



HAL
open science

Etude numérique de l'écoulement de couche de mélange temporelle à viscosité variable

Noureddine Taguelmimt

► **To cite this version:**

Noureddine Taguelmimt. Etude numérique de l'écoulement de couche de mélange temporelle à viscosité variable. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. INSA de Rouen, 2015. Français. NNT : 2015ISAM0020 . tel-01376416

HAL Id: tel-01376416

<https://theses.hal.science/tel-01376416v1>

Submitted on 4 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Préparée au sein de

L'UMR 6614 - CORIA

En vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'INSA DE ROUEN

Spécialité : Mécanique des fluides & Énergétique

Étude numérique de l'écoulement de couche de mélange temporelle à viscosité variable

Présentée et soutenue par

Noureddine TAGUELMIMT

Thèse soutenue publiquement le 19 novembre 2015

Devant le jury composé de

M. Malek Abid,	MdC, HDR, Université d'Aix-Marseille	Rapporteur
Mme Françoise Bataille,	Professeur, Université de Perpignan	Examineur
Mme Francesca Chilla,	Professeur, ENS de Lyon	Examineur
Mme Luminita Danaila,	Professeur, Université de Rouen	Directeur
M. Abdellah Hadjadj,	Professeur, INSA de Rouen	Co-directeur
M. Eric Lamballais,	Professeur, Université de Poitiers	Rapporteur

Thèse dirigée par Luminita DANAILA et Abdellah HADJADJ

Laboratoire UMR 6614- CORIA

Table des matières

1	Revue bibliographique	5
1.1	Écoulement de couche de mélange	6
1.1.1	Configuration spatiale et temporelle	6
1.1.2	Influence de la masse volumique	7
1.1.3	Influence de la compressibilité	9
1.1.4	Influence des différents paramètres dynamiques et géométriques	12
1.2	Effets manifestes des variations spatio-temporelles de viscosité	12
1.2.1	Écoulements géophysiques : mélange des fontaines de magma	12
1.2.2	Écoulement de jet rond : jet de propane/(air-néon)	15
1.2.3	Étude de stabilité linéaire	17
1.3	Conclusion	21
2	Équations et modèles mathématiques	23
2.1	Équations de couche de mélange temporelle incompressible à viscosité variable	24
2.1.1	Équations de Navier-Stokes instantanées	24
2.1.2	Équation de transport de la vitesse moyenne	25
2.1.3	Équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence	28
2.1.4	Équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence à chaque échelle	30
2.1.5	Équation de transport de la vorticité instantanée	36
2.1.6	Équation de transport de la vorticité moyenne	38

2.1.7	Équation de transport de l'enstrophie	39
2.1.8	Équation de transport de scalaires <i>passif</i> et <i>actif</i>	43
2.2	Relations thermodynamiques	44
2.2.1	Gaz parfaits	44
2.2.2	Propriétés de transport	45
2.3	Conclusion	47
3	Méthodes numériques	49
3.1	Code CHOC-WAVES	49
3.1.1	Formulation mathématique des équations résolues	50
3.1.2	Discrétisation des termes convectifs : le schéma WENO	51
3.1.3	Discrétisation des termes diffusifs	58
3.1.4	Discrétisation temporelle	59
3.2	Conditions initiales et conditions aux limites	59
3.2.1	Conditions périodiques	59
3.2.2	Conditions de non réflexion	60
3.2.3	Conditions initiales turbulentes	60
3.3	Conclusion	63
4	Influence des paramètres numériques et thermodynamiques	65
4.1	Description des simulations numériques	65
4.1.1	Présentation des différents cas tests	65
4.1.2	Domaine de calcul : Coefficients d'autocorrélation	73
4.1.3	Influence de la taille de grille	74
4.1.4	Critère de visualisation Q	79
4.2	Influence du schéma numérique des termes convectifs : diffusion numérique du schéma WENO.	82
4.3	Influence du modèle de viscosité de mélange : formule de Wilke.	87

4.4	Influence des configurations co-courant et contre courant de la couche de mélange	94
4.5	Influence de l'épaisseur initiale de viscosité $\delta_{\nu,0}$	96
4.6	Conclusion	100
5	Effets des variations de viscosité dans une couche de mélange temporelle :	
	Analyse globale	103
5.1	Analyse du champ moyen pour différents rapports de viscosité	104
5.1.1	Évaluation de l'épaisseur δ_θ de la couche de mélange	104
5.1.2	Analyse du champ de vitesse moyen	108
5.1.3	Analyse du champ de vorticit�� moyenne	120
5.1.4	Analyse du champ scalaire moyen	130
5.2	Conclusion	143
6	Effets des variations de viscosit�� dans une couche de m��lange temporelle :	
	Analyse d��taill��e	145
6.1	Analyse du champ fluctuant : Statistiques en un point	146
6.1.1	Analyse du champ de vitesse fluctuant	146
6.1.2	Analyse du champ de vorticit�� fluctuant	180
6.1.3	Analyse du champ scalaire fluctuant	186
6.2	Analyse du champ fluctuant �� chaque ��chelle	189
6.2.1	Analyse des fonctions de structures de vitesse	189
6.2.2	Analyse de l'��quation de transport de $\langle(\Delta u_i)^2\rangle$	194
6.3	Conclusion	198
7	Conclusions g��n��rales et perspectives	201
A	Annexe	II
A.1	Article publi�� dans <i>Journal of Physics</i>	II
A.2	Article accept�� dans <i>Flow, Trubulence and Combustion</i>	X
A.3	Article soumis dans <i>Journal of Turbulence</i>	XXVIII

Acronymes **LI**

Symboles **LII**

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, Luminita, de m'avoir pris sous ses ailes tout au long de cette thèse. Vous m'avez conseillé, soutenu et rassuré sans réserve, particulièrement durant les moments de doute. Comme dans une course, vous m'avez sans cesse rappelé le point d'arrivée, en me laissant choisir le chemin à suivre. Je vous remercie sincèrement pour la confiance que vous m'avez accordée. Je vous remercie également d'avoir partagé avec moi votre passion pour la mécanique des fluides, de manière générale, et la turbulence, en particulier.

Je remercie Abdellah, d'avoir mis à ma disposition le code CHOC-WAVES, avec lequel j'ai pu accomplir ce travail. Je te remercie pour les différentes pistes et les suggestions que tu as pu m'apporter suite à mes différentes interrogations. Je te remercie également pour tes nombreuses corrections, que ce soit, pour les articles, le manuscrit et ma présentation de thèse.

Je remercie monsieur Mourad Boukhalfa, directeur du CORIA, de m'avoir accueilli au sein du laboratoire. Un grand merci également pour mesdames Valérie THIERY et Nathalie DELAHAYE, pour les services rendus.

Je tiens également à remercier les membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail. À commencer par mes deux rapporteurs, messieurs Malek ABID et Éric LAMBALLAIS, qui ont examiné dans le détail mon manuscrit de thèse. Je les remercie pour leurs pertinentes remarques, qui ont sans doute contribué à améliorer la qualité de ce mémoire. Je remercie madame Françoise BATAILLE d'avoir présidé mon jury. Vous avez apprécié la lecture de mon manuscrit, vous l'avez qualifié de "roman" plein de suspens!! J'en suis ravi. Je remercie Madame Francesca CHILLA pour son rôle d'examineur.

Je remercie le personnel du CRIHAN (Centre de Régional Informatique de Haute Normandie), plus particulièrement madame Béatrice CHARTON et monsieur Patrick BOUSQUET-MELOU, pour leur assistance technique irréprochable et les moyens techniques mis à ma disposition. Je remercie également GENCI (Genci grand équipement national de calcul intensif), en particulier, l'IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique) et le CINES (Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur), pour

l'assistance, les formations et les moyens mis à ma disposition.

Un grand merci au personnel du service informatique du CORIA, plus particulièrement, messieurs Guillaume EDOUARD, Cédric CHAMBRELAN et Hugues AROUX pour les services rendus ainsi que les nombreux disques durs mis à ma disposition.

Je tiens à remercier monsieur François-Xavier DEMOULIN, pour m'avoir ouvert les portes du CORIA en m'accueillant comme stagiaire en 2011. Je me suis bien "amusé" avec Open-Foam ! Ce fut une expérience enrichissante.

Je tiens également à remercier mes amis et mes collègues qui m'ont suivi, soutenu et conseillé tout au long de mon projet de thèse : Yacine, Thomas, Hakim, Wahid, Said, Edouard, Sarah, Arezki, Léa, Lisa, Geoffroy, Pierre, Julien, Aliou et Alexandre. Thomas, mon ami, j'ai adoré partager le bureau avec toi, je garde en mémoire certaines de tes phrases cultisimes ! J'ai également adoré nos "beats party" accompagnées par un son "progressive house", les curieux pourront voir sur Youtube ! Tout ça évidemment autour d'un café délicieux préparé dans notre bureau. Merci pour ces moments. Tu m'étonneras toujours par tes modifications apportées au turbo de la Renault 5 GT !

Je remercie mes tantes et mon oncle : Lila, Hasina et Samir ainsi que leurs conjoints, pour m'avoir chaleureusement accueilli chez eux lors de mon passage à l'Institut de Mécanique de Marseille. Je n'oublie pas de remercier Ghaya, Naima, Karima, Farid et Azziz, qui ont toujours été présents pour moi, depuis mes premiers pas !

Je remercie mes beaux parents, Ali et Houria pour leur soutien tant moral que matériel. Lors de votre prochain séjour en France, c'est promis, nous irons visiter le Mont-Saint-Michel !

Je remercie de tout mon cœur ma grand-mère à qui je dois tant, tu as tellement voulu que j'aie le plus loin possible dans mes études. C'est chose faite, cette thèse t'est dédiée.

Je remercie mes parents ainsi que mes frères et sœurs pour leur soutien et leur confiance, vous avez toujours cru en moi, je le sais.

Enfin, je remercie de tout mon cœur ma femme, Meriem, pour avoir supporté mon stress. Je t'ai embarquée avec moi dans cette aventure malgré toi, tu n'as pas cessé de m'encourager et de me soutenir, tu as également su me faire changer les idées. Je remercie mon fils, Adam, de m'avoir offert des moments de joie inoubliables.

Résumé

Depuis les travaux pionniers de Brown et Roshko [3] portant sur les effets des variations de masse volumique au sein de l'écoulement de couche de mélange, plusieurs autres études tant théoriques, expérimentales ou numériques se sont attelées à étudier finement cet écoulement. Les motivations sont d'ordre pratiques (industrie de la chimie, l'aérodynamique, la combustion ...) ou alors purement théoriques (rôle des structures cohérentes, instabilités secondaires ...). Ces études se sont intéressées, entre autres, aux effets de compressibilité et/ou de masse volumique variable. A notre connaissance, les effets des variations de viscosité dans la configuration de couche de mélange sont peu abordés dans la littérature. L'objectif de ces travaux de recherche est l'exploration théorique et numérique de l'écoulement de couche de mélange temporelle à viscosité variable, plus particulièrement durant sa phase initiale de développement. D'un point de vu numérique, les équations de Navier-Stokes sont résolues, en formulation faiblement compressible, au moyen du solveur CHOC-WAVES, basé sur le schéma WENO. L'approche DNS est justifiée par l'absence, dans la littérature, de modèles de sous-maille capables de prendre en compte les effets de la viscosité variable. Les équations de transport des différentes grandeurs moyennes et fluctuantes en un point et en chaque échelle (bilan d'énergie cinétique) sont réécrites en formulations incompressible et à viscosité variable. Des termes supplémentaires, engendrés par les variations spatio-temporelles de la viscosité, apparaissent dans ces équations. Celles-ci sont utilisées comme outil, afin d'explorer l'écoulement de couche de mélange et d'étudier le développement de la turbulence dans un milieu hétérogène. Les rapports de viscosité simulés sont $R_\nu = [1 - 18]$. Les résultats numériques montrent que l'épaisseur de la zone de mélange δ_θ évolue plus rapidement lorsque le rapport de viscosité R_ν est élevé. De même, les gradients verticaux de la vitesse longitudinale $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ sont amplifiés par les gradients de viscosité, un gain de près de 60%, par rapport aux valeurs initiales, est observé. La production de l'énergie cinétique turbulente est également amplifiée. L'évolution temporelle des fluctuations des vitesse est accélérée, celles-ci sont augmentées de près de 120% par rapport à l'écoulement à viscosité constante. Le régime autosimilaire du tenseur de Reynolds est atteint plus rapidement par l'écoulement à viscosité variable et l'isotropie des fluctuations de vitesse est améliorée.

Abstract

Since the pioneering work of Brown and Roshko [3] on the effects of density variations within the mixed layer flow, several other theoretical, experimental and numerical studies harnessed to finely investigate this flow. The motivations are of practical order (chemical industry, aerodynamics, combustion. . .) or purely theoretical (the role of coherent structures, secondary instabilities). These studies have focused on, among others, the effects of compressibility and/or variable density. To our knowledge, the effects of viscosity variations in the mixing layer configuration are not discussed in the literature. The objective of this research is the theoretical and numerical exploration of the variable viscosity temporal mixed layer flow, especially during its initial phase of development. From a numerical viewpoint, the Navier-Stokes equations are solved in weakly compressible formulation, using the solver CHOC-WAVES, based on WENO scheme. The DNS approach is justified by the absence in the literature of subgrid models that account for the effects of variable viscosity. The transport equations of different mean and fluctuating quantities at a point and each scale (scale-by-scale energy budget) are rewritten in incompressible and variable-viscosity formulation. Additional terms, generated by the spatial and temporal variations of viscosity occur in these equations. These are used as a tool to explore the mixed layer flow and study the development of turbulence in a heterogeneous environment. The simulated viscosity ratios are $R_\nu = [1 - 18]$. The numerical results show that the the mixing layer thickness δ_θ grows faster when the viscosity ratio R_ν is high. The vertical gradients of the longitudinal mean velocity $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ are amplified by the viscosity gradients, a gain of almost 60 %, compared to initial values was observed. The production of turbulent kinetic energy is also amplified. The temporal evolution of the velocity fluctuations is accelerated, they are increased to nearly 120 % with respect to the constant viscosity flow. The self-similar regime of the Reynolds tensor is reached more quickly by the variable viscosity flow and the isotropy of the velocity fluctuations is improved.

Chapitre 1

Revue bibliographique

Sommaire

1.1	Écoulement de couche de mélange	6
1.1.1	Configuration spatiale et temporelle	6
1.1.2	Influence de la masse volumique	7
1.1.3	Influence de la compressibilité	9
1.1.4	Influence des différents paramètres dynamiques et géométriques . . .	12
1.2	Effets manifestes des variations spatio-temporelles de viscosité .	12
1.2.1	Écoulements géophysiques : mélange des fontaines de magma	12
1.2.2	Écoulement de jet rond : jet de propane/(air-néon)	15
1.2.3	Étude de stabilité linéaire	17
1.3	Conclusion	21

1.1 Écoulement de couche de mélange

Une couche de mélange plane résulte de la confluence de deux écoulements parallèles de vitesses différentes, U_g et U_p , caractérisés par un rapport $R_u = U_g/U_p \geq 1$. Ces deux écoulements possèdent des propriétés physico-chimiques soit identiques, ou bien différentes. On parle dans le premier cas d'écoulement de couche de mélange homogène, et dans le second cas de couche de mélange hétérogène. Les différences de propriétés physico-chimiques se traduisent essentiellement par les différences de masse volumique et/ou de viscosité, elles sont caractérisées par les rapports $R_\rho = \rho_g/\rho_p \geq 1$ et $R_\mu = \mu_g/\mu_p \geq 1$, respectivement. La mise en contact de ces deux écoulements, qu'ils soient homogènes ou hétérogènes, fait apparaître dans l'écoulement une perturbation hydrodynamique appelée instabilité de Kelvin-Helmoltz, celle-ci résulte du fait de la présence d'un point d'inflexion dans le profil initial de la vitesse longitudinale[1]. Ces instabilités naissent et se développent lorsque le nombre de Reynolds critique de l'écoulement est atteint, en dessous de ce nombre critique l'écoulement reste laminaire et les perturbations ne s'amplifient pas [2]. Les couches de mélange sont caractérisées par la présence de structures cohérentes comme le démontre les travaux pionniers de Brown et Roshko [3], illustrées sur la figure 1.1. Plusieurs auteurs ont confirmé la persistance de ces structures dans le régime pleinement développé, ce qui confère à ces structures une importance capitale dans la dynamique de cet écoulement.

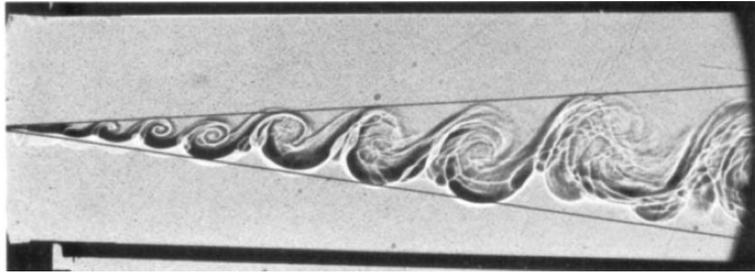


FIGURE 1.1 – Couche de mélange de Brown et Roshko[3], les lignes montrent la méthode de détermination de l'épaisseur visuelle δ_{viz} .

1.1.1 Configuration spatiale et temporelle

D'un point de vue numérique, il est possible d'adapter les conditions aux limites du problème pour simuler un même écoulement suivant deux approches : l'approche spatiale et l'approche temporelle. La première approche reproduit les configurations expérimentales où l'écoulement de couche de mélange se développe en aval d'une plaque plane séparatrice. Dans ce cas deux scénarios sont possibles. Pour le premier, la plaque plane est intégrée au calcul numérique pour voir se développer deux couches limites de part et d'autre de la plaque séparatrice. Le second scénario consiste à imposer des conditions aux limites issues d'un calcul précurseur pour modéliser l'état des couches limites au bord de fuite. L'approche spatiale contient une seule direction homogène (la direction transversale z). L'approche temporelle

contient deux directions homogènes suivant l'axe longitudinal x et transversal z en imposant des conditions périodiques selon ces deux directions. L'écoulement n'évolue plus dans la direction longitudinale comme dans le cas de l'approche spatiale mais en fonction du temps. La configuration temporelle peut être alors vue comme une fenêtre temporelle qui se déplace le long de la direction longitudinale à la vitesse U_c de convection des structures de Brown et Roshko [3].

La figure 1.2 schématise le principe des deux configurations ; temporelle et spatiale. Plu-

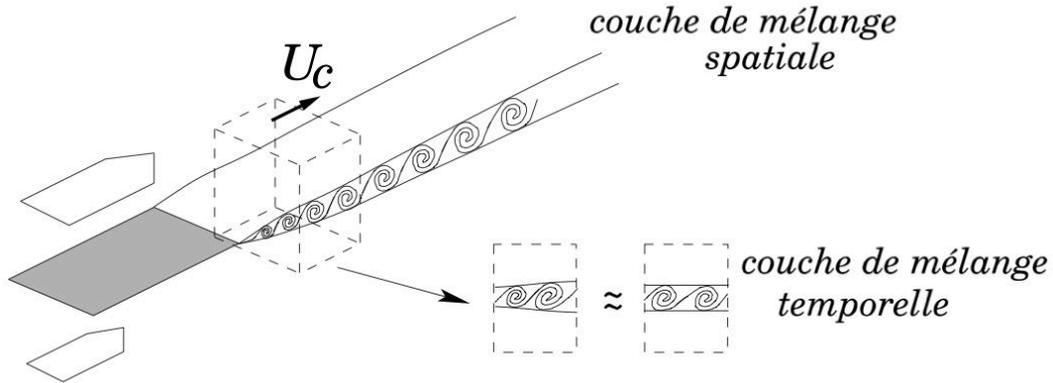


FIGURE 1.2 – Configuration des couches de mélange spatiale et temporelle, d'après [4].

sieurs auteurs [5], [6], [7], continuent de choisir l'approche temporelle pour mener leur étude. L'avantage principal d'une telle approche est sa facilité de mise en œuvre ne nécessitant pas de traitements spécifiques des conditions aux limites d'entrée et de sortie du domaine de calcul. De plus, la taille du domaine dans la direction longitudinale est nettement inférieure pour la configuration temporelle comparé à la configuration spatiale, ce qui réduit considérablement les coûts de calculs des simulations spatiales tridimensionnelles. Ces simulations 3D spatiales telle que les DNS de Laizet et al.[8], Wang al. et [9] et Attili et al.[10], sont peu répandues dans la littérature, contrairement aux simulations 2D spatiales. Néanmoins, les simulations 2D (temporelle ou spatiale) surestiment les grandeurs fluctuantes longitudinales et normales du fait de l'absence d'une troisième direction d'espace. Les simulations 3D temporelles fournissent des résultats très comparables à l'approche spatiale dans plusieurs domaines, avec l'avantage de pouvoir mener plusieurs cas d'études du fait des temps de calcul modérés.

1.1.2 Influence de la masse volumique

Les effets de masse volumique variable ont été quantifiés par Brown et Roshko [3] en faisant varier le rapport de masse volumique $R_\rho = 1/7, 1$ et 7 . D'une manière générale, ils trouvent que le taux d'expansion $\frac{d\delta}{dx}$ augmente lorsque l'écoulement haute vitesse de la couche de mélange possède la plus faible masse volumique. D'après les notations de Brown et Roshko [3] cela correspond bien à un rapport de masse volumique $R_\rho = 7$, voir figure 1.3. Typiquement, dans un jet rond, l'épaisseur de la couche de mélange est plus grande lorsque

le fluide léger est injecté dans un environnement plus lourd que dans le cas contraire. Ce résultat est confirmé par plusieurs d'autres études comme par exemple [11] et [12].

Brown et Roshko [3] proposent un modèle pour prédire le taux d'expansion d'une couche de mélange incompressible à masse volumique variable :

$$\frac{d\delta}{dx} = C_\delta \frac{(1 - R_u)(1 + \sqrt{R_\rho})}{1 + R_u\sqrt{R_\rho}}. \quad (1.1)$$

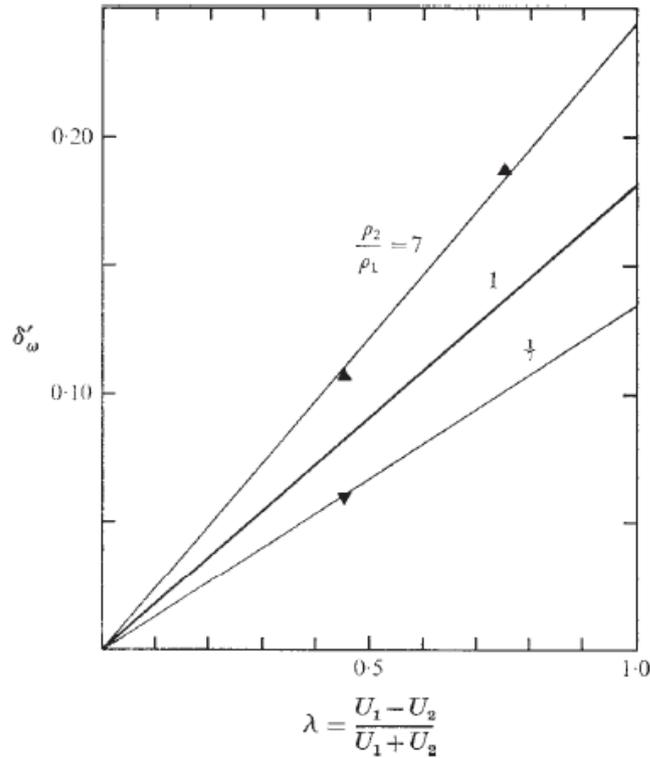


FIGURE 1.3 – Influence du rapport de masse volumique sur l'expansion de la couche de mélange, d'après Brown et Roshko [3].

La valeur de la constante C_δ a été prédite expérimentalement par Brown et al. [13], ils ont trouvé que la valeur de $C_\delta=0.17$ est en bon accord avec leurs visualisations. Slessor et al. [14], en modifiant le niveau de turbulence des couches limites amont, ont confirmé l'influence des variations de masse volumique sur le taux de croissance de la couche de mélange et ont montré que la constante C_δ varie dans un interval de 0,14 à 0,18. Pour d'autres définitions d'épaisseur de couche de mélange C_δ s'exprime comme suit :

$$\frac{d\delta_\omega}{dx} = \frac{d\delta_{viz}}{dx} = \frac{d\delta_{pit}}{dx} = \frac{(1 - R_u)(1 + \sqrt{R_\rho})}{2(1 + R_u\sqrt{R_\rho})}. \quad (1.2)$$

Dimotakis [15] apporte une correction au taux d'expansion, proposé par Brown et Roshko [3], pour prendre en compte l'asymétrie spatiale de la couche de mélange, qui tend à se développer davantage du côté basse vitesse :

$$\frac{d\delta}{dx} = C_\delta \frac{(1 - R_u)(1 + \sqrt{R_\rho})}{2(1 + R_u\sqrt{R_\rho})} \left[1 - \left(\frac{1 - \sqrt{R_\rho}}{1 + \sqrt{R_\rho}} \right) \left(\frac{1}{1 + 2,91(1 + R_u)/(1 - R_u)} \right) \right]. \quad (1.3)$$

1.1.3 Influence de la compressibilité

Dans les couches de mélanges compressibles on parle généralement de l'effet de compressibilité par effet de nombre de Mach. Il existe deux nombres de Mach dans une couche de mélange, M_g et M_p relatifs aux courants libres de vitesse U_g et U_p , respectivement. Dans le cas où l'écoulement lent est mû par une vitesse nulle $U_p = 0$, le nombre de Mach $M_g = U_g/c_g$ (où c_g est la vitesse sonique au niveau de l'écoulement rapide) est suffisant pour quantifier l'effet de compressibilité. Ceci n'est plus vrai pour une couche de mélange où la vitesse du courant lent est non nulle $U_p \neq 0$. A cet effet Bogdanoff [16] a introduit pour la première fois le concept du nombre de Mach convectif M_c qui prend en compte l'existence des deux nombres de Mach M_g et M_p des courants rapide et lent, respectivement. Ce nombre de Mach convectif a ensuite été repris par Papamoschou et Roshko [13] en montrant dans leur étude que M_c est effectivement le paramètre caractérisant l'effet de compressibilité dans une couche de mélange. Ce nombre de Mach convectif s'obtient en se plaçant dans un repère lié aux structures cohérentes de Brown et Roshko, l'égalité des pressions aux points de stagnation entre chaque couple de structures cohérentes successives schématisé sur la figure 1.4 permet d'écrire :

$$\left[1 + \frac{\gamma_1 - 1}{2} M_g^2 \right]^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} = \left[1 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} M_p^2 \right]^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}}, \quad (1.4)$$

où M_g et M_p sont les nombres de Mach des courants rapide et lent, respectivement. Ils sont définis comme suit :

$$M_{cg} = \frac{U_g - U_c}{c_g} \quad \text{et} \quad M_p = \frac{U_p - U_c}{c_p}, \quad (1.5)$$

où c_g et c_p les vitesses soniques dans l'écoulement rapide et lent, respectivement, U_c est la vitesse convective des structures cohérentes. En admettant que les deux gaz sont de même nature ; $\gamma_1 = \gamma_2 = C_p/C_v$, les nombres de Mach M_g et M_p sont alors identiques et le nombre de Mach convectif M_c s'écrit :

$$M_c = \frac{U_g - U_p}{c_g + c_p} = \frac{\Delta U}{c_g + c_p}. \quad (1.6)$$

La vitesse de convection U_c s'écrit :

$$U_c = \frac{c_p U_g + c_g U_p}{c_g + c_p}. \quad (1.7)$$

Slessor et al. [14] ont proposé un nouveau paramètre pour quantifier l'effet de compressibilité dans les couches de mélange à grand ratio de vitesse du son et de densité ($R_u \gg 1$ et $R_\rho \gg 1$). En considérant que la compressibilité est un mécanisme de transformation d'énergie cinétique en énergie thermique, ils définissent un paramètre Π_c comme suit :

$$\Pi_c = \max_i \left[\frac{\sqrt{\gamma_i - 1}}{c_i} \right] \Delta U \quad (1.8)$$

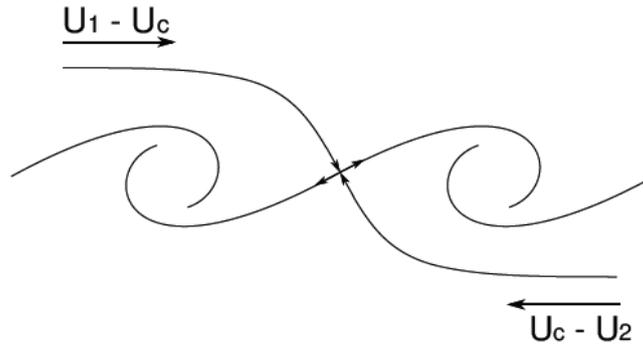


FIGURE 1.4 – Représentation schématique du point de stagnation entre deux structures cohérentes successives, d'après [13]. Les notations U_1 et U_2 représentent respectivement les vitesses U_g et U_p , la vitesse U_c est la vitesse convective des structures cohérentes.

Un des effets remarquables de la compressibilité est la diminution du taux d'évasement longitudinal ou temporel des couches de cisaillement. Ainsi, les couches de mélange compressibles se développent beaucoup plus lentement que dans le cas incompressible dans les mêmes conditions de rapport de densité R_ρ et de rapport de vitesse R_u . L'augmentation du nombre de Mach engendre une diminution de la température et donc une augmentation de la masse volumique. Brown et Roshko [3] ont conclu que la diminution du taux d'évasement n'est pas due aux seuls effets de masse volumique, mais aussi à un effet évident de compressibilité. Cette compressibilité agit comme un stabilisateur de l'écoulement. Plusieurs études ont mené à la même conclusion, en traçant le taux d'évasement normalisé par sa valeur en incompressible en fonction du nombre de Mach convectif M_c . En effet, la figure 1.5 montre une réduction significative du taux d'expansion normalisé au fur et à mesure que la compressibilité augmente. Néanmoins, pour les nombres de Mach convectifs modérés les structures cohérentes de Brown et Roshko sont toujours présentes et perceptibles dans l'écoulement même si celles-ci deviennent de plus en plus tridimensionnelles [17]. La transition des structures cohérentes vers le régime tridimensionnel se fait à partir de $M_c = 0.6$ [18].

Elliott et al. [19] ont effectué des mesures bi-composantes dans une couche de mélange à l'aide du système de vélocimétrie laser Doppler (LDV ; Laser Dopler Velocimetry) pour trois

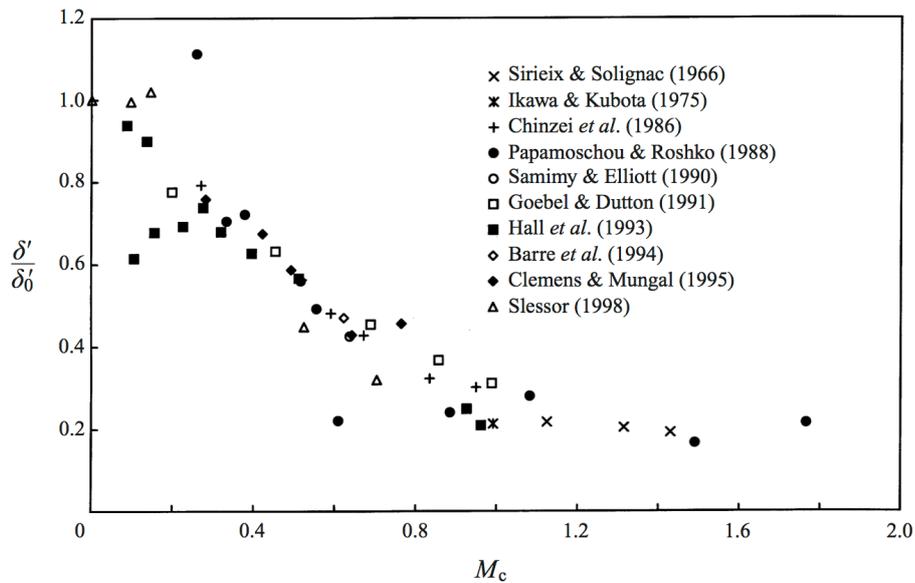


FIGURE 1.5 – Évolution du taux d'évasement de la couche de mélange compressible adimensionné par son équivalent incompressible en fonction du nombre de Mach convectif M_c , d'après [14].

nombre de Mach convectif (0.51, 0.64 et 0.86). Ils ont montré que le tenseur de cisaillement, ainsi que l'intensité de turbulence dans la direction transversale diminuent en augmentant le nombre de Mach convectif. Les intensités de turbulence longitudinales diminuent sensiblement par effet de compressibilité, mais moins que dans la direction transversale. Ceci a pour effet d'accroître l'anisotropie du système. La diminution du tenseur de Reynolds et des fluctuations de la vitesse transversale avec l'augmentation de la compressibilité a également été rapporté par Urban *et al.* [20]. Leurs résultats PIV (Particle Image Velocimetry) ont montré une réduction allant jusqu'à 33% pour l'intensité de turbulence transversale et 31% pour le tenseur de cisaillement turbulent. L'intensité de turbulence longitudinale n'est réduite que de 10%. Néanmoins, d'autres études comme celle de Goebel et Dutton [21] montrent qu'au contraire la compressibilité n'influe pas les grandeurs turbulentes longitudinales. Cette contradiction constitue, en effet, un obstacle à la compréhension et l'interprétation physique des effets de compressibilité.

Bien que les effets de compressibilité au sein de la couche de mélange soient largement identifiés, il reste que l'explication de telles observations est un sujet controversé. Plusieurs hypothèses émanant de différents auteurs ont tenté d'expliquer l'effet stabilisateur de la compressibilité sur une couche de mélange. En effet, de nombreux auteurs [22],[23],[24] et [20] expliquent, qu'en partie, la diminution du taux d'expansion des couches de mélange compressibles par la diminution des fluctuations de la vitesse transversale. La diminution de ces fluctuations de vitesse provoque à leur tour une diminution de l'appariement des grosses structures cohérentes. D'autres auteurs expliquent, comme Sarkar [25] dans un article paru en 1992, que dans les écoulements à grand nombre de Mach, des termes supplémentaires de dilatation compressible et de dilatation de pression apparaissent dans les équations de l'énergie cinétique de turbulence. Ces termes de dilatations se comporteraient comme des

termes dissipatifs supplémentaires dans le bilan de l'énergie cinétique de turbulence. Par conséquent, les niveaux de turbulence sont réduits ainsi que le taux d'expansion des couches de mélange compressibles. Néanmoins, Sarkar [26] dans un autre papier paru en 1995 montre que ces termes de dilatation ne sont pas responsables de la réduction de l'énergie cinétique mais ce sont les termes de production de l'énergie cinétique qui diminuent à mesure que la compressibilité augmente. Ce résultat est conforté par Vreman [27] et plus récemment par Amir et al. [5] qui ont montré, par simulation numérique de couche de mélange temporelle, la réduction du terme de production dans le bilan de l'énergie cinétique de turbulence à mesure que le nombre de Mach convectif augmente. Cette diminution du terme de production est due à une réduction des contraintes de cisaillement, puisque d'après les auteurs [5], la vitesse moyenne n'est pas affectée par la compressibilité. Les auteurs expliquent que les contraintes de cisaillement diminuent à mesure que la compressibilité augmente, à cause de la diminution des amplitudes des fluctuations normales et longitudinales $u'v'$, leurs corrélations n'est pas affectée par la compressibilité.

1.1.4 Influence des différents paramètres dynamiques et géométriques

L'écoulement de couche de mélange est connu pour être sensible aux conditions aux limites et initiales, à cause de son caractère convectivement instable, l'influence de ces conditions persiste dans l'écoulement jusqu'à l'état autosimilaire. L'influence de l'épaisseur du bord de fuite de la plaque plane séparatrice a été étudiée par différents auteurs : [28] et [8], par exemple. Leurs résultats montrent qu'une zone de sillage se crée au voisinage du bord de fuite qui influence la distance d'établissement du régime autosimilaire, l'interaction couche de mélange-sillage inhibe dans certaines conditions (forme et épaisseur du bord de fuite) le processus d'appariement des structures cohérentes. Les travaux de Mehta [28] montrent que la distance d'établissement de la couche de mélange diminue lorsque le rapport de vitesse augmente entre $0,5 < R_u < 0,7$. Au-delà, la distance d'établissement augmente avec le rapport de vitesse.

1.2 Effets manifestes des variations spatio-temporelles de viscosité

Nous tacherons de présenter dans ce paragraphe les résultats issus des études menées sur l'influence des variations spatio-temporelles de la viscosité dans des configurations différentes de celle de la couche de mélange.

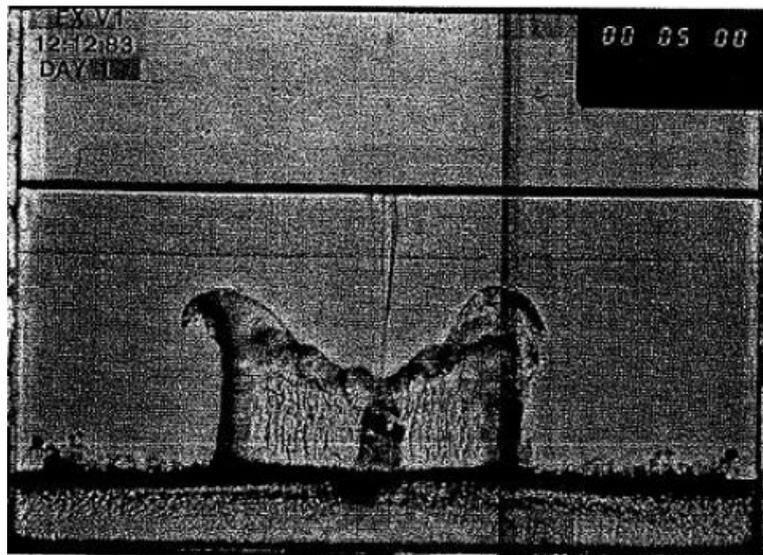
1.2.1 Écoulements géophysiques : mélange des fontaines de magma

Le mélange entre deux magmas à masse volumique constante et à viscosité variable se rencontrant dans les chambres magmatiques du sous-sol terrestre, a été étudié par Campbell

et Turner [29]. Les auteurs ont mené des expériences au moyen de fluides de substitution afin de simuler les fontaines de magma. Le rapport de viscosité cinématique R_ν des différents scénarios simulés varie entre 1 et 400. Les résultats de leurs expériences montrent que pour un rapport $R_\nu = 1$, un mélange turbulent classique se met en place caractérisé par un entraînement efficace, comme le montre le figure 1.6a.



(a)



(b)

FIGURE 1.6 – (a) Mélange turbulent classique à viscosité constante, $R_\nu = 1$ formé entre le fluide injecté (solution de K_2CO_3) et le fluide environnant (solution de K_2CO_3). (b) Mélange à viscosité variable, $R_\nu = 400$ formé entre le fluide injecté (glycérine pure) et le fluide environnant (solution de K_2CO_3), d'après [29].

Le rapport de viscosité R_ν a été graduellement augmenté pour observer la qualité du mélange formé entre le fluide injecté et le fluide environnant. En fixant le nombre de Reynolds d'injection, Campbell et Turner montrent qu'il existe un rapport de viscosité critique au-delà duquel le mélange est complètement inhibé, comme le montre la figure 1.6b. Ceci peut être

la cause d'un amortissement brutal des instabilités au niveau de l'interface entre les deux fluides, qui ralentit considérablement le processus d'entraînement. Une interface nette est alors formée entre les deux fluides, caractérisée par un gradient spatial très important de la viscosité, si bien que le gradient de la vitesse au niveau de cette interface n'est plus capable de déclencher les instabilités de cisaillement. La forme du jet à viscosité variable est pour le moins intrigante, elle se présente sous la forme d'un "V", situation contraire aux jets classiques à viscosité constante qui se présentent sous la forme d'un "V" inversé. Le centre du jet est le siège d'un fort ralentissement tandis que les bords de celui-ci sont accélérés.

Campbell et Turner [29] ne donnent pas une réponse claire à ce phénomène, néanmoins en s'appuyant sur leur analyse, nous proposons le scénario suivant : Lorsque la solution peu visqueuse est injectée dans la chambre contenant le fluide R_ν fois plus visqueux, les forces d'inertie du jet sont, dans un premier temps très bref, suffisantes pour entraîner le fluide visqueux (initialement au repos) au centre du jet. Cet entraînement se fait par des mécanismes classiques ; formation de grosses structures tourbillonnaires à l'interface des deux fluides et enroulement du fluide visqueux au sein du corp potentiel du jet. Nous pensons que cet entraînement du fluide visqueux est complètement laminaire, les structures fines ne peuvent être produites dans ces conditions, d'où la formation d'un mélange très pauvre entre les deux fluides. La présence du fluide visqueux au centre du jet va accroître la décroissance de la vitesse à cet endroit de l'écoulement. Dans un second temps, les forces visqueuses deviennent dominantes devant les forces d'inertie sur les bords du jet, ce qui conduit à la formation d'une interface d'épaisseur remarquable. Étant donné que les fluides de substitution utilisés sont incompressibles, la conservation de la masse impose une accélération du fluide injecté à travers les bords du jet, du fait du ralentissement brutal au centre de celui-ci.

Campbell et Turner ont proposé un critère, basé sur les caractéristiques globales du jet, permettant de définir les rapports de viscosité pour lesquels des mélanges efficaces (et non efficaces) peuvent se former entre les deux fluides :

$$Re_2 = \frac{U_0 D}{\nu_2} = k_t. \quad (1.9)$$

Dans ces notations, ν_2 est comparable à ν_g , qui est la viscosité cinématique du fluide le plus visqueux et k_t est un coefficient ne dépendant que ν_2 .

D'après Campbell et Turner, lorsque $k_t > 70$, le mélange formé entre les deux fluides stratifiés en viscosité s'effectue de manière efficace aussi bien que sans stratification de viscosité. Lorsque $k_t < 7$, un mélange pauvre très peu efficace va caractériser les deux fluides et ceci quel que soit le nombre de Reynolds initial. Pour $7 < k_t < 70$, une zone intermédiaire apparaît où le mélange formé par les deux fluides est différemment influencé par les rapports de viscosité.

Notons que le critère proposé par Campbell et Turner ne se résume pas à un critère basé sur le rapport de la viscosité entre les deux fluides, ce qui serait plus tentant a priori. En effet, leur critère exprimé par la relation 1.9 inclut l'effet inertiel de l'écoulement (vitesse du

fluide injecté), ce qui doit attirer notre attention sur la compétition des effets de stratification de la viscosité et les effets inertiels. Nous verrons dans les chapitres suivants, que pour un même rapport de viscosité R_ν , les effets sous-jacents des gradients de viscosité dépendent du nombre de Reynolds initial.

1.2.2 Écoulement de jet rond : jet de propane/(air-néon)

Talbot [30] a réalisé durant sa thèse de doctorat une étude expérimentale de l'écoulement de jet rond à viscosité constante ; (air/air) et à viscosité variable ; (propane/(air-néon)). Le jet de propane est caractérisé par un rapport de viscosité cinématique R_ν de 5,5 et un rapport de masse volumique R_ρ de 1,7. Des mesures simultanées de scalaire (fraction massique) et de vitesse ont été réalisées [31], des statistiques de grandeurs moyennes et fluctuantes ont été fournies pour les deux configurations. L'intérêt est porté sur le mélange et la dynamique de la turbulence de l'écoulement de jet en présence des variations de viscosité. Talbot [30] affirme très clairement que *le jet de propane présente un mélange turbulent de bien plus grande efficacité que le jet d'air, à même quantité de mouvement injectée ($M_0 = 130 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$). D'autre part, ce mélange turbulent se réalise de manière très prononcée dans les premières distances en aval de la buse.* En effet, il a été montré que les variations de viscosité ne modifient pas uniquement les quantités visqueuses (diffusion et dissipation par la viscosité), mais également influencent grandement le signal de la vitesse instantanée longitudinale comme le montre la figure 1.7. Ces signaux ont été mesurés à des positions spatiales Z/D différentes selon qu'on

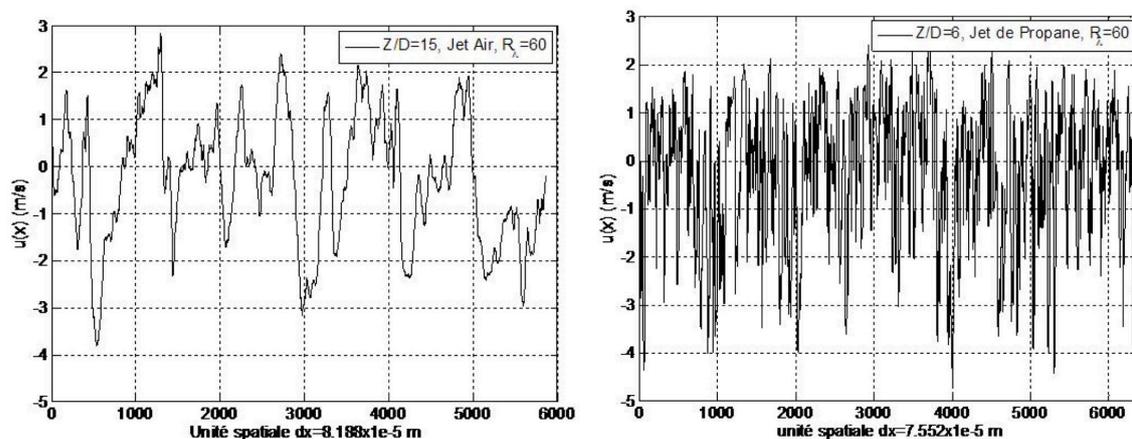


FIGURE 1.7 – Extraits de signaux temporels de vitesse spatiale fluctuante $u(x)$ de mesure par anémométrie à fil chaud : a) dans le jet d'air se déchargeant dans l'air pur et b) dans le jet de propane se déchargeant dans un mélange oxydant constitué de (30% air et 70% néon), le long de l'axe longitudinal où le nombre de Reynolds local vaut $R_\lambda = 60$ pour les deux situations, d'après Talbot [30].

se trouve dans le jet d'air ou le jet de propane, mais la valeur du nombre de Reynolds local R_λ est identique en ces positions. Talbot montre en effet que le signal de vitesse du jet de propane connaît une activité turbulente bien plus intense que pour le jet d'air. Cela prouve que la turbulence qui se développe dans le contexte à viscosité variable est remarquablement différente de la turbulence classique à viscosité constante. Les pics d'intensités turbulentes de

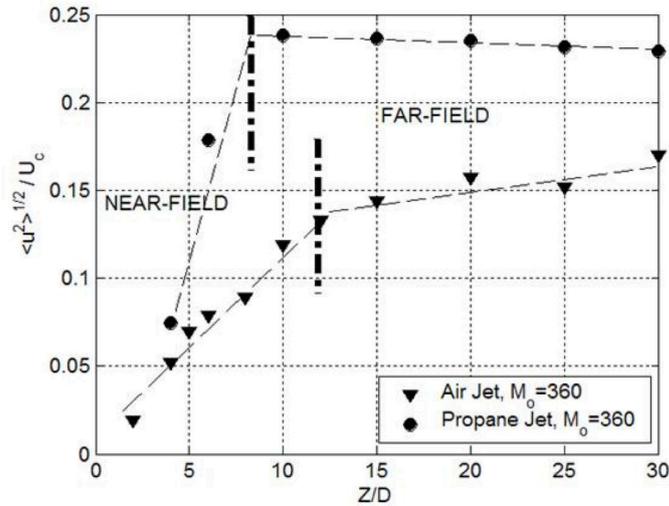


FIGURE 1.8 – Évolution des pics d'intensités turbulentes de la vitesse longitudinale $\langle u^2 \rangle^{1/2} / U_c$ le long de l'axe des jets de propane et d'air ($M_0=360$), d'après [30].

la vitesse longitudinale ont été comparés pour les deux jets à viscosité, constante et variable. La figure 1.8 montre que le jet de propane connaît une évolution plus rapide des fluctuations de vitesse dans la zone du champ proche (near-field), suggérant que les variations de viscosité participent à la production de l'énergie cinétique de la turbulence, ce qui n'est pas le cas des variations de masse volumique. En effet, Talbot écarte dans son analyse les effets des masse volumique variable dont le rapport R_ρ est 1,7 en expliquant que sa configuration de jet plus lourd débouchant dans un milieu plus léger conduit à des effets contraires à ceux observés dans littérature, en ajoutant que les intensités turbulentes de masse volumique s'élèvent au maximum à 5%, contre 18% pour celles de la viscosité dynamique.

Le régime autosimilaire des grandeurs turbulentes sur l'axe du jet est atteint beaucoup plus rapidement pour le jet de propane, dès $Z/D \approx 8$, que pour le jet d'air où un pseudo régime autosimilaire commence à apparaître à $Z/D \approx 12$, le régime autosimilaire est achevé à $Z/D \approx 30$. Talbot montre également que le jet de propane isotropise très rapidement dès $Z/D=1$, le rapport des intensités $\langle u'^2 \rangle^{1/2} / \langle v'^2 \rangle^{1/2}$ tend vers 1,2, tandis que le jet d'air requière une distance de l'ordre de $Z/D=10$.

Une explication d'ordre analytique de ces observations a été apportée par Talbot et al. [32]. En effet, les équations des bilans de quantité de mouvement et d'énergie cinétique en un point et en chaque échelle ont été écrites le long de l'axe du jet de propane en formulation incompressible, mais à viscosité variable. Ces équations présentent des termes supplémentaires amenés par la viscosité variable qui montrent, entre autres, que la dissipation et la pseudo-dissipation ne peuvent être confondues. Néanmoins, la quantification des termes supplémentaires n'a pas pu être fournie. Ça sera un des objectifs du présent travail de thèse, au moyen de simulations numériques directes de la couche de mélange temporelle.

1.2.3 Étude de stabilité linéaire

Même si les travaux liés à l'analyse des variations de viscosité dans les écoulements cisailés libres soient peu répandus dans la littérature, ceux concernant les études de stabilité à viscosité variable de l'écoulement de conduite horizontale ont connu un réel intérêt de la part de la communauté scientifique. La majorité de ces études a été formalisée dans un contexte de faibles amplitudes de perturbations, ce qui permet de linéariser les équations régissant l'écoulement. Le principe des études de stabilité linéaire consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement de base. Pour connaître si un système donné est stable ou non, on superpose des perturbations de faibles amplitudes à l'écoulement de base, la réponse du système sera alors la croissance ou la décroissance de ces perturbations. La croissance des perturbations indique que le système est instable, et on distingue généralement deux types d'instabilités : convective ou absolue. La première est la propagation des perturbations suivant le sens de l'écoulement, tandis que la deuxième fait propager les perturbations dans tout l'espace.

Sahu et al. [33] ont réalisé une étude de stabilité linéaire et une étude numérique de l'écoulement en conduite horizontale de deux fluides miscibles. Leur travail est basé sur des études antérieures telles que [34],[35],[36] et [37]. La masse volumique des deux fluides est identique, tandis que le rapport de viscosité R_ν (équivalent à "m" dans texte original) a été varié entre 1 et 40, le nombre de Schmidt Sc a été varié entre 1 et 100 et enfin le nombre de Reynolds Re entre 100 et 1000. Ces nombres adimensionnels sont calculés à partir d'une vitesse caractéristique basée sur le flux massique à l'entrée et la viscosité du fluide le moins visqueux. Deux configurations de l'écoulement en conduite horizontale ont été étudiées. La première peut s'apparenter à l'écoulement en conduite lubrifiée symétrique, appelée écoulement en triple-couches (*three-layer flow*) comme montré sur la figure 1.9a. On peut apercevoir 3 différentes couches ; une couche de "fluide 1" en contact avec la paroi, une couche de mélange d'épaisseur initiale "q" et une couche de "fluide 2" occupant le centre de la conduite de hauteur "h". La deuxième configuration consiste à injecter un "fluide 1" à l'entrée d'une conduite contenant un "fluide 2" de hauteur "H" au repos appelée écoulement de déplacement (*displacement flow*) comme montré sur la figure 1.9b. La configuration en triple-couches a également fait l'objet d'étude de stabilité pour le cas des fluides non miscibles, voir par exemple les études [38],[39],[40],[41],[42] et [43]. D'après [44], les études concernant les instabilités des écoulements miscibles stratifiés en viscosité ont fait l'objet d'étude que durant les dix dernières années. Nous concentrons donc notre analyse pour les cas des fluides miscibles monophasiques, pour différentes valeurs de nombre de Schmidt.

Dans Sahu et al. [33], les configurations 1.9a et 1.9b ont fait l'objet d'une étude de stabilité linéaire et une étude numérique pour produire des planches représentant les champs de concentration et de vorticité. L'étude de stabilité consiste à résoudre l'équation de Orr-Sommerfeld couplée à une équation de concentration dont dépend la viscosité ( quations 10 et 11 de [33]). Les résultats de [33] montrent, entre autres, que l'écoulement triple-couches est convectivement instable pour un rapport de viscosité $R_\nu = 25$ et absolument instable pour $R_\nu = 40$,

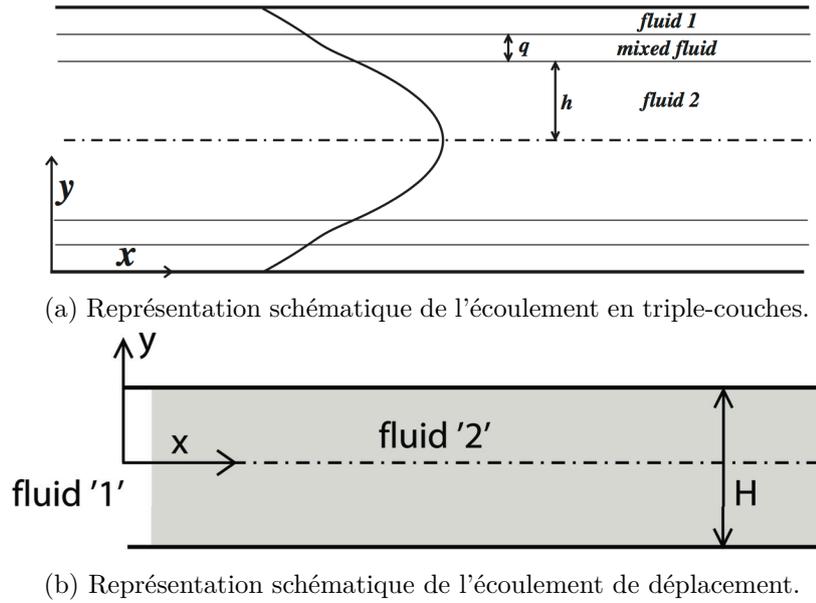


FIGURE 1.9 – Configurations des écoulements étudiés par [33].

pour certaines valeurs du nombre de Reynolds et de Schmidt. Cette transition de l'instabilité du type convectif vers absolu se produit pour des valeurs de rapport de viscosité plus petites (≈ 25) au fur et à mesure que le nombre de Schmidt augmente, comme le montre la figure 1.10. Ceci s'explique par la diminution des effets diffusifs à haut nombre de Schmidt, ce qui

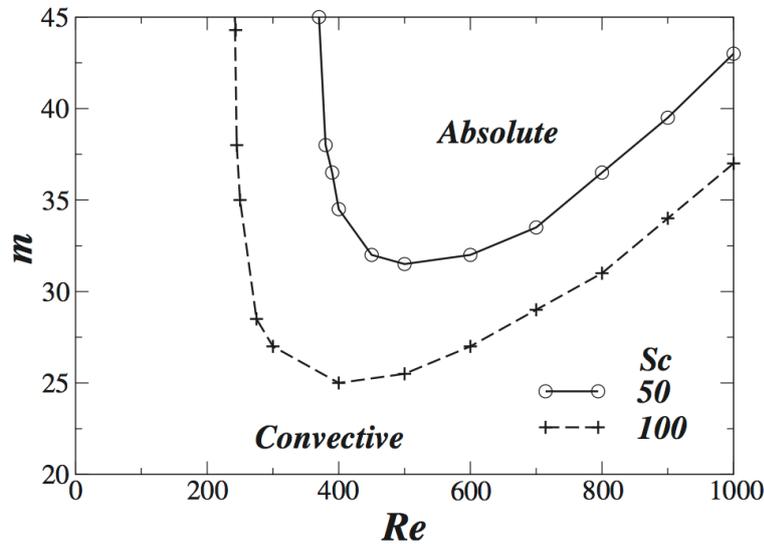
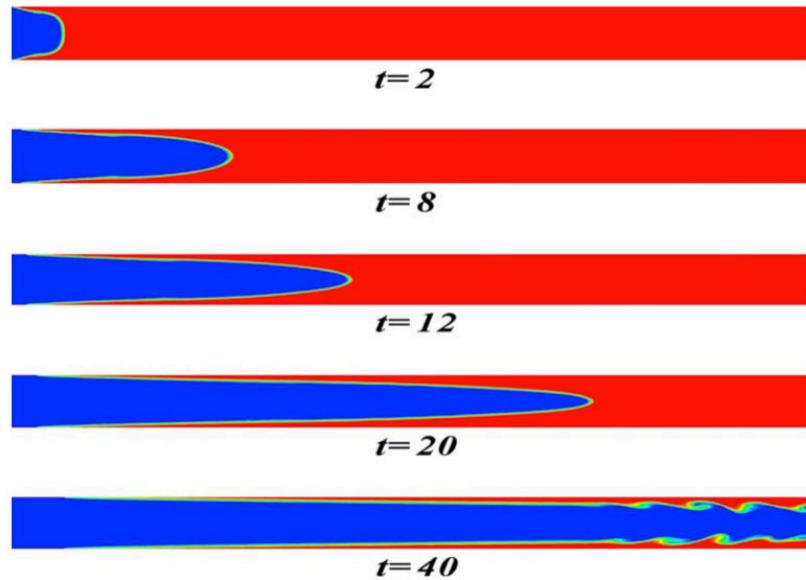


FIGURE 1.10 – Diagramme de stabilité montrant les régions d'instabilités convective et absolue dans le plan nombre de Reynolds (Re) et rapport de viscosité (m) pour différents nombres de Schmidt, d'après [33].

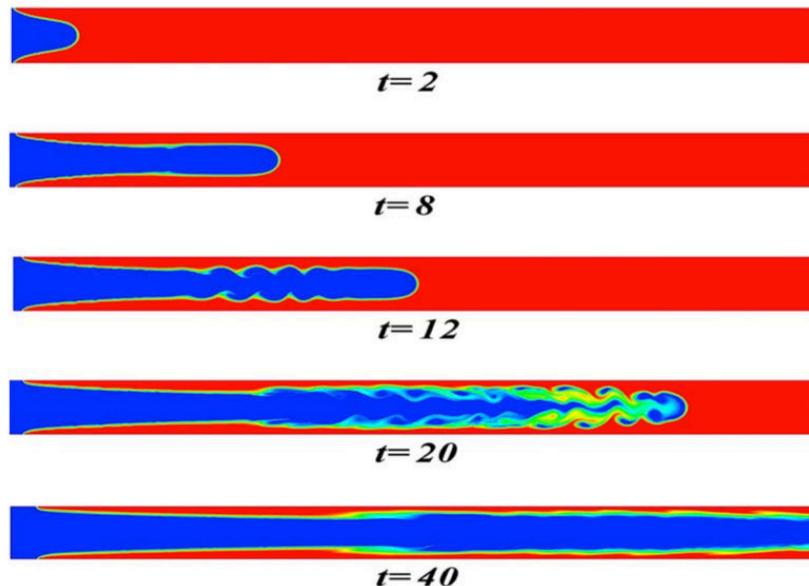
accentue le contraste de viscosité dans la zone de mélange des deux fluides. Néanmoins, on peut noter que cette courbe 1.10 est obtenue en fixant l'épaisseur de mélange q et l'épaisseur h du fluide au centre de l'écoulement, alors que celles-ci connaissent une évolution le long de la direction longitudinale, ce qui rend la comparaison avec l'écoulement de couche de mélange délicate. L'étude révèle également que la plus grande contribution aux instabilités observées dans l'écoulement provient de l'énergie associée aux perturbations des gradients de viscosité

verticaux, correspondant au terme B_y dans le papier de [33].

Le rapport de viscosité a clairement été identifié par [33] comme étant un paramètre déstabilisant lorsque le fluide au cœur de la conduite est moins visqueux que celui près des parois dans la situation des fluides miscibles. En effet, dans leur étude numérique de déplacement de fluide, correspondant à la configuration 1.9b, Sahut et al. [33] montrent qu'augmenter le rapport de viscosité R_ν de 2 à 40 contribue à déstabiliser l'écoulement (voir figure 1.11). Au temps $t=20$, la figure 1.11a montre une forme de "nez pointu", expression latéralement



(a) Évolution spatiotemporelle de la fraction de mélange pour $R_\nu = 2$, $Re=500$ et $Sc=100$.



(b) Évolution spatiotemporelle de la fraction de mélange pour $R_\nu = 40$, $Re=500$ et $Sc=100$.

FIGURE 1.11 – Effet du rapport de viscosité sur l'évolution spatiotemporelle de la fraction de mélange, tiré de [33].

traduite de "sharp nose" employée par les auteurs. Le mélange associé à cette configuration

est pauvre et les instabilités ne commencent à apparaître que très tardivement (à $t=40$). A contrario, la figure 1.11b montre le développement de tourbillons de manière beaucoup plus précoce (à $t=12$), tandis que à $t=20$ le mélange est bien plus intense que lorsque le rapport de viscosité est seulement de 2. Nous pouvons noter qu'à $t=20$, la pénétration du fluide 1, moins visqueux, est plus importante lorsque le rapport de viscosité est $R_\nu = 40$ de près de 16%, comparativement au cas $R_\nu = 2$. Ce sont donc des illustrations quantitatives de l'importance des variations de viscosité dans les écoulements miscibles.

Govindarajan [44] a effectué un état de l'art des recherches liées aux études de stabilité en présence de stratifications de viscosité pour les fluides miscibles et non-miscibles. Le focus est mis sur l'interaction entre les variations de viscosité et les forces de cisaillement des grandes échelles. L'objectif dans ces configurations est la recherche des effets stabilisants, ou déstabilisants, des variations de viscosité pour des applications telles que la réduction de la traînée ou l'augmentation du mélange, respectivement. Govindarajan [44] souligne la nécessité d'étudier les effets de variations de la viscosité puisque celle-ci est généralement une fonction spatio-temporelle dans les écoulements où la température et/ou la composition chimique n'est pas constante. L'auteur donne pour cela des exemples concrets d'écoulements réels (magma, combustion, océan) qui sont à viscosité et/ou masse volumique variable. L'explication des résultats obtenus par [33] peut s'appuyer sur les critères de Fjørtoft 1950 et de Rayleigh 1880 qui indiquent que la raison suffisante pour qu'un profil de vitesse soit instable est la présence d'un maximum de vorticité, il s'agit du point d'inflexion. D'après [44], le caractère stabilisant des variations de viscosité se manifeste en altérant le profil de vitesse pour l'écarter du comportement inflexionnel, tandis que le caractère déstabilisant des variations de viscosité est observé en accentuant le comportement inflexionnel du profil de vitesse, voire en provoquant l'apparition de nouveaux points d'inflexion. Il semble que la déstabilisation de l'écoulement par les variations de viscosité s'effectue par l'amplification des mécanismes les plus instables déjà présents dans l'écoulement.

De manière plus synthétique, Govindarajan [44] propose une représentation qualitative des états stables et instables de l'écoulement triple-couches en fonction des nombres de Reynolds (Re), de Schmidt (Sc) et du rapport de viscosité (m , équivalent à notre rapport R_ν), comme montré sur la figure 1.12. On peut constater sur cette figure que le fait d'augmenter un des trois paramètres conduit à la déstabilisation de l'écoulement, l'état stable, quant à lui, s'obtient en étant près de l'origine. L'extrapolation de cette courbe à d'autres écoulements que celui pour lequel a été établi n'est pas permise. En effet, plusieurs paramètres entrent en ligne de compte, tels que l'effet de la présence des parois, de la nature des instabilités non visqueuses présentes dans l'écoulement, ainsi que les différentes épaisseurs des trois couches de fluide, rendent l'extrapolation extrêmement difficile. Néanmoins, on peut s'apercevoir de l'importance de ces trois paramètres en ce qui concerne la stabilité d'un écoulement stratifié en viscosité, tout particulièrement du rapport de viscosité pour ce qui nous intéresse.

Selon la littérature, les effets des variations de viscosité; qu'ils soient stabilisants ou déstabilisants, ne peuvent se manifester dans un écoulement que si le nombre de Reynolds est non-nul. On comprend alors aisément la relation intime entre l'inertie de l'écoulement et les

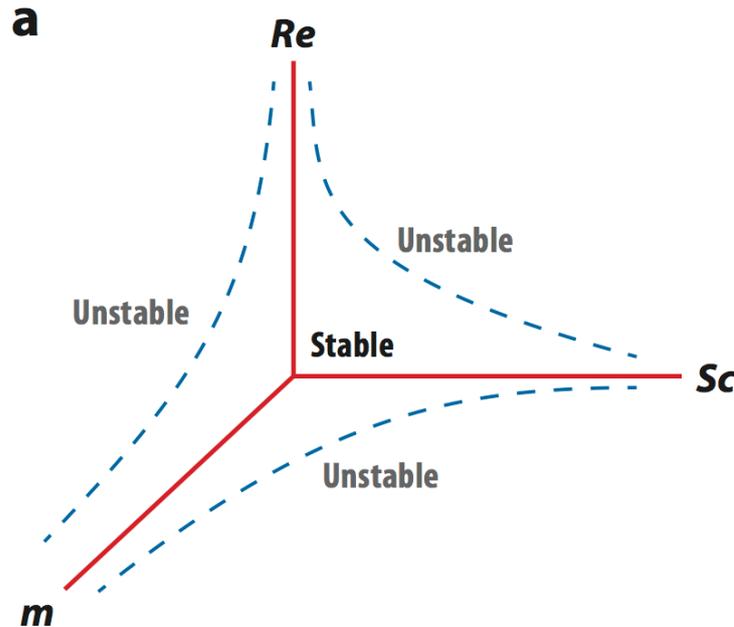


FIGURE 1.12 – Représentation qualitative des états stables et instables de l'écoulement triple-couche en fonction du nombre de Reynolds (Re), nombre de Schmidt (Sc) et du rapport de viscosité (m), d'après de [44].

variations de viscosité comme annoncé par Campbell et Turner [29]. Par ailleurs, le rapport de viscosité permettant l'apparition des effets de viscosité n'a pas pu être établi de manière précise tant celui-ci peut être différent d'un écoulement à un autre et parfois même au sein du même écoulement. En effet, Slevam et al. [36] montrent qu'un rapport de viscosité $0,9 < R_\nu < 1,1$ ne produit aucun effet dans la configuration de l'écoulement annulaire dans une conduite et ce à n'importe quel nombre de Reynolds, Lee et al. [45] préconise un rapport $R_\nu > 3$ pour pouvoir observer des effets des variations de viscosité.

1.3 Conclusion

L'écoulement de couche de mélange a été largement étudié suivant les approches numériques, théoriques et expérimentales. Ainsi, les effets de variations de masse volumiques et ceux de compressibilité ont été identifiés et la compréhension des mécanismes sous-jacents a été grandement améliorée. L'écoulement de couche de mélange peut, en effet, être considéré comme la représentation locale de nombreux écoulements industriels ou géophysiques d'aspect global plus complexe. Cette première partie bibliographique montre que le besoin profond de compréhension des phénomènes physiques va avec la nécessité de simplification de la configuration d'étude. Ainsi, l'approche temporelle de la couche de mélange a été privilégiée par plusieurs auteurs, les résultats obtenus dans cette configuration ont grandement contribué à l'analyse et à la compréhension de nombreux phénomènes physiques. Notre volonté d'étudier les effets de variations de viscosité dans les écoulements cisailés libres, nous amène aussi à choisir la simplicité qu'offre la couche de mélange temporelle pour accroître notre connaissance sur le rôle de la viscosité.

L'étude bibliographique menée dans le cadre de cette étude, a montré que l'analyse des effets des variations de viscosité est très délicate à mener, contrairement aux effets de masse volumique variable (par exemple). En effet, l'écoulement de Rayleigh-Bénard est connu pour être instable lorsque un fluide placé dans un champ de gravité est différentiellement chauffé, de sorte à ce que le sens du gradient de température soit contraire à celui du champ de gravité. L'instabilité de Rayleigh-Taylor résulte de la superposition d'un fluide lourd avec un fluide léger, l'écoulement est stable lorsque la situation s'inverse. Dans ce cas, le moteur de l'instabilité est bien identifié, il est lié aux forces de flottabilité caractérisées généralement par un nombre adimensionnel (Richardson, Rayleigh, Grashof), les mécanismes d'instabilité sont intimement liés au terme barocline dans l'équation de la vorticité [46]. Pour ce qui est de la viscosité variable, plusieurs paramètres entrent en ligne de compte, leurs variations peut faire basculer l'effet des variations de viscosité d'un caractère stable à un caractère instable et inversement. La quantification des termes supplémentaires induits par les variations de viscosité n'a pas été explicitement montrée, encore moins dans la configuration de couche de mélange.

Le présent manuscrit est organisé comme suit : après une étude bibliographique, les équations gouvernantes et les efforts analytiques entrepris sont présentés au chapitre 2. Le chapitre 3 est dédié à la description du code CHOC-WAVES et des méthodes numériques utilisées. Le chapitre 4 présente les différents calculs DNS réalisés et une série de vérifications numériques. Le chapitre 5 est dédié à l'analyse du champ moyen de l'écoulement. L'influence des variations de viscosité est mis en évidence au moyen des équations de transport des différents champs de vitesse, de vorticité et de scalaire. Le chapitre 6 est consacré à l'analyse des variations de viscosité sur les grandeurs fluctuantes de l'écoulement. Enfin, les conclusions les plus marquantes et quelques perspectives sont adressées au chapitre 7.

Chapitre 2

Équations et modèles mathématiques

Sommaire

2.1	Équations de couche de mélange temporelle incompressible à viscosité variable	24
2.1.1	Équations de Navier-Stokes instantanées	24
2.1.2	Équation de transport de la vitesse moyenne	25
2.1.3	Équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence	28
2.1.4	Équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence à chaque échelle	30
2.1.5	Équation de transport de la vorticité instantanée	36
2.1.6	équation de transport de la vorticité moyenne	38
2.1.7	équation de transport de l'enstrophie	39
2.1.8	équation de transport de scalaires <i>passif</i> et <i>actif</i>	43
2.2	Relations thermodynamiques	44
2.2.1	Gaz parfaits	44
2.2.2	Propriétés de transport	45
2.2.2.1	Viscosité d'un mélange constitué de \mathcal{N}_s espèces chimiques	45
2.2.2.2	Diffusion moléculaire d'une $k^{\text{�me}}$ espèce dans un mélange de \mathcal{N}_s espèces chimiques	46
2.3	Conclusion	47

Ce 2^{ me} chapitre résume les équations gouvernantes dans l'écoulement de couche de mélange temporelle ainsi que les efforts analytiques entrepris durant ce travail de thèse. Ainsi, différentes équations de transport de différentes quantités ont pu être écrites en prenant en compte les variations spatio-temporelle de la viscosité. Ces mêmes équations sont évaluées au moyen des calculs DNS réalisés durant ce travail, elles sont discutées en détails et présentées au chapitres 5 et 6. L'évaluation de ces équations de transport est la base de notre travail de comparaison entre l'écoulement à viscosité constante et celui à viscosité variable, cela permet

l'identification des termes supplémentaires responsables des modifications remarquables dans l'écoulement.

2.1 Équations de couche de mélange temporelle incompressible à viscosité variable

2.1.1 Équations de Navier-Stokes instantanées

L'écoulement de couche de mélange incompressible à viscosité variable est régi par les équations de Navier-Stokes représentées par les expressions¹ 2.1 et 2.2 :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (-\tau_{ij}) = 0. \quad (2.2)$$

où ρ représente la masse volumique, $u_i \equiv (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ est le vecteur vitesse et p la pression. Le tenseur des contraintes pour un fluide (ou mélange de fluide) Newtonien incompressible τ_{ij} s'écrit comme suit :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.3)$$

La viscosité dynamique μ est généralement une quantité spatio-temporelle. Ces variations de viscosité peuvent être induites par la présence de forts gradients de température dans l'écoulement. La loi de Sutherland est alors utilisée pour déterminer la viscosité pour chaque température du gradient. Les variations de viscosité peuvent également être induites par la présence de plusieurs espèces chimiques de propriétés physico-chimiques différentes dans l'écoulement. Notre intérêt porte précisément sur ce dernier cas, nous nous intéressons au mélange de deux espèces chimiques ayant la même masse volumique ρ mais présentent un contraste important en terme de viscosité dynamique μ .

En considérant les variations spatio-temporelles de la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ et en remplaçant l'expression 2.3 dans l'équation 2.2 nous obtenons après quelques manipulations l'équation de quantité de mouvement instantanée pour un écoulement incompressible à viscosité variable comme suit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]. \quad (2.4)$$

La prise en compte des variations de viscosité fait apparaître dans l'équation de quan-

1. Notons que les équations réellement résolues dans le code CHOC-WAVES sont celles d'un écoulement de couche de mélange temporelle faiblement compressible. Le nombre de Mach convectif est nettement inférieur à 0,3.

tité de mouvement ci-dessus des termes supplémentaires traduisant les corrélations entre les gradients de viscosité et les gradients de vitesse sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]. \quad (2.5)$$

D'un point de vue mathématique, la présence du terme ci-dessus dans les équations de Navier-Stokes pourrait, suivant les cas, induire des modifications non négligeables sur la solution du système. Autrement dit, les champs de vitesse et de pression peuvent être significativement affectés par le terme exprimé en 2.5. Nous pouvons alors nous poser la question de savoir **quelles sont les effets des variations de viscosité sur les grandeurs moyennes et fluctuantes de l'écoulement**. Plus précisément, **quel est le rôle des variations de la viscosité sur la turbulence et son développement**, puisque c'est d'elle dont il est question dans ce travail. La réponse à cette question est loin d'être triviale tant de nombreux paramètres entrent en ligne de compte. Ainsi, le régime d'écoulement, les conditions initiales et aux limites, la géométrie de l'écoulement et les rapports de viscosité mis en jeu sont, pour ne citer que ceux la, autant de paramètres dont les effets peuvent interagir et ne permettent pas d'avoir une réponse claire aux questions posées ci-dessus. La démarche scientifique généralement admise consiste à isoler les différents effets des paramètres afin de mettre en lumière les phénomènes physiques intéressants, en l'occurrence ici il s'agit du rapport de viscosité.

En prenant comme point de départ l'équation de quantité du mouvement instantanées 2.4 et l'équation de conservation de la masse 2.1, on peut déduire d'autres équations traduisant le transport des grandeurs moyennes et fluctuantes telles que la vitesse moyenne, l'énergie cinétique de turbulence ainsi que la vorticité et l'enstrophie. En effet, la décomposition de Reynolds des quantités instantanées en une partie moyenne et une partie fluctuante appliquée aux équations de Navier-Stokes permet l'obtention de telles équations. Il est alors intéressant d'écrire les termes supplémentaires dus aux variations de viscosité dans chacune de ces équations en vue de les quantifier.

D'autres équations peuvent également être écrites pour traduire l'évolution du scalaire passif ou actif, dans l'écoulement et ainsi mettre en évidence l'influence des variations de viscosité sur ce dernier. Celles-ci seront également développées dans ce chapitre.

A noter que l'équation de quantité de mouvement 2.4 est écrite sous sa forme générale, c'est-à-dire que les conditions aux limites périodiques de notre écoulement ne sont pas prises en compte dans cette équation. Par la suite, les différentes équations seront exprimées d'abord sous leur forme générale puis dans le cas particulier de la couche de mélange temporelle.

2.1.2 Équation de transport de la vitesse moyenne

En vue d'appréhender les complexités liées aux variations de viscosité à grande échelle dans la couche de mélange temporelle, nous prêtons attention aux équations moyennes de

transport de quantité de mouvement. Le point de départ est l'équation de quantité de mouvement instantanée exprimée par l'équation 2.4 écrite pour un écoulement incompressible à viscosité variable. L'équation de quantité de mouvement moyenne est obtenue en appliquant la décomposition de Reynolds aux quantités instantanées comme suit :

$$u_i = \langle U_i \rangle_{xz} + u'_i. \quad (2.6)$$

$$p = \langle P \rangle_{xz} + p'. \quad (2.7)$$

$$\nu = \langle \nu \rangle_{xz} + \nu'. \quad (2.8)$$

Le symbole $\langle \cdot \rangle_{xz}$ désigne la moyenne spatiale obtenue suivant le plan xz du faite des conditions périodiques explicités dans le paragraphe 3.2.1. Cette moyenne s'écrit, pour une grandeur quelconque ϕ , comme suit :

$$\langle \phi \rangle_{xz} = \frac{1}{L_x} \frac{1}{L_z} \sum_{k=1}^{L_z} \sum_{l=1}^{L_x} \phi_{kl}. \quad (2.9)$$

Par souci de simplicité de notation et pour assurer une lecture fluide des équations, l'indice "xz" est omis de la moyenne pour tout le reste du manuscrit. Ainsi, l'équation de quantité de mouvement moyenne s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \langle \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + \left\langle \nu' \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle \\ &+ \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right] + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Notons que toutes les quantités moyennes $\langle \cdot \rangle$ ne dépendent que de la coordonnée verticale y suivant la direction inhomogène de la couche de mélange. Les gradients des quantités moyennes suivant l'axe x ou l'axe z sont par définition strictement nuls :

$$\frac{\partial \langle \cdot \rangle}{\partial x} = \frac{\partial \langle \cdot \rangle}{\partial z} = 0. \quad (2.11)$$

Par conséquent l'équation de conservation de la masse 2.1 se résume à :

$$\frac{\partial \langle V \rangle}{\partial y} = 0. \quad (2.12)$$

Donc, la vitesse moyenne verticale d'une couche de mélange temporelle est strictement nulle :

$$\langle V \rangle = 0. \quad (2.13)$$

De plus, nous admettons que la vitesse moyenne transversale $\langle W \rangle$ est très négligeable devant la vitesse longitudinale $\langle U \rangle$, ce qui permet de réduire le tenseur des gradients de vitesse à une seule composante non nulle comme suit :

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}. \quad (2.14)$$

En prenant en compte les conditions de périodicité ainsi que de la configuration de notre écoulement, c'est-à-dire les expressions 2.11 et 2.14, l'équation de quantité de mouvement moyenne de l'écoulement de couche de mélange temporelle, incompressible et à viscosité variable s'écrit :

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} = -\frac{\partial \langle v' u'_i \rangle}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \langle \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial y \partial y} \quad (2.15a)$$

$$+ \left\langle \nu' \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right] \right\rangle. \quad (2.15b)$$

La projection de l'équation 2.15 sur l'axe x ($i = 1$), permet l'obtention de l'équation de transport pour la vitesse moyenne longitudinale $\langle U \rangle$ ci-dessous :

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} = -\frac{\partial \langle v' u' \rangle}{\partial y} + \langle \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial y \partial y} \quad (2.16a)$$

$$+ \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} + \left\langle \nu' \frac{\partial^2 u'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x} \right\rangle. \quad (2.16b)$$

De même, l'équation de transport de la vitesse moyenne verticale $\langle V \rangle$ ($i = 2$), s'écrit :

$$0 = -\frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial y} \quad (2.17a)$$

$$+ \left\langle \nu' \frac{\partial^2 v'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial v'}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial y} \right\rangle. \quad (2.17b)$$

Les équations de transport 2.16 et 2.17 ainsi obtenues présentent des termes supplémentaires (présent sur les lignes 2.16b et 2.17b, respectivement). Ces termes prennent en compte les variations spatio-temporelles de la viscosité, ils sont strictement nuls pour les écoulements homogènes (mono-fluide à température constante par exemple) où la viscosité est constante. Pour ce dernier cas, l'équation 2.17 se résume à l'équation de Bernoulli dans la direction inhomogène de la couche de mélange :

$$\langle v'^2 \rangle + \frac{\langle P \rangle}{\rho} = \text{Constante}. \quad (2.18)$$

En analysant les termes supplémentaires de l'équation 2.16, nous constatons que le seul terme à grande échelle intimement lié aux conditions initiales de l'écoulement est le terme $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$. En effet, sa contribution dans l'équation de transport de la vitesse moyenne $\langle U \rangle$

(équation 2.16) peut être entièrement contrôlée par les gradients initiaux de vitesse et de viscosité mis en jeu dans l'écoulement. Le signe positif du produit $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ est obtenu lorsque les gradients de vitesse et de viscosité ont le même signe. Autrement dit, lorsque le fluide le plus rapide est à la fois le plus visqueux. On parle de configuration à co-gradient. Dans le cas contraire, la configuration à contre-gradient est obtenue lorsque le signe du produit $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ est négatif, c'est-à-dire que le fluide le plus rapide est le moins visqueux.

Une discussion plus approfondie ainsi qu'une évaluation du rôle de chaque terme de l'équation 2.16 est réalisée au paragraphe 5.1.3 du chapitre 5.

2.1.3 Équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence

L'équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence en un point est obtenue en multipliant l'équation 2.4 par les fluctuations de vitesse u'_i et en moyennant suivant les directions homogènes x et z . Nous obtenons la forme générale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle u_i'^2 \rangle}{2} \right) + \langle U_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\langle u_i'^2 \rangle}{2} \right) + \left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i'^2}{2} \right) \right\rangle + \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle u'_i p' \rangle}{\partial x_i} \quad (2.19a)$$

$$+ \langle \nu \rangle \left\langle u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \right\rangle + \langle \nu' u'_i \rangle \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_j^2} + \left\langle \nu' u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \right\rangle \quad (2.19b)$$

$$+ \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial x_j} \left\langle u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial x_j} \left\langle u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle \quad (2.19c)$$

$$+ \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} u'_i \right\rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} u'_i \right\rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \quad (2.19d)$$

$$+ \left\langle u'_i \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle u'_i \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle. \quad (2.19e)$$

Une forme plus compact de l'équation ci-dessus est obtenue en manipulant les termes des lignes 2.19b, 2.19c, 2.19d et 2.19e. Finalement, la forme générale de l'équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence en formulation incompressible à viscosité variable s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle u_i'^2 \rangle}{2} \right)}_{T_t} + \underbrace{\langle U_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\langle u_i'^2 \rangle}{2} \right)}_{A_d} + \underbrace{\left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i'^2}{2} \right) \right\rangle}_{D_t} + \underbrace{\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j}}_{P_k} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle u'_i p' \rangle}{\partial x_i}}_{D_p} \quad (2.20a)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} u'_i \right\rangle \cdot \left[\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right] + \langle u'_i \cdot \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j}}_{P_\nu} \quad (2.20b)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} + \frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_i} \right] \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG}} + \frac{1}{2} \left\langle \nu \frac{\partial^2 u_i'^2}{\partial x_j^2} \right\rangle - \underbrace{\left\langle \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}}. \quad (2.20c)$$

- **Terme T_t** : Pour les écoulements instationnaires, ce terme représente le taux de variation temporelle de l'énergie cinétique de turbulence.

