



**HAL**  
open science

# Étude de problèmes différentiels elliptiques et paraboliques sur un graphe

Baptiste Vasseur

► **To cite this version:**

Baptiste Vasseur. Étude de problèmes différentiels elliptiques et paraboliques sur un graphe. Mathématiques générales [math.GM]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2014. Français. NNT : 2014DUNK0400 . tel-01337290

**HAL Id: tel-01337290**

**<https://theses.hal.science/tel-01337290v1>**

Submitted on 24 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

**École doctorale :** Sciences Pour l'Ingénieur 72

**Unité de recherche :** Laboratoire de mathématiques pures et appliquées

**Thèse présentée par :** Baptiste VASSEUR

**Soutenue le 6 février 2014**

Pour obtenir le grade de docteur de l'Université du Littoral Côte d'Opale

**Discipline : Mathématiques**

**Titre de la thèse :**

## **Etude de problèmes différentiels elliptiques et paraboliques sur un graphe**

**Thèse dirigée par :**

Joachim VON BELOW

**Rapporteurs :**

Malcolm BROWN

Wolfgang REICHEL

---

**Jury :**

Joachim VON BELOW Directeur de thèse

Malcolm BROWN Rapporteur

Wolfgang REICHEL Rapporteur

Felix ALI MEHMETI Président du jury

Jens BOLTE Examineur

Mabel CUESTA Examineur

José Antonio LUBARY Examineur



Cette thèse a été préparée au



laboratoire de mathématiques pures et appliquées

Centre Universitaire de la Mi-Voix

Maison de la Recherche Blaise Pascal

50 rue Ferdinand Buisson

BP 699

62228 Calais Cédex

☎ 03 21 46 55 90

FAX 03 21 46 55 86

✉ [lmpa@univ-littoral.fr](mailto:lmpa@univ-littoral.fr)

Site <http://www-lmpa.univ-littoral.fr>

La soutenance de cette thèse a reçu l'accord de la Commission des Thèses de Mathématiques des Universités de Lille, Valenciennes, Artois et Littoral.



# Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent tout naturellement à mon directeur de thèse Joachim von Below pour m'avoir appris à réellement aimer les Mathématiques et pour avoir dirigé cette thèse. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour avoir cru en moi depuis l'année 2008.

Je remercie également les rapporteurs de cette thèse Malcolm Brown et Wolfgang Reichel pour le soin avec lequel ils ont relu mon travail. Je remercie au même titre les membres du jury : Félix Ali Mehmeti, Jens Bolte, Mabel Cuesta et José Antonio Lubary.

Merci à tous les membres du LMPA pour leur accueil et leur bonne humeur quotidienne. En particulier Sébastien Duminil et Jean-François Rault avec qui je garderai, je l'espère, une relation durable.

Merci à tous mes proches pour leur soutien.



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>ix</b>
<b>1 Notations</b>	<b>1</b>
<b>2 Multiplicité des valeurs propres sur les graphes localement finis</b>	<b>7</b>
2.1 Introduction . . . . .	7
2.2 Définitions et notations . . . . .	7
2.3 Les harmoniques . . . . .	8
2.4 Les graphes périodiques . . . . .	24
<b>3 Les valeurs propres de multiplicité infinie sur les arbres</b>	<b>29</b>
3.1 Introduction . . . . .	29
3.2 Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une valeur propre <i>black hole</i> . . . . .	30
3.3 Le cas spécial où les longueurs valent un . . . . .	33
<b>4 Comportement asymptotique des valeurs propres sur les graphes finis</b>	<b>37</b>
4.1 Introduction . . . . .	37
4.2 Conditions de transition et opérateurs elliptiques . . . . .	38
4.3 Calcul des valeurs propres dans le cas du Laplacien canonique . . . . .	39
4.4 Écriture matricielle . . . . .	41
4.5 Comportement asymptotique . . . . .	47
<b>5 Etude de la stabilité</b>	<b>53</b>
5.1 Introduction . . . . .	53
5.2 Etude de la stabilité . . . . .	54



**Bibliographie**

**68**

# Table des figures

1.1	A gauche une arête non orientée et à droite une arête ayant une source $v_1$ et un puits $v_2$ . . . . .	1
1.2	A gauche une boucle et à droite le cas d'arêtes multiples . . . . .	2
1.3	Exemple d'un chemin et d'un cycle . . . . .	3
1.4	Le graphe $K_{4,2}$ . . . . .	3
1.5	Exemple pour le calcul des matrices d'adjacence et d'incidence . . . . .	5
2.1	Un premier exemple de graphe Liouville . . . . .	10
2.2	La bande 3-régulière $B$ . . . . .	10
2.3	L'arbre généalogique $T_0$ . . . . .	11
2.4	Exemple d'un arbre non Liouville . . . . .	12
2.5	Le graphe $\Sigma_4$ . . . . .	13
2.6	Construction d'une harmonique indépendante . . . . .	15
2.7	Le graphe $\Gamma_2$ recouvert par deux arbres . . . . .	17
2.8	Le graphe $\tilde{G}$ . . . . .	18
2.9	Le graphe $G$ vérifiant $M(0; G) = 2$ . . . . .	21
2.10	Le graphe $H^3$ . . . . .	24
2.11	Les harmoniques indépendantes sur $H^3$ . . . . .	25
2.12	Un graphe périodique $\Gamma$ dont le noyau est complet . . . . .	26
3.1	L'arbre $H$ . . . . .	31
3.2	Une fonction à support compact pour $\cos \sqrt{\lambda} = 0$ . . . . .	32
3.3	Les arbres $Z_2$ et $\tilde{Z}_2$ . . . . .	34
3.4	Le graphe $G$ . . . . .	35
4.1	Un premier exemple . . . . .	39
4.2	La courbe $ z \sin(z)  = A$ . . . . .	49



# Introduction

Aujourd'hui, les réseaux sont omniprésents. L'exemple d'internet est le plus flagrant mais le mot réseau évoque immédiatement de multiples domaines. Dans le domaine énergétique, les réseaux électriques forment un ensemble d'infrastructures capables d'acheminer l'énergie des centrales vers les consommateurs. En médecine, les réseaux neuronaux décrivent comment l'information circule à travers les neurones via les synapses. D'ailleurs, cette structure intéresse les informaticiens qui cherchent à l'imiter, notamment dans le domaine de l'intelligence artificielle. En écologie, domaine pourtant éloigné de l'abstraction, ce concept intéresse les chercheurs. L'ONU a d'ailleurs reconnu l'importance cruciale du développement durable des réseaux écologiques. Les exemples foisonnent et nous n'avons même pas encore parlé des réseaux sociaux si populaires actuellement.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude d'équations différentielles sur des réseaux. A partir d'équations différentielles sur chaque arête du réseau et de conditions de transition à chaque nœud, on discutera des questions récurrentes de la théorie des équations aux dérivées partielles (existence, unicité, stabilité, ...). A ma connaissance, G. Lumer [59] fut le premier à s'intéresser à ce genre de problème. Dès lors, l'intérêt pour ces problèmes se multiplia. De nombreux auteurs ont contribué à une littérature désormais importante. Parmi ces auteurs, on peut citer W. Woess [76], S. Nicaise [65], E. Yanagida [80], ...

Le travail de J. von Below dans [7] constitue la base de ce travail de thèse. Dans cet article, une équation caractéristique pour le spectre de problèmes aux valeurs propres est donnée. Il y est décrit comment le spectre dépend du graphe sous-jacent au réseau et des longueurs des arêtes.

Nous donnons maintenant les axes majeurs de la thèse qui est découpée en cinq parties. On commencera avec une introduction qui pose les bases de l'étude d'équations différentielles sur les réseaux avec les différentes notations, définitions et premières propriétés. La deuxième partie s'inscrit dans la continuité des articles [3], [5] et [6]. En effet, on trouve dans cette partie une réponse complète à une conjecture présente dans [3]. Dans la troisième partie, on fera une étude plus approfondie des valeurs propres de multiplicité infinie. La quatrième partie généralise le résultat de [17] concernant l'asymptotique des valeurs propres. La dernière partie s'inspire du

travail de Yanagida dans [80] et traite le problème de la stabilité des solutions stationnaires pour certains problèmes de réaction-diffusion.

De nombreux problèmes physiques se ramènent à la résolution d'une équation ou d'un système d'équations dans lequel intervient le Laplacien. En électromagnétisme, l'équation donnant le potentiel électrostatique  $V$  créé par une distribution volumique de charge  $\rho$  est  $\Delta V = \rho/\epsilon_0$  (équation de Poisson). En thermodynamique, l'équation donnant la distributivité de la température  $T$  dans un solide en régime stationnaire est  $\Delta T = 0$  (équation de la chaleur). L'équation des ondes  $\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$  apparaît en électromagnétisme ou en acoustique. Le grand axe de ce travail est de résoudre ce genre d'équations sur un réseau.

La deuxième partie a fait l'objet d'une publication dans *Results in Mathematics* sous le titre "Some remarks on the eigenvalue multiplicities of the Laplacian on infinite locally finite trees" coécrit avec J. von Below et J. A. Lubary tandis que les résultats de la troisième partie ont été soumis au journal *Operators and Matrices*.

## Notations

Au-delà des notations indiquées dans chaque chapitre, nous utiliserons les notations suivantes. Pour une introduction détaillée à la théorie, on pourra consulter [20], [35] ou [75] dans lesquels les terminologies et les exemples sont légion.

Un *graphe* est noté  $\Gamma = (V, E, \epsilon)$  où l'ensemble des *sommets* est  $V = V(\Gamma)$ , l'ensemble des *arêtes* est  $E = E(\Gamma)$  et la relation d'incidence est  $\epsilon \subset V \times E$ . Le degré d'un sommet  $v$  est noté  $\gamma(v) = \text{card} \{e \in E \mid v \in e\}$ . On distingue les sommets du bord  $V_b = \{v_i \in V \mid \gamma_i = 1\}$ , les nœuds de ramification  $V_r = \{v_i \in V \mid \gamma_i \geq 2\}$  et les nœuds de ramification essentielle  $V_{ess} = \{v_i \in V \mid \gamma_i \geq 3\}$ . On appelle *arête de bord* une arête incidente à un sommet du bord.

Dans un graphe non orienté, une arête de  $E$  est donnée par une paire non ordonnée de sommets qui sont connectés par cette arête. Par exemple,  $e = \{v_1, v_2\}$  définit l'arête liant  $v_1$  à  $v_2$  dans la Fig. 1.1.

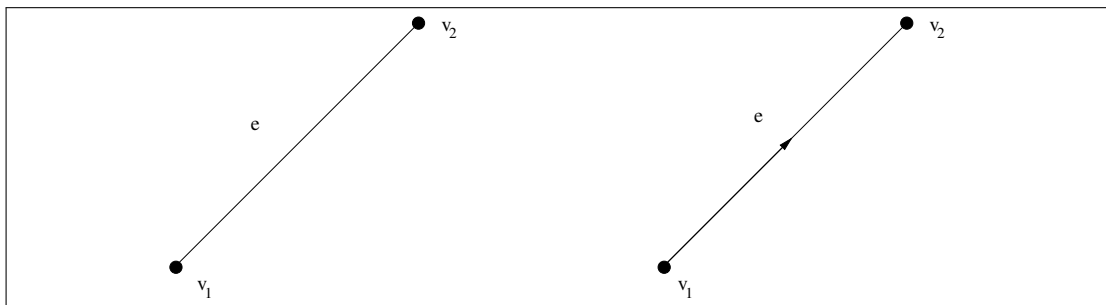


FIGURE 1.1 – A gauche une arête non orientée et à droite une arête ayant une source  $v_1$  et un puits  $v_2$

Dans un graphe orienté, les éléments de l'ensemble  $E$  des paires ordonnées de sommets de  $V$  qui relient les sommets entre eux sont également appelés *arcs*. Dans l'exemple de la Fig. 1.1, l'arête orientée  $e$  quitte le sommet  $v_1$  et arrive en  $v_2$ .

On distinguera les arêtes *sortantes* et les arêtes *entrantes*. L'arête  $e = (v_i, v_j)$  est une arête sortante du sommet  $v_i$  et entrante du sommet  $v_j$ . De plus,  $v_i$  est appelé la *source* de  $e$  et  $v_j$  le *puits* de  $e$ .

On dit que  $v_i$  et  $v_h$  sont *adjacents* s'ils appartiennent à la même arête. On note alors  $v_i \sim v_h$ . Une arête pour laquelle la source et le puits sont confondus est appelée une *boucle*. Dans une boucle, un sommet est donc adjacent à lui-même. On dit qu'un graphe possède des *arêtes multiples* s'il existe deux sommets reliés par au moins deux arêtes distinctes dans la même direction. Dans ce travail, les graphes seront supposés *simples*, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent ni boucle ni arête multiple.

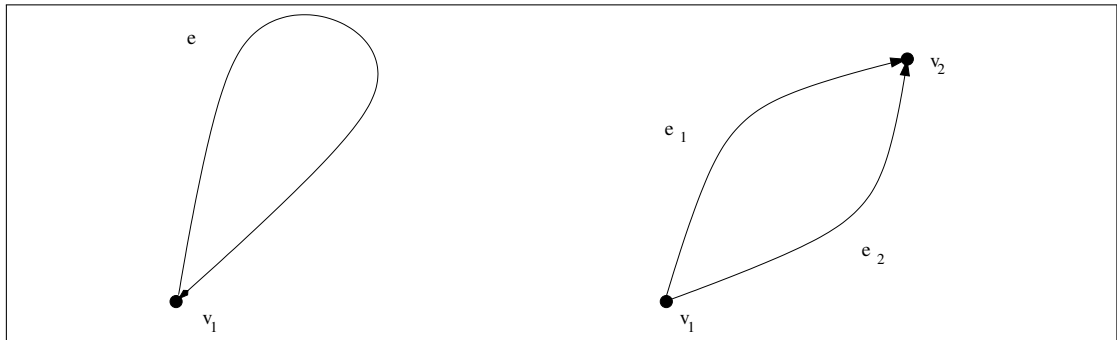


FIGURE 1.2 – A gauche une boucle et à droite le cas d'arêtes multiples

On définit le *degré*  $\gamma(v)$  d'un sommet  $v$  par  $\gamma(v) = \#\{w \in V(\Gamma) : v \sim w\}$ . On pose l'abréviation  $\gamma_i = \gamma(v_i)$ . On introduit également le degré interne d'un sommet  $v$  par

$$\gamma^\circ(v) = \gamma(v) - \#\{w \in V_b \mid v \text{ est adjacent à } w\}.$$

**Définition 1.1.** On définit :

$$\gamma_{min} = \min\{\gamma(v) \mid v \in V\},$$

$$\gamma_{max} = \max\{\gamma(v) \mid v \in V\}.$$

Un graphe est dit *localement fini* si  $V(\Gamma)$  est dénombrable et pour tout  $v \in V(\Gamma)$ ,  $\gamma(v) < \infty$ . Sauf mention contraire les graphes seront supposés *uniformément localement finis* (ULF), c'est-à-dire  $\gamma_{max} < \infty$ .

Dans un graphe orienté, on appelle *chemin* de  $v$  à  $w$  un ensemble ordonné fini d'arêtes  $(e_1, \dots, e_l)$  tel que  $v$  est la source de  $e_1$ ,  $w$  est le puits de  $e_l$  et le puits de  $e_i$  est la source de  $e_{i+1}$  pour  $i$  allant de 1 à  $l-1$ . Le sommet  $v$  est alors appelé la source du chemin  $(v, w)$  et le sommet  $w$  est appelé le puits du chemin  $(v, w)$ . On dit qu'un chemin  $(v, w)$  est un *circuit* si  $v = w$ . La *longueur* d'un chemin est le nombre d'arêtes le composant.

Dans un graphe non orienté, la notion correspondante d'un *chemin* est celle de *chaîne*. Une *chaîne* reliant  $v$  à  $w$  est une suite d'arêtes  $(e_1, \dots, e_l)$  telle que  $v \in e_1, w \in$

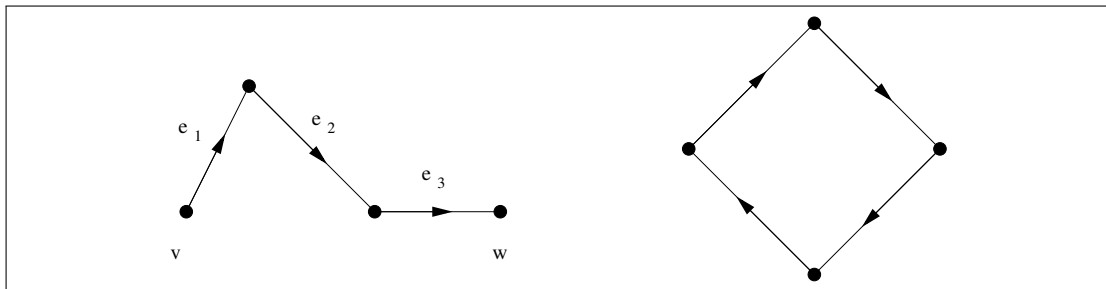


FIGURE 1.3 – Exemple d’un chemin et d’un cycle

$e_l$  et  $e_i$  et  $e_{i+1}$  possèdent un sommet en commun pour  $i$  allant de 1 à  $l-1$ . Dans le cas d’un graphe non orienté, un *cycle* est une chaîne dont les extrémités sont identiques. Un graphe est *connexe* si pour toute paire de sommets distincts  $(v, w)$  il existe une chaîne de  $v$  à  $w$ . Tous les graphes considérés seront supposés connexes. Un *arbre* est un graphe non orienté, connexe et qui ne possède pas de cycle.

Un graphe est dit *biparti* s’il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensemble  $U$  et  $V$  telle que chaque arête ait une extrémité dans  $U$  et l’autre dans  $V$ . Un graphe qui n’est pas biparti est simplement appelé *non biparti*. Il existe une caractérisation purement géométrique des graphes bipartis. Un graphe est biparti si et seulement s’il ne contient pas de cycle de longueur impaire. On appelle graphe *complet biparti* un graphe dans lequel chaque sommet de  $U$  est relié à chaque sommet de  $V$ . On le note  $K_{n,m}$  où  $n$  est le nombre de sommets dans  $U$  et  $m$  le nombre de sommets dans  $V$ . Dans la Fig. 1.4, on donne l’exemple du graphe complet biparti  $K_{4,2}$ .

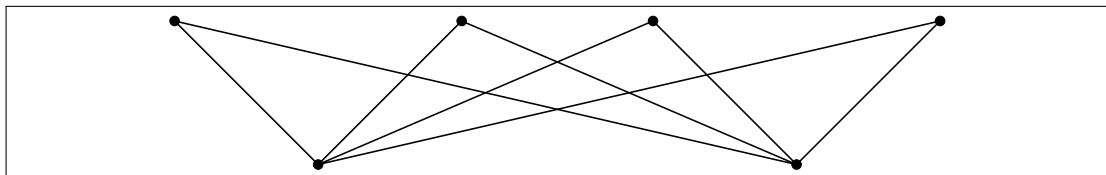


FIGURE 1.4 – Le graphe  $K_{4,2}$

On peut considérer chaque graphe comme étant un graphe topologique connexe de  $\mathbb{R}^m$ , c’est-à-dire que les sommets sont plongés dans  $\mathbb{R}^m$  et que l’ensemble des arêtes est donné par une collection de courbes rectifiables :

$$E(\Gamma) = \{\pi_j : [0, l_j] \rightarrow \mathbb{R}^m \mid j \in \mathbb{N}\}$$

où chaque  $e_j = \pi_j([0, l_j])$  a ses extrémités dans  $V(\Gamma)$ , deux sommets peuvent être rejoints par un chemin composé d’arcs de  $E(\Gamma)$  et deux arêtes distinctes satisfont  $e_j \cap e_h \subset V(\Gamma)$  et  $\text{card}(e_j \cap e_h) \leq 1$ . On note  $t_j$  le paramètre de longueur d’arc du côté



$e_j$ . A partir de maintenant, nous identifions le graphe  $\Gamma$  avec son réseau associé :

$$G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \pi_j([0, l_j]).$$

Pour  $v \in \mathbb{N}^*$ ,  $G$  est appelé un  $\mathcal{C}^v$ -réseau si chaque  $\pi_j \in \mathcal{C}^v([0, l_j], \mathbb{R}^m)$ . Ce qui implique que  $G$  muni de la topologie induite est un espace connexe et localement compact dans  $\mathbb{R}^m$ .

La structure d'un graphe orienté est entièrement définie par les coefficients d'adjacence et les coefficients d'incidence.

**Définition 1.2.** On définit l'opérateur d'adjacence :

$$\mathcal{A} = (e_{ih})_{i,h \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^{V(\Gamma)} \rightarrow \mathbb{R}^{V(\Gamma)}$$

avec

$$e_{ih} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ et } v_h \text{ sont adjacents,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour un graphe simple, deux sommets  $v_i$  et  $v_h$  déterminent de façon unique l'arête  $e_s$  les joignant. On peut donc poser :

$$s(i, h) = \begin{cases} s & \text{si } e_s \cap V = \{v_i, v_h\}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'orientation de  $\Gamma$  est donnée par les facteurs d'incidence :

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_j(l_j) = v_i, \\ -1 & \text{si } \pi_j(0) = v_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\pi_j(0)$  est appelé le nœud initial de  $e_j$  et  $\pi_j(l_j)$  est appelé le nœud final de  $e_j$ .

Les matrices d'adjacence et d'incidence de l'exemple de la Fig. 1.5 sont respectivement

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On donne également quelques exemples de graphes infinis. On définit la grille  $\Gamma_m$  de la façon suivante : son ensemble de sommets est  $V(\Gamma_m) = \mathbb{Z}^m$  et la relation d'adjacence est définie par

$$e_{zw} = 1 \iff \sum_{i=1}^m |z_i - w_i| = 1.$$

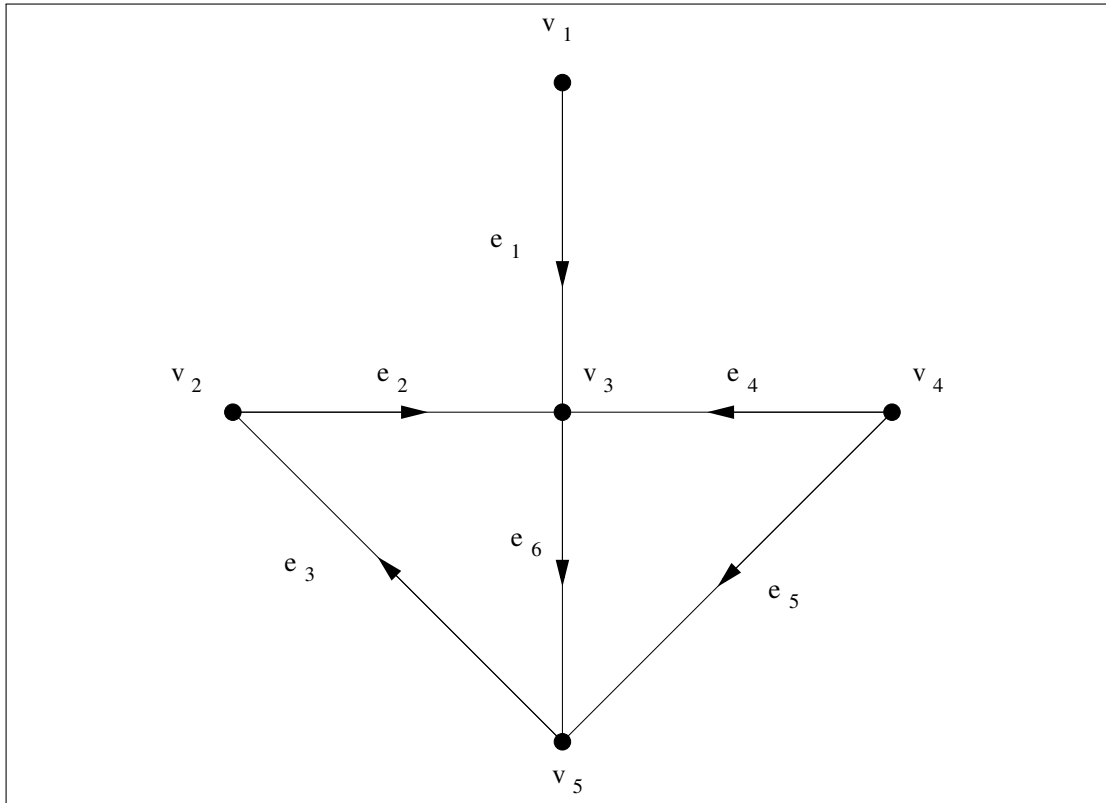


FIGURE 1.5 – Exemple pour le calcul des matrices d’adjacence et d’incidence

Le graphe dénombrable  $\Gamma_m$  dans lequel chaque sommet est de degré  $2m$  est un graphe uniformément localement fini de même que les graphes de Képler  $K_2$ , plan recouvert par des hexagones, et  $K_3$ , plan recouvert par des triangles.

Nous allons maintenant expliciter les conditions de continuité aux nœuds. Pour une fonction  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ , nous posons  $u_j = u \circ \pi_j : [0, l_j] \rightarrow \mathbb{R}$  et on utilise les abréviations suivantes :

$$u_j(v_i) = u_j(\pi_j^{-1}(v_i)), \quad \partial_j u_j(v_i) = \left. \frac{\partial}{\partial t_j} u_j(t_j) \right|_{\pi_j^{-1}(v_i)}.$$

Nous utiliserons les conditions de continuité suivantes :

$$\forall v_i \in V_r, e_j \cap e_s = \{v_i\} \Rightarrow u_j(v_i) = u_s(v_i). \tag{1.1}$$

De plus, à chaque sommet, nous utiliserons les conditions classiques de Kirchhoff :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \sum_{j \in \mathbb{N}} d_{ij} \partial_j u_j(v_i) = 0. \tag{1.2}$$

Cette condition généralise la condition de Neumann sur un intervalle à une condition de transition aux sommets dans un réseau.



