



**HAL**  
open science

# Analyse mésoscopique par éléments finis de la déformation de renforts fibreux 2D et 3D à partir de microtomographies X

Naïm Naouar

► **To cite this version:**

Naïm Naouar. Analyse mésoscopique par éléments finis de la déformation de renforts fibreux 2D et 3D à partir de microtomographies X. Matériaux. INSA de Lyon, 2015. Français. NNT : 2015ISAL0088 . tel-01368595

**HAL Id: tel-01368595**

**<https://theses.hal.science/tel-01368595v1>**

Submitted on 19 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

### ANALYSE MÉSCOPIQUE PAR ÉLÉMENTS FINIS DE LA DÉFORMATION DE RENFORTS FIBREUX 2D ET 3D À PARTIR DE MICROTOMOGRAPHIES X

Présentée devant

**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

par

**Naïm NAOUAR**  
**Ingénieur en mécanique**

Thèse envisagée d'être soutenue le 29 septembre 2015 devant la Commission d'examen

#### Jury

P. BOISSE	Professeur (INSA de Lyon)	Directeur
C. GEINDREAU	Professeur (Université Joseph Fourier, Grenoble)	Rapporteur
G. HIVET	Professeur (Polytech Orléans)	Rapporteur
F. LAURIN	Docteur ingénieur (ONERA, Châtillon)	Invité
S. LOMOV	Professeur (KU Leuven)	Examinateur
E. MAIRE	Directeur de recherche (CNRS - INSA de Lyon)	Encadrant
Y. RÉMOND	Professeur (Université de Strasbourg)	Examinateur
J. SCHNEIDER	Docteur ingénieur (SNECMA, Villaroche)	Examinateur
E. VIDAL-SALLÉ	Professeure (INSA de Lyon)	Encadrante

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



## INSA Direction de la Recherche - Écoles Doctorales - Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ÉCOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNÉES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bâtiment Blaise Pascal 3 <sup>ème</sup> étage 04.72.43.80.46 Insa : R. GOURDON secretariat@edchimie-lyon.fr	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon - Collège Doctoral Bâtiment ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél. : 04.72.43.13.95 directeur@edchimie-lyon.fr
<b>E.E.A.</b>	<b>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://eedea.ec-lyon.fr">http://eedea.ec-lyon.fr</a> Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> École Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél. : 04.72.18 60.97 Fax : 04.78.43.37.17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec. : Safia AIT CHALAL Bâtiment Atrium- UCB Lyon 1 Tél. : 04.72.44.83.62 Insa : S. REVERCHON Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 06.07.53.89.13 e2m2@univ-lyon1.fr
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTÉ</b> <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a> Sec. : Safia AIT CHALAL Bâtiment Atrium - UCB Lyon 1 Tél. : 04.72.44.83.62 Insa : Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	<b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b> INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 69621 VILLEURBANNE Tél. : 04.72.68.49.09 Fax : 04.72.68.49.16 Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bâtiment Blaise Pascal 3 <sup>ème</sup> étage infomaths@univ-lyon1.fr	<b>Mme Sylvie CALABRETTO</b> LIRIS - INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél. : 04.72.43.80.46 Fax : 04.72.43.16.87 Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr
<b>Matériaux</b>	<b>MATÉRIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a> Sec. : M. LABOUNE PM : 71.70 Fax : 87.12 Bâtiment Saint-Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint-Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél. : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.85.28 Ed.materiaux@insa-lyon.fr
<b>MEGA</b>	<b>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://edmega.universite-lyon.fr/">http://edmega.universite-lyon.fr/</a> Sec. : M. LABOUNE PM : 71.70 Fax : 87.12 Bâtiment Saint-Exupéry mega@insa-lyon.fr	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél. : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.72.37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b> <a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a> Sec. : Viviane POLSINELLI Sec. : Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr	<b>Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél. : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 isavonb@gmail.com

\* ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie





# Analyse mésoscopique par éléments finis de la déformation de renforts fibreux 2D et 3D à partir de microtomographies X

La simulation à l'échelle mésoscopique de la déformation des renforts composites fournit des informations importantes. En particulier, elle donne la direction et la densité de fibres qui conditionne la perméabilité du renfort textile et les propriétés mécaniques du composite final. Ces analyses mésoscopiques par éléments finis dépendent fortement de la qualité de la géométrie initiale du modèle. Certains logiciels ont été développés pour décrire ces géométries de renforts composites. Mais, les géométries obtenues impliquent une simplification (notamment dans la section transversale de mèche) qui peut perturber le calcul de déformation du renfort.

Le présent travail présente une méthode directe utilisant la microtomographie à rayon X pour générer des modèles éléments finis, basée sur la géométrie réelle de l'armure textile. Le modèle EF peut être obtenu pour tout type de renfort, plus ou moins complexe. Les problèmes d'interpénétrations de mèches sont évités.

Ces modèles sont utilisés avec deux lois de comportement : une loi hypoélastique et une loi hyperélastique. Les propriétés de chacune d'entre elles, ainsi que les grandeurs caractéristiques nécessaires à leur implémentation dans le logiciel ABAQUS sont développées.

Enfin, une identification des paramètres matériau à l'aide d'une méthode inverse est proposée. Les résultats obtenus pour les simulations de mise en forme sont comparés avec les résultats expérimentaux et montrent une bonne correspondance entre les deux.

**MOTS CLÉS :** Renforts tissés, composites, modélisation mésoscopique, mise en forme, hypoélasticité, hyperélasticité, éléments finis, microtomographie à rayon X

## **2D and 3D composite reinforcement meso F.E. analyses based on X-ray computed tomography**

The simulation at meso-scale of textile composite reinforcement deformation provides important information. In particular, it gives the direction and density of the fibres that condition the permeability of the textile reinforcement and the mechanical properties of the final composite. These meso FE analyses are highly dependent on the quality of the initial geometry of the model. Some software have been developed to describe composite reinforcement geometries. The obtained geometries imply simplification that can disrupt the reinforcement deformation computation.

The present work presents a direct method using computed microtomography to determine finite element models based on the real geometry of the textile reinforcement. The FE model is obtained for any specificity or variability of the textile reinforcement, more or less complex. The yarns interpenetration problems are avoided.

These models are used with two constitutive laws : a hypoelastic law and a hyperelastic one. An analysis of their properties is presented and their implementation in the software ABAQUS is detailed.

Finally, an identification method is presented and the results of forming simulations are compared to experimental tests, which shows a good fit between the both.

**KEYWORDS:** Woven fabrics, composite material, mesoscopic modeling, forming, hypoelasticity, hyperelasticity, finite element analysis, X-ray tomography

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Fabrication et modélisation des composites à renforts tissés</b>	<b>5</b>
1.1 Présentation générale des matériaux composites . . . . .	7
1.2 De la fibre à la pièce finale . . . . .	8
1.2.1 Les mèches . . . . .	8
1.2.2 Le renfort . . . . .	11
1.2.3 Consolidation des matrices organiques . . . . .	15
1.3 Modélisations et simulations de la mise en forme des renforts tissés . . . . .	17
1.3.1 Modélisation à l'échelle microscopique . . . . .	18
1.3.2 Modélisation à l'échelle macroscopique . . . . .	19
1.3.3 Modélisation à l'échelle mésoscopique . . . . .	24
1.4 Tomographie aux rayons X . . . . .	28
1.4.1 Principe physique . . . . .	28
1.4.2 Reconstruction par tomographie . . . . .	29
1.4.3 Équipement utilisé . . . . .	30
1.4.4 Application aux renforts de composites . . . . .	32
1.4.5 Application à un interlock générique . . . . .	35
1.5 Bilan du chapitre 1 . . . . .	41
<b>2 Le traitement d'images</b>	<b>43</b>
2.1 Notions sur le traitement d'images . . . . .	45
2.1.1 Définition d'une image numérique . . . . .	45
2.1.2 Définition d'un filtre d'image . . . . .	46
2.1.3 Détection de contours dans une image . . . . .	53
2.1.4 Morphologie mathématique . . . . .	53
2.2 Présentation des méthodes de segmentation . . . . .	55
2.2.1 Segmentation par le tenseur de structure . . . . .	55

2.2.2	Implémentation de l'algorithme de segmentation par le tenseur de structure . . . . .	56
2.2.3	Segmentation par analyse de texture . . . . .	64
2.2.4	Implémentation de l'algorithme de segmentation par analyse de texture . . . . .	69
2.3	Extractions des sections de mèches à partir de la micro-CT . . . . .	72
2.3.1	Labellisation et morphologie mathématique sur les sections de mèches . . . . .	72
2.3.2	Utilisation d'enveloppes convexes . . . . .	74
2.4	Bilan du chapitre 2 . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Génération des modèles de renfort issus de la microtomographie</b>	<b>79</b>
3.1	Génération de maillage tétraédrique basé sur les images de micro-CT . . . . .	81
3.1.1	Maillage volumique . . . . .	81
3.1.2	Algorithme des Marching Cubes . . . . .	81
3.1.3	Algorithme de simplification de surface . . . . .	82
3.1.4	Maillage par avancée de front . . . . .	85
3.2	Orientation des éléments tétraédriques . . . . .	86
3.2.1	Squelettisation . . . . .	87
3.2.2	Extraction de la fibre neutre de la mèche . . . . .	89
3.3	Génération de maillage prismatique basé sur les images de micro-CT . . . . .	91
3.3.1	Généralités sur les triangulations . . . . .	91
3.3.2	Triangulation de Delaunay . . . . .	93
3.3.3	Algorithme de triangulation . . . . .	94
3.4	Bilan du chapitre 3 . . . . .	104
<b>4</b>	<b>Lois de comportement pour les mèches de renforts tissés</b>	<b>105</b>
4.1	Rappels de notion de mécanique des milieux continus en grandes transformations . . . . .	107
4.1.1	Description du mouvement . . . . .	107
4.1.2	Tenseur gradient de la transformation . . . . .	108
4.1.3	Mesure des déformations . . . . .	108
4.1.4	Mesure des contraintes . . . . .	110
4.1.5	Indifférence matérielle et principe d'objectivité . . . . .	111
4.2	Lois hypoélastiques . . . . .	112
4.2.1	Définitions . . . . .	113
4.2.2	Dérivée objective adaptée aux matériaux fibreux . . . . .	114
4.2.3	Tenseur de comportement . . . . .	115
4.3	Lois hyperélastiques . . . . .	118
4.3.1	Définitions . . . . .	118
4.3.2	Hyperélasticité isotrope transverse . . . . .	119
4.3.3	Loi hyperélastique basée sur des invariants "physiques" . . . . .	120
4.4	Implémentation des lois de comportement dans Abaqus/Explicit . . . . .	124

---

4.4.1	Schémas d'intégration temporelle . . . . .	124
4.4.2	Implémentation des lois . . . . .	127
4.5	Bilan du chapitre 4 . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Simulations de la mise en forme de renforts tissés</b>	<b>131</b>
5.1	Simulation de la mise en forme d'un renfort tissé 2D . . . . .	133
5.1.1	Description du renfort étudié . . . . .	133
5.1.2	Génération du modèle . . . . .	133
5.1.3	Identification des paramètres matériaux pour la loi hypoélastique	139
5.1.4	Validation des paramètres en traction biaxiale . . . . .	147
5.1.5	Validation des paramètres en compaction transverse . . . . .	147
5.2	Simulation de la mise en forme de renforts tissés 3D . . . . .	149
5.2.1	Description des renforts étudiés . . . . .	149
5.2.2	Modèle tissé 3D orthogonal . . . . .	150
5.3	Bilan du chapitre 5 . . . . .	156
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>157</b>
	<b>Annexes</b>	<b>161</b>
<b>A</b>	<b>Influence des paramètres statistiques d'analyse de textures</b>	<b>163</b>
A.1	Influence de la taille de fenêtre . . . . .	163
A.2	Influence du nombre de niveaux gris . . . . .	164
A.3	Influence de l'offset . . . . .	166
<b>B</b>	<b>Publications dans des revues internationales à comité de lecture</b>	<b>169</b>
B.1	Meso-scale FE analyses of textile composite reinforcement deformation based on X-ray computed tomography, <i>Composite Structures</i> , 2014 . . . . .	169
B.2	3D composite reinforcement meso F.E. analyses based on X-ray computed tomography, <i>Composite Structures</i> , 2015 . . . . .	170
	<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>



# Table des figures

1.1	Principe du procédé de fabrication des fibres de carbone ex-PAN [DUP 08]	9
1.2	Procédé de filage et d'assemblage des mèches en fibre de verre [CHA 11b]	11
1.3	Schéma d'un métier à tisser et principaux outils du procédé [FLO 13]	12
1.4	Les différents motifs de tissage 2D. Taffetas (a) Sergé 2x2 (b) Satin de 8 (c)	13
1.5	Embuvage d'une mèche	13
1.6	Structure d'un renfort interlock par $\mu$ -tomographie	14
1.7	Armures de renforts 3D [GU 02]	14
1.8	Illustration du processus d'infusion sous vide	15
1.9	Illustration du processus RTM	16
1.10	Les différentes échelles d'un renfort tissé	18
1.11	Renfort tissé 2D généré par le modèle de Zhou [ZHO 04]	18
1.12	Modélisation du VER d'un renfort après tissage [DUR 10]	19
1.13	Méthode du filet : détermination de la position du point C connaissant celles de A et B [BOI 04]	20
1.14	Drapage d'une pièce complexe avec l'algorithme du filet [BOR 03]	21
1.15	Modélisation d'une particule <i>O</i> connectée à ses quatre voisins (a) avec modélisation de l'élongation (b), du cisaillement (c) et (d), et de la flexion (e) [SZE 05]	21
1.16	Résultats expérimentaux et numériques d'un emboutissage de type double dôme avec mèches orientées à 45° sur un tissé 2D [KHA 10]	22
1.17	Forme expérimentale (a), numérique (b) et angles de cisaillement plan (c) du renfort après formage pour un emboutissage hémisphérique de renfort interlock [LUY 09a, CHA 12]	22
1.18	Élément brique semi-discret à 8 nœuds et application [LUY 09b]	23
1.19	Représentation de deux nappes et des coutures les liant dans un modèle semi-discret [CRE 06]	24
1.20	Modélisation analytique mésoscopique de Kawabata [KAW 73a]	25
1.21	Génération à partir de WiseTex d'une structure 3D d'un renfort en carbone [LOM 00]	26
1.22	Définition des points de contrôle de la ligne moyenne d'un sergé 3x2 [HIV 05]	26
1.23	Définition du contour des sections de la mèche [HIV 05]	27



1.24	Maillage voxel de deux bouts de mèche avec apparition de contrainte [DEC 11] . . . . .	27
1.25	Schéma de principe d'un tomographe à rayons X . . . . .	29
1.26	Acquisition des données en tomographie à rayons X . . . . .	30
1.27	Image du tomographe utilisé . . . . .	31
1.28	Illustration du compromis taille/résolution pour un tomographe à source conique . . . . .	32
1.29	Tomographie d'un sergé de carbone 2x2 : le G0986 . . . . .	34
1.30	Tomographie d'un renfort tissé 3D orthogonal non ondulé . . . . .	35
1.31	Rendu volumique d'un interlock générique . . . . .	36
1.32	Coupe d'un interlock générique dans le plan (x,y) . . . . .	37
1.33	Coupe d'un interlock générique dans le plan (y,z) . . . . .	38
1.34	Coupe d'un interlock générique dans le plan (z,x) . . . . .	39
1.35	Assemblage de différentes coupes dans les 3 plans . . . . .	40
2.1	Image numérique en niveaux de gris - Vision discrète . . . . .	45
2.2	Image numérique en niveaux de gris - Vision surfacique . . . . .	46
2.3	Types d'images . . . . .	46
2.4	Exemple de convolution discrète . . . . .	48
2.5	Filtres de lissage . . . . .	49
2.6	Différentes connexités d'un pixel à ses voisins . . . . .	51
2.7	Filtres dérivateurs . . . . .	52
2.8	Détection de contours . . . . .	54
2.9	Opérations élémentaires de morphologie mathématique . . . . .	54
2.10	Fermeture et ouverture . . . . .	55
2.11	Schéma de l'algorithme basé sur le calcul des tenseurs de structure 3D . . . . .	57
2.12	Filtre de Sobel 3D . . . . .	58
2.13	Gradients dans les trois directions de l'espace . . . . .	59
2.14	Carte des orientations des pixels sans et avec filtrage gaussien . . . . .	61
2.15	Propriétés isotropiques des pixels . . . . .	61
2.16	Orientations des pixels possédant au minimum 2% d'énergie . . . . .	62
2.17	Espace colorimétrique HSB (a) et dichromatie tritanope (b) . . . . .	63
2.18	Application de la tritanopie sur un interlock . . . . .	63
2.19	Déconvolution de couleurs (H&E DAB) . . . . .	63
2.20	Différentes étapes de la segmentation du G0986 [NAO 14] . . . . .	65
2.21	Convention d'orientation du paramètre offset . . . . .	66
2.22	Construction d'une matrice de cooccurrence . . . . .	67
2.23	Exemple d'application des différents paramètres statistiques de la matrice de cooccurrence sur un stack d'images d'interlock . . . . .	68
2.24	Schéma de l'algorithme d'analyse de textures . . . . .	69
2.25	Seuillage équivalent des différents paramètres statistiques . . . . .	71
2.26	Contraste $> 0.035$ avec ou sans filtrage préliminaire . . . . .	72
2.27	Labellisation des sections . . . . .	73

2.28	Morphologie mathématique et labellisation . . . . .	74
2.29	Enveloppe convexe d'un nuage de points . . . . .	75
2.30	Enveloppes convexes des sections . . . . .	75
2.31	(a) Image originale, (b) Enveloppes convexes (plan XZ), (c) Enveloppes convexes 3D . . . . .	76
2.32	(a) Image originale, (b) Enveloppes convexes (plan YZ) . . . . .	76
2.33	Superposition des enveloppes convexes des mèches de chaîne (en vert) et des mèches de trame (en rouge) . . . . .	77
3.1	Composition d'un Marching Cube [PRO 09] . . . . .	82
3.2	Intersection surface-cellule pour l'ensemble des 15 configurations utilisant les propriétés de symétrie et rotation permettant de préserver la topologie [PRO 09, FRE 10] . . . . .	83
3.3	Illustration de contraction de sommets . . . . .	84
3.4	Illustration de la simplification du maillage surfacique . . . . .	85
3.5	Amélioration du maillage frontal . . . . .	86
3.6	Exemple d'orientation d'un élément hexaédrique basée sur une arête en utilisant la numérotation locale de l'élément . . . . .	86
3.7	Exemples de squelettisation . . . . .	87
3.8	Illustrations des axes médians . . . . .	88
3.9	Schématisation de l'algorithme de récupération des noeuds de la "dorsale" des mèches . . . . .	90
3.10	a) Squelettisation des mèches et b) spline de la fibre neutre . . . . .	91
3.11	Assignation orientation des éléments . . . . .	92
3.12	Différentes triangulations : a) triangulation de Delaunay, b) triangulation de poids minimal, c) triangulation gloutonne . . . . .	94
3.13	Exemple de deux triangulations ; Celle de <i>gauche</i> est une triangulation de Delaunay, celle de <i>droite</i> ne l'est pas (le cercle circonscrit rouge aux triangles contient un quatrième site) . . . . .	95
3.14	Génération de la grille triangulaire régulière . . . . .	96
3.15	Schématisation ressort entre les noeuds . . . . .	97
3.16	Génération du maillage surfacique . . . . .	98
3.17	Exemple de lissage barycentrique sur un maillage . . . . .	99
3.18	Schéma de génération de maillage prismatique . . . . .	100
3.19	Exemple de maillage prismatique d'une mèche d'interlock . . . . .	100
3.20	Maillage prismatique du G0986 . . . . .	101
3.21	Illustration d'un prisme tordu présentant un facteur $W_{max} = 0.18$ . . . . .	103
3.22	Histogramme du pourcentage d'éléments en fonction de la qualité du maillage . . . . .	103
4.1	Configuration initiale $C_0$ et configuration actuelle déformée $C_t$ . . . . .	107
4.2	Définition du vecteur contrainte . . . . .	111
4.3	Définition de la rotation suivant la direction des fibres [BAD 08a] . . . . .	115

4.4	Isotropie transverse de la mèche de renfort tissé. Image obtenue par tomographie X . . . . .	116
4.5	Essais de traction sur une mèche seule [BUE 01] . . . . .	122
4.6	Schéma de principe de l'implémentation d'un code de calcul explicite en différences centrées à pas adaptatif . . . . .	128
5.1	Caractéristiques géométriques du sergé de carbone 2x2 : le G0986 . . . . .	133
5.2	Reconstitution du renfort complet par translation d'une maille élémentaire a) non déformée et b) soumise à une transformation homogène . . . . .	134
5.3	Points appariés au sein d'une maille élémentaire . . . . .	135
5.4	Déformation globale et déformations locales de la maille élémentaire permettant de garantir les conditions de périodicité du champ de déplacement du renfort soumis à une transformation globale homogène . . . . .	135
5.5	Configurations d'un VER . . . . .	137
5.6	Comparaison des différents modèles du sergé . . . . .	138
5.7	Appariage par des References Points . . . . .	138
5.8	Algorithme d'optimisation des paramètres par approche inverse de type Levenberg-Marquardt . . . . .	143
5.9	Illustration de la traction biaxiale . . . . .	144
5.10	Machine d'essai de traction biaxiale Zwick . . . . .	145
5.11	Identification des paramètres de la loi hypoélastique . . . . .	146
5.12	Réseau de courbes de traction biaxiale . . . . .	147
5.13	Essais de compaction : simulations et experimental . . . . .	148
5.14	Simulation de la compaction du G0986 . . . . .	149
5.15	Tomographie du renfort 3D orthogonal : a) vue 3D b) coupe chaines et trames c) coupe liant . . . . .	150
5.16	Caractéristiques de la mèche en verre E [VIL 14] . . . . .	151
5.17	Tissé 3D orthogonal segmenté . . . . .	151
5.18	Maillage prismatique du tissé 3D orthogonal réalisé avec la méthode développée dans cette thèse. . . . .	152
5.19	Identification du comportement de la mèche de verre en élongation . . . . .	153
5.20	Paramètres identifiés de la mèche de verre . . . . .	153
5.21	Compaction du tissé 3D orthogonal . . . . .	154
5.22	Comparaison entre tomographie et simulation du renfort 3D orthogonal . . . . .	154
5.23	Image de coupe de la tomographie du renfort 3D (plan XY) a) non compacté et b) compacté à 22% ainsi que les images de coupe de la simulation du renfort 3D (plan XY) c) non compacté et d) compacté à 22% . . . . .	155
A.1	Paramètre contraste pour différentes tailles de fenêtre . . . . .	163
A.2	Paramètre corrélation pour différentes tailles de fenêtre . . . . .	163
A.3	Paramètre énergie pour différentes tailles de fenêtre . . . . .	164
A.4	Paramètre homogénéité pour différentes tailles de fenêtre . . . . .	164
A.5	Paramètre contraste pour différents niveaux de gris . . . . .	165

A.6	Paramètre corrélation pour différents niveaux de gris . . . . .	165
A.7	Paramètre homogénéité pour différents niveaux de gris . . . . .	165
A.8	Paramètre énergie pour différents niveaux de gris . . . . .	165
A.9	Paramètre contraste pour différents offsets . . . . .	166
A.10	Paramètre corrélation pour différents offsets . . . . .	166
A.11	Paramètre énergie pour différents offsets . . . . .	166
A.12	Paramètre homogénéité pour différents offsets . . . . .	167
A.13	Paramètre contraste dans le plan XY pour différents offsets . . . . .	167
A.14	Paramètre corrélation dans le plan XY pour différents offsets . . . . .	168
A.15	Paramètre énergie dans le plan XY pour différents offsets . . . . .	168
A.16	Paramètre homogénéité dans le plan XY pour différents offsets . . . . .	168

## Table des figures

---

# Liste des tableaux

1.1	Compositions massiques principales des fibres de verre (%) [BER 08] . . .	10
4.1	Dérivées objectives et lois de comportement associée [BEL 00, FLO 13] .	114
4.2	Schémas implicites classiques dérivés du schéma de Newmark [BOR 12]	126



# Introduction

Les gains de masse recherchés dans l'aéronautique poussent les sociétés du groupe SAFRAN à développer des technologies CMO (Composites à Matrice Organique) et CMC (Composites à Matrice Céramique) innovantes et en rupture pour concevoir de nouveaux produits et en particulier les aubes de nouveaux moteurs d'avion. Ces développements nécessitent des méthodes, des modèles et des outils de simulation spécifiques, en particulier en conception et dimensionnement. Ces modèles et logiciels doivent être capables de simuler les procédés de fabrication, le comportement mécanique en service, l'endommagement et la durée de vie des pièces composites (CMO et CMC) en vue de leurs l'industrialisation.

La conception des pièces composites nécessite d'adapter les paramètres matériaux (orientation des fibres, taux volumique de fibre, ratio chaîne/trame, porosité) aux sollicitations thermo-mécaniques rencontrées par la pièce et aux possibilités offertes par les procédés de mise en oeuvre. Une large partie de ce travail de conception s'appuie sur des modélisations à l'échelle macroscopique (l'échelle globale de la pièce composite) où ces données locales sont « homogénéisées ». Cependant, l'échelle macroscopique limite parfois la capacité de compréhension des phénomènes physiques, tout particulièrement dans le cas des pièces qui ne respectent pas les conditions de séparation des échelles entre macro et méso. Certaines méthodes de modélisations (en particulier en mise en forme, infiltration, comportement mécanique) s'orientent donc vers l'exploitation de l'échelle mésoscopique (l'échelle du toron, de la maille élémentaire tissée) pour compléter et étayer les hypothèses faites à l'échelle macro. A ce titre, la modélisation des opérations de mise en forme est la plus exigeante sur la qualité de la modélisation géométrique et du maillage associé afin de traiter correctement les contacts entre torons.

La technique classiquement utilisée pour réaliser des simulations à l'échelle mésoscopique consiste à utiliser des modeleurs géométriques spécifiques aux renforts tissés qui permettent de mailler les mèches et d'affecter les caractéristiques anisotropes du renfort tissé.

Ces modèles ont été utilisés pour calculer la déformation de mailles élémentaires mésoscopiques soumises à des sollicitations de tractions biaxiales et de compressions transverses. Ces analyses permettent de calculer certaines propriétés de la maille déformée et en particulier sa perméabilité qui conditionne l'écoulement de la résine lors de l'injection.

Néanmoins les modeleurs géométriques de renforts tissés montrent des limites fortes. Ils sont limités aux architectures simples et ne sont pas adaptés aux interlocks dont la



spécificité est la liaison des couches par le tissage qui conduit à des matériaux qui résistent bien au délaminage. La géométrie de ces matériaux est complexe. Surtout, elle n'est souvent pas bien connue en détail car elle résulte d'équilibres au cours du tissage. Dans ce contexte, la microtomographie aux rayons X, qui est une technique non destructive d'observation d'objets massifs à coeur, permet des analyses détaillées et précises de la géométrie d'un renfort fibreux qu'elle soit déformée ou non. Elle permet de distinguer les mèches mais également les fibres qui définissent les directions d'anisotropie du matériau.

L'objectif de ce travail de thèse est de générer des modèles éléments finis des renforts 3D de composites aussi proches que possible de la réalité à partir d'images de tomographie en vue de simulations de grandes déformations des préformes.

Ce manuscrit s'articule autour de cinq chapitres, au cours desquels la génération de géométries des renforts tissés et différentes approches de modélisation de leur comportement mécanique seront présentées.

Le premier chapitre constitue une présentation générale des matériaux composites à renforts tissés, de leurs procédés de fabrication à leurs propriétés mécaniques. Un état de l'art de la simulation des renforts tissés à différentes échelles sera également présenté ainsi qu'un rappel sur le principe de la tomographie aux rayons X.

Dans le second chapitre, différents concepts utilisés en traitement d'images sont exposés. On y définit les principales notions de base et détaille certaines techniques utilisées afin de segmenter les images, i.e de différencier les mèches de chaîne et trame du matériau composite obtenues par microtomographie X. Deux méthodes sont envisagées. La première est basée sur le calcul du tenseur de structure, c'est-à-dire la matrice du gradient de l'image pour chaque pixel. La deuxième méthode s'appuie sur l'analyse de texture de l'image. Ainsi chaque mèche pourra être identifiée et labellisée. La segmentation de n'importe quel type de renfort plus au moins complexe est rendue possible.

Le troisième chapitre présente les algorithmes mis en place pour générer des maillages issus des images segmentées afin de mener des calculs éléments finis. Nous verrons comment à partir de la microtomographie un premier modèle de maillage est généré. Ce maillage utilise des éléments tétraédriques ayant la spécificité de suivre l'orientation matérielle de la mèche. Enfin, un second modèle de maillage basé sur des éléments prismatiques est construit. Il permet en outre de réduire le nombre d'éléments vis à vis du premier modèle et de réduire le temps de calcul.

Les bases de la mécanique des milieux continus nécessaires à la mise en place des lois de comportement pour les mèches sont rappelées dans le chapitre quatre. Bien que ce comportement présente clairement des caractéristiques élasto-plastiques et viscoplastiques, ces aspects ne seront dans un premier temps pas pris en compte et le comportement défini dans ce manuscrit est purement élastique. Deux types de loi sont abordés, les lois hypoélastiques et hyperélastiques. Les spécificités de chacune y sont présentées. Le choix se portera sur l'une ou l'autre de ces lois, selon les avantages, inconvénients et difficultés d'implémentation dans le logiciel commercial ABAQUS.

Enfin, le dernier chapitre concerne l'identification des paramètres matériau nécessaires à la définition de la loi de comportement mécanique des mèches et à la mise en

oeuvre de celles-ci. Pour ce faire, un algorithme d'optimisation couplé à des modélisations ABAQUS est utilisé afin de corrélérer au mieux le comportement simulé avec les observations expérimentales. Une fois la loi de comportement identifiée, des simulations de la mise en forme des différents renforts sont réalisées et montrent de bonnes corrélations avec l'expérimental.



# Chapitre 1

## Fabrication et modélisation des composites à renforts tissés

*Ce premier chapitre est une introduction à l'étude des pièces composites à renforts tissés. Après une présentation générale des matériaux composites, les renforts textiles de composites seront détaillés. Dans ce mémoire, nous nous intéresserons aux différentes échelles de la modélisation des renforts tissés épais. Enfin, l'utilisation de la tomographie aux rayons X sera abordée. Cette technique d'observation à coeur d'objets massifs est idéalement adaptée à l'étude des renforts tissés car elle est non destructive et permet des observations aux échelles mésoscopiques.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Présentation générale des matériaux composites</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>De la fibre à la pièce finale</b>	<b>8</b>
1.2.1	Les mèches	8
1.2.2	Le renfort	11
1.2.3	Consolidation des matrices organiques	15
<b>1.3</b>	<b>Modélisations et simulations de la mise en forme des renforts tissés</b>	<b>17</b>
1.3.1	Modélisation à l'échelle microscopique	18
1.3.2	Modélisation à l'échelle macroscopique	19
1.3.2.1	Approches géométriques	19

---

1.3.2.2	Approches mécaniques . . . . .	20
1.3.3	Modélisation à l'échelle mésoscopique . . . . .	24
<b>1.4</b>	<b>Tomographie aux rayons X . . . . .</b>	<b>28</b>
1.4.1	Principe physique . . . . .	28
1.4.2	Reconstruction par tomographie . . . . .	29
1.4.3	Équipement utilisé . . . . .	30
1.4.4	Application aux renforts de composites . . . . .	32
1.4.5	Application à un interlock générique . . . . .	35
<b>1.5</b>	<b>Bilan du chapitre 1 . . . . .</b>	<b>41</b>

---

## 1.1 Présentation générale des matériaux composites

Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux constituants non miscibles dont les propriétés répondent à des besoins spécifiques non satisfaits individuellement par les composants de base. Cette définition inclut un large éventail de matériaux, certains naturels et utilisés depuis longtemps tels que le bois, les os ou le torchis ; d'autres conçus plus récemment tels que les pneumatiques ou le béton armé. Tous ces matériaux ont en commun le fait d'être constitués de deux phases principales : le renfort qui confère au produit final les caractéristiques mécaniques dominantes et la matrice qui apporte la cohésion de l'ensemble. La volonté d'utiliser des matériaux spécifiques à chaque application dans l'optique d'optimiser coûts et performances mécaniques, fait des composites, par la multiplicité des matériaux imaginables, de sérieux candidats. Parmi les diverses industries intéressées par les composites, les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatiale sont demandeurs de matériaux légers et résistants, caractéristiques de prédilection des matériaux composites.

### La matrice

Les matrices des matériaux composites développés actuellement sont généralement classées en deux catégories :

- *Les matrices organiques* (polymères thermoplastiques, thermodurcissables et élastomères). Elles représentent la très grande majorité des matrices utilisées industriellement grâce à leur faible coût et à la facilité de mise en œuvre du processus de fabrication ;
- *Les matrices minérales* (céramiques et métalliques). Les matrices céramiques (oxydes et carbures) et métalliques (aluminium, magnésium, fer, cobalt, cuivre) sont destinées à des applications de pointe, lorsque des conditions environnementales hostiles ne permettent pas l'utilisation d'une matrice organique (hautes températures, hygrométrie défavorable). Leurs procédés de fabrication complexes rendent ces matériaux coûteux et difficiles à produire, restreignant plutôt leur utilisation actuelle aux secteurs militaire et spatial.

Les renforts que nous étudierons dans ce document sont destinés à des composites à matrices organiques. Pour ces dernières, les matrices thermodurcissables sont les plus couramment utilisées, leur faible viscosité avant réticulation facilitant la phase d'injection de résine dans le renfort sec.

### Les renforts

Les renforts aussi peuvent être classifiés, cette fois en fonction de leur géométrie :

- *Les renforts particuliers* : la matrice est renforcée par une phase dispersée de particules avec ou sans orientation privilégiée. Il s'agit généralement d'inclusions granulaires (craie), lamellaires (talc, mica) ou aciculaires (wallastonite, fibres courtes). Les composites à renfort particulier sont peu utilisés à des fins structurelles, mais plutôt pour des applications spécifiques ou des produits de grande consommation ;

- *Les renforts à fibres discontinues* : la matrice est renforcée par une phase dispersée de fibres courtes (de longueurs inférieures à 100 fois leur diamètre) avec ou sans orientation privilégiée. Les fibres courtes sont assemblées en nappes appelées mâts et représentent un apport volumique en fibre de l'ordre de 30%. Le composite obtenu est alors un polymère renforcé ;
- *Les renforts à fibres continues* : la matrice est renforcée par une phase dispersée de fibres continues dont la longueur est voisine de celle de la pièce finale. Les directions privilégiées des fibres confèrent à la pièce finale ses caractéristiques mécaniques principales. Dans ce type de renfort, la matrice n'est présente que pour assurer la cohésion de l'ensemble et apporter une résistance aux efforts appliqués dans des directions différentes de celles des fibres.

Dans cette étude, nous nous intéresserons exclusivement aux renforts à fibres continues. Les fibres utilisées pour réaliser ces renforts peuvent être de différentes natures : verre, carbone, métaux, céramiques ou encore matériaux d'origine végétale (cellulose, lignine, lin) ou animale (collagène). Seules les fibres en carbone et verre seront étudiées. Ces fibres sont principalement destinées à des solutions technologiques de haute performance en aéronautique et aérospatiale. Les fibres peuvent être assemblées selon différentes méthodes. On distingue alors les nappes unidirectionnelles (UD), assemblages superposés de plis comptant des fibres orientées dans une direction privilégiée. Si plusieurs nappes sont cousues ensemble, on obtient alors un Non-Crimp Fabric (NCF). Les fibres peuvent également être assemblées en mèches, qui sont ensuite tricotées, tressées ou tissées. Ce travail sera limité aux assemblages tissés de mèches.

## 1.2 De la fibre à la pièce finale

La structure multiéchelle et multimatériau d'une pièce composite conditionne son comportement final. Dans cette partie, les différentes étapes du processus de fabrication sont présentées. Les fibres doivent être produites, puis assemblées en mèches qui seront liées par tissage ; le renfort est ainsi obtenu. Pour produire la pièce finale, le renfort doit être mis en forme, imprégné de résine puis cuit. Dans le cas des matrices céramiques, des étapes supplémentaires (pyrolyse, densification) sont nécessaires.

### 1.2.1 Les mèches

#### Fibres de carbone

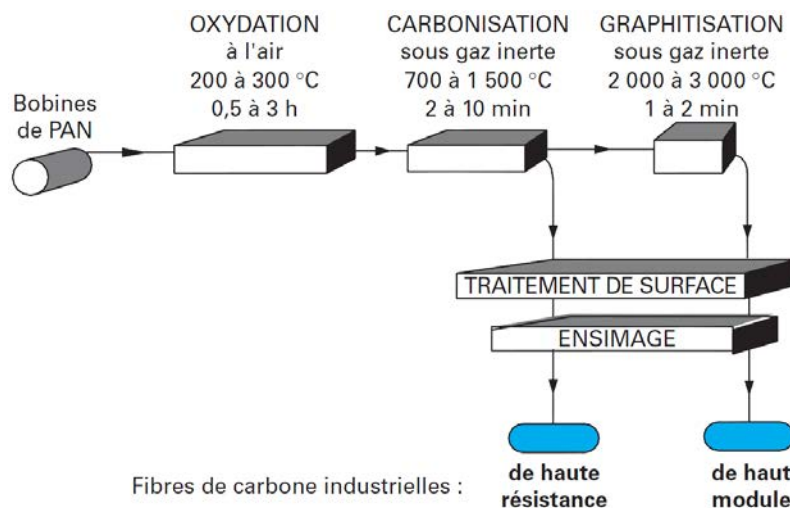
Les fibres de carbone peuvent être obtenues principalement de deux manières : à partir de fibres de polyacrylonitrile (dit PAN-based), la voie la plus courante, ou à partir de fibres de brai produites par filage de résidus de houille ou de pétrole (dit pitch-based).

Dans le premier cas, les fibres de carbone sont créées par la conversion d'un précurseur en polyacrylonitrile. Les filaments sont d'abord filés à partir du précurseur élevé à sa température d'oxydation, puis maintenus en tension, et enfin carbonisés dans une

atmosphère d'azote à environ 1 200°C. Les éléments non carbonés se volatilisent, laissant principalement le carbone. Les fibres obtenues après cette étape sont dites de haute résistance (HR). Une étape supplémentaire de graphitisation à 2 500°C permet de parfaire la structure et d'obtenir des fibres dites haut module (HM). Des variations pendant l'étape de graphitisation mènent à différentes gammes de fibres.

Pour le cas des fibres de brai, les filaments sont cuits après filage à 600°C puis carbonisés dans une atmosphère d'azote à 2 500°C afin de les enrichir en carbone. Les fibres obtenues affichent un très bon taux de carbone. Cependant, la difficulté d'élimination des impuretés dans le brai d'origine leur confère une rigidité de traction plus faible.

La dernière étape avant l'obtention de fibres utilisables est l'ensimage. Cette opération consiste à traiter la surface des fibres et joue un rôle prépondérant dans leur durée de vie. Sa fonction principale est d'obtenir une meilleure compatibilité et une meilleure cohésion entre fibres et matrice afin d'optimiser les caractéristiques mécaniques de la pièce finale. Sa composition peut varier fortement d'un producteur à l'autre et selon le couple fibre/matrice en jeu [BER 08]. La figure 1.1 rappelle les différentes étapes du procédé de fabrication des mèches de carbone ex-PAN.



**FIGURE 1.1** – Principe du procédé de fabrication des fibres de carbone ex-PAN [DUP 08]

## Fibres de verre

Selon l'usage qui sera fait de la fibre, plusieurs types de compositions peuvent être utilisés comme matière première. Parmi les différentes compositions classiques du verre, les plus couramment utilisées pour former des fibres de verres destinées à des applications structurales sont décrites dans le tableau 1.1.

La composition de type E est la composition standard. La composition de type C est généralement utilisée dans des applications nécessitant une bonne résistance à la corrosion. La composition de type A est principalement utilisée pour son bas coût de fabrication comme pour le verre plat ou le verre de bouteille. La composition choisie est



	Type E	Type C	Type A		Type E	Type C	Type A
SiO <sub>2</sub>	52-62	64	72	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.05-0.8		
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	12-16	4	0.3	TiO <sub>2</sub>	0-1.5		
CaO	16-25	8	10	R <sub>2</sub> O	0-2		
MgO	0-5	3	2.8	F <sub>2</sub>	0-1		
Na <sub>2</sub> O		14	14.2	K <sub>2</sub> O		1	
B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0-10	6		SO <sub>3</sub>			0.6

**Tableau 1.1** – Compositions massiques principales des fibres de verre (%) [BER 08]

chauffée à environ 1500°C, puis filée à grande vitesse pour former les fibres. Ce procédé permet d'obtenir des mèches sillionnées (appelées également stratifils ou rovings) composées de fibres continues (par opposition aux mèches verrannes composées de fibres longues) et présentant de très bonnes caractéristiques mécaniques. Ces fibres, dont le diamètre nominal est généralement compris entre 5 et 24 microns, sont alors assemblées en mèches : chaque mèche comporte entre 1000 (1k) et 12000 (12k) fibres. La figure 1.2 illustre le procédé de fabrication des fibres par filage. Dans ce procédé, le diamètre de fibre obtenu dépend principalement de la géométrie de la filière, de la vitesse de filage et de la vitesse de refroidissement

### Obtention des mèches

Les fibres obtenues peuvent subir des traitements ou des transformations afin de leur conférer de nouvelles propriétés. Dans notre cas, elles sont assemblées pour former des mèches, avec des traitements supplémentaires possibles :

- Le moulinage ou le retordage permet d'apporter une torsion aux fils continus pour, dans certains cas, améliorer leurs caractéristiques mécaniques et diminuer leur section et/ou assembler par torsion plusieurs fibres ;
- La texturation confère aux fils continus des propriétés de gonflant et d'élasticité modifiant ainsi l'aspect et le confort des étoffes ;
- Le guipage consiste à recouvrir un fil d'âme par enroulement hélicoïdal avec un ou plusieurs fils simples appelés fils de couverture. Si cette technique est utilisée principalement avec les fils élastiques dans le cas des applications traditionnelles (par exemple, bas et collant), elle permet également de protéger certains fils fragiles comme le carbone ou les fibres céramiques lors des opérations de transformation des fils en surfaces textiles (tissage, tressage...).

Une fois assemblées, les mèches de fibres de carbone contiennent généralement entre 3 000 et 48 000 fibres. Les grandeurs caractéristiques généralement utilisées pour décrire une mèche sont les suivantes : matériau, type d'assemblage, nombre de fibres, diamètre des fibres, masse linéique (en *tex*,  $1 \text{ tex} = 1 \text{ g.km}^{-1}$ ), rigidité et résistance en tension.

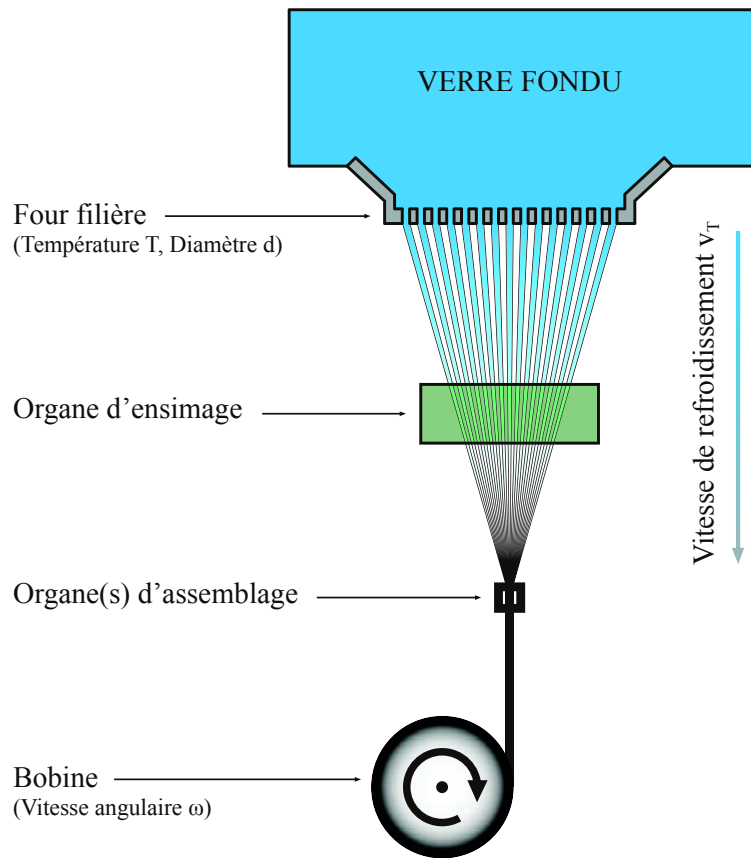


FIGURE 1.2 – Procédé de filage et d'assemblage des mèches en fibre de verre [CHA 11b]

### 1.2.2 Le renfort

Les renforts étudiés dans ce manuscrit sont les assemblages de mèches de carbone ou de verre obtenus par tissage. Les tissages peuvent être 2D (surfariques), 2.5D (interlocks) ou 3D (tridimensionnels). Les premiers sont un entrecroisement de mèches selon deux directions perpendiculaires privilégiées, chaîne et trame. Le type d'agencement utilisé est appelé armure du renfort. Pour le cas 2D, les armures traditionnelles de l'industrie textile sont utilisées. Pour les tissages 3D, une troisième direction de mèche est ajoutée dans l'épaisseur du renfort. Finalement, les tissages nommés 2.5D se situent à la frontière entre tissés 2D et 3D. Des mèches de chaînes vont alors chercher dans les couches supérieures et inférieures une, ou plusieurs mèches de trame afin de lier ensemble les couches. Ces tissus sont souvent dérivés d'armure classiques 2D. Ce procédé permet d'obtenir des tissés très épais (jusqu'à obtenir une dizaine de centimètres) et résistants au délaminage.

Une armure tissée est obtenue à partir d'un métier à tisser, de la même manière que les textiles d'habillement. Le procédé de tissage nécessite un certain nombre d'étapes réalisées par des parties spécifiques du métier, illustrées figure 1.3 : l'ouverture de foule qui permet de séparer les mèches de chaîne en deux parties grâce aux lisses créant l'es-

pace nécessaire à l'insertion d'une trame, l'insertion proprement dite de la trame, le coup de peigne permettant de tasser les trames puis la répétition de ces trois étapes jusqu'à complétion du renfort.

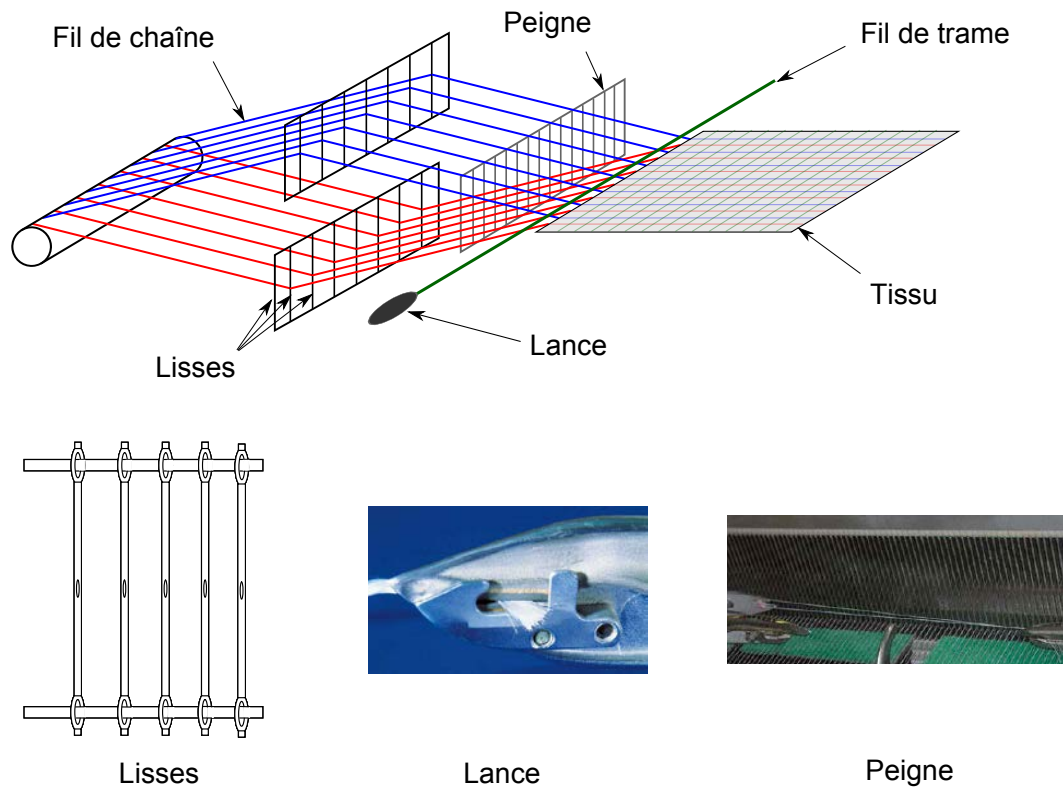


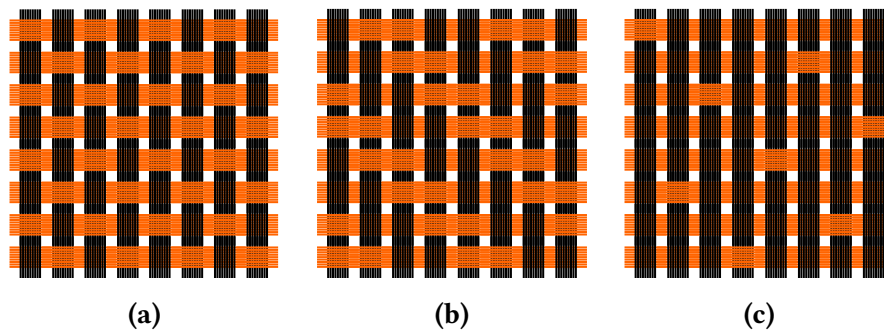
FIGURE 1.3 – Schéma d'un métier à tisser et principaux outils du procédé [FLO 13]

### Armures 2D

En ce qui concerne les tissus 2D, il existe trois armures principales (figure 1.4) :

- *La toile ou taffetas*, l'armure la plus simple : chaque fil de chaîne passe alternativement au-dessus et en dessous de chaque fil de trame (1.4a) ;
- *Le sergé NxM* : le fil de trame passe au-dessus de N puis en dessous de M fils de chaîne en décalant d'un fil à chaque passage (1.4b) ;
- *Le satin* : les points de liage de la chaîne et de la trame sont disséminés de façon à atténuer l'effet de diagonale présent sur le sergé. Le fil de trame passe au dessus de N fils de chaîne puis en dessous de 1. (1.4c).

La combinaison de ces trois familles d'armures avec la multiplicité de géométries et de matériaux disponibles pour la mèche, permet d'obtenir une grande diversité de renforts tissés. Si le renfort est identique dans la direction chaîne et dans la direction trame, on parle de tissu équilibré. De façon générale, un tissu peut être caractérisé par son armure, la disposition relative des chaînes et des trames, et son embuvage qui est la différence relative entre la longueur du tissu dans une direction et la longueur d'une



**FIGURE 1.4** – Les différents motifs de tissage 2D. Taffetas (a) Sergé 2x2 (b) Satin de 8 (c)

mèche dans cette même direction. Différentes études [BUE 98, BOI 01, LOM 05, HIV 08] ont pu montrer l'influence fondamentale de l'embuvage pour le comportement mécanique des renforts. L'embuvage est donné par :

$$e = \frac{l_{\text{mèche}} - l_{\text{tissu}}}{l_{\text{mèche}}} \quad (1.1)$$

**FIGURE 1.5** – Embuvage d'une mèche

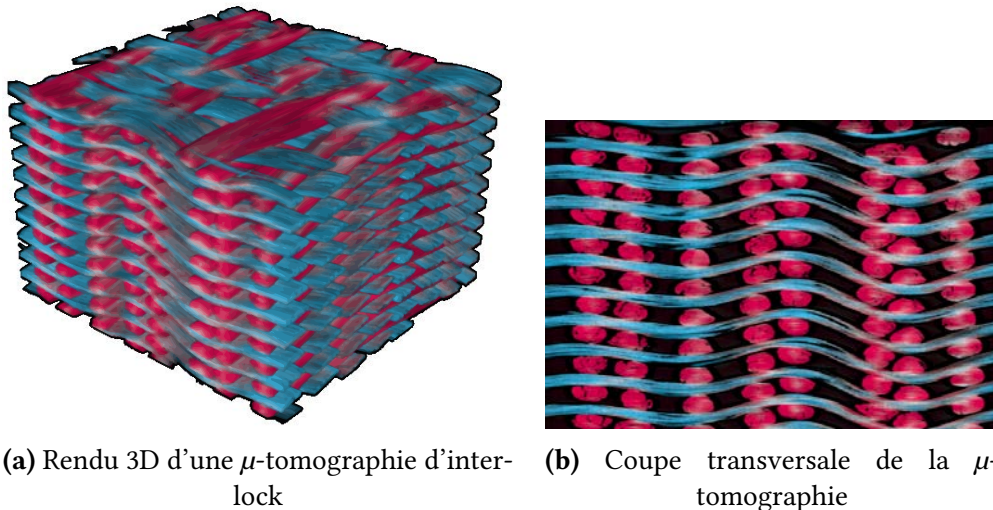
Des pièces épaisses peuvent être réalisées grâce à ces armures 2D en les superposant. La structure ainsi obtenue permet d'optimiser la raideur du matériau fini en jouant sur l'orientation des plis, mais elle est définitivement laminaire au sens où les différents plis ne possèdent pas de liens autres que la résine. Ces matériaux sont alors très sensibles au délaminage qui, quand il apparaît, se propage sans obstacle et peut conduire à une ruine de la structure. De plus, l'empilement des différentes couches (de quelques millimètres d'épaisseur chacune), souvent réalisé à la main, conduit, pour des pièces de forte épaisseur, à des temps de fabrication prohibitifs.

### Armures 2.5D

Pour pallier les problèmes inhérents aux armures 2D, des renforts tissés épais ont été conçus [BIG 05]. Ces renforts peuvent être vus comme la superposition de différentes couches assemblées structurellement lors du tissage. Au lieu de s'entrecroiser continuellement dans le même plan, les mèches de trame croisent plusieurs plans de mèches de chaîne dans l'épaisseur du matériau (voir figure 1.6). Le tissé obtenu peut alors atteindre des épaisseurs de l'ordre de la dizaine de centimètres, permettant la fabrication de pièces aux qualités mécaniques comparables tout en évitant le phénomène de délaminage. Le métier à tisser nécessaire pour ces préformes utilise la mécanique Jacquard modifiée pour le cas des structures 3D de façon à contenir plusieurs couches de chaînes. Certains métiers à tisser aptes à créer de tels assemblages permettent également de faire varier le motif de tissage au sein de la même préforme de manière à optimiser les caractéristiques

de la pièce en fonction des sollicitations subies. Ce type de matériau, onéreux, est pour l'instant réservé aux applications de pointe de l'aéronautique et de l'aérospatiale.

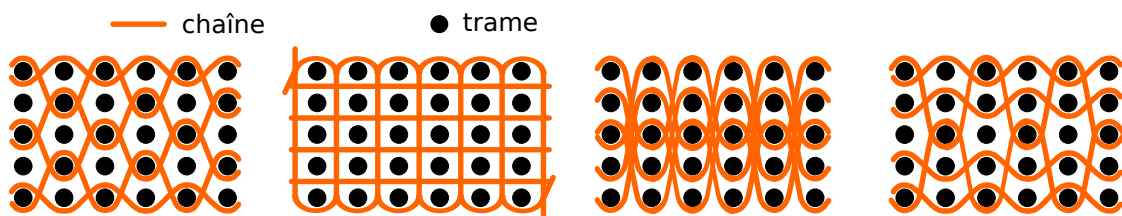
L'utilisation de tissés 2.5D permet aussi de minimiser les variations de propriétés mécaniques entre deux pièces composites achevées sensées être identiques, chose courante pour les stratifiés 2D où la méthode de travail de l'opérateur est prépondérante.



**FIGURE 1.6** – Structure d'un renfort interlock par  $\mu$ -tomographie

Les différents agencements de structures présentés figure 1.7 ont une forte influence sur le comportement en tension de ces tissés [GU 02] :

- cas 1 : les mèches de chaîne relient deux couches l'une avec l'autre ;
- cas 2 : les mèches de chaîne sur les surfaces extérieures traversent toute l'épaisseur de l'échantillon pour relier toutes les couches entre elles ;
- cas 3 : les mèches de chaîne relient plusieurs couches mais suivent la même trajectoire ;
- cas 4 : les mèches de chaîne relient plusieurs couches de manière aléatoire.



**FIGURE 1.7** – Armures de renforts 3D [GU 02]

### 1.2.3 Consolidation des matrices organiques

Les renforts tissés sur lesquels porte notre étude étant destinés à être mis en forme par moulage, nous nous intéresserons uniquement aux procédés de ce type. Les procédés de type LCM (Liquid Composite Moulding) permettent de mettre en forme les composites à renforts tissés et à matrice polymère. Parmi ces procédés, l'infusion sous vide et le RTM (Resin Transfer Moulding, [POT 99]) sont les plus utilisés. Le principe de ces procédés est de mouler le renfort sec, puis d'injecter la résine pour solidifier la pièce. Le fait de mouler le renfort sec permet d'obtenir une pièce composite finale très proche de la pièce désirée, et ainsi de minimiser les étapes d'usinage et donc les coûts. Ces procédés, dits *procédés moule fermé*, permettent un contrôle strict des composés organiques volatiles émis lors de la fabrication, la résine n'étant alors pas en contact direct avec l'atmosphère.

De nombreux autres procédés de formage par moulage existent [BER 99, GAY 05]. Ils varient en fonction de la nature des matériaux constituant le renfort et la matrice, de l'importance des séries à effectuer, de la cadence et du coût de production recherchés.

#### L'infusion sous vide

En infusion sous vide, le renfort tissé sec à consolider est placé entre un moule et une membrane étanche, comme décrit figure 1.8. En mettant sous vide cette zone, la pompe va plaquer le renfort contre le moule grâce à la membrane et amorcer l'écoulement de la résine. Un filet de drainage, réalisé dans un matériau poreux, est placé à proximité du renfort de manière à faciliter la distribution de la résine. Ce procédé est plus facile à mettre en œuvre que le RTM, présenté dans le paragraphe suivant, et autorise la production de pièces en grande série avec une bonne répétabilité et des formes complexes. Cependant, le contrôle de l'épaisseur est difficile et l'état de surface du côté de la membrane est généralement moins bon que côté moulé.

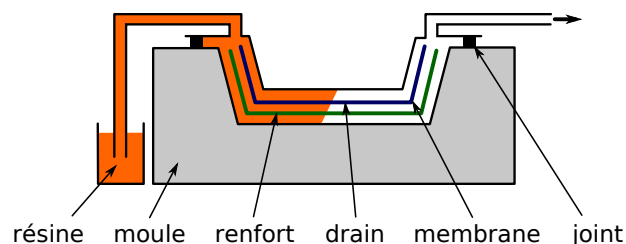


FIGURE 1.8 – Illustration du processus d'infusion sous vide

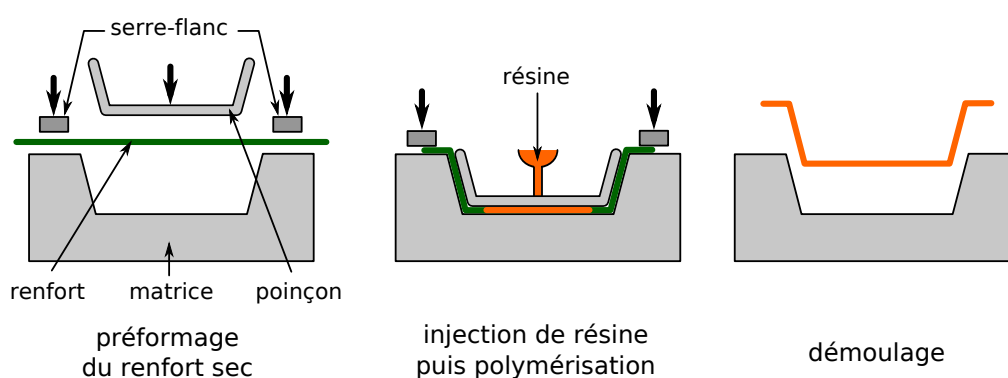
#### Resin transfer moulding

Le Resin Transfer Moulding (RTM) est, lui aussi, utilisé pour la réalisation de pièces en composite à renforts tissés [RUD 97, POT 99, PAR 00]. Le processus de fabrication peut être décomposé en trois étapes, comme illustré figure 1.9.

La première étape est l'étape de préformage. Elle consiste, à partir d'un renfort tissé, à le mettre en forme (ou l'emboutir) dans un moule par l'intermédiaire d'un poinçon.

L'avantage de ce procédé est de disposer de deux parties rigides qui vont permettre de mieux contrôler la compression du renfort pendant la mise en forme et donc son épaisseur finale. L'état de surface est alors bon des deux côtés, contrairement à l'infusion sous vide. Afin d'éviter la formation de plis pendant l'emboutissage, des serre-flanc peuvent être utilisés pour ajouter une légère tension dans les mèches.

Une fois le renfort moulé dans la forme désirée, la résine est injectée. L'ensemble est ensuite chauffé pour polymériser la résine. Finalement, lorsque la résine est consolidée, le moule est ouvert et la pièce démoulée.



**FIGURE 1.9** – Illustration du processus RTM

Ce procédé connaît un fort développement dans l'objectif d'être utilisé pour des pièces en grande série car il permet une maîtrise du taux volumique de fibre, un bon état de surface, la création de géométries complexes et des cadences de fabrication soutenues et automatisées. Cependant, malgré son utilisation dans l'industrie, ce procédé n'est pas totalement contrôlé pour des formes complexes (non développables par exemple) ou de grandes tailles. Ces éléments conduisent aujourd'hui les industriels des secteurs aérospatiaux et automobiles à porter un grand intérêt au développement et à la recherche associés au procédé.

Des problèmes majeurs et de natures différentes sont liés aux deux principales étapes du processus : des problèmes mécaniques pendant la phase de mise en forme et des problèmes de fluide pendant la phase d'infiltration. Ces travaux s'intéressent uniquement aux problèmes d'origine mécanique mais de nombreuses études liées à la perméabilité des renforts et à la résistance à l'avancement du fluide injecté sont menées [VAR 95, BRÉ 03]. La mise en forme du renfort est une étape clé du procédé. La capacité du renfort à se déformer pour prendre la forme du moule a une influence majeure à la fois sur l'étape d'injection (qualité de l'imprégnation, temps de remplissage du moule) et sur les caractéristiques mécaniques de la pièce. Pendant la mise en forme, les événements préjudiciables pouvant être rencontrés sont :

- Des ruptures de fibres, lorsque la tension dans les mèches devient trop importante ;
- La formation de flambements locaux lorsque les mèches sont sollicitées en compression ;



- L'apparition de plis qui peuvent être générés par un cisaillement ou une compression trop importante [PRO 97, BOI 11] ;
- La création de zones sèches ou de zones sans mèches engendrées par un taux volumique de fibres trop important ou trop faible localement, générant une perte de cohésion ou une baisse des propriétés mécaniques.

Avec l'étude de la perméabilité, celle du préformage est indispensable pour vérifier la faisabilité d'un processus de fabrication d'une pièce par RTM. Les qualités mécaniques finales sont intimement liées à cette étape. C'est dans ce cadre que se situe l'étude présentée dans ce manuscrit.

