



**HAL**  
open science

# Détection et filtrage rang faible pour le traitement d'antenne utilisant la théorie des matrices aléatoires en grandes dimensions

Alice Combernoux

► **To cite this version:**

Alice Combernoux. Détection et filtrage rang faible pour le traitement d'antenne utilisant la théorie des matrices aléatoires en grandes dimensions. Autre. Université Paris Saclay (COmUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLC016 . tel-01314768

**HAL Id: tel-01314768**

**<https://theses.hal.science/tel-01314768>**

Submitted on 12 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLC016

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY,**  
**préparée à CentraleSupélec.**

ÉCOLE DOCTORALE N° 580

STIC - Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication.

Spécialité Traitement du Signal et des Images

Présentée par

**Alice COMBERNOUX**

**Détection et filtrage rang faible pour le traitement d'antenne utilisant la théorie des matrices aléatoires en grandes dimensions**

**Thèse soutenue à Gif-sur-Yvette, le 29/01/2016.**

**Composition du jury :**

<i>Présidente du jury :</i>	Sylvie MARCOS	Directrice de recherche (L2S, CNRS)
<i>Rapporteurs :</i>	Walid HACHEM	Directeur de Recherche (CNRS, Comelec, Telecom ParisTech)
	François VINCENT	Professeur (ISAE-SUPAERO)
<i>Examineur :</i>	François LE CHEVALIER	Professeur (Delft University of Technology)
		Directeur scientifique (Thales Air Systems)
<i>Directeur de thèse :</i>	Marc LESTURGIE	Directeur de laboratoire (SONDRA / ONERA)
<i>Encadrants :</i>	Frédéric PASCAL	Professeur (L2S, CentraleSupélec)
	Guillaume GINOLHAC	Professeur (LISTIC, Université de Savoie)
<i>Membres invités :</i>	Chin Yuan CHONG	Dr-Ingénieur de recherche (DSO National Laboratories)
	Romain COUILLET	Enseignant chercheur (CentraleSupélec)

Laboratoire SONDRA  
CentraleSupélec



## Remerciements

Cette thèse a été effectuée au laboratoire SONDRRA de Supélec en collaboration avec l'ONERA, le laboratoire SATIE de l'ENS Cachan, le LISTIC de l'université de Savoie et financée par l'ONERA. J'aimerais donc remercier chaleureusement tous les acteurs de ces organismes qui ont permis à cette thèse de voir le jour.

J'aimerais tout d'abord remercier mes encadrants : Marc Lesturgie, Frédéric Pascal et Guillaume Ginolhac. Merci à mon directeur de thèse Marc Lesturgie pour m'avoir accueillie au sein du laboratoire et m'avoir guidée et soutenue tout au long de ces 3 années de thèse. J'aimerais ensuite remercier Frédéric Pascal pour son support et son aide durant ma thèse. Ton moral inébranlable ne nous aura pas quitté et aura fait avancer ma thèse. Enfin merci à Guillaume Ginolhac pour m'avoir accompagnée, soutenue, aidée et donnée le goût pour la recherche (souvenirs, souvenirs... de mon stage SATIE et de mon bureau dans la salle de pause ;-)). Merci aussi pour la découverte du Anecy culinaire. Ce fut un grand plaisir que de travailler avec vous, je m'en souviendrai toujours.

J'aimerais ensuite remercier les membres de mon jury. Merci à Walid Hachem et à François Vincent d'avoir rapporté mon manuscrit. Merci pour leur grand intérêt pour mon travail et les nombreuses discussions qui m'ont beaucoup apporté. Merci aussi à Sylvie Marcos et François Le Chevalier d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse. Enfin merci à Chin Yuan Chong et à Romain Couillet. Merci à toi Romain de m'avoir supportée pendant de longs après-midi de questions mais qui m'ont tellement appris.

J'aimerais remercier tous mes collègues de SONDRRA, Supélec et du SATIE pour leur sympathie et leur bonne humeur pour une ambiance garantie. Mes chers co-bureaux Joana Frontera-Pons, Arnaud Breloy, Maxime Boizard, Virginie Ollier, Pierre Formont, Uyhour Tan, Ahmad Bitar, Orian Couderc et Eugénie Terreaux, merci à vous pour tous les bons moments pendant ces trois années. Merci à Frédéric Brigui pour ton humour, ton aide et de t'être joint pour explorer de nouveaux horizons. Surtout, reste toi-même. Merci à Virginie Bouvier, Anne-Hélène Picot et Elisabeth Bertheau pour leur gentillesse, leur patience et leur grande aide dans les formalités administratives et plus encore. Je salue aussi toutes les autres personnes avec qui j'ai eu le plaisir de partager de bons moments en conférence par exemple : Jean-Philippe Ovarlez, Sylvain Azarian, Régis Guinvarc'h, Israel Hinoestroza, Laetitia Thirion-Lefevre, Takis Panagiotis, Mohammed Serhir, Jean-Pierre Barbot, Eric Vourch, Pascal Larzabal, Anne Ferréol, Gayathri Masi, Santiago Velasco, Nabil El Korso, Philippe Forster, Rémi Boyer, Eric Chaumette et tant d'autres. Merci à vous, affectueusement.

Je remercie également tous mes amis et ma famille qui m'ont rendue la vie tellement plus simple et agréable. Merci à vous pour votre soutien et votre écoute.

Pour finir, merci à toi Cyrile, mon ange gardien et compagnon de ma vie. Je ne pense pas que je serais arrivée jusque là sans ton soutien sans faille. Je te dédie ce manuscrit.

« Merci à toutes et à tous ! »  
Alice Combernoux



*« Si vous ne lisez que des livres que tout le monde lit, vous ne pouvez penser que ce que tout le monde pense. »*

*« Pour chaque chose, il faut un cadre. Pareil pour la pensée. On ne doit pas craindre le cadre exagérément, mais il ne faut pas non plus craindre de le casser. C'est ça le plus important pour trouver la liberté. Respecter et détester le cadre. »*

*Haruki Murakami*



# Sommaire

<b>Table des figures</b>	<b>xiii</b>
<b>Abréviations</b>	<b>xvii</b>
<b>Notations</b>	<b>xix</b>

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
---------------------	----------

<b>Chapitre 1</b>	
<b>Etat de l'art</b>	<b>5</b>

1.1	Contexte . . . . .	5
1.2	Modèle et motivations . . . . .	6
1.2.1	Modèle . . . . .	6
1.2.1.1	Modèle théorique . . . . .	6
1.2.1.2	Estimation de la matrice de covariance et des projecteurs . . . . .	7
1.2.2	Motivations . . . . .	8
1.3	Filtrage en milieu gaussien . . . . .	9
1.3.1	Définition du problème . . . . .	9
1.3.2	Rapport signal à bruit en entrée . . . . .	9
1.3.3	Définition des mesures de performance d'un filtre . . . . .	10
1.3.4	Filtres non adaptatifs . . . . .	12
1.3.5	Filtres adaptatifs . . . . .	13
1.3.6	Interprétation du SINR loss . . . . .	14
1.4	Détection en milieu gaussien . . . . .	15
1.4.1	Définition du problème . . . . .	15
1.4.1.1	Détection non adaptative . . . . .	15
1.4.1.2	Détection adaptative en 1 étape : le Generalized Likelihood Ratio Test	15
1.4.1.3	Détection adaptative en 2 étapes : le Generalized Likelihood Ratio Test en 2 étapes . . . . .	16
1.4.2	Définition des mesures de performance d'un détecteur . . . . .	17

1.4.3	Détecteurs non adaptatifs . . . . .	19
1.4.4	Détecteurs adaptatifs . . . . .	21
1.5	Contexte applicatif . . . . .	22
1.5.1	Application brouillage . . . . .	22
1.5.2	Traitement STAP . . . . .	22
1.5.3	Traitement MIMO-STAP . . . . .	23
1.6	Motivations RMT . . . . .	24
1.7	Fonctionnement et généralités sur la théorie des matrices aléatoires en grandes dimensions	24
1.7.1	Étude du comportement des valeurs propres . . . . .	25
1.7.1.1	Généralités, la loi de Marčenko-Pastur . . . . .	25
1.7.2	Modèles de SCM . . . . .	27
1.7.2.1	Modèle « G-MUSIC » . . . . .	28
1.7.2.2	Modèle <i>spiked</i> . . . . .	29
1.7.3	Convergence des formes quadratiques . . . . .	31
1.7.3.1	FQ simples <i>Full Rank</i> . . . . .	32
1.7.3.2	FQ simples rang faible . . . . .	33

## Chapitre 2

### Performances asymptotiques des filtres adaptatifs dans le régime en grandes dimensions 39

2.1	Biais asymptotique des filtres adaptatifs FR . . . . .	39
2.2	Biais asymptotique des filtres adaptatifs LR . . . . .	40
2.3	Performances des filtres adaptatifs LR : SINR loss . . . . .	42
2.3.1	Convergence de la FQ <i>structurée</i> LR . . . . .	42
2.3.2	Convergence du SINR loss . . . . .	43
2.4	Validation des résultats . . . . .	44
2.4.1	Présentation de l'application et paramètres de simulation . . . . .	44
2.4.2	Convergences en régime en grandes dimensions . . . . .	45
2.4.3	Performances du filtre LR adaptatif . . . . .	48
2.5	Synthèse . . . . .	49

## Chapitre 3

### Performances asymptotiques des détecteurs adaptatifs dans le régime en grandes dimensions 51

3.1	Biais asymptotique des filtres et détecteurs adaptatifs FR . . . . .	51
3.2	Biais asymptotique des filtres et détecteurs adaptatifs LR . . . . .	52
3.3	Loi asymptotique du détecteur LR-ANMF . . . . .	53

3.3.1	Sans approximation sous $\mathcal{H}_0$ . . . . .	54
3.3.2	Avec approximation sous $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ . . . . .	55
3.3.2.1	Transformation de l'expression de $\bar{\Lambda}(\Theta)$ en un rapport de deux FQs à variables aléatoires réelles . . . . .	56
3.3.2.2	Approximation par ajustement polynômial . . . . .	56
3.4	Performances du détecteur LR-ANMF : $P_{fa}$ et $P_d$ . . . . .	59
3.5	Validation des résultats . . . . .	62
3.5.1	Présentation de l'application et paramètres de simulation . . . . .	62
3.5.2	Convergences en régime en grandes dimensions . . . . .	63
3.5.3	Performances du détecteur LR-ANMF . . . . .	64
3.6	Synthèse . . . . .	69

## Chapitre 4

### Développement et performances de nouveaux filtres et détecteurs adaptatifs LR consistants dans le régime en grandes dimensions 71

4.1	Construction de nouveaux filtres et détecteurs LR adaptatifs consistants . . . . .	71
4.1.1	Détecteurs . . . . .	72
4.1.2	Filtres . . . . .	73
4.2	Performances des nouveaux filtres et détecteurs adaptatifs LR . . . . .	73
4.2.1	Détection : estimation des relations $P_{fa}$ -seuil et $P_d$ -seuil . . . . .	73
4.2.2	Filtrage : SINR loss . . . . .	74
4.2.2.1	Convergence de la FQ <i>structurée rectifiée</i> LR . . . . .	74
4.2.2.2	Convergence du SINR loss . . . . .	75
4.3	Validation des résultats et comportement des nouveaux filtres et détecteurs . . . . .	76
4.3.1	Paramètres de simulation . . . . .	76
4.3.2	Convergences dans le régime en grandes dimensions . . . . .	76
4.3.3	Performances des nouveaux détecteurs LR-AS et LR-AG . . . . .	79
4.3.4	Performances des nouveaux filtres . . . . .	81
4.4	Synthèse . . . . .	84

## Chapitre 5

### Mise en pratique des démarches et résultats sur les applications STAP et MIMO-STAP *sparse* 87

5.1	Contexte applicatif et paramètres de simulation . . . . .	87
5.1.1	Traitement STAP . . . . .	88
5.1.1.1	Présentation du radar . . . . .	88
5.1.1.2	Modèle des signaux . . . . .	89

5.1.2	Traitement MIMO-STAP <i>sparse</i> . . . . .	92
5.1.2.1	Présentation du radar . . . . .	92
5.1.2.2	Modèle des signaux . . . . .	93
5.1.3	Choix du nombre $M$ d'impulsions . . . . .	96
5.2	Simulations de traitement STAP . . . . .	97
5.2.1	Paramètres de simulation . . . . .	97
5.2.2	Performances du filtre LR adaptatif classique . . . . .	98
5.2.3	Performances des nouveaux filtres LR adaptatifs . . . . .	99
5.2.4	Performances des détecteurs adaptatifs LR . . . . .	100
5.3	Simulations de traitement MIMO-STAP <i>sparse</i> . . . . .	101
5.3.1	Paramètres de simulation . . . . .	101
5.3.2	Performances du filtre LR adaptatif classique . . . . .	102
5.3.3	Performances des nouveaux filtres LR adaptatifs . . . . .	103
5.3.4	Performances du détecteur LR-ANMF . . . . .	103
5.3.5	Performances des nouveaux détecteurs LR-AG et LR-AS . . . . .	105
5.4	Discussion sur les résultats . . . . .	105
5.4.1	Comparaisons des modèles « G-MUSIC » et <i>spiked</i> au modèle des données STAP et MIMO-STAP <i>sparse</i> . . . . .	105
5.4.2	Un problème de rang . . . . .	106
5.5	Synthèse . . . . .	107

<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>109</b>
------------------------------------	------------

1	Conclusions . . . . .	109
2	Perspectives . . . . .	111

<b>Annexe A</b>	
<b>Généralités</b>	<b>113</b>

A.1	Relations utiles . . . . .	113
A.2	<i>Continuous mapping theorem</i> . . . . .	114

<b>Annexe B</b>	
<b>Annexes du chapitre 2</b>	<b>115</b>

B.1	Démonstration de la proposition 2.1 : « Convergence de la FQ <i>structurée</i> LR » . . . . .	115
B.1.1	Développement de la FQ <i>structurée</i> . . . . .	115
B.1.2	Convergence de la FQ <i>structurée</i> de base . . . . .	116
B.1.3	Convergence de la FQ <i>structurée</i> . . . . .	116

---

**Annexe C****Annexes du chapitre 3****119**

- C.1 Démonstration du théorème 3.1 : « Quantité aléatoire équivalente à  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  » . . . . . 119
  - C.1.1 Manipulations de l'expression de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  . . . . . 120
  - C.1.2 Développement de chaque FQ . . . . . 120
  - C.1.3 Détermination des variables aléatoires équivalentes aux FQs . . . . . 122
  - C.1.4 Détermination de la variable aléatoire équivalente à  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  . . . . . 123
  - C.1.5 Relations d'indépendance et de décorrélation entre les différentes variables aléatoires . . . . . 123
- C.2 Démonstration de la proposition 3.2 : « Transformation de l'expression de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  en un rapport de deux FQs à variables aléatoires réelles » . . . . . 125

**Annexe D****Annexes du chapitre 4****127**

- D.1 Démonstration de la proposition 4.1 : « Convergence de la FQ *structurée rectifiée* LR, modèle *spiked* » . . . . . 127
  - D.1.1 Développement de la FQ *structurée rectifiée* . . . . . 127
  - D.1.2 Convergence des FQs simples classiques de la somme . . . . . 128
  - D.1.3 Convergence de  $\hat{\chi}_i$  vers  $\chi_i$  . . . . . 128
  - D.1.4 Convergence de la FQ simple de base non classique de la somme . . . . . 129
  - D.1.5 Convergence de FQ *structurée rectifiée* par le *continuous mapping theorem* . . . 130
- D.2 Démonstration de la consistance de  $\hat{\Pi}_{c,G}^\perp$  et  $\hat{\Pi}_{c,S}^\perp$  en régime classique . . . . . 130

**Bibliographie****133**



## Table des figures

1.1	Schéma de fonctionnement simplifié. . . . .	5
1.2	Schéma de fonctionnement simplifié d'un récepteur. . . . .	8
1.3	Probabilité de détection de différents détecteurs avec $m = 100$ en fonction de : (a) $SNR_{dB}$ , (b) $SNR_{dB}^{(t)}$ . . . . .	10
1.4	Lien entre l' <i>improvement factor</i> et le paramètre minimal détectable. . . . .	12
1.5	Schéma de fonctionnement, détection non adaptative. . . . .	15
1.6	Schéma de fonctionnement, détection adaptative. . . . .	17
1.7	Courbes COR d'un récepteur dans le cas d'un bruit gaussien centré. . . . .	18
1.8	Data cube STAP et arrangement des données . . . . .	23
1.9	Data cube MIMO-STAP et arrangement des données . . . . .	23
1.10	Histogramme des valeurs propres de SCM d'un bruit blanc, $m = 256$ . . . . .	25
1.11	Loi Marčenko-Pastur pour différentes valeurs de $c$ . . . . .	27
1.12	DDP asymptotique des valeurs propres de la SCM $\hat{\mathbf{R}}$ quand les valeurs propres de $\mathbf{R}$ sont 1, 2, 3, et 7 avec la même multiplicité. . . . .	29
1.13	Visualisation de $\psi(f)$ quand les valeurs propres de $\mathbf{R}$ sont 1, 2, 3, et 7 et de même multiplicité. . . . .	30
1.14	PDF empirique des valeurs propres de la SCM avec le modèle <i>spiked</i> quand les valeurs propres de $\mathbf{R}$ sont 1, 2, 3, et 7 avec pour multiplicité $m - 3, 1, 1$ et 1 respectivement. . . . .	32
1.15	Tracé des FQs <i>simples</i> rang faible où $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{a}(\theta)$ et $\mathbf{a}(\theta)$ est un vecteur directeur avec trois sources en $-10^\circ, 38^\circ$ et $40^\circ$ , $c = 1, 5$ et $SNR = 10\text{dB}$ . . . . .	36
1.16	Tracé des FQs $\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{\Gamma}}_c^\perp\mathbf{a}(\theta)$ (noir), $\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{\Gamma}}_{c,G}^\perp\mathbf{a}(\theta)$ (rouge) et $\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{\Gamma}}_{c,S}^\perp\mathbf{a}(\theta)$ (vert), où $\mathbf{a}(\theta)$ est un vecteur directeur avec trois sources en $-10^\circ, 38^\circ$ et $40^\circ$ . . . . .	37
2.1	Zoom de la DDP expérimentale de la SCM avec $c_m = 0.2$ sur $5 \times 10^4$ itérations. A cause du zoom, la valeur propre la plus élevée à 71 est en dehors de la figure. . . . .	46
2.2	<i>Condition de séparabilité</i> ( $\alpha_c \gamma_r - \sqrt{c}$ ) du modèle <i>spiked</i> pour la plus faible valeur propres non unitaire en fonction de $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})}$ en dB. . . . .	46
2.3	EQM en fonction de $\theta$ (en degré) entre le signal filtré et ses limites. . . . .	47
2.4	EQM sur $10^3$ itérations correspondant aux Eq.(2.19), (2.20) et (2.21) avec le jeu de paramètres du filtrage, $c = 3$ et $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2$ sont des vecteurs directeurs des brouilleurs (bruit LR) $c$ . . . . .	47
2.5	EQM correspondant aux Eq.(2.25), Eq.(2.30) et Eq.(2.31) quand $m, K \rightarrow \infty$ à rapport constant $c = 3$ avec $\theta = 20, 1^\circ$ et $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})} = 10\text{dB}$ . . . . .	48
2.6	Visualisation de $\rho_{LR}$ (ligne bleue avec étoiles), de $\hat{\rho}_{LR}$ (ligne bleue pointillée), de $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$ (ligne verte), de $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$ (ligne rouge) et de l'approximation $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}] \simeq 1 - \frac{r}{K}$ (ligne noire) sur $10^3$ réalisations avec $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})} = 10\text{dB}$ et $m = 100$ en fonction de $K$ avec $\theta_d = 20, 5^\circ$ . . . . .	49

2.7	Visualisation de $\rho_{LR}$ (ligne bleue avec étoiles), de $\hat{\rho}_{LR}$ (ligne bleue pointillée), de $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$ (ligne verte), de $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$ (ligne rouge) et de l'approximation $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}] \simeq 1 - \frac{r}{K}$ (ligne noire) sur $10^3$ réalisations avec $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 10\text{dB}$ et $m = 100$ en fonction de $\theta = \theta_d$ avec : (a) $K = 50$ , (b) $K = 2r = 6$ .	49
3.1	EQM sur $10^4$ itérations en fonction de $m$ avec $c = 5$ , $\theta_d = 25^\circ$ et $\theta = 20, 1^\circ$ .	63
3.2	EQM en fonction de $\theta$ (en degré) entre le détecteur LR-ANMF et ses limites.	64
3.3	CDF de la distribution approximée avec $d = 2$ avec le modèle <i>spiked</i> , ECDF de $\bar{\Lambda}_S(\theta)$ , de la quantité aléatoire $V$ et des détecteurs LR-ANMF et LR-NMF pour $m = 20$ , $K = r + 1$ et $\theta = 20, 1^\circ$ sous $\mathcal{H}_0$ .	65
3.4	CDF de la distribution approximée avec $d = 2$ avec les modèles <i>spiked</i> et « G-MUSIC », ECDF des détecteurs LR-ANMF et LR-NMF pour $m = 20$ , $K = r + 1$ et $K = 2r$ et $\theta = 20, 1^\circ$ sous $\mathcal{H}_0$ .	65
3.5	CDF de la distribution approximée avec $d = 2$ avec le modèle <i>spiked</i> , ECDF de $\bar{\Lambda}_S(\theta)$ et des détecteurs LR-ANMF et LR-NMF pour $m = 20$ , $\theta = \theta_d = 20, 1^\circ$ sous $\mathcal{H}_1$ et : (a) $K = r + 1$ , (b) $K = 2r$ .	66
3.6	Relations $P_{fa}$ -seuil expérimentales de $\bar{\Lambda}_S(\theta)$ , de $V$ et relation $P_{fa}$ -seuil théorique de sa distribution approximée $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x \mathcal{H}_0)$ (Eq.(3.55)) pour $d = 2$ , $K = 2r$ , $\theta = 20.1^\circ$ , $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 10\text{dB}$ avec $10^5$ itérations.	66
3.7	Relations $P_{fa}$ -seuil de $\bar{\Lambda}_S(\theta)$ et $\bar{\Lambda}_G(\theta)$ par leur distribution approximée $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x \mathcal{H}_0)$ (Eq.(3.55)) et des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF sur $10^5$ itérations pour $\theta = 20.1^\circ$ et : (a) $K = r + 1$ , (b) $K = 2r$ .	67
3.8	Relations $P_d$ -seuil expérimentales de $\bar{\Lambda}_S(\theta)$ , $\bar{\Lambda}_G(\theta)$ , des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF et relations $P_d$ -seuil théoriques de $\bar{\Lambda}_S(\theta)$ et $\bar{\Lambda}_G(\theta)$ par leur distribution approximée $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x \mathcal{H}_1)$ (Eq.(3.56)) pour $d = 2$ , $\theta = \theta_d = 20.1^\circ$ , $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 10\text{dB}$ avec $10^5$ itérations et : (a) $K = r + 1$ , (b) $K = 2r$ .	67
3.9	Relations $P_d$ -SNR de $\bar{\Lambda}_S(\theta)$ par sa distribution approximée $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x \mathcal{H}_1)$ (Eq.(3.56)) pour $d = 2$ et des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF avec $K = 2r$ , $\theta = \theta_d = 20.1^\circ$ , $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 10\text{dB}$ et $P_{fa} = 10^{-3}$ sur $10^5$ itérations.	68
4.1	Condition de séparabilité.	77
4.2	EQM sur $10^4$ itérations en fonction de $m$ avec $c = 10$ , $\theta_d = 25^\circ$ et $\theta = 25^\circ$ .	77
4.3	EQM en fonction de $\theta$ (en degré) entre : (a) les détecteurs LR-ANMF, LR-AG et LR-AS et le détecteur LR-NMF, (b) les signaux filtrés adaptatif et le signal filtré théorique $p_{LR}$ .	78
4.4	Convergences de la FQ <i>structurée rectifiée</i> (Eq.(4.24)) et du SINR loss du nouveau filtre adaptatif LR (Eq.(4.25)) quand $m, K \rightarrow \infty$ à rapport constant $c = 3$ , $\theta_d = \theta = 20, 1^\circ$ et $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 10\text{dB}$ .	79
4.5	Numérateurs et dénominateurs des détecteurs LR-NMF, LR-AS, LR-AG et LR-ANMF sous $\mathcal{H}_0$ en fonction de $\theta$ pour deux valeurs de $m$ et $c_m = 5$ , $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 10\text{dB}$ .	80
4.6	Probabilités de fausse alarme et de détection en fonction de $m$ , des détecteurs LR-NMF (ligne noire), LR-AS (en bleu), LR-AG (en rouge) et LR-ANMF (pointillés noirs) pour $c_m = 20$ , $\theta = \theta_d = 20, 1^\circ$ , $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 20\text{dB}$ et un seuil fixé sur $10^4$ itérations.	81
4.7	Probabilités de fausse alarme et de détection en fonction de $K$ , des détecteurs LR-NMF (ligne noire), LR-AS (en bleu), LR-AG (en rouge) et LR-ANMF (pointillés noirs) pour $m = 200$ , $\theta = \theta_d = 20, 1^\circ$ , $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 20\text{dB}$ et un seuil fixé.	81

4.8	Probabilités de fausse alarme et de détection en fonction de $\theta$ ou $\theta_d$ , des détecteurs LR-NMF (ligne noire), LR-AS (en bleu), LR-AG (en rouge) et LR-ANMF (pointillés noirs) pour $m = 200$ , $c_m = 20$ , $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} = 20\text{dB}$ et un seuil fixé. . . . .	82
4.9	Probabilités de fausse alarme et de détection en fonction de $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})}$ , des détecteurs LR-NMF (ligne noire), LR-AS (en bleu), LR-AG (en rouge) et LR-ANMF (pointillés noirs) pour $m = 200$ , $c_m = 20$ , $\theta = \theta_d = 20, 1^\circ$ et un seuil fixé. . . . .	82
4.10	Relations $P_{fa}$ -seuil des détecteurs LR-NMF, LR-AG, LR-AS et LR-ANMF avec $m = 200$ , $K = 20$ , $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} = 20\text{dB}$ , $\theta = 20, 1^\circ$ et $\theta_d = 20, 1^\circ$ et $SNR = 18\text{dB}$ pour les $P_d$ -seuil. . . . .	83
4.11	Relations $P_d$ - $SNR$ et $P_d$ - $P_{fa}$ des détecteurs LR-NMF, LR-AG, LR-AS et LR-ANMF avec $m = 200$ , $K = 20$ , $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} = 20\text{dB}$ , $\theta = 20, 1^\circ$ , $\theta_d = 20, 1^\circ$ et : (a) $P_{fa} = 10^{-3}$ pour les $P_d$ - $SNR$ , (b) $SNR = 18\text{dB}$ pour les $P_d$ - $P_{fa}$ . . . . .	83
4.12	Visualisation de $\rho_{LR}$ , $\hat{\rho}_{LR}$ et sa limite en grandes dimensions $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$ , $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$ , $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$ et sa limite en grandes dimensions $\tilde{\rho}_{LR}$ en fonction de $K$ ou $\theta_d$ (sur $10^3$ réalisations) avec $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} = 20\text{dB}$ et $m = 200$ . . . . .	84
4.13	Visualisation de $\rho_{LR}$ , $\hat{\rho}_{LR}$ et sa limite en grandes dimensions $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$ , $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$ , $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$ et sa limite en grandes dimensions $\tilde{\rho}_{LR}$ en fonction de $\theta_d$ (sur $10^3$ réalisations) avec $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} = 30\text{dB}$ , $m = 100$ et $K = 2r$ . . . . .	85
5.1	Schémas pour la représentation du STAP. . . . .	88
5.2	Principe et intérêt du filtrage spatio-temporel . . . . .	89
5.3	Data cube STAP et arrangement des données . . . . .	90
5.4	Radar MIMO aéroporté. . . . .	92
5.5	Antenne virtuelle : (a) 1D formée à partir d'éléments récepteurs ploches et d'éléments émetteurs éloignés ou <i>sparse</i> , (b) 2D formée à partir d'éléments récepteurs et émetteurs proches. . . . .	93
5.6	Schémas d'émission d'un radar MIMO-STAP. . . . .	94
5.7	Schéma du processus de réception d'un radar MIMO-STAP. . . . .	95
5.8	Data cube MIMO-STAP et arrangement des données . . . . .	95
5.9	Déplacement du porteur/de l'antenne à chaque impulsion. . . . .	96
5.10	Condition de séparabilité pour différentes tailles des données $m$ . . . . .	97
5.11	Visualisation des SINR loss en fonction de $K$ pour différentes valeurs de $m$ et $v_{t,y} = 5\text{m/s}$ . . . . .	98
5.12	Visualisation des SINR loss en fonction de la vitesse réelle de la cible avec $CNR/N_c = 28\text{dB}$ , $N = M = 4$ et $K = 30$ . . . . .	99
5.13	Visualisation des SINR loss en fonction de $K$ pour différentes valeurs de $m$ et $v_{t,y} = 5\text{m/s}$ . . . . .	100
5.14	Visualisation des SINR loss en fonction de la vitesse réelle de la cible avec $CNR/N_c = 28\text{dB}$ , $N = M = 4$ et $K = 30 \simeq 2m$ . . . . .	100
5.15	Condition de séparabilité pour différentes tailles des données $m$ . . . . .	101
5.16	Visualisation des SINR loss en fonction de : (a) $K$ pour $CNR/N_c = 0\text{dB}$ ( $CNR_{\text{dB}} = 30\text{dB}$ ) et $v_{t,y} = 1\text{m/s}$ , (b) la vitesse de la cible pour $CNR/N_c = 15\text{dB}$ ( $CNR_{\text{dB}} = 45\text{dB}$ ) et $K = 2r$ . . . . .	102
5.17	Visualisation des SINR loss en fonction de : (a) $K$ pour $CNR/N_c = 15\text{dB}$ ( $CNR_{\text{dB}} = 45\text{dB}$ ) et $v_{t,y} = 1\text{m/s}$ , (b) la vitesse de la cible pour $CNR/N_c = 15\text{dB}$ ( $CNR_{\text{dB}} = 45\text{dB}$ ) et $K = 2r$ . . . . .	104
5.18	Relations $P_d$ - $P_{fa}$ (courbe COR) de détecteur LR-NMF, du détecteur LR-ANMF et de ses limites en grandes dimensions $\bar{\Lambda}_G$ et $\bar{\Lambda}_S$ pour $m = 256$ ( $N = 4$ , $L = 4$ , $M = 16$ ), $K = 2r$ , $CNR/N_c = 15\text{dB}$ , $SNR_{\text{dB}} = 18\text{dB}$ et $v_{t,y} = 2\text{m/s}$ . . . . .	104

5.19	Relations $P_d$ - $P_{fa}$ (courbe COR) de détecteur LR-NMF et des détecteurs adaptatif LR-ANMF, LR-AS et LR-AG pour $m = 256$ ( $N = 4, L = 4, M = 16$ ), $K = 2r$ , $CNR/N_c = 15\text{dB}$ , $SNR_{\text{dB}} = 18\text{dB}$ et $v_{t,y} = 2\text{m/s}$ . . . . .	105
5.20	Zoom de la densité de probabilité empirique/expérimentale des valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$ , SCM des données MIMO-STAP <i>sparse</i> en l'absence de cible avec $m = 64$ ( $N = M = L = 4$ ), $K = 2r$ et $CNR/N_c = -5\text{dB}$ . A cause du zoom, certaines valeurs propres (les valeurs les plus importantes) sont en dehors du cadre de la figure. . . . .	106
5.21	Rapport $r/m$ quand $M \rightarrow \infty$ à $N$ et $L$ fixés ( $m = MNL$ ). . . . .	107

## Abréviations

AMF	Adaptive Matched Filter
ANMF	Normalized Adaptive Matched Filter
AoA	Angle of Arrival
AWGN	Additive White Gaussian Noise
CDF	Cumulative Density Function
CNR	Clutter to Noise Ratio
COR	Courbe Opérationnelle de Récepteur
DDP	Densité De Probabilité
ECDF	Empirical Cumulative Density Function
EMV	Estimateur du Maximum de Vraisemblance
FQ	Forme Quadratique
FR	Full Rank
GLRT	Generalized Likelihood Ratio Test
IF	Improvement Factor
iid	independant and identically distributed
JNR	Jamming to Noise Ratio
LR	Low Rank
LR-ANMF	Low Rank Adaptive Normalized Matched Filter
LR-NMF	Low Rank Normalized Matched Filter
MDV	Minimum Detectable Velocity
MF	Matched Filter
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MSE	Mean Squared Error
NMF	Normalized Matched Filter
PDF	Probability Density Function
QF	Quadratic Form
RMT	Random Matrix Theory
RSB	Rapport Signal à Bruit
RSIB	Rapport Signal plus Interférence à Bruit
SCM	Sample Covariance Matrix
SIMO	Single Input Multiple Output
SINR	Signal to Interference plus Noise Ratio
SNR	Signal to Noise Ratio
STAP	Space Time Adaptive Processing
SVD	Singular Value Decomposition



# Notations

$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des complexes
$\mathbb{R}^{+*}$	Ensemble des réels strictement positifs
$\mathbb{C}^+$	$z \in \mathbb{C}^+ \triangleq \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$
$\llbracket a; b \rrbracket$	$x \in \llbracket a, b \rrbracket \triangleq \{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq b, \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$
$a$	Scalaire
$\mathbf{a}$	Vecteur
$\mathbf{A}$	Matrice
$(\cdot)^T$	Opérateur transposé
$(\cdot)^H$	Opérateur hermitien
$\odot$	Produit de Hadamard
$\triangleq$	Égalité par définition
$\lfloor \cdot \rfloor$	Arrondissement à l'entier inférieur
$\Re(\cdot)$	Partie réelle
$\Im(\cdot)$	Partie imaginaire
$\mathbb{E}[\cdot]$	Espérance mathématique
$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{a})$	$\mathbf{A}$ est une matrice diagonale dont le $i$ -ème élément diagonal est la $i$ -ème élément du vecteur $\mathbf{a}$
$\mathbf{a} = \text{diag}(\mathbf{A})$	$\mathbf{a}$ est un vecteur dont le $i$ -ème élément est la $i$ -ème élément diagonal de la matrice diagonale $\mathbf{A}$
$\text{rg}(\mathbf{A})$	Rang de la matrice $\mathbf{A}$
$\text{tr}(\mathbf{A})$	Trace de la matrice $\mathbf{A}$
$ \mathbf{A} $	Déterminant de la matrice $\mathbf{A}$
$\mathbf{I}_{n \times m}$	Matrice identité de taille $n$ par $m$
$\mathbf{O}_{n \times m}$	Matrice nulle de taille $n$ par $m$
$\ \cdot\ _p$	Norme $p$
$X \perp Y$	Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes
$\#\{\mathcal{A}\}$	Cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}$
$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	Loi gaussienne de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$
$\mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	Loi complexe gaussienne de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$
$\mathcal{B}(a, b)$	Loi Beta de première espèce
$\mathcal{F}(a, b, c)$	Loi de Fisher décentrée
$\chi^2(a)$	Loi de Chi2
$\chi^2(a, b)$	Loi de Chi2 décentrée
$\Gamma(\cdot)$	Fonction Gamma
$I_\xi(a, b)$	Fonction Beta incomplète régularisée
$\mathcal{ST}[\cdot]$	Transformée de Stieljes
$C_a^b$	Coefficient binomial

## Notations

---

$X \sim f_X(x)$	La variable aléatoire $X$ suit la densité de probabilité $f_X(x)$
$\xrightarrow{\text{p.s.}}$	Convergence presque sûre
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	Convergence en probabilité
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Convergence en loi ou en distribution
$\xleftrightarrow{\mathcal{L}}$	Équivalence en loi ou en distribution
$\mathcal{H}_0$	Hypothèse signal d'intérêt absent
$\mathcal{H}_1$	Hypothèse signal d'intérêt présent
$P_d$	Probabilité de détection
$P_{fa}$	Probabilité de fausse alarme

# Introduction

Dans beaucoup de domaines comme le radar, les télécommunications ou encore l'imagerie, certains paramètres s'avèrent inconnus ou aléatoires et les traitements supposent donc les signaux à traiter aléatoires. Afin d'être réalisés convenablement, ces traitements nécessitent les statistiques du signal comme sa distribution, son moment d'ordre un (moyenne) ou encore sa matrice de covariance (moment d'ordre 2). Ainsi, en traitement du signal, la matrice de covariance des données est très largement utilisée dans de nombreuses applications comme le filtrage [Reed et al., 1974, Ward, 1994], la détection radar/sonar [Scharf and Friedlander, 1994] ou en localisation [Schmidt, 1986, Roy and Kailath, 1989]. Il s'agit alors dans un premier temps de filtrer les données reçues afin de supprimer les lobes secondaires ou de manière équivalente augmenter le rapport signal d'intérêt à bruit (RSB) afin d'améliorer les traitements post-filtrage. Puis dans un second temps de détecter et/ou localiser un éventuel signal d'intérêt perturbé par un bruit additif.

Cependant, lorsque la perturbation est composée de la somme d'un bruit corrélé de rang  $r$  faible et d'un bruit blanc gaussien, comme c'est le cas dans les traitements STAP [Brennan and Reed, 1973] et MIMO-STAP [Chong et al., 2011], la matrice de covariance est alors remplacée par le projecteur sur le sous-espace du bruit rang faible [Kirstein and Tufts, 1994, Haimovich, 1996, Ginolhac and Jourdain, 2002, Rangaswamy et al., 2004] afin de prendre en compte cette structure « rang faible » et d'obtenir un traitement haute-résolution [Schmidt, 1986]. Le problème consiste alors à estimer ce rang si il est inconnu. Dans ce cadre, une fois le rang déterminé, il existe un filtre rang faible fonction du projecteur [Kirstein and Tufts, 1994, Haimovich, 1997] ainsi qu'un détecteur rang faible, le détecteur LR-NMF (*Low Rank Normalized Matched Filter*) [Rangaswamy et al., 2004].

Cependant, en pratique, la matrice de covariance et le projecteur sont inconnus. On estime donc ce dernier à partir de la matrice de covariance estimée, obtenue à partir de  $K$  données secondaires. Bien que plusieurs estimateurs de la matrice de covariance existent, on considère ici la SCM (pour *Sample Covariance Matrix*) obtenue à partir des  $K$  données secondaires supposées indépendantes et de même distribution. Le projecteur théorique est alors remplacé par le projecteur estimé afin d'obtenir des traitements adaptatifs. Les traitements adaptatifs fonction du projecteur estimé et non de l'inverse de la SCM sont ainsi totalement opérationnels même à faible nombre de données secondaires. En effet, si  $K$  est inférieur à la taille des données secondaires comme ce peut être le cas dans certaines applications radar, alors la SCM n'est plus inversible mais il est toujours possible d'estimer le projecteur. Le filtre adaptatif rang faible et le détecteur LR-ANMF (*Low Rank Adaptive Normalized Matched Filter*) résultants ne sont donc plus optimaux, portant atteinte aux performances de filtrage, de détection et de localisation. Un challenge important est alors de pouvoir caractériser ces performances ainsi que les pertes engendrées par ces traitements adaptatifs en fonction des paramètres du système. Pour cela, aujourd'hui il n'est possible que de les caractériser de manière asymptotique étant donné la difficulté de traiter la distribution d'un projecteur estimé. Les traitements, fonction de la SCM ont déjà été largement étudiés et ont mené à de très nombreux travaux en filtrage [Reed et al., 1974] et détection [Kelly, 1986, Robey et al., 1992, Kraut et al., 2001, Besson and Scharf, 2006]) et il est d'ores et déjà connu que pour assurer de bonnes performances (comme une perte de 3dB en RSB par rapport au RSB optimal [Reed et al., 1974]), les traitements adaptatifs, fonctions du projecteur estimé, nécessitent moins de données secondaires d'estimation ( $K =$

$2r$  [Kirstein and Tufts, 1994, Haimovich, 1997]) que les traitements, fonctions de la SCM ( $K = 2m$  où  $m$  est la taille des données).

De plus, comme dans de nombreuses applications telles que les traitements MIMO de télécommunications ou le radar MIMO-STAP (pour *Multiple Input Multiple Output Space Time Adaptive Processing*), la taille des données à traiter grandit par définition (*e.g.* par un plus grand nombre de capteurs de l'antenne globale). Puis, lorsque l'on considère un traitement spatio-temporel comme le STAP ou MIMO-STAP, une dimension temporelle est aussi ajoutée traitant la partie Doppler des signaux d'intérêt et entraînant à son tour une augmentation de la taille des données. Par conséquent, les estimateurs définis traditionnellement parviennent-ils encore à estimer convenablement les quantités étudiées et leurs comportements peuvent-ils encore être caractérisés de manière traditionnelle, *i.e.* lorsque seul  $K$  augmente à taille des données  $m$  fixe ?

On sait que quand la taille  $m$  grandit, la théorie des matrices aléatoires (RMT pour *Random Matrix Theory*) peut être très utile. En effet, ces dernières années, beaucoup de travaux ont été effectués pour déterminer les performances de quantités non fonction de projecteurs [Hachem et al., 2008, Kammoun et al., 2009, Benaych-Georges and Nadakuditi, 2011, Couillet et al., 2013]. Cependant, certaines quantités comme des formes quadratiques (FQ) et fonction du projecteur estimé ont aussi nourris de nombreux travaux en RMT. Ainsi les outils de RMT ont été utilisés en traitement d'antenne afin d'améliorer l'algorithme MUSIC [Mestre and Lagunas, 2008, Couillet et al., 2014] grâce à l'étude du comportement spectral asymptotique de la SCM pour différents modèles de SCM. De nombreux travaux ont aussi traité de la convergence asymptotique de ces FQs fonction de projecteurs [Mestre, 2006, Mestre, 2008a, Mestre and Lagunas, 2008, Couillet and Hachem, 2013, Hachem et al., 2013, Vallet et al., 2011b, Vallet et al., 2011a] ou de leur distribution asymptotique [Vallet et al., 2012a]. Il est ainsi reconnu que la RMT en grandes dimensions permet de caractériser les performances de quantités aléatoires de façon beaucoup plus précise. En effet, cette théorie permettant de connaître de manière précise la distribution spectrale des matrices aléatoires (comme la SCM), il est possible de déterminer leur comportement statistique. Les outils apportés par ce domaine sont donc très appréciés, bien que parfois difficiles à manipuler. De nombreuses études ont ainsi été traitées sous le regard neuf des matrices aléatoires en grandes dimensions comme en physique [Mehta, 2004, Dyson, 1962], en finance [Laloux et al., 2000], en biologie évolutionniste [Arnold et al., 1994] ou encore en télécommunication sans fil [Tse and Hanly, 1999]. Cependant, très peu d'études dans le régime en grandes dimensions concernent le filtrage et la détection adaptative en rang faible connu et où le projecteur est estimé à partir de la SCM. Seul le filtrage adaptatif non rang faible et donc fonction de la matrice de covariance estimée avait été étudié. [Mestre and Lagunas, 2006] s'était intéressé à la perte en RSB asymptotique du filtre adaptatif non rang faible et [Tang et al., 2013, Rubio et al., 2012a, Rubio et al., 2012b, Yu et al., 2013] avaient également étudié la perte en RSB asymptotique du filtre adaptatif non rang faible mais quand la SCM est respectivement régularisée et/ou normalisée. Aucune étude provenant de la RMT ne porte non plus, à ma connaissance, sur le détecteur LR-ANMF.

Il est alors important de pouvoir caractériser les performances des filtres et détecteurs adaptatifs lorsque la taille des données grandit en fonction des paramètres du système en termes de biais, perte en RSB, probabilité de fausse alarme ou encore probabilité de détection. L'utilisation de la théorie des matrices aléatoires en grandes dimensions est de ce fait une théorie attractive permettant d'étudier les quantités fonction de la SCM ou des projecteurs estimés dans le régime en grandes dimensions, c'est-à-dire lorsque la taille des données et le nombre de données secondaires tendent vers l'infini à ratio  $c$  strictement positif constant.

On propose donc premièrement dans cette thèse de recalculer les performances des filtres et détecteurs adaptatifs dans le régime en grandes dimension en utilisant la RMT. Concernant la perte en RSB due au filtrage en contexte gaussien rang faible, quelques travaux se sont intéressés au filtrage adaptatif rang faible. [Haimovich, 1996, Haimovich, 1997, Ginolhac et al., 2013] se sont intéressés, respectivement

---

à la densité de probabilité de la perte en RSB due au filtrage adaptatif rang faible et à son moment d'ordre 1. Ces résultats ont cependant été obtenus en supposant le bruit rang faible orthogonal au signal d'intérêt, hypothèse contraignante non vérifiée dans tous les cas et voire parfois grossière. Toutefois, [Haimovich, 1996, Haimovich, 1997] ont obtenu sa densité de probabilité pour une forte puissance du bruit rang faible comparée à celle du bruit blanc. Puis, [Ginolhac et al., 2013] a proposé une approximation de son espérance dans les conditions énoncées précédemment en contexte gaussien mais aussi en contexte SIRV [Yao, 1973] (*Spherically Invariant Random Vector*) pour la SCM et la SCM normalisée. Toutefois, ces travaux obtiennent une approximation fonction du nombre de données d'estimation de la matrice de covariance. De ce fait, bien que l'on sache qu'il existe des paramètres du signal d'intérêt (comme l'angle d'arrivée) pour lesquels on observe un décrochement de performances, cette approximation ne permet pas de la prédire. Relaxant l'hypothèse contraignante amenant à ce résultat et utilisant la RMT, on propose donc une quantité qui serait capable de prédire ce décrochage.

Puis, on s'intéressera aussi aux performances du détecteur LR-ANMF de manière théorique. Ce détecteur a été très peu étudié théoriquement contrairement à son homologue non adaptatif (le détecteur LR-NMF) [Rangaswamy et al., 2004, Anitori et al., 2008] ou non rang faible (les détecteurs NMF et ANMF) [Kraut et al., 2001, Michels et al., 2000, Robey et al., 1992]. Seuls [Asendorf and Nadakuditi, 2013, Nadakuditi and Silverstein, 2010, Anitori et al., 2008] s'étaient penchés sur le détecteur LR-ANMF mais avec l'hypothèse d'un rang inconnu pour les premiers et avec des calculs encore à un stade peu avancé pour le dernier. On propose alors en utilisant la RMT des performances théoriques approchées, approximant et prédisant bien celles du détecteur LR-ANMF.

Enfin, cette thèse propose dans un second lieu de se servir des outils de RMT pour construire de nouveaux filtres et détecteurs adaptatifs rang faible visant à améliorer les performances de filtrage et de détection ou à mieux estimer les quantités non adaptatives lorsque la taille des données grandit. Enfin, cette thèse propose aussi d'appliquer les résultats aux applications STAP et MIMO-STAP.

Ce travail de thèse consiste donc à étudier et caractériser les performances de filtres et détecteurs adaptatifs rang faible (LR pour *Low Rank*) pour le traitement d'antenne en utilisant la théorie des matrices aléatoires en grandes dimensions et plus spécifiquement les deux modèles de matrice de covariance les plus courants en RMT : le modèle « G-MUSIC » utilisé dans [Mestre, 2008a] et le modèle *spiked* introduit par [Johnstone, 2001].

Le manuscrit est organisé comme suit. Après avoir présenté l'état de l'art dans le chapitre 1, la démarche de l'étude a consisté dans un premier temps à calculer puis valider dans le chapitre 2 les performances/comportements asymptotiques des filtres adaptatifs dans le régime en grandes dimensions afin de pouvoir connaître et prédire leur comportement. Ainsi, le biais asymptotique du signal filtré non rang faible a été calculé. Puis, le biais asymptotique du signal filtré en LR a été établi de la même manière. Ensuite, les performances du filtre adaptatif LR ont été caractérisées grâce au biais asymptotique de la perte en RSB. Enfin, les résultats ont été validés par une application brouillage simple et ont permis de mettre en évidence l'apport de la RMT en grandes dimensions en terme de prédiction de performance.

Dans un deuxième temps, dans le chapitre 3, les performances/comportements asymptotiques des détecteurs adaptatifs ont été déterminées dans le régime en grandes dimensions afin de pouvoir connaître et prédire leur comportement. De la même manière, le biais asymptotique du détecteur ANMF a été calculé. Puis, le biais asymptotique du détecteur LR-ANMF a été établi. Ensuite, afin de pouvoir calculer les performances du détecteur LR-ANMF, nous avons déterminé sa loi asymptotique dans le régime en grandes dimensions. Grâce à cette loi, nous avons caractérisé les performances de détection du détecteur LR-ANMF par le calcul des probabilités de fausse alarme et probabilités de détection associées à cette loi. Enfin, les résultats ont été validés par une application brouillage simple et ont permis de mettre en évidence l'apport de la RMT en grandes dimensions et l'influence des différences entre les modèles « G-MUSIC » et *spiked* sur les performances de détection.

Dans un troisième temps, dans le chapitre 4, les performances de détection et de filtrage ont cherché à être améliorées par rapport à celles du filtre LR adaptatif classique et du détecteur LR-ANMF en calculant et validant les performances/comportements à  $m$  et  $K$  fixés de nouveaux filtres et détecteurs LR adaptatifs. Ces nouveaux filtres et détecteurs ont été construits afin d'estimer de manière non biaisée dans le régime en grandes dimensions les filtres et détecteurs LR non adaptatifs. Pour cela, on a proposé de nouveaux filtres et détecteurs LR adaptatifs consistants dans le régime en grandes dimensions en se référant aux estimateurs G-MUSIC [Mestre, 2008a] et Spike MUSIC [Couillet and Hachem, 2013, Hachem et al., 2013]. Puis nous avons calculé les performances des nouveaux détecteurs LR adaptatifs en estimant les probabilités de fausse alarme et probabilités de détection qui leur sont associés. Ensuite, nous avons calculé les performances du nouveau filtre LR adaptatif avec le modèle *spiked* en déterminant la perte en RSB qui lui est associée et sa convergence dans le régime en grandes dimensions. Enfin, nous avons validé les résultats par une application brouillage simple qui permettra de mettre en évidence l'apport des RMT en grandes dimensions et l'influence des différences entre les modèles « G-MUSIC » et *spiked* sur les performances.

Enfin, l'étude se fini dans le chapitre 5 sur la mise en pratique des résultats précédemment obtenus sur les applications STAP et MIMO-STAP. Pour cela, ce chapitre présente donc plus en détails les applications visées ainsi que les paramètres de simulation. Grâce à ces derniers nous avons vérifié la validité de la condition de séparation liée aux modèles « G-MUSIC » et *spiked*. On visualise ensuite le comportement des filtres adaptatifs LR sur les deux applications et nous nous sommes intéressés aux détecteurs adaptatifs LR. Enfin, le chapitre discute plus en détails les résultats obtenus.

Le dernier chapitre présente finalement les conclusions et perspectives de cette étude.

# 1

## Etat de l'art

Ce chapitre résume et définit les notions de bases de détection, de filtrage et de la théorie des matrices aléatoires en grandes dimensions nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Il introduit aussi la problématique liée aux applications STAP et MIMO-STAP ainsi que la raison du choix de la théorie des matrices aléatoires en grandes dimensions pour l'étude des détecteurs et filtres présentés dans ce chapitre.

### 1.1 Contexte

Le contexte de cette thèse est la détection d'un signal d'intérêt  $d$  grâce à un système actif. Plus précisément un émetteur (qui sera ici un radar aéroporté) envoie une onde électromagnétique et mesure la réponse de l'environnement (cf. Fig.1.1). Si on prend par exemple l'application de détection d'un véhicule en mouvement, comme sur la figure ci-dessous, il s'agira de détecter  $d$  dans le vecteur d'observation  $x$  noyé dans le bruit  $b$  composé dans cet exemple de la réponse du sol  $c$  et du bruit  $n$  (thermique, électronique ou encore bruit de capteur). D'autres formes de perturbations non prises en compte dans ce manuscrit peuvent être et sont généralement présentes comme d'autres véhicules, les interférences électromagnétiques diverses ou des brouilleurs tentant d'empêcher la détection de  $d$ .

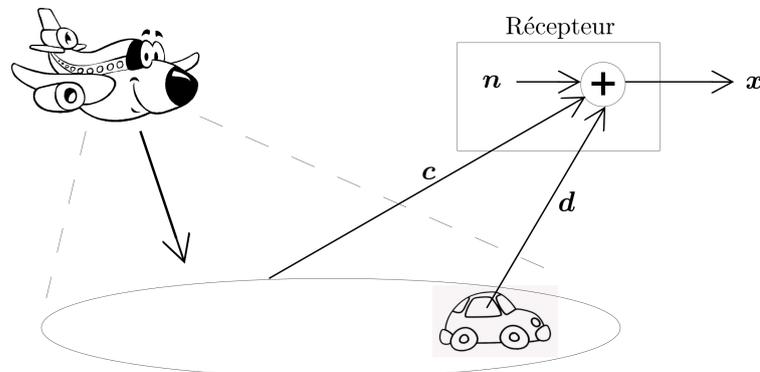


FIGURE 1.1 – Schéma de fonctionnement simplifié.

On s'intéressera plus précisément à l'étude et l'amélioration des processus de filtrage et de détection de sources grâce à des données reçues par un système monostatique.

## 1.2 Modèle et motivations

### 1.2.1 Modèle

#### 1.2.1.1 Modèle théorique

Le vecteur d'observation peut alors être écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{c} + \mathbf{n} \in \mathbb{C}^{m \times 1} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a}(\Theta_d)$  est le signal d'intérêt,  $\alpha$  est un paramètre complexe inconnu déterministe contenant la puissance du signal d'intérêt,  $\mathbf{a}(\Theta)$  le vecteur directionnel de norme 1 dont la structure est supposée connue et  $\Theta_d$  est un vecteur déterministe inconnu contenant les paramètres du signal d'intérêt (*e.g.* sa localisation, sa vitesse, son angle d'arrivée (AoA), *etc.*). Le bruit additif  $\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{n}$  pourra être alors considéré de plusieurs façons :

- soit comme un bruit  $\mathbf{b}$  de matrice de covariance de rang plein  $\mathbf{R}$  (noté cas FR pour *Full Rank*) ;
- soit comme étant la somme d'un bruit  $\mathbf{c}$  de matrice de covariance  $\alpha_c \mathbf{C}$  de rang faible (*i.e.* très inférieur à la taille des données), où  $\alpha_c$  est la puissance de bruit rang faible, et d'un bruit blanc additif gaussien  $\mathbf{n}$  (cas noté LR pour *Low Rank*).

#### Définition 1.1 Matrice de covariance

La matrice de covariance d'un vecteur complexe  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$  est définie comme  $\mathbb{E}[\mathbf{z}\mathbf{z}^H] \in \mathbb{C}^{m \times m}$ .

Les traitements utilisés, suivant le bruit  $\mathbf{b}$  considéré, seront alors différents. Enfin, dans le cadre de cette thèse, les différents bruits seront considérés comme gaussiens complexes et de moyenne nulle. On aura alors, pour le cas d'un bruit  $\mathbf{b}$  *Full Rank* :

$$\text{FR} : \mathbf{b} \in \mathbb{C}^{m \times 1} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \quad (1.2)$$

et dans le cas d'un bruit  $\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{n}$  comprenant un bruit de rang faible  $\mathbf{c}$  :

$$\text{LR} : \mathbf{b} \in \mathbb{C}^{m \times 1} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{R} = \alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m) \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{m \times 1} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_m)$  est le bruit blanc additif gaussien (AWGN pour *Additive White Gaussian Noise*) de puissance  $\sigma^2$  et  $\mathbf{c} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \alpha_c \mathbf{C})$  est le bruit rang faible avec  $\alpha_c$  la puissance du bruit LR. Par conséquent, le rang

$$\text{rg}(\mathbf{C}) = r \ll m \quad (1.4)$$

et sera ici supposé connu. On peut alors écrire la décomposition en valeurs propres de  $\mathbf{C}$  comme suit :

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (1.5)$$

où  $\gamma_i$  et  $\mathbf{u}_i$ ,  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$  sont respectivement les valeurs propres non nulles et les vecteurs propres associés de  $\mathbf{C}$ .  $\mathbf{R}$  se décompose alors comme

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (1.6)$$

où  $\lambda_i$  et  $\mathbf{u}_i$ ,  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\mathbf{R}$  avec, suivant le cas :

$$\begin{cases} \text{FR} : \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \\ \text{LR} : \lambda_1 = \alpha_c \gamma_1 + \sigma^2 > \dots > \lambda_r = \alpha_c \gamma_r + \sigma^2 > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_m = \sigma^2 \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans le cas LR, la littérature a montré que la meilleure approximation de rang  $r$  de l'inverse de la matrice de covariance est  $\mathbf{I}_m - \mathbf{\Pi}_c$  d'après le théorème d'Eckart-Young [Kirstein and Tufts, 1994], dans le cas d'un bruit LR où la puissance de la partie LR est forte comparée au bruit blanc et où  $\mathbf{\Pi}_c$  est le projecteur sur le sous-espace bruit LR. Il est vrai, que cela entraîne une perte mais nous verrons par la suite son intérêt. On définit donc le projecteur sur le sous-espace bruit rang faible  $\mathbf{\Pi}_c$  et le projecteur sur le sous-espace orthogonal au sous-espace du bruit rang faible  $\mathbf{\Pi}_c^\perp$  :

$$\begin{cases} \mathbf{\Pi}_c = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \\ \mathbf{\Pi}_c^\perp = \mathbf{I}_m - \mathbf{\Pi}_c = \sum_{i=r+1}^m \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \end{cases} \quad (1.8)$$

### 1.2.1.2 Estimation de la matrice de covariance et des projecteurs

Cependant, en pratique, la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  et par conséquent les projecteurs ne sont pas connus. On utilise donc un estimateur de ces quantités. Plusieurs estimateurs existent et sont notamment caractérisés par les propriétés suivantes. Ces définitions seront valables pour tous les estimateurs définis dans ce document.

**Définition 1.2** *Biais de l'estimateur  $\hat{\theta}$  de  $\theta$*

Soit une quantité  $\theta$  estimée par l'estimateur  $\hat{\theta}$ . Le biais  $B(\hat{\theta})$  de l'estimateur  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  est alors défini de la façon suivante :

$$B(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta \quad (1.9)$$

Lorsque  $B(\hat{\theta}) = 0$ , l'estimateur  $\hat{\theta}$  est appelé estimateur non biaisé de  $\theta$ .

**Définition 1.3** *Consistance de l'estimateur  $\hat{\theta}$  de  $\theta$*

Un estimateur  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  est dit consistant s'il converge en probabilité vers  $\theta$  dans le régime asymptotique considéré :

$$\|\hat{\theta} - \theta\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad (1.10)$$

où  $\mathbb{P}$  désigne la probabilité et  $\|\cdot\|$  une norme quelconque. De tels estimateurs sont convergents et asymptotiquement non biaisés.

Dans le cas où les données reçues sont considérées gaussiennes, comme dans ce document, les Estimateurs optimaux au sens de Maximum de Vraisemblance ou Estimateurs du Maximum de Vraisemblance (EMV) sont aisément calculables. Plus particulièrement, pour des données complexes gaussiennes, l'EMV de la matrice de covariance correspond à la *Sample Covariance Matrix* (SCM). Cette dernière s'obtient à partir de  $K$  données secondaires iid (indépendantes et identiquement distribuées)  $\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$  et peut être écrite comme :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H = \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \quad (1.11)$$

où  $\hat{\lambda}_i$  et  $\hat{\mathbf{u}}_i$  sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres de la SCM avec  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_m$  et les données secondaires suivent la loi :

$$\begin{cases} \text{FR : } \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k \in \mathbb{C}^{m \times 1} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \\ \text{LR : } \mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k \in \mathbb{C}^{m \times 1} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{R} = \alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m) \end{cases} \quad (1.12)$$

où, dans le cas LR,  $\mathbf{c}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \alpha_c \mathbf{C})$  et  $\mathbf{n}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_m)$ . La SCM est non biaisée et consistante. Cependant, dans le cas de données non gaussiennes ou comportant un certain nombre de données atypiques, l'EMV correspondra à d'autres estimateurs et on pourra aussi utiliser des estimateurs n'étant pas des EMV comme la *Normalized SCM* (NSCM) [Conte and Ricci, 1994] ou le *Fixed Point Estimator* (FPE) [Pascal et al., 2008, Tyler, 1987] mais s'en rapprochant quand même.

De même, l'EMV du projecteur diffère suivant le choix de la distribution des données. Pour des données gaussiennes, l'EMV correspond à l'estimateur traditionnellement utilisé à partir de la SCM suivant :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{\Pi}}_c = \sum_{i=1}^r \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \\ \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp = \mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{\Pi}}_c = \sum_{i=r+1}^m \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H, \end{cases} \quad (1.13)$$

De plus, dans le cas LR, la littérature a montré qu'il est profitable d'utiliser la structure rang faible du bruit grâce au sous-espace correspondant ainsi que son complémentaire. En effet, les processus de traitement du vecteur d'observation visant à le filtrer et à détecter le signal d'intérêt sont fonction de l'inverse de la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  (de rang faible en LR) du bruit, pouvant être approximée par le projecteur sur le sous-espace bruit blanc (sous-espace orthogonal au sous-espace du bruit rang faible) pour un bruit  $c$  de forte puissance comparée à  $\sigma^2$ . Les performances des processus à -3dB sont alors équivalentes pour un nombre  $K$  de données d'estimation bien inférieur :  $2r$  au lieu de  $2m$  [Kirstein and Tufts, 1994, Haimovich, 1997].

Cependant, pour des données non gaussiennes ou comportant un certain nombre de données atypiques, la SCM et les projecteurs ne partagent plus les mêmes vecteurs propres. Il est alors courant d'utiliser l'équation précédente avec les vecteurs propres de l'EMV de la matrice de covariance correspondant aux données ou les vecteurs propres d'une matrice construite indépendamment de la matrice de covariance estimée et partageant les mêmes vecteurs propres [Besson et al., 2011, Raghavan, 2012, Breloy et al., 2015].

## 1.2.2 Motivations

On se place dans un contexte de détection. Le principe est alors de détecter un signal d'intérêt  $d$  éventuel noyé dans du bruit  $\mathbf{b}$  dans un vecteur d'observation  $\mathbf{x}$ . Cependant, la plupart des applications passent d'abord par d'autres étapes avant la détection. On met en forme éventuellement les signaux reçus par le récepteur, puis on filtre les données pour enfin détecter un éventuel signal d'intérêt. Cette chaîne est symbolisée en Fig.1.2.

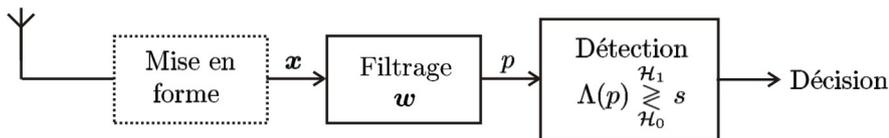


FIGURE 1.2 – Schéma de fonctionnement simplifié d'un récepteur.

La partie de mise en forme du signal arrange les signaux brut reçus en généralement un vecteur d'observation aisément manipulable. Par exemple, dans des applications spatio-temporelles MIMO (*Multiple*

*Input Multiple Output*), le récepteur recevra la somme des réponses de chaque émetteur et il s'agira de pouvoir différentier à chaque instant la réponse associée à un émetteur.

L'étape suivante consiste à filtrer le vecteur d'observation  $\mathbf{x}$  par un filtre noté  $\mathbf{w}$  afin de blanchir le bruit additif  $\mathbf{b}$  sans atténuer l'éventuel signal d'intérêt  $\mathbf{d}$  pour ensuite améliorer les performances de détection du détecteur. Le signal filtré sera noté  $p$ .

Enfin, le signal filtré est analysé via un détecteur  $\Lambda(p)$ . Celui-ci décide en fonction d'un seuil  $s$  si le signal d'intérêt est présent ou non dans le vecteur d'observation. Suivant le détecteur et le filtre utilisés, les performances de détection varient, l'intérêt étant d'avoir un seuil permettant de maximiser la probabilité de détection pour une probabilité de fausse alarme fixée. Ces aspects seront détaillés plus tard dans ce chapitre.