# Multiplicité des valeurs propres sur les graphes localement finis

## 2.1 Introduction

On étudie des propriétés des fonctions harmoniques et bornées sur les réseaux infinis localement finis. D'importants travaux ont été réalisés dans ce sens par J. von Below et par J. A. Lubary. On s'attache ici à prouver une conjecture présente dans [3]. Cette conjecture annonce que les arbres localement finis vérifient la proposition suivante : soit les fonctions harmoniques bornées sont constantes soit elles forment un espace vectoriel de dimension infinie, sous une hypothèse concernant les longueurs des arêtes du graphe considéré.

Un deuxième résultat montre que l'on peut construire des graphes localement finis contenant des cycles sur lesquels les fonctions harmoniques forment un espace vectoriel de dimension finie non trivial.

## 2.2 Définitions et notations

On reprend ici les définitions et notations du préambule. Maintenant, on donne de nouvelles définitions.

**Définition 2.1.** On définit l'opérateur suivant :

$$\mathcal{P}(\Gamma) = (p_{ih})_{i,h \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^{V(\Gamma)} \rightarrow \mathbb{R}^{V(\Gamma)}$$

avec

$$p_{ih} = e_{ih} l_{s(i,h)}^{-1}.$$

On rappelle les conditions de continuité aux nœuds :

$$\forall v_i \in V_r, e_j \cap e_s = \{v_i\} \Rightarrow u_j(v_i) = u_s(v_i). \quad (2.1)$$

Et les conditions classiques de Kirchhoff :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \sum_{j \in \mathbb{N}} d_{ij} \partial_j u_j(v_i) = 0. \quad (2.2)$$

Finalement, nous définissons l'opérateur laplacien  $\Delta$  sur un  $\mathcal{C}^2$ -réseau  $G$  par

$$\Delta = \left( u \rightarrow \left( \partial_j^2 u_j \right)_{j \in \mathbb{N}} \right),$$

dont on choisit comme domaine de définition :

$$\mathcal{D}(\Delta) = \mathcal{C}_K^2(G) = \{u \in \mathcal{C}(G) \mid \forall j \in \mathbb{N} : u_j \in \mathcal{C}^2([0, l_j]), u \text{ satisfaisant (2.2)}\}.$$

Le problème aux valeurs propres s'écrit alors

$$0 \neq u \in \mathcal{C}_K^2(G) \cap L^\infty(G) \quad \text{et} \quad \partial_j^2 u_j = -\lambda u_j \quad \text{pour} \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

## 2.3 Les harmoniques

On cherche les fonctions harmoniques sur un réseau  $G$ , c'est-à-dire les solutions de  $\Delta u = 0$ . Une fonction continue  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée harmonique si, sur chaque arête  $e_j$ ,  $u$  est de la forme  $t_j \rightarrow \alpha_j t_j + b_j$  et satisfait la condition de Kirchhoff (2.2). L'ensemble des fonctions harmoniques sur  $G$  est noté  $\mathcal{H}(G)$ . Chaque élément de  $\mathcal{H}(G)$  est entièrement déterminé par ses valeurs aux sommets :

$$x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad x_i = u(v_i).$$

Nous avons également besoin de la pente sur les arêtes  $e_j$  :

$$\alpha_j = \frac{u_j(l_j) - u_j(0)}{l_j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

D'où, l'égalité (2.2) s'écrit :

$$\forall i \in \mathbb{N} : \sum_{j \in \mathbb{N}} d_{ij} \alpha_j = 0. \quad (2.4)$$

En utilisant la définition de l'opérateur  $\mathcal{P}(\Gamma)$ , l'égalité précédente équivaut à :

$$\forall i \in \mathbb{N} : \sum_{h \in \mathbb{N}} p_{ih} x_h = x_i \sum_{h \in \mathbb{N}} p_{ih},$$

ou encore,

$$\mathcal{Z}x := \text{Diag}(\mathcal{P}(\Gamma)e)^{-1}\mathcal{P}(\Gamma)x = x.$$

D'après [62], l'opérateur  $\mathcal{Z}$  est compact si et seulement si  $\Gamma$  est fini, et borné si  $\Gamma$  est uniformément localement fini. En général, la valeur propre 1 n'est pas simple et sa multiplicité dans  $l^\infty(V(\Gamma))$  vérifie :

$$m(1, \mathcal{Z}, l^\infty(V(\Gamma))) = \dim \mathcal{H}(G) \cap L^\infty(G) = m(0, \Delta, \mathcal{C}_K^2(G) \cap L^\infty(G)).$$

On pose les définitions suivantes, extraites de [3].

**Définition 2.2.**

$$M(0; \Gamma) = \dim \mathcal{H}(G) \cap L^\infty(G).$$

En analyse complexe, le théorème de Liouville pour les fonctions harmoniques affirme qu'une fonction harmonique et bornée est constante. On utilise donc la dénomination *réseau de Liouville* de la façon suivante :

**Définition 2.3.** Un réseau  $G$  est appelé un réseau de Liouville si

$$M(0; \Gamma) = 1.$$

On cite deux premiers résultats issus de [3]. Le premier permet de voir que le caractère Liouville se préserve sous une réduction du graphe.

**Définition 2.4.** Un viaduc dans un graphe  $\Gamma$  est un chemin  $\pi$  de longueur minimale 2 dans  $\Gamma$  joignant deux sommets distincts  $u$  et  $v$  tel qu'il n'y ait pas d'autre chemin joignant  $u$  et  $v$  ayant un sommet dans l'ensemble  $V(\pi) \setminus \{u, v\}$ .

**Définition 2.5.** On définit le graphe réduit  $\Gamma_{red}$  d'un graphe  $\Gamma$  en le construisant de la façon suivante. Introduisons les opérations :

- (I) On supprime les arêtes dans  $\Gamma$  incidentes aux sommets du bord.
- (II) On supprime chaque chemin  $\pi$  non borné d'un côté dans  $\Gamma$  dont les nœuds de ramification  $V_r(\pi)$  sont de degré 2 dans  $\Gamma$ .
- (III) On remplace chaque viaduc  $\pi$  dans  $\Gamma$  par une unique arête de longueur  $\ell$ , où  $\ell$  est la somme des longueurs de toutes les arêtes de  $\pi$ .

On répète (I) et (II) jusqu'à ce qu'il ne reste plus de sommet de degré 1 et qu'il ne reste plus de chemin non borné d'un côté. Alors on applique (III) de telle sorte qu'il ne reste plus de sommet de degré 2. Le graphe résultant de ces opérations est appelé le graphe réduit  $\Gamma_{red}$  de  $\Gamma$ .

*Exemple 2.1.* On donne des exemples de réduction de graphe :

- Le graphe réduit de la Figure 2.1 est un unique sommet.
- Le graphe réduit de la Figure 2.2 est lui-même.

**Théorème 2.1.** [3] *Un graphe  $\Gamma$  est un réseau de Liouville si et seulement si  $\Gamma_{red}$  est un réseau de Liouville.*

Le deuxième résultat est un principe du maximum.

**Théorème 2.2.** [3] *Si une fonction harmonique atteint son maximum en un point de  $G$ , alors elle est constante.*

*Démonstration.* Puisqu'une fonction harmonique est affine par morceaux, elle atteint son maximum en un sommet  $v$  de  $G$ . D'après les conditions de Kirchhoff,  $u(w) = u(v)$  pour tout  $w \sim v$  et par connexité on obtient le résultat.  $\square$

On en déduit que si  $\#V(\Gamma_{red}) < \infty$  alors  $\Gamma$  est un graphe de Liouville. Le deuxième résultat permet également de donner quelques premiers exemples de réseau de Liouville.

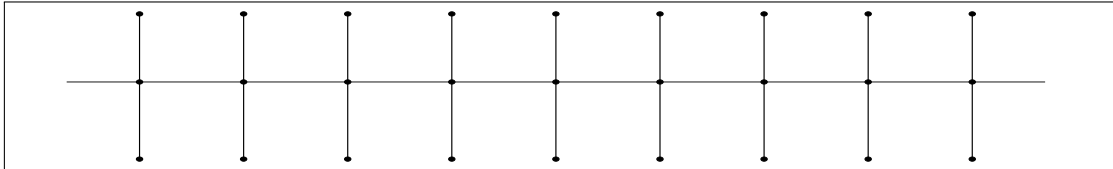


FIGURE 2.1 – Un premier exemple de graphe Liouville

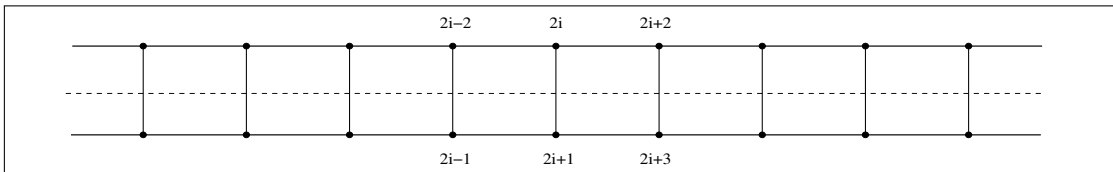


FIGURE 2.2 – La bande 3-régulière  $B$

*Exemple 2.2.* Les exemples suivants sont des réseaux de Liouville :

- a) La droite réelle  $\Gamma_1$  munie des sommets  $V(\Gamma) = \mathbb{Z}$  et de la relation d'adjacence :

$$e_{ik} = 1 \Leftrightarrow |i - k| = 1.$$

- b) Soit  $\Gamma$  la bande infinie dessinée dans la Figure 2.1. La pente s'annule sur chaque sommet du bord, donc une fonction harmonique bornée sur  $\Gamma$  nous donne une fonction harmonique et bornée sur  $\Gamma_1$  de l'exemple précédent. Donc ce réseau est un réseau de Liouville.
- c) La bande infinie 3-régulière  $B$  dessinée dans la Figure 2.2.

*Démonstration.* Pour les deux premiers exemples, le résultat est évident. On donne la preuve pour la bande 3-régulière. Soit  $u$  une harmonique bornée sur  $B$ . On note  $S(u)$  son symétrique par rapport à l'axe médian dessiné en pointillé. Les deux fonctions  $u + S(u)$  et  $u - S(u)$  sont des harmoniques bornées. Si  $u + S(u) = 0$  ou  $u - S(u) = 0$  alors  $u$  est constante. En effet, dans le deuxième cas, on obtient une harmonique sur  $\Gamma_1$  qui est constante. Tandis que dans le premier cas,  $x_{2i+2} = 4x_{2i} - x_{2i-2}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  et  $u$  est alors une fonction non bornée.

Supposons donc que  $v := u + S(u) \neq 0$  alors  $v - S(v) = 0$  et  $v$  est constante. On a alors  $u + S(u) = 2\alpha \Leftrightarrow (u - \alpha) + S(u - \alpha) = 0$ . Donc  $u$  est constante. Ce qui prouve que  $B$  est un réseau de Liouville.  $\square$

### 2.3.1 Les arbres

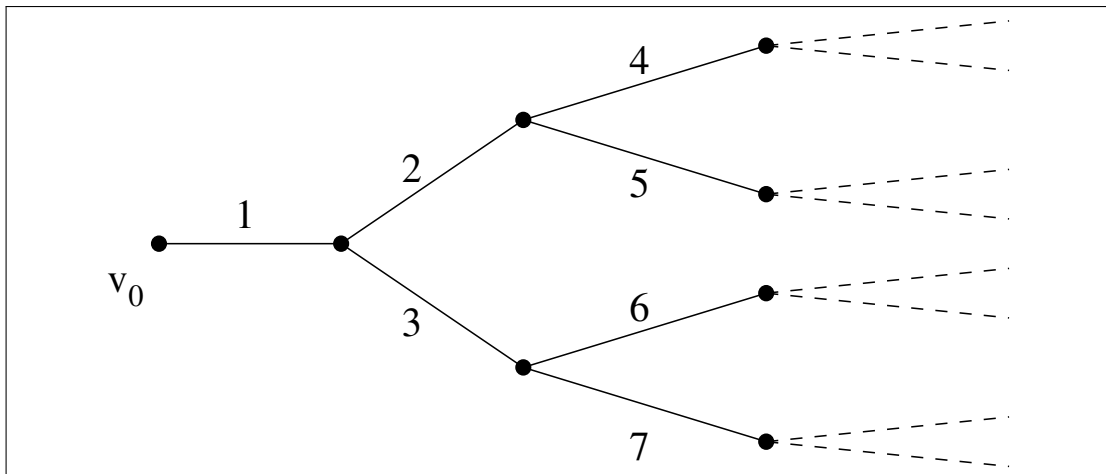


FIGURE 2.3 – L'arbre généalogique  $T_0$

Il est intéressant dans un premier temps de voir un exemple d'arbre qui ne soit pas un espace de Liouville. Ceci a été fait dans [3]. On répète ici la construction. On appelle arbre généalogique l'arbre  $T_0$  dessiné dans la Figure 2.3 où chaque arête est de longueur 1. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in [\frac{1}{2}, 1)$ . On définit une fonction continue  $u$  dépendant de  $\alpha$  et  $\beta$  par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} t \in [0, 1], \\ u_1(t) = \alpha_1 t & \text{avec } \alpha_1 = \alpha, \\ u_{2j}(t) = \alpha_{2j} t + u_j(1) & \text{avec } \alpha_{2j} = \beta \alpha_j & \text{pour } 2^{k-1} \leq j < 2^k, \\ u_{2j+1}(t) = \alpha_{2j+1} t + u_j(1) & \text{avec } \alpha_{2j+1} = (1 - \beta) \alpha_j & \text{pour } 2^{k-1} \leq j < 2^k, \end{cases}$$

où  $j, k \in \mathbb{N}^*$ .



La fonction  $u$  est bornée puisque l'on obtient l'inégalité suivante pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, 1]$

$$|u_n(t)| \leq |\alpha| \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{|\alpha|}{1-\beta} < \infty.$$

On note que  $u_1(v_0) = 0$  et  $u'_1(v_0) = \alpha$ . La fonction  $u$  est donc une fonction continue, bornée et vérifie les conditions de Kirchhoff en chaque sommet sauf en  $v_0$ . De plus, chaque choix de  $\beta \in [\frac{1}{2}, 1)$  nous donne une fonction de ce type linéairement indépendante des autres.

On note  $T_0(\alpha, \beta)$  l'arbre  $T_0$  avec le choix  $(\alpha, \beta)$  pour les fonctions  $u$  précédentes. On colle deux copies de  $T_0$  en leur sommet de bord, voir Figure 2.4, et on vérifie que ce graphe n'est pas de Liouville.

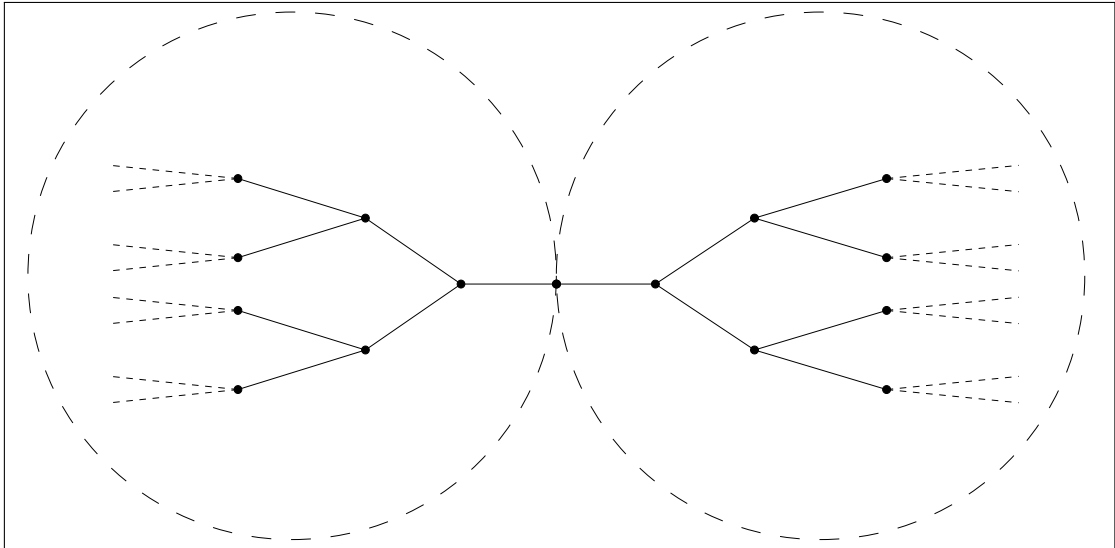


FIGURE 2.4 – Exemple d'un arbre non Liouville

En effet, avec le choix  $(-\alpha, \beta)$  pour la copie gauche et le choix  $(\alpha, \beta)$  pour la copie droite, on obtient une fonction continue, bornée et qui vérifie la condition de Kirchhoff au sommet de degré 2 dans la Figure 2.4. L'arbre vérifie même  $M(0; T) = \infty$ .

On pose maintenant une condition sur les arêtes :

$$\inf\{l_j \mid j \in \mathbb{N}\} > 0. \tag{2.5}$$

Dans [3], une condition suffisante pour qu'un arbre soit de Liouville est donnée. On rappelle ce résultat.

**Définition 2.6.**

$$L(\Gamma) = \inf \left\{ \frac{\text{longueur de l'arc } e}{\text{longueur de l'arc } f} \mid e, f \in E(\Gamma), e \cap f \neq \emptyset \right\}.$$

**Théorème 2.3.** [3] *Supposons qu'un arbre uniformément localement fini  $T$  sous la condition (2.5) satisfasse*

$$L(T_{red}) > \frac{1}{\gamma_{min}(T_{red}) - 1}.$$

*Alors l'équivalence suivante est vérifiée :*

$$M(0; T) = \infty \Leftrightarrow V(T_{red}) = \infty.$$

*Et donc l'arbre  $T$  est de Liouville si et seulement si son arbre réduit a un nombre fini de sommets.*

Ce résultat a été démontré en construisant explicitement une infinité d'harmoniques linéairement indépendantes. Sans la condition (2.5), on peut avoir des arbres  $\Sigma_n$  vérifiant  $M(0; \Sigma_n) = n$  pour tout  $n \geq 2$ . En effet, pour cela il suffit de considérer un graphe  $\Sigma_n$  formé de  $n$  chemins non bornés d'un côté  $\Gamma_0$  dont leur sommet final est un nœud de degré  $n$  comme dans la Figure 2.5.

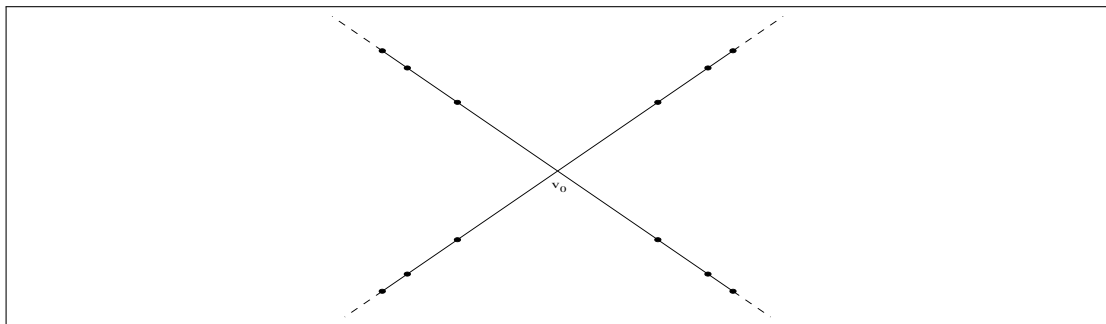


FIGURE 2.5 – Le graphe  $\Sigma_4$

Sur chacun des chemins  $\Gamma_0$ , on multiplie successivement les longueurs des arêtes par un facteur  $0 < \lambda < 1$  donné en commençant à  $v_0$ . Les fonctions harmoniques bornées  $u$  sont alors entièrement déterminées par  $n - 1$  pentes parmi les  $n$  pentes sortantes de  $v_0$  et par la valeur  $u(v_0)$ .

Une question naturelle est posée dans une conjecture de [3]. Sous la condition (2.5), pour les arbres, peut-on avoir un nombre fini de fonctions harmoniques indépendantes? La réponse est non et on prouve l'alternative suivante :

**Théorème 2.4.** *Soit  $T$  un arbre uniformément localement fini satisfaisant (2.5). Alors soit  $T$  est un réseau de Liouville soit  $M(0; T) = \infty$ .*

*Démonstration.* On note  $\mathbf{1}$  la fonction harmonique constante égale à 1 sur  $T$ . On suppose que  $m(0, T) \geq 2$ . On construit une suite de fonctions harmoniques bornées et linéairement indépendantes. Par hypothèse, il existe une fonction  $u_0$  définie sur  $T$ ,

harmonique, bornée et non constante sur  $T_{red}$ . A partir de  $u_0$ , on va construire  $u_1$  sur  $T$  telle que  $(u, u_0, u_1)$  soient indépendantes. Puis on montrera en itérant la construction que l'on a une infinité de solutions indépendantes sur  $T$ .

Soit  $k_0$  une arête dans  $T_{red}$  sur laquelle  $u_0$  n'est pas constante. Soit  $\alpha_0$  la pente de  $u_0$  sur  $k_0$ . On a donc  $\alpha_0 \neq 0$  et on pose  $v_0 := \pi_0(0)$ . Dans  $T_{red}$ , on choisit  $v_0$  comme source et on définit l'orientation définie sur les autres sommets  $v_i$  par

$$\gamma_i^+ = \text{card}\{j \in \mathbb{N} \mid d_{ij} = 1\} = 1$$

et

$$\gamma_i^- = \text{card}\{j \in \mathbb{N} \mid d_{ij} = -1\} = \gamma_i - 1.$$

Soit  $\pi$  un chemin non borné d'un côté dans  $T_{red}$  commençant à  $v_0$  tel que sur chaque arête de  $\pi$ , les pentes de  $u_0$  soient non nulles. Un tel chemin existe grâce à la condition de Kirchhoff (2.2). On note  $(\alpha_i)_{i \geq 0}$  la suite des pentes de  $u_0$  sur  $\pi$ .

D'après la condition (2.5) et comme  $u_0$  est bornée, on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 0.$$

Soit  $i_1 := \min\{j > 0 : \alpha_j \neq \alpha_0\}$ . On pose  $\alpha_{i_1,1} := \alpha_{i_1}$ . Soit  $k_{i_1,1}$  l'arête où la pente de  $u_0$  vaut  $\alpha_{i_1,1}$ . On pose  $v_{i_1} := \pi_{i_1,1}(0)$ . On note  $k_{i_1,2}, \dots, k_{i_1, \gamma(v_{i_1})-1}$  les autres arêtes sortantes à  $v_{i_1}$ .

Par la condition de Kirchhoff (2.2),

$$\sum_{j=1, \alpha_{i_1,j} \neq 0}^{\gamma(v_{i_1})-1} \alpha_{i_1,j} = \alpha_0 \neq 0.$$

Donc il existe  $n, m \in \{1, \dots, \gamma(v_{i_1}) - 1\}$  tels que ,

$$n \neq m, \quad \alpha_{i_1,n} \neq 0, \quad \text{et} \quad \alpha_{i_1,m} \neq 0.$$

Soit  $T_{i_1,n}$  et  $T_{i_1,m}$  les sous-arbres obtenus en coupant  $T_{red}$  en  $v_{i_1}$  qui contiennent  $k_{i_1,n}$  et  $k_{i_1,m}$  respectivement. On définit alors  $u_1 \in \mathcal{H}(T_{red}) \cap L^\infty(T_{red})$  :

$$\begin{aligned} u_1|_{T_{i_1,n}} &:= u_0|_{T_{i_1,n}} - u_0(v_{i_1})\mathbf{1}, \\ u_1|_{T_{i_1,m}} &:= -\frac{\alpha_{i_1,n}}{\alpha_{i_1,m}} u_0|_{T_{i_1,m}} + \frac{\alpha_{i_1,n} u_0(v_{i_1})}{\alpha_{i_1,m}} \mathbf{1}. \end{aligned}$$

On prolonge  $u_1$  de façon continue et constante sur  $T$ . Il est évident que  $u_1$  ainsi définie sur  $T$  est affine par morceaux, bornée, continue et vérifie (2.2).

