Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan

Mathias Front

▶ **To cite this version:**

Mathias Front. Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan. Education. Université Claude Bernard - Lyon I, 2015. Français. NNT : 2015LYO10250 . tel-01312266v3

HAL Id: tel-01312266

https://theses.hal.science/tel-01312266v3

Submitted on 11 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre 250 - 2015 Année 2015

Thèse de l'université de Lyon

Délivrée par

L'université Claude Bernard Lyon1

École Doctorale 485 EPIC - Éducation, Psychologie, Information et Communication

Diplôme de doctorat

Spécialité : Didactique des mathématiques

Soutenue publiquement le vendredi 27 novembre 2015 par

Mathias FRONT

Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan.

Sous la direction de Christian Mercat

Codirection : Virginie Deloustal-Jorrand

JURY :

M^me^ Virginie Deloustal-Jorrand	Université Claude Bernard Lyon 1	Co-directeur
M^me^ Viviane Durand-Guerrier	Université Montpellier 2	Rapporteur
M. Patrick Gibel	Université Bordeaux IV	Examinateur
M. Guillaume Jouve	Université d'Artois	Examinateur
M. Christian Mercat	Université Claude Bernard Lyon 1	Directeur
M^me^ Cécile Ouvrier-Buffet	Université de Reims Champagne Ardenne	Rapporteur

S2HEP
38 boulevard Niels BOHR
Université Lyon 1
F-69622 Villeurbanne Cedex

École doctorale EPIC
86 rue Pasteur
69365 LYON cedex 07

Remerciements

Aucun apprentissage n'évite l'errance dans l'aire du secret.
En quittant la rive des certitudes ou des croyances anciennes,
en perdant le confort des appuis initiaux, le sujet affronte la solitude
...
C'est ainsi qu'il aborde l'énigme pour s'émanciper de la dépendance,
pour perdre de la vulnérabilité, pour approcher une réalité,
indifférente à son désir.

Michel Serres

À l'heure de rédiger cette thèse, j'aurais aimé avoir fait beaucoup plus de chemin que celui déjà parcouru. J'aurais aimé pénétrer plus avant l'aire du savoir qui contient lui-même le secret. Mais c'est le lot de tous, il faut une fois le temps écoulé, regarder où l'on est parvenu et rendre compte du chemin parcouru. Toutefois si je peux estimer avoir perdu pour une part le confort des croyances anciennes et objectivé une certaine réalité, je suis encore loin d'avoir acquis l'aisance dans l'errance et perdu toute vulnérabilité. Le chemin se prolonge.

Je remercie ici tous ceux qui ont permis que cette première étape se réalise. Même si je n'ai réalisé que des pas modestes que ma famille, les amis, les collègues qui les ont accompagnés en soient remerciés. Merci à Léa pour son assistance, merci à Guy, Fabienne, Léa et Maële pour leur relecture, merci à Fabienne, Léa, Maële, Maya et Théo pour leur patience. Merci à Claire et Marie-Line pour les mises en œuvre devant élèves. Merci aux collègues et amis de l'équipe DREAM pour le chemin parcouru ensemble. Merci à Gilles, Marie-Line et Michel pour les échanges ô combien constructifs et formateurs. Merci à Pierre Crépel pour avoir accepter de m'accompagner au début du chemin.

Je remercie également particulièrement :

- Christian Mercat et Virginie Deloustal Jorrand, mes directeurs de thèse, pour le soutien qu'ils m'ont témoigné. Il m'a permis de mener à bien les travaux présentés ici.
- Viviane Durand-Guerrier qui non seulement a accepté de rapporter sur ce travail et de participer au jury, mais qui a également su, par ses échanges toujours vivifiants, me pousser à prolonger mon travail de master.
- Cécile Ouvrier-Buffet pour avoir accepté également le rôle de rapporteur et de membre du jury.
- Patrick Gibel et Guillaume Jouve d'enrichir de leur présence et compétences ce jury.

Je remercie aussi mon laboratoire (S2HEP), mon école doctorale (EPIC) et mon employeur

(l'ESPE de l'académie de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon1) qui ont su comprendre les contraintes associées à la recherche d'un doctorant-travailleur en temps de refondation de la formation des enseignants, m'ont soutenu et laissé un peu de temps pour produire cette thèse.

Un dernier mot pour remercier tous les lecteurs de cette thèse. J'ai essayé de poursuivre dans mes travaux une exigence d'objectivité, mais cette thèse, comme toutes les autres, n'est pas autre chose qu'une œuvre de fiction qui tente de décrire une réalité. J'espère que ma recherche de la construction d'un savoir didactique rencontrera vos préoccupations de didacticiens.

Résumé

Résumé

Étudier l'émergence de savoirs lors de situations didactiques non finalisées par un savoir préfabriqué et pré-pensé nécessite un bouleversement des points de vue, aussi bien épistémologique que didactique. C'est pourquoi, pour l'étude de situations didactiques pour lesquelles le problème est l'essence, nous développons une nouvelle approche historique et repensons des outils pour les analyses didactiques. Nous proposons alors, pour un problème particulier, l'exploration des pavages archimédiens du plan, une enquête historique centrée sur l'activité du savant cherchant et sur l'influence de la relation aux objets dans la recherche. De ce point de vue, l'étude des travaux de Johannes Kepler à la recherche d'une harmonie du monde est particulièrement instructive. Nous proposons également, pour l'analyse des savoirs émergents en situation didactique, une utilisation d'outils liés à la sémiotique qui permet de mettre en évidence la dynamique de l'évolution des objets mathématiques. Nous pouvons finalement conclure quant à la possibilité de construire et mettre en œuvre des « Situations Didactiques de Recherche de Problème » assurant l'engagement du sujet dans la recherche, l'émergence et le développement d'objets mathématiques, la genèse de savoirs. L'étude nous conforte dans la nécessité d'une approche pragmatique des situations et la pertinence d'un regard différent sur les savoirs à l'école.

Mots-clefs

Problème, savoirs mathématiques, épistémologie scolaire, objets mathématiques, Situations Didactiques de Recherche de Problème, polygones réguliers, pavages archimédiens, Kepler, relations histoire-didactique, relation aux objets, action sur les objets, processus sémiotiques, dimension expérimentale, élaborations théoriques.

Title

Emergence and evolution of mathematical objects, during a " Didactical Situation of a Problem Solving " : The Case of Archimedean tilings of the plane.

Abstract

The study of the emergence of knowledges in teaching situations not finalized by a prefabricated and pre-thought knowledge requires an upheaval of point of view, epistemological as well as didactic. For the study of learning situations in which the problem is the essence, we develop a new historical approach and we rethink the tools for didactic analyzes. We propose, then, for a particular problem, exploration of Archimedean tilings of the plane, a historical inquiry centered on the activity of the scientist in the process of research and on the influence of the relationship with objects. From this perspective, the study of Johannes Kepler's work in search of a world harmony is particularly instructive. We also propose, for the analysis of the emerging knowledge in teaching situations, to use tools related to semiotics, which allows to highlight the dynamic of evolution of mathematical objects. We can finally conclude on the opportunity to build and implement "Didactic Situations of Problem Solving", which ensure the commitment of the subject in the research, the emergence and development of mathematical objects, the genesis of knowledges. The study reinforces the necessity of a pragmatic approach of situations and the relevance of a different look at the knowledge at school.

Keywords

Problem, mathematical knowledges, school epistemology, mathematical objects, Didactic Situation of a Problem Solving, regular polygons, archimedean tilings, Kepler, relationship between the history and the didactic, relationship to objects, actions on objects, semiotic process, experimental dimension, theoretical elaborations.

Table des matières

Introduction **11**

I Première partie : Méthode générale de la recherche et ancrages théoriques **15**

1 Méthode générale **17**
1.1 Origine du projet et mise en perspective 17
1.2 Première formulation de la problématique et questions de recherche 18
1.3 Caractérisation de la méthode 20

2 Ancrages théoriques de la recherche. Aspects épistémologique et historique **23**
2.1 Mathématiques pour anticiper, agir et créer 23
2.1.1 Platon un idéal fondateur ? 24
2.1.2 Des intuitions pures à l'intentionnalité 26
2.1.3 Le point de vue de Poincaré 28
2.1.4 Retour sur un point de vue contemporain et conclusion 31
2.2 Premières questions didactiques 33
2.2.1 Qui fait des mathématiques ? 33
2.2.2 Un élève peut-il avoir une activité mathématique ? 34
2.3 Comment interroger l'histoire ? 36
2.3.1 Intrigue et savoirs 37
2.3.2 Histoire et didactique 42

3 Ancrages théoriques de la recherche. Aspects didactiques **51**
3.1 Les situations didactiques de recherche de problème (SDRP) 52
3.1.1 Des dispositifs portés par la résolution de problème en classe 52
3.1.2 Décrire l'activité de recherche de problème 53
3.1.3 Situation didactique de recherche de problèmes en classe de mathématiques 57
3.2 Émergence et institutionnalisation des savoirs mathématiques en SDRP 60
3.3 Les savoirs de l'enseignant 64
3.4 TSD, le milieu 65
3.4.1 Notion de milieu en TSD 65
3.4.2 Différents niveaux de modèles de milieu 67
3.5 Étude d'une relation aux objets mathématiques 69
3.5.1 Quelques éléments de la sémiotique selon Pierce 70
3.5.2 Approche sémiotique pour l'analyse *a priori* d'une tâche mathématique 72
3.5.3 Un modèle d'analyse des raisonnements 75
3.6 Une problématique reformulée 77

II Deuxième partie : Analyses mathématique, historique, épistémologique 79

4 Pavages archimédiens du plan. Étude mathématique et genèses historiques 81
4.1 Le problème, une première approche mathématique . . . 82
4.1.1 Présentation . . . 82
4.1.2 Les pavages archimédiens du plan . . . 82
4.1.3 Premiers commentaires . . . 88
4.1.4 Quelques possibilités d'ouverture . . . 88
4.2 Une perspective historique . . . 90
4.2.1 Les éléments d'Euclide . . . 92
4.2.2 Pappus . . . 93
4.2.3 Dürer . . . 94
4.2.4 Kepler . . . 96
4.2.5 Des successeurs . . . 100
4.2.6 Conclusion . . . 103

5 Le cas Kepler 105
5.1 Formation et premier ouvrage . . . 106
5.1.1 Éléments biographiques . . . 106
5.1.2 Vers la publication du *Mysterium Cosmographicum* . . . 107
5.1.3 Une dernière leçon . . . 110
5.2 Éléments de la pensée képlerienne . . . 111
5.2.1 Proclus . . . 111
5.2.2 Quel mode de pensée pour Kepler à l'heure de l'*Harmonie du monde* ? . . . 113
5.2.3 Les *non-êtres* de Kepler . . . 117
5.3 Retour sur les pavages archimédiens . . . 119
5.4 Conclusion . . . 125

6 Conclusion de la deuxième partie 127

III Troisième partie : Ingénierie et analyses didactiques 131

7 Vers une SDRP fondée sur l'exploration des pavages archimédiens du plan 133
7.1 Introduction . . . 134
7.2 Premiers éléments pour la construction du milieu théorique . . . 134
7.2.1 Le problème mathématique, l'objet mathématique à explorer . . . 134
7.2.2 Un problème pour la classe . . . 135
7.2.3 Objets mathématiques potentiellement en jeu dans une relation des sujets au problème considéré . . . 136
7.2.4 Première anticipation des actions sur les objets . . . 139
7.2.5 Une approche sémiotique . . . 142
7.3 Différentes institutions pouvant accueillir la SDRP envisagée . . . 145
7.3.1 Une diversité d'institutions possibles . . . 145
7.3.2 Le lycée d'enseignement général et technologique français . . . 145
7.3.3 Arithmétique . . . 149
7.4 Première proposition de SDRP pour expérimentations préalables . . . 150
7.5 Expérimentations préalables . . . 150
7.5.1 Expérimentation préalable avec des étudiants préparant le concours de professeur des écoles : EP1 . . . 150

7.5.2 Expérimentation préalable avec deux groupes de trois élèves de terminale scientifique : EP2 . . . 158
7.5.3 Expérimentation préalable en classe de première S, avec une proposition d'usage de LGD : EP3 . . . 169
7.5.4 Expérimentation préalable lors d'un stage de formation continue : EP4 . 174
7.6 Bilan des expérimentations préalables en termes de possibilité de mise en œuvre dans une institution . . . 177
7.6.1 Un embryon de situation . . . 177
7.6.2 Le milieu matériel . . . 178
7.6.3 Différentes institutions . . . 179
7.7 Conclusion sur le milieu théorique . . . 179

8 Milieu expérimental *a priori* et confrontation à la contingence 183
8.1 Le modèle expérimental *a priori* . . . 184
8.1.1 Anticipation du jeu effectif . . . 184
8.1.2 Anticipation des comportements . . . 188
8.1.3 Recueillir des observables, les organiser . . . 188
8.1.4 Des références, une méthode . . . 189
8.2 Confrontation à la contingence . . . 189
8.2.1 Lancement de la situation . . . 189
8.2.2 Le devoir en temps libre . . . 190
8.2.3 Séance de recherche en classe . . . 204
8.2.4 Premières conclusions sur la confrontation à la contingence . . . 234

9 Un exemple de sémiose 239
9.1 Retour sur la genèse des pavages archimédiens par E15 : Thimotée . . . 239
9.1.1 Une sémiose partielle . . . 240
9.1.2 L'enrichissement du signe initial . . . 242
9.2 Enseignements d'une étude singulière de la genèse de l'objet pavage archimédien par E15 . . . 243

10 Conclusion de la partie III 245
10.1 Bilan de l'expérimentation terminale . . . 245
10.2 Conclusion . . . 246

IV Quatrième partie : Conclusion générale et perspectives 249

251

Bibliographie 259

Table des figures 271

Liste des tableaux 273

V ANNEXES 275

A Extrait du livre V de la collection de Pappus d'Alexandrie 277

B Planches de l'Harmonices Mundi 279

C Modélisation de l'activité mathématique par Duchet **285**

D Recherche synthétique de l'enseignante (EP1 et EXP-TS2) **287**

E Expérimentations préalables **289**
E.1 Les onze affiches produites lors de EP1 . . . 289
E.2 Éléments pour des apports complémentaires lors de EP1 . . . 293
E.3 Les deux affiches produites lors de EP2-TS1 . . . 296
E.4 Transcription des échanges lors de EP2-TS1 . . . 297
E.5 Figures obtenues avec GeoGebra lors de EP3 . . . 337
E.6 Transcription d'une partie des échanges du groupe 2 lors de EP3 . . . 339
E.7 Transcription d'échanges lors de EP4-FC . . . 344

F Devoir en temps libre EXP-TS2 **347**
F.1 Cahier de travail . . . 347
F.2 Sujet du devoir en temps libre, EXP-TS2 . . . 348
F.3 Éléments de correction du devoir en temps libre . . . 351
F.4 Résultats chiffrés du devoir en temps libre . . . 356
F.5 Affiches de la séance de retour sur le devoir en temps libre, EXP-TS2 . . . 357
F.6 Transcriptions des échanges lors de EXP-TS2-RDTL . . . 361
F.7 Brève synthèse avant la séance de recherche pour quelques élèves . . . 447

G Séances de recherche en classe **449**
G.1 Organisation des groupes . . . 450
G.2 Extrait du document pour l'enseignante . . . 451
G.3 Extraits d'un texte d'Albrecht Dürer . . . 453
G.4 Éléments pour des apports complémentaires en TS . . . 457
G.5 Affiches EXP-TS2-SDRP . . . 462
G.6 Transcriptions des échanges lors de EXP-TS2-SDRP . . . 466
G.7 Transcription d'échanges lors de la synthèse faite par P . . . 592
G.8 Apparition des objets lors de la phase 4 . . . 595
G.9 Questionnaire : Retour de E15 . . . 596

Introduction

Mieux vaut préférer l'incertitude du succès
à la certitude de l'échec ...
Benjamin Royannez

Yves Chevallard décrit depuis longtemps un enseignement des mathématiques, dans le secondaire français, qui

> ressemble le plus souvent à une visite guidée de monuments mathématiques autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessé d'être comprises et reconnues. (Chevallard, 2003, p.9)

Ces fonctions vitales évoquées seraient en lien direct avec le réel ;

> En quelques décennies, l'idée a été expulsée de la mathématique scolaire qu'elle est un outil pour penser le réel ... les objets sur lesquels éprouver une construction mathématique ont été peu ou prou chassés de l'univers culturel et intellectuel de l'enseignement, si bien qu'on entretient au mieux un commerce purement théorique, et non pas expérimental, avec les constructions mathématiques essentielles. Or l'absence d'expérience affecte le sens de la théorie. (Chevallard, 2004, p.34-36)

Les questions de la relation au « réel » des mathématiques, des objets sur lesquels elle agit ou s'appuie, de la dimension expérimentale de l'activité, dépassent largement le domaine de l'enseignement et restent en débat. Il est aujourd'hui, toujours difficile d'avoir une vision claire de ce que sont les objets des mathématiques et de l'essence même des mathématiques. Peu d'auteurs modernes se risquent à les définir. Pour (Bouvier *et al.*, 2009, p. 525), l'existence même des mathématiques serait fondée sur l'existence de trois forces de la nature humaine :

> La première est l'étude de la nature et la recherche des meilleurs moyens d'en tirer parti. La seconde s'attache aux relations qui se dégagent de ces enquêtes. La troisième est une sensibilité esthétique désintéressée.

Ces auteurs pointent ici trois dimensions qui peuvent se traduire par des questionnements sur le rapport des mathématiques au réel sensible, la réflexion sur les objets mathématiques eux-mêmes et la part de l'individu dans la production. Mais il est important de rappeler que ces trois dimensions ne sont ni également considérées par tous, ni même reconnues dans ce qui doit paraître des mathématiques une fois les processus d'émergence aboutis. Et la diversité des conceptions sur ces questions peut expliquer pour une part que des évolutions parfois brutales du système éducatif se soient produites et aient conduit, alors que les mathématiques sont de plus en plus ouvertes et diversifiées, au constat d'une épistémologie scolaire désormais appauvrie :

> Ce processus de « monumentalisation » est allé de pair, dans la deuxième moitié du XX^{e} siècle, avec un mouvement de purification épistémologique qui a fait

> disparaître à peu près tout moyen de rendre sensible le rôle de la connaissance mathématique dans la production et la compréhension raisonnée des sociétés et de la vie des hommes. (Chevallard, 2003, p.9)

La proposition, qui trouve désormais un certain écho dans la communauté pédagogique, est de quitter le paradigme de la visite des œuvres pour (re)trouver celui du questionnement du monde et refonder ainsi épistémologiquement la culture et l'école [1].

Mais qu'est-ce que fonder un enseignement sur le paradigme du questionnement du monde ? Comment, la monumentalisation, fondée pour une part sur un paradigme phylogénétique de la construction des savoirs, peut-elle être dépassée ? Un point de vue ontogénétique est-il possible ? Pour quels savoirs ? Quelles validités ?

Comme nous le mettrons en évidence plus loin dans le texte, l'institution Éducation Nationale s'est engagée dans une rénovation des pratiques, mais le cadre culturel résiste aux transformations. Les tentatives d'introduction de dispositifs censés permettre une évolution du rapport aux mathématiques, peinent à avoir un impact sur les pratiques majoritaires. C'est dans ce contexte que nous nous engageons dans cette réflexion sur l'épistémologie scolaire.

Dans le cadre plus général de l'éducation en sciences, de nombreux travaux de recherche ont été engagés sur cette voie de la refondation. Ce sont les travaux autour de l'Inquiry Based Science Education, de l'Inquiry Based Learning, [2] qui portent une grande part de la réflexion pour une rénovation de l'enseignement des sciences. Concernant les mathématiques, Dorier fait le lien avec les travaux déjà nombreux sur la résolution de problème :

> pour ce qui concerne les mathématiques, il ne semble pas très évident de distinguer l'*IBSE* de la résolution de problème. Or dans le cadre des innovations et des recherches sur l'enseignement des mathématiques, la résolution de problème n'est pas tout à fait une nouveauté et est rattachée à plusieurs courants qui ont évolué au cours du temps et selon les lieux. (Calmettes, 2012, p.60)

En intégrant la problématique spécifique de l'œuvre d'imagination qui, en mathématiques, permet de s'affranchir des contingences du réel et de créer ses propres réalités, Artigue met en évidence que toutes les approches développées en didactique des mathématiques portent des valeurs de l'IBSE. Dans une conférence en ligne [3], Artigue évoque ainsi les apports dans ce domaine de différentes approches : Théorie des Situations Didactiques, Realistic Mathématics Education, Problem Solving, Théorie Anthropologique du Didactique, Approches critiques, Approches dialogiques, Communautés d'enquête, Approches par modélisation. Pour Artigue ces approches, avec des hiérarchies de sensibilité différentes, questionnent chacune des éléments différents : pertinence des questions en lien avec la réalité des élèves, au monde extra-scolaire, pertinence épistémologique des questions et de l'activité développée, potentiel critique des questions et de l'activité, inscription possible dans une progression curriculaire, travail de modélisation, développement de modes de pensée, de compétences par rapport à des apprentissages de contenu, autonomie à la responsabilité des élèves, dimension collaborative du travail.

Mais si les travaux sur la résolution de problèmes sont nombreux et les approches diverses, les études sur l'émergence même des savoirs en situation de recherche de problème et sur une possible institutionnalisation en classe sont peu nombreuses. Il reste donc un grand nombre de

1. Cette refondation épistémologique peut difficilement s'entendre comme un retour vers un passé pédagogique meilleur qui aurait su faire vivre dans l'école le paradigme du questionnement du monde. L'évolution de la société et du système éducatif interdit cette méthode de refondation, pour autant que l'école ait jamais vécu dans ce paradigme.

2. « Inquiry Based Learning » se traduit habituellement en français par « apprentissage par démarches d'investigation (ou d'enquête) ».

3. CIEAEM 66 : http://www.cieaem.org/?q=node/40

questions à explorer, avant de pouvoir penser un projet d'enseignement fondé sur la résolution de problèmes.

L'étude que nous présentons se positionne clairement dans une dimension épistémologique et questionne l'émergence et l'institutionnalisation de savoirs dans des situations didactiques particulières que nous nommons « Situations Didactiques de Recherche de Problèmes (en classe de mathématiques) ». Comme le nom peut le laisser entendre, nous considérons ici des situations où le problème est premier dans la pensée du projet d'enseignement. Or, penser les situations à partir d'une question mathématique robuste amène à réorienter les analyses, qui ne se font plus en lien permanent avec un savoir mathématique visé mais s'attachent aux produits d'une activité initiée par le problème. Il s'agit alors d'identifier finement ces produits et en particuliers les savoirs [4] émergents dans ces situations, et d'étudier une possible institutionnalisation dans le cadre d'une diversité potentielle importante.

Pour les situations que nous envisageons, à forte dimension expérimentale (au sens de Dias (2008) et Durand-Guerrier (2010)), nous sommes alors amenés à développer des outils pour l'analyse des actions du sujet sur les objets, actions qui aboutissent à la prise de contrôle du sujet sur la situation. Pour cela nous avons orienté nos travaux dans deux directions.

La première est une réflexion sur l'approche historique. Une approche questionnant l'activité effective du savant sera ici développée en appui sur une étude historique autour d'un problème de pavages du plan qui trouva une solution aux prémices de la révolution mathématique du XVII^{e} siècle, à une période transitoire, où les objets en discussion ont des statuts incertains. Cette étude porte en particulier sur l'œuvre de Kepler qui se trouve être une ressource remarquable pour l'observation du savant cherchant.

La deuxième est celle de l'élaboration d'un outil d'analyse permettant de rendre compte de la dynamique des actions sur les objets. Nous avons choisi de solliciter la sémiotique de Pierce et le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011), pour identifier dans les actions sur les objets familiers d'une part et sur les objets mathématiques en émergence d'autre part, les obstacles et les leviers à l'élaboration de savoirs en situation.

Pour structurer notre étude nous développons une thèse en trois parties.

Dans la première partie, dans le chapitre 1, nous précisons le projet, les questions de recherche, la problématique et la méthode utilisée. Les ancrages théoriques se développent ensuite en deux blocs. La question de la refondation étant, dans un premier temps, une question de nature essentiellement épistémologique, nous faisons porter notre réflexion tout d'abord sur la nature de l'activité mathématique. Nous revenons ensuite sur les relations entre histoire, épistémologie et didactique dans le cadre d'une réflexion sur la mise en œuvre d'une enquête qui puisse intégrer la question de l'activité effective du savant cherchant. Le chapitre 3 revient sur les cadres pour les analyses didactiques. Nous faisons ensuite, en nous appuyant sur des synthèses existantes, le point sur la résolution de problème en mathématiques et la possibilité de faire vivre la dimension expérimentale dans des situations didactiques. Nous revenons également sur les savoirs en Situation Didactique de Recherche de Problème (SDRP) et en particulier sur les relations au savoir institué. Nous précisons alors comment notre problématique des SDRP s'appuie sur la Théorie des Situations Didactiques et présentons les cadres d'analyses pour l'étude *a priori* d'une tâche mathématique grâce à une approche sémiotique, (Muller, 2004), et pour l'évolution du système de connaissance des élèves grâce également au modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011).

La deuxième partie développe l'étude de l'invention mathématique sur la question des pavages archimédiens du plan par des approches mathématique et historique. Nous rendons

4. Les savoir sont ici, en suivant Rouchier (1996) et Conne (2004), des connaissances reconnues comme permettant un contrôle sur la situation. Nous reviendrons plus longuement sur cette question dans le chapitre 3.

compte de genèses diverses, passées ou contemporaines, sur cette question. Dans le double but de tester une approche historique centrée sur le savant cherchant et d'enrichir le milieu théorique d'une situation potentielle, le cas Kepler est particulièrement développé, ceci autant en raison de l'importance des apports scientifiques du savant que par l'analyse possible du contexte de l'invention. Tiraillée par des types de causalité différentes (une causalité de type analogique-hiérarchique et une autre, transitive directe) qui pourraient paraître contradictoires mais qui se révèlent complémentaires, la pensée képlerienne s'inscrit dans un contexte qui met particulièrement en évidence les débats sur les objets en jeu. Nous pouvons alors questionner le rôle des objets dans la recherche, la composition du milieu objectif d'une recherche, le rôle des retours de l'expérience dans une élaboration théorique. Bien qu'historiquement située, cette étude nous permet de penser une dimension générale de l'activité mathématique.

Nous tentons en particulier de confirmer la possibilité d'identifier chez un savant cherchant la dialectique objets anciens/objets nouveaux, et la coexistence de connaissances culturellement situées et de savoirs mathématiques nouveaux.

Et une autre hypothèse que nous formulons alors et mettons à l'étude, est que, sous cette approche historique, des questions pertinentes pour les études didactiques peuvent émerger et que l'ontogenèse peut en être éclairée.

La partie 3 est consacrée à la présentation et la mise en œuvre d'une ingénierie visant à tester la genèse des savoirs lors de situations didactiques de recherche de ce problème en classe de mathématiques et à étudier les leviers et les freins à la dialectique connaissances/savoirs lors d'expérimentations. Les analyses s'appuient sur un cadre théorique mêlant approche sémiotique et structuration des milieux d'une situation didactique. Il s'agit en particulier d'observer les sémioses en jeu en situation et de voir s'il est possible d'identifier des savoirs nouveaux, c'est-à-dire si les dialectiques connaissances/savoirs sont effectives dans la SDRP proposée, ou encore, si les nouveaux objets manipulés acquièrent bien un statut d'objets mathématiques mobilisables.

Cette partie doit aussi permettre de confirmer ou d'infirmer la pertinence des outils d'analyse choisis pour une étude fine de l'émergence des savoirs en situation.

Mais, et alors que nous étudions la possibilité de renverser la démarche usuelle et que nous visons à mettre en place des situations qui favorisent la diversité des sémioses, nous sommes amenés à tester aussi et surtout l'hypothèse suivante : la mise en œuvre de situations didactiques de recherche de problème, bien que favorisant la diversité des sémioses, permet d'observer une convergence de ces sémioses, et non une divergence qui interdirait toute institutionnalisation dans la classe.

La validation de cette hypothèse autoriserait à poursuivre dans l'étude de telles situations, comme pistes pour enrichir la pratique mathématique en classe.

Nous concluons cette thèse en synthétisant les apports et les limites de nos travaux et en présentant un certain nombre de projets de recherche qui s'ouvrent à l'issue de ces premières études.

Première partie

Méthode générale de la recherche et ancrages théoriques

Quelles consciences ont ou devraient avoir
scientifiques et citoyens, des fondements et des
méthodes légitimant les « connaissances valables »
que les uns et les autres produisent,
interprètent et transforment en permanence ?
Peut-on continuer à « faire comme si » existait
dans l'empyrée des académies quelque gardien
discret qui veille sur la qualité scientifique des
connaissances, en se référant à une certaine sagesse
que l'on pourrait dès lors ignorer ?
Jean-Louis Le Moigne

Chapitre 1

Méthode générale

Sommaire

1.1 Origine du projet et mise en perspective 17
1.2 Première formulation de la problématique et questions de recherche 18
1.3 Caractérisation de la méthode 20

1.1 Origine du projet et mise en perspective

Nos travaux actuels de thèse s'ancrent dans un intérêt ancien (plus de 20 ans) et continu pour les situations de recherche de problèmes mathématiques en classe. Nous nous appuyons donc sur une fréquentation de longue date des théories du « problem solving » de Polya (1965), des travaux de Arsac, Germain et Mante, (Arsac *et al.*, 1991) et (Arsac et Mante, 2007) pour une intégration dans la classe, des dispositifs plus spécifiques, par exemple « Math à modeler », (Grenier et Payan, 2002) ou « MATHenJEANs », (Audin et Duchet, 1992), (Duchet et Audin, 2009). Nous approfondissons cette thématique depuis 2006 dans une équipe de recherche mixte (IFé, IREM, ESPE et S2HEP)[1] initialement dénommée EXPRIME[2], désormais DREAM[3]. Les travaux de ce groupe questionnent les potentialités et les difficultés de mise en œuvre de ces situations en classe et proposent des pistes d'étude qui utilisent, en particulier, les résultats sur la dimension expérimentale en mathématiques. Une ressource a été publiée en 2010, (Aldon *et al.*, 2010), permettant des travaux ultérieurs sur l'intégration d'une ressource numérique dans la mise en place de situations de recherche, (Aldon, 2008), sur la possibilité de la mise en œuvre par des enseignants novices ou confirmés de situations de recherche en appui sur cette ressource, (Front, 2012a) par exemple. Par ailleurs le constat de l'aspect très majoritairement numérique du registre des problèmes de recherche dont nous disposions, nous a amené à rechercher des questions géométriques dont nous pourrions faire le cœur d'une situation. En lien avec une recherche sur les fractions égyptiennes, nous nous sommes intéressés à la question des pavages du plan à l'aide de polygones réguliers. Après une étude mathématique du problème, (Front et Legrand, 2010), nous fîmes une étude épistémologique et didactique visant à mettre à l'épreuve ce problème et à en étudier les potentialités dans le cadre de la problématique de la recherche de problèmes en classe. Cette étude a été l'objet d'un mémoire de master, (Front, 2010) et d'un article, Front (2012b).

1. IFé : Institut Français de l'éducation, IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, ESPE : École Supérieur du Professorat et de l'Éducation et S2HEP : Sciences, Société, Historicité, Éducation et Pratiques (laboratoire de l'Université Lyon 1).
2. EXPRIME, EXpérimenter des PRoblèmes Innovants en Mathématiques à l'École.
3. DREAM, Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques

Dans cette étude des situations de recherche de problèmes en classe, nous sommes désormais amenés à approfondir la question des leviers et des obstacles à la construction de savoirs en nous intéressant plus finement au jeu sur les objets. Dans les chapitres 2 et 3, en développant les cadres théoriques, nous préciserons les objets et concepts tels que *Situation Didactique de Recherche de Problèmes*, *dimension expérimentale*, *émergence d'un objet mathématique*, ... mais pour permettre d'ores et déjà d'énoncer notre problématique, nous donnons quelques caractéristiques minimales.

Les premiers travaux sur la mise en œuvre de situations didactiques autour de l'étude des pavages du plan par des polygones réguliers ont montré que les élèves pouvaient s'engager dans une activité mathématique où une partie des objets en jeu, en particuliers les polygones réguliers, peuvent faire l'objet de représentations aisées et de manipulations. Cela laisse envisager la possibilité d'une dimension empirique de l'activité. Pour une première approche de ce que nous appellerons dimension expérimentale des mathématiques, nous reprenons une synthèse de Gardes sur cet aspect :

> Pour résumer, l'aspect expérimental des mathématiques se fonde sur deux principes intrinsèquement liés. Le premier est l'existence d'un mode empirique de constitution de certains objets mathématiques. Le recours à cette dimension expérimentale entraîne alors le second principe : la mise en œuvre d'une démarche expérimentale qui se caractérise par des allers et retours entre les objets (naturalisés et/ou en cours de naturalisation) par des confrontations, des vérifications et des argumentations. (Gardes, 2013, p.34)

En appui sur ces éléments que nous reprendrons plus en détails dans la suite, une **Situation Didactique de Recherche de Problèmes** sera définie dans un premier temps comme une situation didactique et d'apprentissage, où le projet commun de l'enseignant et des élèves est avant tout **l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels, la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux**. Nous rajouterons à ces caractéristiques une exigence quant à la présence d'une dimension expérimentale forte, exigence qui explicite l'activité attendue en classe.

Nous préciserons, là encore ultérieurement, ce qu'est exactement « l'engagement dans la résolution du problème proposé », et le lien entre savoirs et problème. Il semble toutefois d'ores et déjà fondamental de préciser que la mise en avant du problème, modifie en profondeur le rapport aux savoirs et au savoir pour tous les acteurs de la situation. Le contrat didactique est lui aussi modifié et la situation perd, pour une part, son caractère artificiel d'outil d'acquisition d'**une** nouvelle connaissance. La complexité de la définition d'une situation est désormais déportée de la difficulté à construire une situation permettant de travailler autour d'une connaissance nouvelle visée à la complexité de gestion des potentialités d'un problème proposé.

La question que nous nous posons dans un premier temps est, comment faire ce que nous avons annoncé : étudier les potentialités d'une SDRP où le projet commun est en particulier de s'engager dans la détermination des pavages du plan à l'aide de polygones réguliers.

1.2 Première formulation de la problématique et questions de recherche

Les questions de la dévolution et de l'adidacticité ne sont pas anodines, surtout dans l'optique d'une mise en œuvre de la SDRP envisagée dans une classe ordinaire. Dans des expérimentations passées, ces deux dimensions n'ont toutefois pas semblé les plus problématiques. Il faudra quoiqu'il en soit les questionner à nouveau en fonction des objectifs des SDRP mais

nous ciblons pour l'instant les autres caractéristiques d'une SDRP, c'est-à-dire à la fois la présence d'une dimension expérimentale forte, et bien évidemment les modifications éventuelles du système de connaissances des élèves lors de l'engagement dans le problème proposé.

Précisons que la dimension expérimentale des mathématiques est une caractéristique des mathématiques en tant qu'activité. Quand nous parlons de dimension expérimentale pour une SDRP, il s'agit donc de caractériser la situation et pas le problème proposé. Un problème ne porte pas une dimension expérimentale intrinsèquement. Ainsi, aussi bien pour l'étude préalable que pour l'étude *a posteriori*, l'étude du caractère expérimental de l'activité doit se faire en anticipant ou en identifiant des objets qui pourraient être mis ou sont mis en relation et ces relations, confrontations, vérifications, argumentations.

Dans l'étude préalable, ceci amène, concernant les objets, à se poser des questions, d'une part sur les relations qu'ils entretiennent entre eux à l'intérieur des structures mathématiques dans lesquelles ils sont en réseau mais aussi sur le rôle qu'ils peuvent être amenés à jouer dans l'élaboration des savoirs par les relations que le sujet entretient avec eux. Nous entendons ici relation dans un sens assez large, comme l'ensemble des liens qu'aura pu tisser un sujet avec un objet et les possibilités d'actions qui en résultent. Nous verrons par exemple que la relation que des acteurs d'une recherche sur les pavages entretiennent avec certains polygones joue un rôle qu'il est nécessaire d'identifier si on veut comprendre les processus en cours.

Dans un autre temps il est indispensable de considérer le jeu des élèves avec les objets. Si la situation se révèle à forte dimension expérimentale l'analyse des modifications du système de connaissance des élèves, sera facilitée. En effet on peut espérer que la multiplication des objets manipulés aide à la mise au jour des relations, ou l'absence de relations effectives que les élèves produiront. Dans tous les cas il s'agit tout à la fois, d'identifier les objets, les relations (au sens large) et l'évolution de ces relations dans un cadre adapté à la résolution de problème.

Nous prendrons, comme cadre théorique principal de la confrontation à la contingence le modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques de Bloch et Gibel. Ce modèle articule deux cadres théoriques complémentaires : la TSD et la sémiotique de Pierce. Pour les auteurs,

> les raisonnements se traduisent par des éléments langagiers, calculatoires, scripturaux, graphiques, qui sont habituellement interprétés comme des signes appartenant à un registre de représentation, ou comme des éléments d'une phase de preuve ou de démonstration. Plutôt que de nous focaliser sur l'un ou l'autre de ces aspects, nous montrons que trois axes sont nécessaires pour analyser les raisonnements : le premier est attaché au niveau de milieu dans la situation, niveau auquel sont liés la forme et le statut logique des énoncés émis ; le deuxième concerne les fonctions du raisonnement ; le troisième est un axe de nature sémiotique basé sur l'analyse des représentations, (Bloch et Gibel, 2011, p.2).

En termes d'objets et de savoirs, ce modèle doit nous permettre d'analyser l'évolution des objets mathématiques, si elle a lieu, et l'émergence de savoirs, c'est-à-dire de connaissances reconnues comme permettant un contrôle sur la situation.

En résumé : Les caractéristiques des SDRP peuvent laisser penser que ce sont de bons candidats pour l'émergence et l'étude des modifications des systèmes de connaissances des élèves. Une dévolution aisée, une adidacticité forte laissant la possibilité de faire vivre la dimension expérimentale des mathématiques et des raisonnements sur les objets, doivent permettre des apprentissages. Ces caractéristiques doivent aussi, dans une certaine mesure, en faciliter l'étude.

Sous cette modélisation de l'activité, nous nous intéressons plus spécifiquement au rôle des conceptions sur les objets lors de l'action sur ces objets et la conceptualisation qui en résulte. Nous cherchons à identifier, tout d'abord dans des pratiques expertes de recherche, le mode d'existence des objets relativement à des recherches

effectives, et à voir ce que cela nous apprend de ces pratiques en vue de l'élaboration d'ingénieries didactiques.

De façon conjointe, nous étudions comment construire et mettre en œuvre une SDRP sur les pavages du plan par des polygones réguliers. **Il s'agit dès lors de s'assurer d'une part de la nature de la SDRP envisagée relativement aux caractéristiques annoncées et d'autre part de produire les analyses, après confrontation à la contingence, qui pourraient montrer l'intérêt d'un regard approfondi porté sur les objets et leur mode d'existence chez les élèves, de prouver la pertinence de la SDRP sur les pavages en termes de construction de savoirs, et plus généralement des SDRP comme moyen de refondation épistémologique et d'évolution du rapport au savoir.**

Voici en conséquence les questions auxquelles nous tenterons de répondre :

Concernant les objets susceptibles d'être manipulés :

- Comment compléter l'étude mathématique des objets dans le cadre d'une vision épistémologique prenant en compte le rôle de l'action sur les objets et de la relation qu'on a avec eux dans une recherche à forte dimension expérimentale ?
- Une approche mathématique et historique du problème considéré, avec un point de vue clairement épistémologique, permet-elle d'identifier des caractéristiques des objets en jeu, propres à enrichir le milieu d'une SDRP ?
- Dans une SDRP, certains types de relation aux objets sont-ils des leviers ou des obstacles à l'avancée de la recherche et à la modification du système de connaissance ?

Concernant les SDRP et l'évolution du système de connaissances des élèves :

- Les SDRP sont-elles un modèle didactiquement pertinent pour une activité mathématique à forte dimension expérimentale et productrice de savoirs ?
- Comment les savoirs trouvent-ils leur place dans une SDRP, comment apparaissent-ils, comment évoluent-ils dans la situation ?

1.3 Caractérisation de la méthode

Du point de vue désormais de la méthode à mettre en place pour notre étude se posent de nouvelles questions concernant en particulier la vie des objets en SDRP :

- quelle approche historique nouvelle pour interroger le rôle de la relation aux objets en jeu dans une recherche singulière et en lien, certaines caractéristiques épistémologiques de ces objets ?
- comment en situation de recherche, en général, identifier la relation du sujet à ces objets ?
- comment étudier l'évolution des objets émergents compte-tenu de la dimension dynamique du processus ?
- comment identifier l'évolution de la perception de ces objets par les sujets et le passage du statut de connaissances à celui de savoirs potentiellement nouveaux ?

Pour développer une approche de ces questions nous développons deux types de cadres théoriques.

Dans le chapitre 2 nous engageons une discussion sur la nature de l'activité mathématique qui nous permet de préciser notre positionnement épistémologique et de revenir sur la nature des objets mathématiques. Nous discutons également de la posture de l'historien des sciences en nous appuyant sur des réflexions de Simon sur une possible histoire des savoirs et sur une proposition de Gros pour établir une intrigue historique par l'enquête. Nous développons ensuite quelques éléments indispensables sur les relations possibles entre histoire, épistémologie

et didactique. Nous testons ces outils dans les chapitres 4 et 5, et tentons de mettre en évidence dans une étude mathématique et historique le caractère indispensable de l'analyse fine de l'activité du chercheur pour comprendre ce qui est pensé. Ceci nous amène aussi à revenir sur la nature des objets en jeu.

Le chapitre 3 revient sur les aspects didactiques et, en caractérisant et les situations envisagées et l'activité associée, permet de préciser les outils disponibles pour l'étude de l'évolution des objets en SDRP. Le cadre élaboré dans Bloch (2002, 2005) est adapté de façon à prendre en compte le rôle premier du problème. Nous conservons les notions de milieu épistémologique, milieu expérimental *a priori* et de confrontation à la contingence qui nous permettent de structurer notre étude didactique. Mais l'approche fondée sur le problème nous amène à repenser l'observation des savoirs émergents. Il ne s'agit plus d'identifier un parcours vers un savoir visé mais d'étudier l'éventuelle convergence de sémioses et leur intersection qu'on imagine non vide. La confrontation à la contingence, les analyses des modifications du systèmes de connaissances des élèves se feront donc en appui sur une approche mêlant sémiotique et niveaux de raisonnement. Cette approche doit permettre de rendre compte des évolutions des objets émergents, du niveau le plus bas de la sémiose au plus élevé dans des processus dynamiques. Ces cadres devraient nous permettre les analyses didactiques que nous développons dans la troisième partie de la thèse.

Chapitre 2

Ancrages théoriques de la recherche. Aspects épistémologique et historique

Sommaire

2.1 Mathématiques pour anticiper, agir et créer 23
2.1.1 Platon un idéal fondateur ? 24
2.1.2 Des intuitions pures à l'intentionnalité 26
2.1.3 Le point de vue de Poincaré 28
2.1.4 Retour sur un point de vue contemporain et conclusion 31
2.2 Premières questions didactiques 33
2.2.1 Qui fait des mathématiques ? 33
2.2.2 Un élève peut-il avoir une activité mathématique ? 34
2.3 Comment interroger l'histoire ? 36
2.3.1 Intrigue et savoirs 37
2.3.2 Histoire et didactique 42

La réalité telle que nous la percevons est une construction autonome de notre esprit dont les fins essentielles sont de rendre l'action possible.
Gonseth [1]

2.1 Mathématiques pour anticiper, agir et créer

L'objet de cette section est de présenter un point de vue sur les mathématiques, pour mettre en évidence le fondement et la cohérence du projet didactique que nous développerons plus loin dans le texte, ainsi que les éléments essentiels à questionner du point de vue épistémologique pour étayer cette étude. C'est une partie qui nous semble faire souvent défaut et qui laisse alors le lecteur dans l'expectative quant aux objectifs de nombreux projets didactiques. En effet des discours qui se veulent techniques mais qui ne seraient pas situés épistémologiquement perdent en pertinence et en portée. Nous revenons donc ici sur quelques éléments généraux et en particulier sur le lien entre le monde et les mathématiques.

Précisons tout d'abord que les questions qui nous intéressent ici, ne sont pas des questions globales sur les mathématiques en tant que science institutionnalisée. Nous allons mettre en

1. (Gonseth, 1998, p.80)

évidence que ce n'est pas l'étude des modes de structuration de la connaissance mathématique comme science qui est pertinente pour notre recherche. Nous avons en effet besoin de repères concernant les mathématiques comme pratiques de recherche, transformant les systèmes de connaissances des individus, et productrices de « savoirs ponctuels » [2]. Suivant la terminologie de Kuhn et Meyer (2008) précisons aussi que c'est hors des phases de « science normale » que nous sommes tentés d'aller observer l'activité mathématique, plutôt dans des phases où le développement des savoirs nécessite un bouleversement de certaines références ou certitudes. Ce sont des moments où les mathématiques nécessitent que l'ingénieur et le créateur soient à la manœuvre qui sont au cœur de notre thèse, des temps où ce n'est pas la seule démarche déductive qui agit sur le système de connaissances. Cette dimension circonstanciée de l'activité mathématique, nous l'envisagerons par ailleurs dans le cadre d'une entrée géométrique, et ainsi nous chercherons à voir comment, en reprenant les propos de Giorgio Israël, il est envisageable de produire dans une étude d'un problème géométrique « un fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité », (Israel, 1996, p.11).

Nous présentons donc tout d'abord, quelques éléments généraux puis les points de vue que nous retenons sur le lien entre mathématiques et « réalité » ou plus précisément entre mathématiciens et « réalité ».

2.1.1 Platon un idéal fondateur ?

Dès qu'il s'agit du lien à « la réalité » tout est sujet à discussions. Doit-on estimer que les mathématiques permettent d'appréhender le monde, c'est-à-dire saisir ce qu'il est par la pensée ? N'est-on pas plutôt amené à envisager que les mathématiques permettent de modeler un réel, c'est-à-dire lui donner une forme ? ou encore selon une autre acception de souligner ses formes ? Ne doit-on pas se contenter de vivre les mathématiques comme un outil pour prévoir et agir dans le monde ...

La pensée philosophique s'est de tout temps emparée de cette question du lien entre mathématiques et réalité et la pensée platonicienne a, plus que tout autre, été le point d'appui de nombreuses postures, bien au-delà souvent de ce qu'elle pouvait autoriser :

> Et, dans le champ de bataille où s'affrontent des philosophes que Kant n'a pas réussi à pacifier, il apparaît que combattre Platon, c'est presque toujours le jouer contre lui-même. [...] Platon risque ainsi de succomber sous la diversité des platonismes qu'il n'a pas faits mais qu'ont forgés ses défenseurs et ses interprètes tout autant que ses adversaires. [3]

De l'œuvre de Platon, (Platon, 2008), on ne retient souvent que quelques éléments, le réalisme des idées, la primauté donnée aux Essences ou Idées, modèles de toutes choses et qui donnent le sens aux phénomènes... Concernant un point central, la discussion sur le statut ontologique des concepts mathématiques, certains, dont Harthong (1992), défendent la thèse que la pensée Platonicienne laisse la porte ouverte à des interprétations moins caricaturales que ce que l'on retient souvent de Platon. Ce qu'on entend aujourd'hui, en général, par *Platonisme mathématique* c'est l'affirmation d'une existence réelle et *a priori* des objets idéaux mathématiques. Suivant l'aspect des mathématiques privilégié, le platonisme mathématique se trouve alors en opposition avec, par exemple, l'intuitionnisme et le formalisme. L'intuitionnisme, dans sa dimension philosophique, postule que « les objets mathématiques, loin d'être des réalités « platoniciennes » objectives, autonomes et éternelles, sont des produits de l'esprit humain,

2. Sens que nous préciserons dans le chapitre 3, en particulier en référence à Conne

3. Monique Dixsaut, « PLATON », Encyclopædia Universalis [en ligne], consulté le 8 décembre 2014. URL : http://www.universalis.fr/encyclopedie/platon/

Figure 2.1 – Détail de la fresque « L'École d'Athènes » du peintre italien Raphaël

accessibles par réflexion et par introspection » [4]. Le formalisme, quant à lui, met l'accent sur le caractère formel de la connaissance mathématique et contourne la question de l'existence des objets mathématiques en se concentrant sur la démonstration des énoncés dans un système symbolique. Dans cette optique les objets idéaux n'existent pas non plus, *a priori*. [5]

Pour Harthong, contrairement à ce que pourrait laisser entendre la dénomination, le « platonisme mathématique » n'est en rien un point de vue qui rendrait compte de la pensée de Platon et de son mode de relation au monde :

> Parmi les clichés sur l'idéalisme platonicien, on peut tout particulièrement noter ce qu'on appelle le platonisme mathématique. Le représentant typique de cette métaphysique est Georg Cantor mais en aucun cas Platon [... Notez bien que ce n'est pas la conception de Cantor que je dénonce comme cliché, mais la confusion avec Platon], (Harthong, 1992, p.1).

Il serait ainsi possible de lire dans les textes de Platon, non une affirmation de l'ontologie des objets mathématiques, mais une méthode pour l'accroissement des connaissances. Ainsi pour lui l'« allégorie de la caverne » n'a pas pour but de définir « la véritable réalité », ce qui

4. Jacques-Paul Dubucs, « INTUITIONNISME », Encyclopædia Universalis [en ligne], consulté le 4 janvier 2015. URL : http://www.universalis.fr/encyclopedie/intuitionnisme/

5. Observons ici qu'on pourrait être amener à différencier les questions de réalisme ontologique et de réalisme sémantique, qui porterait sur la signification et la vérité des énoncés.

« existe » [6] mais permet d'envisager une dialectique pour le progrès de la compréhension de la relation au monde :

> En lisant les textes originaux et non les commentaires, je n'ai pas vu d'opposition binaire entre ce qui serait absolument et définitivement vrai (le monde extérieur) et ce qui serait l'illusion (les ombres) ; au contraire, je n'ai vu qu'une opposition potentielle et relative, qui se contente d'affirmer, comme Einstein et comme les physiciens modernes, qu'on peut accéder par la pensée pure à une connaissance supérieure à la simple compilation des faits observés (mais non nécessairement absolue ou définitive) [...]. (Ibid., p.6)

Nous ne chercherons pas à trancher sur la position de Harthong, mais constaterons que le débat s'est porté depuis des siècles, dans la culture occidentale, sur des questions ontologiques au détriment d'une réflexion sur les démarches de production en mathématiques. Et il est notable que ce n'est pas au seul Platon que l'on doit aux mathématiques de s'être parfois engagées dans des directions monofocales. A l'opposé de démarches beaucoup plus dialectiques, n'écartant ni l'importance des observations, ni l'intérêt de développements théoriques pour l'accroissement des connaissances, certaines écoles de pensée, pour certaines récentes, ont mis à mal l'équilibre dans la façon d'être au monde [7]. Pour autant, le point de vue de certains mathématiciens ou de différentes écoles de pensée qui se développèrent de la Renaissance à nos jours, empirisme de Locke [8], Hume [9], J.-S. Mill [10], logicisme de Frege [11], Couturat [12], Russell [13], Whitehead [14], formalisme de Hilbert [15], intuitionnisme de Brouwer [16], ... se construisant souvent sur des développements de tels ou tels champs mathématiques, ont eu le mérite d'explorer des possibles et de permettre le repérage sur la carte de la philosophie en construction des mathématiques.

Mais aujourd'hui comment fonder une épistémologie des mathématiques ?

2.1.2 Des intuitions pures à l'intentionnalité

Pour s'approcher de ce que nous pourrions appeler une posture épistémologique mathématique contemporaine, nous abordons la question en appui sur des discours mêlant philosophie et épistémologie, par exemple celui de (Salanskis, 2008, p.7) qui considère que,

> le problème de la philosophie des mathématiques est typiquement un « nouveau » problème du XX^e siècle

en ce sens où la question n'a que rarement été traitée en tant que telle mais toujours intégrée dans un propos philosophique général et non spécifique des mathématiques. [17]

En réaction au scepticisme empiriste de Hume c'est à la doctrine Kantienne de l'entendement qu'est revenu de relancer le débat épistémologique. En posant la question de la possibilité de

6. Cette allégorie devait servir à justifier la nécessité d'éduquer les responsables de la cité en arithmétique et en géométrie, car ces deux sciences permettent d'expliquer des phénomènes du monde sensible, comme les objets du monde extérieur expliquent les ombres.

7. Pour approfondir les questions de réalismes ontologiques, voire sémantique, on pourra se reporter par exemple à Engel (1995)

8. John Locke : 29 août 1632 - 28 octobre 1704

9. David Hume : 7 mai 1711 - 25 août 1776

10. John Stuart Mill : 20 mai 1806 - 8 mai 1873

11. Friedrich Ludwig Gottlob Frege : 8 novembre 1848 - 26 juillet 1925

12. Louis Couturat : 17 janvier 1868 - 3 août 1914

13. Bertrand Arthur William Russell : 18 mai 1872 - 2 février 1970

14. Alfred North Whitehead : 15 février 1861 - 30 décembre 1947

15. David Hilbert : 23 janvier 1862 - 14 février 1943

16. Luitzen Egbertus Jan Brouwer : 27 février 1881 - 2 décembre 1966

17. Il est toutefois notable que pour certains, dont Platon et Kant, les mathématiques tiennent une place centrale dans des propos qui restent des références dans l'étude de ce champ en friche.

connaissances pures *a priori*, et donc en amont et indépendamment de toute expérience, Kant [18] a fourni la matière à la réflexion toujours ouverte de la nature des mathématiques. Sa « logique transcendantale », s'opposant pour une part à la « simple » logique générale, s'est intéressée au rapport de la pensée à ses objets. Kant a humanisé les mathématiques non seulement en affirmant l'inaccessibilité des choses en soi, mais aussi en plaçant l'homme au cœur de l'acte de connaître.

> Quand même nous pourrions porter notre intuition à son plus haut degré de clarté, nous n'en ferions point un pas de plus vers la connaissance de la nature même des objets. Car en tous cas nous ne connaîtrions parfaitement que notre mode d'intuition, c'est-à-dire notre sensibilité, toujours soumise aux conditions d'espace et de temps originairement inhérentes au sujet ; quant à savoir ce que sont les objets en soi, c'est ce qui nous est impossible même avec la connaissance la plus claire de leurs phénomènes, seule chose qui nous soit donnée.(Kant et Barni, 1869, p.98)

Après Kant les théories s'appuyant sur la logique générale ont repris la main. Les jugements synthétiques *a priori* de Kant ont laissé la place aux jugements analytiques de la théorie des ensembles, des théories axiomatiques, ... Mais rapidement ces points de vue ont trouvé à leur tour leurs limites. Les résultats de Gödel [19], en montrant que ces théories ne pourront pas embrasser la totalité des mathématiques et par ailleurs qu'elles ne donnent que peu de renseignements sur le lien qu'elles entretiennent avec les « faits de l'expérience », laissent le champ libre à de nouvelles approches.

Husserl, [20] en introduisant le concept d'intentionnalité, a proposé à son tour, un changement de cadre. La posture husserlienne en s'appuyant en particulier sur ce concept d'intentionnalité, souvent illustré par l'expression « Toute conscience est conscience de quelque chose », renverse les conceptions antérieures sur la perception et affirme le rôle du sujet. La perception d'un objet n'est pas la dégradation ou la transformation de cet objet dans la conscience. Un objet est toujours appréhendé avec une intention, intention qui fait qu'il n'est jamais possible de dissocier un objet réel et un objet de pensée. Sans intention l'objet n'est pas perçu. Dans la construction des concepts mathématiques, ceci amène à ne pas mettre sous silence, effacer, les premières étapes. Ainsi il n'est pas question dans l'élaboration d'un concept de ne considérer que la phase de structuration mathématique et de le fonder ainsi de façon apriorique et idéale. Il n'est pas possible d'exclure dans cette élaboration le première conscience, intentionnelle, qui est celle des objets qui ont permis l'émergence du concept :

> Avec Husserl, notre connaissance a la possibilité de s'étendre des objets aux structures de la conscience en tant qu'elle est conscience de ces objets. A la logique formelle et axiomatique va donc se juxtaposer une logique génétique, logique de notre rapport aux objets mathématiques, logique transcendantale en un sens nouveau, beaucoup plus étendue que la logique transcendantale kantienne. (Patras, 1996, p.8)

Pourtant cette approche contient, elle aussi, ses limites, quand la nécessité du rapport aux objets amène Husserl à envisager de

> déconstruire pierre à pierre l'édifice des mathématiques et repérer comme tel chacun des moments du processus d'abstraction, jusqu'à ce que nous soyons reconduits à un système de proto-idéalités comme concepts limites dans notre intuition du « mode de la vie »- c'est-à-dire dans notre intuition spatio-temporelle. (Patras, 1996, p.10)

18. Emmanuel Kant : 22 avril 1724 - 12 février 1804
19. Kurt Gödel : 28 avril 1906 - 14 janvier 1978
20. Edmund Husserl : 8 avril 1859 - 26 avril 1938

Écarter la possibilité d'avoir recours à la perception d'objets pré-construits par d'autres sur leur propre intuition spatio-temporelle, est-il envisageable ? nécessaire ? Les critiques de la phénoménologie de Husserl, portent à vrai dire, plus sur la capacité du point de vue à rendre compte de « la faculté de novation (prodigieuse) qui est celle de la mathématique dans l'histoire », (Salanskis, 2008, p.152).

Pour Salanskis, si « Nous devons lui [Husserl] être infiniment reconnaissant de l'idée d'un sens fondateur, révolutionnaire par rapport à l'idée classiquement épistémologique d'une *vérité* fondatrice », il apparaît clairement que « la géométrie contemporaine appelle d'autres aperçus fondationnels, mieux adaptés à ce qu'elle pense. »

En effet, il faudra trouver un moyen de rendre compte de l'accroissement des connaissances, de l'émergence de nouveaux concepts. Dans un premier temps, et dans le cadre qui est le notre, nous retiendrons toutefois comme fondamental, cette importance de la non-indifférence au sens et de l'importance du regard du sujet pour donner ce sens. Bien entendu ce sens ne s'arrête pas à la première perception de l'objet. Pour se rapprocher d'une formulation de Husserl : « la pensée d'un objet est plus que la simple représentation distincte de cet objet - il y a en elle tout un système de renvois que Husserl appelle très joliment la structure d'horizon de l'intentionnalité » (Patras, 1996, p.13). Nous reviendrons plus loin sur ce maillage, filet tissé par les renvois conceptuels, qui nécessite que l'intuition s'étende de façon assez large pour identifier des invariants dans le vécu du sujet. Mais concernant la notion d'intuition spatio-temporelle, reprenons tout d'abord l'approche d'un théoricien des invariants, Poincaré.

2.1.3 Le point de vue de Poincaré

> L'esprit n'use de sa faculté créatrice que quand l'expérience lui en impose la nécessité. C'est avec la logique que nous prouvons et avec l'intuition que nous trouvons.
>
> Poincaré

Poincaré[21] développe sa pensée épistémologique particulièrement dans trois ouvrages, « La Science et l'Hypothèse », (Poincaré, 1902), « La Valeur de la Science », (Poincaré, 1905), « Science et Méthode », (Poincaré, 1908). Le point de vue de Poincaré sur les problèmes de l'objectivité de la connaissance, actualisant et prolongeant celui de Kant, permet de mettre en évidence quelques éléments que nous retiendrons dans notre thèse, même s'il s'avère que « l'intuitionnisme de Poincaré resta inaccompli », (Crocco, 2004, p.176).

> Aucune de nos sensations, isolée, n'aurait pu nous conduire à l'idée de l'espace, nous y sommes amenés seulement en étudiant les lois suivants lesquelles ces sensations se succèdent. (Poincaré, 1902, p.83)

Pour Poincaré la connaissance débute donc avec les sensations, mais celles-ci subjectives, isolées ne permettent pas par elles-mêmes une structuration de notre connaissance de ces événements. C'est l'observation d'invariants, par exemple les corps solides, c'est-à-dire des corps « qui éprouvent fréquemment des déplacements susceptibles d'être ainsi corrigés par un mouvement corrélatif de notre propre corps » (op. cit., p.85), qui va permettre la géométrie.

Pour Crocco, (Crocco, 2004, p.162), analysant le passage du stimulus à la science chez Poincaré

> Les sensations sont des ici-et-maintenant irrépétables et subjectifs. [...] Par la seule structure de notre perception, telle qu'elle s'est constituée par sélection et en interaction avec notre environnement, nos sensations, qui d'elles-mêmes sont

21. Henri Poincaré : 29 avril 1854 - 17 juillet 1912

> dépourvues de toute dimension spatiale et temporelle, en reçoivent une, mais cette dimension spatiale et temporelle n'est que subjective. [...] Chaque sujet, doté d'une structure perceptive identique à la nôtre et vivant dans un milieu identique au nôtre, construit les mêmes relations qualitatives structurant un espace représentatif des phénomènes.

Plus précisément pour Poincaré, « la vue et le toucher ne nous auraient pu donner la notion d'espace sans le secours du « sens musculaire » », et c'est la considération de déplacements, c'est-à-dire de changements qui peuvent être corrigés par le même mouvement corrélatif de notre corps, et des lois de ces phénomènes qui font l'objet de la géométrie. Leur considération permet de définir un espace homogène et isotrope, et l'idée de la possibilité de répétitions de séries de sensations musculaires donnent à l'espace ses caractères quantitatif, relatif et infini. Et pour Poincaré, l'idée de répétition est centrale et fondatrice des mathématiques :

> Dans le chapitre premier, où nous avons étudié la nature du raisonnement mathématique, nous avons vu l'importance qu'on doit attribuer à la possibilité de répéter indéfiniment une même opération. C'est de cette répétition que le raisonnement mathématique tire sa vertu. C'est donc grâce à la loi d'homogénéité qu'il a prise sur les faits géométriques. (Poincaré, 1902, p.88)

Et ce qui nous assure de ne pas tout fausser en « appliquant » une structure mathématique à l'analyse des sensations c'est que le cadre mathématique que nous avons construit participe du recueil de ces données, car fondé sur l'intuition de la répétition possible, il transforme en grandeurs intensives cohérentes nos sensations du moment.

> [...] ce qui est essentiel dans l'expérience est la possibilité de répétition qui fonde l'analogie. Il y a respect de cette donnée essentielle dans le langage mathématique, car les mathématiques ne sont rien d'autre que des constructions symboliques rendues possibles par la récursion, la répétition indéfinie de certaines opérations (actes). [...] Les mathématiques sont donc constitutives de l'expérience, car elles permettent de transformer les sensations en grandeurs intensives et extensives. (Crocco, 2004, p.166)

Précisons, pour ne pas rester sur une vision simpliste du lien entre expérience et mathématiques, que, bien entendu, Poincaré est le premier à rappeler la « distance » qui sépare la géométrie de l'étude du mouvement :

> On voit que l'expérience joue un rôle indispensable dans la genèse de la géométrie ; mais ce serait une erreur d'en conclure que la géométrie est une science expérimentale, même en partie. Si elle était expérimentale, elle ne serait qu'approximative et provisoire. Et quelle approximation grossière !
>
> La géométrie ne serait que l'étude des mouvements des solides ; mais elle ne s'occupe pas en réalité des solides naturels, elle a pour objet certains solides idéaux, absolument invariables, qui n'en sont qu'une image simplifiée et bien lointaine.
>
> La notion de ces corps idéaux est tirée de toutes pièces de notre esprit et l'expérience n'est qu'une occasion qui nous engage à l'en faire sortir.
>
> Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un « groupe » particulier ; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement.
>
> Seulement, parmi tous les groupes possibles, il faut choisir celui qui sera pour ainsi dire l'étalon auquel nous rapporterons les phénomènes naturels.

> L'expérience nous guide dans ce choix qu'elle ne nous impose pas ; elle nous fait reconnaître non quelle est la géométrie la plus vraie, mais quelle est la plus commode [22]. (Poincaré, 1902, p.93)

Et ainsi pour During, (Poincaré et During, 2001, p.23) :

> [...] Poincaré ne se contente pas de dissoudre un faux problème (celui de la *vérité* de la géométrie euclidienne, quelque soit le sens où on l'entend, vérité *a priori* ou vérité expérimentale), il en fait la genèse en identifiant le présupposé commun aux empiristes et aux aprioristes. D'où vient en effet qu'on se croit fondé à demander quelle géométrie est la vraie ? C'est qu'on s'imagine dans tous les cas que la géométrie décrit la structure de l'espace en soi. Autrement dit : si on pense que la géométrie nous est nécessairement imposée, soit par la nature de l'esprit, soit par l'expérience, c'est qu'on a commencé par se faire une idée absolue, substantielle de l'espace lui-même, en lui supposant des propriétés indépendantes du rapport des figures à une mesure possible.

Ainsi, un des mérites du point de vue de Poincaré est d'ouvrir la réflexion sur la nature des mathématiques au-delà des dimensions logiques. Et s'il écarte l'Espace en soi, il amène la notion d'intuition qui, bien que ne faisant pas partie pour lui stricto-sensu des mathématiques, permet seule le lien avec le réel.

> c'est par elle que le monde mathématique reste en contact avec le réel et quand les mathématiques pures pourraient s'en passer, il faudrait toujours y avoir recours pour combler l'abîme qui sépare le symbole de la réalité, (Poincaré, 1908, p.23).

et encore

> Ainsi la logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique, qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration ; l'intuition est l'instrument de l'invention, (Poincaré, 1905, p.37). [23]

Les concepts peuvent alors se concevoir suivant trois modes, suivant qu'ils sont puisés dans le possible logique (non contradiction), le possible réel (en accord avec les conditions de l'intuition) ou qu'ils soient objectivement possibles. Cette catégorisation des objets de la connaissance se retrouve chez Poincaré :

> Comme chez Kant, ils doivent non seulement être logiquement possibles, mais aussi possibles pour nous, en accord avec les conditions de l'expérience, pour être réellement utiles et pour ne pas piéger l'esprit dans des contradictions fâcheuses. L'existence objective de certaines des constructions de l'esprit, comme le continuum mathématique, n'est rien d'autre que l'occasion que l'expérience donne à l'esprit d'appliquer à la connaissance du monde extérieur ces constructions. (Crocco, 2004, p.155)

Bien entendu, concernant Poincaré, nous n'oublierons pas l'importance qu'il attribuait au langage, et qu'il a su intégrer à sa pensée des mathématiques, par exemple en leur donnant un rôle dans les raisonnements :

22. Les axiomes géométriques ne sont ni des jugements synthétiques *a priori*, ni des faits expérimentaux. Ce sont des conventions. Notre choix parmi toutes les conventions est guidé par des faits expérimentaux mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction », (Poincaré, 1902, p.75).

23. L'idée que l'invention mathématique ne peut se situer dans la seule dimension logique sera également portée par Cavaillès et en particulier en introduisant la question du langage : « [...] si le devenir mathématique est l'apparition d'un nouveau véritable, il faut que la création se situe dans ce sensible que représente l'espace combinatoire ... », (Cavaillès, 1938, p.93).

> les faits donnés par les sensations peuvent, en cas de contradiction avec les principes logiques de notre esprit, être l'occasion de la création d'un nouveau système de symboles résolvant cette contradiction par des distinctions successives ; dans ce cas le langage ajoute quelque chose aux faits bruts ; le langage est alors une adjonction à la réalité, (Poincaré, 1908, p.38).

On pourra retenir qu'à son tour Poincaré a développé de nouvelles voies synthétiques élargissant la rationalité. En appui sur une expérience vécue du sujet, l'objectif est bien un accroissement de la connaissance commune. L'épistémologie retenue ouvre la porte à des modes de développement des concepts pluriels et pour reprendre une expressions de (Paty, 2005, p.12) : « La structuration dynamique de ces éléments de rationalité permet des synthèses constructives ultérieures, et les connaissances nouvelles deviennent possibles. »

Le point de vue de Poincaré a été un temps en retrait du fait des progrès importants en théorie de la démonstration, des travaux de Gödel, Turing. Aujourd'hui à nouveau, les limites de ces approches, amènent à rebondir, à réinterroger le rapport de l'homme au monde, à requestionner la géométrie. En ce sens les idées de Poincaré, entre autres, sont à nouveau à la base d'une nouvelle réflexion sur l'épistémologie des mathématiques. Parmi ses continuateurs on peut citer Longo. Ce dernier défend une conception de la géométrie comme un ensemble de constructions conceptuelles qui émergent dans la praxis, élaboré dans notre rapport aux régularités du monde (ses symétries, ses homogénéités ...), par l'interprétation des perceptions, en lien avec les mouvements et avec notre capacité de simulation-prévision et de l'appréciation d'invariants. Cette géométrie, anticipation du mouvement dans l'espace et non description des formes ou de l'espace [24] est alors synthétique comme prévision d'un parcours, plutôt que comme abstraction d'une forme. Longo se positionne alors, lui aussi philosophiquement, aux frontières des dimensions créatrices et structurantes :

> Riemann, Poincaré, Hé Weyl, F. Enriques ont essayé de développer ces thèses, en cherchant dans le mouvement, dans la boucle sensori-motrice, dans la vue, dans notre vie dans l'histoire, ces « actes d'expérience » sur lesquels nous construisons, grâce aussi au langage, les fondements et l'origine des mathématiques possibles. Mais maints philosophes et logiciens nous ont expliqué, au cours de ce siècles, et continuent de répéter, qu'il ne faut pas confondre fondement et genèse [25].

Ainsi cette frontière ne doit pas être le mur qui sépare genèse et fondement mais plutôt la limite de deux mouvements qui rapprocheraient notre rapport à l'espace sensible et notre capacité à agir sur les invariants conceptuels [26]

2.1.4 Retour sur un point de vue contemporain et conclusion

> C'est là où se touchent genèse et fondement que trouve son origine cette formidable construction conceptuelle que sont les mathématiques.
> Guiseppe Longo.

Nous nous appuierons pour conclure et pour affirmer notre positionnement sur Salanskis qui pose ainsi la problématique de l'objet des mathématiques :

24. On pourra trouver une argumentation de ces points dans (Giusti, 2000), en particulier dans l'étude des définitions du cercle, de la sphère, chez Euclide

25. Texte en ligne de G. Longo, http://www.di.ens.fr/users/longo/files/PhilosophyAndCognition/cogni-geometrie.ps, p.5.

26. Il est à noter que ce point de vue pourrait nous renvoyer à l'idée d'une intégration des mathématiques dans le processus global d'évolution de l'homme (au sens de Darwin) : les mathématiques serait un langage symbolique accompagnant l'évolution de l'humanité et permettant à l'homme de se positionner dans le créneau de la gestion de la rationalité.

> Devons-nous vraiment penser que des entités peuvent fonctionner comme symbole en l'absence d'une activité qui les engage dans des constructions ? (Salanskis, 2008, p.70)

Les réponses à cette question pourraient s'organiser suivant trois attitudes philosophiques si l'on prend en considération la question de l'intentionnalité évoquée précédemment : les attitudes empiriste, idéaliste et pragmatiste. Salanskis ne peut retenir l'attitude idéaliste

> dès lors qu'elle pose, en fait, l'indépendance et la primitivité absolue de la structure symbolique comme structure de l'idéalité par rapport à la forme de la constructivité. (Idem)

Le point de vue empiriste, pour Salanskis, se trouve quant à lui devant un paradoxe indépassable qui fait qu'

> il faut en fin de compte arriver à comprendre, dans un récit causal et naturaliste, comment les sujets passent de la rencontre successive de configurations sensorielles singulières et inéquivalentes, à l'appréhension immédiate du type à travers chacune d'elle, sans poser comme objet patenté le type, ce qui équivaudrait à sombrer dans l'idéalisme. (Idem)

Salanskis ne croit donc pas à une absence d'idéalité dans le discours empiriste. Aussi c'est pour lui la troisième attitude, l'attitude pragmatiste, qui ouvre le plus de portes quand elle postule que le « le symbole ne serait pas lui-même s'il n'était pas soutenu par la pratique constructive [27]. » Plus précisément, le point de vue pragmatiste est celui qui

> accorde à la pratique de la construction, de l'application des règles de fabrication le long du temps opératoire, une sorte de primauté par rapport aux choses prétendant à un statut d'objet, constructions ou symboles. L'objet de la mathématique, soit comme symbole soit comme construction, selon cette vue, « provient » de l'agir mathématique, constructif en l'espèce. (Salanskis, 2008, p.72) [28]

Mais il ne s'agit pas ici d'un pragmatisme qui se restreindrait à une objectivité constructive [29] sans possibilité d'idéal. Pour Salanskis

> La vraie thèse pragmatiste est donc plutôt que la pratique sait déjà, dans ses gestes en quelque sorte, ce que c'est qu'un particulier de valeur générique : la pratique symbolique, constructive, mathématique est une pratique qui se situe nativement, et sans qu'il soit besoin pour cela d'exposition conceptuelle, au niveau de la généricité, et dans la connaissance de la transcendance de l'idéalité sur l'occurrence. (Salanskis, 2008, p.74)

C'est ce qui laisse envisager à Salanskis la possibilité de formuler l'attitude pragmatiste en termes idéalistes. Il propose ainsi, à côté des positions formaliste, intuitionniste ou logiciste, une conception méta-constructive qui

> définit le sens de l'objet mathématique pour les mathématiciens, en partant de ce que vivent ces derniers, de ce qu'ils font et des règles qu'ils suivent. (Salanskis, 2008, p.106)

27. Salanskis s'appuie sur la notion d'objectivité constructive qui est « l'objectivité de ces objets que nous prétendons « construire » dans l'allégeance à une *clause récursive*. Une clause récursive consiste en la donnée d'une batterie d'objets primitifs et d'une liste de règles de fabrication, instruisant sur la façon de fabriquer un nouvel objet à partir d'un certain nombre d'objets supposés déjà construits. » (Salanskis, 2008, p.45)

28. Ce point de vue doit être croisé avec celui des chercheurs cognitivistes. On pourra se référer par exemple à Lakoff et Núñez (2000)

29. Il est à noter que Salanskis distingue l'objectivité constructive de ce qu'il appelle l'objectivité corrélative, celle qui revient aux objets supposés membres d'une collection satisfaisant globalement une liste d'axiomes. Cette objectivité pose la question de l'infini.

Et cette conception permet d'envisager une dimension métaphysique :

> On comprend donc que cette objectivité intentionnelle, celle de l'objectivité constructive, ait une figure métaphysique particulière. Même si l'objet constructif est rencontré comme du *sens* et pas comme de l'*étant*, et la vérité à son sujet connue comme une vérité réglée par ce sens et pas comme une vérité-correspondance, le sens constructif engage l'être de la pensée et s'accroche à l'être de la trace écrite en sorte que la vérité constructive est pour une part vécue comme vérité métaphysique, nécessairement : ce qui revient à endosser un platonisme de l'objet constructif (position qui a été reprochée à Brouwer, mais qui est à l'évidence inévitable). (Salanskis, 2008, p.107)

Contrairement à ce que l'on a pu penser, il n'est donc plus possible de s'en tenir à une ontologie classique ou même aux seules questions de vérité formelle des propositions pour penser les mathématiques. C'est par l'activité des mathématiciens, dans des phases de recherche, d'émissions de conjectures, lorsque la signification est en jeu que le sens même des mathématiques apparaît. Ce sens est à saisir avant que les théories n'arrivent à maturité, ne se figent, et ne se vident alors de ce qui a fait leur raison d'être. Cela renvoie de fait l'étude des mathématiques à l'étude des mathématiques humaines, aux mathématiques produit de l'activité du cerveau humain. Dans notre thèse, c'est donc à des objets issus d'une structure interne à l'homme que nous allons nous intéresser, mais objets qui acquièrent par leur émergence même une dimension externe puis sociale. Ce positionnement nous amènera, aussi bien dans l'étude historique que didactique, à privilégier le regard sur les émergences et les premières transformations d'objets qui n'ont initialement de mathématiques que la potentialité.

2.2 Premières questions didactiques

> Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe ; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître ; comme l'enseigne la Gita, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.
>
> Weil

2.2.1 Qui fait des mathématiques ?

Après avoir tenté de donner une idée de ce que nous entendions par le terme « activité mathématique », se pose une question qui pourrait paraître provocatrice mais qui, dans les faits, ne fait pas encore l'unanimité : un élève est-il en mesure d'avoir une activité mathématique ? D'aucuns ont longtemps affirmé que la mathématique n'était accessible qu'après de longs efforts et que par exemple, il n'était pas donné à beaucoup d'émettre une conjecture mathématique, sous entendu, digne d'intérêt. Pour ceux-là, l'élève jusqu'à un âge avancé reçoit un enseignement de mathématiques, aborde la culture mathématique, mais ne peut avoir une réelle activité mathématique. A l'opposé, d'autres verront une activité mathématique quand le jeune enfant, manipulant sans se lasser pendant des heures des pièces d'un puzzle, construit ainsi de façon surprenante des motifs « géométriques »... alors que ces constructions ne sont que le produit de la patience et du hasard. Alors qu'est-ce qui définit chez un individu non mathématicien reconnu une activité mathématique ?

Longo argumente comme suit quand il s'agit de définir une telle activité :

> Quant à la géométrie, si en faire veut dire déduire des théorèmes partir des axiomes de Hilbert, fondements ultimes de cette « science pure », non, alors il est clair que les calamars ne font pas de géométrie. Si, au contraire, la géométrie est une de nos constructions conceptuelles qui émergent dans la praxis, dans la vie et dans l'histoire, et que nous la construisons dans notre rapport aux régularités du monde (ses symétries, ses homogénéités ...), si la géométrie trouve son origine (et son fondement) dans notre effort, en tant qu'être vivants, d'interpréter les perceptions et de les encadrer dans notre environnement, et si elle la trouve dans le mouvement et dans sa simulation-prévision mentale, ainsi que dans l'appréciation de certains invariants spatiaux (les formes), alors les calamars « font » un embryon de cette géométrie qui sera la nôtre[30].

Longo, dans le prolongement des idées de Poincaré, associe l'activité géométrique élémentaire à l'abstraction d'invariants et de processus, ce qui permet d'affirmer que tout individu peut avoir une activité mathématique et ceci dès le plus jeune âge. Les formes et les objets de cette activité vont bien entendu varier au cours du temps, mais il existe un continuum d'appréciations, d'élaborations et de constructions qui structure l'individu dans sa relation mathématique au monde.

Et ce que Longo exprime pour la géométrie (et donc l'espace) peut être formulé dans un parallèle aisé pour l'arithmétique (et le temps, ou plutôt la répétition).

Si cette hypothèse est retenue, il est alors possible d'affirmer que se met en place chez tout enfant, sauf cas très particulier d'enfants totalement fermés au monde, un substrat qui est mathématique et sur lequel doit pouvoir s'appuyer un enseignement des mathématiques.

2.2.2 Un élève peut-il avoir une activité mathématique ?

Mais les points de vue semblent ensuite diverger en ce qui concerne le rôle de l'enseignement dans le développement d'une culture mathématique. Précisons, avant même de développer ces questions, que nous pouvons dans un premier temps appeler « élève » un sujet évoluant dans une institution ayant pour but l'enseignement des mathématiques, assuré par un enseignant.

Pour certains, c'est en termes de transmission que la question doit être posée dans un premier temps.

> Le discours pédagogique actuel insiste trop souvent sur la place de la construction du savoir aux dépens de l'acquisition du savoir, comme si le rôle de l'enseignement se situait moins dans la transmission d'un savoir déjà constitué que dans la possibilité pour l'élève de construire un savoir qui lui serait propre. On ne construit pas du savoir ex nihilo, l'autonomie de l'élève passe par l'appropriation d'un savoir qui *a priori* n'est pas le sien, et l'enseignement a justement pour but qu'il devienne sien ; c'est parce qu'il a acquis du savoir que l'élève peut construire à son tour du savoir. (Bkouche, 2000a, p.15)

Mais pour Schubring il n'est pas envisageable d'opérer une telle séparation de principe entre les produits de l'activité de l'élève et « le » savoir :

> Il nous faut donc définir une approche qui évite toute séparation entre production et reproduction, tant dans ses principes méthodologiques que dans les pratiques qui en découlent. Il importe de partir d'un cadre théorique dont les catégories mêmes l'interdisent. Or, en alignant production avec « invention » et enseignement avec « socialisation » ou « divulgation » ou « réception » [Belhoste 1998, p. 289 et

30. Longo, texte en ligne : http ://www.di.ens.fr/users/longo/files/PhilosophyAndCognition/ cognigeometrie.ps, p.5.

> 290], on va tout droit vers une séparation. De telles identifications impliquent presqu'inéluctablement une hiérarchie entre invention et transmission, attribuant à la recherche un aspect premier, original, et à l'enseignement un rôle secondaire, dérivé. Certes, depuis Thomas Kuhn, il est commun d'associer la fonction d'enseignement à la seule phase de - science normale - [Ibid., p. 290], mais je voudrais mettre en cause ce consensus. (Schubring, 2001, p.297) [31]

Nous sommes donc en présence de deux conceptions distinctes quant au rapport qui doit se nouer dans la classe vis à vis du savoir et également quant à savoir ce qui fonde le projet didactique à un moment donné d'un processus d'apprentissage. La question ne se pose pas tant sur la forme que doit prendre l'enseignement - où l'on conçoit bien que l'activité doit se rapprocher de la résolution de problème (Pour Bkouche, il s'agit de « recourir aux problématiques d'origine, et d'amener les élèves à une confrontation véritable et directe avec la connaissance », (Bkouche, 2000a, p.11)) - que sur le mode de référence à un savoir savant déjà là.

Nous reviendrons dans le chapitre suivant sur les savoirs en situation didactique de recherche de problème, mais pour pouvoir évoquer les liens entre épistémologie, histoire et didactique, comme nous voulons le faire dans la section suivante, continuons à préciser comment peut se présenter cette question de l'enseignement et de l'apprentissage citant tout d'abord Bkouche sur l'enseignement de la science :

> La science n'a pas été faite pour être enseignée, elle est là ! Une conception naïve conduit souvent à dire que les constructions de la science doivent, tôt ou tard, devenir objet d'enseignement ; cette prétendue automaticité conduit à la déproblématisation de la connaissance, ou à sa « décontextualisation », comme disent les didacticiens. Ce qui conduit à fabriquer les divers artefacts que la transposition didactique et les diverses ingénieries du même nom se proposent de mettre en œuvre, si bien que la connaissance n'a ainsi plus d'autre objectif que d'être enseignée. Avant d'enseigner quelque chose, la forme de ce quelque chose, il faut que soit mis en place le pourquoi, la problématique de ce quelque chose, alors ce quelque chose prend son sens. [32] (Bkouche, 2000a, p.17)

Aussi nous ne chercherons pas à comprendre l'enseignement de la science, ce qui n'a effectivement pas lieu d'être. Il faut par contre questionner la possibilité de permettre à des élèves et un enseignant d'entrer dans une relation aux questions mathématiques qui engendre une transformation du système de connaissance des élèves relativement aux objets mathématiques manipulés et une possible institutionnalisation de savoirs mathématiques.

Pour Fabre, en lien avec la notion de problème, la question de l'enseignement se pose ainsi :

> Toute entreprise didactique ne revient-elle pas d'ailleurs à cette tâche impossible de restituer le sens du problème à partir de sa signification, telle qu'elle apparaît dans la solution déjà là ? Dès lors, toute la difficulté consiste pour le pédagogue à entendre le sens que les élèves donnent au problème tout en maintenant le fil de sa signification mathématique.(Fabre et Vellas, 2006, p.7)

Dans ces propos qui évoquent le « déjà-là », la dite « solution » du problème, on ressent à nouveau la contradiction entre une épistémologie du connaître, renvoyant à l'action, et une épistémologie de la connaissance dont on oublie parfois la dynamique. Mais si nous avions un doute sur l'épistémologie sous-jacente, Fabre clarifie le propos en mettant en avant une relation au monde basée sur l'agir et nous renvoie aux produits de l'action des élèves :

31. L'article de Bruno Belhoste dont il est question est : Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques, *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 (1998), p. 289 - 304.

32. Précisons ici, au regard de la citation de Bkouche, que la problématique qui développe un sens n'est en général pas unique et qu'à une problématique donnée de nombreux sens peuvent être associés.

> Le sujet connaît le monde en l'expériençant activement et la réalité c'est le monde expériencé, jamais le monde ontologique [...]. Le sujet perçoit, agit, pense, opère sur l'objet, jamais sur les choses du monde. L'objet est tout ce que le sujet a expériencé (personnes, objets physiques, événements, concepts, SP, etc.)[33]. (op. cit., p.42)

Si un consensus semble pouvoir se faire aujourd'hui dans la communauté didactique sur l'activité mathématique de l'élève, la question de la forme des situations à mettre en œuvre reste vive. Et si pour Schubring, l'enseignement ne doit pas être dissocié dans l'esprit de l'innovation en mathématiques, Muller constate la difficulté d'une telle dissociation dans les projets didactiques proposés :

> [...] les situations d'enseignement du savoir sont fondamentalement différentes des situations de production du savoir. Les dispositifs didactiques qui soutiennent la reconstruction du savoir par les élèves sont pensés du point de vue d'un savoir déjà là. Quelque soit le degré de problématisation qui anime ces dispositifs (qu'ils soient construits par exemple en référence à de ruptures ou à des obstacles épistémologiques repérés dans l'histoire du savoir savant), le sens des problèmes qu'ils mettent en jeu est un sens pétri de la signification du savoir déjà-là. L'enquête didactique, dans la mesure où elle se soutient de sa connaissance d'un savoir déjà-là, tend alors, si ce n'est à recouvrir l'enquête mathématique de l'élève, du moins à interférer fortement avec elle, interférence qui n'est pas sans conséquence sur le statut épistémologique des objets construits en classe.(Muller, 2006, p.107)

Nous reviendrons sur cette question difficile du savoir déjà-là dans le chapitre suivant. Nous conclurons ici simplement en affirmant que ce ne sont pas des outils pour la **reconstruction** du « savoir déjà-là » que nous souhaitons développer, mais des outils pour la modification et l'enrichissement du système de connaissances mathématiques des élèves et l'émergence de savoirs. Les situations didactiques de recherche de problème sont des candidats susceptibles de lever certaines contradictions. Dans ce cadre, les observations que nous ferons porteront sur l'émergence et l'évolution d'objets mathématiques dans une pratique et non sur une relation à des « objets de savoir » déjà-là.

2.3 Comment interroger l'histoire ?

> Mais il faut admettre que cette histoire, une fois très utilement consultée, n'est pas nécessairement la seule autorité habilitée à nous révéler l'essence du mathématique. (Thirion, 1999, p. 102)

Précisons tout d'abord que nous ne sommes pas historien des sciences et que nous n'allons donc pas mener, dans cette thèse, un travail identique à celui que pourrait réaliser un historien. Pour autant, pour éviter d'avoir à attendre de nombreuses années que le travail soit entrepris, nous sommes amenés à nous poser des questions de l'historien des mathématiques sur certains faits précis qui ont traits aux mathématiques et sur la méthode que nous mettons en œuvre pour les étudier. Bien entendu, puisque notre travail se situe dans un cadre didactique, la question se pose de fait et nous y reviendrons, des interpénétrations entre point de vue mathématique, historique, et didactique. Nous serons ainsi amenés à faire l'hypothèse qu'une étude historique peut fournir des éléments épistémologiques permettant de penser la relation aux objets dans des

33. SP pour situation-problème

situations de recherche contemporaines. Mais avant de revenir sur ces dimensions croisées, évoquons la question historique, en faisant pour l'instant l'hypothèse que nous sommes en mesure de mener une quête historique à « mains nues » [34], qu'une telle posture n'est pas imposture.

2.3.1 Intrigue et savoirs

Pour Veyne :

> Les faits n'existent pas isolément, en ce sens que le tissu de l'histoire est ce que nous appellerons une intrigue, un mélange très humain et très peu « scientifique » de causes matérielles, de fins et de hasards ; une tranche de vie, en un mot, que l'historien découpe à son gré et où les faits ont leurs liaisons objectives et leur importance relative, (Veyne, 1996, p.51).

Pour ce qui nous concerne, l'intrigue historique que nous considérons, bien que mettant évidemment en lien de nombreux plans, ne vise pas l'étude d'un objet mathématique si vaste qu'il faudrait plusieurs thèses pour en cerner les contours. Comme nous l'avons déjà évoqué, nous ne visons pas ici, une explicitation des mécanismes d'élaboration des mathématiques comme science, une analyse d'un champ des mathématiques, mais nous cherchons des repères concernant les mathématiques comme pratique de recherche sur une question simple de pavages. Du point de vue historique, ce n'est ainsi ni une monographie sur le concept de pavages en mathématiques que nous tentons de construire, ni sur les pavages aux XVII^{e} siècle, mais « simplement » une approche de l'activité keplerienne quand celui-ci manipule les pavages archimédiens du plan entre 1590 et 1619.

Si l'étude que nous menons a des dimensions originales, elle peut toutefois s'appuyer sur les travaux particulièrement riches de Gérard Simon [35] (Cf. chapitre 5). Nous reviendrons donc ultérieurement sur ce que nous dit Simon de Kepler, mais puisque c'est sur ces travaux que nous nous appuierons essentiellement, présentons ici quelques éléments sur sa conception de l'histoire des sciences, ou pour être plus fidèle, sur les relations qu'il a observées entre sciences et histoire.

Une histoire des savoirs

> Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique.
> Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit.Bachelard (1938)

Simon, en appui de ses travaux sur Kepler en particulier, Simon (1996, 2008), porte un regard sur la constitution du savoir scientifique, insiste sur le caractère singulier des découvertes et sur une dimension essentiellement contingente de la pensée scientifique. Simon met tout d'abord en garde contre des approches philosophique ou épistémologique des sciences qui nous feraient « voguer dans l'abstraction ». Il écarte ainsi la possibilité de définir les sciences par leur objet, parce qu'un objet scientifique n'est pas donné en tant que tel,

> il est indissociable de la ou des méthodes qui permettent de le formuler, de l'étudier et de le penser. (Simon, 2008, p.23)

par leur méthode (cf. première section du chapitre) ou même par leur esprit car un esprit qui évolue au cours du temps ne peut permettre de définir ce qui fait la scientificité d'une science.

34. Pour reprendre une expression de Barbin (1997), qui oppose une histoire écrite à mains pleines, à travers des grilles, par exemple celle de la didactique, à un travail à mains nues qui permet à l'historien « de manier, comme il le doit, la matière faite des événements historiques »

35. Gérard Simon, 21 janvier 1931 - 22 juin 2009

Pour Simon, il est ainsi vain de vouloir définir la scientificité en général. Il insiste également sur les pièges de la rétrospection. Et si on ne peut faire semblant d'oublier ce que l'on sait il faut être particulièrement vigilant au regard rétrospectif « lourd de pièges insidieux », et en particulier celui de passer d'une première évaluation à une explication de type causal,

> faisant des erreurs et des lacunes à combler dans une science encore balbutiante ou imparfaite la raison d'être des corrections ou des transformations opérées par la science ultérieure. (Ibid., p.28)

Simon appuie son propos sur les « surprises du passé » qui lui font admettre que :

— « l'imaginaire d'un savant s'alimente donc à toutes les sources dont il dispose ». (Ibid., p.38)

— « la notion d'esprit scientifique apparaît comme une notion surajoutée. En fait ce qui compte c'est le système des affrontements théoriques à une époque donnée, où les prises de position prennent leur sens et leur cohérence ». (Ibid., p.39)

et conclure qu'il faut que « [l'histoire des sciences] s'en tienne à ce qui est, qui est fort dérangeant : l'histoire des sciences n'est pas une histoire du vrai ».

Mais alors qu'elles sont les approches possibles des faits pour une compréhension de l'évolution de la science. Pour Macherey, qui cite abondamment Simon,

> Qu'on la prenne par l'un ou l'autre de ses deux bouts, l'entreprise d'une histoire des sciences s'avère donc problématique, exposée au doute, et à la limite invivable. Peut-être faudrait-il aller jusqu'à affirmer qu'il n'y a pas, qu'il ne peut pas y avoir d'histoire des sciences.
>
> C'est cette difficulté de fond qui justifie qu'à l'objectif d'une histoire des sciences il ait été envisagé de substituer celui d'une histoire des savoirs. (Macherey, 2007, p.217)

Mais l'introduction des savoirs pourrait sembler un élargissement tel que le champ d'étude s'en trouverait démesurément agrandi. Pourtant il est au moins deux visions de l'histoire que cette introduction permet de requestionner. Tout d'abord celle qui aurait pour ambition de qualifier *a posteriori* certaines approches de « fausses sciences ». Celle qui parallèlement à des disciplines dont le caractère scientifique serait avéré, voudrait ainsi disqualifier des connaissances qui, ayant prétention à être des sciences, n'en seront finalement pas, comme le fait justement apparaître l'histoire, et qui sont alors versées dans la classe des fausses sciences. Mais les travaux de Simon, sur les XVI^{e} et XVII^{e} siècles, ont permis de mettre en évidence que

> Contrairement à ce que l'on a appris chez Bachelard de la notion d'obstacle épistémologique, il s'avère que des savoirs jugés aujourd'hui non scientifiques ont joué un rôle positif dans le mouvement de restructuration intellectuelle opéré par Kepler comme dans la constitution de savoirs annexés désormais au domaine de la science. (Mazauric, 2007, p.99)

Simon porte ainsi une pratique de l'histoire et de l'épistémologie qui réhabilite certains travaux et amène une nouvelle perception de l'activité scientifique qui s'écarte, on l'aura compris, de la notion de rupture épistémologique. Dans cette optique, les savoirs ont un rôle central et en particulier une vie dont l'aboutissement n'est pas nécessairement de se « transmuer » en science. Car alors

> que faire des savoirs qui ne subissent pas cette opération de transformation, présentés dans ces conditions comme les résidus de la dynamique rétrograde du vrai, qui les rejette sans leur substituer les formes rationalisées dont elles auraient constitué la promesse ou la virtualité, alors qu'elles n'avaient pas les moyens de tenir cette promesse ou de pousser cette virtualité jusqu'au point où elle devient effectivité ? (Macherey, 2007, p.222)

L'étude de la vie des savoirs permet donc de rentrer pleinement dans la question de l'émergence des nouveaux modes de pensée, des nouvelles pistes de développement et potentiellement des résultats nouveaux. Cette ouverture permet d'intégrer un champ d'étude qui a souvent été délaissé et qui pour Simon disqualifie certaines études des grandes avancées historiques. [36].

L'introduction du terme « savoirs » renvoie également à une autre dynamique des sciences. Celle où l'on fait référence

> à des actes, ou des choses en train de se faire, et non des choses déjà toutes faites, accomplies, auxquelles leur réalisation, pour autant qu'elle est censée être définitivement achevée, ôte ce caractère d'être activement en cours, donc prises sur le vif de leur effectuation dont les résultats ne peuvent être anticipés. (Ibid., p.223)

L'étude des savoirs, nous renvoie donc à une dynamique, à des élaborations en cours, à l'acte de connaître en lui-même. [37] C'est pourquoi la méthode se révèle différente. Pour Simon, pour comprendre le pensé il s'agit dans un premier temps de questionner le pensable :

> Nous partons de l'idée qu'avant d'étudier la manière dont un homme à une époque déterminée élabore conceptuellement les données de fait qui s'offrent à sa réflexion, il est bon de s'interroger au préalable sur les normes auxquelles il obéit quand en général il conceptualise ; et donc que l'analyse de ce qui pour lui est pensable doit précéder celle de ce qui par lui est pensé. (Simon, 1979, p.11)

Par ailleurs, l'identification des instants de formulation de connaissances nouvelles doit s'envisager dans l'étude de la dialectique entre ancien et hypothétique :

> Nous tentons de préciser l'articulation entre les *a priori* qui président à l'objectivation et l'*a posteriori* qui réagit sur les présupposés initiaux pour aboutir à la formulation d'une hypothèse, d'une méthode, d'un concept ou d'une loi. C'est dans cette distance et ce rapprochement que nous paraît à chaque époque résider la vie de la pensée scientifique. (Ibid., p.18)

Bien entendu, ces allers-retours sont nombreux et dans l'enrichissement du nœud de relations qui opèrent sur un objet ce n'est pas une théorie qui est soumise à la contingence mais un ensemble, issu du pensable et qui, comme nous en donnerons des exemples, ne résisteront parfois pas aux critères de scientificité postérieurs. Comme nous l'avons déjà évoqué, la notion de rupture épistémologique, parfois utile, ne peut dans ce contexte être utilisée sans une grande prudence tant les savoirs en jeu et les sciences qui adviennent sont indissolublement liés et liés aux savoirs antérieurs. Un objet est pensé dans la mesure où il est devenu pensable, et, bien sur, le fait qu'il soit devenu pensable n'implique pas qu'il soit pensé. Nous n'oublierons pas par ailleurs qu'au delà de cette assurance de l'émergence possible du vrai à partir du faux, c'est parfois dans une part irrationnelle que l'objectivation se réalise.

Conclusion : L'approche historique que nous emprunterons, suivra l'option que Simon avait choisi, du questionnement de la pensée d'un savant sur des objets encore très incertains, dans un contexte jugé *a posteriori* non scientifique. Ceci est possible par l'orientation de nos recherches et « l'étude de cas » que nous envisageons s'avère en l'espèce, comme l'a montré Simon, possible et pertinente. Ce n'est donc pas à l'histoire du savoir que nous cherchons à contribuer modestement mais à l'histoire de l'émergence de savoirs lors d'une pratique de recherche sur un objet mathématique en début de vie.

36. Par exemple l'élaboration de la loi des aires par Kepler

37. Et comme on le verra dans le chapitre 5, quand Kepler lui même présente son œuvre, ce n'est jamais comme une compilation de résultats mais toujours comme un processus, une réflexion en cours, un enchaînement de raisonnements justifiés, aboutissant à une nouvelle compréhension du monde

Des éléments de méthode pour une enquête historique axée sur l'homme cherchant ?

Gérard Simon, Paul Veyne ont fait œuvre d'historiens et d'analystes du travail de l'historien à une époque où les cadres avaient besoin d'être requestionnés. Veyne, en introduisant la notion d'intrigue contrariait en particulier certaines approches qui se voulaient moins sceptiques, plus scientifiques. Il s'appuyait pour ce faire sur les travaux de Weber et on ne sera pas étonné de retrouver dans la méthode proposée par A. Gros pour penser la production de connaissances historiques des références à Weber et Dewey. Nous donnons ici quelques éléments de cette méthode comme cadre pour l'enquête que nous avons envisagée ci-dessus.

A. Gros, dans son souhait de proposer une méthode d'enquête historique, prend tout d'abord de la distance avec deux approches des sciences que nous avons déjà évoquées. Il écarte les méthodes regroupées sous le terme « internaliste » car :

> d'une part, en posant *a priori* des règles à suivre, elles orientent l'étude des savoirs dans une direction normative. Elles se construisent la plupart du temps comme tribunal de la science. D'autre part, lorsque ces démarches *a priori* se proposent d'observer diachroniquement la science, elles présentent le risque d'une téléologie : l'évolution de la pensée scientifique dessinerait un rapprochement progressif vers le modèle le plus pur. (Gros, 2011, p.1)

Il écarte également les méthodes « externalistes », relevant de la sociologie ou de l'anthropologie des sciences qui dans les versions les plus radicales ne s'intéressent guère à la pensée scientifique elle-même et de façon très orientée aux savoirs :

> Ces derniers sont donc référés directement au contexte économique, social, institutionnel ou politique. De ce point de vue, le risque est d'annuler la dimension productive et créatrice des savoirs : ils sont déterminés passivement de l'extérieur et leur existence n'est que le reflet d'un contexte historique donné. (Idem)

Pour autant, il s'agit de trouver une voie permettant la prise en compte des résultats des études empiriques entre l'étude des textes de la science et celle d'un environnement social permettant l'émergence des savoirs. Gros propose en appui sur la théorie de l'enquête de Dewey et sur la méthode idéaltypique théorisée par Weber un cadre pour une étude empirique. Pour Gros (idem) :

> Ces deux approches ont en commun de récuser les théorisations idéalistes des sciences et leurs règles logiques *a priori*. Weber s'attaque explicitement aux « dogmes naturalistes » de l'École Historique Allemande induits par une conception nomologique unifiée des sciences. Dewey s'attaque, quant à lui, aux épistémologues visant l'évaluation de la connaissance comme contenu. Tous deux nous proposent une épistémologie empirique visant la compréhension de la connaissance comme activité humaine fondamentale non réductible à un modèle scientifique unique *a priori* et unifié à terme. Tout deux construisent des schémas processuels pour définir la connaissance qui, dès lors, ne peut être réduite ni à un ensemble de propositions linguistiques, ni à un reflet passif des conditions historiques. L'idée fondamentale à laquelle conduisent ces deux auteurs est que la connaissance n'est pas réductible à un contenu : elle est une pratique utilisant des moyens pour parvenir à une fin. (Idem)

Le croisement doit donner lieu à une théorie de l'enquête historique. Gros s'appuie donc sur le schème de l'enquête de John Dewey [38] qu'il installe dans un cadre théorique général en appui

38. Pour Dewey « l'enquête est la transformation contrôlée ou dirigée d'une situation indéterminée en une situation qui est si déterminée en ses distinctions et relations constitutives qu'elle convertit les éléments de la situation originelle en un tout unifié. » (Dewey et Deledalle, 1993, p.169)

sur les caractéristiques suivantes :

1. La primauté épistémologique de l'usage dans la détermination de la signification.
2. La primauté de la dimension d'acte dans la compréhension de la nature de la pensée, du jugement et du langage et la critique de la conception « représentative » du langage et de la connaissance.
3. La dimension institutionnelle et sociale du sens, de la rationalité et de ses catégories constituantes.
4. L'ordinaire comme horizon de la pratique philosophique.

Ainsi pour Gros, l'élaboration de l'intrigue historique peut se développer sous forme d'enquête.

> Si l'on s'accorde sur le cadre anthropobiologique proposé par Dewey pour penser la connaissance, le schème de l'enquête s'applique théoriquement à l'histoire en tant qu'activité humaine et pratique culturelle. Rappelons que la signification de ce schème est de saisir la pensée comme fonction organique de l'homme vivant : l'enquête est la forme commune que prend la pensée dans les activités humaines. (op. cit., p.6)

Gros invoque alors Weber et la notion d'idéal-type qui consiste à relier dans une trame commune, des phénomènes potentiellement disparates de l'expérience et qui offre un guide dans la construction des hypothèses. On retrouve ici un outil pour l'étude des intrigues de Veyne, qui propose une histoire où les événements humains ne sont susceptibles que d'une compréhension qui exige la multiplication des points de vue et le refus d'un point de vue déterminant sur le social. Alors pour Gros :

> John Dewey et Max Weber, par opposition aux conceptualisations *a priori* de la connaissance, proposent tous deux des descriptions empiriques des processus de pensée. Le premier, par observations conjointes de la science expérimentale et du sens commun, abstrait le schème de l'enquête consistant en la résolution de problèmes par sélection des faits, par usage instrumental des concepts et par suggestion des hypothèses ; le second, par examen des pratiques des sciences historiques en particulier, isole la méthode de l'idéaltype dont l'élément central est le caractère instrumental et hypothétique du concept ayant pour finalité la résolution de problèmes soulevés par des situations factuelles. (Idem)

Gros nous renvoie à une démarche scientifique pour établir une intrigue par l'enquête. Il s'agit donc de poser des problèmes, de proposer des idéaltypes et des hypothèses et de les tester sur les faits observés. L'idée est donc de produire, non des représentations parfaites du réel mais des résultats opérationnels. Il est à noter que chaque résultat étant issu d'une enquête nouvelle, l'histoire s'enrichit à chaque nouvelle enquête d'un nouveau passé.

Dans notre thèse, c'est donc à une enquête autour de l'activité de Kepler manipulant des polygones réguliers que nous avons procédé et dont nous rendons compte en partie dans le chapitre 5. Nous renverrons pour une part aux travaux de Caspar (1958), Simon (1979) et Voelkel (2001) pour une compréhension approfondie de l'univers dans lequel se déploie l'activité de Kepler. Une maîtrise de cet environnement est nécessaire pour débuter l'élaboration d'une intrigue. Mais dans le cadre de cette thèse nous n'avons rédigé que les éléments que nous avons estimés indispensables à la compréhension de notre objet d'étude, que les éléments de l'enquête en lien avec la question de l'émergence et l'évolution des pavages archimédiens du plan. Les liens étant toutefois nombreux le contexte présenté doit suffire pour expliciter le problème posé et justifier les résultats obtenus en termes d'activité du savant cherchant.

2.3.2 Histoire et didactique

Pourquoi un didacticien s'intéresserait-il à l'histoire ? En quoi un apprentissage, par des élèves actuels, dans une classe actuelle, d'une institution contemporaine, dans une culture du XXI^{e} peut-il avoir à faire avec des faits lointains, d'un environnement on ne peut plus étranger, que nous ne pouvons qu'au mieux discerner et encore avec tant de difficultés et d'incertitude ?

Depuis les premiers essais de structuration de la didactique des mathématiques comme science, ces questions se posent avec acuité. Non seulement pour envisager les apports que pourraient avoir les études historiques sur les constructions de dispositifs didactiques[39] mais aussi pour définir la didactique elle-même dans ses rapports aux sciences constituées (mathématiques, linguistique, histoire, sociologie, anthropologie, psychologie, neuroscience, ...).

Concernant le premier point, reprenons des propos d'Artigue au début de la réflexion sur ces questions

> A un premier niveau, l'analyse épistémologique est, me semble-t-il, nécessaire au didacticien pour l'aider à mettre à distance et sous contrôle les « représentations épistémologiques » des mathématiques induites par l'enseignement :
> — en aidant à redonner une historicité aux concepts mathématiques que l'enseignement actuel tend à présenter comme des objets universels, à la fois dans le temps et dans l'espace,
> — en aidant à redonner une historicité également à des notions métamathématiques comme celle de rigueur alors que l'enseignement usuel cultive la fiction d'une rigueur éternelle et parfaite des mathématiques,
> (Artigue, 1990, p.243)

Pour aller plus loin et après avoir mis en évidence une méthode pour l'élaboration d'une intrigue historique, nous pouvons poser la question sous la forme suivante : les concepts opérationnels issus de l'enquête historique peuvent-il avoir un intérêt en didactique des mathématiques ?

Si Gros nous permet d'envisager une méthode qui contient des éléments de contrôle, il faut toutefois rappeler la prudence nécessaire, comme nous l'a dit Simon et nous l'affirme également Cauty, quant aux grilles qu'on se donne voire même et surtout à l'absence de grille qu'on imagine dans un dépaysement historique :

> L'étude d'un objet éloigné (dans l'espace géographique, historique, ou cognitif) pose toujours un difficile problème de frontière à construire entre le proche et le lointain, le familier et l'étrange. L'historien (mais aussi l'anthropologue ou l'ethnolinguiste) se propose de reconstruire pas à pas les catégories, taxinomies et autres classifications d'un âge disparu (ou d'une autre forme de culture) et dont il n'a pas l'intime connaissance. On peut craindre que l'analyse soit restreinte aux seules catégories clairement exprimées par tel ou tel document, mais qu'elle laisse échapper tout le non-dit d'une époque, les prémisses tacites, les catégories cachées[...] Le théoricien commencera au contraire son enquête en cherchant à remplir des catégories supposées universelles, en tout cas données *a priori* et non questionnées, c'est-à-dire celles qui lui sont le plus familières, et par conséquent celles qui sont peut-être les plus étrangères à sont objet d'étude. (Cauty, 1998, p.12)

Dans cette possibilité de mise à distance que propose l'étude historique, il faut donc tenir l'équilibre entre un familier mathématique qui nous donnerait par trop de grilles de lecture et un inconnu à définir à partir de trop peu d'éléments. Pour ce qui nous concerne, en étudiant un

39. Nous n'évoquerons pas ici les réflexions visant à questionner l'éventuel potentiel des études didactiques pour l'histoire.

objet mathématique relativement réduit, en nous appuyant pour la plongée dans la culture en jeu, sur des travaux nombreux qui permettent de ne pas travailler sans filet, en nous donnant le cadre de l'enquête nous avons tenté de limiter les risques liés à l'éloignement.

Sous les contraintes de cette mise à distance, la question qui préoccupe la communauté didactique c'est l'usage pour l'élaboration de situations didactiques et plus généralement le cadre théorique qui permettrait cet usage. Pour reprendre les pistes de l'article de 1990, Artigue voyait un autre intérêt à l'étude historique et épistémologique :

> [le didacticien] est confronté au problème de l'élaboration (pour des recherches de type ingénierie didactique) ou de l'analyse de genèses de la connaissance que, pour les distinguer de la genèse historique, on qualifie souvent de genèses artificielles. Certes les contraintes qui gouvernent ces genèses (artificielles) ne sont pas identiques à celles qui ont gouverné la genèse historique, mais cette dernière reste néanmoins, pour le didacticien, un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné ou une base de travail, s'il s'agit d'élaborer une telle genèse. (Artigue, 1990, p.246)

Reprenons d'ores et déjà la difficulté, nous le verrons plus loin, qu'il peut y avoir à identifier ou définir « la genèse historique ». L'expression porte non seulement l'idée de l'unicité de cette genèse mais donc en filigrane une univocité de la connaissance mathématique. Or quand on s'intéresse réellement à des genèses on constate que la phylogénèse n'a pas cet aspect homogène qu'un regard superficiel actuel pourrait lui prêter.

Voyons maintenant un autre point de vue, celui de Brousseau et d'un certain nombre de didacticiens actuels sur cette relation épistémologie-histoire-didactique.

Pour avancer dans cette recherche de relations, les didacticiens français se sont fortement appuyés sur une tradition de l'épistémologie qui, au XX^{e} siècle, a mis en avant l'étude des sciences, le développement historique des concepts. Ce positionnement de l'épistémologie a été favorable à des études historiques portant sur ces concepts scientifiques et peu, dans un premier temps, à un rapprochement avec la didactique. Faisant le constat d'une épistémologie limitée à l'étude philosophique fondée sur l'étude historique, Brousseau, en particulier, a cherché à définir une épistémologie élargie (cf. Figure 2.2 [40]). L'objectif, en associant à l'épistémologie, la psychologie cognitive et l'épistémologie génétique est de créer une discipline expérimentale propre à apporter des éléments pour l'étude de l'art d'enseigner. Brousseau voit alors la Théorie des Situations Didactiques comme l'élément qui permet de fonder l'épistémologie expérimentale des mathématiques, en rendant possible une confrontation à la contingence.

Dans cette optique, les liens entre histoire des mathématiques et didactique des mathématiques ne sont jamais directs. L'histoire conserve sa relation privilégiée avec l'épistémologie, mais en contrepartie, la construction de Brousseau met en évidence que le seul champ d'expérience possible est la didactique. C'est ce point de vue que nous retiendrons.

Pour questionner cette position reprenons deux visions des liens que l'épistémologie et l'histoire peuvent entretenir avec la didactique.

Point de vue de l'historien des mathématiques

Rudolf Bkouche est professeur émérite de mathématique de l'Université de Lille, et s'est particulièrement intéressé aux liens entre histoire, épistémologie et didactique. Dans (Bkouche, 1997), en appui sur les analyses de Gonseth qui distingue une stratégie de fondement et une

40. Figure extraite d'un diaporama en ligne : De l'art d'enseigner les mathématiques à la didactique et à l'étude des situations. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/08/de-l-art-d-enseigner-%C3%A0-l-etude-des-situationsv5.ppt

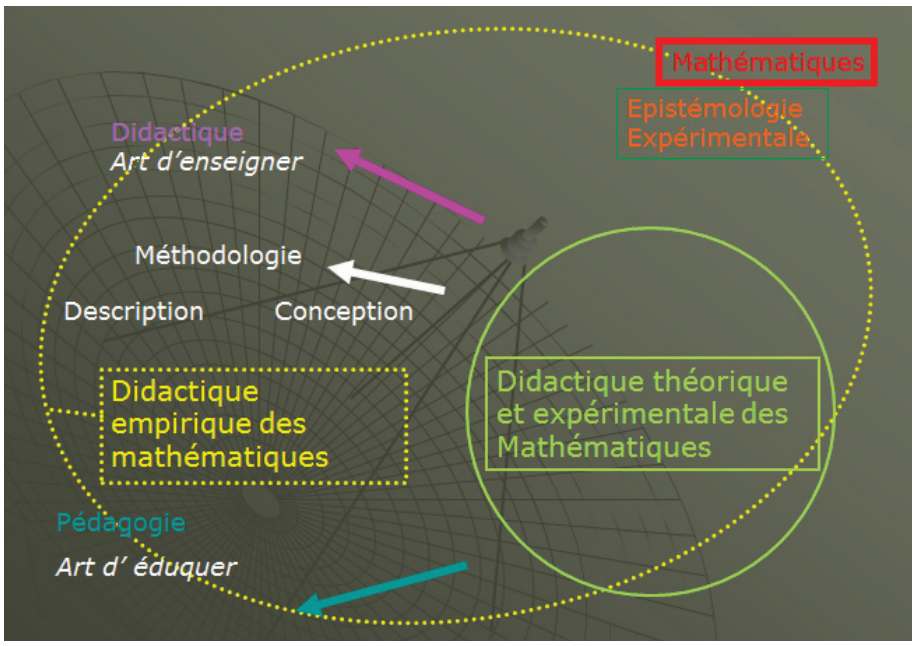


FIGURE 2.2 – Positionnement des champs disciplinaires d'après Brousseau

stratégie d'engagement dans la construction de la connaissance, il définit trois aspects de l'épistémologie, une épistémologie des fondements, une épistémologie du fonctionnement et une épistémologie des problématiques :

- L'épistémologie des fondements se propose l'étude des conditions de légitimation de l'activité scientifique sous ses deux formes aujourd'hui canoniques, la forme mathématicologique et la forme expérimentale.
- L'épistémologie du fonctionnement peut être considérée comme l'analyse des procédures, moins dans leurs fondements que dans leur signification, autant sur le plan proprement technique que sur le plan conceptuel.
- L'épistémologie des problématiques se propose d'analyser comment les problèmes qui ont conduit l'homme à fabriquer ce mode de connaissance que nous appelons la connaissance scientifique ont modelé les théories inventées pour résoudre ces problèmes.
  (Bkouche, 1997, p.4)

Concernant plus particulièrement l'épistémologie du fonctionnement, Bkouche rappelle dans un premier temps les risques de chercher par l'histoire une signification première :

> On peut demander à l'histoire de découvrir l'essence des choses en retrouvant leur genèse, ce qui suppose une signification première originelle, la compréhension des choses passant nécessairement par les retrouvailles de cette signification première. [...] La méthode historique ainsi conçue repose sur une double illusion, d'une part l'existence d'une signification première assimilée à l'essence des choses, d'autre part la nécessité d'atteindre cette signification première pour comprendre les choses que l'on étudie. (op. cit., p.6)

Bkouche envisage alors un autre but :

> On peut aussi chercher dans l'histoire moins une origine illusoire que la compréhension d'un certain type de développement ; en ce qui concerne l'histoire des sciences, la question n'est plus celle de la genèse d'une notion, au sens où cette genèse nous donnerait la clé, c'est-à-dire le moyen d'atteindre l'essence de cette notion, elle est celle d'une part des conditions de son émergence lorsque cela est possible,

> d'autre part des modes de développement de cette notion, ce qui nous renvoie à l'épistémologie des problématiques. (Idem)

Pour ce qui nous nous concerne, nous nous retrouvons pour une part, non pas dans l'épistémologie des problématiques mais dans une épistémologie des conditions d'émergence. Mais à l'étude de ces conditions d'émergence, qui pourrait laisser imaginer l'unique étude d'un environnement, d'un milieu, nous avons besoin d'ajouter, comme vu précédemment, ou tout au moins de préciser, les modalités d'émergence de la notion c'est-à-dire les modalités d'actions sur les objets qui ont mené à l'innovation. Comme le souligne Bkouche, les conditions de l'émergence ne sont pas toujours simple à obtenir, et il en est au moins de même pour les modalités. Nous verrons plus loin comment nous nous positionnons sur ce point.

Précisons pour terminer que, pour Bkouche il est utile de mettre en évidence que la psychogénèse ne peut avoir de lien direct avec la phylogénèse, que l'analogie entre le développement historique des sciences et le développement personnel de la connaissance a de nombreuses limites.

> [...] Cette conception, que Piaget a développée autour de l'épistémologie génétique, me semble doublement réductrice, sur le plan du développement personnel d'une part, sur le plan de l'histoire collective d'autre part. L'analogie piagétienne repose sur l'hypothèse de l'existence de structures psychologiques profondes qui régissent, via les mécanismes de l'accommodation et de l'assimilation, l'acte de connaître, constituant ce que l'on appelle aujourd'hui la cognition. L'aspect problématique de la construction scientifique est ainsi éliminé, celle-ci se réduisant aux seules interactions entre un sujet connaissant objectivé comme ensemble de processus cognitifs et le monde extérieur, l'ensemble des processus cognitifs étant lui-même organisé par la théorie des stades, laquelle rend compte de l'analogie entre la genèse des connaissances chez l'individu et le développement historique de la science. (op. cit., p.7)

Voyons maintenant comment un didacticien peut s'emparer de la question.

Point de vue du didacticien des mathématiques

Présentons maintenant une autre approche, celle de J-L Dorier, professeur de didactique des mathématiques qui a en particulier travaillé sur l'algèbre linéaire et a soutenu une HDR dont le titre est « Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions ». Dans (Dorier, 2000), il reprend comme proposition de cadre épistémologique celui de Drouin, avec quatre catégories :

- Épistémologie historique : Cette « épistémologie s'appuie sur la science du passé pour découvrir derrière les tâtonnements, les erreurs, les fausses routes, les intuitions sans lendemain et les obstacles divers, des conditions de possibilité de l'émergence de concepts scientifiques nouveaux, qui sont autant d'éclairages sur ce qu'est une science et sur ses méthodes de validation. » (Bachelard, Canguilhem)
- Épistémologie « *a priori* » : Cette « épistémologie procède *a priori*, tentant de définir peut-être moins la science telle qu'elle est ou a été, que telle qu'elle devrait être dans sa pureté et sa rigueur. C'est une épistémologie plus proche de ce que les philosophes ont longtemps mis sous le terme de « logique », s'appuyant sur des formalisations *a priori*, définissant des critères idéaux de validation. » (Popper, Lakatos)
- Épistémologie de la science telle qu'elle fonctionne
  Cette « épistémologie observe la science telle qu'elle fonctionne dans le monde des scientifiques, avec leurs rapports de force et leurs rivalités, s'intéresse à la difficulté, pour une

théorie nouvelle, à s'installer à côté de la science reconnue par la communauté scientifique du moment, jusqu'à ce qu'une « révolution » scientifique parvienne à changer les normes. » Elle revêt un caractère plus sociologique. (Kuhn)

— Épistémologie génétique : Cette « épistémologie toujours à la recherche des caractéristiques du savoir scientifique, tente de les trouver dans la genèse du savoir, en s'appuyant sur une observation empirique des enfants. » (Piaget)

Pour Drouin, une partie de l'épistémologie est de fait historique. Dans cette entrée, il est à noter que les errements et les obstacles sont mis en avant. Certaines formulations, par exemple (intuitions sans lendemain) demanderaient à être questionnées pour s'assurer du point de vue épistémologique qui les sous-tend. Ces intuitions sont-elles considérées comme inutiles, voire faisant obstacle, ou participent-elles de la pensée scientifique en tant que telles ? S'écartent d'elles d'une ligne du savoir en construction, ou font-elles partie de l'histoire des savoirs ? Qu'est-ce qui prime, le concept qu'on cherche à identifier ou l'activité du sujet ?

Pour Dorier :

> Nous nous intéressons essentiellement à l'épistémologie en ce qu'elle nous permet de mieux comprendre les liens entre la constitution du savoir dans la sphère savante d'une part et l'enseignement et l'apprentissage de ce savoir d'autre part.

L'étude de Dorier, historique et didactique sur le thème de l'algèbre linéaire est beaucoup plus générale que l'approche que nous tentons dans notre thèse. Dorier envisage ainsi l'étude historique avec des objectifs concernant « le » savoir :

> Elle permet de donner au savoir mathématique sa dimension dynamique, et contribue à dégager, à travers les étapes de sa constitution, ce qui en a fait un savoir de référence digne d'être enseigné ; elle en détermine le sens de façon beaucoup plus riche que la seule référence au contexte actuel ne le permettrait. Par ailleurs, l'étude historique, si elle se prolonge jusqu'au moment où le savoir a été enseigné et retrace également l'histoire de cet enseignement, est un outil fondamental pour l'étude de la transposition didactique stricto sensu. (Dorier, 2000, p.25)

Dorier pointe également l'écart entre genèse historique et genèses artificielles :

> l'organisation du savoir enseigné ne suit pas dans son ensemble la progression historique du savoir savant, comment alors intégrer le passé mathématique de l'élève au modèle du processus historique ? Plus généralement, les différences en termes sociaux, psychologiques ou institutionnels sont telles que la genèse artificielle à l'œuvre dans la classe ne peut suivre que de très loin la genèse historique. Dans l'analyse de la genèse historique, plus que l'énumération et la fonction de différentes étapes de l'évolution, il importe de pouvoir déterminer les conditions qui ont permis de passer d'une étape à une autre ou au contraire ce qui a pu faire obstacle. (Ibid., p.20)

Il est à noter qu'il affirme la possibilité de faire émerger de l'étude historique une compréhension de la construction d'un concept :

> La genèse historique joue le rôle d'exemple de processus privilégié. Il s'agit d'en dégager une logique globale, les grandes étapes, leurs rôles et leur interactions mutuelles. De plus, il faut déterminer les conditions internes de développement, de stabilité ou de blocage d'une étape historique, comprendre les problèmes qui motivaient les acteurs de la vie scientifique de l'époque, leurs contraintes de tous ordres. Tout stade du développement historique doit donc être évalué dans ses rapports à son époque, qu'ils soient scientifiques, sociaux ou culturels. Il ne s'agit pas de se placer seulement dans l'optique d'une progression hiérarchisée en fonction du savoir final, mais de comprendre la fonctionnalité et les raisons d'être de chaque étape.(Ibid., p.28)

Il se positionne ainsi entre l'épistémologie historique et l'épistémologie de la science telle qu'elle fonctionne. Du point de vue méthodologique il précise :

> - tout d'abord, l'analyse historique doit être indépendante, doit satisfaire des exigences d'exhaustivité, et doit répondre aux différents types de questionnement évoqués plus haut
> - d'autre part, le questionnement épistémologique doit avoir une origine et une finalité didactiques

Dorier met par ailleurs en garde contre des études qui se contenteraient

> d'une analyse trop superficielle de l'histoire, qui tendrait à adapter la réalité historique pour mieux appuyer un présupposé d'origine didactique. Il nous semble en particulier que ce danger est très fort dans certains travaux qui font un usage un peu mou du concept d'obstacle épistémologique. (Ibid., p.22)

Et ainsi

> Du point de vue méthodologique, la réflexion épistémologique s'organise dans un rapport dialectique entre l'analyse didactique et l'analyse historique en procédant par touches successives visant des questions de plus en plus fines. L'analyse historique peut susciter la détection d'un problème didactique, mais elle ne saurait le supposer exister *a priori*, ni en déterminer à elle seule les conditions de dépassement. En multipliant les angles d'attaque et en poursuivant le processus dialectique de la réflexion épistémologique, on construit ainsi peu à peu les éléments qui détermineront éventuellement une ingénierie globale permettant la réalisation d'une genèse expérimentale. Néanmoins cette construction n'est jamais ni univoque, ni achevée, elle montre des choix possibles toujours susceptibles d'amélioration. (Ibid., p.26)

Les objets en jeu plutôt que le concept en cours d'élaboration

> Si on regarde l'histoire des mathématiques,
> on est frappé par le fait que les connaissances
> nouvelles produites ont un caractère local,
> comme chez l'élève qui apprend.
> Vergnaud (discussion avec Brousseau sur concept/conception)

D'autres travaux continuent à développer l'étude de parallèles entre genèse historiques et genèses artificielles. Thomaidis et Tzanakis (2007), après avoir relevé différents travaux dans ce domaine, tente à nouveau d'identifier les caractéristiques et les limites d'un « parallélisme » entre ces genèses. Une étude historique et didactique amène les auteurs à identifier deux aspects du parallélisme autour de la relation d'ordre sur la droite numérique et de l'algèbre des inégalités :

> Analysis of the data suggests the existence of at least two different aspects of parallelism ; one related to the obstacles and difficulties encountered in both worlds ; and one related to students' ability to cope with some of these difficulties and provide answers to problems, even though they are lacking the appropriate conceptual framework and techniques, in analogy with what happened historically. (Thomaidis et Tzanakis, 2007, p.167)

Les travaux successifs sur les obstacles épistémologiques (Bachelard, Brousseau, Sierpinska, ...) ont déjà montré la difficulté à raisonner en termes de parallélisme et l'étude amène Thomaidis et Tzanakis, après avoir constaté l'impossibilité de s'en tenir à un strict parallélisme entre deux univers si distincts, à affirmer que

> As a final comment [...] we may suggest that despite the differences between the historical evolution of mathematics and the teaching and learning process in the classroom, existing similarities between the two "'worlds"' (either in the positive, or negative sense of parallelism) may be used to modify conventional teaching. (Ibid., p.182)

Le terme « parallélisme » nous semble apporter plus de contraintes que d'intérêts car il peut renvoyer nous semble-t-il à des parcours à long terme, des évolutions sur la durée. Or pour ce qui concerne les rapprochements positifs Thomaidis et Tzanakis insistent sur des questions de démarches et d'attitude :

> The discussion in Section 3.4(a) suggests that strict parallelism is untenable, since strong didactic factors intervene and constrain students' approaches and answers. [...] some students are able to adapt their knowledge to new situations, unfamiliar to them, and provide correct answers to the problems they face, even though they do not possess yet the appropriate conceptual apparatus and techniques. This may be seen as evidence for the existence of a positive parallelism [...] : In unfamiliar new situations, some students, like creative mathematicians in the past, are able to proceed successfully and provide correct solutions to the problems they face, sometimes in striking analogy to the solutions that appeared historically. (Thomaidis et Tzanakis, 2007, p.180)

Pour ce qui nous concerne et pour être clair, nous ne chercherons aucunement à envisager un quelconque isomorphisme entre des moments aussi différents de la vie des savoirs que peuvent être un temps particulier d'une des genèses historique et un autre temps singulier d'une genèse artificielle. Comme on a pu le voir il n'est plus possible de faire référence à une culture mathématique unique, à travers le temps et l'espace, même si il nous reste la possibilité de rapprochement dans un cadre qui reste pour une part commun (celui des mathématiques).

Mais, au-delà de l'identification de caractéristiques du savoir mathématique favorisée par la mise à distance, l'étude historique permet de produire des éléments sur le pourquoi et le comment de l'émergence des savoirs. Ici, pour une émergence particulière, nous pointerons quelques caractéristiques de la transition connaissances-savoirs. Or nous avons la chance, dans l'étude des genèses des pavages archimédiens du plan, de pouvoir étudier, celle produite par Kepler. La difficulté réside comme pour toute étude historique dans l'accès, non pas à la pensée de l'individu à jamais inaccessible, mais aux produits de cette pensée, aux traces des invariants dans la conceptualisation. Et pour Kepler, nous avons accès, non seulement à ses écrits, mais également à tout ce qu'il a laissé à voir de sa pensée. Car « Kepler est un homme ouvert, prêt à discuter de toutes choses et à les partager » et qui « tient à nous faire part de toutes ses errances, ses fausses routes, ses déductions », (Sauvageot, 2009).

Notre recherche s'orientera donc sur une dimension bien spécifique. Nous ne chercherons pas comme Dorier « à comprendre la constitution d'un savoir comme savoir digne d'être enseigné ». Après avoir redéfini ce que nous entendons par savoirs (cf chapitre 3), nous ne nous engagerons pas dans cette dimension du savoir constitué, mais dans celle des savoirs émergents dans l'activité des individus. Nous ne chercherons pas non plus à identifier les étapes de constitution d'un savoir, nous nous centrerons sur les actions des individus et pas d'une institution. Bien entendu, dans notre étude, nous identifierons également, à n'en pas douter, différents problèmes en lien avec les objets considérés, voire constitutifs de la significations de ces objets. Mais comme notre étude ne porte pas sur la vie même du concept, nous ne basculerons ni dans une épistémologie des problématiques, ni même dans une analyse conceptuelle.

Ceci nous permettra d'être moins prudent sur certains aspects, d'éviter les difficultés liées à la définition d'obstacle épistémologique dans la genèse d'un concept, liées à l'idée d'un concept se développant en tant que tel comme objet d'une histoire des sciences et pas d'une histoire des

savoirs, liées à la vie des savoirs dans la sphère savante, voire à la vie du texte de savoirs, et d'orienter donc nos travaux sur la recherche de processus par lesquels les actions sur les objets en jeu deviennent efficaces, de processus caractérisant une activité mathématique.

Cette étude devrait contribuer à confirmer la nature dynamique des mathématiques, forme d'activité culturellement située. L'enquête à mener, l'intrigue à élaborer, dans ses dimensions philosophique, sociale, technique, devrait nous permettre d'observer des connaissances en transformation, des savoirs émergents.

Un tel niveau de détail du fonctionnement des mathématiques peut sembler difficile à atteindre dans les études historiques. On pourrait avoir tendance à penser que les sources historiques se prêtent moins à cette forme d'inspection. Il faut donc concevoir un dispositif qui permette cette observation. Bien entendu, pratiquer une histoire à mains nues, pour voir les étrangetés, aller au-delà des évidences, poser des questions, mais il faut également choisir son objet d'étude avec suffisamment de précaution pour avoir les opportunités de telles observations. Nous avons fait l'hypothèse que ceci était possible. Nous tenterons de le montrer dans les chapitres 4 et 5 en élaborant une intrigue historique sur une pratique de recherche de pavages archimédiens du plan et en établissant des résultats qui testés historiquement pourront être soumis à des expérimentations en didactique.

Chapitre 3

Ancrages théoriques de la recherche. Aspects didactiques

Sommaire

3.1 Les situations didactiques de recherche de problème (SDRP) 52

3.1.1 Des dispositifs portés par la résolution de problème en classe 52

3.1.2 Décrire l'activité de recherche de problème 53

3.1.3 Situation didactique de recherche de problèmes en classe de mathématiques 57

3.2 Émergence et institutionnalisation des savoirs mathématiques en SDRP 60

3.3 Les savoirs de l'enseignant 64

3.4 TSD, le milieu 65

3.4.1 Notion de milieu en TSD 65

3.4.2 Différents niveaux de modèles de milieu 67

3.5 Étude d'une relation aux objets mathématiques 69

3.5.1 Quelques éléments de la sémiotique selon Pierce 70

3.5.2 Approche sémiotique pour l'analyse *a priori* d'une tâche mathématique 72

3.5.3 Un modèle d'analyse des raisonnements 75

3.6 Une problématique reformulée 77

Après avoir donné les repères épistémologiques, nous sommes donc amenés à préciser le cadre didactique qui sous-tend notre étude. Il s'agit de revenir tout d'abord sur le type de dispositif que nous envisageons de questionner, les situations didactiques de recherche de problème, leurs caractéristiques et objectifs, mais surtout leur action envisagée sur le système de connaissance des élèves et le produit de ces actions. Pour cela après avoir rappelé quelques éléments sur les dispositifs didactiques qui mettent au cœur de leur réflexion des recherches de problèmes nous reviendrons sur la définition d'une SDRP et les dialectiques/connaissances savoirs attendues dans la mise en œuvre de telles situations.

La suite du chapitre est consacrée aux outils choisis pour l'étude des transformations du système de connaissances des élèves, en appui, en particulier, sur les travaux de Bloch, Gibel et Muller.

3.1 Les situations didactiques de recherche de problème (SDRP)

3.1.1 Des dispositifs portés par la résolution de problème en classe

La thèse récente de Marie-Line Gardes, (Gardes, 2013), positionnant très clairement les développements récents par rapport aux travaux déjà anciens sur le thème, nous ne reprenons pas ici l'historique et la revue des dispositifs didactiques qui se sont développés autour de la résolution de problème. Nous insistons toutefois sur quelques points et, en particulier, la question des objectifs des dispositifs évoqués. Gardes s'appuyant sur les écrits initiaux de Polya autour du *problem-solving*, (Polya, 1945), (Polya, 1954), (Schoenfeld, 1985) insiste sur la conception du *problem-solving* qui place la résolution de problème au cœur des mathématiques. Dans cette conception la résolution de problèmes est, entre autres, le moyen d'une appropriation par les étudiants de certaines façons de faire expertes. Dans ce cadre,

> la pratique de référence est donc celle des mathématiciens, vus comme des personnes « disposant d'un ensemble large et structuré de ressources : savoirs mathématiques académiques (concepts et théorèmes), savoirs pratiques allant des algorithmes, routine procédures jusqu'aux heuristiques ou problem-solving strategies ». (Gardes, 2013, p.54)

Mais Gardes met en évidence que les propositions de Schoenfeld associent fondamentalement heuristiques et savoirs :

> Cette approche de la résolution de problèmes laisse donc une place centrale aux savoirs mathématiques. Si elle constitue un but à part entière, elle est aussi vue comme favorisant une meilleure compréhension des concepts et théorèmes enseignés. (Idem)

Toutefois, dans ces propositions novatrices au XX^{e} siècle sur l'approche des mathématiques en classe, l'accent est mis sur les heuristiques, et la philosophie des mathématiques sous-jacente ne permet sans doute pas le développement d'une réflexion conjointe sur les objets mathématiques et les savoirs en jeu.

> Si cette conception de la résolution de problèmes met en évidence la place centrale des savoirs mathématiques et un lien avec les concepts enseignés, elle ne nous semble pas assez mettre en lumière l'aspect dialectique de l'activité de recherche mathématique entre la mobilisation, l'acquisition des connaissances et le développement d'heuristiques. (Idem)

Dans la même optique, dans la revue des dispositifs français qui se sont ancrés sur la résolution de problèmes, Gardes met en évidence les différentes orientations qui se sont développées. Elle évoque le dispositif pensé à l'IREM de Lyon, (Arsac *et al.*, 1991) et (Arsac et Mante, 2007) autour des *problèmes ouverts* où l'accent est mis sur la pratique de résolution de problèmes et non sur l'apprentissage de nouvelles connaissances, les ateliers MATh.en.JEANS, (Duchet et Audin, 2009) qui vise à faire en sorte que les élèves deviennent eux-mêmes des chercheurs, les situations de recherche pour la classe de Math-à-modeler, (Grenier et Payan, 2002), où

> L'objectif premier des situations recherche pour la classe « est donc la résolution (au moins partielle) d'une question dont on ne connaît pas la réponse, et non l'apprentissage ou le travail d'une notion mathématique désignée » (Site internet de l'équipe, `http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/`).(Gardes, 2013, p.53)

Il est à noter que les travaux prenant comme objet le développement d'heuristiques lui-même n'ont jamais fait leur preuve. Il est indéniable que les travaux de Polya sur la logique du raisonnement plausible en mathématiques, ainsi que ceux de Lakatos sur « preuves et réfutations » ont mis au jour l'importance d'une approche s'écartant des lois de la logique déductive classique

pour l'étude de la découverte en recherche de problèmes, en révélant dans cet type d'activité le rôle de différentes formes de raisonnement, généralisations, particularisations et analogies et également le rôle des erreurs et des réfutations comme sources de découverte, les dialectiques, les notions de domaine de validité, la question de l'objet de connaissance. Ils ont ainsi ouvert la voie à l'étude de l'usage de la résolution de problèmes à l'école pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Toutefois, comme le rappelle Julo :

> Il est vrai que la méthode proposée par Polya n'a jamais fait ses preuves et ceci, comme l'a remarqué très tôt un spécialiste de la résolution de problèmes en mathématiques, parce que « nous savons trop peu de choses à propos de la manière dont les sujets utilisent les règles heuristiques et absolument rien à propos de la manière dont ils adaptent ces heuristiques à différentes sortes de problèmes. » (Kilpatrick, 1969). (Julo, 2002, p.3)

Ainsi,

> En dehors du fait que rien ne permet d'étayer, ni théoriquement ni empiriquement, les fondements de cette approche, le risque de faire « de la résolution de problèmes pour la résolution de problèmes », indépendamment de toute finalité conceptuelle, est grand. (Ibid., p.4)

Dès lors, dans la diversité des approches, il semble aujourd'hui premier d'interroger la place laissée à l'institutionnalisation des savoirs dans les dispositifs proposés. C'est ce que tente le groupe de recherche DREAM, auquel nous contribuons, (Aldon *et al.*, 2010). Les choix concernant la place et le rôle des savoirs mathématiques ont de profondes incidences aussi bien du point de vue épistémologique que didactique. Nous reviendrons sur cette question dans la section suivante quand nous préciserons les objectifs que nous donnons aux situations didactiques de recherche de problèmes.

3.1.2 Décrire l'activité de recherche de problème

Les éléments épistémologiques déjà présentés sur l'activité mathématique permettent d'envisager de fonder un point de vue didactique axé sur l'activité du sujet et la relation qu'il entretient avec les objets en jeu. Ce point de vue a déjà été mis en avant et éprouvé dans différents travaux. En particulier l'étude du caractère expérimental de l'activité mathématique s'appuie désormais en particuliers sur les écrits de : Bkouche (1982, 2008), Chevallard (1992), Perrin (2007), Dias (2008), Durand-Guerrier (2010), Giroud (2011) et Gardes (2013).

Pour Gardes à nouveau :

> [...] l'aspect expérimental des mathématiques se fonde sur deux principes intrinsèquement liés. Le premier est l'existence d'un mode empirique de constitution de certains objets mathématiques. Le recours à cette dimension expérimentale entraîne alors le second principe : la mise en œuvre d'une démarche expérimentale qui se caractérise par des allers et retours entre les objets (naturalisés et/ou en cours de naturalisation) par des confrontations, des vérifications et des argumentations. (Gardes, 2013, p.34)

Plus précisément, pour Durand-Guerrier

> la multiplication des expériences, en appui sur des objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves, et contribue de manière essentielle au processus de conceptualisation (au sens de Vergnaud). (Durand-Guerrier, 2010, p.5)

Ces nouveaux objets conceptuels trouvent dans un premier temps au moins, leur place dans une « théorie locale » qui « comporte les définitions, les énoncés théoriques assumés (axiomes), et certaines propositions considérées comme vraies, découlant ou non des axiomes. » (Durand-Guerrier, 2005b, p.19)

Dans l'étude de ces allers-retours entre objets naturalisés et objets en cours de conceptualisation, Gardes a mis l'accent sur les actions du sujet en introduisant la notion de « geste ». Elle fait l'hypothèse suivante :

> La dimension expérimentale des mathématiques fournit un terrain propice pour travailler les aspects dialectiques de l'activité mathématique entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances et le développement d'heuristiques. (Gardes, 2013, p.35)

et met en évidence des invariants dans l'heuristique de la découverte, des invariants qu'elle traduit dans cette notion de geste. Gardes définit la notion après analyse de points de vue philosophique et épistémologique, de Cavaillès (1994), Châtelet (1993), Bailly et Longo (2003) et didactiques de Chevallard (1996), Durand-Guerrier (2005a), Dias (2008) et propose la définition suivante :

> Un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. C'est une opération qui s'accomplit en s'incarnant dans une combinaison de signes, soumise aux règles d'emploi de ces signes. Il possède un pouvoir de créer dans sa possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'un geste dans l'expérience. (Gardes, 2013, p.144)

Elle met alors en évidence dans un cadre arithmétique (l'étude de la conjecture d'Erdös Strauss) sept gestes qui permettent l'analyse car :

> Les gestes mettent en évidence le recours aux connaissances mathématiques disponibles et mobilisables, le rôle des objets mathématiques en jeu, les heuristiques développées, la complexité des raisonnements mis en œuvre et les origines et la nature des avancées de la recherche.(Gardes, 2013, p.188)

Ces gestes sont :
— Désigner des objets
— Réduire le problème aux nombres premiers
— Introduire un paramètre
— Construire des exemples et les questionner
— Effectuer des contrôles locaux
— Transformer l'équation initiale
— Implémenter un algorithme

Par exemple, et pour ce qui nous concernera particulièrement, Gardes définit ainsi les gestes « Désigner des objets », « Construire des exemples et les questionner » et « Effectuer des contrôles locaux », (Ibid., p.159) :

- Désigner des objets :

> Désigner un objet, c'est représenter cet objet par le langage ou un signe (définition du Petit Larousse 2001). Cela permet d'indiquer précisément la nature de ces objets. S'effectuant dans la manipulation d'objets mathématiques, ce geste se situe dans l'espace opératoire mais va permettre progressivement de faire passer le travail mathématique sur les objets dans l'espace combinatoire. Il permet ainsi de mettre en évidence le travail mathématique à l'articulation des deux espaces, combinatoire et opératoire. La désignation des objets intervient en premier lieu pour faciliter le travail. En représentant un objet par un signe, on peut ensuite effectuer

> des opérations sur les signes, sans toujours se référer aux objets qu'ils désignent. [...] Ajoutons que ce geste permet d'exploiter les aspects expérimentaux du problème en favorisant la manipulation des objets en jeu. Sans désignation des objets, leur manipulation est rendue difficile. Ce geste nous semble donc primordial pour entrer dans une démarche expérimentale de recherche. [1]

Ce premier geste confirme que cette approche renvoie directement à une dimension sémiotique. [2] Gardes privilégie toutefois la notion de geste pour rendre compte de l'activité effective du sujet.

- Construire des exemples et les questionner

> Ce geste se décompose en deux actions. La première est la détermination d'une méthode de construction des exemples à partir de manipulations des objets mathématiques naturalisés en jeu dans le problème. La seconde est un questionnement de ces différents exemples dans le but d'en dégager des informations. Plusieurs types d'informations peuvent être tirés de ces exemples. Un questionnement sur de nombreux exemples se base sur la recherche de régularités dans le but d'aboutir à une généralisation. Un questionnement des exemples particuliers, par exemple des exceptions à une certaine propriété, permet de mieux cerner les difficultés liées à la résolution du problème. (Ibid., p.161)

Au-delà de de la généralisation possible à partir d'exemples de même type, il nous semble nécessaire de questionner l'intégration des faits observés dans un système en cours d'élaboration. Ainsi il pourrait être utile de tenter une généralisation de ce geste pour le traitement d'exemples qui n'engendrent pas une généralisation mais qui permettent la structuration d'un modèle.

- Effectuer des contrôles locaux

> Effectuer des contrôles locaux, c'est vérifier les différentes étapes des manipulations et combinaisons de signes dans les écritures mathématiques. Il s'agit de faire référence aux objets désignés par les signes en les positionnant au premier plan. Ce geste se situe donc à l'articulation des espaces combinatoire et opératoire. Lorsque le travail mathématique se situe dans l'espace combinatoire, les contrôles locaux permettent « de plonger » ce travail dans l'espace opératoire avec un retour aux objets mathématiques en jeu dans la résolution du problème, (Ibid., p.161).

Ces gestes, identifiés par Gardes par l'étude d'une situation dans le champ de l'arithmétique, trouvent pour certains une pertinence immédiate dans d'autres champs dont le champ géométrico-arithmétique qui sera le nôtre. Ces gestes pourront donc nous être utiles pour les analyses.

Dans un autre cadre théorique et avec un regard porté sur la dialectique preuve-définition [3], Ouvrier-Buffet (2013) propose un ensemble d'opérateurs pour l'analyse [4]. Dans ce qu'Ouvrier-Buffet appelle la « conception Lakatosienne » ces opérateurs permettent de décrire l'activité du sujet dans l'étude de problèmes intramathématiques et/ou de classification. Sans développer le cadre général mis en place autour de la définition nous rappelons ici les sous-opérateurs de l'opérateur R_5^L : « formuler un nouveau problème », (ibid., p.68) :

1. « En référence aux définitions de Morris, le geste combinatoire, geste sur les signes, relève de l'étude syntaxique et le geste opératoire, geste sur les objets mathématiques renvoie aux aspects sémantiques. »
2. Nous verrons dans la section suivante comment nous serons amenés à développer cette dimension.
3. Qui dans sa dimension heuristique a un lien avec notre problématique
4. Il s'agit ici d'invariants dans le modèle de conception de Balacheff : Deux niveaux d'invariants interviennent : les opérateurs (R) qui permettent d'agir sur la situation et les structures de contrôle (Σ) qui justifient et valident l'utilisation des opérateurs, (Ouvrier-Buffet, 2013, p.21)

- générer des exemples et/ou des contre-exemples (recherche d'un processus pour une génération systématisée) ;
- questionner la validation et la portée de faits expérimentaux ; étudier des cas limites ;
- formuler un lemme ;
- formuler une nouvelle conjecture, interroger sa validité et sa généralisation (voir ci-dessous) ;
- structurer une stratégie (de preuve ou de définition ou de recherche d'algorithme ou autre), interroger sa validité et sa généralisation ;
- structurer un plan de preuve ;
- formuler des sous-problèmes : il s'agit en particulier de l'étude de cas particuliers et de la question de la généralisation des résultats alors obtenus par une telle étude ;
- formuler un problème plus général ;
- formuler le problème dual (et définir le dual du concept en jeu) ;
- interroger la validité de la preuve ;
- problématiser d'autres preuves.

Aussi bien pour Gardes que pour Ouvrier-Buffet les invariants identifiés permettent d'étudier l'activité mathématique effective d'un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche et pour Gardes

> Le recours à ces gestes tels que nous les avons définis nous permet de montrer comment un sujet agit sur le problème afin d'avancer dans son étude. Ils produisent « des indices du progrès », terme emprunté à Polya (1945, p.112). (Gardes, 2013, p.163)

Ces invariants nous renseignent ainsi à la fois sur des débuts et sur des fins de processus. Par exemple quand le sujet formule une nouvelle conjecture, il clôt à la fois un processus et en débute un nouveau.

À côté d'une étude des gestes en jeu en situation de recherche, (Giroud, 2011, p.19) introduit la notion de concept-problème pour en particulier « décrire les interactions en jeu lors de la pratique de la démarche expérimentale ». Pour Giroud c'est le problème et la notion de concept-problème qui est l'objet central dans l'étude d'une SiRC[5] et en particulier par la possibilité d'analyser l'avancement dans la résolution du problème par l'observation de l'émergence de nouveau problèmes ou sous-problèmes.

Du point de vue des analyses didactiques :

> l'utilisation du concept-problème, en particulier de l'espace problème, peut alors être une aide au choix des variables de recherche. En effet, l'espace problème permet de déterminer les liens entre les problèmes et donc d'anticiper sur les nouveaux problèmes que les élèves pourraient être amenés a se poser ainsi que d'identifier les problèmes importants à la résolution. (Giroud, 2011, p.37)

Cette vision analytique définit ainsi un problème comme un couple (I, Q) : « l'ensemble des instances du problème (I) peut être décrit par plusieurs paramètres et la (ou les) question(s) (Q) porte(nt) sur ces instances (spécifiant les propriétés de la solution attendue), (Ouvrier-Buffet, 2013, p.59)[6]. Elle permet donc de définir des variables de recherche, utiles pour identifier les situations didactiques envisageables mais pour Gardes :

5. Situation de Recherche en classe. (Grenier et Payan, 2002)

6. Voir p.72 et 73 pour des développements sur les couples (Instance(s), Question(s)) caractérisant les problèmes permettant une activité de définition.

> la notion de concept-problème ne nous semble pas prendre suffisamment en compte le processus dialectique entre la mobilisation, l'acquisition des connaissances et le développement d'heuristiques dans la résolution de problèmes de recherche. (Gardes, 2013, p.37)

L'approche de Giroud fondamentalement se pose la question de l'existence d'une situation fondamentale pour un savoir du type « triplet (question, conjecture, preuve) ». Et les problèmes considérés, qualifiés de « nouveaux », le sont non seulement parce que les élèves n'y ont encore jamais été confrontés mais également car ils sont dans le champ des mathématiques discrètes qui n'est pas un champ habituellement fréquenté par les élèves de l'école en France.

Pour ce qui nous concerne, nous allons tenter de développer une voie qui met en évidence l'influence des relations du sujet aux objets lors de l'exploration de la question mathématique considérée et les conceptualisations qui en résultent. Dans l'étude de cette conceptualisation, nous serons pour notre part plus attentifs à identifier dans les allers-retours entre objets en cours de conceptualisation et objets plus familiers l'influence du rapport aux seconds sur la conceptualisation des premiers. Et ceci nécessitera aussi pour nous une étude combinant TSD et analyse sémiotique telle que nous la présentons en fin de chapitre.

3.1.3 Situation didactique de recherche de problèmes en classe de mathématiques

La diversité des propositions en termes d'activité de recherche en classe amène donc à la coexistence de dénominations diverses, qui pour la plupart utilisent le terme « situation ». Pour nous qui utilisons le cadre général de la théorie des situations didactiques, le terme « situation » renvoie nécessairement de façon exacte à la théorie des situations didactiques. Et donc rappelons-le, les situations didactiques de recherche de problèmes sont :

- des situations didactiques, c'est-à-dire des situations où

> le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible. Pour cela, il communique ou s'abstient de communiquer, selon le cas, des informations, des questions, des méthodes d'apprentissages, des heuristiques, etc. L'enseignant est donc impliqué dans un jeu avec le système des interactions de l'élève avec les problèmes qu'il lui pose. (Brousseau, 1998, p.60)

- qui soient des situations d'apprentissage, c'est-à-dire des situations où l'élève fasse fonctionner ses connaissances et où la réponse initiale que l'élève envisage à la question posée

> doit seulement permettre de mettre en œuvre une stratégie de base à l'aide de ses connaissances anciennes ; mais très vite, cette stratégie devrait se révéler suffisamment inefficace pour que l'élève soit obligé de faire des accommodations, c'est-à-dire des modifications de son système de connaissances, pour répondre à la situation proposée. (Brousseau, 1998, p.300)

- où le projet **commun** de l'enseignant et des élèves est avant tout **l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels, la genèse**[7] **de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux**,

- où la dimension expérimentale est fortement présente ;

7. Genèse renvoie ici à processus et nous écarte d'un point de vue ontologique qui aurait tendance à ramener l'activité à la démonstration d'une existence ou de propriétés et pas à la recherche d'un processus de construction.

Plus précisément compte-tenu de l'objectif nous aurions dû utiliser un nom long pour ces situations, nom qui devrait être « Situation didactique de genèses de savoirs par la recherche de problèmes en classe de mathématiques ». Nous en resterons à l'acronyme SDRP pour renvoyer à ces situations. Mais rappelons-le, ce qui particularise ces situations c'est bien l'entrée par le problème en tant que tel. Ceci nous amène alors à revenir sur le terme problème, sous des aspects cognitifs, en rappelant tout d'abord la définition de Brun :

> Dans une perspective psychologique, un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but [8]. Il n'y a problème que dans un rapport sujet / situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi que le problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple. (Brun, 1990, p.2)

Cette première approche de la notion de problème est suffisamment générale pour qu'elle s'adapte à une classe bien plus vaste que celle des problèmes d'arithmétique à l'école primaire qui fait l'objet de l'article de Julo. Elle recoupe d'ailleurs les mêmes interrogations que celles de Hilbert lorsque celui-ci introduit les grands problèmes du XX^{e} siècle :

> [...] un problème mathématique doit être difficile, mais non pas inabordable, sinon il se rit de nos effort ; il doit au contraire être un véritable fil conducteur à travers les dédales du labyrinthe vers les vérités cachées, et nous récompenser de nos efforts par la joie que nous procure la découverte de la solution.
> Ghys (2010) reprenant les termes de la conférence de Hilbert [9]

Pour Hilbert, caractérisant les problèmes non résolus qui se présentaient à la communauté mathématique, et pour Brun, dans une optique tournée vers l'enseignement, un problème mathématique se doit d'être robuste et en même temps doit se laisser aborder, questionner, explorer. C'est bien entendu une caractéristiques que nous retiendrons et qui devrait permettre un engagement dans une interaction avec le milieu et la constatation de l'inefficacité des premières procédures envisagées.

Bien entendu, ces définitions du problème mathématique renvoient explicitement aux sujets. La robustesse du problème est donc alors à considérer relativement aux connaissances des sujets et à l'activité qu'ils sont amenés à développer. Pour Perrin, c'est également dans l'activité engendrée par un problème mathématique que l'on retrouve des similitudes entre sujets qu'ils soient mathématiciens ou élèves :

> Mon point de départ est le document d'accompagnement des programmes de mathématiques de l'école primaire, et précisément le paragraphe qui concerne les « problèmes pour chercher ». Je cite le document en question : (Il s'agit) de véritables problèmes de recherche, pour lesquels (les élèves) ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. C'est alors l'activité même de résolution de problème qui est privilégiée, dans le but de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter. Je souscris tout à fait à cette vision de l'activité de recherche, qui est voisine de ma propre pratique, non seulement

8. La situation initiale et la suite d'actions relèvent bien évidemment de l'activité mathématique et le but concerne des renseignements d'ordre mathématique.

9. Le fait qu'Hilbert évoque *la* solution ne doit pas nous laisser imaginer ni que la solution d'un problème est unique, ni qu'elle est immédiatement accessible, sans détour.

> dans ma fonction de chercheur, mais aussi, mais surtout, dans mon activité quotidienne d'enseignant. En particulier j'utilise systématiquement, pour résoudre des problèmes, une méthode que je n'hésite pas à qualifier d'expérimentale. J'appelle ici problème une question mathématique, en général ouverte, soit que je me la sois posée tout seul, soit qu'elle me l'ait été par un collègue ou un étudiant. (Perrin, 2007, p.7)

Pour Perrin c'est la dimension expérimentale de l'activité mathématique engendrée qui va également caractériser un problème mathématique. Mais il est à noter que pour certains mathématiciens, l'activité liée à un problème mathématique peut être autre. Des avancées mathématiques peuvent ainsi se concevoir dans un cadre formel et déductif.

Ces écarts de points de vue renvoient en particulier aux dimensions syntaxique et sémantique des raisonnements et à la distinction de Weber et Alcock, (Weber et Alcock, 2004), entre production de preuve syntaxique et preuve sémantique.

> We define a *syntactic proof production* as one which is written solely by manipulating correctly stated definitions and other relevant facts in a logically permissible way. In a syntactic proof production, the prover does not make use of diagrams or other intuitive and non-formal representations of mathematical concepts. In the mathematics community, a syntactic proof production can be colloquially defined as a proof in which all one does is "unwrap the definitions" and "push symbols". [10]

et

> We define a *semantic proof production* to be a proof of a statement in which the prover uses instantiation(s) of the mathematical object(s) to which the statement applies to suggest and guide the formal inferences that he or she draws. (Weber and Alcock, 2004, p.210) [11]

Barrier, (Barrier, 2009, p.22-23), précise que dans les procédures syntaxiques, « la nature des objets auxquels réfèrent les symboles n'a pas d'importance » alors que pour les productions de preuves sémantiques, « les objets mathématiques viennent s'ajouter au milieu sur lequel celui qui prouve s'appuie pour construire sa stratégie ».

Ces différents auteurs mettent en évidence que le recours à des procédures syntaxiques par des non experts est en général très peu efficace. Alors que ces non experts s'engagent volontiers dans des procédures syntaxiques, ils n'ont pas une connaissance suffisamment intuitive des objets pour aboutir dans la construction de preuves. En réalité, la question de preuve de type purement syntaxique se pose, mais pour ce qui nous concerne, au vu de ces résultats, nous privilégierons les problèmes qui favorisent la dimension expérimentale et où la référence aux objets est aisée. Il s'agira donc de s'assurer de la familiarité des élèves avec les objets en jeu et de leur capacité à construire des preuves de type sémantique.

Ainsi dans les SDRP, les problèmes considérés seront supposés permettre une activité à

10. (Weber et Alcock, 2004, p.210) cité dans (Barrier, 2009, p.22) qui propose la traduction suivante : Nous définissons une production syntaxique de preuve comme une production de preuve reposant exclusivement sur des manipulations logiquement acceptables de définitions correctement énoncées et d'autres faits pertinents. Dans une production syntaxique de preuve, celui qui prouve n'utilise pas de diagrammes ou d'autres représentations intuitives et non formelles des concepts mathématiques. Dans la communauté mathématique, une production syntaxique de preuve peut être familièrement définie comme une preuve dans laquelle tout ce que l'on fait est « dérouler les définitions » et « pousser les symboles ».

11. (Weber et Alcock, 2004, p.210) cité dans (Barrier, 2009, p.22) qui propose la traduction suivante : Nous définissons une production sémantique de preuve comme une preuve d'un énoncé dans laquelle interviennent une ou plusieurs instanciation(s) d'objet(s) mathématiques auxquels s'applique l'énoncé de manière à suggérer et guider les inférences qu'il ou elle effectue.

dimension expérimentale. C'est ainsi que nous entendrons le mot problème [12]. Dès lors, dans la mesure ou nous ne considérons pas les problématiques formelles, par exemple de structuration des théories mathématiques, nous pouvons associer au terme problème un autre point de vue, celui des « objets à savoir » ou « objets d'étude » de Duchet.

Pour Duchet,

> En mathématiques, « faire de la science » suppose la rencontre par le sujet d'un « objet de science », d'un domaine de réalité problématique faisant question, devenant objet d'étude, (Duchet et Mainguené, 2003, p.5)

Duchet insiste sur la nature de cet objet de la recherche :

> il importe de noter que si l'objet de recherche est lié au « Savoir » qui en permet sa présentation et sa description, il ne peut se confondre avec lui : il n'est en effet objet de recherche qu'en tant qu'il est inconnu : l'objet de recherche est « objet à savoir », non « objet de savoir ».

Cette expression d' « objet à savoir » pourrait paraître ambiguë. Il ne faut ainsi pas l'entendre au sens d'objet qu'il est indispensable de connaître comme « une leçon à savoir » mais bien comme un objet qui va faire l'objet d'une étude qui permettra potentiellement de le connaître [13]. L'objet d'étude se transformera successivement en objet de recherche puis en objet de connaissance soumis à l'expérience de la preuve. Il ne doit pas être un objet « porteur du savoir », savoir que le maître propose au sujet d'identifier, mais objet permettant l'action lors de laquelle les savoirs s'élaborent.

Avec les restrictions que nous avons proposées, le problème tel que nous l'entendons se rapproche désormais de « l'exploration d'un *objet à savoir* ». Du point de vue épistémologique, c'est du moins l'hypothèse que nous soutiendrons.

Le problème est le cœur d'une SDRP. Il définit le projet commun, donne le sens de l'action. Bien entendu, il ne permet pas en soi les apprentissages pour tous, c'est la mise en œuvre de la SDRP qui doit s'assurer de ce point. Nous reviendrons dans les chapitres 7 et 8 sur la mise en œuvre effective d'une SDRP, mais elle se doit de posséder une caractéristique qui permette l'évolution et le suivi de la relation des sujets aux objets et aux savoirs en jeu. Nous sommes donc amenés à préciser notre point de vue sur les connaissances, les savoirs et les liens qu'ils entretiennent en SDRP.

3.2 Émergence et institutionnalisation des savoirs mathématiques en SDRP

> Chacun d'entre nous perçoit les mathématiques en fonction de sa propre personnalité.
> C'est choquant mais c'est vrai.
> Yves Meyer

C'est en élaborant le jeu autour des savoirs que Brousseau a développé la théorie des situations. Dans ce cadre théorique, la démarche la plus usuelle pour construire une situation consiste à cibler un savoir donné par un énoncé mathématique, à rechercher un problème permettant de faire émerger ce savoir et de construire une situation redonnant du sens à ce savoir. Ici, nous envisageons une entrée dans le questionnement didactique en appui sur des problèmes qui ont été, **en tant que tels**, repérés comme porteurs de potentialités au sens où nous l'avons défini.

12. C'est pourquoi, il serait possible de supprimer la dernière caractérisation de nos SDRP qui devient superflue avec notre acception du terme problème. Nous avons toutefois préféré la conserver pour éclairer les utilisateurs, quitte à être redondants.

13. On peut renvoyer ici à la modélisation par Duchet de l'activité mathématique (cf. annexe C) et constater que pour Duchet, problème et objet à savoir sont intimement liés.

Ce sont donc des problèmes robustes, de dévolution aisée , permettant, sous des conditions précises, l'action sur des objets mathématiques naturalisés, des conjectures, des validations et des institutionnalisations de savoirs ...

Mais, pour Conne :

> En fait les problèmes ne se laissent pas identifier ni isoler comme cela, ils ne vont jamais seuls, on a toujours affaire à des chaînes de problèmes s'organisant en réseaux, à l'image des réseaux de savoirs qu'ils représentent. (Conne, 2004, p.76)

Il en résulte, *a priori*, une diversité accrue des objets manipulés et une complexité de pilotage et d'analyse des SDRP en termes de savoirs. Des premières propositions ont été faites, (Aldon *et al.*, 2010), pour identifier les savoirs potentiellement travaillés dans ce type de situations, par exemple pour des situations autour de : « La recherche des nombres trapézoïdaux », « La recherche de sommes de fractions égyptiennes égales à 1 ». [14] Mais plus globalement, entrer par les problèmes et pas par un savoir visé, pour construire une situation didactique, amène à prendre un point de vue différent sur les savoirs en jeu, savoirs qui doivent être considérés, tout d'abord, en lien avec le problème qui peut les faire advenir, problème lui-même cœur de la situation. Mais, avant d'aller plus loin, nous devons maintenant préciser ce que nous entendons par le terme « savoirs ».

Concernant la dialectique connaissances/savoirs Conne et Brousseau ont balisé le chemin. Pour Conne, dans une perspective didactique :

> Il est impossible d'évoquer une connaissance indépendamment de tout savoir, car la référence au savoir en tant que modèle s'y trouve d'emblée inscrite, et il est donc difficile de parler séparément de la connaissance et du savoir. (Conne, 1992, p.236).

Ainsi, dans un premier temps, du point de vue théorique, le « savoir mathématique » s'impose comme modèle permettant non seulement la réflexion théorique sur les situations mais également les analyses *a priori* et *a posteriori*. Mais, cette première acception du « savoir » ne s'applique toutefois pas dès que l'on cherche à « tenir compte des mécanismes cognitifs, autant ceux du fonctionnement que ceux du développement cognitifs, dans le projet d'enseigner » (Ibid. p.224).

Conne rejette alors la distinction classique connaissance/savoir qui énonce que le savoir serait décontextualisé, dépersonnalisé, socio-culturellement institué et soutient que « les distinctions contextuel ou non, individuel ou non, portent déjà sur le savoir, et ne sont pas constitutives de la distinction savoir/connaissance » (Ibid. p.226). Il caractérise alors la dialectique connaissance/savoir comme suit :

> Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance, utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation. (Ibid. 235)

et alors :

> le cas où le contrôle de la relation sujet/situation se trouve du côté de la situation, ce sera l'ordre de la connaissance, [...] [le] cas où ce contrôle se trouve du côté du sujet (et de la représentation) ce sera l'ordre du savoir. (Ibid. 223) [15]

14. Les intitulés de ces situations pourraient laisser penser qu'elles pointent un objet de savoir bien défini, mais en réalité le problème est à chaque fois premier, les objets évoqués sont au cœur de réseaux de savoirs, et les situations proposées s'apparentent bien à des situations didactiques de recherche de problème.

15. Il est à noter que Brousseau retient une définition très similaire : « Une situation où les connaissances

Par la suite nous utiliserons ce modèle en considérant que les SDRP sont un des moments favorisant les bascules connaissances/savoirs et que, pour l'élève, la pratique qui a permis cette émergence est constitutive de ces savoirs [16].

Une fois cette distinction connaissances/savoirs posée, Conne définit certains types de savoirs en fonction de leur utilité :

- les savoir-faire et savoir-réfléchi qui sont des savoirs pragmatiques, c'est-à-dire des savoirs qui visent à « la transformation du couple connaissance-situation : soit la transformation du milieu qui supporte la situation, soit la transformation des relations du sujet avec ce milieu » (Ibid. p.253). « Un savoir-faire est un savoir pragmatique considéré du seul point de vue des produits objectifs résultant de la transformation d'une situation donnée. [...] Un savoir réfléchi ne s'arrête pas au seul produit objectif de l'interaction avec la situation [...] mais réfléchit à la manière dont ce produit a été obtenu ... » (Ibid. p.254)

- les savoirs savants dont la finalité sera« l'organisation et le développement des savoirs eux-mêmes, ou encore la transformation des modèles ».

Il est à noter donc que pour Conne les savoirs-savants ne sont pas les savoirs des savants (le fait d'organiser ses savoirs n'est pas l'apanage du savant), et qu'il faut aussi les distinguer des savoirs institués des mathématiques, c'est-à-dire des savoirs socialement institués jouant un rôle privilégié de référence.

Précisons alors que les conceptions concernant le savoir qui pourrait faire référence sont particulièrement variées, voire divergentes, sans doute autant que les conceptions des mathématiques elles-mêmes. Pour ces savoirs de référence, Conne renvoie donc explicitement à l' « ensemble de savoirs culturels mis en des formes très strictes ». D'autres, tel J.P. Ferrier, cherchant à définir Le Savoir Savant, ont tendance à nous renvoyer à un savoir beaucoup plus vaste :

> Le savoir savant lui-même est très difficile à cerner. Il comprend diverses acceptions de la plupart des notions, certaines pouvant être contradictoires. [...] Il comprend aussi l'histoire de toutes ces notions, les conditions de leur genèse étant aussi importantes que leur utilisation courante. Il déborde le cadre des mathématiques, en s'étendant déjà très largement vers la physique. Il est fait de rigueur et d'intuitions. Pour le définir intégralement, on devrait pouvoir interroger tous les mathématiciens ou autres scientifiques actuels, et ressusciter ceux des générations précédentes. Il faut beaucoup d'expérience et de recul pour parler du savoir savant, et à ce jeu certains sont mieux placés que d'autres. La richesse de ce savoir se perd beaucoup dans l'écriture des ouvrages, où, pour des raisons évidentes, on doit toujours privilégier un point de vue parmi d'autres. A ce sujet le contact direct avec des mathématiciens expérimentés apporte beaucoup plus que la lecture de leurs écrits. [17]

Cette vision du « Savoir », et même si elle pointe des éléments incontournables de l'activité mathématique, institue un savoir idéal, inaccessible. Or, s'il faut pour l'école des savoirs de référence, il faut être vigilant sur les savoirs que l'on donne à voir comme savoirs de référence. En effet, alors qu'il n'y a pas coïncidence entre savoirs institués et savoirs socialement pertinents, savoirs institués et savoirs savants (on pourra le constater à nouveau dans les chapitres 4 et 5),

---

qui ont servi ailleurs comme moyen de décision, sont explicitement l'objet d'une action ou d'une étude, d'une identification, d'une classification, d'une articulation avec d'autres etc. donne alors à ces connaissances une autre fonction : celle d'objets de l'action du sujet. Nous appelons ces nouveaux objets : « savoirs » (le pluriel est alors possible), lorsqu'ils présentent certains caractères de stabilité, de validité etc.. », texte en ligne : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf.

16. Notons toutefois que le fait même de la prise de conscience par l'élève assure déjà d'une prise de recul par rapport à la situation.

17. Texte en ligne : http://iecl.univ-lorraine.fr/~Jean-Pierre.Ferrier/Didac/Savoirs.htm

ces savoirs institués jouent très souvent le rôle de savoirs idéaux et introduisent une ambiguïté dans les rapports sujet-connaissance-situation-savoirs. Dans notre étude, dans le cadre de la classe, les savoirs de référence évoqués seront autant que possible les savoirs-savants, au sens de Conne, et non des savoirs inaccessibles, inconnaissables.

Revenons maintenant sur la question de la gestion des bascules connaissances/savoirs en situation didactique[18].

Pour Conne et Rouchier, c'est le couple dévolution/institutionnalisation qui traduit au niveau de la situation didactique les émergences de savoir :

> Je considère après Rouchier (1991) et (1996) que dévolution et institutionnalisation sont les deux facettes d'un même processus de conversions Savoir/Connaissance qui est continûment à l'œuvre dans les situations. » (Conne, 2003, p.85)

L'une des fonctions des SDRP étant de mettre en évidence la diversité des connaissances et des savoirs en jeu, elles devraient être le lieu de l'observation de ces processus de conversions. Le travail autour des situations didactiques est souvent porté par une modélisation simplificatrice qui permet l'étude. Or une situation de recherche, par construction, doit permettre la mobilisation de connaissances diverses, la manipulation d'objets rendus familiers par l'usage pour favoriser un engagement dans la recherche. La dévolution des savoirs est alors nécessairement plurielle, facilitant l'entrée dans la situation, mais en en complexifiant la gestion et la sortie. À la différence d'une situation que l'on pourrait penser construite autour d'un seul savoir, et qui envisagerait des mobilisations de connaissances plus restreintes, une SDRP dévolue donc de fait de nombreux savoirs, ceux du réseau de savoirs associé au problème. Au sens défini par Margolinas (2004), les branches didactiques potentielles se multiplient.

Pour autant, la prise de contrôle par les élèves de la situation doit aboutir à « l'institutionnalisation par laquelle et pour laquelle s'effectue une confrontation à la culture » (Rouchier, 1996, p.191). Mais, du fait de la diversité des connaissances en jeu, on ne peut imaginer immédiatement l'institutionnalisation d'un savoir synthétique. Les phases de formulation et de validation (au sens de la théorie des situations didactiques) vont permettre l'émergence de savoirs pragmatiques distincts. La situation doit alors prendre en charge ces savoirs multiples. Or, portés par un même problème, ces savoirs sont associés à des processus potentiellement convergents et doivent pouvoir amener la structuration de savoirs communs qui pourront faire référence pour chacun. L'institutionnalisation, nécessairement complexe, doit donc s'envisager plurielle, au moins dans un premier temps, avant qu'un travail de rapprochement de ces savoirs dans une structuration plus vaste soit mené. Précisons alors qu'une des limitations des SDRP ou plus précisément des Situations Didactiques de Recherche de Problème **en classe de mathématiques** résidera dans cette condition d'institutionnalisation dans le cadre de la classe. En effet, comme nous l'illustrerons plus tard, le problème proposé ne peut avoir une ampleur telle que les convergences nécessiteraient un dispositif didactique non compatible avec le temps de la classe.

Envisager la mise en œuvre de situations didactiques de recherche de problème en classe, ne vise pas à créer un bégaiement de l'histoire pour faire réinventer tous les savoirs dans des conditions aléatoires. Il s'agit de faire œuvre de diffusion de savoirs, en créant les conditions qui vont permettre leur émergence. L'observation de dialectiques connaissances/savoirs lors de genèses historiques, l'étude de la vie des savoirs avant leur transformation en savoirs institués doit permettre de pointer certaines caractéristiques de ces savoirs et de mieux comprendre les enjeux de la transposition de savoirs à réaliser pour faire vivre une situation de recherche de

18. Dans le tryptique connaissances/savoirs/savoirs institués qui renvoie aux dimensions cognitives, didactiques et sociales, nous nous centrons donc sur les questions didactiques et notre discours ne traite pas de l'émergence de savoirs pour des individus isolés

problèmes en classe. La mise en œuvre de ces situations doit alors permettre que, pour l'élève, le lien entre les savoirs pragmatiques vécus et le savoir culturel mathématique sera a minima amorcé, et dans le meilleur des cas établi, avec la perspective d'un transfert possible à d'autres situations. L'étude historique nous montrera toutefois qu'un même problème peut donner lieu à des conceptualisations totalement différentes. Ce n'est qu'une illustration d'une réalité incontournable qui fait que, même dans des conditions qui pourraient paraître identiques, deux individus ne produisent pas les mêmes savoirs mathématiques. La mise en œuvre de situations de recherche met alors en évidence ces différences, pointe la question des institutionnalisations et les difficultés potentielles de relations aux savoirs institués, difficultés qui restent trop souvent invisibles dans d'autres contextes. L'hypothèse que l'on peut faire est que les SDRP sont un des cadres les plus transparents pour mettre au jour ces différences au moment où elles se créent. Elles peuvent alors permettre l'identification et la confrontation de ces perceptions plurielles, l'institutionnalisation de savoirs communs, et, quand cela a du sens, un lien avec les savoirs institués.

3.3 Les savoirs de l'enseignant

Nous ne nous plaçons pas ici à la frontière (connaissances, outils de l'individu) / (savoir d'une institution), dialectique encore très souvent retenue pour l'étude des systèmes didactiques mais bien dans l'épaisseur (connaissances, outils de l'individu) / (savoirs, prise de conscience de l'individu vers une culture commune). Ce jeu délicat fait intervenir un autre acteur qui ne sera pas au cœur de cette thèse mais qui a lui aussi à mener un jeu fondamental, l'enseignant.

Revenons donc en cette fin de section, sur cette idée de *projet commun*, qui va à l'encontre de la dissymétrie de fait de la relation maître-élève dans une situation didactique, et qui rencontre quelques difficultés. Il s'agit en effet pour l'enseignant, porteur du projet didactique, de trouver les conditions satisfaisantes du processus de dévolution/institutionnalisation permettant la transformation du système de connaissances des élèves. Mais la posture est complexe entre sens, attribué par l'enseignant à la situation, sens que donne les élèves à cette même situation et significations de l'objet d'étude dans la culture mathématique. Prendre comme point de vue celui des SDRP nécessite de tenter un équilibre :

> La question du rapport entre sens et signification renvoie à la question difficile de la compréhension par l'enseignant du processus de problématisation des élèves. L'enseignant connaît la démarche, le sens qu'il lui attribue est traversé de part en part par la signification finale de l'objet [...]. A partir de là, saisir, ne serait-ce que des bribes du sens construit en situation par l'élève, ne pas le confondre avec le sens que lui, enseignant, attribue à la situation, suppose une position d'ouverture qu'il doit faire tenir avec une position de fermeture interprétative des actions des élèves (interpréter celles-ci du point de vue de la signification finale). Et cette position d'ouverture suppose une suspension de l'intention d'enseigner : il ne s'agit plus d'interpréter le sens de ce que font ou disent les élèves en terme de distance à la signification visée, mais de tenter d'entendre ce sens pour lui-même c'est-à-dire d'y retrouver la logique de questionnement propre à l'élève. C'est à cette condition seulement, que l'interprétation en termes de distance à la signification visée peut être pertinemment menée, car s'articulant à cette première distance entre sens donné à la situation par l'élève et sens donné par l'enseignant. Cela signifie que l'enseignant devrait être, au moins par moments, dans une situation indéterminée, confuse, obscure, non encore problématique. Il devrait donc déproblématiser une situation trop déterminée, avant de la reproblématiser plus adéquatement.
>
> On tombe sur un paradoxe ! Pour pouvoir guider le processus de problématisation

> des élèves, l'enseignant doit le comprendre. Cette compréhension lui impose de se dégager, et du sens qu'il attribue à la situation, et de la signification de l'objet de savoir en jeu, sens et signification qui, en même temps, sont les seuls outils épistémologiquement légitimes de contrôle du processus de l'élève !
>
> Concluons abruptement en disant que la spécificité du rapport sens-signification en situation d'enseignement et le paradoxe de sa gestion par l'enseignant, sont des signes de l'épaisseur d'une réalité didactique, épaisseur qu'aucune démarche, aussi problématisante ou constructiviste se prétendrait-elle ne saurait contourner. Tout au plus pouvons nous apprendre à jouer dans les plis même de la tension entre enquête mathématique et enquête didactique. (Muller, 2006, p.121)

À ce paradoxe, proposons une conclusion plus optimiste et qui sera une de nos hypothèses de travail sur la rencontre des différents sens émergents en SDRP et les significations mathématiques. Chacun construisant son propre sens par ses propres actions on ne peut que constater une divergence en situation, mais pour autant tous ces sens cernent un même objet d'étude dont tous ont une expérience, certes personnelle, mais dans une culture globale et mathématique commune. Nous faisons l'hypothèse que la convergence des sens est possible, convergence qui permettra de renforcer cette culture. Et en relativisant le propos de Muller sur le fait que l'enseignant connaît la démarche, ce qui peut être réel pour certaines situations mais nettement moins certain en SDRP où l'enseignant n'a pas nécessairement une maîtrise totale, nous imaginons en SDRP que l'enseignant participe à, plus qu'il ne dirige, la construction de ce sens commun en veillant à la signification.

3.4 TSD, le milieu

Nous ne revenons pas ici de façon globale sur la Théorie des Situations Didactiques (TSD). Nous précisons quelques éléments, en particulier la notion de structuration du milieu et celle de différenciation des milieux.

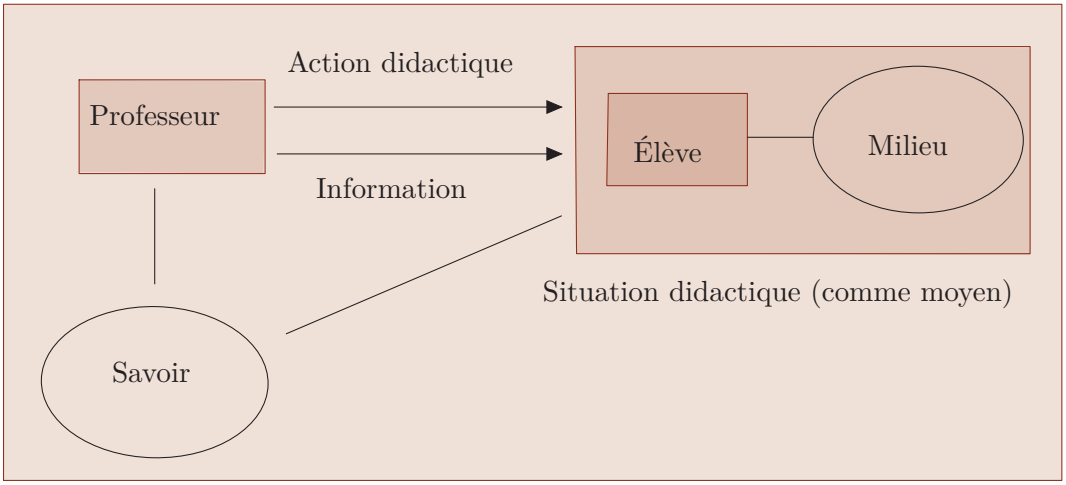
3.4.1 Notion de milieu en TSD

La théorie des situations propose un cadre théorique de l'apprentissage par des processus d'adaptation de l'apprenant à son environnement. Les analyses de situations que mènent Brousseau en terme de jeu rendent nécessaire l'introduction de la notion de milieu.

Dans (Brousseau, 1990, p.320), le milieu est

> Le système antagoniste du joueur dans une situation est pour le joueur comme pour l'observateur, une modélisation de la partie de l'univers à laquelle se réfère la connaissance en jeu et les interactions qu'elle détermine. C'est ce système antagoniste que nous avons proposé d'appeler milieu

Brousseau (1997) a tout d'abord remplacé le triangle didactique classique « [qui] a l'inconvénient de réduire l'environnement didactique à l'action du professeur et d'occulter complètement les rapports du sujet avec tout milieu a-didactique » par le schéma suivant :



Situation didactique (comme environnement)

Cette modélisation permet de traduire le fait que le professeur : « crée donc, effectivement ou fictivement, un autre « milieu » où l'élève agit de façon autonome ».

De cette idée d'emboîtement, naissent les bases de la structuration du milieu dont on doit une version particulièrement aboutie à Margolinas (2002) et un complément à Bloch, (Bloch, 2005, p. 55), pour tenir compte du rôle du professeur dans les situations adidactiques. Cette structuration peut être présentée comme suit :

M3 : Milieu de construction		P3 : P-noosphérien	S3 : situation noosphérienne	sur
M2 : Milieu de projet		P2 : P-constructeur	S2 : situation de construction	didac
M1 : Milieu didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet	tique
M0 : Milieu d'apprentissage : institutionnalisation	**E0 : Élève**	**P0 : Professeur enseignant**	**S0 : situation didactique**	
M-1 : Milieu de référence : formulation validation	E-1 : E-apprenant	P-1 : P régulateur	S-1 : situation d'apprentissage	a
M-2 : Milieu objectif : action	E-2 : E-agissant	P-2 : P-observateur, dévolueur	S-2 : situation de référence	didac
M-3 : Milieu matériel	E-3 : E-objectif	P-3 : P- organisateur du milieu matériel	S-3 : situation objective	tique

Nous utiliserons cette modélisation, en particulier la structuration évoquant les niveaux « adidactiques » car elle a fait ses preuves pour analyser des situations de mises en œuvre de problèmes de recherche.[19] Nous l'utiliserons surtout en lien avec des éléments de sémiotique pour identifier dans les analyses *a posteriori* la qualité des productions des élèves.

19. On pourra par exemple consulter (Houdement, 2004).

3.4.2 Différents niveaux de modèles de milieu

Toujours dans le cadre des analyses en TSD, Bloch pointe une difficulté qui émerge des pratiques ; les situations didactiques sont très souvent confondues avec leur « mise en œuvre » dans la contingence, ce qui revient à confondre modèle et réalité. Cette confusion engendre une réduction des analyses, un aplatissement des mises en perspectives possibles.

Bloch, travaillant dans le cadre des situations fondamentales, est alors amenée à introduire différents modèles de milieux.

> La TSD définit ainsi trois champs de construction et d'analyse des situations. Le champ théorique, domaine de l'élaboration des situations fondamentales d'un savoir, essentiellement épistémologique et qui élabore la construction du jeu théorique d'une situation avec ses variables mathématiques. Le champ expérimental *a priori* s'occupe de la déclinaison de cette situation mathématique à un niveau donné d'enseignement, du jeu possible des élèves et des variables didactiques à conserver, suivant les connaissances des élèves et leurs possibilités d'entrée dans le jeu (conditions de la dévolution). Ce deuxième niveau est celui où se fait l'analyse *a priori* de la situation, afin de garantir, autant que faire se peut, une réalisation en adéquation avec le niveau épistémologique. Enfin le troisième niveau est celui de la contingence, où, comme dit ci-dessus, la mise en œuvre de la situation nécessite en général une alternance de phases didactiques et adidactiques, et où l'observation permet, *a posteriori*, d'attester de ce que le savoir visé a pu, ou non, être mis en jeu dans le travail des élèves et du professeur. (Bloch et Gibel, 2011, p. 9)

Ces trois champs de construction et d'analyse sont présentés dans la figure 3.1

Bloch parle alors de différents modèles de milieux décrits ainsi :

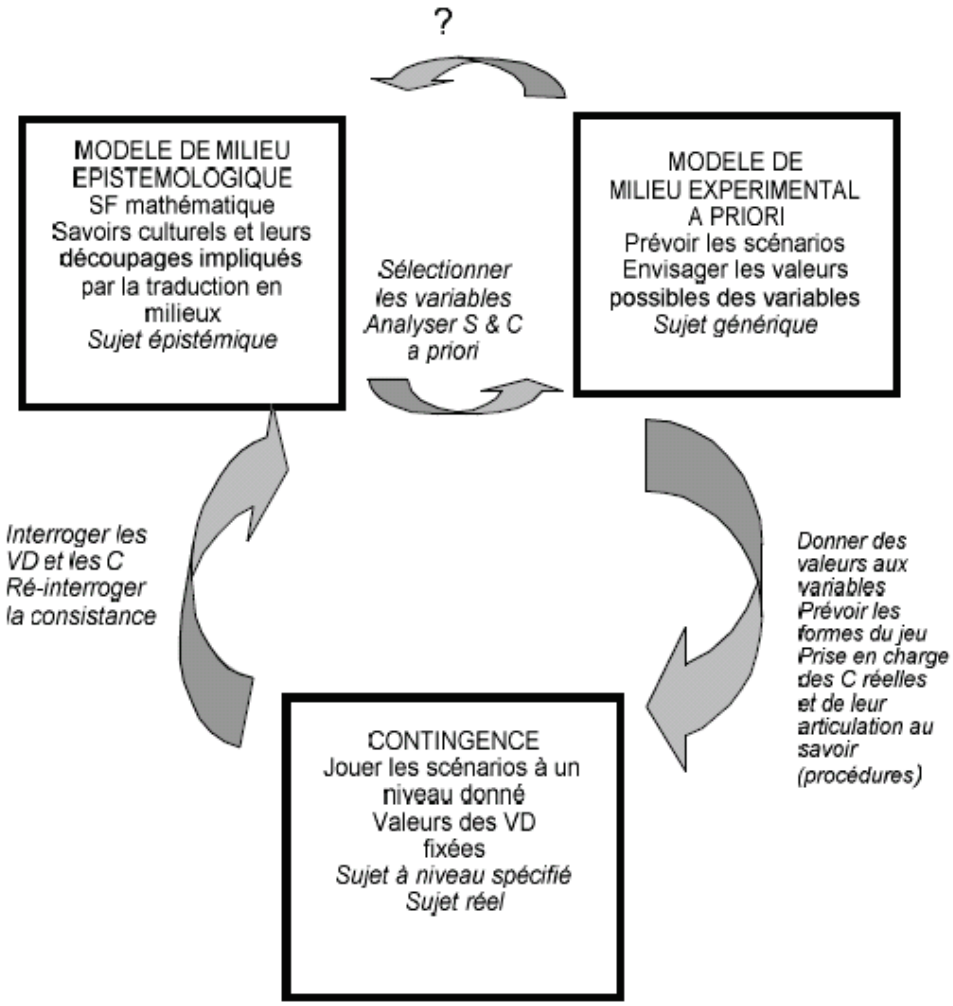
- Le modèle de milieu épistémologique dont « le but est, pour un savoir donné, de trouver un jeu qui le fasse fonctionner comme connaissance et qui permette l'institutionnalisation ». Deux directions : celle du savoir mathématique et des connaissances (modalité mathématique, épistémologique et cognitive) et celle des institutions d'enseignement, et les scénarios prévisibles avec les variables correspondantes.

- Le modèle expérimental *a priori* : C'est un deuxième niveau de modèle, « celui où le jeu est identifié, le milieu antagoniste prévu, les variantes pertinentes définies. Il permet de construire des ingénieries didactiques effectives, relatives à un objet de savoir dans une institution donnée ; d'anticiper, de prévoir des comportements ; de prévoir, de recueillir des observables, de les organiser, de les interpréter ; de fournir une (des) référence(s) pour analyser les situations d'enseignements, qu'elles aient été construites comme des ingénieries ou non ; d'analyser les connaissances mises en jeu, les jeux possibles de l'élève et les jeux du professeur ».

Nous retenons cette modélisation pour l'étude d'une situation. Elle permet effectivement de découpler les niveaux d'analyse en mettant en évidence trois milieux bien distincts. Et en distinguant milieux théorique et expérimental *a priori* et contingence, on ne court plus le risque d'imaginer un lien inexistant entre savoirs émergents en situation et savoirs institués. L'étude du milieu théorique sera le lieu où toutes les formes de savoirs sont questionnées, le milieu expérimental celui où la question de l'émergence de la dialectique connaissance/savoirs est première.

Nous devons adapter le modèle de Bloch dans deux directions pour rendre compte de nos objectifs.

Tout d'abord en réorientant l'étude du modèle de milieu épistémologique qui ne sera pas construit autour d'un savoir visé, mais autour de la recherche d'un problème mathématique, de l'engagement dans l'exploration d'un objet à savoir, de l'institutionnalisation de savoirs émergents. Il s'agit en particulier :



Légende :
SF : situation fondamentale,
VD : variables didactiques,
S & C : savoirs et connaissances

FIGURE 3.1 – Le schéma de l'articulation milieu théorique/milieu expérimental

— d'analyser d'un point de vue mathématique le problème proposé, de mettre en évidence les objets mathématiques potentiellement en jeu,
— de mettre en évidence les connaissances potentiellement mobilisables, les savoirs potentiellement institutionnalisables. Les connaissances peuvent être mathématiques, personnelles, culturelles et sont à mettre en relations avec les types de relations aux objets qui peuvent émerger,
— de décrire au moins une sémiose possible, au sens que nous définissons dans la section suivante,
— de construire, dans l'institution d'enseignement choisie, le jeu relatif au problème considéré

Pour l'élaboration d'une SDRP, il nous faut :

— analyser la pertinence des situations envisagées par rapport à l'engagement dans la recherche et aux savoirs antérieurs requis,
— s'assurer de la constitution d'un milieu permettant une activité à caractère expérimental,

— anticiper des valeurs des variables de la situation,
— analyser la consistance de la situation : « vérifier que les variables retenues ne sont pas contradictoires, c'est-à-dire ne conduisent pas à des connaissances incompatibles, même provisoirement pour l'actant. » (Bloch, 2002, p. 7)

Rappelons que parmi les moyens pour cette étude, nous pourrons utiliser les analyses historiques dans l'esprit décrit au chapitre 2. Par ailleurs, des études didactiques antérieures permettront également d'enrichir ce modèle de milieu théorique en vue de l'élaboration du modèle de milieu expérimental *a priori*.