## 1.3 Filtrage en milieu gaussien

### 1.3.1 Définition du problème

En premier lieu, on filtre le signal reçu  $\mathbf{x}$  afin de le blanchir au mieux sans dégrader la réponse éventuelle du signal d'intérêt  $\mathbf{d}$  (typiquement une cible comme un avion en traitement radar). Afin de déterminer le filtre optimal à appliquer aux observations, on considèrera le cas où le vecteur d'observation comporte le signal d'intérêt :

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{b} \quad (1.14)$$

Le filtre optimal  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$  est alors défini comme le filtre maximisant le Rapport Signal plus Interférence à Bruit (RSIB ou SINR) à la sortie du filtre. Soit alors le signal en sortie du filtre :

$$p = \mathbf{w}^H \mathbf{x} = \mathbf{w}^H \mathbf{d} + \mathbf{w}^H \mathbf{b} \quad (1.15)$$

et le SINR en sortie du filtre :

$$SINR_{\text{out}} = \frac{\mathbb{E}[|\mathbf{w}^H \mathbf{d}|^2]}{\mathbb{E}[|\mathbf{w}^H \mathbf{b}|^2]} = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{d}|^2}{\mathbf{w}^H \mathbb{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}^H] \mathbf{w}} \quad (1.16)$$

$$= \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{d}|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}} \quad (1.17)$$

Le filtre optimal est alors défini de la façon suivante [Ward, 1994] :

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \underset{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{m \times 1}}{\text{Argmax}} (SINR_{\text{out}}) \quad (1.18)$$

et le SINR maximum comme :

$$SINR_{\text{max}} = SINR_{\text{out}}|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_{\text{opt}}} \quad (1.19)$$

### 1.3.2 Rapport signal à bruit en entrée

Le signal à détecter s'écrivant  $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a}(\Theta_d)$  où  $\mathbf{a}(\Theta_d)$  est le vecteur directionnel de norme 1 et le bruit  $\mathbf{b}$  étant de puissance  $\sigma^2$ , on définit le *SNR* (rapport signal à bruit) en entrée de la façon suivante :

$$SNR = \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \quad (1.20)$$

Cette formulation a été choisie afin de respecter les notations et principes de la théorie des matrices aléatoires. En effet, la manière traditionnelle d'écrire  $\mathbf{d}$  est  $\mathbf{d} = \tilde{\alpha} \mathbf{p}(\Theta_d)$  où  $\mathbf{p}(\Theta_d)$  est un vecteur

directionnel non normalisé et donc de norme  $m$ . Alors, le signal à détecter s'écrit  $\mathbf{d} = \tilde{\alpha}\mathbf{p}(\Theta_d) = \tilde{\alpha}\sqrt{m}\mathbf{a}(\Theta_d)$  et le  $SNR$  traditionnel :

$$SNR^{(t)} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{\sigma^2} \quad (1.21)$$

On a donc  $\alpha = \tilde{\alpha}\sqrt{m}$  et

$$SNR = \frac{\alpha^2}{\sigma^2} = \frac{m\tilde{\alpha}^2}{\sigma^2} \quad (1.22)$$

$$= m \times SNR^{(t)} \quad (1.23)$$

De ce fait,

$$SNR_{dB}^{(t)} = SNR_{dB} - 10 \log_{10}(m) \quad (1.24)$$

Afin d'illustrer cette relation, visualisons par exemple en Fig.1.3 la probabilité de détection des détecteurs NMF et ANMF définis plus tard en fonction de  $SNR_{dB}$  (à gauche) et de  $SNR_{dB}^{(t)}$  (à droite). Les courbes de gauche et de droite sont donc bien identiques, à un décalage de  $10 \log_{10}(m)$  de l'axe des abscisses près, dû à la relation (1.24).

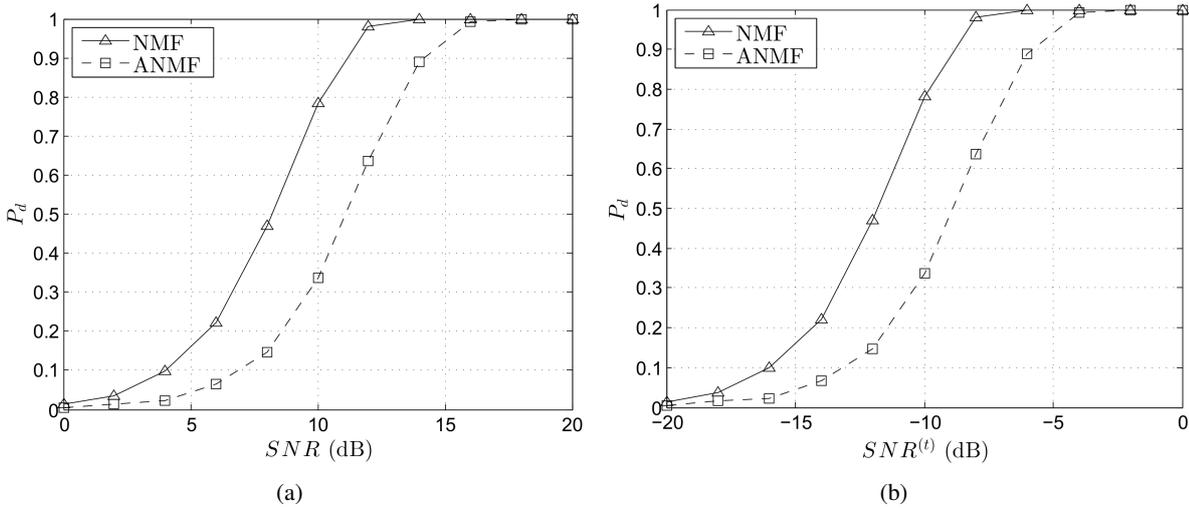


FIGURE 1.3 – Probabilité de détection de différents détecteurs avec  $m = 100$  en fonction de : (a)  $SNR_{dB}$ , (b)  $SNR_{dB}^{(t)}$ .

### 1.3.3 Définition des mesures de performance d'un filtre

Une fois le filtre (optimal ou non) déterminé, il est important de caractériser ses performances de filtrage et ainsi le comparer à d'autres filtres. Les mesures de performance se classent en deux catégories : les performances traditionnellement utilisées pour un estimateur et les mesures de performance spécifiques au filtrage.

Les filtres utilisés étant estimés lorsque la matrice de covariance du bruit est inconnue, les mesures de performance classiques d'estimateurs peuvent être utilisées, comme le biais, la consistance, la loi asymptotique ou non, la vitesse de convergence, *etc.* En filtrage, seuls le biais et la convergence seront

considérés ici.

Les mesures de performance traditionnelles étant d'une lecture et interprétation opérationnelle délicate et ne permettant pas de caractériser pleinement les filtres, d'autres mesures ont été introduites.

**Définition 1.4** *Perte en RSIB ou SINR Loss*

Soit un filtre  $\mathbf{w}$ . Alors le SINR loss est défini comme la perte en SINR causée par le filtre, i.e. le rapport entre le SINR en sortie du filtre et le SINR maximum possible :

$$\rho = \frac{SINR_{\text{out}}}{SINR_{\text{max}}} \in [0; 1] \quad (1.25)$$

Si le filtre  $\mathbf{w}$  est le filtre optimal, alors  $\rho = 1$ .

Cette valeur est donc la valeur optimale à atteindre lorsque l'on définit un nouveau filtre. Dans le cas de comparaison de performances, plus le SINR loss sera proche de 1, plus les performances de filtrage seront bonnes. De manière plus concrète, le SINR loss mesure la perte en RSB causée par le fait d'utiliser un autre traitement que le traitement idéal FR, celui où la matrice de covariance est connue. Le SINR loss se trace traditionnellement en fonction des paramètres  $\Theta$  caractéristiques du signal utile pour vérifier/mesurer les performances de filtrage pour n'importe quelle valeur de  $\Theta$ . Cependant, tracer cette quantité en fonction d'autres paramètres, comme la dimension  $m$  ou le nombre  $K$  de données secondaires, donnent d'autres informations dont la connaissance peut permettre l'amélioration des filtres ou la construction d'expérimentations suivant un cahier des charges.

Cependant, lorsque le SINR loss est associé à un filtre adaptatif, celui-ci sera alors fonction des données secondaires. L'étude du comportement du filtre est alors dépendante de la mesure/simulation de données secondaires. Ainsi, afin de ne plus dépendre de simulation, on aimerait prédire et connaître théoriquement le comportement des filtres en connaissant par exemple sa moyenne ou sa convergence. Les performances classiques d'estimateurs restent alors primordiales.

Puis, on définit une autre mesure de performance, l'*improvement factor* [Klemm, 1998], pouvant être appelé SINR loss dans la littérature et mesurant la perte en RSB comparée au cas idéal où le bruit n'est composé que d'un bruit de matrice de covariance connue  $\sigma^2 \mathbf{I}_m$ .

**Définition 1.5** *Improvement Factor IF [Klemm, 1998]*

Soit un filtre  $\mathbf{w} \propto \mathbf{B}\mathbf{d}$  et  $\mathbf{B}$  la matrice dite de blanchiment. Alors l'Improvement Factor IF est défini comme la perte causée par le filtre par rapport au cas idéal où le bruit n'est composé que d'un bruit de matrice de covariance connue  $\sigma^2 \mathbf{I}_m$ , i.e. le SNR traditionnel en sortie du filtre  $\mathbf{w} \propto \mathbf{B}\mathbf{d}$  sur le SNR traditionnel maximum possible en sortie du filtre  $\mathbf{w} \propto \sigma^2 \mathbf{I}_m \mathbf{d}$  quand le bruit n'est composé que d'un bruit de matrice de covariance connue  $\sigma^2 \mathbf{I}_m$  :

$$IF(\mathbf{B}) = \frac{SNR_{\text{out,max}}^{(t)}}{SNR_{\text{max}}^{(t)}} = \frac{\tilde{\alpha} \mathbf{p}^H(\Theta_d) \mathbf{B} \mathbf{p}(\Theta_d)}{\tilde{\alpha} \mathbf{p}^H(\Theta_d) (\sigma^2 \mathbf{I}_m)^{-1} \mathbf{p}(\Theta_d)} \quad (1.26)$$

$$= \sigma^2 \mathbf{a}^H(\Theta_d) \mathbf{B} \mathbf{a}(\Theta_d) \quad (1.27)$$

Le cas le plus courant est  $\mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1}$ , lorsque la matrice de covariance du bruit  $\mathbf{b}$  quelconque est connue. Alors,  $IF(\mathbf{R}^{-1}) = \sigma^2 \mathbf{a}^H(\Theta_d) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta_d)$ .

Enfin, on définit la dernière mesure de performance : le paramètre du signal d'intérêt minimal détectable, comme l'angle d'arrivée ou la vitesse.

**Définition 1.6** Paramètre minimal détectable

Soit un filtre  $\mathbf{w} \propto \mathbf{B}\mathbf{d}$  et  $\mathbf{B}$  la matrice dite de blanchiment. Alors, le paramètre minimal détectable est défini comme le paramètre de la cible de  $\Theta_d$  étant, sur la courbe de  $IF(\mathbf{B})_{\text{dB}}$  en fonction de ce paramètre (cf. Fig.1.4), l'argument de :

$$IF(\mathbf{B})_{\text{max,dB}} - 5\text{dB} \tag{1.28}$$

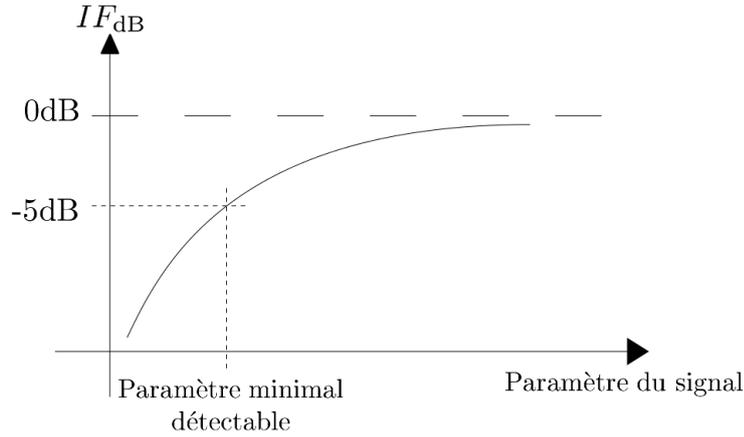


FIGURE 1.4 – Lien entre l'improvement factor et le paramètre minimal détectable.

**1.3.4 Filtres non adaptatifs**

Tout d'abord, le filtre optimal maximisant le SINR est défini de la façon suivante [Ward, 1994] :

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \underset{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{m \times 1}}{\text{Argmax}} (SINR_{\text{out}}) \tag{1.29}$$

$$\propto \mathbf{R}^{-1}\mathbf{d} \tag{1.30}$$

et la valeur du SINR à la sortie du filtre est  $SINR_{\text{out}} = \mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}$  qui est le  $SINR$  maximum que l'on peut atteindre. Le filtre étant le filtre optimal, on a  $SINR_{\text{out}} = SINR_{\text{max}}$  et le SINR loss vaut alors 1.

Dans le cas d'un bruit LR où la puissance de la partie LR est forte comparée au bruit blanc  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{\Pi}_c^\perp$  est la meilleure approximation de rang  $r$  de  $\mathbf{R}^{-1}$ . Les traitements obtenus sont ainsi haute-résolution [Schmidt, 1986]. Le filtre optimal LR est alors défini par [Kirstein and Tufts, 1994, Haimovich, 1997] :

$$\mathbf{w}_{\text{LR}} = \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{d} \tag{1.31}$$

Le SINR loss s'écrit alors de la façon suivante ( $SINR_{\text{max}} = \mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}$ ) :

$$\rho_{\text{LR}} = \frac{|\mathbf{w}_{\text{LR}}^H \mathbf{d}|^2}{(\mathbf{w}_{\text{LR}}^H \mathbf{R} \mathbf{w}_{\text{LR}})(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} \tag{1.32}$$

$$= \frac{|\mathbf{d}^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{d}|^2}{(\mathbf{d}^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{d})(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} < 1 \tag{1.33}$$

et l'improvement factor :

$$IF(\mathbf{\Pi}_c^\perp) = \sigma^2 \mathbf{a}^H(\Theta_d) \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta_d) \tag{1.34}$$

De ce fait, avec  $\sigma^2 = 1$  :

$$\rho_{\text{LR}} = \frac{IF^2(\mathbf{\Pi}_c^\perp)}{(\mathbf{a}^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{a})(\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a})} \quad (1.35)$$

$$\Leftrightarrow \rho_{\text{LR,dB}} = 2IF(\mathbf{\Pi}_c^\perp)_{\text{dB}} - 10 \log_{10}((\mathbf{a}^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{a})(\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a})) \quad (1.36)$$

### 1.3.5 Filtres adaptatifs

Les filtres présentés précédemment supposent la matrice de covariance du bruit connue, ce qui n'est généralement pas le cas en pratique. On l'estime donc grâce à la SCM, calculée à partir des  $K$  données secondaires, estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance en milieu gaussien. Les traitements ainsi construits sont dit adaptatifs.

Le filtre optimal estimé ou filtre adaptatif (sous-optimal) est défini comme :

$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{d} \quad (1.37)$$

Et on peut écrire le SINR loss associé :

$$\hat{\rho} = \frac{|\hat{\mathbf{w}}^H \mathbf{d}|^2}{(\hat{\mathbf{w}}^H \mathbf{R} \hat{\mathbf{w}})(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} \quad (1.38)$$

$$= \frac{|\mathbf{d}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{d}|^2}{(\mathbf{d}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{R} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{d})(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} \quad (1.39)$$

Ce dernier étant alors fonction de  $\hat{\mathbf{R}}$  et donc des  $K$  données secondaires, [Reed et al., 1974] a déterminé sa densité de probabilité à nombre de données secondaires  $K$  fixé et ainsi ses moments d'ordre 1 et 2 :

$$\hat{\rho} \sim f(\rho) = \frac{K!}{(m-2)!(K+1-m)!} (1-\rho)^{m-2} \rho^{K+1-m} \quad (1.40)$$

$$\mathbb{E}[\hat{\rho}] = \frac{K+2-m}{K+1} \quad (1.41)$$

$$\mathbb{E}[\hat{\rho}^2] = \frac{(K+2-m)(K+3-m)}{(K+1)(K+2)} \quad (1.42)$$

Puis, l'*improvement factor* s'écrit :

$$IF(\hat{\mathbf{R}}^{-1}) = \sigma^2 \mathbf{a}^H(\Theta_d) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\Theta_d) \quad (1.43)$$

De ce fait, avec  $\sigma^2 = 1$  :

$$\hat{\rho} = \frac{IF^2(\hat{\mathbf{R}}^{-1})}{(\mathbf{a}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{R} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a})(\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a})} \quad (1.44)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\rho}_{\text{dB}} = 2IF(\hat{\mathbf{R}}^{-1})_{\text{dB}} - 10 \log_{10}((\mathbf{a}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{R} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a})(\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a})) \quad (1.45)$$

De même, dans le cadre d'un bruit LR, le filtre adaptatif LR (sous-optimal) est :

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}} = \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{d} \quad (1.46)$$

Ce filtre a ainsi un autre avantage que celui d'être adapté à un bruit LR. En effet, si le nombre  $K$  est inférieur à la taille des données  $m$ ,  $\hat{\mathbf{R}}$  n'est plus inversible et le filtre adaptatif non LR ne peut plus

être utilisé contrairement au filtre adaptatif LR. En effet,  $\hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp$  peut toujours être estimé dans ce cas là. Finalement, le SINR loss correspondant au filtre adaptatif LR est défini comme :

$$\hat{\rho}_{\text{LR}} = \frac{|\hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}}^H \mathbf{d}|^2}{(\hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}}^H \mathbf{R} \hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}})(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} \quad (1.47)$$

$$= \frac{|\mathbf{d}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{d}|^2}{(\mathbf{d}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{d})(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} \quad (1.48)$$

Dans ce cadre là, plusieurs travaux ont été réalisés sur le SINR loss en contexte gaussien LR [Haimovich, 1996, Haimovich, 1997, Ginolhac et al., 2013] qui se sont intéressés, pour le premier, à la densité de probabilité de  $\hat{\rho}_{\text{LR}}$  et, pour le deuxième, à son moment d'ordre 1. Ces résultats ont cependant été obtenus en supposant le bruit LR orthogonal au signal d'intérêt, hypothèse non vérifiée dans tous les cas et même parfois grossière. Toutefois, [Haimovich, 1996, Haimovich, 1997] a obtenu la densité de probabilité de  $\hat{\rho}_{\text{LR}}$  pour une forte puissance de  $c$  comparée à celle de  $n$ . Puis, [Ginolhac et al., 2013] a dérivé une approximation de  $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{\text{LR}}]$  dans les conditions énoncées précédemment en contexte gaussien mais aussi en contexte SIRV [Yao, 1973] (*Spherically Invariant Random Vector*) pour la SCM et la NSCM. Pour résumer, en contexte gaussien et en considérant les approximations précédentes, on a :

$$\hat{\rho}_{\text{LR}} \sim f(\rho) \simeq \frac{K^r e^K}{\Gamma(r)} e^{-K/\rho} (1-\rho)^{r-1} \rho^{-(r+1)} \quad (1.49)$$

$$\mathbb{E}[\hat{\rho}_{\text{LR}}] \simeq 1 - \frac{r}{K} \quad (1.50)$$

Un des intérêts du filtre LR adaptatif est de ne nécessiter que  $K = 2r$  données secondaires pour une perte de 3dB en RSB par rapport au RSB optimal [Reed et al., 1974, KIRSTEIN and TUFTS, 1994, Haimovich, 1997] au lieu de  $K = 2m$  avec le filtre adaptatif non LR pour des performances équivalentes. De plus, on observe alors que bien que ces statistiques soient dépendantes de  $r$  et  $K$ , elles sont, de fait, indépendantes des paramètres du signal d'intérêt et de la puissance du bruit  $c$ . C'est pourquoi, le chapitre 2 sera dédié à l'obtention des statistiques dépendant aussi de ces paramètres en relaxant premièrement l'hypothèse d'orthogonalité de  $\mathbf{d}$  et du bruit LR. Puis, l'*improvement factor* s'écrit :

$$IF(\hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp) = \sigma^2 \mathbf{a}^H(\Theta_d) \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta_d) \quad (1.51)$$

De ce fait, avec  $\sigma^2 = 1$  :

$$\hat{\rho}_{\text{LR}} = \frac{IF^2(\hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp)}{(\mathbf{a}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{a})(\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a})} \quad (1.52)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\rho}_{\text{LR,dB}} = 2IF(\hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp)_{\text{dB}} - 10 \log_{10}((\mathbf{a}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{a})(\mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a})) \quad (1.53)$$

### 1.3.6 Interprétation du SINR loss

Il est important de noter que le SINR loss peut servir à plusieurs modes d'interprétation. Premièrement, nous pouvons chercher une expression de SINR loss théorique comme  $\rho$  ou  $\rho_{\text{LR}}$  caractérisant au mieux le SINR loss d'un filtre adaptatif comme  $\hat{\rho}$  ou  $\hat{\rho}_{\text{LR}}$ . De ce fait, on cherchera à ce que la courbe du SINR loss théorique déterministe soit la plus proche possible de celle du SINR loss du filtre adaptatif dont on veut prédire/connaître les performances théoriques.

Cependant, le SINR loss peut être aussi tout simplement vu comme ce pour quoi il a été défini, un moyen de calculer les pertes dues au fait d'utiliser un filtre plutôt que le filtre optimal. Dans ce cadre, on cherche à ce définir/construire des filtres pour lesquels les pertes dues au filtrage sont les plus faibles possible et idéalement que ses performances atteignent celles du filtre optimal. Alors, on voudra un SINR loss le plus proche de celui du filtre optimal, c'est-à-dire 1 quelque soient les paramètres du système.

## 1.4 Détection en milieu gaussien

### 1.4.1 Définition du problème

On s'intéresse dans cette section à la détection d'un éventuel signal d'intérêt  $\mathbf{d}$  noyé dans du bruit  $\mathbf{b}$  supposé gaussien dans un vecteur d'observation  $\mathbf{x}$ .

#### 1.4.1.1 Détection non adaptative

Après filtrage, le problème revient alors à résoudre le test binaire d'hypothèses suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : p = \mathbf{w}^H \mathbf{x} = b_0 \\ \mathcal{H}_1 : p = \mathbf{w}^H \mathbf{x} = d_0 + b_0 \end{cases} \quad (1.54)$$

où  $\mathcal{H}_0$  (resp.  $\mathcal{H}_1$ ) est l'hypothèse sans (resp. avec) signal d'intérêt et  $\mathbf{w}$  le filtre approprié au bruit  $\mathbf{b}$  considéré LR ou FR. Dans tous les cas, le filtre ou le signal filtré sera optimal lorsque les paramètres sous test  $\Theta$  seront égaux à ceux du signal d'intérêt. Dans ce cas, le détecteur utilisé sera maximal tout en ayant une réponse du bruit minimale. Cependant ce test d'hypothèses restera équivalent à traiter le test d'hypothèses binaire suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{b} \end{cases} \quad (1.55)$$

On distinguera alors le cas où la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  du bruit est totalement connue du cas où elle est connue à un facteur de puissance près :

$$\mathbf{R} = s^2 \mathbf{M} \quad (1.56)$$

où  $\mathbf{M}$  est une matrice hermitienne positive connue et  $s^2$  un facteur de puissance inconnu. Ces deux cas amèneront à différentes formes de détecteurs. On parle de détection non adaptative car ils supposent la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  du bruit  $\mathbf{b}$  connue, du moins à un facteur de puissance près. Le processus peut être décrit grâce au schéma en Fig.1.5.

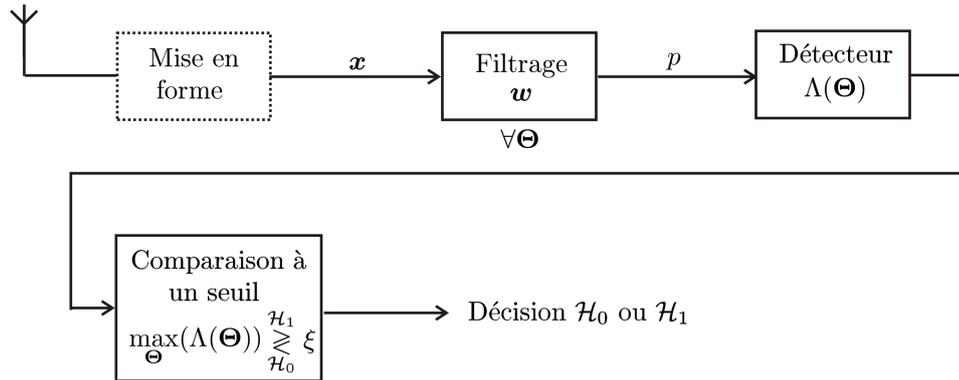


FIGURE 1.5 – Schéma de fonctionnement, détection non adaptative.

#### 1.4.1.2 Détection adaptative en 1 étape : le Generalized Likelihood Ratio Test

Cependant, dans le cas pratique où  $\mathbf{R}$  est inconnue, le formalisme des tests d'hypothèses binaires, comme ici, le *Generalized Likelihood Ratio Test* (GLRT) permet d'obtenir un détecteur en utilisant la

méthode du maximum de vraisemblance. On se place d'une manière générale sous le test d'hypothèses suivant où la matrice de covariance et les paramètres sont connus :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{x} \sim f_0(\mathbf{x}|\Theta_0) \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{x} \sim f_1(\mathbf{x}|\Theta_1) \end{cases} \quad (1.57)$$

Le test de détection optimal associé est alors le *Likelihood Ratio Test* (LRT) :

$$\frac{f_1(\mathbf{x}|\Theta_1)}{f_0(\mathbf{x}|\Theta_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \xi \quad (1.58)$$

Cependant, les valeurs exactes de  $\Theta_0$  et  $\Theta_1$  (typiquement les paramètres du bruit ou de localisation d'une cible) sont inconnues pour chaque hypothèse. Alors le GLRT est obtenu en remplaçant dans l'Eq.(1.58) les paramètres inconnus par ceux estimés :

$$\frac{f_1(\mathbf{x}|\hat{\Theta}_1)}{f_0(\mathbf{x}|\hat{\Theta}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \xi \quad (1.59)$$

où  $\xi$  est le seuil, fixé de manière obtenir une certaine probabilité de fausse alarme  $P_{fa}$  :

$$P_{fa} = \mathbb{P} \left( \frac{f_1(\mathbf{x}|\hat{\Theta}_1)}{f_0(\mathbf{x}|\hat{\Theta}_0)} > \xi \middle| \mathcal{H}_0 \right) \quad (1.60)$$

Cependant, cette méthode ne garantit pas la maximisation de la probabilité de détection :

$$P_d = \mathbb{P} \left( \frac{f_1(\mathbf{x}|\hat{\Theta}_1)}{f_0(\mathbf{x}|\hat{\Theta}_0)} > \xi \middle| \mathcal{H}_1 \right) \quad (1.61)$$

### 1.4.1.3 Détection adaptative en 2 étapes : le Generalized Likelihood Ratio Test en 2 étapes

Cependant, dans le cas pratique où  $\mathbf{R}$  est inconnue, on l'estime à partir de  $K$  données dites secondaires  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K$ . Le test d'hypothèses binaires devient alors :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{x} = \mathbf{b} & \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k, \quad k \in \llbracket 1, K \rrbracket \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{b} & \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k, \quad k \in \llbracket 1, K \rrbracket \end{cases} \quad (1.62)$$

De même on distinguera deux types de bruit :

- le bruit dit *homogène* où  $\mathbf{b}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_K$  sont iid et de matrice de covariance  $\mathbf{R}$  inconnue ;
- le bruit dit *inhomogène* où  $\mathbf{b}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_K$  sont indépendants,  $\mathbf{b} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, s^2\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{b}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ ,  $s^2$  est inconnu et  $\mathbf{R}$  une matrice hermitienne définie positive inconnue.

A partir de la matrice de covariance estimée, on estime les paramètres inconnus suivant la méthode du maximum de vraisemblance représentant la premier étape. La seconde étape consiste alors à construire un test du rapport de vraisemblance, le GLRT en 2 étapes. De même, cette méthode ne garantit pas la maximisation de la probabilité de détection. La détection adaptative peut alors représentée par le schéma en Fig.1.6.

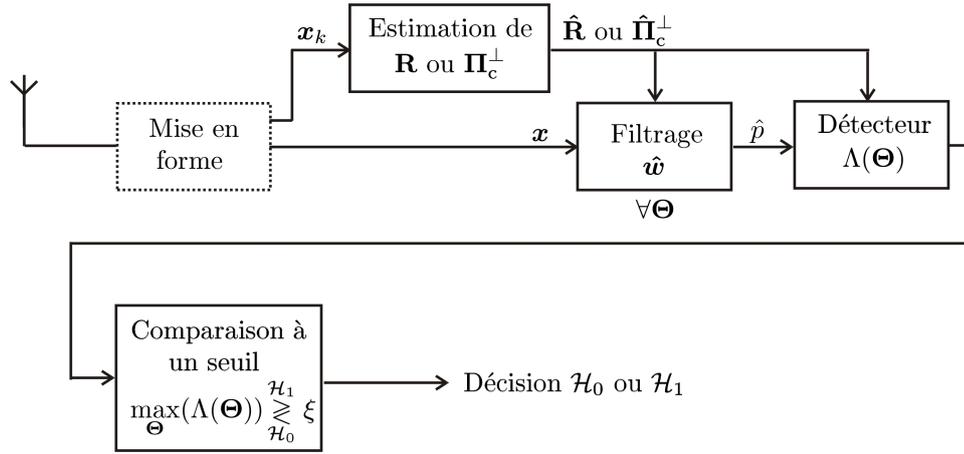


FIGURE 1.6 – Schéma de fonctionnement, détection adaptative.

### 1.4.2 Définition des mesures de performance d'un détecteur

Une fois le test de détection calculé, on obtient un détecteur  $\Lambda(\Theta)$ , variable aléatoire fonction du paramètre  $\Theta$  que l'on peut caractériser et ainsi comparer à d'autres détecteurs grâce aux mesures de performance définies ci-dessous. Elles se classent en deux catégories : les mesures de performance spécifiques à la détection et les mesures de performance traditionnellement utilisées pour un estimateur.

Pour un détecteur, on s'intéressera spécifiquement aux probabilités de fausse alarme et probabilités de détection en fonction de certains paramètres du système.

#### Définition 1.7 Probabilité de fausse alarme et probabilité de détection

Soit  $\Lambda(\Theta)$  un détecteur et  $\xi$  son seuil de détection. Alors les probabilités de fausse alarme et de détection sont définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_{fa} &= \mathbb{P}(\Lambda(\Theta) > \xi | \mathcal{H}_0) \\ P_d &= \mathbb{P}(\Lambda(\Theta) > \xi | \mathcal{H}_1) = 1 - \mathbb{P}(\Lambda(\Theta) < \xi | \mathcal{H}_1) \end{cases} \quad (1.63)$$

La  $P_{fa}$  s'appelle aussi erreur de première espèce et la  $P_d$ , complément à l'unité de la probabilité de non-détection, est aussi appelée erreur de seconde espèce.

Généralement, le seuil  $\xi$  est déterminé de façon à obtenir une certaine  $P_{fa}$  fixée par le cahier des charges. Ceci est possible grâce à la relation  $P_{fa}$ -seuil.

#### Définition 1.8 Relation $P_{fa}$ -seuil, propriété CFAR

Soit  $\Lambda(\Theta)$  un détecteur et  $\xi$  son seuil de détection. Alors la relation  $P_{fa}$ -seuil est définie de la façon suivante :

$$P_{fa} = \mathbb{P}(\Lambda(\Theta) > \xi | \mathcal{H}_0) = \int_{\xi}^{\infty} f_{\Lambda}(x | \mathcal{H}_0) \quad (1.64)$$

$$\Rightarrow P_{fa} = g(\xi) \quad (1.65)$$

où  $g(\cdot)$  est une fonction à déterminer.

Si cette relation est indépendant d'un paramètre, on dit que le détecteur est à Constant False Alarm Rate (CFAR) par rapport à ce paramètre.

Typiquement, on cherchera à ce que le détecteur soit CFAR par rapport à la puissance du bruit. Ensuite la  $P_d$  est déterminée en fonction du seuil et ainsi en fonction de la  $P_{fa}$  et du SNR. Et on obtient ainsi les performances de détection d'un détecteur pour des paramètres d'expérimentation fixes.

**Définition 1.9** Relation  $P_d$ - $P_{fa}$

Soit  $\Lambda(\Theta)$  un détecteur et  $\xi$  son seuil de détection. Alors la relation  $P_d$ - $P_{fa}$  est définie de la façon suivante :

$$P_d = \mathbb{P}(\Lambda(\Theta) > \xi | \mathcal{H}_1) = \int_{\xi}^{\infty} f_{\Lambda}(x | \mathcal{H}_1) \quad (1.66)$$

$$\Rightarrow P_d = h(\xi) = h(g^{-1}(P_{fa})) \quad (1.67)$$

où  $h(\cdot)$  est une fonction à déterminer.

Cette dernière relation est représentée, pour un seuil donné, grâce aux Courbes Opérationnelles de Récepteur (courbes COR, ROC pour *Receiver Operating Characteristics* en anglais) [Kay, 1998] dont on peut voir un exemple en Fig.1.7 pour plusieurs *Signal to Noise Ratio* (SNR ou RSB) en dB où la puissance du signal est la puissance du signal utile  $d$  et la puissance du bruit est celle de  $b$ .

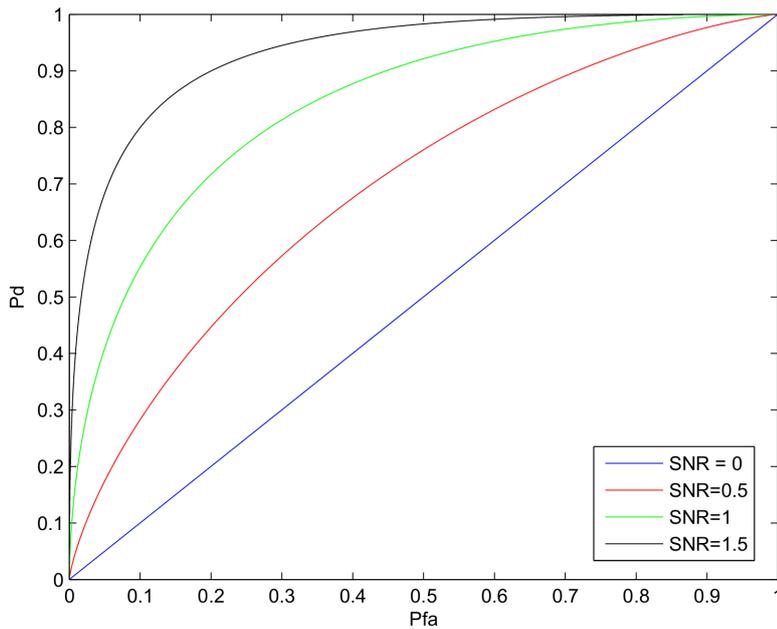


FIGURE 1.7 – Courbes COR d'un récepteur dans le cas d'un bruit gaussien centré.

On peut alors par exemple déterminer la valeur du SNR (ou d'autres paramètres comme le nombre de données secondaires) permettant d'atteindre les performances de détection voulues. Cependant, les courbes COR ne permettant pas de caractériser pleinement le détecteur en fonction de tous les paramètres du système, on travaille aussi sur des courbes supplémentaires représentant par exemple la relation  $P_{fa}$ -seuil,  $P_d$ -SNR ou encore  $P_d$ - $K$ .

De manière plus traditionnelle en estimation, les détecteurs utilisés étant aussi estimés lorsque la matrice de covariance du bruit est inconnue, les mesures de performance classiques d'estimateurs peuvent être utilisées comme le biais, la consistance, la loi asymptotique ou non, la vitesse de convergence, etc. Nous nous intéresserons spécifiquement ici au biais et à la convergence, quantités définies en Sec.1.2.1.2

et que nous pourrions visualiser grâce à l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM), mais aussi aux lois des estimateurs. De plus, afin de pouvoir déterminer les  $P_{fa}$  et  $P_d$ , on a besoin des lois des détecteurs. Deux types de lois seront alors présentes, les lois asymptotiques des quantités étudiées et les lois non asymptotiques, plus ardues à obtenir mais plus convoitées car définissant plus précisément le comportement statistique de la quantité étudiée, même en environnement gaussien. De manière non asymptotique, on aura :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \Lambda(\Theta) \sim f_\Lambda(x|\mathcal{H}_0) \\ \mathcal{H}_1 : \Lambda(\Theta) \sim f_\Lambda(x|\mathcal{H}_1) \end{cases} \quad (1.68)$$

où  $f_\Lambda(x|\mathcal{H}_0)$  (resp.  $f_\Lambda(x|\mathcal{H}_1)$ ) sont les densités de probabilité (PDF ou DDP) de  $\Lambda$  sous  $\mathcal{H}_0$  (resp.  $\mathcal{H}_1$ ). Ces distributions sont généralement fonction de  $\Theta$ , de la dimension  $m$  des données, *etc.* Puis, en prenant un régime asymptotique quelconque, on a :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \Lambda(\Theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0 \sim \bar{f}_\Lambda(x|\mathcal{H}_0) \\ \mathcal{H}_1 : \Lambda(\Theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1 \sim \bar{f}_\Lambda(x|\mathcal{H}_1) \end{cases} \quad (1.69)$$

où  $X_0$  et  $X_1$  sont des variables aléatoires et  $\bar{f}_\Lambda(x|\mathcal{H}_0)$  (resp.  $\bar{f}_\Lambda(x|\mathcal{H}_1)$ ) sont les PDFs asymptotiques de  $\Lambda$  sous  $\mathcal{H}_0$  (resp.  $\mathcal{H}_1$ ).

### 1.4.3 Détecteurs non adaptatifs

Cette sous-section et la suivante présentent les détecteurs GLRT étudiés dans cette thèse, le détecteur historique ainsi que leurs performances de détection quand elles existent. Le premier détecteur correspondant au LRT en milieu gaussien, calculé pour  $\mathbf{R}$  connue et  $s = 1$ . Ce détecteur est le détecteur *Matched Filter* (MF) [Kay, 1998] :

$$\Lambda_{\text{MF}}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}|^2}{\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta)} \underset{\mathcal{H}_0}{\underset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \xi_{\text{MF}} \quad (1.70)$$

où  $\xi_{\text{MF}}$  est le seuil de détection. Il est à noter que ce détecteur revient à comparer la puissance en sortie du filtre adapté  $\mathbf{w}$  présenté dans la section précédente à un seuil  $\xi$  :

$$|\mathbf{w}^H \mathbf{x}|^2 \underset{\mathcal{H}_0}{\underset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \xi = \xi_{\text{MF}} (\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta)) \quad (1.71)$$

Les lois du détecteur MF sont connues sous les deux hypothèses  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  [Kay, 1998] :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \Lambda_{\text{MF}}(\Theta) \sim \frac{1}{2} \chi^2(2) \\ \mathcal{H}_1 : \Lambda_{\text{MF}}(\Theta) \sim \frac{1}{2} \chi^2(2, 2|\alpha|^2 \mathbf{a}(\Theta_d)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta_d)) \end{cases} \quad (1.72)$$

où  $\chi^2(2)$  est une loi du Chi2 à deux degrés de liberté et  $\chi^2(2, \delta)$  une loi du Chi2 décentrée à deux degrés de liberté de paramètre de décentrement  $\delta$ . On peut alors déduire la relation  $P_{fa}$ -seuil à partir de la loi sous  $\mathcal{H}_0$  et la relation  $P_d$ - $P_{fa}$  à partir de la loi sous  $\mathcal{H}_1$  :

$$\begin{cases} \xi_{\text{MF}} = -\ln(P_{fa}) \\ P_d = 1 - F_{\chi^2(2, \delta)}(2\xi_{\text{MF}}) \end{cases} \quad (1.73)$$

avec  $\delta = 2|\alpha|^2 \mathbf{a}(\Theta_d)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta_d)$  et  $F_{\chi^2(2, \delta)}(x)$  la fonction de répartition de la loi  $\chi^2(2, \delta)$ . Le détecteur MF est donc CFAR par rapport à  $\alpha$ .

Puis, lorsque  $\mathbf{R}$  est connue à un facteur de puissance près, le LRT en milieu gaussien pour un bruit FR qui en découle est le détecteur *Normalized Matched Filter* (NMF) [Scharf and Friedlander, 1994] :

$$\Lambda(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x})} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \xi_{\text{NMF}} \quad (1.74)$$

où  $\xi_{\text{NMF}}$  est le seuil de détection. De même, les lois du détecteur NMF sont connues sous les deux hypothèses  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  [Scharf and Friedlander, 1994] :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \Lambda(\Theta) \sim \mathcal{B}(1, m) \\ \mathcal{H}_1 : \Lambda(\Theta) \sim \frac{\mathcal{F}(2, 2(m-1), 2|\alpha|^2 \mathbf{a}(\Theta_d)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta_d))}{\mathcal{F}(2, 2(m-1), 2|\alpha|^2 \mathbf{a}(\Theta_d)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta_d)) + m - 1} \end{cases} \quad (1.75)$$

où  $\mathcal{B}(\cdot)$  est la loi Beta de première espèce et  $\mathcal{F}(\cdot)$  la loi de Fisher décentré. On peut alors déduire la relation  $P_{fa}$ -seuil et la relation  $P_d$ - $P_{fa}$  :

$$\begin{cases} \xi_{\text{NMF}} = 1 - P_{fa}^{1/(m-1)} \\ P_d = 1 - (1 - \xi_{\text{NMF}})^{m-1} e^{-SNR(1-\xi_{\text{NMF}})} \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} \left( \frac{\xi_{\text{NMF}}}{1 - \xi_{\text{NMF}}} \right)^i C_{m-1}^i \sum_{p=0}^{i-1} \frac{SNR^p}{p!} (1 - \xi_{\text{NMF}})^p \end{cases} \quad (1.76)$$

où  $C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$  est le coefficient binomial. Le détecteur NMF est donc CFAR par rapport à  $\alpha$ ,  $\sigma^2$  et  $\mathbf{R}$ .

Enfin, dans le cas d'un bruit LR de puissance assez forte par rapport à  $\sigma^2$ , lorsque  $\mathbf{R}$  est connue à un facteur de puissance près, le GLRT en milieu gaussien peut être approximé sans grande perte [Kirstein and Tufts, 1994, Rangaswamy et al., 2004] par le détecteur *Low Rank Normalized Matched Filter* (LR-NMF) [Rangaswamy et al., 2004] :

$$\Lambda_{\text{LR}}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{x})} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \xi_{\text{LRNMF}} \quad (1.77)$$

où  $\xi_{\text{LRNMF}}$  est le seuil de détection. Puis, lorsqu'on suppose  $r$  faible et la partie bruit rang faible  $c$  de forte puissance, on a les lois suivantes du détecteur LR-NMF sous  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \Lambda_{\text{LR}}(\Theta) \sim f_0^{(\Lambda)}(x) = (m-r-1)(1-x)^{m-r-2} \\ \mathcal{H}_1 : \Lambda_{\text{LR}}(\Theta) \sim f_1^{(\Lambda)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-A^2} \frac{A^{2i} x^i (1-x)^{m-r-2}}{i! \beta(m-r-1, i+1)}, \quad x \in [0, 1] \\ \text{avec } A = \frac{|\alpha|}{\sigma^2} \|\mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta_d)\|_2 \\ \beta(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \end{cases} \quad (1.78)$$

Et on peut en déduire les relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ - $P_{fa}$  :

$$P_{fa} = (1 - \xi_{\text{LRNMF}})^{m-r-1} \quad (1.79)$$

$$P_d = 1 - (1 - \xi_{\text{LRNMF}})^{m-r-1} \sum_{i=1}^{m-r-1} \frac{\Gamma(m-r)}{\Gamma(i+1)\Gamma(m-r-i)} P \quad (1.80)$$

$$\text{avec } \begin{cases} P = \left( \frac{\xi_{\text{LRNMF}}}{1 - \xi_{\text{LRNMF}}} \right)^i (1 - \Gamma_{\text{inc}}(A^2(1 - \xi_{\text{LRNMF}}), i+1)) \\ \Gamma_{\text{inc}}(a, b) = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^a t^{b-1} e^{-t} dt \end{cases} \quad (1.81)$$

Le détecteur LR-NMF est donc CFAR par rapport à  $\alpha$ ,  $\sigma^2$  et la puissance du bruit LR. Cependant, de manière plus générale, *i.e.* pour un bruit de matrice de covariance quelconque, la loi du détecteur sous  $\mathcal{H}_0$  ainsi que sa relation  $P_{fa}$ -seuil a été dérivée dans [Anitori et al., 2008].

#### 1.4.4 Détecteurs adaptatifs

Les détecteurs présentés précédemment supposent la matrice de covariance du bruit connue, ce qui n'est généralement pas le cas. On l'estime donc traditionnellement à partir de données dites secondaires dans lesquelles le signal à détecter est absent. L'estimateur utilisé en milieu gaussien sera ici la SCM. Les traitements construits à partir de cette estimation sont alors appelés traitements adaptatifs. Cette partie vise donc à présenter les détecteurs adaptatifs pris en compte dans cette thèse en milieu gaussien. De même que pour les détecteurs non adaptatifs, il est important de déterminer les performances de détection et de fausse alarme en fonction du seuil afin de pouvoir le déterminer pour fixer la probabilité de fausse alarme à une valeur voulue.

Dans ce cadre, pour un bruit dit homogène, le GLRT en milieu gaussien pour un bruit FR qui en découle est le détecteur de Kelly [Kelly, 1986] qui a été complètement caractérisé. Cependant un autre détecteur adaptatif, le détecteur *Adaptive Matched Filter* (AMF), dit en 2 étapes fut proposé par [Robey et al., 1992] en remplaçant  $\mathbf{R}$  par  $\hat{\mathbf{R}}$  dans le détecteur MF. Ce détecteur fut proposé car, la perte en performance étant minimale, il est aussi plus simple en calcul.

Puis, pour un bruit dit inhomogène, bruit considéré dans la suite du manuscrit, le GLRT 2 étapes en milieu gaussien pour un bruit FR qui en découle est le détecteur *Adaptive Normalized Matched Filter* (ANMF) [Kraut et al., 2001] :

$$\hat{\Lambda}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x})} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \xi_{\text{ANMF}} \quad (1.82)$$

où  $\xi_{\text{ANMF}}$  est le seuil de détection. Afin de simplifier l'étude des lois de ce détecteur, on le réécrit de la manière suivant :

$$T_{\text{ANMF}}(\Theta) = \frac{\hat{\Lambda}(\Theta)}{1 - \hat{\Lambda}(\Theta)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \eta_{\text{ANMF}} = \frac{\xi_{\text{ANMF}}}{1 - \xi_{\text{ANMF}}} \quad (1.83)$$

Les lois de  $T_{\text{ANMF}}(\Theta)$  sont alors été calculées sous  $\mathcal{H}_0$  [Kraut et al., 2001] et  $\mathcal{H}_1$  [Michels et al., 2000, Kraut et al., 2001]. [Michels et al., 2000] a pu ainsi déduire les relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ - $P_{fa}$  associées au détecteur ANMF.

Enfin, dans le cas d'un bruit LR inhomogène, le GLRT 2 étapes en milieu gaussien équivalent est le détecteur *Low Rank Adaptive Normalized Matched Filter* (LR-ANMF) [Kirstein and Tufts, 1994, Rangaswamy et al., 2004] :

$$\hat{\Lambda}_{\text{LR}}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{x})} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \xi_{\text{LRANMF}} \quad (1.84)$$

où  $\xi_{\text{LRANMF}}$  est le seuil de détection. Dans ce cas précis, il n'existe aucune littérature déterminant théoriquement et explicitement les lois du détecteur ainsi que les relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ - $P_{fa}$ . Seuls des travaux expérimentaux ont été réalisés [Rangaswamy et al., 2004] ainsi qu'une formulation de la densité de probabilité sous  $\mathcal{H}_0$  et de la relation  $P_{fa}$ -seuil par [Anitori et al., 2008], formulation très générale et non détaillée où les calculs n'ont pas été poussés très loin.

## 1.5 Contexte applicatif

Le cadre applicatif de cette thèse concerne les traitements spatiotemporels radar STAP et MIMO-STAP. Nous aurons tout de même recours à une application simple totalement maîtrisée pour la validation des résultats dans le cadre d'une application avec brouilleurs.

### 1.5.1 Application brouillage

L'application brouillage vise à détecter une cible  $\mathbf{d}$  caractérisée par son angle d'arrivée (AoA) grâce à une antenne de  $m$  capteurs malgré la présence de  $r$  brouilleurs ( $\mathbf{c}$ ), *i.e.* de  $r$  cibles synthétiques d'AoA  $\theta_{\mathbf{c},i}$ ,  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , et de bruit blanc  $\mathbf{b}$ . Le signal reçu  $\mathbf{x}_k$  est alors un mélange de différents signaux :

- éventuellement le signal d'intérêt  $\mathbf{d}$  provenant d'une cible ;
- la réponse des brouilleurs  $\mathbf{c}$  ;
- le bruit blanc  $\mathbf{b}$  causé par l'électronique.

Sous l'hypothèse de cible présente  $\mathcal{H}_1$ , on peut donc écrire le signal reçu de la façon suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{c} + \mathbf{b} \quad (1.85)$$

L'ensemble des  $K$  signaux (données secondaires) contenant uniquement la réponse des brouilleurs et le bruit blanc et servant à l'estimation de la matrice de covariance du bruit total s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{b}_k \quad (1.86)$$

Enfin sous l'hypothèse de cible absente  $\mathcal{H}_0$ , la donnée sous test ne contient que du bruit. Les données de l'application brouillage se résument donc ainsi :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{n} & \mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k, \quad k \in \llbracket 1, K \rrbracket \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{c} + \mathbf{n} & \mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k, \quad k \in \llbracket 1, K \rrbracket \end{cases} \quad (1.87)$$

Les données sont ainsi de taille :

$$m = \text{nombre de capteurs} \quad (1.88)$$

### 1.5.2 Traitement STAP

Le traitement STAP pour *Space Time Adaptive Processing* [Ward, 1994], est un traitement radar visant à déterminer l'élévation et/ou l'azimut ainsi que la vitesse d'une cible en mouvement grâce à un radar aéroporté comportant une antenne linéaire uniforme composée de  $N$  capteurs uniformément répartis envoyant un signal de  $M$  impulsions *Doppler*. Après mise en forme des signaux, les données STAP forment un *data cube* contenant les réponses spatio-temporelles des  $K + 1$  différentes données d'observations. Pour chaque donnée d'observation  $k$ , les informations temporelles et spatiales sont concaténées dans un vecteur comme montré dans la Fig. 5.3 pour former un vecteur du signal reçu  $\mathbf{x}_k$  de taille  $m = NM$ . Ce signal reçu  $\mathbf{x}_k$  est alors un mélange de différents signaux :

- éventuellement le signal d'intérêt  $\mathbf{d}$  provenant d'une cible
- le *clutter* ou fouillis  $\mathbf{c}$  qui est la réponse du sol
- le bruit blanc  $\mathbf{b}$  causé par l'électronique.

Nous ne tiendrons pas compte ici d'éventuels brouilleurs. De plus, nous supposons par la suite que la cible est présente dans une seule case distance, appelée donnée sous test et notée  $\mathbf{x}$  bien qu'en pratique, il est courant que la réponse de la cible s'étale sur les cases distance d'à côté. Pour palier ce problème, on ne prends pas en compte ces cases qu'on appelle alors cellules de garde. La différence principale avec l'application précédente en terme de modèle des données sera ainsi la taille des données à traiter :

$$m = NM = \text{nombre de capteurs} \times \text{nombre d'impulsions} \quad (1.89)$$

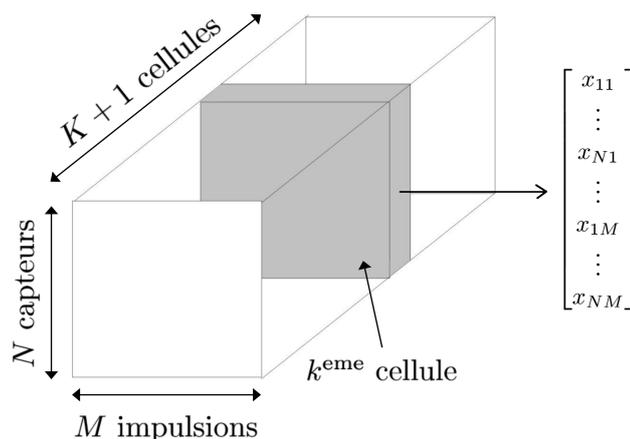


FIGURE 1.8 – Data cube STAP et arrangement des données

### 1.5.3 Traitement MIMO-STAP

Le traitement MIMO-STAP pour *Multi Input Multi Output-Space Time Adaptive Processing* [Chong, 2011], est un traitement radar visant aussi à déterminer l'élévation et/ou l'azimut ainsi que la vitesse d'une cible en mouvement grâce à un radar aéroporté comportant une antenne généralement linéaire uniforme composée de  $L$  capteurs d'émission émettant  $M$  impulsions *Doppler* et  $N$  capteurs de réception. Après mise en forme des signaux et décodage, les données MIMO-STAP forment un *data cube* contenant les réponses spatio-temporelles des  $K + 1$  différentes données d'observations. Pour chaque donnée d'observation  $k$ , les informations temporelles et spatiales sont concaténées dans un vecteur comme montré dans la Fig. 1.9 pour former un vecteur du signal reçu  $x_k$  de taille  $m = LNM$ .

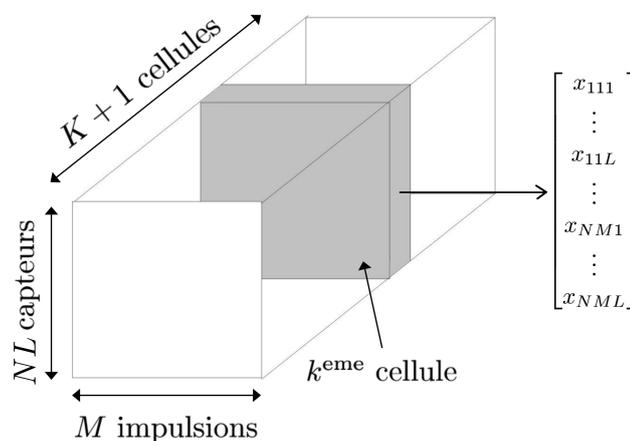


FIGURE 1.9 – Data cube MIMO-STAP et arrangement des données

La différence principale avec l'application STAP précédente en terme de modèle des données sera ainsi la taille des données à traiter :

$$\begin{aligned}
 m &= LNM && (1.90) \\
 &= \text{nombre de capteurs émetteurs} \times \text{nombre de capteurs récepteurs} \times \text{nombre d'impulsions}
 \end{aligned}$$

On observe donc qu'en ajoutant une dimension à chaque application (temporelle en STAP puis antennes émettrice et réceptrice en MIMO-STAP), la taille des données augmente naturellement.

## 1.6 Motivations RMT

Le cadre de cette thèse concerne l'étude des traitements LR adaptatifs basés sur la SCM et appliqués aux applications précédemment présentées dont les applications spatio-temporelles STAP et MIMO-STAP. C'est par une réflexion sur ces applications que l'on s'aperçoit que le régime en grandes dimensions est à explorer. Premièrement, on a vu que d'application en application, la taille des données augmente. De plus l'application MIMO-STAP est par définition MIMO et suppose donc une grande dimension  $m$  du vecteur d'observation. Enfin, ces applications sont des applications spatio-temporelles aéroportées. De ce fait, bien que le nombre de capteurs  $N$  reste plus ou moins fixe dû à la dimension physique limitée du système, nous ne sommes pas limités sur le nombre d'impulsions  $M$  à traiter, en liaison directe avec la précision temporelle. Ainsi, voulant la plus grande précision temporelle possible, le nombre d'impulsions  $M$  peut drastiquement augmenter ainsi que la dimension du vecteur  $\mathbf{x}$  :  $m = NM$  en STAP. Nous sommes alors, de par ces applications spatio-temporelles, en régimes en grandes dimensions. Il est alors intéressant de considérer le régime dans lequel  $m$  peut tendre vers l'infini.

De plus, on rappelle que les traitements adaptatifs concernés sont fondés sur la SCM. Cet estimateur de matrice de covariance, estimateur utilisé en théorie des matrices aléatoires (RMT pour *Random Matrix Theory*) en grandes dimensions, est alors une variable aléatoire et peut être considérée comme une perturbation fonction du nombre de données secondaires  $K$ . En régime classique, *i.e.* quand  $K$  tend vers l'infini à dimension  $m$  fixe, la SCM est consistante. De ce fait, les projecteurs estimés ainsi que les quantités fonction de ces estimateurs le sont aussi par le *continuous mapping theorem* [Billingsley, 1995]. Cependant, dans le régime en grandes dimensions, *i.e.* quand  $m$  et  $K$  tendent vers l'infini à rapport constant, les quantités fonction de la SCM ou des projecteurs estimés ne sont plus consistants, introduisant un biais.

Il est ainsi reconnu que la RMT en grandes dimensions permet de caractériser les performances de quantités aléatoires de façon beaucoup plus précise. En effet, cette théorie permettant de connaître de manière très précise la distribution spectrale des matrices aléatoires (comme la SCM), il est possible de déterminer leur comportement statistique. Les outils apportés par ce domaine sont donc, bien que parfois difficiles à manipuler, des outils très appréciés. De nombreuses études ont ainsi été traitées sous le regard neuf des matrices aléatoires en grandes dimensions comme en physique [Mehta, 2004, Dyson, 1962], en finance [Laloux et al., 2000], en biologie évolutionniste [Arnold et al., 1994] ou encore en télécommunication sans fil [Tse and Hanly, 1999]. De plus, il est à noter que les performances sont souvent très bonnes pour des faibles valeurs de  $K$  et  $m$ , lorsque  $K$  et  $m$  sont du même ordre de grandeur [Mestre and Lagunas, 2008].

Il est par conséquent logique de considérer le filtrage et la détection dans ce nouveau régime et par la théorie des matrices aléatoires en grandes dimensions qui est expliquée plus en détail dans la section suivante.

## 1.7 Fonctionnement et généralités sur la théorie des matrices aléatoires en grandes dimensions

Ces dernières années, les outils de RMT en grandes dimensions ont été largement utilisés dans de nombreux domaines comme en télécommunication, physique nucléaire ou en théorie des jeux. Plus proche de ce qui nous intéresse, ces outils ont été utilisés afin d'améliorer l'algorithme MUSIC [Mestre

and Lagunas, 2008, Couillet and Hachem, 2013, Couillet et al., 2014] et en détection adaptée à sous-espace [Nadakuditi and Silverstein, 2010, Asendorf and Nadakuditi, 2013] où le rang  $r$  n'est pas connu. Le principe est d'examiner le comportement spectral de la matrice de covariance estimée  $\hat{\mathbf{R}}$  grâce à ces outils afin d'obtenir sa convergence, performance et distribution asymptotique quand  $m$  et  $K$  tendent vers l'infini au même rapport, *i.e.*  $c_m \triangleq m/K \rightarrow c \in ]0, +\infty)$  pour différents modèles de matrice de covariance  $\hat{\mathbf{R}}$  des données observées comme en [Mestre, 2008a, Mestre, 2008b, Mestre and Lagunas, 2008], [Couillet and Hachem, 2013] et [Vallet et al., 2012a].

Cette section est ainsi dédiée à la présentation des résultats connus de RMT pour l'étude du comportement spectral asymptotique de la SCM ainsi que des quantités aléatoires comme les formes quadratiques (FQ) simples en régime en grandes dimensions. En effet, les détecteurs et filtres présentés précédemment étant des fonctions de FQs, intéressons-nous à la littérature concernant ces FQs.

### 1.7.1 Étude du comportement des valeurs propres

Commençons par un exemple où l'on estime la matrice de covariance d'un bruit blanc gaussien de puissance unitaire. Dans ce cas, on a  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_m$  et la valeur propre qui lui est associée est 1. Visualisons donc l'histogramme (nommé abusivement densité de probabilité empirique) des valeurs propres de la SCM du bruit blanc en Fig.1.10 pour  $m = 256$  et deux valeurs différentes de  $K$ .

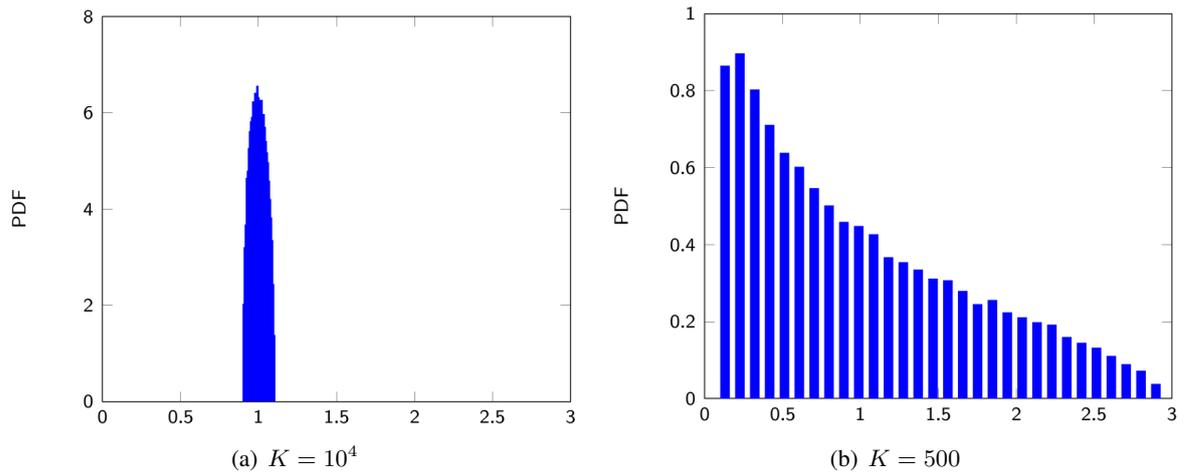


FIGURE 1.10 – Histogramme des valeurs propres de SCM d'un bruit blanc,  $m = 256$ .

On observe alors sur la figure de gauche que quand  $K$  est très grand devant  $m$  ou en d'autres mots quand  $K$  tend vers l'infini à  $m$  fixé toutes les valeurs propres sont proches de 1 et tendent vers 1. Cependant, à droite, lorsque  $K$  est du même ordre de grandeur que  $m$ , les valeurs propres sont beaucoup plus étalées. La densité de probabilité empirique a alors un support plus étalé dont la moyenne est même différente de 1. Cette densité est par ailleurs dissymétrique. De ce fait, comme la plupart des estimateurs supposent que la densité de probabilité empirique ne change pas en fonction de  $K$ , il en résulte forcément un biais, dû à cette mauvaise hypothèse sur la densité de probabilité empirique des valeurs propres de la SCM. Il y a ainsi tout intérêt à déterminer cette densité de probabilité en fonction de  $m$  et  $K$ .

#### 1.7.1.1 Généralités, la loi de Marčenko-Pastur

Le comportement asymptotique des valeurs propres quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même rapport, *i.e.*  $m/K \rightarrow c$  peut être décrit par la convergence asymptotique de leur fonction de répartition empirique  $\hat{F}_m(x)$  ou de

leur histogramme normalisé  $\hat{f}_m(x)$  (nommé abusivement densité de probabilité empirique<sup>1</sup>). On pourra voir que sous certaines conditions décrites plus tard,  $\hat{f}_m(x)$  converge presque sûrement vers une densité de probabilité  $f(x)$  déterministe et à support compact. La DDP asymptotique  $f(x)$  permettra alors de caractériser le modèle de données/de SCM. La fonction de répartition empirique des valeurs propres de la SCM  $\hat{\mathbf{R}}$  est définie de la manière suivante :

$$\hat{F}_m(x) = \frac{1}{m} \# \left\{ k : \hat{\lambda}_k \leq x \right\} \quad (1.91)$$

Cependant, en pratique, la caractérisation asymptotique de  $\hat{F}_m(x)$  est trop compliquée. De ce fait, on préfère étudier la convergence de sa transformée de Stieltjes  $\mathcal{ST}[\cdot]$  définie par :

$$\hat{b}_m(z) = \mathcal{ST} \left[ \hat{F}_m(x) \right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} d\hat{F}_m(x) \quad (1.92)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\hat{\lambda}_i - z} = \frac{1}{m} \text{tr} \left[ (\hat{\mathbf{R}} - z\mathbf{I}_m)^{-1} \right] \quad (1.93)$$

avec  $z \in \mathbb{C}^+ \equiv \{z \in \mathbb{C} : \Im[z] > 0\}$  et qui converge presque sûrement vers une fonction appelée  $\bar{b}_m(z)$ . Il est alors intéressant de noter que la DDP empirique peut être déterminée à partir de la transformée de Stieltjes de la fonction de répartition associée par la relation suivante :

$$\hat{f}_m(x) = \lim_{\Im[z] \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \Im \left[ \hat{b}_m(z) \right] \quad (1.94)$$

avec  $x \in \mathbb{R}$ . D'une autre manière, la détermination de  $\hat{f}_m(x)$  (resp.  $f(x)$ ) peut être obtenue à partir de  $\hat{b}_m(z)$  (resp.  $\bar{b}_m(z)$ ). Cependant, afin de prouver les différentes convergences nous aurons besoin de certaines hypothèses standard définies ci-dessous.