Montrons que  $(\mathbf{1}, u_0, u_1)$  sont indépendantes : soient  $\lambda, \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\lambda \mathbf{1} + \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 = 0.$$

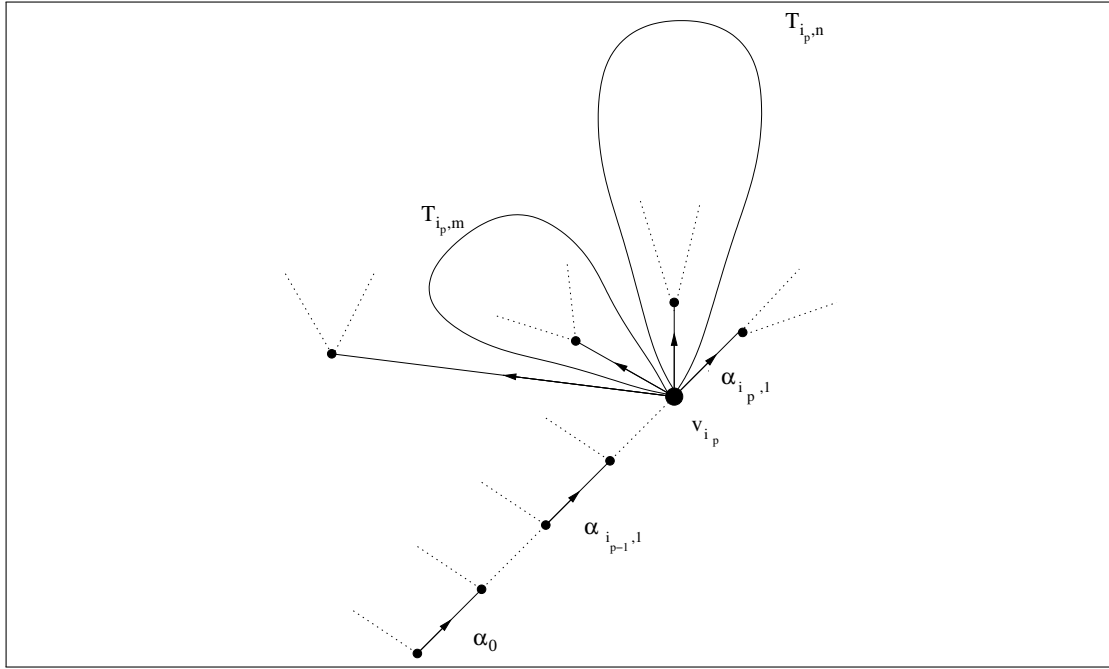


FIGURE 2.6 – Construction d'une harmonique indépendante

On obtient facilement l'égalité  $\lambda = \lambda_0 = 0$  puisque  $u_1$  s'annule sur  $k_0$  et donc également  $\lambda_1 = 0$ .

Supposons maintenant que pour  $p \geq 2$ ,  $u_1, \dots, u_{p-1} \in \mathcal{H}(T_{\text{red}}) \cap L^\infty(T_{\text{red}})$  sont non constantes et que ces fonctions  $\mathbf{1}, u_0, \dots, u_{p-1}$  sont linéairement indépendantes avec les indices  $i_\kappa$  et supports  $T_{i_\kappa, n}$  et  $T_{i_\kappa, m}$  comme au-dessus pour  $1 \leq \kappa \leq p-1$ . On répète la construction ci-dessus en incluant  $u_0$  et  $\pi \cong \Gamma_0$  et on pose  $i_p := \min\{j > i_{p-1} : \alpha_j \neq \alpha_{i_{p-1}}\}$ ,  $\alpha_{i_p, 1} := \alpha_{i_p}$ . Soit  $k_{i_p, 1}$  l'arête sur laquelle  $u_0$  admet comme pente  $\alpha_{i_p, 1}$  et posons  $v_{i_p} := \pi_{i_p, 1}(0)$ . Les autres arêtes sortantes à  $v_{i_p}$  sont notées  $k_{i_p, 2}, \dots, k_{i_p, \gamma(v_{i_p})-1}$ . La condition de Kirchhoff (2.2) permet d'écrire

$$\sum_{j=1}^{\gamma(v_{i_p})-1} \alpha_{i_p, j} = \alpha_{i_{p-1}} \neq 0.$$

Donc il existe  $n, m \in \{1, \dots, \gamma(v_{i_p}) - 1\}$  tels que  $n \neq m$ ,  $\alpha_{i_p, n} \neq 0$  et  $\alpha_{i_p, m} \neq 0$ . Soit  $T_{i_p, n}$  et  $T_{i_p, m}$  les sous-arbres obtenus en coupant  $T_{\text{red}}$  en  $v_{i_p}$  qui contiennent  $k_{i_p, n}$  et  $k_{i_p, m}$  respectivement. On peut maintenant définir  $u_p \in \mathcal{H}(T_{\text{red}}) \cap L^\infty(T_{\text{red}})$  en posant

$$u_p|_{T_{i_p, n}} := u_0|_{T_{i_p, n}} - u_0(v_{i_p})\mathbf{1},$$

$$u_p|_{T_{i_p, m}} := -\frac{\alpha_{i_p, n}}{\alpha_{i_p, m}} u_0|_{T_{i_p, m}} + \frac{\alpha_{i_p, n} u_0(v_{i_p})}{\alpha_{i_p, m}} \mathbf{1},$$

et en étendant  $u_p$  par 0 en dehors de  $T_{i_p,n}$  et  $T_{i_p,m}$ . Il reste à voir que  $\mathbf{1}, u_0, \dots, u_p$  sont linéairement indépendantes. Pour  $\lambda, \lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda \mathbf{1} + \lambda_0 u_0 + \dots + \lambda_p u_p = 0$ , par construction et hypothèse de récurrence, nous obtenons successivement  $\lambda = \lambda_0 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ , en évaluant sur les arêtes  $k_{i_{\kappa-1}}$  pour  $\kappa = 1 \dots p-1$ . Finalement,  $\lambda_p = 0$ .  $\square$

Le théorème 2.4 reste vrai pour les graphes possédant un nombre fini de circuits.

**Corollaire 2.1.** Un graphe infini uniformément localement fini  $\Gamma$  ayant un nombre fini de circuits et vérifiant la Condition (2.5) est un réseau de Liouville ou bien vérifie  $M(0; \Gamma) = \infty$ .

*Démonstration.* Par hypothèse,  $\Gamma$  est constitué d'un graphe fini noté  $F$  contenant tous les circuits de  $\Gamma$  et d'un nombre fini d'arbres  $T_1, \dots, T_m$  avec  $\{v_0^i\} = V(T_i) \cap V(F)$ . On peut supposer que pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , le sommet  $v_0^i$  est de degré 1 dans  $T_i$ . Si  $m = 0$  alors  $M(0; \Gamma) = 1$ . Supposons donc que  $m \geq 1$ . Si l'un des arbres  $T_k$  vérifie  $M(0; T_k) = \infty$  alors  $M(0; \Gamma) = \infty$  puisqu'une harmonique sur  $T_k$  définit une harmonique sur  $\Gamma$  en l'étendant de façon constante.

Supposons maintenant, grâce au Théorème 2.4, que tous les arbres  $T_k$  sont de Liouville. Si toutes les fonctions  $u \in \mathcal{H}(\Gamma) \cap L^\infty(\Gamma)$  sont constantes sur chaque arête incidente à  $v_0^i$  dans  $T_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , alors  $M(0; \Gamma) = 1$ .

S'il existe une fonction  $u \in \mathcal{H}(\Gamma) \cap L^\infty(\Gamma)$  avec une pente non nulle sur l'arête incidente à  $v_0^k$  dans  $T_k$  pour un  $k \in \{1, \dots, m\}$  alors la même construction que dans la preuve du Théorème 2.4 montre qu'il existe des fonctions harmoniques non constantes sur  $T_k$ . Cependant la restriction de  $u$  à  $T_k$  ne satisfait pas la condition de Kirchhoff en  $v_0^k \in V(T_k)$  dans  $T_k$ . Ceci est impossible et permet de conclure que  $\Gamma$  est un réseau de Liouville.  $\square$

On essaie de généraliser ce résultat. On commence par la définition suivante :

**Définition 2.7.** Soit  $r \geq 2$ . On dit que  $G_1, G_2, \dots, G_r$  recouvrent un graphe  $G$  si :

- $\forall e \in E(G), e \in \cup_{i=1}^r E(G_i)$ ,
- $\forall v \in V(G), v \in \cup_{i=1}^r V(G_i)$ .

Avec cette définition, le corollaire 2.1 s'écrit de la façon suivante. Si l'on recouvre un graphe  $G$  par un nombre fini d'arbres Liouville de telle sorte qu'il n'y ait qu'un nombre fini de circuits alors  $G$  est Liouville. On se demande donc naturellement s'il est possible d'étendre ce résultat. Si on recouvre un graphe  $G$  par un nombre fini de réseaux de Liouville alors  $G$  est-il lui-même de Liouville? La réponse est négative et un contre-exemple est donné ultérieurement dans la Figure 2.9. Cependant la question suivante reste ouverte. Si on recouvre un graphe  $G$  par un nombre fini d'arbres Liouville alors  $G$  est-il Liouville?

Soit  $G$  un graphe recouvert par deux arbres  $T_1$  et  $T_2$ . A partir d'une harmonique bornée sur  $G$ , on cherche à obtenir une harmonique sur  $T_1$  ou sur  $T_2$ . On comprend

alors la difficulté du problème puisque l'on cherche à prouver l'existence d'une solution d'un problème différentiel sur un sous-domaine. Pour illustrer ceci, on dessine  $\Gamma_2$  comme recouvrement de deux arbres dans la Figure 2.7.

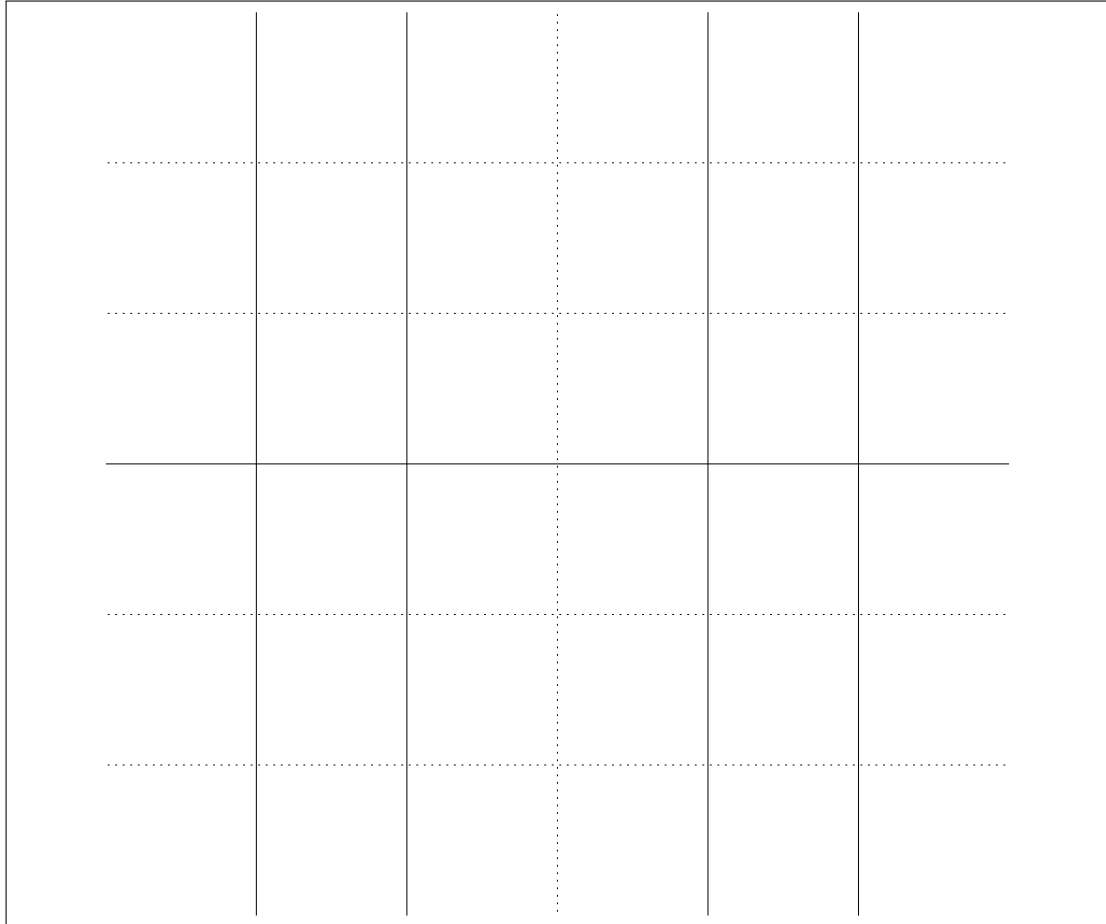


FIGURE 2.7 – Le graphe  $\Gamma_2$  recouvert par deux arbres

Les deux arbres (l'un en traits pleins, l'autre en traits pointillés) sont Liouville puisque leur graphe réduit est restreint à un point. Pour corroborer le fait que cette question pose problème, on donne l'exemple suivant :

**Proposition 2.1.** *Il existe un réseau  $\tilde{G}$  localement fini mais pas uniformément localement fini tel que  $\tilde{G}$  n'est pas Liouville et chaque sous-arbre de  $\tilde{G}$  est Liouville.*

*Démonstration.* Définissons le graphe  $\tilde{H}$  de la manière suivante : numérotions les sommets de  $\tilde{H}$  par  $V(\tilde{H}) = \bigcup_{k \geq 0} V^{(k)}$  où le  $k$ -ième étage est défini par :

$$V^{(k)} = \{v_i^{(k)} \mid 1 \leq i \leq 2^k\}.$$

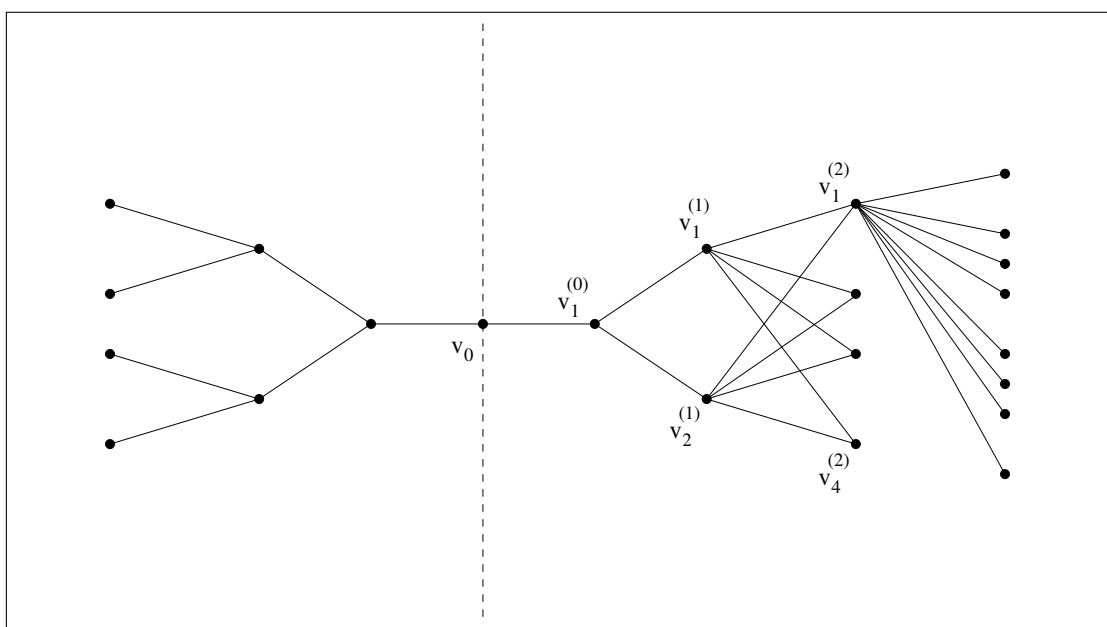
Les arêtes sont définies par les règles d'adjacence suivantes :

- (a) Il n'y a pas d'arête entre deux sommets du même étage ou d'étage dont les indices ont une différence d'au moins deux.
- (b) Entre le  $k$ -ième étage et le  $(k+1)$ -ième étage on pose des arêtes pour avoir un graphe complet biparti. La longueur de ces arêtes est  $2^k$ .
- (c) Les arêtes sortantes à  $v_i^{(k)}$  sont notées  $e_{i,j}^{(k)}$  pour  $1 \leq j \leq 2^{k+1}$ .

On colle maintenant deux copies de  $\tilde{H}$  en ajoutant un sommet  $v_0$  comme indiqué dans la Figure 2.8 pour obtenir le graphe  $\tilde{G}$ . On définit une fonction qui a pour pente  $\prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^i$  sur les arêtes entre le  $k$ -ième étage et le  $(k+1)$ -ième. Cette fonction vérifie donc les conditions de Kirchhoff à chaque nœud et est bornée puisque

$$\sum_k \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^k < \infty. \text{ Donc } \tilde{G} \text{ n'est pas Liouville.}$$

On montre maintenant que les sous-arbres de  $G$  sont Liouville. Soit  $T$  un sous-arbre de  $\tilde{G}$ . Le graphe réduit  $T_{red}$  ne peut pas contenir d'arbre dont chaque sommet est de degré 4 d'après les relations d'adjacence de  $\tilde{G}$ . L'arbre  $T_{red}$  contient donc au maximum un arbre dont chaque sommet est de degré 3. S'il n'en contient pas,  $T_{red}$  est uniquement constitué d'un sommet. S'il en contient un, on considère  $u$  une harmonique bornée non constante sur  $T_{red}$ . La fonction  $u$  admet alors dans son support un chemin de longueur infinie sur lequel la suite des pentes notée  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  vérifie  $\alpha_{i+1} \geq \frac{\alpha_i}{2} > 0$  ce qui est incompatible avec l'ordre de croissance de la longueur des arêtes de  $\tilde{G}$ .

FIGURE 2.8 – Le graphe  $\tilde{G}$

□

## 2.3.2 Des multiplicités finies

### Un premier exemple

On prouve maintenant que les multiplicités finies peuvent être atteintes pour des graphes contenant des circuits. Le premier exemple est justement le graphe  $\tilde{G}$  décrit précédemment dans lequel on peut fixer les longueurs des arêtes égales à 1.

#### Lemme 2.1.

$$M(0; \tilde{G}) = 2.$$

*Démonstration.* On choisit l'orientation de la Figure 2.8. C'est-à-dire que dans chaque copie de  $\tilde{H}$ , chaque arête est orientée en choisissant le sommet de l'étage inférieur comme nœud initial. Soit  $u$  une harmonique bornée sur  $\tilde{G}$ . Soit  $\alpha$  la pente de  $u$  sur l'arête allant de  $v_0$  à  $v_1^{(0)}$ . Il suffit de montrer que pour tout  $k \geq 0$  et pour tout  $i, j$ , la pente de  $u$  sur  $e_{i,j}^{(k)}$  vaut  $\frac{\alpha}{2^{2k+1}}$  car il y a  $2^k \times 2^{k+1}$  arêtes entre le  $k$ -ième étage et le  $(k+1)$ -ième étage. On note  $\alpha_{i,j}^{(k)}$  la pente sur  $e_{i,j}^{(k)}$ . Les conditions de Kirchhoff en  $v_1^{(0)}, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}$  et la continuité en  $v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_3^{(2)}, v_4^{(2)}$  nous donne

- (i)  $\alpha_{1,1}^{(0)} + \alpha_{1,2}^{(0)} = \alpha$ ,
- (ii)  $\alpha_{1,1}^{(1)} + \alpha_{1,2}^{(1)} + \alpha_{1,3}^{(1)} + \alpha_{1,4}^{(1)} = \alpha_{1,1}^{(0)}$  et  $\alpha_{2,1}^{(1)} + \alpha_{2,2}^{(1)} + \alpha_{2,3}^{(1)} + \alpha_{2,4}^{(1)} = \alpha_{1,2}^{(0)}$ ,
- (iii)  $\alpha_{1,1}^{(0)} + \alpha_{1,j}^{(1)} = \alpha_{1,2}^{(0)} + \alpha_{2,j}^{(1)}$  pour  $1 \leq i \leq 4$ .

En sommant, on obtient  $\alpha_{1,1}^{(0)} = \alpha_{1,2}^{(0)} = \frac{\alpha}{2}$ .

Supposons par récurrence que toutes les pentes entre le  $(\kappa-1)$ -ième étage et le  $\kappa$ -ième étage sont égales pour  $1 \leq \kappa \leq k-1$ . Elles valent donc  $\frac{\alpha}{2^{2\kappa-1}}$ . Écrivons la loi de Kirchhoff en  $v_1^{(k+1)}$  et  $v_2^{(k+1)}$ . Il y a  $2^{k+2}$  arêtes sortantes et  $2^k$  arêtes entrantes. Nous obtenons donc :

$$\sum_{j=1}^{2^{k+2}} \alpha_{1,j}^{(k+1)} = 2^k \alpha_{1,1}^{(k)} \text{ et } \sum_{j=1}^{2^{k+2}} \alpha_{2,j}^{(k+1)} = 2^k \alpha_{1,2}^{(k)}.$$

Par continuité, nous avons  $\alpha_{1,1}^{(k)} + \alpha_{1,j}^{(k+1)} = \alpha_{1,2}^{(k)} + \alpha_{2,j}^{(k+1)}$  pour tout  $1 \leq j \leq 2^{k+2}$ .

En sommant sur  $j$ , on obtient finalement  $\alpha_{1,1}^{(k)} = \alpha_{1,2}^{(k)}$ . Par symétrie, cela donne que toutes les pentes sortantes de  $v_1^{(k)}$  sont égales. D'après la loi de Kirchhoff en  $v_1^{(k)}$ ,

$$\sum_{j=1}^{2^{k+1}} \alpha_{1,j}^{(k)} = \frac{\alpha}{2^k}.$$



Donc ces pentes valent  $\frac{\alpha}{2^{2k+1}}$  et donc  $M(0; \tilde{G}) = 2$ . □

En suivant cette idée, on construit maintenant un graphe uniformément localement fini vérifiant  $M(0, G) = 2$ . Puis on en déduira un graphe vérifiant  $M(0, G) = n$  pour tout  $n \geq 2$ .

### Un exemple ULF

#### Construction

Dans un premier temps, on utilise une infinité de copies du graphe  $K_{4,2}$  pour construire le graphe  $G$  satisfaisant  $M(0; G) = 2$ .

Définissons un graphe  $H$  comme suit. On numérote les sommets de  $H$  par  $V(H) = \bigcup_{k \geq 1} V^{(k)}$  où le  $k$ -ième étage est noté

$$V^{(k)} = \{v_i^{(k)} \mid 1 \leq i \leq 2^k\}.$$

Les arêtes de  $H$  sont définies d'après les règles suivantes :

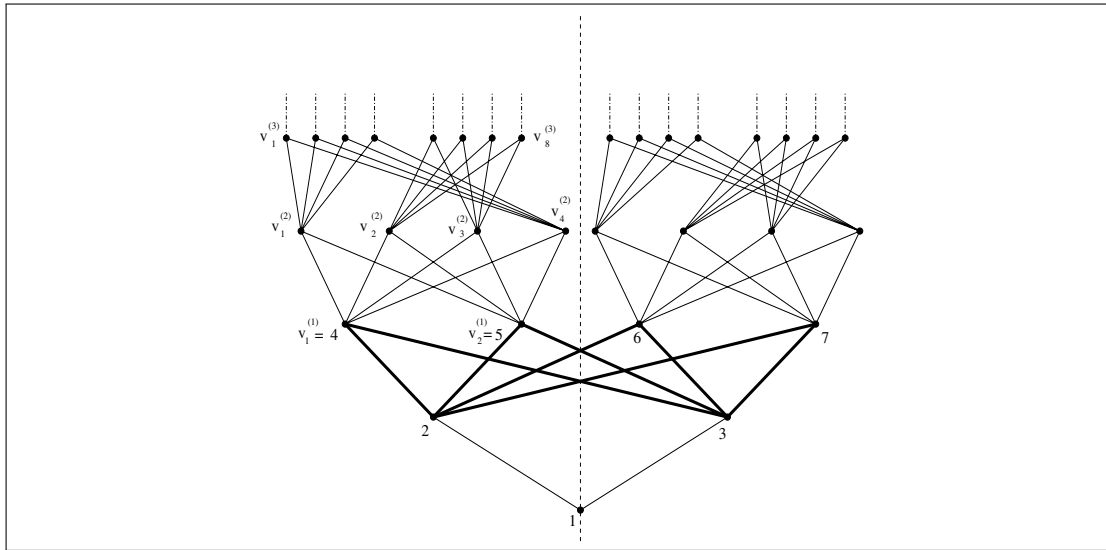
- (a) Il n'y a pas d'arête entre deux sommets du même étage ni entre deux sommets d'étage dont les indices ont une différence d'au moins 2.
- (b) Pour  $k \geq 1$ , les relations d'adjacence entre le  $k$ -ième étage et le  $(k+1)$ -ième étage sont définies par  $2^{k-1}$  copies de  $K_{4,2}$  entre  $v_i^{(k)}, v_{2^k-i+1}^{(k)}$  et  $v_{4i-3}^{(k+1)}, v_{4i-2}^{(k+1)}, v_{4i-1}^{(k+1)}, v_{4i}^{(k+1)}$  pour  $1 \leq i \leq 2^{k-1}$ , voir la Figure 2.9.
- (c) Les 4 sommets sortants de  $v_i^{(k)}$  sont notés  $e_{i,j}^{(k)}$  pour  $1 \leq j \leq 4$ .

Appelons les sommets de  $K_{4,2}$  par les nombres 2 à 7 comme indiqué par les sommets gras dans la Figure 2.9. Ensuite collons deux copies de  $H$  à un  $K_{4,2}$  en identifiant 4 et 5 avec  $v_1^{(1)}$  et  $v_2^{(1)}$  respectivement et en identifiant 6 et 7 avec  $v_1^{(1)}$  et  $v_2^{(1)}$  respectivement. Finalement, ajoutons un nœud 1 et une arête entre 1 et 2 et une autre arête entre 1 et 3 pour obtenir le graphe  $G$ , voir la Figure 2.9. Toutes les arêtes dans  $G$  ont une longueur de 1. Chaque arête est orientée en choisissant le sommet incident d'indice le plus bas comme nœud initial. Les arêtes entre les sommets  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  sont notées  $a_{ij}$ . Nous obtenons un graphe vérifiant  $\gamma_{\max}(G) = 6$  qui est donc uniformément localement fini.

