



Écoulements et rupture en milieu poreux déformable. Application au stockage géologique de CO₂

Walid Saber-Cherif

► To cite this version:

Walid Saber-Cherif. Écoulements et rupture en milieu poreux déformable. Application au stockage géologique de CO₂. Mécanique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066535 . tel-01322384

HAL Id: tel-01322384

<https://theses.hal.science/tel-01322384>

Submitted on 27 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Discipline : Mécanique

par

Walid Saber Cherif

***Écoulements et rupture en milieu poreux déformable.
Application au stockage géologique de CO₂***

soutenue publiquement le 7 octobre 2015 devant le jury composé de :

David Dureisseix	INSA Lyon	<i>Rapporteur</i>
Laurent Stainier	École Centrale Nantes	<i>Rapporteur</i>
Yann Monerie	Université Montpellier 2	<i>Examineur</i>
Djimédo Kondo	Université Paris 6	<i>Examineur</i>
André Chrysochoos	Université Montpellier 2	<i>Directeur de thèse</i>
Frédéric Dubois	Université Montpellier 2	<i>Directeur de thèse</i>
Nadège Brusselle Dupend	IFP Énergies nouvelles	<i>Encadrante de thèse</i>
Laurent Cangémi	IFP Énergies nouvelles	<i>Encadrant de thèse</i>

IFP Énergies nouvelles
1 & 4, avenue de Bois-Préau
92852 Rueil-Malmaison Cedex

LMGC - UMR 5508
Université Montpellier II
CC 048 Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5

Université Paris VI
École doctorale SMAER Case 270
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

Cadre de la thèse

Cette thèse a été financée par IFP Énergies Nouvelles (Reuil-Malmaison). Elle a été préparée au Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de Montpellier (LMGC), unité mixte de recherche (UMR 5508) de l'université de Montpellier et à IFP Énergies Nouvelles. Les activités de recherche ont été réparties sur ces deux sites de façon équilibrée.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	vii
Introduction	1
1 Analyse préliminaire, démarche expérimentale et approche proposée	7
Introduction	8
1 Le stockage géologique de CO ₂	8
2 Accidentologie du stockage CO ₂	10
2.1 Les risques liés au stockage de CO ₂	10
2.2 Défaillance des puits d'injection et de la zone proche puits	12
3 Identification d'un scénario de dégradation	13
3.1 Analyse d'éléments bibliographiques clés	14
3.2 Proposition d'un scénario probable	16
4 Démarche et méthodes expérimentales	16
4.1 Matériau d'étude : ciment pétrolier	17
4.2 Préparation du ciment	18
4.3 Préparation des plots ciment-acier	18
4.4 Effet de la température	18
4.5 Effet de la pression	19
5 Essais de vieillissement par carbonatation	19
5.1 Principe et description des essais	20
5.2 Conditions de vieillissement en chambre thermopressurisée	21
5.3 Conditions de vieillissement des échantillons en dessiccateur	22
6 Résultats	22
6.1 Mesures de perméabilité	22
6.2 Mesures des carbonates par analyse thermogravimétrique	23

6.3	Observation des effets de la dessiccation	25
7	Essais de cisaillement	26
7.1	Principe de l'essai	27
7.2	Description de l'essai	28
8	Résultats	29
	Conclusion	30
2	L'approche choisie : modélisation multiphasique d'un milieu poreux	33
	Introduction	34
1	Notion de contrainte effective en poroélasticité	35
2	Une approche micro-macro de modélisation de milieu poreux multiphasiques	37
2.1	Choix du volume élémentaire représentatif	38
2.2	Opérateurs de moyennes	39
2.3	Équations génériques de bilan microscopique	39
2.4	Équations génériques de bilan macroscopique	40
2.5	Cinématique d'un milieu poreux à l'échelle macroscopique	41
3	Équations de conservation	44
3.1	Équations de conservation macroscopique de la masse	44
3.2	Équation de conservation de la quantité de mouvement	46
4	Équations constitutives	51
4.1	Loi d'état de la phase solide	52
4.2	Loi de comportement de la phase solide	53
4.3	Loi d'état de phase fluide	54
4.4	Loi de Darcy	54
4.5	Notions de pression capillaire et de saturation	55
4.6	Modèles de saturation et de perméabilité	56
5	Formulation du problème de poroélasticité en milieu multiphasique	59
5.1	Équations de champs	59
5.2	Équation de champs en pression	60
5.3	Conditions aux limites	62
5.4	Conditions initiales	63
5.5	Formulation forte du problème	63
	Conclusion	64
3	Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique	66
	Introduction	67
1	Formulation variationnelle mixte en vitesse-pressions pour le problème de poroélasticité	67

1.1	Formulation variationnelle des équations de mouvement	67
1.2	Formulation variationnelle des équations de champs en pressions . .	69
1.3	Formulation générale et espace de solution	70
2	Approximation par éléments finis	71
2.1	Discrétisation en espace	72
2.2	Système matriciel à résoudre	75
3	Algorithmes de résolution	76
3.1	Discrétisation temporelle	76
3.2	Variante de la méthode de Newton	77
4	Description du problème et stratégie de résolution	78
4.1	Méthode simultanée	78
4.2	Méthode étagée	79
4.3	Résumé	80
5	Technique d'implémentation : généricité	81
5.1	Principe de généricité	81
5.2	Implémentation	81
6	Simulation d'un écoulement diphasique en milieux poreux déformables . .	83
6.1	Test de Liakopoulos	83
6.2	Résultats	86
	Conclusion	90
4	Prise en compte de la rupture dans un milieu poreux saturé	92
	Introduction	93
1	Bref état de l'art	93
1.1	Les différentes approches	93
1.2	Mécanique de l'endommagement	94
1.3	Mécanique de la rupture	94
1.4	Les techniques numériques	99
2	Application de la méthode de zone cohésive	101
2.1	Modèle de Raous-Cangémi-Cocu-Monerie	101
2.2	Exemple d'application du modèle : essai de pushout	102
2.3	Stratégie de prise en compte de la rupture en milieu saturé	106
3	Méthode d'érosion d'élément ou <i>eigenerosion</i>	108
3.1	Principe de la méthode d'érosion	108
3.2	Mise en œuvre de la méthode d'érosion	110
3.3	Exemple d'application : plaque deux trous	114
4	Extension de la méthode d'érosion en milieu poreux saturé	115
4.1	Formulation du problème de rupture dans un milieu poroélastique .	116

4.2	Rupture dans un milieu poreux saturé	119
	Conclusion	128
Conclusion		130
A Le ciment		138
1	Les caractéristiques du ciment	138
2	Structure et morphologie des constituants	138
3	Les pores du matériau cimentaire	139
4	L'eau dans le ciment	140
5	Différence entre l'eau évaporable et non évaporable	140
6	Les différentes formes de retrait après prise	141
7	Le séchage : causes et conséquences	142
7.1	Mécanisme du séchage	142
7.2	Mécanisme du retrait de dessiccation	143
8	La carbonatation	144
8.1	Chimie de la carbonatation	145
9	Conséquences physiques	145
9.1	Mécanisme du retrait de carbonatation	146
9.2	Caractéristique de l'environnement	148
Bibliographie		150

Table des figures

1.1	Digramme de phase du CO_2	9
1.2	Représentation schématique de l'injection de CO_2	11
1.3	Représentation schématique d'une cimentation	12
1.4	Schéma des chemins de fuites potentiels le long d'un puits	13
1.5	Échantillon SACROC West Texas	14
1.6	Modélisation de l'injection de CO_2 supercritique.	15
1.7	Schéma de l'éprouvette acier-ciment	18
1.8	Détails du dispositif expérimental pour la préparation des plots de ciment .	19
1.9	Photo du dispositif expérimental pour la préparation des plots de ciment .	21
1.10	Dessiccateurs utilisés pour les échantillons	23
1.11	Plot cuvelage-ciment non vieilli	24
1.12	Vue (1) dans le plan transverse du plot de ciment	24
1.13	Vue (2) dans le plan transverse du plot de ciment	25
1.14	Photographies d'échantillons séchés au CO_2 et à l'azote	25
1.15	Images MEB d'une cicatrisation d'un ciment par carbonatation	27
1.16	Schéma de la machine d'essai de cisaillement	29
1.17	Courbe typique d'un essai de cisaillement (pushout).	30
2.1	Volume représentatif du milieu multiphasique.	37
2.2	Courbe type de saturation	58
2.3	Courbes types des perméabilités	58
3.1	Éléments finis mixtes à 3 champs	72
3.2	Schéma des différentes stratégies de couplage	80
3.3	Architecture du code pour la simulation de problèmes multiphysiques . . .	82
3.4	Géométrie et maillage de la colonne.	84
3.5	Profils de la pression p^w et p^g	87
3.6	Profils de la saturation et de la pression capillaire	88
3.7	Profil du débit d'eau et du déplacement	89

4.1	Coordonnées polaires au voisinage de la fissure.	95
4.2	Géométrie et maillage utilisés pour la simulation du pushout.	103
4.3	Courbe de la réponse mécanique simulée et mesurée du pushout.	105
4.4	Description de l'avancée du chemin d'éléments érodés.	110
4.5	schéma des conditions aux limites de la plaque deux trous	115
4.6	Simulation d' <i>eigenerosion</i> sur un cas-test d'une plaque 2 trous.	116
4.7	Milieu poreux saturé et érodé	117
4.8	Représentation schématique du point d'injection	119
4.9	Milieu poreux saturé et érodé	120
4.10	Profil du déplacement u_y et de la pression p_w selon x	122
4.11	Profil des contraintes $\sigma_y y$	123
4.12	Cartographie des champs mécaniques et du champ de pression pour 2 pas de temps	124
4.13	Progression du chemin de fissuration dans le milieu poreux 1	125
4.14	Les différents types de couloirs fracturés	126
4.15	Progression du chemin de fissuration dans le milieu poreux 2	127
A.1	Représentation schématique de la microstructure du gel de CSH	139
A.2	Les différents types de retrait	141
A.3	Images MEB d'une cicatrisation d'un ciment par carbonatation	146

Liste des tableaux

1.1	Conditions de pression et de température pour le vieillissement	21
1.2	Conditions de pression et d'humidité pour le vieillissement	22
1.3	Mesures de perméabilité	22
1.4	Différentes phases de comportement d'un l'essai de cisaillement.	30
2.1	Relations entre les grandeurs et les lois de conservations microscopiques . .	40
2.2	Relations entre les fractions volumiques, la porosité et la saturation.	45
3.1	Matrices et vecteurs type de la structure de donnée générique.	82
3.2	Propriétés matériaux du sable Del Monte.	85
4.1	Paramètres d'interface du modèle RCCM.	102
4.2	Paramètres thermoélastiques de l'acier et du ciment.	103
4.3	table des valeurs identifiées lors de la simulation à $\beta = 0$	105
4.4	Notations utilisées pour le calcul de l'incrément de l'énergie.	111
4.5	Les statuts possibles des éléments pendant l'érosion.	113
4.6	Paramètres et propriétés physiques.	120

Introduction

*Depuis plusieurs décennies, chaque décennie est notablement plus chaude que la précédente*ⁱ... Le changement climatique, s'il faisait encore débat il y a quelque temps, est maintenant bien réel. Le dernier rapport du GIEC ne fait que confirmer les conclusions des précédents rapports, et les récentes manifestations climatiques telles que l'intensification de l'activité cyclonique, la fonte des glaciers et l'élévation du niveau de la mer ne font qu'attester un processus déjà enclenché. Pour reprendre le jargon des experts du climat, il est désormais *extrêmement probable* – c'est-à-dire avec une probabilité supérieure à 95% – que l'élévation des températures sur le globe soit en partie due aux activités humaines.

Les « puits de carbone » de la planète tels que les océans et grandes forêts ne permettent d'absorber que la moitié des émissions totales émises durant toute une annéeⁱⁱ, l'autre moitié étant accumulée dans l'atmosphèreⁱⁱⁱ. Pour ces raisons, de nombreuses mesures tentent d'être mises en place pour réduire les émissions de gaz dans l'atmosphère, notamment en développant des solutions plus économes en énergie, pour le transport ou encore l'habitat, malheureusement cela reste marginal devant la consommation grandissante d'énergie fossile – avec en tête le charbon – dans la plupart des pays de la planète (hormis la France et le Japon). Les conséquences sont d'ailleurs de plus en plus globales comme le montre une récente étude de la NASA^{iv}. En effet, les particules fines liées aux émissions de CO₂ en Chine semblent être en partie responsables des hivers très rigoureux que connaissent les États-Unis depuis trois ans.

Parmi les solutions envisagées, le stockage géologique du CO₂ est prometteur dans le sens où les capacités de stockage permettraient de couvrir largement (plusieurs siècles) la période pendant laquelle les ressources fossiles seront consommées jusqu'à épuisement (un à deux siècles). Différents types de stockage sont envisagés. D'une part, il y a la possibilité de stocker dans des gisements d'hydrocarbure épuisés ou dans des veines de

i. D'après les conclusions faites par le GISS

ii. Les émissions globales en 2014 ont représenté 40 Gt de CO₂.

iii. <http://climate.nasa.gov/news/2190/>

iv. <http://climate.nasa.gov/news/2218/>

charbon non exploitées pour lesquels les structures géologiques sont bien connues, mais les capacités sont limitéesⁱ, et leurs répartitions géographiques trop localisées. D'autre part, le stockage géologique est possible dans des aquifères salins profondsⁱⁱ qui représentent le plus gros potentielⁱⁱⁱ de stockage et sont disponibles à peu près sur toute la surface du globe, mais possèdent aussi les plus grandes incertitudes sur leurs capacités à confiner durablement le CO₂. Cependant, la fiabilité du stockage doit encore être démontrée sur le plan technique et environnemental. Pour ce faire, de nombreuses recherches ont été lancées pour étudier l'impact des transformations géochimiques et mécaniques sur l'étanchéité des couvertures et des puits. Ces études se font généralement selon trois échelles^{iv}. L'échelle de la roche couverture où l'on étudie de manière détaillée les roches couvertures argileuses possiblement faillées ou fracturées pouvant présenter des niveaux de fuites. Ces niveaux de fuites sont identifiés par des essais en laboratoire, et par des simulations numériques couplant altération géochimique des argiles et comportements mécaniques. L'échelle du réservoir où l'on étudie les processus d'écoulements multiphasiques et de réactivités géochimiques associées. À l'aide de modélisations numériques, des bilans de piégeage potentiel du CO₂ sont réalisés suivant les caractéristiques du réservoir. La dernière échelle est celle du puits où les chemins de fuites potentielles le long des interfaces argile-ciment-cuvelage doivent être étudiés en détail. Cette échelle « puits » correspond en réalité à une zone dite « proche puits » car elle comprend toute la roche voisine dans un rayon de quelques mètres.

Pour modéliser et simuler de manière fiable le comportement du stockage dans le temps, il est donc important de bien comprendre les scénarii pouvant être à l'origine d'une rupture d'étanchéité comme la perte d'intégrité d'un puits, d'un réservoir ou encore la réactivation d'une faille. Les modèles actuels servant à l'étude de la perte d'étanchéité des sites de stockage se servent essentiellement de la compréhension des mécanismes physico-chimiques. Ce qui permet de voir dans quelle proportion la perméabilité du milieu en contact avec le CO₂ est affectée. Et ainsi lorsque ces modèles prennent en compte les phénomènes de transport et la structure géologique du milieu, ils peuvent simuler l'évolution du panache de gaz stocké dans le réservoir. La mécanique du solide est encore peu utilisée dans ces modèles ou alors en faisant beaucoup d'hypothèses simplificatrices, mais parfois indispensables lorsque l'on souhaite modéliser des systèmes de très grandes tailles et que peu de paramètres sont mesurables directement. Les approches mécaniques développées sur ce thème se concentrent sur l'étude de la roche couverture. Les modèles mécaniques à l'échelle roche couverture qu'ils soient de nature

i. 5 à 150 Gt pour les veines de charbon et environ 900 Gt pour les gisements épuisés.

ii. L'aquifère salin est un réservoir d'eau salée non potable.

iii. 1000 à 10000 Gt de stockage potentiel.

iv. Projet ultimateco2

numérique ou semi-analytique^[90] essaient par une description simplifiée de déterminer les conséquences mécaniques de l'apparition du gaz dans le réservoir. Ces modèles ont pour objectif de prévoir la migration du gaz par des chemins préférentiels en modélisant l'amorçage et/ou la réactivation de réseau de fractures ou de failles dus à l'augmentation de la pression interstitielle dans le milieu, par l'injection de gaz pouvant affecter la pérennité de la roche couverture. Pour ce qui est de la pérennité de la zone proche puits, les études faites sur les conséquences mécaniques de l'injection à cette échelle sont limitées et encore incomplètes tant les facteurs pouvant induire une dégradation sont nombreux. De plus, cette zone est le siège de phénomènes physiques complexes provoquant des déformations irréversibles sur des périodes très courtes à l'échelle du stockage. Le puits bien qu'étant relativement simple de conception est une structure présentant de multiples interfaces pouvant être considérées comme autant de chemin de fuites potentielles du gaz. En théorie, le ciment coulé après le forage du puits entre le cuvelage en acier et la formation rocheuse a pour vocation de rétablir l'étanchéité naturelle entre les différentes couches géologiques traversées par le puits. Une fois pris, le ciment constitue une interface de quelques centimètres d'épaisseur entre la roche et le cuvelage. Cette interface cimentaire apparaît comme le point le plus critique vis-à-vis de l'étanchéité et du confinement CO_2 injecté en raison des forts gradients de pression et gradients hydriques générés localement. Pour ces raisons, les scénarii à l'origine de la perte d'étanchéité à l'échelle « proche puits » ne sont pas clairement identifiés. En effet, de nombreux travaux ont récemment tenté de reproduire en laboratoire les conditions d'altérations géochimiques de la gaine cimentée en environnement CO_2 pour établir le lien avec la perte d'étanchéité de la structure. Néanmoins, il est légitime de penser que la dégradation chimique ne peut-être le seul facteur à l'origine de la perte d'étanchéité, mais plutôt un ensemble complexe de couplages multiphysiques qui semblent être responsables de cette perte d'étanchéité. Pour ces raisons, la modélisation multiphysique avec comme principaux outils ceux de la mécanique peut participer à faire progresser la compréhension des mécanismes à l'origine de la perte d'étanchéité dans la zone proche puits.

L'approche proposée dans ce travail est donc, de construire un modèle multiphysique à partir d'un scénario plausible de dégradation de la zone proche puits. L'objectif est de proposer un outil de simulation permettant de décrire et de prévoir l'endommagement de la zone proche puits exposée et non exposée au CO_2 . Pour répondre à notre objectif, une recherche expérimentale essentiellement portée sur le comportement des interfaces cuvelage-ciment soumises à différentes expositions est nécessaire notamment pour observer les conditions d'apparition de fissures dans le milieu. Parallèlement à ces travaux expérimentaux, la construction d'un modèle s'appuiera sur la mécanique des

milieux poreux, qui permet de tenir compte de la présence de fluides sous pression dans la zone proche puits. Par ailleurs, il est connu que l'opération d'injection est en grande partie responsable de la montée en pression et en température dans le milieu. Cette montée en pression s'accompagne alors d'un stockage d'énergie élastique dans le milieu qui sera en partie dissipée par fissuration. La mécanique de la rupture nous permettra de prendre en compte la fissuration dans le modèle et, on étudiera un modèle d'interface pour lequel il sera identifié un nombre restreint de paramètres mécaniques grâce à des essais de cisaillement. Il est également important que le modèle proposé soit suffisamment simple pour permettre une intégration rapide dans un outil de simulation.

Le manuscrit de thèse est composé de quatre chapitres. Le **chapitre 1** a pour objectif d'identifier des scénarii pouvant conduire à des fuites de CO₂ en s'appuyant sur un ensemble d'éléments bibliographiques. Différents essais expérimentaux sont ensuite réalisés afin d'observer certains phénomènes qui sont supposés avoir lieu tels que la carbonatation, le séchage, et le retrait sur des éprouvettes représentatives de la structure. L'annexe A complète ce chapitre par une revue bibliographique sur le ciment et les phénomènes physiques étudiés. Cette analyse nous permet d'identifier les mécanismes sur lesquels se fonde notre modélisation.

Le **chapitre 2** du manuscrit est consacré aux outils de mécanique utilisés. On réalise dans un premier temps un bref rappel sur les quelques notions courantes utilisées en mécanique des milieux poreux. Puis on détaille le modèle utilisé adapté à notre problème en présentant le cadre théorique nécessaire à l'établissement des principales équations. À partir des notions de moyennes faites sur les grandeurs physiques microscopiques jusqu'aux formulations variationnelles nécessaires pour la mise en place de l'outil de simulation. Le modèle permet de traiter plusieurs écoulements dans un milieu poreux déformable.

Le **chapitre 3** présente la stratégie et les méthodes numériques mises en place pour la réalisation de notre outil de simulation par éléments finis en s'appuyant sur la plateforme logiciel LMGC90, particulièrement bien adaptée pour gérer numériquement les problèmes de contact et de frottement aux interfaces. Le but est de mettre en place un outil modulaire et réutilisable en vue de pouvoir venir l'enrichir par la suite. Un cas test de l'outil est présenté pour valider le modèle présenté dans le chapitre 2.

Le **chapitre 4** de ce manuscrit donne une brève synthèse bibliographique des différentes manières de modéliser la rupture en mécanique. On présente ensuite d'une part le modèle d'interface que nous avons utilisé pour identifier les paramètres mécaniques d'une interface cuvelage-ciment. Et d'autre part, le critère énergétique que nous souhaitons utiliser dans notre outil de simulation. On explique ensuite une manière possible

de combiner un critère énergétique et un modèle d'écoulements en milieu poreux en exploitant le principe de la méthode d'érosion^[115].

1 | Analyse préliminaire, démarche expérimentale et approche proposée

Sommaire

	Introduction	8
1	Le stockage géologique de CO₂	8
2	Accidentologie du stockage CO₂	10
2.1	Les risques liés au stockage de CO ₂	10
2.2	Défaillance des puits d'injection et de la zone proche puits	12
3	Identification d'un scénario de dégradation	13
3.1	Analyse d'éléments bibliographiques clés	14
3.2	Proposition d'un scénario probable	16
4	Démarche et méthodes expérimentales	16
4.1	Matériau d'étude : ciment pétrolier	17
4.2	Préparation du ciment	18
4.3	Préparation des plots ciment-acier	18
4.4	Effet de la température	18
4.5	Effet de la pression	19
5	Essais de vieillissement par carbonatation	19
5.1	Principe et description des essais	20
5.2	Conditions de vieillissement en chambre thermopressurisée	21
5.3	Conditions de vieillissement des échantillons en dessiccateur	22
6	Résultats	22
6.1	Mesures de perméabilité	22
6.2	Mesures des carbonates par analyse thermogravimétrique	23
6.3	Observation des effets de la dessiccation	25
7	Essais de cisaillement	26
7.1	Principe de l'essai	27
7.2	Description de l'essai	28
8	Résultats	29
	Conclusion	30

Introduction

L'objectif de ce premier chapitre est de proposer un scénario de dégradation de la zone proche puits dans le contexte du stockage géologique, à partir duquel nous souhaitons établir une méthodologie de modélisation permettant la simulation par éléments finis des principaux phénomènes physiques mis en jeu dans cette altération. Nous tenterons d'une part de fournir un outil numérique d'étude de scénarii et d'aide à la décision, par exemple concernant les risques du stockage géologiques. Et d'autre part, un travail pouvant servir de base aux développements d'autres modèles impliquant de nombreux couplages physiques.

Pour mener à bien cette étude, nous nous proposons dans ce premier chapitre de décrire la procédure de séquestration du CO_2 , laquelle a été la motivation industrielle première, et de préciser la structure associée qui sert de point d'injection et de point d'entrée du CO_2 dans le site d'accueil géologique. La plupart des risques identifiés comme pathologiques pour le stockage seront mis en exergue. Nous établirons alors un scénario plausible de dégradation à partir d'interprétations d'éléments bibliographiques. Nous réaliserons une campagne expérimentale dans le but de caractériser un processus de dégradation d'une structure simplifiée du puits, et dans la mesure du possible, de hiérarchiser les phénomènes physiques responsables de cette dégradation. Toutefois, les nombreux couplages physiques mis en jeu rendent cette tâche difficile. Enfin, nous proposerons une approche de modélisation adaptée au regard des mécanismes qui seront identifiés au cours de ce chapitre.

1 Le stockage géologique de CO_2

Parmi les différentes options de stockage en cours d'évaluation, le stockage de CO_2 dans des formations géologiques présente le plus grand potentiel de réduction des émissions anthropiques, mais aussi les plus grandes incertitudes et difficultés techniques et économiques. La procédure du stockage géologique se résume assez bien par son acronyme *Carbon Capture Storage (CCS)*ⁱ. Les perspectives de déploiements à l'échelle industrielle impliquent que le facteur sécurité soit totalement maîtrisé sur toute la chaîne de développement. En effet, le stockage souterrain prévu dans des réservoirs de capacité suffisante, tels que les veines de charbon trop profondes pour être exploitées, les aquifères salins, les réservoirs de pétrole (ou de gaz) en fin de vie, exige une parfaite étanchéité des puits sur des durées séculaires. Les aquifères salins présentent les qualités de

i. Le procédé CCS comporte une phase de captage, une phase de transport et une phase de stockage. La phase de captage s'effectue au niveau des sources d'émissions généralement industrielles telles que les cimenteries, aciéries ou encore les centrales thermiques. C'est la phase la plus coûteuse économiquement bien que le facteur risque ne soit pas compté dans le chiffrage économique.

stockage les plus importantes d'un point de vue géologique. Pour se donner une idée, la capacité de stockage *potentielle* dans les aquifères profonds est de l'ordre de 400 à 10 000 Gt, soit 10 à plus de 250 fois les émissions de CO₂ cumulées en 2013ⁱ.

Actuellement deux sites sont déjà en cours d'exploitation industrielle depuis quelques années. Le site de Sleipnerⁱⁱ (Norvège) en mer du Nord et le site d'In Salah en Algérie. Concernant le coût du stockage géologique du CO₂, celui-ci est conditionné principalement par les débits d'injection. Cet aspect est toutefois contraint les propriétés géophysiques des réservoirs et les propriétés intrinsèques du fluide qui limitent ces débits. Lors d'une opération d'injection, le CO₂ est injecté dans un état particulier dit supercritique. Le CO₂ est dit supercritique lorsqu'il atteint une température supérieure à 31°C et une pression supérieure à 74 bars (7,4 MPa), voir **Fig.(1.1)**.

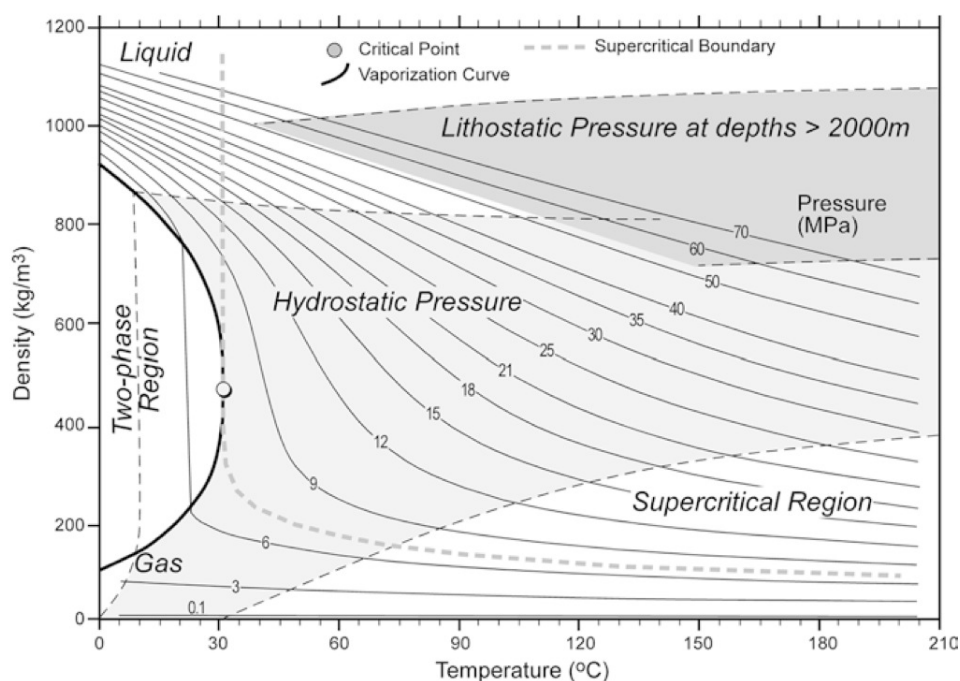


Fig 1.1. Variation de la densité du CO₂ en fonction de la température et de la pression. Ce sont les plages de variabilités thermodynamiques rencontrées dans les bassins sédimentaires pour différents gradients géothermiques, en supposant des conditions de pression hydrostatique et lithostatique, d'après Bachu (2003)^[10].

Cette propriété est intéressante pour le transport et l'injection du CO₂, car les fluides dits supercritiques ont des propriétés différentes qui sont comprises entre celles d'un liquide et celles d'un gaz. En effet, leurs viscosités sont proches de celles d'un gaz, tandis que leurs densités proches de celles d'un liquide avec un pouvoir de diffusivité très élevé

i. 36 Gt, <http://www.planetoscope.com>

ii. CO₂ injecté actuellement à raison d'un million de tonnes par an.

par rapport au fluide liquide. Ce qui facilite la pénétration dans les éléments poreux du réservoir mais aussi du puitsⁱ. Les profondeurs de stockage permettent naturellement de conserver cet état sur le long terme. Pour donner un ordre de grandeur, les niveaux de pression augmentent à raison d'1 MPa tous les kilomètres (km) et la température s'élève d'environ 25°C par km. Notons que les propriétés du CO₂sc (supercritiqueⁱⁱ) peuvent varier au cours d'une opération de stockage notamment du fait de la variabilité des pressions d'injections et des propriétés des réservoirs. Cela n'empêche pas que la masse volumique du CO₂ reste bien inférieure à celle de l'eau, ce qui facilite son injection.

2 Accidentologie du stockage CO₂

2.1 Les risques liés au stockage de CO₂

La sécurité d'un site de stockage de CO₂ peut être évaluée selon « les trois exigences fondamentalesⁱⁱⁱ » suivantes :

- *le site de stockage évolue vers une situation de stabilité à long terme;*
- *le comportement observé du CO₂ injecté est conforme au comportement modélisé;*
- *aucune fuite détectable.*

L'objectif est alors de quantifier le risque à partir de ces trois points pour garantir la sécurité du site. Le premier point est celui qui statistiquement représente le moins de risques d'un point de vue opérationnel, *i.e* que les couplages géochimiques théoriques, activent des mécanismes^{iv} (piégeage résiduel, piégeage stratigraphique, piégeage par dissolution et piégeage minérale) de pérennisation en assurant la stabilisation du site de stockage à long terme.

Le deuxième point est une exigence de surveillance du réservoir post-injection, c'est-à-dire que la modélisation de réservoir doit permettre de manière prédictive de suivre le développement progressif du panache de CO₂.

i. Il est question ici de la gaine de ciment.

ii. Dans la suite du manuscrit, l'abréviation « sc » est utilisée pour désigner le terme supercritique.

iii. D'après CO2Care, informations disponible à l'adresse <https://www.co2care.org/>

iv. Le **piégeage stratigraphique** correspond à celui où le CO₂ moins dense que l'eau est piégée sous une roche couverture imperméable, et ayant la plus forte contribution au piégeage de 20% à 100%. Le **piégeage résiduel** correspond à celui où le CO₂ est piégé dans les pores du réservoir. Le **piégeage par dissolution** est celui dans lequel le CO₂ se dissout dans l'eau salée du réservoir, en enrichissant celle-ci en carbonate et hydrogénocarbonate, la rendant alors plus lourde. Le **piégeage minéral** est celui qui représente le plus haut niveau de sécurité du stockage, les solutions aqueuses riches en CO₂ réagissent avec les minéraux du réservoir pour former de nouveaux minéraux carbonatés. C'est aussi le plus lent des mécanismes à se mettre en place, seulement 15% du CO₂ est minéralisé au bout de 10 ans.

En dernier point, démontrer l'absence de fuite sur le site constitue un élément clé de la viabilité du projet. Les efforts faits par la géophysique dans ce domaine sont importants et permettent maintenant de dire avec une très bonne sensibilité grâce au développement des méthodes d'acquisition de données sismiques 3D/4D le degré d'incertitude fait sur le piégeage du CO₂. Toutefois, ce degré d'incertitude n'est pas aussi bien déterminé en ce qui concerne les infrastructures des puits de forage et de la zone proche puits, les risques de fuites diffuses restent réels et ne sont pas à exclure dans les puits d'injection comme nous y reviendrons en section (2.2). Une vision schématique des principaux événements pathologiques pouvant survenir durant l'injection et le stockage de CO₂ est présentée sur la figure (Fig.1.2). Les événements principaux identifiés^[55] sont : (i) une fuite le long d'un puits d'injection ou d'un autre puits en exploitation ; (ii) une fuite le long d'un puits colmaté ou abandonné ; une fuite par une faille ; (iii) une fuite par migration latérale ; (iv) une fuite à travers la roche de couverture ; (v) des déformations mécaniques par une surrectionⁱ et (vi) une fracturation induite ou une sismicité d'origine anthropique. Les points (i) à (iv) sont représentés sur les figures Fig.(1.2) et Fig.(1.4).

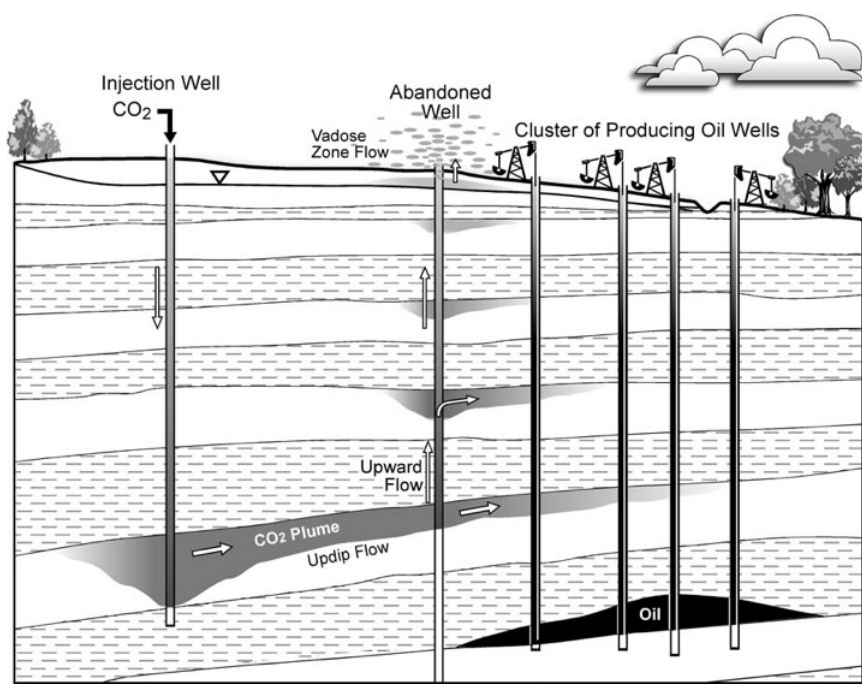


Fig 1.2. Représentation schématique de l'injection de CO₂, de sa migration, et des chemins de fuites potentielles, d'après Celia (2004)^[42].

i. Une surrection est un soulèvement progressif des terrains.

2.2 Défaillance des puits d'injection et de la zone proche puits

Les puits sont des éléments essentiels du stockage géologique, mais également les points faibles de la chaîne de stockage. Le puits constitue le lien direct entre le réservoir et les couches supérieures jusqu'au niveau du sol. La gaine de ciment du puits est censée rétablir l'étanchéité naturelle entre les différentes couches traversées et ainsi assurer le confinement du système de stockage. Le risque alors de mettre en communication des aquifères profonds avec des couches sus-jacentes (par exemple des nappes phréatiques), par un défaut d'un des éléments de structure du puits est fort. Le puits est une structure (voir **Fig.**(1.3)) composée d'un nombre important d'éléments, lesquels ne font que multiplier le nombre d'interfaces et de chemins de fuites potentiels (voir **Fig.**(1.4)).

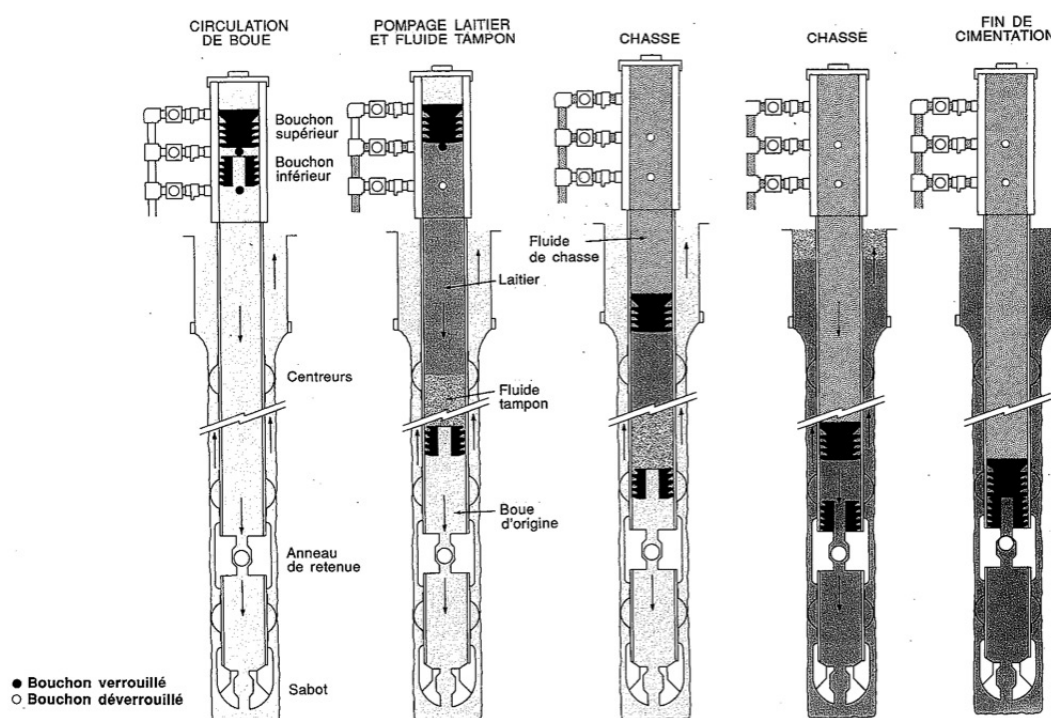


Fig 1.3. Opération de tubage et de cimentation : principe de la procédure de la cimentation, d'après Nguyen (1993) ^[112]

Le puits est soumis à un ensemble de conditions accidentogènes telles qu'un défaut de cimentation, un défaut d'étanchéité des vannes de régulation du débit de gaz, de la dégradation du cuvelage et de la gaine cimentaire du puits suite aux interactions physico-chimiques dues au CO_2 . À l'instar de Nordbotten (2008) ^[113], Oldenburg (2006) ^[114], Fahrner (2012) ^[54] nous pensons que les interfaces cuvelage-ciment-roche et leur voisinage proche constituent des chemins d'écoulements privilégiés. Ceci est accentué par le fait que les opérations de forage et d'injection (forts gradients de pression) conduisent

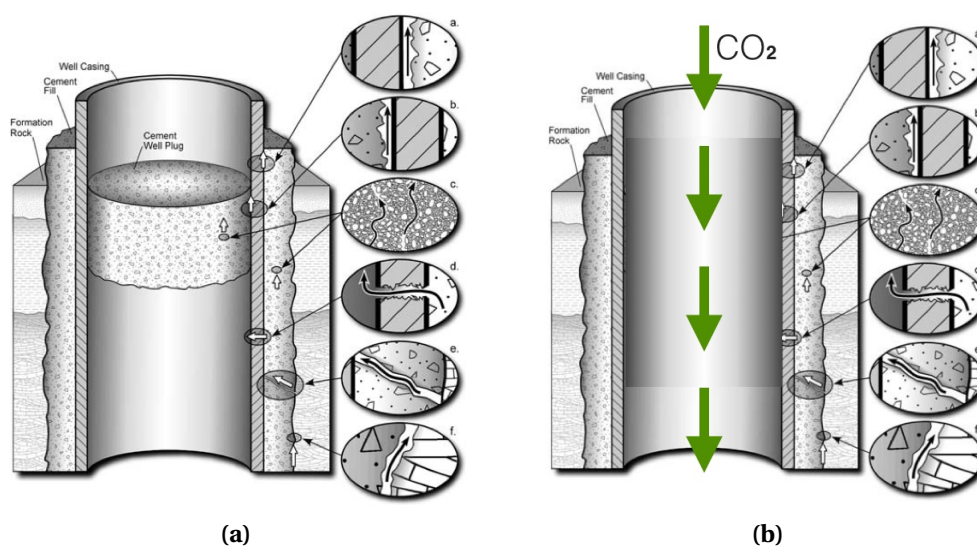


Fig 1.4. (a). Représentation schématique des chemins de fuites potentiels le long d'un vieux puits fermé à l'aide d'un bouchon de ciment : **a** et **b** entre le ciment et le tubage ; **c** à travers le tubage ; **d** à travers des fissures ; **e** entre le ciment et la formation, d'après Celia (2004) ^[42]. **(b)** Les mêmes vecteurs de fuites sont identifiés pour un puits injecteur de CO₂.

inévitavelmente à un endommagement des parois du puits. À titre d'exemple, nous pouvons citer les incidents de fuite qui ont eu lieu sur le site d'In Salah en Algérie. L'expertise technique a montré qu'une faille géologique a été activée entre le puits d'injection et un ancien puits (lieu de la fuite). Le puits a dû être renforcé, et la pression d'injection réduite. Le deuxième incident a été la constatation d'une surrection due à une surpression du réservoir. De nombreux autres incidents et accidents ont été répertoriés dans un rapport d'étude de l'INERIS daté du 30 mai 2013 ^[55].

3 Identification d'un scénario de dégradation

Comme nous venons de le voir, les défaillances probables à l'origine d'une fuite du stockage géologique sont nombreuses. L'exercice dans ce chapitre consiste à identifier un scénario de dégradation. Celui-ci est d'autant plus difficile à identifier que les différents mécanismes physiques susceptibles d'encourager une défaillance du stockage sont fortement couplés et impliquent de nombreux paramètres. L'idée dans un premier temps est d'essayer d'avoir un éclairage nouveau sur quelques études existantes. Nous proposerons dans un second temps à partir de ces nouvelles interprétations, un scénario probable de fissuration des interfaces et dans le volume à l'origine des dégradations constatées dans les sites actuels.

3.1 Analyse d'éléments bibliographiques clés

Jusqu'à présent, plusieurs auteurs Nordbotten (2008)^[113], Kutchko (2007)^[85], Celia (2004)^[42] s'accordent à dire que les fuites résultent de la dégradation du ciment par carbonatation ou lixiviation ou encore par corrosion des cuvelages d'acier. Les conclusions de la publication de Carey (2007)^[39] vont effectivement dans ce sens. Carey a analysé un échantillon exposé 30 ans au CO₂, prélevé à quelques mètres au-dessus de la transition réservoir couverture sur le site de SACROC dans la région ouest du Texas (U.S.A) (**Fig.1.5**). Les conclusions de cette publication montrent qu'il y a bien eu une altération du ciment en contact avec le CO₂ sur une section sus-jacente (au-dessus du réservoir) caractérisée par la formation d'un annulaireⁱ carbonaté. Ce qu'il faut retenir de ceci, c'est que la carbonatation a eu lieu au niveau des interfaces cuvelage-ciment et ciment-roche. Il semble donc y avoir eu un écoulement préférentiel le long de ces interfaces.



Fig 1.5. Photographie d'un échantillon provenant d'un puits abandonné montrant de gauche à droite, ciment avec une croûte noire de 1 mm altérée adjacente au tubage du puits, 5cm de ciment non altéré, ciment avec une zone d'altération de 1 cm en contact avec la roche, d'après Carey (2007)^[39].

De nombreuses publications continuent d'apporter des éléments sur les altérations géochimiques des ciments pétroliers en conditions de stockage, cf. Barlet-Gouédard (2006, 2007, 2009)^{[12], [13], [14]}, ou encore Fabbri (2009)^[53] et Rimmelé (2010)^[128]. Certaines expériences réalisées dans des conditions représentatives de celles d'un réservoir peu profond consistant à caractériser l'étanchéité de l'espace micro annulaire, montrent que celui-ci a une tendance à l'auto-obturation du fait de la formation de carbonates. La conclusion de la publication de Carey (2010)^[40] va également dans ce sens. Dans ce cas, comment expliquer ces écoulements préférentiels aux interfaces constatés dans la plupart des incidents répertoriés ? La question est sur ce point toujours ouverte.

Toutefois, il est très probable qu'au-delà des mécanismes connus pouvant être à l'origine d'une défaillance, par exemple un défaut de cimentation ou une activité sis-

i. de 0,1mm à 1cm.

mique (d'origine entropique ou tectonique) générant un cisaillement sur des sections du puits, d'autres mécanismes potentiels peuvent être à l'origine de migrations préférentielles aux interfaces. En effet, jusque là non mentionnés à notre connaissance pour ce genre d'application, les phénomènes de retraits gênés (ici par la présence du cuvelage en acier et/ou de la roche) peuvent jouer un rôle déterminant dans la défaillance d'un puits d'injection dans la mesure où d'importantes modifications dans les conditions de saturations du milieu ont lieu.

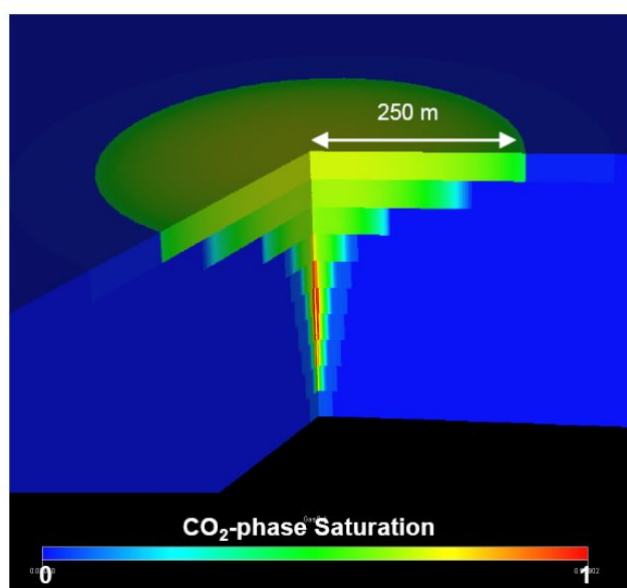


Fig 1.6. Modélisation de l'injection de CO₂sc. La partie en rouge représente la zone totalement saturée en CO₂sc c'est-à-dire il n'y a plus d'eau liquide, résultats d'après Hurter (2007) ^[80].

Dans le cadre de la recherche sur le stockage géologique de CO₂, de nombreuses simulations de migration du panache de CO₂ ont été réalisées. Par exemple, Hurter (2007) ^[80] montre bien que les conditions de saturation sont fortement modifiées localement. En effet, on observe que le point d'injection et son voisinage sont à partir d'un temps t donné saturés en CO₂ (voir **Fig.1.6**). Le CO₂ injecté désature alors progressivement toute la zone proche puits pendant la phase d'injection. Ce front de désaturation s'étale dans un premier temps horizontalement puis verticalement pouvant remonter jusqu'à la roche couverture. Ce phénomène est aussi mis en évidence dans les travaux de Peysson (2011) ^[117] où il est démontré l'existence d'un front de séchage à partir du point d'injection. Par ailleurs, ceci a pour conséquence la précipitation des sels lorsque le site de stockage est un aquifère salin (ce qui est souvent le cas). La conséquence de cette précipitation des sels est de réduire la perméabilité du milieu accentuant alors le risque de fissuration induite en augmentant les gradients de pression locaux.

3.2 Proposition d'un scénario probable

La littérature associée à la recherche dans le génie civil nous donne un éclairage intéressant sur ces phénomènes impliqués dans la dégradation des ciments et des bétons en présence de CO_2 ⁱ. En effet, ces retraits gênés entraînent des déformations différées qui sont souvent à l'origine de fissuration par exemple dans les enceintes de confinement de bâtiment de réacteurs nucléaires, voir par exemple Benboudjema (2005,2008)^[21,22]. Le gradient hydrique est le principal moteur de ce retrait (voir annexe A). C'est lui qui conditionne le taux de saturation du milieu et donc la place laissée pour le transfert du CO_2 . Dans notre cas, une dégradation similaire semble probable. Néanmoins, le contexte géologique rend la lecture du problème délicat, car il est vraiment difficile de connaître l'état de dégradation réel de la structure à plusieurs milliers de mètres de profondeur ainsi que l'état de contrainte *in situ* et les conditions aux limites du problème.

À l'évidence, les scénarii à l'origine de la perte d'étanchéité peuvent être nombreux et ne sont pas clairement identifiés. Les causes responsables d'une fissuration induite aux interfaces et dans le volume sont multifactorielles et les phénomènes géochimiques seuls n'expliquent pas tout. Nous avons essayé, notamment à travers la littérature du génie civil, d'apporter des éléments nouveaux quant à l'interprétation des défaillances des puits d'injection. Ces nouvelles interprétations suggèrent qu'il peut être intéressant d'essayer de reproduire *via* des expériences les mécanismes que nous pensons être à l'origine d'une fissuration.

4 Démarche et méthodes expérimentales

Les dernières conclusions ont montré qu'il était important d'essayer de déterminer ce qui était à l'origine de la fissuration aux interfaces et dans le volume du puits. Dans cette optique, nous proposons de reproduire les mécanismes responsables de cette dégradation à travers des expériences simples, et dans la mesure du possible représentatives des conditions *in situ*. Pour cela, on réalise deux types d'expériences.

L'objectif de la première expérience est de mesurer l'impact de la carbonatation sur les propriétés physico-chimiques du ciment et de l'interface ciment-acier. Pour ce faire, on soumet une série d'échantillons à des conditions de stockage géologique « réservoir » (100% d'humidité relative), et l'autre série d'échantillons à des conditions de stockage « puits » (10% à 50% d'humidité relative).

i. Dans des proportions infiniment plus petites, puisqu'il s'agit ici de ppm pour le CO_2 auquel les structures de génie civil sont exposées.

L'objectif de la deuxième série d'expériences tend à caractériser la tenue mécanique de l'interface ciment-acier saine et carbonatée en condition puits. Pour cela, des tests d'adhérence, *via* des essais de cisaillements sont réalisés à l'aide d'une machine de traction compression.

4.1 Matériau d'étude : ciment pétrolier

Lorsqu'on réalise le forage, différentes couches sont mises en communication. L'isolement initial est rétabli un ensemble cuvelage (acier) et gaine de ciment. Cette fonction est correctement assurée si cet ensemble n'autorise qu'un débit de fuite (eau, huile, gaz) inférieur ou égal à celui qu'autoriserait une section équivalente du terrain non foré.

Le rôle d'une cimentation de colonne étant d'isoler une zone productrice des autres zones, il est essentiel qu'elle soit étanche. Or, la plupart des cimentations se montrent défectueuses et l'on attribue généralement ce défaut d'étanchéité à une mauvaise adhérenceⁱ mécanique du ciment vis-à-vis des parois du cuvelage et de la formation. En effet, une gaine de ciment peu étanche au niveau d'un réservoir de perméabilité relativement faible pourra par exemple, favoriser la fuite de gaz. Les défauts de cimentation pouvant perturber cette étanchéité sont par exemple un canal de boue au niveau de la formation ou encore une percolation de gaz au niveau de la gaine de ciment. Les vecteurs de ces défauts sont généralement dus à un mauvais déplacement de la boue de forage, une formulation du ciment non conforme aux exigences du puits, des fissures de l'annulaire cimenté sous l'effet des chocs thermiques et hydrauliques et du vieillissement, et à l'évolution de la perméabilité pendant le vieillissement.

Le matériau d'étude choisi pour réaliser nos expériences est un ciment pétrolier classique, sa formulation diffère très peu d'un ciment de construction. Il permet de reproduire en laboratoire de manière assez fidèle une structure approchée d'un puits en condition géologique. Au contraire des roches qui sont peu disponibles, du fait qu'il est nécessaire de disposer d'un carottage sur site. Par ailleurs, le lecteur trouvera une synthèse bibliographique détaillée sur les propriétés et la structure du ciment en annexe (A).

Le matériau utilisé pour réaliser le cuvelage est un acier mi-dur équivalent à celui utilisé dans les puits d'injection. Enfin, la géométrie réalisée correspond à une section de puits à une échelle réduite, voir figure **Fig.(1.7)**.

i. En pratique, on vérifie la mauvaise adhérence du ciment à l'aide d'une méthode dite *Cement Bond Log*. C'est un équipement permettant de mesurer la qualité de la liaison du ciment mis en place dans l'annulaire entre le cuvelage et la formation. Les mesures sont réalisées via des ondes soniques et/ou ultrasoniques.

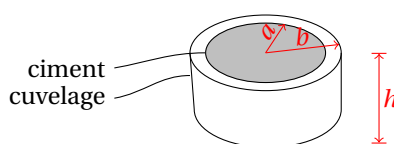


Fig 1.7. Schéma de l'éprouvette acier-ciment utilisée pour les essais. Les dimensions sont les suivantes $a=10\text{mm}$, $b=12\text{mm}$ et $h=22\text{mm}$

4.2 Préparation du ciment

On prépare la pâte de ciment suivant les normes du code API^[5], c'est-à-dire en dispersant le ciment dans l'eau, dans un mélangeur de type Waring Blendor, d'abord pendant 15 secondes à petite vitesse (4000 trs/min), puis pendant 35 secondes, à grande vitesse (12 000 trs/min).

On utilise un rapport eau/ciment égal à 0,44 pour un ciment Portland DYCKERHOFF classe G. Avec ce rapport, la quantité d'eau introduite est supérieure à la quantité d'eau stœchiométrique nécessaire à l'hydratation totale du ciment anhydre ($\text{eau/ciment} > 0,38$), Taylor (1997)^[141]. Un adjuvant anti-moussant à base de silicone NF3 est ajouté pendant le mélange. L'ajout de cet adjuvant vise à minimiser la quantité d'air occlus dans la pâte de ciment. Enfin, une agitation mécanique à 250 trs/min pendant 4 minutes permet de chasser les bulles d'air récalcitrantes.