- **Terme A_d** : Ce terme représente l'advection de l'énergie cinétique de turbulence par l'écoulement moyen $\langle u_j \rangle$. Il est, comme nous allons le voir au paragraphe 6.1.1 du chapitre 6, strictement nul pour le cas de la couche de mélange temporelle du fait de la périodicité de l'écoulement dans les directions longitudinale et transversale.

- **Terme P_k** : L'énergie cinétique de turbulence est produite par les gradients de vitesse moyenne, il s'agit du terme de production.

- **Terme D_t** : Ce terme traduit la diffusion de l'énergie cinétique par la turbulence dans l'écoulement, il est nettement plus grand que la diffusion moléculaire aux grands nombre de Reynolds.

- **Terme $\langle \epsilon \rangle_{VV}$** : Ce terme représente le taux de dissipation moyen de l'énergie cinétique de turbulence, il est responsable de la dissipation en chaleur de l'énergie cinétique de l'écoulement par la viscosité du fluide. A noter que pour ce terme et contrairement à sa forme classique (viscosité constante), le coefficient de viscosité est contenu dans le symbole de la moyenne pour un écoulement à viscosité variable. Il regroupe ainsi les contributions des valeurs moyennes et fluctuantes de la viscosité.

Les termes T_t , A_d , P_k , D_t et $\langle \epsilon \rangle_{VV}$ sont dits, *termes classiques*, puisque on les retrouve dans l'équation de l'énergie cinétique de turbulence dans le cas des écoulements à viscosité constante. En revanche, les termes supplémentaires énumérés ci-après sont liés uniquement aux variations de viscosité dans l'écoulement, ils sont définis comme ceci :

- **Terme P_ν** : Ce terme prend en compte les corrélations existantes entre les gradients de vitesse moyenne et les gradients de viscosité fluctuante. Le rôle de ce terme dans le bilan de transport de l'énergie cinétique n'est pas simple à prédire analytiquement vue la complexité des interactions entre les champs de vitesse et de viscosité. En effet, si on se place dans le cas d'une couche de mélange plane où le gradient verticale de la vitesse longitudinale $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ est positif, alors le signe du terme $\left(\left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial y} u' \right\rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right)$ ne dépend plus que du signe de $\left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial y} u' \right\rangle$. Le signe de ce dernier n'est pas évident à prédire analytiquement.

- **Terme $\langle \epsilon \rangle_{VG}$** : Ce terme regroupe les corrélations entre les gradients de viscosité et les gradients de vitesse fluctuante.

En prenant en compte les conditions de périodicité de la configuration temporelle de l'écoulement de couche de mélange, c'est-à-dire les expressions 2.11 et 2.14, l'équation de transport en un point de l'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement de couche de

mélange temporelle, incompressible et à viscosité variable s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle u_i'^2 \rangle}{2} \right)}_{T_t} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left\langle v' \left(\frac{u_i'^2}{2} \right) \right\rangle}_{D_t} - \underbrace{\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}}_{P_k} + \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \partial \langle v'p' \rangle}_{D_p} \quad (2.21a)$$

$$+ \underbrace{\left[\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x} v' \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial y} u' \right\rangle \right] \cdot \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} + \langle u' \cdot \nu' \rangle \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial y \partial y}}_{P_\nu} \quad (2.21b)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_i' u_j')}{\partial x_i} \right] \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \nu \frac{\partial^2 u_i'^2}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}} - \underbrace{\left\langle \nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}}. \quad (2.21c)$$

Une discussion plus approfondie ainsi qu'une évaluation du rôle de chaque terme de l'équation 2.21 sont réalisées au paragraphe 6.1.1 du chapitre 6.

2.1.4 Équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence à chaque échelle

Comme pour l'établissement de l'équation de transport de l'énergie cinétique en un point, le point de départ est l'équation de quantité de mouvement instantanée 2.4. Elle est écrite aux points \vec{x}^+ et \vec{x}^- séparés d'une distance \vec{r} tel que $\vec{x}^+ = \vec{x}^- + \vec{r}$. Ces deux expressions s'écrivent comme suit :

- Au point \vec{x}^+

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t} + u_j^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^+} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^+}{\partial x_i^+} + \nu^+ \frac{\partial^2 u_i^+}{\partial x_j^+ \partial x_j^+} + \frac{\partial \nu^+}{\partial x_j^+} \left[\frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^+} + \frac{\partial u_j^+}{\partial x_i^+} \right]. \quad (2.22)$$

- Au point \vec{x}^-

$$\frac{\partial u_i^-}{\partial t} + u_j^- \frac{\partial u_i^-}{\partial x_j^-} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^-}{\partial x_i^-} + \nu^- \frac{\partial^2 u_i^-}{\partial x_j^- \partial x_j^-} + \frac{\partial \nu^-}{\partial x_j^-} \left[\frac{\partial u_i^-}{\partial x_j^-} + \frac{\partial u_j^-}{\partial x_i^-} \right]. \quad (2.23)$$

En considérant que les points \vec{x}^+ et \vec{x}^- sont indépendants, i.e. $\frac{\partial(\dots)^+}{\partial x_j^-} = \frac{\partial(\dots)^-}{\partial x_j^+} = 0$, la soustraction des deux expressions 2.22 et 2.23 permet d'écrire l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_j^+}{\partial x_j^+} + \frac{\partial u_j^-}{\partial x_j^-} \right) \Delta u_i &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_i^+} + \frac{\partial}{\partial x_i^-} \right) \Delta p + \left(\nu^+ \frac{\partial^2}{\partial x_j^+ \partial x_j^+} + \nu^- \frac{\partial^2}{\partial x_j^- \partial x_j^-} \right) \Delta u_i \\ &\quad - \frac{\partial \Delta \nu}{\partial x_j^+} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^+} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i^+} \right) - \frac{\partial \Delta \nu}{\partial x_j^-} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^-} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i^-} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

où les quantités $\Delta(\dots) = (\dots)^+ - (\dots)^-$ représentent la différence de la quantité (\dots) exprimée aux points \vec{x}^+ et \vec{x}^- , respectivement. À noter, $\Delta U_i = (\langle U_i \rangle)^+ - (\langle U_i \rangle)^-$, est l'incrément de la vitesse moyenne $\langle U_i \rangle$. Afin d'obtenir l'équation de transport du carré des incréments de

vitesse, l'équation 2.24 est multipliée par l'incrément de vitesse Δu_i puis moyennée comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle (\Delta u_i)^2 \rangle}_{T_t} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle U_j^+ \rangle \frac{\partial}{\partial x_j^+} \langle (\Delta u_i)^2 \rangle}_{A_d^+} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle U_j^- \rangle \frac{\partial}{\partial x_j^-} \langle (\Delta u_i)^2 \rangle}_{A_d^-} \\
 & + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j^+} \langle u_j^+ (\Delta u_i)^2 \rangle}_{D_t^+} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j^-} \langle u_j^- (\Delta u_i)^2 \rangle}_{D_t^-} + \underbrace{\langle u_j^+ \Delta u_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_j^+} \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}_{Pk^+} + \\
 & \underbrace{\langle u_j^- \Delta u_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_j^-} \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}_{Pk^-} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i^-} \langle \Delta p \Delta u_i \rangle}_{D_p^+} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i^-} \langle \Delta p \Delta u_i \rangle}_{D_p^-} \\
 & + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial x_j^+} \Delta u_i \right\rangle \left[\frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial x_j^+} + \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle}{\partial x_i^+} \right]}_{P_\nu^+} + \underbrace{\langle \nu^+ \Delta u_i \rangle \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial x_j^+ \partial x_j^+}}_{P_\nu^+} \\
 & - \underbrace{\left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial x_j^-} \Delta u_i \right\rangle \left[\frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial x_j^-} + \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle}{\partial x_i^-} \right]}_{P_\nu^-} + \underbrace{\langle \nu^- \Delta u_i \rangle \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial x_j^- \partial x_j^-}}_{P_\nu^-} \\
 & + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial x_j^+} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial (\Delta u_i)^2}{\partial x_j^+} + \frac{\partial \Delta u_i \Delta u_j}{\partial x_i^+} \right) \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG}^+} + \frac{1}{2} \left\langle \nu^+ \frac{\partial^2 \Delta u_i^2}{\partial x_j^+ \partial x_j^+} \right\rangle \\
 & - \underbrace{\left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial x_j^-} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial (\Delta u_i)^2}{\partial x_j^-} + \frac{\partial \Delta u_i \Delta u_j}{\partial x_i^-} \right) \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG}^-} + \frac{1}{2} \left\langle \nu^- \frac{\partial^2 \Delta u_i^2}{\partial x_j^- \partial x_j^-} \right\rangle \\
 & - \underbrace{\left\langle \nu^+ \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^+} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}^+} - \underbrace{\left\langle \nu^- \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^-} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}^-}. \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

L'équation 2.25 dépend des coordonnées du point \vec{x}^+ (x^+ , y^+ et z^+) et du point \vec{x}^- (x^- , y^- et z^-). Il convient d'avoir 6 positions spatiales pour décrire complètement l'équation des incréments de vitesse, ce qui pose de réels problèmes de représentation graphique.

Afin de remédier à cette contrainte, considérant le gradient au centre \vec{X} du vecteur de séparation \vec{r} tel que $\vec{X} = \frac{1}{2} (\vec{x}^+ + \vec{x}^-)$ (voir figure 2.1), comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j^+} = \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j}, \\ \frac{\partial}{\partial x_j^-} = -\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j}. \end{cases} \tag{2.26}$$

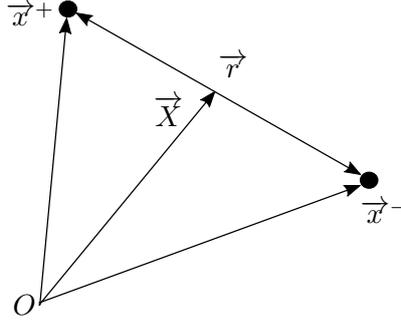


FIGURE 2.1 – Représentation schématisques des différents vecteurs position.

Le changement de variable exprimé en 2.26 est appliqué à l'équation 2.25, il permet de re-écrire les différents termes comme suit :

- Terme \mathcal{A}_d :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left[\langle U_j^+ \rangle \frac{\partial}{\partial x_j^+} \langle (\Delta u_i)^2 \rangle + \langle U_j^- \rangle \frac{\partial}{\partial x_j^-} \langle (\Delta u_i)^2 \rangle \right] \\
 = & \frac{1}{2} \left[\langle U_j^+ \rangle \left(\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \langle (\Delta u_i)^2 \rangle + \langle U_j^- \rangle \left(-\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \langle (\Delta u_i)^2 \rangle \right] \\
 & = \frac{1}{4} \left(\langle U_j^+ \rangle + \langle U_j^- \rangle \right) \left(\frac{\partial}{\partial X_j} \langle (\Delta u_i)^2 \rangle \right). \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

Le terme d'advection est nul dans le cas d'une couche de mélange temporelle car la vitesse verticale moyenne $\langle V \rangle$ est nulle. D'autre part, la moyenne des incréments de vitesse $\langle (\Delta u_i)^2 \rangle$ dépend seulement de la distance de séparation r , de la coordonnée verticale Y (coordonnée verticale du vecteur \vec{X}) ainsi que du temps t , du fait de l'existence de deux directions homogènes dans le cas présent (x et z).

- Terme D_p :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_i^-} + \frac{\partial}{\partial x_i^+} \right) \langle \Delta p \Delta u_i \rangle \\
 & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial X_i} \langle \Delta p \Delta u_i \rangle. \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

Le terme D_p traduit l'inhomogénéité spatiale des corrélations pression-vitesse, en chaque échelle r , suivant la direction verticale de l'écoulement de couche de mélange

- Terme D_t :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j^+} \langle u_j^+ (\Delta u_i)^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j^-} \langle u_j^- (\Delta u_i)^2 \rangle \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \langle u_j^+ (\Delta u_i)^2 \rangle + \left(-\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \langle u_j^- (\Delta u_i)^2 \rangle \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_j} \langle \Delta u_j (\Delta u_i)^2 \rangle + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial X_j} \langle (u_j^+ + u_j^-) (\Delta u_i)^2 \rangle. \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

Le terme D_t regroupe la contribution homogène de la diffusion turbulente, appelé aussi terme de transfert (1^{er} terme de l'expression 2.29) et la contribution inhomogène exprimée par le 2^{ème} terme de l'expression 2.29. Le premier renseigne sur le taux de transfert d'énergie d'échelle en échelle.

- Terme P_ν :

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial x_j^+} \Delta u_i \right\rangle \left[\frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial x_j^+} + \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle}{\partial x_i^+} \right] + \langle \nu^+ \Delta u_i \rangle \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial x_j^+ \partial x_j^+} \\
 & - \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial x_j^-} \Delta u_i \right\rangle \left[\frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial x_j^-} + \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle}{\partial x_i^-} \right] + \langle \nu^- \Delta u_i \rangle \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial x_j^- \partial x_j^-} \\
 &= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) (\Delta \nu) \Delta u_i \right\rangle \left[\left(\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle + \left(\frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_i} \right) \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle \right] \\
 & \quad + \langle \nu^+ \Delta u_i \rangle \left(\frac{\partial^2}{\partial r_j^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial X_j^2} + \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial r_j} \right) \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle \\
 & - \left\langle \left(-\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) (\Delta \nu) \Delta u_i \right\rangle \left[\left(-\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle + \left(-\frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_i} \right) \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle \right] \\
 & \quad + \langle \nu^- \Delta u_i \rangle \left(\frac{\partial^2}{\partial r_j^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial X_j^2} - \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial r_j} \right) \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial r_j} \Delta u_i \right\rangle \left[\frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial X_j} + \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle}{\partial X_i} \right] + \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial X_j} \Delta u_i \right\rangle \left[\frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial r_j} + \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle}{\partial r_i} \right] \\
 & \quad + \left[\frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial r_j^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial X_j^2} \right] [\langle (\nu^+ + \nu^-) \Delta u_i \rangle] + \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial X_j \partial r_j} \langle \Delta \nu \Delta u_i \rangle \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

- Terme P_k :

$$\begin{aligned}
 & \langle u_j^+ \Delta u_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_j^+} \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle + \langle u_j^- \Delta u_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_j^-} \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle \\
 &= \langle u_j^+ \Delta u_i \rangle \left(\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle + \langle u_j^- \Delta u_i \rangle \left(-\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle \\
 &= \langle \Delta u_j \Delta u_i \rangle \frac{\partial}{\partial r_j} \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle + \left\langle \frac{(u_j^+ + u_j^-)}{2} \Delta u_i \right\rangle \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle. \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

Ce terme regroupe la contribution homogène de la production de l'énergie cinétique en chaque échelle r (1^{er} terme de l'expression 2.31) et la contribution inhomogène exprimée par le 2^{ème} de l'expression 2.31.

- Terme $\langle \epsilon \rangle_{VG}$:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial x_j^+} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial (\Delta u_i)^2}{\partial x_j^+} + \frac{\partial \Delta u_i \Delta u_j}{\partial x_i^+} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \nu^+ \frac{\partial^2 (\Delta u_i)^2}{\partial x_j^+ \partial x_j^+} \right\rangle \\
 & - \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial x_j^-} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial (\Delta u_i)^2}{\partial x_j^-} + \frac{\partial \Delta u_i \Delta u_j}{\partial x_i^-} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \nu^- \frac{\partial^2 (\Delta u_i)^2}{\partial x_j^- \partial x_j^-} \right\rangle \\
 = & \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \Delta \nu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) (\Delta u_i)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \Delta u_i \Delta u_j \right] \right\rangle \\
 & + \frac{1}{2} \left\langle \nu^+ \left(\frac{\partial^2}{\partial r_j^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial X_j^2} + \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial r_j} \right) (\Delta u_i)^2 \right\rangle \\
 - & \left\langle \left(-\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \Delta \nu \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) (\Delta u_i)^2 + \left(-\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \Delta u_i \Delta u_j \right] \right\rangle \\
 & + \frac{1}{2} \left\langle \nu^- \left(\frac{\partial^2}{\partial r_j^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial X_j^2} - \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial r_j} \right) (\Delta u_i)^2 \right\rangle \\
 = & \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial r_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (\Delta u_i)^2}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j \Delta u_i}{\partial X_i} \right] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial X_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (\Delta u_i)^2}{\partial r_j} + \frac{\partial \Delta u_j \Delta u_i}{\partial r_i} \right] \right\rangle \\
 + & \frac{1}{2} \left[\left\langle (\nu^+ + \nu^-) \frac{\partial^2 (\Delta u_i)^2}{\partial r_j^2} \right\rangle + \frac{1}{4} \left\langle (\nu^+ + \nu^-) \frac{\partial^2 (\Delta u_i)^2}{\partial X_j^2} \right\rangle + \left\langle \Delta \nu \frac{\partial^2 (\Delta u_i)^2}{\partial X_j \partial r_j} \right\rangle \right]. \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

Finalement, l'équation de transport de l'énergie cinétique $\langle \Delta q^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle (\Delta u_i)^2 \rangle$ à chaque échelle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \langle \Delta q^2 \rangle}_{T_t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial r_j} \langle \Delta u_j \Delta q^2 \rangle}_{D_{t,r}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \langle (u_j^+ + u_j^-) \Delta q^2 \rangle}_{D_{t,y}} \\
 & + \underbrace{\langle \Delta u_j \Delta u_i \rangle \frac{\partial}{\partial r_j} \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}_{P_{k,r}} + \underbrace{\left\langle \frac{(u_j^+ + u_j^-)}{2} \Delta u_i \right\rangle \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}_{P_{k,y}} \\
 & = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial X_i} \langle \Delta p \Delta u_i \rangle}_{D_{p,y}} \\
 & + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial r_j} \Delta u_i \right\rangle \left[\frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial X_j} + \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle}{\partial X_i} \right] + \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial X_j} \Delta u_i \right\rangle \left[\frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial r_j} + \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle}{\partial r_i} \right]}_{P_{\nu,r-y}} \\
 & + \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial r_j^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial X_j^2} \right] \left[\langle (\nu^+ + \nu^-) \Delta u_i \rangle \right] + \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial X_j \partial r_j} \langle \Delta \nu \Delta u_i \rangle}_{P_{\nu,r-y}} \\
 & + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial r_j} \left[\frac{\partial \Delta q^2}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j \Delta u_i}{\partial X_i} \right] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial X_j} \left[\frac{\partial \Delta q^2}{\partial r_j} + \frac{\partial \Delta u_j \Delta u_i}{\partial r_i} \right] \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG,r-y}} \\
 & + \underbrace{\left[\left\langle (\nu^+ + \nu^-) \frac{\partial^2 \Delta q^2}{\partial r_j^2} \right\rangle + \frac{1}{4} \left\langle (\nu^+ + \nu^-) \frac{\partial^2 \Delta q^2}{\partial X_j^2} \right\rangle \right] + \left\langle \Delta \nu \frac{\partial^2 \Delta q^2}{\partial X_j \partial r_j} \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG,r-y}} \\
 & - \underbrace{\left\langle \nu^+ \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^+} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}^+} - \underbrace{\left\langle \nu^- \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^-} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}^-}. \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

À noter, les indices r , y et $r-y$ désignent les termes traduisant les effets d'échelle r , d'inhomogénéité selon la direction normale y et ceux traduisant les deux effets, respectivement. Dans un repère cartésien tridimensionnel, la moyenne des incréments de vitesse (i.e. $\langle \Delta q^2 \rangle$) dépend de r_x , r_y et r_z , coordonnées du vecteur de séparation \vec{r} et de la position verticale Y du vecteur \vec{X} . On peut distinguer trois cas particuliers où le vecteur \vec{r} est parallèle à x , $\vec{r}(r_x, 0, 0)$, à y , $\vec{r}(0, r_y, 0)$ et à z , $\vec{r}(0, 0, r_z)$

En prenant en compte les conditions d'homogénéité selon les directions x et z , nous obtenons finalement l'équation de l'énergie cinétique en chaque échelle pour l'écoulement de couche de mélange temporelle suivante :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \langle \Delta q^2 \rangle}_{T_t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial r_j} \langle \Delta u_j \Delta q^2 \rangle}_{D_{t,r}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \langle (u_j^+ + u_j^-) \Delta q^2 \rangle}_{D_{t,y}} \\
 & + \underbrace{\langle \Delta u_j \Delta u \rangle \frac{\partial}{\partial r_j} \langle \Delta \mathcal{U} \rangle}_{P_{k,r}} + \underbrace{\left\langle \frac{(u_j^+ + u_j^-)}{2} \Delta u_i \right\rangle \frac{\partial}{\partial Y} \langle \Delta \mathcal{U} \rangle}_{P_{k,y}} \\
 & = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial Y} \langle \Delta p \Delta v \rangle}_{D_{p,y}} \\
 & + \underbrace{\left[\left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial r_y} \Delta u \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial r_x} \Delta v \right\rangle \right] \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U} \rangle}{\partial Y} + \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial X_j} \Delta u_i \right\rangle \left[\frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial r_j} + \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle}{\partial r_i} \right]}_{P_{\nu,r-y}} \\
 & + \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U} \rangle}{\partial r_y^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U} \rangle}{\partial Y \partial Y} \right] \left[\langle (\nu^+ + \nu^-) \Delta u \rangle \right] + \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U} \rangle}{\partial Y \partial r_y} \langle \Delta \nu \Delta u \rangle}_{P_{\nu,r-y}} \\
 & + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial r_j} \left[\frac{\partial \Delta q^2}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j \Delta u_i}{\partial X_i} \right] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial X_j} \left[\frac{\partial \Delta q^2}{\partial r_j} + \frac{\partial \Delta u_j \Delta u_i}{\partial r_i} \right] \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG,r-y}} \\
 & + \underbrace{\left[\left\langle (\nu^+ + \nu^-) \frac{\partial^2 \Delta q^2}{\partial r_j^2} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle (\nu^+ + \nu^-) \frac{\partial^2 \Delta q^2}{\partial X_j^2} \right\rangle \right] + \left\langle \Delta \nu \frac{\partial^2 \Delta q^2}{\partial X_j \partial r_j} \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG,r-y}} \\
 & - \underbrace{\left\langle \nu^+ \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^+} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}^+} - \underbrace{\left\langle \nu^- \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^-} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}^-}. \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

2.1.5 Équation de transport de la vorticité instantanée

Notre intérêt porte également sur le comportement du champ de vorticité ($\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$) dans un écoulement turbulent à viscosité variable. Plus particulièrement, lorsque l'écoulement en question est fortement rotationnel comportant des structures tourbillonnaires de grandes et de petites tailles. C'est le cas de l'écoulement de couche de mélange qui est peuplé de structures cohérentes très énergétiques dont l'effet des variations de viscosité sur celles-ci, à notre connaissance, n'a pas encore été abordé dans la littérature. L'équation instantanée pour le transport de la vorticité peut être obtenue en appliquant le rotationnel à l'équation de quantité de mouvement 2.4 qui s'écrit sous forme vectorielle comme suit :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \wedge \vec{\omega} + \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \vec{\nabla} \nu \left[(\vec{\nabla} \vec{u}) + (\vec{\nabla} \vec{u})^t \right], \tag{2.35}$$

où le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ est remplacé par une expression équivalente $-\vec{u} \wedge \vec{\omega} + \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right)$.

Nous appliquons l'opérateur rotationnel à l'équation 2.35 comme suit :

$$\vec{\nabla} \wedge \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \wedge \vec{\omega} + \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \vec{\nabla} \nu [(\vec{\nabla} \vec{u}) + (\vec{\nabla} \vec{u})^t] \right]. \quad (2.36)$$

Nous obtenons :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge (\nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge [\vec{\nabla} \nu [(\vec{\nabla} \vec{u}) + (\vec{\nabla} \vec{u})^t]]. \quad (2.37)$$

Remarquons au passage que le terme de pression est éliminé dans l'équation 2.37. L'opérateur rotationnel fait apparaître un terme appelé *couple-barocline* $(\frac{1}{\rho^2}(\vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} p))$, qui est strictement nul pour un fluide incompressible. Néanmoins, ce terme est non nul pour un mélange incompressible où les différentes espèces constituant ce mélange possèdent des masses volumiques différentes. Ce cas de figure n'est pas traité dans cette étude puisque la masse volumique des différents écoulements simulés est considéré constante.

Il reste à expliciter les termes visqueux, membre de droite de l'équation 2.37 (RHS) qui, rappelons le, sont caractérisés par une viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ qui n'est plus une constante mais se comporte comme un champ scalaire $\nu(x, y, z, t)$. En utilisant l'identité vectorielle $\vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{V}) = (\vec{\nabla} \psi) \wedge \vec{V} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})\psi$ où ψ et \vec{V} sont respectivement un champ scalaire et un champ vectoriel quelconques nous pouvons écrire :

- Pour le premier terme du membre de droite de l'équation 2.37

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}) &= \nu \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}^2 \vec{u}) + (\vec{\nabla} \nu) \wedge (\vec{\nabla}^2 \vec{u}) \\ &= \nu (\vec{\nabla}^2 \vec{\omega}) + (\vec{\nabla} \nu) \wedge (\vec{\nabla}^2 \vec{u}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

- Pour le second terme du membre de droite de l'équation 2.37

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge [\vec{\nabla} \nu [(\vec{\nabla} \vec{u}) + (\vec{\nabla} \vec{u})^t]] &= \vec{\nabla} \wedge [\vec{\nabla} \nu (\vec{\nabla} \vec{u})] + \vec{\nabla} \wedge [\vec{\nabla} \nu (\vec{\nabla} \vec{u})^t] \\ &= \vec{\nabla} \nu [\vec{\nabla} \vec{\omega}] + \vec{\nabla}^2 \nu \wedge [\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^t]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

En remplaçant les expression 2.38 et 2.39 dans l'équation 2.37 nous obtenons finalement l'équation de transport de la vorticité dans un écoulement incompressible   viscosité variable suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} &= \nu (\vec{\nabla}^2 \vec{\omega}) + (\vec{\nabla} \nu) \wedge (\vec{\nabla}^2 \vec{u}) \\ &+ \vec{\nabla} \nu [\vec{\nabla} \vec{\omega}] + \vec{\nabla}^2 \nu \wedge [\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^t]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Cette équation peut être écrite sous forme tensorielle en posant $\omega_i = \epsilon_{iql} \frac{\partial u_l}{\partial x_q}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} - \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} &= \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} + \epsilon_{iql} \frac{\partial \nu}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_j} \\ &+ \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right] + \epsilon_{iql} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_q \partial x_j} \cdot \left[\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

où ϵ_{iql} est le symbol de Levi-Civita définit comme ci-dessous :

$$\epsilon_{iql} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, q, l) \text{ est } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{si } (i, q, l) \text{ est } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{si } i = q \text{ ou } q = l \text{ ou } l = i. \end{cases} \quad (2.42)$$

L'équation 2.41 présente de nouveaux termes liés aux variations spatio-temporelles de la viscosité dans l'écoulement. Ces termes font intervenir des corrélations, d'une part, entre les gradients de viscosité et les gradients de vitesse, (ex. $\epsilon_{iql} \frac{\partial \nu}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_j}$) et d'autre part des corrélations entre les gradients de viscosité et les gradients de vorticité (ex. $\frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right)$).

2.1.6 Équation de transport de la vorticité moyenne

L'équation de transport de la vorticité moyenne $\langle \omega_i \rangle$ est obtenue en appliquant la décomposition de Reynolds à la vorticité instantanée $\omega_i = \langle \omega_i \rangle + \omega'_i$ et en moyennant l'équation 2.41. Celle-ci s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial t} - \langle \omega_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle \omega'_j u'_i \rangle}{\partial x_j} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \omega'_i u'_j \rangle}{\partial x_j} &= \langle \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle \omega_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + \left\langle \nu' \frac{\partial^2 \omega'_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle \\ + \epsilon_{iql} \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial^2 \langle u_l \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + \epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial^2 u'_l}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial x_j} \right] + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j} \right] \right\rangle \\ + \epsilon_{iql} \frac{\partial^2 \langle \nu \rangle}{\partial x_q \partial x_j} \cdot \left[\frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_l} \right] + \epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial^2 \nu'}{\partial x_q \partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial u'_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Sous une forme plus compacte, l'équation ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial t} - \langle \omega_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle \omega'_j u'_i \rangle}{\partial x_j} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \omega'_i u'_j \rangle}{\partial x_j} &= \left\langle \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle \\ + \epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_q \partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \right\rangle + \epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.44)$$

L'équation de transport de la vorticité moyenne présente de nouveaux termes liés aux variations spatio-temporelles de la viscosité dans l'écoulement. Ces termes font intervenir deux types de corrélations à savoir des corrélations entre les gradients de viscosité et les gradients de vitesse (ex. $\epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$) mais également des corrélations entre les gradients de

viscosité et les gradients de vorticité ex. $\left\langle \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle \right\rangle$.

L'équation 2.44 peut davantage être simplifiée en remarquant que les quantités moyennes dépendent uniquement de la direction verticale y dans le cas de la couche de mélange temporelle comme ceci :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial t} - \frac{\partial \langle \omega'_y u'_i \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \omega'_i v' \rangle}{\partial y} &= \epsilon_{i2l} \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \nu \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle \\ &+ \epsilon_{i2l} \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.45)$$

La projection de l'équation ci-dessus sur l'axe x , y et z ($i = 1$, $i = 2$ et $i = 3$), permet d'écrire l'équation de transport pour les trois composantes de la vorticité ω_x , ω_y et ω_z au moyen des expressions 2.46, 2.47 et 2.48 respectivement comme suit :

$$\frac{\partial \langle \omega_x \rangle}{\partial t} - \frac{\partial \langle \omega'_y u' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \omega'_x v' \rangle}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial z} \right) \right\rangle \quad (2.46)$$

$$-\frac{\partial \langle \omega'_y v' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \omega'_y v' \rangle}{\partial y} = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \langle \omega_z \rangle}{\partial t} = -\frac{\partial \langle \omega'_z v' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \omega'_y w' \rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \right\rangle \quad (2.48)$$

La quantification des équations ci-dessus permet de donner un sens et une réponse claire aux différences éventuelles² entre les profils moyens des composantes de la vorticité dans les situations où la viscosité est effectivement une constante ou au contraire un scalaire actif dans l'écoulement.

2.1.7 Équation de transport de l'enstrophie

L'équation de transport de l'enstrophie est obtenue en multipliant l'équation de vorticité 2.41 par les fluctuations de l'enstrophie ω'_i et en moyennant suivant les directions homogènes x et z . Nous obtenons la forme générale décrites en 2.49.

Les différents termes de l'équation 2.49 ont une contribution et un rôle bien définis en ce qui concerne la création, le transfert et la destruction de l'enstrophie dans un écoulement

2. Suivant les paramètres de l'écoulement. En effet, on comprend aisément qu'un faible rapport de viscosité et une forte turbulence ne peut provoquer des différences au niveau des profils moyens de vorticité. En revanche, la question se pose aux nombres de Reynolds modérés avec des rapports de viscosité importants.

turbulent. Ils sont explicités comme suit :

- **Terme T_t** : Pour les écoulements instationnaires, ce terme représente le taux de variation temporelle de l'enstrophie.

- **Terme A_d** : Ce terme représente l'advection de l'enstrophie par l'écoulement moyen $\langle u_j \rangle$. Ce terme est, comme nous allons le voir à la section (6.1.2) du chapitre 6, strictement nul pour le cas de la couche de mélange temporelle du fait de la périodicité de l'écoulement dans les directions longitudinale et transversale.

- **Terme P_ω** : De la même manière que l'énergie cinétique de turbulence qui est produite par les gradients de vitesse moyenne, l'enstrophie est produite dans l'écoulement via les gradients de vortacité moyenne, c'est le terme de production.

- **Terme D_t** : Ce terme traduit la diffusion de l'enstrophie par la turbulence dans l'écoulement, ce terme est nettement plus grand que la diffusion moléculaire aux grands nombres de Reynolds.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle \omega_i'^2 \rangle}{2} \right)}_{T_t} + \underbrace{\langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\langle \omega_i'^2 \rangle}{2} \right)}_{A_d} + \underbrace{\langle \omega_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial x_j}}_{P_\omega} + \underbrace{\left\langle u_j' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\omega_i'^2}{2} \right) \right\rangle}_{D_t} \quad (2.49a)$$

$$= \underbrace{\langle \omega_j \rangle \left\langle \omega_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle + \langle \omega_i' \omega_j' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \left\langle \omega_i' \frac{\partial \omega_j' u_i'}{\partial x_j} \right\rangle}_{ST} \quad (2.49b)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \omega_i' \right\rangle \left(\frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \nu \omega_i' \rangle \frac{\partial^2 \langle \omega_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j}}_{P_{\omega\nu}} \quad (2.49c)$$

$$+ \underbrace{\epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_q \partial x_q} \omega_i' \right\rangle \left(\frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_l} \right) + \epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_q} \omega_i' \right\rangle \frac{\partial^2 \langle u_l \rangle}{\partial x_j \partial x_j}}_{P'_{\omega\nu}} \quad (2.49d)$$

$$+ \underbrace{\epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_q \partial x_q} \omega_i' \cdot \left(\frac{\partial u_l'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_l} \right) \right\rangle + \epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_q} \omega_i' \cdot \frac{\partial^2 u_l'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle}_{\epsilon'_{\omega VG}} \quad (2.49e)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \omega_i'^2}{\partial x_j} \right) \right\rangle}_{\epsilon_{\omega VG}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \nu \frac{\partial^2 \omega_i'^2}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle}_{\epsilon_{\omega VG}} - \underbrace{\left\langle \nu \left(\frac{\partial \omega_i'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\epsilon_{\omega VV}} \quad (2.49f)$$

- **Terme ST** : Dans le bilan 2.49, ce terme est responsable d'un mécanisme très important de production de l'enstrophie qui est l'étirement et l'inclinaison des tubes de vortacité (*Stretching and Tilting* en anglais). Ce terme est strictement nul en turbulence bidimensionnelle, il est en revanche, en turbulence tridimensionnelle, responsable de l'augmentation de

l'enstrophie par effet d'étirement des tubes de vorticité qui rétrécissement en diamètre pour maintenir un flux de quantité de mouvement constant.

- **Terme $\epsilon_{\omega_{VV}}$** : Ce terme représente le taux de dissipation moyen de l'enstrophie, il est responsable de la destruction des plus petites structures de l'écoulement par l'action de la viscosité. A noter que pour ce terme et contrairement à sa forme classique (viscosité constante), le coefficient de viscosité est contenu dans le symbole de la moyenne pour un écoulement à viscosité variable. Il regroupe ainsi les contributions des valeurs moyennes et fluctuantes de celle-ci.

Les termes T_t , A_d , P_ω , D_t et $\epsilon_{\omega_{VV}}$ ci-dessus sont dits termes classiques puisque on les retrouve dans l'équation de l'enstrophie dans le cas des écoulements à viscosité constante. En revanche, les termes supplémentaires ci-dessous sont liés uniquement aux variations de viscosité dans l'écoulement et se traduisent mathématiquement comme ceci :

- **Le terme P_{ω_ν}** : Ce terme prend en compte les corrélations existantes entre les gradients de vorticité moyenne et les gradients de viscosité fluctuante. Le rôle de ce terme dans le bilan de transport de l'enstrophie n'est pas simple à prédire analytiquement vue la complexité des interactions entre les champs de vitesse-vorticité-viscosité. En effet, si on se place dans le cas d'une couche de mélange plane où le gradient vertical de la vorticité transversale $\frac{\partial \langle \omega_z \rangle}{\partial y}$ est positif, alors le signe du terme $\left(\left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial y} \omega'_z \right\rangle \frac{\partial \langle \omega_z \rangle}{\partial y} \right)$ dépend du signe de $\left(\left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial y} \omega'_z \right\rangle \right)$ qui n'est pas évident à prédire analytiquement.

- **Le terme P'_{ω_ν}** : Ce terme fait intervenir le produit vectoriel entre les gradients de viscosité fluctuante et les gradients de vitesse moyenne.

- **Le terme $\epsilon_{\omega_{VG}}$** : Ce terme regroupe les corrélations entre les gradients de viscosité et les gradients de vorticité fluctuante.

- **Le terme $\epsilon'_{\omega_{VG}}$** : Ce terme traduit le produit vectoriel entre les gradients de viscosité et les gradients de vitesse fluctuante.

En prenant en compte les conditions périodiques du problème, c'est-à-dire les expressions 2.11 et 2.14 et sachant que la divergence d'un rotationnel est nulle $\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = 0 \right)$, l'équation de transport de l'enstrophie s'écrit finalement pour l'écoulement de couche de mélange temporelle incompressible   viscosité variable comme l'expression 2.50.

Les termes de l'équation 2.50 sont évalués à l'aide des simulations numériques directes présentées à la section 6.1.2 du chapitre 6.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle \omega_i'^2 \rangle}{2} \right)}_{T_t} + \underbrace{\langle \omega'_z v' \rangle \frac{\partial \langle \omega_z \rangle}{\partial y}}_{P_\omega} + \underbrace{\left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\omega_i'^2}{2} \right) \right\rangle}_{D_t} \quad (2.50a)$$

$$= \underbrace{\langle \omega_z \rangle \left\langle \omega'_i \frac{\partial u'_i}{\partial z} \right\rangle + \langle \omega'_x \omega'_y \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} + \left\langle \omega'_i \frac{\partial \omega'_j u'_i}{\partial x_j} \right\rangle}_{ST} \quad (2.50b)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial y} \omega'_z \right\rangle \left(\frac{\partial \langle \omega_z \rangle}{\partial y} \right) + \langle \nu \omega'_z \rangle \frac{\partial^2 \langle \omega_z \rangle}{\partial y \partial y}}_{P_{\omega_\nu}} \quad (2.50c)$$

$$\underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial z \partial z} \omega'_y - \frac{\partial^2 \nu}{\partial y \partial y} \omega'_z \right\rangle \cdot \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial z} \omega'_y - \frac{\partial \nu}{\partial y} \cdot \omega'_z \right\rangle \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial y \partial y}}_{P'_{\omega_\nu}} \quad (2.50d)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial y \partial x_j} \omega'_x \cdot \left(\frac{\partial w'}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \nu}{\partial z \partial x_j} \omega'_x \cdot \left(\frac{\partial v'}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial y} \right) \right\rangle}_{\epsilon'_{\omega_{VG1-1}}} \quad (2.50e)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial x \partial x_j} \omega'_y \cdot \left(\frac{\partial w'}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \nu}{\partial z \partial x_j} \omega'_y \cdot \left(\frac{\partial u'}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x} \right) \right\rangle}_{\epsilon'_{\omega_{VG1-2}}} \quad (2.50f)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial x \partial x_j} \omega'_z \cdot \left(\frac{\partial v'}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \nu}{\partial y \partial x_j} \omega'_z \cdot \left(\frac{\partial u'}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x} \right) \right\rangle}_{\epsilon'_{\omega_{VG1-3}}} \quad (2.50g)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial y} \omega'_z \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \nu}{\partial z} \omega'_x \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle}_{\epsilon'_{\omega_{VG2-1}}} \quad (2.50h)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial z} \omega'_y \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \nu}{\partial x} \omega'_y \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle}_{\epsilon'_{\omega_{VG2-2}}} \quad (2.50i)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x} \omega'_z \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \nu}{\partial y} \omega'_z \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle}_{\epsilon'_{\omega_{VG2-3}}} \quad (2.50j)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \omega_i'^2}{\partial x_j} \right) \right\rangle}_{\epsilon_{\omega_{VG}}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \nu \frac{\partial^2 \omega_i'^2}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle}_{\epsilon_{\omega_{VG}}} - \underbrace{\left\langle \nu \left(\frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\epsilon_{\omega_{VV}}}. \quad (2.50k)$$

2.1.8 Équation de transport de scalaires *passif* et *actif*

Nous avons jusqu'ici explicité les différentes équations de transport des grandeurs moyennes et fluctuantes liées au champ de vitesse. Nous allons dans ce qui suit en faire de même pour les grandeurs du champ scalaire, celui-ci peut être *passif* ou *actif*. Dans notre étude, le scalaire passif est représenté par la température où un faible gradient de ce dernier est imposé dans la couche de mélange temporelle de sorte qu'il n'intervient pas sur la dynamique de la turbulence. Tandis que le scalaire *actif*, qui agit sur la dynamique de la turbulence, est représenté par la fraction massique des espèces chimiques notée Y_k dans le mélange.

Le transport d'un scalaire quelconque ϕ (passif ou actif) est régi par l'équation d'advection-diffusion suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathcal{D}_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right), \quad (2.51)$$

où \mathcal{D}_ϕ désigne la coefficient de diffusion du scalaire ϕ .

Dans le cas de la température ($\phi = T$), le coefficient \mathcal{D}_ϕ est appelé coefficient de diffusion thermique noté $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}$, λ la conductivité thermique et C_p la capacité calorifique massique du fluide considéré. Pour un scalaire actif telle que la fraction massique des espèces chimiques Y_k , le coefficient \mathcal{D}_ϕ est tout simplement le coefficient de diffusion moléculaire noté \mathcal{D}_k .

En appliquant la décomposition de Reynolds à la température instantanée $\phi = \langle \phi \rangle + \phi'$ et en moyennant l'équation (2.51) nous obtenons l'équation de transport moyenne du scalaire suivante :

$$\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial t} = -\langle u_j \rangle \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x_j} + \mathcal{D}_\phi \left(\frac{\partial^2 \langle \phi \rangle}{\partial x_j \partial x_j} \right) - \frac{\partial \langle \phi' u'_j \rangle}{\partial x_j} \quad (2.52)$$

Dans le cas d'une couche de mélange de propriétés physico-chimiques constantes (un seul fluide à température constante par exemple), la température peut dans certaines conditions être utilisée comme "traceur passif" pour visualiser l'écoulement. Cela va permettre une comparaison visuelle entre le scalaire passif de l'écoulement à viscosité constante et le scalaire actif de l'écoulement à viscosité variable. Bien que utile, la comparaison visuelle des champs scalaires passifs et actifs n'est pas suffisante à elle seule pour comprendre et interpréter tous les phénomènes physiques sous-jacents au processus de mélange turbulent. Il est alors nécessaire de compléter la comparaison visuelle par une comparaison dynamique du scalaire et des mécanismes de transfert et de diffusion dans l'écoulement. Il est également intéressant, dans un même écoulement à viscosité variable, de comparer l'évolution du scalaire passif, généré par de faibles variations de température, à celui du scalaire actif tel qu'une viscosité variable. En effet, les variations de viscosité interviennent sur la dynamique de la turbulence qui elle-même agit, par le biais de l'équation de transport des fractions massiques des espèces, sur la dispersion du scalaire passif.

L'équation ci-dessus reste valable pour l'écoulement à viscosité variable en supposant que le coefficient de diffusion \mathcal{D}_ϕ d'un mélange multi-espèce reste constante quelque soit les proportions massiques des espèces dans le mélange. La prise en compte des conséquences mathématiques des conditions périodiques de notre écoulement, c'est-à-dire les expressions 2.11 et 2.14, l'équation de transport moyenne du scalaire $\langle \phi \rangle$ pour l'écoulement de couche de mélange temporelle incompressible s'écrit :

$$\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial t} = - \langle v \rangle \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial y} + \mathcal{D}_\phi \left(\frac{\partial^2 \langle \phi \rangle}{\partial y \partial y} \right) - \frac{\partial \langle v' \phi' \rangle}{\partial y}. \quad (2.53)$$

Contrairement à l'équation de transport de la vitesse moyenne, il n'y a pas de termes supplémentaires dans l'équation de transport de scalaire pour un écoulement multi-espèces à viscosité variable.

L'équation de transport des fluctuations de scalaire $\langle \phi'^2 \rangle$ s'obtient en multipliant l'équation 5.8 par ϕ' et en moyennant selon le plan x et z . Elle s'écrit comme suit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle \phi'^2 \rangle}{2} \right)}_{T_t} = - \underbrace{\langle \phi' v' \rangle \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial y}}_{P_k} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left\langle v' \left(\frac{\phi'^2}{2} \right) \right\rangle}_{D_t} + \underbrace{\mathcal{D}_\phi \frac{\partial^2 \langle \phi \rangle}{\partial y \partial y}}_{D_m} - \underbrace{\mathcal{D}_\phi \left\langle \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}}. \quad (2.54)$$

L'analyse approfondie de l'équation 5.8 pour les deux écoulements à viscosité constante et celui à viscosité variable est réalisée à la section 5.1.4 du chapitre 5.

2.2 Relations thermodynamiques

Nous décrivons, dans cette section, les principales relations thermodynamiques régissant un mélange composé, dans le cas général, de plusieurs espèces chimiques.

2.2.1 Gaz parfaits

Dans la présente étude, les fluides mis en jeu sont régis par la loi des gaz parfaits. Il existe deux scénarios possibles, soit un seul fluide évolue dans l'écoulement turbulent de couche de mélange, auquel cas on parlera de mélange homogène, ou bien plusieurs fluides (espèces chimiques) évoluent dans le même écoulement, on parlera de mélange hétérogène en rapport avec les propriétés physico-chimiques des différentes espèces. Chaque espèce chimique, identifiée par l'indice $k = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{N}_s$ où \mathcal{N}_s est le nombre total des espèces chimiques présente dans l'écoulement, est régie par l'équation d'état des gaz parfaits comme suit :

$$P_k = \rho_k \mathcal{R}_k T. \quad (2.55)$$

Dans un volume de contrôle \mathbf{V} constant associé à une température constante T , chaque espèce du mélange est déterminée par sa pression partielle P_k , pression qu'aurait le mélange s'il était constitué que de cette espèce, et sa masse molaire \mathcal{W}_k . ρ_k est la masse volumique de la $k^{\text{ème}}$ espèce et $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}_u/\mathcal{W}_k$ où $\mathcal{R}_u = 8.3145 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ est la constante universelle des gaz parfaits. La pression totale exercée par le mélange est, dans le cas d'un gaz parfait, égale à la somme des pressions partielles des constituants du mélange. D'après la loi de Dalton on a :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_s} P_k = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_s} \rho_k \mathcal{R}_k T = \mathcal{R}_u T \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_s} \frac{\rho_k}{\mathcal{W}_k} \\ &= \mathcal{R}_u T \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_s} \frac{\rho_k}{\rho} \frac{\rho}{\mathcal{W}_k} = \rho \mathcal{R}_u T \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_s} \frac{Y_k}{\mathcal{W}_k} = \frac{\rho \mathcal{R}_u T}{W}. \end{aligned}$$

Finalement, l'équation d'état d'un mélange de gaz parfait s'écrit :

$$P = \frac{\rho \mathcal{R}_u T}{W} = \rho \mathcal{R} T, \quad (2.56)$$

où $\mathcal{R} = \mathcal{R}_u/W$ et $W = \left(\sum_{k=1}^{\mathcal{N}_s} \frac{Y_k}{\mathcal{W}_k} \right)^{-1}$ la masse molaire totale équivalente du mélange constitué de \mathcal{N}_s espèces chimiques.

2.2.2 Propriétés de transport

Il est primordiale dans un écoulement multi-espèces de déterminer, au moyen des lois de mélange largement utilisées, la conductivité thermique du mélange ainsi que les coefficients de viscosité dynamique μ et de diffusion $\mathcal{D}_{k,m}$ des espèces chimiques dans le mélange. Ces coefficients sont utilisés par les équations de Navier-Stokes et les équations de transport du scalaire. Les coefficients de transport de chacune des espèces sont déterminés indépendamment les uns des autres à l'aide de la théorie cinétique des gaz. Des bases de données pré-établies existent dans la littérature pour le calcul de ces propriétés de transport et ce pour de nombreuses espèces chimiques. Nous citons à titre d'exemple la base de données du GRI-Mech 3.0.

2.2.2.1 Viscosité d'un mélange constitué de \mathcal{N}_s espèces chimiques

La viscosité dynamique d'un gaz mono-espèce est calculée en utilisant le potentiel de Lennard-Jones, elle est donnée pour une $k^{\text{ème}}$ espèce par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{5}{16} \left(\frac{m_h k_b}{\pi} \right)^{1/2} \frac{(\mathcal{W}_k T)^{1/2}}{\sigma_k^2 f(T_k^*)} \\ &= 2.6693 \times 10^{-5} \frac{(\mathcal{W}_k T)^{1/2}}{\sigma_k^2 f(T_k^*)}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

où $f(T_k^*) = 1.147(T_k^*)^{-0.145} + (T_k^* + 0.5)^{-2}$ est l'intégral de collision et $T_k^* = \frac{T}{T_{ek}}$ avec $T_{ek} = \frac{k_B}{\epsilon_k}$.

Le calcul de la viscosité par la relation 2.57 fait intervenir les grandeurs m_h , σ_k , k_B et ϵ_k qui représentent respectivement la masse atomique exprimée en grammes, le diamètre de collision exprimé en angström, la constante de Boltzmann et le potentiel de Lennard-Jones de la $k^{\text{ème}}$ espèce. L'équation 2.57 exprime la viscosité dynamique dans le système CGS, il convient alors de multiplier cette expression par un facteur de conversion en système international SI égale à 1/10.

La viscosité dynamique d'un mélange de \mathcal{N}_s espèces chimiques dépend naturellement des fractions massiques respectives Y_k de chaque espèce dans le mélange. Le modèle le plus simple donnant la viscosité dynamique de ce mélange est le modèle linéaire exprimé par la relation suivante :

$$\mu = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_s} \mu_k \times Y_k, \quad (2.58)$$

où μ_k est la viscosité de la $k^{\text{ème}}$ espèce déterminée à l'aide de l'équation 2.57. Ainsi, la viscosité de mélange est directement proportionnelle à la quantité massique des espèces chimiques de l'écoulement.

Dans le cas le plus général, un modèle plus sophistiqué dit de Wilke [47] est plus adapté pour la détermination de la viscosité dynamique d'un mélange hétérogène.

$$\mu = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_s} \left[\frac{\mu_k \left(\frac{Y_k}{\mathcal{W}_k} \right)}{\left(\sum_{l=1}^{\mathcal{N}_s} \frac{Y_l \Phi_{kl}}{\mathcal{W}_l} \right)} \right], \quad (2.59)$$

où μ_k et \mathcal{W}_k sont la viscosité dynamique et la masse molaire de la $k^{\text{ème}}$ espèce, respectivement. Φ_{kl} est défini comme suit :

$$\Phi_{kl} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{\mathcal{W}_k}{\mathcal{W}_l} \right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_k}{\mu_l} \right)^{1/2} \left(\frac{\mathcal{W}_k}{\mathcal{W}_l} \right)^{1/4} \right]^{1/2}. \quad (2.60)$$

2.2.2.2 Diffusion moléculaire d'une $k^{\text{ème}}$ espèce dans un mélange de \mathcal{N}_s espèces chimiques

Le coefficient de diffusion binaire³ d'une espèce notée j par rapport à une autre espèce notée k est donné par la relation d'Hayashi et Hishida ci-dessous :

$$\mathcal{D}_{jk} = 1.8829 \times 10^3 \frac{\left[T^3 \left(\frac{\mathcal{W}_j + \mathcal{W}_k}{\mathcal{W}_j \mathcal{W}_k} \right) \right]^{1/2}}{P \sigma_{jk} g(T_{jk}^*)} \quad (2.61)$$

3. Mélange composé de deux espèces

Avec

$$\sigma_{jk} = \frac{1}{2}(\sigma_j + \sigma_k) \quad (2.62)$$

$$g(T_{jk}^*) = (T/T_{ejk})^{-0.145} + \left(T/T_{ejk} + \frac{1}{2}\right)^{-2} \quad (2.63)$$

$$T/T_{ejk} = (T_{ej}T_{ek})^{1/2} = \left(\frac{\epsilon_j \epsilon_k}{k_B^2}\right)^{1/2} \quad (2.64)$$

Si, dans un mélange donné le nombre d'espèce $\mathcal{N}_s > 2$, la diffusion de la $k^{\text{ème}}$ espèce, dans le reste du mélange, dépend de sa taille, de sa masse et de la température du mélange considéré. Cette diffusion d'espèce dans le mélange est caractérisée par un coefficient de diffusion moléculaire donné par la loi suivante :

$$\mathcal{D}_{k,m} = \frac{1 - Y_k}{\mathcal{W} \left(\sum_{j \neq k}^{\mathcal{N}_s} \frac{Y_j}{\mathcal{W}_j \mathcal{D}_{jk}} \right)}, \quad (2.65)$$

où \mathcal{D}_{jk} est le coefficient de diffusion binaire donné par la relation 2.61

La relation 2.65 est donné dans ce manuscrit à titre indicatif puisque elle n'est pas utilisée dans la présente étude. En effet, le nombre d'espèces misent en jeu dans les différentes simulations réalisées durant cette étude est, une (1) pour l'écoulement à viscosité constante, deux (2) pour l'écoulement à viscosité variable.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé les équations de transport des différentes quantités qui nous semblent importantes en vue de comparer deux écoulements, l'un à viscosité constante et l'autre à viscosité variable. Comme pour les variations de masse volumique, qui font apparaître des termes supplémentaires, les variations de viscosité font de même et présentent de nouveaux termes dans les différents bilans. Il vient alors que les effets de ces variations peuvent intervenir sur une gamme d'échelles plus au moins étendue, suivant les conditions initiales et les conditions aux limites de l'écoulement. D'autant plus que la couche de mélange est connue pour être sensible à ces conditions même en régime pleinement développée. Les questions qui peuvent être posées c'est **quel est le rôle des nouveaux termes engendrés par les variations de viscosité dans les différentes équations de transport ?** Savoir également si **les termes classiques sont affectés par les variations de viscosité ? et comment ?** Enfin, quantifier l'apport des variations de viscosité sur l'efficacité du mélange de scalaire. Ce dernier revêt une importance capitale notamment dans le domaine de la combustion.

Nous avons également présenté dans ce chapitre les différentes relations thermodyna-

miques d'un mélange de gaz parfait. En particulier, nous avons exposé les lois de mélange telle que celle de Wilke pour la viscosité. À ce propos, nous pouvons nous poser les questions suivantes : **Quelle différence y a-t-il entre l'utilisation de la loi de Wilke et la loi linéaire sur les résultats de simulation ? Quel est l'effet de ces lois sur les termes supplémentaires ?** En effet, la viscosité se comporte comme un champ scalaire actif, qui influence le champ de vitesse. Par conséquent, toute modification de la valeur locale de la viscosité, donnée par une loi de mélange en particulier, peut avoir des effets sur la dynamique de l'écoulement.

Chapitre 3

Méthodes numériques

Sommaire

3.1	Code CHOC-WAVES	49
3.1.1	Formulation mathématique des équations résolues	50
3.1.2	Discrétisation des termes convectifs : le schéma WENO	51
3.1.2.1	Le schéma WENO	51
3.1.2.2	Le schéma WENO large bande	53
3.1.2.3	Le schéma centré conservatif	55
3.1.3	Discrétisation des termes diffusifs	58
3.1.4	Discrétisation temporelle	59
3.2	Conditions initiales et conditions aux limites	59
3.2.1	Conditions périodiques	59
3.2.2	Conditions de non réflexion	60
3.2.3	Conditions initiales turbulentes	60
3.3	Conclusion	63

3.1 Code CHOC-WAVES

L'outil numérique utilisé lors de ces travaux de thèse est le code CHOC-WAVES (*Compressible High-Order Code using Weno AdaptatiVE Stencils*) développé au laboratoire CORIA par le professeur A. Hadjadj et son équipe. Il a fait l'objet de nombreuses validations tant en écoulement mono-espèce ([48], [49], [50]) qu'en écoulement multi-espèces ([51], [52],[53]). C'est cette version du code qui a été utilisée pour mener ce travail. Nous nous intéressons au transport de différentes espèces chimiques présentant des rapports de viscosité permettant d'évaluer leurs effets dans l'écoulement.

3.1.1 Formulation mathématique des équations résolues

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie totale et de transport des espèces écrites en formulation compressible représentées sous une forme conservative dans l'expression 3.1, sont résolues numériquement à l'aide du code CHOC-WAVES

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}^l}{\partial x_l} + \frac{\partial \mathcal{D}^l}{\partial x_l} = O \quad (3.1)$$

avec :

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \\ \rho Y_1 \\ \vdots \\ \rho Y_{\mathcal{N}_s} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}^l = \begin{pmatrix} \rho u_l \\ \rho u_1 u_1 + p \delta_{1l} \\ \rho u_2 u_2 + p \delta_{2l} \\ \rho u_3 u_3 + p \delta_{3l} \\ \rho H u_l \\ \rho Y_1 u_l \\ \vdots \\ \rho Y_{\mathcal{N}_s} u_l \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^l = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_{1l} \\ -\tau_{2l} \\ -\tau_{3l} \\ -u_i \tau_{il} + q_l \\ \rho Y_1 V_{1,l} \\ \vdots \\ \rho Y_{\mathcal{N}_s} V_{\mathcal{N}_s,l} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

où E est l'énergie totale (somme de l'énergie interne e et de l'énergie cinétique $u_i^2/2$), H est l'enthalpie totale, $Y_k = \rho_k / (\sum_{k=1}^{\mathcal{N}_s} \rho_k)$ est la fraction massique de la $k^{\text{ème}}$ espèce ($k = 1 \dots \mathcal{N}_s$, \mathcal{N}_s est le nombre total des espèces chimiques transportées). $u_i \equiv (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ est le vecteur vitesse, p la pression et ρ est la masse volumique. En formulation incompressible, le tenseur des contraintes de Reynolds τ_{il} , le flux thermique q_l et la vitesse de diffusion des espèces $V_{k,l}$ (celle-ci est obtenue par la loi de Fick), s'écrivent comme suit :

$$\tau_{il} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{il} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}, \quad (3.3)$$

$$q_l = -\mathcal{K} \frac{\partial T}{\partial x_l} + \rho \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_s} h_k Y_k V_{k,l}, \quad (3.4)$$

$$V_{k,l} = -\mathcal{D}_k \frac{1}{Y_k} \frac{\partial Y_k}{\partial x_l}, \quad (3.5)$$

où, μ et \mathcal{K} sont respectivement la viscosité et la conductivité thermique du mélange, h_k est l'enthalpie de la $k^{\text{ème}}$ espèce chimique et \mathcal{D}_k le coefficient de diffusion de l'espèce k dans le reste du mélange.

Bien que les équations explicitées plus haut sont écrites puis résolues dans le code de manière compressible, les conditions d'écoulement utilisées dans la présente étude nous permettent largement de considérer l'incompressibilité de l'écoulement. En effet, le nombre de

Mach convectif des différentes simulations réalisées est très inférieur à 0,3, valeur à partir de laquelle les effets de compressibilité entrent en jeu. Par conséquent, tous les développements analytiques entrepris dans la présente étude (voir chapitre 2) admettent l'hypothèse d'incompressibilité.

3.1.2 Discrétisation des termes convectifs : le schéma WENO

Le code de calcul CHOC-WAVES utilise un solveur basé sur le schéma WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) d'ordre 5 pour sa robustesse avérée en ce qui concerne la résolution d'écoulements comportants de forts gradients. En effet, le schéma WENO est bien approprié pour les simulations numériques des écoulements comportant des régions où les propriétés du fluide (pression, vitesse, masse volumique, viscosité . . .) peuvent avoir des sauts très importants (tels que les ondes de choc et les écoulements diphasiques de spray). En dehors de ces régions, le schéma WENO a l'avantage d'offrir des solutions précises en conservant un ordre élevé.

3.1.2.1 Le schéma WENO

Par souci de clarté, la description du schéma WENO se fera pour une dérivée spatiale unidimensionnelle comme suit :

$$\frac{\partial F(U)}{\partial x} = \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x}, \quad (3.6)$$

où $U = [\rho, \rho u, \rho E, \rho k]$ et $F(U) = [\rho u, \rho u^2, P, (\rho E + P)u, \rho k u]$ représentent le vecteur des variables transportable le flux convectif, respectivement. Les quantités $F_{i+1/2}$ et $F_{i-1/2}$ sont respectivement les flux numériques (approximés) aux interfaces $i + 1/2$ et $i - 1/2$ du flux caractéristique $F(U)$.

Chaque flux numérique $F_{i\pm 1/2}$ est décomposé en une partie positive $F_{i\pm 1/2}^+$ et une partie négative $F_{i\pm 1/2}^-$ tel que :

$$\frac{\partial F_{i\pm 1/2}^+(u_{i\pm 1/2})}{\partial u_{i\pm 1/2}} \geq 0 \text{ et } \frac{\partial F_{i\pm 1/2}^-(u_{i\pm 1/2})}{\partial u_{i\pm 1/2}} \leq 0 \quad (3.7)$$

Cette décomposition s'effectue selon le schéma de Lax-Friedrichs comme suit :

$$F_{i\pm 1/2}^\pm(u_{i\pm 1/2}) = \frac{1}{2}(F_{i\pm 1/2}(u_{i\pm 1/2}) \pm \alpha u_{i\pm 1/2}) \text{ avec } \alpha = \max \left| \frac{dF(U)}{dU} \right| \quad (3.8)$$

La décomposition de Lax-Friedrichs possède deux formulations ; *locale* (LLF) et *globale* (GLF). La première prend en compte les valeurs locales du coefficient α sur une ligne du maillage concernée, tandis la seconde utilise la valeur globale du coefficient α sur toutes les lignes du maillage. Il est à noter que la formulation GLF est plus dissipative et plus robuste

aux voisinages de fortes discontinuités.

Les flux caractéristiques $F_{i+1/2}^{\pm}$ et $F_{i-1/2}^{\pm}$ sont reconstruits à l'aide de l'interpolation essentiellement non-oscillante des flux $F_i^{\pm(k)}$ sur trois stencils. Ainsi, le flux numérique $F_{i+1/2}^+$ calculé par le schéma WENO d'ordre 5 s'écrit comme suit :

$$F_{i+1/2}^+ = \sum_{k=1}^3 w^{(k)} F_{i+1/2}^{+(k)} = w^{(1)} F_{i+1/2}^{+(1)} + w^{(2)} F_{i+1/2}^{+(2)} + w^{(3)} F_{i+1/2}^{+(3)} \quad (3.9)$$

Le calcul du flux $F_{i+1/2}^-$ s'effectue de manière symétrique par rapport à l'interface $i + 1/2$.

En absence de discontinuité, le schéma WENO interpole les flux des différents stencils "k" comme suit :

$$\begin{cases} F_{i+1/2}^{+(1)} = \frac{2}{6} F_{i-2}^+ - \frac{7}{6} F_{i-1}^+ + \frac{11}{6} F_i^+ \\ F_{i+1/2}^{+(2)} = -\frac{1}{6} F_{i-2}^+ - \frac{5}{6} F_i^+ + \frac{2}{6} F_{i+1}^+ \\ F_{i+1/2}^{+(3)} = \frac{2}{6} F_i^+ + \frac{5}{6} F_{i+1}^+ - \frac{11}{6} F_{i+2}^+ \end{cases} \quad (3.10)$$

Dans ce cas, les poids pondérant la contribution du flux en provenance de chaque stencil est donnée par les valeurs optimales de $\alpha_{(k)}^{\pm}$; $\alpha_{(1)}^{\pm} = 1/10$, $\alpha_{(2)}^{\pm} = 6/10$ et $\alpha_{(3)}^{\pm} = 3/10$.

En revanche, dans les régions de forte présence de discontinuités, les coefficients de pondération non-linéaire sont définis comme suit :

$$w_{(k)}^{\pm} = \frac{\tilde{w}_{(k)}^{\pm}}{\sum_{l=1}^3 \tilde{w}_{(l)}^{\pm}} \quad \text{avec} \quad \tilde{w}_{(k)}^{\pm} = \frac{\alpha_{(k)}^{\pm}}{(\epsilon + \beta_{(k)}^{\pm})^2}, \quad (3.11)$$

où ϵ est un nombre très faible qui permet d'éviter la division par zéro, il est pris égal à 10^{-6} . Les coefficients β_k^{\pm} sont les indicateurs de discontinuités qui permettent de diminuer les poids des stencils contenant la discontinuité. Ils s'écrivent sous la forme d'une somme des normes de toutes les dérivées des polynômes d'interpolation, ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \beta_{(1)}^{\pm} = \frac{13}{12} (F_{i-2}^{\pm} - 2F_{i-1}^{\pm} + F_i^{\pm})^2 + \frac{1}{4} (F_{i-2}^{\pm} - 4F_{i-1}^{\pm} + F_i^{\pm})^2 \\ \beta_{(2)}^{\pm} = \frac{13}{12} (F_{i-1}^{\pm} - 2F_i^{\pm} + F_{i+1}^{\pm})^2 + \frac{1}{4} (F_{i-1}^{\pm} - 4F_i^{\pm} + F_{i+1}^{\pm})^2 \\ \beta_{(3)}^{\pm} = \frac{13}{12} (F_i^{\pm} - 2F_{i+1}^{\pm} + F_{i+2}^{\pm})^2 + \frac{1}{4} (F_i^{\pm} - 4F_{i+1}^{\pm} + F_{i+2}^{\pm})^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

La procédure de calcul des flux $F_{i-1/2}^{\pm}$ est exactement la même que celle décrite pour le calcul du flux $F_{i+1/2}^{\pm}$.

3.1.2.2 Le schéma WENO large bande

Quoique largement utilisé dans les écoulements présentant des discontinuités, le schéma WENO, malgré sa grande précision, présente certains inconvénients. En effet, le schéma WENO classique produit une dissipation numérique supplémentaire dans les régions fortement turbulentes : les indicateurs de discontinuités ne sont jamais strictement nuls dans les zones de faible gradients. Pour un calcul DNS de couche de mélange, par exemple, initié avec un champ turbulent de faible amplitude, le schéma WENO classique produit moins de dissipation numérique dans la phase initial du calcul (développement de la turbulence) que dans le régime pleinement turbulent (régime auto-similaire). A cet effet, Martin et al. [54] ont proposé un schéma à large bande comme optimisation du schéma WENO classique, capable de diminuer son caractère dissipatif. Ce schéma comporte un quatrième stencil (voir figure 3.1), en plus par rapport au WENO classique, introduit de sorte à rendre symétrique la solution autour de l'interface. Les flux numériques à l'interface s'écrivent désormais comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{i+1/2}^{+(1)} = \frac{2}{6}F_{i-2}^+ - \frac{7}{6}F_{i-1}^+ + \frac{11}{6}F_i^+ \\ F_{i+1/2}^{+(2)} = -\frac{1}{6}F_{i-2}^+ - \frac{5}{6}F_i^+ + \frac{2}{6}F_{i+1}^+ \\ F_{i+1/2}^{+(3)} = \frac{2}{6}F_i^+ + \frac{5}{6}F_{i+1}^+ - \frac{11}{6}F_{i+2}^+ \\ F_{i+1/2}^{+(4)} = \frac{11}{6}F_i^+ - \frac{7}{6}F_{i+1}^+ - \frac{2}{6}F_{i+2}^+ \end{array} \right. \quad (3.13)$$

La nouvelle formulation du flux à l'interface s'écrit :

$$F_{i+1/2}^+ = \sum_{k=1}^4 w_{(k)}^+ F_{i+1/2}^{+(K)} \quad (3.14)$$

les coefficients non linéaires de pondération $w_{(k)}$ s'écrivent comme suit :

$$w_{(k)}^+ = \frac{\tilde{w}_{(k)}^+}{\sum_{l=1}^4 \tilde{w}_{(l)}^+} \quad \text{avec} \quad \tilde{w}_{(k)}^+ = \frac{\alpha_{(k)}^+}{(\epsilon + \beta_{(k)}^+)^2} \quad (3.15)$$

Les coefficients linéaires optimisés $\alpha_{(k)}$ proposés par Martin et al. [54] sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1^+ = 0,094647545896 & \alpha_2^+ = 0,428074212384 \\ \alpha_3^+ = 0,408289331408 & \alpha_4^+ = 0.068988910311 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

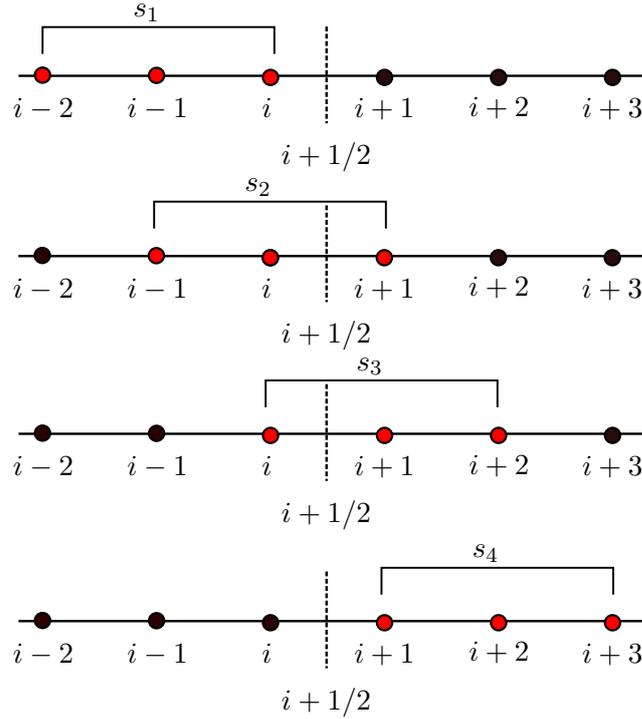


FIGURE 3.1 – Les quatre stencils de reconstruction des flux dans le cas du schéma WENO du 5ème ordre à large bande.

Les indicateurs de décentrement s'écrivent alors comme ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{(1)}^+ = \frac{13}{12} (F_{i-2}^+ - 2F_{i-1}^+ + F_i^+)^2 + \frac{1}{4} (F_{i-2}^+ - 4F_{i-1}^+ + F_i^+)^2 \\ \beta_{(2)}^+ = \frac{13}{12} (F_{i-1}^+ - 2F_i^+ + F_{i+1}^+)^2 + \frac{1}{4} (F_{i-1}^+ - 4F_i^+ + F_{i+1}^+)^2 \\ \beta_{(3)}^+ = \frac{13}{12} (F_i^+ - 2F_{i+1}^+ + F_{i+2}^+)^2 + \frac{1}{4} (F_i^+ - 4F_{i+1}^+ + F_{i+2}^+)^2 \\ \beta_{(4)}^+ = \frac{13}{12} (F_{i+1}^+ - 2F_{i+2}^+ + F_{i+3}^+)^2 + \frac{1}{4} (F_{i+1}^+ - 4F_{i+2}^+ + F_{i+3}^+)^2 \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Le quatrième indicateur est soumis à une condition de la stabilité numérique : $\beta_{(4)}^+ = \max(\beta_{(k)}^+)$, pour $1 < k < 4$.

Le schéma WENO à large bande a connu à son tour une optimisation en introduisant un limiteur basé sur la variation totale des quantités de flux. Proposée par Taylor et al.[55], cette optimisation permet de ne pas altérer partiellement la précision du schéma dans les zones où les perturbations sont de faibles amplitudes. Ainsi, l'application de ce limiteur aux coefficients de pondérations non-linéaires $w_{(k)}^+$ permet d'ajuster la précision du schéma selon

la présence ou pas de perturbations (forte turbulence, forts gradients) dans l'écoulement. Le seuil du limiteur α_{RL}^{TV} , choisi dans la présente étude est celui préconisé par Taylor et al. [55] ($\alpha_{RL}^{TV} = 5$). Cette valeur de α_{RL}^{TV} est également utilisée avec succès dans [53], cette étude montre néanmoins une certaine sous-estimation du taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence dans le régime pleinement développé.

3.1.2.3 Le schéma centré conservatif

Ce schéma est proposé par Pirozzoli [56] pour l'approximation localement conservative des termes convectifs dans l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \rho u_k \varphi}{\partial x_k} \quad (3.18)$$

où u_k est la $k^{\text{ème}}$ composante du vecteur vitesse et φ est la variable d'un champ scalaire ; u , v et w pour les équations de quantité mouvement, Y_k et T pour les équations de transport de fraction massique et de température, respectivement.

Ce schéma utilise la forme fractionnée des dérivées des termes convectifs (voir équation 3.19), il a pour objectif d'assurer une stabilité du schéma centré en différences finies.

- **Principe du schéma centré conservatif**

Se basant sur la description décrite dans Pirozzoli[56], le principe de base de la formulation localement conservative est résumé dans ce qui suit.

L'approximation type différences finies des termes convectifs s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \rho u \varphi}{\partial x} \Big|_{x=x_j} \approx \frac{1}{h} (\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}), \quad (3.19)$$

où $\hat{f}_{j+1/2}$ est le flux numérique.

La forme fractionnée de l'équation 3.19 est :

$$\frac{\partial \rho u \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \rho u \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \varphi \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho u \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (3.20)$$

ou encore :

$$\frac{\partial \rho u \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \rho u \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} u \frac{\partial \rho \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho \varphi \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.21)$$

Les opérateurs de dérivées continues des équations 3.20 et 3.21 sont remplacés par leurs

formulations différences finies, ce qui donne :

$$\left. \frac{\partial fg}{\partial x} \right|_{x=x_j} \approx D_s(fg)_j \equiv \frac{1}{2}D(fg)_j + \frac{1}{2}f_j Dg_j + \frac{1}{2}g_j Df_j, \quad (3.22)$$

où D_s est l'approximation numérique discrète de la forme fractionnée du terme convectif, Df_j représente l'approximation numérique discrète de la dérivée première de f à la position x_j , $f = \rho u$, $g = \varphi$ ou $f = \rho\varphi$, $g = u$ correspondant aux formes fractionnées 3.20 et 3.21, respectivement.

L'approximation centrée de la dérivée première Df_j s'écrit :

$$Df_j = \sum_{l=1}^L a_l D^l f_j, \quad (3.23)$$

où

$$D^l f_j = \frac{1}{h}(f_{j+l} - f_{j-l}).. \quad (3.24)$$

Pour une approximation simple au second ordre, correspondant à $l = 1$, on obtient :

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{4}(f_j + f_{j+l})(g_j + g_{j+l}). \quad (3.25)$$

Tandis qu'une approximation conservative de l'équation 3.19 s'écrit :

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_j g_j + f_{j+l} g_{j+l}). \quad (3.26)$$

En remplaçant le terme D^l de l'équation 3.24 dans l'équation 3.22, on obtient :

$$D_s^l(fg)_j = \frac{1}{2}D^l(fg)_j + \frac{1}{2}f_j D^l g_j + \frac{1}{2}g_j D^l f_j, \quad (3.27)$$

ou encore,

$$D_s^l(fg)_j = \frac{2}{h} \left(\widetilde{(f, g)}_{j,l} - \widetilde{(f, g)}_{j-l,l} \right), \quad (3.28)$$

tel que :

$$\widetilde{(f, g)}_{j,l} = \frac{1}{4}(f_j + f_{j+l})(g_j + g_{j+l}), \quad (3.29)$$

un opérateur de moyenne discret à deux variables.

L'équation 3.27 est réécrite sous forme conservative moyennant un petit développement

comme suit :

$$D_s^l(fg)_j = \frac{1}{4} \left(\hat{f}_{i+1/2}^l - \hat{f}_{i-1/2}^l \right), \quad (3.30)$$

avec :

$$\hat{f}_{i+1/2}^l = 2 \sum_{m=0}^{l-1} (\widetilde{f, g})_{j-m, l}, \quad (3.31)$$

est un flux partiel.

Le flux total est obtenu en faisant la somme des flux partiels suivant la relation 3.23

$$\hat{f}_{i+1/2} = \sum_{l=1}^L a_l \hat{f}_{i+1/2}^l. \quad (3.32)$$

On peut également écrire :

$$\hat{f}_{i+1/2} = 2 \sum_{l=1}^L a_l \sum_{m=0}^{l-1} (\widetilde{\rho u, \varphi})_{j-m, l}, \quad (3.33)$$

et

$$\hat{f}_{i+1/2} = 2 \sum_{l=1}^L a_l \sum_{m=0}^{l-1} (\widetilde{\rho \varphi, u})_{j-m, l}. \quad (3.34)$$

Les expressions 3.33 et 3.34 correspondent respectivement aux écritures 3.20 et 3.21 de la forme fractionnée de l'équations 3.19, avec $a_1 = a_2 = 1/2$.

La forme générale, ci-dessous 3.35, est écrite pour les écoulements pouvant présenter des variations de masse volumique. L'objectif est d'accroître la stabilité du schéma centré conservatif dans ce type d'écoulement [56].

$$\frac{\partial \rho u \varphi}{\partial x} = \alpha \frac{\partial \rho u \varphi}{\partial x} + \beta \left(u \frac{\partial \rho \varphi}{\partial x} + \rho \frac{\partial u \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) + (1 - \alpha - 2\beta) \left(\rho u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \rho \varphi \frac{\partial u}{\partial x} + u \varphi \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (3.35)$$

Cependant, l'approximation conservative n'est obtenue que dans certaines conditions. En particulier, lorsque $\alpha = \beta = 1/4$ [56]. En adoptant la même approche que précédemment, on obtient :

$$\hat{f}_{i+1/2} = 2 \sum_{l=1}^L a_l \sum_{m=0}^{l-1} (\widetilde{\rho, u, \varphi})_{j-m, l}, \quad (3.36)$$

tel que :

$$(\widetilde{\rho, u, \varphi})_{j, l} = \frac{1}{8} (f_j + f_{j+l})(g_j + g_{j+l})(h_j + h_{j+l}), \quad (3.37)$$

est l'opérateur moyenne discret en deux points et à trois variables. Les constantes a_l sont données dans le tableau ci-dessous :

Ordre	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
L = 1	$a_1 = 1/2$			
L = 2	$a_1 = 8/12$	$a_2 = -1/12$		
L = 3	$a_1 = 45/60$	$a_2 = -9/60$	$a_3 = 1/60$	
L = 4	$a_1 = 672/840$	$a_2 = -168/840$	$a_3 = 1/840$	$a_4 = 3/840$

TABEAU 3.1 – Coefficients des schémas centrés du 2^{ème}, 4^{ème}, 6^{ème} et 8^{ème} ordre.

3.1.3 Discrétisation des termes diffusifs

Les flux diffusifs sont calculés, dans le code CHOC-WAVES, en utilisant un schéma centré du quatrième ordre à 5 stencils $S = \{i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2\}$. La dérivée de première ordre $\partial\Phi/\partial x$, calculée à l'aide d'un tel schéma, s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\Phi_{i-2} - \Phi_{i-1} + 8\Phi_i + 1 - \Phi_{i+1} - \Phi_{i+2}}{12\Delta x} \quad (3.38)$$

Les dérivées normal $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ et transversale $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ du flux diffusif Φ se calculent de manière identique que les dérivées exprimées selon la direction longitudinale x donnée en 3.38. Cependant, les composantes du flux diffusif Φ contiennent des dérivées dans les trois directions de l'espace ; $\partial(\Psi)/\partial x$, $\partial(\Psi)/\partial y$ et $\partial(\Psi)/\partial z$. Si la même procédure (3.38) est utilisée pour calculer ces dérivées, cela conduit à l'utilisation, pour les flux diffusifs, d'un large stencil composé de 9 points pour chaque direction de l'espace. Cette solution n'est pas envisageable car entraînerait un surcoût non négligeable pour le traitement des conditions aux limites de l'écoulement. C'est pourquoi, les dérivées contenues dans le flux diffusif Φ sont calculées par différentes formulations d'ordre 4 sur un stencil réduit à 5 points comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \right)_{i-2} = \frac{-25\Psi_{i-2} + 48\Psi_{i-1} - 36\Psi_i + 16\Psi_{i+1} - 3\Psi_{i+2}}{12\Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x_i^4) \\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \right)_{i-1} = \frac{-3\Psi_{i-2} - 10\Psi_{i-1} + 18\Psi_i - 6\Psi_{i+1} + \Psi_{i+2}}{12\Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x_i^4) \\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \right)_{i-2} = \frac{-\Psi_{i+1} + 6\Psi_{i-1} - 18\Psi_i + 10\Psi_{i+1} + 3\Psi_{i+2}}{12\Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x_i^4) \\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \right)_{i-2} = \frac{3\Psi_{i+2} - 16\Psi_{i-1} + 36\Psi_i - 48\Psi_{i+1} + 25\Psi_{i+2}}{12\Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x_i^4) \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Ainsi, les termes diffusifs sont calculés sur un interval de point équivalent à celui des flux convectifs avec le même ordre de précision.

3.1.4 Discrétisation temporelle

Étant donné le caractère instationnaire des écoulements étudiés, la discrétisation temporelle implémentée dans le code est réalisée de manière explicite selon un schéma TVD type Runge-Kutta. Une restriction sur l'incrément temporel est souvent appliquée afin de capturer les phases instationnaires des phénomènes physiques étudiés. Ceci est d'autant plus vrai que dans les simulations de couche de mélange temporelle, qui naturellement évoluent en temps, l'incrément temporel doit être très faible. Dans la présente étude, le schéma Runge-Kutta d'ordre 3 est sélectionné, utilisant 3 étapes afin d'évaluer la valeur de U^{n+1} à partir de la solution à l'instant précédent U^n . La procédure d'intégration suivant ces trois étapes se fait comme suit :

$$\begin{cases} U^1 = U^n + \Delta t \mathcal{L}(U^n), \\ U^2 = \frac{1}{4} [3U^n + U^1 + \Delta t \mathcal{L}(U^1)], \\ U^{n+1} = \frac{1}{3} [U^n + 2U^2 + 2\Delta t \mathcal{L}(U^2)], \end{cases} \quad (3.40)$$

où Δt est le l'incrément temporel et $U^{(k)}$ sont les solutions intermédiaires de U pour $k = \{1, 2\}$. Le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 3 est régit par un critère de stabilité qui s'écrit :

$$\Delta t = \mathcal{CFL} \times \min(\Delta t_{x_i}) \quad (3.41)$$

avec :

$$\Delta t_{x_i} = \min \left[\frac{\Delta x_i}{|u_i| + c}, \frac{\Delta x_i^2 Pr}{2\gamma\mu} \right] \quad (3.42)$$

Le nombre \mathcal{CFL} (Courant, Friedrichs et Lewy) doit être inférieur à l'unité pour assurer la stabilité du schéma. Dans la présente étude, il est pris égale à 0,7. La restriction sur l'avancement temporel se fait en prenant le pas de temps le plus faible, d'une part, suivant les trois directions de l'espace $i = \{1, 2, 3\}$, et d'autre part en choisissant la valeur la plus faible entre le temps convectif $\frac{\Delta x_i}{|u_i| + c}$ et le temps diffusif $\frac{\Delta x_i^2 Pr}{2\gamma\mu}$.