### 1.3 Modélisations et simulations de la mise en forme des renforts tissés

La simulation de la mise en forme du renfort permettrait d'optimiser numériquement les moules et les renforts et ainsi d'éviter une phase d'essai-erreur très onéreuse lors de la conception de pièces en composites à renforts tissés. Un effort de recherche important est donc consacré au comportement du renfort sec et à la simulation de sa déformation. L'objectif est de prédire les caractéristiques géométriques et mécaniques susceptibles d'apparaître au cours de la mise en forme comme :

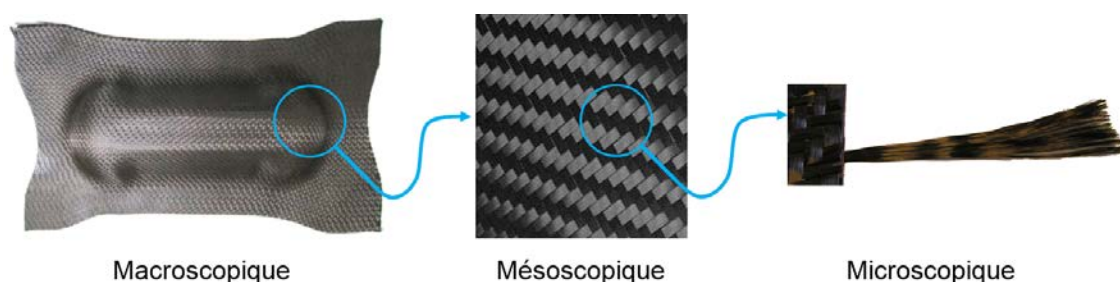
- la position des mèches et des fibres après déformation
- les caractéristiques mécaniques du renfort déformé
- la perméabilité locale du renfort déformé
- l'apparition éventuelle de plissements, de détissages, de ruptures de fibres

Ces caractéristiques et ces défauts ne sont pas tous définis à la même échelle : si une rupture de fibre est un phénomène microscopique difficile à détecter lorsque l'échelle d'observation est macroscopique, un plissement est un phénomène macroscopique qui ne peut être décelé lorsque l'échelle d'observation est microscopique. C'est pourquoi différents types de simulations ont été développés, chacun se plaçant à une échelle (fig.1.10) bien précise du renfort tissé :

- L'échelle *microscopique* : étude des fibres et leurs interactions. Seules quelques centaines de fibres par mèche peuvent être simulées au maximum
- L'échelle *mésoscopique* : étude du comportement de la mèche afin de déterminer les caractéristiques locales du renfort. Les volumes simulés sont généralement de l'ordre de la maille élémentaire du renfort
- L'échelle *macroscopique* : étude de la déformation du renfort dans sa globalité, afin de caractériser l'apparition de plissements, de glissements de mèches et plus généralement la formabilité d'une pièce complète

Les modèles qui ont été développés à ces différentes échelles sont détaillés ci-après.

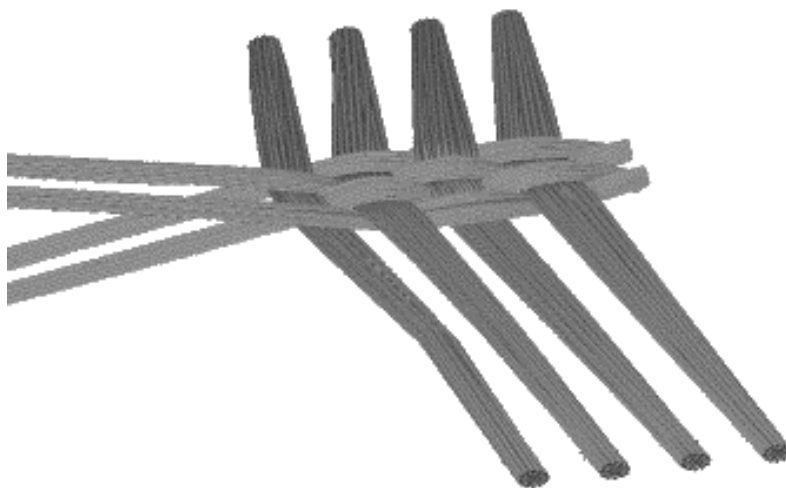




**FIGURE 1.10** – Les différentes échelles d'un renfort tissé

### 1.3.1 Modélisation à l'échelle microscopique

Dans une approche à l'échelle microscopique, le constituant de base est la fibre. Le comportement de la fibre est orthotrope linéaire et ses grandeurs caractéristiques sont relativement bien connues. La difficulté de ce type d'approche est la gestion des nombreux corps constituant le modèle et notamment du contact entre ces corps. Actuellement, les modèles existants qui s'approchent le plus de la modélisation du comportement des renforts à l'échelle microscopique sont ceux effectués sur des cordes ou câbles, qui s'apparentent à des mèches contenant moins de fibres et fortement torsadées [JIA 99, NAW 00, SRE 06, GHO 07]. Par contre, l'application aux mèches des renforts est plus rare [LAT 11], principalement à cause du nombre élevé de fibres par mèche. On notera cependant la modélisation du tissage développée par Zhou [ZHO 04], figure 1.11, qui permet de prévoir dans certaines limites la géométrie des mailles tissées élémentaires.



**FIGURE 1.11** – Renfort tissé 2D généré par le modèle de Zhou [ZHO 04]

Les travaux de Durville [DUR 10] donnent des résultats prometteurs pour la simulation à l'échelle microscopique de renforts. Des modèles de mailles élémentaires ont été développés afin de visualiser le positionnement des mèches et leur réarrangement pendant une sollicitation, figure 1.12. Le positionnement des fibres dans l'armure non

déformée n'est pas imposé mais simulé par suppression incrémentale des interpénétrations initiales. La limitation principale de ce type de simulation est le temps de calcul inhérent au nombre de fibres à modéliser. Pour cette raison, des groupes de fibres sont modélisés dans les mèches, réduisant le nombre de fibres virtuelles à quelques dizaines au lieu des milliers de fibres réelles. Le résultat est directement dépendant de la discrétisation : plus celle-ci est grossière, plus les groupes de fibres ont un comportement proche de celui des mèches, qui est bien plus complexe.

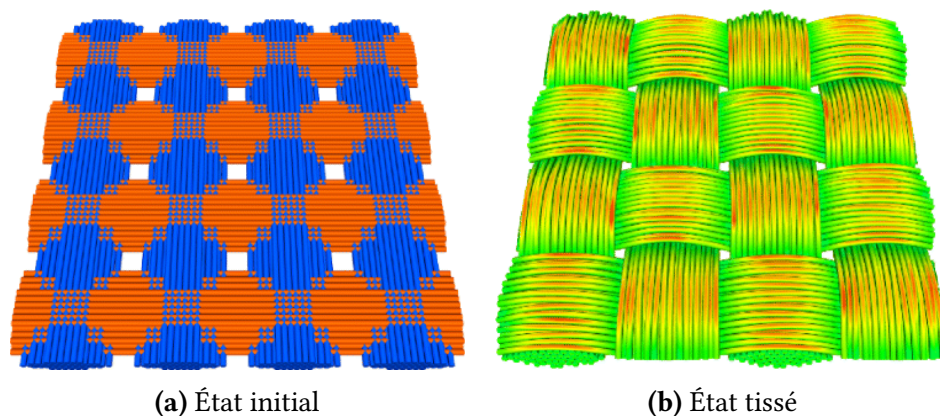


FIGURE 1.12 – Modélisation du VER d'un renfort après tissage [DUR 10]

### 1.3.2 Modélisation à l'échelle macroscopique

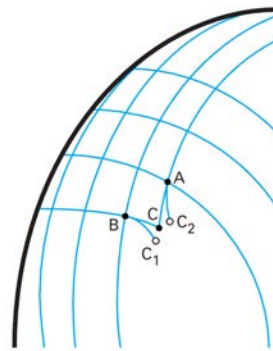
Les simulations à l'échelle macroscopique constituent le but final de la recherche sur la simulation de la mise en forme des renforts tissés : il s'agit, en caractérisant la déformation globale du renfort, d'étudier la formabilité d'une pièce composite à renfort tissé. L'étude de la formabilité consiste notamment à prévoir l'apparition de défauts macroscopiques comme les plissements ou les glissements de mèches. De nombreux modèles permettent de simuler la déformation d'un renfort tissé, depuis les modèles géométriques simples, utilisés pour simuler le drapage au stade du bureau d'étude par exemple, jusqu'aux modèles éléments finis les plus complexes. Ces modèles macroscopiques nécessitent une caractérisation locale du comportement du renfort, qui peut être obtenue à l'aide des modèles à l'échelle mésoscopique. Les modèles macroscopiques sont donc présentés ici car ils constituent, pour certains d'entre eux, la raison d'être des modèles mésoscopiques qui seront étudiés dans ce manuscrit.

#### 1.3.2.1 Approches géométriques

Les approches géométriques se basent sur l'algorithme dit du filet (*Fishnet algorithm*). Cette approche dite géométrique ou cinématique est principalement utilisée pour la simulation du drapage. Sa simplicité d'utilisation et sa rapidité d'exécution en font une bonne méthode de première approche [MAR 56, WEE 91, BOR 02]. Elle est basée sur des hypothèses fortes :

- L'inextensibilité des mèches ;
- Le non-glissement entre chaîne et trame ;
- La rotation libre aux points de croisement entre réseaux ;
- L'absence de considérations complexes de contact (frottement) avec les outils de mise en forme.

Dans cette approche, le renfort est semblable à des barres articulées aux points de croisement entre réseaux. L'algorithme calcule alors la position des points connexes sur des géodésiques tracées sur la surface à draper à partir du point courant. Figure 1.13, la position du point C est calculée grâce à A et B. La position du point initial est ainsi rendue primordiale et influe sur le résultat final [WAN 99].



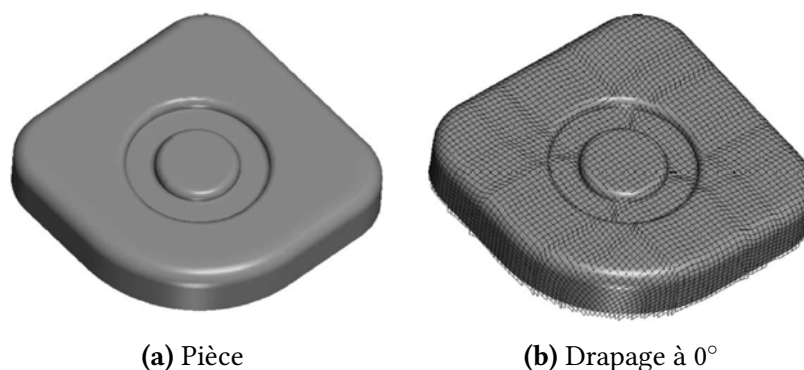
**FIGURE 1.13** – Méthode du filet : détermination de la position du point C connaissant celles de A et B [BOI 04]

Avec la suppression de toutes considérations mécaniques et de tissage, les résultats sont identiques quelles que soient les rigidités des mèches et l'armure choisie. Les blocages cinématiques en cisaillement et la variation d'épaisseur en compression sont aussi absents de la modélisation de base. L'utilisation de cette méthode pour des tissages épais est, bien évidemment, proscrite. L'absence de prise en compte d'un contact développé empêche l'utilisation d'outils externes tels que des serre-flans, pourtant nécessaires à certaines mises en forme. Pour les renforts tissés, l'algorithme du filet est intéressant comme approche préliminaire afin de déterminer le degré de complexité du formage d'une pièce. Un exemple d'application sur une pièce complexe est donné figure 1.14.

### 1.3.2.2 Approches mécaniques

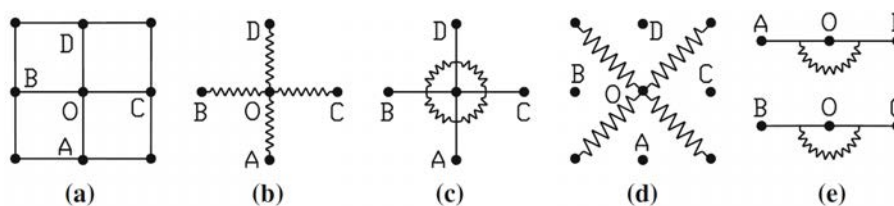
Parmi les modélisations mécaniques, trois types d'approches peuvent être distinguées : discrète, semi-discrète ou continue.

Les approches *discrètes* consistent à considérer le textile comme un assemblage discontinu d'éléments déformables [CHE 01, SHA 04, SZE 05, BOU 07]. Ce sont généralement des extensions de la théorie du filet, c'est-à-dire l'introduction de caractéristiques mécaniques dans la résolution du problème de mise en forme. Le renfort est modélisé par des nœuds reliés entre eux par des barres et ressorts ayant pour but de modéliser la réponse en élongation, cisaillements, torsion et flexion. Les travaux de Sze and Liu



**FIGURE 1.14** – Drapage d’une pièce complexe avec l’algorithme du filet [BOR 03]

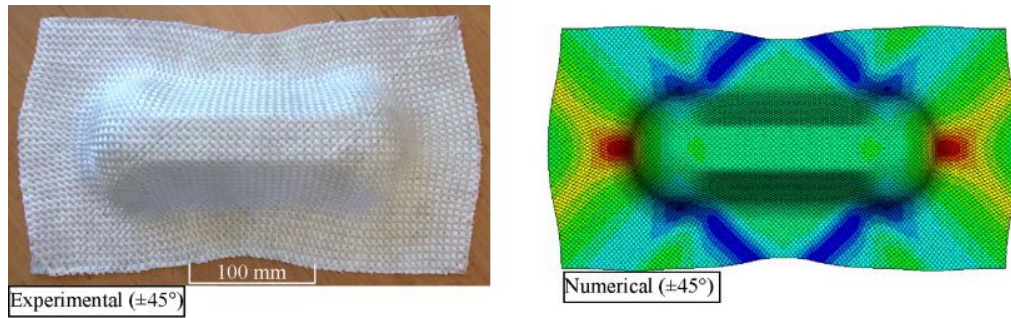
[SZE 05] sont notamment intéressants sur la variété des sollicitations modélisées pour des renforts 2D, comme illustré figure 1.15. Ces approches, généralement rencontrées pour les tissus d’habillement, sont délaissées aux profits de méthodes semi-discrètes ou continues dans le cas des tissus techniques. L’extension aux tissés épais, cas étudié ici, paraît d’ailleurs difficile.



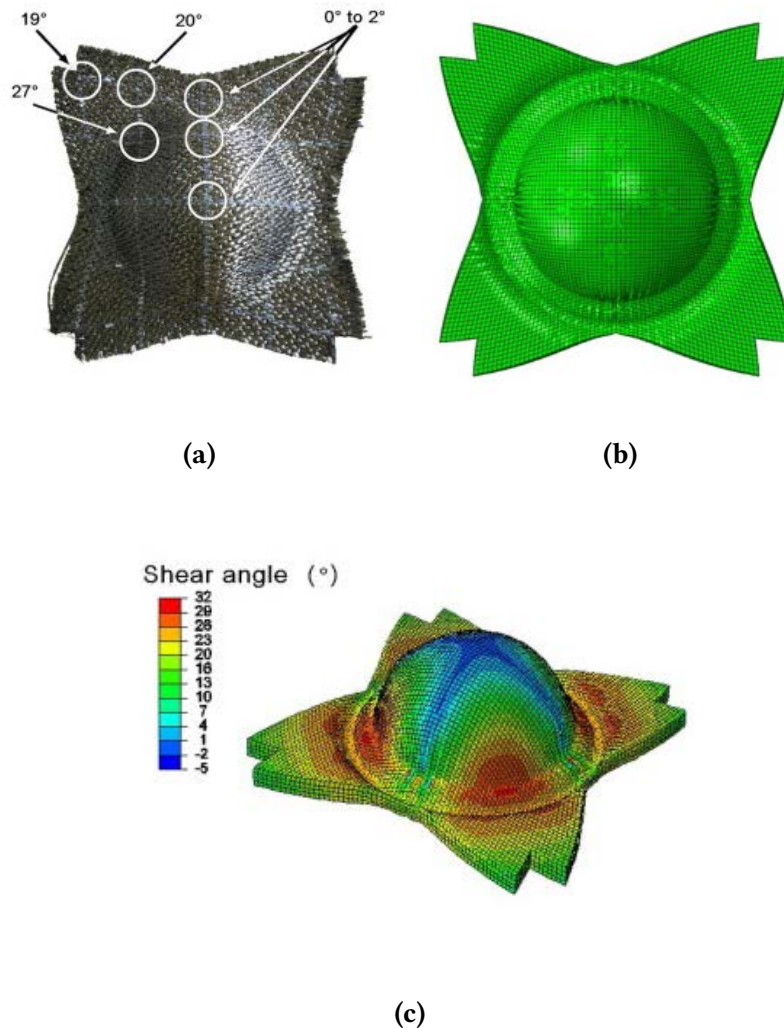
**FIGURE 1.15** – Modélisation d’une particule  $O$  connectée à ses quatre voisins (a) avec modélisation de l’élongation (b), du cisaillement (c) et (d), et de la flexion (e) [SZE 05]

Les approches *continues* font l’hypothèse d’un matériau continu à l’échelle macroscopique. Cette hypothèse découle directement de la considération de non-glissement entre mèches durant la phase de mise en forme. La considération du textile comme un milieu continu anisotrope dont le comportement est homogénéisé à partir d’échelles inférieures est alors possible. La modélisation est focalisée sur une proposition adaptée de lois de comportement. Différentes approches, qu’elles soient hypoélastiques [PEN 05, BAD 08c, KHA 10] ou hyperélastiques [SPE 72, THI 07, DRI 10, CHA 12], ont donné des résultats probants. Ces lois sont associées à des éléments coques ou plaques pour les tissés fins, figure 1.16, et à des briques pour les tissés épais, figure 1.17. Ces méthodes présentent l’avantage de pouvoir être utilisées facilement dans des codes éléments finis commerciaux. Leur inconvénient principal provient justement de l’homogénéisation qui est réalisée. Le même matériau est appliqué en tout point du renfort fibreux à modéliser et ne prend pas en compte les variations des caractéristiques mécaniques inhérentes à l’armure étudiée.





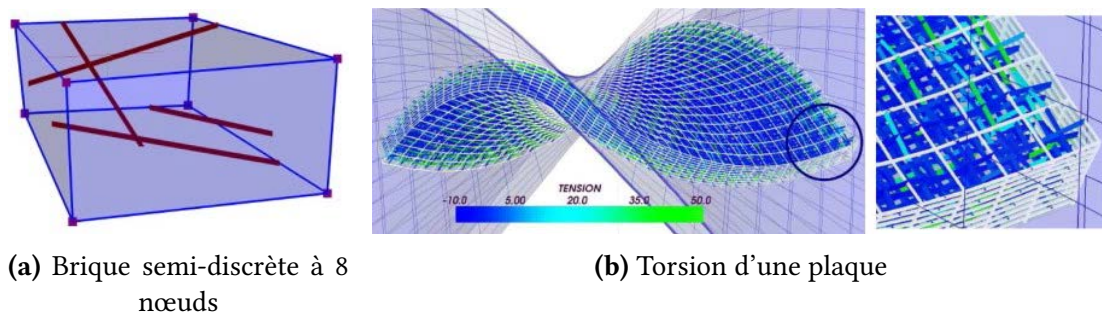
**FIGURE 1.16** – Résultats expérimentaux et numériques d'un emboutissage de type double dôme avec mèches orientées à  $45^\circ$  sur un tissé 2D [KHA 10]



**FIGURE 1.17** – Forme expérimentale (a), numérique (b) et angles de cisaillement plan (c) du renfort après formage pour un emboutissage hémisphérique de renfort interlock [LUY 09a, CHA 12]

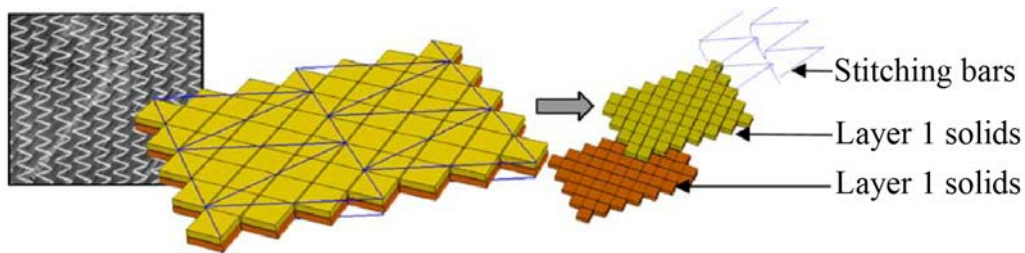
Les approches *semi-discrètes* sont une combinaison des deux approches évoquées ci-dessus. Une partie du comportement est modélisée grâce à un solide continu tandis qu'une autre est modélisée grâce à des apports discrets. On peut alors distinguer deux philosophies dans l'interaction entre parties discrètes et continues.

Dans un premier cas, les parties discrètes et continues sont associées dans un même élément lagrangien. Les efforts générés par une déformation quelconque sont subdivisés entre une contribution de tension associée aux parties discrètes et les autres contributions (cisaillements, compression) associées à la partie continue. Les parties discrètes et continues sont fixes l'une par rapport à l'autre dans la configuration isoparamétrique. Dans ce cas-ci, la partie discrète n'est que la représentation élémentaire d'une contribution énergétique de tension. Deux modèles de ce type ont été développés, le premier dédié aux tissus 2D utilisant des éléments plaque [HAM 08], et le second dédié aux interlocks utilisant des éléments brique (hexaédriques) [LUY 09a], figure 1.18. L'intérêt d'un tel élément est de pouvoir représenter plus fidèlement et simplement les directions locales des mèches dans la préforme et de rendre compte de l'anisotropie complexe de ces matériaux.



**FIGURE 1.18** – Élément brique semi-discrète à 8 nœuds et application [LUY 09b]

Une autre philosophie de modélisation considère les parties discrètes et continues comme totalement indépendantes. C'est le cas, par exemple, de travaux sur les NCF [CRE 06]. Ces tissés spécifiques sont constitués de nappes cousues. Dans cette modélisation, les nappes de mèches sont représentées par des couches d'éléments solides tandis que des éléments barres sont ajoutés pour représenter les coutures, figure 1.19. Ici, les parties continues sont totalement découplées des parties discrètes, impliquant la gestion du contact entre les nappes et les coutures.



**FIGURE 1.19** – Représentation de deux nappes et des coutures les liant dans un modèle semi-discret [CRE 06]

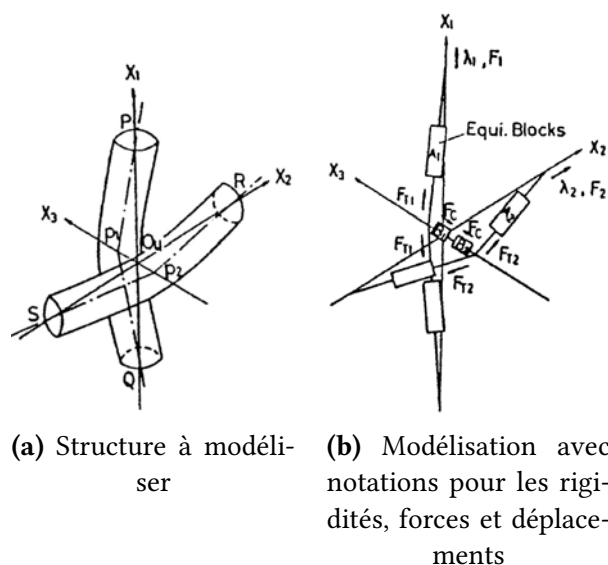
### 1.3.3 Modélisation à l'échelle mésoscopique

Les modèles à l'échelle mésoscopique s'intéressent au comportement d'une maille élémentaire du renfort. A cette échelle, la mèche est considérée comme un milieu continu. L'objectif de ces modèles est de déterminer certains comportements ou certaines propriétés du renfort dont la détermination expérimentale est difficile ou onéreuse. Parmi ces propriétés, les plus recherchées sont :

- le comportement mécanique macroscopique du renfort, permettant notamment d'alimenter les modèles à l'échelle macroscopique. Il est également envisageable, par un tel passage méso-macro, de déterminer automatiquement l'armure adaptée aux besoins d'une pièce en cours de conception
- la perméabilité locale du renfort en fonction de la déformation de la maille élémentaire [LOI 08, LOI 09], permettant d'alimenter les simulations d'écoulement de la résine dans le renfort.

Des approches analytiques ont été développées afin d'accéder à ces grandeurs mécaniques et géométriques. Ces approches sont généralement fondées sur une simplification de la géométrie des mèches dans la maille élémentaire et sur des hypothèses de comportement mécanique. Une modélisation s'appuyant sur la discrétisation de la ligne moyenne par des segments, une rigidité étant associée à chaque segment et à chaque point de croisement entre réseau chaîne et trame, a été proposée par Kawabata [KAW 73a, KAW 73b], voir figure 1.20. Le comportement de la modélisation est satisfaisant pour des sollicitations en tension du renfort mais reste trop pauvre pour être suffisant en compression transverse et cisaillements.

Les approches analytiques fournissent des résultats cohérents dans la détermination du comportement mécanique des mèches en tension mais sont plus limitées dans des applications plus complexes où interviennent, par exemple, le cisaillement. Les hypothèses simplificatrices de la géométrie, notamment au niveau des contacts latéraux, sont problématiques. Face à ces limitations, le recours aux éléments finis semble une bonne alternative. Leur utilisation à cette échelle nécessite alors deux prérequis : la géométrie et les conditions limites du renfort.



**FIGURE 1.20** – Modélisation analytique mésoscopique de Kawabata [KAW 73a]

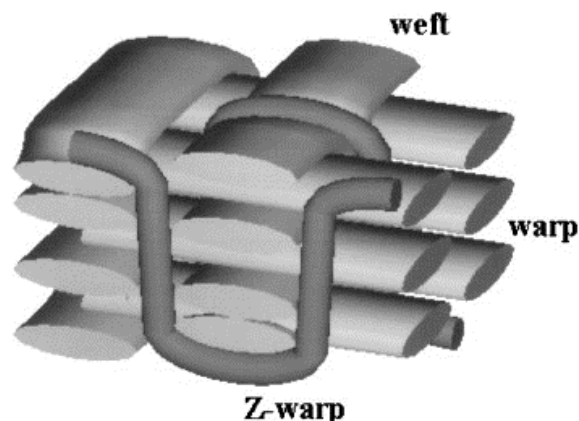
Avant de discrétiser en éléments finis les mèches à modéliser, il est nécessaire de disposer d'une géométrie appropriée des mèches. Cette géométrie doit pouvoir être obtenue théoriquement à partir des caractéristiques de la mèche et de l'armure, ou expérimentalement.

De nombreux modèles ont été développés afin d'obtenir la géométrie finale. On notera le modèle associé au logiciel *WiseTex* développé à la Katholieke Universiteit Leuven et proposé par Lomov [LOM 00, LOM 06]. La géométrie du renfort (fig. 1.21) est ici obtenue par minimisation de l'énergie de déformation de chaque mèche jusqu'à obtenir un équilibre statique en prenant en compte différentes contributions mécaniques (tension, flexion, torsion, compression des mèches et interactions). Cette approche nécessite l'identification expérimentale de données difficiles à obtenir.

Une alternative au précédent modèle est *Texgen*, développé à l'université de Nottingham [SHE 07]. Le modèle associé n'utilise pas, contrairement à *WiseTex* de considération mécanique. Il permet toutefois de réaliser facilement des mailles élémentaires de tissés 2D et 3D dans lesquelles les mèches peuvent avoir des sections non symétriques variables le long de leur ligne moyenne. Pour ces deux approches, le problème de l'interpénétration, bien qu'il ait été sérieusement réduit sous *WiseTex* [VER 05, LOM 07], reste majeur.

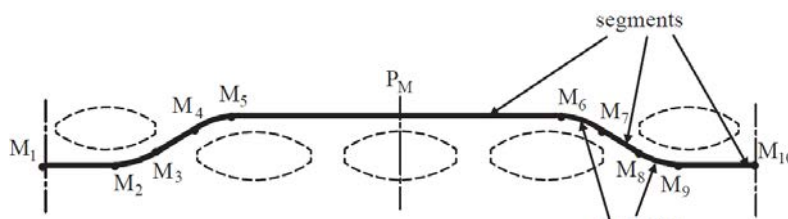
Les travaux de Hivet et plus récemment ceux de Wendling [HIV 03, HIV 05, WEN 13, WEN 14, WEN 15] sur ce point sont très intéressants. Ces modèles se destinent aux tissés 2D et 3D en proposant l'absence d'interpénétrations. Dans ces modèles, la section de la mèche peut varier le long de la ligne moyenne. Les sections sont définies en un certain nombre de points de contrôle sur cette ligne moyenne, nombre variable selon le type d'armure considéré (fig.1.22). Ces points de contrôle définissent les différentes zones caractéristiques de la mèche : les zones sans contact avec d'autres mèches (e.g. M3-M4),





**FIGURE 1.21** – Génération à partir de WiseTex d’une structure 3D d’un renfort en carbone [LOM 00]

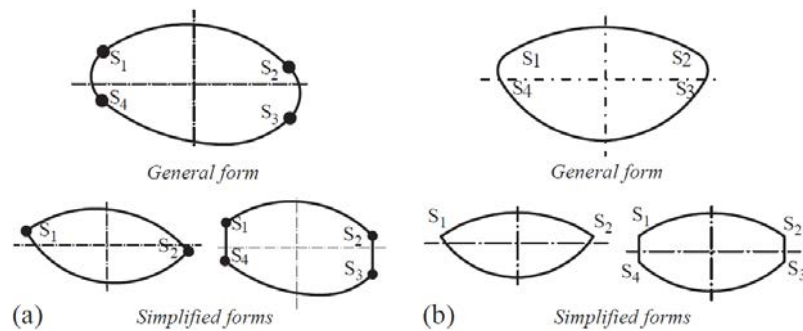
les zones avec contact courbe (e.g. M2-M3) et les zones avec un contact plan (e.g. M1-M2).



**FIGURE 1.22** – Définition des points de contrôle de la ligne moyenne d’un sergé 3x2 [HIV 05]

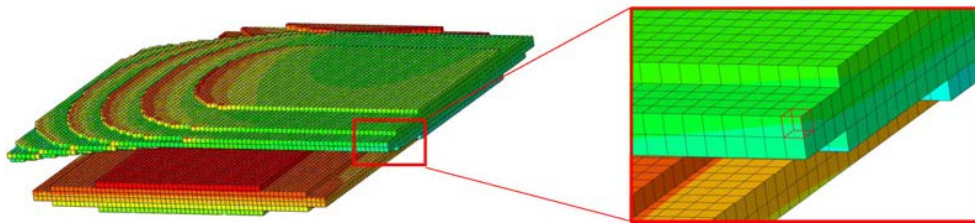
Les sections de la mèche sont définies en chacun de ces points de contrôle, c’est-à-dire pour chacune des différentes zones. Le contour de chaque section est divisé en quatre parties, modélisées par quatre coniques (fig.1.23). Une dégénérescence des coniques situées sur les bords de la mèche permet d’obtenir des formes simplifiées dont le bord est réduit à un point ou à un segment, ce qui pourra par la suite faciliter la discrétisation de la géométrie en éléments finis. Notons que pour les armures taffetas les sections sont symétriques (fig.1.23b). La géométrie de la mèche entre les sections est obtenue par un balayage le long de la ligne moyenne, avec interpolation des sections des points de contrôle. En utilisant les formes simplifiées, il a été montré que trois paramètres sont nécessaires pour modéliser un taffetas équilibré et six pour un taffetas déséquilibré.

Une des méthodes se développant actuellement est celle basée sur l’utilisation de voxel [IAR 09, DEC 11, POT 12]. Un voxel est l’équivalent d’un pixel en trois dimensions ; un espace voxélisé est donc un espace divisé en plusieurs petits cubes. Les méthodes de maillage par voxel prennent en compte la boîte englobant le renfort, voxélisé. Le renfort est alors inséré dans cette boîte et un comportement est affecté à chaque cube en fonction de leur appartenance au renfort ou à la matrice. Cette méthode présente



**FIGURE 1.23** – Définition du contour des sections de la mèche [HIV 05]

plusieurs avantages : elle permet de mailler tout type de modèles (2D et 3D) tout en imposant un contact parfait entre les mèches, l'automatisation est possible même si les mèches sont irrégulières (sections variables) et l'application des conditions aux limites est facilitée par la distribution régulière des noeuds. Cependant, la continuité des surfaces étant représentée par des cubes, il apparaît des concentrations de contraintes locales artificielles (fig.1.24).



**FIGURE 1.24** – Maillage voxel de deux bouts de mèche avec apparition de contrainte [DEC 11]

Dans ce travail de thèse, nous nous placerons à l'échelle mésoscopique. Afin d'obtenir les géométries et les maillages de renforts les plus réalistes possible, on utilisera la tomographie aux rayons X. Cette technique d'observation à coeur non destructive d'objets massifs est idéalement adaptée à l'étude des renforts tissés car elle permet des observations aux échelles mésoscopique voire même microscopique. Avant de poursuivre, nous devons donc présenter cette technique.

## 1.4 Tomographie aux rayons X

La tomographie par absorption de rayons X est une technique non destructive qui permet la reconstruction d'images en coupe ou en 3D d'un objet massif. Le principe repose sur les propriétés d'atténuation des rayons X par la matière et sur l'enregistrement du rayonnement transmis à travers l'objet, principe de la radiographie. Les données collectées suite à une investigation exhaustive de l'échantillon à étudier (un grand nombre

de radiographies sous différents angles de vue) permettent de reconstruire, via des méthodes mathématiques, la géométrie 3D à coeur de l'échantillon. Cette section a pour but de rappeler les grands principes de la technique et de préciser quelques points essentiels pour la compréhension du manuscrit. Pour de plus amples détails, le lecteur peut, par exemple, se référer à [HER 80, STO 99, BAR 00, DES 05, STO 08, HSI 09, MAI 14].

### 1.4.1 Principe physique

Quand un faisceau parallèle de rayons X d'intensité  $I$  traverse une épaisseur infinitésimale de matière  $dx$ , le faisceau transmis est atténué de  $dI$  selon la loi  $dI = I\mu dx$  qui conduit à la loi de Beer-Lambert donnant l'intensité transmise à travers une épaisseur  $x$  de matière par un faisceau incident d'intensité  $I_0$  :

$$I_x = I_0 e^{-\mu x} \quad (1.2)$$

où  $\mu$  (en  $m^{-1}$ ) est le coefficient d'absorption linéique du matériau. On peut traduire de manière simple cette loi en terme de nombres de photons incidents  $N_0$  et de photons transmis  $N$  (pour le cas général de  $\mu$  non constant) le long du trajet  $s$  :

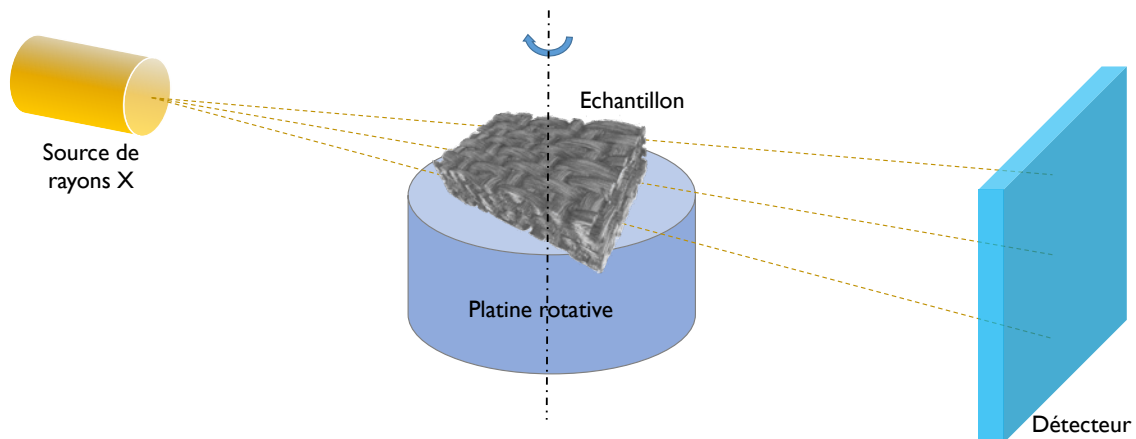
$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\int_s \mu(s) ds\right) \quad (1.3)$$

Si le matériau est homogène,  $N$  ne dépend que de l'épaisseur traversée, sinon, il dépendra de l'atténuation locale en tout point de l'échantillon. Cette variation est à l'origine des contrastes détectés sur les radiographies d'absorption des rayons X. C'est ce principe que l'on utilise en tomographie puisque la méthode consiste à réaliser une série de radiographies pour une multitude d'angles de vue de l'échantillon à étudier.

### 1.4.2 Reconstruction par tomographie

Le principe de la tomographie consiste à reconstruire le volume de l'échantillon par un empilement (ou "stack") de radiographies représentant les coupes le long de l'échantillon (coupes perpendiculaires à l'axe de rotation de l'objet). Le principe général est celui du scanner médical : on effectue des radiographies en faisant varier l'angle de vue de l'objet afin d'obtenir un jeu correspondant à un tour complet de l'objet. A partir de ce jeu de radios, on peut reconstruire la carte du coefficient local d'absorption en tout point de l'échantillon. Dans le cas du scanner médical, le patient est fixe et le dispositif tourne, pour la tomographie c'est l'inverse. Différents types de dispositifs [BAR 00, MAI 14] peuvent être utilisés pour pratiquer la tomographie. Ils comprennent tous une source, une platine de rotation et un détecteur de rayons X (fig. 1.25). Les trois éléments de cette chaîne conditionnent la résolution finale dans l'image. Les particularités de la source assurent cette résolution. La mécanique de la platine de rotation doit être suffisamment précise pour ne pas altérer la résolution (translations parasites inférieures au micromètre

pendant toute la rotation). Le détecteur va convertir les rayons X en lumière visible par un matériau luminescent. L'image ainsi formée est agrandie et projetée par une optique sur un capteur CCD.



**FIGURE 1.25** – Schéma de principe d'un tomographe à rayons X

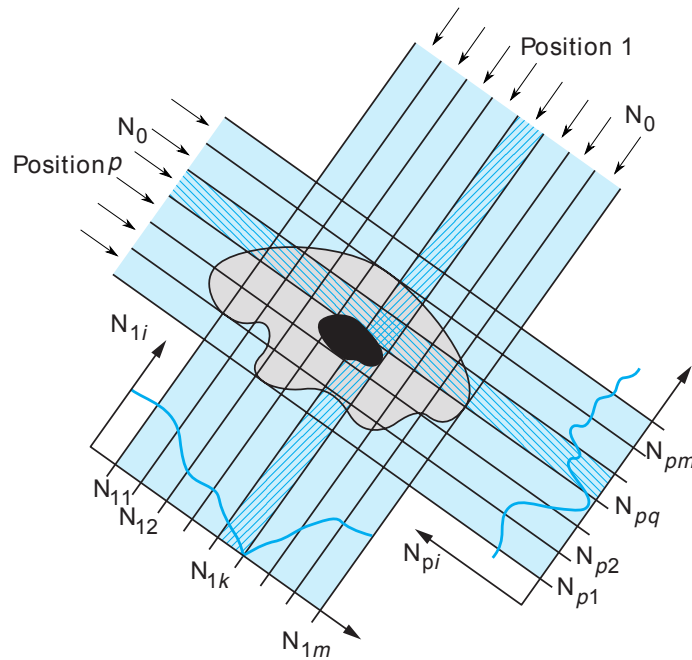
L'acquisition d'un scan correspond à l'enregistrement d'une série de radiographies à intervalle angulaire régulier sur  $180^\circ$  ( $360^\circ$  en tomographie de laboratoire, le faisceau étant conique). L'image à reconstruire dans une coupe est constituée de  $m \times n$  pixels avec pour chacun un coefficient d'absorption local  $\mu_{ij}$ . L'intensité mesurée par le détecteur  $k$  dans la position 1 c'est à dire le nombre de photons transmis, noté  $N_{1k}$  (fig.1.26), est proportionnelle à la sommation des coefficients d'absorption sur chaque pixel de la bande hachurée :

$$\ln \left( \frac{N_0}{N_{1k}} \right) \propto \sum_j \mu_{1j} \quad (1.4)$$

Il en est de même pour tous les éléments sensibles du détecteur et pour chaque position angulaire successive. On obtient un système d'équations linéaires dans lequel le logarithme des intensités est donné par les mesures (chaque radiographie), les  $\mu_{ij}$  étant les inconnues. L'algorithme de résolution de ce système permet de reconstruire la carte du coefficient d'absorption local. En pratique la méthode de reconstruction fait appel à une projection dans le plan de Fourier puis une transformée inverse en utilisant par exemple un algorithme de rétroprojection filtrée [KAK 99].

### 1.4.3 Équipement utilisé

Le tomographe de laboratoire utilisé pour cette étude est situé au laboratoire MATEIS de l'INSA de Lyon. Il contient un tube à émission de rayons X avec une cible tungstène ou molybdène. La taille du focus, ainsi que la résolution, est ajustable de 1 à 5  $\mu\text{m}$ . Le détecteur utilisé est constitué de  $1500 \times 1900$  éléments sensibles de taille  $127 \times 127 \mu\text{m}$ .



**FIGURE 1.26** – Acquisition des données en tomographie à rayons X

Pour les scans réalisés dans cette étude, le faisceau est réglé à des valeurs proches de 90 keV et 170  $\mu$ A sans filtre additionnel. L'installation est présentée sur la figure 1.27.

La source de rayons X étant conique, il est facile d'obtenir une large gamme de résolution en plaçant l'échantillon à différentes distances entre la source et le détecteur. Ainsi des résolutions de 1,5  $\mu$ m à 80  $\mu$ m sont possibles. Dans la pratique, les tailles de voxel utilisés sont micrométriques, on parle alors de micro-tomographie (ou  $\mu$ CT pour micro-Computed Tomography). Ces résolutions sont exprimées en terme de taille d'arête de voxel. Un voxel est un élément de volume : pixel = picture element et voxel = volume element. La résolution adoptée pour un scan est toujours le résultat d'un compromis entre la taille de l'échantillon et la résolution nécessaire pour les plus petits éléments à observer. En effet, il est impératif que l'ensemble de l'échantillon reste dans le champ de vision du détecteur durant la totalité du scan afin de garantir que chaque radiographie ne corresponde pas à un objet tronqué. Cela implique que la dimension maximale de l'échantillon soit contenue dans le « cylindre de reconstruction » (fig.1.28).

#### 1.4.4 Application aux renforts de composites

La tomographie aux rayons X trouve de multiples applications en sciences des matériaux [BAR 00, MAI 14] et a déjà été utilisée comme technique d'observation non destructive des matériaux composites. Les difficultés sont nombreuses avec certaines autres méthodes d'observation. Les coupes sont difficiles à réaliser en particulier sur des renforts secs, l'ajout de résine pour maintenir les renforts peut perturber la géométrie de ceux-ci etc. La tomographie présente un avantage : il n'est pas nécessaire de toucher

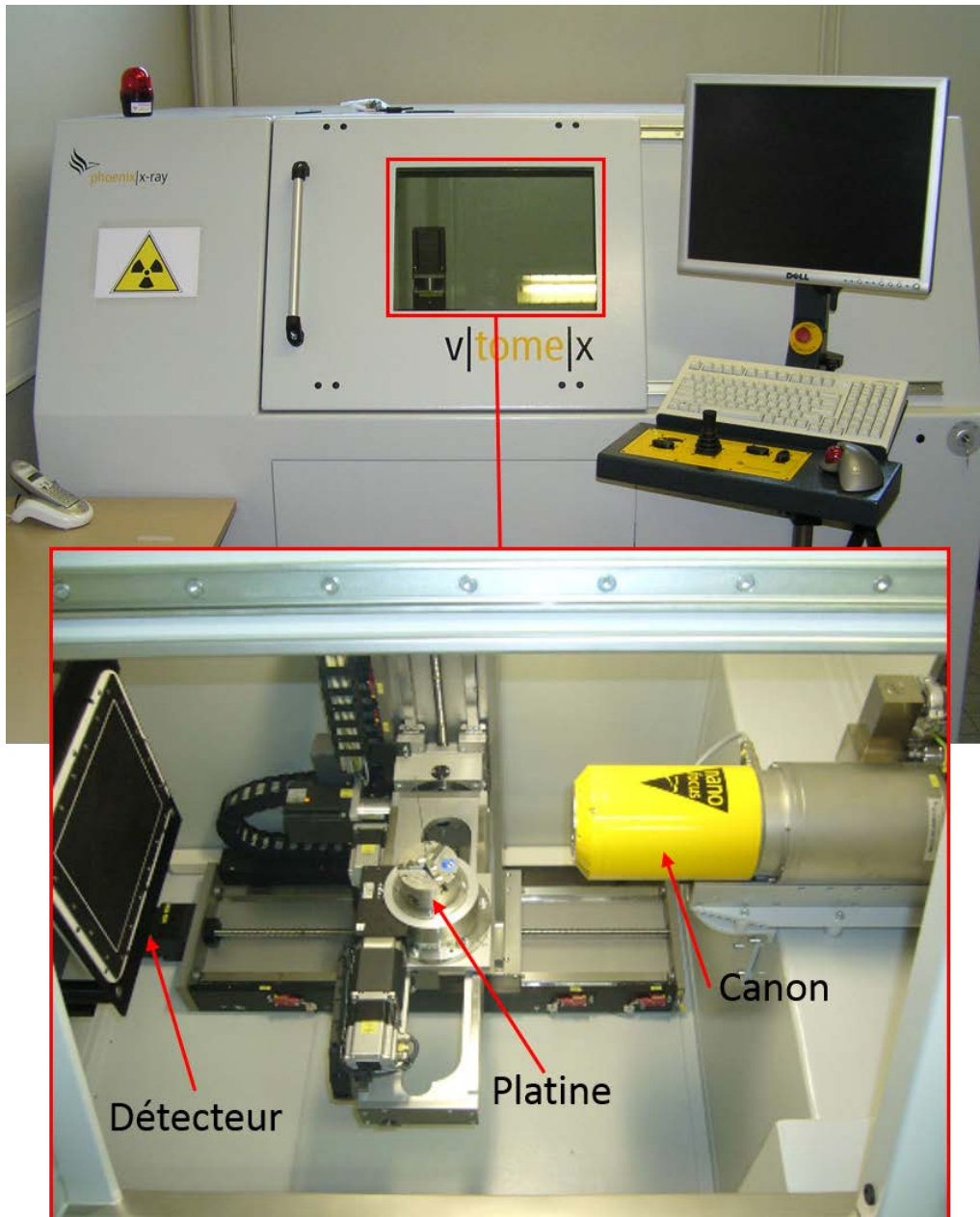
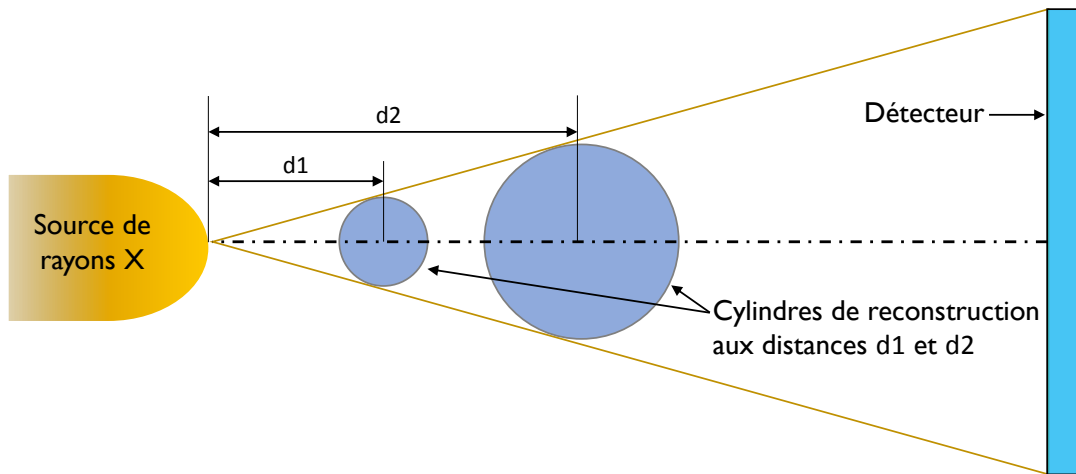


FIGURE 1.27 – Image du tomographe utilisé



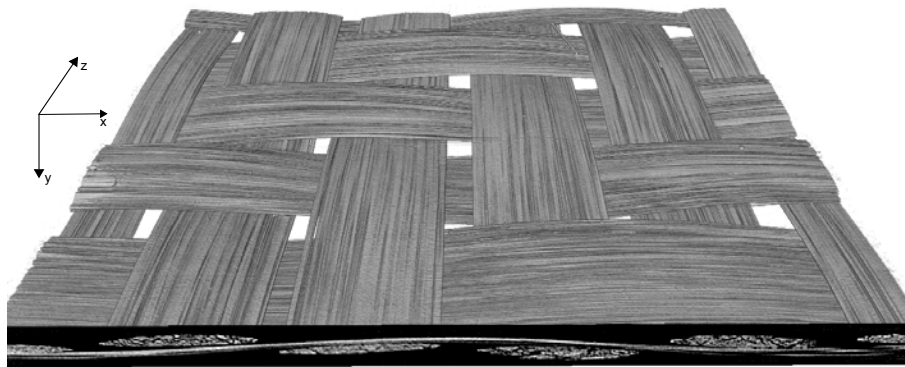


**FIGURE 1.28** – Illustration du compromis taille/résolution pour un tomographe à source conique

l'échantillon pour l'observer à coeur, ce qui permet d'outrepasser les inconvénients mentionnés. On retrouve principalement deux types d'utilisation de la tomographie pour les matériaux composites à renforts tissés. Tout d'abord dans le but d'observer des composites finis (c'est-à-dire avec résine) afin d'étudier des phénomènes tels que la rupture. On peut par exemple y faire la distinction entre zones de rupture de mèches ou zones de décohésion [RAZ 06]. Ensuite pour observer des renforts secs à l'état de repos. La variabilité de l'état géométrique de repos d'un renfort tissé a été largement abordée par [DES 05] en utilisant ce type d'observations.

### Observations mésoscopiques

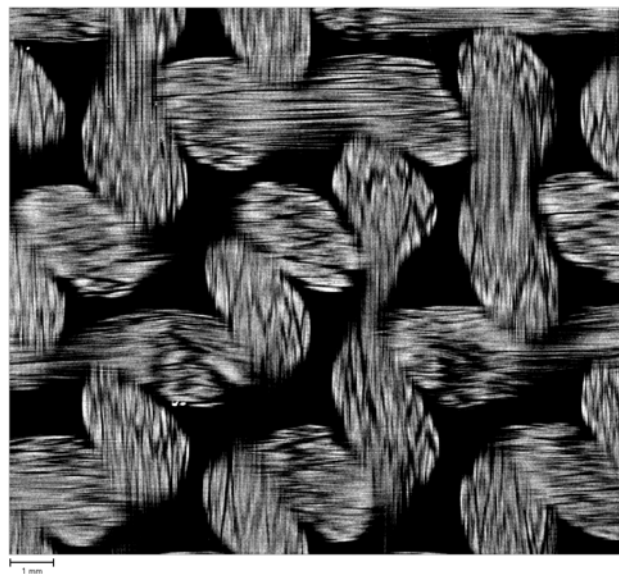
A des résolutions de l'ordre de 10 à 20  $\mu\text{m}$  la taille du cylindre de reconstruction est particulièrement bien adaptée pour l'observation mésoscopique de renforts : ces résolutions rendent possible la reconstruction de plusieurs cellules élémentaires au sein d'un même renfort. En outre, ces résolutions restent convenables pour pouvoir identifier visuellement les contours des mèches. Les observations réalisées à ces échelles, que nous qualifions donc de « mésoscopiques », sont utilisées afin d'exploiter les géométries mésoscopiques réelles des renforts, principalement les formes des sections de mèches. La nature tridimensionnelle des données obtenues permet de réaliser des coupes ou encore des rendus 3D du matériau. Quelques exemples sont donnés ci-après pour les tissus utilisés dans cette étude (fig.1.29 et fig.1.30).



(a) rendu 3D et coupe dans le plan (xy)



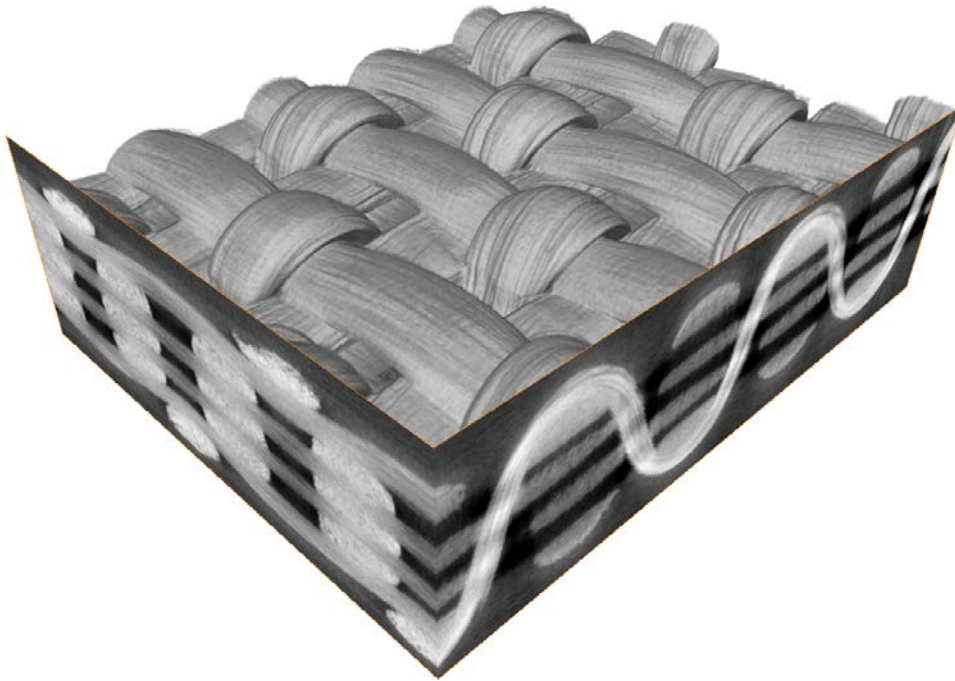
(b) coupe dans le plan (yz)



(c) coupe dans le plan (zx)

**FIGURE 1.29** – Tomographie d'un sergé de carbone 2x2 : le G0986

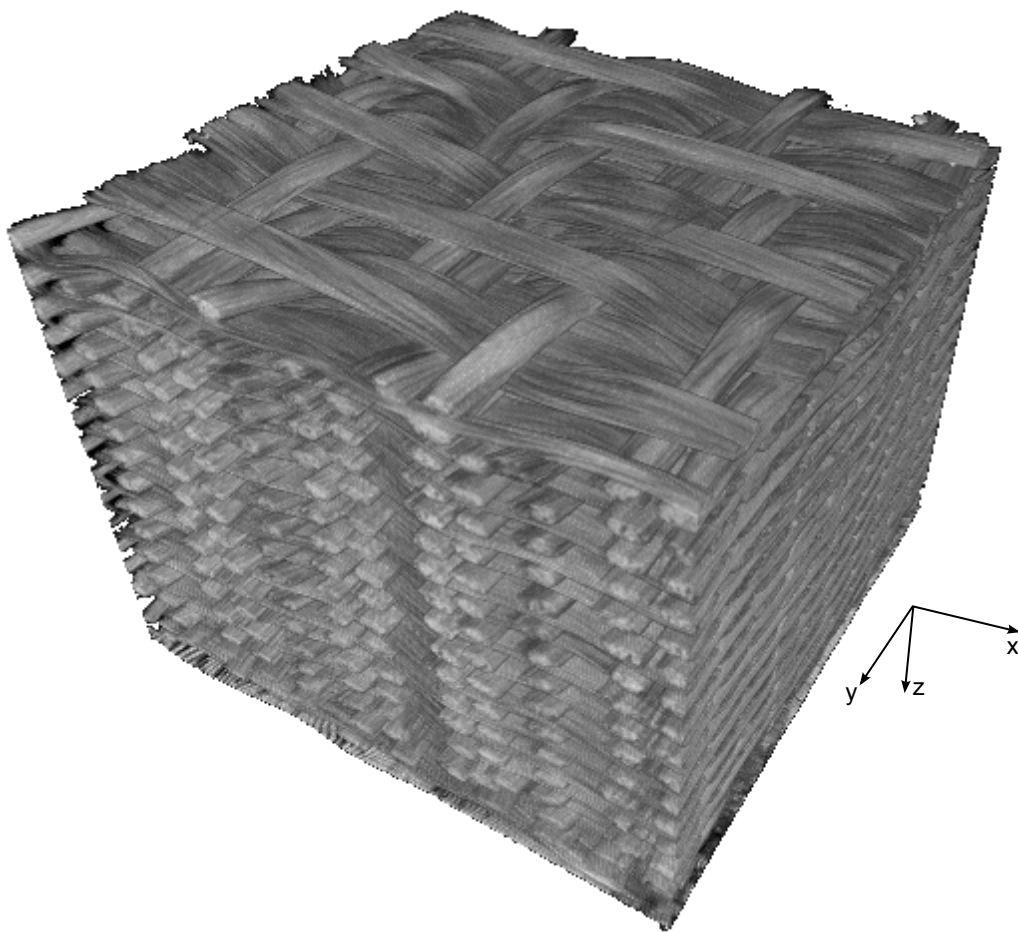




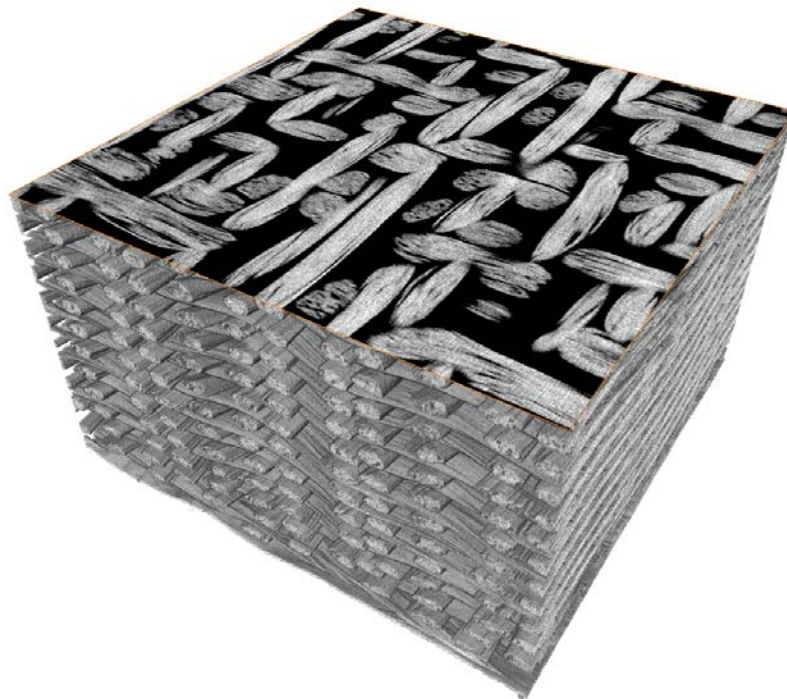
**FIGURE 1.30** – Tomographie d'un renfort tissé 3D orthogonal non ondulé

#### **1.4.5 Application à un interlock générique**

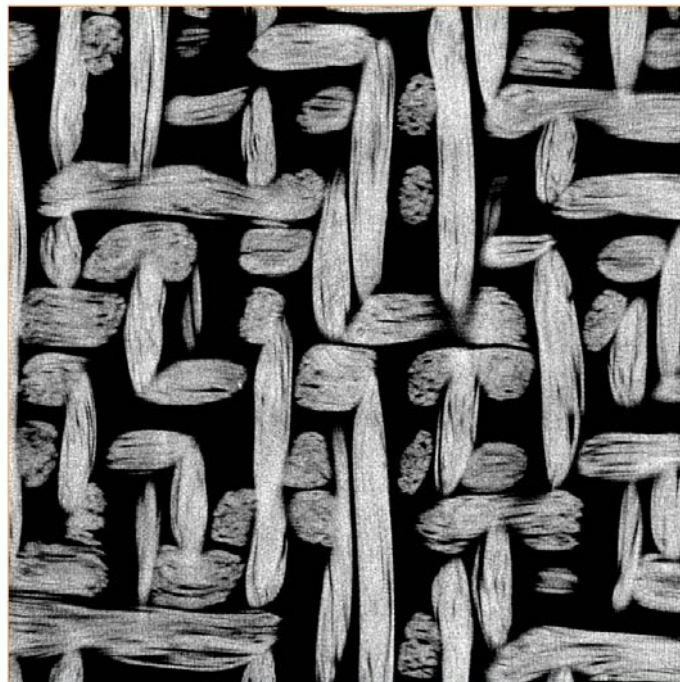
Pour les scans réalisés ici, le faisceau est réglé à des valeurs proches de 50 keV et  $350 \mu$  sans filtre additionnel. La résolution est de  $40 \mu\text{m}$  ce qui donne une taille du cylindre de reconstruction permettant une observation mésoscopique des renforts de l'interlock. Ci-après sont présentés les différents rendus volumiques (fig.1.31) et coupes (fig.1.32,1.33,1.34) de la tomographie de l'interlock.