4.3 Préparation des plots ciment-acier

Les puits sont représentés par un tube métallique rempli par un bouchon de ciment (voir **Fig.1.7**). La paroi du cuvelage est dégraissée avant de couler la pâte de ciment, dans le but d'éviter toutes pollutions qui pourraient nuire aux caractéristiques d'adhérences du ciment.

Pour être proche des conditions géologiques, on fait prendre le ciment dans des conditions de pression et de température proche de celles présentes en fond de puits, soit une température de 60 °C, et une pression de 20 bars. Pour ce faire, le ciment est maintenu dans une cellule chauffante (**Fig.1.8**) sous pression jusqu'à son durcissement. Le durcissement est atteint après une période de 15 jours, au bout de laquelle 99% des performances mécaniques sont atteintes^[30].

4.4 Effet de la température

Une augmentation de la température pendant la prise du ciment conduit à une augmentation de la cinétique d'hydratation. Ceci a pour conséquence d'augmenter légèrement la résistance mécanique de la pâte de ciment au jeune âge.^[31]



Fig 1.8. Détails du dispositif expérimental de la cellule chauffante pressurisée pour la préparation des plots de ciment.

4.5 Effet de la pression

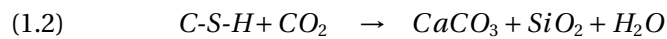
Pour rester dans conditions proches de la réalité, on tient compte de la pression de confinement pendant la prise du ciment. Toutefois, des auteurs tels que Yazici (2007)^[160], Takla (2010)^[140], et Bourissai (2010)^[30,31] s'accordent à dire que la pression pendant la prise de la pâte de ciment ne joue pas de rôle significatif sur son comportement à long terme, du moins dans la gamme des pressions étudiées.

5 Essais de vieillissement par carbonatation

La carbonatation est un phénomène naturel que subit tout matériau à base de ciment. La carbonatation des matériaux à base de ciment est un phénomène qui semble améliorer leurs propriétés (voir annexe A) telles que la résistance mécanique et la dureté augmentent, la perméabilité aux gaz et aux liquides diminue, les hydroxydes solubles sont transformés en carbonates. Cependant, dans le cas des puits pétroliers (et plus généralement dans le cas des bétons armés dans le génie civil), la carbonatation de l'an-

nulaire de ciment (ou du bouchon) mis en place supprime l'immunité dont bénéficie le cuvelage. La diminution du pH rend le milieu corrosif pour l'acier, et la formation de produits de corrosion peut apparaître, générant un état de contrainte supplémentaire à l'interface en la fragilisant d'autant plus. Ces aspects ne sont pas traités dans nos travaux malgré toute l'importance qu'ils peuvent avoir sur la tenue mécanique des interfaces ciment-acier, le lecteur pourra consulter à ce sujet Dehoux (2012)^[46].

On appelle carbonatation la réaction de neutralisation des bases par le CO₂ présent dans le milieu. Les bases présentes dans le ciment hydraté sont essentiellement l'hydroxyde de calcium Ca(OH)₂ (*portlandite*) et les silicates de calcium hydratés, représentés par la formule CSH. Les réactions chimiques de carbonatation peuvent être représentées par les équations (1.1) et (1.2) :



Les équations (1.1) et (1.2) décrivent le mécanisme réactionnel de carbonatation de Ca(OH)₂ sans décrire toutes les étapes intermédiaires de la réaction. Toutefois, on retiendra que la carbonatation du ciment s'accompagne d'une libération d'eau dite *liée* de structure, voir **Fig.(A.1)** de l'annexe (A).

5.1 Principe et description des essais

On réalise des essais de carbonatation dans différentes conditions d'humidité afin d'évaluer l'impact de celle-ci sur la qualité de l'interface cuvelage-ciment. Le premier type d'essai consiste à faire vieillir des plots de ciment (**Fig.1.7**) dans un milieu saturé en eau et en CO₂ dans une chambre thermo pressurisée, voir figure **Fig.(1.9)**. Cet essai correspond aux conditions hydriques que rencontrerait le puits pendant les premiers temps du stockage.

Le deuxième type d'essai consiste à imposer un gradient hydrique sur des échantillons vieillis (carbonatés) et sains, voir figure **Fig.(1.10)**. Cet essai de dessiccation, où l'objectif est de voir l'influence sur l'interface d'une variation importante de la teneur en eau, correspond à la phase de séchage pouvant avoir lieu au fond du puits pendant l'injectionⁱ.

i. Le CO₂ est injecté sec pendant toute la durée du stockage, forçant le système à atteindre un nouvel état d'équilibre hydromécanique.

5.2 Conditions de vieillissement en chambre thermopressurisée

Une série de 8 échantillons a été vieillie 12 semaines suivant les conditions (proches de celles régnant au fond du puits) indiquées dans le tableau (**Tab.1.1**) dans une chambre chauffante sous pressions à deux étages, voir la figure (**Fig.1.9**).

Tab 1.1. Conditions de pression et de température pour le vieillissement des plots de ciment.

pression	15 MPa (15 bars)
température	80 °C
temps de vieillissement	12 semaines
humidité relative étage 1	100%
humidité relative étage 2	>99%

Un montage est réalisé avec un support pour faire vieillir les plots cuvelages-ciments dans deux environnements de CO₂ légèrement différents : une saumure saturée en CO₂ à l'étage inférieur et une atmosphère humide saturée en CO₂ supercritique à l'étage supérieur. Cela signifie qu'à l'étage supérieur de la chambre les échantillons baignent dans une atmosphère humide, et ne sont pas immergés dans une solution saturée. L'eau n'est donc présente que sous sa forme vapeur, ce qui génère un gradient d'humidité entre l'échantillon et l'environnement.



Fig 1.9. Détails du dispositif expérimental de la chambre de vieillissement chauffante et pressurisée.

5.3 Conditions de vieillissement des échantillons en dessiccateur

L'objectif de cet essai est de qualifier l'état de dégradation à l'interface, lorsque l'assemblage cuvelage-ciment est dans un environnement saturé en CO_2 à faible humidité relative ($< 50\%$), les conditions d'environnement sont indiquées dans le tableau (**Tab.1.2**) suivant :

Tab 1.2. Conditions de pression, température et d'humidité pour les plots de ciment.

pression	0,1 MPa (1 bar)
température	22 °C
temps de vieillissement	8 semaines
ambiance humide contrôlée	33%

Les échantillons sont séparés en deux groupes A et B. Le groupe A (cf. **Fig.1.10.a**) est un groupe témoin, c'est-à-dire que l'on cherche à observer les éventuels effets sur la structure dus à la dessiccation sans la carbonatation que pourrait subir le ciment. Pour cela, les échantillons sont placés dans un dessiccateur avec une atmosphère saturée en gaz neutre (qui ne réagit pas chimiquement avec le ciment), en l'occurrence ici, de l'azote. Cela permet de découpler les effets de vieillissement des effets de séchage. Le groupe B (cf. **Fig.1.10.b**) concerne les échantillons placés dans l'environnement saturé en CO_2 .

6 Résultats

6.1 Mesures de perméabilité

Des mesures de perméabilité sur les plots de ciment sont réalisées dans le but de mesurer une éventuelle différence aux interfaces et dans le volume. Ces mesures ont été réalisées par le département de Physico-Chimie Appliquée de IFPEN^[89] avec qui j'ai travaillé en collaboration. Les résultats de ces mesures sont indiqués dans le tableau (**Tab.1.3**) suivant :

Tab 1.3. Valeurs des mesures de perméabilité (en milliDarcy, $1\text{mD}=10^{-15} \text{ m}^2$) arrondie à la partie entière la plus proche.

	Sain	Eau+ CO_2	CO_2sc
interface	1.10^{-4} mD	1.10^{-5} mD	1.10^{-1} mD
ciment	1.10^{-4} mD	1.10^{-5} mD	1.10^{-4} mD

On peut remarquer que les échantillons qui ont vieilli dans une atmosphère humide ($>99\%$ d'humidité relative à l'étage supérieur) saturée en CO_2sc sont plusieurs ordres de grandeur fois plus perméables **au niveau de l'interface** que ceux ayant vieilli dans une

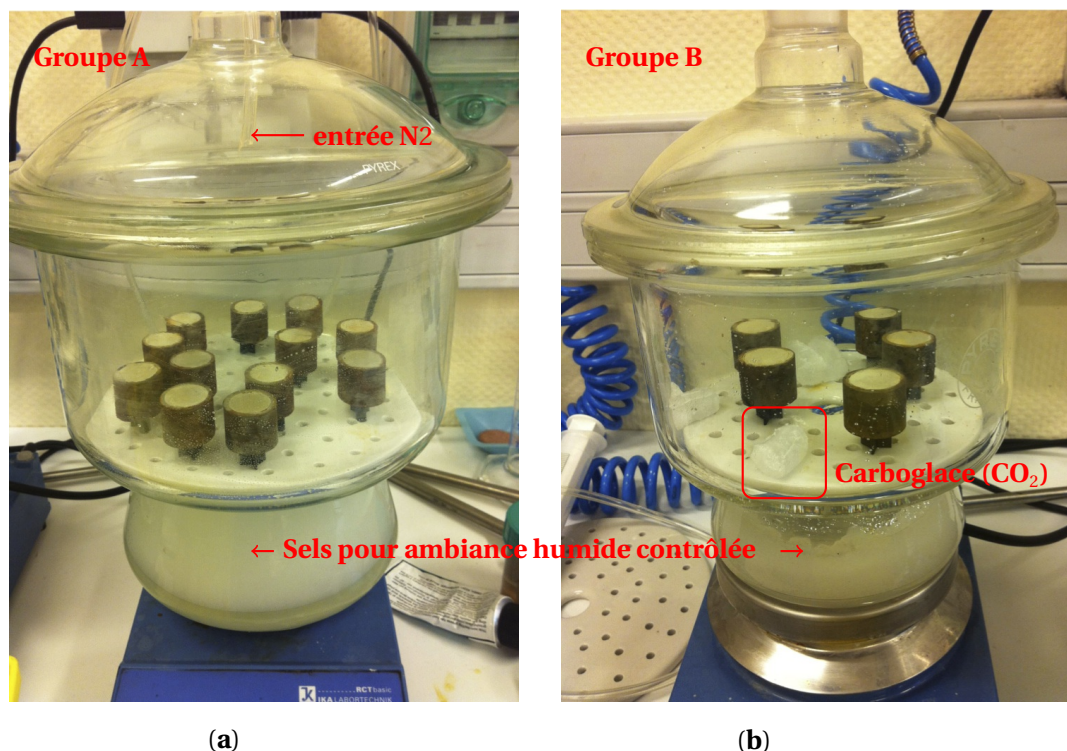


Fig 1.10. Détail du dispositif expérimental mis en place pour l'étude des phénomènes de retrait sur des échantillons cuvelage-ciment. (a) Groupe (A) Dessiccateur à atmosphère neutre saturé en azote. (b) Groupe (B) Dessiccateur à atmosphère saturé en CO₂.

saumure saturée en CO₂. La différence de teneur en eau dans l'échantillon et dans l'atmosphère a suffi à générer un retrait au niveau de l'interface. Celui-ci est imperceptible à « l'œil nu » dans le sens où il n'y a pas de fracture visible, mais suffisant pour modifier significativement la perméabilité au niveau des interfaces.

6.2 Mesures des carbonates par analyse thermogravimétrique

Afin de quantifier la teneur en carbonates dans les différentes zones de la matrice cimentaire des échantillons vieillis dans la chambre chauffante et pressurisée, une analyse thermogravimétrique (ATG) est réalisée. Après vieillissement en milieu CO₂, des coupes transverses au plot (coupe AA sur la figure (Fig.1.11)) du ciment sont faites à l'aide d'une scie à fil diamanté. L'ATG est réalisée par le département de Physico-Chimie Appliquée.



Fig 1.11. Photographie du plot cylindrique ciment/acier testé avant vieillissement.

Les résultats sont indiqués sur les figures (**Fig.1.12**) et (**Fig.1.13**). Un front d'altération net (1) sur la figure (**Fig.1.12**) est observable au niveau des surfaces libres. Il n'y a pas d'effets particuliers observés au niveau de l'interface à cette échelle de temps. La photographie (**Fig.1.13**) représente l'échantillon vieilli dans un ciel gazeux de CO_2 sc. On peut faire les observations suivantes :

- la matrice de ciment est carbonatée à différents degrés dans tout son volume ;
- la carbonatation est plus importante en intensité et en vitesse que dans le cas précédent (**Fig.1.12**), du fait de la plus grande diffusivité du CO_2 supercritique dissous dans l'eau ;
- l'ensemble du ciment est carbonaté aussi bien au niveau des surfaces libres qu'**au niveau de l'interface** qu'au cœur de la matrice ;
- la carbonatation au voisinage de l'interface montre d'après les valeurs données grâce à l'ATG, qu'elle est aussi importante que sur les surfaces libres, pourtant les plus exposées.

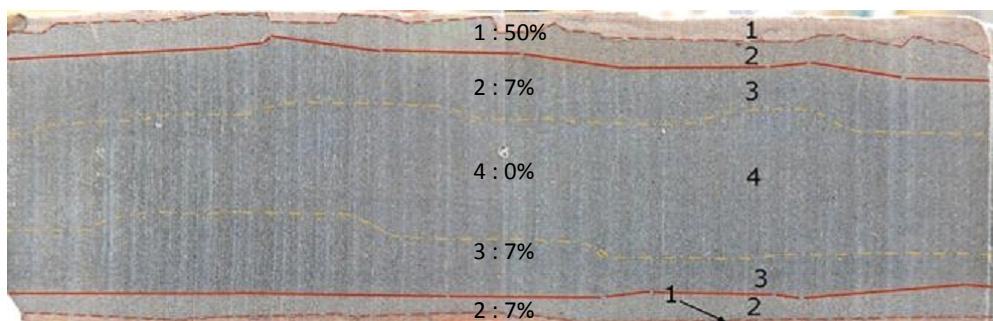


Fig 1.12. Vue du ciment dans le plan transverse du plot (coupe AA dans **Fig.1.11**) après vieillissement de 12 semaines dans une saumure saturée en CO_2 .



Fig 1.13. Vue du ciment dans le plan transverse du plot (coupe AA dans **Fig.1.11**) après vieillissement de 12 semaines dans une atmosphère humide saturée de CO_2 sc

6.3 Observation des effets de la dessiccation

On peut observer sur la photographie (**Fig.1.14a**) et (**Fig.1.14b**) un retrait net de la matrice de ciment au niveau de l'interface. Le faciès de fissuration est différent sur les échantillons ayant été séchés et carbonatés de ceux ayant été séchés dans une ambiance gazeuse neutre (azote).

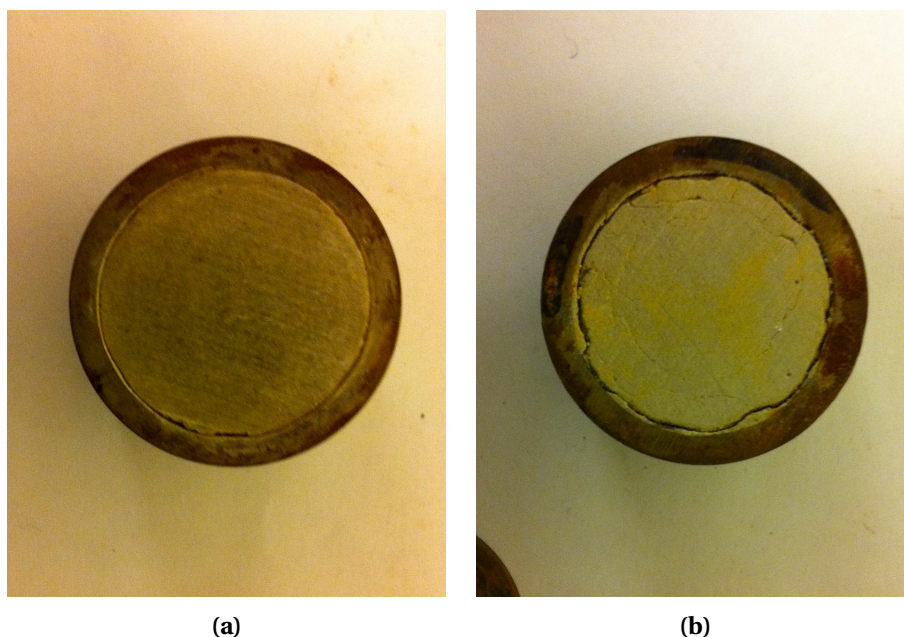


Fig 1.14. Ouverture typique des fissures induites par la dessiccation. **(a)** Un des échantillons séchés pendant 8 semaines dans un dessiccateur sous une atmosphère balayée régulièrement avec de l'azote (gaz non réactif). **(b)** Un des échantillons séchés pendant 8 semaines dans un dessiccateur sous une atmosphère saturée en CO_2 .

Les premiers effets de dégradation de la structure au niveau des interfaces apparaissent au bout de **15 jours seulement**, sous forme de fissuration. Ce temps est à mettre en regard de celui d'une dessiccation complète qui est de 3 mois pour un échantillon de

cette taille. Les conséquences du séchage sur la structure, au moins au niveau de l'interface, semblent beaucoup plus néfastes sur son intégrité que la carbonatation.

Discussion

Au regard des résultats présentés dans les sections précédentes, on peut se poser la question suivante : *quels sont les mécanismes responsables de cette décohésion ?*

La réponse à cette question peut être expliquée par le couplage *a priori* de deux phénomènes : le retrait de dessiccation et le retrait de carbonatation dont les mécanismes sont complexes et peu connus pour ce dernier. Le phénomène de retraitⁱ est un facteur très important dans la pratique, car il entraîne souvent l'apparition de fissures et des décollements aux interfaces qui dans la majorité des cas nuisent à la durabilité des structures. Dans notre contexte, la fissuration même tardive, favorisera le transport d'agents pathogènes au sein de la structure, en l'occurrence ici le long d'un puits d'injection. Ceci aura pour effet de mettre sérieusement en péril l'intégrité du puits et le confinement du CO₂ stocké. En ce qui concerne le retrait de carbonatation (observé sur la figure **Fig.**(1.13) et **Fig.**(1.14b)), les conclusions que nous faisons viennent contredire les résultats connus de Liteanu (2011)^[97] sur la carbonatation, voir figure **Fig.**(1.15). La formation de carbonates a plutôt tendance à obstruer les pores, et de ce fait à réduire la perméabilité. Néanmoins, ce phénomène aussi dit d'*auréole de transition* d'après DeSa (2007)^[47], bien connu dans certains domaines du génie civil peut nous l'expliquer. Il apparaît que la dégradation de l'interface (décohésion) est la conséquence d'un couplage de phénomènes complexes. Bien que la dessiccation et le séchage et dans une moindre mesure la carbonatation semblent être des facteurs majeurs de la défaillance d'un puits d'injection, il est délicat de hiérarchiser avec certitude les mécanismes de dégradation. Toutefois, il nous semble nécessaire de tenir compte d'une fissuration induite par des réactions hydro (chemo) mécaniques dans notre modèle.

7 Essais de cisaillement

Lors de l'étude des interfaces ciment-acier le type d'essai qui revient souvent est l'essai de cisaillement en configuration simple interface ciment-acierⁱⁱ. Cet essai est couramment utilisé dans le secteur pétrolier (et aussi dans le génie civil) pour étudier l'adhérence mécanique du ciment sur l'acier.

i. J'invite le lecteur à consulter l'annexe (A) pour plus de détails sur les phénomènes de retraits.

ii. Il existe aussi celui en double interface acier-ciment-acier

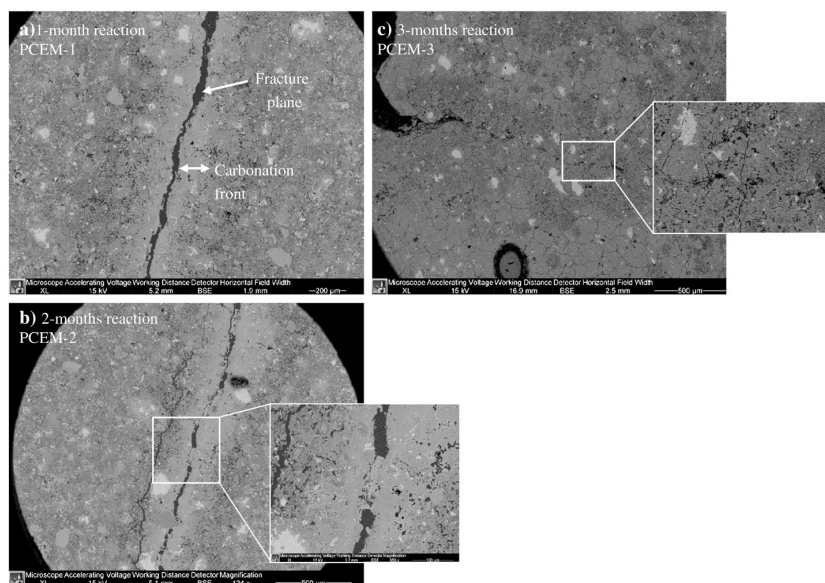


Fig 1.15. Images obtenues par *MEB* d'un échantillon ayant pris sous une pression de confinement de 30 MPa et une température de 80 °C, puis fendu. L'échantillon est ensuite baigné sous une atmosphère de CO_2 avec une pression de confinement de 10 MPa. On peut observer que la surface libre obtenue par fendage crée un front de carbonatation. Et après de 3 mois de carbonatation, un début de cicatrisation apparaît, d'après Liteanu (2011) ^[97].

7.1 Principe de l'essai

Le principe de cet essai est de solliciter l'interface ciment-acier en cisaillement en appliquant un effort axial de compression sur un échantillon cylindrique de ciment. On mesure l'effort nécessaire pour rompre le joint ciment-acier. La contrainte d'adhérence mécanique, couramment appelée dans la littérature *shear-bond strength*, est le rapport de l'effort maximal sur la surface d'adhérence. Le calcul repose sur l'hypothèse simplificatrice que la contrainte d'interface est uniformément répartie le long de l'interface.

Nous utilisons pour cette expérience le même profil d'échantillons que dans les expériences précédentes, les conditions de prise du ciment sont identiques à celles indiquées en section (4.2). Les conditions réelles de mise en place d'un ciment ne sont pas reproduites, car l'état de contrainte *in situ* n'est pas connu. Le rapport entre la hauteur de l'échantillon et le diamètre du plot vaut un. En effet, une hauteur réduite permet de réduire les phénomènes d'instabilités généralement observés sur ce genre d'expérience après la rupture du joint ciment-acier, d'après les essais effectués par Kenga (2005) ^[82]. Un des avantages de cet essai est la connaissance de la surface frottante en fin d'essai. Ce qui est un paramètre essentiel des modèles interfaciaux reposant sur une contrainte de cisaillement critique ou sur un coefficient de frottement. On souhaite caractériser l'interface ciment-acier pour des échantillons sains et des échantillons vieillis. Pour la

caractérisation d'interface des échantillons vieilliss, nous utilisons ceux présentés en section (5.3).

7.2 Description de l'essai

L'appareillage (cf. **Fig.1.16a**) utilisé pour les essais est une machine électromécanique de traction-compression INSTRON modèle 5568. La machine est constituée d'une armature fixe et d'une traverse inférieure mobile qui se déplace verticalement le long de deux vis sans fin par une force électromécanique. Le dispositif d'étude d'adhérence repose sur un plateau circulaire fixé à la traverse. Le dispositif d'étude d'adhérence en acier mi-dur a été développé de manière à imposer une sollicitation axisymétrique sur l'échantillon de ciment. Il est constitué d'un support sur lequel repose l'éprouvette, d'un guide et d'une tige d'acier à fond plat. Avant de commencer l'essai, on remonte légèrement la traverse de façon à amener le dispositif en butée contre un cube fixé à la machine. Cette opération induit une légère précharge sur l'échantillon de ciment. Cette précharge permet de rattraper les éventuels jeux au niveau des systèmes de fixation. Les efforts sont enregistrés par une cellule de force INSTRON de 50 kN. Cette cellule est située sur la partie haute du bâti. Les déplacements sont enregistrés par un capteur logé à l'intérieur de la partie basse du bâti. Il mesure le déplacement relatif de la traverse mobile. Le logiciel utilisé pour l'acquisition des données est Bluehill®. Il nous permet de fixer les paramètres de l'essai tels que les paramètres de pilotage (rampe de vitesse de déplacement), les limites à ne pas dépasser pour ne pas dégrader les capteurs. Le logiciel gère également de façon automatique l'étalonnage de la machine.

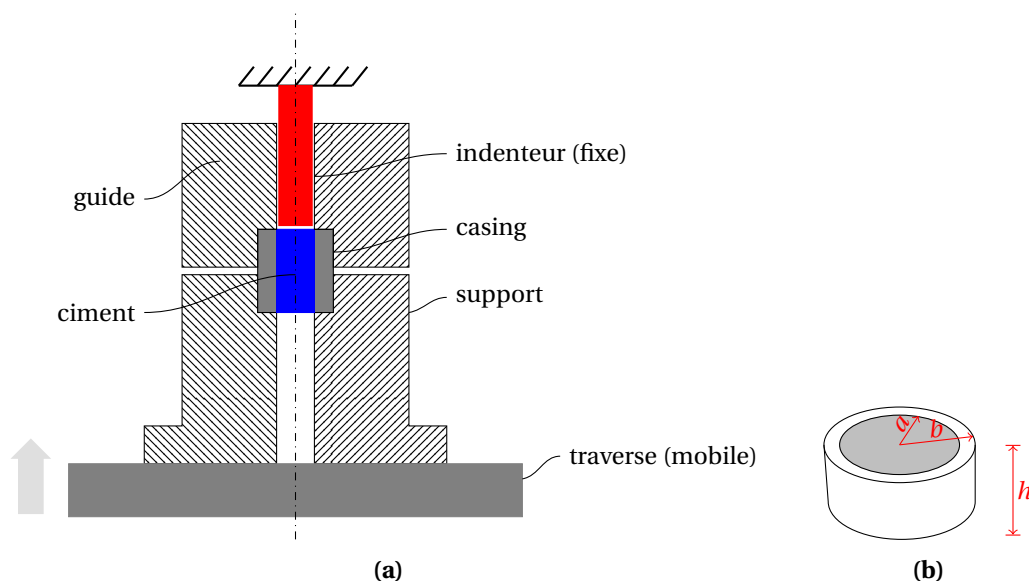


Fig 1.16. (a) Représentation schématique du dispositif utilisé pour l'essai de cisaillement. **(b)** Plot de ciment utilisé pour le test d'adhérence avec $a=10\text{mm}$, $b=12\text{mm}$ et $h=22\text{mm}$.

8 Résultats

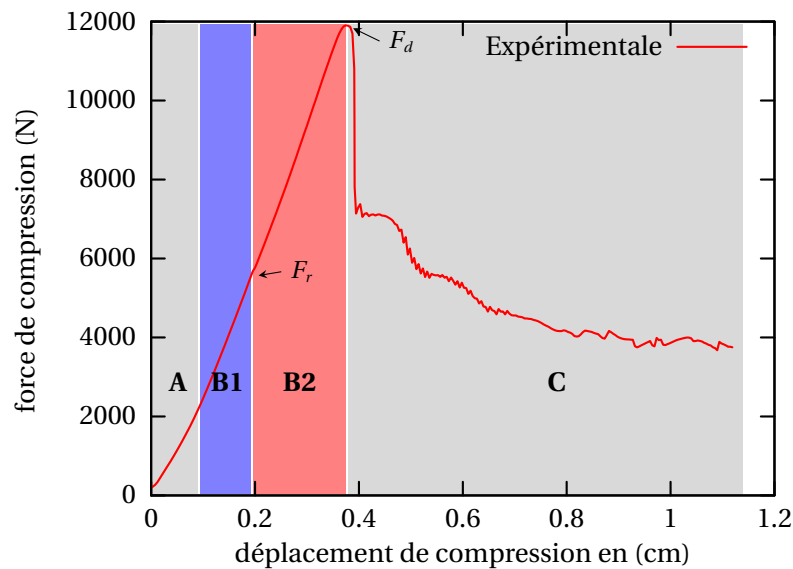
Les essais de cisaillement ont été réalisés sur deux types d'échantillons : des échantillons sains et les échantillons présentés en section (5.3), précisément ceux du groupe A et du groupe B.

Interface saine • Sur la figure **Fig.(1.17)** est illustré une courbe effort-déplacement obtenue après l'essai de cisaillement. On peut distinguer quatre phases caractéristiques notées **A**, **B1**, **B2** et **C** sur cette figure qui sont interprétées dans le tableau **Tab.1.4**. Dans le chapitre (4), un modèle de zone de cohésive sera utilisé pour reproduire le comportement d'une interface ciment-acier. On s'affranchira de la phase **A** (partie non linéaire) pour valider la simulation qui sera confrontée à ce résultat.

Interfaces vieilles • Les essais de cisaillement sur les interfaces vieilles n'ont malheureusement pas donnés de résultats exploitables. Toutes les interfaces du groupe A et B ont cédées au tout début de la phase **A**, ne laissant alors qu'un plateau résiduel de frottement lors de l'acquisition. On peut conclure que dans le cadre de nos essais, le séchage avec ou sans la carbonatation anéantit complètement la tenue mécanique des interfaces ciment-acier.

Tab 1.4. Interprétation des différentes phases de comportement identifiées après l'essai de cisaillement.

phase A	Phase non linéaire correspondant à la mise en charge initiale de l'échantillon du ciment et du dispositif d'essai.
phase B1	Pente linéaire élastique jusqu'à un effort critique de décohésion noté F_d , à partir duquel une décohésion interfaciale et un changement de pente ont lieu.
phase B2	Augmentation continue du chargement jusqu'à l'effort de rupture noté F_r . Cette augmentation traduit la propagation du front de fissuration le long de l'interface.
phase C	Changement de pente brutale après la décohésion complète de l'interface. Cette chute s'accompagne d'une phase de frottement plus ou moins instables.

**Fig 1.17.** Courbe de réponse de l'interface acier-cisaillement pour l'essai de cisaillement sur un échantillon à matrice cimentaire saine.

Conclusion

Ce chapitre a tenté de montrer la multiplicité des facteurs pouvant être à l'origine des mécanismes de dégradation de l'interface. Les mesures de perméabilités et d'ATG ont révélé qu'une très faible variation hydrique, suffisait à générer des déformations différées, donc un décollement aux interfaces propice à la migration de CO_2 . Nous avons vu à travers les expériences de carbonatation et de dessiccation que le problème de fissuration dans les interfaces et dans le volume pouvait être en partie expliqué, par les phénomènes de retrait gênés (déformations différées). Dans ce cas-là, le retrait de carbonatation semble exacerber le retrait de dessiccation en accélérant le séchage de la

gaine de ciment. De plus, cette fissuration ne se limite pas à une décohésion à l'interface puisqu'elle se propage à cœur où l'on décèle un halo de fissures circonférentielles. À notre connaissance, l'implication des déformations différées dans la défaillance des puits d'injection n'apparaît pas pour l'instant dans la littérature.

Dans ce contexte, il est raisonnable de penser que ce sont des interactions fortes hydro-chemo-mécanique en la présence de forts gradients hydriques et de pressions qui sont les causes premières d'une fissuration induite aux interfaces et dans le volume. Il est donc assez incertain que l'objectif de modéliser la réaction de carbonatation et de dessiccation soit suffisant pour prédire la dégradation de la zone proche puits, ni même atteignable. Nous pensons que la bonne façon de procéder est plutôt de tenir de compte dans un premier temps des conditions de pression et éventuellement dans un second temps de la température pendant l'opération d'injection du fluide. En effet, ces gradients de pression conditionnent la pérennité du site de stockage géologique à l'échelle puits-réservoir dans la mesure où une pression d'injection trop élevée peut très facilement fracturer le milieu proche puits. La pression d'injection doit être supérieure à celle du réservoir pour pouvoir injecter sans excéder ni la résistance mécanique de la roche ni celle des interfaces présentes dans le puits. Un critère difficile à respecter dans la réalité.

Ces effets de gradient de pression liés à l'injection de CO_2 font partie des premières sollicitations que voit le milieu proche puits. C'est pourquoi nous pensons qu'établir un modèle multiphysique tenant compte des effets de la pression permettra de mieux saisir les différents phénomènes impliqués dans la dégradation du milieu proche puits pendant les premiers temps du stockage géologiqueⁱ. Pour ce faire, le formalisme de la mécanique des milieux poreux est le plus adapté pour mener à bien notre étude, et dispose d'outils théoriques permettant de décrire mécaniquement l'état de contrainte du milieu. L'injection de CO_2 provoque une augmentation de la pression de pore et de la contrainte effectiveⁱⁱ pouvant induire une fissure que nous cherchons à modéliser. Un premier travail de modélisation des écoulements essentiellement diphasique dans un milieu poreux déformable est nécessaire pour comprendre l'impact de l'injection sur l'état de contrainte du milieu, à l'échelle du puits. Les problèmes liés aux phénomènes de déformations différées et de séchage identifiés dans ce chapitre pourront venir enrichir notre modèle dans une étude future.

i. C'est-à-dire les premières dizaines d'années.

ii. Au sens de la mécanique des milieux continus.

2 | L'approche choisie : modélisation multiphasique d'un milieu poreux

Sommaire

	Introduction	34
1	Notion de contrainte effective en poroélasticité	35
2	Une approche micro-macro de modélisation de milieu poreux multiphasiques . . .	37
2.1	Choix du volume élémentaire représentatif	38
2.2	Opérateurs de moyennes	39
2.3	Équations génériques de bilan microscopique	39
2.4	Équations génériques de bilan macroscopique	40
2.5	Cinématique d'un milieu poreux à l'échelle macroscopique	41
3	Équations de conservation	44
3.1	Équations de conservation macroscopique de la masse	44
3.2	Équation de conservation de la quantité de mouvement	46
4	Équations constitutives	51
4.1	Loi d'état de la phase solide	52
4.2	Loi de comportement de la phase solide	53
4.3	Loi d'état de phase fluide	54
4.4	Loi de Darcy	54
4.5	Notions de pression capillaire et de saturation	55
4.6	Modèles de saturation et de perméabilité	56
5	Formulation du problème de poroélasticité en milieu multiphasique	59
5.1	Équations de champs	59
5.2	Équation de champs en pression	60
5.3	Conditions aux limites	62
5.4	Conditions initiales	63
5.5	Formulation forte du problème	63
	Conclusion	64

Introduction

On a présenté dans le chapitre précédent un scénario de dégradation plausible de la zone proche puits, notamment au niveau des interfaces pendant une phase d'injection de gaz, où l'on a choisi de travailler pour la suite sur la prise en compte des gradients de pression. Dans ce chapitre, nous souhaitons établir la représentation mathématique des phénomènes identifiés dans le chapitre 1. Le but visé est d'arriver à une modélisation simple de l'écoulement de deux phases fluidesⁱ dans un milieu poroélastique fragile.

La mécanique des milieux poreux offre pour cela un cadre particulièrement adapté. Il existe actuellement deux démarches de modélisation. L'une dite macroscopique, dont les travaux de Terzaghi^[143] et Biot^[23,24,25] font référence, consiste à modéliser le milieu poreux comme la superposition d'un milieu continu fluide et d'un milieu continu solide. Dans la lignée de leurs travaux, Coussy (1991, 2004)^[43,44] s'est attaché à proposer un formalisme unifié à partir d'une approche thermodynamique. L'autre voie dite microscopique se propose par une démarche de changement d'échelles et grâce aux techniques d'homogénéisation de formuler les lois de conservation macroscopique. La microporomécanique qui s'inscrit dans cette voie permet de tenir compte de la présence de fluide sous pression dans les pores avant d'évaluer les propriétés mécaniques moyennes du milieu hétérogène, voir Kondo, Dormieux et Ulm (2006)^[49]. Pour notre modèle nous avons choisi de nous inspirer des travaux Schrefler et Lewis (1998) dont les bases sur la théorie des moyennesⁱⁱ ont été posées par Hassanizadeh et Gray (1978-1983)^[74,75,76,68] et Whitaker (1986)^[151,152,153]. Ces auteurs ont développé un modèle complet permettant de représenter les couplages hydromécaniques à partir de règles de moyennes à l'échelle microscopique. L'objectif de ce chapitre — en reprenant les principales étapes de la démarche proposée par Schrefler et Lewis — est de présenter les outils théoriques nécessaires pour formuler les lois de conservations macroscopiques. Ce sont pour la plupart des outils de mécanique classique que nous avons adaptés à notre problème. Ces outils permettront d'établir les équations de champs qui nous serviront à écrire les formulations variationnelles du chapitre 3. Le but poursuivi étant de proposer un outil de simulation multiphasique pratique et opérationnel.

La première étape de ce chapitre est de rappeler quelques notions classiques de milieu poreux. On exposera ensuite le formalisme théorique des équations à l'échelle microscopique permettant de prendre en compte la présence de plusieurs phases dans le

i. On suppose un fluide newtonien et compressible.

ii. La théorie des moyennes présente de nombreux points communs avec la théorie des mélanges lorsque l'on se place à l'échelle macroscopique, elle est d'ailleurs souvent présentée sous le nom de « *hybride mixture theory* ». Le lecteur trouvera des présentations très complètes dans les références suivantes : Truesdell (1960, 1984)^[146,145], Bowen (1976, 1982)^[32,33], Bear et Bachmat (1990)^[19], de Boer (1996)^[28]

milieu considéré. Pour passer à l'échelle macroscopique, on fera l'usage d'opérateurs de moyennes qui nous autoriserons d'écrire les équations de champs pour chaque phase. Cette démarche nous semble la plus pragmatique dans le cadre de la thèse, car elle permet d'établir les principales lois de transport ou de transfert sans avoir à introduire trop d'hypothèses en dehors des principes fondamentaux de la dynamique et de la thermodynamique.

1 Notion de contrainte effective en poroélasticité

Pour les contraintes effectives, on a généralement recours à une approche phénoménologique. En effet, en mécanique des sols il est habituel de formuler le comportement du squelette solide en *contrainte effective*, autrement dit de faire l'hypothèse que la déformation (élastique) du squelette est reliée au tenseur des contraintes effectives σ' . Le tenseur des contraintes effectives a été conceptuellement introduit par les travaux de Terzaghi (1925, 1943) ^{[142], [143]} reposant uniquement sur des observations expérimentales. Pour interpréter cette définition il convient alors de voir le milieu poreux considéré comme la superposition d'un milieu continu solide et d'un milieu continu fluide, où la pression du fluide interstitiel, dit aussi pression de pore, est définie en tout point du milieu continu associé. Concrètement, il est important de retenir que ce tenseur de contrainte est donné par une fonction de la seule déformation du squelette ε , et non par une fonction de ε et de la pression de pore p . En utilisant la convention de la mécanique des milieux continus solides pour laquelle la compression est négative, l'expression de la contrainte effective est :

$$(2.1) \quad \sigma' = \sigma + pI,$$

où σ est le tenseur de contrainte totale, I le tenseur identité et p la pression de pore. Biot (1956) ^[25] a constaté lors de ses travaux sur la propagation des ondes dans les milieux poreux que l'influence de la pression sur le comportement macroscopique est régie par une variable supplémentaire écrite sous forme tensorielle, appelée aujourd'hui tenseur de Biot B . Cette variable de couplage hydromécanique modifie alors l'équation (2.1) de la manière suivante :

$$(2.2) \quad \sigma' = \sigma + Bp.$$

Dans le cadre de la poroélasticité linéaire, B est un tenseur constant, et dans le cas singulier où le solide qui constitue le squelette est incompressible, on peut établir (Coussy (1991) ^[43]) que le tenseur B est égal au tenseur identité. On retrouve alors le tenseur des contraintes effectives initialement introduit par Terzaghi $\sigma + pI$. Dans la relation (2.2),

le tenseur de Biot $\mathbf{B}$ est remplacé par un tenseur sphérique $b\mathbf{I}$ dès lors que le matériau est supposé isotrope, la relation (2.2) se réécrit dans ce cas :

$$(2.3) \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + bp\mathbf{I},$$

où l'on interprète physiquement le terme b comme le rapport du module de compressibilité du milieu poreux K_t sur le module de compressibilité du squelette K_s , tel que :

$$(2.4) \quad b = 1 - \frac{K_t}{K_s}.$$

La valeur du coefficient de Biot b est comprise entre 0 et 1 suivant les propriétés élastiques du milieu.

Ce concept a été étendu par Bishop (1959)^[26] aux milieux poreux non saturésⁱ, en écrivant la pression de pore comme une somme pondérée par un paramètre χ des pressions exercées par chacune des phases en présence dans le milieu, tel que :

$$(2.5) \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \chi p_w + (1 - \chi) p_g.$$

Il existe de nombreuses expressions pour χ . La manière la plus répandue est alors d'exprimer χ en fonction du degré de saturation en eau S_w , tel que :

$$(2.6) \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + S_w p_w + (1 - S_w) p_g.$$

L'idée de contrainte effective, concept de base en mécanique des sols modernes, est aujourd'hui peut-être la notion la plus controversée pour son utilisation dans les milieux poreux non saturés. Des travaux ultérieurs comme ceux de Lloret & Alonso (1980)^[98], Alonso & Gens (1990)^[4] pour les plus récents, ont révisé et relativisé partiellement le concept de contrainte effective, en introduisant plutôt la notion de surfaces d'état. Néanmoins, la définition utilisée de la contrainte effective reste *légitime* pour des milieux poreux multiphasiques, ou autrement dit pour des milieux restant saturés par un fluide en tout point x et à chaque instant t .

Plusieurs modèles physiques sont proposés dans la littérature pour des conditions saturées, tandis que peu d'approches existent (voir Vlahinic (2009,2011)^[150,149]) pour des conditions non saturées. En effet, la plupart des approches reposent sur des hypothèses simplificatrices telles qu'un squelette rigide Rethoré (2008)^[125], ou une phase gazeuse

i. Le concept étant introduit en premier en hydrologie, on parle alors toujours de milieux non saturés en eau.

statique pour la gestion d'un écoulement dans un milieu fracturé.

2 Une approche micro-macro de modélisation de milieu poreux multiphasiques

Le principe dans cette partie est de considérer le milieu poreux à l'échelle macroscopique comme un milieu multiphasique. En d'autres termes, la matière occupant une fraction de volume est représentée comme une superposition de plusieurs particules matérielles occupant le même point géométrique au même instant. Pour notre étude, cela correspond à trois phases : une phase solide qui constitue le réseau poreux et deux phases fluides occupant cet espace poreux. Une première étape de cette démarche consiste à écrire les lois de conservation pour chaque phase α , où α est un symbole générique pouvant désigner l'une des trois phases. Les lois macroscopiques résultent de prise de moyennes des équations microscopiques faites sur ce v.e.r. (voir **Fig.2.1**).

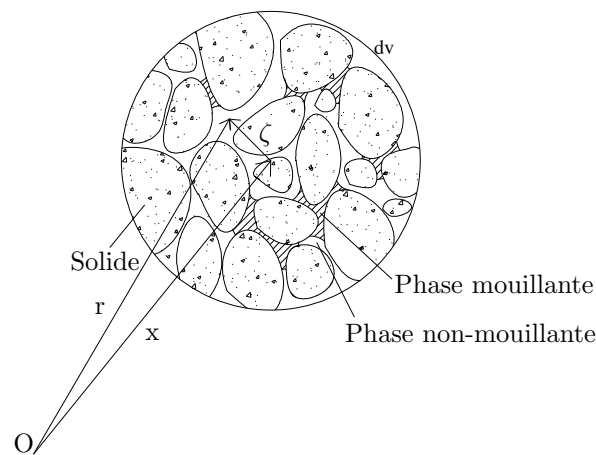


Fig 2.1. Volume représentatif du milieu multiphasique.

Nous supposerons dans toute la suite qu'il n'y pas d'échange de masse entre les phases du milieu poreux. En d'autres termes que le squelette n'échange pas de matière avec les fluides en présence et que les écoulements sont non miscibles. Les évolutions sont supposées indépendantes de la température T .

2.1 Choix du volume élémentaire représentatif

On considère un système multiphasique occupant un volume V , et borné par une surface S . Les phases occupent alors un volume V_α et sont liées à V par :

$$(2.7) \quad \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha = V.$$

Pour la construction du modèle à l'échelle macroscopique, on introduit la notion classique de volume élémentaire représentatif (v.e.r). Dans un système de coordonnées global, la position du centre du v.e.r est définie par un vecteur position $\underline{x}$ tandis que la position d'un volume élémentaire microscopique dv_m est définie par un vecteur $\underline{r}$. On note dv_α le volume dans le v.e.r de centre $\underline{x}$ de la phase α , et le concept de volume occupé par une phase dans un v.e.r est défini en introduisant la notion de fonction de distribution ξ_α ⁱ telle que :

$$(2.8) \quad \xi_\alpha(\underline{r}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{r} \in dv_\alpha \\ 0 & \text{si } \underline{r} \in dv_\beta \end{cases} \quad \forall \alpha \neq \beta.$$

$$(2.9) \quad dv_\alpha(\underline{x}, t) = \int_{dv} \xi_\alpha(\underline{r}, t) dv_m.$$

De la même manière nous écrivons l'élément de surface ds_α de la région occupée par α dans le VER de surface ds :

$$(2.10) \quad ds_\alpha(\underline{x}, t) = \int_{ds} \xi_\alpha(\underline{r}, t) ds_m.$$

Connaissant dv , on peut alors introduire le concept de fraction volumique, noté ϕ_α , lequel est fondamental dans la description des systèmes multiphasiquesⁱⁱ :

$$(2.11) \quad \phi_\alpha(\underline{x}, t) = \frac{dv_\alpha}{dv} = \frac{1}{dv} \int_{dv} \xi_\alpha(\underline{r}, t) dv_m,$$

avec

$$(2.12) \quad \sum_{\alpha=1}^N \phi_\alpha = 1.$$

i. On notera que ξ_α n'est pas définie aux interfaces.

ii. C'est aussi un des concepts à la base de la théorie des mélanges.

2.2 Opérateurs de moyennes

Les grandeurs moyennes sont liées aux quantités microscopiques à travers des opérateurs de moyennes. Hassanizadeh et Gray (1980)^[74] en proposent plusieurs, à partir d'un certain nombre de considérations physiques :

- i. si une opération de moyenne prévoit une intégration, alors l'intégrand qui est multiplié par l'élément infinitésimal de l'intégration, doit être une grandeur extensive ;
- ii. les grandeurs macroscopiques doivent exactement correspondre au total de leurs équivalents microscopiques ;
- iii. la signification de grandeur physique, au sens de la mécanique des milieux continus, doit être conservée pour les grandeurs macroscopiques correspondantes ;
- iv. la valeur moyenne d'une grandeur microscopique doit être le plus proche possible de celle observée ou mesurée dans un contexte expérimental.

Pour respecter ces conditions, Hassanizadeh et Gray (1980)^[74] proposent deux opérateurs de moyenne dont le premier est noté $\langle \cdot \rangle_\alpha$ et définit l'opérateur de moyenne du volume apparent tel que :

$$(2.13) \quad \langle \zeta \rangle_\alpha(\underline{x}, t) = \frac{1}{dv} \int_{dv} \zeta(\underline{r}, t) \xi_\alpha(\underline{r}, t) dv_m,$$

et le second décrit la moyenne intrinsèque du volume notée $\langle \cdot \rangle^\alpha$:

$$(2.14) \quad \langle \zeta \rangle^\alpha(\underline{x}, t) = \frac{1}{dv_\alpha} \int_{dv} \zeta(\underline{r}, t) \xi_\alpha(\underline{r}, t) dv_m.$$

2.3 Équations génériques de bilan microscopique

Pour obtenir le système d'équations aux dérivées partielles d'un système microscopique, on suit la démarche proposée par Hassanizadeh et Gray (1980) qui consiste à se servir d'une variable de description générique pour l'échelle microscopique. Pour une variable générique intensive ψ , l'équation de conservation dans une phase α peut s'écrire :

$$(2.15) \quad \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\psi \underline{\dot{r}}) - \text{div} \underline{\dot{i}} - \rho \underline{\dot{f}} = \rho Q,$$

où $\underline{\dot{r}}$ est la valeur locale du champ de vitesse de la phase α en un point fixe de l'espace, et $\underline{\dot{i}}$ le vecteur flux associé à ψ , $\underline{\dot{f}}$ les « efforts extérieurs » associés à ψ , ρ la masse volumique et Q le taux de production de ψ . L'équation (2.15) est une forme générique des lois de conservations. Les différentes lois de conservation se retrouvent en remplaçant chaque grandeur par la bonne quantité à la manière de ce qui est illustré dans le tableau **Tab.(2.1)**.

Tab 2.1. Relations entre les grandeurs et les lois de conservations microscopiques, voir Hassani-zadeh (1979) ^[75].

grandeurs	ψ	$\mathbf{i}$	f	Q
conserv. masse	1	$\underline{0}$	0	0
conserv. mouvement	$\underline{v}$	$\underline{\sigma}_m$	g	0

À l'interface entre deux phases α et β , la condition de continuité s'écrit :

$$(2.16) \quad [\rho\psi(\underline{w} - \dot{\underline{r}}) + \underline{i}]_{\alpha} \cdot \underline{n}_{\alpha\beta} + [\rho\psi(\underline{w} - \dot{\underline{r}}) + \underline{i}]_{\beta} \cdot \underline{n}_{\beta\alpha} = 0,$$

avec $\underline{w}$ la vitesse de l'interface, $\underline{n}_{\beta\alpha}$ le vecteur normal unitaire orienté de la phase β vers la phase α , et où :

$$(2.17) \quad \underline{n}_{\alpha\beta} = -\underline{n}_{\beta\alpha}.$$

$[\cdot]_{\alpha}$ indique que ce terme doit être calculé en fonction de la phase α . Aucune propriété thermodynamique ne sont attribuées aux interfaces α et β , ce qui n'exclut pas la possibilité d'avoir des échanges de masse, moment ou énergie entre les phases. De plus, l'équilibre thermodynamique est supposé.

2.4 Équations génériques de bilan macroscopique

L'équation générale de bilan macroscopique peut-être obtenue à partir de l'équation (2.15) de la manière suivante :

$$(2.18) \quad \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha}) \right] dV - \int_S (\langle \rho \rangle_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha}) \bar{\underline{v}} \cdot \underline{n} dS - \int_S [\bar{\underline{i}}_{\alpha} \cdot \underline{n}] dS - \int_V (\langle \rho \rangle_{\alpha} \bar{\underline{f}}_{\alpha}) dV - \int_V [\langle \rho \rangle_{\alpha} (e^{\alpha}(\rho\psi) + I_{\alpha})] dV = \int_V [\langle \rho \rangle \bar{Q}_{\alpha}] dV,$$

en considérant que

$$(2.19) \quad \int_V \sum_{\alpha} [\langle \rho \rangle_{\alpha} (e^{\alpha}(\rho\psi) + I_{\alpha})] dV = 0 \quad \forall \underline{x} \in V$$

avec $\bar{\underline{i}}_{\alpha}$ et $\bar{\underline{f}}_{\alpha}$, respectivement le vecteur flux de surface et des forces extérieures associées à $\bar{\psi}_{\alpha}$ qui est défini comme :

$$(2.20) \quad \bar{\psi}_{\alpha} = \frac{1}{\langle \rho \rangle_{\alpha} dV} \int_{dV} \rho \psi \xi_{\alpha} dv.$$

Et $\langle \rho \rangle_{\alpha}$ la valeur moyenne de la masse volumique apparente sur le volume défini par :

$$(2.21) \quad \langle \rho \rangle_{\alpha} = \frac{1}{dV} \int_{dV} \rho \xi_{\alpha} dv_m.$$

I_α et $e^\alpha(\rho\psi)$ sont deux termes d'interaction entre les phases. I_α est dû aux interactions mécaniques entre les phases (équation 2.22) tandis que $e^\alpha(\rho\psi)$ décrit les possibles échanges de masse entre les phases, par exemple par un changement de phase.

$$(2.22) \quad I_\alpha = \frac{1}{\langle \rho \rangle_\alpha dV} \sum_{\alpha \neq \beta} \int_{ds^{\alpha\beta}} \underline{n}_{\alpha\beta} \cdot \underline{i} \, ds_m.$$

$\bar{Q}_\alpha$ est le taux de production lié à $\bar{\psi}_\alpha$. On peut écrire sous certaines conditions de régularité, la forme différentielle de l'équation de bilan (2.18) :

$$(2.23) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle_\alpha \bar{\psi}_\alpha) + \text{div}(\langle \rho \rangle_\alpha \bar{\psi}_\alpha \underline{\bar{v}}) - \text{div} \underline{i} \alpha - \langle \rho \rangle_\alpha [\bar{f}_\alpha + e_\alpha(\rho\psi) + I_\alpha] = \langle \rho \rangle_\alpha \bar{Q}_\alpha \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

en considérant toujours que :

$$(2.24) \quad \sum_\alpha \langle \rho \rangle_\alpha [\bar{f}_\alpha + e_\alpha(\rho\psi) + I_\alpha] = 0 \quad \forall \underline{x} \in V.$$

Les équations de bilan microscopique (2.15) et macroscopique (2.18) font chacune référence à une échelle de description différente, le changement d'échelles correspond aussi à un changement de variable suivant que l'on dérive ou que l'on intègre.

2.5 Cinématique d'un milieu poreux à l'échelle macroscopique

D'après le formalisme que nous avons choisi, le milieu poreux multiphasique peut être considéré comme la juxtaposition de toutes les phases α . On donne dans la suite quelques éléments classiques de cinématique nécessaires à l'établissement des équations macroscopiques de conservation. À l'instant t , dans la configuration dite actuelle, les points matériels repérés par $\underline{X}^\alpha$ occupent tous en même temps le point géométrique de coordonnées $\underline{x}$.

D'un point de vue lagrangien, dans une configuration dite de référenceⁱ, chaque point $\underline{x}^\alpha$ au temps t est fonction de sa position par rapport à une configuration de référence $\underline{X}^\alpha$ à l'instant t , tel que :

$$(2.25) \quad \underline{x}^\alpha = \underline{x}^\alpha(\underline{X}^\alpha, t).$$

On suppose que cette application est continûment différentiable par rapport aux variables d'espace et par rapport au temps, et qu'elle reste bijective pour toute valeur de t fixée. Le tenseur gradient de transformation $\underline{F}^\alpha(\underline{X}, t)$ s'exprime à travers les relationsⁱⁱ

i. On adoptera la convention suivante : un opérateur de dérivation spatiale s'appliquant aux coordonnées spatiales $\underline{x}$ (resp. $\underline{X}$) sera désigné par une minuscule (resp. une majuscule), c'est-à-dire que l'opérateur divergence et gradient seront notés div et grad (resp. Div et Grad).

ii. Ces relations sont aussi appelées *formule de transport*.

suivante :

$$(2.26) \quad d\underline{x} = \mathbf{F}^\alpha \cdot d\underline{X} \quad \text{où} \quad \mathbf{F}^\alpha = \text{Grad } \underline{x}^\alpha.$$

On appelle $\mathbf{J}^\alpha(\underline{X}, t)$ le *jacobien de la transformation géométrique*, lequel est défini comme étant le déterminant du tenseur gradient de la transformation $\mathbf{F}^\alpha(\underline{X}, t)$. Compte tenu de la propriété d'inversibilité de (2.25), on a :

$$(2.27) \quad \underline{X}^\alpha = \underline{X}^\alpha(\underline{x}^\alpha, t).$$

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, il est nécessaire de préciser à quelle phase on s'intéresse, par exemple au fluide ou au squelette. Dans le cas d'un milieu multiphasique, il faut considérer le fait que chaque phase est animée d'une cinématique différente. La dérivée particulaire est l'outil mathématique idoine pour calculer la variation d'une grandeur physique attachée à une phase du milieu continu que l'on suit. On définit donc une dérivée particulaire pour chaque phase. La dérivée particulaire qui suit la phase α est notée D^α/Dt .