3.2 Conditions initiales et conditions aux limites

3.2.1 Conditions périodiques

La couche de mélange temporelle possède une seule direction inhomogène, c'est la direction normale y , puisque il est imposé à la direction longitudinale x des conditions périodiques pour

les grandeurs du champ de vitesse, de masse volumique, d'énergie et de scalaire. Ces conditions de périodicité sont également imposées selon la direction transversale z en supposant que l'écoulement de couche de mélange est initialement plan et que cette hypothèse reste valable tout au long de la simulation. Ces conditions se traduisent mathématiquement par :

$$u_i(x, y, z, t) = u_i(x + L_x, y, z, t) = u_i(x, y, z + L_z, t), \quad (3.43a)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho(x + L_x, y, z, t) = \rho(x, y, z + L_z, t), \quad (3.43b)$$

$$E(x, y, z, t) = E(x + L_x, y, z, t) = E(x, y, z + L_z, t), \quad (3.43c)$$

$$Y_k(x, y, z, t) = Y_k(x + L_x, y, z, t) = Y_k(x, y, z + L_z, t), \quad (3.43d)$$

où L_x et L_z sont les dimensions du domaine de calcul selon les directions longitudinale et transversale respectivement. De manière générale, la taille du domaine de calcul est choisie de manière à ce que les modes les plus instables puissent se développer pleinement dans la direction longitudinale. Autrement dit, le développement des instabilités, et donc de la turbulence, ne peut être altéré par une taille de domaine inférieure à la taille de la périodicité *naturelle* des modes les plus instables. En pratique, la taille du domaine est un multiple entier de l'épaisseur initiale de la couche de mélange, ceci afin de permettre non seulement le développement des instabilités mais également pour contenir les grandes structures de taille caractéristique égale l'échelle intégrale de l'écoulement. Pour la présente étude et pour toute les simulations présentées dans ce manuscrit, nous avons repris le même choix de taille de domaine de calcul que celui fait par Pantano et Sarkar [7].

3.2.2 Conditions de non réflexion

Les conditions de non réflexion sont utilisées lorsque le domaine de calcul possède une direction dite *infinie*¹ pour assurer une transmission des ondes acoustiques suivant cette direction vers l'extérieur du domaine sans aucune réflexion. En effet, la réflexion de ces ondes vers l'intérieur du domaine va affecter la solution du problème étudié par des perturbations parasites. Celles-ci peuvent être à l'origine de l'apparition de nouveaux modes d'instabilités biaisant ainsi la physique réelle de l'écoulement.

3.2.3 Conditions initiales turbulentes

En l'absence de perturbations numériques initiales et lorsque le nombre de Reynolds critique de l'écoulement est atteint, seules les instabilités de Kelvin-Helmholtz, présentes dans l'écoulement cisailé, sont responsables de la transition vers la turbulence pleinement développée. Dans ce cas, le temps nécessaire pour que les premières fluctuations apparaissent est très long et le domaine de calcul doit être très grand. Cette méthode n'est pas sans

1. Une distance suffisamment grande devant les longueurs caractéristiques de l'écoulement pour que celui-ci ne soit influencé d'une quelconque manière par les conditions aux limites suivant la dite direction. Une attention particulière doit être portée à la formulation mathématique des conditions aux limites selon cette direction *infinie* puisqu'en réalité possède une longueur bien finie.

conséquence sur les moyens de calculs mis en oeuvre et les temps CPU qu'il faut avoir à sa disposition afin réaliser des simulations numériques, de surcroit des DNS hautement résolus. Néanmoins, l'avantage d'une telle méthode est que la turbulence ainsi générée est *naturelle* qui ne souffre d'aucun forçage numérique d'une quelconque technique de génération de fluctuations. De plus, cette méthode *naturelle* est celle qui permet de répondre au mieux à différentes questions qui peuvent être posées lorsque la viscosité variable intervient dans l'écoulement, elle permet notamment de savoir quels sont les modes supplémentaires et les mode les plus instables en présence de gradients de viscosité important dans l'écoulement. L'objectif de cette étude n'est pas de réaliser une étude de stabilité proprement parlé, mais de suivre la turbulence depuis ses plus bas niveaux d'intensité jusqu'à sa phase pleinement développée. Dans ce cas, la génération dans les conditions initiales de fluctuations de vitesse adéquates est à notre sens un bon compromis.

Pour ce faire, Klein et al. [57] ont développé une méthode de génération de fluctuations dites, *synthétique*, utilisée pour les simulations aux grandes échelles (LES) et les simulations DNS. Cette méthode est basée sur l'utilisation de filtre digital afin de superposer au champ moyen de vitesse initial un champ fluctuant perturbateur qui accélère la transition vers la turbulence. Cette méthode, contrairement au bruit blanc qui assigne un niveau d'énergie équivalent à toutes les échelles, permet de répartir de manière réaliste l'énergie sur la gamme d'échelle de l'écoulement et ainsi obtenir très rapidement une turbulence réaliste qui prend en compte la présence de structures cohérentes.

Nous avons fait le choix dans cette étude de générer des fluctuations initiales en utilisant la méthode de Klein, l'intensité de la turbulence associée (par rapport à la différence vitesse de la couche de mélange ΔU) est de l'ordre de 1%. Cette valeur atteint à la fin des simulations des pourcentages proches de 20 %. D'une manière générale, la démarche adoptée ici peut être vue comme la contribution à l'étude statistique de la turbulence, en un point et à chaque échelle, dans un interval d'intensité depuis son niveau le plus bas jusqu'à son niveau le plus haut, en présence ou non de variations de viscosité.

• Description de la méthode du filtre digital de Klein

La génération du champ de fluctuations par la méthode de Klein requière la connaissance au préalable du tenseur des contraintes de Reynolds, $R_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ issu de l'expérience, de simulation numérique ou bien obtenu au moyen de lois analytiques ou empiriques.

Le champ instantané de vitesse s'écrit comme suit :

$$u_i = \langle U_i \rangle + a_{ij} \mathcal{U}_j, \quad (3.44)$$

où \mathcal{U}_j est le filtre digital de Klein.

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} (R_{11})^{1/2} & 0 & 0 \\ R_{21}/A_{11} & (R_{22} - A_{11}^2)^{1/2} & 0 \\ R_{31}/A_{11} & (R_{32} - A_{12}A_{31})/A_{22} & (R_{31} - A_{32}^2 - A_{31}^2)^{1/2} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

• Le filtre digital \mathcal{B}

La première étape de la méthode de Klein est de construction le filtre digital utilisé pour générer les fluctuations homogènes par le biais d'un générateur de nombres aléatoires.

Les étapes principales de la méthode de Klein se résument comme suit :

1. Choisir les longueurs caractéristiques L_α dans chaque direction de l'espace. En fixant la discrétisation spatiale $\Delta\alpha$, le choix de la longueur L_α permet d'obtenir la taille du filtre caractérisé par un nombre de maille n_α pour chaque direction :

$$n_\alpha = \frac{L_\alpha}{\Delta\alpha}, \text{ avec } \alpha = x, y \text{ et } z \quad (3.46)$$

Dans cette étude, l'épaisseur de vorticité initiale de la couche de mélange $\delta_{\omega,0}$ a été choisi comme étant la longueur caractéristique pour toutes les directions de l'espace et pour toute les simulations réalisées.

2. Imposer la largeur du filtre dans les trois directions de l'espace, tel que :

$$M_\alpha \geq 2n_\alpha, \text{ avec } \alpha = x, y \text{ et } z \quad (3.47)$$

Nous avons opté dans cette étude pour une taille de filtre $M_\alpha = 2n_\alpha + 10$. Le calcul du filtre digital est ainsi plus long mais cela permet néanmoins de gagner en précision.

3. Initialiser le tableau \mathcal{R}_α de nombre aléatoires de dimension $[-M_x : M_x, -M_y + 1 : M_y + N_y, -M_z + 1 : M_z + N_z]$ pour les trois directions de l'espace $\alpha = x, y$ et z , N_y et N_z sont les dimensions du maillage suivant les directions normale y et transversale z du domaine de calcul, respectivement.
4. Calculer les coefficients du filtre tridimensionnel b_{ijk}

$$b_{ijk} = b_i b_j b_k, \quad (3.48)$$

où b_k est l'estimation numérique des coefficients du filtre faite par Klein et al comme suit :

$$b_k = \tilde{b}_k / \left(\sum_{j=-M_\alpha}^{M_\alpha} \tilde{b}_j^2 \right)^{1/2}, \text{ avec } \tilde{b}_k = e^{-(\pi k^2 / 2n_\alpha^2)} \quad (3.49)$$

5. Calculer le champ des fluctuations homogènes de vitesse $\mathcal{U}_\alpha(j, k)$ pour chaque point

(j, k) d'injection :

$$\mathcal{U}_\alpha(j, k) = \sum_{i'=-M_z}^{M_z} \sum_{i'=-M_x}^{M_x} \sum_{i'=-M_y}^{M_y} b_{i'j'k'} \mathcal{R}_\alpha(i', j + j', k + k') \quad (3.50)$$

6. Calculer le champ de vitesse instantané suivant le $i^{\text{ème}}$ plan (y, z) :

$$u_i = \langle U_i \rangle + a_{i\alpha} \mathcal{U}_\alpha(j, k) \quad (3.51)$$

7. Décaler le tableau des nombres aléatoires d'un plan suivant la direction longitudinale :

$$\mathcal{U}_\alpha(i, j, k) = \mathcal{U}_\alpha(i + 1, j, k), \quad (3.52)$$

avec $i = -M_x : M_x + 1$ et recalculer de nouveaux termes aléatoires pour $\mathcal{R}_\alpha(M_x, j, k)$

8. Repartir de l'étape 4 pour l'avancement de l'injection de la turbulence plan par plan.

3.3 Conclusion

Nous avons décrit, dans ce chapitre, les outils et les méthodes numériques utilisés pour mener ce travail. Ainsi, les conditions aux limites et les conditions initiales du problème sont présentées. Les schémas numériques utilisés et les équations de transport instantanées résolus avec le code CHOC-WAVES sont ainsi décrites. Précisément, nous tâcherons de montrer, dans ce mémoire, l'influence de la discrétisation numérique des termes convectifs sur les résultats de simulation. Nous verrons également si l'emploi du schéma WENO est justifié, dans notre cas. En effet, le schéma centré est plus adapté pour les écoulements ne comportant pas de forts gradients. Pour cause, le schéma WENO prend plus de temps pour calculer un flux que le schéma centré, pour un même degré de précision. En revanche, l'écoulement à viscosité variable présente, dans notre étude, des rapports de viscosité allant de 2,5 à 18. La question est de savoir si l'emploi du schéma centré est toujours possible, pour l'écoulement à viscosité variable.

Les différents champs instantanés (vitesse et scalaire) issus des différentes simulations numériques feront l'objet de traitements statistiques et d'analyse physique au moyen des outils développés dans le chapitre précédent.

Chapitre 4

Influence des paramètres numériques et thermodynamiques

Sommaire

4.1	Description des simulations numériques	65
4.1.1	Présentation des différents cas tests	65
4.1.2	Domaine de calcul : Coefficients d'autocorrélation	73
4.1.3	Influence de la taille de grille	74
4.1.3.1	Variation de la taille de grille	74
4.1.3.2	Comparison avec les expériences et les simulations numériques issues de travaux antérieurs	78
4.1.4	Critère de visualisation Q	79
4.2	Influence du schéma numérique des termes convectifs : diffusion numérique du schéma WENO.	82
4.3	Influence du modèle de viscosité de mélange : formule de Wilke.	87
4.4	Influence des configurations co-courant et contre courant de la couche de mélange	94
4.5	Influence de l'épaisseur initiale de viscosité $\delta_{\nu,0}$	96
4.6	Conclusion	100

4.1 Description des simulations numériques

4.1.1 Présentation des différents cas tests

Cette section a pour but de présenter en détail les simulations numériques directes de l'écoulement de couche de mélange temporelle entreprises dans ce travail. Une représentation graphique du domaine de calcul est montrée sur la figure 4.1. L'objectif de ces simulations est de quantifier les effets des variations spatio-temporelles de la viscosité au sein de cet écoulement turbulent. A l'état initial, les couches de mélange sont généralement caractérisées

par une différence de vitesse longitudinale $\Delta U = U_g - U_p$ entre le courant rapide (U_g) et le courant lent (U_p) suivant la direction inhomogène y , d'une épaisseur initiale de quantité de mouvement $\delta_{\theta,0}$ (respectivement de vorticité de $\delta_{\omega,0}$) et d'un nombre de Reynolds initial $Re_{\theta,0}$ (respectivement $Re_{\omega,0}$) basé sur l'épaisseur initiale de quantité de mouvement $\delta_{\theta,0}$ (respectivement de vorticité $\delta_{\omega,0}$). D'autres paramètres sont également fixés à l'état initial, tels que, le rapport de masse volumique R_ρ , le rapport de viscosité R_ν , le rapport de vitesse R_u et le nombre de Mach convectif M_c . La différence de vitesse ΔU ainsi que l'épaisseur initiale de la couche de mélange sont reliées au nombre de Reynolds par l'intermédiaire de la viscosité cinématique des espèces chimiques présentes dans l'écoulement :

$$R_{\theta,0} = \frac{\Delta U \delta_{\theta,0}}{\nu_{ref}} \quad (4.1)$$

où ν_{ref} est la viscosité cinématique de référence définie comme la moyenne arithmétique des différentes viscosités cinématiques des espèces chimiques. Elle s'écrit, dans le cas d'un transport d'un mélange gazeux binaire, comme suit :

$$\nu_{ref} = \frac{1}{2} \times (\nu_g + \nu_p) \quad (4.2)$$

où $\nu_g \geq \nu_p$, le rapport de viscosité de chaque écoulement est alors défini comme :

$$R_\nu = \frac{\nu_g}{\nu_p} \geq 1 \quad (4.3)$$

 tant donné la présence d'une ou de deux espèces chimiques dans nos différentes simulations numériques, celles-ci sont signalées dans le manuscrit par leur viscosité respective (ν_g) et (ν_p). De même, le rapport de vitesse de la couche de mélange est :

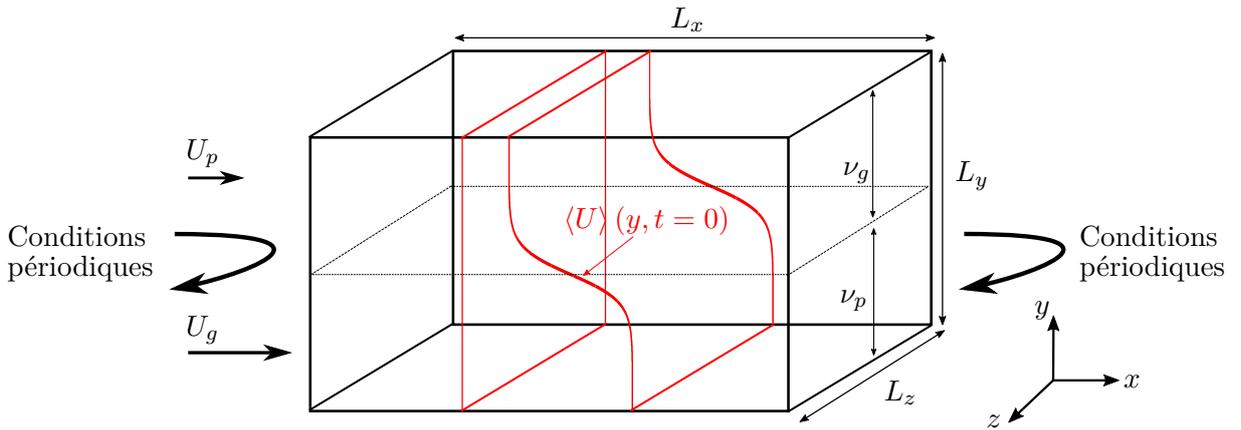


FIGURE 4.1 – Domaine de calcul de l'écoulement de couche de mélange temporelle.

$$R_u = \frac{U_g}{U_p} > 1 \quad (4.4)$$

Le rapport de vitesse est un paramètre important qui influe sur l'évolution du champ moyen de la vitesse de la couche de mélange, telle que l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ [58][3][13].

Sauf mention contraire, ce paramètre est fixé à 11 pour toutes les simulations numériques entreprises dans ce travail. Cette valeur du rapport de vitesse permet, dans le cadre de notre étude, de maintenir des nombres de Mach convectifs relativement bas ; $M_c < 0,3$, afin d'écartier tout effet de compressibilité. À titre d'illustration, les figures 4.2a et 4.2b montrent respectivement l'évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement $\delta_\theta/\delta_{\theta,0}$ et l'énergie cinétique de turbulence $\langle q^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i^2 \rangle / \Delta U^2$ pour deux écoulements à viscosité variable, DNS-R9 et DNS-R9-Ru41. Le rapport de vitesse R_u de ces deux simulations est de 11 et 41, respectivement. On peut noter que l'évolution temporelle de ces deux grandeurs ($\delta_\theta/\delta_{\theta,0}$ et $\langle q^2 \rangle$) présente des différences lorsque le rapport de vitesse est modifié. Celui-ci influence donc aussi bien le champ de vitesse moyen que le champ fluctuant, en accord avec les conclusions de [59] et [60]. Lorsque le rapport de vitesse est élevé ($R_u = 41$), l'évolution de la couche de mélange semble plus lente, c'est d'autant plus vrai pour les fluctuations de vitesse. De plus, le temps nécessaire permettant d'atteindre le régime autosimilaire dépend du rapport de vitesse considéré [28]. Par conséquent, le rapport R_u est, comme souligné plus haut, fixé pour toutes les simulations présentés ci-après.

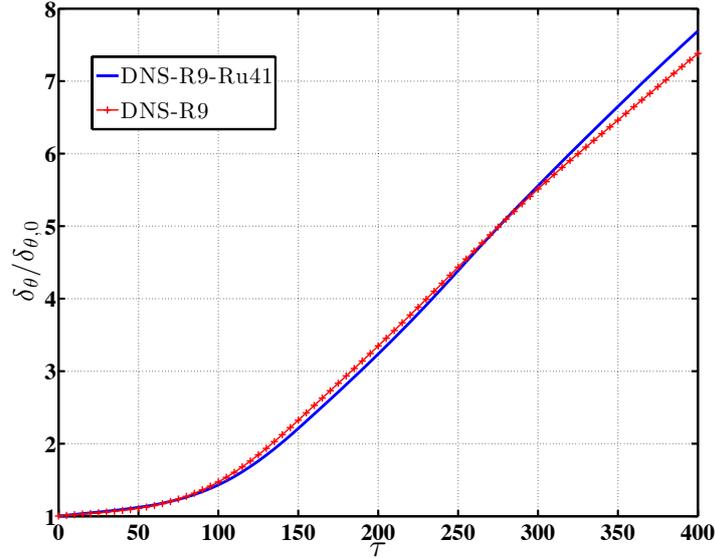
Par ailleurs, le rapport de masse volumique s'écrit :

$$R_\rho = \frac{\rho_g}{\rho_p} \geq 1 \quad (4.5)$$

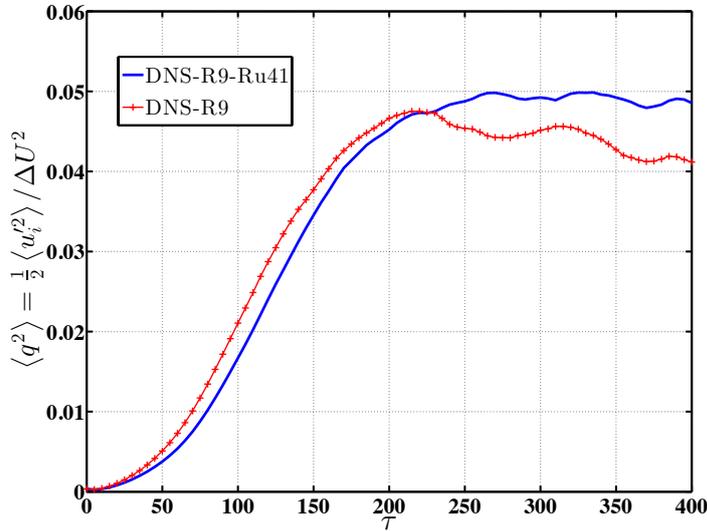
où $\rho_g \geq \rho_p$. Nous concentrons nos efforts uniquement sur les effets de variation de la viscosité au sein de l'écoulement turbulent de la couche de mélange temporelle, c'est la raison pour laquelle le rapport R_ρ est fixé à l'unité pour toutes les simulations numériques présentées dans ce manuscrit. Les effets d'une masse volumique variable ont été largement rapportés dans la littérature (voir par exemple [3][13][61][62][63][64][65]). Chaque écoulement à viscosité variable (caractérisé par un rapport $R_\nu > 1$) peut être comparé à trois différents écoulements à viscosité cinématique constantes caractérisés par : ν_g , ν_p ou $\nu_{ref} = \frac{1}{2} \times (\nu_g + \nu_p)$. Néanmoins, à nombre de Reynolds initial $Re_{\theta,0}$ identique, ces trois écoulements à viscosité constante auront exactement la même évolution (même champs dynamique et scalaire). Le nombre de cas de comparaison est alors réduit qu'à un seul. A titre d'exemple, en posant $Re_{\theta,0} = 160$ et en fixant l'épaisseur initiale de quantité de mouvement, la différence de vitesse se calcule comme :

$$\Delta U = \frac{Re_{\theta,0} \times \nu}{\delta_{\theta,0}} \quad (4.6)$$

Cette différence de vitesse dépend de la valeur choisie pour la viscosité (entre ν_g , ν_p ou ν_{ref}) pour l'écoulement à viscosité constante. Les figures 4.3a et 4.3b montrent respectivement l'évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement $\delta_\theta/\delta_{\theta,0}$, ainsi que de l'énergie cinétique de turbulence $\langle q^2 \rangle$ pour deux écoulements à viscosité constante, DNS-R1 et DNS-R1-M. La viscosité cinématique dans chacune de ces simulations est la viscosité la plus grande ν_g et la viscosité moyenne ν_{ref} , respectivement. Nous pouvons constater que les deux écoulements présentent exactement la même évolution temporelle de ces deux grandeurs ($\delta_\theta/\delta_{\theta,0}$ et $\langle q^2 \rangle$) liées respectivement au champ moyen et au champ fluctuant de la couche



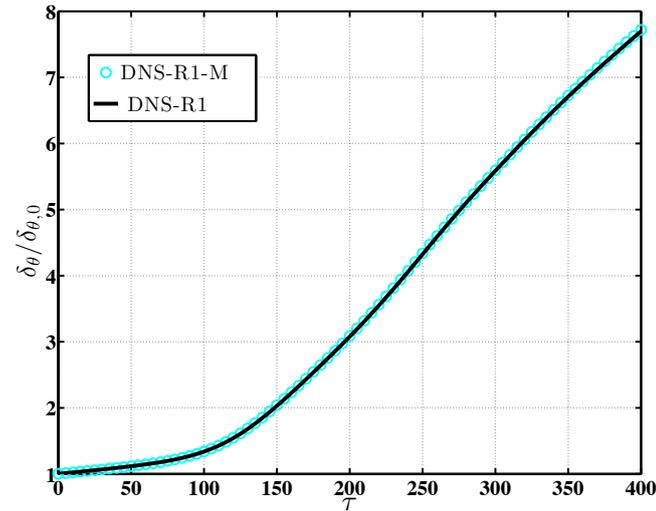
(a) $R_\nu = 9$, $\delta_\theta / \delta_{\theta,0}$



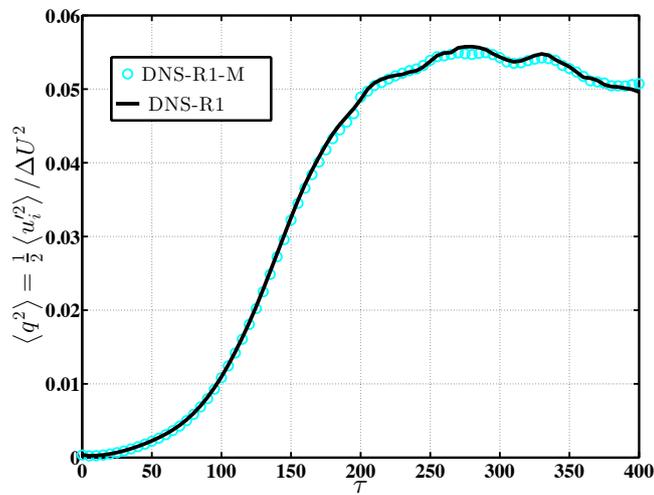
(b) $R_\nu = 9$, $\langle q^2 \rangle$

FIGURE 4.2 – Évolution temporelle de l'épaisseur $\delta_\theta / \delta_{\theta,0}$ et l'énergie cinétique de turbulence $\langle q^2 \rangle$ pour un rapport de viscosité $R_\nu = 9$. Les rapports de vitesse R_u sont 41 et 11 pour les simulations DNS-R9-Ru41 et DNS-R9, respectivement.

de mélange. Il apparaît donc nécessaire de choisir un nombre de Reynolds identique pour l'écoulement à viscosité constante, qui sera désormais l'écoulement de référence, et les autres écoulements à viscosité variable. Nous verrons par la suite que différents nombres de Reynolds peuvent être proposés pour l'écoulement à viscosité variable, ils se présentent à première vue comme de potentiels critères de comparaison. Évidemment, l'autre cas de figure serait d'initialiser les différents écoulements (à viscosité constante et variable) par exactement les mêmes valeurs de la vitesse moyenne longitudinale, ce qui d'après l'expression 4.8 va générer différentes valeurs du nombre de Reynolds $Re_{\theta,0}$ à l'état initial. Ce cas de figure est également considéré dans notre étude, il engendre des effets du nombre de Reynolds combinés à ceux du rapport de viscosité R_ν .



(a) $R_\nu = 1, \delta_\theta / \delta_{\theta,0}$



(b) $R_\nu = 1, \langle q^2 \rangle$

FIGURE 4.3 – Évolution temporelle de l'épaisseur $\delta_\theta / \delta_{\theta,0}$ et l'énergie cinétique de turbulence $\langle q^2 \rangle$ pour un rapport de viscosité $R_\nu = 1$. Les valeurs de viscosité cinématique sont ν_g et ν_{ref} pour les simulations DNS-R1-M et DNS-R1), respectivement.

Plusieurs cas tests ont été considérés dans ces travaux de thèse. Chaque simulation répond à des objectifs donnés, et parfois même conduit à des questions qui nous amènent à considérer d'autres cas tests.

Le tableau 4.1 récapitule quelques paramètres des principales simulations sur lesquelles nous nous sommes appuyés dans ce travail. Afin de préciser l'objectif de chaque simulation, il est proposé, ci-dessous, un descriptif résumant chaque calcul.

- DNS-R1 : Il s'agit d'un écoulement de référence, la viscosité ainsi que la masse volumique sont constantes ($R_\nu = R_\rho = 1$). Le nombre de Reynolds initial $Re_{\theta,0}$ est 160, le rapport de vitesse R_u est 11, la viscosité cinématique est ν_g (l'espèce chimique ayant la plus grande viscosité cinématique). Les différents champs instantanés (vitesse et scalaire) ainsi que les statistiques (en un et deux points) de cet écoulement sont comparés, tout au long de cette

case	R_ν	μ_g $\mu P.s$	μ_p $\mu P.s$	μ_{ref} $\mu P.s$	U_g ms^{-1}	U_p ms^{-1}	ΔU ms^{-1}	R_u
DNS-R1	1	9,00	9,00	9,00	66,41	5,95	60,46	11
DNS-R2.5	2,5	9,00	3,60	6,30	45,87	4,17	41,70	11
DNS-R4	4	9,00	2,25	5,62	40,96	3,72	37,24	11
DNS-R6	6	9,00	1,50	5,25	38,23	3,47	34,76	11
DNS-R9	9	9,00	1,00	5,00	36,41	3,31	33,10	11
DNS-R18	18	9,00	0,50	4,75	34,58	3,14	31,44	11

TABLEAU 4.1 – Paramètres des différents principaux cas-tests. La masse volumique $\rho = 1.32$ est commune à toutes les simulations du présent tableau, $\mu_g = \rho\nu_g$, $\mu_p = \rho\nu_p$ et $\mu_{ref} = \rho\nu_{ref}$

étude, à ceux des écoulements à viscosité variable.

- DNS-R1-M : Les paramètres de ce cas d'étude sont identiques à DNS-R1 à l'exception de la valeur de la viscosité cinématique, prise égale à la viscosité de référence ν_{ref} (voir expression 4.2).

- DNS-R2.5, DNS-R4, DNS-R6, DNS-R9 et DNS-R18 : Ces cas d'étude correspondent aux cas de mélange à viscosité variable dont le rapport R_ν est respectivement 2.5, 4, 6, 9 et 18. Les autres paramètres ($Re_{\theta,0}$, R_u et R_ρ) sont identiques à DNS-R1. L'espèce chimique de l'écoulement lent et plus visqueux (ν_g) est la même pour toutes ces simulations. L'espèce chimique de l'écoulement rapide et moins visqueux ν_p est différente dans chacune des simulations. Cela permet de faire varier le rapport de viscosité $R_\nu = \frac{\nu_g}{\nu_p}$ dans notre étude.

- DNS-R9-Ru41 : Les paramètres de cet écoulement sont identiques en tout point à DNS-R9 à l'exception du rapport de vitesse R_u qui passe de 11 à 41. L'objectif est de mettre en évidence l'effet du rapport de vitesse initial sur l'évolution de la couche de mélange temporelle.

- DNS-R9-CoGradient : Les paramètres de cet écoulement sont identiques en tout point à DNS-R9 à l'exception de la distribution spatiale initiale de la viscosité cinématique. En effet, nous simulons ici la configuration dite de co-gradient, c'est-à-dire, le courant rapide est, $R_\nu = 9$ fois, plus visqueux que le courant lent de la couche de mélange. L'objectif de ce cas test est de montrer que l'approche temporelle de la couche de mélange ne peut, en raison de l'homogénéité longitudinale, distinguer la configuration co-gradient de celle à contre gradient. Néanmoins, les études expérimentales et les simulations numériques spatiales devraient montrer des différences entre les configurations co et contre gradient [34][66].

- DNS-R9-Contre-Courant : Dans ce cas test, la vitesse du courant haut de la couche de mélange est égale mais de signe opposé à la vitesse du courant bas. Par conséquent, la vitesses

des courants libres est en valeur absolue égale à la moitié de la différence de vitesse; $\frac{1}{2}\Delta U$. Le rapport de viscosité est $R_\nu = 9$. L'objectif est le même que celui de DNS-R9-CoGradient, la couche de mélange temporelle donne, en effet, des résultats similaires pour la configuration dite de contre-courant et celle à co-courant.

- DNS-R9-Décalé : L'objectif de ce cas test est de s'affranchir de l'utilisation d'une viscosité de référence pour calculer le nombre de Reynolds initial. L'idée est d'imposer la variation du profil de scalaire de quelques épaisseurs $\delta_{\theta,0}$ du coté du courant rapide. L'écoulement à viscosité variable ne prend place qu'après un certain temps, estimé à $\tau_{visq} \approx 20$, nécessaire à l'écoulement initial de couche de mélange avant d'atteindre le fluide (ν_p) est englouti dans la couche de mélange. En d'autres termes, dans cette configuration nous déplaçons la position du gradient maximum de viscosité vers le bas du domaine de calcul (de l'ordre de quelques épaisseurs $\delta_{\theta,0}$), tandis que le gradient de vitesse est centré sur le milieu du domaine suivant la direction inhomogène y .

Le nombre de Reynolds initial pour le courant rapide ($Re_{g,0}$) et le courant lent ($Re_{p,0}$) peut s'écrire pour les cas à viscosité variable (configuration de contre-gradient) comme suit :

$$Re_{g,0} = \frac{U_g \times 0.5\delta_{\theta,0}}{\nu_p} \quad (4.7)$$

$$Re_{p,0} = \frac{U_p \times 0.5\delta_{\theta,0}}{\nu_g} \quad (4.8)$$

Pour un écoulement à viscosité constante, une seule viscosité cinématique est à prendre en compte pour le calcul de ces deux nombres de Reynolds. Pour DNS-R1, par exemple, la viscosité cinématique à considérer est ν_g . Le tableau 4.2 résume les valeurs de ($Re_{g,0}$) et ($Re_{p,0}$) pour différents calculs numériques à viscosités constante et variable.

Cas test	$Re_{g,0}$	$Re_{p,0}$	$Re_{\theta,0}$
DNS-R1	88.0	8.0	160
DNS-R1-M	88.0	8.0	160
DNS-R2.5	154.0	5.6	160
DNS-R4	220.0	5.0	160
DNS-R6	308.0	4.6	160
DNS-R9	440.0	4.4	160
DNS-R18	836.0	4.2	160

TABLEAU 4.2 – Valeurs du nombre de Reynolds $Re_{g,0}$, $Re_{p,0}$ et $Re_{\theta,0}$ pour différentes simulations

Bien que le nombre de Reynolds initial $Re_{\theta,0}$ soit commun à toutes les simulations du tableau 4.2, il en est tout autrement pour les nombres de Reynolds $Re_{g,0}$ et $Re_{p,0}$, ce qui

est tout à fait normal du fait de la présence de deux viscosités bien distinctes à $\tau = 0$. On peut remarquer qu'à mesure que le rapport de viscosité augmente, le nombre de Reynolds du courant rapide augmente en conséquence pour atteindre 836 à $R_\nu = 18$. Il serait alors intéressant de comparer deux écoulements, l'un à viscosité constante et l'autre à viscosité variable, pour lesquels les nombres de Reynolds $Re_{g,0}$ et $Re_{p,0}$ soient les mêmes. Pour satisfaire cette condition, il faudrait imposer une vitesse nulle au courant lent de la couche de mélange de sorte à avoir un $Re_{p,0} = 0$. Il ne reste alors qu'à ajuster le nombre de Reynolds $Re_{g,0}$. Pour réaliser cette étude, quatre nouveaux cas tests ont été menés en affectant au nombre de Reynolds $Re_{g,0}$ deux valeurs distinctes : 80 et 320. Ces simulations se présentent comme suit :

- DNS-R1-U0-80 : Cette simulation est un écoulement à viscosité constante $R_\nu = 1$, la vitesse du courant lent est nulle ($U_p = 0$), les nombres de Reynolds $Re_{\theta,0}$ et $Re_{g,0}$ sont initiés à 160 et 80, respectivement. L'objectif du présent cas test est de fournir un cas de comparaison pour l'écoulement à viscosité variable DNS-R9-U0-80 et DNS-R9-U0-320.

- DNS-R1-U0-320 : Ce cas test est identique à DNS-R1-U0-80 hormis les nombres de Reynolds $Re_{\theta,0}$ et $Re_{g,0}$ qui prennent les valeurs de 640 et 320, respectivement.

- DNS-R9-U0-80 : Il s'agit de l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$ dont le nombre de Reynolds $Re_{g,0}$ est effectivement le même que celui de DNS-R1-U0-80, en revanche le nombre de Reynolds $Re_{\theta,0}$ est seulement de 32. Ce cas test va permettre, entres autres, de quantifier les effets des variations de la viscosité dans l'écoulement à faible nombre de Reynolds initial.

- DNS-R9-U0-320 : Ce cas test est en tout point identique au calcul précédent, DNS-R9-U0-80, sauf pour les valeurs du nombre de Reynolds. En effet, dans cette simulation le nombre de Reynolds $Re_{\theta,0} = 128$, valeur proche de celle de DNS-R1-U0-80. Le nombre de Reynolds du courant rapide $Re_{g,0}$ est égale 320, identique au cas DNS-R1-U0-320.

Le tableau 4.3 récapitule les principaux paramètres des simulations énoncées ci-dessus.

Cas tests	R_ν	μ_g $\mu P.s$	μ_p $\mu P.s$	μ_{ref} $\mu P.s$	U_g ms^{-1}	U_p ms^{-1}	ΔU ms^{-1}	$Re_{\theta,0}$	$Re_{g,0}$
DNS-R1-U0-80	1	5.00	5.00	5.00	33.38	0	33.38	160	80
DNS-R1-U0-320	1	5.00	5.00	5.00	133.50	0	133.50	640	320
DNS-R9-U0-80	9	45.00	5.00	25.00	33.10	0	33.10	32	80
DNS-R9-U0-320	9	45.00	5.00	25.00	132.40	0	132.40	128	320

TABLEAU 4.3 – Paramètres des différents principaux cas-tests. La masse volumique $\rho = 1.32 \text{ kg.m}^{-3}$ est commune à toutes les simulations du présent tableau, $\mu_g = \rho\nu_g$, $\mu_p = \rho\nu_p$ et $\mu_{ref} = \rho\nu_{ref}$

4.1.2 Domaine de calcul : Coefficients d'autocorrélation

Afin de s'assurer des bonnes dimensions du domaine de calcul selon les directions homogènes, x et z , les coefficients d'autocorrélation sont analysés. Ils représentent la moyenne du produit des vitesses fluctuantes exprimées en deux points \vec{x}^- et \vec{x}^+ séparés d'un vecteur notée \vec{r} de module r . Ces coefficients peuvent s'écrire comme suit :

$$R_{u_i u_i}(\vec{r}) = \langle u'_i(\vec{x} + \vec{r}) \times u'_i(\vec{x}) \rangle \quad (4.9)$$

La séparation r est comprise entre les valeurs 0 et les demi-longueurs ($L_x/2$) et ($L_z/2$) suivant les directions longitudinale et transversale, respectivement.

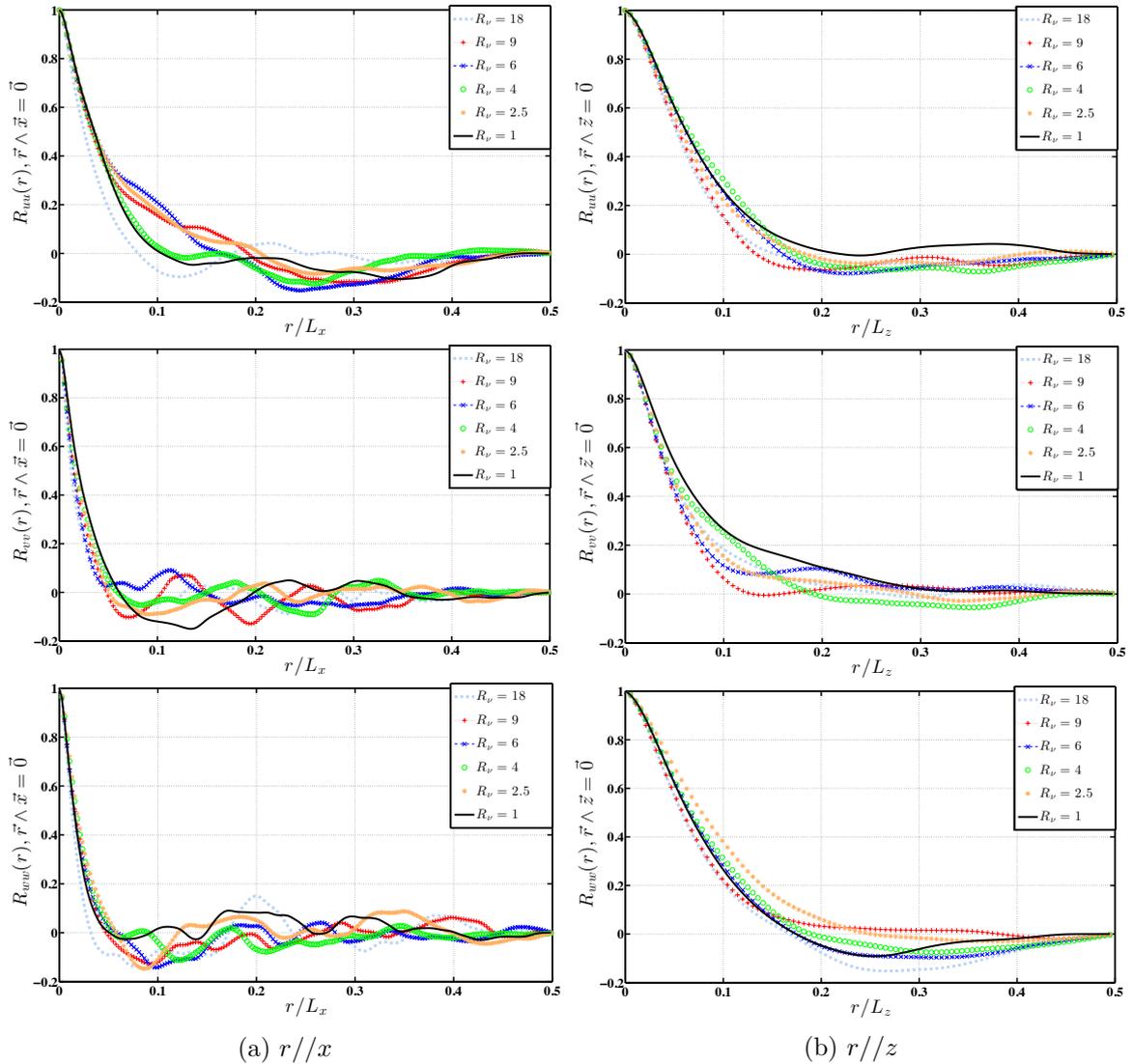


FIGURE 4.4 – Évolution temporelle des coefficients d'autocorrélation $R_{u_i u_i}(r)/R_{u_i u_i}(0)$, le long des directions homogènes x et z pour différents rapports de viscosité R_ν .

Les figures 4.4a et 4.4b montrent ces statistiques en deux points, $R_{u_i u_i}(r)/R_{u_i u_i}(0)$, le long des directions x et z respectivement, tracées pour les différents écoulements à viscosité variable ($R_\nu > 1$) et celui de référence ($R_\nu = 1$) au temps $\tau = 400$. Nous pouvons constater que les vitesses longitudinales, normales et transversales sont suffisamment décorréélées suivant les demi-longueurs du domaine de calcul $L_x/2$ et $L_z/2$. Les dimensions choisies pour notre domaine de calcul sont alors suffisantes pour que la turbulence au sein de la couche de mélange puisse se développer sans être inhibée.

4.1.3 Influence de la taille de grille

Il est important dans une simulation numérique de s'assurer de l'indépendance des résultats obtenus par rapport à la taille de la grille du maillage utilisé, plus particulièrement lorsqu'il s'agit de simulation numérique directe (DNS). En effet, un calcul DNS se doit de résoudre toutes les échelles de turbulence présentes dans l'écoulement, depuis l'échelle de Kolomogorv η représentative de la taille des plus petits tourbillons à l'échelle intégrale ℓ représentative de la taille des plus gros tourbillons présents. Dans le cadre de cette étude, nous adoptons la démarche suivante pour vérifier la consistance des résultats :

- Variation de la taille de grille : Les résultats obtenus suivant différents maillages sont comparés, l'indépendance des résultats vis-à-vis du maillage doit être assurée.
- Comparaison avec les données expérimentales et les résultats numériques disponibles dans la littérature.
- Fermeture des différents bilans : L'équation de transport des différentes grandeurs moyennes et fluctuantes (vitesse, énergie cinétique, enstrophie ...) doivent être fermées, pour garantir une bonne estimation numérique des différents termes composant les différents bilans

4.1.3.1 Variation de la taille de grille

Le test de l'indépendance des résultats des simulations numériques vis-à-vis de la taille de grille est effectué sur la couche de mélange à viscosité variable puisque celle-ci présente des termes supplémentaires qu'il faudra correctement estimer. Ainsi, nous nous assurons que l'effet des gradients de viscosité soit correctement représenté. Pour ce faire, trois différents maillages ont été testés multipliant par 2 (maillage M2) puis par 4 (maillage M3) la résolution spatiale suivant la direction inhomogène y du maillage le plus grossier (maillage M1).

Le tableau 4.4 résume les tailles de grille utilisées pour les différentes simulations numériques de l'écoulement à viscosité variable au rapport de viscosité $R_\nu = 9$ ainsi que celle de Pantano et al. [7]. Notons que la taille de grille du maillage utilisée par Pantano et al. [7] est $512 \times 256 \times 192$, pour un domaine de calcul de dimension $L_x/\delta_{\theta,0} = 345$, $L_y/\delta_{\theta,0} = 172$ et $L_z/\delta_{\theta,0} = 86$. La résolution spatiale correspondante est $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.67 \times \delta_{\theta,0}$, commune aux trois directions longitudinale, normale et transversale du domaine de calcul. Dans

la présente étude, les dimensions du domaine de calcul sont identiques à celles de Pantano et al. [7] et la résolution spatiale dans les directions homogènes x et z est $\Delta x = \Delta z \approx 0.44 \times \delta_{\theta,0}$. La distribution des points de maillage suivant la direction normale inhomogène y est resserré au centre du domaine de calcul pour obtenir une résolution Δy_{min} constante sur une largeur de $23 \times \delta_{\theta,0}$. L'objectif de ce raffinement est d'accroître la résolution spatiale dans la zone où le cisaillement est maximum. Un aperçu dans un plan xy du maillage utilisé est donné à la figure 4.5. Le nombre de points de grille utilisé pour chaque maillage est de l'ordre de 106, 77, 61 et 16 millions pour DNS-R9, DNS-R9-Gr2, DNS-Gr1 et la DNS de Pantano et al. [7], respectivement.

	$L_x^* \times L_y^* \times L_z^*$	$N_x \times N_y \times N_z$	$\Delta x/\delta_{\theta,0}$	$\Delta y_{min}/\delta_{\theta,0}$	$\Delta z/\delta_{\theta,0}$
Pantano et al. [7]	$345 \times 172 \times 86$	$512 \times 256 \times 128$	0.670	0.670	0.670
DNS-R9-Gr1 (M1)	$345 \times 172 \times 86$	$768 \times 420 \times 192$	0.440	0.210	0.440
DNS-R9-Gr2 (M2)	$345 \times 172 \times 86$	$768 \times 528 \times 192$	0.440	0.104	0.440
DNS-R9 (M3)	$345 \times 172 \times 86$	$768 \times 720 \times 192$	0.440	0.057	0.440

TABLEAU 4.4 – Taille de grille utilisée

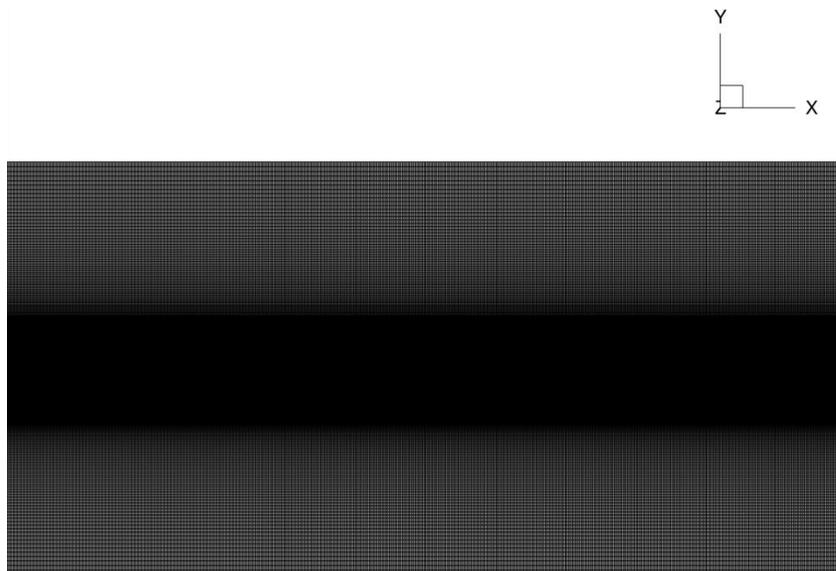


FIGURE 4.5 – Vue du maillage utilisé pour les différents calculs de couche de mélange. Il est resserré dans la zone centrale du domaine de calcul afin de mieux capturer la dynamique de l'écoulement.

La figure 4.6 montre l'évolution temporelle de l'épaisseur de la couche de mélange de l'écoulement à viscosité variable ($R_\nu = 9$) pour trois différents maillages M1, M2 et M3, nous

pouvons remarquer que l'épaisseur prédite par la simulation DNS-R9-Gr1 est inférieure à celle obtenue pour les simulations DNS-R9-Gr2 et DNS-R9 pour les temps τ supérieurs à 80. La raison de cet écart est attribuée à une sous-estimation des gradients de viscosité dans la direction inhomogène qui ne jouent pas complètement leur rôle. Par ailleurs, l'estimation de l'épaisseur de quantité de mouvement par les maillages M2 et M3 est très proche, laissant penser que le champ de vitesse moyenne est correctement prédit à partir du maillage M2.

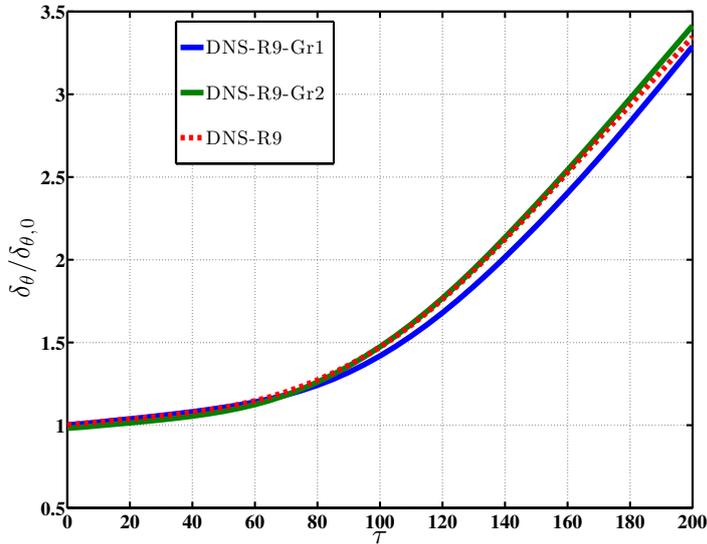


FIGURE 4.6 – Effet du maillage sur l'évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$.

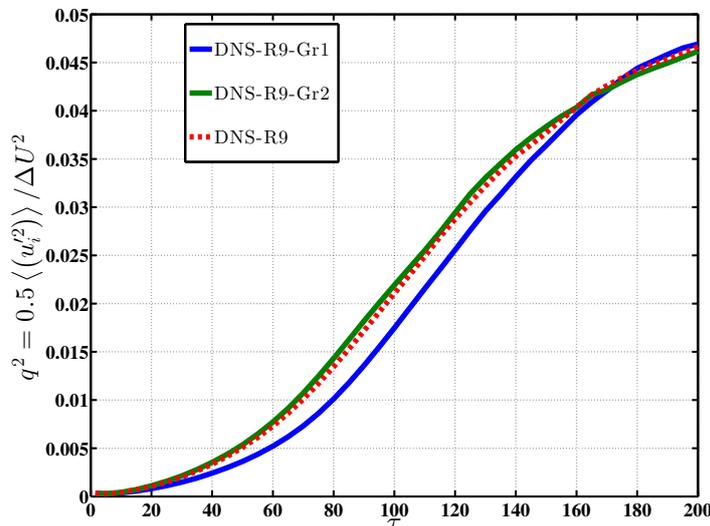


FIGURE 4.7 – Effet du maillage sur l'évolution temporelle de l'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$.

Pour ce qui est du champ de vitesse fluctuante, la figure 4.7 montre l'évolution temporelle de l'énergie cinétique turbulente, $\langle q^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i'^2 \rangle$ pour les trois maillages M1, M2 et M3. Nous remarquons que le maillage grossier M1 sous-estime $\langle q^2 \rangle$ et ce jusqu'au temps adimensionnel $\tau = 160$, après quoi l'énergie cinétique est identique à celle prédite par le maillage M3. Nous

remarquons là aussi que les maillages M2 et M3 estiment de façon équivalente l'énergie cinétique et le taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique turbulente comme montré sur la figure 4.8 tandis que le maillage M1 surestime celui-ci à partir de $\tau = 100$. Cette surestimation est due en partie à une mauvaise prédiction de la viscosité cinématique comme le montre la figure 4.9. La production de l'énergie cinétique de turbulence est également sous-estimée par l'utilisation du maillage M1, tandis que les maillages M2 et M3 prédisent globalement la même production de l'énergie cinétique à quelques différences près. Ces différences au niveau du terme de production ont orienté notre choix vers l'utilisation du maillage M3, sauf mention contraire, pour toutes les simulations numériques présentées dans ce manuscrit.

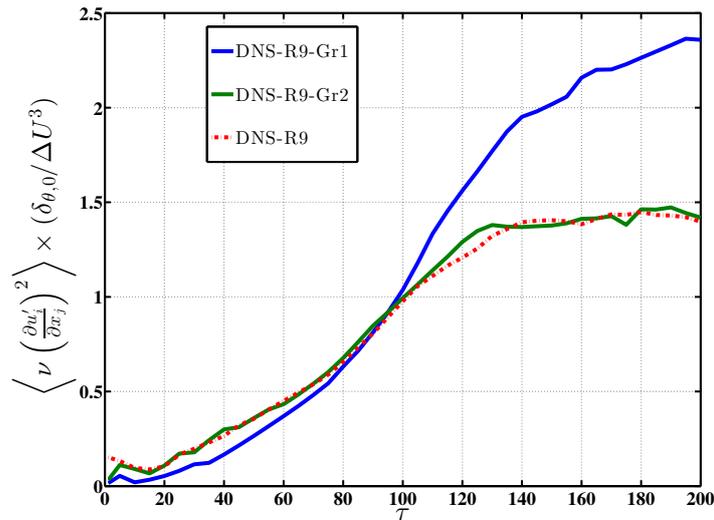


FIGURE 4.8 – Effet du maillage sur l'évolution temporelle du taux de dissipation moyen de l'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$.

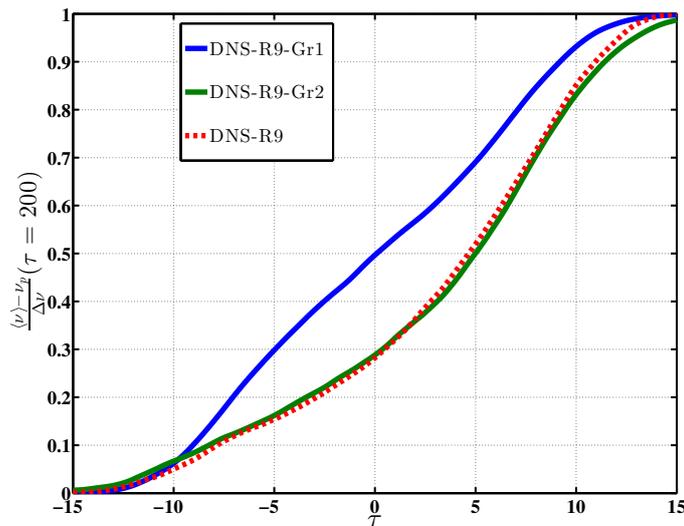


FIGURE 4.9 – Effet du maillage sur l'évolution spatiale de de la viscosité moyenne adimensionnelle le long de la direction inhomogène y à $\tau = 200$ pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$.

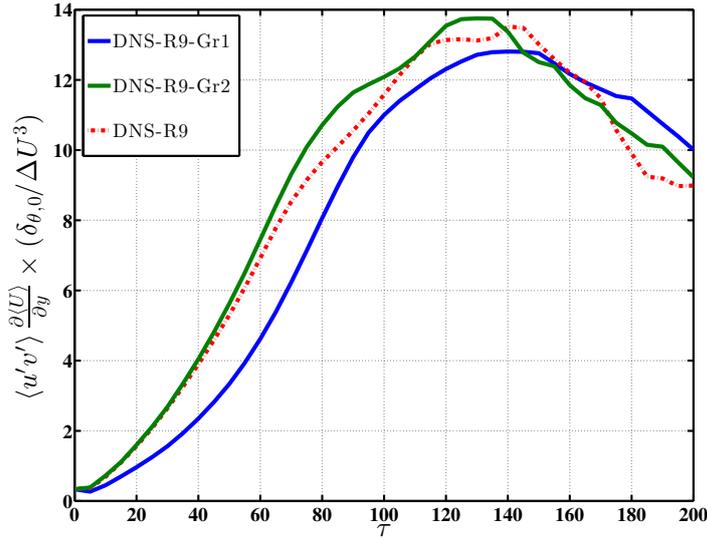


FIGURE 4.10 – Effet du maillage sur l'évolution temporelle de la production de l'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$.

4.1.3.2 Comparaison avec les expériences et les simulations numériques issues de travaux antérieurs

Le tableau 4.5 compare les pics du tenseur de Reynolds $R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$ adimensionné par la différence de vitesse ΔU obtenus pour la simulation DNS-R9 (maillage M3) de la présente étude et la DNS de Pantano et al. [7] ainsi que l'expérience de Bell et al. [67]. À noter que le nombre de Mach convectif est quasi nul sauf pour la DNS de Pantano et al. [7] qui est de 0.3, les effets de compressibilité entrent en jeu et affectent l'écoulement cisailé. En effet, la diminution des pics d'intensité turbulente est caractéristique des écoulements fortement compressibles (par exemple, [68],[13],[27] comme le montre les valeurs du tableau 4.5. Les valeurs prédites par notre calcul, DNS-R9, est de même ordre de grandeur que celles de Bell et al.[67] avec un écart relatif de 6%, 7% et 8 % pour les intensités de turbulence longitudinale, normale et transversale, respectivement. La figure 4.11 montre le profil du tenseur de Reynolds le long de la direction verticale y , obtenu par la simulation DNS-R9 de la présente étude et ceux obtenus par d'autres auteurs. On peut remarquer que les résultats de la simulation DNS-R9 sont très comparables à ceux trouvés dans la littérature. Malgré un rapport de viscosité $R_\nu = 9$, l'écoulement DNS-R9 semble avoir une dynamique très proche à celle des écoulements homogènes dans le régime pleinement développé. En effet, dans ce régime, les gradients de viscosité s'homogénéisent et deviennent de plus en plus faibles. La viscosité au centre de la couche de mélange tend vers une valeur constante (généralement la viscosité du mélange). Néanmoins, la dynamique de l'écoulement DNS-R9 est, comme nous allons le voir plus loin, complètement influencée par les variations de viscosité, dans la phase initiale de l'écoulement. En d'autres termes, l'écoulement DNS-R9 évolue de manière différente depuis l'état initial, caractérisé par de faibles intensités de turbulence, vers un état pleinement turbulent, comparé à l'écoulement à viscosité constante.

	DNS-R9	Pantano et al. [7] (DNS)	Bell et al.[67] (Expérience)	Écart relatif Bell et al. Vs DNS-R9
Mc	0	0.3	0	/
$\langle u'u' \rangle / \Delta U$	0.191	0.17	0.180	6 %
$\langle v'v' \rangle / \Delta U$	0.151	0.134	0.140	7 %
$\langle w'w' \rangle / \Delta U$	0.158	0.143	0.146	8 %
$\langle u'v' \rangle / \Delta U$	0.121	0.103	0.100	21 %
$\langle v'v' \rangle / \langle u'u' \rangle$	0.790	0.788	0.777	1 %
$\langle u'v' \rangle / \langle u'u' \rangle$	0.633	0.606	0.555	14 %

TABLEAU 4.5 – Comparaison des pics d'intensité turbulente dans la région pleinement développée de la couche de mélange.

4.1.4 Critère de visualisation Q

Le critère Q , appelé également le second invariant du tenseur des gradients de vitesse, proposé par Hunt et al. [71], définit les tourbillons comme étant la région où l'écoulement est dominé par le tenseur rotation. Les structures tourbillonnaires sont identifiées par une représentation des iso-valeurs de Q positives, alors que les valeurs négatives représentent les zones dominées par le cisaillement. Le critère Q ainsi que sa forme adimensionnelle Λ s'écrivent comme suit :

$$Q = \frac{1}{2} [\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}] \quad \text{et} \quad \Lambda = \frac{[\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}]}{[\Omega_{ij}\Omega_{ij} + S_{ij}S_{ij}]} \quad (4.10)$$

Avec :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right], S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \quad (4.11)$$

La valeurs de Λ sont comprises dans l'intervalle $[-1 \ +1]$, celle choisie pour représenter les structures tourbillonnaires de l'écoulement est $\Lambda = 0.3$. Ce choix est complètement arbitraire, il a été ajusté visuellement pour rendre compte de la richesse des structures de l'écoulement turbulent de couche de mélange.

Les figures 4.12 et 4.13 montrent les iso-surfaces de $\Lambda = 0.3$ pour deux écoulements, l'un à viscosité constante, DNS-R1 (à gauche), et l'autre à viscosité variable, DNS-R9 (à droite), pour différentes stations temporelles τ , selon une vue en perspective et sur le plan

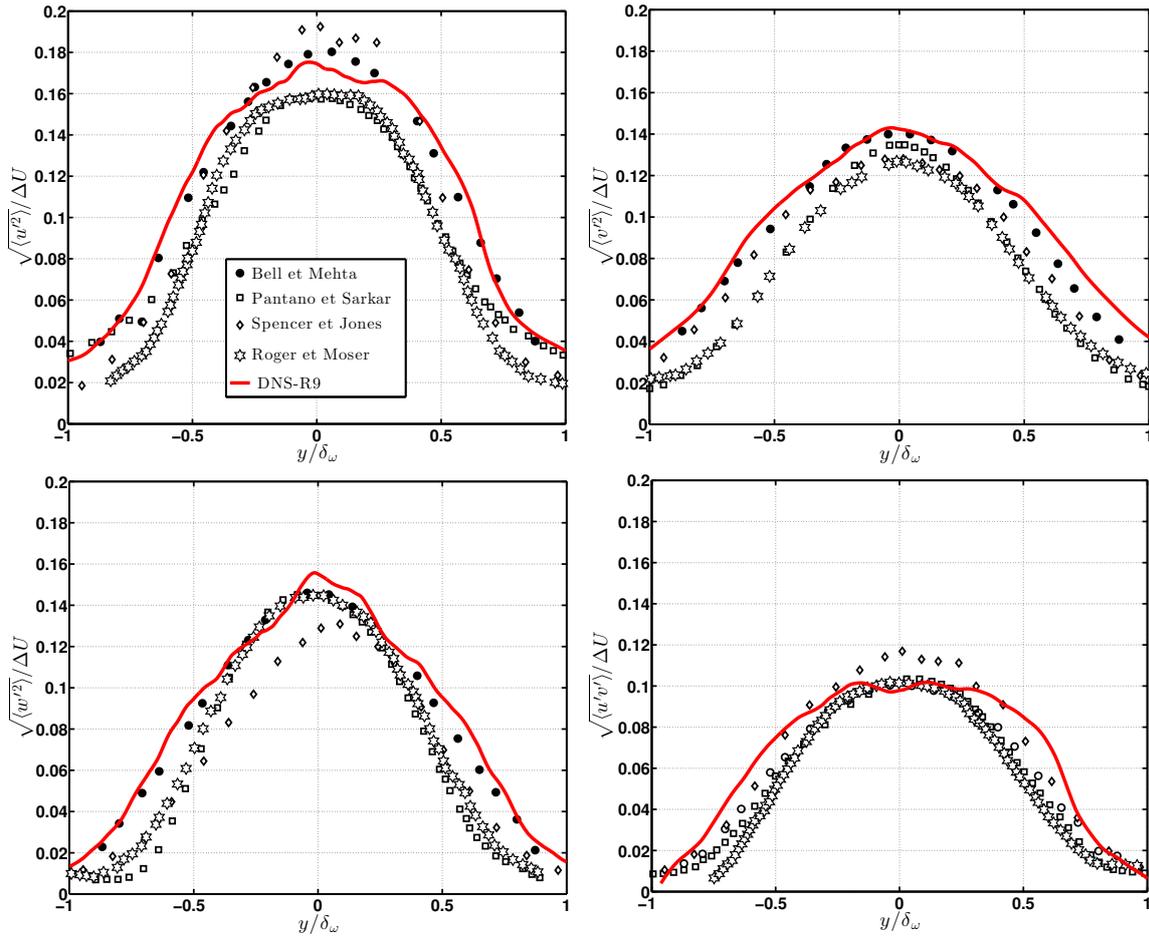


FIGURE 4.11 – Compariaosn des compostantes du tenseur de Reynolds, $R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$ avec les études de Bell et Metha,[67], Pantano et Sarkar [7], Spencer et Jones [69] et Rogers et Moser[70]

xy , respectivement. À $\tau = 100$, nous pouvons observer les structures tourbillonnaires d'axe transversal identifiées comme étant les structures cohérentes de la couche de mélange pour les deux écoulements, à viscosités constante et variable. La présence de ces structures est due au développement de l'instabilité primaire mieux connue sous le nom de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, qui est une instabilité d'origine dynamique et non visqueuse. Néanmoins, nous observons que l'écoulement à viscosité variable est peuplé de structures longitudinales contrarotatives qui prennent place entre deux structures consécutives d'axe transversal. Ces structures longitudinales se manifestent de manière beaucoup plus précoce pour l'écoulement à viscosité variable comparativement au cas à viscosité constante, qui ne sont visibles qu'à partir $\tau = 200$. D'après de nombreux auteurs (par exemple, [72],[73],[74]), la tridimensionnalisation de l'écoulement et la transition vers la turbulence sont en grande partie provoquées par la présence de ces structures longitudinales due à l'apparition d'une instabilité secondaire [75]. Par conséquent, **les gradients de viscosité précipitent l'écoulement de couche de mélange vers le régime turbulent malgré un nombre de Reynolds initial $Re_{\theta,0}$ identique.** À $\tau = 400$, la couche de mélange atteint dans les deux situations à viscosité constante et à viscosité variable, une épaisseur pratiquement 8 fois plus grande que l'épaisseur initiale. Néanmoins, l'organisation des structures de l'écoulement à viscosité variable

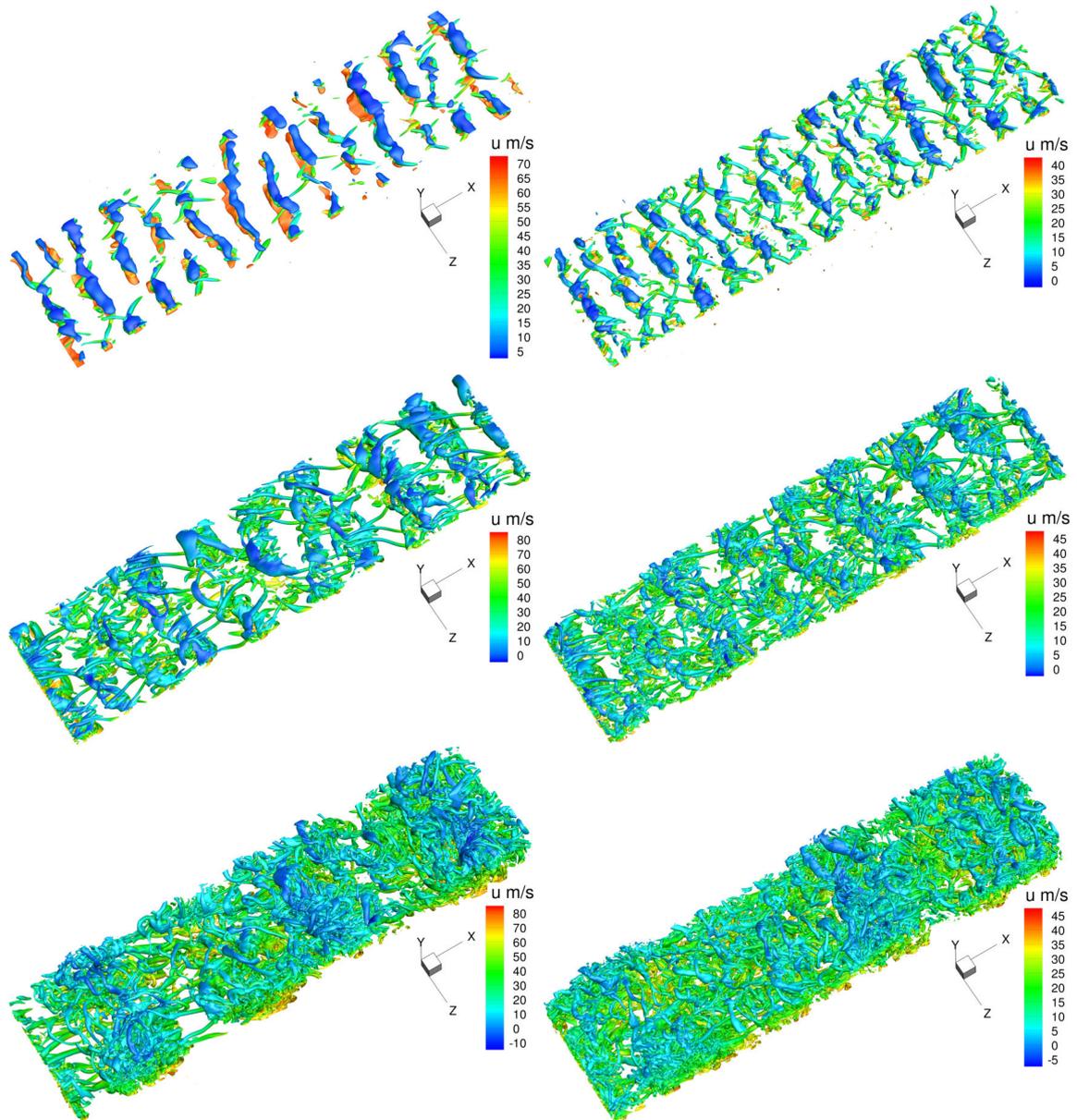


FIGURE 4.12 – Visualisation tridimensionnelle de l'écoulement de couche de mélange temporelle au moyen des iso-surfaces $\Lambda = 0.3$. À gauche ; DNS-R1, à droite ; DNS-R9. De haut en bas $\tau = 100, 200$ et 400.

semble être pleinement turbulente, tandis qu'on peut toujours percevoir les structures bi-dimensionnelles d'axe transversal pour l'écoulement à viscosité constante comme le montre la figure 4.13. L'écoulement DNS-R1 devra encore évoluer en temps pour obtenir le même état turbulent que DNS-R9. Ou bien, augmenter le nombre de Reynolds initial, $Re_{\theta,0}$ ($\times 4$, environ), pour atteindre, à $\tau = 400$, le même régime turbulent que DNS-9.

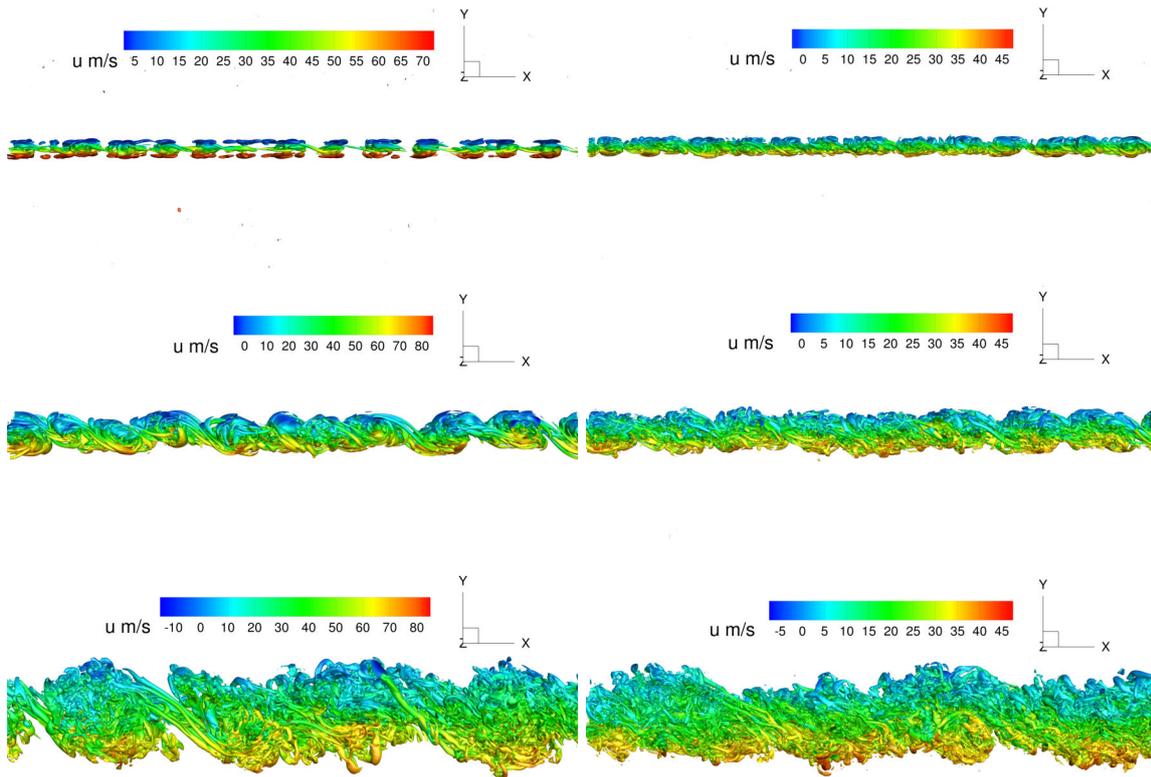


FIGURE 4.13 – Visualisation dans le plan xy de l'écoulement de couche de mélange temporelle au moyen des iso-surfaces $\Lambda = 0.3$. À gauche ; DNS-R1, à droite ; DNS-R9. De haut en bas $\tau = 100, 200$ et 400 .

4.2 Influence du schéma numérique des termes convectifs : diffusion numérique du schéma WENO.

Nous mettons en évidence dans ce paragraphe le caractère diffusif du schéma WENO standard utilisé dans la configuration de couche de mélange temporelle. Ce caractère diffusif a été observé non seulement lorsque l'écoulement présente des discontinuités, matérialisés dans notre cas par des sauts de viscosité au sein de la couche de mélange, mais également en absence de celles-ci. Nous avons décidé de mener une étude numérique sur l'influence de la discrétisation des termes convectifs sur les différents résultats présentés aux chapitres 5 et 6. Nous disposons, dans le code CHOC-WAVES, de deux versions du schéma WENO à savoir la version standard et la version large bande (voir le chapitre 3 pour les détails numériques de ces schémas), le schéma centré conservatif, quant à lui, a été implémenté dans la version multi-espèces du code. Le tableau 4.6 résume les paramètres pertinents des différentes simulations réalisées pour rendre compte de la diffusion numérique du schéma WENO standard. Le schéma centré conservatif est choisi pour l'écoulement à viscosité constante, tandis que le schéma WENO large bande est utilisé pour l'écoulement à viscosité variable. Ce choix sera expliqué un peu plus loin. La figure 4.14 montre l'évolution temporelle de la pseudo-dissipation au centre de la couche de mélange à viscosité constante.

case	R_ν	loi de viscosité de mélange	$\delta_{\theta,0}$ μm	$\delta_{\nu,0}$ μm	Schéma numérique
DNS-R1	1	Viscosité constante	18.4	/	WENO 5 standard
DNS-R1-Centré	1	Viscosité constante	18.4	/	Centré conservatif
DNS-R9	9	Wilke	18.4	0	WENO 5 standard
DNS-R9-LB	9	Wilke	18.4	0	WENO 5 Large Bande

TABLEAU 4.6 – Paramètres principaux des simulations à viscosité constante ; DNS-R1, DNS-R1-Centré et celles à viscosité variable ; DNS-R9 et DNS-R9-LB

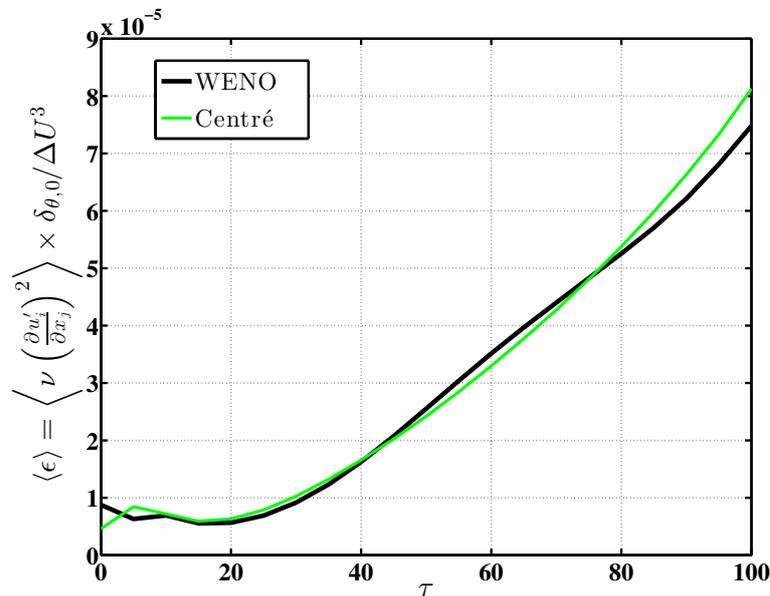


FIGURE 4.14 – Évolution temporelle du taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique turbulente pour l'écoulement à viscosité constante, employant le schéma WENO standard (DNS-R1) et le schéma centré conservatif (DNS-R1-Centré).

Nous constatons que pour des temps $\tau < 80$, le schéma WENO standard se comporte comme le schéma centré conservatif, l'estimation de la dissipation est très comparable pour ces deux schémas. À $\tau = 100$, une sous estimation de la dissipation apparaît pour le schéma WENO de l'ordre de 7% comparativement au schéma centré conservatif. Ce comportement s'explique par le fait que les indicateurs de discontinuités du schéma WENO standard ne sont pas tout fait nuls lorsque celles-ci sont absentes dans l'écoulement. Ce qui engendre mécaniquement une diffusion numérique du fait d'un lissage de la solution au voisinage de la discontinuité, qui se traduit dans le cas présent par l'ajout d'une viscosité artificielle. En revanche, les écoulements de couche de mélange à viscosité variable présentent des discontinuités physiques qui nécessitent l'utilisation du schéma WENO, engendrant nécessairement une diffusion numérique dès les premiers instants de la simulation. L'utilisation du schéma

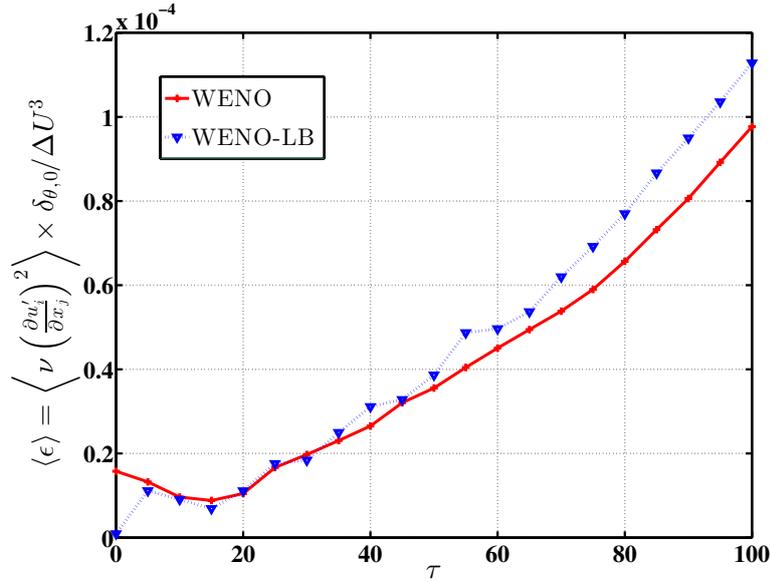
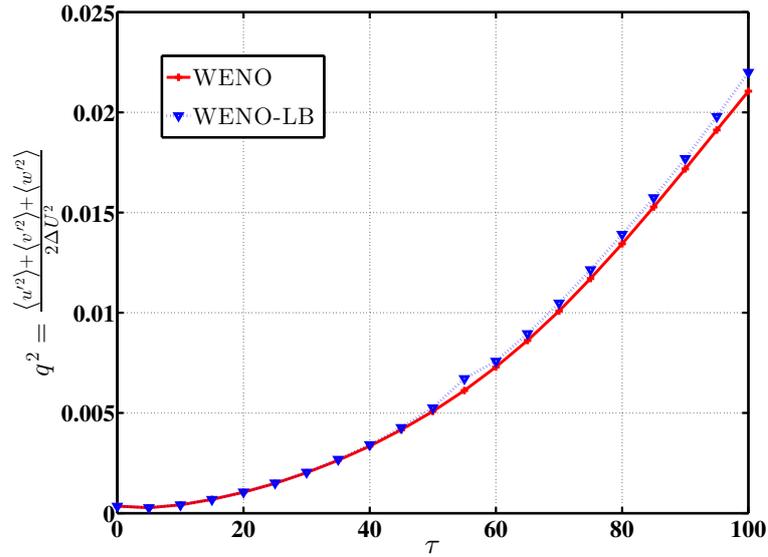


FIGURE 4.15 – Évolution temporelle du tau moyen de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement à viscosité variable, employant le schéma WENO standard (DNS-R9) et le schéma WENO large bande (DNS-R9-LB).

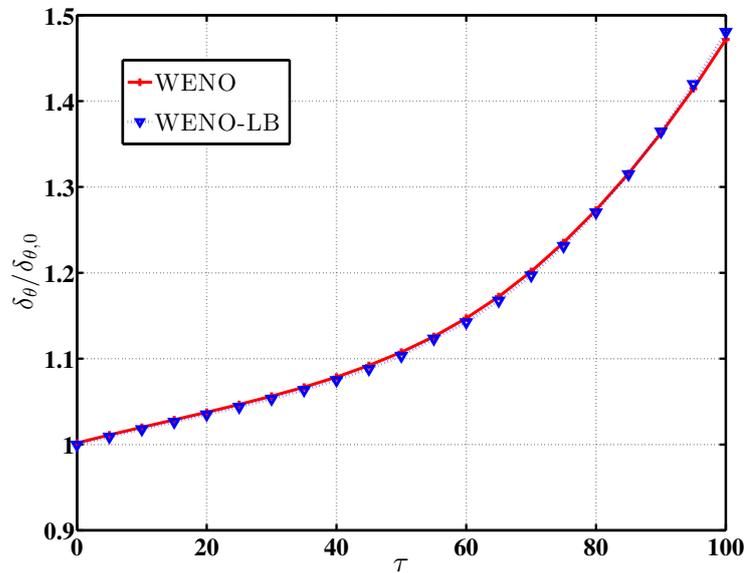
WENO large bande à 4 stencils permet d'améliorer la précision des calculs sans pour autant supprimer complètement la diffusion numérique (voir figure 4.15). Nous constatons que la pseudo-dissipation est sous estimée par le schéma WENO standard à partir de $\tau = 40$ pour atteindre à $\tau = 100$ près de 15% de différence par rapport au schéma WENO large bande. Néanmoins, le schéma WENO large bande n'a pu emmener la simulation numérique à son terme, c'est-à-dire jusqu'à l'état pleinement développé (correspondant à un temps adimensionnel $\tau = 400$). En effet, l'utilisation de ce schéma a provoqué une divergence du calcul numérique de la couche de mélange à viscosité variable ($R_\nu = 9$) à partir du temps adimensionnel $\tau = 110$. Le schéma centré conservatif a également été testé pour l'écoulement à viscosité variable ($R_\nu = 9$). Ce calcul a divergé plutôt que le schéma WENO large bande au temps adimensionnel $\tau = 55$, montrant une sensibilité plus accrue aux discontinuités présentes au sein de l'écoulement. Au vu de ces éléments, il semble que le schéma WENO standard est indispensable pour explorer les temps avancés où la couche de mélange atteint un régime pleinement développé et autosimilaire. Néanmoins, une partie importante de notre travail est consacrée à l'étude la phase initiale du développement de la couche de mélange, correspondant à l'intervalle $\tau = [0, 100]$.