Pour ce deuxième modèle, il est aussi nécessaire d'adapter le modèle initial de Bloch, pour construire une ingénierie effective qui ne soit pas en relation avec un objet de savoir donné dans une institution, mais là encore relative à l'engagement dans la recherche d'un problème, à la détermination de résultats partiels et à l'institutionnalisation de savoirs en lien.

Le retour d'expérimentation, après la mise à l'épreuve dans la contingence permettra, là encore suivant les attendus de Bloch adaptés, de discuter le modèle *a priori* suivant deux composantes « clinique et théorique » :

1. Composante « rapport situation réelle / modèle *a priori* » Il s'agit :
   - de rendre compte de la situation jouée expérimentalement : qu'a-t-on observé, et a-t-on bien vu ce qui était attendu, les acteurs ont-ils pu fonctionner comme prévu ;
   - de produire une interprétation du modèle par rapport à l'expérimentation : de quoi le modèle rend-il compte, et qu'est-ce qui, dans la situation expérimentée, se rapporte aux hypothèses faites dans ce modèle.
2. Composante « consistance théorique »
   On souhaite
   - discuter du rapport entre le modèle épistémologique et la contingence : la contingence est-elle une « réalisation » (fortement ou faiblement équivalente) de la SDRP ? Et qu'est-ce qui permet d'en juger ? Quels objets ont émergé ? Quels savoirs ont été institutionnalisés ? Comment s'en assure-t-on ? Que considère-t-on comme des traces probantes ? Lesquelles a-t-on du sacrifier ?
   - reprendre la discussion de la consistance théorique, au vu des résultats de l'expérimentation : l'observation falsifie-t-elle le modèle théorique, en tout ou en partie ? Qu'est-ce que la contingence nous indique de la validité du modèle SDRP ?

Dans le cadre de notre thèse, ces analyses permettront donc de tester les modèles et de revenir sur les savoirs émergents en SDRP, mais également de pointer l'influence de la relation aux objets des actants sur les évolutions des objets à savoir. Nous menons donc une double étude simultanée en étudiant la qualité de l'instanciation de la SDRP dans la contingence et en particulier de la réalité de l'engagement dans des actions sur les objets et en même temps la qualité de ces actions sur les objets. Par ailleurs comme nous l'avons annoncé, nous délaisserons une grande partie de l'analyse fine concernant l'enseignant. En particulier ses connaissances dans l'action seront peu analysées alors que dans l'optique d'une compréhension globale des savoirs produits en classe cette dimension est importante. Ce travail restera à faire.

Présentons maintenant les éléments que nous retenons pour identifier les objets en jeu (ici en un sens large), le statut de ces objets pour le sujet en recherche de problèmes.

3.5 Étude d'une relation aux objets mathématiques

Dans notre étude du mode d'existence des objets relativement à des recherches il s'agit de s'assurer de l'intérêt de porter un regard approfondi sur les objets et leur mode d'existence

chez les élèves. En croisant les points de vue épistémologique et didactique, Gardes propose de privilégier une approche par le geste qui intègre elle-même, en particulier, la dialectique syntaxe/sémantique/pragmatique pour l'analyse des raisonnements mathématiques dans les discours dans la classe de mathématique.

> Cependant, nous faisons l'hypothèse que cet outil, restant une catégorie langagière, est moins efficace pour analyser l'activité effective d'un sujet en situation de résolution de problèmes de recherche. L'aspect actif de l'activité de recherche semble davantage pris en compte dans la notion de« geste » chez Cavaillès et Châtelet, comme l'ont montré Bailly et Longo (2003). Une analyse en termes de gestes combinatoire et opératoire permet ainsi d'analyser le travail mathématique dans l'articulation syntaxe/ sémantique tout en prenant en compte la dimension pragmatique par l'action située au cœur des processus. (Gardes, 2013, p.159)

Notre questionnement portant essentiellement sur le comment de l'action et sur l'influence du rapport aux objets sur cette action et le type de conceptualisation qui en résulte, nous sommes amenés à nous tourner également vers des outils de la sémiotique et leurs développements pour la didactique par Muller, Gibel et Bloch. Ces outils doivent nous permettre de saisir un objet dans une dynamique d'évolution et de constater d'éventuels changements de « nature », c'est-à-dire un passage (ou non) d'un statut d'objet de l'expérience à un statut d'argument pour la définition d'objets mathématiques. Mais dans cette évolution souhaitée, rappelons là encore que les objets « intermédiaires » sont au moins autant porteurs de sens que les objets plus « évolués ». Nous avons pu constater dans les genèses historiques l'importance des objets qui ont une validité « locale » ou « temporaire. Du point de vue didactique, Hitt met aussi en évidence la nécessité de prendre en compte des objets intermédiaires qui apparaissent dès que l'on met en œuvre des situations qui favorisent la créativité et les échanges. Ces objets relèvent pour certains de processus sémiotiques jusqu'à présent peu identifiés :

> Plus tard, Duval (2006, p. 111)[20] reconnaît ce type de représentations et les nomme représentations auxiliaires transitoires. De notre point de vue, en les nommant ainsi, Duval (ibid.) leur attribue implicitement un rôle mineur dans la construction de concepts. Ainsi, Duval donne une primauté aux représentations sémiotiques institutionnelles sur les représentations, disons pour le moment, non institutionnelles dans la construction de concepts mathématiques. Cependant, cette approche néglige le rôle important des représentations « non officielles » [...] qui émergent généralement dans la résolution de problèmes [...] (Hitt, 2013, p.12)

C'est cette volonté de prendre en compte la dimension fonctionnelle des représentations et la dynamique des situations qui nous amène à introduire quelques éléments de la sémiotique de Pierce.

3.5.1 Quelques éléments de la sémiotique selon Pierce

Nous ne pouvons ici que rendre compte de quelques éléments de la pensée sémiotique, suffisamment nous l'espérons pour rendre claires les deux approches sémiotiques qui suivront. Nous prenons ces éléments dans Muller (2004) qui renvoie lui-même à Chauviré (1995), Deledalle (1990), Everaert-Desmedt (1990), Marty (1990), Peirce (1978), Tiercelin (1993a), Tiercelin (1993b) et Everaert-Desmedt (2011).

Pour Pierce la perception de la réalité s'appuie sur des composés « d'êtres » relevant de trois catégories, *priméité, secondéité et tiercéité*.

20. Hitt renvoie ici à (Duval, 2006)

> La priméité est une conception de l'être indépendamment de toute autre chose. [...] Elle correspond à la vie émotionnelle.
>
> La secondéité est la conception de l'être relatif à quelque chose d'autre. C'est la catégorie de l'individuel, de l'expérience, du fait, de l'existence, de l'action-réaction.
>
> [...] La secondéité s'inscrit dans un temps discontinu, où s'impose la dimension du passé : tel fait a lieu à tel moment, avant tel autre, qui en est la conséquence. La secondéité correspond à la vie pratique.
>
> La tiercéité est la médiation par laquelle un premier et un second sont mis en relation. La tiercéité est le régime de la règle, de la loi ; mais une loi ne se manifeste qu'à travers des faits qui l'appliquent, donc dans la secondéité ; et ces faits eux-mêmes actualisent des qualités, donc de la priméité. Tandis que la secondéité est une catégorie de l'individuel, la tiercéité et la priméité sont des catégories du général ; mais la généralité de la priméité est de l'ordre du possible, et celle de la tiercéité est de l'ordre du nécessaire et, par conséquent, de la prédiction. [...] La tiercéité est la catégorie de la pensée, du langage, de la représentation, du processus sémiotique ; elle permet la communication sociale ; elle correspond à la vie intellectuelle. [21]

Toute pensée s'effectue à l'aide de signes. Et pour Pierce un signe peut être toute chose pour autant qu'elle entre dans un processus sémiotique.

> Le processus sémiotique est un rapport triadique entre un signe ou representamen (premier), un objet (second) et un interprétant (troisième).
>
> Le representamen est une chose qui représente une autre chose : son objet. Avant d'être interprété, le representamen est une pure potentialité : un premier.
>
> L'objet est ce que le signe représente. Le signe ne peut que représenter l'objet, il ne peut pas le faire connaître ; il peut exprimer quelque chose à propos de l'objet, à condition que cet objet soit déjà connu de l'interprète, par expérience collatérale (expérience formée par d'autres signes, toujours antécédents).
>
> Le representamen, pris en considération par un interprète, a le pouvoir de déclencher un interprétant, qui est un representamen à son tour et renvoie, par l'intermédiaire d'un autre interprétant, au même objet que le premier representamen, permettant ainsi à ce premier de renvoyer à l'objet. Et ainsi de suite, à l'infini. (Everaert-Desmedt, 2011)

Ainsi avec le processus sémiotique selon Peirce sont intégrés toutes les composantes de la sémiotique : la pragmatique (domaine de l'interprétant) est indissociable de la sémantique (domaine de l'objet) et de la syntaxe (domaine du representamen). Nous retrouvons liés dans un même processus de pensée ces trois champs. Précisons également que representamen, objet et interprétant sont à prendre comme des relations et que le processus sémiotique s'inscrit nécessairement dans un contexte.

> Chacun des trois termes du processus sémiotique se subdivise à son tour selon les trois catégories : on distinguera donc la priméité, la secondéité et la tiercéité dans le representamen, dans le mode de renvoi du representamen à l'objet, et dans la façon dont l'interprétant opère la relation entre le representamen et l'objet.
>
> La trichotomie du representamen
>
> Le representamen peut être (1) un qualisigne (priméité), c'est-à-dire une qualité qui fonctionne comme signe. Il peut être (2) un sinsigne (secondéité), c'est-à-dire une chose ou un événement spatio-temporellement déterminé qui fonctionne comme signe. Il peut être (3) un légisigne (tiercéité), c'est-à-dire un signe conventionnel.

21. Extraits de http://www.signosemio.com/peirce/semiotique.asp

> La trichotomie de l'objet
>
> Un representamen peut renvoyer à son objet selon la priméité, la secondéité ou la tiercéité, c'est-à-dire par un rapport de similarité, de contiguïté contextuelle ou de loi. Suivant cette trichotomie, le signe est appelé respectivement (1) une icône, (2) un indice ou (3) un symbole.
>
> La trichotomie de l'interprétant
>
> Suivant la trichotomie de l'interprétant, le signe est appelé respectivement (1) un rhème (priméité), (2) un dicisigne ou signe dicent (secondéité) et (3) un argument ou raisonnement (tiercéité). [22]

Cette trichotomisation des instances du signe pourrait laisser penser qu'il existe 27 classes de signe, mais ceci ne prendrait pas en compte le fait qu'un representamen par exemple de catégorie 2 (sinsigne) ne peut renvoyer à un objet de catégorie supérieure (symbole) et il en est de même pour le renvoi d'un interprétant par l'objet. Ainsi ... On obtient alors 10 classes de signes qui rappelons-le n'ont de sens que par l'interprétation dans un contexte.

Avec une adaptation de Everaert-Desmedt (2011), voici (cf. Figure 3.2) les 10 classes de signes. R désigne un representamen, O un objet et I un interprétant. 1, 2, 3 renvoient aux catégories.

Pour conclure ces brèves indications précisons que Pierce réactualisa le raisonnement par abduction qui s'insère avec les raisonnements par induction et déduction dans les processus sémiotiques par des légisignes symboliques argumentaux.

Processus sémiotique et SDRP

Il est à noter que le processus sémiotique est, théoriquement, illimité. Dans la pratique, cependant, il est limité, court-circuité par l'habitude, que Peirce appelle l'interprétant logique final : l'habitude que nous avons d'attribuer telle signification à tel signe dans tel contexte qui nous est familier. L'habitude fige provisoirement le renvoi infini d'un signe à d'autres signes, permettant à des interlocuteurs de se mettre rapidement d'accord sur la réalité dans un contexte donné de communication. Mais l'habitude résulte de l'action de signes antérieurs. Ce sont les signes qui provoquent le renforcement ou la modification des habitudes. Ceci est essentiel en résolution de problème. Les phases adidactiques d'une SDRP sont des phases sans habitude où le sens d'un signe n'est jamais figé et le sens final en devenir. Lors d'une SDRP, il est probable que des processus sémiotiques se poursuivent au-delà des durées usuelles des séquences.

3.5.2 Approche sémiotique pour l'analyse *a priori* d'une tâche mathématique

Bien que le contexte de l'interprétation soit fondamental dans un cadre sémiotique nous décrivons ici une trame d'analyse que nous imaginons généralisable, trame que Muller (2004), met en œuvre sur une tâche particulière. Nous instancierons cette démarche dans le chapitre 7 pour la situation des pavages archimédiens du plan.

Rendre compte d'un processus de modification des connaissances, d'une pensée en mouvement semble un obstacle insurmontable. Trouver le chemin entre la description de moments figés de la production mathématique et le discours général sur la pensée est ardu.

> La sémiotique de Pierce semble offrir une réponse à cette difficulté et permettre de saisir la pensée, mais aussi l'apprentissage et l'enseignement, comme des processus, sans pour autant laisser indéterminée la question des contenus sur lesquels ces processus portent (Muller, 2004, p. 249)

22. Extraits de http://www.signosemio.com/peirce/semiotique.asp

R	O	I	Signe	Illustration
1	1	1	Qualisigne iconique rhématique	Un sentiment vague de peine ou l'empreinte d'un pied sur le sable comme pure forme
2	1	1	Sinsigne iconique rhématique	Une maquette ou l'empreinte d'un pied sur le sable reconnue comme empreinte de n'importe quel pied
2	2	1	Sinsigne indiciel rhématique	Un cri spontané qui indique la survenue d'un événement sans qu'on puisse et veuille l'intégrer dans un schéma logique
2	2	2	Sinsigne indiciel dicent	Une girouette donnée un jour de vent ou l'empreinte d'un pied sur le sable reconnue comme le passage d'un individu
3	1	1	Légisigne iconique rhématique	Les pièces d'un jeu d'échec ou les signes appartenant à un alphabet graphique
3	2	1	Légisigne indiciel rhématique	Un signe de la langue « ceci » ou « je »
3	2	2	Légisigne indiciel dicent	Un feu rouge en contexte
3	3	1	Légisigne symbolique rhématique	Un nom commun : « pomme »
3	3	2	Légisigne symbolique dicent	Toute proposition, par exemple « il fait froid ici »
3	3	3	Légisigne symbolique argumental	L'empreinte d'un pied sur le sable reconnue comme le passage d'un individu dont l'empreinte a été identifiée précédemment dans une base de données et qui va par un raisonnement permettre au détective d'adopter un comportement conforme à l'hypothèse qu'il a pu émettre

Figure 3.2 – 10 classes de signes

Muller se propose d'utiliser la sémiotique pour l'analyse *a priori* d'une tâche mathématique.

> La déclinaison peircienne d'une analyse *a priori* a alors pour but, de dégager les signes potentiels d'une certaine tâche (signe étant à prendre au sens de niveau d'interprétation), de mettre en lumière la progression sémiotique idéale qu'une telle tâche recèle, mais aussi de circonscrire quelles actions sur le milieu autorise ou interdit tel niveau d'interprétation, et, en retour, quels signes sont produits par ces actions. (Ibid., p.250)

Il envisage ainsi de décrire une sémiose possible :

> La sémiose qui va nous intéresser n'est pas une *prévision* de ce qui devrait réellement se passer, mais une *progression logique idéale* menée par un *sujet sémiotique abstrait* qui n'est pas un élève réel. Par *progression logique* nous entendons le passage graduel du signe le plus qualitatif au signe argumental « final ». (Ibid., p.255)

Il s'agit pour Muller de définir le triplet (representamen, objet, interprétant) au cœur d'une tâche définie et d'étudier une sémiose « théorique ». Ainsi sur une tâche de décryptage d'une écriture de nombre sous le codage maya, c'est-à-dire la mise en relation de deux écritures de nombre, Muller après la mise en évidence du signe à construire, propose de repérer la sémiose à l'aide des étapes suivantes :

1. Du qualisigne iconique rhématique au sinsigne indiciel dicent : la construction de la tâche
2. Du légisigne iconique rhématique au légisigne indiciel dicent : la construction du problème
3. Du légisigne symbolique rhématique à l'argument : la construction de la règle

1. Pour Muller, le passage du qualisigne iconique rhématique au sinsigne indiciel dicent doit tout d'abord rendre compte de la prise de conscience, de l'émergence d'un sentiment relativement au problème considéré (qualisigne qui s'incarne dans un sinsigne). Puis l'évolution peut se poursuivre par la considération d'un objet d'expérience directe (sinsigne indiciel rhématique) qui prendra le statut d'un sinsigne indiciel dicent dans la mesure où il pourra se dire et permettre la communication. A ce stade le sujet a conscience de la tâche à réaliser et peut la décrire, l'exprimer. Pour autant que ceci soit effectif, et même si le sujet peut désormais agir avec un but, mais les manipulations sont de l'ordre du fait et non de la règle.

   Le sujet s'étant approprié une tâche singulière, commençant à agir sur un milieu objectif, la construction du problème doit pouvoir advenir.

2. La dévolution du problème sera effective quand apparaîtront les légisignes indiciels dicents.

   Il s'agit désormais de dépasser le cadre des faits et de concevoir une loi générale, « une règle conventionnelle ». Ce que le milieu renvoie n'est plus pris dans son immédiateté (comme précédemment les sinsignes) mais interprété comme l'existence d'une règle plus fondamentale à découvrir. Le légisigne est iconique car de l'ordre de la ressemblance et rhématique car encore de l'ordre du potentiel. Il devient indiciel rhématique puis indiciel dicent quand la loi générale fonde le signe, loi qui n'est pour l'heure pas encore symbole. Mais le problème est construit. Du point de vue didactique, le sujet est confronté à un milieu adidactique réel.

3. Du légisigne symbolique rhématique à l'argument : la construction de la règle

   Il est à noter que très souvent c'est plutôt un ensemble de légisignes symboliques rhématiques qu'il faudra considérer, un ensemble de règles locales sur lesquelles s'appuiera le sujet pour élaborer une règle globale. Ces légisignes prendront tout d'abord la forme de

> légisignes symboliques dicents, quand la loi sera présente et opératoire c'est-à-dire régira les objets, puis de légisignes symboliques argumentaux, quand ils porteront la raison de leur vérité ou de leur fausseté.

Cette présentation ne doit pas faire oublier la complexité de l'élaboration de la règle générale qui ne s'impose pas aussi facilement que cela. Le jeu se porte souvent pendant un temps non négligeable sur le domaine de validité de la loi avant de pouvoir s'orienter vers la question de sa véracité.

Terminons ici, en précisant que cette technique d'analyse permet

> l'analyse sémiotique *a priori* construit des objets de signification renvoyant à ce que peuvent être les relations milieu-sujet, objets qu'une enquête empirique ne pourrait que difficilement mettre en lumière. (Ibid., p. 265)

Ceci est en particulier vrai pour les niveaux les plus bas de la signification qu'on a parfois tendance à négliger. C'est pour quoi nous utiliserons cette « technique » d'analyse *a priori* d'une tâche pour la SDRP des pavages archimédiens. Mais il ne faut pas y voir plus que ce qui est annoncé. En particulier elle ne permet pas d'anticiper les conditions didactiques d'existence des objets, et par exemple le pourquoi du non passage au niveau des légisignes. Il est donc nécessaire de savoir comment ces analyses sémiotiques peuvent interagir avec les analyses didactiques que nous serons amenés à réaliser.

3.5.3 Un modèle d'analyse des raisonnements

La sous-section précédente nous a permis d'envisager, en appui sur la sémiotique, de produire un outil complémentaire pour l'analyse *a priori*. Pour continuer à utiliser la dimension dynamique du lien entre un signe et un objet offert par Pierce nous présentons maintenant le modèle d'analyse des raisonnements développé par Bloch et Gibel (2011). L'ambition de ce modèle est de permettre « une visibilité des raisonnements produits dans certaines situations adidactiques », (Bloch et Gibel, 2011, p. 3), en éclairant « le raisonnement du point de vue de ses fonctions dans la situation, ou du point de vue des représentations produites et de leur statut », (Ibid., p.4).

Précisons d'ores et déjà que Bloch et Gibel annoncent une épistémologie compatible avec l'approche Piercienne et avec celle que nous avons présentée :

> les mathématiques sont considérées comme n'ayant pas de sens fondamental, et il est impossible de leur attribuer ce sens, ni dans leurs théories structurelles, ni par rapport à l'objectivité intuitive de la perception des objets et de leurs relations. Signe et sens sont des processus[...] (Ibid., p.7)

et encore

> Pour Otte, suivant Peirce, la cognition n'est rien d'autre qu'une confrontation entre sujet et objet ; cette confrontation, ajoutons-nous, amène à construire des représentations - des signes : ces signes rendent compte, dans cette interaction, du sens de l'objet. (Idem)

Bloch et Gibel positionnent leur modèle en aval des travaux de Durand-Guerrier sur l'étude des raisonnements, en appui sur le calcul propositionnel basée sur la logique dialogique de Lorenzen, et de Barrier utilisant la sémantique de Hintikka permettant de conjuguer l'analyse syntaxique et l'analyse sémantique. Bloch et Gibel développent alors un modèle d'analyse du raisonnement vu comme

> un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but. (Oleron, 1977, p.9)

Ce modèle s'appuie sur trois axes.

> Le premier axe est lié au milieu de la situation : dans une situation comportant une dimension adidactique, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent [...]
> Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement [...].
> Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. [...]
> (Bloch et Gibel, 2011, p.13)

Le premier axe renvoie aux niveaux de milieux en référence à la structuration des milieux. Pour ce qui concerne le deuxième, les auteurs renvoient aux types suivants : intuition sur un dessin, décision de calcul, moyen heuristique, exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple, calculs génériques, formulation de conjectures étayées, décision sur un objet mathématique, formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du professeur éventuellement). Pour le troisième Bloch et Gibel renvoient au *registre des énoncés* dont l'élève peut user en situation et au *système organisateur* qui permet d'organiser et d'utiliser ce registre.

Cette modélisation est schématisée par le tableau 3.1

	Milieu $M-2$	Milieu $M-1$	Milieu $M0$
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions ...)	R2.2 SYNT/SEM Arguments « locaux » ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques [...]
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine mathématique

TABLE 3.1 – Tableau pour l'analyse des raisonnements

SYNT ou SEM codent les dimensions possibles, syntaxiques ou sémantiques, rencontrées dans les différents niveaux d'argumentation.

Pour Bloch et Gibel le modèle doit permettre :

> - d'affiner l'analyse *a priori* des niveaux de milieux de manière à pouvoir anticiper les signes et les raisonnements ;
> - d'identifier les situations de décision, de formulation ou validation, en les reliant aux phases didactiques et aux phases d'institutionnalisation (analyse *a posteriori*) ;
> - d'analyser les signes produits en situation et de les lier aux niveaux des raisonnements élaborés par les élèves,
> ... et, en définitive, de porter une appréciation sur l'adéquation des signes, des raisonnements et des connaissances produits aux enjeux de la situation. (Idem)

Plus précisément pour ce qui nous concerne, il doit aussi nous permettre de repérer dans la production d'une abondance d'ostensifs, (Marty, 1990), produit de l'entropie phénoménologique liée aux SDRP, certains types de relation aux objets qui pourraient se révéler des leviers ou des obstacles à l'avancée de la recherche et à la modification du système de connaissance.

3.6 Une problématique reformulée

Sous un paradigme pragmatiste, meta-constructiviste, au sens de Salanskis, il est envisageable d'étudier l'activité mathématique dans ses dimensions les moins formalisées, dans les phases où l'agir constructif donne sens et signification, définit l'objet des mathématiques. Ce point de vue amène à réorienter les études épistémologiques puis didactiques, quand il est nécessaire de saisir le mode d'élaboration de nouveaux objets mathématiques dans l'action du sujet confronté à un problème mathématique, dans l'exploration d'un « objet à savoir ».

Dans l'étude du milieu théorique, l'enquête historique est un outil pour l'émergence des questionnements épistémologiques. Pour la recherche des pavages archimédiens du plan, on observera tout d'abord ce que le regard sur une relation qui pourrait passer pour confuse, passéiste, pour une part non scientifique, de certains savants aux objets mathématiques peut produire. Nous serons en particulier amenés à tenter d'identifier chez Kepler, comment coexistent objets anciens et nouveaux savoirs dans un contexte historique culturellement situé.

La première hypothèse que nous formulons est que dans ce nouveau point de vue sur l'étude historique, des questions pertinentes pour les études didactiques peuvent émerger et que l'ontogenèse peut en être éclairée.

Plus globalement nous cherchons à déterminer pour un problème donné, le rôle du rapport initial aux objets naturalisés d'un sujet, l'influence de ce rapport sur l'activité de recherche en situation, l'évolution possible des objets mathématiques dans le système de connaissance du sujet sous ce rapport, la nature du produit de la recherche. Cette étude ne peut se faire sans qu'un milieu adéquat soit disponible. Aussi, dans le même paradigme philosophique, épistémologique, nous testerons la Situation Didactique de Recherche de Problème « Recherche des pavages archimédiens du plan » comme milieu pour l'apprentissage.

Mais alors, le renversement de la démarche, qui amène à observer les savoirs émergents dans l'exploration d'une question mathématique bien identifiée et non à viser, par une situation, un savoir déjà-là, demande à reconstruire le point de vue pour les analyses. Par exemple, ce n'est plus à des bifurcations didactiques généralisées, (Margolinas, 2005), qu'il faut s'attendre mais à l'émergence d'une diversité de sémioses initiées par le milieu.

La deuxième hypothèse que nous formulons est que nous pouvons espérer une convergence de ces sémioses, et non une divergence qui interdirait toute institutionnalisation dans la classe.

L'ingénierie didactique élaborée pour l'occasion, s'appuie sur des outils pour l'observation du système de connaissance des élèves et de ses modifications. Avec les outils de la sémiotique de Pierce et la dimension dynamique qu'ils portent, il s'agira donc d'identifier les processus sémiotiques dans les différents milieux d'une situation et de questionner la possibilité d'émergence de nouvelles connaissances et de savoirs.

La troisième hypothèse que nous faisons ici est que l'outil d'analyse proposé est pertinent pour ce type d'entrée didactique et permet les analyses attendues.

In fine, nous interrogeons la possibilité de produire et mettre en œuvre des situations didactiques non finalisées par un savoir déjà là mais favorisant l'émergence de savoirs et ceci malgré la diversité des relations antérieures aux objets en jeu et le potentiel foisonnement des premiers signes de la recherche. Nous testons ainsi la possibilité de faire vivre des dispositifs revisitant l'épistémologie scolaire.

Deuxième partie

Analyses mathématique, historique, épistémologique

Les voies qui conduisent l'homme au savoir
sont aussi merveilleuses que le savoir lui-même
Johannes Kepler
Astronomia Nova 1604

Chapitre 4

Pavages archimédiens du plan. Étude mathématique et genèses historiques

L'objectif des chapitres 4 et 5 est triple. Il s'agit à la fois

— d'étudier un problème mathématique spécifique, les pavages stricts du plan par des polygones réguliers, dans ses dimensions mathématique, historique, épistémologique,
— de tester une approche historique du point de vue de l'activité du savant cherchant, et d'identifier les éventuels questionnements qui pourraient s'avérer pertinents pour une réflexion didactique,
— d'enrichir le milieu théorique d'une SDRP potentielle sur les pavages archimédiens du plan.

Concernant le deuxième item, l'ambition est de tester une approche sans grille pré-construite mais portée par le « problème » suivant : est-il possible d'identifier historiquement, des éléments caractéristiques de pratiques de recherches singulières et plus particulièrement les conditions de l'émergence et de l'évolution d'objets mathématiques nouveaux chez un individu ? Au vu des résultats de l'enquête menée, nous pourrons éventuellement être amenés à en tirer de nouvelles hypothèses pour la mise en œuvre d'une SDRP. C'est ici un des points importants de la thèse.

Sommaire

4.1 Le problème, une première approche mathématique 82
4.1.1 Présentation 82
4.1.2 Les pavages archimédiens du plan 82
4.1.3 Premiers commentaires 88
4.1.4 Quelques possibilités d'ouverture 88
4.2 Une perspective historique 90
4.2.1 Les éléments d'Euclide 92
4.2.2 Pappus 93
4.2.3 Dürer 94
4.2.4 Kepler 96
4.2.5 Des successeurs 100
4.2.6 Conclusion 103

4.1 Le problème, une première approche mathématique

4.1.1 Présentation

À l'époque de la publication avec P. Legrand de notre article dans le bulletin vert de l'APMEP, (Front et Legrand, 2010), nous n'avions pas connaissance d'écrit contemporain présentant de façon détaillée et accessible une démonstration de l'existence des onze pavages archimédiens [1] du plan. Nous la rédigeons ici dans son intégralité pour deux raisons principales :

— Une maîtrise de la question mathématique est bien évidemment nécessaire pour la compréhension des enjeux de notre écrit. Nous donnons à voir ici une facette des difficultés de cette question mathématique, même si la rédaction et les techniques présentées se voulaient nécessairement esthétiques dans le contexte de publication.

— La littérature concernant les pavages est considérable, très souvent de langue anglaise. Nous citerons, pour les ouvrages de synthèse, le traité de Grünbaum et Shephard (1987), « Tilings and patterns », le livre récent de Conway, Burgiel et Goodman-Strauss, « The symmetries of things », (Conway *et al.*, 2008), très abondamment illustré, et l'ouvrage de Martin (1987), « Transformation Geometry, an Introduction to Symmetry ». Dans ces ouvrages, si les clés sont données, l'absence de développement ne permet absolument pas d'appréhender les enjeux en termes de savoirs de la question étudiée ici.

4.1.2 Les pavages archimédiens du plan

Définition : Un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers satisfaisant aux conditions suivantes :

- si deux polygones du recouvrement ont un point commun unique, il est sommet de l'un et de l'autre (un tel point sera dit un nœud du pavage) ;

- si deux polygones du recouvrement ont plus d'un point commun, leur intersection est un côté de l'un et de l'autre ;

- la configuration locale en chaque nœud est la même à une symétrie près : si par exemple, en tournant autour du nœud N dans le sens direct, on trouve successivement un m-gone, un n-gone, un p-gone et un q-gone, on trouvera aussi successivement un m-gone, un n-gone, un p-gone et un q-gone en tournant autour de tout autre nœud soit dans le sens direct soit dans le sens rétrograde.

Un peu de vocabulaire

- le type d'un nœud est la liste des nombres de côtés des polygones l'ayant pour sommet, énumérés en tournant autour de ce nœud dans le sens direct ou dans le sens rétrograde. Ainsi le nœud N dont nous parlions précédemment est de type (m,n,p,q), mais il est aussi de type (n,p,q,m) ou (q,p,n,m) ; en revanche, si m,n,p,q sont distincts, il n'est pas de type (m,n,q,p).

- l'ordre d'un nœud est le nombre de polygones du pavage l'ayant pour sommet. Ainsi le nœud N décrit ci-dessus est d'ordre 4.

Pour un pavage archimédien donné, tous les nœuds ont même ordre et même type, qui sont dits ordre et type du pavage. En outre, les côtés des polygones le composant ont tous même longueur.

Remarques initiales

Relation entre l'ordre et le type

1. Contrairement au texte initial, nous décidons ici d'utiliser la terminologie « archimédiens » plutôt que semi-régulier, en suivant en cela, (Grünbaum et Shephard, 1977)

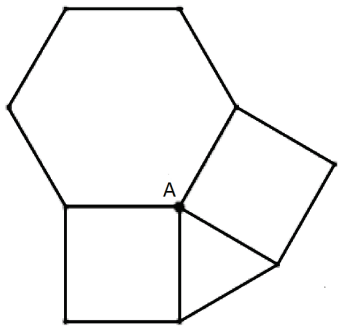


Figure 4.1 – Exemple de nœud d'ordre 4, de type (6,4,3,4)

Si n_i est le nombre de côtés du polygone régulier P_i , ses angles valent $\alpha_i = (1 - \frac{2}{n_i})\pi$. Autour d'un nœud de type $(n_1, n_2, ..., n_k)$, on a

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 2\pi$$

On en tire aussitôt la relation (R) :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1$$

Valeurs de l'ordre possibles a priori

On ne peut assembler autour d'un nœud moins de 3 et plus de 6 polygones réguliers. Le premier résultat est évident. Le second découle, avec les notations du paragraphe précédent, de ce que la plus petite valeur possible de α_i est $\frac{\pi}{3}$, donc que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geq k\frac{\pi}{3}.$$

Un pavage d'ordre 6 suppose que tous les α_i valent $\frac{\pi}{3}$; c'est le classique pavage régulier par triangles équilatéraux. Nous écarterons désormais ce cas. Il nous faut donc commencer par chercher à assembler autour d'un point 3, 4 ou 5 polygones réguliers ... étant entendu qu'un tel assemblage ne pourra pas forcément être prolongé en un pavage archimédien du plan tout entier.

Pavages d'ordre 3

Avec les notations précédentes, la relation (R) nous donne $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$. Il faudra donc décomposer $\frac{1}{2}$ en somme de trois fractions de numérateur 1, mais une telle décomposition ne fournit pas toujours un pavage, comme le montrent les deux remarques ci-après, qui permettront de limiter le travail.

Lemme 1

Dans un pavage archimédien d'ordre 3, de type (x,y,z), si z est impair, alors x = y.

Supposons d'abord x, y, z tous distincts et observons ce qui se passe quand on décrit dans le sens direct le pourtour d'un z-gone en partant d'un point D (Figure 4.2). Le premier côté

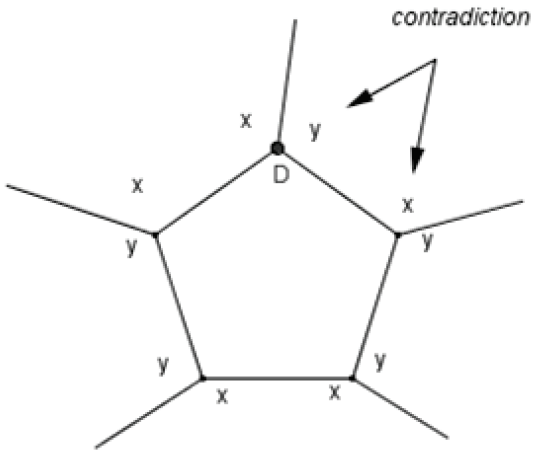


FIGURE 4.2 – Autour de P_i, i impair

longe un x-gone, le second un y-gone, le troisième un x-gone, etc. Quand on arrive au dernier, on obtient, puisque le nombre z de côtés est impair, un x-gone alors que ce devrait être un y-gone compte tenu du type de D.

Supposons maintenant que l'on ait $x = z$ et z $\neq y$. Le même travail permet de conclure à une contradiction : si l'on décrit dans le sens direct le pourtour d'un z-gone en partant d'un point D, les côtés de ce z-gone longent alternativement un z-gone et un y-gone, ce qui exigerait que le nombre de côtés du z-gone décrit soit pair.

Lemme 2

Dans un pavage archimédien d'ordre 3, de type (x, y, z)**, si z est impair, alors** $z = 3$**.**

Nous savons par le lemme 1 que $x = y$. On a donc $\frac{2}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, d'où l'on tire $y(z-2) = 4z$. Comme z est impair, $z-2$ est impair ; mais il divise $4z$, donc il divise z et par suite aussi $z-(z-2) = 2$, donc il vaut 1.

Étude du cas $z = 3$

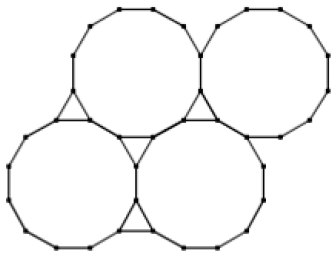


FIGURE 4.3 – Pavage de type (3,12,12)

Des calculs que nous venons de faire on déduit aussitôt que $y = 12$ et donc que le pavage, s'il existe, est du type $(12, 12, 3)$. La figure (4.3) montre qu'un tel pavage existe ; il est unique à une similitude directe près, car une fois choisis un dodécagone de base et l'un des côtés sur lequel on bâtit un triangle équilatéral, la totalité de la construction est déterminée.

Cas où x, y, z *sont tous pairs*

On peut toujours supposer $x \leq y \leq z$. De $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, on tire $\frac{3}{x} \geq \frac{1}{2}$, donc $x \leq 6$, donc $x = 6$ ou $x = 4$.

Le premier cas impose $x = y = z = 6$ et correspond au classique pavage du plan par des hexagones réguliers. Le second cas donne $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$; cela exige que y et z soient strictement supérieurs à 4, donc au moins égaux à 6. Mais, puisque $y \leq z$, on a $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{4}$, donc y vaut 6 ou 8. Finalement, on aboutit à (4, 6, 12) et (4, 8, 8).

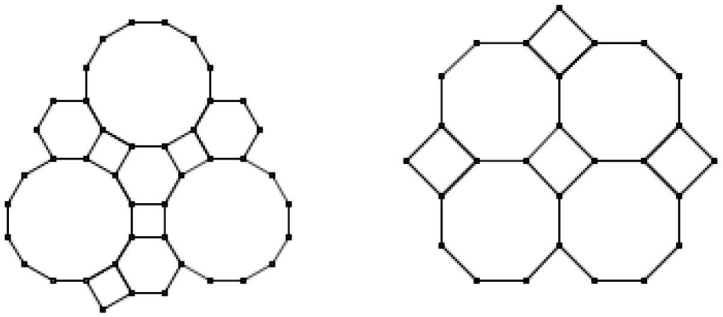


Figure 4.4 – Pavages (4,6,12) et (4,8,8)

Les figures ci-dessus montrent que de tels pavages existent. Pour la même raison que précédemment, ils sont uniques à une similitude directe près : dans le premier cas, une fois choisis un dodécagone de base et l'un des côtés contre lequel on posera un carré, la totalité de la construction est déterminée ; dans le second cas, une fois placé un carré de base, la construction s'ensuit.

Pavages d'ordre 4

Soit un pavage d'ordre 4 et de type (x, y, z, t) . On classe ces quatre nombres dans l'ordre croissant : (n_1, n_2, n_3, n_4) . la relation (R) établie au début s'écrit ici

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1.$$

On en tire $\frac{4}{n_1} \geq 1$, ce qui permet d'affirmer que n_1 vaut 3 ou 4.

Si $n_1 = 4$, les quatre fractions $\frac{1}{n_i}$ sont au plus égales à $\frac{1}{4}$; leur somme ne peut valoir 1 que si chaque n_i vaut 4. Le type est donc (4, 4, 4, 4) : c'est le pavage régulier par des carrés.

Nous supposons désormais $n_1 = 3$. On a alors

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3},$$

les n_i étant toujours supposés rangés par ordre croissant, ce qui assure l'inégalité $\frac{3}{n_2} \geq \frac{2}{3}$; donc n_2 vaut 3 ou 4.

Si $n_2 = 3$, on a

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3},$$

donc $n_3 > 3$. De plus $\frac{2}{n_3} \geq \frac{1}{3}$ donne $n_3 \leq 6$. On a donc à essayer pour n_3 les valeurs 4, 5 et 6. On trouve immédiatement $n_3 = 4, n_4 = 12$ et $n_3 = 6, n_4 = 6$.

Si $n_2 = 4$, on a

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12},$$

d'où l'on tire $\frac{2}{n_3} \geq \frac{5}{12}$, soit $n_3 \leq \frac{24}{5}$, donc $n_3 \leq 4$, ce qui prouve puisque $n_3 \geq n_2$, que $n_3 = 4$. Il vient alors $n_4 = 6$.

Nous avons, comme liste de valeurs *a priori* possibles, classées dans l'ordre croissant, (3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6) et (3, 4, 4, 6). Il nous faut donc examiner la liste de types suivante : (3, 3, 4, 12), (3, 4, 3, 12), (3, 3, 6, 6) (3, 6, 3, 6), (3, 4, 4, 6) et (3, 4, 6, 4). (L)

Tout autre type *a priori* envisageable se ramène à l'un de ces six. Ainsi, par exemple (4, 3, 3, 12) définit par symétrie le même type que (12, 3, 3, 4), qui par permutation circulaire se ramène à (3, 3, 4, 12).

Un lemme va nous permettre de montrer que quatre de ces six types ne permettent pas de définir un pavage archimédien.

Lemme 3

Il n'existe pas de pavage archimédien de type (3,x,y,z) avec $x \neq z$.

La démonstration est voisine de celle du lemme 1. Observons ce qui se passe aux sommets d'un triangle équilatéral ABC du pavage en partant du point A.

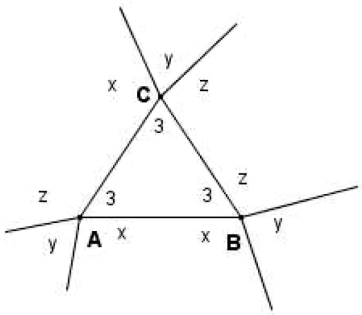


FIGURE 4.5 – Autour d'un triangle

Premier cas : x et z différents de 3

Supposons, ce qui n'est pas restrictif, que le côté AB du triangle ABC longe un x-gone. Alors, compte tenu du type du nœud B (et que y soit ou non égal à 3), le côté BC longe un z-gone. Puis, compte tenu du type du nœud C, le côté CA longe un x-gone. On voit alors que le nœud A est du type $(3, x, y, z)$ et donc que $x = z$.

Second cas : $x = 3$ ou $z = 3$

Supposons par exemple $x = 3$. Dans la liste (L) ci-dessus aucun des types *a priori* possibles ne présente trois fois le nombre 3. Il nous faut donc étudier la possibilité du type $(3, 3, x, z)$, avec y et z différents de 3.

Pour un nœud de ce type, la juxtaposition des deux « 3 » signifie que ce point est sommet de deux triangles équilatéraux ayant un côté commun. Il y a donc dans le pavage un triangle équilatéral ABC tel que le côté AB longe un autre triangle équilatéral. Étant donné le type du nœud C, l'un des deux côtés BC et AC, mettons BC, est longé par le triangle ABC et un autre triangle équilatéral. Mais alors le nœud B est de type (3, 3, 3, ...), ce qui est exclu.

Pavages exclus par le lemme 3

Voyons la liste (L) des cas *a priori* possibles :

(3, 3, 4, 12), (3, 4, 3, 12), (3, 3, 6, 6) (3, 6, 3, 6), (3, 4, 4, 6), (3, 4, 6, 4).

Les types (3, 4, 3, 12), (3, 4, 4, 6), (3, 3, 4, 12) et (3, 3, 6, 6) sont exclus par le lemme 3 comme étant du type $(3, x, y, z)$ avec $x \neq z$.

Restent à étudier les deux cas (3, 4, 6, 4) et (3, 6, 3, 6).

Les figures ci-après montrent que de tels pavages existent. Ils sont uniques à une similitude directe près pour la même raison que dans les cas précédents : une fois choisi un hexagone de base, la totalité de la construction est déterminée.

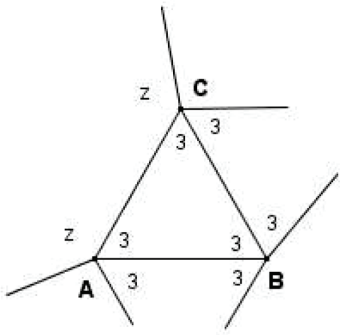


Figure 4.6 – Autour d'un triangle (2)

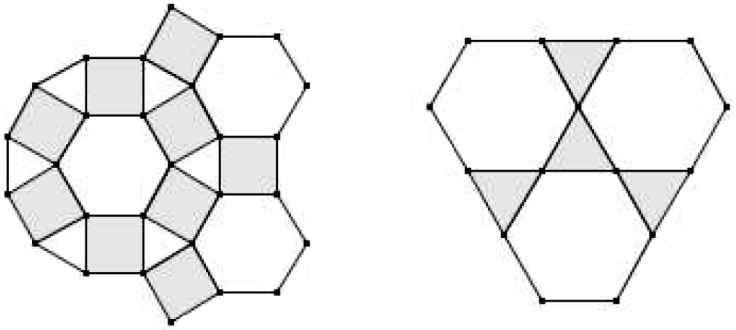


Figure 4.7 – (3,4,6,4) et (3,6,3,6)

Pavages d'ordre 5

Soit un pavage d'ordre 5 et de type (x, y, z, t, u) . On classe ces quatre nombres dans l'ordre croissant : $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$. La relation (R) établie au début s'écrit ici

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}.$$

Les trois premiers n_i sont égaux à 3, car s'il n'en était pas ainsi on aurait

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4};$$

or le second membre vaut $\frac{17}{12}$, inférieur à $\frac{3}{2}$. Il reste donc à discuter $\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2}$, avec n_4 et n_5 au moins égaux à 3. On voit aussitôt que les seules solutions sont (3,6) et (4,4).

Les types *a priori* possibles sont donc (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4) et (3,3,4,3,4). Les figures ci-dessous montrent que de tels pavages existent.

Le pavage (3,3,3,4,4) est manifestement unique à une similitude directe près. Il en est de même pour le pavage (3,3,4,3,4), mais la démonstration est un peu plus laborieuse ; on peut cependant faire constater que, si l'on choisit comme point de départ deux triangles équilatéraux accolés, on a carte forcée pour l'ensemble de la construction.

En revanche, à partir d'un hexagone régulier donné, on peut construire deux pavages (3,3,3,3,6) se correspondant par symétrie, mais non superposables par déplacement. Si on construit autour de l'hexagone sa couronne de dix-huit triangles équilatéraux, on voit en effet que l'on a deux façons de placer les hexagones suivants. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les deux solutions sont superposables par symétrie, mais non par déplacement. Pour le type (3,3,3,3,6) et lui seul, l'unicité est donc à une similitude directe ou inverse près.

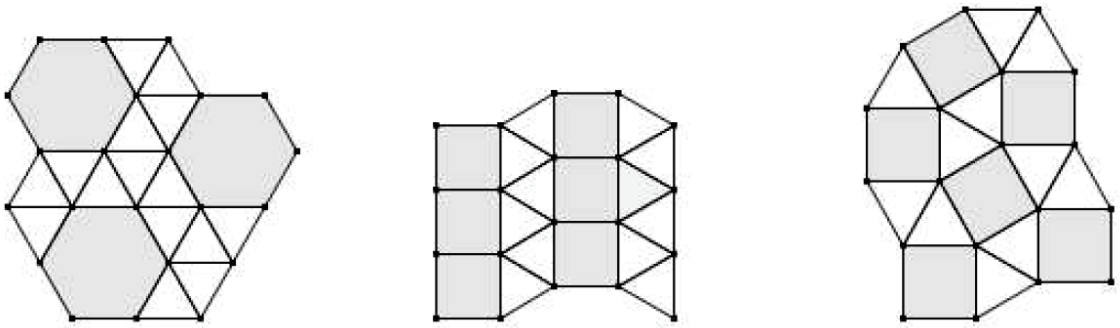


FIGURE 4.8 – (3,3,3,3,6),(3,3,3,4,4) et (3,3,4,3,4)

4.1.3 Premiers commentaires

On retrouve des expressions équivalentes à la relation (R) dans (Grünbaum et Shephard, 1987) et (Martin, 1987). Dans les deux ouvrages la suite est elliptique. Par exemple dans Grünbaum et Shephard :

> It is easy to check that only 17 choices of the positive integers n_i satisfy this equation and hence only 17 choices of polygons can be fitted round a vertex so as cover a neighborhood of the vertex without gaps ou overlaps.

La détermination de ces n-uplets d'entiers n'a rien d'immédiat, et reflète une des difficultés du problème qui est l'exhaustivité des n-uplets obtenus. Nous verrons que plusieurs auteurs ont éprouvé des difficultés dans cette étape.

La démonstration présentée, et qui n'est, bien évidemment, qu'une démonstration parmi d'autres, montre d'ores et déjà les relations qui se tissent autour des pavages entre de nombreux objets des champs géométrique et arithmétique. Les objets ici convoqués (polygones, angles, arête, sommet de polygones, nœud d'un pavage, type de nœud, ordre d'un pavage, somme des angles, relation autour d'un nœud, ...) montrent une diversité et une imbrication presque immédiate des deux champs. Il existe des preuves d'apparence moins technique (cf. annexe D) mais comme nous le verrons il semblerait qu'elles nécessitent elles-aussi une familiarité avec un nombre important des objets cités et ceci dans les deux champs.

4.1.4 Quelques possibilités d'ouverture

Nous évoquons dans cette partie quelques éléments de généralisation qui permettent d'intégrer la question des pavages archimédiens du plan dans des problématiques plus vastes qui ont une certaine importance dans une perspective didactique. Ces questions ont en effet toute leur pertinence, quand on observe qu'elles peuvent apparaître dès le début d'une recherche en classe, comme nous avons pu le constater lors des expérimentations. Ce sont en particulier celles des différences possibles de configuration autour d'un nœud du pavage que nous développons.

Précisons tout d'abord que nous continuons à ne considérer que des polygones réguliers convexes et des pavages stricts. Ainsi nous n'étudions pas les pavages des figures 4.9 et 4.10 ci-dessous. Malgré cette restriction, le problème reste ouvert.

Nous sommes maintenant amenés à introduire des pavages tels que ceux des figures 4.11 et 4.12 en nous intéressant spécifiquement aux nœuds de tels pavages.

Pour cela nous introduisons deux définitions que nous reprenons de (Aslaksen, 2006, p.1) pour poser le problème. [2]

2. Nous n'estimons pas utile ici de rentrer dans la discussion sur la définition des pavages demi-réguliers pour laquelle nous renvoyons là aussi à Aslaken (Ibid. page 2) ou à Ling (2004)

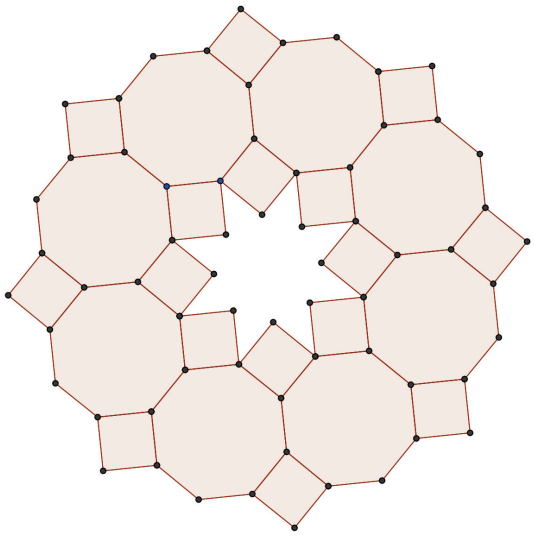


Figure 4.9 – Pavage utilisant un polygone régulier non convexe

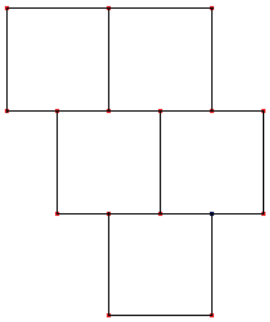


Figure 4.10 – Pavage non strict

> Définition 1 : We will define a tiling to be n-Archimedean if it has n different types of vertices, where the type of a vertex refers to the type and order of polygons surrounding the vertex.

Remarque 1 : Les pavages archimédiens du plan sont alors les pavages 1-archimédiens.

Remarque 2 : On constate que pour un pavage archimédien donné, avec les symétries associées, tous les nœuds sont équivalents. Il est alors assez naturel d'envisager la généralisation suivante :

Définition 2 :

> We will define a tiling to be n-uniform if the group of symmetries of the tiling divide the vertices into n transitivity classes.

Sous ces définitions, on a par exemple, (Lenngren, 2009, p.12 et 13) :

— There are no n-uniform, m-Archimedean tilings where $n < m$.
— There are no m-Archimedean tilings with $m > 14$.
— There are no 1-Archimedean, n-uniform tilings for $n > 1$.

De façon beaucoup plus générale, les travaux de Chavey (1984a,b, 1989), en appui particulièrement sur Krötenbeerdt (1970a,b), Grünbaum et Shephard (1987), avaient déjà permis l'énumération des pavages 2-uniform et 3-uniform.

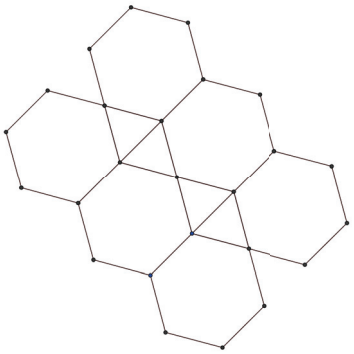


FIGURE 4.11 – Pavage non archimédien

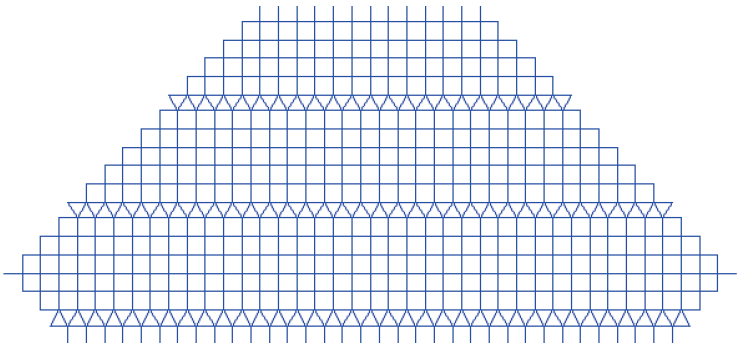


FIGURE 4.12 – Pavage non archimédien

En 2009, Galebach a produit une table (Table 4.1) donnant les nombres de pavages n-uniform, m-archimédien pour $n \leq 6$ ainsi pour quelques valeurs de m et n, pour m et n proches. Voici les indications accompagnant cette table :

> I was able to write a computer program that automatically generates complete sets of tilings for a given n. It took approximately one month of computation time to generate the 6-uniform tilings. The program is also able to generate, in considerably less time, sets of m-Archimedean, n-uniform tilings, where m is close to n. This capability was used to reproduce the results of Otto Krotenheerdt and to generate his tilings (where m=n). (Galebach, 2009)

Au-delà du peu d'informations que Galebach fournit sur son site, il ne semble pas que des éléments complémentaires soient disponibles dans la littérature sur les méthodes utilisées. Tous les pavages annoncés sont par ailleurs représentés sur le site pour $m \leq 7$. Récemment, Chavey (2014), a publié un article traitant des pavages n-uniform utilisant le dodécagone.

Il est notable, pour ce problème ouvert pour la communauté des mathématiciens, que la dimension expérimentale utilise l'outil informatique pour la manipulation des objets familiers. Mais on retrouve également les limites de l'outil quand il ne suffit pas à percevoir un processus, un algorithme de construction et qu'il ne permet que l'accumulation des cas sans les épuiser tous.

4.2 Une perspective historique

Il est clairement impossible de rendre compte ici de l'histoire exhaustive d'objets aussi anciens et familiers que peuvent l'être les pavages. Nous essayons de présenter quelques étapes connues avant de nous attacher à une genèse particulière dans le chapitre 5.

n-uniform \ m-Archimedean	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	> 14	Total
1	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11
2	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
3	0	22	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	61
4	0	33	85	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	151
5	0	74	149	94	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	332
6	0	100	284	187	92	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	673
7	0	?	?	?	?	?	7	0	0	0	0	0	0	0	0	?
8	0	?	?	?	?	?	20	0	0	0	0	0	0	0	0	?
9	0	?	?	?	?	?	?	8	0	0	0	0	0	0	0	?
10	0	?	?	?	?	?	?	27	0	0	0	0	0	0	0	?
11	0	?	?	?	?	?	?	?	1	0	0	0	0	0	0	?
12	0	?	?	?	?	?	?	?	?	0	0	0	0	0	0	?
13	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0	0	0	?
14	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0	0	?
> 14	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0	?
Total	11	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞

Table 4.1 – Nombre de pavages pour n et m donnés.

Keller, dans son « archéologie de la géométrie », fait part d'une « invention de la structuration de la surface de représentation », apparente sur les plus anciens supports dont nous disposons.

> Alors que les parois des grottes ornées ne montrent aucun ordre collectif raisonnablement décelable [...] l'art mobilier (corps humain, outils d'os, pendeloques et rondelles) présente très généralement un décor soigné ; les superpositions sont inconnues et la grande majorité des œuvres manifestent une organisation géométrique rigoureuse. [...] Dans l'art mobilier [...] la structuration est toujours globale, elle imprime un rythme à toute la surface de l'objet : un rythme de frise, fait de translations et de symétries axiales orthogonales. [...] Des frises plus ou moins complexes sont faites de zigzags, de motifs en losanges rainurés, d'associations de rectangles et de tirets ou d'autres encore. (Keller, 2006, p.15)

Ainsi, la structuration de l'espace est ancienne et issues de pratiques diverses. Ces pratiques irriguent les productions de très nombreuses civilisations comme en témoigne par exemple (Jones, 1856). Dans cette « Grammar of ornament » Jones, laisse à voir la richesse des ornements des civilisations d'Océanie, d'Egypte, d'Assyrie, de Perse, de Grèce, de Pompéi, romaine, byzantine, arabe, ... Tous donnent une part importante à la structuration des surfaces, au pavage du plan en s'appuyant sur un usage permanent des symétries (au sens large)[3]. Les motifs sont d'une très grande variété et dans ce foisonnement on ne peut être étonné de retrouver les polygones réguliers et certains pavages archimédiens. Par exemple, et au-delà des pavages réguliers présents partout, on repère (op. cit., Plate XXX) le pavage (3,4,6,4) dans un ornement byzantin, les pavage (3,6,3,6) et l'assemblage (3,3,3,3,6) dans des ornements perses (op. cit., Plate XLV), le pavage (4,8,8) dans des ornements médiévaux (op. cit., Plate LXVIII), ...

Les pavages font ainsi partie de la culture de très nombreux peuples et un art à leur propos existait nécessairement pour aboutir à de telles œuvres. mais nous ne disposons pas à ce jour de textes décrivant cet art du pavage ou des entrelacs, ces derniers étant particulièrement

3. Pour une analyse méthodique des ornements du plan, nous renvoyons ici à Bourgoin (1873) et à Bourgoin (1879), textes anciens mais d'une grande richesse, et qui traitent pour une part des ornements évoqués ici

foisonnant dans la culture arabe. Nous nous appuierons donc tout d'abord sur les textes grecs avant d'étudier les textes principaux sur la question.

4.2.1 Les éléments d'Euclide

Il est dit que les pythagoriciens savaient déjà que seuls trois polygones réguliers, le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier sont capables de paver le plan à eux seuls. Qu'en est-il ?

D'après Vitrac, (Euclide, 1990a, p.101), Proclus attribue peu de résultats du Livre I des Éléments aux Pythagoriciens, mais deux d'entre eux en particulier sont retenus : la valeur de la somme des angles du triangle (avec l'idée capitale de l'additivité des angles) et le théorème du triangle rectangle [4]. Par ailleurs pour Proclus, le théorème sur les pavages du plan résulte directement de ce premier résultat et du porisme de la proposition 15 du livre I des éléments d'Euclide [5]. La proposition 15 énonce :

> Si deux droites se coupent l'une l'autre, elles font des angles au sommet égaux entre eux.

le porisme affirme lui :

> À partir de ceci, il est alors évident que si deux droites se coupent l'une l'autre, elles feront, au point de section, des angles égaux à quatre droits.

C'est sur ces bases que Proclus attribue le théorème sur les pavages du plan aux Pythagoriciens :

> Le porisme au sujet duquel nous nous sommes proposé de parler, tout en nous apprenant que la région qui entoure un seul et même point se distribue en angles égaux à quatre angles droits, fournit le point de départ à l'étonnant théorème qui montre que le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone équilatéral et équiangle sont les seuls polygones pouvant remplir entièrement la région qui entoure un seul et même point [...] Ce théorème est pythagoricien, (Proclus, 1948, p.260).

Pour Vitrac,« Le porisme est très certainement interpolé », (Euclide, 1990a, p.226), pour autant la connaissance sur les pavages réguliers du plan peut, dès l'époque de Proclus, être reconnue comme installée. Mais, et même si la question se présente d'ores et déjà clairement comme le découpage de quatre droits, il n'est pas question, à cette époque, d'assemblages autres que d'un même et unique polygone régulier.

Notons que, d'autres parts, l'existence des polyèdres réguliers et l'affirmation de leur nombre nous est connue dans le Timée, (Platon, 1992, p.433, 54c-55d). Pour (Chasles, 1837, p.204), Pythagore en avait déjà fait le principe de sa cosmogonie,

> dans laquelle les cinq corps réguliers répondaient aux quatre éléments et à l'Univers [...]. Platon adoptait ces idées, et avait aussi cultivé cette théorie, sur laquelle Théatète, un de ses disciples, passe pour avoir écrit le premier.

Pour Vitrac, (Euclide, 1990c, 95 à 97), cette origine pythagoricienne est incertaine et les débats entre P. Tannery ou T. Heath et E. Sachs [6] n'ont pas permis de trancher. On peut toutefois être certain, même si le *Timée* n'est pas un manuel de géométrie, qu'au moment où Platon rédigeait l'ouvrage la notion de figure solide régulière était dégagée, soit autour des année 360-350 avant notre ère.

4. Avec toutefois une certaine prudence de Proclus sur cette dernière attribution
5. Vers 325 avant notre ère – vers 265 avant notre ère
6. Trois éminents historiens des mathématiques grecques

À la suite, une étude de ces cinq solides sera détaillée dans les éléments. Les propositions XIII, XIV, XV, XVI, XVII du livre XIII et dernier des éléments proposent la construction du tétraèdre, octaèdre, cube, icosaèdre, dodécaèdre dans une même sphère circonscrite et la proposition XVIII exhibe les côtés des cinq figures et les compare les uns aux autres. L'essentiel semble être en place pour aller plus loin.

4.2.2 Pappus

Des travaux d'Archimède sur les polyèdres nous n'avons que des indications de ses commentateurs, en particulier celles de Pappus [7]. L'ouvrage dans lequel Archimède aurait traité des treize polyèdres dit archimédiens est toujours perdu. Pappus connaît bien ces polyèdres qu'il décrit précisément mais ne les étudie pas, sous l'argument d'une moindre régularité :

> nous négligerons pour le moment ces treize figures comprises sous les polygones inégaux et dissemblables parce qu'elles sont moins régulières ... (Pappus d'Alexandrie, 1933a, p.276),

Il est envisageable d'imaginer qu'Archimède, s'étant engagé sur la voie du mixage des polygones, se soit aussi penché sur le cas des pavages. Nous n'avons toutefois aucune trace de ce type de travaux, Pappus ni aucun autre successeurs ne les évoquant. Comme le laisse entendre les propos de Pappus, l'importance apportée à la régularité (et aux symétries) joue un grand rôle dans la considération ou non de certains objets mathématiques. Les progrès d'Archimède en sont d'autant plus remarquables.

Pour compléter sur les écrits de Pappus, nous pouvons préciser que c'est dans le livre V de sa « collection mathématique », (Pappus d'Alexandrie, 1933a,b) que Pappus fait référence aux pavages réguliers, et rédige une démonstration pour les trois pavages réguliers. C'est dans un préambule de ce livre que Pappus s'adresse à Mégéthius, géomètre connu seulement par cette mention de son nom. Ce préambule, reproduit en annexe A, contient : « les comparaisons des figures planes ayant même périmètre entre elles et avec le cercle, et les comparaisons des figures solides ayant même surface entre elles et avec la sphère ». Dans cette interpellation à Mégethius, Pappus évoque « une certaine intuition géométrique des abeilles ». Ce sont en fait les premières traces écrites du problème mathématique suivant : Pour une quantité de matériau donnée, quelle est la forme plane qui va permettre aux abeilles de construire des alvéoles renfermant le plus de miel. Pappus, qui parait reprendre en partie le traité de Zénodore sur les figures isomorphes (environ 180 avant J.C. ; aujourd'hui perdu) énonce donc et prouve que « ce sont les triangles, les quadrilatères et les hexagones équilatéraux juxtaposés qui peuvent avoir ainsi leurs côtés communs sans qu'il y ait entre eux de compléments dissemblables ». Et Pappus d'étudier l'organisation de « l'espace qui règne autour d'un même point » et ceci de façon exhaustive. Ce préambule permet à Pappus d'introduire effectivement son étude, toutefois on ne peut que constater qu'il n'a effectivement pas tenté de généralisation aux pavages archimédiens alors qu'il semble avoir eu un certain nombre d'éléments à portée de main.

Quant aux cinq corps réguliers, ils sont étudiés dans la quatrième partie du livre III. Pour Paul Ver Eecke, (op.cit., p.XXIII), Pappus « n'ajoute rien d'essentiel aux propositions du maître de l'école d'Alexandrie [8] mais il les reprend dans une conception absolument différente ... ». Leur étude est ensuite reprise dans le cinquième livre et là on peut noter le parallélisme entre l'étude comparative des figures planes isopérimètres et des figures solides de même surface.

7. Pappus, mathématicien grec vécut entre la fin du III^{ème} siècle et la première moité du IV^{ème} siècle après JC.

8. Ver Eecke désigne ici Euclide

4.2.3 Dürer

En dehors des très nombreuses œuvres peintes, dessinées et gravées, Albrecht Dürer[9] a produit en particulier des ouvrages de théorisation, dont :

— Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt (Instruction sur la manière de mesurer ou Instruction pour la mesure à la règle et au compas)[10].
— Etliche underricht, zu befestigung der Stett, Schloß und Flecken (Instruction sur la fortifications des villes, bourgs et châteaux)[11].
— Hierinn sind begriffen vier bücher von menschlicher Proportion (Traité des proportions du corps humain)[12].

Pour notre étude nous ne renverrons qu'au livre de Jeanne Peiffer, (Dürer, 1995), qui propose une présentation, traduction de l'*Underweysung der Messung*, assortie de notes, sous le titre *Géométrie*.

En dehors des travaux sur la perspective, l'œuvre de Dürer est peu connue des mathématiciens. Nous en donnons quelques éléments.

L'*Underweysung* est divisé en quatre livres :

> Le premier est presque entièrement consacré à la genèse des courbes : spirales et hélices, coniques, conchoïdes, etc. [...] Le livre se termine sur ce qu'il faut bien appeler une théorie des proportions. Le deuxième livre indique la construction des polygones réguliers avec comme application le dessin de rosaces et de pavages. La trissection de l'angle et la quadrature du cercle y sont résolues de façon approchée. Des problèmes de transformation des aires sont abordés. Le troisième livre est nettement moins mathématique que les précédents. Il est consacré à l'architecture [...]. C'est dans ce livre que Dürer indique des tracés géométriques (à l'aide du carré et du cercle) pour les lettres de l'alphabet, contribuant ainsi à codifier la forme de certains caractères d'imprimerie (romains et gothiques). A l'instar des *Éléments* euclidiens, le dernier livre est consacré aux solides réguliers et semi-réguliers. Il se termine par un bref exposé des règles de la perspective, qui devait sans doute constituer le couronnement de tout l'ouvrage [...] (Dürer, 1995, p.47).

Ainsi Dürer a étudié des pavages réguliers et archimédiens du plan. Ainsi après avoir considéré les « planos », figures planes, il s'intéresse aux pavages utilisant des cercles « Si l'on veut utiliser des cercles dans le pavage des sols ou des murs, on pourra les accoler de deux façons. Premièrement par l'intermédiaire de carrés à angles droits, deuxièmement de quadrilatères en forme de losange (op. cit., p.211) » ; Puis, (op.cit., p.215), « Maintenant, je souhaite mettre bout à bout quelques figures polygonales, telles qu'elles peuvent servir dans la pavement des sols. »

Comme le précise Peiffer, (op. cit., p.84)

> l'attitude de Dürer par rapport à la géométrie classique des Anciens, telle qu'elle s'apprécie dans son manuel de géométrie, est empreinte d'un certain éclectisme. Des éléments hétérogènes s'imbriquent profondément pour former une approche originale d'objets mathématiques connus depuis l'antiquité. Les textes classiques ne forment en général qu'un point d'appui qui permet à la créativité de Dürer de se déployer.

et :

> Si l'on devait, en guise de conclusion, caractériser la Géométrie de Dürer, on pourrait dire, si une telle description n'est pas trop schématique, qu'elle est au

9. 1471−1528
10. Traduction française : Dürer (1995)
11. Traduction française : Dürer et Ratheau (1870)
12. Traduction française : Dürer (1975)

> service d'un programme d'inspiration italienne, une nouvelle éducation des artistes et artisans, que les objets sur lesquels Dürer exerce son talent et son intuition géométrique sont classiques et que les méthodes mises en œuvre sont constructives, proches des gestes effectués dans les ateliers. En effet, la Géométrie de Dürer n'est pas démonstrative, sa structure n'est pas déductive et l'ordre d'exposition ne semble pas toujours cohérent aux yeux d'un mathématicien. (op. cit., p.121)

C'est sous ces modalités qu'on retrouve sa présentation d'un certain nombre de pavages du plan, stricts ou non, mêlant polygones réguliers ou non, sans que l'on sache toujours si cela a de l'importance pour Dürer. On voit ainsi (4.13) une planche présentant côte à côte le pavage (4,8,8) et un assemblage avec des nœud de type (3,8,3,8) sans que Dürer attire autrement notre attention que par des formules générales sur l'exactitude des constructions :

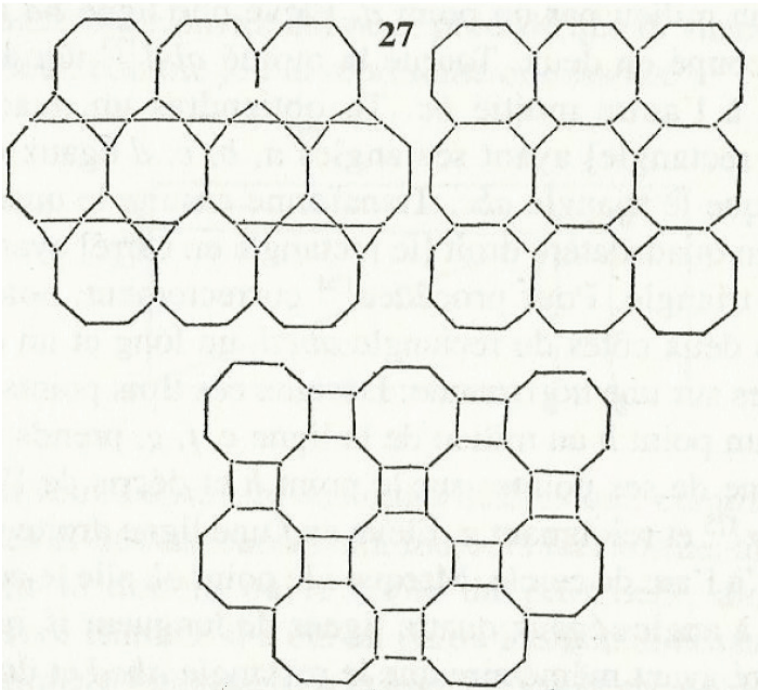


Figure 4.13 – Proposition d'assemblages avec des octogones par Dürer

> En outre, je souhaite assembler des octogones de trois façons différentes. Premièrement je fais en sorte que chaque octogone ait deux côtés et ses sommets en commun avec d'autres. Des triangles subsisteront entre eux. Deuxièmement je les juxtapose en faisant coïncider quatre côtés de chaque octogone avec ceux qui le jouxtent. Si je les empile et les aligne le long de deux droites qui se coupent à angles droits, les espaces résiduels formeront des quadrilatères posés sur une pointe. Troisièmement je les assemble de telle sorte que chaque octogone ait quatre côtés communs avec d'autres, ces côtés étant obliques. Il subsistera entre eux des carrés posés verticalement et dessinant des croix. (op. cit., p.221)

On observe ainsi une approche de Dürer très fortement axée sur une dimension pragmatique et décorative. [13] On observe aussi ici, entre autre, que Dürer se positionne dans un plan avec une direction privilégiée, la verticale, avec une vision très ornementale.

13. Peiffer précise, (Id.) : Un manuscrit préliminaire de ce passage, daté de 1523/1525, subsiste. Le texte diffère fortement de la version publiée et renforce l'impression de tâtonnement de la part de Dürer.

Dans une réaction à une conférence de Peiffer, Cauty [14] aura les propos suivants :

> Jeanne Peiffer nous a fait entendre que Dürer était un homme de carrefour, entre le Moyen-Age et la Renaissance, entre l'Allemagne et l'Italie, entre la géométrie déductive des Grecs, les savoir-faire du tailleur de pierre ou de l'architecte, et les connaissances - naturelles et savantes, comme anciennes et à venir - que désignent l'expression « géométrie projective ». (p.5)

et la prévention suivante quant au caractère mathématique de l'œuvre de Dürer :

> Cette modernité de Dürer suffit bien à compléter son immense stature en tant que peintre et graveur. Et il semble vain de vouloir le grandir artificiellement en lui attribuant une qualité qu'il ne possédait probablement pas, la qualité de géomètre. (p.10)

Il semblerait donc que l'état d'esprit de Dürer ne l'ait pas engagé dans une étude mathématique qui permette des avancées plus conséquentes sur les questions qui nous intéressent. Concernant les pavages, son domaine d'expérience des objets polygonaux, son objectif de mettre à « disposition des artistes et des artisans un réservoir de formes avec leurs infinies variations » (op. cit., p.121), ne lui permettent pas de produire une structuration mathématique des pavages archimédiens. Mais nous ne nous engagerons pas ici dans une étude plus approfondie, comme nous essayerons de le faire pour Kepler. Nous retiendrons que Dürer a mis à disposition de ses successeurs un catalogue de formes qui augmentent la familiarité avec les possibles objets de l'expérience. Les pavages (3,3,3,3,3,3), (4,4,4,4), (6,6,6), (3,6,3,6), (4,8,8) font partie de ce catalogue mais aussi des candidats dont le statut est plus ou moins identifié.

Revenons brièvement sur la question des polyèdres.

Le livre IV s'ouvre sur la description des polyèdres réguliers. Comme le rappelle Peiffer, (op. cit., p.89), Dürer devait connaître le *Timée* à travers une première traduction intégrale par Marsile Ficin, qui date de 1484, ainsi que par le Livre XIII des Éléments dont il disposait. Il est à noter, qu'il n'est pas certain que Dürer ait eu sous la main un exemplaire de La Collection de Pappus, qui n'existait à cette époque qu'à l'état de manuscrit. Ceci peut expliquer que Dürer ne présente, entre les deux éditions de l'Undertweysung der messung de 1525 et 1538, que 9 polyèdres archimédiens sur les 13 que Pappus avait attribué à Archimède (op. cit., p.90). Il est à noter là encore que :

> Dürer [...] se contente de donner les développements des solides sur une surface plane, après les avoir succinctement caractérisés d'un point de vue géométrique. Ce qui lui importe, c'est de pouvoir facilement les construire au moyen de carton de colle et de ciseaux. (Idem)

On identifie chez Dürer un travail novateur et approfondi sur des objets dont le statut mathématique reste incertain. Ces objets sont issus pour une grande part d'une pratique liée à l'art de l'artisan. Dürer a mis au jour de nombreux objets jusqu'alors non exhibés mais l'approche utilisée n'a permis ni une étude globale aboutie des pavages archimédiens ni même une étude partielle de nature mathématique.

4.2.4 Kepler

Cette section prolonge les précédentes, elle ne tente pas une analyse détaillée ni de l'œuvre, ni de l'activité de Kepler, en particulier autour des pavages archimédiens du plan. Cette analyse fera l'objet du chapitre 5.

14. Texte en ligne, http://etnomatematica.org/articulos/cauty3.pdf : De la difficulté d'interpréter les Mélanges de cultures

Pour ce qui concerne les objets mathématiques ici questionnés, Kepler a réalisé des avancées essentielles, aussi bien d'ailleurs sur les pavages archimédiens du plan que sur les polyèdres. Ces apports sont incomparables et si nous verrons que leur caractère scientifique a pu être discuté (dans une vision de l'histoire de l'activité mathématique normative), il est indéniable qu'un pas est franchi par rapport aux travaux de Dürer. Kepler, dans ses écrits spécifiques sur les pavages, n'évoque pas les planches de la Géométrie de Dürer. Pourtant nous savons qu'il a eu connaissance de ces travaux, puisqu'il évoque ce dernier, (Kepler, 1980, p.45), lors de l'étude de l'heptagone, pour pointer une construction erronée de Dürer. Mais avant d'analyser les sources et les motivations de Kepler, revenons sur le texte central de notre étude.

Tardif et publié après un certain nombre d'autres ouvrages, l'*Harmonices Mundi*, que nous dénommerons l'*Harmonie du monde*, en suivant en ceci Kepler (1980, 1997), est un ouvrage de maturité [15]. Il fait preuve dans sa forme du classicisme du mathématicien formé par les sources grecques et d'une originalité sans pareil à son époque.

L'*Harmonie du monde* est composé de cinq livres :

- Le premier Géométrique : de l'origine et des démonstrations des figures régulières qui déterminent des rapports harmoniques.
- Le second, Architectonique ou venant de la Géométrie façonnée, au sujet de la Convenance des Figures Régulières dans le plan ou dans le solide.
- Le troisième spécialement Harmonique, au sujet de l'origine des Rapports Harmoniques tirés des Figures ; et au sujet de la Nature et des différences des choses relatives au chant, contrairement aux Anciens.
- Le quatrième, Métaphysique, Psychologique et Astrologique, au sujet de la Nature mentale des Harmonies et de leurs origines dans le Monde ; surtout au sujet de l'harmonie des rayons descendant des corps célestes vers la Terre et de leur effet sur la Nature ou sur l'Ame sublunaire et Humaine.
- Le cinquième Astronomique et Metaphysique, au sujet des Harmonies délivrées des mouvements célestes, et de l'origine des excentricités issues des rapports Harmoniques.

et d'un appendice contenant » la comparaison de cet ouvrage avec les harmonies au livre III de Claude Ptolémée et avec les contemplations harmoniques insérées dans l'œuvre au sujet du Macrocosme et du Microcosme de Robert Fludd.

Point n'est besoin de longues explications pour comprendre la complexité de la pensée de Kepler dans cet ouvrage, ni que ce qui porte Kepler, c'est un opérateur de portée très générale, le concept d'Harmonie. C'est fondamentalement le projet de la recherche et de la compréhension des harmonies du monde qui permettront à Kepler de produire aussi bien ses résultats sur les pavages, sur les polyèdres, que ses lois sur le mouvement des planètes. Nous y reviendrons dans le chapitre 5.

Dans l'introduction de l'harmonie du monde, Kepler rend un hommage appuyé à Euclide et Proclus, (Kepler, 1980, p.2) :

> [...] Puisque les causes des Rapports harmoniques doivent être cherchées par nous à partir des divisions du cercle en quelques parties égales qui sont faites Géométriquement et scientifiquement, ce qui est à partir des figures planes Régulières démontrables, j'ai décrit au commencement les différences mentales des choses géo-

15. Nous travaillerons à partir de la traduction en français de Peyroux. Au-delà de la complexité de la pensée de Kepler, cette traduction est parfois difficile à lire, voire peu intelligible. En cas de difficulté nous nous référerons à la traduction en langue anglaise. La référence à certaines planches sera faite directement à celles de (Kepler, 1940), disponibles en ligne (`http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b2100140z`) car il semblerait que Peyroux n'ait pas eu sous les yeux toutes les planches de dessins. Il précise en effet, en note, (Kepler, 1980, p.409) : « les figures correspondant aux lettres A,B, ainsi qu'à toutes les lettres simples et à quelques lettres doubles manquent dans l'ouvrage ... ».

> métriques, ce qui parait être tant ignoré en totalité de la part des livres édités. Tellement que pas même parmi les Anciens, quelqu'un n'aura donné à entendre avoir connu exactement ces différences spécifiques des choses Géométriques, si ce n'est Euclide et son commentateur Proclus. Certes la division des Problèmes plans, Solides, et Linéaires de Pappus d'Alexandrie et des anciens que ce dernier suit, est assez convenable aux dispositions de l'esprit à l'égard de chacune - les Géomètres naissants sont soumis à expliquer le maître - pourtant celle-ci est brève en paroles et attachée à la manière de procéder ; il n'est fait mention de nulle théorie, et assurément à moins que nous ne soyons occupés de cette chose par toute la pensée, nous ne pourrions jamais comprendre les raisons harmoniques. Proclus de Lycie traita [de cela] publiquement dans quatre livres édités sur le premier d'Euclide, dans un exposé mathématique des théories des philosophes ; et s'il avait encore laissé pour nous ses commentaires sur le dixième livre d'Euclide [16], non négligeant, il aurait libéré nos Géomètres de l'ignorance [...]

Les attaques de Kepler, vise en particulier les propos de savants à qui il reproche d'avoir rejeté tout ce qui touche au noyau de la philosophie chez Proclus (et en particulier la théorie des cinq corps) et également le dixième livre d'Euclide :

> (Kepler, 1980, p.4) : Et voici que Schoner lui-même suivit cette persuasion de la Ramée, que les corps réguliers ne sont d'aucune utilité ; et pas seulement cela, mais il suivit l'arrêt de la Ramée, et négligea ou méprisa Proclus, par lequel Proclus il aurait pu apprendre l'usage des cinq corps, et dans les Éléments d'Euclide et dans la construction du Monde.

Kepler montre ici son engagement à suivre Proclus pour qui

> [...] c'est le point de vue philosophique néoplatonicien qui prime [ici]. Proclus s'intéresse à Euclide parce que ce dernier fait partie, selon lui, de l'École de Platon. Le but du traité d'Euclide est la construction des cinq figures géométriques dont Platon se sert dans le *Timée* pour expliquer la genèse des quatre éléments (le feu, l'air, l'eau et la terre) et celle du monde. (Lernould, 2010, p.14)

Kepler, montre également son attachement à Euclide dans sa défense de la classification des irrationnelles. Il attaque à nouveau, cette fois Snell :

> Voici Snell, le plus habile des Géomètres d'aujourd'hui, approuvant tout à fait de la ramée dans la préface aux problèmes de Ludolphe Van Ceulen ; il dit au commencement : « cette division en 13 espèces des choses qu'on ne peut exprimer, est inutile pour l'usage. » Je l'accorde s'il ne connaît aucun usage à moins que ce ne soit dans la vie commune, et s'il n'était aucun usage des contemplations physiques pour la vie. (Kepler, 1980, p.5)

C'est donc par un Livre I entièrement consacré, à la suite d'Euclide, à une classification des grandeurs caractéristiques des figures et à l'élaboration de degrés de connaissance de ces figures (nous y reviendrons), que débute l'*Harmonie du monde*. C'est le livre II qui nous intéresse ici au premier abord. Intitulé plus sobrement dans le corps du texte « De congruentia Figurarum Harmonicarum »(De la congruence des figures harmoniques), c'est un livre de vingt-quatre pages qui traite conjointement des pavages et des polyèdres.

Après avoir expliqué « l'essence Mentale ou « intellectuelle » des Figures régulières », Kepler s'applique à rendre compte de leur « Congruence » ou « Insociabilité ». Nous reprenons ci-

16. On rappelle que le Livre X traite des « grandeurs commensurables et incommensurables. Classification des lignes irrationnelles ». Le rôle des lignes remarquables des polygones et polyèdres réguliers y est important, (Euclide, 1990b, p.VI de la préface)

dessous les définitions et propositions qui amènent Kepler aux avancées annoncées, (Kepler, 1980, p.58 à 80) :

> I. Définition : Une congruence est autre dans une surface, autre dans un solide. Il y a une Congruence dans le Plan, lorsque les angles de plusieurs figures concourent un à un en un point, de sorte qu'aucune ouverture n'est laissée.
>
> II. Définition : Celle-ci est dite parfaite, lorsque tous les angles de chaque figure concourante concourent selon le même aspect, de telle sorte que tous les assemblages soient semblables entre eux, et que l'ordre des assemblages puisse être continué à l'infini.

Kepler définit ici les pavages archimédiens. Il passe ensuite aux pavages réguliers, puis aux différents cas possibles :

> III. Définition : Elle est dite très parfaite quand encore les figures concourant dans le plan sont de la même espèce.
>
> IV. Définition : Elle est dite imparfaite, quand certes la plus grande figure est entourée de partout par des contours semblables, et pourtant lorsque la continuation n'est pas donnée à l'infini, ou certes est donnée, mais non sans mélange de concours de diverses espèces. Elle est dite imparfaite de degré inférieur quand la plus grande figure n'est pas propre à concourir en tous les angles par une espèce semblable.

Il apparaît que Kepler maîtrise toutes les conditions nécessaires à l'existence des pavages réguliers et archimédiens. Les définitions V. à XI. définissent de manière totalement parallèle la congruence pour les solides. Dans l'étude de l'harmonie, les figures se caractérisent aussi bien dans le plan que dans l'espace comme nous le verrons dans la proposition 24 de conclusion. Il est à noter que Kepler précise qu'il n'étudie pas la congruence des figures solides entre elles.

Les définitions XII et XIII définissent les termes « congrues » et « incongrues ». Kepler énonce ensuite une suite de conditions nécessaires :

> XIV. Proposition : Pas moins de trois des angles des figures planes congruent dans le plan.
>
> XV. Proposition : Pas moins de trois angles des figures planes congruent ou se dressent pour former un angle solide.
>
> XVI. Proposition : La somme des angles des congruences dans le plan est toujours de quatre droits ; celle des congruences dans le solide est plus petite que cette somme.
>
> XVII. Proposition : Une figure d'un nombre impair de côtés dont des figures de deux espèces sont appliquées par les côtés, ne peut se rencontrer dans une forme égale dans tous les angles, soit dans un plan soit dans un solide.

Dans les propositions XVIII à XXI, Kepler, par une étude de tous les cas possibles, exhibe les onze pavages archimédiens du plan.

> XVIII. Proposition : Seulement Trois surfaces planes de la même figure emplissent très parfaitement un lieu plan, six Triangles à la fois, quatre Carrés à la fois, trois Hexagones à la fois.
>
> XIX. Proposition : Un lieu plan est empli six fois à partir des surfaces planes de deux figures ; deux fois à partir de cinq, une fois à partir de quatre, trois fois à partir de trois angles.
>
> XX. Proposition : Un lieu plan est empli congruement quatre fois à partir d'angles plans de trois espèces.
>
> XXI. Proposition : Les figures planes de quatre ou de plus d'espèces ne congruent pas avec les angles un à un, pour emplir le lieu entier.

Nous analyserons dans le détail les preuves de Kepler dans le chapitre 5 de cette thèse, précisons ici que Kepler procède par exhaustion des cas en considérant le nombre d'espèces différentes de polygones présents autour d'un nœud. Par exemple dans la proposition XXI, il indique qu'il n'est pas possible d'avoir quatre ou plus d'espèces présentes. En effet, avec un minimum de quatre polygones, la somme des angles minimale serait déjà supérieure à quatre droits. Et pour la proposition XIX, par exemple, il s'agit de comprendre que Kepler traite le cas où l'on ne considère que des figures de deux espèces différentes.

Les propositions XXI à XXVII, dans une étude similaire, aboutissent à la

> Proposition XXVIII : Il y a treize espèces de congruence très parfaite de degré inférieur dans le solide, à partir desquelles proviennent les treize corps d'Archimède.

Nous terminerons ici, avec une des deux conclusions du livre, la proposition XXIX :

> Il y a douze figures congrues dans l'univers, huit Fondamentales ou Premières, et quatre développées ou Étoiles.
>
> 1 - Le triangle
> 2 - La Carré
> 3 - Le Pentagone
> 4 - L'Hexagone
> 5 - L'Octogone
> 6 - Le Décagone
> 7 - Le Dodécagone
> 8 - Le polygone de vingt côtés
> 9 - L'Étoile Pentagonale
> 10 - L'Étoile Octogonale
> 11 - L'Étoile Décagonale
> 12 - L'Étoile Dodécagonale

Cette dernière proposition éclaire l'approche globale qui, nous le montrerons, apparaît clairement comme portée par le point de vue bien spécifique de Kepler sur l'Harmonie. Nous verrons que ceci explique aussi l'introduction des polygones étoilés. Nous reviendrons également sur les inexactitudes, pointées par exemple par (Lenngren, 2009, p.8) qui s'expliqueraient pour certaines par le fait que « Kepler did not draw the figures published in the book himself , they were drawn by Wilhelm Schickard, (Kepler, 1997, p.xxiv) ». Si cette hypothèse est à étudier, nous en présenterons une autre, portant sur les objets géométriques « connaissables », plus à même d'expliquer l'oubli de congruences de la forme $3.7.x_1$, $3.8.x_2$, $3.9.x_3$.

4.2.5 Des successeurs

Il est remarquable que les travaux de Kepler sur les pavages sont restés très longtemps dans une ignorance telle que Coxeter (1974) fait remonter la genèse suivante aux travaux de Badoureau de 1881. Et on ne trouve en effet que peu de traces de travaux sur les pavages avant cette date, contrairement à ceux sur les polyèdres beaucoup plus nombreux. [17]

17. S'il n'a, à notre connaissance, pas produit en lien direct avec les pavages, il est un auteur qu'on ne peut pas ne pas citer ici, Poinsot. Il a poursuivi les travaux sur les polygones étoilés et les polyèdres, mais, et sans que nous ayons la possibilité de développer ici ce point, il est intéressant de relever une proximité de forme entre ces travaux et ceux de Kepler. Il développe en effet dans (Poinsot, 1810) une étude des polyèdres après avoir élaboré une « théorie » sur les polygones, dans un parallélisme qu'il faudrait préciser avec les travaux de Kepler. Poinsot a été l'initiateur d'une « théorie de l'ordre », (Boucard, 2011), comprise comme la disposition mutuelle qu'on peut observer entre plusieurs objets et qui se développera comme outil de catégorisation pour les mathématiques. Des éléments de cette « théorie » seront repris par différents savants du XIX^e siècle, comme les mathématiciens Camille Jordan et Edouard Lucas, le philosophe Augustin Cournot ou l'ornemaniste Jules Bourgoin. Et il se confirme que Poinsot a lu Kepler. Une note de bas de page, (Poinsot, 1810, p.44), nous montre qu'il a lu l' *Harmonices Mundi* : « M. Lidonne a donné, à la suite d'une Table de tous les diviseurs des nombres, la description de ces corps qui sont au nombre de treize et que Kepler appelle les treize corps d'Archimède. Nous ignorons ce qui a pu donner lieu à cette dénomination de solides dont Archimède ne fait mention nulle part ; toutefois elle paraît antérieure à Kepler, comme on le voit par ce passage de son Harmonices Mundi : Perfecae in solido congruentiae gradus inférioris, species sunt tredecim ; ex quibus oriuntur tredecim Archimedea corpora. ». Et indiquons ici que Poinsot, rappelle ainsi une parenté qui n'apparaîtrait pas sinon avant le XX^e siècle.

A. Badoureau, un *mémoire sur les figures isoscèles*

Portée par Descartes, Euler, la question de la classification des polyèdres rencontre toujours autant de succès à la fin du XIX^e siècle quand Albert Badoureau[18] s'attelle au sujet. Il peut s'appuyer sur les écrits de Legendre (1809), de Poinsot (1810), de Cauchy (1813a,b) mais aussi de Gergonne (1819) et Catalan (1865).

C'est en 1881 qu'il rédige un mémoire sur ces questions :

> Le présent Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences le 25 novembre 1878, a pour objet de faire connaître le résultat de recherches géométriques auxquelles j'ai été conduit par l'étude des travaux de Bravais sur la symétrie et la cristallographie, et d'Eli de Beaumont sur le réseau pentagonal[19]. Quelques-uns des résultats qui y sont exposés avaient été antérieurement obtenus, à mon insu, en 1808, par Lidonne ; en 1819, par un collaborateur anonyme des *Annales de Gergonne*[20] , et enfin, en 1862, par M. Catalan, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences et inséré dans le Journal de l'École Polytechnique. Lidonne n'avait fait qu'énumérer, sous le nom de *solides d'Archimède* quelques-uns des polyèdres étudiés plus tard par Gergonne et M. Catalan. (Badoureau, 1881, p.47)

Un certain nombre de travaux sur les polyèdres, antérieurs à Badoureau, s'appuyaient sur la relation dite d'Euler. C'est par exemple en appui sur celle-ci et sur des méthodes en partie critiquées par Badoureau, que Gergonne établit un certain nombre de résultats sur les polyèdres et décrit, (Gergonne, 1819, p.18), des pavages de la sphère et du plan du type (3,6,3,6), (6,6,6), (3,3,3,3,3,3), (3,12,12), (4,4,4,4), (4,8,8). Badoureau, dans la partie de son étude concernant les pavages, annonce lui :

> J'ai également étudié toutes les manières possibles de découper un plan indéfini en polygones convexes réguliers sans vide ni duplicature, et de façon qu'on put superposer la figure à elle-même en plaçant un sommet sur n'importe quel autre, et j'ai trouvé, indépendamment des trois assemblages réguliers et des trois assemblages semi-réguliers de Gergonne, sept nouvelles solutions, (Badoureau, 1881, p.52).

Dans son étude des polyèdres, Badoureau utilise sa sensibilité sur la symétrie et fait parfois référence aux cristaux pour un parallèle avec les solides identifiés, voire « à différents *articles de Paris* (lanternes, presse-papier, etc.) », mais concernant la recherche des « assemblages isoscèles convexes » la démarche est très algébrique et éloignée des objets à savoir. Badoureau considère « des assemblages binaires, ternaires, quaternaires, quinaires et senaires » puis énonce que la somme des angles devant être égale à quatre droits, les valeurs des nombres de côtés des polygones ...

doivent satisfaire à l'équation $\sum(2-\frac{4}{n})=4$ ou $\sum\frac{1}{n}=\frac{K}{2}-1$.

Il donne ensuite sans justification une liste des assemblages possibles. Il en annonce vingt-et-un en considérant les assemblages (∞,∞), $(3,6,\infty)$, $(4,8,\infty)$, $(3,3,3,\infty)$. Il ne précise pas les assemblages possiblement obtenus par permutation. En utilisant ensuite un théorème sur la nécessaire parité du nombre de côtés d'un des polygones dans un assemblage ternaire, il exclut un certain nombre de pavages et donne alors une liste d'assemblages. Il manque alors les pavages

18. Jean Paul Albert Badoureau, né le 18 mai 1853 à Paris (Seine, France) et mort le 20 juillet 1923, est un mathématicien et ingénieur français

19. Nous renvoyons ici encore à des travaux récents de Boucard (Article accepté pour la Revue de synthèse par Jenny Boucard et Christophe Eckes : « La théorie de l'ordre de Poinsot à Bourgoin : mathématiques, philosophie, art ornemental ») qui analyse le foisonnement de productions au XIX^e siècle autour des pratiques liées aux questions de combinaison et d'ordre dans les sciences mathématiques, les sciences de la nature, l'art des tissus et l'art ornemental.

20. En fait il s'agit de Gergonne lui-même.

non réguliers suivants : (3,3,3,3,6) et (3,3,4,3,4). Pour le premier des deux sans qu'une raison de l'exclusion soit visible. Après l'analyse, dans la phase de synthèse, Badoureau réintroduira le pavage (3,3,4,3,4). Mais la planche finale, (Badoureau, 1881, p.93), sur laquelle manque les pavages (6,6,6), (3,3,3,3,6), fera dire à Coxeter, à juste titre, (Coxeter, 1974, p.668) :

> In 1881 the French geometer A. Badoureau made a fresh attempt to enumerate the uniform tessellations. Although he rediscovered all the rest, he missed the chiral one, Kepler's L, and this mistake was copier by at least two later authors"..

Il est à noter que, comme il a traité des symétries des polyèdres, Badoureau étudie les symétries des assemblages isoscèles convexes.

Lucien Lévy

Parmi les continuateurs évoqués par Coxeter, figure Lucien Lévy. Dix ans après l'écrit de Badoureau, L. Lévy dans un article du bulletin de la société philomathique, (Levy, 1891), reprend les travaux de Badoureau qu'il estime trop peu connus, et ne relève pas la principale erreur de Badoureau. Le texte par contre permet de préciser des assemblages possibles associant polygones étoilés et polygones convexes de façon très sommaire, mais l'apport principal, bien que mineur par rapport aux intuitions de Kepler, offre quelques éléments pour l'étude des pavages n-uniformes.

Des récréations mathématiques

Dans la même succession, on observe à nouveau une omission dans (Ball, 1908). Cet ouvrage s'apparente à un ouvrage de vulgarisation sous la forme de présentation de « récréations mathématiques ». Les auteurs, après avoir justifié l'intérêt de la question des pavages par un renvoi au problème initialement posé dans (Ozanam, 1694, p.101) sur le « Carrelage ou parquetage », s'appuient sur les travaux de Lévy pour compléter une approche basée sur l'étude d'une relation similaire à celle donnée par Badoureau. Et alors que les auteurs affirment que le quintuplet (3,3,3,3,6) vérifie la relation étudiée, ils concluent que cette solution « ne permet pas de constituer un pavage » ! (Ball, 1908, p.37)

Concernant les pavages, il est notable de ne voir aucun de ces auteurs citer les travaux de Kepler. Et dans la littérature aussi bien française, qu'anglo-saxonne, les travaux de Kepler sont finalement oubliés pendant près de trois cents ans et ses résultats sur les pavages non diffusés.

Sommerville

Duncan MacLaren Young Sommerville (1879 - 1934) était un mathématicien et astronome écossais. Il travailla en particulier sur les géométries non euclidiennes et ceci explique que son « Semi-regular Networks of the Plane in Absolute Geometry », (Sommerville, 1906), étende l'étude des pavages du plan euclidien, aux plans elliptique et hyperbolique. Pour la partie qui nous intéresse, Sommerville, comme Badoureau, bien qu'indépendamment, utilise une forme algébrique pour développer et présenter sa démarche. Il obtient à nouveau tous les pavages archimédiens, sans en oublier aucun et en pointant la particularité de (3,3,3,3,6) :

> The type T_4H is one exception to the rule stated above, for it does admit of a variation. The network is asymmetrical, its mirror image being different from itself. It exists, therefore, in two enantiomorphic forms. The one can be obtained from the other by turning the plane over.(Sommerville, 1906, p.730)

Mais, Sommerville rédige dans cet article une courte étude historique dans laquelle il pointe, lui, les avancées de Kepler sur les pavages et les polyèdres. Il identifie, pour ces derniers, les pistes d'exploration ouvertes par Kepler. Concernant les pavages :

> Kepler has also gone into some detail regarding the Euclidean networks. He gives all the developable species of nodes and some of the others, with examples of networks formed with them, and other patterns, containing star-polygons, which may be derived from them.(Sommerville, 1906, p.730)

Nous renvoyons à (Grünbaum et Shephard, 1977, p.242) pour une liste des travaux nombreux qui suivirent cette redécouverte des pavages archimédiens et les pistes de généralisations qui ont été envisagées puis éventuellement développées.

4.2.6 Conclusion

Après Sommerville, Coxeter, engagé dans des travaux sur les polytopes réguliers, a donc lui aussi reconnu les avancées déterminantes réalisées par Kepler, aussi bien sur les pavages :

> More remarkably, he enumerated the uniform tessellations (analogous to the Archimedean solids). In these the tiles are regular polygons of several kinds, but with the same arrangement at each vertex [ref 3, p.117, Figs. D, E, F, L, N, S, V, Mm, Li]. One of them (his Fig L, our Fig. 11 .8), is exceptional, because it is chiral like his snub dodecahedron : it cannot be continuously moved into the position of its reflected image. (Coxeter, 1948)

que sur les polyèdres :

> The second way in which Kepler sought to generalise the Platonic solids was by regarding the polyhedra as regular tessellations of the surface of a sphere and then, by analogy, considering the regular tessellations of the Euclidean plane. (Coxeter, 1974, p.668)

In fine, la synthèse concernant ce problème n'a en fait été réalisée que récemment. Après différents travaux au cours du vingtième siècle, c'est l'article de Grünbaum et Shephard (1977) qui reprenant les travaux anciens, présente le problème dans sa globalité et donne les pistes de recherche en cours. Cette synthèse tardive, 1977, pourrait expliquer la quasi-absence des pavages archimédiens dans la culture mathématique de base contemporaine.

Il apparaît que les objets considérés ici, aussi simples apparaissent-ils aujourd'hui, ont eu et ont encore une vie mathématique mouvementée et que la fiction d'une rigueur parfaite des mathématiques n'a pas lieu d'être. L'étude des démarches historiques qui ont mis à jour les pavages archimédiens prouve que si rigueur il y a, elle apparaît *a posteriori*, et bien après l'élaboration des concepts. Nous allons préciser ce point de vue global dans le chapitre suivant au niveau de l'étude d'une genèse particulière.

La richesse de cette étude historique montre également que, le « défrichage » réalisé par les précurseurs, les premières avancées dans la définition des objets, sont autant de pistes à explorer pour progresser dans la connaissance de ces objets et surtout dans la compréhension des élaborations théoriques qui les font naître. La diversité des entrées nous renvoie à la diversité des perceptions des mathématiques, des façons de vivre les mathématiques. Elle nous renvoie également à la complémentarité des approches pour autant que l'on envisage les mathématiques comme une œuvre collective. Ainsi diversité et complémentarité sont des caractéristiques à retenir dans la mesure où elles peuvent se croiser pour permettre la création mathématique.

Chapitre 5

Le cas Kepler

Sommaire

5.1 Formation et premier ouvrage 106
5.1.1 Éléments biographiques 106
5.1.2 Vers la publication du *Mysterium Cosmographicum* 107
5.1.3 Une dernière leçon 110
5.2 Éléments de la pensée képlerienne 111
5.2.1 Proclus 111
5.2.2 Quel mode de pensée pour Kepler à l'heure de l'*Harmonie du monde* ? 113
5.2.3 Les *non-êtres* de Kepler 117
5.3 Retour sur les pavages archimédiens 119
5.4 Conclusion 125

Le titre de ce chapitre reprend celui d'un ouvrage de Pauli *et al.* (2002), contenant un court essai de Pauli sur la pensée képlerienne. Ce texte, initialement paru en 1952, sous le titre « L'influence des représentations archétypiques sur la formation des théories scientifiques chez Kepler » s'inscrit dans l'interrogation de Pauli sur l'élaboration de lois naturelles. Klein (2000) évoquait ainsi cette recherche de Pauli :

> Pauli reste perçu comme un monomaniaque de la physique, ne croyant qu'aux vérités mathématiques que la raison est capable de plaquer sur le monde. La réalité fut tout autre. Pauli, loin de ne s'intéresser qu'à la seule physique, se passionna pour la philosophie et pour différentes formes de mysticisme, notamment pour la kabbale juive. [...] À l'opposé de la conception purement empiriste qui veut que les lois naturelles soient tirées des seules données de l'expérience, Pauli voulait mettre en avant le rôle joué par l'intuition dans la formation des concepts scientifiques. Il lui sembla que ce rôle de l'inconscient était implicitement contenu dans la notion d'archétype proposée par Kepler au début du XVII^{e} siècle

A contrario, à la même époque, Einstein renvoie lui, le succès de Kepler à la confrontation avec les faits de l'expérience.

> He had to free himself from an animistic, teleologically oriented manner of thinking in scientific research. He had to realize clearly that logical-mathematical theoretizing, no matter how lucid, could not guarantee truth by itself ; that the most beautiful logical theory means nothing in natural science without comparison with the exactest experience. Without this philosophical attitude, his work would not have been possible. (Kepler et Baumgardt, 1951, p.13)

Nous allons voir que Kepler a su se créer un chemin bien particulier, sans doute unique, plus complexe que ne le laisse entendre Einstein. Cette question difficile de la pensée du réel par Kepler va faire l'objet de la première partie de ce chapitre, avant que nous ne tentions d'en voir les caractérisations dans la recherche de Kepler sur les pavages. Plusieurs auteurs ont étudié Kepler de façon très globale, nous allons ici nous concentrer sur les dimensions « mathématiques » de son œuvre, en laissant un peu de côté certaines problématiques astronomiques, même si cela reste assez illusoire comme on va pouvoir le constater.

5.1 Formation et premier ouvrage

5.1.1 Éléments biographiques

Pour développer quelques brefs éléments biographiques, nous nous appuyons sur (Caspar, 1958), référence pour la biographie de Kepler [1] et la publication de ses œuvres [2], mais également sur (Delambre, 1821), sur un éloge de Condorcet, (Crepel, 1998), lu en 1777 à l'Académie, sur (Gingerich, 1973) et (Faidutti, 2010).

Il n'apparaît pas tout le temps dans les récits, que la famille Kepler était noble et s'était longtemps distinguée au service des empereurs. Il est vrai qu'au moment de la naissance de Johannes (le 27 décembre 1571 à Weil) la fortune avait déserté la famille et les conditions de vie du jeune Kepler étaient difficiles. Né prématurément, de santé tout d'abord fragile, il vit une ambiance familiale agitée. Son père, mercenaire dans l'armée du Duc de Wurtemberg, souvent parti en campagne, finit par disparaître en 1589. Johannes parvient à suivre des études, malgré un intermède de 1579 à 1581 pendant lequel il doit travailler. Il est, en 1589, autorisé à entrer à l'université de Tübingen et suivra une formation complète qu'il souhaite orienter vers la théologie afin de devenir ministre luthérien. Des circonstances diverses et le soutien de son professeur de mathématiques à l'université, Michael Maestlin, qui l'a formé à la théorie copernicienne, lui font finalement accepter un poste de professeur de mathématiques à l'école protestante de Graz. Bien que l'éloignant de son Wurtemberg natal, cette période fut, pour Kepler, un temps de stabilité (1594 - 1600), et il y en eut peu, qu'il mit à profit pour faire paraître le *Mysterium Cosmographicum*, (Kepler et Segonds, 1993). Il le fit parvenir, parmi d'autres à Tycho Brahé [3], qui le reçut en 1598 et invita aussitôt Kepler à le rejoindre. Ce premier échange fut le début d'un court mais tumultueux et productif parcours commun qui vit tout d'abord Kepler retrouver Brahé, après avoir été banni de Styrie, tombée sous la domination de Ferdinand II. Kepler travailla alors à la rétrogradation de mars, à l'élaboration des futures tables rudolphines mais poursuivit aussi la construction de son *Harmonices Mundi*. La mort de Brahé survint brutalement, le 24 octobre 1601, et Kepler fut alors nommé mathématicien impérial, auprès de Rodolphe II. Kepler connaît à nouveau une période de plus grande sérénité. Seront publiés en particulier durant cette période : *Astronomia pars Optica*, (Kepler et Chevalley, 1980), en 1604, sur l'optique et la vision, *De Stella nova in pede serpentarii*, en 1604, sur la supernovae, *Astronomia Nova*, en 1609, où Kepler énonce deux premières lois fondamentales en astronomie, *Strena sive de Nive sexangula*, également en 1609, où il rend compte de sa découverte de la symétrie hexagonale des flocons de neige et en 1610 *Dissertatio cum Nuncio Sidero*, en soutien à Galilée. L'année 1611 fut une année d'infortune aussi bien familiale que politique pour Kepler, qui perdra sa femme puis trois de ses cinq enfants issus de ce premier mariage, et qui dans les troubles politiques commence à perdre ses appuis. Il envisage rapidement de partir de Prague,

1. De nombreuses biographies moins scientifiques ont également été publiées, par exemple (Koestler, 1960), jugée « engaging and sometines exasperating » par Caspar ou (Luminet, 2010) ou (Chardak, 1989)

2. L'édition de référence des œuvres complètes de Kepler est en cours de publication à Munich, chez l'éditeur Beck.

3. 1546 - 1601

pour Linz, ce qu'il fera en avril 1612, après la mort de Rodolphe II, précédemment déposé. Il sera mathématicien à Linz de 1612 à 1626, années qui verront la publication, en 1614 de *De Vero Anno quo Aetermus Dei Filius Humanam Naturam in Utero Benedictae Virginis Mariae Assumpsit*, travail sur l'année de naissance du Christ, en 1615, de *Stereometria doliorum vinarorum*, sur les unités de mesures usuelles dans le commerce, de son *Epitome Astronomiae Copernicanae* ou Kepler présente l'astronomie copernicienne, de l' *Harmonices Mundi* en 1619, d'une réflexion sur l'astrologie en 1620, *Astrologicus* et de tables de logarithmes en 1624, *Chilias logarithmorum*. A nouveau pourchassé par la guerre, Kepler doit fuir Linz et trouver refuge à Ulm puis Sagan dans des conditions périlleuses. Il trouve l'énergie de travailler aux tables rudolphines, point d'aboutissement de longues années de recherche, qui seront publiées en 1627. Kepler rédigera à cette époque *Somnium, seu opus posthumum de astronomia*, un récit fantastique d'un voyage de la Terre à la Lune, qui paraîtra en 1634. Kepler mourra à Ratisbonne en 1630, où il venait faire valoir ses revendications financières.

5.1.2 Vers la publication du *Mysterium Cosmographicum*

D'après (Caspar, 1958, p.36), Kepler se souvient de deux événements marquant de son enfance. En 1577, sa mère, du haut d'une colline lui montra le passage d'une grande comète et en 1580 son père lui fit observer, par une nuit étoilée, une éclipse de lune. En dehors de ses deux instants très particuliers, ce n'est pas dans le contexte familial que Kepler a pu trouver matière à sa formation. Toutefois, les ducs du Wurtemberg menant une politique volontariste pour l'éducation, des moyens sont mis en œuvre pour la formation des jeunes du duché. Ainsi, le jeune Johannes est envoyé à l'école où il apprendra rapidement l'allemand et le latin, mais pour trois ans seulement, son père le retirant bientôt pour travailler aux champs puis dans la taverne familiale. Après cette période loin des classes, il a l'occasion de bénéficier d'une bourse accessible aux jeunes protestants pauvres et prometteurs. Bien que sans beaucoup de bagages, Johannes Kepler réussit une épreuve sélective qui lui permettra d'accéder au petit séminaire d'Adelberg. C'est une fois admis au grand séminaire, qu'il suivra un enseignement basé sur le Trivium : grammaire, rhétorique et dialectique et sur le quadrivium : arithmétique, géométrie, musique et astronomie. Il poursuivra sa formation à l'université de Tübingen avec l'étude du latin, du grec, de l'hébreu, de la dialectique, de la rhétorique et des mathématiques, en vue de devenir pasteur. Esprit curieux et travailleur infatigable, Kepler enrichit sa formation par une fréquentation assidue de la bibliothèque. Il profite des cours de Michel Maestlin, astronome acquis à la pensée copernicienne, et qui professe à l'université les mathématiques. Kepler sera un fervent disciple de ce maître avec qui il conservera une relation privilégiée. C'est ainsi, puissamment outillé d'une solide formation classique et d'un intérêt certain pour l'astronomie qu'il commencera sa carrière comme professeur de mathématiques à Graz.

Les travaux astronomiques de Kepler ont trouvé leur source à l'université, mais c'est à Graz qu'il les développa. Kepler, ayant toujours souhaité que sa pensée soit la plus explicite possible, rédige dans ses publications de nombreux passages où il délivre non seulement sa pensée scientifique mais des éléments la contextualisant. Il en est ainsi dans sa préface du *Mysterium Cosmographicum*, (Kepler et Segonds, 1993, p.31) :

> [...] je voudrais te dire, tant sur la raison de ce petit livre que sur la raison de mon entreprise, certaines choses qui à mon avis te permettront de mieux comprendre et de mieux me connaître.

Et Kepler d'afficher tout de suite sa posture :

> Déjà du temps où, à Tübingen, il y a six ans, je travaillais sous la direction du très célèbre Maître Michel Maestlin, j'étais remué par les multiples incommodités de l'opinion usuelle sur le monde [...], au point [...] que j'ai même composé une disputation soignée au sujet du premier mouvement, pour montrer qu'il se produit par

> suite de la rotation de la terre. J'en étais venu à assigner aussi à la terre le mouvement du soleil, mais alors que Copernic le fait à partir de raisons mathématiques, je le faisais à partir de raisons physiques ou, mieux encore, métaphysiques. Et dans ce but je me mis à rassembler peu à peu soit à partir de l'enseignement de Maestlin soit par mes propres forces, les avantages que Copernic présente, du point de vue mathématique, par rapport à Ptolémée [...]. (Idem)

Dès ce premier extrait de son premier ouvrage, les positions sont claires et en ceci Kepler ne variera pas :

> However, Kepler did not subsequently abandon the broader approach of the Mysterium cosmographicum. Similar metaphysical arguments reappeared in his Harmonice mundi (1619), and he reissued the Mysterium cosmographicum in a second edition in 1621, in which he qualified only some of his youthful arguments. Given the persistence of these ideas in Kepler's work, it is clear that he himself did not experience some sort of conversion experience and become a modern scientist. (Voelkel, 2001, p.2)

Nous verrons plus loin que l'originalité de Kepler est pourtant indiscutable, que ses travaux ont une grande part de modernité et nous préciserons la relation de Kepler aux objets des « expériences ». Nous voyons pour l'instant que, pour Kepler, c'est bien l'idée d'une justification *a priori* de la nature qui peut guider ses recherches. Toutefois cette recherche *a priori* peut prendre différentes voies et c'est aussi là, la force de Kepler qui saura développer aussi bien des arguments mathématiques, que physiques[4], que métaphysiques. Le projet est le suivant :

> Enfin en l'année 1595, alors que je désirais occuper le loisir que me laissaient mes cours d'une manière profitable et accordée à ma charge, je me jetais de toute la force de mon esprit sur ce sujet. Et il y avait alors trois choses particulièrement dont je cherchais avec obstination pourquoi elles étaient ainsi et non pas autrement, à savoir : le nombre, la grandeur et le mouvement des orbes. Ce qui me poussait à m'attaquer à ce problème, c'est la belle harmonie des choses immuables, Soleil, étoiles fixes et espace intermédiaire, avec Dieu le Père, le Fils et le Saint Esprit, similitude que je poursuivrai plus à fond dans ma cosmographie. (Kepler et Segonds, 1993, p.32)

Concernant les orbes, Kepler explore plusieurs pistes :

> Je m'attaquai d'abord à la question au moyen de nombres, et je cherchai si un orbe ne serait pas le double d'un autre, le triple, le quadruple ou tout autre rapport, ou si ce rapport ne se trouvait pas entre les écarts d'un orbe par rapport à un autre. [...] N'ayant rien obtenu par cette voie, j'essayai l'approche par une autre voie extraordinairement audacieuse : entre Jupiter et Mars ainsi qu'entre Venus et Mercure, j'intercalai deux nouvelles planètes [...] Je pensais pouvoir ainsi produire une certaine régularité dans les rapports [...] Mais même l'interposition d'une planète dans l'immense hiatus entre Mars et Jupiter ne suffisait pas. (op. cit., p.32 et 33)

Kepler fit d'autres tentatives, avec des sinus (Figure 5.1), puis avec des figures régulières, après avoir tenté de montrer à ses étudiants l'organisation des grandes conjonctions (Figure 5.2).

Kepler passa l'été à tester la première hypothèse, sans succès, succès qu'il ne rencontra pas plus pour la deuxième. Toutefois :

4. Que perçoit la sensation.

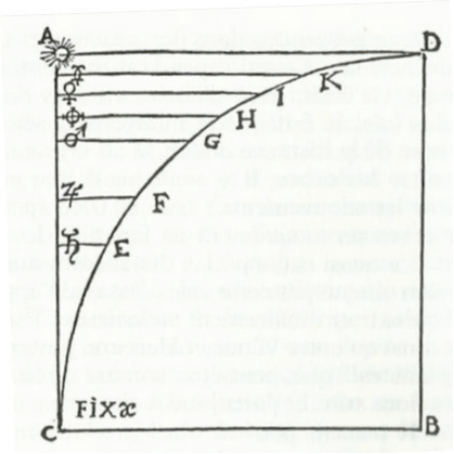


Figure 5.1 – Recherche de régularité utilisant les sinus

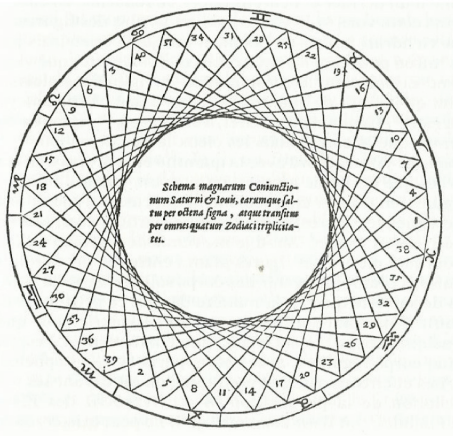


Figure 5.2 – Organisation des grandes conjonctions

> la considération de figures me plaisait, en tant qu'il s'agit de quantité et donc d'une réalité antérieure au ciel. [...] Aussi je me remis à l'étude : pourquoi mettre des figures planes entre des orbes solides ? Faisons plutôt intervenir des corps solides. Et voilà Lecteur, la découverte qui fait la matière de tout ce petit livre. Car il suffit d'être un tant soit peu expert en géométrie pour que ces quelques mots fassent immédiatement venir à l'esprit les cinq corps réguliers, avec les rapports de leurs sphères inscrites et circonscrites, et pour que l'on ait devant les yeux le scolion de la proposition XVIII des *Éléments* d'Euclide [...]. (Op. cit., p.36)

Dès le 2 août 1595, Kepler fait part, à mots couverts, de son hypothèse à Maestlin, (op. cit., p.202) et le 14 septembre 1595 il la précise dans une nouvelle lettre à son maître, (Caspar, 1938a, p.32) :

> Accipe inventum.
> Inter intimam ♄ et summam ♄ superficiem est Cubus, inter ♄ et ♂ Pyramis, inter ♂ et ♁ (Randbemerkung : ♁terra) Dodecaedron, inter ♁ et ♀ Icosaedron, inter ♀ et ☿ Octaedrum sive Octaedrj quadratum, [...] [5]

Cette organisation emblématique sera l'un des fondements des travaux de Kepler. Mais Kepler, loin de se reposer sur cette intuition initiale, n'a de cesse de rechercher l'harmonie dans tous les objets qu'ils manipulent, figures planes, gammes musicales, nombres, ...

> The polyhedral hypothesis became the centerpiece of Kepler's first book, the Mysterium cosmographicum [...]. The polyhedral hypothesis proved to be a very fertile source of ideas, and Kepler buttressed the argument with numerous auxiliary arguments based on the astrological, numerological, and metaphysical appropriateness of the arrangement he was proposing. (Voelkel, 2001, p.4)

Mais si Kepler fonde ses développements sur de telles analogies, nous le verrons, il sait aussi développer un autre mode de pensée.

5.1.3 Une dernière leçon

On l'a déjà dit, la publication de ce premier ouvrage de Kepler permit la rencontre avec Tycho-Brahé après son expulsion de Graz en septembre 1600. La relation avec Tycho-Brahé a été houleuse, pour des questions financières et scientifiques. Concernant ces dernières, les attentes initiales de chacun des deux protagonistes sont trop distinctes pour que Kepler trouve son compte dans la tâche que lui confie Brahé :

> Despite Kepler's express hope of receiving from Tycho improved values for the planetary distances with which to test and improve the polyhedral hypothesis, Tycho would not provide this information. Instead, he assigned Kepler to work on the theory of Mars and gave him observations for just that planet. Despite being barred from developing the primary argument from the Mysterium cosmographicum, Kepler could still pursue his motive force hypothesis. And during his first few months with Tycho, Kepler experienced some remarkable successes in his research with Mars. (Voelkel, 2001, p.6)

Les relations s'apaiseront toutefois, à tel point que c'est à Kepler que Tycho-Brahé demandera de faire fructifier sa richesse, le recueil d'années d'observations astronomiques. Si Kepler possède déjà l'imagination et une excellente connaissance mathématique, il apprend auprès de

5. Traduction libre : Voici l'invention.
Entre les surfaces interne de Saturne et externe de Jupiter est le cube, entre Jupiter et Mars la pyramide (c'est-à-dire le tétraèdre), entre Mars et la Terre, le dodécaèdre, entre la Terre et Vénus l'icosaèdre, entre Vénus et Mercure, l'octaèdre ou carré octaèdre, ...

Tycho-Brahé la rigueur de l'observation et reçoit une leçon d'humilité du grand scrutateur du ciel qu'était Tycho-Brahé.

5.2 Éléments de la pensée képlerienne

> En ce bas monde ou sur la terre se cache une nature intellectuelle, qui est capable de géométrie.
>
> Kepler

Comme on l'a vu dans la chapitre 4, Kepler se revendique clairement de Proclus. Nous présentons donc dans un premier temps quelques éléments de la pensée Proclusienne. Ce qui nous intéresse ici c'est le point de vue philosophique de Proclus, dont les commentaires sur le livre I des Éléments, (Proclus, 1948), sont cités sur la page de titre du livre I de l'*Harmonie du monde*.

5.2.1 Proclus

Pour Itard (1949) :

> Proclus, né à Byzance en 412, mort à Athènes en 486, nous apporte dans son Commentaire, non pas, comme Pappus dans sa collection, des démonstrations nouvelles, des découvertes mathématiques même, dont il paraît être incapable, mais des renseignements précieux, parce qu'ils sont à peu près les seuls qui nous restent, sur bien des points de l'histoire des mathématiques pré-euclidiennes [...] Le mathématicien n'a actuellement rien à apprendre de ce commentaire, alors que la lecture d'Euclide, Archimède, Apollonius, Diophante, Pappus, Ptolémée, Héron même, peut lui apporter encore bien des éléments de réflexion. L'historien des sciences aura au contraire toujours besoin de recourir à Proclus.

Proclus, un des derniers représentants de l'École d'Athènes, rédigea son commentaire des *Éléments* près de huit siècles après leur rédaction par Euclide.

Pour (Lernould, 2010, p.14)

> Les deux prologues au commentaire offrent ainsi à Proclus le lieu de développer des thèmes majeurs de la philosophie des mathématiques de l'Antiquité tardive. C'est ainsi que la première question préalable - le premier « point capital » ($\kappa\epsilon\phi\alpha\lambda\alpha\iota\sigma\nu$) - qui est traitée dans le Prologue I (chapitre un) développe l'idée que l'essence mathématique est intermédiaire entre l'essence intelligible (simple, immatérielle) et l'essence sensible (divisée dans la matière). De la même manière, le Prologue II s'ouvre sur un premier point capital qui est celui du statut ontologique des objets géométriques, à savoir, s'ils sont en eux-mêmes séparés ou non des choses sensibles.

Pour (Lernould, 2010, p.16) toujours,

> Proclus rejette fortement l'idée aristotélicienne selon laquelle les objets du géomètre seraient des concepts empiriques abstraits. Les cercles « imaginés » du géomètre ne dérivent pas par « abstraction » des cercles sensibles.
>
> les objets mathématiques ne peuvent pas tirer leur existence d'une opération de l'âme humaine qui, œuvrant par les procédés de l'abstraction et de l'induction, les produirait en tant que réalités postérieures par rapport aux sensibles, et dépendantes de ces derniers. [...] l'abstraction et l'induction étaient considérées comme utiles pour passer de l'appréhension des objets sensibles à la pensée de concepts généraux, mais

> ni l'une ni l'autre n'étaient considérées comme étant des méthodes scientifiques à proprement parler. En somme les véritables sciences mathématiques portent sur les objets mathématiques antérieurs aux objets sensibles et indépendants de ces derniers. (ibid., p.46)

Proclus développe trois arguments en faveur d'objets mathématiques antérieurs aux objets sensibles (ibid. p.46) : « l'exactitude et la variété des objets mathématiques ainsi que le caractère irréfutable des sciences mathématiques », « les démonstrations, basées sur ce qui est universel, sont meilleures que celles basées sur ce qui est particulier ou même individuel », « l'âme ne peut être inférieure à la matière ; rapport de l'âme avec l'intellect ». Pour Proclus, les véritables objets mathématiques ne peuvent donc avoir de rapport avec les objets produits par abstraction. Dès lors si les objets mathématiques précèdent les objets sensibles individuels, la connaissance sur les objets universels est première et le raisonnement sur les universels est supérieur aux autres.

Précisons aussi que l'on retrouve chez les néo-platoniciens les idées de hiérarchie ontologique et de degré de connaissance :

> Ontologiquement [les objets mathématiques] ont des propriétés en commun à la fois avec les choses sensibles et avec les choses intelligibles. C'est ainsi qu'est établie une hiérarchie ontologique de tous les êtres qui est la suivante : êtres intelligibles, mathématiques, physiques, et dans laquelle chaque chose particulière trouve sa place.
>
> En même temps, à une classification ou hiérarchie ontologique correspond une classification ou hiérarchie épistémologique : chaque objet est associé à une faculté cognitive et correspond à un degré de connaissance qui se saisit de son objet en fonction des critères qui lui sont propres. Dans le cadre d'une telle hiérarchie, la connaissance des objets « inférieurs » c'est-à-dire plus complexes, prépare potentiellement la voie à une connaissance des objets « supérieurs » plus simples. [...] l'étude des objets mathématiques peut conduire à une compréhension des formes et de l'être en lui-même. (op. cit., p.142)

Ainsi, si la connaissance sur les objets universels est première, les objets « inférieurs » ne peuvent pas être écartés pour envisager un accès à la connaissance.

Pour terminer sur cet aspect rappelons l'introduction par Proclus d'une quatrième faculté cognitive en lien avec la définition des objets géométriques.

> Une ligne droite géométrique, au contraire, ne peut être rien d'autre que droite, et un cercle géométrique ne peut être que parfaitement rond. Cela est impliqué dans leur définition. La sensation ($\alpha\iota\sigma\theta\eta\sigma\iota\varsigma$) ne peut donc être la faculté de connaissance appropriée pour une représentation fidèle des figures géométriques. D'un autre côté, la raison discursive ($\delta\iota\alpha\nu\sigma\iota\alpha$) conçoit les objets géométriques et leurs propriétés comme $\lambda\sigma\gamma\sigma\iota$, lesquels ne sont pas étendus spatialement. [...] Il doit donc y avoir une faculté de connaissance, distincte de la sensation et de la $\delta\iota\alpha\nu\sigma\iota\alpha$, qui puisse représenter les objets géométriques comme figures, c'est-à-dire comme objets étendus et parfaits. [...] La $\varphi\alpha\nu\tau\alpha\sigma\iota\alpha$ devient ainsi la quatrième faculté de connaissance dans cet ordre : $\nu\sigma\upsilon\varsigma$, $\delta\iota\alpha\nu\sigma\iota\alpha$, $\varphi\alpha\nu\tau\alpha\sigma\iota\alpha$, $\alpha\iota\sigma\theta\eta\sigma\iota\varsigma$, *i.e.* : intellect, raison discursive, imagination et perception sensible. (ibid. p.142)

Par ailleurs, et cela sera important pour notre étude des travaux de Kepler, pour Proclus, il faut encore distinguer deux espèces : les nombres et les grandeurs. D'une part car, (ibid. p.142) :

> les nombres arithmétiques et les figures géométriques présentent des propriétés opposées quant à l'augmentation et à la diminution à l'infini

et d'autre part car

> tous les nombres sont commensurables : leur commune mesure étant l'unité ; tandis que les figures géométriques de même espèce ne sont pas toutes commensurables mais peuvent être inexprimables [...]

Nous verrons que associé à la hiérarchisation ontologique c'est une telle approche qui organisera le milieu de la recherche chez Kepler.

5.2.2 Quel mode de pensée pour Kepler à l'heure de l'*Harmonie du monde* ?

Même si le projet de l'écriture de l'*Harmonie du monde* est précoce, il aura fallu près de vingt ans pour que l'ouvrage voit le jour.

En effet, les correspondances avec ses amis montrent qu'une grande partie du matériel nécessaire à l'élaboration de l'Harmonie était disponible dès 1599.

> Kepler worked out the principal ideas of the *Harmonices Mundi* in the summer months of 1599, at a time of personal tragedy, with the death oh his young daughter and insecurity as the Counter-Reformation came to Graz. These ideas were described in his letters to Edmund Bruce in Padua, Herwart von Hohenburg in Munich, and Michael Maestlin in Tübingen, especially in the detailed writing of 6 August and 14 September to Herwart and 29 August to Maestlin. (Kepler, 1997, p.xvi)

Dans les trois lettres dont il est question ici, (Caspar, 1938b, p.21) [6], (Caspar, 1938b, p.62) et (Caspar, 1938b, p.43), Kepler présentent à ces correspondants son programme et portent trois questions essentielles :

- Celle de l'origine de l'harmonie musicale. Et pour cette question très ancienne

> Kepler rejected the explanation in terms of abstract numbers, seeking instead the origins of the musical hamonies in the archetypal forms of geometry; in fact in the division of the circle by the vertices of regular polygons. (Kepler, 1997, p.xviii)

- la seconde porte sur les relations entre les harmonies et les aspects astrologiques. Simon, rapporte que Kepler a cru jusqu'en 1608 à l'identité des harmonies musicales et des aspects mais que

> Sa soumission aux données l'a progressivement amené à changer d'avis, en particulier : « Il est juste sur ces matières aussi d'écouter le témoignage de l'expérience : car c'est elle qui comme pour le reste fait la conviction première, avant les raisons ». (Simon, 1979, p.169)

- La troisième question traite bien entendu des orbites et des vitesses des planètes. Là encore, Kepler associe vitesse des planètes à l'harmonie musicale et donc aux harmonies polygonales. Il est à noter qu'au delà des analogies, la symbolique utilisée par Kepler représente ces associations. Dans une lettre à Herwart von Hohenburg d'avril 1599 on lit ainsi :

> Et cum sint harmoniae octo : unisonus, tertia mollis, tertia dura, quarta, quinta, sexta mollis, sexta dura, octava : erunt etiam ut est in meo libello Cosmographico, octo radiationes, conjunctio, sextilis, quintilis, quadratus, trigonus, sesquiquadratus, biquintilis, oppositus, quos sic soleo signare : ☌ ⚹ ☍ □ △ ⯐ ✡ ☍. (Caspar, 1938a, p.310)

6. Edmund Bruce était un anglais connu pour être en contact avec Galilée à Padoue.

Ainsi les polygones réguliers servent également d'icônes dans l'étude des harmonies musicales, qui sont alors visuellement associées aux congruences de polygones et aux pavages. En termes de représentations symboliques, on peut noter que Kepler manipule de nombreux diagrammes astrologiques (organisations des maisons), mettant déjà en évidence des pavages avec des carrés et des triangles.

Notons également que dans la lettre du 6 août 1599 figure déjà une discussion approfondie sur les pavages utilisant le pentagone et le pentagone étoilé (« pedem bufonis, ut germani dicunt »)

Entre ces premières intentions et 1619, si quelques éléments ont bien entendu évolués, l'appréhension du monde de Kepler demeure inchangée :

> Dans l'intervalle le projet a mûri, mais il n'a pas sur l'essentiel varié ; la leçon d'humilité donnée par Tycho devant les données d'observation, la découverte de l'ellipticité des orbites et de la loi des aires lui donnent une nouvelle profondeur, mais ne viennent pas détruire l'idée d'une justification mathématique *a priori* des lois de la nature.
>
> Il importe là encore de bien voir que Kepler unit intimement ce que nous séparons ; le titre à lui seul atteste l'intrication en une seule réflexion de la mathématique, la métaphysique, la musique, la psychologie, l'astrologie et l'astronomie et suffit à nous dépayser dans un univers culturel insolite. (Simon, 1979, p.148)

(Field, 1995, p.14), cherchant à positionner Kepler dans nos cadres actuels, nous propose l'analyse suivante :

> La position philosophique que Kepler adopte envers les théories astronomiques est donc celle que l'on nomme aujourd'hui « réaliste », selon laquelle la théorie mathématique présente un modèle qui permet à l'astronome de se prononcer non seulement sur les apparences astronomiques mais aussi sur les positions physiques des astres dans l'Univers. [...] En bon chrétien, platonicien et réaliste, Kepler cherchait à décrire non pas un modèle cosmologique qui expliquerait l'état présent de l'Univers, mais plutôt *le* modèle qui aurait servi au créateur comme archétype de la Création.

et alors

> dans ce contexte cosmologique le mot « beau » implique une simplicité mathématique (ibid., p.15)

et encore

> Cette fusion d'idées platoniques et chrétiennes, avec un alliage assez léger d'opinions de Proclus, a été caractéristique de la pensée de Kepler depuis ses débuts intellectuels. (ibid., p.17)

Mais si ces affirmations peuvent rendre compte d'une fidélité à certains anciens et d'un fonctionnement assez classique, elles montrent peu le positionnement de Kepler qui a fait de lui l'innovateur dans de nombreux domaines. Pour (Simon, 1979, p.449), Kepler est autre chose que le dernier des grands anciens :

> Dans tous les domaines qu'il aborde, il rompt de manière consciente avec ses prédécesseurs. Même quand il émerge le plus manifestement d'un passé révolu, dans les savoirs que nous considérons comme fossiles, il est profondément novateur.
>
> De même sa métaphysique et sa psychologie, bien qu'elles s'inspirent des pythagoriciens et des néo-platoniciens, ne sont en rien de pures et simples répétitions du

> passé. Elles comportent un élément inédit, bien qu'il soit lui aussi ambigu : c'est la rénovation systématique de la théorie des harmonies, conçues comme organisatrices du cosmos et méthodiquement confrontées aux données de l'expérience ; c'est aussi le besoin d'en justifier la nature et la fonction par une raison dernière, avec la valeur archétypale accordée à la sphère comme symbole de la trinité divine [...]

Sur ce point Pauli précise :

> Les *représentations archétypales* de Kepler ont une structure *hiérarchique* : au sommet se trouve l'impénétrable divinité trinitaire du christianisme [...] Pour Kepler, l'image la plus belle, celle qui figure l'idée de l'essence même de Dieu (*idea ipsius essentiae*, est la sphère à trois dimensions. (Pauli *et al.*, 2002, p.41)

Cette symbolique est ancienne :

> Les philosophes disent que c'est à juste titre que le premier des dieux a revêtu le monde de la figure sphérique, choisie comme étant la plus belle de celles qui existent, (Pappus d'Alexandrie, 1933a, p.272).

Mais dans cet esprit de continuité-rupture, la pensée de Kepler diffère sur quelques points importants de celle de Proclus, en rappelant tout d'abord :

> Kepler's attitude towards Euclid's *Eléments* bears some remarkable similarities with Proclus' point of view. Both are of the opinion that Euclid's texte is only able to function - this is : to have meaning - within a larger, philosophical context exceeding the level of geometry as pure mathematics. (Claessens, 2011, p.185)

mais, si la proximité des deux auteurs se confirme sur une acceptation commune du statut archétypique des figures géométriques, elle doit être précisée.

> At the beginning of book IV Kepler distinguishes between two sorts of harmonie : sensible harmonies on the one hand, and archétypical or intellectual harmonies on the other. (op. cit., p.187)

et

> This intellectual harmony is, according to Kepler, a product of the soul. [...] It is of crucial importance that the production of this archetypical harmony occurs instinctively (ex instinctu), and does not result from a deliberate, contemplative act. The circle is an *essential form* of the soul, not something acquired by it or added to its essence. (op. cit., p.188)

et une différence apparaît alors entre Proclus et Kepler.

> Where Proclus deals with the circle and the pentagone ontologically and epistemologically on equal terms, Kepler clearly installs a hierarchy "origin - product". The existence of the square, the pentagon, etc. depends on the comparaison made by the soul between the circle and a certain arc. As a result, the circle becomes the storehouse (promptuarium) and birthplace of geometry and its objects, which exist as seeds in the circle. (op. cit., p.191)

et où

> From Proclus' perspective, the imagined circle can be considered in two ways : as the construction *process* and as the *result* of this process. (op. cit., p.194)

pour Kepler

> kepler's "imagined"circle is not a projectionor construction made by the soul based on notions (line, point) that it holds *a priori*. (Idem)

Dès lors

> In contradistinction with the Proclean imagination, which allows the soul to see itself as in a mirror *in spite of* its place in the body and in the sensible world, Kepler's imagination enables the soul to recognize itself and its products by means of the senses. The world turns into the soul's own (re)construction. (op. cit., p.191)

Ainsi :

> Both Proclus an Kepler sincerely believed that geometry and its objects did not so much refer to a secondary (abstracted) reality, but rather somehow uncovered our essence and showed us "true"reality. [...] By abandonning the traditional meta-mathematical framework - and the corresponding presuppositions - of the early modern period, Kepler was the first to incorporate imagination's productive side within an early modern philosophy of mathematics. Moreover, by safeguarding imagination's sensory input, he opened up the path for imagination to unravel the harmonic relations governing the univers based on the soul's mathematical essence. By means of its bodily locus, imagination was now able to play a constructive role in acquiring scientific knowledge of the world. (op. cit., p.199)

C'est pourquoi, pour (Simon, 1979, p.453)

> Loin d'être desservi par ses *a priori* métaphysiques, Kepler fut dans sa tâche guidé par eux. Il ne disposait pas d'une physique mathématique préalablement constituée ; et aucune autre discipline connexe ne s'offrait à lui pour formuler et contrôler ses hypothèses. Il fut constamment aiguillonné par la conviction que rien dans le monde n'est laissé au hasard, et que tout au contraire y obéit au principe du meilleur. La pensée d'une création faite à l'image du Créateur lui servit à la fois de guide et de garant. Mieux même, la forme métaphorique qu'elle prit [...] alimenta ses intuitions les plus profondes.

Simon nomme *schème*, des normes implicites, qui orientent la pensée dans le cadre de séquences discursives se présentant spontanément à l'esprit, et guidant à la fois l'association des idées et la logique des raisonnements. Le schème de l'analogie est un schème fréquent en ce début de XVII^{e} siècle, mais Kepler ne s'en contente pas :

> Ce qui caractérise en propre la pensée de Kepler, c'est qu'un second schème tout aussi impérieux vient se superposer au premier, et le remanier tout en subissant la contagion. Celui de l'analogie dominait seul certains savoirs traditionnels, comme l'astrologie et sans doute l'alchimie. Il impliquait une causalité de type analogique-hiérarchique, on pourrait presque dire par participation. Chez lui, une causalité d'un autre type, et inspirée du mécanisme au moins en ce qu'elle implique un *contact*, vient concurrencer la première et se la subordonner. [...]
>
> [Ce schème causal] explique l'apparition [...] d'un autre type d'opérateurs, assurant cette fois la médiation causale nécessaire, et répondant à un besoin conceptuel nouveau. Les plus caractéristiques sont les aspects fondés sur les relations harmoniques [...] (op. cit., p.459)

> C'est l'entrelacs de ces deux schèmes qui nous paraît conduire à ce que Kepler dénomme des *archétypes*, c'est-à-dire des modèles primordiaux. Celui de la sphère, symbolisant la Trinité divine, s'explique par le jeu d'une logique transcendantale au sens kantien du terme : pensée à vide, la catégorie de causalité appelle une origine première ; mais elle n'est pas seule à opérer, puisqu'il faut aussi répondre à l'exigence analogique d'un référent ultime à toutes les virtualités comparatives. C'est pourquoi la source de l'intelligibilité du monde revêt la forme d'une représentation spatiale

> de Dieu, capable par sa symétrie de se renvoyer indéfiniment sa propre image, et d'exprimer son dynamisme interne par le rapport de son centre à sa surface. (op. cit., p.460)

Cette vision est reprise dans ce qu'Hallyn appellera la poétique de Kepler, celle d'un Janus Bifrons qui produit une œuvre avec une « allure oxymorique qui la caractérise en profondeur. » (Hallyn, 1987, p.303)

Pour Hallyn, on est bien en présence d'un double système de causalité :

> L'un, que nous appelons formiste, impliquant « une causalité de type analogique-hiérarchique, on pourrait presque dire de participation » et faisant voir dans les parcours elliptiques des phénomènes musicaux ; l'autre, appelé ici contextualiste, « causalité transitive directe », impliquant « un contact » (une relation matérielle, la « species »). (op. cit., p.302)

Mais comme Hallyn le rappelle,

> Dès que la circularité doit être abandonnée, Kepler se trouve dans ce qu'on a appelé un « no man's land » ou encore une « solitude intellectuelle absolue ». La figure parfaite étant éliminée, tout autre pourrait, au fond, convenir. Ce n'est qu'en tâtonnant qu'il découvre enfin que la trajectoire est une « ellipse régulière ». À ceux qui, tel son ami Fabricius, continuent de penser en fonction du cercle, il répond désormais que leurs constructions ne reposent sur rien de réel et ne sont que des vues de l'esprit [...] (op. cit., p.219).

Ainsi, Kepler se révèle plus complexe que certains ne l'imaginent. C'est bien une bascule entre deux causalités qui a permis à Kepler d'aller aussi loin dans les avancées conceptuelles avec la capacité de

> croire également en l'organisation de l'univers en fonction de lois mathématiques et en la possibilité pour l'esprit humain de découvrir ces lois. Ni l'une ni l'autre de ces présuppositions n'était acceptée par tous dans le premier quart du XVII^{e} siècle. (Hallyn, 2004, p.22)

Et nous laisserons la synthèse à Koyré

> Ce qui est radicalement nouveau dans la conception du monde de Kepler, c'est l'idée que l'Univers est dans toutes ses parties régi par les mêmes lois, et ce par des lois de nature strictement mathématiques. Son univers est sans doute structuré, hiérarchiquement structuré par rapport au soleil et harmonieusement ordonné par le Créateur, qui s'y exprime lui-même en un vaste symbole, mais la norme que suit Dieu dans la création du monde est déterminée par des considérations strictement mathématiques ou géométriques. (Koyré, 1966)

5.2.3 Les *non-êtres* de Kepler

Classiquement, Kepler débute l'*Harmonices Mundi* par une étude des polygones et plus particulièrement des polygones inscrits dans un cercle. Il attaque la recherche des causes des harmonies à partir de l'étude des divisions du cercle « en quelques parties qui sont faites, Géométriquement et scientifiquement ». Dans un travail qui pourrait paraître similaire à celui initial d'Euclide, il introduit immédiatement une variante qui n'est en rien anodine.

> la grandeur prise pour unité, au lieu d'être un segment de droite quelconque, devient d'ailleurs comme dans le treizième livre d'Euclide, le *diamètre* de cercle circonscrit aux figures concernées. Par là l'étude des polygones, et donc des arcs que leurs côtés découpent sur le cercle et des angles au centre ainsi déterminés,

> se rattache à la spéculation symbolique sur le cercle, et, au-delà d'elle, à la valeur ontologique primordiale accordée à la sphère. Certaines figures et les grandeurs qui les caractérisent vont s'en trouver valorisées ; et avec elles, c'est la mathématique dans son ensemble qui devient *pour des raisons internes* un langage symbolique : loin de conserver la neutralité du quantitatif pur, des nombres et des relations retrouvent l'aura sacralisante que leur avait conféré le pythagorisme antique. (Simon, 1979, p.150)

Pour Simon, c'est la mise au point d'un opérateur conceptuel qui va attribuer, par l'intermédiaire de démonstrations géométriques, aux différents êtres géométriques, qu'ils soient des figures ou des rapports, une plus ou moins grande dignité ontologique.

Kepler, après avoir donné les définitions relatives à la description d'une figure et à son inscription dans un cercle, précise ce qu'il entend par connaître et démontrer :

> Connaître, dans les choses géométriques, c'est mesurer au moyen d'une mesure connue ; laquelle mesure connue dans ce travail d'inscription des figures dans le cercle, est le diamètre du cercle.
>
> Est dit connaissable, ce qui est mesurable par le diamètre ou immédiatement par soi-même, soit une ligne, soit une surface par son carré ; ou bien au moins ce qui est formé par une raison sûre et géométrique de telles quantités qui dépendent d'un enchaînement, de n'importe quelle grandeur, enfin pourtant du Diamètre ou de son carré.
>
> La démonstration de la quantité, ou à décrire, ou à connaître, est une déduction à partir du diamètre au moyen des intermédiaires possibles. (Kepler, 1980, p.9)

Kepler arrive ainsi logiquement à définir des « degrés dans la connaissance ou science des figures ». Il est à noter, Définition XV, que

> Tous les degrés qui suivent [le troisième] sont appelés « qu'on ne peut exprimer », Inexprimables [7]. Les traducteurs latins traduisirent irrationnels, par un grand danger d'ambiguïté et d'absurdité. Nous faisons disparaître cet usage d'appellation parce qu'il y a beaucoup de lignes qui sont Inexprimables autant que tu veux, et qui sont pourtant conservées par les meilleures raisons. (Kepler, 1980, p.11)

Pour (Simon, 1979, p.155) :

> Ce n'est pas une impossibilité technique, liée à l'état des mathématiques de son temps, qui les empêche à ses yeux de parvenir à l'expression : c'est une impossibilité essentielle, qui tient à ce qu'elles sont - ou ne sont pas. (Idem)

Kepler nous explique ainsi [8] ce caractère ontologique des objets mathématiques :

> Car ici, quant à nous, nous nous occupons d'êtres connaissables ; et nous affirmons à juste titre, que le côté de l'heptagone fait partie des *non-êtres* ; j'entends connaissables. En effet, comme sa description formelle est impossible ; il ne peut donc être connu par l'esprit humain puisque la possibilité de décrire précède la possibilité de connaître ; il n'est pas connu de l'Esprit Omniscient par un acte éternel simple : puisque par nature il fait partie des inconnaissables. (Idem)

Si certains objets sont clairement non connaissables, Kepler affirme toutefois que il est possible de connaître dans l'incommensurable. Et il produit une hiérarchie, que décrit ainsi (Director, 2002, p.29) [9] :

7. Gérard Simon propose, quant à lui, ineffables.
8. Nous reprenons ici la traduction de Simon, plus pertinente que celle de Peyroux.
9. Director présente dans cet article le problème auquel le jeune Gauss s'est intéressé : quel est le principe qui régit les différents degrés du connaissable ?

> Le premier degré du connaissable appartient à ces quantités que l'on peut prouver être égales au diamètre. Le deuxième degré du connaissable appartient à ces quantités que l'on peut prouver être égales à des parties du diamètre. Le troisième degré du connaissable appartient à ces quantités que l'on ne peut exprimer par des longueurs mais seulement par des carrés. De cela, il découle que ces quantités sont inexprimables [10] ou, comme le disaient les Grecs, incommensurables. Cependant, la classification continue parmi les types d'incommensurables. Le quatrième degré du connaissable appartient à ces grandeurs qui ne sont pas exprimables par des carrés mais qui sont exprimables par des rectangles. Kepler continue, suivant en cela le dixième livre des Éléments d'Euclide, à énumérer les divers degrés de ce que l'on peut connaître de l'incommensurable. Ce que nous considérons important ici, c'est que Kepler réaffirme la possibilité de connaître les grandeurs incommensurables, aussi bien dans le cadre de la géométrie que dans celui des grandeurs mêmes qui caractérisent l'univers physique. [...]

Suivant cette organisation, dans un premier temps, Kepler produit une classification des polygones où n, n' et n" sont des entiers positifs ou nuls et p et q sont des nombres premiers :

— $p.2^n$
— $p.q.2^n$ (p et q > 2)
— $p^{n'}.2^n$ ou $p^{n'}.q^{n''}.2^n$ ($p > 2$ et $n' > 1$)

Kepler étudie ensuite tous les cas et montre que tous les polygones, convexes ou étoilés, dont le nombre de côtés est un nombre premier supérieur ou égal à 7 ou un multiple de ce nombre, ne sont ni « descriptibles » ni « connaissables » et qu'il n'y a pas plus de quatre classes de figures connaissables. Ce sont dans l'ordre le carré, le triangle équilatéral, le pentagone et, bien que sa démontrabilité soit indirecte, le polygone à 15 côtés (3 fois 5), qui servent de chefs de file à ces familles privilégiées. Mais Kepler, poursuit son étude et écarte, par exemple, dans des degrés plus éloignés le 24-gone :

> La figure régulière de vingt-quatre côtés et toutes celles issues de celle-là par un nombre continuellement double de côtés, ont des inscriptions géométriques, mais la science des côtés s'écarte plus longuement dans des degrés plus éloignés que ceux qui furent posés en premier, et comme [celle] de ses étoiles sous-tendues par 5-7-11 vingt-quatrième [parties de la circonférence]. (Kepler, 1980, p.31)

et également le polygone à neuf côtés :

> Au sujet du polygone de neuf côtés dont le nombre 9 est le carré du premier impair entre les [nombres] premiers, à savoir du ternaire, il est débattu jusqu'ici entre les Géomètres, et la plupart s'efforcent de démontrer encore les côtés de cette figure, tous cependant le firent en vain, et jamais ils n'auraient attaqué ce problème s'ils avaient examiné attentivement la différence des connaissables et des inconnaissables. (Op. cit., p.52)

Finalement Kepler ne retient, dans les « limites de la Notion, de la Science, de la détermination, de la Description » qu'un nombre réduit de polygones, ayant des démonstrations « appropriées ». Les polygones convexes à 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 côtés auxquels il faut ajouter les polygones étoilés associés au pentagone, à l'octogone, au décagone et au dodécagone.

5.3 Retour sur les pavages archimédiens

L'étude des congruences de polygones réguliers pour former des pavages du plan ou des solides de l'espace est l'objet du Livre II de l'*Harmonie du monde*. Après avoir reprécisé l'état

10. Pour Kepler « Inexprimable en longueur » pour le troisième degré.

d'esprit général et le contexte du travail sur les pavages, nous revenons sur la démarche de Kepler et nous examinons en particulier une « erreur » du savant difficilement explicable pour qui n'est pas entré dans la pensée képlerienne.

Kepler, rédigeant l'introduction au livre II poursuit sa longue quête :

> En effet, puisque nous avons entrepris d'expliquer l'origine de l'harmonie [11] et les Effets les plus remarquables dans tout le Monde, comment ne ferions-nous aucune parole au sujet de la congruence des figures qui sont les sources des proportions Harmoniques ? puisque être en harmonie et Congruence signifient par les [mots] Latins la même chose que par les [mots] Grecs « être d'accord » « harmonie » ? puisque cet effet des figures à l'intérieur de la Géométrie et à l'intérieur de cette partie de l'Architecture qui est tournée vers les Modèles est comme une certaine image et un prélude des Effets en dehors de la Géométrie et en dehors de la pensée conçue, dans les choses naturelles et célestes elles-mêmes ? (Kepler, 1980, p.57)

L'étude des congruences s'inscrit dans la quête d'intelligibilité du monde et le livre III s'intéressera aux « origines des proportions harmoniques et de la nature et des différences des choses se rapportant au chant », les livres IV et V aux « configurations harmoniques des rayons des astres ... » et à « l'harmonie très parfaite des rayons célestes » .

Après avoir défini les congruences aussi bien dans le plan que dans l'espace, nous avons vu que Kepler étudie de façon systématique, pour ce qui concerne le plan, les assemblages contenant un, deux ou trois types de polygones réguliers.

Nous reprenons ci-dessous le début du texte de son argumentation pour trois types de polygones. Kepler annonce 4 congruences.

> Ici trois ou davantage [d'angles] du triangle ne sont pas tolérés ; en effet trois angles du Triangle font deux droits ; il reste moins que ne fait la somme des plus petits après eux, à savoir du Carré et du Pentagone. À cause de cela deux [angles] du Carré ne sont pas à associer à deux du Triangle ou à des plus grands, parce qu'il ne reste pas assez d'espace pour l'angle de la figure de troisième espèce.
>
> Donc s'il y a deux [angles] du Triangle et un du Carré, le dodécagone sera associé à ceux-ci ; la forme n'est pourtant pas continuée : vois aux lettres Cc, Dd, Ee, trois formes aboutissant toutes à la première circonstance.
>
> L'étoile du Dodécagone est encore reportée ici comme ci-dessus. En effet quatre [angles] du Triangle, un du Carré et un rayon de l'étoile empliront le lieu. Voici les formes Ff, Gg, Hh.
>
> Si un [angle] du Pentagone est joint à deux du Triangle, le reste sera incongru, 22 quinzièmes [de droit] ; en effet aucun angle n'a 11 quinzièmes. Mais si un [angle] de l'Hexagone est ajouté à deux du Triangle, le reste sera encore un angle de l'Hexagone et la figure sera une des précédentes. Donc ensuite deux angles à la fois du Triangle ne pourront exister.
>
> Donc s'il y a un [angle] du Triangle, trois du Carré ne lui seront pas ajoutés ; en effet il est trop produit et il ne reste pas assez d'espace à l'angle de troisième espèce.
>
> Que deux [angles] du Carré soient ajoutés à un du Triangle, dans le reste un [angle] de l'Hexagone congruera à quatre droits ; il y a une double forme, continuable à la lettre Ii, non continuable sans mixture à la lettre Kk. Et ceci est le second cas.
>
> Un angle du Triangle n'est pas joint avec deux du Pentagone, il reste en effet une ouverture de 14 quinzièmes d'un droit, étrangère aux figures régulières ; et non avec un [angle] du Pentagone ; en effet il reste à nouveau 32 quinzièmes [de droits], vu qu'aucune figure régulière n'a 16 quinzièmes [de droit], et non avec [un angle] de

11. La traduction française propose un h minuscule, ce qui n'est pas le cas de la traduction anglaise.

> l'Hexagone, en effet ils font 2 droits, vu que nul angle seul n'est fait aussi grand, assurément sa moitié devient la quantité du Carré, au sujet de quoi il a déjà été traité ; ni avec [l'angle] de l'Heptagone ou du l'Octogone ou du Polygone de neuf côtés, chacun en particulier, en effet il reste pour l'angle des figures de troisième espèce, ou 40 vingt-et-unièmes ou 11 sixièmes ou 16 neuvièmes [de droit], tels que n'a aucune figure Régulière.
>
> Donc un [angle] du Triangle étant composé avec un [angle] du décagone, il reste une ouverture de 26 quinzièmes [de droit], aussi grande que [l'angle] du polygone de quinze côtés. Certes ici il y a une congruence, mais du moins ébauchée. En effet le polygone de quinze côtés est d'un nombre impair de côtés ; c'est pourquoi, par la [proposition] XVII, diverses espèces de concours sont mélangées dans les angles de la même figure. Certes le Décagone par le nombre pair des côtés successifs, mais aussitôt deux tels polygones, de quinze côtés se jettent mutuellement sur soi et s'embarrassent.
>
> Au delà, [l'angle] du Triangle ne peut être joint avec [l'angle] du polygone de onze côtés ; en effet, 56 trente-troisièmes [de droit] sont laissés, nulle figure Régulière n'a un tel angle.
>
> Enfin [l'angle] du Triangle avec [l'angle] du Dodécagone laisse une ouverture Dodécagonique : on a déjà parlé au sujet de cette forme.
>
> Si [l'angle] du Triangle était joint avec de plus grand, il serait fait une ouverture plus petite, puisque cela a déjà été conclu relativement à de plus petits. Et ainsi on a achevé avec [l'angle] du triangle à introduire parmi trois espèces.
>
> Plus d'un angle du carré étant enlevé de quatre droits, il ne reste pas assez d'espace pour deux angles de deux espèces, bien sur eux qui joints, deviendraient plus grands que deux droits [...]. (Op. cit., p.67 et 68)

La démarche de Kepler apparaît clairement. Il raisonne par exhaustion des cas en étudiant d'abord l'utilisation de triangles, puis de polygones avec des angles de plus en plus grands. De nombreuses propriétés, conditions nécessaires et techniques sont utilisées :

- les valeurs des angles sont connues
- la somme des angles doit être égale à 4 droits
- une congruence d'angles peut donner lieu à des nœuds de plusieurs types, donc à plusieurs candidats pavages
- la congruence au niveau d'un nœud n'est pas suffisante
- la méthode d'exhaustion utilise l'ordonnancement des valeurs des angles
- la propriété XVII utilisant la parité d'un des polygones est utilisée (même si on peut s'en passer pour l'étude d'un cas)
- ...

Et il est à noter que le vocabulaire employé par Kepler fait référence constamment à l'expérience concrète. Les différentes espèces se mélangent, les polygones « se jettent mutuellement sur soi et s'embarrassent », les polygones laissent des ouvertures. Contrairement à Badoureau, par exemple, Kepler a une réelle proximité avec les objets géométriques, il les manipule (sans doute mentalement), les organise, les structure[12]. Cette familiarité avec les objets contribue sans aucun doute à l'expertise de Kepler. À la lecture de ce passage, on relève toutefois trois points qui semblent délicats.

Tout d'abord le cas de la figure Kk. Plusieurs commentateurs évoquent une erreur de dessin, par exemple de Wilhelm Schickard, qui aurait réalisé les planches. Pour ces commentateurs,

12. On peut ici rappeler que Kepler n'était pas que le théoricien que nous laisse voir une grande part de son travail. Il est aussi inventeur, non seulement dans le domaine de l'astronomie mais dans de nombreux autres domaines plus pratiques. Il conçoit par exemple une pompe à eau sans valve avec un système d'engrenage anti-reflux pour laquelle il dépose un brevet. (Faidutti, 2010, p.185)

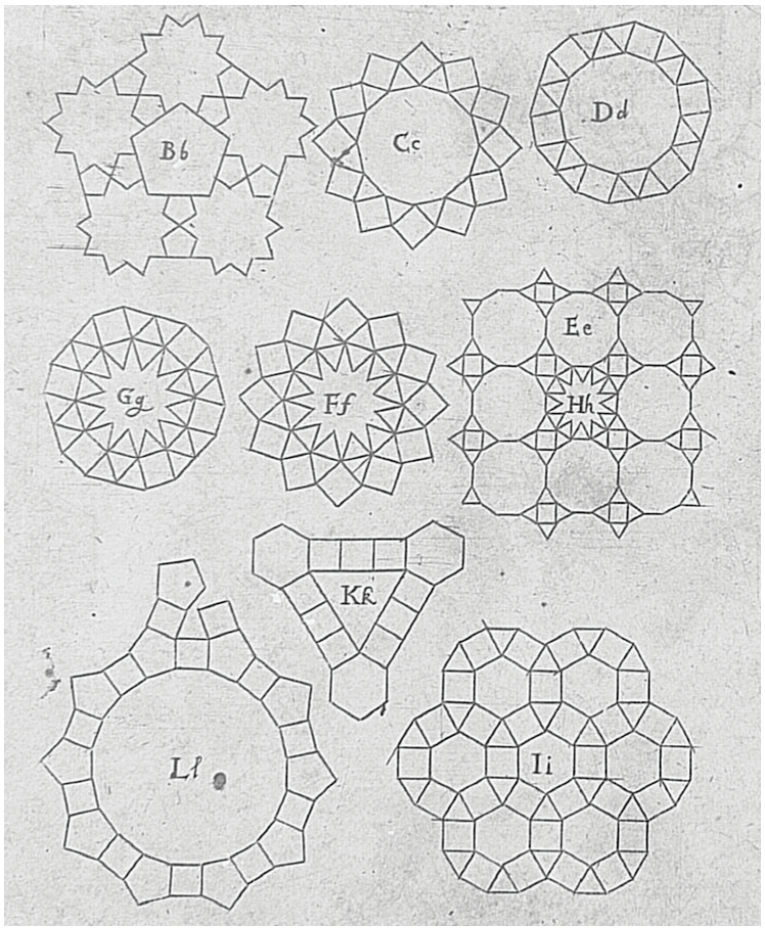


FIGURE 5.3 – Planche de l'Harmonices Mundi

Kepler, travaillant uniquement sur des pavages stricts, la figure aurait du être complétée pour qu'il en soit ainsi. Mais dans ce cas, le pavage obtenu est 2-uniform, avec des nœuds de type (3,4,6,4) et d'autres de type ((3,4,4,6). Dans tous les cas la figure Kk ne convient pas. On peut remarquer qu'il existe une seule autre figure dans les planches (cf. annexe B) représentant un pavage non strict, la figure Bb. Celle-ci émerge lors de l'association de l'étoile décagonale et de pentagones. Dans la tentative de pavage un trou apparaît qui, se trouvant être un grand pentagone, pourrait laisser à penser que l'on a à faire à un pavage non strict. Mais on remarque également que le pavage Ee est 2-uniform. Ainsi les deux hypothèses restent ici possibles dans le cadre des uniques pavages archimédiens, soit une erreur de dessin qui aurait oublié de faire apparaître un pavage strict 2-uniform soit la volonté délibérée de Kepler de mettre en évidence plusieurs types de généralisation quand il y a impossibilité de rester dans le cadre archimédien.

Concernant l'utilisation, qui pourrait apparaître dans ce passage mystérieuse, des polygones étoilés, la démarche de Kepler est en fait systématique. Dès qu'un pentagone, un octogone, un décagone, un dodécagone s'insère dans une congruence, Kepler teste l'étoile associée. Par exemple :

> De plus un [angle] du Triangle parmi les trois, étant placé, deux du Dodécagone congruent ; et la continuation est possible, et n'est pas mêlée d'un autre concours. Une surface plane de cette forme est vue à la lettre S.
>
> Reporte ici l'étoile Dodécagonale à partir de ce fondement, parce que son angle creux égale [l'angle] du triangle ; et ainsi le Dodécagone est partagé entre une étoile et douze Triangles. Donc cinq [angles] du Triangle et deux Rayons de deux étoiles vont ensemble ; que la forme continuable soit regardée à la lettre T. (Kepler, 1980, p.63)

Et ainsi Kepler complète sa collection des pavages archimédiens (avec des polygones convexes) en utilisant les versions étoilées des polygones. On constate en passant que Kepler possède parfaitement non seulement les angles des polygones convexes mais également les « angles creux » des polygones étoilés. Plus étonnant dans cette étude des congruences mathématiques, on observe une approche quasi-expérimentale et pragmatique des pavages, qui font que, même dans cet ouvrage de référence, Kepler introduit des variantes. Cette profusion d'idée de Kepler fait dire à Simon

> On sent dans toute la suite du livre le plaisir d'imagination qu'à ressenti le Mathématicien Impérial à multiplier la variété des constructions possibles, et sa jubilation à mettre en valeur la richesse combinatoire des figures géométriques. Il décrit même, avant que Poinsot ne les redécouvre tout à fait indépendamment de lui en 1810 [13], les deux polyèdres étoilés pentagoniques ; ce n'est qu'en 1862 que son droit de priorité lui sera rendu [...]. C'est dire combien malgré sa richesse, ce livre resta inaperçu : sans doute parce qu'il est plus un complément à la géométrie de l'antiquité qu'une amorce de la mathématique moderne. On est certes tenté d'évoquer, comme le fait à son propos Francis Warrain [14], les débuts des recherches topologiques, ou les travaux de la fin du XVIII^{e} ou du début du XIX^{e} siècle sur la cristallographie : mais dans le premier cas le concept de continuité, dans le second celui de symétrie, sont totalement étrangers à la problématique de Kepler ; si bien qu'il a, comme les vikings en Amérique, abordé dans ces pages des terres qu'il ne pouvait pas reconnaître. (Simon, 1979, p.163)

Dans cette profusion de nouveautés, il reste toutefois un passage surprenant ; **Et « un angle du triangle n'est pas joint [...] ni avec l'angle de l'Heptagone ou de l'Octogone ou**

13. Comme on l'a vu, ceci est discutable
14. Gérard Simon renvoie sans doute ici à (Warrain, 1942)

du polygone de neuf côtés chacun en particulier en effet il reste pour l'angle des figures de troisième espèce ou 40 vingt-et-unièmes, ou 11 sixièmes, ou 16 neuvièmes [de droit], tels que n'a aucune figure régulière ».

Kepler, particulièrement familier avec les polygones réguliers, ne semble pas reconnaître les angles des polygones réguliers à 42, 24 et 18 côtés. En effet l'angle « 40 vingt-et-unièmes de droit » est l'angle du polygone à 42 côtés, « 11 sixièmes de droit » est celui du polygone à 24 côtés et « 16 neuvièmes de droit » est celui du polygone à 18 côtés. Kepler passe donc à côté des candidats pavages (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18).

Une vérification du texte latin semble devoir écarter une erreur du traducteur. Une rapidité excessive dans la justification peut-elle être susceptible d'expliquer ce manque d'attention ? Vu le soin apporté aux calculs, la donnée des angles de troisième espèce, cela semble peu probable. On ne peut que constater une absence de reconnaissance des valeurs des angles de ce qui est pour nous des polygones réguliers.

Nous pourrions émettre d'autre hypothèses calculatoires. Mais d'une part Kepler dispose de la Proposition XXIII du Livre I :

> Si tu enlèves quatre du double du nombre des angles d'une Figure, tu formeras le Numérateur des parties de l'angle droit que vaut l'angle de la figure ; de plus le Dénominateur des parties est le nombre lui-même des Angles

et d'autre part d'une maîtrise calculatoire exceptionnelle reconnue. Il a de plus étudié particulièrement le polygone à 24 côtés (proposition XL) et dans sa classification des polygones, Kepler a envisagé le cas de polygones à 1000 côtés et donc la taille du nombre de côtés n'est pas un obstacle. Il faut donc, nous semble-t-il écarter toute supputation sur les difficulté calculatoires que Kepler aurait pu avoir à reconnaître dans 40/21, 11/6 et 16/9 des fractions d'angle de polygones réguliers.

L'hypothèse que nous proposons pour cette « erreur » est à formuler dans le contexte qui a procédé à sa réalisation. De notre étude précédente, il apparaît que, dans la vision du monde de Kepler, tous les objets n'ont pas le même statut, n'occupe pas le même rang, voire n'ont pas la même densité de réalité. Alors que Kepler a dénoncé l'Heptagone comme un non être il est d'ailleurs surprenant que ce dernier soit même évoqué dans la recherche. C'est sans doute la dimension pragmatique du chercheur qui l'amène à ne pas écarter directement ni l'Heptagone, ni les polygones à neuf et quinze côtés. Il est vrai aussi qu'ils n'arrivent dans le raisonnement que dans un second temps comme des compléments possibles à des polygones de degré de science d'un ordre bien moins éloigné. Il nous reste alors à concevoir que Kepler parlant de « figures régulières possibles » va chercher dans le réservoir des figures connaissables dont il a fait la liste à la fin du Livre I. C'est ainsi aux polygones convexes à 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 côtés auxquels il faut ajouter les polygones étoilés associés au pentagone, à l'octogone, au décagone et au dodécagone qu'il se réfère sans doute pour affirmer « tels que n'a aucune figure régulière » !

Si nous formulions cette partie de la recherche en termes d'enquête et d'hypothèses, celle que nous venons de formuler nous semble être la mieux à même d'expliquer cette erreur de Kepler. En terme d'enquête, pour un point de vue plus global, nous pouvons, en observant ainsi le résultat de la recherche de Kepler, poser un problème :

- en amont de l'exposition d'une théorie sur les polygones, quelle est la nature exacte des objets que Kepler a manipulé ?

- jusqu'à quel point les objets du milieu de l'expérience (ici la galerie des pavages précédemment réalisés) permettent-ils un contrôle des élaborations théoriques ? jusqu'à quel point la théorie nécessite-t-elle un recours à ce milieu de l'expérience ?

- la conception des objets dans la recherche est-elle davantage du côté de l'empirique ou du théorique ?

- et donc, comment est constitué le milieu de la situation de recherche pour Kepler : les polygones qui font partie du milieu objectif, sont-ils ceux que l'on est en capacité de construire réellement ou la porte s'ouvre-t-elle aux objets qui « conviennent » ? Sont-ils ceux que l'on sait manipuler ou tous ceux que nous serions amenés à manipuler ?

- comment s'effectue le passage du sentiment de recherche de l'harmonie à la dimension mathématique ?

- ...

Notre étude a permis que ces questions émergent mais a également produit des éléments de réponse dans le champ historique. La pertinence de ces questions dans le champ didactique est posée.

5.4 Conclusion

La relation de Kepler aux harmonies du monde lui a permis de faire des avancées indéniables, par exemple en dépassant certains obstacles liés au paradigme de la régularité. L'inventivité, l'imagination débordante de Kepler, sa capacité à croiser tous les champs de connaissance ont aidé à ces inventions. Nous avons évoqué la double causalité en œuvre dans la démarche Képlerienne. Toutefois, savoir, quand le retour des faits de l'expérience arrête l'imagination de Kepler, dans quelle mesure, cette puissance imaginaire créatrice, ne s'appuie-t-elle pas également sur les manipulations d'objets reste difficile. Il est certain que Kepler développe un monde imaginaire, qu'il construit sa géométrie, mais dans les avancées qui du calculateur inlassable, de l'expérimentateur ou du théoricien de l'Harmonie l'emporte ? On oppose souvent Kepler et Galilée, le premier n'aurait été qu'un théoricien et le deuxième l'expérimentateur. Si les deux penseurs s'opposent sur certaines dimensions ce n'est pas essentiellement sur celle-là [15]. Il est clair que pour Kepler la problématique n'est pas intérieure aux mathématiques, ni issue de la logique de leur développement. Kepler l'annonce philosophique. Pour autant, on l'a vu, il ne néglige pas les retours de l'expérience. Bien entendu, copernicien convaincu, il est prévenu des expériences sensibles qui peuvent être contraires à la réalité. Mais il est au-delà de cela et connaissant les dangers, il sait contourner l'obstacle. Simon et Caspar propose la vision suivante de la relation de Kepler aux retours de l'expérience :

> Max Caspar a encore raison d'écrire que si on l'eût informé des découvertes de Gauss, qui parvint à construire d'autres polygones, tels que ceux qui ont 17 ou 257 côtés, il aurait été surpris, mais n'aurait pas pour autant renoncé à sa théorie : après avoir accepté les données ainsi acquises, car il était très ouvert aux vérités nouvelles, il aurait un peu bricolé sa systématisation pour pouvoir les intégrer - par exemple en trouvant que la « démontrabilité » de ces polygones est par trop lointaine. Car cette entreprise relève d'une attitude typique et chez lui très générale. Elle révèle en effet combien Kepler croyait à la possibilité soit de découvrir, soit de justifier *a priori* les relations quantitatives *de tout ce qui pouvait être peu ou prou de son temps traité mathématiquement*. Il n'est pas encore physicien au sens moderne du terme : il ne pratique pas systématiquement l'expérimentation ; il est certes fidèle à l'expérience, et même plus que nul autre ; mais à celle de son époque, qui est toute observation. (Simon, 1979, p.168)

Ainsi, s'il est certain que Kepler n'a pas bougé sur sa posture ontologique, il en est tout autrement lorsqu'il s'agit de faire avancer la connaissance. Il est indéniable que finalement Kepler fait preuve d'un pragmatisme réel et que les objets qu'il manipule sont soumis au retour des faits de l'expérience. En dehors des cas où cela est mis en défaut, les objets évoluent selon les nécessités des théories. En cela aussi Kepler fait preuve de « modernité ».

15. On pourra lire Bucciantini (2008) pour approfondir cette question.

Chapitre 6

Conclusion de la deuxième partie

Notre ambition en développant cette étude historique était de tenter une approche centrée sur le savant cherchant, une approche portée par le « problème » suivant : une étude historique peut-elle permettre d'identifier des caractéristiques de pratiques de recherche singulières, particulièrement concernant l'émergence et l'évolution d'objets mathématiques nouveaux en lien avec des objets naturalisés ?

L'enquête entreprise montre dans un premier temps que la recherche des pavages archimédiens du plan fut une véritable question mathématique problématique dans l'histoire. Elle se développa sur plusieurs siècles, dans des contextes variés. Des genèses diverses virent le jour. Kepler en produisit une remarquable. Que peut-on apprendre en particulier de cette genèse singulière ?

En partie grâce à Kepler lui-même et à sa volonté de faire partager sa démarche et son point de vue, aussi bien dans ses ouvrages que dans ses correspondances, il est possible d'identifier des spécificités de la pensée et du mode de fonctionnement du savant. Ceci a pu être mené à bien à un niveau paradigmatique, grâce aux travaux en particulier de Simon, Voelkel, Hallyn, ... et à un niveau pragmatique par l'étude et l'analyse des nombreux écrits de Kepler sur ses résultats et sur sa pratique même.

Indiscutablement Kepler a été un cas unique. Entre deux époques, il est celui qui a porté à son efficacité maximale une théorie des harmonies et l'a abondamment mise en œuvre dans un style alliant spéculation et raisonnement mathématique, sans comparaison possible. Il a su faire preuve d'une systématisation peu courante, mêlée à un exercice d'inventivité extraordinaire. Il a su concilier deux systèmes de causalité pour innover et stabiliser de nouveaux objets, de nouveaux savoirs. On pourrait attribuer au seul génie de Kepler la capacité d'une telle œuvre et il serait alors vain de vouloir en tirer un quelconque enseignement. Il nous semble qu'il est possible de ne pas en rester là.

Le niveau de détail des analyses effectuées permet en effet de faire émerger de l'étude historique des caractéristiques de l'activité de recherche de Kepler, par exemple sa relation aux objets manipulés, l'influence de cette relation sur les objets créés. Et de cette étude singulière peut émerger un problème scientifique. Aussi bien en ce qui concerne les objets manipulés, que la forme et les produits de cette manipulation, rien ne nous interdit désormais de porter un questionnement universel.

La difficulté repérée à intégrer certains polygones dans le domaine d'expérience, voire à refuser qu'ils y entrent au nom d'une théorie, et a contrario la volonté de laisser la porte ouverte à des pavages qui ne rentrent pas encore dans la théorie en construction, l'usage d'analogies, de métaphores acceptables, d'icônes de l'objet manipulé, la recherche d'exhaustivité par réduction des cas, ... sont alors des pistes pour qui cherche à construire un milieu pour les situations didactiques de recherche de problème.

La double causalité développée par Kepler, l'usage d'un contexte explicatif pour innover, la volonté de ne rien rejeter de nouveau sans une étude approfondie, de faire évoluer le cadre théorique autant qu'il le faut, y compris dans un paradigme bien défini pour intégrer de nouvelles données, de faire évoluer le domaine de définition des résultats obtenus, sont autant de caractéristiques remarquables qui peuvent aider également à une réflexion didactique.

Concernant les savoirs indéniablement produits par Kepler, on peut insister sur le fait que :

- Les objets et connaissances sur ces objets manipulés par Kepler sont nombreux et pour certains loin de nos critères actuels de rigueur.
- Les connaissances finalement utilisées sont « relativement simples » (elles portent essentiellement sur les angles des polygones réguliers et sur des majorations, minorations) mais Kepler fonde ses avancées sur un corps de théorie particulièrement riche.
- Les savoirs que Kepler produit lors de la recherche sont partiellement erronés, même si le théorème énoncé est vrai.
- Ces savoirs partiellement erronés font référence et font partie du savoir savant de l'époque.
- Les connaissances qui pour certaines sont peu pertinentes ne font pas obstacles à la construction de nouveaux savoirs.
- Les savoirs pragmatiques, voire réfléchis, de Kepler n'ont pas de lien direct avec le savoir épuré qui existerait dans le livre de la science à un instant donné.
- Faire référence au savoir institué des années plus tard, ne traduit pas une réalité cognitive, mais une réalité mathématique a posteriori, qui elle-même est culturellement située.
- En recherche les connaissances ne se confrontent pas à des savoirs pré-existants institués, à un déjà-là institutionnel. Les erreurs, inhérentes à l'activité de recherche, peuvent amener à faire vivre longtemps des savoirs non valides.

Au-delà de ces savoirs personnalisés, on observe ici qu'une question problématique mène à des émergences diverses qui loin de finaliser immédiatement « un savoir », font vivre pendant plusieurs siècles des savoirs très personnalisés, voire partiellement erronés. On retrouve ainsi la difficulté à identifier à un instant t, ce qui est savoir de ce qui ne l'est pas. Ceci rend ainsi compte de la vie de certains savoirs en dehors des institutions, mais également de la capacité de certaines questions mathématiques à produire des savoirs qui bien que contextualisés et personnalisés sont finalement proches de ce que pourra être le savoir de l'institution des années plus tard.

Ces quelques éléments nous informent déjà de la complexité potentielle de diffusion d'une question qui a mis longtemps à émerger, de savoirs qui ont mis si longtemps à se constituer. Mais nous observons aussi la variabilité des approches possibles en fonction du contexte culturel, la complémentarité de ces approches, l'émergence de savoirs divers, dans des champs variés.

Tous ces résultats de l'enquête nous permettent-il d'envisager la possibilité de faire vivre une dialectique connaissances/savoirs, des validations ou invalidations, des institutionnalisations de savoirs en classe ?

L'étude montre chez Kepler un champ d'expérience particulièrement riche, une relation aux objets très particulière. La production d'un milieu objectif de situation didactique aussi productif est-il envisageable ? Réalisable ? Les relations aux objets de ce milieu seront-elles aussi particulières que celles de Kepler, se révéleront-elles des leviers ou des obstacles aux élaborations théoriques ?

L'enquête historique montre des genèses éloignées, indépendantes. Cela laisse-t-il présager une difficulté pour l'émergence des savoirs ? une difficulté pour l'institutionnalisation de savoirs trop éloignés ? Si cette dernière difficulté s'avérait, il faudrait alors la concevoir, dans le paradigme qui est le notre, non pas en termes d'incapacité à atteindre un savoir visé, mais en termes d'incapacité à gérer des savoirs émergents trop différents ... À moins que de la diversité

n'émerge la complémentarité et la richesse des constructions ?

Ce sont ces questions que nous allons maintenant aborder.

Troisième partie

Ingénierie et analyses didactiques

Il n'y a pas une méthode unique pour étudier les choses.
Aristote

Chapitre 7

Vers une SDRP fondée sur l'exploration des pavages archimédiens du plan

Les connaissances ne prennent naissance que si elles sont dites, non pas dans le grec et le latin des érudits, mais dans la langue des élèves, que si elles tombent sur le terreau des représentations familières de l'apprenant, et [...] elles ne peuvent être durablement acquises que si elles s'articulent à des pratiques utiles. Cauty

Mais il se trouve que le sujet conscient, avec toute sa part d'irréductibilité, offre une résistance au discours cognitiviste ; il constitue justement sa limite. Bkouche (2000b)

Sommaire

7.1 Introduction . . . 134
7.2 Premiers éléments pour la construction du milieu théorique . . . 134
7.2.1 Le problème mathématique, l'objet mathématique à explorer . . . 134
7.2.2 Un problème pour la classe . . . 135
7.2.3 Objets mathématiques potentiellement en jeu dans une relation des sujets au problème considéré . . . 136
7.2.4 Première anticipation des actions sur les objets . . . 139
7.2.5 Une approche sémiotique . . . 142
7.3 Différentes institutions pouvant accueillir la SDRP envisagée . . . 145
7.3.1 Une diversité d'institutions possibles . . . 145
7.3.2 Le lycée d'enseignement général et technologique français . . . 145
7.3.3 Arithmétique . . . 149
7.4 Première proposition de SDRP pour expérimentations préalables . 150
7.5 Expérimentations préalables . . . 150
7.5.1 Expérimentation préalable avec des étudiants préparant le concours de professeur des écoles : EP1 . . . 150
7.5.2 Expérimentation préalable avec deux groupes de trois élèves de terminale scientifique : EP2 . . . 158
7.5.3 Expérimentation préalable en classe de première S, avec une proposition d'usage de LGD : EP3 . . . 169
7.5.4 Expérimentation préalable lors d'un stage de formation continue : EP4 174
7.6 Bilan des expérimentations préalables en termes de possibilité de mise en œuvre dans une institution . . . 177
7.6.1 Un embryon de situation . . . 177

7.6.2 Le milieu matériel 178
7.6.3 Différentes institutions 179
7.7 Conclusion sur le milieu théorique 179

7.1 Introduction

Cette troisième partie traite de l'ingénierie proposée pour notre étude. L'ingénierie didactique est vue au sens d'Artigue (1988), comme une méthode fondée sur une réalisation didactique, validée par une confrontation d'une analyse *a priori* et d'une analyse *a posteriori*. Cette méthode, en intégrant le système des modèles de milieux de Bloch, permet de spécifier dans les analyses *a priori* ce qui ressort d'une analyse théorique, de l'expérimentation anticipée par le milieu expérimental *a priori*. Pour ce qui concerne le milieu théorique, rappelons que notre entrée dans le projet didactique ne s'appuie pas sur un savoir déjà-là à atteindre, mais sur un problème, pour lequel nous affirmons la dimension nécessairement première. Aussi, nous sommes amenés à adapter le système de modèles de milieux en le fondant non pas sur un concept à viser mais sur un objet à savoir porté par une question problématique. Cette modification du référent, nous amène à reformuler le travail à accomplir pour fabriquer la « situation théorique ». Il s'agit alors :

- de faire une analyse mathématique et épistémologique de l'objet à savoir porté par la question problématique,
- en particulier, d'anticiper les objets potentiellement en jeu dans l'étude de cette question,
- d'anticiper l'inscription des productions des sujets dans des systèmes de signes,
- d'envisager la traduction des actions sur les objets en termes d'émergence de savoirs potentiels,
- d'étudier les possibilités pour cette situation théorique d'être importée dans un environnement didactique.

Le chapitre 7 traite de cette construction du milieu théorique. Il intègre un retour sur les points précédents et des expérimentations préalables, permettant d'apporter des éléments complémentaires à la structuration de ce milieu. La détermination du milieu expérimental sera réalisée en début du chapitre 8.

7.2 Premiers éléments pour la construction du milieu théorique

7.2.1 Le problème mathématique, l'objet mathématique à explorer

Fondamentalement, la question mathématique que nous étudions est « Comment associer des polygones réguliers pour paver le plan ? ». C'est une question simple, pensable avec les objets familiers à de nombreux sujets. Compte tenu de la diversité des sujets, elle pourra être pensée à des niveaux de complexité divers. Mais comme on a pu le constater, la notion de pavage archimédien est loin d'être première. L'harmonie, principe fréquemment invoqué par les mathématiciens, amène en premier lieu une centration sur les pavages réguliers. Il apparaît ainsi fondamentalement que les constructions mathématiques sont fortement marquées par un « désir » des sujets, de simplicité, de régularité, et ceci en amont d'une difficulté potentielle conceptuelle ou technique dans la recherche d'assemblages moins réguliers. Mais, et ceci participera de la robustesse de la situation, l'objet à explorer ne se restreint pas à l'ensemble des pavages réguliers du plan, et nécessitera la recherche d'une harmonie d'un « ordre » supérieur. Plus globalement, comme on a pu le voir, l'ensemble de ces pavages archimédiens n'est qu'un sous-ensemble bien spécifique de l'ensemble des pavages du plan avec des polygones réguliers

convexes. L'objet à explorer est donc à un moment ou un autre à définir précisément... Reste à savoir ce qui sera laissé à la responsabilité du chercheur.

D'un point de vue historique la question du pourquoi de l'émergence du questionnement se pose. Chez Pappus, l'environnement apicole n'est que prétexte à l'exposition (cf. annexe A) ; chez Dürer, les associations de polygones sont issues d'objectifs pratiques, d'une nécessité de produire un ouvrage de référence pour les artisans. Ces approches ont pu initier une réflexion, mais n'ont pas permis de poser le cadre d'une étude exhaustive. Chez Kepler, c'est la volonté d'Harmonie, d'un point de vue global, qui permet les développements sur les pavages et les solides. Chez Badoureau, ce sont des considérations cristallographiques qui introduisent le propos, mais dans un cadre déjà algébrique. Plus tard cette question a pu être considérée comme un « jeu mathématique »... Historiquement on observe donc une diversité dans les modes d'émergence de la question elle-même, liée au contexte culturel et social, à l'état d'avancement de la science, à l'individu. Dans un contexte actuel et didactique, il faudra faire des choix, qui ne s'imposent pas d'eux-même, pour la construction d'un jeu dans une institution.

7.2.2 Un problème pour la classe

Une difficulté pour le chercheur réside dans la délimitation *a priori* de l'objet précis de l'étude. Des mathématiciens, comme Kepler, Badoureau savent **à un moment** de leur recherche définir l'objet, se poser le bon problème. Il n'est pour autant pas dit que ceci ne se produise pas tardivement, en particulier lorsque les domaines de validité des raisonnements produits s'affinent. Par exemple, les textes de Kepler montrent une exploration initiale beaucoup plus large que celle dont il sera rendu compte dans le texte final. Pour d'autres comme Pappus, Dürer, le bon problème n'a pas été posé, l'étude de l'objet « pavages archimédiens » n'a pas lieu. Et pour ceux qui ont réussi c'est donc dans un environnement plus vaste des figures du plan et de l'espace que la restriction d'une étude aux pavages archimédiens trouve sa signification. Par exemple la pertinence ou non, de considérer des polygones réguliers ayant des longueurs de côté distinctes, ne peut se décider qu'en étudiant un réseau de problèmes plus étendu et sa complexité. Comment intégrer cette complexité dans le temps restreint de l'enseignement ? Est-il utile, nécessaire, possible de proposer une telle ouverture ? Et si cette ouverture était retenue, une SDRP peut-elle la supporter ? Autrement dit quelle complexité du problème une SDRP est-elle capable de gérer ?

La réponse à la dernière question est dans la définition des SDRP et les objectifs qu'elles se donnent. Tant que l'ouverture n'altère pas la nature du projet, cette ouverture sera considérée comme possible. Une ouverture du problème du type « quels sont les pavages du plan à base de polygones réguliers ? » est-elle envisageable ? Nous faisons l'hypothèse que la réponse à cette question est positive et qu'une telle ouverture aurait les avantages précédemment décrits et pourrait aussi, par exemple, se prêter à une activité de définition, cf. Ouvrier-Buffet (2013). Mais pour le temps de cette thèse et dans notre choix de faire porter l'essentiel de notre recherche sur les actions de l'élève dans les milieux adidactiques, nous choisissons de modifier le milieu plutôt que de confier à l'enseignant certaines tâches de régulation. C'est pourquoi, ici, nous décidons de restreindre la recherche aux pavages stricts du plan à base de polygones réguliers tels qu'autour de chaque nœud du pavage, il y ait le même assemblage de polygones [1]. Cette restriction amènera une complexification de la formulation qui aura le désavantage de s'écarter du mode de l'action. Elle pourrait ainsi donner l'impression d'un rapprochement avec des problèmes (couple instances, questions) renvoyant à l'étude d'un concept pré-existant par une question ciblée. Nous tenterons de ne pas ancrer cette représentation dans la situation. Dans des travaux ultérieurs cette formulation sera sans doute amenée à évoluer, pour l'heure

1. Il est à noter qu'il reste encore sous cette instance un degré de liberté, dans la définition de la similitude des sommets, qui est définie au sens de rotation près.

nous faisons l'hypothèse que ce type de formulation ne réduira pas la robustesse de la situation et participera à la réalisation d'un milieu objectif favorable.

Avant de porter un regard sur les objets, rappelons donc d'ores et déjà que l'enquête menée dans les chapitres précédents nous apporte les éléments suivants :

- L'exploration des pavages archimédiens du plan peut engendrer des développements, toujours ouverts pour la communauté mathématique. Dans sa généralité, ce problème est ouvert pour les étudiants et l'enseignant. Il est open-ended (ouvert pour les étudiants, fermé pour l'enseignant) si on se restreint à l'étude des pavages archimédiens.
- Le résultat d'une recherche avancée est accessible à la compréhension d'un non expert. Il semble envisageable de présenter, si nécessaire, l'étude suivant Kepler ou une présentation exhaustive à l'aide d'un arbre (cf. annexe D) à des élèves dès 15 ans.
- De nombreux résultats intermédiaires peuvent être établis en cours de recherche. Ils peuvent relever de l'élaboration d'exemples (pavages adaptés), de contre-exemples (pavages non adaptés informant sur les limites de la théorie locale en construction), de conjectures, de preuves ... éléments sur lesquels nous revenons ci-après.
- Le problème est historiquement robuste. Même si sa simplicité (relative) de formulation et les outils simples potentiellement en jeu font qu'il est en général très rapidement traité dans la littérature, nous avons montré qu'il résistait.
- La solution amenée par Kepler s'inscrit dans une dimension double et ouverte qui a permis à ce dernier d'œuvrer dans un cadre déductif sans fermer la possibilité du jeu avec les objets, afin d'en intégrer de nouveaux dans la théorie en construction ou d'en écarter d'autres.
- Le problème se prête à l'émission de conjectures s'appuyant sur l'analogie, l'induction, l'abduction, de part sa dimension géométrique inscrite dans l'intuition spatio-temporelle de chacun, mais également de part son cadre discret et son aspect classifiant.
- Le cadre géométrique premier se lie assez rapidement avec différents cadres, ce qui doit pouvoir engendrer des changements de registres que l'on sait précieux pour les apprentissages, cf. Duval (1996).

Notre hypothèse, à ce moment de l'étude, est donc que le problème ainsi envisagé est un bon candidat pour l'élaboration d'une SDRP. Nous revenons maintenant sur les objets potentiellement en jeu et les premières démarches possibles dans l'exploration de ce nouvel objet.