- (H1)** La norme spectrale de  $\mathbf{R}$  est uniformément bornée  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , i.e.  $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket$ ,  $|\lambda_i| < \infty$  quelque soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Plus précisément, soient  $\mathbf{R}_m$  la matrice de covariance indiquée par sa taille et  $\lambda_{1,m}, \dots, \lambda_{m,m}$  ses valeurs propres. On suppose alors que  $\sup_m \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_{i,m}| < \infty$ .
- (H2)** Soit  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{m \times K}$  d'entrées  $y_{ij}$  iid de moyenne nulle et de variance 1, absolument continues et de moment d'ordre 8 fini. La DDP de  $\mathbf{Y}$  est invariante par multiplication à droite par une matrice déterministe unitaire.

Dans ce cas,  $\mathbf{Y}$  est alors une matrice de bruit blanc et la SCM de  $\mathbf{X} = \mathbf{R}^{1/2}\mathbf{Y}$  est :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H \mathbf{R}^{1/2} \quad (1.95)$$

Si  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_m$ , alors  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H$  et on retrouve alors l'exemple du début de section.

Pour tout  $z \in \mathbb{C}^+$  et sous les hypothèses précédentes, quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même rapport ( $m/K \rightarrow c \in \mathbb{R}^{+*}$ ), alors la transformée de Stieltjes  $\hat{b}_m(z)$  de la fonction de répartition converge presque sûrement vers  $\bar{b}_m(z)$ , où  $\bar{b}_m(z)$  est l'unique solution de l'équation suivante dans l'ensemble  $\{\bar{b}_m(z) \in \mathbb{C} : -(1-c)/z + c\bar{b}_m(z) \in \mathbb{C}^+\}$  :

$$\bar{b}_m(z) = \frac{1}{1-c-cz\bar{b}_m(z)-z} \quad (1.96)$$

1. En effet, cet histogramme est en fait une mesure spectrale empirique soit une somme de Dirac,  $\hat{f}_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta_{\hat{\lambda}_i}$  où  $\hat{\lambda}_i$  est la  $i$ -ème valeur propre de la SCM.  $\hat{f}_m(x)$  n'est donc pas une densité de probabilité.

La densité de probabilité associée est alors la loi Marčenko-Pastur [Marčenko and Pastur, 1967] définie de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{c}), & \text{si } x = 0 \text{ et } c > 1 \\ \frac{1}{2\pi cx} \sqrt{(\lambda_- - x)(x - \lambda_+)}, & \text{si } x \in ]\lambda_-, \lambda_+[ \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.97)$$

avec  $\lambda_- = (1 - \sqrt{c})^2$  et  $\lambda_+ = (1 + \sqrt{c})^2$ . Cette loi est à support compact  $] (1 - \sqrt{c})^2, (1 + \sqrt{c})^2 [$  et la valeur propre maximale (resp. minimale) de  $\frac{1}{K} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H$  tends presque sûrement vers  $(1 + \sqrt{c})^2$  (resp.  $(1 - \sqrt{c})^2$ ). Plusieurs exemples peuvent être observés en Fig.1.11 pour différentes valeurs de  $c$ .

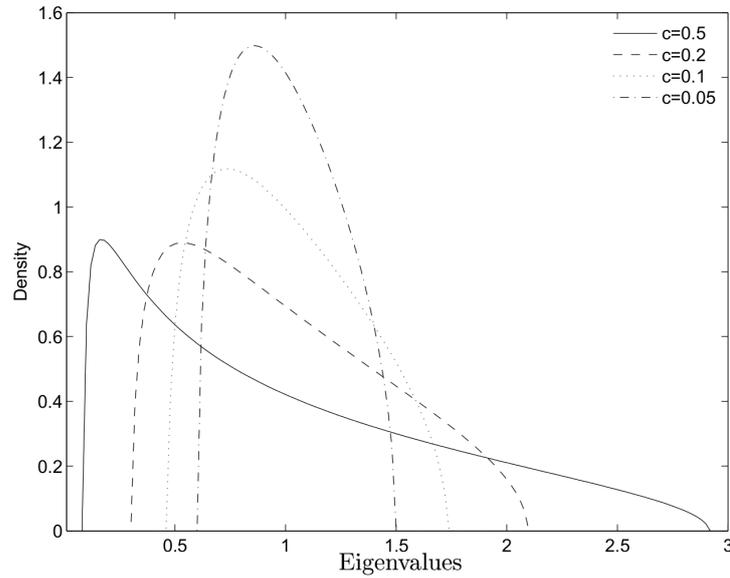


FIGURE 1.11 – Loi Marčenko-Pastur pour différentes valeurs de  $c$ .

## 1.7.2 Modèles de SCM

On s'intéresse maintenant à des modèles de matrice de covariance plus complexes que l'identité, des modèles pour du bruit et du signal utile. On rangera toujours les  $K$  signaux reçus  $\mathbf{x}_k$  de la manière suivante  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K]$  et que l'on peut écrire :

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{Y} \quad (1.98)$$

où  $\mathbf{R}^{1/2}$  est la matrice  $m \times m$  racine carrée hermitienne et définie semi-positive de la vraie matrice de covariance  $\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H]$ . Si  $\mathbf{R}$  peut être décomposée de la manière suivante,  $\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H$  où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{\Lambda}$  sont les matrices contenant respectivement les vecteurs propres et les valeurs propres, alors  $\mathbf{R}^{1/2} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{U}^H$ . Les différences de modèle de matrice de covariance se trouveront bien sûr dans la définition de  $\mathbf{R}$  donc de  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \mathbf{X} \mathbf{X}^H = \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H$  et par conséquent dans la DDP asymptotique des valeurs propres de cette dernière.

### 1.7.2.1 Modèle « G-MUSIC »

Ce qu'on appellera le modèle « G-MUSIC » est le modèle utilisé pour l'algorithme G-MUSIC introduit dans [Mestre, 2008a, Mestre and Lagunas, 2008]. La matrice de covariance  $\mathbf{R}$  se décompose comme suit :

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{\bar{M}} \lambda_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H \quad (1.99)$$

où  $\lambda_i$ ,  $i \in \llbracket 1; \bar{M} \rrbracket$ , sont les  $\bar{M}$  valeurs propres distinctes de  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{U}_i$  les sous-espaces associés avec  $\lambda_1 > \dots > \lambda_{\bar{M}} \geq 0$ .  $\lambda_i$  est de multiplicité  $\mathcal{K}_i$ . On a donc  $\mathbf{U}_i \in \mathbb{C}^{m \times \mathcal{K}_i}$  et  $\sum_{i=1}^{\bar{M}} \mathcal{K}_i = m$ .

La particularité de ce modèle est que la multiplicité  $\mathcal{K}_i$  augmente avec  $m$  [Mestre, 2008a, Couillet and Debbah, 2011] :

$$\frac{\mathcal{K}_i}{m} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{m, K \rightarrow \infty} q_i \in ]0, 1], \quad \forall i \in \llbracket 1, \bar{M} \rrbracket \quad (1.100)$$

avec  $\sum_i q_i = 1$ .

Ainsi, la convergence de la transformée de Stieltjes de la fonction de répartition associée au modèle est décrite par le théorème suivant.

**Théorème 1.10** [Silverstein, 1995]

Pour tout  $z \in \mathbb{C}^+$ , sous (H1-H2) et quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même rapport ( $m/K \rightarrow c \in \mathbb{R}^{+*}$ ),  $\forall i \in \llbracket 1, \bar{M} \rrbracket$ , alors

$$\left| \hat{b}_m(z) - \bar{b}_m(z) \right| \xrightarrow{\text{p.s.}} 0, \quad (1.101)$$

où  $\bar{b}_m(z)$  est l'unique solution de l'équation suivante dans l'ensemble  $\{\bar{b}_m(z) \in \mathbb{C} : -(1-c)/z + c\bar{b}_m(z) \in \mathbb{C}^+\}$  :

$$\bar{b}_m(z) = \sum_{i=1}^{\bar{M}} q_i \frac{1}{\lambda_i(1-c - cz\bar{b}_m(z)) - z} \quad (1.102)$$

Cependant, en pratique, il est impossible de trouver la solution analytique  $\bar{b}_m(z)$  à l'Eq.(1.102) dû au théorème d'Abel-Ruffini [Abel, 1824] car cela reviendrait à trouver les racines d'un polynôme de degré  $\bar{M}+1$ . De ce fait, on résout numériquement l'Eq.(1.102) puis on calcule  $f(x)$  grâce à la relation suivante :

$$\hat{f}_m(x) \xrightarrow{\text{p.s.}} f(x) = \lim_{\Im[z] \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \Im [\bar{b}_m(z)] \quad (1.103)$$

On peut alors visualiser des exemples de DDP asymptotique  $f(x)$  des valeurs propres de la SCM  $\hat{\mathbf{R}}$  en Fig. 1.12 pour deux valeurs de  $c$ . Les quatre valeurs propres de  $\mathbf{R}$  sont 1, 2, 3, et 7 et de même multiplicité quelque soit  $m$  (i.e.  $q_i = 0, 25$ ). On note alors que, quand  $c$  augmente, le support des *clusters* augmente aussi jusqu'à se toucher et se combiner en un *cluster* de support plus grand (ici les *clusters* autour de  $\hat{\lambda}_2 = 3$  et  $\hat{\lambda}_3 = 2$  se réunissent en un seul). D'un point de vue intuitif et assez grossier, on peut ainsi voir ce modèle comme une sorte de somme de bruit blanc à différentes puissances (les valeurs propres) et donnant ainsi plusieurs lois Marčenko-Pastur déformées autour des puissances des bruits.

Après cette observation sur la réunion de *clusters*, on peut introduire la condition de séparabilité qui sera nécessaire aux convergences introduites dans les sections et chapitres suivants. Cette condition donne la valeur de  $c$  qui permet aux *clusters* de  $f(x)$  d'être tous séparés.

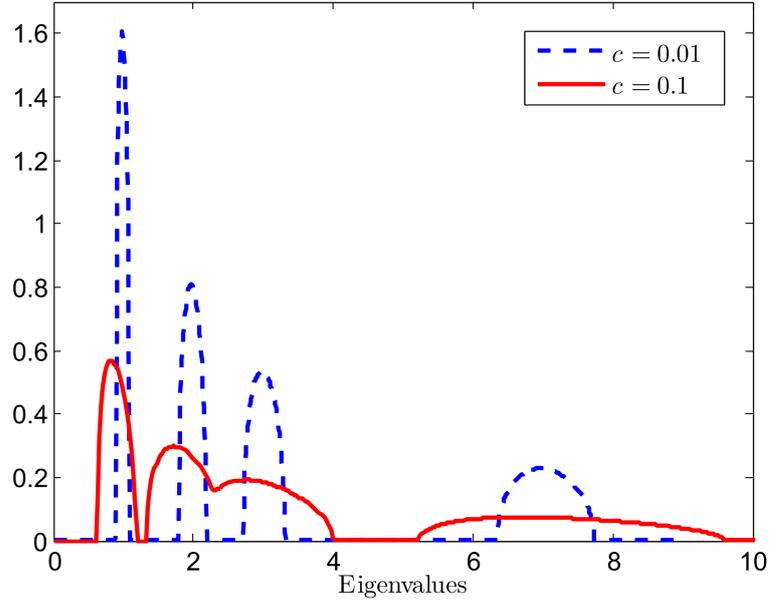


FIGURE 1.12 – DDP asymptotique des valeurs propres de la SCM  $\hat{\mathbf{R}}$  quand les valeurs propres de  $\mathbf{R}$  sont 1, 2, 3, et 7 avec la même multiplicité.

(H3.G) La limite  $c$  du rapport  $c_m = m/K$  est choisie telle que  $1/c$  soit strictement supérieur à  $\{\psi(\bar{f}_i) : i \in \llbracket 1; \bar{M} - 1 \rrbracket\}$ , fonctions dépendant de  $m$ .

où

$$\psi(f) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\bar{M}} \mathcal{K}_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_i - f} \right)^2 \quad (1.104)$$

et  $\{\psi(\bar{f}_i) : i \in \llbracket 1; \bar{M} - 1 \rrbracket\}$  sont ses  $\bar{M} - 1$  minima locaux. Pour plus de détails, voir [Mestre, 2008a]. Une représentation typique de  $\psi(f)$  peut être observée en Fig. 1.13. On observe que  $\psi(f)$  tend vers l'infini quand  $f$  tend vers  $\lambda_i$ , avec  $i \in \llbracket 1, \bar{M} \rrbracket$ . On observe aussi que les emplacements de  $\{\bar{f}_i : i \in \llbracket 1, \bar{M} - 1 \rrbracket\}$  correspondent aux minima locaux de  $\psi(f)$ . Les intersections de  $\psi(f)$  avec la droite horizontale à  $1/c$  sont directement liées aux bornes des supports de  $f(x)$ . En effet, plus  $1/c$  augmente, plus les différents *clusters* sont séparés. Par exemple, en Fig. 1.13, l'intersection de la droite horizontale (ligne rouge pointillée) avec  $\psi(f)$  correspond aux bornes du support de  $f(x)$  pour  $c = 0.1$  en Fig. 1.12 (ligne rouge) et amène à 3 *clusters*. Si la droite horizontale  $1/c$  avait été plus haute telle que  $1/c > \psi(\bar{f}_2)$  en Fig. 1.13, son intersection avec  $\psi(f)$  aurait correspondu au bornes du support de  $f(x)$  pour  $c = 0.01$  en Fig. 1.12 (ligne bleue pointillée) et aurait entraîné 4 *clusters*.

### 1.7.2.2 Modèle *spiked*

Le modèle *spiked*, introduit par [Johnstone, 2001] et étudié par [Benaych-Georges and Nadakuditi, 2011, Paul, 2007] du point de vue des vecteurs propres, considère le signal utile de rang faible  $r$  ou comme une perturbation de rang  $r$ . On peut écrire

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_m + \mathbf{P} \quad (1.105)$$

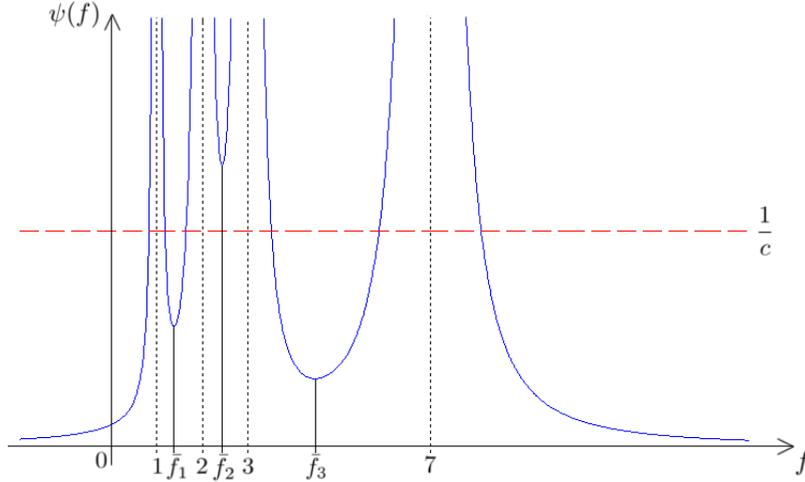


FIGURE 1.13 – Visualisation de  $\psi(f)$  quand les valeurs propres de  $\mathbf{R}$  sont 1, 2, 3, et 7 et de même multiplicité.

où  $\mathbf{P}$  est la matrice de covariance du signal utile de rang faible  $\text{rg}(\mathbf{P}) = r \ll m$ , dite matrice de perturbation de rang  $r$ .  $\mathbf{P}$  peut être décomposée comme

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{\Omega}\mathbf{U}^H = \sum_{i=1}^{\bar{M}-1} \gamma_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H \quad (1.106)$$

avec

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \mathbf{I}_{\mathcal{K}_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \gamma_{\bar{M}-1} \mathbf{I}_{\mathcal{K}_{\bar{M}-1}} & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (1.107)$$

avec  $\gamma_1 > \dots > \gamma_t > 0 > \gamma_{t+1} > \dots > \gamma_{\bar{M}-1} > -1$ ,  $\omega_i \neq 0$ ,  $\forall i \in \llbracket 1; \bar{M} - 1 \rrbracket$ .  $\omega_i$  est donc la  $i$ -ème valeur propre de multiplicité  $\mathcal{K}_i$  de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{U}_i \in \mathbb{C}^{m \times \mathcal{K}_i}$  le sous-espace associé. De plus  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \dots \mathbf{U}_{\bar{M}-1}]$  et  $\text{rg}(\mathbf{\Omega}) = \sum_{i=1}^{\bar{M}-1} \mathcal{K}_i = r$ . De ce fait, la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  peut s'écrire

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{\bar{M}} \lambda_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H \quad (1.108)$$

avec  $\lambda_1 = 1 + \gamma_1 > \dots > \lambda_t = 1 + \gamma_t > \lambda_{t+1} = 1 > \lambda_{t+2} = 1 + \gamma_{t+1} > \dots > \lambda_{\bar{M}} = 1 + \gamma_{\bar{M}-1} > 0$  et  $\sum_{i=1}^{\bar{M}} \mathcal{K}_i = m$ . On fera remarquer que la valeur propre associée au bruit blanc n'est pas forcément la plus faible et sera donc la  $(t+1)$  valeur propre de  $\mathbf{R}$ ,  $\lambda_{t+1}$ .

En lien avec le modèle « G-MUSIC » et le modèle des données décrit en Sec.1.2.1, on a  $r = \bar{M} - 1$ . De plus, en considérant le modèle des données décrit en Sec.1.2.1, on a  $r + 1$  valeurs propres distinctes de  $\mathbf{R}$ . De ce fait  $\mathcal{K}_i = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1; \bar{M} - 1 \rrbracket$ .

La particularité du modèle *spiked* est que les multiplicités  $\mathcal{K}_i$  des valeurs propres  $\gamma_i$  de la perturbation de rang  $r$  sont fixes pour tout  $m$ , *i.e.* :

$$\frac{\mathcal{K}_i}{m} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{m, K \rightarrow \infty} 0^+, \quad \forall i \in \llbracket 1; \bar{M} - 1 \rrbracket \quad (1.109)$$

En d'autres mots, ce modèle spécifie que seulement quelques valeurs propres ( $\lambda_i, \forall i \in \llbracket 1; \bar{M} \rrbracket \setminus t + 1$ ) ne sont pas égales à 1 (et ainsi ne contribuent pas aux valeurs propres unitaires du bruit) et fixes. Cependant, pour que toutes les valeurs propres de  $\mathbf{P}$  ne contribuent pas au bruit, une condition de séparabilité [Couillet and Hachem, 2013] définie ci-dessous est aussi nécessaire.

**(H3.S)** Les valeurs propres de  $\mathbf{P}$  satisfont la condition de séparabilité, i.e.  $|\gamma_i| > \sqrt{c}, \forall i \in \llbracket 1; \bar{M} - 1 \rrbracket$  ( $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$  pour le modèle décrit en Sec.1.2.1).

Le comportement des valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}$  a été étudié par [Baik and Silverstein, 2006], puis [Couillet and Hachem, 2013] a introduit la condition de séparabilité nécessaire pour les convergences ci-dessous. Ainsi, sous **(H1-H2)**, quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant :

$$\hat{f}_m(x) \xrightarrow{\text{p.s.}} f(x) \quad (1.110)$$

où  $f(x)$  est la loi Marčenko-Pastur

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{c}\right), & \text{si } x = 0 \text{ et } c > 1 \\ \frac{1}{2\pi cx} \sqrt{(\lambda_- - x)(x - \lambda_+)}, & \text{si } x \in ]\lambda_-, \lambda_+[ \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.111)$$

avec  $\lambda_- = (1 - \sqrt{c})^2, \lambda_+ = (1 + \sqrt{c})^2$ . Cependant, concernant les valeurs propres  $\hat{\lambda}_i$  de  $\hat{\mathbf{R}}$  associées aux valeurs propres de  $\mathbf{P}$  satisfaisant la condition de séparabilité  $|\gamma_i| > \sqrt{c}$ ,

$$\hat{\lambda}_{j \in \mathcal{M}_i} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\substack{\text{p.s.} \\ m, K \rightarrow \infty}} \tau_i = 1 + \gamma_i + c \frac{1 + \gamma_i}{\gamma_i} \quad (1.112)$$

où  $\mathcal{M}_i$  est l'ensemble des indices correspondant à la  $i$ -ème valeur propre. On a donc par exemple  $\mathcal{M}_{r+1} = \{r + 1, \dots, m\}$  pour  $\lambda_{r+1}$  du modèle des données décrit en Sec.1.2.1.

Deux représentations de  $\hat{f}_m(x)$  pour deux valeurs différentes de  $c$  et une valeur suffisamment grande de  $m$  sont tracées en Fig. 1.14 quand les valeurs propres de  $\mathbf{R}$  sont 1, 2, 3, et 7 sont respectivement de multiplicité  $m - 3, 1, 1$  et 1. On a donc  $r = 3$ . Deux cas sont présents :

- 1) le cas où la condition de séparabilité **(H3.S)** est vérifiée (pour  $c = 0, 1$ )
- 2) le cas où elle n'est pas vérifiée (pour  $c = 1, 5$ )

Dans le premier cas, toutes les valeurs propres  $\hat{\lambda}_i$  (ici  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$  et  $\hat{\lambda}_3$ ) ne correspondant pas aux valeurs propres unitaires de  $\mathbf{R}$  (i.e.  $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$  et  $\lambda_3 = 2$ ) convergent vers une valeur  $\tau_i$  en dehors du support de la loi Marčenko-Pastur. En effet, la condition de séparabilité est vérifiée :  $\gamma_1 = 6, \gamma_2 = 2$  et  $\gamma_3 = 1$  sont supérieurs à  $\sqrt{c} = 0, 316$ . Les trois valeurs propres  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$  et  $\hat{\lambda}_3$  sont donc représentées en dehors du support de la loi Marčenko-Pastur à leurs limites respectives  $\tau_1 = 7, 116, \tau_2 = 3, 15$  et  $\tau_3 = 2, 2$ .

Dans le second cas, la condition  $|\gamma_i| > \sqrt{c}$  n'est vérifiée que pour les deux plus grandes valeurs propres :  $\gamma_1 = 6$  et  $\gamma_2 = 2$  sont supérieurs à  $\sqrt{c} = 1, 225$  contrairement à  $\gamma_3 = 1$ . Seulement deux valeurs propres  $\hat{\lambda}_1$  et  $\hat{\lambda}_2$  sont donc représentées en dehors du support de la loi Marčenko-Pastur à leurs limites respectives  $\tau_1 = 8, 75$  et  $\tau_2 = 5, 25$ . La troisième valeur propre est quand à elle intégrée et appartient à la loi Marčenko-Pastur.

### 1.7.3 Convergence des formes quadratiques

Dû au comportement différent des valeurs propres dans le régime en grandes dimensions par rapport au régime classique  $K \rightarrow \infty$ , certaines quantités comme la trace de la SCM ou certaines formes quadratiques auront aussi un comportement différent. Grâce à la théorie des matrices aléatoires en grandes

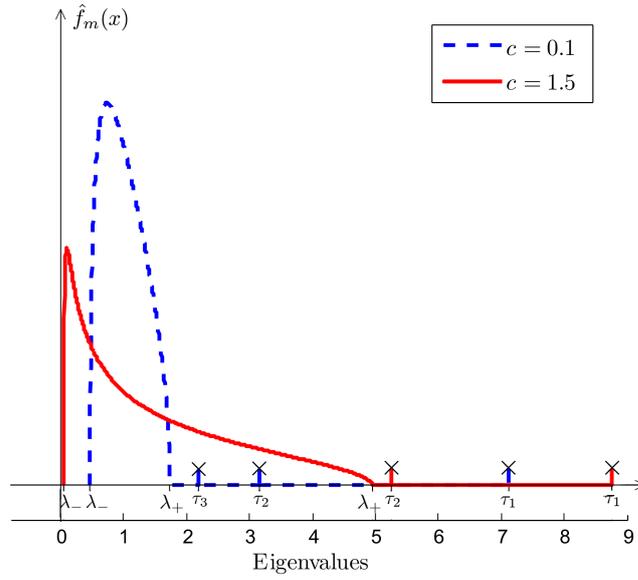


FIGURE 1.14 – PDF empirique des valeurs propres de la SCM avec le modèle *spiked* quand les valeurs propres de  $\mathbf{R}$  sont 1, 2, 3, et 7 avec pour multiplicité  $m - 3, 1, 1$  et 1 respectivement.

dimensions, on pourra ainsi calculer les performances de quantités/estimateurs déjà existants et aussi proposer de nouveaux estimateurs plus performants. On présentera ici la convergence de formes quadratiques dites simples (FQ *simples*). Dans le régime en grandes dimensions, nous aurons aussi besoin de l'hypothèse suivante afin que les convergences soient valides :

**(H4)** Les vecteurs  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathbb{C}^{m \times 1}$  des formes quadratiques (plus tard  $\mathbf{a}(\Theta)$  et  $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ ) sont de norme euclidienne uniformément bornée  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , i.e. leur norme n'augmente pas avec  $m$ . De plus ils sont indépendants des données d'estimation  $\mathbf{X}$  de la SCM.

Tout d'abord, une forme quadratique dite FQ *simple* est de la forme  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{A} \mathbf{s}_2$ . Nous distinguerons deux cas :

- 1) le cas *Full Rank* avec des FQ *simples* du type  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{R} \mathbf{s}_2$  ou  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_2$  ;
- 2) le cas rang faible avec des FQ *simples* du type  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi} \mathbf{s}_2$ , où  $\mathbf{\Pi}$  est un projecteur.

Enfin, on rappelle que le modèle des données comme défini en Sec.1.3.1 ainsi que le *SNR* associé (Sec.1.3.2) satisfont l'hypothèse **(H4)**.

### 1.7.3.1 FQ simples *Full Rank*

On cherche en général à estimer la FQ *simple* qui nous intéresse le plus pour les détecteurs et filtres présentés dans ce chapitre, i.e.  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_2$ . On l'estime donc traditionnellement grâce à la SCM par l'estimateur suivant :  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}_2$ . On s'intéresse donc à sa convergence 1) quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé et 2) quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant.

Il est bien connu que quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé,  $\hat{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$  presque sûrement [Billingsley, 1995]. Ainsi,

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m < \infty]{K \rightarrow \infty, \text{ p.s.}} \mathbf{s}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_2 \quad (1.113)$$

$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}_2$  est donc consistant en régime classique.

Puis, quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c = m/K$ , on a [Girko, 1998, Mestre, 2008a] :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} (1-c)^{-1} \mathbf{s}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_2 \quad (1.114)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{m}{K}\right) \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_2 \quad (1.115)$$

$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}_2$  est donc non consistant en régime en grandes dimensions bien que sa limite soit proportionnelle à la « vraie » FQ  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_2$  d'un facteur déterministe fonction de  $m$  et  $K$ .

### 1.7.3.2 FQ simples rang faible

De même, on cherche en général à estimer la FQ *simple* qui nous intéresse le plus pour les détecteurs et filtres présentés dans ce chapitre, *i.e.*  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2$  avec  $\mathbf{\Pi}_c^\perp$  défini à l'Eq.(1.8). On l'estime donc traditionnellement grâce à la SCM par l'estimateur suivant :  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2$ . On s'intéresse donc à sa convergence 1) quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé et 2) quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant.

Il est connu que quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé,  $\hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \rightarrow \mathbf{\Pi}_c^\perp$  presque sûrement [Mestre, 2008a]. Ainsi,

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m < \infty]{\text{p.s.}, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \quad (1.116)$$

$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2$  est donc consistant en régime classique.

Cependant, dans le régime en grandes dimensions, ce n'est plus le cas, cette FQ n'est plus consistante. C'est pourquoi d'autres estimateurs de  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2$  consistants dans le régime en grandes dimensions ont été définis. En effet, on a suivant le modèle de matrice de covariance choisi et sous les hypothèses présentées précédemment les théorèmes suivants. Enfin, afin d'alléger les écritures et adapter les modèles aux données traitées par la suite, on considèrera le modèle des données décrit en Sec.1.2.1.

**Théorème 1.11** *Modèle « G-MUSIC », convergence de FQs simples [Mestre, 2008a, Mestre and Lagunas, 2008]*

*Sous (H1-H4) et quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même rapport ( $m/K \rightarrow c \in \mathbb{R}^{+*}$ ), alors*

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2 \quad (1.117)$$

avec,  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp = \sum_{i=1}^m w_i^G \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$ , et :

$$w_i^G = \begin{cases} 1 - \frac{1}{m-r-1} \sum_{n=1}^r \left( \frac{\sigma^2}{\lambda_n - \sigma^2} - \frac{\nu_m}{\lambda_n - \nu_m} \right), & \text{si } i > r \\ \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} - \frac{\nu_m}{\lambda_i - \nu_m}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.118)$$

où  $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_m$  sont les valeurs propres de  $\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}) - \frac{c}{m} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}}^T$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$  et  $\sigma^2$  est la puissance du bruit égale à 1.

De plus,

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \quad (1.119)$$

où  $\hat{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp = \sum_{i=1}^m \phi_i^G \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H$ , avec :

$$\phi_i^G = \begin{cases} 1 + \sum_{n=1}^r \left( \frac{\hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_n} - \frac{\hat{\nu}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{\nu}_n} \right), & \text{si } i > r \\ - \sum_{n=r+1}^m \left( \frac{\hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_n} - \frac{\hat{\nu}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{\nu}_n} \right), & \text{si } i \leq r \end{cases} \quad (1.120)$$

où  $\hat{\nu}_1 \geq \dots \geq \hat{\nu}_m$  sont les valeurs propres de  $\text{diag}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) - \frac{1}{K} \sqrt{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} \sqrt{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}^T$  et  $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = [\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m]^T$ . Si  $c > 1$ ,  $\hat{\nu}_m = \dots = \hat{\nu}_K = 0$  et si  $c = 1$ ,  $\hat{\nu}_m = 0$ . Cette nouvelle FQ consistante est appelée estimateur G-MUSIC.

**Théorème 1.12** *Modèle spiked, convergence de FQs simples [Couillet and Hachem, 2013, Hachem et al., 2013]*

Sous (H1-H4) et quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même rapport ( $m/K \rightarrow c \in \mathbb{R}^{+*}$ ), alors

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 \quad (1.121)$$

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 \quad (1.122)$$

avec  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m w_i^S \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  et,

$$w_i^S = \begin{cases} 1, & \text{si } i > r \\ 1 - \frac{1 - c\gamma_i^{-2}}{1 + c\gamma_i^{-1}}, & \text{si } i \leq r \end{cases} \quad (1.123)$$

ainsi que  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S} = \sum_{i=1}^r \chi_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  et,

$$\chi_i = \frac{1 - c\gamma_i^{-2}}{1 + c\gamma_i^{-1}} \quad (1.124)$$

De plus,

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \quad (1.125)$$

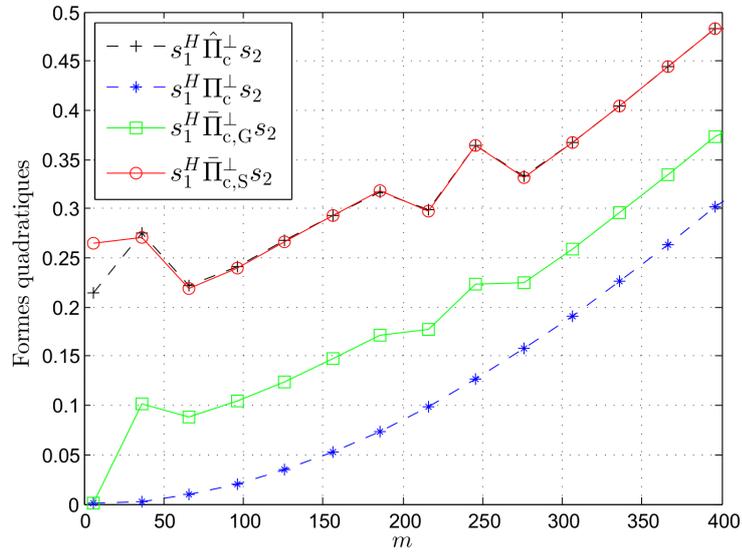
où  $\hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m \phi_i^S \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H$ , avec

$$\phi_i^S = \begin{cases} 1, & \text{si } i > r \\ 1 - \frac{1 + c\hat{\gamma}_i^{-1}}{1 - c\hat{\gamma}_i^{-2}}, & \text{si } i \leq r \end{cases} \quad (1.126)$$

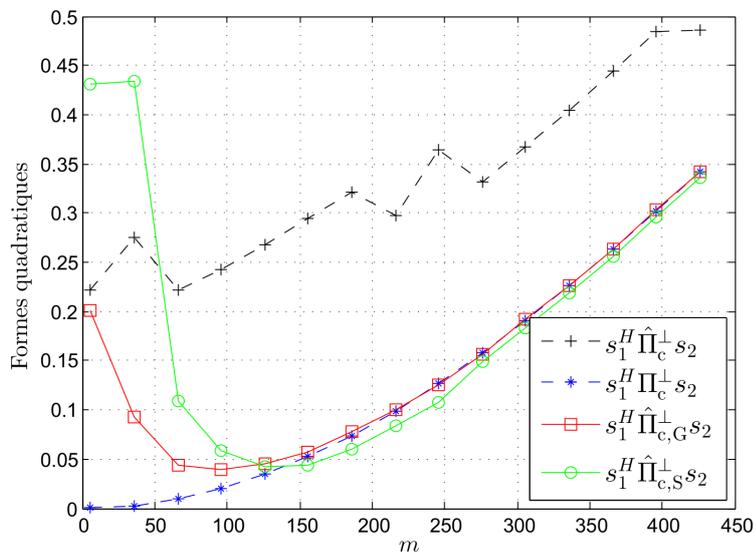
et  $\hat{\gamma}_i = \frac{1}{2} \left( \hat{\lambda}_i - (c_m + 1) + \sqrt{(c_m + 1 - \hat{\lambda}_i)^2 - 4c_m} \right)$ . Cette nouvelle FQ consistante est appelée estimateur Spike MUSIC.

Par conséquent,  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2$  n'est pas consistant dans le régime en grandes dimensions contrairement aux estimateurs consistants  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2$  et  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2$ , phénomènes que l'on peut observer en Fig. 1.15. En effet, la Fig.1.15(a) permet de visualiser en fonction de  $m$  la FQ simple  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2$ , sa limite dans le régime classique  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2$  ainsi que celles dans le régime en grandes dimensions  $\mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2$  et  $\mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2$ . On observe bien que  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2$  ne tend ni vers  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2$  ni vers  $\mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2$ , ce qui est normal étant donné que le modèle des données correspond au modèle *spiked*. Par contre, on observe bien la convergence de  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2$  vers  $\mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2$  étant donné que les courbes sont superposées. Puis, la Fig.1.15(b) permet de visualiser en fonction de  $m$  les FQs simples  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2$ ,  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2$  et  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2$  ainsi que  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2$ . On observe alors que les estimateurs G-MUSIC  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2$  et Spike MUSIC  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2$  convergent bien tous les deux vers  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2$  malgré la différence de modèle entre les données et « G-MUSIC ».

Enfin, ces nouveaux estimateurs permettent donc d'avoir une meilleure estimation de la « vraie » forme quadratique et un meilleur pouvoir séparateur comme le montre la Fig. 1.16 dans un cadre de traitement d'antenne avec l'algorithme à haute résolution MUSIC. En effet, en observant les FQs  $\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{a}(\theta)$ ,  $\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{a}(\theta)$  et  $\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{a}(\theta)$  en fonction de  $\theta$  pour trois sources en  $-10^\circ$ ,  $38^\circ$  et  $40^\circ$ , on observe que la FQ classique  $\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{a}(\theta)$  n'arrive à différencier les deux sources en  $38^\circ$  et  $40^\circ$  contrairement aux nouveaux estimateurs. Ceci est dû à leur meilleur pouvoir de séparation [Vallet et al., 2015].



(a)



(b)

FIGURE 1.15 – Tracé des FQs *simples* rang faible où  $s_1 = s_2 = a(\theta)$  et  $a(\theta)$  est un vecteur directeur avec trois sources en  $-10^\circ, 38^\circ$  et  $40^\circ$ ,  $c = 1, 5$  et  $SNR = 10\text{dB}$ .

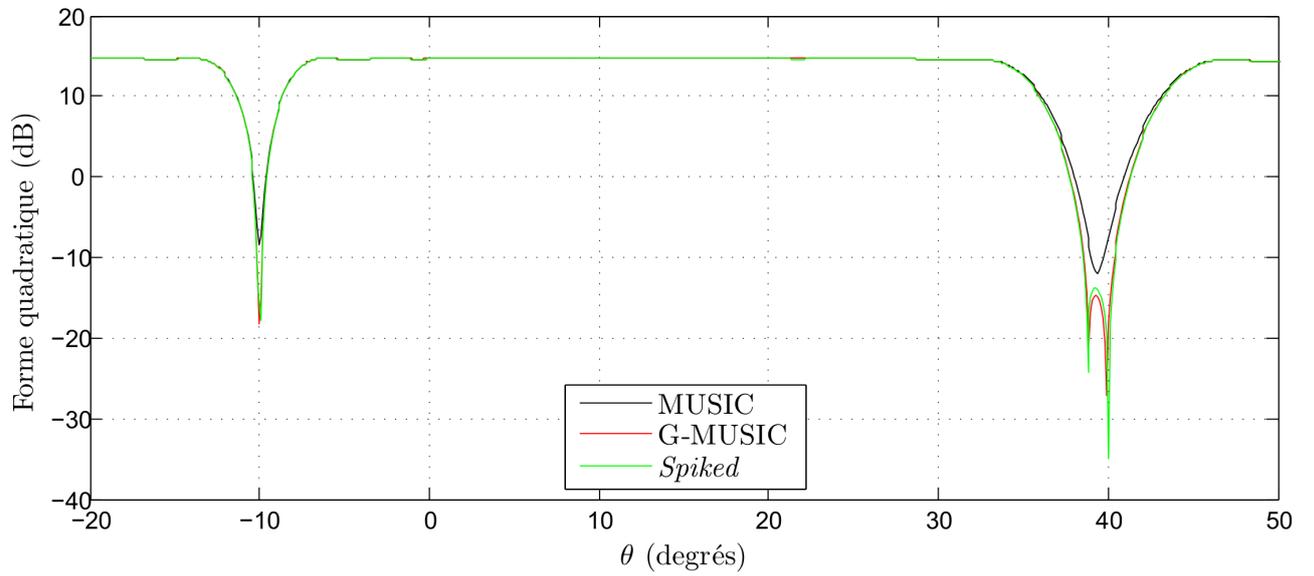


FIGURE 1.16 – Tracé des FQs  $\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\Pi}_c^\perp\mathbf{a}(\theta)$  (noir),  $\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\Pi}_{c,G}^\perp\mathbf{a}(\theta)$  (rouge) et  $\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\Pi}_{c,S}^\perp\mathbf{a}(\theta)$  (vert), où  $\mathbf{a}(\theta)$  est un vecteur directeur avec trois sources en  $-10^\circ$ ,  $38^\circ$  et  $40^\circ$ .



# 2

## Performances asymptotiques des filtres adaptatifs dans le régime en grandes dimensions

On rappelle que l'étude en grandes dimensions par la RMT est motivée par les applications spatio-temporelles éventuellement MIMO ayant pour premier effet d'augmenter la taille des données à traiter. En effet, de par le MIMO et la volonté d'augmenter la précision temporelle, la dimension grandit naturellement. De plus, les quantités LR étudiées sont des fonctions de FQs du type  $s_1^H \hat{\Pi} s_2$ . Ainsi, sachant que cet estimateur est un mauvais estimateur de la FQ théorique  $s_1^H \Pi s_2$  dans le régime en grandes dimensions, qu'en est-il des performances des filtres et détecteurs adaptatifs ? C'est pourquoi, le but est d'utiliser la RMT afin de caractériser les performances des filtres et détecteurs adaptatifs.

Nous nous intéresserons en premier lieu aux filtres adaptatifs. Plus précisément, l'objectif de ce chapitre est de calculer puis valider les performances/comportements asymptotiques des filtres adaptatifs dans le régime en grandes dimensions afin de pouvoir connaître et prédire leur comportement. Pour cela, on calculera le biais asymptotique du signal filtré dans un cadre « rang plein » (FR pour *Full Rank*) en se référant au biais asymptotique de la FQ simple FR en grandes dimensions et en utilisant le *continuous mapping theorem*<sup>2</sup> [Billingsley, 1995]. Puis, on calculera le biais asymptotique du signal filtré en LR de la même manière. Ensuite, les performances du filtre adaptatif LR seront déterminées grâce au biais asymptotique du SINR loss en introduisant la convergence d'une FQ dite *structurée*. Enfin, on validera les résultats par une application brouillage simple qui permettra de mettre en évidence l'apport des RMT en grandes dimensions.

### 2.1 Biais asymptotique des filtres adaptatifs FR

Calculons tout d'abord le biais asymptotique de filtre adaptatif FR en :

- 1) régime classique :  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé ;
- 2) régime en grandes dimensions :  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c_m = m/K \rightarrow c$ .

---

2. Ce théorème permet de déterminer la convergence en loi, probabilité ou presque sûrement d'une fonction de variables aléatoires si l'on connaît la convergence en loi, probabilité ou presque sûrement de ces variables aléatoires.

La RMT en grandes dimensions ne permettant pas d'étudier de manière simple des quantités dont la taille grandit (comme un vecteur aléatoire de taille  $m$  ou une matrice aléatoire  $m \times m$ ), on préfère étudier la consistance d'une quantité scalaire qui ici sera une FQ simple. En effet, on étudiera le signal filtré adaptatif FR, filtré par le filtre adaptatif FR  $\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{d}$  :

$$\hat{p} = \hat{\mathbf{w}}^H \mathbf{x} = \mathbf{d}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x} \quad (2.1)$$

On remarque donc que  $\hat{p}$  est bien une FQ simple. On sait alors que, en régime classique et dans le régime en grandes dimensions, on a :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m < \infty]{K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_2 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{m, K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} (1-c)^{-1} \mathbf{s}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_2 \quad (2.3)$$

Donc, en prenant  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{d}$  et  $\mathbf{s}_2 = \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|_2$ , on en déduit :

$$\alpha \hat{p} \xrightarrow[m < \infty]{K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \alpha p = \alpha \mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \quad (2.4)$$

$$\alpha \hat{p} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{m, K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \alpha p (1-c)^{-1} = \alpha (1-c)^{-1} \mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \quad (2.5)$$

avec  $\alpha = \|\mathbf{x}\|_2^{-1}$  et sous les hypothèses **(H1, H2, H4)** dans le régime en grandes dimensions.

Par conséquent, le signal filtré adaptatif FR normalisé par  $\|\mathbf{x}\|_2$  est consistant et asymptotiquement non biaisé dans le régime asymptotique classique mais ne l'est pas dans le régime en grandes dimensions. Il est donc utile de s'intéresser aux performances du filtre adaptatif FR, le SINR loss, dans les deux régimes asymptotiques. Ses performances asymptotiques sont connues. En effet, comme  $\hat{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$  presque sûrement quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé, on a :

$$\hat{\rho} \xrightarrow[m < \infty]{K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \rho = 1 \quad (2.6)$$

De plus, dans le régime en grandes dimensions et sous les hypothèses **(H1, H2, H4)**, on a [Tang et al., 2010, Mestre and Lagunas, 2006, Rubio et al., 2012a] :

$$\hat{\rho} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{m, K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \frac{(1-c) |\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}|^2}{(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} = 1 - c \quad (2.7)$$

Les performances du filtre adaptatif FR sont donc bien connues dans les deux régimes asymptotiques considérés et nous n'avons donc rien à apporter ici.

*Remarques* : Il est à noter que prendre en compte la dimension donne des performances réduites, *i.e.*  $\hat{\rho} \rightarrow 1 - c < \rho$  quand  $c \neq 0$ . Enfin, la multiplication des signaux filtrés par  $\alpha = \|\mathbf{x}\|_2^{-1}$  est nécessaire afin d'assurer la validation de l'hypothèse **H4** (indispensable aux convergences de FQs dans le régime en grandes dimensions).

## 2.2 Biais asymptotique des filtres adaptatifs LR

C'est pourquoi, calculons le biais asymptotique de filtre adaptatif LR dans les deux régimes précédemment introduits :

- 1) le régime classique :  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé ;
- 2) le régime en grandes dimensions :  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c_m = m/K \rightarrow c$ .

De plus, on rappelle que de par les applications envisagées, le bruit est composé d'une partie LR et d'une partie bruit blanc. Il est alors plus intéressant d'utiliser des traitements adaptatifs LR. En effet, cela permet de réduire le nombre de données secondaires nécessaires pour atteindre des performances équivalentes à -3dB : seules  $K = 2r$  données secondaires sont nécessaires contrairement aux traitements FR où  $K = 2m$  données secondaires sont nécessaires pour de bonnes performances [Kirstein and Tufts, 1994, Haimovich, 1997].

De même, on étudie la consistance de la FQ simple qu'est le signal filtré adaptatif LR, signal filtré par le filtre adaptatif LR  $\hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}} = \hat{\mathbf{\Pi}}_{\text{c}}^{\perp} \mathbf{d}$  :

$$\hat{p}_{\text{LR}} = \hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}}^H \mathbf{x} = \mathbf{d}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{\text{c}}^{\perp} \mathbf{x} \quad (2.8)$$

En régime classique, on sait que :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{\text{c}}^{\perp} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m < \infty]{\text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_{\text{c}}^{\perp} \mathbf{s}_2 \quad (2.9)$$

De plus, on rappelle que dans le régime en grandes dimensions, suivant le modèle et les hypothèses (**H1-H4**), on a (cf. théorèmes 1.11 et 1.12) :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{\text{c}}^{\perp} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{\text{c,G}}^{\perp} \mathbf{s}_2 \quad (2.10)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{\text{c}}^{\perp} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{\text{c,S}}^{\perp} \mathbf{s}_2 \quad (2.11)$$

Par conséquent, en se référant aux convergences ci-dessus avec  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{d}$  et  $\mathbf{s}_2 = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ , on en déduit dans le régime asymptotique classique :

$$\alpha \hat{p}_{\text{LR}} \xrightarrow[m < \infty]{\text{p.s.}} \alpha p_{\text{LR}} = \alpha \mathbf{d}^H \mathbf{\Pi}_{\text{c}}^{\perp} \mathbf{x} \quad (2.12)$$

et dans le régime en grandes dimensions, sous les hypothèses (**H1-H4**) et suivant le modèle de SCM considéré [Comberoux et al., 2015b] :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \alpha \hat{p}_{\text{LR}} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \alpha \bar{p}_{\text{G}} = \alpha \mathbf{d}^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{\text{c,G}}^{\perp} \mathbf{x} \quad (2.13)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \alpha \hat{p}_{\text{LR}} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \alpha \bar{p}_{\text{S}} = \alpha \mathbf{d}^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{\text{c,S}}^{\perp} \mathbf{x} \quad (2.14)$$

avec  $\alpha = \|\mathbf{x}\|_2^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{\text{c,G}}^{\perp} = \sum_{i=1}^m w_i^{\text{G}} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$ , et :

$$w_i^{\text{G}} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{m-r-1} \sum_{n=1}^r \left( \frac{\sigma^2}{\lambda_n - \sigma^2} - \frac{\nu_m}{\lambda_n - \nu_m} \right), & \text{si } i > r \\ \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} - \frac{\nu_m}{\lambda_i - \nu_m}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_m$  sont les valeurs propres de  $\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}) - \frac{c}{m} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}}^T$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$  et  $\sigma^2$  est la puissance du bruit égale à 1 et  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{\text{c,S}}^{\perp} = \sum_{i=1}^m w_i^{\text{S}} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  avec,

$$w_i^{\text{S}} = \begin{cases} 1, & \text{si } i > r \\ 1 - \frac{1 - c\gamma_i^{-2}}{1 + c\gamma_i^{-1}}, & \text{si } i \leq r \end{cases} \quad (2.16)$$

Par conséquent, le signal filtré adaptatif LR normalisé par  $\|\mathbf{x}\|_2$  est consistant et asymptotiquement non biaisé dans le régime asymptotique classique mais ne l'est pas dans le régime en grandes dimensions. En grandes dimensions, le filtre adaptatif LR a donc aussi un comportement différent de celui traditionnellement attendu dû au fait que le signal filtré  $\hat{p}_{\text{LR}}$  par ce filtre converge vers une quantité différente de celle qu'il est censé estimer, *i.e.* le signal filtré  $p_{\text{LR}}$  faisant intervenir le filtre  $\mathbf{w}_{\text{LR}}$ . De plus, cette quantité limite est dépendante du modèle de SCM considéré. On va donc s'intéresser aux performances du filtre adaptatif LR, le SINR loss, dans les deux régimes asymptotiques en déterminant les limites du SINR loss dans ces deux régimes. Tout comme avec le signal filtré, les limites devraient alors être différentes suivant le régime et ainsi mieux prédire le comportement du SINR loss grâce à sa limite en grandes dimensions.

## 2.3 Performances des filtres adaptatifs LR : SINR loss

On veut maintenant déterminer les performances du filtre adaptatif LR grâce au biais asymptotique du SINR loss en introduisant la convergence d'une FQ dite *structurée*. Cela nous permettra de prédire le comportement du filtre LR adaptatif en fonction des paramètres du système et plus particulièrement de prédire pour quels paramètres une forte perte en RSB (qu'on appellera décrochement) se produira. Ce comportement nous intéresse tout particulièrement car cela nous permettra de connaître/prédire les paramètres du signal d'intérêt (comme la vitesse ou l'AoA) pour lesquels il ne sera pas possible de le détecter. On rappelle alors que, dans ce cadre de prédiction de comportement, plusieurs travaux ont été réalisés sur le SINR loss en contexte gaussien LR [Haimovich, 1996, Haimovich, 1997, Ginolhac et al., 2013] qui se sont intéressés, pour le premier, à la densité de probabilité de  $\hat{\rho}_{\text{LR}}$  et, pour le deuxième, à son moment d'ordre 1. Ces résultats ont cependant été obtenus en supposant le bruit LR orthogonal au signal d'intérêt, hypothèse pas toujours vérifiée ni pertinente et restrictive dans les cas pratiques. On propose alors par conséquent de relaxer cette hypothèse et d'étudier la convergence du SINR loss dans le régime en grandes dimensions grâce aux outils de RMT et de la comparer à celle en régime classique. Pour cela, en remarquant dans l'expression du SINR loss que le numérateur est une FQ *simple* dont la convergence est bien connue et que le dénominateur est une FQ plus évoluée dite *structurée* qui n'a pas encore été étudiée en RMT, on se référera à la convergence de FQs *simples* et on introduira et démontrera la convergence de la FQ dite *structurée*. Cette dernière est l'objet de la prochaine sous-section.

### 2.3.1 Convergence de la FQ *structurée* LR

En observant l'expression du SINR loss du filtre adaptatif LR,

$$\hat{\rho}_{\text{LR}} = \frac{|\mathbf{d}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{d}|^2}{(\mathbf{d}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{d})(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} \quad (2.17)$$

On remarque bien la FQ dite *structurée* suivante au dénominateur :

$$\mathbf{d}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{d} \quad (2.18)$$

En régime classique, comme  $\hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \rightarrow \mathbf{\Pi}_c^\perp$  presque sûrement quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé, on a :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m < \infty]{\text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  sont des vecteurs déterministes quelconques. La FQ *structurée* LR converge donc vers la « vraie » FQ *structurée* LR  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2$ .

Cependant, en régime en grandes dimensions, la FQ *structurée* LR converge vers une FQ *structurée* totalement différente de  $\mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2$  et il en résulte la proposition suivante. On rappelle ici que la SCM peut s'écrire de la façon suivante :  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H \mathbf{R}^{1/2}$ .

**Proposition 2.1 Convergence de la FQ structurée LR [Comberoux et al., 2015c]**

Soit  $\mathbf{R}$  la matrice de covariance s'écrivant  $\alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m$  où  $\mathbf{C}$  est une matrice de rang faible  $r$  décrite en Eq.(1.5). Alors, sous (H1-H4), on a :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{R} \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \bar{\Pi}_{c,G} \mathbf{s}_2 \quad (2.20)$$

$$\text{Modèle spiked : } \mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \bar{\Pi}_{c,S} \mathbf{s}_2 \quad (2.21)$$

où  $\bar{\Pi}_{c,G}^\perp = \sum_{i=1}^m w_i^G \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$ ,  $\bar{\Pi}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m w_i^S \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$ ,  $\bar{\Pi}_{c,G} = \mathbf{I}_m - \bar{\Pi}_{c,G}^\perp = \sum_{i=1}^m \chi_i^G \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  et  $\bar{\Pi}_{c,S} = \sum_{i=1}^r \chi_i^S \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  avec  $w_i^G$ ,  $w_i^S$  et  $\chi_i$  définis en Eqs.(1.118), (1.123) et (1.124) et :

$$\chi_i^G = \begin{cases} \frac{1}{m-r-1} \sum_{n=1}^r \left( \frac{\sigma^2}{\lambda_n - \sigma^2} - \frac{\nu_m}{\lambda_n - \nu_m} \right), & \text{si } i > r \\ 1 - \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} + \frac{\nu_m}{\lambda_i - \nu_m}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.22)$$

**Démonstration :** Voir en Annexe B.1.

L'expression  $\bar{\Pi}_{c,S}^\perp \bar{\Pi}_{c,S}$  est cependant trompeuse. En effet,  $\bar{\Pi}_{c,S}^\perp$  et  $\bar{\Pi}_{c,S}$  ne sont pas des projecteurs comme la notation pourrait le faire entendre mais des pseudo-projecteurs fonction des valeurs propres et des vecteurs propres de l'espace bruit LR et éventuellement de l'espace bruit blanc de la matrice de covariance  $\mathbf{R}$ . Ainsi  $\bar{\Pi}_{c,S}^\perp \bar{\Pi}_{c,S} \neq \mathbb{O}_m$  comme on pourrait le penser.

### 2.3.2 Convergence du SINR loss

Après avoir calculé le biais asymptotique du dénominateur du SINR loss (*i.e.* la FQ *structurée* LR) en régime en grandes dimensions, on peut maintenant déterminer le biais asymptotique du SINR loss en régime en grandes dimensions avec le modèle *spiked* et le comparer au biais asymptotique du SINR loss en régime classique. On pourra alors prédire les performances du filtre LR adaptatif.

Ainsi, en régime classique, comme  $\hat{\Pi}_c^\perp \rightarrow \Pi_c^\perp$  presque sûrement quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé, on a les convergences du numérateur et du dénominateur suivantes :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m < \infty]{K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \Pi_c^\perp \mathbf{s}_2 \quad (2.23)$$

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m < \infty]{K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \Pi_c^\perp \mathbf{R} \Pi_c^\perp \mathbf{s}_2 \quad (2.24)$$

Par conséquent, avec  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{d}$  et en utilisant le *continuous mapping theorem*, on a [Comberoux et al., 2015c] :

$$\hat{\rho}_{\text{LR}} \xrightarrow[m < \infty]{K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \rho_{\text{LR}} \quad (2.25)$$

où  $\rho_{\text{LR}}$  est défini en Eq.(1.48).

Cependant, en régime en grandes dimensions, le SINR loss converge vers une quantité totalement

différente de  $\rho_{LR}$ . En effet, sous **(H1-H4)** et le modèle *spiked* :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 \quad (2.26)$$

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \bar{\Pi}_{c,S} \mathbf{s}_2 \quad (2.27)$$

Puis, avec le modèle « G-MUSIC » :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2 \quad (2.28)$$

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{R} \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \bar{\Pi}_{c,G} \mathbf{s}_2 \quad (2.29)$$

Par conséquent, avec  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{d}$  et en utilisant le *continuous mapping theorem*, on a sous **(H1-H4)** :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \hat{\rho}_{LR} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \hat{\rho}_{LR}^{(G)} = \frac{|\mathbf{d}^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{d}|^2}{(\mathbf{d}^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{R} \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{d} + \sigma^2 \mathbf{d}^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \bar{\Pi}_{c,G} \mathbf{d})(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} \quad (2.30)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \hat{\rho}_{LR} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \hat{\rho}_{LR}^{(S)} = \frac{|\mathbf{d}^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{d}|^2}{(\mathbf{d}^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{d} + \sigma^2 \mathbf{d}^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \bar{\Pi}_{c,S} \mathbf{d})(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} \quad (2.31)$$

Ainsi, on observe que, bien que l'estimateur traditionnel  $\hat{\rho}_{LR}$  de  $\rho_{LR}$  est consistant quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé, il ne l'est plus quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant. Il est aussi important de souligner que les nouveaux résultats de convergence donnent une approximation plus précise de  $\hat{\rho}_{LR}$  que les travaux précédents [Haimovich, 1997, Ginolhac et al., 2013]. En effet, [Haimovich, 1997, Ginolhac et al., 2013] ont proposé une approximation dépendante de  $K$  et  $r$ . Tandis qu'ici, l'approximation proposée (par  $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$  ou  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$ ) dépend de  $K$  (et bien sûr de  $c$ ), de  $r$  ainsi que du paramètre  $\Theta$ , ce qui nous permet d'avoir une mesure de performance fonction de la « distance » entre le signal d'intérêt et le bruit LR (comme un brouilleur par exemple). Typiquement,  $\{\mathbf{u}_i^H \mathbf{a}(\Theta) = g_i(\Theta_{\text{jamming}}, \Theta)\}_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \in [-1, 1]$ .

## 2.4 Validation des résultats

Cette section est dédiée à la validation des résultats précédemment énoncés ainsi qu'à l'observation des performances des filtres et détecteurs adaptatifs LR. La sous-section 2.4.1 présente l'application simple (mais proche de l'application STAP) choisie pour la validation et détermine l'adéquation du modèle de SCM à l'application. Puis, la sous-section 2.4.2 valide les nouvelles convergences dans le régime en grandes dimensions. Enfin, la sous-section 2.4.3 présente et compare les performances du filtre adaptatif LR avec celles calculées par [Ginolhac et al., 2013] et celles du filtre LR.

### 2.4.1 Présentation de l'application et paramètres de simulation

Afin d'illustrer l'intérêt des RMT, on choisit une application brouillage simple où l'on maîtrise tous les paramètres mais proche de l'application STAP par le modèle des signaux. Son principe est de détecter une cible  $\mathbf{d}$  grâce à une antenne linéaire uniforme de  $m = 100$  capteurs malgré la présence de  $r$  brouilleurs. On se contentera ici des angles d'arrivée (AoA) et on aura alors  $\Theta_{\mathbf{d}} = \theta_{\mathbf{d}}$  où  $\theta_{\mathbf{d}}$  est l'AoA

de  $\mathbf{d}$ . La réponse des brouilleurs  $\mathbf{c}$  est composée de signaux similaires à  $\mathbf{d}$ , *i.e.* de  $r = 3$  cibles synthétiques d'AoA  $\theta_c$  égaux à  $-20^\circ$ ,  $0^\circ$  et  $20^\circ$  avec pour longueur d'onde  $l_0 = 0.667\text{m}$ . Ainsi, la matrice de covariance des brouilleurs (bruit rang faible) a un rang  $r = 3$  et peut s'écrire :

$$\mathbf{R}_c = \sum_{i=1}^r \mathbf{a}(\theta_{c,i}) \mathbf{a}(\theta_{c,i})^H = \sum_{i=1}^r a_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (2.32)$$

où  $a_i$  et  $\mathbf{u}_i$  sont respectivement les valeurs propres et vecteurs propres de  $\mathbf{R}_c$ . On définira alors la matrice de covariance du bruit LR de manière à contrôler les valeurs propres de la manière suivante :

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (2.33)$$

avec  $\gamma_1 = 6$ ,  $\gamma_2 = 2$  et  $\gamma_3 = 1$ . On aura ensuite la matrice de covariance du bruit total :

$$\mathbf{R} = \frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})} \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m \quad (2.34)$$

avec  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}([\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3])$ ,  $\sigma^2 = 1$  et où  $JNR$  (pour *Jammer to Noise Ratio*) est le rapport brouilleur à bruit.  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})}$  et le  $SNR$  (rapport signal  $\mathbf{d}$  à bruit) sont respectivement fixés à 10dB et 18, 5dB, le rapport  $c \simeq 16$  au maximum (pour  $K = 2r$ ) et  $\theta_d = 20, 1^\circ$  sauf si une autre valeur est indiquée.

Ensuite, afin de déterminer l'adéquation du modèle de SCM à l'application, un zoom de la DDP expérimentale (histogramme normalisé) des valeurs propres de la SCM est présentée en Fig. 2.1. On observe alors une loi Marčenko-Pastur autour de 1 correspondant au bruit blanc et des lois gaussiennes pour les valeurs propres correspondant aux brouilleurs. Ces lois sont centrées autour des limites  $\tau_i$  (cf. Ch.1, Eq.(1.112)) du modèle *spiked*. Ce modèle correspond donc à l'application de brouillage, ce qui est consistant avec le modèle des données en lui-même : un rang  $r$  fixe égal à 3 et des multiplicités des valeurs propres des brouilleurs égales à 1. De plus, le fait d'observer des lois gaussiennes autour des  $\tau_i$  est aussi consistant avec le modèle *spiked* d'après [Couillet and Hachem, 2013]. Cependant, nous continuerons quand même les études avec le modèle « G-MUSIC » pour observer par exemple l'impact de la différence entre les deux modèles.

Puis, afin de vérifier que les modèles sont réalistes en termes de *condition de séparabilité*, la Fig. 2.2 montrent la *condition de séparabilité* en fonction de  $\alpha_c = \frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})}$ , *i.e.*  $(\alpha_c \gamma_r - \sqrt{c})$  en fonction de  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})}$ . On observe alors que la condition est vérifiée pour  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})} > 6.2\text{dB}$  pour la majorité des  $c$ , même si  $c > 17$ . En pratique, si  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})} < 6.2\text{dB}$ , le brouillage n'aura plus d'effet sur les performances car ne sera pas significatif. Par conséquent, les paramètres choisis sont réalistes.

## 2.4.2 Convergences en régime en grandes dimensions

On s'intéresse maintenant à la validation des nouvelles convergences dans le régime en grandes dimensions, *i.e.* quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c$ , présentées dans ce chapitre.

Il est tout d'abord important de noter que le gain d'estimation apportée par la RMT dépend des paramètres choisis et particulièrement de l'AoA d'observation. En effet, si  $\theta$  est trop éloigné de  $\theta_c$ , le gain de prédiction sera négligeable. Afin de mieux appréhender ce phénomène, un moyen est de mesurer l'EQM entre le signal filtré  $\hat{p}_{LR}$  et ses différentes limites afin de pouvoir déterminer quelle limite se rapproche le plus de  $\hat{p}_{LR}$ , *i.e.* quelle limite caractérise le mieux le comportement de  $\hat{p}_{LR}$ . Ainsi, on va

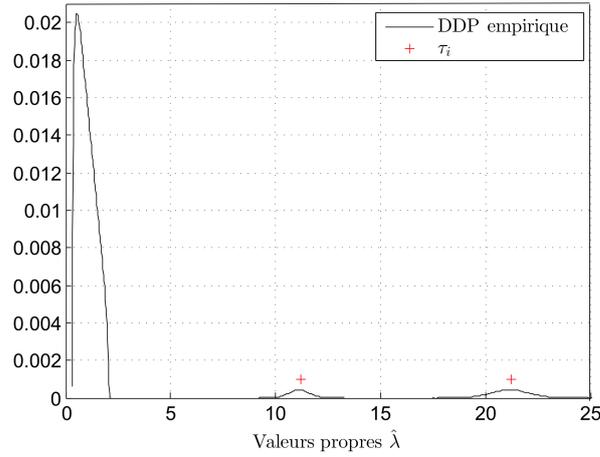


FIGURE 2.1 – Zoom de la DDP expérimentale de la SCM avec  $c_m = 0.2$  sur  $5 \times 10^4$  itérations. A cause du zoom, la valeur propre la plus élevée à 71 est en dehors de la figure.