Par définition de la dérivée particulaire d'une grandeur scalaire continûment différentiable $f^\alpha(\underline{x}, t)$, en suivant la phase α dans son mouvement, la dérivée matérielle de $f^\alpha(\underline{x}, t)$ est donnée par :

$$(2.28) \quad \frac{D^\alpha f^\alpha}{Dt} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} + \underline{\text{grad}} f^\alpha \cdot \underline{v}^\alpha$$

où $\underline{v}^\alpha$ est la vitesse de la phase α donnée en description eulérienne et notée $\underline{v}^\alpha = \underline{v}^\alpha(\underline{x}^\alpha, t)$. Si l'on s'intéresse maintenant à la dérivée particulaire de $f^\alpha(\underline{x}, t)$ relativement à la phase *beta*, cela s'écrit :

$$(2.29) \quad \frac{D^\beta f^\alpha}{Dt} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} + \underline{\text{grad}} f^\alpha \cdot \underline{v}^\beta$$

On vient d'expliciter la variation par rapport au temps de la grandeur $f^\alpha(\underline{x}, t)$ en suivant la phase β dans son mouvement. L'étape suivante consiste à faire apparaître naturellement la notion de vitesse relative. Ceci s'introduit aisément en retranchant l'équation (2.29) à (2.28), il en résulte alors l'expression suivante pour la dérivée particulaire :

$$(2.30) \quad \frac{D^\beta f^\alpha}{Dt} = \frac{D^\alpha f^\alpha}{Dt} + \underline{\text{grad}} f^\alpha \cdot \underline{v}^{\beta\alpha}$$

où

$$(2.31) \quad \underline{v}^{\beta\alpha} = \underline{v}^\beta - \underline{v}^\alpha.$$

$\underline{v}^{\beta\alpha}$ est la vitesse de la phase β relative à la phase α , aussi appelée vitesse de diffusion^[76].

On s'intéresse maintenant aux variations d'une intégrale définie sur un volume V_t que l'on suit dans le mouvement d'une phase constituant le milieu multiphasique. Si l'on écrit la dérivée particulaire de l'intégrale de la grandeur scalaire f^α , on obtient l'expression suivante :

$$(2.32) \quad \frac{d}{dt} \int_{V_t} f^\alpha dV = \int_{V_t} \left[\frac{\partial f^\alpha}{\partial t} + \text{div}(f^\alpha \underline{v}^\alpha) \right] dV.$$

Considérons maintenant que $\underline{f}^\alpha$ est une grandeur physique vectorielle, l'expression de son intégrale s'écrit :

$$(2.33) \quad \frac{d}{dt} \int_{V_t} \underline{f}^\alpha dV = \int_{V_t} \left[\frac{\partial \underline{f}^\alpha}{\partial t} + \text{div}(\underline{f}^\alpha \otimes \underline{v}^\alpha) \right] dV = \int_{V_t} \left(\frac{\partial \underline{f}^\alpha}{\partial t} + \underline{v}^\alpha \cdot \text{grad} \underline{f}^\alpha + \underline{f}^\alpha \text{div} \underline{v}^\alpha \right) dV.$$

Dans le cadre de la théorie des milieux poreux, il est habituel de décrire l'écoulement des phases fluides en termes de vitesses relatives au squelette. Le mouvement de la phase de fluide occupant le domaine dV_t est décrit par rapport à la phase de squelette à l'instant t . On peut faire apparaître explicitement les phases du système réel qui nous intéressent en faisant correspondre $\alpha = s$ pour le squelette, $\alpha = w$ pour l'eau et $\alpha = g$ pour le gaz, ainsi l'expression de la vitesse relative pour l'eau et le gaz, s'écrit :

$$(2.34a) \quad \underline{v}^{ws} = \underline{v}^w - \underline{v}^s,$$

$$(2.34b) \quad \underline{v}^{gs} = \underline{v}^g - \underline{v}^s.$$

De manière analogue, l'accélération d'une particule du milieu $\alpha = w$ et d'une particule du milieu $\alpha = g$ donne en dérivant par rapport au temps (2.30) :

$$(2.35a) \quad \underline{\gamma}^w = \underline{\gamma}^s + \frac{D^s \underline{v}^{ws}}{Dt} + \underline{v}^{ws} \cdot \text{grad}(\underline{v}^s + \underline{v}^{ws}),$$

$$(2.35b) \quad \underline{\gamma}^g = \underline{\gamma}^s + \frac{D^s \underline{v}^{gs}}{Dt} + \underline{v}^{gs} \cdot \text{grad}(\underline{v}^s + \underline{v}^{gs}).$$

La déformation du squeletteⁱ peut être décrite grâce au tenseur gradient des vitesses $\underline{L}^s = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1}$:

$$(2.36) \quad \underline{L}^s \equiv \text{grad} \underline{v}^s = \underline{D}^s + \underline{W}^s,$$

$\underline{D}^s$ est le tenseur du taux de déformation eulérien qui représente la partie symétrique du tenseur gradient des vitesses. $\underline{W}^s$ est la partie antisymétrique du tenseur gradient des

i. En utilisant la relation $\frac{d(\underline{dx})}{Dt} = \frac{d(\underline{F} d\underline{X})}{dt} = \dot{\underline{F}} d\underline{X} = \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1} d\underline{x}$.

vitesse qui n'est autre que le tenseur de la vitesse de rotation de la matière.

Après avoir rappelé la définition d'un certain nombre d'outils mathématiques nécessaires à la construction de notre modèle nous abordons maintenant l'écriture des lois de conservations macroscopiques, en commençant par la conservation de la masse.

3 Équations de conservation

On s'intéresse ici à l'écriture des équations de conservation macroscopique, c'est-à-dire la conservation de la masse de chacune des phases constituant le milieu poreux et la quantité de mouvement. On commence par rappeler la définition des outils mathématiques nécessaires à la formulation des lois de conservation macroscopiques. On rappelle ici qu'il faut remplacer les variables génériques $\bar{\psi}_\alpha, \bar{\underline{i}}_\alpha, \bar{f}_\alpha, \bar{I}_\alpha, \bar{Q}^\alpha$ par les grandeurs physiques adaptées pour obtenir l'équation idoineⁱ. Le principe est le même que celui illustré dans le tableau **Tab.**(2.1). On notera que dans un premier temps, il n'y a pas d'hypothèse faite sur les lois de comportement des matériaux.

3.1 Équations de conservation macroscopique de la masse

Les variables microscopiques qu'il faut introduire dans l'équation (2.15) sont :

$$(2.37) \quad \psi = 1, \quad \underline{i} = \underline{0}, \quad f = 0, \quad Q = 0,$$

il en résulte la relation microscopique suivante :

$$(2.38) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{\dot{r}}) = 0$$

L'équation de conservation de la masse exprimée avec les grandeurs moyennes s'obtient en injectant dans l'équation (2.23) les termes suivants :

$$(2.39) \quad \bar{\psi}_\alpha \equiv 1, \quad \bar{\underline{i}}_\alpha \equiv \underline{0}, \quad \bar{f}_\alpha \equiv 0, \quad \bar{I}_\alpha \equiv 0, \quad \bar{Q}^\alpha = 0,$$

donc

$$(2.40) \quad \frac{\partial \langle \rho \rangle_\alpha}{\partial t} + \text{div}(\langle \rho \rangle_\alpha \underline{\bar{v}}^\alpha) = \langle \rho \rangle_\alpha e^\alpha,$$

i. Certains résultats sont donnés sans démonstration : pour davantage de précisions, le lecteur pourra se référer par exemple aux ouvrages de Lewis et Schrefler (1998)^[92] ou Coussy (1991)^[43], pour certains résultats spécifiques aux milieux poreux.

où :

$$(2.41) \quad \bar{v}^\alpha(\underline{x}, t) = \frac{1}{\langle \rho \rangle_\alpha(\underline{x}, t) dv} \int_{dv} \rho(\underline{r}, t) \underline{v}(\underline{r}, t) \xi^\alpha(\underline{r}, t) dv_m.$$

L'équation (2.40) peut aussi s'écrire :

$$(2.42) \quad \frac{D^\alpha \langle \rho \rangle_\alpha}{Dt} + \langle \rho \rangle_\alpha \operatorname{div} \bar{v}^\alpha = \langle \rho \rangle_\alpha e_\alpha(\rho)$$

en rappelant que :

$$(2.43) \quad \frac{D^\alpha \langle \rho \rangle_\alpha}{Dt} = \frac{\partial \langle \rho \rangle_\alpha}{\partial t} + \bar{v}^\alpha \cdot \operatorname{grad} \langle \rho \rangle_\alpha$$

et en utilisant la relation de la divergence suivante :

$$(2.44) \quad \operatorname{div}(\langle \rho \rangle_\alpha \bar{v}^\alpha) = \langle \rho \rangle_\alpha \operatorname{div} \bar{v}^\alpha + \operatorname{grad} \langle \rho \rangle_\alpha \cdot \bar{v}^\alpha.$$

En introduisant la fraction volumique, on réécrit l'équation (2.42) de la manière suivante :

$$(2.45) \quad \frac{D^\alpha \phi^\alpha \langle \rho \rangle^\alpha}{Dt} + \phi^\alpha \langle \rho \rangle^\alpha \operatorname{div} \bar{v}^\alpha = \phi^\alpha \langle \rho \rangle^\alpha e^\alpha(\rho).$$

On peut relier la fraction volumique de chacune des phases à la porosité et à la saturation, par les égalités répertoriées dans le tableau **Tab.(2.2)**.

Tab 2.2. Relations entre les fractions volumiques, la porosité et la saturation.

phase	fraction volumique	porosité
solide	$\phi^s = (1 - n)$	$n = (dv_w + dv_g) / dv$
saturation		
eau	$\phi^w = n S_w$	$S_w = dv_w / (dv_w + dv_g)$
gaz	$\phi^g = n S_g$	$S_g = dv_g / (dv_w + dv_g)$

Enfin, on déduit aisément du tableau (2.2) la loi de fermeture :

$$(2.46) \quad S_w + S_g = 1.$$

3.1.1 Phase solide

La conservation de la masse du solide s'écrit d'après l'équation (2.42) :

$$(2.47) \quad \frac{D^s \langle \rho \rangle_s}{Dt} + \langle \rho \rangle_s \operatorname{div} \underline{\bar{v}}^s = \langle \rho \rangle_s e^s(\rho).$$

On rappelle que nous ne prenons pas en compte les éventuels échanges de masse entre le squelette et les fluides circulant, le terme source $\langle \rho \rangle_s e^s(\rho) = 0$ est donc nul. Toutefois, on préférera l'écriture de la conservation de la masse de chacune des phases, notamment celle du solide utilisant la masse volumique intrinsèque. Autrement dit celle qui fait apparaître la porosité n explicitement (2.42). La conservation de la masse du solide, se réécrit donc :

$$(2.48) \quad \frac{D^s (1-n) \langle \rho \rangle^s}{Dt} + (1-n) \langle \rho \rangle^s \operatorname{div} \underline{\bar{v}}^s = 0.$$

3.1.2 Phase fluide : eau et gaz

L'équation de conservation de la masse de l'eau s'écrit de la même manière que celle du solide, les mêmes arguments sont utilisés, à la différence que l'écriture en masse volumique intrinsèque fait apparaître ici nS_w comme vu dans le tableau (2.2). On ne considère toujours pas les échanges de masse éventuels entre les phases comme lors d'une évaporation ou d'une condensation, donc la conservation de la masse de l'eau s'écrit :

$$(2.49) \quad \frac{D^w (nS_w) \langle \rho \rangle^w}{Dt} + (nS_w) \langle \rho \rangle^w \operatorname{div} \underline{\bar{v}}^w = 0.$$

Toujours suivant la même démarche l'écriture de la loi de conservation de la masse de gaz, la fraction volumique fait apparaître nS_g :

$$(2.50) \quad \frac{D^g (nS_g) \langle \rho \rangle^g}{Dt} + (nS_g) \langle \rho \rangle^g \operatorname{div} \underline{\bar{v}}^g = 0.$$

3.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

On propose dans cette section, une construction des efforts intérieurs du milieu multiphasique comme une représentation des efforts intérieurs propres à chacune des phases. La démarche de construction des efforts intérieurs de chacune des phases est proche de celle suivie depuis le début du chapitre, et consiste toujours à identifier les grandeurs génériques aux bonnes grandeurs physiques. La première étape consiste à écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour les grandeurs microscopiques. Dans

l'équation (2.15), on introduit alors les variables suivantes :

$$(2.51) \quad \underline{\psi} = \underline{\dot{r}}, \quad \underline{i} = \underline{\sigma}_m, \quad \underline{f} = \underline{g}, \quad \underline{Q} = \underline{0},$$

où $\underline{\sigma}_m$ est le tenseur microscopique des contraintes et $\underline{g}$ les efforts volumiques dus aux effets gravitationnels. L'expression de la loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$(2.52) \quad \frac{\partial(\rho \underline{\dot{r}})}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{\dot{r}} \otimes \underline{\dot{r}}) - \text{div} \underline{\sigma}_m - \rho \underline{g} = \underline{0}.$$

En rappelant que :

$$(2.53) \quad \text{div}(\rho \underline{\dot{r}} \otimes \underline{\dot{r}}) = \underline{\dot{r}} \otimes \underline{\dot{r}} \cdot \text{grad} \rho + \rho \text{grad} \underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}} + \rho \underline{\dot{r}} \text{div} \underline{\dot{r}},$$

et

$$(2.54) \quad \frac{\partial \underline{\dot{r}}}{\partial t} + \text{grad} \underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}} = \underline{\ddot{r}}.$$

Finalement, en utilisant les équations (2.53), (2.54) et (2.38), on peut réécrire l'équation (2.52) comme :

$$(2.55) \quad \text{div} \underline{\sigma}_m + \rho(\underline{g} - \underline{\ddot{r}}) = \underline{0}.$$

C'est la loi classique de conservation de la quantité de mouvement pour un milieu monophasique à l'échelle microscopique. On écrit maintenant l'équation de conservation de la quantité de mouvement à l'échelle macroscopique en suivant la même démarche que celle présentée dans la section précédente (3.1). Les grandeurs macroscopiques adéquates sont donc introduites pour construire la conservation de la quantité de mouvement en chaque point de la phase α :

$$(2.56a) \quad \underline{\bar{\psi}}^\alpha = \underline{\bar{v}}^\alpha$$

$$(2.56b) \quad \underline{\bar{i}}^\alpha \equiv \underline{\bar{t}}^\alpha = \frac{1}{ds} \int_{ds} (\underline{\sigma}_m - \rho \underline{\tilde{r}}^\alpha \otimes \underline{\tilde{r}}^\alpha) \cdot \underline{n} \xi^\alpha ds_m$$

$$(2.56c) \quad \underline{\bar{f}}^\alpha \equiv \underline{\bar{g}}^\alpha = \frac{1}{\langle \rho \rangle^\alpha dv} \int_{dv} \rho \underline{g} \xi^\alpha dv_m$$

où la vitesse $\underline{\tilde{r}}$ est définie comme une fluctuation de la vitesse tel que $\underline{r} = \underline{\bar{r}} + \underline{\tilde{r}}$. L'application du *lemme du tétraèdre*, dont nous ne rappelons pas la démonstration ici, permet de montrer qu'il existe un tenseur des contraintes $\underline{\sigma}^\alpha$ vérifiant l'égalité (2.57) que l'on

trouve également en écrivant la conservation des moments.

$$(2.57) \quad \underline{\tilde{t}}^\alpha = \boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot \underline{n}$$

Il résulte de la définition de $\underline{\tilde{t}}^\alpha$, que le tenseur $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ représenteⁱ les efforts s'exerçant sur une frontière quelconque à l'intérieur du milieu α du système multiphasique. En théorie des mélanges, le tenseur $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ est appelé tenseur des contraintes partielles dans le milieu continu α considéré. Le vecteur contrainte $\underline{\tilde{t}}$ est représenté par la somme des composantes $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ agissant sur chacune des phases. En utilisant l'équation (2.57), écrite pour $\alpha = s, w$ et g , on obtient :

$$(2.58) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^w + \boldsymbol{\sigma}^g.$$

Par ailleurs, le théorème de la divergence permet de montrer que :

$$(2.59) \quad \int_{\partial V} \underline{\tilde{t}}^\alpha dS = \int_V \text{div } \boldsymbol{\sigma}^\alpha dV.$$

De plus, il convient de modéliser l'interaction entre chaque phase α du système multiphasique. On choisit d'en rendre compte^[74,92] par une densité volumique de forces (2.56c), un terme d'interaction volumique $\underline{e}^\alpha(\rho \dot{\underline{r}})$, et un terme de dissipation volumique $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^\alpha$. La discussion sur l'argumentation théorique des termes $\underline{e}^\alpha(\rho \dot{\underline{r}})$ et $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^\alpha$ n'est pas l'objet de ce manuscrit. En revanche, le lecteur désireux de trouver des arguments à la justification de ce genre d'écriture pourra se référer à l'ouvrage de Lewis et Schrefler (1998)^[92] et aux articles de Williams (1978, 1979)^[155,130]. On en déduit que la forme locale de la conservation de la quantité de mouvement de la phase α (ou l'équation de la dynamique), s'écrit :

$$(2.60) \quad \text{div } \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \langle \rho \rangle_\alpha (\underline{\tilde{g}}^\alpha - \underline{\tilde{\gamma}}^\alpha) + \langle \rho \rangle_\alpha [\underline{e}^\alpha(\rho \dot{\underline{r}}) + \underline{\hat{\sigma}}^\alpha] = \underline{0}.$$

On fera l'hypothèse que $\langle \rho \rangle_\alpha \underline{e}^\alpha(\rho \dot{\underline{r}}) \neq \underline{0}$ seulement pour les phases fluides.

3.2.1 Phase fluide

En utilisant la loi de conservation de la quantité de mouvement pour une phase fluide à partir des processus de prise de moyenne développés au début de ce chapitre, on peut réécrire (2.60) sous une forme plus pratique. Donc, en tenant compte de (2.35a) et (2.35b), on écrit l'accélération $\underline{\gamma}^{\alpha s}$ relative d'une phase fluide α par rapport à la phase

i. À l'échelle de description utilisée ici, soit l'échelle macroscopique.

solide s , soit :

$$(2.61) \quad \underline{\gamma}^\alpha = \underline{\gamma}^s + \underline{\gamma}^{\alpha s} + \text{grad} \underline{v}^\alpha \cdot \underline{v}^{\alpha s},$$

en introduisant dans (2.61), les contraintes partielles pour la phase fluide (2.64) et en supposant que :

$$(2.62) \quad \langle \rho \rangle_\alpha \hat{\sigma}^\alpha = -n S_\alpha \mathbf{R}^\alpha \underline{v}^{\alpha s} + n S_\alpha p^\alpha.$$

$\langle \rho \rangle_\alpha \hat{\sigma}^\alpha$ représente la partie dissipative des efforts d'interaction entre la phase solide et les phases fluides, notamment la viscosité. $\mathbf{R}^\alpha$ est un tenseur dit de *résistivité*^[76] inversible, et peut dans le cas où plusieurs fluides sont présents, être défini par l'équation (2.63). Le tenseur de résistivité traduit d'une certaine manière la résistance que rencontre le fluide lors de son écoulement dans le milieu poreux.

$$(2.63) \quad n S_\alpha (\mathbf{R}^\alpha)^{-1} = \frac{\mathbf{k} k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}.$$

En utilisant l'expression de l'inégalité de l'entropie proposée par Hassanizadeh et Gray (1990, 1991)^[77,69] pour les milieux multiphasiques, on adopte l'expression suivante pour le tenseur des contraintes partielles pour les phases fluides :

$$(2.64) \quad \sigma^\alpha = \phi^\alpha p^\alpha \mathbf{I}.$$

où $\mathbf{I}$ est le tenseur identité et $\phi^\alpha = n S_\alpha$ la fraction volumique déjà introduite précédemment et pour laquelle on retrouve les égalités avec la saturation et la porosité dans le tableau (2.2). La grandeur p^α représente la pression macroscopique relative à la phase α , où σ^α représente alors la partie sphérique du tenseur des contraintes. Enfin, en introduisant (2.63) et (2.62) dans (2.60), on arrive à la relation suivante :

$$(2.65) \quad \begin{aligned} & -\text{div}(n S_\alpha p^\alpha \mathbf{I}) - n S_\alpha \langle \rho \rangle^\alpha (\underline{\gamma}^s + \underline{\gamma}^{\alpha s} + \text{grad} \underline{v}^\alpha \cdot \underline{v}^{\alpha s}) \\ & + n S_\alpha \langle \rho \rangle^\alpha \underline{g} + n S_\alpha \langle \rho \rangle^\alpha e^\alpha (\rho \dot{\underline{r}}) - n S_\alpha \mathbf{R}^\alpha \underline{v}^{\alpha s} = 0. \end{aligned}$$

Si on néglige les termes gradient de la vitesse de fluide, que l'on ne considère pas de changement de phase, c'est-à-dire que $e^\alpha (\rho \dot{\underline{r}}) = 0$, et que l'on applique l'identité vectorielle au terme divergence, il en résulte :

$$(2.66) \quad n S_\alpha \underline{v}^{\alpha s} = n S_\alpha (\mathbf{R}^\alpha)^{-1} (-\text{grad} p^\alpha + \langle \rho \rangle^\alpha \underline{g} - \langle \rho \rangle^\alpha \underline{\gamma}^s - \langle \rho \rangle^\alpha \underline{\gamma}^{\alpha s})$$

Enfin, en utilisant (2.63) et en négligeant les termes d'accélération relative $\underline{\gamma}^{\alpha s}$ avec l'hypothèse d'écoulements lents par rapport à la phase solide, on a :

$$(2.67) \quad nS_\alpha \underline{v}^{\alpha s} = -\frac{\mathbf{k}k_{r\alpha}(S_\alpha)}{\mu_\alpha}(\underline{\text{grad}}p^\alpha - \langle\rho\rangle^\alpha(\underline{g} - \underline{\gamma}^s)).$$

On retrouve l'expression de la loi de Darcy pour un milieu multiphasique.

3.2.2 Phase solide et tenseur des contraintes effectives

En utilisant l'expression de l'inégalité de l'entropie proposée par Hassanizadeh et Gray (1990, 1991) ^[77,69] pour les milieux multiphasiques, on peut adopter l'expression suivante pour le tenseur des contraintes partielles pour la phase solide s ($\alpha \neq w, g$) :

$$(2.68) \quad \boldsymbol{\sigma}^s = (1 - n)(\boldsymbol{\sigma}_e^s - \mathbf{I}p^s),$$

où p^s correspond à la pression exercée sur le squelette par les phases fluides. On peut traduire cela à travers la relation suivante :

$$(2.69) \quad p^s = S_w p^w + S_g p^g.$$

La deuxième partie du membre de droite :

$$(2.70) \quad \boldsymbol{\sigma}' = (1 - n)\boldsymbol{\sigma}_e^s, \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma}' = \langle\boldsymbol{\sigma}_e\rangle_s$$

désigne le tenseur des contraintes élastiques exercées sur le squelette, ou encore *tenseur des contraintes effectives*. La fraction volumique $(1 - n)$ permet d'une certaine façon d'en rendre compte. En effet, le processus de moyenne réalisé pour déterminer les contraintes macroscopiques n'est pas la démarche la plus adaptée, mais suffit et donne des résultats satisfaisants pour ce genre de problème. Portant (2.69) dans (2.68), on obtient :

$$(2.71) \quad \boldsymbol{\sigma}^s = (1 - n)[\boldsymbol{\sigma}_e^s - \mathbf{I}(S_w p^w + S_g p^g)].$$

Enfin, la conservation de la quantité de mouvement (2.60) s'écrit pour la phase solide, en tenant compte des équations (2.68), (2.69) et (2.70) de la manière suivante :

$$(2.72) \quad \text{div}[\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{I}(S_w p^w + S_g p^g)] + (1 - n)\langle\rho\rangle^s \underline{g} = (1 - n)\langle\rho\rangle^s \underline{\gamma}^s.$$

3.2.3 Milieu multiphasique et tenseur des contraintes totales

Avant d'exprimer la relation fondamentale de la dynamique pour le milieu multiphasique, on écrit le tenseur des contraintes totales en sommant le tenseur des contraintes partielles de la phase fluideⁱ (2.64) et le tenseur des contraintes partielles de la phase solide (2.71). On obtient :

$$(2.73a) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^w + \boldsymbol{\sigma}^g = (1 - n)[\boldsymbol{\sigma}_e^s - \mathbf{I}(S_w p^w + S_g p^g)] - S_w n \mathbf{I} p^w - S_g n \mathbf{I} p^g$$

$$(2.73b) \quad \boldsymbol{\sigma} = (1 - n)\boldsymbol{\sigma}_e^s - \mathbf{I}(S_w p^w + S_g p^g).$$

Ensuite, en sommant l'équation (2.60) écrite pour les deux phases fluide ($\alpha = w, g$) et l'équation (2.72), tout en tenant compte de la définition des contraintes totales (2.73b), et de la définition suivante pour la masse volumique moyenne (2.74) :

$$(2.74) \quad \rho = (1 - n)\langle \rho \rangle^s + n S_w \langle \rho \rangle^w + n S_g \langle \rho \rangle^g,$$

on obtient alors l'équation fondamentale de la dynamique du milieu poreux multiphasique en tenant compte que $\sum_\alpha \langle \rho \rangle_\alpha [\underline{e}^\alpha(\rho \dot{\underline{r}}) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^\alpha] = 0$:

$$(2.75) \quad \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \underline{g} = \rho \underline{\gamma}^s.$$

Enfin, on notera que les différentes propriétés évoquées dans cette section sont liées au choix de modélisation qui a été effectué entre la phase solide et les phases fluides.

4 Équations constitutives

Nous avons, dans les sections précédentes, présenté une démarche de modélisation des milieux poreux multiphasiques en nous plaçant à l'échelle macroscopique, à partir de laquelle nous avons exprimé toutes les lois de conservations. Il reste à établir les lois constitutives, lesquelles sont nécessaires pour fermer le problème. Ces lois dépendent des phénomènes physiques dont le milieu poreux est le siège, et peuvent être déterminées de trois manières différentes :

- i. soit, en postulant la forme analytique des relations recherchées, via une démarche phénoménologique à partir de résultats expérimentaux ;
- ii. soit, en s'appuyant sur les principes de la thermodynamique et un certain nombre d'hypothèses faites sur la physique du système, et à identifier expérimentalement les coefficients qu'elles font intervenir ;

i. Pour le problème considéré, cela revient à prendre en compte l'eau et le gaz (ou CO_2).

- iii. soit, en réalisant une modélisation des phénomènes physiques à l'échelle microscopique, et d'en déterminer leurs formes mathématiques au moyen de techniques de changement d'échelle.

Nous choisissons la première approche qui consiste à postuler certaines lois phénoménologiques bien connues, par exemple la loi de Darcy.

4.1 Loi d'état de la phase solide

On exprime ici une loi d'état de la phase solide en partant de l'équation de conservation de la masse sous sa forme différentielle, et en supposant que la phase solide est compressible. On rappelle que :

$$(2.76) \quad \frac{D^s(\langle \rho \rangle^s V_s)}{Dt} = 0,$$

En supposant que $\langle \rho \rangle^s$ est une fonction de la pression du solide, de la température et du premier invariant du tenseur des contraintes effectives, telle que $\langle \rho \rangle^s = \langle \rho \rangle^s(p^s, T, \mathbf{I}_{1\sigma'})$, et en développant (2.76), on obtient :

$$(2.77a) \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle^s} \frac{D^s \langle \rho \rangle^s}{Dt} = - \frac{1}{V_s} \frac{D^s V_s}{Dt},$$

$$(2.77b) \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle^s} \frac{D^s \langle \rho \rangle^s}{Dt} = \frac{1}{\langle \rho \rangle^s} \frac{\partial \langle \rho \rangle^s}{\partial p^s} \frac{D^s p^s}{Dt} - \frac{1}{\langle \rho \rangle^s} \frac{\partial \langle \rho \rangle^s}{\partial T} \frac{D^s T}{Dt} - \frac{1}{\langle \rho \rangle^s} \frac{\partial \langle \rho \rangle^s}{\partial \text{tr}(\sigma')} \frac{D^s \text{tr}(\sigma')}{Dt}.$$

On réécrit (2.77b) en supposant les évolutions du système comme étant isotherme, soit $\langle \rho \rangle^s = \langle \rho \rangle^s(p^s, \mathbf{I}_{1\sigma'})$, et on identifie les dérivées partielles de $\langle \rho \rangle^s$ par rapport aux variables d'états comme :

$$(2.78) \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle^s} \frac{\partial \langle \rho \rangle^s}{\partial p^s} = \frac{1}{K_s} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle^s} \frac{\partial \langle \rho \rangle^s}{\partial \text{tr}(\sigma')} = - \frac{1}{3(n-1)K_s}.$$

On introduit maintenant la loi constitutive pour la dérivée temporelle du premier invariant du tenseur des contraintes comme :

$$(2.79) \quad \frac{D^s \text{tr}(\sigma')}{Dt} = 3K_t \left(\text{div} \underline{\bar{v}}^s + \frac{1}{K_s} \frac{D^s p^s}{Dt} \right),$$

En utilisant (2.78) et (2.79) pour réécrire l'équation (2.48), on obtient :

$$(2.80) \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle^s} \frac{D^s \langle \rho \rangle^s}{Dt} = \frac{1}{1-n} \left[\left(1 - \frac{K_t}{K_s} - n \right) \frac{1}{K_s} \frac{D^s p^s}{Dt} + \frac{K_t}{K_s} \text{div} \underline{\bar{v}}^s \right],$$

On remarquera aisément dans l'équation (2.80) que l'on peut faire apparaître le coeffi-

cient de Biot en posant $b = 1 - \frac{K_t}{K_s}$, on a finalement :

$$(2.81) \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle^s} \frac{D^s \langle \rho \rangle^s}{Dt} = \frac{1}{1-n} \left[(b-n) \frac{1}{K_s} \frac{D^s p^s}{Dt} - (1-b) \operatorname{div} \underline{\bar{v}}^s \right].$$

Enfin, en tenant compte de la section (4.2), l'équation (2.81) peut se réécrire en faisant apparaître le taux de déformation élastique $\dot{\epsilon}$. Cela peut se faire en vertu des hypothèses des petites perturbationsⁱ, notamment grâce à l'équation (2.84). On écrit donc :

$$(2.82) \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle^s} \frac{D^s \langle \rho \rangle^s}{Dt} = \frac{1}{1-n} \left[(b-n) \frac{1}{K_s} \frac{D^s p^s}{Dt} - (1-b) \dot{\epsilon}_v \right].$$

4.2 Loi de comportement de la phase solide

Le tenseur des contraintes effectives, introduit dans l'équation (2.70) est induit par les déformations du squelette. Nous considérerons en première approximation le comportement de ce squelette élastique linéaire et isotrope. La relation contrainte effective déformation du squelette s'écrit donc classiquement :

$$(2.83) \quad \sigma' = C_e \epsilon,$$

où C_e est le tenseur d'élasticité du quatrième ordre. On cherche maintenant à simplifier la formulation générale du problème de poroélasticité, en définissant un ensemble d'hypothèses. Pour un problème de mécanique des milieux continus classique, il est habituel de définir l'hypothèse des petites perturbations. Cette hypothèse constitue un cadre adapté pour simplifier la formulation de notre problème. Toutefois, on gardera à l'esprit que d'autres types de comportement peuvent être envisagés pour les géomatériaux. Les aspects plasticité pourraient être pris en compte, par exemple avec le modèle de Alonso et Gens (1990)^[4].

Transformation infinitésimale du squelette • Lorsque cette hypothèse est vérifiée, le tenseur linéarisé s'écrit très classiquement :

$$(2.84) \quad \epsilon = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u}^s + (\operatorname{grad} \underline{u}^s)^T).$$

Petits déplacements du squelette • Cette hypothèse faite sur les petits déplacements du squelette permet de confondre mathématiquement la géométrie actuelle du squelette avec sa géométrie de référence. En pratique, cela revient à confondre les coordonnées $\underline{X}^s$ et $\underline{x}^s$, et nous permet d'écrire toutes les équations dans une configuration fixe.

i. Dans un cadre général, c'est-à-dire sans les hypothèses des petites perturbations, on écrit $\operatorname{tr} \epsilon = J \operatorname{div} v$.

4.3 Loi d'état de phase fluide

Ici, on procède de la même manière que pour la phase solide pour exprimer la loi d'état de la phase fluide. C'est-à-dire que l'on part de la forme différentielle de la conservation de la masse du fluide, soit :

$$(2.85) \quad \frac{D^\alpha (\langle \rho \rangle^\alpha V^\alpha)}{Dt} = 0.$$

En supposant que l'évolution du système est isotherme, et que les variations de volume ne dépendent que de la pression, tel que $\langle \rho \rangle^\alpha = \rho^\alpha(p^\alpha)$, développons alors l'équation (2.85) comme :

$$(2.86) \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle^\alpha} \frac{D^\alpha \langle \rho \rangle^\alpha}{Dt} = - \frac{1}{V^\alpha} \frac{D^\alpha V^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\langle \rho \rangle^\alpha} \left(\frac{\partial \langle \rho \rangle^\alpha}{\partial p^\alpha} \frac{D^\alpha p^\alpha}{Dt} \right),$$

d'où l'on déduit :

$$(2.87) \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle^\alpha} \frac{D^\alpha \langle \rho \rangle^\alpha}{Dt} = \frac{1}{K_\alpha} \frac{D^\alpha p^\alpha}{Dt} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle^\alpha} \frac{\partial \langle \rho \rangle^\alpha}{\partial p^\alpha} = \frac{1}{K_\alpha}.$$

Nous faisons le choix d'utiliser la même loi d'état pour l'eau et le gaz. Ce choix se justifie par le fait des conditions d'utilisations du gaz, notamment du CO₂ lorsqu'il est sous sa forme supercritique. Par conséquent, l'équation (2.87) s'écrit indépendamment suivant l'indice w ou g .

4.4 Loi de Darcy

L'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux saturé est décrit classiquement par la loi de Darcy, et il est maintenantⁱ habituel de trouver cette loi sous la formeⁱⁱ suivante :

$$(2.88) \quad \underline{w} = - \frac{k}{\mu} (\underline{\text{grad}} p - \rho \underline{g}),$$

i. En effet, la loi de Darcy telle qu'elle a été formulée par H. Darcy (1856)^[45], s'exprime par :

$$Q = KA \frac{\Delta H}{L},$$

avec Q le débit volumique [m³.s⁻¹], K le coefficient de perméabilité du milieu traversé [m.s], A la section traversée [m²], ΔH la différence de hauteur, et L la longueur parcourue, est censée être valable pour des écoulements verticaux et uniforme dans des milieux poreux homogènes.

ii. Sous cette forme, maintenant bien commune et dite généralisée, la loi de Darcy est très bien vérifiée par l'expérience, sous réserve de respecter au moins les hypothèses suivantes : 1. petites déformations du milieu poreux 2. l'écoulement du fluide à l'échelle des pores, doit être décrit par un écoulement de Stokes (ce qui suppose également un écoulement à nombres de Reynolds faible). Il a été démontré que les écoulements en milieux poreux sont parfaitement darcéen tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à 1.

avec $\mathbf{k}$ le tenseur de perméabilité en $[\text{m}^2]$ et μ la viscosité dynamique qui s'exprime en $[\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}]$. La loi de Darcy (2.88) peut se généraliser en introduisant la notion de fonction de perméabilitéⁱ relative :

$$(2.89) \quad k_{r\alpha}(S_\alpha).$$

Cette fonction rend la perméabilité du milieu dépendante de la saturation de la phase α . On verra en section (4.6) comment ce genre d'équation s'exprime analytiquement et s'interprète graphiquement. L'équation (2.90) est adaptée aux écoulements multiphasiques en milieu poreux dans la mesure où les hypothèses faites pour les écoulements monophasiques sont respectées. De plus, si nous prenons en compte les termes inertiels, celle-ci s'établit de la manière suivante :

$$(2.90) \quad \underline{w}^\alpha = - \frac{\mathbf{k} k_{r\alpha}(S_\alpha)}{\mu_\alpha} (\underline{\text{grad}} p^\alpha - \langle \rho \rangle^\alpha (\underline{g} - \underline{\gamma}^s)).$$

4.5 Notions de pression capillaire et de saturation

On se limitera dans cette section à énoncer sommairement, mais aussi clairement que possible la définition de deux grandeurs importantes, la *pression capillaire* et la *saturation en fluide*. La première est une notion microscopique, car sa description n'a de sens qu'à l'échelle du pore. La pression capillaire existe dans l'espace poreux par la manifestation de phénomènes interfaciaux entre les différentes phases fluidesⁱⁱ. Ce phénomène traduit une différence de pression entre les deux phases liquide comme étant le rapport entre la tension de surface et le rayon de courbure du ménisque, et s'exprime par la loi de Laplace. À l'échelle macroscopique, on peut simplement écrire la pression capillaire comme la différence de pression des deux phases liquides :

$$(2.91) \quad p^c = p^g - p^w.$$

Les identifications expérimentales de sorption-désorptions font apparaître que la pression capillaire dépend essentiellement de la saturation et ceci d'une manière monotone. Plusieurs facteurs affectent les propriétés capillaires des milieux poreux, parmi lesquels on peut noter : la dimension et la distribution de la taille des pores (influant sur la tension

i. La notion de perméabilité relative peut se justifier par le fait que chaque phase a tendance à développer son propre réseau d'écoulement au niveau des pores. On parle de *ségrégation* de l'écoulement des phases, celles-ci ne s'écoulant pas dans les mêmes pores simultanément. Elle est généralement définie comme une fonction de la saturation en liquide, et est déterminée expérimentalement.

ii. « L'une des deux est appelée phase mouillante, l'autre non mouillante. Les interfaces entre les deux fluides font avec les surfaces solides un angle déterminé appelé angle de mouillage. L'interface entre les deux fluides est quant à elle soumise au phénomène de tension interfaciale. [...] Cette interface se comporte comme une membrane sous tension », Équilibre et transferts en milieux poreux, p.24, J.-F. Daïan, juin 2012. http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/70/39/32/PDF/Transferts_en_poreux.pdf

de surface) ; la nature des fluides et les types de solides impliqués ; et enfin l'historique de saturation du milieu. Ce dernier point traduit l'observation expérimentale d'un phénomène, lors de l'imbibition (augmentation de la phase mouillante) ou du drainage du milieu.

d'hystérésis En réalité, la quantité qui est réellement mesurée lors d'études expérimentales, est la teneur en eau de l'échantillon, ce qui correspond exactement à la perte de masse (en eau) de l'échantillon observé. Mais la plupart des courbes expérimentales transcrivent cette grandeur en saturation de fluide. La saturation s'écrit alors comme une fonction biunivoque de la pression capillaire :

$$(2.92) \quad S_w = S_w(p^c).$$

4.6 Modèles de saturation et de perméabilité

Plusieurs modèles existent pour décrire les courbes de saturation en fonction de la pression capillaire. Nous présentons ici, le modèle de Brooks et Corey (1965)^[34], et le modèle de van Genuchten (1980)^[66]. Le premier étant le plus utilisé dans l'industrie pétrolière et le second en hydrologie. Ces modèles sont tous postulés empiriquement et sont largement utilisés depuis plusieurs décennies dans l'industrie pétrolière, l'hydrologie ou encore dans le génie civil même s'il n'est pas clair pourquoi ils fonctionnent de manière aussi satisfaisante. Toutefois, on peut trouver dans la littérature Kewen (2004, 2010)^[94,95] qui a essayé de leur trouver une justification théorique à partir de modélisation fractale des milieux poreux. Kewen démontre par exemple l'existence d'une corrélation entre l'indice de distribution de la taille des pores et la diminution de la dimension fractale du milieu. Certainement un début d'explication de la raison pour laquelle, ces modèles fonctionnent de manière aussi satisfaisante dans de très nombreux cas.

Les perméabilités relatives $k_{r,\alpha}$ traduisent le mouvement des deux phases en tant que fluide immiscible dans le milieu poreux. L'allure des courbes (voir **Fig.**(2.3)) rend compte de la mobilité d'une phase par rapport à l'autre, autrement dit dans quelle mesure les deux fluides se gênent mutuellement. Les courbes de perméabilités sont des fonctions monotones ce qui se traduit par l'augmentation de la mobilité d'une phase en même temps que sa saturation.

4.6.1 Modèle de Brooks et Corey

La saturation s'exprime en fonction de la pression capillaire pour le modèle de Brooks et Corey de la manière suivante :

$$(2.93) \quad S_w^*(p^c) = \left(\frac{p^{c,r}}{p^c} \right)^\lambda \quad \text{ou} \quad p^c = p^{c,r} S_w^{*-1/\lambda},$$

où $p^{c,r}$ est la pression d'entrée capillaire, et λ est la distribution de taille de pore. La plage de valeur habituellement observée pour λ est $0.5 \leq \lambda \leq 9$. Le paramètre λ traduit deux choses, la première est un indice de la tortuosité du réseau poreux, et la deuxième est la mobilité de la phase saturante. La saturation S_w s'exprime en fonction de la saturation effective (ou saturation normalisée) S_w^* , et S_w^* est comprise dans l'intervalle $[0,1]$ et s'écrit :

$$(2.94) \quad S_w^* = \frac{S_w - S_{wir}}{1 - S_{wir} - S_{gir}}$$

avec S_{wir} la saturation irréductible ou la saturation minimale en eau après un drainage, et S_{gir} la saturation résiduelle en gaz. Les courbes de perméabilités relatives s'expriment en fonction de la saturation normalisée à l'aide des relations suivantes :

$$(2.95a) \quad k_{rw} = (S_w^*)^{3+2\lambda}$$

$$(2.95b) \quad k_{rg} = (1 - S_w^*)^2 (1 - (S_w^*)^{1+2\lambda})$$

4.6.2 Modèle de Van Genuchten

La courbe de saturation du modèle de van Genuchten s'exprime à l'aide de la relation suivante :

$$(2.96) \quad S_w^*(p^c) = \left(1 + \left(\frac{p^c}{p^{c,r}} \right)^p \right)^{-1/q}$$

La figure **Fig.**(2.2) donne un exemple de l'allure de la courbe de saturation en fonction de la pression capillaire. Elle est tracée pour les paramètres suivants : $p^{c,r} = 1000$ Pa ; $q = 2$; $S_{wir} = 0,1$; $S_{gir} = 0$. Les relations de perméabilité relative sont exprimées en fonction de la saturation et s'écrivent de la manière suivante :

$$(2.97a) \quad k_{rw} = (S_w^*)^2 \left(1 - \left(1 - (S_w^*)^q \right)^{1/q} \right)$$

$$(2.97b) \quad k_{rg} = (1 - S_w^*)^2 \left(1 - (S_w^*)^q \right)^{1/q}$$

où les paramètres p , q sont d'autres paramètres de calage similaires à λ , avec $q = (1 - p)/p$. Les courbes de perméabilités relatives sont tracées dans la figure Fig.(2.3) pour les paramètres suivants : $q = 3$; $S_{wir} = 0,1$ et $S_{gir} = 0$.

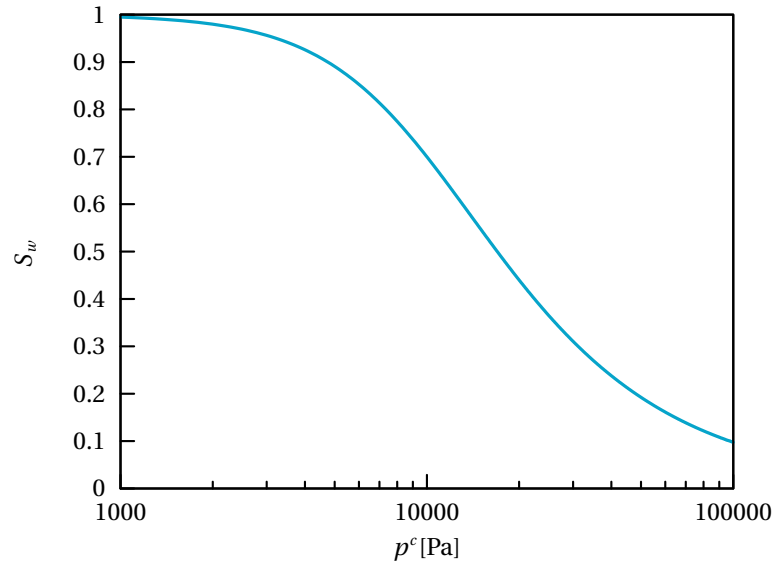


Fig 2.2. Courbe de saturation S_w en fonction de la pression capillaire (p^c).

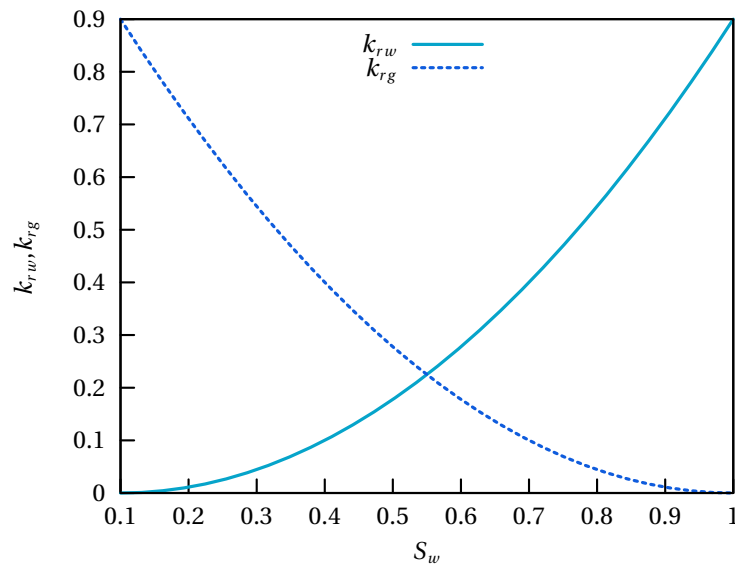


Fig 2.3. Courbes types des perméabilités relatives k_{rw} et k_{rg} en fonction de la saturation S_w .

5 Formulation du problème de poroélasticité en milieu multiphasique

Dans les sections qui précèdent, nous avons présenté un cadre théorique, s'appuyant sur des processus de prises de moyennes à l'échelle microscopique, pour construire l'ensemble des lois de conservation d'un milieu multiphasiques. Pour compléter la construction de notre modèle nous avons ensuite présenté toutes les lois constitutives nécessaires à la formulation des équations de champs.

On présente ci-après, la formulation générale d'un problème de mécanique des milieux poreux multiphasique. Cette formulation est constituée des équations de champs et des conditions aux limites et initiales du problème considéré.

5.1 Équations de champs

Les équations de champs sont établies à partir des équations de conservations, et des équations constitutives.

Équation constitutives • En pratique, nous avons écrit autant d'équations d'état et d'équations complémentaires d'évolution qu'il y a de variables d'état. Les lois complémentaires sont les lois de sorptions (voir section 4.6), la loi de Darcy généralisée (2.88) pour l'écoulement des phases fluides et une loi de comportement pour le squelette solide. La même loi d'écoulement a été utilisée pour l'eau et le gaz. En effet, le CO_2 lorsqu'il se trouve sous forme supercritique se comporte *mécaniquement* comme un liquide, même si son état thermodynamique lui confère une structure plus proche du gaz.

Équations de conservation • Il s'agit de l'équation de conservation de la masse d'eau (2.49), de l'équation de conservation de la masse de gaz (2.50), de l'équation de conservation de la masse du squelette (2.48) et enfin de la conservation de la quantité de mouvement (2.75) présentées précédemment.

Mais avant tout, il est nécessaire d'adapter la formulation du modèle pour notre problème. C'est-à-dire qu'il convient de faire un choix pertinent des variables principales à utiliser, en vue d'une implémentation numérique. Un choix mal adapté peut avoir un impact négatif sur les performances numériques globales. Ce choix peut-être par exemple, pour les variables hydrauliques : la pression de gaz et la pression capillaire. En effet, le choix de la pression capillaire comme variable est préférable par exemple, à la saturation en eau, d'un point de vue numérique. Le choix de la saturation en eau comme variable indépendante introduit $\partial p^c / \partial S_w$ dans la formulation, tandis qu'une formulation reposant sur le choix de la pression capillaire introduit $\partial S_w / \partial p^c$ dans les équations. Dans une

formulation avec la saturation en eau, la pression capillaire tend vers l'infini pour des valeurs de la saturation proche de zéro. Cela a pour effet de rendre la simulation plus sensible au problème de convergence et d'instabilité numérique. En revanche, une formulation en pression capillaire assure un meilleur conditionnement du problème et de meilleures performances sur toute la plage de désaturation du milieu, pour peu que la loi de sorption choisie autorise de grandes plages de validité.

Les équations de champs sont donc formulées avec le triplet $(\underline{v}, p^c, p^g)$, où $\underline{v}$ est la vitesse de déplacement du solide, et sont établies grâce aux lois constitutives déjà introduites.

5.2 Équation de champs en pression

À partir des équations de conservation de la masse de chacune des phases, solide (2.48), eau (2.49) et gaz (2.50), des lois d'états (2.82) et (2.85), et des lois constitutives (2.90), (2.92) et (2.89), on écrit après de quelques manipulations, deux équations de champs en pression, faisant apparaître la pression capillaire pour l'une et la pression de gaz pour la seconde. La forme finale des deux équations de champs fera aussi apparaître le module de Biot.

5.2.1 Première équation de champs en pression capillaire p^c

À partir de l'équation de conservation de la masse (2.48), et en tenant compte des hypothèses de petites perturbations, on obtient en divisant (2.48) par $\langle \rho \rangle^s$:

$$(2.98) \quad \frac{(1-n)}{\langle \rho \rangle^s} \frac{\partial \langle \rho \rangle^s}{\partial t} - \frac{\partial n}{\partial t} + (1-n) \dot{\epsilon}_v = 0$$

où $\langle \rho \rangle^s$ est la densité intrinsèque du solide, n la porosité du système et $\dot{\epsilon}$ est le taux de déformation élastique du squelette.