#### Calcul des multiplicités

**Théorème 2.5.**  *$G$  est un graphe infini localement fini vérifiant (2.5) et*

$$M(0, G) = 2.$$

FIGURE 2.9 – Le graphe  $G$  vérifiant  $M(0; G) = 2$ .

*Démonstration.* On considère une fonction harmonique quelconque sur  $G$ . Soit  $\alpha_{ij}$  ses pentes sur les arêtes  $a_{ij}$  et  $\alpha_{i,j}^{(k)}$  ses pentes sur les arêtes  $e_{i,j}^{(k)}$ . Nous montrons que les fonctions harmoniques s'annulant au sommet 1 sont bornées et forment un espace vectoriel de dimension 1.

Les conditions de Kirchoff aux sommets 1, 2, 3 et la condition de continuité aux sommets 4, 5, 6, 7 nous donnent

- (i)  $\alpha_{12} + \alpha_{13} = 0$ ,
- (ii)  $\alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{26} + \alpha_{27} = \alpha_{12}$  et  $\alpha_{34} + \alpha_{35} + \alpha_{36} + \alpha_{37} = \alpha_{13}$ ,
- (iii)  $\alpha_{12} + \alpha_{2i} = \alpha_{13} + \alpha_{3i}$  pour  $4 \leq i \leq 7$ .

En sommant la relation (iii) sur  $i$ , on obtient  $\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$ . Par continuité  $\alpha_{2i} = \alpha_{3i}$  pour  $4 \leq i \leq 7$ . Les conditions de Kirchoff aux sommets 4, 5 et la condition de continuité en  $v_i^{(2)}$  donnent

- (iv)  $\sum_{j=1}^4 \alpha_{1,j}^{(1)} = 2\alpha_{24}$  et  $\sum_{j=1}^4 \alpha_{2,j}^{(1)} = 2\alpha_{25}$ ,
- (v)  $\alpha_{1,j}^{(1)} + \alpha_{24} = \alpha_{2,j}^{(1)} + \alpha_{25}$  pour  $1 \leq j \leq 4$ .

En sommant la relation (v) sur  $j$ , on obtient  $\alpha_{24} = \alpha_{25}$ . Ce qui nous donne, grâce à la relation  $\alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{26} + \alpha_{27} = \alpha_{12}$ , la relation suivante

$$\alpha := \alpha_{24} = \alpha_{25} = -\alpha_{26} = -\alpha_{27},$$

et par continuité et symétrie de  $G$

$$\alpha = \alpha_{34} = \alpha_{35} = -\alpha_{36} = -\alpha_{37}.$$

Nous prouvons maintenant que le choix de  $\alpha$  détermine un unique élément de  $\mathcal{H}(G)$  s'annulant au sommet 1. En utilisant les formules ci-dessus et la symétrie de  $G$ , il suffit de considérer seulement le graphe  $H$ . On procède par récurrence sur  $k$ . On souhaite montrer que chaque pente entre les étages  $V^{(k)}$  et  $V^{(k+1)}$  vaut  $\frac{\alpha}{2^k}$ . En sommant toutes les conditions de Kirchhoff sur le  $k$ -ième étage, nous avons

$$\sum_{i=1}^{2^k} \sum_{j=1}^4 \alpha_{i,j}^{(1)} = \sum_{i=1}^{2^k} \sum_{j=1}^4 \alpha_{i,j}^{(k)} = 4\alpha.$$

Pour  $k = 1$ , la continuité en  $v_i^{(2)}$  impose la relation suivante  $\alpha_{1,j}^{(1)} = \alpha_{2,j}^{(1)}$  pour  $1 \leq j \leq 4$ . Et les conditions de Kirchhoff en  $v_1^{(2)}$  et  $v_4^{(2)}$  imposent

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_{1,j}^{(2)} = 2\alpha_{1,1}^{(1)}, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{4,j}^{(2)} = 2\alpha_{1,4}^{(1)},$$

et par continuité en  $v_i^{(3)}$ , nous avons  $\alpha_{1,j}^{(2)} + \alpha_{1,1}^{(1)} = \alpha_{4,j}^{(2)} + \alpha_{1,4}^{(1)}$  pour  $1 \leq j \leq 4$ . En sommant cette relation sur  $j$ , nous obtenons  $\alpha_{1,1}^{(1)} = \alpha_{1,4}^{(1)}$  et d'une manière analogue  $\alpha_{1,2}^{(1)} = \alpha_{1,3}^{(1)}$ . Ceci montre  $\alpha_{1,j}^{(2)} = \alpha_{4,j}^{(2)}$  et  $\alpha_{2,j}^{(2)} = \alpha_{3,j}^{(2)}$  pour  $1 \leq j \leq 4$ .

Il reste à montrer que  $\alpha_{1,1}^{(1)} = \alpha_{1,2}^{(1)}$ . En sommant toutes les relations de Kirchhoff aux sommets  $v_1^{(3)}, \dots, v_4^{(3)}$  on obtient

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \alpha_{i,j}^{(3)} = \sum_{j=1}^4 \alpha_{1,j}^{(2)} + \alpha_{4,j}^{(2)} = 2 \sum_{j=1}^4 \alpha_{1,j}^{(2)} = 4\alpha_{1,1}^{(1)},$$

et aux sommets  $v_5^{(3)}, \dots, v_8^{(3)}$ ,

$$\sum_{i=5}^8 \sum_{j=1}^4 \alpha_{i,j}^{(3)} = 2 \sum_{j=1}^4 \alpha_{2,j}^{(2)} = 4\alpha_{1,2}^{(1)}.$$

La condition de continuité aux sommets du 4-ième étage donne pour  $1 \leq j \leq 4$  :

$$\alpha_{1,j}^{(3)} + \alpha_{1,1}^{(2)} + \alpha_{1,1}^{(1)} = \alpha_{8,j}^{(3)} + \alpha_{2,4}^{(2)} + \alpha_{1,2}^{(1)},$$

$$\alpha_{2,j}^{(3)} + \alpha_{1,2}^{(2)} + \alpha_{1,1}^{(1)} = \alpha_{7,j}^{(3)} + \alpha_{2,3}^{(2)} + \alpha_{1,2}^{(1)},$$

$$\alpha_{3,j}^{(3)} + \alpha_{1,3}^{(2)} + \alpha_{1,1}^{(1)} = \alpha_{6,j}^{(3)} + \alpha_{2,2}^{(2)} + \alpha_{1,2}^{(1)},$$

$$\alpha_{4,j}^{(3)} + \alpha_{1,4}^{(2)} + \alpha_{1,1}^{(1)} = \alpha_{5,j}^{(3)} + \alpha_{2,1}^{(2)} + \alpha_{1,2}^{(1)}.$$

En sommant ces 16 équations, on a l'égalité suivante

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \alpha_{i,j}^{(3)} + 4 \sum_{j=1}^4 \alpha_{1,j}^{(2)} + 16\alpha_{1,1}^{(1)} = \sum_{i=5}^8 \sum_{j=1}^4 \alpha_{i,j}^{(3)} + 4 \sum_{j=1}^4 \alpha_{2,j}^{(2)} + 16\alpha_{1,2}^{(1)},$$

et finalement  $\alpha_{1,1}^{(1)} = \alpha_{1,2}^{(1)}$ . L'hypothèse de récurrence est donc vraie au rang  $k = 1$ .

Par récurrence, supposons que les pentes entre le  $\kappa$ -ième étage et le  $(\kappa + 1)$ -ième étage sont toutes égales pour  $1 \leq \kappa \leq k - 1$ . Alors, toutes les pentes entre les sommets de l'étage  $V^{(k-1)}$  et ceux de l'étage  $V^{(k)}$  valent  $2^{-k+1}\alpha$ , et d'après les conditions de Kirchhoff en  $v_i^{(k)}$ , la somme des 4 pentes sortantes à  $v_i^{(k)}$  sont égales (pour tout  $i$ ). On suit la même preuve que dans le cas  $k = 1$ .

Par continuité en  $v_i^{(k+2)}$  pour  $1 \leq i \leq 4$ , nous avons

$$\alpha_{1,1}^{(k)} + \alpha_{1,j}^{(k+1)} = \alpha_{2^{k-1},4}^{(k)} + \alpha_{2^{k+1},j}^{(k+1)}.$$

En sommant,  $\alpha_{1,1}^{(k)} = \alpha_{2^{k-1},4}^{(k)}$ , et en conséquence,  $\alpha_{1,j}^{(k)} = \alpha_{2^{k-1},5-j}^{(k)}$  pour  $1 \leq j \leq 4$ . Il reste à sommer les conditions de Kirchhoff en  $v_1^{(k+2)}, \dots, v_4^{(k+2)}$  et répéter l'opération pour obtenir

$$\alpha_{1,j}^{(k)} = \alpha_{2^{k-1},5-j}^{(k)} = \frac{\alpha}{2^k} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq 4.$$

Ce qui montre que chaque fonction  $u \in \mathcal{H}(G)$  est entièrement déterminée par sa valeur au sommet 1 et par la pente  $\alpha = \alpha_{24}$ . De fait,  $M(0; G) = 2$ .  $\square$

### Un exemple général

Nous construisons maintenant un exemple de graphe uniformément localement fini sur lequel les fonctions harmoniques et bornées forment un espace vectoriel de dimension  $m$ .

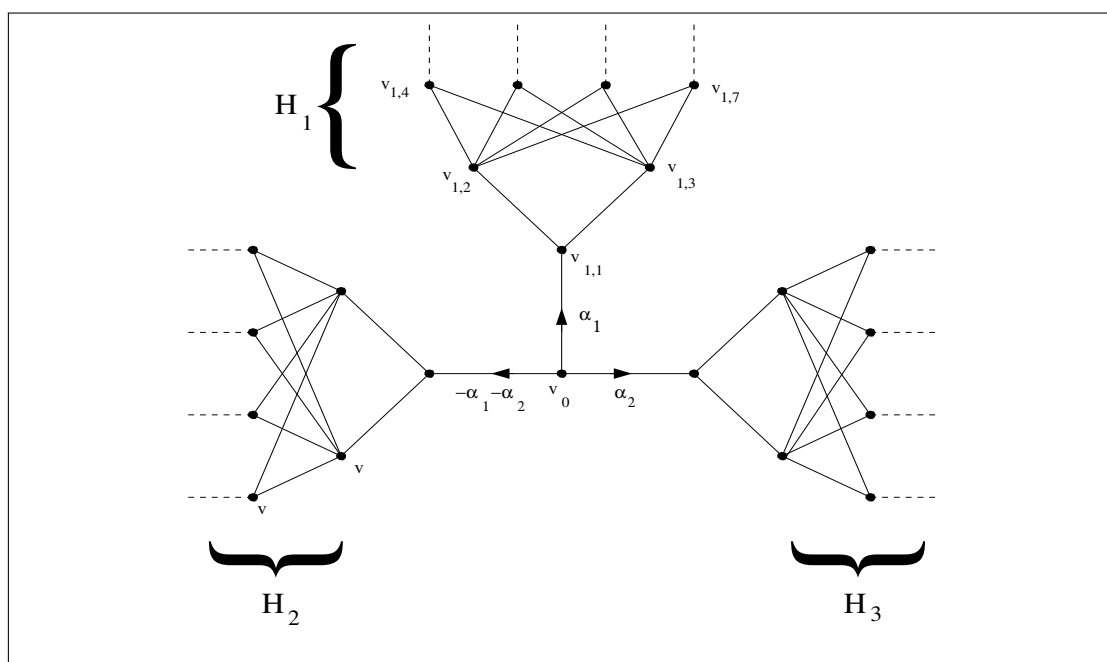
Pour  $m \geq 2$ , on considère  $m$  copies de  $H$ , notées  $H_1, \dots, H_m$ . Collons chaque  $H_i$  sur une étoile à 3 branches en identifiant les sommets  $v_1^{(1)}$  et  $v_1^{(2)}$  avec deux sommets du bord de l'étoile. Le sommet du bord restant est identifié à un nœud de ramification  $v_0$  de degré  $m$ . Le graphe obtenu est appelé  $H^m$ . Il est uniformément localement fini car il satisfait  $\gamma_{\max}(H^m) = \max\{6, m\}$ . L'orientation donnée à  $H^m$  est induite par l'orientation donnée dans chaque  $H_i$  et le sommet  $v_0$  est supposé être une source.

**Corollaire 2.2.**  $M(0; H^m) = m$ .

*Démonstration.* Nous montrons qu'une harmonique  $u \in \mathcal{H}(H^m)$  est entièrement définie par ses valeurs en  $v_0$  et par  $m - 1$  pentes sur les arêtes incidentes à  $v_0$ . Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  les pentes de  $u$  sur ces arêtes. D'après la condition de Kirchhoff en  $v_0$ , on obtient  $\alpha_m = -\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j$ .

Dans  $H_1$ , on utilise les mêmes notations que pour  $H$ . Soit  $v_{1,1}$  le sommet défini dans la Figure 2.10. et on note  $\alpha_{1j}$  la pente de  $u$  sur l'arête entre  $v_{1,1}$  et  $v_j^{(1)}$ . Les conditions de Kirchhoff en  $v_{1,1}, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}$  et les conditions de continuité en  $v_1^{(2)}, \dots, v_4^{(2)}$  conduisent à

$$(i) \quad \alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12},$$


 FIGURE 2.10 – Le graphe  $H^3$ .

$$(ii) \quad \alpha_{11} = \sum_{j=1}^4 \alpha_{1,j}^{(1)} \quad \text{et} \quad \alpha_{12} = \sum_{j=1}^4 \alpha_{2,j}^{(1)},$$

$$(iii) \quad \alpha_{11} + \alpha_{1,j}^{(1)} = \alpha_{12} + \alpha_{2,j}^{(1)} \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq 4.$$

En sommant sur  $j$  la dernière identité, on a  $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \frac{\alpha_1}{2}$ . Comme dans la preuve du lemme précédent, chaque pente de  $u$  entre le  $k$ -ième étage et le  $(k+1)$ -ième étage dans  $H_i$  vaut  $\frac{\alpha_i}{2^{k+2}}$ . Soit  $1 \leq i \leq m-1$ , on définit  $w^{(i)}$  l'unique harmonique sur  $H^m$  vérifiant  $w^{(i)}(v_0) = 0$  et dont les pentes sur les arêtes incidentes à  $v_0$  valent  $\alpha_i = 1$ ,  $\alpha_m = -1$  et  $\alpha_j = 0$  pour  $j \notin \{i, m\}$ . On en déduit

$$u = u(v_0)\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i w^{(i)} \in \langle \mathbf{1}, w^{(1)}, \dots, w^{(m-1)} \rangle_{\mathbb{R}},$$

ce qui montre le résultat puisque les fonctions  $\mathbf{1}, w^{(1)}, \dots, w^{(m-1)}$  sont linéairement indépendantes.  $\square$

## 2.4 Les graphes périodiques

Les graphes périodiques dont la définition est issue de [10] forment une classe importante de graphes uniformément localement finis. Le groupe  $\text{Aut}(G)$  désigne les

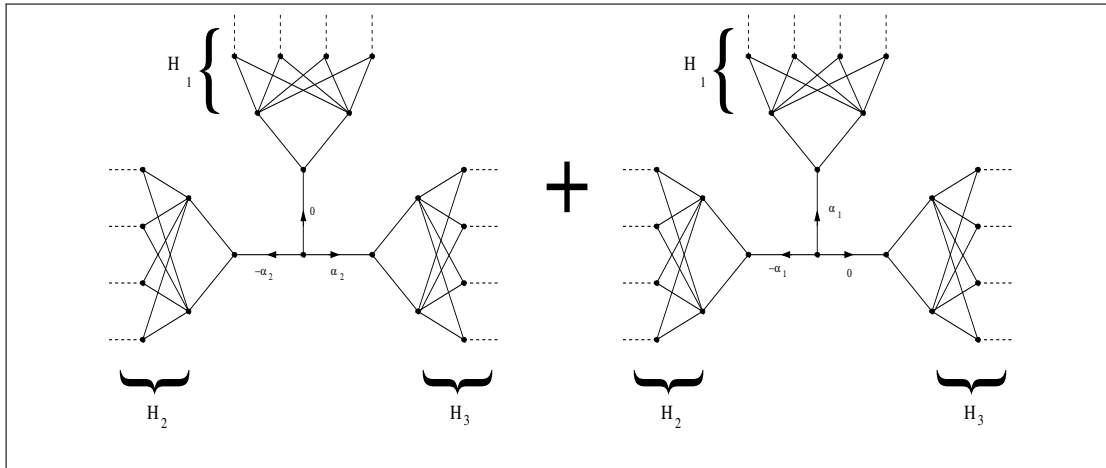


FIGURE 2.11 – Les harmoniques indépendantes sur  $H^3$

automorphismes du graphe  $G$ . Dans la définition suivante, on prend les notations standards de la théorie des actions de groupe.

**Définition 2.8.**  $\Gamma$  est un réseau périodique de groupe de translation  $G = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}b_i \leq \text{Aut } \Gamma$ , de noyau  $N$ , de cellule  $F$  et de rang  $m$  si :

- $\Gamma$  est connexe,
- $N$  et  $F$  sont des sous-graphes finis et connexes de  $\Gamma$ ,
- $V(N)^G = V(\Gamma)$ ,
- $\{b_i, 1 \leq i \leq m\}$  est une base de  $G$ ,
- $F = N \cup \bigcup_{i=1}^m N^{b_i}$  et  $E(F)^G = E(\Gamma)$ ,
- $\forall g, h \in G : g \neq h \Rightarrow V(N^g) \cap V(N^h) = \emptyset$ .

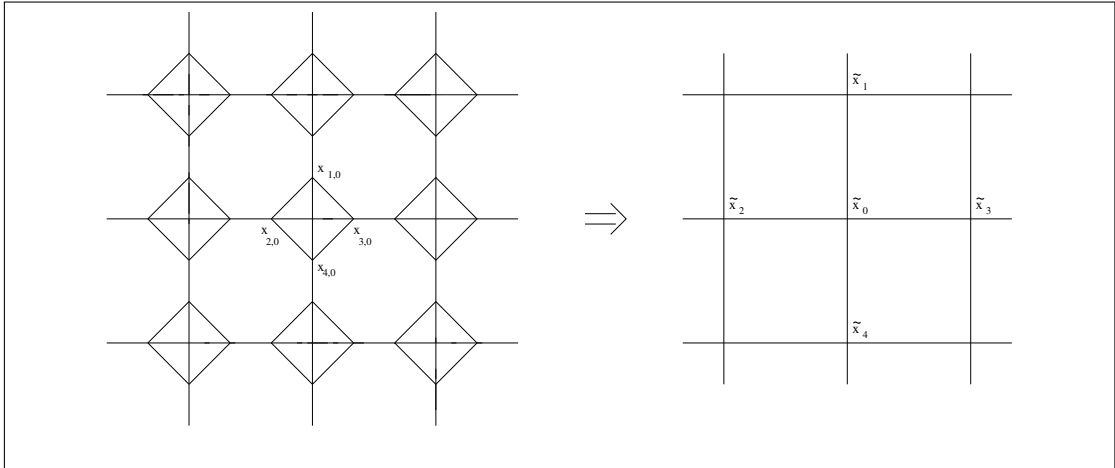
Référencés dans [76], les résultats de G. Choquet et J. Deny dans [33], de J. L. Doob, J. L. Snell et R. E. Williamson dans [36] et de S. Sawyer dans [70] démontrent que les graphes périodiques sont des graphes de Liouville en adoptant des raisonnements probabilistes. Une preuve combinatoire de ce résultat reste donc souhaitable.

Dans [3], une preuve combinatoire a été trouvée pour certains graphes périodiques.

**Théorème 2.6.** *Les réseaux  $\Gamma_m, K_2$  et  $K_3$  sont des réseaux de Liouville.*

De multiples tentatives ont été testées sur des graphes périodiques "simples". Une première approche a été d'essayer de se ramener au cas  $\Gamma_m$  en utilisant une astuce.

*Exemple 2.3.* Le graphe périodique  $\Gamma$  dessiné à gauche dans la Fig. 2.12 est Liouville.


 FIGURE 2.12 – Un graphe périodique  $\Gamma$  dont le noyau est complet

*Démonstration.* Evidemment, pour un graphe périodique, le noyau n'est pas unique. Dans le graphe  $\Gamma$ , on choisit comme noyau le graphe complet à 4 sommets, noté  $K_4$ . On a vu qu'une harmonique  $u$  est définie par les valeurs de  $u$  aux sommets. On crée une application  $\phi$  allant des fonctions harmoniques et bornées sur  $\Gamma$  vers l'espace des fonctions harmoniques et bornées sur  $\Gamma_2$  de la façon suivante : pour tout  $u$  harmonique sur  $\Gamma$ , la valeur en un sommet de  $\Gamma_2$  de  $\phi(u)$  est donnée par la moyenne des valeurs de  $u$  sur le noyau de  $\Gamma$  comme indiqué sur la figure 2.12, la notation  $\tilde{x}$  désignant la moyenne  $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ . Montrons que la fonction  $\phi(u)$  appartient bien à  $\mathcal{H}(\Gamma_2)$ . On prend les notations de la Fig. 2.12 où les  $a_i, b_i, c_i, d_i$  et  $x_i$  désignent les valeurs aux sommets d'une harmonique. Il s'agit simplement de montrer que  $4\tilde{x} = \tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} + \tilde{d}$ . Ecrivons les lois de Kirchhoff

$$\begin{aligned} 4a_1 &= a_2 + a_3 + a_4 + x_1, \\ 4b_1 &= b_2 + b_3 + b_4 + x_2, \\ 4c_1 &= c_2 + c_3 + c_4 + x_3, \\ 4d_1 &= d_2 + d_3 + d_4 + x_4. \end{aligned}$$

En outre, la somme des pentes sortantes de chaque noyau est nulle. En particulier, nous obtenons  $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ . On obtient donc  $16\tilde{x} = \sum_{i=1}^4 a_i + b_i + c_i + d_i$  c'est-à-dire  $4\tilde{x} = \tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} + \tilde{d}$ .

De plus, l'application  $\phi$  est linéaire et de norme 1. On montre qu'elle est injective. Par l'absurde, supposons qu'il existe une harmonique  $u$  de norme 1 telle que la moyenne de  $u$  sur chaque noyau de  $\Gamma$  soit nulle. Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un sommet  $v_i$  où  $u$  prend une valeur  $x_i > 1 - \epsilon$ . On choisit  $\epsilon = \frac{1}{5}$ . Comme la moyenne de  $u$  sur chaque noyau est nulle, il existe un sommet  $v_j$  dans le noyau contenant  $v_i$  tel que  $x_j :=$

$u(v_j) < 0$ . Comme le noyau est complet,  $v_i$  et  $v_j$  sont adjacents. La pente sur l'arête liant  $v_i$  à  $v_j$  orientée vers  $v_i$  est supérieure à  $\frac{4}{5}$ . Comme le degré de  $v_i$  vaut 4, il existe une arête liant  $v_i$  à un sommet  $v_k$  sur laquelle  $u$  a une pente supérieure à  $\frac{1}{5}$ . On obtient  $u(v_k) \geq 1$ . Ce qui contredit le fait que  $u$  est de norme 1, une harmonique ne pouvant pas atteindre sa norme en un sommet.

L'application  $\phi$  étant injective, on en déduit que  $\Gamma$  est un graphe de Liouville. □

Le but est alors d'étendre ce raisonnement à tout graphe périodique. Cependant, lorsque le noyau n'est pas complet, il n'apparaît pas de façon aussi évidente de créer une injection. Concernant la poursuite de cette recherche, j'essaierai donc de montrer le résultat pour les graphes périodiques ayant un noyau complet avant de m'attaquer au cas général.

Une autre idée qui a été exploitée est la suivante. On peut également caractériser le fait qu'un graphe périodique soit Liouville par la méthode suivante : soit  $\phi_1, \dots, \phi_m$  les translations induites par la périodicité d'un graphe  $G$ . On définit :

$$\begin{aligned} T_i : \mathcal{H}(\Gamma) \cap L^\infty(\Gamma) &\rightarrow \mathcal{H}(\Gamma) \cap L^\infty(\Gamma) \\ u &\mapsto T_i u := u \circ \phi_i \end{aligned}$$

Si pour tout  $1 \leq i \leq m$ ,  $T_i$  est l'identité alors l'ensemble des valeurs aux sommets d'une harmonique bornée sur  $G$  serait fini. Ceci étant impossible, on obtiendrait alors que tout graphe périodique est Liouville. Sans succès, il a été essayé d'utiliser le théorème d'analyse fonctionnelle suivant qui permet de caractériser l'identité en regardant le spectre :

**Théorème 2.7.** *Soit  $X$  un espace de Banach,  $T : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire borné. On suppose les deux hypothèses suivantes :*

- $T$  est inversible et  $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|T^n\| \leq K < \infty$ ,
- Le spectre de  $T$  vérifie  $\sigma(T) = \{1\}$ .

Alors  $T$  est l'identité sur  $X$ .

Les hypothèses se vérifient aisément sauf pour montrer que  $T_i + id$  est surjectif. On souhaite écrire chaque fonction harmonique bornée  $v$  sous la forme  $v = (T + id)u$ , ce qui donne formellement  $u = \sum_{n \geq 0} (-T)^n v$ . Il s'agit alors de montrer que  $u$  est bornée, ce qui constitue la difficulté dans ce problème.