7.2.3 Objets mathématiques potentiellement en jeu dans une relation des sujets au problème considéré

Il est bien évident que les objets potentiellement en jeu le sont relativement aux sujets acteurs de la recherche et dans ce cadre un grand nombre d'objets, pour autant qu'ils soient suffisamment familiers aux sujets ou qu'ils le deviennent, peuvent apparaître. Il n'est par exemple pas impossible que des outils de la théorie des groupes puissent être mobilisés par des spécialistes de la question. Toutefois, compte-tenu de l'étude épistémologique menée et du fait que le problème ne concerne plus des mathématiciens experts nous nous contenterons de lister les objets mathématiques identifiés jusqu'à présent dans l'étude.

Les polygones

Ils apparaissent parmi les objets centraux.

- Les polygones non réguliers : Ils peuvent apparaître dès les premières recherches et en particulier lors de la mobilisation des objets familiers (rectangles, losanges, ...).

— Les polygones réguliers : Ce sont les premiers objets à manipuler. De l'acquisition d'une certaine maîtrise à leur sujet, antérieure à la recherche ou pendant la recherche, dépendra certainement l'avancée de la recherche sur les pavages archimédiens.
  — le triangle équilatéral, le carré : ces deux polygones sont particulièrement classiques. On peut s'attendre à une bonne maîtrise de ces objets.
  — l'hexagone : souvent rencontré, son étude approfondie est néanmoins peu fréquente [2].
  — l'octogone, le pentagone, l'heptagone : l'octogone peut apparaître plus familier, les pentagones et heptagones certainement moins.
  — les n-gones pour n supérieurs à 9.
  — les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas [3].
  — les polygones réguliers dont la mesure de l'angle en degré est entière, c'est-à-dire tels que $\frac{360}{n}$ soit entier.

Les angles

Nous faisons ici l'hypothèse que les conceptions des sujets concernant la notion générale d'angle assurent aux connaissances un caractère opératoire, [4] qui permet de faire et de réussir. Pour des chercheurs trop novices sur ces objets, il serait nécessaire de questionner les conceptions avant toute recherche de ce problème.

Sont à considérer :

— l'angle plein : mais est-il toujours perçu comme un angle ? À la limite de la perception comme angle déterminé par deux demi-droites, nous ne sommes pas certains qu'il puisse réellement être perçu par tous comme un objet à part entière. Il reste à questionner si son utilisation au moins « en actes » peut être effective,
— l'angle plat : dans le problème posé l'angle plat peut intervenir par exemple comme angle limite de deux polygones convexes dont l'association autour d'un nœud recouvrirait le plan ;
— l'angle droit : plusieurs conceptions peuvent cohabiter. Celle qui apparaît la plus pertinente ici est celle de l'angle obtenu quand on cherche à former à partir de l'angle plein quatre angles égaux ;
— les angles des polygones : il est à noter que leur reconnaissance pourra être contrariée dans les associations de polygones de longueurs de côtés différentes [5] ;
— dans un assemblage, les angles peuvent être associés soit à un angle de polygone soit à un « trou » : dans ce dernier cas la perception peut être plus difficile ;
— les mesures de ces angles, avec ou sans unité de mesure, en portion de l'angle plat, de l'angle droit : la familiarité avec ces mesures est sans aucun doute un point clé.

La relation à ces objets cruciaux peut orienter comme on l'a vu la recherche. Il est à noter que la familiarité avec les polygones réguliers peut également se tester sur la capacité à générer et gérer une liste suffisamment longue des angles des premiers polygones réguliers.

2. Aucune connaissance n'est exigible à son propos au lycée en France. L'approche des nombres complexes dans les programmes de TS peut éventuellement se prêter à un travail sur les racines de l'unité mais aucune connaissance systématisée n'est exigible.

3. Ce n'est plus un élément du curriculum dans le second degré. Sa dernière apparition remonte aux avant-derniers programmes de spécialité mathématiques en première et terminale L, programmes qui se sont éteints respectivement en juin 2004 et juin 2005.

4. Cf. (Vergnaud, 2001) et (Vergnaud, 2005).

5. Cf. par exemple (Berthelot, 1996), (Tanguay, 2012).

Les nombres

La recherche amène la manipulation de nombres. Si ces objets sont naturalisés chez des chercheurs, il n'en est pas de même pour des non experts. La question de savoir si les objets suivants sont non seulement mobilisables mais également familiers est importante :

- les multiples de 30, 90, 120 ; les multiples des mesures des angles des polygones réguliers ;
- les diviseurs de 360 ... qui permettent d'obtenir des angles polygonaux entiers ;
- les valeurs entières, décimales non entières, rationnelles non décimales des angles ou de leurs mesures ;
- les décompositions additives de 360.

Les assemblages autour d'un nœud

Nous revenons sur cet objet « assemblage » dans la section ci-après, considérant les actions sur les objets. Rappelons simplement ici qu'il n'est pas exclu que des pratiques antérieures de manipulations de pièces diverses (tangram, puzzle) aient déjà engendré une certaine familiarité avec ces objets.

Les fractions et les relations de la forme $\sum 1/n = k/2 - 1$

Des développements syntaxiques peuvent amener à la manipulation de fractions égyptiennes, de sommes de telles fractions et de leurs comparaisons à des nombres de la forme $\frac{k}{2} - 1$, pour $k \in [3; 6]$. [6]

Les pavages

Au delà des assemblages, la pratique des puzzles, initiée précocement à l'école, rend relativement familière la notion de recouvrement d'un domaine plan par des « pièces » identiques ou non [7]. Pour autant, dans la situation considérée, il sera nécessaire d'envisager que la réalisation d'un assemblage autour d'un nœud n'est pas suffisante et que la réussite globale ne va pas de soi. Dans ce cadre, l'objet « plan » est, lui aussi, à questionner.

- Les pavages réguliers : la familiarité culturelle dont ils font l'objet peut laisser envisager que ces objets, non seulement apparaissent, mais qu'ils permettent l'élaboration des premiers éléments de la théorie. Il peut toutefois s'avérer que les pavages réguliers soient perçus dans leur globalité et non comme des assemblages, ce qui rend plus difficile le repérage des propriétés.
- Les pavages archimédiens : Ils sont l'« objet » de la recherche, ils fondent cette recherche. Ils n'en sont pas pour autant le but ultime, non seulement parce que du point de vue mathématique la recherche peut se prolonger plus avant dans l'étude des pavages, mais également parce que dans les expériences que nous mènerons, il est fort probable qu'indépendamment de toute difficulté de conceptualisation la situation ne permette pas d'aller au bout de la recherche.
- Les pavages moins réguliers : Il est envisageable non seulement que des pavages avec des tuiles non régulières apparaissent, mais également que des pavages à tuiles polygonales régulières mais non archimédiens soient mis à jour, discutés. Tel a été le cas pour Dürer dans un cadre peu mathématique et pour Kepler avec des ouvertures nombreuses à des polygones non convexes.

6. Pour des détails sur cet aspect nous renvoyons à la situation « fractions égyptiennes » du groupe EXPRIME qui étudie particulièrement le travail sur ces objets., (cf. Aldon *et al.* (2010)).

7. On pourra consulter une étude sur une situation de pavage au collège dans (Puig-Renault, 2006).

Nous nous arrêtons ici à ce niveau d'objets, en faisant l'hypothèse que ce sont les actions sur les objets décrits qui suffiront pour les élaborations théoriques. Nous présentons ensuite des pistes pour l'élaboration de démarches, en appui sur ces objets et fonction des connaissances des sujets à leur propos.

7.2.4 Première anticipation des actions sur les objets

Les chapitres précédents ont déjà permis d'observer des procédures diverses pour s'engager dans le problème mathématique. Nous ne les rappelons pas ici. Précisons toutefois que la démonstration que nous avons présentée ne laisse pas apparaître les indispensables essais sous forme de dessins, d'esquisses, de croquis (éventuellement mentaux pour les plus familiers avec les pavages) que ne manquera pas de réaliser, pour débuter, tout chercheur confronté au problème, et que nous identifions par exemple dans les écrits de Dürer et Kepler. L'objet premier est ici le polygone, régulier ou non, et c'est en appui sur des représentations de polygones que les premiers rapports [8] à l'objet pavage peuvent émerger. C'est le premier temps de l'intuition des objets nouveaux qui peuvent être d'ordre très divers. Le sujet peut aisément prendre conscience que l'on peut assembler des polygones réguliers, bords à bords.

Se pose alors rapidement la question des trous et celle plus complexe des nœuds. Par exemple, dès les premières recherches les cas suivants peuvent subvenir :

Figure 7.1 – Pavages non stricts

Ces cas sont traités soit par les rétroactions du milieu soit, si le milieu ne le permet pas, par les chercheurs eux-mêmes qui sont amenés à statuer et à préciser l'objet de la recherche. Après cette mise en œuvre du geste « Construire des exemples et les questionner » vont apparaître les premières propositions dont le statut peut être variable, par exemple :

— CN1 : Les longueurs des côtés des polygones sont congruentes.
— CN2 : La somme des angles des polygones autour d'un nœud vaut l'angle plein.
— P1 : La valeur des angles est un diviseur de 360.

C'est le moment des possibles, du passage de l'intuition à l'anticipation, de l'affirmation de propositions ni vraies ni fausses, plutôt vraies, plutôt fausses, suivant le degré de certitude que l'on ressent à leur égard. Ce n'est pas encore le temps de la première construction de la théorie locale qui viendra quand ces propositions auront été soumises à d'autres tests. C'est aussi le moment où d'autres gestes peuvent commencer à prendre place, *changer de cadre*, *structurer une stratégie*, mais il est plus probable que la construction du domaine d'expérience

8. Pour certains ils seront même peut-être de l'ordre du qualisigne iconique rhématique ou du sinsigne iconique rhématique. Nous reprendrons cette question plus loin sous l'angle d'une anticipation de l'évolution sémiotique sur le modèle proposé par Muller.

se poursuive par exemple par la réalisation d'assemblages de polygones autour d'un nœud avec des polygones cette fois tous réguliers, avec des côtés de même longueur. Il est aussi possible, dès qu'un catalogue d'exemples s'étoffe, que le besoin de « Réduire le problème » s'affirme, par exemple par le nombre de types différents de polygones considérés (un pour les pavages réguliers en particulier) ou par le nombre de polygones présents autour d'un nœud.

Cela pourrait produire deux procédures :

— PR1 - La procédure « Pavages Réguliers » : Cette procédure consisterait à s'engager dans la recherche exhaustive des pavages réguliers du plan. Plusieurs démarches syntaxiques s'appuyant sur CN2 sont possibles, par exemple écrire $k\alpha = 360$ où k est le nombre de polygones présents, $k \geq 3$ et où α est l'angle d'un polygone régulier. En combinant les valeurs possibles de k et celles de α cela permet de donner la liste exhaustive des Pavages réguliers du plan :(3,3,3,3,3,3),(4,4,4,4),(6,6,6). Après cette réduction à 1 du nombre E de polygones différents autour d'un nœud [9], l'étude des cas 2, 3 peut se mettre en place [10].

— PR2 - La procédure « Réduction du nombre de polygones » : Elle amène à expliciter que k est non seulement supérieur strict à 2 mais aussi inférieur ou égal à 6 et même inférieur ou égal à 5 si on écarte le cas (3,3,3,3,3,3).

Si on prend l'exemple de la procédure « Pavages Réguliers », elle doit s'appuyer d'ores et déjà sur un noyau de théorie locale qui contient les propositions CN1 et CN2 qui auront été admises comme vraies dans une démarche fonction du milieu. Les propositions peuvent devenir formelles et, quand le besoin s'en fait sentir, nécessité de convaincre en particulier, faire l'objet de recherches de preuve, de débats de validation.

Dans l'exploration du nouvel objet qui se fait jour, le besoin d'appui sur les objets familiers se fera à nouveau sentir dans une phase où les processus de preuve ne sont pas assurés et où émergent déjà de nouveaux sous-problèmes. Ces nouveaux problèmes peuvent désormais se développer aussi du point de vue syntaxique. Différentes procédures peuvent alors voir le jour :

— PR1G : Des procédures syntaxiques, généralisant la procédure « Pavages Réguliers », visant à obtenir de nouvelles conditions nécessaires simples.

— PR21 : Des procédures de dénombrement s'appuyant sur l'ordre du pavage.

— PR22 : Des procédures de dénombrement s'appuyant sur les valeurs de E, nombre de polygones différents autour d'un nœud.

— PR3 : Des procédures s'appuyant sur des conditions nécessaires prenant en compte des aspects globaux du pavage (cf. Lemme 1 page 83 et Lemme 2 page 84) pour réduire la recherche.

Les procédures PR21 et PR22 peuvent se développer comme suit et l'on constate alors qu'elles nécessitent une certaine familiarité avec l'ordre dans $\mathbb{N}$ pour une plus grande efficacité.

PR21 : Procédures de dénombrement s'appuyant sur l'ordre du pavage.

On cherche les pavages archimédiens non réguliers. On travaille à partir des valeurs de k comprises entre 3 et 5 au sens large. On met en évidence des solutions sous forme de n-uplets d'angles, sous la double contrainte de l'appartenance à l'ensemble des valeurs des angles des polygones réguliers et de la vérification de CN2, ce qui fixe le dernier élément du n-uplet quand les autres varient.

— $k = 5$. En considérant $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \alpha_5$ on a $\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i) \geq 240 + \alpha_5$ soit $\alpha_5 \leq 120$. On cherche alors les organisations possibles. On obtient : (60,60,60,60,120), (60,60,60,90,90), c'est-à-dire les candidats pavages de types suivants, à une permutation près : (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4).

— $k = 4$. On considère $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$ et on balaie toutes les valeurs possibles de

9. Ce que Kepler appelait le nombre d'espèces de figures.

10. Dès que l'on écarte les pavages réguliers on a $2 \leq E \leq 3$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:
(60,60,60,180) ne convient pas,
(60,60,90,150), (60,60,120,120) conviennent,
(60,90,90,120) convient,
(90,90,90,90) ne convient pas et toutes les valeurs possibles ont été balayées.
On obtient les candidats pavages de types suivants, à une permutation près : (3,3,4,12), (3,3,6,6), (3,4,4,6).

— $k = 3$. On considère $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$:
(60,60,240) ne convient pas,
...
(60,120,180) non plus, puis $(60, \frac{5}{7}.180, \frac{1200}{7})$, (60,135,165),(60,140,160),(60,144,156), (60,150,150) conviennent,
(90,90,180) ne convient pas puis (90,108,162), (90, 120, 150), (90,135,135) conviennent,
(108,108,144) convient et c'est fini.
On obtient les candidats pavages de types suivants, à une permutation près : (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15), (3,12,12),(4,5,20), (4,6,12), (4,8,8), (5,5,10).

On obtient les 14 candidats pavages non réguliers à permutation près.

Procédures de dénombrement s'appuyant sur les valeurs de E (on cherche les pavages archimédiens non réguliers).

— $E = 3$: On note n_1 le nombre non nul d'apparitions de l'angle de plus petite mesure, n_2 le nombre d'apparitions de l'angle de mesure intermédiaire et n_3 le nombre d'apparitions de l'angle de plus grande mesure. On a $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 \geq 60 + 90 + 108 = 258$ et $360 - 258 = 102$ donc n_1, n_2 sont inférieurs ou égaux à 2 et n_3 est inférieur strict à 2.
En considérant là encore une somme égale à 360, on cherche une liste des combinaisons possibles :
Débuter avec un plus petit angle supérieur ou égal à 108° ne donne pas de possibilité, et débuter avec 90 ne permet pas de doubler un des angles : (90,108,162),(90,120,150) seuls conviennent.
Puis :
(60,60,90,150),
(60,90,90,120),
$(60, \frac{5}{7}.180, \frac{1200}{7})$,(60, 135,165),(60, 140,160),(60,144,156) conviennent, et c'est fini.
On obtient alors les candidats pavages de types suivants, à une permutation près : (4,5,20), (4,6,12), (3,3,4,12), (3,4,4,6), (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15).

— $E = 2$: On note n_1 le nombre non nul d'apparitions de l'angle de plus petite mesure, n_2 le nombre d'apparitions de l'autre angle. On a $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 \geq 60 + 90 = 150$ et $360 - 150 = 210$ donc n_1, n_2 sont inférieurs ou égaux à 3.
$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 = 360$ entraine $\alpha_2 = \frac{360 - n_1\alpha_1}{n_2}$ avec n_1 et n_2 non nuls et nous considérons $\alpha_2 > \alpha_1$
$\alpha_1 = 60$ amène les possibilités suivantes :
(60,150,150),
(60,60,120,120),
(60,60,60,90,90),
(60,60,60,60,120).
$\alpha_2 = 90$ amène la possibilité suivante :
(90,135,135).

$\alpha_1 = 108$ amène la possibilité suivante :
(108,108,144) et c'est fini.
On obtient alors les candidats pavages de types suivants, à une permutation près : (3,12,12), (3,3,6,6), (3,3,3,4,4), (3,3,3,3,6), (4,8,8), (5,5,10).
On obtient là encore les 14 candidats pavages non réguliers à permutation près.

Rappelons également qu'une recherche de l'exhaustivité peut s'appuyer sur un arbre (cf. annexe D) et parait ainsi moins technique.

Une synthèse mathématique est désormais possible dans le cadre de la théorie locale qui aura intégré la nécessité de vérifier la possibilité d'étendre le recouvrement au-delà des assemblages obtenus. Cette synthèse permettra de ne retenir que onze pavages archimédiens du plan. [11] [12]

7.2.5 Une approche sémiotique

Comme nous l'avons présenté dans le chapitre 3, l'analyse *a priori* pour la SDRP envisagée peut être enrichie par une analyse sémiotique. Cette autre grille, rappelons le, ne vient pas remplacer une approche didactique mais collaborer à l'anticipation de ce qui pourrait se produire, sous un paradigme pragmatiste, dans l'activité d'un sujet confronté à la tâche proposée.

Nous allons donc, ici, reprendre la démarche présentée dans le chapitre 3, et chercher à identifier une suite de signes qui pourrait rendre compte d'une évolution sémiotique pour aboutir à la production de légisignes symboliques argumentaux.

1. Le signe à construire

   Nous sommes ici obligés de préciser la tâche qui sera demandée aux élèves. Il s'agira de déterminer tous les pavages stricts du plan à base de polygones réguliers tels qu'autour de chaque nœud du pavage, il y ait le même assemblage de polygones. Nous reprenons ci-dessous le support (Figure 7.2) tel qu'il a été proposé lors des premières expérimentations, et sur lequel nous serons amenés à revenir.

   Cette tâche va engendrer le développement de signes. Nous allons ici en spécifier un, suffisamment général, pour nous guider dans l'analyse. Bien évidemment il ne peut réduire à lui seul la diversité des possibles dans ce domaine. Caractérisons-le ainsi :

   - Objet : Une théorie locale (au sens de Duran-Guerrier) qui permet la détermination des onze pavages archimédiens du plan
   - Representamen : l'expression de cette théorie
   - Interpretant : la médiation entre la théorie et son expression

2. Du qualisigne iconique rhématique au sinsigne indiciel dicent : la construction de la tâche

   Au vu du support, du mot pavage, du dessin le sujet ressent les premières sensations en lien avec les pavages. À ce premier sentiment, cette simple reconnaissance d'une forme (qualisigne iconique rhématique) va succéder la première prise de conscience de la forme, comme forme d'un ensemble permettant par exemple de paver une cuisine

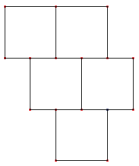
11. Cette synthèse peut se faire au fil de l'analyse dès l'obtention d'un candidat-pavage.
12. Pour cette étape la question de l'aisance à représenter les polygones réguliers et donc les outils disponibles pour le faire est importante pour les sujets qui continueront à s'appuyer sur les représentations. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Une situation de recherche en classe

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

Un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers,
sans trou, ni superposition,
et tel qu'autour de chaque sommet, il y ait le même assemblage de polygones.

On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme sur la figure ci-dessous :



La recherche proposée est la détermination de tous les pavages archimédiens du plan.

Figure 7.2 – Support pour la mise en activité de recherche

(sinsigne iconique rhématique). Puis l'évolution peut se poursuivre par la considération d'un objet d'expérience directe (sinsigne indiciel rhématique), par exemple les premiers dessins, les premières manipulations, qui prendra le statut d'un sinsigne indiciel dicent dans la mesure où il pourra se dire et permettre la communication. À ce stade le sujet a conscience de la tâche à réaliser et peut la décrire, l'exprimer. Il s'agit désormais de créer des pavages archimédiens, pour l'instant avec des manipulations qui sont de l'ordre du fait et non de la règle. Le sujet s'est approprié une tâche singulière, il agit sur un milieu objectif, la construction du problème doit pouvoir advenir.

3. Du légisigne iconique rhématique au légisigne indiciel dicent : la construction du problème

Les assemblages ne disent rien des contraintes qu'ils portent tant qu'ils ne s'intègrent pas dans des éléments de théorie. De même $\sum a_i = 360$ ne peut être dans un premier temps qu'un fait, un retour de l'expérience, encore un sinsigne. Mais ce que le milieu renvoie va petit à petit se concevoir comme l'existence de règles à découvrir. $\sum a_i = 360$ devient un légisigne, iconique car de l'ordre de la ressemblance et rhématique car encore de l'ordre du potentiel. Il devient indiciel rhématique puis indiciel dicent quand la loi communique quelque chose au niveau des pavages en cours d'élaboration. Quand le sujet est à la recherche d'assemblages satisfaisant, par exemple avec deux types de polygones, $x.60+y.90 = 360$, la loi, pour l'heure locale et transitoire, fonde l'action. Le problème est construit, au moins partiellement car on ne peut s'attendre à voir apparaître l'ensemble des légisignes immédiatement. La dévolution est acquise.

R	O	I	Signe	Illustration	Objets potentiellement en jeu
1	1	1	Qualisigne iconique rhématique	Une image de recouvrement du plan comme simple forme	
2	1	1	Sinsigne iconique rhématique	Une prise de conscience d'une image de recouvrement comme élément d'un ensemble	Mots ou dessin de l'énoncé, image mentale préexistante de pavages
2	2	1	Sinsigne indiciel rhématique	Un dessin de deux polygones « côte à côte »	Polygones familiers, polygones réguliers ou non
2	2	2	Sinsigne indiciel dicent	Des premiers dessins de pavage support potentiel pour un échange	Polygones, assemblages de polygones
3	1	1	Légisigne iconique rhématique	La prise en compte des éléments mathématiques (géométriques, numériques) comme tels, renvoyant à une structure	Les entiers, les mesures des angles des polygones, les polygones comme éléments d'un catalogue
3	2	1	Légisigne indiciel rhématique	Structuration de la recherche en appui sur des propositions qui n'ont pas encore le statut de loi, « $\sum a_i = 360$ », « il faut qu'aucun sommet soit au milieu d'un côté »	Polygones, angles, assemblages autour d'un nœud
3	2	2	Légisigne indiciel dicent	Premiers échanges sur ces procédures	Polygones, angles, assemblages autour d'un nœud, PR1, PR1G, PR2, PR3
3	3	1	Légisigne symbolique rhématique	Les procédures renvoient à des lois générales	Congruence des longueurs comme loi, $\sum a_i = 360$
3	3	2	Légisigne symbolique dicent	La théorie s'organise à partir de propositions ... (en appui sur les objets familiers)	CN1, CN2, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1$,...
3	3	3	Légisigne symbolique argumental	Les raisonnements par induction, abduction, déduction se mettent en place	

FIGURE 7.3 – Sémioses autour de la recherche des pavages archimédiens du plan

4. Du légisigne symbolique rhématique à l'argument : la construction de la règle

   Nous remplacerons ici la recherche de la règle par celle de la théorie, toujours locale, mais qui rend mieux compte de la complexité de l'expression attendue. Maintenant, sans l'élaboration d'une théorie sophistiquée, la recherche des pavages archimédiens ne saurait être exhaustive. Et non seulement il faut aboutir à cette certitude, mais il faut pouvoir le faire à un niveau symbolique, dans la théorie porteuse de sens et finalement au niveau argumental pour que la certitude deviennent diffusable dans le cadre mathématique. Le sujet est alors amené à élaborer des procédures, par exemple PR1, PR2, ... précédemment décrites, à en user (la théorie est alors opératoire) tout en les justifiant dans la théorie. Quand le sujet en est arrivé à la production de légisignes symboliques argumentaux, quand ces signes portent la raison de leur vérité et produisent une liste de onze pavages archimédiens la sémiose peut, ici, s'arrêter.

À ce niveau, sans pouvoir aller plus loin quant à l'organisation des sémioses potentielles, nous pouvons proposer un premier tableau (Figure 7.3) liant objets-actions sur les objets et signes.

Pour poursuivre l'analyse théorique, nous précisons maintenant les institutions visées, de manière à envisager une étude plus fine des connaissances potentiellement mobilisables, des sémioses possibles, des savoirs potentiellement institutionnalisables.

7.3 Différentes institutions pouvant accueillir la SDRP envisagée

Comme on l'a vu précédemment, la thématique des pavages archimédiens a mis très longtemps a émerger dans la communauté mathématique et n'a que peu diffusé dans les pays francophones après les premières synthèses du début du vingtième siècle. On ne trouve aujourd'hui que très peu d'ouvrages français l'évoquant. On peut citer le « manuel » de C. Rousseau et Y. Saint-Aubin, Mathématiques et Technologie, (Rousseau et Saint-Aubin, 2009) et un ouvrage de classe préparatoire de Xavier Gourdon. Ce résultat, pourtant élémentaire, n'est donc pas un résultat connu de la communauté des enseignants de l'Éducation Nationale. Il vit aujourd'hui plutôt comme élément de théories plus générales dans le monde de la recherche mais n'a pas su trouver, jusqu'à ce jour sa « niche écologique », au sens de Chevallard, dans l'enseignement mathématique secondaire [13].

7.3.1 Une diversité d'institutions possibles

Compte-tenu de la nature même des SDRP, il est fortement envisageable de faire vivre cette SDRP dans différentes institutions [14] : lycée, premières années de l'enseignement supérieur, école de formation des enseignants, dispositifs de formation continue des enseignants, ... Notre projet visant toutefois prioritairement l'épistémologie scolaire, c'est l'institution « lycée d'enseignement général et technologique français » que nous allons étudier plus finement. Mais nous le verrons dans le cadre de certaines expérimentations préalables, un parallèle avec d'autres institutions est aisément réalisable.

7.3.2 Le lycée d'enseignement général et technologique français

Les objets mathématiques en jeu relèvent essentiellement de deux grands champs des mathématiques, la géométrie et l'arithmétique (dans $\mathbb{N}$ totalement ordonné et archimédien), même si certaines démonstrations peuvent utiliser des concepts d'autres champs, par exemple celui de l'analyse. On se retrouve ainsi dans un problème où formes et nombres [15] sont intimement mêlés, et nous pouvons faire l'hypothèse que des interactions entre ces deux champs dans l'action dépendra pour une part l'avancée dans l'exploration.

La géométrie au lycée

Rappelons que :

> la géométrie élémentaire doit prendre en compte les trois aspects de la connaissance explicités par Gonseth, l'aspect intuitif, l'aspect théorique ou rationnel et l'aspect expérimental, (Bkouche, 2006, p.10)

L'aspect intuitif nous renvoie aux positions de Poincaré et prend appui sur l'expérience du mouvement des corps, enrichie par des connaissances régulièrement théorisées. Pour Bkouche,

13. Notons toutefois que les projets de programmes pour le cycle 4 dans le cadre « des activités particulièrement adaptées à des connexions interdisciplinaires » introduit la construction de pavages. (Projet de programmes pour le Cycle 4 du 9 avril 2015 - p 35).

14. Au sens de la Théorie Anthropologique du Didactique.

15. Entiers car la question de la mesure est assez rapidement écartée dans l'étude du problème.

l'aspect rationnel a pour but d'éviter les pièges d'une intuition mal contrôlée, mais comme nous l'avons écrit cet aspect se construit dans l'activité mathématique elle-même. L'aspect expérimental renvoie ici pour Bkouche à la nécessaire réalisation matérielle d'expériences « assurant la cohérence entre le discours théorique et le monde ». Nous avons généralisé cet aspect avec l'idée de dimension expérimentale de l'activité mathématique.

Dans l'optique de la possible implantation au lycée de la SDRP envisagée, nous étudions maintenant à la fois les objets de la géométrie dans le secondaire et le mode de vie préconisé. Rappelons tout d'abord quelques éléments généraux sur l'organisation de l'enseignement de la géométrie à l'école et au collège [16].

1. Les « objets » rencontrés.

   Il est à noter que dès le cycle 1, il est attendu des élèves qu'ils découvrent les formes en manipulant des objets variés, et qu'ils repèrent des propriétés simples. Il sont amenés à comparer et classer selon la forme, la taille, la masse, la contenance. Le travail de repérage, de déplacement est engagé. Le travail de repérage se fait aussi bien dans le méso-espace, en particulier celui de la classe que dans le micro-espace, par exemple celui d'une feuille de papier. Pour ce qui concerne la manipulation des objets, notons que la reproduction d'assemblages à partir d'un modèle est une activité fréquente et en particulier la réalisation de puzzle à partir de formes simples.

   En cycle 2, les questions de repérage se prolongent mais ce sont surtout les « objets » de l'activité « géométrique » du micro-espace qui se précisent. Il s'agit de décrire, reconnaître, reproduire des carrés, rectangles, triangles (rectangles pour ce qui est de la reproduction) mais également commencer à percevoir et reconnaître quelques relations et propriétés géométriques : alignement, angle droit, axe de symétrie, égalité de longueur. Pour l'espace les élèves doivent savoir reconnaître, décrire et nommer cubes et pavés droits. Le développement d'aptitudes dans la manipulation langagière et instrumentale est un objectif de ce cycle.

   En cycle 3, au-delà de l'approfondissement des compétences déjà initiées les années précédentes, de nouveaux « objets » et instruments sont introduits, droites perpendiculaires, parallèles, cylindres, prismes, patrons, compas, ... mais ce sont aussi de nouvelles compétences en particulier en CM2, de construction à partir d'un programme de construction ou d'indications relatives aux propriétés qui sont attendues.

   Un certain nombre d'objets potentiellement en jeu dans la situation font ainsi l'objet d'une longue fréquentation dans le cursus d'un élève et ce depuis le début de la scolarité.

   Au collège, c'est un travail plus systématique de structuration des savoirs qui est proposé. Il se fait en appui sur un enrichissement des objets fréquentés aussi bien dans le plan que dans l'espace et des propriétés sur ces objets. Dans le plan en particulier, le travail sur les droites, les triangles, les quadrilatères, quelques polygones réguliers, les cercles s'inscrit dans une approche de nouveaux outils, angles inscrits, angles au centre, relations trigonométriques dans le triangle rectangle, configuration de Thalès, théorème de Pythagore, ... Pour ce qui nous concerne, notons en particulier, que les élèves sont amenés à construire un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier, un octogone connaissant son centre et un sommet.

   En seconde, la grande introduction est celle du point de vue analytique. La « géométrie plane repérée » se développe tout d'abord en appui sur les objets connus, mais fonde également l'essentiel des apports sur les vecteurs qui sont essentiellement développés dans ce cadre. Les configurations du plan restent un des items importants des programmes. Ce

16. Compte-tenu des élèves que nous avons sollicité pour nos expérimentations nous ne nous attacherons pas ici à l'étude de la réforme des programmes en cours.

sont les propriétés des triangles, des quadrilatères et des cercles, mais aussi des symétries axiales ou centrales qui doivent fournir les outils pour la résolution de problème.

Dans le cycle terminal de la série scientifique, les résultats en géométrie plane repérée sont enrichis avec le développement de la trigonométrie et l'introduction du produit scalaire puis des nombres complexes.

2. Les raisonnements attendus :

Après un appui sur l'expérience immédiate puis instrumentée aux cycle 1, 2 et 3 les attentes en termes de raisonnement en géométrie évoluent mais toujours dans une proposition de démarche appuyée sur la résolution de problème. Ainsi au collège [17] on identifie :

En sixième :

> La résolution de problèmes a pour objectifs [...] de conduire sans formalisme des raisonnements simples utilisant les propriétés des figures usuelles ou de la symétrie axiale,

En cinquième :

> Les diverses activités de géométrie habituent les élèves à expérimenter et à conjecturer, et permettent progressivement de s'entraîner à des justifications mettant en œuvre les outils du programme et ceux déjà acquis en classe de sixième.

En quatrième, la démonstration est introduite, après le rappel suivant :

> - Les activités de découverte, d'élaboration et de rédaction d'une démonstration sont de natures différentes et doivent faire l'objet d'une différenciation explicite.

Plus globalement :

> La résolution de problèmes a pour objectifs [...]
> - de développer les capacités heuristiques et de conduire sans formalisme des raisonnements géométriques simples utilisant les propriétés des figures usuelles, les symétries, les relations métriques, les angles ou les aires ; [...]
> - d'initier les élèves à la démonstration ;

Et en troisième :

> La résolution de problèmes a pour objectifs [...] de développer les capacités heuristiques, les capacités de raisonnement et les capacités relatives à la formalisation d'une démonstration ;

Les programmes de lycée renvoient à la « démarche scientifique ». Les objectifs généraux du programme de seconde [18] précisent :

> L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :
> - modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;
> - conduire un raisonnement, une démonstration ;
> - pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;
> - faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;
> [...]

17. Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008.
18. Bulletin officiel n°30 du 23 juillet 2009.

Du point de vue didactique, il n'est pas utile pour notre propos de revenir de façon fine sur, par exemple, l'analyse de la figure en géométrie ou l'apprentissage de la démonstration pendant le cursus de l'élève, le problème ne le nécessite pas. Mais nous pouvons reprendre quelques éléments plus généraux sur le travail en géométrie pendant le cursus pour tenter d'identifier la relation des élèves aux objets de la géométrie.

Houdement et Kuzniak (2006) identifient trois types de géométries :

> - La Géométrie I ou « géométrie naturelle » : elle a pour source de validation la réalité, le sensible. Le qualificatif de « naturelle », que nous lui avons attribué à la suite de Gonseth, veut refléter l'existence d'une relation au réel [...] La Géométrie I correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets [...]. L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel.
>
> - La Géométrie II ou « géométrie axiomatique naturelle » : dans cette Géométrie la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. [...] La relation avec la réalité subsiste encore dans cette Géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. L'axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité.
>
> - La Géométrie III ou « géométrie axiomatique formaliste » : dans cette Géométrie, [...], les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique l'emporte. Une différence essentielle avec la Géométrie II porte sur la complétude du système d'axiomes : en Géométrie III, l'axiomatisation n'est plus partielle.

et définissent les ETG comme suit :

> Nous désignerons sous le terme d'espace de travail géométrique (ETG), l'environnement organisé par et pour le géomètre de façon à articuler, de façon idoine, les trois composants suivants :
>
> - un ensemble d'objets, éventuellement matérialisés dans un espace réel et local ;
> - un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre, et enfin ;
> - un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique.

Sous cette modélisation Kuzniak présente alors comme suit quelques points caractéristiques des ETG rencontrés en fin de scolarité en France, (Kuzniak, 2010, p.92) :

> L'ETG de référence peut être caractérisé comme relevant de la Géométrie II morcelée. Un grand nombre d'îlots démonstratifs sont introduits pour bien montrer le lien entre la géométrie et l'intuition de l'espace. Puis, l'accent est mis sur la nécessité de développer le travail démonstratif en le distinguant des preuves expérimentales et des affirmations perceptives.

Cependant :

> Dans les exemples que nous avons pu observer, le glissement vers la Géométrie I a été favorisé par l'usage des logiciels qui instituent une preuve informatique qui vient à l'encontre de la preuve axiomatique. Cette dernière est d'autant plus affaiblie que le référentiel théorique mis à disposition des élèves n'apparaît pas, même en filigrane.

et

> Enfin, la réorganisation des ETG semble de plus en plus pilotée par un professeur s'adaptant au niveau des élèves plus que par des choix épistémologiques assumés. Le travail géométrique fonctionne par appauvrissements successifs [...]

Pour Kuzniak, les allers-retours entre Géométrie I et Géométrie II ne favorisent pas une mise en relation de l'espace physique avec l'espace géométrique abstrait et il est probable qu'un certain nombre d'élèves ne maîtrisent pas cette relation dialectique. Plus généralement les rapports sur l'enseignement de la géométrie dans le secondaire français réaffirment régulièrement la pertinence de cet enseignement, par exemple (Kahane, 2002). Mais si la géométrie est réaffirmée comme indispensable au citoyen et à tous les scientifiques, pour qui le fait de penser géométriquement est essentiel, on assiste à une transformation de la géométrie proposée à l'école et particulièrement au lycée, et il faut sans doute parler maintenant de géométries. Du point de vue de la géométrie non analytique, on ne peut ainsi être certain de la capacité de tous les élèves à s'engager dans une interaction cognitive entre une visualisation et un discours sur des propositions.

Toutefois, dans le cas que nous considérons, l'ensemble des figures à manipuler sont dans des relations simples et l'on peut faire l'hypothèse que le passage du sinsigne au légisigne pourra se produire et que la fonction heuristique de l'appui sur les figures permettra l'élaboration puis le contrôle des théories.

7.3.3 Arithmétique

Les élèves développent tout au long de leur scolarité une familiarité avec les entiers. Elle est aussi de type peu formalisé mais réelle avec :

- dès le collège et plus particulièrement en troisième des connaissances attendues sur les nombres entiers et rationnels autour des diviseurs communs à deux entiers, sur les fractions irréductibles. Les élèves doivent connaître et utiliser un algorithme donnant le PGCD de deux entiers (algorithme des soustractions, algorithme d'Euclide), savoir déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux, savoir simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible. Le recours à une décomposition en produits de facteurs premiers est possible dans des cas simples mais ne doit pas être systématisé ;

- au lycée les compétences sur les entiers ne sont pas développées en tant que telles ni en seconde ni en première mais reprises dans les autres champs, par exemple en algorithmique en seconde et première, avec les suites en première ;

- les élèves de l'enseignement général et technologique qui suivent la spécialité mathématiques sont amenés à développer de nouvelles compétences dans le cadre de la résolution de problèmes sur les contenus suivants [19] : Divisibilité dans Z - Division euclidienne - Congruences dans Z - PGCD de deux entiers - Entiers premiers entre eux - Théorème de Bézout - Théorème de Gauss - Nombres premiers - Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. Pour eux, les exemples de problèmes suivants sont cités : Problèmes de codage (codes barres, code ISBN, clé du Rib, code Insee) - Problèmes de chiffrement (chiffrement affine, chiffrement de Vigenère, chiffrement de Hill) - Questionnement sur les nombres premiers : infinitude, répartition, tests de primalité, nombres premiers particuliers (Fermat, Mersenne, Carmichaël) - Sensibilisation au système cryptographique RSA.

Le choix de la classe de terminale S, spécialité mathématiques permettrait de s'assurer d'une grande familiarité avec le champ de l'arithmétique. Cela ne garantit toutefois pas certaines compétences en termes de majoration-minoration qui sont à l'interface avec l'analyse et en général très peu travaillées au niveau du lycée.

19. Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011.

7.4 Première proposition de SDRP pour expérimentations préalables

Nous sommes à ce moment de l'étude prêt à proposer un premier germe de situation didactique de recherche de problème fondée sur l'exploration des pavages archimédiens du plan. Compte-tenu des analyses précédentes, historique et épistémologique, nous choisissons tout d'abord de tenter une détermination des pavages archimédiens du plan avec des élèves-étudiants de fin d'étude secondaire ou au-delà. Nous faisons à cet instant l'hypothèse que ces élèves-étudiants peuvent s'engager dans une telle SDRP et produire des résultats significatifs. Significatifs ne signifie pas une détermination complète de l'ensemble, en effet les difficultés rencontrées dans les genèses historiques, dans la relation aux polygones, à leurs caractéristiques et dans la relation à la régularité laissent envisager une évolution sémiotique complexe. Toutefois les objets potentiellement manipulables, les actions possibles sur ces objets permettent d'envisager un jeu didactique. Les analyses complémentaires que nous proposons maintenant doivent permettre :

- d'affiner le modèle théorique,
- de confirmer la pertinence de certaines références pour les analyses,
- d'enrichir les données d'analyse pour le modèle expérimental *a priori* et en particulier obtenir des informations sur certaines variables non encore évoquées (artefacts divers, instruments de géométrie, logiciels, matériel pour la manipulation, ...),
- plus généralement de confirmer les variables de commandes de la situation,
- d'obtenir les premières sémioses d'élèves-étudiants lors des différents jeux possibles,
- d'étudier la consistance de la situation : vérifier que les variables retenues ne sont pas contradictoires, c'est-à-dire ne conduisent pas à des connaissances incompatibles, même provisoirement pour l'actant,
- de confirmer la possibilité de poursuivre les expérimentations approfondies en termes déontologiques.

Pour cela nous réalisons plusieurs expérimentations préalables :

1. EP1 : Avec des étudiants préparant le concours de professeur des écoles
2. EP2 : Avec deux groupes de trois élèves de terminale S
3. EP3 : Avec des élèves de premières S
4. EP4 : Avec un groupe de stagiaires de la formation continue

Nous précisons pour chacune d'elles, le contexte, les variables retenues pour la construction du milieu permettant un jeu didactique, des observations permettant les premières analyses.

7.5 Expérimentations préalables

7.5.1 Expérimentation préalable avec des étudiants préparant le concours de professeur des écoles : EP1

Le contexte

Cette première expérimentation préalable a lieu avec des étudiants de l'IUFM [20] de l'académie de Lyon préparant le concours de professeur des écoles, pour la deuxième année consécutive. La séance est proposée par une enseignante expérimentée. La collègue vise une reprise de contact

20. Désormais École Supérieure du Professorat et de l'Éducation.

non seulement avec les problèmes de recherche, mais aussi avec les mathématiques et la préparation au concours. Dans le cadre de la formation de ces étudiants, cette mise en œuvre d'un problème de recherche[21] comme entrée en formation a montré tout son intérêt[22], l'enseignante cherche à l'enrichir en s'appuyant sur la question des pavages archimédiens.

Cette séance est proposée à deux groupes d'étudiants dans les mêmes conditions. Le premier groupe concerné est constitué de 23 étudiants qui ont choisi une majeure histoire-géographie pour le concours et ont très globalement un parcours universitaire non scientifique. Le deuxième groupe de 18 étudiants est *a priori* plus familier avec les démarches scientifiques.

Tous ont déjà vécu au moins une séance de problème de recherche, certains en ont déjà mis en œuvre lors d'un stage de pratique accompagnée à l'école primaire, avec un suivi à l'IUFM, et ont eu plus globalement des apports didactiques sur les problèmes et les problèmes de recherche en particulier.

L'organisation didactique

Pour cette première expérimentation préalable, la survenue du plus grand nombre possible de procédures, cheminements, pistes possibles est souhaitée. L'organisation didactique construite avec l'enseignante est fondamentalement basée sur la gestion proposée par Arsac et Mante pour la mise en œuvre de problèmes ouverts[23], même si les objectifs sont différents.

L'énoncé proposé est celui de la figure 7.2 et le déroulement prévu est le suivant :

1. L'enseignante présente le type d'activité abordée et les différents temps (écoute, recherche individuelle, recherche collective, rédaction d'une affiche par groupe, présentation des productions et débat, institutionnalisation).
2. Elle projette ensuite au tableau une version lisible par tous de l'énoncé et demande à un étudiant de le lire.
3. L'enseignante demande ensuite à un autre étudiant ou éventuellement au même d'expliquer quel est le problème mathématique. Cette phase d'explicitation sera particulièrement nécessaire pour les étudiants les moins familiers avec les objets considérés et le vocabulaire associé. Elle participe de l'appropriation de la tâche.
4. Suit, un premier temps de recherche qui est individuel et dure environ cinq minutes.
5. À la fin de ce temps, si l'enseignante, après avoir circulé auprès des étudiants, constate une incompréhension majeure, elle peut faire un point d'explicitation avec la classe. Sinon elle propose de passer à la deuxième phase de la séance : un temps de travail collectif. Pour cette expérimentation ce temps de recherche sera d'environ une heure et quinze minutes. Les modalités de regroupement sont souples : les étudiants se groupent par affinité ou proximité[24].
6. Le temps suivant sera celui de la présentation des productions et du débat sur ces productions.
7. La séance se termine sur un temps d'institutionnalisation. Dans ce cadre de préparation au concours de recrutement des professeurs des écoles, cette institutionnalisation portera sur la définition d'un polygone régulier, la valeur de la mesure en degré des angles d'un polygone régulier, la preuve de R1 : « Il existe 3 et seulement 3 pavages réguliers du plan », un début de démarche amenant à la preuve de R2 « Il existe 11 et seulement

21. Nous utilisons ici cette expression dans ce contexte avant expérimentation définitive.
22. Voir par exemple Peix et Tisseron (1998).
23. Nous renvoyons à (Arsac et Mante, 2007), pages 49 à 55, pour un exemple de gestion détaillée.
24. Dans d'autres situations ces modalités sont à travailler : cela peut être au volontariat des élèves ou suivant des préconisations de l'enseignant bien précises en fonction des compétences des uns et des autres, des (in)compatibilités de caractères, ...

11 pavages archimédiens du plan », avec un aperçu de la démarche de Kepler et des planches qu'il a produites, la présentation des onze pavages archimédiens, (cf. annexe E.2).

Nous souhaitons qu'il n'y ait pas d'ambiguïté immédiate sur les notions de polygones réguliers et de pavage du plan pour entrer dans la phase de recherche suivante. L'enseignante répondra autant que nécessaire aux questions sur ces points après l'explicitation par l'étudiant.

Le temps de recherche individuelle est essentiel. Il permet une première appropriation de l'énoncé par tous, un début de sémiose, et éventuellement des premiers raisonnements pour les plus rapides. Il fonde les premières positions.

Pour la durée de la mise en œuvre d'une séance de ce type, il est nécessaire de prévoir un minimum de deux heures pour permettre des temps de recherche et de familiarisation minimaux avec les objets mathématiques approchés. Un temps plus réduit complique nettement la gestion, indépendamment du problème considéré.

Le milieu matériel

Les choix suivants ont été faits pour cette primo-expérimentation :

- la salle est préalablement disposée pour favoriser le travail en groupe de quatre, l'écoute et le débat. Pour chaque séance les étudiants se sont répartis en groupes de quatre, éventuellement trois.
- sur une table de la salle, des règles graduées, des compas, des calculatrices, des ciseaux, du papier, des rapporteurs sont mis à disposition des étudiants qui ont la possibilité ou non de les utiliser, une annonce est faite en ce sens en début de recherche.
- aucun autre matériel (pièces rigides prédécoupées, geomag, ...) n'est proposé.
- les étudiants disposent de leur calculatrice.
- aucun matériel informatique n'est mis à leur disposition. Il n'est pas interdit d'utiliser un ordinateur portable personnel, mais les fonctionnalités de recherche internet, ainsi que celles des téléphones portables, ne sont pas autorisées.

La volonté de faciliter la relation aux objets familiers, les actions sur les objets, l'émergence de procédures a amené à proposer à ces étudiants du matériel. Ces étudiants disposent déjà en général de règles, de compas, ... du matériel de tracé. Nous avons souhaité nous assurer de cette disponibilité. L'annonce au même moment de la présence de papier et de ciseaux visait également à permettre le recours aux polygones sensibles. La volonté d'observer la construction de la tâche et du problème à partir des objets disponibles immédiatement chez les étudiants nous ont fait exclure le recours systématique à un logiciel de géométrie dynamique pour cette première expérimentation. Comme nous le verrons un groupe a utilisé le logiciel GeoGebra pour des validations « expérimentales ».

Toutes premières analyses suite à EP1

Les deux séances ont été filmées. Lors de chaque séance un seul groupe a été enregistré.

L'entrée dans la tâche

La projection et la reformulation de l'énoncé ont engendré :

- avec le premier groupe d'étudiants quatre questions : trois immédiates : « Sans trou, ni recouvrement ... ? », « Quelle est la forme à paver ... ? », une troisième à propos de la restriction aux pavages stricts. Une dernière question a été formulée après 5 minutes de recherche individuelle « Peut-on utiliser plusieurs types de polygones réguliers ? »

- Avec le deuxième groupe, contenant plus de scientifiques, cette quatrième question n'a pas été posée, ni à l'issue de la reformulation par une étudiante ni du temps d'appropriation.

Dès lors, pour le premier groupe, et même si l'enseignante n'a pas répondu explicitement à la quatrième question, il n'y a pas eu dans ce groupe de restriction aux pavages réguliers. Dans le deuxième groupe, quatre étudiantes ont elles, longuement cherché à comprendre « l'intérêt du problème », n'imaginant que des pavages réguliers. L'enseignante est intervenue et ce groupe a alors considéré d'autres pavages.

Pour les deux groupes l'énoncé proposé permet une appropriation satisfaisante : très rapidement de nombreux dessins apparaissent, les premiers signes montrant des sémioses ayant comme objet les pavages se développent (y compris des pavages à base de parallélogrammes), et aussi les premiers questionnements : « Qu'est-ce qu'un polygone régulier ? » « Peut-on tous les construire, en particulier celui à 5 côtés ? » ...

Les objets en jeu et les actions sur ces objets

Les polygones réguliers : Les étudiants considérés ont tous une proximité avec la géométrie de collège et en particulier avec le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone régulier. Ils sont par ailleurs relativement habiles dans la manipulation de la règle et du compas[25]. Il n'est donc pas surprenant de voir apparaître pour tous les groupes les trois pavages réguliers. Mais il semble bien que la familiarité de ces étudiants avec ces objets n'aille pas bien au delà. En effet, le pentagone est en général manipulé très maladroitement, on observe pour quelques groupes l'utilisation des polygones à 10 et 12 côtés, parfois 16 mais les polygones à 7 et 9 côtés sont peu évoqués et les autres non évoqués.

Pour un certain nombre d'étudiants le fait de ne pouvoir construire dans l'espace graphique à l'aide des instruments un représentant de l'objet bloquera un temps la progression. C'est le cas pour un groupe avec l'octogone. Nous proposons ci-dessous des extraits des retranscriptions des échanges et la description de gestes afin de montrer l'obstacle lié à cette construction.

Début de la recherche collective à 6'30.

14'35 : une étudiante du groupe qui a déjà tracé un triangle équilatéral et un carré, dessine à main levée, un hexagone, un octogone, puis cherche à tracer apparemment un ennéagone. Elle efface puis trace à nouveau, puis pendant une longue minute hésite, débute le tracé d'un polygone, l'efface, recommence et finit par abandonner ce tracé qui devait compléter une liste de polygones réguliers. Puis :

> 19' : une autre étudiante : Je sais même pas comment on dessine l'octogone.
>
> 40'53 : une troisième : Putain, il m'énerve ce putain d'octogone je sais même pas combien c'est son angle.
>
> 56'58 : la même : Faut qu'on le sache l'octogone, déjà j'arrive pas à le dessiner.

Il apparaît bien ici que la familiarité avec les polygones réguliers, qui doit pour certains aller jusqu'à la possibilité de les construire de façon suffisamment précise, est nécessaire à la progression dans la recherche. On peut émettre l'hypothèse que pour certains étudiants, l'exigence de soin attendue dans le cadre de cette préparation au concours et l'importance donnée aux constructions à la règle et au compas peuvent ici agir comme des freins à l'expérimentation sur les objets polygones réguliers. Voici un exemple de relation aux objets, construite dans un contexte spécifique, qui réduit les possibilités de manipulation de polygones, même relativement familiers. On identifie également que le recours aux angles n'est pas disponible immédiatement.

Concernant le nombre de polygones réguliers et toujours pour le même groupe :

> 59' : E2 : Est-ce qu'on les a tous les polygones réguliers ?

25. La construction à la règle et au compas d'objets de la géométrie plane étant un exercice incontournable de la préparation au CRPE, on peut s'attendre à ce que les étudiants montrent une certains dextérité en ce domaine.

E3 : Une infinité.
E2 : Tu crois qu'il y en a une infinité ?
E3 : Vu que 180 c'est un angle plat ... 135 ... Faut qu'on aille ... là on a 135 faut qu'on aille jusqu'à ce qu'on obtienne inférieur à 180. Tant que t'es inférieur à 180 tu pourras faire un truc qui tournera au bout d'un moment.

Cet extrait montre une approche pragmatique de l'infinité du nombre de polygones réguliers qui se base sur l'idée que la création d'un angle même petit suffit après un certain nombre d'étapes à faire une courbure sensible et sans doute finalement un tour complet. Mais elle montre en même temps, ce qui peut se confirmer aussi par la remarque suivante : E3 : « A 100° ça existe pas sinon on le connaîtrait », que leur approche des polygones réguliers est hésitante, pragmatique. Pour ce groupe, le milieu compense difficilement le manque de familiarité avec les polygones réguliers.

Les angles des polygones réguliers : pour aller un peu plus loin dans l'analyse du passage précédent, on peut confirmer que la difficulté se focalise à partir d'un certain moment sur la détermination de l'angle de l'octogone :

18'34 : Il faudrait savoir l'angle.
19'53 : Il doit bien y avoir un moyen de calculer l'angle ... l'angle de l'octogone.

Puis toujours à propos de l'octogone mais déjà au bout de 30 minutes :

30' 03 :
E1 : Mais vous êtes sûrs, qu'un octogone, ça a tous le même angle ?
E2 : Oui, c'est obligé c'est un polygone régulier.
E2 : C'est obligé, sinon ça serait pas beau hein.
E1 : Comment on fait ?
E1 : Là je suis en train de construire un hexagone.
E2 : Oui avec 120 tu construis un hexagone ... Faut agrandir, oui à mon avis c'est 135, c'est pas 120.
E1 : 150 ...
E1 : Faut qu'il soit moins grand que l'hexagone.
E2 : Si, non il doit être plus grand.
E3 : Il doit être plus grand pour arriver à écarter.
E2 : Oui c'est ça c'est 150.

On retrouve là encore une approche très pragmatique ... Un point de vue esthétique et aussi une idée très physique de l'angle des polygones réguliers et en particulier l'idée qu'on va écarter les côtés pour obtenir un angle plus grand.

Ce groupe va finalement élaborer une démarche pour le calcul de l'angle de l'octogone, démarche importante pour le groupe puisqu'elle apparaîtra sur l'affiche (Affiche 8 (Laura, Anaïs, Anne, Aurélie) de l'annexe E.1). Lors de la présentation les étudiantes doivent s'y mettre à plusieurs pour développer la démarche qui n'est pas encore naturalisée. Mais l'évolution sémiotique sur cet objet est sensible et permettra au groupe de produire des assemblages intéressants et comme on le constate sur l'affiche, des apports non négligeables seront faits.

Pour d'autres groupes les angles sont des objets du milieu objectif. Nombreux sont ceux qui, s'appuyant sur une certaine familiarité avec l'hexagone, ont pu déterminer son angle et reproduire la démarche pour les autres polygones réguliers.

Plus globalement, de nombreux autres éléments (absence de manipulation des pentagones, heptagones, ennéagones, ..., recherche d'angles de mesure entière, ou a contrario appui sur une liste des angles pour produire une recherche fructueuse) confirme que cet objet joue un rôle central dans cette situation.

L'angle plein et les assemblages autour d'un nœud : pour de nombreux groupes la condition $\sum a_i = 360^\circ$ apparaît assez vite comme constatation sur les dessins produits, en premier lieu pour les nœuds d'un début de pavage régulier. Elle n'intervient que plus tardivement comme condition nécessaire en tant que telle. Comme on peut le voir sur la figure 7.4, elle peut permettre soit de vérifier qu'un assemblage potentiel est valide, soit de déterminer la mesure de l'angle « manquant ».

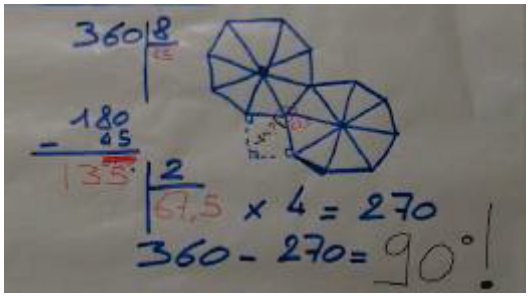


Figure 7.4 – Raisonnement autour d'un nœud

Cette configuration a été relativement souvent étudiée. Cet extrait d'affiche nous montre ici, un groupe relativement à l'aise sur la détermination de l'angle d'un octogone régulier et sur l'étude de l'angle nécessaire pour compléter un assemblage initié avec deux octogones réguliers.

Pour autant, tous les groupes ne sont pas passés clairement au registre numérique et on observe fréquemment des constructions très soignées dans l'espace graphique, et aussi un recours à l'utilisation de gabarit de polygones réguliers, ceci afin de déterminer si tel ou tel assemblage est possible. Ainsi un groupe, de formation plutôt scientifique, (affiche 11 de l'annexe E.1) travaillera essentiellement en manipulant des polygones réguliers découpés dans du papier. Cette manipulation lui permettra d'émettre la conjecture suivante : « si le nombre de côté du polygone est un multiple de trois il peut être assemblé par un triangle, si multiple de quatre assemblages par un carré ». Cette conjecture sera déstabilisée par le cas du dodécagone et invalidée par expérience dans le monde sensible par l'étude de l'ennéagone et du 16-gone. Pour ce groupe, l'essentiel de la validation s'effectue dans l'espace physique par manipulation de polygones en papier. Le changement de registre et le passage à l'espace géométrique ne s'est réalisé que très partiellement.

Des pavages : sur les affiches produites on peut observer de nombreux développements entre l'assemblage local et le pavage assuré. On observe des dessins précurseurs des pavages réguliers, des quasi-pavages (8 8 4), (3 4 3 3 4), (3 3 3 3 6), (3 4 6 4), (12 12 3), et des propositions erronées.

L'observation du passage d'assemblage autour d'un nœud à un pavage plus global s'avère délicate. En effet le besoin de vérifier que les assemblages construits permettent de paver le plan apparaît inégalement ressenti, sachant que cette vérification est pour certains assemblages immédiate. On observe toutefois des embryons d'argumentations du fait qu'il faut prolonger partout (vérification globale) pour vérifier qu'on peut paver le plan. Mais ceci reste peu explicite.

On peut relever à ce propos deux extraits des échanges du premier groupe enregistré :

- un questionnement assez précoce concernant ce caractère global : 19'15 : « oui, mais tu peux pas le répéter ».

- un autre après 51 minutes de recherche alors que certains éléments du groupe travaillent à l'extension d'un assemblage : « Ben on est en train de reproduire notre figure en fait. On est en train de se rendre compte que ... que dès qu'la on arrive à faire 360 on essaie de voir si ça marche. On a fait celle-ci ... puis ça marche à l'infini ». La validation se fait là par un dessin

très soigné.

Pour ce groupe, en difficulté sur les calculs d'angles en début de recherche, la mesure des angles est désormais une ressource. Toujours sur leur affiche (8 de l'annexe E.1) on constate la connaissance de la mesure des angles du pentagone et du décagone en acte, connaissance suffisamment opératoire pour valider l'assemblage (5 5 10) et invalider le candidat pavage.

Plus globalement on constate un certain nombre de développement à partir d'assemblages. Les « dessins » les plus étendus utilisent les triangles, carrés, hexagones et octogones réguliers. On peut y voir l'influence des deux facteurs liés : la bonne connaissance de ces polygones réguliers et la facilité de représentation. On observe dans ces représentations, la présence de nombreux pavages 2-réguliers. Les groupes ont, soit écarté, soit mal compris la notion de voisinage identique autour des nœuds. C'est un élément constitutif de la notion de pavage archimédien qui est ici en jeu. Mais le débat qui a suivi la recherche a permis aux étudiants d'échanger à ce propos et de trancher. On peut faire l'hypothèse, puisque la réalisation effective de pavages n-réguliers ne semble pas rentrer outre mesure en conflit avec le milieu (celui-ci ne fournissant pendant le temps de recherche aucune autre rétro-action que la non-conformité avec l'énoncé), que c'est bien le temps de débat et d'échange qui permettra dans la plupart des cas de revenir sur cet aspect de la définition.

Enfin, il faut ici noter qu'un groupe d'étudiants avait à sa disposition un ordinateur personnel portable. Un des membres du groupe a assez rapidement utilisé le logiciel GeoGebra pour valider des candidats pavages.

Changements de registre

Lors de cette expérimentation, le premier registre est bien graphique. Les manipulations dans cet espace ont été particulièrement nombreuses et prolifiques. Ensuite on peut constater que le passage au registre numérique s'avère nécessaire pour presque tous les groupes, même si l'aisance dans ce registre et l'investissement sont très variés. Ce registre est utilisé :

- Pour déterminer la mesure en degré de l'angle des polygones réguliers.
- Pour déterminer le résidu après association de deux polygones réguliers.
- Pour rechercher des décompositions additives de 360.
- Pour déterminer les diviseurs de 360, et initier la recherche des pavages réguliers.
- Pour rechercher des régularités, des lois.
- Et pour un groupe, pour établir une formule permettant de déterminer la mesure en degré de l'angle en fonction du nombre de côtés et initier une recherche exhaustive.

Sauf peut-être pour les groupes 4 et 9, pour lesquels l'investissement du champ numérique est incertain, pour ces étudiants les interactions entre les deux registres sont continues. Aucun groupe ne s'est engagé dans une démarche exclusivement numérique. Les objets graphiques sont restés nécessaires au raisonnement sauf pour un temps de travail du groupe 7 qui a pu, en formalisant le travail sur les angles, initier une recherche sur la suite des valeurs des mesures en degré des angles des polygones réguliers.

Observation de premiers raisonnements

Pour aucun groupe la condition sur l'égalité des longueurs des polygones réguliers n'apparaît comme problématique. Si on observe des questionnements parfois tardifs : 44'50 « c'est pas obligé que les polygones ils aient tous la même longueur de côté ? », les traces écrites ne portent aucun indice du fait que ce point ait nécessité plus que quelques instants d'étude. C'est une condition qui a été ici transparente. Cet axiome semble faire partie implicitement de la théorie en construction.

Sauf pour le groupe 7, la relation « Somme des mesures des angles autour d'un nœud est égal à 360° » n'a que rarement dépassé le statut d'outil empirique pour la recherche d'assemblages. La dimension syntaxique n'a été que peu investie. Un groupe propose une écriture formelle : $60^\circ x + 90^\circ x + 120^\circ x + 135^\circ x + 150^\circ x + 165^\circ x = 360^\circ$.

Du point de vue numérique on observe des formulations de conjectures sur des régularités supposées en appui sur des observations, et pour un groupe des essais liés à une décomposition primaire de 360 : $360 = 1 \times 2^3 \times 3^2 \times 5 = 1 \times 360 = 2 \times 180 = 3 \times 120 = ... = 18 \times 20$.

Pour certains groupes on a pu constater un début d'organisation permettant d'envisager une étude de l'exhaustivité. L'affiche 2 s'organise ainsi :

> Avec une seule sorte de polygone : 3 côtés : oui, 4 côtés : oui, 5 côtés : non, 6 côtés : oui, 7 côtés : non, 8 côtés : non, 12 côtés : non.
>
> Essais d'association de polygones différents pour réaliser le pavage : 3 et 6 : oui, 5 et 10 : oui, 4 et 8 : non, 4 et 3 : non, 4 et 5 : non, 12 et 4 et 3 : oui, 6 et 12 : non

On constate ainsi un début de systématisation. La suite semble toutefois montrer que cette organisation tient autant de la recherche d'exhaustivité que de la présentation de résultats préliminaires permettant l'élaboration de conjectures.

Par contre la production du groupe le plus avancé dans la recherche, présente clairement un raisonnement qui se voulait exhaustif. Ce groupe présente tout d'abord une liste des angles des polygones réguliers de 3 à 12 côtés. Les échanges lors de la recherche expliquent cette limitation :

> À l'angle où se rassemblent les polygones on pouvait pas en mettre que deux car ça voudrait dire que l'angle doit être à 180, et c'est pas possible et si on veut en mettre trois, le plus petit qu'on peut mettre pour compléter c'est 60, donc ça veut dire que les deux autres ça doit être 150 maximum. C'est complexe ... pff ... faut être sur d'avoir bien compris.
>
> E2 explique alors à nouveau à E3 et conclut par : ... et donc c'est le minimum à trois, c'est le minimum qu'on peut avoir pour avoir 360.
>
> E1 : donc 150 c'est le maximum qu'on peut utiliser et 60 c'est le minimum.
>
> E2 : et donc pour les trois, après c'est deux de 60 et deux de 120 ... Ah oui on passe à 4. ...

Ces échanges incertains seront repris lors de la présentation :

> Comme faire un sommet avec deux, seulement deux polygones c'est pas possible il en faut au minimum de trois. Ensuite pour ces trois, pour les premiers on prend la plus petite valeur possible qui est égale à 60. Donc ça veut dire qu'il reste 300 degrés de libres pour les deux autres. Donc en fait si ils sont supérieurs à 150 degrés, ça ça fait plus que les 300 qui restent donc en fait y a pas de place, c'est pour ça qu'on s'arrête, qu'on s'est arrêté au polygone à 12 côtés.

Cette reprise confirme le raisonnement. Ce raisonnement erroné, et bien que pouvant permettre d'obtenir l'intégralité des pavages archimédiens, écarte les assemblages suivants : (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (4, 5, 20). C'est toutefois une voie qui lors d'une institutionnalisation peut permettre une avancée supplémentaire.

Conclusion

Cette première expérimentation préalable confirme les potentialités du problème en particulier comme support d'une situation de recherche en classe. La dévolution s'est globalement avérée non problématique même si la question de la pluralité des types de polygones réguliers dans un pavage doit faire l'objet d'une attention certaine. Le milieu proposé semble offrir l'environnement suffisant pour une activité objective des étudiants. Apparaissent en effet très

rapidement sur les feuilles de brouillon, y compris pendant la recherche individuelle, des assemblages et des pavages variés. On voit même le pavage régulier avec des hexagones arriver en premier pour certains étudiants. La notion globale de pavage ne semble pas être un obstacle pour l'engagement dans la recherche. Ce qui apparaît également, c'est la non disponibilité chez certains groupes, en particulier composés d'étudiants de parcours non scientifique, de certaines propriétés d'objets dont la manipulation s'avère riche, et aussi des modélisations d'objets qui s'avèrent non pertinentes. La suite des expérimentations devra permettre d'étudier plus finement :

- le degré de disponibilité dans le milieu objectif des élèves des différents types de polygones réguliers,

- la disponibilité des caractéristiques angulaires de ces polygones,

- l'incidence de ce degré de disponibilité sur l'engagement dans des démarches de type expérimentales suffisamment complexes permettant conjectures, élaborations diverses, ...

- l'apparition, en lien, d'une activité mathématique, l'élaboration de théories plus ou moins locales, de raisonnement plus ou moins exhaustifs, ... l'émergence et l'évolution de légisignes.

Dans cette optique la question de l'enrichissement ou non du milieu se pose. En effet, on a pu constater pour le groupe 8 une évolution sémiotique à partir de l'objet angle de l'octogone très riche. De connaissances très sommaires à la construction d'un savoir institutionnalisable sur les angles d'un polygone régulier, l'évolution est réelle. Dans quelle mesure un milieu plus riche ne réduit-il pas ces possibles sémioses et quelles sont les contreparties de ces éventuelles réductions ?

Avant de revenir sur ces questions, nous proposons de tester cette situation, non plus avec des étudiants, mais auprès d'élèves de lycée.

7.5.2 Expérimentation préalable avec deux groupes de trois élèves de terminale scientifique : EP2

Le contexte

Le milieu créé lors de la précédente expérimentation avec des étudiants, s'est avéré suffisamment riche pour permettre l'élaboration des toutes premières axiomatiques locales, mais tous les groupes ne se sont pas engagés dans une réflexion fine sur les validations globales et l'élaboration des raisonnements permettant de structurer une recherche de l'exhaustivité. Nous souhaitons désormais mettre à l'épreuve notre embryon de situation auprès d'élèves de filière scientifique. Le public pour cette deuxième expérimentation préalable sera ainsi différent. Mais pour des élèves de Terminale S, il n'est pas certain que le milieu proposé s'avère aussi fécond. En effet, comme nous l'avons vu, les programmes de première S et de terminale S en mathématiques n'assurent pas que les outils de la géométrie euclidienne soient disponibles et plus globalement que la familiarité nécessaire avec les premiers objets en jeu dans la situation soit suffisante pour que des rétroactions fécondes apparaissent. A contrario, ces élèves disposent *a priori* d'un rapport à la technique différent et d'une dextérité dans les manipulations syntaxique supérieure.

De façon plus précise la situation est proposée à des élèves de terminale S volontaires pour travailler sur un problème de recherche. Ils seront au nombre de 6. D'après l'enseignant de la classe : « La classe dont ils sont issus est d'un niveau moyen, les élèves considérés ont des compétences en mathématiques inégales ». Ces élèves ne suivent pas la spécialité. Ils avaient abordé dans le cadre de la classe les nombres complexes et avaient travaillé avec des expressions du type $e^{\frac{ik\pi}{4}}$ ou $e^{\frac{ik\pi}{3}}$, mais sans aller au-delà sur la dimension géométrique des nombres complexes.

Le milieu

Nous choisissons de ne pas modifier le milieu, qui reste identique à celui décrit précédemment. La mise en œuvre est elle aussi prévue similaire. Pour cette expérimentation, la gestion de la classe est confiée à une doctorante dont le travail de mémoire de master 2 nécessitait également la mise en œuvre d'un problème de recherche. Nous insistons en amont sur l'importance des phases d'appropriation de l'énoncé en laissant la possibilité de répondre dans le détail aux questions éventuelles concernant la définition des polygones réguliers. Compte tenu des effectifs une concertation en cours de séance entre chercheur et professeur n'est pas exclue si le professeur estime une intervention spécifique pertinente auprès d'un des deux groupes.

L'expérimentation a lieu un jeudi de 15h à 17h. Des contraintes horaires ont finalement amené à réduire la durée de la séance. Le temps imparti, se répartit alors comme suit : cinq minutes d'appropriation de l'énoncé, cinq minutes de recherche individuelle, 1h30 de recherche en groupe et rédaction des affiches, 30 minutes qui permettent aux deux groupes de présenter leurs résultats et de débattre de leur validité.

Observations et analyses

Les deux groupes de trois élèves sont filmés et enregistrés. Les affiches produites sont présentées en annexe E.3. Seuls les échanges du groupe 2 sont retranscrits dans leur intégralité (annexe E.4)

Dévolution de la tâche : Après la lecture de l'énoncé par une élève, une demande de reformulation du professeur n'aboutit pas. Celle-ci est alors amenée à poser des questions qui obtiennent des réponses assez peu explicites, ce qui est observable sur un extrait du script à propos de la notion de recouvrement : (Codage : P le professeur, VB et M des élèves.)

> P : ensuite euh alors sur ce pavage archimédien le recouvrement est-ce que ça, ça va ? Est-ce que vous avez des questions là dessus ?
> VB : J'ai pas compris ce que c'était.
> P : Alors qu'est-ce que t'as pas compris exactement ?
> VB : Ben alors ça veut dire quoi un pavage archimédien ?
> P : Alors un pavage archimédien du plan c'est un recouvrement du plan alors est-ce que ça ça va recouvrement ?
> P : Comment ?
> M : Des carrés par dessus des carrés.
> P : Par exemple avec des carrés voilà vas-y dis donc explique parle un peu plus fort pour les autres.
> M : On remplit le plan de polygones réguliers.
> P : Voilà donc là [...] des carrés on remplit le plan avec des carrés.

Il est difficile de percevoir à ce moment la qualité de l'appropriation de l'énoncé par chacun. Le peu de formulation des élèves ne permet pas non plus de savoir quelles informations sont à ce moment là communes. Le constat final est que les pistes suivies par les deux groupes seront très différentes. Observons tout d'abord quelques éléments des travaux du groupe 1.

Groupe 1 : Le groupe 1 a déterminé tous les pavages réguliers du plan. Reprenons un extrait de la présentation de la production lors de la mise en commun (B, F, M sont les trois élèves du groupe 1) :

> B : Heu donc euh donc on a trouvé qu'y avait heu trois polygones réguliers heu qui pouvaient être possibles, heu qui pouvaient marcher pour faire un pavé. Donc y a le triangle équilatéral le carré et euh l'hexagone. Ben on a marqué que l'angle

qu'était ici c'était un cercle ça faisait 360 ici là on a déduit que pour pouvoir heu qui s'assemblent il fallait que ces trois heu diviseurs de 360 pour pouvoir un nombre d'arêtes qui servaient heu pour pouvoir s'emboîter

M : Ensuite on a trouvé un rapport entre heu entre le l'angle et le nombre d'angles dans un polynôme on en a fait une équation on a créé un cercle en fait et on a trouvé une équation entre n et k on a donc euh on a donc mis heu [...] pour n parce qu'on savait que c'était compris entre 60 pour les triangles équilatéraux forcément.

B : Vu que c'est plus petit heu le plus petit polynôme.

M : On peut pas avoir un polynôme à deux angles donc c'était forcément le minimum et entre 180 parce que plus que 180 ça donnait un angle euh ...

B : C'est un angle plat donc une droite

M : Ça donnait un angle négatif donc ça revenait au même on s'est dit que 180 était le maximum et euh et donc du coup on a calculé heu on a calculé les angles qui se trouve entre 3 et 6 parce que heu le nombre d'angles trouvé pour 180 c'était euh ...

B : 2

M : 2 ben oui 2 donc c'était impossible et ensuite entre 3 et 6 on a remarqué que 5 ne marchait pas non plus parce que ça donnait un chiffre qui n'était pas entier.

B : Ça veut dire que le nombre de ...

M : Donc c'était impossible.

B : Le nombre de, le nombre de polygones qu'on s'est s'est emboîté ça doit forcément être un nombre naturel parce que sinon ... donc ben du coup on n'a trouvé qu'y restait que ces trois là.

Du point de vue des savoirs élaborés, nous retenons ici que le groupe a abouti à une preuve du résultat R1 sur les pavages réguliers :

- qui intègre la détermination d'une formule permettant de déterminer l'angle d'un polygone régulier en fonction du nombre de ses angles,
- qui met en évidence la condition nécessaire sur la somme des angles autour d'un nœud,
- qui utilise au moins en acte des conditions nécessaires sur le nombre d'angles autour d'un assemblage et permet la détermination de candidats pavages.

Si on reprend la preuve proposée on peut la faire correspondre à la démarche suivante :

- L'angle plein est associé à l'image du cercle.
- Un assemblage doit vérifier $\sum n = 360$ avec n l'angle d'un seul type de polygones.
- Recherche des diviseurs de 360 (ce qui sous entend que la valeur de n (l'angle des polygones) est entière).
- Parallèlement la détermination de l'angle d'un polygone régulier en fonction du nombre d'angles (k) est réalisé : $n = 180 - \frac{360}{k}$.
- Détermination des valeurs limites de n.
- Détermination des valeurs de k associées par la relation $n = 180 - \frac{360}{k}$ ou par familiarité pour 3,4,6.
- Détermination de l'angle du pentagone et invalidation pour les assemblages.
- Validation des assemblages.

Il apparaît que ce groupe s'est engagé dans une démarche utilisant de façon importante le registre numérique et ce dès le début de la recherche. La production montre une certaine aisance dans ce registre, avec une manipulation permettant en particulier la restriction des cas à étudier. On observe aussi une difficulté à questionner le fait que les angles des polygones réguliers

puissent ne pas être entiers. Du point de vue de l'activité développée, on observe un engagement dans la recherche et l'élaboration d'une démarche pertinente, toutefois l'organisation didactique n'a pas permis que ce groupe questionne le niveau de généralité des pavages produits. Sont potentiellement en cause : la formulation de l'énoncé, les rétroactions du milieu y compris les interventions du professeur, le type de démarche des élèves y compris leur conception. Concernant le troisième point on peut apporter quelques éléments en appui sur l'extrait suivant, où les membres cherchent à explorer des pistes différentes :

M : Tu rajoutes autant de points que possible sur le cercle.

M : Tu divises plutôt par 180 ah quoi que.

B : Attends, moi ce que je dirais c'est que la recherche le nombre de pavages archimédiens du plan c'est un nombre illimité, si on suit le raisonnement.

M : Oui mais faut que tu leur laisses une certaine dans un certain type euh de ...

B : Oui mais faut pas que ça fasse un cercle parce qu'un cercle tu peux pas les mettre contre.

M : J'fais un cercle c'est pour les mettre ensemble c'est pas pour ...

B : Oui.

F : Ça veut dire quoi ...

M : C'est simplement pour trouver

F : Autour de chaque sommet le même assemblage

M : C'est juste pour trouver le polygone.

B : Ouais.

M : Mais regarde si tu prends un carré, le carré tu prends une distance entre chaque point c'est la même longueur, de toute façon, t'auras le même angle.

B : Oui je suis d'accord, oui je vois le principe.

F : Oui je vois ok.

M : Donc là aussi.

00 : 14 :15 :

B Oui j'suis d'accord tu peux prendre n'importe quel polygone avec toutes sortes de longueurs et avec les angles pareils y en a une infinité du coup.

B : Ouais mais remarque c'est vrai que tu peux aussi prendre [...]

M : Ben parce que regarde si tu prends un polygone à 180 côtés, à 180 d'angle ...

B : Non il peut pas faire 180 ça t'ferait un angle plat.

M : Pas un angle à 180, j'veux que mes angles de 30°.

B : Mais les angles, l'angle minimum c'est 60.

F : Pourquoi 60 ?

B : Parce que qu'un triangle équilatéral c'est 60 degré. À chaque fois que t'augmentes le nombre de côté t'augmentes la valeur de l'angle.

F : Ouais.

M : Mais moi je te parle pas de l'angle là, j'te parle de l'angle par rapport au centre, c'est 30° et ça de toutes façons c'est un triangle euh isocèle.

F : Isocèle non ?

M : Ouais de toutes façons c'est des, c'est tous des triangles isocèles de toute manière. c'est dans un cercle ...

Dans cet extrait, des approches différentes apparaissent. F et B semblent avoir une vision plus globale, avec F qui questionne la phrase « ça veut dire quoi, autour de chaque sommet le même assemblage ? » et B qui imagine une infinité de pavages archimédiens et envisage des juxtapositions : « oui mais faut pas que ça fasse un cercle parce qu'un cercle tu peux pas les

mettre contre ». M, lui, s'attache rapidement à l'étude des angles d'un polygone régulier en appui sur l'inscription dans un cercle (cf. figure 7.5).

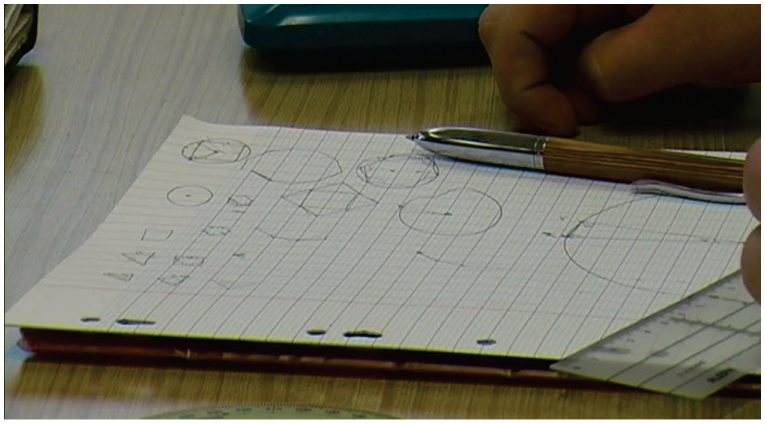


FIGURE 7.5 – Premières recherches de M

F aura dans ce groupe une attitude en retrait, M a plus tendance à prendre la parole. Il montre une aisance dans le registre numérique qui lui permet de s'engager rapidement dans des raisonnements productifs dans cette dimension. [26]. L'extrait montre qu'il prend un point de vue local et ne dévie pas de son idée initiale. Il entraîne le groupe dans l'étude des angles d'un polygone régulier.

On constate donc d'une part, que les deux aspects, local et global, peuvent se présenter initialement et d'autre part, qu'il peut alors être envisagé qu'un engagement fort dans un registre numérique familier, associé à un point de vue local, bloque le questionnement global. Au final ce groupe aura produit et démontré un résultat nouveau dont l'institutionnalisation est aisée.

Groupe 2 : Ce groupe s'est également engagé sans difficulté dans une recherche qui elle aboutira à la mise en évidence de plusieurs pavages, dont des non réguliers. L'intégralité des échanges du groupe ont été retranscrits et sont présentés en annexe E.4. Dans les analyses ci-dessous, les numéros renvoient aux passages de la retranscription. Codage : P le professeur, CS, CQ, VB les membres du groupe. Il est utile de savoir que les élèves de ce groupe ont utilisé du papier de couleur : orange pour les hexagones, vert pour les triangles, jaune pour les octogones, blanc pour les carrés ainsi que pour un pentagone. Nous proposons tout d'abord une première structuration de la recherche du groupe qui s'appuie sur cette retranscription.

0. Lecture de l'énoncé par CQ
1. Clarification suite à des questions du professeur
2. Recherche individuelle
3. Repérage de deux pavages réguliers
4. Cas des losanges
5. Topologie d'un nœud, congruences des nœuds ... Conjecture
6. Variétés des pavages possibles ... Validation conjecture
7. Début d'organisation des polygones ... Pavage octogones-carrés
8. Conjecture : il existe un grand nombre de pavages
9. Début du travail avec le « matériel »
10. Questionnement sur les angles d'un polygone régulier en vue de sa construction
11. « Jeu » de puzzle

26. Il affirmera, par ailleurs, lors d'un échange à la suite de l'expérimentation, « pour moi les maths faut que j'démontre »

12. Conjecture sur la congruence des côtés ... Conclusion partielle
13. Confrontation au sensible lors de la construction de certains polygones réguliers
14. Retour aux angles des polygones réguliers et fabrication
15. Validation à propos de la congruence des côtés
16. Les assemblages ... Entre mathématique et espace sensible
17. Premiers pas vers le global
18. Rédaction de l'affiche ... Rédaction de conditions nécessaires et suffisantes
19. Présentation de l'affiche du groupe 1
20. Présentation de l'affiche du groupe 2

La démarche du groupe 2 prend un parti totalement différent de celui du groupe 1. Les premiers échanges portent sur la validation de deux pavages réguliers conformes à l'énoncé, celui à base de carrés et celui à base de triangles équilatéraux. La question des polygones non réguliers est rapidement écartée :

> - et un losange ça marche ?
> - non parce que le losange les angles c'est pas les mêmes.

On peut donc observer que les connaissances de base sur les polygones réguliers sont suffisamment disponibles pour un engagement dans une première élaboration. À ce point, si on note Ω l'ensemble des pavages archimédiens du plan, ce groupe a établi que Ω contenait deux des pavages réguliers et que les pavages de Ω ne contenaient que des polygones réguliers. Cette entrée se prolonge par un regard pragmatique sur la situation et permet d'envisager une diversité des pavages archimédiens :

> ... Il doit y avoir un truc parce que ... Parce que ce que je comprends pas, c'est que t'as qu'à mettre plein de carrés et puis là t'as trouvé. Ben oui c'est ça ben oui c'est simple. Ben ouais c'est ça que je comprends pas.

Ceci va amener le groupe à tenter l'association de triangles équilatéraux et de carrés. On constate ici une manipulation sur les objets particulièrement familiers. C'est d'ailleurs cette familiarité qui va permettre de porter une conjecture incertaine :

> 502 : est-ce que par exemple ça veut dire que si t'as un triangle par exemple là ... t'as un carré.
>
> 503 : ben non tu peux pas parce que là autour de ton sommet t'auras un carré.
>
> 504 : et alors ?
>
> 505 : alors t'as pas le droit.
>
> 506 : tel qu'un sommet de polygone appartient au ... non c'est pas ça tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones.
>
> 507 : ah oui.
>
> 508 VB : est-ce que c'est pas justement, c'était ça j'voulais te demander si c'était pas par exemple un j'fais un truc au pif tac tac tac t'as un truc comme ça donc là en fait faut qu'à chaque sommet de chaque machin ça soit des ...
>
> 00 :15 :00 ouais peut être. *CQ montre du doigt la première association carré triangle*[27].

Cette première partie met bien en évidence une manipulation d'objets très familiers pour les élèves et qui permet de construire une nouvelle connaissance de l'objet pavage archimédien. Par contre le déficit langagier pour désigner les nouveaux objets est clair. Dans le modèle en construction, Ω semble pouvoir contenir désormais des potentiels pavages associant des polygones réguliers différents. Toutefois, pour l'instant, cette conjecture n'a pas encore le statut d'axiome de la théorie en élaboration. CQ en particulier reste dubitative et incertaine. La relance

27. Cette association au brouillon ne sera pas exploitée.

se fera après une pause dans les échanges et un retour à l'énoncé : « Ah la détermination de tous les pavages ! ». Les membres du groupe se convainquent de la présence de plusieurs pavages archimédiens. Mais CQ va faire appel au professeur pour valider :

> Est-ce que c'est, par exemple faut que par exemple, ces trois figures là elles sont sur un sommet, faut que sur le même sommet il y ait les trois figures.

La théorie s'enrichit d'un nouveau résultat toutefois imprécis ou insuffisamment explicite puisque s'il apparaît nécessaire d'avoir les mêmes figures en deux noeuds d'un pavage, la notion de type n'est pas encore précisée.

Les temps 7 et 8 de la recherche du groupe montrent un enrichissement de la collection de pavages avec, le pavage régulier à base d'hexagones, une association hexagones-carrés et, les brouillons le confirment, l'usage de l'octogone régulier associé au carré. C'est un temps de travail à l'intérieur de la théorie établie avec une manipulation des polygones relativement familiers. Les cinq candidats-pavages dont le statut est encore incertain et qui figureront sur l'affiche, sont déjà présents à cet instant.

L'expression de CQ :

> Et tu crois qu'on doit en trouver combien 1 milliard 732 000

confirme une certaine vision de la pluralité à envisager mais ce travail se confine pour l'instant à l'empirie sans « point de vue » plus élaboré que celui que permet la théorie en cours.

Le temps 9, doit permettre de faire le point (après 22 minutes de travail) sur la recherche accomplie :

> Et si on mettait au propre tous ceux qu'on avait déjà ?
> Ben tiens y en a déjà un là
> Ben j'en ai un là un là.

Ce temps nécessite alors pour ces élèves un retour à la manipulation. Mettre au propre, semble vouloir dire, construire les assemblages. En effet un certain nombre de dessins étaient jusqu'à présent faits à main levée, il s'agit désormais de produire des figures qui pourront être présentées lors du débat. C'est de cette double exigence de présentation et de retour au sensible que nait la phase suivante. C'est pendant ce temps 10, qu'un changement de registre va s'opérer ... mais avec difficulté. Donnons en un exemple :

> 1005 : 1 2 3 4 5 6 7 7 donc 180 divisé par 7
> 1006 : T'es sur ?
> 1007 : Oui parce que tous les angles [inaudible] ça donne un angle droit après.
> 1008 : Pas un angle droit un angle plat.
> 1009 : Ouais un angle plat.
> 1010 : Ah c'est bon hein.
> 1011 : On va attendre je vais voir.
> 1012 : C'est pas possible ça fait 25.
> 1013 : Ben 25 de l'autre coté tu prends.
> 1014 : Ah ouais c'est 25 de là.
> 1015 : Ah ben oui.
> 1016 : Pis après tu fais 180 - 25.
> 1017 : Voilà.
> 1018 : Et ça fait combien ?
> 1019 : Ça fait 165 non 135.
> 1020 : C'est pas possible.
> 1021 : Ça fait ça ça fait 135 ?

Les élèves manipulent le papier, le crayon, le rapporteur, la calculatrice. Ainsi la démarche lie raisonnement géométrique, résultat calculatoire, tracé et rétroaction liée à ce tracé. Ainsi ici le calcul 180 divisé par 7 semble devoir émerger de la considération de l'angle au centre d'un heptagone avec une erreur sur la mesure en degré de l'angle plein. Puis la démarche joue sur l'égalité entre $\frac{360}{7}$ et le supplémentaire de l'angle de l'heptagone, égalité considérée dans le registre graphique et dans le registre numérique. Cette démarche se confirme avec un nouvel essai pour la construction de l'octogone et est, cette fois, menée à son terme. Toutefois la démarche s'avère totalement pragmatique et finalement très peu opératoire pour la suite. Une des trois élèves ne maitrisera jamais complètement la « technique » [28]. Contrairement au groupe 1, l'aspect syntaxique sera absent de cette partie du travail.

26 minutes après le début de la recherche, l'investissement du registre numérique est abandonné. On peut toutefois supposer que le milieu s'est enrichi, pour au moins deux des trois élèves, d'une capacité à construire les hexagones et les octogones. Ce sont avec le triangle équilatéral et le carré, les polygones qui seront à présent manipulés. Une répartition de polygones réguliers à construire s'effectue alors dans le groupe. C'est ce travail collectif [29] qui permet à ce moment l'émergence de la remarque suivante : « ouais mais y faut ça fasse la même taille aussi » et l'échange suivant :

1201 : Ben non pourquoi.
1202 : C'est pas dit que c'est obligatoirement la même taille.
1203 : Ouais faut qu'on en fasse plein.
1204 : Faut que chaque carré ait la même.
1205 : Je pense.
1206 : Oui.
1207 : Ben alors maintenant tu fais les euh les euh...
1208 : Ah si si parce que de toute façon.
1209 : Les euh...
1210 : Ah mais non c'est pas dit.

On constate, une divergence d'appréciation. Pour deux élèves la congruence des côtés des polygones réguliers semble « aller de soi », pour la troisième qui s'appuie sur la définition, il y a quelque chose à prouver.

À 00 : 26 : 51, une première preuve, entre l'expérience cruciale et l'expérience mentale, est avancée :

1214 : Oui mais non mais justement parce que si c'est pas de la même longueur ça refait deux possibilités en plus.
1215 : Ouais.
1216 : Ah ben non parce que après y aura un sommet qui sera dans la longueur.
1217 : Et alors ?
1218 : Ben genre si tu fais un truc comme ça plus grand, plus grand par exemple tu le fais comme ça et après tu vas refaire un triangle comme ça, eh ben là t'auras...
1219 : Eh ben là y a un triangle, voilà.
1220 : Ouais mais j'suis pas sur donc.

Ce premier échange ne permet pas d'aboutir. Il va être nécessaire pour le groupe de se relancer dans la construction. Le groupe s'engage alors pendant vingt minutes dans une activité de réalisation des pièces. Ce sont les temps 13 et 14. Durant le temps 14 on retrouve la difficulté réelle liée à la détermination des angles avec un appui constant sur le perceptif et l'instrumenté

28. Ce qui se confirmera plus tard, repère 1418.
29. Une recherche individuelle n'aurait, à coup sur, pas permis la formulation d'un tel énoncé.

pour conclure avec des échanges du style : « tu vois ç'est euh là c'est ... c'est pareil c'est 108 donc c'est pt'être ça ». C'est à la suite de ce temps 14 qu'un retour à la question de la congruence se fait. Il faut encore cinq minutes d'échanges pour conclure avec une manipulation constante des polygones découpés :

1568 : Tu veux dire que si on nous fait un de c'te longueur là.
1569 : Hum.
1570 : Tu veux dire si on en prend un de c'te longueur là et ben ça marche ?
1571 : Mais on peut pas.
1572 : Et pourquoi ?
1573 : Ben parce que le coin de là il est dans la longueur là et c'est dit euh on exclut heu assemblages voilà.
1574 : Ah ouais c'est vrai.
1575 : On exclut de ce problème les pavages tels que le sommet d'un polygone appartienne au coté ...
1576 : On aurait du y penser tout de suite alors.

La conclusion s'appuie là encore sur un retour à l'énoncé après une manipulation longue et discutée. L'énoncé proposait un exemple de pavage non strict, mais il apparaît que les configurations possibles peuvent être différentes au point de masquer cette proximité. Pour certains élèves, ce temps semble donc nécessaire. La théorie, s'enrichit ainsi d'une condition nécessaire d'existence qui se traduira sur l'affiche par : « Pour former un pavage archimédien il faut que chaque formes utilisées aient leurs côtés de même longueurs ».

Le temps suivant dure 25 minutes. Il est très peu productif du point de vue de l'évolution des connaissances. Les élèves se révèlent particulièrement maladroites dans les manipulations numériques et ne se libèrent pas de l'espace sensible, comme on peut le constater sur les extraits suivants :

16040 : un carré ça marche pas non plus ?
16041 : j'sais pas.
...
16046 : Non mais parce que ça tu pourras pas parce que avec après t'auras le coin de l'autre.
16047 : Pourquoi celui là il rentre pas ?
16048 : Ah ben non.
16049 : Lui non plus il rentre pas parce que l'angle...
16050 : Là faudrait qu'y ait un angle comme ça.
16051 : C'est pas les mêmes angles ça peut pas rentrer.
16052 : Oui mais est-ce que c'te figure là aussi elle marche ?
16053 : Ah t'sais la sorte de maison ?

avec des essais calculatoires laborieux :

16271 : Pourquoi ça marcherait pas par le calcul ?
...
16274 : Vous avez fait comment ? 180 divisé par euh ...
16275 : On a fait 180 divisé par le nombre d'angles 5 là le nombre d'angles.
16276 : Pourquoi 180 ?
16277 : 5 et 360 - 36 324.
16278 : 324 et là ça fait combien 90 et 60 150.
16279 : Et alors ?
16280 : 150 ben c'est un angle de 150 qu'est entre les deux.
16281 : Pourquoi tu dis que ça marche pas ChloChlo j'comprends pas.

16282 : Parce que ça ça fait ça c'est un angle de 108 et 108 plus 108 plus 90 et tu rajoutes à ça pour avoir tu sais un angle enfin tout le tour.

16283 : Parce que tu peux pas en faire un deuxième là et tu calcules carrément.

16284 : Oui parce que y...

16285 : De toutes façons on doit recommencer l'affiche.

16286 : Ben alors ouais ça marche peut-être.

...

16301 : Parce que sinon là ça déborde de quelques degrés.

16303 : Faut savoir en fait l'écart entre les deux ce que c'est.

16304 : Et mais on peut pas.

16305 : Attends j'reprends ma feuille de brouillon 360 divisé par 5 ça fait j'l'avais fait ça fait 72, 72 c'est pour ça que j'étais partie sur le principe que j'faisais 360 - 72 ce qui valait à 200 non 186 non.

On peut aussi extraire de ces échanges la confirmation que la condition nécessaire d'assemblage autour d'un nœud est présente au moins en acte. Elle sera d'ailleurs formulée explicitement sur l'affiche : « Il faut qu'à chaque sommet la somme des angles des figures soient égales à 360° ». Le problème semble se poser clairement au moins dans le domaine graphique avec par exemple des essais d'ajustements de pentagones et d'octogones et le constat que l'assemblage n'est pas possible. Pour autant le groupe ne basculera jamais dans la démarche numérique malgré une certaine perception de la nécessité de ce genre d'approche : « 1 : 08 : 05 tu préfères pas calculer c'est quand même plus simple. » ou « 1 : 11 : 20 pourquoi ça marcherait pas par le calcul ? ». Les difficultés calculatoires et les rétroactions mal interprétées du milieu ne semblent pas permettre ce pas. Ainsi il y a bien ici appui sur les objets mais, étonnamment pour ces élèves, la familiarité insuffisante bloque l'élaboration de résultats supplémentaires.

On retrouve également dans ce temps de courtes formulations qui montrent un début de vision plus globale, par exemple sur le pavage régulier avec des triangles équilatéraux : « quand tous les triangles sont sont ... Mais Charlotte les triangles en pointe ou ceux-là ça revient au même ». On observe donc un premier décentrage au delà d'un nœud. Mais l'essentiel de l'élaboration dans ce domaine se fait au bout 1 heure et 15 minutes avec la manipulation des polygones de différentes couleurs :

1734 : Ouais et ouais et là j'suis d'avis à mettre un autre blanc ah mais non parce que là regarde c't'angle regarde deux blancs et un jaune si y a un blanc là.

1735 : Ben oui et après ?

1736 : Ben oui mais regarde là y a orange jaune blanc et là y a deux blancs un jaune.

1737 : Parce que là tu mets un orange ?

1738 : Ouais.

1739 : Bon après tu mets un blanc là.

1740 : Hum donc ça va pas.

1741 : Et l'autre là ça marche ou pas ?

1742 : Lequel ?

1743 : Celui avec le triangle et le carré.

18 : Bon on va peut être passer à l'affiche.

On peut voir ici la naissance d'un questionnement sur la possibilité de paver globalement à partir d'un assemblage, stoppé ici par le passage à la rédaction de l'affiche. Ce passage confirme que l'élaboration théorique pour ce problème peut emprunter des voies variées, et qu'ici le fait que la condition $\sum a_i = 360^\circ$ n'est pas suffisante peut être établi indépendamment d'une avancée dans le registre numérique.

La rédaction de l'affiche pour ce groupe permettra de faire le point sur les objets considérés et les éléments de théorie construits. Les polygones utilisés sont précisés, avec un rajout de dernière minute, valorisant les n-gones avec n pair. Les résultats obtenus sont rédigés. Ce temps de rédaction ne permettra pas de dépasser l'obstacle déjà rencontré.

Présentation et débat

Les présentations vont permettre à chacun des groupes de prendre connaissance des deux démarches proposées.

La détermination de l'angle d'un polygone régulier, exposée par le groupe 1, trouve un écho auprès du groupe 2. Un des membres de ce groupe demandera une explicitation de la formule proposée par le groupe 1, et les deux autres membres du groupe 1 lui préciseront : « mais si c'est ce qu'on a fait », « ben oui tu divises 360 par k et ... ». Mais c'est M, du groupe 1, qui expose très précisément la méthode.

Si l'appropriation des résultats du groupe 1 se fait aisément, les échanges sur la validation des propositions du groupe 2 sont plus compliqués. En particulier l'invalidation du candidat pavage (3,3,6,6) n'aboutira pas, malgré une construction de VB au tableau, sous les critiques du groupe 1 :

> 2041 : donc forcément quand tu vas tourner si tu mets un hexagone à droite les sommets y vont pas tous, y toucheront pas la même chose du moins pas dans le même sens
>
> 2042 : VB : attends vas y donc c'est pas très heu là y en a un autre là là y en a un là y en a un autre ... là [Rires] bon ben bref donc là y a bien deux deux rouges deux bleus deux rouges deux bleus y aura deux rouges ... ah ben non
>
> 2043 : CQ ben si
>
> 2044 : ah oui ben non ça marche pas là y a deux rouges et un bleu ah et deux bleus (*VB hésite car elle considère un nœud où les deux bleus ne sont pas côte à côte*)
>
> 2045 : VB ah ben si ça marche
>
> 2046 : ça marche pas Bastien ?
>
> 2047 : j'sais pas si

La familiarité des membres du groupe 1 avec les pavages non réguliers ne semble pas suffisante pour permettre un échange constructif.

Conclusion

Le milieu matériel que nous avons proposé s'est révélé objectivement différent pour ces deux groupes. Les sémioses, réelles, sont alors bien différentes. Le groupe 2, en appui sur une vision locale, centrée sur l'objet polygone régulier développe l'objet pavage régulier, dans une sémiose qui va jusqu'aux légisignes symboliques argumentaux. Mais l'objet initial n'a pas permis le développement d'une sémiose s'élargissant aux pavages non réguliers. Le groupe 2 s'est lui engagé dans la tâche en appui sur des premiers allers-retours entre les objets sensibles et la construction théorique qui ont permis une avancée initiale relativement rapide. Le milieu matériel proposé contenait suffisamment d'objets familiers, objets que les membres du groupe ont su manipuler. Le milieu objectif alors constitué a tout d'abord bien joué son rôle, celui de milieu heuristique permettant les essais, les erreurs et les premières élaborations théoriques. Ce sont ici, les interactions avec les objets qui ont ainsi produit les premiers résultats de la théorie et en particulier les premières conditions nécessaires. Dans un deuxième temps toutefois, le milieu objectif s'est révélé insuffisamment riche, avec des familiarités avec les objets qui ne permettent plus que les

résultats, en particulier numériques, soient réellement disponibles. L'élaboration de la construction s'en trouve stoppée et durablement. La dernière avancée (aspect global) s'opérera grâce à un retour aux objets et prouve, par ailleurs, que l'approche des pavages archimédiens peut être multiple et que l'objet de la recherche peut-être ainsi cerné bien qu'encore dans l'ombre.

Sur ce cas simplifié de situations avec deux groupes d'élèves on pourrait développer deux points de vue :

- Le premier qui considérerait qu'à l'issue de ces phases, le milieu de référence est scindé en deux et que les institutionnalisations des savoirs s'avèrent complexes. Ceci laisserait supposer que la situation de recherche permet des sémioses divergentes, ce qui en ferait une de ses caractéristiques et une de ses difficultés quant à l'institutionnalisation.

- Un autre point de vue valoriserait ces sémioses divergentes qui permettent de développer des savoirs complémentaires sur le même objet et qui ne demandent qu'à s'enrichir l'une l'autre. Ceci car l'objet à explorer reste l'enveloppe de ces sémioses qui in fine caractérisent chacune un aspect de l'objet.

Ce que nous retiendrons ici, c'est l'intérêt à laisser se développer des sémioses qui peuvent paraître restrictives initialement mais qui pourront être le terreau de développement ultérieurs. C'est aussi l'anticipation nécessaire de telles organisations du milieu didactique et les adaptations qui pourraient s'avérer nécessaires.

Pour revenir à la situation particulière vécue ici, avec seulement deux groupes, il nous semble qu'il ne faut pas envisager la situation comme aboutie après 1h30. Il faut imaginer une poursuite du travail, qui après un temps d'échange, permettra de poursuivre la structuration de l'objet à explorer. Elle pourra s'appuyer sur les savoirs acquis sur le traitement des pavages réguliers pour développer des techniques pour l'étude des pavages archimédiens et sur les résultats obtenus au niveau global pour les synthèses.

7.5.3 Expérimentation préalable en classe de première S, avec une proposition d'usage de LGD : EP3

L'expérimentation suivante a pour objectif principal de tester l'introduction d'un outil de géométrie dynamique, Geogebra, dans le milieu. Des cadres théoriques, nombreux, étudient l'introduction d'artefacts numériques dans le milieu d'une situation. Nous renvoyons par exemple pour une étude récente à Aldon (2011). Nous ne développerons pas ces cadres ici, en particulier car, comme nous allons le constater, l'usage relève ici d'une instrumentation par un artefact stabilisé et standard. Nous avons estimé nécessaire de réaliser cette expérimentation pour ne pas écarter une valeur de variable trop rapidement. Si en effet, l'introduction d'un logiciel de géométrie dynamique (LGD) dans le milieu permettait une évolution radicale de la situation en favorisant l'émergence de savoirs, il ne pourrait être question de s'en passer. A contrario, certaines difficultés de mise en œuvre de situation en environnement numérique étant connues, il peut être envisager d'exclure l'usage d'un LGD si les apports sont négligeables.

Cette expérimentation, sommaire, permet de ne tester l'introduction que d'un seul outil numérique [30]. Il faudrait aussi s'interroger sur les usages possibles d'un tableur, d'un logiciel de calcul formel, d'un logiciel algorithmique, sous des environnements variés et potentiellement par l'usage d'une calculatrice ouvrant toutes ces possibilités.

Le contexte

La situation est mise en œuvre en classe de première S de 26 élèves. Un seul créneau de 1h30 est disponible et l'organisation didactique doit s'adapter à cette contrainte. L'enseignant qui gère la séance est expérimenté, connaît le scénario d'une situation de recherche de problème

30. En plus des fonctions de base de la calculatrice, toujours disponibles.

mais n'a pas de recul théorique sur ces objets. Il mettra en œuvre la séance dans une salle disposant de 10 ordinateurs sur un espace latéral. Il travaille régulièrement avec ces élèves dans un environnement numérique en utilisant en particulier GeoGebra.

Le milieu

Là encore les différents temps de l'expérimentation initiale sont reproduits. Compte-tenu de la durée disponible, l'institutionnalisation sera toutefois reportée à la séance suivante. Deux modifications sont donc apportées au scénario :

- Lors de la phase de recherche collective les élèves auront la possibilité d'utiliser le logiciel GeoGebra avec un ordinateur par groupe. L'organisation de cet usage est laissé à l'enseignant.

- Lors du contact précédent l'expérimentation, l'enseignant a envisagé de constituer les groupes en amont et de demander à chaque groupe de répondre pour le jour de l'expérimentation sur une fiche aux trois questions suivantes : 1. Qu'est-ce qu'un polygone régulier ? 2. Quelle est la mesure de l'angle d'un polygone régulier ? 3. Comment construire un polygone régulier à 8 côtés avec GeoGebra ? Cette proposition est retenue et mise en œuvre par l'enseignant.

Observations

Construction de la tâche : La séance débute tardivement, après la récréation. L'enseignant présente l'activité, projette l'énoncé et le lit. Il n'y a pas ici de relecture par un élève ni de reformulation ou de questions. Le temps de recherche individuel est annoncé mais de durée très courte. Les groupes s'engagent ici rapidement dans une recherche collective. Aucune restriction n'étant posée, les accès aux ordinateurs sont le fait de très nombreux élèves, et parfois d'un groupe entier. [31]

Nous retrouvons une dévolution proche de celles déjà rencontrées quand le lancement de la séance ne laisse pas de place aux explicitations. Nous nous proposons de le montrer en revenant brièvement sur l'activité de 3 groupes :

- G2, qui a peu utilisé le LGD
- G5 et G6 qui se sont massivement emparé de l'outil.

Recherche d'un groupe qui n'utilise que très partiellement l'outil numérique, G2 : Le groupe est composé d'Alexandra, de Léa, de Martin et de Robin. La réponse aux trois questions de l'enseignant est la suivante :

Q1 : Un polygone régulier est un polygone équilatéral (tous les côtés ont la même longueur) et équiangle (la mesure de tous les angles est la même)

Q2 : $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, n est le nombre de côté

Q3 : À partir de deux points O et A, tracer le cercle de centre O passant par A. Tracer le segment $[AE]$ passant par O. Tracer la perpendiculaire à $[AE]$ passant par O. Tracer les bissectrices des angles pour former deux autres diamètres. Relier les points dont les diamètres coupent le cercle.

La réponse à Q1 montre un recours aux ressources du web. La définition est certainement issue du site mathcurve (`http://www.mathcurve.com/polyedres/regulier/polygoneregulier.shtml`) mais une recherche complémentaire a permis au groupe d'y associer un tableau dont les premières lignes sont reprises ci-dessous (cf. Table 7.1).

La réponse à Q2, erronée peut aussi laisser penser à une utilisation de wikipédia (`https://fr.wikipedia.org/wiki/Polygone_régulier#Angles`), site qui introduit aussi la notion d'angle externe, supplémentaire de l'angle du polygone.

31. Il existe bien évidemment des protocoles qui permettent un autre usage de l'ordinateur, par exemple en ne permettant l'accès qu'à un membre du groupe à chaque fois, avec un cahier des charges discuté dans le groupe.

Polygone régulier	Mesure de l'angle extérieur	Mesure de l'angle intérieur	Somme
Triangle équilatéral	120 °	60 °	180 °
Carré	90 °	90 °	180 °
Pentagone	72 °	108 °	180 °
Hexagone	60 °	120 °	180 °
Heptagone	51,43 °	128,57 °	180 °
...	...	...	...

Table 7.1 – Extrait de recreomath, http://www.recreomath.qc.ca/am_polygone.htm

La demande de l'enseignant a introduit un recours à des ressources externes avec ici l'introduction d'une notion superflue et peu usitée, l'angle dit « extérieur », le supplémentaire de l'angle du polygone régulier. La réponse à Q3 semble être le résultat d'un travail personnel, programme de construction que de tels élèves sont capables de produire. On s'apercevra que ces résultats sont mal partagés dans le groupe et qu'ici les réponses aux questions 1 et 3 sont fournies par Alexandra et la réponse à la question 2 par Robin. Ces sources ne seront par ailleurs utilisées qu'en dernier recours.

En annexe E.6, sont transcrits une partie des échanges du groupe 2 avec des commentaires. Pour ce groupe on peut faire le constat d'une progression rapide en début de recherche. Les questions de l'infini, de la pluralité des types de polygones possibles sont évoquées dans un temps court, en appui sur des images mentales aussi bien en référence à des aspects pratiques (carrelage de cuisine, ...) et culturelles (pavages à Pompéi [32]) qu'à une vision du lien entre pavage du plan et de la sphère (sans toutefois identifier les conditions nécessaire à la formation des angles dièdres). Le recours à ces références pratique, historique et culturelle est surprenant. Il déstabilise Martin qui n'envisage pas ainsi la recherche mais apporte malgré tout les premières images mentales et permet une certaine progression. Concernant les pavages réguliers, les membres du groupe tombent assez vite d'accord sur la possibilité de paver avec des triangles, des carrés et des hexagones, mais les cas des pentagones, des heptagones ne parviennent pas à être tranchés. La résistance de Martin, dans un premier temps, à l'usage de GeoGebra, en raison d'un manque d'assurance dans l'usage, ne permet pas une validation immédiate par le LGD. Et le passage au registre numérique ne profite pas de ce blocage ainsi réalisé [33]. La recherche documentaire préliminaire, par son aspect non disponible, voir erroné, ne permettra pas non plus d'investir ce registre.

Usage du LGD : Devant l'impossibilité de dépasser l'incertitude sur l'utilisation de l'heptagone dans un assemblage, et malgré les réticences de Martin, c'est tout d'abord Léa qui est chargée d'aller tester au bout de 34 minutes sur Geogebra la possibilité de paver uniquement avec des pentagones et des heptagones. Son retour après 5 minutes et 30 secondes d'absence est le suivant :

> 5 ça marche pas , 7 j'ai pas réussi. À mon avis faut mettre des triangles ...

Pas convaincu par ce retour Martin souhaite une confirmation pour les polygones à 6, 7, 9, 12, et 15 côtés. Martin et Léa repartent finalement utiliser GeoGebra. Ils reviendront trop tardivement pour que le groupe puisse produire une affiche. Alexandra et Martin manipulent ensuite l'expression $\frac{360}{n}$ et la liste du tableau de la recherche initiale. Bien que CN1 soit

32. Qui apparemment auraient été étudiés en cours de latin.
33. Nous renvoyons ici au commentaires faits en annexe E.6 pour une explicitation des conditions de ce non investissement.

énoncée, ils ne travaillent que sur le cas des pavages réguliers et n'aboutissent, en cherchant « une relation mathématique à partir des dessins » qu'à des formulations sur le lien de divisibilité entre le nombre de côtés des polygones possibles.

Martin lors de la présentation des résultats annoncera les points sur lesquels le groupe s'est mis d'accord et énoncera :

> Autour d'un point on est d'accord qu'il y a 360 degrés et on a pris tous les mesures des angles intérieurs des polygones qu'on connaissait (*rires de Léa, montrant la surprise de cette annonce*) voilà et après ce qu'on a fait c'est que on a assemblé plusieurs polygones pour arriver au total de 360 degrés avec toutes les mesures des angles intérieurs. Donc on a fait 360 moins les polygones pour arriver à 0. Et puis on a trouvé plusieurs ... On a trouvé 6 triangles, 2 carrés et trois triangles autour d'un sommet ... On a trouvé 3 hexagones, 4 carrés[34], on a trouvé aussi un, deux dodécagones et un triangle équilatéral autour d'un sommet. Ça on pense qu'on peut faire des pavages archimédiens

La recherche sur LGD a finalement permis à Martin de stabiliser sa liste des pavages réguliers et de proposer un nouveau candidat : (3,12,12). La synthèse qu'il produit oublie le pavage (4,8,8) et laisse ouverte les pistes pour des éléments de preuve.

Recherche du groupe 5 qui travaille de 10h10 à 10h55 à l'aide du LGD : P n'ayant pas régulé l'accès aux ordinateurs le groupe 5 (Raphaelle, Angélique, Juliette et Richard) restera la quasi-totalité du temps de recherche sur ordinateur. Le retour à une recherche sur table ne se fera qu'après 45 minutes de recherche à la demande explicite de P, essentiellement pour la rédaction de l'affiche. Celle-ci et sa présentation confirme que le groupe ne s'est intéressé qu'aux pavages réguliers.

Le groupe produit huit figures (cf. annexe E.5) traitant des polygones à 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 et 13 côtés[35]. Il en déduit uniquement la conjecture sur l'existence de 3 pavages réguliers, l'existence de trous ou de superpositions dans certains cas et pas dans d'autres mais passe à côté, et du repérage d'une loi dans la construction possible des pavages réguliers, et de la possibilité d'associer différents polygones par exemple avec deux octogones, deux décagones ou deux dodécagones.

Cette recherche confirme l'inutilité d'une recherche en appui sur un LGD, même efficace dans la qualité des tracés produits, sans un premier corpus théorique qui guide la recherche[36]. Les 8 figures du groupe, aussi parlantes qu'un observateur averti puisse les juger, n'ont pas permis la production de résultats significatifs[37].

Recherche du groupe 6 qui travaille à côté d'un ordinateur : le groupe 6 (Hadrien, Lise, Pierre, Juliette) n'a pas non plus produit de développement dans le champ numérique. L'investissement de ce champ aurait pu advenir après l'intervention de P cherchant à susciter des justifications, mais l'étude de deux propositions concernant l'angle d'un polygone régulier, « c'est égale à $\frac{180^\circ}{n}$ où n est le nombre de côtés » en réponse à la question 3, puis « mesure d'angle d'un polygone $= \frac{180 \times 2^{n-3}}{n}$ » n'a pas permis de développement.

34. Le candidat (3,3,4,3,4) fera l'objet d'une discussion ultérieure après le passage d'un autre groupe.

35. La réponse à la question Q3 montre que le groupe connaît une procédure pour produire immédiatement des polygones réguliers sous GeoGebra.

36. Là encore, notons que les éléments obtenus lors de la recherche internet n'intègrent pas le milieu objectif ; la réponse à la question Q2 pour ce groupe contenait l'expression : « mesure angle intérieur $= \frac{180}{n} \times (n-2)$ ».

37. Un échange lors de la présentation montrera que le groupe a produit un raisonnement sur les multiples de 30 permettant d'exclure les polygones à 5 et 7 côtés, le cas du carré étant traité à part.

Le groupe 6, dont la table est placée à côté d'un ordinateur a la possibilité de tester ses propositions immédiatement. Dans la transition entre la recherche individuelle et la recherche collective alors que les pavages réguliers sont déjà apparus, très rapidement (1'48) Hadrien interroge ses camarades : « On peut mettre plusieurs trucs différents dans un même pavage ? ». Ses camarades valident la proposition. Et alors qu'Hadrien avait proposé un début de pavage octogones-carrés, d'autres dessins surviennent, soit moins soignés, soit faisant intervenir d'autres polygones. C'est alors une hésitation sur le pavage octogones-carrés qui amène le groupe à construire sous GeoGebra. On constate là encore une facilité à construire des polygones réguliers. la construction bute toutefois sur la difficulté pour le groupe à déplacer une figure :

Hadrien : Essaie de déplacer avec euh, avec eux je sais pas.
Lise : Bon voilà j'en ai marre je préfère à la main.

Et pendant qu'un des membres poursuit la construction logicielle, Lise la reprend sur sa feuille. La figure 1 (Groupe 6 - Fig 1 de l'annexe E.5) se construit peu à peu :

Lise : Ah c'est mignon.
Pierre : Et voilà.
Lise : Y a pas du tout de trou dedans.
Hadrien : Y a des trous de partout, mais après il suffit d'en faire d'autres qui vont se mettre dedans ... j'sais pas moi.
Juliette : Tu mets des triangles.
Pierre : Ben fais des carrés alors.
Juliette : Fais des triangles.
Lise : Des losanges.
Pierre : Un losange c'est pas régulier.

La construction se poursuit pendant près de 5 minutes, aboutit à la constatation de la beauté de la figure produite :

Juliette : Ben là y a quoi, carré, triangle, hexagone.
Lise : c'est trop beau.
...
Lise : Et après on fait quoi là.
Hadrien : un de 10.
Lise : 10 ... essaie de faire 12.
Pierre : Ça marche plus là ... Si ça marche.
Lise : En fait on a fait un flocon de neige ... On peut imprimer, mais c'est trop joli on dirait un flocon de neige.
...

La contestation vient d'un membre d'un autre groupe

... autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones.
Pierre : Mais en fait il a raison, on n'a pas respecté la consigne.

Et le groupe abandonnera cette construction : « Impossible car autour de chaque sommet, il n'y a pas le même assemblage de polygones » et Juliette qui prend des notes rejette en accord avec Pierre toutes les propositions intégrant plus d'un type de polygones. Ce point sera rediscuté ensuite (Lise : faut pas utiliser trop de polygones différents. Hadrien : 2 non ? Lise : 2 deux maximum. Hadrien 3 ? ...) mais les deux constructions sous GeoGebra seront écartées malgré leur potentialité.

25 minutes après le début de la recherche l'usage systématique de GeoGebra se termine. Cet usage reprendra pour tester à nouveau les candidats pour les pavages réguliers, ce qui

permettra de ne retenir que les trois pavages réguliers. Mais comme on l'a évoqué, les difficultés d'élaboration d'une formule et la confusion initiale entre l'angle au centre et l'angle du pentagone ne permettront pas d'aller beaucoup plus loin.

Conclusion

Les conditions de cette expérimentation préalable ne se sont pas révélées favorables, la mise en œuvre ne permettant pas une étude fine des variables. Nous retiendrons toutefois un certain nombre d'éléments :

- Concernant les développements de sémioses sur les objets considérés : elles se produisent aussi dans ce niveau de classe et concernent tous les objets potentiellement en jeu, mais hors du champ numérique. Le concept d'angle d'un polygone, dans toutes ses dimensions, n'est lui pas mobilisable dans les conditions de mise en œuvre[38]. Dès lors en dehors de raisonnements sur le pavage (3,3,4,3,4) les échanges aborderont peu le niveau de l'argument. L'expérimentation confirme donc la nécessité d'une élaboration théorique effective sur cet objet, en situation ou en amont dans des conditions bien identifiées.
- Concernant la genèse instrumentale avec GeoGebra : pour le type de constructions attendues et avec les fonctionnalités du logiciel, en particulier la construction des polygones réguliers, la genèse instrumentale ne semble pas devoir être problématique. Elle peut se faire en amont de la séance ou même lors de la séance.
- Concernant les usages de GeoGebra : l'usage observé est multiple et varié. Sans régulation, il a pu être massif et non organisé, important et organisé, limité mais pertinent. Il a pu intervenir dans la génération d'exemples, de contre-exemples. La génération d'exemples a toutefois peu permis la découverte de processus de génération systématisée et la production de contre-exemple doit se comprendre plus dans la mise en place de conjectures incertaines que comme recherche du domaine de validité d'une loi. La fonctionnalité du logiciel de mesure des angles, qui aurait par exemple permis d'identifier éventuellement l'angle d'un pentagone dans l'espace entre deux décagones, n'a pas été constaté. Un usage permettant l'étude de l'aspect global des pavages a été observé pour le groupe 6, mais sans exploitation réelle. Relevons, qu'à plusieurs reprises, des figures de qualité et potentiellement particulièrement intéressantes n'ont pas été exploitées (aussi bien par le groupe 6 que par le groupe 5).

La non exploitation de figures potentiellement intéressantes confirme que le questionnement des faits de l'expérience ne peut se passer d'un développement parallèle d'une théorie sur ces faits. Or le logiciel, agissant ici dans la construction des polygones réguliers comme une boîte noire, où la seule théorie apparente est la juxtaposition de deux côtés des polygones, ne permet pas ce développement pour ce qui concerne les angles. Comme outil exploratoire, il ne favorise donc pas les élaborations théoriques parallèles, pourtant indispensables.

7.5.4 Expérimentation préalable lors d'un stage de formation continue : EP4

Pourquoi cette nouvelle expérimentation ? À l'issue de l'expérimentation en terminale S, une incertitude persiste quant à la capacité du modèle théorique à rendre compte de la réalité et à résister à la contingence. Est-il possible que l'objet à savoir apparaisse réellement, dans sa globalité, dans le cadre du modèle proposé ?

Une intervention en formation continue du second degré, dans le cadre du stage « Enseigner par les problèmes[39] » nous offre la possibilité d'une nouvelle mise à l'épreuve.

38. Sauf en partie par Martin s'appuyant sur un tableau de valeurs des angles.
39. Stage du plan académique de formation de l'académie de Lyon.

Contexte

Le milieu matériel pour cette expérimentation est à nouveau inchangé. La situation est proposée à 19 enseignants de mathématiques, de collège ou lycée, répartis pour l'occasion en 4 groupes de 4 et un groupe de 3. Le temps imparti se révélera légèrement plus long, 2h30 de durée globale, que pour les précédentes expérimentations. Pour l'occasion, nous mettons nous même en œuvre cette séance et envisageons d'intervenir si nous en sentons la nécessité. Un observateur se place auprès d'un groupe.

Deux micros placés auprès de deux groupes distincts, enregistreront la totalité des échanges dans ces groupes et la mise en commun qui suivra.

Quelques éléments de compte-rendu

Nous retrouvons dans cette mise en œuvre une entrée rapide dans la recherche de tous les groupes et des manipulations dans un milieu objectif qui permettra ici dans tous les cas sauf un, d'identifier rapidement l'objet d'étude. Nous ne pouvons revenir sur l'intégralité des démarches. Les échanges seraient à étudier finement. Notons toutefois, tout d'abord, que le milieu objectif s'est enrichi, au moins pour un groupe, des ressources liées aux transformations. Voici un extrait de la présentation de ce groupe :

> Donc on a fait pas mal de dessins en partant au départ d'un triangle équilatéral, ensuite le carré et par un calcul on a trouvé une formule qui est ici, en prenant i le nombre de polygones et puis n_i le nombre de côtés des polygones qu'on mettait autour du point. On a remarqué que le nombre de polygones devait être égal à 2 plus 2 fois la somme des 1 sur n_i, et donc cette formule là, on a essayé de l'appliquer à toutes les figures qu'on avait trouvées avant, ça avait l'air de fonctionner. Donc à chaque fois qu'on trouvait cette égalité, là, les formules qui marchaient avant ça marchait bien et on a remarqué que cette formule, là, c'était pas une condition suffisante parce que, pour le cas du pentagone, donc en prenant 3 figures de 5 côtés, 5 côtés et 10 côtés la formule fonctionnait correctement mais, par contre, on pouvait pas, y avait un problème pour que, on arrivait pas à paver un plan en entier. Donc une condition encore une fois qu'on a trouvé nécessaire c'est que il fallait qu'y ait un axe de symétrie, c'est-à-dire que la figure par laquelle on partait, il fallait que tous les axes de symétrie de la figure de départ soient aussi des axes de symétrie du pavage entier, on a pas bien trouvé pourquoi ça devait être nécessaire, on ne sait pas si c'est suffisant aussi à vérifier ...

L'observateur : *Votre condition sur la symétrie c'est une conjecture ?*

> Non en fait la condition sur la symétrie quand on regarde cette figure là, donc ici on a des angles de 144 et 156 degrés et donc on doit avoir deux angles de 144 degrés à l'extérieur, ici deux angles de 156 degrés à l'extérieur 144, 156, et là d'après ce polygone là, il nous faudrait 156 ici et d'après l'autre polygone 144.

On retrouve ici, des élaborations de conjectures en termes de conditions nécessaires ou suffisantes, dans un nouveau registre, celui des transformations. Les appuis se font là encore sur les angles des polygones réguliers. La familiarité avec ces objets a ici été construite grâce à l'élaboration d'une liste relativement exhaustive.

Nous revenons ici plus particulièrement sur le début de recherche d'un groupe pour lequel nous retrouvons une démarche très similaire à celle du groupe 1 de l'expérimentation en TS. Sous l'impulsion d'un des membres du groupe qui affirme que tous les angles sont les mêmes c'est tout d'abord l'étude des angles des polygones réguliers qui est réalisée avec une idée de généralité, l'obtention de la formule $180 \times \dfrac{n-2}{n}$, l'idée de valeur maximale. Suit alors une

étude d'un nœud d'un pavage (régulier !) avec rapidement, après l'observation du cas $p = 3$, la proposition $\alpha_n = \dfrac{360}{p}$ avec n le nombre de côtés du polygone considéré, α_n l'angle de ce polygone et p le nombre de fois où ce polygone apparaît autour du nœud. Les extraits ci-dessous montrent l'esprit du début de la recherche :

> Moi je sais pas j'ai réussi à faire une formule, l'angle qui est là c'est 180 fois n(n-2) sur n.
> T'en es sur de ça ?
> Ben l'angle de l'autre triangle y fait 60, là c'est 90, va y avoir 108.
> Parce qu'en fait j'ai pris une situation à n côtés, donc ici le petit angle qu 'il y a là c'est 360 sur n, là y a deux angles qui restent.
> ...
> Pour un même p peut-il y avoir plusieurs n ?
> Non.
> Pour un même nombre on obtient un angle et pour un angle y a pas 25 polygones.
> Donc doit y avoir un lien entre n et p.
> Comment on exprime le nombre de côtés en fonction de l'angle.
> Faudrait trouver un lien entre n et p.

On observe donc un appui sur les objets qui se révèlent ici très familiers et un engagement franc dans les registres numérique et arithmétique. Après environ 12 minutes, c'est la résolution de l'équation $180 \times \dfrac{n-2}{n} = \dfrac{360}{p}$ qui occupe l'essentiel du temps de recherche de ce groupe. On constate que la situation est robuste y compris auprès de ces enseignants de mathématiques. Après environ 25 minutes de recherche, devant la difficulté de résolution de l'équation en n et p, on peut observer toutefois un événement nouveau :

> Non mais c'est des trucs que tu vois en term ... *en référence à des équations diophantiennes.*
> ... si on en met plus de 6 on va peut-être trouver un angle trop aigu.
> si si on va s'en sortir parce que là on essaie d'en mettre le plus possible à un moment donné on arrive à des angles aigus plus petits que l'angle du triangle ça marche plus ben tout simplement, on peut pas faire moins que 60 ... et oui oui ... n il est forcément plus grand ou égal à 60 euh non pas n, p.
> non p c'est un nombre de côtés, non c'est le nombre de polygones.

Ici, apparaît clairement le fait que la résolution d'un problème de la théorie se réalise en appui sur l'expérimentation. C'est la manipulation « mentale » des objets de la famille des polygones réguliers, qui permet de constater une impossibilité « ça marche plus ». On note également que le champ syntaxique se révèle ici plus comme un obstacle que comme une aide. C'est l'objet qui est au cœur du raisonnement. On peut aussi constater que l'élaboration de cet élément de la théorie, s'appuie cette fois, non pas sur les objets polygones réguliers mais sur la famille de ces polygones.

Il est également à noter que se joue ici un moment crucial, avec une minoration de $\dfrac{360}{p}$, qui est délicate à obtenir non seulement du fait de la nature de cet angle mais également du fait de la manipulation de l'inégalité et des variations contraires de p et α_n. C'est ainsi l'idée de variations, ou tout au moins de majoration, minoration qui, apparaissant au cœur du raisonnement, permet ensuite rapidement de conclure pour les pavages réguliers.

Après 30 minutes le cas de ces pavages est ainsi réglé. Les 14 minutes suivantes seront consacrées à des clarifications, à la rédaction de l'affiche. Durant ce temps le terme pavage est

employé sans que cela induise un retour sur ce qui a déjà été fait. Nous nous sommes alors décidés à intervenir :

> *Donc là vous avez démontré que ?*
> Il y a trois pavages archimédiens.
> *Et ils sont faits comment ces pavages ?*
> Avec des triangles ...
> ...
> *Et donc, ce que vous avez démontré, c'est qu'il y a trois pavages réguliers.*

Ceci permettra à un des membres du groupe d'affirmer : « et on peut pas mettre un triangle avec ... avec un hexagone » et à un autre « Et ouais le truc c'est que c'est marqué tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même type de polygone » puis aux autres d'enchaîner. Le collègue « mis en cause » pour la voie qu'il a proposée initialement enchaîne alors rapidement :

> non mais y a encore des histoires de plus grand ou pas, ou nombre limité quand même ...

Et c'est cette piste poursuivie, qui mènera le groupe quasiment au bout de l'étude. Nous avons retranscrit en annexe E.7, la fin de leur recherche et la présentation qu'ils ont fait à leurs camarades. La démarche consiste en une étude exhaustive suivant le nombre de polygones autour d'un nœud.

Conclusion

Cette expérimentation préalable montre :
- la robustesse de la situation même auprès d'un public d'enseignants de mathématiques,
- la similarité des objets en jeu, en dehors de l'utilisation de transformations [40],
- la même étude restrictive aux pavages réguliers pour un groupe. Elle apparaît à nouveau quand aucun échange n'a lieu lors de la projection de l'énoncé, ce qui se produit ici, les enseignants présents n'éprouvant pas le besoin d'échanger à ce moment,
- les potentialités d'une étude restrictive aux pavages réguliers qui permet le développement de techniques adaptables au cas général.

7.6 Bilan des expérimentations préalables en termes de possibilité de mise en œuvre dans une institution

Nous tirons ici les enseignements de ces expériences préalables en termes de mises en œuvre d'une SDRP basée sur la recherche des pavages archimédiens du plan dans différentes institutions. Nous pointons également les variables disponibles. Rappelons que nous souhaitons penser en termes de plus-values de la situation dans les évolutions avérées du système de connaissance des élèves, et que dans cet esprit nos objectifs sont d'étudier la mise en place d'une situation fondée sur un problème au sens où nous l'avons défini et les sémioses possibles.

7.6.1 Un embryon de situation

L'embryon de situation que nous avons soumis à la contingence a résisté différemment suivant les institutions, mais des invariants sont apparus :

40. On ne retrouvera pas cet objet lors de nos autres expérimentations, nous ne l'étudierons pas davantage ici, même s'il est un des outils principaux dans les théories de classification.

— Le problème a été robuste dans toutes les expérimentations préalables. Il a fourni au milieu des objets et des potentialités d'action sur ces objets dans toutes les institutions considérées. Quelque soit le sujet observé, un jeu didactique a été possible.
— L'organisation didactique retenue, et mise en œuvre de façon fiable dans trois expérimentations sur quatre, favorise l'engagement de chaque sujet dans la recherche, la production des premiers signes relatifs au problème, les confrontations de ces signes lors d'échanges dans des groupes restreints, des émergences de savoirs du réseau de savoirs considéré.
— Du point de vue de la construction de la tâche, on constate qu'avec les variables choisies, on ne peut avoir l'assurance que tous les groupes vont questionner de leur propre initiative la diversité possible des polygones réguliers autour d'un nœud. Ce fait récurrent doit être questionné du point de vue de l'efficacité des constructions de savoirs. La situation doit-elle être modifiée ? Suivant quelles orientations ?
— Les objets familiers génèrent un domaine d'expérience pour le développement de sémioses lors d'allers-retours avec le nouvel objet en jeu.
— Des savoirs nouveaux émergent et particulièrement concernant la détermination de l'angle d'un polygone régulier, la somme des angles des polygones autour d'un nœud d'un pavage, la notion de pavage régulier, le nombre de pavages réguliers

Nous observons également une certaine diversité de développement de la situation suivant les institutions :

— La situation est sensible à la diversité des institutions et des sujets quant à la relation aux objets et aux sémioses produites. Des étudiants ayant une relative proximité avec les polygones les plus simples et des élèves ayant une proximité avec les entiers et leur manipulation ne développent pas les mêmes sémioses.
— En cas de non évocation orale de la pluralité des polygones possibles les sémioses réalisées peuvent s'engager sur des voies complémentaires, voire *a priori* disjointes.
— L'émergence d'un travail sur les lois (locales, au niveau d'un assemblage, ou globales) est inégale et, pour le premier type, dépend fortement de la familiarité avec certaines caractéristiques du concept d'angle d'un polygone, et de la capacité à manipuler un ensemble de mesures d'angles de polygones réguliers.

7.6.2 Le milieu matériel

On retient ici les variables suivantes en sus de l'environnement papier-crayon :
— mise à disposition d'instruments de géométrie : règle, compas, équerre, rapporteur.
— mise à disposition de papier quadrillé, blanc, coloré, de ciseaux.
— mise à disposition de matériel, type polygones en plastique ou en papier.
— mise à disposition de ressources documentaires : cours, manuels, internet.
— mise en œuvre dans un environnement numérique (calculatrice, logiciel de géométrie dynamique, tableur, logiciel de calcul formel, logiciel de mise en œuvre d'algorithmes, ...) sous des modalités diverses : accès permanent, structuré mais libre, avec une organisation imposée, ...

Les instruments de géométrie sont des outils familiers dans les institutions considérées. Leur disponibilité est naturelle. Leur usage oriente initialement l'activité dans le cadre d'une géométrie I et permet par exemple des mesures et des identifications d'angles. Nous avons observé que cette géométrie instrumentée, en appui sur des constructions de figures et/ou la création de polygones sensibles permet l'élaboration de conjectures et l'engagement dans la création d'une théorie. Elle permet aussi parfois la mise à l'épreuve de la théorie dans des phases plus avancées. Ici, leur usage doit toutefois être dépassé dans des phases de validation dans le cadre de la théorie.

La question de l'usage de papier et de ciseaux rejoint celle de la création de polygones sensibles, création par le sujet et donc dans un cadre théorique déjà présent. La mise à disposition de polygones en papier, déjà découpés, colorés suivant le type de polygone ou de matériel de même type en plastique revêt une autre dimension. Par cette mise à disposition, la manipulation est facilitée [41], voire valorisée, mais une part de la mathématisation est alors à réaliser. Si l'étude globale peut être facilitée, l'étude locale peut elle, être complexifiée.

La problématique de la mise à disposition de ressources issues d'internet n'est pas étudiée ici. On a pu entrevoir la complexité de l'usage de cet outil lors de EP3.

Concernant les autres instrumentations (calculatrice, logiciel de géométrie dynamique, tableur, logiciel de calcul formel, logiciel de mise en œuvre d'algorithmes, ...) : la calculatrice a trouvé toute sa place dans les milieux objectifs de toutes nos expérimentations préalables. Elle ne pallie pas toutes les maladresses dans le registre numérique, mais peut faciliter l'entrée dans ce registre pour les sujets qui ne s'y engageraient pas sans. L'expérimentation EP3, nous a fourni quelques éléments sur l'usage du LGD. Son usage est particulièrement approprié pour la validation ou l'invalidation de candidats-pavages aussi bien au niveau local que global, mais là encore avec le cadre théorique nécessaire. Ainsi, concernant l'utilisation de l'heptagone, Martin a obtenu une certitude que Léa, dans les mêmes conditions, n'a pu proposer. Plus généralement le LGD ne se confirme être qu'un outil au service d'une pensée et, en tant que boîte noire particulièrement concernant les angles, ne favorise que modérément les phases heuristiques.

7.6.3 Différentes institutions

Comme nous l'avons évoqué, la situation a su trouver sa place dans les différentes institutions considérées. Des sémioses nombreuses apparaissent, enrichissant des objets déjà connus et développant des connaissances sur d'autres. Bien évidemment des sémioses plus riches sont développées par des sujets ayant des connaissances plus importantes, mais globalement la construction de la tâche, puis du problème sont relativement similaires pour tous et le développement d'une théorie relative au nouvel objet étudié trouve une limite chez tous [42]. Ainsi il y a à la fois une sensibilité de la situation à l'institution (engagement plus rapide dans la manipulation et la construction des polygone en EP1, engagement dans un registre numérique plus rapide en EP4 et partiellement en EP2, ...) mais également une similarité dans les retours de ces expérimentations du point de vue de la théorie développée et de sa limitation en termes d'exhaustivité.

Précisons pour terminer, que dans les mises en œuvre nous n'avons pas identifié de savoirs en jeu incompatibles avec les institutions considérées. Déontologiquement, en accord avec les recommandations institutionnelles et indépendamment de l'objet de notre recherche, la poursuite d'un travail dans ces cadres est possible.

7.7 Conclusion sur le milieu théorique

Nous pouvons désormais conclure l'étude du milieu théorique, sans revenir sur les études mathématiques et historiques, mais en faisant le bilan en termes de potentialités théoriques d'une SDRP fondée sur la recherche des pavages archimédiens du plan. Nous venons en effet de compléter l'anticipation première par des expérimentations qui permettent en particulier d'obtenir les premières sémioses d'élèves-étudiants lors des différents jeux possibles et d'affiner l'étude de la consistance.

41. Comme nous avons pu le constater lors de la mise à disposition de ce type de matériel à un public varié lors de la nuit des chercheurs 2012.

42. Et ceci est confirmé auprès d'étudiants préparant le CAPES de mathématiques.

Nous pouvons par exemple produire une première carte (Figure 7.6) de l'objet étudié que nous n'organisons, à l'issue de ces expérimentations préalables, que suivant deux axes assez grossiers, la diversité des objets et le point de vue local-global.

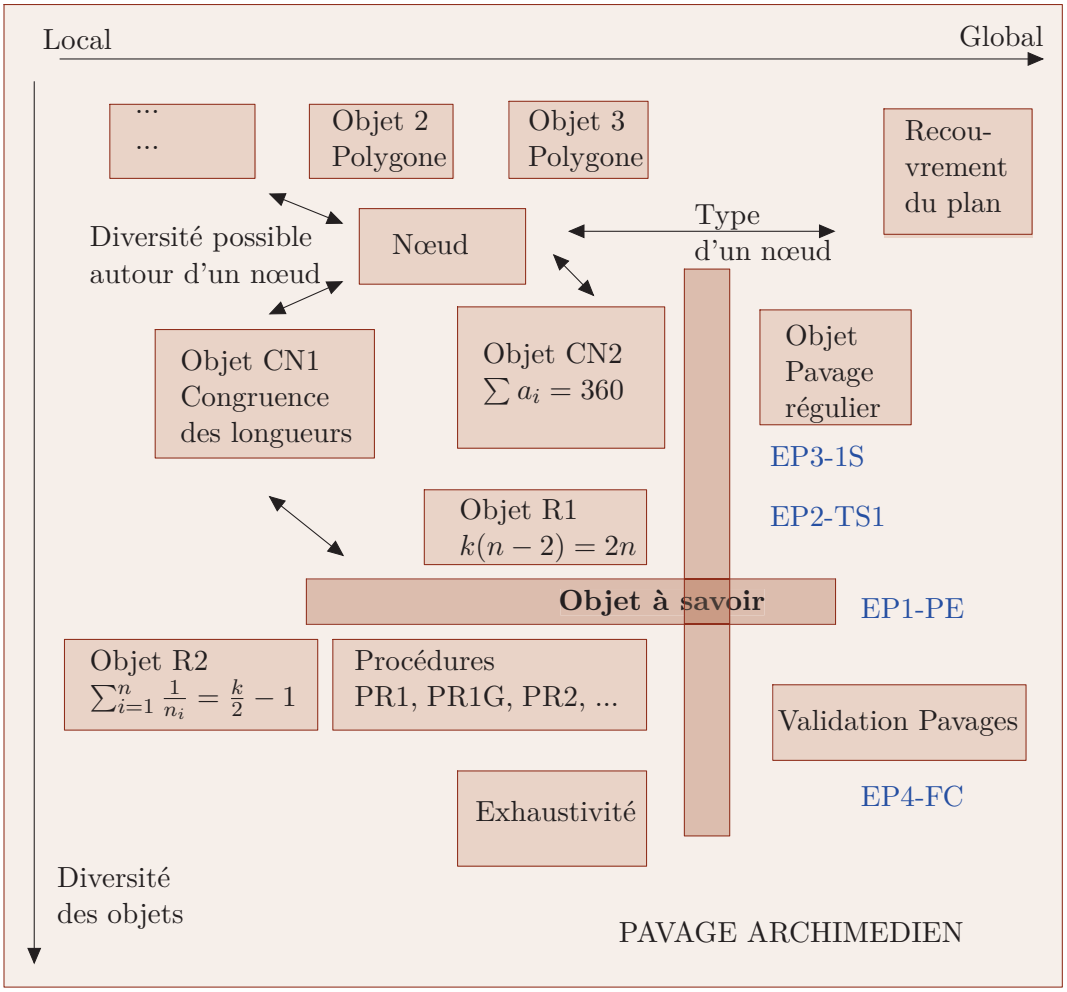


FIGURE 7.6 – Une carte de l'objet « Pavage Archimédien »

Mais si elle permet une synthèse, cette carte ne rend pas assez compte d'au moins deux points :

— Le schéma présenté permet une première visualisation et met en évidence le rôle initial que peuvent avoir les polygones réguliers dans les sémioses mais la structuration ne permet pas de rendre compte du rôle des polygones réguliers dans les va-et-vient qui fondent la dimension expérimentale. Ainsi si la sémiose peut se concevoir sous l'angle d'une progression comme sur le schéma 7.7, il faut garder comme image le soutènement de son évolution par les allers-retours avec les objets familiers ou qui le deviennent. Et les polygones sont, parmi ceux-là, ceux à qui le sujet se réfère tout au long de la recherche.
— La présentation des relations en termes numériques rend aussi très mal les interactions entre les registres et en particulier l'appui sur le sensible géométrique. D'autant plus que, comme le montrent les présentations lors du stage de formation continue, les expériences mentales décrites s'appuient fortement sur des « images » géométriques : « parce que là on essaie d'en mettre le plus possible à un moment donné on arrive à des angles aigus

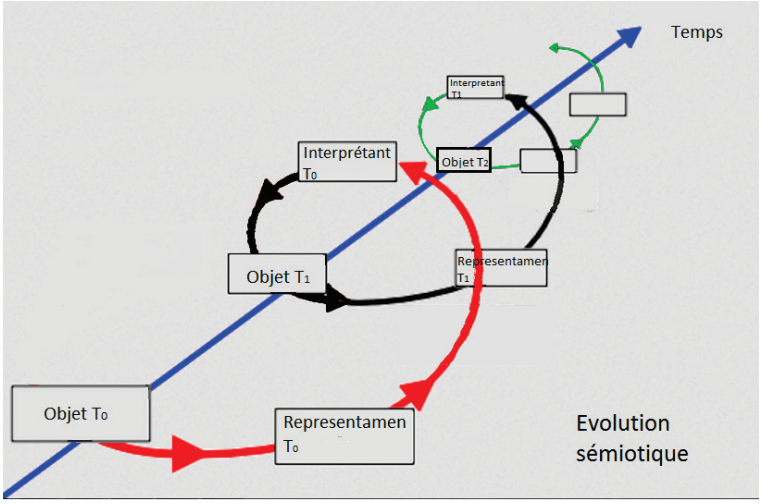


Figure 7.7 – Schéma d'une évolution sémiotique

plus petits que l'angle du triangle ça marche plus ben tout simplement ».

Si le modèle théorique initial se confirme, deux questions se posent toutefois de façon cruciale maintenant :

- **Le rôle des pavages réguliers**, le rôle d'attracteur qu'ils possèdent d'une part et l'intérêt de cette attraction. En effet, au-delà de la limitation de la recherche que cela semble être, il est remarquable que l'objet pavage régulier a joué pour certains groupes plus qu'un simple rôle d'objet « exemplaire » mais également un domaine d'expérience pour les élaborations théoriques. Ceci est à prendre en considération dans le questionnement du modèle expérimental *a priori* et plus généralement dans la structuration même du modèle épistémologique. Comment s'organise le passage du domaine d'expérience familier au champ heuristique pour l'exploration d'un domaine inconnu et incertain ? C'est une des questions en jeu.

- **La limite aux sémioses** : Alors que plusieurs démarches semblent permettre une poursuite des évolutions sémiotiques, deux groupes seulement ont élaboré des voies plus approfondies. Plusieurs pistes peuvent être évoquées mais puisque la mise en œuvre d'un nouveau type d'activité mathématique, l'étude d'un objet inconnu [43] sont des variables fixées de notre étude, notre effort d'analyse portera sur la qualité de la relation aux objets en jeu.

Au centre des questionnements, est en jeu la qualité de la relation aux polygones qui se met en place dans l'activité. La considération de l'angle de ces polygones et de l'ensemble de leurs mesures sont des éléments à questionner. Les exemples historiques, les indices en EP1 avec des étudiants ayant construit une relation particulière aux polygones réguliers, les indices en EP4 avec des images mentales de l'association de polygones suffisamment fortes pour porter le raisonnement nous amènent à orienter, pour une part, l'ingénierie sur ce point.

Ainsi après avoir observé des élèves-étudiants considérer de nouveaux objets (des associations de polygones réguliers autour d'un sommet, les pavages réguliers, des candidats pavages-archimédiens), élaborer des résultats simples (une formule donnant la mesure des angles d'un polygone régulier, une liste des pavages réguliers), débattre sur des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de pavages archimédiens, notre ingénierie va développer l'organisation

43. Par ailleurs difficile à explorer comme l'a prouvé l'étude historique.

d'un milieu permettant l'étude de la construction du problème dans sa globalité, l'investissement plus régulier dans un registre numérique permettant de nouvelles évolutions sémiotiques, la confrontation à la résistance précédemment évoquée. Ce cadre permettra l'étude fine, à l'aide des cadres théoriques envisagés, de l'évolution du système de connaissances des élèves lors de l'élaboration de sémioses en SDRP.

Chapitre 8

Milieu expérimental *a priori* et confrontation à la contingence

Sommaire

8.1 Le modèle expérimental *a priori* 184
8.1.1 Anticipation du jeu effectif 184
8.1.2 Anticipation des comportements 188
8.1.3 Recueillir des observables, les organiser 188
8.1.4 Des références, une méthode 189
8.2 Confrontation à la contingence 189
8.2.1 Lancement de la situation 189
8.2.2 Le devoir en temps libre 190
8.2.3 Séance de recherche en classe 204
8.2.4 Premières conclusions sur la confrontation à la contingence 234

Ce chapitre 8 est le lieu de la détermination de la situation didactique qui, dans la confrontation à la contingence, permettra les analyses, analyses qui devraient montrer l'intérêt d'un regard approfondi porté sur les objets en jeu et leur mode d'existence chez les élèves. Dans le cadre de cette thèse, dont l'ambition est réelle mais limitée par la nature de l'exercice, nous ne pourrons explorer toutes les pistes offertes par l'objet SDRP. Ainsi, aussi général que puisse être le cadre des SDRP, nous ne pourrons soumettre à l'épreuve de la contingence qu'une instance du modèle SDRP. Et, pour des raisons d'insertion dans la progression de P, ce ne peut être l'instance qu'idéalement nous voudrions mettre en œuvre et étudier [1]. Dès lors, cette expérimentation doit bien être vue comme un temps qui permettra avec l'ensemble du travail déjà présenté l'élaboration d'une SDRP, et pas comme la mise en œuvre idéale et définitive d'une SDRP.

L'étude que nous menons, cherchant à identifier dans l'action la relation des sujets aux objets, nous amène à privilégier des mises en œuvre permettant l'observation des actions sur tous les objets en jeu. Or nous venons de voir qu'ils sont nombreux (entropie phénoménologique oblige) et qu'il est possible que certaines sémioses concernant des objets majeurs se développent parallèlement sans que, dans un premier temps, le lien ne se fasse. Nous avons vu également que laisser la possibilité de ces émergences ouvrait des potentialités en termes de développements ultérieurs, potentialités qui pouvaient aller jusqu'à la mise en place de raisonnements suffisants pour envisager la détermination de tous les pavages archimédiens du plan. Au moment de

1. Nous reviendrons dans la conclusion de notre thèse sur d'autres projets, pour une part déjà en cours, et la mise en œuvre d'autres instances.

finaliser une situation expérimentale, nous sommes donc devant un dilemme ; mettre en œuvre une situation avec des conditions initiales similaires à celles des expérimentations préalables ou modifier ces conditions pour tenter l'émergence de sémioses nouvelles au risque de perdre les plus prometteuses. Le choix se fait suivant deux dimensions :

- le choix de l'institution et les contraintes qu'elle impose
- le ciblage des objets de l'étude

Notre volonté de tester des situations propices à une refonte de l'épistémologie scolaire nous amène à privilégier une expérimentation en lycée d'enseignement général et technologique. La situation peut y trouver place à différents niveaux. Compte-tenu des expérimentations préalables et de notre volonté de tester la limite identifiée dans les expérimentations préalables, nous choisissons de mener cette dernière expérimentation à nouveau en classe de terminale scientifique. Ce choix doit permettre de s'appuyer sur la familiarité des élèves avec les entiers et faciliter l'engagement dans des procédures numériques. Le choix d'une classe d'examen amènera des contraintes que nous présentons ci-après.

Malgré le risque de limitations que cela comporte nous décidons également de modifier les conditions d'entrée dans la situation de façon à mieux identifier le répertoire, la relation aux objets. Cette modification doit ainsi permettre de mieux comprendre l'émergence des savoirs dans l'action, des savoirs si possible plus nombreux et de tester la limite évoquée.

8.1 Le modèle expérimental *a priori*

Contrairement à certains travaux sur les activités de recherche proposées à des élèves, nous retenons donc l'intégration dans la classe de mathématique « ordinaire ». Nous sommes donc amenés à croiser l'ingénierie avec les contraintes du curriculum et de l'organisation didactique dans la classe. Nous travaillons à nouveau avec l'enseignante en charge des groupes lors de la première expérimentation préalable en préparation au CRPE, enseignante qui, entre temps, a rejoint un lycée d'enseignement général et technologique. Elle a en charge la spécialité mathématique pour un groupe initialement de 20 élèves (19 au moment de l'expérimentation) issus de classe d'option SVT ou SI. L'expérimentation se déroule en plusieurs temps, entre janvier et mars 2014. Elle sera dénommée « EXP-TS2 ». Un cahier de travail (cf. annexe F.1) est fourni à chaque élève et permet de recueillir l'intégralité de ses productions personnelles.

Nous reprenons maintenant, point par point, le modèle expérimental *a priori*, avec les modalités et les objectifs associés à l'ingénierie proposée.

8.1.1 Anticipation du jeu effectif

Pour cette expérimentation l'organisation didactique prévoit quatre temps :

Temps 1

L'enseignante propose un devoir en temps libre à ces élèves (cf. annexe F.2). Le sujet traite des polygones réguliers en lien avec les objectifs du programme de terminale. Un délai d'un mois est laissé avant le retour à l'enseignante. Les étudiants ont la possibilité de solliciter le chercheur durant cette période[2]. À l'issue, les productions sont co-corrigées par l'enseignante

2. Le chercheur a été sollicité par 3 messages, un sur les suites et deux sur les nombres de Fermat. L'enseignante a été sollicité par E4 et E16 qui obtenant $\frac{360}{n}$ comme formule donnant la mesure en degré de l'angle d'un polygone régulier ne retrouvaient pas les valeurs connues. L'enseignante a échangé jusqu'à l'obtention d'une formule adéquate.

et le chercheur.

Le choix est donc fait d'anticiper sur le temps de recherche en classe la manipulation des objets « polygone régulier » et « angle d'un polygone régulier ». Ce choix se justifie par le rôle de ces objets identifié dans l'étude théorique, la volonté de développer la familiarité des sujets à leur égard sans restreindre pour autant le futur travail sur les pavages. L'organisation des temps 1 et 2 doit par ailleurs permettre les analyses sur la relation des sujets à ces objets.

Le sujet du devoir propose tout d'abord les définitions d'un polygone régulier, d'un polygone régulier convexe, de l'angle d'un polygone régulier convexe, de l'angle au centre d'un polygone régulier convexe, ainsi qu'une propriété caractéristique des polygones réguliers. Quatre thèmes sont ensuite abordés : la mesure en degré de l'angle d'un n-gone régulier convexe, la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ des mesures en degré des angles de ces n-gones, la nature des termes de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$, les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas. Les thèmes sont, une fois le contexte posé, traités en lien avec le programme de terminale sur les suites, l'algorithmique, la décomposition primaire d'un entier. La question sur la nature des termes de la suite renvoie aux ensembles de nombres côtoyés dans les trois années de lycée. La dernière question évoque les nombres de Fermat et le théorème de Gauss-Wantzel.

— Les définitions : Après la présentation, à titre d'exemple, de l'ennéagone convexe régulier et des trois ennéagrammes, des définitions introduisent les éléments minimaux nécessaires à l'étude de l'angle d'un polygone régulier convexe.

— Les 10 questions :

Questions 2.1.1 et 2.1.2 : Chaque question envisage une démarche pour déterminer une formule donnant l'angle d'un polygone régulier en fonction du nombre n de côtés. Ces démarches sont indépendantes et offrent donc deux possibilités d'aboutir. Une équivalence des deux formules peut se faire aisément dans le registre syntaxique. La question 2.1.1 nécessite de l'élève de percevoir sur la figure 1.a. de l'énoncé, la décomposition du polygone en n-2 triangles et de comprendre le lien entre la somme des angles des triangles et la somme des angles du polygone. La question 2.1.2, en appui sur la figure 1.b., utilise elle la décomposition du n-gone en triangles isocèles, un calcul d'angle à la base d'un triangle isocèle et la décomposition de l'angle du n-gone en deux angles adjacents égaux. La proposition de deux démarches permet de n'en réussir qu'une et de pouvoir malgré tout poursuivre l'étude. Dans le cas d'un blocage total, les élèves pouvaient faire appel à leurs camarades et/ou au chercheur.

Questions 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3 : Ces questions visent une familiarisation avec la suite des mesures en degré des angles des polygones réguliers. Elles tentent de la réaliser par la manipulation de l'une ou l'autre des formules obtenues en 2.1, aussi bien par des instanciations pour n dans $[3; 25]$ que par l'étude de la suite. La question 2.2.2 nécessitait l'usage de techniques sur les suites vues en première ou terminale. La question 2.2.3 visait le retour au sens, après une étude potentiellement plus formelle.

Question 2.3.1 : Cette question prépare la question 2.3.2 et nécessite de savoir mettre en œuvre un algorithme simple à une entrée. La réussite à la première partie de la question donne la réponse à la deuxième pour autant que les élèves reconnaissent dans la sortie « 2.2.2.3.3.5 » la décomposition en facteurs premiers du nombre 360, donné comme entrée.

Question 2.3.2 : Cette question, qui étudie la nature des α_n en fonction de n, nécessite de l'élève qu'il fasse un lien avec la formule donnant α_n en fonction de n, et d'entreprendre l'étude de $\frac{360}{n}$. Elle nécessite évidemment une connaissance des ensembles de nombres

($\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$) et la caractérisation de l'écriture des nombres de ces ensembles sous forme fractionnaire. Un appui partiel sur le tableau de la question 2.2.1 est possible.

Questions 3.1.1 et 3.1.2 : Ces questions étudient la primalité des 6 premiers nombres de Fermat : F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. Pour les trois premiers la difficulté se résume à la compréhension de l'écriture des nombres de Fermat. Pour F_3 et F_4 il faut en plus disposer d'un algorithme de décision pour la primalité, savoir en user et le présenter. La solution est donnée pour F_5.

La question 3.2 utilise le théorème donné de Gauss-Wantzel pour déterminer les polygones réguliers à n côtés (n $\leq$25) constructibles à la règle et au compas. La structuration d'une recherche exhaustive est ici nécessaire.

Temps 2

Un travail en classe est organisé autour des productions des élèves, annotées sans excès. L'organisation prévoit une séance d'une heure et cinquante minutes, avec un travail en groupe puis un temps de présentation et de synthèse. Un synthèse écrite (cf. annexe F.3) est distribuée à l'issue.

Les groupes sont organisés en fonction de leur travail en temps libre. Chaque groupe travaille sur une ou deux questions et revient donc sur les premières difficultés rencontrées. Le temps de présentation par chaque groupe des résultats obtenus et le temps de synthèse doivent permettre de revenir sur toutes les difficultés et de créer un début de culture commune sur ces questions, sans se faire d'illusion sur la pertinence de ces modalités pour les élèves les plus en difficulté.

Temps 3

C'est le cœur de la SDRP avec un temps de recherche et de débat fondé sur l'exploration des pavages archimédiens du plan. Les modalités de ce temps sont proches de celles déjà mises en œuvre lors des expérimentations préalables. Deux modifications importantes sont toutefois apportées.

1. Nous prévoyons d'introduire dans le milieu une ressource supplémentaire, des extraits de la « Géométrie » de Dürer (cf. annexe G.3) dans lesquels Dürer « souhaite mettre bout à bout quelques figures polygonales, telles qu'elles peuvent servir dans le pavement des sols.[...] ». Cette introduction se fera après un temps suffisant de recherche qui aura permis de s'assurer de l'apparition, si possible dans tous les groupes, des pavages réguliers et d'un pavage archimédien non régulier, de l'apparition de la condition nécessaire d'assemblage de polygones autour d'un nœud (somme des mesures en degré des angles égale à 360°), d'un début d'un travail numérique utilisant les mesures en degrés des angles des polygones réguliers, de l'apparition dans certains groupes d'une réflexion sur l'exhaustivité [3]. Ce document est donc introduit après la construction de la tâche et l'émergence des premiers éléments de l'ensemble qui servira de domaine d'expérience. Ces extraits sont introduits par l'enseignante par une formulation laissant entendre que comme tout chercheur, les élèves peuvent s'appuyer sur les travaux de leurs prédécesseurs. Le document fourni, présente un décalage dans l'approche des pavages, qui fait que s'il apporte des éléments pertinents, il en apporte d'autres qui ne le sont pas. Une prise de recul est donc nécessaire. De façon plus précise ce document a été construit à partir d'extraits du Livre 2, page 215 à 222 de (Dürer, 1995). Il tente dans un volume réduit de rendre compte de l'esprit de la présentation de Dürer avec deux choix :

3. Les consignes à l'enseignante figurent dans l'extrait du document pour l'enseignante de l'annexe G.2

• celui de limiter le volume de texte. Ceci est fait à la demande de l'enseignante qui estime que ses élèves pourraient être déstabilisés par une tâche de lecture trop importante.
• ne pas présenter le paragraphe sur les losanges, seule figure polygonale non régulière que Dürer associe à son étude.
L'extrait reconstruit rend ainsi compte de la volonté initiale de Dürer de réaliser des assemblages avec un seul type de figure polygonale. Il considère successivement des triangles, des carrés, des losanges, des pentagones, des hexagones, des heptagones et des octogones. Même si ce n'est pas totalement explicite, Dürer considère, au moins au début de cette partie, des polygones réguliers. Il cherche à les associer et présente ainsi les pavages réguliers et des variantes non strictes. Il distingue dans ce document certains pavages suivant l'orientation, en produisant par exemple deux dessins, pour ce qu'on appellerait aujourd'hui une pose droite et une pose diagonale de carreaux carrés. Ainsi si des pavages archimédiens apparaissent, ce n'est pas en tant que tels, mais comme des pavages obtenus en complétant les assemblages obtenus avec un seul type de polygones réguliers mais qui ne pavent pas totalement le plan.
Ainsi les élèves pourront constater que Dürer n'a pas le même objectif qu'eux, même s'il laisse, en fin de texte, la porte ouverte à une étude plus exhaustive laissant à chacun la possibilité d'y réfléchir par lui-même. Les élèves pourront ainsi identifier les 3 pavages réguliers, quelle que soit leur orientation et exclure de l'étude certains pavages car constitués avec des polygones non réguliers ou avec des nœuds de types différents. Ils pourront malgré tout retrouver deux pavages archimédiens, non réguliers et les confronter soit à leur propre production, soit à leurs premières conjectures, voire premiers résultats.

L'introduction de cette ressource devrait donc :
• permettre une mise en position du chercheur qui dispose des productions de ses prédécesseurs,
• permettre une prise de recul par rapport à sa propre recherche,
• permettre aux élèves de se questionner sur CN2,
• offrir une possibilité d'observer des pavages non réguliers,
• offrir une possibilité d'échanger sur les pavages non stricts et non archimédiens et de réaliser un choix,
• soulager les élèves de certaines difficultés de tracés,
• offrir la possibilité de s'engager plus vite dans une démarche numérique,
• a contrario réduire les recherches centrées sur les pavages réguliers, qui, on l'a vu, peuvent s'avérer favorables,
• faciliter certaines validations en s'appuyant sur des dessins tout en prenant conscience de la nécessité d'un travail numérique.
Et pour finir précisons que ce document ne fournit pas d'éléments numériques ni de pistes théoriques, comme nous l'avons déjà constaté dans l'étude de la démarche de Dürer.

2. De plus, quelques instants après cette remise de documents, l'enseignante prendra l'initiative de faire un point avec toute la classe en faisant expliciter les avancées de chaque groupe. Il s'agit ici d'aider à la construction du problème pour ceux qui n'y seraient pas encore parvenus. Bien évidemment, les processus sémiotiques en cours de développement seront impactés. Nous verrons dans quelle mesure et en quel sens.

Il est à noter que des exemplaires du corrigé seront disponibles, accompagnés des photocopies des affiches produites suite au travail en groupes lors du temps 2. L'enseignante pourra les distribuer au moment qu'elle jugera opportun pour compléter les ressources dont disposent déjà les élèves sur leur cahier de travail.

Temps 4

C'est un temps d'apports complémentaires par l'enseignante d'une dizaine de minutes, en appui sur un document écrit (cf. annexe G.4) sur les pavages archimédiens. Il est prévu à distance du temps 3 (une semaine).

Finalement

Cette organisation prend en compte le possible manque de familiarité avec les polygones réguliers et doit permettre que la mesure des angles des polygones réguliers puissent faire partie du milieu objectif des élèves. Elle doit faciliter la mise en œuvre d'une dimension expérimentale, le développement des argumentations, le contrôle de la pertinence des théories élaborées. C'est cette variable qui est ici mise en avant. Celle qui aurait favorisé fortement un développement de théories sur les pavages réguliers est mise au second plan pour cette instance de la SDRP, même si une telle approche pourra sans doute être observée. On peut aussi préciser ici que le travail préliminaire sur les angles et l'introduction des planches de Dürer détermine notre choix quant à l'usage d'un LGD.

8.1.2 Anticipation des comportements

Cette nouvelle organisation didactique nous permet d'envisager des actions et des productions suivant les différents temps. Après la réalisation du devoir en temps libre, il devrait être possible de faire un premier bilan des objets manipulés, des énoncés présents ou absents du registre des élèves, de la familiarité de tel ou tel sujet avec tel ou tel objet. Lors du temps 2, on peut imaginer, pour les questions traitées par un groupe, affiner ces points et peut-être aller au-delà en voyant émerger une relation particulière aux objets, relation explicative d'un certain mode de fonctionnement avec ces objets. À l'issue du temps 2, on peut espérer que les élèves auront stabilisé des connaissances au moins sur les questions qu'ils ont su traiter lors de leur recherche personnelle et sur celles qu'ils auront travaillées dans ce temps. Nous verrons si les présentations et les échanges sur ces présentations peuvent permettre à des élèves qui n'auraient pas traité la question de progresser sur les connaissances en jeu. Le bilan à l'issue de ce temps, nous donnera les conditions initiales du temps 3. Ces conditions étant désormais ce qu'elles sont, il est probable que le milieu objectif permette des sémioses différentes et que les objets considérés offrent la possibilité de l'argumentation dans le cadre d'une théorie contenant par exemple une loi explicite sur la formation des assemblages autour d'un nœud. Les temps de présentation et de débat devraient alors permettre de préciser la théorie qui pourra rendre compte des actions sur les objets d'un champ d'expérience plus commun à tous. L'ensemble des temps donnera lieu à la production d'ostensifs mathématiques et débouchera sur l'institutionnalisation de savoirs mathématiques, c'est-à-dire la mise en commun de règles relatives à la gestion des ostensifs et des actions.

8.1.3 Recueillir des observables, les organiser

Lors de cette expérimentation, tous les temps font l'objet d'un dispositif de recueil de données. Un outil commun aux trois premiers temps est le cahier de travail. Pour le temps 1, les élèves disposent d'une partie « recherche » et d'une partie « rédaction », le cahier permet donc le recueil de ces premiers observables. Le cahier étant à disposition des élèves lors du temps 2, des ajouts peuvent apparaître lors de ce temps. Le cahier recueille également les produits de la recherche individuelle et collective lors du temps 3.

Lors des temps 2 et 3 des affiches par groupe sont produites. Leur fonction première est d'être un outil pour la synthèse du groupe et un support pour les débats. Il est fréquent qu'elles

ne rendent comptent que très partiellement des travaux. Pour autant elles feront aussi partie des données disponibles.

Les temps 2, 3 et 4 sont filmés. Pour le temps 4 une seule caméra au fond de la classe capte l'ensemble du temps. Pour les temps 2 et 3, deux caméras captent chacune le travail d'un groupe et les temps communs. Pour les temps 2 et 3 chaque groupe est enregistré. Une bande son des échanges est donc disponible pour chacun d'entre eux.

Il ne peut s'agir ici d'utiliser tout le matériel disponible dans toutes ces dimensions. Une triple restriction sera réalisée. Tout d'abord une restriction sur les temps analysés. La priorité sera ici donné aux temps 2 et 3. Là encore l'analyse du rôle du professeur en pâtira. Cette étude fine est repoussée à plus tard. Cette restriction s'accompagne d'une centration sur les actions des sujets sur les objets. La troisième restriction porte sur le nombre de sujets étudiés. Il sera défini en fonction des premières analyses, comme nous l'observons ci-après.

Un certain nombre de données sont disponibles en annexe. Nous avons ici exclu l'intégration des trop nombreuses pages des cahiers de travail et avons par contre intégré un grand nombre de retranscriptions des échanges dans les groupes. Pour la suite les élèves sont repérés par une étiquette $Ei, i \in [1; 20]$.

8.1.4 Des références, une méthode

Dans le contexte qui est le nôtre, les analyses ne portent pas sur la capacité de l'enseignant à faire converger vers un savoir donné les parcours cognitifs des élèves. Du point de vue de la situation, les analyses devront montrer la capacité du dispositif à faire vivre des sémioses et à faire émerger des savoirs. Dans le cadre de la TSD, ceci signifie en particulier identifier les passages entre les différents milieux (objectif, de référence, d'apprentissage) et les institutionnalisations de savoirs.

Pour analyser le jeu sur les objets nous utiliserons donc le cadre de la sémiotique et le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel. Mais, nous allons chercher tout d'abord à établir lors des temps 1 et 2, un état des lieux des objets familiers disponibles pour la recherche et le mode d'existence de ces objets pour les sujets. Nous développerons pour le temps 3, les sémioses et les raisonnements dans l'exploration d'objets nouveaux.

8.2 Confrontation à la contingence

Précisons tout d'abord que dans le cadre de l'enseignement de spécialité, les élèves avaient précédemment travaillé la divisibilité dans $\mathbb{Z}$, la division euclidienne, les congruences dans $\mathbb{Z}$, les nombres premiers et l'existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. Le PGCD de deux entiers, les théorèmes de Bézout et Gauss n'avaient pas encore été abordés. Les notions sur les suites, vues en première et terminale, devaient également être mobilisables.

8.2.1 Lancement de la situation

Le jeudi 23 janvier 2014, l'enseignante, (P), présente aux élèves pendant 15 minutes, en la présence du chercheur, le contexte de travail de deux prochaines séances et propose un devoir un temps libre. Il s'agit ici de :

— lancer la recherche du « devoir en temps libre ».
— présenter le contexte d'expérimentation, les demandes, contraintes et modifications de l'environnement ordinaire de la classe et en particulier l'utilisation du cahier de travail, la demande d'une autorisation de droit à l'image, l'acceptation de la présence dans la classe du chercheur, des caméras.

Cette courte présentation n'a pas été enregistrée mais les élèves ont été prévenus que toutes les autres le seraient. P a :

- présenté le chercheur comme un enseignant de l'université (université Lyon1), enseignant travaillant essentiellement pour la formation des enseignants,
- évoqué brièvement la thématique de la recherche en cours,
- présenté le « cahier de travail », en le justifiant par la nécessité du recueil de données et en insistant sur l'importance de noter toutes ses recherches sur son brouillon,
- évoqué les modalités de correction du devoir en temps libre qui donneront lieu à des présentations et échanges en classe.

Le chercheur s'est présenté brièvement, a rappelé qu'il pouvait répondre à des mails pour aider dans le cadre de la recherche du devoir en temps libre, puis a répondu à deux questions sur le parcours qui pouvait amener à s'engager en thèse.

8.2.2 Le devoir en temps libre

Sur un effectif de 19 élèves au moment de l'expérimentation, l'enseignante a eu 17 retours. Le tableau des résultats chiffrés (cf. annexe F.4) donne une première indication sur les réponses aux questions posées et la proximité des élèves avec les objets considérés. Cette proximité est très inégale, précisons la.

Premier regard global sur les travaux écrits des élèves

Question 2.1.1 et 2.1.2

Il s'agissait de déterminer une formule donnant la mesure en degré de l'angle du polygone régulier convexe à n côtés. 12 élèves ont éprouvé peu de difficulté sur ces questions, même si certaines rédactions sont parfois ambiguës. 5 élèves (E4, E6, E11, E13, E16) n'ont pu obtenir la totalité des points à aucune des deux questions. Ces élèves ont une note globale inférieure à 10 et ont donc été en difficulté dans l'appropriation du sujet proposé. E4 et E11 ont malgré tout produit des raisonnements sur ces questions et compte-tenu du fait que la réussite à 2.1.1 ou 2.1.2 suffit pour s'engager dans la suite du problème, la non réussite à l'une des deux questions n'est pas un handicap pour la poursuite de la réflexion. Par ailleurs, pour E4, la note proposée rend compte d'une rédaction incomplète :

> 2.1.1 : La somme des angles d'un polygone ayant n côtés est égale à $(n-2)\times 180$
> $n = 10 \rightarrow (10-2)\times 180 = 1440°$
> 2.1.2 : La somme des angles internes est égale au produit d'un angle interne par le nombre de côtés n : $180n - 360$.
> $n = 10 \rightarrow 180 \times 10 - 360 = 1440°$ même résultat.

Mais la partie brouillon fait apparaître le croquis d'un triangle, avec présence d'un codage et la relation $2x + \dfrac{360}{n} = 180$. Ceci peut laisser imaginer que la relation $180n - 360$ renvoie bien au calcul de la somme des angles attendus.

Pour E11, en partie « brouillon », à côté du dessin du décagone clairement décomposé en 8 triangles est rédigé le texte suivant :

> Chaque triangle a pour somme d'angle 180°. Et un polygone de n côté se décompose en n-2 triangles donc pour déterminer la somme des angles en degré on fait $(n-2)\times \dfrac{180°}{n} = 180° - \dfrac{360°}{n}$.

Le texte montre donc une confusion entre angle du polygone et somme des angles, mais le dessin permet de concevoir que E11 a compris la notion d'angle d'un polygone régulier.

Certains étudiants semblent n'avoir réussi aucune approche de ce calcul d'angle :

Pour E6 : le point 2.1.1 n'est pas traité. Mais le point 2.1.2 est en réalité traité sur le cas du décagone et ceci de telle manière que cet exemple est très proche de « l'exemple générique ». Ceci laisse voir en réalité une appropriation de la procédure envisagée pour ce point 2.1.2 par cet élève.

Pour E13 : Là encore la rédaction est décevante par rapport à la recherche sur la partie « brouillon ». Si 2.1.1 n'est pas traitée, pour 2.1.2, E13 a repris et codé la figure proposée et rédigé ainsi :

$1 + 2 + 3 = 180°$
$3 = \dfrac{360}{n}$
$\sum angles = [1 + 2] \times n$
$(180 - \dfrac{360}{n}) \times n =$ somme de tous les angles du polygones

Ainsi là encore on peut constater un début d'appropriation du concept d'angle du polygone.

Pour E16 : La rédaction est la suivante :

> 2.1.1 : Tous les angles des triangles sont égale à la somme de tout les angles de tout les triangles d'où la formule :
> $(n - 2) \times 180$.
> 2.1.2 : Pour retrouver le même résultat avec la figure 2, on peut faire $180n - 360$.
> Prenons avec $n = 10, (10 - 2) \times 180 = 1440, (180 \times 10) - 360 = 1440$.
> Donc la décomposition est bonne.

Pour cet élève également, une première compréhension d'angle du polygone semble émerger même si la mesure de cet angle reste incertaine.

Particulièrement pour E6, E13 et E16, il sera utile de vérifier lors du travail de reprise en classe que ce travail non abouti autour de l'angle d'un polygone régulier, n'est pas un obstacle à la dévolution de la situation des pavages. Il est à noter que tous ont pu établir une liste de la mesure en degré des angles des 23 premiers polygones réguliers, même si comme on va le voir la nature des mesures considérées reste une question difficile.

Question 2.2.1

Trois types de productions différentes :

- Une élève a proposé une liste donnant n fois la mesure de l'angle en degré du n-gone et ne répond donc pas à la question.

- 4 élèves ont été vigilants au fait qu'une écriture décimale ne permettait pas de donner une valeur exacte et 2 (E6 et E13) ont répondu en proposant des formes fractionnaires quand nécessaire. E6 donne des réponses sous forme entière ou fractionnaire, jamais décimale. Il en est de même pour E13. On peut donc supposer que c'est pour ces deux élèves plus une habitude d'écriture, qu'une réflexion sur la nature des termes de la suite, ainsi que le confirme leur absence de réponse pertinente à la question 2.3.2.

- Les autres élèves donnent pour toutes les valeurs de α_n des valeurs entières ou décimales sans autres commentaires. Pour eux la difficulté n'est pas vue.

Question 2.2.2

Pour cette question, 14 élèves ont répondu convenablement. Les erreurs relevées pour les autres élèves sont les suivantes :

Pour E1 : Les résultats sont affirmés sans démonstration

Pour E4 : Une erreur dans la rédaction pour la stricte croissance mais la phase recherche montre la bonne compréhension, une rédaction confuse pour la limite et rien pour la majoration.

Pour E11 : Rien sur la majoration, une rédaction maladroite pour le calcul de limite et une recherche de la stricte croissance par récurrence qui n'aboutit pas.

Cette question, qui donne peu d'information sur le sens porté à la notion de limite, ne montre pas pour la plupart des élèves de difficulté de traitement. Le travail en classe doit permettre aux trois élèves moins à l'aise de revenir sur ce point.

Question 2.2.3

Pas de difficulté sur cette question sauf pour 3 élèves.

E1, sans lien avec ses réponses justes à 2.2.2, mais en cohérence avec son tableau donnant les valeurs de $n \times \alpha_n$, conclut à l'impossibilité d'obtenir un angle de 179°.

E11 répond à la question sans justification, alors que la rédaction de E13 est maladroite.

Question 2.3.1

7 élèves ont 0 ou 0,5 à cette question. les autres ont obtenus la totalité des points, soit 1,5.

E1, E12 et E14 ont obtenu 0,5 : les conditions de variations de N dans la boucle « tant que » sont mal vues et la fonction de l'algorithme n'est pas identifiée.

E4 arrête l'algorithme dès que N = 90 sans explication.

E4 ne donne pas la bonne fonction.

E6 n'est pas allé au-delà de la question 2.2.3.

Pour E11 la réponse est difficilement interprétable : « Cette algorithme donne le nombre de solution P qui a pour angle en degré un nombre entier jusqu'à N = 360 ».

E13 propose un début de mise en œuvre de l'algorithme très succinct et ne donne pas de fonction.

E16 arrête l'algorithme dès que N = 180 car « 180 est entier ». E16 ne donne pas la bonne fonction.

Parmi tous ceux qui ont mis en œuvre l'algorithme convenablement, un seul n'a pas donné la bonne fonction, apparemment en oubliant de répondre à la question.

Question 2.3.2

Cette question sur 4 points n'a été réussie dans sa globalité par aucun élève dans la mesure où un seul d'entre eux a envisagé des conditions pour obtenir des mesures décimales, au-delà de « n n'est pas un diviseur de 360 », condition très majoritaire dans les copies. Ainsi seul E5 a proposé : « Les polygones réguliers ayant un angle dont la mesure en degré est décimale, a un n qui n'est pas un diviseur de 360, soit un n ayant une décomposition en facteurs premiers avec des facteurs autres que 2, 3 ou 5 ou une puissance de 2, 3 ou 5 supérieur à celles de la décomposition de 360. »

Concernant la première partie de la question, c'est-à-dire celle permettant de retrouver les polygones dont la mesure de l'angle en degré est entière, E1, E4, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E16 et E19 ont obtenu 0 ou 0,5 sur 2 points possibles à la question. Soit, ils n'ont pas répondu à la question, soit ils se sont contentés de répondre en appui sur les 23 valeurs de leur tableau, soit ils ont indiqué que n devait diviser 360 sans donner aucun complément.

Un élève a obtenu 1 point, sa réponse ayant été jugée par le correcteur un peu plus satisfaisante que les précédentes.

4 élèves ont répondu de façon à obtenir les 2 points.

Question 3.1.1 et 3.1.2

À part E6 qui s'est arrêté avant cette question, tous les élèves ont produit les nombres de Fermat attendus. Par contre les justifications sur la primalité sont très inégales. E1 n'a donné aucune justification, quelques-uns font référence à des tables des nombres premiers dont celle de leur manuel, certains annoncent s'appuyer sur l'algorithme proposé dans le devoir mais sans dire comment ils le mettent en œuvre. Aucun ne met en place un algorithme vu dans les années d'études antérieures.

Question 3.2

Cette question est traitée par 8 élèves. Nous y reviendrons dans la suite du texte.

Organisation et déroulement de la séance de retour sur le devoir en temps libre

Le retour sur le devoir en temps libre a lieu le jeudi 20 mars. Initialement prévu pour durer environ 1 heure et 15 minutes, ce retour occupera finalement presque l'intégralité du créneau de 16h05 à 17h55.

L'organisation initiale prévoyait :

5 minutes de regard individuel sur son travail, identification des points forts et des faiblesses,

25 minutes de réflexion en groupe de 3 ou 4 sur une question ayant présenté une même difficulté,

10 minutes : rédaction d'une affiche,

30 minutes de mise en commun et débat (6 minutes par affiche),

quelques minutes de conclusion pour stabiliser les bonnes procédures.

Après une organisation de la salle de classe adaptée a un travail en groupe de 3 ou 4 et une installation du matériel de prise de vue et de sons, l'enseignante a lancé son diaporama contenant 3 diapositives, rappelant le titre du sujet sur la diapositive numéro 1, l'organisation de la séance telle qu'elle est donnée ci-dessus sur la diapositive numéro 2 et l'organisation des groupes, construite suite à l'analyse des productions, dans une troisième diapositive.

Les élèves, entrent dans la salle à l'invite de l'enseignante à 16h10 et s'installent alors par groupe en observant les listes suivantes :

Groupe 1 : E6, E13, E16, les élèvent travaillent sur les questions 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1 traitant de l'angle d'un polygone suivant les 2 méthodes et du tableau des 23 premières valeurs de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Groupe 2 : E1, E4, E11, E17. Les élèvent travaillent sur les questions 2.2.2 et 2.2.3 traitant de l'étude de la suite $(\alpha_n)_n$. E17 n'a pas rendu son travail écrit.

Groupe 3 : E3, E7, E12, E14. Les élèvent travaillent sur la question 2.3.1 traitant de l'algorithme. E3 n'a pas rendu son travail. E7 est absent ce jour.

Groupe 4 : E2, E5, E8, E9. Les élèvent travaillent sur la question 2.3.2 traitant de la nature des mesures d'angle en degré.

Groupe 5 : E10, E15, E19, E20. Les élèvent travaillent sur les questions 3.1.1, 3.1.2 et 3.2 traitant des nombres de Fermat et des polygones constructibles à la règle et au compas.

L'enseignante explique les modes de regroupement et indique en particulier aux deux élèves n'ayant pas rendu le devoir en temps libre quel groupe ils doivent intégrer. Elle distribue ensuite les devoirs en temps libre corrigés en précisant que le travail réalisé durant cette « correction » sera rédigé à la suite de la rédaction du devoir en temps libre, sur le cahier de travail. Les élèves prennent ensuite connaissance des annotations sur leur travail pendant les 5 minutes prévues puis, suivant la consigne orale du professeur, débutent une réflexion de groupe sur des points ciblés du devoir en temps libre. Ce travail débute à 16h20. Au bout de 30 minutes environ de

travail de groupe, l'enseignante débute la distribution des affiches plus pour tenter de respecter le minutage prévu, que parce que les groupes sont prêts à rédiger. Ainsi un échange au bout de 29 minutes montre l'état de l'avancement pour le groupe 3 :

P : c'est bon alors cet algorithme ?
E3 : Ouais, l'algorithme c'est bon, mais on n'a pas la fonction.
P : Vous comprenez pas à quoi il sert ?
E3 : j'arrive pas à comprendre le rapport entre N et P.
P qui relance la recherche : est-ce que tu as essayé de tester l'algorithme sur plusieurs nombre de départ ?

Il est à noter que ce groupe a tout d'abord rencontré une réelle difficulté pour mettre en œuvre l'algorithme. Ensuite, bien qu'ayant identifié, sans aisance toutefois, que 360 permet l'affichage de 2, 2, 2, 3, 3, 5, ils ne sont pas en mesure de donner une interprétation à cette sortie. On peut remarquer que le découpage de la correction avec le traitement d'une question particulière du devoir ne facilitent pas l'obtention du sens. Les élèves sont en effet amenés à chercher un sens à cet algorithme indépendamment de l'environnement qui est lui aussi porteur du sens.

Le temps de travail de groupe et de production de l'affiche durera donc finalement près de 1h, les présentations les 30 minutes restantes. Nous revenons maintenant plus précisément sur le travail des groupes

Analyses des échanges lors de la séance de retour sur le devoir en temps libre

Nous centrons les analyses sur les productions, les échanges des groupes 1, 4 et 5. Les retours sur la nature de la suite $(\alpha_n)_n$ et la fonction de l'algorithme ne sont présentés que sommairement, pour les éléments en lien avec les pavages.

1. Groupe 1 (E6, E13 et E16) : Détermination de l'angle d'un polygone suivant les 2 méthodes et tableau des 23 premières valeurs de α_n. Questions 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1.

   Comme on a pu le décrire précédemment E6, E13 et E16 ont abordé séparément l'étude de l'angle d'un n-gone et ont une première perception de l'objet. Si la tâche initiale était la recherche et l'obtention d'une formule donnant la mesure en degré de l'angle d'un n-gone, celle qui leur est proposée maintenant est différente car le groupe possède une formule que les élèves savent correcte. En terme de sémiose, le signe à construire est maintenant celui qui associe l'angle du n-gone à la formule.
   Après un travail en commun le groupe aboutira à une double affiche, (Figure : 8.1), qui dans la forme fait apparaître une certaine maîtrise du groupe.
   Cette maîtrise apparente ne doit pas masquer les différences d'évolution entre les membres du groupe. E13 porte une grande part de la réflexion et des propositions de rédaction. E6 adhère et semble comprendre les propositions. E16 est moins engagée dans les échanges sur le sens et doute de sa compréhension et de sa capacité à reformuler lors de la restitution au grand groupe.
   La compréhension du lien entre n-gone et triangles se fait jour après des vérifications de la formule sur des petits cas (construire des exemples et les questionner) et le constat que cela ne suffit pas :

   E13 : Alors par contre on peut essayer de découper les autres figures avec des triangles.
   P : Ha ben ça ça peut être une bonne idée puisque tu connais des choses sur les triangles. D'ailleurs si tu regardes tes figures, tu peux voir apparaître des triangles.

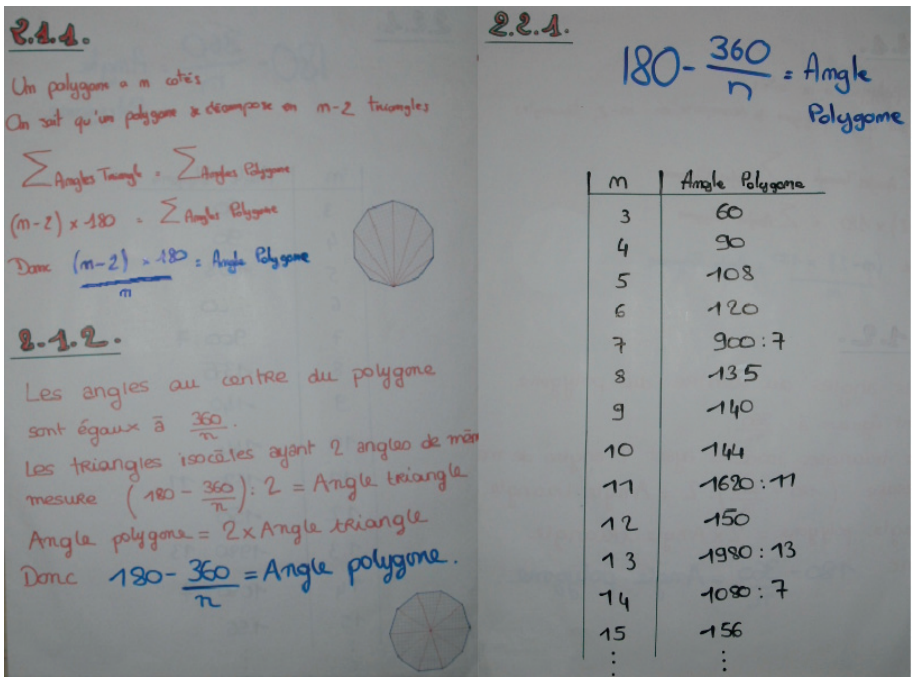


Figure 8.1 – Affiche Groupe 1

E13 :Attends, si on fait ç.. Si on découpe en deux, on a deux triangles.
E6 : Putain, ba ouais puisque...
(rires)
E6 : On est vraiment des boulets.
E16 : Si on découpe en deux ça fait quoi ?
E6 : Ben en fait comme là y'a des triangles, et qu'on sait que la somme 'fin la euh les les... les mesures c'est 180 là, pour un triangle. Ben tu comptes le nombre de triangles et t'ajoutes 180 à chaque fois. [...]

Le groupe est ainsi, lors de cet événement, en train de produire une loi générale, un légisigne indiciel. Et si le test suivant sur l'hexagone sera désormais l'expression de la loi générale sur une réalisation singulière, il prouve toutefois que la dimension générale est encore en cours de construction, que le groupe n'est qu'au début de la validation de la règle. Désormais, l'évolution du signe comme légisigne symbolique fera que le signe produit aura désormais une influence sur l'objet angle du polygone-formule. Et le groupe est prêt à passer de l'expression de faits à l'établissement de la règle, de formulation d'expressions à leur validation.

La mise en évidence de découpages à l'aide de triangles sur des cas particuliers aura permis la compréhension du cas général. Les raisonnements butent toutefois sur la détermination du nombre de triangles.

P : Bon, alors, ton idée de décomposer tes figures en triangles, est-ce que ça avance ?
E13 : Si, ba ; si si ba, du coup en fait on y avait pas pensé, mais en fait, à chaque fois on peut décomposer notre figure en triangles. Donc par exemple pour le cas d'un ... comment dire, d'un hexagone, ...
P : Hum Hum
E13 : On reprend notre n-2, donc là ce serait 6, on fait n-2 à chaque fois, et en fait heu... On fait moins deux **parce que les triangles s'aident mutuellement**

pour construire en fait. Ils utilisent ...

P : Ça va être facile à marquer ça sur l'affiche, hein !

[...]

E6 : Non c'est que, en fait, non non, c'est parce que y'a qu'un côté heu... du, de la figure qui forme le triangle, et euh, y'en a deux, juste deux, ou il doit s'aider des côtés de la figure pour former un triangle, et du coup il faut enlever deux cotés.

Il est remarquable que E13 a une vision dynamique de la figure et personnifie les triangles qui *s'aident mutuellement pour construire*. On retrouve ici un point de vue qui semble faciliter l'appui sur les objets familiers et la compréhension de leurs interactions. Pour autant l'explicitation reste ambiguë ce qui fera dire à E6 : « Ben je crois que j'ai compris ? mais je suis pas sure ... ».

Plus généralement pour E13, on note un fort appui sur les objets familiers et une dimension expérimentale explicite dans le développement de ce nouvel objet « angle d'un n-gone régulier ». L'aspect sémantique des raisonnements est ici premier et permettra sans difficulté l'élaboration de la règle.

Lors de la présentation à l'ensemble de la classe, même si c'est E6 qui a rédigé, c'est E13 qui prendra la parole. Les justifications pour les questions 2.1.1 et 2.1.2 seront présentées avec clarté. À la demande de E15 : « vous avez pas fait le lien entre les deux formules », E13 proposera tout d'abord : « on peut simplement remplacer le n par une valeur si tu veux » avant, sous la réclamation de E15 et de P, de produire une preuve syntaxique mais avec une maladresse dans la rédaction, hésitant entre un raisonnement par différence entre les deux formes et un simple développement de la forme $\frac{(n-2)180}{n}$.