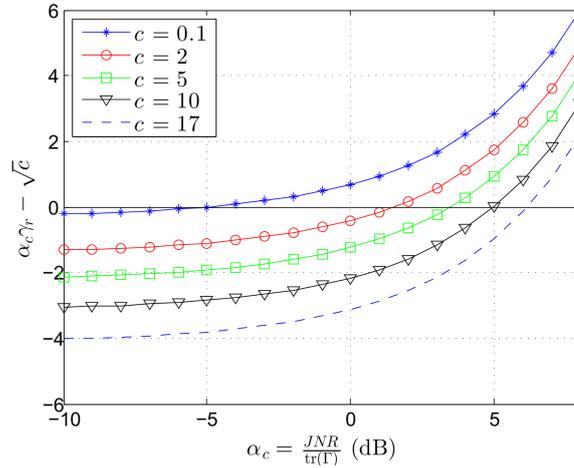


FIGURE 2.2 – Condition de séparabilité ( $\alpha_c \gamma_r - \sqrt{c}$ ) du modèle *spiked* pour la plus faible valeur propres non unitaire en fonction de  $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)}$  en dB.

s'intéresser aux EQMs suivantes :

$$EQM(\hat{p}_{LR} - p_{LR}) = \mathbb{E} [(\hat{p}_{LR} - p_{LR})^2] \quad (2.35)$$

$$EQM(\hat{p}_{LR} - \bar{p}_{LR}^{(G)}) = \mathbb{E} [(\hat{p}_{LR} - \bar{p}_{LR}^{(G)})^2] \quad (2.36)$$

$$EQM(\hat{p}_{LR} - \bar{p}_{LR}^{(S)}) = \mathbb{E} [(\hat{p}_{LR} - \bar{p}_{LR}^{(S)})^2] \quad (2.37)$$

La Fig.2.3 permet ainsi de visualiser ces EQMs entre le signal filtré et ses limites pour  $m = 100$  et  $K = m + 1$  en fonction de  $\theta$ , paramètre du vecteur directionnel. On observe alors que si  $\theta = 10^\circ$  par exemple, les trois EQMs se confondent. La différence entre le signal filtré et ses différentes limites sont donc égales et la RMT n'apporte donc aucun gain. Cependant, si  $\theta \simeq 20^\circ$  par exemple, on observe que  $EQM(\hat{p}_{LR} - \bar{p}_{LR}^{(S)})$  et  $EQM(\hat{p}_{LR} - \bar{p}_{LR}^{(G)})$  sont bien inférieures à l'autre EQM. Par conséquent,  $\hat{p}_{LR}$  est bien plus proche de  $\bar{p}_{LR}^{(S)}$  ou  $\bar{p}_{LR}^{(G)}$  que de  $p_{LR}$ . La RMT apporte donc là un vrai gain de prédiction grâce aux limites  $\bar{p}_{LR}^{(S)}$  et  $\bar{p}_{LR}^{(G)}$  de  $\hat{p}_{LR}$  dans le régime en grandes dimensions. Afin d'observer les gains apportés

par la RMT, il est donc nécessaire de se placer dans cette zone de gain de prédiction. C'est pour cette raison que l'AoA d'observation a été choisi si proche de ceux des brouilleurs.

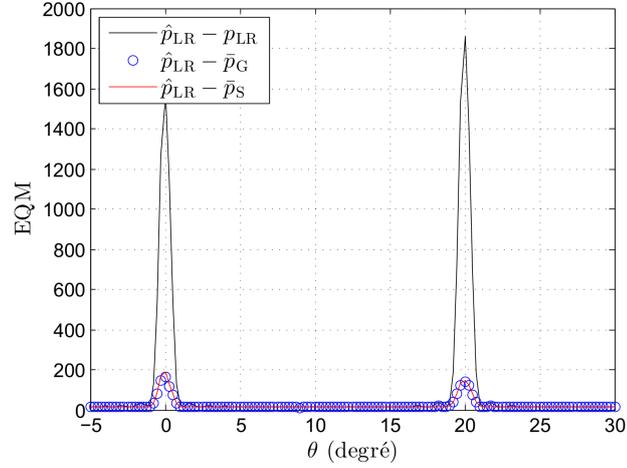


FIGURE 2.3 – EQM en fonction de  $\theta$  (en degré) entre le signal filtré et ses limites.

On observe maintenant en Fig.2.4 la convergence de la FQ *structurée* en Eq.(2.20) et (2.21) comparées à celle de l'Eq.(2.19) et les résultats valident bien les nouvelles convergences avec le modèle *spiked* et le modèle « G-MUSIC » dans le régime en grandes dimensions.

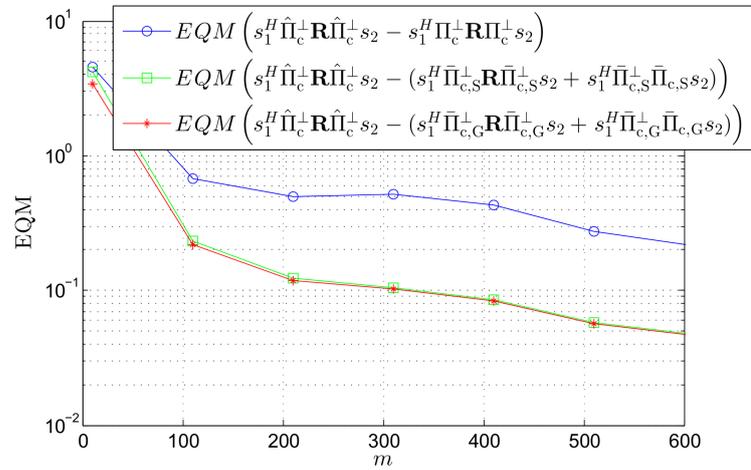


FIGURE 2.4 – EQM sur  $10^3$  itérations correspondant aux Eq.(2.19), (2.20) et (2.21) avec le jeu de paramètres du filtrage,  $c = 3$  et  $s_1 = s_2$  sont des vecteurs directeurs des brouilleurs (bruit LR)  $c$ .

Enfin, on visualise en Fig.2.5 la convergence dans le régime en grandes dimensions du SINR loss vers ses limites  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  et  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  (suivant le modèle choisi) et non vers le SINR loss théorique (du filtre LR non adaptatif) en termes d'EQM pour  $\theta = 20, 1^\circ$  et  $c = 3$ . On observe alors le même comportement qu'en Fig.2.4, c'est-à-dire que le SINR loss converge bien vers ses limites en grandes dimensions avec le modèle *spiked*  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  et le modèle « G-MUSIC »  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  étant donné les paramètres de simulations choisis.

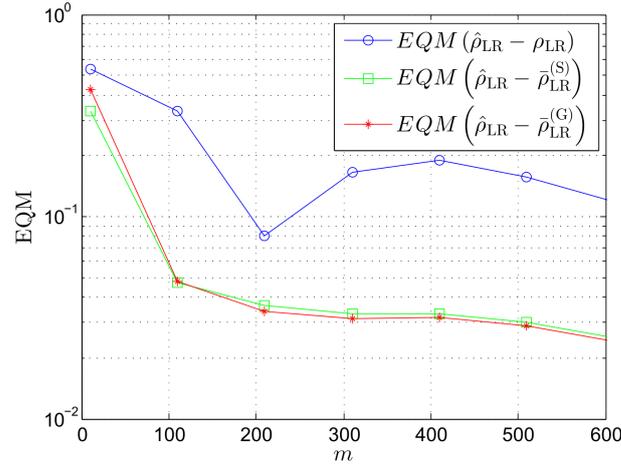


FIGURE 2.5 – EQM correspondant aux Eq.(2.25), Eq.(2.30) et Eq.(2.31) quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c = 3$  avec  $\theta = 20, 1^\circ$  et  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} = 10\text{dB}$ .

### 2.4.3 Performances du filtre LR adaptatif

Pour finir, on visualise les performances du filtre LR adaptatif par son SINR loss. On rappelle qu'ici le but est de déterminer un SINR loss déterministe au comportement le plus proche du SINR loss  $\hat{\rho}_{LR}$  du filtre adaptatif LR classique afin de pouvoir prédire, pour tous les paramètres du système, son comportement ou encore la perte engendrée par le fait que l'on utilise ce filtre par rapport au filtre optimal. On cherche donc à obtenir la courbe la plus proche possible de  $\hat{\rho}_{LR}$ . Pour cela, la Fig. 2.6 montre la visualisation de  $\rho_{LR}$  (ligne bleue avec étoiles), de  $\hat{\rho}_{LR}$  (ligne bleue pointillée), de  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  (ligne verte), de  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  (ligne rouge) et de l'approximation  $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}] \simeq 1 - \frac{r}{K}$  introduite par [Haimovich, 1997, Ginolhac et al., 2013] (ligne noire) en fonction de  $K$  quand la cible est près angulairement des brouilleurs, *i.e.*  $\theta_d = 20, 5^\circ$ . On observe alors que les limites en grande dimension et plus particulièrement  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  avec le modèle *spiked* permettent d'obtenir une bien meilleure approximation de  $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}]$  que l'estimation  $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}] \simeq 1 - \frac{r}{K}$  étant donné que les courbes de  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  et  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  ont le même comportement que celle de  $\hat{\rho}_{LR}$  et, spécifiquement  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$ , en sont plus proche pour tout  $K$ .

Puis, de manière similaire, les mêmes équations sont tracées en fonction de  $\theta = \theta_d$  en Fig. 2.7(a) avec  $K = 50$  de manière à ce que  $K > c$  ( $c \simeq 33, 3$ ). On observe que contrairement à l'estimation  $1 - r/K$ , la RMT permet d'obtenir une meilleure estimation de  $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}]$  en fonction de  $\theta_d$ , particulièrement avec le modèle « G-MUSIC », et par conséquent une meilleure approximation de son comportement à paramètres fixés. Ceci nous permet donc de prédire la valeur de  $\theta_d$  correspondant à un décrochement de performance du filtre adaptatif LR classique (ici autour de  $21^\circ$ ). On observe cependant un décalage entre les courbes de  $\hat{\rho}_{LR}$  et de  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  et entre les courbes de  $\hat{\rho}_{LR}$  et de  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  dû tout simplement au fait que nous sommes à  $m$  et  $K$  fixes et non en régime asymptotique lors du calcul de la courbe de  $\hat{\rho}_{LR}$ .

Enfin, les mêmes équations sont tracées en fonction de  $\theta = \theta_d$  en Fig. 2.7(b) avec  $K = 2r$  afin de prendre en compte un cas drastique où seulement  $K = 6$  données secondaires sont utilisées pour estimer le SCM et le projecteur. De même, on observe que contrairement à l'estimation  $1 - r/K$ , la RMT, et plus particulièrement avec le modèle « G-MUSIC », permet d'obtenir une meilleure estimation de  $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}]$  en fonction de  $\theta_d$  et par conséquent une meilleure approximation de son comportement à paramètres fixés. Ceci nous permet encore de prédire la valeur de  $\theta_d$  correspondant au décrochement de performance du filtre adaptatif LR classique (ici autour de  $21, 1^\circ$ ). On observe aussi le même décalage entre les courbes de  $\hat{\rho}_{LR}$  et de  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  et entre les courbes de  $\hat{\rho}_{LR}$  et de  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  pour la même raison que précédemment.

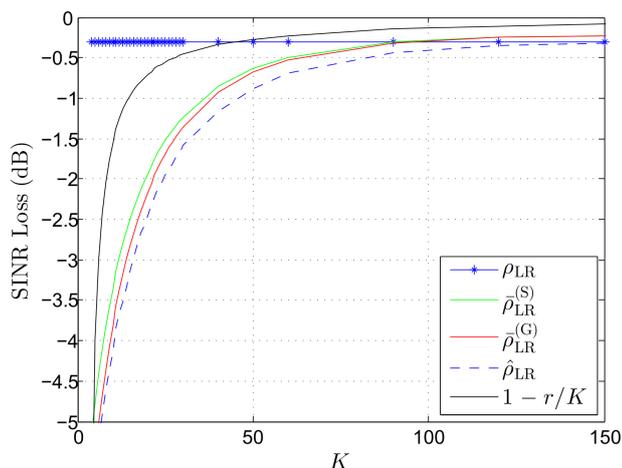


FIGURE 2.6 – Visualisation de  $\rho_{LR}$  (ligne bleue avec étoiles), de  $\hat{\rho}_{LR}$  (ligne bleue pointillée), de  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  (ligne verte), de  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  (ligne rouge) et de l’approximation  $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}] \simeq 1 - \frac{r}{K}$  (ligne noire) sur  $10^3$  réalisations avec  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} = 10\text{dB}$  et  $m = 100$  en fonction de  $K$  avec  $\theta_d = 20, 5^\circ$ .

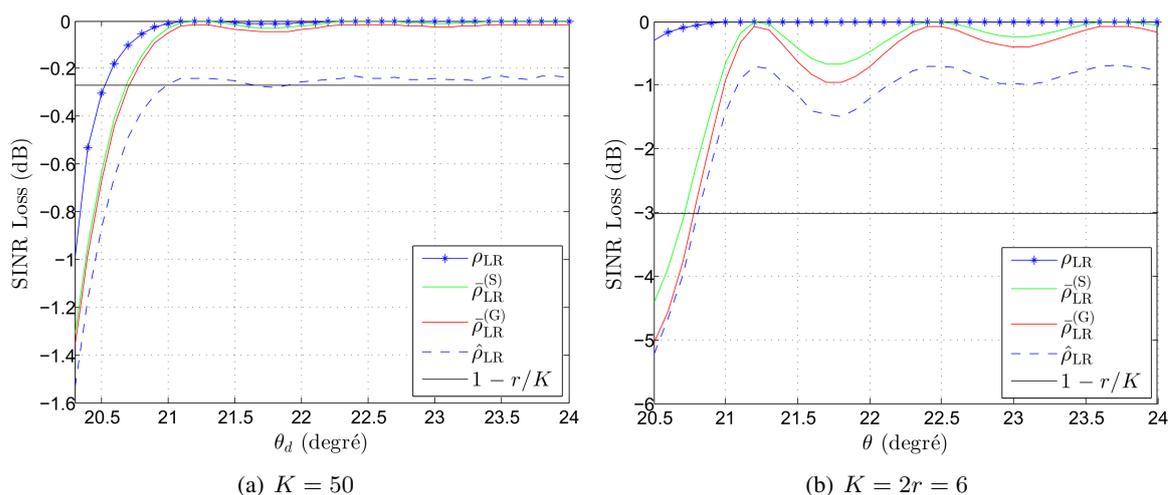


FIGURE 2.7 – Visualisation de  $\rho_{LR}$  (ligne bleue avec étoiles), de  $\hat{\rho}_{LR}$  (ligne bleue pointillée), de  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  (ligne verte), de  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  (ligne rouge) et de l’approximation  $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}] \simeq 1 - \frac{r}{K}$  (ligne noire) sur  $10^3$  réalisations avec  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} = 10\text{dB}$  et  $m = 100$  en fonction de  $\theta = \theta_d$  avec : (a)  $K = 50$ , (b)  $K = 2r = 6$ .

## 2.5 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons donc déterminé les performances/comportements asymptotiques du filtre adaptatif LR dans le régime en grandes dimensions en termes de SINR loss afin de pouvoir connaître et prédire leur comportement pour un jeu de paramètres donné. Même si aucun gain ne peut être apporté avec le filtre adaptatif FR, nous avons pu déterminer avec les modèles « G-MUSIC » et *spiked* les limites dans le régime en grandes dimensions du SINR loss lié au filtre adaptatif LR classique en introduisant la convergence d’une FQ *structurée*. Il a alors été observé que ces limites, particulièrement avec le modèle « G-MUSIC », permettent de mieux prédire les performances du filtre adaptatif que l’approximation  $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}] \simeq 1 - \frac{r}{K}$  introduite par [Haimovich, 1997, Ginolhac et al., 2013], et ceci en fonction de  $K$  et en

fonction de l'AoA de la cible  $\theta_d$ . Ainsi il est par exemple possible pour le filtre LR adaptatif de déterminer la valeur de  $\theta_d$  en dessous duquel un décrochement de performance apparaît. Cependant, afin de bénéficier de ces améliorations il est important que l'AoA de la cible soit proche de ceux des brouilleurs (plus généralement que le sous-espace engendré par le signal à détecter soit « proche » du sous-espace engendré par le bruit de rang faible). La RMT, par l'étude des quantités dans le régime en grandes dimensions, permettent donc de mieux prédire le comportement des quantités adaptatives LR comme le filtre LR adaptatif pour un jeu de paramètres donné.

On a donc montré que les performances du filtrage adaptatif LR classique entraînant, par définition des traitements adaptatifs, une baisse de performances par rapport à la quantité LR non adaptative peuvent être mieux prédites en utilisant les outils de RMT, particulièrement avec le modèle « G-MUSIC », que par les approximations déjà réalisées dans la littérature. Les performances du détecteur LR-ANMF vont donc être étudiées dans le même sens, dans le régime en grandes dimensions.

# 3

## Performances asymptotiques des détecteurs adaptatifs dans le régime en grandes dimensions

On a donc montré que les performances du filtrage adaptatif LR classique, entraînant par définition des traitements adaptatifs une baisse de performances par rapport à la quantité LR non adaptative, peuvent être mieux prédites en utilisant les outils de RMT, particulièrement avec le modèle « G-MUSIC », que par les approximations déjà réalisées dans la littérature. Les performances des détecteurs adaptatifs ANMF et LR-ANMF vont donc être étudiées dans le même sens, dans le régime en grandes dimensions.

Plus précisément, l'objectif de ce chapitre est de calculer puis valider les performances asymptotiques des détecteurs adaptatifs dans le régime en grandes dimensions afin de pouvoir connaître et prédire leurs comportements. Pour cela, on calculera le biais asymptotique du détecteur ANMF en se référant au biais asymptotique de la FQ simple FR en grandes dimensions et en utilisant le *continuous mapping theorem* [Billingsley, 1995]. Puis, on calculera le biais asymptotique du détecteur LR-ANMF de la même manière. Ensuite, afin de pouvoir calculer les performances du détecteur LR-ANMF, on s'intéressera à sa distribution. Ce sujet n'ayant jamais été traité dans la littérature ou de façon très succincte dans [Anitori et al., 2008], on propose donc de la calculer de manière asymptotique avec et sans approximation en utilisant les outils de RMT. Grâce à cette loi, on caractérisera les performances du détecteur LR-ANMF par le calcul des relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ - $P_{fa}$  associées à cette loi. Enfin, on validera les résultats par une application brouillage simple qui permettra de mettre en évidence l'apport des RMT en grandes dimensions et l'influence des différences entre les modèles « G-MUSIC » et *spiked* sur les performances.

### 3.1 Biais asymptotique des filtres et détecteurs adaptatifs FR

Calculons tout d'abord le biais asymptotique du détecteur adaptatif FR, la détecteur ANMF, en :

- 1) régime classique :  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé ;
- 2) régime en grandes dimensions :  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c_m = m/K \rightarrow c$ .

Il est aisé de démontrer que le détecteur ANMF, version adaptative du détecteur NMF, est consistant (*i.e.* asymptotiquement non biaisé) quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé. On rappelle l'expression de celui-ci :

$$\hat{\Lambda}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x})} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \xi_{\text{ANMF}} \quad (3.1)$$

où  $\xi_{\text{ANMF}}$  est le seuil de détection. En effet, on a

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m < \infty]{\text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_2 \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  peuvent prendre les valeurs  $\mathbf{a}(\Theta)$  ou  $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ . Donc, d'après le *continuous mapping theorem* et l'équation précédente,

$$\frac{\left| \mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\Theta)) \left( \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right)} \xrightarrow[m < \infty]{\text{p.s.}} \frac{\left| \mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta)) \left( \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}^H \mathbf{R}^{-1} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right)} \quad (3.3)$$

$$\iff \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x})} \xrightarrow[m < \infty]{\text{p.s.}} \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x})} \quad (3.4)$$

Ainsi, on a :

$$\hat{\Lambda}(\Theta) \xrightarrow[m < \infty]{\text{p.s.}} \Lambda(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x})} \quad (3.5)$$

Puis, dans le régime en grandes dimensions, on a

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} (1-c)^{-1} \mathbf{s}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_2 \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  peuvent prendre les valeurs  $\mathbf{a}(\Theta)$  ou  $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ , remplissant ainsi l'hypothèse **(H4)**. Donc, d'après le *continuous mapping theorem* et l'équation précédente, on prouve de la même manière que ci-dessus que, sous les hypothèses **(H1, H2, H4)** :

$$\hat{\Lambda}(\Theta) \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \Lambda(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x})} \quad (3.7)$$

Par conséquent, le détecteur ANMF est consistant et asymptotiquement non biaisé dans les deux régimes asymptotiques considérés. De plus les performances de détection des détecteurs NMF et ANMF étant déjà connues, la RMT ne peut alors rien apporter.

### 3.2 Biais asymptotique des filtres et détecteurs adaptatifs LR

C'est pourquoi, calculons le biais asymptotique du détecteur adaptatif LR, le détecteur LR-ANMF, dans ces mêmes régimes, le régime classique et le régime en grandes dimensions.

De même, il est aisé de démontrer que le détecteur LR-ANMF, estimateur du détecteur LR-NMF, est consistant (*i.e.* asymptotiquement non biaisé) quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé. On rappelle l'expression de celui-ci :

$$\hat{\Lambda}_{\text{LR}}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{x})} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \xi_{\text{LRANMF}} \quad (3.8)$$

où  $\xi_{\text{LRANMF}}$  est le seuil de détection. En effet, comme

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m < \infty]{K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \Pi_c^\perp \mathbf{s}_2, \quad (3.9)$$

où  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  peuvent prendre les valeurs  $\mathbf{a}(\Theta)$  ou  $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ , d'après le *continuous mapping theorem*, on a de la même manière que précédemment :

$$\hat{\Lambda}_{\text{LR}}(\Theta) \xrightarrow[m < \infty]{K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \Lambda_{\text{LR}}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \Pi_c^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \Pi_c^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \Pi_c^\perp \mathbf{x})} \quad (3.10)$$

Cependant, dans le régime en grandes dimensions, suivant le modèle et sous les hypothèses **(H1-H4)**, on rappelle que :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{m, K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2 \quad (3.11)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{m, K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 \quad (3.12)$$

où  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  peuvent prendre les valeurs  $\mathbf{a}(\Theta)$  ou  $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ . Donc, d'après le *continuous mapping theorem* et les équations précédentes, on prouve aussi que [Combernoux et al., 2015a], sous les hypothèses **(H1-H4)**, on a de la même manière que précédemment :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \hat{\Lambda}_{\text{LR}}(\Theta) \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{m, K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \bar{\Lambda}_G(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{x})} \quad (3.13)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \hat{\Lambda}_{\text{LR}}(\Theta) \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{m, K \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \bar{\Lambda}_S(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{x})} \quad (3.14)$$

Par conséquent, le détecteur LR-ANMF est consistant et asymptotiquement non biaisé dans régime asymptotique classique mais ne l'est plus dans le régime en grandes dimensions. En grande dimension, le détecteur LR-ANMF a donc un comportement différent de celui traditionnellement attendu, dû au fait qu'il converge vers une quantité différente de celle qu'il est censé estimer, *i.e.* le détecteur LR-NMF. De plus, cette quantité limite est dépendante du modèle de SCM considéré. Il sera alors utile de calculer les performances de détection liées à ces limites afin de pouvoir déterminer si elles approximent mieux les performances du détecteur LR-ANMF à  $m$  et  $K$  fixés.

### 3.3 Loi asymptotique du détecteur LR-ANMF

Afin de pouvoir déterminer théoriquement les performances de fausse alarme<sup>3</sup> et détection du détecteur LR-ANMF, il faut connaître l'expression de sa distribution, objet de cette section et qui n'a été traitée que de façon très succincte dans [Anitori et al., 2008]. Normalement, pour la calculer, il faudrait prendre en compte, en plus de la distribution de la donnée sous test  $\mathbf{x}$ , celle du projecteur  $\hat{\Pi}_c^\perp$  donc celle des vecteurs propres  $\hat{\mathbf{u}}_i$  de la SCM. Cette loi est en partie connue. En effet, il est connu [Tulino and Verdù, 2004] que la matrice des vecteurs propres  $\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_m]$  suit une loi uniforme sur le groupe des matrices unitaires dans le cas complexe (sur le groupe des matrices orthogonales dans le cas

3. Comme réguler automatiquement et théoriquement le seuil ou de manière équivalente la  $P_{fa}$  en fonction de tous les paramètres du système comme  $\Theta$  et  $c$ , ce qui n'est pas possible avec la distribution du détecteur LR-NMF.

réel)<sup>4</sup>. Mais il est alors ardu de manipuler mathématiquement cette information de manière à déterminer la distribution du détecteur LR-ANMF.

C'est pourquoi, nous proposons une autre méthode. Sachant qu'en grandes dimensions le détecteur LR-ANMF converge vers une quantité différente du détecteur LR-NMF, on propose de calculer la distribution de cette quantité limite  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  qui ne dépendra plus que de celle de  $\mathbf{x}$  et de l'expression en elle-même de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . Cette distribution est donc la distribution asymptotique du détecteur LR-ANMF en grandes dimensions. Cependant, les limites des quantités aléatoires dans le régime en grandes dimensions sont réputées être de meilleures approximations déterministes de ces quantités même à  $m$  et  $K$  fixés. Nous l'avons d'ailleurs observé dans le chapitre précédent. De ce fait, la distribution asymptotique du détecteur LR-ANMF en grandes dimensions devrait être une bonne approximation de celle du détecteur LR-ANMF à  $m$  et  $K$  fixés. Nous proposons donc d'approximer la distribution du détecteur LR-ANMF par sa distribution asymptotique.

Pour cela, on propose tout d'abord, sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , de déterminer une quantité aléatoire équivalente en distribution, partageant donc la même distribution que  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . Cependant, ce calcul n'aboutit pas simplement à une expression de la distribution. De plus, il est aussi très compliqué voire impossible d'aboutir à une formulation explicite sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  comme sous  $\mathcal{H}_0$  du à des produits et sommes de variables aléatoires gaussiennes non centrées. Par conséquent, on propose une deuxième méthode, valable sous  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ , déterminant une approximation de la distribution de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . Ainsi nous aurons une approximation de la distribution asymptotique du détecteur LR-ANMF dans le régime en grandes dimensions.

### 3.3.1 Sans approximation sous $\mathcal{H}_0$

On propose donc d'abord de déterminer la distribution de  $\bar{\Lambda}_G(\Theta)$  et  $\bar{\Lambda}_S(\Theta)$  en déterminant une quantité aléatoire équivalente partageant la même distribution.

**Théorème 3.1** *Quantité aléatoire équivalente à  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  [Combernoux et al., 2015a]*

Soit  $w$  (resp.  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ ) pour  $w^G$  ou  $w^S$  (resp.  $\bar{\Lambda}_G(\Theta)$  ou  $\bar{\Lambda}_S(\Theta)$ ) suivant le modèle de SCM (« G-MUSIC » ou spiked). Alors, sous  $\mathcal{H}_0$  et (H1-H3),  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  a la même distribution que la quantité suivante :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i X_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m \beta_{ij} (\Re(v_{ij}) Y_{ij} + \Im(v_{ij}) Z_{ij})}{C \sum_{i=1}^m \eta_i X_i} \quad (3.15)$$

où

$$\begin{cases} X_i & \stackrel{\text{iid}}{\sim} \chi_i^2(2) \\ Y_{ij} = R_i R_j + I_i I_j & \sim \text{Laplace}_{ij}^Y(0, 1) \\ Z_{ij} = I_i R_j + R_i I_j & \sim \text{Laplace}_{ij}^Z(0, 1) \\ R_i, R_j, I_i, I_j & \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1) \end{cases} \quad (3.16)$$

et, en rappelant que  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m]$ ,

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{1}{2} w_i^2 \lambda_i |\mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i|^2 \\ \beta_{ij} = w_i w_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \\ v_{ij} = \mathbf{u}_i^H \mathbf{a}(\Theta) \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j \\ \eta_i = w_i \lambda_i \\ C = \frac{1}{2} \|\text{diag}([w_1, \dots, w_m]) \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\Theta)\|_2^2 \end{cases} \quad (3.17)$$

4. Si  $\hat{\mathbf{U}}$  a une mesure de Haar sur les matrices orthogonales, alors pour tout vecteur unitaire  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{U}} \mathbf{x}$  a une distribution uniforme sur la sphère unité  $S_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$

De plus, pour tout  $i, j, i', j' \in \llbracket 1; m \rrbracket$  avec  $i \neq j$  et  $i' \neq j'$ , on a les relations d'indépendance et de décorrélation suivantes :

- $X_i$  est indépendant de  $X_{i'}$  pour  $i' \neq i$  ;
- $Y_{ij}$  et  $Z_{ij}$  sont indépendants de  $X_{i'}$  pour  $i' \neq i$  et  $i' \neq j$  ;
- $Y_{ij}$  est indépendant de  $Y_{i'j'}$  et  $Z_{i'j'}$  pour  $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$  ;
- $Z_{ij}$  est indépendant de  $Y_{i'j'}$  et  $Z_{i'j'}$  pour  $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$  ;
- $X_i$  et  $Y_{ij}$  sont décorrélées ;
- $X_i$  et  $Z_{ij}$  sont décorrélées ;
- $Y_{ij}$  et  $Z_{ij}$  sont décorrélées.

**Démonstration :** Voir en Annexe C.1.

Cependant, il est maintenant très ardu de calculer la distribution de cette quantité aléatoire équivalente, devant calculer la distribution jointe correspondant à cette fonction de variables aléatoires et ne connaissant pas la distribution de somme de variables aléatoires dépendantes suivant des lois de Laplace. De plus, la seule décorrélation ne suffit pas pour obtenir la DDP jointe de la quantité aléatoire équivalente. Ce calcul ne peut donc pas aboutir en l'état à une expression « simple » de la distribution de  $V$  et de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . Une simple simulation de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  au lieu de  $V$  serait donc tout aussi justifiée. De plus, il est aussi très compliqué voire impossible d'aboutir à une formulation explicite sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  comme sous  $\mathcal{H}_0$  dû à des produits et sommes de variables aléatoires gaussiennes non centrées. En effet, sous  $\mathcal{H}_1$  et en se référant aux Eqs.(C.32), (C.33) de la démonstration, on aura de manière similaire des variables aléatoires du type :

$$Y_{ij} \sim 2(\Re(z_i)\Re(z_j) + \Im(z_i)\Im(z_j)) \quad (3.18)$$

$$Z_{ij} \sim 2(\Im(z_i)\Re(z_j) - \Re(z_i)\Im(z_j)) \quad (3.19)$$

avec  $\Re(z_i), \Re(z_j) \sim \mathcal{N}(\Re(\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^H\mathbf{d}), 1/2)$  et  $\Im(z_i), \Im(z_j) \sim \mathcal{N}(\Im(\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^H\mathbf{d}), 1/2)$ , des variables aléatoires non centrées (moyenne non nulle de  $\mathbf{x}$ ) et où  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}([\lambda_1, \dots, \lambda_m])$ . Il n'est donc plus possible de trouver simplement l'expression de la distribution de  $Y_{ij}$  et  $Z_{ij}$  et il devient donc encore plus dur de déterminer l'expression de la distribution de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . Par conséquent, cette première méthode ne présente beaucoup d'intérêt en l'état.

Une solution pour obtenir une loi de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  serait de considérer les lois limites de chaque FQ, *i.e.* des lois du Chi2. Mais étant intéressés par des probabilités de fausse alarme au moins inférieures à  $10^{-2}$ , ces lois limites ne pourraient pas nous fournir une approximation suffisamment proche de la réalité (détecteur LR-ANMF).

### 3.3.2 Avec approximation sous $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$

C'est pourquoi, on propose un deuxième méthode nécessitant une approximation mais donnant une formulation explicite de la distribution de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  (pour  $\bar{\Lambda}_G(\Theta)$  ou  $\bar{\Lambda}_S(\Theta)$  suivant le modèle de SCM considéré). On calculera ici une approximation de sa distribution, méthode valable sous les deux hypothèses. Pour cela, on transformera l'expression de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  fonction de variables aléatoires complexes gaussiennes en un rapport de 2 FQs simples fonction de variables aléatoires gaussiennes réelles. Puis on pourra alors utiliser la méthode d'ajustement polynomial de distribution de [Mohsenipour and Provost, 2012] en approximant la distribution de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  par un polynôme de degré  $d$  multiplié par une loi Beta, le tout ajusté aux moments non centrés de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . Plus précisément, en égalisant les moments non centrés de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  aux moments non centrés liés à la distribution approximée, ceci permet de déterminer les coefficients du polynôme de degré  $d$ .

### 3.3.2.1 Transformation de l'expression de $\bar{\Lambda}(\Theta)$ en un rapport de deux FQs à variables aléatoires réelles

La méthode d'approximation de distribution par ajustement polynomial ne s'appliquant qu'à des rapports de FQs fonction de variables aléatoires gaussiennes réelles, la première étape est donc de transformer l'expression de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  fonction de variables aléatoires complexes gaussiennes en un rapport de 2 FQs simples fonction de variables aléatoires gaussiennes réelles. Il en résulte la proposition suivante.

**Proposition 3.2** *Transformation de l'expression de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  en un rapport de deux FQs à variables aléatoires réelles*

Soit  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  défini de la manière suivante :

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{x})} \quad (3.20)$$

où  $\bar{\Pi}_c^\perp = \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{U}^H$  correspond à  $\bar{\Pi}_{c,G}^\perp$  ou  $\bar{\Pi}_{c,S}^\perp$ ,  $\mathbf{W} = \text{diag}([w_1, \dots, w_m])$ ,  $w_i$  correspond à  $w_i^G$  ou  $w_i^S$  et  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m]$ . De plus,  $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}_x, \mathbf{R})$  est la donnée sous test où  $\boldsymbol{\mu}_x = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{d}$  selon l'hypothèse considérée ( $\mathcal{H}_0$  ou  $\mathcal{H}_1$ ). Alors,

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{z}}}{\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{z}}} \quad (3.21)$$

avec  $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{2m \times 1} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{z}}} = \sqrt{2}[\Re(\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}^H \boldsymbol{\mu}_x)^T, \Im(\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}^H \boldsymbol{\mu}_x)^T]^T, \mathbf{I}_{2m})$ ,  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}([\lambda_1, \dots, \lambda_m])$  et

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{A}) & -\Im(\mathbf{A}) \\ \Im(\mathbf{A}) & \Re(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m} \\ \tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{O}_m \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{H} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m} \end{cases} \quad (3.22)$$

où  $\mathbf{A} = \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{f} \mathbf{f}^H \mathbf{H}^{1/2}$ ,  $\mathbf{H} = \text{diag}([\eta_1, \dots, \eta_m])$ ,  $\eta_i = w_i \lambda_i$  et  $\mathbf{f} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\Theta) / \|\mathbf{W}^{1/2} \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\Theta)\|_2$ . De plus,  $\tilde{\mathbf{A}}$  est une matrice symétrique car  $\Im(\mathbf{A})$  est une matrice antisymétrique.

**Démonstration :** Voir en Annexe C.2.

### 3.3.2.2 Approximation par ajustement polynomial

L'expression de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  étant maintenant un rapport de deux FQs simples, fonctions de variables aléatoires gaussiennes réelles, la méthode d'approximation de distribution par ajustement polynomial de [Mohsenipour and Provost, 2012] est totalement adaptée et utilisable pour approximer la distribution de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . La distribution de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_k$ ,  $k \in \{0, 1\}$ , sera notée  $f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$  et  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$  sera son approximation.  $f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$  est donc approximée par la distribution ajustée polynômialement suivante :

$$\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k) = \varphi(x|\mathcal{H}_k) \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_k} x^i \quad (3.23)$$

où  $\varphi(x|\mathcal{H}_k)$  est une densité de base (par exemple la loi exponentielle ou Beta) de même support que  $f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$  et  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$ , i.e.  $(x_-, x_+)$ ,  $\nu_{i|\mathcal{H}_k}$  sont les coefficients du polynôme d'ajustement et  $d$  son degré. Ce dernier est laissé au choix de l'utilisateur tout en rappelant que, bien évidemment, plus celui-ci

sera élevé, plus l'approximation sera bonne. Afin de caractériser entièrement  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$ , ses paramètres d'ajustement comme les paramètres de la loi de base ainsi que les coefficients  $\nu_{i|\mathcal{H}_k}$  peuvent être calculés par égalisation des moments non centrés. De plus il sera important de s'assurer que le support de  $\varphi(x|\mathcal{H}_k)$  coïncide avec ceux de  $f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$  et  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$ .

### Égalisation des moments non centrés

On cherche donc à calculer les paramètres d'ajustement de  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$  par égalisation des moments non centrés afin de caractériser complètement cette distribution approximée. Pour cela, les moments non centrés de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  sont mis en relation avec ceux liés à  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$  à partir de la relation suivante [Mohsenipour and Provost, 2012] :

$$\mu_{h|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} = \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_k} \mu_{h+i|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)}, \quad \forall h \in \llbracket 0, d \rrbracket \quad (3.24)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \nu_{0|\mathcal{H}_k} \\ \nu_{1|\mathcal{H}_k} \\ \vdots \\ \nu_{d|\mathcal{H}_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{0|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} & \mu_{1|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} & \cdots & \mu_{d|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} \\ \mu_{1|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} & \mu_{2|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} & \cdots & \mu_{d+1|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{d|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} & \mu_{d+1|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} & \cdots & \mu_{2d|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_{0|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} \\ \mu_{1|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} \\ \vdots \\ \mu_{d|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\nu}_k = \mathbf{M}_k^{-1} \boldsymbol{\mu}_k^{(\bar{\Lambda})} \quad (3.26)$$

où  $\mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})}$  (resp.  $\mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)}$ ),  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  sont les moments non centrés d'ordre  $i$  de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  (resp. associés à  $\varphi(x|\mathcal{H}_k)$ ) et  $\mu_{0|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} = \mu_{0|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} = 1$ .

### Moments non centrés de $\bar{\Lambda}(\Theta)$

Afin de calculer les coefficients  $\nu_{i|\mathcal{H}_k}$  du polynôme, il faut donc connaître les moments non centrés  $\mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})}$  de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . Ces derniers peuvent être déterminés suivant la relation suivante [Mohsenipour and Provost, 2012, Magnus, 1986] donnant les moments non centrés d'un rapport de deux FQs, fonctions de variables aléatoires gaussiennes réelles, rapport tel que défini à l'Eq.(3.21) de la Prop.3.2 :

$$\begin{aligned} \mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} &= \frac{1}{\Gamma(i)} \int_0^{+\infty} y^{i-1} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{z}}}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{z}}}\right) \frac{\partial^i}{\partial s^i} \left\{ |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - 2s\tilde{\mathbf{A}} + 2y\tilde{\mathbf{H}}|^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{z}}}^T (\boldsymbol{\Sigma} - 2s\boldsymbol{\Sigma}\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Sigma} + 2y\boldsymbol{\Sigma}\tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{z}}}\right) \right\} \Big|_{s=0} dy \quad (3.27) \end{aligned}$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}$  est la matrice de covariance de  $\tilde{\mathbf{z}}$  ici égale à  $\mathbf{I}_{2m}$ ,  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction Gamma et où la valeur de  $\boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{z}}}$  dépend de l'hypothèse considérée  $\mathcal{H}_k$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} &= \frac{1}{\Gamma(i)} \exp\left(-\frac{\|\boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{z}}}\|_2^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} y^{i-1} \frac{\partial^i}{\partial s^i} \left\{ |\mathbf{I}_{2m} - 2s\tilde{\mathbf{A}} + 2y\tilde{\mathbf{H}}|^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{z}}}^T (\mathbf{I}_{2m} - 2s\tilde{\mathbf{A}} + 2y\tilde{\mathbf{H}})^{-1} \boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{z}}}\right) \right\} \Big|_{s=0} dy \quad (3.28) \end{aligned}$$

et le vecteur  $\boldsymbol{\mu}_k^{(\bar{\Lambda})}$  de l'Eq.(3.26) peut être calculé.

### Paramètres de la loi de base et moments non centrés liés à celle-ci

Il nous reste maintenant à déterminer  $\mathbf{M}_k$  de l'Eq.(3.26) en calculant les moments non centrés liés à la loi de base et à déterminer les paramètres de la loi de base.

Pour cela, on choisit tout d'abord et on utilisera par la suite la loi Beta comme loi de base pour son expression assez simple et son support  $[0; 1]$  coïncidant au support de la distribution de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . En effet,  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  étant par définition la limite d'un détecteur ne pouvant prendre lui aussi des valeurs que comprises entre 0 et 1 par définition,  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  ne peut prendre des valeurs que comprises entre 0 et 1. Ainsi les moments non centrés liés à la loi Beta peuvent se déterminer itérativement de la façon suivante :

$$\mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} = \frac{\alpha_k + i - 1}{\alpha_k + \beta_k + i - 1} \mu_{i-1|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} \quad (3.29)$$

avec  $\mu_{1|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} = \frac{\alpha_k}{\alpha_k + \beta_k}$  et où  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont les paramètres de la loi Beta. Ces derniers sont donnés par :

$$\alpha_k = -\mu_{1|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} + \frac{\left(1 - \mu_{1|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})}\right) \left(\mu_{1|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})}\right)^2}{\mu_{2|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} - \left(\mu_{1|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})}\right)^2} \quad \beta_k = -1 - \alpha_k + \frac{\left(1 - \mu_{1|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})}\right) \mu_{1|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})}}{\mu_{2|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} - \left(\mu_{1|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})}\right)^2} \quad (3.30)$$

Nous avons donc maintenant tous les moments et paramètres pour pouvoir calculer la distribution approximée sauf si les supports de la loi de base et de la loi de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  ne coïncident pas.

#### Résumé de la méthode de calcul de la densité ajustée polynômialement, cas d'une loi de base ayant le même support que la loi à approximer.

- Choix des paramètres initiaux :  $d, m, r, K, etc.$
- 1. Calculs préliminaires :  $\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{A}}$  et  $\tilde{\mathbf{H}}$  grâce aux éléments de la **Proposition 3.2**.
- 2. Calcul des  $d$  moments non centrés  $\mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})}$  de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  grâce à l'Eq.(3.28).
- 3. Calcul des paramètres de la loi de base, ici  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  pour la loi Beta, grâce à l'Eq.(3.30).
- 4. Calcul des  $2d$  moments non centrés  $\mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)}$  de la loi de base grâce à l'Eq.(3.29).
- 5. Calcul du vecteur des  $d + 1$  coefficients pondérateurs  $\nu_k$  grâce à l'Eq.(3.26).
- Possibilité de calcul de la densité approximée  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$ , sa fonction de répartition associée, *etc.*

### Concordance des supports de la loi de base avec celle de la distribution de $\bar{\Lambda}(\Theta)$

On peut se trouver dans le cas où la loi de base choisie (par exemple une loi uniforme de support  $[a; b]$ ) n'a pas le même support que le rapport de FQs, ici  $[0; 1]$  pour  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . Dans ce cas, il est nécessaire d'effectuer des calculs supplémentaires détaillés ci-dessous. Les moments  $\mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)}$  associés à  $\varphi(x|\mathcal{H}_k)$  sont déterminés suivant la densité de base choisie. Cependant, il faut se préoccuper du support de la densité de base si il est différent de  $(x_-, x_+)$ , support de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . Soit, dans ce cas bien précis  $\tilde{\varphi}(y|\mathcal{H}_k)$  la densité de base de support  $(y_-, y_+)$ . Si  $(x_-, x_+) = (y_-, y_+)$ , les moments  $\mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)}$  associés à  $\varphi(x|\mathcal{H}_k)$  sont ceux associés à  $\tilde{\varphi}(y|\mathcal{H}_k)$ . Cependant, si le support  $(x_-, x_+) \neq (y_-, y_+)$ ,  $\mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)}$  doit être déterminé à partir des moments  $\mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\tilde{\varphi})}$  associés à  $\tilde{\varphi}(y|\mathcal{H}_k)$  grâce à la formule du binôme de Newton et en considérant la transformation affine suivante :

$$x = \frac{y - y_-}{y_+ - y_-} (x_+ - x_-) + x_- \Leftrightarrow y = \frac{x - x_-}{x_+ - x_-} (y_+ - y_-) + y_- \quad (3.31)$$

Alors,

$$\tilde{\varphi}(y|\mathcal{H}_k) = \varphi \left( \frac{y - y_-}{y_+ - y_-} (x_+ - x_-) + x_- \middle| \mathcal{H}_k \right) \quad (3.32)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x|\mathcal{H}_k) = \tilde{\varphi} \left( \frac{x - x_-}{x_+ - x_-} (y_+ - y_-) + y_- \middle| \mathcal{H}_k \right) \quad (3.33)$$

et, à partir de la formule du binôme de Newton,

$$\mu_{i|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} = \mathbb{E}[X^i] = \frac{dx}{dy} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{Y - y_-}{y_+ - y_-} (x_+ - x_-) + x_- \right)^i \right] \quad (3.34)$$

$$= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left( \frac{x_+ - x_-}{y_+ - y_-} \right)^{i+1} \left( x_- - y_- \frac{x_+ - x_-}{y_+ - y_-} \right)^{i-j} \mathbb{E}[Y^j] \quad (3.35)$$

$$= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left( \frac{x_+ - x_-}{y_+ - y_-} \right)^{i+1} \left( x_- - y_- \frac{x_+ - x_-}{y_+ - y_-} \right)^{i-j} \mu_{j|\mathcal{H}_k}^{(\tilde{\varphi})} \quad (3.36)$$

### Garantie que la fonction approximée polynômialement a les propriétés d'une densité de probabilité

Une autre préoccupation, non rencontrée ici, concerne la détermination des coefficients  $\nu_{i|\mathcal{H}_k}$ . En effet, l'Eq.(3.25) ne garantit pas que la distribution/fonction approximée obtenue  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$  remplisse les propriétés d'une densité de probabilité, *i.e.* son intégrale vaut 1 et  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k) \in [0; 1]$ . Si le problème est rencontré, une méthode simple afin de vérifier ces propriétés serait d'estimer les coefficients  $\nu_{i|\mathcal{H}_k}$  en minimisant la différence entre  $\mu_{h|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})}$  et  $\sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_k} \mu_{h+i|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)}$  (cf. partie gauche de l'Eq.(3.25)) tels que  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$  vérifie les propriétés d'une densité de probabilité. On pourrait alors par exemple résoudre le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Min}_{\substack{\nu_{i|\mathcal{H}_k} \in \mathbb{R} \\ \forall i \in \llbracket 0; d \rrbracket}} & \left| \mu_{h|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} - \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_k} \mu_{h+i|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)} \right|_2^2 & \forall h \in \llbracket 0; d \rrbracket \\ \text{s.c.} & \tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k) = \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_k} x^i \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ & \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k) dx = \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_k} \mu_i^{(\varphi)} = 1 \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Min}_{\nu_k \in \mathbb{R}^{d+1}} & \|\mathbf{M}_k \nu_k - \boldsymbol{\mu}_k^{(\bar{\Lambda})}\|_2^2 \\ \text{s.c.} & -\mathbf{x}_1^T \nu_k \leq 0 \\ & \vdots \\ & -\mathbf{x}_N^T \nu_k \leq 0 \\ & \mathbf{m}_k^T \nu_k - 1 = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

où  $N$  est le nombre d'abscisses  $x$  pris,  $\mathbf{x}_i^T = [x_i^0, \dots, x_i^d]$  et  $\mathbf{m}_k^T = [\mu_0^{(\varphi)}, \dots, \mu_d^{(\varphi)}]$ .

### 3.4 Performances du détecteur LR-ANMF : $P_{fa}$ et $P_d$

On caractérise maintenant les performances du détecteur LR-ANMF par le calcul des relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ - $P_{fa}/P_d$ -seuil associées à sa distribution asymptotique dans le régime en grandes dimensions

$f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_k)$ , distribution approximant sa vraie distribution à  $m$  et  $K$  fixés. La relation  $P_{fa}$ -seuil pourra être calculée à partir de la quantité équivalente à  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  mais ne trouvera une expression explicite qu'avec sa distribution approximée  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_0)$ . Enfin les relations  $P_d$ - $P_{fa}$ / $P_d$ -seuil seront déterminées de manière explicite de la même façon avec  $f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_1)$ .

Cherchant à déterminer les relations analytiques  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ -seuil du détecteur LR-ANMF mais ne pouvant les obtenir faute d'expression de la distribution du détecteur LR-ANMF, on les approxime par celles de sa limite  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  (pour  $\bar{\Lambda}_G(\Theta)$  ou  $\bar{\Lambda}_S(\Theta)$  suivant le modèle de SCM considéré).

Il est alors possible de déterminer théoriquement, à partir des distributions de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  sous  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ , ou par simulations Monte Carlo les relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ -seuil. En effet, on a défini :

$$P_{fa} = \mathbb{P} [\bar{\Lambda}(\Theta) > \bar{\xi}|\mathcal{H}_0] = \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_0)dx \quad (3.39)$$

$$P_d = \mathbb{P} [\bar{\Lambda}(\Theta) > \bar{\xi}|\mathcal{H}_1] = \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_1)dx \quad (3.40)$$

ou, grâce à  $N$  itérations Monte Carlo ou  $N$  données d'apprentissage, on peut définir les quantités empiriques correspondantes :

$$P_{fa}^{\text{emp}} = \frac{1}{N} \#\{n : \bar{\Lambda}_n(\Theta) > \bar{\xi}|\mathcal{H}_0\} \quad (3.41)$$

$$P_d^{\text{emp}} = \frac{1}{N} \#\{n : \bar{\Lambda}_n(\Theta) > \bar{\xi}|\mathcal{H}_1\} \quad (3.42)$$

où  $\bar{\Lambda}_n(\Theta)$  est la  $n$ -ième réalisation de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ .

La meilleure solution serait bien sur de pouvoir calculer ces lois théoriquement mais nous n'avons pas la distribution théorique de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . Puis, l'inconvénient de la méthode par apprentissage est qu'elle est dépendante des données observées et des données sous test. C'est pourquoi on a proposé au théorème 3.1 une quantité aléatoire  $V$  équivalente en distribution à  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  sous  $\mathcal{H}_0$  mais indépendante des données d'observation. Cependant, elle ne reste qu'une quantité aléatoire dont il est ardu voire « impossible » de déterminer analytiquement sa distribution. Il reste quand même possible d'estimer la relation  $P_{fa}$ -seuil comme suit :

$$P_{fa}^{\text{emp}} = \frac{1}{N} \#\{n : V_n > \bar{\xi}|\mathcal{H}_0\} \quad (3.43)$$

où  $V_n$  est la  $n$ -ième réalisation de la quantité aléatoire  $V$  équivalente en distribution à  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ . Bien que cette méthode soit une estimation par simulation comme la précédente, elle reste quand même plus rapide car il n'y a plus besoin d'effectuer une décomposition en éléments propres (EVD pour *EigenValue Decomposition*) de la SCM pour le calcul de  $\hat{\Pi}_c^\perp$ . On remarquera aussi qu'il n'est possible d'obtenir que la relation  $P_{fa}$ -seuil étant donné que le théorème 3.1 ne donne une quantité aléatoire  $V$  que sous  $\mathcal{H}_0$ . Nous avons donc deux problèmes : les simulations Monte Carlo pour estimer la relation  $P_{fa}$ -seuil et le fait que nous n'avons pas de quantité aléatoire équivalente sous  $\mathcal{H}_1$  et donc pas d'estimation de la relation  $P_d$ -seuil par cette méthode.

C'est pourquoi nous allons calculer les relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ -seuil approximées théoriques de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  à partir de sa distribution approximée déterminée en Sec.3.3.2 sous  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ , respectivement  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_0)$  et  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_1)$ . On rappelle que la loi de base choisie pour la distribution ajustée polynômialement est la loi Beta et que tous ses paramètres sont déterminés par les Eqs.(3.26), (3.28), (3.29), (3.30) et la proposition 3.2. De ce fait, puisque

$$f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_0) \simeq f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_0) \simeq \tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_0) \quad (3.44)$$

$$f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_1) \simeq f_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_1) \simeq \tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_1) \quad (3.45)$$

on peut écrire :

$$P_{fa} \simeq \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} \tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_0)dx = \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} \varphi(x|\mathcal{H}_0) \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_0} x^i dx = \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_0} P_i(\bar{\xi}|\mathcal{H}_0)dx \quad (3.46)$$

$$P_d \simeq \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} \tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_1)dx = \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} \varphi(x|\mathcal{H}_1) \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_1} x^i dx = \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_1} P_i(\bar{\xi}|\mathcal{H}_1)dx \quad (3.47)$$

avec

$$P_i(\bar{\xi}|\mathcal{H}_k) = \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} x^i \varphi(x|\mathcal{H}_k) dx \quad k \in \{0, 1\} \quad (3.48)$$

Déterminons maintenant  $P_i(\bar{\xi}|\mathcal{H}_k)$ . Si  $\varphi(x|\mathcal{H}_k)$  est une loi Beta, alors

$$P_i(\bar{\xi}|\mathcal{H}_k) = \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} x^i \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} x^{\alpha_k-1} (1-x)^{\beta_k-1} \mathbf{1}_{[0,1]} dx \quad (3.49)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} x^{i+\alpha_k-1} (1-x)^{\beta_k-1} \mathbf{1}_{[0,1]} dx \quad (3.50)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} \frac{\Gamma(i + \alpha_k)\Gamma(\beta_k)}{\Gamma(i + \alpha_k + \beta_k)} \mathcal{B}(i + \alpha_k, \beta_k) dx \quad (3.51)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)\Gamma(i + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(i + \alpha_k + \beta_k)} \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} \mathcal{B}(i + \alpha_k, \beta_k) dx \quad (3.52)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)\Gamma(i + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(i + \alpha_k + \beta_k)} \left( 1 - \int_{-\infty}^{\bar{\xi}} \mathcal{B}(i + \alpha_k, \beta_k) dx \right) \quad (3.53)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)\Gamma(i + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(i + \alpha_k + \beta_k)} (1 - I_{\bar{\xi}}(i + \alpha_k, \beta_k)) \quad (3.54)$$

où  $I_{\bar{\xi}}(i + \alpha, \beta)$  (resp.  $\mathcal{B}(i + \alpha, \beta)$ ) est la fonction beta incomplète régularisée (resp. la loi Beta). Par conséquent, en considérant les propriétés de  $I_{\bar{\xi}}(i + \alpha, \beta)$ , on a les relations théoriques  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ -seuil suivantes [Comberoux et al., 2016] :

$$P_{fa} \simeq \begin{cases} \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_0} \frac{\Gamma(\alpha_0 + \beta_0)\Gamma(i + \alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(i + \alpha_0 + \beta_0)} = 1 & \text{si } \bar{\xi} < 0 \\ \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_0} \frac{\Gamma(\alpha_0 + \beta_0)\Gamma(i + \alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(i + \alpha_0 + \beta_0)} (1 - I_{\bar{\xi}}(i + \alpha_0, \beta_0)) & \text{si } \bar{\xi} \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } \bar{\xi} > 1 \end{cases} \quad (3.55)$$

$$P_d \simeq \begin{cases} \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_1} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1)\Gamma(i + \alpha_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(i + \alpha_1 + \beta_1)} = 1 & \text{si } \bar{\xi} < 0 \\ \sum_{i=0}^d \nu_{i|\mathcal{H}_1} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1)\Gamma(i + \alpha_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(i + \alpha_1 + \beta_1)} (1 - I_{\bar{\xi}}(i + \alpha_1, \beta_1)) & \text{si } \bar{\xi} \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } \bar{\xi} > 1 \end{cases} \quad (3.56)$$

On rappelle que  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont déterminés à partir de l'Eq.(3.30). On rappelle aussi que comme  $\nu_k = \mathbf{M}_k^{-1} \boldsymbol{\mu}_k^{(\bar{\Lambda})}$ ,  $\nu_{i|\mathcal{H}_k}$  est fonction de l'hypothèse  $\mathcal{H}_k$ ,  $k \in \{0, 1\}$ , de tous les moments de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  ainsi que de

ceux associés à  $\varphi(x|\mathcal{H}_k)$  :

$$\nu_{i|\mathcal{H}_k} = \left( \mathbf{M}_k^{-1} \boldsymbol{\mu}_k^{(\bar{\Lambda})} \right)_i = \sum_{j=0}^d (\mathbf{M}_k^{-1})_{i,j} \mu_{j|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} \quad (3.57)$$

$$= g_i \left( \mathcal{H}_k, \mu_{0|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)}, \dots, \mu_{2d|\mathcal{H}_k}^{(\varphi)}, \mu_{0|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})}, \dots, \mu_{d|\mathcal{H}_k}^{(\bar{\Lambda})} \right) \quad (3.58)$$

$$= b_i(\boldsymbol{\mu}_x, m, c, r, \mathbf{W}, \boldsymbol{\Theta}, \mathbf{R}, d) \quad (3.59)$$

où  $\mathbf{W}$  correspond à  $\mathbf{W}^{(G)}$  ou  $\mathbf{W}^{(S)}$  suivant le modèle de SCM choisi (« G-MUSIC » ou *spiked*). Ainsi,  $g_i(\cdot)$  (resp.  $b_i(\cdot)$ ) est une fonction de tous les moments et de  $\mathcal{H}_k$  (resp. de tous les paramètres) qui est dure à écrire de manière analytique/détaillée.

Par conséquent, on a obtenu les relations approximées théoriques  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ -seuil de  $\bar{\Lambda}(\boldsymbol{\Theta})$  et donc du détecteur LR-ANMF qui sont fonction de tous les paramètres du système radar et du modèle choisi (*spiked* ou « G-MUSIC »).

### 3.5 Validation des résultats

Cette section est ainsi dédiée à la validation des résultats précédemment énoncés ainsi qu'à l'observation des performances du détecteur LR-ANMF. La sous-section 3.5.1 présente l'application simple (mais proche de l'application STAP) choisie pour la validation et détermine l'adéquation du modèle de SCM à l'application. Puis, la sous-section 3.5.2 valide les nouvelles convergences dans le régime en grandes dimensions. Enfin, la sous-section 3.5.3 présente et compare les performances de détection du détecteur LR-ANMF avec celles de sa limite dans le régime en grande dimension et celle du détecteur LR-NMF.

#### 3.5.1 Présentation de l'application et paramètres de simulation

Afin d'illustrer l'intérêt des RMT, on choisit la même application brouillage simple où l'on maîtrise tous les paramètres mais proche de l'application STAP par le modèle des signaux. L'antenne linéaire uniforme est composée de  $m = 20$  capteurs malgré la présence de  $r$  brouilleurs. La faible valeur de  $m$  est principalement due au temps de calcul des moments de  $\bar{\Lambda}(\theta)$  présentés en Sec.3.3.2. Ce point sera discuté plus en détail en sous-section 3.5.3. La réponse des brouilleurs  $c$  est toujours composée de signaux similaires à  $d$  (d'AoA  $\theta_d$ ), *i.e.* de  $r = 3$  cibles synthétiques d'AoA  $\theta_c$  égaux à  $-20^\circ$ ,  $0^\circ$  et  $20^\circ$  avec pour longueur d'onde  $l_0 = 0.667\text{m}$ . La matrice de covariance des brouilleurs (bruit rang faible) est générée de la même façon que dans le chapitre précédent. On rappelle seulement l'expression de la matrice de covariance du bruit total :

$$\mathbf{R} = \frac{JNR}{\text{tr}(\boldsymbol{\Gamma})} \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m \quad (3.60)$$

avec  $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}([\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3])$ ,  $\gamma_i$  et  $\mathbf{C}$  sont définis comme en sous-section 2.4.1,  $\sigma^2 = 1$  et où  $JNR$  est le rapport brouilleur à bruit.  $\frac{JNR}{\text{tr}(\boldsymbol{\Gamma})}$  et le  $SNR$  (rapport signal  $d$  à bruit) sont respectivement fixés à 10dB et 18dB, le rapport  $c_m = 5$  au maximum (pour  $K = r + 1$ ) et  $\theta_d = 20, 5^\circ$  sauf si une autre valeur est indiquée.

De même que dans le chapitre précédent, le modèle *spiked* correspond à l'application de brouillage. Cependant, nous continuerons aussi les études avec le modèle « G-MUSIC » étant donné les bons résultats donnés par ce modèle dans le chapitre précédent.

Pour la condition de séparabilité, le lecteur pourra se rapporter à la Fig. 2.2 du chapitre précédent.

On rappelle cependant que cette condition est vérifiée pour  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} > 6.2\text{dB}$  pour la majorité des  $c$ , même si  $c > 17$ . En pratique, si  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} < 6.2\text{dB}$ , le brouillage n'aura plus d'effet sur les performances. Par conséquent, les paramètres choisis sont réalistes.

### 3.5.2 Convergences en régime en grandes dimensions

On s'intéresse maintenant à la validation des nouvelles convergences dans le régime en grandes dimensions, *i.e.* quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c$ , présentées dans ce chapitre. On observe tout d'abord la convergence du détecteur LR-ANMF vers ses limites respectives  $\bar{\Lambda}_G(\theta)$  et  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  suivant le modèle de SCM considéré en Fig.3.1 avec  $c = 5$ ,  $\theta_d = 25^\circ$  en observant en  $\theta = 20, 1^\circ$ .

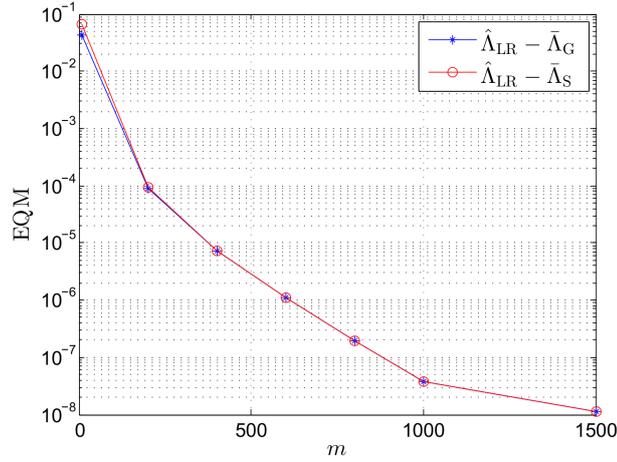


FIGURE 3.1 – EQM sur  $10^4$  itérations en fonction de  $m$  avec  $c = 5$ ,  $\theta_d = 25^\circ$  et  $\theta = 20, 1^\circ$ .

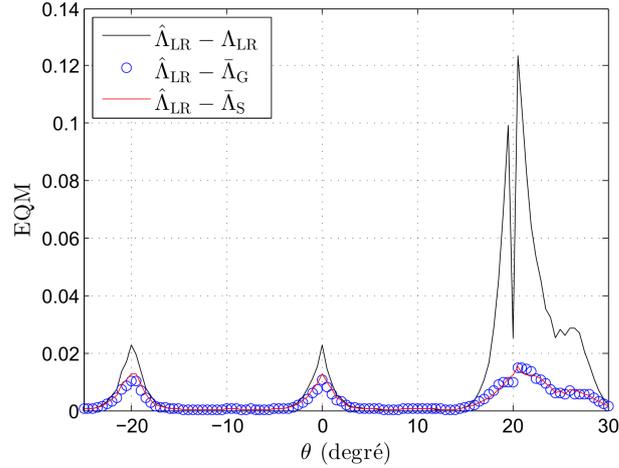
De même que dans le chapitre précédent, il est important de noter que le gain de prédiction apporté par la RMT dépend des paramètres choisis et particulièrement de l'AoA d'observation. En effet, si  $\theta$  est trop éloigné de  $\theta_c$ , le gain d'estimation sera négligeable. De manière similaire au chapitre précédent, on mesure l'EQM entre le détecteur LR-ANMF et ses différentes limites (dans le régime classique et le régime en grandes dimensions) afin de pouvoir déterminer quelle limite se rapproche le plus du détecteur LR-ANMF, *i.e.* quelle limite caractérise le mieux son comportement. Ainsi, on s'intéresse aux EQMs suivantes :

$$EQM \left( \hat{\Lambda}_{LR} - \Lambda_{LR} \right) = \mathbb{E} \left[ \left( \hat{\Lambda}_{LR} - \Lambda_{LR} \right)^2 \right] \quad (3.61)$$

$$EQM \left( \hat{\Lambda}_{LR} - \bar{\Lambda}_G \right) = \mathbb{E} \left[ \left( \hat{\Lambda}_{LR} - \bar{\Lambda}_G \right)^2 \right] \quad (3.62)$$

$$EQM \left( \hat{\Lambda}_{LR} - \bar{\Lambda}_S \right) = \mathbb{E} \left[ \left( \hat{\Lambda}_{LR} - \bar{\Lambda}_S \right)^2 \right] \quad (3.63)$$

La Fig.3.2 permet donc de visualiser ces EQMs en fonction de  $\theta$  pour  $m = 20$ ,  $K = r + 1$  et  $\theta_d = 26^\circ$ . De même que dans le chapitre précédent, on conclut que si  $\theta = 10^\circ$  par exemple, la différence entre le détecteur LR-ANMF et ses différentes limites sont égales, le gain de prédiction est donc nul et la RMT n'apporte rien. Cependant, si  $\theta \simeq 20^\circ$  par exemple, la RMT permet d'obtenir une EQM bien plus faible, donc une limite dans le régime en grandes dimensions caractérisant beaucoup mieux le comportement du détecteur LR-ANMF. C'est pour cette raison que l'AoA d'observation et l'AoA de la cible ont été choisies si proches de ceux des brouilleurs, afin de pouvoir observer les gains que peut apporter la RMT.