L'équation de conservation de la masse (2.49) de l'eau devient en introduisant la vitesse relative du fluide relativement au solide (2.34a) :

$$(2.99) \quad \frac{\partial (n S_w \langle \rho \rangle^w)}{\partial t} + \text{div}(n S_w \langle \rho \rangle^w (\underline{v}^s + \underline{v}^{ws})) = 0.$$

En gardant à l'esprit que $\text{div} \underline{v}^s = \dot{\epsilon}_v$, on applique la relation de la divergence à $\text{div}(n S_w \rho^w (\underline{v}^s + \underline{v}^{ws}))$, on néglige le terme $\underline{\text{grad}}(n S_w \langle \rho \rangle^w)$, puis on divise (2.99) par $S_w \rho_w$. Après calcul, on obtient :

$$(2.100) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{n}{\langle \rho \rangle^w} \frac{\partial \langle \rho \rangle^w}{\partial t} + \frac{n}{S_w} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{1}{S_w \langle \rho \rangle_w} \text{div}(n S_w \langle \rho \rangle^w \underline{v}^{ws}) + n \dot{\epsilon}_v = 0.$$

On ajoute (2.100) à (2.98) pour éliminer le terme $\frac{\partial n}{\partial t}$:

$$(2.101) \quad \frac{(1-n)}{\langle \rho \rangle^s} \frac{D\langle \rho \rangle^s}{Dt} + \dot{\epsilon}_v + \frac{n}{\langle \rho \rangle^w} \frac{D\langle \rho \rangle^w}{Dt} + \frac{n}{S_w} \frac{DS_w}{Dt} + \frac{1}{S_w \langle \rho \rangle_w} \text{div}(n S_w \langle \rho \rangle^w \underline{v}^{ws}) = 0.$$

Portant l'équation d'état du solide (2.82) dans (2.101), on obtient :

$$(2.102) \quad S_w \frac{b-n}{K_s} \frac{Dp^s}{Dt} + b S_w \dot{\epsilon}_v + n \frac{DS_w}{Dt} + S_w \frac{n}{\langle \rho \rangle^w} \frac{D\langle \rho \rangle^w}{Dt} + \frac{1}{S_w \langle \rho \rangle^w} \text{div}(n S_w \langle \rho \rangle^w \underline{v}^{ws}) = 0.$$

Remarquons qu'à ce niveau, la loi d'état du fluide n'a pas encore été introduite. On peut donc remplacer l'indice w par α (pour $\alpha \neq s$) et retrouver une forme plus générale de (2.102), de plus en notant $\underline{w}^\alpha = n S_\alpha \underline{v}^{\alpha s}$, on obtient :

$$(2.103) \quad S_\alpha \frac{b-n}{K_s} \dot{p}^s + b S_\alpha \dot{\epsilon}_v + n \dot{S}_\alpha + \text{div} \underline{w}^\alpha + S_\alpha \frac{n}{\langle \rho \rangle^\alpha} \langle \dot{\rho} \rangle^\alpha = 0.$$

On peut partir de cette forme (2.103), pour exprimer la deuxième équation de champs suivant le jeu de variables désiré. Par ailleurs, si on cherche à en expliciter les termes alors les deux premiers termes représentent la variation de volume du squelette dû aux évolutions de la pression de pore et des contraintes effectives exercées sur le squelette d'une part, et d'autre part au taux de déformation volumique du milieu poreux. Le troisième terme représente la variation de la saturation dans le milieu, et le quatrième terme représente le flux de matière sortant. Enfin le dernier terme représente la variation de la masse volumique de la phase fluide. On retrouve la même formulation que celle proposée par Zienkiewicz et al. (1990) ^[162,163]. Pour obtenir la forme finale de l'équation de champs en pression capillaire, on rappelle dans un premier temps la dérivée par rapport au temps de la pression de pore (2.69) :

$$(2.104) \quad \begin{aligned} \dot{p}^s &= \frac{Dp}{Dt} = S_w \frac{Dp^w}{Dt} + p^w \frac{DS_w}{Dt} + S_g \frac{Dp^g}{Dt} + p^g \frac{DS_g}{Dt} \\ &= S_w \frac{Dp^w}{Dt} + p^w \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_g \frac{Dp^g}{Dt} + p^g \frac{D(1-S_w)}{Dt}. \end{aligned}$$

avec (2.91) et (2.46) :

$$(2.105) \quad \frac{DS_w}{Dt} = \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \frac{Dp^c}{Dt} \quad \text{et} \quad \frac{DS_g}{Dt} = -\frac{DS_w}{Dt},$$

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{Dp}{Dt} &= S_w \left(\frac{Dp^g}{Dt} - \frac{Dp^c}{Dt} \right) + p^w \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \frac{Dp^c}{Dt} + S_g \frac{Dp^g}{Dt} - p^g \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \frac{Dp^c}{Dt} \\
 (2.106) \quad &= \left[(p^w - p^g) \frac{\partial S_w}{\partial p^c} - S_w \right] \frac{Dp^c}{Dt} + \frac{Dp^g}{Dt} \\
 &= - \left[p^c \frac{\partial S_w}{\partial p^c} + S_w \right] \frac{Dp^c}{Dt} + \frac{Dp^g}{Dt}.
 \end{aligned}$$

Repartons maintenant de (2.102), alors en tenant compte de (2.106), et (2.105) et en remplaçant $nS_w \underline{v}^{ws}$ par la loi de Darcy (2.67), on a finalement :

$$\begin{aligned}
 (2.107) \quad &\left[\frac{b-n}{K_s} S_w + \frac{nS_w}{K_w} \right] \dot{p}^g - \left[\frac{b-n}{K_s} S_w \left(S_w + p^c \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right) - n \frac{\partial S_w}{\partial p^c} + \frac{nS_w}{K_w} \right] \dot{p}^c \\
 &+ bS_w \dot{\epsilon}_v + \text{div} \left[-\mathbf{k}_w (\underline{\text{grad}}(p^g - p^c) + \langle \rho \rangle_w (\underline{f} - \underline{v}^s)) \right] = 0
 \end{aligned}$$

5.2.2 Deuxième équation de champs en pression de gaz p^g

L'équation de champs en pression de gaz s'écrit de manière analogue à l'équation (2.107), à la différence qu'aucun changement de variable n'est nécessaire ici, puisque le jeu de variable natif est conservé. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 (2.108) \quad &\left[\frac{b-n}{K_s} S_g + \frac{nS_g}{K_g} \right] \dot{p}^g - \left[\frac{b-n}{K_s} S_g \left(S_w + p^c \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right) + n \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right] \dot{p}^c \\
 &+ bS_g \dot{\epsilon}_v + \text{div} \left[-\mathbf{k}_g (\underline{\text{grad}} p^g + \langle \rho \rangle_g (\underline{f} - \underline{v}^s)) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

5.2.3 Conservation de la quantité de mouvement

Enfin, la dernière équation nécessaire est la conservation de la quantité de mouvement qui s'écrit classiquement :

$$(2.109) \quad \underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \rho \underline{\dot{v}}.$$

5.3 Conditions aux limites

Afin que la formulation du problème soit complète, il nous faut écrire les conditions aux limites imposées à la frontière Γ_t du domaine Ω_t considéré, et ensuite à écrire les conditions initiales. Pour cela, on introduit quatre partitions de la frontière Γ_t du do-

maine Ω_t , tel que :

$$(2.110a) \quad \Gamma_t = \Gamma_{v(t)} \cup \Gamma_{\sigma(t)} \cup \Gamma_{p^\alpha(t)} \cup \Gamma_{q_\alpha(t)},$$

$$(2.110b) \quad \Gamma_{v(t)} \cap \Gamma_{\sigma(t)} = \Gamma_{p^\alpha(t)} \cap \Gamma_{q_\alpha(t)} = \emptyset.$$

Conditions aux limites mécaniques • Sur la partition $\Gamma_{u(t)}$ sont imposées des conditions de bords de type vitesse de déplacement, explicitées sous la forme :

$$(2.111) \quad \underline{v} = \underline{v}^d \quad \text{sur} \quad \Gamma_{u(t)},$$

sur la partition complémentaire $\Gamma_{\sigma(t)}$, des conditions aux limites de type Neumann sont imposées :

$$(2.112) \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\sigma(t)}.$$

Conditions aux limites hydrauliques • Sur la partition $\Gamma_{p^\alpha(t)}$ sont imposées des conditions de bords de type pression, explicitées sous la forme :

$$(2.113) \quad p^\alpha = \underline{p}_d^\alpha \quad \text{sur} \quad \Gamma_{p^\alpha(t)},$$

sur la partition complémentaire $\Gamma_{q_\alpha(t)}$, des conditions aux limites de type flux sont imposées :

$$(2.114) \quad \underline{w}_\alpha \cdot \underline{n} = q_\alpha^d \quad \text{sur} \quad \Gamma_{q_\alpha(t)}.$$

5.4 Conditions initiales

Le problème d'écoulement multiphasique dans un milieu poreux n'est complètement achevé que si toutes les valeurs des champs utiles sont précisées à l'instant initial, ce que l'on réalise ci-après :

$$(2.115a) \quad \underline{v} = \underline{v}^{d,0} \quad \text{sur} \quad \Omega_{v(0)},$$

$$(2.115b) \quad p^\alpha = p_{d,0}^\alpha \quad \text{sur} \quad \Omega_{p^\alpha(0)}.$$

5.5 Formulation forte du problème

La forme forte du comportement dynamique du système multiphasique poroélastique non-linéaire consiste à déterminer le vecteur des vitesses $\underline{v}$, et le champ des pressions scalaires p^c et p^g dans $\Omega \times [0, T]^i$. Le problème se ramène à résoudre le système

i. T désignant la limite supérieure de l'intervalle de temps considéré.

constitué par (2.109), (2.107), (2.108) avec les conditions aux limites (2.111), (2.112), (2.113), (2.114) et initiales (2.115a), (2.115b). Le tableau suivant récapitule l'ensemble des équations :

Équation de champs			
$\text{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \zeta \underline{v} + \rho \underline{\dot{v}}$	dans	$\Omega \times]0, T[$	conservation de la quantité de mouvement
$\left[\frac{b-n}{K_s} S_w + \frac{n S_w}{K_w} \right] \dot{p}^g - \left[\frac{b-n}{K_s} S_w \left(S_w + p^c \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right) - n \frac{\partial S_w}{\partial p^c} + \frac{n S_w}{K_w} \right] \dot{p}^c + b S_w \dot{\epsilon}_v + \text{div} \left[- \underline{k}_w (\text{grad}(p^g - p^c) + \rho_w (\underline{f} - \underline{\dot{v}})) \right] = 0$	"	$\Omega \times]0, T[$	conservation de la masse d'eau exprimée en (p^c, p^g)
$\left[\frac{b-n}{K_s} S_g + \frac{n S_g}{K_g} \right] \dot{p}^g - \left[\frac{b-n}{K_s} S_g \left(S_w + p^c \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right) + n \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right] \dot{p}^c + b(1 - S_w) \dot{\epsilon}_v + \text{div} \left[- \underline{k}_g (\text{grad} p^g + \rho_g (\underline{f} - \underline{\dot{v}})) \right] = 0$	"	$\Omega \times]0, T[$	conservation de la masse de gaz exprimée en (p^g, p^c)
Conditions initiales et conditions aux limites			
$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d$	sur	$\Gamma_\sigma \times]0, T[$	condition mécanique
$\underline{v} = \underline{v}^d$	"	$\Gamma_v \times]0, T[$	
$\underline{v} = \underline{v}^{d,0}$	"	$\Omega_{v(t)}(t=0)$	
$p^c = p^{c,d}$	"	$\Gamma_{p^c} \times]0, T[$	condition hydraulique (en pression)
$p^c = p^{c,0}$	"	$\Omega_{p^c}(t=0)$	
$p^g = p^{g,d}$	"	$\Gamma_{p^g} \times]0, T[$	
$p^g = p^{g,0}$	"	$\Omega_{p^g}(t=0)$	condition hydraulique (en flux)
$\underline{w}_g \cdot \underline{n} = q_g^d$	"	$\Gamma_{q_g} \times]0, T[$	
$\underline{w}_w \cdot \underline{n} = q_w^d$	"	$\Gamma_{q_w} \times]0, T[$	

Conclusion

Le but de ce chapitre était d'établir l'ensemble des équations régissant l'évolution d'un milieu multiphasique (équations de conservation et rhéologiques) comprenant un phase solide poreuse, déformable élastiquement et deux fluides barotropes non miscibles en s'appuyant sur la formulation proposée par Schrefler (1998) ^[92]. Quelques lois constitutives ont dû être introduites afin de compléter la description du comportement du milieu poreux. Elles sont toutes extraites de la littérature. En vue de l'implémentation numérique du modèle dans la plateforme LMGC90, nous avons également adapté l'écriture en choisissant un jeu de variables facilitant la résolution numérique. L'objectif poursuivi dans le chapitre suivant sera de proposer une stratégie numérique adaptée à la résolution de ce problème multiphysique fortement couplé et non linéaire.

3 | Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique

Sommaire

	Introduction	67
1	Formulation variationnelle mixte en vitesse-pressions pour le problème de poroélasticité	67
1.1	Formulation variationnelle des équations de mouvement	67
1.2	Formulation variationnelle des équations de champs en pressions	69
1.3	Formulation générale et espace de solution	70
2	Approximation par éléments finis	71
2.1	Discretisation en espace	72
2.2	Système matriciel à résoudre	75
3	Algorithmes de résolution	76
3.1	Discretisation temporelle	76
3.2	Variante de la méthode de Newton	77
4	Description du problème et stratégie de résolution	78
4.1	Méthode simultanée	78
4.2	Méthode étagée	79
4.3	Résumé	80
5	Technique d'implémentation : généricité	81
5.1	Principe de généricité	81
5.2	Implémentation	81
6	Simulation d'un écoulement diphasique en milieux poreux déformables	83
6.1	Test de Liakopoulos	83
6.2	Résultats	86
	Conclusion	90

Introduction

Ce chapitre présente les outils numériques développés pour la mise en œuvre informatique du modèle présenté au chapitre (2). Une fois la formulation mathématique posée pour la discrétisation du problème, nous verrons alors de quelle manière, nous contournerons les contraintes liées à la stratégie de résolution (résolution simultanée des équations), en mettant au point une technique originale d'implémentation des opérateurs mathématiques. L'avantage étant d'éviter à l'utilisateur de réécrire du code dès que l'on souhaite changer de modèle et/ou ajouter un couplage physique.

1 Formulation variationnelle mixte en vitesse-pressions pour le problème de poroélasticité

Nous proposons dans cette section, une formulation variationnelle mixte vitesse-pressions du problème dynamique de poroélasticité, permettant de prendre en compte les conditions aux limites sur ces deux champs. Le problème obtenu est alors bien posé, et nous l'approchons à l'aide de la méthode des éléments finis. Pour la résolution du problème éléments finis, des éléments finis mixtesⁱ à trois champs sont présentés et utilisés. On procédera en deux parties, on établira dans un premier temps la formulation variationnelle de la quantité de mouvement puis celle des deux équations de champs de pressions.

1.1 Formulation variationnelle des équations de mouvement

À partir de la formulation forte (5.5) décrite au chapitre (2) dont on rappelle l'expression ci-après :

$$(3.1) \quad \underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \zeta \underline{v} + \rho \underline{\dot{v}} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[,$$

où ρ est la masse volumique du milieu multiphasique donnée par l'expression $\rho = (1 - n)\rho_s + nS_w\rho_w + nS_g\rho_g$ et ζ est le terme d'amortissement. On établit la formulation variationnelle de la relation de quantité de mouvement, en multipliant l'équation (3.1) par une fonction test $\underline{\hat{v}} \in \mathcal{V}$ où $\mathcal{V}$ est un espace fonctionnel approprié que l'on définit en détail en (1.3). On obtient ainsi $\forall \underline{\hat{v}} \in \mathcal{V}$ en intégrant sur le domaine Ω de frontière Γ :

$$(3.2) \quad \int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) \cdot \underline{\hat{v}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\hat{v}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \underline{\dot{v}} \cdot \underline{\hat{v}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \zeta \underline{v} \cdot \underline{\hat{v}} \, d\Omega,$$

i. Ce genre d'élément fini est classiquement utilisé pour la résolution de problème de Stokes.

en intégrant par partie le premier membre (forces intérieures), on obtient :

$$(3.3) \quad \int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) \cdot \underline{\hat{v}} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \underline{\hat{v}}^{\top} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, dS - \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\text{grad}} \underline{\hat{v}} \, d\Omega,$$

et en tenant compte de (3.3), il en résulte pour (3.2) :

$$(3.4) \quad \int_{\Gamma_{\sigma}} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, dS - \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\text{grad}} \underline{\hat{v}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\hat{v}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \underline{\dot{v}} \cdot \underline{\hat{v}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\zeta} \underline{v} \cdot \underline{\hat{v}} \, d\Omega.$$

Nous cherchons à faire apparaître la contribution hydraulique (*e.g* terme de couplage) dans la relation (3.4), ceci se fait en remplaçant le tenseur des contraintes totale par son expression (2.73b) obtenue au chapitre (2), ce qui nous donne :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} & - \int_{\Omega(t)} \underline{\text{grad}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : \underline{\sigma}' \, d\Omega + \int_{\Omega(t)} \underline{\text{grad}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : bIS_w p^w \, d\Omega + \int_{\Omega(t)} \underline{\text{grad}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : bIS_g p^g \, d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \rho \underline{\dot{v}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \underline{\zeta} \underline{v} \, d\Omega - \int_{\Omega(t)} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \rho \underline{f} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, dS. \end{aligned}$$

Nous voulons maintenant que le problème final à résoudre soit formulé en pression capillaire (p^c) — pression de gaz (p^g) pour les raisons invoquées en section (5) du chapitre (2). Pour ce faire, on introduit la relation de la pression capillaire (2.91) $p^c = p^g - p^w$ et en gardant à l'esprit que $S_g + S_w = 1$, on obtient :

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & - \int_{\Omega(t)} \underline{\text{grad}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : \underline{\sigma}' \, d\Omega + \int_{\Omega(t)} \underline{\text{grad}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : bIS_w (p^g - p^c) \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega(t)} \underline{\text{grad}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : bIS_g p^g \, d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \rho \underline{\dot{v}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \underline{\zeta} \underline{v} \, d\Omega - \int_{\Omega(t)} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \rho \underline{f} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, dS. \end{aligned}$$

puis

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & - \int_{\Omega(t)} \underline{\text{grad}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : \underline{\sigma}' \, d\Omega - \int_{\Omega(t)} \underline{\text{grad}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : bIS_w p^c \, d\Omega + \int_{\Omega(t)} \underline{\text{grad}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : bIP^g \, d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \rho \underline{\dot{v}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \underline{\zeta} \underline{v} \, d\Omega - \int_{\Omega(t)} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \rho \underline{f} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, dS. \end{aligned}$$

En tenant compte de la loi de comportement élastique linéaire dans (3.7), et en notant que la partie antisymétrique du tenseur $\underline{\text{grad}}(\underline{\hat{v}})^{\top}$ s'annule avec le tenseur symétrique des contraintes effectives $\underline{\sigma}'$, on obtient :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \rho \underline{\dot{v}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \underline{\zeta} \underline{v} \, d\Omega + \int_{\Omega(t)} \underline{\dot{\epsilon}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : \mathbb{C} : \underline{\epsilon} \, d\Omega + \int_{\Omega(t)} \underline{\dot{\epsilon}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : bIS_w p^c \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega(t)} \underline{\dot{\epsilon}}(\underline{\hat{v}})^{\top} : bIP^g \, d\Omega = \int_{\Omega(t)} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \rho \underline{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \underline{\hat{v}}^{\top} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, dS. \end{aligned}$$

On remarque la dépendance de la fonction S_w dans le deuxième coefficient du membre de gauche sur la variable inconnue p^c ⁱ. La présence d'un tel terme empêche le membre de gauche d'être une forme bilinéaire. Ceci signifie d'une part que le problème devient non-linéaire, et d'autre part que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram ne sont plus vérifiées. Pour résoudre, on devra linéariser le problème en le ramenant à une suite de problèmes linéaires. De plus, les techniques de résolution de systèmes non linéaires n'assurent pas systématiquement l'existence et l'unicité de la solution, mais se généralisent assez facilement aux problèmes variationnels. On présentera en section (3.2) la variante de la méthode de Newton qui nous permettra de résoudre numériquement le problème.

1.2 Formulation variationnelle des équations de champs en pressions

1.2.1 Formulation en pression capillaire

On établit à présent la formulation variationnelle de l'équation de champs en pression capillaire, de la même manière que précédemment en partant de l'équation (2.107) du chapitre (2), en la multipliant cette fois par une fonction test $\hat{p}^c \in \mathcal{P}^1$ où $\mathcal{P}^1$ est un espace fonctionnel approprié, on obtient ainsi $\forall \hat{p}^c \in \mathcal{P}^1$ en intégrant sur le domaine Ω de frontière Γ :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega(t)} \left[\left(\frac{b-n}{K_s} S_w + \frac{n S_w}{K_w} \right) \frac{\partial p^g}{\partial t} \right] \hat{p}^c d\Omega \\ & - \int_{\Omega(t)} \left[\left(\frac{b-n}{K_s} S_w \left(S_w + p^c \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right) - n \frac{\partial S_w}{\partial p^c} + \frac{n S_w}{K_w} \right) \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] \hat{p}^c d\Omega \\ & + \int_{\Omega(t)} b S_w \dot{\epsilon}_v \hat{p}^c d\Omega + \int_{\Omega} \underbrace{\text{div} \left(-\mathbf{k}_w (\text{grad}(p^w) + \rho_w (\underline{f} - \underline{v})) \right)}_{\text{terme de perméabilité}} \hat{p}^c d\Omega = 0. \end{aligned}$$

L'application du théorème de Green-Ostrogradski sur le dernier coefficient du membre de gauche (terme de perméabilité) donne :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega(t)} \text{div} \left(-\mathbf{k}_w \text{grad}(p^w) + \rho_w (\underline{f} - \underline{v}) \right) \hat{p}^c d\Omega = - \int_{\Omega(t)} \mathbf{k}_w \text{grad}(p^c) \cdot \text{grad}(\hat{p}^c) d\Omega \\ & + \int_{\Omega(t)} \mathbf{k}_w \text{grad}(p^g) \cdot \text{grad}(\hat{p}^c) d\Omega - \int_{\Omega(t)} \mathbf{k}_w \rho_w (\underline{f} - \underline{v}) \cdot \text{grad}(\hat{p}^c) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_{q_w}} \underline{w}_w \cdot \underline{n} \hat{p}^c dS. \end{aligned}$$

L'utilisation du théorème de Green-Ostrogradski permet de faire apparaître les conditions aux limites en flux $\int_{\Gamma_{q_w}} \underline{w}_w \cdot \underline{n} \hat{p}^c dS = \int_{\Gamma_{q_w}} \underline{q}_w^d \hat{p}^c dS$. On voit également apparaître un autre terme de couplage sur la perméabilité $\int_{\Omega(t)} \mathbf{k}_w \text{grad}(p^g) \cdot \text{grad}(\hat{p}^c) d\Omega$. Finalement

i. Voir les modèles de rétention d'eau présentés au chapitre (2).

en remplaçant (3.10) dans (3.9). On obtient :

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad & \int_{\Omega(t)} \left[\left(\frac{b-n}{K_s} S_w + \frac{nS_w}{K_w} \right) \frac{\partial p^g}{\partial t} \right] \hat{p}^c d\Omega + \int_{\Omega(t)} b S_w \dot{\epsilon}_v \hat{p}^c d\Omega \\
 & - \int_{\Omega(t)} \left[\left(\frac{b-n}{K_s} S_w \left(S_w + p_c \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right) - n \frac{\partial S_w}{\partial p^c} + \frac{nS_w}{K_w} \right) \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] \hat{p}^c d\Omega \\
 & - \int_{\Omega(t)} \mathbf{k}_w \underline{\text{grad}}(p^c) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}^c) d\Omega + \int_{\Omega(t)} \mathbf{k}_w \underline{\text{grad}}(p^g) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}^c) d\Omega \\
 & - \int_{\Omega(t)} \mathbf{k}_w \rho_w (\underline{f} - \underline{v}) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}^c) d\Omega + \int_{\Gamma_{qw}} q_w^d \hat{p}^c dS = 0.
 \end{aligned}$$

1.2.2 Formulation en pression de gaz

Cette formulation en pression de gaz s'établit de manière identique à ce qui précède, à la seule différence que l'on ne réalise pas de changement de variable à l'aide de la relation de la pression capillaire (2.91). Il n'y a donc pas de terme de couplage supplémentaire sur la partie hydraulique qui apparaît. Après multiplication de la forme forte par une fonction test $\hat{p}^g \in \mathcal{P}^2$ où $\mathcal{P}^2$ est l'espace fonctionnel approprié, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad & \int_{\Omega(t)} \left[\left(\frac{b-n}{K_s} S_g + \frac{nS_g}{K_g} \right) \frac{\partial p^g}{\partial t} \right] \hat{p}^g d\Omega + \int_{\Omega(t)} b(1-S_w) \dot{\epsilon}_v \hat{p}^g d\Omega \\
 & - \int_{\Omega(t)} \left[\left(\frac{b-n}{K_s} S_g \left(S_w + p_c \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right) + \frac{nS_w}{K_w} \right) \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] \hat{p}^g d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{k}_g \underline{\text{grad}}(p^g) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}^g) d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \mathbf{k}_g \rho_g (\underline{f} - \underline{v}) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}^g) d\Omega + \int_{\Gamma_{qg}} q_g^d \hat{p}^g dS = 0.
 \end{aligned}$$

On remarque que la fonction de saturation S_w dans les deux dernières formulations (3.11), (3.12) apparaît dans la plupart des termes, signe d'une forte non-linéarité.

1.3 Formulation générale et espace de solution

En supposant que les espaces fonctionnels appropriés aient toutes les chances d'être $H^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, on introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}^{[0,T]} &= \left\{ \underline{v} \in H^1(\Omega) \mid \underline{v} = \underline{v}_d \text{ sur } \Gamma_v \right\} \text{ et } \mathcal{V}_0^{[0,T]} = \left\{ \underline{v} \in H^1(\Omega) \mid \underline{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_v \right\} \\
 \mathcal{Z}^{[0,T]} &= \left\{ \underline{\sigma} \in L^2(\Omega) \mid \text{div} \underline{\sigma} = \rho \underline{f} - \zeta \underline{v} \text{ sur } \Omega \text{ et } \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \text{ sur } \Gamma_\sigma \right\} \text{ et } \mathcal{Z}_0^{[0,T]} \\
 \mathcal{P}^{1,[0,T]} &= \left\{ p^c \in H^1(\Omega) \mid p^c = p_c^d \text{ sur } \Gamma_{p^c} \right\} \text{ et } \mathcal{P}_0^{1,[0,T]} \\
 \mathcal{P}^{2,[0,T]} &= \left\{ p^g \in H^1(\Omega) \mid p^g = p_g^d \text{ sur } \Gamma_{p^g} \right\} \text{ et } \mathcal{P}_0^{2,[0,T]} \\
 \mathcal{Q}^{1,[0,T]} &= \left\{ \underline{q}_w^d \in L^2(\Omega) \mid \underline{w}_w \cdot \underline{n} = \underline{q}_w^d \text{ sur } \Gamma_{qw} \right\} \text{ et } \mathcal{Q}_0^{1,[0,T]} \\
 \mathcal{Q}^{2,[0,T]} &= \left\{ \underline{q}_g^d \in L^2(\Omega) \mid \underline{w}_g \cdot \underline{n} = \underline{q}_g^d \text{ sur } \Gamma_{qg} \right\} \text{ et } \mathcal{Q}_0^{2,[0,T]}
 \end{aligned}$$

où $\mathcal{V}_0^{[0,T]}$, $\mathcal{Z}_0^{[0,T]}$, $\mathcal{P}_0^{1,[0,T]}$, $\mathcal{P}_0^{2,[0,T]}$, $\mathcal{Q}_0^{1,[0,T]}$, $\mathcal{Q}_0^{2,[0,T]}$ sont les espaces homogènes associés. On obtient la formulation variationnelle suivante à partir de (3.8) :

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad & \text{Trouver } \underline{v}(\underline{x}, t) \in \mathcal{V}^{[0,T]}, \text{ et } p^c(\underline{x}, t) \in \mathcal{P}^{1,[0,T]}, p^g \in \mathcal{P}^{2,[0,T]} \text{ telles que } \forall t \in [0, T] : \\
 & \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^\top \cdot \rho \underline{\dot{v}} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^\top \cdot \zeta \underline{v} d\Omega + \int_{\Omega(t)} \dot{\underline{\epsilon}}(\underline{\hat{v}})^\top : \mathbb{C} : \underline{\epsilon} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega(t)} \dot{\underline{\epsilon}}(\underline{\hat{v}})^\top b \underline{I} S_w p^c d\Omega - \int_{\Omega(t)} \dot{\underline{\epsilon}}(\underline{\hat{v}})^\top b \underline{I} p^g d\Omega \\
 & = \int_{\Omega(t)} \underline{\hat{v}}^\top \cdot \rho \underline{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\hat{v}}^\top \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS. \\
 & \text{avec } \forall \underline{\hat{v}} \in \mathcal{V}_0^{[0,T]} \text{ et } \forall \hat{p}^c \in \mathcal{P}_0^{[0,T]}, \forall \hat{p}^g \in \mathcal{Q}_0^{[0,T]}.
 \end{aligned}$$

À partir de (3.11) :

$$\begin{aligned}
 (3.14) \quad & \text{Trouver } \underline{v}(\underline{x}, t) \in \mathcal{V}^{[0,T]}, \text{ et } p^c(\underline{x}, t) \in \mathcal{P}^{1,[0,T]}, p^g \in \mathcal{P}^{2,[0,T]} \text{ telles que } \forall t \in [0, T] : \\
 & \int_{\Omega(t)} \left[\left(\frac{b-n}{K_s} S_w + \frac{n S_w}{K_w} \right) \frac{\partial p^g}{\partial t} \right] \hat{p}^c d\Omega + \int_{\Omega(t)} b S_w \dot{\underline{\epsilon}}_v \hat{p}^c d\Omega \\
 & - \int_{\Omega(t)} \left[\left(\frac{b-n}{K_s} S_w \left(S_w + p^c \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right) - n \frac{\partial S_w}{\partial p^c} + \frac{n S_w}{K_w} \right) \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] \hat{p}^c d\Omega \\
 & - \int_{\Omega(t)} \underline{k}_w \underline{\text{grad}}(p^c) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}^c) d\Omega + \int_{\Omega(t)} \underline{k}_w \underline{\text{grad}}(p^g) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}^c) d\Omega \\
 & - \int_{\Omega(t)} \underline{k}_w \rho_w (\underline{f} - \underline{\dot{v}}) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}^c) d\Omega + \int_{\Gamma_{qw}} \underline{q}_w^d \hat{p}^c dS = 0. \\
 & \text{avec } \forall \underline{\hat{v}} \in \mathcal{V}_0^{[0,T]} \text{ et } \forall \hat{p}^c \in \mathcal{P}_0^{[0,T]}, \forall \hat{p}^g \in \mathcal{Q}_0^{[0,T]}.
 \end{aligned}$$

À partir de (3.12) :

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad & \text{Trouver } \underline{v}(\underline{x}, t) \in \mathcal{V}^{[0,T]}, \text{ et } p^c(\underline{x}, t) \in \mathcal{P}^{1,[0,T]}, p^g \in \mathcal{P}^{2,[0,T]} \text{ telles que } \forall t \in [0, T] : \\
 & \int_{\Omega(t)} \left[\left(\frac{b-n}{K_s} S_g + \frac{n S_g}{K_g} \right) \frac{\partial p^g}{\partial t} \right] \hat{p}^g d\Omega + \int_{\Omega(t)} b (1 - S_w) \dot{\underline{\epsilon}}_v \hat{p}^g d\Omega \\
 & - \int_{\Omega(t)} \left[\left(\frac{b-n}{K_s} S_g \left(S_w + p^c \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right) + \frac{n S_w}{K_w} \right) \frac{\partial p^c}{\partial t} \right] \hat{p}^g d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \underline{k}_g \underline{\text{grad}}(p^g) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}^g) d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \underline{k}_g \rho_g (\underline{f} - \underline{\dot{v}}) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}^g) d\Omega + \int_{\Gamma_{qg}} \underline{q}_g^d \hat{p}^g dS = 0.
 \end{aligned}$$

2 Approximation par éléments finis

La discrétisation par éléments finis mixtes du problème variationnel (3.13)–(3.15) s'effectue très naturellement si on utilise des approximations correctes des espaces $\mathcal{V}$,

$\mathcal{P}^1$, $\mathcal{P}^2$ cinématiquement admissible. On choisit une interpolation de degré 2, notée P_2 dans l'espace discret $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ pour approximer le champ de vitesse $\underline{v}$ et une interpolation de degré inférieur, noté P_1 dans l'espace discret $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}^1 \times \mathcal{P}^2$ pour approximer chaque champ de pression. Nous avons fait le choix d'une interpolation hybride, car ce genre d'approximation permet de vérifier la condition *inf-sup* ou Ladyzhenskaya-Babuška-Breezi (LBB)^[86,9,60]. Cette condition permet de satisfaire aux conditions de stabilités numériques et d'éviter les problèmes d'oscillations et de verrouillages numériques connus. Ce genre de formulation est courante (Zienkiewicz (2013)^[161]) lorsque l'on veut simuler le comportement de matériaux très peu compressibles (coefficient de Poisson $\nu \simeq 0,5$). Ce type de problème s'approche alors d'un problème de Stokes.

L'illustration (Fig.3.1) présente deux types d'éléments finis mixtesⁱ que nous avons implémenté dans LMGC90 pour la simulation de problèmes multiphysiques. La technique d'implémentation employée (voir section 5) a permis de développer toute une collection d'éléments finis mixtes en deux et trois dimensions dans la plateforme LMGC90.

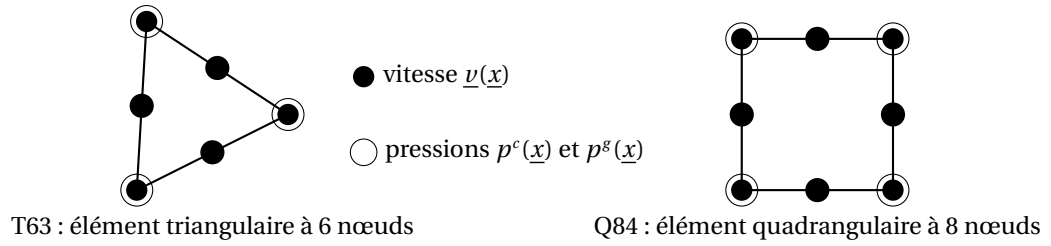


Fig 3.1. Éléments finis mixtes (P2-P1) à un champ de vitesses et deux champs de pression .

2.1 Discrétisation en espace

À partir de l'approximation proposée à la section précédente (2), on discrétise les équations (3.13) – (3.15) à l'aide de la méthode des éléments finis en utilisant les fonctions de formes suivantes :

$$(3.16a) \quad \underline{v}_h(\underline{x}, t) = \mathbf{N}_v(\underline{x}) \underline{v}(t),$$

$$(3.16b) \quad p_h^c(\underline{x}, t) = \mathbf{N}_p(\underline{x}) p^c(t),$$

$$(3.16c) \quad p_h^g(\underline{x}, t) = \mathbf{N}_p(\underline{x}) p^g(t).$$

Dans l'équation (3.16), $\mathbf{N}_v$ et $\mathbf{N}_p$ représentent les matrices de taille ($ndim \times nnodes$) des fonctions de forme nodales. $\underline{v}(t)$ est le vecteur des vitesses nodales, et $p^c(t), p^g(t)$ sont

i. Cet élément est aussi appelé élément de Taylor-Hood.

ceux des pressions nodales.

2.1.1 Discrétisation de la quantité mouvement

On commence par écrire le problème sur le domaine élémentaire $^e\Omega$ d'un élément fini du maillage. La discrétisation pour (3.13) donne :

$$\begin{aligned}
 (3.17) \quad & \{\hat{\underline{v}}\}^\top \left(\int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{B}^\top {}^e\mathbf{C} {}^e\mathbf{B} d\Omega \{u\} + \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{B}^\top \mathbf{m} b S_w {}^e\mathbf{N}_p d\Omega \{p^c\} \right. \\
 & \left. - \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{B}^\top \mathbf{m} b {}^e\mathbf{N}_p d\Omega \{p^g\} + \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_v^\top \rho {}^e\mathbf{N}_v d\Omega \{\underline{v}\} + \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_v^\top \zeta {}^e\mathbf{N}_v d\Omega \{v\} \right) \\
 & = \{\hat{\underline{v}}\}^\top \left(\int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_v^\top \rho \underline{f} d\Omega + \int_{\Gamma\sigma} {}^e\mathbf{N}_v^\top \underline{T}^d dS \right).
 \end{aligned}$$

Dans l'équation discrétisée (3.17), la grandeur $^e\mathbf{B} = \partial \mathbf{N}_v$ est la matrice symétrique d'interpolation des déformations de taille $(nnodes \times nddl^{méca})$, et $\mathbf{m}$ le vecteur identité défini par $\mathbf{m} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^\top$. La première intégrale $^e\mathbf{K}_t = \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{B}^\top {}^e\mathbf{D} {}^e\mathbf{B} d\Omega$ représente la matrice $(nddl^{méca} \times nddl^{méca})$ de rigidité élémentaire. La deuxième et troisième intégrale, respectivement $^e\mathbf{C}_{sc} = \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{B}^\top \mathbf{m} b S_w {}^e\mathbf{N}_p d\Omega$ et $^e\mathbf{C}_{sg} = - \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{B}^\top \mathbf{m} b {}^e\mathbf{N}_p d\Omega$ représentent les matrices $(nddl^{méca} \times nddl^{press})$ de couplage élémentaire de l'action du fluide sur le solide. Les deux dernières intégrales du membre de gauche, respectivement $^e\mathbf{M}_v = \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_v^\top \rho {}^e\mathbf{N}_v d\Omega$ et $^e\mathbf{D} = \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_v^\top \zeta {}^e\mathbf{N}_v d\Omega$ représentent la matrice $(nddl^{méca} \times nddl^{méca})$ élémentaire de masse du solide et la matrice $(nddl^{méca} \times nddl^{méca})$ élémentaire d'amortissement. On précise maintenant le vecteur $(nddl^{méca})$ des forces appliquées $^e\mathbf{F}_v$, lequel englobe les contributions dues aux forces volumiques $\int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_v^\top \rho \underline{f} d\Omega$ et aux forces surfaciques $\int_{\Gamma\sigma} {}^e\mathbf{N}_v^\top \underline{T}^d dS$.

Au final, l'équation (3.17) peut s'écrire sous la forme plus compacte suivante :

$$(3.18) \quad {}^e\mathbf{M}_v \{\underline{v}\} + {}^e\mathbf{C} \{\underline{v}\} + {}^e\mathbf{K} \{\underline{u}\} + {}^e\mathbf{C}_{sc} \{p^c\} + {}^e\mathbf{C}_{sg} \{p^g\} = {}^e\mathbf{F}_v.$$

2.1.2 Discrétisation de l'équation en p^c

La discrétisation de l'équation (3.14) donne :

$$\begin{aligned}
 (3.19) \quad & \{\hat{p}^c\}^\top \left(\int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \left(\frac{b-n}{K_s} S_w + \frac{nS_w}{K_w} \right) {}^e\mathbf{N}_p d\Omega \{\dot{p}^g\} + \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top b S_w \mathbf{m}^\top {}^e\mathbf{B} d\Omega \{\underline{v}\} \right. \\
 & \left. - \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \left(\frac{b-n}{K_s} S_w \left(S_w + p^c \frac{\partial S_w}{\partial p^c} \right) - n \frac{\partial S_w}{\partial p^c} + \frac{nS_w}{K_w} \right) {}^e\mathbf{N}_p d\Omega \{\dot{p}^c\} \right. \\
 & \left. - \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \mathbf{k}_w {}^e\mathbf{N}_p d\Omega \{p^c\} + \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \mathbf{k}_w {}^e\mathbf{N}_p d\Omega \{p^g\} \right. \\
 & \left. + \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \mathbf{k}_w \rho_w {}^e\mathbf{N}_v d\Omega \{\underline{v}\} \right) = \{\hat{p}^c\}^\top \left(\int_{\Gamma_{qw}} {}^e\mathbf{N}_p^\top q_w^d d\Gamma + \int_{^e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \mathbf{k}_w \rho_w \underline{f} d\Omega \right)
 \end{aligned}$$

On multiplie l'équation (3.19) par -1 et on l'écrit sous la forme compacte suivante :

$$(3.20) \quad \mathbf{C}_{cg} \dot{\underline{p}}_g + \mathbf{C}_{cs} \underline{v} + \mathbf{P}_{cc} \dot{p}_c + \mathbf{H}_{cc} p_c + \mathbf{H}_{cg} p_g + \mathbf{M}_c \dot{\underline{v}} = \mathbf{F}_c.$$

On peut expliciter les termes de l'équation (3.19) de la manière suivante, le premier terme ${}^e\mathbf{C}_{cg} = -\int_{e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \left(\frac{b-n}{K_s} S_w + \frac{nS_w}{K_w} \right) {}^e\mathbf{N}_p d\Omega$ représente la matrice ($nddl^{press} \times nddl^{press}$) de couplage de l'action du gaz sur l'eau. Le deuxième terme ${}^e\mathbf{C}_{cs} = -\int_{e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top b S_w \mathbf{m}^\top {}^e\mathbf{B} d\Omega$ représente la matrice ($nddl^{press} \times nddl^{méca}$) de couplage de l'action du solide sur l'eau. La matrice ${}^e\mathbf{P}_{cc} = \int_{e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \left(\frac{b-n}{K_s} S_g \left(S_w + p_c \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right) {}^e\mathbf{N}_p d\Omega$ de taille ($nddl^{press} \times nddl^{press}$) représente la matrice de compressibilité. La matrice ($nddl^{press} \times nddl^{press}$) exprimée par ${}^e\mathbf{H}_{cc} = \int_{e\Omega(t)} {}^e\nabla\mathbf{N}_p^\top \mathbf{k}_w {}^e\nabla\mathbf{N}_p d\Omega$ est la matrice de perméabilité.

On peut remarquer que le terme ${}^e\mathbf{H}_{cg} = -\int_{e\Omega(t)} {}^e\nabla\mathbf{N}_p^\top \mathbf{k}_w {}^e\nabla\mathbf{N}_p d\Omega$ supplémentaire qui apparaît du fait de la formulation en p_c . Le dernier terme du membre de gauche ${}^e\mathbf{M}_c = -\int_{e\Omega(t)} {}^e\nabla\mathbf{N}_p^\top \mathbf{k}_w \rho_w {}^e\nabla\mathbf{N}_p d\Omega$ est dû aux effets inertiels de l'eau. Le vecteur ($nddl^{press}$) des forces appliquées ${}^e\mathbf{F}_c$ englobe les contributions dues aux flux imposés aux bords aux forces volumiques respectivement $-\int_{e\Gamma_{qw}} {}^e\mathbf{N}_p^\top q_w^d d\Gamma$ et $-\int_{e\Omega(t)} {}^e\nabla\mathbf{N}_p^\top \mathbf{k}_w \rho_w \underline{f} d\Omega$.

2.1.3 Discrétisation de l'équation en p^g

La discrétisation de l'équation (3.15) donne :

$$(3.21) \quad \begin{aligned} & \{\underline{\hat{p}}_g\}^\top \left(\int_{e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \left(\frac{b-n}{K_s} S_g + \frac{nS_g}{K_g} \right) {}^e\mathbf{N}_p d\Omega \{\underline{\hat{p}}_g\} + \int_{e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top b S_g \mathbf{m}^\top {}^e\mathbf{B} d\Omega \{\underline{v}\} \right. \\ & - \int_{e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \left(\frac{b-n}{K_s} S_g \left(S_w + p_c \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right) {}^e\mathbf{N}_p d\Omega \{\underline{\hat{p}}_c\} \\ & + \int_{e\Omega(t)} {}^e\nabla\mathbf{N}_p \mathbf{k}_g {}^e\nabla\mathbf{N}_p d\Omega \{p_g\} + \int_{e\Omega(t)} {}^e\nabla\mathbf{N}_p^\top \rho_g {}^e\mathbf{N}_p d\Omega \{\underline{\hat{v}}\} \Big) \\ & = \{\underline{\hat{p}}_g\}^\top \left(\int_{e\Gamma_{qg}} {}^e\mathbf{N}_p^\top q_g^d d\Gamma + \int_{e\Omega(t)} {}^e\nabla\mathbf{N}_p^\top \mathbf{k}_g \rho_g \underline{f} d\Omega \right). \end{aligned}$$

où la forme compacte de (3.21) s'écrit :

$$(3.22) \quad \mathbf{P}_{gg} \dot{\underline{p}}_g + \mathbf{C}_{gs} \underline{v} + \mathbf{C}_{gc} \dot{p}_c + \mathbf{H}_{gg} p_g + \mathbf{H}_{gc} p_g + \mathbf{M}_g \dot{\underline{v}} = \mathbf{F}_g.$$

Dans (3.21), la matrice ${}^e\mathbf{P}_{gg} = \int_{e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \left(\frac{b-n}{K_s} S_g + \frac{nS_g}{K_g} \right) {}^e\mathbf{N}_p d\Omega$ de taille ($nddl^{press} \times nddl^{press}$) représente la matrice de compressibilité, le deuxième terme ${}^e\mathbf{C}_{gs} = \int_{e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top b S_g \mathbf{m}^\top {}^e\mathbf{B} d\Omega$ représente la matrice ($nddl^{press} \times nddl^{méca}$) de couplage de l'action du solide sur le gaz. La matrice ${}^e\mathbf{C}_{gc} = -\int_{e\Omega(t)} {}^e\mathbf{N}_p^\top \left(\frac{b-n}{K_s} S_g \left(S_w + p_c \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right) {}^e\mathbf{N}_p d\Omega$ représente la matrice ($nddl^{press} \times nddl^{press}$) de couplage de l'action du gaz sur l'eau. Enfin, les deux derniers termes ${}^e\mathbf{H}_{gg} = \int_{e\Omega(t)} {}^e\nabla\mathbf{N}_p \mathbf{k}_g {}^e\nabla\mathbf{N}_p d\Omega \{p_g\}$ et ${}^e\mathbf{M}_g = \int_{e\Omega(t)} {}^e\nabla\mathbf{N}_p^\top \rho_g {}^e\mathbf{N}_p d\Omega$ de taille

$(nddl^{press} \times nddl^{press})$ représentent respectivement la matrice de perméabilité et la matrice dues aux effets inertiels du gaz.

2.2 Système matriciel à résoudre

Ainsi, on peut écrire le système d'équations non linéaires sous une forme plus compacte à l'aide des coefficients introduits ci-dessus, donc :

$$(3.23) \quad {}^e\mathbf{M}_v\{\dot{v}\} + {}^e\mathbf{C}\{v\} + {}^e\mathbf{K}\{u\} + {}^e\mathbf{C}_{sc}\{p_c\} + {}^e\mathbf{C}_{sg}\{p_g\} = {}^e\mathbf{F}_v$$

$$(3.24) \quad {}^e\mathbf{M}_c\{\dot{v}\} + {}^e\mathbf{C}_{cs}\{v\} + {}^e\mathbf{P}_{cc}\{\dot{p}_c\} + {}^e\mathbf{C}_{cg}\{\dot{p}_g\} + {}^e\mathbf{H}_{cc}\{p_c\} + {}^e\mathbf{H}_{cg}\{p_g\} = {}^e\mathbf{F}_c$$

$$(3.25) \quad {}^e\mathbf{M}_g\{\dot{v}\} + {}^e\mathbf{C}_{gs}\{v\} + {}^e\mathbf{C}_{gc}\{\dot{p}_c\} + {}^e\mathbf{P}_{gg}\{\dot{p}_g\} + {}^e\mathbf{H}_{gg}\{p_g\} = {}^e\mathbf{F}_g$$

On précise également la forme matricielle du système obtenu. Cette forme matricielle nous servira d'écriture de référence pour la discrétisation en temps et la linéarisation du système. Celle-ci s'exprime de la façon suivante :

$$(3.26) \quad \underbrace{\begin{bmatrix} {}^e\mathbf{M}_u & 0 & 0 \\ {}^e\mathbf{M}_c & {}^e\mathbf{P}_{cc} & {}^e\mathbf{C}_{cg} \\ {}^e\mathbf{M}_g & {}^e\mathbf{C}_{gc} & {}^e\mathbf{P}_{gg} \end{bmatrix}}_{= {}^e\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{p}_c \\ \dot{p}_g \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} {}^e\mathbf{C} & {}^e\mathbf{C}_{sc} & {}^e\mathbf{C}_{sc} \\ {}^e\mathbf{C}_{cs} & {}^e\mathbf{H}_{cc} & {}^e\mathbf{H}_{cg} \\ {}^e\mathbf{C}_{gs} & 0 & {}^e\mathbf{H}_{gg} \end{bmatrix}}_{= {}^e\mathbf{C}} \begin{pmatrix} v \\ p_c \\ p_g \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} {}^e\mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{= {}^e\mathbf{K}} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} {}^e\mathbf{F}_v \\ {}^e\mathbf{F}_c \\ {}^e\mathbf{F}_g \end{pmatrix}}_{= {}^e\mathbf{F}_{ext}}$$

La matrice ${}^e\mathbf{M}$ représente la matrice de masse *augmentée* du système, la matrice ${}^e\mathbf{C}$ est la matrice d'amortissement augmentée, et ${}^e\mathbf{K}_t$ est la matrice de rigidité augmentée. Toutes sont de dimension $(nddl^{méca} + 2 \ nddl^{press}), (nddl^{méca} + 2 \ nddl^{press})$. On remarque que le système à résoudre (3.26) est non symétrique, ce qui sera gênant d'un point de vue de la résolution numérique.

On remarquera également que la formulation proposée en vitesse-pressions à pour conséquence de disposer les coefficients dans (3.23)–(3.25) différemment d'une résolution classique. En effet, les termes de compressibilité ${}^e\mathbf{P}_{cc}$, ${}^e\mathbf{P}_{gg}$ et de couplage ${}^e\mathbf{C}_{cg}$, ${}^e\mathbf{C}_{gc}$ sont dans la matrice de masse ${}^e\mathbf{M}$, les termes de perméabilité ${}^e\mathbf{H}_{cc}$, ${}^e\mathbf{H}_{gg}$ et de couplage structure ${}^e\mathbf{C}_{sc}$, ${}^e\mathbf{C}_{sg}$, ${}^e\mathbf{C}_{cs}$, ${}^e\mathbf{C}_{gs}$ sont dans la matrice d'amortissement ${}^e\mathbf{C}$. La matrice de rigidité ${}^e\mathbf{K}$ possède uniquement la contribution mécanique ${}^e\mathbf{K}$.

Le problème est maintenant réduit à un système non linéaire d'équations algébriques, à partir duquel l'ensemble des forces intérieures $\mathbf{F}_{int}$ et extérieures $\mathbf{F}_{ext}$ sont décrites telle que :

$$(3.27a) \quad {}^e\mathbf{F}_{int} = {}^e\mathbf{F}_{int}^v \cup {}^e\mathbf{F}_{int}^{pc} \cup {}^e\mathbf{F}_{int}^{pg}$$

$$(3.27b) \quad {}^e\mathbf{F}_{ext} = {}^e\mathbf{F}_{ext}^v \cup {}^e\mathbf{F}_{ext}^{pc} \cup {}^e\mathbf{F}_{ext}^{pg}$$

Finalement, le problème éléments finis à résoudre sur un maillage de m éléments, s'écrit :

$$(3.28) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } \underline{v}_h(t) \in \mathcal{V}_h^h, p_h^c(t) \in \mathcal{P}^{1,h}, p_h^g(t) \in \mathcal{P}^{2,h}, \text{ avec le système à résoudre :} \\ & \underline{\mathbf{A}} \left({}^e \mathbf{F}_{int} - {}^e \mathbf{F}_{ext} \right) = \mathbf{R} \quad \text{avec} \quad {}^e \mathbf{M} \dot{\underline{v}} + {}^e \mathbf{C} \underline{v} + {}^e \mathbf{K} \underline{u} = {}^e \mathbf{F}_{int} \\ & \text{tel que } \underline{\hat{v}}_h(t) \in \mathcal{V}_h^0, p_h^c(t) \in \mathcal{P}_h^{1,0}, p_h^g(t) \in \mathcal{P}_h^{2,0} \text{ avec } \mathbf{R} \text{ le vecteur résidu.} \end{aligned}$$

3 Algorithmes de résolution

L'objectif de cette section est de présenter et d'appliquer les méthodes numériques adéquates pour résoudre le système que nous avons formulé.

3.1 Discrétisation temporelle

Il existe de nombreux schémas d'intégration en temps plus ou moins adapté suivant le type de problème que l'on considère. On peut citer par exemple le schéma de Newmark, lequel est utilisé par Mohammadnejad (2012)^[101] et Carrier (2013)^[41] pour le même genre de problème multiphysique. Pour notre problème, nous avons à chaque pas de temps un système à résoudre de la forme suivante :

$$(3.29) \quad \mathbf{M}(\underline{v}) \dot{\underline{v}} + \mathbf{C}(\underline{v}) \underline{v} + \mathbf{K} \underline{u} = \mathbf{F}_{ext}.$$

Le problème étant formulé en vitesse on cherche donc à interpoler la vitesse dans l'intervalle $[t^k; t^{k+1}]$. Pour ce faire, on réalise une discrétisation classique par différences finies paramétrée par θ , en utilisant un **θ -schéma**ⁱ. La particularité ici, est que l'on veut obtenir une intégration en temps à la fois sur la vitesse et sur la position. La méthode pour déterminer le schéma consiste à estimer l'intégrale suivante :

$$(3.30) \quad \underline{v}(t^{k+1}) = \underline{v}(t^k) + \int_{t^k}^{t^{k+1}} f(s, \underline{v}(s)) ds,$$

on estime alors que :

$$(3.31) \quad \int_{t^k}^{t^{k+1}} f(s, \underline{v}(s)) ds \simeq (t^{k+1} - t^k) (\theta f(t^{k+1}, \underline{v}(t^{k+1})) + (1 - \theta) f(t^k, \underline{v}(t^k))).$$

i. Plus généralement, le θ -schéma est inconditionnellement stable si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, et conditionnellement stable si $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, et pour des valeurs particulières de θ on retrouve pour $\theta = 0$ le schéma d'Euler explicite, pour $\theta = \frac{1}{2}$ le schéma de Crank-Nicholson et pour $\theta = 1$ le schéma d'Euler implicite.

avec $h = t^{k+1} - t^k$. En posant les vecteurs $\underline{\dot{v}} = (\dot{v}, \dot{p}_c, \dot{p}_g)^\top$, $\underline{v} = (v, p_c, p_g)^\top$, on obtient par intégration le schéma de dérivation suivant :

$$(3.32) \quad \underline{v}^{k+1} = \underline{v}^k + h\theta \underline{\dot{v}}^{k+\theta} \quad \text{avec} \quad \underline{v}^{k+\theta} = \theta \underline{v}^{k+1} + (1-\theta) \underline{v}^k,$$

et de la même manière pour les vecteurs $\underline{u} = (u, 0, 0)^\top$ et $\underline{\dot{u}} = (\dot{u}, 0, 0)^\top$, on obtient :

$$(3.33) \quad \underline{u}^{k+1} = \underline{u}^k + h\theta \underline{\dot{u}}^{k+\theta} \quad \text{avec} \quad \underline{u}^{k+\theta} = \theta \underline{u}^{k+1} + (1-\theta) \underline{u}^k.$$

Pour déterminer $\underline{v}^k$ on utilise donc le θ -schéma appliqué à (3.29), on obtient alors :

$$(3.34) \quad \mathbf{M}^{k+1} \underline{v}^{k+1} - \mathbf{M}^k \underline{v}^k + \mathbf{C}^{k+\theta} h \underline{v}^{k+\theta} + \mathbf{K}^{k+\theta} h \underline{u}^{k+\theta} = h((1-\theta)\mathbf{F}^k + \theta\mathbf{F}^{k+1}).$$

On développe (3.34) pour regrouper le vecteur $\underline{v}^{k+1}$ et en tenant compte que $\underline{\dot{u}}^{k+\theta} = \underline{v}^{k+\theta}$, on obtient :

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}^{k+1} \underline{v}^{k+1} - \mathbf{M}^k \underline{v}^k + \mathbf{C}^{k+\theta} (h\theta \underline{v}^k + h(1-\theta) \underline{v}^{k+1}) \\ + \mathbf{K}^{k+\theta} (h^2\theta^2 \underline{v}^{k+1} + h^2\theta(1-\theta) \underline{v}^k + h \underline{u}^k) = h((1-\theta)\mathbf{F}^k + \theta\mathbf{F}^{k+1}) \end{aligned}$$

il en résulte l'équation (cf. section (4.1)) à résoudre :

$$(3.36) \quad \begin{aligned} [\mathbf{M}^{k+1} + h\theta\mathbf{C}^{k+\theta} + h^2\theta^2\mathbf{K}^{k+\theta}] \underline{v}^{k+1} \\ = [\mathbf{M}^{k+1} + h((1-\theta)\mathbf{C}^{k+\theta} + h\theta(1-\theta)\mathbf{K}^{k+\theta})] \underline{v}^k - h(\mathbf{K}^{k+\theta} \underline{u}^k + \mathbf{F}^{k+\theta}). \end{aligned}$$

où pour simplifier la notation du membre de gauche, on note $\mathbf{K}_T^{k+1} = \mathbf{M}^{k+1} + h\theta\mathbf{C}^{k+\theta} + h^2\theta^2\mathbf{K}^{k+\theta}$, et le second membre $\mathbf{S}^{k+1} = [\mathbf{M}^{k+1} + h((1-\theta)\mathbf{C}^{k+\theta} + h\theta(1-\theta)\mathbf{K}^{k+\theta})] \underline{v}^k - h(\mathbf{K}^{k+\theta} \underline{u}^k + \mathbf{F}^{k+\theta})$. On note également que $\mathbf{M}$ et $\mathbf{C}$ sont des matrices non symétriques.