Par ailleurs, l'évolution temporelle des grandeurs telles que l'énergie cinétique turbulente et l'épaisseur de quantité de mouvement des simulations DNS-R9 et DNS-R9-LB est identique, comme le montre les figures (4.16a) et (4.16b). Le caractère diffusif du schéma WENO n'est donc ressenti qu'au niveau du terme du taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence. Pour appuyer ce propos, analysons le bilan d'énergie cinétique de turbulence à $\tau = 100$.

Nous constatons d'après la figure 4.17, que les termes supplémentaires liés aux gradients



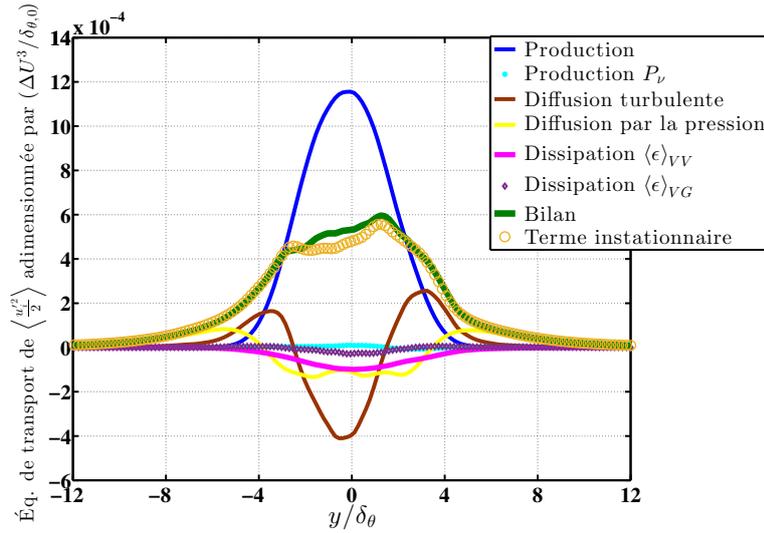
(a)



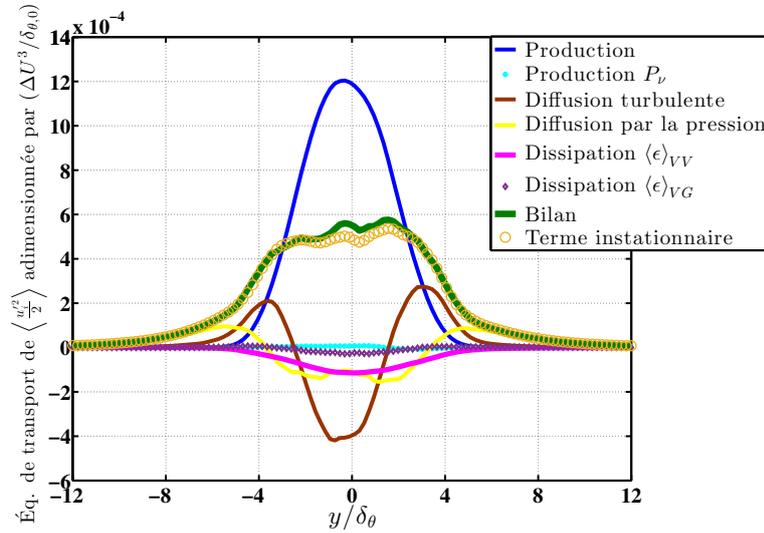
(b)

FIGURE 4.16 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique de turbulence et de l'épaisseur δ_θ pour l'écoulement à viscosité variable, employant le schéma WENO standard (DNS-R9) et le schéma WENO à large bande (DNS-R9-LB).

de viscosité (P_ν et $\langle \epsilon \rangle_{VG}$) sont négligeables à $\tau = 100$ et ce quel que soit le schéma WENO employé. Les termes classiques sont tout à fait comparables pour les deux schémas WENO mis à part le terme de dissipation qui connaît 15% de sous estimation pour le schéma WENO standard, comme illustré à la figure 4.15. Néanmoins, les bilans illustrés sur la figure 4.17 sont fermés, malgré quelques écarts au centre de la couche de mélange dus à l'estimation de la dissipation comme discuté plus haut. Ce caractère diffusif du schéma WENO standard nous amène à analyser de plus près les grandeurs liées aux petites échelles de la turbulence telle que l'enstrophie ($\langle \omega_x'^2 \rangle + \langle \omega_y'^2 \rangle + \langle \omega_z'^2 \rangle$), qui est de faite plus sensible à la variante du schéma WENO employé.



(a) DNS-R9



(b) DNS-R9-LB

FIGURE 4.17 – Évaluation du bilan d'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement à viscosité variable, employant le schéma WENO standard (DNS-R9) et le schéma WENO large band (DNS-R9-LB), à $\tau = 100$.

La figure 4.18 montre, en effet, que l'enstrophie est sous estimée par le schéma WENO standard, plus particulièrement au temps adimensionnel $\tau = 100$. Cette sous estimation va augmenter à mesure que la simulation progresse dans le temps, vers les régimes de plus en plus turbulent, car la diffusion numérique va croître également.

L'utilisation donc du schéma WENO standard est tout à fait justifiée dans la présente étude, en particulier dans l'intervalle temporel $\tau = [0 - 100]$. De plus, le schéma WENO standard permet d'atteindre des temps de simulation avancés, $\tau \geq 400$ alors que le schéma centré et le schéma WENO large bande connaissent une divergence du calcul numérique aux temps $\tau = 55$ et 110 , respectivement.

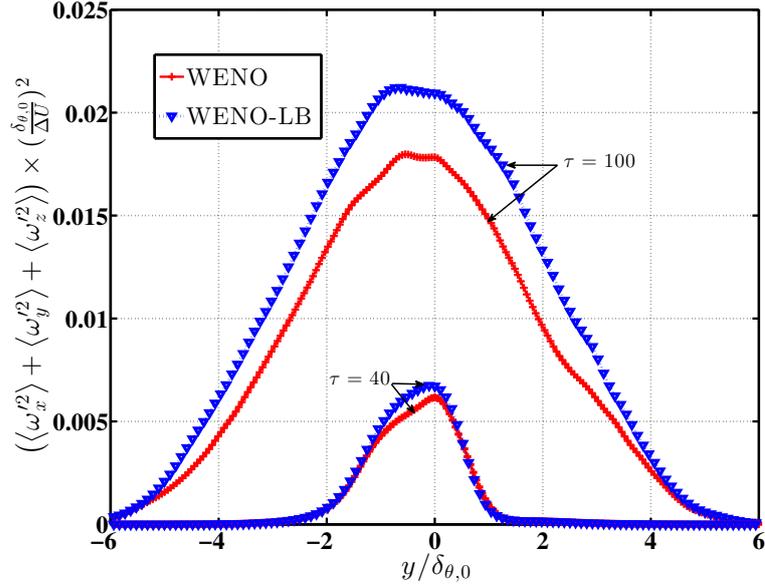


FIGURE 4.18 – Évolution de l'entropie $(\langle \omega_x'^2 \rangle + \langle \omega_y'^2 \rangle + \langle \omega_z'^2 \rangle)$ pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$ le long de la direction inhomogène y pour les deux schémas WENO standard et large bande au temps $\tau = 40$ et 100 .

4.3 Influence du modèle de viscosité de mélange : formule de Wilke.

La viscosité dynamique d'un mélange gazeux est donné par la formule de Wilke[47], largement utilisée dans le domaine de la chimie et de la combustion. Elle est rappelée ci-dessous :

$$\mu = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_s} \left[\frac{\mu_k \left(\frac{Y_k}{\mathcal{W}_k} \right)}{\left(\sum_{l=1}^{\mathcal{N}_s} \frac{Y_l \Phi_{kl}}{\mathcal{W}_l} \right)} \right], \quad (4.12)$$

où μ_k et \mathcal{W}_k sont la viscosité dynamique et la masse molaire de la $k^{\text{ème}}$ espèce respectivement, Φ_{kl} est défini comme suit :

$$\Phi_{kl} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{\mathcal{W}_k}{\mathcal{W}_l} \right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_k}{\mu_l} \right)^{1/2} \left(\frac{\mathcal{W}_k}{\mathcal{W}_l} \right)^{1/4} \right]^{1/2}. \quad (4.13)$$

La figure 4.19 montre l'évolution de la viscosité dynamique d'un mélange gazeux binaire en fonction de la fraction massique des espèces chimiques. Nous constatons que lorsque les quantités massiques des espèces chimiques sont égales ($Y_1 = Y_2 = 0.5$), la viscosité de mélange binaire donnée par la formule de Wilke est inférieure à la viscosité moyenne arithmétique des deux espèces chimiques. Cette dernière est obtenue lorsque la fraction massique de l'espèce chimie ayant la plus grande viscosité est égale 0.8. En prenant la différentielle de la formule de Wilke par rapport à la fraction massique des espèces chimiques, $\frac{d\mu}{dY_1}$, on trouve une

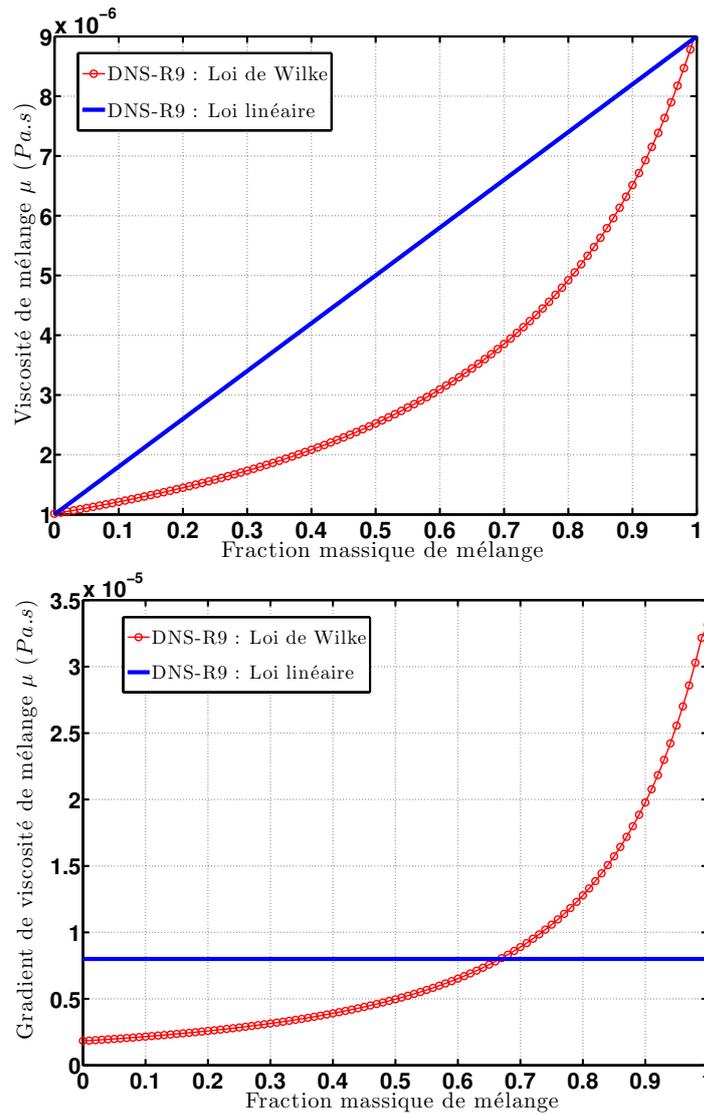


FIGURE 4.19 – Évolution de la viscosité dynamique de mélange d’un mélange gazeux binaire en fonction de la fraction massique des espèces chimiques pour l’écoulement à viscosité variable DNS-R9.

évolution non linéaire, la valeur maximale atteinte est 4 fois supérieur à celle d’une évolution linéaire de la viscosité du mélange comme montré sur la figure 4.19.

On peut s’attendre à ce que les gradients locaux de viscosité dans un écoulement tel que la couche de mélange soient dépendant de la loi de viscosité du mélange utilisée, et par conséquent influencent la dynamique de l’écoulement. Afin d’illustrer ce propos de manière statique, prenons l’exemple de deux points A et B distant d’une longueur Δy fixe et faisons varier les proportions massiques d’un mélange gazeux binaire évaluées en ces deux points, puis calculons le gradient $\frac{\mu(A)-\mu(B)}{\Delta y}$ en utilisant la loi de Wilke et une loi linéaire pour le calcul de la viscosité du mélange comme montré à la figure 4.20. On constate, d’après cette figure, que les gradients de viscosité se concentrent pour les fortes/faibles proportions massiques des espèces chimiques lorsque la formule de Wilke est utilisée, tandis qu’une répartition linéaire, plus lisse, des gradients de viscosité est obtenue lorsque la loi linéaire est utilisée.

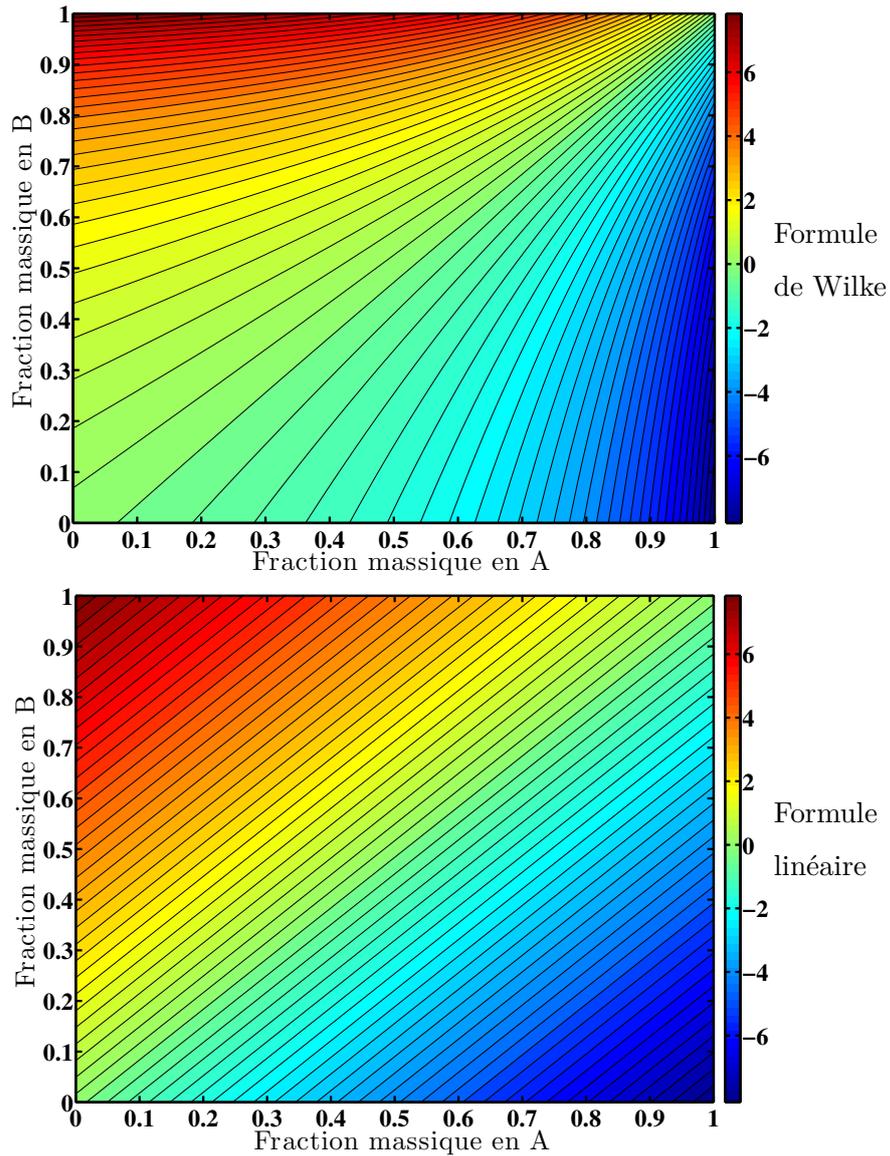


FIGURE 4.20 – Évolution du gradient de viscosité $\frac{\mu(A)-\mu(B)}{\Delta y}$ ($Pa.s$) entre les points A et B, distants d'une longueur $\Delta y = 1\mu m$ en fonction de la fraction massique du fluide visqueux en ces points. Les valeurs de viscosité dynamique sont celles de l'écoulement DNS-R9.

Or, l'enroulement du fluide irrotationnel est caractérisé par une fraction massique extremum ($Y_1 = 0$ ou bien 1, suivant que l'on se trouve du coté haut ou du coté bas de la couche de mélange). Ainsi, l'interface entre la zone de mélange et la zone non mélangée est le siège d'importants gradients de viscosité qui dans le cas d'une loi linéaire seront plus faibles que dans le cas où la formule de Wilke est choisie.

Étant donné que l'objectif de la présente étude est précisément la quantification et la compréhension des effets de variation de viscosité dans un écoulement turbulent, l'emploi d'un modèle linéaire ou de Wilke pour la viscosité de mélange est une question à laquelle il est nécessaire d'apporter une réponse. En effet, l'évolution non linéaire de la viscosité de Wilke, par rapport, à la fraction massique de mélange va considérablement modifier certaines

case	R_ν	loi de viscosité de mélange	$\delta_{\theta,0}$ μm	$\delta_{\nu,0}$ μm	Schéma numérique
DNS-R9	9	Wilke	18.4	0	WENO 5 large bande
DNS-R9-L	9	Linéaire	18.4	0	WENO 5 large bande

TABLEAU 4.7 – Paramètres principaux des simulations DNS-R9 et DNS-R9-L. $\delta_{\theta,0}$ et $\delta_{\nu,0}$ représentent l'épaisseur intégrale du champ de vitesse et du champ scalaire, respectivement.

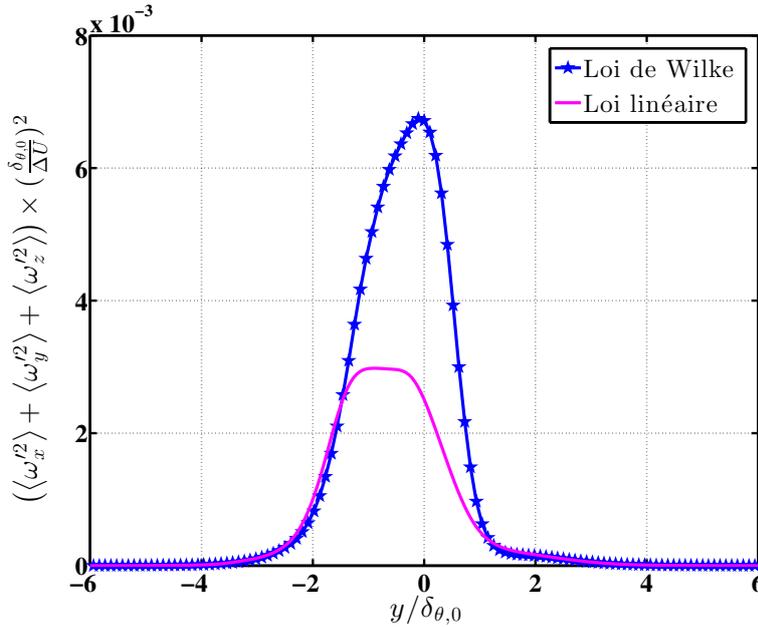


FIGURE 4.21 – Évolution de l'enstrophie le long de la direction inhomogène y pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$ au temps $\tau = 40$.

grandeurs statistiques de l'écoulement. Nous comparons dans ce qui suit deux simulations numérique directe de couche de mélange temporelle DNS-R9 et DNS-R9-L au rapport de viscosité $R_\nu = 9$ utilisant pour la viscosité de mélange le modèle de Wilke et une loi linéaire, respectivement. Le tableau 4.7 résume les principaux paramètres des simulations DNS-R9 et DNS-R9-L.

La figure 4.21 montre l'évolution de l'enstrophie $\langle \omega_i'^2 \rangle$, (le double indice indique une sommation d'Einstein) le long de la direction inhomogène y au temps adimensionnel $\tau = 40$ pour les écoulements à viscosité variable DNS-R9 et DNS-R9-L. Nous constatons que l'emploi de la formule de Wilke conduit à une plus grande enstrophie comparativement à la loi linéaire et ce malgré des conditions initiales identiques. Cela vient du faite des faibles valeurs des gradients de viscosité dans le cas de l'emploi d'une loi linéaire. Or les termes supplémentaires (proportionnels donc aux gradients de viscosité) sont très importants dans le bilan de l'enstrophie.

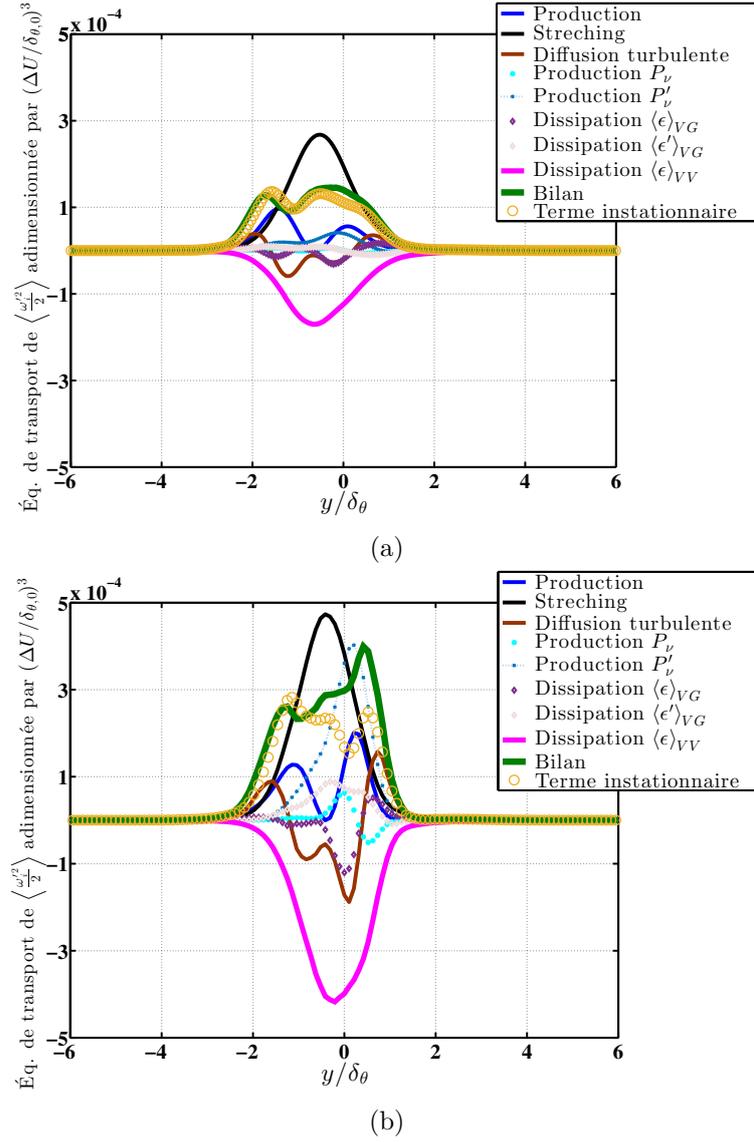


FIGURE 4.22 – Évaluation du bilan d’entrophie sur l’évolution temporelle de la production de l’énergie cinétique de turbulence pour l’écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$.

La figure 4.22 montre l’évaluation du bilan d’entrophie des simulations DNS-R9 et DNS-R9-L au temps adimensionnel $\tau = 40$. Nous remarquons que, d’une part, les termes classiques tel que celui du stretching, responsable de la production de l’entrophie, est pour DNS-R9 jusqu’à 1,37 fois supérieur au terme de stretching de DNS-R9-L. D’autre part, les termes supplémentaires liés aux variations de viscosité, tel que la production P_ν est pour DNS-R9 jusqu’à 8 fois supérieur au terme P_ν de DNS-R9-L. Rappelons que ces différences surviennent uniquement en choisissant deux modèles de viscosité de mélange différents.

Le même constat peut être fait sur le profil de l’énergie cinétique de turbulence $\frac{1}{2} \langle u_i^2 \rangle$, laquelle est plus importante (d’environ 40%) lorsque la formule de Wilke est utilisée comme le montre la figure 4.23. Là encore, l’évaluation des termes visqueux du bilan de l’énergie cinétique de turbulence (voir figure 4.24) dans l’intervalle de temps $\tau = [0 - 100]$, révèle que les termes supplémentaires liés aux gradients de viscosité tel que le terme de production P_ν

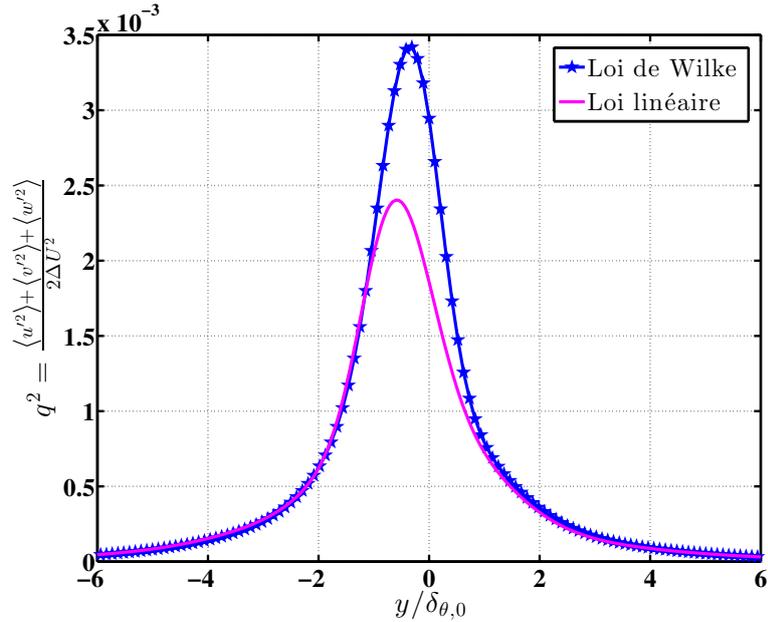


FIGURE 4.23 – Évolution de l'énergie cinétique de turbulence le long de la direction inhomogène y pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$ au temps $\tau = 40$.

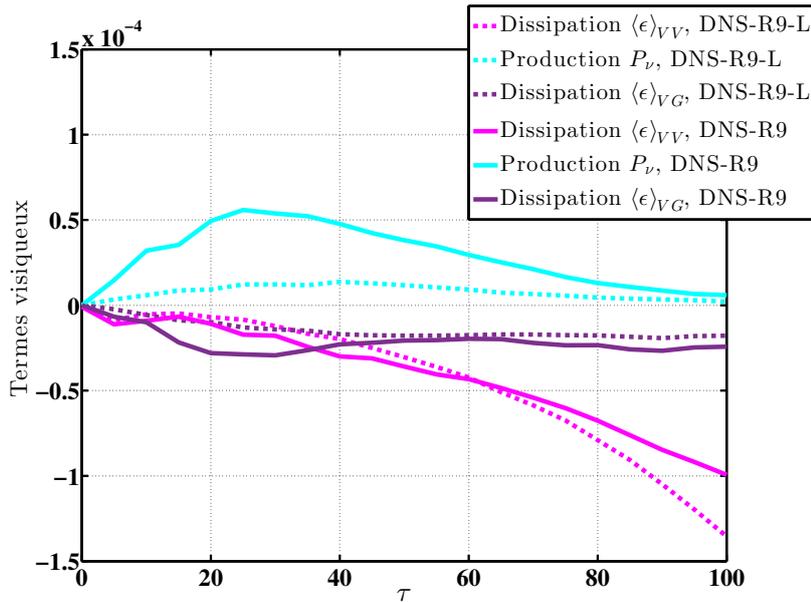


FIGURE 4.24 – Évaluation du bilan de l'énergie cinétique de turbulence le long de la direction inhomogène y pour l'écoulement à viscosité variable (a) DNS-R9-L et (b) DNS-R9 au temps $\tau = 40$.

est plus important dans la situation où le loi de Wilke est utilisée, idem pour le terme de production $\langle u'v' \rangle \frac{\langle U \rangle}{\partial y}$. L'énergie cinétique tout comme l'enstrophie évoluent plus rapidement de la même manière que les gradients de viscosité comme illustré par la figure 4.25. Le gradient de la vitesse moyenne longitudinale est également affecté par le modèle de la viscosité de mélange, la figure 4.26 montre que le pic du profil de gradient de vitesse est plus important lorsque le modèle de Wilke est utilisé. Nous observons également une plus forte dissymétrie pour ce modèle de la viscosité de mélange comparativement à l'emploi d'une loi linéaire.

Nous démontrons ainsi que pour des conditions d'écoulement similaires ($Re_{\theta,0}, R_\nu, R_u, R_\rho$), la modification de l'expression de la viscosité de mélange et, par conséquent, les gradients qui lui sont associés, modifient de manière significative la dynamique de l'écoulement, dont les effets sont ressentis sur une gamme d'échelle étendue (enstrophie, vitesse fluctuante, vitesse moyenne).

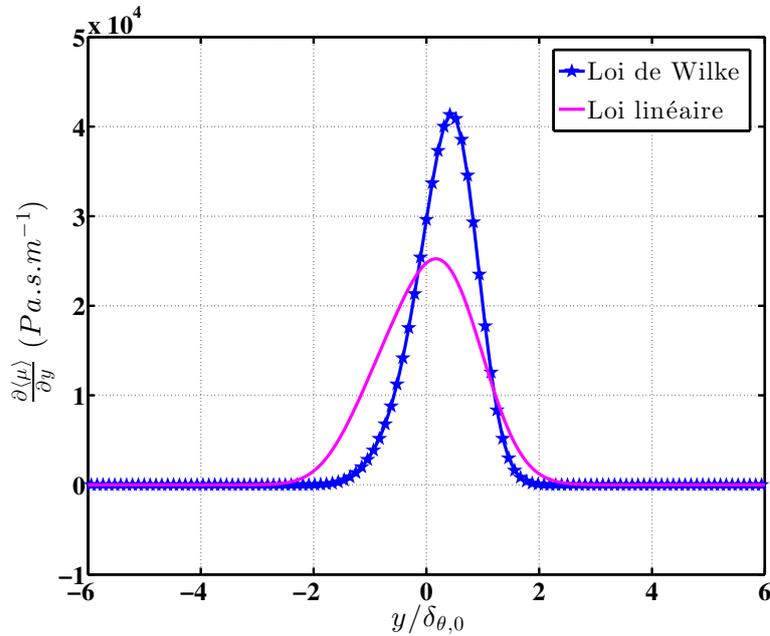


FIGURE 4.25 – Évolution du gradient de viscosité dynamique moyenne le long de la direction inhomogène y pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$ au temps $\tau = 40$.

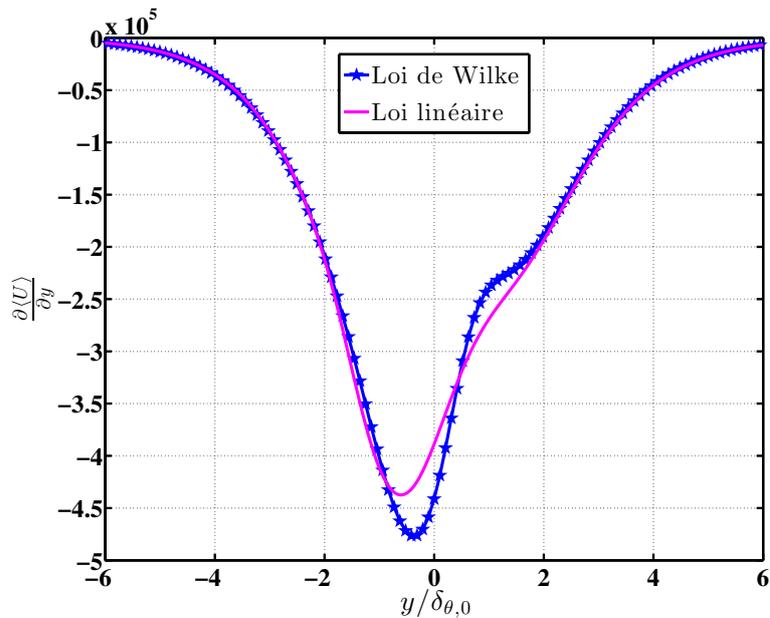


FIGURE 4.26 – Évolution de la vitesse moyenne le long de la direction inhomogène y pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$ au temps $\tau = 40$.

4.4 Influence des configurations co-courant et contre courant de la couche de mélange

La couche de mélange temporelle est caractérisée par des conditions aux limites périodiques suivant la direction de l'écoulement x . D'un point de vu statistique, le terme de transport convectif dans les équations du mouvement est nul, il n'est alors plus possible d'avoir un suivi convectif de l'écoulement. Ceci va limiter les possibilités d'étude que peut offrir une simulation numérique temporelle de couche de mélange. En particulier, la configuration de contre courant, de co-courant ou bien la situation de co-gradient ou de contre gradient, ne peut être étudiée que par simulation spatio-temporelle de la couche de mélange. En d'autres termes, la couche de mélange temporelle est sensible à la différence entre les grandeurs (propriétés physico-chimiques) des courants haut et bas de celle-ci, le signe positif ou négatif de cette différence n'est plus un paramètre influant. Ainsi, le signe et la valeur de la vitesse des courants libres U_p et U_g n'a pas d'influence sur l'évolution temporelle de la couche de mélange, seul la différence de vitesse $\Delta U = U_g - U_p$ importe. Pour appuyer ces propos, nous avons comparé deux couches de mélanges temporelles, à viscosité variable ($R_\nu = 9$) ayant la même valeur de différence de vitesse ΔU . La seule différence réside dans les valeurs données aux vitesses des courants libres. Pour le premier cas (DNS-R9), la situation dite de co-courant, est initiée avec des vitesses $U_g > U_p$. La seconde situation (DNS-R9-CC) est dite de contre-courant où les vitesses des courants libres sont égales mais de signe contraire, $U_g = -U_p = \Delta U/2$. Le tableau 4.8 résume les principaux paramètres des simulations DNS-R9 et DNS-R9-CC.

cas	R_ν	U_g ms^{-1}	U_p ms^{-1}	ΔU ms^{-1}	Schéma numérique	Loi de viscosité de mélange
DNS-R1	9	+36.41	+ 3.31	33.1	Centré conservatif	Linéaire
DNS-R9-CC	9	$\Delta U/2$	$-\Delta U/2$	33.1	Centré conservatif	Linéaire

TABLEAU 4.8 – Paramètres principaux des simulations DNS-R9 et DNS-R9-TH

La comparaison est effectuée pour quelques grandeurs typiques de la couche de mélange ; l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ l'énergie cinétique de turbulence q^2 et son taux moyen de dissipation $\langle \epsilon \rangle_{VV}$ comme montré aux figures 4.27, 4.28 et 4.29, respectivement. En accord avec ce qui a été avancé plus haut, les grandeurs δ_θ , q^2 et $\langle \epsilon \rangle_{VV}$ sont très proches pour les deux situations co-courant et contre-courant. Il vient alors que les termes supplémentaires liés aux variations de viscosité pour l'équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence sont évalué de la même manière. Ce résultat confirme l'impossibilité de mener certaines études en formulation temporelle, telle que les situations de co et contre gradient. En effet, la disposition spatiale et initiale des espèces chimiques associées à des vitesses tel que le produit $\frac{\partial \langle \mu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ est, à l'état initial, positif ou négatif ne montre aucune différence en formulation temporelle comme le montre l'évolution temporelle de l'épaisseur de couche de mélange (voir la figure

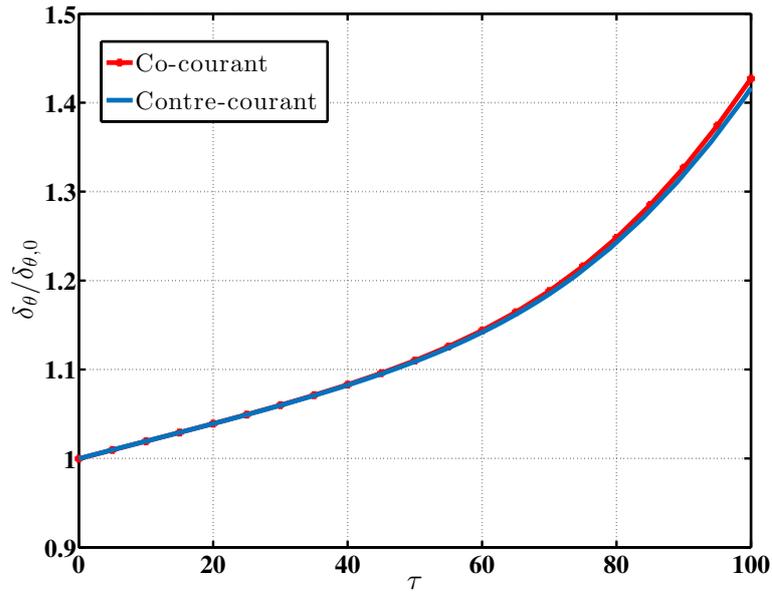


FIGURE 4.27 – Évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement pour les situations co-courant (DNS-R9) et contre-courant (DNS-R9-CC) de la couche de mélange à viscosité variable, $R_\nu = 9$.

4.30).

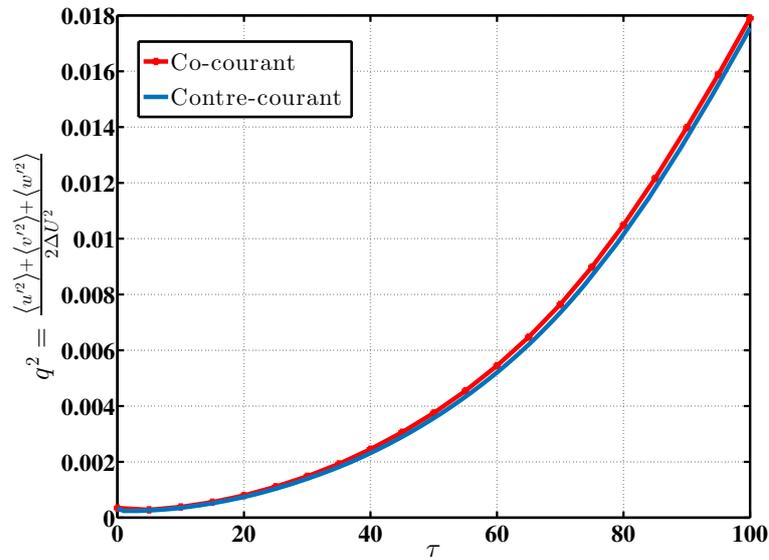


FIGURE 4.28 – Évolution temporelle de l'épaisseur de l'énergie cinétique de turbulence pour les situations co-courant et contre-courant de la couche de mélange à viscosité variable, $R_\nu = 9$.

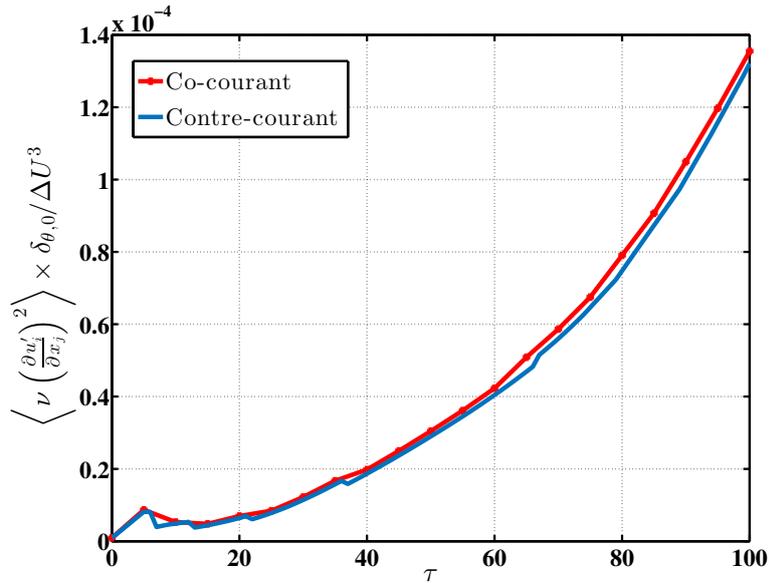


FIGURE 4.29 – Évolution temporelle du taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence pour les situations co-courant (DNS-R9) et contre-courant (DNS-R9-CC) de la couche de mélange à viscosité variable, $R_\nu = 9$.

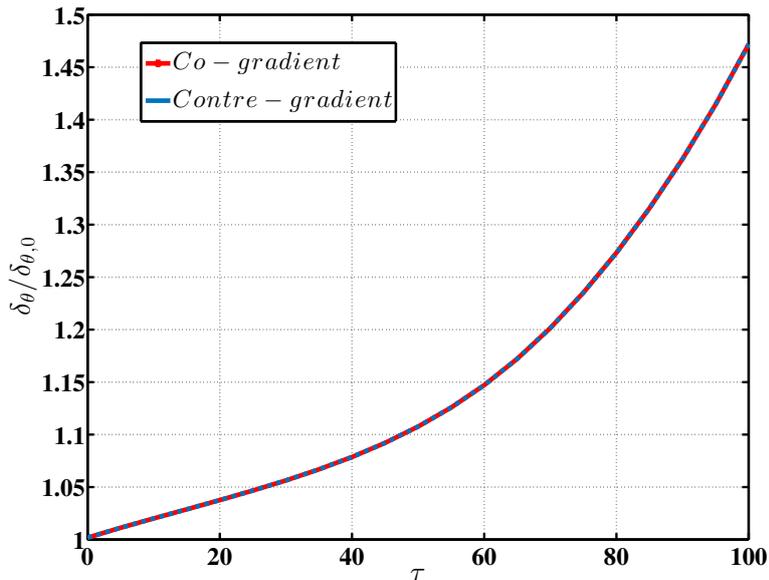


FIGURE 4.30 – Évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement (haut) et du taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence (bas) pour les situations co-courant et contre-courant de la couche de mélange à viscosité variable, $R_\nu = 9$.

4.5 Influence de l'épaisseur initiale de viscosité $\delta_{\nu,0}$

L'épaisseur initiale de la fraction massique du mélange et, par conséquent, de celle de la viscosité est un paramètre qui influe le développement du champ scalaire et de vitesse de la couche de mélange. En effet, plus l'épaisseur initiale du scalaire est petite, plus les gradients normaux à l'interface comprise entre les deux courants (espèces chimiques) sont

importants. À contrario, une large épaisseur initiale de viscosité conduit à s'établir une plus large interface entre le fluide visqueux et moins visqueux, les gradients de viscosité y sont de plus faibles intensités. Les équations de transport des différentes grandeurs moyennes et fluctuantes de l'écoulement à viscosité variable renferment explicitement des termes de gradients de viscosité, l'ampleur de ces derniers revêt une importance capitale dans l'étude que nous menons. C'est pourquoi nous montrons dans ce paragraphe, par le calcul numérique

case	R_ν	loi de viscosité de mélange	$\delta_{\theta,0}$ μm	$\delta_{\nu,0}$ μm	Schéma numérique
DNS-R9	9	Wilke	18.4	0	WENO 5 standard
DNS-R9-TH	9	Wilke	18.4	18.4	WENO 5 standard
DNS-R1	1	Viscosité constante	18.4	/	WENO 5 standard

TABLEAU 4.9 – Paramètres principaux des simulations DNS-R9, DNS-R9-TH et DNS-R1

directe de la couche de mélange temporelle, les effets de l'épaisseur initiale de la viscosité sur les différentes grandeurs de l'écoulement. Nous comparons ici deux cas peu différents dans leur configuration. Le premier est la couche de mélange temporelle à viscosité variable dont le rapport de viscosité est $R_\nu = 9$ et l'épaisseur initiale de viscosité $\delta_{\nu,0}$ est nulle. Le second cas, DNS-R9-TH, est en tout point identique au premier cas, DNS-R9, à l'exception de l'épaisseur de viscosité $\delta_{\nu,0}$ qui dans le cas présent est non nulle et égale à l'épaisseur de quantité de mouvement initiale $\delta_{\theta,0}$. Les principaux paramètres de ces deux simulations sont reportés dans le tableau 4.9. La figure 4.31 compare, en effet, trois grandeurs importantes pour l'écoulement de couche de mélange à savoir, l'épaisseur de quantité de mouvement, l'énergie cinétique de turbulence et le taux de dissipation de celle-ci dans l'intervalle de temps $\tau = [0 - 100]$ pour les deux situations à viscosité variable, citées plus haut, ainsi que l'écoulement à viscosité constante, DNS-R1. Nous remarquons que l'évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement se développe plus rapidement dans le cas où l'épaisseur initiale de viscosité $\delta_{\nu,0}$ est nulle (DNS-R9), et ce pour tout les temps τ compris entre 0 et 100. Il est alors intéressant de constater que malgré un rapport de viscosité R_ν identique, l'épaisseur initiale de viscosité joue un rôle important de telle manière que les grandeurs moyennes de l'écoulement sont modifiés. La raison principale réside dans l'intensité du gradient de viscosité (cinématique/dynamique) initial, qui dans le cas DNS-R9-TH ne représente que $1/48^{\text{ème}}$ de celui de DNS-R9. Résultat qui conforte, une fois de plus, l'importance des gradients de viscosité dans l'écoulement de couche de mélange.

Par ailleurs, la figure 4.31 montre l'importance de l'énergie cinétique de turbulence pour le cas DNS-R9, suivi par le cas DNS-R9-TH et enfin l'écoulement à viscosité constante DNS-R1. Il est intéressant de constater que malgré une épaisseur de viscosité plus importante pour le cas DNS-R9-TH, il n'en demeure pas moins que l'énergie cinétique est produite de manière plus importante comparativement à l'écoulement de référence à viscosité constante

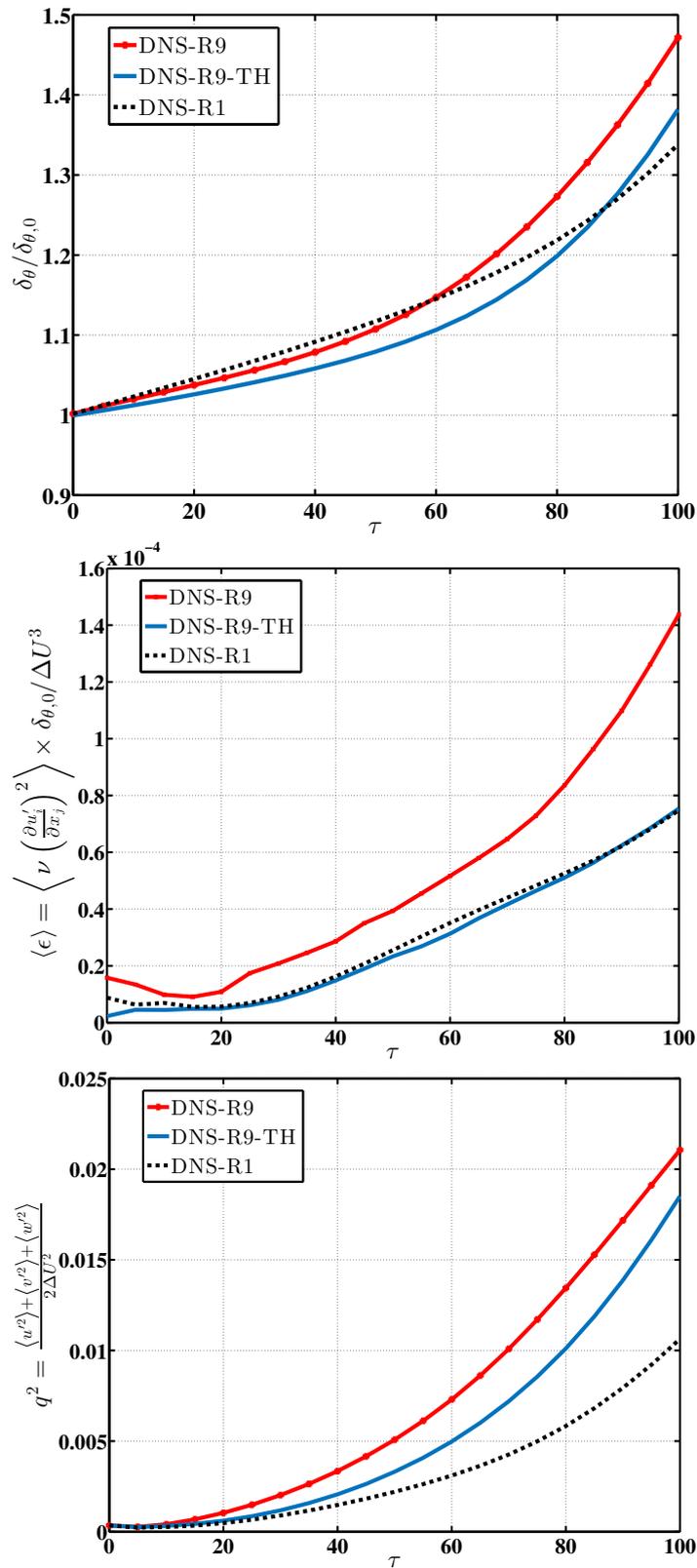


FIGURE 4.31 – Évolution temporelle de (a) l'épaisseur de quantité de mouvement (b) le taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence (c) l'énergie cinétique de turbulence pour les situations DNS-R9 et DNS-R9-TH

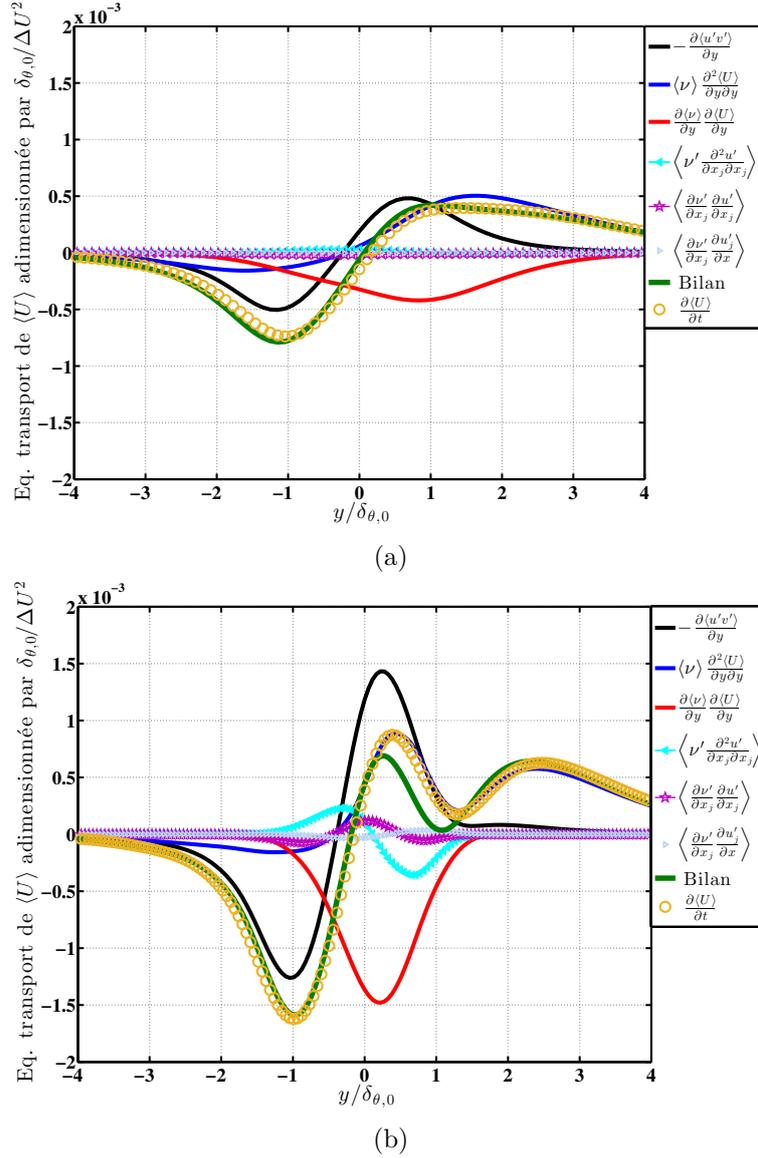


FIGURE 4.32 – Évaluation de l'équation de transport de la vitesse moyenne à $\tau = 40$ pour les situations (a) DNS-R9-TH et (b) DNS-R9.

DNS-R1. Précisément, nous pouvons voir d'après les figures (4.32) et (4.33) que les termes visqueux dans les équations de transport de la vitesse moyenne et celle de l'énergie cinétique de turbulence sont beaucoup plus faibles en ce qui concerne la simulation DNS-R9-TH comparé à DNS-R9. Le terme $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ par exemple, est 3,75 fois plus important pour le cas où l'épaisseur initiale $\delta_\nu = 0$ (DNS-R9) comparé à celui où l'épaisseur de viscosité initiale n'est plus nulle (DNS-R9-TH). Pour ce dernier, cela veut dire que, d'une part, le profil de la vitesse moyenne sera peu impactée par les variations de viscosité et le pic des gradients de vitesse ne seront plus augmentés (comme dans le cas de DNS-R9) et par conséquent la production des fluctuations de vitesse sera beaucoup moins intense que dans le cas DNS-R9. D'autre part, les termes supplémentaires visqueux dans le bilan de l'énergie cinétique de turbulence et, en particulier, le terme de production P_ν est quasi nul pour le cas DNS-R9-TH, ce qui dans l'intervalle de temps $\tau = [0 - 60]$, l'écoulement DNS-R9 voit la production totale (terme

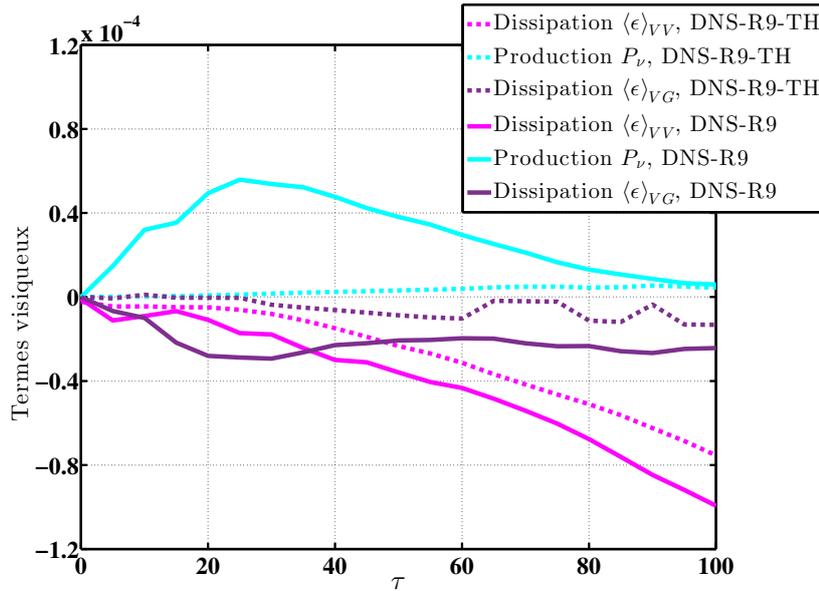


FIGURE 4.33 – Évolution temporelle des termes visqueux du bilan de l'énergie cinétique de turbulence adimensionnés par $(\delta_{\theta,0}/\Delta U^3)$ pour les situations DNS-R9-TH et DNS-R9.

classique et le terme visqueux) des fluctuations de vitesse augmenter.

Ceci nous amène à penser que dans le cas des jets peu visqueux débouchant dans un environnement R_ν fois plus visqueux, l'épaisseur de la lèvre de la buse d'injection doit être la plus fine possible afin d'observer des effets plus marqués des variations de viscosité. En effet, un bord de fuite épais va provoquer au niveau de celui-ci une zone de recirculation, qui va agir comme un "mixeur" dynamique des espèces chimiques de différente viscosité, cela va atténuer l'ampleur des gradients de viscosité à l'interface entre le fluide visqueux et moins visqueux. Il est alors nécessaire d'assurer au niveau de l'interface fluide visqueux/peu visqueux deux gradients importants, celui de la vitesse moyenne ainsi que celui de la viscosité moyenne, de sorte à ce que leur produit soit conséquent dans l'équation de transport de la vitesse moyenne axiale du jet.

4.6 Conclusion

Nous avons décrit, dans ce chapitre, les différents cas d'étude présentés dans ce travail. Une série de vérification a été menée pour valider notre méthode numérique. Ainsi, la taille de la grille et celle du domaine de calcul choisies pour effectuer nos calculs ont été validées. Par ailleurs, nos résultats ont montré que le schéma WENO standard présente une légère diffusion numérique dans la phase initiale de l'écoulement (entre $\tau \in [0 - 100]$). Celle-ci est de l'ordre de 7% pour $R_\nu = 1$ et de 15% pour $R_\nu = 9$, comparé à l'emploi du schéma centré conservatif et du schéma WENO large bande, respectivement. Néanmoins, les schémas centré et WENO large bande deviennent très instables et finissent par diverger pour les écoulements à viscosité variable $R_\nu > 1$, à partir de $\tau > 55$ et $\tau > 110$, respectivement. De manière générale, les

résultats obtenues suivant les différents schémas, cités ci-dessus, sont très comparables dans la phase initiale de l'écoulement. Le schéma WENO standard a été choisi pour explorer les temps longs des différents écoulements.

Les modèles de Wilke et linéaire décrivant la viscosité du mélange ont été comparés. Les résultats montrent que les gradients de viscosité sont plus forts lorsque le modèle de Wilke est employé. Pour un même rapport de viscosité $R_\nu = 9$, les résultats montrent des différences remarquables sur les différentes grandeurs statistiques turbulentes, entre les deux modèles de viscosité du mélange. Ceci indique, d'une part, que le choix de la loi de viscosité du mélange est important et conditionne les résultats d'une étude. D'autre part, les gradients de viscosité amplifient les grandeurs turbulentes, telle que l'énergie cinétique $\langle q^2 \rangle$. Notre choix s'est porté sur l'utilisation du modèle de Wilke, car plus proche des observations expérimentales que le schéma linéaire [47].

L'approche temporelle de la couche de mélange est régie par des équations gouvernantes symétriques, par rapport à la direction inhomogène y . En effet, le terme d'advection, $\langle U_j \rangle \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x_j}$ (où ϕ est un scalaire arbitraire), est nul. Néanmoins, lorsque les propriétés thermodynamiques de l'écoulement sont hétérogènes, nos résultats ont montré une certaine dissymétrie sur les profils des écoulements à viscosité variable. Par ailleurs, nous avons démontré l'impossibilité à mener l'étude des configurations dites de co- et contre-gradient, et, co- et contre-courant, par l'approche temporelle. Seul un développement spatio-temporel de l'écoulement permettrait de mener à bien ce type d'étude.

Le développement du champ scalaire dans l'écoulement est sensible à son état initial. En effet, nous avons comparé, dans ce chapitre, deux écoulements à viscosité variable, $R_\nu = 9$, initiés avec des épaisseurs $\delta_{\nu,0} = 0$ et $18.4 \mu m$ (cette dernière est équivalente à $\delta_{\theta,0}$). Les résultats ont montré que les effets de variation de viscosité sont moins importants lorsque l'épaisseur $\delta_{\nu,0} > 0$. En effet, dans ce cas, les gradients de viscosité sont atténués par la présence d'une zone de mélange d'épaisseur $\delta_{\nu,0}$. Ceci, influe sur les termes couplés vitesse-viscosité, tel que $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$, pouvant être prédominant dans l'équation de transport de la vitesse moyenne longitudinale.

Chapitre 5

Effets des variations de viscosité dans une couche de mélange temporelle : Analyse globale

Sommaire

5.1	Analyse du champ moyen pour différents rapports de viscosité .	104
5.1.1	Évaluation de l'épaisseur δ_θ de la couche de mélange	104
5.1.2	Analyse du champ de vitesse moyen	108
5.1.2.1	Évaluation des profils de la vitesse moyenne longitudinale $\langle U \rangle$	108
5.1.2.2	Évaluation de l'équation de transport de la vitesse moyenne $\langle U \rangle$	113
5.1.3	Analyse du champ de vortacité moyen	120
5.1.3.1	Évaluation des profils de la vortacité transversale moyenne $\langle \omega_z \rangle$	120
5.1.3.2	Évaluation de l'équation de transport de la vortacité transversale moyenne $\langle \omega_z \rangle$	123
5.1.4	Analyse du champ scalaire moyen	130
5.1.4.1	Évaluation des épaisseurs δ_T et δ_ν de la couche de mélange	130
5.1.4.2	Évaluation des profils de température $\langle T^* \rangle$ et de fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$	133
5.1.4.3	Évaluation de l'équation de transport de la température $\langle T \rangle$ et de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$	138
5.2	Conclusion	143

5.1 Analyse du champ moyen pour différents rapports de viscosité

5.1.1 Évaluation de l'épaisseur δ_θ de la couche de mélange

L'épaisseur de quantité de mouvement d'une couche de mélange incompressible peut s'écrire comme suit :

$$\delta_\theta(\tau) = \int_0^{L_y} \frac{[\langle U \rangle - U_p][U_g - \langle U \rangle]}{\Delta U^2} dy, \quad (5.1)$$

où $\langle U \rangle$ est la vitesse moyenne le long de la direction inhomogène y à $\tau = \frac{t\Delta U}{\delta_{\theta,0}}$ donné.

La figure 5.1 montre l'évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement $\delta_\theta(\tau)$ adimensionalisée par sa valeur initiale, $\delta_\theta(0) = \delta_{\theta,0}$, pour différents rapports de viscosité entre $\tau = 0$ et $\tau = 200$. Les paramètres des simulations DNS, présentées dans cette figure, sont rappelés dans le tableau 5.1.

case	R_ν	μ_g $\mu P.s$	μ_p $\mu P.s$	μ_{ref} $\mu P.s$	U_g ms^{-1}	U_p ms^{-1}	ΔU ms^{-1}	$\frac{U_g}{U_p}$ ms^{-1}
DNS-R1	1	9,00	9,00	9,00	66,41	5,95	60,46	11
DNS-R2.5	2,5	9,00	3,60	6,30	45,87	4,17	41,70	11
DNS-R4	4	9,00	2,25	5,62	40,96	3,72	37,24	11
DNS-R6	6	9,00	1,50	5,25	38,23	3,47	34,76	11
DNS-R9	9	9,00	1,00	5,00	36,41	3,31	33,10	11
DNS-R18	18	9,00	0,50	4,75	34,58	3,14	31,44	11

TABLEAU 5.1 – Paramètres des différentes simulations présentées dans la figure 5.1. La masse volumique $\rho = 1.32 \text{ kg.m}^{-3}$ est commune à toutes les simulations du présent tableau, $\mu_g = \rho\nu_g$, $\mu_p = \rho\nu_p$ et $\mu_{ref} = \rho\nu_{ref}$

On peut remarquer qu'à mesure que le rapport de viscosité augmente, la couche de mélange à viscosité variable croît plus rapidement que celle à viscosité constante. Pourtant, l'épaisseur de quantité de mouvement ne dépend que de l'intégrale de la vitesse longitudinale moyenne, ce qui signifie que cette vitesse moyenne est affectée par les variations spatio-temporelles de viscosité. Autrement dit, la dynamique des grandes échelles de la turbulence, où l'énergie est injectée, est modifiée en présence d'un gradient de viscosité. Or, pour les grands nombres de Reynolds, Kolmogorov postule que les grandes échelles de la turbulence ne dépendent pas de la viscosité du fluide en écoulement. Néanmoins, peu de précisions ont été apportées quand à la valeur du "grand nombre de Reynolds" (qui sans doute dépend de

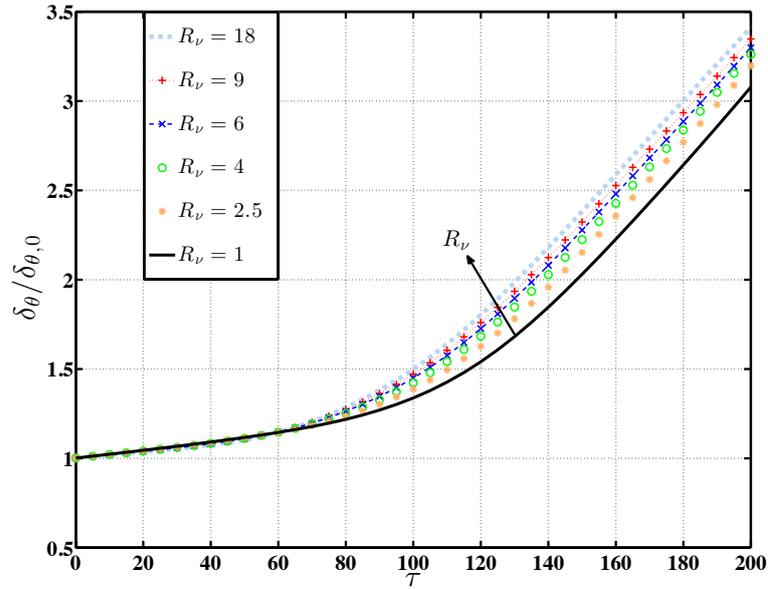


FIGURE 5.1 – Évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement pour différents rapports de viscosité R_ν .

l'écoulement considéré) pour lequel le postulat de Kolmogorov est vérifié. De plus, en se met-

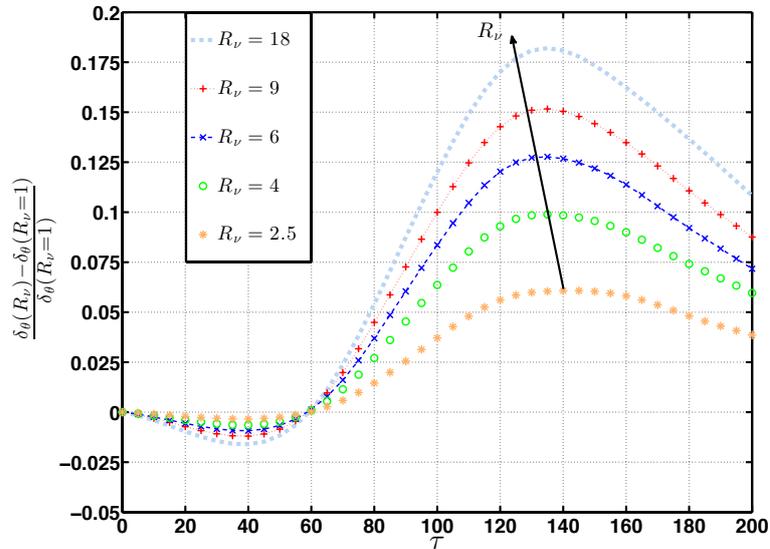


FIGURE 5.2 – Évolution temporelle de l'écart relatif de l'épaisseur de quantité de mouvement pour différents rapports de viscosité R_ν .

tant dans un cadre où son postulat est vérifié, Kolmogorov ne considère que les écoulements ayant des propriétés physico-chimiques constantes. Or, nous nous intéressons aux situations où des gradients de viscosité existent dans l'écoulement. Peut-on alors supposer que les statistiques des grandes échelles ne dépendent plus des gradients de viscosité aux grands nombres de Reynolds. Nous tacherons de répondre à cette question tout au long de ce manuscrit.

La figure 5.2 montre l'écart relatif de l'épaisseur de quantité de mouvement des écoule-

ments à viscosité variable par rapport à l'écoulement de référence :

$$\frac{\delta_\theta(R_\nu) - \delta_\theta(R_\nu = 1)}{\delta_\theta(R_\nu = 1)} \quad (5.2)$$

On peut observer que cet écart est nul à l'état initial ($\tau = 0$), puisque toutes les simulations sont initiées avec la même épaisseur initiale, et il est négatif jusqu'au temps $\tau = 60$ où il redevient à nouveau nul. Dans cette phase très proche de l'état initial, les variations de viscosité semblent affecter négativement l'épaisseur de la couche de mélange, même si cet écart négatif demeure inférieur à 1%. Puis, à partir de $\tau = 60$ et jusqu'à $\tau = 200$, les variations de viscosité jouent cette fois-ci un rôle positif caractérisé par un écart relatif nettement positif. Celui-ci atteint 18% de gain pour le rapport de viscosité $R_\nu = 18$ à $\tau \approx 130$. La figure 5.3

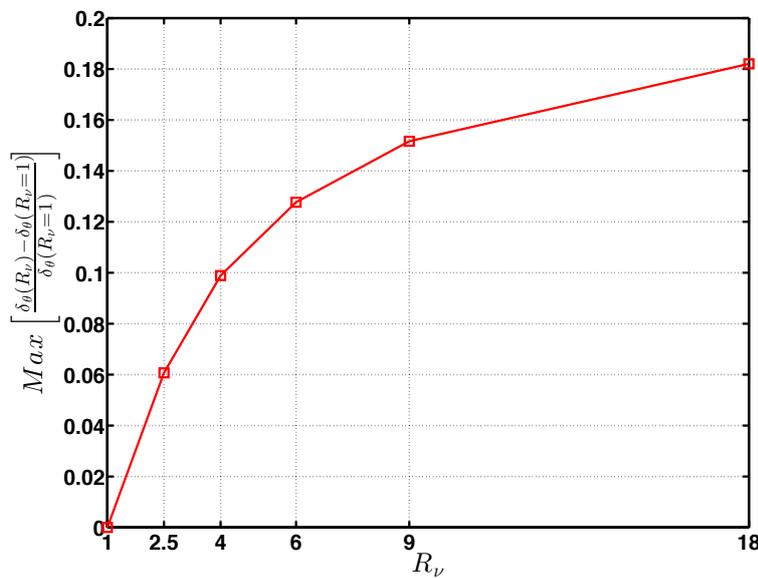


FIGURE 5.3 – Évolution temporelle de l'écart relatif de l'épaisseur de quantité de mouvement pour différents rapports de viscosité R_ν .

montre la dépendance fortement non linéaire du maximum de l'écart relatif de l'épaisseur de quantité de mouvement en fonction du rapport de viscosité. À titre d'exemple, le fait de doubler le rapport de viscosité (passer de $R_\nu = 9$ à $R_\nu = 18$) ne mène pas forcément à doubler cet écart relatif de l'épaisseur de quantité de mouvement. Bien au contraire, il semble y avoir une certaine saturation des effets de variation de viscosité vers un état asymptotique ou bien un état de maximum d'effet. Il existe alors un rapport de viscosité critique $R_{\nu C}$ au delà duquel les effets de variations de viscosité sont, soit indépendants du rapport de viscosité ou alors tendent à affecter négativement les grandeurs statistiques de la couche de mélange (en comparaison avec l'écoulement de référence). Néanmoins, la valeur de $R_{\nu C}$ dépend fortement du nombre de Reynolds initial de l'écoulement de couche de mélange. En effet, il y'a une compétition entre l'énergie injectée à l'état initial (nombre de Reynolds initial) et l'amplitude des variations de viscosité (rapport de viscosité initial R_ν), car cette énergie va se heurter par endroit à des paquets de fluide R_ν fois plus visqueux que le fluide injecté. Le tout est que cette énergie soit suffisante pour ne pas être amortie par une forte

viscosité environnante. Pour étayer ces propos, analysons la figure 5.4 où est tracé l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement $\delta_\theta/\delta_{\theta,0}$ pour les simulations DNS-R1-U0-80, DNS-R9-U0-320 et DNS-R9-U0-80 :

Cas tests	R_ν	μ_g $\mu P.s$	μ_p $\mu P.s$	μ_{ref} $\mu P.s$	U_g ms^{-1}	U_p ms^{-1}	ΔU ms^{-1}	$Re_{\theta,0}$	$Re_{g,0}$
DNS-R1-U0-80	1	5.00	5.00	5.00	33.38	0	33.38	160	80
DNS-R1-U0-320	1	5.00	5.00	5.00	133.50	0	133.50	640	320
DNS-R9-U0-80	9	45.00	5.00	25.00	33.10	0	33.10	32	80
DNS-R9-U0-320	9	45.00	5.00	25.00	132.40	0	132.40	128	320

TABLEAU 5.2 – Paramètres des différents principaux cas-tests. La masse volumique $\rho = 1.32 \text{ kg.m}^{-3}$ est commune à toutes les simulations du présent tableau, $\mu_g = \rho\nu_g$, $\mu_p = \rho\nu_p$ et $\mu_{ref} = \rho\nu_{ref}$

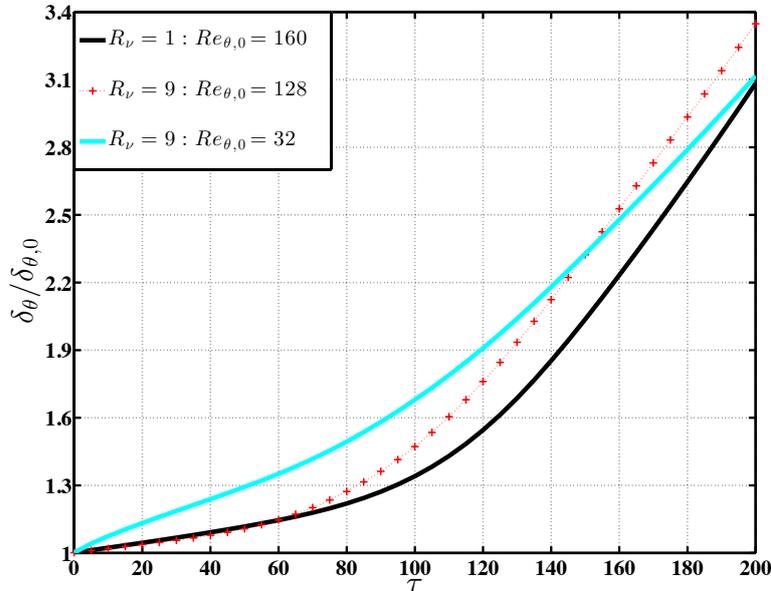


FIGURE 5.4 – Évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement pour différents rapports de viscosité R_ν , ces courbes montrent l'effet du nombre de Reynolds initial sur l'évolution de la couche de mélange à viscosité variable.

Nous pouvons constater que l'épaisseur de quantité de mouvement adimensionnée évolue plus rapidement lorsque le nombre de Reynolds initial de l'écoulement à viscosité variable est plus petit ($Re_{\theta,0} = 32$ au lieu de 160) et ce jusqu'au temps $\tau = 100$. A partir de ce temps, cette épaisseur est marquée par une évolution plus lente, elle reste néanmoins plus importante que le cas de référence mais elle lui devient égale à $\tau = 200$. La figure 5.5 montre l'effet du nombre de Reynolds initial sur l'évolution temporelle de l'écart relatif de l'épaisseur de quantité de mouvement par rapport à l'écoulement de référence ($R_\nu = 1$). Nous pouvons constater que cet écart est, dans la gamme de temps $\tau = 0$ à 200, nul à l'état initial puis strictement positif pour les autres temps $\tau > 0$ pour DNS-R9-U0-80. La faible valeur du

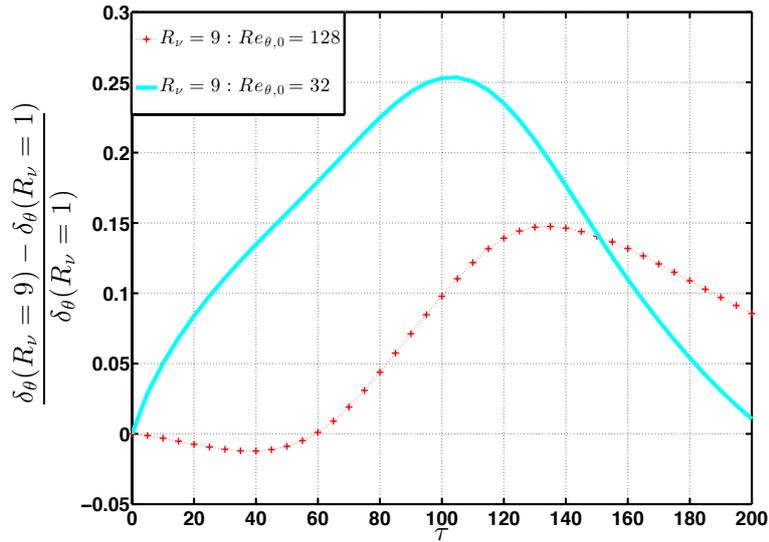


FIGURE 5.5 – Évolution temporelle de l'écart relatif de l'épaisseur de quantité de mouvement pour différents rapports de viscosité R_ν .

nombre de Reynolds initial, $Re_{\theta,0} = 32$, permet aux gradients de viscosité de jouer un rôle plus important dans la phase initial du développement de la couche de mélange temporelle.

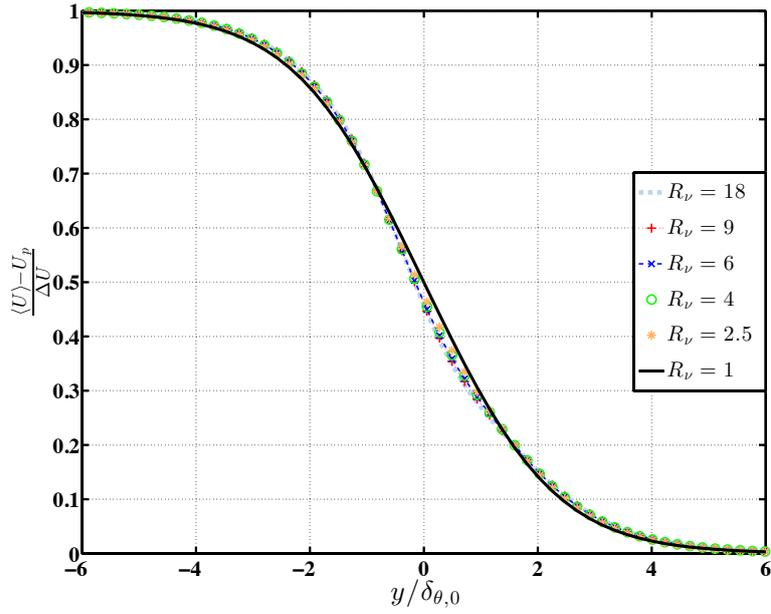
L'analyse des résultats des figures 5.1 et 5.4 nous permettent de dire que, d'une part, les variations de viscosité jouent un rôle non négligeable dans l'évolution de l'épaisseur de la couche de mélange temporelle à partir d'un rapport de viscosité R_ν de 2.5, d'autre part, il existe, pour un même rapport de viscosité (dans notre cas $R_\nu = 9$), des différences plus au moins attendues lorsque le nombre de Reynolds initial est modifié. Reste maintenant à comprendre ces observations et les relier au profil de vitesse moyenne longitudinale. En effet, l'épaisseur δ_θ est, à une constante près, égale à l'intégrale de la vitesse moyenne longitudinale $\langle U \rangle$ le long de la direction inhomogène y . Par conséquent, toutes les modifications dues aux variations de viscosité sur l'épaisseur de quantité de mouvement sont une conséquence directe de la modification des profils de vitesse $\langle U \rangle$. L'analyse de ces modifications est l'objectif du prochain paragraphe 5.1.3

5.1.2 Analyse du champ de vitesse moyen

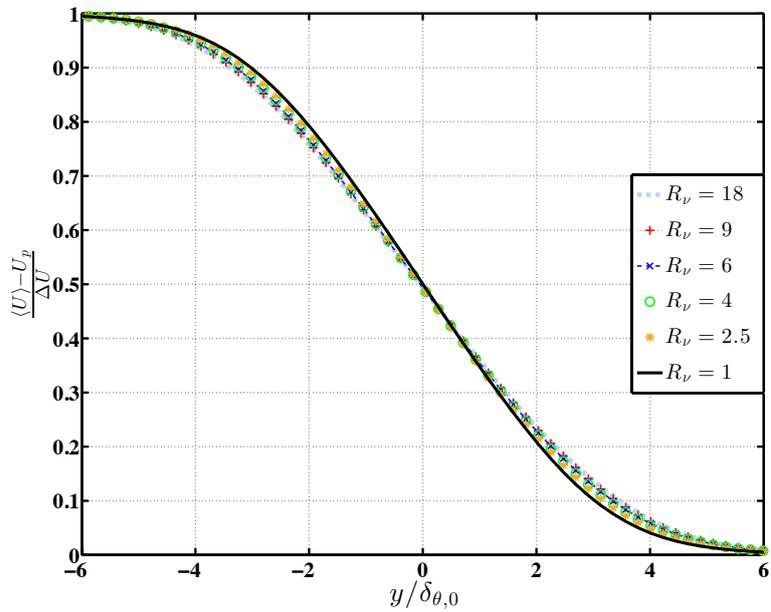
Nous allons dans cette section analyser l'évolution spatio-temporelle du champ de vitesse moyen. L'objectif est la mise en évidence des effets de variation de viscosité sur les statistiques à grande échelle. Pour ce faire, nous analyserons les profils de différentes grandeurs moyennes et les équations de transport associées.

5.1.2.1 Évaluation des profils de la vitesse moyenne longitudinale $\langle U \rangle$

La figure 5.6 montre le profil de la vitesse moyenne longitudinale le long de la direction



(a) $\tau = 40$.

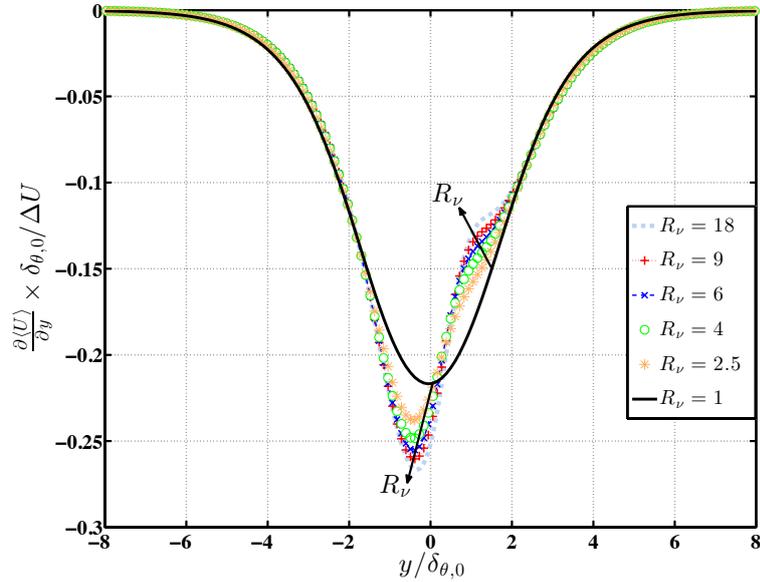


(b) $\tau = 100$.