 FIGURE 3.2 – EQM en fonction de  $\theta$  (en degré) entre le détecteur LR-ANMF et ses limites.

### 3.5.3 Performances du détecteur LR-ANMF

Cette partie présente maintenant les performances asymptotiques du détecteur LR-ANMF dans le régime en grandes dimensions. Celles-ci vont permettre de mieux approximer les performances réelles du détecteur à  $m$  et  $K$  fixés par les performances de sa limite  $\bar{\Lambda}(\theta)$  dans le régime en grandes dimensions. Pour cela, nous avons besoin de la distribution, si possible théorique, de  $\bar{\Lambda}(\theta)$ .

On a donc tout d'abord déterminé une variable aléatoire appelée  $V$  (cf. Théorème 3.1) équivalente en distribution de  $\bar{\Lambda}(\theta)$  sous  $\mathcal{H}_0$  et approximé la distribution de  $\bar{\Lambda}(\theta)$  par une distribution ajustée polynomialement. On cherche donc tout d'abord à valider la quantité aléatoire équivalente et à observer si l'approximation par une distribution ajustée polynomialement est une bonne approximation de la distribution de  $\bar{\Lambda}(\theta)$ . Pour cela on visualise en Fig.3.3 l'ECDF (*Empirical Cumulative Distribution Function* ou fonction de répartition empirique) de  $\bar{\Lambda}(\theta)$  pour le modèle *spiked*, l'ECDF de  $V$  et la CDF correspondant à la distribution approximée avec un degré d'approximation minimal  $d = 2$  et on les compare aussi aux ECDFs des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF. On observe alors que l'ECDF de  $V$  est bien superposée à celle de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  et que la CDF de la distribution approximée, même pour un degré d'approximation minimal  $d = 2$ , est superposée à celle de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$ . C'est donc une très bonne approximation sans perte majeure et la quantité aléatoire équivalente  $V$  est donc validée.

Afin d'observer l'évolution des ECDFs en fonction de  $K$  et du modèle considéré, on compare en Fig.3.4 la CDF de la distribution approximée avec les deux modèles *spiked* et « G-MUSIC » aux ECDFs des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF pour  $K = r + 1$  et  $K = 2r$  sous  $\mathcal{H}_0$ . On observe alors que pour les deux valeurs de  $K$ , les CDF des distributions approximées avec le modèle *spiked* et « G-MUSIC » sont plus proche et sont donc une meilleure approximation de celle du détecteur LR-ANMF que celle du détecteur LR-NMF. La CDF de la distribution approximée avec le modèle « G-MUSIC » est même celle qui est la plus proche de l'ECDF du détecteur LR-ANMF. Le modèle choisi a donc un impact sur la prévision ou approximation des performances du détecteur LR-ANMF. Sachant cela, nous continuerons à étudier les résultats obtenus pour les deux modèles de matrice de covariance. On observe aussi que, plus  $K$  augmente, plus les ECDFs du détecteur LR-ANMF et de ses limites  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  et  $\bar{\Lambda}_G(\theta)$  se rapprochent de celle du détecteur LR-NMF et que, pour une valeur de  $K$  grande ( $K = 2m$ ), toutes les courbes sont superposées et la RMT n'apporte rien.

On cherche maintenant à valider l'approximation par la densité ajustée polynomialement et observer si un degré de polynôme minimal  $d = 2$  entraîne ou non une grosse perte dans l'approximation. On

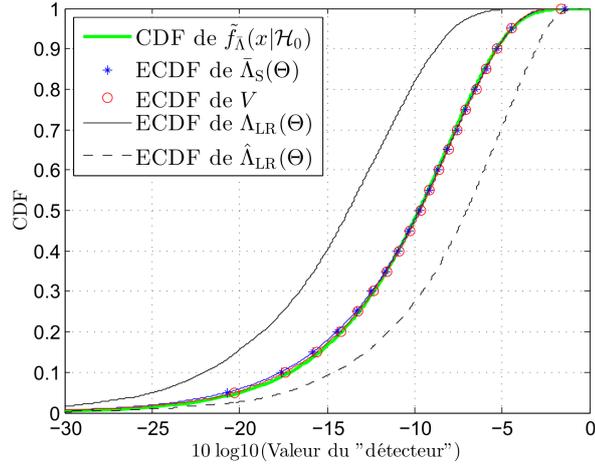


FIGURE 3.3 – CDF de la distribution approximée avec  $d = 2$  avec le modèle *spiked*, ECDF de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$ , de la quantité aléatoire  $V$  et des détecteurs LR-ANMF et LR-NMF pour  $m = 20$ ,  $K = r + 1$  et  $\theta = 20, 1^\circ$  sous  $\mathcal{H}_0$ .

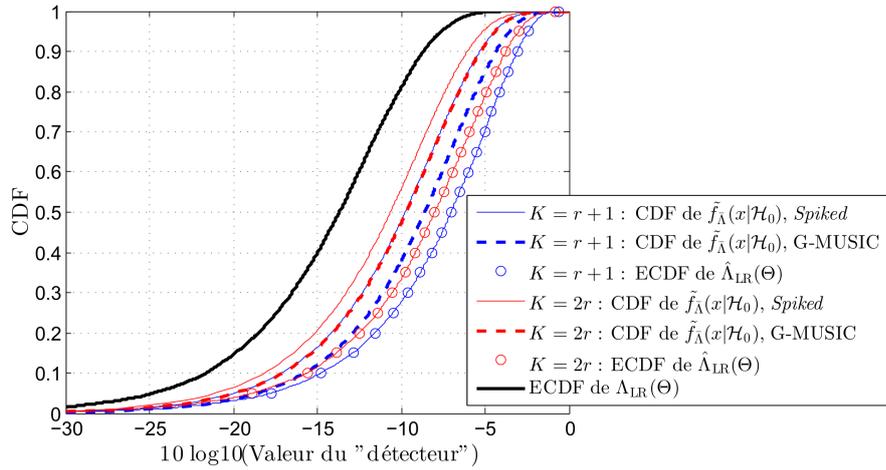


FIGURE 3.4 – CDF de la distribution approximée avec  $d = 2$  avec les modèles *spiked* et « G-MUSIC », ECDF des détecteurs LR-ANMF et LR-NMF pour  $m = 20$ ,  $K = r + 1$  et  $K = 2r$  et  $\theta = 20, 1^\circ$  sous  $\mathcal{H}_0$ .

observe donc en Fig.3.5 sous  $\mathcal{H}_1$  la CDF de la distribution approximée avec  $d = 2$  avec le modèle *spiked* ainsi que les ECDFs de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  et des détecteurs LR-ANMF et LR-NMF pour  $m = 20$ ,  $K = r + 1$  et  $K = 2r$ . On observe alors une plus grande perte que sous  $\mathcal{H}_0$  avec la distribution approximée polynomialement avec  $d = 2$  (Fig.3.3). En effet la partie basse (en dessous de 0,1) de l'ECDF  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  et la CDF liée à l'approximation de sa densité par ajustement polynômial ne se superposent pas tout en restant assez proches. Cependant, calculer une distribution approximée polynômiallement avec un degré  $d$  plus élevé demande beaucoup de temps de calcul. On continuera donc avec  $d = 2$ . En dehors de cela, cette CDF reste beaucoup plus proche et est donc une meilleure approximation de celle du détecteur LR-ANMF que celle du détecteur LR-NMF sous  $\mathcal{H}_1$ .

On s'intéresse maintenant aux performances en tant que telles en visualisant les relations  $P_{fa}$ -seuil. On valide encore une fois en Fig.3.6 la quantité aléatoire  $V$  et la distribution approximée  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_0)$  en

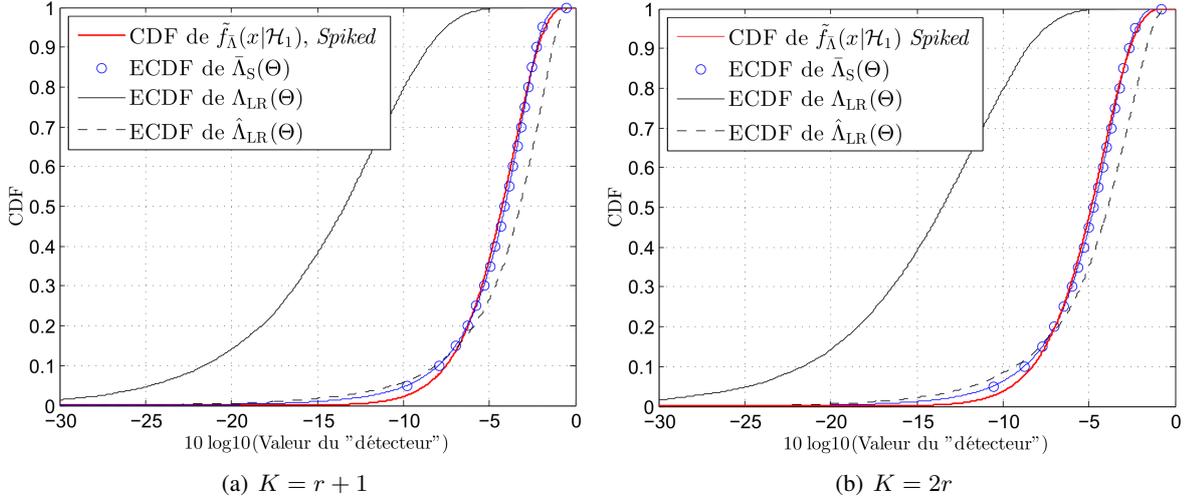


FIGURE 3.5 – CDF de la distribution approximée avec  $d = 2$  avec le modèle *spiked*, ECDF de  $\tilde{\Lambda}_S(\theta)$  et des détecteurs LR-ANMF et LR-NMF pour  $m = 20$ ,  $\theta = \theta_d = 20, 1^\circ$  sous  $\mathcal{H}_1$  et : (a)  $K = r + 1$ , (b)  $K = 2r$ .

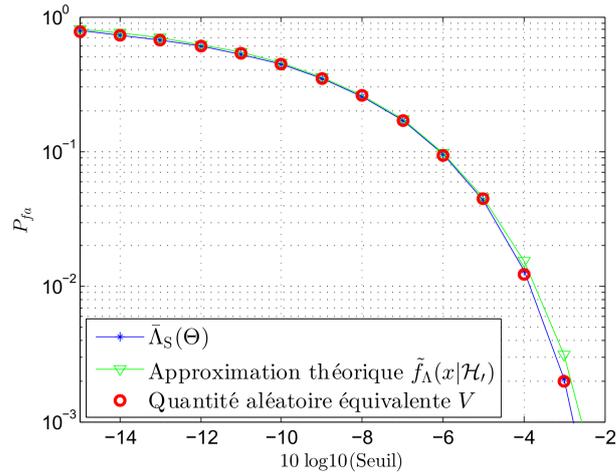


FIGURE 3.6 – Relations  $P_{fa}$ -seuil expérimentales de  $\tilde{\Lambda}_S(\theta)$ , de  $V$  et relation  $P_{fa}$ -seuil théorique de sa distribution approximée  $\tilde{f}_{\tilde{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_0)$  (Eq.(3.55)) pour  $d = 2$ ,  $K = 2r$ ,  $\theta = 20.1^\circ$ ,  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{F})} = 10\text{dB}$  avec  $10^5$  itérations.

visualisant leur relations  $P_{fa}$ -seuil et on constate la superposition de celle de  $V$  avec celle de  $\tilde{\Lambda}_S(\theta)$  et la quasi superposition de celle liée à  $\tilde{f}_{\tilde{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_0)$  (Eq.(3.55)) avec celle de  $\tilde{\Lambda}_S(\theta)$ .

Ensuite, pour déterminer si les performances asymptotiques liées à  $\tilde{\Lambda}_S(\theta)$  et  $\tilde{\Lambda}_G(\theta)$  caractérisent bien (sont plus proches de) celles du détecteur LR-ANMF, la Fig.3.7 permet de comparer les relations  $P_{fa}$ -seuil de  $\tilde{\Lambda}_S(\theta)$  et  $\tilde{\Lambda}_G(\theta)$  par leur distribution approximée (Eq.(3.55)) à celles des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF pour  $K = r + 1$  et  $K = 2r$ . De même que pour les fonctions de répartition, on observe que les relations  $P_{fa}$ -seuil de  $\tilde{\Lambda}_S(\theta)$  et  $\tilde{\Lambda}_G(\theta)$  par leur distribution approximée sont plus proche et sont donc une meilleure approximation de celle du détecteur LR-ANMF que celle du détecteur LR-NMF. On observe aussi que le modèle « G-MUSIC » permet d'obtenir une loi  $P_{fa}$ -seuil plus proche de celle du

détecteur LR-ANMF que le modèle *spiked*.

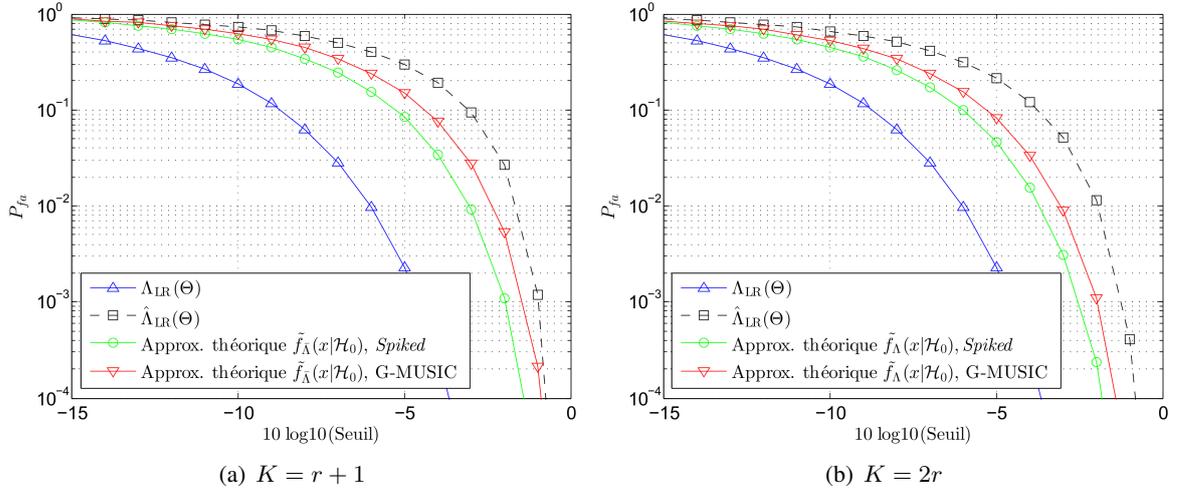


FIGURE 3.7 – Relations  $P_{fa}$ -seuil de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  et  $\bar{\Lambda}_G(\theta)$  par leur distribution approximée  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_0)$  (Eq.(3.55)) et des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF sur  $10^5$  itérations pour  $\theta = 20.1^\circ$  et : (a)  $K = r + 1$ , (b)  $K = 2r$ .

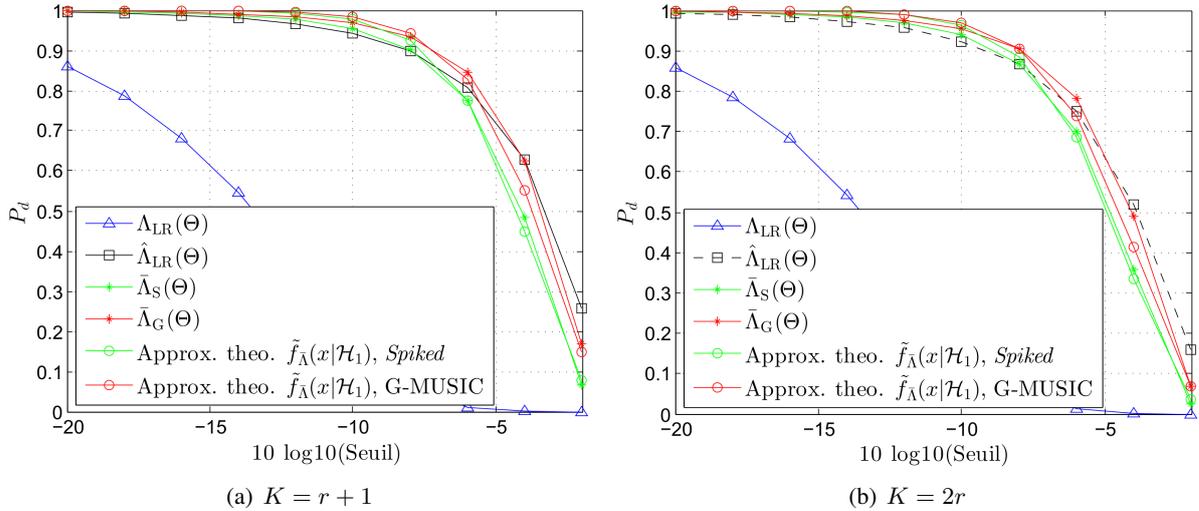


FIGURE 3.8 – Relations  $P_d$ -seuil expérimentales de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$ ,  $\bar{\Lambda}_G(\theta)$ , des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF et relations  $P_d$ -seuil théoriques de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  et  $\bar{\Lambda}_G(\theta)$  par leur distribution approximée  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_1)$  (Eq.(3.56)) pour  $d = 2$ ,  $\theta = \theta_d = 20.1^\circ$ ,  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{R})} = 10\text{dB}$  avec  $10^5$  itérations et : (a)  $K = r + 1$ , (b)  $K = 2r$ .

Après avoir observé les relations  $P_{fa}$ -seuil, on observe les performances de détection à travers tout d'abord les relations  $P_d$ -seuil. Pour cela, la Fig.3.8 permet de visualiser les relations  $P_d$ -seuil expérimentales de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$ ,  $\bar{\Lambda}_G(\theta)$  et des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF et les relations  $P_d$ -seuil théoriques (Eq.(3.56)) de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  et  $\bar{\Lambda}_G(\theta)$  par leur distribution approximée pour  $d = 2$ ,  $K = r + 1$  et  $K = 2r$ , et  $\theta = \theta_d = 20.1^\circ$ . De même que précédemment, on observe les relations  $P_d$ -seuil théoriques (ronds) sont proches de celles de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  et  $\bar{\Lambda}_G(\theta)$  bien que différentes mais sont plus proches et donc approximent mieux celle du détecteur LR-ANMF que celle du détecteur LR-NMF.

Enfin, on trace les relations  $P_d$ - $SNR$  pour une  $P_{fa}$  fixée à  $10^{-3}$  en Fig.3.9. On visualise alors les relations  $P_d$ - $SNR$  de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  (Eq.(3.56)) par sa distribution approximée  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_1)$  pour  $d = 2$  ainsi que celles des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF. On observe alors que bien que la relation  $P_d$ - $SNR$  de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  soit assez éloignée de celle du détecteur LR-ANMF, elle reste une meilleure approximation des performances du détecteur LR-ANMF que ne pourrait l'être celle du détecteur LR-NMF. Nous n'avons cependant pas eu le temps de déterminer tous les points avec le modèle « G-MUSIC » et pour une figure avec des valeurs de  $SNR$  variant suffisamment afin d'observer pleinement les relations  $P_d$ - $SNR$ . Pour la visualisation de cette figure, voir [Comberoux et al., 2016].

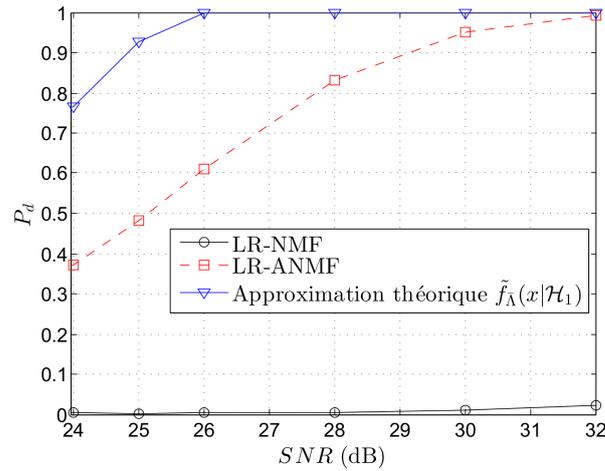


FIGURE 3.9 – Relations  $P_d$ - $SNR$  de  $\bar{\Lambda}_S(\theta)$  par sa distribution approximée  $\tilde{f}_{\bar{\Lambda}}(x|\mathcal{H}_1)$  (Eq.(3.56)) pour  $d = 2$  et des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF avec  $K = 2r$ ,  $\theta = \theta_d = 20.1^\circ$ ,  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{R})} = 10\text{dB}$  et  $P_{fa} = 10^{-3}$  sur  $10^5$  itérations.

On observe cependant que les performances du détecteur LR-ANMF sont ici meilleures que celles du détecteur LR-NMF, ce qui ne devrait pas être le cas. En voici la raison. Le détecteur LR-NMF étant fonction du projecteur théorique, il réjecte parfaitement le bruit LR (les brouilleurs) même bien sur lorsqu'on est près du bruit LR. Cependant, pour le détecteur LR-ANMF avec ici très peu de données secondaires ( $r + 1$  ou  $2r$ ), le projecteur n'est pas bien estimé et ne réjecte donc pas bien le bruit LR et les potentielles cibles proches du bruit LR. De ce fait, les potentielles cibles sont moins rejetées et ses performances de détection sont donc meilleures que celles du détecteur théorique LR-NMF (bénéficiant de la parfaite connaissance de la matrice de covariance du projecteur sur le sous-espace orthogonal au sous-espace bruit LR).

Nous avons parlé précédemment de temps de calcul. En effet, il faut savoir qu'à ce stade, bien que l'approximation de distribution par ajustement polynomial donne des résultats théoriques et facilement implémentables, le calcul des moments de  $\bar{\Lambda}(\theta)$ , quel que soit le modèle de SCM considéré reste très important sous  $\mathcal{H}_1$  soit environ 2/3 jours pour calculer la fonction génératrice de moments puis 2/3 jours par moment avec l'ordinateur utilisé<sup>5</sup>, ceci pour un seul jeu de paramètres. On est donc très vite limité par cette contrainte fortement liée à la taille des données  $m$ . De plus, bien évidemment, plus  $m$  augmente, plus on a besoin de mémoire RAM. Sous  $\mathcal{H}_0$ , cette contrainte se fait cependant moins sentir. Il faut environ une heure pour calculer la fonction génératrice de moments puis seulement quelques secondes de calcul par moment, ceci pour un seul jeu de paramètres. De ce fait, le choix du degré  $d$  du polynôme

5. Processeur Intel(R) Core(TM) i7-3667U CPU @ 2,00GHz, mémoire RAM de 80Go.

	$K = r + 1$	$K = 2r$
Par $\hat{\Lambda}_{LR}$	3,0342 s	3,0188 s
Par la quantité équivalente $V$	0,7046 s	0,7144 s
Par la relation théorique (Eq.(3.55))	0,0252 s	0,0240 s

TABLE 3.1 – Temps de calcul moyen d’un point de la relation  $P_{fa}$ -seuil pour  $10^4$  itérations.

d’approximation devient un compromis entre qualité d’approximation et temps de calcul. Ainsi, sous  $\mathcal{H}_0$  et une fois les moments calculés, le temps de calcul moyen sur  $10^4$  itérations pour un point de la relation  $P_{fa}$ -seuil est résumé dans le tableau 3.1.

### 3.6 Synthèse

Dans ce chapitre, on a donc calculé puis validé les performances/comportements asymptotiques des détecteurs adaptatifs dans le régime en grandes dimensions afin de pouvoir connaître et prédire leur comportement pour un jeu de paramètres donné. De même, même si aucun gain ne peut être apporté avec le détecteur ANMF, ce n’est pas le cas pour le détecteur LR-ANMF. En effet, les performances asymptotiques du détecteur LR-ANMF liées à ses limites dans le régime en grandes dimensions avec les modèle *spiked* et plus particulièrement « G-MUSIC » approximent mieux les performances non asymptotiques du détecteur LR-ANMF. Les expressions théoriques des probabilités asymptotiques approximées de détection et de fausse alarme du détecteur LR-ANMF permettent aussi de déterminer théoriquement une approximation des performances de détection du détecteur LR-ANMF. Cependant, la méthode par ajustement polynômial pour déterminer l’approximation de la distribution du détecteur LR-ANMF reste très longue à calculer numériquement. De plus, comme dans le chapitre précédent, afin de bénéficier de ces améliorations il est important que l’AoA de la cible soit proche de ceux des brouilleurs. La RMT et particulièrement le modèle « G-MUSIC », par l’étude des quantités dans le régime en grandes dimensions, permettent de mieux prédire le comportement des quantités adaptatives LR comme le filtre LR adaptatif pour un jeu de paramètres donné.

On a donc montré que le signal filtré par le filtre LR adaptatif et le détecteur LR-ANMF sont biaisés, ce qui entraîne une baisse de performances par rapport au quantités LR non adaptatives, sauf cas particulier où le nombre de données secondaires est très faible et où la cible est trop proche du sous-espace bruit LR comme c’était le cas dans ce chapitre en détection. Cette baisse de performances peut se traduire par une baisse de la probabilité de détection ou une baisse du RSIB en sortie du filtre. L’objectif est donc de construire de nouveaux filtres et détecteur LR adaptatifs non biaisés dans le régime en grandes dimensions afin d’améliorer les performances de détection et de filtrage par rapport à celles du filtre LR adaptatif classique et du détecteur LR-ANMF.



# 4

## Développement et performances de nouveaux filtres et détecteurs adaptatifs LR consistants dans le régime en grandes dimensions

Dans le chapitre précédent, on a caractérisé les performances des filtres et détecteurs adaptatifs. On a alors montré que le signal filtré par le filtre LR adaptatif classique  $\hat{w}_{LR}$  et le détecteur LR-ANMF sont biaisés, ce qui entraîne une baisse de performances par rapport aux quantités LR non adaptatives, sauf cas particulier où le nombre de données secondaires est très faible et où la cible est trop proche du sous-espace bruit LR comme c'était le cas dans le chapitre précédent en détection. Cette baisse de performances peut se traduire par une baisse de la probabilité de détection ou une baisse du RSIB en sortie du filtre.

L'objectif de ce chapitre est donc d'améliorer les performances de détection et de filtrage par rapport à celles du filtre LR adaptatif classique et du détecteur LR-ANMF en calculant et validant les performances/comportements à  $m$  et  $K$  fixés de nouveaux filtres et détecteur LR adaptatifs en estimant de manière non biaisée dans le régime en grandes dimensions les filtres et détecteurs LR non adaptatifs. Pour cela, on construira de nouveaux filtres et détecteurs LR adaptatifs consistants dans le régime en grandes dimension en se référant aux estimateurs G-MUSIC et Spike MUSIC. Puis on calculera les performances des nouveaux détecteurs LR adaptatifs en estimant les relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ -seuil qui leurs sont associées. Ensuite, on calculera les performances du nouveau filtre LR adaptatif avec le modèle *spiked* en déterminant le SINR loss qui lui est associé et sa convergence dans le régime en grandes dimensions. Enfin, on validera les résultats par une application brouillage simple qui permettra de mettre en évidence l'apport des RMT en grandes dimensions et l'influence des différences entre les modèles « G-MUSIC » et *spiked* sur les performances.

### 4.1 Construction de nouveaux filtres et détecteurs LR adaptatifs consistants

L'utilisation de la théorie des matrices aléatoires (RMT) est une voie attractive pour améliorer le filtrage et la détection et obtenir un signal filtré plus proche du signal filtré optimal ainsi qu'un détecteur

avec un comportement plus proche du détecteur LR optimal, le détecteur LR-NMF. En effet, on a vu que le signal filtré et les détecteurs considérés dans ce manuscrit peuvent être vus comme des fonctions de FQs de la forme  $s_1^H \hat{\Pi}_c^\perp s_2$  où  $\hat{\Pi}_c^\perp$  est le projecteur estimé. On rappelle alors que cette FQ est consistante (*i.e.* tend vers  $s_1^H \Pi_c^\perp s_2$ ) quand  $K$  tend vers l'infini mais ne l'est pas dans le régime en grandes dimensions. C'est pourquoi, pour différents modèles de SCM comme dans [Mestre, 2008b, Hachem et al., 2013], les auteurs ont proposé de rectifier ce biais grâce à de nouveaux estimateurs consistants dans le régime en grandes dimensions. Nous proposons donc ici d'utiliser les estimateurs consistants dans le régime en grandes dimensions introduits par [Mestre, 2008b, Hachem et al., 2013] afin de construire des nouveaux filtres et détecteurs LR adaptatifs pour améliorer le filtrage des données et les performances de détection. Bien que nous ayons montré dans le chapitre précédent et dans [Combernoux et al., 2015a] que le modèle le plus approprié pour une application brouillage est le modèle *spiked*, nous essaierons de mener l'étude le plus loin possible, *i.e.* pour les deux modèles de SCM « G-MUSIC » et *spiked*.

#### 4.1.1 Détecteurs

Construisons tout d'abord des détecteurs LR adaptatifs en estimant de manière consistante le détecteur LR-NMF. On sait que les estimateurs G-MUSIC ( $s_1^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp s_2$ ) et Spike-MUSIC ( $s_1^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp s_2$ ) sont des estimateurs consistants de la FQ  $s_1^H \Pi_c^\perp s_2$  et que le détecteur LR-NMF est une fonction de FQs de cette forme :

$$\Lambda_{\text{LR}}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \Pi_c^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \Pi_c^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \Pi_c^\perp \mathbf{x})} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \xi_{\text{LRNMF}} \quad (4.1)$$

On construit donc les détecteurs adaptatifs LR-AG [Combernoux et al., 2013b, Combernoux et al., 2013a] et LR-AS [Combernoux et al., 2014] suivants par les estimateurs G-MUSIC et Spike-MUSIC, avec l'intention de bénéficier d'une meilleure estimation des FQs :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \hat{\Lambda}_G(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{x})} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \xi_G \quad (4.2)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \hat{\Lambda}_S(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{x})} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \xi_S \quad (4.3)$$

où  $\hat{\Pi}_{c,G}^\perp = \sum_{i=1}^m \phi_i^G \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H$  et  $\hat{\Pi}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m \phi_i^S \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H$  sont les pseudo-projecteurs dont les coefficients  $\phi_i^G$  et  $\phi_i^S$  sont définis aux Eqs.(1.120) et (1.126).

On vérifie alors aisément leur convergence vers le détecteur LR-NMF dans le régime en grandes dimensions. En effet, sous **(H1-H4)**, et le modèle « G-MUSIC », l'estimateur G-MUSIC ( $s_1^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp s_2$ ) converge p.s. vers  $s_1^H \Pi_c^\perp s_2$  dans le régime en grandes dimension. Chaque élément normalisé du détecteur LR-AG,  $\alpha \mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}(\Theta)^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{a}(\Theta)$  et  $\alpha^2 \mathbf{x}^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{x}$  avec  $\alpha = \|\mathbf{x}\|_2^{-1}$  converge donc vers  $\alpha \mathbf{a}(\Theta)^H \Pi_c^\perp \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}(\Theta)^H \Pi_c^\perp \mathbf{a}(\Theta)$  et  $\alpha^2 \mathbf{x}^H \Pi_c^\perp \mathbf{x}$ . Le même raisonnement peut être fait avec le modèle *spiked* et l'estimateur Spike MUSIC. Donc d'après le *continuous mapping theorem* [Billingsley, 1995], sous **(H1-H4)** et suivant le modèle de SCM considéré :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \hat{\Lambda}_G(\Theta) \underset{\substack{m, K \rightarrow \infty \\ m/K \rightarrow c < \infty}}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} \Lambda_{\text{LR}}(\Theta) \quad (4.4)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \hat{\Lambda}_S(\Theta) \underset{\substack{m, K \rightarrow \infty \\ m/K \rightarrow c < \infty}}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} \Lambda_{\text{LR}}(\Theta) \quad (4.5)$$

### 4.1.2 Filtres

De même que dans le chapitre précédent, la RMT en grandes dimensions ne permet pas d'étudier de manière simple des quantités dont la taille grandit (comme un vecteur aléatoire de taille  $m$  ou une matrice aléatoire  $m \times m$ ). On préfère donc étudier la consistance d'une quantité scalaire qui ici sera la FQ simple du signal filtré adaptatif LR, et qui permettra de définir un filtre adaptatif LR amenant à un signal filtré adaptatif consistant dans le régime en grandes dimensions et donc à une meilleure estimation du signal filtré optimal  $p_{LR}$  et des performances plus proches de celles de ce dernier. En effet, d'après le chapitre précédent, sous **(H1-H4)** et suivant le modèle de SCM considéré :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \alpha \hat{p}_{LR} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \alpha \bar{p}_G = \alpha \mathbf{d}^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{x} \quad (4.6)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \alpha \hat{p}_{LR} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \alpha \bar{p}_S = \alpha \mathbf{d}^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{x} \quad (4.7)$$

où  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp$  et  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp$  sont définis en Sec.1.7.3.2. La FQ correspondant au signal filtré normalisée  $p_{LR}$  n'étant donc pas consistante en régime grandes dimensions, *i.e.* ne convergeant pas vers  $\hat{p}_{LR}$ , on peut alors utiliser les estimateurs G-MUSIC et Spike-MUSIC consistants dans ce régime sous **(H1-H4)** :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \alpha \mathbf{d}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{x} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \alpha \mathbf{d}^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{x} = \alpha p_{LR} \quad (4.8)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \alpha \mathbf{d}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{x} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}} \alpha \mathbf{d}^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{x} = \alpha p_{LR} \quad (4.9)$$

où  $\hat{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp$  et  $\hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp$  sont définis en Sec.1.7.3.2.

On définit donc les nouveaux filtres comme suit :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \hat{\mathbf{w}}_{LR}^{(G)} = \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{d} \quad (4.10)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \hat{\mathbf{w}}_{LR}^{(S)} = \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{d} \quad (4.11)$$

de façon à satisfaire les Eqs.(4.8) et (4.9) avec :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \hat{p}_{LR}^{(G)} = \hat{\mathbf{w}}_{LR}^{(G)H} \mathbf{x} \quad (4.12)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \hat{p}_{LR}^{(S)} = \hat{\mathbf{w}}_{LR}^{(S)H} \mathbf{x} \quad (4.13)$$

## 4.2 Performances des nouveaux filtres et détecteurs adaptatifs LR

On caractérise maintenant les performances des nouveaux filtres et détecteurs adaptatifs LR. Premièrement, on essaiera de déterminer les performances des détecteurs LR-AG et LR-AS par l'estimation de leurs relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ -seuil. Puis, on s'intéressera aux performances des nouveaux filtres adaptatifs LR grâce au SINR loss en introduisant la convergence d'une FQ *structurée* dite *rectifiée*.

### 4.2.1 Détection : estimation des relations $P_{fa}$ -seuil et $P_d$ -seuil

Il n'est pas intéressant de raisonner ici comme dans le chapitre précédent, c'est-à-dire approximer la distribution des nouveaux détecteurs par celle de leur limite asymptotique. En effet, leur limite respective dans le régime en grandes dimensions est le détecteur LR-NMF dont la distribution et les performances

sont bien connues mais pas fonction de  $K$ . Ceci ne nous apporterait donc aucune information sur le comportement des nouveaux détecteurs à  $m$  et  $K$  fixés. On s'intéressera donc aux distributions et performances des nouveaux détecteurs adaptatifs à  $m$  et  $K$  fixés.

Dans ce cadre et similairement au chapitre précédent, il est alors possible de déterminer théoriquement, à partir des distributions de  $\hat{\Lambda}_G(\Theta)$  et  $\hat{\Lambda}_S(\Theta)$  sous  $\mathcal{H}_0$  ( $f_{\hat{\Lambda}_G}(x|\mathcal{H}_0)$  et  $f_{\hat{\Lambda}_S}(x|\mathcal{H}_0)$ ) et  $\mathcal{H}_1$  ( $f_{\hat{\Lambda}_G}(x|\mathcal{H}_1)$  et  $f_{\hat{\Lambda}_S}(x|\mathcal{H}_1)$ ), ou par simulations de Monte Carlo les relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ -seuil. En effet, par définition, on a :

$$P_{fa} = \mathbb{P} \left[ \hat{\Lambda}_G(\Theta) > \xi_G | \mathcal{H}_0 \right] = \int_{\xi_G}^{+\infty} f_{\hat{\Lambda}_G}(x|\mathcal{H}_0) dx \quad (4.14)$$

$$P_d = \mathbb{P} \left[ \hat{\Lambda}_G(\Theta) > \xi_G | \mathcal{H}_1 \right] = \int_{\xi_G}^{+\infty} f_{\hat{\Lambda}_G}(x|\mathcal{H}_1) dx \quad (4.15)$$

Avec  $N$  itérations Monte Carlo ou  $N$  données d'apprentissage, on peut définir les contreparties empiriques des précédentes quantités :

$$P_{fa}^{\text{emp}} = \frac{1}{N} \#\{n : \hat{\Lambda}_{G,n}(\Theta) > \xi_G | \mathcal{H}_0\} \quad (4.16)$$

$$P_d^{\text{emp}} = \frac{1}{N} \#\{n : \hat{\Lambda}_{G,n}(\Theta) > \xi_G | \mathcal{H}_1\} \quad (4.17)$$

où  $\hat{\Lambda}_{G,n}(\Theta)$  est la  $n$ -ième réalisation de  $\hat{\Lambda}_G(\Theta)$ . Le même raisonnement peut être fait sous le modèle *spiked* avec  $\hat{\Lambda}_S(\Theta)$  et ses distributions associées sous  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$

La meilleure solution serait bien sûr de pouvoir calculer ces relations théoriquement mais les distributions théoriques de  $\hat{\Lambda}_G(\Theta)$  et  $\hat{\Lambda}_S(\Theta)$  sont inconnues et difficiles voire « impossibles » à calculer pour les mêmes raisons que pour les distributions du détecteur LR-ANMF, *i.e.* la difficulté d'intégrer la distribution des vecteurs propres de la SCM et d'obtenir une formulation facilement implémentable. Ce sujet serait d'ailleurs digne d'être étudié plus en profondeur. C'est pourquoi, nous garderons l'estimation des relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ -seuil empiriques par itérations Monte Carlo.

## 4.2.2 Filtrage : SINR loss

On se propose enfin de mesurer et prédire les performances des nouveaux filtres grâce à l'étude du SINR loss. Pour cela, de même que dans le chapitre précédent, on introduira une FQ *structurée* dite *rectifiée* et sa convergence. Puis on utilisera ce nouveau résultat dans la convergence du SINR loss afin de déterminer leurs performances asymptotiques.

### 4.2.2.1 Convergence de la FQ structurée rectifiée LR

On définit tout d'abord les SINR loss associés aux nouveaux filtres :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \hat{\rho}_{\text{LR}}^{(G)} = \frac{|d^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp d|^2}{(d^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,G}^\perp d)(d^H \mathbf{R}^{-1} d)} \quad (4.18)$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \hat{\rho}_{\text{LR}}^{(S)} = \frac{|d^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp d|^2}{(d^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,S}^\perp d)(d^H \mathbf{R}^{-1} d)} \quad (4.19)$$

En observant leur expression, on remarque encore les FQs *structurées* suivantes au dénominateur :

$$d^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,G}^\perp d \quad (4.20)$$

$$d^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,S}^\perp d \quad (4.21)$$

En régime classique, on peut montrer que  $\hat{\Pi}_{c,G}^\perp \rightarrow \Pi_c^\perp$  et  $\hat{\Pi}_{c,S}^\perp \rightarrow \Pi_c^\perp$  presque sûrement quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé (démonstration en Annexe D.2). On a donc :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m < \infty]{K \rightarrow \infty, \text{ p.s.}} \mathbf{s}_1^H \Pi_c^\perp \mathbf{R} \Pi_c^\perp \mathbf{s}_2 \quad (4.22)$$

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m < \infty]{K \rightarrow \infty, \text{ p.s.}} \mathbf{s}_1^H \Pi_c^\perp \mathbf{R} \Pi_c^\perp \mathbf{s}_2 \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  sont des vecteurs déterministes quelconques. Les FQs *structurées rectifiées* LR convergent donc vers la « vraie » FQ *structurée* LR  $\mathbf{s}_1^H \Pi_c^\perp \mathbf{R} \Pi_c^\perp \mathbf{s}_2$ .

Et on peut montrer que, en régime en grandes dimensions, la FQ *structurée rectifiée* avec le modèle *spiked* converge vers une autre quantité. Il en résulte la proposition suivante.

**Proposition 4.1 Convergence de la FQ structurée rectifiée LR, modèle spiked**

Soit  $\mathbf{R}$  la matrice de covariance s'écrivant  $\alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m$  où  $\mathbf{C}$  est une matrice de rang faible  $r$  décrite en Eq.(1.5). Alors, sous (H1-H4) et le modèle *spiked*,

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{m, K \rightarrow \infty, \text{ p.s.}} \mathbf{s}_1^H \Pi_c^\perp \mathbf{R} \Pi_c^\perp \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H (\tilde{\Pi}_{c,S} - \Pi_c) \mathbf{s}_2 \quad (4.24)$$

où  $\hat{\Pi}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m \phi_i^S \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H$  avec  $\phi_i^S$  défini en Eq.(1.126) et  $\tilde{\Pi}_{c,S} = \sum_{i=1}^r \tilde{w}_i^S \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  avec  $\tilde{w}_i^S$  défini par  $\tilde{w}_i^S = (1 + c\gamma_i^{-1}) / (1 - c\gamma_i^{-2})$ .

**Démonstration :** Voir en Annexe D.1.

Cependant, le même travail n'a pas été fait sur la FQ *structurée rectifiée* avec le modèle « G-MUSIC ». Pour des raisons de temps, ces travaux font donc partie des possibles perspectives de cette thèse.

#### 4.2.2.2 Convergence du SINR loss

Après avoir calculé le biais asymptotique du dénominateur du SINR loss (*i.e.* la FQ *structurée rectifiée* LR) en régime en grandes dimensions avec le modèle *spiked*, on peut maintenant déterminer le biais asymptotique du SINR loss dans le régime en grandes dimensions. On pourra alors comparer les performances asymptotiques théoriques du nouveau filtre avec le modèle *spiked* aux performances du filtre LR non adaptatif.

Avec ce modèle, on connaît la convergence dans le régime en grandes dimensions de la FQ simple du numérateur, étant la FQ de l'estimateur Spike MUSIC (théorème 1.12) et celle du dénominateur calculée précédemment en Prop.4.1 avec  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{d}$ . Donc, d'après le *continuous mapping theorem*, sous (H1-H4) et le modèle *spiked* :

$$\hat{\rho}_{\text{LR}}^{(S)} \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{m, K \rightarrow \infty, \text{ p.s.}} \tilde{\rho}_{\text{LR}} = \frac{|\mathbf{d}^H \Pi_c^\perp \mathbf{d}|^2}{(\mathbf{d}^H \Pi_c^\perp \mathbf{R} \Pi_c^\perp \mathbf{d} + \sigma^2 \mathbf{d}^H (\tilde{\Pi}_{c,S} - \Pi_c) \mathbf{d}) (\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} \quad (4.25)$$

Ainsi,  $\hat{\rho}_{\text{LR}}^{(S)}$  n'est pas un estimateur de  $\rho_{\text{LR}}$  consistant dans le régime en grandes dimensions. En d'autres termes les performances asymptotiques en terme de SINR loss du nouveau filtre LR adaptatif avec le modèle *spiked* ne sont pas celles du filtre LR non adaptatif. Cependant, cette limite asymptotique permet d'obtenir un indice de performance en fonction de  $K$  puisque celle-ci dépend de  $\tilde{\Pi}_{c,S}$  et donc de  $c$ . De plus, seul un tracé de  $\hat{\rho}_{\text{LR}}^{(S)}$  par simulation permettra de mesurer les performances non asymptotiques de

filtrage en fonction de  $K$ ,  $\theta_d$  ou de tout autre paramètre ou tout simplement pour un jeu de paramètres donné. Cependant, comme c'est le cas pour l'estimateur Spike MUSIC, le nouveau filtre LR adaptatif avec le modèle *spiked* devrait permettre d'obtenir de meilleures performances en termes de SINR loss ( $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$ ) à jeu de paramètres fixé que le filtre LR adaptatif classique (par son SINR loss  $\hat{\rho}_{LR}$ ). Ce point sera traité dans la section suivante par la visualisation des différents SINR loss en fonction de plusieurs paramètres.

Enfin, pour le modèle « G-MUSIC », les performances asymptotiques du nouveau filtre LR adaptatif ne peuvent être déterminées théoriquement, faute de convergence de la FQ *structurée*. Cependant, comme pour  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$ ,  $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$  peut être calculé et tracé par simulation.

### 4.3 Validation des résultats et comportement des nouveaux filtres et détecteurs

Cette section est dédiée à la validation des résultats théoriques démontrés précédemment ainsi qu'à l'étude du comportement des nouveaux filtres et détecteurs en fonctions des paramètres du système : la dimension  $m$ , le rapport  $c_m$ , le rapport brouilleurs à bruit  $JNR$  et l'angle d'arrivée  $\theta$  ou  $\theta_d$  suivant l'hypothèse considérée. La sous-section 4.3.1 présente les paramètres de simulation et présente la condition de séparabilité en fonction des paramètres de simulation. Puis, la sous-section 4.3.2 valide les nouvelles convergences dans le régime en grandes dimensions. Ensuite, la sous-section 4.3.3 présente et compare les performances des nouveaux détecteurs LR-AG et LR-AS avec celles des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF. Enfin, la sous-section 4.3.4 présente et compare les performances des nouveaux filtres adaptatifs LR à celles du filtre non adaptatif LR et du filtre adaptatif LR classique.

#### 4.3.1 Paramètres de simulation

Afin d'illustrer l'intérêt des RMT, on choisit comme dans le chapitre précédent l'application brouillage. De même, le paramètre de localisation contenu dans les vecteurs directionnels est l'AoA et ainsi  $\Theta_d = \theta_d$  ou  $\Theta = \theta$  où  $\theta_d$  et  $\theta$  sont des AoAs. De façon similaire, nous avons une antenne linéaire uniforme de  $m = 200$  capteurs (sauf si une autre valeur est indiquée) et  $r = 3$  brouilleurs aux mêmes AoAs ( $-20^\circ$ ,  $0^\circ$  et  $20^\circ$ ) et générés de la même manière que dans le chapitre précédent. La matrice de covariance du bruit total est aussi identique :

$$\mathbf{R} = \frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})} \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m \quad (4.26)$$

avec  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}([\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3])$  et la puissance du bruit blanc  $\sigma^2 = 1$ . Enfin, sauf contre indication, on aura  $m = 200$ ,  $\theta_d = \theta = 20, 1^\circ$ ,  $SNR = 18\text{dB}$ ,  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})} = 20\text{dB}$  ainsi que  $K = 20$  pour la partie détection et  $K = 10$  pour la partie filtrage. On rappelle que  $\mathbf{\Gamma}$  est la matrice diagonale composée des valeurs propres théoriques de la matrice de covariance des brouilleurs (bruit LR).

On vérifie donc pour ce nouveau jeu de paramètres la condition de séparabilité en Fig.4.1. Le nombre de données secondaires est au minimum  $K = r + 1$  et en général dans ce chapitre  $K = 20$ . La valeur maximale de la limite  $c$  de  $c_m$  est donc 50 pour  $m = 200$ . On observe donc que la condition de séparabilité est vérifiée pour  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{\Gamma})} = 10\text{dB}$  et même plus.

#### 4.3.2 Convergences dans le régime en grandes dimensions

On s'intéresse maintenant à la validation des nouvelles convergences dans le régime en grandes dimensions, *i.e.* quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c$ , présentées dans ce chapitre. On observe tout

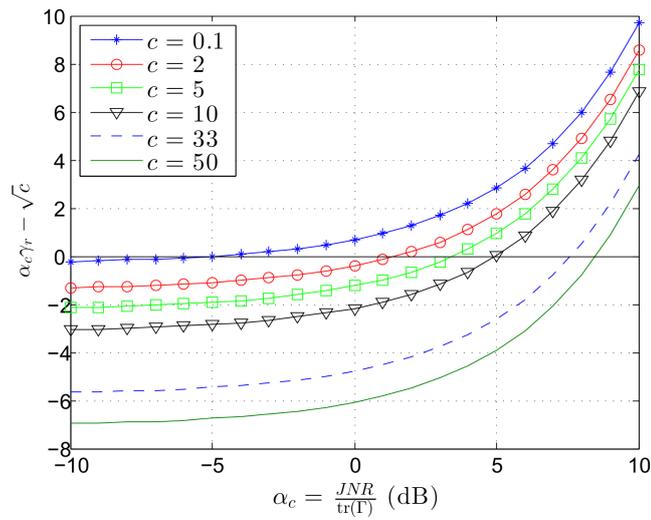


FIGURE 4.1 – Condition de séparabilité.

d'abord la convergence des détecteurs LR-AG et LR-AS vers le détecteur LR-NMF en Fig.4.2 avec  $c = 10$ ,  $\theta_d = 25^\circ$  en observant en  $\theta = 25^\circ$ .

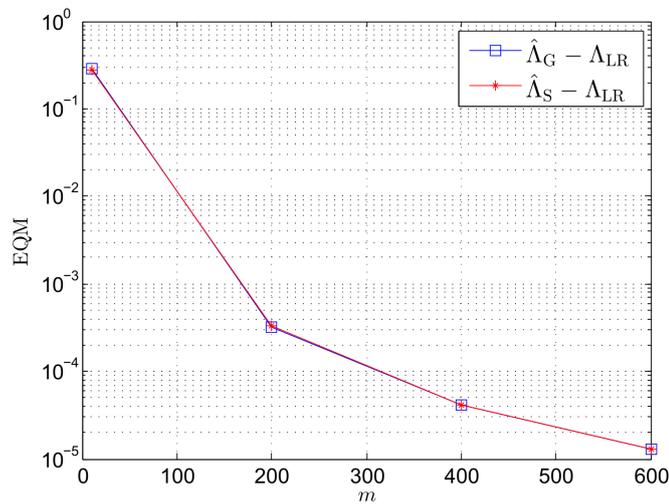


FIGURE 4.2 – EQM sur  $10^4$  itérations en fonction de  $m$  avec  $c = 10$ ,  $\theta_d = 25^\circ$  et  $\theta = 25^\circ$ .

De même que dans les chapitres précédents, on cherche pour quels paramètres de la cible le gain d'estimation (là où les nouveaux filtres et détecteurs permettent de mieux estimer le détecteur LR-NMF)

est notable. Pour cela, on visualise en Fig.4.3 de manière similaire les EQMs suivantes :

$$EQM(\hat{p}_{LR} - p_{LR}) = \mathbb{E}[(\hat{p}_{LR} - p_{LR})^2] \quad (4.27)$$

$$EQM(\hat{p}_{LR}^{(G)} - p_{LR}) = \mathbb{E}[(\hat{p}_{LR}^{(G)} - p_{LR})^2] \quad (4.28)$$

$$EQM(\hat{p}_{LR}^{(S)} - p_{LR}) = \mathbb{E}[(\hat{p}_{LR}^{(S)} - p_{LR})^2] \quad (4.29)$$

$$EQM(\hat{\Lambda}_{LR} - \Lambda_{LR}) = \mathbb{E}[(\hat{\Lambda}_{LR} - \Lambda_{LR})^2] \quad (4.30)$$

$$EQM(\hat{\Lambda}_G - \Lambda_{LR}) = \mathbb{E}[(\hat{\Lambda}_G - \Lambda_{LR})^2] \quad (4.31)$$

$$EQM(\hat{\Lambda}_S - \Lambda_{LR}) = \mathbb{E}[(\hat{\Lambda}_S - \Lambda_{LR})^2] \quad (4.32)$$

Ainsi, la Fig.4.3(a) (resp. la Fig.4.3(b)) permet de visualiser l'EQM entre les détecteurs LR-ANMF, LR-AG et LR-AS et le détecteur LR-NMF en fonction de  $\theta$  (resp. entre les signaux filtrés adaptatif et le signal filtré théorique  $p_{LR}$ ) pour  $m = 200$ ,  $K = 20$  et  $\theta_d = 25^\circ$ . On observe alors que si  $\theta = 22^\circ$  par exemple, la différence entre les détecteurs LR-ANMF, LR-AG et LR-AS et le détecteur LR-NMF sont égales et les nouveaux filtres et détecteurs n'apportent rien. Cependant, si  $\theta \simeq 20, 2^\circ$  ou  $25^\circ$  par exemple et pour le signal filtré sauf aux alentours de l'AoA de la cible, on observe un vrai gain d'estimation avec les nouveaux filtres et détecteurs car les EQMs correspondantes sont beaucoup plus basses. De ce fait, les AoAs d'observation et l'AoA de la cible pour le filtrage et la détection ont été choisis proches de ceux des brouilleurs.

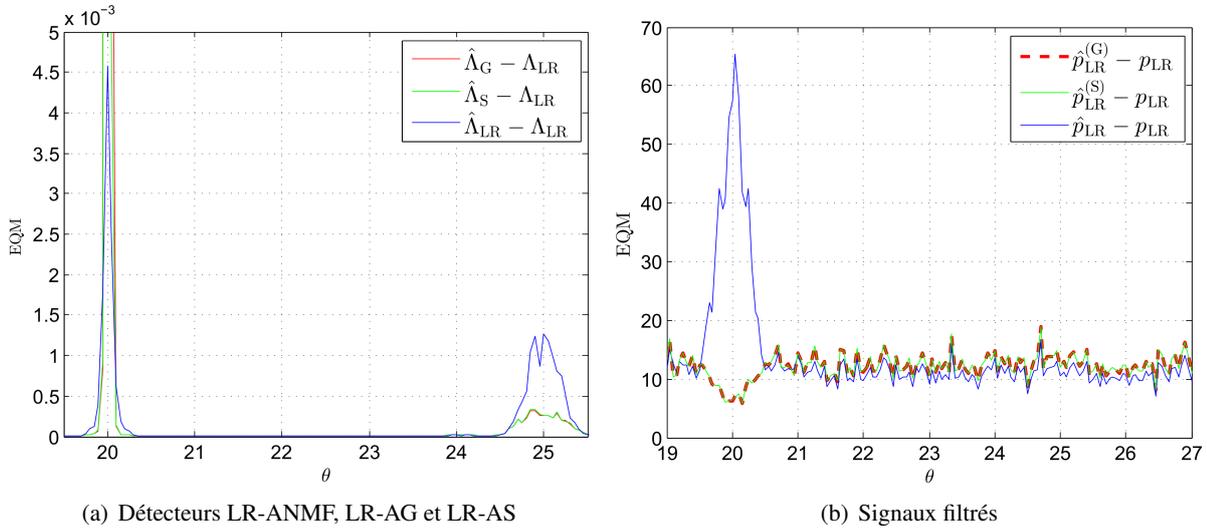


FIGURE 4.3 – EQM en fonction de  $\theta$  (en degré) entre : (a) les détecteurs LR-ANMF, LR-AG et LR-AS et le détecteur LR-NMF, (b) les signaux filtrés adaptatif et le signal filtré théorique  $p_{LR}$ .

Enfin, on observe en Fig.4.4 la convergence de la FQ *structurée rectifiée* en Eq.(4.24) et les résultats valident bien la nouvelle convergence dans le régime en grandes dimensions. On y visualise aussi la convergence dans le régime en grandes dimensions du SINR loss du nouveau filtre adaptatif LR avec le modèle *spiked* vers sa limite dans le régime en grandes dimensions  $\tilde{\rho}_{LR}$  en termes d'EQM pour  $\theta = 20, 1^\circ$  et  $c = 3$ . Il y a bien convergence.

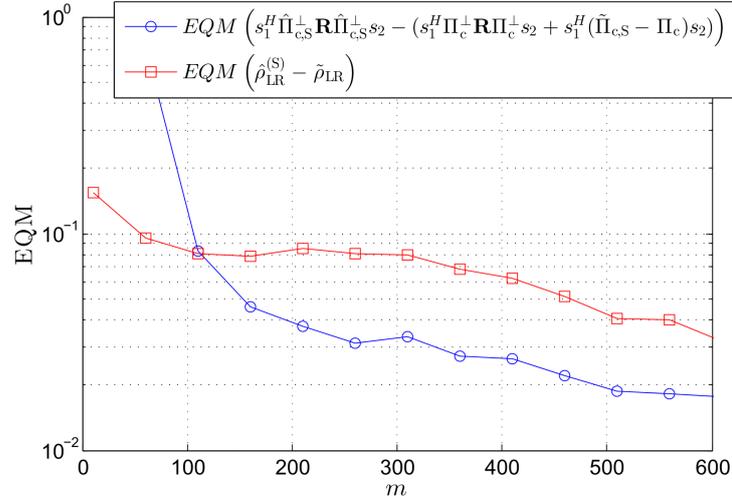


FIGURE 4.4 – Convergences de la FQ *structurée rectifiée* (Eq.(4.24)) et du SINR loss du nouveau filtre adaptatif LR (Eq.(4.25)) quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c = 3$ ,  $\theta_d = \theta = 20, 1^\circ$  et  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} = 10\text{dB}$ .

### 4.3.3 Performances des nouveaux détecteurs LR-AS et LR-AG

Cette partie présente maintenant les performances des nouveaux détecteurs adaptatifs LR-AG et LR-AS dont les performances tendent vers celles du LR-NMF. Cependant, afin de bien apprécier les performances et le gain apporté par la RMT, il est nécessaire de prendre une dimension  $m$  suffisamment élevée. En effet, si elle est trop faible, on peut voir en Fig.4.5 que, même si l'estimation du sous-espace bruit LR par la RMT est meilleure (les détecteurs ont des valeurs plus basses ou encore les « zéros » des FQs du type  $s_1^H \hat{\Pi}_c^\perp s_2$  sont mieux estimés), les minimums (« zéros » des FQs) du dénominateur sont décalés de quelques dixièmes de degré et entraînent donc un dénominateur proche de 0 sur un AoA proche mais différent de celui des brouilleurs. De ce fait, il y aura division par un  $\varepsilon$  proche de 0 et entraînera une très mauvaise estimation du détecteur LR-NMF et une baisse en performance. Cependant, dès que  $m$  augmente, on peut observer que ce décalage en AoA diminue dû à la meilleure précision angulaire de l'antenne. C'est pour cette raison que, par la suite,  $m$  sera fixé généralement à 200, taille suffisamment grande pour pouvoir apprécier et étudier les nouveaux détecteurs adaptatifs LR.

On s'intéresse maintenant à l'évolution des performances des nouveaux détecteurs en fonction des paramètres du système en termes de probabilité de détection et de fausse alarme. Pour cela, on observe en Fig.4.6 les probabilités de fausse alarme et de détection, des détecteurs LR-NMF (en noir), LR-AS (en vert), LR-AG (en rouge) et LR-ANMF (en bleu) pour un seuil fixé en fonction de  $m$ . Pour la  $P_{fa}$ , on observe alors que celle-ci est plus basse que celle du détecteur LR-ANMF et que plus  $m$  augmente, plus elle se rapproche de celle de l'optimal en LR, celle du détecteur LR-NMF. Pour la  $P_d$ , les performances dépendent clairement de  $m$ . En effet si  $m$  est trop faible, les nouveaux détecteurs détectent moins bien que le détecteur LR-ANMF, ce qui n'est plus le cas quand  $m$  augmente à partir d'une certaine valeur ( $m = 250$  ici). Puis on observe ces mêmes quantités en fonction de  $K$  en Fig.4.7. Pour la  $P_{fa}$  et la  $P_d$ , les performances des nouveaux détecteurs sont globalement plus proches de celles du détecteur LR-NMF que ne le sont celles du détecteur LR-ANMF. Les performances théoriques sont donc mieux approchées par les nouveaux détecteurs que par le détecteur LR-ANMF. On observe ces mêmes quantités en fonction de  $\theta$  (sous  $\mathcal{H}_0$ ) ou  $\theta_d$  (sous  $\mathcal{H}_1$ ) en Fig.4.8. En termes de  $P_{fa}$ , celle-ci est bien plus basse que celle du détecteur LR-ANMF pour des valeurs de  $\theta$  proche de celui des brouilleurs ( $20^\circ$ ) et ce rapproche donc de celle du détecteur LR-NMF. Cependant, lorsque la cible est trop loin (au dessus d'une certaine valeur de

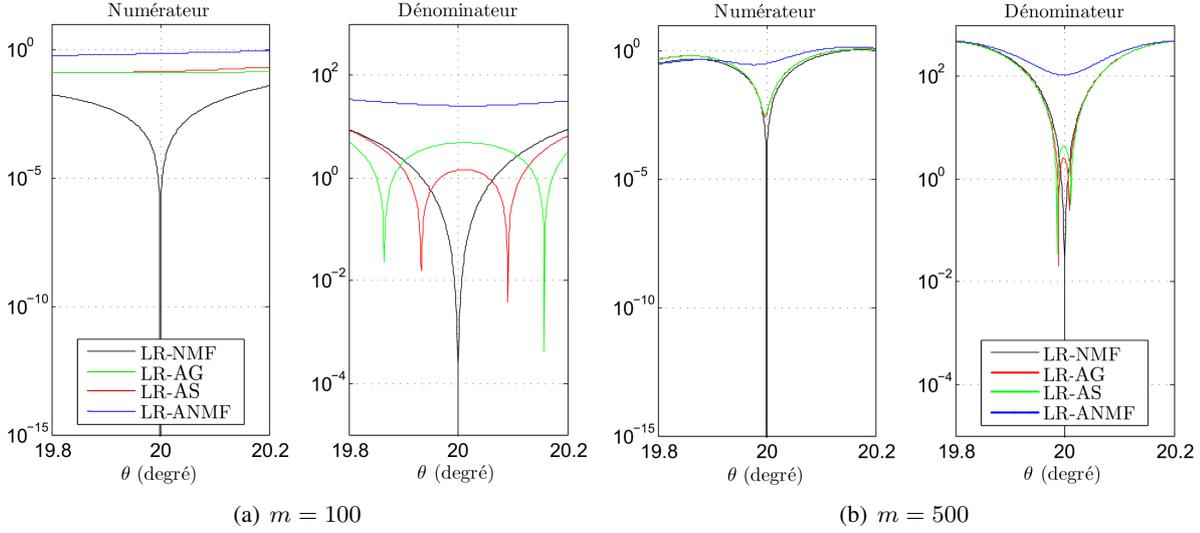


FIGURE 4.5 – Numérateurs et dénominateurs des détecteurs LR-NMF, LR-AS, LR-AG et LR-ANMF sous  $\mathcal{H}_0$  en fonction de  $\theta$  pour deux valeurs de  $m$  et  $c_m = 5$ ,  $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 10\text{dB}$ .

$\theta$ ), les nouveaux détecteurs ont une  $P_{fa}$  bien plus mauvaise que les autres. Toutefois, en termes de  $P_d$ , les nouveaux détecteurs ont des performances très proches des théoriques (celles du détecteur LR-NMF). Enfin, on observe ces mêmes quantités en fonction de  $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)}$  en Figs.4.9(a) et 4.9(b). En termes de  $P_{fa}$ , on observe que pour une large plage de valeurs  $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)}$  (de 14dB à 38dB ici) les nouveaux détecteurs sont bien meilleurs que le détecteur LR-ANMF et sont plus proches du détecteur LR-NMF, ce qui n'est plus le cas pour les valeurs en dehors de cette plage. En termes de  $P_d$ , on observe que les nouveaux détecteurs ont des performances bien plus proches des optimales en LR (celles du détecteur LR-NMF). Les détecteurs LR-AS et LR-AG se comportent donc globalement plus comme le détecteur LR-NMF que ne le fait le détecteur LR-ANMF pour presque tous les paramètres. Cependant, il faut garder en tête que ces courbes sont pour un seuil et des paramètres fixés. Elles ne reflètent donc pas l'intégralité du comportement des nouveaux détecteurs. De plus amples investigations seraient donc nécessaires. De plus, ces courbes ne sont qu'empiriques et on aimerait bien sûr pouvoir déterminer ces comportements de manière théorique. Cela fait partie des nombreuses perspectives de cette thèse.