**FIGURE 1.31** – Rendu volumique d'un interlock générique

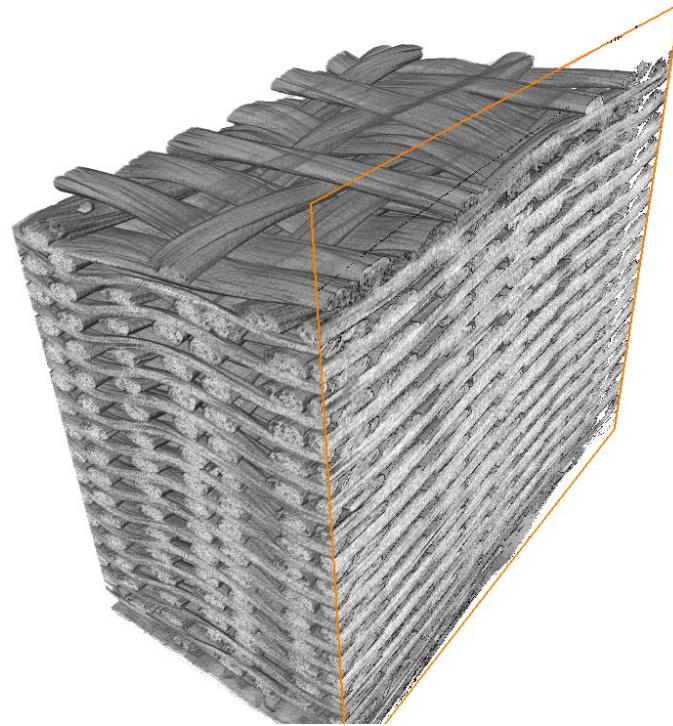


(a)

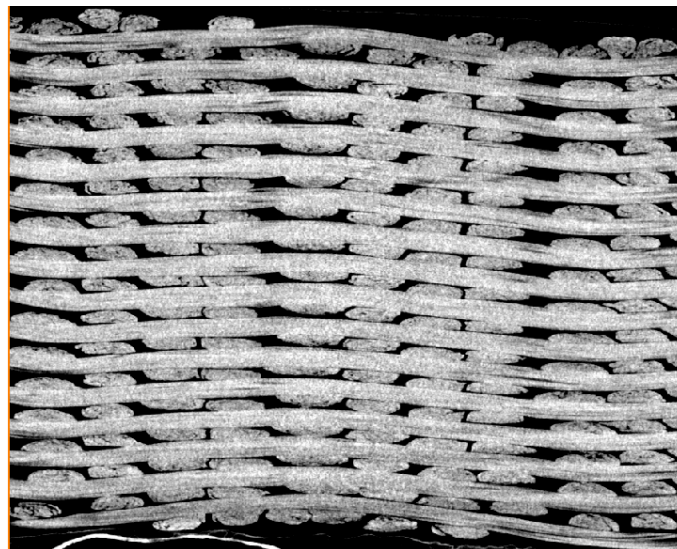


(b)

**FIGURE 1.32** – Coupe d'un interlock générique dans le plan (x,y)



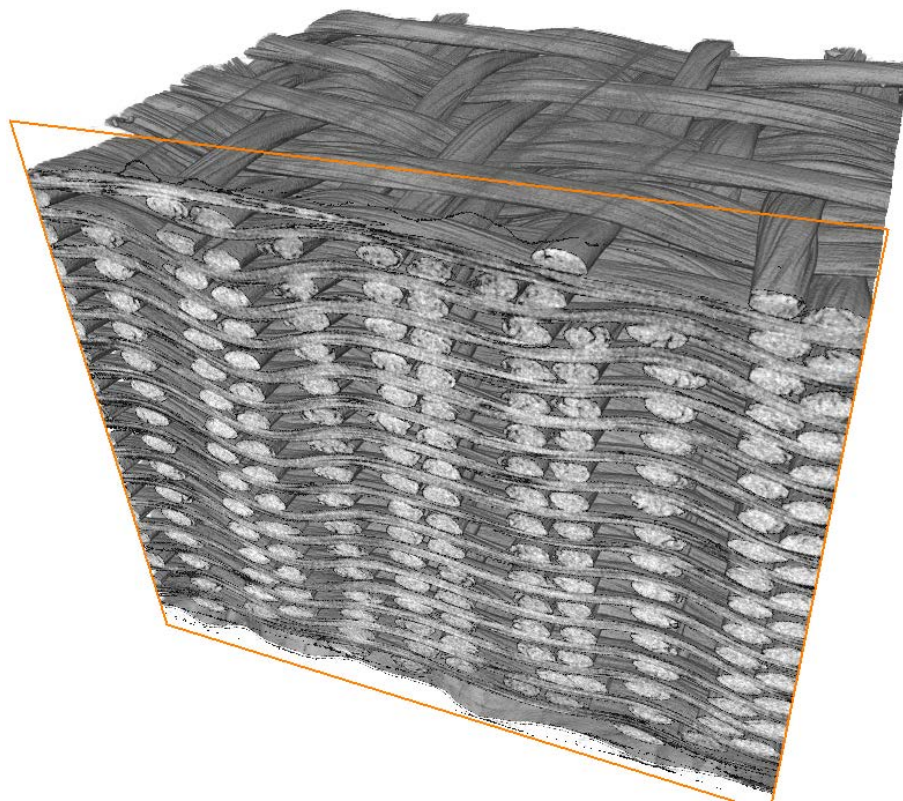
(a)



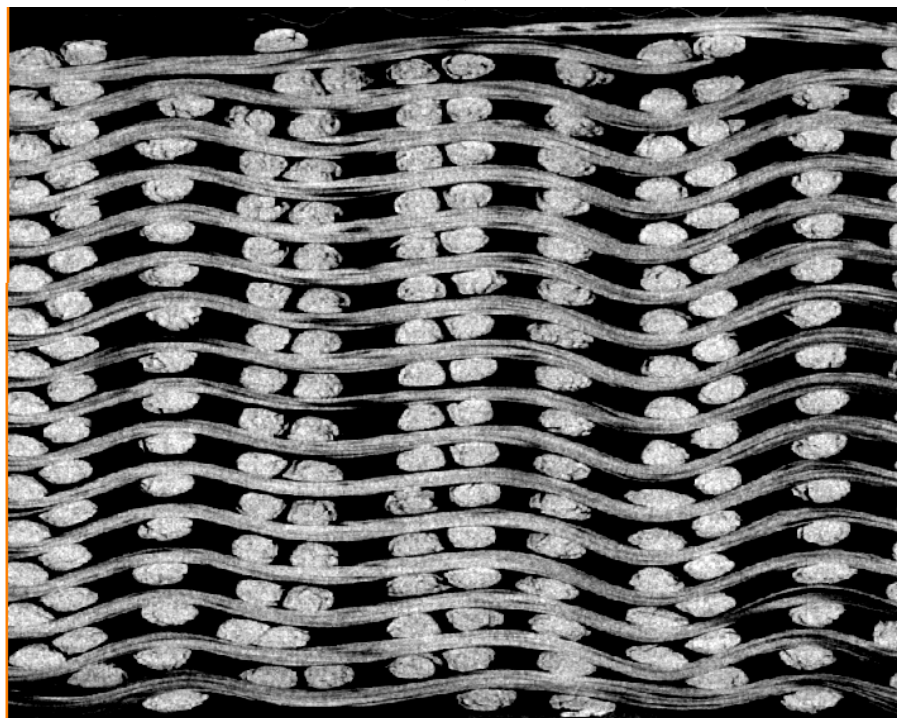
(b)

**FIGURE 1.33** – Coupe d'un interlock générique dans le plan (y,z)



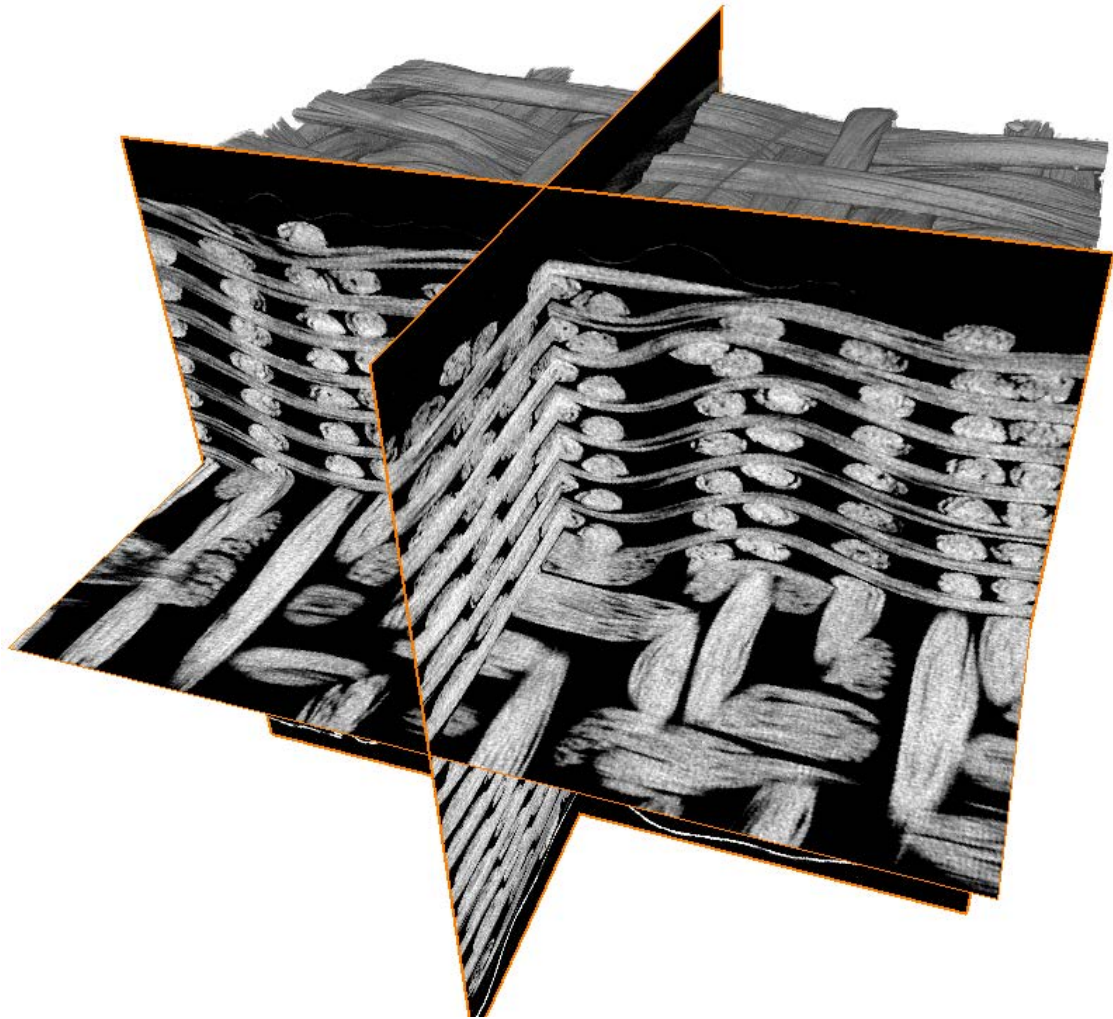


(a)



(b)

**FIGURE 1.34** – Coupe d'un interlock générique dans le plan (z,x)



**FIGURE 1.35** – Assemblage de différentes coupes dans les 3 plans

## 1.5 Bilan du chapitre 1

Dans ce premier chapitre, les renforts tissés de composites ont été présentés dans leur globalité, de la fibre et sa fabrication au renfort final avec son armure, en passant par la mèche. Cette description de la structure du renfort aux différentes échelles nous a permis de mieux comprendre les mécanismes de déformation du renfort. Le procédé RTM a également été présenté, ainsi que les enjeux industriels associés à la simulation de ce procédé.

Un état de l'art de la simulation de la mise en forme des renforts tissés a été réalisé, présentant les modèles micro- méso- et macroscopiques existant à l'heure actuelle et permettant de simuler la déformation du renfort aux différentes échelles. Notre choix se portera sur une étude à l'échelle mésoscopique, permettant de mettre en évidence les comportements multiples de la mèche, tout en gardant un temps de calcul raisonnable.

Enfin, les principes de base de la tomographie à rayons X ont été rappelés. Cette technique d'observation à coeur d'objets massifs est idéalement adaptée à l'étude des renforts tissés car elle est non destructive et permet des observations aux échelles mésoscopiques. Nous proposons au travers de cette étude de générer des modèles géométriques à partir de ces images de tomographie afin de mener un calcul EF sous plusieurs sollicitations mécaniques. Afin de parvenir à ce but, un traitement adéquat des images issues de la tomographie est nécessaire. Le chapitre suivant posera les outils développés pour générer des géométries issues de la tomographie.

# Chapitre 2

## Le traitement d'images

*Ce chapitre présente différents concepts de traitement d'images utilisés pour la construction de modèles de renforts tissés à partir de microtomographies X. On y définit les principales notions de base et détaille certaines techniques utilisées afin de segmenter les images, i.e de différencier les mèches de chaîne et trame du matériau composite obtenues par microtomographie X. Deux méthodes sont envisagées. La première est basée sur le calcul du tenseur de structure, c'est-à-dire la matrice du gradient de l'image pour chaque pixel. La deuxième méthode s'appuie sur l'analyse de texture de l'image. Ainsi chaque mèche pourra être identifiée et obtenir au final la géométrie la plus réaliste possible de n'importe quel type de renfort plus ou moins complexe.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Notions sur le traitement d'images</b>	<b>45</b>
2.1.1	Définition d'une image numérique	45
2.1.2	Définition d'un filtre d'image	46
2.1.2.1	Convolution discrète	46
2.1.2.2	Filtres de lissage	48
2.1.2.3	Filtres dérivateurs	50
2.1.3	Détection de contours dans une image	53
2.1.4	Morphologie mathématique	53



<b>2.2</b>	<b>Présentation des méthodes de segmentation . . . . .</b>	<b>55</b>
2.2.1	Segmentation par le tenseur de structure . . . . .	55
2.2.2	Implémentation de l'algorithme de segmentation par le tenseur de structure . . . . .	56
2.2.2.1	Calculs des gradients directionels d'un stack d'image . . . . .	57
2.2.2.2	Détermination du tenseur de structure 3D . . . . .	59
2.2.2.3	Paramètres extraits du tenseur . . . . .	60
2.2.3	Segmentation par analyse de texture . . . . .	64
2.2.3.1	Matrice de cooccurrence . . . . .	64
2.2.3.2	Analyse statistique . . . . .	66
2.2.4	Implémentation de l'algorithme de segmentation par analyse de texture . . . . .	69
2.2.4.1	Influence des paramètres . . . . .	69
2.2.4.2	Seuillage des paramètres statistiques . . . . .	71
<b>2.3</b>	<b>Extractions des sections de mèches à partir de la micro-CT . . . . .</b>	<b>72</b>
2.3.1	Labellisation et morphologie mathématique sur les sections de mèches . . . . .	72
2.3.2	Utilisation d'enveloppes convexes . . . . .	74
<b>2.4</b>	<b>Bilan du chapitre 2 . . . . .</b>	<b>78</b>

---

## 2.1 Notions sur le traitement d'images

### 2.1.1 Définition d'une image numérique

Une image numérique est composée d'un ensemble fini d'éléments appelés pixels, régulièrement espacés sur une grille, qui représentent chacun une portion de l'image. Une image est caractérisée par le nombre de pixels qui la composent en largeur et en hauteur et par l'étendue des teintes de gris ou de couleurs que peut prendre chaque pixel (quantification). Une image numérique peut donc être définie comme un signal fini bidimensionnel échantillonné à valeurs quantifiées dans un certain espace de couleurs. Ainsi, une image, en niveaux de gris codés sur 8 bits par exemple, peut être considérée comme une matrice de valeurs entières prises sur l'intervalle  $[0,255]$ . Chaque pixel est localisé par la ligne  $i$  et la colonne  $j$  correspondante dans la matrice et sa valeur est définie par l'intensité  $I(i, j)$ . Il s'agit donc d'une représentation discrète. La figure 2.1 illustre cette représentation et indique la convention d'orientation généralement adoptée. Lorsqu'on a une succession d'images constituant un objet tridimensionnel, on parle alors d'un stack d'images ou empilement d'images dont l'élément représentatif est nommé voxel.

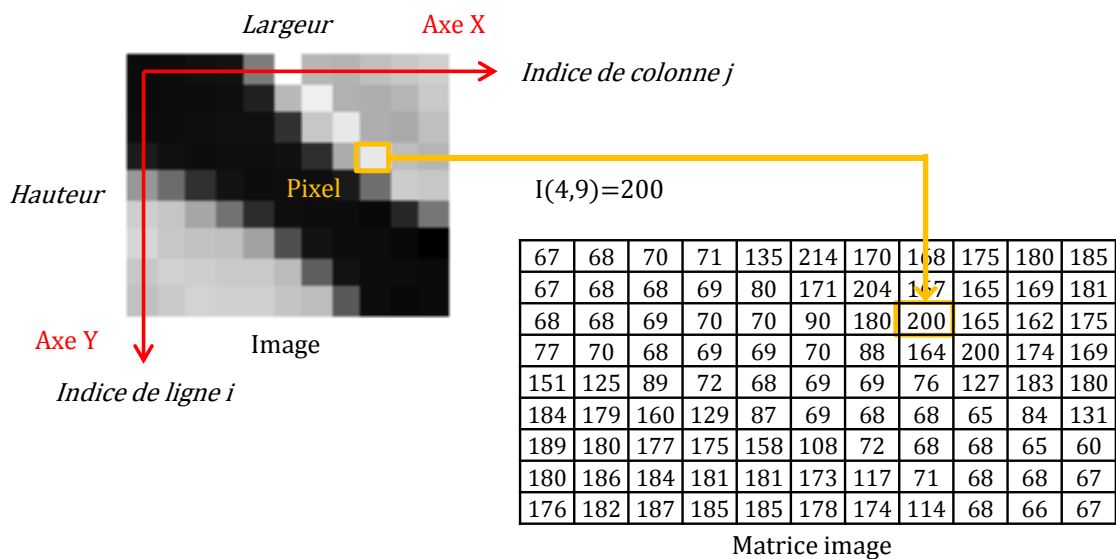
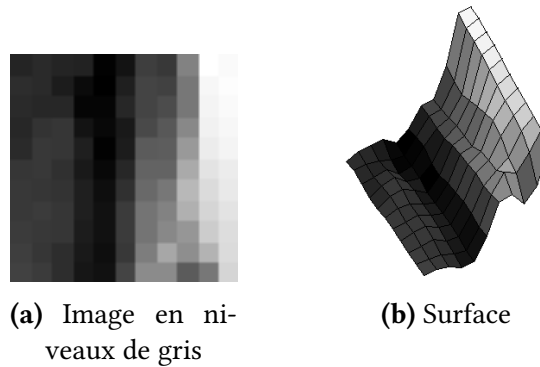


FIGURE 2.1 – Image numérique en niveaux de gris - Vision discrète

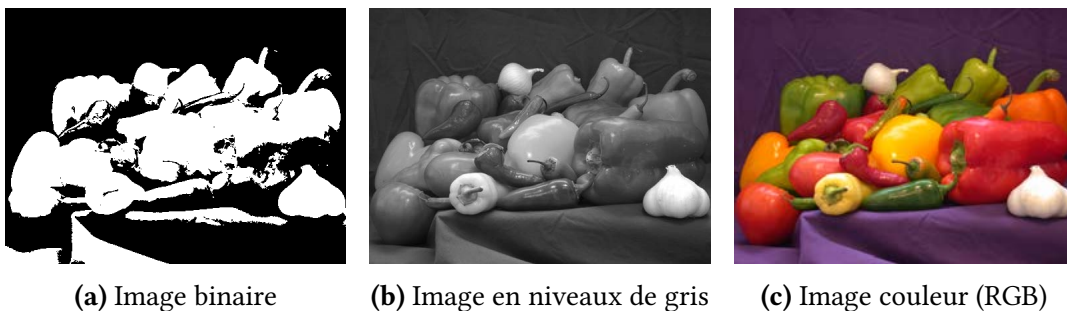
Par ailleurs, une image peut également être définie comme une fonction à deux dimensions  $f(x,y)$  avec  $x$  et  $y$  les deux coordonnées spatiales (dans le plan). L'amplitude de  $f$  associée à chaque paire de coordonnées  $x$  et  $y$  est appelée intensité de l'image au point considéré. On parle de représentation surfacique ou de "paysage de niveaux de gris" (fig.2.3).



**FIGURE 2.2** – Image numérique en niveaux de gris - Vision surfacique

On distingue trois principaux types d'images :

- Les images binaires (fig.2.3a) : un pixel peut uniquement prendre la valeur 0 (noir) ou 1 (blanc).
- Les images en niveaux de gris (fig.2.3b) : les valeurs des pixels sont comprises dans l'intervalle  $[0\ 255]$  où la valeur zéro représente le noir et la valeur 255 le blanc.
- Les images couleurs (fig.2.3c) : l'espace colorimétrique le plus connu est le RGB (Red Green Blue). Cet espace permet de mimer le système visuel humain et repose sur la synthèse additive des couleurs, c'est-à-dire que le mélange des trois composantes donne une couleur. Un pixel possède donc trois valeurs comprises dans l'intervalle  $[0\ 255]$ , une pour chaque composante de l'espace couleur.



**FIGURE 2.3** – Types d'images

### 2.1.2 Définition d'un filtre d'image

#### 2.1.2.1 Convolution discrète

Filtrer une image consiste à appliquer un opérateur sur celle-ci de manière à la transformer. Les effets recherchés sont variés : réduction du bruit, lissage, dérivation, etc. Le

filtrage est une opération de voisinage : la valeur d'un pixel sur l'image de sortie est déterminée par un calcul basé sur les valeurs des pixels voisins. Ainsi, le filtrage linéaire est un filtrage dans lequel la valeur de sortie d'un pixel donné est une combinaison linéaire des valeurs de ses pixels voisins dans l'image d'entrée. L'outil mathématique qui permet l'utilisation de ce type de filtres est la convolution discrète. Le produit de convolution d'une image  $I$  par un filtre  $h$  est défini par l'équation (2.1) :

$$I_{conv}(i, j) = I(i, j) * h(i, j) = \sum_u \sum_v I(i - u, j - v) \cdot h(u, v) \quad (2.1)$$

On s'intéresse ici uniquement à la convolution dans le domaine spatial. Dans le domaine fréquentiel, la convolution correspond à une multiplication. Appliquer un filtre de convolution (appelé également masque, noyau ou kernel) sur une image consiste donc à réaliser un balayage de ce filtre sur l'image et à calculer en chaque point la somme pondérée (par le coefficient correspondant) des pixels voisins. Par exemple, soit un filtre  $F$  de taille 3x3 défini de la manière suivante :

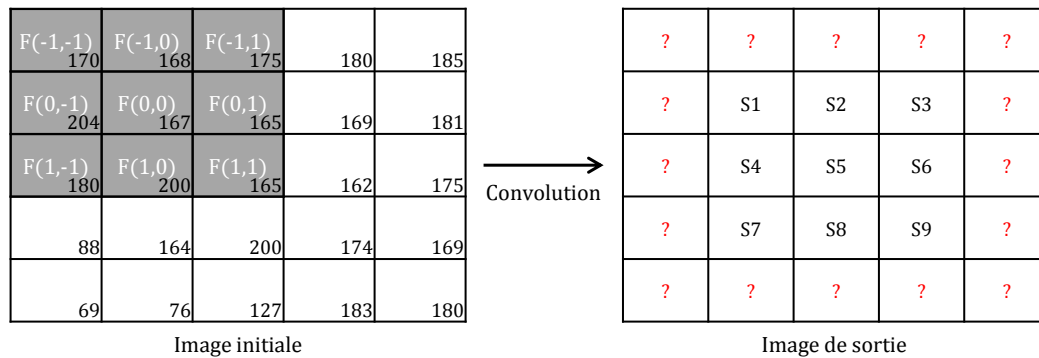
$$F = \begin{bmatrix} F(-1, -1) & F(-1, 0) & F(-1, 1) \\ F(0, -1) & F(0, 0) & F(0, 1) \\ F(1, -1) & F(1, 0) & F(1, 1) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Le produit de convolution d'une image  $I$  par le filtre  $F$  s'écrit :

$$I_{conv}(i, j) = I(i, j) * F(i, j) = \sum_{u=-1}^1 \sum_{v=-1}^1 I(i - u, j - v) \cdot F(u, v) \quad (2.3)$$

En pratique, la convolution numérique est effectuée par une sommation de multiplications. L'image étant considérée comme une matrice, le filtre de convolution est aussi défini comme une matrice, généralement de taille impaire et symétrique. Pour calculer la valeur de sortie d'un pixel de la matrice image après application d'un filtre de convolution, on multiplie le pixel considéré par la valeur centrale du noyau puis on additionne les valeurs des produits pondérés des pixels voisins au résultat obtenu. Le résultat final est généralement divisé par la somme des coefficients du noyau pour éviter de modifier la luminance globale de l'image (la somme des coefficients est ainsi ramenée à 1) mais cette opération n'appartient pas au produit de convolution proprement dit. Le filtre agit donc sur la totalité de l'image en modifiant la valeur de chaque pixel. La convolution d'une image par un filtre 2D est illustrée sur la figure 2.4 :

## 2. Le traitement d'images



$$S1=170.F(-1,-1)+168.F(-1,0)+175.F(-1,1)+204.F(0,-1)+167.F(0,0)+165.F(0,1)+180.F(1,-1)+200.F(1,0)+165.F(1,1)$$

$$S2=168.F(-1,-1)+175.F(-1,0)+180.F(-1,1)+167.F(0,-1)+165.F(0,0)+169.F(0,1)+200.F(1,-1)+165.F(1,0)+162.F(1,1)$$

**FIGURE 2.4** – Exemple de convolution discrète

La valeur de sortie associée à chaque pixel dépend donc du voisinage de celui-ci et de la pondération définie par le filtre. D'autre part, on remarque que les bords de l'image ne peuvent pas être traités directement (voir les points d'interrogation rouges sur la figure 2.4). Pour pallier ce problème, plusieurs options sont envisageables : mettre à zéro les valeurs non calculées, réaliser une convolution partielle en gardant une portion du filtre, ou faire un miroir de l'image de telle sorte que  $I(-x,y) = I(x,y)$ , par exemple.

### 2.1.2.2 Filtres de lissage

Les filtres de lissage sont des opérateurs qui éliminent les éléments perturbateurs d'une image soit pour améliorer sa visualisation, soit pour la simplifier en vue de traitements postérieurs. Il s'agit de filtres passe-bas. Les filtres de lissage les plus connus sont le filtre moyenneur, le filtre gaussien et le filtre médian.

Le filtre moyenneur permet de réaliser un lissage de l'image en remplaçant la valeur de chaque pixel par la moyenne de ses voisins. Tous les coefficients du filtre sont donc égaux. Il permet de réduire le bruit et d'éliminer les détails non significatifs de l'image. Plus la dimension du filtre est grande, plus le lissage devient important et plus le flou s'accroît. Par exemple, un filtre moyenneur de taille 3x3 est défini de la manière suivante :

$$M = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Le filtre gaussien est également un filtre de lissage. Il est assez similaire au filtre moyenneur mais la moyenne est pondérée : les pixels proches du centre ont un poids plus important que les autres. Ce filtre est un filtre de lissage qui permet de réduire le bruit de l'image. L'équation de la gaussienne (eq (2.5)) s'écrit :

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (2.5)$$

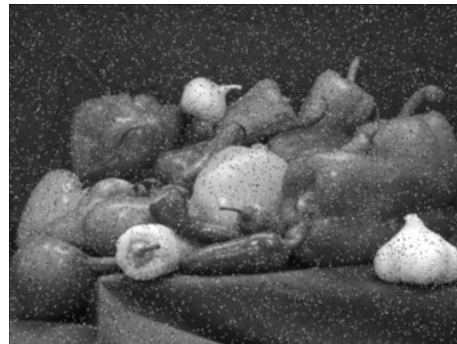
où  $\sigma$  est l'écart-type de la distribution gaussienne. En général, on utilise un filtre gaussien avec  $\sigma < 1$  pour réduire le bruit de l'image. Plus  $\sigma$  est grand, plus le flou résultant sur l'image sera marqué. Par exemple, pour  $\sigma = 1$ , on a le filtre 5x5 suivant :

$$G = \frac{1}{300} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 18 & 30 & 18 & 4 \\ 6 & 30 & 48 & 30 & 6 \\ 4 & 18 & 30 & 18 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

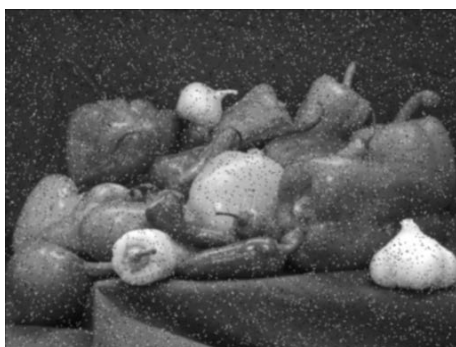
Enfin, contrairement aux filtres moyenneurs et gaussiens, le filtre médian est un filtre non linéaire : il ne peut pas s'implémenter comme un produit de convolution. Ce filtre permet de remplacer la valeur d'un pixel par la valeur médiane de l'ensemble des pixels de son voisinage. Il est généralement plus efficace que les filtres moyenneur et gaussien contre le bruit. La figure 2.5 montre l'effet de ces trois filtres sur une image bruitée.



(a) Image bruitée



(b) Filtre moyenneur 3x3

(c) Filtre gaussien 5x5,  $\sigma = 1$ 

(d) Filtre médian 3x3

**FIGURE 2.5** – Filtres de lissage

### 2.1.2.3 Filtres dérivateurs

Les filtres dérivateurs sont des opérateurs qui mettent en évidence certaines variations spatiales dans les images. Il s'agit de filtres passe-haut. Les variations locales d'intensité constituent en effet une source primordiale d'information en traitement d'images, notamment pour la détection des contours. Elles sont mesurées par le calcul des dérivées de l'image. Le problème du calcul des dérivées d'une image numérique est l'approximation de ces grandeurs différentielles dans l'espace discret. Une estimation discrète des dérivées peut être obtenue en utilisant les différences finies (schéma avant, schéma arrière, schéma centré). Par exemple, pour la première et la deuxième dérivée partielle d'une fonction  $f$  suivant la direction X, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &\approx \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} && \text{schéma avant} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &\approx \frac{f(x,y) - f(x-h,y)}{h} && \text{schéma arrière} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &\approx \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h} && \text{schéma centré} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &\approx \frac{f(x+h,y) - 2 \cdot f(x,y) + f(x-h,y)}{h^2} && \text{schéma centré} \end{aligned}$$

Ainsi, afin d'appliquer les formules décrites ci-dessus au niveau de l'image elle-même, on utilise une approche matricielle. Les différences finies sont calculées par des matrices de convolution avec des noyaux très simples : ce sont les filtres dérivateurs. En se basant sur le schéma aux différences finies centrées, les dérivées premières d'une image peuvent être obtenues par la convolution de la matrice image avec un filtre "horizontal" (noté G1) et un filtre "vertical" (noté G2), correspondant respectivement aux dérivées partielles suivant les directions X et Y. Le deuxième masque se déduit du premier par une rotation de  $\pi/2$ .

$$G1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad G2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

C'est Roberts [ROB 65] qui proposa en 1965 la première approximation de la dérivée première d'une image grâce à l'application de deux masques de convolution pour les deux directions de la dérivée. Malheureusement, ces dérivations sont très sensibles au bruit présent sur l'image et il y a donc nécessité de procéder à un filtrage préalable de l'image, dans la direction orthogonale à celle de la dérivation, afin de réduire le bruit. Ainsi, le filtre de Prewitt [PRE 70] inclut un filtre de lissage moyennneur afin de limiter le bruit. Les masques de convolution dans les directions X et Y sont définis de la manière suivante :

$$P1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ -1] \quad ; \quad P2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1]$$

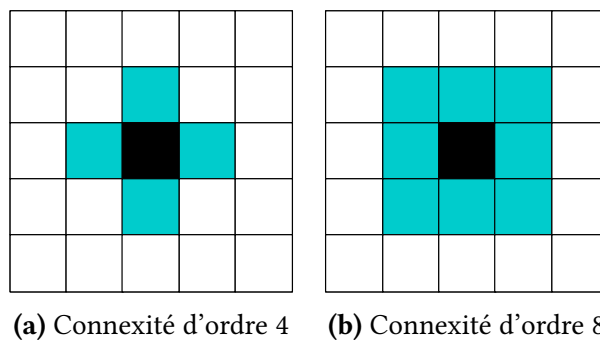
Le filtre de Sobel [SOB 90] inclut quant à lui un filtre de lissage gaussien afin de limiter le bruit. Les masques de convolution dans les directions X et Y sont définis de la manière suivante :

$$S1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ -1] \quad ; \quad S2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 1]$$

De même, on peut utiliser les différences finies pour calculer les dérivées secondes d'une image. Ainsi, le laplacien d'une image peut être obtenu par la convolution de la matrice image avec les filtres suivants en fonction de la connexité considérée :

$$L(4\text{-connexité}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad L(8\text{-connexité}) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

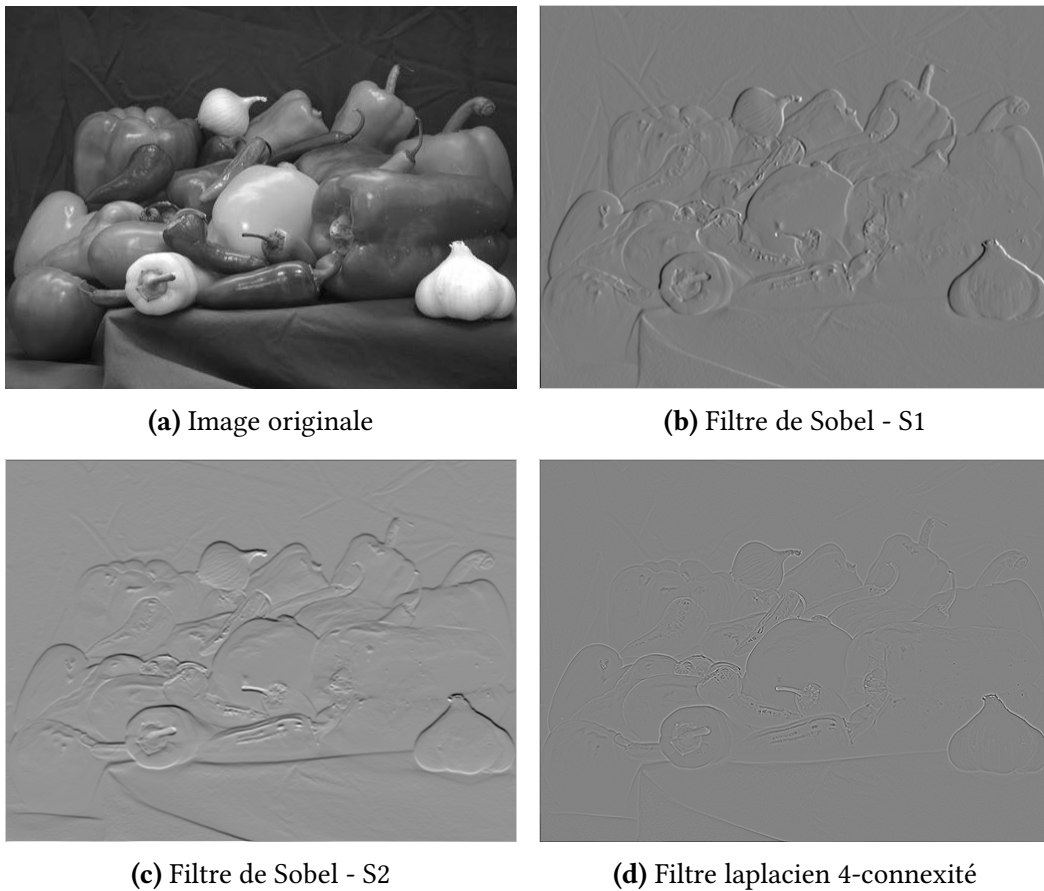
La notion de connexité correspond à la taille du plus petit voisinage non vide d'un pixel. La figure 2.8 montre les différentes connexités d'un pixel à ses voisins.



**FIGURE 2.6** – Différentes connexités d'un pixel à ses voisins

La figure 2.7 illustre l'effet de quelques filtres dérivateurs. Il existe une multitude d'autres filtres. On peut citer les filtres de Kirsh et de Robinson. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à l'ouvrage de Gonzalez et Woods [GON 07].





**FIGURE 2.7** – Filtres dérivateurs

### 2.1.3 Détection de contours dans une image

La détection de contours est une technique de réduction d'information dans une image. Elle consiste à transformer l'image en un ensemble de courbes, pas forcément fermées, formant les frontières significatives de l'image.

Dans une image, un contour apparaît comme une ligne où sont localisées les très fortes variations de  $I(x,y)$ . Les contours correspondent ainsi aux maxima des dérivées premières et aux passages par zéro des dérivées secondes. Les contours peuvent donc être identifiés grâce à l'utilisation de filtres dérivateurs qui déterminent des estimateurs locaux des dérivées discrètes de l'image. Plusieurs filtres dérivateurs ont été décrits dans la partie précédente afin de déterminer les dérivées premières et secondes d'une image. Pour obtenir tous les contours de l'image de la figure 2.7a, on peut utiliser l'opérateur gradient qui regroupe les dérivées premières de l'image. Le gradient est un vecteur qui indique la direction de plus fort contraste dans l'image. Il est orthogonal aux lignes de niveaux et sa norme est d'autant plus élevée que les variations locales d'intensité le sont. Le gradient est donc très sensible au bruit. Il est défini de la manière suivante :

$$\nabla \vec{I}(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\nabla I(x,y) = \|\nabla \vec{I}(x,y)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I(x,y)}{\partial y}\right)^2} \quad (2.8)$$

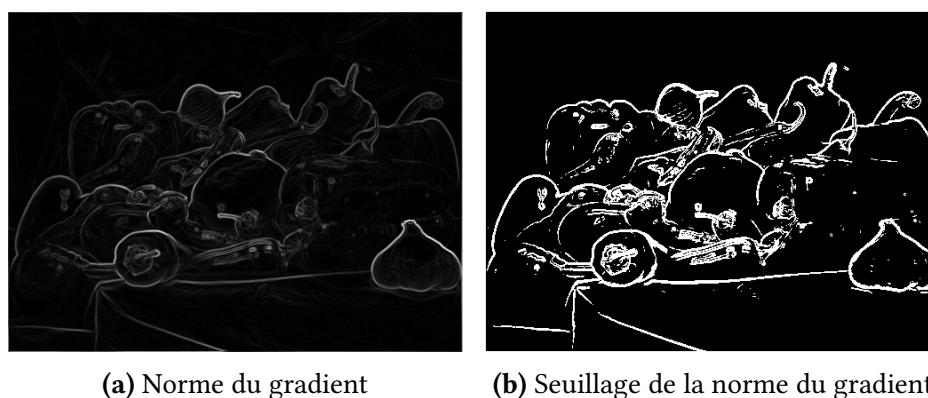
$$\arg(\nabla \vec{I}(x,y)) = \arctan\left(\frac{\frac{\partial I(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial I(x,y)}{\partial y}}\right) \quad (2.9)$$

Toutefois, l'étape de détection des contours (fig. 2.8a) fournit en général trop d'informations et il convient alors de conserver uniquement les composantes principales des contours. Pour ce faire, on peut réaliser un seuillage de la norme du gradient (fig. 2.8b). Mais cette méthode est très sensible aux paramètres de seuillage. Un seuillage par hystérésis permet de diminuer l'importance du seuil en définissant un seuil haut et un seuil bas. Il existe ensuite plusieurs méthodes de fermeture de contours afin de détecter les objets topologiquement clos de l'image.

### 2.1.4 Morphologie mathématique

La morphologie mathématique est une théorie de traitement non linéaire de l'information qui repose sur la théorie des ensembles. Contrairement au traitement linéaire où l'opération de filtrage consiste à éliminer certaines composantes fréquentielles de l'image, filtrer au sens de la morphologie mathématique consiste à simplifier l'image en supprimant certaines structures géométriques.

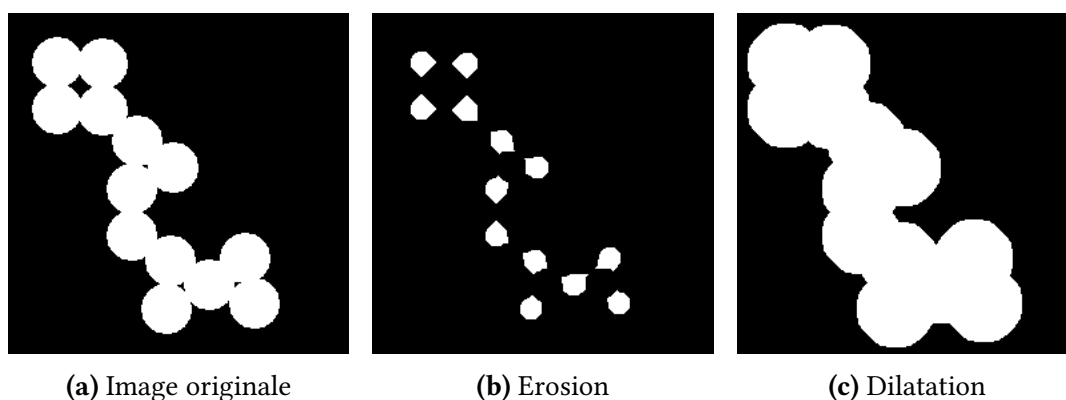
Pour réaliser des opérations de morphologie mathématique sur une image A, il est nécessaire de définir un élément structurant B. Il s'agit d'un objet géométrique pouvant



**FIGURE 2.8** – Détection de contours

être déplacé sur toute l'image, comme un opérateur de convolution. Ainsi, en chaque position de l'élément structurant B, des opérations logiques sont effectuées entre A et B (union, intersection, inclusion, etc). Les résultats dépendent de la forme et de la taille de l'élément structurant utilisé.

On définit deux opérations élémentaires de la morphologie mathématique : l'érosion et la dilatation (fig. 2.9 ). Lorsque l'élément structurant parcourt l'objet tout en gardant son centre à l'extérieur de l'objet, le résultat de l'érosion correspond à l'ensemble des pixels non recouverts par l'élément structurant. De manière qualitative, l'érosion a pour effet de diminuer la taille des objets, de diviser un objet, avec des concavités ou des trous, en plusieurs objets, et de faire disparaître les détails. La dilatation, quant à elle correspond à l'ensemble des pixels recouverts par l'élément structurant lorsque celui-ci parcourt l'objet tout en gardant son centre à l'intérieur de l'objet. La dilatation a pour effet d'augmenter la taille des objets, de boucher les trous et les concavités et de connecter des objets voisins. Les figures 2.9b et 2.9c illustrent les effets d'une érosion et d'une dilatation avec un disque de 10 pixels de rayon.



**FIGURE 2.9** – Opérations élémentaires de morphologie mathématique

A partir de ces deux opérations élémentaires, on peut définir pratiquement tous les

autres opérateurs en utilisant des compositions de fonctions et des opérations ensemblistes. Ainsi, une dilatation suivie d'une érosion est nommée fermeture (fig. 2.10a). Cette opération supprime les trous, complète les défauts de forme et connecte les objets proches. A l'inverse, une érosion suivie d'une dilatation est appelée ouverture (fig. 2.10b). Cette opération permet de lisser les contours et de supprimer les petits "îlots" tout en gardant la taille originale de l'objet. Enfin, il existe des filtres alternés séquentiels qui correspondent à une succession d'ouvertures et de fermetures utilisant des éléments structurants de taille croissante.

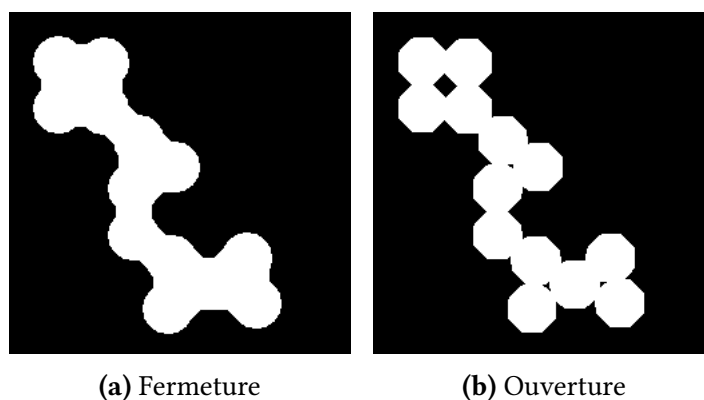


FIGURE 2.10 – Fermeture et ouverture

## 2.2 Présentation des méthodes de segmentation

La segmentation d'images consiste à partitionner une image en plusieurs regroupements de pixels (la segmentation d'images est parfois appelée "superpixelling"). Il s'agit dans ce travail de thèse de mettre en place une méthode de segmentation permettant de distinguer les mèches de trame et les mèches de chaînes à partir des différentes images de coupe provenant de la tomographie du matériau composite. Plusieurs méthodes de segmentation existent mais dans ce travail il sera présenté deux méthodes : une méthode de segmentation basée sur le tenseur de structure et une méthode basée sur l'analyse de texture.

### 2.2.1 Segmentation par le tenseur de structure

Le tenseur de structure [JAH 93, BIG 04] est une matrice représentative des dérivées partielles de l'image. Il permet de déterminer les orientations locales de chaque pixel ainsi que ses propriétés isotropiques. Ce tenseur est défini en 2D pour chaque pixel comme une matrice  $J$  de taille  $2 \times 2$  définie positive symétrique où  $f_x$  et  $f_y$  sont les dérivées partielles spatiales d'une fonction  $f(x,y)$  de niveaux de gris le long des directions principales  $x$  et  $y$ .

$$J = \begin{bmatrix} \langle f_x, f_x \rangle_w & \langle f_x, f_y \rangle_w \\ \langle f_x, f_y \rangle_w & \langle f_y, f_y \rangle_w \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Le produit scalaire pondéré entre deux images arbitraires est défini comme :

$$\langle g, h \rangle_w = \iint_{R^2} w(x, y) g(x, y) h(x, y) dx dy \quad (2.11)$$

où  $w(x, y) \geq 0$  est une fonction pondérée représentant la région d'intérêt. Typiquement, cette région représente une fenêtre carrée de dimension  $L$  centrée en  $(x_0, y_0)$ . La norme associée au produit scalaire est  $\|f\|_w = \sqrt{\langle f, f \rangle_w}$ .

A partir de ce tenseur, trois paramètres [JEU 08, REZ 11] donnant des informations caractéristiques sur la direction clé sont calculés : l'orientation locale prédominante du pixel  $\theta$ , l'énergie  $E$  et la cohérence  $C$ .

L'orientation locale prédominante du pixel  $\theta$  dans une région considérée correspond à la direction du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre du tenseur de structure. L'angle est donné par :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(2 \frac{\langle f_x, f_y \rangle_w}{\langle f_y, f_y \rangle_w - \langle f_x, f_x \rangle_w}\right) \quad (2.12)$$

Le paramètre énergie  $E$  représente la trace du tenseur de structure :

$$E = \text{Trace}(J) = \langle f_x, f_x \rangle_w + \langle f_y, f_y \rangle_w \quad (2.13)$$

Les pixels possédant les plus hautes énergies correspondent à des structures très orientées et donc très peu isotropiques.

Le paramètre cohérence  $C$  correspond au ratio entre la différence et la somme des valeurs propres maximum et minimum :

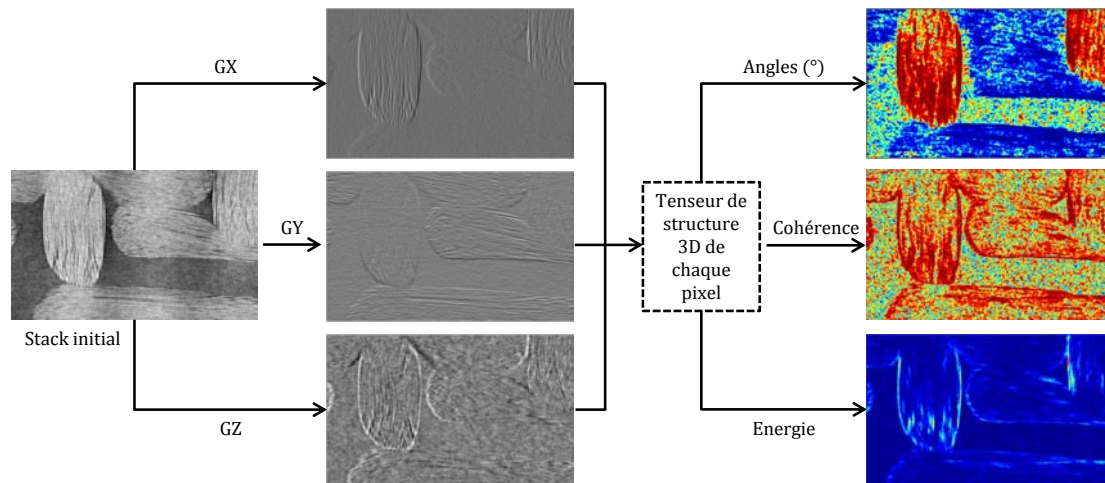
$$C = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} = \frac{\sqrt{(\langle f_y, f_y \rangle_w - \langle f_x, f_x \rangle_w)^2 + 4\langle f_x, f_y \rangle_w^2}}{\langle f_x, f_x \rangle_w + \langle f_y, f_y \rangle_w} \quad (2.14)$$

La cohérence est bornée entre 0 et 1, avec 1 indiquant une structure très orientée et 0 indiquant des zones de distribution isotropiques.

## 2.2.2 Implémentation de l'algorithme de segmentation par le tenseur de structure

Afin de segmenter les mèches de chaîne des mèches de trame sur les images issues de microtomographie X, un algorithme basé sur le calcul du tenseur de structure étendu en 3D a été implémenté dans Matlab.

Pour construire le tenseur de structure 3D d'un pixel, il est donc nécessaire de calculer les dérivées partielles de l'image dans les trois directions. Cette opération est réalisée grâce à des filtres dérivateurs (voir §2.1.2.3). Ensuite, on détermine les orientations de chaque pixel par des calculs d'angles afin de segmenter les pixels appartenant aux mèches de chaîne des pixels appartenant aux mèches de trame. Puisque les directions des mèches sont bien définies dans un plan XY ( $0^\circ$  et  $90^\circ$ ), cette méthode sera utilisée dans ce plan. L'algorithme implémenté est schématisé sur la figure 2.11.



**FIGURE 2.11** – Schéma de l'algorithme basé sur le calcul des tenseurs de structure 3D

### 2.2.2.1 Calculs des gradients directionnels d'un stack d'image

Pour calculer les gradients de chaque image du stack dans les directions X, Y et Z, on utilise un filtre de Sobel 3D de taille  $3 \times 3 \times 3$ . Le stack d'images est ainsi convolué par trois noyaux différents en fonction de la direction étudiée.

L'avantage de ce filtre, contrairement aux filtres classiques (Prewitt, Sobel 2D, Robinson, etc), réside dans le fait qu'il est tridimensionnel, i.e que pour une image  $I$  donnée du stack d'images, le filtre prend en compte les images  $I - 1$ ,  $I$  et  $I + 1$ . Le filtre de Sobel 3D utilisé est défini par Alam [ALA 12] et est représenté sur la figure 2.12.

On détaille ci-dessous les formules de calcul des gradients dans les trois directions.

$$\begin{aligned}
 G_X(y, x, z) = & I(y + 1, x + 1, z + 1) + 2 \cdot I(y, x + 1, z + 1) + I(y - 1, x + 1, z + 1) \\
 & + 2 \cdot I(y + 1, x + 1, z) + 4 \cdot I(y, x + 1, z) + 2 \cdot I(y - 1, x + 1, z) \\
 & + I(y + 1, x + 1, z - 1) + 2 \cdot I(y, x + 1, z - 1) + I(y - 1, x + 1, z - 1) \\
 & - (I(y + 1, x - 1, z + 1) + 2 \cdot I(y, x - 1, z + 1) + I(y - 1, x - 1, z + 1) \\
 & + 2 \cdot I(y + 1, x - 1, z) + 4 \cdot I(y, x - 1, z) + 2 \cdot I(y - 1, x - 1, z) \\
 & + I(y + 1, x - 1, z - 1) + 2 \cdot I(y, x - 1, z - 1) + I(y - 1, x - 1, z - 1))
 \end{aligned}$$

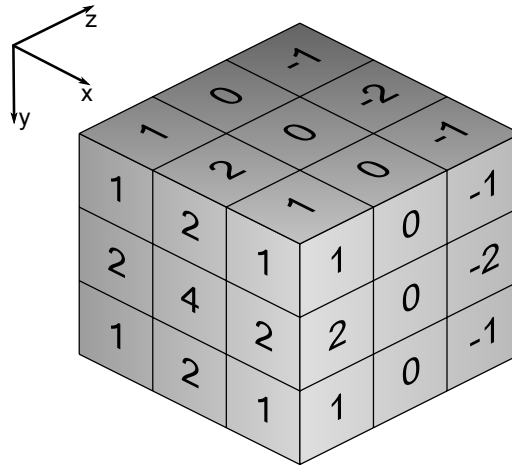
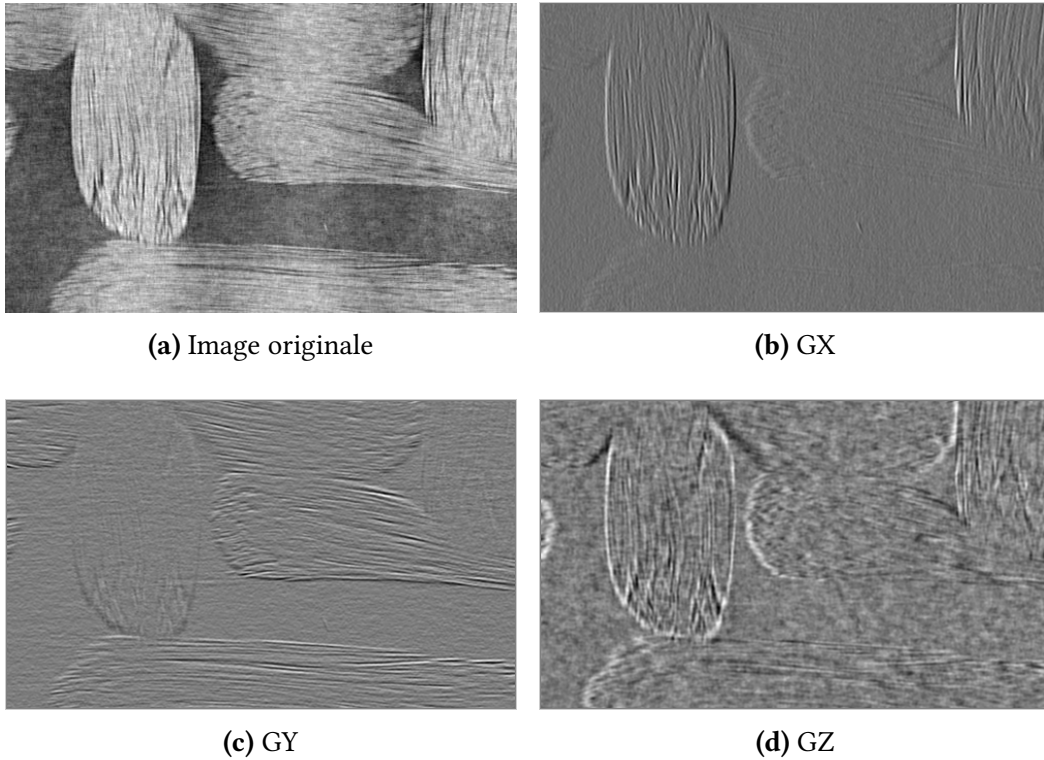


FIGURE 2.12 – Filtre de Sobel 3D

$$\begin{aligned}
 G_Y(y,x,z) = & I(y+1,x+1,z+1) + 2 \cdot I(y+1,x+1,z) + I(y+1,x+1,z-1) \\
 & + 2 \cdot I(y+1,x,z+1) + 4 \cdot I(y+1,x,z) + 2 \cdot I(y+1,x,z-1) \\
 & + I(y+1,x-1,z+1) + 2 \cdot I(y+1,x-1,z) + I(y+1,x-1,z-1) \\
 & - (I(y-1,x+1,z+1) + 2 \cdot I(y-1,x+1,z) + I(y-1,x+1,z-1)) \\
 & + 2 \cdot I(y-1,x,z+1) + 4 \cdot I(y-1,x,z) + 2 \cdot I(y-1,x,z-1) \\
 & + I(y-1,x-1,z+1) + 2 \cdot I(y-1,x-1,z) + I(y-1,x-1,z-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_Z(y,x,z) = & I(y+1,x+1,z+1) + 2 \cdot I(y,x+1,z+1) + I(y-1,x+1,z+1) \\
 & + 2 \cdot I(y+1,x,z+1) + 4 \cdot I(y,x,z+1) + 2 \cdot I(y-1,x,z+1) \\
 & + I(y+1,x-1,z+1) + 2 \cdot I(y,x-1,z+1) + I(y-1,x-1,z+1) \\
 & - (I(y+1,x+1,z-1) + 2 \cdot I(y,x+1,z-1) + I(y-1,x+1,z-1)) \\
 & + 2 \cdot I(y+1,x,z-1) + 4 \cdot I(y,x,z-1) + 2 \cdot I(y-1,x,z-1) \\
 & + I(y+1,x-1,z-1) + 2 \cdot I(y,x-1,z-1) + I(y-1,x-1,z-1)
 \end{aligned}$$

Les formes des gradients obtenus après convolution du stack d'images par le filtre de Sobel 3D sont illustrées sur la figure 2.13. On constate que le gradient dans la direction X permet de détecter les mèches de chaîne (orientées à 90°) tandis que le gradient dans la direction Y permet de détecter les mèches de trame (orientées à 0°). Le gradient dans la direction Z, quant à lui, ne correspond pas à une direction privilégiée des mèches. Toutefois, pour un matériau composite possédant des mèches orientées dans les trois directions de l'espace, le gradient dans la direction Z serait représentatif.



**FIGURE 2.13** – Gradients dans les trois directions de l'espace

### 2.2.2.2 Détermination du tenseur de structure 3D

Les gradients dans les trois directions ayant été calculés, on peut déterminer le tenseur de structure 3D de chaque pixel du stack d'images. On commence tout d'abord par définir un tenseur 3D noté  $T_{init}$  de la manière suivante :

$$T_{init} = \begin{bmatrix} I_x^2 & I_x I_y & I_x I_z \\ I_y I_x & I_y^2 & I_y I_z \\ I_z I_x & I_z I_y & I_z^2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Avec  $I_x = G_X = \frac{\partial I(x,y)}{\partial x}$ ,  $I_y = G_Y = \frac{\partial I(x,y)}{\partial y}$  et  $I_z = G_Z = \frac{\partial I(x,y)}{\partial z}$ .

Les composantes du tenseur  $T_{init}$  correspondent donc à des combinaisons des gradients dans les directions X, Y et Z. Afin de simplifier l'écriture de ce tenseur, on utilise la notation suivante :

$$T_{init} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ sym & T_{yy} & T_{yz} \\ & & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Pour obtenir le tenseur de structure 3D de chaque pixel, on applique un filtre gaussien 3D sur chaque composante du tenseur  $T_{init}$ . Ce filtre est un filtre de lissage qui permet



de réduire le bruit de l'image. On note  $Tf_{xx}$  le résultat du filtrage de la composante  $T_{xx}$  par le filtre gaussien 3D. Le tenseur de structure 3D de chaque pixel s'écrit alors :

$$T = \begin{bmatrix} Tf_{xx} & Tf_{xy} & Tf_{xz} \\ sym & Tf_{yy} & Tf_{yz} \\ & & Tf_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

### 2.2.2.3 Paramètres extraits du tenseur

Le tenseur de structure 3D d'un pixel contient des informations sur l'orientation de celui-ci. Le tenseur de structure peut être visualisé comme un ellipsoïde 3D dont les directions correspondent aux vecteurs propres et dont les demi axes sont égaux aux valeurs propres du tenseur. Afin de segmenter les mèches de trame (orientées à  $0^\circ$ ) des mèches de chaîne (orientées à  $90^\circ$ ), il convient donc de quantifier l'orientation des pixels.

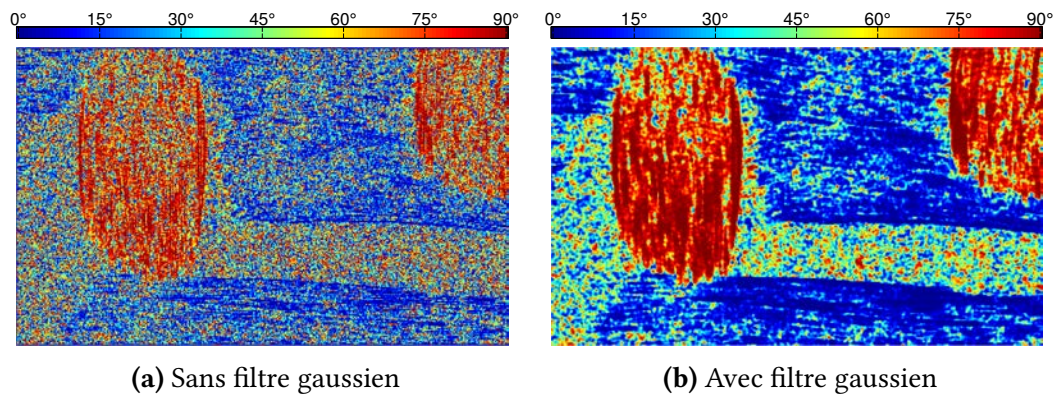
Pour ce faire, on calcule des valeurs d'angles, dans le plan XY, pour chaque pixel du stack d'images :

$$\theta = \arctan\left(\frac{Tf_{xx}}{Tf_{yy}}\right) \quad (2.18)$$

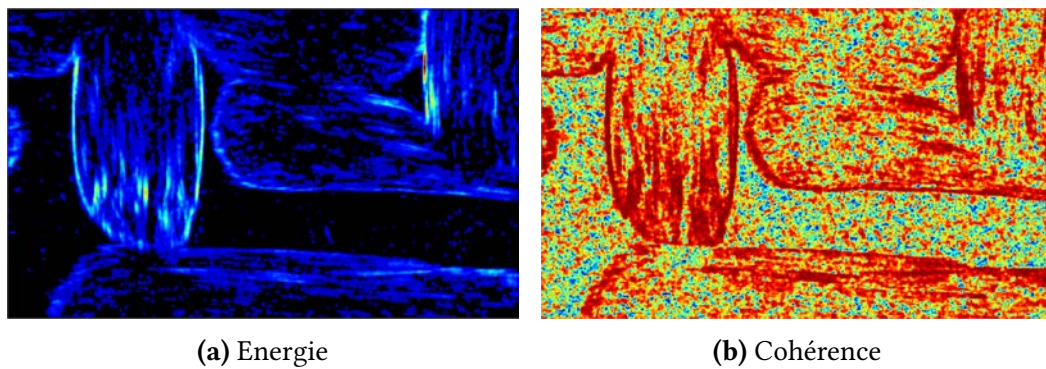
Les résultats obtenus pour une image sans et avec filtrage gaussien sont illustrés sur la figure 2.14. L'échelle de couleur, identique pour les deux images, définit les angles entre  $0^\circ$  (couleur bleue) et  $90^\circ$  (couleur rouge). On remarque que la carte des orientations des pixels sans filtrage gaussien permet de récupérer les orientations réelles des mèches du matériau : les mèches de trame sont orientées à  $0^\circ$  tandis que les mèches de chaîne sont orientées à  $90^\circ$ . Toutefois, l'image de sortie est très bruitée et ceci est problématique pour la segmentation. En effet, si on souhaite garder uniquement les pixels orientés à  $90^\circ$  par exemple, beaucoup de pixels perturbateurs apparaîtront en dehors des mèches de chaîne lors du seuillage. En revanche, les angles calculés à partir des composantes du tenseur de structure 3D de chaque pixel permettent d'identifier clairement les mèches de chaîne, les mèches de trame et le fond de l'image. De plus, l'image est peu bruitée en raison du lissage gaussien appliqué aux composantes du tenseur de structure (filtre gaussien  $3 \times 3 \times 3$ ,  $\sigma = 1$  dans ce cas).

L'énergie (eq (2.13)) et la cohérence (eq (2.14)) sont représentées sur la figure 2.15. Pour l'énergie, les valeurs varient entre 0 (couleur bleue) et 70 (couleur rouge). Pour la cohérence, les valeurs varient entre 0 (couleur bleue) et 1 (couleur rouge). On remarque que ces deux paramètres permettent de mieux différencier les mèches de chaîne et les mèches de trame du fond de l'image.

De ce fait, puisque les zones de l'image qui sont fortement orientées sont clairement identifiées, le calcul des angles effectué précédemment peut être réalisé uniquement pour les pixels correspondant aux mèches. Ceci permet d'éviter de calculer les orientations des pixels non significatifs, comme ceux qui appartiennent au fond de l'image par exemple, et donc de diminuer le temps de calcul. Pour réaliser cette opération, on

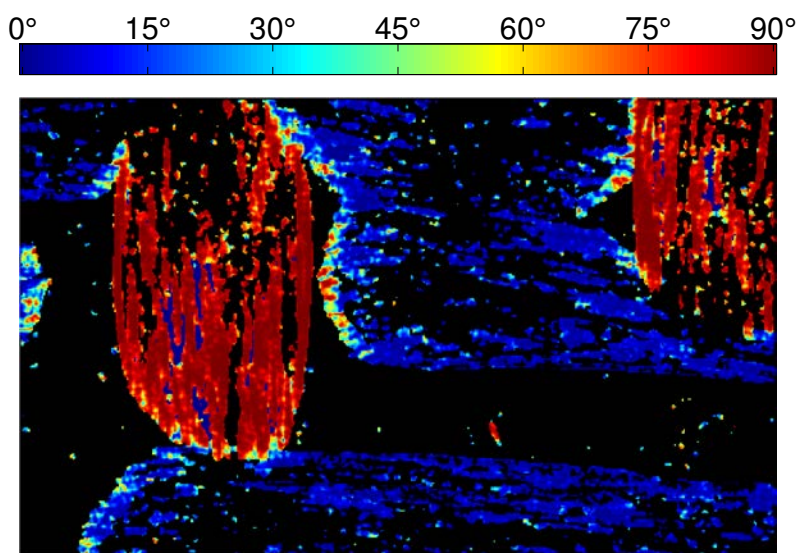


**FIGURE 2.14** – Carte des orientations des pixels sans et avec filtrage gaussien



**FIGURE 2.15** – Propriétés isotropiques des pixels

spécifie un pourcentage minimal d'énergie que doit posséder le pixel considéré pour calculer son orientation. Si le pixel étudié possède une énergie inférieure au seuil donné, son orientation n'est pas calculée. Par exemple, en gardant les pixels ayant un minimum de 2% d'énergie normalisée, on obtient le résultat de la figure 2.16.



**FIGURE 2.16** – Orientations des pixels possédant au minimum 2% d'énergie

A partir de ces paramètres, on va mettre en place un espace de couleurs Hue Saturation Brightness (HSB) dans lequel les composantes H, S et B correspondent respectivement à l'orientation des pixels, à la cohérence et à l'image originale.

Dans l'espace de couleurs HSB (figure 2.17a), les mèches de chaîne apparaissent en rouge et les mèches de trame en vert. Toutefois, certaines zones correspondent à des mélanges de ces deux couleurs. Ainsi, afin de ne garder que deux couleurs dans l'image, on utilise le principe de la dichromatie tritanope (figure 2.17b). La dichromatie correspond à un type de daltonisme qui se caractérise par la non-perception d'une couleur. Une personne atteinte de dichromatie ne possède que deux pigments photosensibles viables sur trois et sa perception est donc limitée à deux couleurs primaires. Ainsi, une personne tritanope ne perçoit pas les nuances de bleu. Cette étape permet donc de mieux différencier les mèches de chaîne des mèches de trame.

On peut voir sur la figure 2.18 le résultat obtenu sur un interlock sur lequel est appliqué le script de la tritanopie.

Ensuite, on applique une déconvolution de couleurs afin de séparer les pixels de couleur rouge des pixels de couleur bleue. La déconvolution de couleurs permet de séparer l'image en trois canaux. Ici, la meilleure déconvolution est obtenue en utilisant l'espace colorimétrique Haematoxylin, Eosin et DAB (H&E DAB), fréquemment utilisé en imagerie médicale, et il suffit de garder les canaux 1 et 3 pour différencier les mèches de chaîne des mèches de trame (figure 2.19).