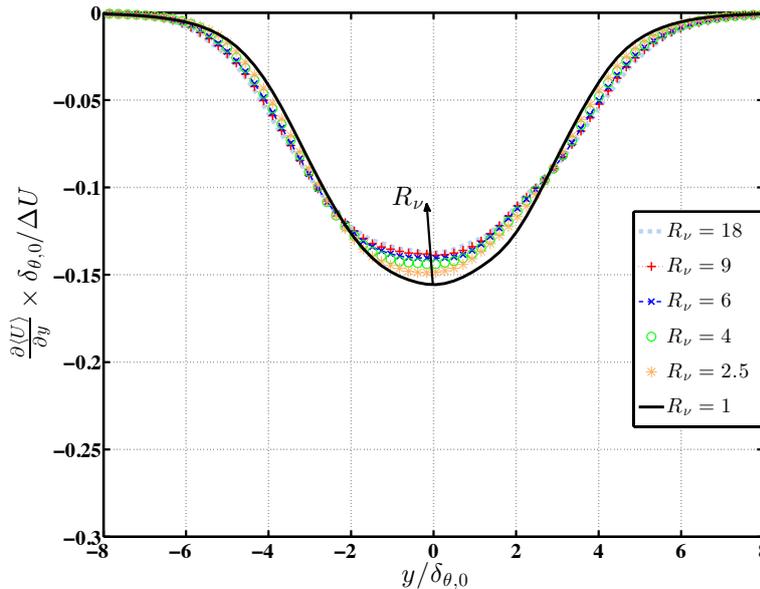
FIGURE 5.6 – Profil de la vitesse moyenne longitudinale tracé le long de la direction inhomogène y pour différents rapports de viscosité R_ν aux temps $\tau = 40$ et 100 .

inohomogène y pour différents rapports de viscosité à $\tau = 40$ (figure 5.6a) et $\tau = 100$ (figure 5.6b). Nous pouvons observer qu'au centre de la couche de mélange ($y = 0$), la vitesse de l'écoulement à viscosité variable ($R_\nu > 1$) est légèrement plus faible que celle de l'écoulement à viscosité constante quand $\tau = 40$. Nous pouvons également remarquer qu'à ce même temps, la vitesse au bord de la couche de mélange est légèrement plus importante pour les cas à viscosité variable. En faisant la même comparaison au temps adimensionnel $\tau = 100$, la figure 5.6b montre un effet contraire, c'est-à-dire une différence de vitesse plus nette sur les bords ; les écoulements à viscosité variable sont plus ralentis du côté haute vitesse ($y/\delta_{\theta,0} < 0$) et plus

accélérés du coté basse vitesse ($y/\delta_{\theta,0} > 0$) de la couche de mélange. La vitesse au centre prend une valeur adimensionnelle moyenne de 0.5 quelque soit le rapport de viscosité.



(a) $\tau = 40$.

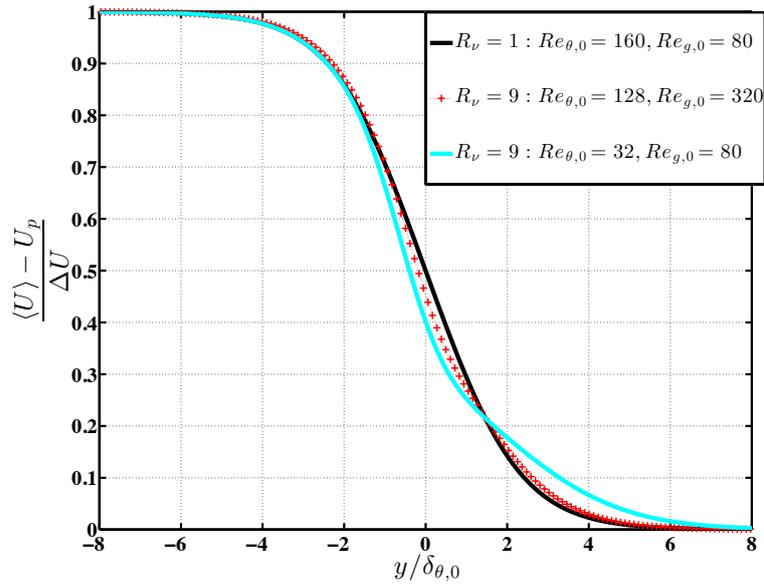


(b) $\tau = 100$.

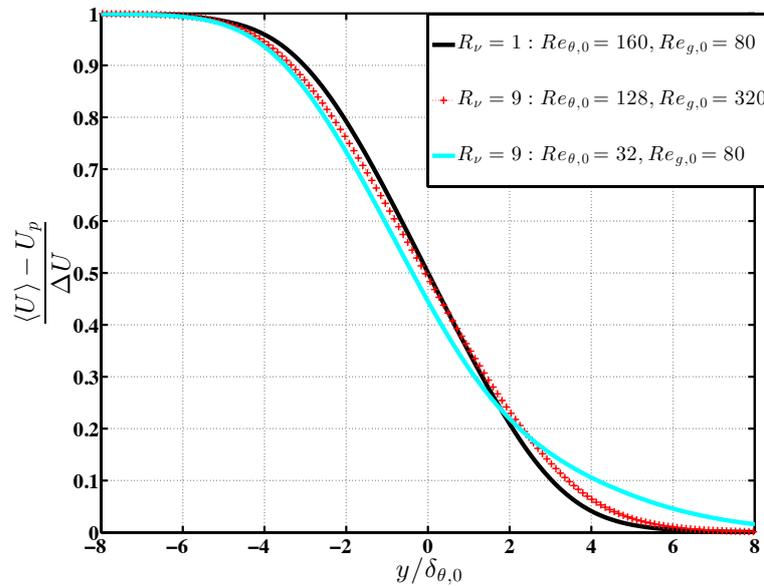
FIGURE 5.7 – Profil du gradient de la vitesse moyenne longitudinale $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ tracé le long de la direction inhomogène y pour différents rapports de viscosité R_ν , aux temps $\tau = 40$ et 100.

La figure 5.7 montre le profil du gradient de vitesse moyenne longitudinale le long de la direction inhomogène y pour différents rapports de viscosité. Nous remarquons d'après la figure 5.7a, que le gradient de vitesse des différents écoulements à viscosité variable est, d'une part, asymétrique et, d'autre part, présente un pic de valeur plus importante comparative-ment à l'écoulement de référence à viscosité constante. L'asymétrie résulte de la distribution asymétrique de la viscosité au sein de la couche de mélange. Ces résultats montrent en ef-

fet que les variations de viscosité modifient la vitesse moyenne longitudinale tel que nous



(a) $\tau = 40$.

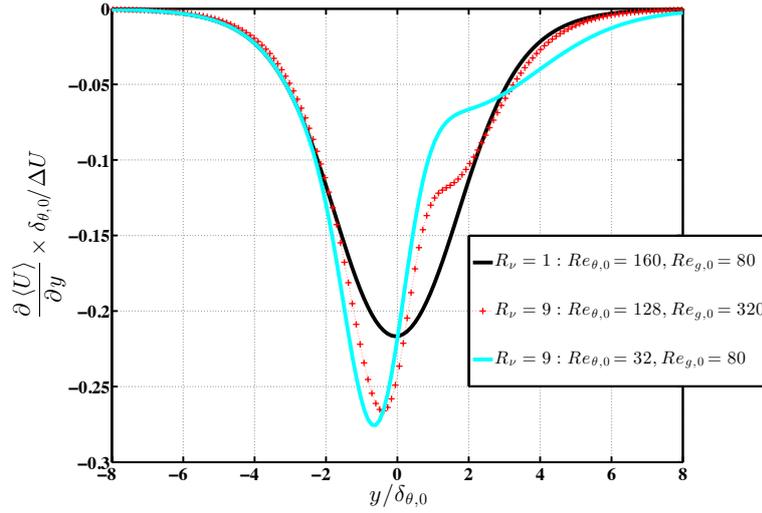


(b) $\tau = 100$.

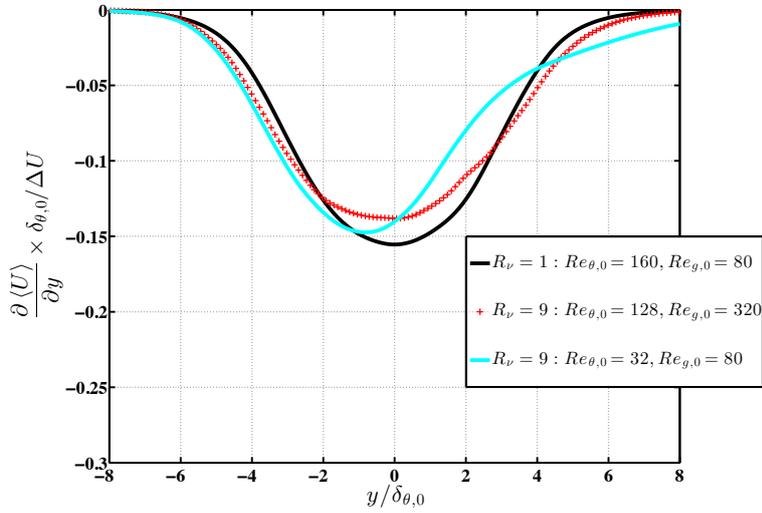
FIGURE 5.8 – Effet du nombre de Reynolds initial sur le profil de la vitesse moyenne longitudinale tracé le long de la direction inhomogène y pour les rapports de viscosité R_ν 9 et 1 aux temps $\tau = 40$ et 100.

l'avions avancé au paragraphe précédent. Ces effets sont expliqués, en partie, par la présence de termes supplémentaires liés aux variations spatio-temporelle de viscosité dans l'équation de quantité de mouvement.

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que le nombre de Reynolds initial, $Re_{\theta,0}$, a une influence qualitative et quantitative sur les effets de variation de viscosité sur l'épaisseur de la couche de mélange temporelle (figures 5.4 et 5.5), ce qui peut s'expliquer par l'analyse des profils de vitesse moyenne longitudinale.



(a) $\tau = 40$.



(b) $\tau = 100$.

FIGURE 5.9 – Effet du nombre de Reynolds initial sur le profil du gradient de la vitesse moyenne longitudinale tracé le long de la direction inhomogène y pour les rapports de viscosité R_ν 9 et 1 aux temps $\tau = 40$ et 100.

La figure 5.8 montre l'évolution du profil de la vitesse moyenne $\langle U \rangle$ à $\tau = 40$ et $\tau = 100$ pour l'écoulement à viscosité constante DNS-R1-U0-80 ($R_\nu = 1, Re_{\theta,0} = 160$) et deux écoulements à viscosité variable ($R_\nu = 9$) pour lesquels le nombre de Reynolds initial est $Re_{\theta,0} = 128$ et 32 (DNS-R9-U0-320 et DNS-R9-U0-80 respectivement). On remarque que lorsque le nombre de Reynolds initial est modéré ($Re_{\theta,0} = 32$), la vitesse moyenne présente, d'une part, un plus grand déficit au centre de la couche de mélange comparé à l'écoulement à viscosité constante et, d'autre part, une nette accélération dans la zone des $y/\delta_{\theta,0}$ positifs correspondant au coté basse vitesse de la couche de mélange. Ce comportement de la vitesse moyenne explique l'augmentation de l'épaisseur de la couche de mélange lorsque le nombre de Reynolds initial est modéré (voir figure 5.4) . Ceci est le résultat d'une forte diffusion de la quantité de mouvement par les gradients de viscosité dans la couche de mélange, ce qui nous amènera à analyser l'équation de transport de la vitesse moyenne longitudinale pour relever

l'origine exacte de cette forte diffusion.

Les gradients de vitesse $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ présentent de fortes dissymétries pour les écoulements à viscosité variable. Ces dissymétries sont plus accentuées lorsque le nombre de Reynolds initial est plus modéré (DNS-R9-U0-80) comme le montre la figure 5.9. Cette dissymétrie disparaît à $\tau = 100$ lorsque le nombre de Reynolds initial est de 128 (DNS-R9-U0-320), ce qui n'est pas encore le cas de l'écoulement à bas Reynolds. Pour ce dernier cas, l'effet des gradients de viscosité sur la vitesse moyenne est plus prononcé et persiste davantage dans le temps.

Ainsi, la comparaison de ces deux écoulements à viscosité variable, qui pour rappel partagent le même rapport de viscosité ($R_\nu = 9$) mais diffèrent par leurs nombres de Reynolds initiaux, montre que la présence des gradients de viscosité dans l'écoulement induit des effets plus au moins différents, aussi bien qualitatifs que quantitatifs, en ce qui concerne l'évolution de la vitesse moyenne et l'épaisseur de quantité de mouvement.

5.1.2.2 Évaluation de l'équation de transport de la vitesse moyenne $\langle U \rangle$

A présent, évaluons l'équation de transport de la vitesse moyenne longitudinale $\langle U \rangle$ (équation 2.16 pour l'écoulement de couche de mélange à viscosité variable et constante). Cette équation est rappelée ci-dessous

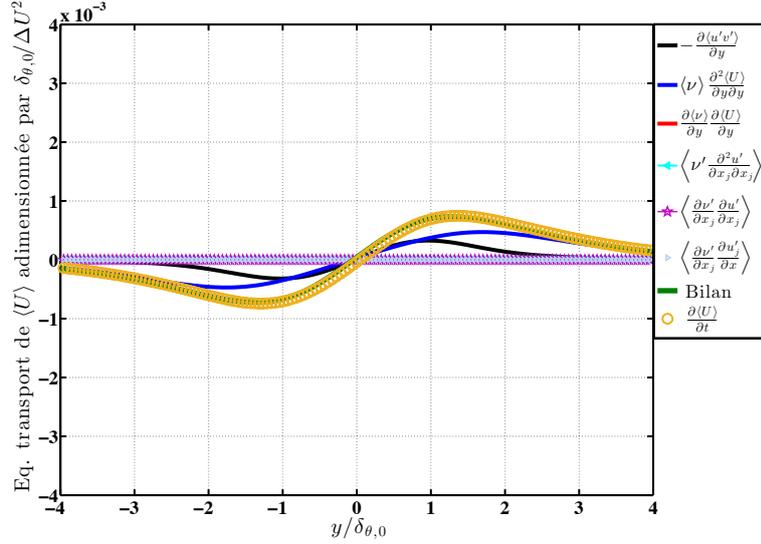
$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} = -\frac{\partial \langle v'u' \rangle}{\partial y} + \langle \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial y^2} \quad (5.3a)$$

$$+ \left\langle \nu' \frac{\partial^2 u'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x} \right\rangle \quad (5.3b)$$

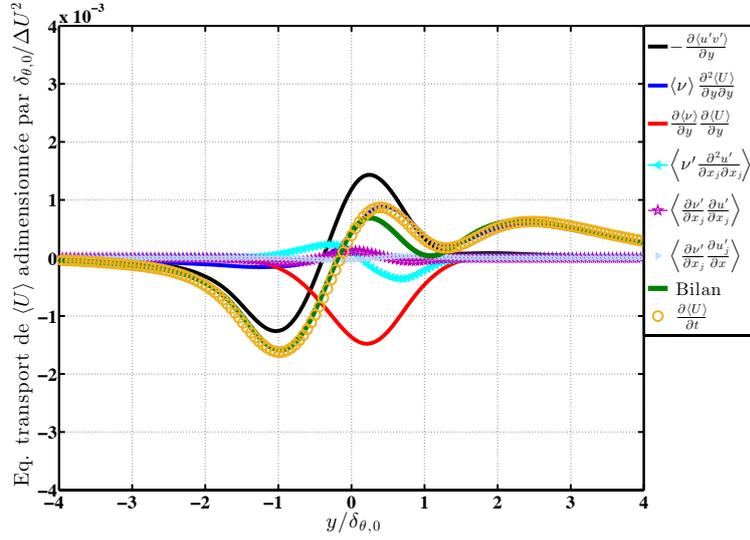
Ainsi, les différences notées sur les profils de vitesse moyenne longitudinale aussi bien entre l'écoulement à viscosité variable et celui à viscosité constante, mais également entre les écoulements à viscosité variable (de rapport R_ν identique ou bien différent) se traduisent par des différences au niveau des termes de l'équation 5.3. La comparaison de ces derniers pour les différents cas tests, simulés lors de cette étude, permet d'expliquer, entre autres, la diffusion de la quantité de mouvement qui se trouve être amplifiée en présence de gradients de viscosité. Dans un souci de clarté, nous détaillons, dans ce qui suit, notre analyse pour deux rapports de viscosité particuliers : $R_\nu = 1$ et 9. Les figures 5.10 et 5.12 montrent l'évaluation de l'équation de transport de la vitesse moyenne $\langle U \rangle$ pour ces deux rapports de viscosité au temps adimensionnel $\tau = 40$ et 100, respectivement. Avant de commencer la discussion ci-après, il est utile d'apporter une précision concernant la légende des figures 5.10 et 5.11. En effet, la courbe verte dite 'Bilan' n'est autre que le membre de droite de l'équation 5.3, qui doit être égal au membre de gauche de cette même équation, équivaut au terme instationnaire $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t}$.

Les différents termes de l'équation 5.3 sont comparés ci-dessous :

- Terme $-\frac{\partial \langle v'u' \rangle}{\partial y}$ (courbe noire)



(a) DNS-R1.



(b) DNS-R9.

FIGURE 5.10 – Évaluation de l'équation de transport de $\langle U \rangle$ (expression 5.3) pour les rapports de viscosité $R_\nu = 1$ et 9 à $\tau = 40$.

Nous pouvons remarquer que le gradient vertical des tensions $\langle v'u' \rangle$ est nettement plus important pour l'écoulement à viscosité variable ($R_\nu = 9$), ce qui indique que les fluctuations de vitesse sont plus importantes pour cet même écoulement comparé au cas de référence où les gradients de viscosité sont nuls. L'écoulement à viscosité variable s'accompagne d'une augmentation (production) rapide des fluctuations de vitesse. La question est comment relier cette augmentation des fluctuations de vitesse à la simple présence de gradients de viscosité. À notre sens, le scénario le plus probable est que des paquets de fluide lents, mais visqueux, vont servir d'obstacles aux paquets de fluides rapides, mais moins visqueux. Ce qui oblige ces, derniers, à effectuer des contournements locaux très localisés et très brefs. Ceci s'accompagne d'une production plus accentuée des fluctuations de vitesse.

Nous pensons que les gradients de viscosité n'introduisent pas de modes d'instabilités

supplémentaires, ils servent à amplifier les modes les plus instables déjà existants dans l'écoulement. En effet, les gradients de viscosité semblent agir sur l'instabilité Kelvin-Helmholtz, de manière à l'accentuer ou au contraire à l'amortir [66].

Il faut également noter l'asymétrie de ce terme pour l'écoulement à viscosité variable, le maximum des tensions $\langle v'u' \rangle$ se trouve du côté du fluide rapide et moins visqueux, là où le gradient vertical de vitesse moyenne $\langle U \rangle$ est maximum.

- Terme $\langle \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial y \partial y}$ (courbe bleu)

Ce terme correspond à la diffusion moléculaire de la quantité de mouvement, celle-ci devient négligeable devant le gradient vertical du cisaillement turbulent $\frac{\partial \langle v'u' \rangle}{\partial y}$ lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand. A $\tau = 40$, la diffusion moléculaire est de même ordre de grandeur que les gradients $-\frac{\partial \langle v'u' \rangle}{\partial y}$ pour l'écoulement à viscosité constante. Signe que la turbulence est dans sa phase initiale de développement. À contrario, cette diffusion moléculaire est pour l'écoulement à viscosité variable, d'une part quasi nulle du côté du fluide moins visqueux (du fait de la faible viscosité et de l'importance des fluctuations de vitesse à cet endroit) et, d'autre part, inférieure, mais pas encore négligeable, devant les gradients $-\frac{\partial \langle v'u' \rangle}{\partial y}$ du côté du fluide visqueux. Cela signifie qu'au temps $\tau = 40$ la turbulence est d'avantage développée en présence des gradients de viscosité comparé à l'écoulement de référence.

- Le terme $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ (courbe rouge)

C'est un terme supplémentaire grandes échelles qui est dans notre étude soit nul, si l'écoulement est à viscosité constante ou négatif pour les écoulements à viscosité variable (configuration en contre-gradient vitesse-viscosité). L'importance de ce terme est loin d'être négligeable dans l'équation de transport de la vitesse moyenne $\langle U \rangle$, il est à $\tau = 40$ du même ordre de grandeur que le terme $-\frac{\partial \langle v'u' \rangle}{\partial y}$ (voir figure 5.10). Il agit comme un terme puit contribuant à la diminution de la vitesse au centre de la couche de mélange. Ce résultat met en évidence l'importance de considérer les termes supplémentaires dans l'écriture des équations régissant le mouvement de fluide en présence de variations de viscosité. Évidemment, ce produit des gradient de vitesse et de viscosité va, à mesure que le mélange se met en place, diminuer jusqu'à devenir négligeable dans l'équation 5.3 par rapport au terme $-\frac{\partial \langle v'u' \rangle}{\partial y}$.

- Terme $\left\langle \nu' \frac{\partial^2 u'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$ (courbe bleu turquoise)

En présence d'un gradient de viscosité à l'état initial au sein de la couche de mélange, ce terme supplémentaire fait intervenir les fluctuations de viscosité et les gradients de la vitesse fluctuante longitudinale. Il contribue de manière positive du côté du fluide rapide ($y/\delta\theta, 0 < 0$) et négative du côté du fluide lent ($y/\delta\theta, 0 > 0$). Il joue un rôle contraire à celui du terme de diffusion moléculaire ; il tend plutôt à accélérer le fluide rapide et à ralentir davantage le fluide lent. Néanmoins, l'importance de ce terme dans l'équation de transport de la vitesse moyenne longitudinale est faible, ce qui est une bonne¹ chose au regard de l'épaisseur de

1. En jouant un rôle contraire à la diffusion moléculaire, le terme $\left\langle \nu' \frac{\partial^2 u'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$ s'oppose à la diffusion de la

mélange qui, s'il était plus important, influencerait négativement sur celle-ci.

- Termes $\left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'}{\partial x_j} \right\rangle$ et $\left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x} \right\rangle$ (courbe violette et grise, respectivement)

Ces deux termes supplémentaires faisant intervenir les gradients de viscosité fluctuante et ceux de la vitesse fluctuante sont dans ce bilan négligeables. Leur amplitude représente au mieux pas plus de 5 % par rapport à celle du terme instationnaire. Ceci s'explique par la faible amplitude des fluctuations de viscosité et de leur gradient. En effet, au temps adimensionnel $\tau = 40$, se sont encore les gradients de viscosité moyenne qui dominent dans l'écoulement. Les fluctuations typiques de viscosité $\sqrt{\langle \nu'^2 \rangle} / \Delta \nu$ sont de l'ordre de 12,5 % et 19 % à $\tau = 40$ et 100, respectivement.

- Termes $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t}$ (courbe orange)

La périodicité dans la direction longitudinale du domaine de calcul impose une évolution temporelle de l'écoulement. Le terme transitoire de la vitesse moyenne est, par conséquent, non nul contrairement au terme de transport convectif. On peut remarquer que ce terme transitoire est parfaitement symétrique en ce qui concerne l'écoulement de référence ($Re_\nu = 1$), tout comme le profil de la vitesse moyenne $\langle U \rangle$. Ceci est loin d'être le cas pour l'écoulement à viscosité variable, où on retrouve l'asymétrie observée sur le profil de vitesse $\langle U \rangle$ (voir figures 5.6 et 5.7). On peut également remarquer que l'amplitude de la variation temporelle de la vitesse moyenne longitudinale est globalement plus importante pour l'écoulement à viscosité variable.

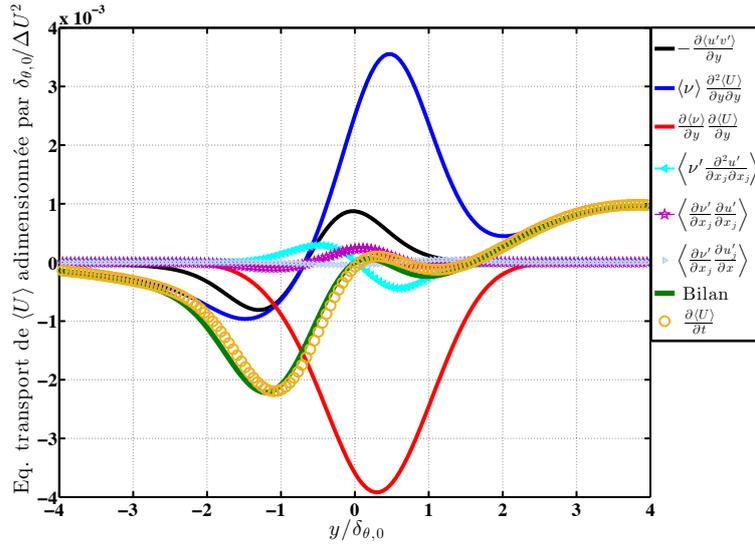
À partir de l'analyse des profils de vitesses longitudinale et de leur équation de transport en présence des gradients de viscosité évalués à $\tau = 40$, nous pouvons avancer les deux principales conclusions suivantes :

- Les termes dits 'classiques' apparaissant dans les deux situations à viscosité constante et à viscosité variable sont différents dans ces deux situations,
- Les termes supplémentaires, en particulier ceux à grande échelle (ex. $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$), sont très influents dans le bilan de la vitesse moyenne.

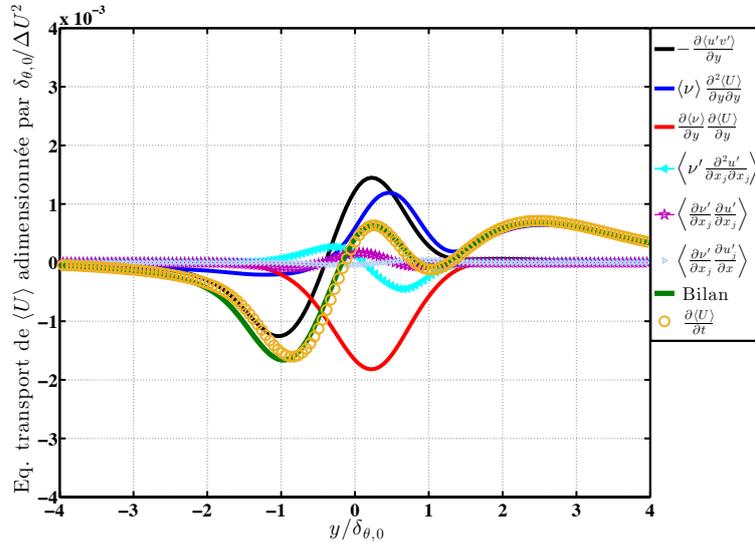
Cela signifie que l'évaluation des effets des variations spatio-temporelles de la viscosité au sein d'un même écoulement ne se fait pas uniquement au niveau des termes supplémentaires.

À présent, regardons les effets du nombre de Reynolds initial $Re_{\theta,0}$ lorsque celui-ci passe de 128 à 32 sur les différents termes de l'équation 5.3 pour l'écoulement à viscosité variable $Re_\nu = 9$ (voir tableau 5.2). En effet, nous voulons comprendre l'origine des modifications observées sur le profil de vitesse moyenne longitudinale ainsi que sur l'épaisseur de quantité de mouvement lorsque le nombre de Reynolds est modifié (voir par exemple les figures 5.8 et 5.9). Les figures 5.11a et 5.11b montrent les différents termes de l'équation 5.3 pour les deux écoulements à viscosité variable DNS-R9-U0-80 ($Re_{\theta,0} = 32$) et DNS-R9-U0-320 ($Re_{\theta,0} = 128$), respectivement.

quantité de mouvement.



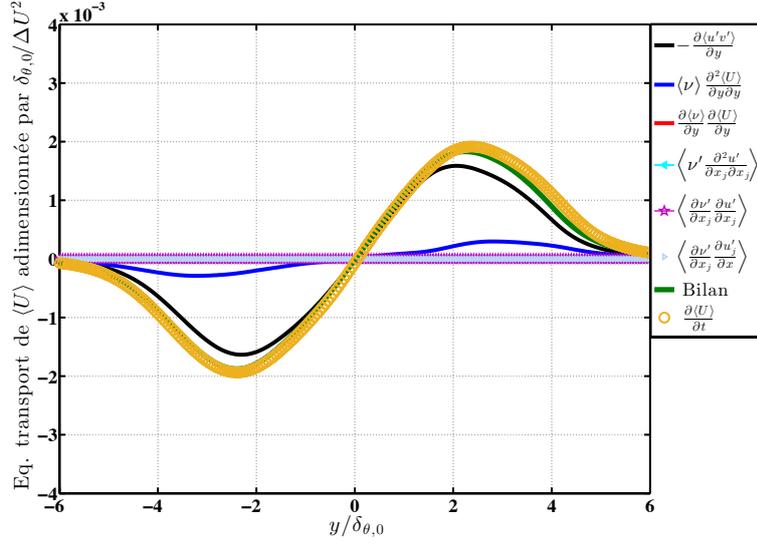
(a) DNS-R9-U0-80 : $R_\nu = 9$, $Re_{\theta,0} = 32$, $Re_g = 80$



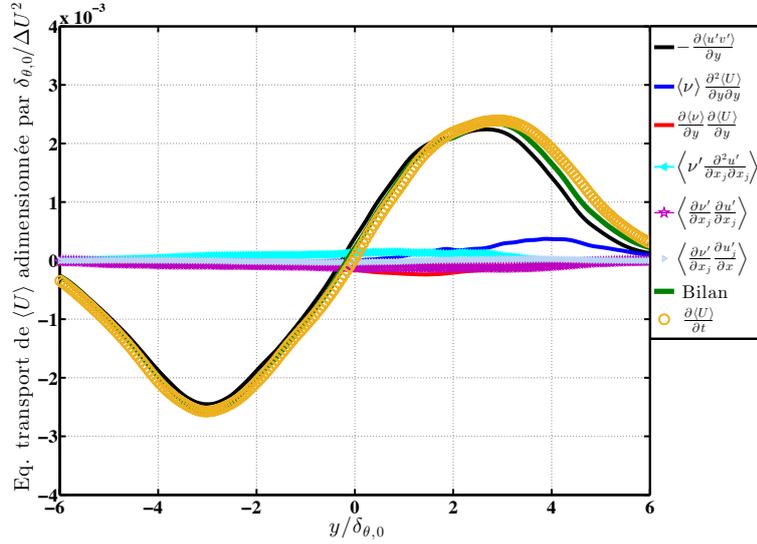
(b) DNS-R9-U0-320 : $R_\nu = 9$, $Re_{\theta,0} = 128$, $Re_g = 320$

FIGURE 5.11 – Évaluation de l'équation de transport de $\langle U \rangle$ (expression 5.3) pour un rapport de viscosité $R_\nu = 9$ à $\tau = 40$.

Tout d'abord, nous remarquons que pratiquement tous les termes de l'équation de transport de la vitesse moyenne longitudinale sont impactés pour le changement du nombre de Reynolds initial. En effet, le gradient vertical des tensions $\langle v'u' \rangle$ est plus important dans le cas où $Re_{\theta,0} = 128$, résultat donc tout à fait cohérent. En effet, les fluctuations de vitesse (et donc la turbulence) se développent plus rapidement lorsque le nombre de Reynolds est plus grand. Une différence nette est observée sur le terme de diffusion moléculaire (courbe bleu), celui-ci est plus important lorsque le nombre de Reynolds est plus petit. Cette forte diffusion explique, en effet, l'accélération du fluide lent (et visqueux) de la couche de mélange à viscosité variable ($R_\nu = 9$ et $Re_{\theta,0} = 32$) comme le montre la figure 5.8. Le nombre de Péclet initial $Pe_0 = Re_{\theta,0} Sc$ est 4 fois plus important pour DNS-R9-U0-320 comparé à DNS-R9-U0-80, ce qui explique le caractère diffusif de ce dernier. De même, le terme supplémentaire



(a) DNS-R1.

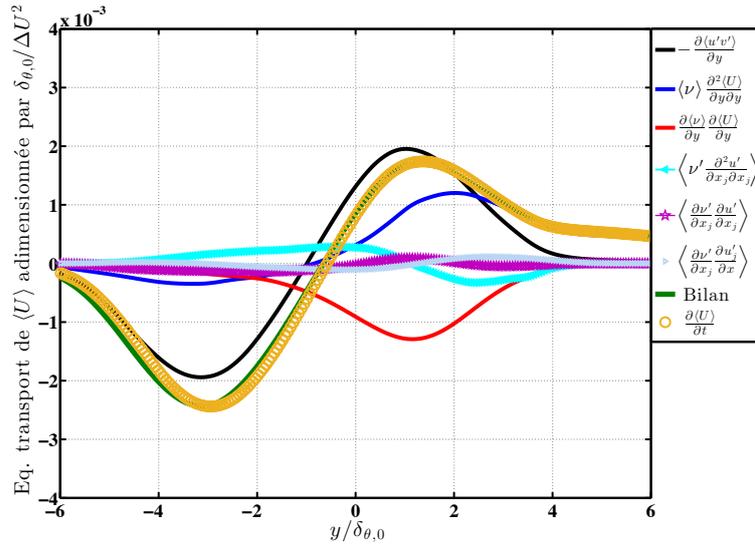


(b) DNS-R9.

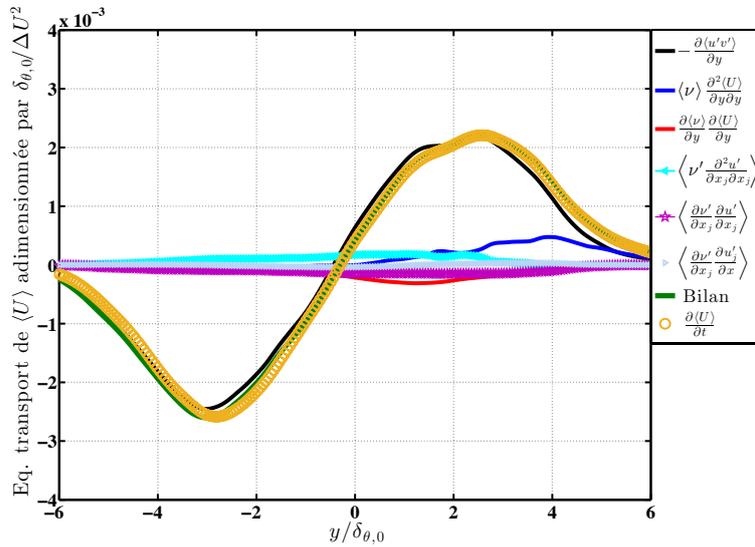
FIGURE 5.12 – Évaluation de l'équation de transport de $\langle U \rangle$ (expression 5.3) pour les rapports de viscosité $R_\nu = 1$ et 9 à $\tau = 40$.

impliquant le produit du gradient vertical de la viscosité moyenne et le gradient de la vitesse moyenne longitudinale; $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$, est deux fois plus grand pour l'écoulement à bas nombre de Reynolds. L'importance de ce terme provoque la diminution de la vitesse moyenne au centre de la couche mélange comparé à l'écoulement de référence. Enfin, pour un écoulement à viscosité constante, le terme temporel $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t}$ est, d'une part, négatif pour le courant rapide de la couche de mélange et, inversement, pour le courant faible, d'autre part, ce terme est parfaitement symétrique par rapport au centre de la couche de mélange ($y/\delta_{\theta,0} = 0$).

La figure 5.12 montre l'évaluation des termes de l'équation de transport de la vitesse moyenne longitudinale pour deux rapports de viscosité $R_\nu = 1$ et 9 au temps adimensionnel $\tau = 100$. On peut voir qu'à ce temps les termes supplémentaires dus aux gradients de viscosité sont très négligeables devant le terme des tensions de vitesse $-\frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y}$, qui est dominant dans



(a) DNS-R9-U0-80 : $R_\nu = 9$, $Re_{\theta,0} = 32$, $Re_g = 80$



(b) DNS-R9-U0-320 : $R_\nu = 9$, $Re_{\theta,0} = 128$, $Re_g = 320$

FIGURE 5.13 – Effet du nombre initial sur l'évaluation de l'équation de transport de $\langle U \rangle$ (expression 5.3) pour un rapports de viscosité $R_\nu = 9$ à $\tau = 100$.

ce bilan pour les deux cas $R_\nu = 1$ et 9 . Néanmoins, il semble que la variation temporelle de la vitesse moyenne ; $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t}$ soit plus accentuée plus l'écoulement à viscosité variable (de l'ordre de 15%), du côté haute vitesse comme celui de basse vitesse. Le profil de la vitesse $\langle U \rangle$ de l'écoulement à viscosité variable, est différent de celui de l'écoulement à viscosité constante, pour les temps longs, comme le montre la figure 5.14. Ceci, malgré le fait que les termes supplémentaires soient négligeables dans le bilan 5.3. Il est alors intéressant de constater que les gradients de viscosité influence l'équation de transport des grandeurs moyennes, telle que la vitesse, par les termes supplémentaires mais pas uniquement. Les termes dits classiques sont également modifiées même lorsque les gradients de viscosité deviennent très faibles dans l'écoulement.

Les termes supplémentaires dans l'équation 5.3 tel que $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ sont plus au moins im-

portants en fonction de la capacité qu'a l'écoulement turbulent à mélanger, par le processus de diffusion principalement, les espèces chimiques présentes dans l'écoulement. En effet, si le nombre de Reynolds initial est modéré, les gradients de viscosité mettront plus de temps à être atténués par la turbulence. Les variations de viscosité joueront dans ce cas un rôle plus important du fait de la persistance des gradients de viscosité dans l'écoulement.

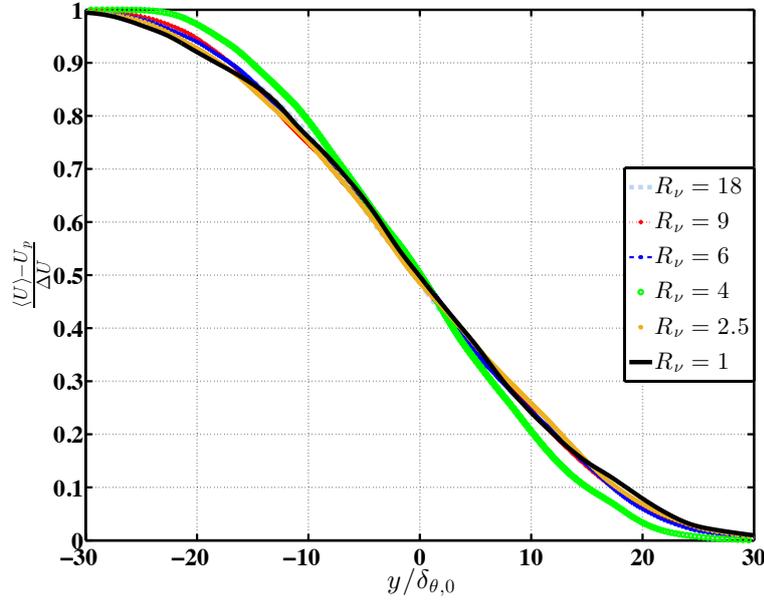


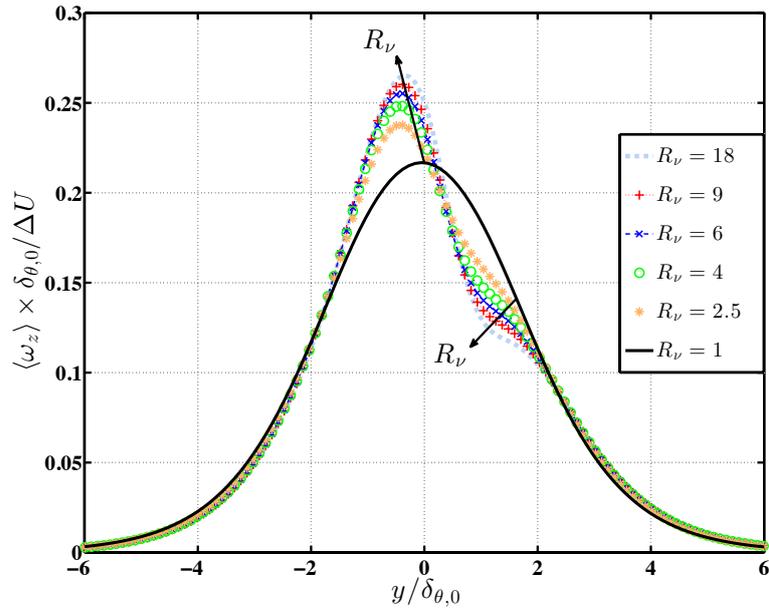
FIGURE 5.14 – Profil de la vitesse moyenne longitudinale tracé le long de la direction inhomogène y pour différents rapports de viscosité R_ν au temps long $\tau = 400$.

5.1.3 Analyse du champ de vorticité moyenne

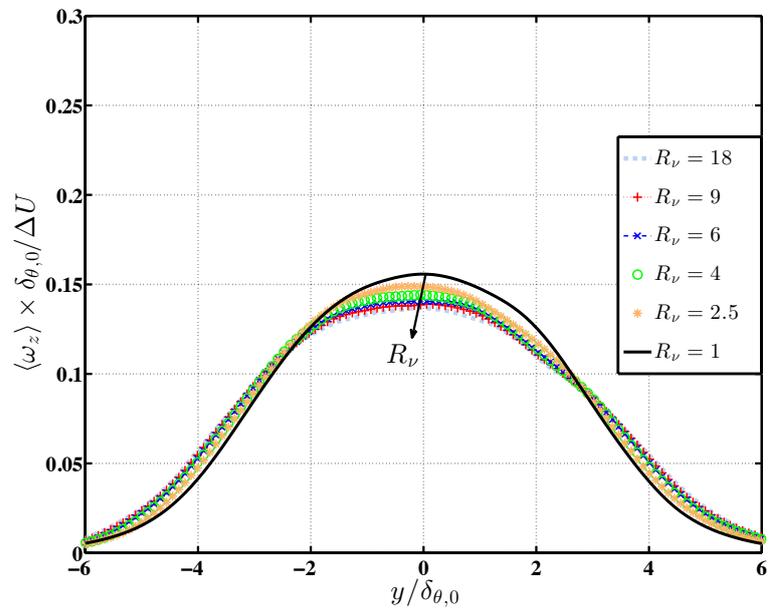
5.1.3.1  valuation des profils de la vorticité transversale moyenne $\langle \omega_z \rangle$

Dans cette section, nous allons analyser les effets des variations spatio-temporelle de la viscosité sur les profils de vorticité moyenne pour différents rapports de viscosité R_ν . Nous avons vu à présent que ces gradients de viscosité influencent grandement les statistiques grandes échelles de l'écoulement, telles que la vitesse moyenne et l'épaisseur de quantité de mouvement.

Les figures 5.15a et 5.15b montrent, pour différentes valeurs de R_ν , le profil de la composante transversale de la vorticité $\langle \omega_z \rangle$ adimensionnée par l'épaisseur initiale de la quantité de mouvement ; $\delta_{\theta,0}$ et la différence de vitesse ΔU au temps adimensionnel $\tau = 40$ et 100 , respectivement. Nous remarquons pour les différents écoulements à viscosité variable que la vorticité moyenne adimensionnée est, comparativement à l'écoulement de référence, plus importante du coté du fluide rapide (moins visqueux) et moins importante du coté du fluide lent (plus visqueux). Nous savons que la viscosité joue le rôle d'un coefficient de diffusion moléculaire dans l'équation de transport de la vorticité. Il est alors tout à fait attendu que la vorticité soit ainsi dissymétrique. Néanmoins, nous ne pouvons pas prédire l'étendu de cette



(a) $\tau = 40$

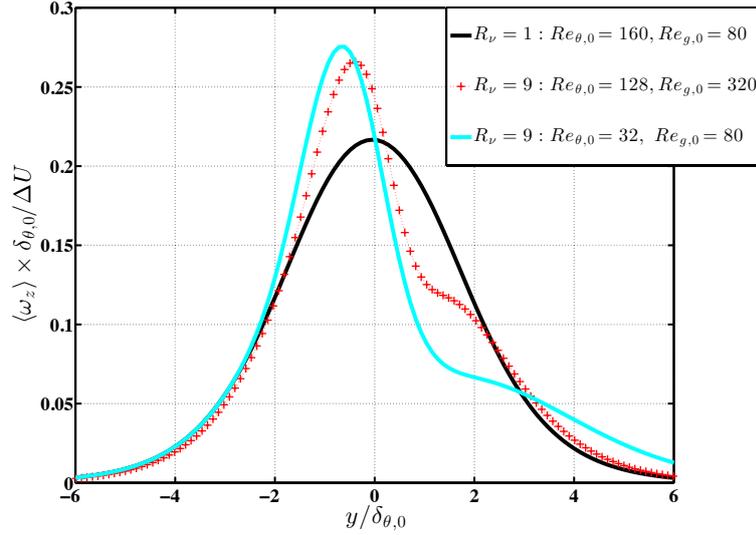


(b) $\tau = 100$

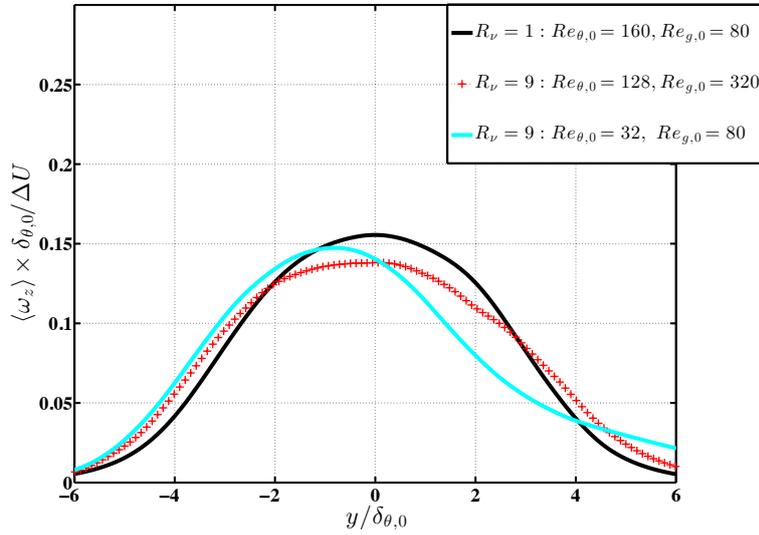
FIGURE 5.15 – Profil de la vorticité moyenne transversale en fonction de la direction inhomogène y pour différents rapports de viscosité R_ν aux temps $\tau = 40$ et 100 .

dissymétrie à mesure que le rapport de viscosité augmente. En effet, l'influence des gradients de viscosité observés sur la figure 5.15a ne semble pas être proportionnel au rapport de viscosité R_ν . Il y a, comme ce qu'on a pu remarquer sur les profils de l'épaisseur de la couche de mélange, une saturation des effets dus au gradients de viscosité.

Par ailleurs, à $\tau = 100$, la figure 5.15b montre que la vorticité moyenne est, pour l'écoulement à viscosité constante (courbe noire), plus importante au centre de la couche de mélange est moins importante sur les bords de celle-ci comparativement aux écoulements à viscosité variable ($R_\nu = 2.5, 4, 6, 9$ et 18). Ce comportement n'est pas tout à fait prévisible car,



(a) $\tau = 40$



(b) $\tau = 100$

FIGURE 5.16 – Effet du nombre de Reynolds initial sur le profil de la vorticité moyenne transversale pour les cas DNS-R1-U0-80, DNS-R9-U0-320 et DNS-R9-U0-80, aux temps $\tau = 40$ et 100.

rappelons-le, la viscosité de l'écoulement à viscosité constante est globalement plus importante que celles des autres écoulements à viscosité variable, ceci impliquerait une diffusion moléculaire de la vorticité moyenne plus importante pour l'écoulement de référence. Le rôle des gradients de viscosité est alors pointé encore une fois du doigt pour être la cause d'une diffusion plus importante de la vorticité.

Pour un même rapport de viscosité $R_\nu = 9$, le nombre de Reynolds initial $Re_{\theta,0}$ influence grandement l'évolution spatio-temporelle des profils de la vorticité moyenne transversale comme le montre la figure 5.16. Remarquons qu'à $\tau = 40$, la figure 5.16a montre une plus forte dissymétrie de la vorticité moyenne $\langle \omega_z \rangle$ pour le nombre de Reynolds initial plus modéré (DNS-R9-U0-80) comparé au cas élevé (DNS-R9-U0-320). L'écoulement de référence, quant à lui, ne présente aucune dissymétrie sur le profil de vorticité. De plus, la valeur maximale

de la vorticité est légèrement plus importante pour le cas (DNS-R9-U0-80), synonyme d'un effet des variations de viscosité plus marqué.

Plus loin, à $\tau = 100$, la figure 5.16b montre, en effet, que la valeur maximale de la vorticité moyenne est plus importante pour l'écoulement à viscosité constante (DNS-R1-U0-80), la dissymétrie du profil de vorticité n'est plus observée pour le cas DNS-R9-U0-320.   contrario, l'écoulement DNS-R9-U0-80 présente encore une forte dissymétrie indiquant que les variations de viscosité imposé à l'état initial mettent plus de temps à être diffusées par la turbulence qui se développe plus lentement lorsque le nombre de Reynolds initial est modéré.

Pour résumer, les variations de viscosité engendrent une augmentation de la vorticité dans le champ proche ($\tau \approx 40$), quel que soit le nombre de Reynolds initial ($Re_{\theta,0} = 128$ et 32). Néanmoins, l'évolution temporelle de l'écoulement, dans les temps longs, est fortement influencée par le couple $(Re_{\theta,0}, R_\nu)$.

5.1.3.2  valuation de l'équation de transport de la vorticité transversale moyenne $\langle \omega_z \rangle$

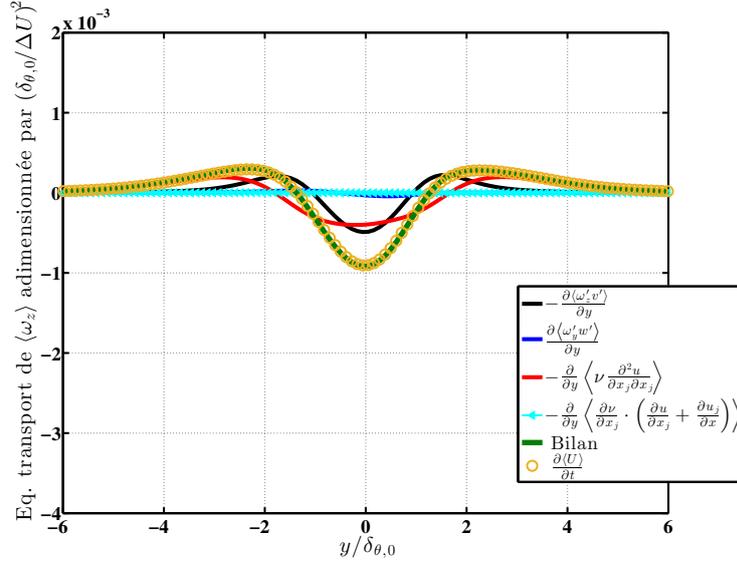
Les différences observées sur l'évolution du profil de la vorticité moyenne pour les différents rapports de viscosité considéré ($R_\nu = 1, 2.5, 4, 6, 9$ et 18) et le nombre de Reynolds initial peuvent être expliquées en analysant son équation de transport. Cette dernière développée au chapitre 2 est rappelée ci-dessous :

$$\frac{\partial \langle \omega_z \rangle}{\partial t} = -\frac{\partial \langle \omega'_z v' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle \omega'_y w' \rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \right\rangle \quad (5.4)$$

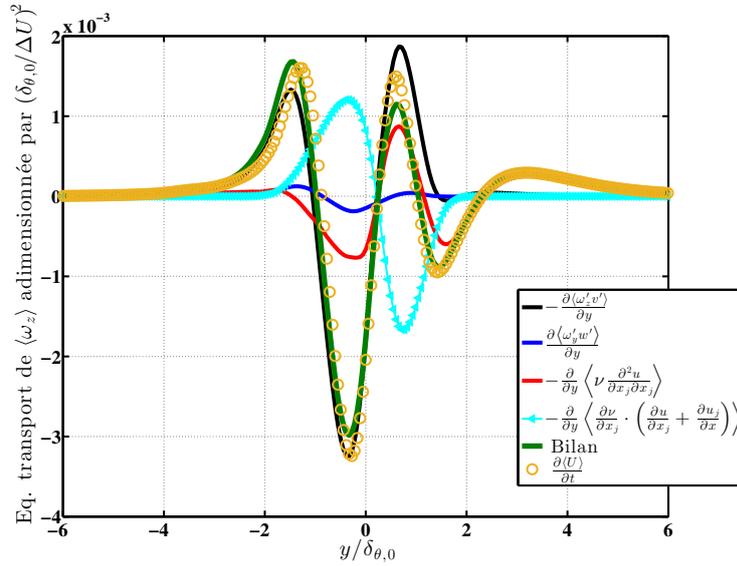
Remarquons qu'un seul terme supplémentaire lié aux variations de viscosité est présent dans l'équation ci-dessus, il s'agit du 4 me terme du membre de droite. L'analyse de cette équation, en vue de quantifier les effets de variation de viscosité, se fait aussi bien sur ce terme supplémentaire que sur les autres termes classiques présents en écoulement à viscosité constante.

La figure 5.17 montre l'évaluation de l'équation 5.4 à $\tau = 40$ pour l'écoulement à viscosité constante (DNS-R1) et l'écoulement à viscosité variable (DNS-R9). Nous produisons l'analyse ci-dessous :

Pour une couche de mélange temporelle, la composante transversale de la vorticité se réduit au gradient de la vitesse longitudinale le long de la direction inhomogène y ; $\langle \omega_z \rangle = -\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$.   l'état initial, l'amplitude de la vorticité transversale moyenne est maximale. Elle est contenue dans l'épaisseur initiale $\delta_{\theta,0}$ de la couche de mélange.   mesure que celle-ci évolue, le gradient de vitesse moyenne longitudinale diminue, et par conséquent la vorticité moyenne aussi. Néanmoins, les structures tourbillonnaires ayant comme composante de vorticité $\langle \omega_z \rangle$



(a) DNS-R1.



(b) DNS-R9.

FIGURE 5.17 – Évaluation de l'équation de transport de $\langle \omega_z \rangle$ (expression 5.4) pour deux rapports de viscosité R_ν à $\tau = 40$.

augmentent en taille pour occuper une épaisseur supérieure à $\delta_{\theta,0}$. L'équation de transport de la vorticité moyenne 5.4 regroupe les mécanismes de transfert moléculaire et turbulent de la vorticité depuis le centre de la couche de mélange jusqu'à ses bords.

- Terme $-\frac{\partial \langle \omega'_z v' \rangle}{\partial y}$

Ce terme est responsable de la diffusion de la vorticité transversale par la turbulence, il diffuse au sein de la couche de mélange la vorticité des régions à forts cisaillement (typiquement au centre de la couche de mélange) vers les bords de celle-ci. Nous pouvons remarquer que l'amplitude de ce terme est 6 fois plus importante pour l'écoulement à viscosité variable

que le cas de référence à viscosité constante. De plus, ce terme est dissymétrique puisque son maximum est atteint du coté du fluide rapide (et moins visqueux) et non au centre de la couche de mélange comme c'est le cas pour l'écoulement à viscosité constante. Dans les deux situations ($R_\nu = 1$ et 9), ce terme est prépondérant dans l'équation 5.4 et constitue le mécanisme de diffusion et de diminution principale de la vorticit   au sein de la couche de m  lange temporelle. On peut alors ais  ment comprendre que la formation des structures tourbillonnaires d'axes transversale z est beaucoup plus pr  cipit   pour l'  coulement viscosit   variable comme le montre la figure 5.18.

- Terme $\frac{\partial \langle \omega'_y w' \rangle}{\partial y}$

Ce terme fait intervenir le gradient vertical de la corr  lation vorticit   verticale fluctuante-vitesse transversale fluctuante, il est responsable de la redistribution de la vorticit   au sein du tube de vorticit   lorsque celui-ci augmente en taille dans la direction perpendiculaire    l'axe de rotation z . Autrement dit, ce terme veille    la conservation de la vorticit   lorsque le tourbillon voit son rayon augmenter ou diminuer. Ce terme est aussi appel   par les Anglo-Saxons comme   tant le terme de "*Stretching*". Nous pouvons voir d'apr  s la figure 5.19 que ce terme est plus important pour l'  coulement    viscosit   variable, ce qui signifie que le rayon des tubes de vorticit   d'axe transversales z , typiquement les structures de Kelvin-Helmholtz, augmente en taille davantage pour l'  coulement    viscosit   variable que l'  coulement de r  f  rence.

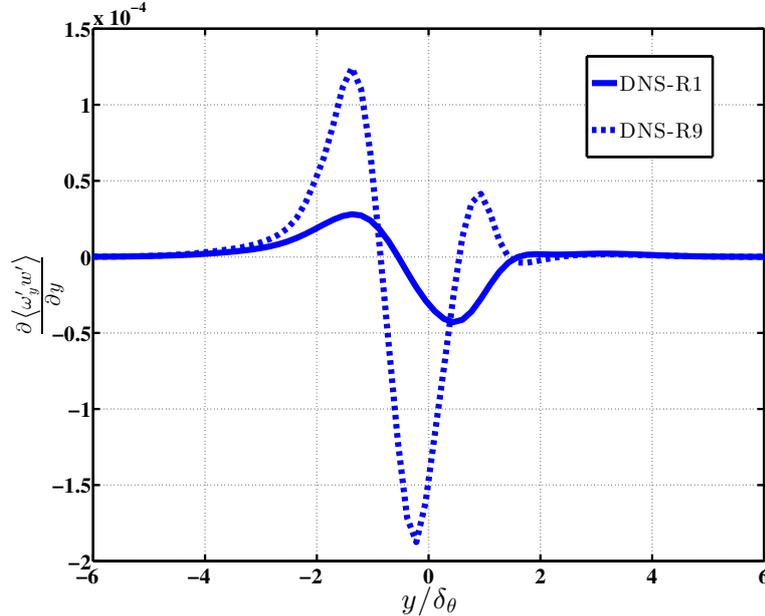


FIGURE 5.19 –   volution du terme de stretching de la vorticit   transversale $\langle \omega_z \rangle$ pour deux rapports de viscosit   $R_\nu = 1$ et 9    $\tau = 40$.

- Terme $-\frac{\partial}{\partial y} \left\langle \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$

   viscosit   constante, ce terme est tout simplement celui de diffusion mol  culaire de la

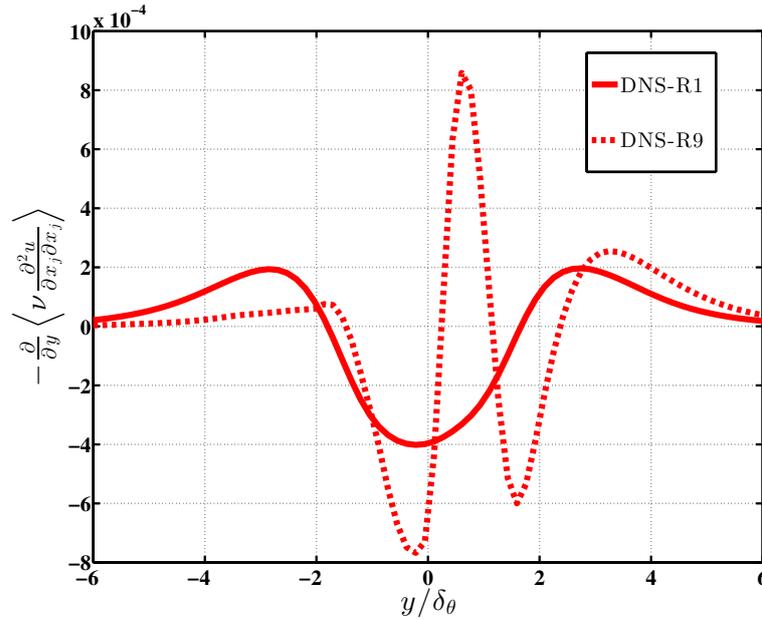
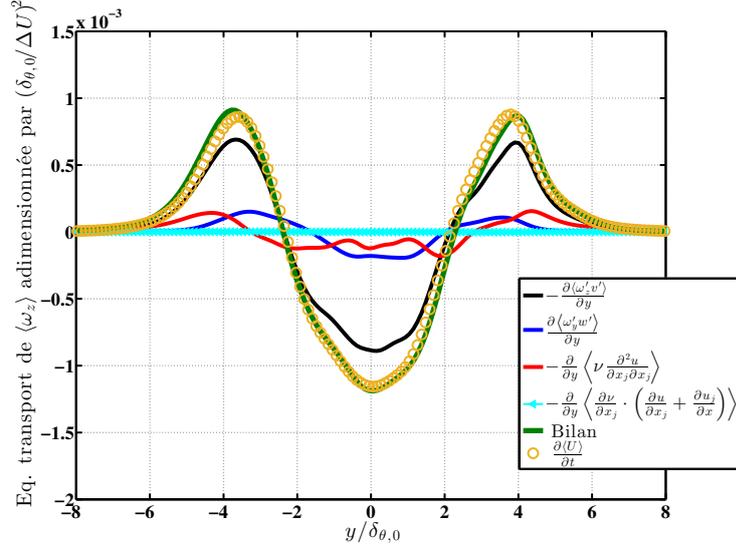


FIGURE 5.20 –  volution du terme de diffusion moléculaire de la vorticité transversale $\langle \omega_z \rangle$ pour deux rapports de viscosité $R_\nu = 1$ et 9 à $\tau = 40$.

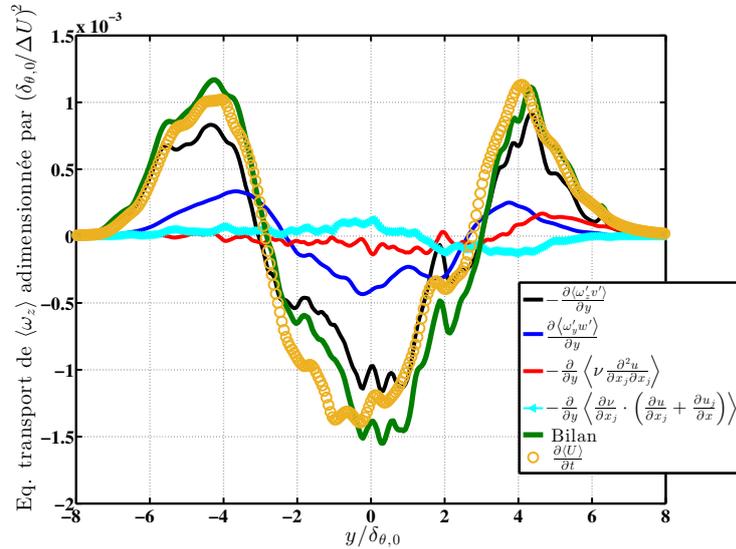
composante transversale de la vorticité ; $\nu \frac{\partial^2 \langle \omega_z \rangle}{\partial y \partial y}$ où la viscosité joue le rôle du coefficient de diffusion moléculaire.   viscosité variable, le gradient vertical du produit $\left\langle \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$ regroupe la contribution de la partie moyenne et fluctuante de la viscosité cinématique. Nous avons choisi de donner la même forme mathématique à la contribution visqueuse de la diffusion de la vorticité dans les deux situations (  viscosité constante et variable). Nous pouvons remarquer, d'après la figure 5.20, que ce terme a une forme tout à fait classique pour l'écoulement à viscosité constante, c'est-à-dire, négatif au centre de la couche de mélange (siège de la zone de cisaillement) et positif sur ses bords.   contrario, ce terme est très peu positif du coté du fluide rapide, il est négatif dans une grande partie du courant rapide jusqu'au centre de la couche de mélange, puis évolue très rapidement vers les valeurs positives. Il enchaine ensuite des valeurs négative puis positive du coté du fluide lent de la couche de mélange. Il est claire que les variations spatiales de la viscosité ont complètement influencé le terme $-\frac{\partial}{\partial y} \left\langle \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$. Notons que les valeurs positives de ce terme, situées près du centre de la couche de mélange, contribuent à produire de la vorticité transversale. Une production supplémentaire due au variations de viscosité.

- Terme $-\frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \right\rangle$

Il s'agit du seul terme supplémentaire dans l'équation de transport de la vorticité transversale pour l'écoulement de couche de mélange temporelle à viscosité variable. Il fait intervenir le produit des gradients de viscosité et des composantes longitudinales du tenseur des contraintes ($2 \times s_{1j}$). La contribution de ce terme supplémentaire dans l'équation de transport de la vorticité transversale $\langle \omega_z \rangle$ est positive du coté du fluide rapide et négative du coté du fluide lent. Ce terme pourrait jouer un rôle important dans la dissymétrie des tourbillons



(a) DNS-R1 : $R_\nu = 1$

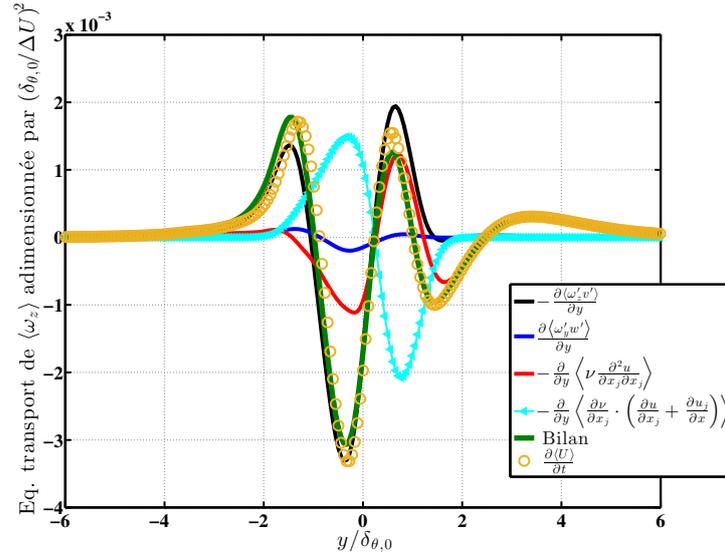


(b) DNS-R9 : $R_\nu = 9$

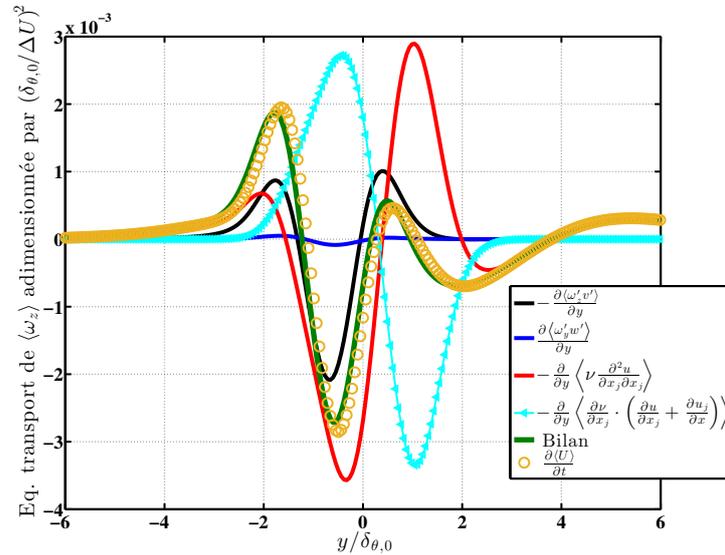
FIGURE 5.21 – Évaluation de l'équation de transport de $\langle \omega_z \rangle$ (expression 5.4) pour deux rapports de viscosité R_ν à $\tau = 100$.

de Kelvin-Helmholtz, qui se trouvent plus diffusés du côté du fluide plus visqueux (voir les planches à $\tau = 60$ et 80 de la figure 5.18).

L'équation de transport de la vorticité $\langle \omega_z \rangle$, évaluée au temps $\tau = 100$, pr esente peu de diff erences pour les deux situations à viscosité constante et variable, comme le montre à la figure 5.21. En effet, le terme suppl ementaire lié aux gradients de viscosité, $-\frac{\partial}{\partial y} \left\langle \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$, est moins important comparé au terme de diffusion turbulente, $-\frac{\partial \langle \omega'_z v' \rangle}{\partial y}$. Nous pouvons néanmoins noter que le terme de stretching est encore plus important pour l'écoulement à viscosité variable.



(a) DNS-R9-U0-80 : $R_\nu = 9$, $Re_{\theta,0} = 32$, $Re_{\theta,0} = 80$



(b) DNS-R9-U0-320 : $R_\nu = 9$, $Re_{\theta,0} = 128$, $Re_{\theta,0} = 320$

FIGURE 5.22 – Évaluation de l'équation de transport de $\langle \omega_z \rangle$ (expression 5.4) pour le rapport de viscosité $R_\nu = 9$, à $\tau = 40$.

Analysons à présent l'effet du nombre de Reynolds initial $Re_{\theta,0}$ sur l'évaluation des différents termes de l'équation 5.4. En effet, le profil de la vorticité moyenne transversale $\langle \omega_z \rangle$ de l'écoulement à viscosité variable (DNS-R9) est sensible à la valeur initiale du nombre de Reynolds comme illustré sur la figure 5.16. Les figures 5.22a et 5.22b montrent l'évaluation de l'équation 5.4 à $\tau = 40$ pour les deux écoulements à viscosité variable DNS-R9-U0-80 et DNS-R9-U0-320, respectivement. Nous pouvons remarquer qu'à faible nombre de Reynolds initial, le terme de diffusion moléculaire de l'écoulement DNS-R1-U0-80 est pratiquement 3 fois plus important que celui de la DNS-R9-U0-320. En effet, l'écoulement de couche de mélange DNS-R1-U0-80 est dominé par les effets diffusifs de la viscosité, ce qui est en accord avec le faible nombre de Péclet de cet écoulement (environ 4 fois inférieur à celui de DNS-

R9-U0-320). Une autre raison à cette augmentation du terme de diffusion vient du fait de l'augmentation des gradients de la vitesse longitudinale par les gradients de viscosité à faible nombre de Reynolds comme montré sur la figure 5.9. On remarquera également que le terme supplémentaire (bleu turquoise sur la figure 5.22) joue un rôle tout à fait opposé au terme de diffusion moléculaire.

5.1.4 Analyse du champ scalaire moyen

Cette section a pour objectif l'analyse du champ scalaire moyen dans la couche de mélange temporelle. Plus précisément, il s'agira de comparer le scalaire passif de l'écoulement à viscosité constante, qui est dans notre cas le champ de température T , et le scalaire actif de l'écoulement à viscosité variable représenté par la fraction massique de mélange Y_k ($k = 1, 2$). Les profils moyens de ces deux grandeurs le long de la direction inhomogène y ainsi que leur équation de transport sont comparés pour différents rapports de viscosité R_ν .

5.1.4.1 Évaluation des épaisseurs δ_T et δ_ν de la couche de mélange

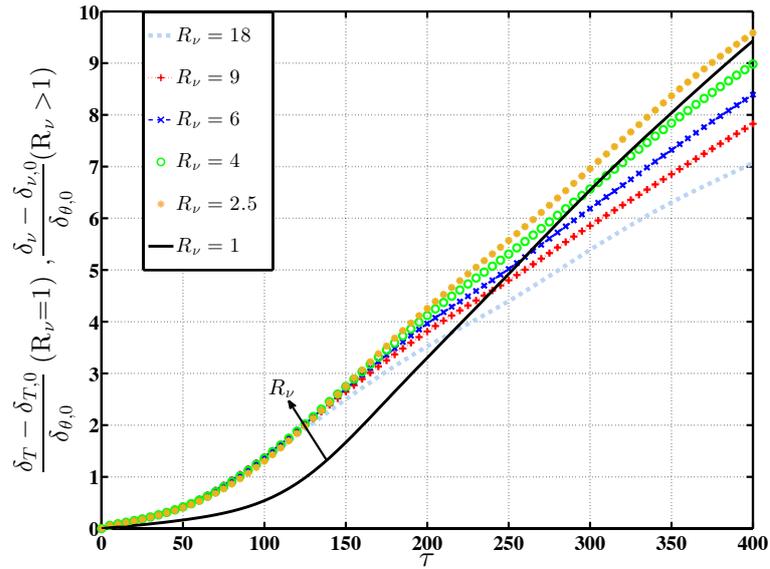
Les épaisseurs δ_T et δ_ν correspondent aux épaisseurs intégrales des champs tridimensionnel de température et de viscosité, respectivement. Elles sont écrites pour chaque temps τ comme suit :

$$\delta_T(\tau) = \int_0^{L_y} \frac{[\langle T \rangle - T_p][T_g - \langle T \rangle]}{\Delta T^2} dy, \quad (5.5)$$

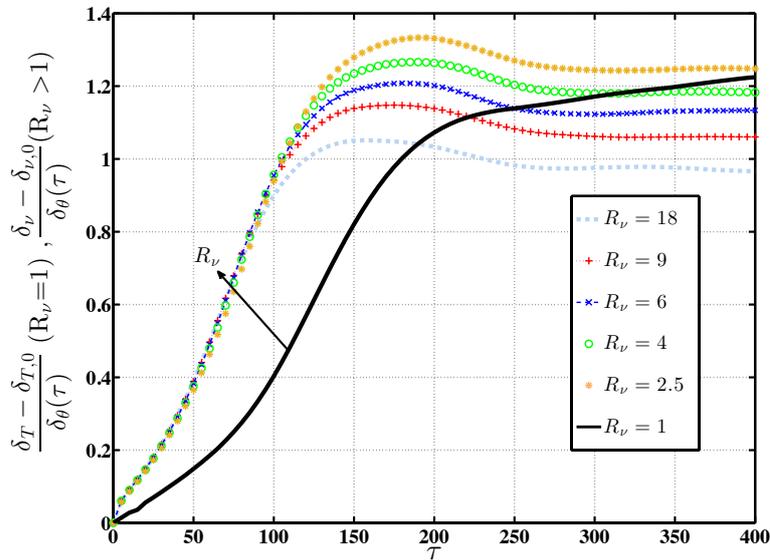
$$\delta_\nu(\tau) = \int_0^{L_y} \frac{[\langle \nu \rangle - \nu_p][\nu_g - \langle \nu \rangle]}{\Delta \nu^2} dy, \quad (5.6)$$

où $\langle T \rangle$ et $\langle \nu \rangle$ sont la température et la viscosité moyenne le long de la direction inhomogène y , respectivement. $\Delta T = T_g - T_p$ et $\Delta \nu = \nu_g - \nu_p$. La température et la viscosité (ou la fraction massique de mélange Y_k) sont, dans notre cas, des champs scalaire passifs et actifs, respectivement.

Les figures 5.23a et 5.23b montrent l'évolution temporelle des épaisseurs δ_T et δ_ν pour différents rapports de viscosité, adimensionnées par les épaisseurs de quantité de mouvement $\delta_{\theta,0}$ et $\delta_\theta(\tau)$, respectivement. Nous remarquons, d'après la figure 5.23a, que l'épaisseur δ_ν n'est pas influencée par le rapport de viscosité R_ν dans l'intervalle $\tau \in [0 - 150]$. Néanmoins, l'épaisseur de champ de viscosité est supérieure à celle champ de température dans l'intervalle $\tau \in [0 - 210]$. Ceci indique que la phase initiale du développement de l'écoulement de couche de mélange est complètement accélérée par les gradients de viscosité, davantage pour le champ scalaire que pour le champ de vitesse (voir figure 5.1). À partir de $\tau = 200$, le rapport de viscosité semble avoir une influence remarquable sur l'évolution temporelle des deux épaisseurs δ_T et δ_ν . En effet, δ_ν semble évoluer plus lentement au fur à mesure que le rapport de viscosité augmente, et plus lentement que l'épaisseur δ_T . Notons le comportement à part de l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 2, 5$. En effet, le ralentissement de δ_ν semble



(a) Adimensionnement par $\delta_{\theta,0}$



(b) Adimensionnement par $\delta_{\theta}(\tau)$

FIGURE 5.23 – Évolution temporelle de l'épaisseur thermique de l'écoulement à viscosité constante, $\delta_T - \delta_{T,0}$, et l'épaisseur visqueuse, $\delta_\nu - \delta_{\nu,0}$, des différents écoulements à viscosité variable, adimensionnées par les épaisseurs de quantité de mouvement $\delta_{\theta,0}$ et $\delta_{\theta}(\tau)$.

être moins important comparé aux autres valeurs de R_ν . De plus, l'épaisseur du champ de viscosité est supérieur pour ce cas ($R_\nu = 2,5$) à celle du champ de température ($R_\nu = 1$), pour les temps longs ($\tau \approx 400$). Ce comportement peut s'expliquer de la manière suivante. Dans une phase initiale de temps $\tau \in [0 - 100]$, les gradients de viscosité sont très importants. De ce fait, les fluctuations de vitesse et d'entrophie ainsi que les mécanismes d'entraînement se trouvent amplifiés par ces gradients de viscosité (voir chapitre 6). Il n'est pas possible de calculer de manière quantitative le taux d'entraînement dans la configuration temporelle de la couche de mélange [76]. Nous pouvons néanmoins nous appuyer sur les planches de la figure 5.24 pour estimer qualitativement l'entraînement du fluide par les tourbillons bi-

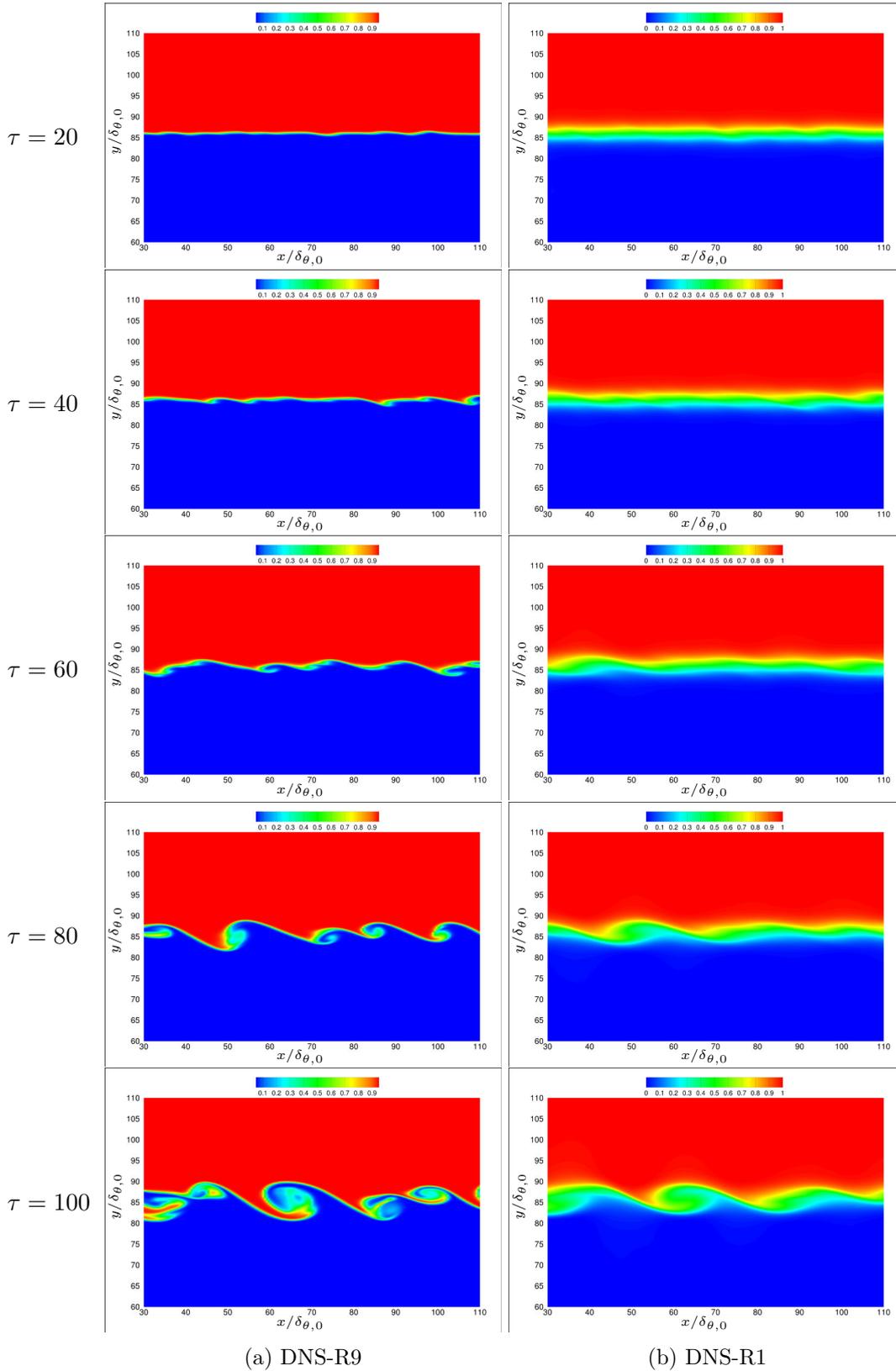


FIGURE 5.24 – Évolution du champ scalaire instantané, $T^* = \frac{T-T_p}{\Delta T}$ et Y_1 dans le plan xy ($z = 0$), pour DNS-R1 et DNS-R9, respectivement. L'intervalle de temps est $\tau \in [20 - 100]$. Pour mieux visualiser les structures de l'écoulement, le domaine de calcul est tronqué dans la direction longitudinale.

dimensionnels au sein de la couche de mélange. En effet, la figure 5.24 montre clairement que l'enroulement du fluide irrotationnel dans le cœur de la zone de cisaillement est accéléré pour le champ de fraction massique. Ceci est dû au développement plus rapide des tourbillons de Kelvin-Helmholtz pour l'écoulement DNS-R9, comparé à DNS-R1. Nous pouvons remarquer le processus d'appariement dans l'écoulement à viscosité variable sur la planche $\tau = 100$ dans l'intervalle $x/\delta_{\theta,0} \in [80 - 100]$, ce qui ne semble pas être le cas de l'écoulement DNS-R1.

Aux temps longs, $\tau \approx 400$, les gradients de viscosité deviennent de plus en plus faibles, mais la valeur moyenne de la viscosité augmente dans le courant rapide de la couche de mélange. Ceci provoque un ralentissement global de l'écoulement, plus particulièrement pour les grandes valeurs de R_ν .

La figure 5.23b montre le rapport entre l'épaisseur du champ scalaire, $\delta_T(R_\nu=1)$, $\delta_\nu(R_\nu>1)$ et celle du champ de vitesse δ_θ au cours du temps. Il est intéressant de constater que ce rapport atteint une valeur asymptotique pour les différents écoulements à viscosité variable à partir de $\tau = 250$. À contrario, l'écoulement à viscosité constante ne montre pas une évolution linéaire entre l'épaisseur δ_T et δ_θ dans tout l'intervalle $\tau \in [0 - 400]$. Les valeurs asymptotiques des écoulements à viscosité variable sont inversement proportionnelles au rapport de viscosité R_ν . Ainsi, pour $R_\nu = 18$, le rapport $\delta_\nu / \delta_\theta$ est proche de l'unité ($\approx 0,98$), alors qu'il atteint approximativement 1,25 pour $R_\nu = 2, 5$.