3.2 Variante de la méthode de Newton

Il existe de nombreuses méthodes pour résoudre les systèmes non linéaires. Nous présenterons ici une variante connue de la méthode itérative de Newton (ou méthode du point fixe). Des auteurs tels que Carrier (2012)^[41], Mohammadnejad (2011,2012,2013)^[83,101,102] ont utilisé la méthode de Newton-Raphson pour résoudre ce genre de système. Cependant pour notre problème nous avons voulu faire l'économie d'un coûteux calcul de la matrice tangente à chaque itération en utilisant une variante de la méthode de Newton.

En posant,

$$(3.37) \quad \mathbf{g}(\underline{v}^{k+1}) = \mathbf{K}_T(\underline{v}^{k+1}) - \mathbf{S}^{k+1}$$

la méthode de Newton peut s'écrire de manière générale pour l'itération n :

$$(3.38) \quad \mathbf{g}'(\underline{v}^{n,k+1})(\underline{v}^{n+1,k+1} - \underline{v}^{n,k+1}) = -\mathbf{g}(\underline{v}^{n,k+1})$$

La variante de la méthode de Newton consiste alors à remplacer la dérivée exacte $\mathbf{g}'(\underline{v}^{k+1})$ par l'expression approchée suivante qui est calculée à la première itération :

$$(3.39) \quad \mathbf{g}'(\underline{v}^{0,k+1}) \simeq \mathbf{K}_T(\mathbf{v}^{0,k+1}) \rightarrow \mathbf{K}^*$$

On suppose alors $\mathbf{K}^*$ comme étant la meilleure approximation de départ. Le problème linéarisé instationnaire s'écrit :

```

étant donné  $\underline{v}^{(0)}$ 
tant que  $R >$  un critère d'arrêt  $\epsilon$ 
  boucle sur  $k = 1, \dots, K$ 
    boucle sur  $n = 1, \dots, N$ 
      résoudre :  $\mathbf{K}^*(\underline{v}^{n+1,k+1} - \underline{v}^{n,k+1}) = \mathbf{K}_T(\underline{v}^{n,k+1}) - \mathbf{S}^{n,k+1}$ 
      mise à jour de la solution
    fin
  fin
Algorithme 1 : variante de la méthode de Newton

```

On peut remarquer le caractère incrémentale (pas à pas) de l'intégration temporelle et la nature itérative de l'algorithme de résolution d'équations non linéaires fournissant la solution à chaque pas de temps.

4 Description du problème et stratégie de résolution

Pour la résolution de problèmes multiphysiques, deux stratégies algorithmiques sont à distinguer. Suivant les classes de problèmes multiphysiques étudiés, *i.e* problèmes couplés forts ou faibles, on parle alors d'approche de résolution dite *étagée* et d'approche dite *simultanée* (ou encore monolithique). La difficulté dans le choix de l'approche est d'obtenir un bon compromis entre la précision, la stabilité numérique, le coût de calcul et la modularité.

4.1 Méthode simultanée

Le principe de la méthode simultanée réside dans le fait de résoudre l'ensemble du système d'équations décrivant chaque physique. Dans notre cas, cela consiste à résoudre simultanément l'équilibre mécanique et l'équilibre hydraulique. Cependant, comme toutes méthodes on peut identifier quelques inconvénients et avantages liés à son utilisation.

Inconvénients • Cette méthode ne permet pas l'utilisation de deux solveurs différents, mais nécessite d'avoir une structure de donnée commune pour la résolution du système. Autre inconvénients inhérents à ce type de résolution, est l'incapacité de gérer des temps caractéristiques différents dans l'évolution des phénomènes mécanique et hydraulique, puisque le couplage s'effectue pour la mécanique et l'hydraulique à chaque itération.

Avantages • Ce type de méthode bénéficie d'une stabilité inconditionnelle^[6,7] pour le schéma en temps (avec $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$). Ces schémas assurent aussi une meilleure précision (à pas de temps donné), qu'une méthode de résolution étagée. Ils peuvent aussi également servir de calcul de référence pour le développement de techniques de résolution étagée. Cette méthode permet de capter numériquement des interactions fortes entre les sous-systèmes, lesquelles sont en général mal décrites par les méthodes étagées avec réactualisation. On notera qu'avec ce type de méthode algorithmique, le couplage est *par construction* fortⁱ

Dans le cas qui nous intéresse, à partir de la discrétisation du système proposé (3.26), la stratégie monolithique consiste à résoudre à chaque pas de temps t^{k+1} :

$$(3.40) \quad [\mathbf{M}^{k+\theta} + h\theta\mathbf{C}^{k+\theta} + h^2\theta^2\mathbf{K}^{k+\theta}] \mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{S}^{k+\theta}$$

où l'on a posé

$$(3.41) \quad \mathbf{S}^{k+\theta} = [\mathbf{M}^{k+\theta} + h(1-\theta)\mathbf{C}^{k+\theta} + h^2\theta(1-\theta)\mathbf{K}^{k+\theta}] \mathbf{v}^k - h\mathbf{K}^{k+\theta} \mathbf{u}^k + h\mathbf{F}_{ext}^{k+\theta}.$$

4.2 Méthode étagée

La terminologie *étagée* pour décrire ce type de méthodes est en réalité récente, voir par exemple Simo (1992)^[135] et Felippa (1980, 1988, 2001)^[58,57,59]. Elles sont à la base des techniques de résolution séquentielle, s'appuyant sur des méthodes telles que celle de Gauss-Seidel ou Jacobi, où les interactions sont évaluées à configuration fixe.

Inconvénients • C'est lorsque le couplage est fort, que les méthodes étagées montrent leurs limites. La convergence se fait alors au prix d'un temps de calcul souvent important. Et l'évaluation des interactions est toujours faite avec un temps de décalage, comme le constate Michler (2004)^[100].

Avantages • Au contraire de la méthode monolithique, la méthode étagée autorise l'utilisation de solveurs différents, et la taille des problèmes à résoudre est généralement in-

i. **Couplage faible.** Si on considère un système divisé en deux sous-systèmes, on dit que le système est faiblement couplé si le premier sous système a une influence significative sur le deuxième sous-système, tandis que le deuxième sous-système n'a qu'une influence négligeable sur le premier sous système. **Couplage fort.** Le couplage est dit fort lorsque chaque sous-système a une influence significative vis-à-vis de l'autre.

férieure à celle des problèmes monolithiques. Ces schémas de résolution permettent, lorsque le couplage est faible, un gain de temps de calcul important, mais perdent la stabilité inconditionnelle. Toutefois, certains auteurs^[129] proposent des modifications de ces méthodes pour les rendre inconditionnellement stables.

4.3 Résumé

Le schéma suivant **Fig.(3.2)** résume les deux stratégies de résolution :

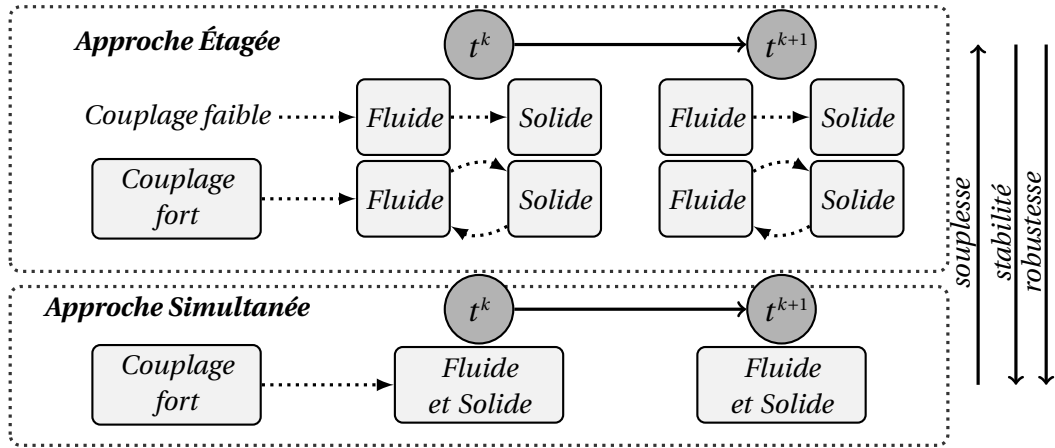


Fig 3.2. Représentation schématique des différentes stratégies de couplage.

En pratique, aucune des deux méthodes n'est vraiment supérieure à l'autre, et la littérature traitant des divergences entre les deux méthodes est abondante. En réalité, le choix dépend fortement du type de problème. Des développements récents (voir Néron (2004,2007,2008)^[109,110,111]) proposent des stratégies alternatives permettant l'utilisation de maillages spatiaux et de discrétisations temporelles, différents pour chaque physique.

Cependant pour nous aider dans le choix de la stratégie, il peut être judicieux d'établir quelques critères de sélection, par exemple :

- force du couplage ;
- ratio entre précision et temps de calcul ;
- potentiel de modularité et de réutilisabilité du code implémenté (à moyen terme).

Le premier critère suffit généralement à orienter le choix vers une approche simultanée de résolution des équations. Tandis que les deux derniers critères sont généralement en faveur de l'approche étagée.

La manière dont est formulé ici le problème (3.40) suggère de choisir la méthode de résolution simultanée et les auteurs, Schrefler (2001)^[132], Mohammadnejad (2012)^[101] et

Carrier (2012)^[41] ayant cherchés à résoudre ce genre de problème préconisent d'utiliser ce type d'approche.

Néanmoins, ce choix ne répond que partiellement à notre objectif. En effet, nous souhaitons développer un outil complet mais surtout modulaire et adaptable à des couplages futurs. Et ainsi éviter des développements lourds dès que l'on change de problème physique.

5 Technique d'implémentation : généricité

L'idée de cette section est d'établir une technique permettant de conserver la robustesse des approches monolithiques tout en gardant une modularité maximale. Pour ce faire, nous nous inspirons de la philosophie de la programmation orientée objet. La plate-forme ouverte LMGC90 est pour cela bien adaptée à ce type d'exercices par sa modularité.

5.1 Principe de généricité

Nous avons cherché ici à extraire de la méthode des éléments finis tout ce qui était bien adapté à la conception par objetsⁱ telle que le Fortran 90ⁱⁱ permet de l'envisager en se plaçant essentiellement du côté utilisateur. Elle doit permettre à ces utilisateurs de construire plus rapidement leurs applications. Nous avons exploité les notions nouvelles de ce langage de programmation pour réfléchir à l'implémentation des éléments finis en assurant réutilisabilité, extensibilité et compatibilité de la plateforme LMGC90.

La généricité telle que nous la définissons dans ce travail, permet d'écrire une méthode de la même façon, quels que soient les objets auxquels elle s'applique. Par exemple, considérons le cas du produit d'une matrice par un vecteur, il est clair que cette opération ne dépend pas du type de coefficients de la matrice (entier, réel, etc...). Les coefficients de la matrice sont paramétrés en dehors du code source.

5.2 Implémentation

Nous avons cherché pour le développement et l'implémentation de notre outil de simulation à factoriser dans un élément fini générique les différents opérateurs nécessaires à notre formulation. Cette approche évite la répétition de code ayant le même objectif ou le même principe et permet d'envisager plus facilement des extensions au modèle (e.g. ajout des effets thermiques). L'enjeu de la conception d'un tel élément est de

i. La conception par objets est une méthode fondée sur des entités ayant des propriétés communes qui échangent des messages. Le fonctionnement de l'objet est déterminé par le principe d'abstraction.

ii. En gardant à l'esprit que le Fortran 90 n'est pas un langage objet.

fournir une structure de données commune au niveau des opérateurs pour résoudre un problème multiphysique. En effet, pour un grand nombre de problèmes physiques, les équations aux dérivées partielles ne diffèrent que par un certain nombre de paramètres matériels et donc les matrices et les vecteurs élémentaires résultant de la discrétisation par éléments finis sont similaires. Ce que nous illustrons dans le tableau **Tab.(3.1)**, où $\mathcal{M}$ désigne de manière générique les différents termes calculés et $\mathbf{N}$ la matrice des fonctions de forme.

Tab 3.1. Matrices et vecteurs type de la structure de donnée générique.

Type	Nom	Équations
$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathcal{M} \mathbf{N}^T d\Omega$	matrice de masse	(3.17), (3.19), (3.21)
$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^T \mathcal{M} \nabla \mathbf{N}^T d\Omega$	matrice laplacienne	(3.19), (3.21)
$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathcal{M} \mathbf{B} d\Omega$	matrice tangente	(3.17)
$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathcal{M} \mathbf{N}^T d\Omega$	matrice de couplage déplacement	(3.17)
$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathcal{M} \mathbf{N}^T d\Omega$	matrice de couplage pression	(3.19), (3.21)
$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{q} d\Omega$	vecteur second membre	(3.17), (3.19), (3.21)

L'implémentation que nous avons mise en œuvre pour simuler les problèmes multiphysiques est illustrée sur la figure **Fig.(3.3)**. Le pré-traitement est effectué à l'aide du logiciel libre Gmshⁱ et le post-traitement est effectué à l'aide du logiciel libre Paraviewⁱⁱ.

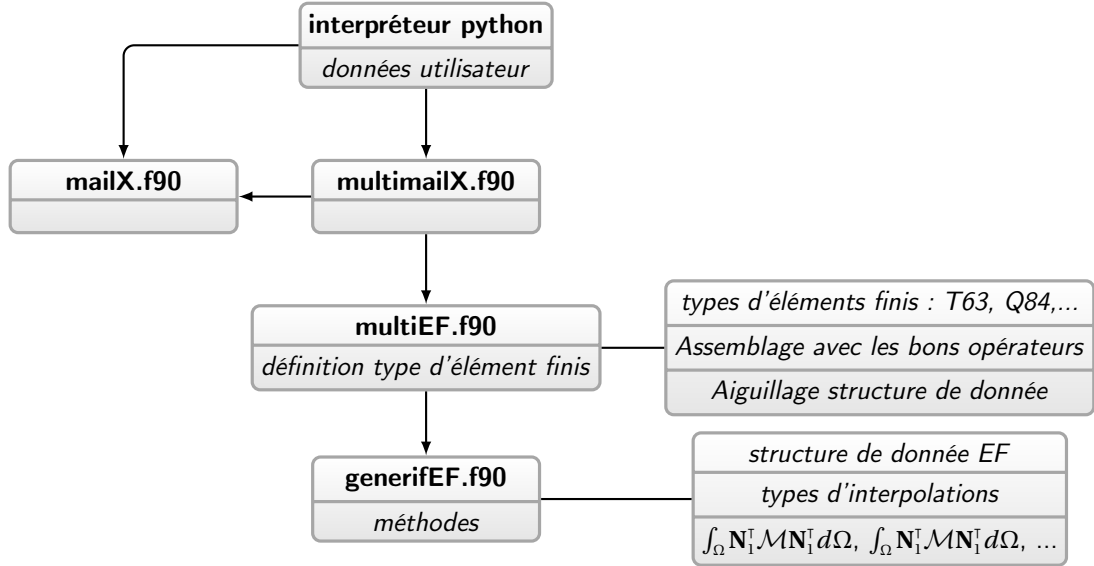


Fig 3.3. Architecture du code pour la simulation de problèmes multiphysiques.

Les données du problème sont entrées par l'utilisateur dans un fichier écrit en python (**interpréteur python**). C'est aussi dans ce fichier que les coefficients des matrices

i. <http://geuz.org/gmsh/>

ii. <http://www.paraview.org/>

Tab.(3.1) sont définis. De cette manière, l'utilisateur peut par exemple changer de formulation (p^c, p^g) ou (p^c, p^w) sans programmation supplémentaire.

6 Simulation d'un écoulement diphasique en milieux poreux déformables

Il n'y a pas de solutions analytiques disponibles pour les écoulements diphasiques dans un milieu poreux partiellement saturé. Pour valider le modèle dynamique d'écoulement diphasique dans un milieu poreux déformable présenté dans ce chapitre, on se propose ici de reproduire l'expérience de drainage d'une colonne de sableⁱ par la seule force gravitaire. De nombreux auteurs^[133,132,87,63,64,158] se sont attachés à reproduire cette expérience pour valider leurs résultats numériques pour des conditions quasi statiques. Pour l'instant, il semblerait que seuls Schrefler et Scotta (2001)^[132], et Khoei et Mohamadnejad (2011)^[83] ont réalisé ce cas test avec une formulation dynamique.

6.1 Test de Liakopoulos

Le cas-test proposé correspond à l'expérience réalisée par Liakopoulos^[96]. Cette expérience consiste à mesurer l'humidité relative en certains points le long d'une colonne d'un mètre pendant sa désaturation uniquement due aux effets gravitationnels. Avant le début de l'expérience et des prises de mesures, de l'eau est ajoutée de manière continue à l'extrémité supérieure de la colonne. Le drainage est libre, à travers un filtre, au niveau inférieur de la colonne jusqu'à ce que des conditions d'écoulements pseudo-permanentes soient établies. Les prises de mesures commencent dès que l'apport d'eau est arrêté.

6.1.1 Configuration initiale

La colonne de sable, représentée en figure (**Fig.3.4**) est supposée initialement saturée en eau ($S_w = 1$, $t = 0^-$). On attire ici l'attention du lecteur sur cette condition, car le passage d'un état saturé à un état non saturé est une des difficultés majeures de la simulation des écoulements diphasiques. En effet, si initialement une des phases n'est pas présente (e.g $S_w = 1$), d'importantes instabilités numériques (oscillations) apparaissent pendant la phase de transition. Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature^[63,64] mais elles ne semblent régler que partiellement ces instabilités. Gawin (1997)^[65] montre que la solution la plus pertinente d'un point de vue numérique consiste à autoriser une très faible valeur de perméabilité pour le gaz. Bien que ce critère n'ait pas de signification physique, Gawin montre qu'introduire une valeur inférieure limite $k_{rg} \leq 0,0001$ n'a pas

i. Le sable est dans un contenant rigide.

d'impact significatif sur la solution. Par ailleurs, cela permet de conserver le jeu complet des équations pendant le démarrage de la simulation. L'état d'équilibre mécanique initial est obtenu par la solution statique du problème.

6.1.2 Conditions aux limites

Au début de l'expérience, les bords supérieurs (Γ_3) et inférieurs (Γ_1) sont supposés être exposés à la pression atmosphérique donc $p_g = p_{atm}$ et $p^w = p_{atm}$. À ($t = 0^+$), l'écoulement est laissé libre sur le bord inférieur tandis qu'il est supposé nul sur le bord supérieur donc $q_w^d = 0$. Cela correspond à une condition de non-reflux. Les bords latéraux (Γ_3 et Γ_4) sont supposés imperméables donc $q_w^d = 0$ et $q_g^d = 0$. Les déplacements horizontaux sont supposés nuls sur les bords latéraux. Les déplacements horizontaux et verticaux sont supposés nuls sur le bord inférieur.

Les conditions initiales et les conditions aux limites sont illustrées sur la figure (Fig.3.4).

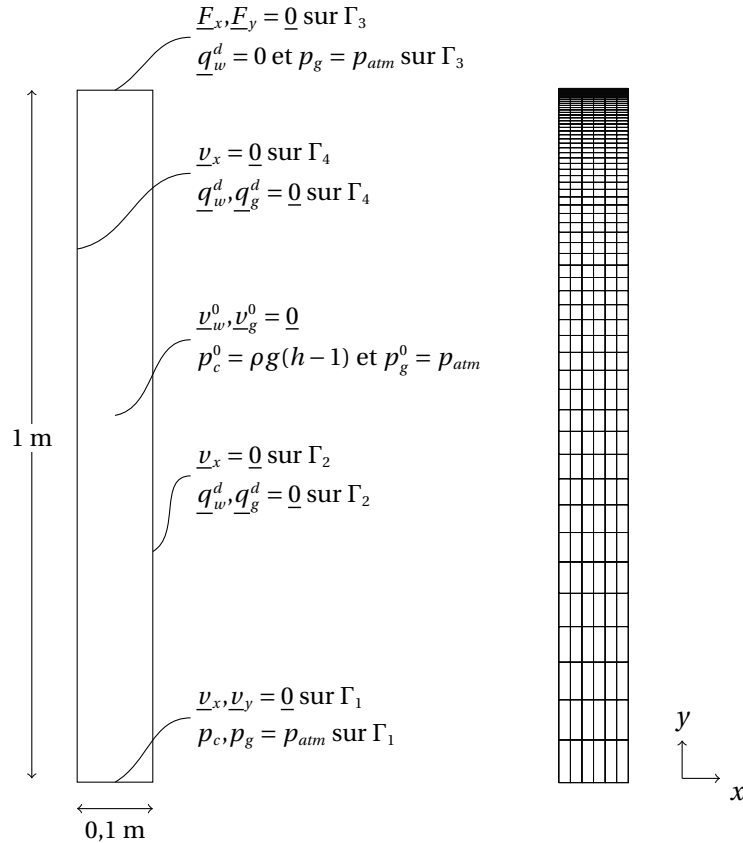


Fig 3.4. Géométrie, conditions initiales, conditions aux limites et maillage de la colonne de Liakopoulos en 2D (déformations planes).

6.1.3 Paramètres matériaux et fonctions de sorption

Les paramètres matériaux utilisés pour la simulation sont listés dans le tableau (3.2). Les paramètres mécaniques du sable Del Monte ont été déterminés plus tard par Gawin (1996) ^[64]. L'évolution de la saturation et de la perméabilité sont gouvernées par les lois de sorption présentées au chapitre 2 (4.6). Durant la simulation, la relation de saturation $S_w(p_c)$ et la relation de perméabilité en eau $k_{rw}(p_c)$ suivantes sont utilisées :

$$(3.42a) \quad S_w = 1 - 0,10152 \left(\frac{p_c}{\rho_w g} \right)^{2,4279}$$

$$(3.42b) \quad k_{rw} = 1 - 2,207(1 - S_w)^{1,0121}.$$

La saturation S_w est fixée à 1 lorsque la pression capillaire p_c est très faible, $p_c < 10^{-16}$ pour des raisons de convergence. La fonction de perméabilité du gaz k_{rg} est celle de Brooks et Corey ^[34] :

$$(3.43a) \quad k_{rg} = (1 - S_e)^2 (1 - S_e^{(2+\lambda)/\lambda})$$

$$(3.43b) \quad S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw}}$$

avec S_e la saturation effective, où la saturation résiduelle vaut $S_{rw} = 0,2$ et le paramètre de distribution de taille de pores $\lambda = 3$.

Tab 3.2. Propriétés matériaux du sable Del Monte.

Module d'Young	$E = 1,3.10^6 \text{ Pa}$
Coefficient de Biot	$b = 1$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,4$
Porosité	$n = 0,2975$
Masse vol. du solide	$\rho_s = 2000 \text{ kg.m}^{-3}$
Masse vol. de l'eau	$\rho_w = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$
Masse vol. de l'air	$\rho_g = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$
Module de compressibilité du solide	$K_s = 1.10^{12} \text{ Pa}$
Module de compressibilité de l'eau	$K_w = 2.10^9 \text{ Pa}$
Module de compressibilité du gaz	$K_g = 0,1.10^6 \text{ Pa}$
Perméabilité intrinsèque	$k = 4,5.10^{-13} \text{ m}^2$
Perméabilité relative de gaz <i>minimum</i>	$k_{rg,min} = 0,0001$
Viscosité dynamique de l'eau	$\mu_w = 1.10^{-3} \text{ Pa.s}$
Viscosité dynamique de l'air	$\mu_g = 1,8.10^{-5} \text{ Pa.s}$
Gravité	$g = 9,806 \text{ m.s}^{-2}$
Pression atmosphérique	$p_{atm} = 0 \text{ Pa}$

6.2 Résultats

Pour la simulation numérique, le problème est traité en deux dimensions avec l'hypothèse de déformations planes. La discrétisation spatiale du domaine est réalisée avec des éléments quadrangulaires à 8 nœuds et trois champs tels que présentés précédemment (**Fig.3.1**). Le maillage discrétisé avec 200 éléments par 6 éléments (**Fig.3.4**), est plus fin en haut de la colonne afin de suivre avec suffisamment de points le début du front de saturation. L'intervalle de temps est $T = 7200s$ et a été étudié avec un pas de temps de $\Delta t = 0,5; 1$ et 10 secondes. Les résultats présentés ci-après le sont pour $\Delta t = 1$ seconde. Ce problème a déjà été résolu en monophasique et diphasique, toujours en quasi-statique par plusieurs auteurs Zienkiewicz (1990)^[163], Gawin (1996)^[64] et Lewis et Schrefler (1998)^[92]. La première résolution en dynamique est due à Schrefler et Scotta (2001)^[132].

Sur la figure **Fig.(3.5a)**, l'évolution de la pression d'eau est tracée pour les temps 5,10,20 et 120 min, et comparée avec la pression d'eau mesurée expérimentalement. Au premier temps $t = 5$ min la pression simulée p^w décroît plus rapidement que la pression mesurée. Pour les temps suivants, la cinétique s'inverse, *i.e* la pression simulée décroît plus lentement que la pression mesurée. À la fin de la simulation, la pression mesurée suit une distribution hydrostatique, ce régime n'est pas encore atteint pour la simulation au bout de 120 min.

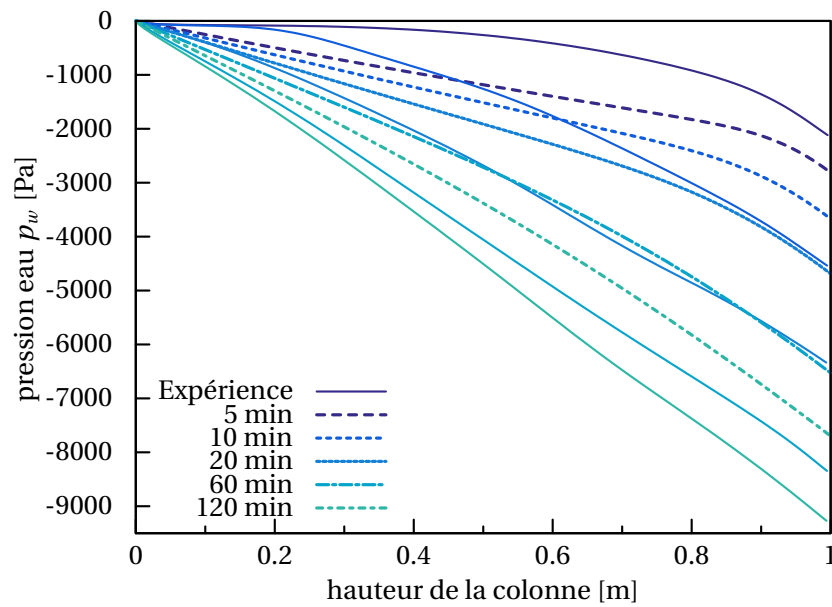
Les profils de la pression de gaz (air) p_g sont tracés sur la figure **Fig.(3.5b)**. Pour les temps 5,10,20 et 120 min tracés, on peut observer que la position de chaque pic de pression est située à l'endroit où évolue la transition d'état saturé à non saturé, voir **Fig.(3.6a)**, et au point d'inflexion de la courbe de pression capillaire, voir **Fig.(3.6b)**.

Dans notre simulation, le front de saturation, voir **Fig.(3.6a)**, se situe vers 0,4 – 0,5 m du bas de la colonne tandis que pour d'autres auteurs, le front se situe par exemple vers 0,2 m pour Schrefler (2001)^[132] et vers 0,6 – 0,7 m pour Khoei (2011)^[83]. La comparaison pour la pression capillaire, la pression de gaz et la saturation n'a pas de valeur de validation, car ces points n'ont jamais été mesurés expérimentalement.

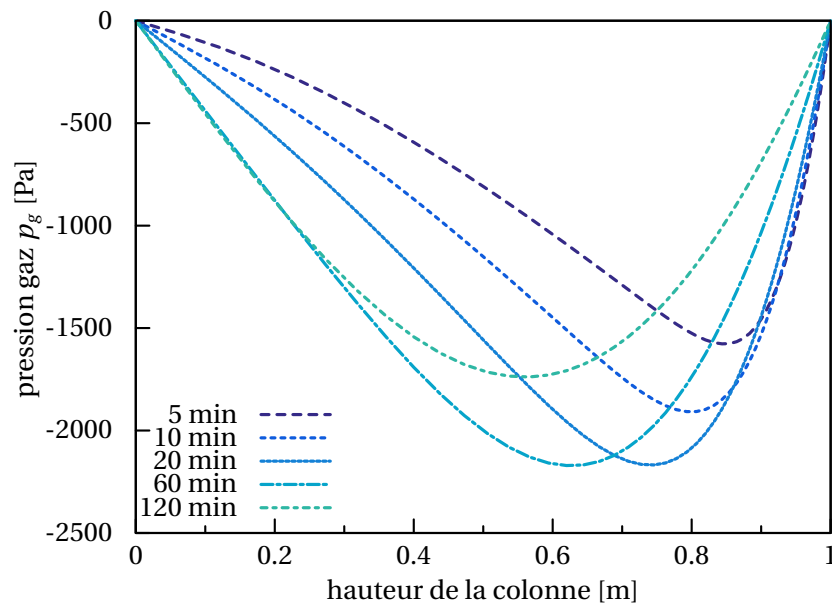
Le déplacement vertical (en haut de la colonne) simulé, voir **Fig.(3.7b)**, est comparable en terme de valeurs et de profils à ce qu'obtient Gawin (1996)^[63]. Schrefler (2001) et Khoei (2011)^[83] obtiennent des valeurs similaires, mais avec des profils différents.

En comparant le débit d'eau sortant simulé et le même débit mesuré expérimentalement, la corrélation est satisfaisante au début de la simulation, voir **Fig.(3.7a)**. Le débit mesuré au début de la simulation $q_w^{simulé} = 4,8.10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$ est comparable à celui mesuré

expérimentalement $q_w^{exp} = 5.10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$. Le débit simulé décroît ensuite plus lentement que lors de l'expérience. Au bout de 120 min, le débit $q_w^{simulé}$ devrait approcher 0 étant donné que l'équilibre est quasiment atteint.

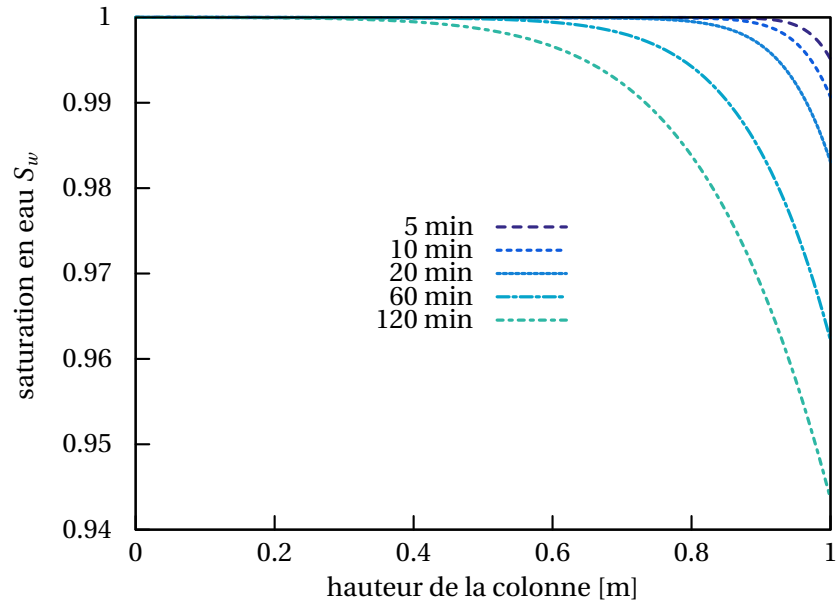


(a)

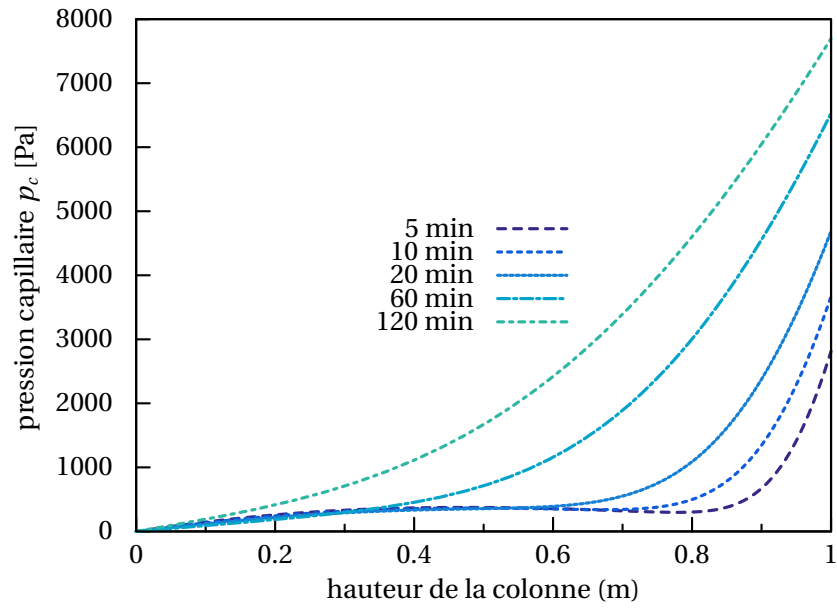


(b)

Fig 3.5. (a) Profils de la pression d'eau p^w tracés suivant l'axe de symétrie de la colonne à 5,10,20,60 et 120 min comparés aux profils expérimentaux en trait plein. (b) Profils de la pression de gaz p^g .

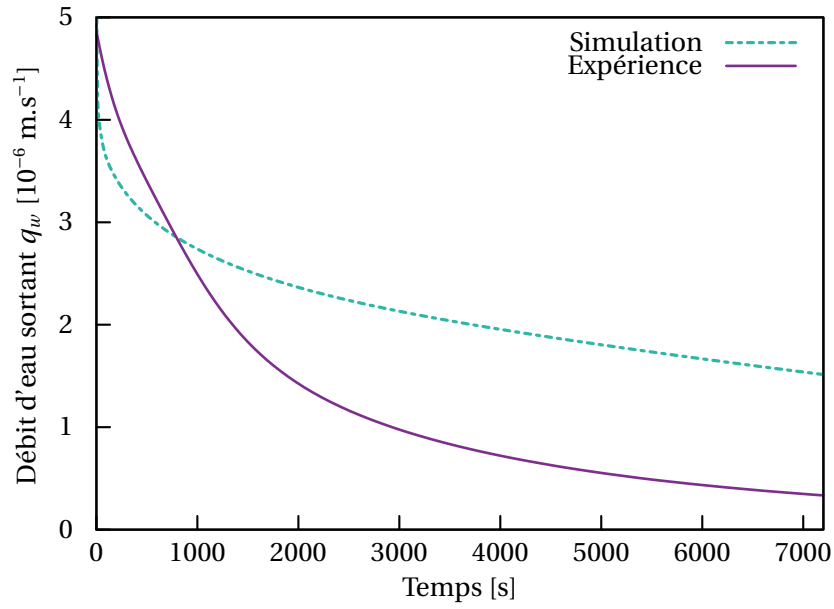


(a)

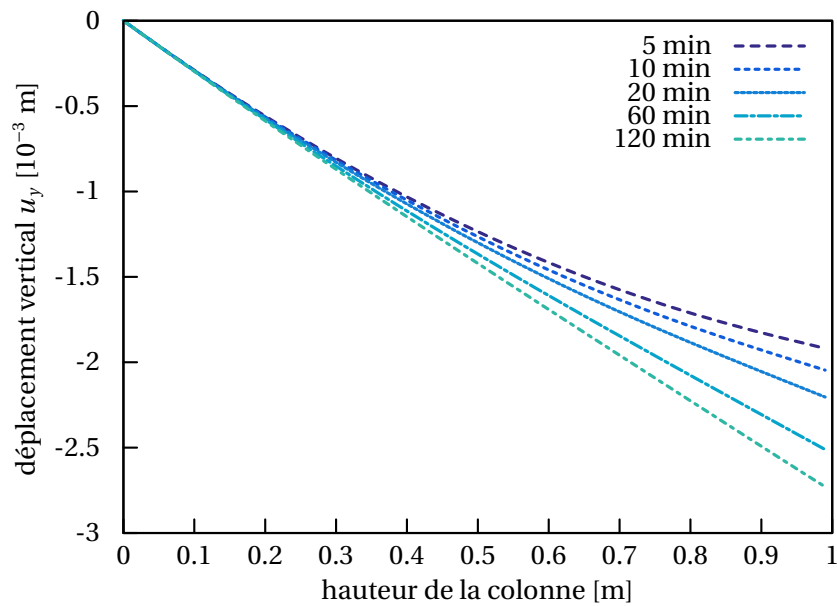


(b)

Fig 3.6. (a) Profils de la saturation en eau S_w tracés suivant l'axe de symétrie de la colonne à 5, 10, 20, 60 et 120 min. (b) Profils de la pression capillaire p_c .



(a)



(b)

Fig 3.7. (a) Profil du débit d'eau sortant (à $y = 0$) de la colonne pendant toute la durée de la simulation (120min) comparée à la courbe expérimentale en trait plein. **(b)** Profils du déplacement vertical de la face supérieure de la colonne de sable à 5,10,20,60 et 120 min.

Conclusion

Au final, les résultats obtenus pour le modèle d'écoulement diphasique en milieu poreux déformable sont satisfaisants d'un point de vue qualitatif. D'un point de vue quantitatif, des différences sont relevées par rapport aux autres auteurs. Ces différences s'expliquent d'une part par la formulationⁱ et le jeu de variable adopté qui n'est pas exactement identique entre les auteurs. Par exemple, le fait de garder les deux équations (3.11 et 3.12) dès le début de la simulation en supposant l'existence d'une perméabilité relative de gaz $k_{rg,min}$ minimale. Et d'autre part, la stratégie et les algorithmes numériques utilisés peuvent impacter sensiblement les résultats.

i. Formulation dynamique (notre cas) ou quasi statique.

4 | Prise en compte de la rupture dans un milieu poreux saturé

Sommaire

	Introduction	93
1	Bref état de l'art	93
1.1	Les différentes approches	93
1.2	Mécanique de l'endommagement	94
1.3	Mécanique de la rupture	94
1.4	Les techniques numériques	99
2	Application de la méthode de zone cohésive	101
2.1	Modèle de Raous-Cangémi-Cocu-Monerie	101
2.2	Exemple d'application du modèle : essai de pushout	102
2.3	Stratégie de prise en compte de la rupture en milieu saturé	106
3	Méthode d'érosion d'élément ou <i>eigenerosion</i>	108
3.1	Principe de la méthode d'érosion	108
3.2	Mise en œuvre de la méthode d'érosion	110
3.3	Exemple d'application : plaque deux trous	114
4	Extension de la méthode d'érosion en milieu poreux saturé	115
4.1	Formulation du problème de rupture dans un milieu poroélastique	116
4.2	Rupture dans un milieu poreux saturé	119
	Conclusion	128

Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons les différentes méthodes théoriques et numériques fréquemment utilisées pour modéliser la rupture en mécanique, dans le cadre fragile. L'ensemble de ces méthodes constitue un sujet riche et vaste dont nous ne donnerons qu'un bref aperçu, mais suffisant pour introduire progressivement la méthode retenue dans le cadre de ce travail. Ainsi, partant des outils les plus connus pour étudier la rupture en mécanique, nous présentons la méthode d'érosion développée par Pandolfi et Ortiz (2012)^[115] (*element eigenerosion*), puis une proposition d'extension et d'application de cette méthode d'érosion dans un milieu poreux.

1 Bref état de l'art

On présente ici les principales approches en mécanique permettant de traiter la rupture. Conceptuellement, la modélisation de prise en compte du défaut se fait en introduisant une variable supplémentaire, que l'on notera β , pour caractériser l'intensité défaut (rupture ou endommagement). Il peut être représenté par un scalaire, un tenseur ou encore une fonction. La démarche consiste à calculer l'énergie potentielle comme une fonction du champ de déplacement u , du paramètre caractérisant l'intensité du défaut β et du temps t , soit $P(u, \beta, t)$, puis à minimiser cette fonction. On détermine alors la valeur que prend β à l'aide d'un critère. Dans le cadre de l'endommagement β est déterminé à grâce à une loi d'évolution. Toutefois, plusieurs approches souvent distinctes d'un point de vue théorique sont disponibles pour modéliser la fissuration d'un matériau. Il n'existe pas de théorie unifiée pour modéliser la rupture d'un matériau, et nombre d'entre elles présentent leurs avantages et inconvénients suivant la situation physique que l'on considère. Il est possible (sous certaines restrictions) d'écrire des équivalences entre les différents critères de rupture, dont nous verrons quelques exemples dans les sections suivantes.

1.1 Les différentes approches

Il est question ici de donner un bref aperçu des différentes approches développées dans la littérature pour modéliser la fissuration d'un matériau, en particulier deux approches :

- les modèles de zone cohésive, précisément le modèle de Raous-Cangémi-Cocou-Monerie car nous l'avons utilisé de manière satisfaisante comme nous le verrons plus loin pour identifier le comportement de l'interface ciment-acier qui a été testé expérimentalement dans le chapitre (1) ;

- l'approche variationnelle de la mécanique de la rupture, car c'est à partir de cette théorie que s'appuie la méthode d'érosion d'éléments que nous nous sommes proposé d'étendre aux problèmes d'écoulements et de rupture en milieux poreux.

1.2 Mécanique de l'endommagement

L'endommagement a pour objectif de décrire de manière continue l'apparition et l'évolution de zones fragilisées, celles-ci résultant de la germination et/ou de la croissance de microcavités dans le matériau. Les modèles d'endommagement (*cf* Lemaitre et Chaboche (1993)^[91], Needleman (1992)^[107]) suivent généralement la démarche qui consiste à déterminer le paramètre β (généralement noté $\beta = 1 - D$) comme un paramètre d'endommagement scalaire caractérisant l'intensité de dégradation du matériau. Ce paramètre peut-être bivalué 0 ou 1 (endommagement brutal), ou continu $\beta \in [0,1]$ (endommagement progressif). Cette description possède un caractère essentiellement local, et peut rapidement ne plus être adaptée lorsqu'il y a coalescence des microcavités. Il y a alors formation d'une fissure macroscopique.

1.3 Mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture a pour objet de décrire l'évolution d'une ou de plusieurs fissures. On distingue dans les modèles de rupture généralement deux approches :

- L'approche locale, caractérisée par une étude des champs de contraintes et de déformations au voisinage de la pointe de fissure ;
- L'approche globale ou énergétique, caractérisée par l'étude du comportement global de la structure fissurée en réalisant un bilan d'énergie.

Toutefois, que l'on adopte une approche locale ou globale, deux types de ruptures sont à distinguer suivant le type de comportement de matériau que l'on considère : la *rupture fragile* ou la *rupture ductile* :

- La rupture fragile est caractérisée par une déformation plastique peu importante, et qui reste confinée au voisinage de la pointe de la fissure. La fissure se propage très rapidement avec une faible consommation d'énergie. Ce type de rupture est généralement décrit *via* la mécanique de la rupture linéaire.
- La rupture ductile au contraire de la rupture fragile, est caractérisée par une rupture lente et des déformations plastiques très importantes avant rupture, ainsi qu'une forte consommation d'énergie par déformation plastique. Ce type de rupture est généralement décrit *via* la mécanique de la rupture non linéaire.

1.3.1 Approche locale

L'approche locale consiste à déterminer les paramètres mécaniques de la rupture à l'aide de l'écriture du champ de contrainte en pointe de fissure. Ces champs alors fortement perturbés par la singularité créée par la pointe de fissure sont définis en introduisant la notion de facteurs d'intensité des contraintes. Les facteurs d'intensité des contraintes ont été introduit par Irwin (1958)^[81]. Williams (1957,1961)^[154] montre que quel que soit le chargement et la géométrie du corps (milieu homogène élastique isotrope) les contraintes au voisinage d'une fissure admettent un développement asymptotique dont le terme singulier s'écrit suivant le mode de propagation de la manière suivante :

$$(4.1) \quad \sigma_{ij} = K_{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{\beta}(\theta) + j_{\beta}(r, \theta),$$

où σ_{ij} est la contrainte imposée, K_{β} est le facteur d'intensité des contraintes en mode β , avec $\beta=I, II$ ou III et s'expriment en $[\text{MPa.m}^{1/2}]$. Les fonctions $j_i(r, \theta)$ sont des fonctions bornées lorsque r tend vers 0, les fonctions $f_{ij}^{\beta}(\theta)$ donnent la répartition angulaire, et r et θ sont les coordonnées polaires d'un point de la structure par rapport à la pointe de la fissure (4.1).

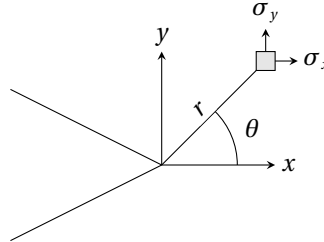


Fig 4.1. Coordonnées polaires au voisinage de la fissure.

Irwin (1958)^[81] postule alors l'existence d'une valeur critique K_{Ic} (ténacité du matériau) comme critère de rupture, pour une propagation en mode I pur. La ténacité est une grandeur intrinsèque au matériau et indépendante de la géométrie de l'éprouvette. Elle peut se généraliser aux autres modes de propagation. Les travaux de Bueckner (1970)^[35], Williams (1957)^[154] et Muskhelishvili (1953)^[105] donnent des méthodes pour estimer ses paramètres. Le principal défaut d'un tel critère est son caractère singulier en pointe de fissure, ce qui d'un point de vue physique n'est pas valable. En effet, un ensemble de mécanismes physiques apparaissent en pointe de fissure.

L'analyse seule des contraintes en pointe de fissure est contestée pour la modélisation de l'amorçage et de la propagation. Une autre approche dite énergétique existe pour analyser l'avancée des fissures^[48].

1.3.2 Approche globale

On se propose dans cette section de rappeler le concept de l'approche énergétique pour l'étude de propagation de fissure. Historiquement, c'est à Griffith (1920)^[70] que l'on doit les fondements de l'approche énergétique. Cela consiste à faire un bilan d'énergie à l'équilibre et après rupture du matériau, en tenant compte de l'énergie de surface créée par l'avancée de la fissure. Griffith propose alors d'écrire un critère de propagation des fissures dans le matériau à partir du calcul de l'énergie potentielle. Cette énergie potentielle totale composée d'un terme d'énergie de déformation élastique $\mathcal{W}_e$ et d'un terme dû aux efforts extérieurs $\mathcal{F}$, s'écrit :

$$(4.2) \quad \mathcal{P} = \mathcal{W}_e - \mathcal{F}.$$

Griffith postule alors l'existence d'une loi donnant l'énergie de surface de la discontinuité en fonction de l'ouverture de la fissure. Sa démarche se résume en deux hypothèses fondamentales :

- Première hypothèse de Griffith — il existe une énergie de surface γ à l'interface des surfaces libres. Si l'on crée une aire supplémentaire dS alors l'énergie disponible du matériau augmente de γdS . En d'autres termes, à chaque fissure est associée une énergie de surface directement proportionnelle à l'aire créée ;
- Deuxième hypothèse de Griffith — l'avancée d'une fissure de longueur ℓ , sous un chargement $\mathcal{C}$, se fera en choisissant la configuration qui rend minimale son énergie totale.

Dans un cadre bidimensionnel, la fissure est caractérisée par sa longueur ℓ , on définit alors le taux de restitution d'énergie G , lequel représente l'énergie nécessaire pour faire avancer la fissure d'un incrément de longueur $d\ell$. À partir de l'énergie potentielle totale $\mathcal{P}$, l'incrément d'énergie de longueur s'écrit :

$$(4.3) \quad G = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell}(\mathcal{C}, \ell) = -\frac{\partial}{\partial \ell}(\mathcal{W}_e - \mathcal{F}).$$

Le critère de Griffith se formule alors en distinguant les deux cas suivants :

- si $G < 2\gamma^i$, il n'y a pas de propagation possible de la fissure ;
- si $G \geq 2\gamma$, il y a propagation de la fissure.

L'approche locale dite en contrainte, et l'approche énergétique peuvent paraître distinctes à première vue. Pourtant, Irwin (1958)^[81] a montré qu'il existe une relation per-

i. Le facteur 2 provient des deux lèvres de la fissure.

mettant de relier le taux de restitution d'énergie G aux facteurs d'intensité des contraintes K_I, K_{II} et K_{III} :

$$(4.4) \quad G = \begin{cases} \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 & \text{en déformation plane} \\ \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 & \text{en contrainte plane} \end{cases}$$

On remarquera qu'il peut sembler paradoxal de relier K_I, K_{II} et K_{III} qui sont des grandeurs locales caractérisant la singularité des contraintes à $G = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell}$ qui est une grandeur définie de manière globale.

1.3.3 Approche de Griffith améliorée

Le critère de Griffith ainsi formulé, souffre de quelques faiblesses mises en évidence dans Bui (1978) ^[36], Leblond (2002) ^[88], ou encore Suquet (2006) ^[137]. Particulièrement, le fait qu'il n'incorpore pas les effets irréversibilité. Une analyse thermodynamique du processus de fissuration, en y incluant le second principe, permet de reformuler ces critères, précisément en montrant l'existence d'une valeur critique de l'énergie dissipée par incrément de longueur d'avancée de la fissure. L'énergie dissipée par incrément de longueur, pour tout chargement $\mathcal{C}$, s'écrit de la manière suivante :

$$(4.5) \quad \Delta E^{diss}(\mathcal{C}, \ell, \Delta \ell) = \mathcal{P}(\mathcal{C}, \ell) - \mathcal{P}(\mathcal{C}, \ell + \Delta \ell).$$

On appelle taux d'énergie dissipée, noté G , sa limite lorsque l'on divise par l'incrément de longueur de fissure, et que l'on fait tendre cet incrément vers 0 :

$$(4.6) \quad G(\mathcal{C}, \ell) = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta E^{diss}(\mathcal{C}, \ell, \Delta \ell)}{\Delta \ell} = -\frac{\partial \mathcal{P}(\mathcal{C}, \ell)}{\partial \ell}.$$

Cette énergie dissipée par unité de surface est considérée comme une propriété intrinsèque du matériau que l'on note classiquement G_c , ou taux de d'énergie dissipée critique. C'est en comparant G_c à G que l'on écrit et distingue les différents cas du critère d'avancée de la fissure, avec $\dot{\ell}$ l'évolution de la longueur de la fissure :

- si $G < G_c$, $\dot{\ell} = 0$, il n'y a pas de propagation possible de la fissure ;
- si $G = G_c$, $\dot{\ell} \geq 0$, il y a propagation de la fissure de manière quasi statique, si le chargement augmente.

Malgré toute l'utilité de ce critère, il est nécessaire de connaître la valeur du taux de restitution d'énergie G_c . Le concept d'intégrale de contour notée J , déduite de la loi de conservation de l'énergie par Eshelby (1956) ^[51], puis développée par Rice (1968) ^[127,126],

est une méthode pratique pour estimer le taux de restitution d'énergie. En effet, dans le cas où la fissure se propage de manière rectiligne, on a $J = G$. Cette intégrale de contour J (ou intégrale de Rice) a la propriété d'être indépendante du contour d'intégration choisi, ce qui lui permet d'être calculée aussi bien proche de la pointe de fissure que sur un contour éloigné. Du fait de ces propriétés, son utilisation est courante en mécanique de la rupture non linéaire.

On vient de voir précédemment que le raisonnement de Griffith peut d'une certaine manière être améliorée en essayant de répondre aux canons de la thermodynamique. Malgré toute la puissance de ce critère, des insuffisances gênantes subsistent. On peut en citer deux :

- Le critère ainsi formulé ne permet pas l'amorçage de la fissure dans un matériau initialement sain ;
- Ce critère n'est guère plus capable de prévoir un branchement de fissure, en l'absence d'hypothèse sur le trajet de celle-ci.

Une solution envisagée est celle proposée par Francfort et Marigo (1998)^[61] en établissant un critère de rupture à partir de l'écriture de l'énergie totale.

1.3.4 Approche variationnelle du critère de Griffith

L'approche variationnelle du critère de Griffith correspond au critère proposé par Francfort et Marigo. Ce critère postule que la solution du problème de fissuration doit minimiser l'énergie totale plutôt que l'énergie potentielle. En restant toujours dans le même cadre (planaire, rupture fragile, élasticité linéaire), on écrit l'énergie totale du système de la manière suivante, en notant Ω le domaine sain, $\partial\Omega$ le bord du domaine, $\Gamma(\ell)$ la surface de la fissure, et $\mathcal{C}(t)$ le chargement imposé sur le domaine. Cette énergie totale E^{tot} s'écrit comme étant la somme de l'énergie potentielle du système $\mathcal{P}(\mathcal{C}(t), \Gamma(\ell))$ et de l'énergie de dissipation $E^{diss}(\Gamma(\ell))$ qui ne dépend que de l'état de fissuration, soit :

$$(4.7) \quad E^{tot} = \mathcal{P}(\mathcal{C}(t), \Gamma(\ell)) + E^{diss}(\Gamma(\ell)).$$

L'énergie totale $E^{tot}(\mathcal{C}(t), \Gamma(\ell))$ écrite ainsi dépend de la géométrie et du chargement à l'instant t , tandis que l'énergie dissipée $E^{diss}(\Gamma(\ell))$ ne dépend que l'état de la fissure. Le critère de Francfort et Marigo repose sur la minimisation de cette seule fonction d'énergie totale. On décrit maintenant plus précisément chaque terme. On associe à l'énergie potentielle un champ cinématiquement admissible $\mathcal{U}$, lequel est continu, dérivable partout sur $\Omega \setminus \Gamma$ et autorise les sauts de $\underline{u}$. L'énergie potentielle, définie comme la différence

de la densité d'énergie élastique et du travail des efforts extérieurs, s'écrit :

$$(4.8) \quad \mathcal{P}(\underline{u}(t), \Gamma(t)) = \int_{\Omega \setminus \Gamma(t)} \mathcal{W}_\varepsilon(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) dV - \mathcal{F}(\underline{u}).$$

L'énergie dissipée est donnée par :

$$(4.9) \quad E^{diss}(\Gamma(\ell)) = G_c \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma(\ell)),$$

où $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma(\ell))$ est la mesure de Hausdorff. La mesure de Hausdorff permet d'attribuer une mesure de dimension $n - 1$ dans un espace de dimension n . Concrètement, cela permet par exemple de définir une grandeur mesurable ℓ , la fissure qui est définie sur Γ de dimension 1 dans le domaine Ω de dimension 2. Enfin, l'énergie totale s'exprime par :

$$(4.10) \quad E^{tot}(\underline{u}, \Gamma(\ell)) = \int_{\Omega \setminus \Gamma(\ell)} \mathcal{W}(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) dV - \mathcal{F}(\underline{u}) + G_c \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma(\ell)).$$

On renvoie le lecteur à l'article de Francfort et Marigo (1998)^[61] pour les conditions d'existences de minimum pour cette fonctionnelle ainsi que les définitions associées.