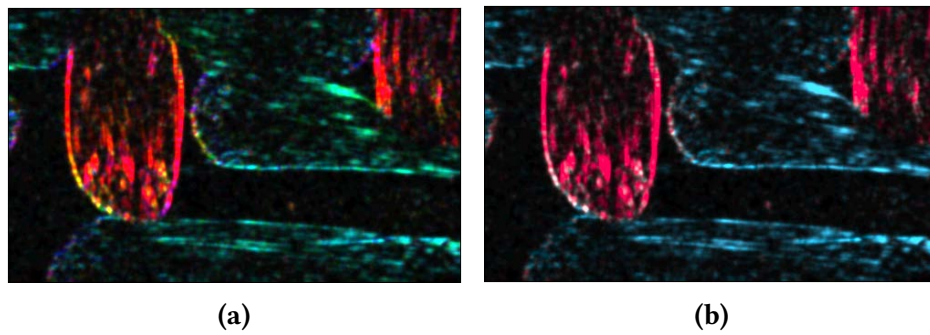


FIGURE 2.17 – Espace colorimétrique HSB (a) et dichromatie tritanope (b)

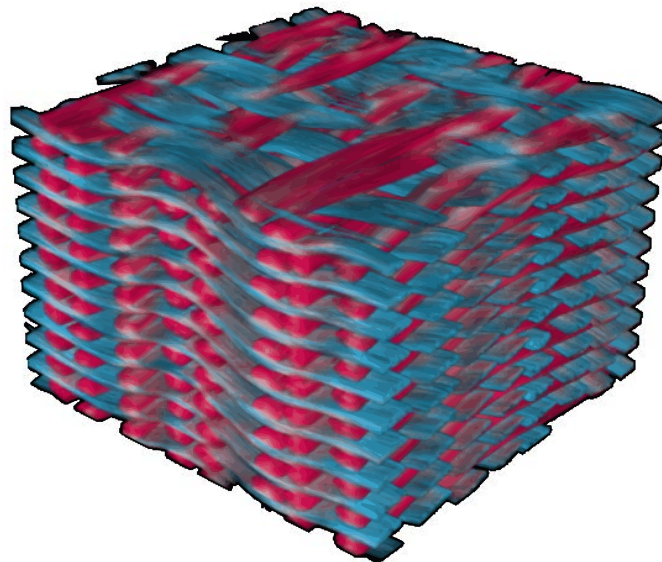


FIGURE 2.18 – Application de la tritanopie sur un interlock

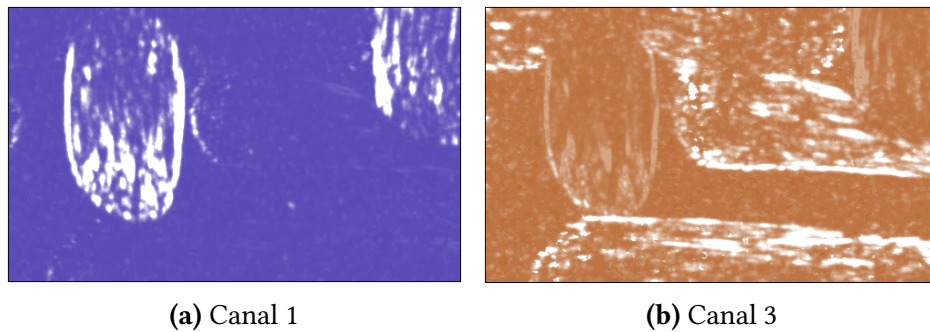


FIGURE 2.19 – Déconvolution de couleurs (H&E DAB)

Il ne reste plus qu'à effectuer des opérations de morphologie mathématique sur chaque canal représentant ainsi une des deux directions chaîne et trame.

Ainsi la figure 2.20 permet de synthétiser les différentes étapes du traitement du stack d'images permettant de segmenter les chaînes et les trames sans qu'il y ait interpénétration entre eux. La segmentation par le tenseur de structure donne de bons résultats sur des images de microtomographies possédant un aspect fibreux car elle est basée sur le calcul des gradients de l'image. Toutefois, lorsque la résolution de l'image ne permet pas d'accéder à cet aspect fibreux mais que les sections de mèche présentent un aspect granuleux, on peut utiliser une méthode de segmentation basée sur l'analyse de la texture.

### 2.2.3 Segmentation par analyse de texture

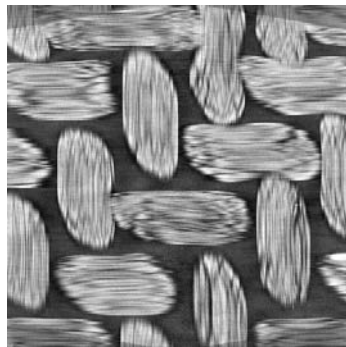
Une texture est une information visuelle qualitative. Dans une image, on peut ainsi repérer des textures plus ou moins fines, grossières, tachetées, périodiques, etc. L'analyse de textures permet de formaliser ces critères. Les méthodes stochastiques d'analyse de textures consistent à étudier les relations entre chaque pixel et ses voisins. Ces méthodes sont adaptées à l'étude des structures fines sans régularité apparente. Il existe deux grandes familles de méthode : les méthodes d'ordre 1 [COC 95, HER 99] qui étudient des paramètres comme la moyenne et la variance, et les méthodes d'ordre 2 [HAR 73, HAU 99, FRA 01] qui sont basées sur le calcul de matrices de cooccurrence. L'ordre de la méthode étant ici le nombre de pixels mis en jeu simultanément dans l'évaluation de chaque résultat. On s'intéresse ici uniquement aux méthodes d'ordre 2 car elles permettent d'obtenir les dépendances spatiales entre les pixels.

#### 2.2.3.1 Matrice de cooccurrence

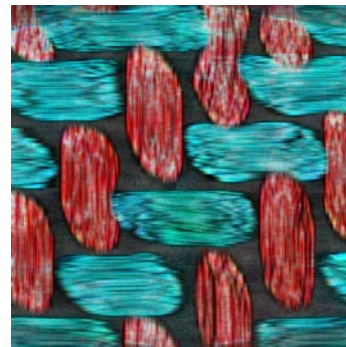
La segmentation d'images par analyse de textures repose sur le calcul de matrices de co-occurrence de niveaux de gris. Cette méthode permet d'étudier le comportement conjoint de couples de pixels séparés spatialement par une translation donnée. La construction des matrices de cooccurrence s'effectue à partir de quatre paramètres d'entrée :

- La taille de fenêtre, notée  $TF$ , correspondant au voisinage de l'image dans lequel on va calculer la matrice de cooccurrence ;
- Le nombre de niveaux de gris, noté  $NG$ , utilisés pour décrire l'image. Ce nombre détermine directement la taille de la matrice de cooccurrence qui aura pour dimension  $NG \times NG$ . Les indices de la matrice de cooccurrence sont donc les niveaux de gris utilisés pour décrire l'image ;
- L'orientation et la distance entre les pixels, notées respectivement  $\theta$  et  $D$ , qui définissent une translation afin de construire la matrice de cooccurrence à chaque itération. On regroupe ces deux paramètres sous le paramètre offset, qui est un vecteur :  $[0 D]$  pour  $\theta=0^\circ$ ,  $[-D D]$  pour  $\theta=45^\circ$ ,  $[-D 0]$  pour  $\theta=90^\circ$  et  $[-D -D]$  pour

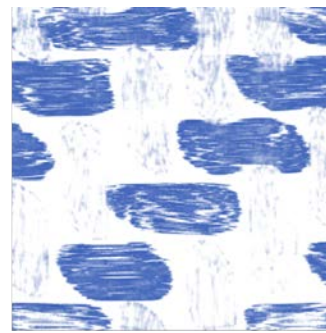




(a) Vue en coupe du G0986



(b) Carte couleur des orientations



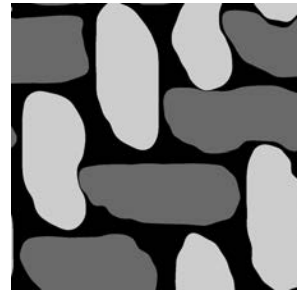
(c) Déconvolution de couleur



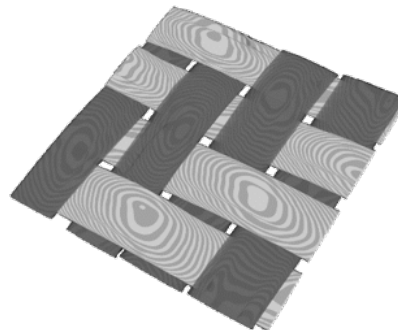
(d) Binarisation



(e) Seuillage



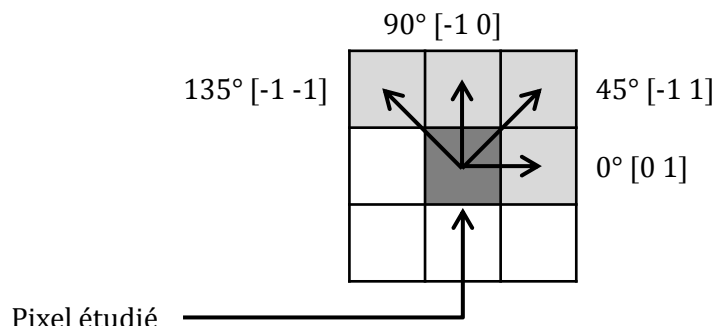
(f) Superposition des chaînes et trames



(g) Rendu 3D segmenté

FIGURE 2.20 – Différentes étapes de la segmentation du G0986 [NAO 14]

$\theta=135^\circ$ . La convention d'orientation utilisée est représentée sur la figure 2.21 pour  $D = 1$ .



**FIGURE 2.21** – Convention d'orientation du paramètre offset

Une matrice de cooccurrence *GLCM* ("Gray Level Cooccurrence Matrix") mesure le nombre d'apparition des paires de valeurs de pixels situés à une certaine distance dans l'image. Elle est basée sur le calcul du nombre de fois où un pixel de niveau de couleur  $i$  apparaît à une distance relative  $D$  d'un pixel de niveau de couleur  $j$  et selon une orientation  $\theta$  donnée.

$$GLCM(i, j) = \sum_{k=1}^{TF} \sum_{l=1}^{TF} \begin{cases} 1, & \text{si } F(k, l) = i \text{ et } F(k + \Delta_x, l + \Delta_y) = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.19)$$

La figure 2.22 illustre le calcul de matrices de cooccurrence d'une image d'entrée 5x5 composée de cinq niveaux de gris (0,1,2,3,4). Cet exemple se limite au cas  $D = 1$  et  $\theta = 0$ . L'élément (1, 4) de la matrice GLMC est égal à 3, cela signifie qu'il existe 3 configurations dans l'image d'entrée où un pixel de niveau de gris 0 est séparé horizontalement d'un autre pixel de niveau de gris 3 par une distance 1.

### 2.2.3.2 Analyse statistique

Les matrices de cooccurrence contiennent une masse très importante d'informations mais elles sont difficilement exploitables en l'état. De ce fait, quatorze indices ont été définis par Haralick [HAR 73] afin de calculer des caractéristiques de textures à partir des matrices de cooccurrence. Les indices les plus utilisés sont le contraste, la corrélation, l'énergie et l'homogénéité. Toutefois, bien que ces paramètres contiennent des informations relatives aux caractéristiques de textures de l'image, il est difficile de déterminer visuellement quelle caractéristique de texture correspond à tel paramètre. La plupart des images sont codées sur 256 niveaux de gris, par conséquent, la taille des matrices de cooccurrence est de 256 x 256. On s'aperçoit ainsi que ces matrices comptabilisent une très grosse quantité d'informations difficile à exploiter directement. Elles sont donc habituellement sous échantillonnées à 8 ou 16 niveaux de gris.

Une fois que la matrice de cooccurrence est calculée, on la normalise de telle sorte que la somme de ses éléments (notés  $p$ ) soit égale à 1. On extrait ensuite quatre paramètres statistiques : le contraste, la corrélation, l'énergie et l'homogénéité. Ainsi, chaque

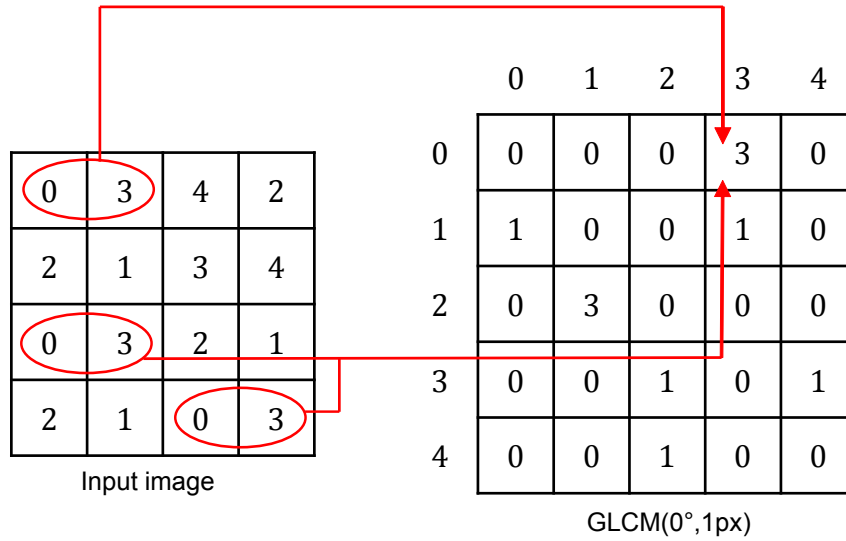


FIGURE 2.22 – Construction d'une matrice de cooccurrence

pixel du stack d'image sera caractérisé par quatre valeurs statistiques. Puisque la forme de la matrice de cooccurrence varie en fonction de la portion d'image étudiée (et donc de la texture associée), les paramètres statistiques vont permettre de discriminer les différentes zones de l'image. Le contraste  $Cts$  (eq. (2.20)) renvoie une mesure de l'intensité du contraste entre un pixel et ses voisins. Ce paramètre prend la valeur 0 pour une image constante (c'est-à-dire dont l'intensité ne varie pas).

$$Cts = \sum_{i,j} |i - j|^2 p(i, j) \quad (2.20)$$

La corrélation  $C$  (eq. (2.21)) renvoie une mesure qui indique l'intensité de la liaison qui existe entre le niveau de gris d'un pixel et celui de ses voisins. Ce paramètre est compris entre -1 et 1. Les paramètres  $\mu_i$  et  $\sigma_i$  correspondent respectivement à la moyenne et à l'écart type des niveaux de gris dans la direction X (colonnes). Les paramètres  $\mu_j$  et  $\sigma_j$  correspondent respectivement à la moyenne et à l'écart type des niveaux de gris dans la direction Y (lignes).

$$C = \sum_{i,j} \frac{(i - \mu_i)(j - \mu_j)p(i, j)}{\sigma_i \sigma_j} \quad (2.21)$$

L'énergie  $E$  (eq. (2.22)) correspond à la somme des éléments au carré de la matrice de cooccurrence. L'énergie varie entre 0 et 1, la valeur 1 étant associée à une image constante.

$$E = \sum_{i,j} p(i, j)^2 \quad (2.22)$$

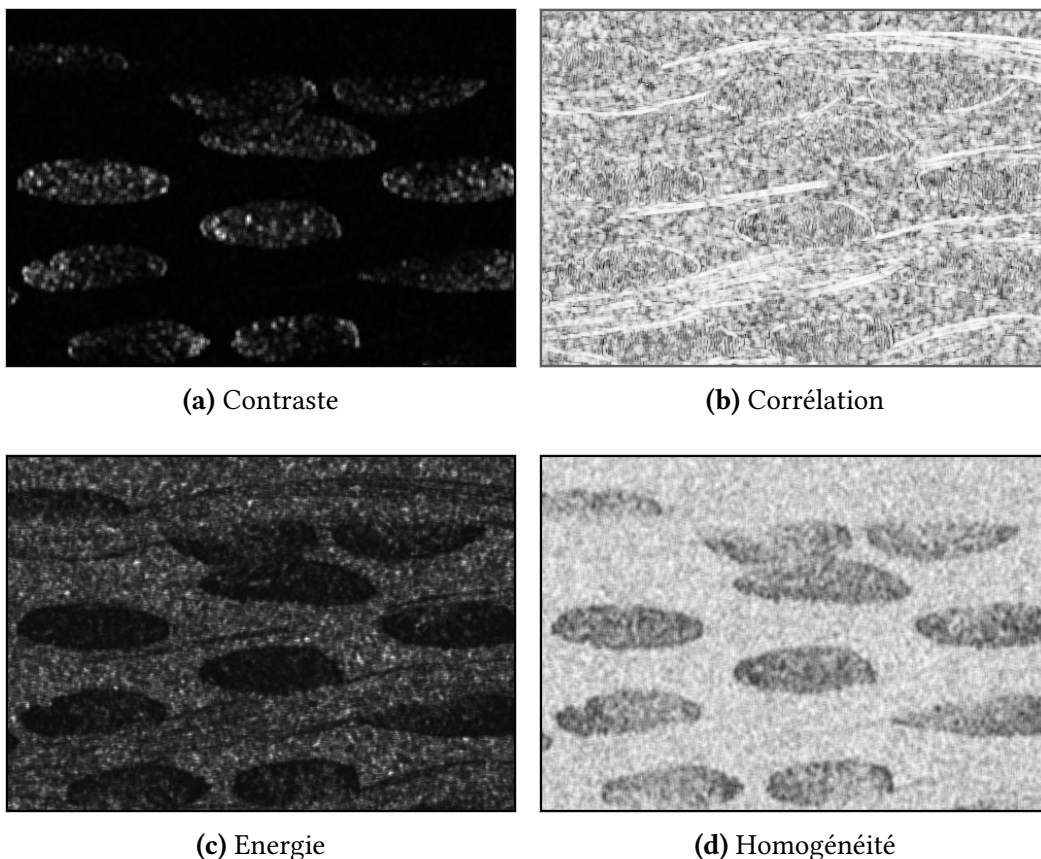
Enfin, l'homogénéité  $H$  (eq. (2.23)) est une valeur qui indique l'étroitesse de la distribution des éléments de la matrice de cooccurrence par rapport à la diagonale. Ce para-



mètre est compris entre 0 et 1, la valeur 1 indiquant que la matrice de cooccurrence est diagonale.

$$H = \sum_{i,j} \frac{p(i,j)}{1+|i-j|} \quad (2.23)$$

La figure 2.23 montre l'application des différents paramètres statistiques sur un stack d'images. Les paramètres d'entrée sont :  $TF = 5$ ,  $NG = 16$  et  $offset = [0 \ 1]$ . On remarque que les paramètres contraste, énergie et homogénéité permettent de différencier clairement les mèches de chaîne (présentes sous forme de torons) du reste de l'image. En revanche, les mèches de trame ne sont pas dissociables du fond de l'image : leur texture n'est pas assez caractéristique.



**FIGURE 2.23** – Exemple d'application des différents paramètres statistiques de la matrice de cooccurrence sur un stack d'images d'interlock

## 2.2.4 Implémentation de l'algorithme de segmentation par analyse de texture

Pour détecter les différentes textures présentes sur l'image, l'algorithme que nous avons implémenté sous Matlab procède au balayage de la fenêtre d'étude sur la totalité de l'image et calcule la matrice de cooccurrence associée à chaque position de la fenêtre. Ainsi, pour chaque pixel de l'image, la fenêtre d'étude définit un voisinage autour de ce pixel (appelé pixel central) dans lequel on va calculer la matrice de cooccurrence : il y a donc une matrice de cooccurrence associée à chaque pixel. La fenêtre d'étude peut, en quelque sorte, être assimilée à un filtre de convolution mais son fonctionnement est bien différent. De manière à exploiter plus aisément les informations contenues dans les matrices de cooccurrence, on en extrait quatre paramètres : le contraste, la corrélation, l'énergie et l'homogénéité. On obtient ainsi quatre valeurs de sortie pour chaque pixel de l'image. L'algorithme implémenté est schématisé sur la figure 2.24 :

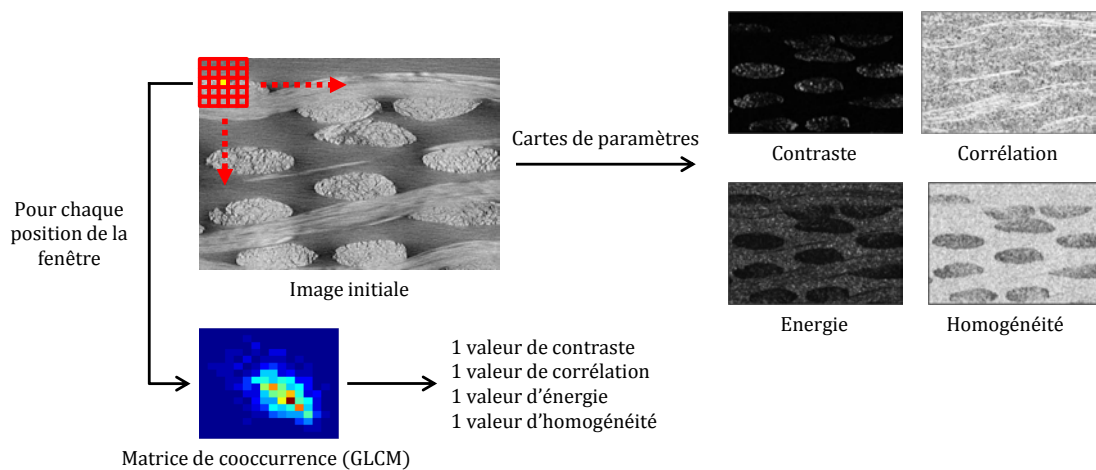


FIGURE 2.24 – Schéma de l'algorithme d'analyse de textures

### 2.2.4.1 Influence des paramètres

Afin de segmenter les images de manière optimale, plusieurs essais ont été réalisés en faisant varier les différents paramètres d'entrée : taille de la fenêtre d'étude, nombre de niveaux de gris et offset. Les performances de la méthode de segmentation par analyse de textures dépendent du compromis à faire entre les valeurs choisies pour les différents paramètres d'entrée et le pouvoir discriminant des paramètres extraits des matrices de cooccurrence. Le choix et les réglages des différents paramètres sont difficiles et il faut souvent faire de nombreux essais pour obtenir des résultats pertinents pour l'opération de segmentation.

### Influence de la taille de fenêtre

La taille de la fenêtre d'étude détermine le voisinage dans lequel la matrice de co-occurrence va être calculée. Pour des raisons mathématiques liées à l'implémentation du code, la taille de la fenêtre doit être impaire. De plus, on s'intéresse uniquement au cas où la fenêtre est carrée. La taille de la fenêtre d'analyse doit satisfaire deux critères contradictoires : être la plus petite possible pour réduire le risque de mélange de textures différentes et, en même temps, être la plus grande possible pour pouvoir extraire des statistiques assez robustes et significatives. On constate que plus la taille de la fenêtre est importante, plus l'image de sortie est floue. L'effet est similaire à un filtrage gaussien ou médian. Plus la taille de la fenêtre est élevée, plus l'information contenue à l'intérieur des mèches de chaîne est homogène. Toutefois, on remarque également que les mèches de chaîne ont alors tendance à s'aplatir. Il faut donc trouver un compromis de manière à réduire le bruit de l'image en homogénéisant l'information à l'intérieur des torons tout en respectant le ratio de forme des mèches. Les résultats obtenus permettent de retenir une **fenêtre de taille  $5 \times 5$** . L'annexe A.1 présentent les résultats obtenus pour différentes tailles de fenêtre.

### Influence du nombre de niveaux gris

Le nombre de niveaux de gris utilisés pour décrire l'image détermine la taille des matrices de cooccurrence qui auront pour dimensions  $NG \times NG$ . Le choix de ce paramètre a donc une influence directe sur le temps de calcul.

Lorsque le nombre de niveaux de gris est élevé, il est plus aisé de discerner uniquement les torons correspondant aux mèches de chaîne. Toutefois, un nombre de niveaux de gris trop élevé peut conduire à une perte d'information (voir le paramètre énergie avec 64 niveaux de gris, annexe A.2). De plus, il semble exister un seuil à 16 niveaux de gris pour le paramètre contraste qu'il n'est pas utile de dépasser. On augmenterait le temps de calcul sans obtenir plus d'informations. On utilisera donc **16 niveaux de gris** par la suite.

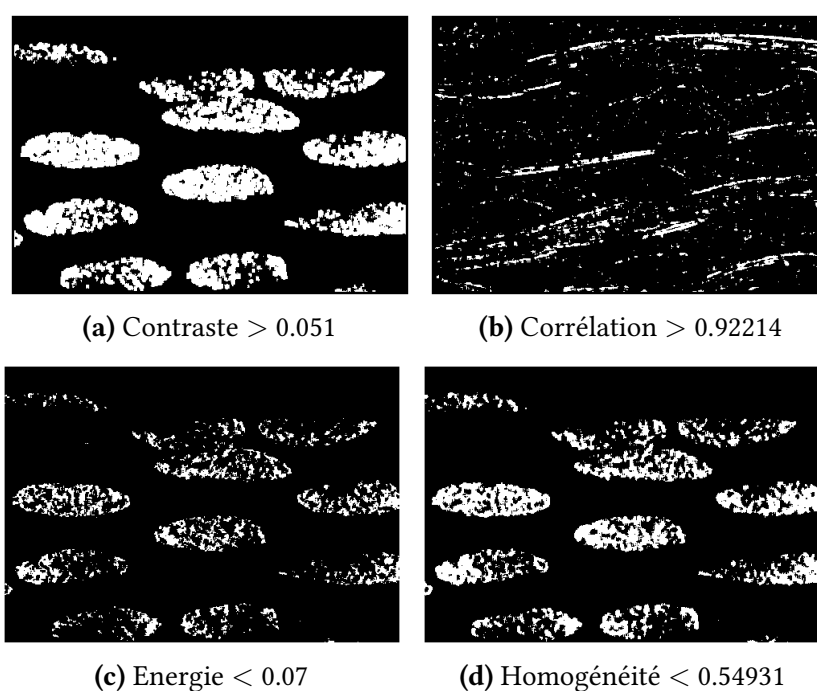
### Influence de l'offset

L'offset définit la relation spatiale qui relie une paire de pixels et indique ainsi de quelle manière la matrice de cooccurrence va être construite. On constate que l'offset  $[0 \ 1]$  permet d'isoler les torons pour les paramètres contraste et homogénéité. On gardera donc l'**offset  $[0 \ 1]$**  par la suite.

Toutefois, les autres offsets ne sont pas à exclure (voir annexe A.3). En effet, l'offset fonctionne, dans une certaine mesure, de la même manière que les filtres dérivateurs : pour une direction donnée, les pixels détectés correspondront aux structures orthogonales à cette direction. Ainsi, dans un plan XY, on peut différencier les mèches orientées à  $0^\circ$  de celles orientées à  $90^\circ$ . De même, si un matériau composite possède des mèches orientées à  $45^\circ$  et  $135^\circ$ , les offsets  $[-1 \ 1]$  et  $[-1 \ -1]$  permettront de les différencier.

### 2.2.4.2 Seuillage des paramètres statistiques

Les paramètres d'entrée retenus sont donc une fenêtre de taille  $5 \times 5$ , 16 niveaux de gris et un offset de  $[0 \ 1]$ . Afin de segmenter de manière distincte les mèches de chaîne des mèches de trame, on procède à un seuillage du paramètre statistique le plus pertinent : on choisit le paramètre qui permet de garder uniquement les torons dans le plan XZ. La figure 2.25 présente les résultats des seuillages réalisés sur les quatre paramètres statistiques. Les valeurs ont été fixées de manière à réaliser un seuillage équivalent entre les paramètres : on cherche à obtenir un maximum d'informations à l'intérieur des sections et peu de pixels perturbateurs à l'extérieur de celles-ci.

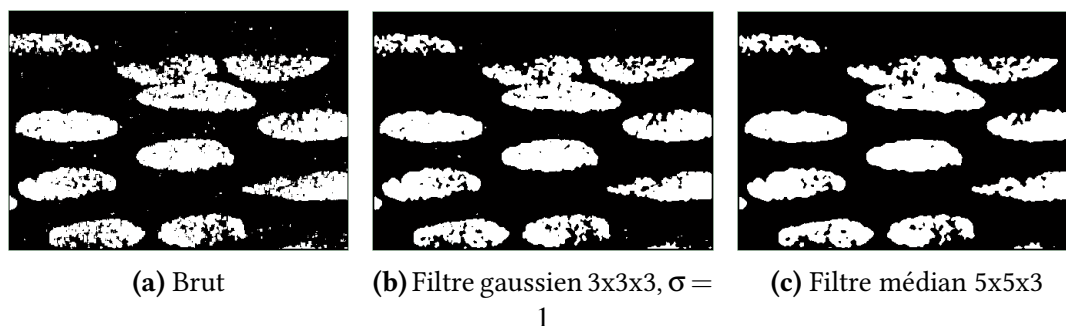


**FIGURE 2.25** – Seuillage équivalent des différents paramètres statistiques

On constate que le contraste est le paramètre le plus caractéristique pour extraire les torons dans le plan XZ. L'énergie et l'homogénéité permettent également de segmenter les torons mais il y a moins d'informations à l'intérieur des sections que pour le contraste. Pour atteindre le niveau d'information obtenu avec le paramètre contraste, il faudrait augmenter les valeurs de seuillage mais de nombreux pixels perturbateurs apparaîtraient alors à l'extérieur des sections. D'autre part, on remarque que la corrélation permet d'identifier plus précisément les mèches de trame mais le bruit présent sur l'image est trop important pour pouvoir réaliser une segmentation. On utilisera donc le paramètre contraste afin de segmenter l'image.

De plus, le seuillage peut être facilité en appliquant un filtre de lissage sur le paramètre à seuiller (figure 2.26). En utilisant un filtre gaussien 3D ou un filtre médian 3D,

on peut ainsi homogénéiser l'information de l'image : les torons apparaissent alors plus "remplis". Toutefois, même s'il est préférable de travailler avec des filtres 3D, il ne faut pas traiter trop d'images simultanément (direction Z). En effet, puisque le stack d'images représente différentes coupes du matériau composite, les sections bougent d'une frame à une autre. De ce fait, il y a des risques de non conformité des formes et des positions des sections lorsque le nombre de frames choisi pour le lissage 3D est trop élevé. On recommande de prendre au maximum 5 frames simultanément.



**FIGURE 2.26** – Contraste  $> 0.035$  avec ou sans filtrage préliminaire

Par ailleurs, comme pour la méthode de segmentation basée sur le calcul des tenseurs de structure 3D, on constate que les sections des torons ne sont pas pleines. Il va donc falloir effectuer de nouvelles opérations de traitement d'images afin d'obtenir des sections complètes pour ensuite procéder au maillage. Cette étape fait l'objet de la partie suivante.

### 2.3 Extractions des sections de mèches à partir de la micro-CT

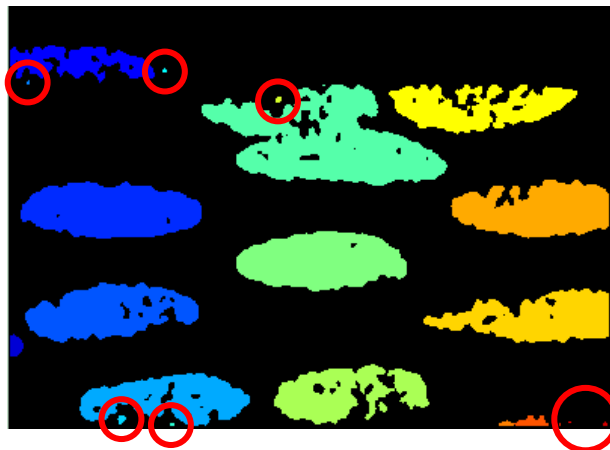
Quelle que soit la méthode de segmentation utilisée, on cherche à extraire les sections des torons afin de les mailler par la suite. Une fois que le seuillage a été réalisé, il reste donc soit les mèches de trame, soit les mèches de chaîne. Les sections n'étant pas pleines, il convient de les remplir pour pouvoir procéder au maillage. L'objectif est d'identifier chaque section indépendamment. La méthode implémentée pour extraire les sections utilise des opérations de labellisation, de morphologie mathématique et l'algorithme des enveloppes convexes.

#### 2.3.1 Labellisation et morphologie mathématique sur les sections de mèches

L'objectif étant d'identifier chaque mèche du matériau, on utilise une fonction Matlab afin de labelliser en 3D les différentes sections à partir du stack d'images seuillées. Cette opération consiste à attribuer un numéro à chaque section dans le but de les identifier.

Appliquée à un stack d'images binarisées, cette fonction permet de parcourir le stack et de numéroter toutes les zones connexes. Elle renvoie une matrice  $L$ , de mêmes dimensions que le stack d'entrée, qui contient les labels des différents objets connectés. Le label 0 correspondant au fond de l'image, la variable  $NUM$  est égale au nombre de mèches identifiées auquel on ajoute une unité. Pour réaliser la labellisation, la fonction suit une procédure en trois étapes. Tout d'abord, elle parcourt tous les pixels du stack d'images et attribue des labels préliminaires aux pixels dont la valeur est différente de zéro. Pour cette raison, il est nécessaire que l'opération de seuillage attribue la valeur 1 aux pixels des mèches et 0 au pixels correspondant au fond de l'image. Ensuite, l'algorithme "Union-Find" est utilisé afin de résoudre les classes d'équivalence. Cet algorithme consiste à "trouver" et à "unir" des classes d'équivalence. On se reportera à l'ouvrage de Sedgwick [SED 90] pour plus de détails sur cet algorithme.

La figure 2.27 montre la labellisation réalisée sur le stack d'images obtenu à la figure 2.26c (mèches de chaîne dans le plan XZ).



**FIGURE 2.27** – Labellisation des sections

On remarque que certaines mèches sont divisées en plusieurs régions de différents labels (cercles rouges sur la figure 2.27). Cela provient du fait que les sections ne sont pas entièrement remplies après l'opération de seuillage. Ainsi une labellisation "brute" peut ne pas donner les résultats souhaités si la connexité entre les pixels d'une même mèche n'est pas suffisante.

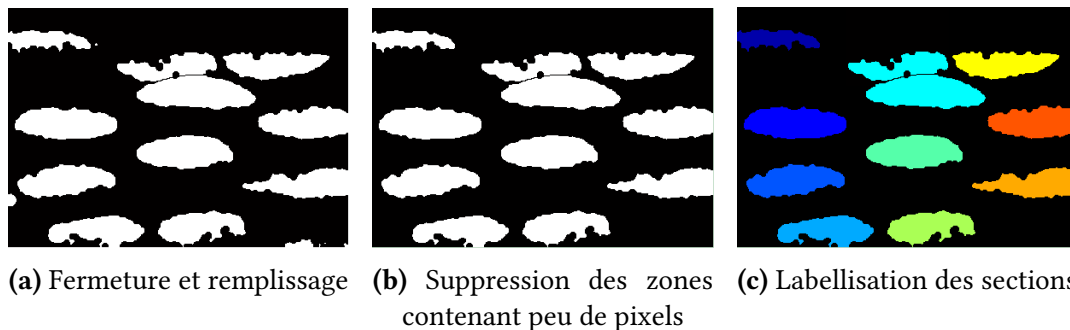
Pour éviter ces problèmes, on ajoute une étape de prétraitement en amont de la labellisation. Le prétraitement consiste à utiliser trois opérations de morphologie mathématique afin d'améliorer la connexité entre les pixels appartenant à une même mèche :

1. Fermeture (dilatation suivie d'une érosion) avec un élément structurant de type

disque. L'utilisation d'un élément structurant de type disque permet de respecter les formes "elliptiques" des sections.

2. Remplissage des trous de manière à combler au maximum les vides présents dans les sections.
3. Suppression des régions de faibles dimensions. Cette opération permet d'éliminer les zones connexes dont le nombre de pixels est inférieur à un seuil fixé  $P$ .

Les différentes étapes de morphologie mathématique et labellisation sont représentées sur la figure 2.28. Il reste maintenant à construire l'enveloppe de chaque mèche labellisée. Pour ce faire, on utilise des enveloppes convexes.



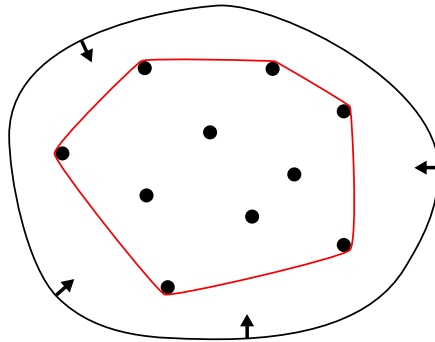
**FIGURE 2.28** – Morphologie mathématique et labellisation

### 2.3.2 Utilisation d'enveloppes convexes

L'enveloppe convexe d'un nuage de points est l'ensemble convexe le plus petit contenant tous les points du nuage. Une enveloppe convexe peut ainsi être comparée à la région délimitée par un élastique tendu puis relâché autour de ce nuage (contour rouge sur la figure 2.29). Dans la partie précédente, les sections ont été labellisées mais elles ne sont toujours exploitables pour réaliser un maillage. Compte tenu de la forme généralement elliptique des sections, nous allons utiliser l'algorithme des enveloppes convexes pour déterminer la forme générale de ces sections et obtenir des sections pleines.

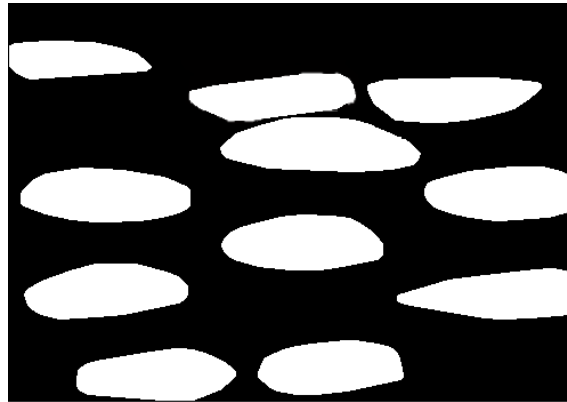
Dans Matlab, l'algorithme des enveloppes convexes est implémenté sous la fonction *bwconvhull* pour une image binaire. Cette fonction utilise le programme *Qhull* qui implémente l'algorithme *Quickhull* pour calculer les enveloppes convexes [BAR 96]. L'algorithme *Quickhull*, reconnu comme l'un des algorithmes les plus performants pour le calcul d'enveloppes convexes, est une combinaison des algorithmes "2-d Quickhull" et "n-d beneath-beyond" [PRE 85]. Il s'agit d'un algorithme récursif [BRI 03].

La fonction *bwconvhull* possède deux options : "Union" et "Objects". La fonction "Union" permet de déterminer l'enveloppe convexe de tous les objets (ensemble de pixels



**FIGURE 2.29** – Enveloppe convexe d'un nuage de points

connexes) d'une image en les considérant comme une entité globale tandis que la fonction "Objects" détermine l'enveloppe convexe de chaque objet de l'image indépendamment. Ici, on calcule l'enveloppe convexe de chaque section labellisée en utilisant l'option "Union". Cela permet de calculer l'enveloppe convexe d'une section même si celle-ci est divisée en plusieurs petites régions possédant le même label. Le code est plus robuste de cette manière. Ainsi, pour chaque image du stack, on parcourt l'ensemble des labels identifiés grâce à une boucle "for" pour appliquer la fonction *bwconvhull* avec l'option "Union" sur chaque section. On obtient le résultat de la figure 2.30 dans le plan XZ.



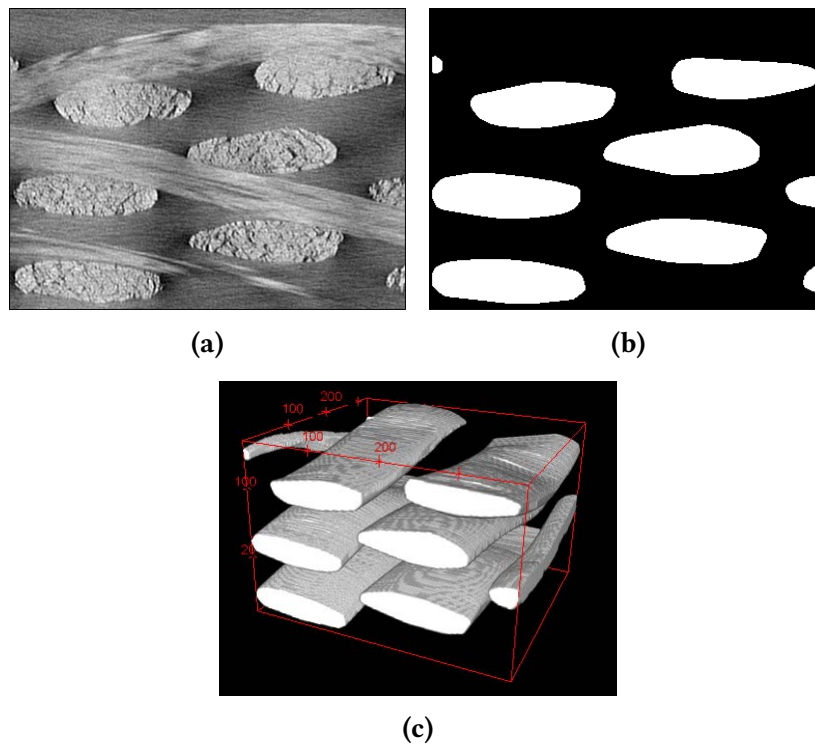
**FIGURE 2.30** – Enveloppes convexes des sections

La figure 2.31 illustre le résultat obtenu sur une portion du stack d'images où toutes les sections sont bien dissociées dans le plan XZ. On montre également le résultat obtenu en 3D sur la figure 2.31.

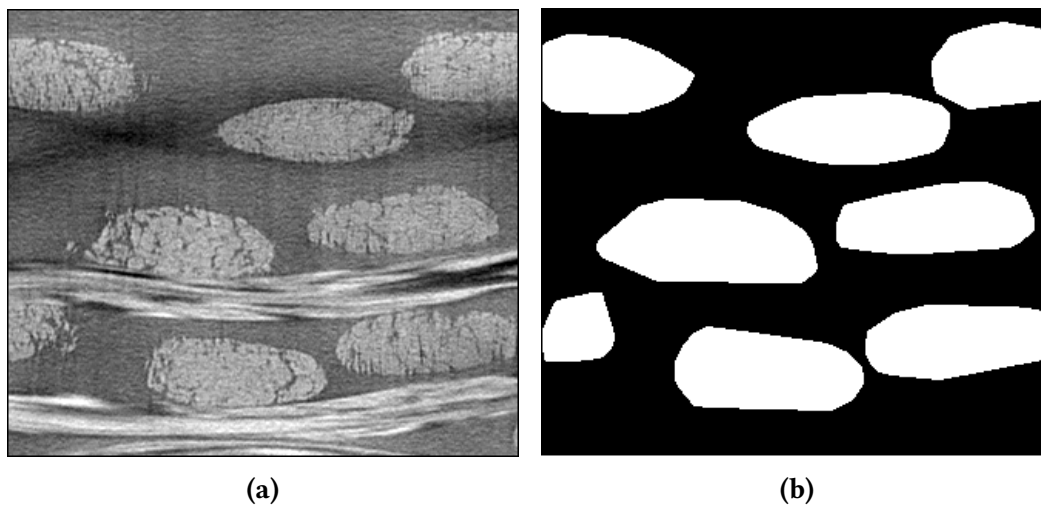
Dans le plan YZ, les mèches de trame obtenues grâce à l'algorithme des enveloppes convexes, pour l'échantillon illustré sur la figure 2.31a, sont représentées sur la figure 2.32.

On peut alors superposer les stacks des enveloppes convexes obtenues dans les plans XZ et YZ afin de visualiser la géométrie réelle du matériau. Ceci est illustré sur la figure 2.33.

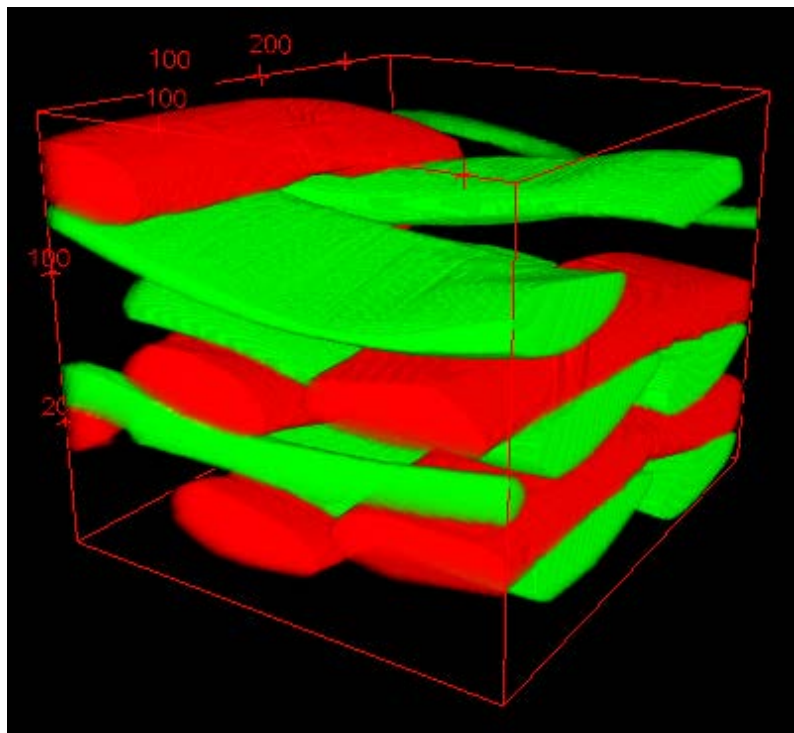




**FIGURE 2.31** – (a) Image originale, (b) Enveloppes convexes (plan XZ), (c) Enveloppes convexes 3D



**FIGURE 2.32** – (a) Image originale, (b) Enveloppes convexes (plan YZ)



**FIGURE 2.33** – Superposition des enveloppes convexes des mèches de chaîne (en vert) et des mèches de trame (en rouge)

## 2.4 Bilan du chapitre 2

Ce chapitre avait pour but de présenter les différents outils utilisés pour le traitement des images. En effet, les images de microtomographie sont difficiles à utiliser telles quelles. La méthode proposée ici est d'utiliser directement les images de microtomographie pour générer le maillage des renforts de composite. Dès lors, il faut être capable de segmenter les images, c'est-à-dire de pouvoir différencier les différentes composantes d'une image ou pour notre cas de différencier les mèches de chaînes et les mèches de trame.

Deux méthodes sont développées. La première est basée sur le calcul du tenseur de structure, c'est-à-dire la matrice du gradient de l'image pour chaque pixel. De cette matrice, on extrait une information sur l'orientation privilégiée de chaque pixel de l'image puis à partir de cette information on réalise une carte d'orientation de l'image. Celle-ci est ensuite seuillée selon le sens chaîne ou le sens trame. Enfin, on applique sur ces images seuillées plusieurs opérations de morphologies mathématiques obtenant ainsi des images segmentées. Cette méthode marche relativement bien sur des images de microtomographie qui possèdent un aspect filamenteux. Toutefois, lorsque la résolution de l'image ne permet pas d'accéder à cet aspect fibreux mais que les sections de mèches présentent un aspect granuleux, on peut utiliser une méthode de segmentation basée sur l'analyse de la texture. Cette méthode utilise la matrice de cooccurrence des niveaux de gris de l'image qui mesure le nombre d'apparitions des paires de valeurs de pixels situés à une certaine distance dans l'image. De cette matrice, quatre paramètres caractéristiques sont extraits et permettent de seuiller correctement l'image. La segmentation est un point très important qui conditionne la qualité du maillage généré et assure la non interpénétration entre les mèches.

Enfin, les mèches étant clairement identifiées, la connaissance de leurs contours va permettre de générer un maillage le plus réaliste possible du renfort. La façon dont nous réalisons ceci sera l'objet du chapitre 3.

## Chapitre 3

# Génération des modèles de renfort issus de la microtomographie

*Ce chapitre présente les algorithmes mis en place pour générer des maillages aussi proches que possible de la réalité afin de mener des calculs éléments finis. Nous verrons comment à partir de la microtomographie un premier modèle de maillage est généré. Ce maillage utilise des éléments tétraédriques ayant la spécificité de suivre l'orientation matérielle de la mèche. Enfin, un second modèle de maillage basé sur des éléments prismatiques est construit. Il permet en outre de réduire le nombre d'éléments vis à vis du premier modèle.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Génération de maillage tétraédrique basé sur les images de micro-CT</b>	<b>81</b>
3.1.1	Maillage volumique . . . . .	81
3.1.2	Algorithme des Marching Cubes . . . . .	81
3.1.3	Algorithme de simplification de surface . . . . .	82
3.1.4	Maillage par avancée de front . . . . .	85
<b>3.2</b>	<b>Orientation des éléments tétraédriques</b> . . . . .	<b>86</b>
3.2.1	Squelettisation . . . . .	87
3.2.1.1	Squelette et axe médian . . . . .	87
3.2.1.2	Méthodes discrètes de squelettisation . . . . .	88

3.2.2	Extraction de la fibre neutre de la mèche . . . . .	89
<b>3.3</b>	<b>Génération de maillage prismatique basé sur les images de micro-CT</b>	<b>91</b>
3.3.1	Généralités sur les triangulations . . . . .	91
3.3.2	Triangulation de Delaunay . . . . .	93
3.3.3	Algorithme de triangulation . . . . .	94
3.3.3.1	Construction du maillage . . . . .	95
3.3.3.2	Qualité du maillage . . . . .	102
<b>3.4</b>	<b>Bilan du chapitre 3 . . . . .</b>	<b>104</b>

---

## 3.1 Génération de maillage tétraédrique basé sur les images de micro-CT

### 3.1.1 Maillage volumique

A partir des images de tomographie, on souhaiterait générer un maillage le plus réaliste possible, qui puisse s'approcher au maximum du renfort étudié. Pour ce faire, certaines techniques utilisent la méthode voxel/élément [MAI 03, SCH 09]. Chaque voxel est considéré alors comme un élément tétraédrique du maillage. Cette méthode, facile de mise en oeuvre, présente quelques inconvénients. L'un d'entre eux est sur le nombre très important d'éléments générés. En effet, la dimension des éléments (taille voxel) dépend de la résolution du stack d'images. Par conséquent, cette méthode est très couteuse en ressources et en temps de calcul.

L'autre difficulté réside dans la description de l'interface entre les mèches. La représentation en « escalier » sur l'interface est très dommageable sur la précision des résultats des contraintes et déformations locales.

La démarche proposée [YOU 05, MOU 08, CAT 08] dans ce travail consiste à extraire la surface de chaque mèche sous forme d'un maillage surfacique épousant fidèlement la géométrie. On vient ensuite mailler les torons par des tétraèdres. Cette méthode permet de générer des maillages tétraédriques non structurés à 4 noeuds (éléments linéaires) ou à 10 noeuds (éléments quadratiques).

### 3.1.2 Algorithme des Marching Cubes

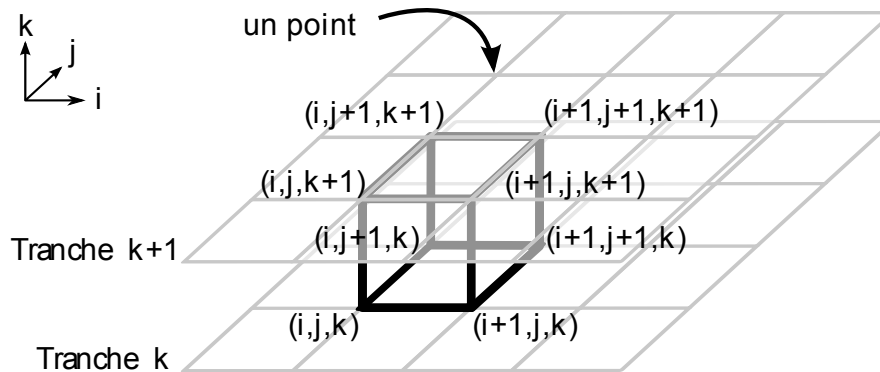
Après l'étape de segmentation et de labellisation des images tridimensionnelles, il est possible de créer une surface polygonale correspondant à la frontière des structures labellisées. Beaucoup d'algorithmes susceptibles de construire une surface à partir d'une succession d'images existent dans la littérature. Cependant, ces algorithmes ne sont pas toujours très fiables surtout en présence de nombreuses phases. En effet, ceux-ci conduisent souvent à l'apparition de trous ou d'incohérences dans la surface.

Néanmoins, l'algorithme le plus répandu est probablement celui du Marching Cubes [LOR 87]. Ce dernier permet de calculer une triangulation d'une isosurface<sup>1</sup> d'un objet discret représenté sous forme d'image 3D, tout en limitant la création d'ambiguïtés topologiques et/ou de surfaces non fermées.

Pour cela l'algorithme utilise une approche « divide-and-conquer » pour déterminer comment la surface intersecte un cube virtuel (le marching cube) formé de huit points de l'image, dont quatre sont voisins dans une tranche de l'objet et quatre sont voisins dans une tranche voisine, comme illustré sur la figure 3.1. Une fois ce cube traité, on passe au suivant.

---

1. On peut considérer une isosurface comme l'analogie en 3D d'une courbe de niveau. C'est en fait le lieu des points de l'espace pour lesquels une certaine fonction (par exemple la pression, la température, la vitesse, la densité et dans notre cas, l'intensité des voxels) est constante. L'isosurface de valeur  $c$  d'une fonction  $f$  est donc l'ensemble  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\}$



**FIGURE 3.1** – Composition d'un Marching Cube [PRO 09]

Les valeurs des voxels de l'image représentent donc un échantillonnage d'une certaine fonction continue, et une valeur  $\sigma$ , fournie par l'utilisateur, déterminera l'isosurface de cette fonction dont on veut calculer une triangulation. Ainsi, un sommet du marching cube est initialisé à **1** si la valeur du voxel représenté par ce sommet est supérieure (ou égale) à  $\sigma$ ; le sommet est ainsi considéré comme étant à l'intérieur (ou sur) la surface en construction. Les sommets dont la valeur est inférieure à  $\sigma$  sont eux initialisés à **0** et sont considérés comme étant à l'extérieur de la surface. On est ainsi ramené à calculer la triangulation d'une image binaire.

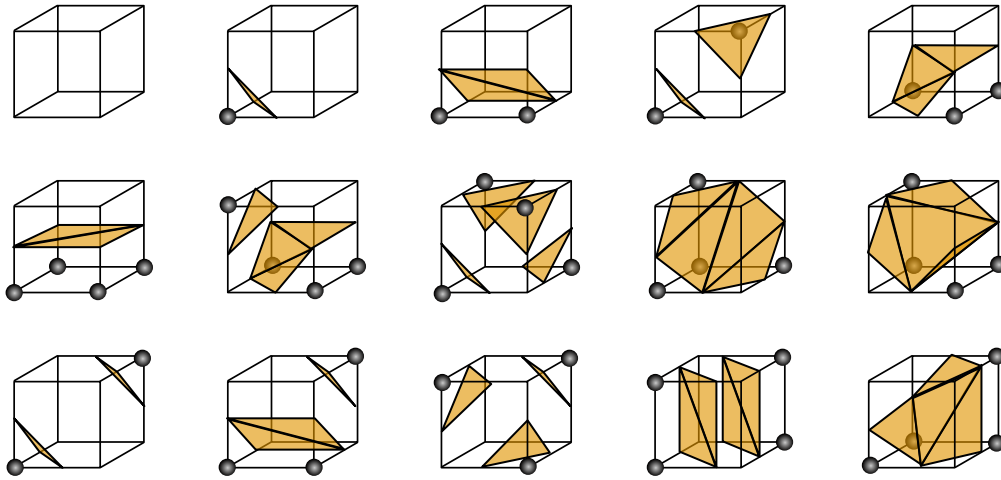
Dans ces conditions, l'algorithme du Marching Cubes considère que la surface de l'objet intersecte les arêtes du cube virtuel pour lesquelles une extrémité est à **1** et l'autre à **0**. La topologie de la surface à l'intérieur de ce cube est alors déterminée et une interpolation linéaire des valeurs des voxels permet de déterminer les coordonnées de l'intersection avec l'arête.

Étant donné qu'un cube possède huit sommets, et qu'un sommet peut valoir soit **0** soit **1**, seulement  $2^8 = 256$  configurations différentes peuvent apparaître dans l'algorithme du Marching Cubes. Toutefois, grâce aux symétries du cube et à la complémentarité des configurations où les sommets **0** et **1** sont interchangés, on peut ramener ce nombre à seulement 15 configurations différentes, toutes représentées sur la figure 3.2.

Les différentes configurations (256) sont précalculées et stockées dans une table. Chaque configuration est indexée par un octet dont chaque bit représente l'état d'un sommet du cube virtuel de la configuration. Lors du parcours de l'image, la triangulation locale associée au marching cube courant est alors obtenue très rapidement grâce à cette table. Finalement, l'ensemble des triangles obtenus par chaque cube virtuel représente la triangulation de l'isosurface recherchée.

### 3.1.3 Algorithme de simplification de surface

Les surfaces générées par l'algorithme des Marching Cubes comportent généralement un nombre trop important de triangles. Pour une raison évidente de réduction du temps de calcul des simulations éléments finis, le nombre de triangles des surfaces



**FIGURE 3.2** – Intersection surface-cellule pour l'ensemble des 15 configurations utilisant les propriétés de symétrie et rotation permettant de préserver la topologie [PRO 09, FRE 10]

reconstruites doit être réduit. Autrement dit, la surface tridimensionnelle doit être simplifiée.

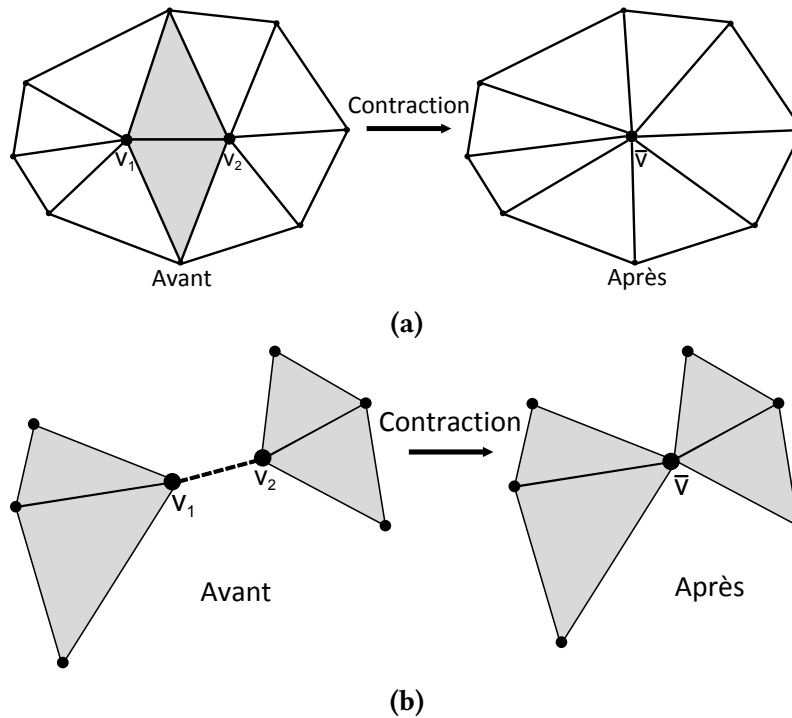
Cette opération est réalisée à partir d'un algorithme basé sur la contraction d'arête. L'algorithme développé par Garland et Heckbert [GAR 97] permet de simplifier rapidement des modèles polygonaux en préservant l'information. La méthode est basée sur des contractions successives de paires de sommets. Il garantit la topologie de la surface grâce à un calcul d'erreurs quadratiques. En contractant des paires de sommets, l'algorithme permet de recoller des parties du modèle qui sont disjointes. Ce procédé est appelé agrégation.

L'algorithme présenté ici est une généralisation de la contraction itérative d'arêtes. Une contraction par paire correspond à un déplacement de deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  vers une nouvelle position notée  $\bar{v}$ . Cette contraction est notée :

$$(v_1, v_2) \rightarrow \bar{v}$$

Certains triangles se trouvent alors dégénérés. Ils sont donc supprimés. Les effets de la contraction restent cependant faibles et très localisés. En effet, pour une arête  $(v_1, v_2)$  un ou plusieurs triangles peuvent être supprimés comme le montre la figure 3.3a. De plus, si les deux sommets appartiennent à deux régions disjointes, celles-ci sont réunies vers la position  $\bar{v}$  (Figure 3.3b). Utiliser un algorithme de contraction d'arêtes possède l'avantage de pouvoir connecter des surfaces disjointes. L'étape de choix des sommets à contracter est un point crucial de la méthode développée par Garland et Heckbert [GAR 97].





**FIGURE 3.3** – Illustration de contraction de sommets

Une paire de sommets est supposée valide si :

- $(v_1, v_2)$  est une arête, ou
- $\|v_1 - v_2\| < t$  où  $t$  est un paramètre seuil.

L'utilisation d'un paramètre  $t = 0$  correspond à un algorithme de contraction d'arête classique. Dans le but d'estimer la performance de chaque itération, on définit un coût relatif à chaque opération de contraction. Ce coût permet de caractériser l'erreur  $\Delta(v)$  produite au niveau de chaque sommet  $v$ . Une erreur quadratique est calculée au niveau de chaque sommet ; elle s'écrit de la manière suivante :

$$\Delta(v) = v^t Q v \text{ avec } v = [v_x \ v_y \ v_z]^t$$

Pour une contraction  $(v_1, v_2) \rightarrow \bar{v}$  donnée, l'algorithme cherche à définir la nouvelle position  $\bar{v}$  qui minimise l'erreur  $\Delta(v)$ .

Sur la figure 3.4 est représentée le maillage surfacique d'un sergé de carbone. Sur la figure 3.4a, on voit qu'on a un très grand nombre d'éléments alors que sur la figure 3.4b, on a procédé à une simplification de surfaces (diminution du nombre d'éléments). De plus, par cette diminution, les surfaces des mèches sont lissées (les cernes disparaissent).

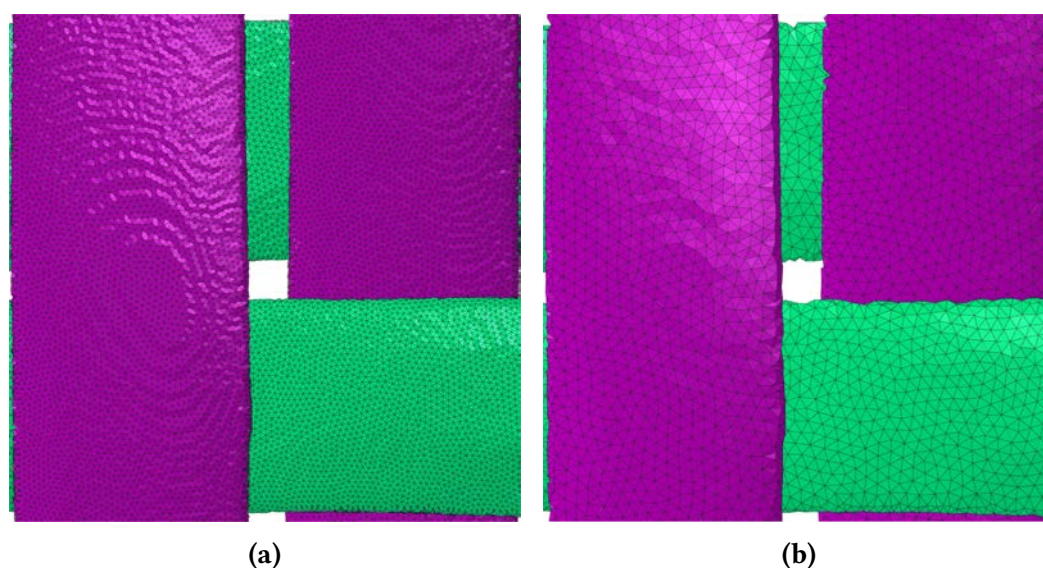


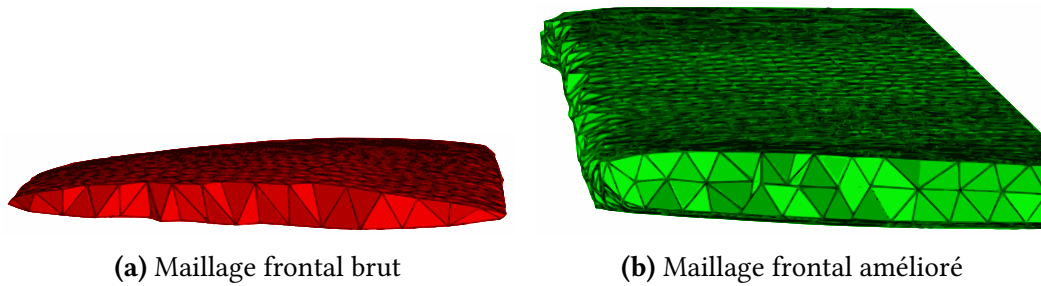
FIGURE 3.4 – Illustration de la simplification du maillage surfacique

### 3.1.4 Maillage par avancée de front

On dispose maintenant d'un maillage triangulaire optimisé de la surface des mèches. Pour obtenir un maillage volumique, il faut remplir les surfaces avec, par exemple, des éléments tétraédriques car ils ont l'avantage de s'adapter à n'importe quelle topologie.