5.1.4.2 Évaluation des profils de température $\langle T^* \rangle$ et de fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$

La figure 5.25 montre le profil de température moyenne $\langle T^* \rangle = \frac{\langle T \rangle - T_p}{\Delta T}$ de l'écoulement à viscosité constante ($R_\nu = 1$) et le profil de la fraction massique du mélange Y_1 des différents écoulements à viscosité variable ($R_\nu > 1$). À $\tau = 40$, la figure 5.25a montre que le profil de température est plus développé comparé aux différents profils de fraction massique. Pour cause, le profil de $\langle Y_1 \rangle$ est initialisé avec une épaisseur nulle, tandis que celui de la température est initialisée avec une épaisseur $\delta_{T,0}$ identique à celle de la quantité de mouvement $\delta_{\theta,0}$. Malgré cela, les profils de température et de fraction massique deviennent équivalents à partir de $\tau = 100$ (voir figure 5.25b), plus particulièrement à $\tau = 200$ (voir figure 5.25c). Le rapport de viscosité R_ν semble avoir un effet sur les profils de Y_1 même pour les temps longs (voir figure 5.25d), où il subsiste une certaine disparité des profils sur les bords de la couche de mélange. Ceci explique le comportement de l'épaisseur du champ de viscosité à partir de $\tau = 200$ vu plus haut (voir figure 5.23a). Ces profils montrent, en effet, l'accélération du champ scalaire actif de l'écoulement à viscosité variable, comme cela a pu être montré sur les figures 5.23 et 5.24. Notons que le développement temporelle des profils de température et de fraction massique est qualitativement très similaire. En effet, ces profils présentent trois points d'inflexions caractérisés par trois changements de pente successifs (voir figure 5.25c par exemple), en accord avec les observations expérimentales sur la température [77]. L'effet des grosses structures cohérentes sur le champ scalaire semble être à l'origine de l'apparition de ces points d'inflexions supplémentaires [77]. Notons que dans le contexte de la combustion

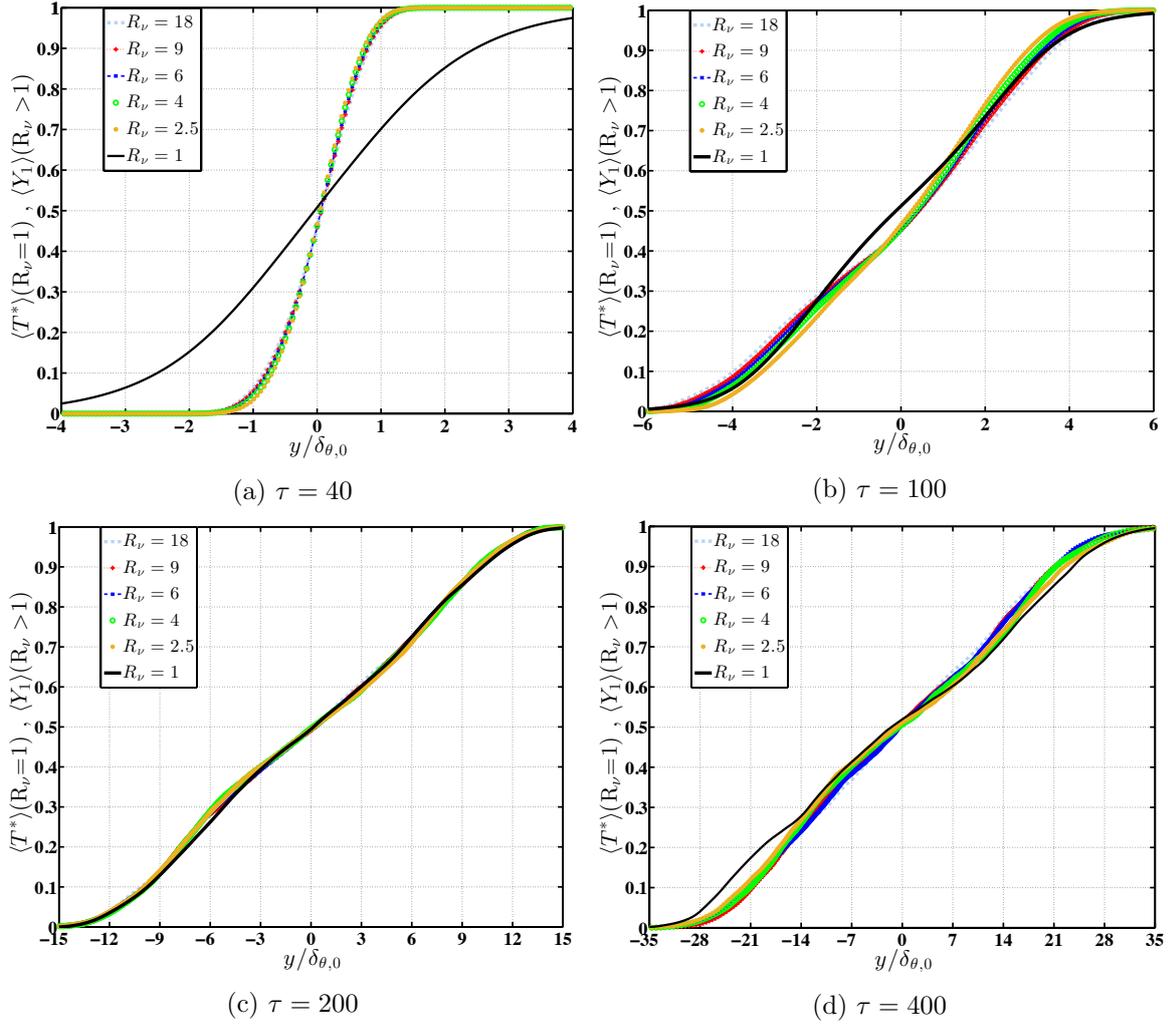
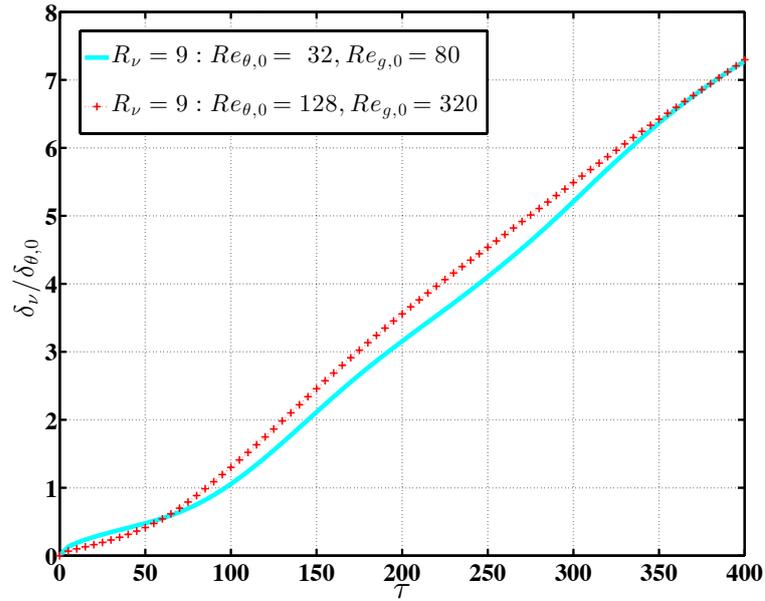


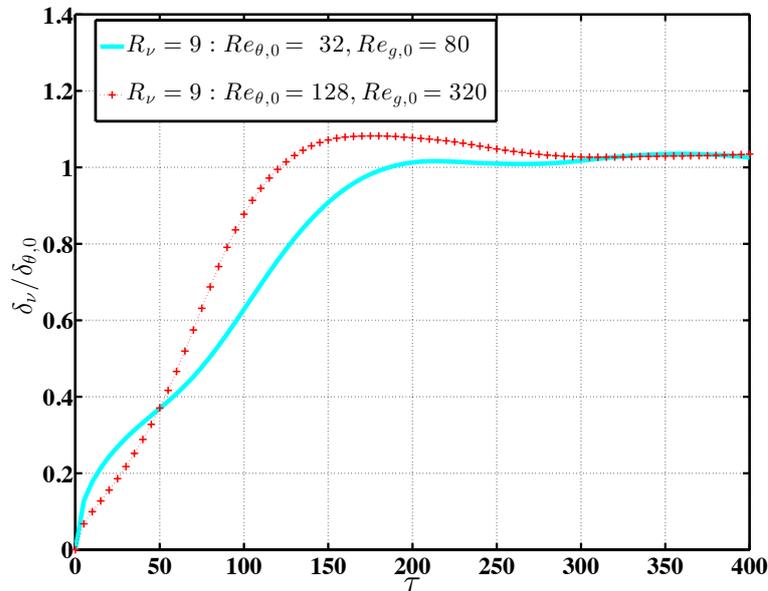
FIGURE 5.25 – Évaluation du profil de la température moyenne $\frac{\langle T \rangle - T_p}{\Delta T}$ (courbe noire) ainsi que du profil de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ (courbe rouge) à $\tau = 40$ et 100.

non prémélangée, nos résultats montrent la capacité remarquable de l'écoulement à viscosité variable à mélanger plus rapidement les espèces chimiques présentes dans l'écoulement. Par ailleurs, des études récentes ont montré des effets non négligeables des variations de viscosité sur l'atomisation des jets liquides, notamment en ce qui concerne la pénétration des jets et la taille des gouttes [78] [79] [80] [81].

Regardons à présent l'effet du nombre de Reynolds initial sur le comportement du scalaire actif de l'écoulement à viscosité variable. La figure 5.26a montre l'évolution temporelle de l'épaisseur δ_ν pour les cas DNS-R9-U0-80 et DNS-R9-U0-320. Pour rappel, ces deux simulations sont caractérisées par le nombre de Reynolds initial $Re_{\theta,0} = 128$ et 32, respectivement. Nous remarquons que l'épaisseur δ_ν de DNS-R9-U0-80 est légèrement au dessus de celle de DNS-R9-U0-320 dans l'intervalle $\tau \in [0 - 50]$. Ceci est dû au caractère plus diffusif de l'écoulement DNS-R9-U0-80 qui présente un nombre de Péclet initial $Pe_0 = Re_{\theta,0} \times Sc$, 4 fois inférieur à celui de DNS-R9-U0-320. Ceci se vérifie sur les planches de la figure 5.27, qui montrent le champ instantané de la fraction massique pour les deux écoulements DNS-R9-U0-320 et



(a) Adimensionnement par $\delta_{\theta,0}$



(b) Adimensionnement par $\delta_{\theta}(\tau)$

FIGURE 5.26 – Évolution temporelle de l'épaisseur thermique de l'écoulement à viscosité constante, $\delta_T - \delta_{T,0}$, et l'épaisseur visqueuse, $\delta_\nu - \delta_{\nu,0}$, des différents écoulements à viscosité variable, adimensionnées par les épaisseurs de quantité de mouvement $\delta_{\theta,0}$ et $\delta_{\theta}(\tau)$.

DNS-R9-U0-80.

Après $\tau = 50$, l'écoulement DNS-R9-U0-320 présente une évolution temporelle de l'épaisseur δ_ν plus importante, synonyme d'un entraînement de fluide plus marqué. La figure 5.26b montre l'évolution temporelle du rapport des épaisseurs du champ scalaire et du champ de vitesse δ_ν/δ_θ . Nous retrouvons le caractère très diffusif de l'écoulement DNS-R9-U0-80 dans l'intervalle $\tau \in [0 - 50]$, comme précédemment. Néanmoins, aux temps longs $\tau \approx 400$, les effets du nombre de Reynolds initial ne sont plus ressentis par le rapport δ_ν/δ_θ et les deux

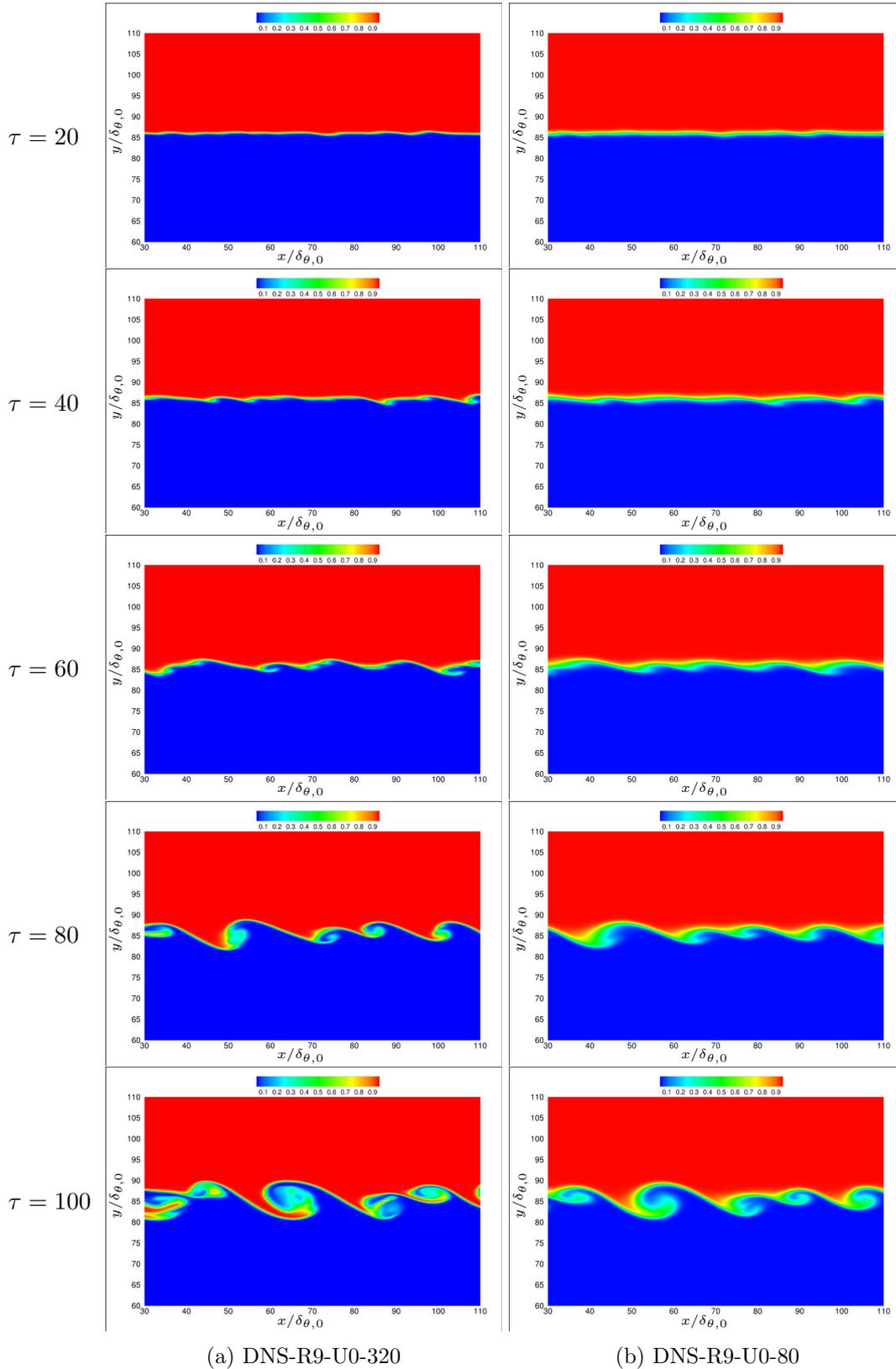


FIGURE 5.27 – Évolution du champ de scalaire instantané Y_1 dans le plan xy ($z = 0$), pour DNS-R9-U0-80 et DNS-R9-U0-320. L'intervalle de temps est $\tau \in [20 - 100]$. Pour mieux visualiser les structures de l'écoulement, le domaine de calcul est tronqué dans la direction longitudinale.

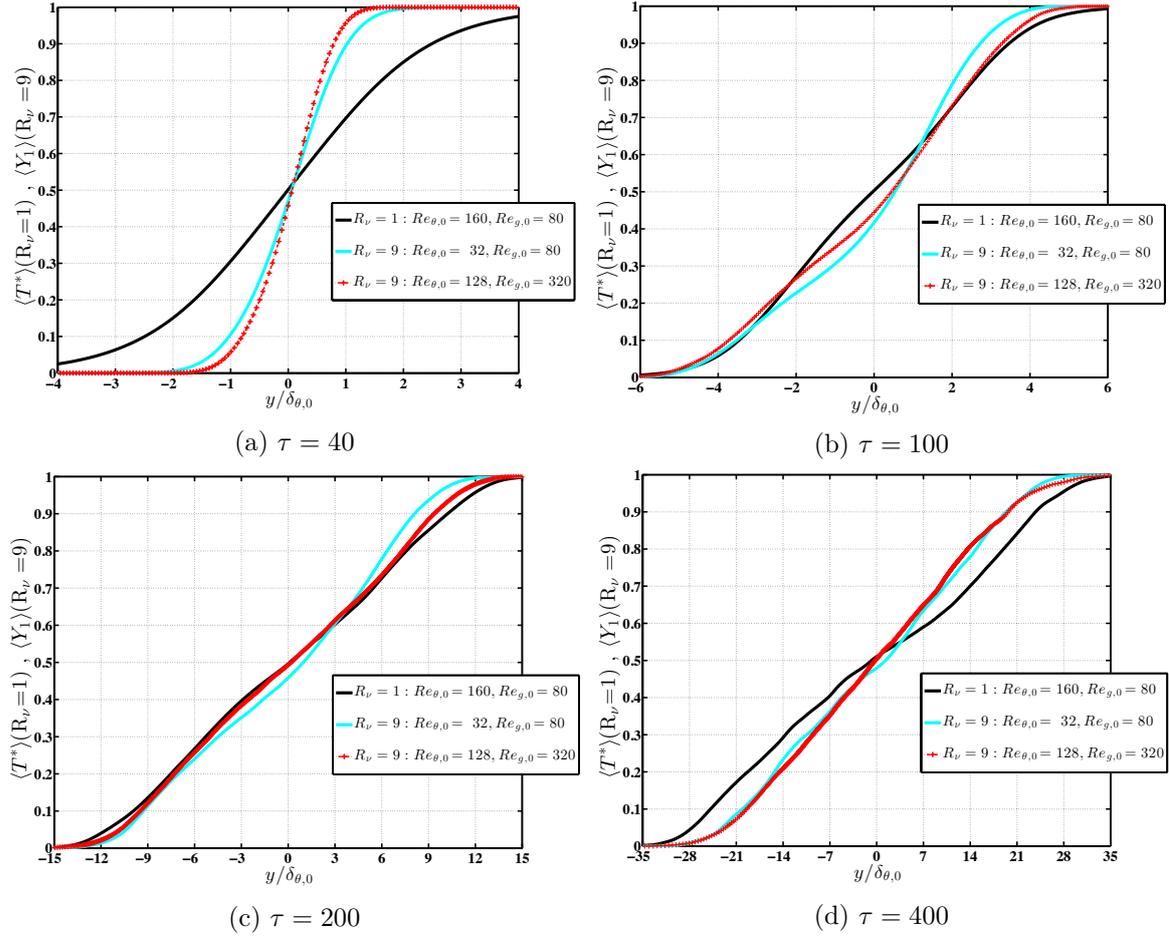


FIGURE 5.28 – Évaluation du profil de la température moyenne $\frac{\langle T \rangle - T_p}{\Delta T}$ (courbe noire) ainsi que du profil de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ (courbe rouge) à $\tau = 40$ et 100.

écoulements atteignent la même valeur asymptotique. Cette dernière dépend du rapport de viscosité comme nous l'avons montré précédemment (voir figure 5.23b). De la même manière, le profil spatial de la fraction massique de mélange Y_1 dépend du nombre de Reynolds initial, pour un même rapport de viscosité comme le montre les figures 5.28a, 5.28b et 5.28c. Néanmoins, Y_1 se superpose pour les cas DNS-R9-U0-80 et DNS-R9-U0-320, comme illustré sur la figure 5.28d.

Pour résumer, les résultats montrent que les gradients de viscosité accélèrent le développement du champ scalaire, comparé à celui de l'écoulement à viscosité constante. Le développement temporel de δ_ν montre que celle-ci est peu sensible au rapport de viscosité R_ν dans la phase initiale de l'écoulement de couche de mélange. Contrairement aux temps longs, où l'épaisseur δ_ν est fortement liée au rapport de viscosité considéré. Par ailleurs, le nombre de Reynolds initial ($Re_{\theta,0}, Re_{g,0}$) semble avoir affecté le développement du champ scalaire dans la phase initiale beaucoup plus pour les temps longs $\tau > 300$.

5.1.4.3 Évaluation de l'équation de transport de la température $\langle T \rangle$ et de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$

Les observations faites ci-dessus peuvent être expliquées par l'analyse des équations de transport de la température moyenne et celle de la fraction massique de mélange moyenne. Ces équations, données au chapitre 2, sont rappelées ci-dessous :

$$\frac{\partial \langle T^* \rangle}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \langle T^* \rangle}{\partial y \partial y} \right) - \frac{\partial \langle v' T'^* \rangle}{\partial y} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \langle Y_1 \rangle}{\partial t} = \mathcal{D} \left(\frac{\partial^2 \langle Y_1 \rangle}{\partial y \partial y} \right) - \frac{\partial \langle v' Y_1' \rangle}{\partial y} \quad (5.8)$$

où \mathcal{D} et α sont respectivement les coefficients de diffusion moléculaire et thermique. Ce dernier dépend la température de l'écoulement, tandis que \mathcal{D} est un coefficient de diffusion moléculaire binaire entre deux espèces chimiques Il est constant ne dépendant pas des quantités massiques des espèces chimiques de l'écoulement.

Sauf mention contraire, le coefficient \mathcal{D} est le même pour tous les écoulements à viscosité variable. Il est choisi de sorte à ce que le nombre de Schmidt $Sc = \nu/\mathcal{D}$ de l'espèce chimique la moins visqueuse soit égale à l'unité ($\mathcal{D} = \nu_p$), pour $R_\nu = 9$. Ainsi, le nombre de Schmidt pour l'espèce visqueuse est tout simplement égale au rapport de viscosité $R_\nu = Sc = \nu_g/\mathcal{D} = \nu_g/\nu_p = 9$. Le tableau 5.3 résume les différents nombres Sc pour les rapports $R_\nu = 2,5$ à 18.

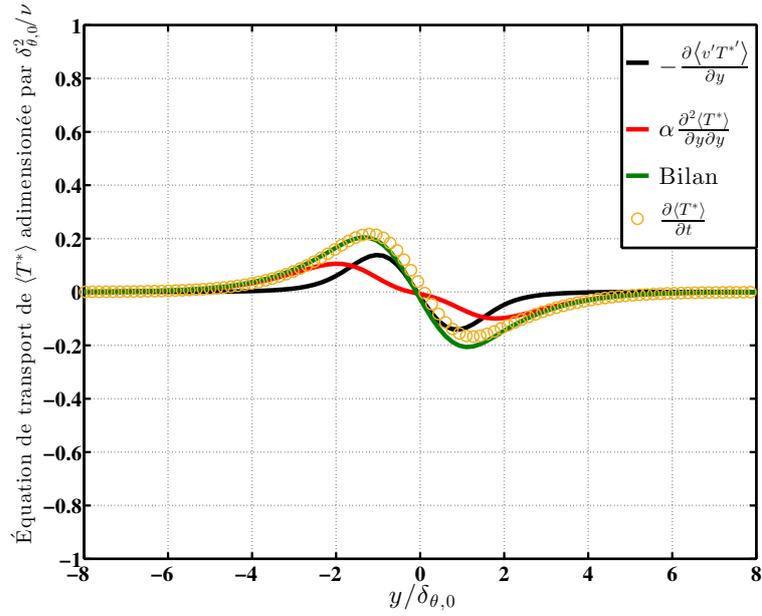
Cas test	Sc _{ref} = $\frac{\nu_{ref}}{\mathcal{D}}$	Sc _g = $\frac{\nu_g}{\mathcal{D}}$	Sc _p = $\frac{\nu_p}{\mathcal{D}}$
DNS-R2.5	6,30	9,0	3,60
DNS-R4	5,62	9,0	2,25
DNS-R6	5,25	9,0	1,50
DNS-R9	5,00	9,0	1,00
DNS-R18	4,75	9,0	0,50

TABLEAU 5.3 – Valeurs du nombre de Schmidt pour différentes simulations. $\mathcal{D} \approx 0,76 \mu m^2 s^{-1}$

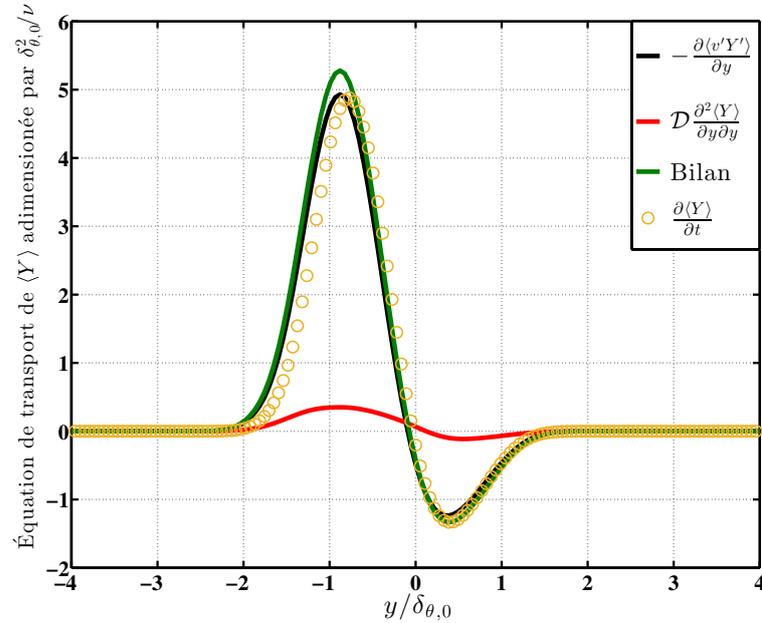
À noter que la température adimensionnelle T^* s'écrit comme :

$$T^* = \frac{T - T_p}{\Delta T} \quad (5.9)$$

où $\Delta T = T_g - T_p$ est la différence de température des courants libres de la couche de mélange le long de la direction inhomogène y , T_g et T_p sont les températures des courants



(a) DNS-R1 : $\langle T^* \rangle$



(b) DNS-R9 : $\langle Y_1 \rangle$

FIGURE 5.29 – Évaluation de l'équation de transport de la température moyenne $\langle T^* \rangle$ (expression 5.7) et de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ (expression 5.8), à $\tau = 40$.

libres chaud et froid ($T_g > T_p$), respectivement. Les différents termes sont analysés de la manière suivante :

- Termes $-\frac{\partial \langle v'Y_1' \rangle}{\partial y}$ et $-\frac{\partial \langle v'T^{*'} \rangle}{\partial y}$

Ces deux termes, de forme équivalente, représentent le transport de scalaire (température et fraction massique) par les fluctuations de vitesse verticale. Les figures 5.29a et 5.29b montre l'évaluation au temps $\tau = 40$ des équations 5.7 et 5.7, respectivement. La figure 5.29

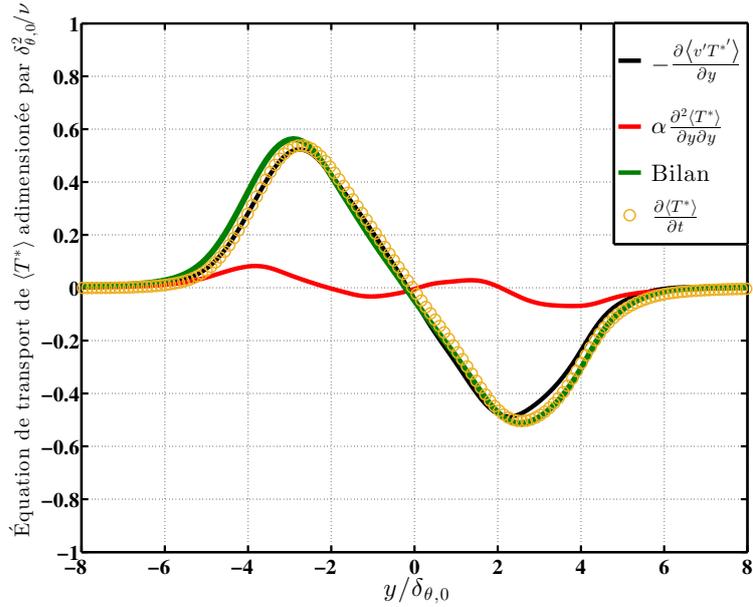
montre, en effet, qu'au temps $\tau = 40$, la diffusion du scalaire, par les fluctuations de vitesses, est plus de 25 fois plus important pour l'écoulement à viscosité variable comparé à l'écoulement à viscosité constante. Ceci explique le taux de croissance rapide du champ scalaire de l'écoulement à viscosité variable comme cela a été rapporté plus haut. Les flux thermiques $\langle v'T'^* \rangle$ sont donc très inférieurs aux flux massiques $\langle v'Y_1' \rangle$ pour deux raisons principales. La première est que le gradient initial de température $\frac{\partial \langle T'^* \rangle}{\partial y}$ est nettement inférieur au gradient initial de fraction massique $\frac{\partial \langle Y_1 \rangle}{\partial y}$, évalués à $1,3 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$ et $9,8 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$, respectivement. Les fluctuations typiques de la fraction massique sont en toute logique supérieurs à celles de la température dans ce cas. La seconde raison est attribuée aux fluctuations de la vitesse verticale v' qui, comme nous allons le montrer au chapitre 6, sont avantageusement plus intenses pour l'écoulement à viscosité variable, résultat que nous interpréterons comme un effet de variation de viscosité. Il est à noter que malgré l'absence de termes supplémentaires liés aux variations de viscosité dans l'équation de transport de scalaire actif, celui-ci est tout de même affecté par les variations de viscosité via les termes dits classiques. Plus loin à $\tau = 100$, la figure 5.30 montre que le transport turbulent des flux massiques demeure plus important comparé au transport turbulent des flux thermiques de l'écoulement à viscosité constante, le rapport entre ces deux termes passe néanmoins de plus de 25 pour $\tau = 40$ à 5 pour $\tau = 100$.

- Termes $\mathcal{D} \frac{\partial^2 \langle Y_1 \rangle}{\partial y \partial y}$ et $\alpha \frac{\partial^2 \langle T'^* \rangle}{\partial y \partial y}$

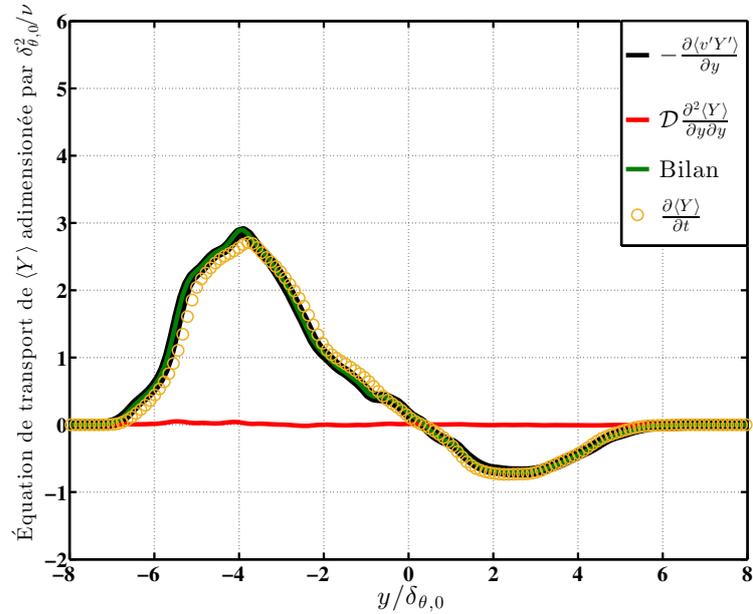
La figure 5.29 montre que la diffusion laminaire de la fraction massique de l'écoulement à viscosité variable est négligeable dans le bilan de transport de $\langle Y_1 \rangle$ (sa contribution est de l'ordre de 5%) tandis que la diffusion laminaire de la température de l'écoulement à viscosité constante contribue près de 50% au bilan de transport de $\langle T'^* \rangle$. Cela donne une indication sur le niveau turbulence du champ scalaire des deux situations à viscosités constante et variable. La diffusion laminaire étant négligeable dans un champ turbulent. La dissymétrie de $\mathcal{D} \frac{\partial^2 \langle Y_1 \rangle}{\partial y \partial y}$ vient de l'adimensionnement effectué sur le bilan 5.8 par la viscosité cinématique moyenne $\langle \nu \rangle$, plus faible du coté du fluide rapide (correspondant aux $y/\delta_{\theta,0}$ négatifs). À $\tau = 100$, le terme de diffusion moléculaire $\mathcal{D} \frac{\partial^2 \langle Y_1 \rangle}{\partial y \partial y}$ est complètement négligeable, tandis que le terme $\alpha \frac{\partial^2 \langle T'^* \rangle}{\partial y \partial y}$ représente encore 11% du bilan de l'équation de transport de la température. Nous pouvons distinguer sur le profil de ce dernier les trois points d'inflexions observées sur le profil de température moyenne $\langle T'^* \rangle$.

- Termes $\frac{\partial \langle Y_1 \rangle}{\partial t}$ et $\frac{\partial \langle T'^* \rangle}{\partial t}$

La variation dans le temps des profils moyen de température et de fraction massique du mélange révèle que cette dernière est sujette à des évolutions temporelles plus rapides que la température. Ceci est en accord avec ce que nous avons montré plus haut, c'est-à-dire que le taux de croissance de l'épaisseur de viscosité (liée par la loi de Wilke aux fractions massiques de mélange) est plus grand que celui de l'épaisseur de température. Une fois encore, la dissymétrie du terme $\frac{\partial \langle Y_1 \rangle}{\partial t}$ vient de l'adimensionnement par la viscosité moyenne appliqué au bilan 5.8. Notons que cette dissymétrie s'estompe peu à peu à $\tau = 100$ car la viscosité cinématique s'homogénéise à mesure que le mélange turbulent prend place.



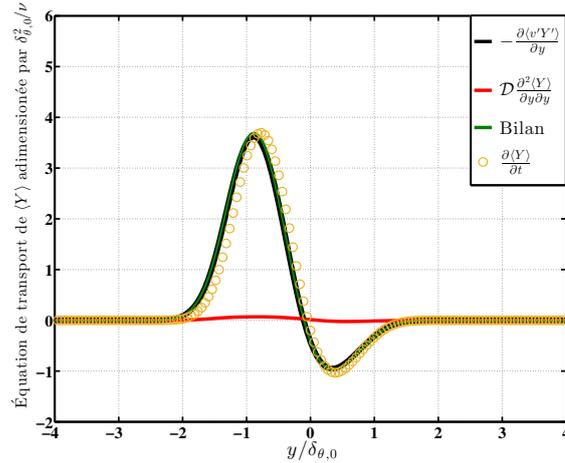
(a) DNS-R1 : $\langle T^* \rangle$



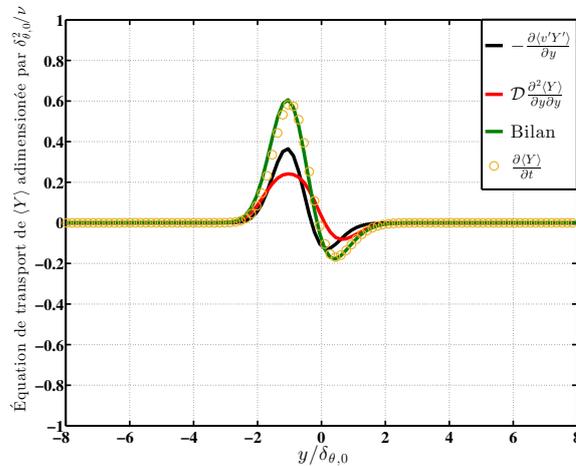
(b) DNS-R9 : $\langle Y_1 \rangle$

FIGURE 5.30 – Évaluation de l'équation de transport de la température moyenne $\langle T^* \rangle$ (expression 5.7) et de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ (expression 5.8), à $\tau = 100$.

Intéressons nous à présent aux effets du nombre de Reynolds initial sur l'équation de transport de la fraction massique moyenne de l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$, les deux nombres de Reynolds testés sont $Re_{\theta,0} = 128$ et 32 . La figure 5.31 montre que les termes du bilan 5.8 de l'écoulement à viscosité variable à DNS-R9-U0-80 possèdent une amplitude plus faible que l'écoulement DNS-R9-U0-230. Le terme de diffusion par la turbulence $-\frac{\partial \langle v' Y_1' \rangle}{\partial y}$ est, pour l'écoulement à haut nombre de Reynolds initial, 9 fois plus important que dans le cas à bas nombre de Reynolds $\delta_{\theta,0}$ et ce malgré un gradient de viscosité initial identique. Ceci réside dans l'incapacité de l'écoulement à bas nombre de Reynolds à produire des fluctuations



(a) DNS-R9-U0-320 : $R_\nu = 9$, $Re_{\theta,0} = 128$, $Re_{g,0} = 320$



(b) DNS-R9-U0-80 : $R_\nu = 9$, $Re_{\theta,0} = 32$, $Re_{g,0} = 80$

FIGURE 5.31 – Évaluation de l'équation de transport la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ (expression 5.8) de l'écoulement à viscosité variable, $R_\nu = 9$, pour $Re_{\theta,0} = 128$ et $Re_{\theta,0} = 32$, à $\tau = 40$.

typiques de vitesse aussi importantes que celles de l'écoulement à haut Reynolds. En effet, et comme nous allons le voir au chapitre 6, les fluctuations typiques de la vitesse vertical v' sont environ le double lorsque le nombre de Reynolds est élevé, comparé à la situation bas nombre de Reynolds. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, cette capacité à produire des fluctuations de vitesse n'est pas seulement due au nombre de Reynolds initial élevé, mais également à l'interaction du champ de vitesse et du champ scalaire de l'écoulement à viscosité variable qui engendre une accélération ou alors sur surproduction des fluctuations de vitesse et de scalaire. Une analyse plus fine de cet aspect sera abordée dans chapitre 6.

Par ailleurs, le terme de diffusion moléculaire est négligeable pour DNS-R9-U0-320, ce qui n'est pas le cas de DNS-R9-U0-80. Ceci explique le caractère diffusif de cet écoulement comme le montre la figure 5.27.

À $\tau = 100$, la figure 5.32 montre de manière générale que les termes de l'équation 5.8

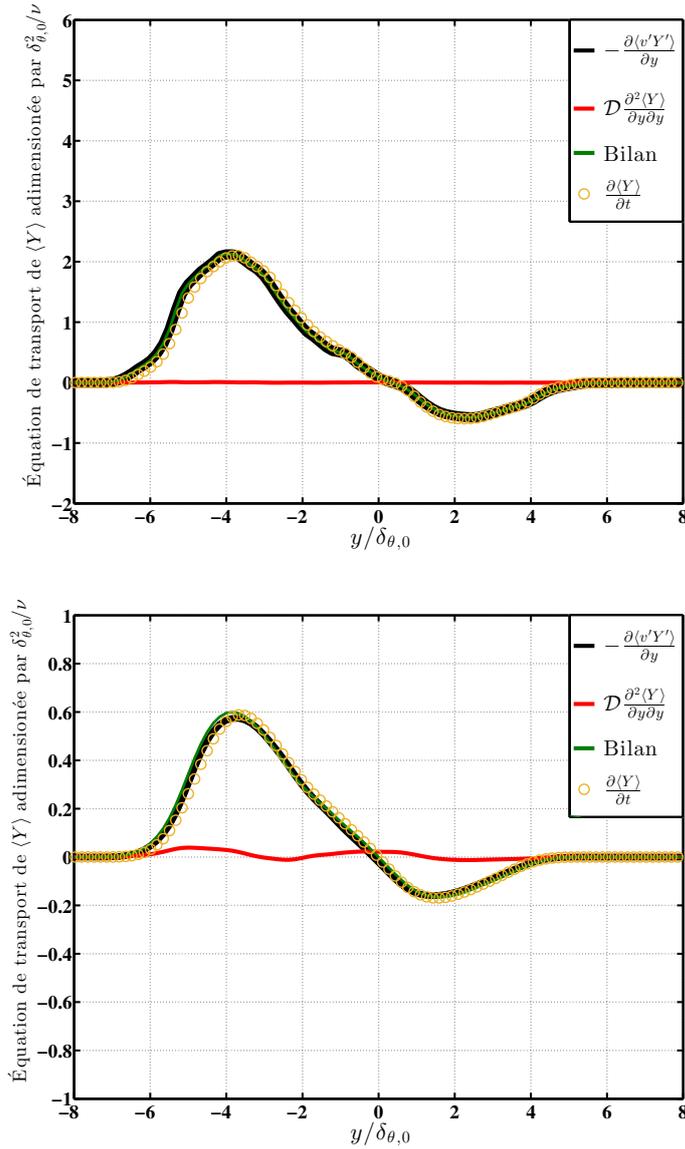


FIGURE 5.32 – Évaluation de l'équation de transport de (a) la température moyenne $\langle T^* \rangle$ et de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ de l'écoulement à viscosité variable, $R_\nu = 9$, pour (b) $Re_{\theta,0} = 128$ et (c) $Re_{\theta,0} = 32$, à $\tau = 100$.

sont plus importants pour DNS-R9-U0-320, synonyme d'un transport de scalaire plus étendu (voir figure 5.27).

5.2 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, les principaux résultats des champs moyens (vitesse, vorticité, scalaire), montrant le comportement dynamique des écoulements à viscosités constante et variable. Nous nous sommes focalisé sur la phase initiale de l'écoulement, où les effets de variation de viscosité sont les plus importants. Pour ce faire, nous avons choisi

de présenter les résultats à $\tau = 40$, très proche de l'état initial, et $\tau = 100$ où les termes supplémentaires deviennent négligeables. Le régime pleinement turbulent est obtenu pour les temps longs ($\tau \approx 400$), celui-ci est directement influencé par le comportement dynamique de l'écoulement dans sa phase initiale. Comparativement à l'écoulement à viscosité constante, nos résultats ont montré que les variations de viscosité accélèrent le développement temporel des épaisseurs δ_θ et $\delta_{\nu,0}$ et modifient les profils de vitesse moyenne, toutes choses égales par ailleurs. Plus intéressant, les variations de viscosité amplifient les gradients de vitesse moyenne $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$, qui atteignent des valeurs plus importantes que celles initiales. Ce comportement est proportionnel au rapport de viscosité R_ν . C'est un résultat très marquant, qui renferme, en partie, l'explication physique des écoulements à viscosité variable. En effet, l'augmentation de $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ va se répercuter, entre autres, sur la production de l'énergie cinétique turbulente $\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$, et par conséquent du développement de la turbulence.

Le champ de vorticité moyenne est également influencé par les variations de viscosité. En effet, la composante transversale, $\langle \omega_z \rangle = -\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$, est plus importante pour les écoulements $R_\nu > 1$. Les tourbillons bi-dimensionnel de Kelvin-Helmholtz se forment plus rapidement dans l'écoulement. Ils sont caractérisés par une diffusion plus importante du coté du fluide ν_g .

Par ailleurs, l'analyse des différentes équations de transport a permis de mettre en évidence l'importance de certains termes supplémentaires. En particulier, le terme $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$, présent dans l'équation 5.3, et le terme $\frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \right\rangle$, dans l'équation 5.4, sont prédominants. Néanmoins, leur rôle devient faible à partir de $\tau = 100$.

Ainsi, l'analyse du champ de vitesse moyenne a permis de constater que les variations de viscosité amplifient le caractère inflexionnel de l'écoulement (celui-ci est initié par un profil de vitesse en tangente hyperbolique), tel que prédit par Govindarajan [44].

Nous avons également abordé, dans ce chapitre, l'influence des différents nombres de Reynolds initiaux sur le développement de l'écoulement. Nous nous sommes intéressé, en particulier, aux effets de viscosité lorsque le nombre de Reynolds $Re_{g,0}$ passe de 320   80. De manière générale, pour de faibles nombres de Reynolds, les résultats montrent que l'écoulement est, dans une phase initiale, très perturbé par les variations de viscosité. Le transfert diffusif de la quantité de mouvement est plus marqué, causé par un nombre de Péclet plus faible. Au cours de son évolution, l'écoulement à viscosité variable entraîne dans la zone de cisaillement du fluide visqueux ν_g , ce qui fait augmenter la viscosité du mélange. Pour les faibles nombres de Reynolds, cela fini par ralentir le développement des fluctuations de vitesse dans l'écoulement, en particulier pour les temps longs. La composante verticale $\langle v'^2 \rangle$ est particulièrement marquée par ce comportement, sans doute à cause du gradient de viscosité qui lui est parallèle.

Chapitre 6

Effets des variations de viscosité dans une couche de mélange temporelle : Analyse détaillée

Sommaire

6.1	Analyse du champ fluctuant : Statistiques en un point	146
6.1.1	Analyse du champ de vitesse fluctuant	146
6.1.1.1	Évolution spatio-temporelle	146
6.1.1.2	Anisotropie	156
6.1.1.3	Autosimilarité	158
6.1.1.4	Corrélations	165
6.1.1.5	Équations de transport de $\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$, $\langle w'^2 \rangle$ et $\langle u_i'^2 \rangle$. . .	167
6.1.2	Analyse du champ de vortacité fluctuant	180
6.1.2.1	Évolution spatio-temporelle	180
6.1.2.2	Autosimilarité	183
6.1.2.3	Équation transport de $\langle \omega_i'^2 \rangle$	184
6.1.3	Analyse du champ scalaire fluctuant	186
6.1.3.1	Évolution temporelle	186
6.1.3.2	Autosimilarité	187
6.1.3.3	Équations de transport de $\langle T^{*2} \rangle$ et $\langle Y_1'^2 \rangle$	187
6.2	Analyse du champ fluctuant à chaque échelle	189
6.2.1	Analyse des fonctions de structures de vitesse	189
6.2.2	Analyse de l'équation de transport de $\langle (\Delta u_i)^2 \rangle$	194
6.3	Conclusion	198

6.1 Analyse du champ fluctuant : Statistiques en un point

Ce section est dédiée à l'analyse des effets des variations spatio-temporelles de la viscosité sur l'évolution des grandeurs fluctuantes. L'objectif est bien appréhender les mécanismes, sous-jacents, pouvant expliquer les observations notées au chapitre précédent.

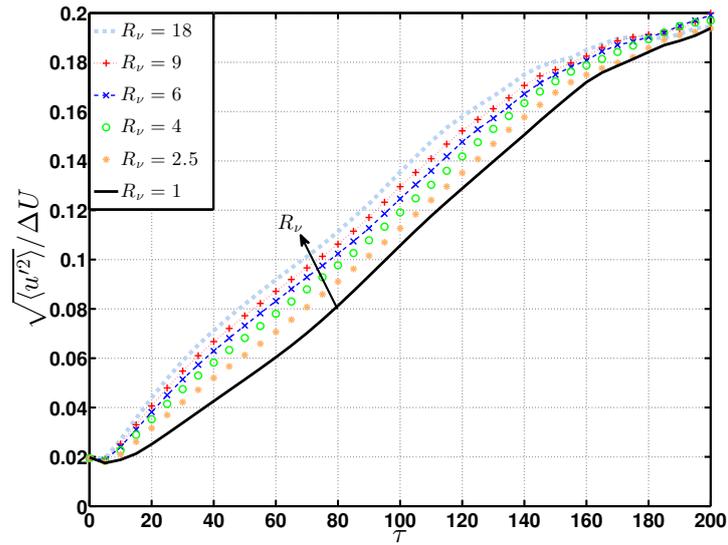
6.1.1 Analyse du champ de vitesse fluctuant

6.1.1.1 Évolution spatio-temporelle

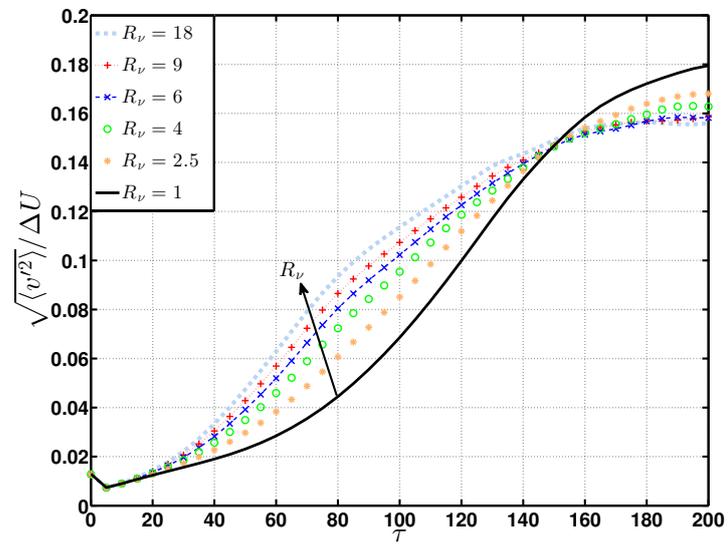
L'intérêt est porté sur la phase initiale du développement de la couche de mélange temporelle afin de comprendre comment, un gradient de viscosité imposé à l'état initial, va influencer le développement de la turbulence. A l'état initial, l'intensité de turbulence de toutes les simulations présentées dans ce mémoire est identique ($\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / \Delta U = 0.0193$, $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / \Delta U = 0.0128$, $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / \Delta U = 0.0131$). Néanmoins, l'évolution temporelle de ces fluctuations diffère selon le rapport de viscosité R_ν considéré, comme le montre la figure 6.1.

Ces intensités turbulente sont calculées à la position verticale $y = y_m$ de la couche de mélange où elles sont maximales. Cette position correspond à l'axe de la couche de mélange $y = 0$ pour l'écoulement à viscosité constante $R_\nu = 1$. Cependant, pour les écoulements à viscosité variable, cette position est légèrement déviée du coté du courant de fluide rapide ($y < 0$). Nous observons, durant l'intervalle de temps $\tau \in [0 - 200]$, que les intensités de turbulence longitudinales ($\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / \Delta U$) évoluent plus rapidement au fur et à mesure que le rapport de viscosité augmente. La même observation peut être faite sur l'évolution des intensités de turbulence transversales ($\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / \Delta U$).

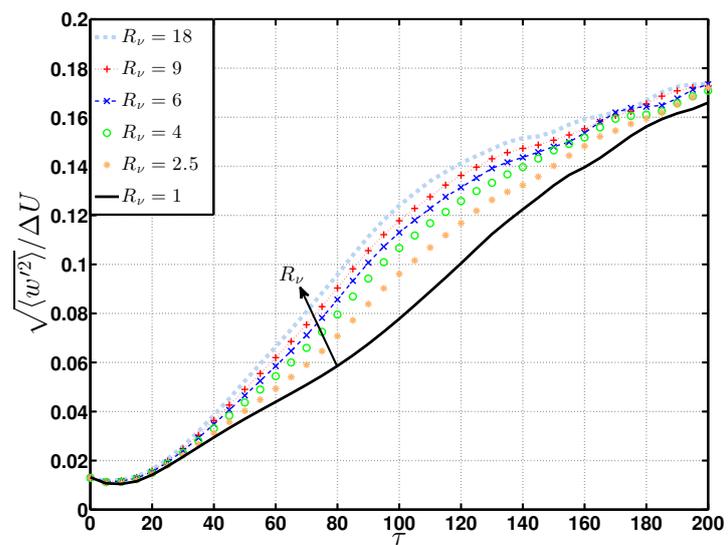
Les fluctuations de vitesse normales ($\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / \Delta U$) évoluent de manière proportionnelle avec le rapport de viscosité et ceci uniquement dans l'intervalle de temps $\tau \in [0 - 155]$. Cette tendance est complètement inversée à partir de $\tau = 155$. Les intensités de turbulence normales deviennent plus importantes pour l'écoulement à viscosité constante. L'explication de ce comportement est reliée à la présence d'un gradient de viscosité dans la direction inohmogène y qui, dans un premier temps, va soutenir la production des fluctuations de vitesse verticale (parallèle donc au gradient de viscosité) jusqu'à l'instant où l'entraînement du fluide R_ν fois plus visqueux au sein de la couche de mélange va pénaliser la production des fluctuations normales ($\langle v'^2 \rangle / \Delta U^2$). Néanmoins, le gradient de viscosité, imposé à l'état initial, apparaît de manière générale comme un accélérateur de la turbulence. Afin de mieux se rendre compte de l'amplitude de cette accélération en fonction du rapport de viscosité R_ν , analysons à présent les profils des fluctuations de vitesse à $\tau = 100$. La figure 6.2 montre le profil des trois composantes ($\sqrt{\langle u_i'^2 \rangle} / \Delta U, i = 1, 2, 3$) le long de la direction inhomogène y à



(a) $\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / \Delta U$,

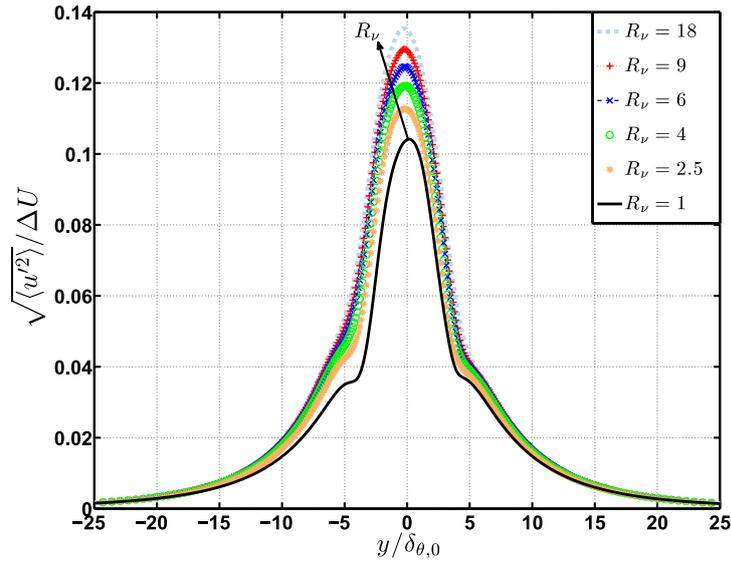


(b) $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / \Delta U$,

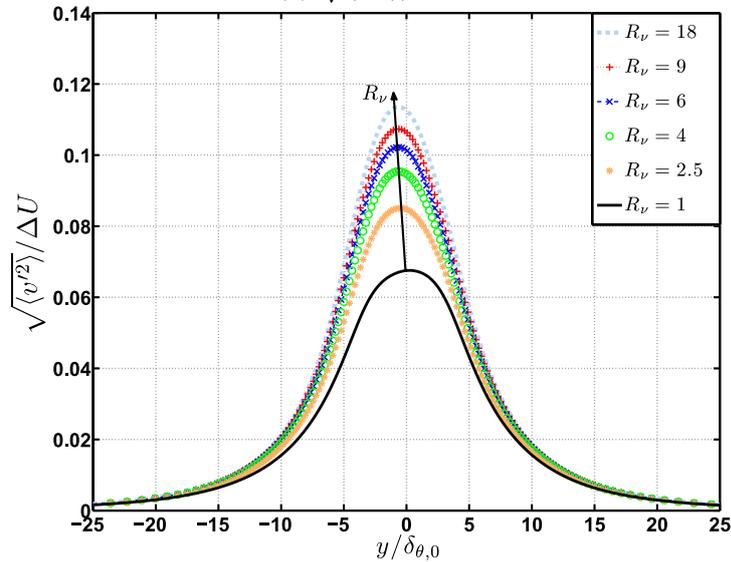


(c) $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / \Delta U$,

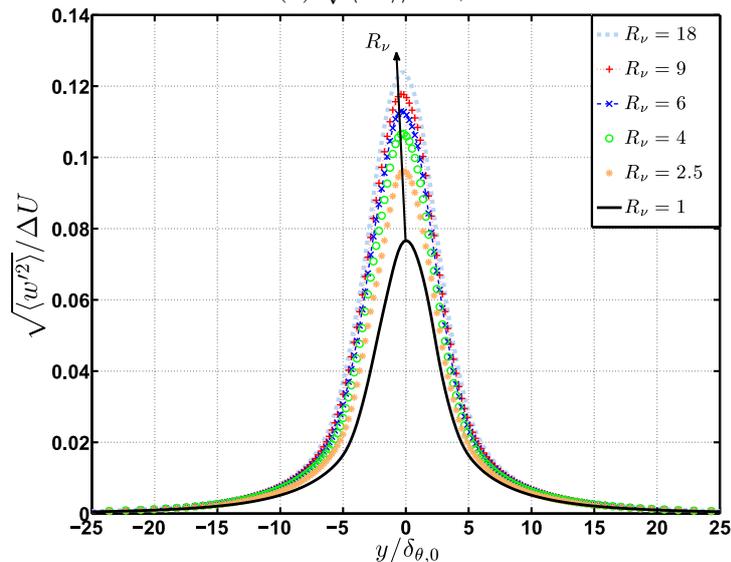
FIGURE 6.1 – Évolution temporelle des intensités de turbulence pour différents rapports de viscosité R_ν .



(a) $\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / \Delta U$,



(b) $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / \Delta U$,



(c) $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / \Delta U$,

FIGURE 6.2 – Profils spatiaux des intensités de turbulence le long de la direction inhomogène y pour différents rapports de viscosité R_ν au temps $\tau = 100$.

ce même temps.

Pour les écoulements à viscosité variable ($R_\nu > 1$), ces profils présentent des pics plus importants et sont plus étalés, comparé à l'écoulement de référence. En reliant ce résultat à celui de l'épaisseur de quantité de mouvement, il apparaît qu'à ce temps ($\tau = 100$), la couche de mélange à viscosité variable (quelque soit le rapport $R_\nu > 1$) est caractérisée par une épaisseur plus importante (jusqu'à 12,5 % d'augmentation pour $R_\nu = 18$, figure 5.2, des fluctuations de vitesse plus importantes (jusqu'à 70 % d'augmentation pour $R_\nu = 18$, figure 6.3) par rapport à l'écoulement de référence. En effet, la courbe 6.3 montre l'évolution temporelle de l'écart relatif des intensités de turbulence longitudinales, normales et transversales entre les différents écoulements à viscosité variable et l'écoulement de référence :

$$\frac{\left[\sqrt{\langle u_k'^2 \rangle} / \Delta U \right] (R_\nu) - \left[\sqrt{\langle u_k'^2 \rangle} / \Delta U \right] (R_\nu = 1)}{\left[\sqrt{\langle u_k'^2 \rangle} / \Delta U \right] (R_\nu = 1)}, k = 1, 2 \text{ ou } 3, \quad (6.1)$$

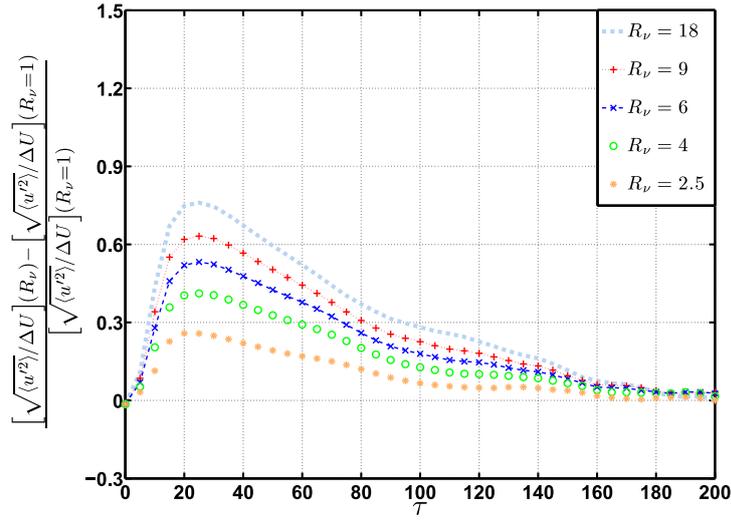
(le double indice k dans l'équation 6.1 n'est pas une sommation).

L'analyse de la figure 6.3 nous permet de mieux comprendre les mécanismes physiques par lesquels les gradients de viscosité agissent dans l'écoulement. En effet, nous constatons que l'écart relatif exprimé en 6.1 croît de manière proportionnelle avec le rapport de viscosité R_ν . De plus, il apparaît que cet écart relatif est plus important pour les intensités de turbulence verticales ; $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / \Delta U$ comparativement aux deux autres composantes. Nous pouvons alors en déduire que la stratification de la viscosité au niveau de l'interface entre les deux fluides, ν_g et ν_p est le siège d'une importante production de fluctuations de vitesse verticale. La question est de savoir comment la production de ces fluctuations de vitesses verticales est reliée aux gradients de viscosité. En effet, s'agit-il, comme pour les études de compressibilité [5], de termes supplémentaires dans les équations de Navier-Stokes qui justifient cette *surproduction* des fluctuations de la vitesse normale ? Ou alors un comportement physique de la couche de mélange à viscosité variable plus subtile qui est à l'origine de cette augmentation ? C'est à ces questions que nous tâcherons d'apporter une réponse dans la prochaine section.

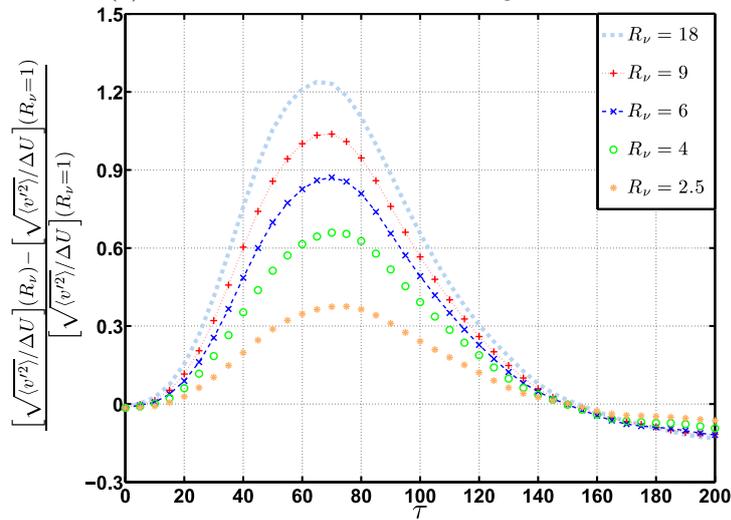
L'augmentation des fluctuations transversales lorsque le rapport R_ν augmente indique que la tridimensionnalisation de l'écoulement à viscosité variable est plus prononcée comparée à l'écoulement de référence ($R_\nu = 1$)

Analysons à présent l'effet du nombre de Reynolds initial sur l'évolution temporelle des fluctuations de vitesse de l'écoulement à viscosité variable ($R_\nu = 9$). En effet, il a été montré, au chapitre précédent, que les grandeurs moyennes à grandes échelles (δ_θ , $\langle U \rangle$ et $\langle \omega_z \rangle$) sont affectées différemment par la viscosité variable (par un même rapport $R_\nu = 9$) selon le nombre de Reynolds initial considéré. Précisément, ce dernier est rappelé dans le tableau 6.1 pour différents écoulements. Le nombre de Reynolds $Re_{gp,0}$ est équivalent au critère k_t de Campbell et al. [82], il est défini comme suit :

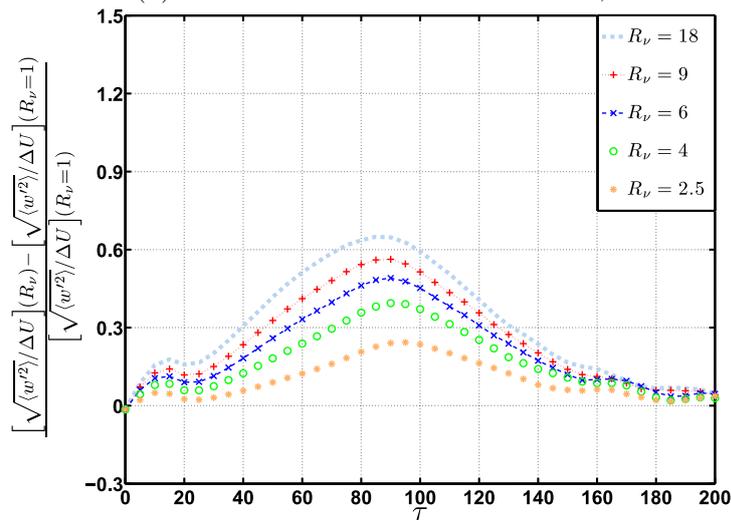
$$Re_{gp,0} = \frac{U_g \delta_{\theta,0} / 2}{\nu_g} \quad (6.2)$$



(a) Écart relatif des vitesses longitudinales,



(b) Écart relatif des vitesses normales,



(c) Écart relatif des vitesses transversales,

FIGURE 6.3 – Évolution temporelle des écarts relatifs des trois composantes de vitesse fluctuantes, selon 6.1.

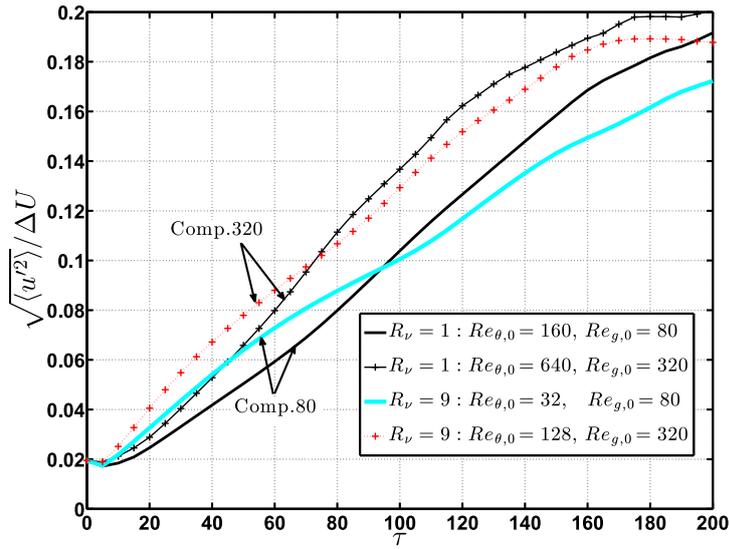
TABLEAU 6.1 – Nombres de Reynolds initiaux de quelques cas-tests.

Cas tests	R_ν	$Re_{\theta,0}$	$Re_{g,0}$	$Re_{p,0}$	$Re_{gp,0}$
DNS-R1-U0-80	1	160	80	0	80
DNS-R1-U0-320	1	640	320	0	320
DNS-R9-U0-80	9	32	80	0	≈ 8
DNS-R9-U0-320	9	128	320	0	≈ 35

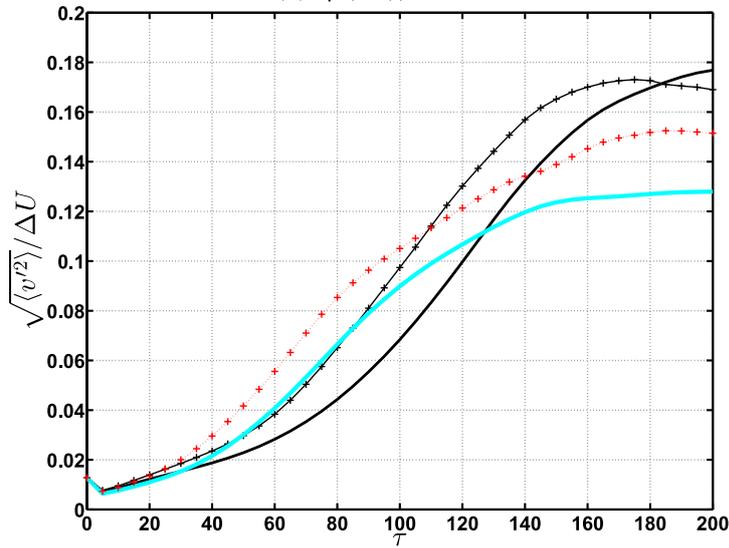
La valeur de $Re_{gp,0}$ pour l'écoulement DNS-R9-U0-80 est environ 8, valeur assez proche de $K_t = 7$ de Campbell et al. [82] pour laquelle les fortes variations de viscosité inhibent le mélange entre les deux fluides ν_g et ν_p .

Les figures 6.4a, 6.4b et 6.4c montrent, respectivement, l'évolution temporelle des fluctuations de vitesse longitudinale, normale et transversale, pour l'écoulement à viscosité variable ($Re_{g,0} = \{80, 320\}$) et l'écoulement à viscosité constante ($Re_{g,0} = \{80, 320\}$). La comparaison des différentes courbes de la figure 6.4 peut se faire sur la base des nombres de Reynolds du tableau 6.1. En effet, nous avons mentionné, au chapitre précédent, qu'il n'existe pas un unique nombre de Reynolds pour comparer deux écoulements, l'un à viscosité constante et l'autre à viscosité variable. Dans notre cas, le critère de comparaison peut s'agir du nombre de Reynolds du courant rapide $Re_{g,0}$ ou alors du nombre de Reynolds $Re_{\theta,0}$ basé sur la différence de vitesse ΔU entre le courant rapide et courant lent. C'est sur ce dernier que nous avons bâti notre comparaison des courbes précédentes. Désormais, nous adoptant comme critère de comparaison le nombre de Reynolds $Re_{g,0}$.

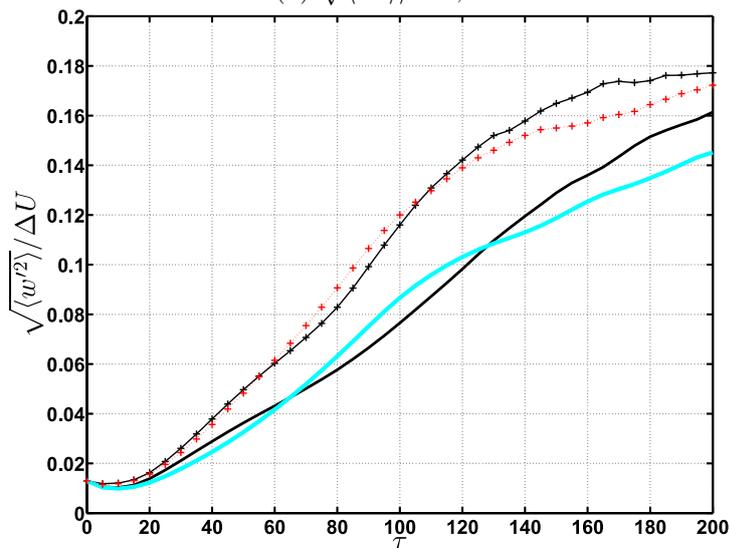
L'évolution des fluctuations de vitesse de l'écoulement DNS-R9-U0-80, par rapport à DNS-R1-U0-80 (que nous appelons *Comp.80*) et de l'écoulement DNS-R9-U0-320 par rapport à DNS-R1-U0-320 (que nous appelons *Comp.320*), est qualitativement très similaire pour les trois composantes de vitesse. D'après la figure 6.4a, l'écoulement à viscosité variable présente une *accélération* des fluctuations de vitesse longitudinales dans l'intervalle $\tau \in [0 - 87]$ et $\tau \in [0 - 77]$ pour les comparaisons *Comp.80* et *Comp.320*, respectivement. Nous remarquons que cette accélération est plus prononcée dans le cas de *Comp.80*. À partir de $\tau = 100$, les fluctuations de vitesse longitudinale deviennent plus importantes pour l'écoulement à viscosité constante dans les deux comparaisons *Comp.80* et *Comp.320*. Néanmoins, cette décroissance de fluctuations de vitesse est plus prononcée dans le cas de la comparaison *Comp.80*, le nombre de Reynolds étant plus faible que dans le cas *Comp.320*. Cela s'explique par l'analyse du nombre de Reynolds $Re_{gp,0}$ basé sur la viscosité la plus grande des deux courants de la couche de mélange. En effet, $Re_{gp,0}$ est de l'ordre de 35 pour DNS-R9-U0-320 alors qu'il n'est que de 8 pour DNS-R9-U0-32. Les petites valeurs de $Re_{gp,0}$ accentuent non seulement les effets



(a) $\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / \Delta U,$



(b) $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / \Delta U,$



(c) $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / \Delta U,$

FIGURE 6.4 – Évolution temporelle des intensités de turbulence pour différents rapports de viscosité R_ν .

"positifs" de la viscosité variable (accélération des u') mais également les effets "négatifs"¹ par une décélération plus importante des u' plus en aval (à partir de $\tau = 100$). L'apport en fluide R_ν fois plus visqueux, au sein de la couche de mélange, se caractérise dans un premier temps par une accélération de la production des fluctuations de vitesse, puis par une accélération de la décroissance de celle-ci. **En somme, les variations de viscosité accélère le cycle de vie de l'écoulement en passant par les mêmes phases de développement que son homologue à viscosité constante.**

Pour illustrer ce propos, analysons le terme de production de l'énergie cinétique de turbulence $P_k = \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ adimensionné par $\delta_{\theta,0}$ et ΔU pour les quatre écoulements présentés dans le tableau 6.1. D'après la figure 6.5, la production de l'énergie cinétique de turbulence

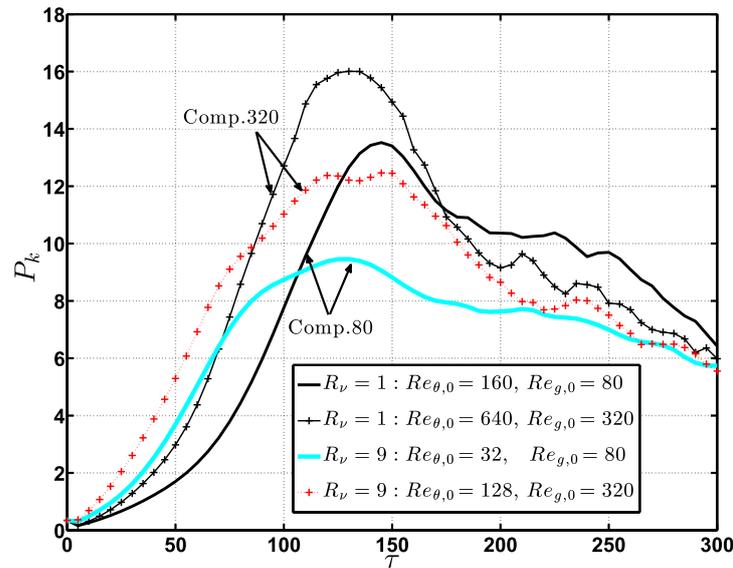


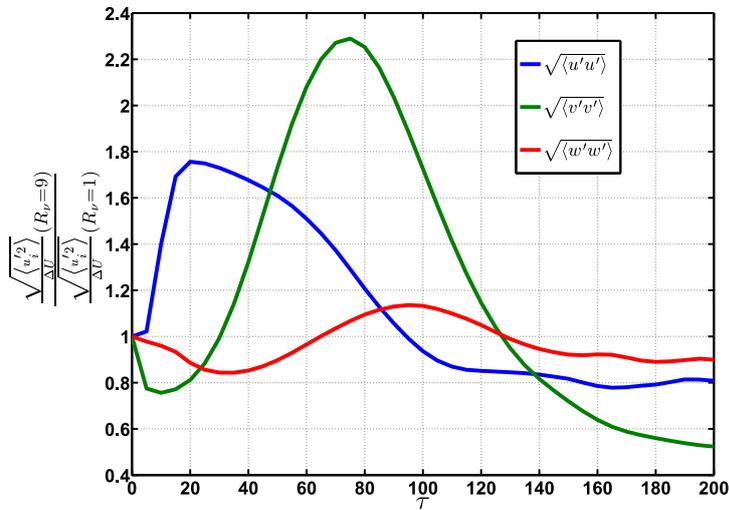
FIGURE 6.5 – Effet du nombre de Reynolds initial sur l'évolution temporelle du terme de production de l'énergie cinétique de turbulence $P_k = \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ adimensionné par $\delta_{\theta,0}$ et ΔU^3 .

passer par deux phases principales dans le développement de l'écoulement de la couche de mélange. La première est l'augmentation plus au moins rapide du terme P_k jusqu'à atteindre un pic (correspondant à la phase de l'enroulement et l'appariement des structures de Kelvin-Helmholtz), puis une décroissance de la production jusqu'à l'état auto-similaire. Ces deux phases caractérisent les deux situations à viscosités constante et variable. Cependant, la région du pic de production est clairement identifiable pour l'écoulement à viscosité constante (forme en cloche), tandis que l'écoulement à viscosité variable présente un pic de production P_k plus aplati. Nous observons que l'écoulement à viscosité variable produit davantage d'énergie cinétique de turbulence dans les deux situations *Comp.80* et *Comp.320*. Plus intéressant, la production de l'énergie cinétique de turbulence du cas DNS-R9-U0-80 est, dans l'intervalle $\tau \in [0 - 70]$, du même ordre de grandeur (+20 % à $\tau = 50$) que celle de l'écoulement DNS-R1-U0-320; ces deux simulations sont initialisées par un nombre de Reynolds

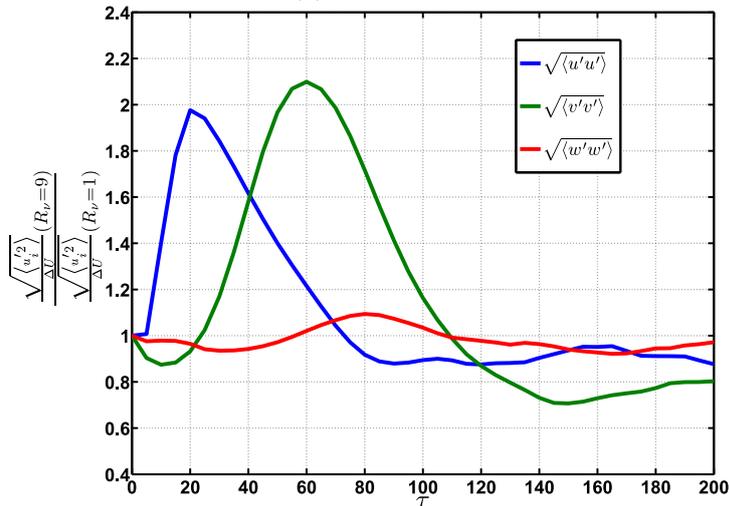
1. Ici, les termes positifs et négatifs sont employés en considérant que la turbulence est effectivement un régime d'écoulement souhaitable. Dans d'autres situations où la stabilisation de l'écoulement est recherchée, l'emploi de ces termes s'inverse et l'effet positif devient la diminution des fluctuations u' .

$Re_{\theta,0}$ de 160 et 640, respectivement. Ce résultat conduit à une conclusion très marquante ; **l'accélération de la turbulence observée sur les écoulements à viscosité variable n'est nullement un effet du nombre de Reynolds**. Les variations spatio-temporelle de la viscosité contribuent grandement à la déstabilisation de l'écoulement et à l'accélération de la turbulence, ce qui est en parfait accord avec les analyses quantitative et qualitative de Talbot et al.[32].

La figure 6.6 montre le rapport des trois composantes des fluctuations de vitesse entre l'écoulement à viscosité variable et celui à viscosité constante dans les deux comparaisons *Comp.80* et *Comp.320*. Tout d'abord, la production des fluctuations de vitesse longitudinales est stimulée par la présence des variations de viscosité (jusqu'à 100 % de gain, figure 6.6b, $\tau = 20$). La production des fluctuations de vitesse verticales est supérieure pour l'écoulement



(a) *Comp.80*.



(b) *Comp.320*.

FIGURE 6.6 – Évolution temporelle du rapport entre les fluctuations de vitesse de l'écoulement à viscosité variable et à l'écoulement à viscosité constante pour les comparaisons *Comp.80* et *Comp.320*.

à viscosité constante, cela est vrai pour la comparaison *Comp.80* dans l'intervalle $\tau \in [0 - 30]$ ainsi que pour la comparaison *Comp.320* dans l'intervalle $\tau \in [0 - 22]$. Cette situation s'inverse

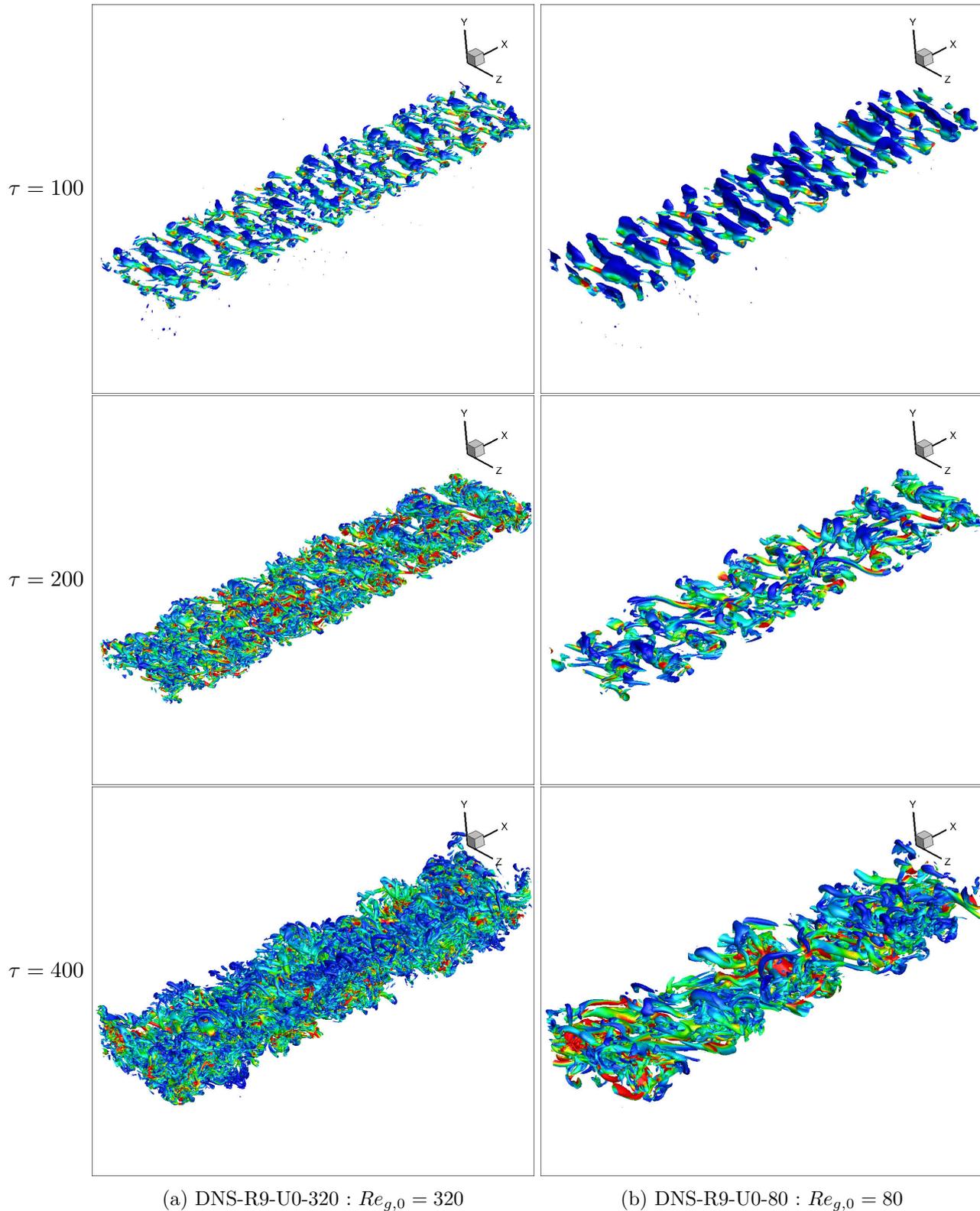


FIGURE 6.7 – Visualisation tridimensionnelle de l’écoulement de couche de mélange temporelle, $R_\nu = 9$, au moyen des iso-surfaces $\Lambda = 0.3$, pour deux nombres de Reynolds $Re_{g,0}$. Les structures turbulentes sont colorées par l’énergie cinétique de turbulence $q_2 = \frac{1}{2}u_i'^2$.