Lors de cette même présentation, la présentation de la liste avec les valeurs exactes des angles ne provoquera aucune réaction si ce n'est celle de P qui cherche à attirer l'attention sur la nature des nombres en jeu.

P : pourquoi pour 7 vous avez mis 900 divisé par 7 ?

E13 : parce que c'est une valeur exacte, parce que sinon ça fait toujours des virgules un peu de partout et c'est pas, c'est pas très pratique

Cette fois la réponse est d'ordre pragmatique et sans référence à la problématique de la nature de la valeurs des angles, qui n'a pas encore été abordée par ce groupe.

On pourrait ici estimer que l'ensemble de la classe possède désormais une familiarité avec les questions abordées en 2.1.1 et 2.1.2, non seulement du fait de cette présentation mais aussi par le fait qu'en dehors de ce groupe les élèves ont sur le papier réussi ces questions. Ceci reste malgré tout soumis à l'incertitude sur la façon dont ont été réalisés les devoirs à la maison, et à la capacité d'interaction lors de ces temps de présentation.

2. Groupe 2 (E1, E4, E11 et E17) : Étude de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, questions 2.2.2, 2.2.3.

Ce groupe devait reprendre les questions 2.2.2 et 2.2.3. La première demandait d'étudier la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci a été traité en utilisant une fonction de la variable réelle. Pour la question 2.2.3 « Existe-t-il un polygone régulier dont la mesure de l'angle est 179° ? » le groupe rédige une réponse sous la forme de la résolution de l'équation $180 - \frac{360}{n} = 179$. Le fait qu'il existe un polygone dont la mesure de l'angle en degré est 179 est accepté tel quel, et par les membres du groupe lors des échanges et par tous lors de la présentation. Aucun élève n'évoque les informations possibles portées par cet exemple. Ceci ne semble

pas questionner pour l'instant les élèves qui ont mal perçu la nature des termes de la suite $(\alpha_n)_n$.

3. Groupe 3 (E3, E12 et E14) : Présentation de la mise en œuvre de l'algorithme, questions 2.3.1.

   Nous ne revenons pas longuement non plus sur la production du groupe 3, si ce n'est pour relever que pour ce groupe, la familiarité avec les entiers naturels ne s'étend pas jusqu'à la décomposition primaire. En effet il faut près de 35 minutes pour mettre en œuvre approximativement l'algorithme proposé et fournir la liste erronée suivante : 2,2,2,3,3,5,5. Au-delà de la difficulté d'appréhension de l'algorithme, il est à noter, qu'une fois écrite, la liste d'entiers n'évoque rien pour ces élèves. E12 propose tout d'abord de faire le lien avec les nombres premiers ce qui amène finalement E3 à proposer : « 360 ce serait pas $2^3 + 3^2 + 5^2$ ... non ce serait des fois ! ».

   Il est à noter que le découpage de la correction et une centration sur une question particulière du devoir ne permettent pas aux élèves de s'appuyer sur le contexte. Les élèves sont en effet amenés à chercher un sens à cet algorithme indépendamment de l'environnement et ne peuvent user d'une dimension pragmatique qui ici aurait pu leur venir en aide.

4. Groupe 4 (E2, E5, E8 et E9) : Nature des termes de la suite, questions 2.3.2.

   Il s'agit ici de l'étude de la nature des termes de la suite des mesures en degré des angles des n-gones réguliers. Cette question est particulièrement importante pour la suite et doit nous renseigner sur la qualité de la relation à ces objets cruciaux pour la recherche des pavages archimédiens. Comme ceci a déjà été indiqué ces deux questions ont été traitées avec difficulté par les élèves. Nous reprenons tout d'abord les productions de chaque membre du groupe, les échanges et la production du groupe 4 pendant le temps de recherche avant de revenir sur la présentation au groupe classe.

   Concernant E2, E5, E8 et E9 les productions écrites pour le devoir en temps libre sont diverses.

   - E2 a répondu à la première partie de la question en trouvant une condition nécessaire et suffisante pour que α_n soit entier, puis en produisant la liste des diviseurs de 360 supérieurs stricts à 2 sans justification. E2 poursuit et conclut en rédigeant : « À l'inverse, l'angle du polygone, ou (α_n), est décimal ssi n n'appartient pas à la précédente liste. ».

   - E5 pour la première partie oublie d'exclure 1 et 2 de la liste des diviseurs de 360. Pour la deuxième partie les connaissances sur l'appartenance des entiers à l'ensemble des décimaux et sur l'existence de non-décimaux sont là encore incertaines et amènent à écrire « les polygones réguliers ayant un angle dont la mesure en degré est décimale, ont un n qui n'est pas un diviseur de 360 ». Mais, et bien que ceci ne permette pas d'aller au bout de la caractérisation, E5 évoque les « n ayant une décomposition en facteurs premiers avec des facteurs autres que 2, 3 ou 5 ou une puissance de 2, 3 ou 5 supérieure à celles de la décomposition de 360. » C'est le seul qui aura cette « intuition ».

   - E8 se contente pour répondre à ces questions de faire des constatations approximatives sur le tableau des valeurs de α_n précédemment obtenu.

   - E9 répond lapidairement aux deux questions, sans la rigueur nécessaire pour la première partie et là encore, pour la deuxième partie, en confondant apparemment de façon doublement erronée l'ensemble des non entiers et l'ensemble des décimaux.

   Pendant le travail en groupe, les échanges se développent en deux temps, le premier étant nettement plus important que le deuxième. Il ne s'agit pourtant que de retrouver l'ensemble des diviseurs de 360, ce que deux membres du groupe avaient déjà fait. Mais

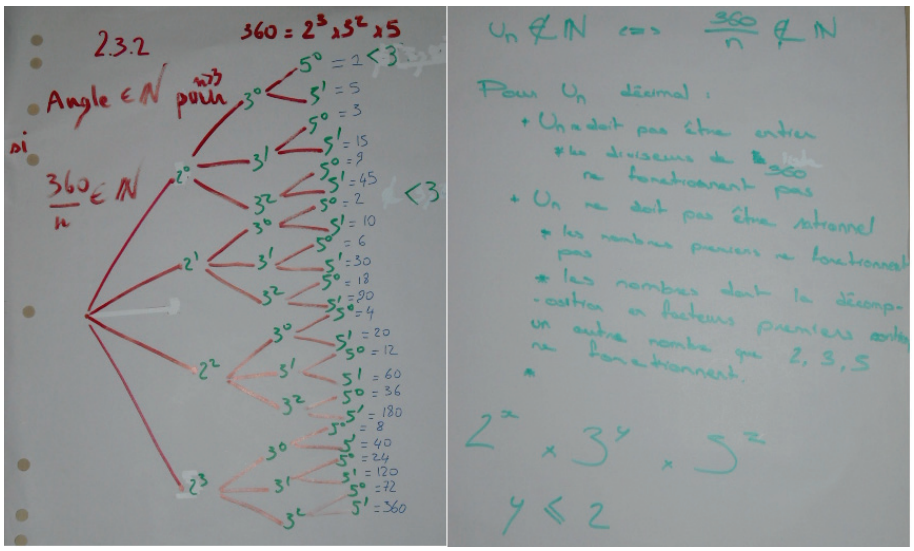


FIGURE 8.2 – Affiche Groupe 4

une demande de justification du correcteur amène le groupe à se référer à des outils peu disponibles dans le milieu et non à la procédure de E5 pourtant explicite :

1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18
360	180	120	90	72	60	45	40	36	30	24	20

E2 : Bon, donc 360 sur N doit être entier.
E9 : Ouais voilà. Donc N divise 360 ...
E2 : Donc si N est un diviseur de ...
E9 : Et après il suffit de préciser la liste ?
E2 : Ouais c'est ça j'pense.
E9 : Sauf le 1 et l'deux.
E2 : Sauf qu'il faut dire euh, il faut que ... il faut dire euh les diviseurs de N sont. Parce que moi j'ai juste mis la liste il m'a mis 2^-, il m'a pas mis 2 tout court tu vois.
E9 : Et euh, 'faut pas utiliser le cours du début d'l'année là ?

Ce besoin ressenti de se référer au cours, renvoie les membres du groupe à la détermination des diviseurs à l'aide d'un arbre, alors qu'ils ne sont pas familiers de cette technique. Le temps nécessaire pour produire les éléments utiles à la rédaction de la première partie de l'affiche (Figure : 8.2) sera ainsi très long (35 minutes en groupe entier puis 15 minutes à deux) et ne laissera que très peu de temps pour l'étude de la deuxième partie de la question. P tentera une première relance trente-cinq minutes après le début de séance pour faire avancer E5 et E9 sur la caractérisation des α_n décimaux :

P : Bien qu'est-ce que t'avais mis dans ta bonne réflexion à développer ? Peut être que tu pourrais la soumettre à Romain pour essayer de voir ce qu'il a fait.

Mais le groupe continuera jusqu'à l'heure entière à travailler à la présentation d'un arbre donnant tous les diviseurs de 360. En dehors de la relative difficulté à construire cet arbre, on identifie aussi une difficulté cette fois beaucoup plus profonde dans l'approche de la nature des α_n. C'est ce que l'on peut constater déjà dans les premières réflexions suite à une deuxième relance :

P : Il vous a euh, 'fin ce que Vincent a tenté de vous expliquer.

E : Qu'est-ce que t'as dit alors ? Faut que 360 sur n soit décimal ?

E5 : Ouais. Donc c'est, c'est soit les trucs ils sont pas diviseurs de 360 et que si tous les côtés [?] parce qu'après la décomposition, 'fin si dans la décomposition y'a un autre chiffre que 2, 3 ou 5, un autre nombre nombre premier, ou que les puissances de 2, 3 ou 5 ce soit supérieur ...

E : Mais ça suffit pas de dire que c'est pas un diviseur ?

E ? : Si !

E5 : Sachant qu'j'ai mis ça, plus le truc des décompositions et que j'ai eu 0,5, je n'pense pas qu'ça suffise, non.

Alors que les membres du groupe 4 sont relativement à l'aise avec les notions de multiple et de diviseur, de décomposition primaire, leur manque de familiarité avec les notions de décimal, rationnel, irrationnel apparaît singulièrement dans les échanges. Tout d'abord ci-dessus où l'on constate que pour E5 un entier n'est pas décimal et dans les échanges qui reprennent sur ce thème au moment de la pause. Car en effet, les élèves, n'ayant pas fini, décident de poursuivre avant le retour des camarades, l'étude du cas α_n décimal. Et alors que P tente d'évoquer une caractérisation des décimaux, le constat suivant est fait :

P : Donc si vous voulez une puissance de 10, ben qu'est-ce que vous pouvez avoir au dénominateur en fait ? C'est ça son idée. Vous avez 360 sur n, qu'est-ce qui marche à mettre au dénominateur pour qu'on ait un nombre décimal.

E : Ben tous les nombres qui sont pas là. (*en référence à la liste des diviseurs de 360*)

P : Ben tous les nombres qui sont pas là, font que ce n'est pas entier, mais on peut être pas entier et pas décimal.

[...]

E : Ah ouais...

P : Ah mais c'est ça en fait, vous vous disiez ... tout ce qui n'est pas entier est décimal ?

E : Non ...

P : Non ? Non mais pas du tout ! [*ton ironique*]

E : Ouais donc euh du coup faut faire quoi d'autre ?

Pour ce groupe la poursuite de la reprise de contact avec ces notions se fait lors d'échanges avec l'enseignant pendant la pause. P propose des nombres-tests visant à faire émerger une règle mais les ambitions se réduisent petit à petit jusqu'à proposer $\frac{1}{6}$. La suite des échanges sur cette question est reportée à la présentation du groupe.

Ces premiers éléments montrent une relation très sommaire à l'objet « ensemble des nombres décimaux ». La seule théorie qui existe dans un premier temps pour cet objet est « les nombres décimaux sont les nombres qui ne sont pas entiers ». Ceci implique ici d'une part que les entiers ne sont pas décimaux et d'autre part, que la non intégrité est la caractéristique suffisante pour répondre à la question posée. Bien entendu cette théorie voit le jour sur la base des connaissances que ces élèves ont pu élaborer tout au long de leur scolarité et en particulier en seconde pour ce qui concerne les ensembles de nombre. [4] À part pour E5, on constate également que cette théorie n'est mise en échec

4. On rappelle ici les indications des programmes de seconde (BO n°30 du 23 juillet 2009) : les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in, \subset, \cup, \cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

que par les rétroactions du milieu fournies par la copie corrigée et pas, par exemple, par la demande de la question 2.2.1 « Dans un tableau, donner la mesure en degré des angles des polygones réguliers à n côtés, pour n dans [3 ;25] ». Mais si, dans le tableau de la question 2.2.1, E5 n'a renvoyé que des entiers et E2 que des décimaux à deux chiffres après la virgule pour tous les non-entiers, E8 et E9 renvoient eux la valeur exacte pour les décimaux non entiers et des décimaux à deux chiffres après la virgule pour tous les non-décimaux. Ils ont ainsi sans doute identifié une différence mais celle-ci ne permet pas de faire le lien avec la question 2.3.2. Seul donc E5 a du constater la non efficacité de cette théorie pour caractériser les valeurs de α_n décimales et complète la théorie en y ajoutant une caractérisation qui permet d'identifier l'apparition des non décimaux. C'est cette théorie qui est d'abord partagée avec E9 avant d'être présentée à la classe.

Lors de cette présentation, c'est tout d'abord E2 puis E8 qui prennent la parole pour présenter l'arbre des diviseurs. E9 et E5 présenteront leurs dernières réflexions. Complétée par P, cette synthèse durera 8 minutes.

La proposition « α_n décimal implique n n'est pas un diviseur de 360 » est à nouveau formulée. L'erreur n'est identifiée par aucun élève. Elle sera reprise en fin de présentation par P.

> E9 énonce également : et en même temps, il faut pas que $\frac{360}{n}$ soit un nombre rationnel, c'est un nombre avec des virgules à l'inf ..., enfin avec des chiffres après la virgule à l'infini et donc pour qui soit pas rationnel il faut pas que n ce soit un nombre premier et il faut pas que n dans sa décomposition fr, euh dans sa décomposition fonctionnelle il y ait d'autres nombres que 2, 3 ou 5.
>
> E5 prend le relais : Du coup après on a vu aussi par rapport, par exemple, $\frac{1}{3}$ il était, euh, pas rationnel.

Il est repris par P qui précise que $\frac{1}{3}$ est rationnel pas décimal.

> E5 : Du coup il fallait que notre nombre $\frac{360}{n}$ il fallait que quand on réduise la fraction faut pas que ce qui est en bas, le dénominateur, ce soit un multiple de 3. Donc ce qui fait que la décomposition en facteur premier de n, faut pas qu'y ait une puissance de 3 supérieur à 2, comme dans la décomposition de 360. Après je peux pas trop expliquer.

P demande l'écriture au tableau de $2^x.3^y.5^z$ et de la formule $\alpha_n = 180 - \frac{360}{n}$. Elle tente alors de faire préciser les conditions sur x, y et z. P cherche ici à modifier le système organisateur des élèves par un passage dans une dimension syntaxique formalisatrice.

> E9 : Si y il est plus grand que deux après quand on va tout simplifier on va se retrouver avec 3 exposant y - 2 ... 2 - y, on va retrouver avec 1 sur un multiple de 3 donc ça fait, on va avoir des tiers divisés par quelque chose donc c'est un rationnel, un euh ... rires.
>
> P : OK, pourquoi je peux pas avoir de 7 au dénominateur ?
>
> E9 : Parce qu'on va se retrouver avec 1/7.
>
> P : Pourquoi c'est pas gênant d'avoir des 2 et des 5 au dénominateur alors que ce serait gênant d'avoir 3, 7 des choses comme ça ?
>
> E9 : 1/2 et 1/5 c'est des décimaux ...
>
> P : Ne me regarde pas comme ça, est-ce que c'est vrai ce que tu as dit, 1/2 et 1/5 c'est des nombres décimaux ?
>
> E9 : Oui

P : Est-ce qu'un 1/2 et 1/5 sont des nombres décimaux ça justifie que les 2 ou les 5 ne nous gênent pas au dénominateur ?

E2 : On peut avoir n'importe quelle puissance en bas comme un demi c'est un nombre décimal, un nombre décimal fois la même chose c'est toujours un décimal.

P : Ben oui, donc c'est bon. Les autres, est-ce que vous avez compris ?

E : Oui.

P : C'est un oui timide.

P propose ensuite une nouvelle synthèse.

Rappelons que dans cette partie de l'expérimentation, le travail personnel en amont du retour en classe devait assurer une culture minimum commune sur les objets en jeu. À partir de la question 2.1.1 de ce devoir en temps libre, il s'avère que le dispositif proposé ne permet pas une confrontation des sémioses de tous mais seulement la présentation de celle d'un groupe et un court débat. Et ainsi il devient difficile d'identifier ce qui du savoir institutionnalisé devient réellement un savoir de chacun. Et ici il est difficile d'identifier, à la suite de la présentation, qui de tous les élèves est dans la mesure pour un n donné de déterminer la nature du α_n associé. Il est évident que certains élèves du groupe 5 auront stabilisé des connaissances sur ces objets, mais il n'est pas exclu que d'autres, malgré les échanges, n'aient pas atteint ce même état de maîtrise. **Et on peut penser au contraire que la relation binaire entier/non entier aux mesures des angles des polygones persistent chez un certain nombre d'élèves.** Or, si cette relation persiste, elle interférera nécessairement dans la manipulation des objets et les allers retours sur ces objets en seront marqués. Les nouveaux objets qui en émergeront aussi. C'est un point à observer dans le temps 3.

5. Groupe 5 (E10, E15, E19 et E20) : Nombre de Fermat et polygones constructibles à la règle et au compas. Questions 3.1.1, 3.1.2 et 3.2

Les questions 3.1.1 et 3.1.2 traitent de la primalité des nombres de Fermat. Ce sont des questions qui ont pu être traitées sans qu'un engagement dans l'exploration des nombres de Fermat soit nécessaire. Elles sont donc avant tout techniques. Et l'avancée du groupe est rapide. Il traite tout d'abord les questions des savoirs et techniques de référence sans hésitation pour la recherche des nombres premiers ; appui sur le rabat du livre, sur l'algorithme du devoir, sur des propriétés vues en classe limitant la taille du diviseur ... Le traitement de cette question ne pose pas de difficulté au groupe (Les ressources étaient déjà présentes dans le groupe, en particulier grâce à E15 et E20). C'est E10 et E19 qui se chargeront de la présentation en évoquant deux procédures différentes (cf. Figure 8.3).

Mais pour l'étude de la question 3.2 (détermination des n-gones réguliers constructibles à la règle et au compas pour n inférieur ou égale à 25 et en appui sur le théorème de Gauss-Wantzel), E10 et E19 se déclarent assez rapidement d'un faible secours. Les échanges montrent essentiellement des prises de parole de E15 et E20 et donc un fonctionnement peu efficace du groupe du point de vue de la mutualisation.

La question 3.2 est aussi de l'ordre de l'application d'une règle, qui est ici donnée, mais qui n'est pas familière. L'appropriation de la règle passe ici pour certains par une reformulation et une réécriture. Dans l'extrait ci-dessous, alors que E20 évoque sa méthode de détermination des polygones réguliers répondant à la règle par une étude de chaque cas, E15 et E20 se mettent d'accord sur la discrimination à utiliser, ce qui amènera à réécrire la règle, ainsi qu'elle sera proposée sur l'affiche :

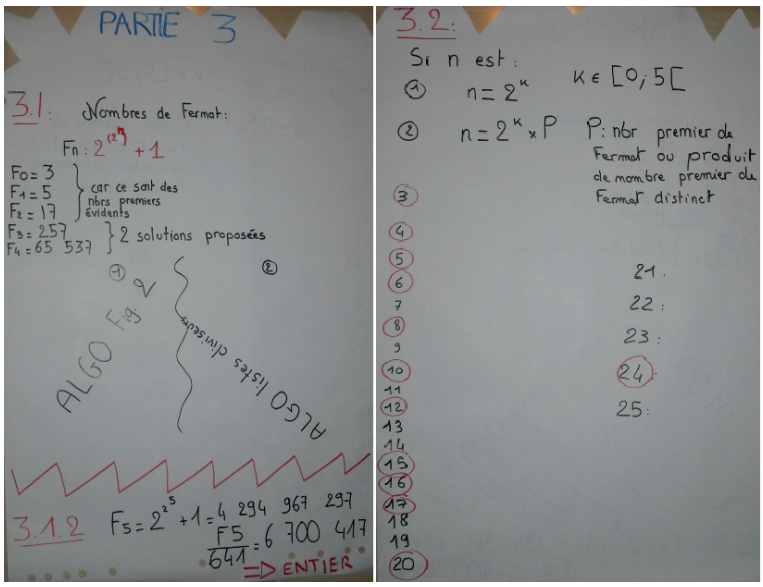


FIGURE 8.3 – Affiches groupe 5 - Devoir en temps libre

E15 : Chais pas. Non mais les points j'm'en fous, 'fin ... c'est pas une question de points, c'est une question de pourquoi il m'a pas noté F5.

[...]

E15 : Ah mais parce que t'as fait la justification nombre par nombre !

E20 : Oui

E15 : D'accord !

E20 : Ouais j'ai fait...

E15 : Moi j'ai procédé à l'envers en fait.

[...]

E20 : Et j'ai ... Attends j't'explique après comment j'ai fait. Vas-y vas-y, fais toi.

E15 : Au lieu d'prendre tous les nombres, de euh de 3 à 25 et de tester, j'ai, j'me, j'me suis d'mandé toutes les possibilités possibles pour trouver.

E20 : Ouais moi aussi, j'ai fait la même chose hein.

E15 : Ah.

E20 : 'fin j'ai dit, j'les ai décomposés, j'ai mis, j'ai mis 'fin ... j'ai mis deux cas. Quand ils étaient 2 exposant a fois F. Et pis le cas où c'est deux exposant a puisqu'on peut dire qu'c'était aucun aussi. On pouvait ne ne pas multiplier de euh de nombre de Fermat si on voulait.

E15 et E20 montrent ainsi une capacité à mettre en œuvre une étude exhaustive de nombres caractérisés par une règle :

E15 : Moi j'ai, j'suis parti dans les puissances de 2. Donc j'ai mis le les le p'tit nombre, enfin le les p'tites puissances de deux, jusqu'à deux exposant quatre.

E20 : Hum hum

E15 : Parce que deux exposant cinq on est au-dessus de 25.

E20 : Hum.

E15 : Et après j'ai raj euh j'ai mis le plus grand nombre possible de nombres de Fermat, donc j'ai multiplié par F0 et F1, par que F0, par que F1, par F2. Et en fait en évoluant comme ça, du coup je les ai bien trouvés.

Dans ce groupe E15 et E20 font preuve d'une aisance dans la manipulation des objets concernés. Les interventions de E10 et E19 sont trop peu nombreuses sur les angles et lors du travail sur les polygones constructibles à la règle et au compas pour qu'on puisse estimer leur familiarité avec les objets qui nous intéressent pour la suite.

Conclusions sur le devoir en temps libre

La mise en œuvre de ce temps s'est déroulée conformément à ce qui était prévu en dehors du non retour du devoir pour deux élèves. Pour les élèves ayant rendu le devoir, les productions sont inégales, mais conforme d'après l'enseignant aux « possibilités de chacun ». Le fait que E6 en particulier n'ait pas abordé certaines questions ne semble pas lié aux objets étudiés mais à une difficulté chronique plus globale. En dehors de E6, pour l'ensemble devoir et travail en séance, l'investissement est réel. En séance, chaque élève s'est engagé dans une tâche. Seul E19 a montré des signes de difficulté de concentration et une facilité à s'écarter du fil des échanges. La totalité des points a fait l'objet d'une synthèse précise et claire par les élèves à l'exception notable de la question sur le caractère non décimal de certaines valeurs de α_n.

— Que nous assure la partie rédaction individuelle ?
  • une première réflexion sur les notions abordées par chacun
  • une familiarisation de tous ceux qui ont réalisé le devoir avec la notion d'angle d'un polygone régulier, sauf bien entendu pour ceux qui n'ont pas rendu le devoir (E3 et E17).
  • une entrée dans l'étude des polygones réguliers

— Que nous assure le temps de travail en groupe ?
  • Pour tous les groupes un engagement dans la tâche attendue, des échanges permettant de revenir sur les premières productions et de les dépasser.
  • Une compréhension des objets en jeu dans le travail du groupe par les membres du groupe, sauf peut-être pour E16 dans le groupe 1 qui suit les échanges mais affirme une éventuelle difficulté pour une reformulation en grand groupe, et pour E19 dans le groupe 5 qui s'égare facilement.
  • Pour les groupes 1, 2, 3 et 5, l'élaboration d'un ostensif mathématique et d'un discours sur cet ostensif formulable et diffusable.
  • La difficulté pour le groupe 4 dans la détermination de la nature des α_n. Le travail du groupe ne montre pas de production identifiable de savoirs en dehors de la caractérisation des n tels que α_n soit entier.

— Que nous assure la partie présentation et validation ?
  Du point de vue des échanges : les présentations produisent peu d'échanges. Il est à noter celui qui, lors de la présentation des travaux du groupe 1, permit de montrer l'équivalence par une méthode syntaxique des deux formules donnant l'angle d'un n-gone régulier. Pour les groupes 1, 4 et 5 la présentation permet une institutionnalisation quasi-immédiate. Pour la question de la nature des α_n la présentation par les membres du groupe 4 est incertaine dès la considération du cas non décimal. Le discours tenu est peu communicable. Il fait rapidement suite à un échange avec P, échange qui ne permet pas à cet instant de s'assurer de l'appropriation par les autres élèves des résultats avancés.

Globalement, du point de vue des objets en jeu, au vu des résultats des travaux écrits et du travail des groupes, nous pouvons envisager que l'angle d'un n-gone, en tant qu'objet géométrique, soit devenu un objet relativement familier pour tous les élèves. Ils savent en

particulier que tous les angles d'un n-gone régulier sont égaux, que la mesure commune en degré dépend du nombre de côtés. Qu'une formule simple permet d'obtenir la mesure en degré à partir du nombre de côtés, par exemple $180 - \frac{360}{n}$. Pour tous il apparaît également que la suite des $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 180. Toutefois 180 est ici plus vu comme la limite « physique » que ne peut dépasser l'écartement de deux côtés d'un polygone convexe. La compréhension de la nature profonde de 180 comme limite de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est moins certaine. Il est aussi apparu clairement qu'il existe des α_n entiers, des α_n décimaux non entiers, des α_n non décimaux. Toutefois, même à l'issue du travail du groupe 4, nous n'avons aucune assurance du caractère mobilisable des propriétés énoncées.

Nous dressons un tableau (cf. annexe F.7) récapitulant les informations recueillies pour les élèves ayant travaillé directement sur l'angle du n-gone régulier, et pour les élèves ayant montré la capacité à une étude exhaustive (Groupe 5). Nous nous référerons à ce tableau lors des actions en séance de recherche.

8.2.3 Séance de recherche en classe

Organisation des groupes

Le temps 3 se déroule un peu moins d'un mois après le temps 2. L'organisation des groupes de recherche est anticipée. Les 18 élèves présents seront répartis en 5 groupes. Alors que pour le retour du travail en temps libre, les groupes avaient été constitués en fonction des productions des élèves, des objets de difficultés communes, l'enseignante a estimé que la production de certains élèves n'étaient pas représentative de leur niveau réel. Elle a constaté lors du travail en groupes que certains élèves ne sont pas arrivés à suivre les débats (alors que leur production aurait pu le laisser penser), E16 et E10 par exemple. L'enseignante a donc estimé préférable pour la suite une réorganisation des groupes pour éviter de mettre en difficulté des élèves moins performants et pour permettre aux élèves qui ont l'habitude de travailler ensemble de pouvoir le faire aussi à cette occasion. Les élèves se regrouperont finalement selon leurs habitudes et leur convenance. La répartition sur les différents temps des élèves est alors celle indiquée en annexe G.1.

Le milieu matériel

Conformément aux choix décrits, le milieu est enrichi du document contenant des extraits de la « Géométrie » de Dürer. Compte tenu de cette introduction en cours de séance, nous n'introduisons pas dans le milieu de polygones préfabriqués, ni de matériel à disposition (papier de couleur, ciseaux) permettant une fabrication. Le milieu matériel n'est pas autrement modifié par rapport à celui de la pré-expérimentation avec des élèves de terminale :

- Le matériel de géométrie est autorisé, les rapporteurs ne sont pas mis en avant. L'enseignante en aura à disposition et les fournira à la demande. On observe la présence d'un rapporteur sur la table dès le début de la recherche pour les groupes A et D.
- Pas de mise à disposition de logiciel de géométrie dynamique. On peut noter que deux élèves (E12 et E14) peuvent éventuellement avoir accès à un LGD sur leur calculatrice « classpad » dont ils sont équipés dans le cadre d'une convention.
- La recherche sur internet n'est pas autorisée. Mais comme ce mode de fonctionnement n'a pas habituellement sa place dans la vie de la classe, cette interdiction ne sera pas rappelée.
- Tout autre document est autorisé.

Précisions sur le scénario prévu

L'enseignante s'appuie sur le scénario anticipé (cf. annexe G.2). Notons que l'enseignante diffuse pour le lancement de la séance trois diapositives.

La première contient simplement un titre « Quelques questions autour des pavages » et un sous-titre « Situation de recherche en classe ».

La deuxième rappelle quelques éléments que l'enseignante utilise pour son introduction : Présentation de l'activité - Enjeux en termes de recherche et de production de savoirs dans la classe - Organisation des groupes - Le support pour la recherche (cahier de recherche).

Sur la troisième figure le support non modifié par rapport aux expérimentations préalables[5] (cf. figure 7.2).

Notons que l'enseignante a également exprimé sa crainte de ne pouvoir faire respecter le temps de recherche individuelle. Elle argumentait en précisant que ses élèves avaient pour habitude de travailler pendant chaque cours en échangeant. Cette crainte ne se concrétisera pas.

Le lancement de la séance

Les éléments ci-après se réfèrent aux premières phases décrites dans le scénario proposé à l'enseignante (cf. annexe G.2).

— **Phase 1** : Lors de l'introduction de la séance, P s'appuie sur sa première diapositive dont le titre est « Quelques questions autour des pavages ». Ceci amène une question immédiate de la part d'un élève « Qu'est-ce que c'est que pavage ? ».
La sémiose commence ici pour tous. Le mot « pavage » va initier les premières sensations, les premières images. P décide de ne pas écarter cette interpellation et la renvoie à la classe :

> P : Qu'est ce que c'est que Pavage. Ben oui, qu'est-ce que c'est que pavage ? Est-ce que quelqu'un a une idée de qu'est-ce que c'est qu'un pavage ?
> E7 : Mettre des pavés sur un carrelage
> P : Mettre des pavés sur un carrelage, OK. Ben, ça ça peut être un pavage, et on va voir euh, mathématiquement ...
> [Discussions entre élèves]
> P : Je pense que c'qu'a dit Axel sur les histoires de carrelage, effectivement ça peut être une notion en rapport avec ça. Donc, vous allez faire une activité de recherche. Cette activité de recherche c'est un problème, ... Eh ho, Nicolas. C'est donc un problème que vous allez résoudre, et le but c'est de voir comment vous, la classe, vous allez euh avancer sur ce problème. Donc vous allez travailler en groupes, et euh, à la fin de euh, du travail vous fa... vous ferez une affiche et on fera la synthèse de toutes ces affiches.

Désormais, pour tous, et avant même la lecture de l'énoncé du problème, celui-ci renvoie à l'image du carrelage. Dès lors la phase 2, de présentation du problème par son énoncé, se poursuit comme suit :

— **Phase 2**

5. La prise en compte du sens de rotation autour d'un nœud qui exclurait des pavages tels que (4,6,12) n'est pas réalisée dans l'énoncé. Cette précision ne peut venir à ce moment là de la situation sauf à priver les élèves d'une phase de découverte personnelle. Elle devra éventuellement faire l'objet d'un échange ultérieur. Nous n'attendons pas ici qu'un choix soit fait pas les élèves eux-mêmes. La prise de décision, après mise en évidence de ce choix possible, sera de la responsabilité de l'enseignant.

Mathieu lisant l'énoncé : Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous le côtés la même longueur.

P : OK, est-ce-que ça va ? ... Quel mot pose problème ?

E17 (qui n'a pas rendu le devoir en temps libre) : Convexe.

P : ... Convexe ? Mais vous avez déjà du euh ... vous poser la question précédemment. Voilà, cette définition vous l'aviez déjà vue. Est-ce-que quelqu'un peut expliquer ce que ça veut dire, convexe, vite fait.

Un certain nombre d'élèves commencent à se référer à leur cahier de travail, mais un retour rapide surgit en faisant référence aux polygones étoilés. Ce point est ainsi évoqué rapidement et la poursuite des questions permet de préciser d'autres aspects de l'énoncé :

E7 : Ben Archimédien ça pose problème.

P : Ben c'est la définition, c'est normal que ce soit le mot que tu connais pas.

E7 : Ahaha.

P : Donc, le mot que tu connais pas c'était archimédien, donc c'est un recouvrement du plan par des polygones réguliers sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones. Ouais ?

E10 : Du coup ça veut dire quoi, sans superposition ?

P : Ben, tout-à-l'heure euh, Axel a dit carrelage. Imagine un carrelage ou y'ait un trou ...

E7 : ben ça serait pas un carrelage.

P faisant des gestes de ses mains : Ça s'rait pas un carrelage, OK. Un carrelage où y'ait des superpositions ...

Plusieurs élèves : Ahaha.

P : C'est bon ? Donc ensuite, qu'est-ce qu'on nous dit ? Flavie ?

E4 : On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme la figure ci-dessous.

P : Donc vous ... voilà. Donc pourquoi est-ce-qu'on l'exclut celui-ci, c'est bon ? Ouais ?

E4 : Ah, parce que c'est pas aligné ?

P : Ben on te dit on l'exclut parce qu'un sommet appartient au sommet d'un autre. Donc en fait on veut que les sommets ils soient comment finalement ?

Des élèves : Qui coïncident.

P : Voilà. On veut que euh, les sommets coïncident. Donc le but, du travail qu'on va faire aujourd'hui, c'est de déterminer TOUS les pavages archimédiens du plan. Donc je vous redonne l'énoncé, je vous laisse 5 minutes pour réfléchir tout seul ...

Ainsi P en acceptant les interventions d'un élève n'ayant pas rendu son devoir et en sollicitant des élèves moins à l'aise, favorise la construction de la tâche et permet aux élèves de développer les premiers signes. Il est notable que l'explicitation de l'énoncé est cette fois relativement développée. Elle l'est pour une part par les élèves, pour l'autre par P. Ce sont ses mouvements de main qui créent une image mentale pour le non recouvrement ou la superposition.

— La **Phase 3** de recherche individuelle se déroule dans le format prévu. Seule E16 sollicite P qui renvoie la question posée au temps de recherche collective.

Phase 4 : La construction de la tâche ?

Cette phase 4, relativement courte, qui débute 12 minutes après le début de la séance, se termine après 13 minutes d'échanges. Du point de vue des critères d'arrêt, on peut se référer au tableau de l'annexe G.8, pour constater que la phase s'arrête avant que tous les critères ne soient observés. On note en particulier que les groupes B et D n'ont pas produits de signes concernant les assemblages non réguliers, que les groupes A, C et E n'ont pas engagé de travail numérique, qu'aucun groupe n'a évoqué la question de l'exhaustivité d'un point de vue général. P n'a donc pris en compte que la durée et a jugé suffisant ces premiers échanges.

De façon complémentaire, nous pouvons observer que :

— Les groupes B et D sont entrés très rapidement dans la tâche et ont construit quasiment immédiatement le problème réduit au cas des pavages réguliers. Nous reviendrons pour chacun d'entre eux sur un élément de blocage dans l'élaboration des raisonnements pendant ce temps mais l'enseignante a pu sans contexte constater un engagement dans la recherche pour ces groupes. La courte durée de la phase 4, n'a pas permis que se développe une dimension syntaxique. La sémiose a été interrompu avant une potentielle apparition de légisignes symboliques argumentaux.
— Le groupe A, sans investissement dans le registre numérique, a beaucoup produit. En dehors de ce non engagement dans le registre numérique, de très nombreux objets sont considérés et étudiés, comme on pourra le constater par exemple ci-dessous pour la question du plan.
— Le groupe C a des difficultés pour construire la tâche. Les exemples émergent lentement, l'intuition est peu présente. P relance le groupe en évoquant la possibilité de compléter les trous laissés par l'association d'octogones.
— Le groupe E, lui, alors que la tâche se concrétise assez vite et que par exemple le mixage des triangles et des carrés survient très tôt dans les échanges (5 minutes), rencontre un temps une difficulté quant à l'activité proposée. La représentation de l'activité mathématique elle-même rentre en conflit avec l'appropriation de la tâche, particulièrement pour E16 :

> E16 : Évidemment on est bloqué on va jamais trouver.
> P : Pourquoi vous êtes bloqués ?
> E4 : Je sais pas j'arrive pas à comprendre.
> E16 : Faut trouver des calculs ou une formule, des trucs comme ça.
> E4 : Je comprends pas ce qui faut trouver.
> P : La question c'est donc, faut trouver tous les pavages archimédiens du plan.
> E4 : Oui mais sans y dessiner.
> P : Tu peux bien sur faire des dessins mais faut arriver à trouver un moyen de répondre à la ... pourquoi est-ce que tu penses qu'il va falloir utiliser une formule ?
> E16 : mais c'est parce que c'est comme dans tous les maths y faut dire un truc qui ressemble ...

La relance de P, puis l'introduction du document permettra finalement de construire la tâche et le problème et au groupe de produire, à l'issue, des résultats significatifs (cf. affiche du groupe E dans l'annexe G.5).

Revenons maintenant sur quelques événements remarquables de cette phase 4 pour les groupes A, B et D.

— Groupe A : Étudions pour ce groupe un exemple de relation à l'objet plan qui induit des constructions originales, avant une régulation dans le groupe. La question du plan arrive très rapidement. Elle semble dans un premier temps évacuée par l'évocation par un élève du plan de la feuille et par un autre du plan comme face du cube.

> E6 : Ça, ça c'est le plan. Oui mais je comprends pas ... un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan, c'est quoi le plan là ?
>
> E [un élève] : Le plan, c'est heu, oui ben, c'est quand y a trois points non alignés, c'est-à-dire que alors c'est comme si t'avais une feuille.
>
> E6 : Et là, il est où notre plan ?
>
> E [un élève] : Ben ça c'est un plan, c'est le plan de ...
>
> E [un autre élève] : y a un truc tu sais dans le cube, dans le cube t'as, t'as ABCDEFGH ... t'as trois points qui peuvent pas être alignés, ça ça forme un plan.

En réalité cette première vision d'un plan comme zone carrée ou rectangulaire va engendrer quelques idées et débats. Tout d'abord la recherche d'organisation des polygones pour obtenir un bord de pavage rectiligne :

> E6 : Pour moi l'idéal ça serait qu'on arrive à créer des droites parallèles, comme ça on pourrait les assembler ensuite.

Cette idée, qui porte bien entendu des potentialités en termes de validation de pavages par invariance par transformation mais qui contraint les élaborations de pavages, amène une reprise de l'objet « plan ».

> E13 : Ouais mais sauf qu'en fait là c'que t'as ...c'que t'as pas pris en compte Nico c'est que ... vu qu'c'est un plan en fait c'est infini. Donc là, on peut mettre des carrés, et là t'as pas forcément besoin de mettre des triangles.
>
> E20 : Parce que là ça marcherait pas.
>
> E6 : Ouais, c'est à ça qu'j'pensais, parce qu'en fait ...
>
> [...]
>
> E6 : T'vois, mais ça c'est l'genre de truc que tu r'trouves sur des carrelages, c'est pour ça qu'j'vous ai dit ça tout à l'heure.
>
> E13 : Alors autre euh, autre truc. Euh, étrangement ... étrangement là on a un truc avec 8 côtés, et c'qui permet de compléter pour avoir un euh un pavage total, ... c'est un truc à 8. J'me demande si euh c'est pas possible de faire ...
>
> E6 : Mais par contre comment tu fais pour arrêter pour que ce soit droit derrière ?
>
> E13 : Mais en fait Nicolas, vu qu'c'est un plan , c'est quelque chose qui est infini, donc là j'peux continuer à faire ça.
>
> E6 : Hum.
>
> E13 : Ça j'peux continuer à l'infini.
>
> E6 : D'accord. Parce que t'as pas besoin de l'arrêter, t'as pas b'soin que ça fasse quelque chose de carré.
>
> E20 : Ouais t'es pas obligé d'avoir des droites parallèles, c'est bien c'que j'disais.

On constate ici une difficulté de E6 à entendre ce que lui présente E13. E6 est tout d'abord resté sur cette image du plan comme zone carrée et l'affirmation de E13 ne peut intégrer son image de pavage. C'est seulement une réalisation sur feuille qui convaincra E6.

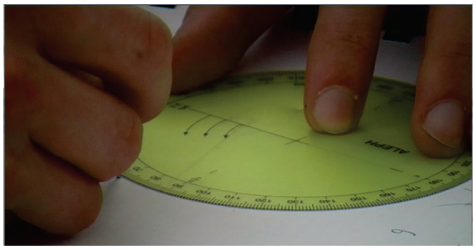
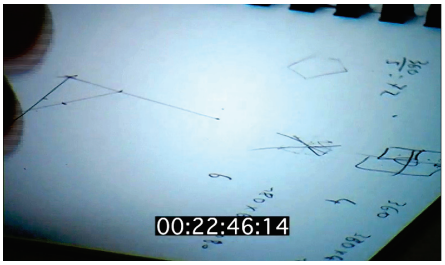
Un autre objet engendre des relations complexes, le pentagone. Premier des polygones peu familier, il peut faire l'objet de rejet « E13 : J'vais ... j'vais essayer un truc. J'vais faire avec 5, euh non, 5 ça va être chiant. Le faire avec 8 et avec 16. » ou engendrer comme nous allons le voir avec le groupe B de la complexité.

— Groupe B : Les débuts du groupe B sont particulièrement rapides. En quelques minutes, E2 et E9 évoquent une grande partie des objets potentiellement en jeu dans la situation. Ils sont à deux doigts d'engager une démarche numérique vers une preuve pour les pavages réguliers, preuve que E9 attend impatiemment. Mais alors que le travail autour du devoir en temps libre semblait montrer une relation solide avec l'angle des n-gones, E2 et E9 vont buter sur la manipulation de l'angle du pentagone et peiner à mettre en place une procédure efficace :

E9 : Triangles et carrés ça marche.
E 19 : Triangle équilatéral et carré.
E9 : Pentagone ça doit marcher.
E2 : Ben c'est chaud.
E9 : J'avais des carrelages en pentagone chez moi. Ouais. C'était pentagone euh ... comme ça et comme ça. [...] Comment tu fais un pentagone ?
E2 : Ben, tu mets 5 côtés.
E9 : Ouais, c'est c'que j'dis, comment tu fais un pentagone ?
E9 : Si, avec ... avec un pentagone ça marche.
E19 : Non, comme ça.
E2 : Ouais, un pentagone ça a l'air de marcher.
E9 : Ouais, j'te dis j'avais des ... du carrelage comme ça chez moi.
E19 : Du carrelage en pentagones.
E9 : Il était marron dégueu. Ah, dégueu.
E2 : J'crois qu'on va parler des angles encore.
E9 : En fait on fait une technique de merde là. Ouais, faut trouver une relation qui puisse se démontrer pour tout. ...
...
E2 : Mais ça marche pas pour les hex... penta.
E9 : Pour les quoi ?
E2 : Pentagones.
E9 : Si parce qu'à chaque point t'auras 360.
E2 : Ouais mais les pentagones ...
E9 : Ben, j'pense, t'auras.
E2 : T'as 72 degrés, c'est ça ?
E9 : 1, 2, 3, 4, 5... 360 divisé par 5
E19 : Attends, j'prends ma calculette.
E2 : Ça fait 72.
E9 : C'est possible. Comment tu sais ça toi ?
E2 : Ben, 360 divisé par 5 ça fait 72.
...
E9 : Ouais mais c'est pas l'angle ... l'angle intérieur, l'angle intérieur, l'angle intérieur ...
...
E2 : J'suis pas sur que ça marche.
E9 : Ça marche p't'être pas avec 5 côtés hein.
E9 : non, c'était du comme ça qu'j'avais, du carrelage, chez moi. Comme ça, ça marche. En fait tu pars comme ça. (*E9 produit alors un assemblage d'hexagones*)

Il ne semble donc qu'il ne reste plus à E9 en particulier, qu'à utiliser le résultat déjà stable de la théorie : la somme des angles autour d'un nœud vaut 360. Mais le calcul de l'angle du pentagone pose problème. E2 et E9 divisent 360 par 5 pour trouver l'angle du pentagone. La rétroaction du milieu ne viendra pas de leur familiarité qu'on pouvait imaginée construite lors du devoir en temps libre, mais de la considération d'un croquis de pavage régulier avec des pentagones[6]. Ce support fait douter de la valeur trouvée mais ni E2 ni E9 ne reviendront, dans un premier temps, aux résultats du devoir en temps libre, aux formules qu'ils avaient trouvées par des démarches singulières ou à la liste, même imparfaite des α_n.
Pour E9, la certitude que le pentagone convient, issue tout d'abord d'une relation très personnelle à l'objet pavage, sera dès lors remise en cause par cette même réminiscence (Le ton sur lequel est évoqué le « marron dégueu » montre bien ce fort ressenti personnel). La relation à l'objet a porté et orienté tout ce temps de recherche de E9 et ici retardé la mise en place d'une démarche de preuve[7].

— Groupe D : C'est à nouveau le pentagone, objet crucial à plusieurs égards, qui perturbe l'étude de E15. Après avoir étudié les cas du pavage avec des triangles et des carrés, E15 s'attaque au cas du pentagone. Il construit, au rapporteur, un angle de 72°, puis construit, en appui sur un des côtés du premier, un deuxième angle de 72° :

« On crée un angle de 72... On mesure ... On reporte 72. »

Devant le résultat E15 prend sa gomme et fait disparaître la construction. « Ça n'existe pas, cette figure n'existe pas ». Puis E15 reprend la page précédente de son cahier où figurent quelques uns des nombres de Fermat dont F_1, page qu'il observe longuement. S'ensuivra un long échange sur le lien entre les polygones traçables (*a priori* synonyme de constructibles à la règle et au compas) et les polygones permettant de réaliser un pavage régulier :

> E15 : Celui-là il est traçable à la règle. Si tu commences par faire la figure ici, ça va partir un peu comme ça. Et lui il va partir comme ça et ça va se superposer.
> Ouais. Contre-exemple
> E15 : Parce que c'est pas parce qu'ils sont traçables à la règle et au compas ... [?]

Ici c'est le devoir en temps libre qui a créé pour E15, un lien entre polygones et polygones constructibles à la règle et au compas. Le cas du pentagone est là encore particulier parce qu'il ne permet pas d'invalider ou de valider une règle, sa manipulation se révélant trop complexe. Cette règle sera réfutée en appui sur un autre cas que le pentagone qui ne permet ici ni appui ni réfutation.
Pour ce groupe la règle suivante à tester sera « Dans tous les cas faut qu'ils aient un angle qui soit un diviseur de 360. Que quand tu les ajoutes autour ça fasse 360. ».

6. Bien entendu non valide mathématiquement.
7. Notons que la régulation se fera juste après l'apport du document portant les extraits de Dürer.

Phase 5 : Premiers échanges dans les groupes après l'introduction du document complémentaire

P, après avoir interrompu les échanges, présente l'introduction du document complémentaire comme envisagé et relance la recherche. Pour tous les groupes il s'agit donc de comprendre le rapport entre ces éléments d'un texte de Dürer et la recherche engagée, de tirer de ces extraits les éléments pertinents.

— Groupe A : Le groupe A qui avait déjà produit un grand nombre de candidats-pavages archimédiens, et en particulier tous ceux proposés par Dürer, n'enrichit son ensemble d'exemples permettant les allers-retours avec la théorie en construction que par les figures erronées. Ainsi la considération de la figure associant octogones et triangles amène l'échange suivant :

> Bah, techniquement ils sont ... Parce que l'problème c'est que pour avoir des... J'suis pas sûr qu'tu puisses, avec des octogones, avoir des triangles équilatéraux.
> Avec des octogones si, si ils ont tous le même longueur de côté, t'façon les ...
> Ben r'garde là j'ai essayé.
> Ben oui du coup ils seront ...
> T'as vérifié si y'avait la même longueur là, là, là, là ?
> Ah non. Mais non mais ...

Avec le renvoi de la question de la validation sur l'égalité des longueur, la question des angles n'apparaît pas ici. Pour le groupe, la considération des « trous » un peu plus tard « Ils sont bien liés aux mêmes choses, mais y'a des trous et ... » n'amènera pas là non plus, un recours explicite aux angles.

— Groupe B : La réaction à l'introduction du document est immédiate. La considération de la figure [24a] invalide le pavage régulier avec des pentagones et amène l'échange suivant :

> E9 : Ah ça marche pas avec 5.
> E2 : Ben oui j't'ai dis.
> E19 : Làlàlàlà ...
> E2 : Ah oui on s'est un peu plantés j'crois.
> E9 : Quoi ? Ben pour 5 ça marche pas, pour 6 ...
> E2 : Ben ouais mais tu vois, mais j'faisais 360 sur le nombre de côtés, et ça donne l'angle du milieu, ça donne pas l'angle euh du polygone.
> E9 : Ah, l'angle du milieu.
> E2 : Ça t'donne l'angle au centre.
> E9 : Comment tu sais ça ?
> E2 : Ben, j'sais pas, ça a l'air.

Cet apport permet donc au groupe de reconsidérer la formule de l'angle d'un n-gone et de s'engager dans le registre numérique, pour l'instant dans un cadre non formel. Le groupe aura le temps de commencer à trouver un minorant du nombre de polygones et d'en déduire l'angle maximal pour un pavage régulier. Le groupe ne considère pas les autres figures de Dürer et en particulier le pavage (4,8,4,8).

— Groupes C : L'évolution est là encore très lente. E7 a du mal à voir les différents cas des figures 22 et 23, « tu fais des droites dans tous les sens et c'est bon » et il ne semble pas que les pavages non stricts soient identifiés. Les figures laissant apparaître des trous sont exclues mais les échanges sont trop rares. E1 et E11 s'expriment très peu.

Pour ce groupe peu communicatif la bande son s'avérera finalement très peu exploitable et ne pourra par exemple pas expliquer l'écart entre les traces sur le cahier de recherche et l'affiche, assez pauvre. Pour ce groupe, la situation ira a son terme mais l'énergie dans le jeu, les échanges, constatée dans les autres groupes, feront défaut.

— Groupe D : Le groupe D reporte lui explicitement l'étude d'une idée en cours et examine le document. Après avoir traité rapidement les figures 22 et 23, la figure [24a] est vue comme une ébauche de patron de polyèdre « Oui mais c'est ça, j'pense qu'on suppose qu'on prend pas un plan convexe ou ... Parce que sinon ça devient compliqué. » C'est alors l'enseignante qui par une intervention effectuera la rétroaction nécessaire : « Non, on va prendre un plan plan, pas un plan sphérique, hein, ça sera plus simple. »
Lors de l'étude du document, E5 et E15 reviennent sur l'idée temporairement délaissée et étudient les angles possibles pour un pavage régulier :

> E15 : Si t'as un truc qui part ici comme ça, admettons que t'as 130. T'as 130 du coup. Tu reportes 130 ici, ici c'est pas possible que t'aies 130, tu vas retomber dessus. De toute façon y'a pas l'choix, faut que ça soit inférieur à 90 ... Ça marche à chaque fois. Ah oui là on a l'truc, là c'est 120. 120 j'pense. 1, 2, 3, oui, 120.

L'expérience cruciale[8] sur un entier « quelconque » supérieur à 90 qui visait à valider la proposition « il y a superposition dès que $\alpha_n > 90$ se retrouve alors confrontée à la construction de la figure 25. La proposition est affinée et le groupe continue son exploration par l'étude des exemples.

— Groupe E : E4 identifie les pavages non stricts, E16 pointe les figures avec trous, E12 propose de remplir avec des triangles. E4 assure qu'un losange est un polygone régulier mais E16 contredit E4 en argumentant sur les angles. Le document complémentaire s'avère pour le groupe une source d'échanges importants. Mais on observe que le positionnement par rapport à la tâche est là encore difficile pour E16. Quand P vient échanger pour savoir pourquoi E16 trouve que Dürer contredit tout ce que le groupe a construit, P énonce : « est-ce que tu penses que ce qui l'intéresse c'était vraiment de trouver ... tu vois en fait pourquoi il les garde... Parce qu'on pourrait en faire beaucoup de jolies choses ». E16 réplique : « oui, mais là on s'en fout d'être joli ». P et E16 tombent d'accord sur le fait que les objectifs ne sont pas les mêmes.
Ce n'est pas la volonté d'engagement dans l'activité qui est en cause pour E16 mais la compréhension du milieu. Pour E16 cette introduction rend le milieu instable, renvoyant des rétroactions incompréhensibles. L'intervention de P vient redonner une cohérence à ce milieu.

Phase 6 : première mise en commun

P sollicite au bout de dix minutes l'ensemble de la classe pour une mise en commun. Chaque groupe va être sollicité :

> Bon, j'pense que vous vous êtes tous approprié le problème, on va faire une petite euh, juste un p'tit échange. Vous allez euh me dire dans chaque groupe qu'est-ce que vous avez trouvé, comment est-ce que vous avez avancé, histoire que vous puissiez chacun utiliser aussi un peu des éléments des autres. Alors, euh, le groupe de Pierre, qu'est-ce que vous avez compris du problème, qu'est-ce que vous avez comme ébauche de réponse, où est-ce que vous en êtes ?

8. Procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaît pour aussi peu particulier que possible, (Balacheff, 1987).

Propositions des élèves	Proposition de P	Commentaires
Groupe E		
E16 : Le plan est infini.	Oui, le plan est infini. En effet. Donc c'est-à-dire qu'en fait on imagine que ce pavage on va pouvoir l'étendre, effectivement à l'infini.	Au vu des échanges dans les groupes, ce point semble devoir désormais faire partie des énoncés disponibles. E16 lors de la suite de cet échange demandera à P de prolonger un dessin au tableau pour tenter une visualisation de cette prolongation sans fin ...
E16 : On a vu qu'on peut aussi les mélanger, par exemple des carrés des triangles. E4 : Des carrés. E16 : Celui avec des carrés. E16 : Triangles et carrés.	on peut les mélanger on peut avoir deux types ou trois types ou plusieurs types de polygones différents, OK. Et est-ce que vous en avez trouvé qui fonctionnaient ?	Ici P s'appuie uniquement sur les propositions du groupe E et fait comme si l'énoncé était déjà dans la culture commune.
E4 : Triangle équilatéral	Et vous êtes arrivés à faire quelque chose avec un mélange de triangles et de carrés ?	E9 intervient alors : « on a le droit de faire des mélanges ? » Le groupe B est le seul à n'avoir pas interroger la pluralité possible des types de polygones, ni dans la phase 4 ni dans la phase 5. Cette première institutionnalisation ne recoupe pas ici la sémiose du groupe.
E14 propose alors pour construire un pavage mixte de couper certains carrés du pavage (4,4,4,4) en deux.	Alors oui on a l'droit d'faire des mélanges. C'est euh, c'est écrit dans l'énoncé. Donc vous avez voulu couper un carré ? Comme ça alors ?	La construction de la possible pluralité des types de polygone est alors résumé par P en un « c'est écrit dans l'énoncé » qui travestit la réalité.
	Mais j'coupe dans quel sens ? Comme ça ou comme ça ? Comme ça. Bon, les autres, qu'est-ce-que vous avez comme remarques à faire ?	P sollicite le passage dans une dimension argumentative en appui sur les angles.
Plusieurs élèves : les angles sont pas égaux	Qu'est-ce-qui est dans la définition, qui pourrait... ? Voilà, c'est pas un polygone régulier.	P renvoie à la définition. Ce renvoi coupe ici le débat sur cette question sauf pour le groupe E qui commence à requestionner sa figure

P sollicite ensuite le groupe C.

Propositions des élèves	Proposition de P	Commentaires
Groupe C	Bon, le groupe d'Axel, est-ce que vous avez d'autres choses ?	

E10 et E11 : Avec des triangles équilatéraux.	Donc du coup euh ... Ça fait comme ça, et puis on continue, euh ... OK ? Est-ce que vous en avez un autre ? ...	
E1 : Les losanges.		On constate ici le manque de communication dans le groupe qui montre un désaccord sur ce point. La non régularité du losange est rapidement dénoncée par d'autres élèves.
E10 propose ensuite les polygones avec 8 côtés.	Et vous remplissez avec quoi vous avez dit ? Donc un octogone et du coup ?	P envisage que pour tous les groupes, l'image du trou comme espace à compléter est disponible pour tous. Ici il n'est pas fait référence à la planche de Dürer.
E15 en aparté : Octogone et carré ça va laisser des triangles.		À cet instant ce sont les membres des groupes B et D qui font des remarques sur ces associations. Ils se sont engagés sur une dimension locale autour d'un nœud et ont peu questionné cette dimension.
	Donc octogone carré. OK. Est-ce-que ça correspond à la définition ça ?	
E4 en appui sur la proposition d'association carrés-triangles du groupe E : Je comprends pas cette histoire d'angle ... tout à l'heure on avait dit que ça marchait pas sur les angles. Là.		L'ambiguïté sur les angles évoqués ressort ici (angles du n-gone tous de même mesure, ou angles des polygones autour d'un nœud).
	Je sais pas, est-ce-que ça marche sur les angles ? Est-ce-que vous l'avez vérifié, si ça marche sur les angles, ceux qui l'ont dessiné ?	
E20 : Euh non	Donc ça marche parce qu'on l'a dessiné ? Est-ce-que ça marche sur les angles, c'est peut être effectivement une bonne question.	P renvoie à une vérification sur les angles (sans précision) et sur un registre autre que graphique.

P sollicite le groupe A

Propositions des élèves	Proposition de P	Commentaires

Groupe A	Groupe de Valentin, est-ce-que vous avez avancé sur autre chose, que ce soit des pavages que vous avez trouvés, soit des pavages au contraire qui n'en sont pas.	
E13 : Avec les hexagones	OK. Je marque « hexagone ». Je le dessine pas. Oui d'ailleurs octogone-carré je me suis bien embêtée à le dessiner, il y est pas, par hasard, dans les papiers ?	P renvoie ici à la planche de Dürer, sans préciser le statut.
	Bon, si on reprend les papiers de Dürer, est-ce-que vous en avez trouvé qui sont des candidats à notre euh ...	P échange désormais avec l'ensemble de la classe pour étudier le document avec les planches de Dürer.

Les pavages non stricts sont alors identifiés. P réoriente la lecture du pavage régulier de la figure 22 pour envisager le cercle comme un trait de construction. P et E20 expliquent l'égalité de 2 pavages par invariance dans une rotation. Les dessins de la figure 24a sont exclus car « E4 : Y'a des losanges. » et « E10 : On peut pas remplir. ». Après avoir retenu le pavage (6,6,6), les échanges s'attardent alors sur la proposition (3,6,3,6) de la figure 25.

E : Il fonctionne.

P : Oui, il fonctionne, on reprend les critères, pour vérifier si ça fonctionne. Qu'est-ce que je dois vérifier ?

E : Même longueur, mêmes angles.

E : Les sommets ont les mêmes assemblages.

P : Les sommets ont les mêmes assemblages, qu'est-ce-que ça veut dire ça ?

Devant la diversité des attitudes, P est dans l'attente

P : Ben je sais pas, y'en a qui ont l'air de douter, moi j'attends hein.

...

P : Donc celui euh ... Sur la figure 25 du coup, vous m'avez dit que celui avec les hexagones c'était oui, celui d'à côté, c'est quoi d'ailleurs comme figure ?

E : Ben triangles équilatéraux et hexagones.

P : Hexagone et triangles, OK. Est-ce-que ça fonctionne alors pour celui-ci ?

Des élèves : Ouais, oui.

P : Je sais pas, je vois au fond votre camarade qui secoue la tête. Bon, donc celui-ci on va le laisser sur un point d'interrogation, vous résoudrez ça ensemble. Ben y' a des groupes qui doutent, on va les laisser finir de douter.

Les propositions des groupes sont diverses. E12 et E16 sont assurées de la validité du pavage sur la base du dessin alors que E15 s'engage, en aparté, dans une vérification numérique « Là, un hexagone c'est 120, et donc du coup, deux angles euh ... 120 ça fait 240 et là faut rajouter 2 fois 60. »

P envisage donc de renvoyer au travail de groupes ce passage au numérique, qui n'est toujours pas présent pour tous les groupes. P renvoie aussi la vérification de la suite du document à la phase 7. P souhaite toutefois finir le recueil des propositions de tous.

Propositions des élèves	Formulation de P	Commentaires

Groupe B	Le groupe de Maxime, qu'est-ce que vous avez ... vous avez avancé sur quoi ?	
E9 : Ben euh, la somme des angles ça fait 360 si on prend n'importe quel sommet.	Somme autour d'un sommet, 360. OK. Donc 360 degrés hein, je suppose.	
E9 : Ouais.	Et euh donc du coup comment vous aviez envisagé de vous servir de ça ?	
E19 : Faut que l'angle sur un côté soit un diviseur de 360.	Donc l'angle d'un polygone tu veux dire ?	
E19 : Non. 'fin si. J'en sais rien.		P note en les reformulant ces propositions en affirmant leur statut de conjectures.
E19 poursuit.	Donc tu nous dis que pour faire un pavage il faut que sur chaque sommet il y ait au moins trois polygones, donc du coup que chacun des trois est inférieur à 120. OK. Au moins 3 quoi ? Quand tu dis au moins 3 ... ?	P reformule des propositions confuses.
E19 : Côtés.	Au moins 3 côtés.	E19 qui reprend les propositions du groupe n'a pas leur maîtrise.
E9 Au moins trois polygones. E15 : Polygones.		Ce sont ici uniquement des membres des groupes B et D, qui s'étaient engagés sur l'étude des pavages réguliers qui interviennent.
	Je vous ai entendu dire tout-à-l'heure : « ah mais on a l'droit de mettre plusieurs formes » Vous étiez partis sur un seul type de forme ?	
E9 et E15 : Oui	Donc ça c'est leurs pistes. Ça peut vous donner des idées, mais pensez bien qu'ils étaient partis que sur un type de formes. Et le dernier groupe ?	P essaie de réduire l'impact de la présentation de ces énoncés.
Groupe D		
E5 : Ouais ben nous aussi on est partis que sur une forme. On est partis avec le même raisonnement.	OK, donc vous êtes aussi arrivés à cette conclusion que y'avait un, des angles inférieurs à 120 ...	

On retrouve dans ces derniers échanges deux caractéristiques de la situation proposée :

- la possibilités de sémioses complémentaires. Dans des temps cette fois plus contraints deux types de développement de signes émergent à nouveau. Les sémioses centrées sur l'étude d'un nœud d'un pavage régulier apparaissent auprès d'élèves envisageant ou désirant fortement une démarche systématique. Elles permettent l'entrée dans le registre numérique, avec les difficultés éventuelles évoquées.

- la confrontation de ces sémioses lors des temps de mise en commun. Il est à noter que la réception de l'information d'une pluralité possible de polygones autour d'un nœud semble ici plus facile à intégrer dans le registre personnel des énoncés que la considération des mesures d'angles pour valider ou pas un assemblage.

P effectue la transition comme suit :

> OK. Est-ce-qu'il y a encore des points... sur lesquels vous êtes encore indécis, que vous avez pas encore bien compris ? Quelle est la difficulté majeure en fait ? ... De toutes les trouver. Parce qu'en fait là vous avez réussi à en dessiner quelques-uns qui fonctionnent, la question difficile ça va être comment toutes les trouver. En effet.

Conclusion concernant cette phase 6

Cette mise en commun devait s'assurer de la construction de la tâche et du problème. En fin de phase 5, dans des délais réduits, la construction du problème dans sa complexité n'est effective pour aucun groupe. Des objets similaires ou distincts sont considérés dans chaque groupe avec une richesse variable mais parfois importante. La phase 6 va faire se rencontrer des répertoires différents qui sont déjà une juxtaposition de répertoires personnels. On a vu que ces répertoires sont issus de relations qui peuvent être très personnelles aux objets, relations qui initient des sémioses et orientent les raisonnements. Nous présentons (Tableau 8.5) la liste des objets évoqués lors de cette phase 6, présents dans le répertoire mathématique que l'enseignant a choisi d'expliciter. Pour certains objets, les savoirs sont désormais partagés (par exemple concernant le plan et son recouvrement), pour d'autres nous n'avons pas l'assurance que les connaissances sur ces objets ont intégré le répertoire personnel de chaque élève et acquis le statut de connaissances effectives. Bien entendu le répertoire des élèves et des groupes contient aussi d'autres objets que ceux mis en avant dans la mise en commun.

Phase 7 : Analyses des échanges dans les groupes après la mise en commun

Nous reprenons tout d'abord un déroulé de la recherche des groupes A, B, D et E[9].

1. Groupe A :

   Le groupe A très productif dans la phase 4, le fut moins dans les phases 5 et 6. La diversité des objets manipulés est grande mais le groupe ne s'est pas engagé dans le registre numérique. En ce début de phase 7, le groupe poursuit une idée de E13 issue de la phase 4, le repérage de régularité. Les essais se réalisent toujours dans le registre graphique malgré la difficulté :

   > - Mais attends, oui ça fonctionne, les 12 avec les 6. Ah mais non ça peut pas fonctionner. Attends, ah si ça peut fonctionner.
   > - Ouais, mais si c'est 12, c'est c'que j'suis en train de faire, le problème c'est que ... Le problème, c'est que 2 choses. La première c'est long, et la deuxième c'est pas évident.

9. Une étude plus approfondie de la bande son de ce groupe E nous a amené à proposer quelques éléments relatifs à la construction de ce groupe, bien que nous n'ayons pas dans un premier temps jugé utile de transcrire tous les échanges.

Objets	Commentaire
Recouvrement du plan mathématique	Aspects théorique et pratique.
Polygones non réguliers	Leur usage est écarté.
$\sum \alpha_i = 360$	Pas d'expression littérale de cette règle d'action.
(3,3,3,3,3,3)	La validité reste à établir dans une théorie non perceptive.
(4,4,4,4)	La validité reste à établir dans une théorie non perceptive.
(6,6,6)	La validité reste à établir dans une théorie non perceptive.
Angle d'un polygone	Des valeurs particulières servent dans les échanges. La formule $\alpha_n = 180 - \frac{360}{n}$ n'est pas rappelée.
Minoration du nombre de polygones autour d'un nœud d'un pavage régulier	Valeur proposée, non validée.
Majoration de l'angle du polygone d'un pavage régulier	Valeur proposée, non validée.
Idée de pavage à base de triangles et carrés	Le pavage est évoqué mais non représenté, réalité à finaliser.
Pavage (3,6,3,6)	La validité reste à établir dans une théorie non perceptive.
Pavage (4,8,8)	La validité reste à établir dans une théorie non perceptive

TABLE 8.5 – Répertoire didactique - fin de phase 6

Les dessins d'assemblages ne relèvent plus alors du sinsigne iconique rhématique. Ils ne sont plus simplement construits comme des assemblages de polygones un par un avec une juxtaposition qui n'assure pas le résultat final, mais élaborés pour exemplifier une proposition de règle, ils relèvent de l'indice. Toujours dans un milieu objectif, le dessin est un moyen heuristique qui peine malgré tout à produire des résultats.
E13 propose alors une autre voie :

> Mais leur idée de 360 ... de 360 degrés autour des points à mon avis y'a quelque chose à faire avec ça.

Ses camarades pris dans les tracés ne suivant pas, E13 attend l'occasion suivante :

> E : Mais, attends d'abord j'essaye le carré parce que j'suis pas sur, en fait je sais c'qui faudrait faire. Il faudrait trouver un ... truc qui a un nombre de côtés qui fait que si on met des carrés dessus l'angle entre les deux carrés est suffisant pour que ce soit un ...
>
> E13 : ... Correspond à un angle du polygone ... Et pour calculer l'angle des polygones on y avait fait dans la partie d'avant du DM.
>
> E : Eh ben vas-y amuse toi bien, en attendant, moi j'essaye de faire avec les carrés.

Envisagé pour étayer une conjecture, le tracé devient contre-exemple :

> - Ahah. Non. Non, c'est Valentin qui voulait qu'j'essaye quelque chose et apparemment c'était pas c'qui voulait, mais ça fonctionne quand même.
> - E13 : En fait euh, j'pensais qu'il y avait une euh règle de moitié parce qu'on a vu que les hexagones et les triangles ça fonctionnait ; et les octogones et les carrés aussi.

La règle « de moitié » est donc invalidée. Et de cet échec naîtra un passage au registre numérique. Ce passage est initié par P qui interroge sur l'avancée des travaux : « Ben déjà il faudra peut-être aussi vérifier si le dessin fonctionne aussi. C'est juste euh ... ça a l'air de fonctionner. »

Aussi surprenant que cela puisse paraître, le changement de paradigme géométrique s'avérera très compliqué pour E6 qui refuse de se dégager du dessin. De longs échanges seront nécessaires pour obtenir une validation par les angles :

> E6 : Là, lui ?
> ...
> E6 : Ça fonctionne non ?
> E13 : Ben, mesure cet angle là
> ...
> E6 : Qu'est-ce qui peut pas fonctionner en fait ? Qu'est-ce qui respecte pas la règle, ... là ils ont tous le même angle.
> E20 : Ouais mais là t'es sur qu'ça fonctionne. T'es sur qu'ton angle c'est 90 ? C'est ça qu'j'veux savoir. Déjà que c'est un angle de 90 ici.
> E6 : Ben c'est c'que j'ai essayé d'faire, mais en fait oui...
> Ben prends le compas pour le ...le rapporteur
> E6 : ... Parce qu'en fait celui-là ... j'l'ai fait, là en fait j'ai calculé : un hexagone, c'est un angle de 120, alors ici j'ai fait des angles de 120. Regarde j'me suis cassé les couilles à l'faire là avec tous les p'tits points. Donc ça c'est un vrai hexagone, ça c'est un vrai 12 côtés, le carré j'ai essayé de le faire mais j'ai pas, j'ai pas [?]
> E13 : Nicolas ? Mesure moi l'angle d'un hexagone s'il-te-plaît.
> E6 : 120 degrés.
> ...
> Eh ben r'garde, dans la logique faudrait avoir 120, faudrait prendre celui-là, enlever 120 et voir si c'est 90 là. Si ça s'trouve c'est pas des carrés qu'tu mets. Donc là on a quoi ? On a 360 ...
> E6 : Ah, tu veux vérifier que ça c'est bien un angle droit !
> E13 : Oui, j'veux vérifier qu'ça c'est un angle droit.
> E6 : D'accord, bah écoute, il a une équerre.
> E13 : non non non, on vérifie pas comme ça, on vérifie par le calcul. Ça c'est un angle de trois cent soix... trois cent quatre-vingt.
> ...
> E13 : T'as 150 ? ... 150, 150 + 120, ce qui nous fait 270. On est à ... 360 - 270 = 90. On est bons.
> E6 : On est bons.

Le travail sur les exemples peut désormais utiliser les angles et les résultats vus précédemment qui sont disponibles et effectifs pour E20, et ce conformément à ce qui a pu être anticipé suite au devoir en temps libre :

E13 : J'veux savoir la valeur d'un angle.

E20 : Eh ben, tu fais ça, tu fais 72, 180 - 72, c'qui t'fais du 108. 108 degrés. On l'a fait dans le DM.

E13 : 108 tu dis ?

E20 Euh, ouais normalement c'est ça hein. On l'a fait dans l'DM ... Euh, ouais c'est ça.

On constate par contre que pour E13, qui avait travaillé précisément sur cette question et qui a la maîtrise de la recherche, la détermination de l'angle du pentagone n'est pas disponible. Il a toutefois connaissance que la détermination est possible.

Les essais se poursuivent avec ce nouvel outil jusqu'à ce que E20 propose : « non mais on va, j'pense, arrêter de chercher ceux qui marchent, et faudrait plutôt essayer de déterminer une règle, tu vois ? »

E13 qui s'est référé aux pages précédentes du cahier de travail renvoie maintenant à la liste des angles des 23 premiers n-gones. Le lien fait par E20 avec la constructibilité à la règle et au compas est rejeté par E13 qui en profite pour élaborer la règle locale et la démarche :

E13 : Ça on s'en fout. En fait on a le nombre de côtés et la valeur de leur angle. Et en fait, on sait que pour chaque point il faut 360 degrés. Donc on a qu'à regarder, avec ces valeurs d'angle là, lesquelles peuvent correspondre. En les additionnant !

E20 : Oui, en additionnant, oui, après tu sais pas si... parce que là, faut un carré, plus un euh ... Ça on sait pas ... Faut arriver à 360.

Même si la formalisation n'est pas présente, la dimension syntaxique non encore utilisable, le problème est désormais construit. Une règle est présente et exprimée clairement donc devient un objet à son tour manipulable, discutable. L'objet pavage archimédien a subi une structuration supplémentaire, un premier légisigne est présent.

Cette structuration se poursuit. C'est cette fois en opposition à l'idée de devoir utiliser des diviseurs de 360 que E13 propose :

E13 : Mais même pas forcément en fait. C'est là où c'est problématique. C'est qu'on a pas forcément besoin que d'un diviseur parce que on peut ajouter plusieurs qui ne soient pas des diviseurs de euh, de 360. On peut prendre j'sais pas, un qui ferait 190 et un autre qui ferait euh, 160. Et dans ce cas là ...

E20 : Pourvu que leur somme fasse 360 ?

E13 : Pourvu que leur somme fasse 360. Euh, 172 au temps pour moi. Ben, ce sera par 190 parce qu'il n'y aura pas d'angle à 190 degrés de toutes façons. Mais euh, voilà.

E20 : Ouais.

E13 : Et au minimum y'en aura 3 effectivement parce que ce serait des euh, ce serait des ... Euh ...

la majoration vient de la considération de 180 comme majorant de la suite des valeurs des angles des polygones. E13 avance, en appui sur E20 et là encore contre l'insistance de E6 qui revient à l'idée d'utiliser les diviseurs de 360

E20 : Il est supérieur ou égal à un angle de 60 degrés.

E13 : Oui, nécessairement, parce que sinon y'a pas d'angle en-dessous de 60 degrés c'est ...

E20 : C'est déjà notre euh, notre base.

E17 : Ah non faudrait trouver à l'intérieur de ceci ...
E13 : Entre 60 et 180 ... ça fait beaucoup de possibilités tout ça.
...
E6 : Heu, on les a trouvés alors les diviseurs de ... Tu peux les donner ? Les diviseurs de 360 ?
...
E13 : 360, ... y'a 60
E6 : Attends je vais les noter.
E13 : Attends, pour des mesures d'angles de polygones ?
E6 : Pardon ?
E13 : Pour des mesures d'angles de polygones ou pour euh ...
...
E13 : Mais j'comprends pas l'intérêt Nicolas.
...
E13 : Ben en gros on a c'te forme là. C'est-à-dire qu'on a 360 degrés, c'est-à-dire notre point. Notre point central on a. Avec x fois un polygone à n côtés. Et après on rajoute un autre polygone éventuellement avec y fois, donc ça peut être zéro, ça peut être euh j'sais pas, 40 fois ce polygone là. Mais le seul problème c'est que j'arrive pas à trouver ...

On retrouve chez E6, comme pour d'autres élèves lors de cette expérimentation, ce repli insistant sur les entiers. E6 a associé polygones réguliers et polygones à mesure d'angle entière d'où l'insistance pour les lister. E13 propose lui une nouvelle règle qui généralisée donnera la proposition qui figurera sur l'affiche : $360 = x(180 - \frac{360}{n}) + y(180 - \frac{360}{m}) + ...$ Le travail dans le registre numérique peut désormais s'engager. Les arguments en appui sur la règle d'assemblage autour d'un nœud permettent de valider ou d'invalider les candidats. Les essais se font plus nombreux et permettent de poursuivre la production de nouveaux signes, par exemple :

E20 : Faudrait encadrer n peut-être non ?
E17 : Supérieur ou égal à 3 ?
E20 : Faudrait pas encadrer n déjà ? Parce qu'on a déjà dit que
E13 : Mais justement c'est là que ... 'fin c'est là où c'est impossible à ...
...
E : Comment on peut s'débrouiller.
E : Attendez j'fais un peu d'place, ça commence à être le bordel.
E : Faut trouver une autre condition.

Les échanges se poursuivent et le groupe bute sur la complexité du signe produit :

E13 : Oui mais en fait euh, y'aura pas de critères pour arrêter j'pense, parce que, dans la mesure ou on a une infinité de polygones, j'pense qu'il y a une infinité de combinaisons possibles. Mais par contre il doit y avoir des euh des corrélations entre le nombre de polygones, leur nombre de côtés, et celui qu'on choisit au départ.

Les tentatives d'encadrement du nombre de polygones vont se limiter à une minoration par 3. Aucune majoration autre que celle de l'angle d'un n-gone régulier ne sera obtenue et le groupe ne saura pas organiser une recherche structurée des candidats-pavages. E13 qui organise in fine la recherche, propose donc, devant cette difficulté, un retour aux tentatives initiales d'observation de régularité. Ces essais se réaliseront longuement et ce jusqu'au temps de production de l'affiche. Le pgcd, le ppcm sont aussi convoqués

dans ces recherches qui ne permettront que de lister l'ensemble des candidats pavages obtenus. Cette liste ne sera pas reprise sur l'affiche finale. Il est à noter sur cette affiche le retour des entiers par le biais d'une hypothèse ... « Et ben nous on a dit que ce nombre de côtés devait être, on a émis l'hypothèse que c'était un diviseur de 360 et donc par conséquent si c'est cette hypothèse on aurait alors un nombre de côtés compris entre 3 et 180 si on part du principe que ce nombre de côtés est un diviseur de 360 ».

2. Groupe B :

Le groupe B qui s'était initialement engagé sur l'étude d'un nœud d'un pavage régulier prend lui en compte pour une part les propositions retenues par P :

> E9 : ... si on met tout le temps le même polygone on a déjà notre conclusion.
> E2 et E19 : Ouais.
> E9 : Maintenant il faut qu'on travaille sur le fait qu'il y en ait plusieurs ensemble.
> ...
> E2 : Donc ça si c'est tout l'temps l'même.
> E9 : Ben si c'est tout l'temps l'même faut qu'il y ait ... comment on sait qu'il y a au moins 3 figures et que c'est tout l'temps la même il faut qu'ce soit minimum euh 'fin plus p'tit que 120 degrés, comme la somme est égale à 360 ouais c'est bon.
> E2 : Calculer le cas où y'en a deux différentes. Hein.

Pour le groupe le cas des pavages réguliers est déjà traité et le travail sur les angles initié dans la phase 4 permet de s'engager ici très rapidement dans la production de règles locales non encore formalisées mais opératoires.

> E2 : Juste maintenant on essaye avec deux côtés. Avec deux euh ...
> E9 : Faut toujours, faut toujours qu'on garde que la somme c'est égal à 360. Parce que ça c'est vrai tout l'temps.
> E19 : Ça marche toujours ça ?
> E9 : Ouais, ça ça marche toujours. Ben oui, parce que si c'est pas égal à 360, ça marche pas, t'as un trou. Et après l'trou faut l'remplir. Ben t'enfiles des p'tits triangles dedans.
> E2 : Tu fais quoi là du coup ?
> E9 : Euh, je réécris la conclusion de ça.

Ce premier énoncé, qui intègre le registre du groupe, est suivi d'un projet porté par E2 :

> E9 : Voilà, et après pour les polygones euh, pas réguliers. Enfin quand t'en mets plusieurs ensemble, ...
> E2 : T'sais y'avait que deux. Là on a fait qu'avec un seul. Si, on a fait avec un type, maintenant on fait avec deux types, après 3 types.

Une structuration de la recherche en appui sur le nombre de types de polygones est ainsi envisagée. Elle s'envisage rapidement dans un cadre syntaxique :

> E9 : Et donc euh, après faut chercher toutes les décompositions qui font 360. Avec euh ... E2 : Mais genre c'est comme euh, c'est comme un truc à deux inconnues.
> E : T'sais le truc de la fois d'avant c'était ... y'avait qu'une seule inconnue c'était x. Genre euh, le nombre de côtés ?
> E9 : Ça va être chaud euh, deux, après 3, 4, 5, 6, 7...
> E2 : Ouais, ben ouais.
> E19 : Système à 7 inconnues.

Et pour ce groupe qui progresse à nouveau très vite, la question de l'encadrement des valeurs de l'angle se pose à la suite :

E9 : Si c'est deux, on fait ... Ah c'est bon ! ... 60, 60, 120, 120, tac, 360. Et tu fais pareil partout. Faut qu'ce soit inférieur à 180.

E2 : Ah ça, ce ... à 120 quoi.

717 Non, pas forcément, faut que ...

E2 : En fait, il faut que, il faut qu'le ... Si on fait deux trucs, si on fait avec deux trucs différents, il faut que chacun des deux types, ... Mais après on dit pas combien on a.

E9 : T'façon là, l'angle il est obligé d'être compris entre 60, l'angle d'un triangle équilatéral, ...

...

E9 : L'angle du polygone il est compris entre 60 et y'a un maximum

E2 : 60 et 120.

E9 : C'est pas 120 l'maximum, parce que là, genre ... Là t'as 120, ...

E2 : Ouais.

E9 : ... Mais y'a un moment où ... non, avec 6

E2 : Mais, c'est forcément, fin ... On est d'accord y'en a forcément 3.

E9 : Euh, donc euh, ça veut dire que là, tu vas mettre 60

...

E2 : Regarde attends, attends, trois-cent soix... Faut qu'ce soit 150 alors. non. C'est 150.

E9 : Au max ?

E2 : J'dirais . Parce que euh ... Parce que le plus p'tit. T'es obligé d'en avoir au moins 3, donc le minimum ce s'rait d'avoir euh 3, et le plus p'tit angle ce sera 60 avec un triangle.

E9 : Ouais.

E2 : Donc euh, ça veut dire que si tu fais 360 moins 60, 300. Et comme il t'en reste forcément deux, ...

E9 : Ouais, mais comme c'est pas les mêmes, ça pourrait faire un autre de 60 et pis un de euh ...

E2 : C'est bien vu.

...

E2 : C'est entre 60 et 300 finalement.

E9 : On est surs de ça ?

E2 : 300 exclu du coup.

E2 et E9 ont donc initié un raisonnement général permettant de majorer les angles dans une configuration avec trois polygones. Il est repris ainsi par E19 :

E19 : Ben ouais. Le plus p'tit truc qui peut s'assembler, c'est un triangle, 60. Donc à la sortie ça va faire euh, 150, moi j'dirais 150. Y'en a forcément en double, il peut pas y'en avoir qu'un pour compléter un sommet. 300 oui ce s'rait l'général, sauf qu'il y en a besoin de deux. Ça s'divise en deux.

E2 : Chais pas.

E9 : Un truc avec plus de 150 ... Plus de 150 degrés un angle ...

E19 : Ça marcherait pas. À moins que ce soit 3 trucs différents mais pour l'instant on est sur 2. 2 qui sont identiques.

E9 : Ah mais ... On n'a qu'à faire un truc général, pour pas ... Après p't'être que ça marche pas au-dessus de 150, mais faut réussir à y prouver.

P intervient :

P : OK. Qu'est-ce qui vous manque en fait pour avancer ?
E9 : Si mais y'a juste ceux-là. Ça avec les triangles, pis ça avec les carrés. C'est tout après.

Cet échange relance l'identification des exemples disponibles ou non. Sur le cahier de E9, sous la rubrique « cas avec 2 polygones différents, figureront les assemblages (3,3,4,3,4), (4,8,8) et (3,6,3,6). Le pentagone est écarté car « E9 : tu peux rien faire un pentagone ». Elle bute à nouveau sur le repli sur les entiers diviseur de 360, porté par E19, mais contredit pas E2, qui rappelons-le, est un de ceux qui a travaillé sur cette question :

E9 : Alors ? Y'a quoi d'autre qui marche ?
E9 : 9 côtés ça fait combien ?
E19 : Un ... heptagone. non. Un noventagone.
E2 : Ça fait 40.
...
E9 : 140 degré l'angle.
E19 : C'est pas un multiple.
E9 : Quoi ?
E19 : C'est pas un multiple.
E9 : Ouais mais ça peut marcher quand même.
...
E2 : Bon, ça existe les angles à virgule ?
E9 : Non, on peut prendre des ... Ahaha.
E2 : T'es sur Romain ?
E9 : Ouais.
E2 : Elle doit pas être bien d'accord la prof.

Cette recherche ne sera toutefois pas portée par l'analyse précédente concernant la majoration de α_n. On n'assistera qu'à une simple systématisation sur le premier polygone mais le raisonnement sur le complément ne sera pas repris. Le rappel de E2 sur les α_n non entiers ne sera pas repris non plus et au contraire les associations considéreront à nouveau les diviseurs de 360. Le rôle des entiers est à nouveau confirmé dans l'essai de formulation d'une équation :

E9 Oh, si tu fais c't'équation là, 60 plus ...
E2 : 90.
E9 : Après 60 c'est quoi, 90 ?
E2 : 90, mais c'est c'que j'ai fait tout-à-l'heure.
E9 : Après c'est quoi 90 ?
E2 : 120 ... 108 !
E9 : Non mais pour 5, 5 côtés.
E2 : 108.
...
E2 108. Mais 108 ça marche pas ?
...
E9 Après, 120...
...
E2 : 7, c'est cent-vingt euh ... C'est des euh, infini.
E9 : OK, après ?
E2 : 8 c'est 135.
E9 : 135. OK, après ?

On constate alors que le pentagone conserve son statut particulier de « non étant ». Sur l'expression rédigée par E9 dans son cahier, le terme « 108 z » est rayé. L'heptagone est aussi écarté, l'expression passe de 120a à 135b, l'heptagone rejoint les « non étant », il en sera de même pour le 11-gone. Alors que et la liste des angles et la formule sont disponibles le repli sur les entiers se confirme.
E9 semble prêt à s'attaquer à la recherche d'une association de 3 à 6 des angles de la liste dont il dispose mais semble arrêter par une intervention de P :

P : Ah c'est chaud comme équation à résoudre ça hein. Et du coup tu continues ou tu t'arrêtes là ?
E9 : Chais pas. J'ai encore la liste là, mais, ...
P : Oui voilà, c'est qu'est-ce-que t'en fais, de cette liste. Si tu la prends, ou est-ce que tu la prends pas. Après va falloir les trouver les euh ...
E9 : Ouais. Ouais, j'aurai p't'être du mal à savoir ...
E9 : Ça tu peux pas y remplir avec des triangles en plus.

P revient :

P : Donc déjà, tu t'es arrêté là parce que t'en avais mare d'écrire ou tu t'es arrêté pour une raison ?
E9 : Parce qu'il fallait bien qu'j'm'arrête à un moment mais j'sais pas si faut que je continue ou pas. Parce qu'après ça fait des polygones presque ronds.
P : Ouais.
E9 : Pour ajouter des trucs ... Pour ajouter des cercles les uns à côté des autres c'est chaud quoi.
P : Ouais, il va falloir vous organiser là, pour arriver euh ... Résoudre ça, parce que comme ça on sait pas faire.

Une recherche systématique prend corps :

E9 : Après on peut faire la même méthode que l'autre fois hein. On peut faire la même méthode que l'autre fois. Tu testes pour tout égal zéro, après tu changes pour un, après tu passes à zéro et tu r'mets un ...
E2 : C'est un peu ... C'est un peu ce que je suis après faire là hein.
...
E2 : Genre avec euh, 3 polygones. On peut faire jusqu'à seiz... 6. Là y'a trois, avec euh ..
E9 : Pourquoi tu peux en mettre 6, tu peux en mettre autant qu'tu veux.
E2 : non, parce qu'après ils sont plus réguliers. .. non et puis même, tu peux en mettre 6 au maximum.
E2 : Donc t'essaies avec 3, après ensuite c'est 3 fois le même. T'as ton ... T'as trois fois le même ça te donne une liste.
...
E2 : 2 différents. 2 différents donc t'en as 1 et 2 différents, là tu les donnes. Et 3 différents, après tu les donnes aussi. Et là ça t'fait une liste, c'est l'arbre ....

On observe donc une proposition de E2 mixant l'approche sur le nombre total de polygones autour d'un nœud et le nombre de polygones différents et en appui sur l'idée d'arbre. E9 retient uniquement l'idée de discriminer suivant le nombre de polygones et propose :

E9 : En fait il t'en faut, il t'en faut entre 3 et 6 par euh, par sommet.
E2 : Ouais. Tu testes euh, par 3 d'abord, après 4 ...
E9 : Moi j'ai fait les 3, si tu veux. Moi j'ai fait les trois.

On observe donc pour finir une recherche organisée par le nombre de polygones autour d'un nœud. Elle est sous-tendue pour E2 par l'image de l'arbre et nous retrouvons donc au total pour ce groupe les 3 pistes anticipées pour cette recherche. E2 en charge des associations de 3 polygones identifiera :

3 fois le même	$\longrightarrow$ hexagones
2 différents	$\longrightarrow$ Triangle + 12c (x2)
	$\longrightarrow$ Carré + 8c (x2)
	$\longrightarrow$ 10c + 5c (x2)

Il se libère de la contrainte (plutôt portée par E9) liée au pentagone. E9 en charge de l'association de 4 polygones obtiendra : - 4 carrés - 2 triangles et 2 hexagones - 2 carrés, 1 triangle, 1 hexagone.

La temps de rédaction de l'affiche permettra de stabiliser certains résultats, de clarifier certains énoncés :

- E2 : « c'te truc c'était faux avec les diviseurs, comme on m'écoute jamais »

- La limitation à 150 est rejetée : « après on garde 150 - ouais - non, sinon ça tiens plus - t'en as trouvé un à 150 toi - oui j'crois. ». Le complément de recherche de E2 l'oblige donc à revoir ce point de la théorie.

Cette rédaction ne permettra pas de mettre en évidence les avancées dans les méthodes construites et pourtant opératoires, ni de pointer des pistes manquantes (plusieurs assemblages possibles par exemple avec (3,3,4,3,4), nécessité de considérer un point de vue global).

Nous proposons aussi quelques éléments descriptifs pour les groupes D et E.

3. Groupe D :

Le groupe D poursuit sa recherche en associant désormais deux polygones et en testant la validité des assemblages sur la somme des angles et le fait que chaque angle soit un diviseur de 360. Mais les constructions obtenues, par exemple celles visibles sur les cahiers de E5 et E15 (assemblage (6,4,3,4) sur Figure 8.4), sont aussi testées globalement :
Ainsi l'étude de cette figure produira l'échange suivant :

> E15 : Donc là du coup ça voudrait dire ... Ouais non mais attends, en gros, là faut remettre un carré, et là si on fait notre hexagone ...
>
> E5 : C'est pas trop la même taille, mais ...
>
> E15 : Faut regarder si ... 1, 2, 3, 4, 5. 1, 2, 3, 4. Ça va pas.
>
> E5 : Pourquoi ?
>
> E15 : Ici, on a 1, 2, 3, 4, 5 polygones sur un point. Et là, si tu regardes ici, t'en as 1, 2, 3, 4, sur un point aussi. Et il faut qu'il y ait le même nombre de polygones.
>
> E5 : Ah ça. J'avais oublié ce détail. Heu, mais ...

On retrouve également dans les échanges la difficulté avec le pentagone, toutefois pas totalement rédhibitoire :

> E8 : Avec un polygone à 5 cotés euh, ça marche jamais, même si ...
>
> E15 : Ben c'est vrai que ça a pas l'air de bien marcher, non.
>
> E8 : Et si on met un polygone à 5 côtés plus un carré ?

Par contre la réduction aux diviseurs de 360 est clarifiée par E15. Pour ce groupe elle était clairement issue du début de la recherche avec l'étude d'expressions littérales ($\alpha \times n = 360$) mais tombe à ce moment :

Extrait du cahier de E5 Extrait du cahier de E15

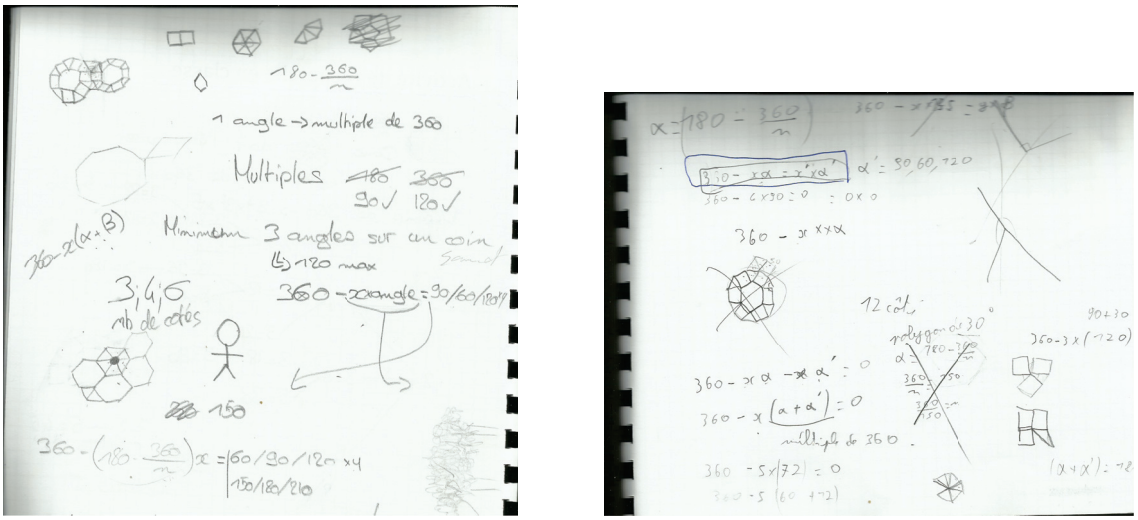


Figure 8.4 – Production partielle de E5 et E15

E8 : Dans tous les cas faut que ce soit des diviseurs de 360. C'est obligé de toute façon. C'est un polygone régulier.

E15 : Il faut ... Non, parce qu'il peut y avoir un deuxième angle. Et il faut que la somme des deux, à la fin il faut qu'on arrive toujours à 360. Après ça peut être composé par deux.

Les premières expressions « semi-littérales » apparaissent :

$$360 - (180 - \frac{360}{n})x = 60/90/120/150/180/210.$$

Elles évoluent et le groupe manipule désormais des légisignes symboliques argumentaux. Des expressions du type $360 - x\alpha - x'\alpha' = 0$ (Figure 8.4) relèvent dans le milieu de référence d'une double dimension sémantique, en décrivant la démarche, et syntaxique permettant jeu avec les variables et par exemple transformation et retour au sens [10] :

$$360 - x\alpha - x\alpha' = 0$$
$$360 - x(\alpha + \alpha') = 0$$

et conclusion sur $(\alpha + \alpha')$.

La recherche se poursuit tout d'abord en testant la formule sur des cas simple $\alpha = 135$, puis *a priori* simple :

E15 : Bon euh ... 10 côtés. 180 moins 36 ? Ça fait cent ... 144 ?

...

E8 : 216.

E15 : 216, comment est-ce qu'on pourrait le composer ? 216 on peut pas. Parce qu'il faudrait mettre des mesures d'angles qui soient, qui fassent euh, ...

E5 : 108 c'est heu, un polygone à 5 côtés. Régulier, 108 ça fait 2 polygones.

E15 : Ça fait 2 fois 108 ? Donc ça veut dire que si on a un décagone, on peut mettre deux figures à 5 cotés autour. Les 5 côtés c'est un peu bizarre mais ...

10. Nous reviendrons plus loin sur cette transformation qui accompagne la survenue d'une nouvelle démarche.

Le pentagone est finalement accepté et l'extension testée, sur une construction de E5 :

E15 : En fait là ça va pas marcher. On arrive à 396.
E5 : Ça marchera pas.
E5 : Si tu mets 10 ... Là tu seras obligé d'mettre un 5, et après ...
...
E15 : Donc notre condition, elle est nécessaire mais pas suffisante.
E8 : C'est-à-dire ?
E15 : Ben faut qu'il y ait ça d'validé pour que ça fonctionne, mais si y'a ça d'validé ça fonctionne pas à tous les coups.

Cette découverte déstabilise un temps le groupe qui abandonne temporairement les tests. L'utilisation de trois polygones, évoquée précédemment, est relancée par E8, E15 se projette rapidement :

Si jamais on prend 3 polygones, ça voudrait ... De toute façon la base c'est la même. On part d'un truc comme ça, ... Et après on essaye de composer avec ce qui nous reste.

Mais le cas 2 figures n'ayant pas fait l'objet d'un aboutissement, la complexité apparaît trop grande :

E5 : J'pense que 3 figures ça va être chaud hein.
E15 : 3 figures euh, ça m'paraît compliqué.
E5 : Parce que 3 figures après on s'retrouve comme ça avec euh trop ... Trop d'figures sur un seul angle.

Le groupe tente de se tourner vers l'usage d'un LGD embarqué sur calculatrice. La manipulation bien qu'ayant pris du temps, ne permet pas l'obtention de résultats. E15 propose alors une nouvelle attaque, explicitée ici dans un échange avec P :

E15 : En fait j'pensais qu'sur un même point, vu qu'on doit avoir l'même nombre de euh, de figures sur un même point...
P : Moui.
E15 : ... On prend le même nombre de figures ... Euh, c'est-à-dire que si on a 3, si on a 3 d'une figure et une de l'autre ça va marcher peut être une fois les autres coups ça devrait pas fonctionner. Après pour le justifier j'vais avoir un p'tit peu d'mal. Et du coup euh, j'ai donné la règle, 360 moins le nombre de côtés fois la somme des angles, qui est sensé donner 0. Mais euh, après j'trouvais pas euh, j'arrivais pas à trouver d'exemples.
P : Alors 360 moins ?
E15 : Moins euh, ça c'est le nombre de côtés, multiplié par la somme des angles des différents polygones, ...
P : Oui.
E15 : C'est sensé donner zéro.
P : D'accord
...
P : Donc en fait tu détermines tous ceux où y'aurait le même nombre ... Où y'a, en fait y'a deux types de polygones, un alpha et un alpha prime, ...
E15 : Oui.
P : Et tu détermines tous ceux, où y'a l'même nombre de alpha que de alpha prime.

Cette démarche se construit en appui sur la transformation de l'expression littérale vue précédemment :
$360 - x\alpha - x\alpha' = 0$
$360 - x(\alpha + \alpha') = 0$
Arrivée tardivement, elle ne se développera pas vraiment avant le temps de rédaction de l'affiche.

Phase 10 : Présentation des travaux des groupes - Débats sur les présentations

Nous reprenons ici quelques éléments des présentations des groupes D, E, A, B dans l'ordre de passage, choisi par P. Nous renvoyons aux affiches (cf. annexe G.5) pour une référence visuelle aux propos tenus.

— **Groupe D**

E8 : Déjà on a trouvé que la somme des angles au point de concours est égale à 360°.

La formulation pourrait laisser imaginer que l'énoncé n'est ici que le résultat d'un constat. Or pour les autres membres du groupe l'énoncé « Dans un pavage la somme des angles au point de concours est égale à 360° » est un des axiomes de la théorie qui permet l'action dans un registre formel. Pour un certain nombre d'élèves on peut sans doute le considérer comme tel.

E8 : Et qu'y avait au minimum trois polygones par sommet.
P : Donc pourquoi y a trois polygones pas sommet.
E15 : Parce que s'il y en avait deux ça pourrait pas s'étendre à l'infini.
E13 intervenant : On obtiendrait des angles de 180°.
P : S'il y en avait deux quoi ?
E15 : On obtiendrait des angles de 180° pour pouvoir faire 360 et du coup on arriverait, ça donnerait pas de polygones.
P : OK.

Le fait que deux polygones ne suffisent pas pour paver le plan est un savoir qui est partagé par tous. Les arguments sont peu formalisés. Avec l'aide de E13, E15 produit une ébauche de raisonnement par l'absurde mais qui, en l'absence de formalisation, reste incertain. On peut constater que l'ensemble des polygones considérés ne s'étend pas aux polygones non convexes.

E15 : Donc après on est parti sur le principe que la somme des angles faisait 360 ° et du coup sur un seul, si on considère un seul type de polygone pour avoir 360° il faut que le nombre de polygones au point de concours ça soit un ça soit 3, 4 ou 6 côtés, ce qui nous donne des angles de 60, 90 et 120°, c'est des diviseurs de 360 et on a trouvé que c'est les seuls qui fonctionnaient. Pour un seul type de polygones.
P : Pour un seul type de polygone.
E15 : c'est-à-dire que des triangles, que des carrés, que des hexagones.
P : OK.

La formulation de E15 reste floue sur le statut des propositions. Le lien entre la condition autour d'un nœud et les diviseurs de 360 n'est pas explicite. P mène ce temps essentiellement pour mettre en évidence les productions et n'insiste pas ici pour tenter de faire émerger une preuve plus formalisée. Or sur le cahier de E15 une étape supplémentaire

était présente sous la forme « $\alpha \times n = 360$, α et n diviseurs de 360. » Avec à disposition une liste des mesures des angles des polygones réguliers, il manquait peu pour faire émerger une preuve plus formelle. A part pour les membres du groupe C, le fait, même mal étayé, qu'il n'existe que 3 pavages réguliers du plan, semble être un savoir désormais disponible.

E5 : Donc après on a fait pour deux formes, c'est juste une hypothèse, on a pas pu la vérifier, on a mis que, pour, au départ un polygone régulier l'angle ça dépend du nombre de côté, comme on a vu dans le DM, donc la mesure d'angle c'est 180 - 360 sur n et ça fois x c'est combien on en mettait à côté pour un seul sommet, donc 360 moins ça ça devait donner un des trois polygones qu'on a donné ici 3,4 ou 6 donc 90, 60 ou 120 et si on met plusieurs c'est fois y.

E10 : c'est des y à droite ?

E5 : Ouais c'est un y donc par exemple avec un hexagone, 120 d'angle, ça c'est égal à 120, on en a 2 ...

E5 illustre alors la méthode sur l'obtention du pavage (3,6,3,6).

P : Vous avez dit que c'était une hypothèse, si on trouve des valeurs qui vérifient cette équation vous êtes surs que ça fait un pavage ?

P semble tenter de faire émerger la condition globale au-delà de la condition autour d'un nœud.

E15 : Normalement, dans ce qu'on a testé ...

E5 : après faut juste les placer correctement ... si on les place pas correctement ça risque de pas marcher.

P : OK ... est-ce que vous avez des questions les autres ?

Les réponses de E15 et E5 ne vont pas dans le sens attendu. P questionnera à nouveau E15 lors d'une synthèse rapide après les présentations. E15, qui connaît cette autre condition nécessaire, la formulera à ce moment là.

— **Groupe E**

Le groupe E liste l'ensemble des points de l'affiche. P demande une clarification de la méthode. E4, précise que le groupe n'a pas trouvé de formules et a procédé par exhibition d'exemple. Là encore n'apparaissent pas des résultats beaucoup plus fins du groupe, par exemple l'encadrement des valeurs de α_n initiant la preuve pour les pavages réguliers et qui a pourtant été développé :

E14 : En fait il faut utiliser trois trucs ... pour décomposer ton cercle on va dire, y te faut au moins trois machins.

E16 : Ouais.

E14 : parce que si t'en a que deux ça fait, ça fait comme ça, enfin tu vois et puis il faut forcément que t'en aies trois ... et du coup ça veut dire que au maximum ton truc il fait 360 divisé par 3.

E12 : Ça veut dire que ça marche pas pour les 8 et 9.

E14 : Ça fait 120 et ...

...

E14 : Tout ce qui est au-dessus de 120 tu t'en fous.

...

E4 : C'est 60 hein le premier polygone, donc en tous cas en dessous de 120, ce sera 108, 90 ou 60

E12 : Donc c'est de 3 à 6.

Ainsi il existe ici, pour tous les membres du groupe, un savoir beaucoup plus complexe que la simple liste des pavages réguliers. Par contre, ce qui est bien mis en évidence c'est la limitation aux entiers de la recherche qui suivra :

E4 On n'a pris que les angles exacts, enfin ...
P : Que les angles à valeurs.
E4 : Exactes.
P : Non.
E4 : Entières.
P : Entières, je pense que c'est ce que vous vouliez dire.
P : Et pourquoi vous avez pris que les angles à valeurs entières ?
E14 : Ça nous paraissait trop compliqué sinon.
P : OK.

— **Groupe A**

E13 reprend la condition autour d'un nœud et la minoration du nombre de polygones puis présente l'équation proposée en précisant que les angles sont obtenus en considérant des nombres de côtés diviseurs de 360, sauf 360, après considérations du fait que c'était le cas pour tous les pavages exhibés. Le groupe termine en explicitant la recherche de régularité et l'insuccès de ces recherches. La présentation se termine par le rajout sur l'affiche, à la demande de P, des candidats (24,8,3), (12,6,4), (8,8,4), (15,5,3), issus des dernières recherches.
P insiste ensuite sur la démarche portant la recherche de candidats et la conjecture du groupe « Les deux plus petits sont des diviseurs du plus grand ».

— **Groupe B**

E2 reprend à nouveau la condition autour d'un nœud puis
E2 : on a trouvé qu'il devait y avoir 3 polygones minimum par sommet et 6 maximum.
P : 6 maximum c'est pas, 3 par sommet ça été expliqué mais 6 par sommet au maximum ça a pas été expliqué.
E2 : C'est parce que, les plus petits polygones avec les angles les plus petits c'est les triangles avec 60° et on peut en mettre que 6 par euh sommet donc ça fait 360.

E2 exprime une nouvelle condition nécessaire et borne le nombre de polygones. Un nouveau savoir émerge ici. La suite de la présentation est réalisée par E19, qui comme on a pu le constater a eu une implication aléatoire avec d'importantes difficultés de concentration.

E19 : Le premier cas c'est un pavage avec des polygones qui sont tous identiques, après vu que y a que trois polygones euh y a au moins trois polygones par sommet on divise 360 par 3 ça donne 120 déjà l'angle d'un sommet il est forcément plus petit que 120 et après pour mesurer un angle avec la formule du DM on a fait une hypothèse que le résultat qu'on obtenait ça devait être un diviseur de 360 pour que ça marche. Et ça marche avec un carré, un triangle et un hexagone.
P : Et c'était une hypothèse ou une conclusion ?
E19 : J'en sais rien.
P : Non, si vous en êtes surs que c'est forcément un diviseur de 360 ou est-ce que c'est ...

E19 : Maxime ouais.

P insiste à nouveau, mais E19 n'apporte pas d'autres éléments. Il n'y aura ainsi pas plus d'explicitation concernant les pavages réguliers. C'est à E9 de prendre la parole.

E9 : On a essayé avec le cas où il y avait deux polygones différents et on n'a pas trouvé une loi générale pour ça et on a juste on a juste trouvé qu'on pouvait mettre deux octogones avec deux carrés, deux carrés avec trois triangles, puis deux hexagones avec deux triangles et pis ben après on a trouvé l'équation en reprenant le tableau qu'y avait dans le DM, on a repris tous les nombres entiers qu'y avait dans le tableau et pis on a mis des coefficients genre a, b, c , d côtés.

P : Bon, ça correspond à quoi alors a, b, c, d ... ben a par exemple c'est ...

E9 : C'est le nombre de triangles qu'y a sur ce sommet.

P : Bon OK, qui peut être éventuellement 0 ?

E9 : ouais et pis 90 pour un carré, 120 c'est pour un hexagone et pis le tout c'est égal à 360 parce que la somme des angles ça vaut 360 par sommet.

P : Et puis après cette équation vous êtes restés bloqués.
E19 : On est allés en pause.
P : OK, est-ce que vous avez des questions les autres ? Bon ben merci.

— **Synthèse par P**

Il reste 5 minutes à P pour faire une reprise. La première partie de ce temps est consacrée au recueil des candidats-pavages produits par l'ensemble des groupes. Voici la liste obtenue, avec la notation reprise des élèves par l'enseignante : (3,3,3,3,3,3), (4,4,4,4), (6,6,6,6), (24,8,3), (15,5,3), (12,8,4), (8,8,4), (12,12,3), (10,5,5), (12,6,4), (6,6,3,3), (4,4,3,3,3). Cette liste mélange dans un premier temps des candidats pavages qui pourront être éliminés par CN2 et des candidats qui devront être discriminés par la possibilité d'extension. Le candidat (15,5,3) est éliminé par les membres du groupe 1 sur la sollicitation de P, sans que ce cas fasse l'objet d'une présentation détaillée. Par ailleurs la notation ordonnée, reprise sans analyse critique, masque jusqu'au bout la diversité des possibilités d'assemblage. Ce point ne fait pas l'objet de débat.
Cette liste ne contient pas tous les assemblages vérifiant CN2 mais tous ceux qui potentiellement amèneront les 11 pavages archimédiens, à l'exception de (6,4,3,4) produit par le groupe D dans la recherche mais exclus dans la tentative d'extension. P cherche tout d'abord à faire réagir les élèves sur cette possibilité :

P : Donc ça nous en fait quand même une liste. Est-ce que ? En fait comment vous avez établi cette liste ? Vous avez vérifié avec votre calculatrice que ça faisait bien 360°, en utilisant le tableau. Qu'est-ce qui nous reste à vérifier ? Pour être surs que ça marche bien ?

20 L'équation.

21 P : Alors l'équation on peut supposer que vous l'avez vérifiée comme il faut, chacun ...

E13 : La somme de tous les angles.

P : Donc la somme de tous les angles fait bien 360 pour ceux-ci. Qu'est ce qui reste à vérifier ? Thimotée ?

E15 : ...

E13 : La longueur des côtés.

P : Pour être sur que ce soit un pavage archimédien, qu'est-ce qui reste à vérifier ?

E13 : Faut pas que ça se superpose.

E15 : Que ça puisse se continuer.

Toutes les conditions nécessaires, sous différentes formes, apparaissent donc avec en dernier celle attendue par P. P ne s'attarde pas non plus sur ce point et engage les échanges sur la question de l'exhaustivité :

P : Que ça puisse se continuer à l'infini, parce que rien ne dit que puisque ça marche bien autour d'un sommet quand on veut l'étendre ça fonctionne bien donc d'ailleurs, vous nous en avez pas parlé, mais vous aviez fait un dessin qui posait un problème à ce niveau là ... et puis y reste quand même une grosse question par rapport à la question initiale c'est ?

Plusieurs élèves : Est-ce qu'on les a tous ?

P : Voilà, tous, le problème est le problème du tous. Alors après sur vos équations, euh vous avez tous, les deux groupes vous avez quasiment tous la même équation sauf que dans ce groupe là, vous n'avez mis que des mesures entières.

E2 : Parce qu'on a oublié.

P : Alors que dans ce groupe là y a des 900 sur 7 qui apparaissent.

E13 : Parce que nous on a considéré que c'étaient des diviseurs de 360 en fait qui composaient, enfin les polygones qui pouvaient éventuellement faire le pavage c'étaient des euh des polygones euh dont la forme des côtés euh dont le nombre de côtés était diviseur de 360.

E20 : alors que eux ils ont émis l'hypothèse que c'était euh la valeur de ces angles qui était un diviseur de 360.

P : Donc pour l'instant vous êtes restés les deux à des stades d'hypothèse.

E20 : Oui.

E9 : Euh oui.

P : Et puis il va falloir trouver un moyen de trouver la liste de toutes les réponses possibles à cette équation.

Un élève : Internet.

P : Internet ça pourrait être une solution qui vous donnera la réponse vraisemblablement si vous savez taper le bon critère de recherche mais vous pouvez aussi essayer de les déterminer par une autre façon mais il faut vous organiser pour les déterminer. Donc y a quelque chose que ici qui est intéressant et qui est pas sorti pour les autres c'était l'histoire que vous avez au plus 6.

...

P : Ouais donc du coup ça veut dire que vous avez mis des trois petits points sur vos équations mais finalement elles sont peut-être pas si compliquées que ça vos équations à résoudre.

Un élève du groupe A : On a mis des trois petits points parce qu'on a pas eu le temps de terminer.

P : Oui et puis parce que vos valeurs peuvent être nulles aussi.

Un élève du groupe A : Nos valeurs peuvent être égales à 0 quand y en a pas.

P : Donc ce qui vous manque en fait pour arriver à terminer c'est arriver à borner les choses c'est-à-dire ...

E13 : Mettre un intervalle.

P : Voilà à essayer de mettre des intervalles de façon à pas chercher une infinité de choses, OK.

La réduction du problème à l'ensemble des valeurs entières de n ou α_n, voire des diviseurs de 360, reste d'une part de l'ordre du geste inconscient, révélateur d'un rapport aux objets spécifique et d'autre part provient d'une généralisation abusive du cas des pavages

réguliers (avec en plus, pour le groupe A, une incompréhension entre E13 et E20). Elle est toujours présente à la fin de ce temps et les implicites (non tous connus par P) ne sont pas levés. P conclut sur l'idée de borner les recherches par l'encadrement du nombre de polygones autour d'un nœud, mais si la majoration du nombre de polygones autour d'un nœud a été explicité, la majoration du nombre de polygones différents, de n ou de α_n ne l'est pas.[11] L'expérimentation a montré que cette majoration n'émergeait pas aisément pour ces élèves. P conclut la séance sur cette idée d'intervalle.

Finalement

Cette phase de présentation et de débat permet de diffuser à l'ensemble des groupes des savoirs émergents dans les groupes. Certains de ces savoirs font accord (par exemple l'existence de 3 pavages réguliers), bien qu'ils ne soient pas, à ce moment, intégrés dans un savoir formalisé. D'autres (formules de décomposition additive) gardent un statut incertain, car en appui sur des « hypothèses », mais permettent un débat. Mais pour d'autres (tout assemblage autour d'un nœud valide ne permet pas de paver le plan), qui ont bien donné à E15 une maîtrise sur la situation, et même s'ils sont validés par P, leur intégration dans le répertoire de la classe est très relatif. Notons également qu'un certain nombre de savoirs ne sont pas mis au jour dans cette phase bien que pertinents, par exemple l'existence d'un assemblage (6,4,3,4) valide, la nature de n et α_n pour les pavages réguliers, l'initiation des démarches exhaustives du groupe B pour 2 ou 3 polygones, du groupe D avec une dimension syntaxique : $360 - x\alpha - x\alpha' = 0$...

Cette phase permet donc l'intégration dans le répertoire de la classe d'un certain nombre d'énoncés. Mais elle ne permet pas ici de statuer pour plusieurs d'entre eux et rencontre les difficultés bien connus de ce type d'exercice en termes de gestion des débats et des argumentations. Les débats lors de cette phase ne se sont pas engagés sur les questions de preuve alors que pour plusieurs énoncés des preuves étaient envisageables.

Phase 11 : Ostension de savoirs par l'enseignant

Pendant 10 minutes, lors de la séance suivante, P fait une revisite de la séance et présente, en appui sur un document de synthèse (cf. annexe G.4), deux démarches possibles pour obtenir l'exhaustivité. Le mode d'exposition et sa durée ne permettent pas d'observer des savoirs d'élèves, même si ceux précédemment évoqués sont repris, intégrés dans un réseau de preuves. Un bref échange suit sur les difficultés rencontrées et l'éventuelle frustration de ne pas avoir obtenu « le résultat » dans la durée imparti.

8.2.4 Premières conclusions sur la confrontation à la contingence

Nous donnons ici les premières conclusions relativement à l'expérimentation évoquée dans ce chapitre 8. Tout d'abord relativement aux choix faits concernant le milieu matériel et la familiarisation avec certains objets, ensuite du point de vue des savoirs potentiellement en jeu.

Construction de la situation objective

L'impact du devoir en temps libre : Le travail autour du devoir en temps libre visait la construction d'un milieu objectif suffisamment riche pour un engagement plus rapide durant la phase de recherche. Nous avons observé lors de la séance de recherche :

11. Il est possible d'envisager des raisonnements en appui sur des formulations comme « le plus grand angle possible est obtenu en association avec la plus petite somme supérieure à 180 » et sur une étude de cas limitée qui amène à considérer le triangle et l'heptagone et permet de majorer n par 42 (un refus de considérer l'heptagone amènerait à majorer n par 24).

- que la notion d'angle de polygone régulier convexe était disponible,

- que pour tous les membres des groupes A, B, D, E la formule donnant la mesure en degré de l'angle d'un n-gone régulier faisait parti du milieu objectif, avec toutefois un temps de retard pour les membres du groupe B,

- que chaque groupe utilise assez rapidement la liste des mesures en degré des angles des n-gones réguliers,

- que seul E2 a un regard distancié sur la nature des α_n mais que ceci ne permet ni de s'extraire de la mise à l'écart du pentagone, de l'heptagone ni d'emporter certaines décisions dans le groupe

Ce travail en amont sur les angles des n-gones réguliers est donc envisageable et permet en particulier l'introduction dans le milieu objectif d'une liste des mesures en degré des angles des n-gones réguliers. La forme retenue permet le travail de tous sur cette question contrairement à une institutionnalisation qui pourrait se faire à l'issue d'une première phase de recherche et en appui sur la production de certains groupes. On peut ici envisager que les savoirs sur les angles des polygones (en dehors de la question de la nature de la mesure en degré) sont effectifs et disponibles dans le cadre d'une SDRP sur les pavages. La dimension expérimentale pourra s'appuyer sur ces objets.

L'enrichissement du milieu par les planches de Dürer : Le constat, suite à l'introduction de cette ressource dans le milieu matériel et relativement aux attendus, est le suivant :

• Une élève particulièrement, a eu du mal à prendre le recul nécessaire en termes de chercheur qui dispose des productions de ses prédécesseurs et l'introduction de la ressource a été déstabilisatrice.

• La prise de recul par rapport à sa propre recherche se réalise, sauf pour les groupes les plus engagés dans des réflexions personnelles. Ainsi le déclenchement de la phase d'introduction du document est à affiner pour mieux prendre en compte l'état d'avancement de chaque groupe. Il serait pertinent de retarder l'introduction de la ressource pour les groupes actifs et particulièrement ceux travaillant sur les seuls pavages réguliers (Ici groupe B et D). La question de la différenciation de cette introduction est à envisager en préservant la qualité de cette introduction auprès de chaque groupe.

• Le questionnement sur CN2 n'est pas facilité et l'engagement dans une démarche numérique n'est pas accéléré. De ce point de vue, il peut être envisagé de retarder également l'introduction de la ressource à un temps où un travail à partir d'une liste des mesures d'angle est observable. Un équilibre est ici à trouver entre une introduction trop précoce qui ne permet pas la possibilité d'une réflexion lors de la synthèse sur des validations numériques et une introduction trop tardive qui ne serait que de peu d'utilité en particulier pour des groupes en difficulté. Du point de vue de la gestion par l'enseignant, la question est posée de la validation ou non de chaque proposition de Dürer, et si la validation est retenue à quel moment cela doit-il se faire et par qui.

• L'identification de pavages non réguliers est effective, les échanges sur les pavages non stricts et non archimédiens également. Dans cette mise en œuvre, P a renvoyé la validation du pavage (3,6,3,6) au travail des groupes alors que seul E2 doutait. Il semble ici possible d'aller plus loin, et de réaliser un travail sur les énoncés avec une grande majorité d'élèves.

• La ressource permet de se soustraire du besoin de validation graphique mais le statut de certaines figures reste incertain pour beaucoup. Le passage au numérique est ici insuffisamment présent pour trancher clairement le cas du pavage avec des triangles et des hexagones.

L'introduction de cette ressource peut donc être retenue par sa contribution à la création d'un milieu objectif permettant la construction du problème. La gestion de cette introduction et de la phase de synthèse qui suit la première étude de ces planches doit, quant à elle, mieux

prendre en compte les élaborations des élèves.

Les relations aux objets manipulés

Nous reviendrons dans le chapitre suivant sur ces relations qui, même si elles peuvent apparaître pour une part similaire, sont toujours de l'ordre de la relation personnelle dans l'action. Mettons ici à nouveau en évidence les principaux objets ayant fait l'objet d'une relation remarquable :

- Les entiers vs les non entiers.
- Le pentagone, premier polygone régulier dont la mesure de l'angle en degré n'est pas entière et premier polygone dont la construction à la règle et au compas n'est pas maîtrisée.
- L'heptagone et tous les polygones dont la mesure de l'angle en degré n'est pas entière.

Ces relations sont particulièrement sensibles du fait de l'importance dans la situation proposée de la dimension expérimentale. Sur ce dernier point, plusieurs exemples ont été rencontrés. Rappelons, par exemple, les échanges de E5 et E15, qui après avoir établi CN2, continuent à structurer l'objet pavage archimédien en appui sur la manipulation du candidat pavage (5,5,10) et des polygones à 5 et 10 côtés et constatent :

> E15 : En fait là ça va pas marcher. On arrive à 396.
> E5 : Ça marchera pas.
> E5 : Si tu mets 10 ... Là tu seras obligé d'mettre un 5, et après ...
> ...
> E15 : Donc notre condition, elle est nécessaire mais pas suffisante.

Les savoirs potentiellement en jeu

Dans cette instance de la SDRP, en dehors du groupe C pour laquelle elle est plus incertaine, la dévolution du problème et des savoirs en jeu est effective. Tous les élèves ont envisagé les enjeux et tout ou partie des objets en jeu. A l'exception notable de la dimension globale du problème qui n'est cette fois identifiée que par un seul groupe. Il est certain que la disponibilité dans le milieu de la liste des mesures des angles a orienté les recherches sur des questions numériques. L'étude des dimensions locales syntaxiques et globales s'en sont trouvées réduites.

Comme nous l'avons également signalé, il n'est pas suffisant de s'appuyer sur les affiches et les présentations des élèves pour identifier les savoirs des élèves à l'issue de la séance de recherche. Plus globalement c'est même la phase 10 qui est ici décevante en termes de synthèse sur les savoirs des élèves à ce moment là. La gestion du temps ne permet pas à P de travailler sur l'explicitation de certains savoirs, ni à leur intégration dans un réseau de savoirs par l'intermédiaire de la preuve, et ceci indépendamment de la difficulté à identifier certains savoirs des élèves. Par ailleurs ce temps, initialement prévu de 35 minutes, doit aussi permettre de travailler sur des énoncés qui sont clairement pour plusieurs élèves des savoirs, et qui pour une part étaient connus de P. Ainsi la relation $360 - x\alpha - x\alpha' = 0$ était pour E5 et E15 un savoir permettant la maîtrise de l'action sur les objets et il est notable qu'une étude même maladroite permet alors de conclure pour les assemblages avec deux types de polygones.

Les savoirs identifiés dans l'analyse *a priori* sont donc à nouveau majoritairement présents mais de façon inégale suivant les groupes.

Similarité, juxtaposition ou complémentarité des sémioses

Nous avions fait, particulièrement dans EP2, le constat du développement possible de deux sémioses parallèles qui, tout en explorant le même objet, semblaient disjointes au point d'engendrer une difficulté dans les échanges lors de la mise en commun. Mais nous avions dans

le même temps, signalé la richesse potentielle de cet état de fait. L'adaptation de la situation pour la dernière mise en œuvre a tenté de préserver cette richesse potentielle tout en facilitant la rencontre de sémioses trop parallèles. Le succès est mitigé, essentiellement du fait de la précocité de lancement du temps facilitant la rencontre. Bien que nous n'ayons pas de certitude sur ce point, une introduction plus tardive aurait peut-être eu une influence sur l'apparition de formalisations plus abouties. Il est nécessaire d'avoir une vigilance accrue sur ce point du scénario.

Mais par ailleurs nous constatons également, et particulièrement dans cette dernière expérimentation, une convergence qui rend possible le débat. Des échanges permettent, par exemple, de comparer certains éléments des équations obtenues dans les groupes A, B et D. Dans tous les cas, la construction de la tâche, puis du problème contribuent à la définition d'un but commun et les groupes contribuent à l'avancée de la recherche sur un objet commun par des productions de signes complémentaires, parfois redondants mais non contradictoires.

Conclusion

Rappelons qu'il n'est pas envisageable que les élèves aient une maîtrise complète de l'objet pavage archimédien à la fin de la SDRP. Nous venons de tester à nouveau, dans cette instance, les résistances dans l'avancée de l'exploration de l'objet. Dans cette nouvelles expérimentation, deux groupes ont avancé dans l'étude d'un sous-problème formalisé sous la forme d'une question à deux variables. C'est une des avancées importantes du point de vue du problème rencontrées dans nos expérimentations en terminale. La question générale, à plusieurs variables, nécessite un travail de majoration, qui a débuté ici, mais n'a pas fait l'objet de développements.

Ceci étant rappelé, nous pouvons considérer que le modèle SDRP n'est pas falsifié par la confrontation à la contingence, ni sur la dimension de l'engagement dans la résolution du problème proposé et de la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux.

Plusieurs de nos critères à l'étude sont donc ainsi vérifiés. Pour étudier plus finement les genèses nous voudrions, dans un dernier chapitre, revenir sur l'étude d'une évolution sémiotique, celle associée à l'activité de E15.

Chapitre 9

Un exemple de sémiose

Sommaire

9.1 Retour sur la genèse des pavages archimédiens par E15 : Thimotée 239
9.1.1 Une sémiose partielle 240
9.1.2 L'enrichissement du signe initial 242
9.2 Enseignements d'une étude singulière de la genèse de l'objet pavage archimédien par E15 243

Nous enrichissons les apports du chapitre 8 par un exemple d'étude d'un processus sémiotique, soit l'analyse *a posteriori* de la sémiose que développe E15 lors de la séance de recherche. En réalité, une analyse sémiotique complète est impossible ici, nous proposons donc plutôt une utilisation de la sémiotique pour l'analyse de certains temps de la construction de E15. Cette analyse s'appuie sur les éléments de sémiotique déjà présentés et en partie sur le modèle milieux/répertoire/symboles de Bloch et Gibel.

9.1 Retour sur la genèse des pavages archimédiens par E15 : Thimotée

E15 est un élève d'option SI. Lors du devoir en temps libre, E15, produit des raisonnements souvent pertinents, sauf pour les questions 2.1.1 et 2.1.2, où la rédaction laisse une incertitude sur le raisonnement, et pour la caractérisation des α_n décimaux, qui révèle là une réelle difficulté.

Comme réponse à la question 2.2.1, il a dressé un tableau (Cf. Tableau 9.1). E15 propose donc des valeurs exactes pour les α_n entiers et des écritures décimales avec un chiffre après la virgule pour toutes les valeurs non entières. E15, à une exception près, respecte les règles d'arrondis au dixième le plus proche, ce qui montre une aisance suffisante pour qu'on puisse estimer qu'il sait faire la différence entre valeur exacte et valeur approchée.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$(\alpha_n)_{n\geq 3}$	60	90	108	120	128,57	135	140	144	147,3	150	152,3
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
154,3	156	157,5	158,3	160	161,1	162	162,9	163,6	164,4	165	165,6

TABLE 9.1 – Tableau proposé par E15 pour la réponse à la question 2.2.1

On peut donc estimer qu'il a différencié les entiers, les décimaux avec une partie décimale finie et les autres nombres. Mais ce qui apparaît c'est une confusion entre nombre décimal et

nombre non entier. Ceci est confirmé par la réponse à la question 2.3.2 quand, pour caractériser les valeurs de α_n décimales, E15 se contente de répondre qu'il suffit que n ne soit pas un diviseur de 360. Dans une correction (en vert sur le cahier de travail) E15 précise également, « nombre décimal = nombre fini », ce qui laisse supposer que pour E15, jusqu'à présent, un nombre décimal n'avait pas nécessairement une partie décimale finie.

9.1.1 Une sémiose partielle

Considérons maintenant l'engagement dans la séance de recherche. Lors du lancement de la séance par P, E15 n'est pas sollicité et n'intervient pas, on ne peut donc avoir accès aux tous premiers signes que suscite chez E15 la projection de l'énoncé du problème. Les premiers signes auxquels nous avons accès sont ceux que nous montre la vidéo du groupe. Et plus particulièrement les images de la main droite de E15, alors que E15 réfléchit, le front posé sur sa main gauche, elle-même posée sur la table. On observe alors très nettement la main qui, armée d'un stylo, mine rentrée, décrit des intersections et des angles, tels ceux que l'on pourra observer ultérieurement sur le cahier de travail (cf. Figure 8.4, partie en haut à droite). On peut ainsi envisager un premier qualisigne iconique rhématique qui se traduit en un sinsigne, le geste de la main. L'intuition du pavage est donc très rapidement présente et se traduit par ce sinsigne, icône du nœud d'un pavage. On peut noter que ce premier signe renvoie une image locale du pavage et non une image globale, comme on a pu le constater, par exemple, pour E2 et son image de carrelage.

Pour E15, le signe suivant est déjà un légisigne symbolique rhématique. Il s'agit d'une écriture, encadrée, en haut à gauche de la première des trois pages de de son cahier de travail consacrées à la recherche :

$$\boxed{\sum \text{angl} = 360}$$

C'est un légisigne car E15 se réfère aux « mots » du langage conventionnel mathématique. C'est un symbole car il renvoie à l'objet en construction en vertu d'une loi, loi qui pour E15 émerge immédiatement. Nous le qualifions ici de rhématique en le voyant comme un possible (statut confirmé par le point d'interrogation à droite de l'encadrement), un signe non encore intégré dans une discussion sur sa valeur de vérité ou dans un raisonnement sur les raisons de sa vérité.

Toujours dans le temps de recherche individuel, E15 produit à droite du premier légisigne, des croquis : association de 4 carrés, de 6 triangles, de formes hexagonales mais avec une juxtaposition confuse, de 2 pentagones, de 2 octogones avec un essai d'association d'un troisième. Quel est le signe global ainsi en cours de développement ? Que nous dit-il du raisonnement en cours ?

Ces croquis, ici indices car la question de leur vérité est posée, sont la marque de passage du légisigne symbolique rhématique au légisigne symbolique dicent, et bientôt argumental. En appui sur des objets plus ou moins familiers, E15 fonde une valeur de vérité pour ce signe. Alors que l'intuition portait le premier signe, c'est désormais l'expérience sur les objets qui permet l'évolution du signe. Cette expérience amène d'ailleurs une double évolution : la valeur de vérité du signe se fixe et le signe devient le cadre potentiel d'une action sur les objets familiers. Plus précisément, l'action, désormais inscrite dans la théorie portée par le signe, peut être régie par ce signe. Ces deux dimensions se traduisent sur la page de travail par l'apparition, l'un sous l'autre, de deux « sous-signes » :

- un qui utilise le registre numérique (60° 6× triangl equi)
- et d'une formule à nouveau encadrée : $\boxed{\text{chaque angl} = \dfrac{360}{\text{nbr de pt de contact}}}$

La dimension numérique semble être présente pour montrer le passage à la valeur vraie du signe initial et permettre sa transformation en un légisigne symbolique argumental susceptible de transformations dans le cadre conventionnel.

Il est notable que dans cette dimension de recherche du sens, la syntaxe soit mixte et non encore complètement mathématique. Les dimensions sémantique et syntaxique s'articulent y compris dans le representamen.

Ce début de sémiose montre l'évolution très rapide du signe et traduit du point de vue didactique une dévolution aussi rapide. E15 confirme ce point dans des réponses à un court questionnaire (cf. annexe G.9).

> 1. L'énoncé du problème proposé était-il clair ? Avez-vous rapidement compris ce qu'il fallait chercher ?
>
> Oui
>
> 2. Pendant la recherche individuelle, quelles sont les premières idées que vous avez eues ?
>
> La somme des angles en un point était de 360 degrés le pavage était composé d'un seul type de polygone régulier.

Ce que pouvaient laisser voir les premiers croquis, mais dont nous ne pouvions avoir la certitude, c'est que le signe que développe E15, renvoie uniquement, pour le moment, aux pavages réguliers. Pour cette première approche de l'objet, E15 se positionne clairement dans le milieu de référence. Sans que les raisonnements soient de l'ordre de la formalisation dans un cadre mathématique, ils permettent de prendre des décisions sur l'objet en jeu. Le répertoire s'enrichit au niveau argumentaire et les premiers ostensifs sont organisés.

Le temps de recherche individuelle étant terminé, la suite du processus sémiotique se déroulera désormais dans les échanges avec E5 et E8. Nous rappelons tout d'abord le point détaillé dans le chapitre 8, sur l'émergence avortée d'un signe, la tentative de construction au rapporteur du pentagone régulier. Pour mieux comprendre cet événement nous pouvons reprendre le texte que rédige E15 dans la réponse à la question 2.1.2 du devoir en temps libre :

> dans le figure 1.b, tout les triangles son isocèl en le centre du polygone. La somme des angles à la base représente un angle du polygone. $(180 - \frac{360}{n})n = 180n - 360$.
> La somme des angles du polygone est égale à $180n - 360$.

Ainsi le travail préliminaire de E15 ne garantissait pas la capacité à construire un pentagone à l'aide du rapporteur. Les raisonnements développés pour un temps vont alors se cantonner dans les niveaux R1.1, R2.1 et R3.1 du modèle milieux/répertoire/symboles (cf. Tableau 3.1). Il s'agit de tenter de reconstruire une méthode de détermination des mesures des angles et de questionner la notion de polygone constructible à la règle et au compas. Le travail sur le répertoire sera de l'ordre de l'utilisation ponctuelle de connaissances anciennes, de calculs et d'élaboration de conjectures ponctuelles. Mais les échanges n'aboutiront pas et l'ensemble des signes produits sera abandonné (et même gommés pour certains) malgré un appui sur la partie 3 du devoir en temps libre.

Il résultera de ce temps, comme nous l'avons signalé, un rapport particulier au pentagone qui rejoint, pour E15, la catégorie des polygones à statut particulier, à la marge du milieu objectif. L'autre aspect, c'est alors que l'appui aux signes graphiques est pour un temps repoussé et E15 produit alors une nouvelle forme du signe :

> $\alpha \times n = 360$
> α et n diviseur de 360

Cette forme du signe, plus aboutie que la précédente, est à nouveau testée à la demande de E5 et E8 sur des cas particuliers. Le test pour le décagone se fera sur le décagone de l'énoncé et la construction est visible sur le cahier de E8. Pour E15, il ne s'agit plus de remettre en cause cet énoncé, qui fait désormais partie du système organisateur des connaissances en jeu. Non seulement $\alpha \times n = 360$ mais E15 en déduit la nature des angles et prolonge sa recherche, après l'interruption par P introduisant les planches de Dürer, en produisant une liste (Tableau 9.2) et en discriminant les angles des polygones réguliers permettant les pavages réguliers.

1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18	20	24
30	36	40	45	$\boxed{60}$	72	$\boxed{90}$	$\boxed{120}$	180	360				

TABLE 9.2 – Liste des diviseurs de 360 discriminés

Le signe temporairement stabilisé, fait désormais office de règle qui permet la formalisation de preuves. C'est ainsi (cf. chapitre 8) qu'une majoration de la valeur de α_n pour les pavages réguliers pourra être obtenue et transférée au répertoire de la classe. Du point de vue du modèle milieux/répertoire/symbole le milieu est désormais le milieu de l'élève apprenant, de l'émergence des savoirs. Même si la formalisation n'est pas aboutie, les symboles permettent l'argumentation dans le champ arithmético-géométrique concerné. Mais la modification du milieu objectif, avec l'introduction par P du document contenant les planches de Dürer, va amener une nouvelle évolution du signe.

9.1.2 L'enrichissement du signe initial

L'introduction des planches de Dürer amène donc le groupe D à dépasser le cadre des pavages réguliers. Comme on a pu le constater, E15 peut s'appuyer sur les énoncés du répertoire préalablement construits mais également sur les conditions proposées par l'énoncé, dont la nécessaire similitude des nœuds. E15 rejette ainsi un candidat pavage dont l'extension provoquait une différence de nombres de polygones autour de deux nœuds. Ce retour au milieu objectif, et au niveau des indices, se fait en appui sur des polygones familiers dont ne fait pas partie à ce moment le pentagone.

Les objets familiers, E15 nous le précise ci-après (extrait de la réponse au questionnaire en annexe G.9), sont les objets qui vont à nouveau favoriser l'émergence de la théorie. Plus sophistiquée cette fois, ce ne sera pas une simple traduction de l'intuition, mais immédiatement un outil heuristique.

> 5. Quelle est la ou les bonnes idées qui vous ont le plus fait avancer ?
> Les angles des polygones doivent-être des diviseurs de 360, s'il y à 2 types de polygones, il y a forcément des triangles carrés et hexagones pour compléter.

Le signe produit, $\boxed{360 - x\alpha = x'\alpha'}$, $\alpha' = 90, 60, 120$, est un légisigne symbolique et la loi s'impose ici aux faits. L'intuition initiale, en appui sur les triangles, carrés et hexagones, sera finalement étendue et E15 propose donc un nouvel élément théorique, une équation à deux inconnues qui structure tout un pan de l'objet à explorer. Cette capacité à formaliser et à produire de tels signes permet à E15 d'initier une étude systématique. Et, comme nous l'avons constaté, la théorie intégrera cette fois le pentagone, même si « Les cinq côtés c'est un peu bizarre ». E15 semble prêt à investir le champ de la preuve formelle.

Mais l'élan théorique se trouve stoppé quand la considération du cas $x = 1$ et $\alpha = 144$ oblige à conclure au fait que la condition nécessaire initiale (CN2) n'est pas suffisante. Dans un processus de construction théorique cohérent, cette considération semble être pour E15 une remise en cause de la voie explorée. Elle amènera E15 à s'écarter de la recherche en cours et à explorer d'autres pistes plutôt qu'à poursuivre la systématisation. Parmi celles-ci, E15

manipulera la relation $360 - x\alpha = x'\alpha'$ [1] mais toujours avec une dimension sémantique en appui sur les polygones. Ainsi quand E15 transforme $360 - x\alpha = x'\alpha'$ en $360 - x\alpha - x\alpha' = 0$ puis en $360 - x(\alpha + \alpha')$, il n'est jamais dans la simple manipulation du signe mais toujours dans l'élaboration de conjectures étayées, dans une dimension organisatrice :

E15 : En fait j'pars du principe que, si on veut que en un point ...
E5 : Ouais.
E15 : ... Il y ait toujours ici par exemple 4 trucs, il faut qu'il y en ait 2 de chaque.
E5 : Pas forcément.
E15 : Pas forcément, il peut y avoir 3 et 1. Mais 3 et 1 c'est pas sur qu'il fonctionne après.
E5 : Non, ça va foirer.
E15 : Si on en a l'même nombre à chaque fois, ...
E5 : Ça marche.
E15 : ... Tu vas répéter exactement l'même modèle, juste décalé d'une rotation.
E5 : ...
E15 : Et une fois qu't'as décalé, tu retrouves la même chose.
E5 : Ouais.
E15 : Pour moi c'est un truc qui fonctionnerait.
E5 : Mais après faut savoir si c'est suffisant.

Les épisodes suivants porteront essentiellement sur la recherche d'exemples et la structuration de l'objet à explorer et n'enrichiront que modérément le signe produit par E15. Nous arrêtons donc ici l'analyse de cette élaboration.

9.2 Enseignements d'une étude singulière de la genèse de l'objet pavage archimédien par E15

Montrer des genèses du point de vue de la dimension expérimentale nécessite de mettre en évidence des allers-retours entre objets naturalisés et objets en cours de conceptualisation, entre une théorie en construction portant sur un objet nouveau et des actions sur les objets naturalisés. L'étude de la genèse réalisée par E15 tente ici d'identifier la structuration de l'objet pavage archimédien de la première intuition à un état avancé d'une théorie locale sur l'objet à savoir. L'approche sémiotique nous a permis en particulier de caractériser les premières étapes qui souvent ne sont pas identifiées. Même si le passage au légisigne est pour E15 rapide, nous avons ainsi pu mettre en évidence le passage du qualisigne iconique au sinsigne puis au légisigne symbolique. La construction du signe montre l'exploration de l'objet à savoir, l'évolution de la théorie le structurant. Dans cette évolution le rôle des objets naturalisés a été plusieurs fois mis en évidence. Ainsi, c'est de l'action de E15 sur les polygones qu'émerge, sans aucun doute, le légisigne symbolique « $360 - x\alpha = x'\alpha'$, ... ». Et alors, ce dernier oriente à son tour l'action sur les polygones qui produira à nouveau un résultat théorique. Ce sont donc bien des allers-retours que nous mettons en évidence, allers-retours qui lient les objets naturalisés et les nouveaux objets et dont l'origine se perd dans l'intuition initiale.

Le milieu matériel a ici joué le rôle attendu. Si dans notre première lecture de la situation, nous avions pu imaginer que la temporalité n'était pas favorable à la finalisation de l'étude des pavages réguliers, il s'avère que ce n'est pas le cas pour E15. E15 a en effet déterminé de

1. On peut rappeler qu'à ce niveau d'action d'après (Dondero, 2011, p.8) « Les formules algébriques, toujours selon Peirce, bien qu'elles soient constituées de symboles, c'est-à-dire de signes généraux qui ne se rapportent à leur objet qu'en vertu de conventions arbitraires, fonctionnent comme des icônes car c'est la constitution de formes qui leur offre une structure unitaire et perceptivement saisissable de la totalité des relations entre ces signes généraux eux-mêmes. »

façon certaine les trois pavages réguliers du plan, avant l'introduction des éléments l'amenant à poursuivre la généralisation. E15 agissant dans un milieu suffisamment riche, a développé une construction au gré des rétroactions du milieu qui n'ont ici jamais été contradictoires. E15 a produit des savoirs, qu'il a partagés avec E5 et E8, mais sans qu'un certain nombre d'entre eux puissent diffuser à l'ensemble de la classe.

Ce qui apparaît peu, ici, relativement au modèle milieux/répertoire/symboles, c'est une formalisation standard des raisonnements. Ces derniers se sont donc souvent restreints aux fonctions de R1.1 et R1.2, avec des incursions en R1.3. Pour autant E15 fait preuve d'une organisation telle que les éléments du système organisateur sont représentés sur le cahier de travail et ne demandent qu'à être formalisés. Les savoirs de E15 sur les pavages archimédiens du plan, même s'ils n'ont pas été repris sur l'affiche, peuvent ainsi facilement diffusés lors de présentations similaires à celle faite à P dans un échange en aparté.

Dans l'étude des procédures de E15, on peut par ailleurs retrouver des gestes, actes de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité, identifiés par Gardes. Concernant particulièrement le geste, « construire des exemples et les questionner », il se confirme que ce n'est pas l'aspect généralisation que l'on a pu observer chez E15 (alors que cela a pu être le cas pour d'autres). La situation favorise chez E15 l'emploi de l'exemple comme terrain pour la recherche de procédures de structuration de l'objet à savoir[2]. Ceci nous rapproche, pour E15, d'autres invariants comme « structurer une stratégie, interroger sa validité et sa généralisation ». Ceci fait peut-être une des caractéristiques de la recherche de E15, qui était plus à l'affût d'un processus que d'une loi.

Les processus ont l'avantage de relever du pragmatique. Alors que la loi peut écarter un objet, la recherche du processus a plutôt tendance à prendre en considération tous les objets. Et ainsi, même si le pentagone a failli ne pas exister dans les objets potentiellement mobilisables par E15, la mise en œuvre d'un processus l'a réintroduit dans les objets à manipuler. En dehors de cette relation particulière au pentagone, E15 a su profiter des travaux préliminaires et de cette vision en termes de processus pour éviter le piège de la réduction aux diviseurs de 360, mais sa recherche ne nous dit pas comment il pourra intégrer l'heptagone et autres polygones à mesure d'angle non entière dans la théorie en construction.

2. Ceci est à mettre en lien avec le rôle de la figure en géométrie.

Chapitre 10

Conclusion de la partie III

Sommaire

10.1 Bilan de l'expérimentation terminale 245
10.2 Conclusion 246

10.1 Bilan de l'expérimentation terminale

Au vu de ces nouvelles analyses, nous pouvons à nouveau considérer que le modèle SDRP n'est pas falsifié par la confrontation à la contingence, ni sur la dimension de l'engagement dans la résolution du problème proposé et de la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux, ni sur celle de la dimension expérimentale. Il est toutefois avéré que certaines formalisations n'ont pas eu lieu au niveau du groupe classe et que le répertoire de cette classe n'intègre pas un certain nombres d'ostensifs syntaxiques qu'il aurait été simple de (re)produire. Ce point relève de la question de la gestion des phases didactiques par P et non de l'efficacité des phases adidactiques. À part pour un groupe, cette instance de la SDRP atteint ses objectifs lors de ces phases, parfaitement contrôlées par l'enseignante. Toutefois, la gestion par P de la phase didactique terminale ne permet pas d'explorer l'ensemble des formalisations de savoirs possibles pour cette instance.

Reprenons maintenant les deux éléments centraux que nous voulions tester ici, l'importance de l'étude des pavages réguliers et l'identification d'éléments limitant les sémioses.

Concernant le rôle d'attracteur des pavages réguliers et l'intérêt à laisser vivre des sémioses les ayant pour objet, cette expérimentation apporte une double réponse avec une part d'indétermination. Les assemblages réguliers émergent à nouveau de façon première et sont porteurs de processus sémiotiques riches pour deux groupes. Sur deux cas donc, il se trouve que cette émergence première se réalise pour des élèves très à l'aise avec les objets en jeu, ou ayant la capacité de réguler les interactions avec les objets. Cela ne signifie ni que cette centration ne se réalise pas pour des élèves moins à l'aise (cf. expérimentation préalable), ni que tous les élèves à l'aise s'engagent sur cette voie, mais cela confirme que certains élèves ont une relation telle aux polygones que étude locale prime sur une exploration globale. Même si ce n'est pas immédiat, l'utilisation du registre numérique s'en trouve apparemment facilité et cette centration permet de créer un domaine d'expérience favorable à la poursuite de l'exploration. Cette caractéristique de la situation est donc à conserver et intégrer dans la réflexion sur les élaborations théoriques.

Cette instance de la situation a permis de produire de nombreux savoirs sur l'objet pavage archimédien et de confirmer la possibilité d'une exploration avec des élèves de terminale. En raison des adaptations de la SDRP les bornes atteintes cette fois ont été différentes et la mise à disposition (plus ou moins effective) d'une liste des mesures en degré des angles des polygones

réguliers a joué sur les ostensifs produits, par exemple une équation à un nombre mal défini de variables. Bien entendu à cet instant l'ostensif rejoint une approche théorique qui amènerait à la considération de plusieurs variables entières et à un jeu de majoration sur ces variables, certaines ayant des variations contraires. Mais on ne peut réduire la robustesse de la situation à cette considération théorique. Comme l'a prouvé E15, des procédures par réduction du problème sont possibles. D'autres procédures (cf. recherche de P) étant aussi envisageables, on ne peut pas, à ce jour, exclure des développements différents en particulier dans le champ numérique. Dans ce champ, on constatera à nouveau l'importance de la relation des élèves aux entiers et aux non entiers. Dans la dernière expérimentation cette relation s'est complexifiée. L'importance du travail sur la nature des α_n a introduit un usage important des diviseurs de 360 (en lien avec la formule $180 - \frac{360}{n}$). La non considération, voire le « rejet », des α_n non entiers en a été accentuée. Ce point devra à nouveau être interrogé, y compris pour des élèves de terminale S.

10.2 Conclusion

La volonté de requestionner le modèle théorique d'une situation didactique du point de vue de la référence à un savoir et de fonder une situation sur un problème nous a amenés à proposer une SDRP et à mettre en œuvre une de ses instances en classe de terminale S après avoir procédé à plusieurs expérimentations préalables. L'ingénierie mise en œuvre a permis la confrontation attendue entre situation réelle et modèle *a priori* d'une part et entre savoirs en situation et milieu théorique d'autre part.

La situation proposée en classe de terminale répond, nous pensons l'avoir montré, aux attentes que nous avions d'une SDRP. La limitation que nous observons dans la situation mise en œuvre est relative à la mise à disposition dans le répertoire de la classe, d'énoncés formalisés **en appui direct sur les savoirs émergents**. Certains savoirs sont institutionnalisés en phases 6 et 10 mais un certain nombre d'autres ne le sont pas, alors qu'il semblerait qu'une formalisation à leur propos soit possible. Une institutionnalisation de savoirs a bien lieu lors de la séance suivante mais le lien entre savoirs des élèves et savoirs portés par cette institutionnalisation n'est, compte tenu de la forme de cette institutionnalisation, plus étudiable.

Du point de vue du milieu proposé, le travail préliminaire en devoir en temps libre et en classe, et l'introduction d'une ressource complémentaire ont développé une familiarité avec les objets en jeu et permis l'exploration attendue, avec la réserve déjà faite quant à la réduction aux entiers. Concernant le texte de Dürer, en dehors d'une élève déstabilisée par la prise de recul nécessaire, son intégration dans le milieu a lui aussi eu les effets escomptés. La gestion de cet élément, introduit en cours de recherche dans le milieu, nécessite de la part de l'enseignant une vigilance, aussi bien au moment de sa présentation, que pendant le temps de synthèse qui suit son étude. La richesse de la considération des seuls pavages réguliers fait par ailleurs que nous ne pouvons envisager d'introduire ce type de ressource dans le milieu initial.

Concernant plus précisément les gestions des deux instances mises en œuvre en classe de terminale, elles ont été le fait de deux enseignantes sensibilisées à la recherche en cours, c'est-à-dire l'étude de l'émergence des savoirs en SDRP. Ceci peut expliquer en premier lieu la réussite de la mise en œuvre des phases adidactiques, ce qui pourrait nécessiter avec des enseignants moins au fait de ce genre de problématique un travail de préparation plus important. Mais il est par ailleurs possible que les enjeux de la recherche aient influé pour une part sur la forme de l'institutionnalisation et induit une relative prudence par rapport à la formalisation des savoirs. Il faudrait, pour aller plus loin, questionner en particulier plus avant le topos (au sens de Chevallard) de P pour identifier les raisons d'un déficit de formalisation à la fin de la phase 10 (gestion du temps, attendus par rapport au problème, conception sur l'institutionnalisation, interprétation de la commande du chercheur, ...)

Dans le cadre de l'institution choisie, les connaissances sur les objets manipulés sont nombreuses. En « résolution de problème », comme attendu par les programmes, les élèves sollicitent les notions de diviseurs, de pgcd, de solutions d'une équation diophantienne, de suite, de majoration, de minoration, ... Mais, dans ces manipulations, la relation à certains objets a un impact certain sur les actions d'exploration des pavages. Ainsi la considération de l'angle de l'heptagone est ainsi écartée et le pentagone est par deux fois lui aussi exclu des études, au moins temporairement. Une relation particulière aux polygones, qui ne semble pas s'accorder avec des angles à mesures en degré non entières, réduit globalement pour beaucoup l'exploration. Certains objets qui semblent faire partie du milieu objectif, ne le sont en réalité que dans certaines mesures. Mais si une certaine invariance existe de ce point de vue, chaque élève semble avoir une relation particulière qu'il est nécessaire d'étudier pour comprendre les procédures.

De façon générale, au cours des diverses expérimentations, la possibilité d'une mise en place d'une situation didactique fondée sur la recherche des pavages archimédiens du plan n'a pas été mise en défaut. Les instances mises en œuvre ont été des situations d'apprentissage. Nous avons la certitude que l'activité des élèves permet la création de savoirs, avec seulement un doute pour 4 élèves lors de l'expérimentation finale. Par ailleurs, la crainte d'une production surabondante d'ostensifs, non compatibles dans une mise en commun, s'écarte. Fondamentalement car le problème définit un réseau qui réunit par le sens les ostensifs et également, car les variables finalement retenues et les modalités ainsi déterminées font que les sémioses, qui auraient pu être complémentaires mais disjointes, se recoupent pour enrichir au final la structuration de l'objet à savoir.

Quatrième partie

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives

Bilan

Dans un premier temps nous proposons une synthèse des résultats obtenus suivant trois axes : les situations didactiques de recherche de problèmes, l'étude historique et épistémologique, l'usage de la sémiotique.

Les Situations Didactiques de Recherche de Problème

Nos travaux s'inscrivent dans les recherches sur la pertinence de situations non finalisées par un savoir déjà-là mais fondées sur l'étude de problèmes mathématiques robustes. Ceci nous a amenés à proposer un point de vue sur l'activité mathématique, sur les savoirs, et à soumettre à l'étude un modèle didactique, celui des SDRP. Nous avons conclu positivement quant à la possibilité de mettre en œuvre des situations ayant les caractéristiques du modèle :

- Dévolution à l'élève d'une situation adidactique.
- Interactions indépendantes avec le milieu et fécondité de ces interactions.
- Développement d'une stratégie initiale en appui sur des connaissances anciennes mais qui trouve ses limites et nécessite des accommodations.
- Étude d'un problème robuste, exploration d'un objet à savoir par une activité avec une forte dimension expérimentale.
- Genèses de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux pour les élèves.

Sous ce modèle, les questions cruciales portent sur l'émergence des savoirs, la diversité de ces savoirs (un même problème pouvant donner lieu à des explorations, des modélisations, et des théories locales, *a priori* différentes) et leur institutionnalisation.

Suivant les instances de la SDRP étudiée dans cette thèse, les savoirs observés sont en lien avec des objets divers : polygones, nombres entiers, pavages réguliers, pavages archimédiens, ... Et ces savoirs sont par ailleurs plus ou moins formalisés. Mais dans tous les cas, les objets naturalisés servent de domaine d'expérience de façon suffisamment effective pour que les savoirs soient diffusables et explicitables dans le langage naturel ou dans un formalisme à la portée des élèves. La situation ayant permis une maîtrise au moins partielle du problème, nous sommes assurés de l'émergence de savoirs d'élèves.

Concernant la diversité, produit de l'entropie phénoménologique, nous avons évoqué la question de la réduction ou de l'ouverture de la question mathématique à considérer. Nous l'avons montré, historiquement la recherche des assemblages de polygones réguliers s'insère dans un réseau de considérations plus vastes intégrant des polygones non convexes, des polyèdres. Nous avons dans cette thèse considéré une recherche « restreinte ». Elle a permis de contenir pour une part les diversité des sémioses, tout en conservant un énoncé « simple » facilitant la dévolution. Nous avons ainsi trouvé un équilibre entre ouverture du champ de recherche et SDRP implantable dans le curriculum d'une classe de terminale. La question d'ouvrir les possibles doit rester posée, c'est ce que nous faisons ci-après dans la présentation des perspectives.

Concernant maintenant l'institutionnalisation des savoirs, deux éléments clés sont à pointer. Tout d'abord l'identification et la mise au jour des savoirs émergents ; cette identification passe par l'observation de l'évolution des sémioses et l'interprétation par l'enseignant des signes produits en termes de structuration de l'objet et de niveaux de raisonnement sur cet objet. Cette tâche de l'enseignant reste très complexe. En situation, elle dépend de nombreux critères dont, bien entendu, du nombre d'élèves mais également des sémioses. Elle semble plus accessible avec un nombre de groupes réduit et pour certaines sémioses (par exemple en EP1). Elle reste délicate, même avec cinq groupes de quatre élèves, quand les sémioses s'enrichissent. Mais bien entendu cette complexité dépend aussi de la familiarité de l'enseignant avec les objets en jeu, les raisonnements sur ces objets. Elle dépend également de sa capacité à envisager la pluralité des sémioses possibles et leur nécessaire institutionnalisation. Nos expérimentations ont bénéficié de la pratique informée d'enseignantes sur ces questions, enseignantes qui ont su faire vivre cette pluralité même si, comme on a pu le constater, certaines identifications restent problématiques. Mais l'institutionnalisation doit alors permettre la rencontre des savoirs de chacun avec les savoirs des autres et avec ceux de l'enseignant. Elle doit faire vivre, comme cela apparaît désormais clairement, une intersubjectivité. Cette deuxième étape, qui pourrait sembler plus simple, s'avère dans les faits aussi délicate que la première. Au-delà de la difficulté de l'inter-institutionnalisation, nous constatons que tout semble se passer comme si l'existence connue par l'enseignant d'un « savoir papier », ici représenté par le document mis à disposition des élèves-étudiants peu de temps après la séance, paralysait la véritable production d'un savoir commun dans la classe. Les synthèses observées visent ainsi à la présentation de savoirs d'élèves, à leur explicitation mais pas à leur formalisation dans un langage commun, à leur agrégation sous une forme acceptable par tous. La présence supposée d'un « savoir de référence » inhibe l'action de l'enseignant mais aussi des élèves. Cette question du positionnement de chacun par rapport aux savoirs mathématiques qui vivent dans la classe reste, malgré les conditions ici organisées, une question cruciale.

La SDRP est un lieu où la dimension expérimentale se développe, où les actions sur des objets plus ou moins naturalisés fondent la structuration de nouveaux objets par le sujet. Nous avons initialement posé la question de l'effet de la relation du sujet aux objets naturalisés en SDRP sur l'avancée de la recherche et les élaborations théoriques. Cette question, issue pour une part de l'étude de la recherche de Kepler et de l'observation d'une relation très particulière à certains polygones, nous l'avons donc posé également en situation didactique. Nous avons alors pu confirmer l'existence d'un ensemble de relations personnelles aux objets, et en particuliers aux polygones et au couple (entiers, décimaux), qui influence fortement la recherche et la singularise dans un groupe d'élèves. Ces relations sont, et se révèlent résistantes aux tentatives superficielles de modifications. Elles sont incontournables. Sont-elles pour autant des obstacles dans l'avancée de la recherche ? Ou des leviers ? Ces relations ne sont pas réductibles aux effets passés de l'environnement didactique (il en est par exemple ainsi des références culturelles concernant les carrelages) et peuvent difficilement être pilotées à court terme. S'en servir comme levier revient donc à les laisser vivre et agir, dans la mesure où il est nécessaire qu'elles s'expriment pour évoluer et parce que localement elles permettent l'avancée de la recherche. Éviter qu'elles ne deviennent des obstacles, c'est identifier leur action et mettre en évidence leurs limites. Ceci peut être fait par l'élève lui même quand il a, par exemple, cette capacité à réintroduire dans le milieu objectif, du fait des retours de l'expérience, un objet qu'il avait dans un premier temps écarté. C'est aussi le rôle des temps d'inter-institutionnalisation quand cette relation aux objets a pu être mise en évidence. A contrario, et pour finir sur ce point, ce que nous pouvons identifier comme obstacle, c'est l'absence de relation aux objets, c'est-à-dire une telle pauvreté des liens qu'elle ne permet plus l'action. Ainsi il vaut mieux une relation aux objets mathématiquement floue que pas de relation.

Une autre caractéristique importante des SDRP, qui émerge plus clairement à la lumière de l'étude, est celle des mathématiques qui vivent dans ce genre de situation. On a déjà longuement évoqué la dimension expérimentale, mais dans une perspective épistémologique et quand il s'agit d'identifier dans l'agir constructif ce qui donne sens et signification, on peut revenir sur le mode d'interrogation des exemples et plus généralement sur la démarche de construction du nouvel objet. De ce point de vue, l'ancrage géométrique de la situation semble favoriser la possibilité d'émergence et d'élaboration de processus. Quand un élève, à partir d'un croquis de pavage, produit la relation $360 - x\alpha - x'\alpha' = 0$, nous avons vu qu'elle relève, en premier lieu, de la description d'un algorithme de recherche. Contrairement à la relation $360 = 60a + 90b + 120c + 135d + 140e + 144f + 150g + 156h + ...$ qui n'a initialement qu'un statut déclaratif, $360 - x\alpha - x\alpha' = 0$ porte une dimension pragmatique qui offre d'autres potentialités. On retrouve ici une dimension qu'il est intéressant de voir vivre et cohabiter avec des démarches formelles qui permettent d'autres formes de preuves (par exemple la démonstration formelle de l'existence de 3 pavages réguliers en EP2). Il sera intéressant d'observer, dans d'autres expérimentations, s'il se confirme que les SDRP sont le lieu possible d'émergence de ce type de démarches constructives.

Études historique et épistémologique

Dans l'étude du milieu théorique, l'enquête historique est un outil pour l'émergence des questionnements épistémologiques. Avec l'ambition de comprendre la connaissance comme activité humaine, nous n'avons pas cherché à faire émerger de notre enquête des considérations sur l'évolution d'un concept, mais avons tenté de construire une intrigue autour des pratiques singulières, de l'activité des sujets, des objets manipulés, des actions sur ces objets, de l'environnement théorique de ces manipulations. Cette approche, qui se veut cohérente avec le projet global de la thèse, devait être testée, aussi bien du point de vue de la faisabilité que de la pertinence pour le projet didactique.

L'étude historique et épistémologique s'est révélée réalisable et productrice d'enseignements sur le fonctionnement des mathématiques, localement et globalement. La conclusion de la deuxième partie de la thèse en rend compte. Nous avons alors été conforté dans le projet de mise en œuvre de situations avec une dimension adidactique permettant la manipulation d'objets nombreux, éventuellement pour un temps hors des critères de rigueur de l'enseignant, faisant vivre des produits de la recherche sous une forme éventuellement non standardisée, voire même temporairement non valide, et autant que possible sans référence à un savoir institué déjà-là.

En appui sur l'étude, montrant une relation de Kepler qui pourrait passer pour confuse, pour une part non scientifique, aux objets considérés, et une démarche fortement portée par des allers-retours entre des objets anciens et nouveaux, nous avons aussi cherché à préciser le rôle de la relation aux objets dans les élaborations théoriques en situation. C'est un axe d'analyse parmi d'autres mais sa prise en compte doit permettre d'intégrer le rôle de la relation personnelle aux objets dans la variabilité des produits de la recherche. Dans cette relation d'un sujet à un objet, nous avons chez Kepler pu identifier le rôle du rapport aux objets anciens et l'influence d'une problématique externe aux mathématiques, philosophique, et sa traduction dans le milieu objectif de la recherche. C'est l'influence de la relation aux objets anciens que nous avons cherché à identifier dans les expérimentations pour pointer les objets qui ne sont pas disponibles dans l'activité à dimension expérimentale. Ce sont des analyses fines qui peuvent montrer la raison de l'absence d'un objet du milieu objectif. Elles nous permettent, par exemple pour les polygones, d'identifier ce qui ressort d'une relation singulière extra-mathématique (image d'un carrelage familial), d'une relation mathématique propre à un objet manipulé (le pentagone jugé trop complexe à construire et écarté des objets manipulables), ou d'une relation issue

directement d'une relation à d'autres objets (disparition du milieu objectif des polygones dont la mesure d'angle en degré est non entière). Ces relations parfois affirmées (« travailler avec des décimaux c'est trop compliqué ») ou refoulées (« on a oublié ») jouent un rôle important dans les élaborations et ne peuvent être négligées. L'approche historique que nous avons menée permet donc, au-delà des réflexions de nature d'épistémologique générale, l'émergence de questions qui, problématisées dans le champ de la didactique, montrent leur pertinence. Dans un cadre particulier le regard sur les objets s'est révélé utile. Il reste désormais à en étudier la dimension générique.

L'usage de la sémiotique

L'utilisation de la sémiotique visait pour une part à tenter de rendre compte de l'aspect dynamique des processus d'exploration d'objets et d'autre part à participer à l'identification dans le cadre du modèle milieux/répertoire/symbole des fonctions des raisonnements, des actualisations du répertoire.

Dans l'ensemble des preuves que nous avons pu rencontrer tout au long de cette étude, il s'avère donc que très peu sont d'ordre purement syntaxique. Lors de EP2, un résultat partiel (le cas des pavages réguliers) est traitée de façon syntaxique mais globalement les démarches syntaxiques ne permettent que très modestement d'enrichir les phases heuristiques. Dans l'ensemble des phases c'est donc la dimension sémantique qui est première. Et dans l'ensemble des milieux de la situation, le travail sur les énoncés ne peut se passer d'un retour aux objets sur lesquels portent les énoncés. Dans ce contexte, l'approche sémiotique se confirme pertinente aussi bien dans une analyse *a priori* que pour des analyses *a posteriori*. *A priori*, nous l'avons utilisé pour anticiper des signes potentiels liés à la réalisation d'une tâche et envisager une évolution sémiotique théorique. *A posteriori*, nous nous en sommes servis pour étudier des sémioses partielles de l'objet « pavage archimédien ». Dans les deux cas, l'outil permet de préciser les premiers instants des sémioses souvent écartés des analyses. Dans ces instants, où la syntaxe est peu présente et les raisonnements peu explicites, les outils de la sémiotique permettent en particulier de mieux comprendre les modalités de construction de la tâche puis du problème. Chez un sujet singulier, la sémiotique permet également de regarder l'ensemble du processus de recherche comme l'évolution d'un seul objet, et d'observer la dynamique de cette évolution. Dans des situations ou l'interprétant logique final n'apparaît pas, où l'habitude ne fige pas le renvoi infini d'un signe à d'autres signes, l'outil sémiotique semble aussi pertinent pour penser en termes de processus à développer et non de but à atteindre.

Pour cette SDRP, l'usage de l'outil semble par ailleurs facilité par le développement des processus à l'interface des champs géométrique et numérique. Mais il trouve aussi ses limites dans la complexité des sémioses à analyser. Son association avec la structuration des milieux dans le modèle milieux/répertoire/symboles, que nous utilisons également, permet de prolonger son usage à l'analyse des raisonnements, mais ici de façon limité, dans un environnement peu syntaxique. Dans le contexte qui a été le nôtre, nous observons donc surtout la pertinence de l'outil pour penser la continuité du processus d'élaboration, depuis l'apparition de qualisignes jusqu'à l'élaboration de légisignes, et dévoiler également un peu plus certaines expériences cognitives habituellement déclarées inaccessibles.

Perspectives

Approfondir l'approche sémiotique

Dans cette situation des pavages, il semble que l'approche de la sémiotique que nous avons développée, même débutante, trouve une certaine pertinence. Cela provient pour une part d'une

abondance de signes relativement simples, dont peu sont syntaxiques. Notre étude a alors plus porté sur les milieux objectifs et de référence et nous avons peu considéré les niveaux d'utilisation des symboles les plus élevés. Un de nos objectifs, lors d'expérimentations abouties faisant apparaître plus d'ostensifs syntaxiques, est d'aller plus loin dans les analyses des phases de formalisation et d'usage majoritaire de la dimension syntaxique. Nous pourrons alors user pleinement du modèle milieux/répertoire/symboles et nous confronter à la complexité des niveaux d'utilisation des symboles pour des signes syntaxiques. Ceci nécessitera de ré-interroger avec les enseignants, de manière approfondie, les phases de formalisations des savoirs.

Reproduire l'approche historique développée

L'approche historique que nous avons menée, a permis une étude singulière féconde. Il reste à savoir si la rencontre fructueuse d'un problème, d'un savant, d'un projet didactique relève de la coïncidence ou d'une approche théorique généralisable. Autrement dit, il faut désormais rechercher d'autres couples problème-savant(s) qui permettent une étude similaire à celle faite dans cette thèse en vue de l'élaboration d'une SDRP à destination de non experts en mathématiques. La difficulté réside en deux points. Une étude sur un couple problème-savant(s) doit non seulement être envisageable en termes de disponibilité des sources primaires ou secondaires mais doit également relever d'objets accessibles à des non-experts et adaptés à la pratique de ces non-experts. En mathématiques ces deux exigences sont souvent incompatibles. Mais c'est justement là que l'enquête historique trouverait son intérêt et sa pertinence, si tant est qu'elle puisse atteindre le niveau de la relation savant-objets. Pour profiter des connaissances déjà acquises dans le cadre de cette thèse, nous pouvons envisager d'initier les premières recherches par la période historique. Nous serions alors amenés à explorer les mathématiques de 1550 à 1650, à la recherche d'un problème mathématique robuste et accessible mais surtout d'un savant ayant laissé suffisamment de traces de sa pratique pour que nous puissions l'observer comme nous l'avons fait dans cette thèse pour celle de Kepler. Reproduire une telle étude permettrait de confirmer la pertinence et l'intérêt d'une approche historique fondée sur l'activité mathématique du savant-cherchant.

Poursuivre la réflexion sur les SDRP

La mise en œuvre d'une SDRP sur les pavages archimédiens du plan gagne en termes de production de savoirs si elle intègre les réflexions sur les polygones réguliers en amont de l'étude des pavages, comme cela a pu être le cas lors d'une de nos expérimentations. Ceci nécessite toutefois de modifier l'organisation pour laisser possible la réalisation de toutes les phases d'une SDRP avec, cette fois-ci, un double temps de synthèse, le premier sur l'ensemble des polygones réguliers et les pavages réguliers, le deuxième sur les pavages archimédiens. Ceci nous amènerait à proposer une autre temporalité avec, par exemple, un ensemble de trois séances de deux heures. Au-delà de la possibilité d'une étude potentiellement plus riche, il s'agirait surtout de chercher à dépasser la difficulté de la transition entre production de savoirs par les élèves et formalisation pour la classe. En appui sur une situation que nous savons favorable, nous pourrions chercher à mettre en place les conditions de ce dépassement et, en particulier, pointer ce qui, dans la relation aux savoirs, restreint l'institutionnalisation, malgré les ressources d'une situation à forte dimension expérimentale.

Et cette étude doit être l'occasion d'un regard approfondi sur les liens qui doivent s'établir entre savoirs des élèves produits en situation, savoirs de l'enseignant et savoirs-savants. Ce que nous n'avons pas pu réaliser ici, doit permettre d'identifier en particulier comment se positionne l'enseignant par rapport aux savoirs des élèves, dans une situation peu balisée en termes de savoirs à institutionnaliser. La question du jeu du professeur en situation est ici renouvelée

dans des situations où les savoirs de l'enseignant ne sont plus ceux que l'on vise. Penser des situations où le problème est premier semble nécessiter de revenir à nouveau sur des phases de l'activité enseignante souvent négligées, celles de la formalisation des savoirs des élèves. Ce sont ces phases effectivement complexes, où l'enseignant doit savoir jouer avec les sens que chacun prête à l'enquête en cours et une signification de l'objet à savoir dont il est, à cette occasion, l'interprète. Ce sont des phases où le jeu de l'enseignant se doit d'intégrer, au-delà de sa relation au savoir institué, une relation aux relations des élèves aux objets en jeu.

En lien avec cette attention à l'enseignant, il est à noter que des futures ingénieries pourront se concevoir dans une collaboration approfondie entre chercheur et enseignant[1] pour obtenir une meilleure connaissance de l'enseignant par le chercheur et co-construire les enjeux du projet d'enseignement particulièrement en termes d'institutionnalisation.

Un autre aspect que nous aimerions approfondir est celui du mode d'élaboration des savoirs. Nous avons vu que la SDRP considérée peut laisser envisager la construction de processus. Mettre alors en avant l'intérêt du processus, du « comment construire » peut participer à la déstabilisation d'une vision ontologique et produire une autre relation aux savoirs. Dans l'étude de nouvelles SDRP, c'est un point qui doit être étudié.

Revenons pour terminer sur certaines pistes d'ouverture de la SDRP considérée. Construire des séquences d'enseignement fondées sur un problème nécessite aussi, on l'a vu, une vigilance sur la dimension du projet qu'on engage. Et si nous l'avons réduit pour cette étude, il serait judicieux d'étudier des ouvertures, par exemple à l'ensemble des pavages du plan avec des polygones réguliers. Cette ouverture aurait l'avantage certain de permettre une activité de définition des objets que nous avons exclue ici, mais qui rencontrerait les pratiques des chercheurs. Une autre réflexion pourrait, là encore en lien avec l'histoire, s'ouvrir à l'étude du passage du plan à l'espace. On l'a constaté, le lien pavage du plan, pavage de la sphère apparaît naturellement, y compris pour des élèves de terminale. Les planches de Dürer invitent à tisser ce lien étroit entre ces savoirs. Étendre une SDRP à cette dimension semble dans un premier temps envisageable. Mais les objets à considérer seront alors dans un champ beaucoup moins familier aux élèves de lycée ou de premières années de l'enseignement supérieur. Des travaux ont été réalisés sur ces questions. On pourra se référer à Dias (2008) pour un travail avec des élèves moins âgés et à Grenier et Tanguay (2008) pour une étude au niveau de la transition secondaire/post-secondaire des « habiletés et connaissances nécessaires à la conceptualisation de l'espace ». Une étude de ces documents montre toutefois que pour envisager une situation intégrant des objets de l'espace il faudra en premier lieu s'intéresser à l'objet « angle solide » dont l'étude fine reste à faire.

Coda

On l'aura compris la volonté de faire vivre des dispositifs revisitant l'épistémologie scolaire ne peut se passer d'une réflexion approfondie sur l'émergence des savoirs par exemple dans des dispositifs tels que les SDRP. Contribuer à cette réflexion fait partie des retombées que nous attendons de ce travail de recherche. Bien entendu, l'apprentissage des mathématiques porte en lui des processus aléatoires dont la portée n'est jamais assurée et un dispositif, quel qu'il soit, ne peut garantir un niveau de production de savoirs. Mais la réflexion proposée ici, doit permettre de proposer un cadre pour penser un usage du problème en classe, et favoriser les

1. Le projet DREAM auquel nous participons cherche désormais à organiser la co-construction par la communauté de chercheurs et la communauté de praticiens d'un projet d'enseignement fondé sur la mise en œuvre de situation de recherche de problèmes.

institutionnalisations de savoirs. Rappelons-le, si nécessaire, l'émergence des savoirs n'est pas le fruit du hasard et la construction d'un sens des mathématiques nécessite des dispositifs où l'agir est pensé concomittamment avec l'élaboration théorique. C'est un dispositif de ce type, qui emprunte la voie étroite où la pensée mathématique de chacun va se construire dans un agir-constructif pensé collectivement, que nous tentons d'élaborer.

Bibliographie

Aldon, G. (2008). Analyse du rôle d'une ressource numérique dans la mise en place de problèmes de recherche dans la classe de mathématiques. Mémoire de D.E.A., Université Lyon1. 17

Aldon, G. (2011). *Interactions didactiques dans la classe de mathématiques en environnement numérique : construction et mise à l'épreuve d'un cadre d'analyse exploitant la notion d'incident*. Thèse de doctorat, Université Lyon 1. 169

Aldon, G., Cahuet, P., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M. et Tardy, C. (2010). *Expérimenter des problèmes innovants en mathématiques à l'école*. Inrp, irem de lyon, iufm de lyon, leps-lyon1 édition. 17, 53, 61, 138

Arsac, G., Germain, G. et Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation problème*. IREM de Lyon. 17, 52

Arsac, G. et Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Repères pour agir. Disciplines, ISSN 1625-3000. SCEREN-CRDP de l'Académie de Lyon, Lyon. 17, 52, 151

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3):281–307. 134

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10:241–286. 42, 43

Aslaksen, H. (2006). In search of demiregular tilings. *Bridges London : Mathematical Connections in Art, Music & Science*, pages 533–536. 88

Audin, P. et Duchet, P. (1992). La recherche à l'école : Math.en.jeans. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, 121:107–131. 17

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin. 37

Badoureau, A. (1881). Mémoire sur les figures isoscèles. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 30:47 à 172. 101, 102

Bailly, F. et Longo, G. (2003). Incomplétude et incertitude en mathématiques et en physique. *En ligne, ftp ://ftp.di.ens.fr/pub/users/longo/PhilosophyAndCognition/incompl-incert.pdf*. 54

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educationnal Studies in Mathematics*, 18:147–176. 212

Ball, W. R. (1908). *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes, Deuxième édition française Iraduite d'après la quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrick*. Librairie scientifique A. Hermann. 102

BARBIN, E. (1997). Sur les relations entre épistémologie histoire et didactique. *Repères IREM*, 27:63–80. 37

BARRIER, T. (2009). *Une perspective sémantique et dialogique sur l'activité de validation en mathématiques*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon I. 59

BERTHELOT, René et Salin, M. (1996). L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans : identification d'un obstacle didactique. *Revue des sciences de l'éducation*, 22(2):417–442. 137

BKOUCHE, R. (1982). Les mathématiques comme science expérimentale. *Bulletin APMEP*, 333:306–324. 53

BKOUCHE, R. (1997). Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. *for the learning of mathematics*, 17. 43, 44

BKOUCHE, R. (2000a). Culture scientifique, pensée machinale et recherche du sens. enseigner les sciences selon une épistémologie des problématiques. *SPIRALE - Revue de Recherches en Éducation*, 26:11–22. 34, 35

BKOUCHE, R. (2000b). Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science. *Repères IREM*, 39. 133

BKOUCHE, R. (2006). La géométrie entre mathématiques et sciences physiques. *In Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics, volume II, édité par M.Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète*. 145

BKOUCHE, R. (2008). Du caractère expérimental des mathématiques. *Repères IREM*, 70:33–76. 53

BLOCH, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage*. 21, 69

BLOCH, I. (2005). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur. Note de synthèse pour une Habilitationà Diriger des Recherches.* Thèse de doctorat, Paris 7. 21, 66

BLOCH, I. et GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage, Grenoble*, 31-2:191–228. 13, 19, 67, 75, 76

BOUCARD, J. (2011). Louis poinsot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ? *Revue d'histoire des mathématiques*, 17(1):41–138. 100

BOURGOIN, J. (1873). *Théorie de l'ornement*. A. Lévy. 91

BOURGOIN, J. (1879). *Les éléments de l'art arabe : le trait des entrelacs*. 91

BOUVIER, A., GEORGE, M. et LIONNAIS, F. (2009). *Dictionnaire des mathématiques*. Quadrige (Paryż ; 1981). Presses Universitaires de France - PUF. 11

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu : Dévolution. *Recherches en didactique des Mathématiques, Actes de la V ème Ecole d'été de Didactique des mathématiques, Plestin les grèves. La pensée sauvage. Grenoble.*, 9(3):309–336. 65

Brousseau, G. (1997). http ://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/. 65

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage. 57

Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : bilans et perspectives. *Math. Ecole*, 141:2–15. 58

Bucciantini, M. (2008). *Galilée et Kepler, Philosophie, cosmologie et théologie à l'époque de la Contre-Réforme*. 125

Calmettes, B. (2012). *Didactique des sciences et démarches d'investigation : Références, représentations, pratiques et formation*. Pratiques en formation. L'Harmattan. 12

Caspar, M. (1938a). *Kepler, Gesammelte Werke, Vol. 13, Briefe 1590-1599*. 110, 113

Caspar, M. (1938b). *Kepler, Gesammelte Werke, Vol. 14, Briefe 1599-1603*. 113

Caspar, M. (1958). *Johannes Kepler*. 41, 106, 107

Catalan, E. (1865). Mémoire sur la théorie des polyèdres. *J.E.P. [Journal de l'École Polytechnique]*, 24:1–71. 101

Cauchy, A.-L. (1813a). Recherches sur les polyèdres : premier mémoire. *Journal de l'École polytechnique*, XVIe cahier(t. IX):7–25. 101

Cauchy, A.-L. (1813b). Sur les polygones et les polyèdres : second mémoire. *Journal de l'École polytechnique*, XVIe cahier(t. IX):26–38. 101

Cauty, A. (1998). De la difficulté d'interpréter les mélanges de cultures. 42

Cavaillès, J. (1938). *Méthode axiomatique et formalisme : essai sur le problème du fondement des mathématiques, Volume 1*. 30

Cavaillès, J. (1994). *Oeuvres complètes de philosophie des sciences*. 54

Chardak, H. (1989). *Kepler Le chien des étoiles*. Librairie Séguier. 106

Chasles, M. (1837). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie : particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie*. 92

Chauviré, C. (1995). *Peirce et la signification. Introduction à la logique du vague*. 70

Chavey, D. (1984a). *Periodic Tilings and Tilings by Regular Polygons*. Thèse de doctorat, Univ. of Wisconsin. 89

Chavey, D. (1984b). Periodic tilings and tilings by regular polygons i : Bounds on the number of orbits of vertices, edges, and tiles. *Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen*, 164(2):37–50. 89

Chavey, D. (1989). Tilings by regular polygons ii : A catalog of tilings. *Computers and Mathematics with Applications*, 17, Issues 1-3:147–165. 89

Chavey, D. (2014). Tilings by regular polygons iii : Dodecagon-dense tilings. *Symmetry : Culture and Science*, 25, 3:193–210. 90

CHEVALLARD, Y. (1992). Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x*, 30:5–15. 53

CHEVALLARD, Y. (1996). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. *Actes de la VIII Ecole d'été de Didactique des Mathématiques. In Noirfalise, R. et Perrin, M.-J.*, pages 82–122. 54

CHEVALLARD, Y. (2003). Quel avenir pour l'enseignement des mathématiques ? *In Actes du colloque " L'enseignement des mathématiques du collège au premier cycle de l'université ", Metz, 8-10 octobre 2003*, pages 9–24. 11, 12

CHEVALLARD, Y. (2004). Pour une nouvelle épistémologie scolaire. *cahiers pédagogiques CRAP*, 427:34–36. 11

CHÂTELET, G. (1993). *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie.* 54

CLAESSENS, G. (2011). Imagination as self-knowledge : Kepler on proclus' commentary on the first book of euclid's elements. *Early Science and Medicine*, 16(3):179–199. 115

CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 12/2(3):221–270. 61

CONNE, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. *Éducation et francophonie*, XXXI(2). 63

CONNE, F. (2004). Problèmes de transposition diddactique. *Petit x*, 64:62–81. 13, 61

CONWAY, J., BURGIEL, H. et GOODMAN-STRAUSS, C. (2008). *The symmetries of things.* A.K. Peters. 82

COXETER, H. (1948). *Regular polytopes. With eight plates and numerous diagrams.* London : Methuen and Co. 103

COXETER, H. (1974). Kepler and mathematics. *Vistas in Astronomy*, 18:661–670. 100, 102, 103

CREPEL, P. (1998). Vie de kepler, par mr le marquis de condorcet. *Matapli*, 54:41–46. 106

CROCCO, G. (2004). Intuition, construction et convention dans la théorie de la connaissance de poincaré. *Philosophiques*, 31(1):151–177. 28, 29, 30

DELAMBRE, J. (1821). *Histoire de l'astronomie moderne.* 106

DELEDALLE, G. (1990). *Lire Peirce aujourd'hui.* 70

DEWEY, J. et DELEDALLE, G. (1993). *Logique : la théorie de l'enquête.* Interrogation philosophique. Presses universitaires de France. 40

DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage.* Thèse de doctorat, Université Lyon 1. 13, 53, 54, 256

DIRECTOR, B. (2002). La division du cercle et le concept gaussien de domaine complexe. *Fusion*, 90:28–33. 118

DONDERO, M. (2011). Diagramme et parcours visuels de la démonstration. *Actes Sémiotiques [En ligne]*, 114. 243

Dorier, J.-L. (2000). Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - perspectives théorique sur leurs interactions. *Les cahiers du laboratoire Leibniz - n°12*. 45, 46

Dürer, A. (1975). *Les quatre livres d'Albert Durer, peinctre et geometrien tres excellent, de la proportion des parties et pourtraicts des corps humains*. 94

Dürer, A. (1995). *Géométrie / Albrecht Dürer ; présentation, traduction de l'allemand et notes par Jeanne Peiffer*. 94, 186

Dürer, A. et Ratheau, A. (1870). *Instruction Sur la Fortification Des Villes, Bourgs, Et Châteaux ... Traduit de L'Allemand Et Précédé D'une Introduction Historique Et Critique Par A. Ratheau*. 94

Duchet, P. et Audin, P. (2009). Math.en.jeans : définition, exemples, contre-exemples, propriétés, démonstrations. *Bulletin APMEP*, 482:347–358. 17, 52

Duchet, P. et Mainguené, J. (2003). Les apprentis-chercheurs de math.en.jeans. *Actes Journées COPIRELEM, La Roche sur Yon, 17-19 mai 2002*. 60

Durand-Guerrier, V. (2005a). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.* Thèse de doctorat, Université Lyon 1. 54

Durand-Guerrier, V. (2005b). Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques, à la lumière de la théorie des modèles de Tarski. *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ? Bordeaux, 25-27 mai 2005*. 54

Durand-Guerrier, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques, enjeux épistémologiques et didactiques. *In Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école (cédérom)*. INRP. 13, 53

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, 16.3. 136

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in alearning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61:103–131. 70

Engel, P. (1995). Platonisme mathématique et antiréalisme. *In Panza Marco, Salanskis Jean-Michel, dir. L'Objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles*, pages 133–146. 26

Euclide (1990a). *Les éléments, traduction et commentaires de B. Vitrac, préface de M. Caveing Volume 1*. PUF. 92

Euclide (1990b). *Les éléments, traduction et commentaires de B. Vitrac, préface de M. Caveing Volume 3*. PUF. 98

Euclide (1990c). *Les éléments, traduction et commentaires de B. Vitrac, préface de M. Caveing Volume 4*. PUF. 92

Everaert-Desmedt, N. (1990). *Le processus interprétatif. Introduction à la sémiotique de Ch. S. Pierce*. 70

EVERAERT-DESMEDT, N. (2011). La sémiotique de peirce dans Louis Hébert (dir.), signo [en ligne], (québec). 70, 71, 72

FABRE, M. et VELLAS, E. (2006). *Situations de formation et problématisation.* Perspectives en éducation et formation. De Boeck Supérieur. 35

FAIDUTTI, B. (2010). *Copernic, Kepler et Galilée face aux pouvoirs.* Harmattan. 106, 121

FIELD, J. V. (1995). Le platonisme de Johannes Kepler. *Enrahonar*, 23:7–33. 114

FRONT, M. (2010). Pavages semi-réguliers du plan. Élaboration d'une situation favorable à la dialectique théorie-objets. Mémoire de D.E.A., Université Claude Bernard. Lyon 1. 17

FRONT, M. (2012a). Exemple d'appropriation d'un dispositif de recherche en classe par un jeune enseignant lors d'un stage de formation continue. *In Actes des journées mathématiques de l'IFE-ENS de Lyon, 12 et 13 juin 2012.* 17

FRONT, M. (2012b). Pavages archimédiens du plan : une exploration favorable aux élaborations mathématiques. *Repères IREM*, 89:5–37. 17

FRONT, M. et LEGRAND, P. (2010). Pavages semi-réguliers du plan. *Bulletin de l'APMEP.* 17, 82

GALEBACH, B. (2009). N-uniform tilings. 90

GARDES, M. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres.* Thèse de doctorat, Université de Lyon. 18, 52, 53, 54, 56, 57, 70

GERGONNE (1819). Géométrie élémentaire. recherches sur les polyèdres, renfermant en particulier un commencement de solution du problème proposé à la page 256 du vii.e volume des annales. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 9:321–344. 101

GHYS, t. (2010). Les problèmes de hilbert. *Images des Mathématiques, CNRS.* 58

GINGERICH, O. (1973). Kepler. *Dictionnary of scientific biography*, tome VII:289–312. 106

GIROUD, N. (2011). *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.* Thèse de doctorat, Université de Grenoble. 53, 56

GIUSTI, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques.* 31

GONSETH, F. (1998). *Logique et philosophie mathématiques.* Collection Savoir. Cultures, ISSN 1158-3517 ; 1998. Hermann, Paris. 23

GRENIER, D. et PAYAN, C. (2002). Situations de recherches en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2002.* 17, 52, 56

GRENIER, D. et TANGUAY, D. (2008). L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *petit x, IREM de Grenoble*, 78:26–52. 256

GRÜNBAUM, B. et SHEPHARD, G. (1977). Tilings by regular polygons. patterns in the plane from kepler to the present, including recent results and unsolved problems. *Mathematics magazine*, 50(5):227–247. 82, 103

Grünbaum, B. et Shephard, G. (1987). *Tilings and patterns*. Freeman and Co. 82, 88, 89

Gros, A. (2011). Les formes de l'enquête historique : John dewey et max weber. *L'Atelier du Centre de recherches historiques*, http ://acrh.revues.org/3668 ; DOI : 10.4000/acrh.3668. mis en ligne le 17 mai 2011, consulté le 13 novembre 2014. 40

Hallyn, F. (1987). *La structure poétique du monde : Copernic, Kepler*. Des Travaux. Editions du Seuil. 117

Hallyn, F. (2004). *Les structures rhétoriques de la science : de Kepler à Maxwell*. Des Travaux. 117

Harthong, J. (1992). L'idéalisme platonicien et la science. *In L'objectivité mathématique, ouvrage collectif dirigé par Marco Panza et Jean-Michel Salanskis*. Masson, Paris 1995. 24, 25

Hitt, F. (2013). Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaisances mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg*, 18:9–27. 70

Houdement, C. (2004). Mathématiques, didactique et découpages : la richesse d'un problème. *Mathématiques et résolution de problèmes : un point de vue didactique. Actes des journées de formation, IREM Montpellier 13-14 mai 2004*, pages 43–52. 66

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *In Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 11, pages 175–193. 148

Israel, G. (1996). *La mathématisation du réel : essai sur la modèlisation mathématique*. Science ouverte. Seuil. 24

Itard, J. (1949). Proclus de lycie, les commentaires sur le premier livre des Éléments d'euclide. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 2:363–364. 111

Jones, O. (1856). *The Grammar of Ornament : All 100 Color Plates from the Folio Edition of the Great Victorian Sourcebook of Historic Design*. Dover. 91

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, (69):31–52. 53

Kahane, J.-P. (2002). *Enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques : Rapport au ministre de l'éducation nationale / sous la direction de Jean-Pierre Kahane*. 149

Kant, I. et Barni, J. (1869). *Critique de la raison pure*. 27

Keller, O. (2006). *La figure et le monde, une archéologie de la géométrie : peuples paysans sans écriture et premières civilisations*. Vuibert. 91

Kepler, J. (1940). *Harmonices Mundi*. C.H. Beck, München. 97

Kepler, J. (1980). *Harmonie du monde. Harmonices Mundi. Traduit du latin avec un avertissement et des notes par Jean Peyroux*. Blanchard. 97, 98, 99, 118, 119, 120, 123

Kepler, J. (1997). *The Harmony of the World. Trans. with Intro. and notes by E.J. Aiton, A.M. Duncan, and J.V. Field*. Memoires of the American Philosophical Society. 97, 100, 113

KEPLER, J. et BAUMGARDT, C. (1951). *Johannes Kepler : life and letters*. Philosophical Library. 105

KEPLER, J. et CHEVALLEY, C. (1980). *Paralipomènes à Vitellion (1604) : les fondements de l'optique moderne*. Histoire des sciences : Vrin Volume 21 de L'Histoire des sciences. Textes et études. 106

KEPLER, J. et SEGONDS, A. (1993). *Le secret du monde*. Gallimard. 106, 107, 108

KLEIN, . (2000). La part d'ombre de wolfgang pauli. *La Recherche*, 329:62. 105

KOESTLER, A. (1960). *The sleepwalkers : a history of man's changing vision of the universe*. 106

KOYRÉ, A. (1966). *Études d'histoire de la pensée scientifique*. Bibliothèque de philosophie contemporaine. Presses universitaires de France. 117

KRÖTENBEERDT, O. (1970a). Die homogenen mosaike n-ter ordnung in der euklidischen ebene ii. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universitat Halle-Wittenberg*, 19:19–38. 89

KRÖTENBEERDT, O. (1970b). Die homogenen mosaike n-ter ordnung in der euklidischen ebene iii. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universitat Halle-Wittenberg*, 19:97–122. 89

KUHN, T. et MEYER, L. (2008). *La structure des révolutions scientifiques*. Champs (Flammarion (Firme)). Flammarion. 24

KUZNIAK, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en france. *Annales de didactique et de sciences cognitives.Irem de Strasbourg*, 15:75–95. 148

LAKOFF, G. et NÚÑEZ, R. (2000). *Where Mathematics Comes from : How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. Basic Books. 32

LEGENDRE, A. (1809). *Elements de geometrie, avec des notes*. Firmin Didot. 101

LENNGREN, N. (2009). k-uniform tilings by regular polygons. 89, 100

LERNOULD, A. (2010). *Etudes sur le commentaire de Proclus au premier livre des "Eléments" d'Euclide*. 98, 111

LEVY, L. (1891). Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers. *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, (8) 3:46–50. 102

LING, N. L. (2004). Tilings and patterns. Mémoire de D.E.A., Department of Mathematics, National Univ. of Singapore. 88

LUMINET, J. (2010). *Les Bâtisseurs du Ciel*. Jean-Claude Lattès. 106

MACHEREY, P. (2007). Histoire des savoirs et épistémologie. *Revue d'histoire des sciences*, 60(1):217–236. 38

MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances. analyse de l'activité du professeur. *Actes de la 11ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*, pages 141–156. 66

Margolinas, C. (2004). Points de vue de l'élève et du professeur. essai de développement de la théorie des situations didactiques. Rapport technique, Habilitation à diriger des recherches de l'Université de Provence-Aix-Marseille I. 63

Margolinas, C. (2005). Les bifurcations didactiques : Un phénomènenomène révélé par l'analyse de la structuration du milieu. *Mercier A. & Margolinas C. Balises en didactique des mathématiques, La pensée sauvage*, pages 1–12. 77

Martin, G. (1987). *Transformation Geometry, an Introduction to Symmetry*. 82, 88

Marty, R. (1990). *L'algèbre des signes*. 70, 77

Mazauric, S. (2007). De l'age baroque à l'âge classique / construction d'une nouvelle rationalité scientifique. *In Histoire et agronomie. Entre rupture et durée, Ed Par Paul Robin, Jean-Paul Aeschliman, IRD Editions. Coll, Colloques et séminaires, Paris : 2007*. 38

Muller, A. (2004). Approche sémiotique pour l'analyse a priori d'une tâche mathématique. *In Christiane Moro et René Rickenmann , Situation éducative et significations*. De Boeck Supérieur « Raisons éducatives ». 13, 70, 72

Muller, A. (2006). *La numération de position ? : entre enquête mathématique et enquête didactique, in Michel Fabre et Etiennette Vellas , Situations de formation et problématisation*, chapitre 7, pages 107–122. 36, 65

Oleron, P. (1977). *Le raisonnement*. 75

Ouvrier-Buffet, C. (2013). *Modeling of the defining activity in mathematics and of its dialectic with the proving process Epistemological study and didactical challenges*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Diderot - Paris VII. 55, 56, 135

Ozanam, J. (1694). *Récréations mathématiques et physiques, 4 vol*. 102

Pappus d'Alexandrie (1933a). *La Collection mathématique, avec une introduction et des notes de Paul Ver Eecke. Tome premier*. Desclée De Brouwer, Paris and Bruges. Réédition Blanchard, Paris 1982. 93, 115

Pappus d'Alexandrie (1933b). *La Collection mathématique, avec une introduction et des notes de Paul Ver Eecke. Tome second*. Desclée De Brouwer, Paris and Bruges. Réédition Blanchard, Paris 1982. 93

Patras, F. (1996). Phénoménologie et mathématiques : de la logique formelle à la logique transcendentale. *In Séminaire de Philosophie et mathématiques*. 27, 28

Paty, M. (2005). Des fondements vers l'avant. sur la rationalité des mathématiques et des sciences formalisées. *Philosophia Scientiae. Aperçus philosophiques en logique et en mathématiques*, 9-2. 31

Pauli, W., Heisenberg, W. et Cazenave, M. (2002). *Le cas Kepler*. 105, 115

Peirce, C. (1978). *Écrits sur le signe*. 70

Peix, A. et Tisseron, C. (1998). Le problème ouvert comme moyen de réconcilier les futurs professeurs d'école avec les mathématiques. *Petit x*, 48:5 – 21. 151

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 73:6–34. 53, 59

PLATON (1992). *Sophiste ; Politique ; Philèbe ; Timée ; Critias / Platon ; éd. établie par Emile Chambry*. 92

PLATON (2008). *Platon, oeuvres complètes, sous la direction de Luc Brisson*. Flammarion. 24

POINCARÉ, H. (1902). *La science et l'hypothèse*. Flammarion, Paris. 28, 29, 30

POINCARÉ, H. (1905). *La valeur de la science*. Flammarion, Paris. 28, 30

POINCARÉ, H. (1908). *Science et méthode*. Flammarion, Paris. 28, 30, 31

POINCARÉ, H. et DURING, E. (2001). *La science et l'hypothèse*. Ellipses, Paris. 30

POINSOT, L. (1810). Mémoire sur les polygones et les polyèdres. *J.E.P. [Journal de l'École Polytechnique*, 4:16–49. 100, 101

POLYA, G. (1945). *How to Solve It*. 52

POLYA, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. 52

POLYA, G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème. Traduit par Mme C. Mesnage. Préface de Georges Darmois*. Réimpressions (Editions Jacques Gabay). Jacques Gabay. 17

PROCLUS, Traduction et préface : Ver Eecke, P. (1948). *Les Commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide [Texte imprimé] / Proclus de Lycie, traduits pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke*. 92, 111

PUIG-RENAULT, I. (2006). Etude d'un moment sensible dans l'apprentissage de la géométrie : une situation de pavage. Mémoire de D.E.A., Université Lyon 1. 138

ROUCHIER, A. (1996). Connaissance et savoirs dans le système didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16/2:177–196. 13, 63

ROUSSEAU, C. et SAINT-AUBIN, Y. (2009). *Mathématiques et Technologie*. Springer New York. 145

SALANSKIS, J.-M. (2008). *Philosophie des mathématiques*. 26, 28, 32, 33

SAUVAGEOT, F. (2009). Man : Much about nothing. *Images des Mathématiques, CNRS,*. 48

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic press. 52

SCHUBRING, G. (2001). Production mathématique, enseignement et communication. remarques sur la note de bruno belhoste, " pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques " parue dans la rhm 4 (1998), p. 289-304. *Revue d'histoire des mathématiques*, 7. 35

SIMON, G. (1979). *Kepler astronome astrologue*. Gallimard. 39, 41, 113, 114, 116, 118, 123, 125

SIMON, G. (1996). *Sciences et savoirs aux XVI et XVII siècles*. Septentrion, presses universitaires. 37

SIMON, G. (2008). *Sciences et histoire*. Bibliothèque des histoires, ISSN 0768-0724. 37

SOMMERVILLE, D. (1906). Semi-regular networks of the plane in absolute geometry. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 41:725–759. 102, 103

TANGUAY, D. (2012). La notion d'angle au début du secondaire. *Envol*, 158:33–37. 137

Thirion, M. (1999). *Les mathématiques et le réel*. 36

Thomaidis, Y. et Tzanakis, C. (2007). The notion of historical "parallelism" revisited : historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics*, Volume 66, Issue 2:pp 165–183. 47, 48

Tiercelin, C. (1993a). *C.S. Peirce et le pragmatisme*. 70

Tiercelin, C. (1993b). *La pensée-signe. Études sur C.S. Peirce*. 70

Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. *In Actes du Colloque GDM-2001*. 137

Vergnaud, G. (2005). Repères pour une théorie psychologique de la connaissance. *Balises en didactique des mathématiques. A. Mercier and C. Margolinas. (Coord.). Grenoble : La Pensée Sauvage*, pages 123–136. 137

Veyne, P. (1996). *Comment on écrit l'histoire : texte intégral*. Points. Histoire. Seuil. 37

Voelkel, J. (2001). *The composition of Kepler's Astronomia nova*. Princeton university press, Princeton. 41, 108, 110

Warrain, F. (1942). *Essai sur l'"Harmonices mundi" : ou "Musique du monde" de Johann Kepler : d'après Kepler, adaptée à nos connaissances actuelles*. Hermann, Paris. 123

Weber, K. et Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof production. *Educational studies in mathematics*, 56:209–234. 59

Table des figures

2.1 Détail de la fresque « L'École d'Athènes » du peintre italien Raphaël 25
2.2 Positionnement des champs disciplinaires d'après Brousseau 44

3.1 Le schéma de l'articulation milieu théorique/milieu expérimental 68
3.2 10 classes de signes 73

4.1 Exemple de nœud d'ordre 4, de type (6,4,3,4) 83
4.2 Autour de P_i, i impair 84
4.3 Pavage de type (3,12,12) 84
4.4 Pavages (4,6,12) et (4,8,8) 85
4.5 Autour d'un triangle 86
4.6 Autour d'un triangle (2) 87
4.7 (3,4,6,4) et (3,6,3,6) 87
4.8 (3,3,3,3,6),(3,3,3,4,4) et (3,3,4,3,4) 88
4.9 Pavage utilisant un polygone régulier non convexe 89
4.10 Pavage non strict 89
4.11 Pavage non archimédien 90
4.12 Pavage non archimédien 90
4.13 Proposition d'assemblages avec des octogones par Dürer 95

5.1 Recherche de régularité utilisant les sinus 109
5.2 Organisation des grandes conjonctions 109
5.3 Planche de l'Harmonices Mundi 122

7.1 Pavages non stricts 139
7.2 Support pour la mise en activité de recherche 143
7.3 Sémioses autour de la recherche des pavages archimédiens du plan 144
7.4 Raisonnement autour d'un nœud 155
7.5 Premières recherches de M 162
7.6 Une carte de l'objet « Pavage Archimédien » 180
7.7 Schéma d'une évolution sémiotique 181

8.1 Affiche Groupe 1 195
8.2 Affiche Groupe 4 198
8.3 Affiches groupe 5 - Devoir en temps libre 202
8.4 Production partielle de E5 et E15 227

Liste des tableaux

3.1 Tableau pour l'analyse des raisonnements 76
4.1 Nombre de pavages pour n et m donnés. 91
7.1 Extrait de recreomath, http://www.recreomath.qc.ca/am_polygone.htm . . 171
8.5 Répertoire didactique - fin de phase 6 218
9.1 Tableau proposé par E15 pour la réponse à la question 2.2.1 239
9.2 Liste des diviseurs de 360 discriminés 242

Cinquième partie

ANNEXES

Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan.