Dans cette étude, nous utiliserons la méthode par avancée de front [FRE 98] qui s'appuie sur le maillage surfacique pour initialiser le front. Dans un premier temps l'algorithme détermine une face de départ (plusieurs critères peuvent être utilisés comme ici la plus petite face). Cet élément est ensuite analysé et un point interne est créé puis relié à l'élément. Ce point doit respecter un critère de distance, doit être à l'intérieur du domaine et l'élément créé ne doit pas intercepter les éléments déjà en place. Le front est alors mis à jour et l'opération est renouvelée jusqu'à ce que l'espace soit rempli. La méthode d'avancée de front est connue pour créer des tétraèdres de bonne qualité près des surfaces des mèches. En revanche, au centre du domaine, la qualité est moins bonne à cause des collisions de fronts. Pour pallier ce problème, on peut générer un maillage de meilleure qualité en utilisant le logiciel de maillage Open Source GMSH<sup>2</sup>. Ce logiciel possède une fonction d'homogénéisation du maillage. La figure 3.5 montre cette fonctionnalité sur une mèche maillé avec des tétraèdres.

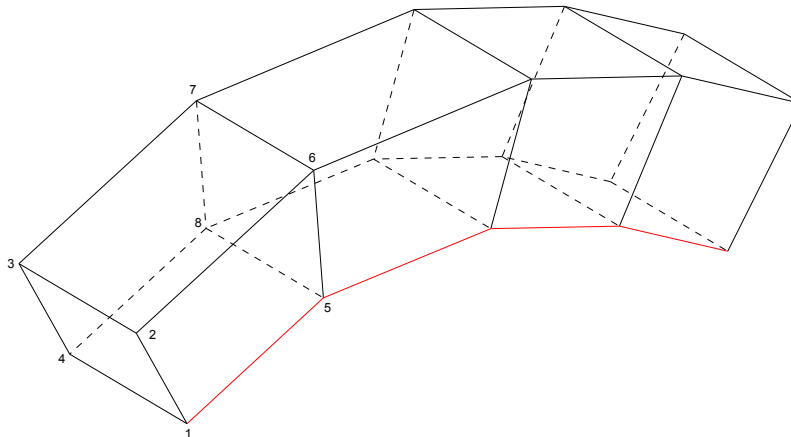
2. <http://geuz.org/gmsh/>



**FIGURE 3.5** – Amélioration du maillage frontal

## 3.2 Orientation des éléments tétraédriques

Pour les simulations numériques de la mise en forme des renforts fibreux, il est indispensable d'affecter un repère local à chaque élément fini avec un axe orienté suivant la direction de la mèche. Cette opération est aisément réalisable lorsque le maillage est de type hexaédrique ou prismatique. Il suffit par exemple d'utiliser les arêtes des éléments telles que définies en numérotation locale. La figure 3.6 illustre la direction des fibres (en rouge) donnée par les noeuds 1 et 5 en numérotation locale.



**FIGURE 3.6** – Exemple d'orientation d'un élément hexaédrique basée sur une arête en utilisant la numérotation locale de l'élément

En revanche, lorsque la géométrie du maillage est tétraédrique cette astuce n'est plus possible. La solution apportée pour orienter correctement les éléments tétraédriques est d'utiliser les images segmentées en y extrayant la fibre neutre des mèches par squelettisation. Ainsi à chaque barycentre d'un tétraèdre, un repère local est assigné où le premier axe correspond à l'axe de la direction des fibres de la mèche.

### 3.2.1 Squelettisation

La squelettisation est une opération homotopique, c'est-à-dire qu'elle conserve la topologie de l'objet à traiter. Cette propriété est primordiale car elle permet de représenter les mèches par leurs fibres neutres. La squelettisation donne une représentation compacte des objets, même dans le cas de formes et de topologies complexes. En dimension 2, les squelettes représentent des lignes inter-connectées au centre d'un objet, comme le montre la figure 3.7.

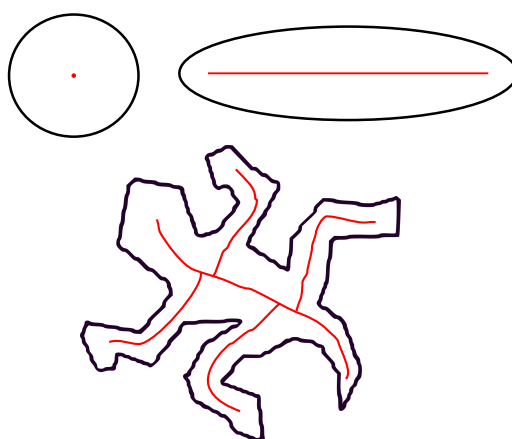


FIGURE 3.7 – Exemples de squelettisation

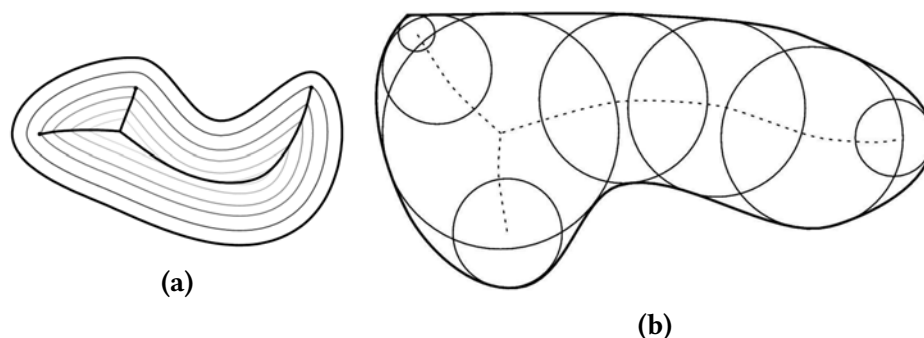
En dimension 3, les squelettes peuvent représenter des lignes centrales comme en dimension 2 ou bien des surfaces centrales. Ils sont très utilisés en analyse d'image et reconnaissance de forme, car ils permettent de décrire synthétiquement non seulement la forme, mais aussi certaines propriétés mathématiques des objets, comme par exemple la longueur ou la surface. Ils sont par ailleurs utilisés en compression d'image car ils décrivent les objets de façon compacte.

#### 3.2.1.1 Squelette et axe médian

Pour extraire les lignes centrales des mèches, nous pouvons considérer deux approches :

- l'une qui définit une ligne centrale comme un axe médian,
- l'autre qui définit une ligne centrale comme un squelette.

Blum fut le premier à introduire la notion de squelette en utilisant la métaphore des feux de prairie [BLU 67] : il définit l'axe médian comme le lieu des points où les fronts de propagation s'évanouissent (Fig. 3.8a). Calabi et Harnett [CAL 68] définissent le squelette comme le lieu des centres des boules maximales d'un objet ; une boule étant définie comme maximale dans un objet s'il n'existe aucune autre boule incluse dans l'objet qui la contient (fig. 3.8b).



**FIGURE 3.8** – Illustrations des axes médians

Kong et Rosenfeld [KON 89] ajoutèrent la notion de préservation de la topologie à la définition du squelette. Par la suite, nous utiliserons la définition suivante, car elle conduit à un squelette ayant de bonnes propriétés pour les analyses mathématiques de l'objet :

**Définition 3.2.1 (Squelette d'un objet)** *Un squelette est un sous-ensemble de l'objet ayant les propriétés suivantes :*

- **Homotopie** : le squelette est topologiquement équivalent à l'objet original, en particulier, il a le même nombre de composantes connexes, le même nombre de tunnels et de cavités que l'objet original.
- **Minceur** : le squelette est topologiquement mince, c'est-à-dire qu'il a un pixel d'épaisseur.
- **Localisation** : le squelette est situé au centre de l'objet.

En pratique, lorsque l'on considère des images discrètes (i.e. composées de voxels), un squelette discret est rarement exactement homotope, fin et centré. En effet, il arrive que la largeur du squelette soit supérieure à un pixel notamment dans les intersections pour pouvoir garantir l'homotopie. De plus, lorsque la largeur de l'objet est composée d'un nombre pair de voxels, le squelette ne peut être à la fois fin et centré. On dira d'un squelette discret qu'il est homotope, fin et centré, s'il est parfaitement homotope, fin partout sauf aux endroits où l'homotopie exige un plus grand nombre de pixels et centré (ou le plus centré possible dans le cas où c'est impossible).

#### 3.2.1.2 Méthodes discrètes de squelettisation

Les méthodes continues, bien qu'exactes (elles donnent des squelettes ayant les bonnes propriétés), sont souvent délicates à mettre en oeuvre et difficilement adaptables à des images de la taille des nôtres. On peut en revanche s'intéresser aux méthodes discrètes, généralement simples et rapides [BOR 99, FOU 06]. L'obtention de squelette ou ligne centrale peut alors être basée sur les cartes de distance ou sur l'amincissement.

### Squelettisation basée sur les cartes de distance

Dans ce cas, le squelette est défini comme le lieu des maxima locaux des cartes de distance [CAL 68], [MAL 98]. L'extraction du squelette se fait en deux temps :

1. on cherche l'axe médian grâce aux maxima locaux de la carte de distance. Ce sous-ensemble est fin, mais généralement non connexe. Il peut aussi servir de sous-ensemble initial à partir duquel on peut reconstruire un squelette.
2. on essaie de rendre ce sous-ensemble connexe, en cherchant des configurations de voisinage dans la carte de distance afin de retrouver des lignes de crête ou des arêtes de la surface associée [NIB 92], ou encore des chemins (ou cluster) [ZHO 98] qui vont connecter l'ensemble des maxima locaux.

Le squelette résultant est centré par construction, mince, suivant le choix du seuil des maxima locaux, mais pas nécessairement homotope, suivant la méthode de reconstruction.

### Squelettisation basée sur l'amincissement

Le squelette est obtenu en "épluchant" itérativement les couches frontières de l'objet. Les points supprimables (les points simples et qui ne sont pas des points de fin) sont enlevés successivement [PAL 01] ou en parallèle [TSA 81],[GON 90] ou bien encore à l'aide d'opération morphologiques [JON 00]. Ces méthodes conduisent à un squelette homotope à l'objet par construction, mince, géométriquement représentatif (si les points de fin ont été correctement caractérisés), mais pas nécessairement centré.

Des méthodes hybrides, introduites relativement récemment, permettent de bénéficier des avantages de ces deux approches [PUD 98]. Ces méthodes consistent en un amincissement homotope, i.e en la suppression itérative de points simples mais dans l'ordre croissant de la valeur d'une carte de distances calculées à l'intérieur de l'objet (on parlera de Distance Ordered Homotopic Thinning ou DOHT), ce qui conduit à un squelette centré. Par construction, le squelette obtenu est homotope, car les points ne sont enlevés que si cette opération préserve la topologie de l'objet, et mince car tous les points sont détruits jusqu'à ce qu'aucun point supplémentaire ne puisse être supprimé.

### 3.2.2 Extraction de la fibre neutre de la mèche

On applique à présent la méthode de squelettisation sur les images de microtomographies du G0986. Le résultat obtenu est un squelette ressemblant à des "arrêtes de poisson" (fig. 3.10a).

Or ce qui nous intéresse, c'est de garder la "dorsale" qui correspond à la fibre neutre des mèches. L'algorithme 1 permettant d'extraire "cette dorsale" a été développé (fig. 3.9). Les noeuds ne se trouvant pas sur celle-ci sont supprimés autorisant à construire une courbe spline (fig. 3.10b) décrivant ainsi la fibre neutre de la mèche.

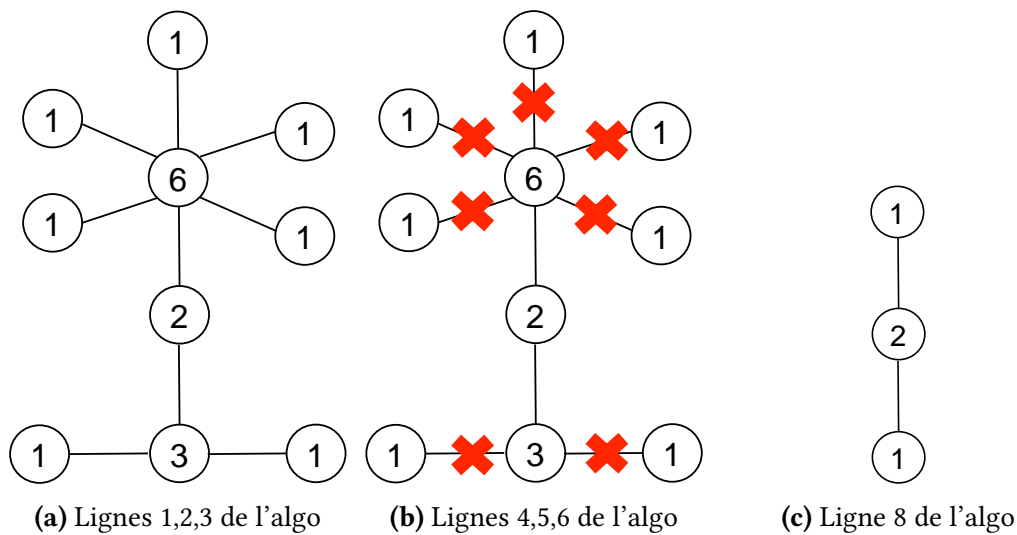
### 3. Génération des modèles de renfort issus de la microtomographie

**Données :** Coordonnées des voxels du G0986

**Résultat :** Coordonnées des voxels sur la fibre neutre des mèches

```
1 Lire les coordonnées des voxels;  
2 nb_node_cnx_sup_1 ← Nb de connectivité supérieur à 1;  
3 nb_node_cnx_1 ← Nb de connectivité égale à 1 minimum =(nb de mèches x 2) ;  
4 tant que nb_node_cnx_sup_1 > nb_node_cnx_1 faire  
5 |   Suppression de ces noeuds ;  
6 |   Actualiser Nb de noeuds cnx sup à 1 ;  
7 fin  
8 ⇒ Obtention des noeuds de la fibre neutre
```

**Algorithme 1 :** Récupération des noeuds de la "dorsale" des mèches



**FIGURE 3.9** – Schématisation de l'algorithme de récupération des noeuds de la "dorsale" des mèches

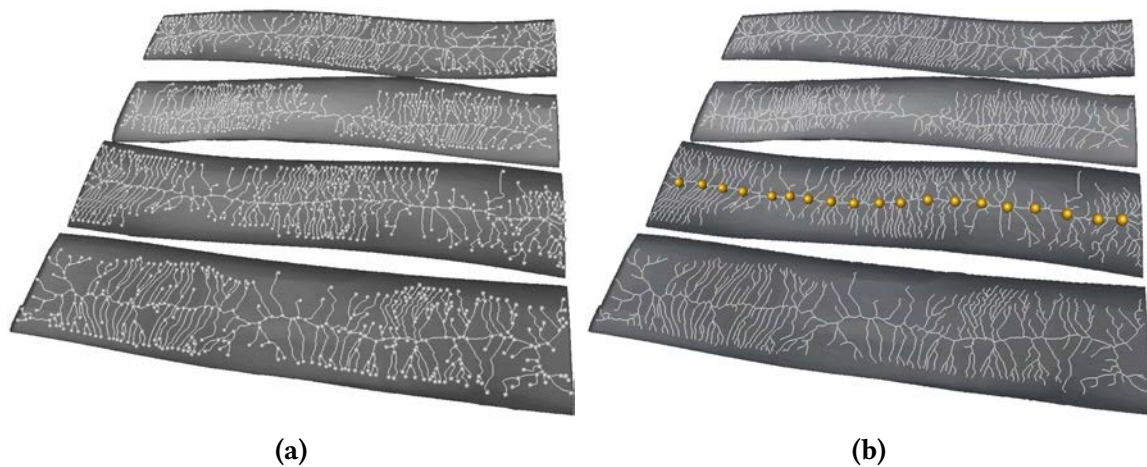


FIGURE 3.10 – a) Squelettisation des mèches et b) spline de la fibre neutre

**Assignation des orientations des éléments** Afin de pouvoir suivre fidèlement les directions matérielles de mèche, on va définir un repère lié à chaque élément (fig. 3.11) de la mèche en s'appuyant sur la connaissance de la fibre neutre. On calcule tout d'abord le centroïde du tétraèdre, il sera l'origine du repère. Ensuite la direction 1 sera colinéaire à l'orientation matérielle de la fibre neutre. La direction 2 se déduit en dérivant la direction 1 par rapport à l'abscisse curviligne de la fibre neutre. La direction 3 s'obtient en faisant le produit vectoriel des deux directions précédentes.

### 3.3 Génération de maillage prismatique basé sur les images de micro-CT

La génération de maillage tétraédrique présente l'avantage de pouvoir s'adapter à n'importe quelles formes de renfort. Toutefois, les modèles doivent être d'une certaine finesse pour obtenir des résultats corrects et les temps de calcul sont long. Pour pallier cette difficulté, la solution mise en place ici est d'utiliser des éléments prismatiques. L'algorithme développé dans cette thèse permet de générer ces éléments en s'appuyant sur des triangulations de Delaunay des sections transverses le long des mèches. Ainsi, ces éléments ont l'avantage de s'adapter à tout type de morphologie de renfort tout en réduisant le nombre d'éléments par rapport aux éléments tétraédriques.

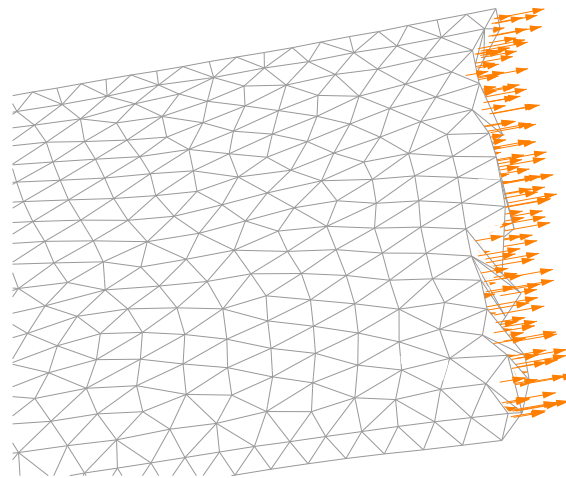
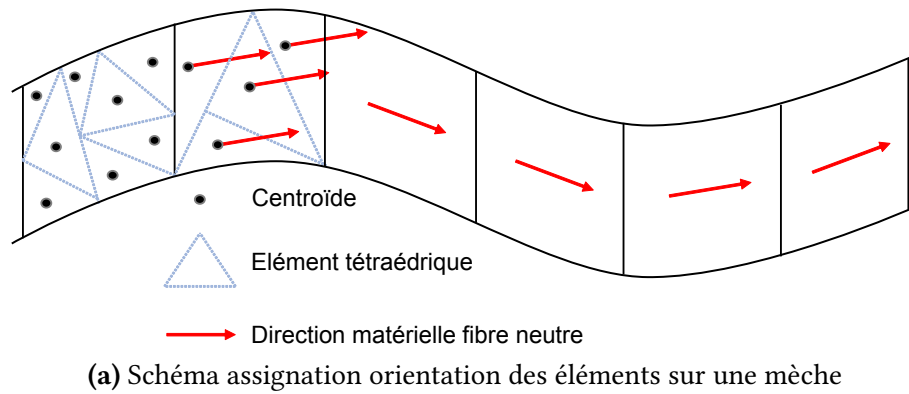
#### 3.3.1 Généralités sur les triangulations

Les triangulations sont des objets géométriques très fréquemment utilisés. En effet, manipuler uniquement des points n'est pas satisfaisant. Les triangulations, en reliant les points entre eux, créent une partition de l'espace ou d'un domaine. Les liaisons géométriques et topologiques ainsi définies permettent de localiser rapidement un objet, de

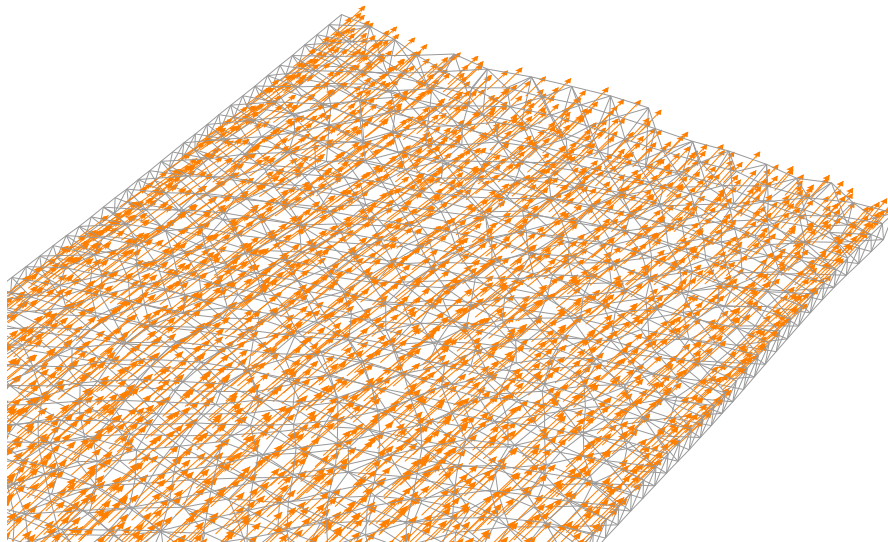


### 3. Génération des modèles de renfort issus de la microtomographie

---



(b) Illustration orientation des éléments



(c) Illustration orientation des éléments

**FIGURE 3.11** – Assignation orientation des éléments

décomposer l'espace de travail d'un robot, de reconstruire des objets tridimensionnels à partir de coupes, de visualiser une surface avec rendu d'image...

Ainsi on peut définir la triangulation comme suit [BRé 08] :

**Définition 3.3.1** Soit  $S$  un ensemble de  $n$  points ( $\geq 3$ ) du plan appelés des sites. On suppose que  $S$  est en position générale, c'est-à-dire que  $S$  n'admet pas trois sites alignés et n'admet pas quatre sites cocycliques<sup>3</sup>.

L'enveloppe convexe de  $S$ , notée  $\text{conv}(S)$ , est la plus petite partie convexe du plan qui contient  $S$ .

On appelle triangulation de  $S$  toute décomposition de  $\text{conv}(S)$  en triangles d'intérieurs disjoints dont les sommets sont les sites de  $S$  et dont les côtés ouverts ne contiennent pas de sites de  $S$ .

Ces triangles sont aussi appelés les faces de la triangulation et leurs côtés sont aussi appelés les arêtes de la triangulation.

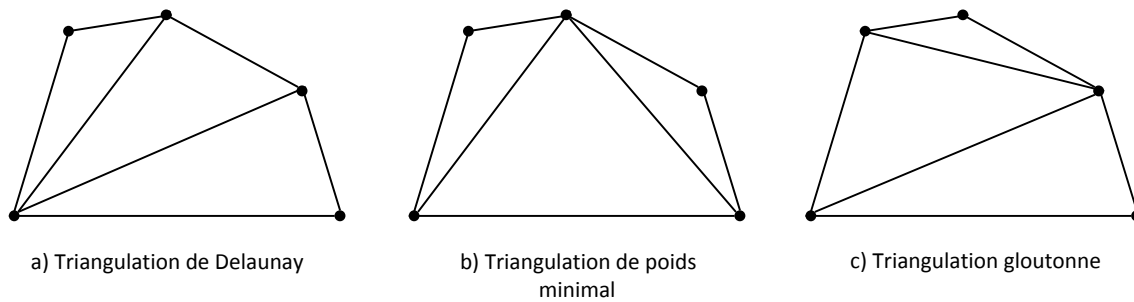
**Propriété 1** Si  $n'$  est le nombre de sommets de  $\text{conv}(S)$ , alors toute triangulation de  $S$  admet  $3n - n' - 3$  côtés et  $2n - n' - 2$  triangles.

Il existe un très grand nombre de façons pour trianguler un ensemble de points. En fonction du domaine d'application, la triangulation devra respecter certains critères, ce qui limitera le nombre des possibilités. Pour des problèmes de communication, on cherchera à minimiser la longueur totale des côtés des triangles ou, plus généralement, la somme des poids associés aux trois côtés des triangles : c'est la triangulation de poids minimal Fig. 3.12b. Elle a l'avantage d'être unique (on dit que la triangulation est systématique) pour des points en position générale mais reste difficile à calculer du point de vue algorithmique. La complexité de ce problème n'est pas connue a priori. La triangulation gloutonne (triangulation obtenue en ajoutant une à une les arêtes et en choisissant toujours la plus courte qui ne croise aucune de celles retenues précédemment) n'est pas toujours égale à la triangulation de poids minimum. Elle a aussi l'avantage d'être unique pour des points en position générale, mais par contre peut se calculer en  $O(n \log n)$ . Pour des problèmes d'approximation de surfaces (avec interpolations) ou de calculs par éléments finis, on préférera avoir des triangles les plus équilatéraux possibles ce qui justifie le choix de la triangulation de Delaunay pour ces applications. Cette dernière maximise l'angle minimal parmi tous les triangles. Elle a aussi l'énorme avantage d'être unique (pour des points en position générale) et peut se calculer efficacement (en  $O(n \log n)$ )

### 3.3.2 Triangulation de Delaunay

Il existe un très grand nombre de méthodes théoriques [LEM 97] et pratiques pour générer une triangulation à partir d'un ensemble de points. Mais toutes ne sont pas exploitables. En effet, on cherche à construire un ensemble de triangles qui soient arrangés de manière assez uniforme et régulière [FRE 10].

3. Des points sont cocycliques lorsqu'ils appartiennent à un même cercle.



**FIGURE 3.12** – Différentes triangulations : a) triangulation de Delaunay, b) triangulation de poids minimal, c) triangulation gloutonne

**Définition 3.3.2** Soit  $S$  un ensemble de sites en position générale. On appelle triangle de Delaunay de  $S$  un triangle dont les sommets sont des sites de  $S$  et qui est inscrit dans un cercle circonscrit ou cercle vide, c'est-à-dire un cercle qui ne contient aucun site de  $S$  en son intérieur. De plus, on appelle triangulation de Delaunay de  $S$  toute triangulation de  $S$  dont tous les triangles sont des triangles de Delaunay de  $S$

Cette triangulation possède des propriétés intéressantes pour construire un algorithme de génération de maillage. On se restreint ici aux propriétés de la triangulation dans un espace à deux dimensions. Soit  $n$  le nombre de points :

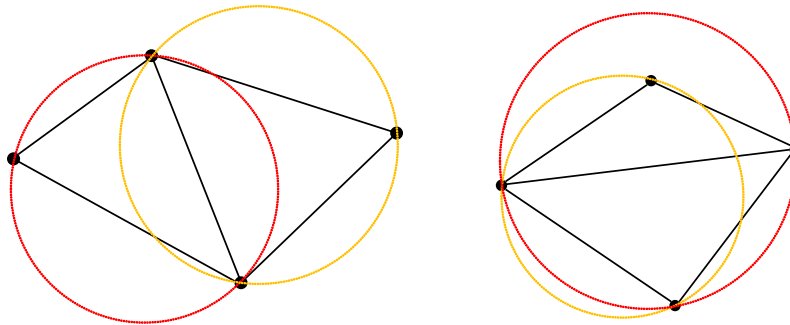
- La triangulation est unique s'il n'y a pas trois points alignés ou quatre points cocycliques
- La triangulation de Delaunay maximise le plus petit des angles.
- La triangulation contient au plus  $n$  simplexes
- Chaque sommet est connecté en moyenne à 6 triangles
- L'union des simplexes de la triangulation forme l'enveloppe convexe de l'ensemble des points

Ci-dessous est donné l'exemple de deux triangulations dont l'une est une triangulation de Delaunay.

### 3.3.3 Algorithme de triangulation

N'importe quel ensemble de points dans le plan  $(x,y)$  peut être triangulé par l'algorithme de Delaunay [EDE 01, PER 04]. L'algorithme de génération du maillage dans le plan est basé sur une analogie simple en mécanique entre un maillage triangulaire et une structure en treillis ou une structure composée de ressorts. Les arêtes des triangles correspondent aux éléments barres du treillis et les sommets des triangles correspondent aux jonctions des barres. Chaque élément barre possède une relation entre force et déplacement dépendant de la longueur de barre déformée  $l$  et de la longueur non déformée  $l_0$ .

Les efforts extérieurs s'appliquent sur la frontière du maillage. A chaque noeud de



**FIGURE 3.13** – Exemple de deux triangulations ; Celle de *gauche* est une triangulation de Delaunay, celle de *droite* ne l’est pas (le cercle circonscrit rouge aux triangles contient un quatrième site)

la frontière, un effort de réaction agit normalement à la frontière. La norme de cet effort de réaction doit être juste égale à une valeur qui permettrait au noeud de ne pas sortir de la frontière de départ. Pour savoir si un noeud se trouve à l’intérieur ou à l’extérieur d’un domaine donné, on peut utiliser les fonctions distances signées.

**Définition 3.3.3** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un domaine fermé. La fonction distance signée ou la fonction distance orientée d’un domaine  $\Omega$  est la fonction  $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto u_\Omega(x)$  définie par :

$$u_\Omega(x) = \begin{cases} -d(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \Omega \text{ (intérieur du domaine)} \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \text{ (sur la frontière)} \\ d(x, \partial\Omega) & \text{si } x \notin \Omega \text{ (extérieur du domaine)} \end{cases}$$

avec  $d(\cdot, \partial\Omega)$  désignant la norme euclidienne d’un point à la frontière  $\partial\Omega$ .

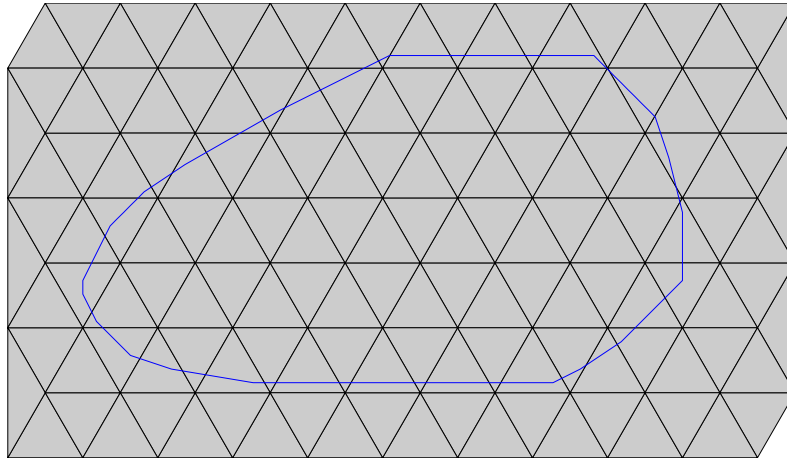
Si on prend l’exemple d’un contour circulaire de rayon  $r$ , la fonction distance signée  $d$  est donnée par :

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} - r \quad (3.1)$$

Ainsi, pour les contours de mèche issus des images de microtomographie, les fonctions distances signées seront calculées en faisant passer une B-spline par les pixels du pourtour extérieur des mèches.

### 3.3.3.1 Construction du maillage

Nous allons décrire dans ce paragraphe comment générer un maillage s’adaptant à n’importe quelle forme de toron. Pour ce faire, une grille triangulaire régulière (fig. 3.14) est appliquée sur le contour des torons. Ensuite, seuls sont gardés les noeuds de cette grille se trouvant à l’intérieur du contour. L’utilisation de la fonction distance signée nous permet aisément et rapidement de déterminer si un noeud se trouve dans, sur ou à l’extérieur du contour.



**FIGURE 3.14** – Génération de la grille triangulaire régulière

La question qui se pose maintenant est disposer ces noeuds de manière à ne pas sortir du contour tout en ayant une triangulation la plus régulière possible. Pour ce faire, on peut faire l'analogie où la triangulation de départ peut être considérée comme un système de barres de treillis ou ressorts soumis à des efforts internes entre les barres et à des efforts extérieurs qui contraignent les noeuds à ne pas sortir du contour de mèche.

Afin de déterminer la position idéale de ces noeuds, on va résoudre l'équation fondamentale de la statique (à l'équilibre) du système de treillis.

Pour résoudre cette équation, un vecteur  $\vec{p}$  est construit, de dimension  $N \times 2$ , constitué des coordonnées  $x, y$  des  $N$  points du maillage :

$$\vec{p} = [x \ y]$$

Le vecteur Force  $\vec{F}(p)$  possède aussi des composantes horizontales et verticales à chaque noeud :

$$\vec{F}(p) = [F_{int_x}(p) \ F_{int_y}(p)] + [F_{ext_x}(p) \ F_{ext_y}(p)]$$

où  $\vec{F}_{int}(p)$  contient les efforts intérieurs des barres et  $\vec{F}_{ext}(p)$  contient les efforts extérieurs. Pour trouver la bonne configuration de la position à l'équilibre des noeuds du maillage, on pose donc  $\vec{F}(p) = \vec{0}$ .

Ce problème n'est pas aisé à résoudre, puisque  $\vec{F}(p)$  change selon l'arrangement des barres du treillis. Une manière simple de pallier cette difficulté est d'introduire artificiellement une dépendance au temps. En posant  $p(0) = p_0$ , il est possible d'écrire l'équation différentielle ordinaire suivante (on utilise ici des unités non physiques) :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(p), \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

Si une solution stationnaire existe, elle satisfait le système  $\vec{F}(p) = \vec{0}$ . En utilisant la méthode d'Euler à schéma "avant" et en posant  $t_n = n\Delta t$ , la solution approchée du système devient :

$$\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n + \Delta t \vec{F}(p_n) \quad (3.3)$$

Lorsque la fonction force est évaluée, les positions des noeuds de  $\vec{p}_n$  sont connues et donc la triangulation associée est connue aussi. Durant le passage de  $\vec{p}_n$  à  $\vec{p}_{n+1}$ , les noeuds sortant du domaine sont ramenés sur la frontière. Les noeuds peuvent se mouvoir le long de la frontière mais pas en sortir. Il existe plusieurs possibilités pour choisir la fonction force  $f(l, l_0)$  de chaque barre. Il est fait le choix ici d'un modèle ressort linéaire répulsif car les noeuds de départ sont toujours pris à l'intérieur du domaine (fig.3.15) :

$$f(l, l_0) = \begin{cases} k(l - l_0) & \text{si } l < l_0 \\ 0 & \text{si } l \geq l_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

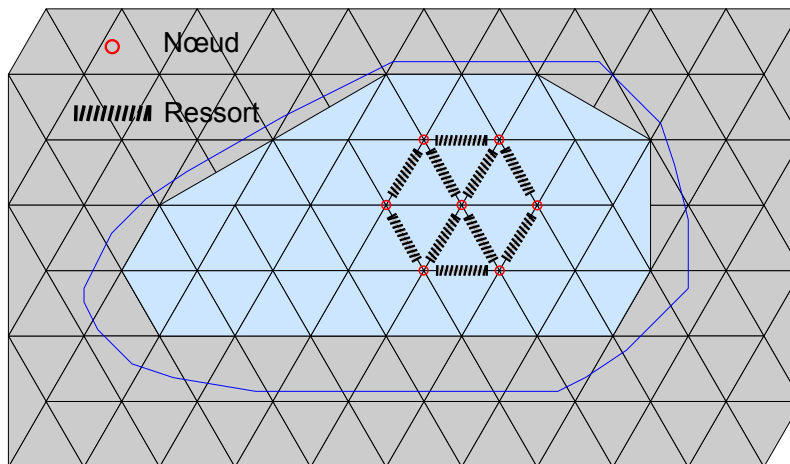
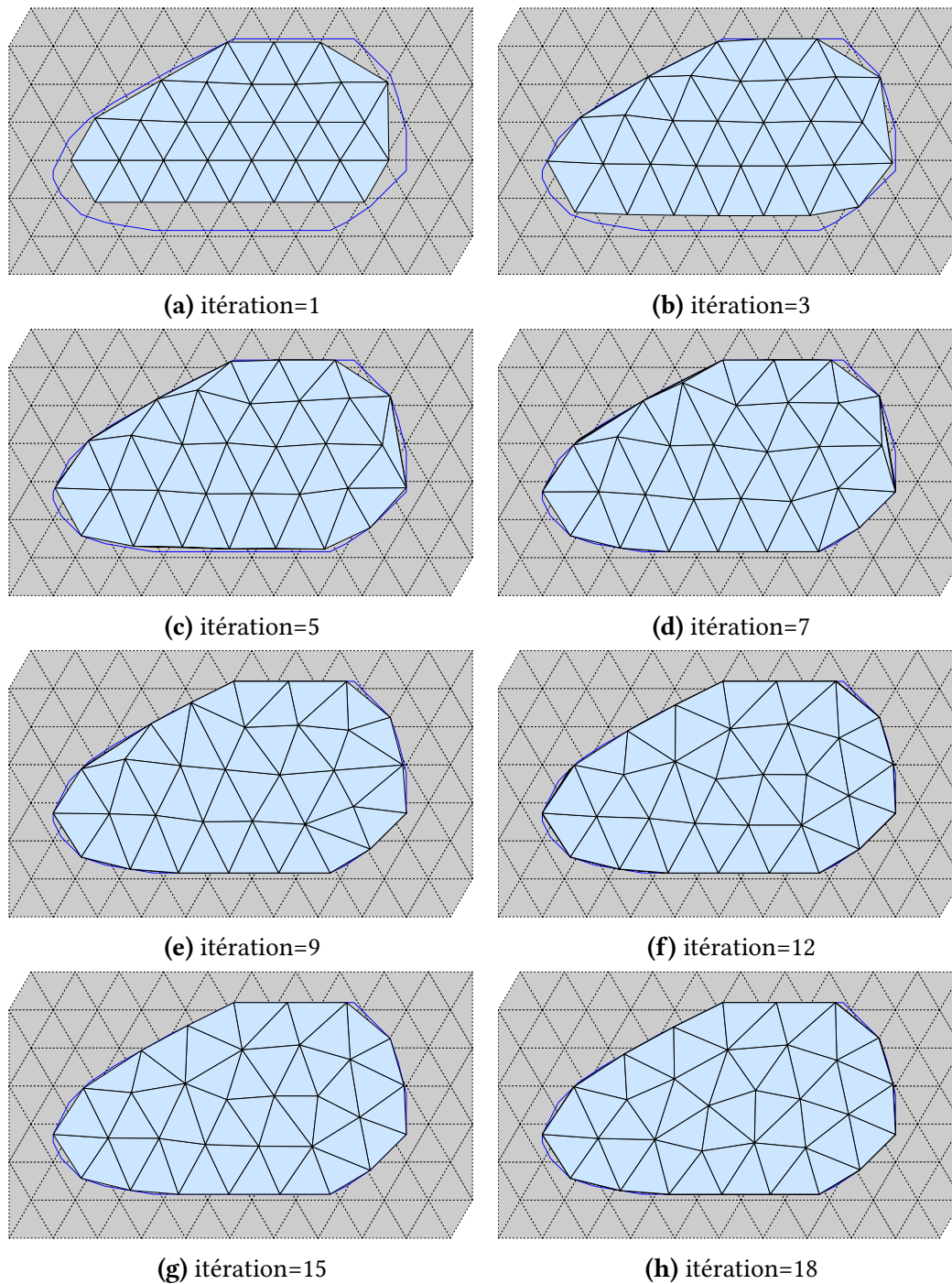


FIGURE 3.15 – Schématisation ressort entre les noeuds

Par simplicité, la valeur de  $k$  est prise égale à 1. Il est possible de prendre une fonction de force non linéaire avec  $k = (l + l_0)/2 l_0$  pour améliorer légèrement le maillage mais le cas linéaire donne déjà de très bon résultats et a un temps de calcul très rapide. Pour permettre aux noeuds initiaux de s'épandre et d'avoir des fonctions de forces positives,  $f(l, l_0)$  devrait être positif quand  $l$  avoisine la longueur désirée qui peut être obtenue en choisissant  $l_0$  légèrement plus grand que  $l$ . Un bon choix est de prendre  $l_0 = 1.1 l$ .

Il suffit maintenant de laisser se mouvoir les noeuds en résolvant les équations (3.3) et (3.4) à chaque itération. La figure 3.16 montre la triangulation (en rouge) obtenue à différents incréments alors que le fond bleu permet de voir la triangulation initiale. On voit qu'à chaque itération les noeuds se meuvent jusqu'à atteindre la frontière et se réorganisent pour avoir la meilleure triangulation possible.



**FIGURE 3.16** – Génération du maillage surfacique

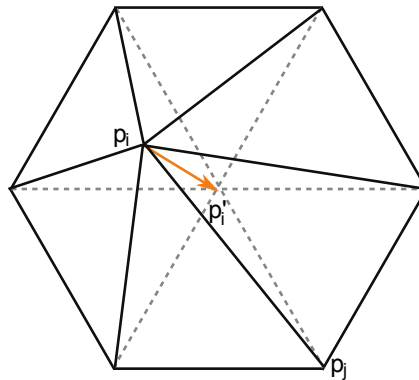


On génère un maillage prismatique en projetant, selon la direction de la fibre neutre de mèche, le maillage surfacique obtenu (délimité en vert sur la figure 3.18a) sur le contour de la section suivante du toron (contour bleu sur la figure 3.18a).

Afin d'obtenir les éléments les plus équilatéraux possibles, on effectuera un lissage barycentrique (fig.3.17) sur chaque maillage surfacique, c'est-à-dire effectuer un déplacement de chaque noeud au barycentre de l'ensemble  $N$  des noeuds voisins. Pour chaque sommet  $p_i$  du maillage, un estimateur  $\hat{p}_i$ , obtenu par une moyenne, parfois pondérée, de ses voisins, est calculé. Ensuite, chaque sommet est déplacé vers cet estimateur (lissage) ou dans la direction opposée (rehaussement). La formulation générale est la suivante :

$$\begin{cases} \hat{p}_i = \sum_{j \in N} w_j p_j \\ p'_i \leftarrow p_i + \alpha \hat{p}_i \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $\alpha$  est un réel compris entre  $[0 ; 1]$  et  $w_j$  désigne le poids du voisin  $j$ .

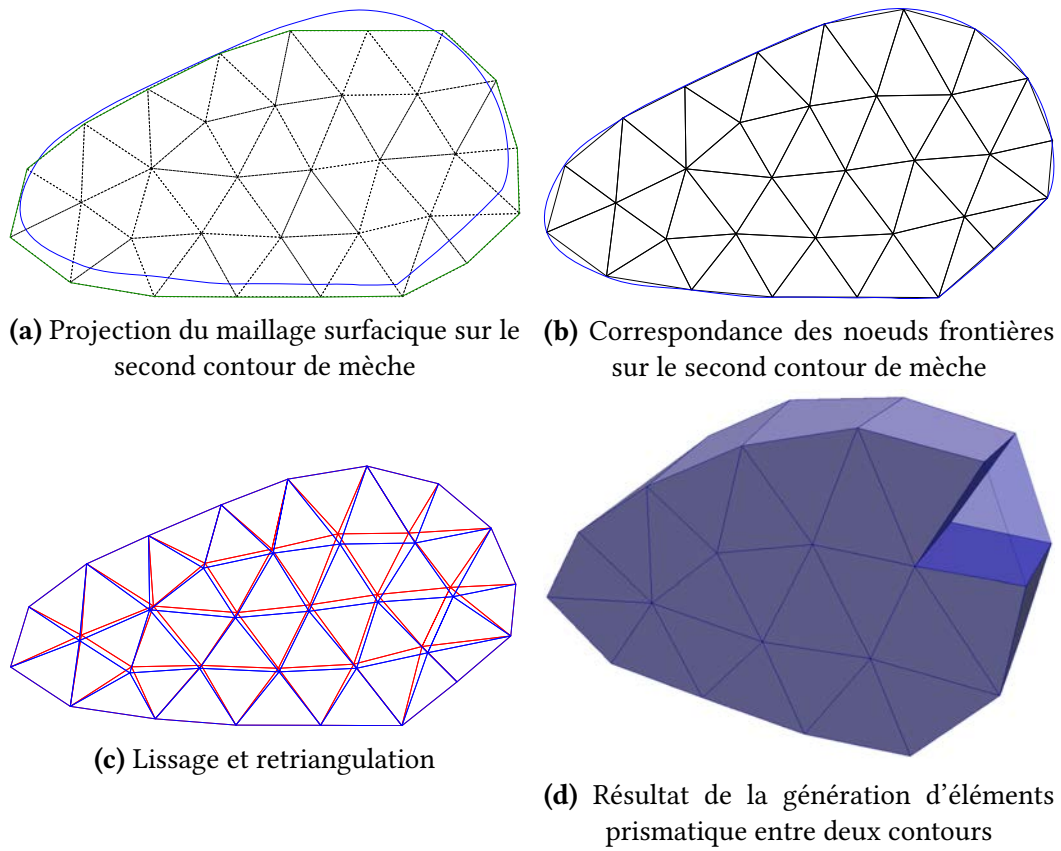


**FIGURE 3.17** – Exemple de lissage barycentrique sur un maillage

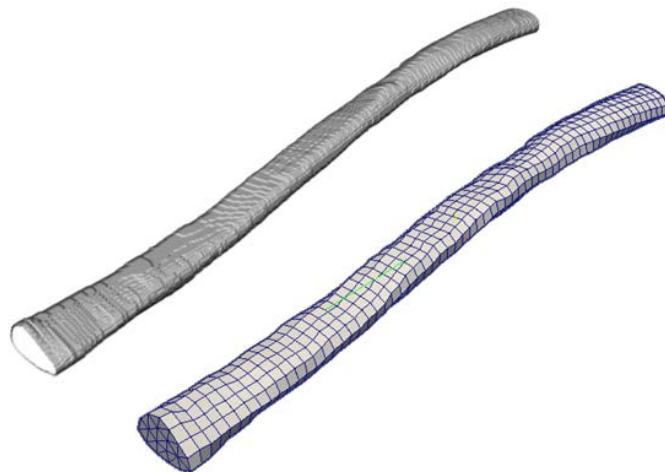
Ensuite, on adapte la triangulation en faisant correspondre les noeuds frontières à des noeuds du second contour (fig.3.18b). Puis, on réapplique notre algorithme de triangulation pour lisser et adapter au mieux la triangulation à la forme du nouveau contour (fig.3.18c). Le résultat donne des éléments prismatiques réguliers (fig.3.18d) de très bonne qualité (voir §3.3.3.2). Les faces extérieures de la mèche maillée sont des éléments quadrangles, ce qui permet de définir facilement les surfaces de contact inter torons.

La figure 3.19 montre le maillage d'une mèche d'interlock. On voit que la mèche maillée respecte la topologie de la mèche de microtomographie. Toutes les irrégularités y sont retranscrites. On verra plus tard que ces imperfections auront une incidence sur le calcul mécanique. Un autre exemple de maillage prismatique est illustré sur la figure 3.20. Celui-ci représente le maillage du G0986.

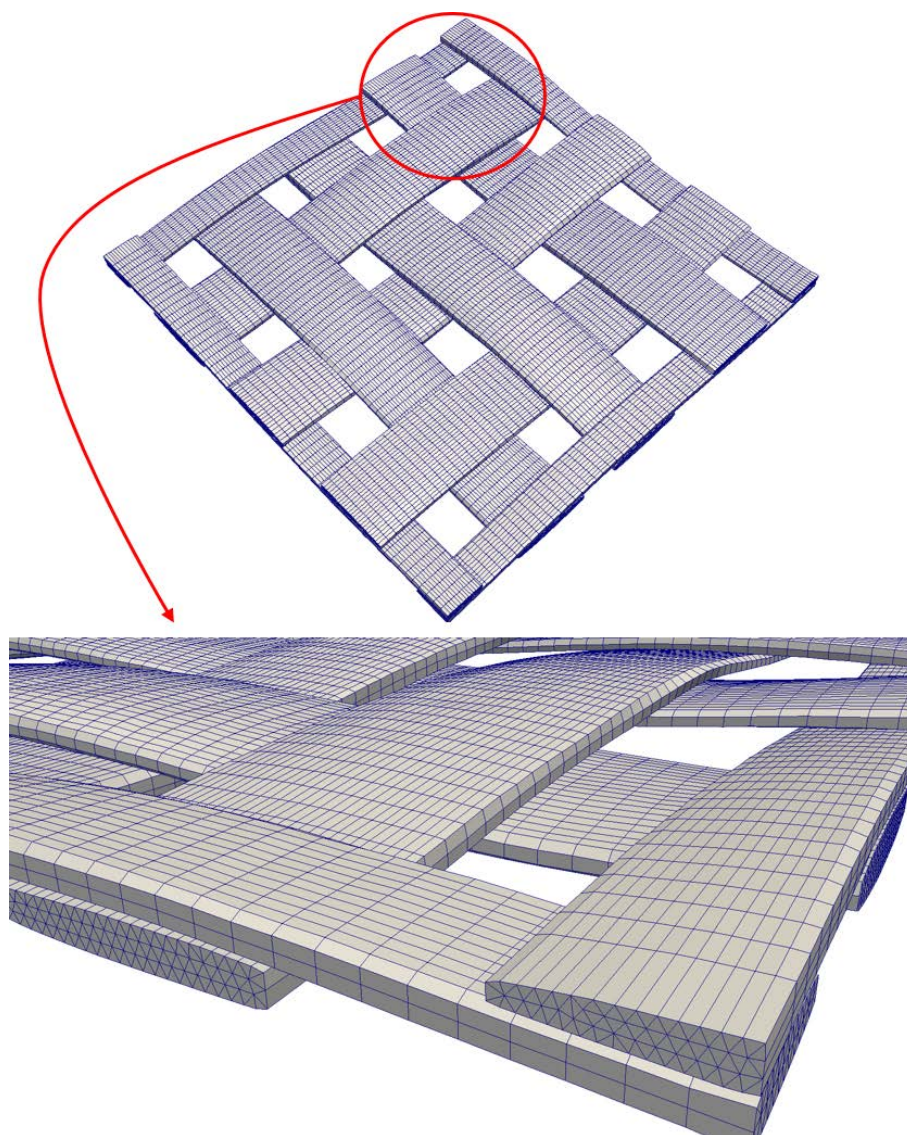




**FIGURE 3.18** – Schéma de génération de maillage prismatique



**FIGURE 3.19** – Exemple de maillage prismatique d'une mèche d'interlock



**FIGURE 3.20** – Maillage prismatique du G0986

### 3.3.3.2 Qualité du maillage

Lorsque un maillage est construit, il est nécessaire de vérifier la qualité de celui-ci. En effet, si le maillage est de mauvaise qualité, des erreurs apparaîtront dans la solution du calcul EF. On se propose donc de travailler sur un critère permettant de définir la qualité du maillage. De nombreuses études [FIE 91, PAR 94, LIU 94, LO 97] existent sur la mesure de la qualité d'éléments tétraédriques mais très peu sur les éléments prismatiques. Kwok et Chen [KWO 00] introduisent un critère pour les hexaèdres et les prismes. En effet, on peut voir le prisme comme un hexaèdre dégénéré. Ce critère  $Q$  (eq (3.6)) a été modifié afin de prendre en compte trois paramètres. Un paramètre d'aspect  $R$ , un paramètre de gauchissement maximal  $W_{max}$  de l'élément et un paramètre du calcul du rapport entre la valeur maximale et minimale du déterminant du Jacobien  $J$ . Un élément prismatique parfait a une valeur  $Q = 1$  et  $Q = 0$  est un élément plat.

$$Q = \begin{cases} 0 & J_{min} \leq 0 \\ (1 - R - W_{max}) \frac{J_{min}}{J_{max}} & J_{min} > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

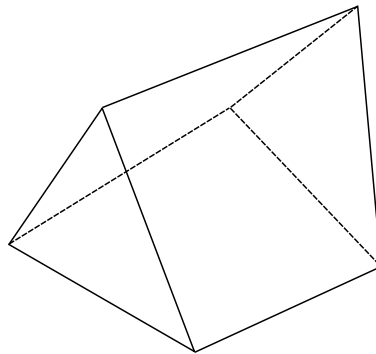
Le paramètre d'aspect  $R$  est basé sur la comparaison entre les caractéristiques angulaires réelles de l'élément ( $\theta_{min}$  et  $\theta_{max}$  angles minimum et maximum de la face considérée) et celles de la face correspondante considérée parfaite  $\theta_e$ . Ainsi, pour une face triangulaire, l'angle de référence  $\theta_e$  est de  $60^\circ$ , ceci correspondant aux angles d'un (triangle équilatéral). De même, pour une face quadrangulaire, l'angle de référence  $\theta_e$  est de  $90^\circ$  (angles d'un rectangle).

$$R = \max \left[ \frac{\theta_{max} - \theta_e}{180 - \theta_e}, \frac{\theta_e - \theta_{min}}{\theta_e} \right] \quad (3.7)$$

$R$  détermine l'aspect d'une face évaluée avec une face considérée comme parfaite. Ainsi lorsque  $R$  tend vers 0 l'élément est très bon, tandis que lorsqu'il tend vers 1, celui-ci devient plat. Un prisme idéal sera défini comme étant celui où les deux faces triangulaires sont équilatérales et où les trois faces quadrilatérales seront rectangulaires.

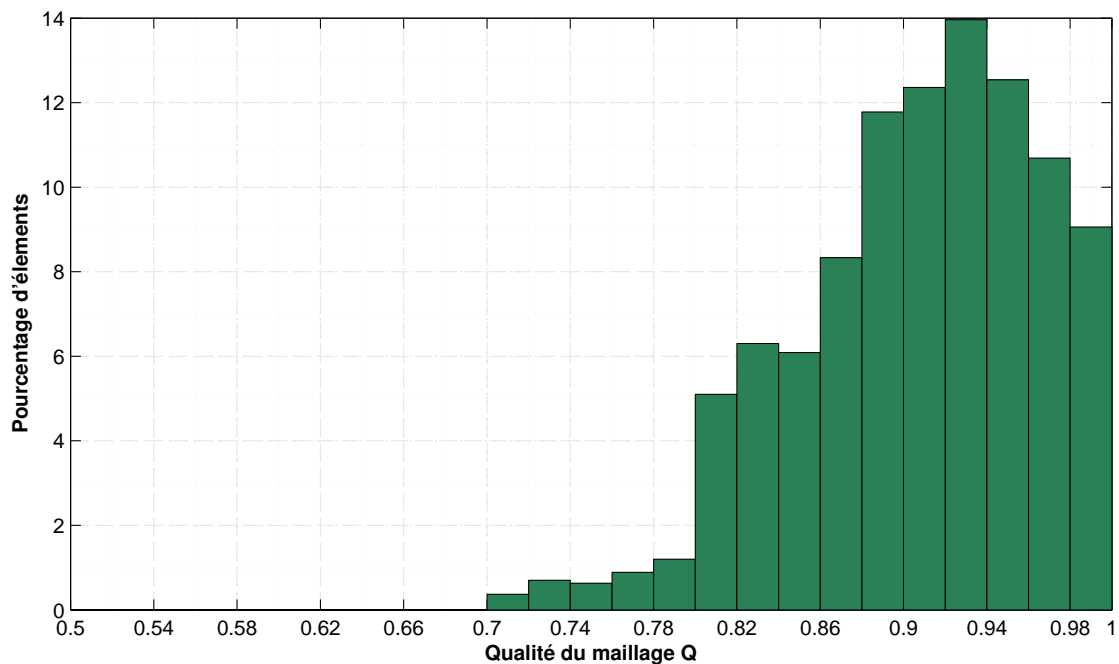
$W_{max}$  correspond au maximum des facteurs de gauchissement d'un élément. Le paramètre de gauchissement  $W$  est utilisé pour déterminer si les quatre noeuds d'une face quadrilatérale d'un prisme sont sur un même plan. Le lecteur se référera à [KWO 00] pour la manière de calculer  $W$ . Ce facteur est borné entre 0 et 1, avec une valeur de 0 impliquant une face plate. Une valeur supérieur à 0 mesure comment l'élément est distordu. La figure 3.21 montre un élément torsadé avec  $W_{max} = 0.18$ .

$J_{min}$  et  $J_{max}$  sont les valeurs minimales et maximales du déterminant du Jacobien calculées aux noeuds de l'élément. Le ratio  $J_{min}/J_{max}$  est maximal et vaut 1 lorsque toutes les arêtes d'un prisme sont de la même longueur. Par contre, lorsque le déterminant devient négatif, l'élément est de mauvaise qualité et conduira à une erreur dans le calcul par éléments finis.



**FIGURE 3.21** – Illustration d'un prisme tordu présentant un facteur  $W_{max} = 0.18$

La figure 3.22 illustre l'histogramme de la distribution du nombre d'éléments en fonction de la qualité appliquée au G0986. Sachant que chacun des éléments considérés présente un critère de qualité  $Q$  compris entre 0.7 et 1 et que la qualité moyenne est supérieure à 0.9, on peut considérer que le maillage utilisé est de très bonne qualité.



**FIGURE 3.22** – Histogramme du pourcentage d'éléments en fonction de la qualité du maillage

### 3.4 Bilan du chapitre 3

Ce chapitre montre les deux méthodes développées pour générer un maillage aussi proche que possible de la réalité à partir des images de microtomographie. La première méthode utilise l'algorithme des Marching Cubes qui permet d'extraire les surfaces extérieures de chaque mèche puis maille l'intérieur par un solveur frontal. Cette méthode a le gros avantage de pouvoir mailler n'importe quelle topologie de mèche, de la plus simple à la plus complexe. Toutefois, afin de mener des calculs EF en grandes transformations représentatifs, il faut considérer l'orientation des mèches. Celle-ci a été prise en compte en utilisant le squelette de chaque mèche correspondant à la fibre neutre.

Le deuxième modèle génère un maillage basé sur une triangulation de Delaunay. Puis par un jeu de projection, on construit des éléments prismatiques qui s'adaptent au mieux à la forme de mèche. L'avantage de ces éléments est qu'il en faut beaucoup moins que des éléments tétraédriques pour mailler une mèche. De plus, les faces extérieures sont des quadrangles, ce qui permet de mieux définir les surfaces de contact entre les mèches. Le maillage de la géométrie issue de la microtomographie étant réalisé, il reste à définir le comportement approprié à ce modèle EF.

# Chapitre 4

## Lois de comportement pour les mèches de renforts tissés

*Ce chapitre présente les bases de la mécanique des milieux continus de manière à mettre en place des lois de comportement utilisées pour les mèches. Ces lois doivent définir le comportement du matériau homogène équivalent à un matériau fibreux. De plus, le comportement de la mèche doit aussi retranscrire à la fois le comportement des fibres qui la composent et leurs interactions. Deux types de lois, hypoélastique et hyperélastique permettent d'obtenir d'excellents résultats pour des calculs en dynamique explicite. Sont abordées les problématiques induites par ces lois, ainsi que leur mise en oeuvre dans un code éléments finis.*

### Sommaire

---

<b>4.1 Rappels de notion de mécanique des milieux continus en grandes transformations</b>	<b>107</b>
4.1.1 Description du mouvement	107
4.1.2 Tenseur gradient de la transformation	108
4.1.3 Mesure des déformations	108
4.1.4 Mesure des contraintes	110
4.1.5 Indifférence matérielle et principe d'objectivité	111
<b>4.2 Lois hypoélastiques</b>	<b>112</b>
4.2.1 Définitions	113

4.2.2	Dérivée objective adaptée aux matériaux fibreux . . . . .	114
4.2.3	Tenseur de comportement . . . . .	115
<b>4.3</b>	<b>Lois hyperélastiques . . . . .</b>	<b>118</b>
4.3.1	Définitions . . . . .	118
4.3.2	Hyperélasticité isotrope transverse . . . . .	119
4.3.3	Loi hyperélastique basée sur des invariants "physiques" . . . . .	120
4.3.3.1	Énergie d'élongation . . . . .	121
4.3.3.2	Énergie de compaction . . . . .	122
4.3.3.3	Énergie de distorsion . . . . .	123
4.3.3.4	Énergie de cisaillement transverse . . . . .	123
<b>4.4</b>	<b>Implémentation des lois de comportement dans Abaqus/Explicit .</b>	<b>124</b>
4.4.1	Schémas d'intégration temporelle . . . . .	124
4.4.1.1	Schémas implicites . . . . .	125
4.4.1.2	Schéma explicite aux différences centrées . . . . .	126
4.4.2	Implémentation des lois . . . . .	127
<b>4.5</b>	<b>Bilan du chapitre 4 . . . . .</b>	<b>129</b>

---

## 4.1 Rappels de notion de mécanique des milieux continus en grandes transformations

L'utilisation de lois de comportement en grandes transformations nécessite une description des mouvements au sein du milieu continu qui dépasse le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (petites déformations, petits déplacements et petites transformations). Avant d'introduire les modèles pour caractériser le comportement des milieux continus, il est rappelé ci-après quelques grandeurs de base et définitions utilisées en mécanique des milieux continus.

### 4.1.1 Description du mouvement

Le mouvement d'un point permet de relier sa position dans une configuration initiale  $C_0$  à sa position dans une autre configuration à l'instant  $t$  ( $C_t$ ). Cette dernière peut être la configuration dite finale ou une configuration intermédiaire quelconque entre la configuration initiale et la configuration finale. On parlera alors de configuration instantanée ou actuelle.

Le mouvement est alors défini par la fonction  $x(X, t)$  qui donne la position  $x$  à l'instant  $t$  d'un point référencé par  $X$ , et définit donc la transformation faisant passer de la configuration de référence  $C_0$  à la configuration actuelle déformée  $C_t$ , comme illustré figure 4.1.

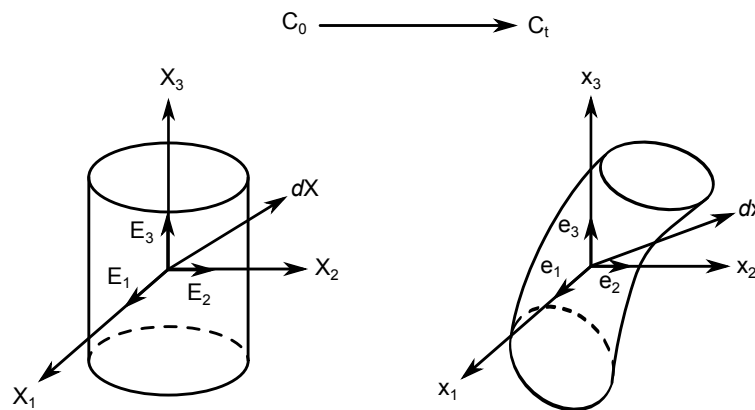


FIGURE 4.1 – Configuration initiale  $C_0$  et configuration actuelle déformée  $C_t$

En mécanique des solides, la configuration de référence  $C_0$  est généralement associée à l'état initial du solide non déformé, ce qui permet d'associer les deux configurations dans le même système d'axe. Les coordonnées dans la configuration  $C_0$  sont alors nommées coordonnées lagrangiennes ou matérielles, tandis que celles associées à la configuration courante  $C_t$  sont appelées coordonnées eulériennes ou spatiales. Les différentes quantités présentées dans la suite seront écrites par rapport à l'un ou l'autre de ces ré-



férentiels. Par abus de langage la dépendance au temps  $t$  sera omise dans la suite en supposant  $t > 0$ .

### 4.1.2 Tenseur gradient de la transformation

La transformation d'un milieu continu, occupant le volume  $\Omega_0$  dans la configuration de référence (i.e. à l'état naturel non contraint du matériau), et le volume  $\Omega$  dans la configuration actuelle, peut être décrite par une application  $\chi$  bijective qui fait correspondre à chaque position initiale  $\underline{X} \in \Omega_0$  une position actuelle  $\underline{x} \in \Omega^1$  :

$$\underline{x} = \chi(\underline{X}) \quad (4.1)$$

Le tenseur gradient de la transformation, également appelé application linéaire tangente ou transformation homogène tangente, est le tenseur jacobien de l'application  $\chi$ . Le vecteur  $d\underline{x}$  se met alors sous la forme :

$$d\underline{x} = \frac{\partial \chi}{\partial \underline{X}} d\underline{X} = \underline{F} d\underline{X} \quad (4.2)$$

On définit aussi la transformation d'un élément de volume élémentaire. Soit un élément de volume dans la configuration de référence,  $d\Omega_0 \in C_0$ . Sa contrepartie déformée dans la configuration courante,  $d\Omega \in C_t$ , est donnée par le déterminant de la matrice jacobienne du tenseur gradient de la transformation, appelé jacobien :

$$dv = J dV, \quad J = \det(\underline{F}) \quad (4.3)$$

L'application  $\chi$  étant bijective, son jacobien  $J$  sera toujours strictement positif, ce qui revient à dire que le volume de l'élément de matière défini par le volume élémentaire  $dV$  ne peut s'annuler.

On définit aussi la transformation d'un élément de surface  $d\underline{A} = d\underline{A}\underline{N}$  de normale  $\underline{N}$  en configuration initiale en un élément de surface  $d\underline{a} = d\underline{a}\underline{n}$  de normale  $\underline{n}$  à l'aide de la formule de Nanson :

$$d\underline{a} \underline{n} = J \underline{F}^{-T} \underline{N} dA \quad (4.4)$$

### 4.1.3 Mesure des déformations

Le tenseur gradient de la transformation décrit les transformations locales du milieu étudié. Ces transformations se décomposent en rotations de corps rigide et en déformations de la matière. Ce constat est formalisé par le théorème de la décomposition polaire du gradient de la transformation, selon lequel il est possible d'écrire, de façon unique :

---

1. Dans toute cette partie, et sauf mention contraire, les grandeurs écrites en minuscule seront relatives à la configuration actuelle tandis que les grandeurs écrites en majuscule seront relatives à la configuration initiale.