1.4 Les techniques numériques

1.4.1 Modèles d'interfaces

Les modèles d'interfaces ont été proposés la première fois dans les travaux de Dugdale et Barenblatt (1960, 1962)^[50,11] dans le but de décrire l'amorçage et l'évolution de fissure. Ces modèles lorsqu'ils sont implémentés sous forme d'éléments finis de surface permettent d'envisager des situations mécaniques complexes (dégradation de matériaux hétérogènes et composites, comportement mécanique non linéaire, évolutions dynamiques instables...) tout en conservant une compréhension fine de la physique à l'échelle locale.

Il permettent en général d'établir une synthèse des principales classes de modèles de fissuration entre ceux utilisant des critères énergétiques (taux critique de restitution de l'énergie,...) et ceux fondés sur des critères de contrainte maximale (cisaillement maximal en mode II,...). L'amorçage de la fissure résulte alors naturellement du trajet du chargement et les champs cinématique et sthénique sont connus en chaque point de la structure.

Ils rendent compte de la fissuration au moyen d'une contrainte cohésive, notée ici $\underline{R}$, qui s'exprime en fonction d'un saut de déplacement $[[\underline{u}]]$ (représentatif de « l'ouverture » des lèvres de la fissure nouvellement créée) et s'adaptent particulièrement bien aux

formulations par éléments finis. Le modèle d'interface proposé par Barenblatt est bien adapté au problème de rupture fragile. L'idée de ce modèle est de tenir compte grâce à l'introduction de variables adéquates d'une zone de transition entre la partie saine et la partie endommagée du matériau. L'ouverture normale de la fissure augmente la contrainte de cohésive $\underline{R}$ jusqu'à une valeur critique notée δ_c . Au-delà de cette valeur, la contrainte diminue et tend vers 0. Le modèle proposé par Dugdale est similaire à celui de Barenblatt mais plus adapté aux problèmes de rupture ductile.

Dans un cas plus général, la décomposition du saut de déplacement interfacial $\llbracket \underline{u} \rrbracket$, et de la contrainte cohésive $\underline{R}$, en une partie normale et une partie tangente, conduit à écrire $\llbracket \underline{u} \rrbracket$ et $\underline{R}$ dans le repère normal-tangent de la manière suivante :

$$(4.11a) \quad \underline{R} = R_N \underline{n} + R_T \underline{t},$$

$$(4.11b) \quad \llbracket \underline{u} \rrbracket = u_N \underline{n} + u_T \underline{t}.$$

À partir des années 80, Gurtin (1979)^[73], Needleman (1987)^[106], Camacho et al. (1996)^[37], Xu (1994)^[159], Needleman (1999)^[108] proposent des modèles de zone cohésive beaucoup plus complets. Ils permettent alors de rendre compte de l'évolution des forces de contact en fonction du saut de déplacement. Par ailleurs, Atkinson et al. (1968)^[8] montrent que sous certaines conditions le taux de restitution (critère de Griffith) de l'énergie mis en évidence par les modèles classiques de la mécanique de la rupture est aussi conservé, l'énergie de décohesion d'un modèle de zone cohésive est alors équivalente au taux de restitution d'énergie du critère de Griffith.

Il existe deux catégories de modèles de zones cohésives, les modèles dits *intrinsèques*, possédant une raideur initiale finie, et les modèles dits *extrinsèques* possédant une raideur initiale infinie. L'inconvénient majeur de cette première classe de modèles est d'adoucir artificiellement le comportement global du matériau. Toutefois, les travaux récents de Blal et Monerie (2012)^[27] semblent régler en partie ce problème. En revanche, les modèles de zones cohésives présentent l'avantage de pouvoir s'affranchir de critère d'amorçage ou de techniques consistant à préfissurer le matériau lorsque le chemin de fissuration n'est pas *a priori* connu. Ils permettent également de simuler des propagations de fissures avec bifurcation sans critères adaptés en introduisant des éléments d'interface entre chaque élément du maillage, Xu et al. (1994)^[159].

Nous présentons en détail le modèle de zone cohésive *Raous-Cangémi-Cocu-Monerie* à la section (2.1) que nous avons utilisé pour caractériser le comportement interfacial ciment-acier.

1.4.2 Méthode de partition de l'unité

Le concept de partition de l'unité a été introduit par Babuška et Melenk^[99]. Les auteurs cherchent à améliorer la qualité de la solution fournie par la méthode des éléments finis non pas en raffinant le maillage, mais en injectant dans la base de fonctions utilisées pour approximer le problème des fonctions *a priori* proches de la solution attendue. La prise en compte de la discontinuité est effectuée en enrichissant l'interpolation des champs de déplacement sur chacun des nœuds dont le support est traversé par une surface de discontinuité. Cette approximation du champ de déplacement peut s'écrire de la manière suivante :

$$(4.12) \quad u(x) \simeq \sum_i u_i \Phi_i(x) + \sum_j \hat{u}_j H(x) \Phi_j(x)$$

où $\Phi_i(x)$ représente les fonctions de formes classiques (équivalente à celles utilisées dans le chapitre (3) et $H(x)$ désigne la fonction de Heaviside uniquement définie sur la surface de discontinuité.

2 Application de la méthode de zone cohésive

L'objectif ici est de simuler un essai de *push-out* afin d'identifier un certain nombre de paramètres mécaniques d'interface, à l'aide d'un modèle de zone cohésive. Ce modèle, décrit dans la section suivante (2.1.1), a été proposé par Raous, Cocu, Cangémi et Monerie (2001)^[122,38,103]. Les résultats de la simulation sont confrontés aux résultats des essais expérimentaux présentés dans le chapitre (1). On montre alors que le modèle permet d'obtenir une très bonne corrélation avec les résultats expérimentaux.

2.1 Modèle de Raous-Cangémi-Cocu-Monerie

Le modèle RCCM (Raous-Cangémi-Cocu-Monerie) s'appuie sur l'idée fondamentale (cf. Frémond (1987)^[62]) qu'il existe une variable d'intensité permettant de décrire l'état d'adhésion. Depuis, ces auteurs ont largement développé cette idée, et sa forme actuelle est due à Monerie (2001)^[103].

Ce modèle développé à partir du formalisme de la thermodynamique, propose de coupler endommagement surfacique, frottement de Coulomb et contact unilatéral en incluant une sensibilité à la vitesse de sollicitationⁱ.

i. Il étend ainsi le modèle proposé par Frémond (1987)^[62].

2.1.1 Formulation du modèle

Le comportement de l'interface est décrit par les équations suivantes (4.13-4.14a) où le statut de la fissure passe progressivement de l'adhésion au frottement de Coulomb avec contact unilatéral (conditions de Signorini) grâce à une variable supplémentaire β permettant de décrire son état, tel que :

$$(4.13) \quad \begin{cases} \beta = 1, & \text{l'interface est vierge,} \\ 0 < \beta < 1, & \text{l'interface est partiellement endommagée,} \\ \beta = 0, & \text{l'interface est rompue.} \end{cases}$$

$$(4.14a) \quad -\underline{R}_N^r + \beta^2 C_N \llbracket \underline{u}_N \rrbracket \geq 0, \quad \llbracket \underline{u}_N \rrbracket \geq 0$$

$$(4.14b) \quad \underline{R}_T^r = \beta^2 C_T \llbracket \underline{u}_T \rrbracket,$$

$$(4.14c) \quad |\underline{R}_T - \underline{R}_T^r| \leq \mu | \underline{R}_N - \beta^2 C_N \llbracket \underline{u}_N \rrbracket |,$$

$$(4.14d) \quad \|\underline{R}_T - \underline{R}_T^r\| < \mu | \underline{R}_N - \beta^2 C_N \llbracket \underline{u}_N \rrbracket | \Rightarrow \llbracket \dot{\underline{u}}_T \rrbracket = 0,$$

$$(4.14e) \quad \|\underline{R}_T - \underline{R}_T^r\| = \mu | \underline{R}_N - \beta^2 C_N \llbracket \underline{u}_N \rrbracket | \Rightarrow \exists \lambda \leq 0, \quad \text{tel que} \quad \llbracket \dot{\underline{u}}_T \rrbracket = \lambda (\underline{R}_T - \underline{R}_T^r).$$

avec C_N et C_T les raideurs initiales normale et tangentielle de la liaison interfaciale, et μ le coefficient de frottement de Coulomb.

2.1.2 Interprétation du modèle et de ses valeurs

Pour comprendre le comportement mécanique proposé par le modèle et le rôle de ses différents paramètres, nous donnons leurs significations dans le tableau (**Tab.4.1**) ci-après.

Tab 4.1. Paramètres d'interface du modèle RCCM.

C_T et C_N	Raideurs initiales normales et tangentielles de la liaison interfaciale.	[MPa.m ⁻¹]
μ	Coefficient de frottement de Coulomb.	[-]
w	Énergie de décohésion, tant que le seuil de décohésion n'est pas atteint, l'interface n'est pas endommagée. Son comportement élastique est alors gouverné par les rigidités initiales C_N et C_T .	[J.m ⁻²]

2.2 Exemple d'application du modèle : essai de pushout

L'exemple traité ici permet de rendre compte de la capacité du modèle à simuler le comportement d'une interface acier-ciment.

2.2.1 Description du problème

On considère le problème de pushout présenté au chapitre (1). Le plot de ciment est soumis à un chargement imposé en vitesse de déplacement. La géométrie ainsi que les conditions aux limites sont illustrées sur la **Fig.**(4.2). La géométrie de l'objet suggère de traiter le problème de manière axisymétrique.

Afin de représenter correctement les conditions réelles de l'essai — par exemple les contraintes résiduelles d'origine thermique liées à la prise du ciment — on considère une loi de comportement thermoélastique linéaire.

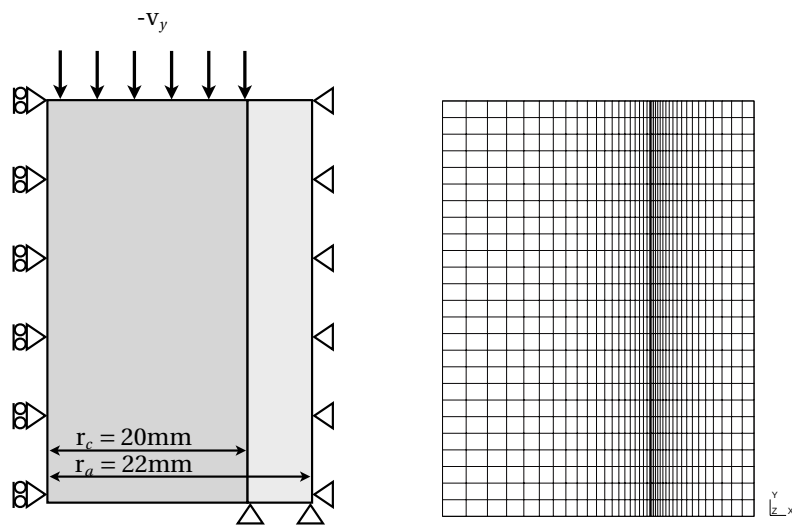


Fig 4.2. Géométrie et maillage du problème avec vitesse de déplacement imposée, conditions aux limites de type axisymétrique. Le maillage est réalisé avec des éléments quadrangulaires à quatre nœuds (1180 éléments, 1092 nœuds et 162 nœuds de contact).

Les propriétés thermoélastiques des deux matériaux sont données dans le tableau (**Tab.4.2**). L'analyse des données expérimentales disponibles dans^[82] montre que le comportement de l'interface est fragile.

Tab 4.2. Paramètres thermoélastiques de l'acier et du ciment.

	acier	ciment	unité
Module d'Young E	210	13	[GPa]
Coefficient de Poisson ν	0,3	0,18	[-]
Coefficient de dilatation thermique α_{th}	$9 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}	K^{-1}

La distribution des contraintes le long de l'interface et le gradient de cisaillement interfacial proche de la surface libre sont fortement influencés par le type de chargement du plot de ciment. Une attention particulière est apportée au maillage de la zone au voisinage de l'interface pour tenir compte des concentrations de contraintes.

2.2.1.1 Chargement et discrétisation temporelle

Le chargement est appliqué en vitesse de déplacement imposée $v_y = 1.10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$. Cette valeur est proposée par Kenga (2005)^[82]. En effet, au-delà de $v_y = 1.10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ les résultats montrent une grande sensibilité à la vitesse de chargement, d'après l'analyse des résultats obtenus par Kenga (2005)^[82]. Une attention particulière doit être portée au choix du pas de temps, car la formulation dynamique de la plateforme LMGC90 implique des contraintes supplémentaires sur la discrétisation du calcul par rapport à une approche avec une formulation quasi statique. En régime dynamique, il est nécessaire de définir le pas de temps Δt en proportion de la taille des éléments h . Le pas de temps choisi doit être inférieur au temps nécessaire à l'onde élastique de vitesse c pour traverser la fraction d'élément h , tel que $\Delta t \leq \frac{h}{c}$. On notera qu'un raffinement spatial implique alors un raffinement temporel.

2.2.1.2 Les contraintes résiduelles d'origines thermo-mécanique

Les différentes propriétés thermoélastiques des matériaux génèrent un champ de contraintes résiduelles d'origine thermique qu'il convient de prendre en compte. Ceci correspond à la différence de température pendant la prise du ciment T_p et la température pendant les conditions de l'essai T_A . La différence de température $\Delta T = T_A - T_p$ mesurée est de 41 °C. Au vu de la géométrie cylindrique de l'échantillon, le chargement mécanique résultant de ce gradient de température est un cisaillement interfacial et une pression radiale. Les contraintes résiduelles d'origine thermomécanique sont appliquées durant les dix premiers pas du chargement. Le chargement mécanique est ensuite superposé à ce chargement thermique. Cette évaluation des contraintes d'origine thermique comme un préchargement permet également à simuler un frettage post-decohésion. En effet, on voit bien sûr la (**Fig.4.3**) qu'après rupture de l'interface, il reste un plateau d'efforts résiduel. Mis à part les éventuels artefacts expérimentaux, celui-ci correspond bien aux contraintes induites par la mise en forme initiale des échantillons.

2.2.1.3 Méthode d'identification des paramètres mécaniques du modèle

Nous rappelons que les paramètres mécaniques à identifier sont les suivants : la raideur interfaciale C (les raideurs normales C_T et C_N sont supposées égales ; cette hypothèse est vérifiée par le fait qu'il n'y a pas (ou de manière très négligeable) de contribution de la composante normale lors de l'essai. Le seuil de décohésion w , le coefficient de frottement de coulomb μ . La méthode d'identification repose sur une estimation *a priori* de ces paramètres. Des plages d'ordre de grandeur sont ainsi définies pour les coefficients C , w et μ . Une discussion sur la validité physique de ces paramètres est faite à la section suivante (2.2.2). On notera que ces paramètres ont des influences couplées

sur la réponse globale du test. On précisera donc les paramètres les plus influents pour chaque phase caractéristique de l'essai : charge élastique, début de l'endommagement, endommagement établi, décharge, frottement résiduel.

2.2.2 Résultats et discussion

La **Fig.**(4.3) représente la réponse mécanique simulée à l'aide du modèle de zone cohésive RCCM, et la réponse mécanique mesurée lors de l'essai de pushout jusqu'à rupture complète. Les paramètres cohésifs retenus pour le modèle sont indiqués dans le tableau **Tab.**(4.3).

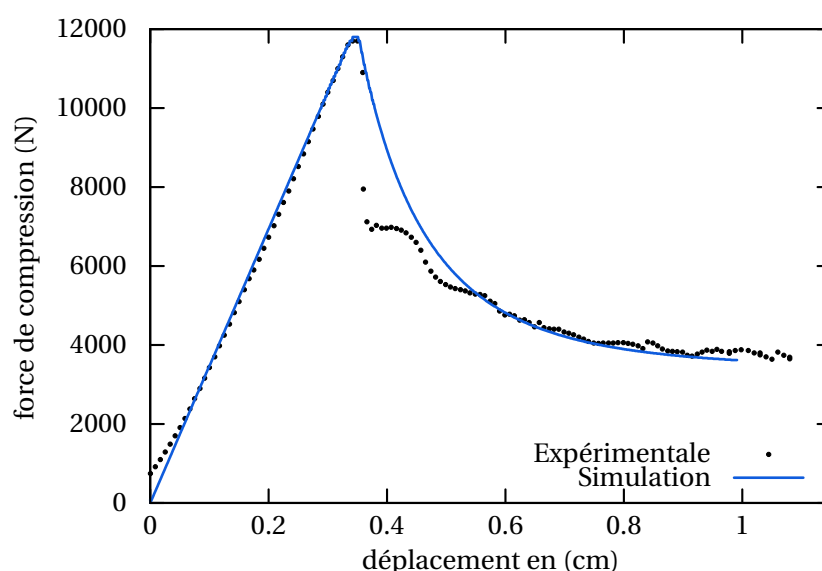


Fig 4.3. Courbe de la réponse mécanique simulée et mesurée du pushout.

Tab 4.3. table des valeurs identifiées lors de la simulation à $\beta = 0$.

paramètres	valeurs identifiées	unités
μ	1	[-]
w	6650	[J.m ⁻²]
C_N, C_T	$6,4.10^{10}$	[J.m ⁻²]

Coefficient de frottement • La valeur moyenne identifiée (voir **Tab.**4.3) est supérieure aux valeurs classiquement admises dans la littératureⁱ. Li (1998)^[93] et Raous (2009)^[123] identifient pour des interfaces la valeur suivante $\mu = 0,5$.

i. Malgré le fait que très peu de données soient disponibles pour une interface ciment-acier.

On peut envisager l'explication suivante : les interactions géométriques destructives ne sont pas prises en compte après la fissuration de l'interface. C'est ce que l'on appelle en mécanique des roches un comportement dilatant. La valeur élevée identifiée du frottement de coulomb semble donc compenser un effet de structure.

Énergie de décohesion • Contrairement à Raous (1997)^[122], Monerie (2001)^[103] nous avons fait le choix d'identifier l'ensemble des paramètres du modèle. Raous (2009)^[123] prend pour son identification, l'énergie de rupture interfaciale calculée par Bažant (1994, 1995)^[16,17] qui égale à $w \simeq 140 \text{ J.m}^{-2}$. La valeur que nous avons identifiée est significativement plus élevée (voir **Tab.**(4.3)). Néanmoins, c'est l'énergie nécessaire pour atteindre l'effort maximal avant rupture lors de notre simulation. Toutefois, cette valeur semble assez éloignée des valeurs classiquement admises par la littérature.

Raideurs interfaciales • Les raideurs normales et tangentielles sont choisies initialement telle que le comportement du système ciment/zone cohésive/acier avant décohesion est inférieur au comportement élastique du ciment seul. En considérant que les ruptures de liaisons interfaciales siègent effectivement dans le ciment, les valeurs trouvées sont donc comme on l'attendait inférieures à la réponse élastique en cisaillement du ciment seul.

2.3 Stratégie de prise en compte de la rupture en milieu saturé

Nous avons au début de ce chapitre donné un bref aperçu des différentes approches existantes pour modéliser la rupture. Bien que conceptuellement proches, leurs mises en œuvre s'avèrent souvent très différentes lorsqu'il s'agit de mettre au point un outil de simulation, la plupart du temps grâce à la méthode des éléments finis.

Nous pensons qu'un couplage fort entre les phénomènes d'écoulements (séchage et drainage) et leurs effets sur la déformation mécanique (retraits volumiques, pressions de fluides multiphasiques dans le milieu,...) sont potentiellement à l'origine de l'endommagement de la gaine d'étanchéité cimentaire. Cet endommagement peut-être approché traditionnellement par différentes méthodes, tant sur le plan conceptuel au niveau du choix de modèles dits « phénoménologiques », que sur le plan de leur mise en œuvre numérique : méthodes d'endommagement volumique locales directes, éléments finis étendus (XFEM) ou zones cohésives pour citer les plus fréquentes.

La difficulté dans notre cas est clairement de devoir gérer une ou plusieurs variables de pression supplémentaires dans la formulation de ces critères à cause du caractère poreux des milieux concernés par notre étude.

L'enjeu est également de pouvoir traiter de manière intégrée deux mécanismes qui

nous paraissent fondamentaux vis-à-vis de la dégradation des puits et de la zone proche puits :

- la décohésion interfaciale (ou proche de l'interface) ;
- la fracturation induite dans la zone proche puits (voir **Fig.1.4**).

Cette dégradation caractérisée par des mécanismes de décohésion et de fracturation est provoquée par l'injection de gaz à des pressions élevées et, est potentiellement aggravée par des phénomènes de drainage capillaire et probablement des effets de retrait, bien que ces derniers ne soient quantifiés pour le moment.

Bien entendu, différents choix de modélisation sont susceptibles de convenir pour tenter d'apporter une solution de simulation prédictive et d'être en mesure de prendre en compte *in fine* l'ensemble de ces phénomènes de dégradation. Dans le contexte de ce travail de thèse et de par la relative complexité des différentes physiques que nous avons dû aborder et modéliser, nous avons retenu deux voies *a priori* prometteuses. La première concerne une approche par zone cohésive pour modéliser l'interface ciment/acier ou ciment/roche et la seconde récemment développée par Pandolfi et Ortiz (2012)^[115] est une méthode d'érosion d'éléments s'appuyant sur les approches énergétiques de la mécanique de la rupture. Notre choix a été conditionné par certaines réflexions d'ordre général, mais néanmoins importantes à ce stade de notre travail.

Les approches par zone cohésive sont susceptibles de traiter à la fois la problématique de décohésion interfaciale et celle de la fracturation multiple dans un volume (*cf* Monerie (2001)^[103]). Ce dernier point reste cependant un champ d'études complexes en soi et encore ouvert à l'heure actuelle rejoignant alors des questionnements qui s'étendent bien au-delà de notre étude limitée dans le temps (dépendance au maillage, raideurs d'interface, orientation de la fissuration,...). Quoi qu'il en soit, la formulation locale des modèles de zones cohésives permet d'aborder des mécanismes variés comme le contact unilatéral, le frottement ou la plasticité et d'enrichir la phénoménologie de l'endommagement et de la rupture. Nous retiendrons donc ce type d'approche pour représenter les effets de décohésion aux interfaces, fortement conditionnés par le frottement en condition de fond de puits (contact normal non-négligeable dû à des conditions de pression importantes).

Cependant, l'extension et l'application de ce genre de modèle au milieu poreux saturé dépend de l'échelle de fissuration que l'on considère. Nous nous intéressons à des matériaux de natures différentes (ciment, roches consolidées) dans lesquelles nous trouvons des hétérogénéités à des échelles très diverses. Et il n'est pas certain de la légitimité physique des modèles de zones de cohésives à une échelle dite de l'ingénieur^[147,83].

La méthode de Pandolfi et Ortiz, bien que classique dans son approche, s'appuie sur un critère énergétique pour la propagation de la rupture. Elle présente une souplesse de mise en œuvre supérieure à celle des modèles de zones cohésives pour la simulation de propagation de fissure en volume lorsque l'on souhaite traiter des problèmes multiphysiques. À l'inverse des méthodes de zones cohésives, elle ne permet pas de traiter simplement (dans le stade actuel) les mécanismes dissipatifs ou non linéaires pouvant coexister avec la rupture (plasticité, contact, frottement,...). Nous retiendrons donc cette approche pour traiter la problématique de fissuration dans la zone proche puits, et aborder éventuellement les problèmes de bifurcation de fissure en présence de défauts.

Il n'a pas été possible dans le temps imparti de mener jusqu'au bout l'ensemble de la démarche multiphysique sur ces deux approches de modélisation de la rupture. Nous nous sommes focalisés sur l'intégration d'un modèle de transfert multiphasique au sein de l'approche générale de Pandolfi et Ortiz.

3 Méthode d'érosion d'élément ou *eigenerosion*

Nous avons dans les sections précédentes, exposé de manière non exhaustive, mais suffisante les différentes approches de la mécanique du défaut, notamment le principe de l'approche variationnelle de la mécanique de la rupture. C'est en conjuguant cette approche et la théorie de l'*eigendeformation*ⁱ, dont les principes sont exposés et développés dans l'ouvrage de référence de Mura (1987)^[104], que Schmidt, *et al.* (2009)^[131] introduisent le principe d'*eigenfracture*. Le principe d'*eigenerosion* est développé par Pandolfi et Ortiz (2012)^[115] à partir du formalisme de l'*eigenfracture*. On se propose dans cette section de présenter l'approche d'*eigenerosion* modifiée, notamment les variantes qu'elle apporte en regard de l'article de Pandolfi et Ortiz, puis de l'étendre à un problème d'écoulement dans un milieu poreux saturé en eau, *via* la méthode que nous proposerons (section 4) et que l'on pourra noter *eigen porous erosion*.

3.1 Principe de la méthode d'érosion

Sans entrer dans le formalisme de l'*eigenerosion*, cette méthode consiste très simplement à établir un bilan d'énergie (4.10) sur chaque élément de la structure. Chaque élément ayant atteint un critère fixé est alors supprimé. On peut d'un point de vue conceptuel faire l'analogie avec la mécanique de l'endommagement (brutal), dans le sens où

i. La terminologie *eigendeformation*, héritée de l'allemand *Eigenspannungen*, est un terme générique pour désigner les déformations non élastique, apparu la première fois dans Reissner (1931)^[124]. C'est Eshelby (1957)^[52] qui y fera référence en premier pour décrire les déformations liées aux perturbations des contraintes générées par une inclusion Ω dans un domaine D . Ces déformations sont alors notées ϵ^* dans l'inclusion, nous utiliserons la même notation pour les déformations dans la zone érodée.

chaque élément possède un caractère binaire, 0 pour un élément sain et 1 pour un élément *érodé*.

Donc, considérons un domaine sain Ω , avec son bord $\partial\Omega$. Appelons A l'aire de la fissure, et $\mathcal{C}(t)$ le chargement imposé sur le domaine. L'approximation de l'énergie potentielle (4.8) se réécrit avec le champ d'*eigendeformation* de la manière suivante :

$$(4.15) \quad \mathcal{P}(\underline{u}(t), \boldsymbol{\varepsilon}^*) = \int_{\Omega \setminus A} \mathcal{W}_\epsilon(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*) dV - \mathcal{F}(\underline{u}),$$

le champ d'*eigendeformation* $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ ne consomme pas d'énergie, donc ne modifie pas la valeur de l'énergie élastique, et autorise les sauts de $\underline{u}$.

Dans ce qui suit, nous établissons l'approximation de l'énergie totale (4.10), selon la formulation proposée par Schmidt^[131], en prenant $n = 3$ pour la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^2$ à $\frac{|A_\epsilon|}{2 \times \epsilon}$, celle-ci s'écrit donc :

$$(4.16) \quad E_\epsilon(\underline{u}(t), \boldsymbol{\varepsilon}^*) = \int_{\Omega} \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*) dV - \mathcal{F}(\underline{u}) + G_\epsilon \frac{|A_\epsilon|}{2 \times \epsilon}.$$

Dans l'expression (4.16), apparaît un paramètre de contrôle ϵ qui est un paramètre homogène à une longueur et qui intervient lors de l'estimation de l'incrément de longueur de la fissure. A représente le support du champ d'*eigendeformation* $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ tel que $A = \{\boldsymbol{\varepsilon}^* \neq 0\}$, i.e le domaine sur lequel le champ d'*eigendeformation* est différent de zéro où A peut-être considéré comme une approximation de la fissure. A_ϵ représente le ϵ -voisinage de A . Autrement dit, A_ϵ correspond à l'ensemble des points se trouvant à une distance inférieure ou égale à ϵ de A . Et $|A_\epsilon|$ représente le volume du ϵ -voisinage de A_ϵ . On trouvera toute la rigueur mathématique de cette approcheⁱ dans l'article de Schmidt^[131], notamment les aspects de Γ -convergence qui montrent l'existence de minimiseurs pour l'approximation de (4.16) permettant l'utilisation légitime de la méthode des éléments finis pour ce type d'approche. Récapitulons maintenant la stratégie à suivre pour appliquer la méthode d'érosion d'éléments :

- i. Décrire la topologie de la fissure et pour cela calculer (section 3.2.1) l'incrément de longueur d'avancée de la fissure ;
- ii. Établir un bilan d'énergie (section 3.2.2), notamment en calculant l'énergie élastique de chaque élément (peu coûteux numériquement), et de la structure.

i. Le lecteur curieux trouvera de nombreux détails sur le principe de l'approche variationnelle de la rupture dans l'article de Bourdin, Francfort et Marigo^[29].

3.2 Mise en œuvre de la méthode d'érosion

3.2.1 Calcul de l'incrément de longueur de fissuration

Pour mettre en œuvre le point (i) et calculer l' ϵ -voisinage A_ϵ , on utilise une sphère de rayon ϵ ayant comme centre le barycentre de chaque élément érodé. Tout élément ayant son barycentre à une distance inférieure ou égale à ϵ du barycentre de l'élément érodé est considéré comme un *voisin* (**Fig.4.4a**), et l'union de ces éléments voisins constitue le ϵ -voisinage. L'incrément de longueur correspondant à l'avancée de la fissure (**Fig.4.4b**) pour un élément est alors calculé de la manière suivante :

$$(4.17) \quad \Delta \ell^e = \frac{|(A \cup e)_\epsilon \setminus A_\epsilon|}{2 \times \epsilon}$$

où la lentille (**Fig.4.4b**) de surface $A \cup e$ est obtenu en incrémentant la surface héritée A de e . La relation $|(A \cup e)_\epsilon \setminus A_\epsilon|$ décrit donc la surface actuelle de la fissure moins la surface des éléments érodés A_ϵ .

Relevons ici que ce genre de méthode de calcul des voisins présente un inconvénient lors de l'amorçage d'une fissure (le cas d'une fissure débouchante est sensiblement le même). Dans le cas de l'amorçage, le nombre de voisins compris dans A_ϵ est excessif, car aucune fissure n'est encore présente. Si on ne fait rien, le premier incrément de longueur calculé est donc surestimé. La solution que l'on propose est de calculer $\Delta \ell^e$ comme une fonction de la surface de l'élément érodé $f(e)$.

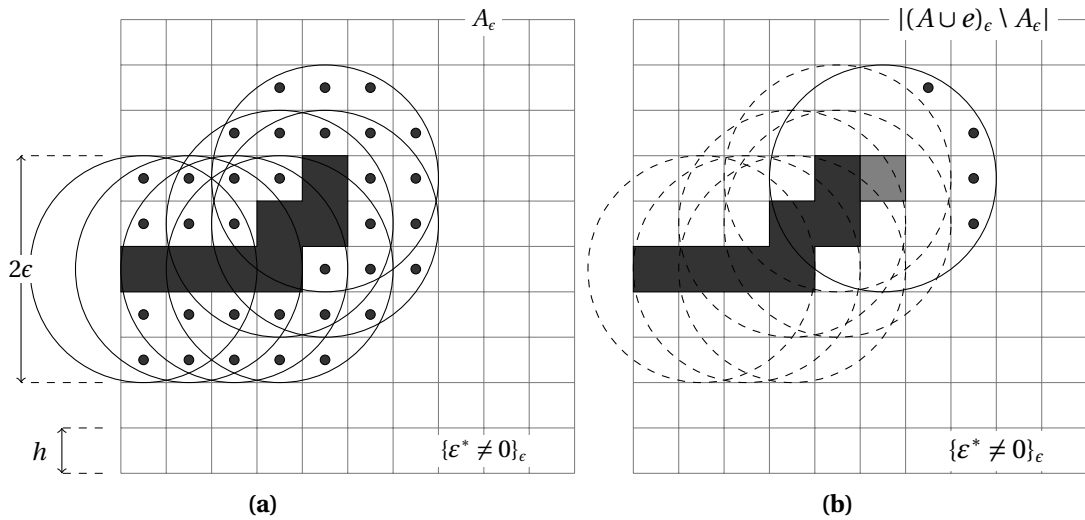


Fig 4.4. (a) Description de l'avancée du chemin d'éléments érodés, et des éléments appartenant au ϵ -voisinage $|e_\epsilon|$. Les éléments voisins sont marqués par les points (•). (b) Visualisation de la nouvelle configuration érodée $| \Delta e_\epsilon |$, l'élément grisé correspond à l'avancée éventuelle de la fissure, les nouveaux voisins sont décrit par la lentille marquée de (•).

3.2.2 Calcul de l'incrément d'énergie

Dans cette section, on détaille le point (ii). Il est question d'estimer l'énergie dissipée par un élément tout juste érodé. Évaluons alors l'énergie de la structure avant, soit (4.4a), et après, soit (4.4b) l'érosion de l'élément. Nous noterons la matrice de rigidité avant érosion $\mathbf{K}_T^{sain} = \mathbf{K}_T^e + \Delta\mathbf{K}_T^e$, $\mathbf{K}_T^e$ étant la matrice de rigidité moins l'élément érodé, et $\Delta\mathbf{K}_T^e$ la matrice de rigidité de l'élément érodé^e. Nous noterons u^{sain} le champ de déplacement de la structure saine, u^e le champ de déplacement de la structure érodée, Δu^e étant la différence ($u^e - u^{sain}$). Toutes les grandeurs utilisées dans le calcul de l'énergie sont récapitulées dans le tableau suivant (4.4) :

Tab 4.4. Récapitulatif des notations utilisées pour le calcul de l'incrément de l'énergie.

Matrice de rigidité avant érosion	$\mathbf{K}_T^{sain}$
Matrice de rigidité avec érosion	$\mathbf{K}_T^e$
Matrice de rigidité d'un élément érodé	$\Delta\mathbf{K}_T^e = \mathbf{K}_T^{sain} - \mathbf{K}_T^e$
Champ de déplacement de la structure saine	u^{sain}
Champ de déplacement d'un élément érodé	u^e
Différence du champ de déplacement	$\Delta u^e = u^{sain} - u^e$
Chargement extérieur de la structure	f_{ext}

Nous exprimons ci-dessous, la variation de l'énergie potentielle dans la structure consécutive à l'érosion d'un élément :

$$(4.18) \quad -\Delta E^e = \frac{1}{2} {}^t u^{sain} (\mathbf{K}_T^e + \Delta\mathbf{K}_T^e) u - {}^t f_{ext} u^{sain} - \frac{1}{2} {}^t (u^{sain} + \Delta u^e) \mathbf{K}_T^e (u + \Delta u^e) + {}^t f_{ext} (u^{sain} + \Delta u^e).$$

L'écriture de la configuration avant (cf. 4.19a) érosion à l'équilibre pour un chargement f_{ext} , et après érosion (cf. 4.19b) s'écrit :

$$(4.19a) \quad (\Delta\mathbf{K}_T^e + \mathbf{K}_T^e) u^{sain} = f_{ext},$$

$$(4.19b) \quad \mathbf{K}_T^e (u^{sain} + \Delta u^e) = f_{ext}.$$

De ces deux relations, nous en déduisons deux autres, lesquelles nous seront utiles pour le développement qui va suivre. Pour cela, nous écrivons d'une part l'égalité (4.20a) entre (4.19a) et (4.19b) où chaque côté est multiplié par $(\Delta\mathbf{K}_T^e)^{-1}$, et d'autre part en écrivant la

i. Pour éviter la confusion sur les exposants utilisés dans ce manuscrit, on gardera à l'esprit que l'exposant devant une grandeur telle que ^e(.) signifie élémentaire, et l'exposant après (.)^e fait référence à un élément érodé.

différence (4.20b) entre (4.19a) et (4.19b). Nous avons donc :

$$(4.20a) \quad (\Delta \mathbf{K}_T^e)^{-1} (\Delta \mathbf{K}_T^e + \mathbf{K}_T^e) u^{sain} = u^{sain} + \Delta u^e,$$

$$(4.20b) \quad (\Delta \mathbf{K}_T^e)^{-1} \mathbf{K}_T^e u^{sain} = \Delta u^e.$$

Ci-après, développons simplement (4.18), soit :

$$(4.21) \quad \begin{aligned} -\Delta E^e = & \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \mathbf{K}_T^e u^{sain} + \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \mathbf{K}_T^e u^{sain} - {}^t f_{ext} u^{sain} - \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \mathbf{K}_T^e u \\ & - \frac{1}{2} {}^t (\Delta u^e) \mathbf{K}_T^e u^{sain} - \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \mathbf{K}_T^e \Delta u^e - \frac{1}{2} {}^t (\Delta u^e) \mathbf{K}_T^e \Delta u^e + {}^t f_{ext} u^{sain} + {}^t f_{ext} \Delta u^e. \end{aligned}$$

En tenant compte de (4.19a)-(4.19b), alors (4.18) devient :

$$(4.22) \quad -\Delta E^e = \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \Delta \mathbf{K}_T^e u^{sain} - \frac{1}{2} {}^t (\Delta u^e) \mathbf{K}_T^e u^{sain} - \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \mathbf{K}_T^e \Delta u^e - \frac{1}{2} {}^t (\Delta u^e) \mathbf{K}_T^e \Delta u^e + {}^t f_{ext} \Delta u^e.$$

En rappelant que ${}^t f_{ext} = {}^t u^{sain} (\mathbf{K}_T^e + \Delta \mathbf{K}_T^e)$, alors (4.22) devient :

$$(4.23) \quad \begin{aligned} -\Delta E^e = & \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \Delta \mathbf{K}_T^e u^{sain} - \frac{1}{2} {}^t (\Delta u^e) \mathbf{K}_T^e u \\ & - \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \mathbf{K}_T^e \Delta u^e - \frac{1}{2} {}^t (\Delta u^e) \mathbf{K}_T^e \Delta u^e + {}^t u^{sain} (\mathbf{K}_T^e + \Delta \mathbf{K}_T^e) \Delta u^e. \end{aligned}$$

Après avoir simplifier (4.23), nous obtenons :

$$(4.24) \quad -\Delta E^e = \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \Delta \mathbf{K}_T^e u^{sain} - \frac{1}{2} {}^t (\Delta u^e) \mathbf{K}_T^e \Delta u^e + {}^t u^{sain} \Delta \mathbf{K}_T^e \Delta u^e,$$

compte tenu de (4.20a) et (4.20b), nous écrivons :

$$(4.25) \quad \begin{aligned} -\Delta E^e = & \frac{1}{2} {}^t ((\Delta \mathbf{K}_T^e)^{-1} \mathbf{K}_T^e \Delta u^e) \mathbf{K}_T^e ((\Delta \mathbf{K}_T^e)^{-1} \mathbf{K}_T^e \Delta u^e) \\ & + {}^t ((\Delta \mathbf{K}_T^e)^{-1} \mathbf{K}_T^e \Delta u^e) \mathbf{K}_T^e \Delta u^e - \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \Delta \mathbf{K}_T^e u^{sain}. \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient :

$$(4.26) \quad -\Delta E^e = \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \Delta \mathbf{K}_T^e u^{sain} + \frac{1}{2} {}^t (\Delta u^e) (\mathbf{K}_T^e)^{-1} \Delta u^e$$

Pandolfi et al. (2012)^[115] propose d'écrire (4.26) en négligeant les termes du second ordre :

$$(4.27) \quad -\Delta E^e \simeq \frac{1}{2} {}^t u^{sain} \Delta \mathbf{K}_T^e u^{sain}.$$

Toutefois, cette approximation minimise l'énergie et retarde l'apparition de la fissure. Dans la section suivante, l'incrément d'énergie est calculé à partir de (4.18). Par ailleurs,

après une vérification des calculs, il semble qu'une petite erreur de signe ($+$ $\rightarrow$ $-$) soit présente dans l'équation (4.18) dans le deuxième terme, par rapport à celle écrite dans l'article^[115].

3.2.3 Algorithme de résolution

Dans ce type de critère, l'énergie nécessaire à la fissuration est fournie par la restitution d'énergie lors de la relaxation dans l'ensemble du milieu. Ainsi pour connaître l'énergie dissipée lors de l'avancée de la fissure, on a besoin de connaître l'énergie élastique stockée dans l'ensemble du milieu, donc dans chaque élément lors d'un calcul par élément fini. Ici, le calcul de l'énergie nécessaire à l'avancée de la fissure se fait en deux temps, d'abord en calculant un critère local puis en calculant un critère global, donc :

- i. On calcule l'énergie élastique dans chaque élément puis le taux de restitution d'énergie E_{rr} en prenant les valeurs les plus élevées suivant une tolérance définie.
- ii. Puis, on calcule la variation d'énergie totale de la structure sur la longueur de fissure estimée avant et après érosion temporaire des éléments sélectionnés. Les éléments sélectionnés sont mis sur une liste *onset*. Enfin, on calcule le taux de restitution critique et si celui-ci est atteint alors les éléments présents dans cette liste sont érodés. Les éléments e en vue d'être potentiellement érodés prennent quatre statuts différents, voir **Tab.**(4.5).

Tab 4.5. Les statuts possibles des éléments pendant l'érosion.

$\varepsilon^*(e) = 0$	sain
$\varepsilon^*(e) = 1$	érodé
$\varepsilon^*(e) = 2$	voisin
$\varepsilon^*(e) = 3$	nouveau voisin

Le jacobien $j(e)$ des éléments est également calculé pour connaître l'état de chargement des éléments, par exemple s'ils sont en traction ou en compression. L'algorithme de résolution de la méthode est donné dans la figure **Alg.**(2).

```

Données : tol=10%
Initialisation
tant que go=1 faire
  pour tous les éléments  $e$  dont  $\varepsilon^*(e) \neq 0$  faire
    si  $\varepsilon^*(e) = 0$  alors
      calcul du volume  $|e|$  de tous les éléments  $e$ 
    pour tous les éléments  $e$  dans  $B_e$  faire
      calcul du volume  $|e_e|$ 
    fin
    calcul de  $|\Delta e_e| \leftarrow |e_e|/2 \times \epsilon$ 
    calcul de l'énergie locale  $\Delta E(e) \leftarrow \mathcal{W}_e(e) - G_c \times |\Delta e_e|$ 
    si ( $J(e) \geq 1$  et  $|\Delta e_e| > 0$ ) alors
      calcul du critère local  $E_{rr}(e) \leftarrow \max\{\mathcal{W}_e(e)/|\Delta e_e|\}$ 
    si  $E_{rr}(e) > tol \times E_{rr}(e)$  alors
       $e$  ajouté à onset
  fin
  si onset > 0 alors
    pour tous les éléments  $e$  dont  $\varepsilon^*(e) \neq 1$  faire
      calcul du volume  $|A_e|$ 
      calcul de l'énergie globale  $\Delta E \leftarrow \Delta E + \Delta E(e)$ 
    fin
    calcul du critère global  $E_{rr} \leftarrow \Delta E/|A_e|$ 
    si  $E_{rr} < G_c$  alors
      go = 0
    sinon
      pour tous les éléments  $e$  dans onset faire
        mise à jour du chemin de rupture
      fin
    fin
  fin

```

Algorithme 2 : Schéma de résolution de l'eigenerosion

3.3 Exemple d'application : plaque deux trous

La méthode d'érosion a été dans un premier temps implémentée sans modification de l'algorithme proposé par Pandolfi et Ortiz. La méthode a été testée sur un cas-test représentant une plaque avec deux trous en traction. Le calcul a été réalisé pour des conditions quasi statiques et les conditions aux limites et propriétés du matériau sont indiquées sur la figure **Fig.**(4.5). Les résultats de la simulation sont illustrés dans les figures **Fig.**(4.6.a) et (4.6.b)). Sur ces figures, on peut remarquer que la surface de la fissure à l'amorçage est surestimée. En effet, il y a trop d'éléments érodés (3-4 éléments (bleu clair)) en même temps lors de l'amorçage au voisinage du trou, au temps $t = 8s$ (voir **Fig.**(4.6.a)).

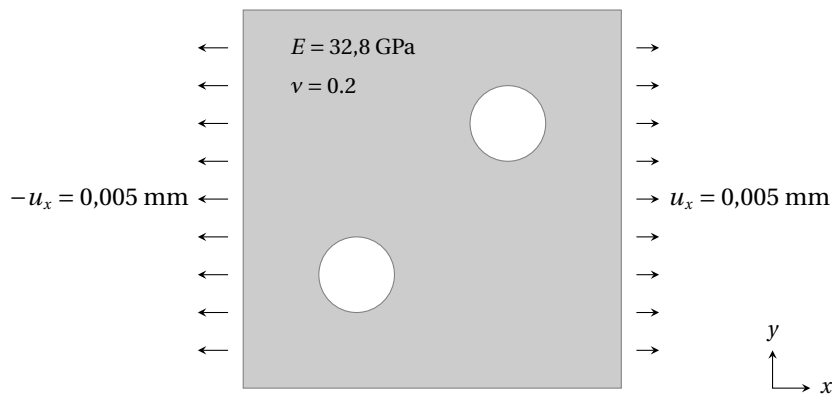


Fig 4.5. Conditions aux limites de la plaque deux trous.

Les résultats de la simulation avec modification du calcul des voisins sont illustrés sans les figures **Fig.(4.6.c)** et **(4.6.d)**). En tenant compte de la modification, le nombre d'éléments érodés à l'amorçage (voir **Fig.(4.6.c)**) est réduit. Le comportement de la fissure à l'amorçage semble plus réaliste. En revanche, il est à noter deux choses, la première est que la vitesse de propagation est modifiée (voir **Fig.(4.6.a)** et **(4.6.c)**) comme on peut le voir sur le trou supérieur. La fissure n'a pas été amorcée au même moment lorsque l'on tient compte de la modification. La deuxième chose est que la fissure n'a pas suivi le même trajet dans le cas de la méthode modifiée.

4 Extension de la méthode d'érosion en milieu poreux saturé

Cette partie est consacrée à l'extension, et l'application grâce à une approximation par éléments finis, de la méthode *eigenerosion*^[115] pour un milieu poreux saturé. La méthode *eigenerosion*^[115] repose sur une approche variationnelle de la mécanique de la rupture^[61] qui offre un formalisme rigoureux pour le traitement de la propagation de fissures et possède de bonnes propriétés de convergence pour des maillages suffisamment fins, Schmidt (2009)^[131]. En s'appuyant sur ce cadre théorique et technique, nous développons l'idée ici qu'il est possible d'étendre l'usage de l'*eigenerosion* à un problème de milieux poreux saturé. Dans le cas de l'*eigenerosion* présentée, soit l'élément est sain et son comportement est élastique linéaire, soit l'élément est érodé et il n'a plus de rigidité. Dans le cas de notre méthode, soit l'élément est sain et son comportement est poroélastique linéaire, soit l'élément est érodé et son comportement est remplacé par une loi d'écoulement de Poiseuille. On présuppose en effet que le chemin de fissure crée un conduit laissant place à un écoulement laminaire. L'écoulement est alors darcéen dans le milieu sain et de type Poiseuille dans le milieu fissuré en utilisant comme support les éléments érodés. La difficulté de ce genre d'approche est la gestion cohérente de l'apparition de nouvelles conditions aux limites sur les bords de la fissure. Lors de l'implémen-

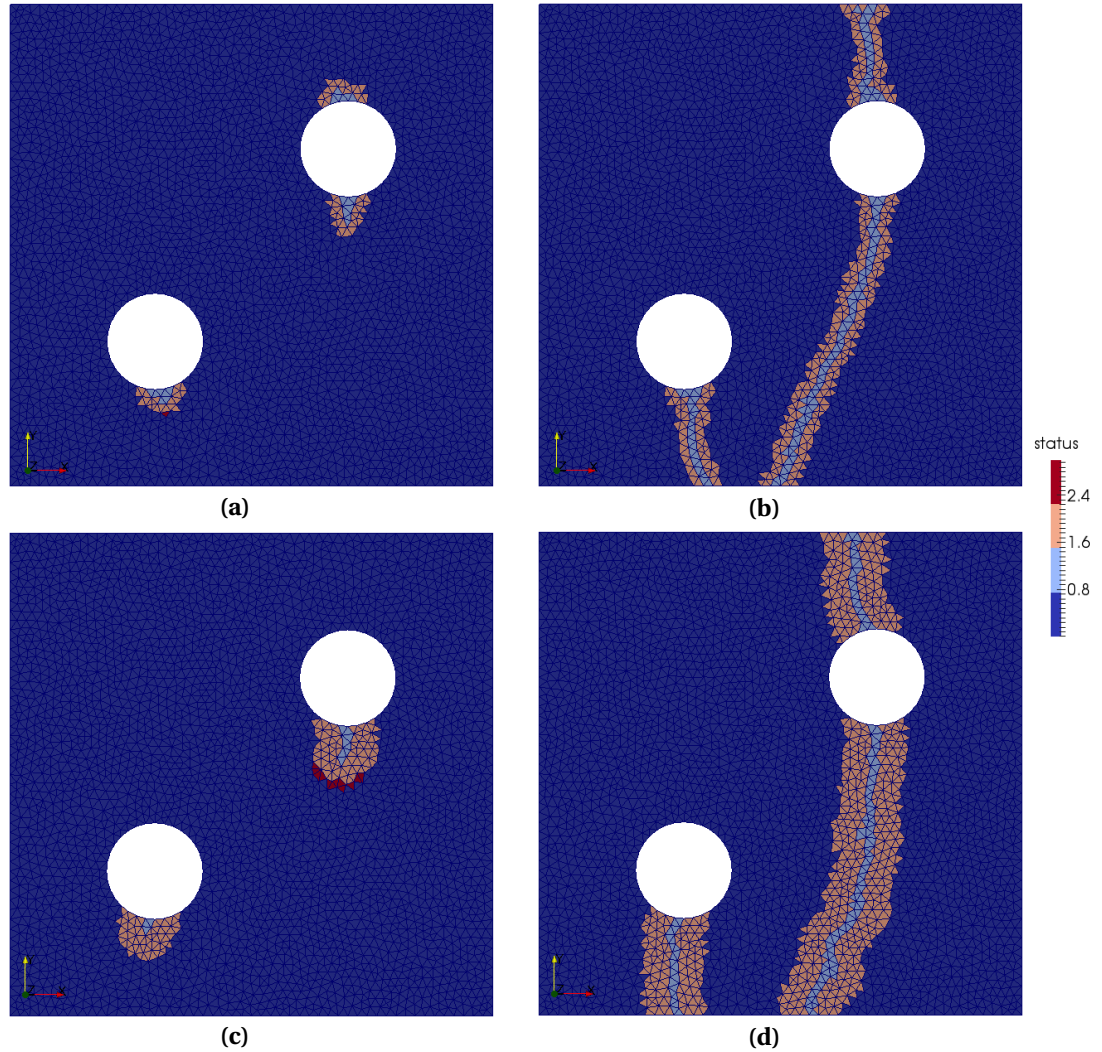


Fig 4.6. Simulation d'*eigenerosion* sur un cas-test d'une plaque 2 trous. **(a)** Sans modification du calcul des voisins : propagation de la fissure au temps $t = 8s$. **(b)** Propagation de la fissure au temps $t = 155s$. **(c)** Avec modification du calcul des voisins : propagation de la fissure au temps $t = 8s$. **(d)** Propagation de la fissure au temps $t = 155s$.

tation de la méthode, on écrira la continuité de la pression du fluide entre le milieu sain et le milieu fissuré. Une autre difficulté qu'il convient de noter est l'incapacité – pour le moment – du modèle de tenir compte des contacts frottants entre les bords de la fissure, à l'inverse d'un modèle de zone cohésive.

4.1 Formulation du problème de rupture dans un milieu poroélastique

La modélisation complète d'une fracture hydraulique se propageant dans le milieu poreux saturé doit tenir compte des différents couplages physiques. Cela comprend la déformation du squelette solide, l'écoulement du fluide dans le milieu poreux et l'écou-

lement du fluide dans le milieu fracturé ainsi que l'échange de fluide entre le milieu poreux sain et le milieu fracturé. Il convient de gérer de la propagation de la fracture hydraulique. Les équations pour décrire ce problème sont similaires à ce que l'on a présenté dans le chapitre (2) à la différence qu'il n'y a ici plus qu'une seule phase. Ce qui implique qu'il n'y plus besoin de lois de saturation et de perméabilités relatives. La perméabilité du milieu est constante. Le comportement mécanique du milieu sain est gouverné par une loi élastique linéaire et l'écoulement est supposé darcéen. Dans le milieu fracturé, l'écoulement peut-être assimilé à un écoulement de Poiseuille, ce qui est valable si l'on considère que l'écoulement se fait par un fluide visqueux newtonien entre des parois lisses et parallèles en situation idéale. Ce type de simplification est parfaitement justifiable pour l'écoulement d'un fluide dans une fracture d'un milieu poreux d'après Witherspoon (1980)^[156]. L'accélération relative de la phase fluide par rapport à la phase solide est toujours considérée comme négligeable par rapport à l'accélération de la phase solide.

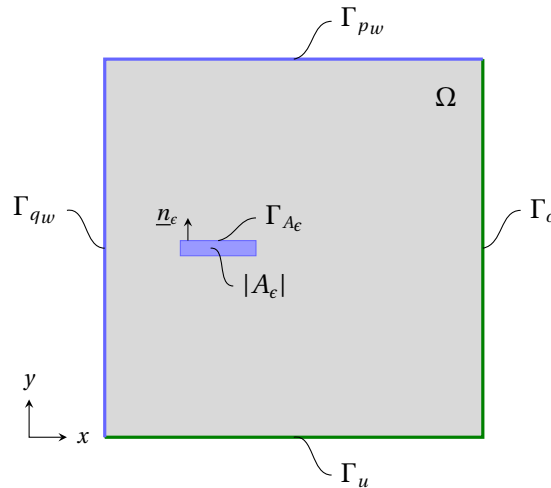


Fig 4.7. Milieu poreux saturé et érodé.