# Les valeurs propres de multiplicité infinie sur les arbres

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on montre que sur un arbre infini uniformément localement fini, si une valeur propre admet une infinité de fonctions propres indépendantes alors l'espace propre associé contient un sous-espace isomorphe à  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ . On obtient également les inclusions suivantes pour le spectre dans le cas d'un arbre où chaque arête est de longueur 1 :

$$[0, \infty) \supset \mathbf{S}(T) \supset [0, \infty) \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)^2.$$

Par le biais d'exemples, nous montrons que ces inclusions sont optimales.

Il a été montré dans [6] que les valeurs propres du Laplacien sur un arbre uniformément localement fini sont positives et que si un arbre  $T$  admet uniquement un nombre fini de sommets de bord alors le spectre du Laplacien vaut exactement  $[0, \infty)$ . De plus, les valeurs propres sont de multiplicité finie pour tout graphe vérifiant  $\#V_{\text{ess}}(G) < \infty$ . Dans [5, Thm. 8.6] il a été montré le résultat suivant

**Théorème 3.1.** [5] *Soit  $T$  un arbre uniformément localement fini avec au plus un nombre fini de sommets du bord. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

- (a)  $\exists \lambda \in (0, \infty) : M(\lambda; T) = \infty$
- (b)  $\forall \lambda \in (0, \infty) : M(\lambda; T) = \infty$
- (c)  $\#V_{\text{ess}}(T) = \infty$

De plus, pour cette classe d'arbres, tous les arbres vérifiant  $V_{\text{ess}} = V_{\text{r}}$  ont le même spectre et chaque nombre réel strictement positif est une valeur propre *black hole*,

c'est-à-dire que l'espace propre contient un sous-espace isomorphe à  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ , voir [4]. En fait, chaque valeur propre de multiplicité infinie d'un arbre uniformément localement fini est une valeur propre *black hole*.

## 3.2 Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une valeur propre *black hole*

Pour une parfaite compréhension du théorème 3.3, on rappelle la construction faite par J. von Below et J. A. Lubary dans [4] d'une infinité de fonctions propres associées à tout  $\lambda \in (0, \infty)$  dans le cas d'un arbre infini  $T$  vérifiant  $\#V_b(T) < \infty$  et  $\#V_{ess}(T) = \infty$ .

**Théorème 3.2.** [4] Soit  $T$  un arbre uniformément localement fini vérifiant  $\#V_b(T) < \infty$  et  $\#V_{ess}(T) = \infty$ . Alors pour tout  $\lambda \in (0, \infty)$ ,  $M(\lambda; T) = \infty$ .

*Démonstration.* Soit  $B$  le plus petit sous-arbre connexe de  $T$  tel que  $V_b(T) \subset V(B)$ . Le graphe  $B$  est alors un graphe fini et il existe une infinité de sommets de  $V_{ess}(T)$  en dehors de  $B$ . On suppose que  $u$  est nulle sur  $B$  et que  $u$  s'annule sur chaque chemin joignant un sommet de  $V(B)$  aux nœuds de  $V_{ess}(T)$  les plus proches de  $B$ . On trouve un nombre fini d'arbres connexe et deux à deux disjoints  $T_1, \dots, T_\gamma$  tels que  $V_b(T_i) = \emptyset$ . Supposons que  $V_b(T) = \emptyset$  et que  $u(v_0) = 0$  où  $v_0$  est un nœud de ramification pour  $T$ . On définit  $v_0$  comme source et pour les autres sommets on définit l'orientation par  $\gamma_i^+ = 1$ ,  $\gamma_i^- = \gamma_i - 1$ . On choisit des pentes  $\psi_1, \dots, \psi_{\gamma(v_0)} \in \mathbb{R}$  telles que

$$\sum_{j=1}^{\gamma} \psi_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{\gamma} |\psi_j| > 0.$$

Alors il existe une unique fonction  $u \in \mathcal{C}^2(S)$  sur l'étoile dont le nœud de ramification est  $v_0$  vérifiant la loi de Kirchhoff en  $v_0$  et telle que pour tout  $1 \leq j \leq \gamma$ ,

$$\begin{cases} \partial_j^2 u_j = -\lambda u_j & \text{dans } [0, 1], \\ u(v_0) = 0, \\ d_{0j} \partial_j u_j(v_0) = \psi_j. \end{cases}$$

On étend  $u$  à  $T$  par récurrence : supposons que l'on fixe la valeur de  $u$  en  $v_{i-1}$  et la dérivée en  $v_{i-1}$  sur une arête  $e_1$  incidente à  $v_i$ . Alors la valeur de  $u$  en  $v_i$  et la dérivée  $\psi_{i1}$  en  $v_i$  sur l'arête  $e_1$  sont entièrement déterminées. On choisit alors les autres pentes sortantes de  $v_i$  de façon à ce que  $u$  soit bornée de la façon suivante :

$$\psi_{i1} = \sum_{j=2}^{\gamma(v_i)} \psi_{ij}, \quad \psi_{ij} = K_{ij} \psi_{i1} \text{ avec } 0 \leq K_{ij} \leq 1 \text{ pour } 2 \leq j \leq \gamma(v_i).$$

Il existe alors une unique fonction  $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_i)$  sur l'étoile dont le nœud de ramification est  $v_i$  vérifiant la loi de Kirchhoff en  $v_i$  et telle que pour tout  $1 \leq j \leq \gamma_i$ ,

$$\begin{cases} \partial_j^2 u_j = -\lambda u_j & \text{dans } [0, 1], \\ u_j(v_i) = u_1(v_i), \\ d_{ij} \partial_j u_j(v_i) = \psi_j. \end{cases}$$

Cette fonction  $u$  est alors une fonction bornée associée à  $\lambda$  et puisqu'il y a un nombre infini de nœuds de ramification essentielle, il y a un nombre infini de fonctions propres linéairement indépendantes.  $\square$

**Théorème 3.3.** *Soit  $T$  un arbre uniformément localement fini et  $\lambda \in [0, \infty)$ . Alors  $M(\lambda; T) = \infty$  si et seulement si l'espace propre dans  $\mathcal{C}_K^2(T) \cap L^\infty(T)$  contient un sous-espace isomorphe à  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $M(\lambda; T) = \infty$ .

- Si  $T$  contient un nombre fini de nœuds de ramification essentielle alors toutes les multiplicités sont finies. Ceci vient du fait que  $T$  est alors un graphe fini  $F$  et un nombre fini de chemins non bornés d'un côté  $\Gamma_0$  liés à  $F$  par son sommet du bord.
- Si  $V_{\text{ess}} = V_r$  et  $\#V_b(T) < \infty$  alors le résultat est prouvé dans [4, Thm. 3.2]. Dans ce cas, toutes les valeurs propres sont des black holes.  $T$  contient une famille dénombrable  $\{H_k | k \in \mathbb{Z}\}$  d'arbres disjoints isomorphes à  $H$  graphe dessiné dans la Figure 3.1. La construction dans la preuve du théorème 3.2 permet de construire

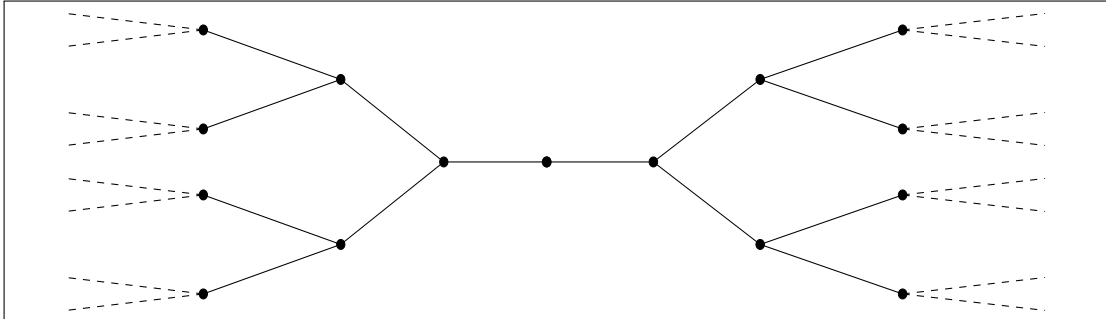
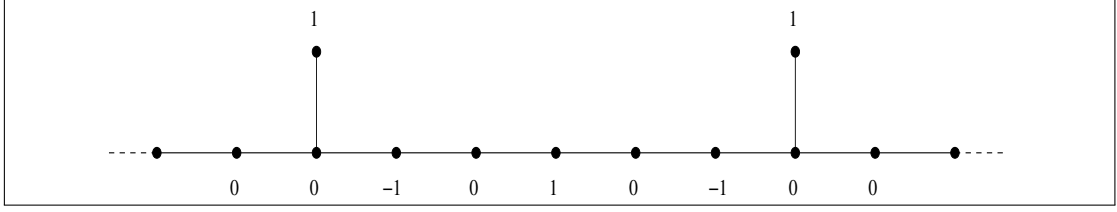


FIGURE 3.1 – L'arbre  $H$

une fonction propre  $u_k$  associée à  $\lambda$  dont le support est dans  $H_k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $\lambda \in [0, \infty)$  telle que  $u_k$  s'annule en  $v_k$  correspondant à  $h_0$ . Alors, pour chaque  $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} = x \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ , on associe la fonction propre  $u = \Phi(x)$  associée à  $\lambda$  en définissant

$$\forall k \in \mathbb{Z} : u|_{H_k} = x_k u_k$$

et on étend  $u$  par 0 aux autres nœuds de  $T$ . L'application  $\phi$  est injective grâce au fait que les  $H_k$  sont disjoints deux à deux.

FIGURE 3.2 – Une fonction à support compact pour  $\cos \sqrt{\lambda} = 0$ 

- c) Si  $\#\{v \in V_r(T) \mid \gamma^\circ(v) \geq 3\} < \infty$  alors  $T$  est constitué d'un arbre fini  $F$  connecté à un nombre fini de chemins non bornés d'un côté  $\Gamma_0$  dont chaque nœud peut posséder des arêtes supplémentaires. On appelle ces arbres  $\tau_1, \dots, \tau_m$ . Si  $\cos \sqrt{\lambda} \neq 0$ , alors la valeur et la pente au nœud initial déterminent entièrement la fonction propre ce qui permet de conclure que  $M(\lambda; T) < \infty$ . Supposons donc que  $\cos \sqrt{\lambda} = 0$ . Alors une fonction propre s'annule en chaque nœud adjacent aux sommets du bord, donc aux sommets de degré  $\geq 3$  dans chaque  $\tau_k$ . Par hypothèse, un de ces arbres  $\tau_k$  contient un nombre infini de nœuds de ramification essentielle notés  $w_i$  en suivant l'orientation de  $\Gamma_0$  dans  $\tau_k$ . Voici pourquoi :
- Si  $\#\{w_i \mid \gamma(w_i) \geq 4\} = \infty$ , alors c'est vrai en utilisant des paires de sommets du bord en tant que support bien choisi pour un cosinus. Alors, en augmentant  $F$  avec un sous-graphe fini convenable contenant un nombre fini de  $w_i$  avec  $\gamma(w_i) \geq 4$ , nous pouvons supposer que  $\tau_k$  contient seulement des nœuds de degrés 3, 2 ou 1. Mais alors le support d'une fonction propre ne peut pas contenir de paires de nœuds  $w_i$  et  $w_{i+1}$  de distance impaire. Alors, d'après la multiplicité infinie, il doit y avoir un nombre infini de paires différentes de nœuds de ramification  $w_i$  et  $w_{i+1}$  de distance paire. Ceci conduit à un nombre infini de fonctions propres linéairement indépendantes  $u_k$  de support compact comme dans la Figure 3.2. Nous avons une injection linéaire  $\Phi : \ell^\infty \rightarrow \mathcal{C}_K^2(T) \cap L^\infty(T)$  donnée par  $\Phi(\alpha) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k u_k$  pour  $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ .
- d) Si  $\#\{v \in V_r(T) \mid \gamma^\circ(v) \geq 3\} = \infty$  et  $\cos \sqrt{\lambda} \neq 0$  alors la même construction que dans la preuve du théorème 3.2 fonctionne.
- e) Il reste à montrer la propriété dans le cas  $\#\{v \in V_r(T) \mid \gamma^\circ(v) \geq 3\} = \infty$  et  $\cos \sqrt{\lambda} = 0$ . S'il existe au moins trois fonctions propres linéairement indépendantes sur un sous-graphe  $\Sigma$  de  $T$  alors il existe une fonction propre ayant son support dans  $\Sigma$  et s'annulant sur une arête donnée dans  $\Sigma$  puisque la multiplicité sur chaque arête est au moins 2. Ceci conduit à des supports *irréductibles* de fonctions propres qui ont au plus deux fonctions propres linéairement indépendantes. Sous l'hypothèse  $M(\lambda; T) = \infty$ , il existe une famille  $\{\Sigma_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  de sous-arbres irréductibles et de fonctions propres correspondantes linéairement indépendantes  $\{u_k \in \mathcal{C}_K^2(T) \cap L^\infty(T) \mid k \in \mathbb{N}\}$  telles que chaque  $u_k$  a son support

dans  $\Sigma_k$  et  $\|u_k\|_\infty \leq \frac{1}{1+k^2}$ , et tel que  $\Sigma_k$  possède une arête que tous les autres n'ont pas. Alors pour chaque  $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ ,

$$\Phi(\alpha) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k u_k$$

définit un élément de  $\mathcal{C}_K^2(T) \cap L^\infty(T)$ . De plus,  $\Phi : \ell^\infty \rightarrow \mathcal{C}_K^2(T) \cap L^\infty(T)$  est linéaire et injective par construction.

□

### 3.3 Le cas spécial où les longueurs valent un

Les valeurs propres dépendent fortement des longueurs des arêtes en général mais dans le cas où les arêtes ont toutes une longueur égale, tout nombre réel en dehors d'un ensemble dénombrable est valeur propre dans un arbre uniformément localement fini.

**Théorème 3.4.** *Soit  $T$  un arbre uniformément localement fini dont chaque arête est de longueur 1. Alors*

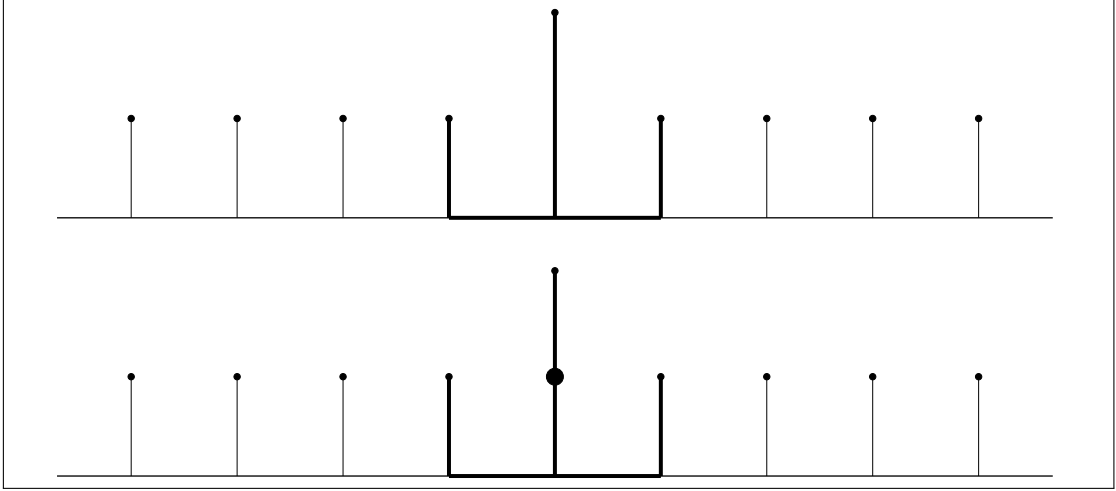
$$[0, \infty) \supset \mathbf{S}(T) \supset [0, \infty) \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)^2.$$

*Démonstration.* La première inclusion provient de [5, 6]. Pour la deuxième inclusion, soit  $\lambda$  tel que  $\cos \sqrt{\lambda} \neq 0$ , on peut suivre la construction d'une fonction propre dans [5, Thm. 8.4]. Par hypothèse, sur chaque arête  $k_j$  incidente à un sommet du bord, en donnant la valeur au nœud de ramification et une pente nulle sur le sommet du bord, on définit la restriction d'une fonction propre  $u_j$  sur cette arête. De plus à chaque nœud de ramification  $v$ , il existe au moins un nœud de ramification adjacent. Alors, la procédure d'itération citée marche aussi dans le cas présent. □

Notons que les deux inclusions sont optimales. Pour les arbres uniformément localement finis avec un nombre fini de sommets du bord  $[0, \infty) = \mathbf{S}(T)$ . Tandis que pour le peigne infini  $Z_1$ , i.e.  $\widetilde{Z}_2$  ci-dessous sans les arêtes du bord incidente aux sommets 1 et 2,  $\mathbf{S}(Z_1) = [0, \infty) \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)^2$ , voir [5, Ex. 8.2].

En fait en ajoutant une simple arête ou en doublant exactement la longueur d'une arête, on passe du spectre minimal au spectre maximal.

*Exemple 3.1.* Soit  $Z_2$  l'arbre obtenu en ajoutant dans  $\Gamma_1$  à chaque sommet une arête telle que chaque sommet du graphe obtenu a soit un degré 1 soit un degré 3 comme dans 3.3 et telle que la longueur d'une arête a une longueur 2 tandis que toutes les autres ont une longueur 1.

FIGURE 3.3 – Les arbres  $Z_2$  et  $\tilde{Z}_2$ 

Soit  $\tilde{Z}_2$  l'arbre obtenu en divisant dans  $Z_2$  l'arête de longueur 2 en deux arêtes de longueur 1. Le calcul du spectre ponctuel nous donne alors le résultat suivant :

$$\mathbf{S}(Z_2) = \mathbf{S}(\tilde{Z}_2) \supset [0, \infty) \setminus (2^{-1}\pi + \pi\mathbb{Z})^2.$$

la deuxième inclusion vient du Théorème 3.4. Pour  $\cos \sqrt{\lambda} = 0$ ,  $Z_2$  admet des fonctions propres de support compact dans le sous-graphe indiqué en gras dans 3.3. Ceci permet de conclure que  $\mathbf{S}(Z_2) = \mathbf{S}(\tilde{Z}_2) = [0, \infty)$  alors que  $\mathbf{S}(Z_1) = [0, \infty) \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})^2$ .

Revenons au Théorème 3.1 sous l'hypothèse que les longueurs des arêtes sont égales. On peut généraliser dans le cas d'une infinité de sommets du bord en prenant en compte le rôle spécial des valeurs propres de la forme  $\cos \sqrt{\lambda} = 0$ . En fait, ces nombres exceptionnels proviennent de la procédure d'itération de la preuve avant le théorème 3.3 et de l'équation  $\partial_j^2 u_j + \lambda u_j = 0$  sur une arête de bord  $e_j$  de longueur 1 sous une condition de Dirichlet in-homogène au nœud de ramification et une condition de Neumann au sommet du bord. Pour  $\cos \sqrt{\lambda} = 0$ , il n'est pas toujours possible d'étendre une fonction propre partiellement définie sur  $e_j$ .

**Théorème 3.5.** *Soit  $T$  un arbre uniformément localement fini dont chaque arête est de longueur 1. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $\exists \lambda \in (0, \infty) \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})^2 : M(\lambda; T) = \infty$
- (b)  $\forall \lambda \in (0, \infty) \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})^2 : M(\lambda; T) = \infty$
- (c)  $\#\{v \in V_r(T) \mid \gamma^\circ(v) \geq 3\} = \infty$

*Démonstration.* Dans un premier temps, notons que  $\mathbf{S}(T) \supset [0, \infty) \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})^2$  par le Théorème 3.4. Pour conclure (a)  $\Rightarrow$  (c), observons que pour les arbres  $T$  avec un

nombre fini de nœuds internes satisfaisant  $\gamma^\circ(v) \geq 3$ , la valeur propre  $\lambda$  a une multiplicité finie, puisque  $\cos \sqrt{\lambda} \neq 0$  et  $T$  a la forme spéciale indiquée dans c) dans la preuve du Théorème 3.3.

Il reste à montrer (c)  $\Rightarrow$  (b). En fait, on peut suivre la construction dans la preuve de [5, Thm. 8.4]. L'hypothèse  $\#\{v \in V_r(T) \mid \gamma^\circ(v) \geq 3\} = \infty$  garantit que la construction récursive dans la preuve citée conduit à un nombre infini de fonctions propres linéairement indépendantes.  $\square$

On donne un exemple pour montrer que ce résultat ne peut marcher ni dans le cas des valeurs propres de la forme  $\cos \sqrt{\lambda} = 0$  ni pour les arbres sans la condition (c).

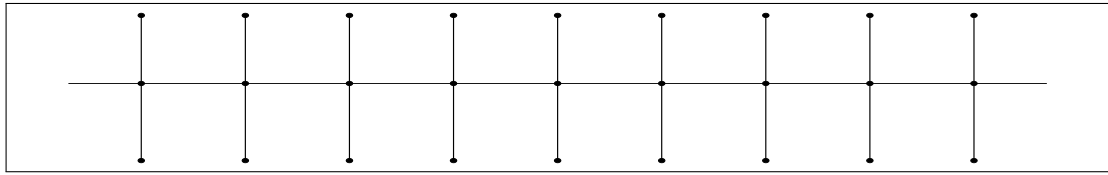


FIGURE 3.4 – Le graphe  $G$

*Exemple 3.2.* Soit  $G$  l'arbre de la figure 3.4. Pour  $\lambda = 0$ , à chaque sommet du bord, la pente s'annule et donc chaque fonction harmonique bornée sur  $G$  donne une harmonique bornée sur  $\Gamma_1$  et est donc constante. Dans le cas général, on a

$$M(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 0, \\ 2 & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} \neq 0, \\ \infty & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = 0. \end{cases}$$

*Remarque 3.1.* Pour les arbres possédant des arêtes de longueur  $\ell > 0$ , les valeurs exceptionnelles s'écrivent  $(\frac{1}{\ell}(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}))^2$ . Le Théorème 3.4 peut être généralisé par la formule

$$[0, \infty) \supset \mathbf{S}(T) \supset [0, \infty) \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{\ell_j^2} \left( \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right)^2.$$

Si  $-\Delta$  est remplacé par le laplacien canonique

$$\Delta_G^K = \left( u \mapsto \left( \ell_j^2 \partial_j^2 u_j \right)_{j \in \mathbb{N}} \right),$$

sous des conditions de continuité en  $V_r$  et sous les conditions de Kirchhoff

$$\forall i \in \mathbb{N} : \sum_{j \in \mathbb{N}} d_{ij} \ell_j^2 \partial_j u_j(v_i) = 0,$$

alors les Théorèmes 3.4 et 3.5 restent vrais et les zéros de  $\cos \sqrt{\lambda}$  jouent le même rôle qu'au-dessus.





# Comportement asymptotique des valeurs propres sur les graphes finis

## 4.1 Introduction

Je rappelle les travaux de H. Weyl concernant l'asymptotique des valeurs propres. Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $\lambda_k$  la  $k$ -ième valeur propre du laplacien avec des conditions de bord de Dirichlet alors :

$$\lambda_k \sim C(\Omega)k^{2/n} \text{ avec } C(\Omega) = \frac{4\pi^2}{(v_n \text{mes}_n(\Omega))^{2/n}}$$

où  $v_n$  est le volume de la boule unité dans  $\mathbb{R}^n$ . On travaille ici à trouver une telle formule de Weyl dans le cadre des réseaux. Les opérateurs elliptiques sur les réseaux ont été étudiés par plusieurs auteurs. On peut citer par exemple [14] et [56]. Dans [17], il a été prouvé une formule de Weyl concernant les valeurs propres d'opérateurs elliptiques sur des réseaux finis sous des conditions de Kirchhoff de la forme  $\sum_{j=1}^N d_{ij}c_{ij}\partial_j u_j(v_i) + \rho_i u(v_i) = 0$ . Cette formule de Weyl s'écrit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_k|}{k^2} = \pi^2 \left( \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{1}{\sqrt{a_j}} dx_j \right)^{-2}$$

où  $\lambda_k$  est la  $k$ -ième valeur propre comptée suivant les multiplicités algébriques. Dans [15, Chap. 20], la même formule est obtenue sous une condition de Kirchhoff dynamique  $\sum_{j=1}^N d_{ij}c_{ij}\partial_j u_j(v_i) + \rho_i u(v_i) = \lambda \sigma_i u(v_i)$  pour le cas consistant. Motivé par ces deux articles, on prouve cette formule dans le cas dynamique sans l'hypothèse de consistance. Les conditions dynamiques ont leur origine dans la modélisation en neurobiologie. Dans ce sens, dans [21], H. Camerer donne un modèle décrivant la propagation de l'information dans un neurone.