à mesure que l’écoulement évolue dans le temps. À faible nombre de Reynolds ($Re_{g,0} =$

80), le gain en terme de fluctuation verticales atteint 130 % pour la comparaison *Comp.80* (figure 6.6a, $\tau \approx 75$) et 110 % pour la comparaison *Comp.320* (figure 6.6b, $\tau \approx 60$). À $\tau = 200$, la production des fluctuations verticales recule par rapport à l'écoulement à viscosité constante de près de 48 % pour la comparaison *Comp.80* et près de 20 % pour la comparaison *Comp.320*. La faible valeur de $Re_{gp,0}$ pour l'écoulement DNS-R9-U0-32 explique ces dernières observations. Dans ce cas, les effets visqueux deviennent de plus en plus importants devant les effets d'inertie au fur et à mesure que le fluide ν_g est englouti à l'intérieur de la zone de cisaillement. La figure 6.7 montre les iso-surfaces du critère Q adimensionné, $\Lambda = 0,3$ pour les deux écoulements DNS-R9-U0-320 et DNS-R9-U0-80, à différents τ .

6.1.1.2 Anisotropie

La figure 6.9 montre l'évolution temporelle du paramètre d'anisotropie b_{ij}^v qui s'écrit comme :

$$b_{ij}^v = \frac{\langle u'_i u'_j \rangle^v}{2 \langle q^2 \rangle^v} - \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (6.3)$$

avec :

$$\langle u'_i u'_j \rangle^v = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \langle u'_i u'_j \rangle dy, \quad (6.4)$$

et

$$\langle q^2 \rangle^v = \frac{1}{2L_y} \int_0^{L_y} \langle u'_i u'_i \rangle dy, \quad (6.5)$$

(somme sur le double indice i).

L'exposant v désigne les grandeurs moyennes intégrées suivant la direction inhomogène y .

Les résultats de la présente étude montrent que le paramètre (tenseur) d'anisotropie b_{ij}^v dépend du rapport de viscosité R_ν . À notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de résultats analogues aux nôtres du fait de la rareté des études exploitant les effets de la viscosité variable. Cependant, les études s'intéressant aux effets de compressibilité trouvent que les quantités b_{11}^v et b_{22}^v présentent des différences avec le nombre de Mach [76]. Le tenseur b_{ij}^v possède trois invariants. Le premier, \mathbf{I}_b , est nul par construction, il est égale à la trace de b_{ij}^v . Le second, $\mathbf{II}_b = b_{ij}^v b_{ji}^v$ est positif, il représente le degré d'anisotropie du champ de vitesse. Le troisième, $\mathbf{III}_b = b_{ij}^v b_{jk}^v b_{ki}^v$, peut être positif ou négatif, sa valeur donne des informations sur la nature de l'anisotropie [83]. Dans les régions où l'écoulement est isotrope, le tenseur b_{ij}^v est nul. Néanmoins, le tenseur b_{ij}^v ne révèle que l'anisotropie globale de l'écoulement alors que l'isotropie est intimement liée à la notion d'échelle. Néanmoins, l'analyse du tenseur b_{ij}^v , permet d'avoir une idée du niveau d'anisotropie du champ de vitesse fluctuant.

Lumley [85] a été le premier à utiliser les invariants \mathbf{II}_b et \mathbf{III}_b pour construire un diagramme qui, désormais porte le nom de *triangle de Lumley* (voir figure 6.8), pour caractériser

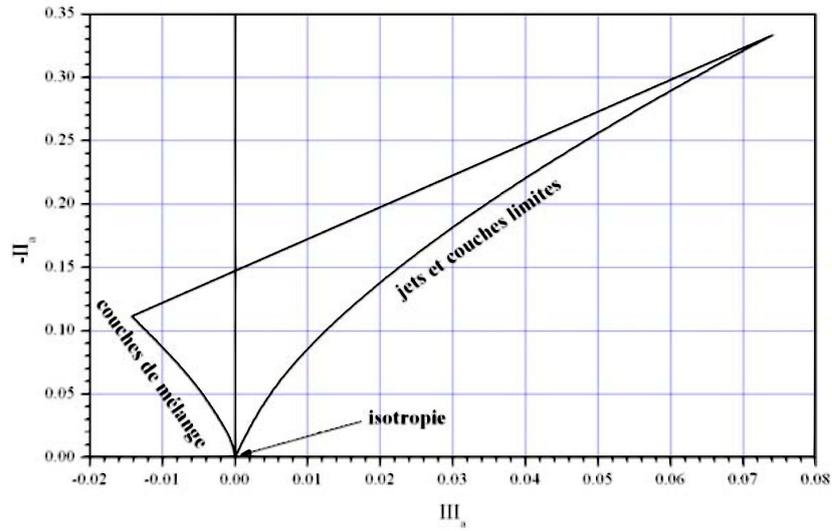


FIGURE 6.8 – Triangle de Lumley d'après [84]

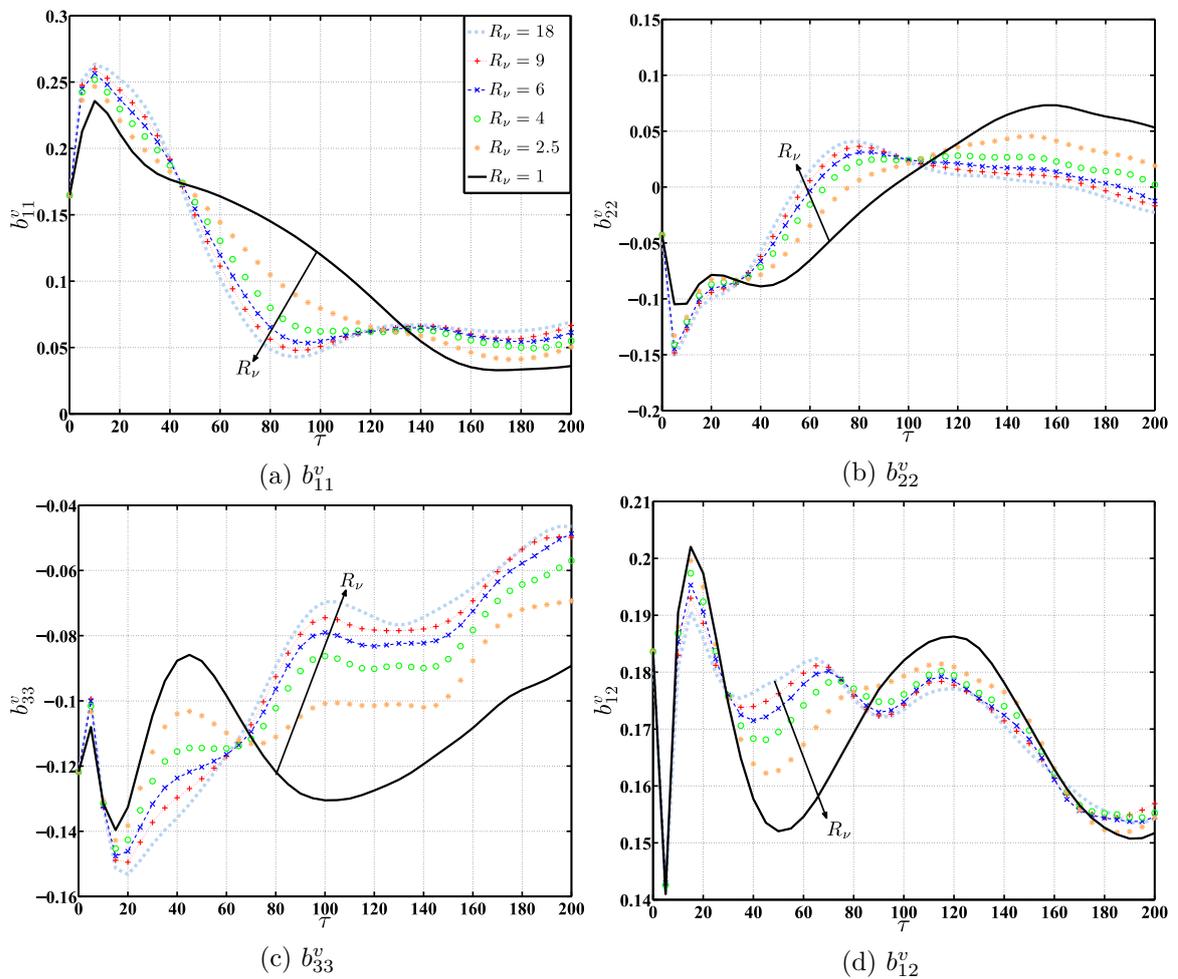


FIGURE 6.9 – Anisotropie du tenseur de Reynolds pour différents cas d'écoulements.

la nature de l'anisotropie du champ de vitesse. L'écoulement de couche de mélange est caractérisé par des valeurs négatives de l'invariant \mathbf{III}_b , on a un état de turbulence axisymétrique

en disque correspondant à une turbulence où deux des trois fluctuations typiques de vitesse sont égales est plus importantes que la troisième.

La figure 6.9 montre l'évolution temporelle du tenseur b_{ij}^v pour différentes valeurs de R_ν . Le caractère isotrope du tenseur de Reynolds est obtenu lorsque les valeurs de b_{ij}^v avoisinent le zéro. Les valeurs positives et négatives caractérisent l'écart par rapport à l'isotropie. De manière générale, la figure 6.9 montre que les variations de viscosité affectent l'isotropie du champ de vitesse. Dans l'intervalle $\tau \approx 20$, l'anisotropie est importante due aux premiers enroulements de l'écoulement. La figure 6.9a montre que, les écoulements à viscosité variable tendent vers une valeur asymptotique, bien plus rapidement que l'écoulement de référence. Néanmoins, à $\tau = 200$, la valeur de b_{11}^v est légèrement inférieure à celles des écoulements à viscosité variable. La composante b_{22}^v tend rapidement vers la valeur zéro, pour $R_\nu > 1$, comme le montre la figure 6.9b. Ceci dénote le caractère très isotrope de la composante $\langle v'^2 \rangle$ du tenseur de Reynolds. À $\tau = 200$, l'écoulement $R_\nu = 1$ présente une valeur $b_{22}^v = 0.05$, supérieur aux autres écoulements $R_\nu > 1$. La composante b_{33}^v est très marquée par les gradients de viscosité. Ces derniers améliorent, de manière considérable, l'isotropie de la composante $\langle w'^2 \rangle$. la composante b_{12}^v est affectée, de manière significative, par le rapport de viscosité dans l'intervalle $\tau \in [40 - 100]$.

En somme, le rapport de viscosité affecte l'isotropie du tenseur de Reynolds, de manière à améliorer celle-ci, par rapport à l'écoulement à viscosité constante.

6.1.1.3 Autosimilarité

Le régime autosimilaire est atteint par un écoulement turbulent si les grandeurs statistiques sont indépendantes de la direction de l'écoulement et/ou du temps lorsqu'elles sont adimensionnées par des grandeurs locales appropriées. Ainsi, pour une évolution temporelle de la couche de mélange, les profils des grandeurs moyennes sont généralement tracées le long de la coordonnée spatiale $y/\delta_\omega(\tau)$ où $\delta_\omega(\tau)$ est l'épaisseur de vorticité locale (temporelle) de la couche de mélange. Dans la gamme de temps τ où le régime autosimilaire est établi, les profils des grandeurs moyennes se superposent et ne font plus qu'un. Les statistiques à grandes échelles, telle que la vitesse moyenne $\langle U \rangle$, atteignent le régime autosimilaire bien avant les fluctuations de vitesse. Ces dernières mettent, en effet, plus de temps (ou de distance dans le cas d'une évolution spatiale de l'écoulement) pour se superposer. De plus, les fluctuations de vitesse longitudinales atteignent le régime autosimilaire avant les deux autres composantes et les corrélations $\langle u'v' \rangle$. Dans cette zone, l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche de mélange temporelle δ_θ croît de manière linéaire avec le temps, cette caractéristique sera vérifiée plus bas pour différentes valeurs de R_ν .

L'autosimilarité est une des caractéristiques des écoulements de couche de mélange à viscosité constante. **Qu'en est-il des écoulements de couche de mélange à viscosité variable ? Est ce que cette description est toujours vérifiée ? Le régime d'autosimilarité est-il établi plus rapidement pour l'écoulement à viscosité variable comme**

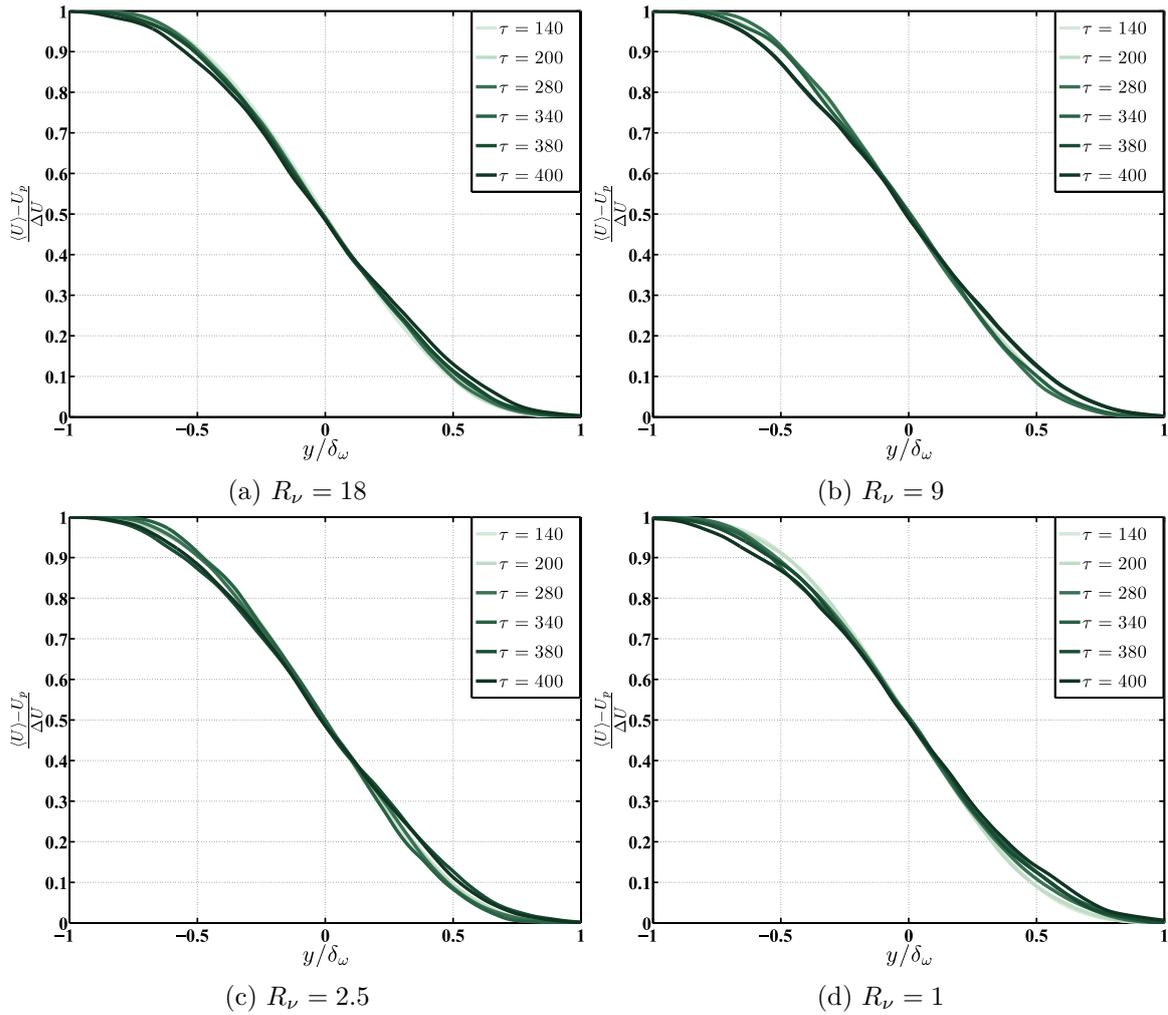


FIGURE 6.10 – Autosimilitude des profils de $\langle U \rangle$ pour différents cas d'écoulements.

suggéré par Talbot [30] et Talbot et al. [32] ? C'est à ces questions que nous tenterons d'apporter des réponses et des éclaircissements.

La figure 6.10 montre les profils de la vitesse moyenne longitudinale adimensionnée, $\frac{\langle U \rangle - U_p}{\Delta U}$, pour différents temps $\tau \in [140 - 400]$ tracés suivant la coordonnée spatiale verticale locale² y/δ_ω . À première vue, les profils de vitesse moyenne se superposent remarquablement bien au centre de la couche de mélange, quelle que soit la valeur de R_ν . Ceci est moins évident sur les bords de la zone de cisaillement, où des écarts subsistent entre les différents profils. Néanmoins, il semble que ces écarts sont moins importants pour le rapport de viscosité $R_\nu = 18$. Ces courbes attirent notre attention sur deux éléments principaux. Le premier est que l'autosimilitude des profils de vitesse moyenne n'est pas complètement établie dans l'intervalle de temps $\tau \in [140 - 400]$ (nous verrons les raisons plus bas). Le deuxième élément est que les variations de viscosité, quantifiées par le paramètre R_ν , tendent à "améliorer" sinon à précipiter le champ de vitesse moyen dans le régime autosimilaire (voir figure 6.10a).

De manière générale, il apparaît d'après la figure 6.10 que, **les profils de vitesse**

2. δ_ω est une valeur locale temporelle, le " τ " est omis pour soucis de simplicité de la notation.

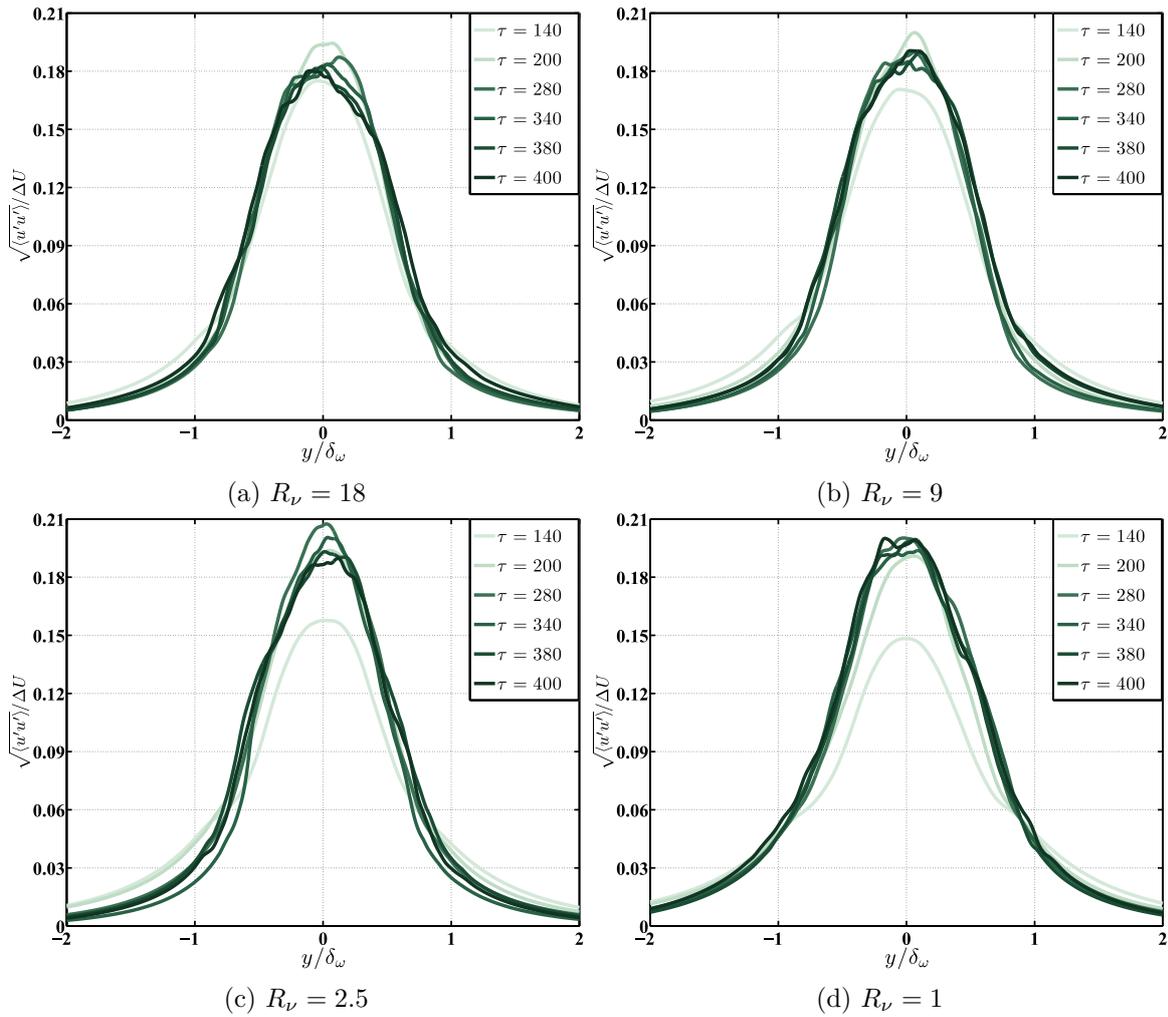


FIGURE 6.11 – Autosimilarité des profils de $\langle u'u' \rangle$ pour différents cas d'écoulements.

moenne sont autosimilaires (du moins au centre de la couche de mélange) à partir de $\tau = 140$ quel que soit le rapport R_ν , cette autosimilarité semble, tout de même, meilleure pour les grandes valeurs de R_ν . D'après la littérature, les moments d'ordre 2 mettent plus de temps (ou de distance) pour atteindre le régime autosimilaire, cet aspect est vérifié en traçant les profils de vitesse fluctuante, $\sqrt{\langle u'u' \rangle}$, $\sqrt{\langle v'v' \rangle}$, $\sqrt{\langle w'w' \rangle}$, $\sqrt{\langle u'v' \rangle}$ adimensionnés par la différence de vitesse ΔU comme le montre les figures 6.11, 6.12, 6.13 et 6.14, respectivement. D'après la figure 6.11, les profils de vitesse fluctuante longitudinale atteignent un régime autosimilaire plus rapidement lorsque R_ν augmente. En effet, à $\tau = 140$, l'écoulement à viscosité constante ($R_\nu = 1$) semble encore loin de l'état autosimilaire. Le profil de vitesse fluctuante, à ce temps (courbe en vert très clair), ne se superpose pas vraiment avec ceux des autres temps supérieurs. Comme pour le champ de vitesse moyen, les profils de $\sqrt{\langle u'u' \rangle}$ ne se coincident pas parfaitement. Des écarts sont observés sur les pics (centre de la couche de mélange) et sur les bords. Néanmoins, il nous paraît clair que les variations de viscosité ont tendance à précipiter les fluctuations de vitesse longitudinales vers le régime autosimilaire. Ces courbes montrent également que les champs de vitesse moyenne atteignent le régime autosimilaire avant le champ de vitesse fluctuante, ce quelle valeur de

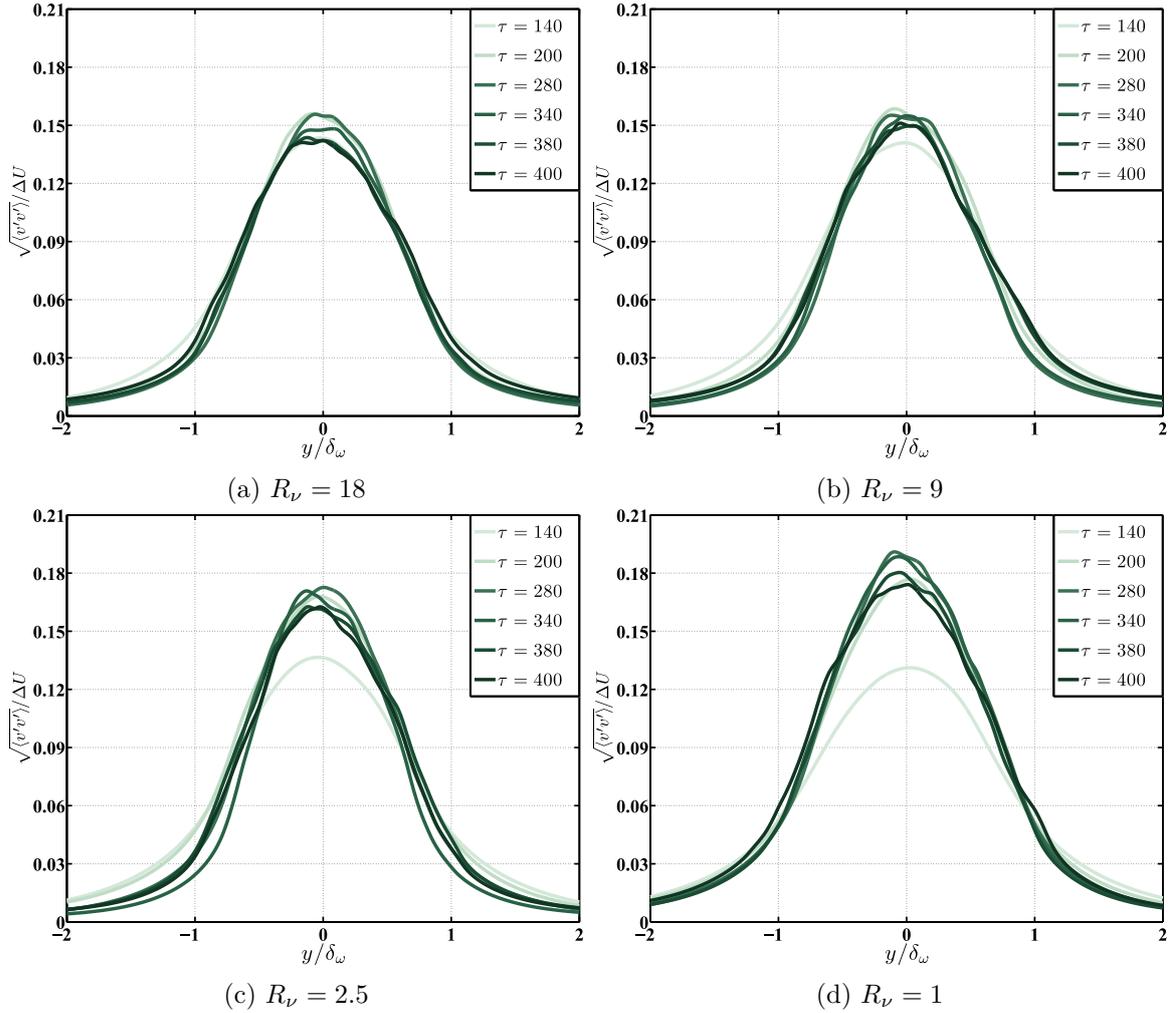


FIGURE 6.12 – Autosimilitude des profils $\langle v'v' \rangle$ pour différents cas d'écoulements.

R_ν^3 . L'autosimilitude des fluctuations de vitesse $\sqrt{\langle v'v' \rangle}$ et $\sqrt{\langle w'w' \rangle}$ suit la même tendance que les fluctuations $\sqrt{\langle u'u' \rangle}$; l'autosimilitude est mieux établie pour $R_\nu = 18$ (figures 6.12a et 6.13a, respectivement) que pour $R_\nu = 1$ (figures 6.12d et 6.13d, respectivement). Il apparaît évident que les variations spatio-temporelle de la viscosité sont à l'origine de cette précipitation vers le régime autosimilaire. Notons, néanmoins, que les fluctuations $\sqrt{\langle v'v' \rangle}$ atteignent le régime autosimilaire avant les fluctuations $\sqrt{\langle w'w' \rangle}$, conformément à ce qui est annoncé dans la littérature (voir figures 6.12a et 6.13a). La tendance vers le régime autosimilaire de tensions croisées $\sqrt{\langle u'v' \rangle}$ semble être évidente d'après la figure 6.14. Cette tendance est, comme pour les autres composantes de vitesse fluctuante, soutenue par les grandes valeurs de R_ν . Néanmoins, l'autosimilitude des $\sqrt{\langle u'v' \rangle}$ intervient beaucoup plus tard et probablement après $\tau = 400$ (résultat non présenté).

Pour résumer et afin de répondre aux questions posées précédemment, l'autosimilitude des champs de vitesse moyen et fluctuant est bien une caractéristique de l'écoulement de couche

3. Pour rappel, les valeurs de R_ν simulées dans ce travail sont 1, 2,5, 4, 6, 9 et 18. Nous n'avons pas présenté, dans cette section, les résultats de $R_\nu = 4$ et 6, mais la tendance est la même, ce qui ne change rien à la discussion.

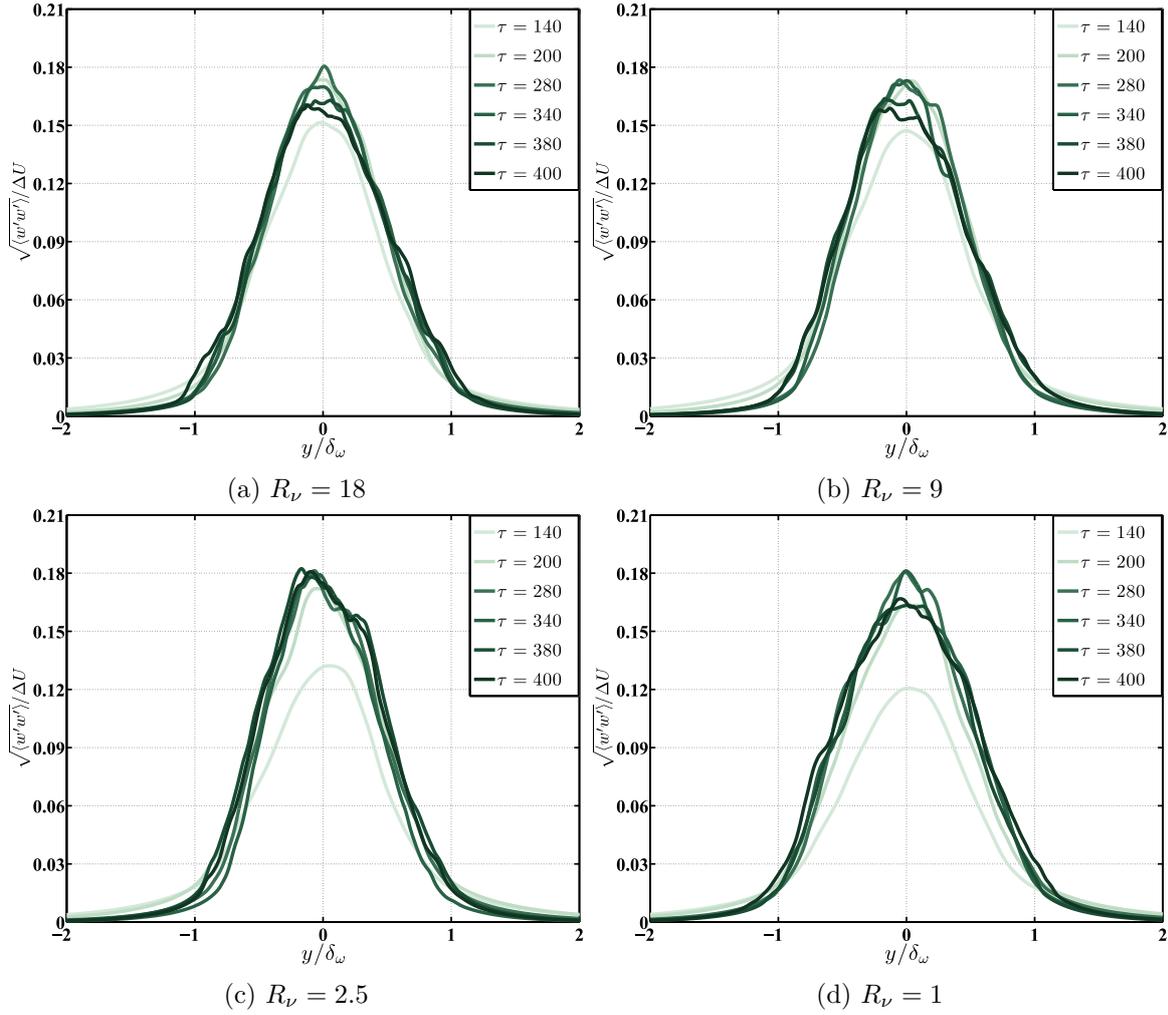


FIGURE 6.13 – Autosimilitude des profils $\langle w'w' \rangle$ pour différents cas d'écoulements.

de mélange à viscosités constante et variable. Dans ces deux situations, le champ de vitesse moyen atteint l'autosimilitude avant le champ de vitesse fluctuant suivi de $\sqrt{\langle u'u' \rangle}$, $\sqrt{\langle v'v' \rangle}$, $\sqrt{\langle w'w' \rangle}$ et enfin $\sqrt{\langle u'v' \rangle}$. L'écoulement à viscosité variable atteint le régime autosimilaire plus rapidement que pour celui de référence.

À présent, nous allons examiner les écarts observés sur les différents profils de vitesse (moyenne et fluctuante). En effet, ces profils ont été tracés dans l'intervalle $\tau \in [140 - 100]$ ce qui a permis de répondre à certaines de nos interrogations. Néanmoins, il nous semble nécessaire de faire évoluer les simulations vers des temps avancés pour pouvoir observer un régime autosimilaire développé, c'est-à-dire, tous les moments atteignent un régime autosimilaire sur toute la zone de mélange (centre et bord de la couche de mélange). Goerge [86] considère un régime autosimilaire complet celui où tous les moments et toutes les échelles atteignent le régime autosimilaire. Les profils des fluctuations de vitesse en un point ne permettent de rendre compte que d'une autosimilitude globale loin de la notion d'échelle. Une autre manière de vérifier cette autosimilitude est de tracer la quantité $\dot{\theta} = \frac{1}{\Delta U} \frac{d\delta_\theta}{dt}$. Il représente le taux d'expansion de la couche de mélange temporelle. Cette quantité renseigne de

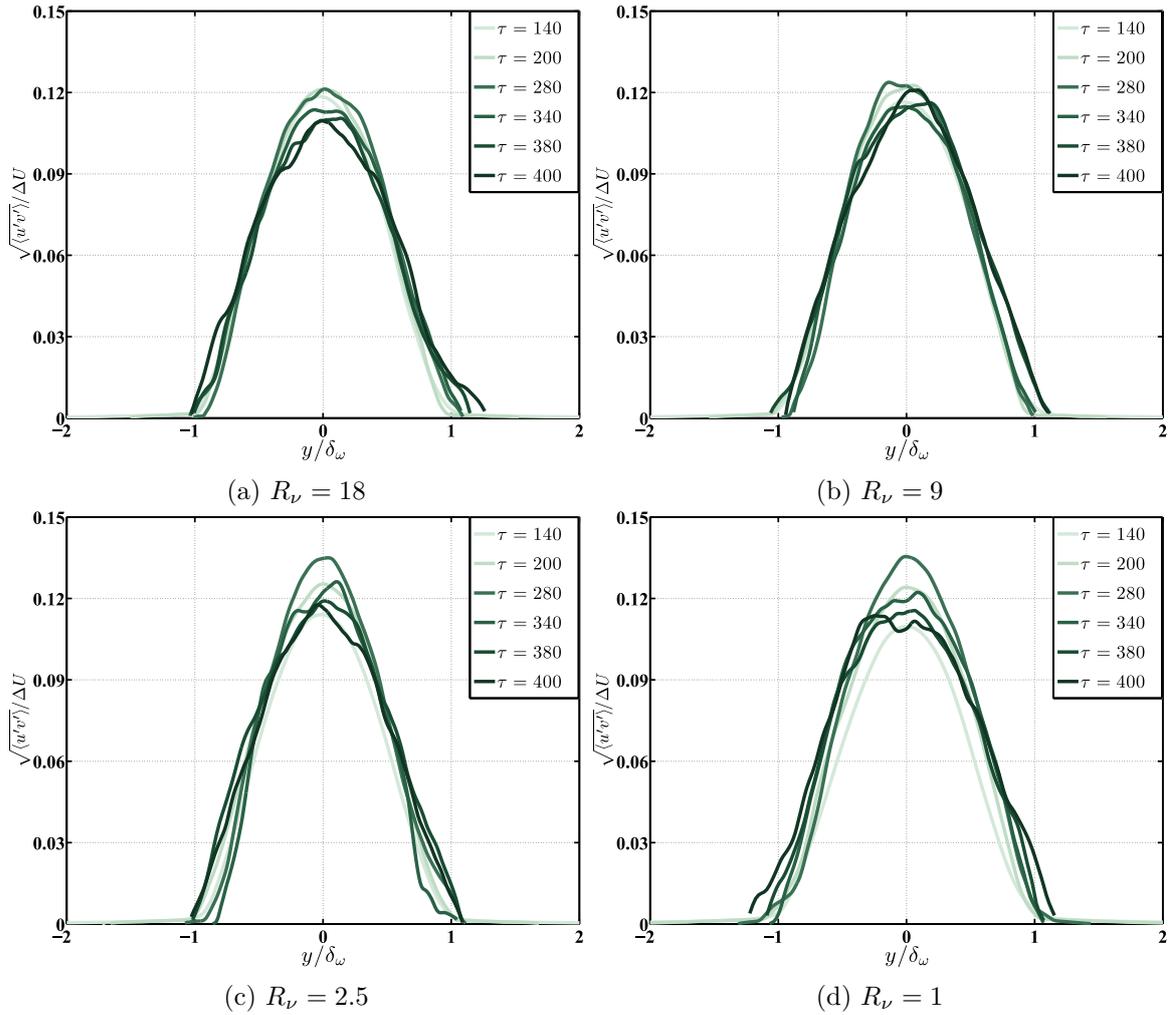


FIGURE 6.14 – Autosimilitude des profils $\langle u'v' \rangle$ pour différents cas d'écoulements.

manière quantitative sur les régions où le développement de l'épaisseur δ_θ par rapport au temps est linéaire. En effet, le simple tracé de δ_θ en fonction du temps ne permet qu'une approximation visuelle de ces régions. La figure 6.15b montre l'évolution temporelle de $\frac{1}{\Delta U} \frac{d\delta_\theta}{dt}$ entre le temps $\tau = 0$ et 400 pour pour différentes valeurs de R_ν .

Nous pouvons remarquer l'évolution rapide de l'épaisseur de la couche de mélange dans l'intervalle $\tau \in [50 - 140]$. Pour les temps $\tau \in [140 - 175]$, l'épaisseur δ_θ des écoulements à viscosité variable connaissent une évolution quasi-linéaire avec le temps, contrairement à l'écoulement $R_\nu = 1$. Une deuxième évolution linéaire de l'épaisseur δ_θ est observée dans l'intervalle $\tau \in [320 - 370]$ pour les rapports $R_\nu = 9$ et 6. De manière générale, l'évolution de l'épaisseur de la couche de mélange ne suit pas une tendance linéaire dans un intervalle de temps important. Ceci explique les écarts observés sur les profils autosimilaires des vitesses moyenne et fluctuante. En effet, l'autosimilitude globale du champ de vitesse a plus de chance d'être observé dans le champ lointain, c'est-à-dire vers les grandes valeur de τ . A cet effet, nous avons fait évoluer l'écoulement DNS-R9 ($R_\nu = 9$) jusqu'à $\tau = 700$, la quantité $\frac{1}{\Delta U} \frac{d\delta_\theta}{dt}$ est tracée sur la figure 6.15b. Nous observons sur cette figure, m'établissement d'une zone

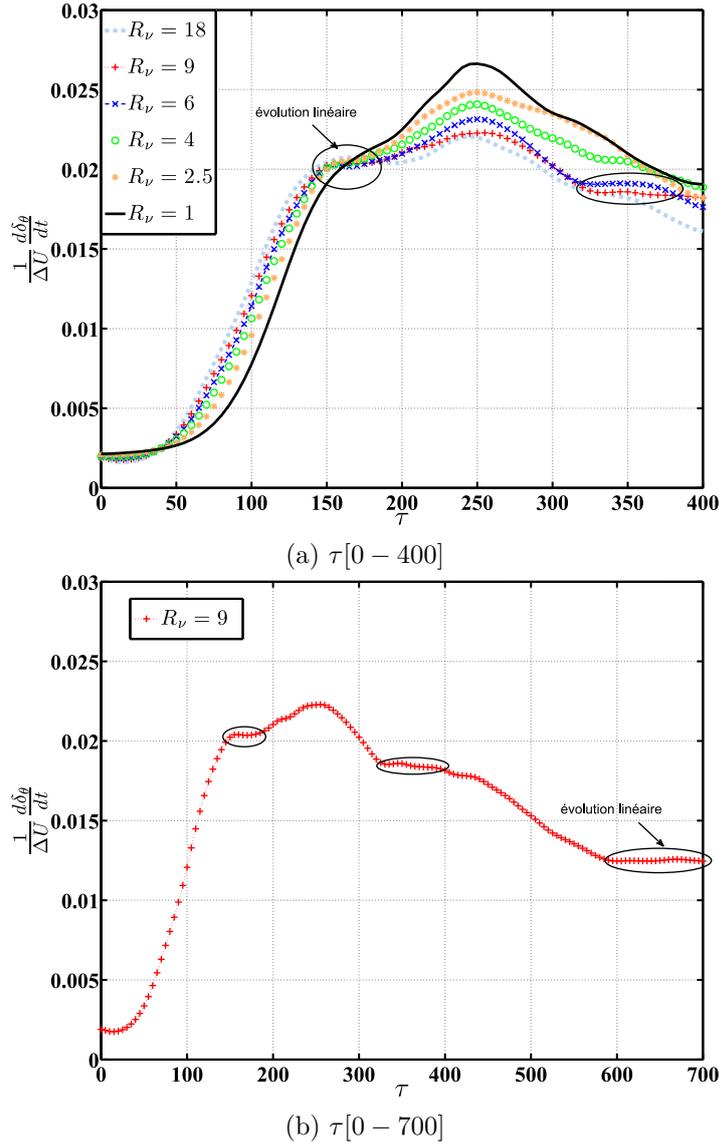


FIGURE 6.15 – Évolution temporelle de $\frac{1}{\Delta U} \frac{d\delta_\theta}{dt}$ pour différentes valeurs de R_ν .

temporelle, $\tau \in [600 - 700]$, dans laquelle l'épaisseur δ_θ évolue linéairement avec le temps. Le taux d'expansion dans cette zone est de 0,0125, valeur légèrement inférieure à 0,016 observée pour les écoulements de couche de mélange à viscosité et à masse volumique constantes [53].

Une meilleure superposition des profils autosimilaire des champs de vitesse moyen et fluctuant est obtenue dans l'intervalle $\tau \in [640 - 700]$, comme le montre les figures 6.16 et 6.17, respectivement.

Bien que nous n'ayons pas mener toutes les simulations jusqu'à $\tau = 700$, nous pouvons avancer que, pour les autres valeurs de R_ν , l'écoulement de couche de mélange tend vers un régime autosimilaire global à l'image de DNS-R9.

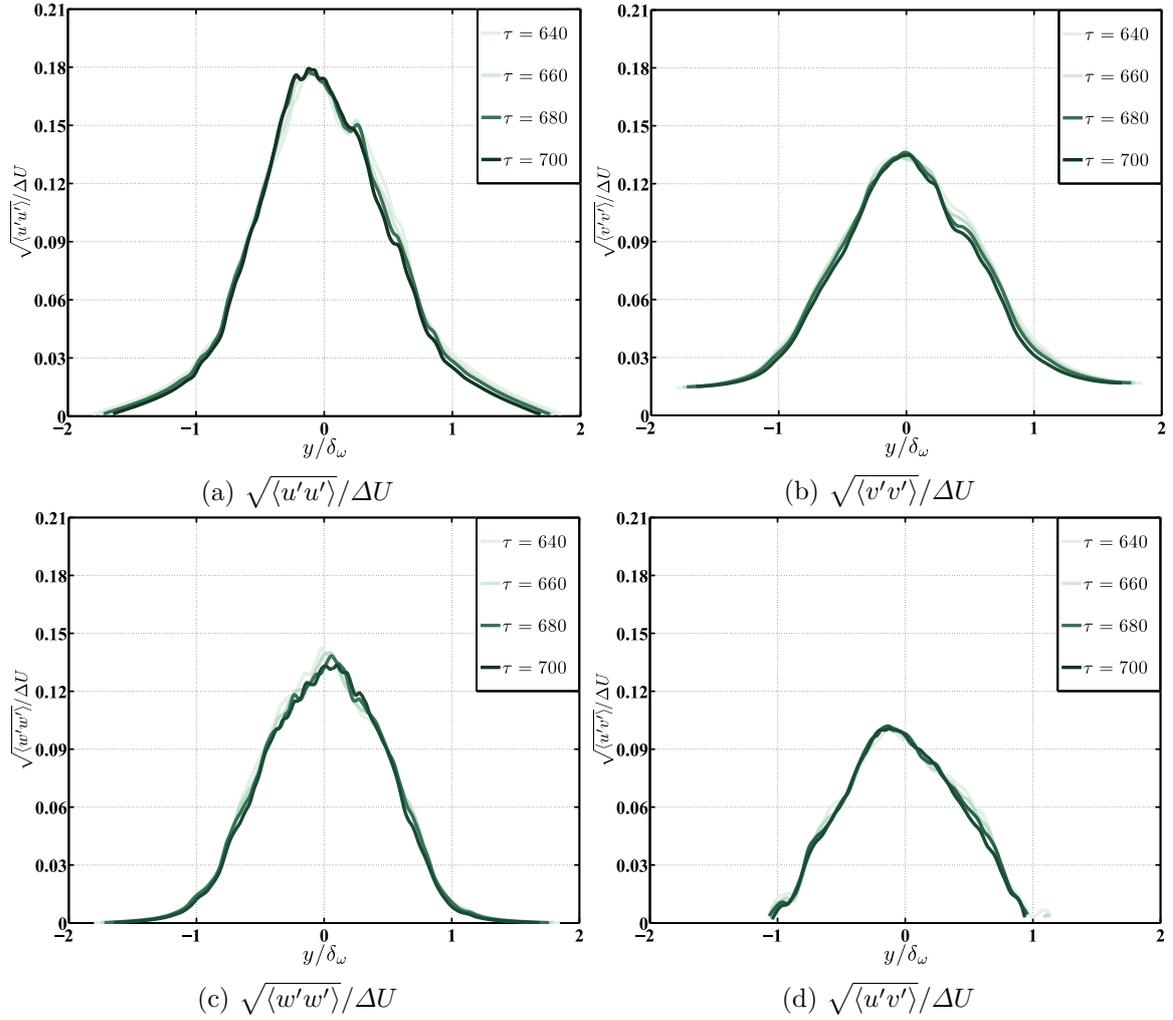


FIGURE 6.16 – Autosimilitude des profils de vitesse moyenne de l'écoulement DNS-R9 dans l'intervalle $\tau \in [640 - 700]$

6.1.1.4 Corrélations

Nous voulons évaluer dans cette section l'effet du rapport de viscosité sur les corrélations de différentes grandeurs statistiques de la turbulence. Nous utilisons pour cela les quantités décrites dans les relations 6.6 et 6.9, exprimant les corrélations entre les fluctuations vitesse-vitesse et vitesse-pression, respectivement. Comme précédemment, l'exposant v indique que la quantité statistique est intégrée suivant la direction inhomogène y .

$$C_{ij, i \neq j}^v = \frac{|\langle u'_i u'_j \rangle^v|}{[\langle u_i'^2 \rangle^v \langle u_j'^2 \rangle^v]^{0.5}} \quad (6.6)$$

avec :

$$\langle u'_i u'_j \rangle^v = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \langle u'_i u'_j \rangle dy \quad (6.7)$$

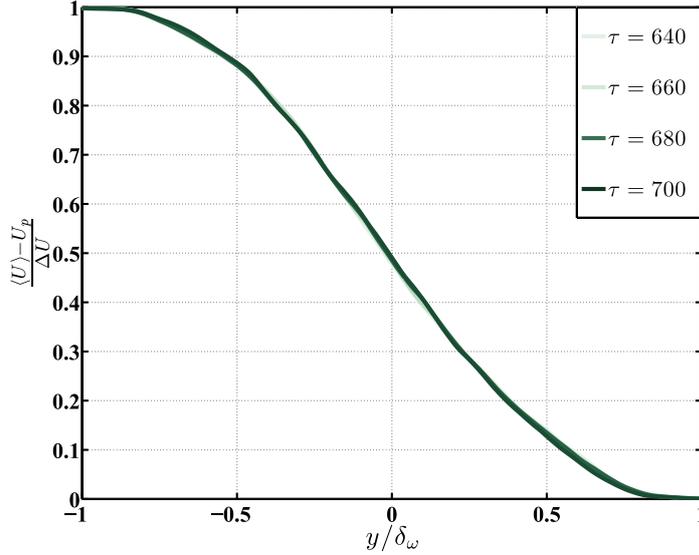


FIGURE 6.17 – Autosimilitude des profils des vitesse fluctuantes de l'écoulement DNS-R9 dans l'intervalle $\tau \in [640 - 700]$.

et

$$\langle u_i'^2 \rangle^v = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \langle u_i'^2 \rangle dy \quad (6.8)$$

De la même manière, le coefficient de corrélation des quantités liants vitesse fluctuante et pression fluctuante tels que $\langle v'p' \rangle$ s'écrit :

$$C_{VP}^v = \frac{|\langle v'p' \rangle^v|}{[\langle v'^2 \rangle^v \langle p'^2 \rangle^v]^{0.5}} \quad (6.9)$$

avec :

$$\langle v'p' \rangle^v = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \langle v'p' \rangle dy \quad (6.10)$$

et

$$\langle v'^2 \rangle^v = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \langle v'^2 \rangle dy \quad (6.11)$$

$$\langle p'^2 \rangle^v = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \langle p'^2 \rangle dy \quad (6.12)$$

L'évolution temporelle de $C_{ij, i \neq j}^v$ et C_{VP}^v est tracée pour différentes valeurs de R_ν comme le montre la figure 6.18. De manière générale, le rapport de viscosité semble avoir une influence sur le niveau de corrélation des quantités $\langle u'v' \rangle$, $\langle u'w' \rangle$, $\langle v'w' \rangle$ et $\langle v'p' \rangle$ (voir figure 6.18a, 6.18b, 6.18c et 6.18d, respectivement). Les variations spatio-temporelles de la viscosité amplifient les corrélations $\langle u'v' \rangle$ pratiquent durant toute la simulation (entre $\tau = 40$ et 400) (les résultats

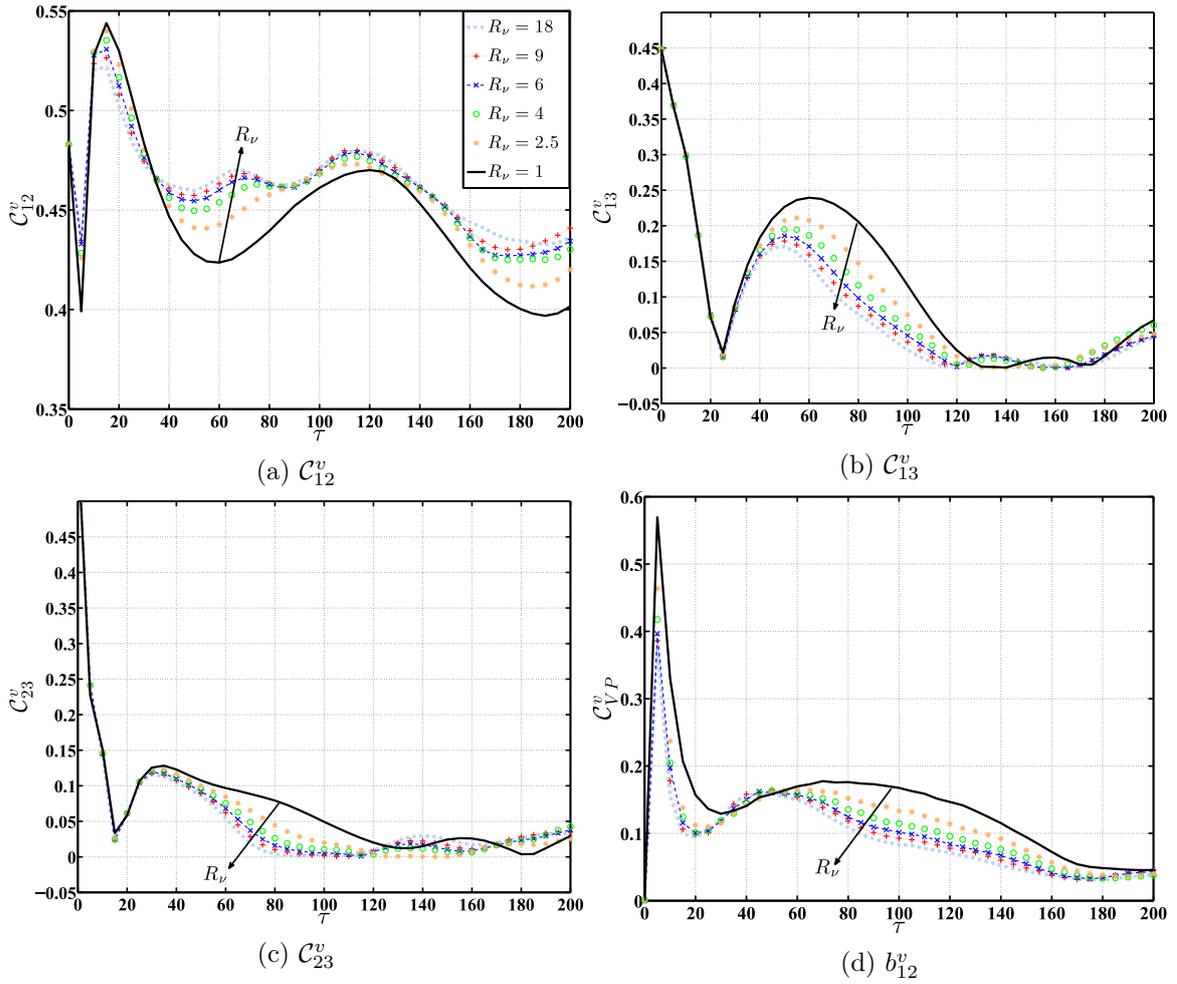


FIGURE 6.18 – Coefficient de corrélation des grandeurs fluctuantes C_{ij}^v et C_{VP}^v pour différents cas d'écoulements.

$\tau > 400$, ne sont pas montrés ici) , et ce pour toute les valeurs de $R_\nu > 1$. Nous remarquons une légère baisse des niveaux de corrélation C_{12}^v , C_{23}^v et C_{VP}^v , pour les écoulements à viscosité variable. Néanmoins, à $\tau = 200$, ces niveaux de corrélation sont égaux quelque soit le rapport de viscosité R_ν .

6.1.1.5 Équations de transport de $\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$, $\langle w'^2 \rangle$ et $\langle u_i'^2 \rangle$

A présent, analysons les équations de transport des fluctuations de vitesse longitudinale, normale et transversale durant la phase initiale de développement de la couche de mélange. Pour plus de clarté, deux valeurs du rapport de viscosité $R_\nu = 1$ et 9 sont comparées. Il s'agira d'expliquer, entre autres, les différences observées sur l'évolution temporelle des trois composantes des fluctuations de vitesse. Ces équations de transport sont dérivées de l'équation de l'énergie cinétique de turbulence 2.21, qui s'écrivent comme ceci :

L'équation de transport des fluctuations de vitesse longitudinale $\langle u'^2 \rangle$:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle u'^2 \rangle}{2} \right)}_{T_t} = - \underbrace{\left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u'^2}{2} \right) \right\rangle}_{D_t} - \underbrace{\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}}_{P_k} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left\langle u' \frac{\partial p'}{\partial x} \right\rangle}_{D_p} \quad (6.13a)$$

$$+ \underbrace{\left[\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial y} u' \right\rangle \right] \cdot \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} + \langle u' \cdot \nu' \rangle \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial y \partial y}}_{P_\nu} \quad (6.13b)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u'^2}{\partial x_j} + \frac{\partial(u'u'_j)}{\partial x} \right] \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG}} + \frac{1}{2} \left\langle \nu \frac{\partial^2 u'^2}{\partial x_j^2} \right\rangle - \underbrace{\left\langle \nu \left(\frac{\partial u'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}} \quad (6.13c)$$

L'équation de transport des fluctuations de vitesse normale $\langle v'^2 \rangle$:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle v'^2 \rangle}{2} \right)}_{T_t} = - \underbrace{\left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v'^2}{2} \right) \right\rangle}_{D_t} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left\langle v' \frac{\partial p'}{\partial y} \right\rangle}_{D_p} \quad (6.14a)$$

$$+ \underbrace{\left[\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x} v' \right\rangle \right] \cdot \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}}_{P_\nu} \quad (6.14b)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial v'^2}{\partial x_j} + \frac{\partial(v'u'_j)}{\partial y} \right] \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG}} + \frac{1}{2} \left\langle \nu \frac{\partial^2 v'^2}{\partial x_j^2} \right\rangle - \underbrace{\left\langle \nu \left(\frac{\partial v'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}} \quad (6.14c)$$

L'équation de transport des fluctuations de vitesse transversale $\langle w'^2 \rangle$:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle w'^2 \rangle}{2} \right)}_{T_t} = - \underbrace{\left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{w'^2}{2} \right) \right\rangle}_{D_t} + \underbrace{-\frac{1}{\rho} \left\langle w' \frac{\partial p'}{\partial z} \right\rangle}_{D_p} \quad (6.15a)$$

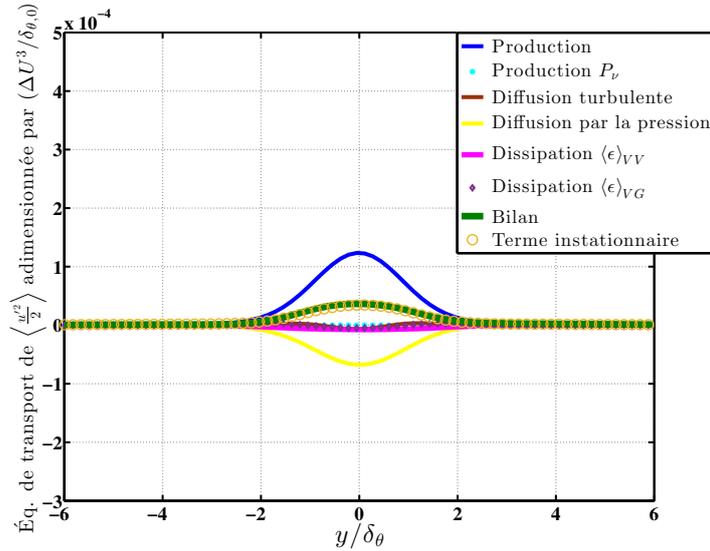
$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial w'^2}{\partial x_j} + \frac{\partial(w'u'_j)}{\partial z} \right] \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG}} + \frac{1}{2} \left\langle \nu \frac{\partial^2 w'^2}{\partial x_j^2} \right\rangle - \underbrace{\left\langle \nu \left(\frac{\partial w'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}} \quad (6.15b)$$

Les équations de transport, ci-dessus, sont évaluées aux temps $\tau = 40$ et 100 pour les deux situations à viscosité constante (DNS-R1) et à viscosité variable (DNS-R9).

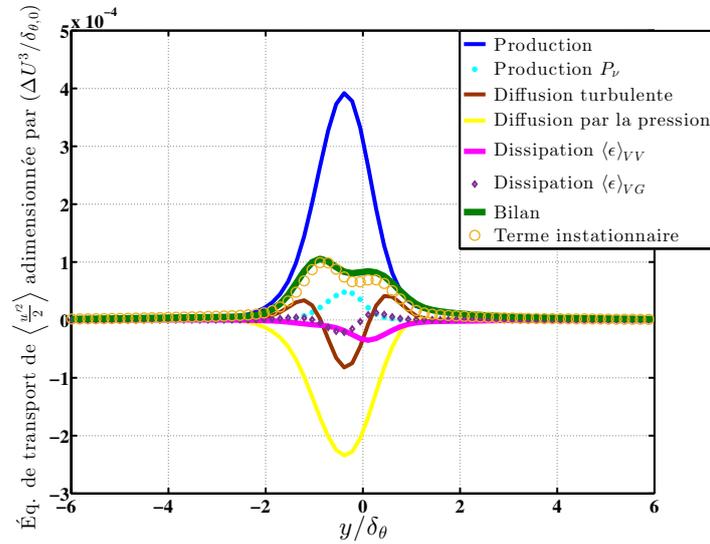
– *Analyse de l'équation 6.13 :*

La figure 6.19 montre l'évaluation de l'équation 6.13 à $\tau = 40$, pour les simulations DNS-R1 (figure 6.19a) et DNS-R9 (figure 6.19b). On peut remarquer la dissymétrie des différents termes (production, diffusion,...) de l'écoulement à viscosité variable, contrairement à l'écoulement à viscosité constante. Cette dissymétrie est aussi visible sur les profils des

vitesses fluctuantes (6.2) et des gradients de vitesse moyenne (figure 5.6) ; les fluctuations de vitesse maximales sont produites du côté du fluide rapide et moins visqueux. Précisément, le terme de production (dissymétrique), $\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$, de l'écoulement à viscosité variable, est plus important comparé à l'écoulement à viscosité constante. Une part de cette augmentation est attribuée à l'amplification des gradients de vitesse moyenne, comme montré au chapitre précédent (figure 5.7). En effet, un des effets de variation viscosité est l'accentuation du caractère inflexionnel du profil de vitesse moyenne. En d'autres termes, le gradient de viscosité



(a) DNS-R1



(b) DNS-R9

FIGURE 6.19 – Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse longitudinale $\langle \frac{u'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 40$.

imposé à l'état initial a pour effet d'accroître les pics de vorticité transversale $\langle \omega_z \rangle = -\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$. Cette augmentation est, pour l'écoulement à viscosité variable, de l'ordre de 23 % supérieure à l'écoulement de référence. Or, le terme de production connaît une augmentation de l'ordre de 218 % par rapport à l'écoulement de référence, sachant que 164 % d'augmentation

est attribuée au terme $\langle u'v' \rangle$. L'augmentation de la composante de cisaillement du tenseur de Reynolds $\langle u'v' \rangle$ peut être l'effet de l'augmentation de l'amplitude typique de u' et v' et/ou une meilleure corrélation entre ces fluctuations de vitesse. En effet, les augmentations des fluctuations typiques de u' et v' , pouvant être estimées par leurs valeurs RMS (voir figure 6.1), sont de l'ordre de 58 % et 62 % supérieurs par rapport à l'écoulement de référence, respectivement. Finalement, l'augmentation du terme $\langle u'v' \rangle$ est due en grande partie (près de 156 %) à l'augmentation des amplitudes des vitesses fluctuantes u' et v' ; près de 3 % est attribuée à une meilleure corrélation des vitesses normales et longitudinales en présence des gradients de viscosité.

Pour résumer, l'accélération de la production des fluctuations de vitesse longitudinales par les gradients de viscosité s'effectue suivant deux mécanismes, agissant sur deux gammes d'échelles différentes. Le premier, résulte de l'augmentation des gradients de vitesse moyenne le long de la direction inhomogène y . Le second, consiste en l'augmentation de l'amplitude typique des fluctuations de la vitesse normale. La combinaison de ces deux mécanismes favorise le transfert d'énergie depuis le champ de vitesse moyen vers le champ fluctuant, ce qui explique l'effet déstabilisant des variations de viscosité. Un effet stabilisant de celles-ci provoquerait une diminution des gradients de vitesse moyenne en l'écartant du caractère inflexionnel, et la diminution des fluctuations typique de la vitesse normale v' .

Le terme, P_ν lié aux gradients de viscosité, est positif dans le bilan 6.13. Il contribue à la production des fluctuations de vitesse longitudinales. La contribution de ce terme est de l'ordre de 14 % de la production totale des fluctuations u' à $\tau = 40$. La contribution positive de ce terme peut s'expliquer en analysant le signe du terme $\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial y} u' \right\rangle$, le signe du gradient vertical de la vitesse moyenne est négatif pour nos différentes simulations. Le signe du produit $\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial y} u' \right\rangle$ est négatif, les flux massiques descendants, de viscosité ν_g et de vitesse U_p vont, en terme d'apport fluctuant, produire des fluctuations positives de viscosité et des fluctuations négatives de vitesse. Le même raisonnement peut se faire sur le flux ascendant. Le résultat est que la corrélation $\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial y} u' \right\rangle$ demeure négative, ainsi le produit $\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial y} u' \right\rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ est positif.

Le terme supplémentaire $\langle \epsilon \rangle_{VG}$ est négatif dans le bilan 6.13. Il agit comme une dissipation supplémentaire aux cotés du taux dissipation classique $\langle \epsilon \rangle_{VV}$. Néanmoins, l'influence de $\langle \epsilon \rangle_{VG}$ est négligeable dans l'équation de transport des fluctuations de vitesse longitudinale. Les termes de diffusion turbulente et de diffusion par la pression sont plus importants pour l'écoulement à viscosité variable, comparée à l'écoulement à viscosité constante. Précisément, la pression joue un rôle très important dans l'écoulement de couche de mélange. Elle puise de l'énergie des fluctuations de vitesse longitudinale (terme de pression négatif dans ce cas) pour produire les fluctuations normales et transversales (terme de pression positif cette fois-ci).

La figure 6.19b montre que la diffusion par la pression présente une augmentation de près de 246 % pour l'écoulement à viscosité variable, comparé à l'écoulement de référence (figure 6.19a). La diffusion par la pression est proportionnelle aux corrélations pression-vitesse $\left\langle u' \frac{\partial p'}{\partial x} \right\rangle$ (voir équation 6.13). Les fluctuations typiques de u' sont augmentées de 58 % en

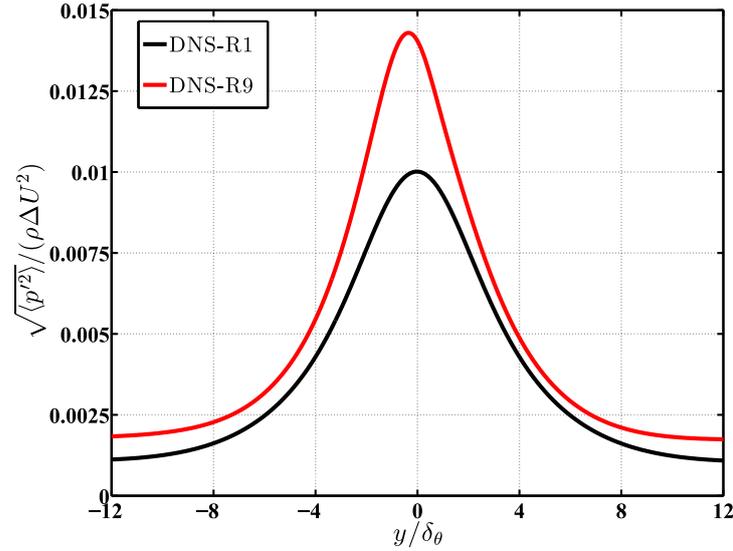


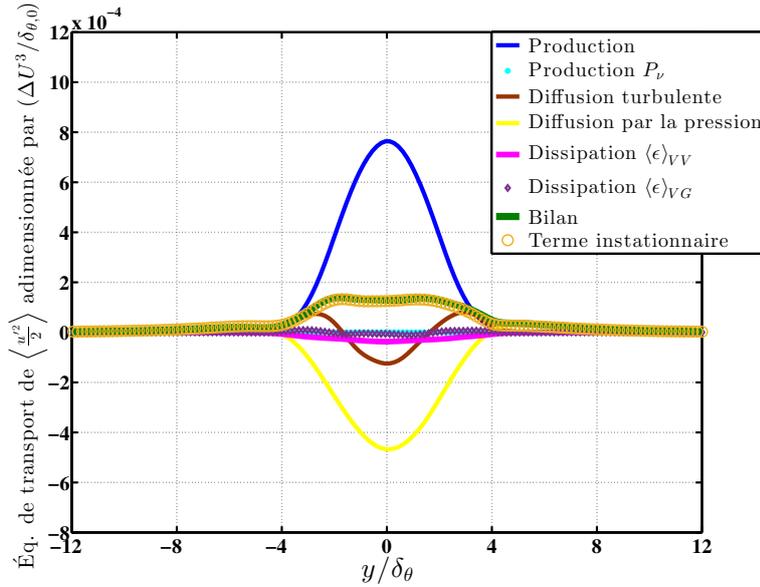
FIGURE 6.20 – Évolution des fluctuations de pression, $\sqrt{\langle p'^2 \rangle}$ adimensionnées par $(\rho \Delta U^2)$, le long de la direction inhomogène y à $\tau = 40$.

présence des variations de viscosité (DNS-R9), ce qui implique que les fluctuations de pression et/ou une meilleure corrélation vitesse-pression contribuent également à l'augmentation du terme de pression dans l'équation 6.13. D'après la figure 6.20, la présence des variations de viscosité augmente les fluctuations typique de pression de 45 %, comparé à l'écoulement de référence (DNS-R1). Les gradients de viscosité améliorent les corrélations entre les vitesse typiques u' et les gradients de pression typiques $\frac{\partial p'}{\partial x}$ de près de 6 %.

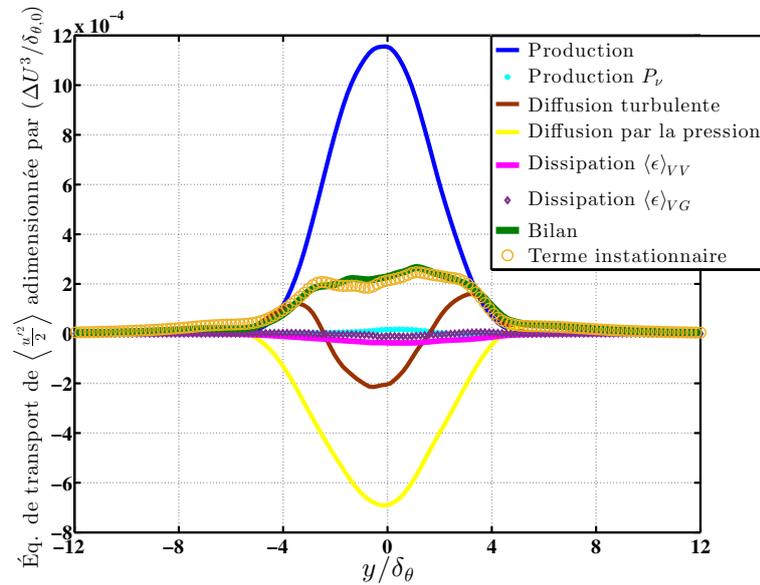
La figure 6.21b montre l'évaluation de l'équation 6.13 à $\tau = 100$ pour l'écoulement à viscosité variable DNS-R9. Nous pouvons constater que les termes supplémentaires relatifs aux gradients de viscosité sont négligeables, les termes classiques sont encore plus importants para rapport à DNS-R1 (figure 6.21a). En effet, l'évolution temporelle de la couche de mélange se traduit par une diffusion des quantités de mouvement et des flux massiques des espèces chimiques, ce qui tend à homogénéiser les gradients de viscosité dans la région centrale de l'écoulement. Par conséquent, le rôle de *la viscosité variable*, n'est plus visible sur les termes supplémentaires (P_ν et $\langle \epsilon \rangle_{VG}$ qui sont négligeables), mais garde un effet remarquable sur les autres termes classiques de l'équation de transport des fluctuations de vitesse longitudinale. À titre d'exemple, le terme de production présente une augmentation de l'ordre de 53 %, le terme de pression près de 42 %, par rapport à l'écoulement de référence DNS-R1. Le terme de pression, comme nous l'avons mentionné plus haut, est responsable de la production des fluctuations de vitesse normale et transversale. Nous analysons ci-dessous les équations 6.14 et 6.15.

– *Analyse de l'équation 6.14 :*

Les figures 6.22a et 6.22b montrent l'évaluation de l'équation 6.14 pour les deux situations à viscosité constante (DNS-R1) et à viscosité variable (DNS-R9), respectivement. La production des fluctuations de vitesse $\langle v'^2 \rangle$ est assurée par le terme de pression $-\frac{1}{\rho} \left\langle v' \frac{\partial p'}{\partial y} \right\rangle$.



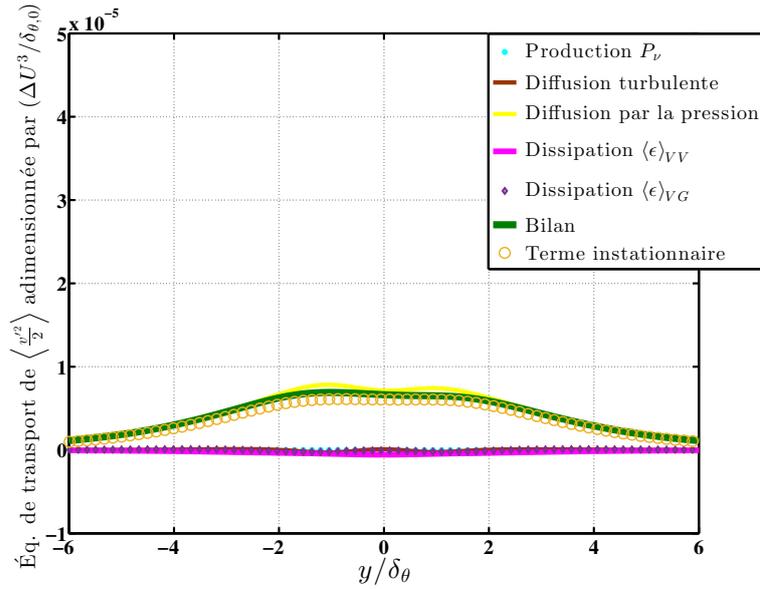
(a) DNS-R1



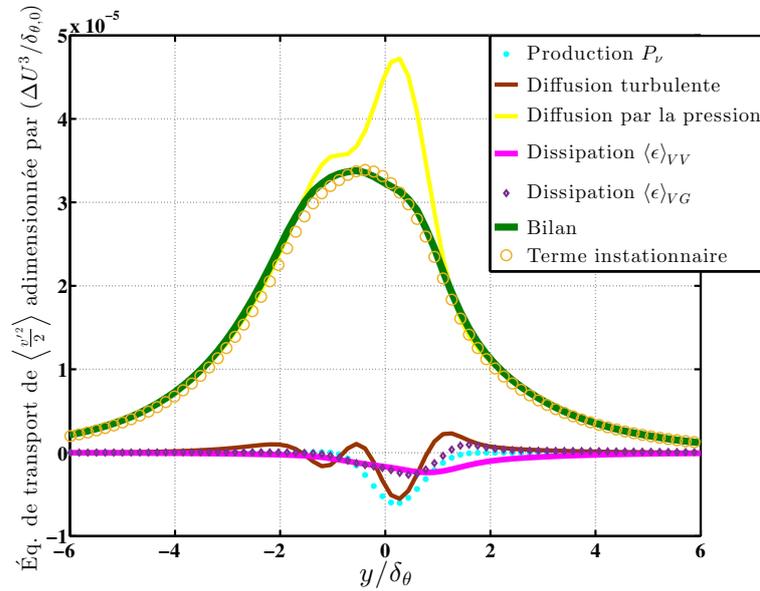
(b) DNS-R9

FIGURE 6.21 – Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse longitudinale $\langle \frac{u'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 100$.

Ce terme est cependant plus important pour l'écoulement à viscosité variable. En effet, le pic de production des fluctuations de vitesse normale est supérieur pour l'écoulement DNS-R9 près de 503 %! comparé à l'écoulement de référence DNS-R1. C'est ce qui explique l'augmentation de l'amplitude des fluctuations de vitesse verticales v' . Notons au passage la faible amplitude des termes $\langle \epsilon \rangle_{VV}$ et D_t de l'écoulement DNS-R1 par rapport à DNS-R9. Ceci indique, encore une fois, que l'écoulement de couche de mélange atteint à $\tau = 40$ un état turbulent plus important pour le cas à viscosité variable. Les termes supplémentaires $\langle \epsilon \rangle_{VG}$ et P_v sont négatifs et contribuent à dissiper l'énergie cinétique de turbulence sous forme de chaleur. Ils présentent des pics d'amplitude au moins égale au terme de dissipation $\langle \epsilon \rangle_{VV}$.



(a) DNS-R1



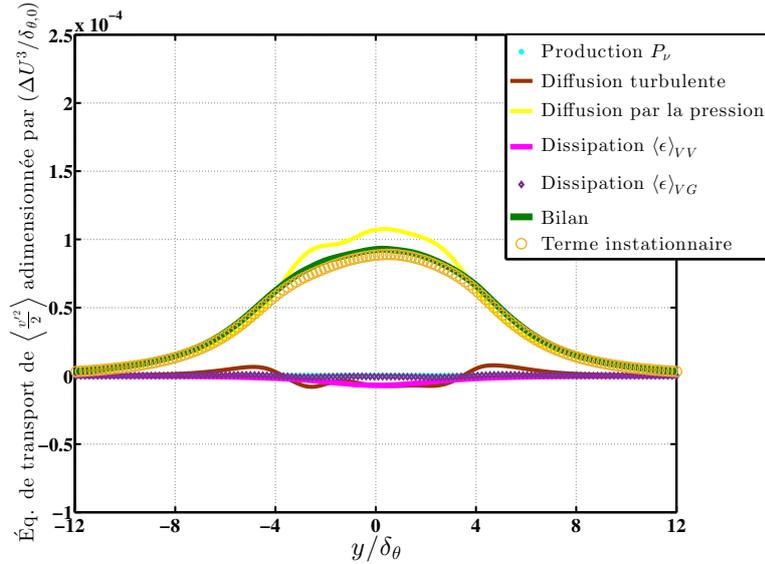
(b) DNS-R9

FIGURE 6.22 – Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse normale $\langle \frac{v'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 40$.

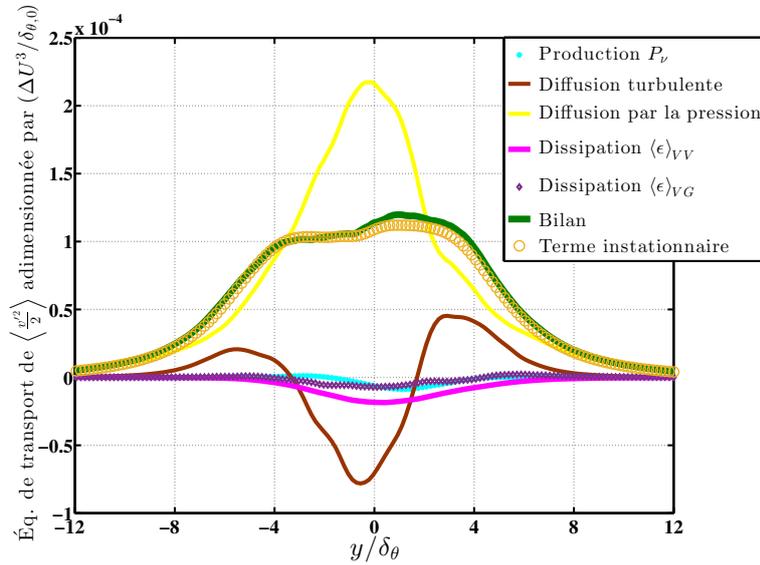
Ces termes sont donc importants, ils jouent un dissipatif et leur prise en compte permet de fermer le bilan 6.14.

À $\tau = 100$, les termes supplémentaires ($\langle \epsilon \rangle_{VG}$ et P_ν) sont négligeables dans le bilan 6.14, mais la turbulence (termes de pression, diffusion turbulente et dissipation) demeure plus importante pour l'écoulement à viscosité variable DNS-R9. En particulier, le terme de diffusion turbulent D_t fait partie des termes prédominants dans le bilan 6.14 pour l'écoulement DNS-R9, ce qui n'est pas encore le cas DNS-R1 (voir figure 6.23).

– Analyse de l'équation 6.15 :



(a) DNS-R1

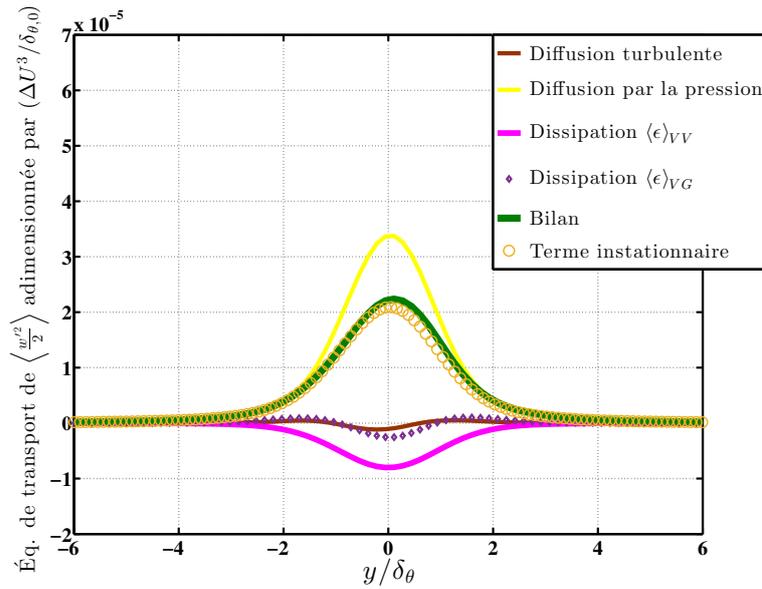


(b) DNS-R9

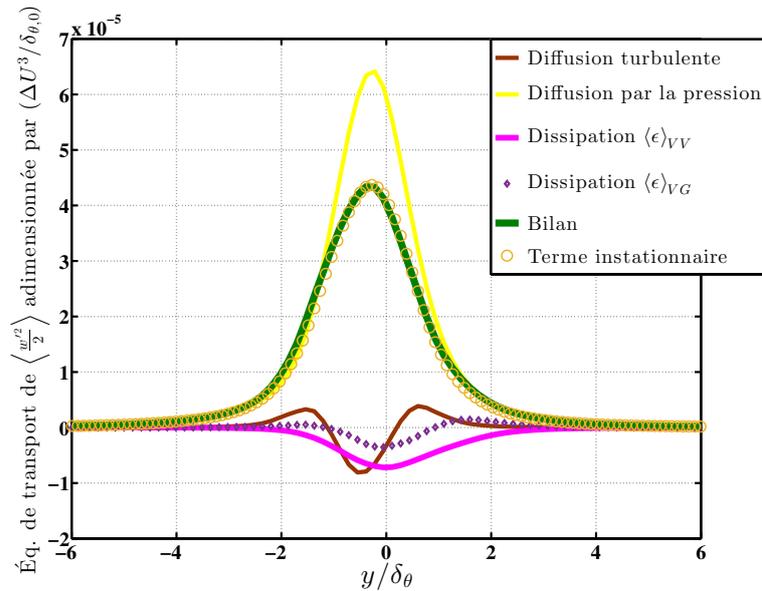
FIGURE 6.23 – Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse normale $\langle \frac{v'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 100$.