Annexe A

Extrait du livre V de la collection de Pappus d'Alexandrie

LIVRE V DE LA COLLECTION DE PAPPUS D'ALEXANDRIE

IL CONTIENT LES COMPARAISONS DES FIGURES PLANES AYANT MÊME PÉRIMÈTRE ENTRE ELLES ET AVEC LE CERCLE, ET LES COMPARAISONS DES FIGURES SOLIDES AYANT MÊME SURFACE ENTRE ELLES ET AVEC LA SPHÈRE.

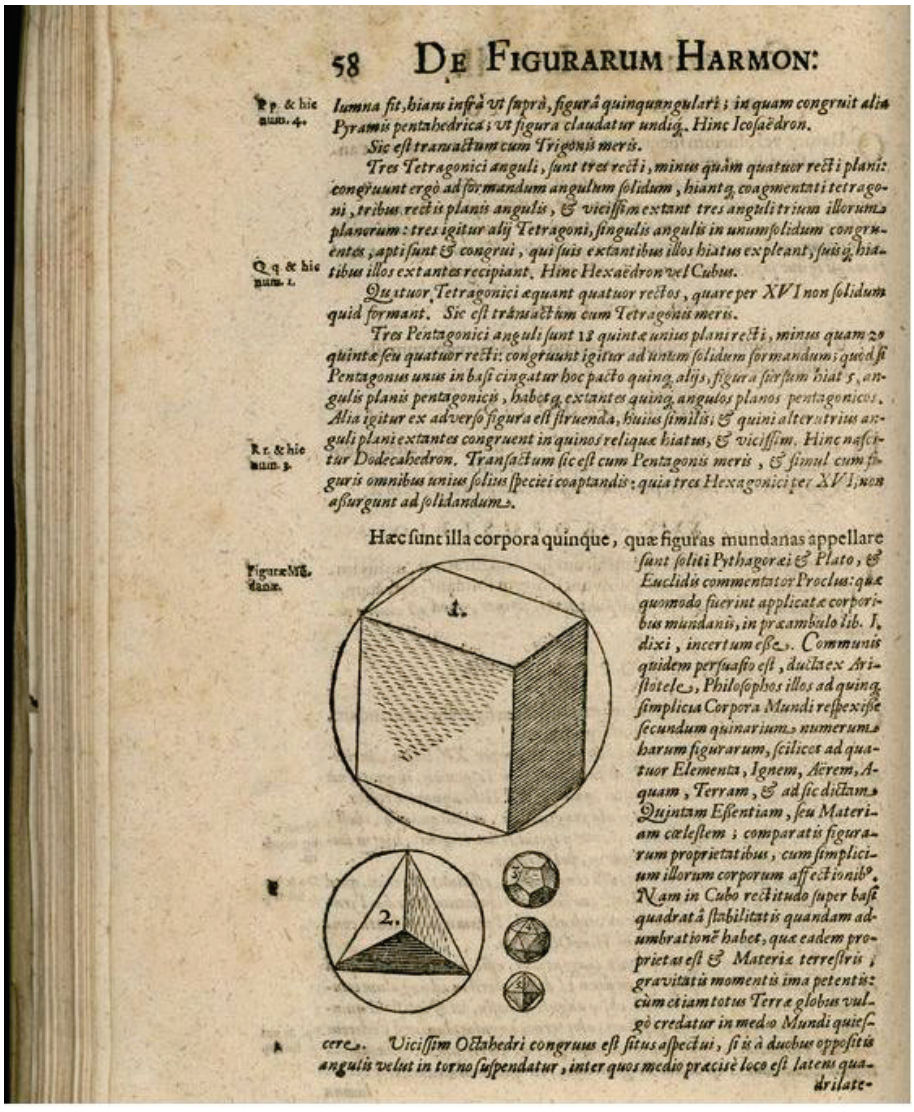
La divinité cher Mégétius, a donné aux hommes la conception la plus haute et la plus parfaite de la sagesse et des mathématiques, mais n'a octroyé ce privilège que partiellement aux animaux. Elle a, en effet, accordé aux hommes de pouvoir, de par leur intelligence, faire toute chose par raison et en connaissance de cause et, quant aux autres êtres vivants, elle a octroyé à chacun d'eux la faculté d'acquérir ce qui leur est utile et de nécessité vitale, non plus par raison, mais grâce à une certaine intuition naturelle. On peut d'ailleurs observer la réalité de ce fait chez un grand nombre d'espèces animales, et tout particulièrement chez les abeilles. En effet, non seulement il y a lieu d'admirer leur discipline et leur soumission envers celles qui dirigent le gouvernement établi parmi elles ; mais, ce qui étonne encore plus, c'est leur zèle, leur propreté dans la récolte du miel, leur vigilance et leur sagesse en vue de sa conservation. On dirait que, convaincues que c'est de la part des dieux qu'elles apportent cette parcelle d'ambroisie aux hommes cultivés, les abeilles n'ont pas cru bon de répandre leur miel au hasard sur le sol, sur du bois ou sur quelque autre matière informe et irégulière ; elles choisissent les plus belles fleurs parmi les plus agréables qui croissent à la surface de la terre et, pour contenir ce miel, elles construisent des vaisseaux qu'on appelle des alvéoles, tous égaux entre eux, semblables, juxtaposés et de la forme hexagonale. Au reste, voici comment on se rend compte de ce qu'elles parviennent à ce résultat à la faveur d'une certaine intuition géométrique.

Elles ont cru que ces figures devaient être absolument juxtaposées et avoir leurs côtés communs, afin que des substances étrangères ne puissent tomber dans leurs intervalles et venir ainsi souiller le fruit de leurs travaux. Or trois figures rectilignes étaient susceptibles de remplir cette condition, c'est-à-dire des figures régulières, équilatérales et [équiangles ; car les] figures dissemblables répugnaient aux abeilles, et ce sont donc les triangles, les quadrilatères et les hexagones équilatéraux qui peuvent avoir ainsi leurs côtés communs sans qu'il y ait entre eux des compléments dissemblables. En effet, l'espace qui règne autour d'un même point est rempli par six triangles équilatéraux en raison de six angles dont chacun vaut les deux tiers d'un angle droit ; par quatre carrés en raison de quatre angles droits, et par trois hexagones en raison de trois angles d'hexagones dont chacun vaut un angle droit et un tiers. Mais trois pentagones ne suffisent plus pour remplir l'espace qui règne autour d'un même point tandis que quatre excèdent cet espace, parce que trois angles de pentagone sont plus petits que quatre angles droits (car chacun d'eux vaut un angle droit et un cinquième), et que quatre de ces angles dépassent quatre angles droits. Et trois heptagones ne peuvent pas non plus être disposés autour d'un même point en étant juxtaposés entre eux suivant leur côtés, parce que trois angles d'heptagone dépassent quatre angles droits (car chacun d'eux vaut un angle droit et trois septièmes) ; et le même raisonnement peut s'appliquer à fortiori, aux polygones plus élevés. En conséquence, comme il y a trois figures au moyen desquelles on peut remplir l'espace qui règne autour d'un point : le triangle, le carré et l'hexagone, les abeilles ont choisi en vue de leur industrie, grâce à leur habileté, la figure la plus polygonale, après avoir compris qu'elle peut recevoir plus de miel que chacune des autres figures.

D'ailleurs, les abeilles ne reconnaissent que ce qui leur est utile, notamment que l'hexagone est plus grand que le carré et le triangle, et que, si la même quantité de matière est dépensée pour la construction de chacune de ces figures, c'est l'hexagone qui pourra contenir plus de miel. Mais pour ce qui nous concerne, comme nous avons la prétention de posséder une plus grande part de sagesse que les abeilles, nous rechercherons quelque chose de plus remarquable. En effet, parmi les figures planes équilatérales et équiangles de même périmètre, celle qui possède un plus grand nombre d'angles est continuellement plus grande, et la plus grande de toutes est le cercle lorsqu'il a même périmètre qu'elles.

Annexe B

Planches de l'Harmonices Mundi



58 DE FIGURARUM HARMON:

Pp. & hic num. 4. *Iumna fit, hians infrà vt suprà, figurâ quinquangulari; in quam congruit alia Pyramis pentahedrica; vt figura claudatur undiq;. Hinc Icosaëdron.*

Sic est transactum cum Trigonis meris.

Tres Tetragonici anguli, sunt tres recti, minus quàm quatuor recti plani: congruunt ergò ad formandum angulum solidum, hiantq; coagmentati tetragoni, tribus rectis planis angulis, & vicissim extant tres anguli trium illorum planorum: tres igitur alij Tetragoni, singulis angulis in unum solidum congruentes, apti sunt & congrui, qui suis extantibus illos hiatus expleant, suisq; hiatibus illos extantes recipiant. Hinc Hexaëdron vel Cubus.

Qq. & hic num. 1. *Quatuor Tetragonici æquant quatuor rectos, quare per XVI non solidum quid formant. Sic est trànsactum cum Tetragonis meris.*

Tres Pentagonici anguli sunt 12 quintæ unius plani recti, minus quam 20 quintæ seu quatuor recti: congruunt igitur ad unum solidum formandum; quòd si Pentagonus unus in basi cingatur hoc pacto quinq; alijs, figura sursum hiat 5, angulis planis pentagonicis, habetq; extantes quinq; angulos planos pentagonicos. Alia igitur ex adverso figura est struenda, huius similis; & quini alterutrius anguli plani extantes congruent in quinos reliquæ hiatus, & vicissim. Hinc nascitur Dodecahedron. Transactum sic est cum Pentagonis meris, & simul cum figuris omnibus unius solius speciei coaptandis: quia tres Hexagonici per XVI, non assurgunt ad solidandum.

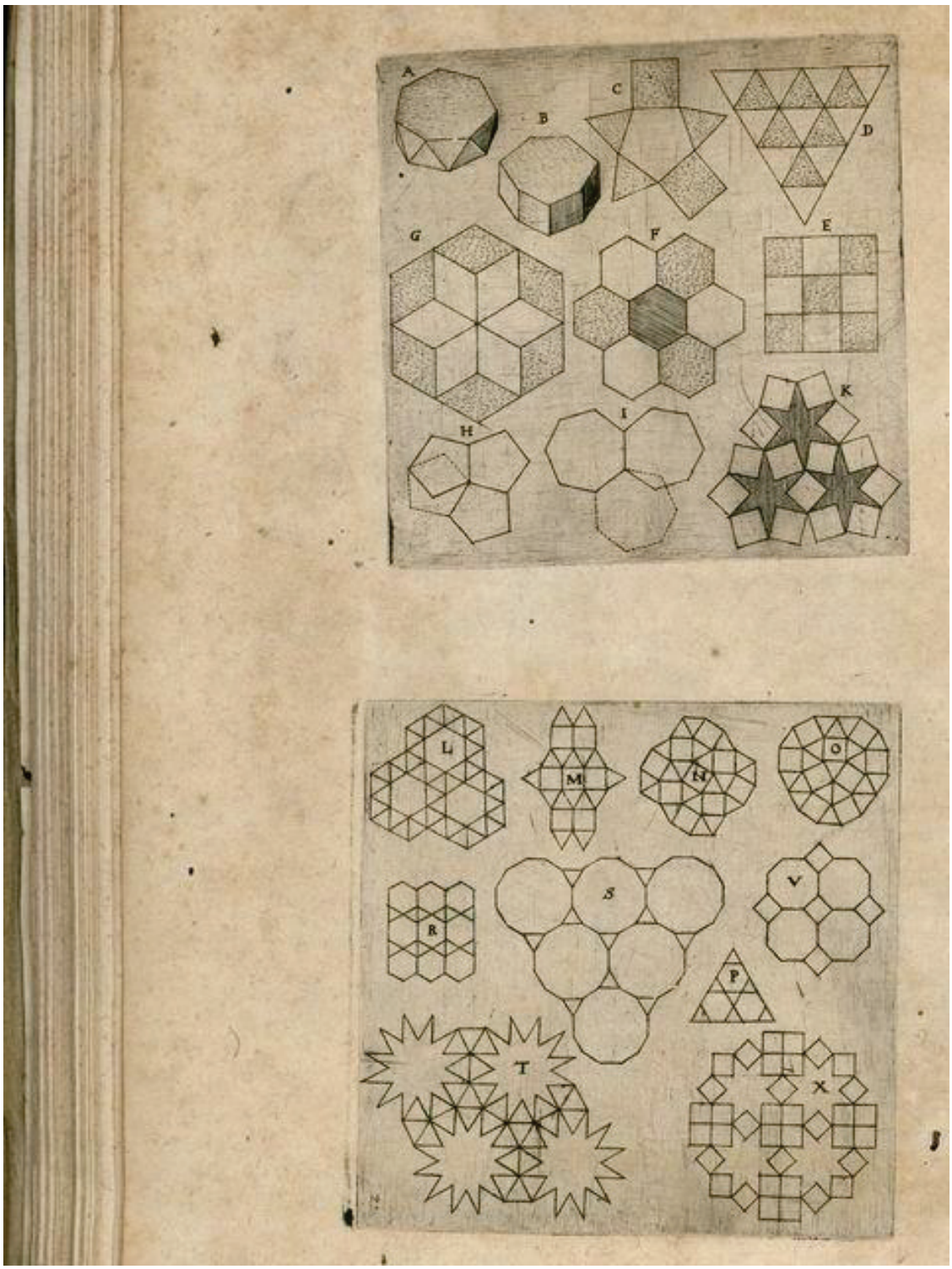
Rr. & hic num. 3.

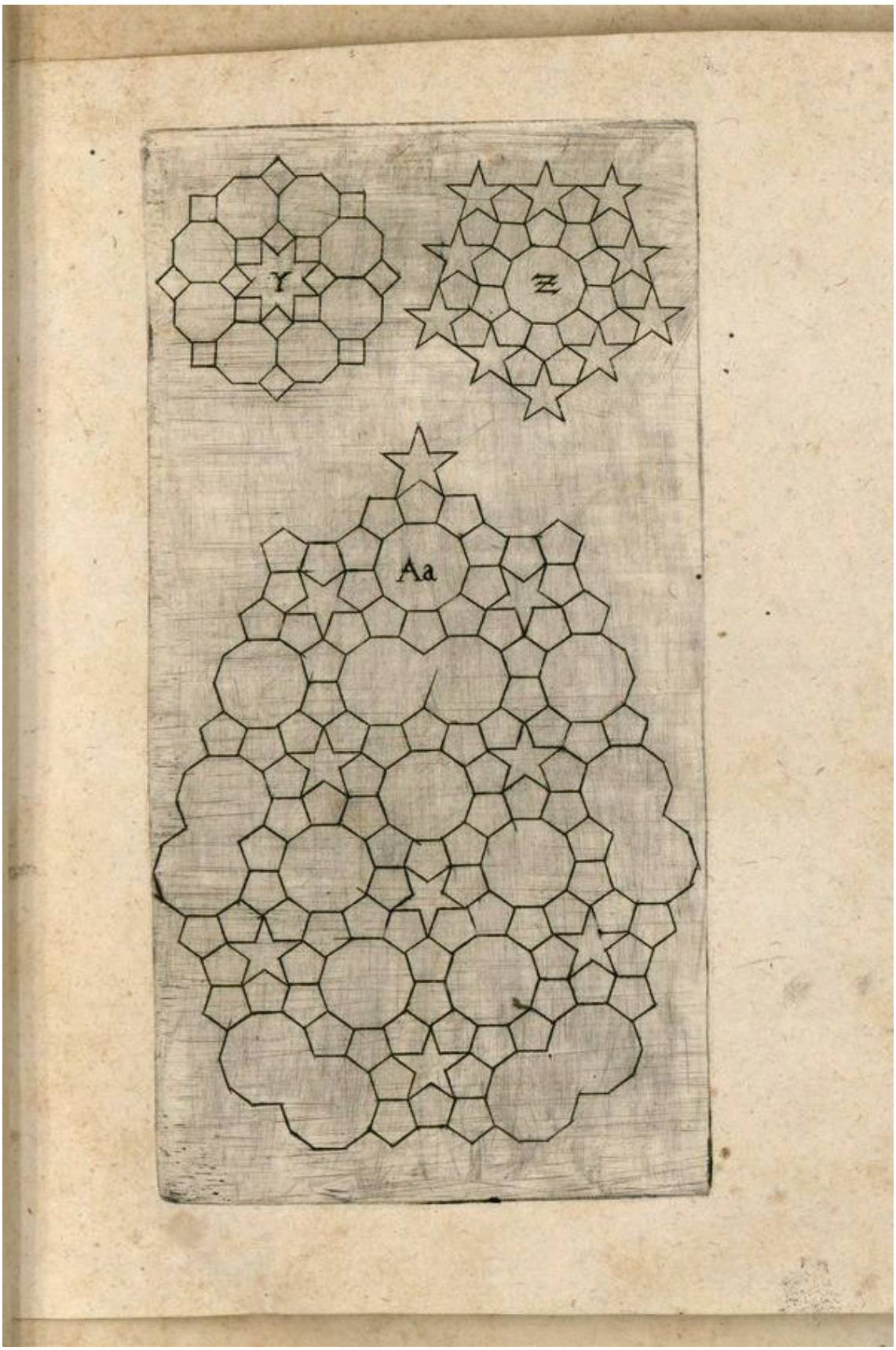
Hæc sunt illa corpora quinque, quæ figuras mundanas appellare

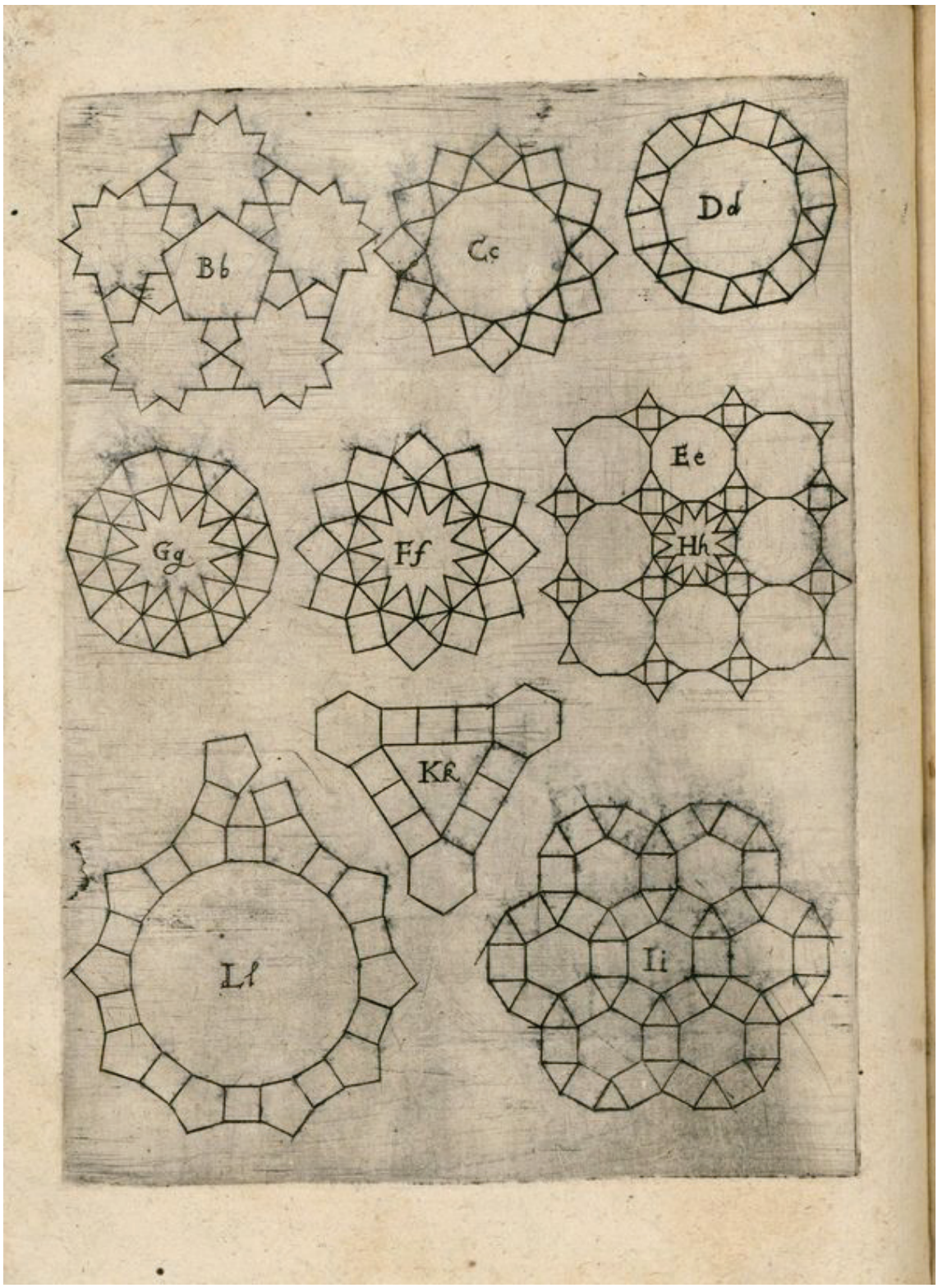
Figuræ Mundanæ.

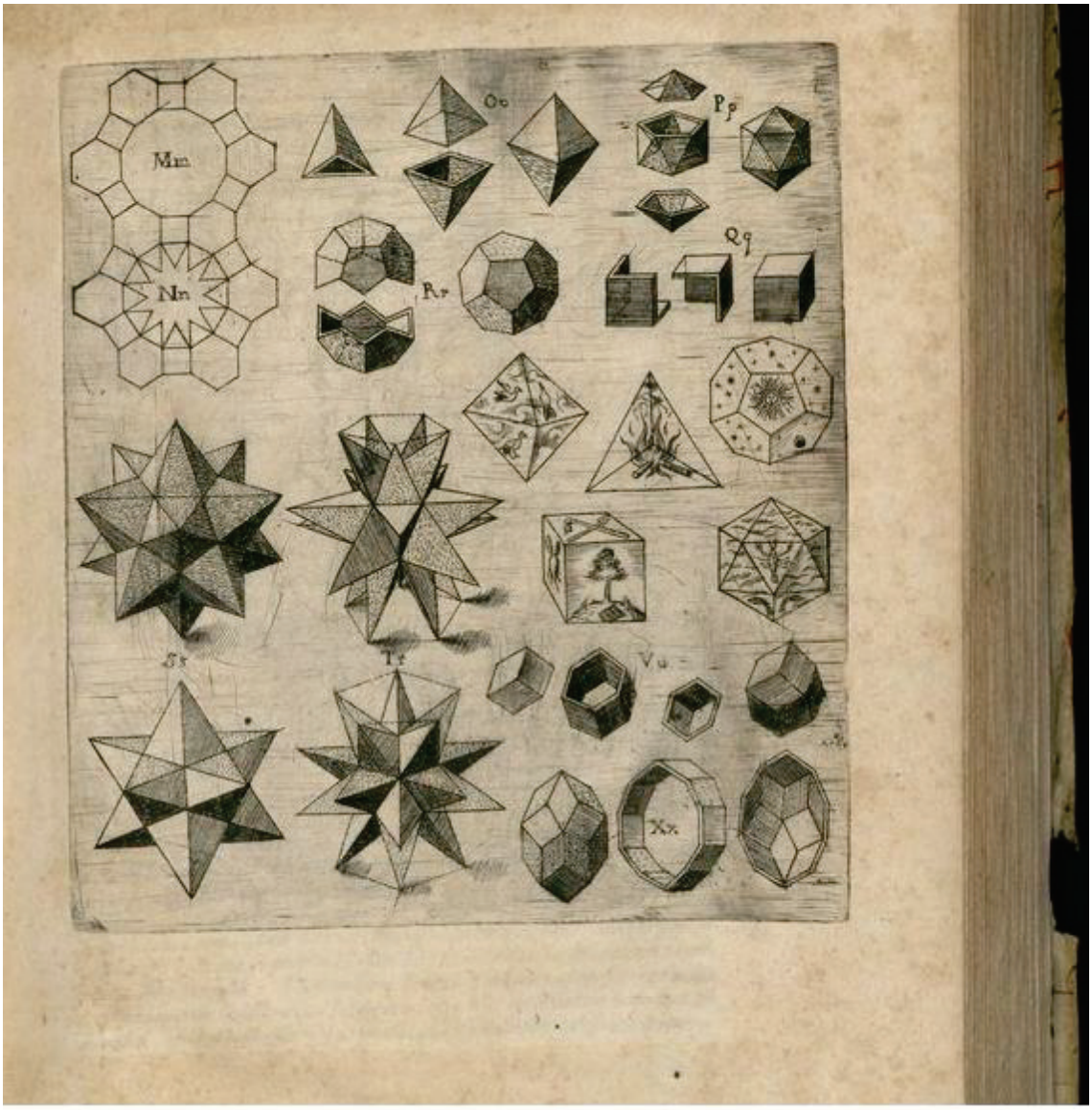
sunt soliti Pythagoræi & Plato, & Euclidis commentator Proclus: quæ quomodo fuerint applicatæ corporibus mundanis, in præambulo lib. I. dixi, incertum esse. Communis quidem persuasio est, ducta ex Aristotele, Philosophos illos ad quinq; simplicia Corpora Mundi respexisse secundum quinarium numerum harum figurarum, scilicet ad quatuor Elementa, Ignem, Aërem, Aquam, Terram, & ad sic dictam Quintam Essentiam, seu Materiam cœlestem; comparatis figurarum proprietatibus, cum simplicium illorum corporum affectionib⁹. Nam in Cubo rectitudo super basi quadratâ stabilitatis quandam adumbrationẽ habet, quæ eadem proprietas est & Materiæ terrestris, gravitatis momentis ima petentis: cùm & iam totus Terræ globus vulgò credatur in medio Mundi quiescere. Vicissim Octahedri congruus est situs aspectui, si is à duobus oppositis angulis velut in torno suspendatur, inter quos medio præcisè loco est latens qua-

drilate-


A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
R
S
T
V
X

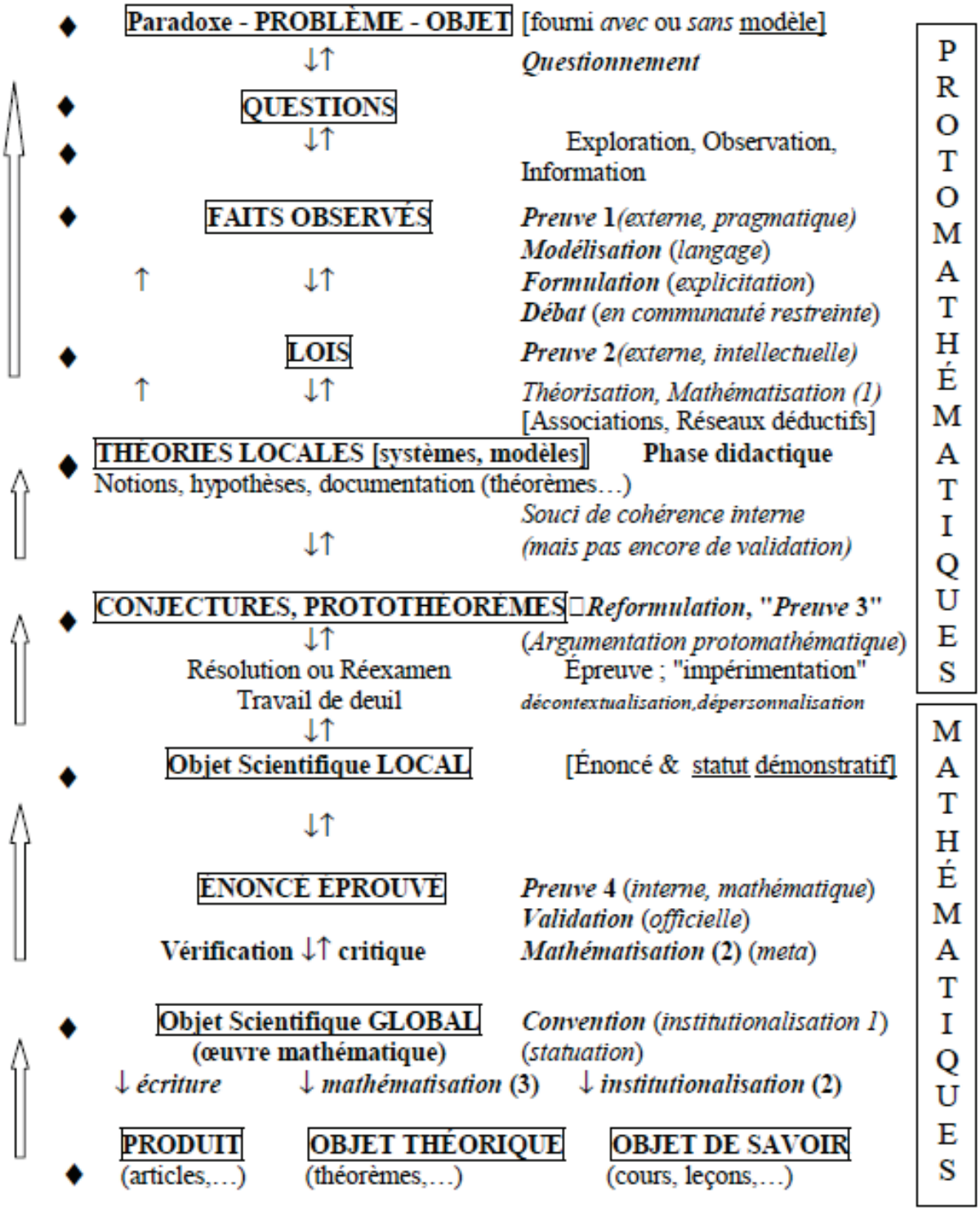

Y
Z
Aa


Bb
Cc
Dd
Ee
Ff
Gg
Hh
Ii
Kk
Ll


Mm
Nn
Oo
Pp
Qq
Rr
Ss
Tt
Vu
Xx

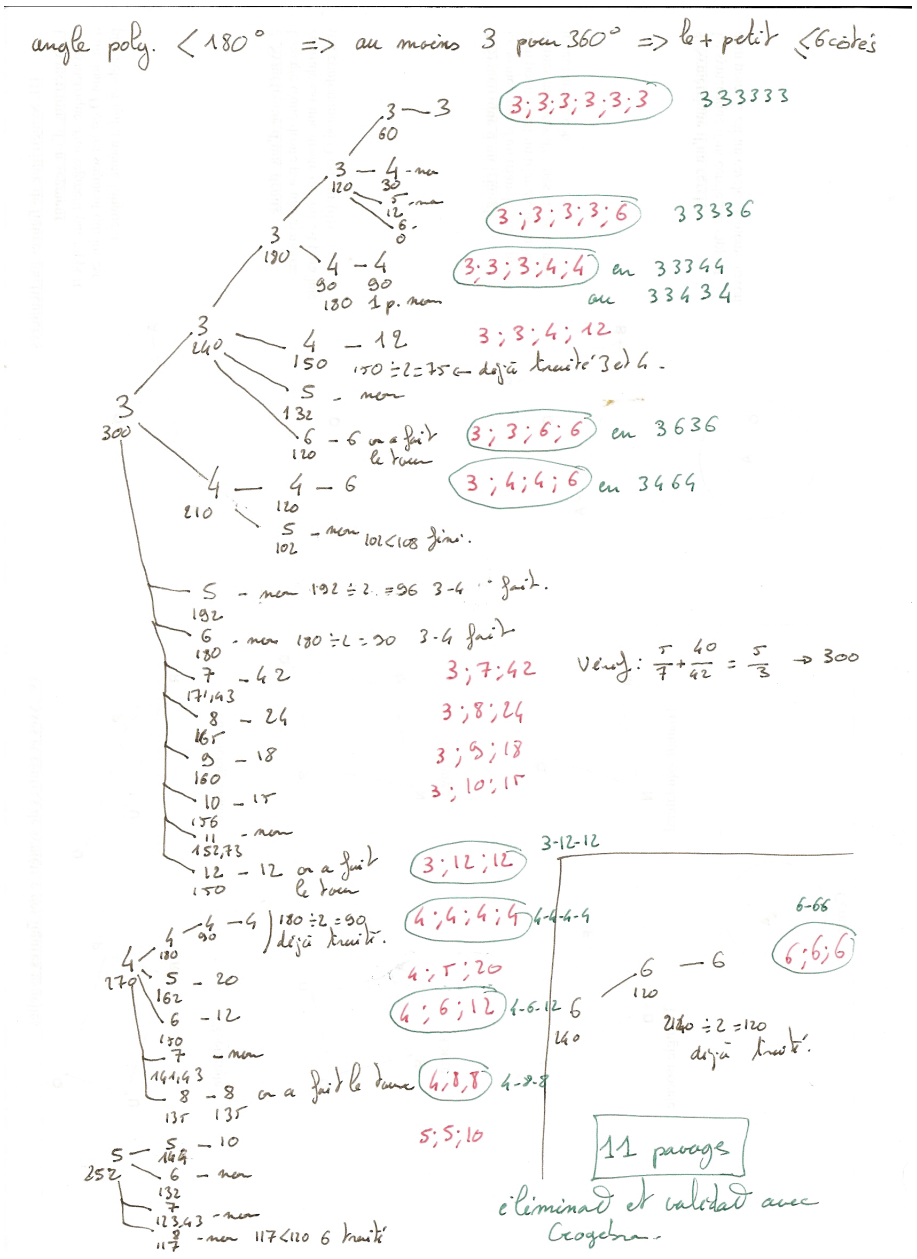
Annexe C

Modélisation de l'activité mathématique par Duchet


Paradoxe - PROBLÈME - OBJET [fourni avec ou sans modèle]
↓↑ Questionnement
QUESTIONS
↓↑ Exploration, Observation, Information
FAITS OBSERVÉS
Preuve 1 (externe, pragmatique)
Modélisation (langage)
↑ ↓↑ Formulation (explicitation)
Débat (en communauté restreinte)
LOIS
Preuve 2 (externe, intellectuelle)
↑ ↓↑ Théorisation, Mathématisation (1)
[Associations, Réseaux déductifs]
THEORIES LOCALES [systèmes, modèles] Phase didactique
Notions, hypothèses, documentation (théorèmes…)
Souci de cohérence interne
↓↑ (mais pas encore de validation)
CONJECTURES, PROTOTHÉORÈMES Reformulation, "Preuve 3"
↓↑ (Argumentation protomathématique)
Résolution ou Réexamen Épreuve ; "impérimentation"
Travail de deuil décontextualisation, dépersonnalisation
↓↑
Objet Scientifique LOCAL [Énoncé & statut démonstratif]
↓↑
ENONCÉ ÉPROUVÉ
Preuve 4 (interne, mathématique)
Validation (officielle)
Vérification ↓↑ critique Mathématisation (2) (meta)
Objet Scientifique GLOBAL
(œuvre mathématique)
Convention (institutionalisation 1)
(statuation)
↓ écriture ↓ mathématisation (3) ↓ institutionalisation (2)
PRODUIT (articles,…)
OBJET THÉORIQUE (théorèmes,…)
OBJET DE SAVOIR (cours, leçons,…)
PROTOMATHÉMATIQUES
MATHÉMATIQUES

Annexe D

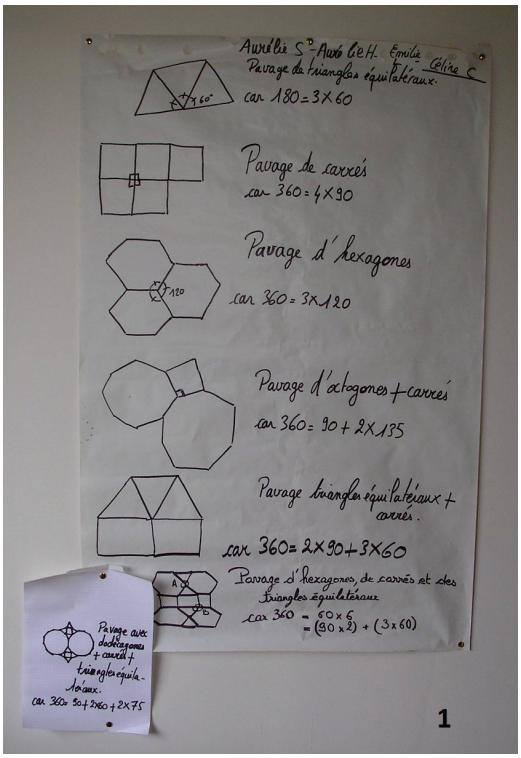
Recherche synthétique de l'enseignante (EP1 et EXP-TS2)

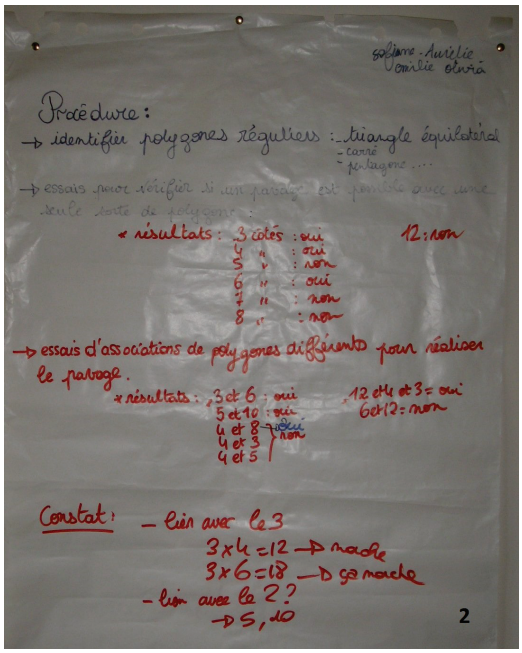


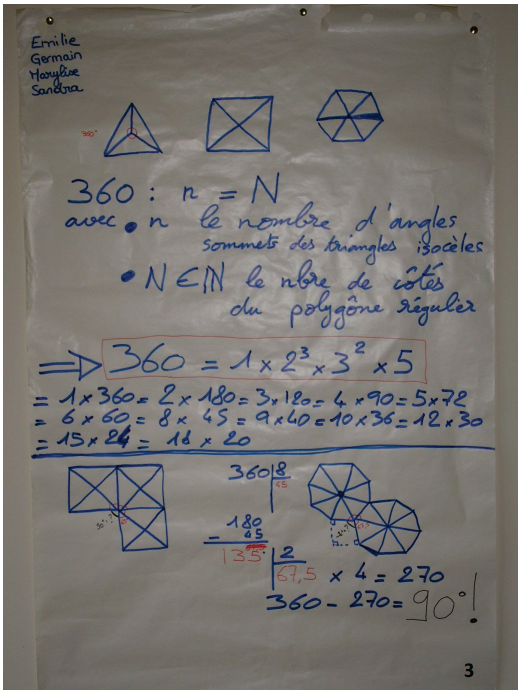
Annexe E

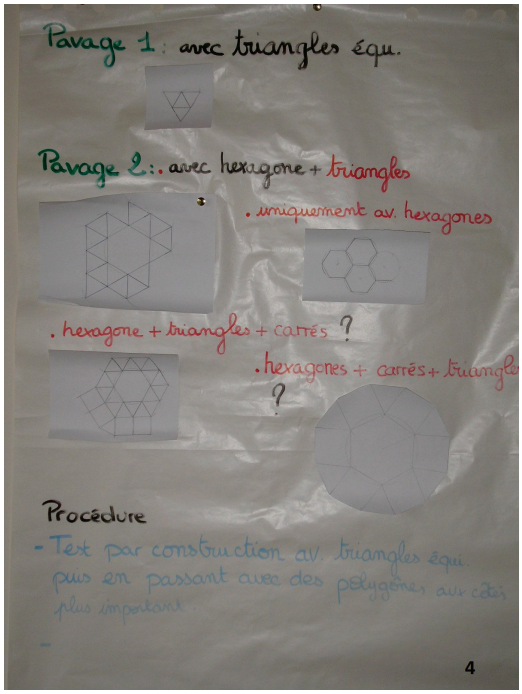
Expérimentations préalables

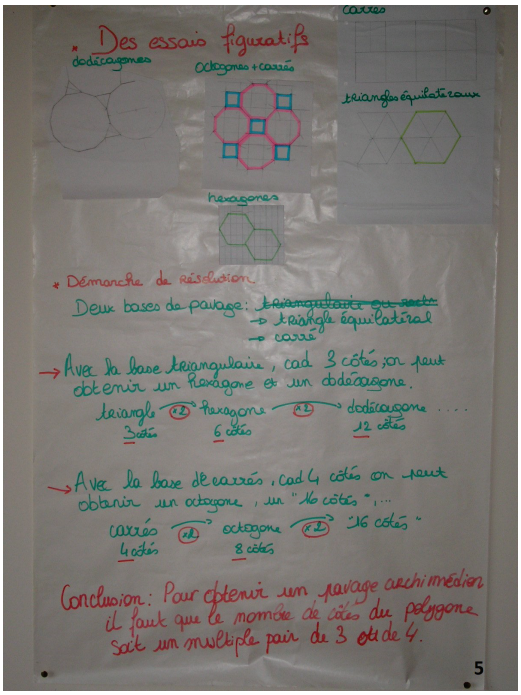
E.1 Les onze affiches produites lors de EP1

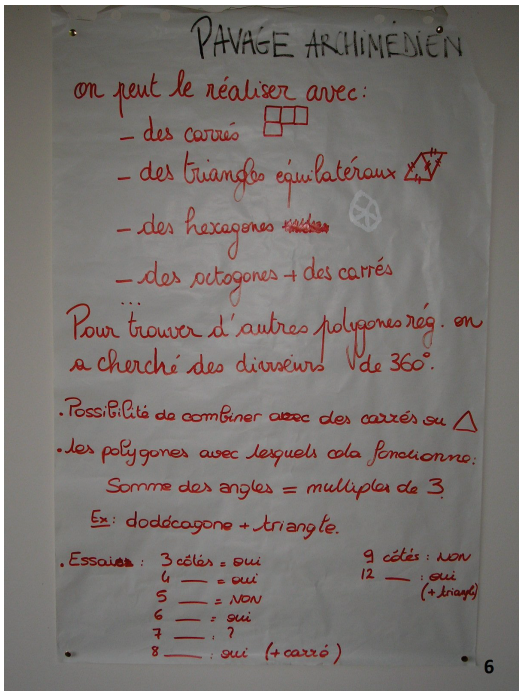


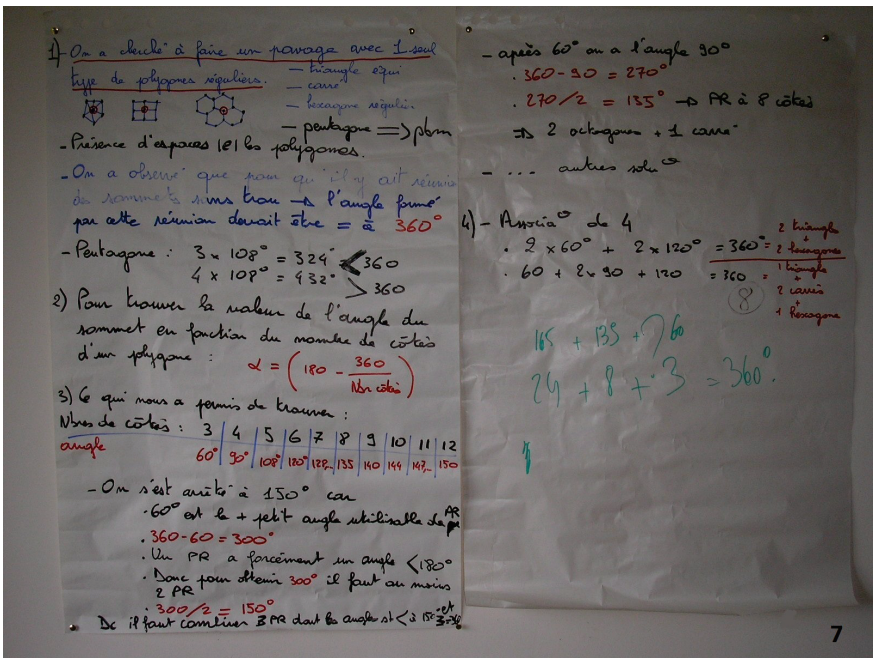


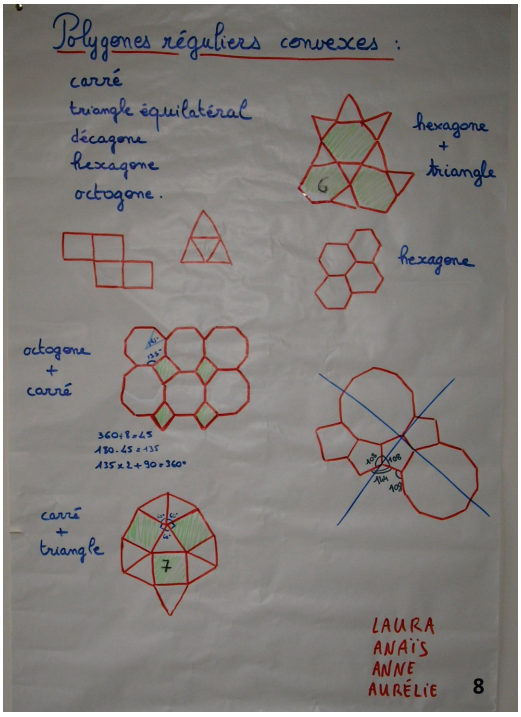

Emilie
Germain
Maryline
Sandra
360 : n = N
avec • n le nombre d'angles sommets des triangles isocèles
• N ∈ ℕ le nbre de côtés du polygône régulier
⇒ 360 = 1 × 2³ × 3² × 5
= 1×360 = 2×180 = 3×120 = 4×90 = 5×72
= 6×60 = 8×45 = 9×40 = 10×36 = 12×30
= 15×24 = 18×20
360 | 8
180 | 45
135 | 2
67,5 × 4 = 270
360 - 270 = 90° !
3

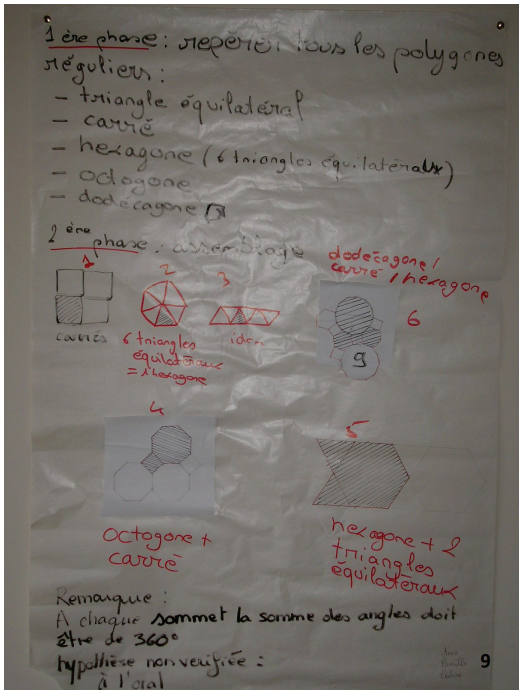

Pavage 1 : avec triangles équ.
Pavage 2 : avec hexagone + triangles
. uniquement av. hexagones
. hexagone + triangles + carrés ?
. hexagones + carrés + triangles ?
Procédure
- Test par construction av. triangles équ. puis en passant avec des polygones aux côtés plus importants
4

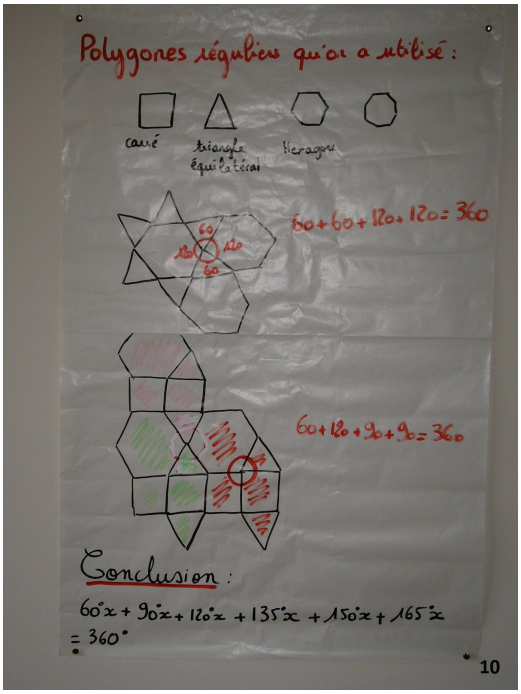

Des essais figuratifs
dodécagones
octogones + carrés
carrés
triangles équilatéraux
hexagones
* Démarche de résolution
Deux bases de pavage : ~~triangulaire ou carré~~
→ triangle équilatéral
→ carré
→ Avec la base triangulaire, cad 3 côtés, on peut obtenir un hexagone et un dodécagone.
triangle (×2) hexagone (×2) dodécagone ....
3 côtés 6 côtés 12 côtés
→ Avec la base de carrés, cad 4 côtés on peut obtenir un octogone, un "16 côtés", ...
carrés (×2) octogone (×2) "16 côtés"
4 côtés 8 côtés
Conclusion : Pour obtenir un pavage archimédien il faut que le nombre de côtés du polygone soit un multiple pair de 3 et de 4.
5

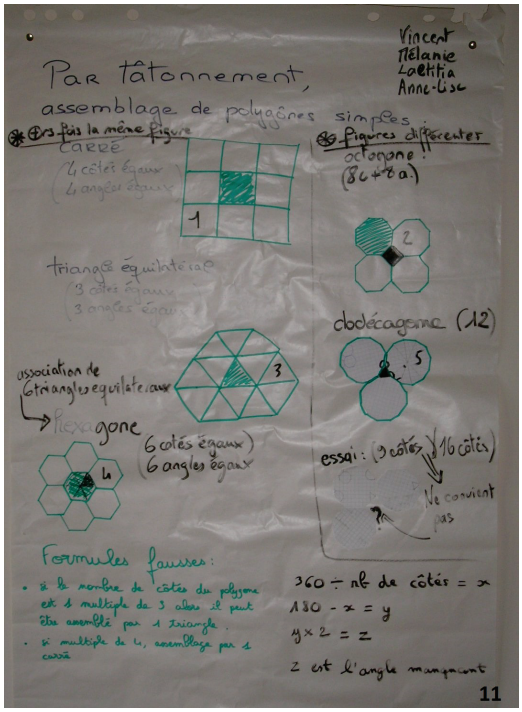

PAVAGE ARCHIMÉDIEN
on peut le réaliser avec :
- des carrés
- des triangles équilatéraux
- des hexagones
- des octogones + des carrés
...
Pour trouver d'autres polygones rég. on a cherché des diviseurs de 360°.
. Possibilité de combiner avec des carrés ou △
. les polygones avec lesquels cela fonctionne :
Somme des angles = multiples de 3
Ex : dodécagone + triangle.
. Essais : 3 côtés = oui
4 — = oui
5 — = NON
6 — = oui
7 — : ?
8 — : oui (+ carré)
9 côtés : NON
12 — : oui (+ triang.)
6


1) On a cherché à faire un pavage avec 1 seul type de polygones réguliers.
— triangle équi
— carré
— hexagone régulier
— pentagone ⇒ pbm
- Présence d'espaces lors des polygones.
- On a observé que pour qu'il y ait réunion des sommets sans trou → l'angle formé par cette réunion devait être = à 360°
- Pentagone : 3 x 108° = 324° < 360
4 x 108° = 432° > 360
2) Pour trouver la valeur de l'angle du sommet en fonction du nombre de côtés d'un polygone : α = (180 - 360 / Nbre côtés)
3) 6 qui nous a permis de trouver :
Nbres de côtés : 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12
angle 60° | 90° | 108° | 120° | 128,_ | 135 | 140 | 144 | 147,_ | 150
- On s'est arrêté à 150° car
· 60° est le + petit angle utilisable de AR
· 360-60 = 300°
· Un PR a forcément un angle < 180°
· Donc pour obtenir 300° il faut au moins 2 PR
· 300/2 = 150°
Dc il faut combiner 3 PR dont les angles ont < à 150 et 3 x
- après 60° on a l'angle 90°
· 360-90 = 270°
· 270/2 = 135° → PR à 8 côtés
⇒ 2 octogones + 1 carré
- ... autres sol°
4) - Associ° de 4
· 2 x 60° + 2 x 120° = 360° = 2 triangle + 2 hexagone
· 60 + 2 x 90 + 120 = 360 = 1 triangle + 2 carré + 1 hexagone
8
185 + 135 + 60
90 + 8 + 3 = 360°.
7


Polygones réguliers convexes :
carré
triangle équilatéral
décagone
hexagone
octogone.
hexagone + triangle
hexagone
octogone + carré
carré + triangle
LAURA
ANAÏS
ANNE
AURÉLIE
8


1ère phase : repérer tous les polygones réguliers :
- triangle équilatéral
- carré
- hexagone (6 triangles équilatéraux)
- octogone
- dodécagone
2ème phase : assemblage
dodécagone / carré / hexagone
carrés
6 triangles équilatéraux = l'hexagone
idem
octogone + carré
hexagone + 2 triangles équilatéraux
Remarque :
A chaque sommet la somme des angles doit être de 360°
hypothèse non vérifiée :
9


Polygones réguliers qu'on a utilisé :
carré
triangle équilatéral
hexagone
60+60+120+120=360
60+120+90+90=360
Conclusion :
60°x + 90°x + 120°x + 135°x + 150°x + 165°x = 360°
10


Vincent
Mélanie
Laëtitia
Anne-Lise
Par tâtonnement, assemblage de polygones simples
Pas la même figure
carré
4 côtés égaux
4 angles égaux
Figures différentes
octogone
(8c+2a)
triangle équilatéral
3 côtés égaux
3 angles égaux
dodécagone (12)
association de 6 triangles équilatéraux
hexagone
6 côtés égaux
6 angles égaux
essai : (3 côtés / 16 côtés)
Ne convient pas
Formules fausses :
• si le nombre de côtés du polygone est 3 multiple de 3 alors il peut être assemblé par 1 triangle.
• si multiple de 4, assemblage par 1 carré
360 ÷ nb de côtés = x
180 - x = y
y × 2 = z
z est l'angle manquant
11

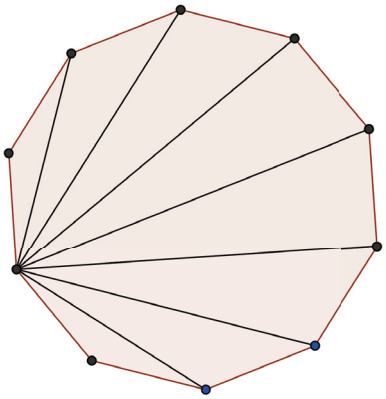
E.2 Éléments pour des apports complémentaires lors de EP1

Éléments utilisés par P, pour des apports complémentaires dans le contexte de la primo-expérimentation.

Pavages archimédiens du plan

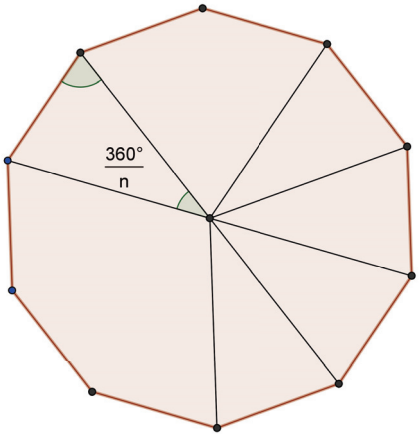
- Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

- Pour un polygone régulier à n côtés, la somme de tous les angles intérieurs est égale à n-2 fois la somme analogue pour un triangle, soit l'angle plat.



Comme les angles d'un n-gone régulier sont tous égaux et qu'il y en a n alors la mesure en degré de chacun vaut $\frac{n-2}{n}180$.

- ou : un polygone régulier à n côtés peut être décomposé en n triangles isocèles d'angle au sommet dont la mesure en degré est $\frac{360}{n}$.



En degré, l'angle à la base mesure $\frac{180-\frac{360}{n}}{2}$; Il faut 2 angles à la base pour former un angle de polygone donc l'angle mesure $180-\frac{360}{n}$

- S'il existe un pavage régulier, la condition en un sommet du pavage est

$k\ \dfrac{n-2}{n}180 = 2 \times 180$, où k est un entier, $k \geq 3$.

Cette condition s'écrit aussi : $k(n-2) = 2n$ ou $(n-2)(k-2) = 4$.

Les seules solutions entières qui conviennent sont n = 3 et k = 6 , n = 4 et k = 4 , n = 6 et k = 3.

Elles correspondent à des pavages par, respectivement, des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones réguliers.

- Pour les pavages archimédiens, des pistes, par exemple avec 3 polygones :

Autour d'un sommet potentiel on a :

$a_1 + a_2 + a_3 = 360$ où a_i est la mesure en degré d'un des 3 secteurs.

Par ailleurs, si n_i est le nombre de cotés du polygone régulier i , on a :

$a_i = \dfrac{n_i - 2}{n_i} \times 180 = (1 - \dfrac{2}{n_i})\ 180$,

et donc la relation précédente devient :

$$(1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} + 1 - \frac{2}{n_3}) \times 180 = 360$$

soit : $\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3} = \dfrac{1}{2}$: et il reste à chercher les triplets possibles.

On admet que les seuls triplets possibles sont :

$$(3,7,42)(3,8,24)(3,9,18)(3,10,15)(3,12,12)$$
$$(4,5,20)(4,6,12)(4,8,8)(5,5,10)(6,6,6).,$$

Mais ils ne fournissent pas tous un pavage ...

- Éléments pour l'approche de Kepler :

XVIII. Proposition : Seulement Trois surfaces planes de la même figure emplissent très parfaitement un lieu plan, six Triangles à la fois, quatre Carrés à la fois, trois Hexagones à la fois.

XIX. Proposition : Un lieu plan est empli six fois à partir des surfaces planes de deux figures ; deux fois à partir de cinq, une fois à partir de quatre, trois fois à partir de trois angles.

XX. Proposition : Un lieu plan est empli congruement quatre fois à partir d'angles plans de trois espèces.

XXI. Proposition : Les figures planes de quatre ou de plus d'espèces ne congruent pas avec les angles un à un, pour emplir le lieu entier.

Pour la proposition XIX, il s'agit de comprendre que Kepler traite le cas où l'on ne considère que deux figures différentes.

Il énonce tout d'abord qu'on ne peut associer 6 telles figures car si il existe a_i tel que $a_i > 60$ alors la somme des a_i est supérieure à 360.

Puis il cherche à assembler 5 figures de 2 espèces différentes.

$4 \times 60 + 120 = 360$ ... on obtient le pavage (3,3,3,3,6) figure L

$3 \times 60 + 2 \times 90 = 360$ ... (3,3,3,4,4) figure M ou (3,3,4,3,4) figure N

$2 \times 60 + 3 \times 90 > 360$ et idem si on prend 3 autres figures à la place du carré.

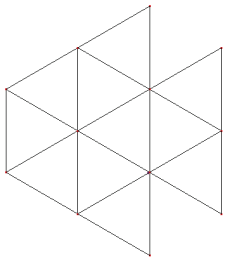
...

Il passe à 4 figures de 2 espèces différentes :

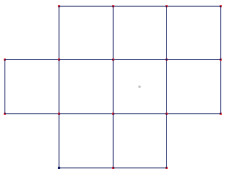
$2 \times 60° + 2 \times 120 = 360$ on obtient les pavages (3,3,6,6) figure R ou (3,6,3,6) figure P. La figure R ne correspond pas à un pavage archimédien.

...

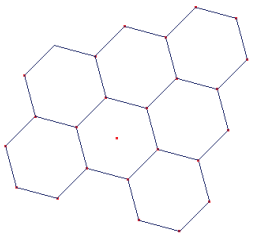
Les 11 pavages semi-réguliers :



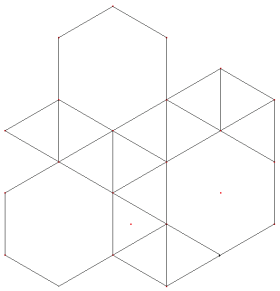
(3,3,3,3,3,3)



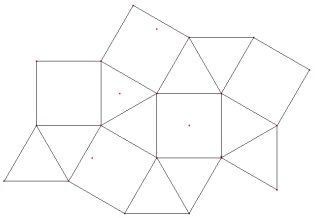
(4,4,4,4)



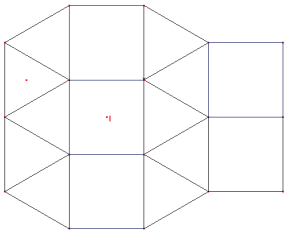
(6,6,6)



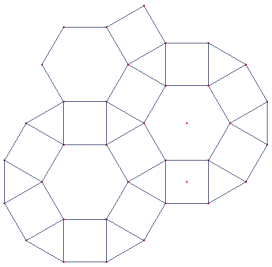
(3,3,3,3,6)



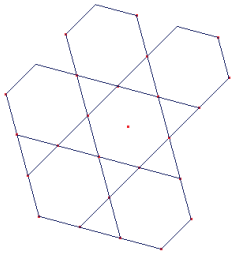
(3,3,4,3,4)



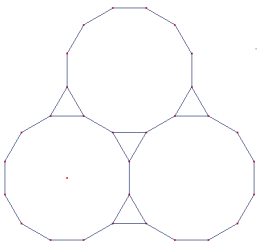
(3,3,3,4,4)



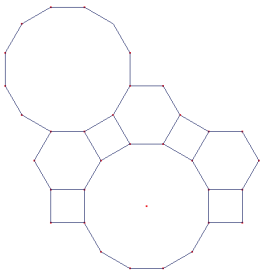
(3,4,6,4)



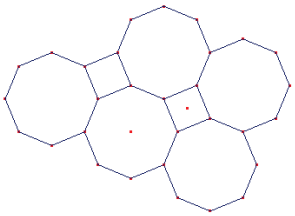
(3,6,3,6)



(3,12,12)

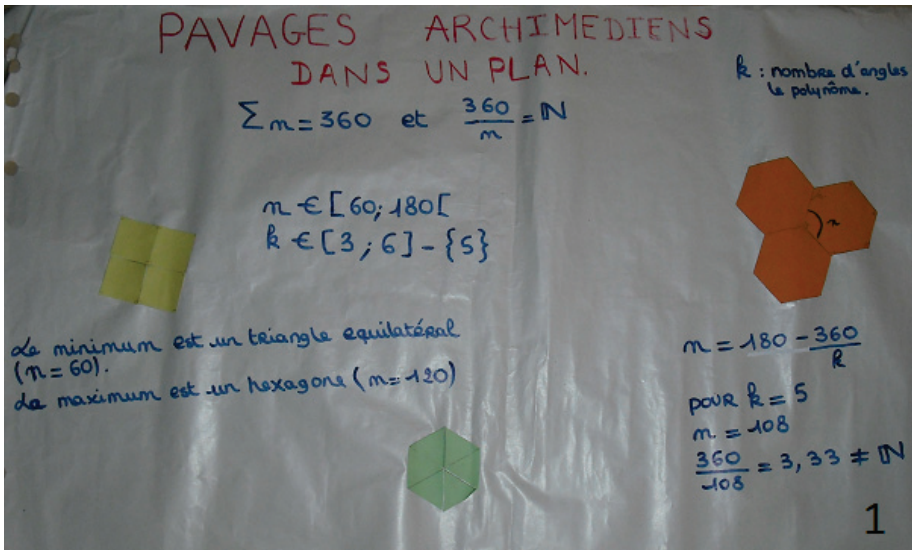


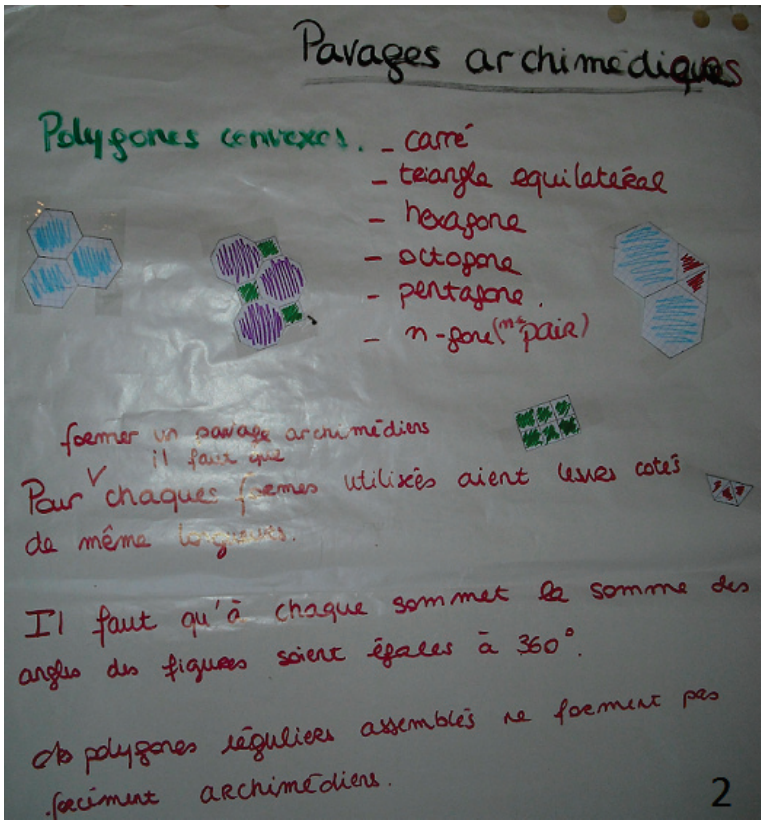
(4,6,12)



(4,8,8)

E.3 Les deux affiches produites lors de EP2-TS1





E.4 Transcription des échanges lors de EP2-TS1

Expérimentation en TS : Transcription des sons enregistrés par le micro placé près du groupe 2.

Codage : P le professeur, CS, CQ, VB les membres du groupe 2, B et M deux membres du groupe 1.

[...] les courts passages inaudibles, en italique des commentaires qui font parfois référence à l'image vidéo.

Les élèves du groupe 2 ont utilisé du papier de couleur : orange pour les hexagones, vert pour les triangles, jaune pour les octogones, blanc pour les carrés ainsi que pour un pentagone.

Repère	Locuteur Temps	Texte de l'intervention
0	00 :00 :00	Lecture de l'énoncé
	CQ	Une situation de recherche en classe. Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les les côtés qui ont tous côtés de la même longueur enfin tous.Un pavage ar archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers,sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet, il y ait le même assemblage de polygones. On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygone appartienne au côté d'un d'un autre comme sur la figure ci-dessous. La recherche proposée est la détermination de tous les pavages archimédiens du plan.
1	P 00 :00 :28	Alors est-ce qu'il y a quelqu'un qui peut reformuler, qui a compris ce qu'on vous demandait euh sur ce problème. Est-ce qu'il y a des questions sur les termes euh vous avez besoin de précisions sur certains termes qui sont difficiles alors sur les définitions des polygones polygone convexe est-ce que ça ça va
101	CS	non
102	P	Non Alors qu'elle serait ta question
103	CS	Ben j'sais pas ce que c'est
104	P	Tu sais pas quoi le polygone régulier le polygone convexe quel mot ?
105	B	carré
106	P	Alors carré c'est quoi ?
107	B	Ben c'est convexe comme polygone enfin
108	M	tous les angles qu'ont la même mesure c'est forcément des angles à 90° et vu qu'ils ont tous la même longueur c'est forcément des carrés
109	P	Voilà ça répond à la définition d'un polygone régulier Alors est-ce qu'avec cet exemple ça va où est-ce qu'il y a encore besoin de précisions c'est bon ?

110	P	Ensuite euh alors sur ce pavage archimédien le recouvrement est-ce que ça ça va ? est-ce que vous avez des questions là dessus
111	VB	j'ai pas compris ce que c'était
112	P	alors qu'est-ce que t'as pas compris exactement
113	VB	ben alors ça veut dire quoi un pavage archimédien
114	P	Alors un pavage archimédien du plan c'est un recouvrement du plan alors est-ce que ça ça va recouvrement
115		[...]
116	P	Comment
117	M	des carrés par dessus des carrés
118	P	par exemple avec des carrés voilà vas y dis donc explique parle un peu plus fort pour les autres
119	M	on remplit le plan de polygones réguliers
120	P	voilà donc là [...] des carrés on remplit le plan avec des carrés
121	CQ	y a quoi comme autre polygone convexe à part des carrés ?
122	P	ah ça ben ça sera à vous de réfléchir d'accord. Alors après donc euh sans trou ni superposition ça ça va ? et puis euh autour de chaque sommet il y a un assemblage de polygones est-ce que ça c'est bon ?
123	CQ	Hum
124	P	Ouais Donc là on vous donne un exemple qui ne convient pas euh pour le pavage alors euh on va passer aux modalités de la recherche s'il n'y a plus de question je remettrai l'énoncé après alors 5 minutes de recherche individuelle ensuite 1H30 de recherche en groupe et alors à l'issue de ce temps de recherche vous allez avoir à préparer une affiche qui se trouve là bas où vous allez présenter vos résultats et justifications et les questions euh qui subsistent c'est-à-dire s'il vous reste encore des choses que vous pensez qu'il faudrait étudier mais que par le temps vous n'avez pas pu. Ensuite on va faire 30 minutes de débat euh à partir des deux affiches ... qui permettront de présenter les résultats et de débattre sur la validité de vos résultats d'accord alors pour toutes ces différentes phases de recherche vous avez à votre disposition du papier blanc de couleur euh rapporteur règle compas calculatrice des marqueurs donc ce sera pour faire l'affiche des ciseaux de la colle gomme euh scotch euh voilà donc vous pouvez venir vous servir à tout moment de la recherche, phase individuelle ou collective, et utiliser ce matériel si vous en éprouvez le besoin voilà et ben c'est parti pour les 5 minutes de recherche individuelle je vous remets l'énoncé allez
125	CQ	on doit recouvrir quoi comme plan
126	P	Alors on doit recouvrir quoi comme plan est-ce qu'il y a quelqu'un qui peut répondre à cette question t'as une idée
127	B	[...] trois points
128	P	Un plan c'est dans toutes les directions comme vous voulez

129	B	Comme au tableau
130	P	Un tableau par exemple ça peut aller partout
131		y a pas les points
132	P	c'est bon allez c'est parti
133		
2	00 :04 :45	*Cinq minutes de recherche individuelle*
201	P	Bon alors les cinq minutes individuelles sont passées vous pouvez mettre en commun ce que vous avez fait individuellement et puis commencer la phase de recherche collective donc sur le problème qui va durer un petit à peu près 1h 1h et quart je vous donnerai le moment ou vous passerez à la rédaction de l'affiche
202		
3	00 :10 :50	[échanges chuchotés inaudibles]
301	P	Vous êtes pas obligé de chuchoter
302		[échanges chuchotés inaudibles]
303		Autour de chaque sommet
304	CQ	Il doit y avoir un truc parce que
305		parce que ce que je comprends pas c'est que t'as qu'à mettre plein de carrés et puis là t'as trouvé
306		ben oui c'est ça ben oui c'est simple
307		ben ouais c'est ça que je comprends pas
308		*[relecture du texte de l'énoncé]* et qu'autour de chaque sommet il y a le même assemblage de polygones
309		j'vois pas ce qu'on nous demande
310		ben là si t'as triangle équilatéral comme ça eh ben y faut qu'là t'aies un triangle équilatéral comme ça il faut que le truc
311		oui mais là ça va marcher mais pour les carrés [...]tu pourras plus les faire toucher
312		ben si
313		ben si si tu fais des carrés
314		ben oui le carré tu le mets là
315		c'est un plan
316		c'est pas à l'infini si ?
317		oui mais dans ce cas c'est pareil pour les triangles équilatéral
318		comme ça et comme ça
319		ben oui c'est ça que je comprends pas
320		
4	CQ 00 :13 :37	et un losange ça marche
401		non parce que le losange les angles c'est pas les mêmes
402		t'es sur ?
403		à moins que tu prennes un losange tordu
404		Mais non un losange c'est comme ça
405		Oui donc normalement c'te angle c'te angle là ... losange particulier en fait c'est un carré
406		ouais donc un rectangle

407		
5	VB 00 :14 :03	alors est-ce que c'est pas l'assemblage de tous les polygones réguliers qui font [...]
501		mais ce que je comprends pas c'est le pavage du plan par des polygones réguliers ...
502		est-ce que par exemple ça veut dire que si t'as un triangle par exemple là ... t'as un carré
503		ben non tu peux pas parce que là autour de ton sommet t'auras un carré
504		et alors
505		alors t'as pas le droit
506	CQ	tel qu'un sommet de polygone appartient au ... non c'est pas ça tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones
507		ah oui
508	VB	est-ce que c'est pas justement c'était ça j'voulais te demander si c'était pas par exemple un j'fais un truc au pif tac tac tac t'as un truc comme ça donc là en fait faut qu'à chaque sommet de chaque machin ça soit des ...
509		ça *CQ montre du doigt la première association carré triangle*
510	00 :15 :00	ouais peut être
511		est-ce que c'est ça ou pas
512		attends tu veux dire quoi
513		par exemple que si t'as cette figure là
514		ben vu qu'là y a un sommet là faut qu'y ait le même truc ici
515		ça c'est un carré tu peux pas faire un carré là
516		oui mais là tu peux faire autre chose par exemple t'sais tu trouves autre chose
517	00 :15 :22	après je sais pas si c'est faisable
518		
519		ben si et [...] régulier est-ce que ça compte
520		ouais mais y a pas de côté
521		c'est pas grave
522		oui et puis y a pas d'angle
523		c'est pas grave
524		ouais c'est vrai
525		moi aussi j'me suis dit y a pas de côté y a pas d'angle
526		peut pas y avoir un angle où là ça c'est c'est et ça *une élève considère des secteurs angulaires*
527		Attends attends tu sors ça d'où toi
528		Hein ?
529		ben ça doit bien exister
530		T'sais genre un angle un angle comme ça
531		Ouais
532		y doit bien exister un truc comme ça
533		Là c'est égal là c'est égal et là quand on fait le calcul de ça c'est égal aussi

534		Pour quoi
535		Ben non un cercle si tu prends deux ... à peu près là là ça peut bien être égal
536		ouais mais là
537		ça peut bien être plus petit ça peut bien être plus grand
538		Tu veux dire non
539		Elle dit que ça peut pas être égal parce que l'angle là par exemple ici si tu prends ces deux traits là il est plus petit et si tu prends là il est plus grand entre les deux et là aussi
540		oui mais moi j'te parle de là
541		Hein là
542		là ouais mais y a pas d'angle alors après
543		ouais ben non ça c'ést pas un angle
544		ouais mais là t'as que un angle
545		mais c'est pas grave si t'as que un angle
546		[...]
547		Donc tous les angles ont la même [...]
548		Merci de me rendre ma feuille
549		C'est parce que je sais le problème
550		Allez on est parti
551		*Un temps long*
552		
6	00 :17 :50	Ah la détermination de tous les pavages
601		ça veut dire qu'ça c'en est un ça s'en est un autre
602		ben ça s'rait trop simple sinon
603		on s'dit qu'y a un truc
604		si nous on peut expliquer c'est que c'est pas trop compliqué
605		sinon on s'rait pas là on mangerait la galette
606		si tu fais j'vais p't'être dire un truc super con
607		si tu fais quoi
608	CQ	c'est des triangles équilatéral vous voyez pas mais
609		et ben après ça fait tac ça fait un autre truc
610		tu vas chercher des carrés là dedans
611		j'y ai pensé comme toi, mais voilà ... là comme ça
612		mais pourquoi tu veux chercher des carrés
613		ben j'sais pas
614		ben pourquoi vous allez faire ça
615		ben j'sais pas c'est p't-être un autre carré
616		bon déjà faut qu'on pose la question si c'est bien ça
617		On peut vous poser une question ?
618	P	J'sais pas si j'vais répondre mais bon
619		En fait faut qu'on cherche toutes les possibilités de pavage
620	P	Hu Hu
621		Donc ça par exemple c'en est un
622		Ah d'accord
623		Moi j'ai pas compris c'est

624		tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones
625	P	alors c'est quoi que tu comprends pas
626		c'est le même assemblage de polygones
627	00 :19 : 30	est-ce que c'est par exemple faut que par exemple ces trois figures là elles sont sur un sommet faut que sur le même sommet il y ait les trois figures
628		c'est ça
629		Hu Hu
630		ben j'avais compris
631		d'accord merci
632		[...]
633		
7		Bon on en a dèjà trouvé un
701		j'pense
702		Ben oui parce que de toute façon ça fait pareil
703		parce que là y a chaque carré là et après t'as chaque carré enfin ainsi de suite
704		Tu trouves un deuxième
705		Ouais
706		ben après y a un troisième avec ça
707		Ca s'trouve c'est pas du tout ça
708		Rires
709		Si on dit c'est ça
710		Et après tu fais ça
711		ouias mais après faut essayer de les assembler
712	CS	oui mais après mais euh déjà
713	CS	donc ça fait un de plus avec celui là
714		attends j'regarde un truc
715		mais faut pas que attends j'regarde
716		Non mais y faut pas que par exemple y faut pas que je mette comme ça
717		[...]
718		je dois mettre quoi là au bout
719	00 :20 :30	ben va y avoir un triangle
720		Ah
721		Ok ça marche
722	00 :20 :38	ça c'en est un autre
723		là c'est pareil, le même angle, le même ...
724		ça veut dire que là
725		oui mais c'est pas grave parce que là sur l'angle là y en a un là, y en a un là
726		là faut que t'en aies un autre comme ça
727		et là aussi et ainsi de suite
728		[...] *appui sur le pavage octogone-carré*
729		par exemple là autour de chaque angle y a un machin comme ça

730		c'est comment ça
731		comment on appelle un ...gone ?
732		ouais
733		là y en a huit, là on a huit
734		non octo
735		non 1,2,3,4,5,6,7 ouais y en a 8, là
736		y en a pas 7
737	CQ	y en a 8 c'est octo
738		oui ben 7 aussi c'est octo
739		y en a 8 ou 7, 8 ou 6
740		1,2,3,4,5,6,7,8 donc c'est un octogone
741		ben recompte
742		de toute façon c'est six
743		comme ça
744		c'est comme ça c'est çui là
745		l'hexagone c'est 6
746		Hum
747		et avec celui là
748		mais j'suis loin
749		tac tac tac tac et ainsi de suite
750		y a un truc c'est pas possible que ça soit ça
751	VB	non mais parce que ça c'est des simples mais y en a des compliqués j'pense et les compliqués c'est ceux là
752		faut pas écouter c'qui disent derrière
753	00 :21 :48	et les compliqués c'est ceux là
754		moi je vois pas ...
755		
8		et tu crois qu'on doit en trouver combien 1 milliard 732 000
801		hein ?
802		tu crois qu'on doit en trouver combien ?
803	00 :22 :00	ben j'en sais rien
804		[...]
805		2 octogones, un au carré, et sur chaque angle ... ainsi de suite
806		si tu continues comme ça ...
807		[...]
9	CQ 00 :22 :09	et si on mettait au propre tous ceux qu'on avait déjà
901		Ben tiens y en a déjà un là
902		Ben j'en ai un là un là
903	CQ	Et ben Valentine fais [inaudible] comme ça elle utilisera pas
904		Ah ah ah
905		ça sert à rien d'utiliser 50 feuilles
906		et après
907		après y a ceux là à faire
908		là y a lui là encore
909		Ben ça fait deux elle le fait

910		...
911		ben oui pis là tu dois encore faire avec des carrés faut que tu recommences
912		Oui mais non
913	VB	ben si parce que de ce côté faut que tu mettes un carré, de ce côté
914	VB	et pis d'ailleurs c'est tordu les trucs tes angles
915		si t 'en fais un bien, les angles sont pas
916		mais si tu mets un carré genre là
917		Ah mais ça veut dire qu'y a
918		mais il est pas très carré ton carré je vais reprendre une feuille
919		oui moi ça m'aurait arrangé aussi en fait
920		t'en veux une
921		pardon c'aurait été plus simple
922		Ah non
923		Y a des trous
924		oui ben je sais qu'y a des trous d'partout maintenant
925		t'en veux une ou pas
926		oui mais trop tard j'suis parti là dessus
927		y a même du papier millimétré si vous voulez
928		[...]
929		au pif
930		non
931		tu m'en prends une
932		ah oui
933		alors
934		ouais
935		ça ça fait un cm
936		et mais t'es sure
937		on peut aller regarder
938		on peut [...]
939		[...]
10	00 :23 :50	et c'est combien les angles dans un un un truc comme ça ... *dessin d'un octogone ressemblant à un heptagone*
1001		euh celui là ou celui là
1002		celui là
1003		celui là eh ben tu fais
1004	CQ	c'est un angle obtus déjà
1005	VB	1 2 3 4 5 6 7 7 donc 180 divisé par 7
1006	CQ	t'es sure
1007		oui parce que tous les angles [inaudible] ça donne un angle droit après
1008		pas un angle droit un angle plat
1009		ouais un angle plat
1010		Ah c'est bon hein
1011		on va attendre je vais voir

1012	CQ	c'est pas possible ça fait 25 *utilisation de la calculatrice et du rapporteur simultanément*
1013		Ben 25 de l'autre côté tu prends
1014	CQ	Ah ouai c'est 25 de là
1015		Ah ben oui
1016	CQ	pis après tu fais 180 - 25
1017		Voilà
1018		et ça fait combien
1019		ça fait 165 non 135
1020	CQ	c'est pas possible
1021	CQ	ça fait ça ça fait 135 ?
1022		ben elles sont comme ça
1023	VB	vous cherchez quoi là
1024		combien l'angle il fait là
1025		ben regarde
1026		là il fait comme ça ton angle
1027		ton angle il est comme ça
1028		360
1029		divisé par 8
1030		Ah peut être ouais
1031		un tour complet, ça fait un tour complet
1032		divisé par 8 non divisé par 7
1033		et pourquoi ?
1034		parce que y a 7 angles
1035		1 2 3 4 5 6 7 8 non [Rires]
1036		45 c'est pas ça
1037		c'est pas possible ?
1038		et ben regarde c'est bien
1039		tu fais tac
1040		45 c'est pas un angle droit
1041		Non ça fait la moitié d'un angle droit donc c'est pas possible
1042		c'est 135 c'est 135
1043		ouais
1044		c'est très beau
1045		Ah non j'ai pas fait pareil en même temps
1046		[inaudible]
1047		tu faisais plus simple tu faisais comme ça ton angle
1048		tac tac
1049		...
1050		et ben maintenant tu
1051		...
1052		je viens de le dire ben franchement
1053		vous êtes têtues hein
1054		et j'ai une idée
1055		t'es têtue
1056		tu le fais comment le calcul
1057		n'importe quoi

1058		non là 135
1059		mais y tiennent pas là ? ? ... la formule exacte tu l'as trouvée par le calcul
1060		mais on la déjà trouvé par le calcul
1061		
11	00 :25 :51	bon bref
1101	CQ	si on mettait des formes dans des dans des ... ça serait plus simple,
1102		t'y assemble euh
1103	CQ	ouais, tu fais du puzzle
1104		bruits de manipulation
1105		je me charge des carrés
1106		et j'fais le triangle équilatéral
1107		j'vous remercie les filles c'est sympa
1108		
12	00 :26 :21	ouais mais y faut ça fasse la même taille aussi
1201		ben non pourquoi
1202		c'est pas dit qu' c'est obligatoirement la même taille
1203		ouais faut qu'on en fasse plein
1204		faut que chaque carré est la même
1205		je pense
1206		oui
1207		ben alors maintenant tu fais les euh les euh
1208		ah si si parce que de toute façon
1209		les euh
1210		ah mais non c'est pas dit
1211		là la longueur
1212		oui mais en plus
1213		là tu fais au moins la même longueur
1214		oui mais non mais justement parce que si c'est pas de la même longueur ça refait deux possibilités en plus
1215		ouais
1216	00 :26 :51	Ah ben non parce que après y aura un sommet qui sera dans la longueur
1217		et alors ?
1218		ben genre si tu fais un truc comme ça plus grand, plus grand par exemple tu le fais comme ça et après tu va refaire un triangle comme ça, eh ben là t'aura
1219		eh ben là y a un triangle, voilà
1220		ouais mais j'suis pas sure donc
1221		
13		ben on va y essayer de toutes façons, on verra mieux
1301		vous faites quoi vous ?
1302		un triangle équilatéral
1303		t'arrives ... rires
1304		j'vous remercie ... ah ben bien sur
1305		y nous manque des triangles

1306		y en a un làs bas
1307		vous avez pris des ciseaux
1308		Heu non
1309		moi j'en ai
1310		tu peux en prendre un
1311	CQ	ah mais vous avez rien sérieux
1312		ben ouais, j'ai rien
1313		oui donc ça revient au même
1314		j'en fais un grand ou pas, vous faites des grands ou pas
1315	CS	moi j'fais
1316	VB	5 cm
1317		moi j'en ai fais un de 4
1318		on en fait déjà un tous de la même forme après ...
1319		on en fait un de 5
1320		5 ?
1321	CS	4
1322		Euh tu t'es mis sur quel point toi
1323		T'es sure de toi Chloé ?
1324		oui
1325	CQ	ils font des calculs savants de l'autre côté
1326	CQ	Qui c'est qu'a une gomme
1327		[inaudible]
1328		j'crois y a des cours
1329		j'sais plus
1330		*temps long d'action*
1331		t'en as fait trois
1332		non
1333		vous en avez fait trois ?
1334		le 4 et 6
1335		[inaudible]
1336	CQ	en même temps vous m'avez laissé ... le truc que personne veut faire hop, il est pour Charlotte
1337		en tant que déléguée
1338		5 cm
1339		c'est énorme
1340		mouais mais bon, si on veut assembler ...
1341		oui mais j'veux dire j'pense pas que y fasse ...
1342		si tu veux je ferai le prochain
1343		non mais c'est bon t'inquiète
1344	CQ	j'vais en dire un plus petit
1345	VB	2 cm
1346		y sont en train de faire des calculs trop complets
1347		nous d'façon c'est trop simple
1348		il est bizarre mon truc hein
1349		j'crois que j'me suis plantée
1350		
14		euh elle a fait 135 de l'autre côté

14001		ouais
14002		au pire vu qu'on fait tous 5 cm pourquoi voulez vous qu'ça fasse ...
14003		ah non parce que là j'ai fait 6 et 4 d'façon
14004		alors j'étais pas trop chiante
14005		ben si vous respectez genre une couleur par euh
14006		faut que tu prennes une feuille jaune
14007		hein
14008		tu prends une feuille jaune
14009		pour le faire
14010		elle veut qu'on respecte les couleurs
14011	CQ	ben ouais
14012		ou alors donne lui ah ben non
14013		mais non parce que là les feuilles orange on va repartir avec les 8
14014		parce que là j'pense que tu fais le 6 toi
14015		Non j'fais le 8 on refera avec le 6
14016		c'est combien les angles pour les 6
14017		ben tu fais pareil sauf
14018	CS	ben oui mais vous m'avez pas dit ce que vous vous avez fait
14019		c'est trop savant
14020		Rires merci !
14021		Ah mais toi aussi [...]
14022	CQ	tu fais 6 ou le 8 là parce que 8 c'est 135, si tu l'fais jaune c'est 8
14023	CS	pour le 6 c'est combien ?
14024	VB	150
14025	CS 00 :34 :00	150 ?
14026	VB	normalement ça devrait être ça ... essaye
14027		si on a fait une faute euh
14028		j'faisais les 8 mais j'ai pris jaune [...] tant pis
14029		he j'vais me faire taper dessus
14030		ah ben oui juste un coup de compas
14031		c'est mieux quand on cherche à plusieurs
14032		quoi ?
14033		c'est mieux quand on cherche à plusieurs
14034		si ça trouve pour le bac on va tomber sur ce sujet
14035		ça me paraît bizarre 150
14036		il est où ?
14037	00 :35 :33	ah ben non ... non non c'est pas 150 ...
14038		mais y me paraît bizarre
14039		c'est moins de 160
14040		on dirait que c'est plus petit en haut qu'en bas
14041		ouais
14042		si ça se trouve c'est parce que t'as fait deux traits comme ça, ben tu vois

14043		
14044		pourquoi toi tu peux couper ?
14045		ben c'est ce que j'allais faire mais
14046		est-ce que les côtés sont les mêmes
14047		ben non c'est pas les mêmes
14048		c'est pas les mêmes longueurs de diagonales ?
14049		[inaudible]
14050		ben non
14051		[...]
14052		ben non c'est pas la même la diagonale
14053		[...]
14054		T'as dis quoi Aurélie euh Chloé
14055		ben c'est pas les mêmes là la diagonale
14056		logique [...]
14057		la diagonale
14058		ben le carré, le côté d'un carré et la diagonale c'est pas les mêmes
14059		non
14060		[...]
14061	CQ	c'est pi sur deux ça ...
14062		j'crois les diagonales c'est 2 2 ...la longueur de la diagonale c'est un truc du genre pi sur 2 quelque chose comme ça euh 2 racine de 2 où une connerie comme ça
14063		alors moi [...]
14064		eh ben tu prends là et là
14065		j'peux tester un truc
14066		tu veux tester quoi
14067		[...] faut qu'on mette la distance entre ces deux trucs
14068		oh regarde il est beau
14069		vous voulez que j'en fasse un autre
14070		si tu connais pas la distance entre ces points
14071		vous voulez un plus petit ?
14072		il fait combien là
14073		euh 3
14074		ben celui là
14075		c'te partie
14076		tu crois là qu c'est ...
14077	CQ	faut au moins en faire deux des comme ça parce que si on veut les assembler
14078		moi j'en prends ...
14079		là mais c'est le milieu d'un d'un triangle équilatéral
14080		ha mais le milieu de
14081		ouais de la figure
14082		même faudrait les trois de la même taille
14083		je teste un truc
14084		parce que si c'est le milieu après pour que ce soit la distance ...tu reportes là tu mets ton machin là ...

14085		j'ai suivi la conversation et j'ai rien compris de ce que tu m'dis là
14086		regarde ...c'est plein de petits triangles
14087		oui donc là
14088		là c'est le milieu du truc
14089		ouais et en fait tu fais en fait après tu prends deux tu repars de là et tu fais deux segments comme ça parallèles à celui là
14090		deux segments de la même taille mais parallèles
14091		tu m'as dit quoi Charlotte
14092		j'sais plus
14093		comme ça on saura faire des...
14094		j'ai l'impression d'être euh t'sais en maternelle
14095		moi aussi
14096		j'crois qu' nous on utilise la méthode maternelle et derrière ils utilisent la méthode terminale S
1497		Rires
14098		heu non c'est pas ça
14099		j'crois qu'j'ai fais la même erreur la même erreur que toi ...
14100		qu'est-ce que t'as fait
14101		parce que j'ai pris le rapporteur derrière donc j'ai pris 145 là
14102		hum
14103		t'avais pas ça toi tout à l'heure
14104		j'sais pas
14105	CQ	ben j'crois j'avais compté 130 au lieu de 135
14106		j'crois [...]
14107		[...]
14108		d'façon j'sais plus où j'ai pris mes [...]
14109	CQ	T'as fait un carré de 5, un carré de combien ?
14110		Euh 6 et 4
14111		6 4 5
14112		j'crois [...]
14113		et là tu fais combien de 4 de 3
14114		ouais
14115		Rires tu fais 6 5 et là tu fais 3
14116		hé mais Charlotte tu peux pas tout commencer là
14117		mais si tu rallonges tu fais des parallèles
14118	CS	oui parce que c'est Charlotte
14119	VB	oui je sais
14120		et là donc tu vas faire 4
14121		oui
14122		eh ben moi j'vais faire euh 6 [...]
14123		[...] on va connaître
14124	CQ	on a déjà commencé [...] d'façon
14125		[...]
14126		qu'est-ce que je suis intelligente des fois j'sais pas comment je fais

14127	CS	elle fait bizarre ma figure quand même
14128		ben regarde si les angles c'est les mêmes
14129	CS	ben ouais mais non j'trouve ça bizarre
14130	CS	c'est 115 moi
14131		115 ?
14132		hum
14133		120 !
14134	CS	donc d'accord c'est normal que ça soit pas pas pareil
14135		Rires
14136	VB	ben faut tu prennes entre 5 carreaux et ça
14137		hé
14138		[...]
14139		ha j'aimerais pas l'avoir à ta place
14140		hein
14141		j'aimerai pas l'avoir à ta place
14142		pourquoi ?
14143		faut peut-être marquer au dos au dos on marque le nombre de côtés
14144		oui
14145		5
14146		et les cm euh les euh les angles
14147		ah oui d'accord
14148		comme ça on saura
14149		135
14150		parce que regarde, c'est pas bon mon truc c'est pas aligné ça
14151		mais de toute façon enfin prends n'importe quelle longueur c'est les mêmes les angles
14152		oui mais on y marque quand même ... quelque part
14153	CS	parce que la longueur de l'angle là euh
14154		chut
14155		ba
14156		[...]
14157	CS	ça sert à rien ce que j'fais
14158	CQ	de quoi
14159	CS	j'dis ça sert à rien ce que je fais
14160		mais si
14161		[...]
14162		ça c'est 4
14163	CQ 00 :43 :46	p'être bien qu'faut qu'on accélère un peu
14164		ah j'suis désolée
14165		[...]
14166	CS	bon verdict des angles
14167	VB	y m'paraît déjà mieux
14168	VB	mais je sens que là ça va pas être égal
14169	CS	c'est combien là y a combien

14170		oui c'est ce qu'on avait dit entre 120 et
14171		118
14172	CS	ah non mais ça m'énerve
14173	VB	eh ben
14174	CS	120
14175	CS	en fait ça doit être 120
14176	VB	hein
14177	CS	çà doit être 120
14178	CS	parce que là j'ai trouvé 122
14179		vous êtes toujours sur vos histoires d'angles
14180	00 :45 :12	moi j'dirais c'est 119
14181		non c'est 120
14182		ben refais qu'est-ce que tu veux que j'te dise
14183		eh ben 120
14184	CQ	bientôt fini
14185	VB	hein
14186	CQ	T'as bientôt fini ton ...
14187		tu veux que j'en refasse un autre ?
14188		ouais
14189		comme ça on en a on en a tous
14190		au fait faut p'être qu'on commence un peu [...]
14191		tu galères un peu toi
14192		non !
14193		[...]
14194		ça se trouve on peut pas ...
14195		si parce que [...]
14196		quoi ?
14197		bon maintenant
14198		fais moi pas sauter
14199		
15	00 : 47 : 30	bon Valentine on va commencer parce que sinon ...
1501		par contre y'en a pas une autre forme y en a qu'une de 5
1502		de quoi ?
1503		on n'a qu'une de 5 cm y en a pas d'autres tailles
1504	CQ	de ça
1505	VB	ben oui
1506	CQ	bon on f'ra déjà avec ça et on verra après
1507		Rires
1508		T'en f'ras déjà deux comme çà et puis ...
1509	CQ	et après tu découpes et tu passes au 3
1510		c'est 4 ça
1511		hum deux de 6
1512		j'peux avoir le rapporteur s'il te plaît
1513		*fin des constructions et du découpage pour CQ et VB*
1514		merci
1515		oui mais après
1516		de quoi

1517		tu fais avec le 6 non
1518		ben j'sais pas peu importe on va essayer
1519	00 :48 :25	t'en regarde voir si on fait ça comme ça après là on peut pas assembler deux formes comme ça [...] qu'ont pas le même côté de longueur
1520	VB	j'sais pas si t'as entendu ce que je viens de dire mais parce que même un triangle ça rentre pas faut superposer
1521		ben si superposer
1522		tu peux bien superposer
1523		ça rentre bien
1524		[...]
1525		donc on peut on peut juste attends ces deux formes faut noter quelque part que les deux formes là on peut
1526		c'est quoi ces deux là t'as dis comme forme
1527		euh octo non oui octogone
1528		CQ note le résultat
1529		tu fais un 6 toi aussi pourquoi y en a trois de 6 ?
1530		parce que j'en ai fais trois
1531		tu veux faire comment ?
1532		tu vas mettre celui là [...] Rires
1533		parce que là si on met un un carré et un octogone on peut même ... ça marchera toujours pas
1534		ouais
1535		fais voir essayes en un
1536		non ça marche pas
1537		donc en fait deux formes qu'ont pas le même côté de longueur on peut pas les
1538		hum
1539	00 :50 :24	faut que faut faut que que chaque forme elles aient la même longueur
1540		ouais pour qu'on puisse les assembler
1541		pour heu qu'on puisse faire un
1542		[...]
1543	VB	Ah j'crois que t'es en train péter un cable non ?
1544	CQ	mais qu'est-ce que tu fais ?
1545		si, ils sont droits
1546	CQ	en fait faut juste que tu vérifies si t'as les angles et les longueurs et si tes angles et tes longueurs elles sont bons normalement c'est tout bon
1547	CS	ouais j'sais bien mais j'ai l'impression ça marche pas
1548	CQ	mais découpe-les tu verras bien
1549		[...] mais non j'ai l'impression que ça marche pas
1550		mais si
1551		ah j'prends avec les 4
1552		donc on saura que c'est un angle de 120°
1553		donc en fait maintenant il nous reste plus qu'à faire des des des formes de la même mesure
1554		et ça marche pas alors [...]

1555		parce que en fait on peut on peut assembler aucune
1556		attends j'te regarde j'fais juste ça
1557		t'as juste besoin ... tu peux pas assembler tu peux assembler aucune forme qu'on pas la même longueur
1558		oui parce que là après tu peux plus mettre un angle
1559	00 :51 :30	et là si tu fais ça en plus t'as le coin blanc qui est dedans
1560		mais si attends
1561		t'en fais la moitié, donc là on prend une petite taille enfin t'sais une tout petite
1562		tu veux dire tu veux défendre la taille toi [rires]
1563		tu trouves ça
1564		mais si par exemple le truc après ça fait
1565		tu parles tu parles c'est la même longueur ça marcherait
1566		
1567		non mais tu peux pas faire ça parce que regarde t'as ton ta ton [...] dans c'te longueur tu peux pas
1568	CS	tu veux dire que si on nous fait un de c'te longueur là
1569		hum
1570	CS	tu veux dire si on en prend un de c'te longueur là et ben ça marche
1571		Mais on peut pas
1572		et pourquoi
1573	CQ	ben parce que le coin de là il est dans la longueur là et c'est dit euh on exclut heu assemblages voilà
1574		ah ouais c'est vrai
1575	CQ 0 :52 :30	on exclut de ce problème les pavages tels que le sommet d'un polygone appartienne au coté ...
1576	CS	on aurait du y penser tout de suite alors
1577		
16		on va repartir
16001		5
16002		oh ben 4
16003		bon c'est bon on va faire 4 et 5
16004		on doit faire 5 euh 5 carrés
16005		et là ça va pas
16006		mais non mais le carré tu vas le mettre où ?
16007		ça va pas là Charlotte
16008		quel carré ?
16009		tu veux mettre un carré
16010		tu peux en faire
16011		mets
16012		attends
16013		fais en un autre comme ça
16014		t'sais tu peux juste tu fais juste les points sur les côtés et tu relis après
16015		déjà on place
16016		[...]

16017		j'vais le faire en petit en plus
16018		j'en avais fais plein des 5 non c'est des 6 que j'en avais fais plein
16019		on va prendre des 5
16020		y aura peut-être un cm de plus mais on s'en fout enfin pas un cm mais
16021		y aura peut-être 15 cm de plus mais c'est pas grave [Rires]
16022		oui quelques mm du fait que
16023		ça fait 6
16024		la honte on a fini [...] enfin reste qu'un hexagone
16025		[...]
16026		tu me passes les 5 euh carrés
16027		l'hexagone ... j'me sens trop débile de faire des trucs comme ça alors [...]
16028		oui mais ici c'est pas le but
16029		non mais au moins on a au moins
16030		tu m'passes un ciseau
16031		au moins on a
16032		c'est [...] qui l'a
16033		prends celui dans ma trousse
16034		on a on [...] les choses
16035		ça m'fait décompresser
16036	CS 00 :54 :55	et c'est plus facile de pouvoir inventer d'autres figures en voyant que
16037		parce que expliquer par a + b que a et b sont
16038		5
16039		le problème c'est que tu peux faire un truc avec ça parce que ça ça fait le même coin mais après de là aller à l'autre chose tu peux pas hein
16040		un carré ça marche pas non plus ?
16041		j'sais pas
16042		[...]
16043		non excuse
16044		avec un autre comme ça
16045		avec un autre comme ça
16046		non mais parce que ça tu pourras pas parce que avec après t'auras le coin de l'autre
16047		pourquoi celui là il rentre pas
16048		ah ben non
16049		lui non plus il rentre pas parce que l'angle
16050		là faudrait qu'y ait un angle comme ça
16051		c'est pas les mêmes angles ça peut pas rentrer
16052		oui mais est-ce que c'te figure là aussi elle marche
16053		ah t'sais la sorte de maison ?
16054	00 :55 :45	ben non parce que là c'est pas l'angle de ça
16055		si tu l'fais comme ça
16056		ben oui ça c'est exactement ça

16057		non pas comme ça
16058		attends ...
16059		non c'est pas les mêmes angles
16060		ben si tu fais en sorte que ce soit les mêmes angles
16061		ah genre une étoile
16062		ouais
16063		maintenant je vois ce que tu veux dire
16064		en fait avec 5 côtés
16065		ça ça ça
16066	00 :56 :02	ben ça c'est un hexagone 5
16067		ben oui
16068		ouais j'crois
16069		ça c'est une maison ça [Rires]
16070		oui
16071		on n'a plus de couleur de feuilles
16072		c'est 6 hexag hexagone non
16073		pourquoi la ... on dit que c'est un hexagone [...] parce que ça fait tac tac tac
16074		ben après ça fait ça sauf qu'elle est plus
16075		non j'parlais de celui là
16076		et celui là c'est celui là
16077		et y a encore entre les deux
16078		oui ben vous sortez une feuille
16079		celui qui fait comme ça
16080		ça fait une étoile quoi
16081		ben attends pour l'instant je vais le faire là dessus
16082		c'est celui là qu'tu veux dire
16083		oui
16084		bon alors
16085		3
16086		[...]
16087		ben en fait tout ce qu'on voulait faire c'est autour d'eux parce qu'avec les angles c'est pas évident que ça marche pas
16088		ben oui mais si ... on aurait pas pu voir
16089		ben oui mais
16090		eh ben j'fais en petit ... j'dessine toutes les heu possibilités
16091		si tu trouves un truc qui fait qu'là attends
16092		ou pardon
16093		c'est pas grave
16094		ben y en a un là
16095		ben faut qu'y ait un truc qui reste pour que ça fasse cet angle là
16096		ouais tu me dis si c'est 72 ben j'ai trouvé
16097		l'angle c'est 115 non 105 pardon
16098		ah oui mais rien
16099		moi j'ai trouvé 105 j'ai trouvé peut être
16100		105

16101		là tu peux pas faire entre deux non c'est combien là
16102		ça marche pas
16103		et t'es sur ça fait même taille même longueur
16104		le même angle la même longueur
16105		attends j'vais essayer
16106		105
16107		105 ? T'as combien toi ?
16108		110
16109		d'accord
16110		aye
16111		tu t'es plantée
16112		mais ça me lance dans le poignet
16113	P 00 :59 :25	Il est 16h euh dans un quart faudra penser à commencer la rédaction de votre affiche
16114		hu
16115		non ça va
16116		qu'est-ce le truc c'est qu'est-ce que les angles là sont .... c'est tout
16117		on est en degré
16118		j't en ai fait un de petit de 1,5 cm Rires
16119		ça marche ça fait les bons angles
16120		celui là
16121		ça fait bien ... l'angle est bon
16122		oui ça fait 222 non 252 *CS manipule un hexagone et un octogone*
16123	1 :00 :28	108 tu vois ç'est euh là c'est ... c'est pareil c'est 108 donc c'est p'être ça
16124		fais en un de 5 pour voir si ça marche
16125		tu veux que je le fasse
16126		par contre faut qu'on s'magne
16127		là j'en ai que trois
16128		t'as fait les car les rectangles
16129		les rectangles heu
16130	CS	les triangles
16131	CQ	oui ah mais ils sont tous en pointe là
16132	CS	et ceux là après quand tu les
16133	VB	mais là aussi ils le sont bien
16134	CQ	ouais mais non quand tu les mets comme ça comme ça ils sont tous autour d'un
16135	CS	ah oui
16136		pourquoi ceux-ci y marchent pas tu peux pas les assembler ceux-ci là t'as toujours un trou là en fait
16137	CQ	ha mais si parce que là si tu mets
16138	VB	tu mets un carré
16139	CQ	mais si t'en mets un autre là par exemple ben ça fait un carré
16140		oui c'est sur ça fait rien mais

16141		ben oui ça peut pas faire un ...
16142		tandis que ceux là ça marche ou pas
16143	CQ	ben non ça fait pas un carré
16144		oui mais ceux là c'est possible de les tous les mettre ensemble *octogones carrés*
16145		ouais
16146	1 :02 :28	ceux là c'est possible de tous les assembler *hexagones*
16147		[...]
16148		oui mais c'est c'est ceux que j'ai dessiné
16149		non ça c'est ceux là
16150	CQ	et on peut mettre un carré avec
16151	CS	non tu mets
16152		non c'est ceux que tu mets à chaque fois
16153		et là on peut pas genre mettre un carré
16154		ou un triangle non on peut pas
16155		un triangle, deux triangles
16156		si on peut mettre deux triangles
16157		l'autre de 5 il est où
16158	CQ 1 :02 :50	si on peut mettre deux triangles
16159		et t'en mets euh
16160		sachant qu'y a celui aussi où tu peux faire
16161		ouais faut ... 4 en petit
16162		... fais comme sur le dessin
16163		non mais découpes pas au pire
16164		non mais ça marche p'être ça marche pas du tout
16165		y a pas un côté où ça marche *essai d'ajustement de deux octogones autour d'un pentagone dessiné*
16166		là c'est p'être là on ça fait ... c'est ceux qui font
16167		[...]
16168	VB	non parce que là on met des on met des carrés on peut pas mettre des on est bêtes
16169		j'lai pas dit
16170		eh dis donc
16171		attends j'vais dessiné un truc
16172		[...]
16173		j'commence à dessiner
16174		avec lui c'est galère
16175		t'es en train d'faire lesquels
16176 16177	1 :04 :08	quand tous les triangles sont sont ... mais Charlotte les triangles en pointe ou ceux-là ça revient au même *comparaison de deux assemblages avec uniquement des triangles*
16178		ah oui c'est vrai
16179		si tu fais sur une grande surface ça revient au même
16180		c'est pas con
16181		bon ben j'fais ceux là

16182		eh mais tu fais lequel, avec les triangles ou celui
16183		comme tu veux toi
16184		ben importe
16185		... on fait la même figure
16186		j'ai trouvé un autre truc
16187		quoi
16188		avec ta forme ?
16189		oui
16190		c'est un angle de combien le
16191		120
16192		il est microscopique mon truc
16193		bon ben j'fais avec le triangle
16194		tu fais avec les triangles ?
16195		si tu veux
16196		tu veux quoi ?
16197		j'te l'emprunte
16198		tout ce que je prends euh
16199		attends
16200		ç'aurait été plus simple
16201		avec un triangle un triangle de 5 un autre triangle de 5 merci en fait ça fait ça fait pareil que là sauf que là autour on met des ça
16202		j'ai triché un de toutes façons là
16203		oh ! !
16204		et ça fait attend combien ça fait ça
16205		de quoi
16206		ah ça va être
16207		ça va pas
16208		j'vois pas c'qu'on va pouvoir mettre pour ça
16209		attends j'te redis dans deux minutes
16210		attends tu veux faire quoi là essaye avec des trucs de 5
16211		ça mais pareil
16212		toc et si tu mets un carré ensemble
16213		non parce que l'angle il est de 60 56
16214		alors peut être avec les erreurs
16215		ou avec un triangle
16216		ça marche tu mets un carré un triangle
16217		pourquoi tu pars du principe qu'on se trompe
16218		un carré un triangle ça marche
16219		ah mais non parce que l'angle il est de 56 et le triangle il est de 60
16220		ouais mais après t'as les erreurs de
16221		ouais mais tu vois y a pas que moi Charlotte
16222		vous êtes pessimistes
16223		ça marche pas
16224		mais on est nulles

16225		fais le truc ah non tu fais attends tu fais tout le dessin avec les bons angles tu verras ça marche (manipulation entre les gabarits et utilisation du rapporteur)
16226	1 :08 :05	tu préfères pas calculer c'est quand même plus simple
16227		tu nous en trouve un autre alors Chlochlo ou pas
16228		peut-être ... j'vois pas pourquoi ça marcherait pas
16229		super
16230		dis moi qu't'as fait avec les triangles
16231		hum
16232	1 :09 :30	ha mais non ça va pas
16233		ça marche pas
16234		parce que ça fait 54 un angle de 54 et ça fait 60 l'angle
16235		L'angle d'un triangle équilatéral ç'est combien d'jà
16236		60
16237		et tu m'as dit qu'ça c'était 120
16238		non
16239		si tu m'as dit
16240		non j't'ai rien dit
16241		ah mais si oui ah mais oui pardon
16242		donc ça ça fait 120
16243		et 120 c'est le double de 60
16244		hum
16245		bon mais est-ce que ça marche tout le temps
16246		là c'est 90 et là c'est ?
16247		120
16248	1 :10 :05	non c'est plus c'est 135 j'crois ça marche pas
16249		mais de quoi tu veux faire
16250		non mais c'est ton angle là qui fait 130 135
16251		oui
16252		et celui là c'est 90 ben ça fait
16253		tu fais 135 plus 135 plus 90 normalement tu dois trouver 360
16254	CQ 1 :10 :21	bon mais en fait j'ai rien trouvé j'ai cru j'étais super intelligente
16255		houlà, il est pas un peu euh un petit peu y a un truc qui va pas là
16256		c'est pas grave d'toutes façons après on va devoir le euh le refaire sur l'affiche
16257	CQ	t'as trouvé quoi ChloChlo
16258	CS	mais y a ça mais j'trouve rien pour là pour y combler avec ...
16259	VB	ah j'me suis plantée là
16260		t'as essayé ça
16261		et deux triangles t'as essayé
16262		non ça marche pas non j'crois plus faudrait un de 5
16263		ou un carré un triangle essaye un carré un triangle
16264		mais ça marche un carré un triangle

16265		remarque il s'agit de tester l'assemblage pentagone-pentagone-carré-triangle
16266		mais non
16267		mais si
16268		regarde mais si ça marche c'est c'que j'ai fait tout à l'heure ça marche
16269		mais par le calcul ça marche pas
16270		[...]
16271	1 :11 :20	pourquoi ça marcherait pas par le calcul
16272	VB	parce que j'ai fait ça c'est un angle de 108 degrés parce que c'est euh parce que tu fais tu fais 360 divisé par 5 ouais 5 ça t'fait 30 voilà non ça fait 110
16273		mais tout à l'heure pour celui là on a fait 180 divisé par ... et après on y a soustrait à 360 le nombre qu'on a trouvé
16274		vous avez fait comment ?180 divisé par euh
16275		On a fait 180 divisé par le nombre d'angles 5 là le nombre d'angles
16276		pourquoi 180 ?
16277		5 et 360 moins 36 324
16278		324 et là ça fait combien 90 et 60 150
16279		et alors
16280	1 :12 :20	150 ben c'est un angle de 150 qu'est entre les deux
16281	CQ	pourquoi tu dis que ça marche pas ChloChlo j'comprends pas
16282	VB	parce que ça ça fait ça c'est un angle de 108 et 108 plus 108 plus 90 et tu rajoutes à ça pour avoir tu sais un angle enfin tout le tour
16283		parce que tu peux pas en faire un deuxième là et tu calcules carrément
16284	CS	oui parce que y
16285		de toutes façons on doit recommencer l'affiche
16286		ben alors ouais ça marche peut-être
16287	1 :12 :50	là tu dois trouver un angle de 150 entre les deux
16288		attends mais y a ceux là aussi
16289		j'sais pas
16290		j'peux pas prendre pour essayer ça pour essayer d'y faire
16291		mais c'est pas le bon
16292		non mais là à côté
16293		t'en a fais deux
16294		il est là le deuxième j'fais l'angle
16295		l'angle c'est
16296		ouais moi j'dis ça marche ça se voit
16297		ah quoique attends
16298		tu vas essayer de faire la construction
16299		ouais mais non parce que regarde si tu suis bien là tu vois t'es pas
16300		[...]
16301		parce que sinon là ça déborde de quelques degrés

16302		ben tu vois c'est ce que je disais personne voulait me croire
16303	CS 01 : 14 : 05	faut savoir en fait l'écart entre les deux ce que c'est
16304		et mais on peut pas
16305		attends j'reprends ma feuille de brouillon 360 divisé par 5 ça fait j'l'avais fait ça fait 72 72 c'est pour ça que j'étais partie sur le principe que j'faisais 360 - 72 ce qui valait à 200 non 186 non
16306	CS	288 *à la calculatrice*
16307		et 288 ç'est pas un angle de 190 degré
16308		là entre les deux
16309		par contre là entre là et là
16310		et ben tu fais 288
16311		vous êtes sur qu'y fait 5 cm ce carré
16312		c'est pas possible que ça fasse 288 parce que 288
17	01 :15 :10	
1701		et ChloChlo et regarde je suis en train de trouver quelque chose
1702		regarde un comme ça un comme ça tu mets
1703	CQ	ah tu remets celui là
1704		non celui là celui là
1705		celui là ah mais c'est pas celui là attends vas- y remets
1706		non parce que c'est un carré qui va là
1707		ah ouais merde
1708		mais pourquoi
1709	CQ	mais ça marchait
1710	VB	attends j'essaie celui-là après
1711	CS	oui voilà mais le problème c'est qu'on sait pas *essai avec octogone hexagone pentagone*
1712	CQ	mais après tu mets un orange un jaune un orange attends un jaune un orange un jaune un orange ah non les deux oranges y vont se toucher c'est après
1713		ouais mais si ça se trouve tu vois c'est à quelques degrés près ça marche pas et on le sait pas ça ... faut qu'on essaie de le calculer avec l'autre aussi
1714		ouais après y manque un coin
1715		ouais voilà et là on met quoi
1716		mi-jaune mi-orange
1717		mais non un jaune
1718		mais non j'crois qu'c'est un comme ça encore
1719		ça marche pas un jaune
1720		T'en a pas un deuxième
1721	P 1 :16 :12	j'vous propose de passer à la réalisation de votre affiche pour exposer vos résulats
1722		remarque : annonce peu écoutée du fait des échanges pregnants
1723		mais c'est un jaune

1724		mais non c'est un orange
1725		c'est un comme ça
1726		pourquoi c'est un orange
1727		c'est un comme ça
1728		Attends enlève c'te feuille là tu prends celui là à la base voilà mets le orange jaune ... à peu de choses près
1729		à peu de choses près non là ça marche pas j'l'ai pas fait tout à fait bien hein
1730		oui mais voilà c'est ça le problème
1731		mais ça marche pas
1732		mais avec ça marchait non c'est pas ce que tu m'as dit
1733		non là ça marchait ouais
1734	VB	ouais et ouais et là j'suis d'avis à mettre un autre blanc ah mais non parce que là regarde c't'angle regarde deux blancs et un jaune si y a un blanc là
1735	CQ	ben oui et après
1736	VB	ben oui mais regarde là y a orange jaune blanc et là y a deux blancs un jaune
1737	CQ	parce que là tu mets un orange là
1738		ouais
1739		bon après tu mets un blanc là
1740		hum donc ça va pas
1741	CS	et l'autre là ça marche ou pas
1742	CQ	lequel ?
1743	CS	celui avec le triangle et le carré
18	CQ 1 :17 :50	bon on va peut être passer à l'affiche
18001		ouais ... le bordel
18002		bruits de rangement
18003	1 :18 :35	on met un titre
18004		problème du [...]
18005		tu mets ça vraiment
18006		tu veux mettre quoi
18007		tu mets problème
18008		polygones réguliers
18009		pavages archimédiens "'arkimédiens archimédiens"'
18010		on dit archimédien ou arkimédien
18011		bon on va pas s'engueuler
18012		[...]
18013		archimédiques ?
18014		non c'est archimédiens
18015		on va corriger avec du rouge
18016		et y a pas de s ah si t'as mis un s à pavage
18017		bon alors
18018		des p'tits collages
18019	CQ	faut dire que on ça faut mettre euh

18020	CS	faut qu'on explique après
18021		moi j's'rais d'avis euh qu'on découpe quelques figures qu'on a faites et que [...]
18022		faut mettre du scotch
18023		mais tu les colles avec de la colle mais euh ç's'rait plus simple parce que
18024		ouais on en aura pas assez pour faire toutes les figures
18025		ouais avec toutes celles qu'on a refaites là
18026		ah ouais
18027		tu découpes
18028		pis genre on les colorie
18029		ouais si tu veux
18030		moi j'fais le coloriage
18031		mais parce que
18032		c'est vrai que ça va pas faire beau
18033		[...]
18034		tu veux que ...j'fais en vert
18035		mais là est-ce que j'en ai fait assez
18036		j'fais en vert
18037		ouais tu fais comme tu veux par contre faut faire les mêmes figures avec la même couleur
18038		rouge les triangles
18039		où j'l'écris elle
18040		j'ai de la colle
18041		j'mets du scotch c'est mieux le scotch
18042		découpes en gros ... non tu découpes en gros là tu t'embêtes
18043		non non y a pas de couleur
18044		si si c'est bleu
18045		j'les colle scotch euh
18046		ben on met pas d'ordre on s'en fout
18047		mais attend parce qu'elle veut écrire elle y a une phrase
18048		
18049		si on mettait déjà le nombre de tous les polygones qui machinent sur notre truc
18050		c'est les polygones réguliers
18051		oui c'est ce que j'ai dit
18052		non t'as dit arki
18053		faut découper
18054		sauf qu'elle les disaient à l'inverse
18055		[...]
18056		c'est pas de ma faute
18057		on découpe bien
18058		[...]
18059		c'est quoi ça alors
18060		ben un hexagone ah non celui là si un hexagone
18061		1 2 3 4 5 6 6 hexagone t'es sure
18062		oui

18063		et avec 5
18064		5 c'est hec pentagone pentagone 5
18065		on n'a trouvé que ça
18066		si ça se trouve ça marche [...]depuis tout à l'heure
18067		si ça se trouve ça marchait peut-être avec d'autres
18068		les triangles
18069		pour l'instant on n'a trouvé que ça
18070		avec 7 ça marche parce que si ça se trouve c'est tous les
18071		oui c'est ça
18072		y a un moment ça doit tous les faire avec
18073		tous les dérivés des gones
18074		quand tu les assembles tous y a toujours un moment où ça doit
18075		fais voir si on fait un 7
18076		y en avait d'autres les autres années
18077		*Remarque : références aux polygones d'une frise affichée dans cette salle de mathématiques*
18078		attends avec du scotch
18079		alors 7 ça fait 1 2 3 4 5 6 7
18080		et après tu peux multiplier à l'infini
18081		ben tous les machins avec n côtés
18082		et ouais parce qu'après t'a toujours moyen de mettre n'importe quoi d'abord un carré pis après t'ajoutes un triangle un truc comme ça
18083		bon on va la laisser là j'ai voulu la décoller ça marchait pas tiens j't'en remets de l'autre côté Ah ChloChlo un boulet un boulet tiens
18084		après j'mets la phrase su ...
18085		ça ça s'trouve c'est ce qu'on a fait
18086		on a fait l'autre Chloé
18087		Quel autre ?
18088		tu sais le pentagone avec le triangle et le carré
18089		ben on va le faire vite fait
18090		mais vous êtes sures que ça marche
18091		non mais en même temps d'jà le pentagone ça a servi à quoi
18092		ben parce que quand on mais c'est pas obligé là c'est les polygones convexes mais c'est pas obligé que ça fasse des trucs
18093		ben alors tu peux mettre sextagone donc tu peux mettre tous les mettre
18094		je c'est dur hein de tout mettre oh on peut pas ça va descendre jusqu'au ...
18095		ben oui parce que le nombre il est pas défini
18096		le n de ... ça veut rien dire c'est pas grave n c'est pour attirer les mathématiciens ils vont bien comprendre ben mets un tiret
18097		c'est quoi n-gone
18098		Chloé j'sais pas il est où ton ...

18099		ben j'crois qu'elle l'a jeté
18100		non mais tu veux pas en faire un plus petit
18101		non on n'a rien jeté
18102		ha si c'est là bas ma feuille de brouillon
18103		il est juste celui-là ?
18104		ouais mais après ça ce qu'on a trouvé c'est ... ça ne marche pas tout le temps
18105		mais faut expliquer toi derrière pourquoi on a trouvé ça
18106		ben parce que ça marche pas
18107		ben parce que sinon y aurait des trous quoi
18108	CS	c'était des angles de combien
18109	CQ	et puis surtout que les
18110	VB	72 - quelque chose
18111		on a on a fait que vous avez coupé que ça on a fait que ça ?
18112		si tu prends c'te angle là là c'est là l'angle hein faut que tu prennes
18113		[...]
18114		là y a un problème
18115		105
18116		on expliquera à l'oral
18117		ouais
18118		on dit quoi
18119		j'ai oublié un mot là ouais j'ai oublié la moitié de la phrase
18120		un pavage archimédien
18121		arki médiens dien chien
18122		heureusement que j't'écoute pas parce que
18123		il faut que oui j'ai oublié un gros morceau de la phrase il faut que chaque point
18124		[...]
18125		mais tu fais quoi là
18126		ben j'en fais un autre pour après dire que
18127		oh c'est bon Valentine
18128		comment on dit la même mesure sur le côté enfin le la même longueur de côté la même longueur
18129		il faut que chaque forme ait la même longueur
18130		j'vois pas ce que tu veux dire
18131		les côtés de même longueur non parce que la longueur ça peut être tu vois ça peut être ça
18132		tous les côtés la même ben j'sais pas
18133		toutes les formes aient utilisé ah non hein euh utilisent une longueur égale
18134		un côté de même
18135		les côtés de même longueur
18136		leurs côtés de même longueur
18137		on a trouvé que des exemples mais si ça s'trouve y a une loi t'sais
18138		ben oui on a trouvé n-gones quand y a n c'est une loi

18139		on pense j' mets entre parenthèses
18140		on pense
18141		on n'est pas sures
18142		ah d'accord
18143		pour pouvoir être placés côte à côte
18144		hein
18145		pour pouvoir les placer côte à côte
18146		pourqu'il n'y ait pas de trous en fait
18147		ouh la
18148		qu'est-ce qu'on peut mettre d'autre
18149		la feuille elle est bientôt finie
18150		non
18151		tiens celui là dans l'autre sens
18152		[...]
18153		mais non j'y arrive plus
18154		tu veux que j't'y passe
18155		et il est où le ChloChlo Chloé il est où blanc qu't'avais fais ton pentagone j'sais pas quoi
18156		il est là mon blanc pentagone
18157		ben non c'est ce que j'avais fait alors
18158		ben tu t'es plantée de c'te longueur là parce que si tu prends la parallèle de ça
18159		ouais c'était mal barré
18160		il est où ton blanc qu't'as découpé
18161		mon blanc
18162		t'avais coupé un petit pentagone blanc
18163		ben je sais je sais pas moi là il est dans le tas là
18164		parce que la parallèle de ça
18165		parce qu'attends j'crois que j'ai trouvé quelque chose
18166		non j'ai pas trouvé non plus ah mais ça c'est ce qu'on a trouvé
18167		Et ces deux là ils vont pas ensemble ?
18168		là je suis sure qu'y a un truc c'est obligé
18169		ah mais non ça peut mais comme si tu mets ça là et celui tu l'mets de l'autre côté
18170		après t'en mets un là
18171		oui mais là faut bien que tu combles le trou
18172		non imagine on le comble pas Rires
18173		non mais attends regarde si tu en mets un blanc là là tu en remets un orange un blanc un orange un blanc après la tu mets un blanc un jaune
18174		oui mais après tu peux pas le finir parce que vu c'est un plan le plan est à l'infini ben là y a un trou
18175		si j'mets ma main
18176		t'es sure que la tienne est elle juste au départ Chloé
18177		ben au pire refais là hein
18178		ben non ça m'embêterait quand même [...]

18179		bon j'vais coller ma petite figure
18180		attends moi j'voulais voir un truc si
18181		mais ça craint si on a trouvé que ça
18182		j'voulais faire un truc j'sais plus faire est-ce que attends c'est un de 5 y sont où les 5 de triangles
18183		j'ai que des 6 tiens
18184		non là on peut plus rien mettre y va te manquer
18185		ben là de toutes façons tu pouvais mettre un
18186		c'est c'est un blanc qui faut
18187		Charlotte elle blème
18188		ben c'est obligé qu'y ait un truc on peut pas laisser ça comme ça y a un Schmilblick
18189		pourquoi là ça irait
18190	1 :32 :10	parce que là
18191		eh ben là tu mets un jaune
18192		et là
18193		ben là tu mets un blanc
18194		bon ben là dans ce coin là y a deux blans et un orange là y a deux blancs et un jaune alors que là y a un jaune orange blanc
18195		hum hum
18196		t'es bien partie je crois
18197		bon alors ça ça marche pas non plus parce qu'alors dans ce coin là y en a trois et dans ce coin là y aura que du rouge
18198		ben non parce que tu vas remettre deux bl jau deux bleus là
18199		les bleux tu vas les mettre
18200		tiens j'en ai des bleus voilà c'est bon
18201		là tu vas mettre deux bleux là ça va faire tac et là tu vas remettre deux rouges et là tu vas remettre des rouges là
18202		on aurait peut être dû [...]
18203		ben
18204		tu veux que j'en refasse un bleu comme ça
18205		mais attends faut compléter l'affiche on va pas y laisser comme ça
18206		y vous reste plus que 5 minutes pour finir la rédaction de l'affiche mais si vous avez besoin d'apporter des éléments vous pouvez les donner aussi à l'oral
18207		donne moi un bout de feuille
18208		tu fais du décalquage
18209		j'pense que je vais faire ça
18210		alors donne moi ce bout de feuille
18211		on voit rien du tout
18212		aide moi à faire le le 5 là
18213		attends j'vais le faire
18214		c'est stressant hein
18215		c'est comment ça déjà 30
18216		pourquoi tu la refais

18217		parce que là en fait j'vois pas parce que ...on va en remettre deux comme ça
18218		[...]
18219		tu vas en remettre un second là
18220		... ça va pas
18221		là y a un dégât
18222		ah ouais pi t'en remets un là
18223		... ça va pas
18224		pourquoi
18225		parce que là ça fait un angle de 111 alors que là y a 116 ici par exemple ben tu vois déjà à vue d'œil pis ... 116
18226		mais c'est quoi qui va pas c'est le truc c'est que ça marche pas ou heu
18227		c'est que là après là tu veux bien remettre un truc comme ça ici
18228		ouais
18229		eh ben peux pas
18230		aller on recommence
18231		lui y doit pas marcher lui j'pense le pentagone
18232		c'est que c'est que c'est pas construit comme il faut ou c'est que
18233		lui il doit faire 360 divisé par 5 égal 72 180 - 72 c'est ce que je disais à la base c'est un 108 en fait et là j'ai 116 donc celui là y va pas
18234		on aurait du faire des formes plus grosses ça aurait plus combler parce que là on
18235		mais tu peux dire ouais
18236		il faut qu'à chaque coin [...] du truc eh ben ça soit égal à 360 de toutes façons l'ensemble des angles j'veux pas dire ...
18237		ça fait 150 équilatéral et carré ça fait 50
18238		j'les garde ça ...
18239		ouais 80 ouais faut qu'y fasse l'autre y fait plus 108
18240		heu 108
18241		donc ça ça fait 150 + 108 258 - 360 ça équivaut à 2 0 1 102 donc pas ça
18242		pourquoi
18243		parce que 108 et 102 c'est pas pareil
18244		euh oui [...] ben oui donc ça marche pas [...]
18245		on va présenter ça ils ont fait des trucs de fous hein
18246		ouais j'ai vu
18247		on s'tape trop la honte
18248		z'ont fait des putains de calculs
18249		nous on a fait le truc maternelle [Rires]
18250		en plus z'ont rempli la feuille pas nous
18251		tu veux qu'on active l'imprimante
18252	P 1 :37 :13	vous avez fini
18253		hum pas trop
18254	P	c'est jamais terminé

18255		et en fait ça marche pas notre truc [...]
18256		hein
18257		parce que ça marche pas sur les polygones sur le pentagone ça marche pas
18258		ben non mais ça les polygones heu convexes ben les polygones réguliers irréguliers non
18259		tu peux dire que toute euh tous les tu peux marquer comme quoi tous les polygones heu réguliers ne forment pas forcément un pavage archimédien
18260	P	bon on va commencer la la phase de débat de restitution de vos résultats de communication à l'autre groupe j'vous propose de commencer heu on va accrocher vos affiches avec les aimants votre affiche
18261		faut qu'j'écrive quoi
18262		comme quoi un polygone régulier un polygone régulier ne forme pas
18263		assemblés en fait c'est deux polygones réguliers
18264		deux polygones réguliers assemblés ne forment pas forcément un pavage archimédien
18265		Oh
18266		honte à nous
18267		
19	1 :38 :49	Première présentation : GROUPE 1
1901		alors ben expliquez ce que vous avez trouvé et ce qui se trouve sur votre affiche et puis ensuite on demandera à l'autre groupe ce qu'ils en pensent
1902	B	Heu donc euh donc on a trouvé qu'y avait heu trois polynones réguliers heu qui pouvaient être possibles heu qui pouvaient marcher pour faire un pavé donc y a le triangle équilatéral le carré et euh l'hexagone ben on a marqué que l'angle qu'était ici c'était un cercle ça faisait 360 ici là on a déduit que pour pouvoir heu qui s'assemblent il fallait que ces trois heu diviseurs de 360 pour pouvoir un nombre d'arêtes qui servaient heu pour pouvoir s'emboîter
1903	M	ensuite on a trouvé un rapport entre heu entre le l'angle et le nombre d'angles dans un polynome on en a fait une équation on a créé un cercle en fait et on a trouvé une équation entre n et k on a donc euh on a donc mis heu [...] pour n parce qu'on savait que c'était compris entre 60 pour les triangles équilatéraux forcément
1904	B	vu que c'est plus petit heu le plus petit polynome
1905	M	on peut pas avoir un polynome à deux angles donc c'était forcément le minimum et entre 180 parce que plus que 180 ça donnait un angle euh
1906	B	c'est un angle plat donc une droite

1907	M	ça donnait un angle négatif donc ça revenait au même on s'est dit que 180 était le maximum et euh et donc du coup on a calculé heu on a calculé les angles qui se trouvent entre 3 et 6 parce que heu le nombre d'angles trouvé pour 180 c'était euh
1908	B	2
1909	M	2 ben oui 2 donc c'était impossible et ensuite entre 3 et 6 on a remarqué que 5 ne marchait pas non plus parce que ça donnait un chiffre qui n'était pas entier
1910	B	ça veut dire que le nombre de
1911	M	donc c'était impossible
1912	B	le nombre de le nombre de polygones qu'on s'est s'est emboîté ça doit forcément être un nombre naturel parce que sinon [...]
1913	CQ	5 c'est un nombre naturel
1914	M	donc ben du coup on n'a trouvé qu'y restait que ces trois là
1915		5 c'est pas un nombre naturel
1916		je ben non parce que j'ai cru que vous disiez que 5 c'était pas un nombre naturel
1917		non c'est parce [...]le chiffre que l'on trouvait
1918		d'accord
1919		Alos qu'elle est la réaction de votre groupe est-ce que vous avez compris tout ce qu'ils ont donné est-ce que vous êtes d'accord pas d'accord
1920		nous on en a trouvé un en plus de de polygones convexes y a l'octogone aussi qui marche mais en fait nous on a assemblé aussi avec d'autres formes ben on n'a pas assemblé que les heu les heu c'est les hexagones on n'a pas assemblé que les mêmes formes entre elles
1921		on les a mélangé
1922		on a essayé de
1923		nous on est parti sur le principe que
1924		vous avez fait mathématique nous on a fait primaire
1925		on a ajouté que ben a fait on a compris que ça devait être que la même forme
1926		ben non
1927		moi ce que j'ai pas compris c'est la formule n heu égal 180 moins 360 sur k
1928		mais si c'est ce qu'on a fait
1929	CQ	ben oui tu divises 360 par k
1930	P	est-ce que y a quelqu'un de l'autre groupe qui peut expliquer en faisant si t'as besoin oui prends voilà

1931		on a fait un cercle le centre on s'est dit qu'en prenant n'importe quel point sur le cercle on s'est dit que de toutes façons ça créera un triangle heu isocèle et donc que cet angle ça sera égal à ça plus ça forcément un triangle isocèle il te reste forcément le même angle divisé par 2 ici c'est les mêmes et donc du coup on s'est dit que par exemple dans le carré super bien fait non on s'est dit que l'angle il était égal à deux fois celui-ci ben après on en a fait une relation en faisant le nombre d'angles enfin 360 divisé par le nombre d'angles
1932		c'est plus simple notre technique hein
1933		ça faisait ça en fait
1934		ouais ben en fait on fait pareil
1935		k c'est le nombre d'angles dans le polygone et n c'est c'est
1936		c'est l'angle en degré et puis après on a passé de l'autre coté et pis on a trouvé ça
1937		donc pour vous là si on répond à la question quelle est la réponse à la question à la question qu'on vous a posée vous répondez quoi
1938		ben pour eux y a trois solutions
1939		y a trois solutions et c'est celles-ci
1940		alors est-ce que vous avez encore des réactions à faire l'autre groupe
1941		non
1942		est-ce que vous êtes d'accord déjà que les trois solutions qui exposent sont des pavages archimédiens
1943		oui c'est ce qu'on disait [Rires]
1944		
20		Deuxième présentation : Groupe 2
2001	P	vous allez exposer votre affiche
2002		déjà on a faux
2003		notre grande affiche pleine de formules
2004		[...]
2005		t'aurais du mettre
2006		[...]
2007	E2	c'est marqué c'est le même assemblage de polygones [...] sans trou ni superposition
2008	P	Alors quel est votre problème sur le n-gone
2009		Ben en fait on vient de se rendre compte que n y devait être pair pour le
2010		on peut rajouter pair
2011		ben tu mets à côté tu mets à côté n est pair dans les conditions tu mets n est pair
2012		j'peux prendre ça
2013		oui j'pense que ça ira
2014	E1	[...] ben c'est forcément le même polygone
2015	P	Alors on va les écouter et après on reviendra sur ce qu'elles ont fait bon alors allez-y
2016		T'y vas j'y vais

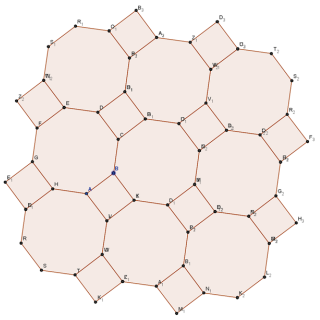
2017		ben alors nous on a trouvé heu ben plus un peu plus de polygones convexes on a trouvé un carré un triangle équilatéral et un hexagone comme vous on s'est rendu compte que le pentagone y marchait pas ... et heu l'octogone
2018		c'est quand même un polygone convexe
2019		oui c'est quand même un polygone convexe mais ça marche pas pour faire un un assemblage donc voilà on s'est rendu compte que pour faire un pavage archimé archidien bref médien et ben toutes les formes qu'on devait utiliser elles devaient avoir la même longueur [...] par exemple vous pouvez pas utiliser un triangle équilatéral de côté 5 et un autre de côté heu 6 6 ben bref ça marchait pas et ben faut que y faut qu'à chaque sommet enfin c'est ce que vous avez trouvé sauf que hein
2020		k égal n égal 180 moins 360
2021		en fait un sommet tous les autres angles qu'arrivent à ce sommet et ben [...] tous les angles c'est la même et heu on a utilisé aussi tous les polygones réguliers formant un pavage archimédien nous on a trouvé on a trouvé
2022		mais qui devait y en avoir à l'infini si n pentagone n-gone si avec n-gone on pouvait faire un assemblage c'est que c'est une hypothèse
2023	P	pour vous la réponse à la question posée ça serait quoi la déremination de tous les pavages archimédiens du plan
2024		eh ben y aurait une infinité plus heu les triangles et les pavés fin
2025		enfin avec les triangles et les carrés on pourrait heu compléter les n-gones on pourrait compléter
2026		comme on a fait euh avec euh celui là celui là on a complété avec les carrés [...]
2027		alors les autres vas-y
2028		il faut que heu il faut qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones donc heu ben déjà celui là
2029		celui là
2030		ça veut dire qu'à droite il est faux déjà
2031		là
2032		ouais
2033		et ben non
2034		ben non regarde
2035		là y a un sommet qui touche un hexgone un hexagone et un autre qui touche un triangle
2036		ouais mais regarde attends
2037		donc forcément y s'ont pas tous
2038		où ça là
2039		ouais mais non ouais
2040		attends j'fais mon petit truc

2041		donc forcément quand tu vas tourner si tu mets un hexagone à droite les sommets y vont pas tous y toucheront pas la même chose du moins pas dans le même sens
2042	VB	attends vas y donc c'est pas très heu là y en a un autre là là y en a un là y en a un autre ... là [Rires] bon ben bref donc là y a bien deux deux rouges deux bleus deux rouges deux bleus y aura deux rouges ... ah ben non
2043	CQ	ben si
2044		ah oui ben non ça marche pas là y a deux rouges et un bleu ah et deux bleus
2045	VB	ah ben si ça marche
2046		ça marche pas bastien ?
2047	B 1 :49 :14	j'sais pas si
2048	VB	parce que ouais chaque sommet y a deux rouges deux bleus quoi
2049	CQ	non mais si tu ... si ça se trouve on a faux mais on comprend pas ce que tu veux dire
2050	M	si si j'sais pas faut que ça soit les mêmes nous on avait vu ça comme
2051		oui c'est vrai ... le même assemblage de polygones
2052		nous on pensait en fait que à chaque sommet en fait fallait que fallait que qu'y ait deux rouges et de bleus fallait que y ait chaque fois deux rouges de bleus on pensait pas
2053		peux y avoir le même nombre de à chaque sommet doit y avoir le même nombre de d'octogones et de triangles j'dis n'importe quoi ... le même nombre de ... à chaque sommet
2054		on pensait pas que ce soit vraiment les mêmes euh
2055	P	alors qu'est-ce que vous en pensez vous
2056		ben ça oui vu comme ça
2057	P	et avec l'explication qu'elles vous ont donné vous
2058		mais non mais si avec l'histoire des composés ça donne un nombre de solutions illimité on peut pas résoudre le problème
2059	P	alors ça donne déjà plus de solutions que celles que vous avez faites ça c'est certain, si les votres marchent hein puisqu'on a bien à chaque fois à chaque sommet mais ça donne plus de solutions ça on est bien d'accord alors elles disent qu'y en a une infinité qu'est-ce que vous en pensez ?
2060		j'pense pas qu'y en ait une infinité
2061		vous pensez pas
2062		non
2063		pour quelles raisons qu'est-ce qui vous fait dire qu'y aurait ça serait un nombre fini comme ça sans avoir
2064	M	le fait que les triangles équilatéraux y passe pas avec tous les euh avec tous les polygones mais qu'avec euh qu'avec l'hexagone [...] parce que ça fait 120° et euh et le carré avec l'octogone et le reste ça marche pas

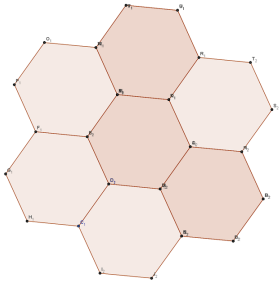
2065		donc en fait le raisonnement que tu voudrais conduire c'est sur quoi le raisonnement que t'as envie de faire, tu dis euh avec les angles ça risque de pas passer est-ce que ça veut dire que là t'es sur une piste un peu comme celle que tu avais déjà fait enfin tu penses dans la même dans la même
2066	M	oui dans la même ligne avec plusieurs
2067		est-ce que vous avez encore d'autre chose à dire c'est bon ?
2068	Chercheur	juste revenir sur le rouge et le bleu là il marche où il marche pas celui là vous aviez des doutes
2069		oui ben oui, ce sommet là y a du rouge du bleu ce sommet là y a du rouge du bleu celui pareil donc
2070	Chercheur	Donc ça répond à la contrainte à quelle contrainte ?
2071		à la contrainte euh qui faut qu'il y ait le même assemblage de polygones ça nous perturbe aussi
2072		t'as un problème tu peux pas le finir aussi
2073		pourquoi
2074		c'est un plan c'est infini
2075		c'est infini celui-là
2076		ben celui là aussi
2077		non
2078		ben vous c'est pareil vous là bas
2079		oui du coup il est impossible à faire c'est une boucle c'est une boucle ouverte
2080		ben celui là aussi
2081		non celui là il est ter non il est non mais dans le sens ou t'es obligé de rajouter un rouge et pour rajouter le rouge t'es obligé de rajouter un bleu et pour rajouter le bleu t'es obligé de rajouter un autre rouge
2082		oui mais c'est pareil là bas parce que là-bas on a bien d'autres sommets ben tu vois ce que je veux dire y a d'autres sommets faut bien que tu le complète aussi
2083		ouais c'est bon
2084		ben tu vois
2085		c'est quand même bizarre
2086		ouais voilà fallait mettre des couleurs avec des couleurs ça marche
2087	Chercheur	vous avez combien de solutions vous, là, clairement, qu'on voit bien sur votre affiche
2088		ben là sur notre affiche 1 2 3 4 4 de sures enfin des solutions d'assemblages ou des solutions de
2089		qui répondent à la question
2090	VB 1 :53 :25	mais parce que d'un côté si on met euh 10 enfin 10 machins 10-gones là ah après l'angle y va y sera plus petit parce que à chaque fois l'angle comme là on a vu que avec 8 c'est un carré donc là on met 90 ah on passe à 6 de 6 à [...] donc si on rajoute logiquement l'angle il s'ra plus petit donc je pense que là normalement c'est impossible à faire

2091	CQ	ben si ... ben concrétement on sait pas bien parce que en fait on a tatonné on a plus tatonné à à essayer de faire les assemblages que la que d'trouver une formule ou [...] précis donc du coup on a un morceau de réponse mais on a pas toute la réponse
2092		il nous fallait plus de temps
2093	P	alors on va [...] Je vais vous donner quelques éléments
	1 :54 :35	Début de l'institutionnalisation

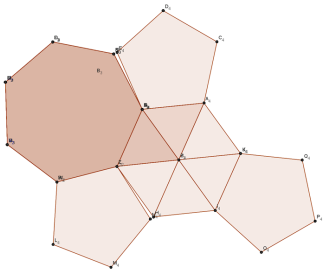
E.5 Figures obtenues avec GeoGebra lors de EP3



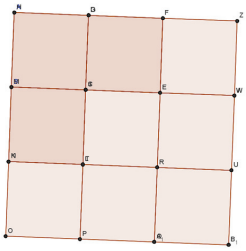
Production du Groupe 3



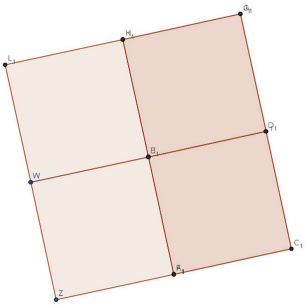
Groupe 4 - Fig 1



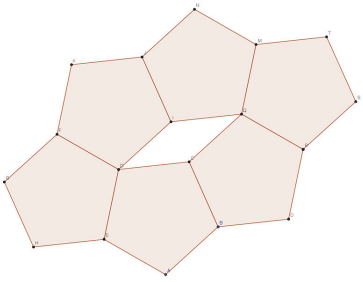
Groupe 4 - Fig 2



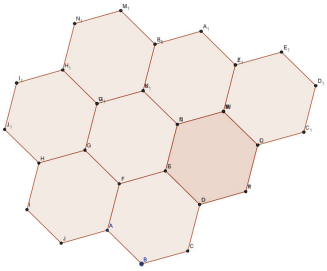
Groupe 4 - Fig 3



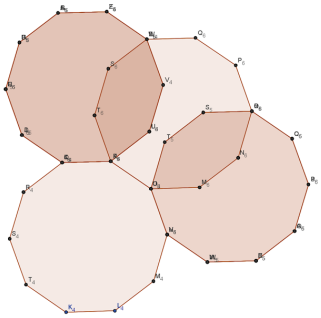
Groupe 5 - Fig 1



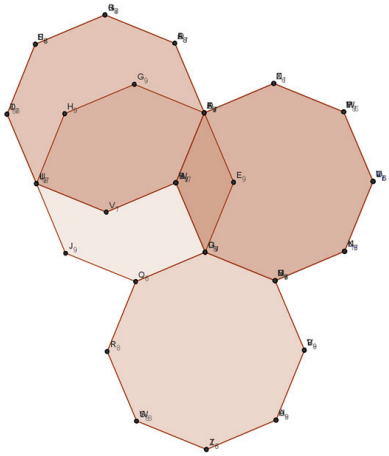
Groupe 5 - Fig 2



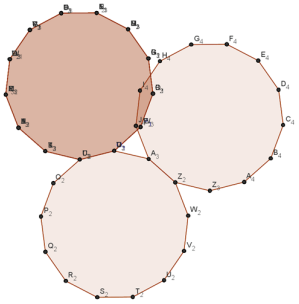
Groupe 5 - Fig 3



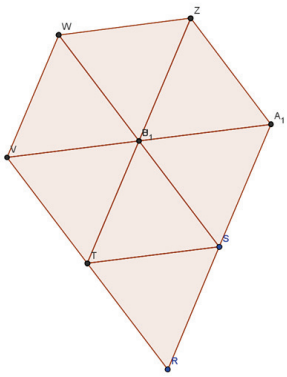
Groupe 5 - Fig 4



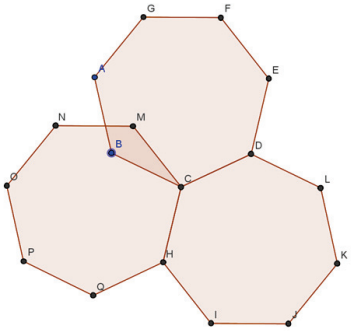
Groupe 5 - Fig 5



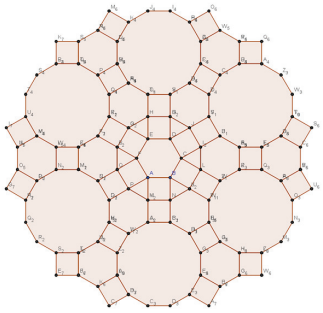
Groupe 5 - Fig 6



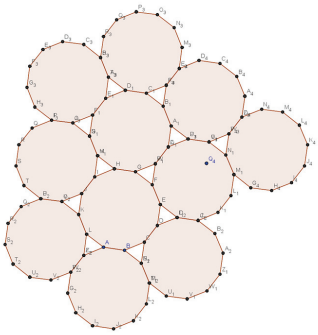
Groupe 5 - Fig 7



Groupe 5 - Fig 8



Groupe 6 - Fig 1



Groupe 6 - Fig 2

E.6 Transcription d'une partie des échanges du groupe 2 lors de EP3

Intervention	Commentaires
Robin : Non mais y a 6 de partout sauf là	Robin pose le problème des nœuds en bord de représentation
Alexandra : Oui mais là comme y a pas 6 il faut tu pars du principe que tu le continues de partout pour qu'y en ait toujours 6	
Martin : Imaginons que ce soit à l'infini, imaginons, supposons que le pavage s'étende à l'infini	
Léa : oui ça va faire tout le plan	
Alexandra : oui mais le plan il est à l'infini, à quoi ça sert de faire un plan à l'infini	Alexandra pose une question de fond sur l'infini
Martin : Alexandra s'te plait d'abord on règle ce problème ensuite on réglera le problème de l'infini	
Robin : Non mais là autour de chaque truc y en a 6	Robin considère l'assemblage de triangles équilatéraux
Martin : mais si on continue la figure, mais si on continue la figure	
Léa : faut continuer à vie	
Robin : Là y en a 3 de chaque côté	
Alexandra : à l'infini	
Martin : Supposons que la figure soit ronde, y a plus de problème d'infini	Martin pensant présenter un argument définitif évoque « l'enroulement » du plan sur la sphère
Robin : la figure soit ronde ?	
Robin : ben ça marche pas alors	
Alexandra et Léa : Ben si	
Alexandra : ben si parce que chaque sommet retouche un autre sommet	
Robin : Ah ouais, genre une sphère quoi	
Alexandra : Ouais voilà, donc si c'est sphérique ça marche ... donc en fait faut faire un plan avec tous les polygones mais que ça fasse une forme de sphère	
[...]	
Robin : Et là le nid d'abeille on fait comment ?	Robin évoque cette fois le pavage (6,6,6)
Alexandra : pareille une sphère ça marche aussi	
[...]	
Alexandra : et avec des losanges ça marche ?	Alexandra pose la question des polygones non réguliers. La question n'est pas tranché dans les échanges mais aucun dessin n'atteste que l'idée soit reprise

Robin : et avec des pentagones ça fait quoi, une sphère aussi ?	Robin évoque les croquis avec des pentagones mais qui sont encore en discussion
Léa : oui	
[...]	
Alexandra : fais les mieux tes pentagones	
Robin : t'as qu'à les faire mieux	
Martin : mais ça marche les pentagones	
Martin : Bon, pourquoi on débat sur l'infini, on cherche d'abord les pavages et ensuite on verra	Alors qu'Alexandra insiste à nouveau sur la nécessité de considérer le pavage d'une sphère, Martin qui estime que la question ne se pose pas, cherche à ramener les échanges sur la question des assemblages possibles
Robin : mais déjà pourquoi ça s'appelle pavage [...] c'est pour mettre des pavés quoi	Robin qui n'est pas convaincu par le passage à la sphère, s'appuie sur une dimension pratique
Rires	
Robin : donc ça veut dire que c'est pas rond	
Alexandra : Ben si	
Robin : Tu paves des trucs ronds toi	
[...]	
Si ça s'appelle pavage, c'est en gros ça se trouve. En plus Archimède c'est un truc du genre Antiquité il pavait la rue ou je sais pas moi une cour	
Martin c'est quoi ce groupe là	Martin n'est pas intéressé par les considérations historiques et culturelles
Alexandra : mais tu vas pas paver les rues avec des pentagones	
Martin : Mais on s'en fout	
Alexandra : tu paves avec des carrés	
Léa : ... pour faire beau	
Martin : selon vous y a que les rectangles sur le côté historique, y a que les rectangles pour les pavages archimédiens	
Robin : déjà la notion de pavage	
Alexandra : Non à Pompéi y avait des trucs	Alexandra renvoie ici à des pavages antiques
[...]	
Alexandra : Bon ben ça fait 3	
Robin : là on a 4 sortes de pavés	Robin
Alexandra : 4 sorte de pavages, mais pour les étendre tu vas pas daller toute la planète pour que ça marche	10 minutes après le début de la recherche un premier bilan identifie les 3 pavages réguliers plus le candidat (5,5,5) dont le statut est incertain

[...]	
11 : 50 : Alexandra : tu fais quoi Martin	Apparition des pavages non réguliers utilisant des carrés et des triangles
Martin : ben je sais pas pendant que vous exposez vos idées j'essaie d'en trouver t'as vu	
Alexandra : Ah mais attend on peut superposer mais il est pas bête Martin tu peux superposer plusieurs trucs	
Robin : non sans superposition y a marqué là	
Alexandra : non mais tu peux t'es pas obligé de prendre toujours le même polygone régulier	
Alexandra : Tu peux en prendre un autre, genre là il a pris un carré	Ils travaillent à ce moment là sur le candidat (3,3,4,3,4)
Robin : Ouais c'est pas bête	
Alexandra : Là c'est mieux, t'as jamais vu les motifs sur le carrelage	Alexandra reviendra plusieurs fois sur cette idée de carrelage
[...]	
Robin : non mais ils ont essayé avec les octogones	Robin en référence au travail du groupe d'à côté
Alexandra : Eh ça marche pas ?	
Robin : Ben j'en sais rien	
ALexandra : déjà comment tu dessines un octogone	
Robin : Et toi ton truc c'est à combien	
Martin : un octogone	
Robin : He ben voilà, un octogone avec des carrés	
Martin : mais tu peux pas faire octogones sans carré	
Robin et si tu fais pas des octogones mais des trucs en dessous et avec des triangles	
Alexandra : des trucs en dessous ? c'est quoi les trucs en dessous	
Robin : c'est pas un hepta, un heptagone un truc comme ça	
Léa : oui c'est ça, heptagone	
Robin : on en a déjà 4	
Martin : mais attends j'essaie de faire un heptagone là	
Robin : Un quoi	
Martin : Un heptagone	
Alexandra : 1, 2 , 3, 4, 5, 6, 7	
Martin : 4, 5, 6, 7	
Alexandra : Et avec un triangle il a dit	
Martin : Je propose qu'on les mette tous à côtés et ça fera une forme au milieu.	

Robin : Hé pourquoi eux ils ont l'ordi ... hé on y va alors ça sera plus facile pour tracer des octogones	Robin s'aperçoit qu'il a la possibilité d'utiliser un ordinateur, ce qu'il n'avait pas entendu et que ces camarades lui rappelle
Alexandra : Eh ben viens si tu veux	
Martin : euh	
Robin : genre tu gères tu traces des heptagones comme ça	
Alexandra : moi je sais m'en servir je l'ai sur mon ordi Geogebra	
Martin : et mais n'importe quoi, geogebra je vais perdre du temps, je suis trop nul	Martin s'estimant peu efficace avec GeoGebra préfère continuer sa recherche sur papier
Alexandra : mais si ça marche, tu cliques et ça s'affiche	
Léa : T'as une fonction ça fait polygone régulier et tu mets	Alexandra et Léa montrent leur connaissance du logiciel et de sa facilité d'emploi.
P : Allez y pas tous, vous pouvez y aller un du groupe de toute façon y a pas, y a pas que ça	Le professeur intervient pour réguler, auprès de ce groupe, l'usage de l'ordinateur
Martin : on est d'accord qu'on va pas y arriver qu'on va perdre du temps	Dans un premier temps Martin emporte la décision de ne pas se déplacer
[...]	
Martin : Heptagone ça marche	En appui sur un dessin approximatif
Alexandra : mais tes heptagones ils sont de plus en plus petits	
Martin : ils sont pas réguliers parce que c'est moi qui les faits	
Robin : Ça marche pas ton truc	Échange sur la validité du candidat
Martin : si je suis sur que ça marche	
Alexandra : là t'en as combien	
Léa : Attends on peut pas changer les tailles entre chaque heptagone ?	Début d'un échange sur la taille des différents polygones
Alexandra : non sinon c'est pas régulier	
Martin : c'est pas idiot ce que tu dis	
Robin : régulier ça veut juste dire	
Léa : ça veut juste dire un seul polygone a les mêmes mesures et les mêmes longueurs	
Alexandra : a les mêmes mesures et les mêmes longueurs, si ils ont les mêmes mesures et les mêmes longueurs les angles ils doivent être pareils et tu peux pas changer sa taille	
Martin : tu plaisantes les angles de toutes façons ça a aucun rapport avec la taille	
[...]	
18 minutes : Robin : bon ben j'en sais rien	

Robin Bon ben Petit 1, Petit 2, Petit 3, Petit 4, Petit 5 Voilà y en a que 5	
[...]	
22 minutes et 26 secondes	
P : [...] Je vous interromps 2 secondes écoutez, vous avez tous fait plein de figures vous avez remarquez certaines choses, ça marche ou ça marche pas, ce sera temps de passer à une démonstration un peu plus mathématiques, c'est pas que du dessin, faut essayer de prouver quelque chose [...]	P tente de faire progresser le recours au registre numérique. Il rappelle sa demande antérieure sur les angles des polygones réguliers
[...]	
Martin : Qu'est-ce qu'on sait ? moi j'ai une idée, on part de 360 sur n puisque c'est à peu près tout ce qu'on sait	Martin se réfère à ce que le groupe a indiqué en réponse à Q2
[...]	
Léa : Pourquoi vous avez écrit 360 alors	Au constat que la formule $\alpha = \frac{360}{n}$ ne convient pas Léa questionne la provenance de la formule
Robin : Pour quoi on a écrit 360	
Martin : Parce que c'est toi qui l'avait écrit sur ta feuille	
Robin : Ah ben bravo tout le monde	
Léa : Si parce qu'on avait dit que ça s'inscrivait dans un cercle et que chaque côté c'était dans le cercle et que du coup ...	Explications qui s'éteignent au fur et à mesure du sentiment d'inadaptation à la question
Robin : Ben bref, du coup ça marche pas alors	

E.7 Transcription d'échanges lors de EP4-FC

Expérimentation en FC : Transcription des sons enregistrés par le micro placé près du groupe 2. Transcription pour la fin de la recherche et la présentation des résultats.

Repère	Locuteur Temps	Texte
1	01 :40 :50	270 - 108 ... 162 est-ce que y en a un qui fait 162 ?
2		euh oui n = 20
3		voilà [...] avec n = 20 en plus de notre carré. Est-ce qu'on va pas retomber là sur [...]
4		Allez continue allez un carré un hexa ... 150 j'en ai un à 150
5		N = 12
6		N = 12 ça ça marche aussi
7		Ouais ensuite
8		Ah oui je comprends ce que tu fais ah ouais alors l'hepta
9		270 auquel j'enlève l'hepta ce qui
10		Non
11		Oui
12		Est-ce que Thomas tu pourrais faire [...]
13		Ah ah
14		C'est pas possible
15		Pas possible
16		Octo
17		Alors octo avec huit
18		Faut faire 270 - 135
19		C'est 135
20		Ouais
21		Est-ce que t'en as un qui fait 135
22		Oui
23		Ben oui ... t'es retombé dessus
24		Il faut qu'on tombe je crois que c'est fini parce que forcément
25		Comme là on s'est arrêté aux deux octogones ?
26		Tu sais quoi c'est comme quand on cherche les diviseurs d'un nombre
27		Voilà
28		On prend la racine carrée de
29		Maintenant tu fais avec 1 N = 5
30		...
31	01 :43 :00	Début du débat
32		...

01 : 48 : 58 : Alors concernant notre recherche nous en fait on n'avait pas compris l'énoncé à la base on a cherché les pavages avec toujours euh le même polygone régulier donc à la base ce qu'on a regardé c'est dans le cas ou il y avait trois côtés l'angle, qu'on a appelé alpha n l'angle entre deux côtes consécutifs était de 60 dans le cas du carré de 90 dans le cas du pentagone de 108 et dans le cas quelconque la formule nous donne donc on a un petit triangle 180 - 36 sur n

360

360 sur n parce que 360/n c'est l'angle qu'il y a ici là les deux angles sont identiques, somme

des angles dans un triangle ...etc. donc on a établit que l'angle entre deux côtés consécutifs en fonction du nombre de côtés était 180 fois (n-2) sur n alors ensuite ce qu'on a fait c'est qu'on a posé on a appelé P le nombre de polygones réguliers qu'on allait mettre autour d'un sommet euh et donc forcément pour que ca marche qu'il n'y ait pas de superpositions dans la logique qu'on avait il fallait que ce soit 360 divisé par P l'angle puisque l'angle entre deux côtés consécutifs on les met tous à la suite autour du sommet pour que ca divise parfaitement voilà après quoi il vient que comme cet angle doit être à la fois 360 divisé par P et 180 fois (n-2) sur n on a posé ça et on est arrivé à la relation suivante le nombre de côtés doit être égal a 2P sur (P - 2) alors première chose on a regardé dans le cas P = 2 on met que deux autour du sommet ça a pas de sens hein bien sur on peut pas en mettre que deux ensuite on a regarde dans le cas P = 3 en remplaçant ici on a trouvé [...] donc on a vu que ça fonctionnait avec les hexagones on est passé au cas 4 on a trouvé que ça marchait avec les carrés [...] pavages avec les carrés pour P = 6 on aboutissait à n = 3 donc c'est 6 triangles équilatéraux et on s'est posé la question puisque ça nous semblait ne jamais fonctionner par la suite donner des valeurs qui étaient pas entières pour n est ce que c'est possible que ce soit plus grand que 6 et on a répondu non car il doit forcément l'angle entre deux côtés consécutifs doit forcement être plus grand que 60 étant donne que le plus petit entre guillemets c'est le triangle équilatéral on peut pas faire un angle plus aigu pour faire un voilà donc partant du principe que cet angle entre deux côtés consécutifs était plus grand que 60° on a remplacé par 360 sur P et on est arrivé à dire que P devait être plus petit que 6 ce qui nous a permis de trouver qu'il existait trois pavages archimédiens réguliers du plan et on était très contents pour savoir que ...rires ... et ça permet pas du tout on peut effectivement mélanger des polygones réguliers alors ici on s'est un peu reparti les tâches j'étais encore en train j'étais plus trop dans l'histoire voilà on a regardé après on s'est posé la question des pavages irréguliers là on s'est encore une fois qu'on pouvait pas être au-delà de 6 pour la même raison parce que déjà avec les triangles ça remplit juste etc on peut en avoir plus de 6 autour d'un même sommet euh on a vu donc le cas p = 2 n'était pas possible peut pas y en avoir deux seulement deux ça n'a pas de sens donc c'était forcément dans le cas où il y en a 3 autour d'un sommet 4 5 ou 6 sachant que 6 était résolu et que p = 3 était résolu aussi c'est l'hexa non c'est pas celui là qu'est résolu c'est p =6 c'est résolu où c'est des triangles [...] donc il nous restait à traiter 3 4 5 alors pour l'étape 3 4 5 on a commencé par le cas n° 5 et dans le cas où il y en a 5 euh on est partis on a constaté qu'ça qu'on pouvait pas mettre un polygone qui était qui avait un angle entre deux côtés consécutifs plus grand que l'hexagone si on faisait ça si on prenait un qui a un angle plus grand que celui de l'hexagone c'qui nous restait même les triangles déjà les plus petits si on en remettait quatre autres ça rentrait pas donc on était surs déjà qu'on pouvait pas prendre quelque chose qui ait un angle supérieur à celui de l'hexagone et on a rem et on a regardé avec le avec ce qui nous restait y nous restait des triangles des carrés des pentagones on a regardé comment mettre quatre autres pour obtenir les 360 et on a trouvé comme solution uniquement de mettre quatre triangles donc un hexagone et quatre triangles là on a fait pour l'hexagone ensuite on a regardé ce qui se passait pour le pentagone on a vu que ça faisait 108 entre deux côtés consécutifs avec ce que l'on avait à disposition on pouvait pas euh on pouvait pas trouver c'est pas possible donc euh [...] ensuite on a regardé ce qui se passait avec les carrés donc on a soit soit y a un carré on va regarder comment mettre quatre autres pour faire 360 et on a trouvé uniquement le fait de rajouter un autre carré et trois triangles donc deux carrés et trois triangles et apparemment ça j'ai pas regardé mais y aurait - ouais - deux solutions pour paver de cette façon - au moins - euh et après triangle ça marchait plus donc voilà donc on a pu faire euh la liste exhaustive de tous les cas possibles quand y en a 5 autour donc y nous reste uniquement les cas 3 et 4 cas 3 et 4 on avait déjà trouvé les pavages réguliers il nous restait à trouver des pavages panachés entre deux et alors là je sais pas j'm'en suis pas chargé donc *a priori* pour p = 4 vous avez fait comment

y avait attends

en testant
ouais en fait
d'accord donc le pavage régulier on l'avait déjà
y en a d'autres mais
y en a d'autres
oui j'pense y en a d'autres ben faudrait faire ta technique après
ouais ma technique entre guillemets c'est que moi je me suis intéressé au cas comme il restait 3 et 4 j'me suis intéressé au cas p = 3 y en a 3 autour du sommet [...] ça doit être simple si y en a que trois on va trouver quelque chose comme j'avais trouvé ici qu'on pouvait pas faire plus qu'un hexagone donc ça nous laissait peu de choix possible pour faire le tour, j'me suis dit si y en a que trois on va trouvé quelque chose qui nous limite comme ça on va pouvoir bon il s'avère que ça été plus compliqué que je le pensais alors comment j'ai fait euh ben j'ai fait dans l'ordre en partant du plus petit j'ai dit euh ben j'me place dans le cas p = 3 y en a que trois autour du sommet commun si il y a un triangle ben j'commence par le plus petit euh il m'en reste il faut que j'en mette deux autres pour obtenir euh 360 faut que j'en mette deux autres pour faire 300 forcément un de 60 les deux autres vont faire 300 alors j'ai essayé avec le triangle c'était pas possible j'ai fait 300 moins c'qui a pour le triangle et j'ai regardé si y en avait un c'est supérieur à 180 donc non carré pas possible en fait ensuite j'ai fait tous les cas possibles triangle carré pentagone hexagone etc et j'ai trouvé que arrivé à l'heptagone c'était possible en prenant n = 42 donc c'est-à-dire en mettant un un qui aurait 42 côtés un heptagone et un triangle après avec l'octogone j'ai trouvé un avec 24 côtés qu'était possible avec 9 côtés un à 18 côtés etc et ensuite j'suis arrivé à deux dodécagones je crois c'est ça donc deux avec douze côtés en plus de mon triangle de départ puisque ça fait bien 60 + 300 [...] et après si je continue je retombe sur des cas que j'ai déjà traité ça fait une boucle puisque à force d'augmenter celui qui reste y revient dans les plus petits que j'ai déjà traité avant donc je suis sur que je suis arrivé au bout de ce que j'ai fait alors après j'ai fait un carré donc j'ai un carré il m'en reste deux pour faire 270 et j'ai fait triangle pas possible, carré pas possible, pentagone et n=20 possible etc et au bout du compte je j'les ai tous trouvé dans le cas p = 3 j'vais pas vous les lire parce que ça serait déjà je suis pas sur de m'y retrouver moi-même en tout cas on peut tous les trouver on arrive au bout et j'ai pas eu le temps de finir donc pour savoir si j'peux faire la même chose aussi facilement pour p = 4 et surtout on les a pas testés aussi en les dessinant pour savoir si ils marchaient et s'il y avait plusieurs solutions ou pas ...

Annexe F

Devoir en temps libre EXP-TS2

F.1 Cahier de travail

C'est un assemblage de 31 feuilles entre une couverture avant transparente et une couverture arrière opaque colorée, le tout relié avec une reliure spirale plastique. Le contenu est le suivant :

- Une page de garde sur laquelle figure le texte suivant :

Étude des processus de construction de savoirs lors d'activités de recherche en classe
Premier semestre 2014 Terminale scientifique - Spécialité « mathématiques »
NOM : Prénom :
Claire COFFY-SAINT-JALM
Mathias FRONT

- une feuille de titre : DEVOIR Á LA MAISON.

- L'énoncé du devoir à la maison : deux feuilles.

- Une feuille intitulée : Espace pour la recherche du devoir à la maison.

- 8 feuilles alternativement blanches et quadrillées (5×5) à utiliser en tant que brouillon pour la recherche du devoir à la maison.

- Une feuille intitulée : Rédaction du devoir à la maison.

- 5 feuilles quadrillées (5×5) pour la rédaction du devoir à la maison.

- Une feuille intitulée : Activité de recherche en classe.

- 8 feuilles alternativement blanches et quadrillées (5×5) à utiliser en tant que brouillon pendant la recherche des pavages archimédiens du plan.

- Une feuille intitulée : Synthèse.

- 2 feuilles quadrillées (5×5) pour la prise de notes pendant le temps d'institutionnalisation.

F.2 Sujet du devoir en temps libre, EXP-TS2

Quelques questions autour des angles des polygones réguliers

Devoir en temps libre
Terminales S - Spécialité Mathématiques

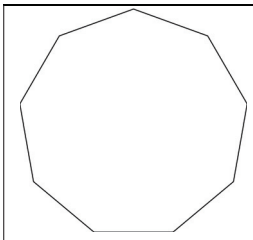
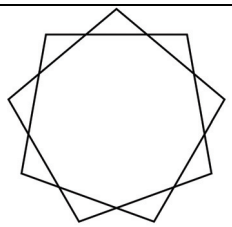
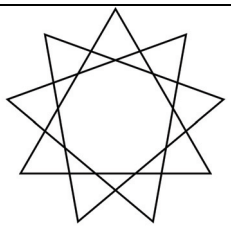
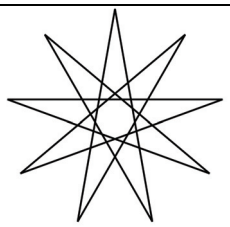
A rendre le 27 février 2014
Certaines questions plus difficiles feront l'objet d'une discussion en classe après présentation par certains élèves de leur recherche.
En cas de blocage, possibilité de solliciter une aide : mathias.front@univ-lyon1.fr

1. Définitions

1.1 Polygones réguliers

On appelle polygone régulier tout polygone inscriptible dans un cercle dont les côtés ont même longueur.

Exemples (Images Wikipédia) :

			
Ennéagone régulier	Ennéagramme de type 9/2	Ennéagramme de type 9/3	Ennéagramme de type 9/4

Remarque : L'ennéagone est aussi appelé nonagone.

1.2 Polygones réguliers convexes

Définition : Un polygone est convexe si tous ses sommets sont dans un même demi-plan par rapport à n'importe quelle droite contenant un côté du polygone.

Parmi les exemples précédents seul l'ennéagone est convexe. Les autres polygones sont des polygones réguliers étoilés.

Dans la suite du texte on ne considère que des polygones réguliers convexes.

1.3 Angles d'un polygone régulier convexe

Définition : Un polygone convexe à n côtés possède n angles qui sont les angles orientés de deux arêtes consécutives en leur sommet commun.

Propriété : Un polygone convexe est régulier si et seulement si tous ses côtés sont de même longueurs et tous ses angles sont égaux.

Définition : Pour un polygone convexe régulier on nomme « angle du polygone » l'angle orienté de deux arêtes consécutives quelconques en leur sommet commun.

Définition : On nomme « angle au centre d'un polygone régulier convexe » l'angle orienté de deux segments joignant le centre du cercle circonscrit à deux sommets consécutifs du polygone.

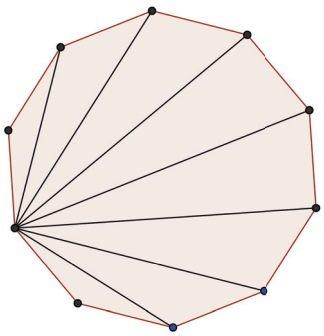
2. Étude de la suite des mesures en degré des angles des polygones réguliers.

2.1 Mesure en degré de l'angle d'un n-gone régulier.

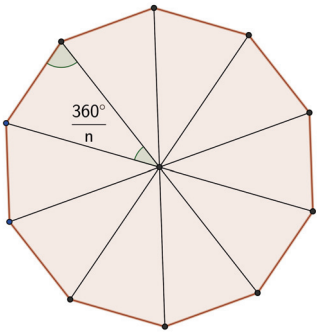
2.1.1 On peut décomposer un polygone à l'aide de triangles, par exemple comme sur les figure 1.a pour le décagone régulier. En considérant cette décomposition, en n-2 triangles pour un polygone régulier à n côtés, déterminer la somme des mesures des angles du polygone puis la mesure en degré de l'angle d'un polygone régulier à n côtés, en fonction de n.

2.1.2 Retrouver ce résultat en utilisant cette fois une décomposition comme celle de la figure 1.b.

Figure 1 : Deux décompositions du décagone



1.a. Décomposition du décagone avec des triangles ayant un sommet du polygone en commun.



1.b. Décomposition du décagone avec des triangles égaux ayant le centre du cercle en commun.

2.2 Suite des mesures en degré des angles des polygones réguliers

On note $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ la suite des mesures en degré des angles des polygones réguliers.

2.2.1 Dans un tableau, donner la mesure en degré des angles des polygones réguliers à n côtés, pour n dans $[3; 25]$.

2.2.2 Montrer que $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est strictement croissante. Montrer qu'elle est majorée. Déterminer sa limite.

2.2.3 Existe-t-il un polygone régulier dont la mesure en degré de l'angle est 179 ?

2.3 Étude de la nature des termes de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$

2.3.1 Question préliminaire - Mettre en œuvre l'algorithme de la Figure 2 en prenant N = 360.

- Décrire la fonction de cet algorithme.

```
1 Entrées : Saisir N;
2 2 → P;
3 début
4 |  tant que P ≤ N faire
5 |  |  si N/P est entier alors
6 |  |  |  Afficher P;
7 |  |  |  N/P → N;
8 |  |  sinon
9 |  |  |  P + 1 → P
```

Figure 2 : Algorithme

2.3.2 Nature des termes de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ - Déterminer tous les polygones réguliers ayant un angle dont la mesure en degré est entière.

- Caractériser les polygones réguliers ayant un angle dont la mesure en degré est décimale.

3 Complément sur les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas

3.1 Nombres de Fermat premiers

Un entier naturel est dit de Fermat s'il peut s'écrire sous la forme $2^{(2^n)}+1$ pour un certain entier naturel n. Le n+1-ème nombre de Fermat est noté F_n.

3.1.1 Montrer que F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sont premiers.

3.1.2 Vérifier que F_5 est divisible par 641.

Remarque : Actuellement, on ne connaît que cinq nombres de Fermat premiers, ceux cités ci-dessus. On ignore encore s'il en existe d'autres, mais on sait que les nombres de Fermat F_n, pour n entre 5 et 32, sont tous composés ; F_{33} est le plus petit nombre de Fermat dont on ne sait pas s'il est premier ou composé.

3.2 Théorème de Gauss-Wantzel

On sait construire certains polygones réguliers uniquement à la règle et au compas, par exemple le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone. C'est grâce à un résultat de Pierre-Laurent Wantzel, de 1837, qu'il a été possible de caractériser les polygones constructibles à la règle et au compas.

Théorème de Gauss-Wantzel : Un polygone à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts (éventuellement aucun).

Déterminer pour n compris entre 3 et 25, les polygones réguliers à n côtés constructibles à la règle et au compas.

F.3 Éléments de correction du devoir en temps libre

Quelques questions autour des angles des polygones réguliers

Devoir en temps libre
Terminales S - Spécialité Mathématiques

Éléments de correction

Qualité de la rédaction : 1,5 points

1. Définitions

RAS

2. Étude de la suite des angles des polygones réguliers.

2.1 Mesure en degré de l'angle d'un n-gone régulier.

2.1.1 1,5 points

La somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180 en degré donc la somme des mesures des angles du polygone régulier à n côtés vaut $(n-2).180$. Or le polygone a n angles égaux donc l'angle du polygone régulier à n côtés vaut $\dfrac{(n-2).180}{n}$.

2.1.2 1,5 points

La figure 1.b. met en évidence n triangles isocèles dont les angles à la base sont égaux à la moitié de l'angle du polygone régulier. Or la mesure en degré de l'un de ces angles à la base vaut : $\dfrac{180-\dfrac{360}{n}}{2}$. La mesure de l'angle du polygone régulier est le double de cette dernière mesure soit $180-\dfrac{360}{n}$.

On vérifie que $\dfrac{(n-2).180}{n} = \dfrac{n.180-360}{n} = 180-\dfrac{360}{n}$.

2.2 Suite des mesures en degré des angles des polygones réguliers

On note $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ la suite des mesures en degré des angles des polygones réguliers.