## 4.2 Conditions de transition et opérateurs elliptiques

On reprend les notations standards de la théorie des graphes qui ont été présentées dans le préambule. Nous allons rappeler les conditions de continuité aux nœuds. Nous imposons la condition de continuité suivante :

$$\forall v_i \in V_r : e_j \cap e_s = \{v_i\} \Rightarrow u_j(v_i) = u_s(v_i). \quad (4.1)$$

De plus, à chaque sommet, nous imposons une condition de Kirchhoff généralisée qui intervient dans le problème aux valeurs propres (4.5) :

$$\sum_{j=1}^N d_{ij} c_{ij} \partial_j u_j(v_i) + \rho_i u(v_i) = \lambda \sigma_i u(v_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n \quad (4.2)$$

avec les poids  $c_{ij} > 0$  et les termes de potentiels  $\rho_i \in \mathbb{R}$ . La condition de Kirchhoff est indépendante de l'orientation choisie. Cette condition est dite non dynamique si  $\sigma = 0$  et dynamique si  $\sigma_i \neq 0$  pour un indice  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dans la suite, nous utiliserons également la notion de continuité fractionnée c'est-à-dire :

$$\exists \phi \in \mathbb{C}^n, \forall v_i \in V_r : v_i \in e_j \Rightarrow u_j(v_i) = \alpha_{ij} \phi_i, \quad (4.3)$$

où chaque  $\alpha_{ij}$  est supposé strictement positif. Sur chaque arête, nous considérons un opérateur elliptique différentiel de la forme :

$$L_j = a_j \partial_j^2 + b_j \partial_j + q_j$$

où les coefficients  $a_j, b_j, q_j$  sont continus et réels vérifient

$$a_j \in C^2([0, l_j]) \text{ et } a_j \geq \delta > 0 \text{ pour tout } 1 \leq j \leq N. \quad (4.4)$$

Les opérateurs  $L_j$  définissent l'opérateur :

$$L = (u \rightarrow (L_j u_j)_{N \times 1}) : \mathcal{C}^2(G) \rightarrow \prod_{j=1}^N \mathcal{C}[0, l_j]$$

sur un  $\mathcal{C}^2$ -réseau.

Nous considérons le problème spectral suivant :

$$\begin{cases} 0 \neq u \text{ et } L_j u_j = -\lambda u_j & \text{pour } 1 \leq j \leq N, \\ \sum_{j=1}^N d_{ij} c_{ij} \partial_j u_j(v_i) + \rho_i u(v_i) = \lambda \sigma_i u(v_i) & \text{pour } 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (4.5)$$

Pour s'attaquer à ce problème, il est commode d'écrire les opérateurs sous la forme d'opérateurs de Sturm-Liouville :

$$\frac{1}{r_j} \partial_j (p_j \partial_j u_j) + q_j u_j = -\lambda u_j \quad (4.6)$$

sur l'intervalle  $[0, l_j]$ . Pour cela, on applique la transformation suivante :

$$p_j(x_j) = \eta_j \exp\left(\int_0^{x_j} \frac{b_j(\xi_j)}{a_j(\xi_j)} d\xi_j\right), r_j(x_j) = \frac{p_j(x_j)}{a_j(x_j)}$$

avec le paramètre  $\eta_j$  vérifiant  $\eta_j > 0$ . D'après [16] et [15, Chap. 18 et 22], il est possible d'écrire ce problème différentiel sous la forme algébrique  $Fy = -\lambda Gy$  qui mène au résultat sur l'asymptotique dans le cas S-hermitien. Dans le cas général, nous verrons qu'une approche d'analyse complexe est plus adaptée au problème. Nous écrirons qu'une valeur propre doit être une racine d'une fonction holomorphe. La première difficulté est d'écrire le problème différentiel (4.5) comme un problème aux valeurs propres matriciel comme dans [17].

### 4.3 Calcul des valeurs propres dans le cas du Laplacien canonique

Pour situer le problème, on traite un premier exemple dans lequel on calcule les valeurs propres du Laplacien sur un graphe comportant peu d'arêtes. Sur un triangle

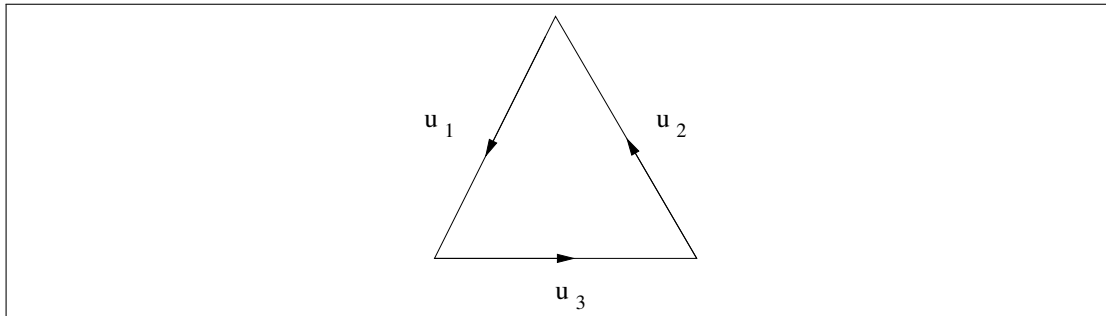


FIGURE 4.1 – Un premier exemple

dont les trois arêtes sont de longueur un, on donne l'orientation et les notations de la Fig. 4.1. Les solutions de  $\Delta u = -\lambda u$  pour  $\lambda > 0$  s'écrivent sur chaque arête de la façon suivante :

$$u_i(x) = a_i \cos(\sqrt{\lambda}x) + b_i \sin(\sqrt{\lambda}x) \text{ pour } 1 \leq i \leq 3.$$

La variable  $x$  désigne le paramètre de la longueur d'arc sur chaque arête et on peut utiliser la même variable sur chaque arête sans crainte de confusion. Les conditions de continuité aux nœuds impliquent :

$$\begin{aligned} u_1(0) = u_2(1) &\Leftrightarrow a_1 = a_2 \cos \sqrt{\lambda} + b_2 \sin \sqrt{\lambda}, \\ u_1(1) = u_3(0) &\Leftrightarrow a_3 = a_1 \cos \sqrt{\lambda} + b_1 \sin \sqrt{\lambda}, \\ u_3(1) = u_2(0) &\Leftrightarrow a_2 = a_3 \cos \sqrt{\lambda} + b_3 \sin \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Les conditions de Kirchhoff impliquent :

$$\begin{aligned} u'_1(0) = u'_2(1) &\Leftrightarrow b_1 = -a_2 \sin \sqrt{\lambda} + b_2 \cos \sqrt{\lambda}, \\ u'_1(1) = u'_3(0) &\Leftrightarrow b_3 = -a_1 \sin \sqrt{\lambda} + b_1 \cos \sqrt{\lambda}, \\ u'_3(1) = u'_2(0) &\Leftrightarrow b_2 = -a_3 \sin \sqrt{\lambda} + b_3 \cos \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Si  $\cos \sqrt{\lambda} = 1$ , l'espace des solutions est engendré par  $(\cos \sqrt{\lambda}x, \sin \sqrt{\lambda}x)$ .

Si  $\cos \sqrt{\lambda} = -1$ , il n'y a pas de solution non nulle. Supposons donc que  $\sin \sqrt{\lambda} \neq 0$ . A partir des conditions de continuité, nous obtenons les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{a_1 - a_2 \cos \sqrt{\lambda}}{\sin \sqrt{\lambda}}, \\ b_1 &= \frac{a_3 - a_1 \cos \sqrt{\lambda}}{\sin \sqrt{\lambda}}, \\ b_3 &= \frac{a_2 - a_3 \cos \sqrt{\lambda}}{\sin \sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

On incorpore ces valeurs dans les conditions de Kirchhoff afin d'obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 2a_1 \cos \sqrt{\lambda}, \\ a_1 + a_3 = 2a_2 \cos \sqrt{\lambda}, \\ a_1 + a_2 = 2a_3 \cos \sqrt{\lambda}. \end{cases}$$

La valeur  $\lambda$  est donc valeur propre du problème différentiel si  $2 \cos \sqrt{\lambda}$  est valeur propre de la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  c'est-à-dire  $-1$  ou  $2$ . Finalement, les valeurs propres

vérifient  $\cos \sqrt{\lambda} = 1$  ou  $\cos \sqrt{\lambda} = -\frac{1}{2}$ . Dans [7], le calcul des valeurs propres et des multiplicités géométriques a été effectué. Ce calcul a été généralisé aux multiplicités

algébriques. Nous rappelons le calcul des multiplicités algébriques fait dans [18] qui donne une solution générale au problème de valeurs propres. Les auteurs ont traité le

cas spécial du Laplacien *canonique*  $\Delta = \left( u \mapsto \left( \partial_j^2 u_j \right) \right)_{N \times 1} : C_K^2(G) \rightarrow \prod_{j=1}^N C([0, 1])$  sous

une condition de Kirchhoff de la forme suivante :

$$\sum_{j=1}^N d_{ij} c_{ij} \partial_j u_j(v_i) = 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

**Théorème 4.1** ([18]). *Pour le laplacien canonique sous condition de continuité aux sommets et sous des conditions de Kirchhoff classiques, nous avons :*

$$m_a(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 0, \\ m_a(\cos(\sqrt{\lambda}, \mathcal{Z}) & \text{si } \sin \sqrt{\lambda} \neq 0, \\ N - n + 2 & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = 1, \\ N - n + 2 & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = -1, \Gamma \text{ biparti,} \\ N - n & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = -1, \Gamma \text{ non biparti,} \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $m_a(x, \mathcal{A})$  désigne la multiplicité algébrique de  $x$  en temps que valeur propre de la matrice  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{Z} = \text{Diag}[\mathcal{C} \mathbf{e}]^{-1} \mathcal{C}$  et  $\mathcal{C} = (c_{is(i,h)} e_{ih})_{n \times n}$ .

## 4.4 Écriture matricielle

En suivant les transformations dans [7] [15], le problème aux valeurs propres (4.5) est équivalent au problème différentiel matriciel (4.10) - (4.15) ci-dessous où figure la matrice d'adjacence du réseau. Nous rappelons que le produit d'Hadamard de matrices de même taille est défini par  $(a_{ik}) * (b_{ik}) = (a_{ik} b_{ik})$ . Posons  $\sigma = (\sigma_i)_{n \times 1}$  et définissons la matrice diagonale ayant  $\sigma$  comme diagonale principale par  $\text{Diag}[\sigma] = (\delta_{ik} \sigma_i)_{n \times n}$ . Le vecteur colonne dont les coefficients sont égaux à 1 est noté  $\mathbf{e}$  et on note également  $\mathbf{e}^*$  le vecteur transposé de  $\mathbf{e}$ . Comme dans [16], une transformation de Liouville du problème (4.6) est donnée par

$$\xi_j(x_j) = \int_0^{x_j} \sqrt{\frac{r_j(s)}{p_j(s)}} ds, \quad K_j = \int_0^{l_j} \sqrt{\frac{r_j(s)}{p_j(s)}} ds,$$

$$U_j(\xi_j) = \sqrt{K_j} \sqrt[4]{p_j(x_j) r_j(x_j)} u_j(x_j).$$

On pose  $\alpha_j(x_j) = \sqrt{K_j} \sqrt[4]{p_j(x_j) r_j(x_j)}$  et on note  $\mathcal{K} = (e_{ih} K_{s(i,h)})_{n \times n}$ . Sur chaque arête, l'équation est maintenant de la forme

$$\frac{d^2}{d\xi_j^2} U_j(\xi_j) + Q_j(\xi_j) U_j(\xi_j) = -\lambda U_j(\xi_j) \text{ pour } \xi_j \in [0, K_j] \quad (4.8)$$

où

$$Q_j(\xi_j) = \frac{1}{\alpha_j(x_j)(\xi_j'(x_j))^2} \left( \xi_j''(x_j) \sqrt{\frac{p_j(x_j)}{r_j(x_j)}} \alpha_j''(x_j) + \frac{r_j(x_j)\alpha_j(x_j)q_j(x_j)}{p_j(x_j)} - \alpha_j''(x_j) \right).$$

L'opérateur sur chaque arête est maintenant un opérateur de Schrödinger. Mais les conditions de transitions changent brutalement : la condition de continuité (4.1) devient une condition de continuité fractionnée de la forme (4.3) avec

$$\alpha_{ij} = \sqrt{K_j} \sqrt[4]{p_j(v_i)r_j(v_i)}.$$

On note  $\tilde{\mathcal{A}} = (e_{ih}\alpha_{is(i,h)})_{n \times n}$ . De plus, les conditions de Kirchhoff prennent maintenant la forme

$$\sum_{j=1}^N d_{ij} C_{ij} \partial_j U_j(v_i) = \sum_{j=1}^N d_{ij} b_{ij} U_j(v_i) + \lambda \sum_{j=1}^N d_{ij}^2 h_{ij} U_j(v_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n \quad (4.9)$$

où les  $b_{ij}$  sont réels et dépendent de  $K_j$  et des valeurs aux nœuds de

$r_j, \partial_j r_j, p_j, \partial_j p_j, \rho_i, c_{ij}$ , de plus on a  $C_{ij} = \frac{c_{ij}}{\alpha_{ij}} \sqrt{\frac{r_j(v_i)}{p_j(v_i)}}$  et  $h_{ij} = \frac{\sigma_i}{\gamma_i \alpha_{ij}}$ . On pose  $\mathcal{B} = (e_{ih} b_{is(i,h)})_{n \times n}$  et  $\mathcal{H} = (e_{ih} h_{is(i,h)})_{n \times n}$  et la matrice de conductivité  $\mathcal{C} = (e_{ih} C_{is(i,h)})$ . Pour  $x \in [0, 1]$ , on définit

$$t_{ih}(x) = K_{s(i,h)} \left( \frac{1 + d_{is(i,h)}}{2} - x d_{is(i,h)} \right)$$

et les matrices

$$\mathcal{U}(x) = (U_{ih}(x))_{n \times n}, \quad \mathcal{Q}(x) = (Q_{ih}(x))_{n \times n}$$

par

$$U_{ih}(x) = e_{ih} U_{s(i,h)}(t_{ih}(x)), \quad Q_{ih}(x) = e_{ih} Q_{s(i,h)}(t_{ih}(x)).$$

Le problème aux valeurs propres (4.5) est alors équivalent au problème matriciel suivant :

$$U_{ih} \in C^2([0, 1]) \quad \text{pour tout } 1 \leq i, h \leq n \quad (4.10)$$

$$e_{ih} = 0 \Rightarrow U_{ih} = 0 \quad (4.11)$$

$$\mathcal{K}^{(-2)} * \mathcal{U}'' + \mathcal{Q} * \mathcal{U} = -\lambda \mathcal{U} \text{ dans } [0; 1] \quad (4.12)$$

$$\exists \phi \in \mathbb{C}^n, \quad \mathcal{U}(0) = \phi \mathbf{e}^* * \tilde{\mathcal{A}} \quad (4.13)$$

$$(\mathcal{C} * \mathcal{K}^{(-1)} * \mathcal{U}'(0)) \mathbf{e} = (\mathcal{B} * \mathcal{U}(0)) \mathbf{e} + \lambda (\mathcal{H} * \mathcal{U}(0)) \mathbf{e} \quad (4.14)$$

$$\mathcal{U}'(x) = \mathcal{U}(1-x) \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (4.15)$$

En utilisant un argument de perturbation, voir [47], concernant le comportement asymptotique, on peut supposer que  $Q = 0$  puisque les valeurs propres  $\lambda_k^\Delta$  du Laplacien canonique  $\Delta$  et celles de  $\lambda_k^{\Delta+\mathcal{Q}}$  de  $\Delta + \mathcal{Q}$  vérifient une inégalité de la forme

$$|\lambda_k^{\Delta+\mathcal{Q}} - \lambda_k^\Delta| \leq \text{cst.} \|\mathcal{Q}\|_\infty.$$

On traite d'abord le cas  $K_1 = \dots = K_N = K$ .

**Lemme 4.1.** *Supposons  $K_1 = \dots = K_N = K$ . Alors les deux cas suivants sont possibles :*

*soit  $\lambda$  satisfait  $\sin(\sqrt{\lambda}K) = 0$ ,  
soit  $\lambda$  vérifie l'équation caractéristique*

$$\mathcal{G}(\lambda) := \det \left( \mathcal{C} * \mathcal{K}^{(-1)} * \tilde{\mathcal{A}}^t - \cos(\sqrt{\lambda}K) \text{Diag}[(\mathcal{C} * \mathcal{K}^{(-1)} * \tilde{\mathcal{A}}) \mathbf{e}] - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}K)}{\sqrt{\lambda}K} \text{Diag}[(\mathcal{B} * \tilde{\mathcal{A}}) \mathbf{e}] - \frac{\sqrt{\lambda}}{K} \sin(\sqrt{\lambda}K) \text{Diag}[(\mathcal{H} * \tilde{\mathcal{A}}) \mathbf{e}] \right) = 0. \quad (4.16)$$

*Démonstration.* La solution  $U$  au problème différentiel s'écrit

$$\mathcal{U}(x) = \cos(x\sqrt{\lambda}K) \mathcal{U}(0) + \frac{\sin(x\sqrt{\lambda}K)}{\sqrt{\lambda}K} \mathcal{U}'(0).$$

Supposons que  $\sin(\sqrt{\lambda}K) \neq 0$ , alors on obtient

$$\mathcal{U}'(0) = \frac{\sqrt{\lambda}K}{\sin(\sqrt{\lambda}K)} \left( \mathcal{U}(1) - \cos(\sqrt{\lambda}K) \phi \mathbf{e}^* * \tilde{\mathcal{A}} \right). \quad (4.17)$$

Alors en insérant (4.17) dans (4.14) et en utilisant (4.14), on obtient le résultat.  $\square$



En utilisant un argument présent dans [17] [55], la suite des valeurs propres  $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  croît quadratiquement en module et vérifie

$$0 < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_k|}{k^2} < \infty$$

et asymptotiquement, on peut supprimer la matrice  $\mathcal{B}$ . On sépare le problème en deux parties en distinguant le cas  $(U(v_i))_{n \times 1} = 0$  du cas  $(U(v_i))_{n \times 1} \neq 0$ . Si  $(U(v_i))_{n \times 1} = 0$ , alors  $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$  et (4.10)-(4.15) s'écrit maintenant :

$$U_{ih} \in C^2([0, 1]) \quad \text{pour tout } 1 \leq i, h \leq n \quad (4.18)$$

$$e_{ih} = 0 \Rightarrow U_{ih} = 0 \quad (4.19)$$

$$\mathcal{K}^{(-2)} * \mathcal{U}'' = -\lambda \mathcal{U} \text{ dans } [0; 1] \quad (4.20)$$

$$\mathcal{U}(0) = 0 \quad (4.21)$$

$$(\mathcal{C} * \mathcal{K}^{(-1)} * \mathcal{U}'(0))\mathbf{e} = 0 \quad (4.22)$$

$$\mathcal{U}^t(x) = \mathcal{U}(1-x) \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (4.23)$$

Ce problème est un problème aux valeurs propres bien posé qui correspond au problème différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \neq u \text{ et } \frac{1}{K_j^2} u_j'' = -\lambda u_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N, \\ \sum_{j=1}^N d_{ij} \frac{c_{ij}}{K_j} \partial_j u_j(v_i) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n. \\ u(v_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Pour une fonction  $u : G \rightarrow \mathbb{C}$ , on note les valeurs aux sommets

$$\mathbf{n}(u) = (u(v_i))_{n \times 1}.$$

Nous comptons maintenant les fonctions satisfaisant le problème ci-dessus. Posons  $C_K^2(G) := \{u \in C(G) \mid \forall j \in \{1, \dots, N\} u_j \in C^2([0, 1]), u \text{ vérifie (4.24)}\}$ ,  $T_j u_j := \frac{1}{K_j^2} u_j''$  et

$$T : C_K^2(G) \cap \{u \mid \mathbf{n}(u) = 0\} \rightarrow \prod_{j=1}^N C([0, 1])$$

$$u \mapsto (T_j u_j)_{n \times 1}.$$

On définit  $\kappa := \min \{k \in \mathbb{N} \mid \ker(T + \lambda I)^{k+1} = \ker(T + \lambda I)^k\}$  et  $E^c(\lambda, T) := \ker(T + \lambda I)^\kappa$ . Il y a  $\dim_{\mathbb{C}} E^c(\lambda, T)$  fonctions linéairement indépendantes satisfaisant le problème. De plus, d'après [18], pour  $K = 1$ ,

$$\dim_{\mathbb{C}} E^c(\lambda, T) = \begin{cases} N - n + 1 & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = 1, \\ N - n + 1 & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = -1 \text{ et } \Gamma \text{ biparti,} \\ N - n & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = -1 \text{ et } \Gamma \text{ non biparti.} \end{cases}$$

Si  $(U(v_i))_{n \times 1} \neq 0$ , la définition de la multiplicité algébrique pour le problème (4.10) - (4.15) est plus difficile. On réécrit le problème avec  $\mathcal{Q} = \mathcal{B} = 0$  :

$$U_{ih} \in C^2([0, 1]) \quad \text{pour tout } 1 \leq i, h \leq n \quad (4.25)$$

$$e_{ih} = 0 \Rightarrow U_{ih} = 0 \quad (4.26)$$

$$\mathcal{K}^{(-2)} * \mathcal{U}'' = -\lambda \mathcal{U} \text{ dans } [0; 1] \quad (4.27)$$

$$\exists \phi \in \mathbb{C}^n, \quad \mathcal{U}(0) = \phi \mathbf{e}^* * \tilde{\mathcal{A}} \quad (4.28)$$

$$(\mathcal{C} * \mathcal{K}^{(-1)} * \mathcal{U}'(0)) \mathbf{e} = \lambda (\mathcal{H} * \mathcal{U}(0)) \mathbf{e} \quad (4.29)$$

$$\mathcal{U}^t(x) = \mathcal{U}(1-x) \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (4.30)$$

L'équation caractéristique correspondant avec (4.25) - (4.30) s'écrit

$$\mathcal{G}(\lambda) = \det \left( \mathcal{C} * \mathcal{K}^{(-1)} * \tilde{\mathcal{A}}^t - \cos(\sqrt{\lambda} K) \text{Diag}[(\mathcal{C} * \mathcal{K}^{(-1)} * \tilde{\mathcal{A}}) \mathbf{e}] \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\lambda}}{K} \sin(\sqrt{\lambda} K) \text{Diag}[(\mathcal{H} * \tilde{\mathcal{A}}) \mathbf{e}] \right) = 0. \quad (4.31)$$

En choisissant des paramètres  $\eta_j$  convenables, on peut toujours supposer que le rayon spectral de  $Z = \text{Diag}[(\mathcal{C} * \mathcal{K}^{(-1)} * \tilde{\mathcal{A}})\mathbf{e}]^{-1} (\mathcal{C} * \mathcal{K}^{(-1)} * \tilde{\mathcal{A}}^t)$  vaut 1. Nous donnons la définition suivante et nous montrons qu'elle étend la définition de la multiplicité algébrique donnée dans le cas non dynamique. On note par  $\mathbf{m}(z_0, f)$  l'ordre de  $z_0$  en tant que zéro de la fonction complexe  $f$ .

**Définition 4.1.** On définit les multiplicités algébriques du problème (4.25)-(4.30) comme suit :

$$m_a(\lambda) := \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} E^c(\lambda, T) + \mathbf{m}(\lambda, \mathcal{G}) - 1 & \text{si } \sin(\sqrt{\lambda}K) = 0 \text{ et } \mathcal{G}(\lambda) = 0, \\ \dim_{\mathbb{C}} E^c(\lambda, T) & \text{si } \sin(\sqrt{\lambda}K) = 0 \text{ et } \mathcal{G}(\lambda) \neq 0, \\ \mathbf{m}(\lambda, \mathcal{G}) & \text{si } \sin(\sqrt{\lambda}K) \neq 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

L'équation caractéristique pour le laplacien canonique avec  $\sigma = 0$  s'écrit :

$$\mathcal{G}(\lambda) = \det\left(\mathcal{C} - \cos(\sqrt{\lambda}) \text{Diag}[\mathcal{C}\mathbf{e}]\right) = 0. \quad (4.33)$$

**Proposition 4.1.** *Pour le laplacien canonique sous condition de continuité aux sommets et sous des conditions de Kirchhoff classiques, si  $\sigma = 0$ , la définition 4.1 mène au même calcul des multiplicités algébriques.*

*Démonstration.* Si  $\lambda \neq 0$ ,

$$\dim_{\mathbb{C}} E^c(\lambda, T) = \begin{cases} N - n + 1 & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = 1, \\ N - n + 1 & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = -1 \text{ et } \Gamma \text{ biparti,} \\ N - n & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = -1 \text{ et } \Gamma \text{ non biparti.} \end{cases}$$

Posons

$$\phi(\lambda) := \det(\mathcal{C} - \lambda \text{Diag}[\mathcal{C}\mathbf{e}]).$$

On remarque que  $m_a(\cos \sqrt{\lambda}, \text{Diag}[\mathcal{C}\mathbf{e}]^{-1}\mathcal{C}) = \mathbf{m}(\cos \sqrt{\lambda}, \phi)$  et  $\mathcal{G}(\lambda) = \phi(\cos \sqrt{\lambda})$ . Pour  $\sin \sqrt{\lambda} \neq 0$ ,  $\phi(\cos \sqrt{\lambda}) = \phi'(\cos \sqrt{\lambda}) = \dots = \phi^{(k)}(\cos \sqrt{\lambda}) = 0$  et  $\phi^{(k+1)}(\cos \sqrt{\lambda}) \neq 0$  est équivalent à  $\mathcal{G}(\lambda) = \dots = \mathcal{G}^{(k)}(\lambda) = 0$  et  $\mathcal{G}^{(k+1)}(\lambda) \neq 0$ .

D'où,  $\mathbf{m}(\lambda, \mathcal{G}) = \mathbf{m}(\cos \sqrt{\lambda}, \phi) = m_a(\cos \sqrt{\lambda}, Z)$ .