Après avoir déterminé le comportement des nouveaux détecteurs en fonction des paramètres du système, prenons maintenant un jeu de paramètres favorable aux nouveaux détecteurs ( $m = 200$ ,  $K = 20$ ,  $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 20\text{dB}$  et  $\theta = \theta_d = 20, 1^\circ$ ) afin de pouvoir observer leur performances de détection en termes de probabilité de fausse alarme en fonction du seuil et probabilité, détection en fonction du SNR et courbes COR et de les comparer à celles des détecteurs LR-NMF et LR-ANMF. En Fig.4.10, on visualise les relations  $P_{fa}$ -seuil des détecteurs LR-NMF, LR-AG, LR-AS et LR-ANMF et on observe que les nouveaux détecteurs adaptatifs ont de meilleures performances que le détecteur LR-ANMF, *i.e.* pour un seuil donné la probabilité de fausse alarme est bien inférieure. Ensuite, en Fig.4.11(a), on visualise les relations  $P_d$ -SNR des détecteurs LR-NMF, LR-AG, LR-AS et LR-ANMF pour une probabilité de fausse alarme fixée à  $10^{-3}$  et on observe que les nouveaux détecteurs adaptatifs ont de meilleures performances que le détecteur LR-ANMF, *i.e.* pour un SNR donné la probabilité de détection est bien supérieure. Enfin, en Fig.4.11(b), on visualise les relations  $P_d$ - $P_{fa}$  ou courbes COR des détecteurs LR-NMF, LR-AG, LR-AS et LR-ANMF pour un SNR fixé à 18dB et de même on observe que les nouveaux détecteurs adaptatifs ont de meilleures performances que le détecteur LR-ANMF, *i.e.* pour une probabilité de fausse alarme et un SNR donnés la probabilité de détection est supérieure.

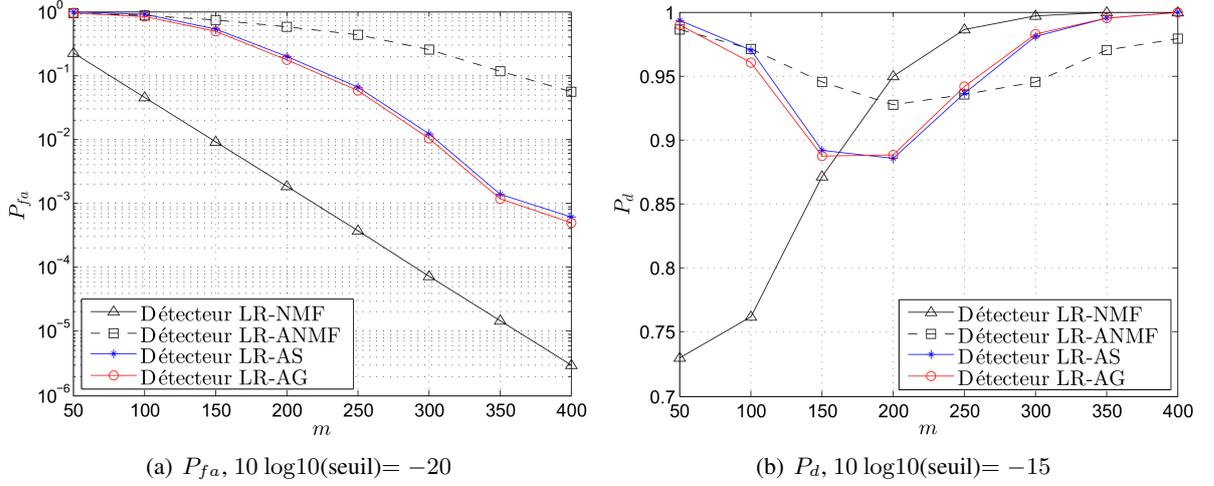


FIGURE 4.6 – Probabilités de fausse alarme et de détection en fonction de  $m$ , des détecteurs LR-NMF (ligne noire), LR-AS (en bleu), LR-AG (en rouge) et LR-ANMF (pointillés noirs) pour  $c_m = 20$ ,  $\theta = \theta_d = 20, 1^\circ$ ,  $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 20\text{dB}$  et un seuil fixé sur  $10^4$  itérations.

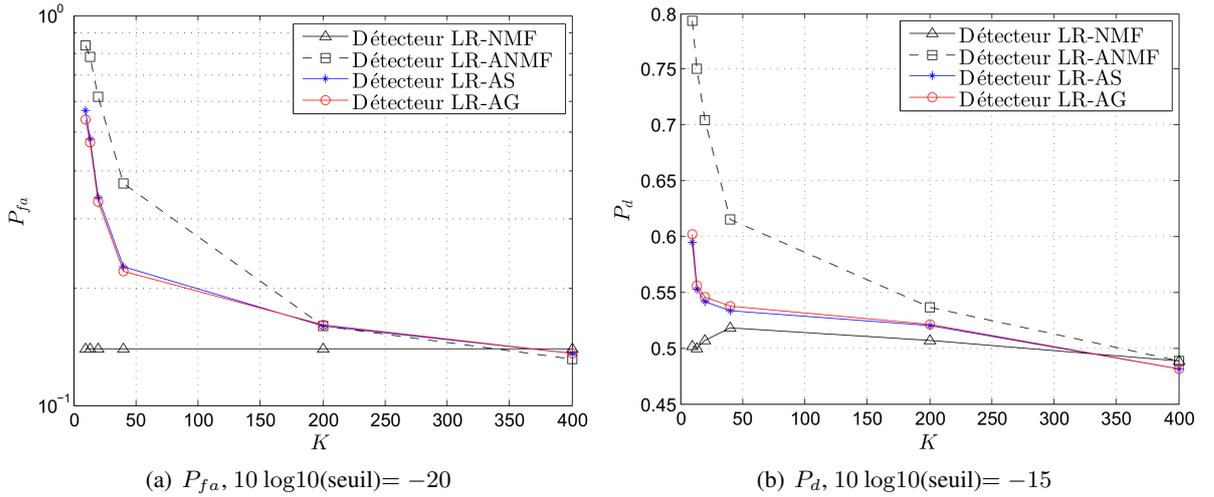


FIGURE 4.7 – Probabilités de fausse alarme et de détection en fonction de  $K$ , des détecteurs LR-NMF (ligne noire), LR-AS (en bleu), LR-AG (en rouge) et LR-ANMF (pointillés noirs) pour  $m = 200$ ,  $\theta = \theta_d = 20, 1^\circ$ ,  $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 20\text{dB}$  et un seuil fixé.

Les nouveaux détecteurs ont donc un comportement et des performances plus proches de ceux du LR-NMF et globalement meilleurs que ceux du détecteur LR-ANMF. On a aussi pu observer les des deux détecteurs se comportent de la même façon malgré la différence de modèle de covariance.

#### 4.3.4 Performances des nouveaux filtres

Pour finir, on visualise les performances du filtre LR adaptatif classique et des nouveaux filtres par leur SINR loss et à leurs performances asymptotiques par les limites des SINR loss en Fig. 4.12. On cherche donc ici à avoir le moins de pertes de filtrage pour un maximum de paramètres donc un SINR

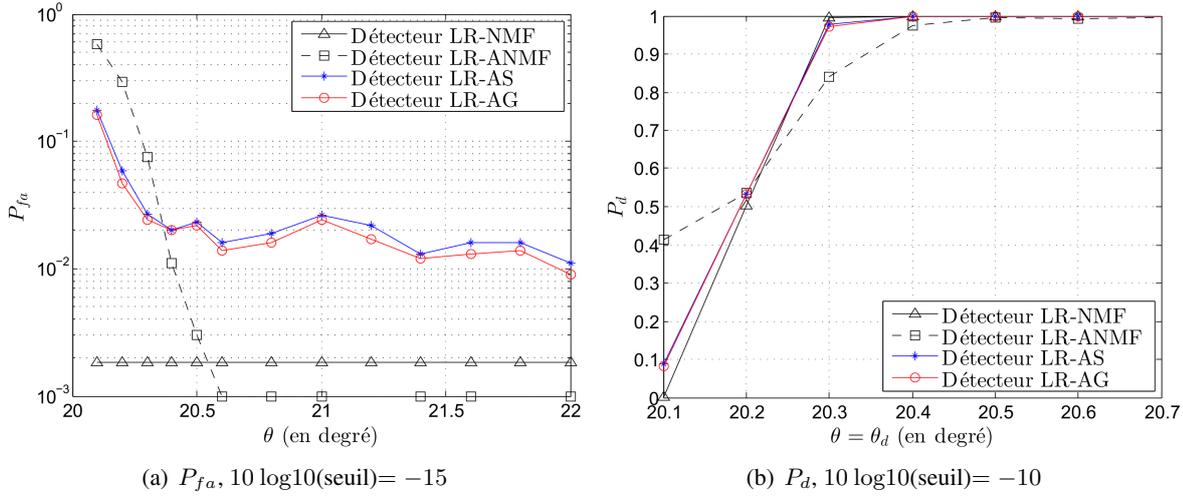


FIGURE 4.8 – Probabilités de fausse alarme et de détection en fonction de  $\theta$  ou  $\theta_d$ , des détecteurs LR-NMF (ligne noire), LR-AS (en bleu), LR-AG (en rouge) et LR-ANMF (pointillés noirs) pour  $m = 200$ ,  $c_m = 20$ ,  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})} = 20\text{dB}$  et un seuil fixé.

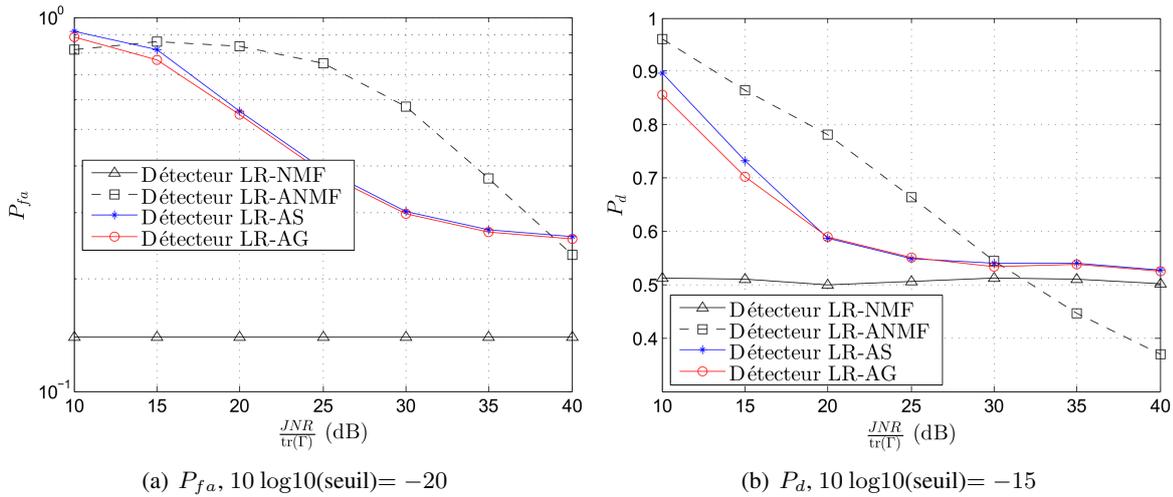


FIGURE 4.9 – Probabilités de fausse alarme et de détection en fonction de  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{T})}$ , des détecteurs LR-NMF (ligne noire), LR-AS (en bleu), LR-AG (en rouge) et LR-ANMF (pointillés noirs) pour  $m = 200$ ,  $c_m = 20$ ,  $\theta = \theta_d = 20, 1^\circ$  et un seuil fixé.

loss le plus proche possible de 1. La Fig. 4.12(a) montre alors la visualisation des différents SINR loss :  $\rho_{LR}$  (ligne noire avec étoiles),  $\hat{\rho}_{LR}$  (ligne pointillée bleue) et sa limite dans le régime en grandes dimensions  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  (ligne bleue avec carrés),  $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$  (ligne verte avec ronds),  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$  (ligne rouge avec étoiles) et sa limite dans le régime en grandes dimensions  $\bar{\rho}_{LR}$  (ligne rouge avec carrés) en fonction de  $K$  quand la cible est près des brouilleurs, *i.e.*  $\theta_d = 20, 1^\circ$ . On observe alors que les SINR loss des nouveaux filtres permettent d'obtenir de meilleures performances à nombre de données secondaires  $K$  faible. C'est-à-dire qu'on a besoin de moins de données secondaires pour avoir un filtrage aussi performant que le filtre LR adaptatif classique (à SINR loss fixé), par exemple  $K = 20$  au lieu de  $K = 35$  pour un SINR loss de  $-3\text{dB}$ . Ceci est intéressant lorsqu'on cherche justement à trouver de nouveaux filtres permettant

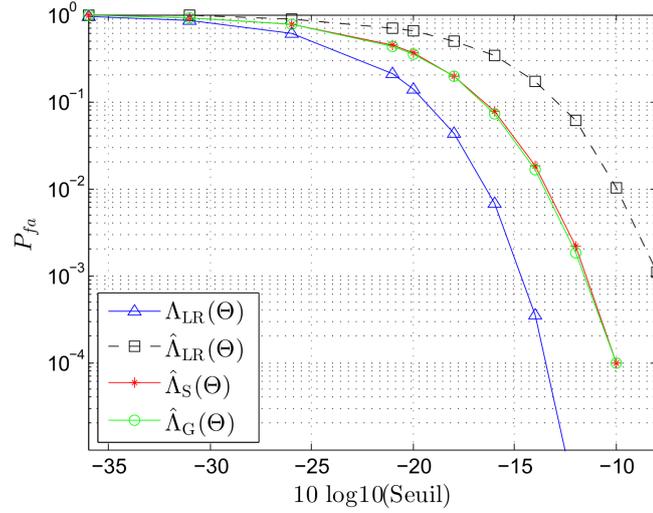


FIGURE 4.10 – Relations  $P_{fa}$ -seuil des détecteurs LR-NMF, LR-AG, LR-AS et LR-ANMF avec  $m = 200$ ,  $K = 20$ ,  $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 20\text{dB}$ ,  $\theta = 20, 1^\circ$  et  $\theta_d = 20, 1^\circ$  et  $SNR = 18\text{dB}$  pour les  $P_d$ -seuil.

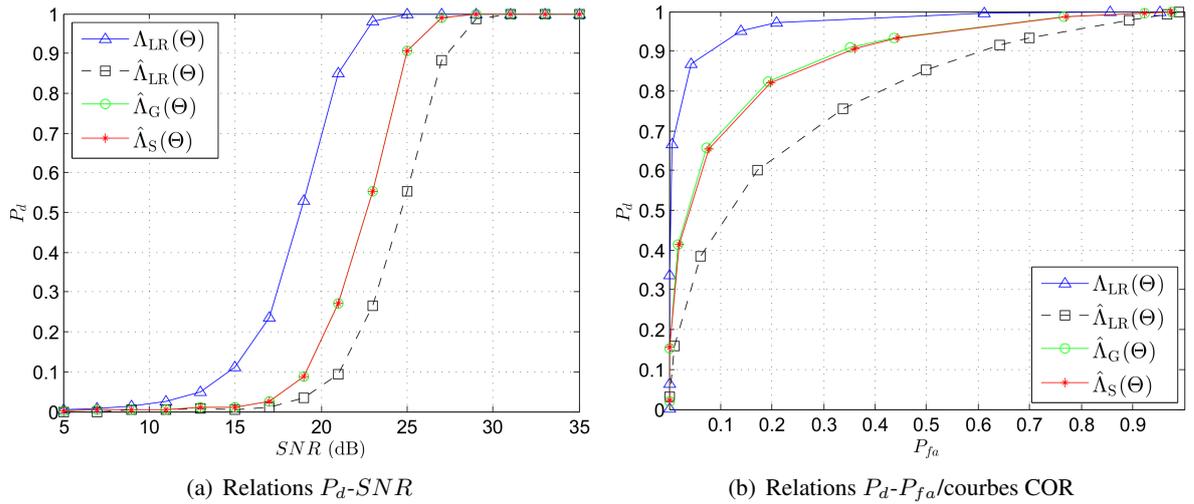


FIGURE 4.11 – Relations  $P_d$ - $SNR$  et  $P_d$ - $P_{fa}$  des détecteurs LR-NMF, LR-AG, LR-AS et LR-ANMF avec  $m = 200$ ,  $K = 20$ ,  $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 20\text{dB}$ ,  $\theta = 20, 1^\circ$ ,  $\theta_d = 20, 1^\circ$  et : (a)  $P_{fa} = 10^{-3}$  pour les  $P_d$ - $SNR$ , (b)  $SNR = 18\text{dB}$  pour les  $P_d$ - $P_{fa}$ .

de diminuer le nombre de données secondaires pour des performances équivalentes comme en application STAP. On observe aussi, comme avec les détecteurs, que les SINR loss des deux nouveaux filtres sont presque superposés. On s'intéresse maintenant aux performances asymptotiques dans le régime en grandes dimensions du filtre adaptatif LR classique et du nouveau filtre LR adaptatif avec le modèle *spiked* :  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  et  $\tilde{\rho}_{LR}$  respectivement. On observe alors qu'asymptotiquement, le nouveau filtre LR adaptatif avec le modèle *spiked* a de meilleures performances que le filtre adaptatif LR classique. En effet, pour des performances équivalentes (-3dB par exemple), le nouveau filtre LR adaptatif ne nécessite qu'environ  $K = 12$  données secondaires contre  $K = 30$  données secondaires pour le filtre adaptatif LR classique. Les performances du nouveau filtre LR adaptatif avec le modèle *spiked* s'approchent donc plus de celles du filtre LR non adaptatif que celles du filtre LR adaptatif classique.

Puis, de manière similaire, les mêmes équations sont tracées en fonction de  $\theta = \theta_d$  en Fig. 4.12(b) avec  $K = 2r$ . On observe alors comme précédemment que les nouveaux filtres adaptatifs ont de meilleures performances que le filtre adaptatif LR classique, *i.e.* lorsque l'AoA de la cible est proche de ceux des brouilleurs (ici en dessous de  $20, 5^\circ$ ) les pertes dues au filtrage sont beaucoup moins importantes ou de manière équivalente la valeur du SINR loss est plus importante. Ainsi, on peut observer que le décrochage (là où les performances se dégradent fortement) s'effectue à une valeur plus basse de  $\theta_d$ , ici autour de  $20, 3^\circ$  pour les nouveaux filtres au lieu d'environ  $20, 5^\circ$  pour le filtre LR adaptatif classique. Cette différence peut être même plus importante, comme on peut le voir en Fig.4.13. Ceci nous permet donc d'avoir une valeur de  $\theta_d$  correspondant à un décrochement de performances, en dessous de laquelle le filtrage se dégrade fortement. Enfin, on s'intéresse aussi aux performances asymptotiques dans le régime en grandes dimensions du filtre adaptatif LR classique et du nouveau filtre LR adaptatif avec le modèle *spiked* :  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$  et  $\tilde{\rho}_{LR}$  respectivement. De même, on observe sur les deux Figs. 4.12(b) et 4.13 que les performances asymptotiques du nouveau filtre LR adaptatif avec le modèle *spiked* sont meilleures (SINR loss asymptotique plus proche de 0dB) que les performances asymptotiques du filtre LR adaptatif classique. Les performances du nouveau filtre LR adaptatif avec le modèle *spiked* s'approchent donc plus de celles du filtre LR non adaptatif que celles du filtre LR adaptatif classique.

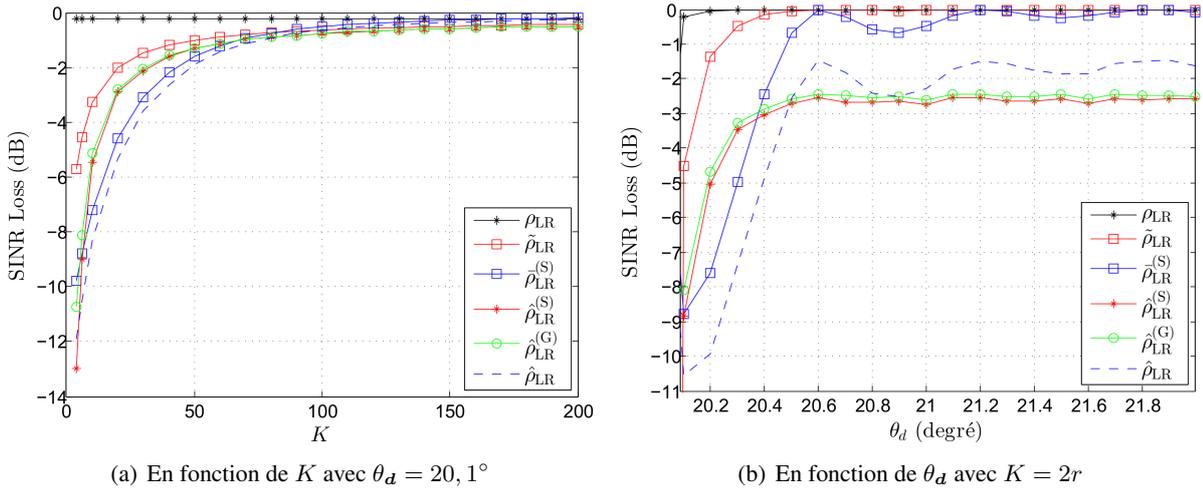


FIGURE 4.12 – Visualisation de  $\rho_{LR}$ ,  $\hat{\rho}_{LR}$  et sa limite en grandes dimensions  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$ ,  $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$ ,  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$  et sa limite en grandes dimensions  $\tilde{\rho}_{LR}$  en fonction de  $K$  ou  $\theta_d$  (sur  $10^3$  réalisations) avec  $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 20\text{dB}$  et  $m = 200$ .

Nous avons donc défini en utilisant les outils de RMT des nouveaux filtres adaptatifs LR présentant de meilleures performances asymptotiques et non asymptotiques en termes de perte en RSIB que le filtre adaptatif LR classique en fonction des paramètres de localisation du signal d'intérêt et du nombre de données secondaires  $K$ .

## 4.4 Synthèse

Dans ce chapitre, on a donc proposé d'améliorer les performances de détection et de filtrage par rapport à celles du filtre LR adaptatif classique et du détecteur LR-ANMF en construisant de nouveaux filtres et détecteurs LR adaptatifs aux meilleures performances. On a ainsi observé de meilleures per-

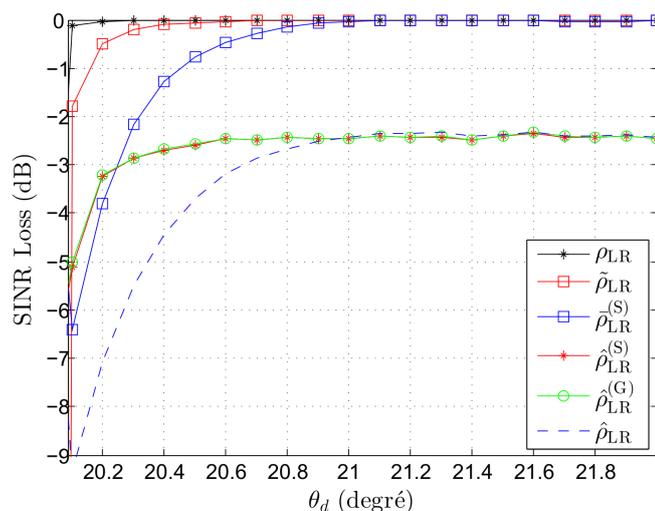


FIGURE 4.13 – Visualisation de  $\rho_{LR}$ ,  $\hat{\rho}_{LR}$  et sa limite en grandes dimensions  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$ ,  $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$ ,  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$  et sa limite en grandes dimensions  $\tilde{\rho}_{LR}$  en fonction de  $\theta_d$  (sur  $10^3$  réalisations) avec  $\frac{JNR}{\text{tr}(\Gamma)} = 30\text{dB}$ ,  $m = 100$  et  $K = 2r$ .

performances non asymptotiques et asymptotiques en termes de filtrage et SINR loss, *i.e.* on a besoin de moins de données secondaires pour des performances équivalentes à celle du filtre adaptatif classique et le filtrage est meilleur (moins de pertes en RSB) pour des cibles plus proches des brouilleurs. On a ainsi montré que les performances du nouveau filtre LR adaptatif avec le modèle *spiked* s'approchent bien plus de celle du filtre LR non adaptatif que ne le sont celles du filtre LR adaptatif classique. Les nouveaux détecteurs LR-AG et LR-AS apportent aussi globalement de meilleures performances en termes de probabilités de fausse alarme et de détection. Ainsi, leurs performances sont plus proches de celles du détecteur LR-NMF, à seuil fixé la probabilité de fausse alarme est plus faible que celle du détecteur LR-ANMF et à SNR et probabilité de fausse alarme fixés, la probabilité de détection est plus importante. Cependant, certains jeux de paramètres sont défavorables aux nouveaux détecteurs (par exemple si  $m$  est trop petit ou la puissance des brouilleurs trop forte) et ce sujet mériterait d'être étudié plus en détail. Ainsi, lorsque l'AoA de la cible ou l'AoA d'observation s'éloigne de celui des brouilleurs (bruit LR), les performances des nouveaux détecteurs tendent à être équivalentes ou moins bonnes que celles des autres détecteurs (LR-ANMF et LR-NMF). C'est donc proche des brouilleurs que le gain des nouveaux détecteurs est significatif. Cependant, bien qu'une meilleure estimation des FQs entraîne une meilleure discrimination, cela n'entraîne pas forcément une meilleure estimation des paramètres d'intérêt. Enfin, nous avons observé que les modèles « G-MUSIC » et *spiked* amènent aux mêmes résultats.

On a ainsi validé les résultats théoriques de cette thèse sur une application simple entièrement contrôlée et observé les comportements des diverses quantités de filtrage et détection. On va donc s'intéresser aux applications sur lesquelles nous avons moins de contrôle et pour lesquelles cette thèse a initialement été réalisée : le STAP et MIMO-STAP.



# 5

## Mise en pratique des démarches et résultats sur les applications STAP et MIMO-STAP *sparse*

Dans les chapitres précédents, on a tout d'abord calculé puis validé les performances/comportements asymptotiques des filtres adaptatifs et des détecteurs adaptatifs rang faible dans le régime en grandes dimensions afin de pouvoir connaître et prédire leur comportement pour un jeu de paramètres donné. Ainsi, on a déterminé la loi asymptotique dans le régime en grandes dimensions du détecteur LR-ANMF puis ses performances de détection asymptotiques et la perte en RSB asymptotique du filtre adaptatif LR. On a alors démontré que le signal filtré par le filtre LR adaptatif et le détecteur LR-ANMF sont biaisés, ce qui entraîne une baisse de performances supplémentaire due à ce biais par rapport aux quantités LR non adaptatives, cette baisse de performances pouvant se traduire par une baisse de la probabilité de détection ou une baisse du RSIB en sortie du filtre. On a donc construit de nouveaux filtres et détecteurs LR adaptatifs non biaisés dans le régime en grandes dimensions afin d'améliorer les performances de détection et de filtrage par rapport à celles du filtre LR adaptatif classique et du détecteur LR-ANMF. On a validé tous les résultats sur une application de brouillage simple et entièrement maîtrisée et observé les comportements des diverses quantités de filtrage et détection.

Cependant, les applications qui nous intéressent ici sont les traitements STAP et MIMO-STAP *sparse*. C'est pourquoi, l'objectif de ce chapitre est de mettre en pratique les résultats précédemment obtenus sur les applications STAP et MIMO-STAP *sparse*. Pour cela, on présentera plus en détails les applications visées ainsi que les paramètres de simulation. Grâce à ceux-ci on vérifiera la validité de la condition de séparabilité. On visualisera ensuite le comportement des filtres adaptatifs LR sur les deux applications et on s'intéressera aux détecteurs adaptatifs LR. On pourra ainsi observer l'influence des différences entre les modèles « G-MUSIC » et *spiked* sur les performances. Enfin, on discutera plus en détails les résultats obtenus.

### 5.1 Contexte applicatif et paramètres de simulation

Le contexte applicatif de cette thèse concerne initialement les traitements spatio-temporels radar STAP et MIMO-STAP *sparse*. Une description détaillée du STAP (resp. MIMO-STAP) est disponible dans [Ward, 1994] (resp. [Chong, 2011]). On présentera ici une version succincte afin d'appréhender les

principes fondamentaux du STAP et du MIMO-STAP.

### 5.1.1 Traitement STAP

#### 5.1.1.1 Présentation du radar

Le traitement STAP pour *Space Time Adaptive Processing*, est un traitement radar visant à déterminer l'élévation et/ou l'azimut ainsi que la vitesse d'une cible en mouvement grâce à un radar aéroporté comportant une antenne généralement linéaire uniforme composée de  $N$  capteurs de réception uniformément répartis et espacés d'une distance  $D$  envoyant un signal de  $M$  impulsions *Doppler* (cf. Fig.5.1). Il y a  $K$  cellules de *clutter* ou fouillis (réponse du sol), ces cellules étant les  $K$  données secondaires, et une cellule sous test étant la cellule où on détecte ou pas la cible potentielle de vitesse  $v_t$ .

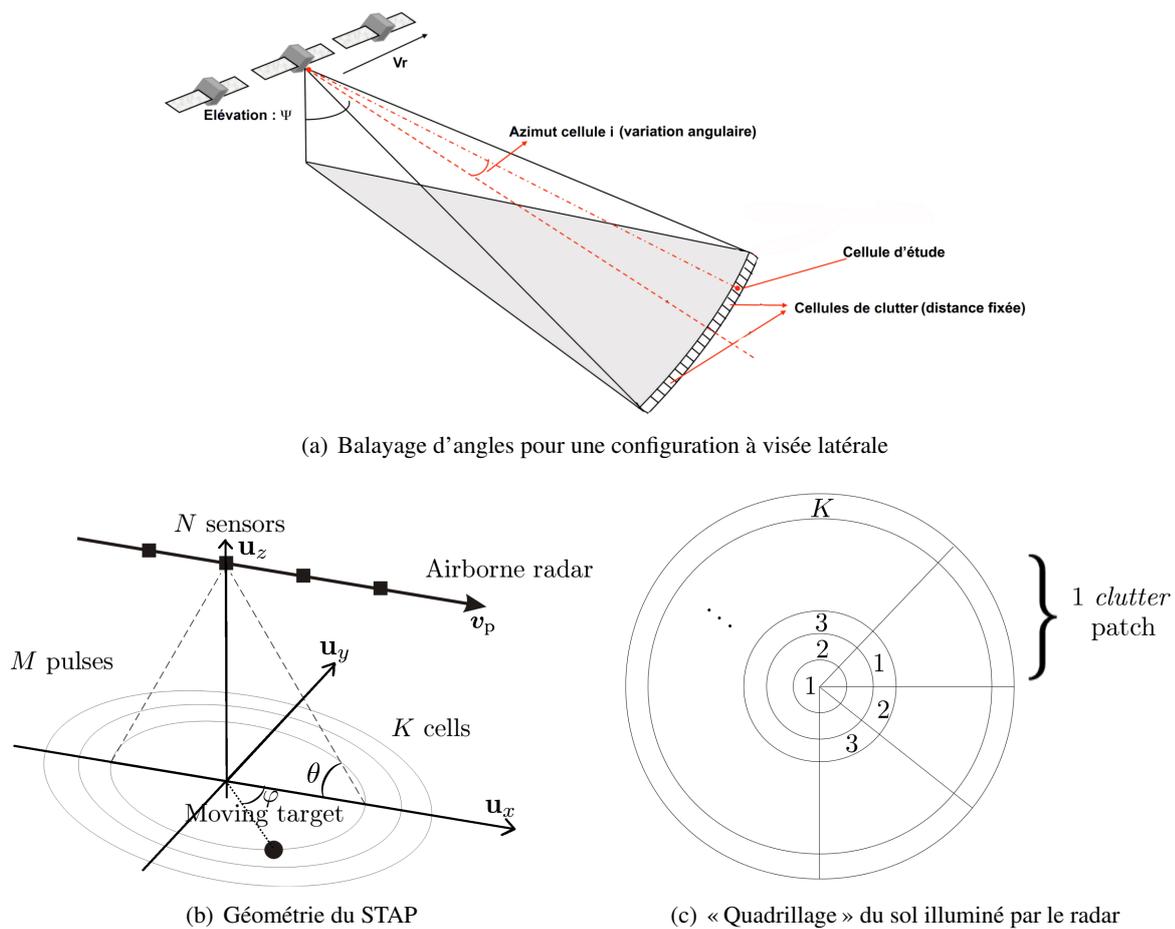


FIGURE 5.1 – Schémas pour la représentation du STAP.

De cette façon, en ayant une information spatiale, les  $N$  capteurs de l'antenne, et une information temporelle, les  $M$  impulsions envoyées, il est possible de détecter des cibles mobiles même à basse vitesse comme le montre la Fig.5.2, grâce à la finesse du filtre bidimensionnel.

La géométrie d'un système STAP classique est présentée à la Fig. 5.1(b). Le radar envoie des impulsions cohérentes à une fréquence de répétition  $f_r$ . Le porteur se déplace à la vitesse non uniforme  $v_p$ . De part la disposition des capteurs par rapport à sa direction de mouvement, on dit que le radar est en configuration *side-looking*, configuration la plus simple. A la réception, les retours radar sur chaque

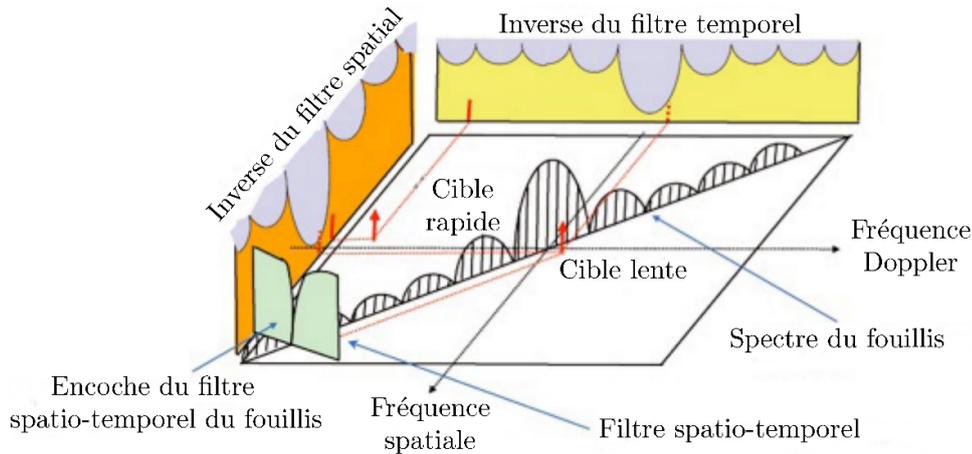


FIGURE 5.2 – Principe et intérêt du filtrage spatio-temporel

capteur après transposition en bande de base et filtrage adapté sont échantillonnés à une fréquence  $f_e$ . La fréquence spatiale ou longueur d'onde du radar est notée  $f_s = c/f_0$  où  $c$  est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques et  $f_0$  la fréquence porteuse des signaux émis. Enfin, le signal émis est bande étroite.

Le vecteur de position du  $n$ -ième élément d'antenne est :

$$\mathbf{d}_n = D(n-1)\mathbf{u}_x \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{u}_x$  est un vecteur unitaire du système de coordonnées cartésien. Le vecteur de vitesse du radar est :

$$\mathbf{v}_p = v_{p,x}\mathbf{u}_x + v_{p,y}\mathbf{u}_y + v_{p,z}\mathbf{u}_z \quad (5.2)$$

$$= v_{p,x}\mathbf{u}_x \quad (5.3)$$

puisque nous considérerons ici un porteur se déplaçant suivant le vecteur  $\mathbf{u}_x$ .  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  et  $\mathbf{u}_z$  sont des vecteurs unitaires du système de coordonnées cartésien. La position d'un point sera présentée par un vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  décrit par les angles azimut et élévation  $(\varphi, \theta)$  :

$$\mathbf{u}(\varphi, \theta) = \cos(\theta)\sin(\varphi)\mathbf{u}_x + \cos(\theta)\cos(\varphi)\mathbf{u}_y + \sin(\theta)\mathbf{u}_z \quad (5.4)$$

### 5.1.1.2 Modèle des signaux

Après mise en forme des signaux, les données STAP forment un *data cube* contenant les réponses spatio-temporelles des  $K+1$  différentes cases distances ou cellules de la scène illuminée par le radar. Pour chaque case distance  $k$ , les informations temporelles et spatiales sont concaténées dans un vecteur comme montré dans la Fig. 5.3 pour former un vecteur du signal reçu  $\mathbf{x}_k$  de taille  $m = NM$ .

Ce signal reçu  $\mathbf{x}_k$  dans la cellule distance  $k$  est alors un mélange de différents signaux qui seront décrits plus en détail par la suite :

- éventuellement le signal d'intérêt  $\mathbf{d}$  provenant d'une cible
- le *clutter* ou fouillis  $\mathbf{c}$  qui est la réponse du sol
- le bruit blanc  $\mathbf{b}$ , bruit de réception interne ou bruit d'électronique (dû aux capteurs, systèmes, etc.).

Nous ne tiendrons pas compte ici d'éventuels brouilleurs. De plus, nous supposerons par la suite que la cible est présente dans une seule case distance, appelée donnée sous test et notée  $\mathbf{x}$  bien qu'en pratique, il est courant que la réponse de la cible s'étale sur les cases distances entourant la cellule sous test. Pour

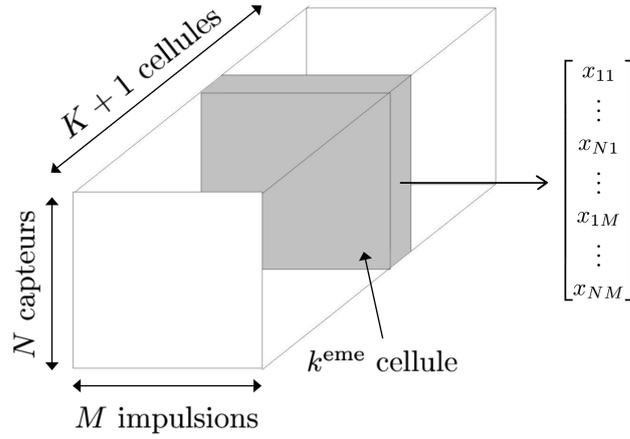


FIGURE 5.3 – Data cube STAP et arrangement des données

palier ce problème, on ne prend pas en compte ces cases qu'on appellera alors cellules de garde. Sous l'hypothèse de cible présente, hypothèse  $\mathcal{H}_1$ , on peut donc écrire le signal reçu de la façon suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{c} + \mathbf{b} \quad (5.5)$$

L'ensemble des  $K$  signaux (données secondaires) contenant uniquement le fouillis et le bruit blanc s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{b}_k \quad (5.6)$$

Enfin sous l'hypothèse de cible absente  $\mathcal{H}_0$ , la donnée sous test ne contient que du bruit. Les données STAP se résument donc ainsi :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{n} & \mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k, \quad k \in \llbracket 1, K \rrbracket \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{c} + \mathbf{n} & \mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k, \quad k \in \llbracket 1, K \rrbracket \end{cases} \quad (5.7)$$

On supposera que le bruit de la cellule sous test et le bruit des  $K$  autres cellules sont indépendantes et partagent la même distribution.

### Modèle du signal cible

La réponse de la cible s'écrit :

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a}(\omega_t(\mathbf{v}_t), \nu_t(\varphi_t, \theta_t)) \quad (5.8)$$

où  $\alpha$ , contenant la puissance de la cible, représente l'atténuation de l'onde après propagation et réflexion sur la cible et  $\mathbf{v}_t$  le vecteur vitesse de la cible :

$$\mathbf{v}_t = v_{t,x} \mathbf{u}_x + v_{t,y} \mathbf{u}_y + v_{t,z} \mathbf{u}_z \quad (5.9)$$

De plus :

$$\mathbf{a}(\omega_t(\mathbf{v}_t), \nu_t(\varphi_t, \theta_t)) = \frac{1}{m} \mathbf{b}(\omega_t(\mathbf{v}_t)) \otimes \mathbf{v}(\nu_t(\varphi_t, \theta_t)) \quad (5.10)$$

où  $\mathbf{b}(\omega_t(\mathbf{v}_t))$  et  $\mathbf{v}(\nu_t(\varphi_t, \theta_t))$  sont les vecteurs directeurs temporel et spatial définis comme :

$$\mathbf{b}(\omega_t(\mathbf{v}_t)) = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ 1, e^{2i\pi\omega_t(\mathbf{v}_t)}, \dots, e^{2i\pi(M-1)\omega_t(\mathbf{v}_t)} \right]^T \quad (5.11)$$

$$\mathbf{v}(\nu_t(\varphi_t, \theta_t)) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[ 1, e^{2i\pi\nu_t(\varphi_t, \theta_t)}, \dots, e^{2i\pi(N-1)\nu_t(\varphi_t, \theta_t)} \right]^T \quad (5.12)$$

avec  $\omega_t(\mathbf{v}_t)$  et  $\nu_t(\varphi_t, \theta_t)$  la fréquence Doppler normalisée et la fréquence spatiale de la cible :

$$\begin{aligned}\omega_t(\mathbf{v}_t) &= \frac{2}{f_s f_r} \mathbf{u}(\varphi_t, \theta_t)^T (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_t) \\ &= \frac{2}{f_s f_r} [(v_{p,x} - v_{t,x}) \cos(\theta_t) \sin(\varphi_t) + (v_{p,y} - v_{t,y}) \cos(\theta_t) \cos(\varphi_t) + (v_{p,z} - v_{t,z}) \sin(\theta_t)]\end{aligned}\quad (5.13)$$

$$\nu_t(\varphi_t, \theta_t) = \frac{1}{(n-1)f_s} \mathbf{u}(\varphi_t, \theta_t)^T \mathbf{d}_n \quad (5.14)$$

$$= \frac{D}{f_s} \cos(\theta_t) \sin(\varphi_t) \quad (5.15)$$

### Modèle du bruit blanc

Le bruit blanc est modélisé par un vecteur aléatoire complexe gaussien centré et de puissance  $\sigma^2$  :

$$\mathbf{b}, \mathbf{b}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_m) \quad (5.16)$$

La puissance sera égale à 1 si aucune précision n'est donnée.

### Modèle du fouillis

Le *clutter* ou réponse du sol est équivalent à une cible immobile dans chaque *clutter patch*. En d'autres termes c'est la superposition d'un grand nombre de points distribués autour du radar à une distance fixe. La réponse d'un point du sol est donc similaire à celle de la cible :

$$\mathbf{c}_i = \alpha_i \mathbf{a}(\omega_i, \nu_i(\varphi_i, \theta_i)) \quad (5.17)$$

avec  $\alpha_i$  est l'amplitude complexe aléatoire du *patch*  $i$  et, de la même manière qu'avec la cible :

$$\omega_i = \beta \nu_i(\varphi_i, \theta_i) = \frac{2}{f_s f_r} \mathbf{u}(\varphi_i, \theta_i)^T \mathbf{v}_p \quad (5.18)$$

$$= \frac{2v_{p,x}}{f_s f_r} \cos(\theta_i) \sin(\varphi_i) \quad (5.19)$$

$$\nu_i(\varphi_i, \theta_i) = \frac{D}{f_s} \cos(\theta_i) \sin(\varphi_i) \quad (5.20)$$

où  $\beta = \frac{2v_p}{Df_r}$  et où l'on rappelle que le porteur se déplace suivant le vecteur  $\mathbf{u}_x$ . La réponse du fouillis peut donc s'écrire comme la somme des réponses des  $N_c$  points du sol (les *clutter patch*) :

$$\mathbf{c}_k = \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{c}_{i,k} = \sum_{i=1}^{N_c} \alpha_{i,k} \mathbf{a}(\omega_i, \nu_i(\varphi_i, \theta_i)) \quad (5.21)$$

Les  $\alpha_{i,k}$  sont supposés décorrélés entre eux.

Le fouillis peut être décrit comme homogène ou inhomogène [Ward, 1994] mais sera ici décrit comme homogène. Dans ce cas, la puissance du fouillis est la même pour toutes les cellules  $k$  et pour la cellule sous test. Les vecteurs  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{c}_k$  sont alors modélisés comme des vecteurs aléatoires complexes gaussiens centrés et de matrice de covariance  $\alpha_c \mathbf{C} = \mathbb{E}[\mathbf{c}\mathbf{c}^H] = \mathbb{E}[\mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^H]$  qui peut s'écrire théoriquement de la manière suivante :

$$\alpha_c \mathbf{C} = \frac{P_c}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \tilde{\gamma}_i \mathbf{a}(\omega_i, \nu_i(\varphi_i, \theta_i)) \mathbf{a}^H(\omega_i, \nu_i(\varphi_i, \theta_i)) \quad (5.22)$$

où  $P_c$  est la puissance du fouillis et  $\gamma_i$  le rapport fouillis à bruit ( $CNR$ ) du patch  $i$  normalisé par le rapport fouillis à bruit total. Ensuite, en STAP, le fouillis est de rang faible  $\text{rg}(\mathbf{C}) = r \ll m$  d'après la formule de Brennan [Brennan and Staudaher, 1992], d'où une décomposition comme à l'Eq.(1.5), avec :

$$r \simeq \lfloor N + \beta(M - 1) \rfloor \quad (5.23)$$

Si  $\beta \in \mathbb{N}^*$ , la relation devient une égalité. Enfin, la matrice de covariance du bruit total s'écrit :

$$\mathbf{R} = \alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m = \frac{CNR}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \tilde{\gamma}_i \mathbf{a}(\omega_i, \nu_i(\varphi_i, \theta_i)) \mathbf{a}^H(\omega_i, \nu_i(\varphi_i, \theta_i)) + \mathbf{I}_m \quad (5.24)$$

$$= \frac{CNR}{N_c} \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H + \mathbf{I}_m \quad (5.25)$$

avec  $\sigma^2 = 1$  et  $\alpha_c = CNR/N_c$  et où  $CNR$  est le rapport fouillis à bruit.

## 5.1.2 Traitement MIMO-STAP sparse

### 5.1.2.1 Présentation du radar

Le traitement MIMO-STAP pour *Multiple Input Multiple Output-Space Time Adaptive Processing*, est un traitement radar visant à déterminer l'élévation et/ou l'azimut ainsi que la vitesse d'une cible en mouvement grâce à un radar aéroporté comportant une antenne généralement linéaire uniforme composée de  $L$  capteurs d'émission et  $N$  capteurs de réception uniformément répartis et respectivement espacés d'une distance  $D_e$  et  $D_r$  comme montré en Fig.5.4. L'intérêt d'un traitement MIMO réside en l'augmentation du pouvoir de résolution. Le radar sera en configuration cohérente colocalisée et la vitesse du porteur sera négligée. En d'autres termes, on considèrera qu'entre l'émission et la réception, le porteur n'aura pas bougé ( $\Delta t = 0$ ) et ainsi les angles d'émission seront égaux aux angles de réception.

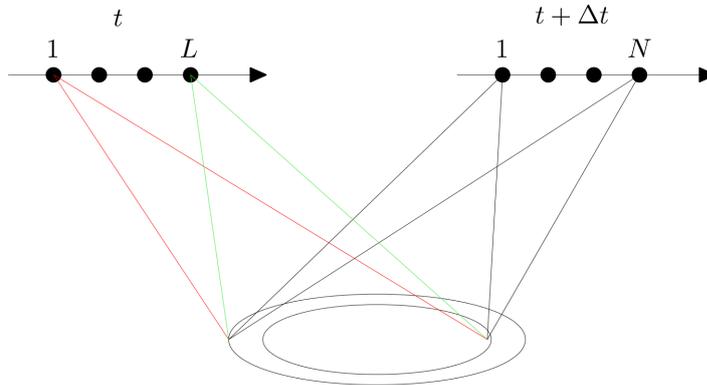


FIGURE 5.4 – Radar MIMO aéroporté.

L'origine de l'augmentation du pouvoir de résolution provient de l'augmentation de la taille de l'antenne virtuelle. En effet, la géométrie de l'antenne virtuelle est donnée par la convolution des positions des capteurs émetteurs et récepteurs comme montré en Fig.5.5. Ainsi, par exemple comme en Fig.5.5(a), avec  $L$  émetteurs espacés de manière *sparse* et  $N$  récepteurs proches les uns des autres (comme  $f_s/2$  où  $f_s$  est la longueur d'onde), on obtient une ouverture d'antenne effective plus grande soit  $(LN - 1)f_s/2$  au lieu de  $(N - 1)f_s/2$  pour un radar STAP classique. De manière alternative, si les antennes d'émission et de réception ont des directions différentes comme en Fig.5.5(b), on obtient une antenne virtuelle 2D,

où Rx est l'antenne de réception, Tx l'antenne de transmission et Virtual l'antenne virtuelle formée par les antennes de transmission et de réception. Par la suite, on se placera en configuration *sparse* comme en Fig.5.5(a).

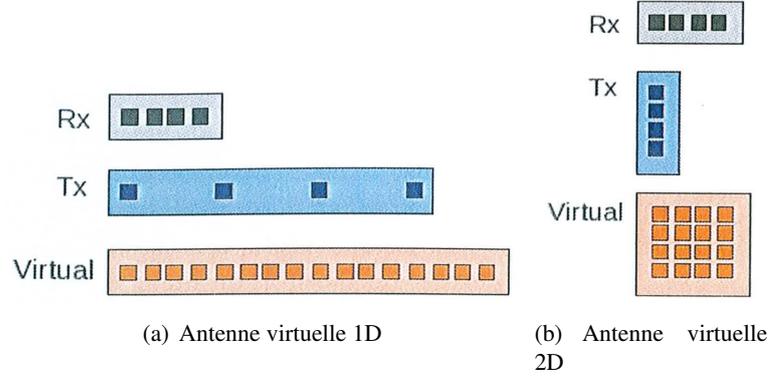


FIGURE 5.5 – Antenne virtuelle : (a) 1D formée à partir d'éléments récepteurs ploches et d'éléments émetteurs éloignés ou *sparse*, (b) 2D formée à partir d'éléments récepteurs et émetteurs proches.

Les capteurs d'émission envoient des signaux de  $M$  impulsions ou *pulses Doppler*. De même qu'en STAP, il y a  $K$  cellules de *clutter* ou fouillis (réponse du sol) comme on peut le voir à la Fig.5.1(c), ces cellules étant les  $K$  données secondaires, et une cellule sous test étant la cellule où on détecte ou pas la cible potentielle de vitesse  $v_t$ . Les  $M$  impulsions cohérentes sont envoyées à une fréquence de répétition  $f_r$ . Le porteur se déplace à la vitesse non uniforme  $v_p$ . De part la disposition des capteurs par rapport à sa direction de mouvement, on dit que le radar est en configuration *side-looking*, configuration la plus simple. Enfin, on note  $f_0$  la fréquence porteuse des signaux émis. Enfin, le signal émis est supposé bande étroite.

### 5.1.2.2 Modèle des signaux

On peut décrire le processus d'émission grâce aux schémas présentés en Fig.5.6. Le  $l$ -ième élément émetteur émet une *pulse* composée de  $N_s$  échantillons sur une durée  $T_s$ . On supposera aussi que les capteurs sont découplés. Le  $m$ -ième *pulse* peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbf{e}_{m,l} = \mathbf{c}_{m,l} \odot \phi_l(t) = [(\mathbf{c}_{m,l})_1 \phi_l(t_1) \cdots (\mathbf{c}_{m,l})_{N_s} \phi_l(t_{N_s})] \in \mathbb{C}^{1 \times N_s} \quad (5.26)$$

où  $\mathbf{c}_{m,l}$  est le vecteur de codage associé à l'émetteur  $l$  et au *pulse*  $m$  et  $\phi_l(t) = [\phi_l(t_1), \dots, \phi_l(t_{N_s})]$  la forme d'onde associée à l'émetteur  $l$ .

Ainsi la réponse d'un objet de fréquence Doppler  $\omega$ , et d'azimut  $\varphi$  et élévation  $\theta$  reçue par le  $n$ -ième récepteur au  $m$ -ième *pulse* et provenant d'une cellule  $k$  s'écrit de la manière suivante :

$$\alpha_k v_n(\varphi, \theta) b_m(\omega) \sum_{l=1}^L v_l(\varphi, \theta) \mathbf{e}_{m,l} \quad (5.27)$$

Donc, la réponse de cet objet reçue par les  $N$  récepteurs au  $m$ -ième *pulse* et provenant d'une cellule  $k$  s'écrit de la manière suivante :

$$\alpha_k b_m(\omega) \mathbf{v}_e(\varphi, \theta) \mathbf{v}_r^T(\varphi, \theta) (\mathbf{C}_m \odot \Phi) \quad (5.28)$$

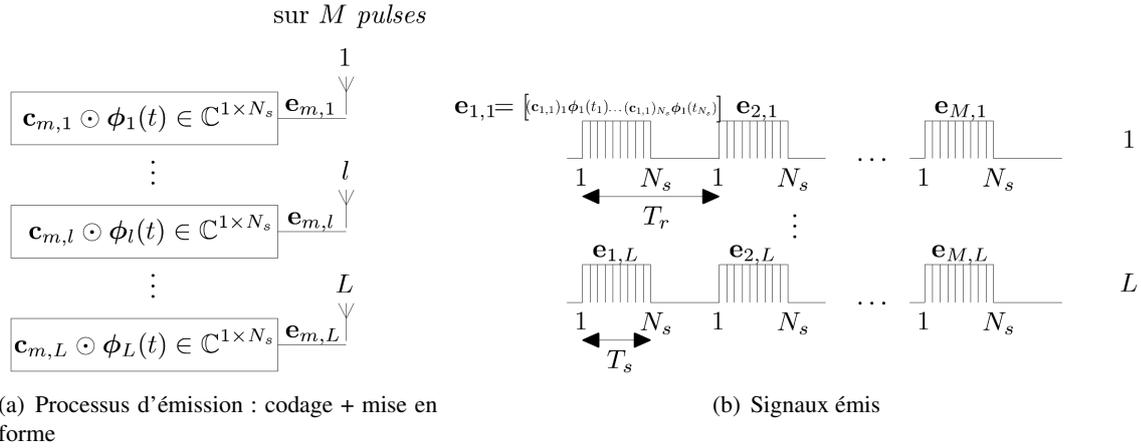


FIGURE 5.6 – Schémas d'émission d'un radar MIMO-STAP.

où  $\mathbf{C}_m$  est la matrice de codage du  $m$ -ième pulse et  $\Phi$  la matrice des formes d'onde :

$$\mathbf{C}_m = [\mathbf{c}_{m,1}^T, \dots, \mathbf{c}_{m,L}^T]^T \quad (5.29)$$

$$\Phi = [\phi_1^T(t), \dots, \phi_L^T(t)] \quad (5.30)$$

et où  $b_m(\omega)$ ,  $v_l(\varphi, \theta)$  et  $v_n(\varphi, \theta)$  sont respectivement les  $m$ -ième,  $l$ -ième et  $n$ -ième éléments des vecteurs directeurs temporel  $\mathbf{b}(\omega(\mathbf{v}))$  et spatiaux de l'émetteur  $\mathbf{v}_e(\varphi, \theta)$  et du récepteur  $\mathbf{v}_r(\varphi, \theta)$ , définis comme :

$$\mathbf{b}(\omega(\mathbf{v})) = \frac{1}{\sqrt{M}} [1, e^{2i\pi\omega(\mathbf{v})}, \dots, e^{2i\pi(M-1)\omega(\mathbf{v})}]^T \quad (5.31)$$

$$\mathbf{v}_e(\varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{L}} [1, e^{2i\pi \frac{D_e}{f_s} \cos(\theta) \sin(\varphi)}, \dots, e^{2i\pi(L-1) \frac{D_e}{f_s} \cos(\theta) \sin(\varphi)}]^T \quad (5.32)$$

$$\mathbf{v}_r(\varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, e^{2i\pi \frac{D_r}{f_s} \cos(\theta) \sin(\varphi)}, \dots, e^{2i\pi(N-1) \frac{D_r}{f_s} \cos(\theta) \sin(\varphi)}]^T \quad (5.33)$$

avec  $\omega(\mathbf{v})$  la fréquence Doppler normalisée du point réfléchissant :

$$\omega(\mathbf{v}) = \frac{2}{f_s f_r} \mathbf{u}(\varphi, \theta)^T (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}) \quad (5.34)$$

Les signaux reçus  $(\mathbf{z}_{n,m})_k$  sont ainsi composés de la somme des réponses des  $N_c$  clutter patch, de la réponse éventuelle de la cible et de bruit de réception interne au radar. Ces signaux sont ensuite traités, filtrés et décodés pour obtenir un data cube  $\bar{\mathbf{X}}$  comme montré en Fig.5.7.

Ainsi, après mise en forme des signaux et en supposant les formes d'ondes orthogonales et un parfait décodage, les données MIMO-STAP forment un data cube similaire au data cube en traitement STAP contenant les réponses spatio-temporelles des  $K + 1$  différentes cases distances ou cellules de la scène illuminée par le radar. Pour chaque case distance  $k$ , les informations temporelles et spatiales sont concatinées dans un vecteur comme montré dans la Fig. 5.8 pour former un vecteur du signal reçu  $\mathbf{x}_k$  de taille  $m = NML$ .

Ce signal reçu  $\mathbf{x}_k$  dans la cellule distance  $k$  est donc aussi un mélange de différents signaux qui seront décrits plus en détail par la suite :

- éventuellement le signal d'intérêt  $\mathbf{d}$  provenant d'une cible
- le clutter ou fouillis  $\mathbf{c}$  qui est la réponse du sol
- le bruit blanc  $\mathbf{b}$ , bruit de réception interne.

La suite de la modélisation est identique à celle du traitement STAP avec  $m = NML$ . Nous ne noterons donc ici que les différences.

sur  $M$  pulses

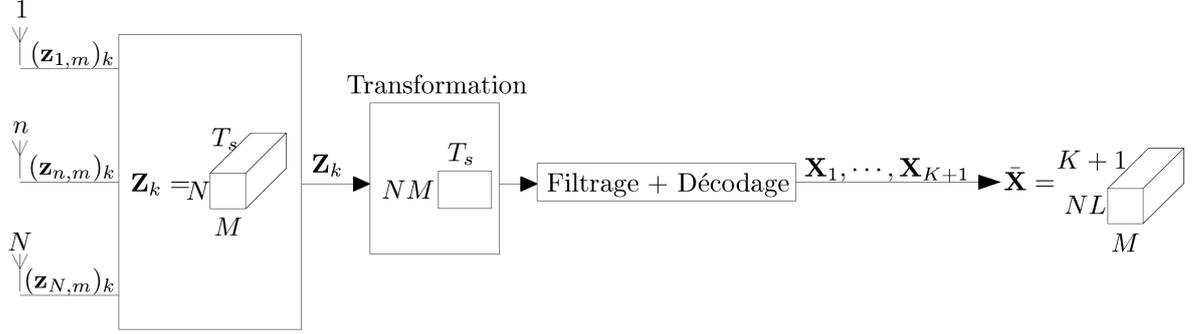


FIGURE 5.7 – Schéma du processus de réception d'un radar MIMO-STAP.

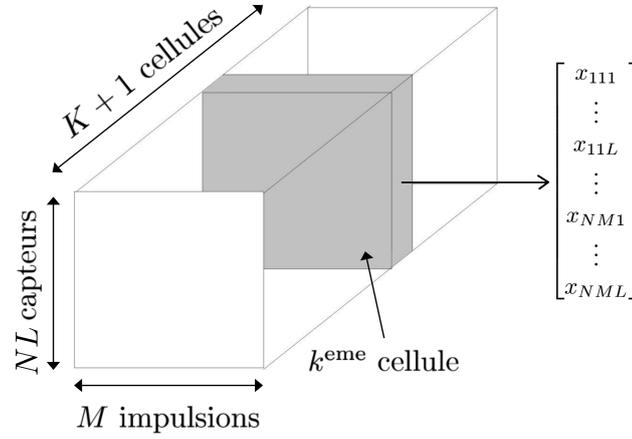


FIGURE 5.8 – Data cube MIMO-STAP et arrangement des données

### Modèle du signal cible

La réponse de la cible s'écrit presque de manière identique :

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a}(\omega_t(\mathbf{v}_t), \varphi_t, \theta_t) \quad (5.35)$$

où  $\alpha$ , contenant la puissance de la cible, représente l'atténuation de l'onde après propagation et réflexion sur la cible et

$$\mathbf{a}(\omega_t(\mathbf{v}_t), \varphi_t, \theta_t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{b}(\omega_t(\mathbf{v}_t)) \otimes \mathbf{v}_e(\varphi_t, \theta_t) \otimes \mathbf{v}_r(\varphi_t, \theta_t) \quad (5.36)$$

où  $\mathbf{b}(\omega_t(\mathbf{v}_t))$ ,  $\mathbf{v}_e(\varphi_t, \theta_t)$  et  $\mathbf{v}_r(\varphi_t, \theta_t)$  sont les vecteurs directeurs temporel et spatiaux de l'émetteur et du récepteurs et  $\omega_t(\mathbf{v}_t)$  la fréquence Doppler normalisée de la cible, déjà définie pour le traitement STAP.

### Modèle du fouillis

La réponse du sol d'un *clutter patch* est toujours similaire à celle de la cible :

$$\mathbf{c}_i = \alpha_i \mathbf{a}(\omega_i, \varphi_i, \theta_i) \quad (5.37)$$

avec  $\alpha_i$  est l'amplitude complexe aléatoire du *patch*  $i$  et  $\omega_i$  est défini comme en traitement STAP. La réponse du fouillis de la cellule  $k$  et sa matrice de covariance  $\alpha_c \mathbf{C} = \mathbb{E}[\mathbf{c}\mathbf{c}^H] = \mathbb{E}[\mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^H]$  sont défini de la même manière. Cependant, en MIMO-STAP *sparse*, le rang faible du fouillis est donné par la relation suivante :

$$r \simeq \lfloor N + \beta(M - 1) + \gamma(L - 1) \rfloor \quad (5.38)$$

avec  $\gamma = D_e/D_r$ . Si  $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^*$ , la relation devient une égalité. Enfin, la matrice de covariance du bruit total s'écrit :

$$\mathbf{R} = \alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m = \frac{CNR}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \tilde{\gamma}_i \mathbf{a}(\omega_i, \nu_i(\varphi_i, \theta_i)) \mathbf{a}^H(\omega_i, \nu_i(\varphi_i, \theta_i)) + \mathbf{I}_m \quad (5.39)$$

$$= \frac{CNR}{N_c} \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H + \mathbf{I}_m \quad (5.40)$$

avec  $\sigma^2 = 1$  et  $\alpha_c = CNR/N_c$  et où  $CNR$  est le rapport fouillis à bruit.

### 5.1.3 Choix du nombre $M$ d'impulsions

Bien que le nombre  $M$  d'impulsions soit au choix de l'utilisateur, il existe un ordre de grandeur afin d'optimiser les performances du radar. Ce nombre est fonction de nombre de capteurs et peut se comprendre grâce à la Fig.5.9.

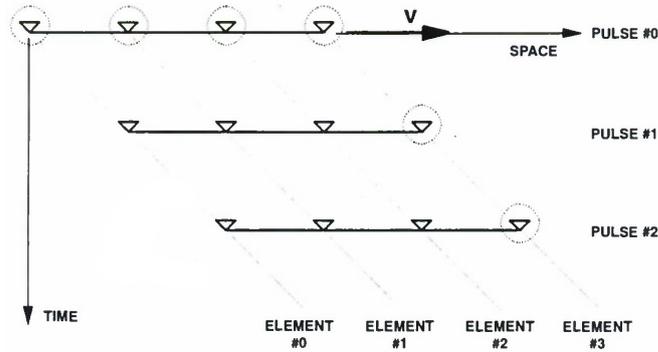


FIGURE 5.9 – Déplacement du porteur/de l'antenne à chaque impulsion.

Afin d'avoir un traitement cohérent, le radar envoie une impulsion à chaque fois que le porteur s'est déplacé de la longueur  $D_r$  ou en d'autres mots à chaque fois qu'il se déplace d'un capteur (de l'antenne virtuelle en MIMO-STAP *sparse*). Ainsi, afin de traiter le maximum de « distance » possible, le nombre  $M$  est égal à 2 fois le nombre de capteur de l'antenne (virtuelle en MIMO-STAP *sparse*). Si ce nombre est inférieur, on aura traité qu'une partie de l'antenne ou de la distance possible. Au delà, on se retrouve en présence d'un sur-échantillonnage mais cela ne nuit pas aux performances. Ainsi, il faudrait choisir :

$$\text{STAP :} \quad M \simeq 2N \quad (5.41)$$

$$\text{MIMO-STAP } \textit{sparse} : \quad M \simeq 2NL \quad (5.42)$$

Cette règle ne sera pas toujours respectée dans les simulations.

## 5.2 Simulations de traitement STAP

### 5.2.1 Paramètres de simulation

Pour le traitement STAP dans ce chapitre, le radar sera composé d'une antenne linéaire uniforme de distance inter-capteur  $D = f_s/2$ , où la longueur d'onde  $f_s$  est fixée à 0,6667m. La fréquence porteuse est  $f_0 = 450\text{MHz}$ , la fréquence de répétition  $f_r = 600\text{Hz}$ , la vitesse du porteur  $v_{p,x} = 100\text{m/s}$  ( $v_{p,y} = v_{p,z} = 0\text{m/s}$ ), la distance avion-scène  $d = 30\text{km}$  et la bande passante des signaux  $B = 4\text{MHz}$ . Enfin, l'élévation et l'azimut de la cible sont fixés à  $0^\circ$ . La cible ne se déplace que suivant l'axe  $\mathbf{u}_y$ . Ainsi seule sa vitesse  $v_{t,y}$  changera.