En tenant compte de ce que nous venons de présenter, l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour le domaine de volume Ω et de bord extérieur Γ (voir **Fig.(4.7)**) s'écrit :

$$(4.28) \quad \underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \zeta \underline{v} + \rho \underline{\dot{v}} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[.$$

Pour établir la formulation variationnelle de l'équation de conservation de quantité de mouvement, l'équation (4.28) est multipliée par une fonction test $\underline{\hat{v}} \in \mathcal{V}$ où $\mathcal{V}$ est un espace fonctionnel approprié. On obtient ainsi en intégrant sur le domaine Ω et de bord

extérieur Γ pour $\forall \underline{\hat{v}} \in \mathcal{V}$:

$$(4.29) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega(t)} \underline{\hat{\epsilon}}^\top(\underline{\hat{v}}) : \mathbb{C} : \underline{\epsilon} \, d\Omega + \int_{\Omega(t)} \underline{\hat{\epsilon}}^\top(\underline{\hat{v}}) b \mathbf{I} p_w \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^\top \cdot \rho \underline{\dot{v}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\hat{v}}^\top \cdot \zeta \underline{v} \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega(t)} \underline{\hat{v}}^\top \cdot \rho \underline{f} \, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \underline{\hat{v}}^\top \cdot (\underline{T}^d - b p_w \underline{n}) \, dS + \int_{\Gamma_{A_\epsilon}} \underline{\hat{v}}^\top \cdot b p_w \underline{n}_\epsilon \, dS. \end{aligned}$$

Le dernier terme de l'équation (4.29) apparaît naturellement lors de l'intégration par partie et correspond aux conditions aux limites sur le bord Γ_ϵ de la fracture de volume $|A_\epsilon|$. L'équation de champ pour le fluide dans le milieu poreux s'écrit pour une seule phase :

$$(4.30) \quad \left(\frac{b-n}{K_s} + \frac{n}{K_w} \right) \frac{\partial p_w}{\partial t} + b \underline{\dot{\epsilon}} + \text{div} \left[\frac{k_w}{\mu_w} (-\underline{\text{grad}} p_w + \rho_w (\underline{f} - \underline{\dot{v}})) \right] = 0$$

La formulation variationnelle de l'équation de champs en pression s'écrit en multipliant l'équation (4.30) par une fonction test $\hat{p}_w \in \mathcal{P}^1$ où $\mathcal{P}^1$ est un espace fonctionnel approprié, on obtient :

$$(4.31) \quad \begin{aligned} & \left(\frac{b-n}{K_s} + \frac{n}{K_w} \right) \int_{\Omega(t)} \dot{p}_w \hat{p}_w \, d\Omega + \int_{\Omega(t)} b \underline{\dot{\epsilon}}_v \hat{p}_w \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega(t)} k_w \underline{\text{grad}}(p_w) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}_w) \, d\Omega = \int_{\Omega(t)} k_w \rho_w \underline{f} \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}_w) \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega(t)} k_w \rho_w \underline{\dot{v}} \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}_w) \, d\Omega - \int_{\Gamma_{q_w}} q_w^d \hat{p}_w \, dS + \int_{\Gamma_{A_\epsilon}} \hat{p}_w^\top (\underline{w}_w \cdot \underline{n}_\epsilon) \, dS \end{aligned}$$

Le dernier terme de l'équation (4.31) correspond aux conditions aux limites sur le bord Γ_ϵ de la fracture de volume $|A_\epsilon|$. Pour l'écoulement dans la fissure, l'équation de champs se réduit à :

$$(4.32) \quad \frac{1}{K_w} \dot{p}_w + \underline{\dot{\epsilon}} + \text{div} \left[k_{w\epsilon} (-\underline{\text{grad}} p_w + \rho_w (\underline{f} - \underline{\dot{v}})) \right]$$

où $k_{w\epsilon}$ est le coefficient qui correspond à un écoulement de Poiseuille et s'exprime par :

$$(4.33) \quad k_{w\epsilon} = \frac{1}{c} \frac{(2h)^2}{12\mu_w},$$

avec h la demi-hauteur d'un élément érodé support de l'écoulement et c est un coefficient qui permet de tenir compte des éventuelles pertes de parallélisme entre les deux plans de l'écoulement. La formulation variationnelle pour cette équation peut s'écrire en multipliant l'équation (4.32) par une fonction test $\hat{p}_w \in \mathcal{P}^1$ où $\mathcal{P}^1$ est un espace fonc-

tionnel approprié. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 (4.34) \quad & \frac{1}{K_w} \int_{|A_\epsilon|} \dot{p}_w \hat{p}_w dA_\epsilon + \int_{|A_\epsilon|} \dot{\epsilon}_v \hat{p}_w dA_\epsilon \\
 & + \int_{|A_\epsilon|} k_w \underline{\text{grad}}(p_w) \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}_w) dA_\epsilon = \int_{|A_\epsilon|} k_{we} \rho_w \underline{f} \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}_w) dA_\epsilon \\
 & + \int_{|A_\epsilon|} k_{we} \rho_w \underline{\dot{v}} \cdot \underline{\text{grad}}(\hat{p}_w) dA_\epsilon - \int_{\Gamma_{A_\epsilon}} \underline{q}_{we} \hat{p}_w dS.
 \end{aligned}$$

4.2 Rupture dans un milieu poreux saturé

La rupture dans un milieu poreux saturé lorsqu'il s'agit de fracturation par injection d'un fluide visqueux correspond à un problème rupture de fragile dans un milieu solide confiné. Sur la figure **Fig. (4.8)** est représentée une vue du puits d'injection avec les différents chemins de fuite potentiels et une vue du point d'injection. Le problème que nous choisissons de simuler dans la suite est une portion du point d'injection avec une perforation.

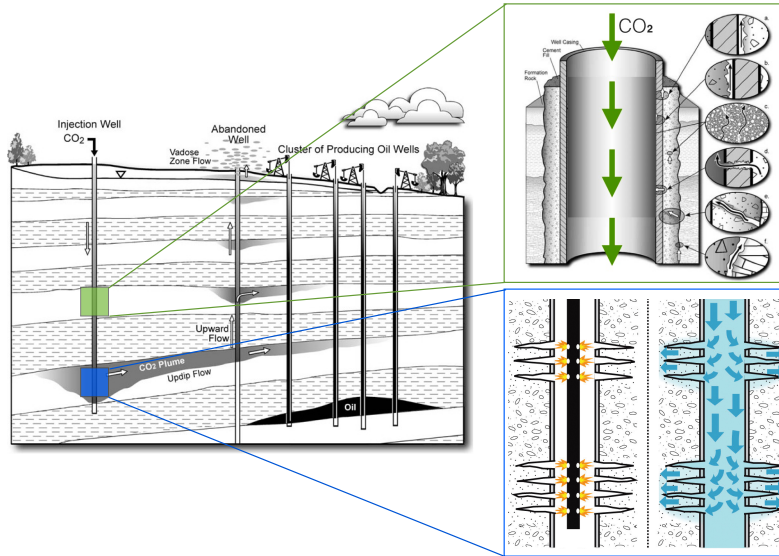


Fig 4.8. En vert, une section du puits d'injection où sont représentés les différents chemins de fuites potentiels. En bleu, une section du point d'injection. À gauche : l'étape de perforation précédant l'injection. À droite : l'étape d'injection.

4.2.1 Simulation dans un milieu confiné

Afin d'illustrer l'approche proposée dans cette partie, on se propose de simuler le problème qui consiste à charger en pression une fissure initialement saturée par un fluide visqueux newtonien compressible. Ce problème revient à étudier la propagation

d'une fracture hydraulique dans un milieu poreux perméable. L'avancée de la fracture est alors gouvernée par la pression imposée dans l'ouverture.

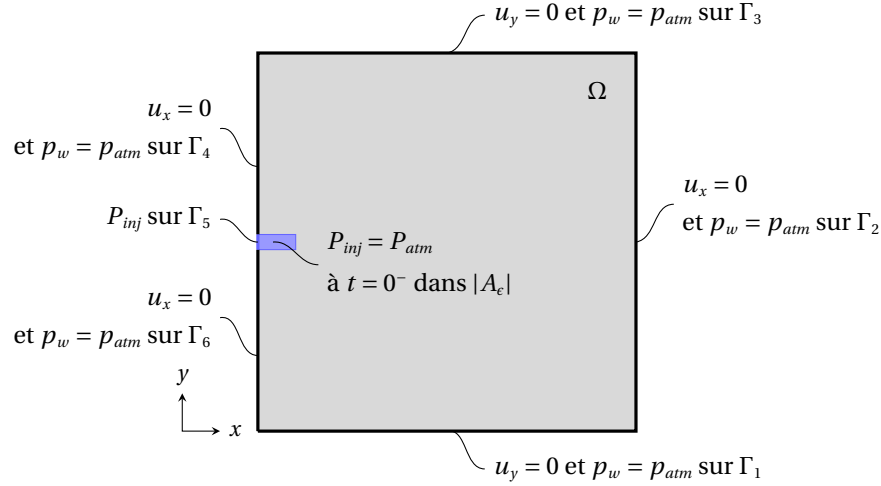


Fig 4.9. Milieu poreux saturé et érodé.

Le système modélisé est représenté sur la figure **Fig.(4.9)**. À $t = 0^-$, tous les déplacements sont supposés nuls et la pression est égale à $p_w = p_{atm}$. À $t = 0^+$, les déplacements u_y sur les bords supérieurs (Γ_3) et inférieurs (Γ_1) sont nuls. Sur les bords latéraux Γ_3 , Γ_4 et Γ_6 les déplacements u_x sont mis à zéro. La pression est mise à $p_w = p_{atm}$ sur tous les bords en dehors du bord extérieur Γ_5 de la préfracture. Sur Γ_5 la pression du fluide est mise à $p_w = 10$ MPa. En raison de la symétrie du problème et des conditions de chargement le coefficient c de l'équation (4.32) est égale à 1. Le comportement du milieu est supposé poroélastique linéaire et les effets gravitaires sont supposés négligeables. Enfin, les paramètres utilisés sont indiqués dans le tableau **Tab.(4.6)**.

Tab 4.6. Paramètres et propriétés physiques.

Module d'Young	$E = 2.10^9$ Pa
Coefficient de Biot	$b = 1$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,2$
Porosité	$n = 0,2$
Masse vol. du solide	$\rho_s = 2000$ kg.m ⁻³
Masse vol. de l'eau	$\rho_w = 1000$ kg.m ⁻³
Module de compressibilité du solide	$K_s = 1.10^{12}$ Pa
Module de compressibilité de l'eau	$K_w = 2.10^9$ Pa
Perméabilité intrinsèque	$k = 1.10^{-13}$ m ²
Viscosité dynamique de l'eau	$\mu_w = 1.10^{-3}$ Pa.s
Pression atmosphérique	$p_{atm} = 0$ Pa
Pression d'injection	$p_{inj} = 10.10^6$ Pa
Taux de restitution d'énergie critique	$G_c = 100$ J.m ⁻²

4.2.2 Résultats

La simulation est réalisée en deux dimensions avec l'hypothèse de déformations planes, et pour des conditions quasi statiques. Le domaine est discrétisé avec 40401 éléments Q84 (voir chapitre (3)), soit 201 éléments sur chaque bord. L'intervalle de temps simulé est $T = 20s$ avec un pas de temps $\Delta t = 0,1s$.

Sur la figure **Fig.**(4.10a) est tracé le déplacement vertical u_y au voisinage de chaque lèvres de la fissure pour différents pas de temps. On peut remarquer que le profil d'ouverture est parabolique jusqu'au pas de temps $t = 2s$, et que la valeur maximale du déplacement (voir **Fig.**4.12.(c-d)) est atteinte à l'endroit où la valeur de la pression est maximale (voir **Fig.**(4.10b) et **Fig.**4.12.(a-b)), et le déplacement atteint sa valeur minimale en pointe de fissure, ce qui est physiquement cohérent et peut-être vu comme un bon critère de validation. D'un point de vue quantitatif, la valeur maximale du déplacement est comprise entre $90 \mu m$ et $900 \mu m$, ce qui est cohérent avec les ouvertures observées sur des roches stimulées hydrauliquement dans des réservoirs. La figure **Fig.**(4.10b) indique la distribution de la pression p_w sur une ligne proche du bord de la fissure. L'allure de cette courbe montre que la pression chute rapidement après la pointe de fissure. En revanche, on pourrait s'attendre à ce que la pression au niveau de l'injection atteigne plus rapidement p_{inj} . Sur la figure **Fig.**(4.11a), on peut observer le profil de la pression p_w dans la fracture pour différents pas de temps. La mesure est prise jusqu'en pointe de fissure.

La figure **Fig.**(4.11) représente la distribution de la contrainte effective normale le long de l'avancée de la fissure. L'analyse de cette courbe montre que le pic du profil de la contrainte normale correspond à la pointe de la fissure, position où l'ouverture de la fracture est nulle. La valeur du pic de contrainte correspond à une concentration de contrainte en pointe de fissure. En s'éloignant de la pointe de fissure, la valeur de la contrainte diminue rapidement en se rapprochant de la valeur de la contrainte initiale. Sur la figure **Fig.**(4.13) est illustré le chemin suivi par la fracture gouverné par le chargement hydraulique (pression imposée). Pour indication, les éléments en bleu clair correspondent aux éléments cassés. L'élément une fois cassé n'a plus de comportement poroélastique et laisse place à un écoulement de type Poiseuille, comme nous l'avons présenté précédemment. Les éléments en rose clair sont les éléments voisins (**Fig.**4.4a) et les éléments en rouge sont les nouveaux voisins (**Fig.**4.4b). Les éléments bleus constituent la partie saine de la structure. Le chemin de la fissure est cohérent avec les modèles existants dans la littérature^[102,134].

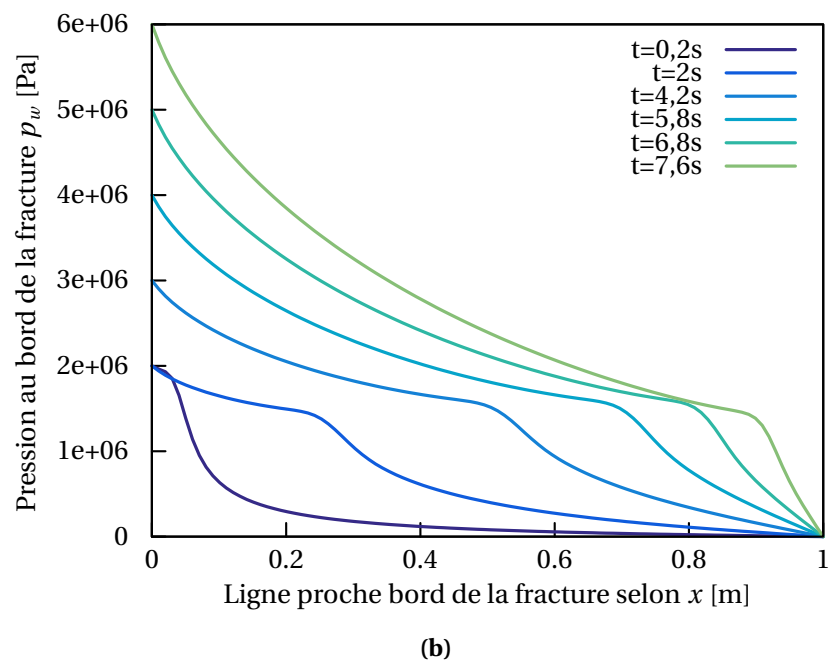
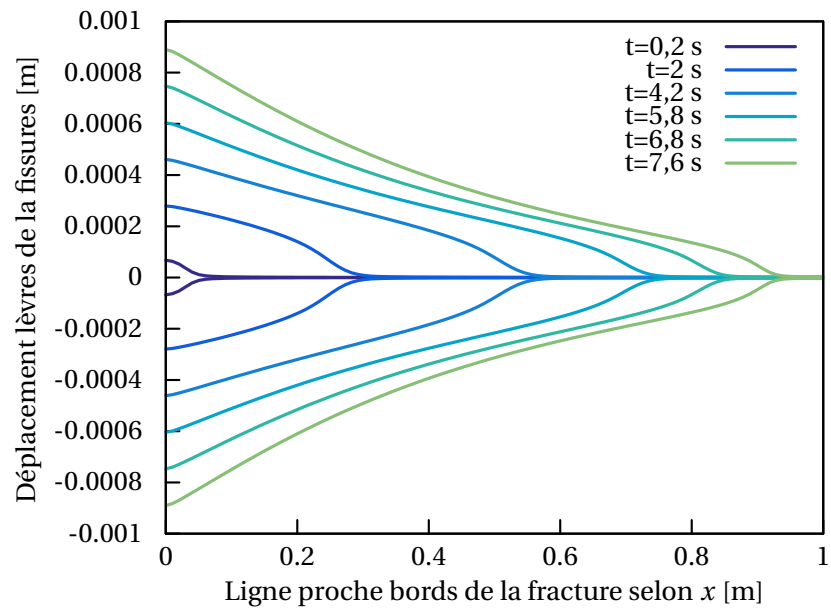
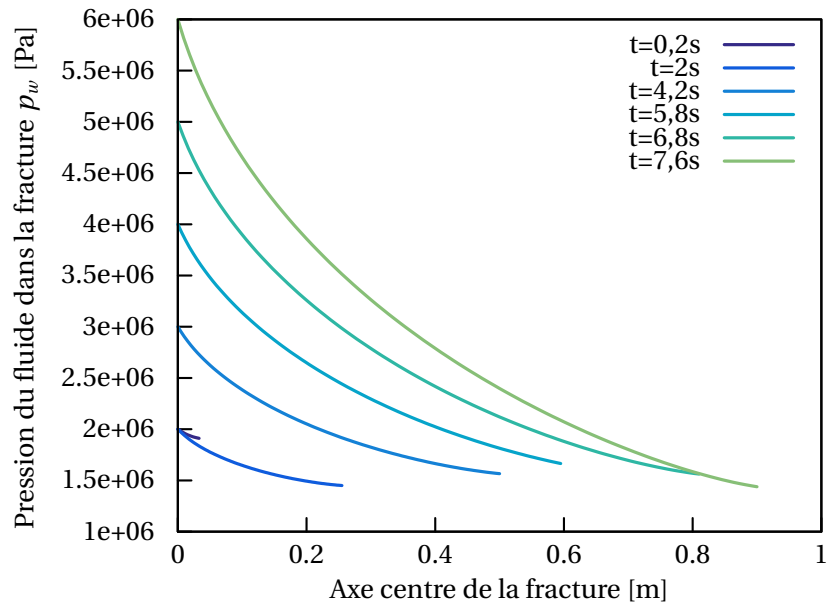
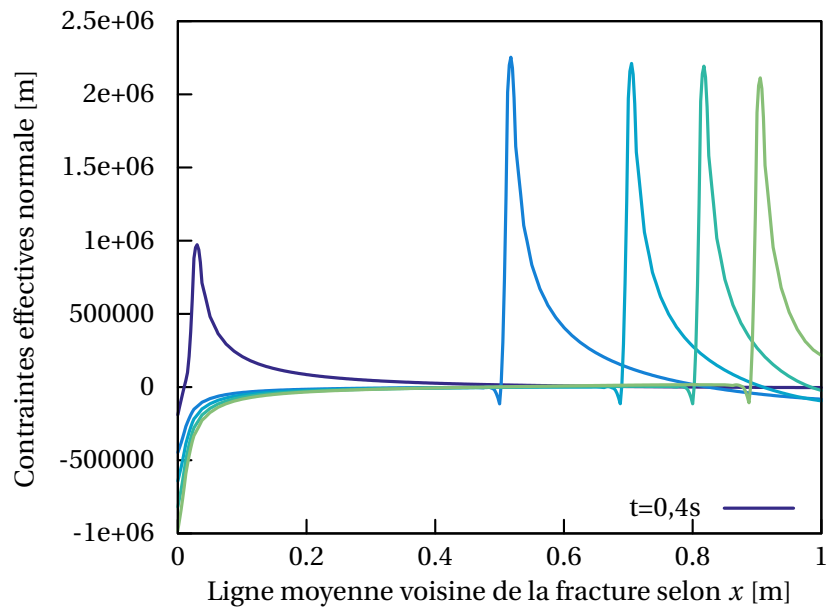


Fig 4.10. (a) Profil du déplacement normal u_y aux lèvres de la fissure. (b) Profils de distribution de la pression p_w selon x .



(a)



(b)

Fig 4.11. (a) Profil de la pression dans la fracture. (b) Profil de la contrainte normale σ_{yy} sur la ligne moyenne voisine de la fracture.

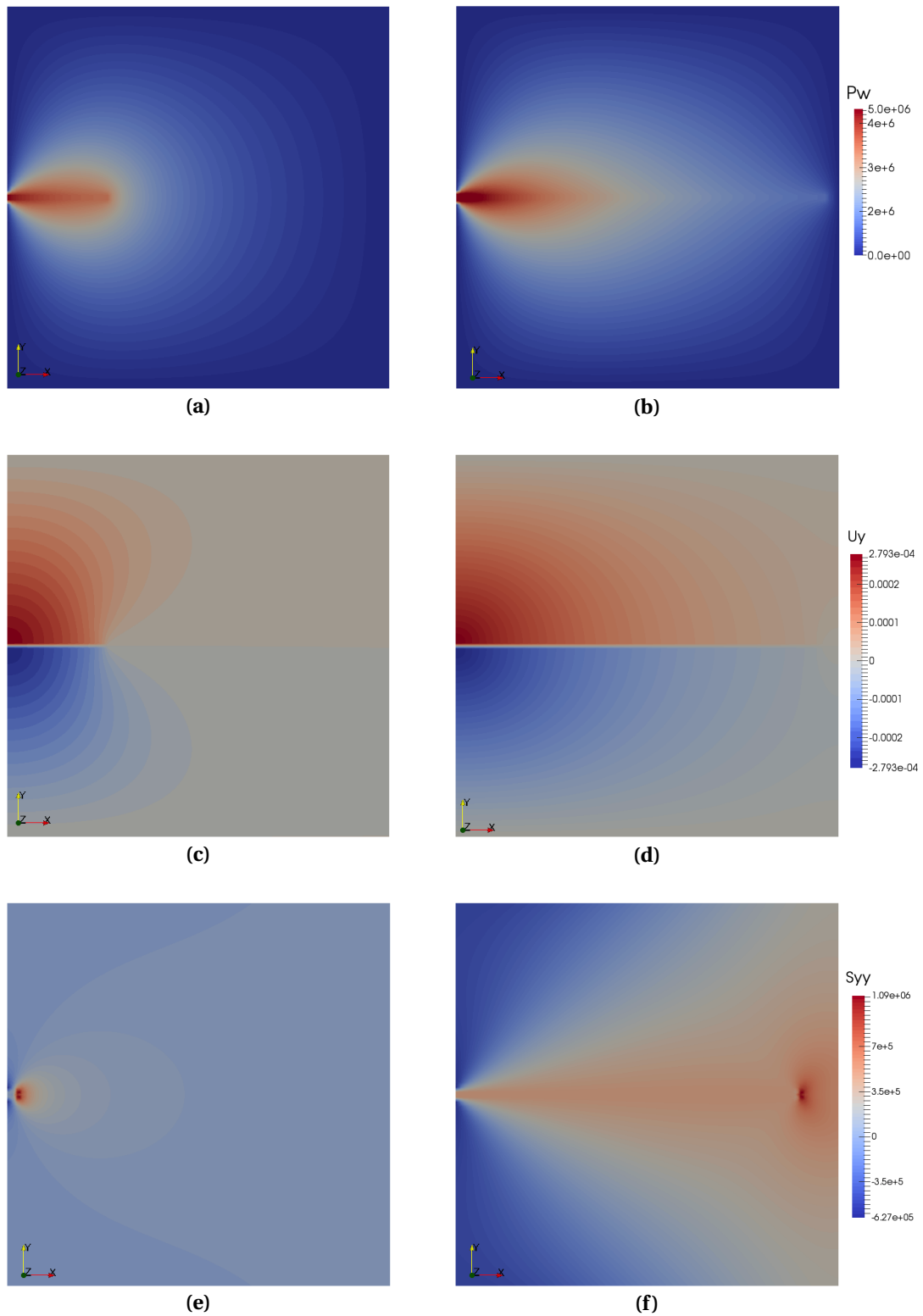


Fig 4.12. Cartographie des champs mécaniques et du champ de pression pour 2 pas de temps : $t = 2s$ et $t = 8s$. En bleu les valeurs les plus faibles et rouge les valeurs les plus élevées. (a)-(b) Champ de pression. (c)-(d) Déplacement normal u_y . (e)-(f) Contraintes normales σ_{yy} .

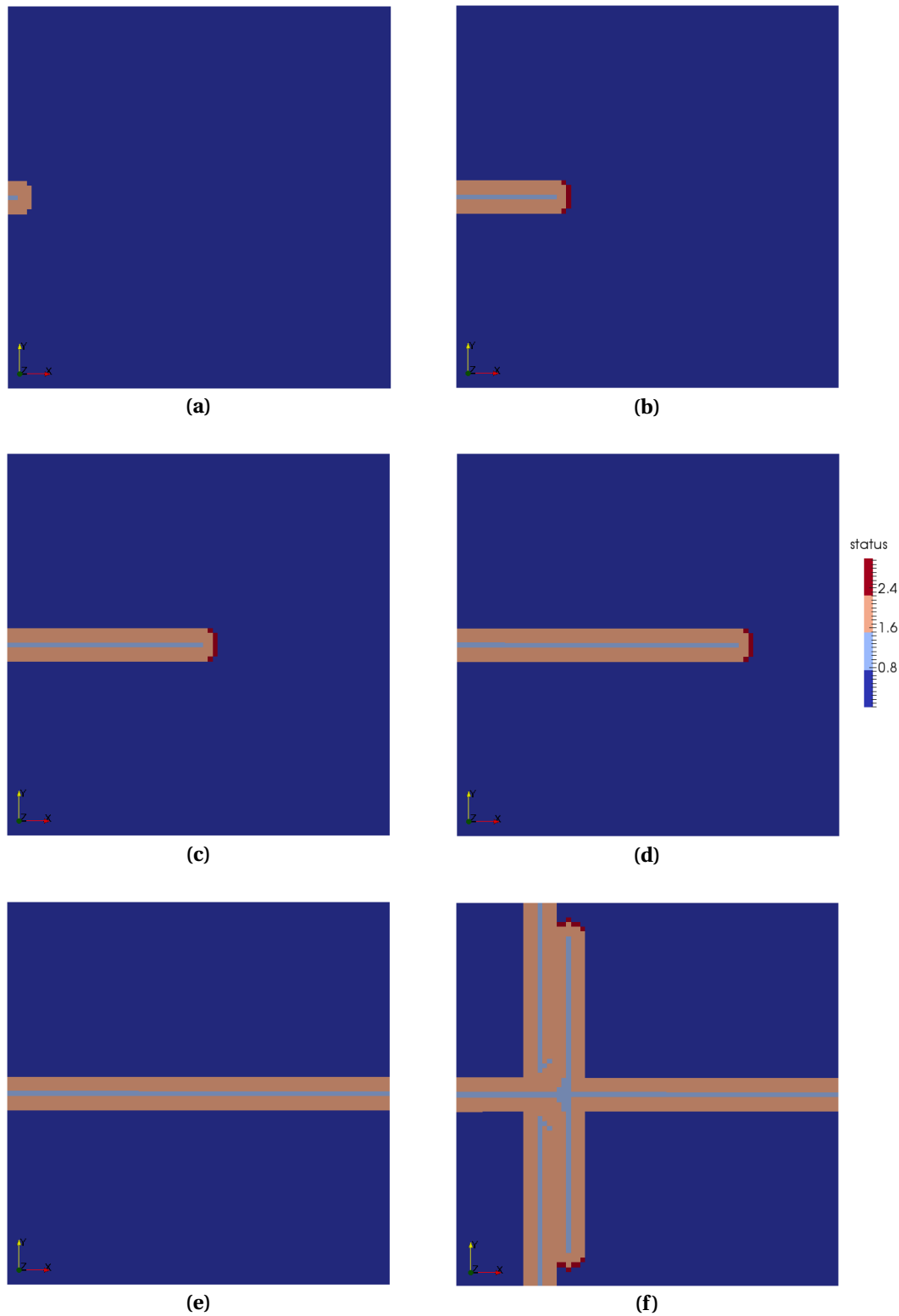


Fig 4.13. Progression du chemin de fissuration dans le milieu poreux pour les pas de temps suivants : **(a)** $t=0$; **(b)** $t=2s$; **(c)** $t=4,2s$; **(d)** $t=5,8s$; **(e)** $t=7,6s$ et **(f)** $t=16s$. En bleu clair : la fissure (éléments cassés laissant place à un écoulement de Poiseuille), en rose clair : les voisins, en rouge : les nouveaux voisins et en bleu les éléments poreux sains.

4.2.3 Simulation d'une bifurcation dans un milieu confiné

Dans ce second exemple, on montre l'influence de l'introduction d'un deuxième défaut initial dans le milieu sur la propagation de la fracture, et la capacité de la méthode à en rendre compte. Les conditions aux limites sont identiques au premier exemple (voir Fig.4.9) ainsi que les propriétés matériaux (voir Tab.4.6).

4.2.4 Résultats

La simulation est réalisée selon les mêmes conditions que le premier exemple. L'intervalle de temps simulé est $T = 20s$ avec un pas de temps $\Delta t = 0,1s$.

La figure Fig.(4.15) montre la propagation de la fissure pour six pas de temps : (a) $t = 0$; (b) $t = 2s$; (c) $t = 4,2s$; (d) $t = 5,8s$; (e) $t = 7,6s$ et (f) $t = 16s$. Entre l'instant $t=0s$ et $t=2s$, on peut remarquer que la fissure a bifurqué en direction du défaut avant de poursuivre un chemin rectiligne. Après l'instant $t = 4,2s$, une deuxième fissure s'est propagée au point de bifurcation à 90° de la fissure principale vers le bas. Le milieu étant confiné et toujours sous chargement, le comportement observé semble cohérent. À partir de l'instant $t = 7,6s$, un faisceau de fractures à 90° de la principale fissure se propage vers le haut. Ce faisceau s'initie au voisinage de la fissure principale et non à partir d'un défaut. En effet, le maillage pas assez fin par rapport à l'épaisseur de la fissure peut introduire des erreurs d'origines numériques. Par ailleurs, le faisceau de fractures simulé rappelle les *couloirs de fracturation* (voir Fig.4.14) que l'on peut observer sur certains réservoirs. C'est un phénomène géologique complexe et actuellement mal compris, où l'on observe de manière aléatoire de nombreuses fractures verticales très rapprochées, et perpendiculaires à la stratification ou à un plan de fracture.

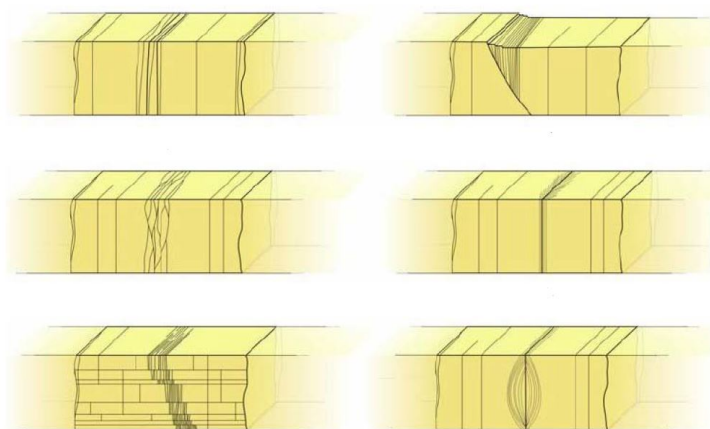


Fig 4.14. Les différents types de couloirs fracturés observés sur site, d'après Quesada (2008) ^[121].

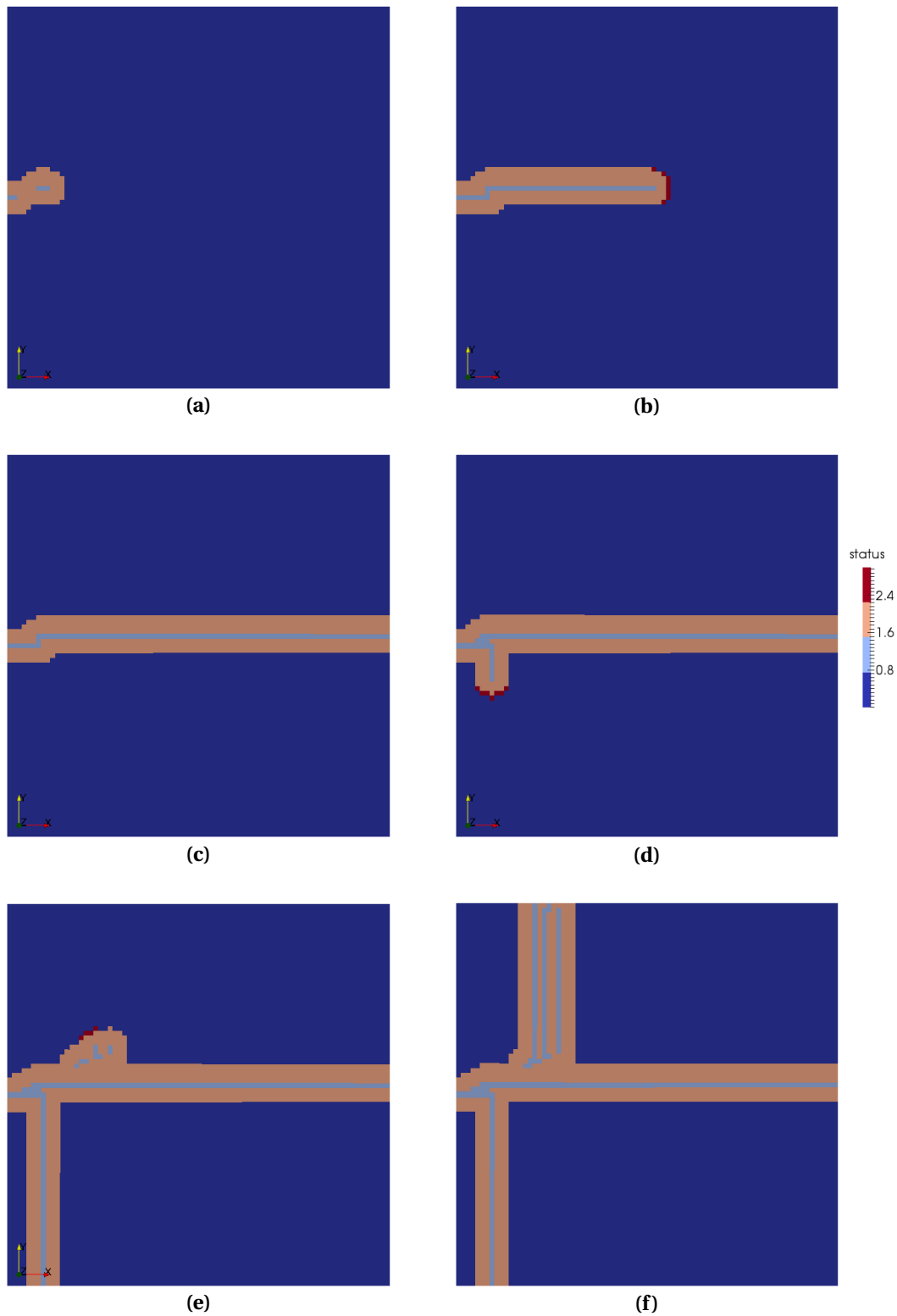


Fig 4.15. Progression du chemin de fissuration et de la bifurcation dans le milieu poreux pour les pas de temps suivants : **(a)** $t = 0$; **(b)** $t = 2s$; **(c)** $t = 4,2s$; **(d)** $t = 5,8s$; **(e)** $t = 7,6s$ et **(f)** $t = 16s$. En bleu clair : la fissure (éléments cassés laissant place à un écoulement de Poiseuille), en rose clair : les voisins, en rouge : les nouveaux voisins et en bleu les éléments poreux sains.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons travaillé sur les problèmes de fissuration dans la zone proche puits, en traitant séparément les phénomènes de décollement aux différentes interfaces du puits et la facturation par injection. À l'aide d'un modèle de zone cohésif, nous avons identifié les paramètres mécaniques d'une interface cuvelage-ciment qui nous ont permis de retrouver avec une bonne précision les courbes expérimentales obtenues sur les essais de cisaillements du chapitre (1). Nous nous sommes ensuite appuyés sur la méthode *eigenerosion* pour développer une nouvelle approche (*eigen porous erosion*) en utilisant les outils de la mécanique des milieux poreux. Plutôt que d'éroder un élément en supprimant sa contribution dans le système à résoudre, l'élément érodé reste présent en conservant sa contribution hydraulique afin de tenir compte de la présence de fluide dans les fissures. La loi de Darcy est alors remplacée par une loi de Poiseuille tenant ainsi compte de la nouvelle situation physique. Les simulations réalisées dans un milieu confiné montrent qu'il est possible de reproduire une fracturation hydraulique par injection. L'analyse des résultats conduit à un comportement mécanique et hydraulique qui semble cohérent. Il est toutefois difficile de conclure définitivement quant à la pertinence du modèle et des simulations tant que des expériences ne seront pas réalisées. De plus, il est évident qu'un travail de validation approfondi sur le plan numérique est nécessaire pour apprécier les qualités et les défauts du modèle. Ces premiers résultats obtenus nous semblent toutefois prometteurs et montrent le potentiel de la méthode.

Conclusion et perspectives

L'objectif initial de cette thèse était d'étudier l'impact de la carbonatation sur les mécanismes de dégradation des interfaces acier-ciment-roche des puits d'injection de gaz dans le cadre du stockage géologique de CO_2 . L'analyse bibliographique préalable nous a toutefois conduit à nous intéresser à d'autres mécanismes de dégradation possibles d'origine hydrique (dessiccation), hydraulique (fracturation) et mécanique (état géologique), dont les temps caractéristiques sont plus courts que ceux de la carbonatation. Ces mécanismes doivent naturellement être pris en compte pour évaluer correctement l'état initial de la structure avant de tenir compte des effets de carbonatation.

Dans une première partie (chapitre 1), nous avons essayé de comprendre l'ensemble des phénomènes et d'identifier les scénarii qui pouvaient être à l'origine d'une dégradation mécanique du puits, et donc d'une perte d'étanchéité de celui-ci. Les mesures de perméabilités et d'ATG nous ont montré qu'une très faible variation hydrique suffisait à générer un décollement aux interfaces ciment-acier alors propice à la migration de CO_2 , *via* des déformations différées. Les expériences de carbonatation et de dessiccation dans un milieu partiellement humide nous ont confirmé que le problème de fissuration dans les interfaces et dans le volume pouvait être en partie expliqué par le phénomène de déformations différées. Une bibliographie sur le ciment nous a permis de mieux comprendre les mécanismes réactionnels au sein de celui-ci, et nous a aidé à identifier les besoins en terme de modélisation. Cependant, les expériences réalisées n'ont pas permis de décrire dans leur ensemble les facteurs responsables d'une dégradation mécanique. Par exemple, les conditions d'injection et les contraintes géomécaniques se sont révélées trop complexes à mettre en œuvre expérimentalement dans le cadre de la thèse, et leurs implications pourtant évidentes n'ont donc pas pu être décrites. Nous avons donc choisi une approche multiphysique pour rendre compte de la rupture potentielle d'un milieu poreux déformable, lors de l'écoulement diphasique.

Dans le chapitre 2, nous nous sommes intéressés à l'introduction d'un modèle de poroélasticité en reprenant le formalisme théorique développé par Hassanizadeh et Gray (1980), puis Schrefler (1998). De nombreux concepts, évoqués au début du chapitre 2 et

nécessaires à l'établissement des principales équations de champs, mériteraient d'être revisités. Nous avons toutefois choisi de nous focaliser rapidement sur la construction d'un modèle poroélastique déformable et endommageable siège d'écoulement de deux fluides barotropes non miscibles pour pouvoir simuler *via* une résolution par la méthode des éléments finis les mécanismes de dégradation de la structure lors de l'injection. Une partie de notre travail a donc été d'appliquer les outils de la mécanique des milieux poreux à notre problématique. Nous avons alors obtenu un système d'équations formulé avec les principales grandeurs que nous souhaitions observer : la pression de gaz, la pression capillaire et la vitesse de déplacement du solide.

Dans le chapitre 3, nous avons discrétisé le problème pour une résolution par la méthode des éléments finis, et développé toute une catégorie d'éléments finis mixtes permettant de gérer les degrés de liberté supplémentaires – la pression de gaz et la pression capillaire – introduits par le modèle multiphysique. Nous avons alors utilisé une stratégie de mise en œuvre numérique pragmatique – grâce au principe de généricité hérité de la programmation objet – en factorisant les opérateurs mathématiques communs. Cela a permis d'éviter la répétition de code et rendu le modèle numérique facilement modifiable et réutilisable. Ainsi l'ajout de degrés de liberté supplémentaires, par exemple la température, ou l'utilisation de différentes lois de perméabilité, peut se faire très facilement et sans développement additionnel. Nous avons ensuite – pour juger de la validité de notre modèle – réalisé la simulation du cas test de Liakopoulos, le seul à notre connaissance disposant de données expérimentales pour un écoulement diphasique dans un milieu déformable. Les courbes de saturation, de pression, de déplacement et de débit sont relativement bien reproduites. Les allures sont correctes, mais les écarts avec les valeurs mesurées montrent que certains éléments nécessitent d'être revus, voire modifiés ; d'autant plus que d'autres auteurs^[132,83,84] ayant adopté le même formalisme ont pu reproduire de manière très satisfaisante les résultats expérimentaux. Les différences constatées peuvent provenir des schémas numériques adoptés (discrétisation en temps). Par ailleurs, les performances du modèle pourraient être améliorées en affinant le calcul de la matrice tangente (linéarisation). Un travail sur l'utilisation d'autres schémas numériques, pourrait être considéré pour mesurer l'impact réel sur les performances et la précision de la solution.

Dans le chapitre 4, nous avons abordé la question de la fissuration dans un milieu poroélastique. La gestion numérique de la fissuration dans une structure peut s'avérer être un problème difficile à traiter, particulièrement quand il est question de tenir compte de nombreux couplages. La méthode choisie a donc été de considérer un écoulement monophasique dans le milieu poreux élastique et d'utiliser une technique dite d'érosion d'élément (*eigenerosion*) s'appuyant sur un critère énergétique. Après avoir illustré

sa mise en pratique à travers un exemple simple de fissuration d'une plaque avec deux trous, l'intégration de la méthode dans la plateforme LMGC90 a été l'occasion d'utiliser la version modifiée de l'algorithme proposé initialement par Pandolfi et Ortiz. Cette version tient compte de la contribution de l'élément érodé et de la structure dans le calcul de la restitution d'énergie. Cette amélioration a été illustrée dans l'exemple de la plaque deux trous. Cette méthode relativement simple à implémenter nécessite le choix arbitraire de certains paramètres. L'originalité de nos travaux réside dans la manière dont nous avons tiré parti de la technique d'érosion d'éléments pour gérer une fracturation gouvernée par des conditions hydrauliques dans un milieu poreux saturé. À l'aide des éléments finis mixtes développés dans le chapitre (3), la technique proposée d'érosion d'éléments dans un milieu poreux (*eigen porous erosion*) permet en attribuant un nouveau comportement à l'élément érodé d'assurer la continuité des champs de pressions dans le milieu poreux et le milieu fracturé. Cela nous a permis de décrire une physique plus proche de la réalité lors d'une fracturation par injection, en considérant un écoulement de type Darcy dans le milieu poreux sain et de type Poiseuille dans le milieu fissuré. Les premières simulations réalisées à l'aide de notre méthode montrent qu'elle est capable de rendre compte de la propagation d'une fracturation par injection dans un milieu poreux confiné. Les résultats obtenus sont intéressants, car ils semblent également reproduire certains comportements géologiques encore mal expliqués comme les couloirs de fracturation^[121]. Gardons tout de même à l'esprit que l'analyse reste très qualitative, et ne permet pas de conclure sur ce sujet. Aussi, il est évident qu'un important travail de tests et de validation de la méthode est encore nécessaire. Par exemple, l'influence de la taille de maille et du type d'élément sur la propagation et l'orientation des fractures devra être étudiée. D'autres types de chargements doivent également être testés. Enfin, la confrontation avec une solution analytique simple – le cas d'une fissure pressurisée dans un milieu semi-infini, voir Sneddon (1946)^[136] – est inévitable, et devra être faite. Cela ne remet pas en cause, pour autant, la méthode que nous avons développée dans ce mémoire, mais proposent de nombreuses et nouvelles pistes de travail.

Le contexte de départ de la tenue des puits dans le cadre du stockage géologique de CO₂ s'est finalement recentré sur celui d'un problème fracturation par injection dans un milieu poreux. Il est évident que les mécanismes de diffusion pris en compte dans le modèle développé mériteraient d'être plus exploités. Quoiqu'il en soit ce dernier chapitre a donc permis de répondre en partie à l'objectif que nous nous étions fixé au début de ce travail : celui de proposer un outil de simulation capable de prédire une dégradation par injection. Pour développer un outil complet, il est envisageable de mettre au point un modèle de zone cohésive poreuse pour rendre compte de la rupture aux interfaces entre différents matériaux, en complément de la méthode d'*eigen porous erosion* développée

dans ce travail, qui est plus adaptée à la simulation d'une dégradation dans le volume. L'outil développé est suffisamment modulaire pour envisager des couplages supplémentaires, par exemple thermique et/ou chimique, mais de nombreuses améliorations sont à prévoir pour prédire avec précision la propagation de fracture par injection. Les applications sont nombreuses et peuvent intéresser l'industrie pétrolière pour augmenter la perméabilité des réservoirs non conventionnels et la géothermie qui nécessite l'extension artificielle des réseaux de fractures existants, en plus de l'étude des risques de rupture d'étanchéité au niveau de la zone proche puits et/ou du toit du réservoir dans le cadre de la séquestration géologique de CO_2 .

Liste des symboles

Les notations utilisées dans cette thèse sont explicitées ci-dessous par chapitre.

Chapitre 2

σ	tenseur des contraintes de Cauchy
σ'	tenseur des contraintes effectives
σ_m	tenseur microscopique des contraintes
ε	tenseur des déformations élastiques
B	tenseur de Biot
F	tenseur gradient lagrangien de déformation
I	tenseur identité
k	tenseur de perméabilité isotrope
L	tenseur gradient des vitesses
R^α	tenseur de résistivité
χ	paramètre de Bishop
Γ	bords du domaine Ω
γ^α	accélération de la phase α
$\langle \rho \rangle^\alpha$	masse volumique intrinsèque ou réelle moyennée de la phase α
$\langle \rho \rangle_\alpha$	masse volumique apparente moyennée de la phase α
$\langle \zeta \rangle^\alpha$	volume intrinsèque de la phase α
$\langle \zeta \rangle_\alpha$	volume apparent de la phase α
ϕ_α	fraction volumique de la phase α
ψ	grandeur générique intensive
ρ	masse volumique
$\sum_\alpha^N$	sommation sur toutes les phases allant de 1 à N
ds_α	élément de surface de la phase α
ds_m	élément de surface microscopique
dv	élément de volume macroscopique
dv_α	élément de volume de la phase α à l'échelle macroscopique
dv_α	élément de volume de la phase α
dv_m	volume élémentaire microscopique
dv_m	élément de volume microscopique
$\underline{\bar{v}}$	vecteur de la vitesse moyenne
$\underline{\dot{r}}$	vecteur vitesse associé à une phase α
$\underline{f}$	efforts extérieurs associé à ψ
$\underline{\bar{i}}$	vecteur flux générique associé à ψ

$\underline{n}_{\beta\alpha}$	vecteur normal unitaire orienté de la phase β vers la phase α
$\underline{v}^{\beta\alpha}$	vecteur de la vitesse relative entre la phase β par rapport à la phase α
$\underline{w}$	vecteur vitesse de l'interface
$\underline{x}$	vecteur position d'un point à l'échelle macroscopique
ξ_α	fonction de distribution de la phase α
b	coefficient de Biot
I_α	terme dû aux interactions mécaniques entre les phases
K_s	module de compressibilité du squelette
K_t	module de compressibilité du milieu poreux
$k_{r\alpha}$	perméabilité relative de la phase α
n	porosité
p	pression de pore dans un milieu monophasique
p^α	pression de pore exercée par la phase α
Q	taux de production de ψ
S_g	saturation du gaz
S_w	saturation de l'eau
V	volume total
V_α	volume de la phase α
$\underline{v}^\alpha$	vecteur vitesse de la phase α

Chapitre 4

$(.)^{sain}$	exposant relatif à une configuration saine
$(.)^{érodé}$	exposant relatif à une configuration érodée
$(.)^e$	exposant relatif à un élément érodé
$(.)_\epsilon$	indice relatif aux éléments voisins de la zone érodée
$\Delta \ell^e$	incrément de longueur de la fissure
Δu^e	différence du champ de déplacement
$\mathcal{H}^{n-1}$	mesure de Hausdorff
$\mathcal{P}$	énergie potentielle totale
$\mathcal{W}_\epsilon$	énergie de déformation élastique
$\mathbf{K}_T^{sain}$	matrice de rigidité avant érosion
$\mathbf{K}_T^{érodé}$	matrice de rigidité avec érosion
$\mathbf{K}_T^e$	matrice de rigidité d'un élément érodé
u^{sain}	champ de déplacement de la structure saine
ϵ^*	champ d' <i>eigendeformation</i>
A	surface de la zone érodée
A_ϵ	surface des éléments voisins (ϵ -voisinage)
e	surface de l'élément érodé
E^{diss}	énergie dissipée
E^{tot}	énergie totale
E_ϵ	énergie totale approximée
f_{ext}	chargement extérieur de la structure en utilisant l' <i>eigenerosion</i>
G	taux de restitution d'énergie élastique
$u^{érodé}$	champ de déplacement d'un élément érodé
$^e(.)$	grandeur élémentaire

G_c taux de restitution d'énergie élastique critique

Chapitre 3

B fonction de forme appliquées aux vitesses

$\mathbf{N}_p$ matrice des fonctions de forme appliquées aux pressions

$\mathbf{N}_v$ matrice des fonctions de forme appliquées aux vitesses

$\hat{\cdot}$ fonction test

$\cdot^T$ vecteur transposé

$\cdot^e$ matrice élémentaire

A | Le ciment

Cette annexe a pour but de décrire certains mécanismes importants identifiés au chapitre 1 de présenter les notions essentielles sur la composition et le comportement du ciment.

1 Les caractéristiques du ciment

La connaissance de la structure du ciment est essentielle pour comprendre le comportement et les propriétés des matériaux à base de ciment. Il est constitué de différents composés chimiques, dont le gel de CSH (silicate de calcium hydraté), à l'origine de son pouvoir adhérent, voir Benboudjema (2002)^[20]. Il contient aussi de pores à différentes échelles, contenant de l'eau et/ou de l'air. L'eau en est un élément essentiel. Elle lui confère en effet ses propriétés de maniabilité (pour le transport et le moulage avant la prise) et de résistance mécanique (après avoir réagi avec le clinker). Mais elle est aussi responsable de ses principaux défauts (augmentation de la porosité et diminution de la résistance mécanique, présence inhérente d'agents agressifs, possibilité de transport d'agents agressifs, retrait et fluage).

2 Structure et morphologie des constituants

Le gel de CSH est l'hydrate principal du ciment Portland. Il est responsable de la structuration de la pâte de ciment durcie. Il est composé de particules solides (composition $(CaO)_x(SiO_2)(H_2O)_y$ où les valeurs de x et y sont dépendantes de la teneur en calcium et en silicates dans la phase aqueuse, Viallis-Terrisse (2000)^[148]). Il présente une grande surface spécifique (caractéristique des gels colloïdaux) et une porosité d'environ 28 %. La morphologie du gel serait peu influencée par le type de ciment utilisé ou le rapport e/c, Baroghel-Bouny (1994)^[15]. Les surfaces du gel de ciment sont très attractives. Elles adhèrent entre elles et avec les autres éléments constitutifs dans le cas par exemple d'un béton (sable, granulats, portlandite ...), ce qui explique le rôle de « colle » du ciment. De nombreux modèles existent dans la littérature scientifique pour décrire sa structure et

sa morphologie. Néanmoins, d'après Guénot-Delahaie (1997)^[72], le modèle proposé par Feldman (1968)^[56] semble être le plus à même de justifier la plupart des comportements différés du matériau cimentaire.

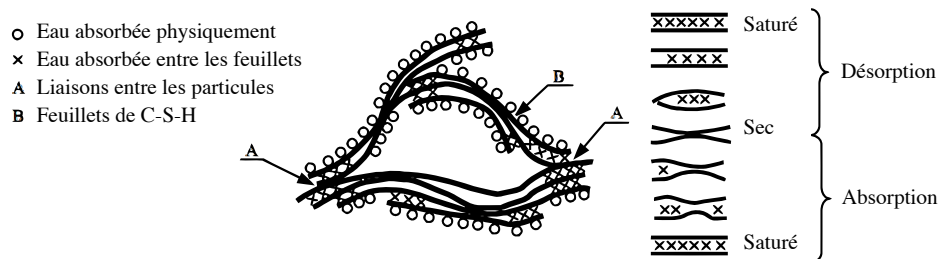


Fig A.1. Représentation schématique de la microstructure du gel de CSH d'après^[56].

3 Les pores du matériau cimentaire

Le matrice solide du ciment durcie est constituée par les produits d'hydratation du ciment dont l'agencement détermine le réseau poreux final. À la porosité de la matrice que nous considérerons comme une donnée, s'ajoute la porosité de l'interface ciment/acier appelée classiquement auréole de transition ou zone de transition interfaciale, de Sa (2007)^[47]. La pâte de ciment présente une porosité à différentes échelles d'observation et varie en fonction des performance du matériau cimentaire recherché. On peut distinguer généralement deux familles de pores (le phénomène de bullage n'est pas pris en compte) :

- la porosité capillaire : sa dimension caractéristique se situe dans la plage 0,01 - 50 μm . Il semble que les différences structurales entre des pâtes de ciment, de type ou de rapports e/c différents, proviennent essentiellement des différences entre les porosités capillaires^[47] ;
- la porosité intrinsèque aux CSH : porosité intrinsèque aux hydrates (voir **Fig.A.1**), sa dimension caractéristique, de l'ordre du nanomètre, est beaucoup plus faible que celle de la porosité capillaire.

À la porosité de la matrice que nous considérerons comme une donnée, s'ajoute la porosité de l'interface ciment/acier appelée classiquement *auréole de transition* ou *zone de transition interfaciale* (de Sa (2007) ^[47]). À l'instar des bétons cette auréole de transition existe aux interfaces hydrates/granulats, nous supposons qu'une même zone existe entre le tubage et le ciment, et le ciment et la formation rocheuse.

4 L'eau dans le ciment

L'eau introduite lors de la fabrication est présente sous de multiples états dans le ciment durcie. L'étude de ces formes a fait l'objet de nombreuses classifications suivant que les approches du problème soit structurale ou énergétique. Toutefois, dans l'optique de rester synthétique et de ne pas rentrer dans les détails qui n'intéressent pas directement notre étude. Nous retiendrons la classification simplifiée suivante :

1. l'eau chimiquement liée : celle qui participe à la réaction d'hydratation pour donner principalement le gel de CSH ;
2. L'eau de sorption : il s'agit principalement des premières couches de molécules d'eau soumises au champ des forces superficielles d'origine électrique. La distinction entre les termes de chimisorption et de physisorption tient principalement à la forme de la liaison : mise en commun des électrons de valence dans le premier cas, simple force électrique (du type Van der Waals) dans le second. Le diamètre d'une molécule d'eau étant de 0,1 nm, l'eau chimi- et physisorbée n'interviendra pratiquement pas lors d'un séchage à 50% HR. On peut prévoir en revanche un changement dans le mécanisme de séchage du ciment, lequel se traduit par une augmentation significative du coefficient global de diffusion, lorsque les pores de l'ordre du nanomètre entre en phase de séchage. En effet, l'énergie fournie est alors beaucoup plus important pour vaporiser l'eau physisorbée ;
3. L'eau libre : il s'agit de l'eau qui n'est plus dans le rayon d'action des forces superficielles. Elle se trouve donc principalement dans les pores capillaires et les macropores.