En appliquant le théorème de Perron-Frobenius comme dans [15] pour  $\sin \sqrt{\lambda} = 0$ ,  $m_a(\cos \sqrt{\lambda}, Z) \leq 1$  et nous obtenons  $\phi(\cos \sqrt{\lambda}) = 0$ ,  $\phi'(\cos \sqrt{\lambda}) \neq 0$  est équivalent à  $\mathcal{G}(\lambda) = \mathcal{G}'(\lambda) = 0$  et  $\mathcal{G}''(\lambda) \neq 0$ .  $\square$

La définition 4.1 étend la définition classique du cas non dynamique au cas dynamique.

## 4.5 Comportement asymptotique

Dans le cas consistant, c'est-à-dire quand les poids  $c_{ij}$  coïncident avec  $p_j(v_i)$  alors d'après [14] et [15], les valeurs propres sont réelles. Dans les autres cas, des valeurs propres complexes peuvent apparaître et l'on connaît l'ordre de croissance. Par exemple, en reprenant le graphe de l'exemple 4.1 avec une condition de Kirchhoff donnée par les coefficients

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/6 & 5/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le Laplacien canonique, il existe alors des valeurs propres non réelles puisque  $\mathcal{C}$  admet des valeurs propres complexes. Nous rappelons le résultat de [17] à propos du cas non dynamique.

**Théorème 4.2.** [17] *Dans le cas non dynamique, c'est-à-dire  $\sigma = 0$ , sous les hypothèses imposées aux coefficients (4.4), les valeurs propres du problème (4.5) avec  $c_{ij} > 0$  vérifient*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_k|}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Re \lambda_k}{k^2} = \pi^2 \left( \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{1}{\sqrt{a_j}} dx_j \right)^{-2} \quad (4.34)$$

où les valeurs propres sont comptées selon leur multiplicité algébrique.

Nous allons voir que dans le cas dynamique, le comportement asymptotique est le même. D'abord, on traite le cas du laplacien canonique.

**Théorème 4.3.** *Supposons que  $K_1 = \dots = K_N = 1$  et  $\sigma_i \neq 0$  pour tout  $i$  de 1 à  $n$ . On suppose également  $\mathcal{Q} = \mathcal{B} = 0$ . Sous les hypothèses (4.4), l'asymptotique des valeurs propres du problème (4.5) avec  $c_{ij} > 0$  est donnée par*

$$|\lambda_k| = \frac{\pi^2}{N^2} k^2 + O(1). \quad (4.35)$$

où les valeurs propres sont comptées suivant leur multiplicité algébrique.

*Démonstration.* On développe le déterminant

$$\Delta(z) := \mathcal{G}(z^2) = P(z \sin z, \cos z)$$

où

$$P(X, Y) = a_{n,0} X^n + \sum_{j=0}^{n-1} X^j \sum_{i=0}^{n-j} a_{j,i} Y^i. \quad (4.36)$$

On pose  $g(z) = a_{n,0}(z \sin(z))^n$ . Appliquons le théorème de Rouché au domaine  $|z \sin(z)| < A$  pour  $A$  suffisamment grand pour compter le nombre de valeurs propres satisfaisant  $\sin \sqrt{\lambda} \neq 0$ . Notons que  $\{z : |z \sin(z)| = A\}$  définit des courbes simples. Ces courbes admettent une composante connexe dans la bande  $j\pi - \frac{\pi}{2} < \Re z < j\pi + \frac{\pi}{2}$  pour tout  $j$  suffisamment grand. Cette composante connexe est notée  $\Gamma_j$ . On définit  $a_{j,i} = 0$  pour tout  $i > n - j$ . Sur  $\Gamma_j$ ,

$$|\cos z|^2 \leq 1 + \frac{A^2}{|z|^2}.$$

Alors, si  $|z| > A$ ,  $|\cos z| \leq \sqrt{2}$ . Notons que

$$|g(z) - \Delta(z)| = \left| \sum_{j=0}^{n-1} (z \sin z)^j \sum_{i=0}^{n-j} a_{j,i} (\cos z)^i \right|.$$

Posons  $M = \max_{i,j} |a_{j,i}|$ . Alors, pour  $|z| > A$ ,

$$|g(z) - \Delta(z)| \leq M \frac{(\sqrt{2})^{n+1} - 1}{\sqrt{2} - 1} \frac{A^n - 1}{A - 1}.$$

Choisissons

$$A = 1 + \frac{M}{|a_{n,0}|} \frac{(\sqrt{2})^{n+1} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

et on obtient

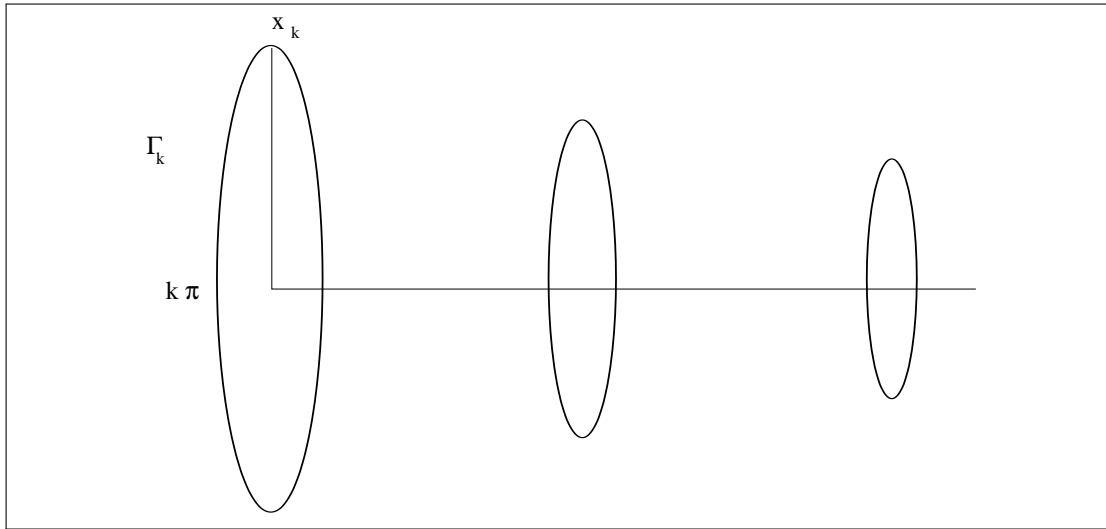
$$|g(z) - \Delta(z)| < |g(z)|.$$

Alors  $\Delta$  et  $g$  ont le même nombre de zéros comptés avec leur multiplicité dans  $\Gamma_j$ .  $\Delta$  admet  $n$  zéros dans  $\Gamma_j$  pour tout  $j$  suffisamment grand et il n'y a pas de zéros en dehors de  $|z \sin(z)| < A$ . On note que  $\Delta$  est une fonction paire. Les racines de  $\Delta$  de partie réelle négative n'interviennent pas dans la loi asymptotique pour les valeurs propres.

On ordonne les zéros de  $\Delta$  suivant leur module et on considère les sous-suites  $(z_{nk+i})_{k \in \mathbb{N}}$ , pour  $i = 1 \cdots n$ , des zéros de  $\Delta$  tels que  $z_{nk+i}$  sont à l'intérieur de  $\Gamma_k$  pour  $i$  de 1 à  $n$  et  $k$  suffisamment grand. Définissons  $x_k$  par les conditions  $x_k > 0$  et  $|(k\pi + ix_k) \sin(k\pi + ix_k)| = A$ . On remarque que  $|z_{nk+i} - k\pi| \leq x_k$ . Donc nous trouvons que  $x_k \sim \frac{A}{k\pi}$ .

Il y a  $n - \mathbf{m}(k\pi, \Delta)$  valeurs propres dans  $\Gamma_k$  satisfaisant  $\sin \sqrt{\lambda} \neq 0$ .

Si  $\Gamma$  est biparti,  $\mathbf{m}(k\pi, \Delta) = 2$ , et  $\dim_{\mathbb{C}} E^c(\lambda, T) = N - n + 1$  par [18].

FIGURE 4.2 – La courbe  $|z \sin(z)| = A$ 

Si  $\Gamma$  n'est pas biparti,  $\mathbf{m}(2k\pi, \Delta) = 2$ ,  $\mathbf{m}((2k+1)\pi, \Delta) = 0$  et

$$\dim_{\mathbb{C}} E^c(\lambda, T) = \begin{cases} N - n + 1 & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = 1 \\ N - n & \text{si } \cos \sqrt{\lambda} = -1. \end{cases} \quad (4.37)$$

Alors, avec la définition 4.1, dans tous les cas, nous avons  $N$  valeurs propres dans  $\Gamma_k$  dont le diamètre est uniformément borné. On en déduit l'égalité (4.35).

Sur la courbe  $|z \sin(z)| = A$ , les parties imaginaires sont décroissantes en  $\frac{1}{k}$ . Les valeurs propres ont alors une partie imaginaire bornée et le même comportement asymptotique est alors valable pour les parties réelles des valeurs propres. De plus, la suite des valeurs propres n'admet pas de point d'accumulation fini.  $\square$

**Théorème 4.4.** *Pour  $\sigma \neq 0$ , sous les hypothèses imposées aux coefficients (4.4), les valeurs propres du problème (4.5) avec  $c_{ij} > 0$  vérifient*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_k|}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Re \lambda_k}{k^2} = \pi^2 \left( \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{1}{\sqrt{a_j}} dx_j \right)^{-2}$$

où les valeurs propres sont comptées selon leur multiplicité algébriques.

*Démonstration.* Si des coefficients  $\sigma_i$  s'annulent, posons  $m := \#\{\sigma_i | \sigma_i = 0\}$ . On développe le déterminant et on applique le théorème de Rouché à la courbe définie par  $|(z \sin(z))^{n-m} (\cos(z))^m| = A$  pour  $A$  suffisamment grand pour compter les valeurs propres comme dans le théorème précédent.  $\square$

On peut se passer de l'hypothèse  $K_1 = \dots = K_N = 1$  de la façon suivante.

**Corollaire 4.1.** Supposons que  $\sigma \neq 0$ . Sous les hypothèses (4.4), l'asymptotique des valeurs propres du problème (4.5) avec  $c_{ij} > 0$  est donnée par

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_k|}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Re \lambda_k}{k^2} = \pi^2 \left( \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{1}{\sqrt{a_j}} dx_j \right)^{-2}$$

où les valeurs propres sont comptées suivant leur multiplicité algébrique.

*Démonstration.* Le raisonnement est le même que dans [17]. Si tous les quotients  $K_j/K_m$  sont rationnels, alors le problème aux valeurs propres en question est équivalent à un problème où les  $K_j$  sont constants ce qui mène à des longueurs d'arêtes constantes. On voit cela en découpant les arêtes de façon convenable en ajoutant des sommets artificiels et en imposant la continuité et des conditions de Kirchhoff consistantes à ces sommets. Par le cas précédent, l'équation (4.34) reste valable où la constante de Weyl vaut maintenant  $\pi^2 \left( \sum_{j=1}^N K_j \right)^{-2}$ .

Dans le cas général, on fixe les matrices  $\mathcal{C}$  et  $\tilde{\mathcal{A}}$  et considérons la constante de Weyl  $W = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{k^2}$  comme une fonction en les variables  $K_1, \dots, K_N$ . Les zéros de  $\mathcal{G}$  dépendent continûment des matrices  $\mathcal{C}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}$  et  $K_1, \dots, K_N$ . Donc  $W$  également. Sur l'ensemble des vecteurs rationnels dense dans  $(0, \infty)^N$ , la fonction vaut

$$W(K_1, \dots, K_N) = \pi^2 \left( \sum_{j=1}^N K_j \right)^{-2}.$$

Par continuité, nous obtenons le résultat.  $\square$

*Remarque 4.1.* Les arguments s'appliquent également pour une condition de Kirchhoff plus générale de la forme

$$\sum_{j=1}^N d_{ij} c_{ij} \partial_j u_j(v_i) + \rho_i u(v_i) = f(\lambda) \sigma_i u(v_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

où  $f$  est polynomiale. Dans ce cas, l'équation caractéristique s'écrit :

$$\mathcal{G}(\lambda) := \det \left( \mathcal{C} * \mathcal{K}^{(-1)} * \tilde{\mathcal{A}}^t - \cos(\sqrt{\lambda}K) \text{Diag}[(\mathcal{C} * \mathcal{K}^{(-1)} * \tilde{\mathcal{A}})\mathbf{e}] - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}K)}{\sqrt{\lambda}K} f(\lambda) \text{Diag}[(\mathcal{H} * \tilde{\mathcal{A}})\mathbf{e}] \right)_{n \times n}.$$

*Remarque 4.2.* Le cas d'existence de valeur propre négative arrive déjà dans le cas de graphes assez simples. Par exemple, dans [18], on considère le circuit  $C_3$  où les arêtes sont toutes de longueur 1 sous des conditions de Kirchhoff données par la

matrice  $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$  et des conditions de continuité fractionnée données par  $\tilde{A} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Il existe alors une valeur propre négative  $\lambda \approx -0,52597$ .





# Etude de la stabilité

## 5.1 Introduction

Les modèles de diffusion en une dimension qui décrivent l'évolution de la concentration d'une substance sont décrites par une équation de réaction-diffusion définie sur un intervalle. Kolmogorov, Petrovsky, Piskounov et Fisher, en 1937, ont modélisé l'invasion d'un gène dans une population par une équation de la forme

$$\partial_t u = D\partial_x^2 u + R(u),$$

où  $R(u) = ru(1 - u)$  et  $D$  est le coefficient de diffusion. Cette équation est appelée équation KPP en référence à Kolomogorov - Petrovsky - Piskounov. Lorsque  $R(u) = -u(u - 1)(u + 1)$ , c'est l'équation de Newell - Whitehead - Segel qui décrit un phénomène de convection. L'équation de Zeldovich avec  $R(u) = -u(u - 1)(u - \alpha)$  où  $0 < \alpha < 1$  est employée en théorie de la combustion et  $R(u) = u^2 - u^3$  en est le cas dégénéré. Si l'objet d'étude est maintenant un réseau constitué d'un nombre fini de fils connectés par des sommets alors on peut voir ce domaine comme un graphe topologique. Une question essentielle dans l'étude des équations de réaction-diffusion est la question de la stabilité. On étudie la stabilité de solutions stationnaires non constantes dans certains problèmes de réaction-diffusion. Le premier résultat obtenu dans ce sens est dû à Chafee [29]. Pour le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + f(u), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \end{cases}$$

il n'y a pas de solution stationnaire stable non constante. Le même résultat apparaît pour les conditions de bord suivantes :

$$\begin{cases} u(0, t) = u(l, t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t). \end{cases}$$

## 5.2 Etude de la stabilité

On reprend les notations des chapitres précédents. Notamment, on rappelle que les coefficients  $d_{ij}$  désignent les coefficients d'incidence. Sur un graphe fini, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}(G \times [0, \infty)) \cap \mathcal{C}^{2,1}(G \times (0, \infty)), \\ \partial_t u_j = \partial_j(a_j \partial_j u_j) + f(u_j), \\ (K) : \sum_{j=1}^N d_{ij} a_j(v_i) \partial_j u_j(v_i) = 0, \\ \forall v_i \in V_r : e_j \cap e_s = \{v_i\} \Rightarrow u_j(v_i) = u_s(v_i). \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans ce problème, on suppose que la fonction  $f \in C^1(\mathbb{R})$  et que les fonctions  $a_j$  vérifient

$$a_j > 0, \quad a_j \in C^1([0, l_j]). \quad (5.2)$$

On étudie la stabilité des solutions stationnaires (c'est-à-dire constantes en temps) non constantes du problème (5.1) ; ce qui est une question essentielle de la théorie des systèmes de réaction-diffusion. On donne la définition de la stabilité au sens de Lyapunov :

**Définition 5.1.** Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une solution stationnaire de (5.1). On dit que l'équilibre est stable si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que toute solution  $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$  de (5.1) avec

$$|v_i(x, 0) - u_i(x)| < \delta, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, N$$

satisfait

$$|v_i(x, t) - u_i(x)| < \epsilon, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, N \text{ et pour tout } t > 0.$$

Dans le cas contraire, la solution stationnaire est dite instable.

L'existence d'un équilibre stable non constant est assurée pour de nombreux problèmes. Nous donnons l'exemple suivant qui démontre, de plus, l'intérêt des réseaux. Hale et Raugel [45] et Yanagida [79] ont étudié le problème suivant

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta u + f(u) \text{ dans } \Omega$$

où  $\Omega$  est un voisinage tubulaire d'une courbe lisse, sous des conditions de Neumann. Pour construire un voisinage tubulaire d'une courbe, considérons les droites perpendiculaires en chaque point de cette courbe. A moins que la courbe soit une droite, ces droites s'intersectent. Toutefois si l'on regarde dans une bande étroite autour de la courbe, les portions de droites ne s'intersectent pas et forment une bande sans trou. Cette bande est appelé voisinage tubulaire.

Le problème peut se résumer à un problème en une dimension :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u &= \frac{1}{d(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( d(x) \frac{\partial}{\partial x} u \right) + f(u) \text{ pour } x \in (0, l) \\ \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) &= \frac{\partial}{\partial x} u(l, t) = 0 \end{aligned}$$

où  $x$  est le paramètre de la longueur d'arc et  $d(x)$  représente la largeur de  $\Omega$  autour de la courbe lisse. Dans le cas où  $d(x)$  est une fonction régulière, le problème a été étudié dans [32]. Dans le cas où  $d(x)$  est constante par morceaux, le problème a été étudié par Yanagida dans [80]. Dans ce cas précis, on considère un graphe avec  $m$  arêtes. Pour  $1 \leq i \leq m$ , posons

$$d(x) = d_i \text{ pour } x \in (a_{i-1}, a_i)$$

et  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_m = l$ . Supposons que  $d_i > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq m$ . Le problème se réécrit alors comme un système de réaction-diffusion constitué de  $m$  arêtes alignées  $e_i$  de longueur  $l_i = a_i - a_{i-1}$  et de largeur  $d_i$ . De façon plus générale, c'est-à-dire sans cette condition d'alignement, Yanagida a considéré le problème suivant sur tout graphe fini

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_j = \partial_j^2 u_j + f(u_j) \\ \sum_{j=1}^N d_{ij} d_j \partial_j u_j(v_i) = 0 \\ \forall v_i \in V_r : e_j \cap e_s = \{v_i\} \Rightarrow u_j(v_i) = u_s(v_i). \end{array} \right. \quad (5.3)$$

avec  $d_j > 0$  pour tout  $1 \leq j \leq N$ . Si le graphe  $G$  contient des arêtes adjacentes avec la même largeur  $d$ , alors on peut les réduire en une unique arête ou une boucle.

J. von Below et J. A. Lubary ont considéré dans [19] le problème (5.3) le cas où  $f(u) = \eta \sin u$  sous la condition  $d_j = 1$  pour tout  $j$ . Un important résultat également énoncé dans ce papier concerne le cas cubique balancé : pour  $f(u) = u - u^3$ ,

il n'existe pas de solutionnaire stable non constante pour des réseaux analytiques. Dans notre cas, nous essayons d'étudier l'existence ou non d'une solution stationnaire non constante et stable pour le problème (5.1) sur tout graphe, si le terme de non-linéarité est fixé. On reprend pour cela des outils utilisés par Yanagida.

Introduisons l'espace  $H_K^1(G) = \{u \in C_K(G) : u_i \in H^1(0, l_j), \forall 1 \leq i \leq N\}$  où l'indice  $K$  désigne un espace de fonctions dans lequel les conditions de Kirchhoff sont satisfaites. On définit de façon similaire l'espace  $H_K^2(G)$ . Dans la suite,  $u$  désignera une solution stationnaire du problème (5.1). Pour étudier la stabilité de  $u$ , on analyse le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \in \mathcal{C}(G) \cap \prod_j H^2([0, l_j]) \\ \partial_j(a_j \partial_j \phi_j) + f'(u_j) \phi_j = -\lambda \phi_j \\ \sum_{j=1}^N d_{ij} a_j(v_i) \partial_j \phi_j(v_i) = 0 \\ \forall v_i \in V_r : e_j \cap e_s = \{v_i\} \Rightarrow \phi_j(v_i) = \phi_s(v_i). \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Sur chaque arête, on note l'opérateur  $L_j(\phi_j) = \partial_j(a_j \partial_j \phi_j) + f'(u_j) \phi_j$ . Ces opérateurs induisent l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} L: H_K^2(G) &\longrightarrow \mathcal{C}(G) \\ \phi = (\phi_j)_{1 \leq j \leq N} &\longmapsto (L_j \phi_j)_{N \times 1}. \end{aligned}$$

Les propriétés de l'opérateur  $L$  sont cruciales et le premier lemme prouvé dans [80] montre que l'opérateur  $L$  est auto-adjoint.

**Lemme 5.1.** *L'opérateur différentiel  $L$  est un opérateur différentiel auto-adjoint pour le produit scalaire suivant*

$$\langle L(\phi), \psi \rangle = \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} L_j \phi_j(x_j) \psi_j(x_j) dx_j.$$

*Démonstration.* D'après [41] et [24], l'opérateur  $L$  est local, c'est-à-dire  $L(u(x)) = L(v(x))$  implique que  $u = v$  dans un voisinage de  $x$ , et  $L$  est fermé. On montre que  $L$  est symétrique :

$$\begin{aligned} \langle L(\phi), \psi \rangle &= \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \partial_j(a_j \partial_j \phi_j) \psi_j dx_j + \int_0^{l_j} f'(u_j) \phi_j \psi_j dx_j \\ &= \sum_{j=1}^N [a_j \psi_j \partial_j \phi_j]_0^{l_j} - \int_0^{l_j} a_j \partial_j \phi_j \partial_j \psi_j dx_j + \int_0^{l_j} f'(u_j) \phi_j \psi_j dx_j \\ &= \sum_{j=1}^N - \int_0^{l_j} a_j \partial_j \phi_j \partial_j \psi_j dx_j + \int_0^{l_j} f'(u_j) \phi_j \psi_j dx_j \\ &= \langle \phi, L(\psi) \rangle. \end{aligned}$$

Les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  vérifient les conditions de Kirchhoff, ce qui justifie que

$$\sum_{j=1}^N [a_j \psi_j \partial_j \phi_j]_0^{l_j} = \sum_{j=1}^N [a_j \phi_j \partial_j \psi_j]_0^{l_j} = 0.$$

□

Cette propriété permet d'exploiter des résultats d'analyse fonctionnelle et notamment le principe de Courant-Fischer utilisé dans la proposition suivante, voir [43] :

**Proposition 5.1.** *Les valeurs propres du problème (5.4) sont réelles. De plus, il existe une valeur propre minimale simple notée  $\lambda_{min}$  dont une fonction propre  $\phi_{min}$  peut être prise positive sur  $G$ . Cette valeur propre minimale peut être calculée de la façon suivante :*

$$\lambda_{min} = \inf_{v \in H_K^1(G), v \neq 0} \frac{\sum_{j=1}^N \left( \int_0^{l_j} a_j (\partial_j v_j)^2 dx_j - \int_0^{l_j} f'(u_j) v_j^2 dx_j \right)}{\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} v_j^2 dx_j},$$

où la fonction  $v$  vérifie la condition de continuité à chaque sommet. On note que cet infimum est atteint seulement par  $C\phi_{min}$  où  $C$  est une constante arbitraire non nulle.

Le quotient utilisé dans la définition de  $\lambda_{min}$  est appelé quotient de Rayleigh, et on le note

$$R(v) = \frac{\sum_{j=1}^N \left( \int_0^{l_j} a_j (\partial_j v_j)^2 dx_j - \int_0^{l_j} f'(u_j) v_j^2 dx_j \right)}{\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} v_j^2 dx_j}.$$

La valeur propre  $\lambda_{min}$  donne une information essentielle pour l'étude de la stabilité.