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} \quad (4.5)$$

où  $\underline{\underline{R}}$  est un tenseur de rotation (i.e. orthogonal direct) et où  $\underline{\underline{U}}$  et  $\underline{\underline{V}}$  sont des tenseurs symétriques définis positifs appelés tenseurs de déformation pure. Afin d'étudier les variations de longueur et d'angle au sein du solide, on peut étudier le produit scalaire de deux vecteurs élémentaires en configuration déformée :

$$\begin{aligned} d\underline{\underline{u}} \cdot d\underline{\underline{v}} &= du_i dv_i = F_{ij} dU_j F_{ik} dV_k = dU_j F_{ji}^T F_{ik} dV_k \\ &= d\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{\underline{V}} \\ &= d\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot d\underline{\underline{V}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'écriture précédente permet d'introduire le tenseur de *Cauchy-Green droit*  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}^2$ , mesure du produit scalaire des vecteurs déformés. Par suite, la variation de ce produit scalaire entre la configuration initiale et la configuration déformée s'écrit :

$$\begin{aligned} d\underline{\underline{u}} \cdot d\underline{\underline{v}} - d\underline{\underline{U}} \cdot d\underline{\underline{V}} &= d\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot d\underline{\underline{V}} - d\underline{\underline{U}} \cdot d\underline{\underline{V}} \\ &= d\underline{\underline{U}} \cdot \left( \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}} \right) \cdot d\underline{\underline{V}} \\ &= d\underline{\underline{U}} \cdot 2\underline{\underline{E}} \cdot d\underline{\underline{V}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Le tenseur  $\underline{\underline{E}} = 1/2 \left( \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}} \right)$  introduit ainsi est appelé tenseur des *dilatations de Green-Lagrange* : en petites déformations, ce tenseur se confond avec le tenseur des déformations linéarisé  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Les tenseurs  $\underline{\underline{C}}$  et  $\underline{\underline{E}}$  sont définis sur la configuration initiale. A ce titre, il sont généralement dits « lagrangiens ». On peut définir de la même façon leurs équivalents en configuration actuelle, qui seront dits « eulériens<sup>2</sup> » :

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{V}}^2 \quad (4.8)$$

$$\underline{\underline{a}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1} \right) \quad (4.9)$$

Ils sont appelés respectivement tenseur de *Cauchy-Green gauche* et tenseur d'*Euler-Almansi*.

L'écriture du principe des puissances virtuelles, ainsi que certaines loi de comportement (hypoélastiques, viscoélastiques), nécessitent de définir la notion de vitesse de déformation. En différentiant l'équation 4.2 par rapport au temps, on obtient :

2. Un tenseur sera dit *lagrangien* (resp. *eulérien*) lorsque ses quantités d'entrée et de sortie sont exprimées dans la configuration initiale (resp. actuelle). Un tenseur dont la quantité d'entrée et la quantité de sortie ne sont pas exprimées dans la même configuration sera dit *bipoint*.

$$d\underline{\dot{x}} = \underline{\dot{F}} \cdot d\underline{X} = \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot d\underline{x} = \underline{l} \cdot d\underline{x} \quad (4.10)$$

Le tenseur  $\underline{l}$  est appelé tenseur *gradient de vitesse*. Il est classiquement décomposé en un terme symétrique  $\underline{d}$  (tenseur *taux de déformation*) et un terme antisymétrique  $\underline{\omega}$  (tenseur *taux de rotation*) :

$$\underline{l} = \underline{d} + \underline{\omega}$$

avec  $\underline{d} = \frac{1}{2} (\underline{l} + \underline{l}^T)$  et  $\underline{\omega} = \frac{1}{2} (\underline{l} - \underline{l}^T)$  (4.11)

Le tenseur taux de déformation est une mesure de la vitesse de déformation dans la configuration actuelle. On peut également obtenir une mesure de la vitesse de déformation dans la configuration initiale :

$$\underline{\dot{E}} = \frac{1}{2} \underline{\dot{C}} = \underline{F}^T \cdot \underline{d} \cdot \underline{F} \quad (4.12)$$

#### 4.1.4 Mesure des contraintes

Soit un solide déformable virtuellement coupé en deux sous domaines, avant et après transformation (fig.4.2). L'équilibre de chacun des deux sous domaines ainsi définis impose l'existence de forces internes à la frontière entre les deux. Soit  $ds$  un élément de surface infinitésimal positionné à la frontière entre les deux sous domaines, soumise à un effort  $d\underline{f}$ . Le *vecteur contrainte* est alors défini localement par :

$$\underline{t} = \frac{d\underline{f}}{ds} \quad (4.13)$$

Selon le théorème de Cauchy, ce vecteur contrainte ne dépend, au point considéré, que de la normale  $\underline{n}$  à la surface élémentaire  $ds$  considérée, et ce de façon linéaire. Il existe donc un tenseur d'ordre deux, que l'on appellera tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}$ , tel que :

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \quad (4.14)$$

L'écriture de l'équation de moment du principe fondamental de la dynamique permet de démontrer que ce tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique. Notons que dans l'expression (4.14), les vecteurs  $\underline{t}$  et  $\underline{n}$  sont définis en configuration actuelle. Avec (4.13) et (4.14), l'effort exercé sur la surface élémentaire s'écrit :

$$d\underline{f} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} ds \quad (4.15)$$

Le tenseur de Cauchy représente donc les efforts internes exprimés dans la configuration actuelle. De même que pour les différentes mesures de déformation établies précédemment, il est possible de définir d'autres mesures des efforts internes. Ainsi, en

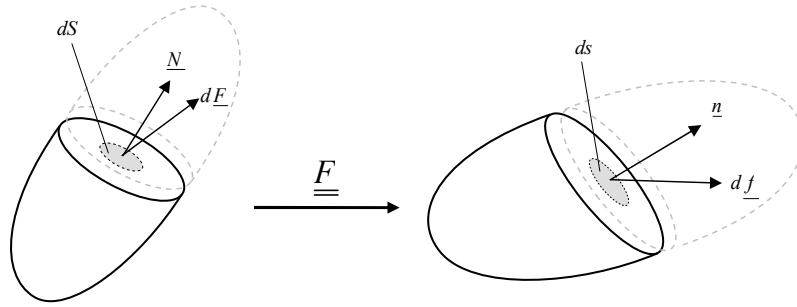


FIGURE 4.2 – Définition du vecteur contrainte

notant  $d\underline{F}$ ,  $dS$  et  $\underline{N}$  l'effort, la surface et sa normale ramenés en configuration initiale, on définit les deux tenseurs  $\underline{\underline{P}}$  et  $\underline{\underline{S}}$  comme suit :

$$\begin{aligned} d\underline{f} &= \underline{\underline{P}} \cdot \underline{N} dS \\ d\underline{F} &= \underline{\underline{S}} \cdot \underline{N} dS \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ces tenseurs sont respectivement appelés premier tenseur de Piola-Kirchhoff (PK1) (ou tenseur de Boussinesq), second tenseur de Piola-Kirchhoff (PK2) ou tenseur de Piola Lagrange. En petites déformations, ces tenseurs sont identiques. On introduit d'autre part le tenseur eulérien  $\underline{\underline{\tau}} = J\underline{\underline{\sigma}}$ , appelé tenseur des contraintes de Kirchhoff; c'est un tenseur symétrique qui joue un rôle important pour la formulation variationnelle des problèmes en grande déformation.

Les équations (4.17 et 4.18) montrent les liens entre ces différents tenseurs :

$$\underline{\underline{\tau}} = J\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \quad (4.17)$$

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} = J \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (4.18)$$

Avec la définition précédente des adjectifs lagrangien et eulérien, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$ , qui permet d'obtenir le vecteur contrainte dans la configuration actuelle en fonction de la normale dans cette même configuration, sera dit eulérien. A l'inverse, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{S}}$ , qui permet d'obtenir le vecteur contrainte dans la configuration initiale en fonction de la normale dans cette même configuration, sera dit lagrangien. Le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{P}}$  et le tenseur de Kirchhoff  $\underline{\underline{\tau}}$  ne sont ni lagrangiens ni eulérien : ils sont appelés tenseurs bipoints.

#### 4.1.5 Indifférence matérielle et principe d'objectivité

Une loi de comportement doit vérifier le principe d'indifférence matérielle, c'est-à-dire qu'elle doit s'écrire sous une forme indépendante de l'observateur. Par conséquent,

les grandeurs mises en jeu doivent respecter le principe d'objectivité. En effet, l'objectivité traduit l'indépendance de ces grandeurs au repère ou référentiel choisi, c'est-à-dire que quel que soit le changement de référentiel d'observation en termes de rotations/translations, elles doivent rester fondamentalement les mêmes [SID 82]. Il est donc nécessaire de définir et de travailler avec des grandeurs objectives. A ce titre, on peut citer [LEM 09] :

- tout scalaire ;
- tout tenseur écrit dans la configuration de référence  $C_0$  (tel que le tenseur de déformation de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$  et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{S}}$ );
- toute dérivée temporelle d'un tenseur défini dans la configuration de référence  $C_0$  (telle que  $\underline{\underline{\dot{E}}}$  et  $\underline{\underline{\dot{S}}}$ ).

Cependant, il est important de noter que les dérivées temporelles des grandeurs définies dans la configuration actuelle déformée  $C_t$  ne sont pas objectives. Ainsi, la dérivée  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  du tenseur des contraintes de Cauchy n'est pas objective. Les dérivées temporelles  $\underline{\underline{\dot{F}}}$  du gradient de la transformation et  $\underline{\underline{\dot{P}}}$  du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff ne sont également pas objectives. Cependant, plusieurs dérivées temporelles objectives existent, telles que Jaumann ou Green-Naghdi, ce point sera détaillé dans la suite de ce manuscrit.

Les notions de base de mécanique des milieux continus ayant été rappelées, il convient maintenant de déterminer quel type de loi de comportement utiliser de manière à formaliser au mieux les mécanismes de déformation intervenant dans le cadre de l'étude des mèches. Deux types de lois sont abordés : les lois hypoélastiques et les lois hyperélastiques. Le choix de l'une ou l'autre est conditionné par le fait que chacune d'entre elles permettent de modéliser certains aspects du comportement mécanique, mais également par le fait que la modélisation est effectuée à l'aide d'un logiciel commercial, ABAQUS/Explicit. Ces différents points sont explicités par la suite.

## 4.2 Lois hypoélastiques

Le modèle de comportement pour la simulation mésoscopique de la mise en forme de renforts secs doit prendre en compte à la fois les non-linéarités géométriques engendrées par les grands déplacements et grandes déformations des mèches, mais aussi les non-linéarités matérielles liées à la structure des mèches. Une mèche est un assemblage de fibres ayant une rigidité longitudinale prédominante vis-à-vis des autres caractéristiques mécaniques. Les différents aspects du comportement de la mèche doivent être pris en compte en tant que matériau continu. L'approche proposée ici pour simuler la mise en forme de renforts est une approche hypoélastique non linéaire basée sur les travaux de Badel [BAD 08b], qui permet de répondre simplement à ces exigences. En outre, un comportement continu de la mèche est considéré ici.

### 4.2.1 Définitions

Une loi hypoélastique [TRU 55a, TRU 55b, XIA 97, BAD 08c], écrite en taux, relie un tenseur d'ordre 2 traduisant la cinématique du milieu à un autre tenseur d'ordre 2 traduisant les efforts de cohésion de la matière par l'intermédiaire du tenseur de comportement d'ordre 4 :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}^{\nabla} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}} \quad (4.19)$$

où  $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$  et  $\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}$  sont, respectivement, le tenseur d'élasticité tangent du quatrième ordre et le tenseur taux de déformation.  $\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}^{\nabla}$  est une dérivée objective de  $\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}$ , tenseur des contraintes de Cauchy, dont le but est d'éviter les perturbations dues aux mouvements de corps rigide dans la dérivée temporelle directe  $\underline{\underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}} = \frac{d\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}}{dt}$ . Une dérivée objective peut être vue comme la dérivée telle qu'elle apparaît pour un observateur fixe par rapport à la matière. Puisque la matière se déforme, la notion « d'observateur fixe par rapport à la matière » n'est pas unique. Cela peut être interprété de différentes manières, il existe ainsi différentes dérivées objectives qui approchent ce but et garantissent toutes un état constant sous mouvement de corps rigide. Le choix d'une dérivée objective adaptée est un aspect primordial pour le modèle de comportement que nous mettrons en place.

Soit la rotation  $\underline{\underline{\underline{\underline{Q}}}}$  définissant, par rapport au repère de référence, un repère dit « repère tourné ». La dérivée objective dans le mouvement de rotation  $\underline{\underline{\underline{\underline{Q}}}}$  est la dérivée pour un observateur qui serait fixe dans le repère tourné (le tenseur objectif que nous utilisons désormais pour les exemples est le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}$ ) :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}^{\nabla} = \underline{\underline{\underline{\underline{Q}}}} \cdot \left( \frac{d}{dt} \left( \underline{\underline{\underline{\underline{Q}}}}^T \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{Q}}}} \right) \right) \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{Q}}}}^T \quad (4.20)$$

On peut écrire cette dérivée objective sous une autre forme. Pour cela, re-calculons la dérivée temporelle directe de  $\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}$ . Nous faisons apparaître cette fois-ci les vecteurs de base du repère tourné  $\{\underline{e}_i\} = \{\underline{e}_1; \underline{e}_2; \underline{e}_3\}$  et le spin de ce repère  $\underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\dot{Q}}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{Q}}}}^T$  tel que  $\dot{\underline{e}}_i = \underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}} \cdot \underline{e}_i$ .

Soit :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (4.21)$$

La dérivée objective peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}} &= \dot{\sigma}_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + \sigma_{ij} \dot{\underline{e}}_i \otimes \underline{e}_j + \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \dot{\underline{e}}_j \\ &= \dot{\sigma}_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + \sigma_{ij} (\underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}} \cdot \underline{e}_i) \otimes \underline{e}_j + \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes (\underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}} \cdot \underline{e}_j) \\ &= \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}^{\Delta} + \underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}}^T \\ &= \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}^{\Delta} + \underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

On obtient alors la forme suivante pour la dérivée objective en rotation  $\underline{\underline{\underline{\underline{Q}}}}$  :

$$\underline{\underline{\sigma}}^\Delta = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \quad (4.23)$$

En mécanique des milieux continus en grandes transformations, il convient de faire un choix pour la rotation  $Q$ . En effet, compte tenu des déformations de la matière, il n'est pas possible de suivre rigoureusement celle-ci avec une simple rotation. On ne peut que suivre au mieux la matière. Différentes dérivées objectives existent, telles que les dérivées de Jaumann, de Green-Naghdi ou de Truesdell, présentées tableau 4.1.

	Taux de contrainte	Loi en taux
Dérivée de Jaumann du tenseur de Cauchy	$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla J} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{W}}^t$	$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla J} = \underline{\underline{C}}^{\sigma J} : \underline{\underline{D}}$
Dérivée de Jaumann du tenseur de Kirchhoff	$\underline{\underline{\tau}}^{\nabla J} = \underline{\underline{\dot{\tau}}} - \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{W}}^t$	$\underline{\underline{\tau}}^{\nabla J} = \underline{\underline{C}}^{\tau J} : \underline{\underline{D}}$
Dérivée de Truesdell du tenseur de Cauchy	$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla \tau} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \text{div}(\underline{\underline{v}})\underline{\underline{\sigma}} - (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}) \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}})^t$	$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla \tau} = \underline{\underline{C}}^{\sigma \tau} : \underline{\underline{D}}$
Dérivée de Green-Naghdi du tenseur de Cauchy	$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla G} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^t$ $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\dot{R}}} \cdot \underline{\underline{R}}^t$	$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla G} = \underline{\underline{C}}^{\sigma G} : \underline{\underline{D}}$

**Tableau 4.1** – Dérivées objectives et lois de comportement associée [BEL 00, FLO 13]

#### 4.2.2 Dérivée objective adaptée aux matériaux fibreux

Les travaux de Hagège [HAG 04, BOI 05] ont permis de montrer que l'utilisation de dérivées objectives classiques, telles que celles de Green-Naghdi et Jaumann, ne garantit pas le suivi des directions d'anisotropie et donc l'objectivité de la loi de comportement. Les repères associés à ces dérivées tournent selon des rotations moyennes de la matière et ne suivent pas précisément la transformation des directions d'anisotropie. Ces travaux introduisent une nouvelle dérivée objective, propre aux mèches, appliquée aux renforts tricotés [HAG 04, BOI 05] puis étendue aux tissés [BAD 08a]. Cette dérivée s'appuie sur la rotation des fibres, correspondant ainsi au repère d'isotropie transverse de la mèche. De cette manière, les composantes de rigidité longitudinale et de rigidités transverses, très différentes, peuvent être distinguées. On définit alors la base  $\{f_i\} = \{f_1, f_2, f_3\}$  comme base liée à la direction des fibres  $\{f_1\}$ . Notons  $\Phi$  la rotation de la fibre. La dérivée objective associée, illustrée figure 4.3, s'exprime alors de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla \Phi} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{\Omega}}_\Phi \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}_\Phi^t \quad (4.24)$$

où  $\underline{\underline{\Omega}}_\Phi = \underline{\underline{\dot{\Phi}}} \cdot \underline{\underline{\Phi}}^t$  est le spin de la rotation des fibres. La démarche proposée pour le calcul de cette rotation est la suivante [BAD 08a] :

- calcul de la direction actuelle des fibres  $\underline{f}_1$  à partir de la direction initiale des fibres  $\underline{f}_1^0$  connue et du gradient de la transformation  $\underline{E}$  :

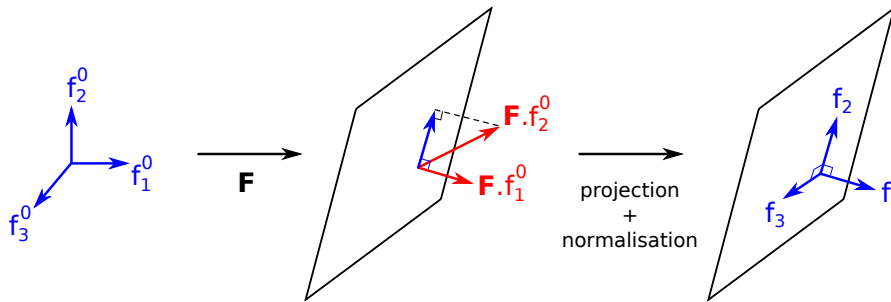
$$\underline{f}_1 = \frac{\underline{E} \cdot \underline{f}_1^0}{\|\underline{E} \cdot \underline{f}_1^0\|} \quad (4.25)$$

- projection de la direction 2  $\underline{f}_2$  dans le plan normal à  $\underline{f}_1$  afin de construire une base orthonormée, en supposant que  $\underline{f}_2$  ait subi la même transformation  $\underline{E}$  que  $\underline{f}_1$  :

$$\underline{f}_2 = \frac{\underline{E} \cdot \underline{f}_2^0 - \left( (\underline{E} \cdot \underline{f}_2^0) \cdot \underline{f}_1 \right) \cdot \underline{f}_1}{\left\| \underline{E} \cdot \underline{f}_2^0 - \left( (\underline{E} \cdot \underline{f}_2^0) \cdot \underline{f}_1 \right) \cdot \underline{f}_1 \right\|} \quad (4.26)$$

- calcul de la direction 3  $\underline{f}_3$  par produit vectoriel des deux autres directions :

$$\underline{f}_3 = \underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2 \quad (4.27)$$



**FIGURE 4.3** – Définition de la rotation suivant la direction des fibres [BAD 08a]

Est obtenue ainsi la matrice de rotation décrivant la direction actualisée des fibres au sein de la mèche et donc la base dite "matérielle" :

$$\underline{\Phi} = \left[ \{ \underline{f}_1 \} \{ \underline{f}_2 \} \{ \underline{f}_3 \} \right] \quad (4.28)$$

Il est alors possible, à l'aide de cette rotation, d'assurer le respect du principe de l'indifférence matérielle et de l'objectivité. Ainsi, une loi de comportement hypoélastique spécifique aux matériaux fibreux peut s'exprimer simplement par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla\Phi} = \underline{\underline{C}}^{\sigma\Phi} : \underline{\underline{D}} \quad (4.29)$$

### 4.2.3 Tenseur de comportement

Une mèche est un assemblage de fibres orientées approximativement dans la même direction (fig.4.4). Cet assemblage est supposé suffisamment compact pour que les fibres



ne puissent pas se déplacer de façon indépendante. Cette hypothèse permet de considérer ce matériau « mèche » comme un matériau continu. Dans les travaux de Latil [LAT 11], des essais mécaniques sont réalisés à l'intérieur d'un tomographe à rayons X. Des observations précises de la déformation microscopique et des mouvements des fibres au sein d'une mèche ont ainsi pu être réalisées, montrant le bien fondé d'une telle approche continue. Le matériau homogénéisé correspondant présente alors une direction privilégiée, celle des fibres. La distribution des fibres dans une section de la mèche déformée a pu être analysée par tomographie X [BAD 08a], et il a été conclu que cette distribution est isotrope pour les matériaux étudiés dans ce manuscrit. Notons que certains matériaux dont la structure est plus complexe ne satisfont pas cette hypothèse [KOI 06]. Le matériau homogénéisé « mèche », sera donc supposé isotrope transverse.



**FIGURE 4.4** – Isotropie transverse de la mèche de renfort tissé. Image obtenue par tomographie X

La forme du tenseur d'élasticité tangent eulérien est la suivante [DAN 94] :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{matrix} (11) \\ (22) \\ (33) \\ (12) \\ (23) \\ (31) \end{matrix} \quad (4.30)$$

où les constantes de rigidités s'expriment :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2^2 \Delta} \\ C_{22} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{12} = \frac{\nu_{12}(1 + \nu_{32})}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{23} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{44} = G_{12} \\ \Delta = \frac{1 - 2\nu_{12}\nu_{21}(1 + \nu_{32}) - \nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_2^2} \end{array} \right. \quad (4.31)$$

De plus, le coefficient de poisson  $\nu_{12}$  est considéré nul, ceci implique  $C_{12} = 0$ . Le comportement de la mèche peut alors être défini :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{12} & 0 & 0 \\ & sym & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 \\ & & & & & G_{31} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Le modèle de comportement du matériau homogène équivalent doit traduire les caractéristiques du matériau fibreux :

- le comportement longitudinal de la mèche pilote les principaux aspects de la transformation du renfort. La rigidité de la mèche dans la direction longitudinale est nettement supérieure à toutes les autres rigidités ; cela nécessite de suivre parfaitement cette direction pour ne pas cumuler d'erreurs (actualisation des contraintes par exemple). Cet aspect est traduit par la nécessité de suivre parfaitement les directions matérielles lors des grandes déformations subies par le renfort (cisaillement par exemple). Cela se traduit par la mise en place d'une dérivée objective adaptée aux milieux à une direction de fibres vue précédemment.
- le comportement transverse intervient dans la plupart des sollicitations (traction biaxiale, cisaillement dans le plan...). Les mèches étant très rigides longitudinalement, les directions transverses sont les directions privilégiées des déformations ; il est donc important de définir un modèle de comportement fiable dans ces directions. Le comportement d'une section de mèche est alors considéré comme étant la combinaison d'un changement de surface et d'un changement de forme. Cet aspect se traduit au niveau du tenseur de déformation par la décomposition en une composante sphérique ( $\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{2}$ ) et une composante déviatorique ( $\varepsilon_d = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{2}$ ).

- enfin, la faible rigidité de flexion des mèches est prise en compte en introduisant un module de cisaillement faible par rapport au module longitudinal [GAS 00].

Finalement, Badel propose comme forme finale du tenseur :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} E^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{A-B}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ sym & & & & B & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

- $E^*$  est le module d'Young apparent, tel que  $E^* = E \frac{S_0}{S}$ ,  $S_0$  étant la section initiale,  $S$  la section actuelle et  $E$  le module d'Young de la mèche.
- $G$  est le module de cisaillement.
- $A = A_0 e^{-p\varepsilon_s} e^{n\varepsilon_{11}}$  et  $B = B_0 e^{-p\varepsilon_s}$  sont des coefficients élastiques représentant respectivement les rigidités relatives à la variation de surface et à la variation de forme des sections.

Tous ces paramètres dépendent de l'état de déformation du matériau et peuvent être caractérisés à l'aide de manipulations expérimentales. Le principal avantage de ce type de loi de comportement est la facilité à être enrichie de manière à formaliser un comportement non linéaire visco-élastique ou visco-plastique.

## 4.3 Lois hyperélastiques

### 4.3.1 Définitions

L'inégalité de Clausius-Duhem constitue le point de départ de la définition des lois de comportement hyperélastiques. Ces lois diffèrent en ce point des lois élastiques et des lois hypoélastiques qui sont dépourvues de fondements thermodynamiques. Notons que les lois hyperélastiques font partie des lois élastiques, qui font elles-mêmes partie des lois hypoélastiques. Dans la configuration initiale et dans la configuration déformée, l'inégalité de Clausius-Duhem prend respectivement les formes :

$$\Phi_0 = -\rho_0 (\dot{\psi} - \dot{\theta}\eta) - \frac{1}{\theta} \underline{Q} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \underline{x}} + \underline{S} : \underline{\dot{E}} \geq 0 \quad (4.34)$$

$$\Phi = -\rho (\dot{\psi} - \dot{\theta}\eta) - \frac{1}{\theta} \underline{q} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \underline{X}} + \underline{\sigma} : \underline{D} \geq 0 \quad (4.35)$$

avec  $\Phi_0$  et  $\Phi$  les dissipations par unité de volume (initial et final),  $\psi$  l'énergie libre spécifique (i.e. par unité de masse),  $\theta$  la température et  $\underline{Q}$  et  $\underline{q}$  les vecteurs flux de chaleur en configuration initiale et actuelle. En théorie « purement mécanique », il est courant de

s'affranchir des effets thermiques, c'est-à-dire de considérer la température homogène et la transformation isotherme. Les dissipations s'écrivent alors :

$$\Phi_0 = -\rho_0\dot{\Psi} + \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}} \quad (4.36)$$

$$\Phi = -\rho\dot{\psi} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \quad (4.37)$$

Un matériau hyperélastique est un matériau dont l'énergie de déformation par unité de volume initial  $w = \rho_0\Psi$  ne dépend que de l'état actuel de déformation et qui est non dissipatif, c'est-à-dire que les dissipations 4.36 et 4.37 sont nulles. On peut déduire de ces deux conditions les équations suivantes, relations de base des lois de comportement hyperélastiques :

$$\begin{aligned} \dot{w}(\underline{\underline{F}}) &= \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}} \\ w &= w(\underline{\underline{F}}) = \rho_0\Psi \end{aligned} \quad (4.38)$$

Il a été montré [CIA 88] que pour respecter le principe d'indifférence matérielle, il faut et il suffit que l'énergie de déformation soit une fonction du tenseur de Cauchy-Green droit :

$$\begin{aligned} w &= w(\underline{\underline{C}}) = \rho_0\Psi \\ \dot{w}(\underline{\underline{C}}) &= \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{C}}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ainsi, les problématiques liées aux dérivées objectives n'ont pas lieu d'être dans ce type de formulation. On en déduit alors :

$$\dot{w}(\underline{\underline{C}}) = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{C}}} : \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial t} = \frac{1}{2}\underline{\underline{S}} : \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial t} \Leftrightarrow \left( \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{C}}} - \frac{1}{2}\underline{\underline{S}} \right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (4.40)$$

L'équation 4.40 constitue l'expression générale des lois de comportement hyperélastiques. Ces dernières nécessitent alors uniquement la définition de l'énergie de déformation  $w$  correspondant au comportement mécanique du matériau. Ce potentiel n'est admissible que s'il vérifie les conditions suivantes :

- $w$  s'annule lorsque le matériau n'est soumis à aucune sollicitation :

$$w(\underline{\underline{I}}) = 0 \quad (4.41)$$

- $w$  respecte le principe d'indifférence matérielle :

$$w(\underline{\underline{F}}) = w(\underline{\underline{QF}}), \forall \underline{\underline{Q}} \in \mathcal{SO}_3 \quad (4.42)$$

- $w$  respecte les symétries du matériau :

$$w(\underline{\underline{F}}) = w(\underline{\underline{FQ}}), \forall \underline{\underline{Q}} \in \mathcal{G} \subset \mathcal{SO}_3 \quad (4.43)$$

où  $\mathcal{G}$  est le groupe de symétries du matériau. La condition 4.41 dépend de la forme choisie pour l'énergie de déformation. La condition 4.42 est satisfaite par l'utilisation du tenseur de Cauchy-Green droit comme argument de  $w$ . La condition 4.43 est satisfaite par l'introduction d'invariants du tenseur de Cauchy-Green droit.

### 4.3.2 Hyperélasticité isotrope transverse

Les théorèmes de représentation des fonctions à arguments vectoriels ou tensoriels statuent qu'une fonction d'un tenseur symétrique d'ordre deux est isotrope si et seulement si elle peut être représentée par une fonction de trois invariants du tenseur argument :

$$w(\underline{\underline{C}}) \text{ est isotrope} \Leftrightarrow \exists \tilde{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad w(\underline{\underline{C}}) = \tilde{w}(I_1, I_2, I_3) \quad (4.44)$$

Les invariants classiquement utilisés pour définir la fonction  $\tilde{w}$  sont les coefficients du polynôme caractéristique de  $\underline{\underline{C}}$  :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr}(\underline{\underline{C}}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left( \text{Tr}(\underline{\underline{C}})^2 - \text{Tr}(\underline{\underline{C}}^2) \right) \\ I_3 &= \text{Det}(\underline{\underline{C}}) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dans un souci de simplicité, la même notation sera utilisée pour  $w$  et  $\tilde{w}$ .

Un matériau isotrope transverse est caractérisé, dans la configuration initiale, par une direction privilégiée  $\underline{\underline{M}}$  (normée). Cette direction permet de définir le tenseur de structure  $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \otimes \underline{\underline{M}}$  caractéristique du groupe de symétrie du matériau. D'après le théorème de représentation, la représentation du potentiel de déformation s'écrit dans ce cas [BOE 78, ITS 00] :

$$w^{it} = w^{it}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) \quad (4.46)$$

où  $I_1, I_2, I_3$  sont les invariants de  $\underline{\underline{C}}$  définis précédemment et  $I_4 = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}}$  et  $I_5 = \underline{\underline{C}}^2 : \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{M}}$  sont des invariants mixtes correspondant au tenseur de structure  $\underline{\underline{M}}$ . Le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff s'écrit alors :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{C}}} = 2 \left( \frac{\partial w}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_5} \frac{\partial I_5}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) \quad (4.47)$$

### 4.3.3 Loi hyperélastique basée sur des invariants "physiques"

Charmetant [CHA 11b] a mis en place une loi hyperélastique pour les mèches de renfort formulée à l'aide d'invariants porteurs de sens physique, et ceci dans le cadre de modélisations numériques sous ABAQUS/Explicit. Cette approche, inspirée

des travaux de Criscione [CRI 01], est basée sur une décomposition multiplicative du gradient de la transformation  $\underline{F}$ . Différentes parties de  $\underline{F}$  correspondant chacune à un mode de déformation peuvent alors être mises en évidence, et chacun des termes de cette décomposition est caractérisé par un invariant dit "physique", relié aux invariants classiques. L'avantage de ce type de formulation réside dans le découplage des modes de déformation, permettant ainsi de les mettre en évidence et de les identifier séparément.

Quatre modes de déformation de la mèche peuvent être alors identifiés : l'élongation, le cisaillement, la compaction et la distorsion (cisaillement dans le plan transverse). Pour chacun d'eux, un invariant peut être défini :

$$\begin{aligned} I_{elong} &= \frac{1}{2} \ln(I_4) \\ I_{cis} &= \sqrt{\frac{I_5}{I_4^2} - 1} \\ I_{comp} &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I_3}{I_4}\right) \\ I_{dist} &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}} + \sqrt{\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}}\right)^2 - 1}\right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

L'énergie volumique de déformation peut alors être exprimée en fonction de ces invariants physiques grâce à l'hypothèse de découplage :

$$w = w_{elong} + w_{cis} + w_{comp} + w_{dist} \quad (4.49)$$

A partir de cette énergie volumique, on obtient le second tenseur de Piola-Kirchhoff 4.47 tel que :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{C}}} = 2 \left( \frac{\partial w}{\partial I_{elong}} \frac{\partial I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_{cis}} \frac{\partial I_{cis}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_{dist}} \frac{\partial I_{dist}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) \quad (4.50)$$

Regardons maintenant l'écriture des différentes énergies associées aux modes de déformation.

#### 4.3.3.1 Énergie d'élongation

Un essai de traction sur une mèche seule permet de caractériser le comportement de la mèche en élongation. Les essais de ce type réalisés révèlent un comportement en traction quasi linéaire (fig.4.5). En effet, les défauts d'alignement des fibres introduisent une légère non-linéarité de ce comportement : au sein de la mèche, les fibres ne sont pas exactement de la même longueur ; ainsi, la mise sous tension de la mèche se traduit à l'échelle inférieure par une mise sous tension progressive des fibres. Afin de prendre en compte cette non-linéarité, le potentiel de déformation sera défini par morceaux : une

partie décrivant la réponse en effort non-linéaire de la mèche lorsque  $I_{elong} \leq I_{elong}^0$ , et une partie décrivant la réponse linéaire lorsque  $I_{elong} > I_{elong}^0$  :

$$w_{elong}(I_{elong}) = \begin{cases} W_{elong}^{nl}(I_{elong}) & \text{si } I_{elong} \leq I_{elong}^0 \\ W_{elong}^{lin}(I_{elong}) & \text{si } I_{elong} > I_{elong}^0 \end{cases} \quad (4.51)$$

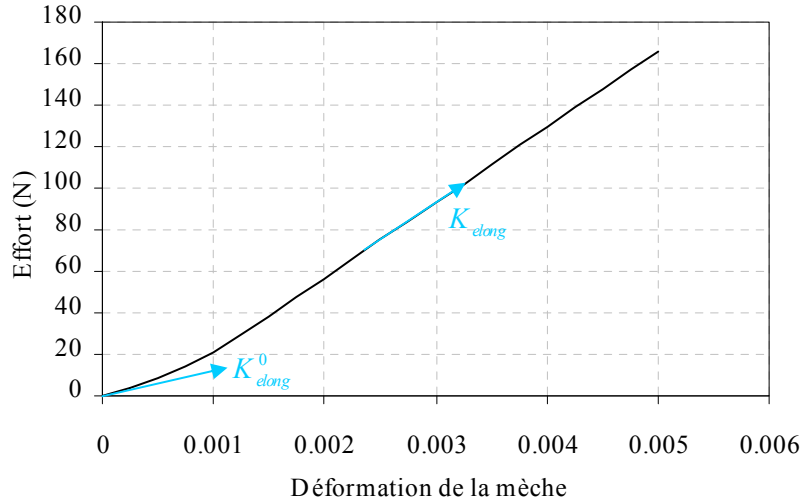


FIGURE 4.5 – Essais de traction sur une mèche seule [BUE 01]

En introduisant la section initiale  $S_0$  de la mèche (supposée constante le long de la mèche), sa rigidité initiale  $K_{elong}^0$  et sa rigidité finale  $K_{elong}$  (fig.4.5), ainsi que les conditions de continuité et de dérivabilité de la fonction  $w_{elong}$ , on obtient :

$$w_{elong}^{nl} = \frac{K_{elong} - K_{elong}^0}{6S_0 I_{elong}^0} I_{elong}^3 + \frac{K_{elong}^0}{2S_0} I_{elong}^2 \quad (4.52)$$

$$w_{elong}^{lin} = \frac{K_{elong}}{2S_0} I_{elong}^2 - \frac{K_{elong} - K_{elong}^0}{2S_0} I_{elong}^0 I_{elong} + \frac{K_{elong} - K_{elong}^0}{6S_0} (I_{elong}^0)^2 \quad (4.53)$$

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff est donné par :

$$\underline{\underline{S}}_{elong} = \frac{1}{I_4} \underline{\underline{M}} \begin{cases} \frac{K_{elong}^0}{S_0} I_{elong} + \frac{K_{elong} - K_{elong}^0}{2S_0 I_{elong}^0} I_{elong}^2 & \text{si } I_{elong} \leq I_{elong}^0 \\ -\frac{K_{elong} - K_{elong}^0}{2S_0} I_{elong}^0 + \frac{K_{elong}}{S_0} I_{elong} & \text{si } I_{elong} > I_{elong}^0 \end{cases} \quad (4.54)$$

L'aire  $S_0$  de la section de la mèche étant connue (issue de la modélisation géométrique de la maille élémentaire), trois paramètres devront donc être identifiés :  $I_{elong0}$ ,  $K_{elong}^0$  et

$K_{elong}$ . Ces paramètres seront identifiés par méthode inverse, simplement avec le solveur non-linéaire d'Excel, à partir de la courbe d'élongation.

#### 4.3.3.2 Énergie de compaction

Une loi de type « puissance » est proposée pour décrire le comportement de la mèche en compaction, et l'énergie nécessaire à une décompaction sera considérée comme nulle :

$$w_{comp}(I_{comp}) = \begin{cases} K_{comp} |I_{comp}|^p & \text{si } I_{comp} \leq 0 \\ 0 & \text{si } I_{comp} > 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

Il est supposé que dans la gamme de déformations étudiée (celle de la mise en forme du renfort), la rigidité en compaction de la mèche n'atteint jamais la rigidité du matériau composant les fibres, c'est-à-dire que la mèche ne peut pas être suffisamment compactée pour que tous les vides entre les fibres soient comblés. Le second tenseur de Piola-Kirchhoff correspondant à la compaction de la mèche dérive de l'expression :

$$\underline{\underline{S}}_{comp}(I_{comp} \leq 0) = -\frac{p}{2} K_{comp} |I_{comp}|^{p-1} \left( \underline{\underline{C}}^{-1} - \frac{1}{I_4} \underline{\underline{M}} \right) \quad (4.56)$$

Les paramètres à identifier sont donc  $K_{comp}$  et  $p$ . Comme il a été mentionné précédemment, le comportement en compaction ne peut être caractérisé expérimentalement aussi simplement que le comportement en élongation. Il sera donc fait appel à une méthode inverse, utilisant des essais de traction équibiaxiale pour identifier les deux paramètres.

#### 4.3.3.3 Énergie de distorsion

De même que le comportement en compaction, le comportement en distorsion est difficile à caractériser expérimentalement de façon directe. Il a été supposé dans cette étude que la raideur en distorsion est constante, ce qui donne le potentiel de déformation suivant :

$$w_{dist}(I_{dist}) = \frac{1}{2} K_{dist} I_{dist}^2 \quad (4.57)$$

La constante  $K_{dist}$  sera identifiée par méthode inverse, en même temps que les coefficients de la loi de compaction. Le second tenseur de Piola-Kirchhoff correspondant à la distorsion de la mèche dérive de l'expression :

$$\underline{\underline{S}}_{dist} = 2K_{dist} I_{dist} \frac{2I_4 \underline{\underline{I}} - (I_1 I_4 - I_5) \underline{\underline{C}}^{-1} + \left( I_1 + \frac{I_5}{I_4} \right) \underline{\underline{M}} - 2 \left( \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}} \right)}{4 \sqrt{(I_1 I_4 - I_5)^2 - 4 I_3 I_4}} \quad (4.58)$$



#### 4.3.3.4 Énergie de cisaillement transverse

L'énergie de cisaillement transverse de la mèche est liée au glissement relatif des fibres dans leur direction privilégiée et à la présence d'ensimage dans la mèche. Cet ensimage est supposé suffisamment influent pour que le comportement associé à ce mode de déformation soit élastique. Il est supposé également que ce comportement n'est pas rigidifiant (raideur constante). L'énergie de déformation est alors écrite sous la forme :

$$w_{cis}(I_{cis}) = \frac{1}{2} K_{cis} I_{cis}^2 \quad (4.59)$$

Et les contraintes du second tenseur de Piola-Kirchhoff sont données par :

$$\underline{\underline{S}}_{cis} = \frac{1}{2} K_{cis} \left[ \frac{1}{I_4^2} \left( \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}} \right) - \frac{2I_5}{I_4^3} \underline{\underline{M}} \right] \quad (4.60)$$

Au cours d'un essai de traction simple sur un renfort tissé, ce mode de déformation intervient fortement : dans la partie non-linéaire de la courbe de tension uniaxiale, correspondant à la diminution de l'embuvage du réseau sollicité, seuls les modes d'élongation et de cisaillement travaillent [KAW 73b]. Ensuite, dans la partie linéaire, seule l'élongation travaille. Une fois le comportement en élongation identifié, il sera donc possible d'identifier le coefficient de cisaillement à partir d'un essai de traction simple.

## 4.4 Implémentation des lois de comportement dans Abaqus/Explicit

Abaqus/Explicit permet d'implémenter des lois de comportement via des sous-routines utilisateur VUMAT (Vectorized User Material). Les paramètres d'entrée de la sous-routine contiennent les informations nécessaires à la mise en place de la plupart des lois de comportement de milieux continus.

### 4.4.1 Schémas d'intégration temporelle

Dans un problème dynamique non linéaire, les équations de la dynamique sont résolues pas à pas à l'aide de schémas d'intégration temporelle itératifs. Le temps est discrétisé en incréments, espacés d'un pas de temps donné. Ainsi, l'équation de la dynamique 4.61 discrétisée en temps, peut s'écrire à l'incrément  $i$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \quad (4.61)$$

$$\rightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{(i)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{(i)} = \mathbf{f}_{ext}^{(i)} - \mathbf{f}_{int}^{(i)} \quad (4.62)$$

où  $\mathbf{u}$  est le déplacement des nœuds,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement, et  $\mathbf{f}_{int}$  et  $\mathbf{f}_{ext}$  sont respectivement les efforts internes et externes aux nœuds. Un résidu  $\mathbf{r}$  est induit par la linéarisation nécessaire à l'obtention de l'équation 4.62 :

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}_{ext}^{(i+1)} - \mathbf{f}_{int}^{(i+1)} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{(i+1)} \quad (4.63)$$

Le schéma d'intégration temporelle définit la manière dont sont calculés le déplacement, la vitesse et l'accélération à chaque incrément de temps. Les schémas de Newmark sont les plus utilisés [NEW 59], dans lesquels le déplacement et la vitesse sont d'abord développés en séries de Taylor et tronqués au jerk avec deux coefficients de pondération sur celui-ci :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(i+1)} &= \mathbf{u}^{(i)} + \Delta t^{(i)} \dot{\mathbf{u}}^{(i)} + \frac{(\Delta t^{(i)})^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}^{(i)} + \beta (\Delta t^{(i)})^2 \dot{\ddot{\mathbf{u}}}^{(i)} \\ \dot{\mathbf{u}}^{(i+1)} &= \dot{\mathbf{u}}^{(i)} + \Delta t^{(i)} \ddot{\mathbf{u}}^{(i)} + \gamma (\Delta t^{(i)})^2 \dot{\ddot{\mathbf{u}}}^{(i)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

L'accélération étant supposée linéaire sur l'incrément, le jerk peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\ddot{\mathbf{u}}}^{(i)} = \frac{\ddot{\mathbf{u}}^{(i+1)} - \ddot{\mathbf{u}}^{(i)}}{\Delta t^{(i)}} \quad (4.65)$$

En remplaçant cette expression du jerk dans les formules précédentes, les expressions classiques du déplacement et de la vitesse associées au schéma de Newmark sont alors obtenues en réintégrant cette expression dans les équations 4.64 :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(i+1)} &= \mathbf{u}^{(i)} + \Delta t^{(i)} \dot{\mathbf{u}}^{(i)} + \frac{(\Delta t^{(i)})^2}{2} \left[ (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{u}}^{(i)} + 2\beta \ddot{\mathbf{u}}^{(i+1)} \right] \\ \dot{\mathbf{u}}^{(i+1)} &= \dot{\mathbf{u}}^{(i)} + \Delta t^{(i)} \left[ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}^{(i)} + \gamma \ddot{\mathbf{u}}^{(i+1)} \right] \end{aligned} \quad (4.66)$$

Le jeu de paramètres  $(\beta, \gamma)$  définit le schéma d'intégration que l'on souhaite utiliser, la stabilité et la précision en dépendant fortement. Lorsque le déplacement à l'incrément  $i + 1$  peut être directement obtenu en fonction du déplacement, de la vitesse et de l'accélération à l'incrément  $i$ , le schéma est dit explicite. Dans le cas contraire, le schéma est dit implicite.

#### 4.4.1.1 Schémas implicites

Dans le cas d'un schéma implicite, le déplacement ne pouvant pas être directement déterminé, il est alors nécessaire de prédire une solution à partir des données connues à l'incrément  $i$ , c'est-à-dire qu'une première estimation du déplacement peut être faite à l'aide des équations 4.62 et 4.63 :

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{r} \quad (4.67)$$

La difficulté de cette prédiction réside dans l'inversion de la matrice de raideur tangente. Un algorithme itératif, l'algorithme de Newton-Raphson, est ensuite mis en place pour corriger cette prédiction et contrôler le résidu de manière à faire converger la solution vers une solution satisfaisant l'équation d'équilibre. C'est ce qui fait la force de ce schéma, l'équilibre n'étant pas vérifié dans le cas d'un schéma explicite. Un schéma

implicite est inconditionnellement stable dans le cas où  $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$ , et la précision de second-ordre (l'erreur diminue avec le carré de l'incrément de temps) est obtenue pour  $\gamma = \frac{1}{2}$ . A l'inverse, si  $2\beta < \gamma$  et  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ , alors le schéma est conditionnellement stable et l'incrément de temps doit remplir la condition suivante, fonction de  $\omega^{max}$ , fréquence naturelle maximale du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta t \leq \frac{\omega^{crit}}{\omega^{max}} \\ \omega^{crit} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \end{array} \right. \quad (4.68)$$

Les schémas implicites les plus couramment utilisés sont résumés tableau 4.2.

Schéma	$\beta$	$\gamma$	Stabilité
Accélération moyenne	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	inconditionnelle
Accélération linéaire	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	conditionnelle
Fox-Goodwin	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	conditionnelle

**Tableau 4.2** – Schémas implicites classiques dérivés du schéma de Newmark [BOR 12]

#### 4.4.1.2 Schéma explicite aux différences centrées

Le schéma obtenu en prenant  $\beta = 0$  et  $\gamma = 1/2$  dans les formules de Newmark 4.66 s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u^{(i+1)} &= u^{(i)} + \Delta t^{(i)} \dot{u}^{(i)} + \frac{(\Delta t^{(i)})^2}{2} \ddot{u}^{(i)} \quad \text{a)} \\ \dot{u}^{(i+1)} &= \dot{u}^{(i)} + \frac{\Delta t^{(i)}}{2} (\ddot{u}^{(i)} + \ddot{u}^{(i+1)}) \quad \text{b)} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Bien que l'accélération  $\ddot{u}^{(i+1)}$  intervienne dans le calcul de la vitesse, il est possible de calculer le déplacement à l'incrément  $i$ , c'est pourquoi il s'agit d'un schéma explicite. En exprimant l'accélération dans (4.69a) et en substituant dans (4.69b), les relations suivantes sont obtenues (pour un pas de temps constant) :

$$\begin{aligned} \dot{u}^{(i)} &= \frac{u^{(i+1)} - u^{(i-1)}}{2\Delta t} \\ \ddot{u}^{(i)} &= \frac{u^{(i+1)} - 2u^{(i)} + u^{(i-1)}}{(\Delta t)^2} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Lorsque  $\beta = 0$  et  $\gamma = 1/2$  les dérivées du déplacement sont donc approchées par différences centrées. C'est pourquoi ce schéma est dit explicite aux différences centrées.

A chaque pas de temps, l'accélération  $\ddot{u}^{(i)}$  est calculée à l'aide de l'équation de la dynamique (4.61). Ce type de schéma est donc plus aisé à implémenter qu'un schéma implicite, car il n'est pas nécessaire de mettre en place un algorithme faisant converger la solution à chaque pas de temps. En contrepartie, la stabilité de ce schéma explicite est conditionnée par le pas de temps : celui-ci doit rester en dessous d'une valeur critique  $\Delta t_{crit}^{(i)}$  afin que la stabilité du schéma soit assurée. Ce pas de temps critique correspond au temps de propagation d'une onde de compression dans un élément. Il dépend donc de la plus petite dimension d'élément dans la discrétisation en éléments finis, de la densité du matériau et de sa rigidité. Le matériau pouvant avoir un comportement nonlinéaire, l'incrément de temps critique doit être réévalué à chaque pas de temps. Un coefficient de sécurité  $\alpha$  généralement 0.8 est mis en place afin de s'assurer que le pas de temps critique n'est pas dépassé :

$$\Delta t^{(i)} = \alpha \Delta t_{crit}^{(i)} \quad (4.71)$$

Le calcul du pas de temps critique associé à chaque élément est effectué par Abaqus de la façon suivante :

$$\Delta t_{crit}^{(i)} = \min_{\text{éléments}} \left( L^e \sqrt{\frac{\rho}{\lambda^e + 2\mu^e}} \right) \quad (4.72)$$

avec  $L^e$  la plus petite dimension de l'élément,  $\rho$  la densité du matériau dans l'élément, et  $\lambda^e$  et  $\mu^e$  des coefficients de Lamé équivalents. Cette façon de calculer le pas de temps critique convient pour les matériaux faiblement non-linéaires et/ou faiblement anisotropes. Pour les matériaux étudiés dans ce manuscrit, au comportement fortement anisotrope, un pas de temps critique maximum sera calculé manuellement et imposé à Abaqus, à l'aide de la formule suivante :

$$\Delta t_{crit}^{(i)} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \min_{\text{éléments}} (L^e) \quad (4.73)$$

où  $E$  est une estimation du module d'élasticité maximal du matériau, pour le calcul considéré.

#### 4.4.2 Implémentation des lois

Les lois de comportement (et donc les sous-routines VUMATs) interviennent dans le calcul des forces internes, lorsque les contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^{PI,(i)}$  induites par les déplacements  $u^{(i)}$  sont calculées. La figure 4.6 résume le principe de l'implémentation de ces lois.

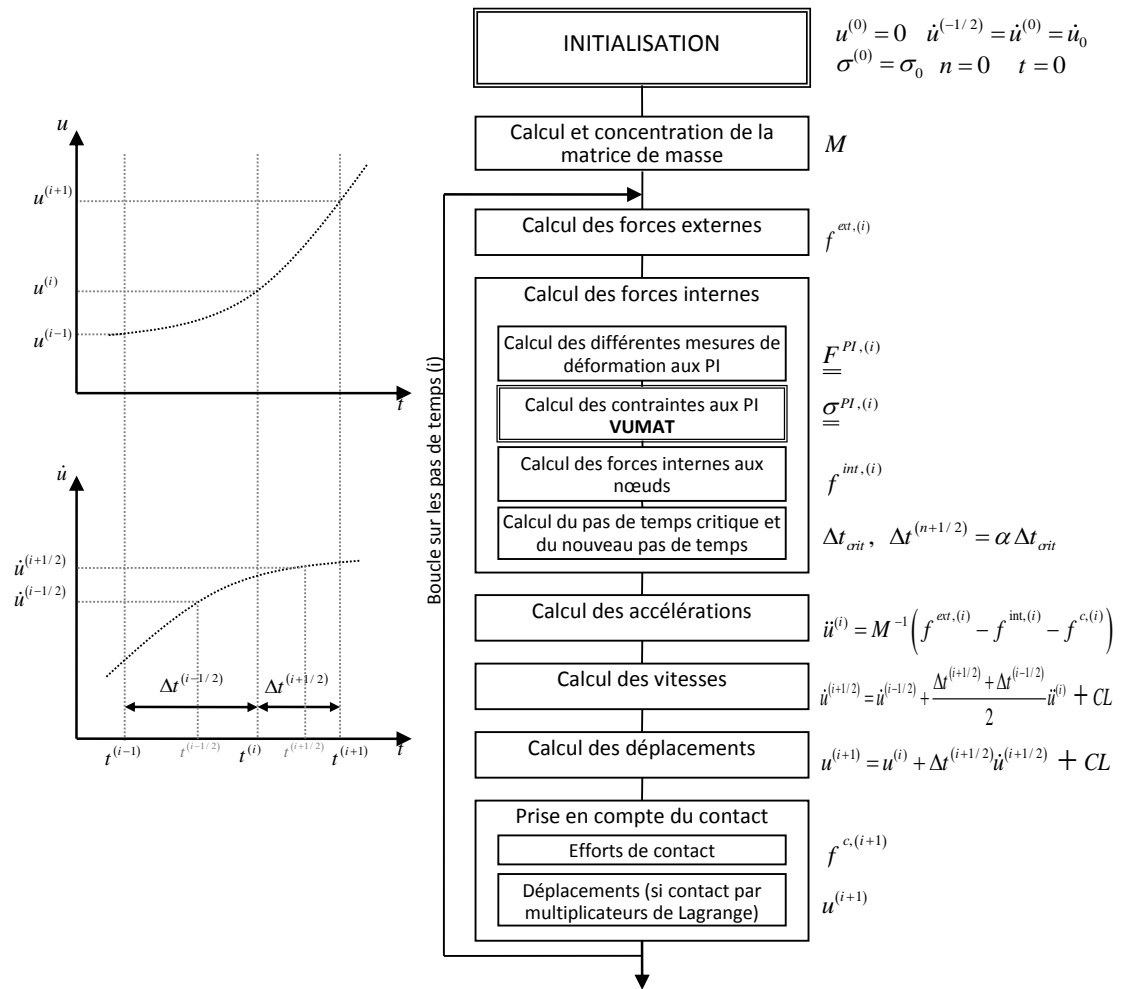


FIGURE 4.6 – Schéma de principe de l’implémentation d’un code de calcul explicite en différences centrées à pas adaptatif

## 4.5 Bilan du chapitre 4

Les formulations de lois hypoélastiques et hyperélastiques ont été décrites. Ces lois ne concernent que des matériaux élastiques.

Un modèle de comportement hypoélastique adapté a été présenté. Il implique l'utilisation d'une dérivée objective en rotation basée sur le suivi de la direction de fibres. Les lois hypoélastiques facilitent les couplages entre les modes de déformations. Elles présentent aussi l'avantage de pouvoir être aisément enrichies de manière à décrire des comportements visco-élastiques ou visco-plastiques. En effet, les réarrangements de fibres ne sont a priori pas totalement réversibles et le frottement induit implique nécessairement de la dissipation.

Une loi de comportement hyperélastique est disponible pour décrire le comportement des mèches des renforts tissés. Pour cela, la mèche a été considérée comme un milieu continu isotrope transverse. Ses différents modes de déformation ont été analysés et décrits indépendamment : un invariant et une fonction densité d'énergie ont été définis pour chacun des quatre modes de déformation de la mèche (élongation, compaction, distorsion, cisaillement transverse). Les difficultés liées à la définition des dérivées objectives n'apparaissent pas avec ce type de modèle.

Ces deux lois seront utilisées indépendamment selon les moyens expérimentaux disponibles et la praticité d'utilisation pour le renfort étudié.

Le principe de fonctionnement du code de calcul Abaqus/Explicit a également été décrit dans les grandes lignes. La compréhension du fonctionnement des codes de calcul, industriels ou non, est primordiale lorsque les calculs réalisés sortent du cadre des matériaux élastiques linéaires en petites perturbation : elle permet d'avoir une vision globale sur l'algorithme et sur les différents problèmes qui peuvent être rencontrés. L'un des objectifs de cette section était donc d'avoir les clés nécessaires à une utilisation du code de calcul adaptée au problème traité, afin de pouvoir résoudre les difficultés liées à l'implémentation des lois de comportement pour les renforts tissés.

Finalement, les deux chapitres précédents ont permis d'expliquer comment obtenir une géométrie cohérente maillée. Il est donc maintenant possible de réaliser des simulations de mise en forme à l'échelle mésoscopique de renforts tissés de composites.



# Chapitre 5

## Simulations de la mise en forme de renforts tissés

*Ce chapitre présente les résultats des différentes simulations de la mise en forme de renforts obtenus par microtomographie. Il présente les résultats obtenus aussi bien pour les simulations de mise en forme de renforts 2D que pour les simulations de renforts 3D. Un algorithme d'optimisation a été couplé aux simulations éléments finis afin d'identifier au mieux les différents paramètres des lois de comportement hypoélastique et hyperélastique. Les simulations réalisées sont en bonne corrélation avec les résultats expérimentaux.*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Simulation de la mise en forme d'un renfort tissé 2D . . . . .</b>	<b>133</b>
5.1.1	Description du renfort étudié . . . . .	133
5.1.2	Génération du modèle . . . . .	133
5.1.2.1	Périodicité des renforts tissés . . . . .	133
5.1.2.2	Géométrie des renforts tissés . . . . .	136
5.1.3	Identification des paramètres matériaux pour la loi hypoélastique .	139
5.1.3.1	Module d'Young longitudinal . . . . .	139
5.1.3.2	Paramètres du comportement transverse . . . . .	139
5.1.3.3	Identification des paramètres . . . . .	144
5.1.4	Validation des paramètres en traction biaxiale . . . . .	147



5.1.5	Validation des paramètres en compaction transverse . . . . .	147
<b>5.2</b>	<b>Simulation de la mise en forme de renforts tissés 3D . . . . .</b>	<b>149</b>
5.2.1	Description des renforts étudiés . . . . .	149
5.2.2	Modèle tissé 3D orthogonal . . . . .	150
5.2.2.1	Génération du modèle . . . . .	151
5.2.2.2	Identification des paramètres matériaux pour la loi hyperélastique . . . . .	151
5.2.2.3	Simulation de la compaction transverse du renfort . . . . .	152
<b>5.3</b>	<b>Bilan du chapitre 5 . . . . .</b>	<b>156</b>

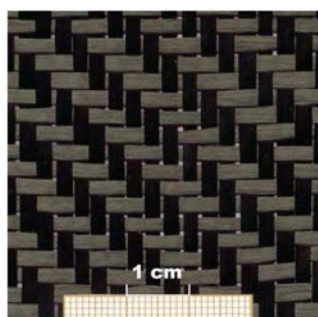
---

## 5.1 Simulation de la mise en forme d'un renfort tissé 2D

Les aspects majeurs pour la mise en place de modèles de simulation par éléments finis de la mécanique des renforts tissés concernent la loi de comportement mécanique de la mèche. Dans le cas de simulations mésoscopiques, le matériau continu doit traduire le comportement très spécifique des mèches du renfort. Cette problématique a fait l'objet du chapitre précédent. Bâtir le modèle de simulation à échelle mésoscopique requiert également de s'intéresser à des points d'une grande importance comme la fidélité du maillage et les conditions aux limites à appliquer. Ce chapitre présente les différents points clés qui permettront de réaliser les calculs par éléments finis (Abaqus/explicit) à l'échelle mésoscopique de la déformation des renforts tissés de composites.

### 5.1.1 Description du renfort étudié

Le renfort étudié est un sergé de carbone 2x2 : le G0986. Ce tissé a fait l'objet de plusieurs études [BUE 98, DUM 03, NGU 13] qui permettront de comparer les résultats obtenus. Ce renfort présente de bonnes caractéristiques mécaniques et géométriques (fig 5.1). Il est pourvu aussi d'une quasi symétrie chaîne/trame. Il est donc considéré comme étant équilibré dans cette étude.



Caractéristiques	Données
Armure	Sergé 2x2 équilibré
Nb de fibre/mèche (chaîne)	6K
Nb de fibre/mèche (trame)	6K
Contexture (chaîne)	3.5 mèches/cm
Contexture (trame)	3.5 mèches/cm
Masse surfacique	285 g/m <sup>2</sup>
Module de Young (6K Carbon Yarn)	228 GPa
Epaisseur tissu	0.3 mm

FIGURE 5.1 – Caractéristiques géométriques du sergé de carbone 2x2 : le G0986

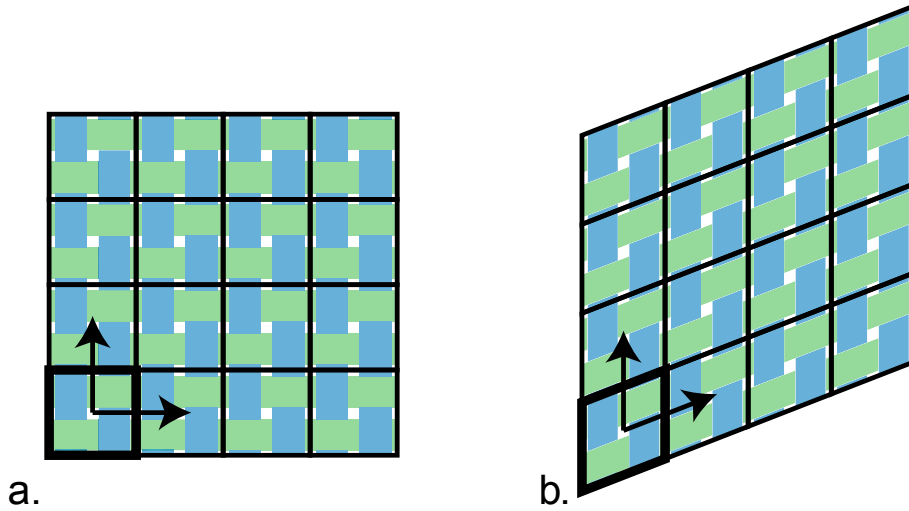
### 5.1.2 Génération du modèle

#### 5.1.2.1 Périodicité des renforts tissés

Dans la configuration non déformée, le renfort tissé est une structure périodique plane : l'ensemble du renfort peut être reconstitué par translations successives d'un motif appelé maille élémentaire (voir fig. 5.2). Cette maille élémentaire, non unique, constitue un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau.

Le VER est le plus petit élément de volume permettant de reconstituer l'ensemble de la structure par simples translations, donc sans utiliser symétries et rotations. Dans certains cas, des conditions de symétrie peuvent également être ajoutées afin de réduire un

peu plus la taille du modèle. Toutefois, il est impératif que les symétries « géométriques » du modèle soient les mêmes que celles du chargement mécanique et du matériau. Cela ne constitue pas le cas général.



**FIGURE 5.2** – Reconstitution du renfort complet par translation d’une maille élémentaire a) non déformée et b) soumise à une transformation homogène

Deux vecteurs, non uniques, sont nécessaires pour décrire la périodicité du renfort [BAD 07]. Par souci de simplicité, ces deux vecteurs seront pris orientés par les directions de chaîne et de trame du renfort, et de normes égales aux largeurs de la maille élémentaire. Ils seront notés  $\vec{T}_c$  et  $\vec{T}_t$  (fig. 5.3). Deux points matériels  $P_1$  et  $P'_1$  du renfort sont appariés s'ils sont images l'un de l'autre par un déplacement d'un nombre entier de translations  $\vec{T}_c$  et  $\vec{T}_t$  :

$$P_1 \text{ et } P'_1 \text{ sont appariés} \Leftrightarrow P'_1 = P_1 + n_c \vec{T}_c + n_t \vec{T}_t \quad (5.1)$$

Lorsque le renfort est soumis à une transformation homogène, les propriétés de périodicité précédentes sont conservées, mais les vecteurs  $\vec{T}_c$  et  $\vec{T}_t$  changent : les nouveaux vecteurs  $\vec{t}_c$  et  $\vec{t}_t$  sont les images par cette transformation des vecteurs  $\vec{T}_c$  et  $\vec{T}_t$  (fig. 5.4).