5 Différence entre l'eau évaporable et non évaporable

Le séchage du matériau se limite par définition à l'eau évaporable. Pour cela, on définit l'eau non évaporable par l'eau résiduelle dans la structure, correspondant à la valeur limite de la courbe de désorption en $h=0$ % d'humidité relative. Par conséquent, l'eau évaporable correspond à :

- l'eau libre ;
- l'eau de sorption la moins liée (physisorption) ;

réciproquement, l'eau non évaporable correspond à :

- l'eau chimiquement liée ;
- l'eau de sorption fortement liée (chimisorption).

6 Les différentes formes de retrait après prise

La pâte de ciment très jeune (en phase plastique) et la pâte de ciment jeune, en tant que matériau poreux (en phase de durcissement), sont caractérisées par divers phénomènes de retrait qui résultent, d'une part, de processus se déroulant au sein même du ciment, et d'autre part, de l'interaction avec l'environnement. Ces diverses déformations volumiques peuvent être classées en quatre catégories d'après Aïtcin (1998)^[3] et Acker (2001)^[2] :

1. **Le retrait chimique** est une conséquence directe de l'hydratation du ciment.
2. **Le retrait thermique** est la contraction accompagnant le refroidissement de la pâte de ciment qui fait suite à la réaction d'hydratation exothermique. Cependant les propriétés mécanique évoluent très vite au jeune âge, Bourissai (2010)^[30], en particulier le module élastique. Il en résulte des contraintes résiduelles d'origine thermique dans la pâte de ciment durcie.
3. **Le retrait endogène** apparaît surtout avec les pâtes de ciment présentant un rapport eau/ciment (e/c) faible et une teneur élevée en fines. Dans ces conditions, le ciment prélève de telles quantités d'eau lors de l'hydratation du béton jeune que des pores remplis d'air se forment rapidement. Ce phénomène d'auto-dessiccation entraîne des pressions capillaires qui conduisent à un retrait rapide dans toute la masse du béton.
4. **Le retrait de séchage ou de dessiccation** est la déformation volumique créée par le séchage à la surface de la pâte de ciment. Le moteur de la dessiccation est un déséquilibre hydrique : après la prise, l'humidité relative est plus élevée au sein de la pâte de ciment que dans l'air ambiant.

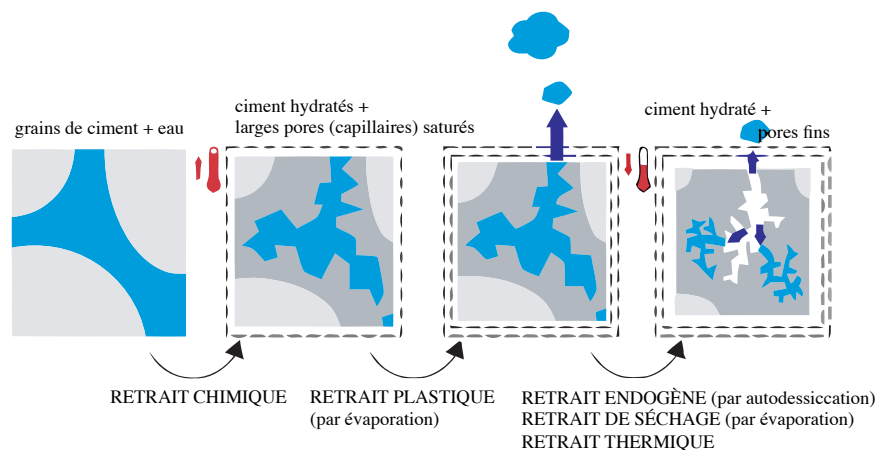


Fig A.2. Les différents types de retrait, image tirée du site <http://www.cstc.be>

7 Le séchage : causes et conséquences

Le but de cette partie est qu'à travers une revue bibliographique, nous présentons et expliquons les principaux mécanismes responsables du séchage de la pâte de ciment. Nous préciserons les hypothèses simplificatrices qui sont habituellement faites sur le matériau, et nous en ferons apparaître les limites pour ce type de modélisation. Nous tenterons de situer notre approche dans le cadre générale de la mécanique des milieux poreux^[7]. Une telle approche fait apparaître très clairement, au niveau des équations d'état, les différents couplages mécaniques, physiques, et chimiques, à l'échelle du matériau.

Comme nous l'avons présenté au chapitre 1, la gaine d'étanchéité est amenée à être exposée, au cours de l'injection, à une humidité relative environnante inférieure à celle régnant au sein du matériau. Il en résulte un déséquilibre hygrométrique qui se traduit par un mouvement de l'eau de l'intérieur du matériau vers l'extérieur conduisant au séchage de celui-ci. En outre, le séchage s'accompagne généralement d'effets structuraux, du fait du gradient de déformation induit. Au vu des conséquences potentielles, il nous paraît essentiel de connaître les principaux mécanismes du séchage.

7.1 Mécanisme du séchage

Physiquement, le séchage met en jeu des phénomènes complexes intimement couplés les uns aux autres et qu'il est difficile d'aborder au niveau microscopique vu la complexité du réseau poreux, voir Benboudjema (2002)^[20] et Patel (1985)^[116]. Il est possible de classer les phénomènes de transport de l'eau en deux grandes familles :

1. diffusion en phase liquide (de type Darcy) tant qu'il y a encore continuité de la phase liquide ;
2. diffusion en phase gazeuse (de type Fick) pour la vapeur d'eau.

Bien que le mécanisme moteur du séchage soit le gradient d'humidité relative, lié à la phase vapeur, l'eau liquide est également concernée. L'équilibre thermodynamique entre les phases vapeurs et liquides doit être en effet maintenu. Le séchage fait intervenir de multiples mécanismes complexes, qui se produisent de façon plus ou moins couplés, Coussy (2004)^[44]. Les phénomènes de perméation, diffusion, adsorption-désorption, condensation-évaporation sont en effet mis en jeu dans le matériau cimentaire.

Ajouté à la modification des caractéristiques localesⁱ, la non uniformité de la teneur en eau dans le matériau (*via* des gradients) génère des contraintes, et induit localement des effets de structure particulièrement importants : le fluage de dessiccation structural, d'après Granger (1996)^[67], Acker (1988)^[1] et Bažant (1986)^[18]. Il en résultera, suivant

i. L'importance du séchage tient au fait que l'humidité à l'intérieur du matériau modifie considérablement ses propriétés physico-chimiques, d'après Patel (1985)^[116] (hydratation, porosité etc...) et mécanique (module d'Young, coefficient de dilatation thermique ; retrait de dessiccation ...).

certains cas, un endommagement, une fissuration de peau (voire en volume), et une décohé- sion aux interfaces pour le matériau.

7.2 Mécanisme du retrait de dessiccation

Le départ de l'eau présente initialement dans les pores du béton induit une défor- mation du squelette solide. L'origine de cette variation dimensionnelle ne fait pas au- jourd'hui l'unanimité de la communauté scientifique (Aïtcin et al. 1998). Néanmoins, les expériences de retrait de dessiccation montrent que la distribution des pores et les ca- ractéristiques du gel CSH ont une influence prépondérante sur la déformation de retrait de dessiccation. Trois principaux modèles microstructuraux proposent un mécanisme pour le retrait de dessiccation : le modèle de Swenson (1968)^[139], le modèle de Feldman (1968)^[56] et le modèle de Munich Wittmann (1973)^[157]. Toutefois, il semble que le retrait de dessiccation ne résulte pas d'un mécanisme unique, mais plutôt de la combinaison de plusieurs mécanismes.

Les trois principaux mécanismes proposés pour les valeurs usuelles de l'humidité relative (plage 50-100 %) sont liés aux effets de :

- la pression capillaire : elle résulte de l'équilibre liquide-vapeur dans la porosité capillaire du béton. La diminution de l'humidité relative au sein du béton (du fait du séchage) induit une diminution de la pression de l'eau liquide, provoquée par la vaporisation de celle-ci. La coexistence des phases liquides (eau) et gazeuses (vapeur d'eau et air sec) entraîne la formation d'un ménisque à l'interface li- quide/gaz, et donc l'apparition de tensions capillaires. Elles entraînent alors la contraction du squelette solide et provoque ainsi le retrait de dessiccation ;
- la pression de disjonction : l'eau associée à la pression de disjonction est en équi- libre avec l'humidité relative environnante. Une diminution de l'humidité relative entraîne un départ de cette eau. Il se produit alors une diminution de l'épaisseur de la couche d'eau absorbée dans la zone d'adsorption empêchée et donc une diminution de la pression de disjonction. Il en résulte alors une déformation du squelette solide qui correspond à la déformation de retrait ;
- la variation de l'énergie surfacique solide : l'énergie surfacique des particules de gel CSH crée des contraintes de traction en surface et des contraintes de com- pression au sein du solide. Lorsqu'il y a absorption, les tensions surfaciques di- minuent et s'il y a désorption, les contraintes induites augmentent, provoquant une contraction du solide et donc une déformation de retrait.

7.2.1 Effet de la pression capillaire

Le mécanisme de retrait de dessiccation par pression capillaire s'explique à partir des équations de Kelvin et de Laplace. L'obtention de ces équations nécessite plusieurs hypothèses :

- l'eau capillaire forme une phase, c'est-à-dire un milieu continu ;
- la vapeur d'eau est un gaz parfait ;
- l'eau capillaire est homogène et incompressible ;
- la vitesse de chacun des points est nulle ;
- l'eau capillaire n'est soumise à aucune force extérieure à distance significative (gravité, force de Van der Waals, force électrique due aux ions en présence ...) ;
- la pression du gaz g (air sec + vapeur d'eau) est égale à la pression atmosphérique p_{atm} ;
- l'eau est en équilibre avec l'atmosphère ambiante (pas d'évaporation, de condensation ou d'écoulement).

7.2.2 Équation de Kelvin et de Laplace

L'équation de Kelvin exprime l'équilibre entre la phase liquide et la vapeur d'eau. Les potentiels chimiques de la vapeur d'eau et de l'eau liquide sont alors égaux :

$$(A.1) \quad \mu_v = \mu_l$$

En choisissant un état de référence particulier, on obtient alors l'équation de Kelvinⁱ :

$$(A.2) \quad p_c = p_g - p_l = \frac{\rho_l RT \ln(h)}{M_v}$$

La pression capillaire p_c s'exprime donc simplement par la pression de gaz p_g - la pression de liquide p_l . Pour se faire une idée, on peut faire l'application numérique suivante, pour une température de 360 °K et une humidité relative de 0,45%, on obtient $p_c = 130$ MPa. Ce calcul met en évidence l'intensité élevée de la pression capillaire dans les pores.

8 La carbonatation

La carbonatation est un phénomène naturel que subit tout matériau à base de ciment. On appelle carbonatation la réaction du CO_2 . La carbonatation des matériaux à base de ciment est un phénomène qui n'altère pas leurs propriétés, bien au contraire : la résistance mécanique et la dureté augmentent, la perméabilité au gaz et aux liquides di-

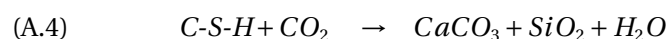
i. La démonstration de la loi de Kelvin se trouve dans les principaux ouvrages de référence.

minue, les hydroxydes solubles sont transformés en carbonates. Cependant, dans le cas des puits pétrolier (et plus généralement dans le cas des béton armés dans le génie civil), la carbonatation de l'annulaire de ciment mis place supprime l'immunité dont bénéficie le tubage. La diminution du ph rend le milieu corrosif pour l'acier, et la formation de produits de corrosion peut apparaître, générant un état de contraintes supplémentaire à l'interface en la fragilisant d'autant plus. De plus, comme dans le cas du séchage, des variations des conditions hygrométriques peuvent provoquer un retrait de carbonatation.

Le phénomène de retrait est un facteur très important dans la pratique, car il entraîne souvent l'apparition de fissures et des décollements aux interfaces qui peuvent nuire à la durabilité de la structure. Dans ce contexte, la fissuration même tardive, favorisera le transport d'agents pathogènes au sein de la structure, par exemple le long d'un puits d'injection.

8.1 Chimie de la carbonatation

On appelle carbonatation la réaction de neutralisation des bases par le CO_2 présent dans le milieu. Les bases présentes dans le ciment hydraté sont essentiellement l'hydroxyde de calcium $Ca(OH)_2$ (*portlandite*) et les silicates de calcium hydratés, représentés par la formule CSH. Les réactions chimiques de carbonatation peuvent être représentées par les équations (A.3) et (A.4) :



Les équations (A.3) et (A.4) décrivent le mécanisme réactionnel de carbonatation de $Ca(OH)_2$ sans toutefois décrire toutes les étapes intermédiaires de la réaction. En revanche, on retiendra que la carbonatation du ciment s'accompagne d'une libération d'eau dite *liée* (voir **Fig.A.1**) de structure.

9 Conséquences physiques

La réaction de carbonatation de $Ca(OH)_2$ entraîne une augmentation du volume. Si l'on tient compte que des produits solides, l'augmentation de volume de $Ca(OH)_2$ est de 11% en moyenne pour chaque nouveau composé formé, d'après Houst (1989, 1994) ^[78,79] et Wittmann (1973) ^[157].

La distribution de la taille des pores d'une pâte de ciment durcie est modifiée par la carbonatation. La pâte de ciment durcie montre une réduction significative du volume des pores après carbonatation, selon les constatations de Houst (1989) ^[78]. On parle d'effet de *colmatage* ou de *cicatrisation*.

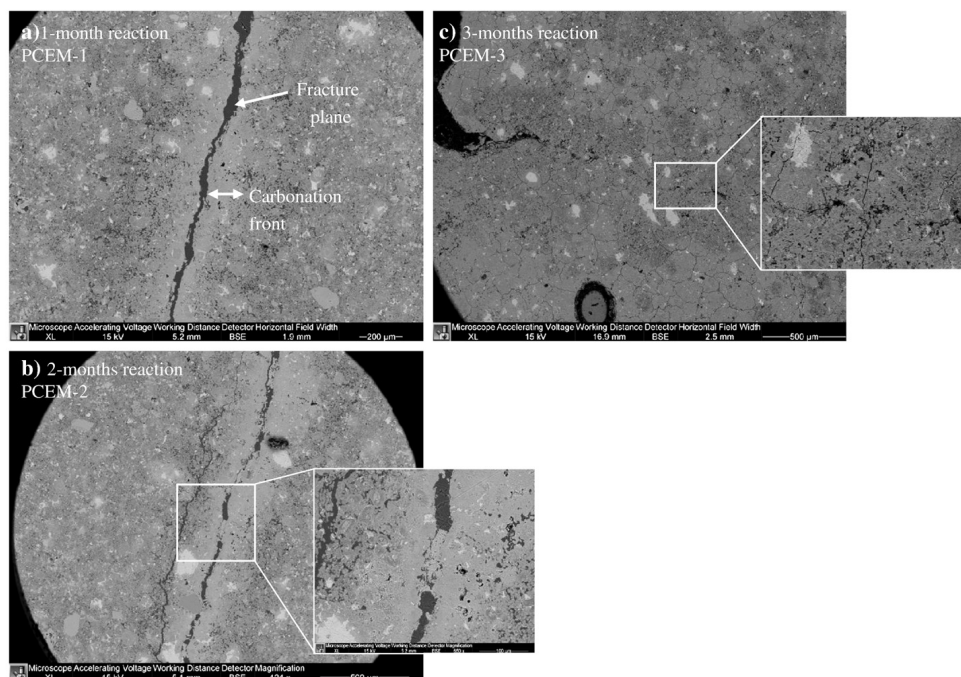


Fig A.3. Images obtenues par MEB d'un échantillon ayant pris sous une pression de confinement de 30 MPa et une température de 80 °C puis fendu. L'échantillon est ensuite baigné sous une atmosphère de CO₂ avec une pression de confinement de 10 MPa. On peut observer que la surface libre obtenue par fendage crée un front de carbonatation. Après de 3 mois de carbonatation, un début de cicatrisation apparaît, d'après Liteanu (2011) ^[97].

La réduction de la porosité entraîne une augmentation globale de la résistance mécanique. La calcite qui s'est formée consolide la structure de la pâte de ciment durcie. En effet, le carbonate de calcium formé par la carbonatation de Ca(OH)₂ est un excellent liant. La résistance à la compression et à la flexion des structures à base de ciment portland conservé dans une atmosphère de CO₂ peut augmenter jusqu'à 30 % par rapport aux mêmes structures cimentaires (béton, mortier,...) conservés en atmosphère exempte de CO₂. L'augmentation de la résistance est d'autant plus marquée que le rapport eau/-ciment est bas, Thiery (2005) ^[144] et Houst (1994) ^[79]. Il semblerait toutefois que tous les auteurs, par exemple Rimmelé (2010) ^[128], ne s'accordent pas sur le fait que la carbonatation s'accompagne d'une augmentation globale de la résistance. On notera tout de même que les conditions d'humidité relative ambiante peuvent considérablement influencer les résultats dans un sens ou dans l'autre.

9.1 Mécanisme du retrait de carbonatation

Comme nous venons de l'expliquer dans la section précédente, la carbonatation de Ca(OH)₂ entraîne une augmentation des volume des solides en moyenne de 11%. Il peut

sembler donc à première vue contre intuitif que cette réaction entraîne un retrait et non un gonflement. Pourtant toutes les expériences mettent en évidence un retrait. Afin d'expliquer cette apparente contradiction, la littérature nous donne diverses explications sur ce phénomène, en particulier trois.

Powers (1962)^[120] indique que les cristaux de portlandite commencent par se dissoudre dans l'eau, puis sous l'effet de gradients hydrauliques et diffusifs, les ions Ca^{2+} peuvent migrer vers les espaces vides partiellement désaturés du réseau poreux. C'est dans ces pores *libres* que les ions calcium pourront former des carbonates de calcium dont l'expansion s'effectue librement sans exercer de contraintes dans la pâte de ciment. Les contraintes initialement imposées sur les cristaux de portlandite, se trouvent alors relâchées et la compressibilité de la pâte de ciment hydratée est augmentée. La dissolution de la portlandite fait disparaître certaines liaisons chimiques, tandis que la précipitation des carbonates de calcium en crée d'autres. C'est donc le réarrangement de la microstructure qui semble occasionner un retrait volumique. Toutefois, il apparaît également que les matériaux cimentaires dépourvus de portlandite présentent aussi un retrait de carbonatation non-négligeable. De ce fait, la carbonatation d'autres hydrates que la portlandite est manifestement impliquée dans le retrait de carbonatation.

Comme on peut le remarquer dans l'équation de la réaction, la formation de carbonates s'accompagne d'une libération de l'eau de structure chimiquement liées aux CSH. Cette observation fait l'objet d'une hypothèse formulée par Swenson (1967)^[138], où le retrait de carbonatation ne serait pas uniquement dû à la carbonatation de $\text{Ca}(\text{OH})_2$, mais s'expliquerait également par la déshydratation, et par la polymérisation du gel de silice formé après carbonatation des CSH. Groves (1990)^[71] ajoute qu'au cours de la carbonatation, le transfert du calcium des zones internes vers les zones externes des CSH peut également conduire au retrait de carbonatation du matériau.

Enfin, la dernière explication avancée est que le retrait de carbonatation correspondrait à une forme de retrait de dessiccation associé à la libération d'eau de structure par carbonatation. Par exemple, Swenson (1967, 1968)^{[138], [139]} signalent que le transfert de l'eau libérée est freinée par la présence d'une enveloppe de CaCO_3 autour des cristaux de portlandite. Ce qui crée un gradient de teneur en eau à travers la couche de carbonates entre l'interface $\text{Ca}(\text{OH})_2 - \text{CaCO}_3$, et les pores où l'humidité est plus facilement évacuée. Pihlajavaara (1968)^{[119], [118]} observe sur matériaux carbonatés une augmentation de la teneur en eau évaporable par séchage à 105 °C. On peut aisément imaginer que cette eau relâchée au niveau du réseau poreux, peut rentrer en compte dans la solution interstitielle, et contribuer au transport d'agents potentiellement nuisibles pour la structure.

Le phénomène de retrait de carbonatation est très complexe. Malgré sa mise en évidence expérimentale, ses causes et conséquences sont encore mal comprises. Le fait que

le retrait de carbonatation se manifeste par une fissuration en surface du matériau n'est pas prouvé, mais que cela soit la conséquence d'un ensemble de phénomènes physico-chimiques est plus probable. La compréhension des mécanismes sous-jacents du retrait de carbonatation sont encore méconnus.

9.2 Caractéristique de l'environnement

Il existe évidemment une étroite corrélation entre la concentration en CO_2 de l'atmosphère environnant le matériau et l'aptitude de celui-ci à se carbonater. Les épaisseurs carbonatées sont évidemment plus élevées dans les ambiances les plus riches en CO_2 . La vitesse de carbonatation du matériau cimentaire dépend principalement de la facilité avec laquelle le dioxyde de carbone de l'environnement pénètre à l'intérieur de la matrice cimentaire. L'hygrométrie de l'environnement extérieur est donc déterminante, puisqu'elle conditionne le taux de saturation du milieu et donc la place laissée pour le transfert du CO_2 . C'est elle qui est la source des transferts hydriques de dessiccation ou d'humidification du matériau.

Bibliographie

- [1] Acker, P. 1988, «Comportement mécanique des bétons : Apports de l'approche physico-chimique», Rapport de recherche des LPC 152.
- [2] Acker, P. et F.-J. Ulm. 2001, «Creep and shrinkage of concrete : physical origins and practical measurements», *Nuclear Engineering and Design*, vol. 203, n° 2–3, doi:10.1016/S0029-5493(00)00304-6, p. 143 – 158, ISSN 0029-5493. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029549300003046>.
- [3] Aïtcin, P., A. Neville et P. Acker. 1998, «Les différents types de retrait du béton», *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, vol. 215, p. 41–51.
- [4] Alonso, E. E., A. Gens et A. Josa. 1990, «A constitutive model for partially saturated soils», *Géotechnique*, vol. 40, n° 3, doi:10.1680/geot.1990.40.3.405, p. 405–430.
- [5] API. 1997, «Recommended practice for testing oil well cements 10b 22 th edition», cahier de recherche, American Petroleum Institute.
- [6] Armero, F. et J. Simo. 1992, «A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems», *Numerical Method in Engineering*, vol. 35, n° 4, doi:10.1002/nme.1620350408.
- [7] Armero, F. et J. Simo. 1993, «A priori stability estimates and unconditionally stable product formula algorithms for nonlinear coupled thermoplasticity», *International Journal of Plasticity*, vol. 9, n° 6, doi:10.1016/0749-6419(93)90036-P, p. 749–782.
- [8] Atkinson, C. et J. Eshelby. 1968, «The flow of energy into the tip of a moving crack», *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 4, n° 1, doi:10.1007/BF00189137, p. 3–8, ISSN 0020-7268.
- [9] Babuška, I. 1973, «The finite element method with lagrangian multipliers», *Numerische Mathematik*, vol. 20, n° 3, doi:10.1007/BF01436561, p. 179–192, ISSN 0029-599X.
- [10] Bachu, S. 2003, «Screening and ranking of sedimentary basins for sequestration of CO₂ in geological media in response to climate change», *Environmental Geology*, vol. 44, n° 3, doi:10.1007/s00254-003-0762-9, p. 277–289.
- [11] Barenblatt, G. 1962, «The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture», *Advances in applied mechanics*, vol. 7, n° 1, p. 57–129.
- [12] Barlet-Gouédard, V., G. Rimmelé, B. Goffe et O. Porcherie. 2006, «Mitigation strategies for the risk of CO₂ migration through wellbores», URL <http://www.spe.org/elibrary/servlet/spepreview?id=SPE-98924-MS>.

- [13] Barlet-Gouédard, V., G. Rimmelé, B. Goffe et O. Porcherie. 2007, «Well technologies for CO₂ geological storage : CO₂-resistant cement», *Oil Gas Sci Tech*, vol. 62, n° 3, doi:10.2516/ogst :2007027, p. 325–334.
- [14] Barlet-Gouédard, V., G. Rimmelé, O. Porcherie, N. Quisel et J. Desroches. 2009, «A solution against well cement degradation under CO₂ geological storage environment», *International Journal of Greenhouse Gas Control*, vol. 3, n° 2, p. 206–216. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1750583608000704>.
- [15] Baroghel-Bouny, V. 1994, *Caracterisation microstructurale et hydrique des pâtes de ciment et des betons ordinaires et à très hautes performances*, thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [16] Bažant, Z. P., ASCE et R. Desmorat. 1994, «Size effect in fiber or bar pullout with interface softening slip», *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 120, doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1994)120 :9(1945), p. 1945–1962.
- [17] Bažant, Z. P., ASCE, Z. Li et M. Thoma. 1995, «Identification of stress-slip law for bar or fiber pullout by size effect tests», *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 121, n° 4, doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1995)121 :5(620), p. 620–626.
- [18] Bažant, Z. P., S. Sener et K. J.K. 1986, «Effect of cracking on drying permeability and diffusivity of concrete», *ACI Materials Journal*, vol. 84, p. 351–357.
- [19] Bear, J. et Y. Bachmat. 1990, *Introduction to modeling of transport phenomena in porous media*, Kluwer Academic Publishers.
- [20] Benboudjema, F. 2002, *Modélisation Des Déformations Différées Du Béton Sous Sollicitations Biaxiales. Application aux enceintes de confinement de bâtiments réacteurs des centrales nucléaires*, thèse de doctorat, Université de Marne la Vallée - ENS Cachan. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00006945>.
- [21] Benboudjema, F., F. Meftah et J. Torrenti. 2005, «Interaction between drying, shrinkage, creep and cracking phenomena in concrete», *Engineering Structures*, vol. 27, n° 2, doi:10.1016/j.engstruct.2004.09.012, p. 239 – 250, ISSN 0141-0296.
- [22] Benboudjema, F. et J. Torrenti. 2008, «Early-age behaviour of concrete nuclear containments», *Nuclear Engineering and Design*, vol. 238, n° 10, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.nucengdes.2008.04.009>, p. 2495 – 2506, ISSN 0029-5493.
- [23] Biot, M. A. 1941, «A general theory of three dimensional consolidation», *Journal of Applied Physics*, vol. 12, doi:10.1063/1.1712886, p. 155–164.
- [24] Biot, M. A. 1955, «Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid», *Journal of Applied Physics*, vol. 26, n° 2, p. 182–185.
- [25] Biot, M. A. 1956, «Thermoelasticity and irreversible thermodynamics», *Journal of Applied Physics*, vol. 27, n° 3, doi:10.1063/1.1722351, p. 240–253.
- [26] Bishop, A. W. 1959, «The principle of effective stress», *Teknisk Ukeblad*, vol. 39, p. 859–863.

- [27] Blal, N., L. Daridon, Y. Monerie et S. Pagano. 2012, «Artificial compliance inherent to the intrinsic cohesive zone models : criteria and application to planar meshes», *International Journal of Fracture*, vol. 178, n° 1-2, doi:10.1007/s10704-012-9734-y, p. 71–83.
- [28] de Boer, R. 1996, «Highlights in the historical development of the porous media theory : Toward a consistent macroscopic theory», *Applied Mechanics Reviews*, vol. 49, n° 4, p. 201–262.
- [29] Bourdin, B., G. Francfort et J.-J. Marigo. 2008, «The variational approach to fracture», *Journal of Elasticity*, vol. 91, doi:10.1007/s10659-007-9107-3, p. 5–148.
- [30] Bourissai, M. 2010, *Comportement thermo-chimio-hydro-mécanique d'un ciment pétrolier au très jeune âge en conditions de prise HP/HT. Approche expérimentale et analyse par changement d'échelle*, thèse de doctorat, Université PARIS-EST.
- [31] Bourissai, M., F. Meftah, N. Brusselle-Dupend, É. Lecolier¹ et G. Bonnet. 2013, «Evolution of the elastic properties of an oilwell cement paste at very early age under downhole conditions : Characterization and modelling», *Oil Gas Sci. Technol. – Rev. IFP Energies nouvelles*, vol. 68, n° 3, doi:10.2516/ogst/2012087, p. 595 – 612.
- [32] Bowen, R. M., éd.. 1976, *Continuum Physics*, vol. 3, chap. Theory of mixtures, Academic Press, New York, p. 1–127.
- [33] Bowen, R. M. 1982, «Compressible porous media models by use of the theory of mixtures», *International Journal of Engineering Science*, vol. 20, n° 6, doi:10.1016/0020-7225(82)90082-9, p. 697–735.
- [34] Brooks, R. H. et A. T. Corey. 1964, «Hydraulic properties of porous media», Hydrology papers, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.
- [35] Bueckner, H. 1970, «Novel principle for the computation of stress intensity factors», *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik & Mechanik*, vol. 50, n° 9.
- [36] Bui, H. D. 1978, *Mécanique de la rupture fragile*, Masson.
- [37] Camacho, G. et M. Ortiz. 1996, «Computational modelling of impact damage in brittle materials», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, n° 20-22, doi:10.1016/0020-7683(95)00255-3, p. 2899–2938.
- [38] Cangémi, L. 1997, *Frottement et adhérence : modèle traitement numérique et application à l'interface fibre/matrice*, thèse de doctorat, Université de la méditerranée Aix-Marseille II.
- [39] Carey, J., M. Wigand, S. J. Chipera, G. WoldeGabriel, R. Pawar, P. C. Lichtner, S. C. Wehner, M. A. Raines et G. D. G. Jr. 2007, «Analysis and performance of oil well cement with 30 years of CO₂ exposure from the sacroc unit, west texas, usa», *international journal of greenhouse gas control*, vol. 1, p. 75–85.
- [40] Carey, J. W., R. Svec, R. Grigg, J. Zhang et W. Crow. 2010, «Experimental investigation of wellbore integrity and co₂–brine flow along the casing–cement microannulus», *International Journal of Greenhouse Gas Control*, vol. 4, n° 2, doi:10.1016/j.ijggc.2009.09.018, p. 272 – 282, ISSN 1750-5836. The Ninth International Conference on Greenhouse Gas Control Technologies.

- [41] Carrier, B. et S. Granet. 2012, «Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 79, doi:10.1016/j.engfracmech.2011.11.012, p. 312—328.
- [42] Celia, M. A., S. Bachu, J. M. Nordbotten, S. E. Gasda et H. K. Dahle. 2004, «Quantitative estimation of CO₂ leakage from geological storage analytical models, numerical models, and data needs», *Greenhouse Gas Control Technologies (GHGT)*.
- [43] Coussy, O. 1991, *Mécanique des milieux poreux*, Technip.
- [44] Coussy, O. 2004, *Poromechanics*, John Wiley & Sons, Ltd, doi:10.1002/0470092718.
- [45] Darcy, H. 1856, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Librairie des corps impériaux des ponts et chaussées et des mines. URL <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k624312>.
- [46] Dehoux, A. 2012, *Propriétés mécaniques des couches de produits de corrosion à l'interface acier/béton*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6). URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00828155/document>.
- [47] deSa, C. 2007, *Étude hydro-mécanique et thermo-mécanique du béton - Influence des gradients et des incompatibilités de déformation*, thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan.
- [48] Dominique, L. 1989, «Calcul du taux de restitution de l'énergie au voisinage d'une singularité», *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre*, vol. 309, n° 10, p. 945–950.
- [49] Dormieux, L., D. Kondo et F.-J. Ulm. 2006, *Microporomechanics*, Wiley.
- [50] Dugdale, D. 1960, «Yielding of steel sheets containing slits», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, n° 2, doi:10.1016/0022-5096(60)90013-2, p. 100–104.
- [51] Eshelby, J. 1956, «The continuum theory of lattice defects», *Solid state physics*, vol. 3, p. 79–144.
- [52] Eshelby, J. D. 1957, «The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems», *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 241, n° 1226, doi:10.1098/rspa.1957.0133, p. 376–396.
- [53] Fabbri, A., J. Corvisier, A. Schubnel, F. Brunet, B. Goffé, G. Rimmele et Barlet-Gouédard. 2009, «Effect of carbonation on the hydro-mechanical properties of portland cements», *Cement and Concrete Research*, vol. 39, n° 12, p. 1156–1163. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0008884609002014>.
- [54] Fahrner, S., D. Schäfer et A. Dahmke. 2012, «A monitoring strategy to detect CO₂ intrusion in deeper freshwater aquifers», *International Journal of Greenhouse Gas Control*, vol. 9, n° 0, doi:10.1016/j.ijggc.2012.03.016, p. 262 – 271.
- [55] Farret, R. et A. Thoraval. 2013, «Retour d'expérience des incidents et accidents sur des sites d'exploitation ou de stockage en milieu souterrain – application au stockage géologique du CO₂», Rapport d'étude DRS-12-126009-13886B, INERIS. URL <http://www.ineris.fr/centredoc/drs-12-126009-13866b-unique-1370523220.pdf>.

- [56] Feldman, R. F. et P. J. Sereda. 1968, «A model for hydrated portland cement paste as deduced from sorption-length change and mechanical properties», *Materials and Structures*, vol. 1, doi:10.1007/BF02473639, p. 509–520, ISSN 1359-5997.
- [57] Felippa, C. et T. Geers. 1988, «Partitioned analysis for coupled mechanical systems», *Engineering Computations*, vol. 5, n° 2, doi:10.1108/eb023730.
- [58] Felippa, C. et K. Park. 1980, «Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems : Formulation», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 24, n° 1, doi:10.1016/0045-7825(80)90040-7, p. 61–111.
- [59] Felippa, C., K. Park et C. Farhat. 2001, «Partitioned analysis of coupled mechanical systems», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 2, doi:10.1016/S0045-7825(00)00391-1, p. 3247–3270.
- [60] Fortin, M. et F. Brezzi. 1991, *Mixed and hybrid finite element methods*, New York : Springer-Verlag.
- [61] Francfort, G. et J.-J. Marigo. 1998, «Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 46, n° 8, p. 1319–1342.
- [62] Frémond, M. 1987, «Adhérence des solides», *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. 6, n° 3, doi:10.1016/S1251-8069(97)89074-4, p. 383 – 407.
- [63] Gawin, D., P. Baggio et B. A. Schrefler. 1995, «Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media», *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, vol. 20, n° 969-987, doi:10.1002/fld.1650200817.
- [64] Gawin, D. et B. A. Schrefler. 1996, «Thermo-hydro-mechanical analysis of partially saturated porous materials», *Engineering Computations*, vol. 13, n° 7, p. 113–143.
- [65] Gawin, D., L. Simoni et B. A. Schrefler. 1997, «Numerical model for hydro-mechanical behaviour in deformable porous media : A benchmark problem», *Balkema*, p. 1143–1148.
- [66] Genuchten, M. T. V. 1980, «A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity», *Soil Science Society American Journal*, , n° 44, doi:10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x, p. 892–898.
- [67] Granger, L. 1996, *Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires. Analyse et modélisation*, thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [68] Gray, W. G. 1983, «General conservation equations for multi-phase systems : 4. constitutive theory including phase change», *Advances in water resources*, vol. 6, n° 3, doi:10.1016/0309-1708(83)90025-8, p. 130–140.
- [69] Gray, W. G. et M. Hassanizadeh. 1991, «Unsaturated flow theory including interfacial phenomena», *Water Resources Research*, vol. 27, n° 8, doi:10.1029/91WR01260, p. 1855–1863.
- [70] Griffith, A. A. 1921, «The phenomena of rupture and flow in solids», *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, vol. 221, doi:10.1098/rsta.1921.0006, p. 163–198.

- [71] Groves, G. W., D. I. Rodway et I. G. Richardson. 1990, «Carbonation of hardened cement pastes», *Advances in Cement Research*, vol. 3, n° 11, doi:10.1680/adcr.1990.3.11.117, p. 117–125. URL 10.1680/adcr.1990.3.11.117.
- [72] Guénot-Delahaie, I. 1996, *Contribution à l'analyse physique et à la modélisation du fluage propre du béton*, thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [73] Gurtin, M. E. 1979, «Thermodynamics and the cohesive zone in fracture», *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, vol. 30, n° 6, doi:10.1007/BF01590496, p. 991–1003, ISSN 0044-2275.
- [74] Hassanizadeh, M. et W. G. Gray. 1979, «General conservation equations for multi-phase systems : 1. averaging procedure», *Advanced in Water Resources*, vol. 2, doi:10.1016/0309-1708(79)90025-3, p. 131–144.
- [75] Hassanizadeh, M. et W. G. Gray. 1979, «General conservation equations for multi-phase systems : 2. mass, momenta, energy, and entropy equations», *Advanced in Water Resources*, vol. 2, doi:10.1016/0309-1708(79)90035-6, p. 191–203.
- [76] Hassanizadeh, M. et W. G. Gray. 1980, «General conservation equations for multi-phase systems : 3. constitutive theory for porous media flow», *Advances in Water Resources*, vol. 3, n° 1, doi:10.1016/0309-1708(80)90016-0, p. 25–40.
- [77] Hassanizadeh, M. et W. G. Gray. 1990, «Mechanics and thermodynamics of multi-phase flow in porous media including interphase boundaries», *Advanced in Water Resources*, vol. 13, n° 4, doi:10.1016/0309-1708(90)90040-B, p. 169–186.
- [78] Houst, Y. F. 1989, «Carbonatation du béton et corrosion des armatures», *Chantiers / Suisse*, vol. 15, p. 569–574.
- [79] Houst, Y. F. 1994, «Le retrait de carbonatation», *Chronique des matériaux de construction (Chantiers)*, p. 55–60.
- [80] Hurter, D. Labregere et J. Berge. 2007, «Simulations for CO₂ injection projects with compositional simulator», 108540, SPE, Offshore Europe 2007 held in Aberdeen, Scotland, OnePetro.org.
- [81] Irwin, G. 1958, «Fracture», *Encyclopedia of Physics*, vol. VI, p. 551–590.
- [82] Kenga, Y. et M. Mainguy. 2005, *Méthode de caractérisation mécanique des interfaces : application au cas des interfaces acier/ciment/roche*, Document interne - direction mécanique appliquée - 59057.
- [83] Khoei, A. et T. Mohammadnejad. 2011, «Numerical modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media : A comparison between two- and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfill dams», *Computers and Geotechnics*, vol. 38, doi:10.1016/j.compgeo.2010.10.010, p. 142–166.
- [84] Kolditz, O., S. Bauer, N. Böttcher et D. Elsworth. 2012, «Numerical simulation of two-phase flow in deformable porous media : Application to carbon dioxide storage in the subsurface», *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 90, p. 1919–1935.
- [85] Kutchko, B. G., B. R. Strazisar, D. A. Dzombak, G. V. Lowry et N. Thaulow. 2007, «Degradation of well cement by CO₂ under geologic sequestration conditions», *Environ. Sci. Technol.*, vol. 41, p. 4787–4792.

- [86] Ladyzhenskaya, O. A. et R. A. Silverman. 1969, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, vol. 76, Gordon and Breach New York.
- [87] Laloui, L., G. Klubertanz et L. Vulliet. 2003, «Solid–liquid–air coupling in multi-phase porous media», *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, vol. 27, doi:10.1002/nag.269, p. 183–206.
- [88] Leblond, J. B. 2002, *Mécanique de la rupture fragile et ductile*, Hermès.
- [89] Lécolier, É. 2010, «Puits CO₂ - ANR», Rapport interne, ANR, IFP Énergies nouvelles.
- [90] Leguillon, D. 2002, «Strength or toughness? a criterion for crack onset at a notch», *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 21, n° 1, doi:10.1016/S0997-7538(01)01184-6, p. 61 – 72, ISSN 0997-7538.
- [91] Lemaître, J. et J.-L. Chaboche. 1988, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod.
- [92] Lewis, R. W. et B. A. Schrefler. 1998, *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, 2^e éd., John Wiley & Sons, Ltd.
- [93] Li, C. Y. et B. Mobasher. 1998, «Finite element simulations of fiber pullout toughening in fiber reinforced cement based composites», *Advanced Cement Based Materials*, vol. 7, n° 3-4, doi:10.1016/S1065-7355(97)00087-4, p. 123 – 132.
- [94] Li, K. 2004, «Theoretical development of the brooks-corey capillary pressure model from fractal modeling of porous media», *SPE*, n° 89429, doi:10.2118/89429-MS.
- [95] Li, K. 2010, «Analytical derivation of brooks–corey type capillary pressure models using fractal geometry and evaluation of rock heterogeneity», *Journal of Petroleum Science and Engineering*, vol. 73, doi:10.1016/j.petrol.2010.05.002, p. 20–26.
- [96] Liakopoulos, A. C. 1965, *Transient flow through unsaturated porous media*, thèse de doctorat, University of California, Berkeley.
- [97] Liteanu, E. et C. Spiers. 2011, «Fracture healing and transport properties of well-bore cement in the presence of supercritical CO₂», *Chemical Geology*, vol. 281, n° 3–4, doi:10.1016/j.chemgeo.2010.12.008, p. 195 – 210, ISSN 0009-2541.
- [98] Lloret, A. et E. E. Alonso. 1980, «Consolidation of unsaturated soils including swelling and collapse behaviour», *Geotechnique*, vol. 30, n° 4, doi:10.1680/geot.1980.30.4.449, p. 449–477.
- [99] Melenk, J. et I. Babuška. 1996, «The partition of unity finite element method basic and application», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n° 1-4, doi:10.1016/S0045-7825(96)01087-0, p. 289–314.
- [100] Michler, C., S. Hulshoff, E. van Brummelen et R. de Borst. 2004, «A monolithic approach to fluid–structure interaction», *Computers & Fluids*, vol. 33, n° 5,6, doi:10.1016/j.compfluid.2003.06.006, p. 839–848.
- [101] Mohammadnejad, T. et A. Khoei. 2012, «Hydro-mechanical modeling of cohesive crack propagation in multiphase porous media using the extended finite element method», *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*

- [102] Mohammadnejad, T. et A. Khoei. 2013, «An extended finite element method for hydraulic fracture propagation in deformable porous media with the cohesive crack model», *Finite Elements in Analysis and Design*, n° 73, doi:10.1016/j.finel.2013.05.005, p. 77–95.
- [103] Monerie, Y. 2001, *Fissuration des matériaux composites : Rôle de l'interface fibre/matrice*, thèse de doctorat, Université de la méditerranée Aix-Marseille II.
- [104] Mura, T. 1987, *Micromechanics of Defects in Solids*, 2^e éd..
- [105] Muskhelishvili, N. I. 1977, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, 1, Springer.
- [106] Needleman, A. 1987, «A continuum model for void nucleation by inclusion debonding», *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, n° 3, doi:10.1115/1.3173064, p. 525–531.
- [107] Needleman, A. 1992, «Micromechanical modelling of interfacial decohesion», *Ultramicroscopy*, vol. 40, n° 3, doi:10.1016/0304-3991(92)90117-3.
- [108] Needleman, A. et A. Rosakisb. 1999, «The effect of bond strength and loading rate on the conditions governing the attainment of intersonic crack growth along interfaces», *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 47, doi:10.1016/S0022-5096(99)00012-5, p. 2411–2449.
- [109] Néron, D. 2004, *Sur une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques*, thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan.
- [110] Néron, D. et D. Dureisseix. 2007, «A computational strategy for poroelastic problems with a time interface between coupled physics», *Numerical Method in Engineering*, vol. 73, n° 6, doi:10.1002/nme.2091, p. 783–804.
- [111] Néron, D. et D. Dureisseix. 2008, «A computational strategy for thermo-poroelastic structures with a time-space interface coupling», *Numerical Method in Engineering*, vol. 75, n° 9, doi:10.1002/nme.2283, p. 1053–1084.
- [112] Nguyen, J. P. 1993, *Technique d'exploitation pétrolière : le forage*, Technip.
- [113] Nordbotten, J. M., D. Kavetski, M. A. Celia et S. Bachu. 2008, «Model for co₂ leakage including multiple geological layers and multiple leaky wells», *Environmental science & technology*, vol. 43, n° 3, doi:10.1021/es801135v, p. 743–749.
- [114] Oldenburg, C. et J. Lewicki. 2006, «On leakage and seepage of co₂ from geologic storage sites into surface water», *Environmental Geology*, vol. 50, n° 5, doi:10.1007/s00254-006-0242-0, p. 691–705.
- [115] Pandolfi, A. et M. Ortiz. 2012, «An eigenerosion approach to brittle fracture», *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, vol. 92, n° 8, doi:10.1002/nme.4352, p. 694–714.
- [116] Patel, R. G., L. J. Parrott, J. A. Martin et D. C. Killoh. 1985, «Gradients of microstructure and diffusion properties in cement paste caused by drying», *Cement and Concrete Research*, vol. 15, p. 343–356.

- [117] Peysson, Y., M. Fleury et V. Blázquez-Pascual. 2011, «Drying rate measurements in convection- and diffusion-driven conditions on a shaly sandstone using nuclear magnetic resonance», *Transport in Porous Media*, vol. 90, doi:10.1007/s11242-011-9829-3, p. 1001–1016.
- [118] Pihlajavaara, S. E. 1968, «The effect of gravity on the process of drying concrete», *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 14, doi:10.1007/BF00827977, p. 101–106, ISSN 1062-0125. 10.1007/BF00827977.
- [119] Pihlajavaara, S. E. 1968, «Some results of the effect of carbonation on the porosity and pore size distribution of cement paste», *Materials and Structures*, vol. 1, doi:10.1007/BF02473640, p. 521–527, ISSN 1359-5997.
- [120] Powers, T. C. 1962, «A hypothesis on carbonation shrinkage», *J. Res. Dev. Labs. Portland Cement Association*, n° 146, p. 40–50.
- [121] Quesada, D. 2008, *Génèse et typologie des fractures naturelles d'un réservoir pétrolier*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6).
- [122] Raous, M., L. Cangémi et M. Cocu. 1997, «Un modèle couplant adhérence et frottement pour le contact entre deux solides déformables», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, vol. 325, n° 9, doi:10.1016/S1251-8069(97)89074-4, p. 503 – 509, ISSN 1251-8069.
- [123] Raous, M. et M. A. Karray. 2009, «Model coupling friction and adhesion for steel concrete interfaces», *Int. J. Comput. Appl. Technol.*, vol. 34, n° 1, doi:10.1504/IJCAT.2009.022701, p. 42–51.
- [124] Reissner, H. 1931, «Eigenspannungen und eigenspannungs-quellen», *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 11, p. 1–8.
- [125] Rethore, J., R. de Borst et M. Abellan. 2008, «A two-scale model for fluid flow in an unsaturated porous medium with cohesive cracks», *Computational Mechanics*, vol. 42, doi:10.1007/s00466-007-0178-6, p. 227–238.
- [126] Rice, J. 1968, «A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks», *Journal of applied mechanics*, vol. 35, n° 2, doi:10.1115/1.3601206, p. 379–386.
- [127] Rice, J. et G. Rosengren. 1968, «Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, n° 1, doi:10.1016/0022-5096(68)90013-6, p. 1–12.
- [128] Rimmelé, G., V. Barlet-Gouédard et F. Renard. 2010, «Evolution of the petrophysical and mineralogical properties of two reservoir rocks under thermodynamic conditions relevant for CO₂ geological storage at 3 km depth», *Oil Gas Science and Technology - Revue de l'Institut Français du Pétrole*, vol. 65, n° 4, p. 565–580. URL <http://ogst.ifp.fr/10.2516/ogst/2009071>.
- [129] Saetta, A. V. et R. V. Vitaliani. 1992, «Unconditionally convergent partitioned solution procedure for dynamic coupled mechanical systems», *Numerical Method in Engineering*, vol. 33, n° 9, doi:10.1002/nme.1620330913, p. 1975–1996.
- [130] Sampaio, R. et W. O. Williams. 1979, «Thermodynamics of diffusing mixtures», *Journal de Mécanique*, vol. 18, p. 19–45.

- [131] Schmidt, B., F. Fraternali et M. Ortiz. 2009, «Eigenfracture : An eigendeformation approach to variational fracture», *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 7, n° 3, doi:10.1137/080712568, p. 1237–1266.
- [132] Schrefler, B. A. et R. Scotta. 2001, «A fully coupled dynamic model for two-phase fluid flow in deformable porous media», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, p. 3223–3246.
- [133] Schrefler, B. A. et Z. Xiaoyong. 1993, «A fully coupled model for water flow and airflow in deformable porous media», *Water Resources Research*, vol. 29, n° 1, doi:10.1029/92WR01737, p. 155–167.
- [134] Secchi, S. et B. A. Schrefler. 2012, «A method for 3-d hydraulic fracturing simulation», *International Journal of Fracture*, vol. 178, n° 1-2, p. 245–258.
- [135] Simo, J. et C. Miehe. 1992, «Associative coupled thermoplasticity at finite strains : Formulation, numerical analysis and implementation», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 98, n° 1, doi:10.1016/0045-7825(92)90170-O, p. 41–104.
- [136] Sneddon, I. N. 1946, «The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid», *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. A187, p. 229–260.
- [137] Suquet, P. 2006, «Rupture et plasticité», URL <http://www.ensta-paristech.fr/~mbonnet/mec551/mec551.pdf>.
- [138] Swenson, E. G. et P. J. Sereda. 1967, «Some ageing characteristics of lime», *Journal of Applied Chemistry*, vol. 17, n° 7, doi:10.1002/jctb.5010170704, p. 198–202, ISSN 1934-998X.
- [139] Swenson, E. G. et P. J. Sereda. 1968, «Mechanism of the carbonatation shrinkage of lime and hydrated cement», *Journal of Applied Chemistry*, vol. 18, n° 4, doi:10.1002/jctb.5010180404, p. 111–117, ISSN 1934-998X. URL <http://dx.doi.org/10.1002/jctb.5010180404>.
- [140] Takla, I. 2010, *Comportement Thermo-Hydro-Mécanique d'un ciment pétrolier sous l'effet du CO₂*, thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [141] Taylor, H. F. W. 1997, *Cement Chemistry*, second edition éd., Thomas Telford Ltd.
- [142] Terzaghi, K. 1925, *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*, Deuticke, Leipzig.
- [143] Terzaghi, K. 1943, *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, doi:10.1002/9780470172766.
- [144] Thiery, M. 2005, *Modélisation de la carbonatation atmosphérique des matériaux cimentaires Prise en compte des effets cinétiques et des modifications microstructurales et hydriques*, thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [145] Truesdell, C. 1984, *Rational Thermodynamics*, Springer-Verlag, 578 p..
- [146] Truesdell, C. et R. Toupin. 1960, *The classical field theories, Handbuch des Physik*, vol. III, flügge éd., Springer.

- [147] Vernerey, F. J. 2011, «A theoretical treatment on the mechanics of interfaces in deformable porous media», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, n° 22–23, doi:10.1016/j.ijsolstr.2011.07.005, p. 3129 – 3141, ISSN 0020-7683.
- [148] Viallis-Terrisse, H. 2000, *Interaction des Silicates de Calcium Hydratés, principaux constituants du ciment, avec les chlorures d'alcalins. Analogie avec les argiles.*, thèse de doctorat, Université de Bourgogne.
- [149] Vlahinic, I., H. M. Jennings, J. E. Andrade et J. J. Thomas. 2011, «A novel and general form of effective stress in a partially saturated porous material : The influence of microstructure», *Mechanics of Materials*, vol. 43, doi:10.1016/j.mechmat.2010.09.007, p. 25–53.
- [150] Vlahinic, I., H. M. Jennings et J. J. Thomas. 2009, «A constitutive model for drying of a partially saturated porous material», *Mechanics of Materials*, vol. 41, doi:10.1016/j.mechmat.2008.10.011, p. 319–328.
- [151] Whitaker, S. 1986, «Flow in porous media i : A theoretical derivation of darcy's law», *Transport in Porous Media*, vol. 1, n° 1, doi:10.1007/BF01036523, p. 3–25.
- [152] Whitaker, S. 1986, «Flow in porous media ii : The governing equations for immiscible, two-phase flow», *Transport in Porous Media*, vol. 1, n° 1, doi:10.1007/BF00714688, p. 105–125.
- [153] Whitaker, S. 1986, «Flow in porous media iii : Deformable media», *Transport in Porous Media*, vol. 1, n° 2, doi:10.1007/BF00714689, p. 127–154.
- [154] Williams, M. 1961, «The bending stress distribution at the base of a stationary crack», *Journal of applied mechanics*, vol. 28, n° 1, p. 78–82.
- [155] Williams, W. 1978, «Constitutive equations for flow of an incompressible viscous fluid through a porous medium», *Quart. J. Appl. Math.*, vol. 36, p. 255–267.
- [156] Witherspoon, P., J. Wang, K. Iwai et J. Gale. 1980, «Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture», *Water Resources Research*, vol. 16, n° 6, doi:10.1029/WR016i006p01016, p. 1016–1024.
- [157] Wittmann, F. H. 1973, «Interaction of hardened cement paste and water», *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 56, n° 8, doi:10.1111/j.1151-2916.1973.tb12711.x, p. 409–415, ISSN 1551-2916. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1151-2916.1973.tb12711.x>.
- [158] Xicheng, W. et B. A. Schrefler. 2003, «Fully coupled thermo-hydro-mechanical analysis by an algebraic multigrid method», *Engineering Computations*, vol. 20, n° 2, doi:10.1108/02644400310465326, p. 211–229.
- [159] Xu, X.-P. et A. Needleman. 1994, «Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 42, n° 9, doi:10.1016/0022-5096(94)90003-5, p. 1397–1434.
- [160] Yazici, H. 2007, «The effect of curing conditions on compressive strength of ultra high strength concrete with high volume mineral admixtures», *Building and Environment*, vol. 42, n° 5, p. 2083–2089.
- [161] Zienkiewicz, O. C. 2013, *The Finite Element Method*, 7^e éd..

- [162] Zienkiewicz, O. C., A. H. C. Chan, M. Pastor, D. K. Paul et T. Shiomi. 1990, «Static and dynamic behaviour of soils : a rational approach to quantitative solutions. i. fully saturated problems.», *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 429, n° 1877, doi:10.1098/rspa.1990.0061, p. 285–309.
- [163] Zienkiewicz, O. C., Y. M. Xie, B. A. Schrefler, A. Ledesma et N. Bićanić. 1990, «Static and dynamic behaviour of soils : a rational approach to quantitative solution, ii. semi-saturated problems», *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 429, n° 1877, doi:10.1098/rspa.1990.0062, p. 311–321.