**Lemme 5.2.** ([80]) *Soit  $u$  une solution stationnaire. Si la valeur propre minimale du problème (5.4) satisfait  $\lambda_{min} < 0$  alors  $u$  est instable.*

*Démonstration.* Soit  $v$  une solution vérifiant  $|v_i(x, t) - u_i(x)| < \epsilon$  et  $v > u$  sur  $G$ . La fonction  $w = v - u$  vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} w = \frac{\partial}{\partial t} v = Lv = Lw + O(w^2)$$

où  $O(w^2) = (O(w_1^2), O(w_2^2), \dots, O(w_N^2))$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle w, \phi_{min} \rangle &= \langle Lw + O(w^2), \phi_{min} \rangle \\ &= \langle w, L\phi_{min} \rangle + O(w^2) \\ &= -\lambda_{min} \langle w, \phi_{min} \rangle + O(w^2). \end{aligned}$$

Comme  $w = v - u > 0$ ,  $\phi_{min} > 0$  et  $\lambda_{min} < 0$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w, \phi_{min} \rangle \geq -\frac{\lambda_{min}}{2} \langle w, \phi_{min} \rangle.$$

Ce qui démontre l'instabilité de la fonction  $u$ . □

On se pose la question suivante : quels problèmes de réaction-diffusion ne possèdent pas de solution stationnaire non constante stable ? Une réécriture du quotient de Rayleigh donnera de précieuses informations pour des fonctions  $v$  bien choisies. En effet, en choisissant  $v = (v_j)_{1 \leq j \leq N} := (\varphi(u_j))_{1 \leq j \leq N}$  avec  $\varphi$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ , on obtient  $v \in H_K^1(G)$ . Comme  $v_j \in C^2([0, l_j])$ , on peut intégrer par parties le terme  $\int_0^{l_j} a_j (\partial_j v_j)^2 dx_j$  dans le quotient de Rayleigh. En utilisant les relations de Kirchhoff, le quotient de Rayleigh s'écrit alors :

$$R(v) = - \frac{\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} (a_j \partial_j^2 v_j + \partial_j a_j \partial_j v_j + f'(u_j) v_j) v_j dx_j}{\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} v_j^2 dx_j}.$$

Comme  $v_j = \varphi(u_j)$ , on obtient :

$$\partial_j (\varphi(u_j)) = \partial_j u_j \varphi'(u_j).$$

$$\partial_j^2 (\varphi(u_j)) = \partial_j^2 u_j \varphi'(u_j) + (\partial_j u_j)^2 \varphi''(u_j).$$

Comme  $u$  est une solution stationnaire, on peut également écrire :

$$a_j \partial_j^2 u_j = -f(u_j) - \partial_j a_j \partial_j u_j.$$

Pour  $v = (\varphi(u_j))_{1 \leq j \leq N}$ , le quotient de Rayleigh devient donc :

$$R(v) = - \frac{\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \left( a_j (\partial_j u_j)^2 \varphi''(u_j) + f'(u_j) \varphi(u_j) - f(u_j) \varphi'(u_j) \right) \varphi(u_j) dx_j}{\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} v_j^2 dx_j}.$$

Et on pose :

$$F_j(\varphi)(t) = -f(t)\varphi'(t)\varphi(t) + f'(t)\varphi(t)^2.$$

Ainsi, on obtient :

$$R(v) = - \frac{\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} F_j(\varphi)(u_j) dx_j}{\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \varphi(u_j)^2 dx_j} - \frac{\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} a_j (\partial_j u_j)^2 \varphi''(u_j) \varphi(u_j) dx_j}{\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \varphi(u_j)^2 dx_j}.$$

Pour  $f$  fixé, on cherche donc  $\varphi$  telle que pour tout  $1 \leq j \leq N$ ,  $F_j(\varphi)(t) \geq 0$  sur  $u_j([0, l_j])$  afin de prouver que les solutions stationnaires non constantes sont instables. Pour avoir  $R(v) < 0$ , il suffit donc que  $\varphi$  satisfasse les inégalités différentielles  $f'\varphi^2 - f\varphi'\varphi \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\varphi\varphi'' \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ . En effet, puisque l'on a la condition  $a_j > 0$  pour tout  $1 \leq j \leq N$ , la deuxième terme de l'égalité précédente sera négatif. On peut citer un premier critère qui a été donné dans [19] :

**Lemme 5.3** ([19]). *Si une solution stationnaire  $u \in \mathcal{C}_K^2(G)$  de (5.4) satisfait*

$$\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} f'_j(u_j) dx_j > 0,$$

ou

$$\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} f'_j(u_j) u_j^2 dx_j > \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} f_j(u_j) u_j dx_j,$$

alors  $u$  est instable.

*Remarque 5.1.* Tout polynôme de degré 1, de degré 2 de signe constant, de la forme  $(x - x_0)^k$ ,  $a_1(x - x_1)^{k_1} + a_2(x - x_2)^{k_2}$  avec  $k_1$  et  $k_2$  pairs et  $a_1 a_2 \geq 0$  vérifient  $f f'' \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

On incorpore la fonction  $\varphi(x) = (x - x_0)^k$  dans le quotient de Rayleigh afin d'obtenir le résultat suivant :



**Lemme 5.4.** *S'il existe des constantes  $x_0$  et  $c$ , un entier  $k > 0$  et un polynôme positif  $P_k$  tel que*

$$f(x) = (x - x_0)^k \left( c + \int_{x_0+1}^x \frac{P_k(t)}{t - x_0} dt \right)$$

*et  $P_k^{(k-1)}(x_0) = 0$  alors  $f$  est un polynôme et le problème (5.1) n'admet pas de solution stationnaire non constante stable.*

*Démonstration.* Dans le cas où  $k$  est un entier impair, la fonction  $f$  vérifie  $f' \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$  et on obtient le résultat grâce au lemme précédent. Dans le cas où  $k$  est un entier pair,  $k = 2p$ , en choisissant  $\varphi(x) = (x - x_0)^p$ , on obtient facilement  $f'\varphi^2 - f\varphi'\varphi = (x - x_0)^{2k-2}P_k \geq 0$ . D'où l'on déduit que  $R(v) < 0$  et donc toute solution stationnaire non constante est instable.  $\square$

On illustre finalement ce lemme avec la proposition suivante :

**Proposition 5.2.** *Le problème (5.1) ne possède pas de solution stationnaire non constante stable si  $f$  possède l'une des propriétés suivantes :*

1.  *$f$  est un polynôme de degré 2.*
2.  *$f(x) = \sum_i c_{2p_i+1}(x - x_0)^{2p_i+1} + c_{2n}(x - x_0)^{2n} + \sum_j c_{2q_j+1}(x - x_0)^{2q_j+1}$   
si  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $2n \leq 2p_i + 1$ ,  $2n \geq 2q_j + 1$ ,  $c_{2p_i+1} \geq 0$  et  $c_{2q_j+1} \leq 0$ .*
3.  *$f$  est un polynôme de degré 3 et son coefficient dominant est positif.*
4.  *$f(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}$  avec  $k_1$  et  $k_2$  qui ne sont pas pairs simultanément.*
5.  *$f(x) = -(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}$  avec  $k_1$  et  $k_2$  impairs.*

*Démonstration.* 1. Les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 de discriminant négatif vérifient  $ff'' \geq 0$ , ainsi que les polynômes de degré 2 possédant une racine double. On considère alors les polynômes de la forme  $a(x - x_1)(x - x_2)$  avec  $x_1 < x_2$ . Pour  $a < 0$ , on choisit  $\varphi(x) = (x - x_2)^2$  et on obtient  $f'\varphi^2 - f\varphi'\varphi = a(x - x_2)^4(x_1 - x_2) > 0$ .

Pour  $a > 0$ , on choisit  $\varphi(x) = (x - x_1)^2$  et on obtient  $f'\varphi^2 - f\varphi'\varphi = a(x - x_1)^4(x_2 - x_1) > 0$

2. Il suffit de choisir  $\varphi(x) = (x - x_0)^{2n}$ . On obtient

$$f'\varphi - f\varphi' = \sum_i c_{2p_i+1}(2p_i+1-2n)(x-x_0)^{2n+2p_i} + \sum_j c_{2q_j+1}(2q_j+1-2n)(x-x_0)^{2n+2q_j}.$$

Chaque terme des sommes est positif d'après les hypothèses. On en déduit que  $f'\varphi^2 - f\varphi'\varphi \geq 0$  et donc  $R(v) < 0$ .

3. Soit  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$  avec  $a > 0$  et  $x_1 < x_2 < x_3$ . En choisissant  $\varphi(x) = (x - x_2)^2$ , on obtient  $f'\varphi^2 - f\varphi'\varphi = a(x - x_2)^4 Q(x)$  avec  $Q(x) = x^2 - 2x_2x + x_1x_2 + x_2x_3 - x_1x_3$  et le discriminant de  $Q$  vaut  $4(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) < 0$ .

Les polynomes de degré 3 avec une racine triple vérifient  $ff'' \geq 0$  et les polynomes de la forme  $(x - x_1)^2(x - x_2)$  sont traités dans le cas 4.

4. On suppose  $x_1 < x_2$ . Si  $k_1$  et  $k_2$  sont impairs,  $R(v) < 0$  pour  $\varphi(x) = (x - x_1)^{k_1+k_2}$  car alors on a  $f'\varphi^2 - f\varphi'\varphi = k_2(x_2 - x_1)(x - x_2)^{k_2-1}(x - x_1)^{3k_1+2k_2-1}$ .

Si  $k_1$  est pair et  $k_2$  impair,  $R(v) < 0$  pour  $\varphi(x) = (x - x_1)^{k_1}$  car alors on aura  $f'\varphi^2 - f\varphi'\varphi = k_2(x - x_1)^{3k_1}(x - x_2)^{k_2-1}$ . On a le même résultat pour  $k_1$  impair et  $k_2$  pair.

5. Pour  $f(x) = -a(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}$  avec  $x_1 < x_2$  et  $k_1$  et  $k_2$  impairs, on choisit  $\varphi(x) = (x - x_2)^{k_1+k_2}$  et les calculs sont les mêmes que dans le premier cas de 4. □

*Remarque 5.2.* Pour le point 2, sous l'hypothèse  $n \geq 1$ ,  $u = x_0$  est une solution stationnaire constante qui vérifie  $f(u) = f'(u) = 0$ . Cet équilibre est alors évidemment instable car il suffit de choisir une fonction vérifiant  $\varphi\varphi'' \geq 0$  et  $\varphi\varphi''$  non identiquement nulle, par exemple  $\varphi(x) = x^2$ .

*Remarque 5.3.* Les fonctions du type  $\varphi(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}$  vérifient  $\varphi\varphi'' \geq 0$  seulement si  $x_1 = x_2$  car

$$\varphi(x)\varphi''(x) = (x - x_1)^{2k_1-2}(x - x_2)^{2k_2-2}Q(x)$$

où  $Q(x)$  est un polynome dont le discriminant vaut  $k_1k_2(k_1 + k_2 - 1)(x_1 - x_2)^2$ .

**Proposition 5.3.** *Soit  $u$  est une solution non constante du problème (5.1) pour  $f(x) = -x(x - x_1)(x - x_2)$  où  $x_1 < 0$  et  $x_2 > 0$ . Si  $u$  est stable alors  $u(G) \subset [x_1, x_2]$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $j$  et  $t \in [0, l_j] : u(t) < x_1$ . On pose :

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x - x_1)^3 & \text{pour } x \leq x_1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction  $\varphi$  est de classe  $C^2$  et par hypothèse,  $(\varphi(u_j))_{1 \leq j \leq N}$  est non identiquement nulle. Le calcul donne :  $f'\varphi^2 - f\varphi'\varphi = (x - x_1)^6((2x_1 - x_2)t - x_1x_2) \geq 0$  sur  $] -\infty, x_1]$  car  $x_1 \leq 0$ .

D'autre part, supposons qu'il existe  $j$  et  $t \in [0, l_j] : u(t) > x_2$ . On pose :

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x - x_2)^3 & \text{pour } x \geq x_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction  $\varphi$  est de classe  $C^2$  et par hypothèse,  $(\varphi(u_j))_{1 \leq j \leq N}$  est non identiquement nulle. Le calcul donne :  $f' \varphi^2 - f \varphi' \varphi = (x - x_2)^6 ((2x_2 - x_1)t - x_1 x_2) \geq 0$  sur  $]x_2, \infty[$  car  $x_2 \geq 0$ .

□

# Bibliographie

- [1] ALI MEHMETI E, BELOW J. von et NICAISE S. *Partial Differential Equations on Multistructures*. Marcel Dekker Inc. New York : Lectures Notes in Pure et Applied Mathematics Vol. 219, 2000.
- [2] BEHRNDT J. et LUGER A. « On the number of negative eigenvalues of the Laplacian on a metric graph ». Dans : *J. Phys.* vol. 43 (2010), 11pp.
- [3] BELOW J. von et Lubary J. A. « Harmonic functions on locally finite networks ». Dans : *Results in Math.* vol. 45 (2004), p. 1–20 (cf. p. ix, 7, 9–13, 25).
- [4] BELOW J. von et Lubary J. A. « Isospectral infinite graphs and networks and infinite eigenvalue multiplicities ». Dans : *Networks Het. Media.* vol. 4 (2009), p. 453–468 (cf. p. 30, 31).
- [5] BELOW J. von et Lubary J. A. « The eigenvalues of the Laplacian on locally finite networks ». Dans : *Results in Math.* vol. 47 (2005), p. 199–225 (cf. p. ix, 29, 33, 35).
- [6] BELOW J. von et Lubary J. A. « The eigenvalues of the Laplacian on locally finite networks under generalized node transition ». Dans : *Results in Math.* vol. 54 (2009), p. 15–39 (cf. p. ix, 29, 33).
- [7] BELOW J. von. « A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on  $c^2$ - networks ». Dans : *Lin. Alg. Appl.* vol. 71 (1985), p. 309–325 (cf. p. ix, 40, 41).
- [8] BELOW J. von. « A maximum principle for semilinear parabolic network equations ». Dans : *Lectures Notes in Pure and Appl. Math* vol. 133 (1991), p. 37–45.
- [9] BELOW J. von. « An existence result for semilinear parabolic network equations ». Dans : *Semesterbericht Funktionalanalysis Tübingen* vol. 15 (1988/89), p. 33–41.
- [10] BELOW J. von. « An index theory for uniformly locally finite graphs ». Dans : *Linear Algebra and its Applications* vol. 431 (2009), p. 1–19 (cf. p. 24).

- [11] BELOW J. von. « Can one hear the shape of a network ? » Dans : *Partial Differential Equations on Multistructures* vol. 219 (1999), p. 19–36.
- [12] BELOW J. von. « Classical solvability of linear parabolic equations on networks ». Dans : *J. Differential Equations* vol. 72 (1988), p. 316–337.
- [13] BELOW J. von. « Comparison and maximum principles for parabolic equations on networks ». Dans : *Semesterbericht Funktionalanalysis Tübingen* vol. 14 (1988), p. 33–37.
- [14] BELOW J. von. « Kirchhoff laws and diffusion on networks ». Dans : *Linear Algebra Appl.* vol. 121 (1989), p. 692–697 (cf. p. 37, 47).
- [15] BELOW J. von. *Parabolic network equations*. 2nd ed. Tübingen. Universitätsverlag, 1994 (cf. p. 37, 39, 41, 46, 47).
- [16] BELOW J. von. « Sturm - Liouville eigenvalue problems on networks ». Dans : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* vol. 10 (1988), p. 383–395 (cf. p. 39, 41).
- [17] BELOW J. von et LUBARY J. A. « Eigenvalue asymptotics for second order elliptic operators on networks ». Dans : *Asymptotic Analysis* (to appear) (cf. p. ix, 37, 39, 44, 47, 50).
- [18] BELOW J. von et LUBARY J. A. « Eigenvalue multiplicities for second order elliptic operators on networks ». Dans : *to appear* () (cf. p. 41, 45, 48, 50).
- [19] BELOW J. von et LUBARY J. A. « Stability of stationary solutions of reaction-diffusion equations on networks ». Dans : (to appear) (cf. p. 55, 59).
- [20] BIGGS N. L. *Algebraic graph theory*. T. 67. Cambridge : Cambridge Tracts Math., 1967 (cf. p. 1).
- [21] CAMERER H. *Die elektronische Spannungsausbreitung im Soma*. Dendritenbaum und Axon von Nervenzellen. Tübingen : Dissertation, 1980 (cf. p. 37).
- [22] CANOSA J. « On a nonlinear diffusion equation describing population growth ». Dans : *IBM J. Research Development* vol. 17 (1973), p. 307–313.
- [23] CARDANOBILO S. et MUGNOLO D. « Parabolic systems with coupled boundary conditions ». Dans : *Journal Differential Equations* vol. 247 (2009), p. 1229–1248.
- [24] CARLSON R. « Adjoint and self-adjoint differential operators on graphs ». Dans : *Electron. J. Diff. Eqs.* vol. 1998 (1998), p. 1–10 (cf. p. 56).
- [25] CARLSON R. « Spectral theory for nonconservative transmission line networks ». Dans : *Networks and Heterogeneous Media* vol. 6 (2011), p. 257–277.
- [26] CARMESIN J. « A characterization of the locally finite networks admitting non-constant harmonic functions of finite energy ». Dans : *preprint* (2011).

- [27] CATTANEO C. « The spectrum of the continuous Laplacian on a graph ». Dans : *Monatsheft für Mathematik* vol. 124 (1997), p. 215–235.
- [28] CHAFEE N. « A stability analysis for a semilinear parabolic differential equation ». Dans : *J. Differential Equations* vol. 15 (1974), p. 522–523.
- [29] CHAFEE N. « Asymptotic behavior for solutions of a one-dimensional parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions ». Dans : *Journal of differential equations* vol. 18 (1975), p. 111–134 (cf. p. 53).
- [30] CHAFEE N. « Asymptotic behavior for solutions of a one-dimensional parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions ». Dans : *J. Diff. Eqs.* vol. 18 (1975), p. 111–134.
- [31] CHAFEE N. et INFANTE E. F. « A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type ». Dans : *Applicable Anal.* vol. 4 (1974), p. 17–37.
- [32] CHIPOT M. et HALE J. K. « Stable equilibria with variable diffusion ». Dans : *Non-linear Partial Differential Equation, Contemporary Math. Series* vol. 17 (1983), p. 209–213 (cf. p. 55).
- [33] CHOQUET G. et Deny J. « Sur l'équation de convolution  $\mu = \mu \star \sigma$  ». Dans : *C. R. Acad. Sci.* vol. 250 (1960), p. 799–801 (cf. p. 25).
- [34] CVETCOVIĆ D.M., DOOB M. et SACHS H. *Spectra of graphs*. New York : Academic Press, 1980.
- [35] DIESTEL. *Graph Theory*. Berlin : Springer, 2005 (cf. p. 1).
- [36] DOOB J. L., SNELL J. L. et WILLIAMSON R. E. « Application of boundary theory to sums of independent random variables ». Dans : *Contributions to Probability and Statistics* (1960), p. 182–197 (cf. p. 25).
- [37] DOYLE P. G. « Electric currents in infinite networks ». Dans : *preprint* (1988).
- [38] DOYLE P. G. et SNELL J. L. *Random walks and Electric Networks*. Washington D. C. : Mathematical Association of America, 1984.
- [39] FLANDERS H. « Infinite Electrical Networks : II - resistance in an infinite grid ». Dans : *J. Math. Anal. Appl.* vol. 40 (1972), p. 30–34.
- [40] FLANDERS H. « Infinite Electrical Networks : I - resistive networks ». Dans : *IEEE Trans. Circuit Theory* vol. 18 (1971), p. 326–331.
- [41] GAVEAU B., OKADA M. et OKADA T. « Explicit heat kernels on graphs and spectral analysis ». Dans : *Several Complex Variables* vol. 38 (1993), p. 364–388 (cf. p. 56).
- [42] GEORGAKOPOULOS A. « Uniqueness of electrical currents in a network of finite total resistance ». Dans : *J. London Math. Soc.* (2010).

- [43] GILBARG D. et TRUDINGER N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2nd ed. New York : Springer, 1983 (cf. p. 57).
- [44] HADELER K.-P. et ROTHE S. « Travelling fronts in nonlinear diffusion equations ». Dans : *J. Math. Biology* vol. 2 (1975), p. 251–263.
- [45] HALE J. K. et RAUGEL G. « Reaction-diffusion equation on thin domains ». Dans : *J. Math. Pures Appl.* vol. 71 (1991), p. 33–95 (cf. p. 55).
- [46] HALE J. K. « Dynamical systems and stability ». Dans : *J. Math. Anal. Appl.* vol. 26 (1969), p. 39–59.
- [47] KATO T. *Perturbation theory of linear operators*. J. Springer Verlag, 1976 (cf. p. 43).
- [48] KOSTRYKIN V. et SCHRADER R. « Kirchhoff's rule for quantum wires ». Dans : *J. Phys.* vol. 32 (1999), p. 595–630.
- [49] KOSTRYKIN V. et SCHRADER R. « Laplacian on metric graphs : eigenvalues, resolvents and semigroups ». Dans : *Proc. Summer Research Conf. in the Mathematical Sciences on Quantum Graphs and Their Applications* vol. 415 (2006), p. 201–250.
- [50] KOSTRYKIN V. et SCHRADER R. « The inverse scattering problem for metric graphs and the traveling salesman problem ». Dans : *arXiv:math-ph/0603010v1* (2006).
- [51] KUCHMENT P. « Quantum graphs : an introduction and a brief survey ». Dans : *Analysis on graphs and its applications, Proc. Symp. Pure Math* vol. 77 (2008), p. 291–312.
- [52] KUCHMENT P. « Quantum graphs II. Some spectral properties of quantum and combinatorial graphs ». Dans : *J. Phys.* vol. 38 (2005), p. 4887–4900.
- [53] KUCHMENT P. « Quantum graphs I. Some basic structures ». Dans : *Waves in Random media* vol. 14 (2004), p. 107–128.
- [54] KURASOV P. « Schrodinger operators on graphs and geometry ». Dans : *2008* vol. 254 (J. Funct. Anal.), p. 934–953.
- [55] LEVIN B. Ja. *Distribution of zeros of entire functions*. Translations of Mathematical Monographs, Am. Math. Soc. Rhode Island. Providence : Amer. Math. Soc., 1964 (cf. p. 44).
- [56] LUBARY J. A. « Multiplicity of solutions of second order linear differential ». Dans : *Lin. Alg. Appl.* vol. 274 (1998), p. 301–315 (cf. p. 37).
- [57] LUBARY J. A. « On the geometric and algebraic multiplicities for eigenvalue problems on graphs ». Dans : *Partial Differential Equations on Multistructures*. vol. 219 (2000), p. 135–146.

- [58] LUBARY J. A. et de Solà-Morales J. « On the geometric and algebraic multiplicities for eigenvalue problems on graphs ». Dans : *Partial Differential Equations on Multistructures*. vol. 219 (2000), p. 135–146.
- [59] LUMER G. « Connecting of local operators and evolution equations on networks ». Dans : *Potential Theory Lect. Not. Math. v. 787 Springer Verlag* (1980), p. 219–234 (cf. p. ix).
- [60] LYONS R. et PERES Y. *Probability on Trees and Networks*. In preparation. Current. Cambridge University Press., 2012.
- [61] MEHMETI F. et al (Editors). « Partial Differential Equations on Multi-structures ». Dans : (2001).
- [62] MOHAR B. et Woess W. « A survey on spectra of infinite graphs ». Dans : *Bull. London Math. Soc.* vol. 21 (1989), p. 209–234 (cf. p. 9).
- [63] MUGNOLO D. *Parabolic systems and evolution equations on networks*. Habilitationsschrift. Universität Ulm, 2010.
- [64] NICAISE S. « Some results on spectral theory over networks applied to nerve impulse transmission ». Dans : *Polynomes Orthogonaux et Applications* vol. 1171 (1985), 532–541.
- [65] NICAISE S. « Spectres des réseaux topologiques finis ». Dans : *Bull. Sc. Math.* vol. 111 (1987), p. 401–413 (cf. p. ix).
- [66] PICARDELLO M. et WOESS W. « Harmonic functions and ends of graphs ». Dans : *Proc. Edinburgh Math. Soc.* vol. 31 (1988), p. 457–461.
- [67] ROTH J.-P. « Analyse harmonique sur les graphes réels et fonctions moyennepériodiques ». Dans : *Bull. Sci. Math.* vol. 119 (1995), 555–571.
- [68] ROTH J.-P. « Le spectre du laplacien sur un graphe ». Dans : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* vol. 296 (1983), p. 793–795.
- [69] ROTH J.-P. « Le spectre du laplacien sur un graphe, Théorie du potentiel ». Dans : *Lecture Notes in Math.* vol. 1096 (1984), 521–539.
- [70] SAWYER S. A. « Martin boundaries and random walks ». Dans : *Adam Koranyi (Ed.) Harmonic functions on trees and buildings*. vol. Contemporary Mathematics 206 (1997), p. 17–44 (cf. p. 25).
- [71] SOARDI M. et YAMASAKI Maretsugu. « Classification of infinite networks and its applications ». Dans : *Circuits systems signal process* vol. 12 (1993), p. 133–149.
- [72] SOARDI P. M. « Potential Theory on Infinite Networks ». Dans : *Springer Verlag* (1991).



- [73] THOMASSEN C. « Resistances and currents in infinite electrical networks ». Dans : *J. Combin. Theory (Serie B)* vol. 49 (1990), p. 87–102.
- [74] THOMASSEN C. « Transient random walks, harmonic functions, and electrical currents in infinite electrical networks ». Dans : *Technical report Mat-Report* (1989).
- [75] WILSON R. J. *Introduction to graph theory*. Edinburgh : Oliver et Boyd, 1972 (cf. p. 1).
- [76] WOESS W. *Random walks on infinite graphs and groups*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000 (cf. p. ix, 25).
- [77] WOESS W. « Topological groups and infinite graphs ». Dans : *Discrete Mathematics* vol. 95 (1991), p. 373–384.
- [78] WOESS W. et SOARDI P. M. « Uniqueness of currents in infinite resistive networks ». Dans : *Discrete Applied Mathematics* vol. 31 (1991), p. 37–49.
- [79] YANAGIDA E. « Existence of stable stationary solutions of scalar reaction-diffusion equations in thin tubular domains ». Dans : *Applicable Anal.* vol. 36 (1991), p. 171–188 (cf. p. 55).
- [80] YANAGIDA E. « Stability of nonconstant steady states in reaction-diffusion system on graphs ». Dans : *Japan J. Inudstr. Appl. Math.* vol. 18 (2001), p. 25–42 (cf. p. ix, x, 55–57).
- [81] ZEMANIAN A. H. « Infinite electrical networks ». Dans : *Proc. IEEE* vol. 64 (1976), p. 6–17.
- [82] ZEMANIAN A. H. « The characteristic-resistance method for grounded semi-infinite grids ». Dans : *SIAM J. Math. Anal.* vol. 12 (1981), p. 115–138.
- [83] ZEMANIAN A. H. « The complete behavior of certain infinite networks under Kirchhoff's node and loop laws ». Dans : *SIAM J. Appl. Math.* vol. 30 (1976), p. 278–295.