On vérifie donc les conditions de séparabilité pour plusieurs tailles des données :

- pour  $m = 16$  avec  $N = 4$  et  $M = 4$  ( $N_c = 7, r = 7$ );
- pour  $m = 16$  avec  $N = 2$  et  $M = 8$  ( $N_c = 9, r = 9$ );
- pour  $m = 64$  avec  $N = 4$  et  $M = 16$  ( $N_c = 19, r = 19$ ).

On visualise la condition de séparabilité en Fig.5.10 en fonction du rapport  $CNR/N_c$  en dB où  $CNR$  est le rapport *clutter* à bruit. On remarque alors que la condition change drastiquement en fonction de chaque paramètre ( $N$  et  $M$  et donc  $m$ ), ce qui est anormal. En effet, cela signifie qu'en fonction de  $N$  et  $M$ , la valeur propre la plus faible du fouillis change de valeur, ce qui ne correspond pas aux modèles *spiked* et « G-MUSIC ». On remarque aussi que les rapports de puissance en jeu pour que la condition de séparabilité soit validée ( $\alpha_c \gamma_r - \sqrt{c_m} > 0$ ) ne sont pas forcément réalistes :

- pour  $m = 16$  avec  $N = 4$  et  $M = 4$ ,  $(CNR/N_c)_{\text{dB}} \in [22; 32]$  dB impliquant  $CNR_{\text{dB}} \in [30, 45; 40, 45]$  dB ;
- pour  $m = 16$  avec  $N = 2$  et  $M = 8$ ,  $(CNR/N_c)_{\text{dB}} \in [34; 44]$  dB impliquant  $CNR_{\text{dB}} \in [43, 54; 53, 54]$  dB ;
- pour  $m = 64$  avec  $N = 4$  et  $M = 16$ ,  $(CNR/N_c)_{\text{dB}} \in [59; 69]$  dB impliquant  $CNR_{\text{dB}} \in [71, 79; 81, 79]$  dB.

Il semble donc qu'a priori les modèles *spiked* et « G-MUSIC » ne soient pas adaptés au STAP mais nous vérifierons quand même au travers de simulations sur les filtres adaptatifs LR.

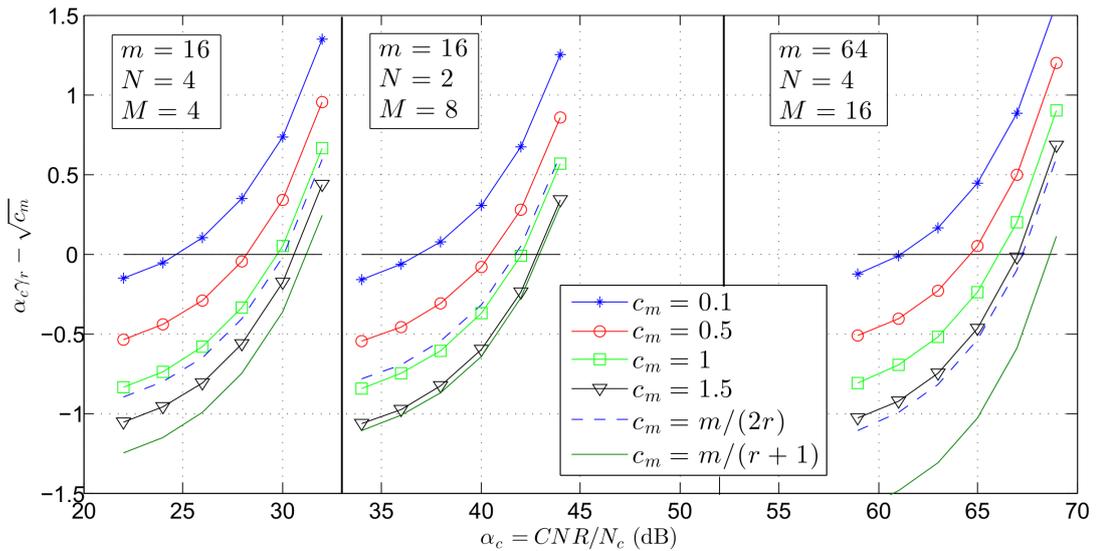
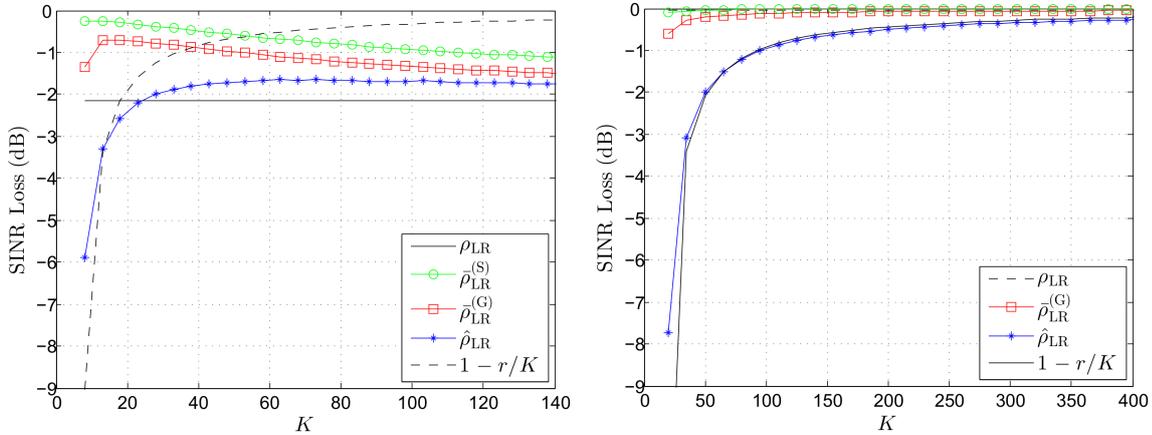


FIGURE 5.10 – Condition de séparabilité pour différentes tailles des données  $m$ .

### 5.2.2 Performances du filtre LR adaptatif classique

On s'intéresse tout d'abord aux performances de filtrage du filtre LR adaptatif classique par son SINR loss  $\hat{\rho}_{LR}$  et la prédiction de son comportement. On rappelle que l'on peut utiliser le SINR loss pour rendre compte de deux visions différentes. Premièrement, on peut le tracer tout simplement pour caractériser les performances de filtrage d'un filtre et ainsi les comparer à des SINR loss d'autres filtres. Le but sera alors d'avoir le filtre aux meilleures performances possible (à la perte en RSB la plus faible possible) et d'obtenir un SINR loss le plus proche de 1. La seconde façon d'utiliser le SINR loss est d'en calculer sa ou ses limites asymptotiques (dans différents régimes) et de les comparer afin d'observer laquelle prédit le mieux le comportement du SINR loss (et donc des performances) du filtre adaptatif considéré. Le but sera alors d'obtenir un SINR loss asymptotique déterministe au comportement (et donc à la courbe) le plus proche possible de celui du SINR loss du filtre considéré. C'est cette deuxième vision qui sera ici employée. On visualise donc le SINR loss  $\hat{\rho}_{LR}$  du filtre LR adaptatif classique et ses différentes limites présentées dans cette thèse en fonction de  $K$  pour différentes valeurs de  $m$  et  $v_{t,y} = 5\text{m/s}$  en Fig.5.11. On y visualise  $\rho_{LR}$  (noir),  $\hat{\rho}_{LR}$  (étoiles bleues), ses limites dans le régime en grandes dimensions  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  (ronds verts) et  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  (carrés rouges) et son approximation  $1 - r/K$  (pointillés noirs). On remarque alors que la RMT avec le modèle *spiked* ou « G-MUSIC » ne permet pas ou peu (avec le modèle « G-MUSIC ») de mieux prédire le comportement de  $\hat{\rho}_{LR}$  comme c'était le cas dans le chapitre 2. En effet, les courbes des limites  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  et  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  de  $\hat{\rho}_{LR}$  n'ont pas un comportement équivalent à celle de  $\hat{\rho}_{LR}$  que ne l'a la courbe de son approximation  $1 - r/K$  bien que pour des valeurs de  $K$  supérieures à 50, les courbes de  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  et  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  tendent vers celle de  $\hat{\rho}_{LR}$  en Fig.5.11(a).


 (a)  $m = 16$  ( $N = 4$ ,  $M = 4$ ) avec  $CNR/N_c = 28\text{dB}$ 

 (b)  $m = 64$  ( $N = 4$ ,  $M = 16$ ) avec  $CNR/N_c = 65\text{dB}$ 

FIGURE 5.11 – Visualisation des SINR loss en fonction de  $K$  pour différentes valeurs de  $m$  et  $v_{t,y} = 5\text{m/s}$ .

Puis on visualise les mêmes SINR loss en fonction de la vitesse de la cible et  $K = 30$  en Fig.5.12. Dans ce cadre là, par contre, les limites  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  et  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  de  $\hat{\rho}_{LR}$  permettent de mieux prédire son comportement que son approximation  $1 - r/K$  ou que le SINR loss du filtre LR non adaptatif. En effet, surtout à faible vitesse, les courbes de  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  et encore plus  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  suivent celle du SINR loss du filtre adaptatif LR  $\rho_{LR}$ .

En conclusion, bien que les résultats de prédiction soient encourageants, surtout en fonction de la vitesse de la cible, les limites obtenues par la RMT du SINR loss du filtre adaptatif LR ne permettent pas de prédire totalement ses performances.

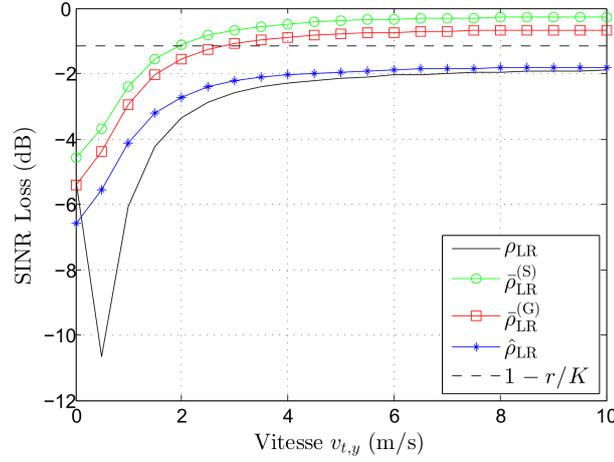


FIGURE 5.12 – Visualisation des SINR loss en fonction de la vitesse réelle de la cible avec  $CNR/N_c = 28\text{dB}$ ,  $N = M = 4$  et  $K = 30$ .

### 5.2.3 Performances des nouveaux filtres LR adaptatifs

On s'intéresse ensuite aux performances de filtrage des nouveaux filtres LR adaptatifs présentés et construits lors des chapitres précédents en comparant leur SINR loss  $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$  et  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$  à ceux des filtres LR adaptatif et non adaptatif, respectivement  $\hat{\rho}_{LR}$  et  $\rho_{LR}$ . Le but est donc d'avoir un SINR loss le plus proche possible de 1 (0 en dB). On visualise donc les SINR loss en fonction de  $K$  pour différentes valeurs de  $m$  et  $v_{t,y} = 5\text{m/s}$  en Fig.5.13(a). On y visualise  $\rho_{LR}$  (noir),  $\hat{\rho}_{LR}$  (étoiles bleues) et sa limite dans le régime en grandes dimensions  $\tilde{\rho}_{LR}^{(S)}$  (carrés bleus),  $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$  (carrés rouges),  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$  (ronds verts) et sa limite dans le régime en grandes dimensions  $\tilde{\rho}_{LR}$  (carrés verts). Les observations sont alors tout à fait différentes. En effet, bien que la courbe de  $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$  (modèle « G-MUSIC ») est bien inférieure à celle du SINR loss du filtre adaptatif LR classique, celle de  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$  est quand à elle supérieure pour certaines valeurs de  $K$  (par exemple  $K \in \llbracket 20; 110 \rrbracket$  pour la Fig.5.13(a)). Le nouveau filtre adaptatif avec le modèle *spiked* présente donc moins de pertes que le filtre adaptatif LR classique dans cette plage de valeurs. Il faut quand même noter que les paramètres de simulation restent très particuliers car amenant des performances supérieures au filtre optimal en LR (ligne noire). C'est pourquoi on visualise en Fig.5.13(b) les mêmes courbes avec une taille de données plus grande n'entraînant pas ce phénomène. On observe alors la même chose pour  $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$  (modèle « G-MUSIC »). De plus, bien que le gain apporté soit moins important, la courbe de  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$  est toujours supérieure à celle de  $\hat{\rho}_{LR}$ . Le nouveau filtre adaptatif avec le modèle *spiked* présente donc moins de pertes que le filtre adaptatif LR classique à  $K$  fixé. En d'autres mots, le nouveau filtre adaptatif LR avec le modèle *spiked* a une perte en RSB moins importante que le filtre adaptatif LR classique sur une certaine plage de valeurs du nombre de données secondaires.

Puis on visualise les mêmes SINR loss en fonction de la vitesse réelle de la cible et  $K = 30 \simeq 2m$  en Fig.5.14. De même qu'avec les courbes précédentes on observe que la courbe de  $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$  (modèle « G-MUSIC ») est bien inférieure à celle du SINR loss du filtre adaptatif LR classique. Le nouveau filtre adaptatif LR avec le modèle « G-MUSIC » donne donc de moins bonnes performances que le filtre adaptatif LR classique. Cependant, pour une vitesse supérieure à 2,5 m/s, le nouveau filtre avec le modèle *spiked* (courbe verte) a des performances supérieures à celles du filtre adaptatif LR classique. En d'autres termes, à vitesse suffisante, les pertes engendrées par le filtrage avec le nouveau filtre sont plus faibles.

Par conséquent, le nouveau filtre adaptatif LR avec le modèle *spiked* a de meilleures performances que le filtre adaptatif LR classique contrairement au nouveau filtre adaptatif LR avec le modèle « G-MUSIC ». Cependant, il faut garder en tête que les puissances du fouillis en jeu ne sont pas réalistes

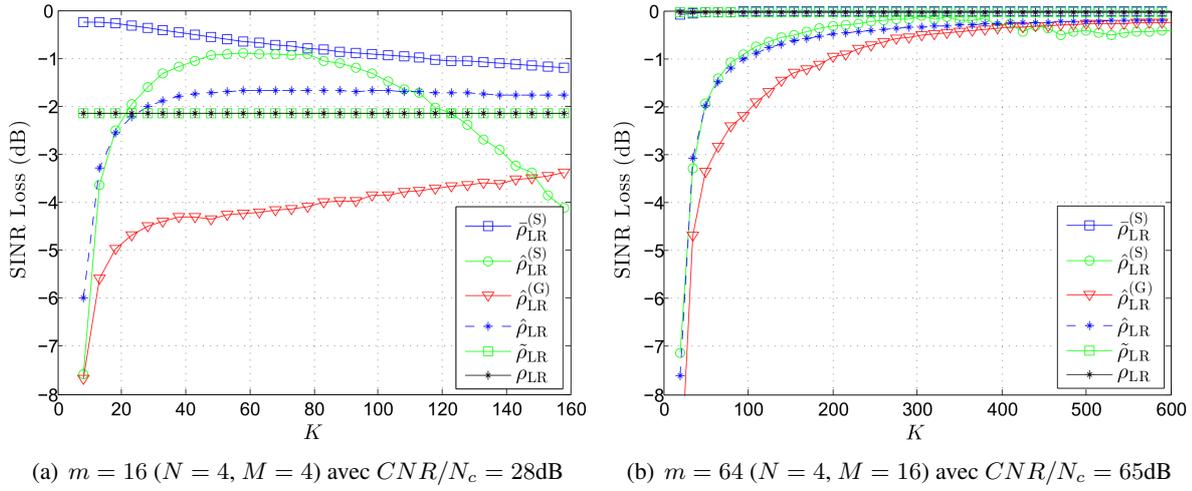


FIGURE 5.13 – Visualisation des SINR loss en fonction de  $K$  pour différentes valeurs de  $m$  et  $v_{t,y} = 5\text{m/s}$ .

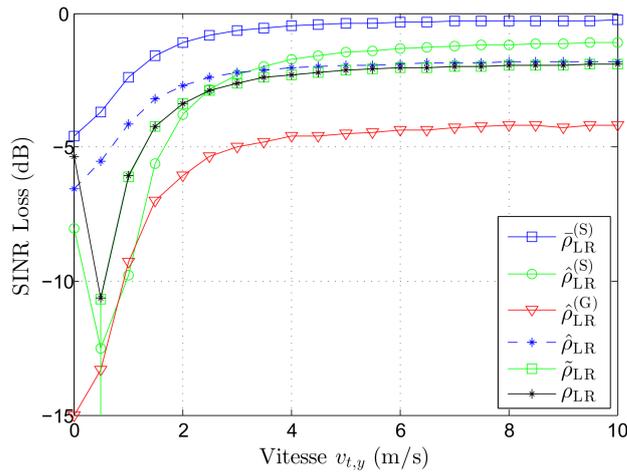


FIGURE 5.14 – Visualisation des SINR loss en fonction de la vitesse réelle de la cible avec  $CNR/N_c = 28\text{dB}$ ,  $N = M = 4$  et  $K = 30 \simeq 2m$ .

et que les conditions de séparabilité associées au modèle *spiked* sont différentes en fonction de  $m$ . Les modèles « G-MUSIC » et *spiked* ne permettent donc pas de décrire les données STAP.

### 5.2.4 Performances des détecteurs adaptatifs LR

Étant donné les résultats mitigés en prédiction de performance de filtrage avec les données STAP, la partie prédiction de performances de détection ne pourra pas donner de bons résultats. De plus, les améliorations en performances de filtrage avec les nouveaux filtres ne se font sentir que pour des jeux de paramètres peu réalistes, surtout en termes de puissance de fouillis. C'est pourquoi nous ne donnons pas ici de courbes sur les performances des détecteurs adaptatifs LR avec les données STAP.

## 5.3 Simulations de traitement MIMO-STAP *sparse*

### 5.3.1 Paramètres de simulation

Pour le traitement MIMO-STAP *sparse* dans ce chapitre, le radar sera composée d'une antenne linéaire uniforme composée de  $N$  capteurs récepteurs séparés d'une distance  $D_r = f_s/2$ , où la longueur d'onde  $f_s$  est fixée à 0,6667m. Les  $L$  capteurs émetteurs sont séparés d'une distance  $D_e = ND_r$  pour obtenir un traitement MIMO *sparse*. La fréquence porteuse est  $f_0 = 450\text{MHz}$ , la fréquence de répétition  $f_r = 300\text{Hz}$ , la vitesse du porteur  $v_{p,x} = 50\text{m/s}$  ( $v_{p,y} = v_{p,z} = 0\text{m/s}$ ), l'altitude de l'avion  $h_p = 2,6\text{km}$  et la bande passante des signaux  $B = 4\text{MHz}$ . On fixera le nombre de *clutter patch* à 1000. Enfin, l'élévation et l'azimut de la cible sont fixés à  $0^\circ$ . La cible ne se déplace que suivant l'axe  $\mathbf{u}_y$ . Ainsi seule sa vitesse  $v_{t,y}$  changera.

De même qu'en STAP, on vérifie les conditions de séparabilité pour plusieurs tailles des données :

- pour  $m = 64$  avec  $L = N = M = 4$  ( $r = 19$ );
- pour  $m = 1600$  avec  $L = N = 5$  et  $M = 64$  ( $r = 88$ ).

On visualise la condition de séparabilité en Fig.5.15 en fonction du rapport  $CNR/N_c$  en dB. On remarque alors que la condition change en fonction de chaque paramètre ( $N$  et  $M$  et donc  $m$ ) mais moins qu'en STAP, ce qui reste quand même anormal. On remarque aussi que les rapports de puissance en jeu pour que la condition de séparabilité soit validée ( $\alpha_c \gamma_r - \sqrt{c_m} > 0$ ) sont de moins en moins réalistes plus  $m$  augmente bien que plus réalistes qu'avec l'application STAP :

- pour  $m = 64$  avec  $L = N = M = 4$ ,  $(CNR/N_c)_{\text{dB}} \in [-18; -6]$  dB impliquant  $CNR_{\text{dB}} \in [12; 24]$  dB;
- pour  $m = 1600$  avec  $L = N = 5$  et  $M = 64$ ,  $(CNR/N_c)_{\text{dB}} \in [-8; 10]$  dB impliquant  $CNR_{\text{dB}} \in [22; 40]$  dB.

Il semble donc a priori que, bien que les modèles *spiked* et « G-MUSIC » ne soient pas totalement adaptés au MIMO-STAP *sparse*, il le soient plus que pour le STAP. C'est pourquoi nous vérifierons cela au travers de simulations sur les filtres adaptatifs LR.

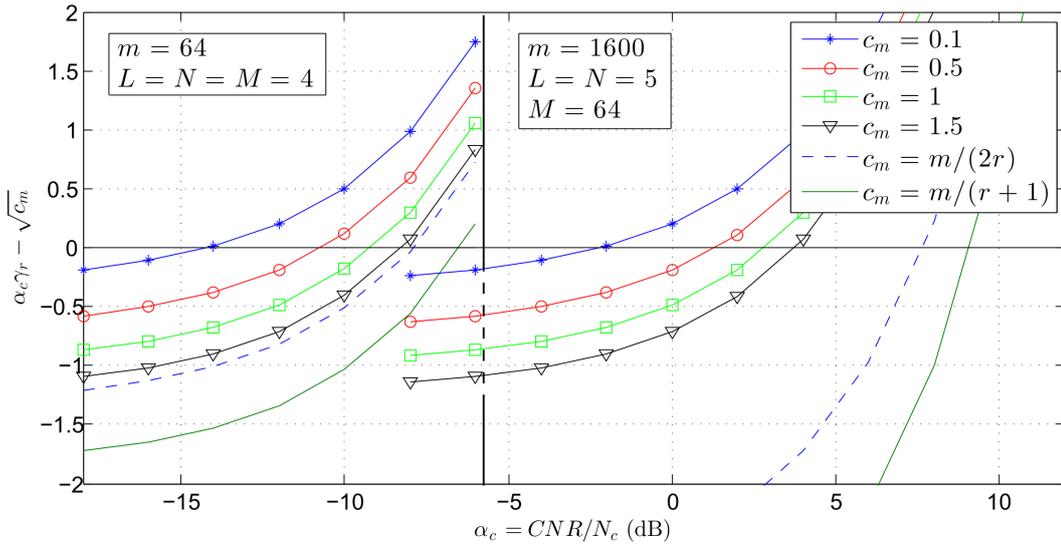


FIGURE 5.15 – Condition de séparabilité pour différentes tailles des données  $m$ .

### 5.3.2 Performances du filtre LR adaptatif classique

De même, on s'intéresse tout d'abord aux performances de filtrage du filtre LR adaptatif classique par son SINR loss  $\hat{\rho}_{LR}$  et la prédiction de son comportement.

On visualise donc en Fig.5.16(a) le SINR loss du filtre LR adaptatif classique  $\hat{\rho}_{LR}$  (étoiles bleues),  $\rho_{LR}$  (noir), ses limites dans le régime en grandes dimensions  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  (carrés rouges) et  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  (ronds verts) et son approximation  $1 - r/K$  (pointillés bleus) en fonction de  $K$  pour  $m = 256$  ( $N = 4$ ,  $L = 4$ ,  $M = 16$ ,  $r = 31$ ) et  $v_{t,y} = 1$  m/s. On observe alors que les SINR loss dans le régime en grandes dimensions  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  et  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  ont un comportement plus proche du comportement de  $\hat{\rho}_{LR}$ . Les courbes de  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  et plus particulièrement celle de  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  sont plus proches de celle de  $\hat{\rho}_{LR}$  que ne le sont les autres ( $\rho_{LR}$  et l'approximation  $1 - r/K$  de  $\hat{\rho}_{LR}$ ).

Puis, on visualise les mêmes courbes en fonction de la vitesse pour  $K = 2r$  en Fig.5.16(b). Dans ce cas là, on remarque que, bien que les puissances en jeu ( $CNR$ ) soient très élevées, les courbes de  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  et  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  suivent parfaitement le comportement de celle de  $\hat{\rho}_{LR}$  contrairement aux autres courbes, à un décalage près dû au fait que nous ne sommes pas en régime asymptotique vis-à-vis de  $m$  et  $K$ . On observe aussi que la courbe de  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  est bien plus proche de celle de  $\hat{\rho}_{LR}$  que celle de  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$ . La RMT, particulièrement avec le modèle « G-MUSIC », permet donc d'obtenir un SINR loss asymptotique prédisant le comportement du filtrage adaptatif LR classique, donc la valeur de la vitesse en dessous de laquelle on observe un décrochement de performances (ici 2,5 m/s). On observe aussi que, proche du fouillis (vitesse nulle),  $\hat{\rho}_{LR}$  remonte alors que ça ne devrait pas être le cas. À cet endroit, il devrait se comporter comme  $\rho_{LR}$ . Ceci est dû au fait que  $\rho_{LR}$  étant fonction du projecteur théorique, il filtre parfaitement le bruit LR (le fouillis) même, bien sûr, lorsqu'on est près du bruit LR. Cependant, pour  $\hat{\rho}_{LR}$  avec ici très peu de données secondaires ( $2r$ ), le projecteur n'est pas bien estimé et ne filtre donc pas bien le fouillis et les potentielles cibles proches de celui-ci. De ce fait, les potentielles cibles sont moins filtrées et ses performances de filtrage sont donc meilleures que celles du filtre théorique LR (bénéficiant de la parfaite connaissance de la matrice de covariances du projecteur sur le sous-espace orthogonal au sous-espace fouillis). On remarque alors que  $\bar{\rho}_{LR}^{(G)}$  permet de prédire parfaitement ce comportement.

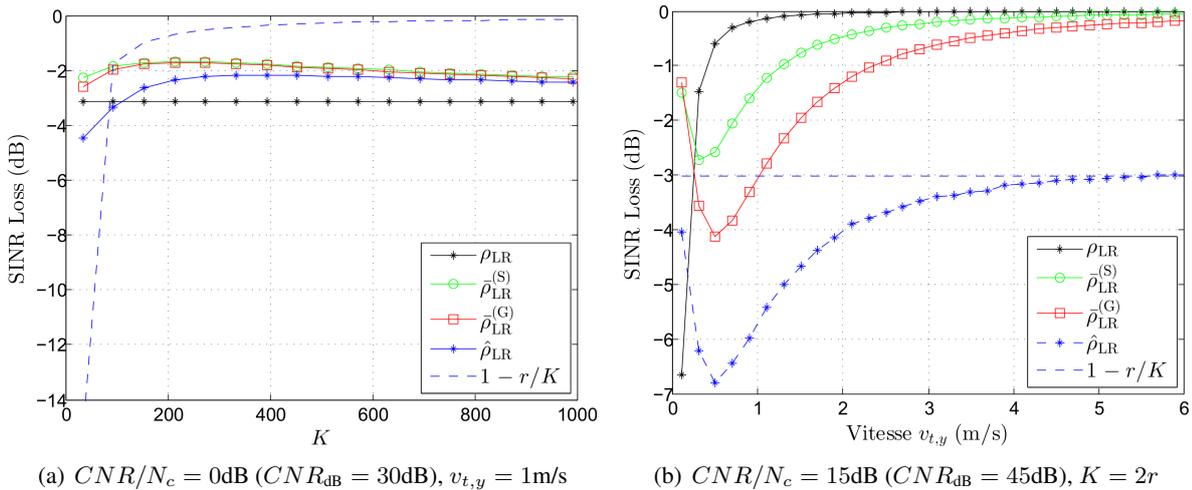


FIGURE 5.16 – Visualisation des SINR loss en fonction de : (a)  $K$  pour  $CNR/N_c = 0$  dB ( $CNR_{dB} = 30$  dB) et  $v_{t,y} = 1$  m/s, (b) la vitesse de la cible pour  $CNR/N_c = 15$  dB ( $CNR_{dB} = 45$  dB) et  $K = 2r$ .

### 5.3.3 Performances des nouveaux filtres LR adaptatifs

On s'intéresse ensuite aux performances de filtrage des nouveaux filtres LR adaptatifs présentés et construits lors des chapitres précédents en comparant leur SINR loss à celui du filtre LR adaptatif et celui du filtre LR non adaptatif ainsi que leurs SINR loss asymptotiques. On rappelle que le but est d'obtenir un SINR loss le plus proche de 1 (0 en dB).

On visualise donc en Fig.5.17(a) les SINR loss  $\rho_{LR}$  (noir),  $\hat{\rho}_{LR}$  (étoiles bleues) et sa limite dans le régime en grandes dimensions  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  (carrés bleus),  $\hat{\rho}_{LR}^{(G)}$  (carrés rouges),  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$  (ronds verts) et sa limite dans le régime en grandes dimensions  $\tilde{\rho}_{LR}$  (carrés verts), SINR loss du filtre non adaptatif LR, des filtres adaptatifs LR classique et nouveaux avec les modèles « G-MUSIC » et *spiked* et de leurs limites en grandes dimensions avec le modèle *spiked*, en fonction de  $K$  pour  $m = 256$  ( $N = 4, L = 4, M = 16, r = 31$ ) et  $v_{t,y} = 1\text{m/s}$ . On observe alors que pour  $K < 100$ , les deux nouveaux filtres permettent d'obtenir un SINR loss au dessus de  $\hat{\rho}_{LR}$ . Ils permettent donc d'avoir moins de pertes de filtrage. Par exemple, pour une perte d'environ 5dB (SINR loss égal à -5dB), les nouveaux filtres adaptatifs ne demandent que  $K \simeq 50$  données secondaires au lieu de  $K \simeq 70$  pour le filtre adaptatif LR classique. Pour  $K > 100$ , les performances des nouveaux filtres sont un peu en dessous des performances du filtre classique. Puis, on visualise les mêmes SINR loss en fonction de la vitesse de la cible et  $K = 2r$  en Fig.5.17(b). On constate alors que les nouveaux filtres adaptatifs LR ont de meilleures performances que le filtre adaptatif LR classique, surtout à de faibles vitesses autour de 1m/s. En effet, c'est autour de cette vitesse qu'on observe que le SINR loss associé aux nouveaux filtres est vraiment supérieur à celui du filtre adaptatif classique. On remarque aussi (sur les deux figures) que le nouveau filtre avec le modèle « G-MUSIC » (en rouge) donne de meilleures performances que le nouveau filtre avec le modèle *spiked* (vert). Enfin, lorsque l'on s'approche de la « vitesse » du fouillis, les SINR loss des nouveaux filtres ne tendent pas à remonter comme le fait  $\hat{\rho}_{LR}$ , ce qui tend à montrer que les nouveaux filtres réjectent le fouillis beaucoup plus précisément.

On peut aussi s'attarder sur les performances asymptotiques du filtre LR adaptatif classique ( $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$ ) et du nouveau filtre avec le modèle *spiked* ( $\tilde{\rho}_{LR}$ ). On observe alors sur les deux figures que le nouveau filtre avec le modèle *spiked* atteint asymptotiquement les performances du filtre LR non adaptatif ( $\rho_{LR}$ ) et donc meilleures asymptotiquement que celles du filtre LR adaptatif classique. Il est cependant possible de douter de la pertinence du SINR loss asymptotique  $\tilde{\rho}_{LR}$  étant donné que le modèle *spiked* ne correspond pas tout à fait au modèle des données MIMO-STAP. Ce point sera d'ailleurs abordé plus en détails par la suite.

Par conséquent, les modèles « G-MUSIC » et *spiked* sont plus adaptés aux données MIMO-STAP *sparse* qu'aux données STAP et donnent donc des résultats très encourageants que ce soit en prédiction de performance ou en amélioration de performance de filtrage.

### 5.3.4 Performances du détecteur LR-ANMF

Ainsi, aux vues des résultats encourageants de filtrage en MIMO-STAP *sparse*, nous allons visualiser les relations  $P_d$ - $P_{fa}$  en Fig.5.18 du détecteur LR-ANMF (étoiles bleues) ainsi que celles du détecteur LR-NMF (noir) et des limites dans le régime en grandes dimensions du détecteur LR-ANMF (carrés rouges et ronds verts). L'intérêt est de déterminer si ces limites dans le régime en grandes dimensions permettent de mieux caractériser les performances réelles du détecteur LR-ANMF et si possible de les prédire. Les probabilités de fausse alarme et de détection sont déterminées empiriquement, ne pouvant pas calculer la loi approximée des limites du détecteur LR-ANMF par ajustement polynômial comme dans le chapitre 3, faute de temps et de mémoire. Nous prendrons ici le meilleur jeu de paramètres possible déduit à partir de la section précédente :  $m = 256$  ( $N = 4, L = 4, M = 16, r = 31$ ),  $K = 2r$ ,  $v_{t,y} = 2\text{m/s}$ ,  $CNR/N_c = 15\text{dB}$  ( $CNR_{dB} = 45\text{dB}$ ) et  $SNR_{dB} = 18\text{dB}$ . On observe ainsi qu'en termes de relation

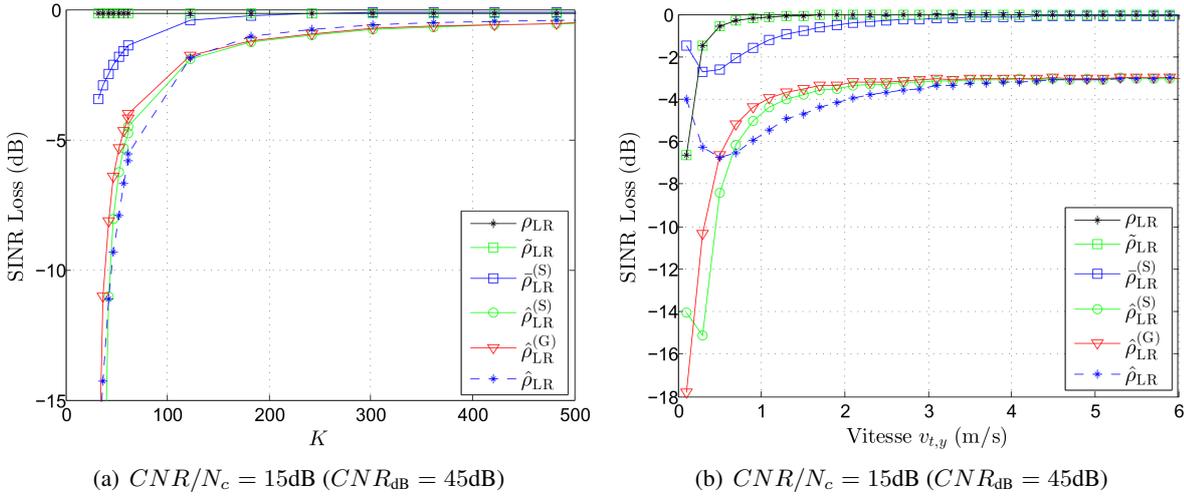


FIGURE 5.17 – Visualisation des SINR loss en fonction de : (a)  $K$  pour  $CNR/N_c = 15\text{dB}$  ( $CNR_{\text{dB}} = 45\text{dB}$ ) et  $v_{t,y} = 1\text{m/s}$ , (b) la vitesse de la cible pour  $CNR/N_c = 15\text{dB}$  ( $CNR_{\text{dB}} = 45\text{dB}$ ) et  $K = 2r$ .

$P_d$ - $P_{fa}$  (courbe COR), les limites du détecteur LR-ANMF avec les modèles *spiked* et « G-MUSIC » sont plus proches de la relation  $P_d$ - $P_{fa}$  du détecteur LR-ANMF que ne l'est celle du détecteur LR-NMF, bien qu'aucune des deux ne la suive parfaitement. Cependant, à faible probabilité de fausse alarme et à forte probabilité de détection, la limite en grandes dimensions avec le modèle « G-MUSIC » est celle qui s'en rapproche le plus. Le modèle « G-MUSIC » permet donc d'obtenir une loi  $P_d$ - $P_{fa}$  asymptotique plus proche de celle du détecteur LR-ANMF que la loi  $P_d$ - $P_{fa}$  asymptotique obtenue avec le modèle *spiked*. Les limites du détecteur LR-ANMF dans le régime en grandes dimensions permettent donc de mieux approximer le comportement du détecteur LR-ANMF que ne le peut le détecteur LR-NMF. Un travail reste tout de même à faire sur le modèle de matrice de covariance à utiliser (« G-MUSIC », *spiked* ou autre), travail faisant partie des perspectives de cette thèse.

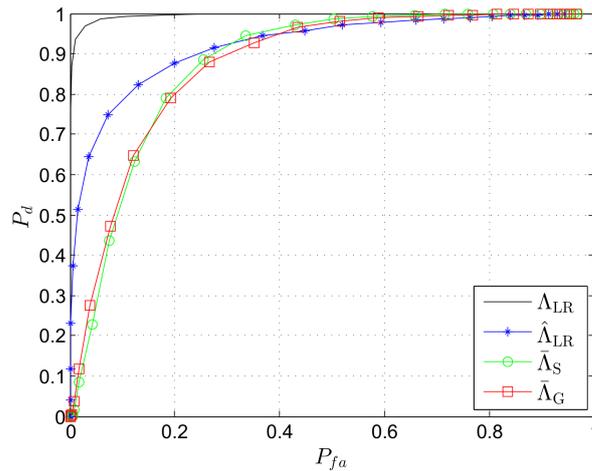


FIGURE 5.18 – Relations  $P_d$ - $P_{fa}$  (courbe COR) de détecteur LR-NMF, du détecteur LR-ANMF et de ses limites en grandes dimensions  $\bar{\Lambda}_G$  et  $\bar{\Lambda}_S$  pour  $m = 256$  ( $N = 4$ ,  $L = 4$ ,  $M = 16$ ),  $K = 2r$ ,  $CNR/N_c = 15\text{dB}$ ,  $SNR_{\text{dB}} = 18\text{dB}$  et  $v_{t,y} = 2\text{m/s}$ .

### 5.3.5 Performances des nouveaux détecteurs LR-AG et LR-AS

Puis, on visualise les relations  $P_d$ - $P_{fa}$  en Fig.5.19 des nouveaux détecteurs adaptatifs LR-AG (carrés rouges) et LR-AS (ronds verts) et on les compare à celles des détecteurs LR-ANMF (étoiles bleues) et LR-NMF (noir). Nous prenons ici le même jeu de paramètres que dans la sous-section précédente :  $m = 256$  ( $N = 4, L = 4, M = 16$ ),  $K = 2r$ ,  $v_{t,y} = 2\text{m/s}$ ,  $CNR/N_c = 15\text{dB}$  ( $CNR_{\text{dB}} = 45\text{dB}$ ) et  $SNR_{\text{dB}} = 18\text{dB}$ . On observe ainsi qu'en termes de relation  $P_d$ - $P_{fa}$  (courbe COR), les nouveaux détecteurs ont des performances plus proches de celles du détecteur LR-NMF que celles du détecteur LR-ANMF, et meilleures. Ainsi, à probabilité de fausse alarme fixée, la probabilité de détection des nouveaux détecteurs est supérieure. De plus le nouveau détecteur LR-AG obtient de meilleures performances de détection que le nouveau détecteur LR-AS.

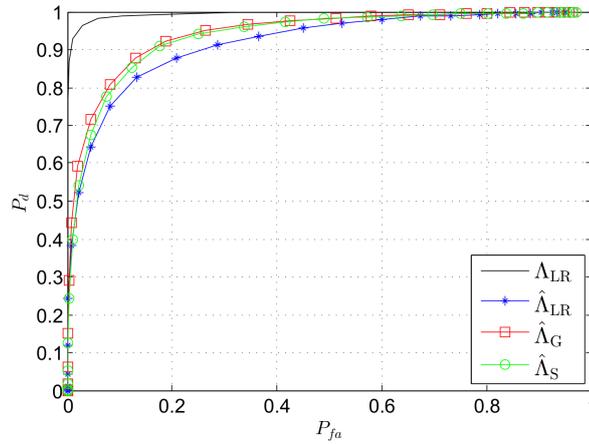


FIGURE 5.19 – Relations  $P_d$ - $P_{fa}$  (courbe COR) de détecteur LR-NMF et des détecteurs adaptatifs LR-ANMF, LR-AS et LR-AG pour  $m = 256$  ( $N = 4, L = 4, M = 16$ ),  $K = 2r$ ,  $CNR/N_c = 15\text{dB}$ ,  $SNR_{\text{dB}} = 18\text{dB}$  et  $v_{t,y} = 2\text{m/s}$ .

Par conséquent, bien que les modèles « G-MUSIC » et *spiked* ne soient pas tout à fait adaptés aux données MIMO-STAP *sparse*, la RMT (et plus particulièrement le modèle « G-MUSIC ») et les résultats obtenus en utilisant ses outils sont très intéressants pour ce traitement radar.

## 5.4 Discussion sur les résultats

### 5.4.1 Comparaisons des modèles « G-MUSIC » et *spiked* au modèle des données STAP et MIMO-STAP *sparse*

On a donc remarqué, de par les conditions de séparabilité fonction de  $m$  à rapport  $c$  constant et de par des résultats mitigés en STAP, que les modèles « G-MUSIC » et *spiked* ne semblent pas adaptés aux données STAP bien que plus adaptés au MIMO-STAP *sparse*. En effet, en traçant la densité de probabilité empirique des valeurs propres de la SCM en Fig.5.20 avec des données MIMO-STAP *sparse*, on observe alors une DDP similaire à celle obtenue avec l'application brouillage, à savoir une loi Marčenko-Pastur autour de 1 (pour le bruit blanc) et des lois gaussiennes sur les valeurs propres du fouillis. Cette DDP ne correspond donc pas à celle présentée avec le modèle « G-MUSIC ». On s'intéresse donc ensuite aux limites  $\tau_i$  des valeurs propres empiriques du fouillis données selon le modèle *spiked* et on s'aperçoit qu'elles ne coïncident pas du tout avec les moyennes des gaussiennes comme c'était le cas avec l'application brouillage. Ainsi, cette DDP ne correspond donc pas à celle présentée avec le modèle *spiked*,

bien que plus proche de ce dernier que du modèle « G-MUSIC ». Ces deux modèles ne correspondent par conséquent pas aux données MIMO-STAP *sparse* et de manière similaire aux données STAP.

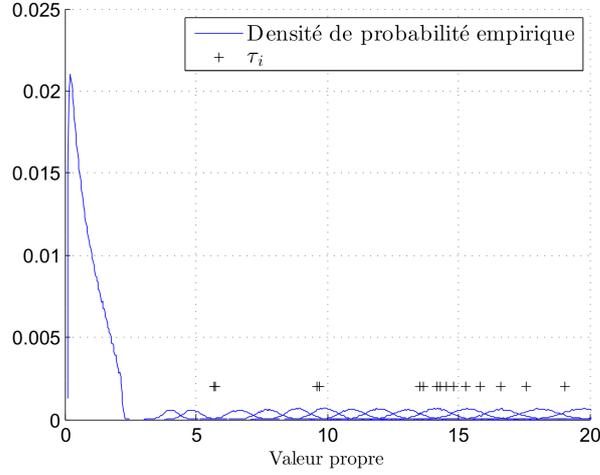


FIGURE 5.20 – Zoom de la densité de probabilité empirique/expérimentale des valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}$ , SCM des données MIMO-STAP *sparse* en l’absence de cible avec  $m = 64$  ( $N = M = L = 4$ ),  $K = 2r$  et  $CNR/N_c = -5\text{dB}$ . A cause du zoom, certaines valeurs propres (les valeurs les plus importantes) sont en dehors du cadre de la figure.

### 5.4.2 Un problème de rang

Cette différence de modèle et de DDP semble provenir du rang  $r$ . En effet, celui-ci peut se calculer d’après la règle de Brennan :

$$r \simeq \lfloor N + \beta(M - 1) + \gamma(L - 1) \rfloor \quad (5.43)$$

Ainsi, notant que  $m = NML$ , il est aisé de déduire que  $r \rightarrow \infty$  quand  $m \rightarrow \infty$  et n’est pas fixe pour tout  $m$  comme avec le modèle *spiked* présenté dans ce manuscrit. De plus, la multiplicité des valeurs propres associées au fouillis est de 1, impliquant ainsi que le nombre de valeurs propres distinctes augmente lorsque  $m \rightarrow \infty$ , ce qui semble ne pas être en accord avec le modèle « G-MUSIC ». Le comportement des valeurs propres de la SCM sera alors totalement différent de ceux associés aux modèles « G-MUSIC » et *spiked* et les quantités aléatoires fonction de la SCM et des projecteurs estimés se comporteront aussi différemment.

Nous avons cependant observé que les données MIMO-STAP *sparse* permettent d’obtenir de bons résultats allant dans le sens de ceux obtenus dans les chapitres précédents avec l’application brouillage. Ceci provient aussi du rang. En effet, de part les limitations physiques dimensionnelles du porteur, on peut supposer que le nombre de capteurs émetteurs  $L$  et récepteurs  $N$  sont fixes. Ainsi, seul le nombre d’impulsions peut fortement augmenter. On s’intéresse alors au rapport  $r/m$  en considérant  $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^*$ , décrivant la proportion de perturbations (fouillis) par rapport à la taille totale des données :

$$\frac{r}{m} = \frac{N + \beta(M - 1) + \gamma(L - 1)}{NML} = \frac{1}{ML} + \beta \left( \frac{1}{NL} - \frac{1}{NML} \right) + \gamma \left( \frac{1}{NM} - \frac{1}{NML} \right) \quad (5.44)$$

Par conséquent, quand  $M \rightarrow \infty$ , on a :

$$\frac{r}{m} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{\beta}{NL} \quad (5.45)$$

Ce rapport peut être visualisé en Fig.5.21. On voit donc bien que le MIMO-STAP *sparse* permet de diminuer fortement ce rapport et sa limite par rapport au traitement STAP. La limite est alors plus proche de 0 qui est la limite du rapport  $r/m$  des modèles « G-MUSIC » et *spiked* (modèles à rang fixe) quand  $m \rightarrow \infty$ . Ceci explique donc les meilleurs résultats en traitement MIMO-STAP *sparse*.

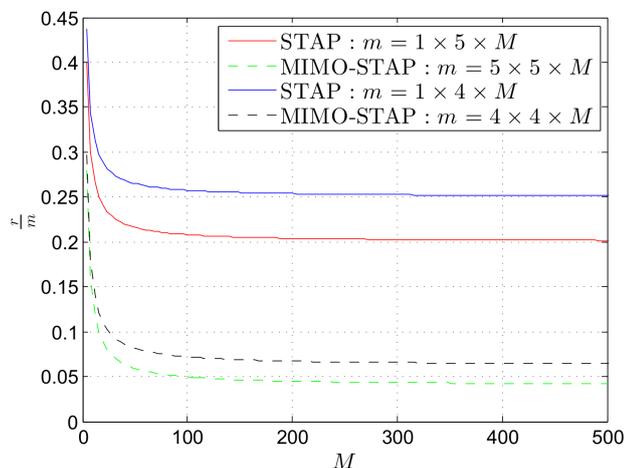


FIGURE 5.21 – Rapport  $r/m$  quand  $M \rightarrow \infty$  à  $N$  et  $L$  fixés ( $m = MNL$ ).

## 5.5 Synthèse

Dans ce chapitre, on a donc mis en pratique les résultats précédemment obtenus sur les applications STAP et MIMO-STAP *sparse*. Nous avons alors pu observer de bons résultats dans tous les domaines en traitement MIMO-STAP *sparse* grâce à la RMT, particulièrement avec le modèle « G-MUSIC », et malgré la différence notable de modèle de matrice de covariance entre les modèles « G-MUSIC » et *spiked* et celui des données MIMO-STAP *sparse*. Nous avons aussi observé quelques bons résultats en traitement STAP surtout lors de la prédiction de performance du filtre adaptatif LR classique en fonction des paramètres de la cible et avec le modèle « G-MUSIC », mais beaucoup plus minimes. Ces bons résultats se sont généralement traduits par la possibilité de prédire le comportement du filtre adaptatif LR et du détecteur LR-ANMF en termes de SINR loss et de probabilité de fausse alarme et de détection en utilisant la RMT et le modèle « G-MUSIC » en particulier. Les nouveaux filtres et détecteurs adaptatifs LR ont aussi montré de meilleures performances : moins de données secondaires nécessaires pour une perte en RSB donnée, moins de perte en RSB à faible vitesse de la cible et une probabilité de détection plus importante à probabilité de fausse alarme fixée. Puis étonnamment, bien que le modèle « G-MUSIC » ne semble pas correspondre aux données MIMO-STAP et, qu'en termes de DDP des valeurs propres, le modèle *spiked* semble en être le plus proche, le modèle « G-MUSIC » s'est révélé être celui permettant les meilleures prédictions de performance du filtre LR adaptatif et du détecteur LR-ANMF ainsi que les meilleures performances pour les nouveaux filtres et détecteurs. Cependant, nous avons noté que le rang du fouillis n'est pas fixe pour toute taille de donnée  $m$  mais augmente quand  $m$  augmente, différence de modèle qui pourrait expliquer le peu de résultats concluant en STAP. Il serait alors pertinent de considérer un modèle de matrice de covariance en RMT prenant en compte un rang grandissant avec  $m$ .



# Conclusions et perspectives

## 1 Conclusions

Partant du constat que dans plus en plus d'applications, la taille des données à traiter augmente, il semble pertinent d'utiliser des outils appropriés tels que la théorie des matrices aléatoires dans le régime en grandes dimensions. Plus particulièrement, dans les applications de traitement d'antenne et radar spécifiques STAP et MIMO-STAP, nous nous sommes intéressés au traitement d'un signal d'intérêt corrompu par un bruit additif composé d'une partie dite rang faible et d'un bruit blanc gaussien. Ainsi l'objet de cette thèse est d'étudier dans le régime en grandes dimensions la détection et le filtrage dit rang faible (fonction de projecteurs) pour le traitement d'antenne en utilisant la théorie des matrices aléatoires.

Pour cela, après avoir rappelé l'état de l'art en filtrage, détection et théorie des matrices aléatoires ainsi que les deux modèles de matrices de covariance associés, les modèles « G-MUSIC » et *spiked*, la démarche ci-dessous a été proposée. Tout d'abord, nous avons étudié dans le chapitre 2 le comportement asymptotique des filtres adaptatifs. Après avoir montré que le filtre adaptatif LR est asymptotiquement biaisé, dans le régime en grandes dimensions, son comportement asymptotique en termes de SINR loss a été obtenu avec les modèles de matrice de covariance « G-MUSIC » et *spiked*. Puis, dans le chapitre 3, nous avons montré que le détecteur LR-ANMF était aussi biaisé dans le régime en grandes dimensions. Constatant cela et sachant que le calcul de la densité du détecteur n'avait jamais été vraiment abordé, nous avons proposé d'approximer sa loi par la loi de sa limite dans le régime en grandes dimensions. À partir de cette dernière, nous avons pu déterminer les relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ -seuil approchées du détecteur LR-ANMF. Ensuite, nous avons cherché dans le chapitre 4 à construire de nouveaux filtres et détecteurs LR adaptatifs entraînant des signaux filtrés non biaisés dans le régime en grandes dimensions. Ces nouveaux outils ont montré de meilleures performances que le filtre adaptatif LR classique et le détecteur LR-ANMF. Ainsi, grâce aux estimateurs G-MUSIC, et Spike MUSIC, nous avons pu construire de nouveaux filtres et de nouveaux détecteurs LR-AS et LR-AG (suivant le modèle de matrice de covariance choisi). Nous avons ensuite calculé leurs performances en termes de SINR loss et de relations  $P_{fa}$ -seuil et  $P_d$ -seuil dans ce même chapitre. Enfin, ayant validé les résultats sur une application de brouillage simple et maîtrisée, nous les avons appliqués aux traitements radar STAP et MIMO-STAP *sparse* dans le chapitre 5. Les points à retenir sont donc les suivants.

### Choix du modèle de matrice de covariance

Le choix du modèle de matrice de covariance fournit par la RMT et son adéquation avec l'application est assez importante, surtout lorsque l'on cherche à prédire le comportement de quantités aléatoires par leur limite asymptotique, bien qu'une erreur de modèle puisse peu influencer suivant l'application choisie. En effet, nous avons pu observer par exemple que pour une application rang faible et fixe pour toute taille des données comme l'application brouillage ou pour l'application MIMO-STAP, le modèle « G-MUSIC » donne des prédictions encore meilleures que celles obtenues avec modèle *spiked*, bien que pas forcément adapté à ces données. Cependant, avec des données STAP, ces deux modèles non adaptés au STAP donnent des résultats mitigés voire moins bon que ceux obtenus par la littérature. L'erreur de modèle a donc pour cette application un plus grand impact. On a aussi constaté que ce choix est moins important

lorsque l'on définit de nouveaux estimateurs à partir de la théorie des matrices aléatoires (RMT), comme les nouveaux filtres et détecteurs adaptatifs LR. Dans ce cas, on a observé que les filtres et détecteurs, quel que soit le modèle, se comportent de manière presque similaire. Enfin, on finira par remarquer que le modèle *spiked* amène généralement à des calculs plus simples que ceux déroulés avec le modèle « G-MUSIC », information pouvant aussi influencer sur le choix du modèle de matrice de covariance.

### **Prédiction des comportements du filtre adaptatif LR et du détecteur LR-ANMF**

Les outils de RMT ont permis de déterminer les quantités limites déterministes du SINR loss du filtre adaptatif LR et du détecteur LR-ANMF. Ces quantités caractérisent de façon beaucoup plus précise leur comportement non asymptotique que les quantités limites dans le régime classique. Ainsi, on a pu prédire/approximer le comportement de la perte en RSB du filtre adaptatif LR ou la perte engendrée par l'utilisation de ce filtre en fonction des paramètres du système (taille des données, nombre de données secondaires, paramètres du signal d'intérêt, etc.). On a alors pu caractériser théoriquement les paramètres pour lesquels un filtrage adaptatif LR classique perd beaucoup de son efficacité par rapport au filtre optimal. De plus, par le même raisonnement de base, nous avons pu déterminer des performances théoriques asymptotiques du détecteur LR-ANMF. Ces performances asymptotiques, bien que très longues à calculer, se sont révélées proches de celles du détecteur LR-ANMF à distance finie, *i.e.* même à taille de données et à nombre de données secondaires finis.

### **Nouveaux filtres adaptatifs LR**

Les nouveaux filtres adaptatifs LR, pour lesquels les signaux filtrés sont des estimateurs consistants du signal filtré par le filtre non adaptatif LR, permettent d'obtenir de meilleures performances que le filtre adaptatif LR classique quand le signal d'intérêt est proche du bruit rang faible. Ainsi, ils permettent d'avoir une perte en RSB plus faible (donc une meilleure performance de filtrage) lorsque les paramètres de « localisation » (AoA, vitesse, etc.) du signal d'intérêt sont proches de ceux du bruit rang faible (brouilleurs, fouillis). Ils nécessitent aussi moins de données secondaires pour des performances équivalentes à celle du filtre adaptatif LR classique. De plus, le nouveau filtre adaptatifs LR avec le modèle *spiked* a de meilleures performances asymptotique dans le régime en grandes dimensions que le filtre adaptatif LR.

### **Nouveaux détecteurs adaptatifs LR**

De même, les nouveaux détecteurs adaptatifs LR, estimateurs consistants du détecteur LR-NMF, permettent d'obtenir de meilleures performances que le détecteur LR-ANMF quand le signal d'intérêt est proche du bruit rang faible. Ainsi, ils permettent de mieux détecter le signal dans cette condition. En d'autres mots, à performances (probabilité de fausse alarme et probabilité de détection) équivalentes à celles du détecteur LR-ANMF, les nouveaux détecteurs nécessitent moins de données secondaires, une puissance de la cible plus faible et/ou une cible plus proche du bruit rang faible.

### **Application STAP**

Lors de l'application des résultats théoriques au traitement STAP, nous avons pu noter quelques améliorations du même type que ceux précédemment décrits. Cependant, ces améliorations restent limitées. En effet, peu de jeux de paramètres permettent d'obtenir cette amélioration et il est nécessaire que la puissance du fouillis soit très forte. Ces limitations sont liées au modèle de matrice de covariance du traitement STAP, dont le rang grandit avec la taille des données contrairement aux modèles utilisés dans cette thèse.

**Application MIMO-STAP *sparse***

Avec le traitement MIMO-STAP *sparse*, les résultats théoriques apportent des améliorations en termes de prédiction de performance et en termes de performances elles-mêmes pour des jeux de paramètres plus réalistes, bien que le modèle de matrice de covariance soit aussi différent de ceux utilisés dans cette thèse. Ainsi, la RMT (particulièrement avec le modèle « G-MUSIC ») permet de prédire plus précisément les performances du filtre adaptatif LR et du détecteur LR-ANMF et d'améliorer les performances de filtrage et de détection grâce aux nouveaux filtres et détecteurs adaptatifs LR. Il est aussi à noter que les nouveaux filtre et détecteur liés au modèle « G-MUSIC » ont de meilleures performances que ceux liés au modèle *spiked*. À l'état d'avancement actuel des études, il est donc tout indiqué d'opter pour le modèle « G-MUSIC » que ce soit en prédiction de performance où pour les nouveaux filtres et détecteurs.

**Théorie des matrices aléatoires**

La RMT permet donc d'avoir un gain en performances avec les nouveaux estimateurs adaptatifs LR, dû au meilleur pouvoir de séparation des estimateurs rectifiés provenant de la RMT. Enfin, c'est aussi un très bon outil de prédiction/calcul des performances des quantités adaptatives.

**2 Perspectives**

Les perspectives évidentes à court terme sont bien évidemment de déterminer la convergence de la FQ *structurée rectifiée* et du SINR loss liés au nouveau filtre adaptatif LR avec le modèle « G-MUSIC ». Il serait aussi intéressant de déterminer la convergence des FQs *structurée*  $s_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp s_2$  et *structurée rectifiée*  $s_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,RMT}^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,RMT}^\perp s_2$  avec une matrice centrale  $\mathbf{R}$  plus générale que la matrice de covariance (ou une matrice de cette structure).

Puis, afin de pouvoir déterminer au moins une approximation des performances du détecteur LR-ANMF, une approximation de sa densité a été calculée par ajustement polynômial. De plus, cette méthode reste longue numériquement parlant. Pourrait-on alors trouver un moyen théorique ou numérique pour diminuer ce temps de calcul ? Une autre solution serait de déterminer la loi asymptotique dans le régime en grandes dimensions en utilisant le CLT (pour *Central Limit Theorem*) et les outils de RMT. À partir des CLTs déjà calculés pour les FQs simples [Vallet et al., 2012b, Hachem et al., 2013, Couillet and Hachem, 2013], on obtiendrait une loi gaussienne asymptotique mais complètement déterministe et plus rapide à calculer. Le même raisonnement pourrait être utilisé afin de calculer la loi asymptotique des nouveaux détecteurs et ainsi caractériser théoriquement et non plus empiriquement leurs performances.

Cependant, ces densités et les performances qui en sont déduites restent asymptotiques. On préférerait donc avoir leurs densités à distance finie, *i.e.* lorsque qu'aucun des paramètres du système ne tend vers l'infini. La distribution de la matrice contenant les vecteurs propres de la SCM est connue. Ainsi, en sachant intégrer cette connaissance dans le calcul de la distribution du détecteur LR-ANMF, il serait possible de déterminer sa distribution non asymptotique. Avec aussi la distribution des valeurs propres de la SCM, on pourrait aussi obtenir la distribution des nouveaux détecteurs adaptatifs LR.

Il est connu que la RMT permet d'obtenir soit des limites de quantités au comportement proche de ces dernières soit de nouveaux estimateurs aux meilleures performances. La RMT permet donc d'obtenir un gain d'estimation se traduisant par exemple en une EQM plus faible entre la quantité et sa limite ou entre le nouveau estimateur et la quantité qu'il estime. Il est par contre moins connu que ce gain d'estimation dépend fortement des vecteurs  $s_1$  et  $s_2$  lorsqu'il s'agit de la FQ simple du type  $s_1^H \mathbf{\Pi}_c s_1$ . Plus particulièrement, lorsque  $s_1$  et/ou  $s_2$  sont des vecteurs directionnels de paramètre  $\Theta$ , le gain d'estimation sera fonction de  $\Theta$ . Dans cette thèse, nous avons toujours déterminé empiriquement les valeurs de  $\Theta$  pour lesquels le gain d'estimation est important. Il serait donc très intéressant de pouvoir les déterminer

théoriquement en caractérisant théoriquement ce gain d'estimation en fonction de  $\Theta$  et des paramètres du système comme la taille des données ou le nombre de données secondaires par exemple.

Puis, une différence de modèle entre les données STAP et MIMO-STAP et les modèles classiques « G-MUSIC » et *spiked* de RMT a été mise en évidence, dû principalement au fait que le rang du fouillis (bruit de rang faible) est fonction de la taille des données et augmente donc quand la taille augmente et que la multiplicité des valeurs propres soit toujours égale à 1. Ceci implique que le nombre de valeurs propres distinctes augmente avec la taille des données. Un modèle récent de la RMT prend en compte cette spécificité : le modèle *Generalized-MUSIC* [Vallet et al., 2009, Vallet et al., 2012a, Vallet et al., 2015]. Étant donné les résultats très intéressants lorsque le modèle de covariance est respecté et même lorsque qu'il ne l'est pas tout à fait comme avec le traitement MIMO-STAP *sparse*, réétudier et recalculer tous les résultats de cette thèse avec ce modèle amènerait certainement des améliorations encore plus intéressantes pour les traitements STAP, MIMO-STAP et plus généralement pour toutes les applications avec un bruit rang faible dont le rang augmente avec la taille des données.

Nous avons toujours considéré des bruits gaussiens. Cependant, en pratique, comme pour les applications STAP et MIMO-STAP, le bruit rang faible (réponse du sol) ne suit pas une distribution gaussienne mais est plutôt un bruit de type SIRV (pour *Spherically Invariant Random Vector*) [Yao, 1973] ou équivalent. Des études en RMT avec ce type de bruit ont déjà été réalisées par [Couillet et al., 2013, Couillet and McKay, 2013], études dont on pourrait s'inspirer pour améliorer et rendre plus réalistes les résultats apportés par cette thèse.

Enfin, lors des traitements STAP et MIMO-STAP, le décodage a été supposé parfait, les formes d'ondes parfaitement orthogonales et les antennes non couplées, ce qui n'est pas le cas en pratique. Chaque étape à la réception entraîne donc une perte. Une piste serait alors de construire un détecteur prenant directement en compte les signaux reçus bruts. On aurait ainsi un détecteur généralisé pour le traitement STAP-MIMO.

Pour finir, la théorie des matrices aléatoires est une théorie méritant de se faire connaître plus amplement. En effet, bien qu'elle soit très largement utilisée dans le domaine des télécommunications, elle reste assez peu employée dans d'autres domaines comme en radar. Nous avons vu ici qu'elle peut apporter beaucoup en traitement radar. Les autres domaines employant des données à grandes dimensions comme la finance, la biologie ou encore la fouille de données auraient donc tout intérêt à investiguer dans ce sens.



## Généralités

### A.1 Relations utiles

Voici tout d'abord quelques relations puis un théorème utiles lors des différentes démonstrations.

$$a \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), b \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow a^2 + b^2 \sim \sigma^2 \chi^2(2) \quad (\text{A.1})$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m (\bar{z}_i z_j + z_i \bar{z}_j) = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m (\Re(z_i) \Re(z_j) + \Im(z_i) \Im(z_j)) \quad (\text{A.2})$$

$$\Re(z_1 z_2) = \Re(z_1) \Re(z_2) - \Im(z_1) \Im(z_2) \quad (\text{A.3})$$

$$\Im(z_1 z_2) = \Re(z_1) \Im(z_2) + \Im(z_1) \Re(z_2) \quad (\text{A.4})$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow X_1 X_2 - X_3 X_4 \sim \text{Laplace}(0, 1) \quad (\text{A.5})$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow X_1 X_2 + X_3 X_4 \sim \text{Laplace}(0, 1) \quad (\text{A.6})$$

$$XY = \frac{1}{4}(X+Y)^2 - \frac{1}{4}(X-Y)^2 \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2), Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_Y^2) &\Rightarrow X+Y, X-Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2) \\ &\Rightarrow (X+Y)^2, (X-Y)^2 \sim (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2) \chi^2(1) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$z \sim \mathcal{CN}(0, 1) \Rightarrow \bar{z} \sim \mathcal{CN}(0, 1) \quad (\text{A.9})$$

#### Définition A.1 Identités de Woodbury

Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux matrices inversibles,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{U}$  deux matrices quelconques et  $\mathbf{V}$  une matrice symétrique.