2.2.1 1 point

On a :

Nombre de côtés du polygone	Mesure de l'angle en degré		Nombre de côtés du polygone	Mesure de l'angle en degré
3	60		15	156
4	90		16	157,5
5	108		17	$\frac{15 \times 180}{17}$
6	120		18	160
7	$\frac{5 \times 180}{7}$		19	$\frac{17 \times 180}{19}$
8	135		20	162
9	140		21	$\frac{19 \times 180}{21}$
10	144		22	$\frac{10 \times 180}{11}$
11	$\frac{9 \times 180}{11}$		23	$\frac{21 \times 180}{23}$
12	150		24	165
13	$\frac{11 \times 180}{13}$		25	165,6
14	$\frac{6 \times 180}{7}$		...	...

On notera que certaines valeurs ne sont pas décimales, par exemple la mesure en degré de l'angle de l'heptagone.

2.2.2 1 + 1 + 0.5 points

Montrons que $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est strictement croissante, majorée et de limite 180.

- Pour $n \geq 3$, $\alpha_{n+1} - \alpha_n = 180 - \frac{360}{n+1} - (180 - \frac{360}{n}) = \frac{360}{n} - \frac{360}{n+1} = \frac{360}{n(n+1)}$ qui est toujours strictement positif. $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est donc strictement croissante.

- Pour $n \geq 3$, $\alpha_n = 180 - \frac{360}{n} \leq 180$. $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est donc majorée.

- Croissante et majorée, $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ admet une limite. Or pour $n \geq 3$, $\frac{360}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ tend vers 180.

2.2.3 1 point

Existe-t-il un polygone régulier dont la mesure en degré de l'angle est 179 ?

Pour qu'il en soit ainsi il suffit que $\frac{360}{n}$ soit égal à 1 et donc que n soit égal à 360.

2.3 Étude de la nature des termes de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$

2.3.1 Question préliminaire

- 1,5 point Mise en œuvre l'algorithme de la Figure 2 en prenant N = 360.

```
1 Entrées : Saisir N;
2 2 → P;
3 début
4     tant que P ≤ N faire
5         si N/P est entier alors
6             Afficher P;
7             N/P → N;
8         sinon
9             P + 1 → P
```

On obtient les valeurs successives suivantes :

Valeurs de N	360	180	90	45	45	15	5	5	5	1
Valeurs de P	2	2	2	2	3	3	3	4	5	5
Test1	$2 \leq 360$	$2 \leq 180$	$2 \leq 90$	$2 \leq 45$	$3 \leq 45$	$3 \leq 15$	$3 \leq 5$	$4 \leq 5$	$5 \leq 5$	
Test2	N/P entier	N/P entier	N/P entier	N/P n'est pas entier	N/P entier	N/P est entier	N/P n'est pas entier	N/P n'est pas entier	N/P est entier	
Affichage successifs	2	2	2		3	3			5	

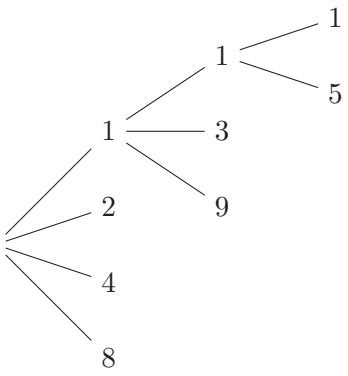
- 1 point L'algorithme proposé donne la décomposition d'un entier supérieur ou égal à 2 en produit de facteurs premiers.

2.3.2 Nature des termes de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$

- 2 points

Les polygones réguliers ayant un angle dont la mesure en degré est entière sont ceux tels que n divise 360 et tels que $0 < \frac{360}{n} < 180$. En effet $180 - \frac{360}{n}$ est entier si et seulement si $\frac{360}{n}$ l'est et la mesure de l'angle est nécessairement comprise strictement entre 0 et 180. Il s'agit donc de trouver les diviseurs de 360 strictement supérieurs à 2.

La décomposition $360 = 2^3.3^2.5$ donne assez facilement tous les diviseurs par exemple avec l'arbre ci-dessous, dont seul la première branche est développée :



On obtient, en faisant les produits suivant les branches, tous les diviseurs de 360, soit : 1, 5, 3, 15, 9, 45, 2, 10, 6, 30, 18, 90, 4, 20, 12, 60, 36, 180, 8, 40, 24, 120, 72, 360. Ils sont au nombre de $(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$ c'est-à-dire autant que de branches de l'arbre.

On retient ici pour les polygones dont le nombre de côtés permet d'obtenir une mesure d'angle en degré entière les polygones à 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, ,40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

- 2 points

Les polygones réguliers ayant un angle dont la mesure en degré est cette fois décimale sont donc tels que $180-\dfrac{360}{n}$ est décimal. Ceci revient à déterminer tous les n tels que $\dfrac{360}{n}=\dfrac{2^3.3^2.5}{n}$ est décimal. La décomposition en facteur premier de n doit cette fois être supérieur strict à 2 et de la forme $2^p.3^q.5^r$ avec p dans N, q dans $\{0;1;2\}$ et r dans N. En effet au-delà de la présence éventuelle de 3 ou 9 simplifiables, le dénominateur de la fraction ne peut contenir que des puissances de 2 ou 5 pour qu'il soit possible de mettre ce dénominateur sous la forme 10^a, a dans N.

Il y a donc une infinité de tels polygones. Celui dont le nombre de côtés est le plus petit et dont la mesure de l'angle en degré n'est pas entière a $n=2^4=16$ côtés.

3. Complément sur les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas

3.1 Nombre premier dit de Fermat

Un nombre premier est dit de Fermat s'il est de la forme $2^{(2^n)}+1$ pour un certain entier naturel n. Le n+1-ème nombre de Fermat est noté F_n.

3.1.1 2 points Montrons que F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sont premiers.

$F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$ sont connus comme premiers.

Pour F_3 et F_4 nous testons la divisibilité du nombre par tous les premiers plus petits que la racine carrée de ce nombre. Or 257 n'est pas divisible par 3, 5, 7, 11, 13 et $\sqrt{257}<17$ donc 257 est premier.

$F_4=65537$, il faut donc tester la divisibilité de 65537 par tous les premiers inférieurs à $\sqrt{65537}\approx 256$.

Ceci nécessite d'établir une liste des premiers inférieurs à 256, soit : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251. On montre alors que 655737 est premier.

Autre solution, utiliser l'algorithme de décomposition proposé, mais très peu optimisé, il est très lent et ne propose une réponse sur la graph 100 qu'après 30 minutes de recherche.

3.1.2 0,5 point

Une calculatrice ou un tableur nous confirme que $F_5 = 4294967297$ est divisible par 641 ($4294967297 = 641 \times 6700417$).

3.2 Théorème de Gauss-Wantzel

Théorème de Gauss-Wantzel : Un polygone à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts (éventuellement aucun).

2 points

On a les écritures uniques suivantes : $3 = F_0$, $4 = 2^2$, $5 = F_1$, $6 = 2 \times F_0$, 7 est premier et non de Fermat, $8 = 2^3$, $9 = F_0 \times F_0$ ne convient pas, $10 = 2 \times F_1$, 11 est premier et non de Fermat, $12 = 2^2 \times F_0$, 13 est premier et non de Fermat, $14 = 2 \times 7$ ne convient pas, $15 = 2 \times F_1$, $16 = 2^4$, $17 = F_2$, $18 = 2 \times F_0 \times F_0$ ne convient pas, 19 est premier et non de Fermat, $20 = 2^2 \times F_1$, $21 = 3 \times 7$ ne convient pas, $22 = 2 \times 11$ ne convient pas, 23 ne convient pas, $24 = 2^8 \times F_0$ convient et $25 = F_1 \times F_1$ ne convient pas.

Ainsi les polygones réguliers à n côtés ($n \leq 25$) constructibles à la règle et au compas sont ceux pour lesquels n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24.

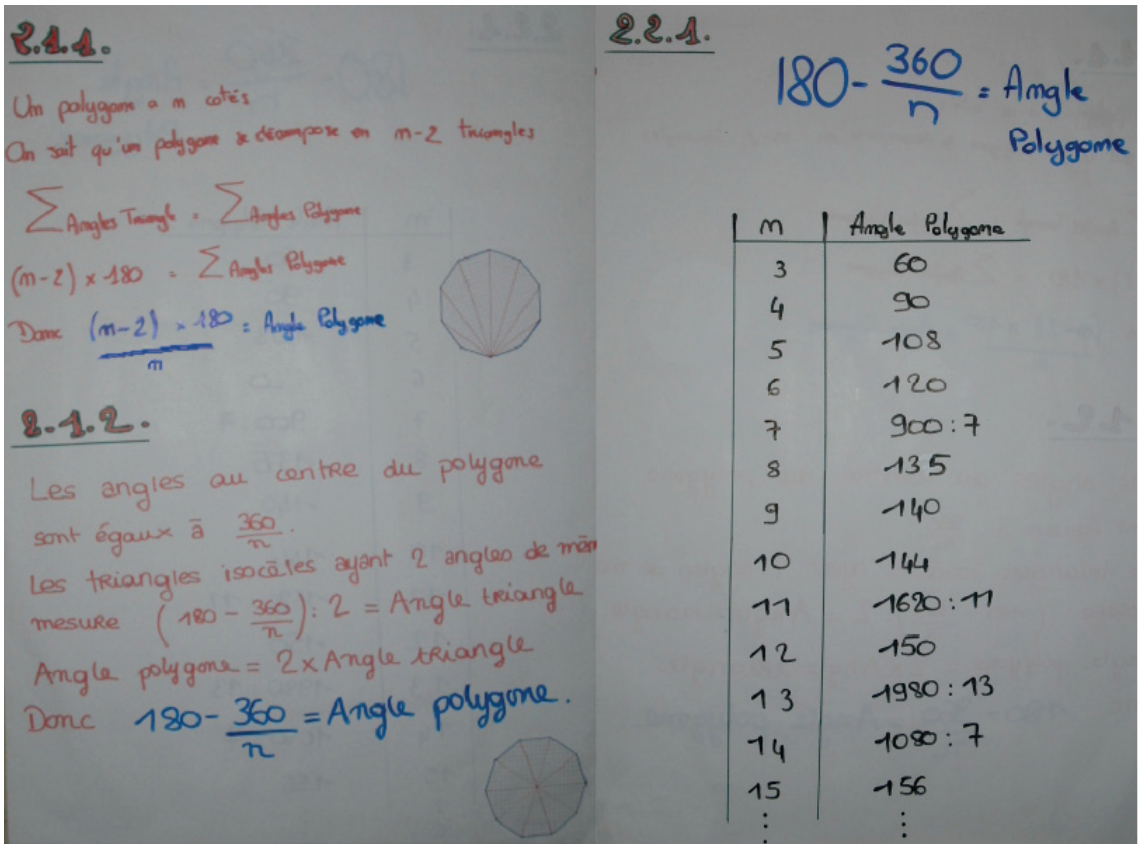
Et par exemple, la construction (à la règle et au compas) de l'heptagone régulier n'est pas possible.

F.4 Résultats chiffrés du devoir en temps libre

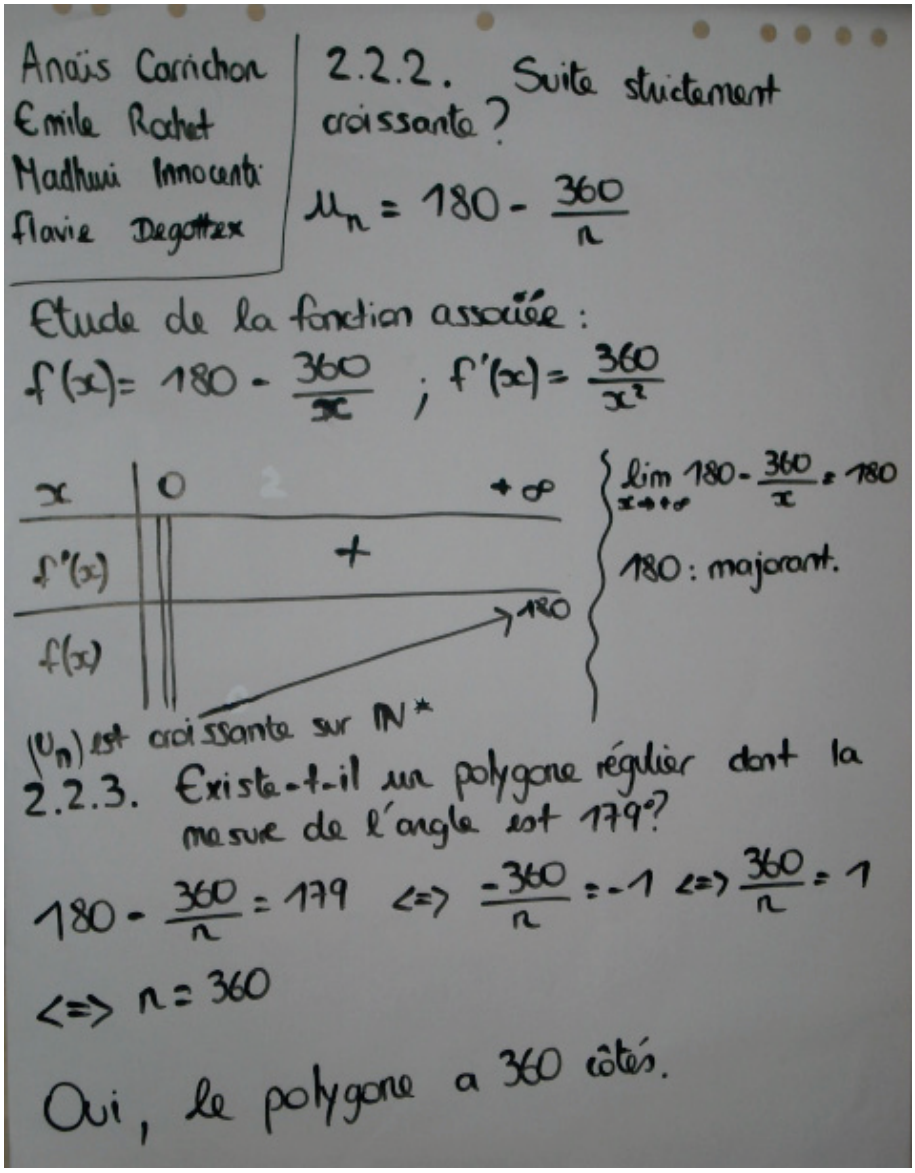
Élève	2.1.1	2.1.2	2.2.1	2.2.2	2.2.3	2.3.1	2.3.2	3.1.1	3.1.2	3.2	Rédaction	Global
E1	1,5	1	0	1	0	0,5	NR	0,5	0	NR	1,5	6
E2	1,5	1,5	0,5	2,5	1	1,5	2	0,5	0,5	2	1,5	16
E3	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR
E4	1	0	0,5	1	1	0	0,5	0,5	0,5	0,5	1,5	7
E5	1,5	1,5	0,5	1,5	1	2,5	2	1,5	0,5	2	1,5	16
E6	NR	0.5	1	1,5	1	NR	NR	NR	NR	NR	0,5	4,5
E7	0,5	1,5	0,5	1,5	1	2,5	0,5	1,5	0,5	NR	0,5	10,5
E8	1,5	1,5	0,5	2,5	1	2,5	0	1	0,5	NR	1,5	12,5
E9	1,5	1,5	0,5	2	1	2,5	0,5	1,5	0,5	1,5	1,5	14,5
E10	1,5	1,5	0,5	1,5	1	2,5	0,5	0,5	0,5	NR	1,5	11,5
E11	1	0	0,5	0,5	0,5	0	NR	1	0	1	1	6
E12	0.5	1,5	1	2,5	1	0,5	0,5	1	0,5	2	1,5	12,5
E13	0	0.5	1	2,5	0,5	0,5	0,5	1	0,5	NR	1	8
E14	1,5	1	1	2,5	1	0,5	1	1,5	0,5	2	1,5	14
E15	0,5	1,5	0,5	2,5	1	2,5	2	1,5	0,5	1,5	1	15
E16	0,5	0,5	0,5	2	1	0	0,5	0,5	0,5	0,5	1,5	8
E17	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR
E18	ABS	ABS	ABS	ABS	ABS	ABS	ABS	ABS	ABS	ABS	ABS	ABS
E19	1,5	1,5	0,5	2	1	2,5	0,5	1,5	0,5	NR	1,5	13
E20	1,5	1,5	0,5	2	1	1,5	2	1,5	0,5	2	2	16
Barème	1,5	1,5	1	2,5	1	2,5	4	2	0,5	2	1,5	20

Légende : ABS pour absent, NR pour non réponse.

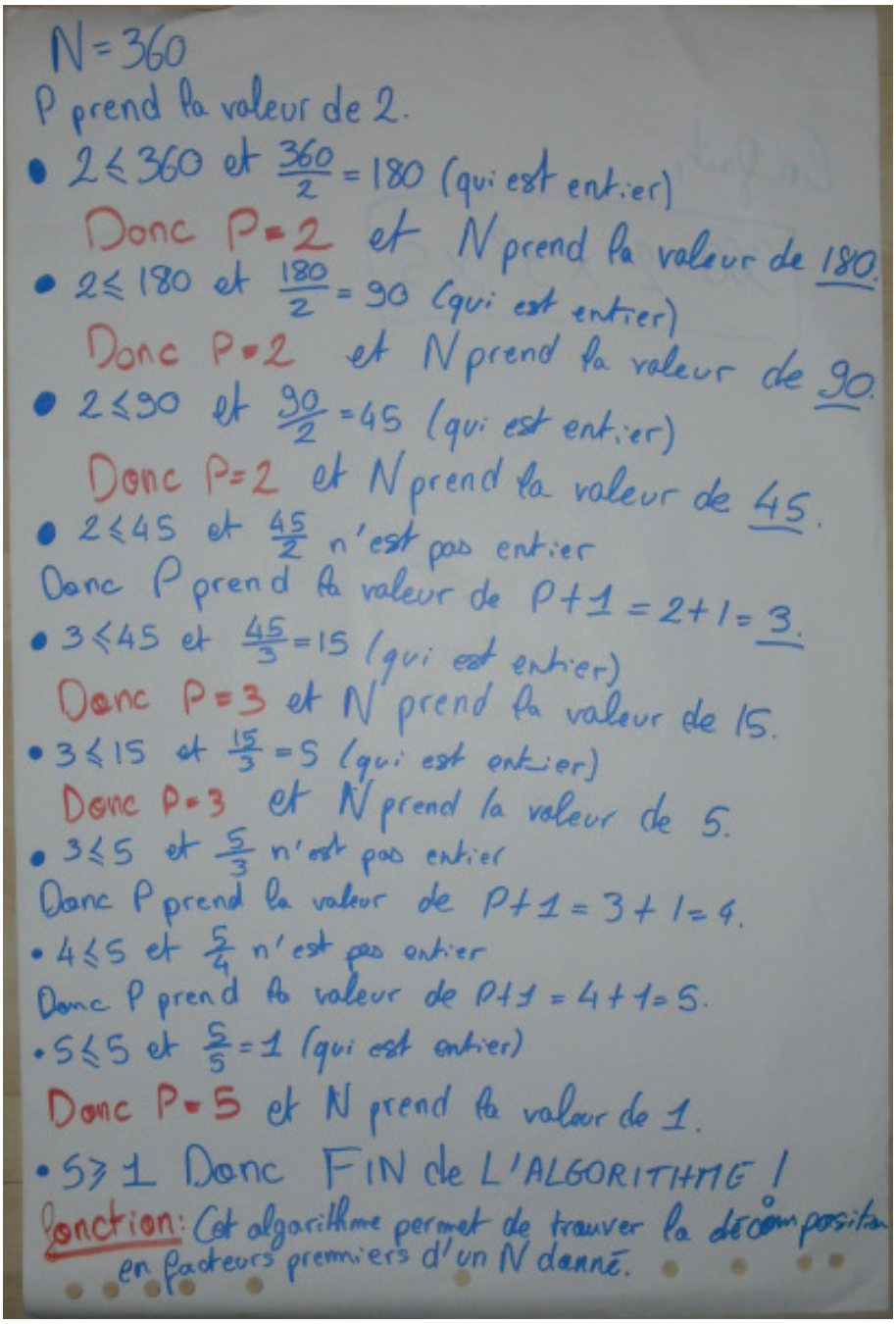
F.5 Affiches de la séance de retour sur le devoir en temps libre, EXP-TS2



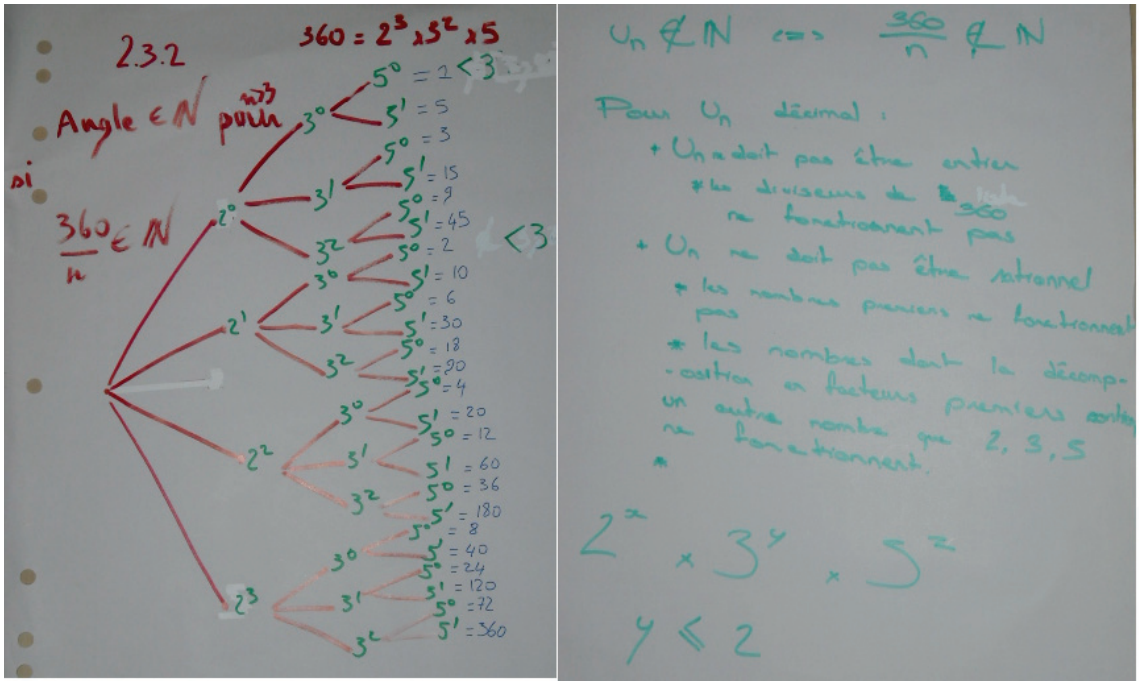
Affiches Groupe 1, RDTL-TS2



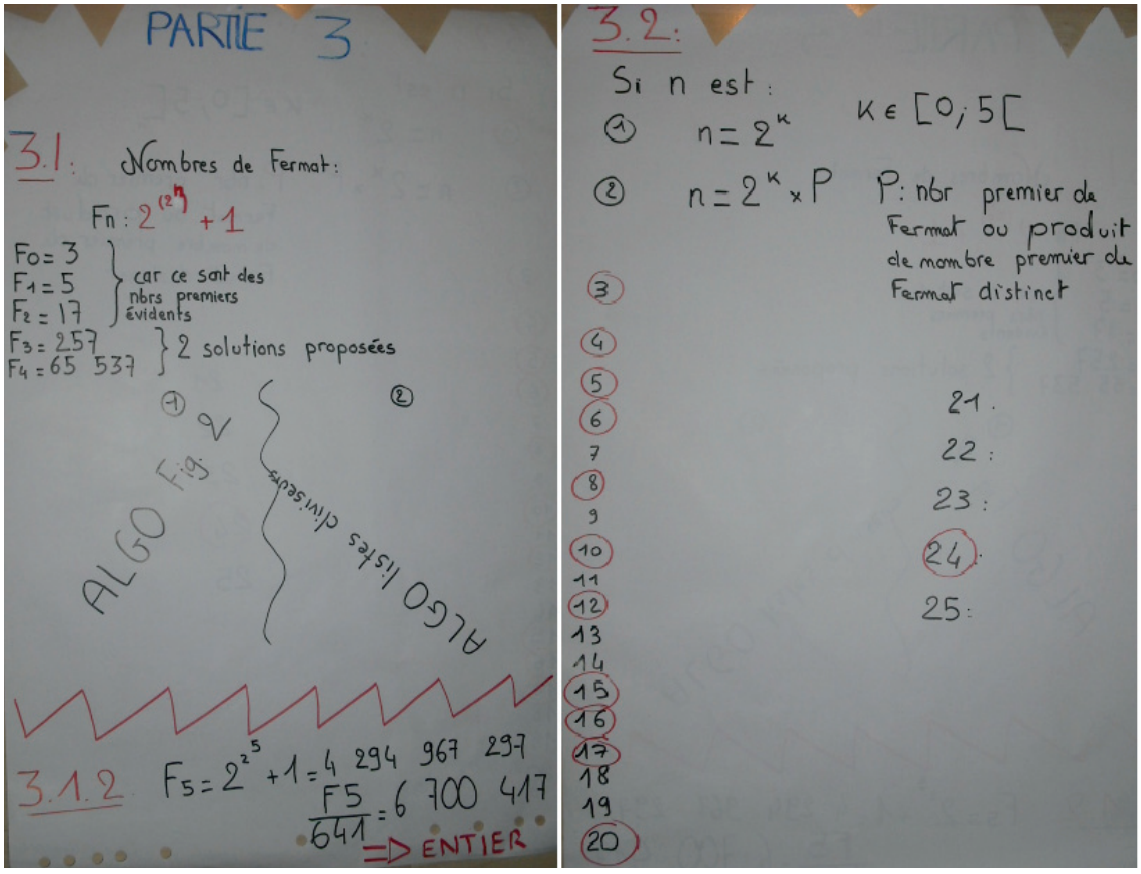
Affiches Groupe 2, RDTL-TS2



Affiches Groupe 3, RDTL-TS2



Affiches Groupe 4, RDTL-TS2



Affiches Groupe 5, RDTL-TS2

F.6 Transcriptions des échanges lors de EXP-TS2-RDTL

F.6.1 Transcription des échanges lors de EXP-TS2-RDTL - groupe 1

Expérimentation en TS2 : Transcription des sons enregistrés par le micro placé près du groupe 1.

Codage : P le professeur, Nicolas (E6), Valentin (E13), Nina (E16) les membres du groupe 1.

[...] les courts passages inaudibles, en italique des commentaires qui font parfois référence à l'image vidéo.

Repère	Locuteur Temps	Texte
2	E13	Et nos groupes sont répartis sur les questions qu'on a bien réussies ou mal réussies ?
3	P	Sachant Valentin, que tu es sur la première question « détermination de l'angle d'un polygone suivant les deux méthodes », tu penses que c'est quoi ?
4	E13	J'en sais rien, je sais plus
5	P	En fait vous avez été répartis sur, vous avez démarré mais y'a des pistes à creuser un ptit peu plus. Donc soit vous avez fait des choses mais c'est pas allé assez loin, soit vous aviez une bonne idée mais vous l'avez pas assez exploitée. Donc grosso modo vous avez un plan pour démarrer tous.
6		Ouais donc en fait j'aurais pu être dans n'importe quel des groupes.
7		Pourquoi y'a des élèves qui sont en noir et des élèves qui sont en rouge ?
8	P	Ah Y'en a qui ont pas rendu, vous les avez pas là bien sur ? Perdu ... Oui c'est petit, ça se perd facilement, entre les feuilles ...
9		270 Ah ben bien Émile Rocher !
10		Donc je vous rends ça, 5 minutes pour le regarder tout seul
11	E16	Tu l'as perdu ?
12	E16	Non mais en plus ils nous filment. Ils nous enregistrent ils nous filment ...
13		Euh madame, ça compte pour le deuxième ou le troisième trimestre ?
14		Le troisième
15		2/20. Vas y donne tout pour tes deux points bonus, merci !
16		Dur la vie. A oui là c'est les pages que j'ai collées.
17		Je sens que ça va être joyeux. 0,5, 4,5.
18		Sur 20 ?
19		Ouais je crois
20		On va vite le savoir si t'as la moyenne
21		Non, j'pense pas que j'l'ai moi.
22		Si t'as 10 ça sera le cas.
23	E16	Faudrait bien qu'il y en ait au moins un qui ait la moyenne quoi
24		8. Bon donc c'est sur 20
25	E16	Non mais alors si t'as eu 8, je vais avoir quoi moi ?
26		8, j'ai eu 8.
27		Bon ben voilà.
28	E16	Mais il était trop dur, pourquoi ils ont pas mis des bonnes notes ?
29		Non mais en fait ça veut dire que vous deux vous pouvez avoir dix quoi.

30		Oh la la, le mec mais catastrophique quoi. Alors ça ça m'avait cassé les couilles, ça c'est l'exemple qui passait à travers les feuilles (? ?).
31	E16	Nous deux c'est laquelle qu'on avait fait ?
32		Nous c'est détermination de l'angle là
33		*comparaison des questions faites et des points obtenus*
34		Bon, d'abord réflexion personnelle. Bon allez c'est parti.
36		Ouais y'a moyen d'avoir 10 en plus
37		Ouais y'a moyen avec les deux points bonus
38		Moi j'ai moyen d'avoir 6,5 quoi. Mais à mon avis ça peut se faire ...
39		Bon, vous prenez connaissance si c'est pas déjà fait de la question que vous avez à résoudre avec votre groupe. Vous cherchez aussi sur les petits cahiers que vous avez. Vous pouvez peut être poser vos affaires ailleurs que sur la table. Pas d'IPod. Oui vous écrivez sur les cahiers que vous avez tous là. Ben vous allez réfléchir ensemble pour répondre à votre question, et après vous ferez une affiche. Pour l'instant vous réfléchissez ensemble.
40		La question elle est là.
41		Euh, la somme des angles d'un triangle, c'est égal à 180, et pour faire, en fait, le nombre de triangles d'ici, t'en as n-2. n c'est le nombre de ...
42	E16	Ben ouais, mais justement pour la première question il fallait retrouver celui là, pas celui là, celui là c'est pour lui, pour la 2.1.2.
43		Oh purée mais t'avais tellement raison
44		Mais on s'est plantés non ?
45		Ça c'est pour ça et ça c'est pour ça et ça c'est pour ça (...)
46		Regarde, ce que t'as écrit c'est vraiment pas con. T'sais, heum, avec un nombre de côtés, c'est n. C'est ce que t'as appelé n, toi, c'est le nombre de côtés ?
47	E16	Oui, ben oui.
48		Imagine pour un triangle, donc c'est 3, OK ?
49		Hum hum
50		Donc 3 côtés. Tu fais 3-2, c'est égal à 1,...
51	E6	C'est bien Valentin
52		1*180 c'est égal à la somme de, heu, 'fin la somme des 3 angles.
53		Ouais
54		Du coup si jamais tu fais ça par exemple avec un carré, j'suis sur que ça fonctionne. 4-2, du coup t'as 2, fois 180. Un carré, c'est quatre angles droits. 4*90, 360. c'est exactement ça.
55		Ah ouais.
56		J'sais pas pourquoi ça fonctionne, mais ça fonctionne.
57		J'sais pas pourquoi j'ai trouvé ça non plus mais ...
58		Mais c'est vraiment pas bête
59		Mais j'ai réfléchi avec Valentin vite fait, ha ha, ça a pas donné ça.
60		Ouais non honnêtement j'l'ai fait un petit peu trop à l'arrache. mais bon, ça passe
61		Ah ouais, c'est vraiment pas stupide, ah ouais, j'y avais pas pensé, bien joué. Euh, pour la 2 du coup on a fait quoi nous ?
62		Ben la 2, j'crois qu'on a eu juste hein. J'en sais rien.
63	E16	Pour la 2.1. ... Déjà pourquoi ils mettent 2.1.2, ils peuvent pas mettre 1, 2, 3 ? Truc facile. C'est chiant là !

64		M'en fait c'est-à-dire que la première partie y'a pas de questions je crois. Y'a une partie 1 avec des, de, des documents. Là. 1, y'a 1.1, 1.2, 1.3 mais y'a pas de questions. Et du coup à partir de la partie 2 y'a des questions.
65		Qu'est-ce qui se passe ? Vous arrivez à trouver euh ?
66		Ouais non c'est bon
67		Ben en fait on vient de trouver, euh avec euh, 'fin Nina qui ne se souvenait plus de comment elle est-ce qu'elle avait trouvé sa réponse, on vient de la retrouver, effectivement ça marche bien.
68	P	D'accord. Vous serez capables de l'expliquer à vos camarades ?
69		Euh ... Peut être pas.
70		Oh si ça va se faire. Ben en fait ...
71		Faut qu'on y réfléchisse
72	E13	En fait je sais pas pourquoi ça fait technique ; mais en fait sur un triangle, en fait, on a trois cotés. C'est le n qu'on avait. Et donc du coup si on fait (n-2) fois 180, du coup là on a la somme des trois angles en fait sur un triangle c'est 180 degrés, à chaque fois.
73	P	Oui
74	E13	Si on fait sur un carré, c'est quatre angles droits, donc c'est 360 degrés, et donc là on fait à nouveau n-2, donc là on est à (4-2) fois 180 et on trouve notre 360.
75	P	Hum hum.
76	E13	Et du coup à chaque fois en fait, on a (quarante motifs ?), on fait le nombre de cotés - 2, fois 180, et on obtient la somme de, enfin euh , on obtient la somme totale des angles.
77	P	Sauf que là tu viens de me dessiner deux exemples.
78		oui, mais je sais pas comment on peut faire pour euh ...
79		?
80	E16	Ouais pour donner un truc général.
81		voilà.
82		Pour le donner de manière générale, euh ...
83	E16	Eh ben la formule elle marche pas là ?
84		Parce que là le problème c'est que tu as une propriété...
85		Si mais je pense que faut la démontrer
86		... tu m'as dit la somme des angles dans un triangle fait 180. C'est une propriété.
87		Oui
88	P	La somme des angles dans un quadrilatère fait 360 c'est une propriété aussi. Et est-ce que t'en as d'autres pour des euh ...
89		Euh...
90	P	Le problème c'est que là t'inventes des propriétés hein
91		Ouais ben ouais
92		qui seraient peut être vraies mais qu'on ne connaît pas vraiment.
93		J'pense ...
94	P	Vous avez vu y'a deux dessins hein.
95	E13	Alors par contre on peut essayer de découper les autres figures avec des triangles.

96	P	Ha ben ça ça peut être une bonne idée puisque tu connais des choses sur les triangles. D'ailleurs si tu regardes tes figures, tu peux voir apparaître des triangles.
97	E13	Attends, si on fait ç.. Si on découpe en deux, on a deux triangles
98	E6	Puuutain, ba ouais puisque...
99		(rires)
100	E6	On est vraiment des boulets
101	E16	Si on découpe en deux ça fait quoi ?
102	E6	Ben en fait comme là y'a des triangles, et qu'on sait que la somme 'fin la euh les les... les mesures c'est 180 là, pour un triangle. Ben tu comptes le nombre de triangles et t'ajoutes 180 à chaque fois. 'tain on est vraiment des glandus hein.
103	E16	Et j'crois que j'avais essayé...
104		Et... en fait on avait démontré
105	E16	Parce que je crois qu'il y avait 9 triangles et que ça marchait pas.
106	E6	Parce que en fait, comme y'a que des triangles, t'as le nombre de points et ça fait le nombre de côtés. T'en enlèves deux parce que y'en a deux pour faire les deux premiers triangles , et euh... et pis t'as le nombre de triangles total.
107	E13	Et c'est, en fait, regarde, là, cet angle là c'est la somme de cet angle ici. 'fin c'est cet angle ici. La somme d'ici c'est la somme de ces deux là. En fait à chaque fois en fait on fait la somme de tous les angles des triangles. Tous les angles des triangles c'est 180 fois le nombre total de triangles.
108 hline 109	E16 E13	Hum hum Et là ou en fait je me suis fait avoir, c'est que pour le DM, j'avais pas compris que, euh, cet angle là c'est la somme de tous ces p'tits angles.
110	E16	Ben oui ben si, moi c'est un des seuls trucs que j'avais compris dans le DM.
111	E6	rires
112	E13	Ben... pas moi.
113		Bon ben du coup ça c'est pas mal
114		Et puis le -2 c'est juste ces deux là qui sont pas heu, qui font partie en fait du euh, ... c'est ces deux là qui font partie de,... de la figure quoi.
115	E13	Ouaaais, ah purée ouais. Ah, donc attends on va essayer sur un truc à six côtés.
116		Alors euh... Ah purée six côtés ça va être chaud aussi.
117	E6	Baaa ... tu fais quoi tu fais un hexagone ?
118		Allez.
119	E13	Ouais, si, ça fonctionne là aussi.
120		Donc on fait,...
121	E13	ça fait, 6-2, ben quatre
122	E13	fois 180,
123	E6	Et donc du coup ça fonctionne
124	E13	720. Ça fait 720 et ouais.
125	E6	Wolala, attends on est trop fort
126	E16	He mais en fait j'ai expliqué là j'crois. Dans la deuxième.
127		Attends y'a combien y'a quatre triangles là ouais, donc en fait c'est bon
128	E13	Ah mais en fait toi t'as, toi t'as v... toi t'as justifié la première avec la deuxième alors qu'en fait ta deuxième était pas la même.

129	E16	Oui mais ils demandaient de retrouver le même résultat avec euh...
130		Et ça par contre euh, c'est c'qu'on avait trouvé nous... Euh...
131	E6	On a raisonné différemment nous.
132		Ouais
133	E6	Un décagone possède
134		...
135	E6	comme son nom l'indique, 10 cotés
136	E16	Moi j'ai mis 180 n - 360.
137		Euh...
138	E16	Nan vous avez pas ça vous
139		Euh nan, nous on a mis ...
140	E13	Euh... si si si c'est ça, 180 n -360. Ben nous en fait c'est simple, on a mis (180-360 divisé par n) fois n, ouais, donc en fin de compte ça revient à la même chose.
140	E16	Tu crois ?
141	E13	Ba regarde
142	E16	Ouais nan mais chais pas j'y comprends rien
143		Multiplie
144		Ouais
145		Là si tu multiplies, t'annules les 2n (?) et là t'as 180n.
146	E16	Ba y manque un n alors. Ah ben nan nan oui nan j'ai rien dit
147	E6	Pourquoi t'as mis fois n là ?
148	E13	Parce que c'est n fois euh ... ce qui ce passe ici
149		Quel rapport ?
150	E16	Ah mais vous avez compliqué les choses en fait
152		Nan mais ...
151	E6	Mais attends si tu développes le ... ça fait 180.
153	P	Bon, alors, ton idée de décomposer tes figures en triangles, est-ce que ça avance ?
154	E13	Si, ba ; si si ba, du coup en fait on y avait pas pensé, mais en fait, à chaque fois on peut décomposer notre figure en triangles. Donc par exemple pour le cas d'un ... comment dire, d'un hexagone, ...
155	P	Hum Hum
156	E13	On reprend notre n-2, donc là ce serait 6, on fait n-2 à chaque fois, et en fait heu... On fait moins deux parce que les triangles s'aident mutuellement pour construire en fait. Ils utilisent ...
157	P	Ça va être facile à marquer ça sur l'affiche, hein !
158		Ouais ça va être bizarre à marquer
159		Mais heu, ouais...
160		On peut pas y expliquer à l'oral ?
161	E6	Nan c'est que, en fait, nan nan, c'est parce que y'a qu'un côté heu... du, de la figure qui forme le triangle, et euh, y'en a deux, juste deux, ou il doit s'aider des côtés de la figure pour former un triangle, et du coup il faut enlever deux cotés.
162	E13	Whoa, ça par contre à mettre en page ça va être sympa.
163	E6	Ba euh ...

164	E13	Euh... bon, donc ça c'est pas mal. Euh... alors faut qu'on... Attends, on va essayer de réexpliquer vite fait le... Ça c'est encore des brouillons. La on va essayer de réexpliquer vite fait le
165	E16	Ouais ouais on va expliquer ...
166	E16	Ben je crois que j'ai compris ? mais je suis pas sure ...
167	E6	Tu fais quoi tu fais un ... tu fais un décagone, ou ?
168	E13	Euh les octogones c'est plus simple à faire. Euh, donc là y'a le centre, là on fait ?
169		question vite fait là ?
170		C'est un décagone hein ?
171		Heu on s'en fiche, ca peut être un décagone ça peut être ...
172	E16	Parce que moi ce que je m'étais dit, c'est que donc là y'a huit triangles.
173		Ouais
174	E16	Les huit triangles donc ils ont le même sommet, et là, la somme, 'fin le... l'angle de ce truc c'est 180.
175	E13	Pourquoi 180 ?
176	E13	Parce que 180 ça voudra dire que là ça sera plat, alors que là l'angle il est pas plat
177		Ah ouais. Alors pourquoi j'mettais ça alors ?
178	E16	Ah attends je sais plus. je m'rappelle plus ce que j'avais fait ? Nan mais j'sais pas.
179		Et tu l'as pas marqué au brouillon ?
180	E16	Non, enfin ... Enfin. J'ai mis « à expliquer » alors... J'm'en rappelle pas.
181		Expliquer
182	E13	Heu... on t'explique de la manière qu'on a fait, pis si tu retiens... En gros on s'est dit que là, heu... vu qu'à chaque fois ça partait du centre, là, la somme de ... 'fin euh ces deux angles avaient la même valeur.
183	E16	Humhum
184		D'accord avec nous ?
185	E16	Mais ca voudrait dire celui là en fait il avait, enfin ...
186		En fait, à chaque fois c'est toujours la même valeur d'angle, ici, ici, ici...
187		Ouais voilà. Ah ouais
188	E13	Au milieu, on a un angle qui est là, d'accord ? ... On sait que au centre, y'a un... Si jamais on considère le, le tour, ça fait 360 degrés.
189	E16	Hum
190		Donc 360 degres il est divisé en plein de petits angles. Y'en a un, deux, ...
191	E16	Oui oui
192		Voilà. Donc on dit que cet angle là au milieu c'est 360 divisé par le nombre de ... le nombre de ...
193		le nombre de côtés.
194		le nombre de... fin ouais le nombre de côtés.
195	E13	Donc du coup, pour obtenir la somme d'un seul de ces angles là, c'est 360, euh... 180...-360. Donc là on a la somme, fin on a ce qui reste. Là c'est la somme de ces deux angles là c'est égal à 180-360 sur n.
196	E6	Et comme c'est un triangle isocèle, ils font tous les deux là il est ...
197		Donc si jamais tu veux la somme que d'un seul angle, après il suffit de diviser par deux.
198	E16	de diviser par deux ouais

199	E13	Sauf que nous ce qui nous intéresse c'est euh... c'est la valeur d'un angle complet là. Tu vois. L'angle complet ici de l'octogone. Et donc en fait c'est deux de ces angles, donc enfin de compte là ...
200		Ça change rien
201	E13	Et donc après si tu veux la somme de tous les angles, et ben c'est simple, tu multiplies par le nombre ... euh, ba d'angles, qui est n.
202	E16	Si mais en fait c'est ce que j'avais écrit là.
203	E6	Bon, et ben voilà.
204	E16	C'est juste le fois n, je.. le fois n je vois pas d'où il sort.
205		Si tu veux la somme de tous ces angles là,
206	E16	Ouais
207		faut bien que tu multiplies par ... ba par un, par le nombre d'angles [...].
208	E6	Parce que t'en avais qu'un là, t'avais que celui là.
209		Ah d'accord. Euh daccord.
210	MF	En gros la question qui vous est posée c'est quoi ?
211		C'est de trouver le même résultat euh avec euh une décomposition des angles de cette manière.
212	MF	Voilà. Et c'est euh... La question de départ c'est laquelle puisque vous devez trouver la même ... Oui, et donc là c'était : « En considérant cette décomposition, déterminer la somme des mesures des angles du polygone puis la mesure en degré de l'angle du polygone régulier » Hein, donc euh... Euh... Là ça, ... Vous lisez ça comme ça c'était une démarche qui permettait d'arriver au moins à cette question là. La question principale qui vous est posée c'était la détermination de l'angle.
213		Oui
214		Hein ?
215	E13	Donc après la somme des angles oui effectivement ...
216	MF	Juste que ... La somme nous intéresse moins que l'angle. Ce qui est vraiment important dans cette question là ce qui est important c'est de déterminer la mesure en degré de l'angle d'un polygone régulier
217		OK
218	E13	Ah oui 'est vrai que euh... on s'était embêté pour rien à chercher la somme en fait.
219		Donc ouais
220		Ah oui donc ta réponse était la bonne
221	MF	Parce que dans cette question là effectivement on passe par la somme,
222		oui, et là par contre on a la ... la valeur que d'un angle.
223	MF	et là on va, on va, on passe pas par la somme, puisqu'on arrive directement sur la valeur de ... de l'angle
224	E13	Donc là... ah ouais, donc c'est dans l'autre qu'on aurait pu changer. Donc dans la 2.1, dans la 2.1.1, c'est-à-dire que la somme d'un angle, 'fin la valeur d'un angle , c'est ...
225		Pour la, pour la, c'est pour la 2.1.1 c'est ?
226		Pour la 2.1.1 ? En fait là tu as la somme de tous les angles,
227	E16	Ah ? la c'est tous les angles
228		Et donc là faut y diviser par le nombre euh de d'angles total. Pour trouver la valeur d'un seul.
229	E16	Donc là faut y diviser par n

230		Voilà.
231	E6	Mais n fois 180 là c'est pas possible de le faire ?
232		attends, n-2, (calculs inaudibles)
233		et donc la 2.1.2, j'men rappelle plus c'que c'est... Pourquoi tu divises par n là ?
234		Mais euh...
235		Parce que là en fait, ça donneuh l'ensemble, 'fin ça donne la somme de tous les angles
236		Ah oui mais parce qu'on veut un angle seulement ?
237		Un seul ouais
238	E6	Ah ouais d'accord, mais c'est là ou y'a pas besoin de ... ouais nan ok c'est bon
239		C'est ce qu'il nous a expliqué.
240		Et donc l'autre effectivement c'est 180 - 360 sur n
241		Et donc celle d'après, c'est quoi ?
242	E16	C'est l'tableau
243		Ah ouais l'tableau. Ben d'ailleurs c'est l'seul j'crois ou j'ai eu tout juste.
244	E16	Ben ouais ben moi je sais pas comment j'ai fait j'ai pas eu tout juste
245		Ouais c'est bon le tableau il est bon aussi le mien
246		Alors attends ...
247	E16	Pourquoi j'ai eu faux à c'truc ?
248		Nombre de côtés, des angles.
249		Ouais donc après les angles c'est simple, t'as juste aaaa... T'as juste à, à appliquer la formule qu'on a trouvé avant quoi.
250	E16	Ben ouais mais pourquoi j'ai eu faux alors ?
251		Ben j'sais pas ...
252		J'en ai eu faux qu'à certains.
253		Ah ouais alors attends. euh, 17, ouais en fait c'qui c'est passé toi t'as mis des arrondis à chaque fois.
254	E16	Et faut pas ?
255		Ba du coup c'est mieux de mettre des fractions au moins t'es sure de pas te tromper.
256	E16	Toi t'as mis des fractions là ?
257		Ouais. Ben du coup ça évite les arrondis ça permet de, ça permet d'éviter les erreurs.
258	E16	Ah ouais j'suis dégoutée. J'aurais mis des arrond... des, des valeurs exactes j'aurais eu une bonne note... J'aurais eu un point d'plus.
259		Ouais bon, c'pas l'plus important. Et donc la 2.1.2 ...
260	E16	Ouais mais dans l'tableau y'a combien (?)
261		Le tableau c'est une application directe euh deuh, ... donc y'a pas vraiment d'intérêt.
262	E16	Attends faut regarder la question. et euh... euh c'est ...
263		Bon, 3,25. Bon, t'as... voilà. 'fin c'est pas plus compliqué q'ça je pense.
264	E16	Mouais.
265	E13	Attends ; on va essayer de développer ça quand même le...
266	E16	Enfin faut pouvoir y expliquer. Vous sauriez expliquer ?
267		De quoi ?
268	E16	Ba à l'oral, le euh ...

269		Ça là ?
270		Ouais.
271	E13	Ah ouais du coup y... ye ya maintnant... en fait on sait que le, comment dire, que pour ajouter un côté en fait, ...
272		Attends j'vais y écrire aussi.
273	E6	Vous cherchez quoi là ?
274		...
275		T'as fait quoi là ?
276	E6	Val ?
277		Attends j'vais essayer un truc.
278		...
279	E6	Ah ouais tu vérifies que ça fait 360 ?
280		attends j'vérifies...
281	E6	Tu vérifies que ça fait bien 360 c'est ça ?
282		Non non c'était pas ça.
283		...
284	E6	et toi Val ?
285	E13	Ben, ça par contre euh... Non j'vérifie simplement que c'qu'on a avancé avant ça ... ça fonctionne. T'sais avec euh l'histoire des euh ... des triangles pour former des euh... des figures.
286	E6	Non mais ça ça fonctionne mais c'est plutôt lui là j'comprends pas.
287		Parce que en fait j'ai voulu l'découper avec des triangles mais en fait là, ça ... c'est inutile. et là du coup on a plus que deux triangles. Et là du coup avec ça j'aurais pu construire un...
288		D'ac mais alors celui là aussi tu peux le couper qu'en deux.
289		Non
290		Ah non ouais d'accord c'était pas des triangles.
291		Ouais, exact.
292	E6	Et alors pourquoi lui tu l'as pas placé au milieu.
293		Au milieu ?
294		Nan nan nan nan, ça ça tu oublies Nico. Ça c'était, ça c'est la suite.
295		Par contre si tu veux que j'te découpe l'octogone, regarde : ... tu euh, tu m'demande. L'octogone si on peut le découper.
296	E6	Nan nan c'était pas ça, mais d'accord. Nan nan c'était juste ton pentagone j'comprenais pas pourquoi t'avais d'abord fait un carré avec un ... un point au centre et ensuite un pentagone euh ...
297		Ben c'est... pas grand chose.
298	E6	Nan nan nan mais c'est bon Val t'inquiète. Ok
299		Euh ... popopop. Nan c'est 2.1.2 après c'est ça ?
300		La 2.1.2 avec la formule ...
301	P	Donc du coup vous avez réussi à trouver la formule ?
302		Ouais. Du coup on a réussi à trouver la formule.
303	P	En expliquant avec euh... celui ci de dessin. d'accord.
304		Ouais. Ouais. Et l'autre après ba on l'avait déjà expliqué dans le DM. Donc euh... ça va quoi.
305	P	OK y'avait pas d'problème pour les explications ?
306		Non. Mais en fait euh, 2.2.1 c'est une application directe des formules. Donc euh... est-ce que ça vaut la vraiment peine de la mettre sur euh ...

307	P	Oui.
308		On met les réponses sur la fiche ?
309	P	Ben vous mettez les réponses, ben vous mettez ce que vous voulez mais de toute façon va falloir que vous l'expliquiez de façon à ce que les autres comprennent. Donc soit vous l'écrivez soit vous l'expliquez à l'oral.
310		D'accord.
311	E16	Mais là vous avez prévu, vous allez nous donner une fiche sur quoi écrire ou ... ?
312	P	La fiche ouais si vous êtes prêts j'la donne.
313		Ba on la veut bien.
314		On ? pas.
315	E6	J'ai pas compris si l'histoire de fiche c'est pour faire une affiche là ? On va faire une affiche ?
316		Ouais on va faire une affiche. Ben t'façon là euh...
317	E6	Ah mais on a terminé ? Aaaaah, oui, la 2.2.1 c'était l'tableau.
318		Been vous avez besoin de ... ?
319		Non. Pis l'truc c'est qu'on va pouvoir y faire au fur et à mesure aussi
320	E6	Merci !
321		Oh non, j'ai des mauvais souvenirs
322		Ah ouais y sont bizarres en plus les feutres .
323	P	Ouais. Par contre c'est pas des feutres de tableau hein. Donc quand vous présenterez au tableau euh ...
324		...
325	E6	Euh, le problème madame c'est qu'on va écrire sur la table, ça va traverser.
326	P	De quoi ?
327	E6	Ça va traverser et on va écrire sur la table.
328	P	Vous allez bien vous débrouiller.
329		Euh... oui ça traverse. y'a ?
330		Bon on va écrire avec nos stylos alors.
331	E16	Au pire on écrit les numéros d'questions et tout comme ça après avec nos stylos on écr...
332		Ouais, par contre on va faire d'la place.
333	E6	T'sais parce que Gaetan il était venu à la maison. Beh depuis c'est marqué Denis sur le sol de ma chambre.
334	E16	Au pire on peut essayer sur un p'tit coin pour voir si ça se voit ou quoi. Parce que sinon d'au fond ils vont rien voir quoi.
335		Ouais.
336		D'ja moi j'ai un feutre noir,
337	E13	Nico ça t'embête si on ...
338		Non vas y vas y.
339	E6	Là sur l'bord ? En mode rien à foutre ?
340		Ouais.
341	E6	Ah ça traverse pas.
342		Nan ça va.
343		Bon on écrit en rouge ?
344		Tiens, j'ai ça, ça, ça. Pis au cas où on verra si y'a besoin
345		Moi j'ai du jaune. 'fin *a priori* quoi.
346		(?)

347		Bon. Ok. On va se mettre d'accord. On va d'abord écrire là tout ce qu'on va mettre. Donc pour la 2.1.1, euh là c'est... alors va falloir... eu ... Va falloir faire un dessin de...
348		Ouais
349		Ben on t'laisse faire hein.
350		Ou alors, fin ... soit d'abord on fait un schéma soit d'abord on montre le calcul et ensuite on l'démontre. Et pour le démontrer on fait un schéma.
351		Ouais vaut mieux faire un schéma et pis après
352		...
353		Donc là on met
354		Et on met quand même le calcul.
355		Alors c'est la 2...
356		2.1.1
357		Ok, 2.1.1, alors, voilà.
358		Et lui p'têtre. Pourquoi pas comme schéma.
359		Euh... le schéma. Euh...
360		J'ai vite fait une règle.
361		(?)
362		Rholala, ça va être chaud là
363		Très très (?)
364		Mettre dans l'coin, garder un peu d'place ici.
365		Alors là ... Alors, on vaaaa euh, ...
366		J'peux t'emprunter ça ?
367		Ouais vas-y.
368		En fait l'idée ça s'rait qu'on fasse une espèce de miniature là d'ssus et qu'on voit si ça rend bien ou pas. Parce que l'problème c'est qu'là c'est de l'indélébile donc euh, si on commence à marquer un truc et puis on se rend compte que ça fait très moche ben ...
369		Donc là on met notre 2.1.1. Là, on met
370	E6	Est-ce que ça serait pas bête de faire un décagone parce que comme ça on reprends celui de l'exercice et puis euh ... c'est plus simple ça répond à la question.
371	E13	Ouais, ça s'rait bien par contre faut l'dessiner.
372		Ba let's go
373		et y nous faudrait juste celui de l'exercice. C'est simple. Euh on a calculé l'angle qu'il y avait entre chaque euh ...
374		Tu veux qu'on y fasse au rapporteur ?
375	E16	Ouais, euh... On y va approximativement, 'fin...
376		Non mais t'as raison on peut essayer au rapporteur, hein. Nico c'est pas bête.
377		Alors, on r'passera ensuite. Alors. Donc, euh, moi j'serais d'avis déjà qu'on fasse un rappel genre on met uuuun ... Heu, quoique non. Non, le rappel on le refera à l'oral.
378		Ouais.
379		Que la somme des angles d'un triangle...
380	E16	Parce qu'après faut tout que ça tienne sur la feuille aussi.
381		Ouais.
382	E16	Donc ça sert à rien de l'écrire euh

383		Donc alors, on fait notre espèce de décagone,
384		Combien ça fait ? Putain ça fait... ça fait 5 ...Ça fait 5 côtés
385		Alors euh ... Tu fais quoi du coup ?
386		Baaa, 360 divisé par 5. Ah ben 360 divisé par 10 ça fait ...
387		Du coup t'as fais l'tableau.
388		Ça fait 36. Hein ?
389		T'as l'tableau
390		Ben l'tableau c'est pas suffisant
391		Non, mais c'est bon, tous les tr... C'est c'est tous les 36 en fait. Donc c'est bon.
392		Donc, alors, on présente ça comment euh ...
393		C'est tous les 36, donc c'est bon.
394	E16	D'jà tu peux mettre la formule à côté et mettre t'sais en gros les angles euh qui sont concernés par euh
395		Alors.
396	E16	J'sais pas si tu vois ce que j'veux dire.
397		Attends, c'est ça.
398		Tous les 36 degrés va falloir. Enfin faudra faire un point tous les 36 degrés et on pourra l'tracer.
399		Tu veux que j'commence à dessiner ou ?
400		On présente ça comme ça on est d'accord ?
401		Hum hum
402		C't'à dire que tu veux exactement la même figure que sur l'exercice ?
403		Ok.
404		Alors, Nico c'que j'te propose c'est ...
405		Alors non c'est ouais, non c'est ...
406		Est-ce que t'as un ciseau Nina ?
407	E16	Nan.
408		T'as pas d'ciseaux
409		Euh... faudra. Benoît en a un.
410		Benoît ?
411		(?)
412		Non, j'vous propose un truc. A la place de s'embêter à le dessiner, on va l'faire sur un truc quadrillé, et on y colle. Au moins ça évite qu'on se prenne la tête ...
413	E16	Alors là à côté faudrait mettre la formule par exemple non ?
414		Alors « expliquez que euh il y a n triangles »
415		Ouais ça ça peut être notre brouillon
416		Donc, là. n... « Dans ce polygone ». Là, ça parait logique
417		Hum hum
418		... « x côtés »...
419		T'es sur que si on met x ça va pas les, les perdre ?
420		Nan. « on remarque »
421		Parce que là dans la formule euh ... Là c'est n c'est l'nombre de côtés aussi.
422		Ah merde. Alors on va l'mettre. « il y a n côtés et x triangles » x triangles dans l'polygône.
423	E16	Ouais voilà

424		« on remarque que x.. »
425	E16	Donc là faudra mettre x en fait.
426		« est égal à n moins 2 ».
427	E16	Là faudrait mettre x.
428		(?) les triangles.
429		Euh ...Ouais c'est ça.
430	E16	Attends j'te corrige
431		Euh ... Ouais. Ho putain ça fait n-2 ici en dessous.
432		J'ai pas compris
433		C'était n-2 ici en dessous
434	E16	Ah bon, pourquoi ? Ben là c'était (?). Le nombre de côtés moins deux en dessous c'est. Non ba. Nan en dessous c'est le nombre de triangles.
435		Heuuuu ...
436		Ah oui pas bête
437		Ouais mais le nombre de triangles c'est pas n-2
438	E16	Ben non, n moins d... N c'est le nombre de côtés. Heu...
439		Ah non, non non. Donc là effectivement c'est, ... c'était bien n. Si parce que c'est le nombre de côtés. Là on, ...
440	E16	Ben là on le... le triangle qui est là on s'en fout nan ?
441		Non parce que le nombre de triangles en fait... Si tu préfères en gros, ça c'est x en fait. n moins 2 c'est égal à x.
442	E16	n là c'est égal heu... au côtés
443		n c'est le nombre de côtés.
444		D'accord
445	E13	Et le nombre de triangles dans le polynôme, euh le polygône, c'est le nombre de côtés moins 2.
446		Est-ce que ça suffit c'te taille ou est-ce que tu veux que j'agrandisse avec la règle ?
447		Non, mais tu le fais de c'te taille, mais tu sais pas dessiner un octogone ?
448		Non mais c'est bon j'ai terminé.
449	E13	T'as fait un cercle là ?
450		Non, c'est un, ... non c'est un décagone.
451		Ok, bon ben, ça ça ira très bien.
452		Donc alors on remarque que x est égal à n moins 2. Heu...
453	E16	x, ... En fait x c'est le nombre de triangles
454		C'est le nombre de triangles, heu... qui composent en fait le polygone. Par exemple, bah un carré, c'est composé de deux triangles. Après un hexagone c'est composé de quatre triangles.
455	E16	Oui mais heu... J'comprends pas le heu... 'fin le « on remarque que x est égal à n-2 »
456		Alors en fait, c'est pour expliquer le fait que, la somme ... la somme des angl...
457	E16	Attends si x c'est les triangles, et n c'est les côtés, faut av... fin euh ... Pour avoir un triangle faut (3 ?) côtés moins deux. Ben c'est pas logiq... Si c'est logique ou pas.
458		Oui.
459	E6	On parle toujours du triangle ? Le fait de faire moins 2 c'est ça que tu t'poses comme question ?

460		Oui, heu... 'fin ouais nan.
461		En fait ce heu... Comme heu ... Tu vois les triangles ils se font comme ça. Là t'as, t'as un triangle, là t'en as un autre, là t'en as un autre et en fait tu regardes que tous les triangles ils ne se servent que d'une partie du... c'est celle-ci. Et là y'en a qu'une. Ça ça fait pas partie de la figure. Sauf 2. Celui là il se sert de cette partie, et de cette partie. Celui là il se sert de cette partie et de cette partie.
462		Oui non mais c'est pas ça... f'in
463		Donc tu fais moins 2 parce qu'il faut enlever deux côtés, pour avoir le nombre de triangles.
464		Ouais, p't'être.
465		Parce que regarde. Combien y'a de côtés ? Y'en a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. On enlève ces deux côtés parce que ... y'a deux côtés pour un triangle. Ça fait 6. Et en vrai y'a 1, 2, 3, 4, 5, 6 triangles.
466	E16	Humhum. Mouais. Ouais. Ben j'vous laisserai expliquer, hein. Parce que j'ai pas tout...
467		Donc la somme des angles. La somme des angles d'un triangle
468		...
469		Là pour le moment c'est tout ce qu'on a dit.
470		Et donc là faudra mettre la formule alors du coup.
471		Eum... Là j'fais celui à partir du centre ou à partir d'en bas ? A partir d'en bas ?
472		A partir d'en bas.
473		Par contre là, t'y... t'y fais en rouge Nico.
474		Euh le contour j'le fais en quelle couleur ?
475		Euh ... fais le en bleu, fais le en bleu et tu sépares en rouge.
476		Ah purée. J'me disais aussi.
477		Là on met la formule à côté ou... ?
478		Pardon ?
479		Là on met la formule à côté de celle là ou quoi ?
480		Euh ... ouais. Ou même limite on la met à la fin.
481		Ouais, comme tu veux.
482		Ça me paraît pas mal.
483		Et donc du coup, la somme d'un angle c'est égal à n moins 2
484		Nan c'est la valeur d'un angle
485		?
486		On s'y perd là mais...
487	E6	A force de dire euh.. somme, angle et tout ce qui va avec euh... j'finis par m'y perdre.
488		...
489	E16	Tu veux pas noter que c'est la valeur de l'angle à côté ? Au cas ou euh...
490		...
491	E6	Ah, ben j'ai pas forcément pris le bon. Ah ben si ça va.
492	E13	Nico, heu c'est pas très grave de toute façon, on pourra l'refaire... On pourra l'retourner après.
493		Ouais.
494		...
495	P	Pourquoi vous le faites pas direct là-dessus ?

496		Parce que c'est super dur à faire un octogone.
497		Non mais euh avec...
498		Non, c'est un décagone et avec ça, ça fonctionne que j'le fasse là ou là c'est la même chose.
499	P	Oui, remarque après tu scotcheras vas.
500		J'ai calculé en fait tous les angles, pis j'ai ajouté 36 à chaque fois.
501		Ah ouais pas bête
502		Puisque 300 divisé... 360 divisé par 10 ça fait 36. Comme il est 10 côtés, ça fait 36, ça fait tous les 30... ça fait euh... faut mettre un point tous les 36 degrés, c'que j'ai fait.
503	E16	Mais donc, donc ça tu veux quand même y écrire là, ou on y dit à l'oral.
504		De quoi ?
505		Ça
506		Ça, euh... J'hésite à y écrire à l'oral. J'pense que...
507		S'tu veux j'le refait là-dessus directement.
508		Heu... y écrire. Ho, j'viens d'te faire une phrase magique, je vais y écrire à l'oral. C'était beau. Bon.
509		...
510	E16	Bon c'est p't'être mieux d'y écrire pour comprendre...
511		Alors.
512		...
513		Alors est-ce que tu peux lire la question ?
514		Oui
515		...
516		...
517	E6	J'te les colorie les triangles ou pas Val ? Genre tu mets un point, ou ? Non. Pas b'soin.
518	E13	Tu peux découper ouais
519	E16	Là tu va y coller là maintenant ?
520		Quoi ?
521	E16	Tu vas y coller là ?
522		Ouais...
523	E13	Un polygone a n côtés. On sait qu'un polygone se décompose en n-2 triangles. Ça c'était donné dans euh.. là d'dans. Donc la somme des angles du polygone est égale à n-2 fois
524	E16	Mais c'est c'qu'on a écrit là.
525		Alors, est-ce que
526	E16	Tu veux que j'écrive ou ... ?
527		Heu ... Si tu as envie d'écrire oui, j'veux bien
528		Maintenant .
529	E13	Ben à la limite tu ... t'écrira le 1.1.2 parce que vu qu'j'ai commencé à écrire on va pas mettre deux écritures en même temps, ça va p't'être faire bizarre. Euh Nico, j'ai une question :
530		J'técoute
531		Ce sigle tu l'connais ? Euh... Ca ça veut dire quoi ?
532	E16	C'est la somme
533		C'est sigma, c'est la somme
534		Ouais c'est la somme

535		Bon, à la limite, tu écris somme. angle. ...
536		Euh, quelqu'un a une colle ?
537		Ouais
538		... triangle est égale à somme angle polygone. Polygone, euh... Ça, est-ce que vous ... euh ... fin par exemple si je vous avais pas dit que c'était la somme, vous auriez compris ?
539	E16	Au pire, au pire mets comme ça, ça sera plus court et puis on expliquera ...
540		Ouais.
541		...
542	E6	J'te l'mets ça comme ça Val ?
543		Heu... ouais. J'veux bien.
544		P't'être là (?)
545		Ouais ?
546	E16	J'pense ouais, comme ça il peut écrire à côté.
547	E6	Ca marche. C'qui est bien, c'est que comme en fait il est quadrillé, ça fait comme si on avait heu... ça fait comme si on avait heu ... Mis du truc sur les triangles du coup on l'voit bien.
548		Eh mec, mais t'es sur qu'on verra ?
549		Je sais pas, on verra.
550		Ben j'pense qu'on verra pas en fait, mais... Haha
551		Écoute. Alors.
552	E16	Et donc là maintenant j'vais pouvoir remettre la... la formule.
553		Euh... n moins 2 (?)
554		Oui, donc t'aurais pu rajouter directement égal quoi
555		Et donc, ...
556		Alors lui par contre, lui faut l'écrire en bleu.
557		Ho lui par contre, j'pense ...
558	E6	Non, non, ça va mais la feuille est en plastique en fait. Moi j'écrivais sur une nappe. Même que Gaetan il a perdu ses poumons dans la bataille, j'te jure. Parce que tu l'avais vue la banderole toi Val ? Hein ? Ouais.
559		...
560		Ok, ça m'va.
561	E16	Angle polygone ou angle d'un angle, euh...
562		Angle polygone, là j'ai pas mis de s.
563	E6	Maintenant faut expliquer le n-2
564	E13	Il est expliqué. Il est donné en haut. Il est ... n-2 en fait il nous est donné là dedans. J'avais même pas vu.
565	E6	T'es sérieux ?
566	E13	Ouais, il est donné d'dans. C'est marqué dedans... Ben j'vais vous l'retrouver. ... En considérant cette décomposition, en n-2 triangles pour un polygone régulier
567	E6	Ah, d'accord. Ben à la limite on pourrait expliquer parce que c'est facile à comprendre.
568		Ouais.
569	E6	Est-ce qu'on fait pas un trait comme ça pour dire on fait (?)
570	E13	Non on met simplement 2.1.2 et là on saute une ligne et puis heu,
571		Ben comme tu veux
572	E16	Ouais

573		Heu ...
574		Attends ben, j'vais écrire.
575		Ouais vas-y tiens. J'te file ça comme ça
576	E16	Ben vous m'dites c'qui faut qu'j'écrive.
577		Ben là tu mets le 2.1.2 ici.
578	E16	C'est assez gros ?
579		Ouais ouais.
580	E13	Lui par contre il va être chiant à expliquer.
581		Heu ...
582	E6	Ouais on l'a l'explication, nous on l'a fait. Moi personnellement j'ai fait un texte hein.
583		Ah mais tu l'as fait ?
584	E6	un décagone peut (? ? ?) dix triangles isocèles, donc deux angles identiques par triangle
585		? ?
586	E13	Je serai bien d'avis de refaire un même polygone, et comme ça en fait on peut expliquer.
587	E6	Tu veux qu'j'le fasse direct là d'ssus maintenant ?
588	E13	Non c'est pas mal en fait l'histoire des quadrillages j'trouve que ça fait ressortir.
589	E6	On est d'accord.
590	E16	On écrit quoi pour l'début ?
591		Heu... bah vas-y on va prendre une feuille de brouillon et on va essayer de voir comment est-ce que ...
592	E6	J'refais un décagone ? Hein ? J'en r'fais un ?
593		Au pire fais celui qui y'avait. T'sais lui c'est pour la première mais tu sais y'en avait un deuxième, juste à côté ou y'avait la formule
594		Heu...
595	E16	L'énoncé. R'garde, pour lui, pour la, ... pour la première question c'est lui. Pour la deuxème c'est lui et (?)
596	E13	Celui là là ?
597	E16	Ouais.
598	E13	Ouais mais c'est l'même. 'fin c'est la même chose r'garde si t'enlèves les traits à l'intérieur c'est l'même décagone.
599		Ah ouais
600	E13	Donc c'est juste que j'refais celui là mais avec le point rouge au milieu
601	E16	Ouais
602		Ouais ça va comme ça ?
603		Ouais.
604		Allez go.
605		Donc, heu...
606		Allez, hop, c'est r'partit.
607	E16	P't'être que t'y avais écris quand j'ai r'gardé ton brouillon, non ? Comment t'avais fait ?
608		L'angle qu'est au centre ? L'angle euh ...
609		Bon, heu, les... Les angles au centre du polygone ... sont ...

610		Ça déjà, ça nous est donné, t'sais, euh... c'est cette valeur d'angle là. ... Ça dit qu'c'est 360 sur n. T'sais c'est c'qu'on t'a expliqué pour c'qu'on (a fait ?).
611		Oui oui.
612	E13	Sachant que la somme des angles d'un triangle est égale à euh... Nan ! Les triangles étant isocèles, les deux autres angles ont la même valeur. ...
613		...
614	P	C'est bon vous êtes prêts ?
615		144, 181.
616		216.
617		Euh...
618		Donc, à partir de là, on dit que ... 180
619	E16	Et donc là on va y écrire.
620		Ouais.
621		D'accord.
622		(?)
623	E16	Sur la ligne. Égal la valeur de l'angle. 'fin comme t'as mis là, Mets angle du polygone au pire.
624		...
625	E16	Nan. Parce que là r'garde t'as mis valeur d'un angle, ben là on a un angle.
626		...
627		(Tu vas mettre ça ? ?)
628	E13	Euh, j'suis pas forcément convaincu quand même en fait... Nico ?
629		Ouais ?
630		Ben chais pas t'en penses quoi ?
631	E16	Si moi j'trouve que c'est bien expliqué mais après vaut mieux ... si ils comprennent pas t'sais avec le schéma.
632		Ouais ouais
633		(?)
634		Ok
635		Euh... Alors, est égale avec un e, euh ... attends !
636	E16	Ah j'ai oublié un s.
637		est égale ou sont égaux ?
638	E16	sont égaux, non ?
639		Ah non non. Ah ben putain, mais ...
640	E16	Non mais si c'était les angles, "sont égaux".
641		Ça fait moche.
642		Ouais
643		Aahh, non, euh ...
644	E6	C'est quoi la question ?
645	E13	"Sont égaux"
646	E16	Sont égaux ouais. Egal avec un s ça jamais.
647		Ouais c'est forcément ça.
648	E16	Moi j'écris pas droit pas contre alors vous m'en voudrez pas hein.
649		Euh... ben alors essaye de ... de structurer en fait la ... la... comment dire ? (?) 'fin chais pas.
650		...

651		J'aurais du te faire écrire depuis le début.
652	E16	Pourquoi ?
653		T'écris mieux que moi.
654	E16	Heu.. non j'écris mal.
655		Ouais, 'fin. C'est "sont égaux à 360 sur n"
656		...
657		Heu...
658		Les triangles isocèles ...
659		isocèles c'est un c, ou ?
660		Ouais. "ayant ... ayant deux angles de même mesure ... "
661		Ah !
662		y'a un s là ?
663		Heum... Alors, attends là par contre on va changer. Là on va faire une p'tite variante sinon là on ... Heu ... Là va falloir que tu mettes donc ... "180"... "180 moins 360 fois n divisé par 2".
664	E16	Là t'as mis "sur 2"
665		Ouais. Heu ... sur n, au temps pour moi.
666		Ouais voilà.
667		"Egal" heu ... "angle(triangle) "
668		Angle des triangles ou du triangle ? Le seul ou les ?
669	E6	Nan c'est un seul angle. T'sais c'est les ... c'est, c'est cet... heu.. cet angle là là à l'extérieur. Heu ... j'sais pas comment heu ...
670		Ok, si si, j'vois c'que tu veux dire. ... Donc là ...
671		Et donc du coup, et après on marquera que "angle...polygone, est égal à deux fois angle(triangle)"
672		Ca va être un peu chiant à expliquer
673		Non, on est obligés de passer par là. Parce que du coup sinon on grille une étape et et ... là on risque euh ...
674	E16	Ah ouais mais ça veut dire qu'après faut faire tout ça fois deux.
675		Ben ouais mais du coup chais pas comment ... 'fin on est obligés d'expliquer ça, parce que sinon on ... on saute une étape. Et du coup "l'angle du polygone... est égal à 360 - (360 sur n) ..."
676		Là, égal
677		angle triangle
678		Y va falloir euh ... qu'on s'calme hein.
679		Tranquille, tranquille. Aller hop, ça... ca c'est à quelqu'un ?
680		angle(polygone) égal
681		est égal à deux fois l'angle(triangle) ...
682		hop, euh ... tac tac
683	E16	Mais là j'mets donc nan ?
684	E13	Ouais, et là tu mets donc, et là après par contre, on f'ra en bleu comme le précédent.
685		Heu...
686		Les ciseaux y étaient à qui ?
687	E13	Alors là par contre on va garder la même notation. "180 - 360 sur n est égal à angle(polygone)"
688		Après qu'tu as finis c'te question, on fait p'têtre le tableau au dos.
689		Ouais éventuellement.

690		On fait un gros tableau bien clair. Moi ça m'va.
691		Ok, heu .. limite, on va passer le euh... le numéro des questions
692		Ouais
693		Tu fais l'contour en noir.
694		Ouais, ou... 'fin non. Euh... pour fin pour les détacher, pourquoi pas les mettre d'une couleur différente
695		Ben y s'voit bien non ?
696	E13	Ouais, c'est vrai qu'on les a bien détachés ... 'fin j'serai presque d'avis de ... ouais d'les ... Ah ouais c'est pas mal comme idée ça Nico. Ouais, c'est pas mal. Ok, ouais donc là on est pas trop mal. Euh... t'as ta colle Nicolas j'crois.
697		Nan
698	E16	Sinon on pourrait tout souligner à la limite.
699		Ouais, ça c'était une meilleure idée j'crois.
700		Ouais, j'sais pas. J'trouve ça pas mal.
701	E16	Non, moi j'ai d'la colle sinon.
702		T'as pas pris la tienne t'à l'heure Nicolas ? Ben t'as pris celle de qui ? C'est Nina qui t'as prété la sienne ?
703		...
704	P	On fait 5 minutes de pause ? puis on passe à la présentation des affiches après.
705		Mais on a pas fini.
706	P	Si vous voulez finir au lieu d'aller en pause c'est comme vous voulez.
707		Ooh nan, mais ...
708		...
709	P	Valentin toi t'as conseil de classe ?
710	E13	Ouais, j'pars à euh ... et quart.
711		D'accord
712	E16	Ca veut dire qu'il faut qu'on passe en premier alors ?
713	E13	Ouais, désolé.
714	P	Vous vous passez en premier donc c'est bon.
715		Ouaiiis...
716		...
717	E16	Ben du coup, ... t'façon l'tableau c'est vite fait à faire, 'fin...
718		Ouais.
719		...
720		Bon ça va être un peu dommage, parce que euh... en fait le tableau c'est une simple application d'formules.
721	E16	Hum. Donc en fait ouais, limite on est pas obligés d'le faire en fait. 'fin j'sais pas.
722	E13	Nan, mais 'fin par exemple, pour un triangle on peut dessiner, pis on... on remplace, 'fin euh on fait le calcul. On fait ça pour un traingle un carré puis on met 3 p'tits points pour dire et caetera.
723	E16	Pourquoi ? Ouais, ben ouais.
724		Ça m'paraît ...
725	E16	Ça m'apparaît plus simple de faire un tableau, c'que tu dis ça parait c... pas compliqué, mais...
726	E13	Ouais on a p't'être pas l'temps ouais.

727	E6	Faire un grand tableau ? On a pas l'temps d'faire un grand tableau ?
728	E13	Non non, justement, j'voulais faire un ... Un truc genre on dessine un ...
729		...
730		?
731		Excuse moi.
732		Haha.
733		Vas-y.
734		Heu, donc on fait ça comment ? On exp... On...
735	E16	On fait un tableau vite fait, ça sert à rien d...
736	E13	Vous voulez vraiment faire un tableau ?
737	E16	Ben ça sert à rien d'compliquer les choses, 'fin... c'est l'plus simple à comprendre.
738		Y'as pas la règle du tableau là ?
739		...
740	E6	Tant pis, allez on va faire ça à la règle.
741		Et ben faisons l'tableau.
742	E6	Quelqu'un a une règle de ... 30 ou 40 centimètres ?
743		Ah... je sais pas.
744		Non, moi j'ai pas.
745		Euh... y'a personne ...
746		Non, j'cherchais la règle jaune là, mais elle y est pas
747		... Ah, ouais, j'veux bien, merci. Merci Madhuri.
748		D'jà c'est mieux. On fait ça comme ça ? Ca vous va ? Genre en plein milieu un truc comme ça ?
749		Ouais. Ouais
750	E6	On a pas besoin de faire quelque chose d'énorme, on met trois p'tits points.
751		Comment tu dis ?
752		Euh, là. Tac, tac
753		Ouais ouais ça va.
754	E13	Euh... par contre j'vais reprendre le mien, je sais pas ... j'l'ai mis ou mon euh... mon DM ?
755		C'est ça ?
756		Non.
757	E16	Euh... ça c'est l'tien. Tiens, j'crois qu'c'est le mien et le tien dessus.
758	E13	Du coup j'vais euh... c'est l'seul ou j'ai, j'crois que c'est le seul exercice ou j'ai tout juste, donc autant le reprendre. Parce que par contre ...
759	E13	Eh ben c'est simple, tu remets en gros. En haut la formule, heu... 3 euh ... 180 moins euh ... moins 360 sur n. En gros.
760	E6	Ici là ?
761		Ouais
762		...
763	E6	... entre parenthèse ?
764	E13	Euh... pas forçément. Et donc là, du coup on va faire un tableau avec la valeur de n. Euh... faut qu'tu sépares le tableau en 2, on va faire comme ça. Puis on va mettre euh...
765		Euh... tu m'fais voir l'énoncé ?
766		Euh, comment est-ce qu'il est mis ?

767	E6	Parce que j'ai p'têtre intérêt à séparer en deux ici en fait.
768		Euh... ça va faire... Donc euh ouais tu peux faire comme ça effectivement.
769		...
770		Pourquoi tu fais un côté plus p'tit ? Ah mais oui, nan j'ai rien dit.
771		Si si si c'est heu...
772		Je... j'fais que 30 cm ?
773		Euh... nan là faut que tu continues quand même un peu j'pense. On va prendre vraiment la place hein. 'fin y'a 25 nombres, 'fin non y'en a 22 à mettre.
774		Ouais donc on fait 1 mètre ?
775		Ouais. J'vais, ... Pendant c'temps j'vais faire le numéro du ... de l'exercice.
776		Moi j'peux p'têtre commencer à copier d'un côté.
777		Oh mais c'est pas droit.
778		T'inquiète
779		J'y fais en bleu ou en rouge ?
780		Heum... Tu peux y faire en b... heu... Non, fais le, fais le en rouge. Heu ... purée. heu ... En quelle couleur on va bien pouvoir écrire ?
781		Au pire y z'ont du noir.
782		Euh... ouais en noir c'est pas mal.
783		De quoi ?
784		Alors euh... ouais. J'te le dis. T'essayes de faire à peu près un espace régulier à chaque fois.
785		Heu ouais... j..., j'fais pas heu... Ouais d'accord on s'complique pas la vie.
786		Non mais j'fais pas... j'fais pas là. Ca sert à rien d'le fermer l'tableau, si ?
787		Ho ? Ouais comme vous voulez.
788		Ouais, tu peux... tu peux juste faire cette ligne là s'tu veux.
789		Ouais.
790		Et après tu tires des traits horizontaux, y'en faut 22.
791		Haha. Ouais j'peux faire ça mais...
792		Parce que là tu veux faire des traits ?
793		Euh, 'fin oui, ou sinon on peut ne pas en mettre mais chais, pas, c'est, 'fin j'trouve que c'est plus clair.
794		Ouais j'trouve aussi.
795		Bon, après on a p't'être pas forcément l'temps donc...
796		Ba... j'pense qu'on a pas l'temps.
797		...
798		Madame, il nous reste combien de minutes ?
799		Madame il reste combien de temps ?
800		Ah ouais d'accord j'comprenais pas c'que c'était ces traces, mais c'est moi ça.
801	P	Vous allez prendre tous le temps d'aller aux toilettes puis vous démarrez puisque c'est vous qui commencez.
802		Ouais mais euh...
803		Ok, et ben c'est parti
804		Ouai, ben c'est bon on fait pas des traits.
805		Ok, alors, ben là tu écris...
806		J'commençe à 3.

807		3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ...
808		Quelqu'un a un mouchoir ? (?) Dans ma trousse.
809		Ça va pas tenir, hein...
810		Ouais mais c'est pas grave, après heu... le reste euh... ils s'débrouillent. 'fin c'est juste la méthode qui... qui compte.
811		Et après tu mets 3 p'tits points.
812		Tu mets 14 et tu mets 3 p'tits points.
813		allez 15. 3 p'tits points.
814		Ok.
815		Voilà.
816		Et...
817	E16	Et j'change de couleur là non ?
818		Euh.. non non non, en face tu mets... 'fin tu peux garder la même couleur.
819	E13	60. 90. 108. 120. 907/7. Euh... 135. Non, c'est, c'est 135.
820	E16	Oh putain merde !
821		Pas grave.
822	E16	J'mettrai du blanc.
823		Euh... 140. 144. Cent-soix... alors 1620/11.
824		1620/11.
825		150. 1980/13. 1080/7. 158. Et tu mets 3 petits points.
826	E16	J'vais mettre du blanc.
827		Par contre, là on va mettre... "n..."
828		...
829		Tu fais quoi c'soir Val ?
830		J'ai conseil de classe.
831		Jusqu'à quelle heure ?
832		Jusqu'àààà 7h à peu près.
833		Tu viens, tu passes à la maison après ?
834		Après j'ai mon train.
835		A quelle heure ?
836		Hum... 7h et demi.
837		Tu passes pas ?
838		J'pense que j'aurai pas l'temps.
839		D'ac. Tu m'envoies un sms.
840		Il commence à quelle heure ton conseil ? Ah oui mais tu pars là de toute façon.
841		...
842		Putain, ça va être chiant.
843		Non j'paye pas les trains.
844		Non en fait finalement c'est bien, c'est plus aéré comme ça.
845		Bon ben c'est nickel !
846		Ouais.
847		Ça marche.
848		Moi j'vais aller boire.
849		Ouais, moi aussi j'vais aller boire un coup.
850		...

851	P	Bon, si vous voulez aller aux toilettes c'est maintenant, puis après on démarre la ...

F.6.2 Transcription des échanges lors de EXP-TS2-RDTL, groupe 4

Expérimentation en TS2 : Transcription des sons enregistrés par le micro placé près du groupe 4.

Codage : P le professeur, Victor (E2), Vincent (E5), Paul (E8), Romain (E9) les membres du groupe 4.

[...] les courts passages inaudibles, en italique des commentaires qui font parfois référence à l'image vidéo.

Repère	Locuteur Temps	Texte
1		Oh Vincent tu m'sauves hein.
2		Eh r'garde là
3		...
4		C'est parti.
5		On est le groupe 4.
6		Vous savez pourquoi on a ça ?
7		Ça c'est pour enregistrer vos superbes voix. Moi j'parle pas.
8		On fait des signes.
9		On écrit sur un cahier.
10		Oh nous on n'a qu'une question.
11		J'ai presque l'impression que ça enregistre.
12		Désolé, moi j'dis ça mais ça enregistre.
13		[?]
14		Ils vont être trop frustrés ils vont avoir des bruits. Parce que moi j'suis désolé, mais quand j'travaille j'fais des bruits les gars. J'suis désolé mais ...
15		Ouais mais c'est pas grave. Nous on fait des blagues.
16		[?]
17		Y'a des caméras mon gars. Mec y'a des caméras.
18	P	Donc j'vais d'abord vous rendre vos euh... travaux. Vous allez regarder un petit peu chacun euh c'que vous avez écrit, voir votre note, voir c'que vous avez réussi à faire euh c'qui vous a posé des difficultés. Donc c'était euh ... le DM qu'on a ..., enfin que vous avez fait avant les vacances, donc y'avait des histoires de polygones réguliers et de nombre de Fermat, vous vous souvenez ?
19	P	Donc, on va ... avoir cette organisation : donc vous allez avoir 5 minutes ou vous allez regarder le devoir que je vais vous rendre, ensuite, pendant 15 minutes vous allez réfléchir euh, chaque groupe sur une question en particulier du devoir. Donc ceeeees... groupes ont été faits en fonction euh, des questions que vous avez euh réussi à faire ou pas réussi à faire justement, que vous ayez une réflexion un peu plus avancée. Ensuite, 5 minutes, vous écrirez vos réponses sur une affiche, pour présenter ce que vous avez euh ... fait.
16	P	Alors un dessin peut être, ou peut-être pas, tout dépend de la question.
20	P	Ensuite, 30 minutes ou ou chacun va venir..., ou chaque groupe va venir expliquer ce qu'il a fait.
18		30 minutes ?

21	P	Donc l'idée c'est qu'en fait vous allez, tout, 30 minutes ça fait 6 minutes par affiche.
23		Ah. Ah Ok.
22	P	Non, vous n'allez pas chacun parler 30 minutes, d'accord ?
24		Heureusement.
25		Les petites choses qu'il y a sur les tables, c'est quoi ?
26		On a pas l'droit d'les éclater ?
27		C'est les enregistreurs, parce que quand vous allez être dans la phase de réflexion vous allez réfléchir ensemble, et ce qui intéresse mon collègue c'est ce que vous allez dire pour réfléchir.
28	P	Non, on peut pas mettre sur pause, vous ne touchez pas.
29		On a pas l'droit d'les casser ?
30	P	On a pas le droit d'les casser non plus.
31		Ni d'les ouvrir ?
32		Et toutes les blagues pourries que tu fais elles sont enregistrées ?
33	P	Les devoirs, vous allez voir, c'était un devoir difficile, vous avez pas forcément tous de très bonnes notes. Vous avez la possibilité d'avoir des points bonus.
34	P	Un point pour la qualité de la présentation. Donc quand vous allez présenter euh, si c'est juste un dessin, ça risque d'être un peu limité. Et un point sur la qualité des échanges. Les échanges ça va être à la fois comment est-ce que vous, quand vous présenterez vous arriverez à répondre aux questions,
14		Oh merde y'a des questions.
17	P	Et comment et-ce que parmi ceux qui sont assis pendant que les autres présentent, vous posez des questions. L'idée c'est d'arriver à faire en sorte que chaque euh... groupe explique suffisament ce qu'il a fait, pour que euh, vous sortiez d'ici en ayant compris le DM, même les questions que vous n'étiez pas arrivés à faire quand vous l'avez cherché tout seul.
19		Et les groupes sont répartis selon les questions qu'on a bien réussi ou mal réussi ?
20	P	Sachant Valentin que tu es sur la première question "détermination de l'angle d'un polygone suivant les deux méthodes", tu penses que c'est quoi ?
21		Je sais plus.
23	P	En fait vous avez été répartis sur : vous avez démarré, mais y'a des pistes à creuser un p'tit peu plus. Donc soit vous avez fait des choses mais c'es paaas allé assez loin, soit vous aviez une bonne idée mais vous l'avez pas assez exploitée. Grosso modo vous avez un point pour démarrer, tous.
24	P	Qui sont ... ? Pourquoi est-ce qu'il y a des élèves qui sont en noir et des élèves qui sont en rouge ?
25		Parce que ? Ah parce qu'on l'a perdu. Parce qu'on les a pas rendus. Vous les avez pas là bien sur ?
26		Oh le champion !
27		C'est vrai q'c'est petit, ça se perd facilement, entre les feuilles...
28		Ta gueule !
29		Merde mais en plus ils enregistrent.
30		Mais ouais, faut pas qu'je fasses [?]
31		Ça va tu peux t'faire plaisir. Maintenant tu peux déballer.
32		[?]

33		Il est ou l'micro ?
34		...
35		Bon alors.
36		L'erreur principale c'est d'écrire nombre décimal de ... Un début d'idée hein, aucune idée ...
37		T'as eu combien ?
38		Je sais pas c'est marqué ou ?
39		Ben [?]. Là.
40		16.
42		Et toi combien ? Mathieu ? Hein ? Et lui ?
41		Pourquoi il me met ça ?
43		Ah mais t'as fait un tableau toi ?
44		Timothée ? Benoit ? 16.
45		Regarde, regarde le 1.
46		Lequel, le tableau ? Voilà. Valeur de ...
47		Euh ouais, pourquoi c'est rayé ?
48		Ouais ?
49		J'sais pas.
50		Ouais moi y'a marqué ça.
51		Ouais, moi aussi y'a écrit ça.
52		Eh ben au moins on est sûrs.
53		C'est marqué dans la consigne qu'il fallait que ce soit dit explicitement ?
54		Nan.
55		Ben [?] comme ça.
56		Ouais.
57		Donc c'est elle qu'on doit faire nous ? La 2.3.2 ?
58		C'est sur quoi nous ?
59		2.3.2.
60		Vas-y.
61		Alors ...
62		Existe-t-il un polygone régulier dont la mesure en degré de l'angle est cent-soix... Ah non c'est pas ça merde.
63		Déterminer tous les polygones réguliers ayant un angle dont la mesure...
64		Oh, vas-y on est filmé on fait [?]
65		La caméra elle est sur toi.
66		Là.
67		Comment, ... ?
68		Ce que j'ai mis ?
69		Oui.
70		Non mais ça, regarde. Après la deuxième question [?]
71		Pourquoi, qu'est-ce qu'il t'a mis ?
72		Moi j'ai mis que les deux algorithmes c'était ...
73		T'as mis quoi toi pour la question 2.3.2 ?
74		Et il m'a mis "à expliquer".
75		La 2.3.2 ?
76		C'que j'ai mis , ou ?
77		Ouais.

78		Euh, pour quelle partie ?
79		Ben la 2.
80		Ah ouais. Ben moi euh, j'ai mis pour les entiers c'est les diviseurs de 360, ...
81		Ouais.
82		Pour les diviseurs j'ai mis que c'est ... Attends.
83		Ah ouais, c'est ça, c'est là.
84		J'ai mis qu'c'était soit un diviseur de 360 soit il avait une décomposition en facteurs premiers avec des facteurs autres que 1, 3 ou 5 ou une puissance de 1, 3 ou 5.
85		Ah ouais ok.
86		...
87		Très bien il m'a mis.
88		Fais voir.
89		...
90		Pourquoi il m'a mis deux traits là ?
91	P	Donc vous prenez connaissance si c'est pas déjà fait de la question que vous avez à répondre avec votre groupe. Vous cherchez aussi sur les euh petits cahiers que vous avez. Vous pouvez p'têtre poser vos affaires ailleurs que sur les tables là.
92		Regarde mon dessin.
93	P	Allez Paul. Oui vous écrivez sur les cahiers que vous avez là.
94		Y'a marqué "Ambigu", c'est bien ou pas bien ?
95	P	Vous allez réfléchir ensemble pour répondre à votre question. Et après vous ferez une affiche. Pour l'instant réfléchissez.
96		Nan.
97		[?]
98		Et merde.
99		[?]
100		Ça j'ai pas trop compris là.
101		Euh, nous on a l'autre question.
102		Ben on n'a pas l'algorithme.
103		C'est pas la question 3.3.2 ? 3.2.3 ?
104		On n'a qu'une question.
105		Ouais 'fin t'as vu la question ? On a deux p'tits points.
106		Là, celle là.
107		Ça c'est bon. La partie là, sur les polygones réguliers ...
108		Non, il m'a mis un truc. Polygones à préciser.
109		T'avais pas mis la liste ?
110		Moi je les ai listés.
111		T'as eu juste ?
112		Il m'a dit "comment obtient on cette [?]"
113		Non parce que moi j'ai pas fait comme ça.
114		Faut juste mettre "les diviseurs de 36 sont"
115		[?]
116		Moi j'ai dit que si t'obtiens un diviseur de 360, hop et donc j'ai fait la liste.
117		Des diviseurs de 360 ?

118		Ouais ben moi aussi.
119		"Comment obtient t'on cette [?]" ici
120		Non parce que moi j'ai fait comme ça.
121		
122		Ouais.
123		Il suffisait juste que j'mette euh "les diviseurs de 360 sont :".
124		...
125		Oh merde. [?]
126		...
127		On va dire 1 plus [?] du polygône
128		Ca veut dire quoi [?]
129		Mais c'est pas la question qu'on a à faire.
130		Ah ouais, c'est pas celle-là.
131		Alors concrètement ...
132		Bon euh du coup si c'est sur 4 points vous avez combien ?
133		Un et demi.
134		0.30.
135		Attends mais r'gardes, on dirait que c'est sur 30.
136		Pour euh le total ?
137		Ouais, total ouais.
138		3 points.
139		1.5 moins.
140	P	Première difficulté comprendre ce que vous avez à écrire, c'est ça ?
141		Non ça va.
142		3.1. C'est la 3.2.
143		C'était sur 4 points ?
144		T'es sur que c'est la 3.2 ?
145		C'est la 2.3.
146		2.3.2. C'est ça là.
147		Ah oui.
148		Toi t'as eu combien ?
149		0.6 ? Ok.
150		Et toi t'as eu combien ?
151		J'ai eu 1 j't'ai dit.
152		Combien ?
153		1, j'ai eu.
154		2 moins.
155		2 moins ?
156		Moi j'ai 2.
157		Ouais.
158		C'est Guillaume qui a la meilleure note.
159		Ben en fait j'pense qu'il faut faire heu ...
160		Moi j'ai juste oublié d'enlever le 1 et le 2.
161		C'est 180 - 360 sur n, c'est ça ?
162		Ouais.
163		Non prends celui-là plutôt.
164		C'est entier 180-360 sur n ?

165		Ouais voilà c'est ça.
166		... 360 sur n. Un grand N.
167		Dire ...
168		N divise 360.
169		Et en fait heu, toi t'es l'seul ? C'est toi qui as la meilleure note ?
170		Mais ça sert à rien que [?]
171		C'est chaud quand même. C'est pas du tout noté pareil.
172		C'est mon dessin qui fait toute la différence.
173		Ton dessin ?
174		C'est vrai t'as fait un dessin.
175		Ça justifie.
176	E9	Bon, donc 360 sur N doit être entier.
177	E2	Ouais voilà. Donc N divise 360 ...
178	E9	Donc si N est un diviseur de ...
179	E2	Et après il suffit de préciser la liste ?
180	E9	Ouais c'est ça j'pense.
181	E2	Sauf le 1 et l'deux.
182	E9	Sauf qu'il faut dire euh, il faut que ... il faut dire euh "les diviseurs de N sont". Parce que moi j'ai juste mis la liste il m'a mis 2-, il m'a pas mis deux tout court tu vois.
183	E2	Et euh, 'faut pas utiliser le cours du début d'l'année là ? juste euh ... 1 divise euh, ... c'qu'on avait fait là.
184		Ah ouais. Mais ça va faire un truc super long.
185		Ouais, ça va faire un truc super long mais bon.
186		Après moi j'ai eu 1,5.
187		Moi j'ai eu 2.
188		Non mais juste sur c'te partie.
189		Oui moi aussi.
190		T'as eu 0.5.
191		J'ai eu 0. à l'autre
192		Ok.
193		Euh, et, t'as eu deux points, donc euh ça donne quoi ?
194		Ben j'ai fait ça, c'qu'on vient d'faire là. Machin machin. 360 sur N entier. Donc si N est divisible par 360, comment [...]
195		Ok, donc moi j'ai perdu euh 2 points déjà parce que j'ai laissé le 1 et l'deux.
196		Comment on obtient une liste de diviseurs ?
197		Donc du coup euh, ça veut dire que ... Si on enlève le 1 et l'deux, on arrive presque à
198		Ah ouais.
199		... à 2.
200		[?] faire de trois à 180.
201		Ouais.
202		...
203		Tu veux r'grouper comment ?
204		Quelqu'un a ses cours du début d'l'année ?
205		Ouais.
206		Ah, cool.

207		Et euh ... [?]
208		Quoi ?
209		J'ai l'livre.
210		Ah ouais t'as un livre.
211		[?]
212		Ça c'est les exercices.
213		J'vais péter un câble si ils commencent à gueuler comme ça
214		Comment on f'sait ?
215		Hein ?
216		Comment on f'sait pour faire un ...
217		T'as pas un p'tit exemple ?
218		Ben r'garde. Si tu vois écrit exemple, c'est que c'est un exemple.
219		...
220		Faudrait essayer de justifier un p'tit peu mieux.
221		J'sais pas
222		On justifie pas assez quand on met ... euh, ben que la liste des diviseurs de 360 c'est ça.
223		Faut qu'on cherche si y'a pas une façon euh ...
224	P	En fait si tu donnes la liste des diviseurs de 360 faut que tu dises comment tu l'as fait. Et on a vu plusieurs méthodes pour trouver la liste des diviseurs.
225	E9	Justement, nous on a utilisé la calculette
226	P	Ben donc euh, et donc vous avez marqué que vous avez trouvé un algorithme euh, sur votre calculatrice qui vous a permis d'obtenir la liste des diviseurs ?
227		Non il aurait fallu l'écrire après
228		Ben, déjà, [?] avec des arbres.
229	E9	Ouais mais regardez, d'après ma calculette ...
230	P	Non mais d'après la calculette. Mais j'ai demandé, elle m'a répondu ... Et tu lui as demandé quoi ?
231	E9	On applique l'algorithme.
232		Oui mais, l'algorithme, ça fait un peu comme au BAC, le correcteur qui va vous corriger il va pas savoir qu'est-ce qu'on a fait en classe comme algorithme.
233		Bon ben on réécrit l'algorithme sur notre copie
234		C'est pas l'histoire de l'arbre là ?
235		Y'a une histoire d'arbre pour trouver la liste de tous les diviseurs.
236		Est-ce que c'est dans le cours ?
237	P	Dans les exos en tout cas
238		Moi j'les ai plus.
239		Euh j'ai changé de cahier.
240		Est-ce que y'a vraiment marqué [oliver ?] sur un truc dans ton cahier.
241		Fais voir.
242		Chais même plus pourquoi.
243		...
244		Un arbre ...
245		L'arbre de proba ... Là on est déjà sur d'la proba.
246		Ah ben c'est au tout début alors.
247		Ben chuis au déut.

248		J'en viens.
249		...
250		Non mais ça c'est [?]
251		Attends là.
252		Est-ce que c'est à toi ce truc bizarre par terre ?
253		Nan.
254		[?]
255		Ou alors on fait comme euh ... N divise 360 euh ...
256		Ouais ben N divise 360.
257		Nan mais ils gueulent trop.
258		D'après l'algorithme Page 25.
259		Nan on fait pas ça.
260		
261		Pour la géométrie euclidienne.
262		Ah p'têtre dans les exercices [?]
263		Les exercices corrigés.
264		[?]
265		Donc, bon ben ...
266		Non mais comment tu veux justifier à part tu dis ben "on a fait la liste des diviseurs" ?
267		Au pire tu dis euh ... [?]on divise [?]
268		Décomposition en nombres premiers.
269		3*120. 3*120 euh ...
270		Ouais mais ... c'est les facteurs premiers qui ...
271		3, 5, ...
272		2.
273		Euh, ouais mais il est pas dans le ...
274		2 fois 2.
275		Après 2 fois trois ...
276		4 fois 2, ça fait 8. 3 fois 3 ça fait 9. Tu les r'trouves tous comme ça.
277		Ouais mais euh ...
278		Il suffit d'combiner chaque facteur premier entre eux.
279		Ouais mais c'est simple.
280		Parce que genre en facteurs premiers 360 ça fait quoi ?
281		Ben on l'a fait j'crois
282		Ouais mais l'truc c'est que si tu fais ça y va falloir faire ça pour tous ... 2 fois 2 fois 2 fois euh trois ...
283		2 fois 2 fois ...
284		Non, là ça fait 180.
285		Allez ciao.
286		Ça fait 90. Ça fait 45. 15.
287		Ok.
288		Là tu fais ça, voilà.
289		Là y'en a plein qui ...
290		Alors là tu commences par 3. T'as 2 fois 2 t'as 4. Après t'as 2 fois deux fois 2.
291		8.

292		8. T'as 2 fois 3. Putain ça fait tout ça ?
293		Oui mais non c'est la même chose. 'fin, ...
294		2 fois 2 fois 3 ça fait 12.
295		Après t'en as pour 2 ans à faire ça.
296		Oui mais aussi, euh, j'ai pas à tout à y prendre parce que j'élimine le 1 et le 2.
297		Encore plus long.
298		3, 2 et 5.
299		7, 8, 9. T'as 9 diviseurs.
300		Non mais t'en as plus que 9, parce que là,
301		Mais non mais, ...
302		Mais non mais, t'as mis quoi là ? T'as mis deux fois deux fois deux, t'as mis ...
303		Y'a des facteurs communs.
304		T'en a 24, des diviseurs.
305		Ah, mais déjà t'as ...
306		2 fois 2 fois 2 fois 3 fois 3 fois 5.
307		Y'en a déjà que 22. Parce que dedans tu comptes le 1 et ...
308		Djà dedans ...
309		Et l'deux faut pas l'prendre parce que ...
310		3, 2, 1, ça fait 4. 3 fois 3 ...
311		Ah oui, ouais, 2.
312		Ah non c'est pas ça là.
313		Ouais mais voilà mais c'est ... c'est encore plus complexe c'que t'as fait.
314		[?] dans l'cours ou dans les exos ?
315		Qu'est-ce qui est sensé être quelque part ?
316		Ben, l'arbre.
317		Parce qu'après y'a l'autre partie d'la question à faire hein.
318		On a combien de temps ?
319		Ouais ben l'autre partie j'ai eu 0.5.
320		Ouais mais une fois ...
321		Au pire c'qu'on fait c'est qu'on met juste ... on obtient ça grâce à un programme ci ... ci-dessus.
322		Ouais voilà.
323		Vous voulez qu'j'recopie l'programme ?
324		Vas-y r'copie l'programme.
325		Si vous r'copiez un programme, indiquez le euh langage dans lequel vous l'avez écrit.
326		Non mais on va pas r'copier l'programme.
327		Langage calculatrice c'est tout.
328		Nan mais du coup, euh, m'dame, du coup l'arbre ?
329		Mais quel arbre ?
330		Oui ?
331		C'est bon ?
332		C'est quoi ça ?
333		Ben c'est un peu comme c'que t'as fait.
334		On va le tester jusqu'à 180 ?

335		Alors moi j'ai fait ... j'ai fait comme ça alors.
336		On r'prend l'programme finalement ?
337		Madame ?
338	P	Alors en fait, pour avoir la liste de tous les diviseurs, on a effectivement en tant que résultat, ça suppose que vous avez fait la question pour tous et que [?]
339	P	Effectivement on a moyen de faire un arbre et de faire autre chose ça dépend, ce qui compte c'est la décomposition en facteurs premiers.
340		Ben c'est c'qu'on a essayé de faire mais ...
341		C'est quand même ...
342		Ça fait 24 diviseurs. Ça fait 2 fois 2 fois 2 fois 3 fois 3 fois 5.
343		Et après faut multiplier chaque truc entre lui pour trouver le ?
344		Oui.
345		J'veux dire, plus que, plus que ça.
346		Au moins, au moins c'est justifiable. On prend ta liste, j'vais d'jà r'copier
347		C'qu'on peut faire c'est avec un arbre en fait.
348		Mais y'a pas b'soin d'arbre.
349		Avec un arbre ça doit être plus facile.
350		Là à la fin si faut faire des arbres, faut y faire pour demain ?
351	P	Après si vous voulez euh, ne pas faire d'arbre, vous pouvez dire en écrivant combien euh ben quelles sont les possibilités pour les puissances de 2, quelles sont les possibilités pour les puissances de trois et quelles sont les possibilités pour les puissances de 5.
352		Ah ouais.
353		On euh réduit l'écriture.
354		Ouais, on va faire comme ça.
355		Un, un, deux, trois, quatre, cinq, six, ...
356		En gros tu fais une euh, tu fais une euh distribution... tu distribues sur
357		Euh après oui, 'fin.
358		Pour chaque après faudra prendre l'autre... Tu distribues sur chaque et après faudra prendre chaque autre
359		Donc alors ...
360		T'as une idée ?
361		Hein ?
362		T'as une idée ?
363		Non, [...]
364		Avec un dessin, on matérialise notre idée, peut-être qu'il vont pas nous demander comment on a fait
365		Si ils nous demandent comment on a fait, on l'mettra au tableau et on écrira.
366		Attends on écrit quoi là ?
367		Après tu dis ben ... T'expliques le principe.
368		Ouais voilà.
369		On fait tourner à la main. On fait tourner à la main l'algorithme.
370		[...]
371		Parce qu'il envoie en fait [?]
372		On va faire comme ça là !
373		Par contre faut r'copier la liste.

374		...
375		Ouais dis, en fait tu fais ça, tu dis tac, tu dis on a 24 diviseurs, donc tu dis on a pu ... on a pu tester pour chaque machin donc on fait 24 calculs et pis voilà.
376		Normal, si on remet sur la liste de proba, donc faut ...
377		...
378		Le problème [?]
379		Bon allez, j'vais faire un p'tit arbre, j'vais tenter.
380		...
381		C'est quoi ça ?
382		J'tente un arbre.
383		Un arbre de proba ?
384		Mais non, pas d'proba.
385		[?] ça passe par [?] demain
386		Vous voulez 72 ...
387		Ah ouais pas mal ! Euh 72 à étudier c'est ça ?
388		Ouais.
389		Ouais. Euh ... Ouais.
390		C'est sérieux ça !
391		C'est malin !
392		C'est malin !
393		Le problème c'est que, ...
394		Hein ? Ouais non mais après faudra faire un autre arbre.
395		Ben oui.
397		On fait des arbres ou pas ?
396		Toi t'es vraiment un psychopathe
398		Non mais là ...
399		En gros tu veux faire euh , tu ... pour répondre à la question tu veux taper des chiffres
400		Faut faire euh ...
401		Non Ok.
402		On a l'temps d'faire un [...]
403		[...]
404		Après faut pas ... euh ... Genre là j'ai mis 2, 2, 2. J'peux ... J'pourrais pas remettre un deux là.
405		Pourquoi ?
406		Ouais mais euh, y'en a trois des 2.
407		Si j'mets tout, ben après t'élimines les combinaisons
408		J'en ai 5 moi.
409		24. 1, 2, 3, ...
410		Nan ?
411		Ben si tu fais tout après t'élimines les combinaisons pas possibles.
412		Nan, mais au bout ...
413		T'as trois 2 ben tu dis ben ...
414		Là t'as une puissance de 3, donc tu t'arrêtes quand tu peux plus mettre de trois et cinq.
415		Ouais.

416		...
417		Y'a qu'un seul cinq, on est bien d'accord ?
418		Eh y'a une [?]
419		Ahaha, c'est une brique.
420		Après, ça ?
421		En fait après t'as pas besoin de faire un arbre par personne... Parce qu'au final tu vas repartir à chaque fois euh ... dans l'autre sens en fait. Par exemple t'as 5 fois 2 fois machin, alors que là t'as 2 fois 5 ...
422		...
423		1, 2, 2, 2, 3, 23. 5 ...
424		J'aime pas les arbres, à chaque fois j'sais pas c'qu'il se passe.
425		"J'aime pas les arbres"...
426		Euh ...Il s'est passé quoi là sur ma calculette ?
427		Euh, ben c'est parti.
428		...
429		C'est mal. T'as déjà copié 1 sur 80 ?
430		360, 180, 90, 45 ... 45 euh
431		Ohlàlà ! J'aime pas faire des arbres à chaque fois ... J'me r'trouve à écrire tout p'tit.
432		...
433		Et genre, on donne ... On s'arrêterait pas quand on arrive à 5 des fois ? Genre à notre dernier.
434		Ouais.
435		S'tu veux.
436		Hein ?
437		Ben oui.
438		Ouais.
439		Ça y est vous vous êtes mis d'accord sur la quantité à écrire euh, sur les feuilles ?
440		Bon ben on a fini la première partie de la question ?
441		Ah oui. Et du coup on va justifier ?
442		Eh il m'en manque plus que trois.
443		T'en manques que trois ?
444		Ah ben on va pas s'embêter à faire trois arbres, on va faire plus p'tit, hein.
445		Ben si, ...
446		Mais r'garde son truc, c'est trop chiant !
447		...
448	P	Pendant que vous vous mettez d'acccord sur la première ça serait bien qu'il y en ait un qui commence à remplir la fiche.
449		Ben Romain ?
450		J'remplis quoi ?
451		Un arbre, t'expliques ce que t'as fait là ...
452		Non non, mais au pire fais un arbre. 'fin chais pas, ...
453		Comment j'fais ?
454		C'est toi ... sinon tu vas en oublier.
455		Tu peux pas en oublier parce que tu fais 24 diviseurs.
456		Ouais, chais bien, avec la formule.

457		Mais bon, la formule ...
458		Tu prends les puissances et tu les multiplies.
459		[...]
460		En fait si ça s'trouve il est totalement hors sujet mon arbre ...
461		Pas du tout c'qu'on a fait.
462		Parce que tu fais quoi d'un arbre ?
463		Ben t'sais tu ... 2, 2, 2, 3 ...
464		Eh, j'ai fini mon arbre.
465		Ah ouais.
466		Sinon tu peux r'mettre un trois.
467		Exact.
468		Et là tu r'mettra rien parce que [...] si tu remets un 3 après ça fait comme si t'avais mis deux 3 avant le cinq.
469		Là j'mets un 3.
470		3 fois ... 72.
471		3 fois 24 ouais.
472		Là c'est un deux.
473		Et un 5 encore. Ça fait 360.
474		Et ben voilà impeccable on fait ça.
475		Ça marche !
476		Mais ça va pas.
477		Alors ... alors ça fait ...
478		Ouais non mais toi t'as fait ...
479		2,3,5, ... Ça fait 2, 2, 2, après j'ai mis un 3 et un 5.
480		3, 5 ?
481		Ouais. Là ça donne 40 ... Là j'ai r'mis un 3 et un 5. Là, tu vois ...
482		Ouais vas-y, commence à le faire là.
483		Euh ... moi ...
484		J'écris s'tu veux.
485		Non mais j'écris trop bien, t'inquiète.
486		Faut écrire gros.
487		Ça marche votre truc à vous alors ?
488		Bah ouais.
489		Tu l'as fini le tien ?
490		Hein ?
491		Tu l'as fini ?
492		Hein ?
493		Tu veux que j'vérifie ?
494		Tu veux que j'le fasse ?
495		Euh ... Non c'est bon ça devrait aller.
496		J'trouve 22.
497		Hein ?
498		22.
499		Pareil.
500		...
501		Il en manque un peu là.
502		Ouais il en manque. On les divise là.

503		Là c'est bon là ?
504		Non. Non non.
505		...
506		Fois 2 ...
507		Alors, 1, 2, 3, ...
508		Eh il t'en manque 3 déjà.
509		2, 2, 2 ...
510		1, 3, ...
511		Mais à chaque fois que tu t'arrêtes avant [...]
512		Ah non parce que si tu mets un 3 ça va m'faire [...]
514		40 ...
515		Ça va venir hein.
516		Faut en rajouter là. Un de chaque
517		Encore 3 là tu vois. Encore 3, 5.
518		Mais tu vas les trouver en 15 fois les trucs.
519		Plus 8.
520		Encore 2.
521		Y'a des trucs que tu vas r'trouver en plusieurs fois.
522		Ouais.
523		C'pour ça. Y'a des trucs que vous allez retrouver plein de fois.
524		Pourquoi ?
525		2, 2, 3, ...
526		Non mais lui parce qu'il en a fait trop.
527		Oui parce que euh lui
528		Non mais là j'me suis arrêté. C'est fini.
529		Montre.
530		Attends 'tends 'tends
531		Ecris les en dessous
532		Il est [?]
533		Y'a 2 déjà.
534		Ouais mais 2 on l'met pas.
535		Si on l'met.
536		Ah non on l'met pas.
537		Il est compté dans euh ...
538		Ah mais attends, mais on doit en trouver combien ? Dans la liste on doit en trouver ?
539		22.
540		22 parce que deux est ...
541		...
542		T'en a que 22.
543		Y'en a que 18.
544		Vas-y attends.
545		Au pire tu m'dis c'que t'as trouvé moi j'te dis si ça correspond à la liste.
546		Ben oui mais non, parce que y'en a ou euh c'est normal qu'il en manque ... Faut qu'on qu'on fasse un autre arbre avec euh ... 3 fois 3 tu vois. 'fin faut que ça commence par trois, parce que là c'est forcément un [?].
547		Bon ben on peut l'faire alors.

548		Mais y'a forcément des solutions ...
549		Ouais mais ...
550		...
551		Donc là ben on a 1.
552		C'est 1.
553		Non mais parce qu'il y a pas le 1.
554		Là-dedans y'a pas le 1.
555		C'est pas bon ?
556		Si si là c'est bon.
557		Il faut qu'on en trouve 22.
558		Hein ?
559		On en trouve 22 nous.
560		23.
561		Non mais j'en ai 23 avec le 2.
562		Avec le 2 ?
563		Ben c'est bon.
564		On r'copie ?
565		Faudra juste expliquer.
566		T'en as 23 toi ?
567		Ouais j'avais pris 2.
568		Tu veux qu'j'écrive ?
569		Hein ?
570		Tu veux qu'j'écrive ?
571		C'est bon alors.
572		Sur la feuille ?
573		Tu veux qu'j'écrive sur la feuille et vous vous cherchez la suite.
574		Ouais. Ben vas-y.
575		T'es sur hein ? On est bons hein ?
576		On recopie
577		Ouais mais ...
578		...
579		J'écris sur quoi déjà ?
580		Ben attends. Madame !
581		Bon, on va l'faire là.
582		Alors ... Ben euh ... [?]
583		C'est pas possible quand même de euh ... ?
584		...
585		2 fois 3.
586		Au propre, faut multiplier par 2, ou 3, ...
587		En-dessous, en-dessous de 3.
588		Mets produit égal. Euh P égale.
589		Un.
590		Là tu mets P et tu mets P égale. P divise... P égale machin.
591		Bon alors, on met quoi ?
592		On met là, sauf que tu fais pas les [?]

593		Attends attends. Parce que, alors là, on a commencé par un et si on mettait direct 2, 3, 5. Genre au lieu de commencer par un 2 on commence par 2, 3 ou 5. Après ça va nous faire 3 [?] et on va y arriver.
594		Ouais on peut faire marcher le truc.
595		Non mais fais comme ça là. Ça marche.
596		[...]
597		Faudrait ajouter ça.
598		Pourquoi ?
599		Mais parce que ... on fait l'arbre et ça justifie.
600		On apprend que si tu commences par ça et ben l'arbre il [?]
601		Hein, ho on [bouge ?] quelque part ou t'as oublié.
602		Pourquoi ?
603		Un 3 là ou tu pourrais rajouter en bas un 5, en haut un, un 3 et un 5. Ça fait 2, 3, ...
604		Dans tout ça t'as pas euh, 5 [?]
605		380 il est divisible par 5, faut qu'on fasse un arbre avec 5 aussi.
606		Oui mais un arbre avec 5 ça fait ça.
607		Oui. Ben voilà.
608		Ouais.
609		Ouais non mais j'y ai pensé.
610		Non mais parce que là t'en as trop des diviseurs.
611		Nan nan, y'a l'nombre. Y sont là.
612		Et si tu rajoutes un arbre avec 5 ?
613		Ouais non mais un arbre c'est juste ...
614		Ah oui.
615		Un diviseur de ... Et [?] quand t'as des diviseurs de 3 et 5.
616		T'as pas b'soin de refaire un arbre avec 5 si y'a que 5 quoi.
617		Oui, mais ...
618		Moi j'ai testé.
619		Et là t'en as, t'en as trop des diviseurs. Non ? T'en as combien là ?
620		Là au total j'en ai euh, 23.
621		En gros tu fais ça, tu mets rien là et ... Tu rajoutes heu ...
622		On en a 22 hein !
623		Ouais si tu pars comme ça, tu pars sans rien.
624		De diviseurs.
625		'fin heu, tu marques sans rien.
626		Après, tu rajoutes, 'fin ça revient à caler celui-là là et celui-là là.
627		Ça fait rien, tu mets sans rien.
628		Si tu pars sans rien, tu mets rien et tu mets 2, 3, 5.
629		Par contre là quand tu peux tu mets là, y'en a 2 qui vont être notés après.
630		Au pire euh ...
631		Tu mets juste 3 et 5, en haut.
632		[?]
633		Après, si on commence par un 3, celle-là faudra pas l'utiliser. Nan mais le 3 tu marques rien. Tu mets juste 3, 5, le 2 tu l'développes.
634		Genre si on fait comme ça, ...
635		Et les 2 là tu les laisses. Nan tu mets rien.

636		Et y'a les 3 aussi là.
637		Si r'garde y'a le 15.
638		Tu peux pas l'faire si tu commences, si tu développes le, un développement en 2.
639		Ouais, et ben, ...
640		Vous arrivez pas à les trouver tous ?
641		Si on les a tous là, avec nos ... gros arbres. Mais euh ...
642		J'vais recopier ça et euh on justifiera
643		Ben, mets pas les ...
644		J'mets comment ?
646		Bah rien. Tu mets deux-trois [?], tu commences par rien, tu commences par rien n'est pas égal ... Non mais un peu plus loin quand même.
645		Là c'est bon ?
647		[...]
648		Nan nan, commence p'têtre pas trop haut le 2 hein, parce qu'après on va r'monter encore.
649		Ok.
650		Le 2 faut qu'il arrive là quoi, au milieu.
651		Après euh, ...
652		Oh putain mais j'le sens mal, commence par la fin.
653		Non mais alors toi.
654		En fait ouais euh, ...
655		Là tu mets rien.
656		Nan, là on met l'deux au milieu,
657		Ouais on met deux.
658		Mais nan mais ...
659		Là tu mets 5.
660		Nan mais y'a d'la place encore.
661		Le 3 il va plus le développer.
662		Ouais mets 3 et euh ... 3.
663		Ben euh, en bas y'a plus de place non ?
664		Ouais, mais on va la faire où la deuxième question ? Derrière ?
665		Derrière.
666		Allez hop.
667		Ouais, vous pouvez faire derrière ou vous pouvez prendre une autre affiche.
668		Non mais sinon cet arbre il est correct.
669		Alors, ...
670		[...]
671		Ben t'as listé toutes les puissances de 2 possibles ?
672		[...]
673		Oui, c'est pas comme ça qu'on fait d'habitude, mais ...
674		Oui mais j'me rappelle plus comment on fait. On commence comment d'habitude ? Parce qu'on a beau chercher on trouve pas
675	P	Ben d'habitude on commence par s'attacher aux 2, et on réfléchit, les deux, on peut aller jusqu'à combien ? [...] Et après on met les 3, et après on met les 5. Mais bon ça marche aussi ça hein.

676		Le problème c'est que si, euh, si on a des 3 donc les [...] autre arbre 3 et après pour 5.
677	P	Et vous avez pas retrouvé vos cours du début d'l'année ? Donc comme on avait fait, on s'occupe d'abord des puissances de 2. Donc des puissances de 2, et si on veut un nombre qui soit un diviseur de euh ... 360, on peut aller maximum à la puissance 3. Donc vous allez commencer à la puissance 0 puis à la puissance 1, puissance 2, et puissance 3. Pour chacune des branches on va rajouter les puissances 2 et puissances 3. C'est ce qui nous avait permis de justifier la formule. Celle que vous avez sans doute utilisée tout-à-l'heure pour justifier le nombre de diviseurs.
678		Ah ouais.
679		En fait, [...]
680		Non, celle sur les puissances [?].
681		Par contre on n'a pas de blanc là.
682		Ouais mets du blanc là.
683		Ho, mais regardez là !
684		Oui mais ça transperce, ça m'énerve !
685		Ah oui, ah merde on est enregistrés !
686		Allez envoie le, euh, dans l'cours c'est.
687		Pas grave à mon avis ça c'est trop loin.
688		Nan mais ça c'est trop loin.
689		Vas-y, après.
690		C'est où nombres premiers et tout, là ?
691		Mais ça y est j'ai compris c'qu'elle voulait qu'on fasse.
692		C'est bon ?
693		Allez-y [recopiez, moi je vais ?] attaquer la deuxième partie j'pense.
694		Vas-y ouais.
695		Bah, [?]
696		J'avoue que c'est [?] ouais, après euh, si on avait du temps ouais.
697		Nan mais c'est bien on est du chapitre 1 au chapitre 4.
698		Nan, nan on en est surtout à la compréhension du chapitre... euh, compléments tout ça là. Là on est sur les premiers.
699		[?]
700		Mais non, mais non ! Non mais le cours est quand même bien !
701		C'est nombres premiers, laisse tomber !
702		Mais vas voir, ... dans l'cours.
703		Bon, vas pour les premiers.
704		C'est ça déjà, tu mets 2 puissance 0, 2 puissance 1...
705		Allez, j'arrive !
706		Un ?
707		Non, 2 puissance 0 pour que ça fasse, pour que ça soit une puissance. Allez, 2 puissance 0, 1 et 2 et 3.
708		[?]
709		Mais t'es malade toi !
710		J'te trouve trop gentil !
711		Bon et la question avec les décimales là ?
712		Ah euh, [?]
713		T'es sur qu'on écrira pas là ?

714		Nan, justement non.
715		Nan, mais du coup moi j'ai mis euh, y'a marqué "bonne réflexion mais à développer"
716	P	Ben qu'est-ce que t'avais mis dans ta bonne réflexion à développer ? P't'être que tu pourrais la soumettre à Romain pour essayer de voir c'qu'il a fait.
717		Euh, tout-à-fait.
718		Il dit qu'il y a des fractions qui sont entières.
719		Non, j'ai dit qu'c'était par rapport aux puisssances de euh, 'fin, quand tu découpes ...
720		Ouais.
721		C'est tous les ...nombres qui ont pas 2 3 ou 5 dans leur euh décomposition,
722		T'as pas l'droit !
723		J'm'en rappelle déjà plus.
724		Là on met 2, sur un autre euh truc, 2, 3 ...
725		Ou qui ont des puissances derrière.
726		On fait comment là ?
727		Là tu mets ...
728		Ah oui parce que comme t'as 360 divisé par n ...
729		... 3 puissance 0, 3 exposant 1, 3 exposant 2, ...
730		Ouais.
731		Parce que ça va être très [?]
732		Moi il m'avait mis ...
733		Là c'est pareil, tu mets quelque chose ?
734		Ouais.
735		Merde, mais j'ai écris où ça ?
736		Il était bien ...
737		Mais quand tu mets pas de 2.
738		Et après tu mets 5.
739		3-0, 3-1.
740		Et après pour chaque truc faut que tu r'décomposes en 2. 5-0 et 5-1.
741	P	C'est bon vous êtes prêts ?
742		Et après tu vas les marquer où les, les résultats ?
743		Ben on les explique.
744		Et après faut qu'tu [?] hein.
745		Nan, faut justifier.
746		Ben, 2 exposant 0, ...
747		[?]
748		Non, trop long.
749		Eh, moi j'ai, moi j'ai fait votre arbre, sauf que j'ai fait les calculs.
750		Ben oui.
752		Ben c'est, c'est comme ça qu'j'aurais fait.
751		[?]
753		Eh, je sens qu'tu vas foirer un zéro ou un 1, un moment.
754		Ben j'réfléchissais tu vois.
755		5-1
756		0-1
757		À un moment il va même pas écrire un 1 il va mettre un 0.

758		5-1
759		5-1 ?
760		5-1.
761		5-0.
762		1 et 0.
763		1-0.
764		Wooo, faut comprendre quand même.
765		En fait on aurait pu s'arrêter p'têtre.
766		Eh mais attends ça en fait 24 là.
767		Là ça en fait 24 ouais.
768		Donc du coup si on met "égal" à chaque fois.
769		Ouais.
770		Ouais.
771		[...]
772		Mets un peu d'couleur tiens.
773		Tu mets juste "égal" là, et on va mettre tous le [?]
774		Tu mets ..., tu veux du rouge ?
775		Tu veux mon feutre ?
776		Ouais prends le feutre.
777		Non, c'est trop p'tit.
778		Ouais c'est trop p'tit.
779		Non mais t'inquiète.
780		Non, c'est bon, ils vont y voir.
781		Ça ça fait un.
782		Ouais ça fait 1.
783		L'autre ça fait 5.
784		L'autre euh, ça fait 3.
785		L'autre y fait 15.
786		L'autre y fait ... 3 fois carré, ça fait combien ?
787		3 au carré ça fait 9.
788		9 fois 5. Ouais.
789		145 là.
790		J'fais confiance à Léo hein.
791		2 fois... ben 2.
792		2.
793		Après, 2 fois 5.
794		10.
795		10 là.
796		Attends on réfléchit hein.
797		6 fois 5 ?
798		30.
799		C'est bon vous êtes sûrs ?
800		Ouais 30.
801		Après ... Après 18
802		[?]
803		Après ... après 4 fois 5, 20.
804		Après ça fait 72, 72. Nan attends. Nan, ...

805		Soixante euh ... deux.
806		60. 60.
807		'tain mais les gars.
808		On coupe le micro 2 minutes là pour les calculs ?
809		euh, 2, 4 fois 9.
810		36 euh non, 36 fois... 36 fois 5.
811		180.
812		Après ça fait 8. 8 fois 5, 40.
813		Euh ... 8 fois 3. 24.
814		24 fois 5.
815		cent-soix ... euh, 120 !
816		120.
817		96 fois 6.
818		8 fois 9. 72. Et 72 fois 5... 360.
819		[...]
820		Non, elle est là.
821		Alors on a dit que 360 sur n ça doit être entier
822	P	Ça y est, vous y êtes arrivés du coup ?
823		Ouais.
824		Ouais mais 'tends, on l'dira à l'oral.
825	P	Vous avez eu de quoi... argumenter un p'tit peu pour l'histoire du euh, décimaux. 'fin des nombres décimaux.
826		Non.
827	P	Il vous a euh, 'fin ce que Vincent a tenté de vous expliquer.
828		Qu'est-ce que t'as dit alors ? Faut que 360 sur n soit décimal ?
829		Ouais. Donc c'est, c'est soit les trucs ils sont pas diviseurs de 360 et que si tous les côtés [?] parce qu'après la décomposition, 'fin si dans la décomposition y'a un autre chiffre que 2, 3 ou 5, un autre nombre nombre premier, ou que les puissances de 2, 3 ou 5 ce soit supérieur ...
830		Mais ça suffit pas de dire que c'est pas un diviseur ?
831		Si !
832		Sachant qu'j'ai mis ça, plus le truc des décompositions et que j'ai eu 0,5, je n'pense pas qu'ça suffise, non.
833		Tu mets "est égal".
834		Sinon tu peux l'mettre là hein.
835		Non mais c'est bon, tu mets euh ... donc.
836		Ouais mais celui-là il va parfaitement tu vois.
837		Là tu mets une flèche à 1 et 2, tu mets une p'tite flèche euh ...
838		Où une p'tite étoile.
839		[...]
840		Ah oui ça c'est le ...
841		C'est possible.
842		Attends.
843		Appartient pas à 3 sur euh ...
844		[3 ;25].
845		Appartient pas.
846		Non mais non.

847		Mais pourquoi [3 ;25] ?
848		C'est dans l'énoncé.
849		Euh, 3 ...
850		Ah mais on va jusqu'à plus de 25 nous hein.
851		...
852		Ouais.
853		Hein, on va jusqu'à plus de 25 hein pour les angles.
854		[?]
855		Non, tu ...
856		Non c'est pas possible.
857		Dis juste que c'est impossible.
858		Un polygone euh, ...
859		Tu fais quoi là ?
860		J'dis juste que c'est impossible.
861		Ouais mais ...
862		Nan !
863		Ça doit être supérieur à 3.
864		Ah mais faut mettre euh, inférieur à 3 ?
865		Ouais. Déjà tu mets...
866		[?]
867		Faut dire "plus l'infini".
868		Mais non ça marche pas c'est des entiers.
869		[?]
870		S'tu veux j't'en redonnerai un.
871		Ah, qu'est-ce qu'on s'amuse.
872		Là tu peux ...
873		[?]
874		'tain on est bien là ! J'pense qu'au niveau timing on est vraiment bien.
875		J'suis pas sûr.
876		Allez il nous reste un p'tit quart d'heure.
877		Ouais en même temps on fait que c'qui est marqué.
878		'tain t'es vraiment sale comme gars.
879		J'arrive pas à l'faire. J'suis un putain d'empôté !
880		Il l'a massacrée l'affiche !
881		J'reconnais il est sale.
882		Putain ça va être chaud à l'envers.
883		Tous les nombres, ...
884		Surtout attends pas ...
885		Euh ... en gros pour tous les autres, tous les autres nombres [?]
886		En fait ça fait un cœur quoi.
887		...
888		Tous les autres nombres ils [?].
889		Tu veux faire un arbre ?
890		Là t'as [?] qui marche.
891		On en a p'têtre 24.
892		On fait 5 minutes de pause ? On passe à la présentation des affiches après.
893		On fait 5 minutes de pause et après on fait la présentation.

894		Si vous avez fini vous allez en pause, c'est comme vous voulez.
895		Ça va être cool.
896		Non mais vas-y on va pas en pause là c'est pas fini.
897		[?]
898		[?]
899		Ben il l'a dit, pour tous les nombres euh qui sont pas décimaux, les nombres qui sont pas des diviseurs.
900		Tous ceux qui ...
901		Tous les diviseurs, donc tous ceux qui sont pas des entiers
902		À l'inverse, les polygones ...
903		Oui, moi aussi ...
905		Donc euh, faut aussi euh, faire ce que j'ai fait parce que euh ...
904		Ouais, moi j'ai mis ça aussi, mais ...
906		... Non mais parce qu'il y a marqué "début d'idée à approfondir"
907		Ben vas-y, approfondis, allez !
908	P	Alors, les polygones réguliers, y'a un nombre dont la mesure en degré est décimale, ou un n qui n'est pas diviseur de 360.
909		Non mais c'est l'autre euh, l'idée à développer.
910		Soit un n ayant une décomposition en facteurs premiers avec des facteurs autres que 1, 3, 5, ou une puissance de 2 ou 5 supérieure a celle dans la décomposition de 360. Est-ce que vous comprenez c'qu'il a voulu dire ?
911		Ouais.
912		Ça fait 2 exposant ... 4 au minimum.
913		2 exposant 3 exposant 3 exposant 4.
914	P	Donc si vous voulez une puissance de 10, ben qu'est-ce que vous pouvez avoir au dénominateur en fait ? C'est ça son idée. Vous avez 360 sur n, qu'est-ce qui marche à mettre au dénominateur pour qu'on aie un nombre décimal.
915		Ben tous les nombres qui sont pas là.
916	P	Ben tous les nombres qui sont pas là, font que ce n'est pas entier, mais on peut être pas entier et pas décimal.
917		Elle est vraiment dégueulasse notre affiche on est d'accord ?
918		Ah ouais.
919		Ah mais c'est ça en fait, vous vous disiez tout ce qui n'est pas entier est décimal ?
920		Non ...
921	P	Non ? Non mais pas du tout ! [*ton ironique*]
922		Ouais donc euh du coup faut faire quoi d'autre ?
923	P	Donc effectivement, si le nombre il est dans la liste c'est plié c'est entier. Mais si le nombre il est pas dans la liste ? Y'a des fois ça va être décimal et des fois où ça va pas l'être. Et c'est à vous de trouver un p'tit critère.
924		Oui mais aussi là pareil, si ça fait des 0 virgule quelque chose ça peut être euh entier quoi.
925		Ça peut être décimal ou euh ?
926		Qu'est-ce que vous pourriez avoir comme truc en-dessous pour avoir un nombre décimal et qu'est-ce qui en-dessous ne marcherait pas ?
927		Si c'est pas décimal ça peut être quoi ?
928		Bah il peut être euh infini, 'fin ...

929		Ouais.
930	P	Par exemple, 0.33333... Un tiers donc, ça n'est pas un nombre décimal.
931		Et comment ça s'appelle déjà ?
932	P	Un nombre rationnel non décimal.
933		Ah ouais voilà.
934		Et pourquoi ça s'arrête là ?
935		Ok, donc décimal ?
936		Ouais ?
937		Donc, on va bien s'marrer.
938		Ouais.
939		Ho oui.
940		...
941	P	Donc la bonne idée c'était d'partir sur les décompositions avec des 2 des 3 et des 5. Essayez d'exploiter ça maintenant vous avez compris qu'est-ce que ça veut dire être décimal.
942		Ouais parce que moi j'avais pas compris.
943		Ouais pareil.
944		Décimal pour moi c'était à virgule quoi.
945		Ouais pareil.
946		Tiens, un nombre ... si tu divises 360 par un nombre premier, t'auras un truc rationel non ? Donne moi un nombre premier.
947		17.
948		Moi aussi j'vais prendre un choco.
949		T'en veux un ?
950		C'est un nombre rationnel, qui finit jamais ?
951		C'est un nombre irrationnel.
952		C'est quoi c'travail ?
953		C'est juste pas possible.
954		Ah non non non, qu'est-ce que c'est qu'un nombre rationnel ?
955		J'sais pas moi j'ai fait ça.
956	P	Alors c'est un nombre rationnel qui n'est pas décimal. Un nombre irrationnel c'est racine de 2, ça s'écrit pas comme une fraction.
957		Ah ouais c'est ça.
958	P	Donc c'est rationnel parce que ça s'écrit comme une fraction mais pas décimal parce que ça s'finit pas.
959		Merci.
960		Pas d'problème.
961		T'es l'distributeur de bouffe t'sais.
962		Non mais toi t'as d'jà à bouffer, tu vas pas ...
963		...
964		Et donc, les nombres premiers tu peux pas les décomposer.
965		Oui, pas faux ouais.
966		Ça nous avance à quoi ?
967		Comme tu peux pas les décomposer, ça fait un nombre rationnel.
968		Euh ...
969		Ouais c'est une bonne idée ça.
970		Essaye euh ...

971		Un autre, allez !
972		Vas-y.
973		43.
974		36 divisé par ...
975		43 c'est un nombre premier.
976		Ben voilà, nombre rationel.
977		Un autre ?
978		14.
979		Euh, 14 c'est pas un nombre premier hein.
980		Oui non mais merci mais je sais. J'cherche pas un nombre premier, j'cherche justement un nombre qui est pas dans notre liste. Ça donne ça.
981		Merde.
982		Ouais, parce que la décomposition elle a un 7 dedans.
983		14, c'est 7 fois 2,
984		En fait y'a pas que les nombres premiers. Y'a les nombres premiers, et les nombres comme t'avais dit là. ... t'en prends un ou y a 2, 3, 5, et y'a d'autres nombres.
985		Ouais.
986		Ah, 160 divisé par 16.
987	P	Est-ce que l'inspiration vient mieux avec les chocos ?
988		J'pense que ça devrait être bon ouais.
989		16 ça marche pas.
990		Si ça marche.
991		48.
992		Alors j'crois qu'j'ai trouvé. Tous ceux qui ont une décomposition en facteurs premiers avec des 2, 3 ou des 5, mais à l'exposant supérieur, eux, ça fait des décimal.
993		Ben voilà !
994		Mais, tous ceux qu'ont des 2, 3 ou 5, mais qui ont un autre ...
995		Et en plus, qui ont un autre. En plus. Parce que 2 fois 7, y'avait, y'avait 2 tu vois.
996		Mais qui ont un autre, qui ont un autre truc que 2, 3 ou 5, ou alors, ils sont premiers, d'accord ?
997		C'est ça.
998		C'est ça ?
999		C'est ça ?
1000	P	Attends tends tends, j'réfléchis, ...
1001	P	Est-ce que 1080 ça marche ?
1002		Sans doute.
1003		C'est quoi 1080 ?
1004		C'est un multiple de 3.
1005		0.33333
1006		Donc ?
1007		Ça marche pas.
1008		Mais pourq ...
1009		Et pourtant 1080 c'est 360 fois 3. Tu m'as dit qu'il fallait que j'prenne que des 3 et des 5.
1010		Puissance de 3 supérieure on avait dit.

1011		Oui mais attends, parce qu'il doit falloir un truc du genre inférieur à 360, j'en sais rien.
1012		Mais non.
1013	P	En fait, quelles sont les puissances qui ne vous posent pas de problème pour [...] décimales ?
1014		Ben celles qui sont en-dessous de ...
1015		Faut que ce soit en-dessous de 360 déjà ou pas ?
1016		Ben non, juste que ...
1017		Ben si, parce que si c'est au-dessus de 360 c'est décimal. Parce que ça fait ... c'est comme si on faisait 1 sur ...
1018	P	Mais vous vous voulez que ça soit décimal, donc faut diviser par un nombre pour leq ... donc qui fasse pas partie de cette liste là.
1019		1080 divisé par 7.
1020		Ouais.
1021		Donc ça peut être n'importe quoi, alors qui est-ce là ?
1022		À l'exposant supérieur de euh ...
1023	P	Sauf que moi j'vous en ai donné un qui rentre dans vos critères. 1080, qui est 360 fois 3.
1024		Ouais.
1025	P	Donc il a bien des puissances supérieures et pourquoi il marche pas ? Pourquoi est-ce qu'il marche pas ?
1026		...
1027		T'as trouvé combien ?
1028		Non, mais, ça fait un tiers quoi.
1029		Ouais ça fait un tiers.
1030		Ouais.
1031	P	Donc en fait vous vouliez augmenter les puissances de 2, les puissances de 3 et les puissances de 5, la question est-ce que, est-ce que c'est vraiment ça qu'il faut faire ? Est-ce que vous pouvez jouer sur ces trois nombres ?
1032		Nan, faut pas qu'ce soit les mêmes.
1033		Et par contre 720 ça marche.
1034		Quoi ?
1035		720 ça marche.
1036		Ben oui.
1037		[?]
1038		Mais justement j'cherchais 0.5.
1039		Alors. Bon, faut réfléchir quoi.
1040	P	Bon, ben vous réfléchirez pendant que les autres présenteront, mais faudra qu'l'inspiration vienne.
1041		Oui mais là ...
1042		Bon, ...
1043		...
1044	P	Donc réfléchissez en fait si vous avez une fraction, irréductible, dont vous savez que ce n'est pas un nombre décimal.
1045		Hum hum.
1046	P	Par contre je vous donne euh, 1 sur 250. Est-ce que vous savez me dire si c'est un nombre décimal ou pas ? Nan mais sans calculette.
1047		Ah.

1048		Euh nan mais ouais ouais il est p... il est décimal.
1049	P	Un sixème ?
1050		Ouais ouais il l'est celui-là.
1051	P	Un sixième ?
1052		Nan en fait, j'pense qu'il faut que ça soit pair.
1053	P	Arrête de dire n'importe quoi, réfléchis 2 secondes.
1054		Mais non, mais ...
1055		Nan il l'est pas 1/6.
1056	P	Pourquoi ?
1057		...
1058		Parce que ... c'est un tiers divisé par 2.
1059		Humhum.
1060		Ils vont [?] un tiers là tous ?
1061		Divisé par 3.
1062	P	Bon, si vous avez, si vous voulez aller aux toilettes c'est maintenant.
1063		J'vais boire un p'tit coup, j'reviens.
1064		[...]
1065		J'vais faire pareil.

F.6.3 Transcription des échanges lors de EXP-TS2-RDTL, groupe 5

Expérimentation en TS2 : Transcription des sons enregistrés par le micro placé près du groupe 5.

Codage : P le professeur, Mathieu (E10), Timothée (E15), Maxime (E19), Benoit (E20), les membres du groupe 5.

[...] les courts passages inaudibles, en italique des commentaires qui font parfois référence à l'image vidéo.

Repère	Locuteur Temps	Texte
1		Madame, vous avez fait des groupes de niveau ?
2		À partir de ce moment 'faut pas raconter de connerie les gars.
3		Ah merde euh.
4		Eh, on est filmés depuis l'entrée hein !
5		Oui non mais Axel t'imagines !
6		Pourquoi y'a des rouges et des noirs ?
7		Oui donc euh ...
8		Pourquoi y'a des élèves qui sont en rouges et pas les autres ?
10		[?]
9		Bon, donc. C'est bon vous y êtes ?
11		Heu non.
12	P	Donc je vais d'abord vous rendre vos euh... travaux. Vous allez regarder un petit peu chacun euh ce que vous avez écrit, voir votre note, voir ce que vous avez réussi à faire euh ce qui vous a posé des difficultés. Donc c'était euh ... le DM qu'on a ..., enfin que vous avez fait avant les vacances, donc y'avait des histoires de polygones réguliers et de nombre de Fermat, vous vous souvenez ?
13		Hum hum
15		Ouais.
14	P	Donc, on va ... avoir cette organisation : donc vous allez avoir 5 minutes ou vous allez regarder le devoir que je vais vous rendre, ensuite, pendant 15 minutes vous allez réfléchir euh, chaque groupe sur une question en particulier du devoir. Donc ces ... groupes ont été faits en fonction euh, des questions que vous avez euh réussi à faire ou pas réussi à faire justement, que vous ayez une réflexion un peu plus avancée. Ensuite, 5 minutes, vous écrirez vos réponses sur une affiche, pour présenter ce que vous avez euh ... fait.
16		On fait un dessin et tout ?
17		Alors un dessin peut être, ou peut-être pas, tout dépend de la question.
18		Ensuite, 30 minutes ou ou chacun va venir..., ou chaque groupe va venir expliquer ce qu'il a fait. Donc l'idée c'est qu'en fait vous allez, tout, 30 minutes ça fait 6 minutes par affiche. Non, vous n'allez pas chacun parler 30 minutes, d'accord ?
19		Les petites choses qu'il y a sur les tables, c'est quoi ?
20		C'est les micros.

21		C'est les enregistreurs, parce que quand vous allez être dans la phase de réflexion vous allez réfléchir ensemble, et ce qui intéresse mon collègue c'est ce que vous allez dire pour réfléchir.
22		Donc là on peut y mettre sur pause.
23		Non, on peut pas mettre sur pause, vous ne touchez pas.
24		On a pas le droit d'les casser non plus.
25		On ne démonte pas.
26		Y'a pas accès de toute façon
27		D'accord ?
28		T'as vu ils ont fait des groupes de niveau.
29		Ha ha ha
30		Les devoirs, vous allez voir, c'était un devoir difficile, vous avez pas forcément tous de très bonnes notes. Vous avez la possibilité d'avoir des points bonus.
31		Deux.
32	P	Un point pour la qualité de la présentation. Donc quand vous allez présenter euh, si c'est juste un dessin, ça risque d'être un peu limité. Et un point sur la qualité des échanges. Les échanges ça va être à la fois comment est-ce que vous, quand vous présenterez vous arriverez à répondre aux questions, et comment et-ce que parmi ceux qui sont assis pendant que les autres présentent, vous posez des questions. L'idée c'est d'arriver à faire en sorte que chaque euh... groupe explique suffisamment ce qu'il a fait, pour que euh, vous sortiez d'ici en ayant compris le DM, même les questions que vous n'étiez pas arrivés à faire quand vous l'avez cherché tout seul.
33	E13	Et les groupes sont répartis selon les questions qu'on a bien réussi ou mal réussi ?
34		Sachant Valentin que tu es sur la première question "détermination de l'angle d'un polygone suivant les deux méthodes", tu penses que c'est quoi ?
35		Je sais plus.
36		Nous on a la plus dure t'sais.
37		C'est dur.
38	P	En fait vous avez été répartis sur : vous avez démarré, mais y'a des pistes à creuser un p'tit peu plus. Donc soit vous avez fait des choses mais c'est pas allé assez loin, soit vous aviez une bonne idée mais vous l'avez pas assez exploitée. Grosso modo vous avez un point pour démarrer, tous.
39	P	Qui sont ... ? Pourquoi est-ce qu'il y a des élèves qui sont en noir et des élèves qui sont en rouge ?
40		Moi j'viens d'le dire j'ai perdu mon DM
42		Parce que ? Ah parce qu'on l'a perdu. Parce qu'on les a pas rendus. Vous les avez pas là bien sur ? C'est vrai q'c'est petit, ça se perd facilement, entre les feuilles...
41	P	Donc j'vous rends ça, donc 5 minutes pour le regarder tout seul.
43		...
44		Alors t'as ta demande d'ordi ou pas ?
45		Dernière question, dernière point. T'as regardé chaque cas ou ... ?
46		Ah ben non, en fait j'ai essayé de comprendre la question qu'était pas évidente.

47		Ouais, 'fin on en parlera dans les phases de réflexion hein. On va pas prendre de l'avance !
48		J'me sens pressé là !
49		Ouvre la f'nêtre, ça va faire des interférences, le micro il va pas aimer.
51		6 sur 20.
50		Qui ?
52		On va avoir 5.
53		Oh non, mais abuse pas. Vas-y j'attends que tu l'aies.
54		Hahaha
55		On va r'garder la note.
56		Elle est ou ?
57		Elle doit être là j'pense.
58		0.5, non j'dec.
59		Moi j'dis, 9.
60		11.5. Ca va. Pfiou.
61		Combien ?
62		11.5
63		Bon les gars j'pense que je vous ai battus, regardez pas.
64		...
65		15. Pfou !
66		16. Non, mais pareil. Comment j'ai fait ?
67		Toi ? ... Et Romain ? ...
68		Ouais, on sait qu'c'est personnel, mais...
69		Il a eu combien Axel, que j'lui dise.
70		J'vois bien un p'tit 10.
71		Nan, 12.
72		Ah mais l'orthographe elle comptait aussi ?
73		Ah ah ah !
74		Ah ben fallait l'dessiner.
75		Non, c'est euh, c'est au tout début euh ... de la rédaction du propre, que c'est marqué le...
76		Nan mais par exemple, euh, là ...
77		Début "Rédaction du devoir à la maison".
78		Sauf qu'il l'a enlevée cette page.
79		Y'avait des dessins.
80		10.5.
81		Ah ben tu vois.
82		T'as dis combien ?
83		10.
84		T'as eu combien toi Romain ?
85		13.
86		Madame ? J'savais pas qu'l'orthographe ça comptait.
88		Pourquoi à la règle et au compas ?
87		Hein ?
89		J'savais pas que l'orthographe ça comptait.
90		Ben attends ho, chacun ses avantages, hein.
91		T'as eu combien toi Benoît ?

92		16.
93		C'est juste une p'tite remarque, c'est pas forcément décompté au niveau des points.
94		Ça j'y peux pas grand chose hein.
95		Là... quoi ?
96		...
97		Ah non, mais j'arrive pas à relire. C'est du déchiffrage là.
98		J'avoue qu'c'est impossible à lire.
99		C'est comme ça.
100		...
101		Un produit de facteurs premiers
102		Pareil.
103		Eh mais j'arrive pas à lire.
104		...
105		Pfff.
106		Qui c'est qui a moins de la moyenne là ?
107		T'arrives à lire ce qu'il y a noté ?
108		Présentation qui peut être clarifiée pour montrer mieux la méthode.
109		J'suis pas bon en déchiffrage moi.
110		Nous on est sur les dernières là ?
111		J'crois qu'ouais.
112		Pourquoi t'as du surligneur là ?
113		Non c'était juste pour mettre ceux qui étaient bons en ceux qui étaient pas bons.
114		T'as eu combien du coup ?
115		16.
116		Comme toi.
117		Et toi ?
118		Moi j'ai eu 15.
119		Ouais, mais y'a des trucs, ouais. Les trucs euh, ... La mesure de l'angle décimal là,
120		Question combien ?
121		Ben, la les... toutes celles euh... La première et aussi toutes celles là, ça lui a pas plus hein !
122		Donc, vous prenez connaissance si c'est pas déjà fait d'la question que vous avez à ... répondre avec votre groupe.
123		Putain mais on a celle qu'on a pas fait.
124		Vous cherchez aussi sur les petits euh cahiers que vous avez.
125		C'est-à-dire ?
126		Vous pouvez poser vos affaires ailleurs que en plein milieu là.
127		Oui vous écrivez sur les cahiers que vous avez là.
128		Ben vous allez réfléchir ensemble pour répondre à votre question. Et après vous ferez une affiche. Pour l'instant réfléchissez ensemble.
129		3.3.2. Mais de quelle partie ?
130		Euh ... deuxième partie.
131		Donc la, donc la, ...
132		Ouais : mesure en degrés de l'angle décimal.

133		Non je sais pas moi. J'ai mis euh j'ai mis qu'c'étaient tous ceux q...
134		Allez !
135		dont le nombre de côtés n'est pas un diviseur de 360.
136		Ouais.
137		Et y m'a mis, non c'est pas, c'est beaucoup plus compliqué.
138		Moi aussi.
139		Pour ?
140		2.3.2.
141		Toutes les fractions ne sont pas des ?
142		Ouais mais c'est la deuxième partie
143		Ah mais oui.
144		Ben oui.
145		Euh, y'en a... y'a des fractions qui sont euh... irrationnelles.
146		...
147		C'est-à-dire ?
148		Ça veut dire qu'c'est pas des nombres décimaux, parce qu'ils peuvent pas s'écrire avec un nombre de chiffres doub... finis après la vi, après euh la virgule.
149		Ah ouais.
150		Donc, moi jvois qu'ça, après j'sais pas.
151		Ben t'façons on n'a pas cette question à traiter ?
152		Nan.
153		Nan mais c'est ça nan ?
154		Euh... tu disais ?
155		Ben qu'y'a des fractions qui sooonnt ... Qui ben oui,
156		Deux tiers, un tiers, ...
157		Hum !
158		Ça s'écrit jamais.
159		Ouais.
160		Donc c'est pour ça que ... ouais. [?] Ben c'était rapide.
161		Ah, fait chier.
162		Eh, donc nous on a troiiiis, 3.3. ... Faut que nous on y fasse euh
163		Y'a une partie correction et ?
164		Oui, "Recherche en classe".
165		Chuis stréssé par les caméras hein ...
166		Regarde les pas.
167		Y'a des micros et tout.
168		...
169		On a quoi nous ?
170		Alors vous, c'est tout simple, toutes les questions 3, sur les nombres de Fermat.
171		Pfou, c'est long. Putain mais y'en a long.
172		Non, c'est pas les plus longues celles-là.
173		Ouais ben enfin j'trouve.
174		...
175		Donc on a 1 sujet en fait. Ah mais non mais j'suis bête !
176		Là on est obligés de tourner l'image.

177		Donc là on peut y enl'ver ou pas ? Y déchirer ou ... ?
178		Nan nan, mais ...
179		Nan mais ça va être un peu...
180		j'ai les papiers.
182		Ben euh ...
181		Alors, pour la question 3.3.1, vous avez eu des soucis ou pas ?
183		Nan.
184		Baaaah, pfff, t'façon euh, ...
185		Moi j'ai fait tou... j'ai fait tourner leur algorithme hein, pour euh... pour savoir si c'était premier.
186		Ouais.
187		Ah nan moi j'ai pas fait comme ça.
188		...
189		Ben euh, c'pas grave, vas-y dis t'as fait comment ? 'fin on va euh...
190		[?] trois solutions.
191		Pour la trois, mais ...
192		Genre euh, 2., trois point, ... oui 3.1.1.
193		Mais ça, ça faut justifier. Moi aussi j'ai fait ça mais faut y justifier.
194		Ouais donc vous avez fait euh... z'avez fait comme moi, donc nous on a tous fait euh, on a écrit les nombres euh, comme ils disaient dans ... Parce que ils étaient de la forme "2 exposant 2n, + 1", on a regardé après s'ils étaient premiers ou pas.
195		Humhum.
196		...fallait préciser...
197		Par contre toi t'as fait autre chose.
198		Moi j'ai fait autre chose, j'ai eu un très bien, donc c'est p't'être que c'est pas si mauvais.
199		Bon bah alors j'pense qu'on va ... faire ta méthode hein, parce que si t'as eu très bien.
200		Ben en fait euh, moi, ..., moi j'ai pas r'pris c't'algorithme.
201		Voilà, Mathias, ça y est
202		3.1.1. Merde.
203		C'est beau Maxime.
204		Tu peux parler
205		C'est marqué quoi ?
206		Parce que là euh...
207		Le comment... est so... strictement
208		Le comment... est...
209		Demande lui il est juste derrière.
210		Intéressant.
211		Ouais c'est ptêtre le commentaire, non ?
212		Le comment. est ...
213		Les comment est ici intéressant. Le comment est ici intéressant. Ça veut dire qu'il faut expliquer le comment.
214		Je sais pas.
215		Le comment ?
216		Le pourquoi du comment.

217		C'est euh ...
218		Monsieur, on arrive pas à lire ce qui est marqué.
219		... Le comment est ici intéressant. Donc, en faisant tourner l'algorithme ...
220		D'accord. La, la manière
222		C'est que l'algorithme il commence à ...
221		Donc l'algorithme j'ai cru comprendre que c'était celui qui était là dedans, et... donc euh y compris pour 65537. Il avait tourné euh ?
223		Il avait tourné un moment mais il avait fini par donner une valeur. 65537.
224		La question c'était, est-ce que vous pourriez en lisant ça, c'est euh, quel algorithme avait été proposé, comment il avait été programmé, sur quelle calculatrice, hein, le temps qu'il avait mis ... et cetera. Ça, ça fait partie de, de l'intérêt de l'étude sur la calculatrice.
225		D'accord.
226		Merci.
227		Oui, donc moi j'ai fait tourner l'algorithme pour savoir si...
228		Et tu l'as fait ...
229		Et, c'est plein de fois ?
230		Bah, 5 fois. Parce que nous, en fait, vous avez fait quoi en gros ? ...
231		Parce que le principe de l'algorithme, j'sais pas si vous avez compris, c'est qu'il donne...
232		La décomposition en facteurs premiers.
233		Voilà. Un nombre premier sa seule décomposition c'est avec lui-même.
234		Ouais.
235		Humhum.
236		Donc j'ai fait tourner l'algorithme, et s'il me donnait que lui-même, c'est qu'il était premier.
237		Mais ça a du mettre longtemps pour le dernier, le gros là.
238		Oui.
239		Ouais c'est ça qu'j'ai..., c'est ça qu'j'ai pas... justement j'ai pas utilisé l'algorithme parce que j'avais pas compris. Justement ... Les 3.1.2 après, fin avant on trace un ...
240		Ben déjà F0, F1, F2 ils sont euh... ils sont dans la liste à la fin du bouquin.
241		Dans la liste de nombres premiers.
242		Ouais ouais ouais je sais. Justement, euh, vous vous avez fait comment pour trouver ? Vous avez fait tourner l'algorithme qu'on avait fait en cours ou pas ? Pour savoir s'ils étaient premiers ?
243		Ouais
244		Moi j'ai pas justifié hein.
245		Si, mais...
246		Ouais t'as fait comme ça.
247		Ouais mais on peut p't'être
248		Nan mais j'ai r'gardé dans l'repli du cahier.
249		Moi l'truc c'est en fait euh ...
250		Nan mais par contre pour euh, pour euh... 257 il y était ou pas ?
251		Le dernier il y était pas.
252		Nan il y était pas.
253		Et pis euh, 65537 il y était pas non plus ?
254		200 y était mais pas 65000.

255		Ah ben ouais.
256		Mais c'était pour quelle question ça ?
257		Pour la 3.1.1 toujours.
258		Moi c'était un peu par flemmardise, j'ai, j'me suis dit si jamais j'rentre le, l'algorithme dans l... 'fin si j'utilise l'algorithme dans la calculette, j'vais devoir tout, tout l'remarquer. Pour dire lequel j'ai utilisé.
259		Ouais mais bon.
260		J'me dis je vais utiliser celui qui est donné y va, y va, il peut aller. Donc on r'gardait, donc celui-là, ...
261		Donc par rapport à trois, F0 c'est trois hein
262		F0 c'est ...
263		On faisait la division euclidienne
264		3, 5, 17 et 257 et 50537 de mémoire.
265		Genre pour 3, on a pas besoin de, de préciser.
266		3, 5, 17 ça va.
267		Oui mais il faut bien justifier quand même, nan ?
268		Ben non, tu mets "on sait que 3 est premier" quand même.
269		Ben 3
270		Oui, euh, 17 aussi. Jusqu'à 17 on sait clairement qu'ils sont premiers.
271		Donc, et le ... faites quoi la ?
272		Ben on r'copie les F0, F1, F2, F3 et on ... Jusqu'à c'qui faut recopier... faire tourner l'algorithme.
274		D'accord.
275		Et euh, pour euh, ...
276		Donc, pour ... On dit qu'c'est évident pour 3, 5, 17 ?
277		...
278		On y prouve pas.
279		T'sais on avait une formule dans l'cours pour euh ...
280		Non, c'est euh ...
281		Prendre la racine du euh ...
282		Si si ouais...
283		Tester tous les nombres premiers inférieurs à la racine carrée de lui-même.
284		Ouais.
285		Ouais, mais ouais.
286		Pour 3 euh, le seul entier ...
287		euh ...
288		On peut dire qu'on a utilisé la table hein.
289		Ah non mais c'est, c'est bon, parce que regarde, ils montrent juste pour 257 et ...
290		Ouais
291		Donc c'est-à-dire les deux premiers.
292		Ouais, parce que les, les premiers c'est évident.
293		Ouais.
294		Ben, faut p'têtre juste rappeler pourquoi ils sont premiers hein.
295		Bah ...
296		La condition qui ... nombres premiers.
297		Ouais

298		En disant qu'ils sont divisibles que par eux-mêmes, par...
299		3, 5, 17, ...
300		...par un et eux-mêmes. Ils sont pas d'autre diviseur que ...
301		Ouais, c'est pas mal ça !
302		Comme ça on donne la condition et ...
303		On dit comment ...
304		...
305		Ah oui.
306		[?]
307		Alors, euh, ... poser tranquillement.
308		Ah non
310		
309		F0, F1, F2. Non mais c'est bon, y'a pas b'soin de ...
311		On rappelle la condition de nombres premiers. C'est divisible que par ...
312		Exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
313		Ouais.
314		Comment ?
315		Un nombre premier il est ... premier s'il a exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.
317		Faut pas oublier hein, le ...
316		De quoi ?
318		2 exposant 6, c'est combien ?
319		Euh : 2, 4, 8, 16, 32, soix ... Nan j'fais n'importe quoi là. 2, 4, 8, 16, 32, 64. Ah ouais si, 64.
320		Donc, euh, pourquoi on a trouvé 257 alors ?
321		2 exposant 64. Attends. Deux-cent cinq... Nan mais c'était 2 exposant exposant 3. Donc ça t'faisait deux exp ... C'est pas 2 x 3 hein !
322		Ah oui, certes.
323		C'est 2 exposant 3, et donc
324		Nan
325		2 exposant 2 exposant 3.
326		Donc ça fait 2 exposant 8.
327		Voilà.
328		Et 2 exposant 8, ça fait ... 128 ...
329		256, plus un, 257.
330		C'est ça.
331		Et euh ... tac tac tac tac tac. Après euh ...
332		On, peut, on peut dire les deux ...
333		Pour F3 et F4 on dit quoi ?
334		Comment ?
335		Pour F3 et F4, on dit quoi ?
336		Ba on dit que les premiers sont évidents, un ...
337		Oui mais ça c'est fait.
338		Ça c'est fait.
339		C'est bon vous avez déjà fait ?
340		Oui oui.

341		Et pis on ... on met les deux solutions qu'on a trouvées. Nous on a utilisé l'algorithme qu'on avait déjà programmé dans la calculatrice. C'était en ...
342		Tu avais fait ... tu, tu l'rentres ? Tu peux l'rent... tu l'as rentré toi ?
343		Le, la, le programme qu'on a fait en début d'année.
344		Oui, celui qu'on avait fait en début d'année.
345		Qui permet de trouver
346		...permet de donner la liste des diviseurs.
347		Hum hum.
348		P'têtre le rappeler nous.
349		Ouais parce que moi j'ai mis ça il m'a juste entouré il m'a dit "préciser lequel".
350		Ouais, moi aussi, "préciser l'algorithme".
351		Et toi [Ben ?]
352		Moi il m'a mis euh "expliquer comment".
353		D'accord ouais. Parce que alors. J'lui ai pas dit qu'j'avais utilisé celui-là, j'lui ai pas dit qu'j'avais utilisé ... [?]
354		[Pierre ?] on recopie, on recopie le programme ?
355		[?]
356		Alors là on dit que ...
357		Ah ouais mais après va falloir, ...
358		Attends j'ai toujours pas compris le, l'utilité de l'algorithme
359		En fait,
360		L'algorithme, tu rentres une valeur,
361		Ouais
362		Il prend un ... il prend p à partir de 2,
363		Hum hum
364		Y r'garde si ton nombre il divise par 2. 2 qui est le premier nombre premier.
365		Ouais, d'accord.
366		Si y trouve quelque chose, alors y, y, il affiche euh son ... Un un
367		Il affiche 2.
368		Ouais
369		Un diviseur premier.
370		Ben il affiche deux. Le coup d'après y repasse, y t'affiche euh... Si c'est divisible y te réaffiche une nouvelle fois deux.
371		Attends, parce que après, c'est n sur p ?
372		'tain j'ai pas suivi du début moi.
373		Oui d'accord le reste c'est ... oui d'accord.
374		Oui.
375		Voilà.
376		Tu prends la valeur du reste.
377		Donc le reste, euh
378		Après ...
379		Oui, d'accord, et après tu regardes si encore y'en a un, 'fin il est divisible euh le reste et tout
380		Et à chaque fois en fait tu divises par 2, jusqu'à ce que ça soit plus possible. A ce moment là tu divises par 3, ...
381		Ouais ok.

382		Après tu vas diviser par 4, mais en fait ça, si t'avais divisé, déjà divisé par 2 ça ...
384		Ça marche pas.
383		Ça... ça fonctionnera pas.
385		En fait euh ...
386		Pourquoi vous revenez à l'algorithme ? Parce que vous l'avez établi sur votre calculette pour ... ?
387		Parce qu'en fait euh, j'l'ai utilisé euh, pour montrer que F3 et F4 étaient euh ... oui c'est ça, que F3 et F4 étaient premiers. Au lieu d'avoir à réécrire à nouveau l'algorithme qu'on avait déjà fait j'ai réutilisé celui qui était donné.
388		D'accord. Et t'as bien marqué euh "j'ai programmé l'algorithme sur ma calculatrice et voilà les résultats que ..."
389		J'ai dit que j'avais fait tourner l'algorithme pour les valeurs et euh ... et j'ai euh ...
390		Oui mais faire tourner ça serait bien de dire quel euh logiciel t'as utilisé.
391		Oui, c'est ...
392		C'est ta calculatrice par exemple.
393		C'est ce qu'il m'avait dit... expliqué.
394		Hum.
395		C'est si important que ça d'expliquer avec quoi tu l'as fait tourner ?
396		[?] combien de temps il avait tourné. Il avait tourné pendant presque 10 minutes.
397		Ouais
398		Donc du coup pour les autres, t'as euh, t'es obligé de trouver autre chose.
399		Pour les autres ? Nan mais il avait tourné pour euh, pendant 10 minutes euh ...
400		Même pour l'plus grand ?
401		... que pour le plus grand.
402		D'accord.
403		Et heu, tu l'as rentré dans ta caculette du coup ?
404		Ouais ouais
405		...
406		Donc on utilise celui-là d'algorithme ?
407		Bah, sinon, on ...il faut r'copier l'algorithme dans euh ... que vous avez dans la calculatrice, ça s'fait aussi.
408		Et alors il faisait quoi lui alors ?
409		On faisait la division euclidienne de : de notre nombre, par un nombre de ...
410		Déjà, on allait que jusqu'à racine de ton nombre. Parce qu'on a b'soin de tester que les euh ...
411		Même pas non
412		Non, celui là il t'donnait la liste des diviseurs.
413		Ah oui.
414		Donc y lit ... 'fin. oui. Donc euh justement c'qu'on avait fait, on avait r'gardé les diviseurs... les diviseurs, pis si y'avait aut'chose que 1 et lui-même, on avait dit qu'ils étaient pas premiers. Et euh ... euh ...
415		Mais tu mets, tu mets juste ...

416		Parce que là, on faisait... Attends, si on reprend le ... l'ancien [liste ?] des diviseurs là, on r'prenait, on faisait la division euclidienne de not'nombre, par k, et qu'il commençait à 1, et on r'gardait si c'était ... divisible.
417		Ouais,donc ...
418		Donc après on en déduisait, on l'rentrait dans la liste, si c'était euh ... divisible.
419		Ouais ouais.
420		Et après on augmentait jusqu'à avoir ...
421		Jusqu'à retomber
422		Jusqu'à ce qu'on retrouve ton nombre.
423		C'est-à-dire qu'c'est euh ... la meilleure des solutions.
424		On met, hein, si tu mets juste "on utilise l'algorithme donné précédemment dans l'énoncé euh... on l'insère dans la calculette et on obtient ..."
425		On programme l'algorithme dans la calculatrice, on ...
426		Faut expliquer qu'est-ce qu'il nous donne aussi.
427		Qui nous donne ...
428		L'algorithme donné
429		Qui nous donnerait la décomposition en facteurs
430		De facteurs premiers.
431		Ouais c'est pas mal ça.
432		Ouais mais y vont nous dire "pourquoi vous utilisez celui-là ?"
433		Bah si la décomposition en facteurs premiers c'est logique.
434		Ouais.
435		...
436		On peut dire deux solutions.
437		... facteurs premiers ...
438		Tout à fait.
439		Euh ... La solution, euh ...
440		...
441		Donné dans le C ... rentrer ..
442		Pis faut faire une affiche après ?
443		Ouais, par contre là faut qu'on avance.
444		T'inquiète, moi j'dessine.
445		Ok
446		Oh, y'a pas vraiment d'dessin.
447		Rentrer l'algo donné dans l'énoncé ... qui donne ... décomposi .... 'fin donne les facteurs pr ... 'fin la décompostion en facteurs premiers.
448		La décomposition en facteurs premiers.
449		'fin ouais si.
450		Oui c'est ça.
451		Si.
452		Du coup tu l'as rentré toi aussi dans ta calculette ?
453		Nan, moi j'ai utilisé... la liste des diviseurs qu'on avait fait euh
454		D'accord. Et ça, ça euh pas été de problème ?
455		Si.
456		Encore plus long normalement que ...
457		Nan. 'fin je sais pas combien de temps ça avait mis, mais euh ...

458		Mais là c'est très bien, parce qu'en fait vous avez fait euh... Ça, le DM, c'est pas moi qui l'ai corrigé. Donc du coup comme vous faites référence à un algorithme, le correcteur lui il sait pas c'qu'on a
459		Ouais justement c'est ça. C'est ça que on ...
460		Ben oui il sait pas de quoi on parle. À la limite vous pouvez très bien dire euh, en euh, j'ai utilisé l'algorithme qui donne la liste de tous les diviseurs...
461		Et faut préciser ou pas ? Comment il fonctionne, faut préciser ou pas ?
462		Ben, le mieux pour être sur d'avoir les points au BAC, c'est éventuellement que tu recopies l'algorithme.
463		Ouais, mais en pensant que c'était vous qui corrigiez, 'fin on a mis, euh [on sort ?] l'algorithme qui donne la liste des diviseurs.
464		[?]
465		Voilà. Mais c'est vrai qu'au BAC, vous risquez de vous retrouver dans cette situation
466		Alors là faudrait plus préciser.
467		Voilà.
468		Euh ... c'qui donne deux ...
469		Ah !
470		Qu'est-ce que t'as fait ?
471		Nan, je ... j'regarde
472		Il a effacé une ligne !
473		ERROR MATH
474		Ah, ca va, c'est pas trop loin.
475		... rentrer l'algo donné dans l'énoncé, qui donne la décomposition...
476		DEL, F3
477		Ah tu fais ça, tu ...
478		... qui donne la décomposition en facteurs premiers. On l'réécrit ou pas ?
479		Nan.
480		... facteurs premiers, et après faut mettre la condition.
481		Oh, sur ... sur l'affiche faudra l'réécrire.
482		Oui.
483		Oui, et après faut mettre la condition p't'être.
484		Si ... alors. Si y'a des facteurs premiers autres que ...
485		1 et lui même.
486		Autre que lui-même. Parce que 1 il y sera pas. Parce qu'on commence à p égale ...
487		Ouais on commence à 2.
488		Aaah ...
489		Donc on peut p't'être mettre la condition, et là on dit ...
490		Si, ...
491		[blagues/appartés inaudibles et rires]
492		Euh ... des facteurs premiers autres ...
493		Facteurs ...
494		Le facteur il est passé, pirouette euh...
495		que...
496		Le nombre...
497		J'suppose que pour euh... Le, j'suis passé à la question d'après hein.

498		Que quoi ?
499		Si on obtient des facteurs premiers, 'fin, si on obtient des facteurs premiers autres que le nombre lui-même, on en déduit ...
500		Divisé par 3 on en déduit
501		On est tous d'accord ?
502		Ben justement non
503		On en déduit ...
504		... qu'il n'est pas premier.
505		Tu penses ?
506		Ouais.
507		Donc ça c'était la première solution mais on peut p't'être la deuxième solution.
508		Non !
509		Ah ?
510		Bah si.
511		Ben vite fait.
512		On expliquera hein, mais ...
513		Attends, on va mettre rappel heu... Première solution, deuxième.
514		Les SSI là, partisans du moindre effort
515		Ouais c'est ça.
516		Ouais j'vois ça.
517		Une table de SSI complète.
518		Ben t'façon y'a euh ...
519		Première solution ...
521		À gauche aussi ils sont SSI complet. Full
520		Ben en même temps, hein.
522		Non, là c'est SVT. Ah non, Si ?
523		Deuxième solution : utilisation algo ... donne liste des diviseurs...
524		Quoi ?
525		...
526		Euh, si on obtient ...
527		[rires]
528		... autres que 1 et lui-même.
529		Lui sa présentation elle est déjà deux fois mieux qu'la notre.
530		... alors ...
531		Vous avez eu combien en présentation ?
532		Hein ?
533		Vous avez eu combien en présensation ?
534		1,5, et toi ?
535		Y'a des points d'présentation ?
536		Si t'as eu 1,5 ...
537		1 et demi.
538		J'ai eu un point. Perdu 0,5 pour l'orthographe à tous les coups.
539		Euh... Alors pas premier.
540		Eh t'écris bien hein !
541		Euh, bien heu, pfff
542		Ah nan moi j'trouve qu'c'est écrit mal.

543		Franchement ça va hein !
544		C'est négligé comme travail hein.
545		Allez go ! Ensuite, donc on a ça. Vérifier que F5 est divisible par 641.
546		On a tous fait pareil ?
547		On a calculé F5 et on a divisé par cent ... par 641 ?
548		Ça c'est bon ouais.
549		Ben on est tous d'accord ?
550		On a calculé F5, qui est 2 exposant 2 exposant cinq plus 1. Pis ça nous donne heu, pff ?
551		Non, pas deux exposant 5.
552		Si si si.
553		Ça nous donne combien ?
554		2 exposant 32 +1, et pis là heu,
555		Hé l'amigo !
556		J'ai plus en tête.
557		Ça nous donne 4294967297.
558		Non, parce que j'vais t'effacer un truc. J'prends la mienne de calculette.
559		Ah mais t'as pas ça ?
560		2 exposant 2 exposant, combien, cinq ?
561		Hein ?
562		La première fois j'avais pas descendu d'deux crans en fait.
563		Ah oui.
564		De quoi ?
565		Donc j'rajoutais le 1 heu ...
566		À l'exposant.
567		C'est pour ça que j'trouvais jamais rien.
568		D'accord. Donc ça, divisible...
569		Divisible par ...
570		Attends 'tends, on va l'noter p't'être.
571		Heu, t'es sur de toi là ?
572		Ben j'y dis pas à l'oral parce que l'oral ...
573		Moi j'l'ai s'tu veux.
574		Alors attends.
575		3.3.3, ça fait du 4 milliards. 4 294 967 297
576		Et là tu mets "égal 641 fois ...
577		Six cent, non, 6 700 417.
578		Si on l'divise par 641, on trouve un nombre entier. 6 700 417.
579		Plus zér ... Moi j'ai précisé plus zéro, pour bien dire qu'y'avait pas d'reste.
580		Ça dépasse pas les capacités d'la calculatrice ?
581		Ben apparemment non.
582		6 700 417. Donc ça, euh donc on peut dire qu'c'est...
583		Ca veut dire que 6 700 417 ...
584		... un nombre entier, donc pas de reste.
585		Pas de reste ...
586		Pas de reste.
587		... dans le division euclidienne.
588		'fin le reste c'est zéro.

589		Ouais.
590		Ouais.
591		Est-ce que faut dire qu'il y pas pas de reste ou pas ?
592		Pas de reste dans la division euclidienne.
593		Euclidienne ouais.
594		Ouais ouais.
595		Donc, entier, pas de reste dans la division euclidienne.
596		Donc euh ... F5 divisible par 641.
597		Et voilà. On va faire une super affiche.
598		Pour la division c'est facile. Tu marques le grand nombre, que tu, tu traces le trait à 640. Tu marques et tu marques 0 en bas.
599		Euh ... Donc c'est un euh, multiple. C'est divisible.
600		641 multiple.
601		On peut l'faire dans ce sens hein.
602		Ça marche aussi.
603		Ça marche dans ce sens.
604		Hopla. Ensuite, pour le euh, 3.2.
605		Non c'est l'inverse.
606		affiche.
607		C'est F5 qui est un multiple.
608		Oui excuse moi.
609		Non en fait, j'ai fait la double inversion dans ma tête, et non.
610		Allez on va passer à [...]
611		...
612		Bon, pour l'dernier, la phrase elle était un peu incompréhensible.
613		Ben là on va pas ... on va pas vous être grandement utiles.
614		Heu, attends. Pour reprendre, 'faut ... faut retraduire la phrase en fait.
615		Non, non, j'veux bien t'montrer mon raisonnement quand même.
616		Alors, un polygone a ...
617		Si ça t'intéresse, regarde ...
618		Ah, c'est un peu ... non mais si c'est intéressant quand même...
619		Allez, donc, il faut reprendre la phrase en fait .
620		Quelle phrase ?
621		Un polygone à n côtés est constructible à la règle
622		C'est ou ça ?
623		Ben c'est l'dernier.
624		C'est l'dernier.
625		Il est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts
626		Voilà
627		Éventuellement aucun.
628		La difficulté c'est nombre fini de nombres.
629		Oui.
630		Nombre fini de nombres.
631		Ça j'ai ...
632		Ça c'est incaptable.

633		Nombre fini de nombres premiers.
634		Parce que en fait ils veulent dire un nombre fini de ...nombres de Fermat multipliés entre eux.
635		Pour ... Pour moi, en fait au départ c'était des nombres de Fermat qui sont premiers y'en a 5
636		1, 2. oui, ben faut savoir. 1, 2, 3, 4, 5.
637		Et du coup y'en manquait. Il manquait 17 j'crois. Ou quelque chose comme ça. Et du coup j'ai fait euh ... un p'tit peu différemment.
638		Moi j'ai, j'ai pas ...
639		On a réfléchi avec Romain, on a pris une liste de nombres de Fermat, on a pris la liste des nombres de Fermat premiers, on a pris la liste des ...
640		Comment tu les connais ?
641		Et ben, les nombres de Fermat premiers y'a F0, F1, F2, F3
642		Et F4.
643		Et par contre, ...
644		F4 c'est pas possible, parce que ça fait 65 000, on est au d'sus de 25. Et on a montré ...
645		Pourquoi il m'a mis "et F5".
646		Pourquoi il m'a mis F5. Et F5 ?
647		... pété un câble !
648		Attends, 'tends. Si on dit que F5 est divisible par 641, comment on peut ... ?
649		Si F5 est divisible par 641, il est pas premier ? Donc pourquoi il m'a demandé F5.
650		Ben moi il m'en a même pas parlé.
651		P't'être que ça marchait, p't'être que ça marchait ...
652		Il m'a mis oui, et il m'a mis 1,5.
653		Il t'a mis combien toi ?
654		Chais pas. Non mais les points j'm'en fous, 'fin ... c'est pas une question de points, c'est une question de pourquoi il m'a pas noté F5.
655		Deux. Deux.
656		...
657		Ah mais parce que t'as fait la justification nombre par nombre !
658		Oui
659		D'accord !
660		Ouais j'ai fait...
661		Moi j'ai procédé à l'envers en fait.
662		Ben euh ... soit puisqu'on dit que ...
663		[Tout le monde nous entend bien mentir ? ? ?]
664		Fallait rajouter F5 n'est pas euh premier, car il est divisible par 5.
665		Alors, comment vous comprenez exactement la question ?
666		Euh, c'est un tout p'tit peu incompréhensible.
667		Non, montrer que F0 'fin, non, pis ... Non c'était pour la 3.2.
668	E19	On a pas trop a pas trop compris ce que c'était qu'un nombre fini de nombres premiers de Fermat.
669	P	Quand tu as le si et seulement si, ...
670	E19	Hum hum
671	P	tu dois aussi dire que quand ça ça marche pas, ça ça marche pas non plus.

672		Ah ouais c'est [?]
673		'fin c'est le ... ouais.
674		...
675		En fait moi ouais, c'que j'disais c'est que j'ai procédé à l'envers
676		Hum hum
677		Et j'ai ... Attends j't'explique après comment j'ai fait. Vas-y vas-y, fais toi.
678		Au lieu d'prendre tous les nombres, de euh de 3 à 25 et de tester, j'ai, j'me, j'me suis d'mandé toutes les possibilités possibles pour trouver
679		Ouais moi aussi, j'ai fait la même chose hein.
680		Ah.
681		'fin j'ai dit, j'les ai décomposés, j'ai mis, j'ai mis 'fin ... j'ai mis deux cas. Quand ils étaient 2 exposant a fois F. Et pis le cas où c'est deux exposant a puisqu'on peut dire qu'c'était aucun aussi. On pouvait ne ne pas multiplier de euh de nombre de Fermat si on voulait.
682		Donc ça a b'soin d'être qu'une puissance de 2 ?
683		J'ai mis qu'une puissance de d... Donc je, j'ai mis toutes les puissances de, une fois avoir fait c'premier tri, j'ai euh bah ... j'ai cherché ... tac tac tac comment j'avais fait ? Et après j'ai mis qu'ça devait être divisible par ben seulement les nombres premiers de Fermat. Et s'ils étaient pas divisibles par ces nombres premiers de Fermat, c'était obligé que euh ... Ils peuvent pas s'écrire d'la euh par une puissance de deux et, un nombre premier de Fermat. S'ils sont pas divisibles par ces nombres de Fermat, ce nombre premier de Fermat, ben ils peuvent pas être euh ...
684		Ouais. Ouais, j'comprends c'que t'as fait.
685		Et toi fais vois, t'as fait comment alors ?
686		Moi j'ai, j'suis parti dans les puissances de 2. Donc j'ai mis le les le p'tit nombre, enfin le les p'tites puissances de deux, jusqu'à deux exposant quatre.
687		Hum hum
688		Parce que deux exposant cinq on est au-dessus de 25.
689		Hum.
690		Et après j'ai raj euh j'ai mis le plus grand nombre possible de nombres de Fermat, donc j'ai multiplié par F0 et F1, par que F0, par que F1, par F2. Et en fait en évoluant comme ça, du coup je les ai bien trouvés.
691		D'accord. J'pense qu'on va finir l'affiche.
692		Euh, alors on peut p't'être expliquer, vous deux est-ce que vous avez compris le euh la question.
693		D'accord.
694		Sincèrement.
695		Ouais.
696		En gros, attends. Pour, pour pour bien comprendre, j'pense qu'il faut retranscrire ça par une équation, faut retranscrire la, la condition.
697		La phrase sous une expression ...
698		La phrase voilà, c'est ça. Sous une explication mathématique, j'pense c'est plus compréhensible.
699		Ouais.

700		Donc, si on r'prend mot à mot, c'est : un polygone à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts (éventuellement aucun). Donc déjà c'est l'produit d'une puissance de deux. C'est obligé qu'il y ait la puissance de deux.
701		Ouais.
702		Ouais vas y sers toi. Donc en gros, on fait n égal deux exposant k
703		Mouais
704		est égal à deux exposant k, on a mis k ouais, k
705		Hum hum.
706		Ça d'accord.
707		d'une puissance de deux, et d'un nombre premier. Et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat. Donc c'est ça le nombre fini de nombres premiers, ça je, on avait pas compris, au début.
708		... entre F0 et F3 non ?
709		La difficulté c'est que ...
710		Et F4.
711		Là, ça on peut pas l'mettre sous forme d'une euh d'une seule expression mathématique.
712		Et F3 aussi.
713		T'as raison ouais.
714		Et pourquoi ?
715		On est obligé de ...
716		Hein ?
717		Pourquoi F3 ? Pourquoi tu prends pas le euh le cas de F4 ?
718		Euh ... F, F3 il vaut 254, c'est...
719		F4 c'est 257 donc c'est obligé que ça soit pas ça.
720		Donc déjà ça restreint aux trois, trois ...
721		Aux trois premiers.
722		Aux trois premiers.
723		Ouais.
724		Donc ça nous donne, ben t'sais on peut mettre sous une seule équation en fait.
725		Ah ouais.
726		Non, faut ... faut faire deux cas en fait.
727		Ben non.
728		Non, mais y'a plein de cas.
729		Ah bon ?
730		Oui. Ouais.
731		Tu pourrais avoir euh F1, F2 fois F3 fois F4 ...
732		Oui mais justement, là faudrait mettre plus... là, plus un nombre premier ou plus deux nombres premiers. La multiplication de deux nombres premiers.
733		Ben plus, plus la multiplication de ...
734		... chais pas quoi. Nan y'a un truc pour dire ça.
735		La somme. Nan ?
736		Pour tout ou chais pas quoi là.
737		Ah non, c'est ouais, c'est l'machin là.
738		Le A à l'envers.

739		Ouais.
740		Non.
741		Non, tu peux pas mettre un truc là.
742		J'veux vous montrer un truc là, comment, ben c'était p'têtre pas là..
743		Mais si l'machin là, nan, c'est pas ça ?
744		Non mais ça.
745		Oui, ça c'est le pour tout mais c'est pas ça que j'voulais dire.
746		Ok.
747		Le E à l'envers.
748		Le point d'exclamation. Non non rien à voir.
749		Pour tout, c'est juste pour dire euh ...
750		Ouais, mais genre, elle avait montré un truc au tableau. Genre, le, pa, pareil que sigma, mais pour la multiplication.
751		...
752		C'est pas factoriel là ?
753		Ben n factoriel avec le point d'exclamation.
754		Factoriel c'est pas ça, factoriel c'est tu fais 1x2x3x4x5.
755		Ah ouais.
756		Ça exprime pas toutes les possibilités ?
757		Non parce que nous on cherche euh une puissance de deux, on change pas euh
758		Après ouais.
759		quel euh n'importe quel nombre. On cherche une puissance de deux, avec éventuellement un ou des nombres euh
760		Moi je l'aurais mis celle-là. Avec les nombres de Fermat, pour les mettre tous euh. Et après il suffit d'en mettre qu'un. Ah mais non ça marche pas.
761		Non mais là, à mon avis faut au moins faire deux distinctions. Si c'est qu'une puissance de deux parce que on dit que on peut ne pas de, de nombre premier. Et le deuxième c'est : la multi plus. 'fin, si tu multiplies encore par un ou des nombres premiers de Fermat.
762		Hum hum
763		Donc, y'a p't'être les deux grandes distinctions après faut dire on peut avoir un deux ou autant qu'on veut. ... OK ?
764		...toutes les possibilités c'est trop long ?
765		Ben justement on peut p't'être vérifier les cas, et dire toutes les puissances de deux, tac on les bloque... Ouais ?
766		Euh, faut qu'on passe à l'affiche parce que on a passé quasiment une demi-heure.
767		Madame, euh, on passe quand pour l'affiche ?
768		Allez-y.
769		Maintenant euh ?
770		Ah ben ...
771		Enfin plutôt il nous reste combien de temps en fait ?
772		Il nous reste combien de temps en fait ? Parce que on discute mais...
773		Rédigez déjà ce que vous avez fait, j'pense là.
774		Ouais, d'accord.
775		Bon, une fois qu'on avait ç... ben au pire on reprendra...
776		Ouais

777		Ben on va se faire piéger par le temps mais on verra.
778		Alors, z'avez des crayons ou pas ?
779		Et ben, là.
780		Mets toi comme ça, ça ira bien.
781		Qui c'est, t'écris bien ?
782		Allez vas-y.
783		Ben vas-y écris alors. J'te demande si t'écris bien.
784		Tu veux mettre un titre ? Vas-y mets un titre euh.
785		Le titre de la partie 3 là, non ?
786		On s'appelle groupe 5.
787		Groupe 5, et pis chais pas, on va mettre ...
788		Mets Gp5 ici.
789		Mais ça on réécrit non ? Compléments sur les polygones
790		Il est ou l'machin là heu ?
791		...
792		Ouais, donc.
793		Vas-y chante Maxime.
794		Ouais, donc alors, partie 3. Partie 3 et ...
795		Ah chaud !
796		Mets y en rouge le titre.
797		Non non on écrira la suite en rouge.
798		Mais non après ...
799		On soulignera en rouge j'veux dire.
800		Partie 3.
801		Tu vas recommencer Maxime hein.
802		...
803		Pari ?
804		Pari.
805		Y'a moyen de corriger ouais.
806		T'inquiète, commence par là.
807		Un p'tit coup de blanc...
808		Mais j'ai pas d'blanc
809		Aha mon pauvre !
810		Ouais faudrait du blanc t'sais en ...
811		Boh, c'pas grave !
812		Ca s'verra pas, de loin.
813		Et pis tu veux écrire là euh, en rouge parce qu'il écrira p't'être mieux.
814		"Compléments"
815		Ah merde ! putain quel con !
816		Ah ah
817		Qu'est-ce que t'as fait ?
818		J'ai cru qu'c'était heu, un postillon.
819		Vas-y écris p't'être heu ...
820		J'écris quoi ?
821		Compléments, tu marques, compléments ça ?
822		Oh non, non non on marque pas ça.
823		Non, tu mets que l'nom, que polygones réguliers, j'pense que ça

824		On n'a qu'une affiche hein !
825		Ok, ouais c'est vrai.
826		Donc, on marque...
827		P't'être écrire 3.1.1. 3.1.
828		3.1
829		Et vous êtes surs qu'on fait un truc euh bien structuré ou on fait un truc heu
830		Faut qu'ça ...
831		Genre carte mentale un peu non ?
832		Faut qu'ça explose de partout !
833		Faut qu'ce soit compréhensible
834		Genre on va faire d'l'abstrait !
835		Mais déjà faudrait diviser en deux parties pour les deux euh deux parties qu'on a !
836		Hop, on mettra ...
837		En diagonale comme ça on s'fait genre la partie ... 3.1, 3.2
838		Ouais
839		Sachant qu'la deuxième elle prend beaucoup d'place.
840		Ouais d'accord, donc on fait plutôt comme ça.
841		Tiens, ...
842		T'as pas une règle plus grande ?
843		Ok, on fait on va se euh
844		T'façon t'as pas d'règle toi, elle est cassée la tienne.
845		On va [s'emméler ? en règle] les gars !
846		Nan, franchement. Ben on verra après au pire.
847		Mais au pire, tu traces à main levée
848		Ouais, tu peux pas tracer à main levée ?
849		Ou tu fais un zigzag quoi !
850		Tu veux que j'trace de quoi à quoi ?
851		Tu fais un éclair !
852		Ho, on écrit et on tracera après !
853		Ouais.
854		Alors là, tu mets 3.1.
855		3.1
856		Enfin un peu plus en bas ouais, qu'ça soit assez gros.
857		Parce que ? Tu veux pas y mettre plus haut ?
858		Boarf.
859		Marque en rouge, marque en rouge
860		Change de stylo !
861		Marque tout en rouge.
862		En espérant qu'il marche.
863		Ouais, ça va.
864		Allez !
865		Allez go ! Alors, les nombres...
866		On marque pas nos noms ?
867		Les nombres de Fermat
868		D'jà on peut p't'être mettre la, la condition.