Le champ de déplacement  $\varphi(\vec{X})$  associé à la transformation de la maille élémentaire peut être décomposé en deux parties : un champ de déplacement homogène macroscopique  $\varphi_m(\vec{X})$  et un champ de déplacement local  $\varphi_l(\vec{X})$  décrivant les déplacements de chaque point de la maille élémentaire par rapport aux déplacements macroscopiques :

$$\varphi(\vec{X}) = \varphi_m(\vec{X}) + \varphi_l(\vec{X}) \quad (5.2)$$

Dans les simulations qui seront mises en place dans ce chapitre, le champ de déplacement macroscopique sera imposé à la maille élémentaire (e.g. traction biaxiale) tandis

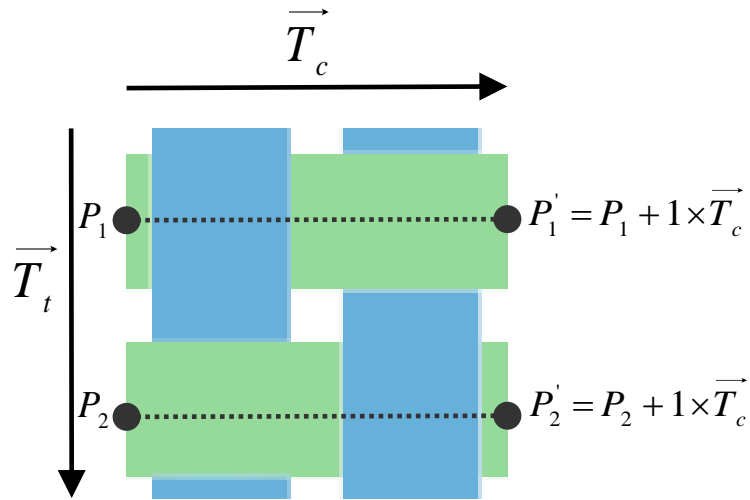


FIGURE 5.3 – Points appariés au sein d'une maille élémentaire

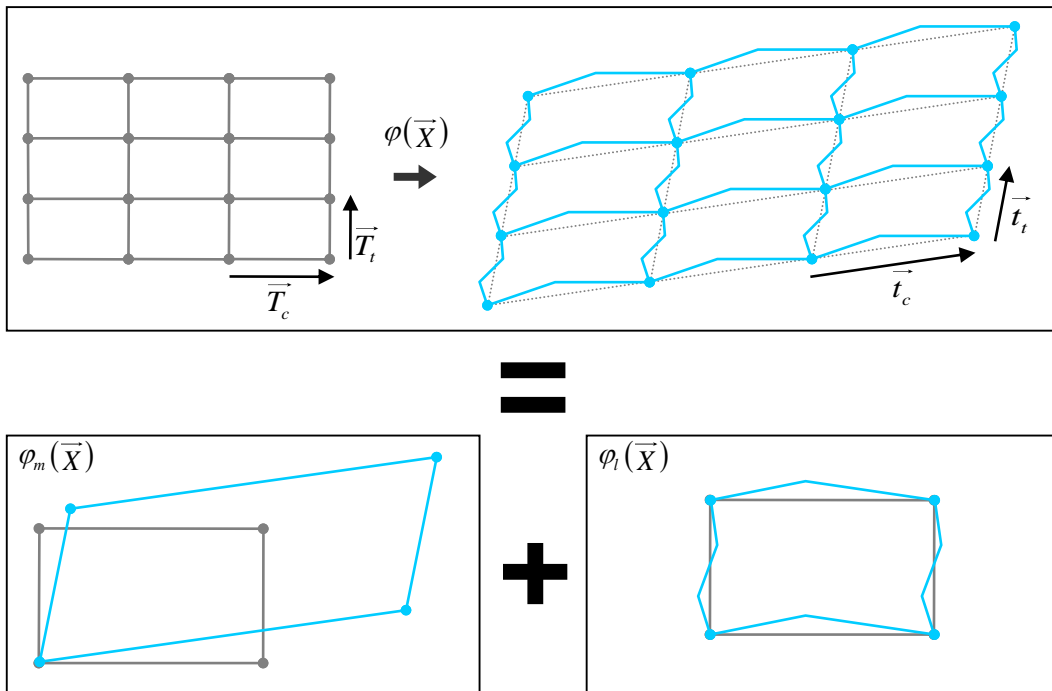


FIGURE 5.4 – Déformation globale et déformations locales de la maille élémentaire permettant de garantir les conditions de périodicité du champ de déplacement du renfort soumis à une transformation globale homogène

que le champ de déplacement local fera partie des inconnues du problème. La périodicité du renfort se traduit par la nécessité que les déplacements locaux des points appariés soient identiques :

$$P_1 \text{ et } P'_1 \text{ sont appariés} \Rightarrow \varphi_l(P_1) = \varphi_l(P'_1) \quad (5.3)$$

Les coins de la maille élémentaire étant appariés les uns aux autres, leurs déplacements locaux doivent être identiques. Un déplacement local identique des coins de la maille élémentaire correspondant à un mouvement de corps rigide, les mouvements locaux des coins de la maille élémentaire peuvent être supposés nuls, sans perte de généralité :

$$\varphi_l(P_1) = \varphi_l(P'_1) = 0 \quad (5.4)$$

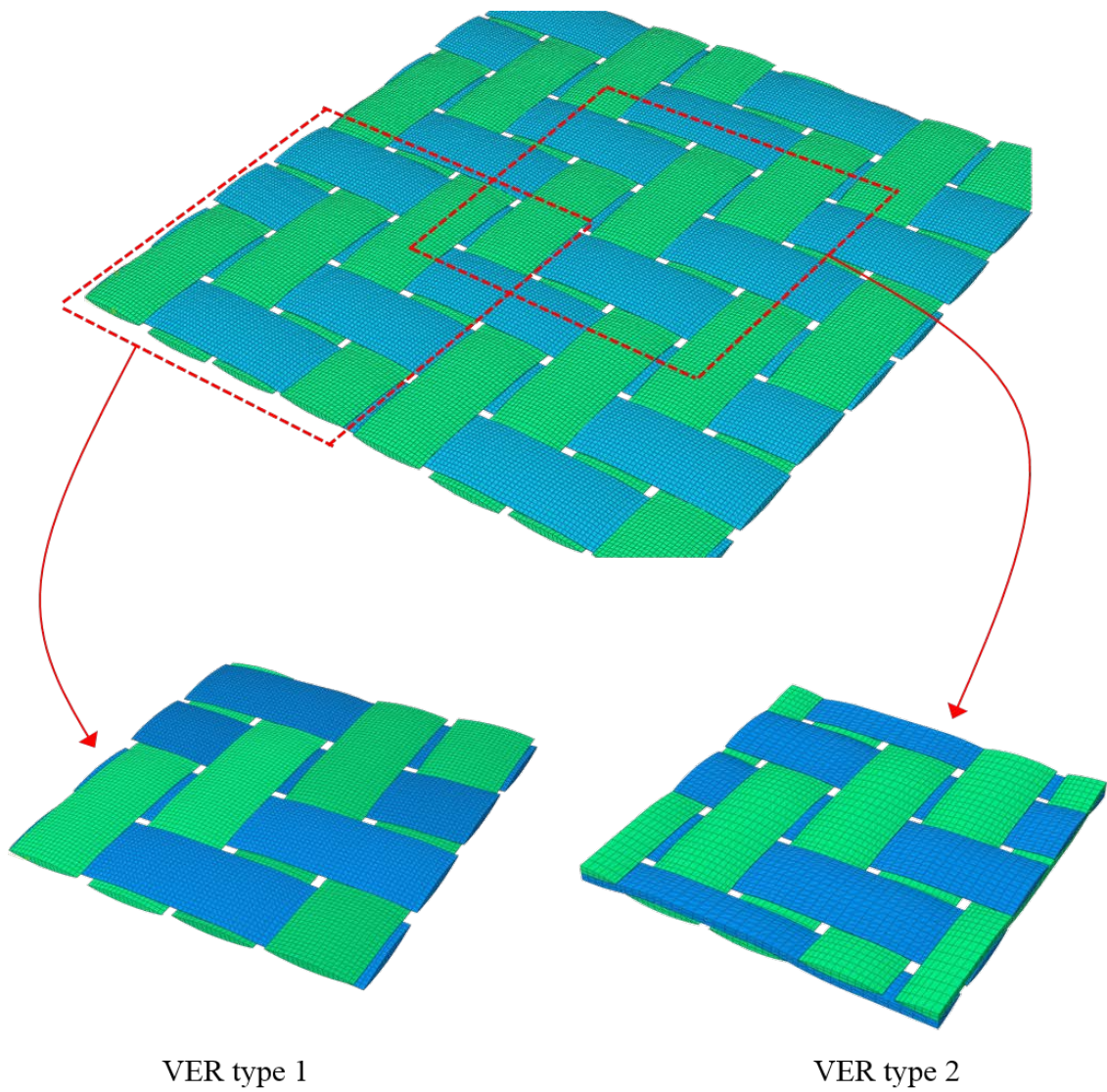
Le champ de déplacement macroscopique  $\varphi_m(\vec{X})$  ainsi que les relations (5.3) et (5.4) constituent les conditions aux limites de la plupart des simulations qui sont présentées dans ce chapitre : pour une transformation globale  $\varphi_m$  donnée, chaque paire de points  $(P_1, P'_1)$  appariés doit vérifier la relation :

$$\varphi(P_1) - \varphi(P'_1) = \varphi_m(P_1) - \varphi_m(P'_1) \quad (5.5)$$

### 5.1.2.2 Géométrie des renforts tissés

Étant donnée la définition ci dessus, il vient immédiatement que le choix d'un VER n'est pas unique. La Figure 5.5 présente deux VER possibles du sergé. Il est théoriquement possible d'utiliser l'un ou l'autre de ces deux VER. Cependant, certaines sollicitations comme le cisaillement nécessite l'écriture des conditions aux limites sur les points matériels (les points appartenant au maillage) sur l'ensemble des frontières du VER. Un VER de type 2 est donc préférable. En traction biaxiale ou compression, l'utilisation d'une cellule de type 1 ne pose pas de problème.

La modélisation géométrique (fig.5.6) utilisée pour étudier le comportement de la maille élémentaire est capitale pour les résultats des simulations du comportement de la maille élémentaire. Le modèle utilisé dans cette thèse est généré à partir de  $\mu$ CT (fig.5.6a) (cf chapitre 2 et 3). Ce modèle permet d'obtenir une géométrie (fig.5.6b) la plus proche de la géométrie réelle du renfort (embuvages, largeurs de mèches, épaisseur sont identiques). Le modèle TexGen fournit des sections plus régulières (fig.5.6c). Les mèches de trame sont toutes horizontales tandis que celles obtenues par tomographie ont une orientation qui varie en fonction de leurs positions par rapport aux mèches de chaîne. La forme de la section transversale est parfaitement lenticulaire dans le modèle géométrique alors qu'elle n'est pas si régulière dans le modèle tomographique. La mèche de chaîne est également quelque peu différente avec des parties rectilignes qui ne sont pas présentes dans la géométrie en provenance de la tomographie. Une rotation de la mèche de trame dans le modèle TexGen peut être considérée pour s'adapter à



**FIGURE 5.5** – Configurations d'un VER

la direction obtenue par tomographie, mais cela conduit à des interpénétrations de mèches ce qui rend difficile les calculs EF. En général, les interpénétrations de renforts complexes sont un des principaux inconvénients rencontrés lors de l'utilisation de ce genre de modèleur alors que le modèleur tomographique permet la génération de n'importe quelle géométrie.



(a) Coupe de tomographie du sergé



(b) Coupe segmenté du sergé par la méthode du tenseur de structure



(c) Coupe du sergé obtenue par Texgen

**FIGURE 5.6** – Comparaison des différents modèles du sergé

### Maillage

La phase de maillage présente généralement une influence majeure dans les analyses par éléments finis, l'utilisation du modèle géométrique à partir de la  $\mu$ CT permet de mailler n'importe quel type de renfort par des éléments tétraédriques. Toutefois, pour obtenir des résultats satisfaisants, le maillage doit avoir un nombre suffisant d'élément. De plus, pour respecter la périodicité du VER, on utilisera dans Abaqus des References Points (RP) pour appairer les noeuds frontières d'une mèche qui ne sont pas en vis à vis comme illustré sur la figure 5.7. L'orientation des éléments suit bien la direction des fibres comme vu dans la section 3.2.2.



**FIGURE 5.7** – Appairage par des References Points

### 5.1.3 Identification des paramètres matériaux pour la loi hypo-élastique

Un des points importants de tout modèle de simulation est l'identification des paramètres du modèle de matériau utilisé. Ici le modèle développé au cours du chapitre 5 n'est pas classique et présente des paramètres assez difficiles à appréhender. Si le module de rigidité longitudinale est déterminé assez facilement, nous verrons qu'il est moins direct d'aborder les paramètres du comportement transverse.

#### 5.1.3.1 Module d'Young longitudinal

Des essais de traction sur une mèche extraite du renfort permettent de déterminer aisément le module de tension (raideur) de la mèche. Dans cette étude, celui-ci est constant, ce qui n'est pas le cas du module d'Young longitudinal d'un matériau continu équivalent. Le module utilisé dans la loi de comportement mise en place est un module apparent qui doit garantir le respect de la raideur de mèche. On note ce module  $E$ , il doit vérifier :

$$E = E_0 \frac{S_0}{S} = \frac{k}{S_0} \frac{S_0}{S} \quad (5.6)$$

où  $k$  est la raideur de la mèche et  $S_0$  et  $S$  sont respectivement les aires de la section transverse initiale et déformée. Puisque le facteur correctif  $S_0/S$  est calculé de manière intrinsèque au cours du calcul, il suffit de déterminer  $E_0$ . Pour cela une simulation de traction est réalisée sur une section de mèche extraite du maillage initial du renfort.  $E_0$  est alors ajusté de sorte que la raideur de la mèche corresponde à la valeur expérimentale mesurée.

#### 5.1.3.2 Paramètres du comportement transverse

Bien que les paramètres de comportement transverse nécessaires à notre modèle aient une véritable signification physique, une caractérisation expérimentale sur la mèche seule semble difficile en raison de la difficulté à travailler sur le matériau considéré. Une mèche extraite d'un renfort a très peu de tenue, d'éventuels essais de compression seraient très dépendants des conditions aux limites, l'ordre de grandeur des efforts à mesurer est très faible pour des moyens expérimentaux classiques... Une autre approche est proposée, il s'agit de procéder par une méthode inverse [SCH 92a, GAS 00]. Dans ce but, il est primordial de considérer un essai qui permette de mettre en jeu de manière significative le comportement à identifier. Nous développons dans les paragraphes suivants le principe de cette méthode et le choix des essais utilisés, puis la méthode d'optimisation des paramètres.

#### Méthode inverse / essai expérimental

Le principe d'une méthode inverse consiste à ajuster certains paramètres d'un modèle en comparant les résultats fournis par ce modèle à un résultat de référence



[SCH 92a]. Ici, les paramètres à identifier sont les paramètres du comportement transverse  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $n$  et  $p$  (introduits au chapitre 4). Le résultat de référence est issu d'un essai expérimental. Il convient alors de faire usage d'un essai, si possible simple, dans lequel on sollicite de manière significative le comportement transverse des mèches et qui puisse être simulé à échelle mésoscopique. Deux essais peuvent être envisagés :

- Un essai de compression de renfort entre deux plans parallèles au plan du renfort est un essai assez simple à réaliser. Toutefois, les quantités à mesurer sont très faibles au départ et se pose la question de situer le début de l'essai. Autre inconvénient, majeur, ce test est réalisé sous tension longitudinale nulle. Il n'est donc pas possible d'identifier le paramètre  $n$  de cette manière.
- Un essai de traction biaxiale [BUE 98, BUE 01] est plus difficile mais il met en jeu un fort écrasement transverse des mèches sous tension. Il permet d'identifier les paramètres que nous cherchons.

### Méthode d'optimisation

L'objectif ici est d'optimiser les paramètres du comportement transverse de manière à obtenir un résultat cohérent avec les courbes expérimentales de compression et traction biaxiale. Le problème consiste à minimiser une erreur  $e$ , mesure de l'écart entre les courbes simulées et expérimentales. Pour cela, la méthode des moindres carrés est utilisée.

**Problème d'optimisation** Il s'agit de comparer deux courbes et de minimiser l'erreur entre les deux. Soient  $n_e(x_e, y_e)$  et  $n_s(x_s, y_s)$  les ensembles des points des courbes expérimentale et simulée respectivement. Les abscisses des points ne correspondant pas, le choix est fait ici d'interpoler la courbe expérimentale sur la courbe simulée, choix non déterminant pour la précision du résultat final de l'algorithme. Soit  $n_i(x_i, y_i)$  l'ensemble des points expérimentaux interpolés, calculés comme suit :

- recherche des points expérimentaux  $n_e^1(x_e^1, y_e^1)$  et  $n_e^2(x_e^2, y_e^2)$  encadrant l'abscisse  $x_s$  du point de la courbe simulée considéré :

$$x_e^1 \leq x_s \leq x_e^2 \quad (5.7)$$

- interpolation linéaire des ordonnées  $y_e^1$  et  $y_e^2$  à l'abscisse  $x_i$  :

$$y_i = y_e^1 + \frac{y_e^2 - y_e^1}{x_e^2 - x_e^1} (x_i - x_e^1) \quad (5.8)$$

L'erreur de la courbe simulée par rapport à la courbe expérimentale est alors calculée par la méthode des moindres carrés :

$$e = \sum_{n_s} (y_i - y_s)^2 = \sum_n e_n \quad (5.9)$$

C'est cette erreur que l'on cherche à minimiser de manière à ce que la courbe simulée se rapproche au plus de la courbe expérimentale. L'algorithme utilisé pour cela est l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

**Algorithme de Levenberg-Marquardt** L'algorithme de Levenberg-Marquardt permet de minimiser une fonction non linéaire et dépendant de plusieurs variables. Dans notre cas, la fonction à minimiser est l'erreur  $e$  définie par l'équation 5.9 dépendant du vecteur paramètres  $\underline{p} = \{A_0, B_0, n, p\}$ . Ainsi, on cherche  $\underline{p}$  tel que  $e(\underline{p}) = 0$ . L'algorithme de Levenberg-Marquardt interpole l'algorithme de Gauss-Newton et l'algorithme du gradient. L'algorithme de Gauss-Newton présente l'avantage d'une convergence rapide mais peut osciller autour de la solution, tandis que l'algorithme du gradient, bien que moins rapide, permet d'approcher plus précisément la solution. Ainsi, l'algorithme de Levenberg-Marquardt [MAR 63, SCH 92b] présente les avantages de chacun de ces deux algorithmes et permet, à chaque itération  $i$ , de calculer le nouveau vecteur paramètres :

$$\underline{p}_{i+1} = \underline{p}_i - (\underline{H} + \lambda \underline{I})^{-1} \cdot \underline{g}_i \quad (5.10)$$

où  $\underline{g}_i = \nabla_{\underline{p}} e(\underline{p}_i)$  est le gradient de  $e$  au point considéré,  $\underline{H}$  est la hessienne de  $e$  et  $\lambda$  est le paramètre de Levenberg. Lorsque  $\lambda$  est grand, l'algorithme se rapproche de celui du gradient et, inversement, s'il est faible l'algorithme se rapproche de celui de Gauss-Newton. Ainsi, si l'algorithme converge rapidement,  $\lambda$  est diminué de manière à se rapprocher plus finement de la solution et, à l'inverse, si la convergence est plus délicate  $\lambda$  est augmenté de manière à faire varier les paramètres dans la direction de plus grande pente. Dans le cas d'une fonction d'erreur au sens des moindres carrés telle que définie par l'équation 5.9, l'écriture de cet algorithme peut être simplifiée [BAD 08b] :

$$\underline{p}_{i+1} = \underline{p}_i - \left( \underline{J}_i^t \cdot \underline{J}_i + \lambda \underline{I} \right)^{-1} \cdot \left( \underline{J}_i^t \cdot e(\underline{p}) \right) \quad (5.11)$$

où  $\underline{J}$  est le gradient de  $e$  par rapport aux paramètres  $\underline{p}$ . Ainsi, il n'est plus nécessaire de calculer la matrice hessienne  $\underline{H}$ , ce qui est un net avantage par rapport à une fonction d'erreur quelconque. Il est à noter que cet algorithme ne trouvera qu'un minimum local de la fonction d'erreur si celle-ci ne présente pas qu'un minimum global. Le minimum trouvé peut donc dépendre fortement du point de départ et des coefficients choisis, et la convergence vers le minimum global n'est pas assurée.

**Application** L'algorithme présenté précédemment permet d'optimiser le jeu de paramètres de la loi de comportement hypoélastique. Il convient maintenant de spécifier son application à des modèles ABAQUS/Explicit. L'erreur calculée est basée sur les données expérimentales de la forme  $(\underline{\varepsilon}_i; F^{exp}(\underline{\varepsilon}_i))$  d'une part, et sur les résultats des simulations  $(\underline{\varepsilon}_i; F^{simu}(\underline{\varepsilon}_i, \underline{p}))$  d'autre part. Ainsi, l'erreur se calcule :

$$e = \sum_i e_i = \sum_i (F^{simu}(\underline{\varepsilon}_i, \underline{p}) - F^{exp}(\underline{\varepsilon}_i)) \quad (5.12)$$

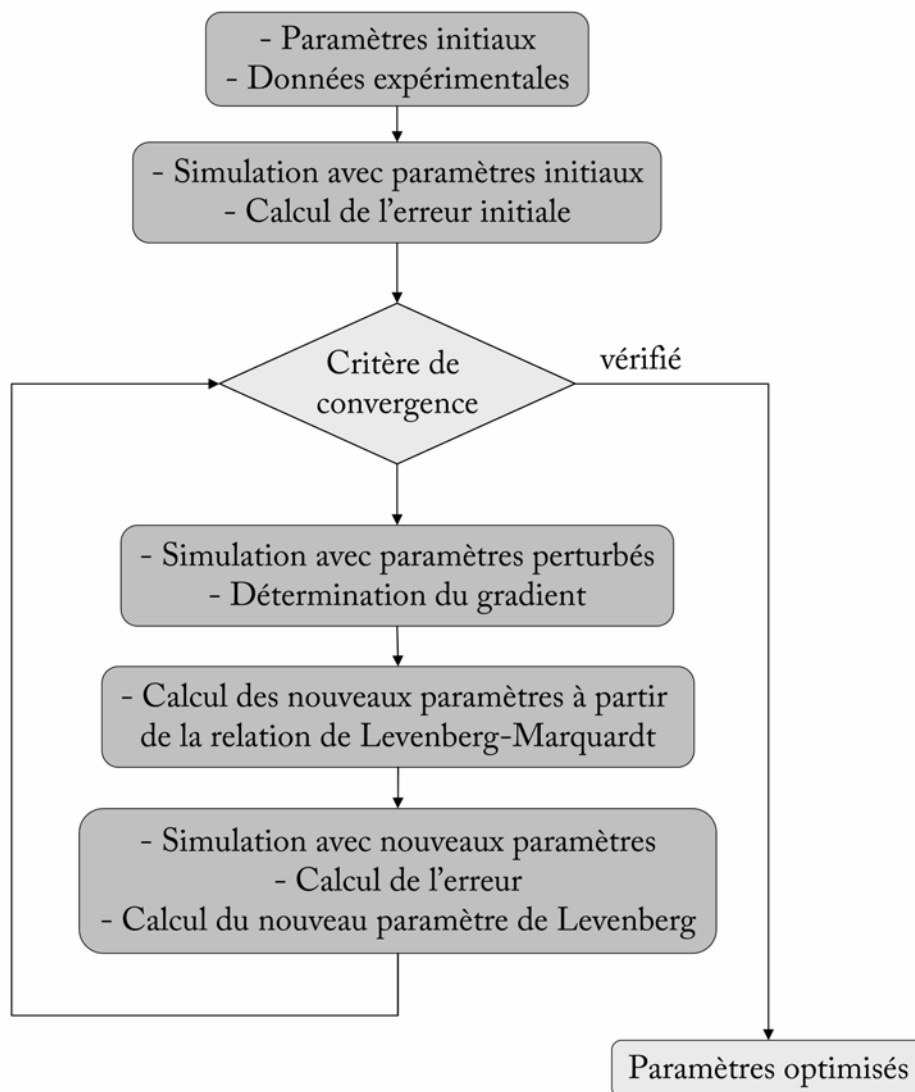
Le gradient de  $e$ ,  $\underline{J} = \nabla_{\underline{p}} e$ , au point  $i$  considéré s'exprime donc :

$$J_{ij} = \frac{\partial (F^{simu}(\underline{\varepsilon}_i, \underline{p}) - F^{exp}(\underline{\varepsilon}_i))}{\partial p_j} = \frac{\partial F^{simu}(\underline{\varepsilon}_i, \underline{p})}{\partial p_j} \quad (5.13)$$

$F^{simu}$  n'étant connu que numériquement, ses dérivées sont approchées par différences finies :

$$J_{ij} = \frac{F^{simu}(\epsilon_i, p_1 \dots p_j + \Delta p_j \dots p_q) - F^{simu}(\epsilon_i, p_1 \dots p_j \dots p_q)}{\Delta p_j} \quad (5.14)$$

où  $q = 4$  est le nombre de paramètres. Ainsi, l'algorithme d'optimisation obtenu est résumé figure 5.8. Il reste à spécifier le critère de convergence, nécessaire pour stopper l'algorithme. Il peut porter sur les paramètres, l'erreur ou leurs variations relatives. Le choix est fait ici de baser le critère d'arrêt sur la valeur de l'erreur au sens des moindres carrés. Y est ajouté un nombre maximal d'itérations pour des raisons pratiques, le temps de calcul des simulations pouvant être relativement important. Cet algorithme est alors codé dans Matlab, logiciel offrant de bonnes fonctionnalités de calcul matriciel, ainsi que la possibilité de piloter ABAQUS/Explicit de manière à lancer les calculs par éléments finis "à distance".



**FIGURE 5.8** – Algorithme d'optimisation des paramètres par approche inverse de type Levenberg-Marquardt

### 5.1.3.3 Identification des paramètres

L'algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt implémenté, l'identification des paramètres liés au comportement de la mèche dans le plan transverse est réalisée à partir d'un essai de traction équi-biaxiale. Une sollicitation de traction biaxiale (fig. 5.9) consiste à soumettre chacun des deux réseaux de chaîne et trame à une sollicitation de traction (non nécessairement identique). Si l'on note  $\epsilon_{chaîne}$  la déformation dans la direction du réseau chaîne et  $\epsilon_{trame}$  la déformation dans la direction du réseau trame, on définit le coefficient de traction biaxiale  $k$  par l'équation (5.15) :

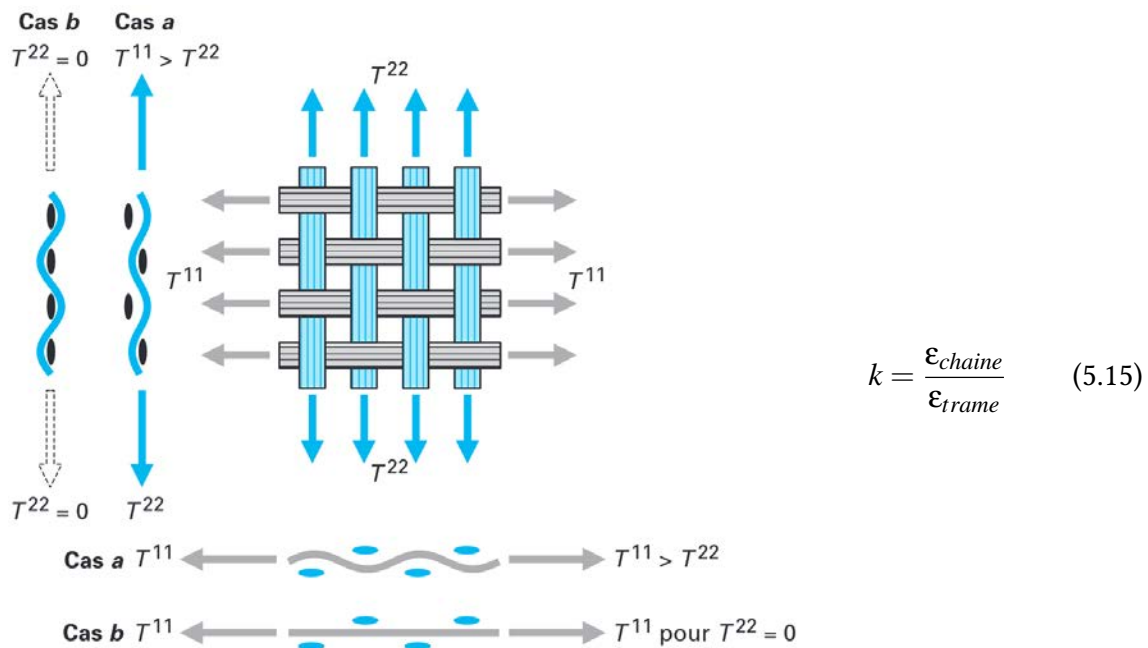
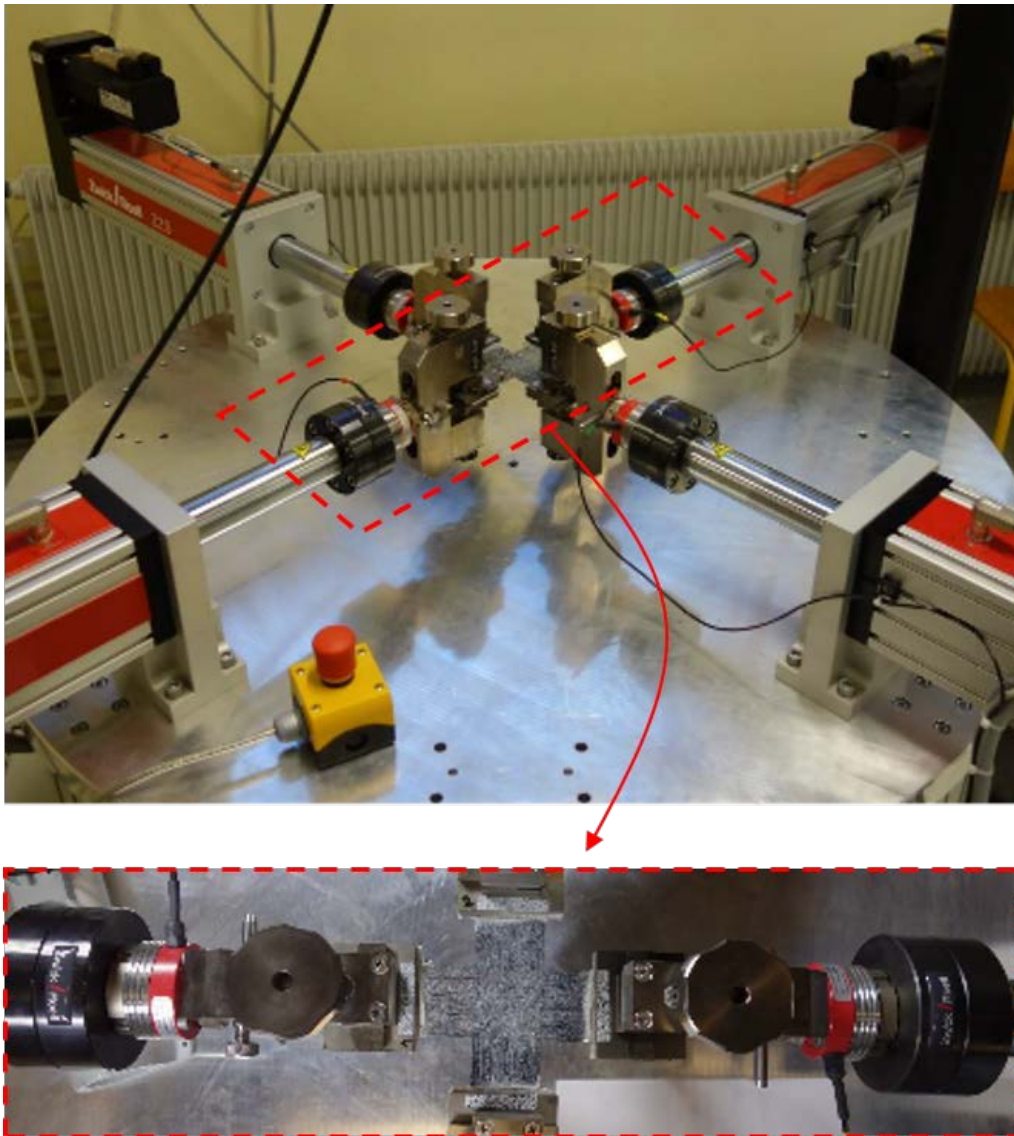


FIGURE 5.9 – Illustration de la traction biaxiale

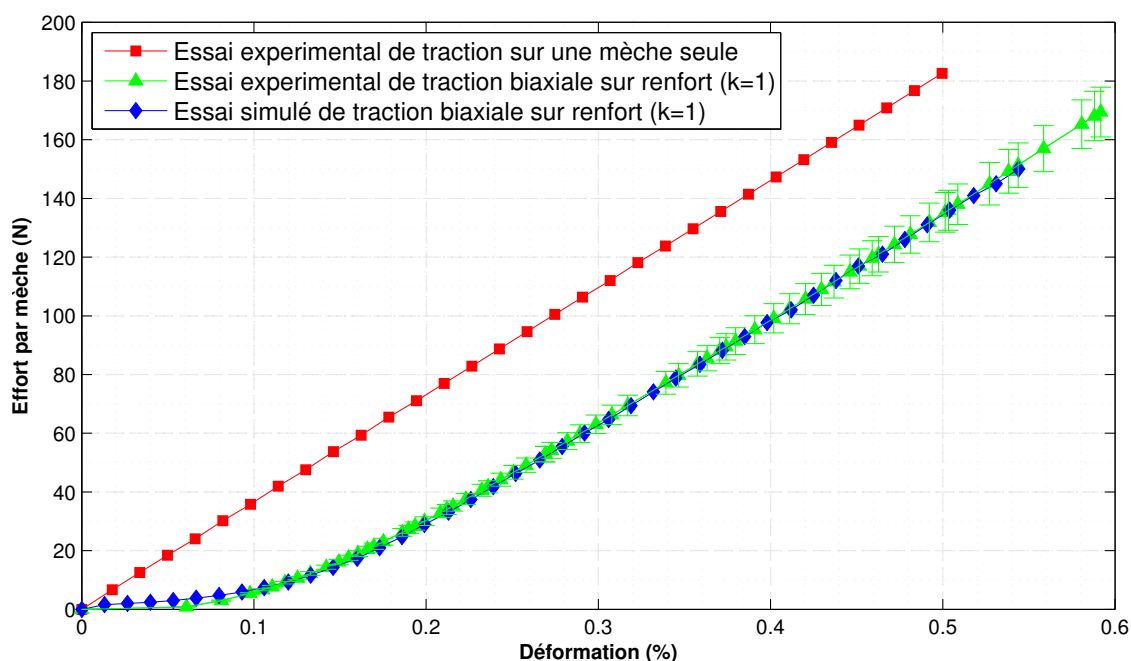
Un coefficient  $k = 1$  signifie donc que les deux réseaux sont sollicités de façon identique (traction équi-biaxiale) et un coefficient  $k = 2$  signifie que la déformation dans la direction du réseau trame est deux fois plus faible que la déformation dans la direction du réseau chaîne.

Plusieurs dispositifs expérimentaux de traction biaxiale adaptés au tissu ont été conçus [KAW 73a, BUE 01, WIL 08] qui permettent de régler le coefficient de traction biaxiale. Dans cette étude, on a utilisé une machine d'essai de traction biaxiale Zwick (fig.5.10), équipée de 4 vérins électromécaniques. Les 4 vérins sont entraînés par 4 moteurs électriques brushless à 1 kW. Ils développent une force maximale de 2000 N en traction/compression. La vitesse est réglable entre 0.01 et 7500 mm/min pour une course totale de 200 mm. La précision de positionnement est de  $1 \mu\text{m}$  pour une vitesse de 0,5 m/min. La fabrication des éprouvettes en croix utilisées dans ces dispositifs est un point clé de l'essai : la raideur des mèches en tension étant très importante, et les déplacements très faibles, les mèches doivent être parfaitement alignées dans les deux directions afin



**FIGURE 5.10** – Machine d'essai de traction biaxiale Zwick

d'entrer en tension simultanément. La courbe de tension équi-biaxiale simulée ( $k = 1$ ) obtenue par l'algorithme d'optimisation ainsi que la courbe expérimentale sont présentées sur la figure 5.11. Les paramètres identifiés sont donnés sur cette même figure.



**Paramètres identifiés**

$E$	$G$	$A_0$	$B_0$	$p$	$n$
116 000 MPa	0.01 MPa	3.7386 MPa	10.3798 MPa	-0.00111	2.19

**FIGURE 5.11** – Identification des paramètres de la loi hypoélastique

**Autres données de calcul**

Outre les trois aspects importants que nous avons abordé dans les sections ci-dessus, il reste plusieurs données d'entrée du calcul à définir. L'algorithme de gestion du contact entre mèches est laissé par défaut au logiciel Abaqus. Concernant les frottements, on utilise un modèle de Coulomb avec un coefficient de frottement de 0,24, valeur empruntée à la littérature [LIU 06, GOR 07, COR 14]. Les calculs ont été réalisés avec des éléments continus tétraédriques à 4 noeuds. Le maillage compte environ 80000 éléments de type C3D4 (dans Abaqus). La masse volumique est de  $1,76 \times 10^3 \text{ g/mm}^3$  pour les mèches de carbone. La gestion des incréments de temps est laissée au logiciel.

### 5.1.4 Validation des paramètres en traction biaxiale

Dans cette section la loi de comportement identifiée est utilisée pour simuler le comportement du renfort soumis à des chargements de traction biaxiale pour différents rapports  $k$  (i.e.  $k \neq 1$ ). Le réseau de courbes présenté sur la figure 5.12 correspond aux situations  $k = 0.5$ ,  $k = 2$  ainsi qu'à la situation où la seconde direction est laissée totalement libre (notée « cas libre »). Les réseaux de tension biaxiale obtenus expérimentalement et par simulation pour le sergé de carbone sont comparés (fig.5.12). La courbe obtenue par simulation pour  $k = 2$  est très proche de la courbe expérimentale. Par contre, pour  $k = 0.5$ , un léger décalage des déformations peut être observé entre la courbe expérimentale et la courbe simulée. De façon générale dans les essais de tension biaxiale, le point de départ (i.e. le zéro des déformations) est difficile à obtenir précisément, le tissu pouvant être légèrement déformé lors de sa manutention. Ceci pourrait expliquer ce décalage constaté entre les courbes expérimentale et simulée. La bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et les résultats de simulation issus de la  $\mu$ CT permet ainsi une première validation de la loi de comportement.

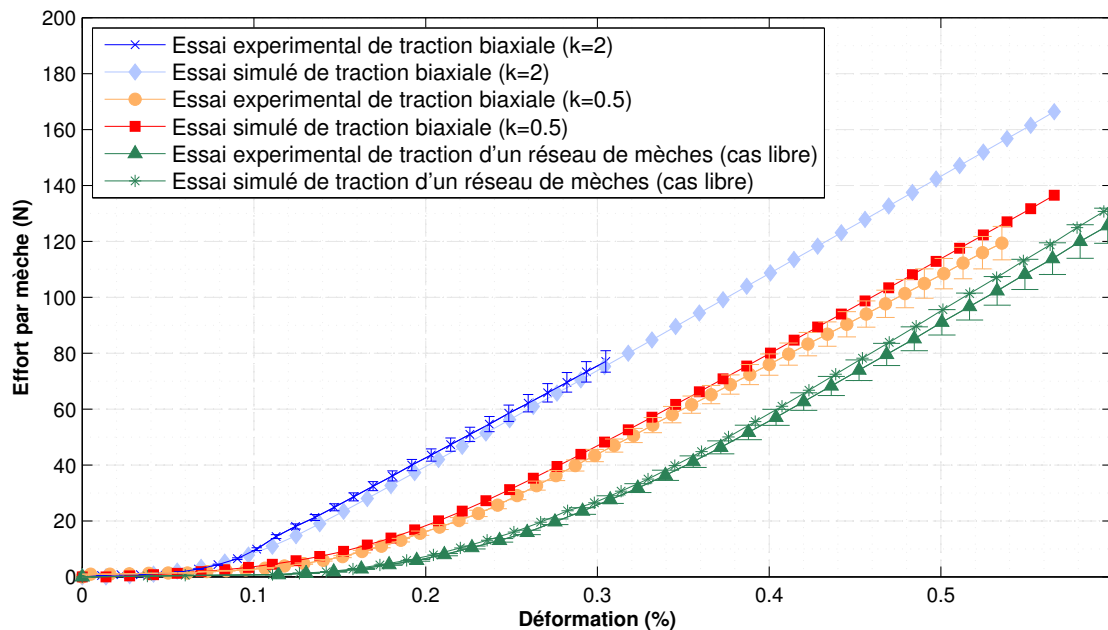


FIGURE 5.12 – Réseau de courbes de traction biaxiale

### 5.1.5 Validation des paramètres en compaction transverse

La figure 5.13 montre les courbes de compaction du sergé de carbone G0986. L'effort de compression est ramené à la surface de tissu afin de s'affranchir de la taille de l'échantillon et pouvoir comparer simulations et essais. Pour les mêmes raisons, on n'utilise pas la mesure directe de distance entre plans parallèles mais le taux volumique



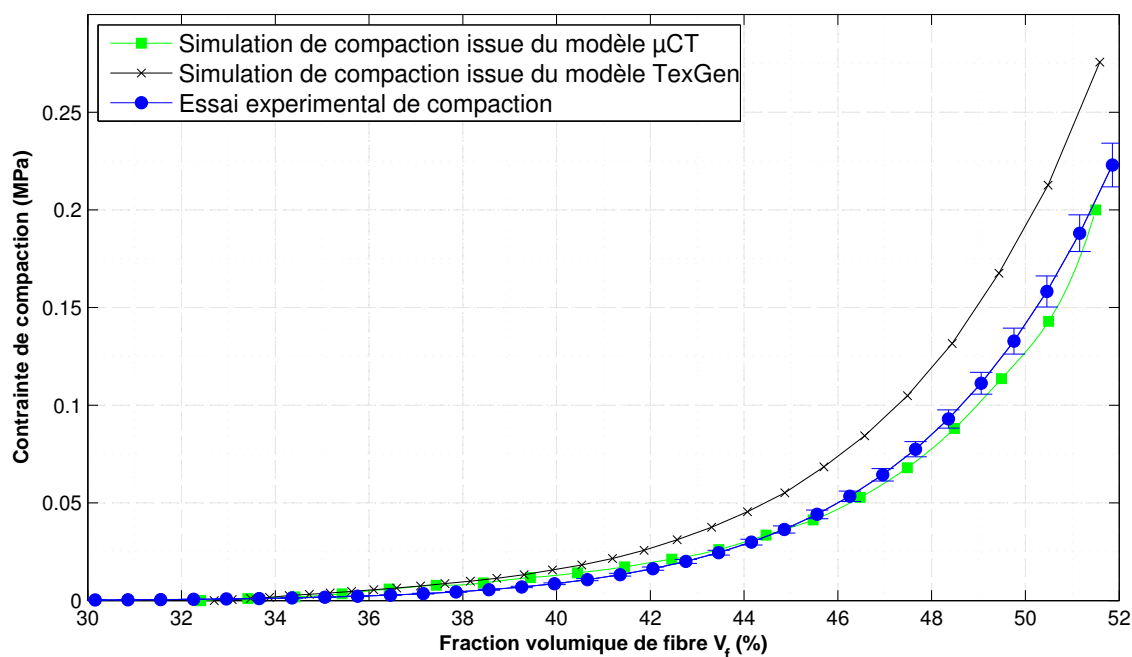


FIGURE 5.13 – Essais de compaction : simulations et experimental

de fibres  $V_f$ , variable qui permet une comparaison correcte avec un essai expérimental. En effet, les efforts en début de l'essai expérimental sont si faibles qu'il n'est pas possible de déterminer à partir de quelle valeur du déplacement l'essai commence réellement. En revanche, la quantité de fibre mise en jeu est parfaitement connue et la distance entre plans également (à partir du déplacement machine). A partir de ces deux grandeurs, on détermine de manière convenable une grandeur comparable entre essai et simulation : le taux volumique de fibres dans le volume utile :

$$V_f = \frac{V_{fibre}}{V_{tissu}} = \frac{m_s S_{tissu}}{\rho S_{tissu} \delta} = \frac{m_s}{\rho \delta} \quad (5.16)$$

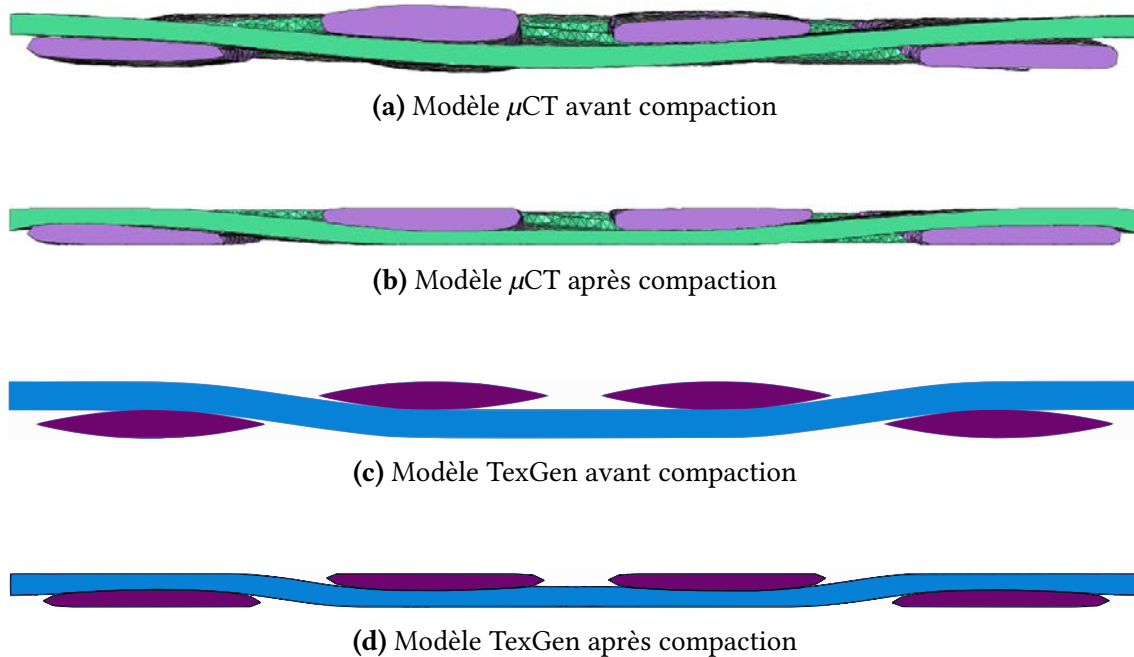
où  $V_{tissu}$ ,  $m_s$ ,  $\rho$ ,  $\delta$  représentent respectivement le volume "parallélépipédique"<sup>1</sup> du tissu, la masse surfacique, la masse volumique et l'épaisseur du tissu.

Au début de l'essai, lorsque les efforts appliqués sont relativement faibles, l'épaisseur du tissu diminue principalement en raison de la fermeture des pores entre les fibres et de la désondulation des mèches (fig.5.14b et fig.5.14d).

Comme cette étape est dominée par le comportement en flexion des fibres, la fraction volumique de fibres augmente rapidement avec la pression. Ensuite, les mèches rentrent en contact et l'effort augmente fortement.

La simulation de la compaction du sergé de carbone est effectuée sur un modèle géométrique issue du logiciel TexGen (fig.5.14c et fig.5.14d). Cette simulation est comparée

1. Il faut comprendre par volume parallélépipédique le volume représentant l'épaisseur de l'échantillon du tissu x la section de compaction du tissu



**FIGURE 5.14** – Simulation de la compaction du G0986

au modèle de la simulation EF provenant de la  $\mu$ CT (fig.5.14a et fig.5.14b). Les deux modèles (TexGen et  $\mu$ CT) sont maillés et utilisés pour calculer la compaction du G0986. Les propriétés mécaniques sont les mêmes et ont été identifiées à partir de l'essai de traction équi-biaxiale. Les résultats obtenus par le modèle  $\mu$ CT sont en bon accord avec l'expérimental [NAO 14]. Le modèle TexGen donne une solution plus raide. Cela est dû à la géométrie idéalisée qui n'inclut pas des imperfections géométriques et augmente quelque peu la rigidité. Cet exemple simple montre deux avantages du modèle EF issu de la  $\mu$ CT. Il évite les interpénétrations entre mèches et il prend en compte les imperfections de la géométrie qui diminuent la rigidité au moins au début du chargement.

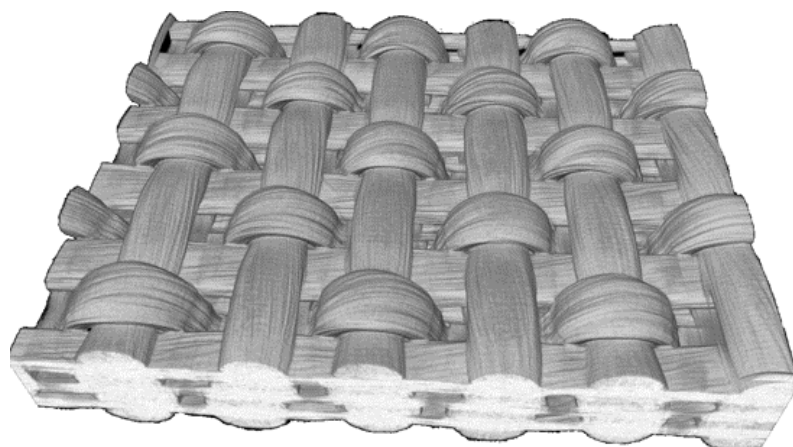
## 5.2 Simulation de la mise en forme de renforts tissés 3D

### 5.2.1 Description des renforts étudiés

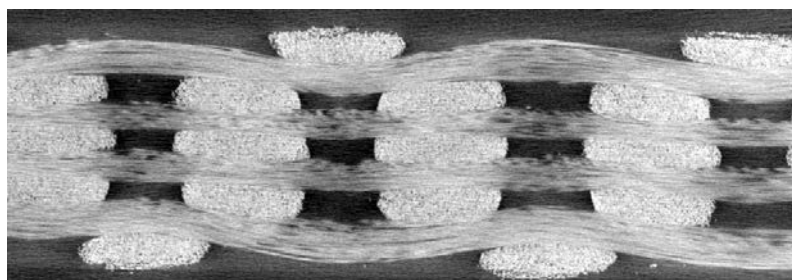
Deux renforts 3D tissés ont été principalement étudiés dans cette thèse. Un interlock 4 couches de type couche-à-couche fourni par Snecma du groupe Safran et un tissé 3D orthogonal Numtiss (fig.5.15). Seules les données relatives au tissé 3D orthogonal seront données ici, des problèmes de confidentialité empêchant de montrer en détails les tissages et réponses expérimentales du matériau Snecma.

### 5.2.2 Modèle tissé 3D orthogonal

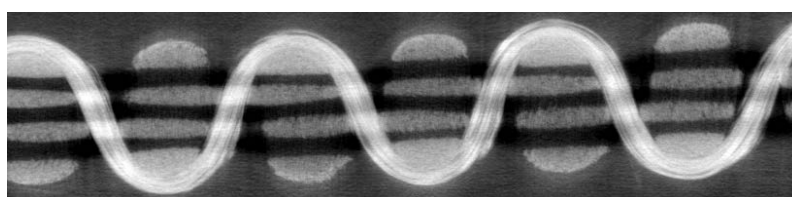
Le tissé 3D orthogonal (fig. 5.15) est un tissé avec des mèches non retordues, dits « roving », en verre E de titrage 900 Tex. La figure 5.16 donne les différentes caractéristiques de ses mèches.



(a)



(b)



(c)

**FIGURE 5.15** – Tomographie du renfort 3D orthogonal : a) vue 3D b) coupe chaînes et trames c) coupe liant

La cellule élémentaire représentative (CER) de ce tissé 3D orthogonal possède trois couches de chaînes et quatre couches de trames non interlacées entre elles (fig.5.15b). De plus un liant orthogonal englobant les chaînes et trames dans l'épaisseur est présent (fig.5.15c). On pourra se référer à [MOH 88, BAN 98, MOU 99, ANS 11] pour plus d'informations sur ce type de renfort.

Roving, $\pm 6\%$	$\varnothing$ filament	Nb fils/mèche	Densité surfacique	Epaisseur
900 tex (g/km)	15 $\mu\text{m}$	2000	2722 $\text{g}/\text{m}^2$	3.1 mm

FIGURE 5.16 – Caractéristiques de la mèche en verre E [VIL 14]

### 5.2.2.1 Génération du modèle

#### Géométrie

La géométrie de ce tissé 3D orthogonal est obtenue à partir de la  $\mu\text{CT}$ . Le matériau étant en verre, la segmentation est plus aisée que pour le carbone car le contraste verre/air est supérieur au contraste carbone/air. Le résultat obtenu est présenté sur la figure 5.17



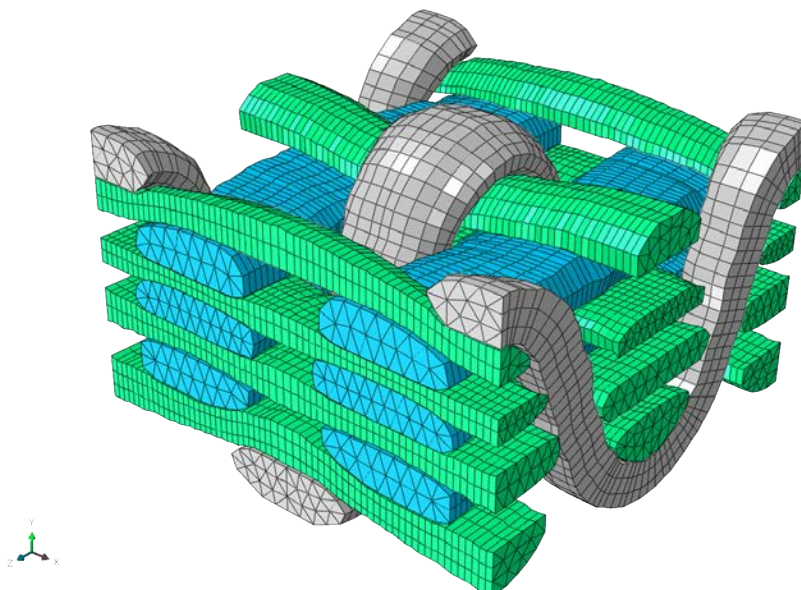
FIGURE 5.17 – Tissé 3D orthogonal segmenté

#### Maillage

A partir des images segmentées et comme vu au chapitre 3, on génère le maillage (fig. 5.18). Le modèle est composé de 39888 éléments prismatiques (C3D6 dans Abaqus). Le contact inter-mèche est du type surface to surface.

### 5.2.2.2 Identification des paramètres matériaux pour la loi hyperélastique

On utilise ici la loi hyperélastique développée par charmetant [CHA 11a].



**FIGURE 5.18** – Maillage prismatique du tissé 3D orthogonal réalisé avec la méthode développée dans cette thèse.

Quatre paramètres définissent, dans le modèle proposé, le comportement de la mèche correspondant au mode de déformation en élongation dans la direction des fibres :  $S_0$ ,  $I_{elong}^0$ ,  $K_{elong}^0$  et  $K_{elong}$ .  $S_0$  est l'aire de la section transverse de la mèche.

Les trois autres paramètres sont identifiés à l'aide d'un essai de traction simple sur une mèche isolée du renfort : le modèle théorique est implémenté dans Excel, puis le solveur non-linéaire d'Excel est utilisé pour déterminer les paramètres. Il est important de réaliser cet essai sur une mèche isolée du renfort plutôt que sur une mèche provenant d'une bobine avant le tissage car, dans certains cas, l'opération de tissage du renfort peut induire une modification de la raideur de la mèche. La courbe expérimentale et la courbe issue de l'identification sont représentées sur la figure 5.19. Le potentiel énergétique (eq (4.54)) formulé pour le comportement en élongation permet d'obtenir des courbes expérimentale et simulée très proches, même dans la partie non-linéaire de la réponse en tension.

Concernant l'identification des paramètres pour le comportement en compaction, distorsion et cisaillement transverse, ceux-ci sont issus des travaux de Charmetant [CHA 11b]. La figure 5.20 donne les paramètres utilisés pour la loi de comportement.

### 5.2.2.3 Simulation de la compaction transverse du renfort

La loi de comportement identifiée est utilisée pour simuler le comportement du renfort soumis à un chargement de compaction transverse. On confronte sur la figure 5.21 l'effort transversal expérimental à l'effort transversal simulé en fonction du déplacement dans la direction de l'épaisseur. La courbe simulée présente une bonne correspondance

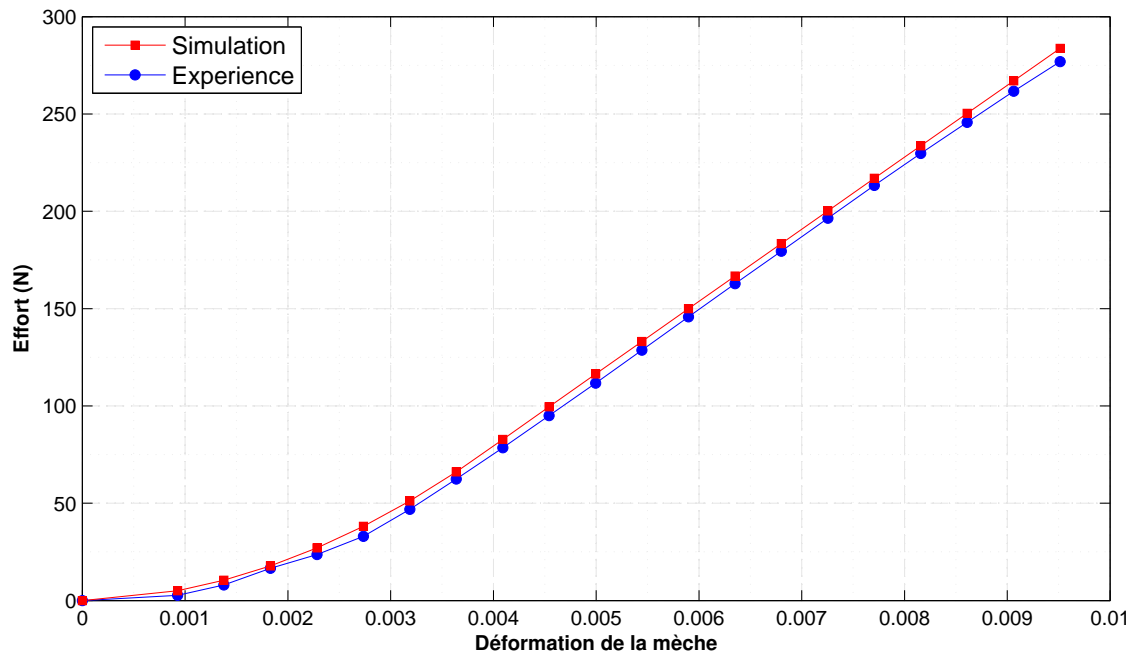


FIGURE 5.19 – Identification du comportement de la mèche de verre en élongation

$S_0$	$I_{elong}^0$	$K_{elong}^0$	$K_{elong}$	$K_{comp}$	$p$	$K_{dist}$	$K_{cis}$
0.489 (mm <sup>2</sup> )	0.00386 (N)	11000 (N)	37486 (N)	17800 (MPa)	7.72	0.0608 (MPa)	3 (MPa)

FIGURE 5.20 – Paramètres identifiés de la mèche de verre

avec la courbe expérimentale. La petite différence entre les courbes peut s'expliquer par la difficulté à déterminer expérimentalement l'origine des déplacements.

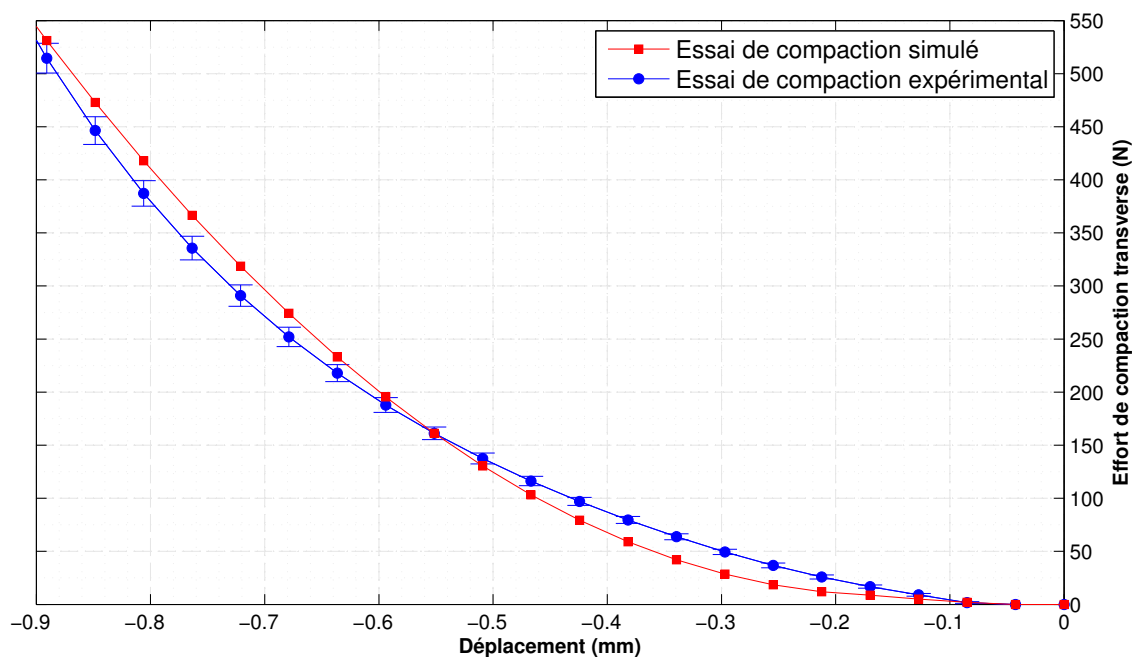
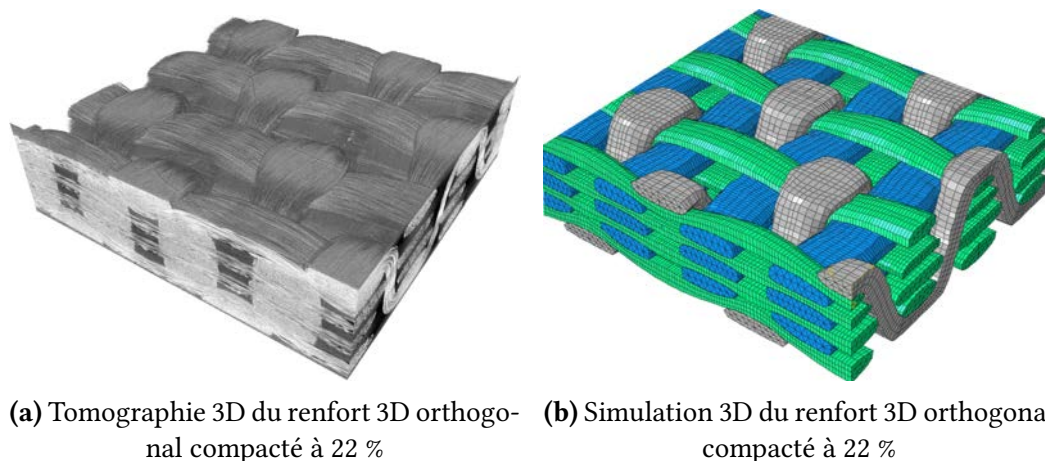


FIGURE 5.21 – Compaction du tissu 3D orthogonal

La figure 5.22 montre une comparaison entre le volume tomographique du renfort 3D compacté et le volume compacté simulé. On voit que la mèche liante orthogonale présente le même aspect et se déforme comme sur la tomographie ce qui est un résultat très satisfaisant.