Alors :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{CBC}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.10})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{UBV}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{V} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V} \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.11})$$

**Théorème A.2**

Soient  $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$  et  $Y_1, Y_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_Y^2)$  quatre variables aléatoires indépendantes. Alors :

$$X_1Y_1 - X_2Y_2 \sim \text{Laplace}(0, \sigma_X\sigma_Y) \quad (\text{A.12})$$

$$X_1Y_1 + X_2Y_2 \sim \text{Laplace}(0, \sigma_X\sigma_Y) \quad (\text{A.13})$$

**A.2 Continuous mapping theorem**

**Théorème A.1 Continuous mapping theorem**

Soient  $\{X_n\}$  et  $X$  des variables aléatoires définies sur un espace métrique  $S$ . Soit une fonction  $g : S \rightarrow S'$  (où  $S'$  est un autre espace métrique) ayant un ensemble de points de discontinuité  $D_g$  tel que  $\mathbb{P}[X \in D_g] = 0$ . Alors :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X) \quad (\text{A.14})$$

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X) \quad (\text{A.15})$$

$$X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} g(X) \quad (\text{A.16})$$

# B

## Annexes du chapitre 2

### B.1 Démonstration de la proposition 2.1 : « Convergence de la FQ structurée LR »

#### Proposition Convergence de la FQ structurée LR

Soit  $\mathbf{R}$  la matrice de covariance s'écrivant  $\alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m$  où  $\mathbf{C}$  est une matrice de rang faible  $r$  décrite en Eq.(1.5). Alors, sous (H1-H4), on a :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{R} \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G} \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Modèle spiked : } \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.2})$$

où  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp = \sum_{i=1}^m w_i^G \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$ ,  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m w_i^S \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$ ,  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G} = \mathbf{I}_m - \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp = \sum_{i=1}^m \chi_i^G \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  et  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S} = \sum_{i=1}^r \chi_i^S \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  avec  $w_i^G$ ,  $w_i^S$  et  $\chi_i$  définis en Eqs.(1.118), (1.123) et (1.124) et :

$$\chi_i^G = \begin{cases} \frac{1}{m-r-1} \sum_{n=1}^r \left( \frac{\sigma^2}{\lambda_n - \sigma^2} - \frac{\nu_m}{\lambda_n - \nu_m} \right), & \text{si } i > r \\ 1 - \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} + \frac{\nu_m}{\lambda_i - \nu_m}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

La démonstration est décomposée comme suit. Premièrement, on développe la FQ structurée en une somme de FQs simples et de FQs structurées de base (Subsec. B.1.1). Dans un second temps, on détermine la convergence de la FQ structurée de base (Subsec. B.1.2). Enfin, on utilise ce résultat pour déterminer la convergence de la FQ structurée dans le régime en grandes dimensions (Subsec. B.1.3). Le régime des convergences de cette section s'il n'est pas précisé est  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c$ .

#### B.1.1 Développement de la FQ structurée

Soient  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  deux vecteurs complexes déterministes et  $\mathbf{R} = \alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m$  la matrice de covariance décrite en sous-section 1.2.1 avec  $\mathbf{C}$  la matrice de covariance d'un bruit LR de rang  $r$  (fixe pour tout  $m$ ,

i.e.  $r/m \rightarrow 0^+$ ). Ainsi, on peut développer la FQ *structurée* de la manière suivante :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp (\sigma^2 \mathbf{I}_m + \alpha_c \mathbf{C}) \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.4})$$

$$= \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 + \alpha_c \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \left( \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \right) \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.5})$$

$$= \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 + \alpha_c \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.6})$$

### B.1.2 Convergence de la FQ *structurée* de base

Remarquant que l'Eq.(B.6) est une somme d'une FQ *simple* et de FQs *structurées* de base, on se focalise tout d'abord sur la convergence de la FQ *structurée* de base  $\hat{\eta}_i = \gamma_i \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2$ ,  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Cette FQ *structurée* de base n'est en fait que le produit de 3 quantités :  $\gamma_i$  qui est déterministe et deux FQ *simples*  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_i^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2$  dépendantes dont la convergence est très bien connue. En effet, le vecteur  $\mathbf{u}_i$  étant un vecteur déterministe de norme 1, il satisfait l'hypothèse **(H4)** et,  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a (cf. théorèmes 1.11 et 1.12) :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{u}_i \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{u}_i \quad (\text{B.7})$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{u}_i \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{u}_i \quad (\text{B.8})$$

On conclut la même chose pour la FQ  $\mathbf{u}_i^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2$ . Ainsi, d'après le *continuous mapping theorem*,  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  :

$$\text{Modèle « G-MUSIC » : } \hat{\eta}_i = \gamma_i \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \bar{\eta}_i^{(G)} = \gamma_i \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.9})$$

$$\text{Modèle } \textit{spiked} : \hat{\eta}_i = \gamma_i \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \bar{\eta}_i^{(S)} = \gamma_i \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.10})$$

### B.1.3 Convergence de la FQ *structurée*

En utilisant l'Eq.(B.10), le théorème 1.12 et le *continuous mapping theorem*, on a avec le modèle *spiked* :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 + \alpha_c \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.11})$$

$$\xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 + \alpha_c \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{C} \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.12})$$

Or, on rappelle que, conformément au modèle *spiked*,  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp = \mathbf{I}_m - \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}$ . Ainsi :

$$\mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{I}_m \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.13})$$

$$= \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \left( \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp + \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \right) \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.14})$$

$$= \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{I}_m \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_1^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.15})$$

De ce fait :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,S}^\perp \bar{\Pi}_{c,S} \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.16})$$

Enfin, en définissant  $\bar{\Pi}_{c,G} = \mathbf{I}_m - \bar{\Pi}_{c,G}^\perp$  et en appliquant le même raisonnement en utilisant l'Eq.(B.9), le théorème 1.11 et le *continuous mapping theorem*, on a avec le modèle « G-MUSIC » :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{R} \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \bar{\Pi}_{c,G}^\perp \bar{\Pi}_{c,G} \mathbf{s}_2 \quad (\text{B.17})$$



# C

## Annexes du chapitre 3

### C.1 Démonstration du théorème 3.1 : « Quantité aléatoire équivalente à $\bar{\Lambda}(\Theta)$ »

**Théorème** *Quantité aléatoire équivalente à  $\bar{\Lambda}(\Theta)$*

Soit  $w$  (resp.  $\bar{\Lambda}(\Theta)$ ) pour  $w^G$  ou  $w^S$  (resp.  $\bar{\Lambda}^G(\Theta)$  ou  $\bar{\Lambda}^S(\Theta)$ ) suivant le modèle de SCM (« G-MUSIC » ou spiked). Alors, sous  $\mathcal{H}_0$  et (H1-H3),  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  a la même distribution que la quantité suivante :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i X_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m \beta_{ij} (\Re(v_{ij})Y_{ij} + \Im(v_{ij})Z_{ij})}{C \sum_{i=1}^m \eta_i X_i} \quad (\text{C.1})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \chi_i^2(2) \\ Y_{ij} = R_i R_j + I_i I_j \sim \text{Laplace}_{ij}^Y(0, 1) \\ Z_{ij} = I_i R_j + R_i I_j \sim \text{Laplace}_{ij}^Z(0, 1) \\ R_i, R_j, I_i, I_j \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1) \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

et, en rappelant que  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m]$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \frac{1}{2} w_i^2 \lambda_i |\mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i|^2 \\ \beta_{ij} = w_i w_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \\ v_{ij} = \mathbf{u}_i^H \mathbf{a}(\Theta) \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j \\ \eta_i = w_i \lambda_i \\ C = \frac{1}{2} \|\text{diag}([w_1, \dots, w_m]) \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\Theta)\|_2^2 \end{array} \right. \quad (\text{C.3})$$

De plus, pour tout  $i, j, i', j' \in \llbracket 1; m \rrbracket$  avec  $i \neq j$  et  $i' \neq j'$ , on a les relations d'indépendance et de décorrélation suivantes :

- $X_i$  est indépendant de  $X_{i'}$  pour  $i' \neq i$  ;
- $Y_{ij}$  et  $Z_{ij}$  sont indépendants de  $X_{i'}$  pour  $i' \neq i$  et  $i' \neq j$  ;

- $Y_{ij}$  est indépendant de  $Y_{i'j'}$  et  $Z_{i'j'}$  pour  $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$ ;
- $Z_{ij}$  est indépendant de  $Y_{i'j'}$  et  $Z_{i'j'}$  pour  $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$ ;
- $X_i$  et  $Y_{ij}$  sont décorrélées ;
- $X_i$  et  $Z_{ij}$  sont décorrélées ;
- $Y_{ij}$  et  $Z_{ij}$  sont décorrélées.

La démonstration est organisée comme suit. On effectue d'abord quelques manipulations sur l'expression de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  (Subsec.C.1.1). Dans un second temps, on développe chaque forme quadratique de façon à obtenir une fonction de variables aléatoires scalaires gaussiennes réelles centrées et de variance 1/2 (Subsec.C.1.2). Puis, on détermine la variable aléatoire équivalente à chaque FQ (Subsec.C.1.3) et la variable aléatoire équivalente à  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  partageant la même distribution (Subsec.C.1.4). Enfin, on détermine les diverses relations d'indépendance et de corrélation entre différentes variables aléatoires (Subsec.C.1.5).

### C.1.1 Manipulations de l'expression de $\bar{\Lambda}(\Theta)$

Soit  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  défini de la manière suivante :

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \bar{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{x})} \quad (\text{C.4})$$

avec  $\bar{\mathbf{\Pi}}_c^\perp = \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{U}^H$  correspondant à  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,G}^\perp$  ou  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp$  suivant le modèle de SCM considéré et  $\mathbf{W} = \text{diag}([w_1, \dots, w_m])$ . On effectue tout d'abord des rotations et réécritures sur les FQs de  $\bar{\Lambda}$ . On a alors :

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{U}^H \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{U}^H \mathbf{x})} = \frac{|e^H \mathbf{y}|^2}{(e^H e)(\mathbf{y}^H \mathbf{y})} \quad (\text{C.5})$$

avec  $e = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\Theta)$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{U}^H \mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{H})$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{w} \odot \boldsymbol{\lambda})$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}) = \text{diag}([\lambda_1, \dots, \lambda_m])$  et  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_m]$ . Puis, au final :

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{|e^H \mathbf{y}|^2}{(e^H e)(\mathbf{y}^H \mathbf{y})} = \frac{|e^H \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{z}|^2}{(e^H e)(\mathbf{z}^H \mathbf{H} \mathbf{z})} \quad (\text{C.6})$$

avec  $\mathbf{z} = \mathbf{H}^{-1/2} \mathbf{y} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m)$ .

### C.1.2 Développement de chaque FQ

On développe maintenant chaque forme quadratique pour avoir des expressions fonction de variables aléatoires réelles gaussiennes centrées de variance 1/2.

Calculons d'abord chaque terme de  $e^H$  afin de pouvoir développer les autres FQs  $|e^H \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{z}|^2$  et  $e^H e$ . On a :

$$\mathbf{W}^{1/2} \mathbf{U}^H = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{w_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} \mathbf{u}_1^H \\ \vdots \\ \sqrt{w_m} \mathbf{u}_m^H \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} \mathbf{u}_1^H \mathbf{a}(\Theta) \\ \vdots \\ \sqrt{w_m} \mathbf{u}_m^H \mathbf{a}(\Theta) \end{bmatrix} \\ e^H = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_1 & \cdots & \sqrt{w_m} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

### Développement du numérateur

On développe donc maintenant le numérateur  $|e^H \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{z}|^2$ .

$$|e^H \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{z}|^2 = \left| \sum_{i=1}^m \sqrt{w_i} \sqrt{w_i} \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right|^2 = \left| \sum_{i=1}^m w_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right|^2 \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m \left| w_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m \left( \left[ w_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right]^* \left[ w_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j z_j \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ w_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right] \left[ w_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j z_j \right]^* \right) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$= \sum_{i=1}^m \left| w_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \left( w_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right)^* \left( w_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j z_j \right) \quad (\text{C.11})$$

On a donc pour le numérateur :

$$|e^H \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{z}|^2 = A + B \quad (\text{C.12})$$

$$\text{avec } \begin{cases} A = \sum_{i=1}^m \left| w_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right|^2 \\ B = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \left( w_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right)^* \left( w_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j z_j \right) \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

On a alors pour  $A$  :

$$A = \sum_{i=1}^m \left| w_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right|^2 = \sum_{i=1}^m w_i^2 \lambda_i \left| \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i \right|^2 |z_i|^2 \quad (\text{C.14})$$

$$= \sum_{i=1}^m w_i^2 \lambda_i \left| \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i \right|^2 (\Re(z_i)^2 + \Im(z_i)^2) \quad (\text{C.15})$$

avec  $\Re(z_i), \Im(z_i) \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ . Puis, on a pour  $B$  :

$$B = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m \left[ \left( w_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right)^* \left( w_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j z_j \right) + \left( w_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right) \left( w_j \sqrt{\lambda_j} \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j z_j \right)^* \right] \quad (\text{C.16})$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m w_i w_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \left[ \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right)^* \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j z_j \right) + \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right) \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j z_j \right)^* \right] \quad (\text{C.17})$$

$$= 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m w_i w_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \left[ \Re \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right) \Re \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j z_j \right) + \Im \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i z_i \right) \Im \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j z_j \right) \right] \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m w_i w_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \left[ \left( \Re \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i \right) \Re(z_i) - \Im \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i \right) \Im(z_i) \right) \left( \Re \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j \right) \Re(z_j) - \Im \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j \right) \Im(z_j) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \Re \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i \right) \Im(z_i) + \Im \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i \right) \Re(z_i) \right) \left( \Re \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j \right) \Im(z_j) + \Im \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j \right) \Re(z_j) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m w_i w_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \left[ \left\{ \Re \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i \right) \Re \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j \right) + \Im \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i \right) \Im \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j \right) \right\} \left\{ \Re(z_i) \Re(z_j) + \Im(z_i) \Im(z_j) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -\Im \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i \right) \Re \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j \right) + \Re \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i \right) \Im \left( \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j \right) \right\} \left\{ \Im(z_i) \Re(z_j) - \Re(z_i) \Im(z_j) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

$$B = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m w_i w_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} [\Re(\mathbf{u}_i^H \mathbf{a}(\Theta) \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j) \{\Re(z_i) \Re(z_j) + \Im(z_i) \Im(z_j)\} \\ + \Im(\mathbf{u}_i^H \mathbf{a}(\Theta) \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j) \{\Im(z_i) \Re(z_j) - \Re(z_i) \Im(z_j)\}] \quad (\text{C.21})$$

avec  $\Re(z_i), \Im(z_i), \Re(z_j), \Im(z_j) \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ .

### Développement du dénominateur

Enfin on développe le dénominateur. On a alors :

$$D = (\mathbf{e}^H \mathbf{e})(\mathbf{z}^H \mathbf{H} \mathbf{z}) = \|\mathbf{e}\|_2^2 \sum_{i=1}^m w_i \lambda_i |z_i|^2 \quad (\text{C.22})$$

$$= \|\mathbf{e}\|_2^2 \sum_{i=1}^m w_i \lambda_i (\Re(z_i)^2 + \Im(z_i)^2) \quad (\text{C.23})$$

$$(\text{C.24})$$

avec  $\Re(z_i), \Im(z_i) \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ .

### C.1.3 Détermination des variables aléatoires équivalentes aux FQs

Afin de déterminer les variables aléatoires équivalentes aux FQs, on rappelle les expressions du numérateur et du dénominateur :

$$|\mathbf{e}^H \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{z}|^2 = A + B \quad (\text{C.25})$$

$$\text{avec } \begin{cases} A = \sum_{i=1}^m w_i^2 \lambda_i |\mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i|^2 (\Re(z_i)^2 + \Im(z_i)^2) \\ B = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m w_i w_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} [\Re(\mathbf{u}_i^H \mathbf{a}(\Theta) \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j) \{\Re(z_i) \Re(z_j) + \Im(z_i) \Im(z_j)\} \\ + \Im(\mathbf{u}_i^H \mathbf{a}(\Theta) \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j) \{\Im(z_i) \Re(z_j) - \Re(z_i) \Im(z_j)\}] \end{cases}$$

et

$$D = (\mathbf{e}^H \mathbf{e})(\mathbf{z}^H \mathbf{H} \mathbf{z}) \quad (\text{C.26})$$

$$= \|\mathbf{e}\|_2^2 \sum_{i=1}^m w_i \lambda_i (\Re(z_i)^2 + \Im(z_i)^2) \quad (\text{C.27})$$

avec  $\Re(z_i), \Im(z_i), \Re(z_j), \Im(z_j) \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ . On remarque donc aisément que l'on peut écrire les équivalences suivantes :

$$A \sim \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_i^2 \lambda_i |\mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i|^2 X_i \quad (\text{C.28})$$

$$B \sim \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m w_i w_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} [\Re(\mathbf{u}_i^H \mathbf{a}(\Theta) \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j) Y_{ij} + \Im(\mathbf{u}_i^H \mathbf{a}(\Theta) \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j) Z_{ij}] \quad (\text{C.29})$$

$$D \sim \frac{1}{2} \|\mathbf{e}\|_2^2 \sum_{i=1}^m w_i \lambda_i X_i \quad (\text{C.30})$$

avec

$$X_i \sim 2(\Re(z_i)^2 + \Im(z_i)^2) \quad (\text{C.31})$$

$$Y_{ij} \sim 2(\Re(z_i) \Re(z_j) + \Im(z_i) \Im(z_j)) \quad (\text{C.32})$$

$$Z_{ij} \sim 2(\Im(z_i) \Re(z_j) - \Re(z_i) \Im(z_j)) \quad (\text{C.33})$$

On a donc, d'après les relations de l'annexe A

$$X_i \sim \chi_i^2(2) \quad (\text{C.34})$$

$$Y_{ij} \sim \text{Laplace}_{ij}^Y(0, 1/2) \quad (\text{C.35})$$

$$Z_{ij} \sim \text{Laplace}_{ij}^Z(0, 1/2) \quad (\text{C.36})$$

#### C.1.4 Détermination de la variable aléatoire équivalente à $\bar{\Lambda}(\Theta)$

En réécrivant donc  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  de la façon suivante :

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{A + B}{D} \quad (\text{C.37})$$

On obtient bien

$$\bar{\Lambda}(\Theta) \sim \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i X_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m \beta_{ij} (\Re(v_{ij}) Y_{ij} + \Im(v_{ij}) Z_{ij})}{C \sum_{i=1}^m \eta_i X_i} \quad (\text{C.38})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \chi_i^2(2) \\ Y_{ij} = R_i R_j + I_i I_j \sim \text{Laplace}_{ij}^Y(0, 1) \\ Z_{ij} = I_i R_j + R_i I_j \sim \text{Laplace}_{ij}^Z(0, 1) \\ R_i, R_j, I_i, I_j \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1) \end{array} \right. \quad (\text{C.39})$$

et, en rappelant que  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m]$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \frac{1}{2} w_i^2 \lambda_i |\mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_i|^2 \\ \beta_{ij} = w_i w_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \\ v_{ij} = \mathbf{u}_i^H \mathbf{a}(\Theta) \mathbf{a}^H(\Theta) \mathbf{u}_j \\ \eta_i = w_i \lambda_i \\ C = \frac{1}{2} \|\text{diag}([w_1, \dots, w_m]) \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\Theta)\|_2^2 \end{array} \right. \quad (\text{C.40})$$

#### C.1.5 Relations d'indépendance et de décorrélation entre les différentes variables aléatoires

On s'intéresse ici en premier lieu aux relations d'indépendance, puis dans un second temps aux relations de décorrélation. On rappelle tout d'abord le résultat obtenu précédemment :

$$X_i \sim 2(\Re(z_i)^2 + \Im(z_i)^2) \stackrel{\text{iid}}{\sim} \chi_i^2(2) \quad (\text{C.41})$$

$$Y_{ij} \sim 2(\Re(z_i)\Re(z_j) + \Im(z_i)\Im(z_j)) \sim \text{Laplace}_{ij}^Y(0, 1) \quad (\text{C.42})$$

$$Z_{ij} \sim 2(\Im(z_i)\Re(z_j) - \Re(z_i)\Im(z_j)) \sim \text{Laplace}_{ij}^Z(0, 1) \quad (\text{C.43})$$

où  $z_i, z_j \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ . On peut alors écrire :

$$X_i = A_i^2 + B_i^2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \chi_i^2(2) \quad (\text{C.44})$$

$$Y_{ij} = A_i A_j + B_i B_j \sim \text{Laplace}_{ij}^Y(0, 1) \quad (\text{C.45})$$

$$Z_{ij} = A_j B_i - A_i B_j \sim \text{Laplace}_{ij}^Z(0, 1) \quad (\text{C.46})$$

où  $A_i, A_j, B_i, B_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et sont indépendantes pour tout  $i \neq j$ ,  $(i, j) \in \llbracket 1; m \rrbracket^2$ .

### Relations d'indépendance

Soient  $P_1(A_i, A_j, B_i, B_j)$  et  $P_2(A_i, A_j, B_i, B_j)$  deux polynômes différents en plusieurs indéterminées avec  $i \neq j$ . Alors, du fait de l'indépendance des quatre variables aléatoires  $A_i, A_j, B_i, B_j$ , on peut dire :

- $P_1(A_i, A_j, B_i, B_j)$  et  $P_2(A_{i'}, A_{j'}, B_{i'}, B_{j'})$  sont indépendants pour tout  $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$ ;
- $P_1(A_i, A_j, B_i, B_j)$  et  $P_1(A_{i'}, A_{j'}, B_{i'}, B_{j'})$  sont indépendants pour tout  $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$ ;
- $P_2(A_i, A_j, B_i, B_j)$  et  $P_2(A_{i'}, A_{j'}, B_{i'}, B_{j'})$  sont indépendants pour tout  $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$ .

Par conséquent, en définissant  $P_1(A_i, A_j, B_i, B_j)$  et/ou  $P_2(A_i, A_j, B_i, B_j)$  comme  $X_i$  et/ou  $Y_{ij}$  et/ou  $Z_{ij}$ , on peut conclure que :

- $X_i$  est indépendant de  $X_{i'}$  pour  $i' \neq i$ ;
- $Y_{ij}$  et  $Z_{ij}$  sont indépendants de  $X_{i'}$  pour  $i' \neq i$  et  $i' \neq j$ ;
- $Y_{ij}$  est indépendant de  $Y_{i'j'}$  et  $Z_{i'j'}$  pour  $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$ ;
- $Z_{ij}$  est indépendant de  $Y_{i'j'}$  et  $Z_{i'j'}$  pour  $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$ .

### Relations de décorrélation

Afin de prouver la corrélation ou décorrélation entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , il suffit de calculer leur coefficient de corrélation  $\text{Corr}(X, Y)$  défini par :

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (\text{C.47})$$

où  $\sigma_X$  et  $\sigma_Y$  sont les écarts type de  $X$  et  $Y$  et  $\text{Cov}(X, Y)$  la covariance entre  $X$  et  $Y$ , définie par :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \quad (\text{C.48})$$

On calcule donc la moyenne de  $X_i, Y_{ij}$  et  $Z_{ij}$  :

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[A_i^2 + B_i^2] = \mathbb{E}[A_i^2] + \mathbb{E}[B_i^2] = 2 \quad (\text{C.49})$$

$$\mathbb{E}[Y_{ij}] = \mathbb{E}[A_i A_j + B_i B_j] = 0 \quad (\text{C.50})$$

$$\mathbb{E}[Z_{ij}] = \mathbb{E}[A_j B_i - A_i B_j] = 0 \quad (\text{C.51})$$

Puis, on calcule la covariance entre  $X_i$  et  $Y_{ij}$  :

$$\text{Cov}(X_i, Y_{ij}) = \mathbb{E}[X_i Y_{ij}] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[Y_{ij}] = \mathbb{E}[(A_i^2 + B_i^2)(A_i A_j + B_i B_j)] \quad (\text{C.52})$$

$$= \mathbb{E}[A_i^3 A_j + A_i^2 B_i B_j + A_i A_j B_i^2 + B_i^3 B_j] \quad (\text{C.53})$$

$$= 0 \quad (\text{C.54})$$

Puis entre  $X_i$  et  $Z_{ij}$  :

$$\text{Cov}(X_i, Z_{ij}) = \mathbb{E}[X_i Z_{ij}] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[Z_{ij}] = \mathbb{E}[(A_i^2 + B_i^2)(A_j B_i - A_i B_j)] \quad (\text{C.55})$$

$$= \mathbb{E}[A_i^2 A_j B_i - A_i^3 B_j + A_j B_i^3 - A_i B_i^2 B_j] \quad (\text{C.56})$$

$$= 0 \quad (\text{C.57})$$

Et enfin entre  $Y_{ij}$  et  $Z_{ij}$  :

$$\text{Cov}(Y_{ij}, Z_{ij}) = \mathbb{E}[Y_{ij} Z_{ij}] - \mathbb{E}[Y_{ij}]\mathbb{E}[Z_{ij}] = \mathbb{E}[(A_i A_j + B_i B_j)(A_j B_i - A_i B_j)] \quad (\text{C.58})$$

$$= \mathbb{E}[A_i A_j^2 B_i - A_i^2 A_j B_j + A_j B_i^2 B_j - A_i B_i B_j^2] \quad (\text{C.59})$$

$$= 0 \quad (\text{C.60})$$

Enfin, sachant que  $\sigma_{X_i}^2$ ,  $\sigma_{Y_{ij}}^2$  et  $\sigma_{Z_{ij}}^2$  sont finies et différentes de 0, on peut conclure que :

$$\text{Corr}(X_i, Y_{ij}) = 0 \quad (\text{C.61})$$

$$\text{Corr}(X_i, Z_{ij}) = 0 \quad (\text{C.62})$$

$$\text{Corr}(Y_{ij}, Z_{ij}) = 0 \quad (\text{C.63})$$

De manière plus explicite, étant donné que leurs coefficients de corrélation sont nuls :

- $X_i$  et  $Y_{ij}$  sont décorrélés ;
- $X_i$  et  $Z_{ij}$  sont décorrélés ;
- $Y_{ij}$  et  $Z_{ij}$  sont décorrélés.

## C.2 Démonstration de la proposition 3.2 : « Transformation de l'expression de $\bar{\Lambda}(\Theta)$ en un rapport de deux FQs à variables aléatoires réelles »

**Proposition** *Transformation de l'expression de  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  en un rapport de deux FQs à variables aléatoires réelles*

Soit  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  défini de la manière suivante :

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{x})} \quad (\text{C.64})$$

où  $\bar{\Pi}_c^\perp = \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{U}^H$  correspond à  $\bar{\Pi}_{c,G}^\perp$  ou  $\bar{\Pi}_{c,S}^\perp$ ,  $\mathbf{W} = \text{diag}([w_1, \dots, w_m])$ ,  $w_i$  correspond à  $w_i^G$  ou  $w_i^S$  et  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m]$ . De plus,  $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}_x, \mathbf{R})$  est la donnée sous test où  $\boldsymbol{\mu}_x = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{d}$  selon l'hypothèse considérée ( $\mathcal{H}_0$  ou  $\mathcal{H}_1$ ). Alors,

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{z}}}{\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{z}}} \quad (\text{C.65})$$

avec  $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{2m \times 1} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{z}}} = \sqrt{2}[\Re(\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}^H \boldsymbol{\mu}_x)^T, \Im(\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}^H \boldsymbol{\mu}_x)^T]^T, \mathbf{I}_{2m})$ ,  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}([\lambda_1, \dots, \lambda_m])$  et

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{A}) & -\Im(\mathbf{A}) \\ \Im(\mathbf{A}) & \Re(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m} \\ \tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{O}_m \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{H} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m} \end{cases} \quad (\text{C.66})$$

où  $\mathbf{A} = \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{f} \mathbf{f}^H \mathbf{H}^{1/2}$ ,  $\mathbf{H} = \text{diag}([\eta_1, \dots, \eta_m])$ ,  $\eta_i = w_i \lambda_i$  et  $\mathbf{f} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\Theta) / \|\mathbf{W}^{1/2} \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\Theta)\|_2$ . De plus,  $\tilde{\mathbf{A}}$  est une matrice symétrique car  $\Im(\mathbf{A})$  est une matrice antisymétrique.

Soit  $\bar{\Lambda}(\Theta)$  défini comme :

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \bar{\Pi}_c^\perp \mathbf{x})} \quad (\text{C.67})$$

où  $\bar{\Pi}_c^\perp = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{U}^H$  correspond à  $\bar{\Pi}_{c,G}^\perp$  ou  $\bar{\Pi}_{c,S}^\perp$ ,  $\mathbf{W} = \text{diag}([w_1, \dots, w_m])$  et  $w_i$  et  $\mathbf{U}$  sont définis comme dans le **Théorème 3.1**. Se référant au Chap.1,  $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}_x, \mathbf{R})$  avec  $\boldsymbol{\mu}_x = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{d}$  suivant l'hypothèse considérée ( $\mathcal{H}_0$  ou  $\mathcal{H}_1$ ).

Premièrement, on transforme l'expression précédente en un rapport de deux FQs, fonctions de variables aléatoires complexes gaussiennes. Pour cela, on écrit :

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{|\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{U}^H \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{a}(\Theta)^H \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\Theta))(\mathbf{x}^H \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{U}^H \mathbf{x})} = \frac{|e^H \mathbf{y}|^2}{(e^H e)(\mathbf{y}^H \mathbf{y})} \quad (\text{C.68})$$

avec  $\mathbf{e} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\Theta)$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{U}^H \mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}_y = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{U}^H \boldsymbol{\mu}_x, \mathbf{H})$ ,  $\mathbf{H} = \Lambda \mathbf{W}$  et  $\Lambda = \text{diag}([\lambda_1, \dots, \lambda_m])$ . Alors,

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{|e^H \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{z}|^2}{(e^H e)(\mathbf{z}^H \mathbf{H} \mathbf{z})} = \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{H}^{1/2} e e^H \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{z}}{(e^H e)(\mathbf{z}^H \mathbf{H} \mathbf{z})} = \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{f} \mathbf{f}^H \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{H} \mathbf{z}} \quad (\text{C.69})$$

$$= \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{H} \mathbf{z}} \quad (\text{C.70})$$

avec  $\mathbf{z} = \mathbf{H}^{-1/2} \mathbf{y} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}_z = \Lambda^{-1/2} \mathbf{U}^H \boldsymbol{\mu}_x, \mathbf{I}_m)$ ,  $\mathbf{f} = e/\|e\|_2$  et  $\mathbf{A} = \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{f} \mathbf{f}^H \mathbf{H}^{1/2}$ . On obtient bien un rapport de deux FQs, fonctions de variables aléatoires complexes gaussiennes.

Enfin il est aisé de montrer la relation suivante, transformant le rapport de deux FQs fonction de variables aléatoires complexes gaussiennes en un rapport de deux FQs fonction de variables aléatoires réelles gaussiennes :

$$\bar{\Lambda}(\Theta) = \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^H \mathbf{H} \mathbf{z}} = \frac{\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{z}}}{\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{z}}} \quad (\text{C.71})$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{z}} = \sqrt{2}[\Re(\mathbf{z})^T, \Im(\mathbf{z})^T]^T \in \mathbb{R}^{2m \times 1} \\ \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{A}) & -\Im(\mathbf{A}) \\ \Im(\mathbf{A}) & \Re(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m} \\ \tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbb{O}_{2m} \\ \mathbb{O}_{2m} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m} \end{cases} \quad (\text{C.72})$$

avec  $\tilde{\mathbf{z}} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{z}}} = \sqrt{2}[\Re(\boldsymbol{\mu}_z)^T, \Im(\boldsymbol{\mu}_z)^T]^T, \mathbf{I}_{2m})$  et  $\tilde{\mathbf{A}}$  matrice symétrique car  $\Im(\mathbf{A})$  est une matrice antisymétrique.

# D

## Annexes du chapitre 4

### D.1 Démonstration de la proposition 4.1 : « Convergence de la FQ structurée rectifiée LR, modèle spiked »

#### Proposition Convergence de la FQ structurée rectifiée LR, modèle spiked

Soit  $\mathbf{R}$  la matrice de covariance s'écrivant  $\alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m$  où  $\mathbf{C}$  est une matrice de rang faible  $r$  décrite en Eq.(1.5). Alors, sous (H1-H4) et le modèle spiked,

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{p.s.} \mathbf{s}_1^H \Pi_c^\perp \mathbf{R} \Pi_c^\perp \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H (\tilde{\Pi}_{c,S} - \Pi_c) \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.1})$$

où  $\hat{\Pi}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m \phi_i^S \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H$  avec  $\phi_i^S$  défini en Eq.(1.126) et  $\tilde{\Pi}_{c,S} = \sum_{i=1}^r \tilde{w}_i^S \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  avec  $\tilde{w}_i^S$  défini par  $\tilde{w}_i^S = (1 + c\gamma_i^{-1}) / (1 - c\gamma_i^{-2})$ .

La démonstration s'organise comme suit. Tout d'abord, on développe la FQ structurée rectifiée  $\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2$  en une somme de FQs simples et de FQs structurées de base. En un second temps, la convergence de chaque terme de la somme est déterminée afin de déterminer la convergence de  $\mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2$  en utilisant le *continuous mapping theorem*. Durant toute cette démonstration, les hypothèses (H1-H4) sont supposées vérifiées. On rappelle que la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  s'écrit  $\alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m$ .

#### D.1.1 Développement de la FQ structurée rectifiée

D'après sa définition, le pseudo projecteur  $\hat{\Pi}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m \phi_i^{(S)} \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H$  peut être réécrit comme :

$$\hat{\Pi}_{c,S}^\perp = \mathbf{I}_m - \hat{\Pi}_{c,S} = \mathbf{I}_m - \sum_{i=1}^r \hat{\chi}_i^{-1} \hat{\Pi}_i \quad (\text{D.2})$$

avec

$$\hat{\chi}_i = \frac{1 - c_m \hat{\gamma}_i^{-2}}{1 + c_m \hat{\gamma}_i^{-1}} \quad (\text{D.3})$$

$$\hat{\gamma}_i = \frac{1}{2} \left( \hat{\lambda}_i - (c_m + 1) + \sqrt{(c_m + 1 - \hat{\lambda}_i)^2 - 4c_m} \right) \quad (\text{D.4})$$

$$\hat{\mathbf{\Pi}}_i = \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \quad (\text{D.5})$$

On développe donc  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2$  à partir de l'Eq.(D.2) comme suit :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^H \left( \mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \right) \left( \alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m \right) \left( \mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \right) \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.6})$$

$$= \mathbf{s}_1^H \left[ \alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m - 2\sigma^2 \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} - \alpha_c \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{C} - \alpha_c \mathbf{C} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} + \sigma^2 \left( \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \right)^2 + \alpha_c \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{C} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \right] \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.7})$$

$$= \mathbf{s}_1^H \left( \alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m \right) \mathbf{s}_2 - 2\sigma^2 \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{C} \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \mathbf{C} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \left( \sum_{i=1}^r \hat{\chi}_i^{-2} \hat{\mathbf{\Pi}}_i \right) \mathbf{s}_2 + \alpha_c \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \left( \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \right) \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.8})$$

$$= \mathbf{s}_1^H \left( \alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m \right) \mathbf{s}_2 - 2\sigma^2 \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{C} \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \mathbf{C} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^r \mathbf{s}_1^H \hat{\chi}_i^{-2} \hat{\mathbf{\Pi}}_i \mathbf{s}_2 + \alpha_c \gamma_i \sum_{i=1}^r \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.9})$$

### D.1.2 Convergence des FQs simples classiques de la somme

On s'intéresse tout d'abord à la convergence des FQs simples « classiques », notamment présentes dans le FQ *structurée*  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2$ . D'après [Couillet and Hachem, 2013, Hachem et al., 2013], on a :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.10})$$

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{C} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c \mathbf{C} \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.11})$$

$$\mathbf{s}_1^H \mathbf{C} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_c \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.12})$$

et, pour tout  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$  :

$$\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{u}_i \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_c \mathbf{u}_i \quad (\text{D.13})$$

$$\mathbf{u}_i^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S} \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{u}_i^H \mathbf{\Pi}_c \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.14})$$

### D.1.3 Convergence de $\hat{\chi}_i$ vers $\chi_i$

On s'intéresse donc ensuite à la convergence de la FQ simple de base non classique  $\hat{\chi}_i^{-2} \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_i \mathbf{s}_2$ . Cependant, comme cette dernière n'est pas du type des FQs simples étudiées précédemment, *i.e.*  $\hat{\chi}_i^{-1} \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_i \mathbf{s}_2$ ,

*D.1. Démonstration de la proposition 4.1 : « Convergence de la FQ structurée rectifiée LR, modèle spiked »*

mais le produit  $\hat{\chi}_i^{-1} \times \hat{\chi}_i^{-1} \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_i \mathbf{s}_2$ , on détermine la convergence de  $\hat{\chi}_i$ . On rappelle que la multiplicité des valeurs propres  $\lambda_1$  à  $\lambda_r$  est ici égale à 1. On cherche donc tout d'abord à écrire  $\hat{\chi}_i$  et  $\chi_i$  comme des fonctions de  $\hat{\lambda}_i$  et  $\tau_i$ , quantité dont on connaît la convergence.

Ainsi, d'après le théorème 2 et corollaire 2 de [Couillet and Hachem, 2013], on a :

$$\chi_i = \frac{1 - c\gamma^{-2}}{1 + c\gamma^{-1}} = \zeta_1(\tau_i) = \frac{\bar{b}_m(\tau_i)(1 + \tau_i \bar{b}_m(\tau_i))}{(\tau_i \bar{b}_m(\tau_i))'} \quad (\text{D.15})$$

où  $(f(\tau_i))' = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\tau_i}$ . Puis, d'après le théorème 2 de [Hachem et al., 2013] et par identification (les hypothèses et le modèle sont identiques dans [Couillet and Hachem, 2013] et [Hachem et al., 2013]), on a aussi :

$$\zeta_2(\tau_i) = \frac{\tau_i \bar{b}_m(\tau_i)^2 \tilde{m}(\tau_i)}{(\tau_i \bar{b}_m(\tau_i)) \tilde{m}(\tau_i)'} = \chi_i \quad (\text{D.16})$$

avec  $\tilde{m}(\tau_i) = c\bar{b}_m(\tau_i) - (1 - c)/\tau_i$ .

De plus, d'après les Eqs.(12) et (13) de [Hachem et al., 2013] et par identification,

$$\hat{\chi}_i = \zeta_2(\hat{\lambda}_i) \quad (\text{D.17})$$

Donc, d'après l'Eq.(D.16) montrant l'égalité des fonctions  $\zeta_1(\cdot)$  et  $\zeta_2(\cdot)$  et que l'on appellera désormais  $\zeta(\cdot)$ , on en conclut :

$$\hat{\chi}_i = \zeta(\hat{\lambda}_i) \quad (\text{D.18})$$

$$\chi_i = \zeta(\tau_i) \quad (\text{D.19})$$

Enfin, en remarquant que  $\hat{\lambda}_i$  tend p.s. vers  $\tau_i$  dans le régime en grandes dimensions  $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket$  et que  $\zeta(x)$  est continue sur  $[\lambda_+; +\infty)$ , on obtient :

$$\zeta(\hat{\lambda}_i) - \zeta(\tau_i) = \hat{\chi}_i - \chi_i \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{D.20})$$

#### D.1.4 Convergence de la FQ simple de base non classique de la somme

On revient maintenant à la convergence de la FQ simple de base non classique  $\hat{\chi}_i^{-2} \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_i \mathbf{s}_2$ . Sachant que :

$$\hat{\chi}_i = \zeta(\hat{\lambda}_i) \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \chi_i = \zeta(\tau_i) \quad (\text{D.21})$$

$$\hat{\chi}_i^{-1} \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_i \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_i \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.22})$$

on peut conclure par le *continuous mapping theorem* la convergence de la FQ simple de base non classique :

$$\hat{\chi}_i^{-2} \mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_i \mathbf{s}_2 \xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \chi_i^{-1} \mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi}_i \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.23})$$

en rappelant que  $\zeta(x)$  est continue sur  $[\lambda_+; +\infty)$  et que  $\zeta(\hat{\lambda}_i) \neq 0$  et  $\zeta(\tau_i) \neq 0$ .

### D.1.5 Convergence de FQ structurée rectifiée par le continuous mapping theorem

À partir des convergences précédentes en Eqs.(D.10 à (D.14) et (D.23), on peut alors montrer par le *continuous mapping theorem* que :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 &\xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H (\alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m) \mathbf{s}_2 - 2\sigma^2 \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{C} \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \mathbf{C} \Pi_c \mathbf{s}_2 \\ &\quad + \sigma^2 \sum_{i=1}^r \mathbf{s}_1^H \chi_i^{-1} \Pi_i \mathbf{s}_2 + \alpha_c \gamma_i \sum_{i=1}^r \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \Pi_c \mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H (\alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m) \mathbf{s}_2 - 2\sigma^2 \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{C} \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \mathbf{C} \Pi_c \mathbf{s}_2 \\ &\quad + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \left( \sum_{i=1}^r \chi_i^{-1} \Pi_i \right) \mathbf{s}_2 + \alpha_c \mathbf{s}_1^H \Pi_c \left( \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \right) \Pi_c \mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H (\alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m) \mathbf{s}_2 - 2\sigma^2 \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{C} \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \mathbf{C} \Pi_c \mathbf{s}_2 \\ &\quad + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \tilde{\Pi}_{c,S} \mathbf{s}_2 + \alpha_c \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{C} \Pi_c \mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

$$(\text{D.27})$$

avec  $\tilde{\Pi}_{c,S} = \sum_{i=1}^r \chi_i^{-1} \Pi_i$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1^H \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{s}_2 &\xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H (\alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m) \mathbf{s}_2 - 2\sigma^2 \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{C} \mathbf{s}_2 - \alpha_c \mathbf{s}_1^H \mathbf{C} \Pi_c \mathbf{s}_2 \\ &\quad + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{s}_2 + \alpha_c \mathbf{s}_1^H \Pi_c \mathbf{C} \Pi_c \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H (\tilde{\Pi}_{c,S} - \Pi_c) \mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

$$\xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H (\mathbf{I}_m - \Pi_c) (\alpha_c \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m) (\mathbf{I}_m - \Pi_c) \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H (\tilde{\Pi}_{c,S} - \Pi_c) \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.29})$$

$$\xrightarrow[m/K \rightarrow c < \infty]{\text{p.s.}, m, K \rightarrow \infty} \mathbf{s}_1^H \Pi_c^\perp \mathbf{R} \Pi_c^\perp \mathbf{s}_2 + \sigma^2 \mathbf{s}_1^H (\tilde{\Pi}_{c,S} - \Pi_c) \mathbf{s}_2 \quad (\text{D.30})$$

où on a utilisé la relation  $(\Pi_c)^\perp = \Pi_c$  pour le passage de la ligne (D.28) à (D.29).

## D.2 Démonstration de la consistance de $\hat{\Pi}_{c,G}^\perp$ et $\hat{\Pi}_{c,S}^\perp$ en régime classique

On rappelle tout d'abord les expressions de  $\hat{\Pi}_{c,G}^\perp$  et  $\hat{\Pi}_{c,S}^\perp$  :

$$\hat{\Pi}_{c,G}^\perp = \sum_{i=1}^m \phi_i^G \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \quad (\text{D.31})$$

$$\hat{\Pi}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m \phi_i^S \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \quad (\text{D.32})$$

avec

$$\phi_i^G = \begin{cases} 1 + \sum_{n=1}^r \left( \frac{\hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_n} - \frac{\hat{v}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{v}_n} \right), & \text{si } i > r \\ - \sum_{n=r+1}^m \left( \frac{\hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_n} - \frac{\hat{v}_n}{\hat{\lambda}_i - \hat{v}_n} \right), & \text{si } i \leq r \end{cases} \quad (\text{D.33})$$

$$\phi_i^S = \begin{cases} 1, & \text{si } i > r \\ 1 - \frac{1 + c_m \hat{\gamma}_i^{-1}}{1 - c_m \hat{\gamma}_i^{-2}}, & \text{si } i \leq r \end{cases} \quad (\text{D.34})$$

où  $\hat{v}_1 \geq \dots \geq \hat{v}_m$  sont les valeurs propres de  $\text{diag}(\hat{\lambda}) - \frac{1}{K} \sqrt{\hat{\lambda}} \sqrt{\hat{\lambda}}^T$ ,  $\hat{\lambda} = [\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m]^T$  et  $\hat{\gamma}_i = \frac{1}{2} \left( \hat{\lambda}_i - (c_m + 1) + \sqrt{(\hat{\lambda}_i - (c_m + 1))^2 - 4c_m} \right)$ .

Or, quand  $K$  tend vers l'infini à  $m$  fixé, on a les convergences presque sûres suivantes :

$$\hat{\lambda}_i \longrightarrow \lambda_i \quad (\text{D.35})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_i \longrightarrow \mathbf{u}_i \quad (\text{D.36})$$

$$c_m \longrightarrow 0 \quad (\text{D.37})$$

$$\hat{\gamma}_i \longrightarrow \lambda_i - 1 \quad (\text{D.38})$$

$$\text{diag}(\hat{\lambda}) - \frac{1}{K} \sqrt{\hat{\lambda}} \sqrt{\hat{\lambda}}^T \longrightarrow \text{diag}(\lambda) \quad (\text{D.39})$$

$$\hat{v}_i \longrightarrow \lambda_i \quad (\text{D.40})$$

Donc, d'après le *continuous mapping theorem*, à  $m$  fixé :

$$\phi_i^G \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \begin{cases} 1, & \text{si } i > r \\ 0, & \text{si } i \leq r \end{cases} \quad (\text{D.41})$$

$$\phi_i^S \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \begin{cases} 1, & \text{si } i > r \\ 0, & \text{si } i \leq r \end{cases} \quad (\text{D.42})$$

et par conséquent, d'après le *continuous mapping theorem*, à  $m$  fixé :

$$\hat{\Pi}_{c,G}^\perp \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \Pi_c^\perp \quad (\text{D.43})$$

$$\hat{\Pi}_{c,S}^\perp \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \Pi_c^\perp \quad (\text{D.44})$$



## Bibliographie

- [Abel, 1824] Abel, N. (1824). Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré.
- [Anitori et al., 2008] Anitori, L., Srinivasan, R., and Nadakuditi, R. (2008). Performance of low-rank STAP detectors. *IEEE Radar Conference*, pages 1 – 6.
- [Arnold et al., 1994] Arnold, L., Gundlach, V., and Demetrius, L. (1994). Evolutionary formalism for products of positive random matrices. *The Annals of Applied Probability*, 4(3) :859 – 901.
- [Asendorf and Nadakuditi, 2013] Asendorf, N. and Nadakuditi, R. (2013). The performance of a matched subspace detector that uses subspaces estimated from finite, noisy, training data. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 61(8) :1972 – 1985.
- [Baik and Silverstein, 2006] Baik, J. and Silverstein, J. W. (2006). Eigenvalues of large sample covariance matrices of spiked population models. *Journal of Multivariate Analysis*, 97 :1643 – 1697.
- [Benaych-Georges and Nadakuditi, 2011] Benaych-Georges, F. and Nadakuditi, R. (2011). The eigenvalues and eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matrices. *Adv. in Math.*, 227(1) :494 – 521.
- [Besson et al., 2011] Besson, O., Dobigeon, N., and Tournet, J. (2011). Minimum mean square sid-tance estimation of a subspace. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 59(12) :5709 – 5720.
- [Besson and Scharf, 2006] Besson, O. and Scharf, L. (2006). CFAR matched direction detector. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 54(7) :2840 – 2845.
- [Billingsley, 1995] Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. Wiley, New York, NY, 3rd edition.
- [Breloy et al., 2015] Breloy, A., Ginolhac, G., Pascal, F., and Forster, P. (2015). Clutter subspace estimation in low rank heterogeneous noise context. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 63(9) :2173 – 2182.
- [Brennan and Reed, 1973] Brennan, L. E. and Reed, L. S. (1973). Theory of adaptive radar. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 9(2) :237 – 252.
- [Brennan and Staudaher, 1992] Brennan, L. E. and Staudaher, F. (1992). Subclutter visibility demonstration. Technical report, RL-TR-92-21, Adaptive Sensors Incorporated.
- [Chong et al., 2011] Chong, C., Pascal, F., and Lesturgie, M. (2011). Estimation performance of coherent MIMO-STAP using cramer-rao bounds. *IEEE National Radar Conference*.
- [Chong, 2011] Chong, C. Y. (2011). *Signal Processing for MIMO Radars : Detection under Gaussian and non-Gaussian environments and application to STAP*. PhD thesis, Supelec.
- [Combernoux et al., 2013a] Combernoux, A., Pascal, F., Ginolhac, G., and Lesturgie, M. (2013a). Random matrix theory applied to low rank stap detection. *EUSIPCO*. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00871217>.
- [Combernoux et al., 2013b] Combernoux, A., Pascal, F., Ginolhac, G., and Lesturgie, M. (2013b). Théorie des matrices aléatoires appliquée à la détection STAP rang faible. *GRETSI*.
- [Combernoux et al., 2014] Combernoux, A., Pascal, F., Ginolhac, G., and Lesturgie, M. (2014). Performances of low rank detectors based on random matrix theory with application to stap. *RADAR*.

- [Combernoux et al., 2015a] Combernoux, A., Pascal, F., Ginolhac, G., and Lesturgie, M. (2015a). Asymptotic performance of the low rank adaptive normalized matched filter in a large dimensional regime. *ICASSP*.
- [Combernoux et al., 2015b] Combernoux, A., Pascal, F., Ginolhac, G., and Lesturgie, M. (2015b). Filtres adaptatifs rang faible : analyse de performances en grandes dimensions. *GRETSI*.
- [Combernoux et al., 2015c] Combernoux, A., Pascal, F., Ginolhac, G., and Lesturgie, M. (2015c). Theoretical performance of low rank adaptive filters in gaussian context in the large dimensional regime. *IEEE Trans. on Signal Process.* submitted.
- [Combernoux et al., 2016] Combernoux, A., Pascal, F., Ginolhac, G., and Lesturgie, M. (2016). Asymptotic performance of the low rank adaptive normalized matched filter detector in the large dimensional regime. *IEEE Trans. on Signal Process.* to be submitted.
- [Conte and Ricci, 1994] Conte, E. and Ricci, G. (1994). Performance prediction in compound-Gaussian clutter. *IEEE Trans. AES*, 30(2) :611 – 616.
- [Couillet and Debbah, 2011] Couillet, R. and Debbah, M. (2011). *Random Matrix Methods for Wireless Communications*. Cambridge University Press. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00658725>.
- [Couillet and Hachem, 2013] Couillet, R. and Hachem, W. (2013). Fluctuations of spiked random matrix models and failure diagnosis in sensor networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, 59(1) :509 – 525.
- [Couillet and McKay, 2013] Couillet, R. and McKay, M. (2013). The large dimensional regime of robust shrinkage covariance matrix estimators. *Journal of Multivariate Analysis*.
- [Couillet et al., 2013] Couillet, R., Pascal, F., and Silverstein, J. (2013). The random matrix regime of Maronna's M-estimator with elliptically distributed samples. *Journal of Multivariate Analysis*. <http://arxiv.org/abs/1311.7034>.
- [Couillet et al., 2014] Couillet, R., Pascal, F., and Silverstein, J. (2014). Robust estimates of covariance matrices in the large dimensional regime. *IEEE Transactions on Information Theory*, 60(11) :7269 – 7278. <http://arxiv.org/abs/1204.5320>.
- [Dyson, 1962] Dyson, F. (1962). Statistical theory of the energy levels of complex systems. *Journal of Mathematical Physics*, 3(3) :157 – 165. Part II.
- [Ginolhac et al., 2013] Ginolhac, G., Forster, P., Pascal, F., and Ovarlez, J.-P. (2013). Performance of two low-rank STAP filters in a heterogeneous noise. *IEEE Trans. on Signal Process.*, 61 :57 – 61.
- [Ginolhac and Jourdain, 2002] Ginolhac, G. and Jourdain, G. (2002). "principal component inverse" algorithm for detection in the presence of reverberation. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 27(2) :310 – 321.
- [Girko, 1998] Girko, V. (1998). *An Introduction to Statistical Analysis of Random Arrays*, chapter 14 - Ten years of general statistical analysis. VSP International Science Publishers. <http://www.general-statistical-analysis.girko.freewebspace.com/chapter14.pdf>.
- [Hachem et al., 2008] Hachem, W., Khorunzhy, O., Loubaton, P., Najim, J., and Pastur, L. (2008). A new approach for mutual information analysis of large dimensional multi-antenna channels. *IEEE Trans. on Inf. Th.*, 54(9) :3987–4004.
- [Hachem et al., 2013] Hachem, W., Loubaton, P., Mestre, X., Najim, J., and Vallet, P. (2013). A subspace estimator of fixed rank perturbations of large random matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 114 :427 – 447.
- [Haimovich, 1996] Haimovich, A. (1996). The eigencanceler : Adaptive radar by eigenanalysis methods. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 32(2) :532 – 542.

- 
- [Haimovich, 1997] Haimovich, A. (1997). Asymptotic distribution of the conditional signal-to-noise ratio in an eigenanalysis-based adaptive array. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 33 :988 – 997.
- [Johnstone, 2001] Johnstone, I. (2001). On the distribution of the largest principal component. *The Annals of Statistics*, 29(2) :295 – 327.
- [Kammoun et al., 2009] Kammoun, A., Kharouf, M., Hachem, W., and Najim, J. (2009). A central limit theorem for the SINR at the LMMSE estimator output for large dimensional signals. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 55(11) :5048 – 5063.
- [Kay, 1998] Kay, S. (1998). *Fundamentals of statistical signal processing - Detection theory - Vol.2*. Prentice Hall PTR.
- [Kelly, 1986] Kelly, E. (1986). An adaptive detection algorithm. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 22(1) :115–127.
- [Kirstein and Tufts, 1994] Kirstein, I. and Tufts, D. (1994). Adaptive detection using a low rank approximation to a data matrix. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 30 :55 – 67.
- [Klemm, 1998] Klemm, R. (1998). *Space-Time Adaptive Processing : Principles and Applications*. Number 9 in Iee Radar Series. Inspec/Iee, 1st edition.
- [Kraut et al., 2001] Kraut, S., Scharf, L., and McWhorter, L. (2001). Adaptive subspace detectors. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 49(1) :1–16.
- [Laloux et al., 2000] Laloux, L., Cizeau, P., Potters, M., and Bouchaud, J. P. (2000). Random matrix theory and financial correlations. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3(3) :391 – 397.
- [Magnus, 1986] Magnus, J. (1986). The exact moments of a ratio of quadratic forms in normal variables. *Annales d'économie et de statistique*, (4) :95 – 109.
- [Marčenko and Pastur, 1967] Marčenko, V. and Pastur, L. (1967). Distributions of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1(4) :457 – 483.
- [Mehta, 2004] Mehta, M. (2004). *Random Matrices*. ELSEVIER, San Diego, CA, USA, first edition edition.
- [Mestre, 2006] Mestre, X. (2006). On the asymptotic behavior of quadratic forms of the resolvent of certain covariance-type matrices. Technical report, Telecommunications Technological Center of Catalonia.
- [Mestre, 2008a] Mestre, X. (2008a). Improved estimation of eigenvalues and eigenvectors of covariance matrices using their sample estimates. *IEEE Transactions on Information Theory*, 54(11) :5113 – 5129.
- [Mestre, 2008b] Mestre, X. (2008b). On the asymptotic behavior of the sample estimates of eigenvalues and eigenvectors of covariance matrices. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(11) :5353 – 5368.
- [Mestre and Lagunas, 2006] Mestre, X. and Lagunas, M. (2006). Finite sample size effect on minimum variance beamformers : Optimum diagonal loading factor for large arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(1) :69 – 82.
- [Mestre and Lagunas, 2008] Mestre, X. and Lagunas, M. (2008). Modified subspace algorithms for doa estimation with large arrays. *IEEE Transactions on Information Theory*, 56(2) :598 – 614.
- [Michels et al., 2000] Michels, J., Rangaswamy, M., and Himed, B. (2000). Performance of STAP tests in coumpound Gaussian clutter. *Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, pages 250 – 355.

- [Mohsenipour and Provost, 2012] Mohsenipour, A. and Provost, S. (2012). Approximating the distributions of singular quadratic expressions and their ratios. *Journal of Iranian Statistical Society*, 11(2) :147 – 171.
- [Nadakuditi and Silverstein, 2010] Nadakuditi, R. and Silverstein, J. (2010). Fundamental limit of sample generalized eigenvalue based detection of signals in noise using relatively few signal-bearing and noise-only samples. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 4(3) :468 – 480.
- [Pascal et al., 2008] Pascal, F., Chitour, Y., Ovarlez, J., Forster, P., and Larzabal, P. (2008). Covariance structure maximum-likelihood estimates in compound Gaussian noise : existence and algorithm analysis. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 56(1) :34 – 48.
- [Paul, 2007] Paul, D. (2007). Asymptotics of sample eigenstructure for a large dimensional spiked covariance model. *Statistica Sinica*, 17(4) :1617 – 1642.
- [Raghavan, 2012] Raghavan, R. (2012). Statistical interpretation of a data adaptive clutter subspace estimation algorithm. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 48(2) :1370 – 1384.
- [Rangaswamy et al., 2004] Rangaswamy, M., Lin, F., and Gerlach, K. (2004). Robust adaptive signal processing methods for heterogeneous radar clutter scenarios. *Signal Processing*, 84 :1653 – 1665.
- [Reed et al., 1974] Reed, I., Mallett, J., and Brennan, L. (1974). Rapid convergence rate in adaptive arrays. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, AES-10(6) :853 – 863.
- [Robey et al., 1992] Robey, F., Fuhrmann, D., Kelly, E., and Nitzberg, R. (1992). A CFAR adaptive matched filter detector. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 28(2) :208 – 216.
- [Roy and Kailath, 1989] Roy, R. and Kailath, T. (1989). ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariant techniques. *IEEE Trans.-ASSP*, 37(7) :984 – 995.
- [Rubio et al., 2012a] Rubio, F., Mestre, X., and Hachem, W. (2012a). A CLT on the SNR of diagonally loaded MVDR filters. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 60(8) :4178 – 4195.
- [Rubio et al., 2012b] Rubio, F., Mestre, X., and Palomar, D. (2012b). Performance analysis and optimal selection of large mean variance portfolios under estimation risk. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 6(4) :337 – 350.
- [Scharf and Friedlander, 1994] Scharf, L. and Friedlander, B. (1994). Matched subspace detectors. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 42 :2146 – 2157.
- [Schmidt, 1986] Schmidt, R. (1986). Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans.-ASSP*, 34(3) :276 – 280.
- [Silverstein, 1995] Silverstein, J. (1995). Strong convergence of the empirical distribution of eigenvalues of large dimensional random matrices. *J. Multivar. Anal.*, 55 :331 – 339.
- [Tang et al., 2010] Tang, B., Tang, J., and Peng, Y. (2010). Performance of knowledge aided space time adaptive processing. *IET Radar Sonar Navig.*, 5(3) :331 – 340.
- [Tang et al., 2013] Tang, B., Tang, J., and Peng, Y. (2013). Clutter nulling performance of SMI in amplitude heterogeneous clutter environments. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 49(2) :1366 – 1373.
- [Tse and Hanly, 1999] Tse, D. and Hanly, S. (1999). Linear multiuser receivers : effective interference, effective bandwidth and user capacity. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(2) :641 – 657.
- [Tulino and Verdù, 2004] Tulino, A. and Verdù, S. (2004). *Random Matrix Theory and Wireless Communications*. Now Publishers Inc.
- [Tyler, 1987] Tyler, D. (1987). A distribution-free  $m$ -estimator of multivariate scatter. *The Annals of Statistics*, 15(1) :234 – 251.

- 
- [Vallet et al., 2011a] Vallet, P., Hachem, W., Loubaton, P., Mestre, X., and Najim, J. (2011a). An improved music algorithm based on low rank perturbation of large random matrices. *SSP*, pages 689 – 692.
- [Vallet et al., 2011b] Vallet, P., Hachem, W., Loubaton, P., Mestre, X., and Najim, J. (2011b). On the consistency of the g-music doa estimator. *SSP*, pages 685 – 688.
- [Vallet et al., 2009] Vallet, P., Loubaton, P., and Mestre, X. (2009). Improved subspace doa estimation methods with large arrays : The deterministic signals case. *ICASSP*, pages 2137 – 2140.
- [Vallet et al., 2012a] Vallet, P., Loubaton, P., and Mestre, X. (2012a). Improved subspace estimation for multivariate observations of high dimension : the deterministic signal case. *IEEE Trans. on Information Theory*, 58(2) :1043 – 1068.
- [Vallet et al., 2012b] Vallet, P., Mestre, X., and Loubaton, P. (2012b). A CLT for the G-MUSIC DoA estimator. *EUSIPCO*, pages 2298 – 2302.
- [Vallet et al., 2015] Vallet, P., Mestre, X., and Loubaton, P. (2015). Performance analysis of an improved MUSIC DoA estimator. *IEEE Trans. on Signal Processing*.
- [Ward, 1994] Ward, J. (1994). Space-time adaptive processing for airborne radar. Technical report, Lincoln Lab., MIT, Lexington, Mass., USA.
- [Yao, 1973] Yao, K. (1973). A representation theorem and its applications to spherically invariant random processes. *IEEE Trans. on Inf. Th.*, 19(5) :600 – 608.
- [Yu et al., 2013] Yu, J., Rubio, F., and McKay, M. (2013). Performance analysis of minimum variance asset allocation with high frequency data. *ICASSP*, pages 6496 – 6500.





---

**Titre :** Détection et filtrage rang faible pour le traitement d'antenne utilisant la théorie des matrices aléatoires en grandes dimensions.

**Mots-clés :** Théorie des matrices aléatoires, détection et filtrage adaptatif, rang faible, traitement d'antenne, STAP et MIMO-STAP.

**Résumé :**

Partant du constat que dans plus en plus d'applications, la taille des données à traiter augmente, il semble pertinent d'utiliser des outils appropriés tels que la théorie des matrices aléatoires dans le régime en grandes dimensions. Plus particulièrement, dans les applications de traitement d'antenne et radar spécifiques STAP et MIMO-STAP, nous nous sommes intéressés au traitement d'un signal d'intérêt corrompu par un bruit additif composé d'une partie dite rang faible et d'un bruit blanc gaussien. Ainsi l'objet de cette thèse est d'étudier dans le régime en grandes dimensions la détection et le filtrage dit rang faible (fonction de projecteurs) pour le traitement d'antenne en utilisant la théorie des matrices aléatoires.

La thèse propose alors trois contributions principales, dans le cadre de l'analyse asymptotique de fonctionnelles de projecteurs. Ainsi, premièrement, le régime

en grandes dimensions permet ici de déterminer une approximation/prédiction des performances théoriques non asymptotiques, plus précise que ce qui existe actuellement en régime asymptotique classique (le nombre de données d'estimation tends vers l'infini à taille des données fixe). Deuxièmement, deux nouveaux filtres et deux nouveaux détecteurs adaptatifs rang faible ont été proposés et il a été montré qu'ils présentaient de meilleures performances en fonction des paramètres du système en terme de perte en RSB, probabilité de fausse alarme et probabilité de détection. Enfin, les résultats ont été validés sur une application de brouillage, puis appliqués aux traitements radar STAP et MIMO-STAP *sparse*. L'étude a alors mis en évidence une différence notable avec l'application de brouillage liée aux modèles de matrice de covariance traités dans cette thèse.

---

**Title :** Low rank detection and estimation using random matrix theory approaches for antenna array.

**Keywords :** Random matrix theory, adaptive detection and estimation, low rank, array processing, STAP and MIMO-STAP.

**Abstract :**

Nowadays, more and more applications deal with increasing dimensions. Thus, it seems relevant to exploit the appropriated tools as the random matrix theory in the large dimensional regime. More particularly, in the specific array processing applications as the STAP and MIMO-STAP radar applications, we were interested in the treatment of a signal of interest corrupted by an additive noise composed of a low rang noise and a white Gaussian. Therefore, the aim of this thesis is to study the low rank filtering and detection (function of projectors) in the large dimensional regime for array processing with random matrix theory tools.

This thesis has three main contributions in the context of asymptotic analysis of projector functionals. Thus, the large dimensional regime first allows to determine

an approximation/prediction of theoretical non asymptotic performance, much more precise than the literature in the classical asymptotic regime (when the number of estimation data tends to infinity at a fixed dimension). Secondly, two new low rank adaptive filters and detectors have been proposed and it has been shown that they have better performance as a function of the system parameters, in terms of SINR loss, false alarm probability and detection probability. Finally, the results have been validated on a jamming application and have been secondly applied to the STAP and sparse MIMO-STAP processings. Hence, the study highlighted a noticeable difference with the jamming application, related to the covariance matrix models concerned by this thesis.

---