869		Tu marquera groupe 5 en bas.
870		La condition.
871		Tu peux p't'être même mettre euh Nombre de Fermat, deux petits point, et pis là la condition.
872		Là j'mets ? nan ! Ah mais tu veux dire, tu veux pas qu'j'mette le titre ?
873		Non, non non !
874		Bon, bah, on l'met là.
875		Non, p't'être écris en bleu, nombre de Fermat. Pis là on met la condition en rouge.
876		pfoua !
877		Le bleu il est mort.
878		Non mais on va pas tout écrire en rouge.
879		Ah ben si !
880		Non non non attends, j'vais faire une feinte attends regarde !
881		On a une pénurie de stylo !
882		Maxime il va faire une feinte !
883		...
884		Il va être filmé en gros plan.
885		Merci.
886		...
887		On a, on a deux rouges. Non, demande un bleu.
888		Merci, merci beaucoup.
889		Mets "nombre de Fermat :"
890		'tain j'espère que j'vais écrire droit hein !
891		Attends on va se servir de ça de règle.
892		P'tain j'avais oublié qu'on était filmé !
893		Nombre de Fermat !
894		Putaiiin !
895		Ça va t'écris pas trop mal.
896		Nombre de Fermat, Fn tu mets.
897		De quoi ?
898		De Fermat.
899		De Fermat, et après tu mets Fn... Avec un F majuscule.
900		Et là tu marques Fn, comme ça on met le rang même, parce que faut p't'être euh dire le, le rang du nombre
901		Ouais, Fn
902		Deux p'tits points, pis là tu mets en rouge
903		Ça c'est la condition.
904		Ça ça va être... ça va être ficelé ...
905		Euh, exposant 2 exposant n.
906		Non il est pas là.
907		Deux exposant deux exposant n.
908		...
909		Exposant, c'est un exposant !
910		C'est pas grave !
911		Regarde là c'qui est marqué.

912		Non mais il est aussi en exposant. IL est plus petit. Il est écrit tout p'tit en haut.
913		Non mais raccourcis lui les pattes.
914		Ho mais tiens, ...
915		Voilà.
916		Sur ... Plus 1. Et le plus 1 tu le mets bien dans l'axe là.
917		Plus 1. OK
918		Donc maintenant. Ouais, mine de rien on a pris beaucoup d'place pour écrire un p'tit truc.
919		Au pire on f'ra derrière ensuite.
920		Ouais ben ouais.
921		Attends, est-ce que ça traverse ?
922		Ouais ça va.
923		Mathieu ... doué !
924		Et faudrait p't'être, tu vois genre heu ... tac tac tac, donc on peut p't'être mettre ... F0
925		Faut passer sur la suite, on aura jamais l'temps sinon.
926		Allez !
927		On marque F0 égal ...
928		Ben non, au pire tu l'marques direct
929		Non,
930		Et après on dit... Voilà.
931		Euh ... F0
932		Égal.
933		On va p't'etre même mettre un égal.
934		Non, euh parce que c'est...
935		J'mets à la suite hein.
936		Euh, ouais ou dessous. Dessous.
937		On sait que trois est ...
938		Mais y'aura jamais assez de place !
939		Mais comme ça on fera une ecal, une accolade, et pour dire, euh voilà.
940		On sait que 3 n'est pas premier
941		On f'ra une accolade comme ça on fera les [?]
942		5, F2...
943		28 !
944		Égal à 17.
945		F3, un peu, un peu plus en dessous. F3 257, on va, ouais ben vas-y c'pas grave.
946		Ouais
947		Ouais vas-y c'est pas grave.
948		Tu l'as fait sur les trois l'accolade là ?
949		Ouais.
950		est égal à 257 et pis F4
951		65 537
952		Combien ?
953		65 537
954		542 ?

955		537...
956		Ah Timothée ! Ah ha
957		Tac, alors.
958		Donc maintenant tu fais une accolade là.
959		Eh, qui c'est qui m'fait ça ?
960		Ah, j'sais bien faire les accolades moi
961		J'suis assez ... Non, si tu veux j'sais très bien les faire.
962		Non, arrêteuh !
963		Non npn. Non mais si tu t'loupes mon gars.
964		Meuh non.
965		Nickel.
966		Celle-là elle est dix fois plus longue que celle-là !
967		Ah c'est pas grave, c'est pas grave.
968		Et pour les deux ?
969		Donc là euh ...
970		Tu mets : on sait que ces nombres sont premiers
971		Nombres premiers évidents tu mets.
972		Ouais.
973		Car... Eh faut mettre aussi la condition qu'est-ce qu'un nombre premier aussi.
974		Faut l'dire là-dessus ou pas ?
975		De quoi ?
976		Qu'est-ce qu'un nombre premier ?
977		Boarf, ils le savent
978		Alors, vous n'êtes pas obligés, vous allez parler en même temps.
979		D'accord.
980		Donc peut-être que si y'a des questions là-dessus... Là c'est pareil vous avez pas détaillé l'calcul, y'en a qui ont les, qui ont calculé le nombre de Fermat. Faudrait p't'être expliquer sur un calcul comment vous l'avez fait mais c'est pas la peine de l'écrire.
981		Ben on a l'a marqué là, juste au dessous.
982		Ah ouais. On est obligés d'le dire qu'on a ... ?
983		Ben si vous avez la question "moi j'ai pas trouvé 5" euh, va falloir expliquer, oui.
984		Bah...
985		On peut pas dire que le 1 on l'ajoute heu
986		Les puissances de 2, ça s'fait d'tête ça.
987		Tu prends ta calculette pis c'est tout.
988		Oui la calculette mais faut, faut penser que le 1 n'est pas là, il est là.
989		Ben oui.
990		Il faut bien penser que c'est 2 à la puissance n, qu'il y a dans la puissance.
991		Oh, c'est bon.
992		Il a pas d'blanc.
993		Ça s'voit pas, l'affiche est blanche.
994		Bah, de loin ...
995		Et donc voilà. Premier, évident.
996		Car nombre premier évident, et là tu peux mettre pour le F3 F4, ...

997		On est obligé d'remarquer l'algorithme hein, si on l'utilise.
998		On peut mettre deux solutions proposées là. Tu fais une accolade et deux solutions proposées.
999		Ben tiens tu r'copies ça.
1000		Non mais ... pas celui-là si ?
1001		Si si.
1002		Non mais tu mets deux solutions proposées.
1003		Si.
1004		Ben
1005		Non au pire deux solutions proposées, un algorithme qui donne la liste des diviseurs, et un, et l'algorithme de celui-là. Et après si on t'pose des questions on expliquera.
1006		Donc on fait les deux ici ?
1007		Ouais, ben tu mets deux s... Bah là tu peux p't'être faire une accolade : deux solutions proposées.
1008		Ah les copines !
1009		Non mais on r'copie [deux fois l'même ?]... On dit qu'on utilise celui-là et pis si ils posent des questions ben voilà
1010		Deux solutions ...
1011		Vous êtes au point sur comment ils fonctionnent.
1012		Attends j'regarde.
1013		sont proposées.
1014		Et là, on va faire une deux
1015		Eh faut garder d'la place pour la question, pour la question 2 hein.
1016		On s'met derrière.
1017		Non mais là y'a encore d'la place.
1018		Ca veut dire quoi si elle est
1019		Euh ça c'est quand contrôle lisse c'est quand euh
1021		?
1020		?
1022		Donc là tac, maintenant on va faire hein ...
1023		Tiens, sors ta règle de 3 centimètres.
1024		Là.
1025		Tu mets euh première solution.
1026		Là tu mets un 1 entouré d'un euh entouré.
1027		Tu veux qu'je souligne quoi ?
1028		Hein ? non rien, tu mets 1 entouré.
1029		Non là, là au milieu là.
1030		1, 2 ouais.
1031		1, et pis 2.
1032		Ah y'en a qu'on le sens de l'esthétique hein !
1033		Attends, t'es pas au milieu là !
1034		Chef de chantier !
1035		Tu veux ou ?
1036		Par là.
1037		Mais non mais fais genre pas droit, un éclair, tu vois un éclair tsch tsch
1038		Un éclair, un zig-zag, tu vois faut qu'ça soit personnel un peu.

1039		Ah, c'est beau ! Si c'était au milieu ça serait pas mal, ...
1040		C'est joli.
1041		Mais c'est pas grave. Bon allez et pis maintenant 2. Et pis euh, non non non.
1042		Au milieu au milieu.
1043		Et pis là euh ...
1044		Ah d'accord ! J'savais p... Moi j 'croyais qu'vous qu'vous vouliez vous caler au milieu par rapport à ce truc là.
1045		Ah non non non.
1046		Donc là faut mettre euh ... on met laquelle en première ? La tienne ?
1047		Oh y'a pas d'importance hein.
1048		Vas-y quel algorithme ?
1049		Ben y'a le ... algorithme donné euh ...
1050		Ouais bon [... ?] recopier alors.
1051		Algorithme non ? J'mets juste algorithme ?
1052		Ouais non. Tu mets algo. Algo euh ...
1053		'fin mets le plus là.
1054		Algo. Figure deux tu mets.
1055		Algo filgure, figure 2.
1056		Filgule 2. Énorme.
1057		Algobox.
1058		Algo. Et tu mets fig. 2.
1059		Et pis là tu mets algo. Et là tu mets dans l'autre sens, tu mets algo donnant ...
1060		Algo liste.
1061		Algo liste div.
1062		Ouais
1063		Pis on expliquera.
1064		Faudrait expliquer pourquoi, parce que ...
1065		Bon, on est 4, y'a trois questions, j'vous laisse faire ?
1066		Euh ... quoi ? Algo ?
1067		On est quatre y'a trois questions une deux trois ...
1068		Vous l'appelez comment ? Vous voulez l'appeler comment celui-là ?
1069		Liste diviseurs.
1070		Euh ... Algo liste diviseurs.
1071		Ou liste div. ou un truc comme ça.
1072		...
1073		Bah ...
1074		Euh, j'ferais bien un p'tite fleur ici moi.
1075		Ben vas-y, c'est libre d'expression.
1076		Tu la f'ras sur l'tableau à côté.
1077		Chais pas si c'est très... très facile à lire mais ...
1078		Alors ... ah non à l'envers c'est la galère.
1079		Mais putain tu me dis de mettre ça là.
1080		Dans l'autre sens. Marquer en biais comme ça.
1081		Ah ha
1082		À un moment donné les gars, la communication euh ...

1083		C'est pas grave
1084		Vincent tu peux nous faire un mouton s'te plaît !
1085		Ah c'est presque lisible.
1086		Ben c'est bon ! P'tain un peu d'bon sens !
1087		Ah ha
1088		Fallait noter comme ça !
1089		Hé il m'dit dans l'autre sens, moi j[...]
1090		C'est pas grave, c'est pas bien grave !
1091		Et pis on on va refaire des p'tites vaguelettes là, et pis répondre à la question.
1092		Tu veux pas m'faire des éclairs s'te plaît ?
1093		Mais si fais des éclairs !
1094		On va faire des montagnes, euh ...
1095		Libre expression !
1096		Mais fais genre euh tsch tsch tsch ...
1097		Ben fais le vas-y !
1098		Nan mais arrête j'vais m'merder après.
1099		Ouais ben ...
1100		Ouais mais ça, on voit le futur ingénieur en fait. Fais ci, fais ça, ...
1101		Oh la la ! C'est beau non ? On dirait des dents de scie !
1102		C'est une usine !
1103		Elles sont pas régulières !
1104		Ben excuse moi euh.
1105		A vue d'œil j'dirais une période de euh pi sur 2.
1106		On en déduit la fréquence. Non.
1107		On en déduit la fréquence. Et on parle plus, même pas d'ça.
1108		Et là faut qu'on fasse la dernière question.
1109		Donc là au pire on met juste le calcul.
1110		...
1111		Et ça va, moi j'l'ai l'calcul de F5.
1112		Au pire tu mets euh ...
1113		F5 égal
1114		Avec 3.1, 3.1.2
1115		Si vaut p't'être mettre au moins un calcul.
1116		Tu mets F5, deux p'tits points.
1117		3.1.2 faut mettre déjà.
1118		Ou on met directement F5 égal hein !
1119		Nan nan, on a ... on n'a pas fait un calcul encore.
1120		Marque 3.1.2.
1121		Attends on a pas marqué ... si ?
1122		Ouais, faut réduire le texte. On f'ra des fleurs après.
1123		Donc là vas-y tiens.
1124		Oh Vincent, viens nous faire un mouton.
1125		Euh ... 3.2.
1126		3.1.2.
1127		Dommage qu'il y ait pas Axel parce que ...
1128		Euh ... Ouais c'est ça.

1129		Même si on n'a pas mis 3.1.1 mais c'pas grave
1130		Et là on, on mettra juste ce cas de source.
1131		On explique... enfin tu mets F5 deux p'tits points.
1132		F5 égal ?
1133		F5 égal. Ouais, ouais si ouais.
1134		2 exposant deux exposant deux exposant cinq.
1135		J'vous fais l'calcul ou pas ?
1136		Comment on fait l'calcul là ?
1137		J'l'ai c'est bon.
1138		...
1139		Est égal à ... ben quatre milliards... quatre plus loin, deux centre quatre vingt quatorze ...
1140		C'est bon j'l'ai.
1141		Personne connaît mes talents de chanteur, j'pense qu'il est tant que j'fasse le premier pas.
1142		J'ai envie d'faire un rond tu vois, genre un truc, un escargot
1143		Super idée.
1144		T'as un micro
1145		Ouais justement c'est ce que j'étais en train de ...
1146		Chante.
1147		Et donc après, on divise le tout ... 'fin... on peut pas mettre comme la calculatrice là ? Ans ?
1148		La réponse donnée ici par euh
1149		Eh ben tu mets F5 sur six-cent tre... six cent quarante ...
1150		Ah ben oui oui
1151		?
1152		Si tu l'mets
1153		Ans, Tu mets Ans divisé par
1154		On met F5.
1155		On met F5 ouais c'est pareil.
1156		F5 divisé par ...
1157		Vas-y, mets, mets groupe 5, si si là.
1158		Hein ?
1159		En haut, groupe 5, si si.
1160		Si si la famille.
1161		J'aurais même pas fait tout ça, j'aurais mis directement divisé par 641, et j'aurais mis directement le résultat de la ligne d'en dessous.
1162		Ouais, mais c'est pas ..
1163		Parce que comme ça y'avait le calcul de [...]
1164		Et là on met 417.
1165		Et là faudrait mettre justement on expliquera ...
1166		C'est bon vous êtes prêts ?
1167		'tain qu'est-ce que c'est bizarre de te voir travailler.
1168		De quoi ?
1169		Ça fait bizarre de te voir travailler.
1170		Et là faudrait mettre, marquer premier, tu peut l'marquer ou pas ?
1171		Mais premier ...

1172		En rouge, en rouge.
1173		J'vais l'faire.
1174		Nan nan.
1175		Allez.
1176		Tu mets une p'tite flèche vers le haut et tu mets premier.
1177		Euh, non !
1178		Entier entier. Entier pardon.
1179		Là, là, entier ici.
1180		Ap... tu mets appartenant à n.
1181		Nan nan ça tient pas.
1182		Entier !
1183		Mais si, entier.
1184		J'écris ça en entier ?
1185		J'écris en entier ou pas ?
1186		Ouais ouais.
1187		La p'tite blague de merde allez
1188		Et donc ... entier
1189		Donc, ... ?
1190		Ben en gros on dira ben donc c'est divisible. Par contre faudra bien dire la...
1191		3.2 en rouge en haut.
1192		Bon ben ferme là alors.
1193		Ouais mais là ça va pas être ? pour l'explication.
1194		On va donner le stylo à Maxime.
1195		Ouais vas-y j'écris.
1196		Ouais vas-y, c'est en rouge.
1197		J'pense qu'on va utiliser ta technique. On va marquer tous les, tous les nombres
1198		Oui mais ça rentre dans la tienne après non ?
1199		Tu marques tous les nombres de 1 à 25
1200		Hum hum.
1201		Pis avec ...
1202		Mets y en rouge.
1203		Non en noir, on les entendra, on les entourera en rouge ceux qui sont bons.
1204		Ok
1205		Donc, 1 à 25.
1206		Non, non ! 3 en fait.
1207		Faut 't'être les mettre après. Faut p't'être définir justement euh les deux, les deux ... en disant qu'ils peuvent s'écrire euh sous la forme d'une puissance.
1208		Ouais, ce qu'on commençait tout-à-l'heure là ?
1209		C'qu'on commençait tout-à-l'heure, et comme ça on met toute la liste, et on met oui ou non pourquoi.
1210		Ouais. On traduit l'énoncé non d'jà, n égal euh
1211		Ouais. Euh donc euh sauf qu'on avait pas vraiment de formule.
1212		Ben justement faudrait dire euh n euh ...
1213		Nombre de nombre de Fermat, expliquer avec une formule mathématiques ça passe pas trop

1214		On peut mettre si n est égal à :
1215		Vas-y marque.
1216		Vous avez vu j'écris comme un gaucher ça fait comme ça, j'écris comme ça.
1217		Si n, petit n, petit n. Est égal à ...
1218		Deux exposant k.
1219		Non non non.
1220		C'est pas grave.
1221		Si on commence par une phrase ?
1222		Non, mais non. Non vaut mieux mettre égal. C'est quand on va mettre l'expression mathématique.
1223		Si n est, deux p'tits points, n égal
1224		Ah ha
1225		Deux p'tits points, et pis là tu mets... Dessous tu mets n est égal à.
1226		Ouais.
1227		Est égal à
1228		Oh la la Victor. Oh la la.
1229		Et là donc, non, euh non non laisse comme ça. Y'a deux cas.
1230		Quoi ?
1231		Y'a deux cas.
1232		Si n égal euh 2 exposant k,
1233		Ouais mais faut k appartenant à euh
1234		Ouais, c'est c'que j'allais dire, k appartenant à $\mathbb{R}$. Non, à $\mathbb{N}$.
1235		Appartient euh ... à $\mathbb{N}$.
1237		À jusqu'à ...
1238		À $[\![3\,;\,25]\!]$. Ça dépasse les 25
1236		Non, appartient à $[\![3\,;\,25]\!]$, l'intervalle.
1239		k il appartient, il appartient à $[\![0\,;\,5]\!]$.
1241		$[\![0\,;\,5[\![$, 5 exclus.
1240		Ça fait combien 2 exposant 5 ?
1242		2, 4, 8, 16, 32.
1243		32, et donc ça passe.
1244		Euh ... tu mets k appartient à $[\![0\,;\,5[\![$, 5 exclus.
1245		Ouais.
1246		T'y mettras à la fin.
1247		Non, marque là, avec le ...
1248		Et on expliquera pourquoi.
1249		Ouais.
1250		Mais, faut d'jà finir l'expression non ?
1251		Ouais.
1252		J'mets quoi ?
1253		k appartient à : ... Et là euh
1254		$\mathbb{R}$, double, non oui.
1255		... zéros compris. Inclus
1256		Exclu ou ?
1257		Inclus pour F0.
1258		Ouais mais t'façon y'a [...]
1259		C'est pas l'nombre de côtés qui est important.

1260		Non, mais n, si tu mets 0 là y'aura 1 et y'aura pas 2
1261		[...]quelque chose derrière. Parce qu'après là y'a
1262		Oui mais là. Oui d'accord. Donc toi tu veux l'faire
1263		Tant qu'à faire
1264		Oui d'accord.
1265		k appartient à 0, point virgule, Pis euh, 5 ?
1266		5.
1267		5 exclu.
1268		Ouais
1269		Donc là tac, donc là c'est notre première condition, tu mets un 1.
1270		Union...
1271		Faut mettre un premier point
1272		Là faut mettre un ... 'fin c'est une première condition. Tac.
1273		Là, dessous tu mets un deux. Voilà, c'est bien.
1274		Pis on met 2 exposant k fois euh
1275		Fois, pis là faudrait dire
1276		Si n est ...
1277		Il est variable, pis après on met que c'est [...] un ou plusieurs nombres de Fermat premiers
1278		De ?
1279		Tu mets, si n est égal à 2 exposant k ...
1280		Relis la phrase depuis le début regarde.
1281		Si n est, ... égal deux exposant k, fois quoi ?
1282		Est égal à 2 exposant k...
1283		On l'multiplie par quoi ?
1284		... fois, ben faut une variable.
1285		Une variable ?
1286		[...]
1287		Euh ... P.
1288		P.
1289		P. Allez.
1290		Fois P.
1291		P majuscule.
1292		Grand P.
1293		Et puis là on va, on va décrire qu'est-ce que c'est le P.
1294		Grand P.
1295		Ah ha.
1296		Tu marques avec P euh... Avec P
1297		Tel que ...
1298		Produit d'un ou plusieurs nombres de Fermat.
1299		[?]
1300		Si P, alors attends. Attends j'vais [?]
1301		Non mais
1302		Sinon cibler et euh ... nombre premier de Fermat ou produit de plusieurs nombres premiers de Fermat.
1303		Non chais pas.
1304		On va aller au plus simple.

1305		Y'a pas de plus simple.
1306		Attends. Si ...
1307		Vous voulez dire quoi ?
1308		À la limite ça : nombre premier de Fermat, ou produit de d.. de nombres premiers de Fermat distincts.
1309		Ouais mais ça tiendra jamais hein.
1310		...
1311		Alors on l'rajoutera à l'oral ou on l'dit là ?
1312		Non faudrait p't'être écrire quand même.
1313		Allez dis moi.
1314		Alors si entre parent... P est égal à. Non, P, non, P nombre premier de Fermat
1315		P tu mets deux p'tits points. Nombre premier de Fermat. Nombre : n.b.r.e premier de Fermat
1316		Non mais ouais ...
1317		... premier de Fermat. Ou produit de plusi...
1318		A chaque fois [...]
1319		Hein, ou ...
1320		'tain mais y va se marrer quand il va me voir. Des fois je baille, des fois j'oublie ...
1321		... produit, ou produit de nombres premiers. Premiers de Fermat distincts.
1322		Timothée. Bien sur ouais. Timothée, Timthée, c'est léger comme euh
1323		De Fermat distincts.
1324		...
1325		C'est bon ?
1326		On fait une liste de 1 à 25.
1327		Note.
1328		Ouais.
1329		Et là faut p't'être mettre si ... non mais on mettra, on dira que si n, euh, voilà.
1330		Non mais moi j'ferai pas c'te partie déjà.
1331		Ben vas-y maintenant faut aller jusqu'à... trois, quatre
1332		3, 4, 5, 6, 7 jusqu'à 25.
1333		Ça j'peux écrire.
1334		T'écris droit attention !
1335		En une seule colonne.
1336		Oh si on s'met d'accord ... si les parties euh
1337		Faut pas qu'espace trop parce que de faire euh 18 nombres, sur 22 nombres ...
1338		J'peux la découper ou pas ? Genre euh ...
1339		Allez vas-y.
1340		Euh ... Ouais mais
1341		pas tous
1342		Non pas tous ...
1343		Ouais mais c'est pas grave, on va dire, on s'débrouillera. 3, 4. Eh tu fais gaffe à ta place hein !
1344		Ouais

1345		Il doit aller jusqu'à combien là ?
1346		25.
1347		J'suis pas sur, mais booon, tu r'commencera.
1348		Écris plus gros !
1349		Et plus p'tit là.
1350		Écris plus gros mais plus serré.
1351		Mais ça t'avait inspiré apparemment ce théorème.
1352		Pardon ?
1353		Je dis ça t'avait inspiré apparemment
1354		Ouais mais euh je sais pas si [...]
1355		On va dire que c'était
1356		[...]
1357		Moi j'fais la partie ...
1358		Alors Benoît le design là !
1359		Ben tu marques 21, 22, 23, 24, 25 sur [...]
1360		Bon, on fait 5 minutes de pause. On passe à la présentation des affiches après.
1361		Oh, on expliquera à l'oral.
1362		Ben si vous voulez finir au lieu d'aller en pause c'est comme vous voulez.
1363		Arf ...
1364		Après faut que j'fasse
1365		Eh c'est bon on a fini là !
1366		tu prends un stylo rouge et t'entoures juste les bons
1367		Euh ... Il manque allez vas-y.
1368		Entoure 3, 4, 5, 6 euh ...
1369		Mec, pourquoi tu fais pas des p'tits ... Pourquoi tu fais des p'tits points ici et pas là-bas.
1370		6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24. C'est tout.
1371		Et maintenant faudrait p't'être dire si on r... 'fin, en deux lignes c'est : ceux qui sont, enfin on dira pourquoi, tout ceux qui sont euh ... euh... puissance de deux ; ou sinon les autres sont divisibles par euh un ou plusieurs nombres euh distincts.
1372		Ouais
1373		Ça on l'dit pas, 'fin on l'dira à l'oral.
1374		On l'dira à l'oral.
1375		D'après ça.
1376		Ça c'est toi qui va l'expliquer.
1377		Non, non non.
1378		Si si.
1379		Ouais.
1380		Ben moi j'fais la première partie de ...
1381		Ben au pire, vous vous y mettez à deux. Nous on fait le première partie
1382		Bon, c'est bon ils s'débrouillent là.
1383		Pis euh ...
1384		Allez, on l'affiche au tableau.
1385		On fait un p'tit dessin ou ?
1386		Ouais vas-y on va faire un p'tit dessin.

1387		Ouais genre on va customiser, tu vois.
1388		Vas-y ouais.
1389		J'suis l'seul à découper l'affiche. Personne d'autre ?
1390		...
1391		Pourquoi j'découpe en fait ? Ca m'amuse. Ça fait un peu d'fantaisie.
1392		...

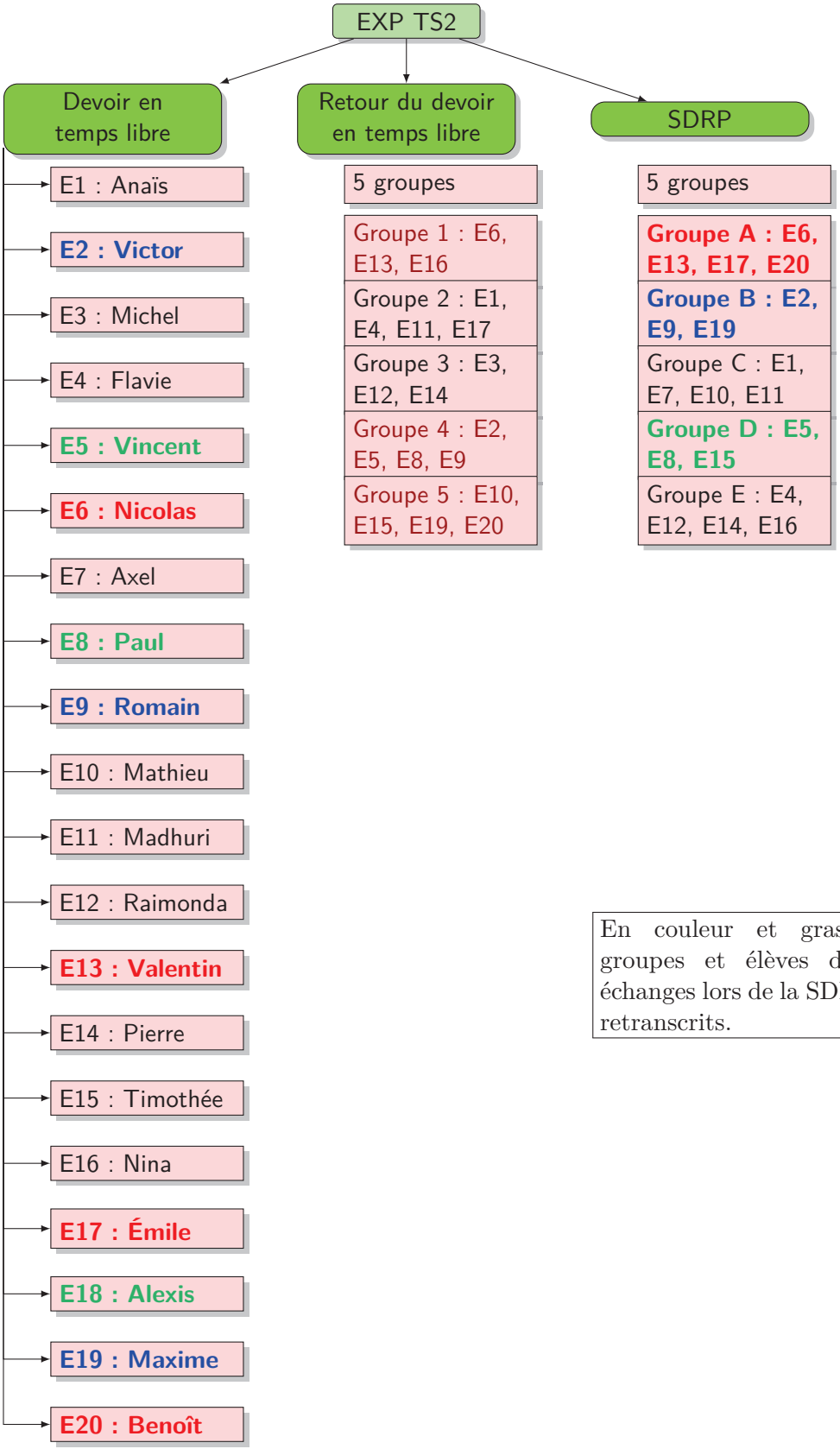
F.7 Brève synthèse avant la séance de recherche pour quelques élèves

Élève	2.1.1 Formule A	2.1.2 Formule B	2.2.1 Liste α_n	2.2.2 Suite	2.2.3 179° ?	2.3.2 α_n entier ?	2.3.2. α_n décimal ?	Commentaire
E2	1,5	1,5	0,5	2,5	1	2	0	Dans un ensemble de qualité, E2 n'avait pas identifié la difficulté liée aux α_n non décimaux. Il est dans le groupe, celui qui a le plus progressé sur ce point. Même si le vocabulaire n'est pas encore stabilisé, il semble avoir identifié les conditions nécessaires pour préciser la nature des α_n.
E5	1,5	1,5	0,5	1,5	1	2	0	E5 montre une aisance dans la manipulation des entiers et la décomposition primaire de 360. Concernant la nature des α_n on ne peut être sur d'une compréhension des résultats du groupe.
E6	NR	0.5	1	1,5	1	0	0	E6 montre une compréhension du découpage du n-gone en n-2 triangles et du lien avec la formule proposée par E13.
E8	1,5	1,5	0,5	2,5	1	0	0	Idem E5.
E9	1,5	1,5	0,5	2	1	0,5	0	E9 développe une position similaire à celle de E2, mais la maîtrise semble moins bonne. La possibilité d'avoir des α_n non décimaux semble acquise.
E13	0	0.5	1	2,5	0,5	0,5	0	E13 maîtrise les éléments langagiers permettant de décrire les deux méthodes d'obtention de la formule de l'angle du n-gone. Le dépassement du raisonnement sur un exemple générique est lent mais effectif à la fin du temps 2.
E15	0,5	1,5	0,5	2,5	1	2	0	Très bonne manipulation des objets (avec incertitude dans la rédaction de la question 2.1.2) sauf pour la caractérisation des α_n décimaux, et capacité à mettre en œuvre une étude exhaustive de nombres caractérisés par une règle.
E16	0,5	0,5	0,5	2	1	0,5	0	Reste incertaine sur sa compréhension de l'obtention de la formule de l'angle du n-gone régulier.
E19	1,5	1,5	0,5	2	1	0,5	0	Des interventions peu en lien avec les objets qui ne permettent pas de juger d'une familiarité à leur égard.
E20	1,5	1,5	0,5	2	1	2	0	Idem E15 relativement à la nature des α_n.

Annexe G

Séances de recherche en classe

G.1 Organisation des groupes



En couleur et gras : les groupes et élèves dont les échanges lors de la SDRP sont retranscrits.

G.2 Extrait du document pour l'enseignante

Les différentes phases.

Les phases sont donc les suivantes, avec des durées indicatives fournies mais qui pourront être adaptées :

Phase 1 : 3' : Introduction de la séance, présentation de l'activité et des enjeux en termes de recherche et de production de savoirs dans la classe, consigne concernant le support pour la recherche (cahier de recherche).

Phase 2 : 5' : Présentation du problème par son énoncé, relecture par un élève, explicitation éventuelle en réponses à des questions. Les explicitations sont limitées, devront porter essentiellement sur les pavages non stricts, la question du plan. Les enjeux mathématiques doivent être compris et les difficultés de vocabulaire levé. Bien entendu, ce temps n'est que le premier contact avec le concept.

Phase 3 : 5' : Recherche individuelle. Ce temps est indispensable pour l'implication de chaque élève dans l'activité.

Phase 4 : 15' : Premiers échanges par groupe. Mise en commun des premières recherches et premiers débats.

La fin du temps sera dépendante de l'apparition des indicateurs suivants :

- Apparition si possible dans tous les groupes des pavages réguliers et d'un pavage archimédien non régulier
- Apparition de la condition nécessaire d'assemblage de polygones autour d'un nœud (somme des mesures en degré des angles égale à 360°)
- Début d'un travail numérique utilisant les mesures en degrés des angles des polygones réguliers
- Apparition dans certains groupes d'une réflexion sur l'exhaustivité

Phase 5 : 3' + 10' : Distribution et présentation rapide des extraits du Livre 2 de « Géométrie » de Dürer, étude.

L'arrêt commun du temps précédent permet cette présentation et une courte consigne :

« De la même façon qu'un chercheur, après une première accroche sur un problème, réalise un « état de l'art » et s'appuie sur des recherches antérieures, je vous propose de regarder des extraits de ce qu'Albrecht Dürer avait produit sur l'assemblage de figures polygonales. Là encore vous commencer par quelques minutes de lecture individuelle avant 10' de reprise du travail en groupe ».

Phase 6 : 15' Mise en commun sans support écrit. Il s'agit de :

- faire le point sur l'état des premières recherches et mettre en évidence les premiers éléments.
- Discuter des propositions de Dürer et écarter certains pavages qui ne sont pas archimédiens.
- redonner l'objectif des phases suivantes, « la détermination de tous les pavages archimédiens du plan »

Phase 7 : 45' : Relance de la phase de recherche en groupe pour 45'.

Phase 8 : 15' : Rédaction de l'affiche.

Phase 9 : 15' : Pause.

Phase 10 : 35' : Présentation des travaux des groupes - Débats sur les présentations.

Phase 11 : 10' : Institutionnalisation, une semaine après : Résultats de la classe de TS. Quels sont les savoirs nouveaux produits ? Que transmettre aux futurs chercheurs du problème ? Avec appui sur un diaporama pour écarter certaines propositions erronées. Pas de « démonstration » pour l'exhaustivité. Les élèves curieux de poursuivre sont invités à rédiger sur leur cahier de recherche pour le jeudi suivant les éléments sur lesquels ils voudraient un retour.

Un document de synthèse sera proposé le 24-04-2014 mais ceci n'est pas annoncé aux élèves avant.

G.3 Extraits d'un texte d'Albrecht Dürer

Extraits d'un texte d'Albrecht Dürer

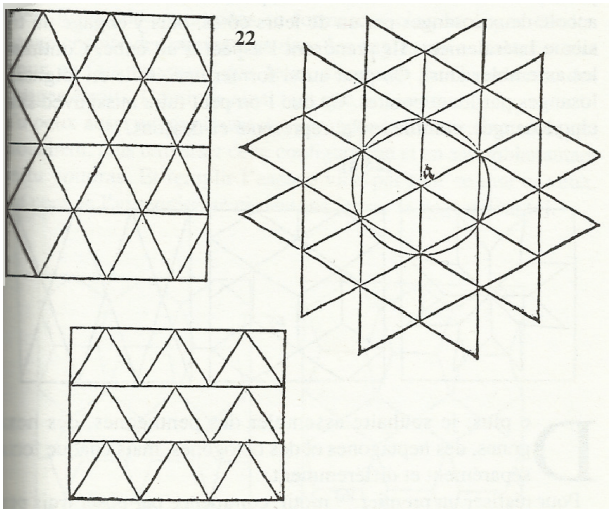
GÉOMETRIE

Présentation et traduction de

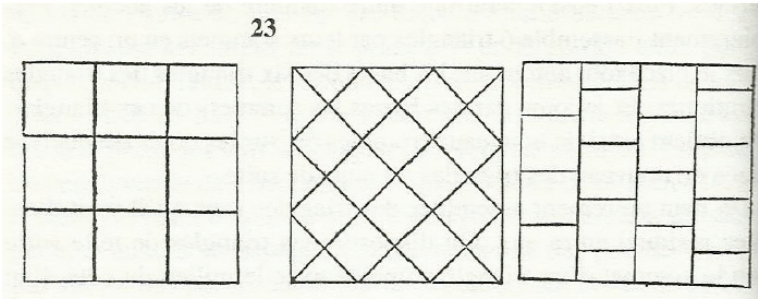
Jeanne Peiffer

Livre II

Maintenant je souhaite mettre bout à bout quelques figures polygonales, telles qu'elles peuvent servir dans le pavement des sols.[...] On peut assembler autrement des triangles sans qu'il y ait d'espace résiduel entre eux.[...]

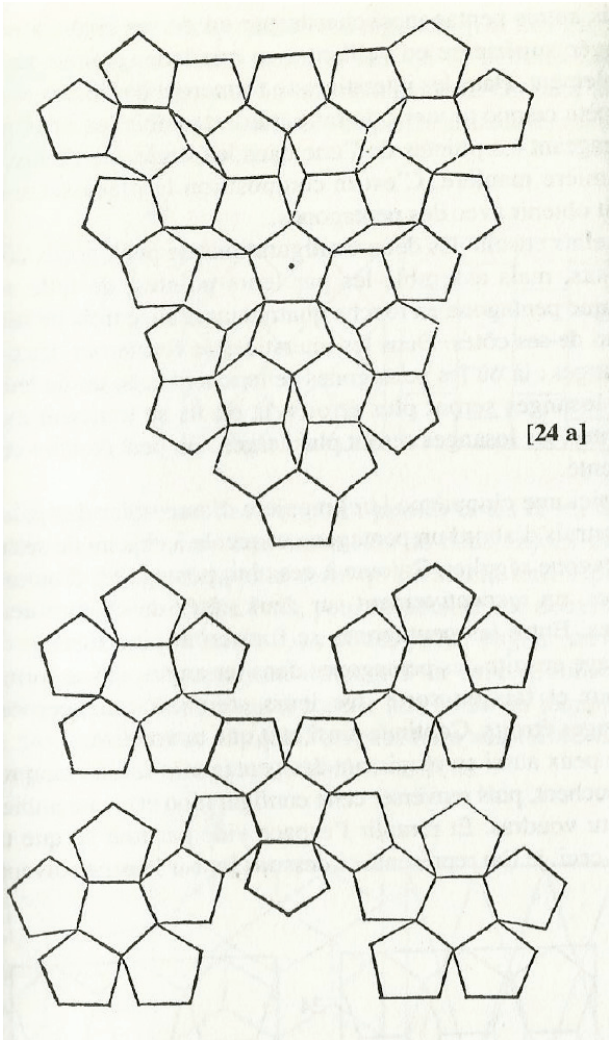


Item en assemblant des quadrilatères réguliers [*i.e.* des carrés], ils restent identiques à eux mêmes, sauf qu'on peut les disposer le long de la diagonale ou horizontalement.[...]



De plus, je souhaite assembler des pentagones, des hexagones, des heptagones et des octogones, mais chaque forme séparément et différemment.[...]

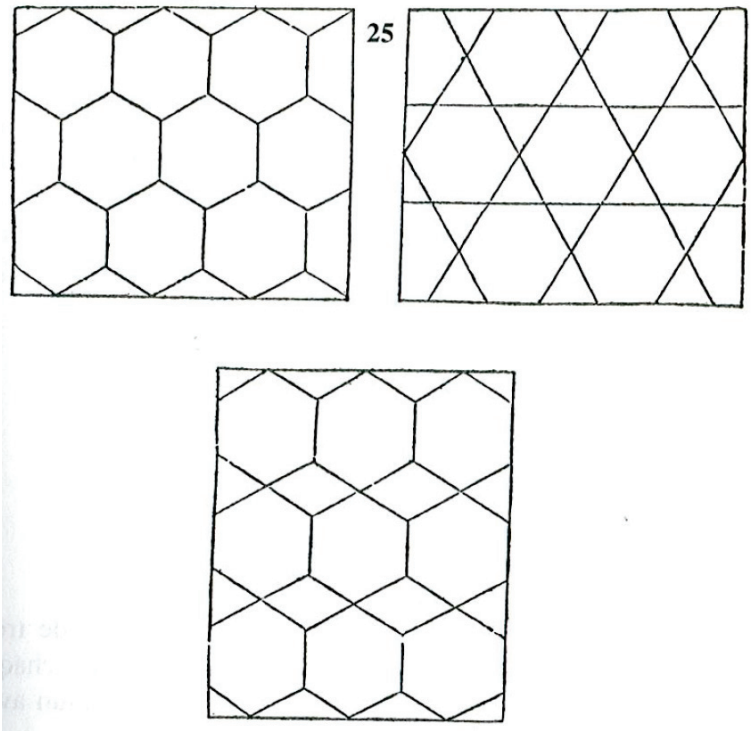
[...] Tu peux aussi en réunissant des pentagones, former cinq roses qui se touchent, puis renverser cette configuration et en assembler autant que tu voudras. Et remplir l'espace vide par tout ce que tu veux. [...]



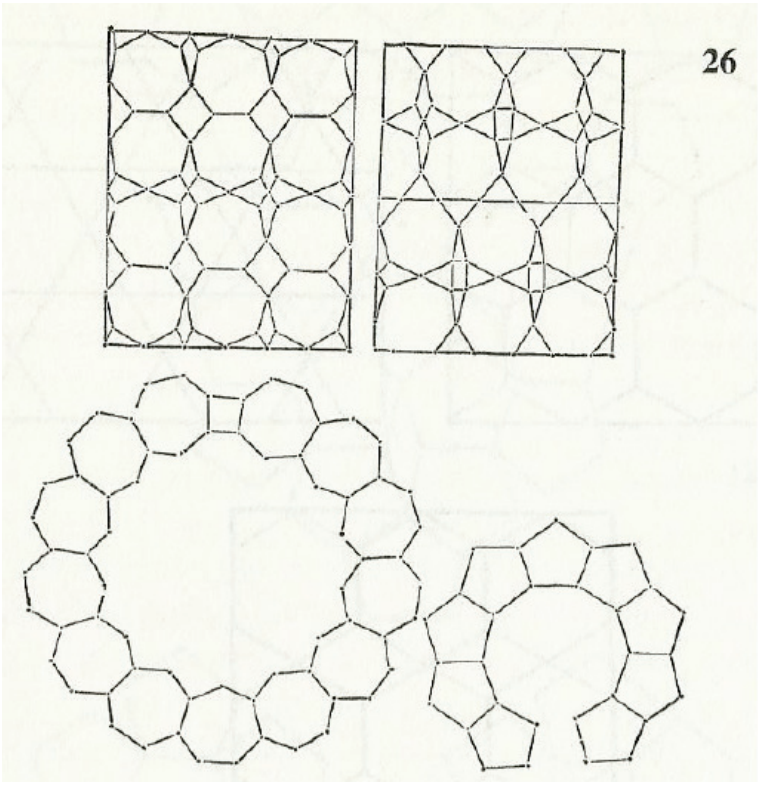
Item je souhaite assembler les hexagones de trois manières différentes. Premièrement je les imbrique les uns dans les autres de telle sorte que de tous côtés angles et pointes se touchent et qu'aucun espace vide ne subsiste entre eux.

Deuxièmement je les juxtapose de telle façon que seules leurs pointes se touchent. Entre les hexagones subsisteront alors des espaces triangulaires.

Troisièmement je les assemble de telle sorte que chaque hexagone touche les autres par deux de ses côtés et deux de ses pointes, comme je l'ai représenté ci-dessous.

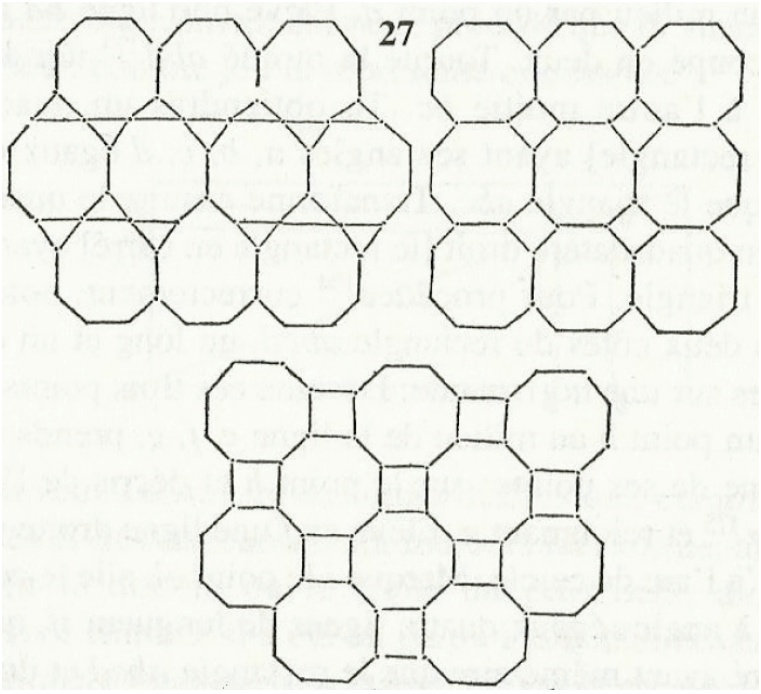


Quant aux heptagones [...]



En outre je souhaite assembler des octogones de trois façons différentes. Premièrement je fais en sorte que chaque octogone ait deux côtés et ses sommets en commun avec d'autres. Des triangles subsisteront entre eux.

Deuxièmement [...]



Item nous pouvons tracer nombre de figures très variées, qui ont leurs côtés inégaux et leurs sommets nullement situés sur un cercle. On pourra en faire beaucoup de jolies choses.

Nous pouvons aussi assembler dans un plan toutes sortes de figures : triangles, carrés, pentagones, hexagones, heptagones ou octogones. On pourra en tirer des motifs curieux pour les planchers et les plafonds, comme je l'ai indiqué ci-dessus. [...] Si je devais enseigner tout cela, le livre prendrait beaucoup trop de volume. C'est pourquoi j'encourage tout un chacun d'y réfléchir par lui-même.

G.4 Éléments pour des apports complémentaires en TS

Éléments utilisés par P pour la synthèse lors de EXP-TS2.

1. Angles d'un polygone régulier

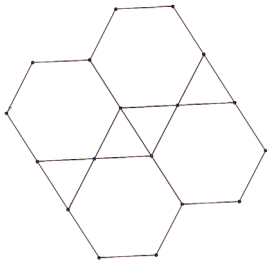
On rappelle que la mesure en degré de l'angle du polygone régulier à n côtés vaut $\frac{(n-2).180}{n}$

On rappelle également que l'on a alors les premiers termes suivants pour la liste des mesures en degré des angles des polygones réguliers :

Nombre de côtés du polygone	Mesure de l'angle en degré		Nombre de côtés du polygone	Mesure de l'angle en degré
3	60		15	156
4	90		16	157,5
5	108		17	$\frac{15 \times 180}{17}$
6	120		18	160
7	$\frac{5 \times 180}{7}$		19	$\frac{17 \times 180}{19}$
8	135		20	162
9	140		21	$\frac{19 \times 180}{21}$
10	144		22	$\frac{10 \times 180}{11}$
11	$\frac{9 \times 180}{11}$		23	$\frac{21 \times 180}{23}$
12	150		24	165
13	$\frac{11 \times 180}{13}$		25	165,6
14	$\frac{6 \times 180}{7}$		...	...

2. Pavages du plan avec des polygones réguliers : généralités

Dans un pavage du plan :
— Il est nécessaire que tous les polygones du pavage aient des côtés de même longueur.
— Il est nécessaire qu'autour de chaque nœud du pavage la somme des angles soient égales à 360°.
— Ces deux conditions ne sont pas suffisantes. Il existe, par exemple, des pavages stricts respectant ces deux conditions qui ne sont pas archimédiens :



3. Pavages réguliers

En un sommet d'un pavage régulier, c'est-à-dire constitué d'un seul type de polygones réguliers, on a :

$k\ \dfrac{n-2}{n}180° = 2 \times 180°$, où k est un entier, $k \geq 3$.

Cette condition s'écrit aussi :$k(n-2) = 2n$ ou $(n-2)(k-2) = 4$.

Les seules solutions entières qui conviennent sont n = 3 et k = 6 , n = 4 et k = 4 , n = 6 et k = 3.

Elles correspondent à des pavages par, respectivement, des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones réguliers.

4. Pavages archimédiens

On cherche maintenant des pavages archimédiens mais non réguliers.

Autour d'un nœud, la somme des angles est égale à 180° et on peut alors observer :

— qu'il faut associer au moins trois polygones, car la somme des mesures de deux angles n'atteint pas 360°.

— qu'il ne peut y avoir plus de 6 polygones car 60° est la plus petite mesure et $6 \times 60 = 360$.

— que si on exclut les pavages réguliers, un pavage archimédien contient au moins deux polygones différents et au plus 4. Au plus 4 car 60+90+108 = 258 et 60+90+108+120 = 378.

En s'appuyant sur les deux premières conditions, on peut organiser la recherche de tous les assemblages de 3, 4 ou 5 polygones.

— Avec 5 polygones.
En considérant $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \alpha_5$, on a $\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i) \geq 240 + \alpha_5$ soit $\alpha_5 \leq 120$.
On cherche alors les organisations possibles. On obtient : (60,60,60,60,120), (60,60,60,90,90), c'est-à-dire les candidats pavages de types [1] suivants, à une permutation près : (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4).

— Avec 4 polygones.
On considère $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$ et on balaie toutes les valeurs possibles de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
(60,60,60,180) ne convient pas,
(60,60,90,150), (60,60,120,120) conviennent,
(60,90,90,120) convient,
(90,90,90,90) ne convient pas et toutes les valeurs possibles ont été balayées.

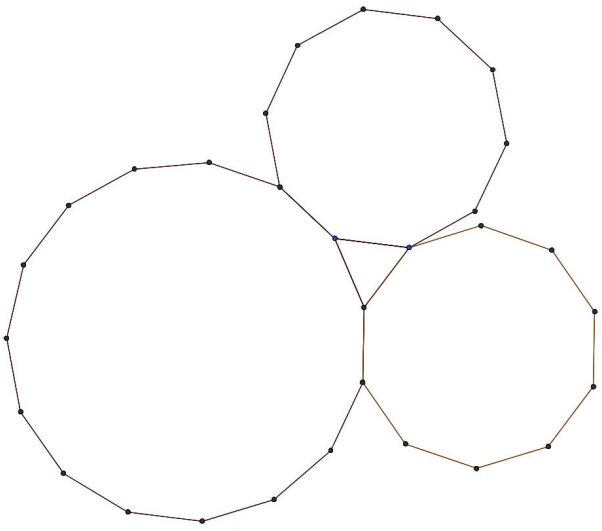
1. Le type d'un nœud est la liste des nombres de côtés des polygones l'ayant pour sommet, énumérés en tournant autour de ce nœud dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.

On obtient les candidats pavages de types suivants, à une permutation près : (3,3,4,12), (3,3,6,6), (3,4,4,6).

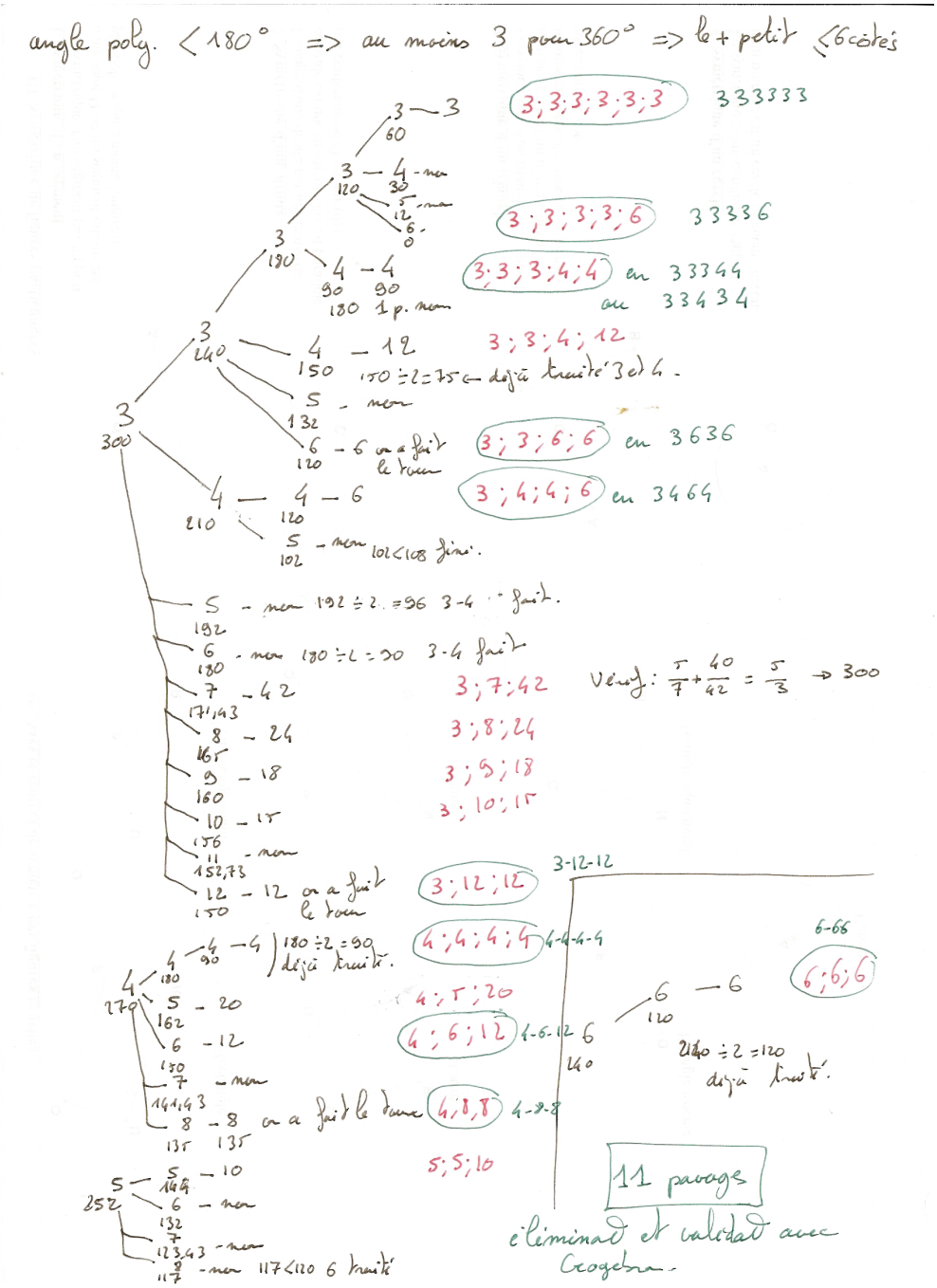
— Avec 3 polygones.
On considère $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$
(60,60,240) ne convient pas
...
(60,120,180) non plus, puis (60, 5/7.180,1200/7), (60,135,165),(60,140,160),(60,144,156), (60,150,150) conviennent,
(90,90,180) ne convient pas puis (90,108,162), (90, 120, 150), (90,135,135) conviennent
(108,108,144) convient et c'est fini.
On obtient les candidats pavages de types suivants, à une permutation près : (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15), (3,12,12),(4,5,20), (4,6,12), (4,8,8), (5,5,10).

On obtient ainsi 14 candidats pavages non réguliers à permutation près.

Ces n-uplets vérifient une condition nécessaire, condition locale, mais ceci ne permet pas d'affirmer que l'assemblage autour d'un nœud va aboutir à la réalisation d'un pavage. Il faut ensuite s'assurer de la possibilité de paver le plan avec ces candidats. Il existe en effet des assemblages autour d'un nœud respectant ces conditions autour d'**un** nœud mais qui ne permettent pas de paver. Par exemple le candidat pavage (3,10,15) ne convient pas :

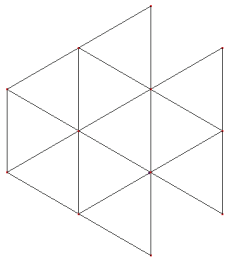


La recherche peut aussi s'organiser avec un arbre :

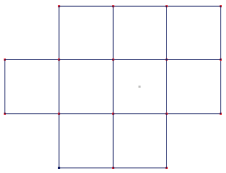


On obtient au final 11 pavages archimédiens.

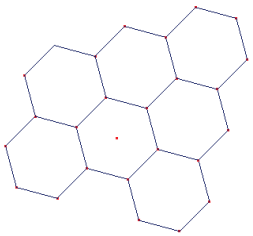
Les 11 pavages archimédiens :



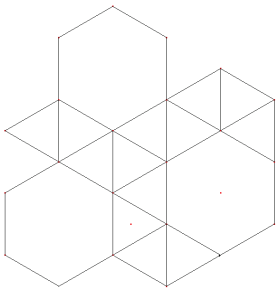
(3,3,3,3,3,3)



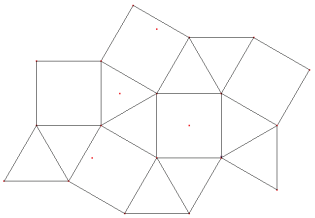
(4,4,4,4)



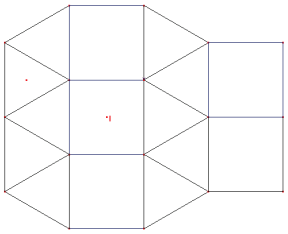
(6,6,6)



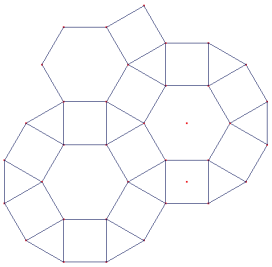
(3,3,3,3,6)



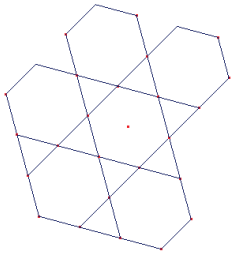
(3,3,4,3,4)



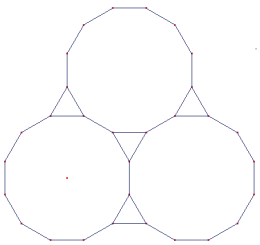
(3,3,3,4,4)



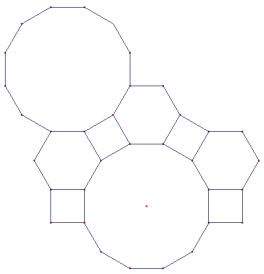
(3,4,6,4)



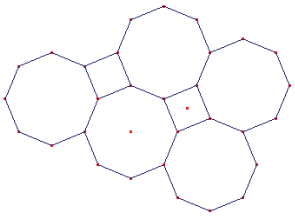
(3,6,3,6)



(3,12,12)

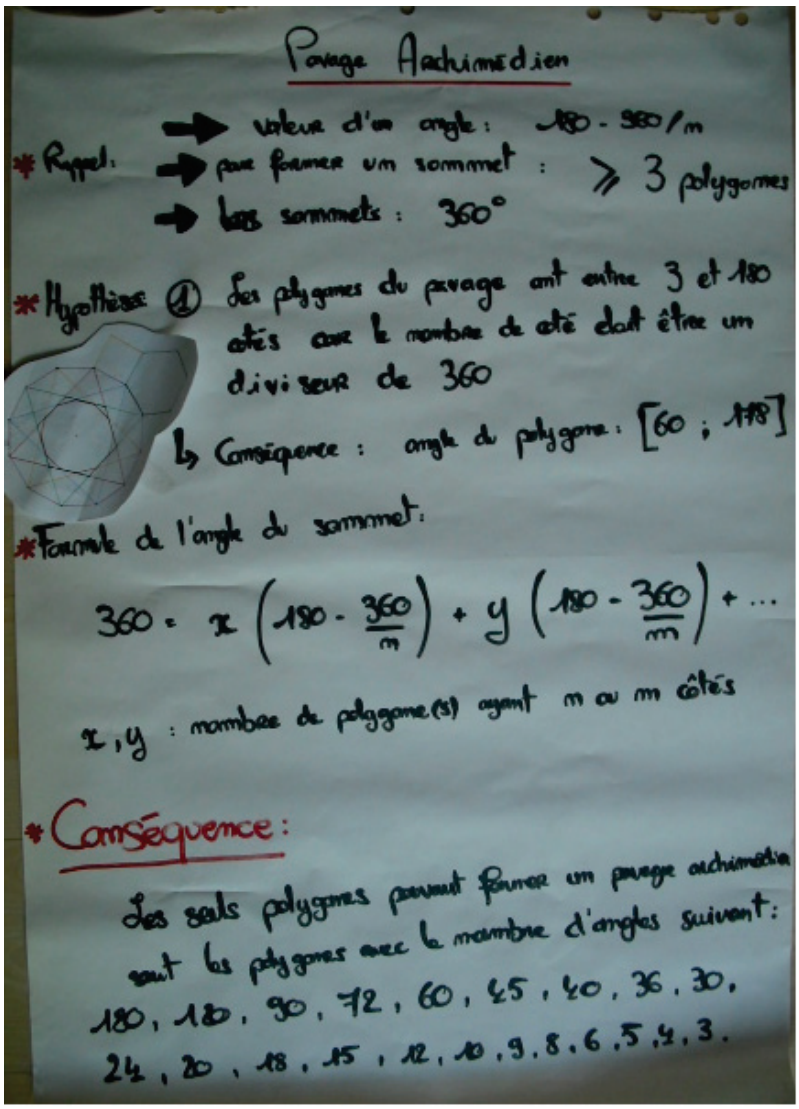


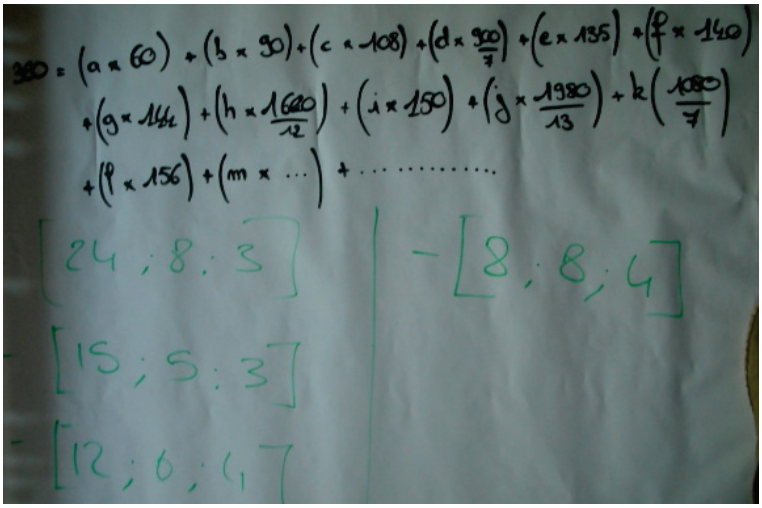
(4,6,12)



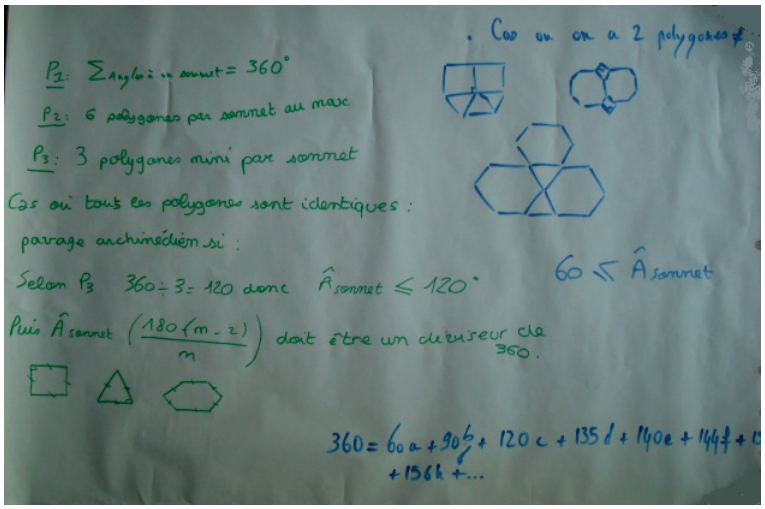
(4,8,8)

G.5 Affiches EXP-TS2-SDRP

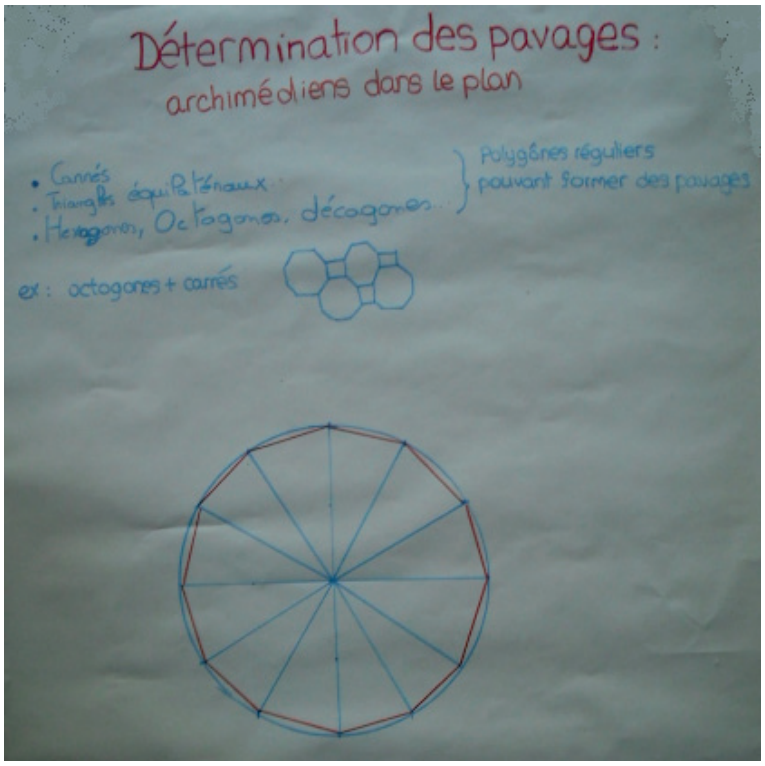




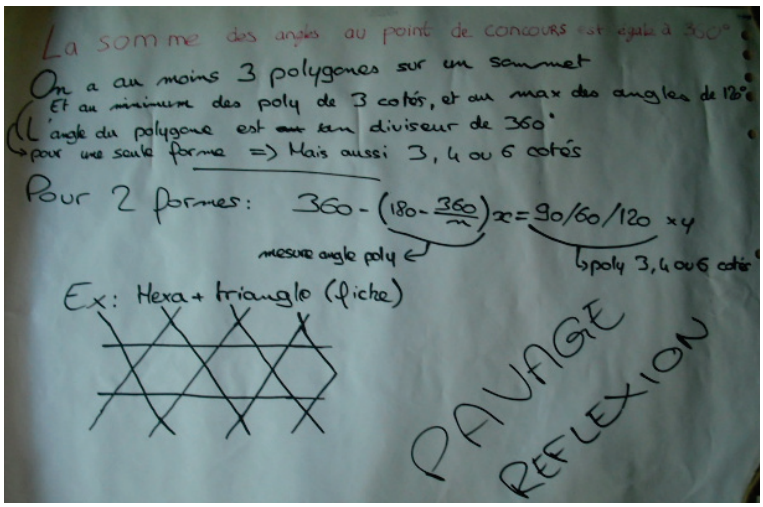
Affiches Groupe A, SDRP-TS2



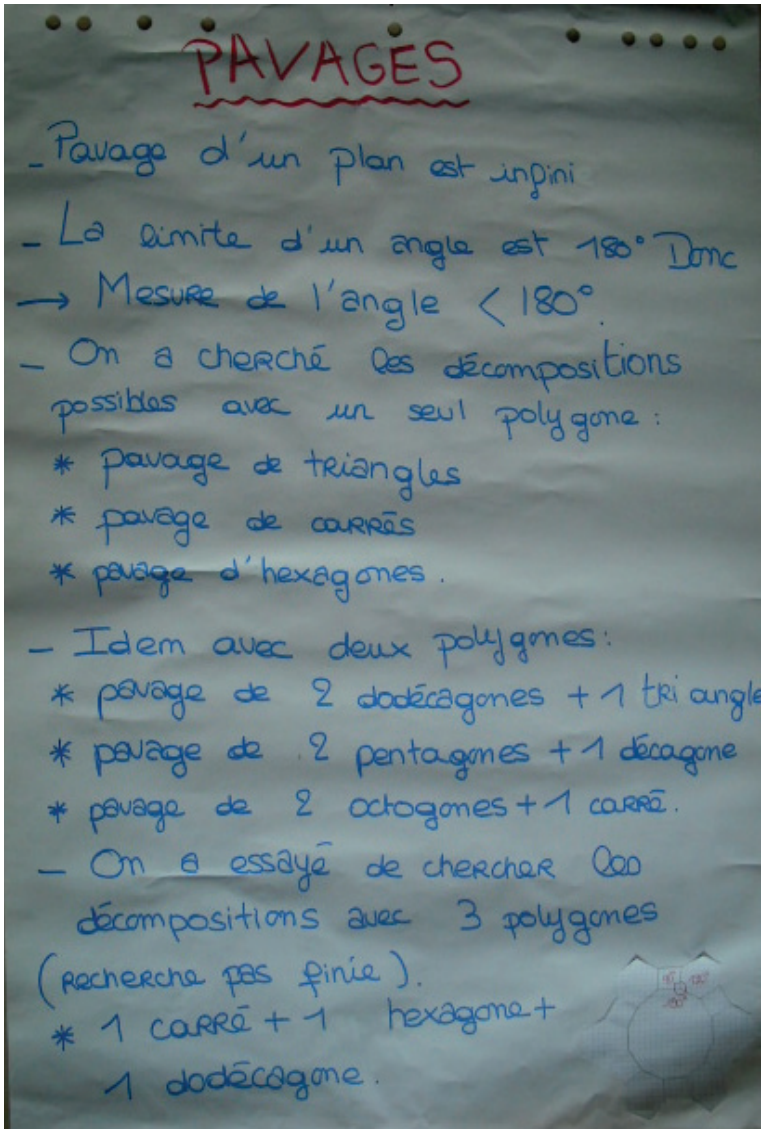
Affiche Groupe B, SDRP-TS2



Affiche Groupe C, SDRP-TS2



Affiche Groupe D, SDRP-TS2



Affiche Groupe E, SDRP-TS2

G.6 Transcriptions des échanges lors de EXP-TS2-SDRP

G.6.1 Transcription des échanges lors de EXP-TS2-SDRP, groupe A

Expérimentation en TS2 : Transcription des sons enregistrés par le micro placé près du groupe A.

Codage : P le professeur, Nicolas (E6), Valentin (E13), Émile (E17), Benoît (E20) les membres du groupe A.

[?] les courts passages inaudibles, en italique des commentaires qui font parfois référence à l'image vidéo.

Repère	Locuteur Temps	Texte de l'intervention
1		Bon alors à partir de c'moment, plus d'bêtise, ok ?
2		Tu peux, t'as pas ... une feuille s'il te plait ? ?
3		non, j'ai pas d'feuille.
4		Euh ...
5		Oui, c'est ... bon, [?]
6		J'ai une feuille grands carreaux s'tu veux. Euh, p'tits carreaux.
7		Euh, ben vas-y.
8		[?]
9		J'pense qu'ils vont se rendre compte que j'suis malade.
10		Il était un petit navireuh, qui n'avait jamais
11		Ahahah
12		Ceci était Valentin Millet.
13		On sait qu'c'est toi malin.
14		Celui qu'à les longs ch'veux.
15		[?]
16		20 0 30 96 ...
17		Numéro d'sécu.
18		Numéro d'sécu ouais.
19		141, chemin du tout. Villard les Dombes.
20		01 330.
21		Y'a beaucoup de fric à la maison, va falloir [?]
22		C'est bon vous êtes tous prêts ?
23		Le mec y s'balade avec 200 balles dans sa poche.
24		Donc, on commence. Vous allez travailler aujourd'hui, c'est un problème de recherche sur lequel vous n'avez jamais travaillé. Qu'est ce que c'est que "Pavage". Ben oui, qu'est-ce que c'est que pavage ? Est-ce que quelqu'un a une idée de qu'est-ce que c'est qu'un pavage ?
25		Ouais c'est pas des euh ... ?
26		Mettre des pavés sur un carrelage, ok. Ben, ça ça peut être un pavage, et on va voir euh, mathématiquement euh
27		Alors euh ...
28		J'vais dire une connerie mais c'est pas avec les graines de pavot.
29		Avec ?
30		Non non, j'allais dire une ânerie.
31		Mais vas-y, dis.

32		Ben, faut mieux pas.
33		Ouais.
34		C'est avec ses graines de pavot.
35		Mais non mais j'crois qu'les clous d'girofles y f'saient des ... Mais parce que en fait, regarde le fond d'écran. En fait euh, les clous d'girofle euh ...
36		Non alors, le fond d'écran n'est pas une indication.
37		C'est des écritures euh ...
38		Des hiéroglyphes.
39		Effectivement le fond d'écran c'est euh, c'est quoi ?
40		Des écritures hiéroglyphes.
41		Oui, ça peut être ça.
42		Des écritures ...
43		Cunéiformes.
44		Donc, non, les pavages, ... Je pense que c'qu'a dit Axel sur les histoires de carrelage, effectivement ça peut être une notion en rapport avec ça. Donc, vous allez faire une activité de recherche. Cette activité de recherche c'est un problème, ...
46		'tain mais ils vont nous enregistrer quoi.
45		T'as la mort avec tes graines de pavot hein.
47		Eh ho, Nicolas. C'est donc un problème que vous allez résoudre, et le but c'est de voir comment vous, la classe, vous allez euh avancer sur ce problème. Donc vous allez travailler en groupes, et euh, à la fin de euh, du travail vous ferez une affiche et on f'ra la synthèse de toutes ces affiches
48		Ouh, une affiche ?
49		Voilà, comme euh la dernière fois,
50		Voilà, vous passerez là, vous montrerez. Donc la différence par rapport à la dernière fois c'est que là vous allez tous travailler sur le même sujet. Mais par contre vous allez peut-être pas euh, aborder les ... le sujet de la même façon. Donc j'vous ai laissé vous organiser en groupes comme vous vouliez. Donc [j'sais c'que c'est ?], sur quoi va-t'on travailler ?
51		...
52		Alors, allez tiens Axel lis-nous l'début.
53		Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous le côtés la même longueur.
54		Ok, est-ce-que ça va ?
55		Hum.
56		Que quel mot pose problème ?
57		Convexe.
58		Ah mais on en est pas là encore. Convexe ? Mais vous avez déjà du euh ... vous poser la question précédemment. Voilà, cette définition vous l'aviez déjà vue. Est-ce-que quelqu'un peut expliquer ce que ça veut dire, convexe, vite fait.
59		...
60		Oui, vous aviez les exemples de ceux qui n'étaient pas convexes, c'étaient par exemple les étoilés. Ceux ... voilà, comme ça. Donc voilà, convexe. Donc ensuite, Axel, t'avais l'air de dire que la suite était compliquée donc vas-y, lis la deuxième phrase.

61		Un pavage archimédien est un recouvrement du plan par des polygones réguliers sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones.
62		Ok.
63		Ben Archimédien ça pose problème.
64		Ben c'est la définition, c'est normal que ce soit le mot que tu connais pas.
65		Ah ah ah.
66		Donc, le mot que tu connais pas c'était archimédien, donc c'est un recouvrement du plan par des polygones réguliers sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones. Ouais ?
67		Hum.
68		Ça veut dire quoi sans trou ni superposition ?
69		Ben, tout-à-l'heure euh, Axel a dit carrelage. Imagine un carrelage ou y'ait un trou
70		Ça s'rait pas un carrelage.
71		Ben ça s'rait pas un carrelage
72		Ahaha
73		[?]
74		[?] C'est bon ?
75		Donc ensuite, qu'est-ce qu'on nous dit ? Flavie ?
76		On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme sur la figure ci-dessous.
77		Donc vous ... voilà. Donc pourquoi est-ce-qu'on l'exclut celui-là, c'est bon ?
78		[?]
79		Ben on te dit on l'exclut parce qu'un sommet appartient au sommet d'un autre. Donc en fait on veut que les sommets ils soient comment finalement ?
80		[?]
81		Voilà. On veut que euh, les sommets coïncident. Donc le but, du travail qu'on va faire aujourd'hui, c'est de déterminer TOUS les pavages archimédiens du plan. Donc j'vous redonne l'énoncé, j'vous laisse 5 minutes pour réfléchir tout seul, tout seul tout seul, ça veut dire que vous d'vez pas parler, et pis après, vous pourrez euh réfléchir en groupe. Donc vous coupez l'énoncé en deux pour que chacun en ait un bout.
82		C'est mes ciseaux ça ?
83		Ouais ouais.
84		Je sais pas.
85		Ahaha.
86		C'est les ciseaux qu'étaient à côté de euh Valentin.
87		[?] cutter
88		Si tu savais.
89		non c'était pour le ...
90		Tu peux être ton [?] pour ce soir.
91		Euh, réfléchir ça peut se faire aussi en écrivant hein. C'est pas parce que vous réfléchissez que vous [?] sans écrire.
92		[?]
93		Cette personne est Émile [?]. Ahaha. Numéro d'sécu : ... Sa tête est mise à prix si vous voulez gagner de l'argent. Ahaha.

94		Euh... Bon, allez.
95		...
96		[?] mais j'vais finir par plus avoir assez d'place.
97		...
98		Au fait, faut trouver dans quoi ça ...
99		Tout seul. Quel est le problème dans le tout seul.
100		[?]
101		Tu réfléchis 5 minutes tout seul. Réfléchir ça peut aussi être noter tes questions si t'as pas compris pour qu'ils t'expliquent quand vous travaillerez ...
102		J'ai pas compris la question.
103		T'as pas rien compris, donc marque, qu'est-ce-que tu n'as pas compris.
104		Il faut trouver, euh, pourquoi ça ça marche, et ça ça marche pas
105		...
106		T'as un taille-crayon s'te-plait ?
107		Dedans.
108		...
109		...
110		Bon, j'vous laisse encore un peu de temps pour réfléchir, mais maintenant vous pouvez échanger avec les autres de votre groupe.
111		Talala, talala !
112		J'crois qu'j'ai compris
113		Après le triangle et le carré moi je vois rien d'autre
114		Oui moi non plus
115		Moi je pense
116		Ça fonctionne pour tout ou pas ?
117		Il faut qu'il y ait aucun trou ni superposition
118		Et c'est ça le plan en fait dont il parle, puisque c'est marqué nulle part
119		Quoi ?
120		Non, c'est ça, il faut pas que ce soit comme ça
121		Parce que ?
122		Eh ben déjà, t'as ça sauf que tu, faut que tu
123		Ça, ça c'est le plan. Oui mais je comprends pas ... un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan, c'est quoi le plan là
124		Le plan, c'est heu, oui ben, c'est quand y a trois points non alignés, c'est-à-dire que alors c'est comme si t'avais une feuille
125		Et là, il est ou notre plan
126		Ben ça c'est un plan, c'est le plan de
127		y a un truc tu sais dans le cube, dans le cube t'as, t'as ABCDEFGH ... t'as trois points qui peuvent pas être alignés, ça ça forme un plan
128		Y'a un truc aussi
129		Dans l'idéal ce serait que la ...
130		Y'a aussi une autre chose, c'est que là il faut que ça puisse s'imbriquer ensuite euh sur le coté
131		Oui, donc là, là ça marcherait pas
132		Mais
133		Ha oui oui oui oui

134		Faut un carré pour avoir ça
135		Mais qu'est-ce qui fait que ça donnerait pas ça
136		Sinon faut trouver le ...
137		Je pense qu'il doit y avoir une concordance avec la longueur des côtés. Et t'sais, c'est ce qu'on avait fait la dernière fois
138		Les angles aussi
139		Ouais les angles mais bon
140		Les angles et les longueurs doivent être toutes les mêmes
141		Les angles sont trouvables, après je sais pas si on peut trouver la longueur de ...
142		Et vous avez du carrelage chez vous ?
143		[Rires] oui, pas toi, t'as pas des faïences ?
144		Ben si, mais ça aide
145		Comment ?
146		Ça aide. Moi mon carrelage c'est des carrés, ils ont tous la même forme et ...
147		Le rectangle, ..., est-ce, est-ce qu'y a d'autres exemples ...
148		Y'a, y'a le, y'a le triangle
149		Pour moi l'idéal ça serait qu'on arrive à créer des droites parallèles, comme ça on pourrait les assembler ensuite
150		Y'a les rectangles aussi ou pas ?
151		L'idée pour moi, c'est assembler les figures pour obtenir des droites parallèles, c'est-à-dire assembler pour avoir là un angle euh de 180
152		En fait y'a y'a un truc que je me suis dit aussi c'est que faut qu'à chaque fois ce soit une décomposition du nombre de .. en fait on dit que au niveau de chaque sommet, autour de chaque sommet il y a le même assemblage de polygones. Ça voudrait dire qu'en fait, en plus d'avoir à chaque sommet euh les 360 degrés il faut que les autres sommets puissent avoir 360 degrés avec euh
153		Ils doivent être en contact avec les autres sommets avec 360, 180, 180 degrés
154		Ouais, mais ça, je sais pas comment se débrouiller pour faire ça
155		Et avec des cercles, ça fonctionne pas ?
156		Non, non justement Nico, parce que, typiquement c'est le truc qui fonctionne pas. T'as pas le droit de les superposer [...]
157		Déjà y a, y a les carrés, les triangles, les rectangles encore et sinon
158		Les rectangles, on peut pas parce que c'est pas les mêmes longueurs
159		T'as pas le droit de mettre
160		Y'a nécessairement une question d'angle
161		Euh
162		Mais non, si tu représentes un polygone régulier avec une infinité de côtés, ça ressemble à un cercle
163		Ouais mais, est-ce que tu vas fabriquer
164		Faut trouver une condition des figures qui permette de
165		J'avais pas compris que tu pouvais pas les superposer, c'est marqué mais j'avais pas compris
166		T'avais pas vu en fait ?
167		Hein ? Si j'ai vu sans superposition mais j'avais pas compris la définition de ce que ça voulait dire exactement jusqu'à maintenant

168		Superposition t'avais pas compris [Rires]
169		Ben écoute tu peux l'mettre en deux mots. non j'déconne, j'sais pas.
170		Super position
171		Superman
172		Yes man
173		Ouais, euh donc ...
174		Alors là, dans mon truc ça s'rait ...
175		Eh, est-ce que t'as pas l'droit d'faire deux figures différentes avec euh, une même euh ... avec un même 'fin t'as deux pavages différents mais dans l'même genre.
176		non tu peux pas ça.
177		T'as pas l'droit d'faire carré octogone carré
178		Tu parles des polygones ?
179		Ah ! Humhum.
180		Il y ait le même assemblage de polygones
181		Ça veut dire quoi ça ?
182		Euh ...
183		Ah, attends !
184		Parce que c'est pas dit que t'as pas l'droit d'mettre ça là.
185		Au pire faut demander à la prof
186		Ah ça s'trouve on pourrait avoir ça.
187		Ouais, ça s'trouve on pourrait avoir ça.
188		Ah, ok.
189		Et après selon la ligne comme comme t'as fait tout-à-l'heure ça peut ça peut p't'être être plus parallèle.
190		Polygone régulier sans trou ni superposition
191		Mais ... avec ça, ça veut dire que tu peux même rajouter des triangles.
192		Au pire on d'mande à la prof.
193		Et du coup, mais ça voudrait dire qu'il peut y en avoir une infinité, parce que ça, t'en cales un n'importe où, tu mets un autre n'importe quoi, ... Ah non parce que des fois ça [?]. Mais par exemple si on fait ça là, ...
194		Oui mais r'garde, si tu fais ...
196		[?] Ça pourrait fonctionner.
195		Est-ce-que ça on a l'droit d'le mettre sous la forme qu'on veut ?
197		Sous la forme qu'on veut c'est-à-dire ?
198		Hein Val ?
199		Hum ?
200		C'que j'disais c'est qu'a a... *a priori* c'est pas marqué qu't'as pas l'droit d'mettre un carré.
201		Oui en fait tu veux, tu peux faire varier le... tu peux ne pas...
202		Mettre un carré avec un triangle par exemple
203		Ne pas garder que le... on était partis sur celui-là.
204		Sinon tu peux garder
205		Tu peux faire varier ...
206		On peut garder ça, et pis mettre un carré et un triangle. Et comme ça déjà tu fais un truc.
207		On a l'droit d'faire ça, j'pense ? 'ttends, faut relire le ...

208		Ouais mais...
209		"Est un recouvrement du plan par des polygones réguliers, sans trou ni superposition tel qu'aucun..."
210		Ahhhh, alors ça c'est p't'être simplement une mauvaise interprétation d'notre part.
211		Oui, mais est-ce-qu'on peut euh ... y'en aurait une infinité parce que là-d'dans tu, tu nous mets 4 triangles ça fait un carré, donc après on peut euh ...
212		On est d'accord. C'est-à-dire que là j'peux mettre que des triangles si j'veux.
213		Par contre avec des triangles on peut tout recouvrir.
214		non mais les triangles faut qu'ils aient le ... le même côté.
215		En fait, j'ai pas compris, c'est juste ... c'est quoi c't'exemple...
216		Ah oui c'est vrai qu'faut que ce soit toujours des ...
217		C'est quoi c't'exemple j'comprends pas.
218		C'est ... un triangle [?] ton, ton sommet il est, il s'trouve au milieu d'un côté. Donc nous il faut qu'les, les sommets coincident.
219		Qu'ils soient ... Ouais nous il faut qu'ils soient... ouais faut qu'les sommets soient ensemble.
220		...
221		Ouais, faudrait demander à la prof siiiii ...
222		Ouais c'est le même assemblage de polygones, c'est-à-dire que, en gros ...
223		Alors est-ce-que c'est toujours les mêmes polygones ou est-ce-que c'est euh ... C'est là la question.
224		Si le, le même assemblage c'est-à-dire euh, comme t'as fait là. Si c'est le même assemblage avec ...
225		On peut avoir différents polygones mais avec euh ...
226		Faudrait avoir ... Est-ce-qu'on pourrait avoir différents polygones dans ce euh, dans c'pavage quoi. Faut qu'ils soient imposés.
227		"Un pavage archimédien du plan est na na na" ... Ah mais c'est pas dit qu'on... Ça ça pourrait fonctionner alors. Faut trouver la condition ...
228		Quoi par rapport à ça là ?
229		Ça ça pourrait l'faire alors. Et, je sais pas parce que euh ...
230		En fait, le seul problème c'est qu'j'ai l'impression qu'à partir du carré ça, y'a plus rien qui fonctionne. Faut trouver pourquoi est-ce-que à partir d'là y'a ... À mon avis y'a une hisoire de longueur de euh y'a une histoire d'angle. Et parce que sinon ça servirait à rien d'nous avoir donné tout le euh toute la première partie.
231		Eh mais r'garde, tes triangles y doivent avoir la même longueur.
232		Pardon ?
233		Tes triangles ils doivent avoir la même longueur. 'fin, tous les côtés des triangles doivent avoir la même longueur.
234		R'garde. Si tu fais un triangle là comme ça. Comme ça. Un triangle là comme ça comme ça, et de nouveau comme ça. Là j'ai bien huit triangles, et tous identiques là, ...
235		Et est-ce-que tous les sommets sont euh ...
236		Mais faudrait l'faire sur de grandes dimensions et vérifier avec ça.
237		[?] coincident avec le fait de ...

238		M'dame y'a quelque chose qu'on arrive pas à s'expliquer. Est-ce qu'il faut qu'on aie à chaque fois le même polygone, ou est-ce qu'il faut qu'on ait euh un assemblage de plusieurs polygones différents ?
239		Ça peut être un carré, un ...
240		Ben j'pense que t'as exactement la réponse, il faut qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones.
241		Ouais mais le ...
242		Donc qu'est-ce-que vous avez dessiné qui vous pose problème ?
243		Ça, est-ce-que c'est pas un ... ?
244		Ben alors, à chaque sommet on doit avoir le même assemblage de polygones. Donc tourne autour d'un sommet et regarde, est-ce-que tu as toujours ... t'as quoi quand tu tournes autour ?
245		On a, un carré, un euh ... un hexagone. Là pareil. Ben ça pourrait fonctionner celui-là.
246		D'accord.
247		*A priori* oui.
248		Parce que ouais, on, ils sont chacun ... un carré et un
249		Donc celui-là pourrait fonctionner
250		Ça veut dire ...
251		Ouais le tien il fonctionne ... Attends, ah non il fonctionne pas parce que t'as un
252		Ouais j'ai deux tri... j'ai un triangle
253		Un triangle avec euh hexagone.
254		Ouais mais sauf qu'en fait là c'que t'as ...c'que t'as pas pris en compte Nico c'est que ... vu qu'c'est un plan en fait c'est infini. Donc là, on peut mettre des carrés, et là t'as pas forcément besoin de mettre des triangles.
255		Parce que là ça marcherait pas
256		Ouais, c'est à ça qu'j'pensais, parce qu'en fait ...
257		Là ça marcherait pas ça par contre.
258		Hein ? Non, par contre c'est euh, ce à quoi j'pensais c'est c'que Valentin a fait en fait. À la base.
259		Ouais, c'qu'on avait fait là ?
260		Ok, donc ça ça pourrait fonctionner, parce que y'a l'même euh ...
261		T'vois, mais ça c'est l'genre de truc que tu r'trouves sur des carrelages, c'est pour ça qu'j'vous ai dit ça tout-à-l'heure.
262		Alors autre euh, autre truc. Euh, étrangement ... étrangement là on a un truc avec 8 côtés, et c'qui permet de compléter pour avoir un euh un pavage total, ... c'est un truc à 8. J'me demande si euh c'est pas possible de faire
263		Mais par contre comment tu fais pour arrêter pour que ce soit droit derrière ?
264		Mais en fait Nicolas, vu qu'c'est un plan , c'est quelque chose qui est infini, donc là j'peux continuer à faire ça.
265		Hum.
266		Ça j'peux continuer à l'infini.
267		D'accord. Parce que t'as pas besoin de l'arrêter, t'as pas b'soin de quelque chose de carré.
268		Ouais t'es pas obligé d'avoir des droites parallèles, c'est bien c'que j'disais.
269		Donc t'es pas obligé d'avoir un ...

270		J'vais ... j'vais essayer un truc. J'vais faire avec 5, euh non, 5 ça va être chiant. Le faire avec 8 et avec 16.
271		Essaye un truc ...
272		J'vais voir si ça fonctionne aussi.
273		Essaye un truc : une fois qu't'arrives à ça, euh, là par exemple, depuis ici, de mettre euh, là t'en r'fais un deuxième là, ... Ouais, alors j'vais t'le faire.
274		Fais en un ouais.
275		Ouais.
276		Là tu fais un triangle.
277		De mêmes dimen..., euh de mêmes euh côtés là. 'fin ils ont la même longueur,
278		En fait euh, ouais mais c'qu tu fais du coup Nico ça casserait notre euh
279		Là tu peux pas ...
280		Bien sur que oui, sauf que...
281		Non tu peux pas parce que les angles ... T'as vu comme ils disent ? Ils disent : autour de chaque sommet il y a le même assemblage de polygones. Et là on a pas l'même assemblage sur le
282		Oui mais, si là tu mets un triangle ? Eh ben, il suffit juste de mettre deux comme ça euh, juste autour, ou un seul.
283		Oui, mais si on met un triangle ici, ça veut dire que là y'aura octogone et triangle, alors que là y'aura octogone et carré.
284		Octogone et carré ouais.
285		Donc ça sera pas le même
286		Donc y'aura pas le même assemblage.
287		Oui mais l'même assemblage, c'est juste que, il faut que par exemple autour du carré, y'ait 4 euh hexagones. Là, en fait c'est des ...
288		Si tu prends chaque sommet tu dois avoir ...Si t'as un carré et un euh ... non c'est un hexagone. 1, 2, 3, 4, 5, 6. Non c'est un hexagone.
289		J'vais essayer quelque chose avec euh 16.
290		Moi j'fais des hexagones.
291		non ça r'vient au même.
292		Ouais c'est ça.
293		Mais l'idée ...
294		On s'en fout. Si là par exemple j'ai ça là, j'ai, j'ai ça là. Hop, hop, hop, hop, hop, hop. Voilà, au lieu du triangle là ou au lieu du triangle là. Et ben, ça veut pas dire qu'c'est faux. C'pas parce que là j'ai un triangle et qu'là j'ai un octogone, que c'est pas bon. Du moment que lui, il est entouré de, de trucs comme ça, que de trucs comme ça, lui, que de trucs comme ça, lui, que de trucs comme ç... 'fin celui-là que de trucs comme ça c'est bon non ?
295		Ouais mais, non mais, non mais ...
296		Autour de chaque sommet, regarde, chaque sommet, ça veut dire que là, y doit y'avoir la même chose que euh sur ce sommet là.
297		Nico ?
298		Ouais ?
299		Autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones. Donc ça ça marcherait pas.
300		Donc si tu mets un autre.
301		Si tu mets un triangle c'est, tu, tu pourras pas, r'garde c'est ...

302		Comme il a dit tout-à-l'heure, t'auras un ...
303		Et autour d'un carré ?
304		... un hexagone autour d'un ...
305		Un hexagone autour d'un carré ?
306		Autour d'un carré, c'est comme euh
307		non, t'as fais là, c'est ...
308		Autour d'un triangle [?]
309		[?] autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones...
310		D'accord. Donc, en gros, ...
311		...
312		Ah, va falloir m'aider là, parce que... On peut p't'être le faire euh, autour d'un triangle, hein, Benoit ?
313		Comment ?
314		On pourrait p't'être le faire autour d'un triangle, mais pour que les trois côtés aient la même longueur, il faut trouver non pas un octogone mais un polygone régulier qui a ses côtés ...
315		Dont l'angle permette
316		De faire un triangle euh, équilatéral. Et peut-être qu'avec ça on peut refaire la même chose mais au lieu d'le faire avec un carré...
317		Y'en a un autre qui fonctionne c'est l'hexagone, avec que lui-même.
318		Mouais.
319		Alors ...
320		Attends, ben on peut essayer de ... voilà maintenant.
321		Mais c'est que des hypothèses hein.
322		Donc on a le triangle, le triangle équilatéral, on a le carré, ...
323		Ouais le carré.
324		On a les ...
325		L'hexagone.
326		L'hexagone.
327		[?]
328		On a l'octogone aussi.
329		Et on a l'octogone, avec un carré.
330		L'octogone plus carré.
331		Ouais. Et en fait j'ai l'impression que tout c'qui va être des multiples de trois ça va être capable de euh, de faire des euh, de fonctionner avec lui-même.
332		Les multiples de trois ?
333		Ouais. Parce que là on a 3, 6 qui fonctionnent en étant tous seuls, ...
334		Octogone.
335		Ben faut essayer d'aller à 9.
336		Et à mon avis, faudrait voir avec 12 côtés, si ça fonctionne pas avec 8.
337		...
338		De rajouter de 4 en 4 à chaque fois.
339		Mais 8 ça fonctionne non ?
340		Chais pas. Euh ...
341		Non non non, ...

342		Attends mais 8 ça fonctionne avec le carré. L'octogone ça fonctionne avec le carré, parce que, un côté, ...
343		Bon, je vais vous interrompre deux minutes. Donc, dans un problème de recherche, les vrais mathématiciens quand ils sont dans un problème de recherche, ils disposent des recherches précédentes. Donc pour euh, vous aider, et parce que vous êtes aussi dans une situation de recherche vous avez le droit de bénéficier euh de quelques documents, donc j'vais vous distribuer en fait des extraits d'un texte d'Albrecht Dürer, qui a travaillé là-dessus.
344		C'est ... il a travaillé. Donc à vous de voir ce est écrit dedans, si ça vous sert ou si ça vous sert pas et comment est-ce-que vous pouvez vous en servir. Donc j'vous distribue ça, j'vous laisse prendre connaissance du document et voir comment est-ce-que vous pouvez euh vous en servir.
345		À mon avis euh ... merci.
346		Y'en a une de trop.
347		...
348		Pourquoi elle a fait ... Pourquoi y'a un cercle là ?
349		Et oui y'a [un maximum ?] y'a un ... y'a, ben tiens ils en parlent de ... Donc par contre eux...
350		Ah ouais d'accord, mais après faut vraiment ...
351		Mais là du coup y'a des [?] pour écrire ?
352		Attends, on va essayer de lire. Heu ...
353		[lecture inaudible]
354		OK. ... Idem j'pense.
355		Ça veut dire quoi idem ?
356		Où ça ?
357		D'accord, oui ben ça ça s'comprend.
358		Ouais mais ...
359		Y'en a un là euh Madame.
360		...
361		"Tu peux aussi organiser un pentagone en cinq roses qui se touchent". De roses qui se touchent, d'accord. "...puis renverser..."
362		...
363		...
364		Donc là on a encore l'hexagone.
365		D'accord.
366		[?]
367		On peut dire d'jà, ben y'a beaucoup d'trucs avec le ...
368		Et par contre là ...
369		Et donc en gros après ...
370		Par contre là, faut regarder. ... Ici là sur euh, ils nous demandent de pas, d'avoir les mêmes longueurs et les mêmes angles. On en a un de plus grâce à celui-là déjà.
371		Déjà y'en a euh ...
372		Celui avec des triangles équilatérals.
373		Faut prendre en compte ce qu'ils nous demandent là hein. Y'en a on peut les virer. Ceux-ci ils nous intéressent pas.
374		On a dit on mettait pas ceux qu'étaient ...

375		Ouais, les mêmes angles et ...
376		Par exemple celui-là on peut mais grâce à ... ben c'est un triangle équilatéral. ... Mais j'sais pas si ça marche parce qu'il faut qu'les sommets soient sur le ...
377		C'est lesquels que t'as dit qu'il fallait qu'on vire ?
378		Après chais pas hein, j'me suis p't'être trompé, mais ...
379		Attends,
380		Ben déjà y'a lui là, et là on peut l'enlever,
381		Ouais ouais. Et j'ai regardé, le premier aussi. Celui-là là. Ils ont fait un cercle.
382		Celui-là on peut pas ...
383		...
384		Après les carrés normal, on a ...
385		Euh, oui, donc là en plus ils dépassent. Les figures 5 dépassent.
386		[?]
387		Et après tu fais, ça fonctionne pas là.
388		Pourquoi ?
389		Ben parce que euh, les triangles ils sont pas équit, équilatéraux.
390		Hum.
391		Ben t'as le dernier ouais il fonctionne pas.
392		Et celui-là aussi il fonctionne pas là.
393		J'peux t'le ré-emprunter après ? Ah ben non j'ai l'même.
394		Pourquoi les triangles ils sont pas équilatéraux ? Si.
395		Ici là, là ?
396		Ben non mais ils font pas tous la même longueur.
397		Ah ouais, faudrait, faudrait r'garder là, parce que...
398		Bah, techniquement ils sont ... Parce que l'problème c'est qu'pour avoir des... J'suis pas sûr qu'tu puisses, avec des octogones, avoir des triangles équilatéraux.
399		Avec des octogones si, si ils ont tous le même longueur de côté, t'façon les ...
400		Ben r'garde là j'ai essayé.
401		Ben oui du coup ils seront ...
402		T'as vérifié si y'avait la même longueur là, là, là, là, là ?
403		Ah non. Mais non mais ...
404		Et du coup celui-là, il marche ou pas ?
405		Ben pas comme ça, si on passe le triangle comme ça au lieu de laisser comme ça l'espace, [?] je sais pas par rapport au sommet après du coup.
406		Et ben lui, euh oui, mais si... il faudrait que cette longueur là soit la même que cette longueur là. Ce qui est peu probable. Tu vois ? La longueur là doit être la même longueur là. C'est comme ces deux là, ...
407		C'est comme celui-là ?
408		Oui, parce que ces longueurs là elles sont égales, tes, ton côté là il est égal à celui-là. Donc celui-là il doit être égal à celui-là.
409		Ah ouais.
410		J'sais pas si ça arrange quelque chose mais, ...
411		Ah ben oui oui. ... Ah ouais.
412		...

413		Et celui-là il marche aussi là.
414		Ouais mais en fait euh, faut trouver la condition qui réunit euh
415		[?]
416		Es-ce que vous pouvez tirer un trait sur votre cahier, juste avant qu'on vous distribue le document là. Comme ça je saurai ce que vous avez produit avant le document [?]
417		Ok.
418		Un trait. Voilà.
419		Un trait à partir du moment ou on n'a pas eu le document.
420		Donc on aurait, euh ... pour le même cahier, ...
421		...
422		Et est-ce que nous ça nous ... Euh, on fait pas de distinction entre ça et ça nous ?
423		Hum... Non.
424		non y'a pas de distinction. À part qu'on [tourne ?] quoi.
425		Après là y... il s'arrête pas mais sinon ça fait la même chose que celui-là.
426		Comment ?
427		Il s'ra, il s'ra accessible, mais parce que là [?].
428		Y'as pas, ouais, y'a pas de ...
429		Donc lui il a fait des dessins. Vous aussi vous avez fait des dessins quand vous avez fait des dessins y'en a qui étaient juste et y'en a qui étaient faux. Donc euh, ils sont pas forcément tous bons ces dessins.
430		Ben ils correspondent pas tous
431		Ils correpondent pas forcément tous aux conditions de l'énoncé.
432		Là par exemple, ceux là, euh, chaque sommet ... Si ça marche encore.
433		Ils sont bien liés aux mêmes choses, mais y'a des trous et ...
434		Ça ça serait bon là ? Celui-là.
435		Ok.
436		Celui-là ...
437		Ben d'jà ceux-là, non plus hein.
438		Ce serait bon ceux-là ou pas ?
439		Celui-là oui, parce que regarde.
440		Oui, si on ...
441		C'est les mêmes côtés, après chais pas si c'est les mêmes angles.
442		...
443		Pis ici c'est les mêmes angles. Et faut pas qu'ce soit tout partout les mêmes angles.
444		T'façon ils ont tous le même côté.
445		Ouais.
446		Ouais mais ... l'angle celui-là il est pas...
447		Qui c'est qui m'a piqué ma gomme ?
448		Et ça c'est pas important ça ?
449		non, j'pense pas.
450		J'pense pas.
451		Par contre c'est pas dit dans le ...
452		C'est toi qui as ma gomme ?
453		Oui.

454		J'pense pas, ben après euh, ben celui-là il doit être bon là.
455		Celui du bas on a dit qu'on pouvait pas.
456		Lequel ?
457		[?]
458		Euh ... C'est toujours le même problème.
459		Lequel ?
460		...
461		Chaque sommet est constitué par un ...
462		Mais là il nous a donné la réponse non ?
463		Ah non, par contre, lui il marche pas par exemple.
464		Pourquoi ?
465		Bien sur que non.
466		Parce que lui ...
467		Ben alors, c'est quoi qu'on cherche ?
468		Ben du coup son sommet est ...
469		Lui ça marche pas parce que ce sommet là, regarde, tu prends ce sommet là,
470		Ouais ?
471		Il est lié à quoi ? À ... 3, 6, octogone. Et il est lié à losange ici. Alors que celui-là il est lié à quoi ? Au losange et au losange. Ils ont pas la même disposition.
472		Et t'façon là ici, là les ... Par rapport à ça aussi. Les angles.
473		Oui, les angles sont pas les mêmes.
474		C'est déjà pas les mêmes.
475		Donc on peut être surs déjà, tous les euh, ... On peut déjà enlever celui-là.
476		Ça et ça, c'est pas [?]
477		Ouais, c'est c'que j'ai pensé tou-à-l'heure, mais, ...
478		Oui, mais est-ce que cette mesure là est la même que celle-là ?
479		Fais, ben fais des dessins Nico.
480		J'pense pas hein.
481		Ça veut pas dire ... pas forcément ... Donc ça correspond à ceux qu'on veut nous.
482		Ben on peut faire ça par étape, mais après ...
483		Euh ...
484		C'est des dessins, c'est pas forcément pour que ça corresponde à ce que l'on veut nous.
485		...
486		[?] oui, faut qu'la longueur soit la même déjà.
487		...
488		Bon, j'pense que vous vous êtes tous approprié le problème, on va faire une petite euh, juste un p'tit échange. Vous allez euh me dire dans chaque groupe qu'est-ce que vous avez trouvé, comment est-ce que vous avez avancé, histoire que vous puissiez chacun utiliser aussi un peu des [?]. Alors, euh, le groupe [?], qu'est-ce que vous avez compris du problème, qu'est-ce que vous avez comme ébauche de réponse, où est-ce que vous en êtes ?
489		Ben qu'est-ce qu'on a comme ébauche nous ?
490		Rien.
491		Ça a pas marché, j'sais pas.

492		Oui, le plan est infini. En effet. Donc c'est-à-dire qu'en fait on imagine que ce pavage on va pouvoir l'étendre, effectivement à l'infini. Qu'est-ce-que vous avez trouvé d'autre ? Axel, tais toi. Qu'est-ce-que vous avez trouvé d'autre ? Est-ce-que vous avez trouvé des pavages qui conviennent à la définition, qu'est-ce-que ... ?
493		[?]
494		Donc, au niveau de l'appropriation de l'énoncé, le plan est infini, on peut mélanger, on peut avoir deux types, ou trois types, ou plusieurs types de polygones différents, Ok. Et est-ce-que vous en avez trouvé qui fonctionnaient ?
495		Euh, oui.
496		Celui avec des carrés ? Donc si j'me souviens bien c'que vous avez dessiné c'est ça ? Quatre carrés comme ça ... Ok ?
497		[?]
498		Ah oui, faudrait y faire à l'infini, mais j'vais avoir du mal. Est-ce-que ça suffit si j'dessine ça pour qu'on comprenne euh comment ...
499		Ben non, parce que [?]
500		Y'en a qui se forment tous seuls, ben oui. Mais l'problème c'est que, va bien falloir que j'm'arrête un jour.
501		On va jusqu'au [?]
502		Ok, donc j'mets des p'tits points. Ok ? Est-ce que vous en avez trouvé d'autres ?
503		Triangles équilatéral.
504		[?]
505		Et vous êtes arrivés à faire quelque chose avec un mélange de triangles et d'carrés ?
506		[?]
507	E9	On a le droit d'faire des mélanges comme ça ?
508		Alors oui on a l'droit d'faire des mélanges. C'est euh, c'est écrit dans l'énoncé. Donc vous avez voulu couper un carré ? Comme ça alors ?
509		...
510		Ouais mais là c'est pas un triangle euh, équilatéral.
511		Les autres ?
512		C'est pas euh ... les mêmes distances ouais.
513		Y'a pas les mêmes angles non plus.
514		Celui de droite on le laisse en carré, comme ça ?
515		Ouais.
516		Où en dessous de celui-là on [?]
517		Mais j'coupe dans quel sens ? Comme ça ou comme ça ? Comme ça. Bon, les autres, qu'est-ce-que vous avez comme remarques à faire ?
518		C'est pas les mêmes angles.
519		Donc en fait cette figure là, c'est pas ... Qu'est-ce-qui est dans la définition ?
520		C'est pas régulier.
521		Voilà, c'est pas un polygone régulier.
522		C'est-à-dire que qui est avec des triangles rectangles ça fonctionne pas. Faut que ça soit automatiquement un triangle équilatéral.
523		Bon, le groupe d'Axel, est-ce que vous avez d'autres choses ? ... Mathieu, mais peu importe, c'est pas ... Vous avez rien du tout comme [?] à rajouter ?

524		Avec quatre triangles équilatéraux, donc du coup euh
525		Un comme ça et un en haut.
526		Donc ça fait comme ça et puis on continue euh ... Ok ? Est-ce que vous en avez un autre ?
527		Des losanges.
528		C'est pas régulier.
529		Non. Donc on peut paver avec des losanges mais c'est pas un pavage archimédien au vu de la définition.
530		Sauf si ton losange c'est un carré.
531		Tu peux m'prêter un stylo vert s'il-te-plaît ?
532		Ben si c'est un carré on appelle ça un carré !
533		Alors avec 8 côtés. Alors, 8 côtés.
534		Regarde, on l'a pas fait celui-là, mais l'hexagone, octogone avec des carrés comme ça.
535		Oui mais en fait ...
536		On a fait ça mais ...
537		[?]
538		Là, nous on a collé les diagonales avec les diagonales, eux ils ont collé les côtés avec les côtés.
539		Ouais ouais.
540		En fait on en a quatre quoi. Enfin non, trois. Ah si, quatre.
541		Donc un octogone et puis un autre là ? Donc j'imagine que je continue, et du coup on complète avec quoi ? Donc octogone carré. Ok. Est-ce-que ça correspond à la définition ça.
542		Ouais.
543		Nous on a trouvé que oui.
544		Oui, à priori oui.
545		[?] qu'est-ce-que tu comprends pas de cette histoire de ?
546		[?]
547		Quelle phrase tu comprends pas dans l'énoncé ?
548		Non mais c'est pas des phrases, c'est euh [?]
549		Je sais pas, est-ce-que ça marche sur les angles. Est-ce-que vous l'avez vérifié, si ça marche sur les angles, ceux qui l'ont dessiné ?
550		Donc ça marche parce qu'on l'a dessiné ? Est-ce-que ça marche sur les angles, c'est p't'être effectivement une bonne question.
551		De quoi ? Qu'est-ce-qui fonctionne ?
552		Est-ce-que ça marche sur les angles ?
553		De quoi ?
554		Ben je sais pas, c'est lié euh ...
555		Euh, le groupe de Valentin, est-ce-que vous avez avancé sur autre chose, que ce soit des pavages que vous avez trouvés, soit des pavages [?] qui n'en sont pas.
556		Les multiples de 3.
557		Oui, avec les hexagones.
558		Avec les hexagones, Ok. Je marque "hexagone".
559		Avec les hexagones ça marche aussi.
560		Ouais.
561		Dis lui direct les multiples de 3 Val.

562		J'le dessine pas.
563		Heu, non mais ça va pas fonctionner, j'ai regardé ...
564		Ben pas les carrés ...
565		Et octogone-carré, comme euh ...
566		Oui d'ailleurs octogone-carré j'me suis bien embêtée à le dessiner, il y est pas, par hasard, dans les papiers euh ?
567		Si il y est.
568		...
569		Bon, si on reprend les papiers de Dürer, est-ce-que vous en avez trouvé qui sont des candidats à notre euh ... Là, sur la première page, est-ce-qu'il y en a qui répondent à la question ?
570		Ben [?]
571		Ben toujours le triangle.
572		Là sur ces trois dessins est-ce-qu'il y en a ?
573		Triangles équilatéraux.
574		Et donc c'est lequel ? C'est celui-ci ou celui-là ?
575		Celui euh, du bas.
576		Celui-là ?
577		Celui-ci, vous avez dit que ça fonctionnait ?
578		non, parce que les sommets ...
579		Voilà, parce qu'il y a des sommets qui sont sur les arêtes des autres. Celui-ci vous avez dit que ça fonctionnait ou pas ?
580		Bah ...
581		Oui, non, peut-être ?
582		...
583		Alors c'est une superposition, vous voyez une superposition ?
584		non, mais, c'est un angle euh ...
585		C'est un arc de cercle.
586		Ah oui mais l'arc de cercle est-ce-qu'il est là comme trait de construction ou est-ce-qu'il fait partie du pavage ?
587		Là c'est un trait de construction.
588		Alors on essaye d'oublier le cercle du coup, alors est-ce-que ça fonctionne ou est-ce-que ça fonctionne pas ?
589		Tes hexagones ils fonctionnent avec des triangles aussi ?
590		...
591		Ça revient au même que ...
592		[?] qu'avec des triangles
593		Donc on en a deux ? Du coup euh ... j'ai celui-ci et j'ai celui-là. Ça nous en fait deux.
594		L'hexagone il fonctionne avec des triangles aussi, donc on peut r'mettre des hexagones.
595		Non non mais parce que Benoit il écoute pas, mais j'pense qu'il sait pourquoi.
596		Comment ?
597		On en a deux alors ?
598		non y'en a qu'un.
599		Y'en a qu'un. J't'ai entendu l'dire, y'en a qu'un.
600		Parce que c'est la même euh, 'fin on décale juste. ... Ça revient au même.

601		C'est la même chose avec euh ... c'est juste tourné ? C'est pas étendu de la même façon ?
602		[?]
603		Ben oui, ça ça fonctionne. Tu prends l'hexagone là, tu l'mets ici ...
604		Ceux d'en face sur la première page, on retrouve celui que vous avez dessiné tout-à-l'heure
605		Tu remets des triangles ?
606		Hein, les deux autres ?
607		Le troisième il marche pas vu que [?]
608		Et le deuxième heu ...
609		Et le deuxième ?
610		Il marche.
611		Il marche. En diagonale.
612		C'est le même que l'premier. Ok. Sur les autres, qu'est-ce que vous avez repéré heu sur les autres feuilles ?
613		Par contre ça veut dire que là en face y'aura un triangle ? Là ici on va avoir un ... on va avoir ce trait là qui va continuer comme ça, celui qui va se retrouver comme ça. Ça va nous faire un triangle ici, et ici on va avoir un deuxième hexagone. Pis là un hexagone, ici un triangle, un hexagone, ici un triangle, un hexagone, ici un triangle, ...
614		Là, le premier fonctionne pas, pourquoi ? Parce qu'il y a des losanges. Le deuxième ? On peut pas [?] Ok.
615		Ici là faut rajouter ... comme ça non ?
616		Ouais c'est ça.
617		Là, c'est celui-là qui ...
618		Sur ceux-ci, la troisième page, qu'est-ce-que vous avez trouvé d'intéressant ?
619		[?]
620		Les hexagones vous me l'aviez donné tout à l'heure.
621		Plus les triangles !
622		Avec les triangles.
623		Celui avec les triangles euh ...
624		Il marche.
625		Celui-ci là ?
626		Ouais, il fonctionne.
627		Je sais pas, non. Celui-ci vous avez dit ok que ça fonctionnait. Celui-ci ?
628		Oui, il fonctionne.
629		Oui, il fonctionne, on reprend les critères, pour vérifier si ça fonctionne. Qu'est-ce que je dois vérifier ?
630		Même longueur, même angle.
631		Et les sommets ont le même assemblage.
632		Non, ça marche pas.
633		Euh ...
634		Si, ça fonctionne.
635		Les sommets ont les mêmes assemblages, qu'est-ce-que ça veut dire ça ?
636		Ça veut dire qu'à chaque fois il doit y avoir deux hexagones et deux triangles qui forment un sommet, et, 'fin ... ouais y'a ça.
637		Là, chaque euh ...
638		Là c'est bien ....

639		Si ben c'est bon.
640		Ah, attendez. À mon avis va y'avoir un vieux truc encore. Faut essayer avec 5 et 10. J'ai l'impression qu'il y a une histoire de doubles. Parce que ...
641		Y'a des grosses impressions là.
642		Alors celui-ci ?
643		Euh, ben, j'pense que oui mais...
644		Si tu veux j'essaye juste après. J'termine avec euh, avec 12 là.
645		Parce que du coup avec 12 à c'est ...
646		Ben je sais pas, y'en a qui ont l'air de douter, moi j'attends hein.
647		Ça va pas, y'a ...
648		Ben il marche quand même.
649		Non mais il fonctionne.
650		Il fonctionne ouais.
651		Est-ce que t'as du noir s'te plait ? Merci. Un crayon à papier ?
652	P	Donc celui euh ... Figure 25 du coup, vous m'avez dit que celui avec les hexagones c'était oui, celui d'à côté, c'est quoi d'ailleurs comme figure ? ... Des étoiles ? Ben on parle de polygone non régulier là. Hexagone et triangles, ok. Est-ce-que ça fonctionne alors pour celui-ci ?
653		Oui. Oui. Oui oui.
654	P	Je sais pas, je vois au fond votre camarade qui secoue la tête.
655		Toi t'es ... Toi t'es d'jà une pièce rapportée, donc euh ... Ahaha.
656	P	Bon, donc celui-ci on va le laisser sur un point d'interrogation, vous résoudrez ça ensemble.
657		Alors ... une histoire d'angle.
658		Du coup ça devrait fonctionner.
659		Ben y'a des groupes qui doutent, on va les laisser finir de [?]
660		C'est les d'angle, donc ça devrait pas.
661		Bon, ben du coup c'est une question d'angle alors.
662		Mais tous les angles sont pareils, regarde là.
663		Un ...
664	P	On termine ? Celui d'en-dessous ?
665		Ben un polygone à 12 côtés ça devrait fonctionner avec un polygone à 6 côtés.
666	P	Pourquoi est-ce-que vous l'élimineriez celui-ci ?
667		Normalement.
668		Eh ben on va essayer. Un polygone à 6 côtés ce serait ... celui-ci.
669	P	Les losanges ok. C'est vos dessins là. Est-ce que vous en avez tiré quelque chose ?
670		Et ... donc on va le repasser en ... violet. Repasse celui à 12 en violet.
671	P	Valentin ? Pour le 26, là, t'as tiré quelque chose ? Vous avez fait la figure 26 ou pas ?
672		Celui-ci ? Absolument pas.
673		Regarde ... Si ...
674		non, celui-ci j'en ai retiré aucune parce que c'est pas ... des polygones réguliers.
675		Ok.
676		Ouais c'est vrai.

677		Que ce soit les ...que ce soit le, ce qui ressemble à un collier ou celui au-dessus, en fait à chaque fois y'a des polygones qui n'ont pas les mêmes mesures d'angles et pas les mêmes longueurs de côté.
678		Ok.
679		C'est vrai.
680	P	Donc comme vous n'êtes pas tous allés au tout à fait au bout du document, j'vous laisse continuer à réfléchir là-dessus, maintenant j'ai vu ce que certains d'entre vous étaient euh pour d'autres arguments. Le groupe de Maxime, qu'est-ce que vous avez ... vous avez avancé sur quoi ?
681		...
682		La somme autour d'un sommet 360. Ok.
683		Ça on l'avait vu.
684		Ça c'est con.
685	P	Donc 360 degrés hein, je suppose. Et euh [?] comment vous aviez envisagé de vous servir de ça ?
686		Et à tu veux que j'mette ... euh, ou est-ce-que j'ai du noir ?
687		Donc l'angle d'un polygone tu veux dire ? Divise 360. Ok. Donc ça je mets c'est toujours pareil hein, c'est des ... Pourquoi est-ce-qu'il faut inférieur à 120 ?
688		[?]
689	P	Tu nous réexpliques ça, parce que je crois qu'il y en a qui ont fait "hein ?"
690		Ben faut pas qu'le sommet il soit tout seul, faut toujours qu'il y en ait trois.
691	P	Donc tu nous dis que pour faire un pavage il faut que sur chaque sommet il y ait au moins trois polygones, donc du coup que chacun des trois est inférieur à 120. Ok.
692		Ben, c'est logique en fait, parce que tu peux pas faire quelque chose où y'a plus de 120 degrés. C'est un triangle équilatéral.
693	P	Au moins trois quoi ? Quand tu dis au moins trois ... ? Au moins trois côtés. ... Au moins trois polygones. Polygones. Euh, j'vous ai entendu dire tout-à-l'heure : "ah mais on a l'droit d'mettre plusieurs formes" Vous étiez partis sur un seul type de forme ? ... Ok. Donc ça c'est leurs pistes. Ça peut vous donner des idées, mais pensez bien qu'ils étaient partis que sur un type de formes. Et l'dernier groupe ?
694		[?]
695	P	Ok, donc vous êtes aussi arrivés à cette conclusion que y'avait un, des angles inférieurs à 120 dont la somme faisait ... 360. Ok. Est-ce-que vous avez avancé dans cette démarche ou pas ?
696		[?]
697	P	Ok. Est-ce-qu'il y a encore des points... sur lesquels vous êtes encore indécis, que vous avez pas encore bien compris ? Quelle est la difficulté majeure en fait ?
698		De toutes les trouver en fait.
699	P	De toutes les trouver. Parce qu'en fait là vous avez réussi à en dessiner quelques-uns qui fonctionnent, la question difficile ça va être comment toutes les trouver. En effet.
700		On peut raisonner par récurrence.
701		Si p marche, p+1 marche ? Ahah.

702	P	Donc j'vous laisse encore réfléchir, le but c'est que ça sonnera à 5h moins euh 10 ... non 4h moins 10 ...
703		Non, 5h moins dix.
704	P	Oui, enfin bon, quand ça sonnera donc, ahah, vous euh, ayez fait une synthèse de votre groupe sur l'affiche. Donc là maintenant, c'est chaque groupe vous vous débrouillez, vous essayez d'aller le plus loin possible. Les affiches vous les... j'vous les donnerai quand vous aurez suffisamment avancé.
705		Attends, [?].
706		Révélation.
707		[?]
708		On avait une histoire comme ça aussi non ?
709		On a Valentin qui a trouvé la solution p't'être.
710		Qu'est-ce-que tu fais là ?
711		Ben il fait un dessin.
712		non, j'tente son truc, il a dit les euh, les trucs comme ça, avec les trucs comme ça.
713		C'est-à-dire ? C'est vague un peu ...
714		Les 12 avec les 6.
715		Et à mon avis va falloir rajouter un carré là ici.
716		Mais attends, oui ça fonctionne, les 12 avec les 6. Ah mais non ça peut pas fonctionner. Attends, ah si ça peut fonctionner.
717		Une histoire de 12 on a dit tout-à-l'heure.
718		Tu mets un 4, un 6, un 12. Ici 8, 4, ... Ça se trouve l'histoire de doubles comme t'as dit Valentin c'est p't'être euh ...
719		Parce que là t'as 8, t'as 4, faudrait qu't'essayes ... on va essayer avec 12.
720		Ouais, mais si c'est 12, c'est c'que j'suis en train de faire, le problème c'est que ... Le problème, c'est que 2 choses. La première c'est long, et la deuxième c'est pas évident.
721		...
722		Ça serait bon là celui-là. Pourquoi on l'vait laissé en suspens là ? Celui-là. Il serait bon en termes d'angle. C'est des triangles équilatéraux. Hum ... Il faut juste heu, le sommet, ...
723		'tain fait chier ...
724		Les gars faut qu'on [?] celui-là là, avec des hexagones.
725		...
726		C'est long ! !
727		Faut creuser ça. Creuser le fait que ...
728		...
729		J'l'ai fait ton putain de truc !
730		...
731		J'fais un triangle ou un carré ici ?
732		Triangle je suis pas sur que ça fonctionne.
733		Ben fait un carré plutôt.
734		Triangle ça fonctionne pas. Donc faut que j'fasse un carré.
735		Essaye attends, essaye 12... 12, 8 et 4.
736		J'ai l'impression que l'histoire de la moitié ça correspond pas.
737		La moitié c'est quoi ?
738		Parce que regarde, là si il fait 12 ...

739		Attends, là j'essaye de faire un carré.
740		... si il fait 12, 6, il est obligé de faire un carré.
741		Je prends le jaune pour les carrés, on va bien voir c'que ça donne hein.
742		Mais leur idée de 360 ... de 360 degrés autour des points à mon avis y'a quelque chose à faire avec ça.
743		Par contre, là à mon avis si on fait un carré au-dessus de tous, ça fonctionne. Parce que si on fait un carré au-dessus de tous les côtés, on peut même mettre des triangles entre les carrés.
744		Ça ?
745		Essaye.
746		Ça c'est la même chose que ça ?
747		Le noir c'est la même chose que ?
748		Les deux noirs là ?
749		Ouais mais tu vas faire comment pour combler le vide entre eux ?
750		Mais y'a pas d'vide. Là c'est le violet avec le noir.
751		Ah d'accord ok.
752		Écris Nico.
753		Mais, attends d'abord j'essaye le carré parce que j'suis pas sur, en fait je sais c'qui faudrait faire. Il faudrait trouver un ... truc qui a un nombre de côtés qui fait que si on met des carrés dessus l'angle entre les deux carrés est suffisant pour que ce soit un ...
754		... Correspond à un angle du polygone.
755		C'est ça. Pour que ça fasse un triangle équilatéral.
756		Et pour calculer l'angle des polygones on y avait fait dans la partie d'avant du DM.
757		Eh ben vas-y amuse toi bien, en attendant, moi j'essaye de faire avec les carrés.
758		Mouais, amuse toi bien.
759		Ça veut dire que, faut rajouter un carré, ...
760		Ah ! J'le, j'le mets mon carré là !
761		Si tu mets ton carré ici ça veut dire que ...
762		Ça veut dire que si là j'veux un carré, ici là, j'ai de nouveau euh, un 12 côtés. Et que ici j'ai droit à un 6 côtés. Val ? C'est beau hein ?
763		Quoi ?
764		Ben ici là, j'ai de nouveau un hexagone, et ici j'ai de nouveau un 12 côtés.
765		C'est-à-dire qu'un carré on pourra ...
766		Là r'garde. Là j'ai 12 côtés, là j'ai 6 côtés, là j'ai un carré, là j'ai un 6 côtés, là j'ai 12 côtés.
767		Ça veut dire qu'avec un carré on peut en ...
768		Du coup ici j'ai un carré, ici j'ai un 6 côtés, là j'ai un 12 côtés. Ici j'ai un carré euh ... Donc ...
769		Ouais, mais pourquoi ?
770		Ça c'est la règle qui est derrière.
771		Ben c'est c'qu'on avait fait dans le DM là.
772		Ouais, c'est pourquoi le problème. C'est ...
773		Et ben on reprend et ...
774		Il a dessiné quelque chose qui a l'air de fonctionner, c'est ça ?
775		Humhum.

776		Oui, qui fonctionne.
777		En fait toi tu es l'dessinateur.
778		Ahah. non. non, c'est Valentin qui voulait qu'j'essaye quelque chose et apparemment c'était pas c'qui voulait, mais ça fonctionne quand même.
779		En fait euh, j'pensais qu'il y avait une euh règle de moitié parce qu'on a vu que les hexagones et les triangles ça fonctionnait ; et les octogones et les carrés aussi.
780		D'accord.
781		Et puis là on a ...
782		[?] 12 et un octogone ...
783		12 et du coup vous avez essayé de mettre 6 et y'a ...
784		Ça marche plus.
785		Et y'a un trou ?
786		Et ça marche avec 6 et 4.
787		Et y'a un trou.
788		Par contre si on l'compare à un carré, ben ça refonctionne de nouveau, parce qu'ici on peut refaire 12 côtés, ici 6 côtés, et ici en fait on peut refaire un carré, et refaire un 12 côtés ici et e cetera.
789		Et du coup suit ça pas le double.
790		D'accord. Et ça suit pas quoi tu dis ?
791		Comme on avait dit que ça faisait le double ...
792		[?] 12, 6, 3.
793		Ah oui votre règle qu'en fait ça serait forcément euh, par paire, en fait ça marche pas.
794		Ouais.
795		Par contre du coup en fait on est en train de réver parce qu'on se demande si ça serait pas, c'est pas ... pour le rapport parce qu'en même temps on peut se demander euh, là y'a un carré, mais on peut remplacer là l'hexagone par des triangles.
796		Humhum.
797		Alors du coup si on l'remplace par euh ... si on l'remplace par des triangles il faut aussi trouver avec combien de nombre de côtés, et-ce-que, en mettant des carrés, ça laisse un intervalle suffisant pour qu'on ait des triangles équilatéraux.
798		Un angle suffisant.
799		D'accord. Ok, ben ça vous fait pas mal de pistes tout ça.
800		Ouais, pas beaucoup plus
801	P	Ben déjà il faudra peut-être aussi vérifier si le dessin fonctionne aussi. C'est juste euh ... ça a l'air de fonctionner.
802		Là, lui ?
803		Humhum.
804		Ça fonctionne non ?
805	E13	Ben, mesure cet angle là et regarde [?]
806		Attends 360 t'as combien de côtés t'as dit ? Attends t'as combien de côtés ? Donc là t'as un angles de ?
807		Ici là j'ai 120.
808		Attends, t'as 360. Ça veut dire que là on aurait un angle de ... J'peux ?
809		Ouais ouais.

810		Là, on aurait ... 30 ... Ça veut dire que là on aurait euh ... du 30 degrés.
811		Ouais
812		Et alors là on avait dit ... Faut tr ... , déterminer cet angle-là. On avait dit avec 360, ...
813		C'est celui-là ? Attends j'les ai calculés ces angles, c'était, regarde.
814		non mais attends faut voir après en fonction de ...
815		Regarde [Loïc ?]. Là, j'les ai calculés ces angles.
816		Oui, mais c'est bon. Non mais c'est pas ça qu'j'voulais dire. C'est savoir si ton ...
817		Tu voulais vérifier quoi ?
818		Faut vérifier si ça fonctionne.
819		Mais ça fonctionne forcément.
820		T'es sur de toi ?
821		Qu'est-ce qui peut pas fonctionner en fait ? Qu'est-ce qui respecte pas la règle, ... Là ils ont tous le même angle.
822		Ouais mais là t'es sur qu'ça fonctionne. T'es sur qu'ton angle c'est 90 ? C'est ça qu'j'veux savoir. Déjà que c'est un angle de 90 ici.
823		Ben c'est c'que j'ai essayé d'faire, mais en fait oui...
824		Ben prends le compas pour le ...le rapporteur
825		... Parce qu'en fait celui-là ... j'l'ai fait, là en fait j'ai calculé : un hexagone, c'est un angle de 120, alors ici j'ai fait des angles de 120. Regarde j'me suis cassé les couilles à l'faire là avec tous les p'tits points. Donc ça c'est un vrai hexagone, ça c'est un vrai 12 côtés, le carré j'ai essayé de le faire mais j'ai pas, j'ai pas [?]
826		Nicolas ? Mesure moi l'angle d'un hexagone s'il-te-plaît.
827		120 degrés.
828		120 degrés un hexagone ?
829		Ici là.
830		non. Euh, oui.
831		À chaque fois c'est 120 degrés ?
832		Pour un hexagone ?
833		Ben là y'a 120, 120, 120, 120, 120. Du coup dans la logique ici il doit y avoir 240.
834		Eh ben r'garde, dans la logique faudrait avoir 120, faudrait prendre celui-là, enlever 120 et voir si c'est 90 là. Si ça s'trouve c'est pas des carrés qu'tu mets. Donc là on a quoi ? On a 360 ...
835	E6	Ah, tu veux vérifier que ça c'est bien un angle droit !
836	E13	Oui, j'veux vérifier qu'ça c'est un angle droit.
837	E6	D'accord, bah écoute, il a une équerre.
838	E13	non non non, on vérifie pas comme ça, on vérifie par le calcul. Ça c'est un angle de trois cent soix... trois cent quatre-vingt.
839		[...]
840		Hein ? Voilà !
841		Ça ça fonctionne tu vois.
842		C'est pas, c'est pas ...
843		Eh ben c'est simple, ça fait 120 ...
844		180.
845		Et l'angle d'un ...

846		L'angle d'un truc comme ça, ben écoute c'est pas compliqué pfuit pfuit.
847		Ça nous fait, est égal à ...
848		Tu vas nous sortir une valeur exacte j'pense.
849		Clac. Non, c'est comme ça, clac, ...
850		Parce que du coup ...
851		... entre zéro et là.
852		... c'est p't'être pas forcément avec les côtés.
853		T'as combien ...
854		P't'être que c'est avec les angles.
855		Pardon ?
856		T'as combien entre [?] ?
857		Ici là ? Ben attends je regarde justement. Là ... Là j'ai 0 là.
858		T'as 150 ?
859		Attends. Ouais.
860		150 degrés. Là t'avais combien on a dit ? 120 ?
861		Ouais.
862		150, 150 + 120, ce qui nous fait 270. On est à ...
863		360 - 270 = 90. On est bons.
864		On est bons.
865	E13	Ouais, par contre euh, pour un pentagone ... C'est quoi l'angle ? 5 côtés ...
866		Non ben attends, prends pas le ...
867	E20	360 divisés par 5, ...
868		Non, parce que la somme des angles sera pas égale à 360 Benoît. 360 c'est pour l'carré.
869		Non mais, non mais c'que j'veux dire ... Tu veux calculer cet angle là ?
870		non, j'veux un truc à 5 côtés moi, j'veux savoir ...
871		Oui, à 5 côtés, à 5 côtés regarde. Merde, j'ai pas pris l'bon. 1, 2, 3, 4, 5. Tu veux savoir quel angle, sur ton 5 ? Celui-là là ?
872		J'veux savoir la valeur d'un angle.
873		Oui mais un angle comment ? Comme ça ?
874		Oui, un angle comme ça.
875	E20	Eh ben, tu fais ça, tu fais 72, 180 - 72, c'qui t'fait du 108. 108 degrés. On l'a fait dans l'DM.
876		108 tu dis ?
877	E20	Euh, ouais normalement c'est ça hein.
878		...
879		On l'a fait dans l'DM ... Euh, ouais c'est ça.
880		Ouais c'est ça.
881		Et là du coup, ...
882		Il est parti Mickaël ?
883		Il est parti.
884		Sérieux, il est parti ou ?
885		Il est en spé physique.
886		Oh le con.
887		...

888		Donc là ça veut dire que là, ça pourrait s'vérifier. Faut trouver une condition aussi, ça ça marche, c'est bien, mais par contre euh, faut voir une condition. On a vérifié qu'ça marchait, maintenant, ...
889		Ben j'crois qu'Valentin il avait raison. Ça là, faut prendre ça là.
890		C'est c'qu'on a fait ça. Ça c'est pour déterminer cet angle là, on l'a fait.
891		Et maintenant ?
892		Et ça, ça peut pas nous aider ça ?
893		non. Ça c'est pas terrible
894		Non mais sans regarder là les traits là. Si tu prends juste le premier avec les p'tits triangles,
895		Hum.
896		T'en prends 1 , ...
897	E20	non mais on va, j'pense, arrêter de chercher ceux qui marchent, et faudrait plutôt essayer de déterminer une règle, tu vois ?
898		D'accord.
899		Essayer de trouver une règle qui marche tout l'temps.
900		Soit par rapport aux angles soit par rapport ...
901	E13	Dans l'DM on avait la liste des polygones jusqu'à 25 côtés.
902		Hum.
903		Qui avaient euh, en fonction de leur euh, ...
904	E20	S'ils étaient polygones euh, s'ils étaient constructibles à la règle et au compas.
905		Ouais.
906	E13	Ça c'est tous les polygones réguliers de 3 à 25 avec leur mesure d'angle.
907	E20	Et c'est quoi la règle, pour qu'ils soient euh, constructibles euh ...
908	E13	Ça on s'en fout. En fait on a le nombre de côtés et la valeur de leur angle. Et en fait, on sait que pour chaque point il faut 360 degrés. Donc on a qu'à regarder, avec ces valeurs d'angle là, lesquelles peuvent correspondre.
909	E13	En les additionnant !
910		Oui, en additionnant, oui, après tu sais pas si... parce que là, faut un carré, plus un euh ... Ça on sait pas ... Faut arriver à 360.
911		Ouais.
912		Et t'façons, que ce soit un truc comme ça ou que ce soit un truc avec les angles ou un truc avec la longueur des côtés euh ...
913		...
914		Plus euh ...
915		...
916		Hexagone, plus carré, plus ...
917		On avait aussi quoi ? Le ...
918		1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 12.
919		Pourquoi t'écris José ? Ah mais non ...
920		José ! Ahah, non c'est 30 degrés.
921		Ouais.
922		Euh, donc on avait aussi quoi ? On avait carré plus euh ...
923		Donc lui il fonctionne bien.
924		Ouais.
925		Lui il fonctionne bien, on a ajouté ...
926		Un octogone.

927		On a essayé de trouver 360. On a ajouté c'que tu disais.
928		Et en fait à chaque fois c'est une somme d'angles polygones réguliers. On a calculé les valeurs d'angles pour un seul, pour un seul angle à chaque fois, de tous les polygones réguliers possibles.
929		360.
930		Ça veut dire qu'il faut regarder, pour tous les polygones qui sont des diviseurs, 'fin dont l'angle du polygone divise 360.
931		Faut chercher tous les diviseurs communs de 360.
932		Non, tous les diviseurs de 360.
933		De 360 à 360 c'est con
934		C'est ça.
935		Et euh chercher ...
936		Et faut chercher en fait tous les nombres entiers qui divisent 360.
937		Ben c'est simple, y'a 180.
938		60, 90, 180.
939		non t'en as déjà oublié un non ?
940		60, 90, 120 et 180.
941		30.
942		30 tu connais un polygone qui a des angles de 30 degrés ?
943		non mais faut tous les prendre et ensuite on cherche les polygones qui fonctionnent.
944		Ouais mais dans c'cas là en fait Nicolas on prendra que ceux qui peuvent euh se construire uniquement euh dans une seule euh dans un seul type de polygone. Et ça on les connaît.
945		Comment on fait déjà pour trouver la relation pour ça ?
946		Ouais non non mais on l'a pas fait en cours on l'a fait dans l'DM. C'est simple c'était euh ... voilà, la valeur d'un angle c'est (n-2) fois 180 sur n.
947		Mais faut tous les prendre et ensuite on vérifie ceux qui fonctionnent. Parce que là tu pars que de ceux qu'on a. À tous les coups y'en a un qu'on n'a pas trouvé. 'fin, moi j'me base sur ceux qu'on a trouvés.
948		Déjà, à chaque fois, ...
949		Mais Nico dans un premier temps déjà faudrait p't'être partir avec déjà tous les diviseurs communs de 360
950		y'en a aussi au-dessus qui fonctionnent.
951		Parce qu'avec l'hexagone ça nous fait 720 et ça fonctionne aussi.
952		Ouais.
953		Euh ... ouais.
954		Mais lui, j'vois pas pourquoi elle disait on le laisse, c'est ... excuse moi. Elle disait on reverra s'il fonctionne ou pas après. Lui, il fonctionne bien.
955		Eh ben c'est hexagone + triangle ça fait 6, 3. Donc hexagone ça fait 720 ...
956		Lequel fonctionne bien ?
957		Ça fait 720 mais tout l'tour là.
958		720.
959	P	Alors c'est quoi tous ces nombres que tu mets les uns en dessous des autres ?
960	E13	C'est c'qu'on a fait euh, dans l'DM en fait. On avait calculé la valeur d'un angle de, de, pour chaque polygone régulier.
961	P	Ok.
962		Nico ?

963	E13	Et donc on va essayer de voir euh, quelle condition il faut avoir pour avoir du euh 360 degrés.
964		D'accord.
965		La somme des angles d'un hexagone c'est quoi déjà ?
966		Ben je sais pas mais ça c'est 720.
967		Comment être sur que ça fonctionne, comment être sur que si on les assemble on aura [?].
968	P	Ah ben on peut essayer aussi, effectivement ça fait aussi partie de la question.
969		Ça se trouve ça serait une règle. Enfin, à lier à une autre règle, parce que là, t'auras forcément des possibilités qui fonctionneront pas. Parce que tu vas assembler des ...
970	E13	Déjà faudrait trouver la formule exacte pour euh, déterminer la valeur de l'angle d'un polygone régulier.
971	E20	Ouais mais ça c'est ... c'est tout bête.
972	P	Vous avez besoin du corrigé du DM peut-être ?
973	E13	Ouais ça s'rait bien.
974		...
975	P	Y'en a pas un par personne, mais j'vous en donne. On vous a mis aussi des photos des affiches que vous aviez faites, si jamais ça vous sert.
976		Ok.
977		Ouais ... Il apparaît joli mon gars ! Il apparaît super beau là-dessus.
978		La belle écriture !
979		T'as ta calculette ? Ah non c'est bon.
980		Donc pour les polygones réguliers ... dont l'angle euh ...
981		Donc en gros ton idée Val c'était de prendre tous les polygones réguliers ton ... dont l'angle est un diviseur de 60, euh, de 360, de les rassembler ...
982	E13	Non, faut pas que ça soit un diviseur commun en fait. Parce que si on prend un diviseur commun
983		Ben, un diviseur ?
984	E13	Mais même pas forcément en fait. C'est là où c'est problématique. C'est qu'on a pas forcément besoin que d'un diviseur parce que on peut ajouter plusieurs qui ne soient pas des diviseurs de euh, de 360. On peut prendre j'sais pas, un qui ferait 190 et un autre qui ferait euh, 160. Et dans ce cas là ...
985		Pourvu que leur somme fasse 360 ?
986		Pourvu que leur somme fasse 360. Euh, 172 au temps pour moi. Ben, ce sera par 190 parce qu'il n'y aura pas d'angle à 190 degrés de toutes façons. Mais euh, voilà.
987		Ouais.
988	E13	Et au minimum y'en aura 3 effectivement parce que ce serait des euh, ce serait des ... Euh ...
989		Déjà les angles c'est euh ...
990		Donc euh ...
991		On a dit quoi déjà ? Que l'octogone allait avec le ... ?
992		Ben déjà ...
993		Ben l'octogone y'a qu'à regarder hein.
994		Ouais mais ça allait avec ?

995		Donc attendez, déjà on peut ...
996		Dis-moi ça fait combien la mesure d'un angle ?
997		Un octogone ? Ben 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 135. 135 plus 135 plus un carré c'est 90.
998		270 plus 90.
999		360.
1000		135, ça nous fait fois 8.
1001		non, mais attends attends, tu veux calculer la somme totale des angles d'un ... Ouais ça fait fois 8.
1002		Ça nous fait 8 angles de toutes façons.
1003		Ouais.
1004		Excuse moi, euh ... Donc là t'façon on a, notre angle t'façon.
1005		Il serait compris entre quoi ?
1006		Entre ... notre angle euh ... Il serait compris entre 180, ah non il est inférieur à 180. Un angle plat, il est inférieur à un angle plat. Sinon ça s'peut pas.
1007		Oui.
1008		Et euh, il est supérieur à euh ... supérieur ou égal à un angle euh ...
1009		Ça marche pas c'truc...
1010	E20	Il est supérieur ou égal à un angle de 60 degrés.
1011	E13	Oui, mais nécessairement, parce que sinon y'a pas d'angle en-dessous de 60 degrés c'est ...
1012	E20	C'est déjà notre euh, notre base.
1013		Ah non faudrait trouver à l'intérieur de ceci ...
1014		Entre 60 et 180 ... ça fait beaucoup de possibilités tout ça.
1015		On est même pas surs que ça marche.
1016		Le plus simple c'est d'aller jusqu'à 180 déjà.
1017		...
1018		Si on ajoute machin ça fait ...
1019		...
1020		Heu, on les a trouvés non les diviseurs de ... Tu peux les donner ? Les diviseurs de 360 ?
1021		Ben déjà faut ...
1022		360, ... y'a 60
1023		Attends je vais les noter.
1024	E13	Attends, pour des mesures d'angles de polygones ?
1025	E6	Pardon ?
1026		Pour des mesures d'angles de polygones ou pour euh ...
1027		Euh ouais ouais.
1028		Mais j'pense déjà faut trouver les ...
1029	E13	Mais j'comprends pas l'intérêt Nicolas.
1030		Déjà faut, faut ...
1031	E6	Pardon ?
1032		Faut trouver tous les angles qui sont compris dans c'que t'as dis là, 60 et 180. Et faut faire un lien.
1033		Tu ne peux assembler que euh, tu ne peux assembler que des polygones réguliers, si euh
1034		Ben c'est surtout avec ça en fait on a tous les angles. On a tous les ...

1035		Tiens mets le truc du ...
1036	E6	On a tous les polygones réguliers avec ça en fait.
1037	E13	Ben en gros on a c'te forme là. C'est-à-dire qu'on a 360 degrés, c'est-à-dire notre point. Notre point central on a. Avec x fois un polygone à n côtés. Et après on rajoute un autre polygone éventuellement avec y fois, donc ça peut être zéro, ça peut être euh j'sais pas, 40 fois ce polygone là. Mais le seul problème c'est que j'arrive pas à trouver ...
1038		Ouais mais c'que j'te dis c'est que 360 c'est égal 2 fois 180.
1039		Ouais, t'as déjà vu un polygone à ... un polygone avec 180 degrés d'angle ?
1040		Non mais alors c'est égal à 3 fois euh et 3 fois 80. Non, c'est pas 80. C'est égal à 3 fois 108. Non je sais pas c'est lequel mais en tous cas ...
1041		120.
1042		3 fois 120.
1043		Voilà. Ouais.
1044		3 hexagones.
1045		Voilà.
1046		Ouais.
1047		Ou alors c'est égal à ...
1048		4 fois 90.
1049		Ouais mais ...
1050		Tu fais tous ceux qui sont possibles.
1051		Ouais mais si on dit comme tout-à-l'heure, euh, y'aura des ...
1052		Et en fait, ...
1053		... y'en aurait qui fonctionneraient pas.
1054		Et tu peux faire ? Ça fait combien 3 fois 90 ?
1055		3 fois 90 ? Ça fait 270.
1056		Plus 60, ça fonctionne pas.
1057		Ben 4 fois 90 ça fait 360 déjà.
1058		Y'a un truc qui colle. Ben déjà c'est simple, au minimum t'as besoin de 3 polygones. Donc 3 polygones, c'est 120. Ok ? 120 fois 3. Ça fait 360.
1059		Et si tu fais 120 fois 2 ?
1060		T'as que 240 degrés.
1061		Ouais.
1062		Et tu peux pas faire 120 fois 2 plus 2 fois 60 ?
1063		Non.
1064		Ben ... si.
1065		Ben en fait 2 fois 60 ça te ferait pas un truc euh ...
1066		Ben en fait ça ferait 2 triangles équilatéraux.
1067		D'accord mais si tu prends qu'un seul triangle ?
1068		...
1069		Ça recouvrira pas l'espace Nicolas, regarde, en fait ça va donner un truc ...
1070		Mais si, si tu prends 2 triangles et carrés ça fonctionne, parce que si tu bouches le trou avec un triangle et l'autre trou avec un triangle, t'auras 90 degrés et tu pourras faire un carré.
1071		Oui, mais ça sera des triangles rectangles Nicolas.
1072		Oui, ce sera des triangles rectangles et ça sera pas régulier.
1073		D'accord, ça marche. Ça vous dérange si je vais boire un coup après ?
1074		Vas-y hein.

1075		Mais, là, c'qu'on avait dit tout-à-l'heure, c'est pas obligé qu'ça fonctionne ça. Ah, si !
1076		Si, parce que ça c'est tous les angles ...
1077		C'est obligatoirement ça.
1078		Avec x, y, z ...
1079		Faudrait encadrer n peut-être non ?
1080		Supérieur ou égal à 3 ?
1081		Faudrait pas encadrer n déjà ? Parce qu'on a déjà dit que
1082		Mais justement c'est là que ... 'fin c'est là où c'est impossible à ...
1083		Attends attends attends, on va poser ça.
1084		On y est autorisé mais euh
1085		C'est impossible de trouver la véritable valeur. Ah ben si, sûrement...
1086		Ben déjà la formule j'pense qu'elle est pas mal déjà, parce que ça nous aide euh...
1087		En gros, ça, si tu veux, cette formule là, c'est n, n ça correspond au nombre de côtés du polygone, d'accord ?
1088		Hum.
1089		On a trouvé ça dans l'DM, en gros, ça, cette valeur là, c'est égal à la valeur de l'angle.
1090		Ouais, d'un seul angle.
1091		Avec n le nombre de côtés duuuuu ...
1092		Ouais le nombre d'angles dans le ...
1093		Plus t'as de côtés, plus l'angle se rapprochera de 180 degrés. Voilà.
1094		Ben de toute façon oui.
1095		Avec ... Euh, là avec x + y + z supérieur ou égal à 3. On est obligé d'avoir ça.
1096		Supérieur ou égal à 3.
1097		Ensuite , on a deux inconnues ...
1098		Oui, supérieur, on est obligé d'avoir ça.
1099		Euh, 1980 divisé par 13.
1100		Ça c'est pas très important Nico. Tu l'as normalement dans l'DM hien, regarde.
1101		...
1102		Et là, x euh, ...
1103		...
1104		Comment on peut s'débrouiller.
1105		Attendez j'fais un peu d'place, ça commence à être le bordel.
1106		Faut trouver une autre condition.
1107		Ouais, y'a besoin d'autre chose en plus de ça.
1108		Faut une autre condition ?
1109		Faut une autre condition parce que ça c'est la première condition mais il nous en faut une deuxième. Mais j'sais pas laquelle.
1110		Donc ça votre condition c'est quoi ?
1111		On sait que ... déjà au minimum c'est qu'on posait 3 polygones, c'est c'qu'on avait dit là-bas.
1112		Ouais.
1113		Ça c'est la valeur en fait, d'un angle d'un seul polygone à n côtés.
1114		D'accord.

1115		On sait que c'est composé de 1 ou plusieurs polygones. Donc c'est pour ça qu'on met des exposants devant. Donc x et y.
1116		Ok.
1117		Qui peuvent être égale à ... autant à 0 qu'à euh, autant qu'on veut.
1118		Ok.
1119		Et donc du coup en fait c'est composé à chaque fois de cette manière là. Avec euh ... Un angle, 'fin un ou plusieurs angles de telle mesure plus un ou plusieurs angles de telle ou telle mesure. Avec euh des, du coup des polygones avec différents côtés.
1120		D'accord.
1121		Et sauf que ça après on sait pas comment euh comment s'débrouiller pour obtenir une ... Parce que là du coup on pourrait mettre à nouveau ...
1122		Oui tu pourrais en avoir euh
1123		On pourrait en avoir 40 quoi. Mais on sait pas justement comment est-ce qu'on peut y arrêter. C'est bien notre souci. Et j'ai l'impression qu'il y a une infinité de possibilités du coup.
1124		Ouais après faut p't'être essayer de trouver un moyen pour structure, pour euh trouver comme tu disais pour arrêter. Éventuellement trouver un critère pour arrêter ou trouver une façon structurée de les avoir petit à petit.
1125		Oui mais en fait euh, y'aura pas d'critère pour arrêter j'pense, parce que, dans la mesure ou on a une infinité de polygones, j'pense qu'il y a une infinité de combinaisons possibles. Mais par contre il doit y avoir des euh des corrélations entre le nombre de polygones, leur nombre de côtés, et celui qu'on choisit au départ.
1126		Tu m'étonnes que ça, à trouver, euh ...
1127		Ok.
1128		Est-ce qu'on peut déjà encadrer, notre ...
1129		Ouais.
1130		Notre angle est nécessairement compris entre 60 et 180, on a x + y + z supérieur ou égal à 3.
1131		On a également le nombre de côtés il est ... combien déjà.
1132		3 côtés minimum.
1133		Ben oui 3 côtés minimum, et après ben on peut en avoir une infinité.
1134		Et x, y et z peuvent par exemple euh, ... x + y + z + machin ...
1135		Pourquoi tu mettrais que ça c'est supérieur à 3 ?
1136		Parce que tu dois avoir nécessairement ...
1137		Ah oui, 3 euh, oui on avait dit 3 euh ... D'accord.
1138		...
1139		Tu dois avoir au moins 3 ...
1140		Oui.
1141		Est-ce-que c'est vrai ou pas ?
1142		Oui.
1143		De quoi ?
1144		Oui, au moins 3 polygones, parce qu'avec 2 ça voudrait dire qu't'as un polygone qui a un angle de 180 degrés. Et c'est pas possible.
1145		Au moins 3 polygones.
1146		Mais si t'en as deux, ça veut dire que pour avoir 360 tu divises par 2, ça veut dire qu't'es ...

1147		Ah oui. Ouais ouais ça fait 180, d'accord ouais, c'est pas possible.
1148		Ouais, ça serait des ronds. Et encore, même pas. Ce serait un polygone avec une infinité de côtés. Ça va s'en rapprocher mais jamais ça y arrivera.
1149		Comment est-ce-qu'on peut se débrouiller ?
1150		Mais déjà 360 sur n par exemple c'est ...c'est partiellement ... 'fin c'est compris entre 60 et 180.
1151		C'est compris entre ...
1152		Par exemple 360 sur n ...
1153		Concrètement c'est compris entre euh
1154		Alors attends. On a trouvé que le 12 marchait avec 6 et 4. Pourquoi ça serait avec 6 et 4 ?
1155		...
1156		Parce que euh ...
1157		Et le 12 là ...
1158		Qu'est-ce-qu'il pourrait y avoir comme moyens pour obtenir un 12 avec un 6 et un 4 ? La racine de 4 fois ... fois 6 euh ...
1159		Mec tu veux trouver une formule comme ça là ?
1160		Mais ouais, 'fin...
1161		Racine de 4 fois 6 ouais
1162		Attends on avait quoi ? On avait... Les 5 marchaient, y'avait d'autres choses, y'avait euh ... Y'avait 12 qui marchait avec 6, 4. Y'avait 4-8. Attends on a 8-4, qui marchaient. C'était 12 ...
1163		Il est à qui ce stylo bleu ?
1164		Euh, j'en sais rien.
1165		À moi. Euh, c'est à moi hein ?
1166		C'est à toi ? Ah ok ...
1167		12-6-4, y'avait aussi quoi ?
1168		4, ...
1169		Y'avait 4 euh ...
1170		Y'avait 4-8, y'avait
1171		Et y'avait 3-6 aussi.
1172		3-6 ? 3-6 ouais.
1173		On a essayé 5-10 ?
1174		non, on n'a pas essayé. Mais justement l'histoire des doubles on a vérifié ça fonctionne pas. 12 et 6 euh ... 12 et 6 ils fonctionnent pas, c'est ...
1175		Ben oui, faut rajouter un 4.
1176		Attends attends attends ... Oui, faut comprendre pourquoi 12 et 6 ça fonctionne si on rajoute un 4.
1177		Ouais, c'est ce que je me pose comme question.
1178		Attends déjà, 5-10, on essaye 5-10 non les gars ?
1179		Attends 'tends 'tends, ...
1180		C'est quoi le rapport avec les angles ? C'est 12 fois combien qui fait 360 ?
1181		Aaaaaattends. Euh, 30.
1182		Hein ?
1183		30.
1184		Mais il y est pas. ... Mais en fait euh ...
1185		Ouais.

1186		Tu comprends c'qu' j'veux dire Benoit ou pas ?
1187		De quoi, de quoi ?
1188		Tu comprends c'que j'veux faire ?
1189		Euh ... non.
1190		L'angle d'un truc à 12 côtés, on y rajoute l'angle euh, à 4 côtés et l'angle à 6 côtés il faut comprendre pourquoi ça fait 360.
1191		Hum, c'est ça qui faut faire. Ben c'est ce qui est là-dedans. C'est ce qui est dans notre euh
1192		Est-ce-que notre euh ... Non mais notre 360, ...
1193		J'ragardais si avec des carrés y'avait pas une euh, un truc qui ressemblait mais, franchement là on n'a pas ...
1194		Essaie ... On essaie avec 5-10, et on va voir si y'a notre apparition de 3. 5-10-3.
1195		5-10-3 ?
1196		On peut essayer ?
1197		Ouais.
1198		Si c'est logique ça devrait ...
1199		12-6-4, 10-5 ... faut essayer. Ben non on va pas l'faire comme ça, on va l'faire directement avec les angles.
1200		Ok, ça marche.
1201		Merde.
1202		Ouais d'accord.
1203		Ouais fais le ... ça doit être quelque chose comme ça. Donc ça nous fait, euh
1204		Ça fait un truc comme ça ?
1205		T'as un truc à 10.
1206		Non mais du coup c'est bizarre parce que ... [?]
1207		Attends, faut trouver euh ...
1208		C'est 144 degrés pour un polygone euh
1209		144.
1210		144 degrés pour un ...
1211		Plus euh plus un triangle on a dit,
1212		60
1213		Ça nous ferait plus 60.
1214		Ouais.
1215		Plus euh, ça nous ferait du 204. Il nous faudrait donc du 360 156
1216		156 ... 156 attends, 156 ça m'rappelle quelque chose.
1217		156 si c'est un si c'est 10, ça serait nickel.
1218		156 c'est ...
1219		10 ?
1220		non.
1221		Si.
1222		C'est 8, non non attends, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. C'est un polygone à 15 degrés 156.
1223		15-5-3.
1224		15 degrés ?
1225		Ouais, c'est à 15 côtés.

1226		15 côtés ? Pourquoi ...
1227		Euh ...
1228		Ah par contre là on a un truc ou ça fait 3-5-15.
1229		Ouais ça fait ...
1230		Et 4-6-12. [?]
1231		Mais non mais c'est pas ...
1232		J'ai ... 'tends, purée y'a un truc avec ...
1233		C'est 15 là ?
1234		Y'a un truc avec les multiplicateurs à chaque fois. Parce que mon 4-6-12 à chaque fois 6 c'est divisible par 6 et par 4.
1235		5 divisible par ... ouais.
1236		15 c'est divisible par 5 et par 3.
1237		Ben euh, on va essayer avec euh 24. Par exemple.
1238		24, tu veux mettre quoi, 6 ?
1239		Euh ... 180.
1240		24 ...
1241		24 ça fait euh ...
1242		Ça marche pas alors 5-10-3 ?
1243		24-8-3, on peut essayer ou pas ?
1244		24 c'est des angles de 165 degrés
1245		165. Euh, 8, c'est combien ?
1246		8, euh, j'vais t'dire.
1247		C'était pas, c'est combien ... tu l'avais là.
1248		135.
1249		8, 135 ?
1250		Ouais.
1251		Ça fait d'jà 10-6 euh ... 10, 200, 300, 63, ... Ça marche aussi.
1252		Soixante heu ... 24-8-3 ça marche.
1253		24-8-3.
1254		Et t'auras...
1255		3 fois ...Et ça marcherait attends 3 fois 8, 24 en plus.
1256		Ben oui mais c'est bon, c'est pour ça. Essayons 24-6-4.
1257		Ouais mais 4 fois 6 ça fait pas ...
1258		De quoi ?
1259		Ah non ça marcherait pas parce qu'on avait déjà dit que ça marchait avec 12.
1260		Ouais.
1261		Attends on peut p't'être essayer, on va voir
1262		[?]
1263		Euh, 24 ça fait 165, plus 60, c'qui nous fait du 325. C'est ça ?
1264		Ouais.
1265		Ouais mais là c'est un angle à ...
1266		325 plus euh quaran..., euh, 55.
1267		Ouais.
1268		55 degrés y'a pas.
1269		non ça marche pas. Euh ... Lien avec multiples ...
1270		J'ai l'impression faut prendre les plus p'tits possibles.

1271		Ouais, justement les ...
1272		'fin, deux
1273		non, les plus grands.
1274		Deux fois 12.
1275		Ouais, les plus grands.
1276		Les plus grands possibles.
1277		Les plus grands diviseurs possibles.
1278		Faut trouver un ...
1279		Ahaha, PGCD.
1280		Eh attends, et là y'aurait pas heu
1281		Hein ?
1282		J'ai l'impression qu'il y a un truc avec le PGCD.
1283		Ouais y'a un truc.
1284		Pour chaque, ça veut dire pour chaque là, c'est des diviseurs de 360 là. non, c'est un diviseur de 360, 24 ?
1285		24 ouais. 24 quand tu divises 360 par 24 ça donne 165.
1286		Eh ben faudrait prendre leur ... faudrait prendre ...
1287		Avec 10, 5 et 3 ça fonctionnait pas ?
1288		... leur plus grand ... Son plus grand diviseur.
1289		360 divisé ...
1290		Son plus grand diviseur commun de 360 et de son nombre de côtés, ...
1291		Attends, j'ai un programme pour les diviseurs.
1292		... et après on peut ... Ben attends, attends on va essayer.
1293		n c'est 360.
1294		Donc là ça nous fait 3 fois 8, donc, ... et par contre ...
1295		Donc, si on prend, si on prend un euh diviseur de ...
1296		Eh, c'est sur il marche le 12-6-4 ?
1297		Oui oui, j'crois on avait essayé. Si on prend un diviseur de 360 ...
1298		C'est bon j'les ai tous les diviseurs de 360.
1299		Vas-y alors.
1300		Y'a 180.
1301		Oui.
1302		120.
1303		Oui.
1304		90.
1305		Oui.
1306		72.
1307		Oui.
1308		60.
1309		Ouais.
1310		Quarant...
1311		Combien ?
1312		45. 40. 36. 30.
1313		36, 30, ...
1314		24. 20. 18. 15. Et on r'trouve le 12.
1315		C'est-à-dire que si on prend le diviseur euh le PGCD de ce nombre, d'un de ces nombres et de 360, et qu'on trouve ben euh le diviseur euh ...

1316		Ça fonctionne ?
1317		Attends, euh, écris jusqu'au bout. 9, 8, 6.
1318		9, 8, 6.
1319		19, 8, 6.
1320		C'est entre 12 et ...
1321		Ça veut dire, attends, on peut essayer de vérifier. Euh, 12, 10, ... Si on prend par exemple 120, on prend 120. Exemple, 120. Donc euh, PGCD de 360 et 12 c'est quoi ?
1322		C'est 120 justement, puisque 120 est un diviseur de 360.
1323		Ouais.
1324		Attends, l'PGCD je sais pas si j'l'ai lui en programme.
1325		Ben ça fait ... 120 ...
1326		Ben ça marche pas là, non ça marche pas. non, faut trouver l'deuxième euh ... la décomposition ...
1327		Et est-ce que 12 ça marche avec le 3 ou pas ?
1328		Après est-ce qu'ils se superposent pas aussi c'est ça ? Ben non, est-ce que si les angles ...
1329		Non à chaque fois c'est obligé d'être égal à 360, donc ça se superpose pas.
1330		Euh ... Donc attends t'as écris jusqu'au bout les euh
1331		Ouais, on les a tous ici.
1332		Sauf que si on prenait ...
1333		Euh, non. Donc y'a 6, 5, 4, 3, 1. Donc le 2, le 1 et le 2 tu les enlèves. D'accord, donc ça c'est tous les polygones, ... Tous les polygones, 'fin tous les angles, 'fin tous les angles ...
1334		Ça donne des valeurs entières d'angles.
1335		Ça c'est en fait c'est le nombre d'angles 'fin ...
1336		non ça c'est la la la mesure ...
1337		C'est le nombre d'angles avec lesquels ça fonctionne.
1338		La mesure de l'angle possible.
1339		Ouais.
1340		Et l'angle on a dit il est situé entre 60
1341		Euh, non en fait, j'crois ça qu'ça donne le nombre ...
1342		non, le nombre de côtés.
1343		De côtés.
1344		Le nombre de côtés ouais.
1345		Pis là ton côté, on peut rajouter n, n, n supérieur ou égal à 3, mais prends les valeurs des des angles euh ...
1346		Ben d'jà c'est le deux et ...
1347		Alors attends. Maintenant , ...
1348		Ben c'est compris entre 3
1349		3 euh, 3 et 360.
1350		Mais 360 euh, il va pas y avoir 360 côtés.
1351		non, sinon ça ferait un rond.
1352		3 et 180.
1353		Et on peut dire que c'est compris entre ...
1354		Mais attends, y'a un truc que j'comprends pas. Notre 12 ... Notre 12 pourquoi est-ce-qu'il prend en compte le 6 et le 4 ?
1355		Mais c'est celui-là qui nous ...

1356		Parce que ...
1357		Mais c'est sur que ça marche avec 6 et 4 au moins ? non parce qu'on a, on a juste fait la figure hein.
1358		Ben, essaye avec 3 et 4 le 12.
1359		Ben ça ça compte ...
1360		Ça veut dire quoi essaye avec 3 et 4 le 12 ?
1361		Ahahah.
1362		C'est la mienne celle-là ?
1363		C'est le nombre de côtés des polygones. Donc ... Non c'est la mienne.
1364		Donc ça veut dire que vous voulez essayer de faire quoi ?
1365		En fait on a listé tous les ...
1366		Alors...
1367		Non, mais 3 et 4 c'est pas possible parce qu'on a dit que c'était pas possible parce que si on faisait des triangles et des carrés, ça nous faisait des triangles rectangles.
1368		Ouais.
1369		Aaaaah.
1370		Ben, c'est pas ce qu'on a dit, ça, c'qu'il y a, c'est qu'il a voulu partir là-dessus ET ça faisait des triangles rectangles.
1371		Ouais ben c'est ça, mais au pire on peut quand même essayer, parce que p't'être que... y'a une disposition ... On pourrait l'placer comme ça comme ça
1372		En fait on s'est rendu compte madame, qu'à chaque fois y'a euh, c'est composé du euh, de diviseurs euh ...
1373		Ça peut fonctionner.
1374		Attends deux secondes j'essaye.
1375		... de diviseurs de 360. Euh, les polygones qui peuvent euh servir pour le ...
1376		Oui, le pavage.
1377		En fait ils ont un nombre de côtés qui est un diviseur de 360.
1378		D'accord donc il vous en reste plus tant que ça au final.
1379		Ben finalement on n'en a plus tant que ça. Donc on essaye de voir par contre pourquoi y'en a qui s'associent avec d'autres.
1380		Ok.
1381		Ouais mais ça ça reste pareil.
1382		Alors : 1,5 ...
1383		Euh, c'est-à-dire qu'on a notre n et m qui sont compris entre 3 et 180, on a dit ? Nombre de côtés ?
1384		Alors attends, parce que du coup là maintenant j'peux remplir ça là. Mes n et mes m là.
1385		Ouais mais tu peux donner un cas [?], mais tu peux pas... 'fin on peut les ... On peut les mettre ...
1386		[?] tout là.
1387		Ouais mais on va pas faire ça maintenant.
1388		Non on va pas faire ça.
1389		Mais ...
1390		Mais vous êtes sûrs que ça ça marche ? Le 12-6-4 ça marche ou pas ?
1391		Le 12 ? Attends, tu peux m'passer le longueur euh, la ... ?
1392		J'vais t'dire. Alors, 180 moins 360 divisé par 12...

1393		Ben 150 degrés les ...
1394		150 degrés ? 150. On a, plus le 6, c'était ...
1395		6 c'est 102 j'crois.
1396		102 ?
1397		Euh, non, j't'ai p't'être dit une bêtise. non c'est 120 j'crois.
1398		120.
1399		120.
1400		Ouais si, ça fontionne hein.
1401		Ça fonctionne aussi ?
1402		Ouais.
1403		170 donc ...
1404		Ah, lui il nous met une épine dans l'pied celui-là.
1405		Pourquoi ça marche ? Pourquoi on s'prend la tête là-dessus, ça marche pas.
1406		Mais au pire, on ...
1407		Quoi ?
1408		Pourquoi pourquoi il marcherait pas ?
1409		[?] là t'as 3 fois 8.
1410		3 fois 8, 24.
1411		Ah oui.
1412		3 fois 5, 15, et là 4 fois 6 euh ...
1413		Ah oui, par contre ils sont tous des diviseurs de 12 qui est lui-même diviseur de 360.
1414		Mais faudrait, par exemple, et ...
1415		Ça veut dire qu'il y a encore plus que ça.
1416		Faudrait [mettre ?] t'sais avec 3, 4.
1417		Mais par contre lui il marche pas, c'est ça qui ...
1418		Attends,
1419		Attends, celui-là il marche pas par contre.
1420		Heu ...
1421		Celui-là il marche pas, alors que c'est tous des diviseurs de ...
1422		...
1423		À chaque fois, c'est des diviseurs de ... En fait à chaque fois c'est des diviseurs de ce nombre là, là.
1424		Qui sont, qui est lui-même diviseur de 360.
1425		C'est pour ça que 3 ...
1426		C'est pour ça qu'le 3 et le 4 y'a pas de ... C'est pour ça que le 3 et le 4 ils peuvent se euh s'assembler que uniquement avec eux-mêmes, et pas avec des plus petits. Parce qu'en fait, y'a rien qui les divise ceux-là.
1427		Hum ?
1428		Et donc c'est pour ça qu'à partir du 6 on peut mettre des, éventuellement des triangles,
1429		Hum.
1430		Parce que 6 il est divisible par 3.
1431		Hum.
1432		C'est pour ça que le 8 il s'associe avec le 4, et avec rien d'autre. Parce que en fait euh, dans les polygones qu'on, qu'on a, ...
1433		Et les 3 ? Et pour le 12 alors ?

1434		Ben 3, 4, 5,
1435		Hum ?
1436		Avec le 12 en fait, j'pense qu'il doit y avoir ...
1437		non mais avec le 12, non y'a qu'une solution. Par contre avec le 24, pourquoi y'a deux solutions, ça marche pas. Deux solutions : y'a le 8-3, et là 4-6.
1438		C'est là que j'comprends pas.
1439		[?]
1440		Et on a une solution avec 15 aussi.
1441		De quoi ?
1442		360 divisé par 24 ça fait 15. Avec 15 on a une solution. P't'être que y'a un truc comme ça non ?
1443		Oui. Oui ben, 15 est une solution [?] est une solution, donc faudrait tous ceux-là, et lister est-ce-que ça pourrait marcher. Mais c'est c'est, ça revient à faire ce qu'on avait dit là. C'est-à-dire reprendre chaque et voir si ça marche.
1444		Ouais, mais j'comprends ... Y'a une règle, y'a une règle, mais faut la trouver.
1445		Et alors là, attends, attends, là pourquoi ... Faut trouver aussi pourquoi avec ça ça marche et avec ça ça marche pas.
1446		Ouais.
1447		Parce que il faudrait ...
1448		Mais c'est pareil ici, euh, pour le 12 pourquoi ...
1449		Pourquoi ça fonctionnerait pas avec des triangles ?
1450		Le 12 pourquoi est-ce-que c'est 6 fois 4, et pas 4 fois 3.
1451		Ben j'ai l'impression c'est le plus grand en fait euh, ...
1452		C'est le plus grand ...
1453		non pas forcément le plus p'tit.
1454		non avec celui qui irait ... 'fin avec celui qui irait et ça fait partie des [?]
1455		Essayez avec 3 fois 4 là p't'être. non ça marcherait pas ?
1456		Ben on a dit que ce 3, 4 euh
1457		Ben attends, on peut l'refaire.
1458		Alors 3 fois 4 ...
1459		Ben c'est les deux plus grands.
1460		Attends attends 12, 12 on va refaire.
1461		J'ai l'impression que c'est les 2 plus grands euh, diviseurs communs.
1462		150, 60 plus 90 ... 300.
1463		'fin c'est les deux plus grands diviseurs du truc.
1464		Ça ferait 300 degrés donc ça irait pas.
1465		Ah non ça irait pas.
1466		J'vais, j'vais essayer vite fait.
1467		J'vais essayer quelque chose de plus grand Benoit.
1468		Vas-y, vas-y.
1469		Euh, y'a quoi au-dessus de 24 ?
1470		24 ? 30, 36, 40, 45 ...
1471		Ok, j'vais essayer avec 30.
1472		30 ?
1473		30 donc ça nous fait quoi ?
1474		T'essayes quoi là, t'essayes le carré ?

1475		4 et 3 ouais, ça a l'air de [?]
1476		non ?
1477		Hein ?
1478		Moi j'ai fait, j'ai fait aussi comme ça, je sais pas si ça marche.
1479		30, euh Benoît, avec 30 on va essayer avec des trucs de 10 et trucs de 15.
1480		Ouais.
1481		Ben vas-y, alors on, on essayerait 30-15-10 ?
1482		Oui. Ça ... J'essaye hein, c'est pas ...
1483		Donc alors 30 ça fait 360 euh attends. C'est quoi d'jà la formule ? 180 moins ...
1484		Alors pour ceux de 15, c'est ... En fait c'est 180 moins 360 divisé par le nombre de côtés.
1485		Ouais, Ok.
1486		Donc 15 c'est 156 degrés.
1487		Merde.
1488		...
1489		J'vais vous dire c'que j'ai trouvé les gars. Mais j'pense que du coup en fait que ceux à 10 ils doivent être assemblés avec un pentagone.
1490		Avec un ...
1491		Ça veut dire que ça marchera.
1492		Ah, ça va pas marcher.
1493		Ah, 120 degrés.
1494		120 degrés, 120 degrés c'est quoi ?
1495		120 degrés c'est quoi, c'est l'hexa ... euh le pentagone non ?
1496		120, 120 ...
1497		J'pense c'est l'hexagone. C'est un hexagone. Donc triangle, carré, hexagone ça
1498		6, non 6 ça fonctionne.
1499		Ça veut dire [coupure, début fichier son 2]
1500		La décomposition en facteurs premiers ?
1501		Ouais.
1502		Ça fait quoi si on y décompose de cette manière là ? Parce que du coup moi là c'que j'ai essayé de heu d'y décomposer avec les deux plus grands facteurs, ça fonctionne pas.
1503		...
1504		Parce que du coup là j'me retrouve avec 168, ouais non c'est pas possible. Ouais il est nettement trop grand. Donc euh ...
1505		Alors attends.
1506		Alors 30-15-10 on avait dit qu'ça marchait pas ? 30 ça f'sait quoi ?
1507		30 euh ...
1508		Dis moi les angles.
1509		30 c'est 68 degrés.
1510		15 c'est combien ?
1511		15 156, et 10 c'est 144.
1512		Ça marche pas ?
1513		Ça marche [?] ça marche plus.
1514		Non ça marche plus.

1515		Est-ce-que il faudrait euh ... C'te somme c'est supérieur à 360 donc ça marchera pas.
1516		C'est simple dans les diviseurs de 30 on a ... on a 15, 10, 6, 5, 3.
1517		Ben on essaye avec 6, 5.
1518		Ben on va r'garder avec 6 5 et 3 et puis j'pense y'en aura ... Ce s'ra un de ceux-là. Mais lequel heu...
1519		Et, si ça s'trouve ben c'est comme ... [?] le plus p'tit avec le plus grand, parce que du coup non ?
1520		Avec euh attends, on va faire 6 plus ...
1521		Oh putain j'crois que j'viens d'trouver les gars ! J'crois que c'est le plus grand diviseur commun euh c'est le plus grand diviseur de 30 et le PGCD de 30, 'fin du du plus gros avec euh 360.
1522		J'ai essayé d'faire ça mais ça marche pas.
1523		T'es sur ?
1524		Oui on a dit ça tout à l'heure, on a dit euh PG, on a dit on prenait 360 et on prend celui-là, on cherche un PGCD, et regarde c'est ça mais ça marche pas.
1525		Attends, j'vais, j'vais essayer euh le truc j'ai ... J'vais essayer vite fait.
1526		Ben si tu ... Attends on r'prend un exemple s'tu veux. On a 360 et quoi tu veux savoir quoi.
1527		Avec 30 alors.
1528		Avec 30 ?
1529		Faut trouver l'PGCD de 360 et de 30. C'est nécessairement 30. C'est ça qui va pas.
1530		Ouais.
1531		Un PGCD [?]
1532		J'crois qu'il y a le PPCM, ça existe aussi ça.
1533		Plus petit euh multiple ...
1534		Commun.
1535		non.
1536		Si.
1537		Et et si on prend au-dessus, euh au-dessous, juste celui d'au-dessous
1538		Ouais p't'être qu-dessous de 30 ...
1539		Ça veut dire qu'c'est 15.
1540		C'est 15.
1541		15 euh 15.
1542		Ben regarde, ça là, t'as la liste de tous les diviseurs de 30.
1543		Ouais mais là on a euh ...
1544		Le petit.
1545		T'as tous les diviseurs de 30 là.
1546		Ouais mais là ça veut dire que si on faisait avec le PGCD comme on a dit, on aurait 360, ...
1547		Mais de toutes façons le PGCD, le PGCD d'entre 360 et 30 c'est 30.
1548		Ouais c'est c'qu'on a dit.
1549		Donc c'est con.

1550		Et est-ce-que si on prend celui du dessous ce s'rait 15, mais on a dit qu'on a vu que ça marchait pas avec 10. Là on voulait faire avant trois-cent ... euh on voulait faire 30, euh, 6 et 5 c'est ça ? On n'avait pas fini. Euh, 30 ça fait combien ? On a dit ... putain ... Euh ... Ça fait 180 moins 360 divisé par n.
1551		Ouais, c'est ça ouais.
1552		C'est ça ?
1553		Oui, c'est 180 moins 360 divisé par n.
1554		360 ... divisé par ... euh, 6 ? Ça fait du 120. Ça nous fait du 120, ... 168 ça fait du deux-cent...
1555		Et ça fait du 102 en plus. Ah, j'crois que ça fonctionne. C'est 102 lui. C'est 102 l'cinq. Le 5 c'est 102 degrés.
1556		J'crois ouais.
1557		non c'est 108.
1558		108.
1559		108 ?
1560		Il m'semble hein, parce que là ...
1561		Oui c'est ça.
1562		Et 168 plus 120 plus 108 : 396, donc il fonctionne pas celui-là.
1563		Pourquoi est-ce-qu'il y en a qui fonctionnent pas ? Euh ...
1564		Alors ... Hum ... Ça c'est chiant ça. C'est très chiant c'est très chiant ... Euh ...
1565		Pis en plus ton x y ils foutent quoi là ? C'est des coefficients pour savoir le nombre ...
1566		C'est des coefficients mais ça peut être un zéro ça veut dire qu'il y en aura peut-être pas.
1567		Ouais, mais euh ...
1568		Mais ça peut être combien, ça peut être 0, 1, 2 ?
1569		Par exemple, tu peux avoir deux triangles, par exemple. En plus. Ou deux, ou deux carrés. Qui sont joints.
1570		Ouais mais là on les prend pas en compte dans l'calcul. [?]
1571		Imagine, là t'as des 0 là...
1572		[?] mais là on les prend pas
1573		Là on dit pas deux fois la valeur euh 5. Euh, 'fin deux fois l'angle euh ...
1574		Deux fois l'angle d'un hexagone ... d'un pentagone.
1575		D'un pentagone. Et donc là dans ce cas-là ce s'ra deux 180 - 360 sur 5
1576		Ouais mais là on l'a pas pris en compte nous.
1577		Comment ça ?
1578		Dans nos, dans nos recherches euh on f'sait juste avec des ...
1579		Oui c'est vrai, on a juste pris directement les ...
1580		Oui.
1581		... Sans prendre euh les x et les y.
1582		Ah ouais on n'a pas, on n'a pas ...
1583		On n'a pas essayé 5-5 regarde.
1584		5 5 euh 360.
1585		Ouais mais on sait pas lesquels fonctionnent en fait.

1586		C'est ça, faut trouver une règle, mais on n'a pas trouvé d'règle. On a essayé en disant que... T'façon c'est tous des multiples. On a vu qu'c'était tout des multiples de ...
1587		Ouais, à chaque fois c'est des euh ... à chaque fois c'est des multiples, mais pourquoi est-ce-que c'est ça ?
1588		Est-ce-que c'est bon, pour ça ?
1589		Euh, tous les ...
1590		Les 15 ils marchent déjà ?
1591		Tous les ... Les polygones ... Qui forment euh ... Un angle. 'fin, qui forment euh ... 'fin qui forment ...
1592		Un angle de 360 on va dire.
1593		Euh, tous les polygones qui forment le pavage doivent être des multiples de trois-cent... euh, des diviseurs
1594		Doivent posséder un nombre de côtés diviseur de.
1595		Ouais.
1596		360.
1597		...
1598		Après faudra quand même passer à l'encadrement euh 'fin on va passer à l'affiche. Faudra passer à l'encadrement de ...
1599		On mettra tous les encadrements sur l'affiche.
1600		Euh, madame on va faire une affiche, mais en fait on n'a rien trouvé.
1601		Si vous avez forcément avancé, même si c'est pas abouti, vous avez forcément avancé un peu.
1602		Ouais.
1603		Euh ... [?]
1604		Sinon il vous faudrait 10h pour ... Ahaha.
1605		Ouais à peu près ouais.
1606		Ben on a qu'à dire ce qui ne fonctionne pas. Toutes les théories qu'on a touvées qui ne fonctionnent pas.
1607		Là par contre on a ...
1608		Ben j'pense qu'il faudra qu'on les dise.
1609		... on n'en a plein de la théorie.
1610		Ahaha.
1611		Alors y'a 12-6-4, y'a ...
1612		Après on peut dire qu'il y en a qui fonctionnent mais pas pour tous, et qu'on n'a pas trouvé pourquoi y'en a qui fonctionnaient pas.
1613		...
1614		Donc, alors ...
1615		Tu fais quoi c'soir gros ?
1616		De quoi ?
1617		Tu fais quoi c'soir ?
1618		Tu viens à la maison ?
1619		T'sais on n'a toujours pas fini le paquet de 5 kilos.
1620		Bon allez, concentration
1621		15-5-3 Attends faut déjà faut déjà encadrer les trucs, enfin faut déjà dire notre ...
1622		3 fois 8
1623		Mais y a 3 déjà deux fois

1624		Quoi
1625		Mais 3 et 4
1626		On fait le haut ici ?
1627		N'importe
1628		Le haut il est ici Nico
1629	E6	Ok
1630		Vous pouvez déjà partagé déjà ceux qui marchent [...]
1631		on avait 12-6-4 ça marchait
1632		4-8, 3-6
1633		De quoi on est parti
1634		3-6 aussi ?
1635		De quoi
1636		On les a essayé les deux 4-8 et
1637		3-6 ça marchait
1638		6-3-8
1639		avec 12 ?
1640		On a cherché pour commencé les diviseurs communs de 360
1641		Et ça c'était pas les hypothèses qu'on avait lancé au début pour regardé si c'était bon
1642		Pour commencer on a cherché les diviseurs communs de 360 non tous les diviseurs de 360
1643		Attends on peut déjà expliqué çà, on peut déjà expliqué çà
1644		Ah ouais, on peut déjà expliqué pourquoi est-ce qu'on cherche des ...
1645		On va dire on peut expliquer l'encadrement et rappeler la formule
1646		Rappeler qu'y a au moins trois polygones
1647		La formule avec x
1648		Y a au moins trois polygones on a dit
1649		Rappeler que le nombre de côtés de ces polygones étaient
1650		Attends faut qu'on mette rapidement un titre vite fait
1651		Activité
1652		C'est quoi le nom du truc
1653		Pavé, Pavés archimédiens non pavages archimédiens
1654		Mets pavages archimédiens
1655		On aura même besoin des
1656		T'as fait trois fautes d'orthographe
1657		Archi
1658		Non je déconne
1659		Non attends, reprends les deux
1660		Rappel
1661		On a dit qu'il fallait un nombre de polygones supérieur à 3 ... pour former un angle de 360
1662		Pour former un sommet
1663		Mec on voit rien on voit que dal, on dirait que t'es en train d'écrire sur une feuille, tu recules d'un mètre t'arriveras pas à te relire
1664		Ah ouais écris plus gros, plus gros
1665		Ouais c'est un petit peu court, au pire on y dira à l'oral le
1666		Je vais essayer

1667		J'aime bien, quand tu lui dis écris plus gros, il écrit plus gros il écrit plus espacé. C'est toujours aussi petit
1668		Ouais mais là ça se voir mieux déjà
1669		Pour former un sommet deux points
1670		J'adore ces flèches genre ça fait des flèches trop naturelles
1671		de 360°
1672		Pour former un sommet de 360° non ...
1673		Ah ouais d'accord
1674		Après on fait notre histoire de 360
1675		Dis qu'il faut avoir un angle de 360
1676		Ç'aurait été mieux de lui dire avant
1677		Pour former un sommet de 360 ... trois polygones
1678		Si on doit faire comme ça ça va être long
1679	P	Après vous mettez sur l'affiche vous allez expliquer quand même vous êtes pas obligés de tout expliquer
1680		Il doit avoir autour de lui 360°
1681		Ensuite faut mettre que notre angle non notre nombre de côtés de ce polygone est compris entre 3 et 180
1682	E13	La valeur de l'angle du polygone est comprise entre
1683		non le nombre de côtés ... du polygone
1684		non le nombre de côtés il peut y en avoir des milliers on s'en fout la valeur d'un angle c'est 180 - 360 sur n
1685		Pourquoi on a fait ça, pourquoi on avait dit ça alors
1686		Entre 360 et, entre 3 et 360, c'est supérieur à 3 c'est sur, on est sur que c'est supérieur à 3 mais
1687		Attends mais on a fait un un schmilblic là
1688		Ouais
1689		Attends tends tends tends
1690		Là, on a mélangé le nombre de côtés
1691		Ça c'est la valeur
1692		Et ben nous on a dit que ce nombre de côtés devait être, on a émis l'hypothèse que c'était un diviseur de 360 et donc par conséquent si c'est cette hypothèse on aurait alors un nombre de côtés compris entre 3 et 180 si on part du principe que ce nombre de côtés est un diviseur de 360
1693	E13 (qui écrit)	180 - 360 divisé par ... ça ça serait l'angle maximal que l'on pourrait avoir pour un un seul côté ... pour euh
1694		Oui parce que tu aurais le nombre max parce que tu aurais un nombre de côtés de 180 maximal c'est ça
1695		...
1696		
1697		

G.6.2 Transcription des échanges lors de EXP-TS2-SDRP, groupe B

Expérimentation en TS2 : Transcription des sons enregistrés par le micro placé près du groupe B.

Codage : P le professeur, Victor (E2), Romain (E9), Maxime (E19) les membres du groupe B.

[...] les courts passages inaudibles, en italique des commentaires qui font parfois référence à l'image vidéo.

Repère	Locuteur Temps	Texte de l'intervention
0	00 :00 :00	Lecture de l'énoncé
1		C'est bon vous êtres tous prêts ?
2		Alors, la question est la suivante... Vous disposez de quatre...
3		Donc, on commence. Vous allez travailler aujourd'hui, c'est un problème de recherche sur lequel vous n'avez jamais travaillé. Qu'est ce que c'est que "Pavage". Ben oui, qu'est-ce que c'est que pavage ? Est-ce que quelqu'un a une idée de qu'est-ce que c'est qu'un pavage ?
4		[?]
5		Mettre des pavés sur un carrelage, ok. Ben, ça ça peut être un pavage, et on va voir euh, mathématiquement euh
6		Avec ? ... Mais vas-y, dis. ... Non alors, le fond d'écran n'est pas une indication.
7		Mais c'était l'même l'autre fois déjà.
8		Effectivement le fond d'écran c'est euh, c'est quoi ? ... Oui, ça doit être ça.
9		Des écritures quoi ?
10		Cunéïformes.
11		Donc, non, les pavages, ... Je pense que c'qu'a dit Axel sur les histoires de carrelage, effectivement ça peut être une notion en rapport avec ça. Donc, vous allez faire une activité de recherche. Cette activité de recherche c'est un problème, ... Eh ho, Nicolas. C'est donc un problème que vous allez résoudre, et le but c'est de voir comment vous, la classe, vous allez euh avancer sur ce problème. Donc vous allez travailler en groupes, et euh, à la fin de euh, du travail vous fa... vous ferez une affiche et on f'ra la synthèse de toutes ces affiches.
12		On est trop forts pour les affiches !
13		Ouais.
14		Voilà, vous passerez là, vous montrerez. Donc la différence par rapport à la dernière fois c'est que là vous allez tous travailler sur le même sujet. Mais par contre vous allez peut-être pas euh, aborder les ... le sujet de la même façon. Donc j'vous ai laissé vous organiser en groupes comme vous vouliez. Donc [j'sais c'que c'est ?], sur quoi va-t'on travailler ?
15		Ça marche pas.
16		Alors, allez Mathieu lis nous le début.
17		Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous le côtés la même longueur.
18		Ok, est-ce-que ça va ? ... Que quel mot pose problème ?
19		Convexe.