(a) Tomographie 3D du renfort 3D orthogonal compacté à 22 %

(b) Simulation 3D du renfort 3D orthogonal compacté à 22 %

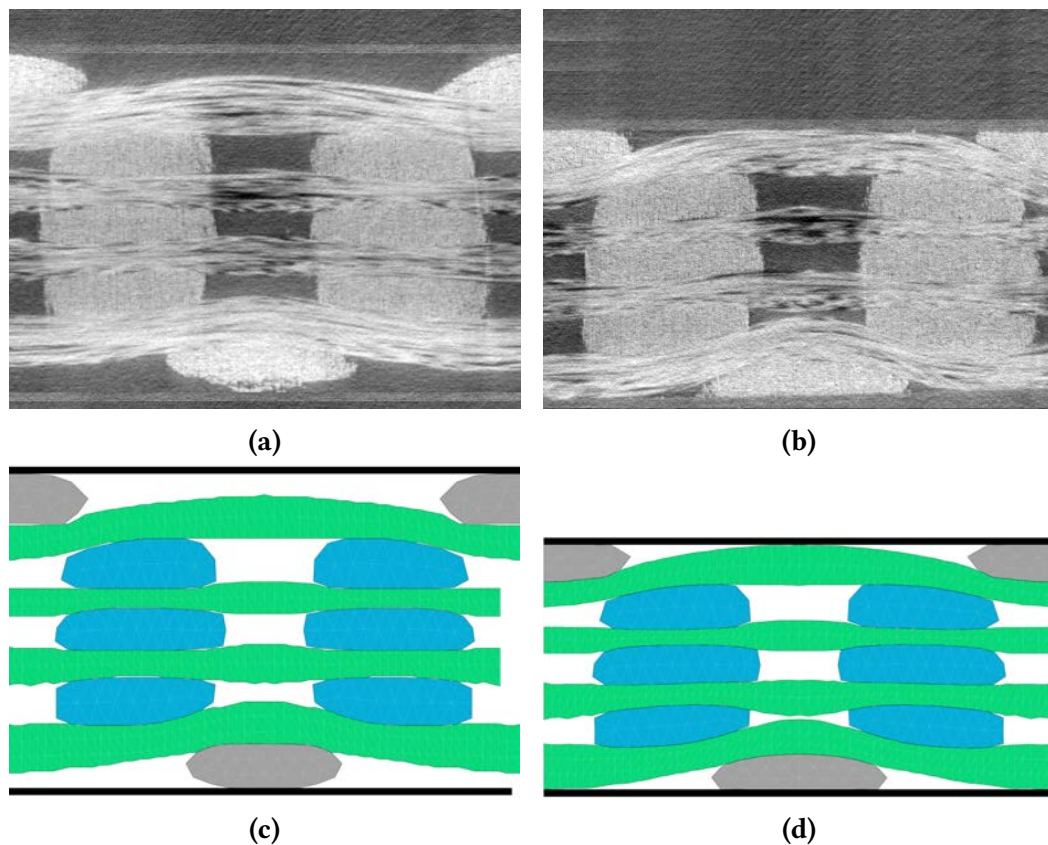
FIGURE 5.22 – Comparaison entre tomographie et simulation du renfort 3D orthogonal

En effet, le comportement en compression dans la direction des mèches des renforts tissés est difficile à caractériser. Prise individuellement, une mèche aura tendance



à flamber en compression. Cependant, par le procédé de tissage, celles-ci sont liées dans les renforts. Leurs mouvements sont contraints par les positions de leurs voisines. La présence du tissage, à travers la densité de fibre et la cohésion, influence directement le comportement des mèches en compression, et donc le comportement macroscopique du matériau. Aucun essai significatif n'est communément admis, ni même utilisé, pour la caractérisation des renforts tissés en compression dans le sens des mèches. En tous cas, il faut veiller à bien définir la rigidité en compression dans la direction des mèches plus faible que la rigidité en tension dans la direction des mèches.

La figure 5.23 montre une comparaison entre des images de coupes de tomographies et des images de coupes simulées du renfort 3D orthogonal à l'état initial et compacté à 22 %. Les sections simulées dans le plan (XY) correspondent aux sections de tomographie. D'ailleurs le foisonnement des mèches de trame est retranscrit dans la simulation. Les ratio des sections de chaîne des images tomographiées et simulées est de 0.93.



**FIGURE 5.23** – Image de coupe de la tomographie du renfort 3D (plan XY) a) non compacté et b) compacté à 22% ainsi que les images de coupe de la simulation du renfort 3D (plan XY) c) non compacté et d) compacté à 22%



### 5.3 Bilan du chapitre 5

Les différents aspects du modèle mésoscopique d'analyse mécanique des renforts tissés ont été abordés dans ce chapitre.

Les géométries à l'échelle mésoscopique sont basées sur les modèles issus des images de microtomographie permettant une description précise et cohérente des mèches mais aussi des zones de contact, évitant ainsi toute interpénétration. L'identification des paramètres du modèle de matériau est un point important pour la prédiction du comportement du renfort. Ceux-ci ne peuvent être déterminés directement, une approche inverse est utilisée en se basant sur des essais de traction équi-biaxiale pour le renfort 2D et sur des essais de compaction transverse pour les renforts 3D.

Les simulations de la traction biaxiale et de la compaction transverse du sergé de carbone sont très satisfaisantes. Elles donnent de meilleurs résultats que des simulations issues de géométries idéalisées TexGen. En effet, ces simulations sont plus raides car elles n'incluent pas les imperfections géométriques et défauts du renfort. Une simulation de cisaillement plan a été réalisée mais n'a pas été incluse dans ce manuscrit.

Les résultats obtenus lors de simulations de compaction de renforts 3D montrent une bonne correspondance entre les résultats simulés et expérimentaux. Finalement, une comparaison, entre les coupes de microtomographie et coupes du tissu 3D orthogonal en compaction transverse, a montré que les formes des sections des torons déformés étaient très similaires.

Des simulations de la compaction transverse et cisaillement transverse d'un interlock Snecma ont été effectuées et donnent aussi de bons résultats. Cependant, pour des raisons de confidentialité, ces résultats ne seront pas détaillés ici.

# Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse est consacré à l'analyse de renforts composites 2D et 3D à l'échelle mésoscopique à partir de microtomographies à rayons X. En outre, il peut se diviser en deux parties.

La première partie a été consacrée à la génération de géométries et modèles. Le point de départ de la méthodologie s'appuie sur un stack d'images de microtomographie permettant de reconstruire le volume du renfort. Toutefois, ces images ne sont pas utilisables telles quelles. Elles nécessitent un traitement afin de pouvoir effectuer une segmentation. La segmentation d'images dans notre cas consiste à être capable d'identifier et séparer les différentes mèches de chaînes et mèches de trames sans qu'il n'y ait aucune interpénétration.

Deux méthodes ont été développées. La première est basée sur le calcul du tenseur de structure, c'est-à-dire la matrice du gradient de l'image pour chaque pixel. De cette matrice, on extrait une information sur l'orientation privilégiée de chaque pixel de l'image puis à partir de cette information on réalise une carte d'orientation de l'image, i.e des directions de fibres. L'image est ensuite seuillée selon le sens chaîne ou le sens trame. Enfin, on applique sur les images seuillées plusieurs opérations de morphologies mathématiques obtenant ainsi des images segmentées. Cette méthode marche relativement bien sur des images de microtomographie qui possèdent un aspect filamenteux. Il faut pour cela que les fibres soient majoritairement dans le plan analysé. Il se peut que l'image ne puisse pas permettre d'accéder à cet aspect fibreux mais que les sections de mèche présentent un aspect granuleux. On peut utiliser dans ce cas une méthode de segmentation basée sur l'analyse de la texture. Cette méthode utilise la matrice de cooccurrence des niveaux de gris de l'image qui mesure le nombre d'apparitions des paires de valeurs de pixels situés à une certaine distance dans l'image. De cette matrice, quatre paramètres caractéristiques sont extraits. Ils permettent de seuiller correctement l'image et d'obtenir une segmentation.

Pour générer un maillage aussi proche que possible de la réalité à partir des images segmentées de microtomographie, il est possible d'utiliser l'algorithme des Marching Cubes. Il permet d'extraire les surfaces extérieures de chaque mèche puis maille l'intérieur à l'aide d'un solveur frontal. Cette méthode a le gros avantage de pouvoir mailler n'importe quelle topologie de mèche, de la plus simple à la plus complexe.

Toutefois, afin de mener des calculs par éléments finis en grandes transformations représentatifs, il faut considérer l'orientation des mèches. Celle-ci a été prise en compte en utilisant le squelette de chaque mèche correspondant à la fibre neutre. Dès lors, un deuxième modèle génère un maillage basé sur une triangulation de Delaunay. Puis par un jeu de projection, on construit des éléments prismatiques qui s'adaptent au mieux à la forme de mèche. L'avantage de ces éléments est qu'il en faut beaucoup moins que des éléments tétraédriques pour mailler une mèche. De plus, les faces extérieures sont des quadrangles, ce qui permet d'obtenir une bonne description entre les mèches des zones de contact (surfaiques) qui jouent un rôle clé dans le comportement mécanique.

La deuxième partie de cette thèse concerne la modélisation puis la simulation numérique de la mise en forme des différents types de renforts. Un point important pour toute modélisation par éléments finis concerne le choix du type de loi de comportement à mettre en place afin de représenter au mieux les phénomènes physiques mis en jeu. Les lois décrites dans ce manuscrit ne concernent que des matériaux purement élastiques. Cependant, les réarrangements de fibres ne sont a priori pas totalement réversibles et le frottement induit implique nécessairement de la dissipation. D'un côté, les lois hypoélastiques présentent l'avantage de pouvoir être aisément enrichies de manière à décrire des comportements visco-élastiques ou visco-plastiques. D'un autre côté, les lois hyperélastiques permettent de s'affranchir des problématiques d'objectivité, particulièrement cruciaux dans le contexte des grandes transformations. Ces deux lois ont été utilisées et implémenter dans ABAQUS/Explicit.

La dernière étape dans la mise au point de nouveaux modèles concerne l'identification des paramètres matériau nécessaires à la loi de comportement choisie. Elle est réalisée soit directement, soit par méthode inverse à l'aide de l'algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt. Ainsi, la loi choisie permet de modéliser plusieurs sollicitations mécaniques comme la traction biaxiale ou la compaction transverse. Les résultats des simulations sont satisfaisants et sont en accord avec les expérimentations. Ces simulations issues de la microtomographie donnent de meilleurs résultats que des simulations issues de géométries idéalisées type TexGen. En effet, ces simulations sont plus raides car elles n'incluent pas les imperfections géométriques et défauts du renfort. De plus, les géométries déformées simulées sont très similaires aux géométries déformées des images de microtomographie.

Finalement, cette thèse a permis de mettre en place un pack de routines Matlab encapsulées dans une interface utilisateur directement exploitable par Snecma. Ces outils et méthodologies peuvent être étendues à d'autres domaines d'applications comme la bio-mécanique.

Plusieurs perspectives peuvent s'ouvrir à l'issue de ce travail :

- Il pourrait être envisagé d'utiliser des éléments hexaédriques ou du moins mixtes prismatiques sur les bords des mèches et hexaédriques à l'intérieur des mèches.

Cela permettrait de réduire le nombre d'éléments dans le maillage.

- Il serait intéressant de modéliser le frottement anisotrope, les modélisations actuelles utilisant un frottement isotrope classique. En effet, le frottement dans le renfort a lieu dans toutes les directions : frottement mèche/métal dans la direction de fibres, frottement mèche/métal et mèche/mèche dans la direction perpendiculaire aux fibres et frottement mèche/mèche d'orientation variable. Ainsi, l'effet sur les géométries finales et les contraintes induites pourrait être caractérisé.
- Dans le cas des simulations d'écoulement de la résine dans des milieux fibreux, l'espace poral (entre les mèches) doit être défini et maillé. Il est le lieu d'un écoulement généralement de type Stokes. Il est obtenu à partir de la géométrie des mèches ou directement par la tomographie. Il est clair que l'exactitude de la géométrie est un point très important pour le calcul de la perméabilité du renfort. Le calcul de la perméabilité est un enjeu majeur pour les procédés LCM, car les essais sont difficiles à réaliser et peu reproductibles.
- La mise en place de lois de comportement hypoélastiques telles que définies dans les travaux de Badel [BAD 08a] est relativement complexe dans ABAQUS/Standard, bien que ce ne soit pas le cas dans ABAQUS/Explicit. Leur adaptation en simulation implicite, bien que délicate, dans le sens où il paraît très complexe de déterminer le tenseur d'élasticité eulérien correspondant à la dérivée de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy, permettrait de mieux décrire les phénomènes induits lors de la déformation de mèches. On pourrait ainsi par exemple avoir accès à la détermination de contraintes résiduelles dans le renfort lors de la phase de compaction.
- Enfin il serait intéressant de modifier la loi de comportement pour que les éléments du maillage puissent inclure le véritable taux volumique de fibres obtenu à partir de la microtomographie. Ce comportement pourrait être mieux implémenté à l'aide d'un nouvel élément, développé dans une subroutine UEL.



# Annexes



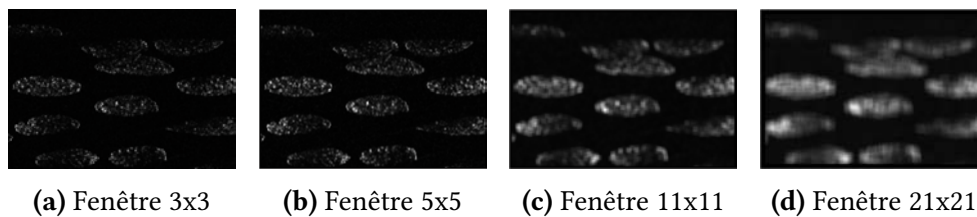
## Annexe A

# Influence des paramètres statistiques d'analyse de textures

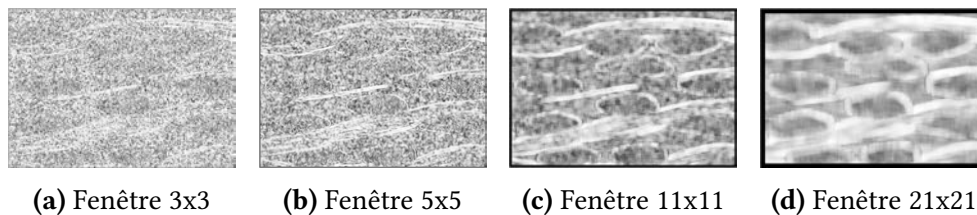
### A.1 Influence de la taille de fenêtre

La taille de la fenêtre d'étude détermine le voisinage dans lequel la matrice de cooccurrence va être calculée. Pour des raisons mathématiques liées à l'implémentation du code, la taille de la fenêtre doit être impaire. De plus, on s'intéresse uniquement au cas où la fenêtre est carrée.

Les figures A.1,A.2,A.3,A.4 présentent les résultats obtenus pour des fenêtres de taille  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ ,  $11 \times 11$  et  $21 \times 21$ . Les autres paramètres d'entrée sont fixés de la manière suivante :  $NG = 16$  et  $offset = [0 \ 1]$ .

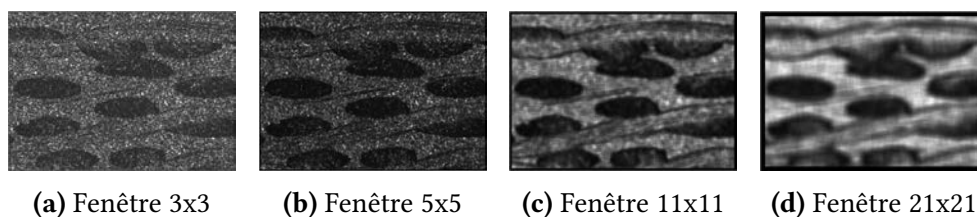


**FIGURE A.1** – Paramètre contraste pour différentes tailles de fenêtre

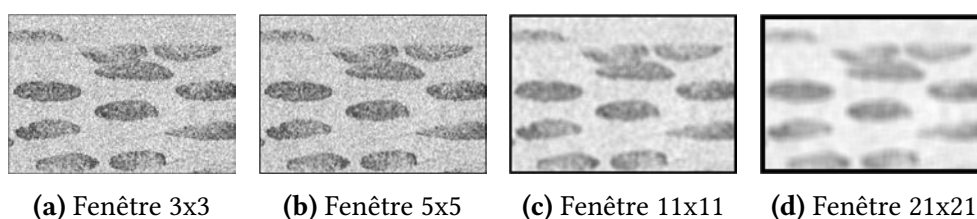


**FIGURE A.2** – Paramètre corrélation pour différentes tailles de fenêtre





**FIGURE A.3** – Paramètre énergie pour différentes tailles de fenêtre



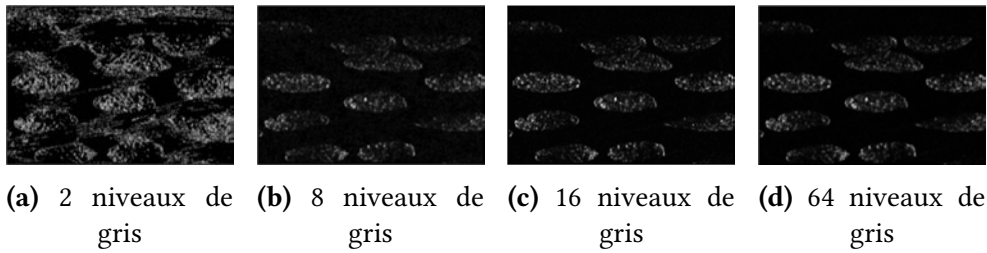
**FIGURE A.4** – Paramètre homogénéité pour différentes tailles de fenêtre

La taille de la fenêtre d'analyse doit satisfaire deux critères contradictoires : être la plus petite possible pour réduire le risque de mélange de textures différentes et, en même temps, être la plus grande possible pour pouvoir extraire des statistiques assez robustes et significatives. On constate que plus la taille de la fenêtre est importante, plus l'image de sortie est floue. L'effet est similaire à un filtrage gaussien ou médian. Plus la taille de la fenêtre est élevée, plus l'information contenue à l'intérieur des mèches de chaîne est homogène. Toutefois, on remarque également que les mèches de chaîne ont alors tendance à s'aplatir. Il faut donc trouver un compromis de manière à réduire le bruit de l'image en homogénéisant l'information à l'intérieur des torons tout en respectant le ratio de forme des mèches. Les résultats obtenus permettent de retenir une **fenêtre de taille  $5 \times 5$** .

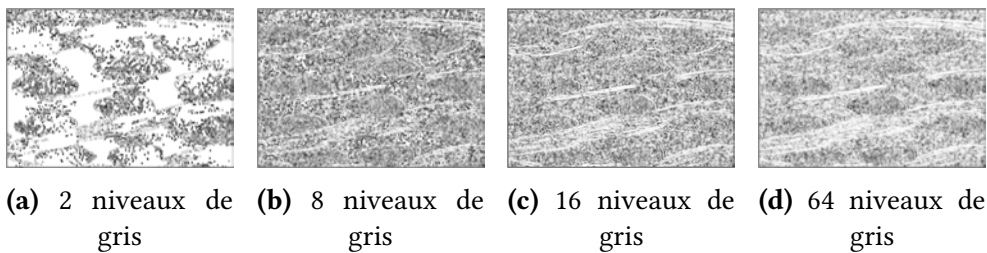
## A.2 Influence du nombre de niveaux gris

Le nombre de niveaux de gris utilisés pour décrire l'image détermine la taille des matrices de cooccurrence qui auront pour dimensions  $NG \times NG$ . Le choix de ce paramètre a donc une influence directe sur le temps de calcul.

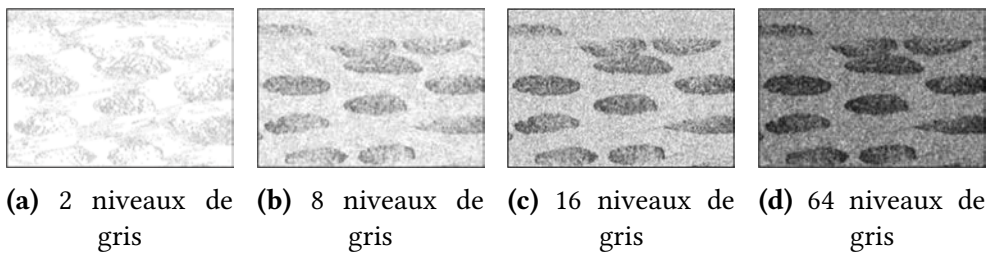
Les figures A.5,A.6,A.7,A.8 présentent les résultats obtenus pour 2, 8, 16 et 64 niveaux de gris. Les paramètres d'entrée fixés sont les suivants :  $TF = 5$  et  $offset = [0 \ 1]$ .



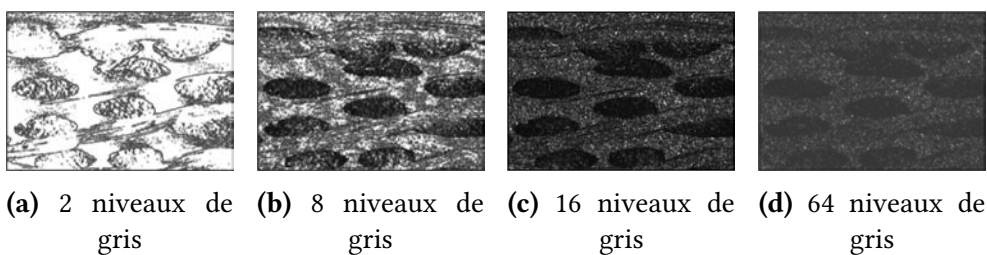
**FIGURE A.5** – Paramètre contraste pour différents niveaux de gris



**FIGURE A.6** – Paramètre corrélation pour différents niveaux de gris



**FIGURE A.7** – Paramètre homogénéité pour différents niveaux de gris



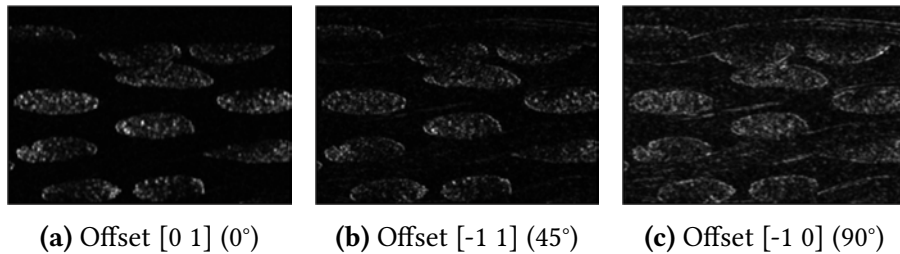
**FIGURE A.8** – Paramètre énergie pour différents niveaux de gris

Lorsque le nombre de niveaux de gris est élevé, il est plus aisé de discerner uniquement les torons correspondant aux mèches de chaîne. Toutefois, un nombre de niveaux de gris trop élevé peut conduire à une perte d'information (voir le paramètre énergie avec 64 niveaux de gris). De plus, il semble exister un seuil à 16 niveaux de gris pour le

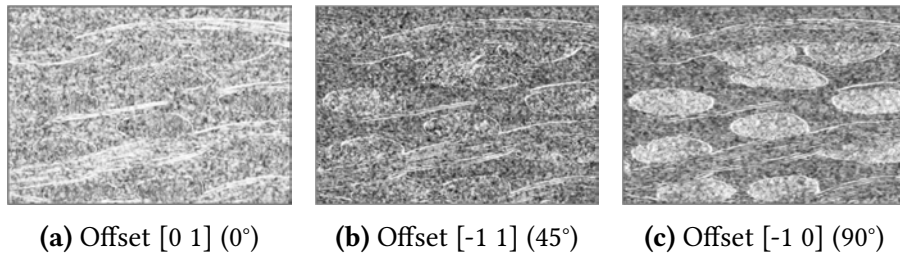
paramètre contraste qu'il n'est pas utile de dépasser. On augmenterait le temps de calcul sans obtenir plus d'informations. On utilisera donc **16 niveaux de gris** par la suite.

### A.3 Influence de l'offset

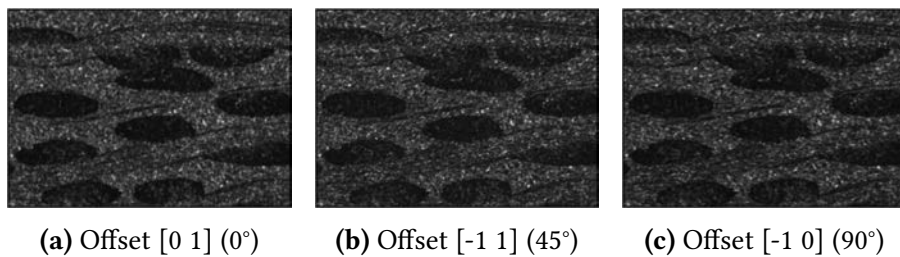
L'offset définit la relation spatiale qui relie une paire de pixels et indique ainsi de quelle manière la matrice de cooccurrence va être construite. Les figures A.9,A.10,A.11,A.12 présentent les résultats obtenus pour différents offsets :  $[0\ 1]$ ,  $[-1\ 1]$  et  $[-1\ 0]$ . Les paramètres d'entrée fixés sont :  $TF = 5$  et  $NG = 16$ .



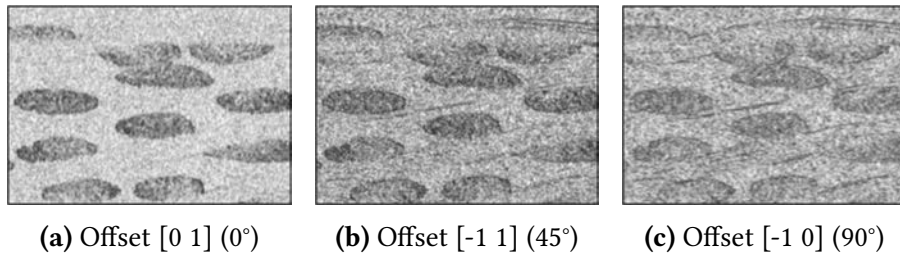
**FIGURE A.9** – Paramètre contraste pour différents offsets



**FIGURE A.10** – Paramètre corrélation pour différents offsets



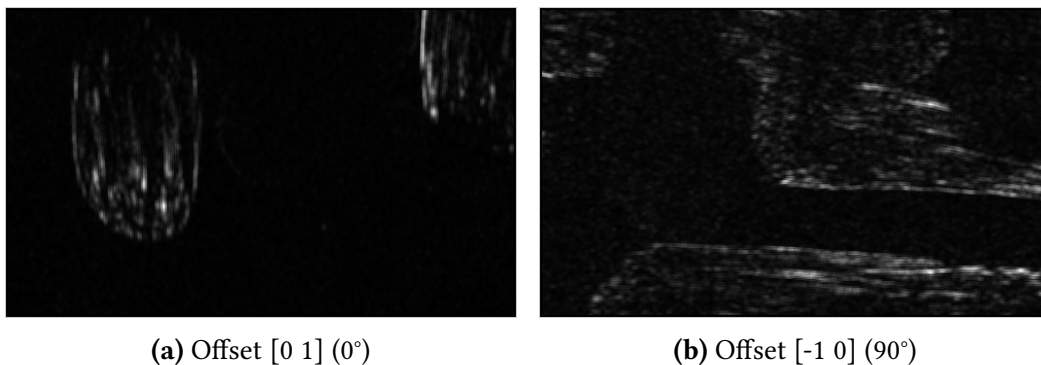
**FIGURE A.11** – Paramètre énergie pour différents offsets



**FIGURE A.12** – Paramètre homogénéité pour différents offsets

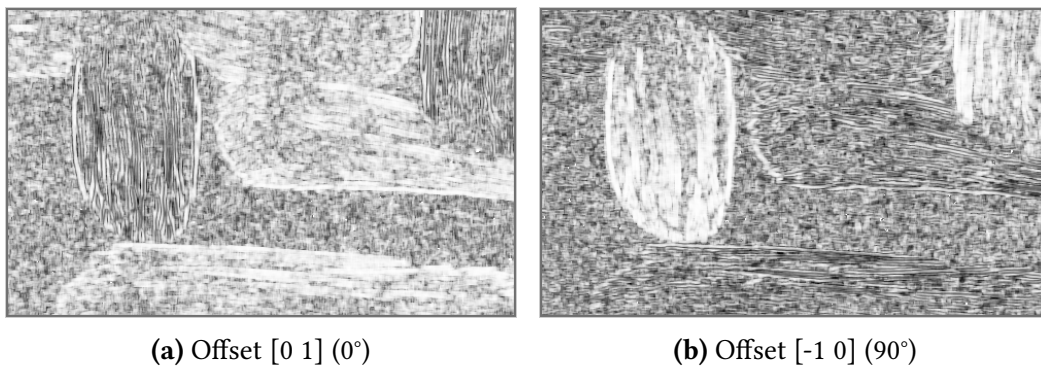
On remarque que les offsets  $[-1\ 1]$  et  $[-1\ 0]$  font apparaître à la fois les mèches de chaîne et les mèches de trame quel que soit le paramètre statistique considéré. Ces offsets ne permettent donc pas de segmenter les mèches les unes des autres. En revanche, on constate que l'offset  $[0\ 1]$  permet d'isoler les torons pour les paramètres contraste et homogénéité. On gardera donc l'**offset**  $[0\ 1]$  par la suite lorsque l'on travaillera dans le plan XZ.

Toutefois, les autres offsets ne sont pas à exclure. En effet, l'offset fonctionne, dans une certaine mesure, de la même manière que les filtres dérivateurs : pour une direction donnée, les pixels détectés correspondront aux structures orthogonales à cette direction. Ainsi, dans le plan XY, on peut différencier les mèches orientées à  $0^\circ$  de celles orientées à  $90^\circ$ . Les figures A.13, A.14, A.15, A.16 illustrent les résultats obtenus dans le plan XY. De même, si un matériau composite possède des mèches orientées à  $45^\circ$  et  $135^\circ$ , les offsets  $[-1\ 1]$  et  $[-1\ -1]$  permettront de les différencier.

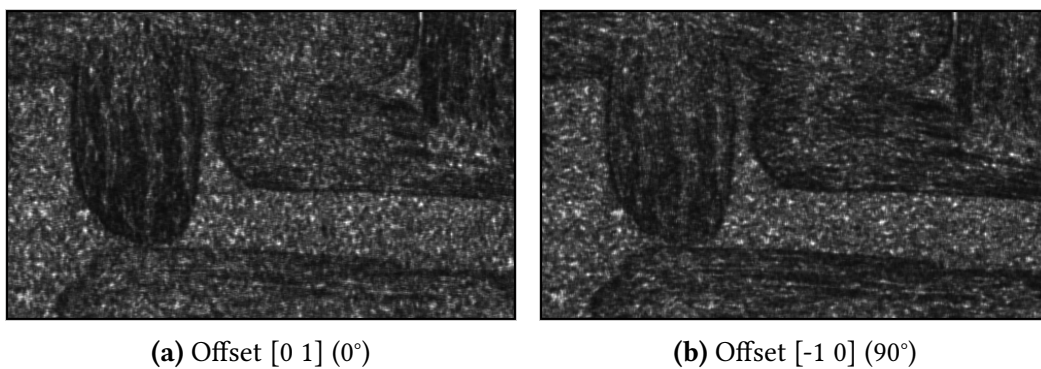


**FIGURE A.13** – Paramètre contraste dans le plan XY pour différents offsets

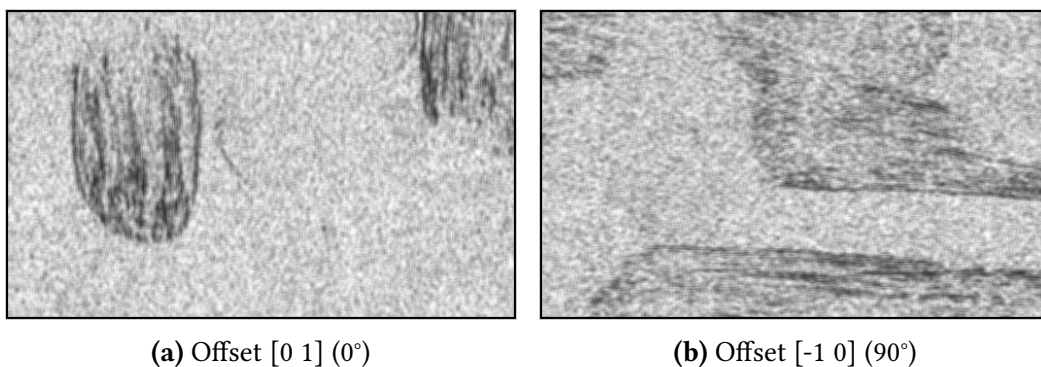




**FIGURE A.14** – Paramètre corrélation dans le plan XY pour différents offsets



**FIGURE A.15** – Paramètre énergie dans le plan XY pour différents offsets



**FIGURE A.16** – Paramètre homogénéité dans le plan XY pour différents offsets

## Annexe B

# Publications dans des revues internationales à comité de lecture

### B.1 Meso-scale FE analyses of textile composite reinforcement deformation based on X-ray computed tomography, *Composite Structures*, 2014

N. Naouar, E. Vidal-Sallé, J. Schneider, E. Maire, P. Boisse  
<http://dx.doi:10.1016/j.compstruct.2014.04.026>

#### Abstract

The simulation at meso-scale of textile composite reinforcement deformation provides important information. In particular it gives the direction and density of the fibres that condition the permeability of the textile reinforcement and the mechanical properties of the final composite. These meso FE analyses are highly dependent on the quality of the initial geometry of the model. Some softwares have been developed to describe composite reinforcement geometries. The obtained geometries imply simplification that can disrupts the reinforcement deformation computation. The present paper presents a direct method using computed tomography to determine finite element models based on the real geometry of the textile reinforcement. The FE model is obtained for any specificity or variability of the textile reinforcement. The interpenetration problems are avoided. The determination of the fibre direction at each point of the model is detailed. It is a key point for the quality of the deformation simulation. A comparison between FE models obtained from  $\mu$ CT and from a textile geometrical modeller shows that the description of the variability taken into account by the first one leads to a better result.

**Keywords :** Meso-FE modelling, X-ray tomography, Hypoelasticity, Large strain, Anisotropy, Skeletonisation

## **B.2 3D composite reinforcement meso F.E. analyses based on X-ray computed tomography, *Composite Structures*, 2015**

N. Naouar, E. Vidal-Sallé, J. Schneider, E. Maire, P. Boisse  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.005>

### **Abstract**

Meso-FE modelling of 3D textile composites is a powerful tool, which can help determine mechanical properties and permeability of the reinforcements or composites. The quality of the meso FE analyses depends on the quality of the initial model. A direct method based on X-ray tomography imaging is introduced to determine finite element models based on the real geometry of 3D composite reinforcements. The method is particularly suitable regarding 3D textile reinforcements for which internal geometries are numerous and complex. The approach used for the separation of the yarns in different directions is specialized because the fibres flow in three-dimensional space. An analysis of the image's texture is performed. The homogeneity parameter has proved to be the most efficient criterion to separate the yarns numerically. A hyperelastic model developed for fibre bundles is used for the simulation of the deformation of the 3D reinforcement. Meso-FE simulations based on this approach are performed in the event of transverse compaction of a 3D orthogonal reinforcement. The deformation of the yarns' geometry in the simulation is compared with real conditions.

**Keywords :** Meso-FE modelling, 3D textile reinforcements, X-Ray tomography, Hyperelasticity, Anisotropy, Finite strains.

# Bibliographie

- [ALA 12] ALAM A.  
Parallelization of the Estimation Algorithm of the 3D Structure Tensor. Master's thesis, School of Information Science, Computer and Electrical Engineering, Halmstad University, 2012.
- [ANS 11] ANSAR M., XINWEI W., CHOUWEI Z.  
Modeling strategies of 3D woven composites : A review. *Composite Structures*, vol. 93, n° 8, 2011, p. 1947-1963.
- [BAD 07] BADEL P., VIDAL-SALLÉ E., BOISSE P.  
Computational determination of in-plane shear mechanical behaviour of textile composite reinforcements. *Computational Materials Science*, vol. 40, n° 4, 2007, p. 439-448.
- [BAD 08a] BADEL P.  
Analyse mésoscopique du comportement mécanique des renforts tissés de composites utilisant la tomographie aux rayons X. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2008.
- [BAD 08b] BADEL P., VIDAL-SALLE E., MAIRE E., BOISSE P.  
Simulation and tomography analysis of textile composite reinforcement deformation at the mesoscopic scale. *Composites Science and Technology*, vol. 68, n° 12, 2008, p. 2433-2440.
- [BAD 08c] BADEL P., VIDAL-SALLÉ E., BOISSE P.  
Large deformation analysis of fibrous materials using rate constitutive equations. *Computers & Structures*, vol. 86, 2008, p. 1164-1175.
- [BAN 98] BANNISTER M., HERSZBERG I.  
*Resin transfer moulding for aerospace structures*, Chapitre Advanced reinforcements. Chapman and Hall, 1998.
- [BAR 96] BARBER C. B., DOBKIN D. P., HUHDANPAA H.  
The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 22, n° 4, 1996, p. 469-483, ACM.
- [BAR 00] BARUCHEL J., BUFFIERE J., MAIRE E., MERLE P., PEIX G.  
*X-Ray Tomography in Material Science*. Hermes Science, 2000.
- [BEL 00] BELYTSCHKO T., LIU W. K., MORAN B.  
*Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000.



- [BER 99] BERTHELOT J.  
*Matériaux composites - Comportement mécanique et analyse des structures*. 1999.
- [BER 08] BERTHEREAU A., DALLIES E.  
Fibres de verre de renforcement. *Techniques de l'Ingénieur*, vol. AM5132, 2008.
- [BIG 04] BIGUN J., BIGUN T., NILSSON K.  
Recognition by symmetry derivatives and the generalized structure tensor. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, vol. 26, n° 12, 2004, p. 1590-1605, IEEE.
- [BIG 05] BIGAUD D., DREANO L., HAMELIN P.  
Models of interactions between process and microstructure and mechanical properties of composite materials-a study of the interlock layer-to-layer braiding technique. *Composite Structures*, vol. 67, n° 1, 2005, p. 99-114.
- [BLU 67] BLUM H.  
A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape. DUNN W., Ed., *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, p. 362-380 MIT Press, 1967.
- [BOE 78] BOEHLER J.  
Lois de comportement anisotrope des milieux continus. *Journal de Mécanique*, vol. 17, 1978, p. 153-190.
- [BOI 01] BOISSE P., GASSER A., HIVET G.  
Analyses of fabric tensile behaviour : determination of the biaxial tension-strain surfaces and their use in forming simulations. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 32, 2001, p. 1395-1414.
- [BOI 04] BOISSE P.  
Mise en forme des renforts fibreux de composites. *Techniques de l'Ingénieur*, vol. AM3734, 2004.
- [BOI 05] BOISSE P., GASSER A., HAGEGE B., BILLOET J.-L.  
Analysis of the mechanical behavior of woven fibrous material using virtual tests at the unit cell level. *Journal of Materials Science*, vol. 40, n° 22, 2005, p. 5955-5962, Springer.
- [BOI 11] BOISSE P., HAMILA N., VIDAL-SALLÉ E., DUMONT F.  
Simulation of wrinkling during textile composite reinforcement forming. Influence of tensile, in-plane shear and bending stiffnesses. *Composites Science and Technology*, vol. 71, n° 5, 2011, p. 683 - 692.
- [BOR 99] BORGEFORS G., NYSTROM I., SANNITI DI BAJA G.  
Computing skeletons in three dimensions. *Pattern Recognition*, vol. 32, 1999, p. 1225-1236.
- [BOR 02] BOROUCHEKI H., CHEROUAT A.  
Une nouvelle approche géométrique pour le drapage des structures composites. *Revue des composites et des matériaux avancés*, vol. 12, 2002, p. 407-421.

- [BOR 03] BOROUCHAKI H., CHEROUAT A.  
Drapage géométrique des composites. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 331, 2003, p. 437-442.
- [BOR 12] DE BORST R., CRISFIELD M. A., REMMERS J. J. C., VERHOOSSEL C. V.  
*Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Wiley, 2012.
- [BOU 07] BOUBAKER B. B., HAUSSY B., GANGHOFFER J. F.  
Discrete models of woven structures. Macroscopic approach. *Composites Part B : Engineering*, vol. 38, 2007, p. 498-505.
- [BRé 08] BRÉVILLIERS M.  
Construction de la triangulation de Delaunay de segments par un algorithme de flip. Thèse de doctorat, Université de Haute Alsace, 2008.
- [BRÉ 03] BRÉARD J., HENZEL Y., TROCHU F., GAUVIN R.  
Analysis of dynamic flows through porous media. Part I : Comparison between saturated and unsaturated flows in fibrous reinforcements. *Polymer Composites*, vol. 24, 2003, p. 391-408.
- [BRI 03] BRIQUET C.  
Algorithmes de contournement de barrières. Master's thesis, Université de Liège, 2003.
- [BUE 98] BUET-GAUTIER K.  
Analyse et simulation du comportement mécanique des renforts composites tissés. Thèse de doctorat, Université d'Orléans, 1998.
- [BUE 01] BUET-GAUTIER K., BOISSE P.  
Experimental analysis and modeling of biaxial mechanical behavior of woven composite reinforcements. *Experimental Mechanics*, vol. 41, n° 3, 2001, p. 260-269.
- [CAL 68] CALABI L., HARNETT W.  
Shape recognition, prairie fires, convex deficiencies and skeletons. *American mathematical monthly*, vol. 75, n° 4, 1968, p. 335-342.
- [CAT 08] CATY O.  
Fatigue des empilements de sphères creuses métalliques. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2008.
- [CHA 11a] CHARMETANT A., VIDAL-SALLE, BOISSE P.  
Hyperelastic modelling for mesoscopic analyses of composite reinforcements. *Composites Science and Technology*, vol. 71, n° 14, 2011, p. 1623-1631.
- [CHA 11b] CHARMETANT A.  
Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2011.
- [CHA 12] CHARMETANT A., ORLIAC J., VIDAL-SALLÉ E., BOISSE P.  
Hyperelastic model for large deformation analyses of 3D interlock composite preforms. *Composites Science and Technology*, vol. 72, 2012, p. 1352-1360.

- [CHE 01] CHEROUAT A., BILLOËT J. L.  
Mechanical and numerical modelling of composite manufacturing processes deep-drawing and laying-up of thin pre-impregnated woven fabrics. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 118, n° 1-3, 2001, p. 460-471.
- [CIA 88] CIARLET P.  
*Mathematical Elasticity, Volume 1 : Three dimensional elasticity*. Elsevier, 1988.
- [COC 95] COCQUEREZ J.-P., PHILIPP S.  
*Analyse d'images : Filtrage et segmentation*. Masson, 1995.
- [COR 14] CORNELISSEN B., SACHS U., RIETMAN B., AKKERMAN R.  
Dry friction characterisation of carbon fibre tow and satin weave fabric for composite applications. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 56, 2014, p. 127-135, Elsevier.
- [CRE 06] CREECH G., PICKETT A. K.  
Meso-modelling of Non-Crimp Fabric composites for coupled drape and failure analysis. *Journal of Materials Science*, vol. 41, n° 20, 2006, p. 6725-6736.
- [CRI 01] CRISCIONE J., DOUGLAS A., HUNTER W.  
Physically based strain invariant set for materials exhibiting transversely isotropic behavior. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, 2001, p. 871-897.
- [DAN 94] DANIEL I. M., ISHAI O.  
*Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford University Press, 1994.
- [DEC 11] DE CARVALHO N., PINHO S., ROBINSON P.  
Reducing the domain in the mechanical analysis of periodic structures, with application to woven composites. *Composites Science and Technology*, vol. 71, 2011, p. 969-979.
- [DES 05] DESPLENTERE F., LOMOV S. V., WOERDEMAN D. L., VERPOEST I., WEVERS M., BOGDANOVICH A.  
Micro-CT characterization of variability in 3D textile architecture. *Composites Science and Technology*, vol. 65, n° 13, 2005, p. 1920-1930.
- [DRI 10] DRIDI S.  
Essais de caractérisation des structure tissées. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2010.
- [DUM 03] DUMONT F.  
Contribution à l'expérimentation et à la modélisation du comportement mécanique de renforts de composites tissés. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2003.
- [DUP 08] DUPUPET G.  
Fibres de carbone. *Techniques de l'Ingénieur*, vol. AM5134, 2008.
- [DUR 10] DURVILLE D.  
Simulation of the mechanical behaviour of woven fabrics at the scale of fibers. *International Journal of Material Forming*, vol. 3, n° S2, 2010, p. 1241-1251.
- [EDE 01] EDELSBRUNNER H.  
*Geometry and topology for mesh generation*. Cambridge University Press, 2001.

- [FIE 91] FIELD D.  
A generic Delaunay triangulation algorithm for finite element meshes. *Advances in engineering software and workstations*, vol. 13, n° 5, 1991, p. 263-272.
- [FLO 13] FLORIMOND C.  
Contribution à la modélisation mécanique du comportement de mèches de renforts tissés à l'aide d'un schéma éléments finis implicite. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2013.
- [FOU 06] FOUARD C., MALANDAIN G., PROHASKA S., WESTERHOFF M.  
Blockwise processing applied to brain microvascular network study. *IEEE Trans Med Imaging*, vol. 25, 2006, p. 1319-1328.
- [FRA 01] FRANKLIN S., WULDER M., GERYLO G.  
Texture analysis of IKONOS panchromatic data for Douglas-fir forest age class separability in British Columbia. *International Journal of Remote Sensing*, vol. 22, n° 13, 2001, p. 2627-2632, Taylor & Francis.
- [FRE 98] FREY P. J., BOROUCHAKI H.  
Geometric surface mesh optimization. *Computing and Visualization in Science*, vol. 1, n° 3, 1998, p. 113-121, Springer-Verlag.
- [FRE 10] FREY P. J., GEORGE P. L.  
*Mesh generation*. John Wiley & Sons, 2010.
- [GAR 97] GARLAND M., HECKBERT P. S.  
Surface simplification using quadric error metrics. *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '97*, New York, NY, USA, 1997 ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., p. 209-216.
- [GAS 00] GASSER A., BOISSE P., HANKLAR S.  
Mechanical behaviour of dry fabric reinforcements. 3D simulations versus biaxial tests. *Computational Materials Science*, vol. 17, n° 1, 2000, p. 7-20.
- [GAY 05] GAY D.  
*Matériaux composites*. Hermes Science, 2005.
- [GHO 07] GHOREISHI S., CARTAUD P., DAVIES P., MESSENGER T.  
Analytical modeling of synthetic fiber ropes subjected to axial loads. Part I : A new continuum model for multilayered fibrous structures. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 44, 2007, p. 2924-2942.
- [GON 90] GONG W., BERTRAND G.  
A simple parallel 3D thinning algorithm. *10th International Conference on Pattern Recognition*, vol. 1, Atlantic City, NJ, 1990 p. 188-190.
- [GON 07] GONZALEZ R. C., WOODS R. E.  
*Digital Image Processing (3rd Edition)*. Prentice Hall, 2007.
- [GOR 07] GORCZYCA-COLE J. L., SHERWOOD J. A., CHEN J.  
A friction model for thermostamping commingled glass-polypropylene woven fabrics. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 38, n° 2, 2007, p. 393-406.

- [GU 02] GU H., ZHILI Z.  
Tensile behavior of 3D woven composites by using different fabric structures. *Materials & Design*, vol. 23, n° 7, 2002, p. 671-674.
- [HAG 04] HAGÈGE B.  
Simulation du comportement mécanique des milieux fibreux en grandes transformations : application aux renforts tricotés. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2004.
- [HAM 08] HAMILA N., BOISSE P.  
Simulations of textile composite reinforcement draping using a new semi-discrete three node finite element. *Composites Part B : Engineering*, vol. 39, n° 6, 2008, p. 999-1010.
- [HAR 73] HARALICK R., SHANMUGAM K., DINSTEN I.  
Textural Features for Image Classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - TSMC*, vol. 3, n° 6, 1973, p. 610-621.
- [HAU 99] HAUTA-KASARI M., PARKKINEN J., JAASKELAINEN T., LENZ R.  
Multi-spectral texture segmentation based on the spectral cooccurrence matrix. *Pattern Analysis & Applications*, vol. 2, n° 4, 1999, p. 275-284, Springer.
- [HER 80] HERMAN G. T.  
*Image Reconstruction from Projections : The Fundamentals of Computerized Tomography*. Academic Press, New York, 1980.
- [HER 99] HERLIDOU S.  
Caracterisation tissulaire en Imagerie par Resonance Magnetique Nucleaire par l'analyse de texture : etude du tissu musculaire et de tumeurs intracraniennes. Thèse de doctorat, Universite de Rennes 1, 1999.
- [HIV 03] HIVET G.  
Modélisation mésoscopique pour le comportement bi-axial et la mise en forme des renforts de composites tissés. Thèse de doctorat, Université d'Orléans, 2003.
- [HIV 05] HIVET G., BOISSE P.  
Consistent 3D geometrical model of fabric elementary cell. Application to a meshing preprocessor for 3D finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 42, n° 1, 2005, p. 25-49.
- [HIV 08] HIVET G., BOISSE P.  
Consistent mesoscopic mechanical behaviour model for woven composite reinforcements in biaxial tension. *Composites Part B : Engineering*, vol. 39, n° 2, 2008, p. 345-361.
- [HSI 09] HSIEH J.  
*Computed tomography : principles, design, artifacts, and recent advances*. SPIE Press, 2009.
- [IAR 09] IARVE E. V., MOLLENHAUER D. H., ZHOU E. G., BREITZMAN T., WHITNEY T. J.  
Independent mesh method-based prediction of local and volume average fields in textile composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 40, 2009, p. 1880-1890.

- [ITS 00] ITSKOV M.  
On the theory of fourth-order tensors and their applications in computational mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 189, 2000, p. 419-438.
- [JAH 93] JAHNE B.  
*Spatio-temporal image processing : Theory and scientific applications*, vol. 751. Springer, 1993.
- [JEU 08] JEULIN D., MOREAUD M.  
Segmentation of 2d and 3d textures from estimates of the local orientation. *Image Analysis & Stereology*, vol. 27, 2008, p. 183-192.
- [JIA 99] JIANG W., YAO M., WALTON J.  
A concise finite element model for simple straight wire rope strand. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, 1999, p. 143-161.
- [JON 00] JONKER P.  
Morphological Operations on 3D and 4D Images : From Shape Primitive Detection to Skeletonization. BORGEFORS G., NYSTROM I., BAJA G., Eds., *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1953, p. 371-391 Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [KAK 99] KAK A. C., SLANEY M.  
*Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE PRESS, 1999.
- [KAW 73a] KAWABATA S., NIWA M., KAWAI H.  
The finite-deformation theory of plain-weave fabrics part I : the biaxial-deformation theory. *The Journal of The Textile Institute*, vol. 64, 1973, p. 21-46.
- [KAW 73b] KAWABATA S., NIWA M., KAWAI H.  
The finite-deformation theory of plain-weave fabrics. Part II : the uniaxial-deformation theory. *The Journal of The Textile Institute*, vol. 64, 1973, p. 47-61.
- [KHA 10] KHAN M., MABROUKI T., VIDAL-SALLÉ E., BOISSE P.  
Numerical and experimental analyses of woven composite reinforcement forming using a hypoelastic behaviour-application to the double dome benchmark. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 210, 2010, p. 378-388.
- [KOI 06] KOISSIN V., IVANOV D., LOMOV S., VERPOEST I.  
Fibre distribution inside yarns of textile composite : geometrical and FE modelling. *8th International Conference on Textile Composites (TexComp-8)*, Nottingham, 2006.
- [KON 89] KONG T., ROSENFELD A.  
Digital topology : Introduction and survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 48, 1989, p. 357-393.
- [KWO 00] KWOK W., CHEN Z.  
A Simple and Effective Mesh Quality Metric for Hexahedral and Wedge Elements. *IMR*, 2000, p. 325-333.
- [LAT 11] LATIL P., ORGÉAS L., GEINDREAU C., DUMONT P., DU ROSCOAT S. R.  
Towards the 3D in situ characterisation of deformation micro-mechanisms within a compressed bundle of fibres. *Composites Science and Technology*, vol. 71, 2011, p. 480-488.

- [LEM 97] LEMAIRE C.  
Triangulation de Delaunay et arbres multidimensionnels. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Saint-Etienne et Université Jean Monnet, 1997.
- [LEM 09] LEMAITRE J., CHABOCHE J., BENALLAL A., DESMORAT R.  
*Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 2009.
- [LIU 94] LIU A., JOE B.  
Relationship between tetrahedron shape measures. *BIT Numerical Mathematics*, vol. 34, n° 2, 1994, p. 268-287.
- [LIU 06] LIU L., CHEN J., ZHU B., YU T. X., TAO X. M., CAO J.  
The yarn-to-yarn friction of woven fabrics. *9th ESAFORM Conference*, Glasgow, United Kingdom, 2006.
- [LO 97] LO S.  
Optimization of tetrahedral meshes based on element shape measures. *Computers & structures*, vol. 63, n° 5, 1997, p. 951-961.
- [LOI 08] LOIX F., BADEL P., ORGEAS L., GEINDREAU C., BOISSE P.  
Woven fabric permeability : From textile deformation to fluid flow mesoscale simulations. *Composites Science and Technology*, vol. 68, n° 7-8, 2008, p. 1624 - 1630.
- [LOI 09] LOIX F., ORGÉAS L., GEINDREAU C., BADEL P., BOISSE P., BLOCH J.-F.  
Flow of non-Newtonian liquid polymers through deformed composites reinforcements. *Composites Science and Technology*, vol. 69, n° 5, 2009, p. 612-619.
- [LOM 00] LOMOV S. V., GUSAKOV A. V., HUYSMANS G., PRODRMOU A., VERPOEST I.  
Textile geometry preprocessor for meso-mechanical models of woven composites. *Composites Science and Technology*, vol. 60, n° 11, 2000, p. 2083-2095.
- [LOM 05] LOMOV S. V., BARBURSKI M., STOILOVA T., VERPOEST I., AKKERMAN R., LOENDERSLOOT R., TEN THIJE R.  
Carbon composites based on multiaxial multiply stitched preforms. Part 3 : Biaxial tension, picture frame and compression tests of the preforms. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 36, n° 9, 2005, p. 1188-1206.
- [LOM 06] LOMOV S. V., VERPOEST I.  
Model of shear of woven fabric and parametric description of shear resistance of glass woven reinforcements. *Composites Science and Technology*, vol. 66, n° 7-8, 2006, p. 919-933.
- [LOM 07] LOMOV S. V., IVANOV D. S., VERPOEST I., ZAKO M., KURASHIKI T., NAKAI H., HIROSAWA S.  
Meso-FE modelling of textile composites : Road map, data flow and algorithms. *Composites Science and Technology*, vol. 67, n° 9, 2007, p. 1870-1891.
- [LOR 87] LORENSEN W. E., CLINE H. E.  
Marching cubes : A high resolution 3D surface construction algorithm. *Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '87*, New York, NY, USA, 1987 ACM, p. 163-169.

- [LUY 09a] DE LUYCKER E., MORESTIN F., BOISSE P., MARSAL D.  
Simulation of 3D interlock composite preforming. *Composite Structures*, vol. 88, n° 4, 2009, p. 615 - 623.
- [LUY 09b] DE LUYCKER E.  
Simulation et expérimentation en mise en forme de renforts composites 3D interlocks. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2009.
- [MAI 03] MAIRE E., FAZEKAS A., SALVO L., DENDIEVEL R., YOUSSEF S., CLOETENS P., LE-TANG J. M.  
X-ray tomography applied to the characterization of cellular materials. Related finite element modeling problems. *Composites Science and Technology*, vol. 63, n° 16, 2003, p. 2431-2443.
- [MAI 14] MAIRE E., WITHERS P.  
Quantitative X-ray tomography. *International materials reviews*, vol. 59, n° 1, 2014, p. 1-43.
- [MAL 98] MALANDAIN G., FERNANDEZ-VIDAL S.  
Euclidean Skeletons. *Image and Vision Computing*, vol. 16, n° 5, 1998, p. 317-327.
- [MAR 56] MARK C., TAYLOR H. M.  
The fitting of woven cloth to surfaces. *Journal of the Textile Institute*, vol. 47, 1956, p. 477-488.
- [MAR 63] MARQUARDT D.  
An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 11, 1963, p. 431-441.
- [MOH 88] MOHAMED M., ZHANG Z., DICKINSON L.  
Manufacture of multilayer woven preforms. *Advanced composites and processing technology*, vol. 5, 1988, p. 81-89.
- [MOU 99] MOURITZ A., BANNISTER M., FALZON P., LEONG K.  
Review of applications for advanced three-dimensional fibre textile composites. *Composites Part A : applied science and manufacturing*, vol. 30, n° 12, 1999, p. 1445-1461.
- [MOU 08] MOULIN N.  
Modélisation numérique de la fragmentation de particules de formes complexes avec une application au laminage des alliages d'aluminium. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2008.
- [NAO 14] NAOUAR N., VIDAL-SALLE E., SCHNEIDER J., MAIRE E., BOISSE P.  
Meso-scale FE analyses of textile composite reinforcement deformation based on X-Ray computed tomography. *Composite Structures*, vol. 116, 2014, p. 165-176.
- [NAW 00] NAWROCKI A., LABROSSE M.  
A finite element model for simple straight wire rope strands. *Computers and Structures*, vol. 77, 2000, p. 345-359.
- [NEW 59] NEWMARK N.  
A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 85, 1959, p. 67-94.



- [NGU 13] NGUYEN Q., VIDAL-SALLE E., BOISSE P., PARK C., SAOUAB A., BREARD J., HIVET G.  
Mesoscopic scale analyses of textile composite reinforcement compaction. *Composites Part B : Engineering*, vol. 44, n° 1, 2013, p. 231 - 241.
- [NIB 92] NIBLACK C., GIBBONS P., CAPSON D.  
Generating skeletons and centerlines from the distance transform. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, vol. 54, n° 5, 1992, p. 420-437.
- [PAL 01] PALAGYI K., BALOGH E., KUBA A., HALMAI C., ERDOHELYI B., SORANTIN E., HAUSEGGER K.  
A Sequential 3D Thinning Algorithm and Its Medical Applications. INSANA M., LEAHY R., Eds., *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2082, p. 409-415 Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [PAR 94] PARTHASARATHY V., GRAICHEN C., HATHAWAY A.  
A comparison of tetrahedron quality measures. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 15, n° 3, 1994, p. 255-261.
- [PAR 00] PARNAS R. S.  
*Liquid Composite Molding*. Hanser Gardner Publications, 2000.
- [PEN 05] PENG X. Q., CAO J.  
A continuum mechanics-based non-orthogonal constitutive model for woven composite fabrics. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 36, n° 6, 2005, p. 859-874.
- [PER 04] PERSSON P.-O., STRANG G.  
A simple mesh generator in MATLAB. *SIAM review*, vol. 46, n° 2, 2004, p. 329-345, SIAM.
- [POT 99] POTTER K. D.  
The early history of the resin transfer moulding process for aerospace applications. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 30, n° 5, 1999, p. 619-621.
- [POT 12] POTTER E., PINHO S., ROBINSON P., IANNUCCI L., McMILLAN A.  
Mesh generation and geometrical modelling of 3D woven composites with variable tow cross-sections. *Computational Materials Science*, vol. 51, n° 1, 2012, p. 103-111.
- [PRE 70] PREWITT J.  
*Picture Processing and Psychopictorics*, Chapitre Object enhancement and extraction. Academic Press, 1970.
- [PRE 85] PREPARATA F. P., SHAMOS M. I.  
*Computational geometry : an introduction, 1985*. Springer-Verlag, 1985.
- [PRO 97] PRODRMOU A. G., CHEN J.  
On the relationship between shear angle and wrinkling of textile composite preforms. *Composites Part A*, vol. 28A, 1997, p. 491-503.
- [PRO 09] PROVOT L.  
Vers une polyédricisation des objets discrets bruités 3D. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré - Nancy1, 2009.

- [PUD 98] PUDNEY C.  
Distance-ordered homotopic thinning : A skeletonization algorithm for 3D digital images. *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 72, 1998, p. 404-413.
- [RAZ 06] RAZ-BEN AROUSH D., MAIRE E., GAUTHIER C., YOUSSEF S., CLOETENS P., WAGNER H.  
A study of fracture of unidirectional composites using in situ high-resolution synchrotron X-ray microtomography. *Composites Science and Technology*, vol. 66, 2006, p. 1348-1353.
- [REZ 11] REZAKHANIHA R., AGIANNIOTIS A., SCHRAUWEN J., GRIFFA A., SAGE D., BOUTEN C., VAN DE VOSSE F., UNSER M., STERGIOPULOS N.  
Experimental Investigation of Collagen Waviness and Orientation in the Arterial Adventitia Using Confocal Laser Scanning Microscopy. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, vol. 11, n° 3-4, 2011, p. 461-473.
- [ROB 65] ROBERTS L.  
*Optical and Electro-optical Information Processing*, Chapitre Machine perception of three dimensional solids, p. 159-197. MIT Press, 1965.
- [RUD 97] RUDD C. D., LONG A.  
*Liquid molding technologies*. Woodhead Publishing Limited, 1997.
- [SCH 92a] SCHNUR D. S., ZABARAS N.  
An inverse method for determining elastic material properties and a material interface. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, n° 10, 1992, p. 2039-2057, John Wiley & Sons, Ltd.
- [SCH 92b] SCHNUR D. S., ZABARAS N.  
An inverse method for determining elastic material properties and a material interface. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 33, 1992, p. 2039-2057.
- [SCH 09] SCHNEIDER J., HELLO G., ABOURA Z., BENZEGGAGH M., MARSAL D.  
A meso-FE voxel model of an interlock woven composite. *Poster of the 17th International Conference on Composite Materials*, 2009.
- [SED 90] SEDGEWICK R.  
*Algorithms in C*. Addison - Wesley, 1990.
- [SHA 04] SHARMA S. B., SUTCLIFFE M. P. F.  
A simplified finite element model for draping of woven material. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 35, 2004, p. 637-643.
- [SHE 07] SHERBURN M.  
Geometric and mechanical modelling of textiles. Thèse de doctorat, Université de Nottingham, 2007.
- [SID 82] SIDOROFF F.  
. « Cours sur les grandes déformations », 1982.
- [SOB 90] SOBEL I.  
*Machine Vision for Three-Dimensional Scenes*, Chapitre An isotropic image gradient operator, p. 376-379. Academic Press, 1990.

- [SPE 72] SPENCER A.  
*Deformations of Fibre Reinforced Materials*. Oxford University Press, London, 1972.
- [SRE 06] SREPRATEEP K., BOHEZ E.  
Computer aided modeling of fiber assemblies. *Computer Aided Design & Applications*, vol. 3, 2006, p. 367-376.
- [STO 99] STOCK S.  
X-ray microtomography of materials. *International Materials Reviews*, vol. 44, n° 4, 1999, p. 141-164.
- [STO 08] STOCK S.  
Recent advances in X-ray microtomography applied to materials. *International Materials Reviews*, vol. 53, n° 3, 2008, p. 129-181.
- [SZE 05] SZE K. Y., LIU X. H.  
A new skeletal model for fabric drapes. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 2, n° 3-4, 2005, p. 225-243.
- [THI 07] TEN THIJE R., AKKERMAN R., HUÉTINK J.  
Large deformation simulation of anisotropic material using an updated Lagrangian finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, 2007, p. 3141-3150.
- [TRU 55a] TRUESDELL C.  
Hypo-Elasticity. *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 4, 1955, p. 83-133.
- [TRU 55b] TRUESDELL C.  
The simplest rate theory of pure elasticity. *Communication of Pure Applied Mechanics*, vol. 8, 1955, p. 123-132.
- [TSA 81] TSAO Y., FU K.  
A parallel thinning algorithm for 3-d pictures. *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 17, 1981, p. 315-331.
- [VAR 95] VARNA J., JOFFE R., BERGLUND L.  
Effect of voids on failure mechanisms in RTM laminates. *Composites Science and Technology*, vol. 53, 1995, p. 241-249.
- [VER 05] VERPOEST I., LOMOV S. V.  
Virtual textile composites software Wisetex : integration with micro-mechanical and permeability and structural analysis. *Composites Science and Technology*, vol. 65, n° 15-16, 2005, p. 2563-2574.
- [VIL 14] VILFAYEAU J.  
Modélisation numérique du procédé de tissage des renforts fibreux pour matériaux composites. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2014.
- [WAN 99] WANG J., PATON R., PAGE J. R.  
The draping of woven fabric preforms and prepregs for production of polymer composite components. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 30, n° 6, 1999, p. 757-765.

- [WEE 91] WEEN F. V. D.  
Algorithms for draping fabrics on doubly-curved surfaces. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 31, 1991, p. 1415-1426.
- [WEN 13] WENDLING A.  
Simulation à l'échelle mésoscopique de la mise en forme de renforts de composite tissés. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2013.
- [WEN 14] WENDLING A., HIVET G., VIDAL-SALLE E., BOISSE P.  
Consistent geometrical modelling of interlock fabrics. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 90, 2014, p. 93-105.
- [WEN 15] WENDLING A., DANIEL J., HIVET G., VIDAL-SALLE E., BOISSE P.  
Meshing Preprocessor for the Mesoscopic 3D Finite Element Simulation of 2D and Interlock Fabric Deformation. *Applied Composite Materials*, , 2015, p. 1-18.
- [WIL 08] WILLEMS A., LOMOV S. V., VERPOEST I., VANDEPITTE D.  
Optical strain fields in shear and tensile testing of textile reinforcements. *Composites Science and Technology*, vol. 68, n° 3-4, 2008, p. 807-819.
- [XIA 97] XIAO H., BRUHNS O., MEYERS A.  
Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate. *Journal of Elasticity*, vol. 47, n° 1, 1997, p. 51-68, Springer.
- [YOU 05] YOUSSEF S., MAIRE E., GAERTNER R.  
Finite element modelling of the actual structure of cellular materials determined by X-ray tomography. *Acta Materialia*, vol. 53, n° 3, 2005, p. 719-730.
- [ZHO 98] ZHOU Y., KAUFMAN A., TOGA A.  
3D skeleton and centerline generation based on an approximate minimum distance field. *International Journal of Visual Computer*, vol. 14, 1998, p. 303-314.
- [ZHO 04] ZHOU G., SUN X., WANG Y.  
Multi-chain digital element analysis in textile mechanics. *Composites Science and Technology*, vol. 64, n° 2, 2004, p. 239-244.