20		Ah mais on en est pas là encore. Convexe ? Mais vous avez déjà du euh ... vous poser la question précédemment. Voilà, cette définition vous l'aviez déjà vue. Est-ce-que quelqu'un peut expliquer ce que ça veut dire, convexe, vite fait.
21		[?]
28		Oui, vous avez les exemples de ceux qui n'étaient pas convexes, c'était par exemple les étoilés. Ceux euh, que tu disais ... voilà. Donc ensuite Ale... Axel. T'avais l'air de dire que la suite était compliquée donc vas-y, lis la deuxième phrase.
29		Un pavage archimédien est un recouvrement du plan par des polygones réguliers sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones.
30		Ok.
31		Ben Archimédien ça pose problème.
32		Ben c'est la définition, c'est normal que ce soit le mot que tu connais pas.
33		Ahaha.
34		Donc, le mot que tu connais pas c'était archimédien, donc c'est un recouvrement du plan par des polygones réguliers sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones. Ouais ?
35		Du coup ça veut dire quoi, sans superposition
36		Ben, tout-à-l'heure euh, Axel a dit carrelage. Imagine un carrelage ou y'ait un trou
37		Ça s'rait pas un carrelage, Ok. Un carrelage où y'ait des superpositions ...
38		Ahaha.
39		C'est bon ?
40		Donc ensuite, qu'est-ce qu'on nous dit ? Flavie ?
41		On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme la figure ci-dessous.
42		Donc vous ... voilà. Donc pourquoi est-ce-qu'on l'exclut celui-ci, c'est bon ? Ouais ?
43		Ah, parce que c'est pas aligné ?
44		Ben on te dit on l'exclut parce qu'un sommet appartient au sommet d'un autre. Donc en fait on veut que les sommets ils soient comment finalement ?
45		qui coïncident
46		Voilà. On veut que euh, les sommets coïncident. Donc le but, du travail qu'on va faire aujourd'hui, c'est de déterminer tous les pavages archimédiens du plan. Donc je vous redonne l'énoncé, je vous laisse 5 minutes pour réfléchir tout seul, tout seul tout seul, ça veut dire que vous d'vez pas parler, et pis après euh, vous pourrez euh réfléchir en groupe. Donc vous coupez l'énoncé en deux pour que chacun en ait un bout.
47		Qui c'est qui a un ciseau ?
48		...
49		[?] Super.
50		C'est quoi l'énoncé ?
51		Euh, réfléchir ça peut se faire aussi en écrivant hein. C'est pas parce que vous réfléchissez tout seul que vous réfléchissez sans écrire.
52		Donne moi ton ciseau.

53		Mes ciseaux.
54		...
55		Oh putain.
56		...
57		Tu m'as donné [?]
58		Pour une fois.
59		Tout seul. Quel est le problème dans le "tout seul" ? Tu réfléchis 5 minutes tout seul. Réfléchir ça peut être aussi noter tes questions si tu... y'a des choses que tu n'as pas compris [?] t'as pas rien compris, donc marque ce que tu n'as pas compris.
60		...
61		[?] tu veux pas une bassine [?]
62		non ça va.
63		...
64		Mathieu ?
65		Tu vas en parler avec l'autre ou pas ?
66		Ahaha.
67		...
68		Bon, j'vous laisse encore un peu d'temps pour réfléchir, mais maintenant vous pouvez échanger avec les autres de votre groupe.
69		On a tous fait la même chose. Triangle équilatéral, carré.
70		Triangles et carrés ça marche.
71		Triangle équilatéral et carré.
72	E9	Pentagone ça doit marcher.
73		Ben c'est chaud.
74	E9	J'avais des carrelages en pentagone chez moi.
75		Ouais.
76	E9	C'était pentagone euh ... comme ça et comme ça.
77		Si t'as des hexagones ça va être comme ça.
78		[?]
79		C'est des ronds, et des patates.
80		Comment tu fais un pentagone ?
81		Ben, tu mets 5 côtés.
82		Ouais, c'est c'que j'dis, comment tu fais un pentagone ?
83		Si, avec ... avec un pentagone ça marche.
84		Non, comme ça.
85		Ouais, un pentagone ça a l'air de marcher.
86		Ouais, j'te dis j'avais des ... du carrelage comme ça chez moi.
87		Du carrelage en pentagones ...
88		Il était marron dégueu. Ah, dégueu.
89		J'crois qu'on va parler des angles encore
90		En fait on fait une technique de merde là.
91		Ouais, faut trouver une relation qui puisse se démontrer pour tout.
92		...
93		Eh vous avez du carrelage chez vous ? (*un membre du groupe voisin*)
94		Rires.
95		...

96		Le mec qui sort de sa grotte
97		...
98		En fait il faut qu'à chaque angle là t'aies 360.
99		Ouais et alors ?
100		Chaque fois qu't'as une arête qui s'ren ... deux arêtes qui s'rencontrent.
101		Ben non regarde, quand tu fais un grand espace comme ça dans le plan là, tu l'remplis genre avec euh ... Attends, faut qu'j'en fasse un comme il faut.
102		...
103		Un grand rectangle comme ça qu'tu fais en deux carrés.
104	E19	Ça va pas faire 360 ?
105	E9	Ben si.
106	E9	Un plan c'est infini hein.
107	E9	Ça veut dire qu't'auras d'autres carrés là après.
108		Et là si tu prends c't'arête ... tu prends ce point là y'a 360.
109	E2	Mais ça marche pas pour les hex... penta.
110		Pour les quoi ?
111	E2	Pentagones.
112		Ça marche. C'est juste qu'à chaque point t'auras 360.
113		Ouais mais les pentagones ...
114		Ben, j'pense.
115	E2	T'as un angle de 72 degrés, c'est ça ?
116	E9	1, 2, 3, 4, 5... 360 divisé par 5.
117		Attends, j'prends ma calculette.
118	E2	Ça fait 72.
119	E9	C'est possible. Comment tu sais ça toi ?
120	E2	Ben, 360 divisé par 5 ça fait 72.
121		non, mais attends ...
122		360 divisé par 10, ça fait combien ?
123		Ouais, c'est ça, 72.
124	E9	Ben c'est bon
125	E2	72 fois 3.
126		Ouais mais c'est pas l'angle [?] d'ici. L'angle intérieur, l'angle intérieur, l'angle intérieur ...
127		C'est la même chose non ?
128	E19	Si t'en intercale un dedans
129		J'suis pas sur que ça marche.
130	E9	Ça marche p't'être pas avec 5 côtés hein.
131	E9	non, c'était du comme ça qu'j'avais, du carrelage, chez moi.
132		Comme ça, ça marche.
133		En fait tu pars comme ça.
134		...
135		J'comprends pas à quoi elle sert la première définition.
136		C'est pour ça qu'ça marche pas.
137		On est d'accord.
138		5 ça marche pas hein.
139		Ah.
140		Parce qu'il faut qu'on ait des poly ... des trucs réguliers.

141		[?] c'est quand même mieux.
142		Et avec 6 ?
143		Donc ça non.
144		Ou alors euh ...
145		non.
146		T'as 60 degrés par angle, pour un hexagone.
147	E19	Hexa c'est 10.
148		Quoi ?
149	E19	Hexa c'est 10.
150	E9	6.
151	E19	Mais non.
152		Mais si.
153		[?]
154		Les angles ... 360 ...
155		...
156	E19	non en fait faut pas qu'ça fasse 360 faut qu'ça fasse 180.
157	E9	non 360. 180 c'est juste un triangle.
158		Ouais et alors ? ... Quoique non.
159	E2	180 tu vas jusque là. Comme ça.
160		Ouais.
161	E2	Tu fais pas l'tour complet.
162		...
163		Pourquoi ça marche avec ça alors ?
164		T'as 60, 60, 60.
165		Là ça marche avec ça ?
166		J'pense. Avec 6 côtés ça marche.
167		non mais il est p't'être mal fait ton truc. P't'être que t'as, que tu peux pas en mettre 3.
168		180 ça fait ?
169		Ouais.
170		J'pense qu'il faut en mettre 4.
171		[?] en mettre 4.
172		Si, mais si, ça ça marche. Parce que ça c'est comme si t'assemblais des triangles comme ça.
173	E19	Mais non, sauf que oui, sauf, sauf que tu dois en rajouter un là, un là, et un là. Et là ça marche, 6 fois 6.
174	E9	Regarde ça là, quand tu mets des triangles ensemble ça fait un camembert.
175		Ouais.
176		Eh ben t'en r'mets un autre à côté d'camembert.
177		non mais, écoute c'que j'te dis. Là t'as 3 fois 6, 18. 180. Si t'en mets un là, un là, un là, 6 fois 6, 360. En faisant rentrer ...
178	E9	Mais non.
179	E19	Mais si.
180		...
181	E9	Regarde tu mets ça, ... ça, ça, ...
182		...
183		Si tu r'mets un truc là, ...

184		...
185		Si t'en r'mets un là, tu peux bien en r'mettre un là au pire.
186		Ahaha ... Connerie ...
187		Il en a mis deux !
188		Ça marche ça hein. T'en as un là, un là, t'en as un là, t'en as un là, pis après tu peux en r'ettre à l'infini des comme ça. Ça marche avec 6 Victor hein. R'garde.
189		Ouais ouais.
190		R'garde [c'qu'on peut ?] faire.
191		Tu mets comme ça mais tu mets que ça.
192		Est-ce que tu peux faire un carré avec des triangles ?
193		Rectangle.
194		Ben ... rectangle, pas équilatéral.
195		Ah, si tu fais comme ça !
196		C'est pas un carré ça.
197		Ça dépend du point de vue.
198		Ahaha. Non.
199		[?] il a un truc dans sa calculette.
200		non mais si on s'base sur les triangles, ... Ouais, pour les carrés.
201		L'exception qui confirme la règle.
202		Oh, on m'a toujours dit ça hein.
203		À 7 ... à 7 côtés on a rien hein
204		Ça marche avec quoi donc ? Carrés, triangles et ... hexagone ?
205		Tout c'qui est à base de triangles ça va marcher.
206		Y'a un truc avec les multiples de trois j'pense.
207		Si tu prends un ...
208		3, 6.
209		... un 9 côtés, ça t'fais pas un ... Comme si t'enfilais des triangles ensemble ?
210		Euh ...
211		Ouais y'a un truc à 9 côtés [?]. non ?
212		Chais pas.
213		Mais lui ça marchera pas.
214		9 côtés non.
215		C'est bon 9 côtés ça fait ça [?]
216		Ahaha.
217		Ah, c'est tout bon.
218		J'crois qu'il faut qu'ce soit inférieur à ... l'angle. Faut qu'ce soit ... L'angle de chaque truc faut qu'il soit inférieur à quelque chose. Doit y'avoir euh, doit y'avoir un max. Si l'angle ...
219		Oui, doit y'avoir un maximum parce que là ça fait une sorte de rond après.
220		Ouais.
221		Plus tu mets d'côtés plus ça fait rond.
222		Ouais mais genre euh ...
223		Genre si tu l'dessines à côté, si t'en dessines un autre à côté, ...
224		C'est combien celui-là ?
225		9 côtés ça ?
226		Là tu pourras pas aller, tu pourras pas l'caser là.

227		Ouais c'est pour ça, c'est, une fois qu'ça commence à ressembler à un peu à un rond, ...
228		Ouais mais voilà.
229		...eh ben c'est mort après. tu peux pas les mettre ensemble.
230		Faut trouver juste le ...
231		Donc y'a un côté, un nombre de côtés maximum.
232		Ouais.
233		...
234		Tu dis ça marche pas avec les carrés ? Ben si.
235		Si, ça marche avec les carrés.
236		Ouais. Donc on cherche pas un truc avec les multiples de trois.
237		Ça mar...7 côtés, ça r'ssemble plus à rien un truc à 7 côtés.
238		non.
239		Tu peux pas l'mettre en, en ...
240		...
241		Un truc à ...
242		Et t'as l'droit ... t'as l'droit genre d'faire genre un triangle, un carré et un truc comme ça ou c'est que les mêmes ?
243		Non j'pense pas.
244		C'est que les mêmes j'crois.
245		Si tu fais 5 côtés ça fait quoi ? 5 côtés t'en as un comme ça, t'sais c'est comme en phy..., en physique. T'sais les cycles. T'sais t'en as à 6 côtés, t'en as aussi à 5 côtés.
246		...
247		C'est 6 côtés un cycle non ?
248		Mais t'en as aussi à 5.
249		Ah ouais ? Ah, j'savais pas.
250		...
251		C'est un truc comme ça 5 ?
252		Hum.
253		Voilà.
254		Ben ça ça doit marcher.
255		non. non j'pense pas parce que ... parce que genre euh si t'en colles trois, t'en colles 3. T'sais là un angle euh là comme ça .... Ça fait euh, c'est 5 côtés ça fait 72. Trois fois 72 ça fait euh, Cent euh deux-cent euh seize. 216 c'est pas 360 et tu peux pas
256		Ouais mais r'garde là. Un angle ça fait 60, tu peux bien les coller pourtant.
257		Ouais, mais moi j'te dis j'aurais fait comme ça là. ... Un autre là ...
258		Ouais mais faut qu'tu te dises que c'est à l'infini le plan.
259		...
260		Ton plan il s'arrête jamais en fait, faut qu'tu puisses tout l'temps les enfiler euh les uns avec les autres quoi.
261		Ouais je sais j'suis un peu euh, ...
262		non là t'en as plusieurs.
263		Mais t'as même pas compris la question.
264		[?]
265		5, ça marche pas.
266		C'est bon, on est ensemble, on est ... on est une classe.

267		Bon, j'vais vous interrompre deux minutes. Donc, dans un problème de recherche, les vrais mathématiciens quand ils sont dans un problème de recherche, ils disposent des recherches précédentes.
268		5 ça marche ?
269		Donc pour euh, vous aider, et parce que vous êtes aussi dans une situation de recherche vous avez le droit de bénéficier euh de quelques documents, donc j'vais vous distribuer en fait des extraits d'un texte d'Albrecht Dürer, qui a travaillé là-dessus. C'est ... il a travaillé. Donc à vous de voir ce est écrit dedans, si ça vous sert ou si ça vous sert pas et comment est-ce-que vous pouvez vous en servir. Donc j'vous distribue ça, j'vous laisse prendre connaissance du document et voir comment est-ce-que vous pouvez euh vous en servir.
270		Ça fait d'jà 35 minutes.
271		Arrête.
272		C'est fous comme ça passe pas vite quand s'amuse
273		Si moi j'trouve que c'est passé vite.
274		À ton avis ils sont allés l'chercher où, l'mec ?
275		C'est un élève.
276		Quoi ?
277		C'est un élève.
278		C'est un M2
279		C'est un M2 ? Ahaha.
280		Merci.
281		Super.
282		...
283		Itème ? Ça veut dire quoi itème ?
284		Idem.
285		non.
286		Où ça ?
287		C'est pareil, c'est idem, c'est pareil.
288		Ah ça marche pas avec 5.
289		Ben oui j't'ai dis.
290		Làlàlàlà ...
291		Ah oui on s'est un peu plantés j'crois.
292		Quoi ?
293		Ben pour 5 ça marche pas, pour 6 ...
294		Ben ouais mais tu vois, mais j'faisais 360 sur le nombre de côtés, et ça donne l'angle du milieu, ça donne pas l'angle euh du polygone.
295		Ah, l'angle du milieu.
296		Ça t'donne l'angle au centre.
297		Comment tu sais ça ?
298		Ben, j'sais pas.
299		Làlàlàlàlà.
300		...
301		Reste calme Maxime, reste calme.
302		En fait ça marche que pour euh ...
303		T'façon t'as déjà vu du carrelage avec plus de euh 6 côtés ? Non ? Ben alors voilà, c'est qu'ça marche pas.

304		[?] du carrelage octogone.
305		Après c'est des mosaïques.
306		[?]
307		En vrai y'a moyen d'faire de la thune. Tu fais ta propre boite en salle de bain ou en cuisine.
308		Putain, j'y comprends rien.
309		Pico ?
310		Pico ici. Ils sont toujours ensemble. [...]
311		Faut qu'parte, le lendemain faut que j'parte tôt.J'les laisse tous les deux hein.
312		C'est même pas des maths, c'est d'la géométrie. D'la carrelerie. Genre là ça va pas parce qu'il y a des espaces en gros c'est ça ?
313		Oui.
314		Et là c'est lequel ? Le 6 ça marche pas ? Ah l'affreux Jojo...
315		...
316		Qu'est-ce qu'il y a ?
317		Ça marche avec 3, 4 et 6.
318		6 ça marche là ?
319		Ouais, r'garde. Y'a pas de trou.
320		Et pourquoi ça marche que avec 3, 4, 6 ?
321		Parce que euh ... pfff ...
322		C'est pas obligé qu'il ait juste le mec hein.
323		Hein ?
324		Ça se trouve c'est un piège il a p't'être pas bon c'mec.
325		Ben attends, si tu commences à faire comme ça ...
326		Tu réfléchis comme quelqu'un d'prépa là.
327		Ça va pas.
328		Ça m'étonnerait.
329		Faut utiliser la formule qu'on a vue l'autre fois j'pense.
330		T'as 6 côtés ça fait 120.
331		Faut utiliser la formule de l'autre fois.
332		Ah ouais ?
333		T'es sûr ?
334		C'est (n moins 2) fois 180 sur n.
335		Là t'as 120 degrés.
336		Sur un triangle... T'as 60 degrés. Et sur un truc à 5 côtés ...
337		Pour faire quoi ça sert ça ?
338		Calculer l'angle euh, que t'as là.
339		Regarde, pour un truc à 5 côtés ça fait ça en fait.
340		Ouais. Ça fait genre comme ça, ..., comme ça, comme ça. Et donc 72 c'est l'angle au milieu.
341		Pourquoi 120 degrés là, j'ai pas compris.
342		C'est comme ça. C'est un truc [?]. Ça s'décompose comme ça un truc en 5 triangl... en 5 côtés. Donc là t'as 72 ici. Voilà. Eh ben tu fais 180 moins soixante-d... 180 moins 72,
343		108.
344		Et tu divises par deux.

345		Forcément.
346		T'as 54.
347		T'as 54 ici, donc t'as 54 ici, donc là t'as 108.
348		Ouais, c'es c'que j'étais après faire mais avec la formule.
349		Ah ouais ?
350		Et si tu fais 108 fois 4 ? ... Fois 3 ?
351		180 fois 3 divisé par 5 ça fait combien ?
352		Ben tu vas calculer tout seul.
353		180 ...
354		Est-ce que vous pouvez tirer un trait euh ... jusqu'au moment où vous avez eu le document ? Pour séparer ce que vous avez fait avant le document et ce que vous avez fait après, pour que je sache euh, ce que vous avez fait avant et après. Merci.
355		540 sur 5, 108. Ouais, c'est ça, 108.
356		Ouais, et 108 c'est pas un multiple de 360.
357		Ben voilà. J'pense que c'est ça.
358		Il faut faire ...
359		Il faut décomposer en triangles tous les polygones.
360		J'l'ai fait ça. Pour tous les trucs. 128, 135, 140, ...
361		Ben ce, pour ce, ... Pour que ça marche, ça doit être des multiples de 360. 6, 120, ...
362		Ouais.
363		'fin des diviseurs. 3, 60, ...
364		C'est bon, madame, on a trouvé, on a [?]
365		Vous avez trouvé ?
366		Heu ...
367		Ouais euh ...
368		Il en raconte.
369		Tu t'la pètes un peu
370		non, tu l'as trouvé, d'accord.
371		C'était quoi ta formule alors ?
372		C'est n moins 2 fois 180 sur n.
373		180 moins 360 sur n.
374		non.
375		C'est ça là.
376		Eh, mais du coup c'que j't'ai dis, ...
377		180 n moins 360 sur n.
378		n moins 2 fois 180.
379		C'est juste qu'il a développé.
380		La formule c'était ça.
381		Ah oui c'est vrai. J'ai oublié.
382		La formule c'était bien ça ?
383		Ouais ouais ouais.
384		...
385		Et tu peux en ajouter que trois là ? 'fin faut que t'en aies minimum 3. Des trucs. Faut qu't'aies minimum 3 figures. Pour pouvoir faire un truc entier.
386		Hum.

387		Oui, c'est pour ça qu'on prend au-dessus de 3.
388		Genre en fait, je pense qu'il faut qu'ce soit un ... diviseur de 180 et [?] quelque chose.
389		Bah, ça doit pas être supérieur à 120... Ben oui, parce que avec 3 côtés ... y'a au moins 3 côtés.
390		Ben c'est c'que j'disais ...
391		Oui oui oui
392		... parce que genre tu peux pas mettre que 2 tr... que deux figures à côté pour remplir. T'es obligé d'en mettre 3 minimum.
393		Ouais.
394		Donc si ...
395		Ben non, c'est juste qu'il faut au moins trois côtés pour faire un polygone.
396		non mais c'est pas ça. C'est là r'garde, ici, t'es obligé d'avoir une deux trois figures. Une deux trois. Pour pas qu'il y ait de trou au milieu.
397		Tu peux pas remplir en même temps que ... ?
398		non tu peux pas.
399		Avec deux carrés ...
400		Deux carrés t'as juste une arête qui se touche. En réalité t'en as 4 de carrés. Comme ça. Pour que là t'aies plus de trou. Si tu veux que là t'aies plus de trou, t'es obligé d'pareil, de mettre ton truc comme ça. Pour plus avoir d'trou ici.
401		Et avec un triangle t'en mets 1, 2, 3, 4, 5, 6.
402		Faut qu'on ait au minimum 3 figures, pour combler tout l'trou. Et donc euh ...
403		...
404		Faut qu'ce soit inférieur à 120 on a dit ?
405		ET un multiple de 360.
406		Faut que soit un m... un diviseur
407		Ouais [?].
408		Bon, j'pense que vous vous êtes tous approprié le problème, on va faire une petite euh, juste un p'tit échange. Vous allez euh me dire dans chaque groupe qu'est-ce que vous avez trouvé, comment est-ce que vous avez avancé, ...
409		Tu prends la parole.
410		Non non.
411		Si si.
412		C'est toi qui as dit qu't'avais trouvé.
413		C'est toi qui as trouvé.
414		Non, j'ai pas trouvé.
415		C'est Romain qui a trouvé.
416		Voilà.
417		... histoire que vous puissiez chacun utiliser aussi un peu des [?] des autres. Alors, euh, le groupe de [?], qu'est-ce que vous avez compris du problème, qu'est-ce que vous avez comme ébauche de réponse, où est-ce que vous en êtes ?
418		[?]

419		Oui, le plan est infini. En effet. Donc c'est-à-dire qu'en fait on imagine que ce pavage on va pouvoir l'étendre, effectivement à l'infini. Qu'est-ce-que vous avez trouvé d'autre ? Axel, tais toi. Qu'est-ce-que vous avez trouvé d'autre ? Est-ce-que vous avez trouvé des pavages qui conviennent à la définition, qu'est-ce-que ... ?
420		Anaïs ! Anaïs ! Anaïs ! ... Merci !
421		Donc, au niveau de l'appropriation de l'énoncé, le plan est infini, on peut mélanger, on peut avoir deux types, ou trois types, ou plusieurs types de polygones différents, Ok.
422		Ah bon ?
423		Tiens merci.
424		Ah ouais ?
425		Et est-ce-que vous en avez trouvé qui fonctionnaient ? Celui avec des carrés ? Donc si j'me souviens bien c'que vous avez dessiné c'est ça ? Quatre carrés comme ça ... Ok ?
426		Ah mais tu peux faire avec d'autres trucs ?
427		Mais faudrait y faire à l'infini.
428		Ah oui, faudrait y faire à l'infini, mais j'vais avoir du mal. Est-ce-que ça suffit si j'dessine ça pour qu'on comprenne euh comment on continue ?
429		Ben non parce que [?]
430		Y'en a qui se forment tous seuls, ben oui. Mais l'problème c'est que, va bien falloir que j'm'arrête un jour
431		On va jusqu'au [?]
432		Ok, donc j'mets des p'tits points.
433		Trois p'tits points.
434		Ok ? Est-ce que vous en avez trouvé d'autres ?
435		Triangle équilatéral.
436		[?]
437		Et vous êtes arrivés à faire quelque chose avec un mélange de triangles et d'carrés ?
438		[?]
439		On a l'droit d'faire des mélanges ?
440		Alors oui on a l'droit d'faire des mélanges. C'est euh, c'est écrit dans l'énoncé. Donc vous avez voulu couper un carré ? Comme ça alors ?
441		Si on fait toujours avec le même, ... Ça marche quand même.
442		Oui, c'est [?]
443		Les autres ?
444		Un triangle rectangle c'est pas convexe avec la même longueur d'côté.
445		[?]
446		Celui de droite on le laisse en carré, comme ça ?
447		Tu peux pas faire d'rectangle avec un triangle équilatéral.
448		Ou en-dessous de celui-là on recommence [?]
449		Mais j'coupe dans quel sens ? Comme ça ou comme ça ? Comme ça. Bon, les autres, qu'est-ce-que vous avez comme remarques à faire ?
450		C'est pas convexe. Les angles sont pas égaux dans un triangle rectangle.
451		Ouais.
452		Donc du coup en fait cette figure là, c'est pas ... Qu'est-ce-qui est dans la définition, qui pourrait... ?

453		C'est pas régulier.
454		Voilà, c'est pas un polygone régulier.
455		C'qui va passer. Là, mais là !
456		Sale enfoiré !
457		Bon, le groupe d'Axel, est-ce que vous avez d'autres choses ? ... Mathieu, mais peu importe, c'est pas ... Vous avez rien du tout comme autre pavage qui fonctionne ?
458		Ça dérive, ça dérive.
459		Ça intégre.
460		Ahaha.
461		Avec des triangles équilatéraux. Donc du coup euh ... Ça fait comme ça, et puis on continue, euh ... Ok ? Est-ce que vous en avez un autre ? ... Les losanges.
462		Hein ?
463		C'est pas régulier.
464		Non. Donc on peut paver avec des losanges mais c'est pas un pavage archimédien au vu de la définition.
465		Il est con [?].
466		Alors avec 8 côtés. Alors, 8 côtés.
467		Ahaha.
468		Qu'est-ce-qu'il y a ?
469		Il fait : "sauf si le losange c'est un carré".
470		Ouais.
471		C'est plus un losange alors.
472		Et vous remplissez avec quoi vous avez dit ?
473		Un carré c'est un losange particulier.
474		Ouais.
475		Comme un losange, c'est un p... un paralellogramme particulier.
476		Donc un octogone et du coup ? Un autre, là ? Ok, j'imagine que je continue, et du coup vous remplissez avec quoi ?
477		Oh, c'matin ma colle elle était là hein.
478		Et ils ont fait quoi ?
479		Ben ils ont collé tout l'plastique et après ils l'ont décollé.
480		Donc octogone carré. Ok. Est-ce-que ça correspond à la définition ça ?
481		Ouais.
482		Ça m'a pas l'air mal.
483		Oui, à priori oui.
484		Oui mais si tu ... si tu commences à faire comme ça ça fait chaud hein.
485		Flavie qu'est-ce-que tu comprends pas ... ? Quelle phrase tu comprends pas dans l'énoncé ?
486		Non c'est pas une phrase, c'est heu, tout-à-l'heure on avait dit que les angles [?]
487		Je sais pas, est-ce-que ça marche sur les angles ? Est-ce-que vous l'avez vérifié, si ça marche sur les angles, ceux qui l'ont dessiné ?
488		Heu, non, on l'a dessiné.
489		Donc ça marche parce qu'on l'a dessiné ? Est-ce-que ça marche sur les angles, c'est p't'être effectivement une bonne question.
490		Mais trac ... Tracer un octogone c'est gentil mais ...

491		Heu ... le groupe de Valentin, est-ce-que vous avez avancé sur autre chose, que ce soit des pavages que vous avez trouvés, soit des pavages au contraire qui n'en sont pas. Avec les hexagones Ok. Je marque "hexagone". J'le dessine pas. Oui d'ailleurs octogone-carré j'me suis bien embêtée à le dessiner, il y est pas, par hasard, dans les papiers euh ?
492		Si il y est.
493		Ça là.
494		Ouais. Bon, si on reprend les papiers de Dürer, est-ce-que vous en avez trouvé qui sont des candidats à notre euh ... Là, sur la première page, est-ce-qu'il y en a qui répondent à la question ? Là sur ces trois dessins est-ce-qu'il y en a ?
495		Hexagone-triangle. Hexagone-triangle.
496		Et donc c'est lequel ? C'est celui-ci ou celui-là ?
497		Mais non triangles ça va pas.
498		Quoi ?
499		Lequel t'as dit ?
500		Celui-là ?
501		Ah oui celui-là oui. Et lui aussi.
502		Celui-ci vous avez dit qu'ça fonctionnait ?
503		'fin p't'être pas hein celui-là, j'sais pas.
504		Voilà, parce qu'il y a des sommets qui sont sur les arêtes des autres. Celui-ci vous avez dit que ça fonctionnait ou pas ? Oui, non, peut-être ?
505		Si, ça marche ça.
506		Alors c'est une superposition, vous voyez une superposition ?
507		Non mais c'est [?]
508		Ah oui mais l'arc de cercle est-ce-qu'il est là comme trait de construction ou est-ce-qu'il fait partie du pavage ?
509		Alors on essaye d'oublier le cercle du coup, alors est-ce-que ça fonctionne ou est-ce-que ça fonctionne pas ?
510		Mais si ça marche.
511		Donc on en a deux ?
512		Du coup euh ... j'ai celui-ci et j'ai celui-là. Ça nous en fait deux.
513		[?]
514		Non non mais parce que Benoît il écoute pas, mais j'pense qu'il sait pourquoi. On en a deux alors ?
515		Non y'en a qu'un.
516		Y'en a qu'un. J't'ai entendu l'dire, y'en a qu'un.
517		Parce que c'est la même euh, 'fin on décale juste. ... Ça revient au même.
518		Lève les pieds Maxime.
519		C'est la même chose avec euh ... c'est juste tourné ? C'est pas étendu de la même façon ?
520		[?]
521		Ceux d'en bas sur la première page, on retrouve celui que vous m'avez fait dessiner tout-à-l'heure. Hein, les deux autres ?
522		non ils marchent pas. 'fin ils marchent pas, le troisième il marche pas.
523		Le troisième il marche pas, toujours pour cette histoire heu ... Et le deuxième ?
524		Ben il est inversé, c'est pareil heu ...

525		Il marche mais en fait ... ? C'est le même que l'premier. Ok. Sur les autres, qu'est-ce que vous avez repéré heu sur les autres feuilles ?
526		...
527		C'qu'on sait, c'est qu'à chaque sommet faut qu'ça fasse 360 pour que ce soit [?]
528		Là, le premier fonctionne pas, pourquoi ? Parce qu'il y a des losanges. Le deuxième ? On peut pas remplir. Ok.
529		Ben après ... un octogone.
530		T'as qu'à faire ça, t'as qu'à faire 180 fois 8 moins 2 fois 6, ça fait 1040.
531		Sur ceux-ci, la troisième page, qu'est-ce-que vous avez trouvé d'intéressant ?
532		Et après divisé par heu ... heu ...
533		Les hexagones vous me l'aviez donné tout à l'heure.
534		Celui avec les triangles ... Celui-ci là ?
535		130 c'est pas un multiple de trois-cent-soix ... si !
536		non.
537		De quoi ?
538		130, c'est pas un multiple de 360 ?
539		Ouais, mais si t'ajoutes 90.
540		Je sais pas, non. Celui-ci vous avez dit Ok que ça fonctionnait. Celui-ci ?
541		Plus 180 plus 130 plus 160 maintenant.
542		Oui, il fonctionne, on reprend les critères, pour vérifier si ça fonctionne. Qu'est-ce que je dois vérifier ?
543		Même longueur, même angle.
544		non, tu crois pas qu'il faut ... qu'on divise euh ... Qu'il faut décomposer 360 ?
545		En facteurs premiers ?
546		Les sommets ont les mêmes assemblages, qu'est-ce-que ça veut dire ça ?
547		Pourquoi ?
548		Possible.
549		Comme ça euh ... Comme ça après tu ... Tu peux les ...
550		Alors toi mais tu vas prendre un coup de boule.
551		On r'part de ce qu'on a fait euh la dernière fois ?
552		Ouais.
553		Si tu mets en facteurs premiers ... faut calculer la décomposition, d'accord ? On veut savoir euh, tous les, ... 'fin tous les ... Comme on l'a fait l'autre fois.
554		Ouais mais comme tu fais des additions, c'tte fois c'est pas pareil.
555		Alors celui-ci, je dis oui ou je dis non ?
556		Comme t'additionnes chaque angle
557		Ouais.
558		Ben c'est normal.
559		[?]
560		Ben je sais pas, y'en a qui ont l'air de douter, moi j'attends hein.
561		Quoi ?
562		...

563		Donc celui euh ... Figure 25 du coup, vous m'avez dit que celui avec les hexagones c'était oui, celui d'à côté, c'est quoi d'ailleurs comme figure ? ... Des étoiles ? Ben on parle de polygone non régulier là. Hexagone et triangles, ok. Est-ce-que ça fonctionne alors pour celui-ci ?
564		Ouais.
565		Je sais pas, je vois au fond votre camarade qui secoue la tête.
566		Toi t'es cameraman. Ahaha.
567		Mais si ça marche.
568		Bon, donc celui-ci on va le laisser sur un point d'interrogation, vous résoudrez ça ensemble. Ben y'a des groupes qui doutent, on va les laisser finir de [?]. On termine ? Celui d'en-dessous ? Pourquoi est-ce-que vous l'éliminériez celui-ci ? Les losanges ok. C'est vos dessins là. Est-ce que vous en avez tiré quelque chose ? Valentin ? Pour le 26, là, t'as tiré quelque chose ? Vous avez fait la figure 26 ou pas ?
569		Romain. Romain, quel beau dessin.
570		[Ouais, j'aime bien l'dessin ?]
571		Maxime il a dit qu'il aimait bien les seins.
572		Ahaha.
573		[?]
574		Ok.
575		[?] pas les même mesures d'angles et pas les mêmes mesures.
576		Donc comme vous n'êtes pas tous allés au tout à fait au bout du document, j'vous laisse continuer à réfléchir là-dessus, maintenant j'ai vu ce que certains d'entre vous étaient euh pour d'autres arguments. Le groupe de Maxime, qu'est-ce que vous avez ... vous avez avancé sur quoi ?
577		Euh, ben, la somme des angles ça fait 360, si on prend n'importe quel sommet.
578		La somme autour d'un sommet 360. Ok.
579		Donc 360 degrés hein, je suppose.
580		Ouais.
581		Et euh [?] comment vous aviez envisagé de vous servir de ça ?
582		Après faut que ... faut que l'angle sur un côté soit un diviseur de 360.
583		Mais ça ça marchait que si on f'sait des trucs euh ...
584		De quoi ?
585		Ben, que si on f'sait les mêmes.
586		Donc l'angle d'un polygone tu veux dire ?
587		Non. 'fin si. J'en sais rien.
588		Divise 360.
589		Ça c'est pas sur.
590		On a trouvé pareil mais euh ...
591		Ok. Donc ça je mets c'est toujours pareil hein, c'est des ...
592		Mais pas pour tous. Faut qu'il soit inférieur à 120 aussi.
593		Pourquoi est-ce-qu'il faut inférieur à 120 ?
594		Parce qu'il faut au moins trois polygones euh, pas qu'l'arête elle soit toute seule.
595		Tu nous réexpliques ça, parce que je crois qu'il y en a qui ont fait "hein ?"
596		'fin pour qu'le sommet il soit pas tout seul faut toujours qu'il y en ait 3.

597		Donc tu nous dis que pour faire un pavage il faut que sur chaque sommet il y ait au moins trois polygones, ...
598		Dessine, tu verras.
599		... donc du coup que chacun des trois est inférieur à 120. Ok.
600		Non mais ça c'est pas juste ça 120. Si tu peux mettre des carrés et des octogones ça marche pas.
601		Pourquoi c'est pas juste ?
602		Ouais, mais c'est c'que j'disais tout-à-l'heure, tu me disais c'était pareil. Y'a au moins 3 côtés.
603		Au moins 3 quoi ? Quand tu dis au moins 3 ... ?
604		Côtés aussi.
605		Au moins trois côtés.
606		Ouais, 3 polygones, polygones c'est.
607		Au moins trois polygones . Polygones.
608		Ouais mais ça c'est aussi côté, c'est pareil.
609		Un carré ça fait 90, [?]
610		Euh, j'vous ai entendu dire tout-à-l'heure : "ah mais on a l'droit d'mettre plusieurs formes" Vous étiez partis sur un seul type de forme ?
611		Oui.
612		Ok. Donc ça c'est leurs pistes. Ça peut vous donner des idées, mais pensez bien qu'ils étaient partis que sur un type de formes. Et l'dernier groupe ?
613		Ben nous on est partis que sur une forme.
614		Ok, donc vous êtes aussi arrivés à cette conclusion que y'avait un, des angles inférieurs à 120 dont la somme faisait ...
615		306.
616		Ok. Est-ce-que vous avez avancé dans cette démarche ou pas ?
617		Ben après on a [?] par rapport à aux ... y'a plusieurs formes, donc on n'a pas encore [?]
618		Ok. Est-ce-qu'il y a encore des points... sur lesquels vous êtes encore indécis, que vous avez pas encore bien compris ? Quelle est la difficulté majeure en fait ?
619		[?]
620		3, 4, 6 ouais.
621		La question. Ahaha.
622		De toutes les trouver. Parce qu'en fait là vous avez réussi à en dessiner quelques-uns qui fonctionnent, la question difficile ça va être comment toutes les trouver. En effet.
623		Donc j'vous laisse encore réfléchir, le but c'est que ça sonnera à 5h moins euh 10 ... non 4h moins 10 ...
624		5h moins 10.
625		Oui, enfin bon, quand ça sonnera donc, ahah, vous euh, ayez fait une synthèse de votre groupe sur l'affiche. Donc là maintenant, c'est chaque groupe vous vous débrouillez, vous essayez d'aller le plus loin possible. Les affiches vous les... j'vous les donnerai quand vous aurez suffisamment avancé. Donc le but c'est aller le plus loin possible.
626		Oh, en fait, pour les ... si on met tout l'temps l'même polygone on a d'jà notre conclusion.
627		Ouais.

628		Ouais parce que ...
629		Maintenant il faut qu'on travaille sur le fait qu'il y en ait plusieurs ensemble.
630		C'est ça.
631		Les trois trucs là ?
632		C'qu'elle a noté au tableau quoi.
633		Ouais voilà.
634		Donc ça si c'est tout l'temps l'même.
635		Ben si c'est tout l'temps l'même faut qu'il y ait ... comment on sait qu'il y a au moins 3 figures ?
636		Si c'est tout l'temps la même il faut qu'ce soit minimum euh 'fin plus p'tit que 120 degrés,
637		Ouais.
638		Comme la somme est égale à 360 ouais c'est bon.
639		Ok, le cas où y'en a deux différentes. Hein.
640		Le cas où ...
641		Vous auriez pas du me mettre de ce côté, ahaha.
642		Moi j'peux me mettre là hein.
643		Moi ça va franchement, 'fin j'suis pas l'pire hein.
644		C'est le milieu le pire ?
645		Ouais. Mais tu vois il nous a entraînés là-dedans maintenant.
646		Ah ben moi j'suis, ah moi j'suis légèrement, 'fin non ...
647		Ouais.
648		Euh si, ouais.
649		Victor tu n'es pas humain.
650		Victor c'est l'mec qui bande même pas devant la fille. Il est capable de s'retenir.
651		Tu l'oublies pas ? l'micro s'te plait ?
652		Il va pas tout y écouter ça ?
653		Ouais, est-ce-que c'est ...
654		[?] 6 heures en plus.
655		Y'a des choses très intéressantes.
656		Victor est impuissant.
657		Alors là ...
658		Mais tais-toi.
659		Oui, c'est chaud.
660		Bon, alors ...
661		...
662		Faut qu'on essaye maintenant avec deux... avec deux trucs différents.
663		C'est la [condition ?] pour un pavage euh, polygones équivalents
664		Identiques.
665		Équivalents.
666		...
667		Alors ?
668		J'ai soif, mais j'ai soif.
669		T'es un soiffard.
670		Juste maintenant on essaye avec deux côtés. Avec deux euh ...

671		Faut toujours, faut toujours qu'on garde que la somme c'est égal à 360. Parce que ça c'est vrai tout l'temps.
672		Ça marche toujours ça ?
673		Ouais, ça ça marche toujours.
674		Ben oui, parce que si c'est pas égal à 360, ça marche pas, t'as un trou.
675		Et après l'trou faut l'remplir.
676		Ben t'enfiles des p'tits triangles dedans.
677		...
678		Tu fais quoi là du coup ?
679		Euh, je réécris la conclusion de ça.
680		...
681		Voilà, et après pour les polygones euh, pas réguliers. Enfin quand t'en mets plusieurs ensemble, ...
682		T'sais y'avait que deux. Là on a fait qu'un seul.
683		Si, on a fait avec un type, maintenant on fait avec deux types, après 3 types.
684	E19	Après stéréotype
685		Ouais mais ce que tu dis c'est que ...
686		360 ...
687		[?]
688		Ah non, non !
689		Regardez ! Et l'autre il dévisse sa trousse.
690		non, non, non !
691		Ben c'est comme ça qu'ça s'écrit.
692		Putain, sigma ...
693		Ben la somme des angles d'un sommet c'est égal à 360.
694		Non, pas d'un sommet, d'un polygone.
695		non, d'un sommet. Tu prends n'importe quel sommet, c'est égal à 360.
696		Oui, d'un paquet d'sommets.
697		Tu prends genre là, 360 autour.
698		D'un paquet d'sommets.
699		Donc ça ce s'ra la première condition.
700		Euh ...
701		Et donc euh, après faut chercher toutes les décompositions qui font 360. Avec euh ...
702		Mais genre c'est comme euh, c'est comme un truc à deux inconnues.
703		T'sais le truc de la fois d'avant c'était ... y'avait qu'une seule inconnue c'était x.
704		Genre euh, le nombre de côtés ?
705		Ça va être chaud euh, deux, après 3, 4, 5, 6, 7...
706		Ouais, ben ouais.
707		Système à 7 inconnues.
708		Moi j'vais t'proposer un truc.
709		Oh, génial !
710		Ça ... Ça ça ça ça ça ...
711		Mec, tu vas en faire quoi ici ? Tu vas pas faire [?]
712		Si c'est deux, on fait ... Ah c'est bon ! ...
713		[chant :] La suite de Fibonacci...

714		... 60, 60, 120, 120, tac, 360. Et tu fais pareil partout.
715		Faut qu'ce soit inférieur à 180.
716		Ah ça, ce ... à 120 quoi.
717		Non, pas forcément, faut que ... En fait, il faut que, il faut qu'le ... Si on fait deux trucs, si on fait avec deux trucs différents, il faut que chacun, des deux types, ... Mais après on dit pas combien on a.
718		T'façon là, l'angle il est obligé d'être compris entre 60, l'angle d'un triangle équilatéral, ...
719		L'angle d'un triangle équilatéral c'est OBLIGÉ d'être 60.
720		Ouais, donc forcément ça peut pas être en dessous de 60.
721		Ouais.
722		non.
723		Ni au-dessus.
724		Ben si, ça peut être au-dessus. Là t'as 120. Là.
725		Oui mais c'est pas un triangle équilatéral.
726		Oui mais alors ...
727		C'est un polygone.
728		Oui, un autre polygone.
729		[chant :] La la la la la la.
730		...
731		L'angle du polygone il est compris entre 60 et y'a un maximum
732		60 et 120.
733		C'est pas 120 l'maximum, parce que là, genre ... Là t'as 120, ...
734		Ouais.
735		... Mais y'a un moment où ... non, avec 6
736		Mais, c'est forcément, fin ...
737		On est d'accord y'en a forcément 3.
738		Euh, donc euh, ça veut dire que là, tu vas mettre 60
739		60... Ouais, et là t'as 120, mais sur une autre figure, ...
740		Regarde attends, attends, trois-cent soix... Faut qu'ce soit 150 alors. non. C'est 150.
741		Au max ? J'dirais . Parce que euh ... Parce que le plus p'tit. T'es obligé d'en avoir au moins 3, donc le minimum ce s'rait d'avoir euh 3, et le plus p'tit angle ce sera 60 avec un triangle.
742		Ouais.
743		Donc euh, ça veut dire que si tu fais 360 moins 60, 300. Et comme il t'en reste forcément deux, ...
744		Ouais, mais comme c'est pas les mêmes, ça pourrait faire un autre de 60 et pis un de euh
745		C'est bien vu.
746		...
747		Faut qu'leur somme ...
748		[chant :] La la la la la la
749		C'est entre 60 et 300 finalement.
750		On est surs de ça ?
751		300 exclu du coup.
752		Ouais.

753		Là y'avait un truc là. Avec ça, r'garde. Là t'as 90, ici t'as 90.
754		Ouais.
755		Ici t'as 135 et ici t'as 135.
756		Oui, 135 oui.
757		Donc voilà, t'es au-dessus de 120.
758		Mais là toi tu parlais d'triangles là non ?
759		Ouais mais là t'es sur un carré. Faut qu'on fasse un truc euh ... Un cas général.
760		Ouais.
761		On essaye triangle-carré ...
762		Ben ouais. Le plus p'tit truc qui peut s'assembler, c'est un triangle , 60. Donc à la sortie ça va faire euh, 150, moi j'dirais 150. Y'en a forcément en double, il peut pas y'en avoir qu'un pour compléter un sommet. 300 oui ce s'rait l'général, sauf qu'il y en a besoin de deux. Ça s'divise en deux.
763		Chais pas.
764		Un truc avec plus de 150 ...Plus de 150 degrés un angle ...
765		Ça marcherait pas. À moins que ce soit 3 trucs différents mais pour l'instant on est sur 2. 2 qui sont identiques.
766		Ah mais ... On n'a qu'à faire un truc général, pour pas ... Après p't'être que ça marche pas au-dessus de 150, mais faut réussir à y prouver.
767		...
768		J'pense on [?] en hexadécimal.
769		En ASCII.
770		En quoi ?
771		En code ASCII.
772		C'est quoi ça ?
773		C'est un autre code.
774		...
775		360 c'est égal à ...
776		ax+by
777		[?]
778		Oui mais t'es obligé d'en avoir... T'es obligé d'en avoir 3 mais tu peux en avoir 4, des ... trucs.
779		Pour l'instant on est sur 2 ... [?] 3, 4. D'abord on fait 2 donc là c'est bien 150. Il est inclu ou exclu ? Hein ?
780		Cent-cinq... euh, 300 il est exclu. 150 tu peux l'inclure.
781		Parce que regarde là t'en as 4, des trucs sur l'même sommet.
782		Mais fais avec 3, putain.
783		Sur le même sommet t'en as 4.
784		Fais avec 3. 'fin deux différents.
785		Oui mais là y'a ... R'garde, y'en a ...
786		J'm'en fiche qu'il y en ait 4 là !
787		Mais t'en as deux différents, mais t'en as 4 sur l'même sommet. Donc ton équation elle marche pas, puisque t'en as 4 sur l'même sommet.
788		...
789		[?]
790		Oui ?

791		Et, il peut y avoir moins de 150, ça peut pas être au-dessus. Si y'en a 4 ce sera 300 divisé par 4. C'est obligatoirement divisé par 2. Minimum.
792		...
793		'tain vivement que ce soit fini parce que ...
794		Grave, trop long.
795		...
796		[chant :] Un éléphant, qui se balançait ...
797		Vous avez l'air perplexe.
798		...
799		Et pour cause.
800		Pourquoi, qu'est-ce qui vous pose problème ?
801		La question.
802		Oui, mais la question est pas simple, ça c'est sur.
803		Pour les euh ...
804		Donc t'as écrit 60 plus petit que a(polygone) plus petit que 150.
805		Enfin là on l'a fait pour tous les mêmes polygones donc si on fait à 2 polygones différents, ...
806		Ouais.
807		Euh...donc c'était sur lequel qu'on était déjà ? Là, ou... 'fin chais plus. En gros ça veut dire que pour qu'un sommet il soit pas tout seul, faut qu'il y'en ait minimum deux, à côté...
808		Humhum.
809		... Donc le plus petit angle possible c'est 60, polygone [?] 3 côtés un polygone.
810		Ouais.
811		Donc c'est un triangle, 60 degrés. Pis après faut qu'il y ait 300 sur les polygones à côtés, donc divisé par deux, c'est au moins, 'fin maximum 150.
812		Humhum.
813		Après après euh ...
814		Après après... Donc là vous êtes en train de chercher deux types de polygones, qui ont des angles entre 60 et 150, et euh, qui permettent de faire ... un pavage.
815		Ouais.
816		Ok. Qu'est-ce qui vous manque en fait pour avancer ?
817		L'envie.
818		Le talent.
819		Ah, oui mais alors ça j'peux rien pour toi.
820		Un cerveau.
821		Si mais y'a juste ceux-là. Ça avec les triangles, pis ça avec les carrés. C'est tout après.
822		Octogone-carré, et c'est quoi l'autre, hexagone-triangle ?
823		Ben ouais.
824		Après tu peux mettre quoi d'autre ?
825		Un pentagone ?
826		Non, j'suis plutôt pent... non.
827		Tu peux rien faire un pentagone.
828		J'ai rien entendu.
829		Tu peux pas faire un pentagone.

830		non, y'a pas marqué qu't'avais pas l'droit au début.
831		Après un carré ... Un carré ça marche que quand il est qu'avec lui-même.
832		Ouais.
833		non, ben non, avec l'octogone.
834		non y'a un endroit à un moment ...
835		Ouais, avec l'octogone ouais.
836		Ben, tu peux pas mettre un carré avec triangle.
837		non, c'est ...
838		Le carré il est avec euh ...
839		L'octogone.
840		... Genre carré c'est 4 côtés, octogone c'est 8 côtés, tu vois.
841		Ouais, et euh ... Triangle c'est 3 hexagone c'est 6.
842		Putain.
843		non j'rigole.
844		Mais non mais ...
845		Ah mais si c'est ça.
846		'tain tu l'as encore mis dans l'vert hein, tu l'mets dedans à chaque fois ahaha.
847		[?]
848		T'as qu'à pas m'passer [un vent ?].
849		...
850		Ça c'est l'cas où t'en as deux.
851		Et si tu mets des triangles et des carrés ?
852		Ben, si tu mets des triangles et des carrés, c'est genre a fois 90 ... Faut résoudre a fois 90 plus b fois 60 égal 360.
853		Ouais.
854		Donc tu peux mettre deux carrés et trois euh triangles.
855		...
856		Deux carrés et trois triangles ça marche ?
857		Ben deux carrés ça fait 180 ...
858		Madame ?
859		... et trois triangles ça fait ...
860		Ça marche si on dit qu'c'est 8 et 4 et 3 et 6, 'fin, 3 et 6 qui vont ensemble ?
861		Ben verifiez euh, ce que vous pensez.
862		Ça veut dire que ça marcherait aussi avec euh ... Non. 5 c'est quoi, c'est pent. ?
863		Ouais. Mais euh le pent. Il marche pas dès l'début.
864		Deux c'est quoi c'est ...
865		Ça existe pas.
866		Si le 4 il marche au début. Le 5 il marche pas au début.
867		C'est vrai ?
868		Le 5 ? Mais non mais on n'a pas le droit j'crois ils disaient. Un pentagone ... à 5 ... J'crois qu'ils mettaient qu'il y avait hexagone, octogone, mais pas sept., ni pent..
869		[?]
870		...
871		Heptagone ...

872		...
873		C'est chaud.
874		La pêche.
875		[?]
876		[?]
877		...
878		Octogone-carré, heptagone-triangle ...
879		On vous a mis aussi des photos des affiches que vous aviez faites si jamais ça vous aide.
880		Oui.
881		Ben nous on va s'faire re ton découpage de merde.
882		...
883		Et c'est tout c'qui marche là comme ... Pour deux trucs ?
884		...
885		J'vous pose là, si jamais vous en avez besoin c'est l'corrigé du DM parce que les autres ont demandé.
886		Magnifique ! Avec votre machin avec votre arbre ... Impossible ...
887		[?] c'était bien en fait.
888		[?]
889		Voilà.
890		Avec l'écriture de Romain.
891		Avec quoi ?
892		Ton écriture.
893		Eh vous avez fait un coeur.
894		Ahaha.
895		Fois 3 3 3 3 3 3 3. Ici.
896		2 exposant x fois 3 exposant y fois 2 exposant ...
897		...
898	E9	Alors ? Y'a quoi d'autre qui marche ?
899		9 côtés ça fait combien ?
900		Un ... heptagone. non. Un noventagone.
901		Ça fait 40.
902		40 quoi ?
903	E9	140 degré l'angle.
904	E19	C'est pas un multiple.
905	E9	Quoi ?
906	E19	C'est pas un multiple.
907	E9	Ouais mais ça peut marcher quand même.
908		Ouais.
909		...
910		[chant :] Victor [?], si t'enlèves la cédille ça fait Victor [?].
911		[Regarde l'heure. ?]
912		M'inquiète garçon.
913		Quoi t'as dit ?
914		M'inquiète garçon.
915		Molle tête ? Ça veut dire quoi ?
916	E2	M'inquiète. Bon, ça existe les angles à virgule ?

917	E9	non, on peut prendre des ... Ahaha.
918	E2	T'es sur Romain ?
919		Ouais.
920	E2	Elle doit pas être bien d'accord la prof.
921		...
922	E2	J'vais demander.
923		...
924		Par la bouche !
925		...
926		Des carrés et des triangles ça marche non ?
927		Oui, ben j't'ai dit. Trois, 3 triangles deux carrés par exemple.
928		Par angle ?
929		3 triangles ... 1, 2, 3,. Deux carrés ...
930		Oui ben c'est ça quand j't'ai demandé ça. Ça marche.
931		Oui, si ... Si tu veux.
932		Si c'est juste ?
933		Ouais, mais pourquoi pas.
934		J'pense que c'est ... Tu vois trois, trois ... Déjà j'pense faut faire la liste de tous les diviseurs. De 360.
935		Ouais.
936		Et dans tout ça, j'pense que tu peux assembler les trucs. 'fin, p't'être pas en fait. C'est ... Faut essayer.
937		Tu veux assembler des trucs qui sont diviseurs de 360 regarde. Genre euh 8, c'est un diviseur de 360, 4 aussi, 6, 3 ... T'es, tu veux assembler les ...
938		8 c'est pas un diviseur de 360.
939		Ah ouais ? Ah ben merde.
940		Si ben si.
941		Si mais si.
942		Mais non.
943		Mais trop qu'si !
944		Mais si !
945		360 divisé par 8 ça fait 45.
946		Là, c'est écrit là.
947		[chant :] Comme une star de cinéma ...
948		...
949		Si, ça marche avec des triangles et des carrés.
950		Ben oui.
951		Par contre à dessiner c'est impossible hein.
952		Ben dessine le hein, tu fais comme ça, regarde. Deux carrés, ... triangles.
953		Moi j'l'avais vu comme ça.
954		Ça devient compliqué déjà.
955		Parce qu'après tu les emboîtes comment, tes machins ?
956		Avec tr, 3 triangles équilatéraux tu peux faire un ... non ça t'fait pas un rectangle ?
957		...
958		Ah ben non.
959		Victor tu vas sortir.

960		Hein ?
961		Il parait [?]
962		Ah ouais. non mais j'y arrive hein, ça va.
963		...
964		Qu'est-ce qu'il y a ?
965		...
966		Ouais, bon, faut qu'on trouve une condition nécessaire.
967		Ben une généralité quoi.
968		Ma tête elle suit plus là.
969		Ça va y'a encore des mots quand tu parles.
970		Ahaha.
971		J'ai entendu condition, nécessaire. Ça m'a fait "Whoa"
972		Ouais, un truc général quoi.
973		[?]
974		Quoi ?
975		Ben c'est sur [?]
976		Ahahaha, mais dis pas ça, mais dis t'as vu sa tête [?]
977		[?]
978		Courir après un ballon...
979		Ooooooooooookaaaaaaaaaaaaaay.
980		...
981		[?]
982		[?]
983		[?]
984		...
985		Chut ! Il se balade, il se balade !
986		[chant :]
987		[blagues chuchotées]
988		C'est sur quel thème ?
989		On passe à trois Romain ?
990		Quoi ?
991		On passe à trois ?
992		Attends on n'a pas fini ?
993		T'attends quoi ? Ahahaha.
994		Si tu mets des hexagones avec des octogones ?
995		Hexa ...
996		Ah non, ça va pas être possible, y'a trop de gones. C'est pas [?].
997		...
998		Si, avec des carrés p't'être. Des hexagones. Octogones.
999		Ouais, non ça marche pas.
1000		J'vais aller boire.
1001		Ouais.
1002		Non.
1003		Non mais s'tu veux, après on peut essayer avec 3 mais ça va s'réduire encore non ?
1004		Ouais.
1005		Ouais mais là déjà t'as trouvé quoi ? Avec 2 ?

1006		Euh ... Octogone-carré, hexagone-triangle, triangle-carré.
1007		Déjà de toute façon faudra, faudrait tester les ...
1008		Vincent [?]
1009		Ahahaha.
1010		Vas-y mais ...
1011		T'es en plein dans l'champs !
1012		Ouais, t'es en plein dans l'champs.
1013		Oh, mais arrête.
1014		Faut essayer de 3 à 7 en fait.
1015		Ouais.
1016		...
1017		Elle s'arrête la pendule. Elle s'arrête.
1018		Elle remonte.
1019		On r'monte le temps.
1020		Putain [?].
1021		[?]
1022		C'est quand la pause là ?
1023		Alex, 150.
1024		C'est dans 25 minutes.
1025		Putain pis j'comprends pas [?] partir en moto.
1026		Oh là là mon pauvre. J'rentre même pas moi.
1027		T'imagines même pas
1028		Qu'est-ce qu'il y a ?
1029		Il se plaint de ce qu'il est obligé ... il a que 5 minutes chez lui.
1030		Il a quoi ?
1031		Il a que 5 minutes chez lui, il faut qu'il aille aux chiottes, il faut qu'il aille euh, manger.
1032		Après j'vais ...
1033		Préparer son sac. Parce qu'il peut pas préparer son sac la veille.
1034		Non mais je, j'mange pas hein. J'mange en rentrant.
1035		...
1036		Oh mais ça va pas si on multiplie par la constante de Planck ?
1037		Le nombre d'Avogadro !
1038		C'est quoi ça ?
1039		C'est pour les moles.
1040		Ça y est, il commence à sortit toutes les conneries qu'il connait.
1041		En fait tout c'qu'on sait c'est que la somme de tous les sommets c'est 360.
1042		...
1043		Oh, si tu fais c't'équation là, 60 plus ...
1044		90.
1045		Après 60 c'est quoi, 90 ?
1046		90, mais c'est c'que j'ai fait tout-à-l'heure.
1047		Après c'est quoi 90 ?
1048		120 ... 108 !
1049		non mais pour 5, 5 côtés.
1050		108.
1051		Cent-vingte il a dit.

1052		108. Mais 108 ça marche pas ?
1053		Cent-vingte.
1054		Après, 120...
1055		TE.
1056		120.
1057		Arrête on va r'partir sur un a
1058		T'as quel âge, 5 ans ?
1059		Après 120, c'est quoi ?
1060		7, c'est cent-vingt euh ... C'est des euh, infini.
1061		Ok, après ?
1062		8 c'est 135.
1063		135. Ok, après ?
1064		Nonante cinquante.
1065		Déjà faite.
1066		Pour 9 c'est quoi ?
1067		140.
1068		T'es né l'28...
1069		Après c'est quoi pour euh
1070		144.
1071		Pour 10. 150.
1072		En fait attends c'était pas marqué là ?
1073		Ici là ?
1074		144 pour 10. Faut 11 non ?
1075		Non, pour 11 c'est ... Attends. Pour 11 c'est des onzièmes.
1076		Ouais, donc 150. a, b, c, d, e. Ouais, c'est bon après.
1077		Cent euh ... 156 après.
1078		Après 15 côtés ça commence à être chaud hein.
1079		...
1080		Elle est cool ton équation à 18 inconnues.
1081		Et comme y'en faut 3, au minimum, ...
1082		Et ben ?
1083		Ben, au minimum t'as 60, 60 ...
1084		Y'en faut entre 3 et 7.
1085		Pourquoi entre 3 et 7 ?
1086		Euh, entre 3 ... 360 ... Entre 3 et 6, pardon.
1087	P	Ah c'est chaud comme équation à résoudre ça hein.
1088		Ahaha.
1089		Mais il a dit qu'il se sentait ... qu'il se sentait prêt...
1090		Et donc toi t'as sorti ta calculatrice et tu t'es dit euh, "allons-y elle va la résoudre" ?
1091		Ah non non, mais j'ai ... Moi j'ai rien fait.
1092		Il a dit qu'il préférait faire de tête.
1093	P	Et du coup tu continues ou tu t'arrêtes là ?
1094		Chais pas. J'ai encore la liste là, mais, ...
1095	P	Oui voilà, c'est qu'est-ce-que t'en fais, de cette liste. Si tu la prends, ou est-ce que tu la prends pas. Après va falloir les trouver les euh ...
1096	E9	Ouais. Ouais, j'aurai p't'être du mal à savoir ...

1097		...
1098		Ça tu peux pas y remplir avec des triangles en plus.
1099		Euh ...
1100		...
1101		J'ai faim.
1102		Putain, moi j'ai soif.
1103		Tu peux boire dans la rivière là, s'tu veux.
1104		...
1105		Tu marques quoi ?
1106		Ben j'essaye un truc. À mon avis ça va aboutir à rien. 'fin ça va être long.
1107		...
1108		Parce que si tu veux en j'sais pas combien à côté, si tu mets un gros polygone ...
1109		Après ...
1110		...
1111		Ouais.
1112		Ils font quoi eux ?
1113		Les batârds.
1114		Putain.
1115		Ouais la prof [?]
1116		Putain.
1117		...
1118		Faut faire tous les diviseurs de 360.
1119		...
1120		1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. 10, 12, 15, 18.
1121		...
1122		Putain, je savais qu'on aurait du acheter une corde.
1123		Pour nous ou pour lui ?
1124		J'sais pas, j'hésite.
1125		Regarde, pour nous.
1126		Pour lui, comme ça on n'en pend qu'un.
1127		...
1128		non, allez t'as tort, c'est bon.
1129		...
1130		Pfff, en fait tout c'qu'on sait c'est qu'la somme ça doit être 360.
1131		[?]
1132		non mais y'a que ça qu'on sait vraiment. Qu'on est sur.
1133	E9	Parce que comme c'est une addition, on s'en fout qu'ce soit des diviseurs ou pas.
1134		...
1135		Bon alors, vous en êtes où ?
1136		Dans les choux.
1137		Donc déjà, tu t'es arrêté là parce que t'en avais mare d'écrire ou tu t'es arrêté pour une raison ?
1138		Parce qu'il fallait bien qu'j'm'arrête à un moment mais j'sais pas si faut que je continue ou pas. Parce qu'après ça fait des polygones presque ronds.
1139		Ouais.

1140		Pour ajouter des trucs ... Pour ajouter des cercles les uns à côté des autres c'est chaud quoi.
1141		Ouais, il va falloir vous organiser là, pour arriver euh ... Résoudre ça, parce que comme ça on sait pas faire.
1142		Ouais.
1143		On factorise.
1144		Par combien aussi.
1145		...
1146		Ouais, j'sais pas, et pis j'ai plus envie.
1147		Ouais.
1148		Pffff.
1149		...
1150		Sa thèse c'est bien, c'est bien « comment j'ai détesté les maths ». [?]
1151		Non, sa thèse c'est l'apprentissage des maths.
1152		non, c'est comment ... Ah mais non c'était l'film "comment j'ai détesté les maths".
1153		La somme ça doit être égal à 360.
1154		Après on peut faire la même méthode que l'autre fois hein. On peut faire la même méthode que l'autre fois. Tu testes pour tout égal zéro, après tu changes pour un, après tu passes à zéro et tu r'mets un ...
1155		C'est un peu ... C'est un peu ce que je suis après faire là hein.
1156		Mais t'as vu toutes les valeurs que ...
1157		Genre avec euh, 3 polygones. On peut faire jusqu'à seiz... 6. Là y'a trois, avec euh ...
1158		Pourquoi tu peux en mettre 6, tu peux en mettre autant qu'tu veux.
1159		non, parce qu'après ils sont plus réguliers.
1160		non, tu peux pas en mettre plus de euh ...
1161		Ben oui, parce que en-dessous de euh ...
1162		non et puis même, tu peux en mettre 6 au maximum.
1163		Ouais.
1164		Donc t'essaies avec 3, après ensuite c'est 3 fois le même. T'as ton ... T'as trois fois le même ça te donne une liste.
1165		Après tu peux en mettre 6 ...
1166		2 différents. 2 différents donc t'en as 1 et 2 différents, là tu les donnes. Et 3 différents, après tu les donnes aussi. Et là ça t'fait une liste, c'est l'arbre ....
1167		...
1168		Et tiens allez, 6 d'un coup. En fait il t'en faut, il t'en faut entre 3 et 6 par euh, par sommet.
1169		Ouais. Tu testes euh, par 3 d'abord, après 4 ...
1170		Moi j'ai fait les 3, si tu veux. Moi j'ai fait les trois.
1171		...
1172		Eum ...
1173		...
1174		Bon, ça fait depuis 10 minutes, que vous regardez euh cette équation que vous avez écrit sans arriver à ...
1175		Ouais, non mais elle est euh ... On s'en fout, on est passé à autre chose.
1176		...

1177		Quoi ? Ouais.
1178		Ok.
1179		...
1180		Ben tout-à-l'heure vous aviez avancé un peu euh si euh ...
1181		Ben on sait pour euh, si c'est tout l'temps la même ... Si c'est tout l'temps la même figure on sait laquelle c'est.
1182		D'accord.
1183		Mais après c'est tout.
1184		Ok. Donc, avant d'arriver à cette étape, effectivement là tu euh ... Vous êtes ... Seul ça peut être un critère si euh les nombres vérifient ça alors ça marche. Mais euh, l'problème c'est qu'on peut pas l'résoudre. Donc vous pourriez peut-être réfléchir à euh, 'fin repartir sur euh ... Un problème un peu plus simple. Réduire un peu, de façon à pouvoir trouver tous ceux qui vérifient un critère particulier, par exemple.
1185		...
1186		Qu'est-ce que t'as écrit toi Victor ?
1187		Ben, [?] c'est trop lourd. On teste euh, avec trois polygones dans un coin, après 4, après 5. Et jusqu'à 6. Mais ça prend du temps et ...
1188		Et déjà après 3, vous êtes arrivés à quelque chose de concluant ou pas.
1189		Ben j'ai pas fini encore.
1190		Hein ?
1191		non, j'ai pas fini. 'fin j'pense qu'on peut arriver mais j'ai pas fini. Oui, ça va être long quoi. 'fin ...
1192		Donc fais voir avec trois t'as trouvé quoi, des hexagones, des triangles ...
1193		C'est trois fois les mêmes, si c'est deux différents et après faut faire trois différents, l'truc c'est qu'ça va être long.
1194	P	Donc triangle plus un dodécagone, deux dodécagones, un carré... Ok. Oui, ce qu'il y a c'est que là tu testes un peu au hasard en fait, comment tu fais pour euh ...
1195		Ben jl'es teste un par un, 'fin ...
1196	P	Ce qu'il y a ... C'qu'il faut c'est que vous arriviez à trouver une méthode pour être surs de les attraper tous.
1197		...
1198		[?]
1199		Mes yeux y m'piquent.
1200		Fais pour 5 angles, 5 polygones par sommet.
1201		J'ai pas compris [?] en fait.
1202		Moi j'fais pour 4, j'ai trouvé 4 carrés, quand tu mets 4 carrés
1203		J'ai pas compris
1204		quand tu mets, quand tu mets 2 triangles avec 2 hexagones
1205		Ben, en fait, j'ai fait dans un sommet, à un sommet, t'as forcément trois trucs mais tu peux en avoir jusqu'à 6
1206		ouais
1207		ben tu peux avoir, ben tous les mêmes, tu peux en avoir deux différents, genre un triangle et deux trucs à 12 côtés ou alors un carré et deux trucs à 8 côtés ou alors un truc à 10 côtés et
1208		[?]
1209		ouais avec 4, c'est le truc qu'on a déjà trouvé en fait

1210		T'y arrives avec trois toi
1211		Ben j'ai un peu laché
1212		Pour 5, ça va prendre ... ça va être chaud
1213		Tu vois moi ça m'a fait ça quand je suis arrivé au concours général [?]
1214		On tourne en rond, là.
1215		Moi j'en envie de marcher
1216		J'ai l'impression de perdre mon temps à faire ça. Putain mais ça sert à quoi ?
1217		On sera pas le groupe le moins avancé
1218		Je peux mettre un 4, si t'en mets quatre ensemble après ... Pour 4 y en a qu'1, que 2 de possibilités, hein ?
1219		4 côtés moi j'ai trouvé que deux possibilités. Ben si tu mets un triangle
1220		Essaie, si t'as tous les mêmes, que des rectangles, si t'en as deux différents tu peux ouais, si t'en as 3 différents, si t'en as 4 différents
1221		Putain, 1 triangle, 60, avec un carré 90, si tu peux mettre deux carrés, un triangle, un hexagone
1222		mais tu peux en avoir d'autres non
1223		En fait les pentagones ça marche jamais
1224		ouais
1225		supprime i ?
1226		septagone aussi
1227		c'est quoi septagone ?
1228		c'est un nombre à virgule ... 8 ... J'dirais qu'à 12 côtés ça marche pas non plus
1229		qu'est-ce qu'on va mettre sur la fiche
1230		ben rien
1231		parce que nous on n'a que des hypothèses
1232		ben nous on n'a que des feuilles blanches
1233		si vous voulez 150 on le supprime
1234		c'est lequel ? Pourquoi ?
1235		non j'sais pas j'ai trouvé des trucs avec 150
1236		ah ouais
1237		y a moyen que je vous en fasse un
1238		allez
1239		non sur votre affiche
1240		alors deux carrés
1241		120 c'est quoi ?
1242		avec un carré
1243		madame on peut aller boire un coup
1244	P	non vous faites vos affiches. La pause ce sera après
1245		Bon Romain y a une animation là
1246	P	je sais que vous avez pas fini, mais vous avez des éléments à écrire sur les affiches et peut-être que
1247		par miracle
1248	P	en mettant toutes ces affiches bout à bout on arrivera à déterminer
1249		ça marche avec ça, 2 carrés, 2 triangles, 1 hexagone
1250		bon allez c'est bon, alors qu'est-ce qu'on a, y en a plein le cul

1251		Autant quand tu fais le projet t'as l'impression de faire quelque chose tu vois 5 heures ce matin c'est passé vite, mais là
1252		c'est 6
1253		donc qui c'est qu'écrit sur l'affiche
1254		ben moi si j'écris mais c'est toi qui dictes
1255		c'est à qui tout ça là
1256		[... bruits de papiers] T'écris là bas toi
1257		ben c'est bon t'es à fond
1258		tu mets truc impossible en titre
1259		tu mets premièrement
1260		tu mets truc impossible dans le titre
1261		non tu mets les
1262		tu mets juste ça
1263		tu mets situation de recherche
1264		mais non tu mets direct, direct
1265		somme des angles sur un sommet égal 360
1266		première situation, polygones équivalents ben
1267		
1268		ça c'est tout en vrai
1269		j'mets propriété
1270		là tu mets juste ça
1271		somme des quoi des angles
1272		somme des angles
1273		a avec un chapeau dessus
1274		à un sommet
1275		écris plus gros
1276		va te faire foutre
1277		ah putain
1278		qu'est-ce qui y a ?
1279		tu veux que j'écrive
1280		non
1281		360
1282		degré celsius
1283		c'est assez gros comme ça ?
1284		je vais écrire
1285		c'est bon
1286		je veux écrire t'as dit ?
1287		je vais écrire
1288		après il faut dire que 3 polygones minimum, 6 polygones maximum pour chaque angle pour chaque sommet
1289		on sait que
1290		ben quoi on sait que ... c'est nous qui l'avons déterminé
1291		écris comme ça
1292		ben non mais mets juste genre P2
1293		
1294		on sait que
1295		non on n'a dit qu'on met pas on sait que

1296		j'écris ?
1297		ben non on a dit
1298		bon je vais mets quoi
1299		6 polygone par sommet maximum
1300		entre 3 et 6 6
1301		tu mettras 3 par truc ça fera trois propriétés vraies tout le temps
1302		
1303		et tu mets car l'angle
1304		non on met de justification, il va nous poser des questions
1305		ouais voilà
1306		P3 : 3 polygones minimum
1307		y avait quoi d'autres ?
1308		par sommet
1309		y avait autre chose qu'on avait trouvé
1310		ben après on était parti sur le fait que
1311		ce qu'on a dit tout à l'heure à la prof là avec le (n-2) 180 (n-2) que ça doit être un diviseur de 360
1312		cas où tous les polygones sont identiques
1313		ouais
1314		ben regarde
1315		dis je mets quoi donc là ?
1316		tu mets pavés archimédiens si
1317		c'est pavages
1318		pavages archimédiens si
1319		l'angle ah mince
1320		si mets si deux points
1321		si il est possible
1322		si c'est un triangle, un carré, un hexagone
1323		mais y avait autre chose
1324		moi j'mettrais ce qu'on a dit tout à l'heure... l'angle d'un sommet divise 360
1325		ben non c'est tout, si c'est un triangle ça marche, si c'est un carré ça marche, un hexagone ça marche
1326		mais non
1327		ben si
1328		ça marchait pas ce qu'on a dit tout à l'heure
1329		si si
1330		si fallait que ça soit inférieur à 360
1331		moi j'mettrais mesure que si mesure d'un angle d'un sommet entre parenthèse 180 fois n-2 sur n est un diviseur de 360
1332		ouais et inférieur à 120 aussi
1333		ouais
1334		attends attends c'est ça
1335		de quoi
1336		ce qu'il vient de dire
1337		j'ai pas écouté

1338		la mesure d'un angle d'un sommet entre parenthèse 180 fois n-2 sur n doit être un diviseur de 360 et inférieur à 120
1339		c'est une hypothèse
1340		j'sais pas je sais même pas si c'est juste
1341		ben oui justement c'est ce que je dis
1342		on va y vérifier puis on verra
1343		puisqu'on a montré
1344		dans tous les cas c'est juste
1345		puisqu'on a montré que c'était inférieur à 120
1346		si mais ça c'est sur que c'est bon pour les polygones équivalents
1347		tous les mêmes
1348		on peut pas avoir plus de
1349		c'est logique y a au minimum trois côtés donc euh
1350		minimum trois côtés
1351		360 divisé par 3
1352		120
1353		ça peut pas être plus grand que 120
1354		ouais ben oui ça on est sur faut le marquer comme ça
1355		eh ben attends
1356		mets trois polygones minimum donc 360 divisé par 3 = 120 degré par angle maximum
1357		donc selon P3
1358		non non tu mets juste comme ça
1359		trois polygones mini
1360		ouais si tu veux
1361		d'après P3
1362		en fait ils vont rien voir on écrit tout petit
1363		rien à foutre
1364		selon P3
1365		euh 360 divisé par 3
1366	P	Alors il parait que vous avez fait des axiomes, d'après ah oui selon P3
1367		Le pire c'est que ça veut rien dire la phrase
1368		selon P3 donc
1369		comme y a trois trucs minimum 360 divisé par 3 ça fait 120 donc ... donc comme j'ai fait cuire des crêpes hier je vais mangé une pomme ce soir
1370		c'est pas grave
1371		mets pas donc mets pas donc il aurait fallu mettre inclus, induit
1372		c'est quoi ça limite
1373		limite pfuh
1374		non c'est quoi ?
1375		lui ?
1376		puis
1377		puis
1378		un sommet ... sonnet, c'est un sonnet
1379		mais tu dis quoi
1380		tu te démerdes c'est toi qui explique ça parce qu'alors là
1381		quoi ça doit être un diviseur déjà

1382		écris pas tout le long faut qu'on puisse écrire ici tu vois
1383		mais si ça on l'a montré tout à l'heure que ça marche avec 3 là on le met que ça marche avec triangle carré
1384		non mais j'te dis 5 c'est un diviseur, ça marche pas
1385		et c'est parce qu'il est pas
1386		ouais il est pas
1387		si
1388		alors il nous manque une règle
1389		non non c'est ça c'était faux il fallait pas y mettre
1390		alors du côté de PR
1391		y a pas une question de diviseur y a juste une question de ça doit être 120 au maximum
1392		Bah au pire on se fera ... j'y dirais on s'fera engueuler
1393		Bah ça sert rien dire qu'c'est faux
1394		on y met qu'ça marche pour le triangle, hexadécimal et truc là
1395		ouais
1396		on réalise le pavage à partir de triangles
1397		Tu dessines un carré, tu dessines un triangle, et tu dessines un hexagone et ça ira, on dira ça marche pour ça ça ça ... un carré pas un rectangle, un triangle équilatéral
1398		alors là attention attends
1399		tu veux que j'te le fasse l'hexagone
1400		non ça va ... c'est comme ça un hexagone
1401		les angles aussi
1402		on s'en fout des angles
1403		ouais mais c'est bon comme ça
1404		c'te truc c'était faux avec les diviseurs, comme on m'écoute jamais
1405		dis pas trop, dis pas trop quand même
1406		cas où tous les polygones après cas avec deux polygones différents on met
1407		ben là [?]
1408		mais barre tout ça
1409		non c'est beau
1410		cas avec deux polygones différents j'mets là ensuite tout ce qu'on a fait
1411		c'est faux barre tout ça
1412		tout ça qu'est faux
1413		ah si ça, on avait en plus que la somme c'est égale à 360, la somme c'est égale à 360
1414		eh ben
1415		ben si tu prends si tu prenais le pentagone ça faisait pas 360
1416		c'est bon ce machin, on le laisse
1417		ouais faut rajouter juste, ouais non c'est marqué là c'est
1418	P	donc ça c'est tout, le cas où tous les polygones sont identiques. Ok, y en a pas un qu'a remarqué que à touts on met pas un t
1419		si si on a si si on lui a dit
1420		on lui a dit Romain qu'c'était un s
1421		de quoi
1422		on t'a dit

1423		c'est toi qu'écrit
1424	P	puis l'angle du sommet doit être un diviseur de 360, ok donc là vous expliquerez pourquoi est-ce que c'est les trois qui fonctionnent, ça marche
1425		on a fait
1426		donc ensuite vous vous êtes pas arrêté là,
1427		on a fait l'initialisation
1428		vous avez avancé, même si vous avez pas terminé, marquez où est-ce que vous en étiez
1429		tiens ou là bas, ben tiens va écrire
1430		mais t'as vu ce que t'as laissé
1431		va écrire avec ça
1432		t'as vu ce que t'as laissé
1433		et j'écris quoi là
1434		cas où il y a des polygones différents
1435		deux polygones pour l'instant
1436		non au pire on a tellement rien fait
1437		non pour deux on n'a pas fait une liste entière
1438		t'es filmé Maxime
1439		Y a pas moyen d'faire une liste là
1440		putain d'merde
1441		y a pas d'moyen d'faire une liste vite fait
1442		ben ouais mais on n'a pas fait de liste
1443		ben y a pas moyen d'en faire une là
1444		triangle + carré, heptagone + triangle
1445		mais attends j'ai fait
1446		ouais mais cas où deux polygones différents
1447		j'ai commencé là, déjà y en a quelques uns là, y en a trois, 1, 2, 3
1448		ouais mais fait cas où il y a deux polygones différents
1499		j'mets quoi cas ou deux
1450		ben on a trouvé que le triangle plus le carré ça marchait
1451		mais on met pas de règle là, on met directement
1452		ben on a pas fait de règle on a fait au pif
1453		A la fin j'mettrais mon équation, pis c'est tout, à la fin j'mettrais mon équation
1454		j'écris quoi
1455		quoi
1456		j'écris quoi
1457		triangle + carré, heptagone-triangle et octogone-carré ça là
1458		y a que ces trois là qu'on a trouvé
1459		clac, clac, clac
1460		ouais t'as raison c'est ça en vrai ton équation elle marche bien mais c'est chaud
1461		on la mettra à la fin là en bas et on dira, voilà la
1462		mais ce truc est hors de portée
1463		et tu dis pour que ça marche il faut que ça vérifie cette équation là
1464		et voilà
1465		y vont te dire pourquoi

1466		eh ben on peut pas la résoudre et tout eh ben non on peut pas la résoudre mais si ça marche avec cette équation c'est que c'est juste
1467		si on trouve ouais faudra dire ce que c'est x, y , a , b
1468		faudra mettre 180 a + ... a'
1469		pourquoi t'as mis a deux fois
1470		hein
1471		pourquoi t'as mis a deux fois
1472		non faut mettre des primes
1473		mets juste cas où il y a deux polygones tu mets qu'y a ça ça ça
1474		je marque euh on a trouvé ... y a pas moyen de trouver une règle
1475		y a pas de règle pour ça, on a pas fait de règle, à part que la somme c'est 360 et qu'on en a trois au minimum, on sait rien d'autres
1476		crampes
1477		[Rires]
1478		j'ai vraiment failli me manger
1479	P	Bon j'vous laisse 5 minutes pour finir vos affiches
1480		j'mets on a trouvé ça
1481		ouais tu mets juste ça non tu mets juste genre une figure
1482		celle-là, celle-là, celle-là
1483		bonne chance pour celle-là ... c'est quoi ça, ah ouais
1484		putain
1485		c'est bon on let pas de justification
1486		deux octogones collés et deux carrés
1487		et puis ça, deux hexagones qui se touchent par un sommet et deux triangles
1488		trois hexagones ?
1489		Non tu peux enlever le haut là
1490		j'marque l'équation là
1491		ouais
1492		attends
1493		quoi
1494		ouais non vas y
1495		...
1496		au lieu de mettre ça
1497		toi tu ferais mieux de te taire
1498		tu veux pas mettre
1499		mais y en avait d'autres y en avait d'autres un
1500		si moi aussi j'avais trouvé genre deux carré un triangle et un hexagone
1501		si mets l'équation tu commences par a tu mets b, c, d
1502		ouais ça c'était pas
1503		pourquoi t'as mis y
1504		merde
1505		ah ah
1506		c'est pas grave c'est pas grave c'est pareil
1507	P	... t'avais mis y toi
1508		oui mais je lui avais dit de commencer de faire a, b, c moi j'avais fait x, y, z après a, b, c
1509	P	ah d'accord

1510		Fais une rature
1511		c'est vraiment une torture j'aurais du faire spé physique
1512	P	qu'est-ce que vous avez dessiné là-bas ?
1513		octogone-carré
1514	P	octogone-carré, hexagone-triangle
1515		deux carrés trois triangles
1516		deux carrés trois triangles, ok
1517		après t'as 140
1518		j'connais plus mon alphabet moi
1519		après e c'est f, a, b, c, d, e, f c'est ça
1520		144 t'es sur
1521		après on garde 150
1522		ouais
1523		non sinon ça tiens plus
1524		t'en as trouvé un à 150 toi
1525		oui j'crois
1526		parce que même si t'en trouve un tu peux faire un truc à 240 hein
1527		et on peut le mettre le truc que j'ai trouvé tout à l'heure la mesure de l'angle comprise entre
1528		240 comment tu veux un angle de 240 faut que ce soit en dessous de 180
1529		quoi
1530		faut que ce soit en dessous de 180
1531		ah ouais ?
1532		Ben oui sinon c'est un angle plat, comment tu veux un polygone avec des angles
1533		ah ouais c'est vrai, ben attends y en a d'autres alors, on peut finir, y a 162, 165, 16... ha non, 156
1534		on peut le mettre le la mesure de l'angle est comprise entre 60 et 150
1535		on met plus et trois petits points
1536		là en dessous tu mets
1537		156 après ?
1538		non non tu mets là tu mets plus
1539		156 ?
1540		non plus et trois petits points
1541		156 ?
1542		non
1543		c'est quoi après g ? h
1544		non mais le tableau y s'arrête
1545		c'est 156 h ?
1545		ouais mais non
1546		c'est pour mettre trois petits points après !
1547		ouais ben ouais
1548		et maintenant on marque 60 a chapeau dessus 150
1549		là j'mets, là c'est tous les diviseurs entiers de
1550		attends j'regarde un truc, 195 divisé par 2
1551		y s'arrête ton tableau y s'arrête
1552		tu me prêtes ta calculette

1553	P	Bon on redémarre dans 5 minutes, donc si vous voulez une pause c'est maintenant
1554		bon marques ce que je t'ai dit
1555		ah, ok
1556		... rangement
1557		... écrit ce qu'il voulait écrire depuis plusieurs minutes 60 inférieur ou égal à
1558		mets pas 150, parce qu'on en est pas sur de 150
1559		j'mets juste ça ?
1560		mais si on en est sur elle l'a dit tout à l'heure
1561		ben non t'as juste balancé ça comme ça, mais y a des angles au-dessus de 150 qui marchent
1562		Le groupe fait la pause, alors que d'autres cherchent
1563		Présentation à la classe en dernière position. Victor débute
1564	P	Allez
1565		On a trouvé que la somme des angles en un point c'était 360
1566		On a trouvé qu'on devait avoir 3 polygones minimum par sommet et 6 maximum
1567	P	Alors 6 maximum ... 3 minimum ça a été expliqué, 6 maximum ça a pas été expliqué
1568	Victor	C'est parce que ben les plus petits polygones avec les angles les plus petits c'est les triangles avec 60° et on peut en mettre 6 par sommet et ça fait 360°
1569	Maxime	le premier cas c'est un pavage avec des polygones qui sont tous identiques après vu que y a que trois polygones euh y a au moins trois polygones par sommet on divise 360 par 3 ça donne 120 déjà l'angle d'un sommet il est forcément plus petit que 120 et après pour mesurer un angle avec la formule du DM on a fait une hypothèse que le résultat qu'on obtenait ça devait être un diviseur de 360 pour que ça marche. Et ça marche avec un carré, un triangle et un hexagone.
1570		Et c'était une hypothèse ou une conclusion
1571	Maxime	J'en sais rien
1572		Non, si vous en êtes surs que c'est forcément un diviseur de 360 ou est-ce que c'est
1573	Maxime	ouais
1574	P	Ben c'est pas une hypothèse alors, y a rien à conclure
1575	Romain	On a essayé avec le cas où il y avait deux polygones différents et on n'a pas trouvé une loi générale pour ça et on a juste on a juste trouvé qu'on pouvait mettre deux octogones avec deux carrés, deux carrés avec trois triangles puis deux hexagones avec deux triangles et pis ben après on a trouvé l'équation en reprenant le tableau qu'y avait dans le DM, on a repris tous les nombres entiers qu'y avait dans le tableau et pis on a mis des coefficients genre a, b, c , d côtés
1576	P	bon ça correspond à quoi alors a, b, c, d ... ben a par exemple c'est
1577	Romain	c'est le nombre de triangles qu'y a sur ce sommet
1578	P	Bon ok, qui peut être éventuellement 0 ?
1579		ouais et pis 90 pour un carré, 120 pour un hexagone t pis le temps c'est égal à 360 parce que la somme des angles ça vaut 360 par sommet

1580	P	ET puis après cette équation vous êtes restés bloqués
1581		on est allés en pause
1582		Ok, est-ce que vous avez des questions les autres ? Bon ben merci
1583		

G.6.3 Transcription des échanges lors de EXP-TS2-SDRP, groupe D

Expérimentation en TS2 : Transcription des sons enregistrés par le micro placé près du groupe D.

Codage : P le professeur, Vincent (E5), Paul (E8), Timothée (E15) les membres du groupe D.

[?] les courts passages inaudibles, en italique des commentaires qui font parfois référence à l'image vidéo. La bande son étant ici de mauvaise qualité, de nombreux passages sont inaudibles.

Repère	Locuteur Temps	Texte de l'intervention
0	00 :00 :00	Lecture de l'énoncé
1		C'est bon vous êtres tous prêts ?
2		[?]
3		Donc, on commence. Vous allez travailler aujourd'hui, c'est un problème de recherche sur lequel vous n'avez jamais travaillé. Qu'est ce que c'est que « Pavage ». Ben oui, qu'est-ce que c'est que pavage ? Est-ce que quelqu'un a une idée de qu'est-ce que c'est qu'un pavage ?
4		[?]
5		Mettre des pavés sur un carrelage, ok. Ben, ça ça peut être un pavage, et on va voir euh, mathématiquement euh
6		Avec ? ... Mais vas-y, dis. ... Non alors, le fond d'écran n'est pas une indication.
7		Mais c'était l'même l'autre fois déjà.
8		Effectivement le fond d'écran c'est euh, c'est quoi ? ... Oui, ça doit être ça.
9		[?]
10		Donc, non, les pavages, ... Je pense que c'qu'a dit Axel sur les histoires de carrelage, effectivement ça peut être une notion en rapport avec ça. Donc, vous allez faire une activité de recherche. Cette activité de recherche c'est un problème, ...
11		Eh ho, Nicolas. C'est donc un problème que vous allez résoudre, et le but c'est de voir comment vous, la classe, vous allez euh avancer sur ce problème. Donc vous allez travailler en groupes, et euh, à la fin de euh, du travail vous fa... vous ferez une affiche et on f'ra la synthèse de toutes ces affiches.
12		On est trop forts pour les affiches !
13		Ouais.
14		Voilà, vous passerez là, vous montrerez. Donc la différence par rapport à la dernière fois c'est que là vous allez tous travailler sur le même sujet. Mais par contre vous allez peut-être pas euh, aborder les ... le sujet de la même façon. Donc j'vous ai laissé vous organiser en groupes comme vous vouliez. Donc [j'sais c'que c'est ?], sur quoi va-t'on travailler ?
15		Ça marche pas.
16		Alors, allez Mathieu lis nous l'début.
17		Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous le côtés la même longueur.
18		Ok, est-ce-que ça va ? ... Que quel mot pose problème ?
19		Convexe.

20		Ah mais on en est pas là encore. Convexe ? Mais vous avez déjà du euh ... vous poser la question précédemment. Voilà, cette définition vous l'aviez déjà vue. Est-ce-que quelqu'un peut expliquer ce que ça veut dire, convexe, vite fait.
21		[?]
28		Oui, vous avez les exemples de ceux qui n'étaient pas convexes, c'était par exemple les étoilés. Ceux euh, que tu disais ... voilà. Donc ensuite Ale... Axel. T'avais l'air de dire que la suite était compliquée donc vas-y, lis la deuxième phrase.
29		Un pavage archimédien est un recouvrement du plan par des polygones réguliers sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones.
30		Ok.
31		Ben Archimédien ça pose problème.
32		Ben c'est la définition, c'est normal que ce soit le mot que tu connais pas.
33		Ahaha.
34		Donc, le mot que tu connais pas c'était archimédien, donc c'est un recouvrement du plan par des polygones réguliers sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones. Ouais ?
35		Pourquoi sans trou ni superposition ?
36		Ben, tout-à-l'heure euh, Axel a dit carrelage. Imagine un carrelage ou y'ait un trou
37		Ça s'rait pas un carrelage, Ok. Un carrelage où y'ait des superpositions ...
38		Ahaha.
39		Un carrelage ou y'ait des superpositions ? Ok. C'est bon ?
40		Donc ensuite, qu'est-ce qu'on nous dit ? Flavie ?
41		On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme la figure ci-dessous.
42		Donc vous ... voilà. Donc pourquoi est-ce-qu'on l'exclut celui-là, c'est bon ? Ouais ?
43		[?]
44		Ben on te dit on l'exclut parce que un sommet appartient au sommet d'un autre. Donc en fait on veut que les sommets ils soient comment finalement ?
45		Qui coïncident
46		Voilà. On veut que euh, les sommets coïncident. Donc le but, du travail qu'on va faire aujourd'hui, c'est de déterminer TOUS les pavages archimédiens du plan. Donc j'vous redonne l'énoncé, j'vous laisse 5 minutes pour réfléchir tout seul, tout seul tout seul, ça veut dire que vous d'vez pas parler, et pis après euh, vous pourrez euh réfléchir en groupe. Donc vous coupez l'énoncé en deux pour que chacun en ait un bout.
47		Oui, 5 minutes tout seul.
48		Euh, réfléchir ça peut se faire aussi en écrivant hein. C'est pas parce que vous réfléchissez tout seul que vous réfléchissez sans écrire.
49		Tout seul. Quel est le problème dans le « tout seul » ? Tu réfléchis 5 minutes tout seul. Réfléchir ça peut être aussi noter tes questions si tu... y'a des choses que tu n'as pas compris [?] t'as pas rien compris, donc marque ce que tu n'as pas compris.

50		[?]
51		Le but c'est de déterminer TOUS les pavages archimédiens du plan. Donc t'essayes de réfléchir [?]. Tu faire un dessin, tu peux écrire des choses, tu peux poser des questions...
52		[?]
53		[?]
54		...
55		Bon, j'vous laisse encore un peu de temps pour réfléchir mais maintenant vous échangez avec les autres de votre groupe.
56		Qui c'est qui a fait quoi ?
57		... c'est égal à 360, qui est divisible par le nombre de ... Le nombre de figures qui se touchent.
58		...
59		Si y'en a 4 qui se touchent, ça fait des carrés, 90. Si y'en a trois qui se touchent ça fait des triangles, 60 ... euh non, si y'en a 6 plutôt. Et là t'en as 1, 2, 3. C'est tout ?
60		De toute façon [?] qu'ils se touchent. [?]
61		Est-ce-que c'est une question suffisante, je sais pas. Nécessaire oui, suffisante ?
62		[?]
63		[?]
64		[?]
65		Les angles ont la même mesure. Donc, est-ce qu'il faut pas que la somme des angles dans une figure [?]. Parce que y'a, y'a forcément un lien. Si il faut que un nombre de chaque [?] si la somme de chaque [?]fait 360 [?] reste en contact, il faut que le reste ça fasse [?] qui dépende aussi du nombre de figures qui sont côte à côte. Et après faut qu'ça fasse aussi 360. [?] côtés possibles.
66		J'ai pas tout compris là.
67		C'est-à-dire que, t'as un carré... Tu peux en faire 4 même.
68		Ouais.
69		Là y'a 360.
70		Ouais.
71		Là t'as 90, et ça fait que [?] j'en ai que deux qui s'touchent. La somme des angles dans un ... dans un carré c'est combien ?
72		360.
73		Quand on met une somme de côtés de 360...
74		[?] 4.
75		Si maintenant j'prends des triangles équilatéraux, il m'en faut 6.
76		1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, bon, y'en a un de trop.
77		Non moi j'l'ai. [?]
78		Voilà. Donc on en a 6. La somme des angles dans un triangle c'est combien, c'est 180. 180 fois 6 ? ... Euh, 6 fois 8 euh 6 fois 8, 48.
79		8, 4.
80		4 fois [?] 360. Là, 360 fois 4.
81		Pourquoi fois 4 ?
82		Ben parce qu'on en a 4.
83		Ah oui non mais [?]

84		[?]
85		Oui, 440.
86		Ben à chaque fois on a [?]
87		40.
88		[?]
89		360 ?
90		Si après tu ...
91		Sinon j' ...
92		J'pense que si on fait ça on aura euh on rajoute 360 [?]
93		[?]
94		Ah oui 1800, j'aurais pu l'faire de tête celui-là.
95		[?]
96		Donc alors 1800... Alors un carré...
97		5 points.
98		5 ?
99		Faut qu'on puisse faire 5 points.
100		360 divisé par 5.
101		72.
102		Un truc à 72 côtés, euh, 72 degrés de côté.
103		[?] 5 faces, c'est ce qui [?]
104		[?]
105		72. Tac tac tac.
106		[?]
107		[?]
108		On crée un angle de 72. C'est ce qu'on veut trouver [?] On mesure [?] On reporte 72.
109		Ça n'existe pas, cette figure n'existe pas
110		Mais tu fais quoi ?
111		[?]
112		[?]
113		S'ils sont pas traçables ...
114		Je suis pas sur que ça marche. J'avais une idée aussi, mais ... j'sais pas si ça peut se faire [?]
115		Celui-là il est traçable à la règle
116		Si tu commences par faire la figure ici, ça va partir un peu comme ça. Et lui il va partir comme ça et ça va se superposer
117		Ouais.
118		Contre-exemple
119		Après tous ceux qui sont là-dedans sont pas forcément euh ...
120		pas forcément traçables
121		Ben on pouvait dire euh ...
122		C'est quoi [?]
123		C'est ceux qui sont pas traçables.
124		Je ne sais pas si ça, si ça [?].
125		J'sais pas.
126		Parce que c'est pas parce qu'ils sont traçables à la règle et au compas. Ceux qui sont pas traçables ils sont pas forcément. Tu vois ce que je veux dire

127		[?]
128		Dans tous les cas faut qu'ils aient un ... qui soit un diviseur de 360. Que quand tu les ajoutes autour ça fasse 360.
129		Et donc, alpha fois n, 360. Et n diviseur de 360. C'est logique.
130		2 c'est [?]
131		[?] c'est à deux côtés [?]
132		[?]
133		Ça ça semble possible.
134		C'est ridicule.
135		[?]
136		Faire un pavage [?]
137		C'est possible.
138		'fin [?] ça semble pas possible.
139		[?] 10 côtés.
140		C'est celui-là.
141		Ça fait des trous quoi.
142		Ça fait plus que des trous, ça se superpose.
143		Ça va partir comme ça.
144		Y'a lui qui va partir comme ça.
145		[?]
146		Oui mais moi j'veux pas superposer donc du coup j'laisse des trous. 'fin superposer...
147		[?]
148		Eh, 180 moins 360 ça fait combien ?
149		[?]
150		180 moins 360 ça fait cent ...
151		[?]
152		[147 ?]
153		10 côtés, 144.
154		La somme d'angles ...
155		...
156		Mais à partir de 10 côtés c'est plus possible ?
157		Ben même euh ... Déjà 10 côtés on sait que ... Ouais, tout ce qu'il y a après 10 côtés, vraisemblablement ...
158		Euh, donc ...
159		[?]
160		...
161		Si on veut qu'la euh ... Tu vois, 360 ... Et si à chaque euh ...
162		À chaque intersection en fait
163		Du coup faudrait que ça soit égal à 360 [?]
164		[?]
165		Bon, j'vais vous interrompre deux minutes. Donc, dans un problème de recherche, les vrais mathématiciens quand ils sont dans un problème de recherche, ils disposent des recherches précédentes.

166		Donc pour euh, vous aider, et parce que vous êtes aussi dans une situation de recherche vous avez le droit de bénéficier euh de quelques documents, donc j'vais vous distribuer en fait des extraits d'un texte d'Albrecht Dürer, qui a travaillé là-dessus. C'est ... il a travaillé.
167		[?]
168		C'est fait exprès.
169		Donc à vous de voir ce est écrit dedans, si ça vous sert ou si ça vous sert pas et comment est-ce-que vous pouvez vous en servir. Donc j'vous distribue ça, j'vous laisse prendre connaissance du document et voir comment est-ce-que vous pouvez euh vous en servir.
170		Déjà là, [?] 360, c'est pas possible. Avec 280 c'est pas possible.
171		Ben alors ?
172		Quand y'a plus de 120 degrés ...
173		Ok, j'vais le récupérer ...
174		[?] faut qu'il y ait au moins 3 angles
175		Ben ça va ça, c'est 3 fois 360. 3 fois euh, 3 fois 120. 360.
176		Oui.
177		Ça fait 3 angles.
178		Ah oui mais trois, ah non, attends.
179		J'vous en ai mis 3.
180		[?]
181		Attends on va l'examiner, pis euh ... On r'garde vite fait et pis garde ton idée on en reparlera.
182		...
183		Non, celle-là elle marche pas.
184		Ben celle-là on peut pas non plus ... Si, celle-là on peut. Mais celle-là on n'a pas le droit.
185		[?]
186		[?]
187		De toute façon on [?]. Tu prends celle-là, tu la tournes ça donne celle-là.
188		C'est pareil.
189		Oui c'est pareil sauf que
190		Oui en fait c'est les mêmes c'est [?]
191		Ça ça marche ça ? Avec les [?]
192		Oui y'a des trucs.
193		Oui mais c'est ça, j'pense qu'on suppose que [?] Tu prends pas un plan convexe ou ... Parce que sinon ça devient compliqué.
194	P	Non, on va prendre un plan plan hein, juste.
195		[?] sphérique, et ...
196	P	Non, on va prendre un plan plan, pas un plan sphérique, hein, ça sera plus simple.
197		Mais il s'est passé quoi là ?
198		...
199		En fait ça s'est [?] qui se touchent
200		Hein ? [?]
201		En fait c'est [comme un carrelage ?]
202		...
203		Ça c'est pas bon.

204		Hein ?
205		Ben si c'est ... Regarde, non non, mais tu la, ... Si tu continues d'en faire un deuxième là, tu pars comme ça, et tu pars comme ça.
206		Mais ce truc là là, c'est faux. C'que t'as fait c'est faux. Parce que les angles, là ils changent complètement, c'est pour ça qu't'arrives à ... Sinon ça allait faire ça.
207		En fait ça laisse un ... Ça laisse un trou ici.
208		...
209		Ça c'est un piège là.
210		[?]
211		Hexagone ça passe.
212		180.
213		360 sur 6.
214		360 sur 6 ...
215		[?]
216		Ah j'suis con, j'l'avais oublié.
217		...
218		Faudrait que cette longueur là [?]
219		Ça ça marche.
220		Euh ... [?]
221		[? ? ? ? ? ?]
222		Ben non, pas tout, faut pas qu'il soit trop grand.
223		Parce que si t'as un degré, sur 360, il faut 360 côtés.
224		360 côtés je trouve pas que [?] superposer.
225		Il faut qu'on trouve une condition sur le nombre de côtés.
226		Non mais déjà faut [?]
227		[?]
228		Et il faut trouver le minimum euh le nombre de côtés à partir duquel c'est pas possible.
229		Oui non mais [?]
230		Ça c'est combien ?
231		[?]
232		On peut essayer de partir de tel angle, [?]
233		[?]
234		Ils sont trop grands en angle. Même si c'est un multiple de euh, 360.
235		Et quand tu vas l'faire ça va se superposer.
236		L'angle ici est supérieur à 90.
237		140 sur 5 ...
238		[?]
239		Parce que un angle supérieur à 90, quand tu vas l'reporter, il va se décaler.
240		[?]
241		Parce regarde, admettons même si t'as un truc comme ça, tu prends 90, ...
242		C'est ce que j'ai fait là.
243		Là ça fait 100.

244		Si t'as un truc qui part ici comme ça, admettons que t'as [?]. T'as 130 du coup. Tu reportes 130 ici, ici c'est pas possible que t'aies 130, tu vas retomber dessus. De toute façon y'a pas l'choix, faut que ça soit inférieur à 90. [?] ça marche à chaque fois. Ah oui là on a l'truc, là c'est 120. 120 j'pense. 1, 2, 3, oui, 120.
245		Et pourquoi ...
246		Et ici on a 120, ça fonctionne aussi.
247		Ça ça va pas.
248		Mais, [?]
249		Déjà on peut entourer ceux qui [?]
250		[?]
251		90 ça fonctionne, 120 ça fonctionne.
252		60 ça fonctionne, c'est l'triangle.
253		...
254		45 ça fait combien [?] ?
255		360...
256		Faut un truc à 8 côtés. Hexagone.
257		[?]
258		L'hexagone [?]
259		Tu penses que ça ?
260		Ça fonctionne pas un truc comme ça ?
261		R'garde l'hexagone c'est celui-là.
262		Euh, octogone !
263		Non, parce que regarde si j'essaye de le tracer heu
264		...
265		Bon, j'pense que vous vous êtes tous approprié le problème, on va faire une petite euh, juste un p'tit échange. Vous allez euh me dire dans chaque groupe qu'est-ce que vous avez trouvé, comment est-ce que vous avez avancé, histoire que vous puissiez chacun utiliser aussi un peu des éléments des autres. Alors, euh, le groupe de Pierre, qu'est-ce que vous avez compris du problème, qu'est-ce que vous avez comme ébauche de réponse, où est-ce que vous en êtes ?
266		[?] Oui, le plan est infini. En effet. Donc c'est-à-dire qu'en fait on imagine que ce pavage on va pouvoir l'étendre, effectivement à l'infini. Qu'est-ce-que vous avez trouvé d'autre ? Axel, tais toi. Qu'est-ce-que vous avez trouvé d'autre ? Est-ce-que vous avez trouvé des pavages qui conviennent à la définition, qu'est-ce-que ... ?
267		[?]
268		Donc, au niveau de l'appropriation de l'énoncé, le plan est infini, on peut mélanger, on peut avoir deux types, ou trois types, ou plusieurs types de polygones différents, Ok. Et est-ce-que vous en avez trouvé qui fonctionnaient ?
269		Ben oui, les carrés.
270		Celui avec des carrés ? Donc si j'me souviens bien c'que vous avez dessiné c'est ça ? Quatre carrés comme ça ... Ok ?
271		Mais faudrait y faire à l'infini.
272		Ah oui, faudrait y faire à l'infini, mais j'vais avoir du mal. Est-ce-que ça suffit si j'dessine ça pour qu'on comprenne euh comment on continue ?

273		Ben non parce que [?]
274		Y'en a qui se forment tous seuls, ben oui. Mais l'problème c'est que, va bien falloir que j'm'arrête un jour
275		Jusqu'aux plinthes.
276		Ok, donc j'mets des p'tits points.
277		Ok ? Est-ce que vous en avez trouvé d'autres ?
278		Triangles et carrés.
279		Triangle équilatéral.
280		Et vous êtes arrivés à faire quelque chose avec un mélange de triangles et d'carrés ?
281		Alors oui on a l'droit d'faire des mélanges. C'est euh, c'est écrit dans l'énoncé. Donc vous avez voulu couper un carré ? Comme ça alors ?
282		Ouais.
283		Les autres ?
284		[?]
285		Ben si t'as un carré, genre euh, ça ça fonctionne. Par contre il faut qu'il ait [?]
286		Celui de droite on le laisse en carré, comme ça ?
287		Ou en-dessous de celui-là on recommence [?]
288		Mais j'coupe dans quel sens ? Comme ça ou comme ça ? Comme ça. Bon, les autres, qu'est-ce-que vous avez comme remarques à faire ?
289		Les angles sont pas égaux.
290		Donc du coup en fait cette figure là, c'est pas ... Qu'est-ce-qui est dans la définition, qui pourrait... ? Voilà, c'est pas un polygone régulier.
291		Bon, le groupe d'Axel, est-ce que vous avez d'autres choses ? ... Mathieu, mais peu importe, c'est pas ... Vous avez rien du tout comme autre pavage qui fonctionne ?
292		Avec des triangles équilatéraux. Donc du coup euh ... Ça fait comme ça, et puis on continue, euh ... Ok ? Est-ce que vous en avez un autre ? ... Les losanges.
293		C'est pas régulier.
294		Non. Donc on peut paver avec des losanges mais c'est pas un pavage archimédien au vu de la définition.
295		Alors avec 8 côtés. Alors, 8 côtés. Et vous remplissez avec quoi vous avez dit ? Donc un octogone et du coup ?
296		Un autre sur la ...
297		Un autre, là ? Ok, j'imagine que je continue, et du coup vous remplissez avec quoi ?
298	E15	Octogone et carré ça va laisser des triangles.
299		Ouias.
300		Donc octogone carré. Ok. Est-ce-que ça correspond à la définition ça ?
301		Oui, à priori oui.
302		J'comprends pas cette histoire d'[?] ...
303		Flavie qu'est-ce-que tu comprends pas ... ? Cette histoire de ?
304		Une histoire de [?]
305		Quelle phrase tu comprends pas dans l'énoncé ?
306		Non mais c'est pas une phrase c'est euh, tout-à-l'heure on avait dit que ça marchait pas sur les angles. Là.

307		Je sais pas, est-ce-que ça marche sur les angles ? Est-ce-que vous l'avez vérifié, si ça marche sur les angles, ceux qui l'ont dessiné ?
308		Euh non.
309		Donc ça marche parce qu'on l'a dessiné ? Est-ce-que ça marche sur les angles, c'est p't'être effectivement une bonne question.
310		Heu ... le groupe de Valentin, est-ce-que vous avez avancé sur autre chose, que ce soit des pavages que vous avez trouvés, soit des pavages au contraire qui n'en sont pas. Avec les hexagones Ok. Je marque "hexagone". J'le dessine pas. Oui d'ailleurs octogone-carré j'me suis bien embêtée à le dessiner, il y est pas, par hasard, dans les papiers euh ?
311		Ouais.
312		Ouais. Bon, si on reprend les papiers de Dürer, est-ce-que vous en avez trouvé qui sont des candidats à notre euh ... Là, sur la première page, est-ce-qu'il y en a qui répondent à la question ? Là sur ces trois dessins est-ce-qu'il y en a ?
313		... Octogone c'est 135 degrés ...
314		Et donc c'est lequel ? C'est celui-ci ou celui-là ?
315		Non, 'fin non, si tu fais 2 fois 135 ...
316		Celui-ci vous avez dit qu'ça fonctionnait ? Voilà, parce qu'il y a des sommets qui sont sur les arêtes des autres. Celui-ci vous avez dit que ça fonctionnait ou pas ? Oui, non, peut-être ?
317		Ben moi je dirais que oui hein.
318		Celui-ci.
319		Alors c'est une superposition, vous voyez une superposition ?
320		Non mais c'est un angle euh, c'est un arc de cercle.
321		Ah oui mais l'arc de cercle est-ce-qu'il est là comme trait de construction ou est-ce-qu'il fait partie du pavage ?
322		Un trait de construction.
323		Alors on essaye d'oublier le cercle du coup, alors est-ce-que ça fonctionne ou est-ce-que ça fonctionne pas ?
324		Oui.
325		Donc on en a deux ?
326		Ouais.
327		Du coup euh ... j'ai celui-ci et j'ai celui-là. Ça nous en fait deux.
328		Non, ça en fait un seul, c'est l'même.
329		Non non mais parce que Benoit il écoute pas, mais j'pense qu'il sait pourquoi. On en a deux alors ?
330		Non y'en a qu'un.
331		Y'en a qu'un. J't'ai entendu l'dire, y'en a qu'un.
332		C'est le même. Parce que c'est la même euh, 'fin on décale juste. ... Ça revient au même.
333		C'est la même chose avec euh ... c'est juste tourné ? C'est pas étendu de la même façon ?
334		[?]
335		Ceux d'en bas sur la première page, on retrouve celui que vous m'avez fait dessiner tout-à-l'heure. Hein, les deux autres ?
336		Non, ils marchent pas. Le troisième il marche pas.

337		Le troisième il marche pas, toujours pour cette histoire heu ... Et le deuxième ?
338		Ben il est inversé, c'est pareil heu ...
339		Il marche mais en fait ... ? C'est le même que l'premier. Ok. Sur les autres, qu'est-ce que vous avez repéré heu sur les autres feuilles ?
340		...
341		Là, le premier fonctionne pas, pourquoi ?
342		Y'a des losanges.
343		Parce qu'il y a des losanges. Le deuxième ?
344		Ben il a l'air de pas marcher.
345		On peut pas remplir. Ok.
346		Sur ceux-ci, la troisième page, qu'est-ce-que vous avez trouvé d'intéressant ?
347		Ben l'premier il marche.
348		Les hexagones vous me l'aviez donné tout à l'heure.
349		Les triangles.
350		Celui avec les triangles ... Celui-ci là ?
351		Les croix ça veut dire que ça marche ou que ça marche pas ?
352		Je sais pas, non.
353		Celui-ci vous avez dit Ok que ça fonctionnait. Celui-ci ?
354		Il fonctionne.
355		Oui, il fonctionne, on reprend les critères, pour vérifier si ça fonctionne. Qu'est-ce que je dois vérifier ?
356		Même longueur, mêmes angles.
357		[?]
358		Les sommets ont les mêmes assemblages, qu'est-ce-que ça veut dire ça ?
359		...
360		Là, un hexagone c'est 120, et donc du coup, deux angles euh ... 120 ça fait 240 et là faut rajouter 2 fois 60. 60, 60, 60 ça fait 180, donc c'est [?]
361		Alors celui-ci, je dis oui ou je dis non ?
362		...
363		Ben si, pourquoi il marcherait pas ?
364		Ben je sais pas, y'en a qui ont l'air de douter, moi j'attends hein.
365		Donc celui euh ... Sur la figure 25 du coup, vous m'avez dit que celui avec les hexagones c'était oui, celui d'à côté, c'est quoi d'ailleurs comme figure ?
366		Ben triangles équilatéraux et hexagones.
367		Des étoiles ? Ben on parle de polygone non régulier là.
368		Non mais c'est hexagone et triangle régulier.
369		Hexagone et triangles, ok. Est-ce-que ça fonctionne alors pour celui-ci ?
370		Ouais.
371		Oui
372		Oui.
373		Je sais pas, je vois au fond votre camarade qui secoue la tête.
374		Non non mais j'suis pas d'accord.
375		Logiquement si.
376		...

377		Bon, donc celui-ci on va le laisser sur un point d'interrogation, vous résoudrez ça ensemble. Ben y'a des groupes qui doutent, on va les laisser finir de douter. On termine ? Celui d'en-dessous ? Pourquoi est-ce-que vous l'éliminez celui-ci ? Les losanges ok. C'est vos dessins là. Est-ce que vous en avez tiré quelque chose ? Valentin ? Pour le 26, là, t'as tiré quelque chose ? Vous avez fait la figure 26 ou pas ?
378		[?]
379		Ok.
380		[?]
381		Ok. Donc comme vous n'êtes pas tous allés au tout à fait au bout du document, j'vous laisse continuer à réfléchir là-dessus, maintenant j'ai vu ce que certains d'entre vous étaient euh pour d'autres arguments. Le groupe de Maxime, qu'est-ce que vous avez ... vous avez avancé sur quoi ?
382		Euh ben euh, la somme des angles ça fait 360 si on prend n'importe quel sommet.
383		Somme autour d'un sommet, 360. Ok. Donc 360 degrés hein, je suppose.
384		Ouais.
385		Et euh donc du coup comment vous aviez envisagé de vous servir de ça ?
386		Faut que l'angle sur un côté soit un diviseur de 360.
387		Donc l'angle d'un polygone tu veux dire ?
388		Non. 'fin si. J'en sais rien.
389		Divise 360.
390		Ok. Donc ça je mets c'est toujours pareil hein, c'est des ...
391		Mais pas pour tous. Faut qu'il soit inférieur à 120 aussi.
392		Pourquoi est-ce-qu'il faut inférieur à 120 ?
393		Parce qu'il faut au moins trois polygones euh, pas qu'l'arête elle soit toute seule.
394		Tu nous réexpliques ça, parce que je crois qu'il y en a qui ont fait "hein ?"
395		'fin pour qu'le sommet il soit pas tout seul faut toujours qu'il y en ait 3.
396		Donc tu nous dis que pour faire un pavage il faut que sur chaque sommet il y ait au moins trois polygones, donc du coup que chacun des trois est inférieur à 120. Ok.
397		Au moins 3 quoi ? Quand tu dis au moins 3 ... ?
398		Côtés.
399		Au moins 3 côtés.
400		Au moins trois polygones . Polygones.
401		Euh, j'vous ai entendu dire tout-à-l'heure : "ah mais on a l'droit d'mettre plusieurs formes" Vous étiez partis sur un seul type de forme ?
402		Oui.
403		Ok. Donc ça c'est leurs pistes. Ça peut vous donner des idées, mais pensez bien qu'ils étaient partis que sur un type de formes. Et l'dernier groupe ?
404		Ouais ben nous aussi on est partis que sur une forme. On est partis avec le même raisonnement.
405		Ok, donc vous êtes aussi arrivés à cette conclusion que y'avait un, des angles inférieurs à 120 dont la somme faisait ...
406		360.
407		Ok. Est-ce-que vous avez avancé dans cette démarche ou pas ?

408		Ben après on a fait quelques trucs par rapport à euh, aux ... y'a plusieurs formes, donc on n'a pas encore vraiment eu l'temps de réfléchir.
409		Ok. Est-ce-qu'il y a encore des points... sur lesquels vous êtes encore indécis, que vous avez pas encore bien compris ? Quelle est la difficulté majeure en fait ? ... De toutes les trouver. Parce qu'en fait là vous avez réussi à en dessiner quelques-uns qui fonctionnent, la question difficile ça va être comment toutes les trouver. En effet. Donc j'vous laisse encore réfléchir, le but c'est que ça sonnera à 5h moins euh 10 ... non 4h moins 10 ...
410		5 heures moins 10.
411		Oui, enfin bon, quand ça sonnera donc, ahah, vous euh, ayez fait une synthèse de votre groupe sur l'affiche. Donc là maintenant, c'est chaque groupe vous vous débrouillez, vous essayez d'aller le plus loin possible. Les affiches vous les... j'vous les donnerai quand vous aurez suffisamment avancé. Donc le but c'est aller le plus loin possible dans la question.
412		[?]
413		Euh, ben genre 60 et 90 ...
414		...
415		Carré-triangle ça marche pas. [?]
416		[?]
417		5 côtés ? Attends, carré, 90. 180. Plus 60 euh, ...
418		Ça fait 240. 240 c'est pas un diviseur de 360.
419		[?]
420		Même que [?] ça en est pas. Ou alors ça fait deux triangles.
421		Non, ça va ça fait [?]
422		...
423		On fait des [?]
424		Non mais la caméra elle est complètement pointée sur moi.
425		Ahaha.
426		On est d'accord ça fait des [fleurs ?]. Parce que là
427		Non mais par contre faudrait voir quand
428		Est-ce qu'on arriverait à faire [?]. Sachant qu'ils font tous la même longueur. On obtient le même polygone plus gros. On a combien de côtés sur celui-là ? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. On obtient un polygone à 12 côtés.
429		Ça fonctionne pas [?]
430		Est-ce qu'on polygone à 12 côtés se rassemble avec un polygone à [?] côtés ? 12 côtés ça nous fait combien d'angle ?
431		180.
432		180 ?
433		Mais genre là, si on fout un carré... Un carré, si on refout un triangle, regarde, oh.
434		Ouais non mais ça ressemble à rien [?].
435		Ahah, celle-là ouais.
436		Euh, 90, deux carrés.
437		C'est quoi que vous êtes après dessiner en fait ?
438		Là on a essayé avec des carrés, des triangles, et euh des hexagones.
439		D'accord.
440		Et ça passe aussi. Enfin ça passe sur un, après est-ce-qu'on va arriver à [?]
441		D'accord.

442		Ici on a 90 plus 60. 90 et 60, 150, qui correspond ... 150 c'est pas un diviseur de 360.
443		Quoi ? Non mais heu, ...
444		Parce qu'on arrive à le composer avec heu
445		Non mais si ça ... Si ça c'est égal à ... À 210, on obtient un truc à 150. Donc c'est-à-dire [?], donc ...
446		[?]
447		Donc 70.
448		Ben non, 70 c'est pas un diviseur de 360. [?] beaucoup de figures à ... Avec un angle de 70.
449		Ouais ça ça va.
450		Ahahah, ils vont nous prendre en gros plan là.
451		Ahahah.
452		[?]
453		Mais on galère comme toi je pense.
454		Attends, si ... Quoi ?
455		[?]
456		Ahaha.
457		Non mais t'as pas entendu, mais bon, on va p't'être heu, hein ! Pas en ce moment.
458		[?]
459		Non, non, non.
460		On en parle pendant la pause.
461		Ouais.
462		Heu ...
463		Et 150 on arrive à 300, là ça fait un triangle.
465		270, qu'est-ce-que ...
464		360 moins 90. Merde. 270.
466		Y'a des triangles. Des triangles quand tu ...
467		Ouais ça passe hein cette figure. Si tu r'mets un triangle... Tu, tu r'mets le même, et 150 c'est-à-dire que tu refais exactement celui-là. Tu l'reportes, tu complètes avec des triangles et ça ... Il a l'air bien celui-là. Là c'est droit, 90 et [?] 210. Donc tu peux l'mettre avec un 150, et [y'en arrive encore ?]
468		Donc 120 et 90 ?
469		120 et 90 ça fait 210.
470		Ouais là en gros tu ...
471		Et 210 tu peux euh, tu peux l'mettre avec un 150 [?] ça fait 150.
472		C'est combien on a dit un hexagone ?
473		Un hexagone, 6 côtés.
474		Ah ben merci !
475		Mais non euh, 360 sur 6 ...
476		120.
477		120 ahaha.
478		Non.
479		Ahaha, si !
480		[?]
481		Hein ? Non, ...

482		360 sur 6 ça fait 6, 60, 180 moins 60 ... Si c'est bon.
483		Heu, donc on a dit, tout ça ça faisait ... Non, ...
484		Là on a 210.
485		Plus 120.
486		[?] 250. Il en resterait heu ...
487		Un de 150.
488		Un de 150.
489		150 c'est notre gros qui est là. Il fait 150.
490		Ok. Donc du coup, si on refout un gros, c'est-à-dire qu'on va faire ... Comme ça ...
491		Non ça va pas, il est rectangle celui-là.
492		Rhaa.
493		Et les rectangles ils vont pas.
494		Pourquoi y'aurait [?].
495		Ben il est rectangle, tu l'as fait partir d'un carré comme ça.
496		Ça c'est un carré ...
497		Oui.
498		... Ça c'est un triangle ...
499		Oui. D'où il est rectangle. Ah non mais tu m'fais [?] Ok.
500		[?]
501		Donc là du coup ça voudrait dire ... Ouais non mais attends, en gros, là faut remettre un carré, et là si on fait notre hexagone ...
502		[?] encore plus fort [?] aha.
503		[?]
504		Est-ce-que là ça va pas au niveau des ...
505		C'est pas trop la même taille, mais ...
506		Faut regarder si ... 1, 2, 3, 4, 5. 1, 2, 3, 4. Ça va pas.
507		Pourquoi ?
508		Ici, on a 1, 2, 3, 4, 5 polygones sur un point. Et là, si tu regardes ici, t'en as 1, 2, 3, 4, sur point aussi. Et il faut qu'il y ait le même nombre de polygones.
509		Ah ça [?]. J'avais oublié ce détail. Heu, mais ...
510		[?]
511		Hexa. J'avais oublié ce détail en fait. Du coup ça fait chier.
512		...
513		Oui, celui-là il va pas.
514		...
515		Lalala, qu'est-ce que je voulais faire moi avant ? Avant que [?]
516		[?]
517		Avec un polygone à 5 cotés euh, ça marche jamais, même si ...
518		Ben c'est vrai que ça a pas l'air de bien marcher, non.
519		Et si on met un polygone à 5 côtés plus un carré ?
520		...
521		Si tu refous un polygone tout de suite derrière ça passe.
522		On peut pas mettre un triangle là ?
523		J'crois pas, ils ont p't'être pas la même longueur.
524		Ouais.
525		Par contre si tu fais ça, avec ça, un carré ici, [?]

526		J'regardais les polygones [?] qui [composaient ?] que un polygone en fait.
527		Euh, 180 moins 360 sur n, c'est que pour les polygones réguliers c'est ça ?
528		Oui.
529		De toute façon y'a que des polygones réguliers.
530		Ouais non mais justement. Aïe.
531		Excuse-moi.
532		C'est pas grave. J'ai dit aïe juste pour l'principe.
533		...
534		Ça c'est l'angle alpha.
535		Dans tous les cas faut que ce soit des diviseurs de 360. C'est obligé de toute façon. C'est un polygone régulier.
536		Il faut ... Non, parce qu'il peut y avoir un deuxième angle. Et il faut que la somme des deux, à la fin il faut qu'on arrive toujours à 360. [?]. Après ça peut être composé par deux.
537		...
538		En gros ce qu'on cherche c'est ça. Là l'angle il faut qu'il soit comme ça. Sous c'te forme.
539		Oui oui.
540		On est d'accord. Donc, p't'être qu'on peut réduire déjà.
541		Réduire quoi, tu vas avoir deux inconnues tu vas [?]
542		Je sais pas. Oui bon, on verra. Non mais je sais qu'j'ai que 2 inconnues
543		T'en auras même plus si tu considères que tu peux avoir des triangles. Parce que tu refais la même chose avec euh, avec un n différent et un x différent.
544		[?] deux polygones.
545		Ben si tu mets 2 polygones différents, le n ça sera pas l'même.
546		Oui non mais oui. Mais faut que ça soit égal à ... Ça, ça c'est pour deux polygones différents ça. Si t'as ton ... Ton mesure d'angle qui [?] que t'enlèves à l'autre 360, ça donne un truc comme ça. Logiquement tu dois pouvoir rajouter un polygone régulier, donc 3 4 ou 6 cotés, [?] ...
547		Mais après faudrait voir si ... Ça va, euh, en dessinant.
548		Mais ça c'est un brouillon.
549		Le dessiner c'est pas forcément [une vraie démo ?]
550		Oui mais juste en ... Pour vérifier.
551		...
552		Moi j'dirais que c'te règle elle [?]. Ben tu l'as appelé y et bêta hein mais, ... Parce que ça là, 360 moins euh, le nombre de [?], qui est égal à un autre nombre d'angle pour une même valeur d'angle, qui peut être 0. Si tu prends le cas d'un triangle, non, d'un carré, d'un carré. 360 moins [?] moins x euh, 90 ...
553		x c'est l'nombre de côtés ?
554		Ouais.
555		Le nombre de polygones exactement.
556		Donc ça t'fait 0. Ou ça t'fait 0 fois euh ... Zéro. Donc cette formule elle s'adapterait même si t'en as pas un qui rentre.
557		Et si tu fais avec [?]
558		Si on prend ... Qu'est-ce-qui fonctionnait euh ... L'octogone. L'octogone il est à combien, 360 sur 8 ... Euh, 8 fois 4, 32 ...
559		360 sur 8 ça fait 45.

560		45. Donc si on prend, euh, 360 moins 8 fois 45, égal y fois le bêta.Je change les lettres volontairement. Euh, octogone on peut en rentrer un sur deux, si [on est en base 2 ?] ... L'octogone il fait 45 degrés ?
561		Ouais, tu m'a dit 360 sur 8, ça fait 45.
562		180 moins qu... Euh, 180 moins 45 ?
563		135.
564		C'est mieux ça. 35 on peut en rentrer combien ? 360 euh, 360 divisé par 45 ?
565		Euh, tu peux en rentrer 2,6.
566		2. Ça fait 2 fois 135, ça fait du euh, 270, et il nous reste 90. Deux-cent ... 90, égal ...
567		[?]
568		Non, 90, ça nous fait un carré. Un carré qui s'intercale au milieu.
569		Ça fait une fois qu... Euh, égal une fois 90. Donc on peut lui dire que le système octogone-carré ça fonctionne.
570		Mais ça marche que avec 2 ça ?
571		2 ?
572		Polygones différents.
573		L'autre groupe euh, j'leur ai donné le corrigé du DM parce qu'ils en avaient besoin, du coup j'vous l'donne à vous aussi si jamais ça vous sert.
574		Ouais on verra.
575		Si jamais on prend 3 polygones, ça voudrait ... De toute façon la base c'est la même. On part d'un truc comme ça, ...
576		Humhum.
577		... Et après on essaye de composer avec ce qui nous reste.
578		Ouais.
579		Donc, si on prend. euh, donne moi un polygone régulier.
580		Euh, on va prendre
581		On va pendre euh, on va prendre dans les diviseurs. Euh, 135 il est déjà [?] ...
582		Et regarde, c'est notre affiche !
583		Oui !
584		Oufff !
585		Sinon la mienne elle y est ou pas ? Avec les ... Ahaha, il avait fait des p'tits triangles Romain.
586		Avec des cœurs, aha.
587		Bon euh ... 10 côtés. 180 moins 36 ? Ça fait cent ... 144 ?
588		Hein ?
589		180 moins 36 ?
590		144.
591		144 c'est 360 moins 216.
592		144. Et euh ... 360 moins 144 ? Ç fait 6, 5, 1. 116. On est d'accord ?
593		De quoi ?
594		360 moins 144.
595		216.
596		216, pardon.
597		[?]
598		Hein ?

599		[?]
600		C'est vrai.
601		216, comment est-ce qu'on pourrait le composer ? 216 on peut pas. Parce qu'il faudrait mettre des mesures d'angles qui soient, qui fassent euh, 108.
602		108 c'est heu, un polygone à 5 côtés. Régulier, 108 ça fait 2 polygones [?]
603		Ça fait 2 fois 108 ?
604		Donc ça veut dire que si on a un décagone, on peut mettre deux figures à 5 cotés autour. Les 5 côtés c'est un peu bizarre mais ...
605		Ouais, j'suis un peu du, dessus depuis un quart d'heure, et je me suis rendu compte que ça nous donnait ça.
606		1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, oui !
607		Maintenant si on prend plus fort, 10 côtés on a fait.
608		Oui mais j'pense pas [?] parce que j'pense pas qu'on puisse euh refaire.
609		Ben à moins de passer sur euh ... Après ici on a combien ? On aura 108. 108 ça nous fait 207.
610		Ouais.
611		Si on lui met un grand, ...
612		Ça marche.
613		... Ça fonctionne. On arrive à le recaler.
614		Est-ce qu'on arrive, est-ce qu'on arrive à caler celui-là ?
615		[?]
616		Là on aura deux fois ça, on aura deux fois les grands angles, ça nous fera deux fois 144, euh, 2 fois 88. 180 ...
617		Là on pourra caler qu'un polygone là sur ce [?].
618		Mouais ?
619		Parce que comme là y'en a 1, 2, 3, là faut qu'il y en ait un autre là.
620		Ah mais ça va pas marcher parce que regarde, là si tu mets ...
621		En fait là ça va pas marcher. On arrive à 396.
622		Ça marchera pas.
623		Si tu mets 10 ... Là tu seras obligé d'mettre un 5, et après ...
624		Tu veux mettre un 10 ?
625		Ça va pas faire ...
626		... Là y'a un trou, et donc là ça, si tu ren... Ça marchera pas.
627		Donc notre condition, elle est nécessaire mais pas suffisante.
628		C'est-à-dire ?
629		Ben faut qu'il y ait ça d'validé pour que ça fonctionne, mais si y'a ça d'validé ça fonctionne pas à tous les coups.
630		Ahaha.
631		Ça marche pas ça marche pas.
632		J'aime pas les gens qui me disent ça fonctionne pas putain.
633		...
634		Bon, ben ...
635		Ben franchement je sais pas comment on va faire maintenant
636		Ben tu te dis euh ...Au pire tu demande à ton ami google. Si ça marche.
637		Sauf qu'on [?]
638		...
639		Euh, on est d'accord que le [n ?] doit rester constant ?

640		J'pense que, à chaque fois qu'on a un truc trop grand ça marchera pas hein. Ça peut pas marcher.
641		Oui euh, y'a un coup où ça a fonctionné, mais dès qu'on a l'deuxième, ça fonctionnera plus.
642		Moi j'pense que [?] polygones à 6 côtés. Parce qu'après ça commence à bouffer d'la place, à faire des trous [?] superposer ...
643		Après est-ce-qu'on peut pas décomposer les gros polygones en p'tits polygones ?
644		Si, genre là, les triangles ça fait les triangles ça fait un, ça fait un ...
645		Si de toute façon c'est [?] ... Ça fait un hexa. Heu, 2, 6, oui, hexa. Hexagone. 5 il s'décompose en triangle aussi non ? Si il sont [?] équilatéraux.
646		Là, ça va faire plus grand que 4,
647		Ahaha.
648		Lui [?] [fonction triangle ?].
649		Lui il fonctionne avec [?]
650		Ça c'est une étoile juive.
651		[?]
652		C'est pas b... C'est pas un polygone régulier, heu ...
653		Ça ça fait rien non plus, ça fait une ruche quoi.
654		Oui mais c'est [?] ...
655		De toute façon il a dit tout-à-l'heure, s'il y arrive pas il sort.
656		S'il y arrive pas quoi ?
657		S'il arrive pas il s'en va, il sort.
658		Il est pas encore sorti.
659		[?]
660		Bon alors ?
661		Ben on va dire qu'on a trouvé une condition nécessaire mais pas suffisante.
662		Alors c'est quoi votre condition nécessaire ?
663		Ben heu ... On est, on est toujours resté sur les euh, la somme des angles qui doit faire 360 degrés ...
664		Ouais.
665		... Alors on a d'abord décomposé 360 en un certain nombre de points, angles d'un polygone. Et après avec heu le résultat que ça nous donne on essaye de décomposer avec des polygones plus petits, et euh, carré, triangles, ou le dernier c'était quoi ?
666		Hein ?
667		Carré, triangle, [?] ...
668		Ici c'était heu ... Hexagone.
669		Non parce qu'il y avait pas 3 [?] ici. Vous avez mis 3 quoi ?
670		Triangles.
671		Donc un triangle, un carré, et un hexagone.
672		Non, c'est pas plus.
673		C'est les les ... Les figures qui nous semblent euh ...
674		Possibles ...
675		... fonctionner heu.
676		Juste avec un angle. 'fin juste avec une seule forme. Mais j'pense que ça marche aussi avec 2 formes,
677		Ok.

678		Mais j'suis ...
679		C'est-à-dire que si on prend par exemple un hexagone on a un angle 120 degrés, on peux rentrer deux hexagones dans 360, ...
680		Ouais.
681		... Et après ce qui reste il va nous rester cent ... Il va nous rester heu, 120, deux fois 60.
682		Ok.
683		Donc c'est ... Pour moi il faut que ça réponde à ce critère mais ça suffit pas pour que ça fonctionne, parce que on a essayé pour euh, celui-là ...
684		Hum hum.
685		... Alors là le premier il fonctionne, mais dès qu'on va essayer d'en remettre un deuxième, un deuxième décagone, ça arrête de fonctionner.
686		D'accord.
687		Et si on rajoute un ... un petit pour compenser, ça nous laissera du vide, et y'aura plus le même nombre de figures autour d'un même point.
688		J'pense que 3 figures ça va être chaud hein.
689		3 figures euh, ça m'paraît compliqué.
690		Parce que 3 figures après on s'retrouve comme ça avec euh trop ... Trop d'figures sur un seul angle.
691		Est-ce-que du coup là vous avez fait une figure qui fonctionnait juste pour un truc et quand vous avez essayé de l'étendre ...
692		Juste pour un truc.
693		Ben là on a, là on a trop ...
694		[?] on arrivait à 5 figures autour d'un point, alors que sur deux points y'en avait que 4.
695		Ouais.
696		D'accord. Ok.
697		Donc ça dépend.
698		[?]
699		non mais sérieux ...
700		Fais un dessin.
701		Hein ?
702		Fais un dessin.
703		Dessine un mouton. Ahaha.
704		Tu m'dessines un [?]
705		Hein ?
706		Tu m'dessines un [?]
707		Ahaha.
708		Tu l'fais ?
709		Moi aussi. C'est un polygone heu ...
710		Octopattes.
711		Polygone avec 4 pattes.
712		[?]
713		Il font [?] à côté.
714		Derrière ou à côté là ?
715		Merde.
716		Ah franchement il est bien.
717		...

718		Déjà y'a un truc qu'on a éliminé dès l'départ.
719		Attends !
720		C'est la longueur.
721		Des côtés. Est-ce que la longueur, est-ce-que la longueur des côtés a une influence ?
722		Non.
723		Attends, si on fait deux hexa... T'as pas un truc de dessin sur ta calculatrice parce que j'fais toujours des trucs bizarres.
724		Ça s'appelle quadrigéo, mais je sais pas si [?]
725		Sachant ...
726		Mais j'm'en fous du nom j'veux juste que ça marche.
727		... Les polygones de toute façon ils auront les mêmes euh mêmes côtés. 'fin la longueur ...
728		120 et 120 ?
729		240.
730		360 moins 240 ? 120.
731		...
732		Ah oui mais ça revient à celui-là quoi.
733		Tiens, regarde, truc de dessin s'tu veux.Tu séléctionnes les [?]
734		Non c'est pas l'même.
735		Ça trace les milieux.
736		C'est pas l'même.
737		Non mais c'est deux triangles, et un hexa.
738		Mais c'est pas l'même.
739		Déconne pas.
740		Ahaha.
741		Mais du coup ...
742		Oh, si ça t'intéresse j'ai [Cabrigéo ?], pour les juniors.
743		Junior ? T'es, t'es un enfant ?
744		Ouais !
745		J'ai appuyé sur 5.
746		Tiens, ça c'était le, le tableau périodique.
747		Ouais.
748		Tu fais des camemberts ?
749		Mais ça marche pas bien.
750		J'pense qu'il faut que chaque gros polygone pour qu'il fonctionne faut qu'il soit décomposable en ... En sous euh, en sous-polygones.
751		Tapez une touche. ... Mais j'fais quoi avec ça ?
752		Genre ... Ouais te, t'appuies sur les trucs du haut, t'as des options.
753		Ok. Animer.
754		Là ça marche pas tu vois. Y'a trop d'angles.
755		Ouais.
756		On a dit qu'l'hexa il fonctionnait.
757		Point droite segment cercle quadrilatère ...
758		J'peux heu ... En fait ça va jusqu'aux carrés.
759		Oui, quadrilatères, ben j'ai essayé heu... On va faire des trucs [?] alors.
760		...

761		Est-ce-que lui il serait décomposable en carrés ?
762		[?]
763		En fait ça sert à rien.
764		Oui oui, on est d'accord.
765		C'est juste pour me distraire pendant que vous réfléchissez.
766		Ahaha, c'est un peu ça.
767		Non non non non, c'est pas pendant qu'on réfléchit, c'est ...
768		J'crois qu'ça marche ça.
769		Attends j'pense pas. 1, 2, 3, 4. 1, 2, 3, 4. Ici t'en as que ... T'en as 3, si tu veux faire un truc ce s'ra un gros carré. T'as pas l'choix.
770		Hein ?
771		Pour en avoir que 3 sur ce point là t'as pas l'choix, faudra qu'tu fasses un gros carré. Non pour un carré en plus t'auras pas [le droit ?]
772		Hein ?
773		Ben parce que sinon t'auras des segments libres.
774		Ouais. Non non mais t'inquiète.
775		Là tu veux en faire qu'un seul sur ce point là ?
776		1, 2, 3, ...
777		Recommence plus loin.
778		Ahaha.
779		Bon, on fait un tiret.
780		Ah c'est bon, c'est bon.
781		T'as grandi tes trucs aux ... [?]
782		Non mais le pire c'est que j'avais lu un truc là-dessus.
783		Ah mais tu m'soules toi, t'aurais pas pu l'dire plus tôt ?
784		Mais, j'y ai pensé, j'y ai pensé, mais j'arrive pas à me souvenir, et puis j'ai pas mon bouquin là sur moi.
785		Bon, quand est-ce-qu'on va commencer les affiches alors ?
786		Ça a failli marcher quand même.
787		Qu'est-ce qui a failli marcher ?
788		Non ben non, rien.
789		Rien du tout, c'est ...
790		Ben failli, heu ...
791		Il me semble que j'ai lu un truc là-dessus mais j'arrive pas à me souvenir.
792		Ouais, mais c'est un problème de recherche, pas un problème de mémoire.
793		Oui.
794		Bon, donc vous en êtes où ? Expliquez-moi ou est-ce-que vous en êtes ? Ok, donc vous avez toujours, votre angle de 180 moins 360 divisé par ...
795		Madame, j'crois que depuis la dernière fois que vous êtes passée on n'a rien fait de mieux.
796		Ok.
797		Si on a fait des tests.
798		Oui c'est ça.
799		Et alors, y'a eu des tests qui fonctionnaient pas ?
800		Non concluants.
801		Qu'est-ce-que vous avez fait comme tests ?

802		Toujours trop d'angles euh, sur un seul point. Euh ... Non, toujours trop de figures sur un seul sommet.
803		Oui, et vous arrivez pas à déterminer me critère, pour euh, ... Qui permettrait de dire à l'avance qu'il y en a trop quoi. Ce qui vous éviterait de les essayer.
804		Bah ...
805		...
806		Vas-y exprime toi.
807		Hein ?
808		Ben j'comprends pas c'que tu fais.
809		Là j'suis parti sur euh, en disant que, dans tous les cas il faut qu'on ait le même nombre d'intersections à chaque fois. Et si on prend un, on donne euh, ...
810		Quoi ?
811		Autour d'un point, faut qu'il y ait le même nombre de figures.
812		Ouais.
813		Donc j'suis parti du principe que on en avait le même nombre de chaque.
814		Humhum.
815		Là si on a 2, si on en a deux d'chaque, ou trois d'chaque, ou ...
816		Humhum.
817		Et donc je reviens [?] cette équation là, qui devient compliquée mais qui sous-entend que ça, ça donne un multiple de 360.
818		Il faut que la somme, la somme des angles qui composent ... Il faudrait que la somme des angles qui composent la figure soit un multiple de 360. Il faudrait. Après euh, c'est pas dit qu'ça fonctionne. Si prend ... Un truc qui fonctionnait, euh ... Hexa et triangle. L'hexa c'est 120, les triangles c'est 60, ça fait 180. 180, c'est bien un diviseur de 360 aussi.
819		Ouais.
820		Ça a l'air de fonctionner pour ça. Après c'est pas dit qu'ça fonctionne toujours.
821		Donc toi, ... On dit que, en chaque point ...
822		En fait j'pars du principe que, si on veut que en un point ...
823		Ouais.
824		... Il y ait toujours ici par exemple 4 trucs, il faut qu'il y en ait 2 de chaque.
825		Pas forcément.
826		Pas forcément, il peut y avoir 3 et 1. Mais 3 et 1 c'est pas sur qu'il fonctionne après.
827		Non ça va foirer.
828		Si on en a l'même nombre à chaque fois, ...
829		Ça marche.
830		... Tu vas répéter exactement l'même modèle, juste décalé d'une rotation.
831		...
832		Et une fois qu't'as décalé, tu retrouves la même chose.
833		Ouais.
834		Pour moi c'est un truc qui fonctionnerait.
835		Mais après faut savoir si c'est suffisant.

836		Est-ce-que ça donne tous les cas possibles ? Il faudrait un exemple à ... à 2 et 1. Ou un contre-exemple à 2 et 1. Donc, 360, ça fait 2 fois, 2 fois 120. Non celui-là il fonctionne, ahah. Euh ... 3 et 2. 3 fois 90 ?
837		Quoi ?
838		Putain mais c'est pas vrai. 90. Divisé par 2. Qui nous donne 45. Si on prend, ...
839		Ahaha, les deux disent la même chose, c'est trop drôle.
840		Ça m'fait éclater de rire.
841		Hein ?
842		La caméra elle te focuse.
843		Ah mais depuis tout-à-l'heure. Et à un momet j'me r'tourne j'l'ai en pleine face.
844		Ils vont s'marrer en regardant l'truc. Ils vont voir Vincent qui fait ...
845		J'me r'tourne après, parce que sinon heu ...
846		C'est pas régulier, si ?
847		Non. 3 fois 90 ça passe pas.
848		1, 2, 3, 4, 5 ...
849		3 fois 72 ... Ça fait 216. 360 divisé par 216, qui fait 144. Qu'on divise par 2, 72. Ouais, j'obtiens encore la même chose quoi. C'est-à-dire qu'on peut en rentrer 5 de 72.
850		...
851		Ahahah, ça va, ça va, vous inquiétez pas.
852		...
853		Bon, comment on l'enlève ? 72. 72 ça fait 5 fois 72...
854		Ça marche pas ça.
855		... Égal zéro. 72 on peut l'décomposer en quoi ? Avec les [?]
856		Ça fait un étoilé. Mais attends, mais 'fin oui mais non. Ça marche ça ?
857		Fais voir.
858		60 plus 12.
859		Non.
860		Ahaha.
861		Attends. J'pense pas.
862		Ah non non non non. Si, vas-y.
863		Si on en met 5 de 60 et 5 de 12, ... 5 de 60 ça fait 5 triangles ...
864		Quoi ? Ouais, non, ça fait trop.
865		Là. Là t'es obligé d'remettre des carrés là.
866		Ah j'en sais rien.
867		Ben là, euh, si tu te cales là,
868		Ouais p't'être.
869		T'as 1, 2, 3, 4, 5.
870		Ouais.
871		Et si tu 'cales là, t'as 1, 2
872		3, 4.
873		On pourrait en mettre 4.
874		Ouais.
875		Et remettre deux carrés.

876		Y'a moyen qu'ça marche ouais. Mais par contre si ça marche ce serait abusé parce que mes p'tits dessins ils sont ...
877		C'est vrai qu'tu s'rais obligé de remettre des carrés à l'infini non ?
878		Non, attends, non. Après si on fait un même forme ...
879		Ah oui.
880		Euh, on va prendre comme ça hein.
881		... T'arrives à trouver un contre-exemple ?
882		J'essaye avec 72. Mauvaise idée. J'obtiens 560 plus 12, du coup... Alors 5 triangles plus 5 figures à 30 côtés, j'ai un peu du mal. Et je pense que ça ne passera pas.
883		...
884		Tu cales quoi au milieu après ?
885		Tu caleras rien du tout à mon avis.
886		Si, si on r'fait un truc, ça va, ça va p't-être refaire un hexagone.
887		Ici de toutes façons t'auras un trou, parce que de toute façon tu peux rien mettre ... Tu vas être euh, si peux pas mettre un seul truc , parce que tu vas te retrouver au milieu.
888		Ah ouais. Oh c'est chiant ça. Attends. ... Ouais mais juste, si on l'efface. Si on efface c'tte rangée ...
889		Bon, j'vais prendre un nombre plus grand.
890		Marche pas.
891		...
892		Ah.
893		Ça marche ?
894		Ouais, mais j'sais pas dessiner, ça m'soule ! Mis à part les moutons ...
895		'tain, en fait fallait pas aller en S, fallait aller en dessin. M'énerve ça !
896		Ahaha.
897		[?] p't-être que ça marche et là j'saurai. Chanceux.
898		[?]cagone là-d'dans après attends. 1, 2, 3, ...
899		Alors, vu ton dessin en plus heu, ...
900		[?] mosaïque ...
901		Heu, assure toi quand même du critère, ...
902		Oulà.
903		... Sur chaque sommet tu dois avoir le même assemblage de polygones.
904		Ben oui mais ...
905		Le même assemblage, c'est-à-dire qu'à chaque fois on devrait avoir la réplique [?]
906		Ben il me semble que là il y a un sommet ...
907		Faut qu'il y ait le même nombre de polygones sur chaque sommet ou ...
908		C'est ça oui.
909		Ça veut dire que si sur un sommet par exemple t'as un hexagone, euh un carré et un triangle, tu dois avoir la même chose sur tous les sommets.
910		Oh là là !
911		Fallait l'dire c'est ça ?
912		Ouais.
913		Ahaha.
914		Ben après fais voir, euh, là comme ça ça a l'air ...
915		Non mais ça marchera pas, parce que là au milieu ça marchera pas.

916		Ça marchera pas au milieu.
917		Ouais.
918		J'pensais que les pavages c'était de faire des carreaux carrés quoi.
919		Ahaha.
920		Bon alors ...
921		Ça marche pas ton truc ?
922		Ben, c'que je ... Comme ça ça marche pas ouais. Non mais [?]
923		Elle était belle ma mosaïque ...
924		...
925		Toutoutou, ça marche pas ... Ça commençait à prendre forme mon truc.
926		C'était beau. T'as enlevé un critère ça marchait.
927		[?] en plus.
928		Raye le !
929		Ahaha.
930		Euh, du coup tu fais des p'tits dessins
931		[C'est super agréable ?] Euh ... Comme ça, faudrait que ça ça fasse 30 degrés.
932		On dirait une marque de voiture.
933		Euh, ouais. Si, plutôt euh, Mitsubishi ?
934		Oui. Qu'est-ce-qu'il y a ?
935		Regarde Axel, juste regarde-le.
936		Qu'est-ce-qu'il fait ?
937		[?]
938		Ben j'sais pas, mais ...
939		Ah non, il est en train de rechercher un truc dans son sac.
940		[?]
941		Ouais, parce que [?]
942		Bon, euh ...
943		[?]
944		Fais gaffe y'a un micro.
945		Ahaha, j'vais aller en taule.
946		Il est stupide c'mec !
947		J'vais t'balancer mon gars, j'vais tout dire à la police.
948		Ouais 'fin Paul, dis pas d'la merde.
949		Ben quoi, c'est une preuve comme ça.
950		Bon, heu, du coup. Celui-là il marche ?
951		Ça c'est un polygone ?
952		Ouais, il a 30 côtés.
953		Plein de côtés.
954		Il marche celui-là Timothée ?
955		Lequel ?
956		Lui.
957		Ouais celui-là ouais, j'crois qu'y'a moyen.
958		Bon, si on en revient à ça, ...
959		C'est sensé nous aider ça sérieux ?
960		Oh non, euh, ça euh, ...
961		[?] la réponse à la fin ?
962		Cachée en p'tit.

963		Pfff. [?]
964		[?]
965		Ouais j'veux bien.
966		Bon, ben finalement.
967		Alors, j'ai trouvé une figure qui doit avoir 2,4 côtés. J'suis pas mal !
968		Pas grave !
969		...
970		On a quelque chose là-d'dans, non, là-d'dans.
971		Mais en plus ça marche pas, c'que j'disais. On a un contre-exemple dedans.
972		C'est quoi votre contre-exemple ?
973		T'as dit quoi ?
974		Celui-là, à ce que je pensais.
975		C'est 2-2.
976		Non, en fait c'est 2-2 qui marche. Il fonctionne.
977		Quoi ?
978		En fait j'pensais qu'sur un même point, vu qu'on doit avoir l'même nombre de euh, de figures sur un même point...
979		Moui.
980		... On prend le même nombre de figures et [d'autres ?]. Euh, c'est-à-dire que si on a 3, si on a 3 d'une figure et une de l'autre ça va marcher peut-être un fois les autres coups ça devrait pas fonctionner. Après pour justifier j'vais avoir un p'tit peu d'mal. Et du coup euh, j'ai donné la règle, 360 moins le nombre de côtés, fois la somme des angles, qui est sensé donner 0. Mais euh, après j'trouvais pas euh, j'arrivais pas à trouver d'exemples
981		Alors 360 moins ?
982		Moins euh, ça c'est le nombre de côtés, multiplié par la somme des angles des différents polygones, ...
983		Oui.
984		C'est sensé donner zéro.
985		D'accord.
986		Et après euh ...
987		Donc en fait, ici, finalement ce que tu fais, c'est ...
988		C'est une idée après ...
989		x c'est le même.
990		Oui c'est l'même oui.
991		Donc en fait tu détermines tous ceux où y'aurait le même nombre ... Où y'a, en fait y'a deux types de polygones, un alpha et un alpha prime, ...
992		Oui.
993		Et tu détermines tous ceux, où y'a l'même nombre de alpha que de alpha prime.
994		Hum.
995		Et alors t'as réussi à trouver des choses qui fonctionnaient ou pas ?
996		Euh, ben c'étaient euh, lesquels, qu'on avait ?
997		[?] c'que j'vais fait à 10 côtés. Un décagone, et [?]. Ah j'ai oublié.
998		Et donc du coup ce, tu dit que ça c'est un multiple de 360, d'accord. Ouais, en fait là t'es en train de dire que là t'as deux types de polygones, quand tu fais ça.
999		Euh, oui, j'ai deux, j'ai deux types de polygones.

1000		Deux types de polygones, et que y'a le même nombre.
1001		Y'en a le même nombre de chaque oui.
1002		D'accord.
1003		Après c'est pareil c'est une idée hein.
1004		Oui, mais si déjà vous arrivez tous ceux qui répondent à ce critère là vous avez déjà avancé dans la résolution du problème.
1005		Le problème c'est que j'ai fait des tests et euh ... 180, c'était avec 180. C'est un angle de 180.
1006		Un angle de 180 ?
1007		Une somme d'angles de 180.
1008		Ah. Des triangles.
1009		Non, avec deux types différents.
1010		Ah.
1011		90 et deux fois 60. Ça fait 180. Deux fois 90 ...
1012		Tu vois par exemple ça ça marche.
1013		... c'est 180 plus ... Non ça fonctionne pas.
1014		Ça marche. Pourtant y'a qu'un seul carré contre deux octogones.
1015		...
1016		Non, mais j'avais trouvé le bon tout-à-l'heure, mais j'arrive pas à remettre la main dessus.
1017		Si si en fait y'avait bien un contre-exemple dans l'machin.
1018		Mais genre... Donc ça, si on fait ça, ça fait, x fois 135, 2 fois 135, fois 160 mois deux f... Moins 270.
1019		Ça donne 90, donc ça donne un 3, 4 ou 6.
1020		Genre faudrait [?] autre chose.
1021		De toute façon la règle de départ heu, [?].
1022		Plus 60 ?
1023		[?] Non.
1024		Oui, mais on a donné ici, mais le alpha prime j'pense qu'il peut être que de 90, 60 ou 120, ou alors peut-être ...
1025		120 ça commence déjà à être grand hein.
1026		Oui mais genre euh, ça fait ...
1027		360 moins 120 ?
1028		Ça fait 240.
1029		240. [?] J'suis con. 240 c'est ... 3 fois ... 3 fois combien 240 ?
1030		24, 3 fois 80.
1031		80. Non. 240 divisé par ... 60 ... Donc là en gros, il faut trouver 60, donc le triangle, et on s'retrouve avec euh un ... hexagone, et un triangle quoi.
1032		[?]
1033		Non non mais cherche pas, on s'retrouve avec ça.
1034		Ah non, pas les affiches ! ! Oh, juste non.
1035		On a rien fait t'façon.
1036		Ouais ben là, heu, on va pas mettre grand chose dessus.
1037		Il sont en train de distribuer ...
1038		Mais nous on n'a que des hypothèses !
1039		Et même on n'en a [?]
1040		...

1041		[?]
1042		De quoi ? De quoi de quoi de quoi de quoi ?
1043		De mouton.
1044		Ouais !
1045		Sur l'affiche.
1046		Si, vous avez forcément avancé, [?].
1047		La dernière fois on avait des p'tits triangles dessus, cette fois j'vais avoir un mouton.
1048		La dernière fois vous aviez quoi ?
1049		Ils avaient découpé, en haut, des triangles.
1050		Et là, vous avez que des hypothèses vous aussi non ?
1051		Non, moi j'ai un truc vrai.
1052		Oui non mais moi aussi j'pense avoir des trucs vrais, mais j'ai pas trouvé comment l'vérifier.
1053		Ah ouais, [?]
1054		Ouais, on est d'accord.
1055		C'est des hypothèses.
1056		Ben c'est d'jà bien hein.
1057		Eh, y'a 5 minutes on avait rien, alors ...
1058		Mathieu il positive.
1059		Non, vous faites les affiches, la pause ce sera après.
1060		[?]
1061		[?]
1062		Ouais.
1063		On laisse surtout pas Timothée écrire.
1064		Oh non j'écris pas non, mais c'est pas prévu de toute façon.
1065		S'tu veux tu m'dictes.
1066		Déjà, on marque l'hypothèse de base. On est partis de ... Que la somme des angles autour d'une intersection ça faisait 360.
1067		Ça c'est sur.
1068		Oui ben ça oui.
1069		C'est la première chose qu'on a à marquer.
1070		Oui mais c'est déjà marqué au tableau.
1071		Oui mais ça fait partie de ... De notre affiche. C'est, ça fait partie d'nos réflexions. Pour l'principe quoi.
1072		En plus même moi j'y avais trouvé.
1073		Ah ben en même temps ...
1074		Mais si, n'empêche heu ...
1075		Oui, non mais t'es un ...
1076		[?] il m'a chouré un stylo comme ça là !
1077		À toi ?
1078		Mais tu lui as pas redemandé, genre heu ... ?
1079		Mais non j'ai oublié.
1080		Bon vas-y, fais voir l'stylo, j'te fais un p'tit mouton là.
1081		...
1082		Mais non, j'vais pas en faire un.
1083		J'écris où ? On la prend dans quel sens ?

1084		Ah, c'est toi qui décide.
1085		Oh, ça va comme ça alors.
1086		Oh, merde, tu peux la r'tourner sans ...
1087		...
1088		Mais j'ai pas, j'ai pas touché la feuille.
1089		Allez dessine un mouton.
1090		Nan.
1091		Un mouton ?
1092		Ah non ahaha ! T'façon, si y'en, non, si y'en a un, il peut pas v'nir de Paul.
1093		Pourquoi ?
1094		Parce que c'est moi l'chef des moutons. J'suis l'berger.
1095		"J'suis l'berger". Ahaha.
1096		C'est [?] le berger hein. [?]
1097		Heu, j'mets quoi ?
1098		Bonjour.
1099		Bonjour.
1100		Non, mais pose le sytlo.
1101		Tu l'as fait tourner dans l'autre sens l'affiche ?
1102		J'sais pas.
1103		Juste pose le stylo.
1104		Peu importe.
1105		Peu importe. Ben c'est bien comme ça.
1106		Non non, pose le stylo. On sait pas du tout c'qu'on va marquer, donc du coup ...
1107		Qu'est-ce-qu'il y a ?
1108		Non rien, on sait juste pas du tout c'qu'on va marquer.
1109		On peut dessiner.
1110		Ben marquez heu, même si c'est que des pistes, que des idées, qu'c'est pas assez abouti, vous marquez.
1111		Marque, déjà, que ça fait 360 degrés.
1112		Je marque la date, nos prénoms ?
1113		Mais marquez pas "ça fait 360 degrés", formulez ça comme il faut.
1114		Oui, mais il comprend, il est intelligent !
1115		La somme des angles, ... La somme des angles est égale à 360 degrés [autour d'une ?] intersection.
1116		Mais dis moi c'que j'marque clairement parce que ...
1117		[?]
1118		J'mets hypothèse ?
1119		Au point de contact, de coincidence.
1120		C'est une hypothèse ou c'est vrai ça ?
1121		Non, point de concours.
1122		Mais utilise des mots que tout l'monde comprend.
1123		Le point d'concours.
1124		Nan. [?] concours ...
1125		Ben c'est vrai. C'est forcément vrai. C'est pas une hypothèse, c'est vrai.
1126		Ok, tu marques vérité vraie.
1127		Non, tu marques rien du tout, tu mets ...

1128		Vraiment vraie comment vraie qu'elle est vraie.
1129		Déjà là tu marques ... Oh, marque, marque euh, que ça fait 360 derés au point de ...
1130		Alors, somme ... J'mets quoi ? J'mets somme ? Genre euh sigma ?
1131		Somme des angles au som ... euh, comment t'avais dit ?
1132		Sigma et ...
1133		Point de concours.
1134		Non.
1135		Point d'intersection. Point d'coincidence.
1136		Non mais dès l'début. Non mais dès l'début.
1137		Hein ?
1138		J'mets quoi clairement ? Somme ...
1139		Somme des ... La somme des ...
1140		En toutes lettres ou ... ?
1141		Tu dis, euh, la somme les angles ...
1142		Azy, j'commence.
1143		Au pire on va bien avoir euh, un pourcentage d'erreur. On va dire qu'il y a d'autres feuilles.
1144		Vas-y ...
1145		Non mais petit, petit, pet ... Non, pas petit.
1146		Comme ça ? Plus gros ?
1147		Ouais, [?].
1148		C'est quoi ce stylo ?
1149		Si tu veux j'écrirai un bout.
1150		Comment t'écris mal !
1151		Ahahah.
1152		[?] On les laisse travailler tranquilles !
1153		Ah ouais j'écris d'plus en plus p'tit.
1154		Ahaha.
1155		Pas grave.
1156		Bref. La somme des angles au point de concours ?
1157		Ouais, on point de concours on a dit.
1158		Fais toi plaisir hein, de toute façon ils vont pas comprendre.
1159		Comment ça s'écrit concours ? Comme un concours ?
1160		Ouais.
1161		T'es sur que c'est commme un concours ?
1162		Avec un s.
1163		Trop tard. ... point d'concours.
1164		Eh !
1165		Et là j'mets égal ?
1166		...
1167		Non non mets juste "est 360". C'est pas grave, "est égale à 360 degrés".
1168		[?] tu pourrais juste te casse d'notre table en fait ? ... Non non, j'ai pas envie.
1169		C'est bon là, j'écrase pas l'affiche.
1170		C'est bon voilà, on a fini. J'mets quoi d'autre ?
1171		Bonjour.

1172		On a l'droit d'mettre la date et nos noms ?
1173		Ça prend d'la place ça, c'est bien.
1174		Mais ça c'est vrai hein.
1175		Ouais, mets aussi euh, l'deuxième prénom, ça prendra plus de place.
1176		Fais un p'tit dessin.
1177		Hein ?
1178		Fais un p'tit dessin d'nous 3 au pire.
1179		Attends ... Oui ! Il est mal peigné là.
1180		Tu m'étonnes, [?].
1181		[?] Ah, moi j'croyais qu't'allais faire [?].
1182		Non.
1183		Pourquoi ?
1184		Parce que j'suis plus à l'aise à droite. Oh, j'tiens mon crayon dans la main droite, c'est p'têtre pour ça.
1185		Ouais ça fait des parallèles.
1186		Pardon ?
1187		C'est normal sauf que [?]
1188		Parallèles, parallèles. Parallèles, parallèles. Parallèles.
1189		[?]
1190		Ça fait des parallèles quand ça (?]
1191		C'est vrai ?
1192		[?] ce qui est plutôt logique, parce que ...
1193		Ça veut dire qu'à un moment ça fait 90 degrés.
1194		Les côtés opposés ça ... Les côtés opposés ...
1195		Là y'a juste un léger bug.
1196		Oui mais dans, dans tous les cas les côtés opposés sont parallèles dans un polygone régulier. Si ils ont parallèles comme ça... Donc y'en a qui sont parallèles dans ce sens là ... Dans tous les cas ça nous f'ra des parallèles dans c'sens là. Donc on aura égalité entre les angles là et là.
1197		Hum.
1198		Entre les angles là et là. Entre là et là.
1199		Au pire si tu veux on va faire des parallèles ...
1200		C'est, y'a tout l'temps des parallèles donc ?
1201		Ouais. Et c'est logique parce que [?] sont parallèles sur un polygone régulier. Il m'semble.
1202		Ben j'ai des losanges.
1203		C'est pas régulier un losange.
1204		...
1205		En tous cas ...
1206		Et de même mesure ... Les côtés d'même longueur, est-ce-que ça implique forcément que les côtés opposés sont parallèles ? Le triangle non. 5 ça fonctionne pas non plus.
1207		...
1208		Ils font des axiomes derrière.
1209		Ils font des axiomes ouais. Ils ont écrit propriété 1, propriété 2 ...
1210		Et après [?] d'après le propriété heu ...
1211		[?]

1212		C'est heu, ça forme des parallèles.
1213		Qu'est-ce qui forme des parallèles ?
1214		Les euh, les segments, [?]
1215		Ah oui ?
1216		Mais après, je sais pas si ça aide beaucoup, mais euh ça fait des parallèles hein.
1217		Tout l'temps, tout l'temps ?
1218		Des droites ... Ben, si on c... Quand t'as des euh des intersections, vu qu'c'est des symétries [y'a un moment ?] tu r'tombes toujours sur [?]. Euh, même quand on en a plusieurs, que c'est comme ça ...
1219		... Dodécagone.
1220		12. C'est 12 le dodéca.
1221		Bon, heu, faudrait qu'j'mette que ...
1222		[?] j'le savais aussi ...
1223		Bon, j'avais dit un truc sur le 12. Sur le 12 côtés.
1224		Hum ...
1225		Mais j'sais plus quoi.
1226		Oh, est-ce-que j'mets qu'on a euh, au moins trois polygones sur un sommet ?
1227		Oui.
1228		Ben ouais. C'est pas faux. C'est même vrai.
1229		[?] Parce que si on avait 2 [?]
1230		Ben si y'en a 2 comme ça, ...
1231		Nan.
1232		Ben, si en un point t'en as 2, faut augmenter ça, et l'problème c'est que ça s'étend pas à l'infini parce que dès qu'tu vas en mettre d'autres t'en auras plus.
1233		Ah ouais.
1234		T'écris vraiment [?] là.
1235		Mais non c'est du DM. J'écris trop bien, arrêtez.
1236		Woaho, j'ai trop réfléchi là.
1237		Bon, qu'est-ce-qu'on écrit d'autre on va dire ?
1238		Ben on avait des, on avait quelque chose qui était, ben ... euh ... ça.
1239		Ouais ça c'est bien ça.
1240		Ben c'est pas suffisant mais c'est d'jà ça. Ben c'est vrai.
1241		De ? Ah ben oui, oui.
1242		Oh, c'est vrai on n'est pas encore sûrs.
1243		Non, on a dit euh ... On n'a pas dit qu'c'était vrai, on a dit qu'c'était une hypothèse donc faut en parler.
1244		Déjà, euh ...
1245		Oui, mettez toutes vos pistes dans l'affiche. Vous expliquerez euh pourquoi est-ce-que euh ...
1246		Est-ce-qu'on met qu'on peut avoir que 3, 4 ou 6 côtés pour les polygones ?
1247		Alors là va falloir que t'expliques pourquoi tu penses que c'est comme ça.
1248		Nan mais attends, j'y avais réfléchis, mais j'm'en rappelle plus.
1249		...
1250		Mais c'est que pour une forme ça j'crois.
1251		[?]

1252		...
1253		[?] Si on considère qu'il y a qu'un seul polygone ...
1254		On a des hypothèses.
1255		Au pire euh, ... J'sais pas j'ai entendu dire ça.
1256		Hein ?
1257		J'aime pas quand Benoît et Timothée ils disent ça.
1258		Ils disent quoi ? Qu'c'est dur ?
1259		"T'as des hypothèses qui tiennent la route ?" "Ouais non pas tellement non".
1260		Bon, beh, tout l'monde est dans la merde.
1261		[?] la f'nêtre. Merde, on est au premier étage.
1262		Bon, si on peut avoir une pause Vincent, va falloir t'dépêcher d'écrire.
1263		Allez Vincent.
1264		Oui mais j'p... Oui mais j'écris quoi ?
1265		Écris heu, l'hypothèse qu'on a faite là. 'fin, que vous avez fait.
1266		Donc du coup, pour une seule forme, on est obligés d'avoir 3, 4 ou 6 côtés. Parce que 3, 4 et 6 côtés ça fait des angles de 60, 90 et 120. Et donc euh, ça, ça fait pas d'trou et pas d'superposition.
1267		Oui oui, nan mais, ça fonctionne. Nan mais c'est des exemples. Enfin c'est, ...
1268		[?]
1269		Ahaha.
1270		Hé hein, c'est aussi parce que c'est des multiples de 360.
1271		Et ça faut l'mettre d'ailleurs.
1272		Ouais.
1273		Alors, j'mets quoi ?
1274		Ben que, un point d'contact, la somme des angles des polygones du point de contact, euh, doivent euh, de 360 degrés.
1275		Ouais, mais ça on l'a dit.
1276		C'est la première phrase.
1277		Nan, vous avez dit qu'y'a au moins 3 polygones. Ah, en rouge ! Ok, j'avais pas vu.
1278		C'est moi qui l'ai écrite en plus.
1279		Ouais c'est pour ça, ça m'a pas marqué.
1280		...
1281		Vous avez pu faire un [?]
1282		Ouais.
1283		[?] Dodécagone ?
1284		Franchement ben c'est pile la bonne taille hein !
1285		Sinon y'a ça hein !
1286		Trop p'tit.
1287		En t'avais euh, au tout début t'avais donné heu une idée à Paul, mais je sais pas si ça servait.
1288		Je sais pas, ils veulent faire un cercle, ils font un cercle.
1289		Les polygones [bruit]
1290		[?]

1291		Non mais les polygones traçables à la règle et au compas. Les règles de euh, les règles de traçage pour la règle et le compas c'est euh, le cercle, le cercle d'origine, en ... En donnant des p'tites encoches à chaque fois, on arrive à un hexagone. Un hexagone, ça se, ça fonctionne. Après on [?] ... ça se trace pas.
1292		Pourquoi on est les seuls à avoir que deux phrases ?
1293		Ahaha.
1294		[?] hypothèses, ouais on est partis n'importe où.
1295		Qu'est-ce-qu'il y a ? Vous êtes partis dans tous les sens et vous savez pas quoi écrire ?
1296		Ouais, voilà.
1297		Ben reprenez c'que vous avez écrit là.
1298		Oui mais ...
1299		On est restés sur la même chose et on a essayé de voir si ça fonctionnait. Plutôt.
1300		Ben mettez les pistes que vous avez envisagées.
1301		On n'a pas grand chose de plus.
1302		C'est quoi ce 360 moins x fois angle égal 90, 60, 120 ?
1303		C'est une hypothèse. C'est pas vérifié du tout.
1304		On n'a même pas d'exemple.
1305		Si mais si, ça marche euh, pour euh, ... Ça marche pour le, l'hexa et le triangle, ça marche pour l'octo et l'carré ...
1306		Ouais, ça marche pour tous ceux qu'il y avait de dessinés.
1307		En fait quand vous avez fait ça, ça r'présente quoi x fois angle ?
1308		x c'est le nombre de points d'contact. C'est bien ça ?
1309		Hein ?
1310		x ...
1311		x c'est le nombre de polygones d'un certain type ?
1312		D'un certain type, ouais.
1313		Et vous essayez de voir avec quoi on peut euh, ... 'fin qui donnera un trou qu'on puisse mettre quelque chose d'autre dedans ?
1314		Voilà.
1315		Ben voilà, ben expliquez ça.
1316		Celle-là [?]
1317		Ouais celle-là [?]
1318		Ouais mais c'est, 'fin j'sais pas.
1319		Octo-carré, hexa-triangle. C'est divisé par 2. Cherche !
1320		Bon, j'vous laisse 5 minutes pour finir vos affiches.
1321		Oh, put...
1322		[Faut prouver que ?] ça fait 12 à chaque fois, mais après, heu ...
1323		Hein ?
1324		Non ça fait [8 ?] en plus.
1325		Non mais c'est divisé par 2.
1326		Ahaha.
1327		Et ramène la pas trop vers moi.
1328		J'vais la tourner. Ahaha.
1329		Bon euh, du coup euh ...
1330		Quatre minutes pour finir.

1331		Tiens.
1332		Mais j'comprends rien.
1333		Ahaha.
1334		Mets celle-là elle est plus [?].
1335		Ouais mais il va encore rien comprendre.
1336		...
1337		360 moins x alpha égal x prime alpha prime. Ou y prime, j'sais pas.
1338		Franchement euh, vous écrivez bien hein.
1339		Ben c'est [?] qui écrit quoi.
1340		T'as rétréci, ahaha.
1341		J'ai pas compris là ! [?] qu'il faut expliquer [?] phrase drôle [?].
1342		Mais j'écris pas droit hein. Voilà.
1343		[?]
1344		Il reste 5 minutes.
1345		[?]
1346		De toute façon on va pas en mettre plus nous.
1347		Mais si on va mettre plein de trucs.
1348		Ben, j't'écoute.
1349		Un p'tit dessin ça prend de la place.
1350		Ben le truc vrai j'sais pas moi.
1351		1 plus 1 égal 2.
1352		Attends fais un dessin, un d'ceux-là.Ils sont, ils sont classes.
1353		Oui, ça servira pour expliquer la formule qui euh, qui est là.
1354		Oui, oui ben bien sur !
1355		Nan mais t'en fais un tout simple.
1356		Pour expliquer la formule, même simple, mais euh ...
1357		Merde, mais ça c'est pour euh, qu'une seule forme, c'que j'suis en train d'écrire.
1358		Pas grave.
1359		À la fin tu mets une arcade euh, un truc, une décomposition, [un seul polygone ?].
1360		Un seul type de polygone.
1361		Un seul type de polygone.
1362		Euh, ouais, non mais là je fais n'imp'.
1363		J'sais pas j'arrive pas [à lire ?]
1364		Ouais, non mais j'crois que j'suis en train d'écrire ce que j'ai écrit en haut.
1365		Ahaha.
1366		Ah non !
1367		[?] la somme des angles est de 360. Point. Pour la somme des angles est de 360.
1368		...
1369		On n'avait pas r'pris les formules qu'on avait ... Qu'on a euh ...
1370		Pas encore.
1371		On les utilisait vite fait pour calculer un angle quoi, mais ...
1372		Mas après on pourrait remplacer le alpha et alpha prime.
1373		Pardon ?
1374		On pourrait remplacer alpha et alpha prime là. La formule c'est quoi déjà ?

1375		Ouf, faites pas tomber la caméra !
1376		[?] casser.
1377		Mais y'a ton sac.
1378		C'est mon sac ? Non, c'est pas l'mien.
1379		...
1380		C'est à qui ça ? On pourrait l'prendre ça.
1381		C'est à moi.
1382		Mais t'as cru qu'j'écrivais comme ça ?
1383		J'écris pas aussi bien qu'Vincent moi.
1384		Il m'semblait.
1385		[?] dessin aussi.
1386		Sachant qu'on va présenter à tour de rôle, faut quand même que j'lise un peu ce qu'on a marqué moi.
1387		Ahaha, ah oui c'est vrai ça.
1388		Moi j'présente la phrase en rouge. Ça vous dit ?
1389		...
1390		Bon, on démarre dans 5 minutes. Donc si vous voulez une pause c'est maintenant, sinon vous aurez pas de pause.
1391		...
1392		Faut qu'tu précises ce que c'est x.
1393		Hein ?
1394		Faut qu'tu précises ce que c'est x.
1395		Ouais oh ...
1396		Ouais, merci !
1397		Ah c'est l'tien.
1398		Je sais.
1399		Faut y ? Faut l'mettre ?
1400		Non, on expliquera. On expliquera qu'après ça peut s'décomposer sous forme de p'tits triangles. Ou de p'tits euh carrés, ou de p'tits ...
1401		C'est fois y ? C'est quoi c'est un hexa ?
1402		Euh ... Ouais, c'est un hexa. Non, là faudrait euh, deux carrés plus euh un ... Nan !
1403		J'le mets le fois y ?
1404		On a l'impression d'faire des formules topologiques, comme en chimie.
1405		Quoi ?
1406		Avec [?]. Cyclohexane, heu ...
1407		Bon, j'le refais un Mickey ou j'le fais pas ?
1408		Ouais !
1409		Ben Mickey heu ...
1410		Oui ben hein !
1411		Ils ont tous ... On a fini !
1412		Fais un dessin pour expliquer. Pour expliquer ça. Un exemple, euh ... Des exemples qui étaient donnés dans euh ...
1413		C'est c'que j'vais faire.
1414		Celui-là ?
1415		...
1416		[?] là 120 c'est 2 fois 60.

1417		C'est pas grave.
1418		Oh Vincent, il me faudrait les clefs de casier. Faut qu'j'aille chercher mon sac.
1419		J'sais où elles sont.
1420		Ça ? Non mais ... , mais faut pas nous regarder, parce que ...
1421		Pourquoi vous avez écrit quoi ? Vous savez que [?]
1422		Hein ?
1423		[?] Nous aussi hein. Mais on n'a pas fait d'la même façon.
1424		Vous l'avez c'truc ? On n'a pas vérifié hein, mais ...
1425		Ah. Par contre j'crois que 90, 60 et 120 on n'a pas. Il semblerait hein.
1426		Ben, c'est [?] p'tits dessins.
1427		J'ai trouvé un truc mais c'est chelou. J'sais même plus c'que j'fais. J'suis pas sur du tout. Il est où Timothée ? Hé, il est parti ?
1428		Ouais.
1429		[?]
1430		Ouais mais fallait qu'il aille chercher sa [?].
1431		Ça va être joyeux.
1432		Mec j'ai remplac...
1433		T'es prêt ? Non attends, j'crois qu'je sais.
1434		Et, t'sais dans la formule à Timothée j'ai remplacé les alpha par la formule qu'on a. Et euh, du coup ça m'donne un truc chelou. 2 moins x plus 2 x sur n, fois x prime moins 2 x. x sur y.
1435		Non mais j'suis même pas sur qu'elle soit juste euh ...
1436		Pour ceux qui sont encore sur leur affiche vous êtes conscients qu'vous aurez pas d'pause hein ?
1437		Ça ? Ah ça va vraiment être joyeux.
1438		Mais si c'est sur l'affiche ne l'refais pas.
1439		Tu pars déjà... Ouais mais faut remplir un peu l'affiche, donc euh ...
1440		Ah.
1441		Ouais on n'a pas d'autre ...
1442		On fait comme Mathieu, euh ... On va faire un gros dessin.
1443		Timothée ?
1444		Oui.
1445		Si on part du principe que euh, cette formule-là elle est juste ...
1446		Oui ?
1447		Ça veut dire qu'on peut écrire ça, là.
1448		Oui.
1449		Allez, 30 secondes pour écrire la formule et on y va !
1450		Et après j'ai developpé ... Mais j'ai oublié [?]. J'ai developpé, j'ai mis 180 en facteur, des deux côtés du coup j'y ai enlevé, et ça m'donne ça à la fin.
1451		[x sur 2 b sur n ?]
1452		C'est bizarre hein ? Ça sert à rien en fait.
1453		Ahaha.
1454		...
1455		Voilà. Ah il nous manque quelque chose là. Personne aurait un dessin à faire ?
1456		T'as pas mis l'truc à Timothée. Ah si tu l'as mis.

1457		Ça va faire quoi comme [?] Madame ?
1458		Ben on va voir comment vous avez avancé.
1459		On était sensés avancer ?
1460		Oui, ahaha. Vous avez l'impression d'avoir fait du sur-place ?
1461		Un p'tit peu oui.
1462		Après c'est pas impossible que euh, une fois que tout le monde aura présenté vous vous dites ah, c'était ça !
1463		Non j'crois qu'c'est la seule chose qu'on peut espérer maintenant.
1464		C'est bon vous avez fini ? Va bien falloir pourtant. Mais c'est pas grave, le but c'est pas d'remplir toute l'affiche.
1465		Fais un mouton, j't'ai dit. Un mouton en gros. Ahaha.
1466		Nan mais sérieux, heu, pour ... Là on a fait pour deux formes simples. Mais est-ce-que pour trois formes ça serait pas euh, ...
1467		Ben c'est l'même principe.
1468		Ouais mais on en, on en rajouterais un quoi.
1469		Ici t'as la même chose. C'est juste que derrière t'auras un multiple ... T'auras, t'auras autre chose quoi. C'est-à-dire que tu fais ta ... Tu fais d'abord une décomposition, et ensuite avec le résultat que tu vas avoir tu feras deux décompositions au lieu d'une seule.
1470		...
1471		Bon, trouvé ça mais ça aide pas hein.
1472		Ouais. Ben trois inconnues quoi.
1473		Ouais, 4 inconnues sur une équation c'est pas mal.
1474		Ouais mais tu penses pas que ... , Timothée ? Là 360 na na na na fois x, si on fait encore moins na na na na, le même truc, fois un y par exemple. 'fin [?]. Ça peut nous faire pour 3 formes ça, non ?
1475		[?]
1477		Ah ben, pas grave.
1476		Allez, c'est l'heure.
1478		Tu sais, c'est pas grave. Ok.

G.7 Transcription d'échanges lors de la synthèse faite par P

Expérimentation en TS2 : Transcription des sons enregistrés par la caméra groupe 2.
Codage : [?] les courts passages inaudibles.

Repère	Locuteur Temps	Texte des échanges
0	00 :00 :00	
1	P	Alors on a encore 5 minutes pour voir un peu tout ça ensemble
2	P	Alors si on garde, si on garde la notation que vous avez utilisée (24,8,3), (15,5,3), (12,8,4), (8,8,4), euh, y en a un je crois qui fonctionne pas en fait, vous avez mal du calculer
3	Un élève	(15,5,3) non ?
4	P	Il me semble oui que le (15,5,3) y doit pas être bon
5	P	Pour celui-ci donc vous avez trouvé triangle carré hexagone, les deux dodécagones ce serait quoi avec leur notation ? Comment est-ce qu'ils l'ont écrit les deux dodécagones plus un polygone ?
6	Un élève	(12,12,3)
7	P	Donc vous avez en plus le (12,12,3)
8	Une élève	ensuite (5,5,10)
9	P	Ok, (5,5,10) euh après eux ils avaient mis le plus grand d'abord, je vais plutôt mettre (10,5,5) même si vous l'aviez pas écrit comme ça. (8,8,4) donc y en a qui se retrouve plusieurs fois et vous aviez celui-ci là
10		ouais
11		Donc si on remet
12		(12,6,4)
13	P	(12,6,4) donc ça c'est ceux que vous aviez listés. Celui-ci, (8,8,4), ... vous l'aviez déjà. Est-ce que vous en aviez trouvé un autre, vous ? Si finalement votre hexagone plus triangles ce serait un quoi ?
14	un élève	(6,3,3)
15	P	Y a deux hexagones et deux triangles. Donc l'hexagone c'est 6, donc (6,6,3,3) deux hexagones et deux triangles. Et puis sur la dernière affiche, qu'est-ce qu'on avait, l'histoire des carrés là avec des triangles, celui que vous aviez dessiné là je crois qu'on l'a pas vu encore
16	Un élève	c'est le (4,4,3,3,3)
17	P	4,4,et 3,3, 3 ?
18		ouais
19	P	Donc ça nous en fait quand même une liste. Est-ce que ? En fait comment vous avez établi cette liste ? Vous avez vérifié avec votre calculatrice que ça faisait bien 360°, en utilisant le tableau. Qu'est-ce qui nous reste à vérifier ? Pour être surs que ça marche bien ?
20		L'équation
21	P	Alors l'équation on peut supposer que vous l'avez vérifiée comme il faut, chacun, donc la somme de tous les angles fait bien 360 pour ceux-ci. Qu'est-ce qui reste à vérifier ? Thimotée ?
22	Timothée	...

23	Un élève du groupe 3	la longueur des côtés
24	P	Pour être sur que ce soit un pavage archimédien, qu'est-ce qui reste à vérifier ?
25	Le même élève du groupe 3	Faut pas que ça se superpose
26	Timothée	Que ça puisse se continuer
27	P	Que ça puisse se continuer à l'infini, parce que rien ne dit que puisque ça marche bien autour d'un sommet quand on veut l'étendre ça fonctionne bien donc d'ailleurs, vous nous en avez pas parlé, mais vous aviez fait un dessin qui posait un problème à ce niveau là ... et puis y reste quand même une grosse question par rapport à la question initiale c'est ?
28		Est-ce qu'on les a tous ?
29		Voilà, tous, le problème est le problème du tous. Alors après sur vos équations, euh vous avez tous, les deux groupes vous avez quasiment tous la même équation sauf que dans ce groupe là, vous n'avez mis que des mesures entières
30		Parce qu'on a oublié
31	P	Alors que dans ce groupe là y a des 900 sur 7 qui apparaissent
32	Un élève du groupe ...	Parce que nous on a considéré que c'étaient des diviseurs de 360 en fait qui composaient, enfin les polygones qui pouvaient éventuellement faire le pavage c'étaient des euh des polygones euh dont la forme des côtés euh dont le nombre de côtés était diviseur de 360
33	Un élève du groupe ...	alors que eux ils ont émis l'hypothèse que c'était euh la valeur de ces angles qui était un diviseur de 360
34	P	Donc pour l'instant vous êtes restés les deux à des stades d'hypothèse
35		oui
36		euh oui
37	P	Et puis il va falloir trouver un moyen de trouver la liste de toutes les réponses possibles à cette équation
38		Internet
39	P	Internet ça pourrait être une solution qui vous donnera la réponse vraisemblablement si vous savez taper le bon critère de recherche mais vous pouvez aussi essayer de les déterminer par une autre façon mais il faut vous organiser pour les déterminer. Donc y a quelque chose que ici qui est intéressant et qui est pas sorti pour les autres c'était l'histoire que vous avez au plus 6
40	Un élève	...
41		ouais donc du coup ça veut dire que vous avez mis des trois petits points sur vos équations mais finalement elles sont peut-être pas si compliquées que ça vos équations à résoudre
42	un élève	...
43	un élève du groupe 3	on a mis des trois petits points parce qu'on a pas eu le temps de terminer
44	P	oui et puis parce que vos valeurs peuvent être nulles aussi

45	un élève du groupe 3	nos valeurs peuvent être égales à 0 quand y en a pas
46	P	Donc ce qui vous manque en fait pour arriver à terminer c'est arriver à borner les choses c'est-à-dire
47	un élève du groupe ...	mettre un intervalle
48	P	voilà à essayer de mettre des intervalles de façon à pas chercher une infinité de choses, ok
49	P	C'est pas trop frustrant de ne pas être arriver euh jusqu'au bout
50		Si
51		Si un peu ? Ceux qui sont frustrés vous pouvez très bien me ramener pour jeudi prochain votre réponse ...
52		
53		Synthèse le 24 avril 2014 à partir du document papier

G.8 Apparition des objets lors de la phase 4

Objets		Groupe A	Groupe B	Groupe C	Groupe D	Groupe E
Référence concrète		oui (142, 261)	oui (74)	oui		oui
Plan		oui (123, 149, 264)	oui (106)	oui		oui (avec P)
Polygones non réguliers		oui (150)		oui		oui
Congruence des longueurs		oui (152, 233)				oui
$\sum \alpha_i = 360$		oui (152)	oui (98)		oui (57)	
Pavages réguliers	Triangles	oui (113)	oui (70)	oui	oui (59)	oui
	Carrés	oui (113)	oui (70)	oui	oui (59)	oui
	Pentagones	Mal aimé (270)	oui (72)		oui (97)	évoqué
	Hexagones	oui (325)	oui (188)		oui (59)	évoqué
	Autres	16 (270)	7, 9 (203), 7 mal aimé (237)	7	10 (139)	
	Mesures de α_n		oui (115)		oui (78)	
	Encadrement de α_n		oui (218)			
	Utilisation de la syntaxe					
	Preuve		idée (90)			
Assemblages non réguliers		oui (175, 191)		oui		oui (tôt)
	Triangles-carrés	oui (202)				oui
	Triangles-hexagones	oui (253)				
	Carrés-octogones	oui (177)		oui		
	Recherche de lois	oui (270, 332)				
Infinité de pavages		oui (193)				
Aspect global		oui (151)				
Exhaustivité						

Entre parenthèses, les repères de la retranscription.

G.9 Questionnaire : Retour de E15

Timothée ..., élève de ...

Bonjour. Par ce mail, je vous fait part des réponses apportées à votre questionnaire. Je suis désolé de ne pas avoir put répondre plus tôt, mais je n'ai pas contrôlé mes mails avant ce week-end.

1. L'énoncé du problème proposé était-il clair ? Avez-vous rapidement compris ce qu'il fallait chercher ?

Oui

2. Pendant la recherche individuelle, quelles sont les premières idées que vous avez eues ?

La somme des angles en un point était de 360 degrés le pavage était composé d'un seul type de polygone régulier.

3. Lister 3 ou quatre idées principales que vous avez travaillées pendant la recherche collective.

- La somme des angles en un point était de 360 degrés.
- En un point, il y a au moins 3 polygones.
- Si il y à un seul type de polygone régulier, c'est forcément de carrés, triangles ou des hexagones.

4. Lister des questions qui vous ont bloqués pendant cette recherche collective

- Comment lister toutes les possibilités possibles ?
- Comment définir les polygones en fonction de leurs angles ?

5. Quelle est la ou les bonnes idées qui vous ont le plus fait avancer ?

Les angles des polygones doivent-être des diviseurs de 360, s'il y à 2 types de polygones, il y a forcément des triangles carrés et hexagones pour compléter.

6. En quoi le travail en DM vous a aidé ?

Le DM à permit d'utilisé la formule donnant l'angle des polygones réguliers en fonction de leurs nombre de coté.

7. En quoi les planches de Durer qui ont été distribuées pendant la recherche vous ont aidés ?

Elles ont permis d'utilisé les exemples pour vérifier les idées.

8. Que saviez-vous sur les pavages archimédiens à l'issue du temps de recherche en groupe ?

- Il y a un rapport intrinsèque entre les valeur d'angles des polygones et la possibilité de faire du pavage archimédien avec eux
- Le pavage à un type de polygone est faciles à déterminer
- Il n'y a au moins 3 polygones et au plus 6.

9. Que savez-vous maintenant sur les pavages archimédiens ?

- Il n'y a qu'un nombre déterminé de solution pour obtenir un pavage archimédien.
- Il y a un rapport intrinsèque entre les valeur d'angles des polygones et la possibilité de faire du pavage archimédien avec eux.
- Le pavage à un type de polygone est faciles à déterminer.
- Il n'y a au moins 3 polygones et au plus 6.

10. Quelles questions vous posez-vous encore sur les pavages archimédiens ?
Est-ce possible d'établir un pavage archimédien dans d'autre formes de plan non euclidien (hyperbolique, sphérique)

11. La classe a produit de nombreux résultats, que pensez-vous qu'il aurait fallu pour aller plus loin dans le temps imparti ?
Plus de concentration et de travail individuel.

12. Ce genre de problème vous plait-il ?
Oui

13. Donner des éléments que vous trouvez positifs.
C'est un genre de problème peut abordés en temps normal, cela apport des connaissances

14. Donner des éléments que vous trouvez négatifs.