Comme pour les fluctuations de vitesse normales, la production des fluctuations transversales est assurée par le terme de pression. Ce dernier est, au temps $\tau = 40$, plus important pour l'écoulement à viscosité variable comme le montre la figure 6.24. Ceci est en accord avec l'évolution temporelle de fluctuations $\langle \frac{w'^2}{2} \rangle$ décrite précédemment à la figure 6.1c. Notons que, à $\tau = 40$, la production des fluctuations transversales par l'écoulement DNS-R9 est pratiquement le double de celle de DNS-R1. Or, la production des fluctuations normales par l'écoulement DNS-R9 est environ 6 fois plus grande que celle de DNS-R1 (voir figure 6.22). Cela montre que les variations de viscosité agissent de manière beaucoup plus forte sur les mouvements verticaux là où le gradient de viscosité est imposé. Nous pouvons également constater que la diffusion turbulente selon la direction transversal se met en place beaucoup

plus rapidement dans le cas DNS-R9, comme le montre la figure 6.25.



(a) DNS-R1



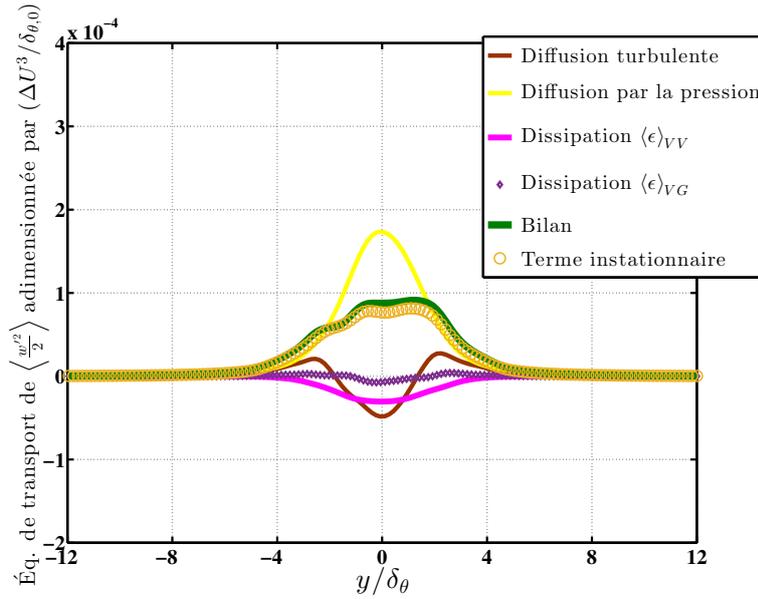
(b) DNS-R9

FIGURE 6.24 – Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse transversale $\langle \frac{w'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 40$.

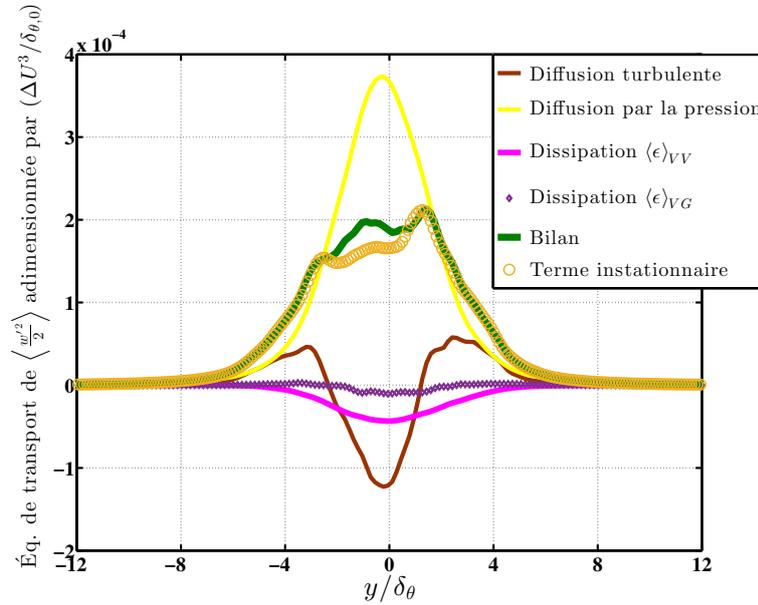
De la même manière que pour les fluctuations longitudinales et normales, les termes supplémentaires sont négligeables à $\tau = 100$, mais les termes de production et de diffusion demeurent plus importants pour DNS-R9 comme le montre la figure 6.25.

– *Analyse de l'équation de l'énergie cinétique de turbulence 2.21 :*

Les figures 6.26 et 6.27 montre l'évaluation du bilan d'énergie cinétique de turbulence $\langle q^2 \rangle$ exprimée en 2.21 pour DNS-R1 (figure 6.26a) et DNS-R9 (figure 6.26b), au temps $\tau = 40$ et $\tau = 100$, respectivement. De manière générale, ces deux figures nous montrent que tout



(a) DNS-R1

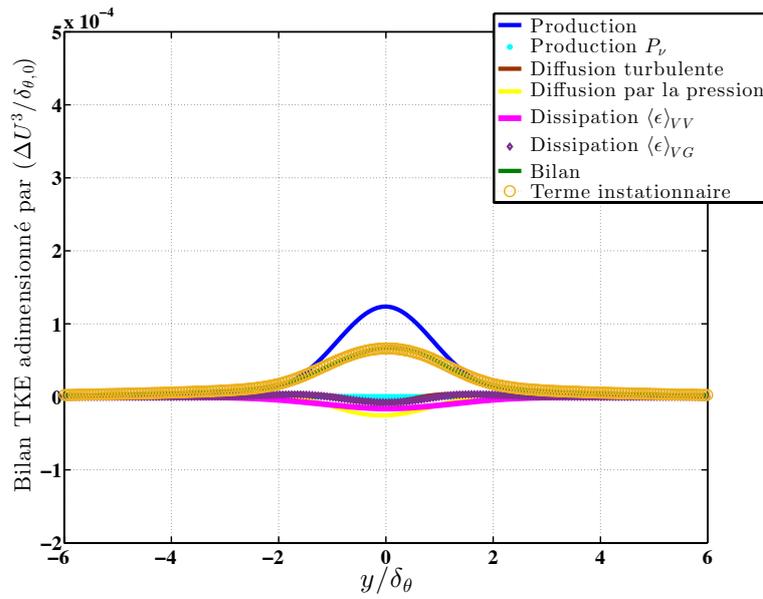


(b) DNS-R9

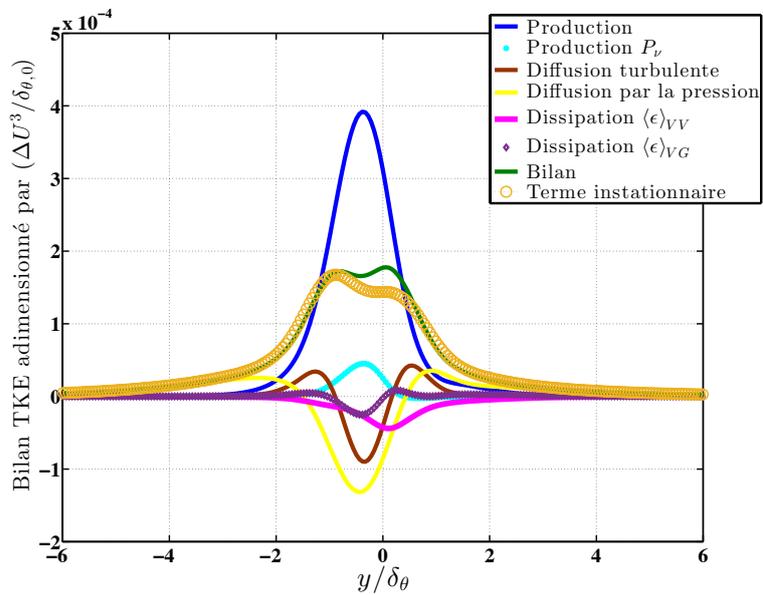
FIGURE 6.25 – Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse transversale $\langle \frac{w'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 100$.

les termes du bilan 2.21 sont plus importants pour l'écoulement à viscosité variable et que les termes supplémentaires sont négligeables à $\tau = 40$ et deviennent très faible à $\tau = 100$. L'énergie cinétique produite est ainsi plus importante en présence des variations de viscosité. Ceci est la conclusion à laquelle nous sommes arrivés, qui est vérifiée aussi bien pour l'énergie cinétique que pour les compostantes de la vitesse fluctuante.

Nous pouvons résumer la phase initiale du développement de couche de mélange à viscosité variable comme suit :



(a) DNS-R1

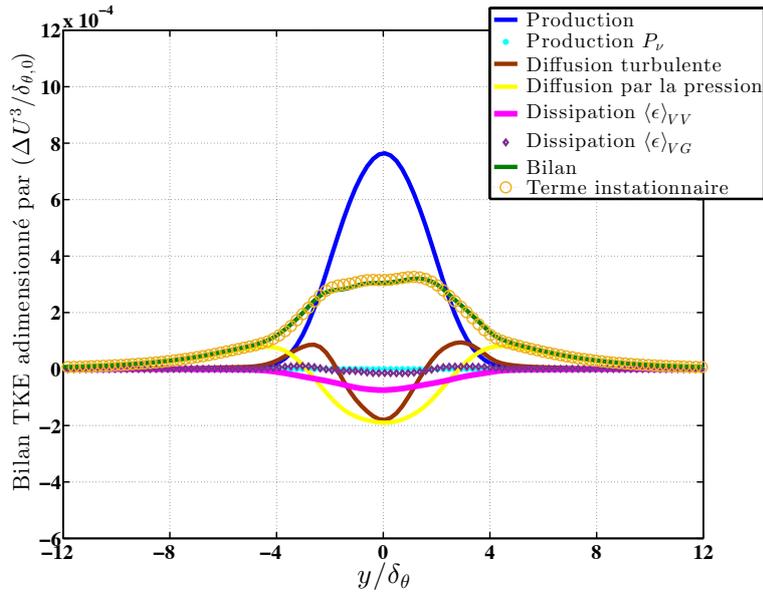


(b) DNS-R9

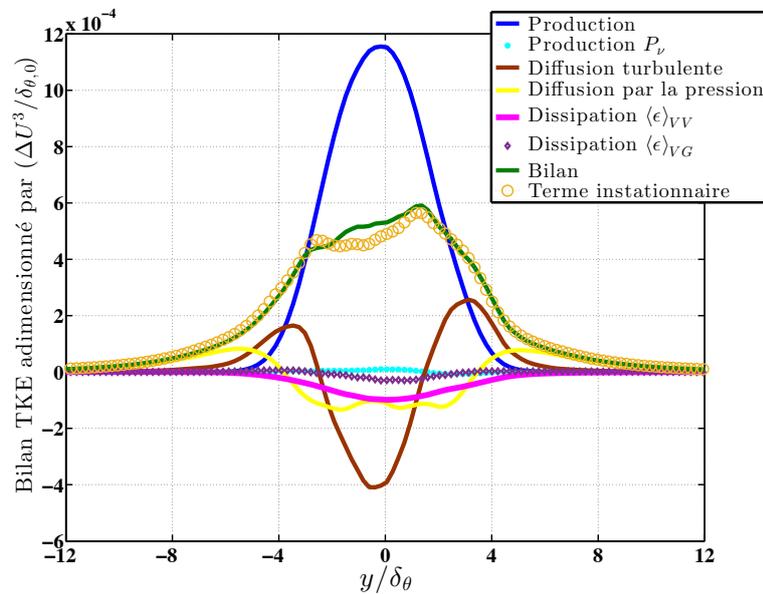
FIGURE 6.26 – Évaluation du bilan de l'énergie cinétique de turbulence à $\tau = 40$ pour les valeurs $R_\nu = 1$ et 9.

• À $\tau = 0$, les différents écoulements ($R_\nu = 1, 2.5, 4, 6, 9$ et 18) possèdent le même gradient de vitesse.⁴ **Le gradient de viscosité a pour effet d'augmenter l'amplitude du gradient de vitesse dans l'intervalle $\tau \in [0 - 70]$ par rapport à sa valeur initiale, comme le montre la figure 6.28.** Comme mentionné par Govindarajan et al. [44], les variations de viscosité peuvent accentuer le caractère inflexionnel du profil de vitesse. À titre d'exemple, l'écoulement DNS-R9 présente une augmentation du gradient de vitesse près de 50 % par rapport à sa valeur initiale. L'écoulement à viscosité constante voit son gradient

4. Nous parlons ici du gradient de vitesse adimensionné par la différence de vitesse ΔU ou bien par sa valeur initiale, propre à chaque cas R_ν .



(a) DNS-R1



(b) DNS-R9

FIGURE 6.27 – Évaluation du bilan de l'énergie cinétique de turbulence à $\tau = 100$ pour les valeurs $R_\nu = 1$ et 9.

de vitesse diminuer dès les premiers instants, comme il est classique de le voir dans les écoulements homogènes.

- La conséquence directe de l'augmentation des gradients de vitesse moyenne par la viscosité variable est **l'augmentation mécanique du terme de production** (rappelons que celui-ci est proportionnel au gradient de vitesse moyenne). Dans le cas de la couche de mélange temporelle, le terme de production $\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ est responsable de la production des fluctuations de vitesse longitudinales. L'énergie cinétique du champ de vitesse moyen, disponible à être transférée au champ de vitesse fluctuant, est par conséquent plus importante

pour l'écoulement à viscosité variable.

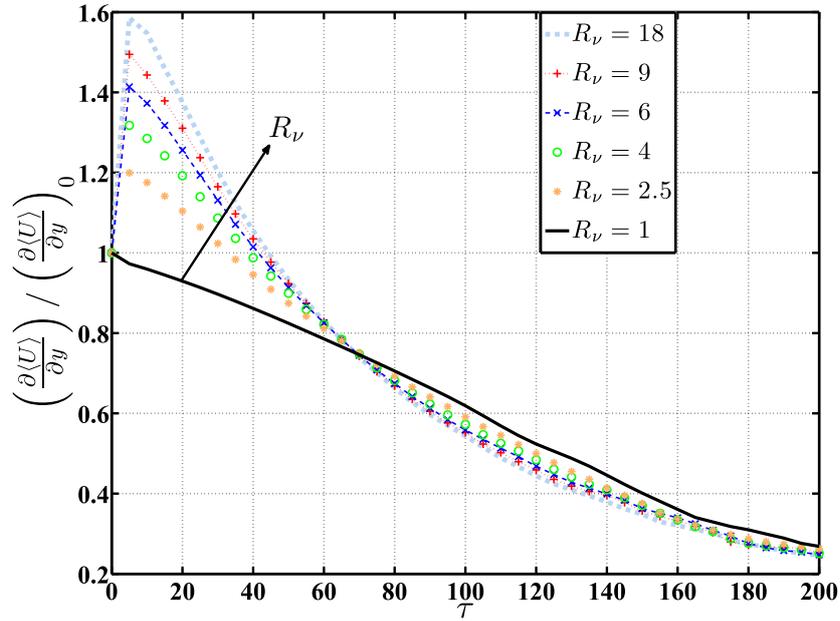


FIGURE 6.28 – Évolution temporelle des valeurs maximales du gradient de vitesse $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ adimensionné par sa valeur initiale pour différents rapports de viscosité R_ν .

Les figures 6.29a et 6.29b montrent, respectivement, l'évolution temporelle l'énergie cinétique du champ de vitesse moyen $\langle Q^2 \rangle^v$ et du champ fluctuant $\langle q^2 \rangle^v$ intégrée le long la direction inhomogène définit comme suit :

$$\langle Q^2 \rangle^v = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \frac{1}{2} \langle U \rangle^2 dy \quad (6.16)$$

$$(6.17)$$

$$\langle q^2 \rangle^v = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \frac{1}{2} \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle dy \quad (6.18)$$

L'énergie cinétique du champ moyen a tendance à diminuer au cours du temps (transfert d'énergie des grandes échelles aux plus petites), tandis que l'énergie cinétique de champ fluctuant augmente avec le temps (développement de la turbulence). Nous pouvons remarquer l'influence du rapport R_ν sur l'évolution de ces profils. En effet, l'énergie $\langle Q^2 \rangle^v$ diminue plus rapidement pour les grands rapports R_ν . Ce résultat peut être interprété comme ceci : **l'écoulement à viscosité variable possède une capacité à transférer de l'énergie depuis le champ moyen vers le champ fluctuant bien supérieure à l'écoulement à viscosité constante.**

De même, l'énergie cinétique du champ fluctuant $\langle q^2 \rangle^v$ est produite plus rapidement pour les grandes variations de la viscosité. Cela traduit également **la capacité de l'écoulement à viscosité variable à créer les fluctuations de vitesse.**

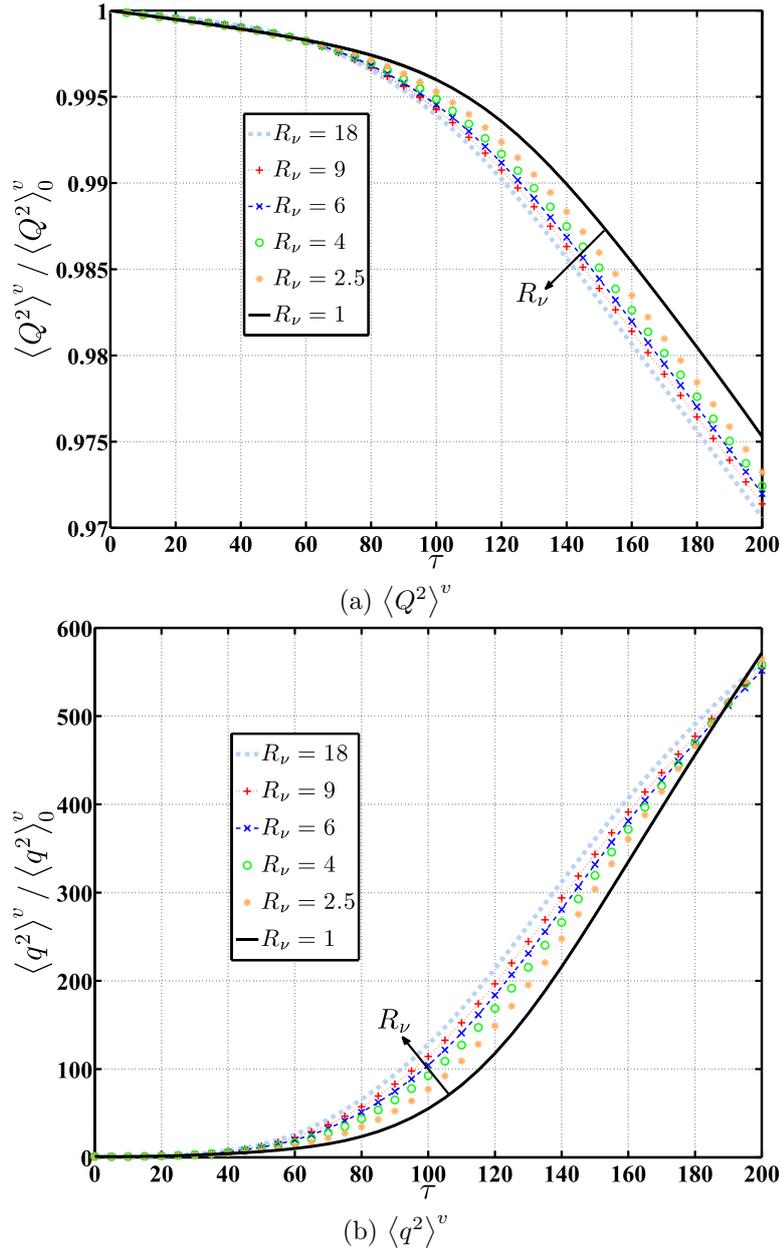


FIGURE 6.29 – Évolution temporelle des énergies cinétiques de l'écoulement de couche de mélange pour différentes valeurs de R_ν .

6.1.2 Analyse du champ de vorticité fluctuant

6.1.2.1 Évolution spatio-temporelle

Les figures 6.30a et 6.30b montrent, pour différents rapports de viscosité R_ν , le profil spatial d'entrophie $\frac{1}{2} (\langle \omega_x'^2 \rangle + \langle \omega_y'^2 \rangle + \langle \omega_z'^2 \rangle)$ adimensionnée par ΔU et $\delta_{\theta,0}$ aux temps $\tau = 40$ et 100 , respectivement. Ces courbes montrent que l'entrophie est plus importantes pour les différents écoulements à viscosité variable ($R_\nu > 1$). À $\tau = 40$, la forme des profils de l'écoulement à viscosité variable sont dissymétriques, mais présentent néanmoins un pic au centre de la couche de mélange ($y/\delta_{\theta,0} = 0$). Comparé à l'énergie cinétique de turbulence,

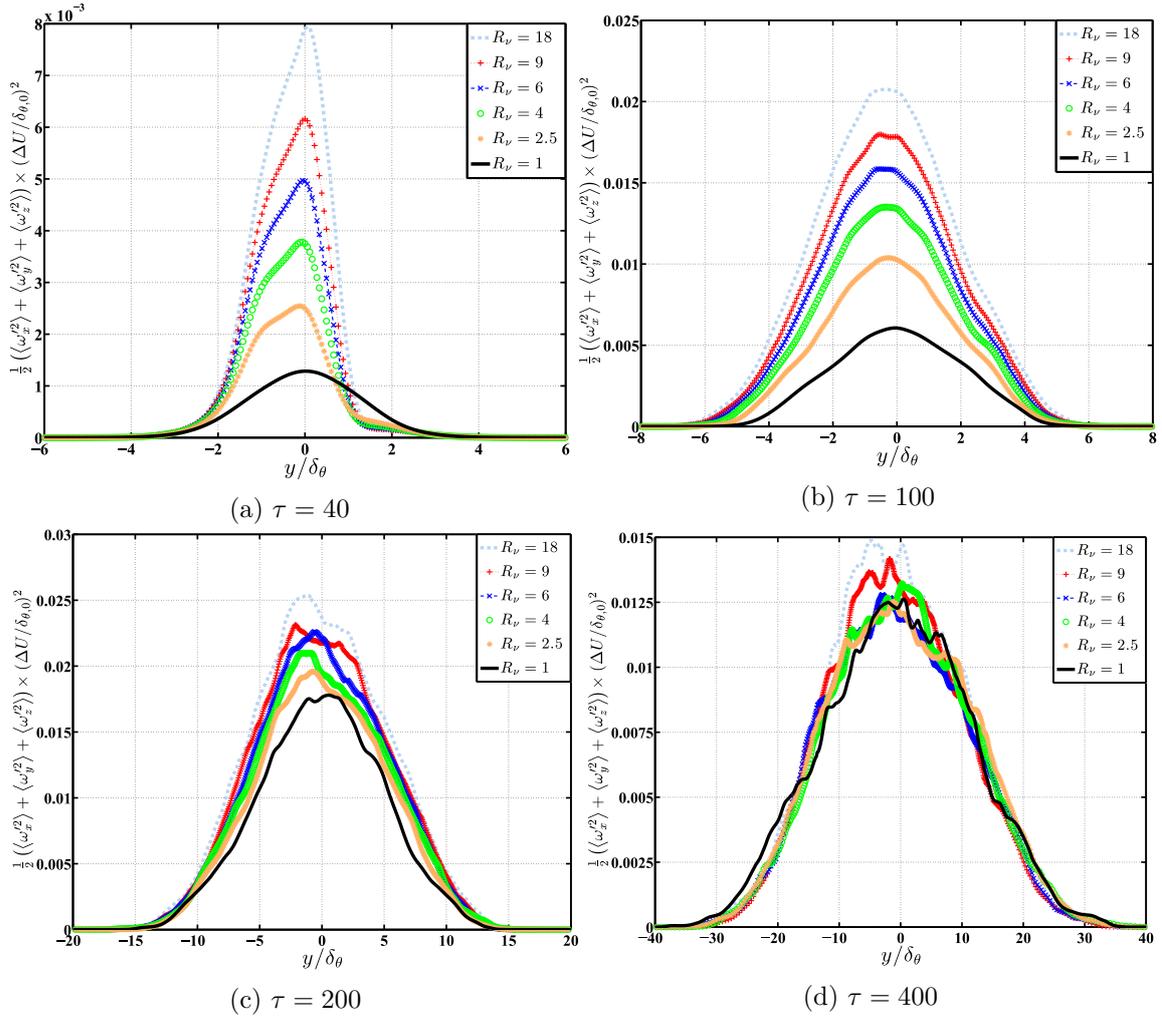


FIGURE 6.30 – Évaluation des profils d'entropie $\frac{1}{2} (\langle \omega_x'^2 \rangle + \langle \omega_y'^2 \rangle + \langle \omega_z'^2 \rangle)$ adimensionnée par ΔU et $\delta_{\theta,0}$, pour différents rapports de viscosité R_ν et de temps τ .

le champ d'entropie semble plus sensible aux variations de viscosité. En effet, les figures 6.31 et 6.32 montrent respectivement les pics des composantes d'entropie et de l'énergie cinétique de turbulence enregistrés au cours du temps pour les rapports $R_\nu = 9, 6, 4$ et 1. Les pics des fluctuations de vorticité demeurent généralement plus importants pour les écoulements à viscosité variable même au temps long (voir par exemple la figure 6.30d). Les fluctuations de vitesses deviennent plus importantes pour l'écoulement à viscosité constante à partir de $\tau = 200$, en particulier la vitesse verticale (voir les figures 6.32d et 6.32d). Ceci s'explique par l'effet aux petites échelles que peut avoir la viscosité, d'une part, et, d'autre part, les gradients de viscosité modifient le profil de vitesse pour accentuer son caractère inflexionnel. Par conséquent, les gradients de viscosité amplifient l'instabilité non visqueuse de Kelvin-Helmholtz, responsable de la déstabilisation de l'écoulement. La production de vorticité est donc plus importante pour l'écoulement à viscosité variable.

Nous pouvons remarquer sur la figure 6.31a, que la composante transversale $\langle \omega_z'^2 \rangle$ est plus importante que les deux autres composantes, pour les écoulements à viscosité variable $R_\nu > 1$. Pour $\tau > 40$, cette situation change et les pics d'entropie prennent l'ordre suivant,

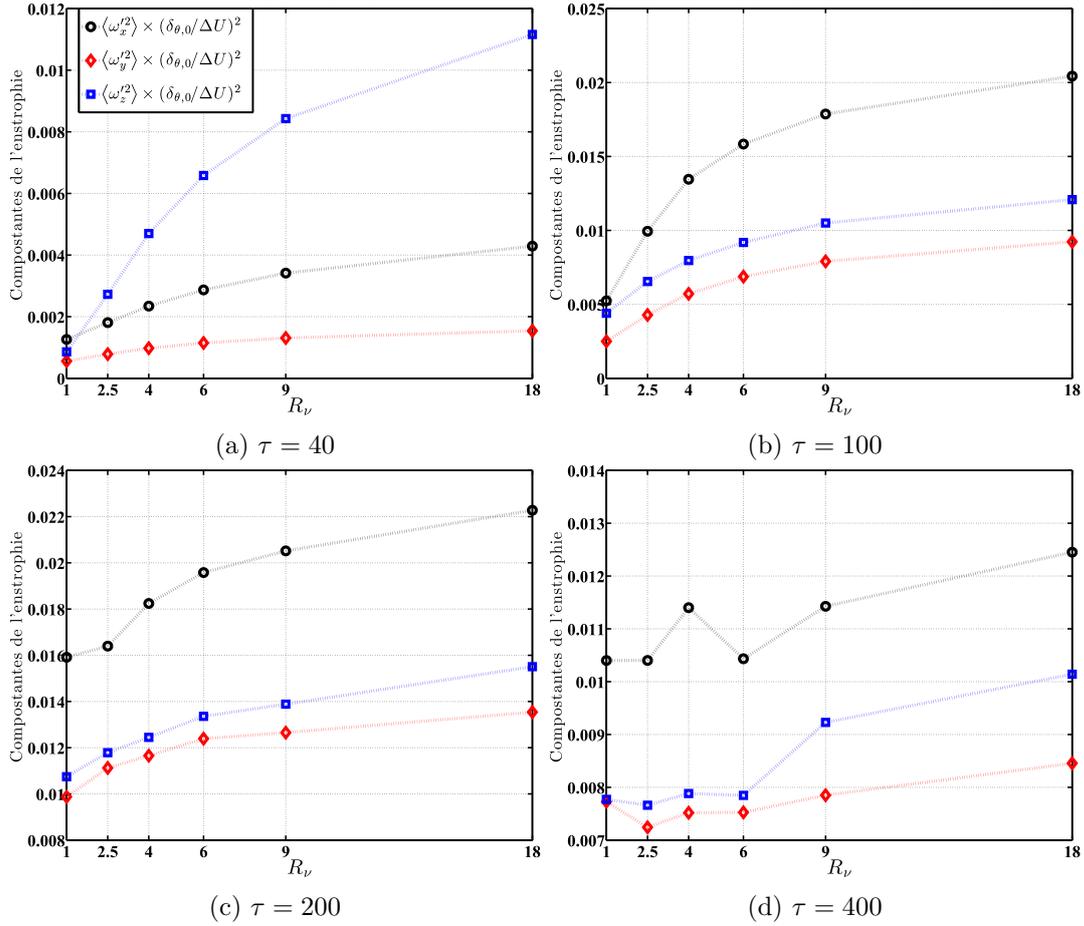


FIGURE 6.31 – Évolution des valeurs maximales des composantes d'ensrophie en fonction du rapport de viscosité R_ν pour différentes valeur de τ .

$\langle \omega_x'^2 \rangle > \langle \omega_z'^2 \rangle > \langle \omega_y'^2 \rangle$, quelle que soit la valeur de R_ν . Ceci dénote l'importance des gradients de viscosité dans la phase initiale de l'écoulement.

Nous pouvons également lire sur la figure 6.31 que les fluctuations de vorticité longitudinales sont proportionnelles au rapport de viscosité, en particulier pour les valeurs $R_\nu > 6$. Le développement de l'instabilité secondaire et l'apparition des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs d'axe transversal sera plus accentuée pour les écoulements DNS-R9 et DNS-R18.

Cette instabilité secondaire a été considérée par plusieurs auteurs comme un mécanisme de transition vers la tridimensionnalisation de l'écoulement et vers le régime turbulent pleinement développé. Cet aspect de l'écoulement est illustré sur les figures 4.12 et 4.13, montrant les structures turbulentes de l'écoulement à viscosité constante et variable. La taille de ces structures est reliée au terme de stretching. Plus ce dernier est important, plus les structures sont petites. Partant de ce constat, le stretching de l'écoulement à viscosité variable est probablement plus important pour l'écoulement à viscosité variable. Néanmoins, l'existence de nouveaux termes dans l'équation de transport de l'ensrophie, pourrait suggérer d'autres mécanismes physiques, responsables de la production de l'ensrophie et des petites structures turbulentes.

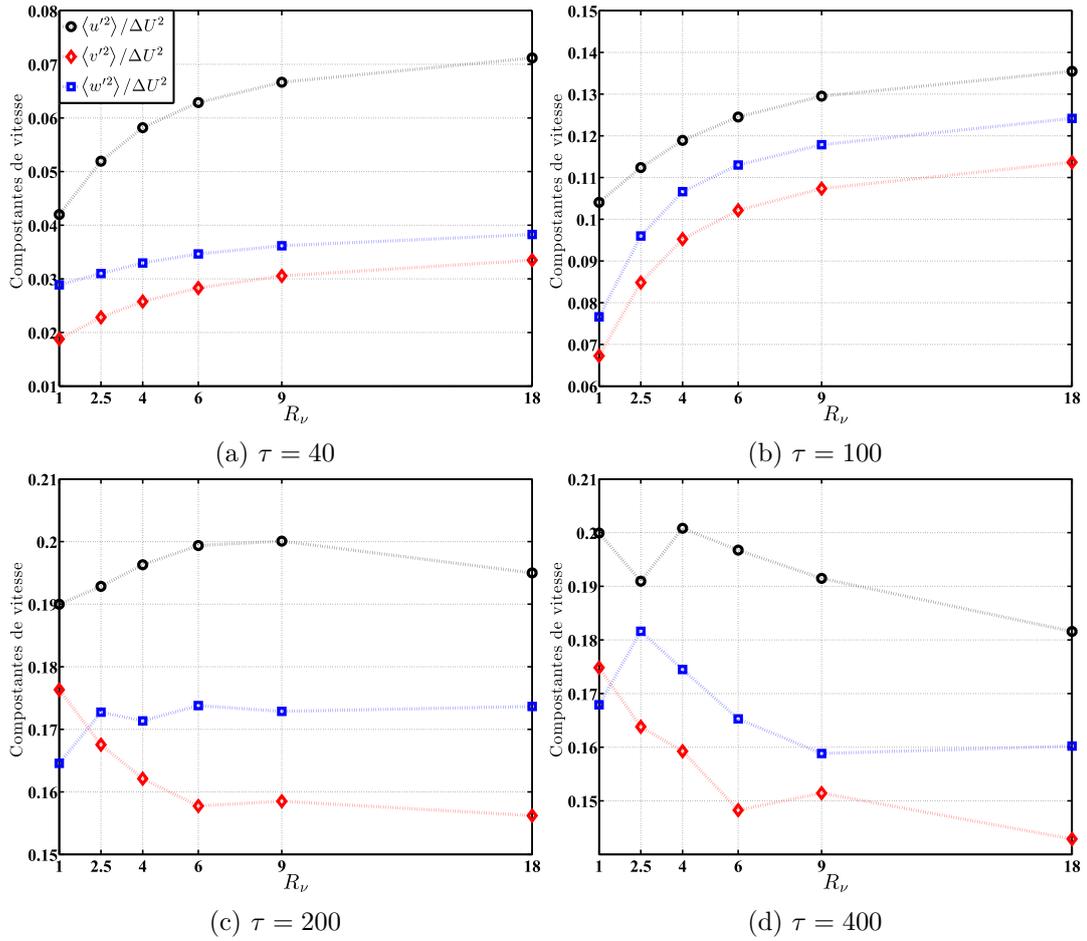


FIGURE 6.32 – Évolution des valeurs maximales des composantes d'énergie cinétique de turbulence en fonction du rapport de viscosité R_ν pour différentes valeurs de τ .

6.1.2.2 Autosimilitude

L'autosimilitude des profils $\langle \omega_i'^2 \rangle$ pour l'écoulement à viscosité constante et les écoulements à viscosité variable n'a pu être obtenu dans l'intervalle $\tau \in [0 - 400]$. Néanmoins, l'écoulement à viscosité variable DNS-R9 présente un régime autosimilaire de ces profils dans les temps longs $\tau \in [640 - 700]$, comme le montre la figure 6.33. Malgré quelques écarts, notamment au centre de la couche de mélange, ce résultat montre que l'écoulement à viscosité variable a la capacité d'atteindre un régime autosimilaire. En effet, d'après la littérature, les écoulements à masse volumique variable n'atteignent pas le régime autosimilaire, passé certains rapports R_ρ [87].

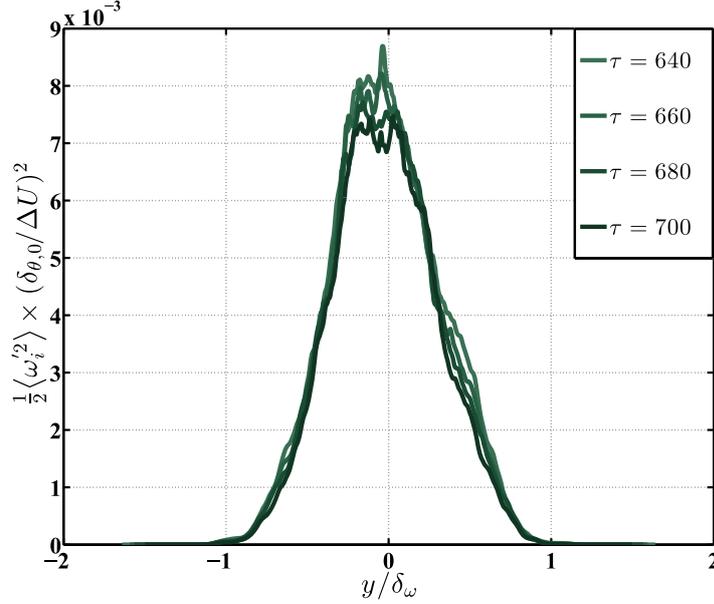


FIGURE 6.33 – Autosimilitude des profils d’ensrophie de l’écoulement DNS-R9 dans l’intervalle $\tau \in [640 - 700]$.

6.1.2.3 Équation transport de $\langle \omega_i'^2 \rangle$

L’équation de transport de l’ensrophie prenant compte des variations spatio-temporelles de la viscosité, développée au chapitre 3, est rappelée ci-dessous (équation 6.19).

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle \omega_i'^2 \rangle}{2} \right)}_{Tt} + \underbrace{\langle \omega_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial x_j}}_{P_\omega} + \underbrace{\left\langle u_j' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\omega_i'^2}{2} \right) \right\rangle}_{Dt} \quad (6.19a)$$

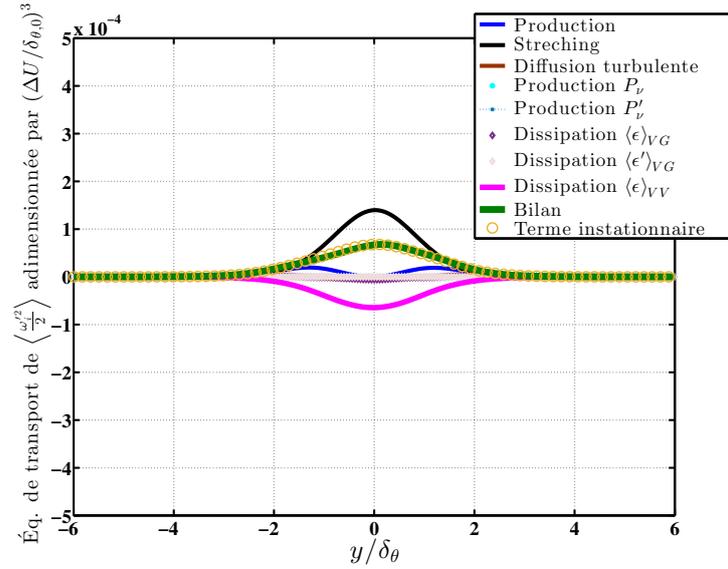
$$= \underbrace{\langle \omega_j \rangle \left\langle \omega_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle + \langle \omega_i' \omega_j' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \left\langle \omega_i' \frac{\partial \omega_j' u_i'}{\partial x_j} \right\rangle}_{ST} \quad (6.19b)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \omega_i' \right\rangle \left(\frac{\partial \langle \omega_i \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \nu \omega_i' \rangle \frac{\partial^2 \langle \omega_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j}}_{P_{\omega\nu}} \quad (6.19c)$$

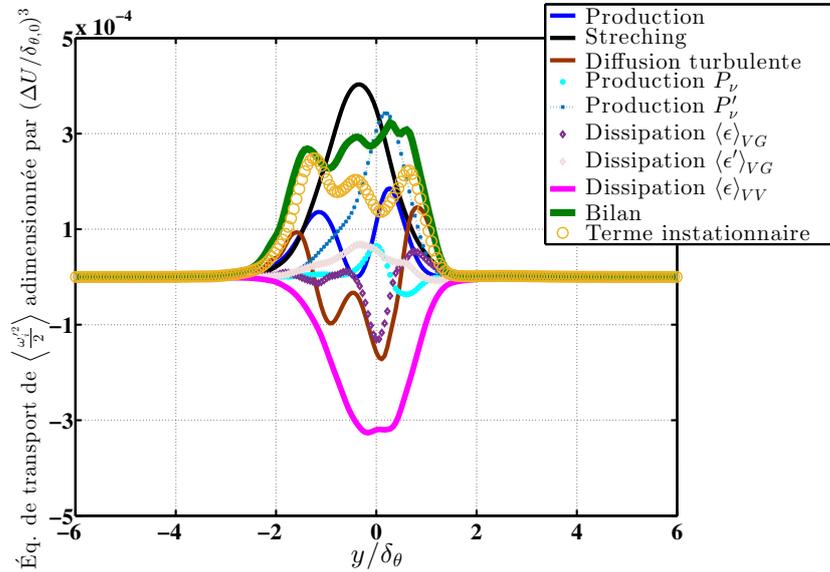
$$+ \underbrace{\epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_q \partial x_q} \omega_i' \right\rangle \left(\frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_l} \right) + \epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_q} \omega_i' \right\rangle \frac{\partial^2 \langle u_l \rangle}{\partial x_j \partial x_j}}_{P'_{\omega\nu}} \quad (6.19d)$$

$$+ \underbrace{\epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_q \partial x_q} \omega_i' \cdot \left(\frac{\partial u_l'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_l} \right) \right\rangle + \epsilon_{iql} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_q} \omega_i' \cdot \frac{\partial^2 u_l'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle}_{\epsilon'_{\omega VG}} \quad (6.19e)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \omega_i'^2}{\partial x_j} \right) \right\rangle}_{\epsilon_{\omega VG}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \nu \frac{\partial^2 \omega_i'^2}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle}_{\epsilon_{\omega VG}} - \underbrace{\left\langle \nu \left(\frac{\partial \omega_i'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\epsilon_{\omega VV}} \quad (6.19f)$$



(a) DNS-R9



(b) DNS-R9

FIGURE 6.34 – Évaluation de l'équation de transport de l'enstrophie à $\tau = 40$ pour les deux cas ; à viscosité constante et à viscosité variable.

L'évaluation de cette équation pour les deux situations à viscosité constante et à viscosité variable permet l'identification des termes responsables de la production des fluctuations de vortacité, ainsi que le rôle des termes supplémentaires. En effet, la figure 6.34b montre que ces derniers sont loin d'être négligeables dans le bilan 6.19. Ils contribuent à la production de l'enstrophie (termes P'_{ω} , P_{ω} et $\epsilon'_{\omega VG}$) mais également à sa dissipation (terme $\epsilon_{\omega VG}$). Il est surprenant de voir que le terme P'_{ω} est de même ordre de grandeur que celui lié au stretching, responsable en grande partie de la production de l'enstrophie dans les situations homogènes (ν et ρ constants). Ces termes supplémentaires deviennent de plus en plus faibles, au fur à mesure que l'écoulement évolue, à cause des gradients de viscosité qui s'homogénéisent au cours du temps.

Par ailleurs, les termes classiques, P_ω , D_t , ST et $\epsilon_{\omega_{VV}}$ sont, de manière générale, plus importants pour l'écoulement à viscosité variable. Le terme ST est légèrement dissymétrique du côté du courant rapide de la couche de mélange. Ce aspect est également valable pour les temps longs (résultat non montré ici).

L'analyse des structures turbulentes des différents écoulements à viscosité variable, n'a pas révélée une forme particulière de celles-ci. En effet, certains écoulements à masse volumique variable, présentent des structures allongées dans le sens de la direction inhomogène y . Aussi, dans les écoulements non miscibles, les gradients de viscosité font apparaître des structures de forme particulière.

Néanmoins, dans notre étude, les structures sont celles des écoulements de couche de mélange homogène.

6.1.3 Analyse du champ scalaire fluctuant

6.1.3.1 Évolution temporelle

La figure 6.35 montre l'évolution temporelle des fluctuations du champ scalaire (valeurs maximales) pour l'écoulement à viscosité constante (champ de température) et les différents écoulements à viscosité variable (fraction massique de mélange). Notons que ces deux champs fluctuants sont nuls à $\tau = 0$. Cependant, l'évolution temporelle des fluctuations $\sqrt{\langle Y_1'^2 \rangle}$ est nettement supérieur à $\sqrt{\langle T^{*2} \rangle}$ dans l'intervalle $\tau \in [0 - 180]$.

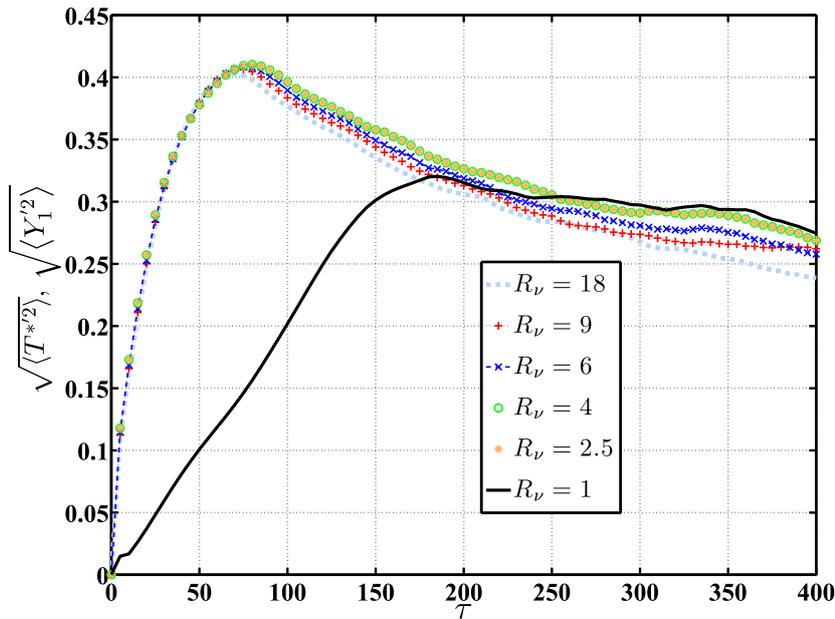


FIGURE 6.35 – Évolution temporelle des fluctuations de de température, $\sqrt{\langle T^{*2} \rangle}$, de l'écoulement à viscosité constante ($R_\nu = 1$) et des fractions massiques de mélange, $\sqrt{\langle Y_1'^2 \rangle}$, des écoulements à viscosité variable ($R_\nu = 18, 9, 4$ et $2,5$).

Notons également que dans l'intervalle $\tau \in [0-70]$, l'évolution des fluctuations de fractions massique de mélange est indépendante du rapport de viscosité R_ν . À titre d'exemple, le rapport entre les fluctuations $\sqrt{\langle Y_1'^2 \rangle}$ et $\sqrt{\langle T^{*2} \rangle}$ est supérieur à 5, à $\tau = 40$. Nous analyserons dans la suite l'équation de transport de ces fluctuations afin de comprendre et de déterminer les mécanismes par lesquels elles sont produites.

6.1.3.2 Autosimilarité

L'autosimilarité des profils $\langle T^{*2} \rangle$ pour l'écoulement à viscosité constante, d'une part, et des profils $\langle Y_1'^2 \rangle$ pour les écoulements à viscosité variable d'autre part, n'a pu être obtenu dans l'intervalle $\tau \in [0-400]$. L'écoulement DNS-R9, seul DNS à être amené jusqu'à $\tau = 700$, présente des profils de fraction massique de mélange $\langle Y_1'^2 \rangle$ et de viscosité $\langle \nu'^2 \rangle$ autosimilaire comme le montre les figures 6.36a et 6.36b.

L'autosimilarité de ces profils n'est atteinte que vers les temps longs. Ces profils montrent clairement que l'écoulement à viscosité variable est capable d'atteindre le régime autosimilaire aussi bien pour le champ de vitesse (comme cela été montré plus haut) et aussi pour le champ scalaire.

6.1.3.3 Équations de transport de $\langle T^{*2} \rangle$ et $\langle Y_1'^2 \rangle$

Nous avons que les fluctuations du champ actif de fraction massique de mélange sont produites plus intensément que les fluctuations de scalaire passif de température, plus particulièrement dans la zone proche de l'état initial $\tau \in [0-70]$. La figure 6.37 montre l'évaluation à $\tau = 40$ des équations de transport des fluctuations $\langle T^{*2} \rangle$ et $\langle Y_1'^2 \rangle$ écrites ci-dessous :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle T^{*2} \rangle}{2} \right)}_{T_t} = - \underbrace{\langle T^{*'} v' \rangle \frac{\partial \langle Y_1 \rangle}{\partial y}}_{P_k} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left\langle v' \left(\frac{T^{*2}}{2} \right) \right\rangle}_{D_t} + \underbrace{\alpha \frac{\partial^2 \langle T^* \rangle}{\partial y \partial y}}_{D_m} - \underbrace{\alpha \left\langle \left(\frac{\partial T^{*'}}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}} \quad (6.20)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle Y_1'^2 \rangle}{2} \right)}_{T_t} = - \underbrace{\langle Y_1' v' \rangle \frac{\partial \langle Y_1 \rangle}{\partial y}}_{P_k} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left\langle v' \left(\frac{Y_1'^2}{2} \right) \right\rangle}_{D_t} + \underbrace{\mathcal{D} \frac{\partial^2 \langle Y_1 \rangle}{\partial y \partial y}}_{D_m} - \underbrace{\mathcal{D} \left\langle \left(\frac{\partial Y_1'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}} \quad (6.21)$$

Notons que les figures 6.37a et 6.37a n'ont pas la même échelle des ordonnées pour des

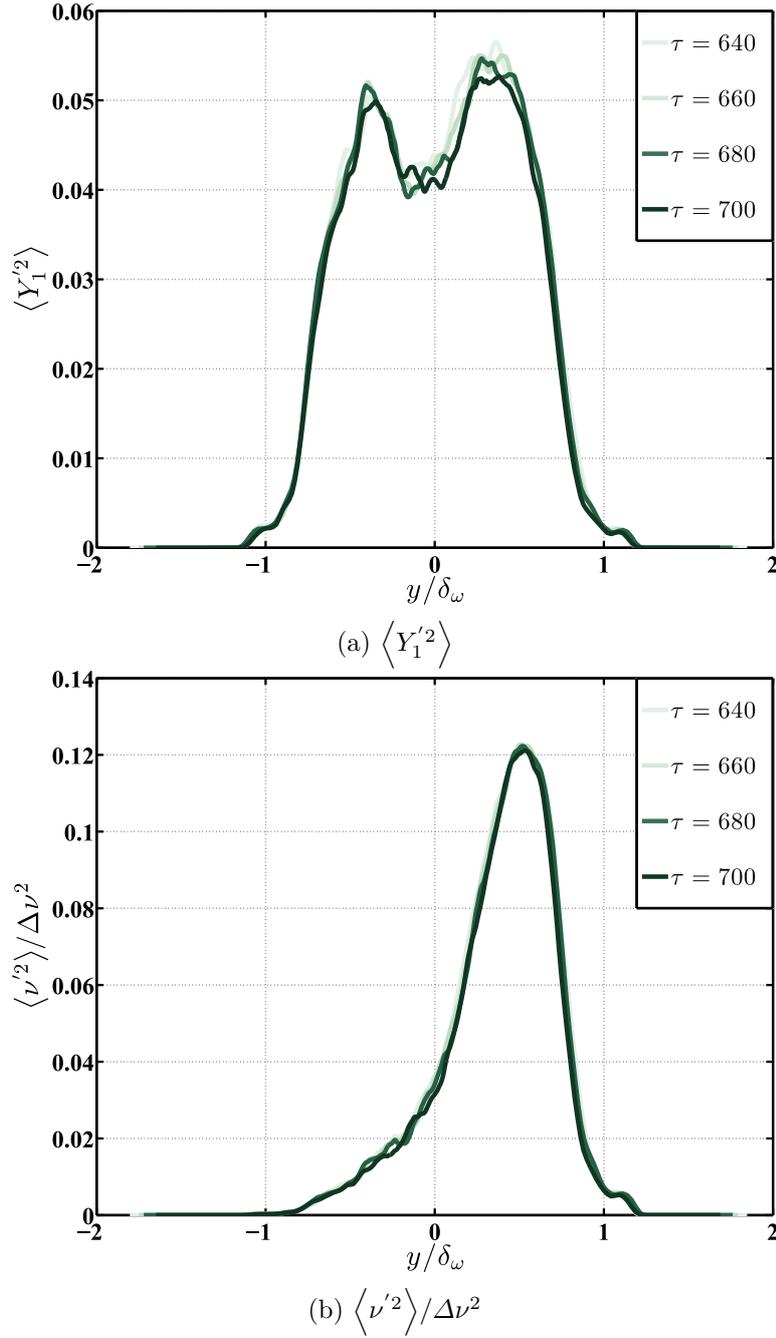


FIGURE 6.36 – Autosimilarité des profils du champ scalaire actif fluctuant de l'écoulement DNS-R9 dans l'intervalle $\tau \in [640 - 700]$.

raisons évidentes de clarté. De manière qualitative, les deux bilans présentent des différences apparentes, telle que la dissymétrie qui caractérise les différents profils de l'écoulement à viscosité variable. Bien que de faible amplitude, les différents termes de l'équation de température 6.20 sont plus étalés (suivant la direction y) que ceux de l'équation 6.21. Ceci est dû à l'épaisseur initiale du champ de température, $\delta_{T,0} = \delta_{\theta,0}$, supérieur à $\delta_{\nu,0} = 0$. Nous trouvons que la production des fluctuations de $\langle Y_1'^2 \rangle$ sont environ 30 fois celles de $\langle T'^2 \rangle$. Cette différence est liée au fait que le gradient initial de la fraction massique de mélange est nettement plus important que celui de la température.

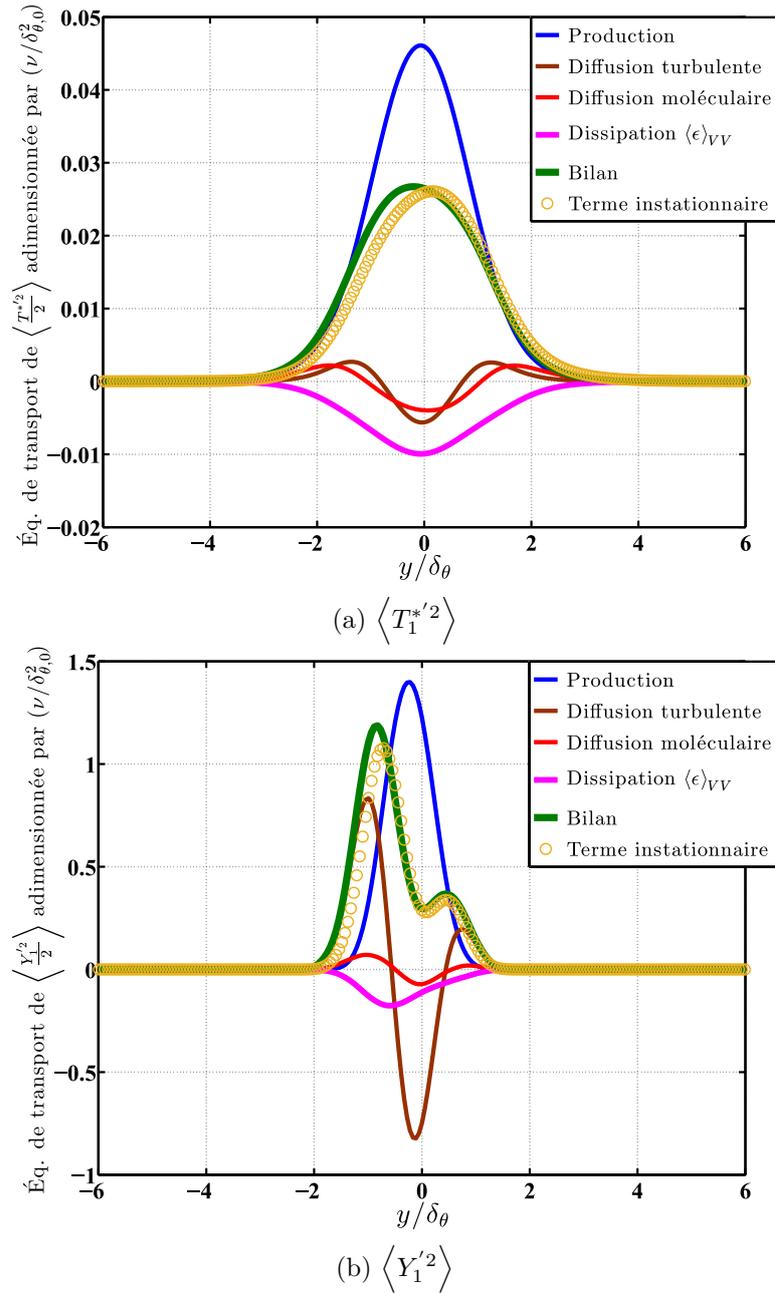


FIGURE 6.37 – Évaluation au temps $\tau = 40$ des équations de transport du champ scalaire passif et actif des écoulements DNS-R1 et DNS-R9, respectivement. Les équations 6.20 et 6.21 sont adimensionnées par $\delta_{\theta,0}$ et le profil instantané de la viscosité cinématique moyenne $\langle \nu \rangle$.

6.2 Analyse du champ fluctuant à chaque échelle

6.2.1 Analyse des fonctions de structures de vitesse

Afin d'évaluer la distribution de l'énergie cinétique de turbulence à chaque échelle, nous traçons ci-dessous les fonctions de structures de vitesse d'ordre 2 pour différents rapports de viscosité R_ν . Pour rappel, les fonctions de structures de vitesse d'ordre p sont définies comme

la moyenne des écarts de u'_i entre deux points distants d'un vecteur $\vec{r} = (\vec{x}^+ - \vec{x}^-)$:

$$\langle (\Delta u_i)^p \rangle (r) = \langle (u'_i(x_i + r) - u'_i(x_i))^p \rangle, \quad i = \{1, 2 \text{ et } 3\} \quad (6.22)$$

où p est l'ordre de la fonction de structure.

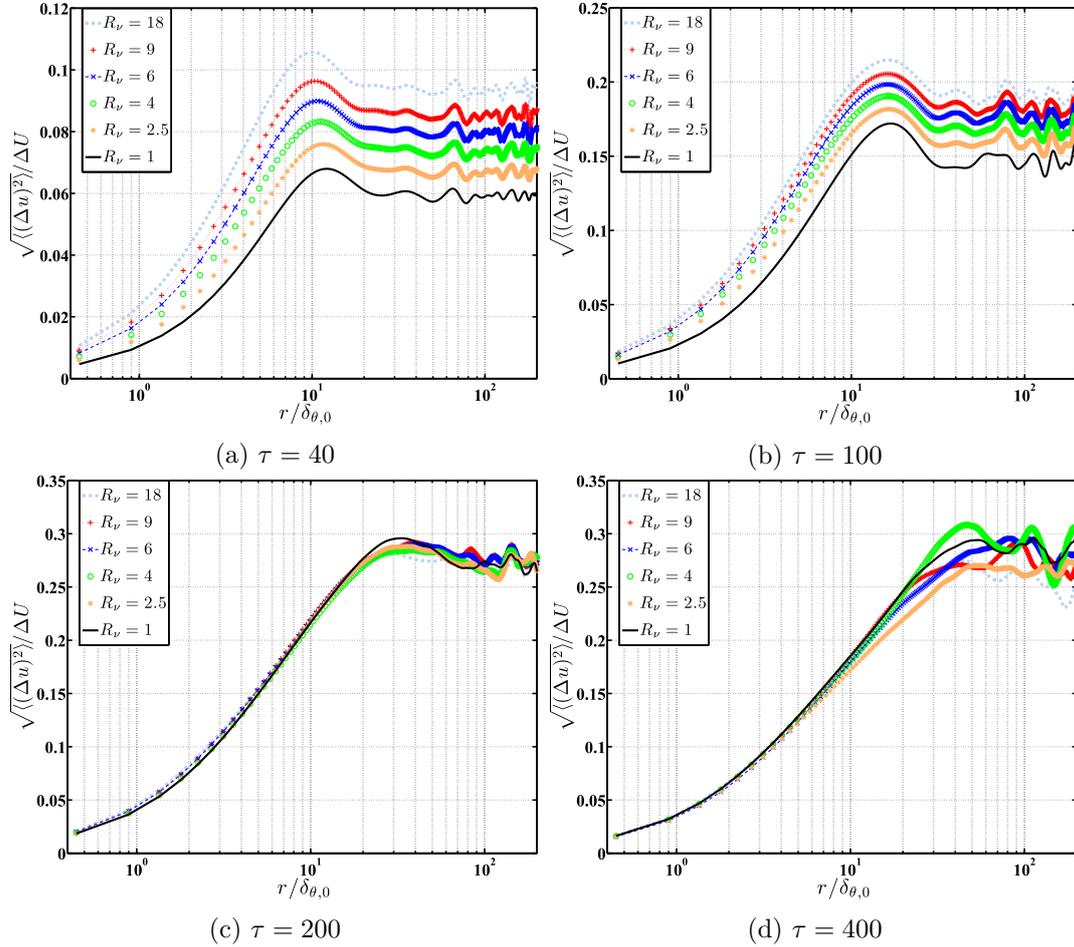


FIGURE 6.38 – Évaluation au centre de la couche de mélange, $y = 0$, des fonctions de structures de la vitesse longitudinale pour différents rapports de viscosité R_ν et différentes valeurs de τ . Le vecteur séparation est parallèle à la direction longitudinale ; \vec{r}/\vec{x} .

Les fonctions de structure d'ordre deux ($p = 2$) donnent des informations sur la distribution de l'énergie cinétique de turbulence en chaque échelle r . Aux grands nombres de Reynolds, et lorsque les petites échelles de la turbulence sont isotropes, les fonctions de structures d'ordre deux peuvent être écrites de manière autosimilaire conformément à la théorie de Kolmogorov [88] :

$$\langle (\Delta u_i)^2 \rangle (r) = C_{u,2} r^{2/3}, \quad i = \{1, 2 \text{ et } 3\} \quad (6.23)$$

Ces régimes sont peu probables dans le cadre de simulation numérique directe (DNS). Le nombre de Reynolds est modéré voir faible. De plus, nous nous intéressons à la phase initiale du développement de la turbulence, l'isotropie des petites échelles est mise à mal par

l'influence des structures cohérentes.

En règle générale, les fonctions de structure de vitesse d'ordre deux sont adimensionnées par la fluctuation de vitesse quand $r = 0$ (i.e. $\langle u'^2 \rangle (r = 0)$). Cette adimensionnement permet une superposition rapide des profils de $\langle (\Delta u_i)^2 \rangle (r)$ pour différents régimes d'écoulement. Néanmoins, il cache une information essentielle qui est l'intensité de la turbulence (mesurée par rapport à une grandeur non locale) pour chaque échelle r . Précisément, l'objectif

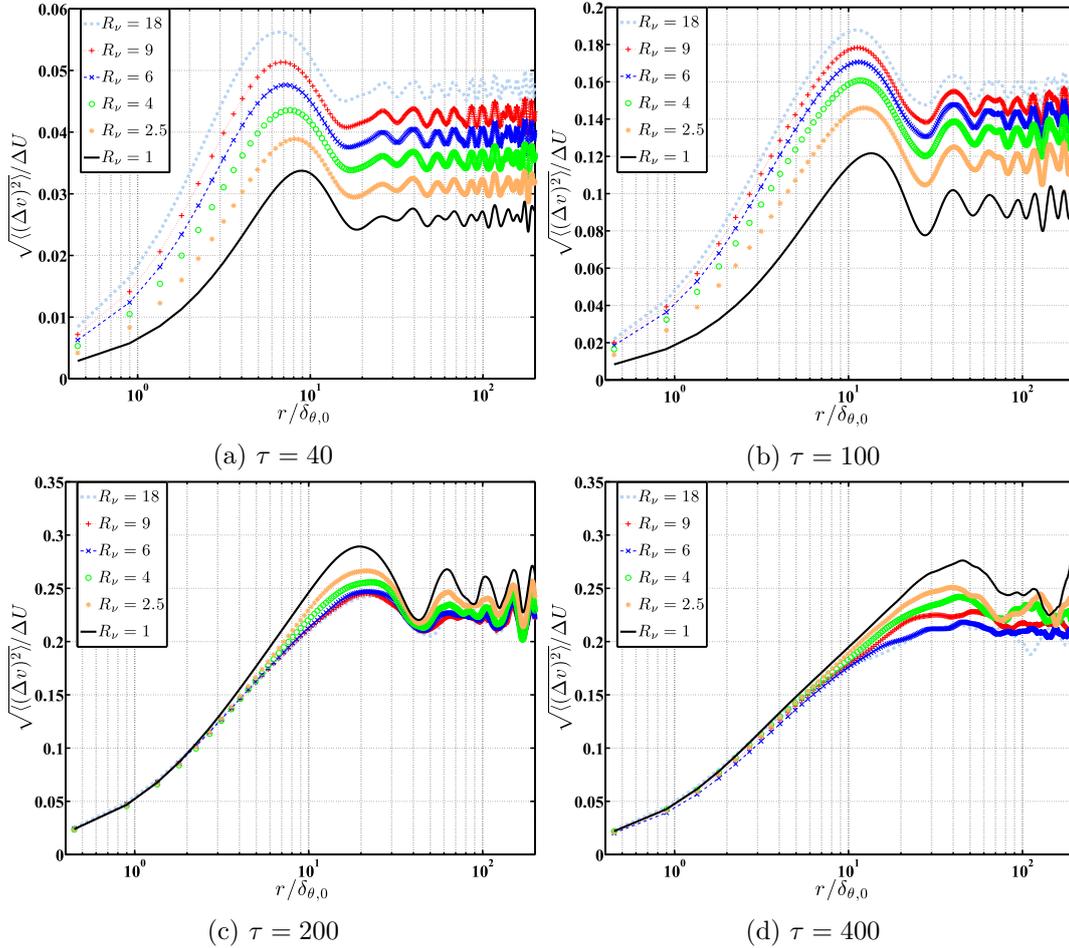


FIGURE 6.39 – Évaluation au centre de la couche de mélange, $y = 0$, des fonctions de structures de la vitesse normale pour différents rapports de viscosité R_ν et de temps τ . Le vecteur séparation est parallèle à la direction longitudinale ; \vec{r}/\vec{x} .

recherché, dans la présente étude, est l'influence du rapport de viscosité sur la distribution de l'énergie et l'intensité de la turbulence à différentes échelle r d'un même écoulement. C'est pourquoi, nous adimensionnons les fonctions de structure par la différence de vitesse ΔU , comme pour les fluctuations de vitesse en un point. L'échelle r est adimensionnée par l'épaisseur $\delta_{\theta,0}$.

Les figures 6.38, 6.39 et 6.40 montrent le développement temporel des fonctions de structure d'ordre deux $\sqrt{\langle (\Delta u)^2 \rangle} / \Delta U$, $\sqrt{\langle (\Delta v)^2 \rangle} / \Delta U$ et $\sqrt{\langle (\Delta w)^2 \rangle} / \Delta U$, respectivement. Le vecteur \vec{r} est parallèle à la direction longitudinale \vec{x} ($r = (\vec{r} \cdot \vec{r})^{1/2}$). Aux grandes séparations r , les différents profils atteignent une valeur asymptotique qui n'est autre que l'intensité des

fluctuations de vitesse en un point (voir figure 6.1). À $\tau = 40$, les figures 6.38a, 6.39a et

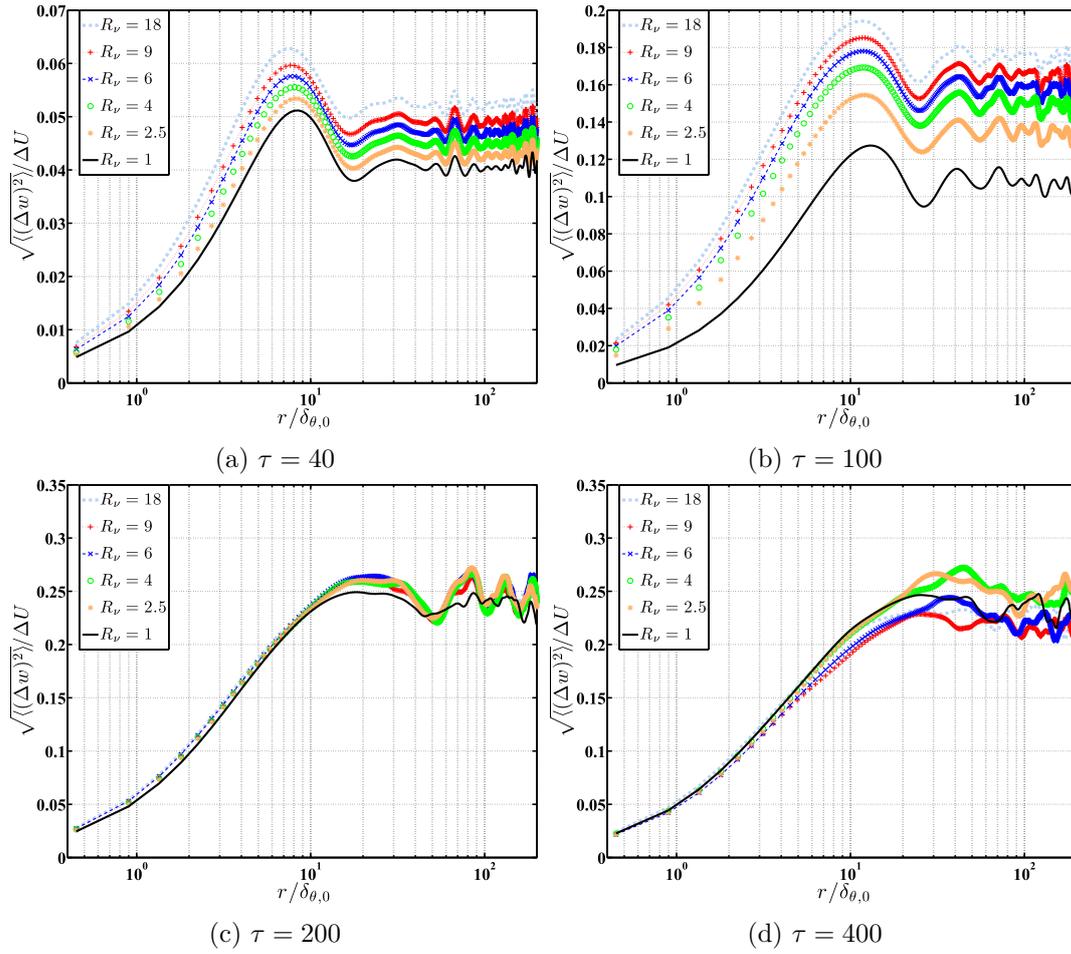


FIGURE 6.40 – Évaluation au centre de la couche de mélange, $y = 0$, des fonctions de structures de la vitesse transversale pour différents rapports de viscosité R_ν et différentes valeurs de τ . Le vecteur séparation est parallèle à la direction longitudinale ; \vec{r}/\vec{x} .

6.40a montrent clairement l'importance des fluctuations de vitesse des écoulements à viscosité variable ($R_\nu > 1$), comparé à l'écoulement à viscosité constante ($R_\nu > 1$). Cette observation est vraie pour toutes les échelles r . Autrement dit, les petites et les grandes échelles de la turbulence sont plus énergétiques au fur et à mesure que le rapport de viscosité augmente. Nous remarquons que les fonctions de structure de la vitesse verticale connaissent le plus d'augmentation avec le rapport R_ν , comparé aux fonctions de structure des vitesses longitudinale et transversale.

À $\tau = 100$, les figures 6.38a, 6.39a et 6.40a montrent la même tendance qu'à $\tau = 40$. Les différents profils font apparaître des bosses localisées à $r/\delta_{\theta,0} \approx 1$, signature de la présence des structures cohérentes dans l'écoulement de couche de mélange. Le niveau énergétique de ces structures semble être proportionnel au rapport de viscosité.

À partir de $\tau = 200$, le niveau énergétique des petites échelles r devient indépendant du rapport de viscosité, tandis que les grandes échelles r semblent être encore affectées par le rapport de viscosité. En effet, la figure 6.39d montre la signature de la persistance de

structures cohérentes à $\tau = 400$ pour l'écoulement à viscosité constante, contrairement aux écoulements à viscosité variables (en particulier pour $R_\nu > 6$).

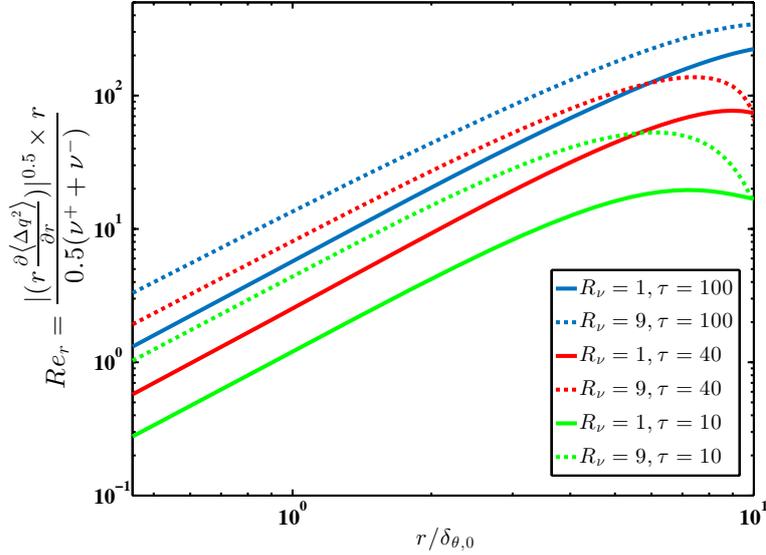


FIGURE 6.41 – Évolution du nombre de Reynolds Re_r en fonction de l'échelle r , pour $R_\nu = 1$ et 9 , à différents τ . La fonction de structure $\langle \Delta q^2 \rangle$ est évaluée au centre de la couche de mélange, $y = 0$. Le vecteur de séparation \vec{r} est parallèle à la direction longitudinale de l'écoulement, \vec{r} / \bar{x} .

D'après Danaïla et al. [89], l'énergie cinétique correspondante à une échelle r donnée, est exprimée par la relation suivante :

$$E_r = r \frac{\partial \Delta q^2}{\partial r}. \quad (6.24)$$

Afin de mieux nous rendre compte du niveau énergétique à chaque échelle, nous définissons le nombre de Reynolds suivant :

$$Re_r = \frac{|(r \frac{\partial \langle \Delta q^2 \rangle}{\partial r})|^{0.5} \times r}{0.5(\nu^+ + \nu^-)}, \quad (6.25)$$

où $\langle \Delta q^2 \rangle = 0.5 \langle (\Delta u_i^2) \rangle$ (sommation sur le double indice i).

La figure 6.41, montre l'évolution de Re_r en fonction de la séparation r , pour les rapports $R_\nu = 1$ et 9 , à différents τ . À $\tau = 10$, l'écoulement $R_\nu = 9$ présente un nombre de Reynolds Re_r , valant approximativement 1 , pour les petites échelles r , et atteint 40 , vers les grandes échelles. L'écoulement $R_\nu = 1$ présente des valeurs de Re_r bien plus inférieures (entre $0,2$ et 18). Ceci dénote de manière quantitative, l'amplification par les variations de viscosité, du niveau énergétique des structures turbulentes. Pour $\tau = 40$ et 100 , les valeurs de Re_r , demeurent plus importantes pour l'écoulement $R_\nu = 9$. Néanmoins l'écart entre les deux écoulements tend à diminuer avec le temps.

6.2.2 Analyse de l'équation de transport de $\langle(\Delta u_i)^2\rangle$

La turbulence est un phénomène multi-échelle, où des structures de différentes tailles coexistent. Chaque échelle est caractérisée par un niveau énergétique ainsi qu'un degré de cohérence qui lui sont propre.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \langle \Delta q^2 \rangle}_{T_t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial r_j} \langle \Delta u_j \Delta q^2 \rangle}_{D_{t,r}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \langle (u_j^+ + u_j^-) \Delta q^2 \rangle}_{D_{t,y}} \\
 & + \underbrace{\langle \Delta u_j \Delta u \rangle \frac{\partial}{\partial r_j} \langle \Delta \mathcal{U} \rangle}_{P_{k,r}} + \underbrace{\left\langle \frac{(u_j^+ + u_j^-)}{2} \Delta u_i \right\rangle \frac{\partial}{\partial Y} \langle \Delta \mathcal{U} \rangle}_{P_{k,y}} \\
 & = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial Y} \langle \Delta p \Delta v \rangle}_{D_{p,y}} \\
 & + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial r_j} \Delta u_i \right\rangle \left[\frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial X_j} + \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle}{\partial X_i} \right] + \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial X_j} \Delta u_i \right\rangle \left[\frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_i \rangle}{\partial r_j} + \frac{\partial \langle \Delta \mathcal{U}_j \rangle}{\partial r_i} \right]}_{P_{\nu,r-y}} \\
 & + \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U} \rangle}{\partial r_y^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U} \rangle}{\partial Y \partial Y} \right] \langle (\nu^+ + \nu^-) \Delta u \rangle + \frac{\partial^2 \langle \Delta \mathcal{U} \rangle}{\partial Y \partial r_y} \langle \Delta \nu \Delta u \rangle}_{P_{\nu,r-y}} \\
 & + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial r_j} \left[\frac{\partial \Delta q^2}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j \Delta u_i}{\partial X_i} \right] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Delta \nu}{\partial X_j} \left[\frac{\partial \Delta q^2}{\partial r_j} + \frac{\partial \Delta u_j \Delta u_i}{\partial r_i} \right] \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG,r-y}} \\
 & + \underbrace{\left[\left\langle (\nu^+ + \nu^-) \frac{\partial^2 \Delta q^2}{\partial r_j^2} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle (\nu^+ + \nu^-) \frac{\partial^2 \Delta q^2}{\partial X_j^2} \right\rangle + \left\langle \Delta \nu \frac{\partial^2 \Delta q^2}{\partial X_j \partial r_j} \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG,r-y}} \right. \\
 & \quad \left. - \underbrace{\left\langle \nu^+ \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^+} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}^+} - \underbrace{\left\langle \nu^- \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^-} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}^-} \right. \tag{6.26}
 \end{aligned}$$

L'évaluation de l'équation de l'énergie cinétique en chaque échelle 6.26, permet de mettre en évidence la manière dont l'énergie est transférée d'échelle en échelle.

Pour rappel, les indices r , y et $r - y$ désignent les termes traduisant les effets d'échelle r (transport dans l'espace des échelles), d'inhomogénéité selon la direction normale y (transport dans l'espace géométrique) et ceux traduisant les deux effets, respectivement. Pour un écoulement à viscosité constante, le terme $P_{\nu,r-y}$ est strictement nul. Tandis que, le terme $\langle \epsilon \rangle_{VG,r-y}$ est réduit au terme diffusion moléculaire, en posant $\nu^+ + \nu^- = 2\nu$. La figure 6.42 montre le bilan 6.26, appliqué à l'écoulement $R_\nu = 1$, à $\tau = 100$. Ce bilan est évalué au point $Y = 0$, il est adimensionnée par la valeur de la dissipation $\langle \epsilon \rangle_{vv}^+$. Le vecteur de séparation \vec{r} , est parallèle à la direction inhomogène y ($r = (0, r_y, 0)$). On peut remarquer que la variation temporelle des incréments de vitesse de l'équation 6.26 (courbe orange), n'est pas égale au terme de droite (courbe verte). Plusieurs pistes ont été abordées afin de fermer ce bilan. Nous

nous sommes, à chaque fois, retrouver avec le même résultat, dans les deux cas à viscosités constante et variable (ce dernier cas n'est pas montré). Le bilan 6.26 est obtenu en faisant l'hypothèse que les des deux points \bar{x}^+ et \bar{x}^- , sont statistiquement indépendants. Cela se traduit mathématiquement par $\frac{\partial(\cdot)^-}{\partial x_j^+} = \frac{\partial(\cdot)^+}{\partial x_j^-} = 0$. Nous pensons que cette hypothèse pourrait être à l'origine de la non fermeture du bilan 6.26.

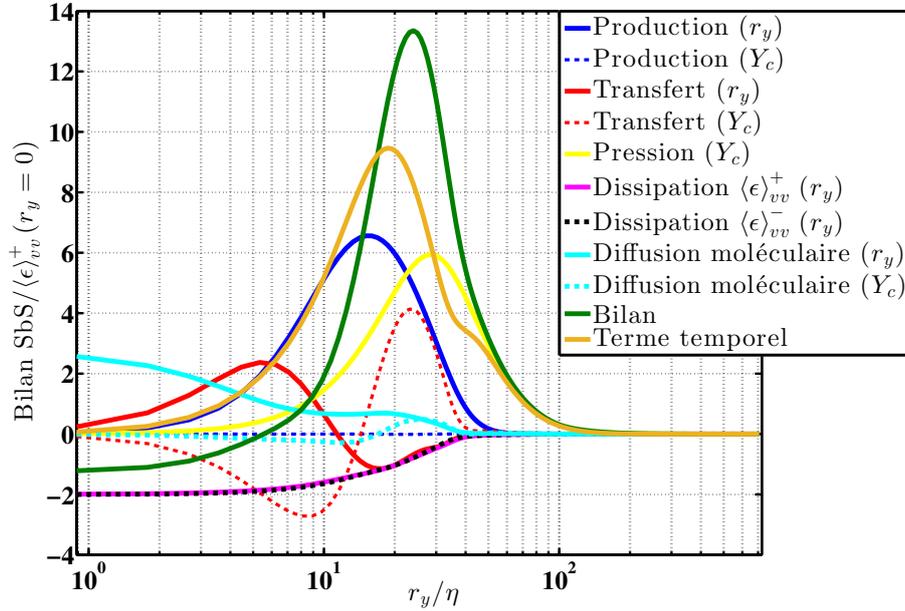


FIGURE 6.42 – Évaluation de l'équation d'énergie cinétique de turbulence en chaque échelle pour l'écoulement à viscosité constante au temps $\tau = 100$

Nous avons montré plus haut que l'énergie cinétique des échelles r est amplifiée par les variations de viscosité. Nous nous proposons d'analyser dans ce qui suit, les termes de production $P_{k,r}$ et de transfert $D_{t,r}$, pour différentes valeurs de R_ν . En faisant le lien avec le bilan en 1 point de l'énergie cinétique turbulente, les termes $P_{k,r}$ et $D_{t,r}$ devraient expliquer, en partie, l'amplification des niveaux énergétiques de l'écoulement à viscosité variable. La figure 6.43, montre que la production des incréments $\langle \Delta q \rangle^2 (0, r_y, 0 | Y = 0)$, est bien plus importante au fur et à mesure le rapport R_ν augmente. La production $P_{k,r}$ est maximale aux grandes échelles r , où les gradients de vitesse moyenne sont les plus importants. Il est intéressant de noter que $P_{k,r}$ demeure plus importante pour les grands rapports R_ν , aussi bien pour les temps proches que les temps longs (voir figure 6.44d).

La figure 6.44 montre que les transferts de $\langle \Delta q \rangle^2 (0, r_y, 0 | Y = 0)$ des grandes vers les petites échelles de la turbulence est bien plus intense pour les grands rapports R_ν . Nous pouvons prétendre que la cascade énergétique de Richardson est, amplifiée par la viscosité. Les échelles les plus actives au transfert d'énergie pourrait également être influencé par le rapport R_ν . Cette question dépasse largement le cadre de notre écoulement et pourrait faire l'objet d'investigations plus poussées.

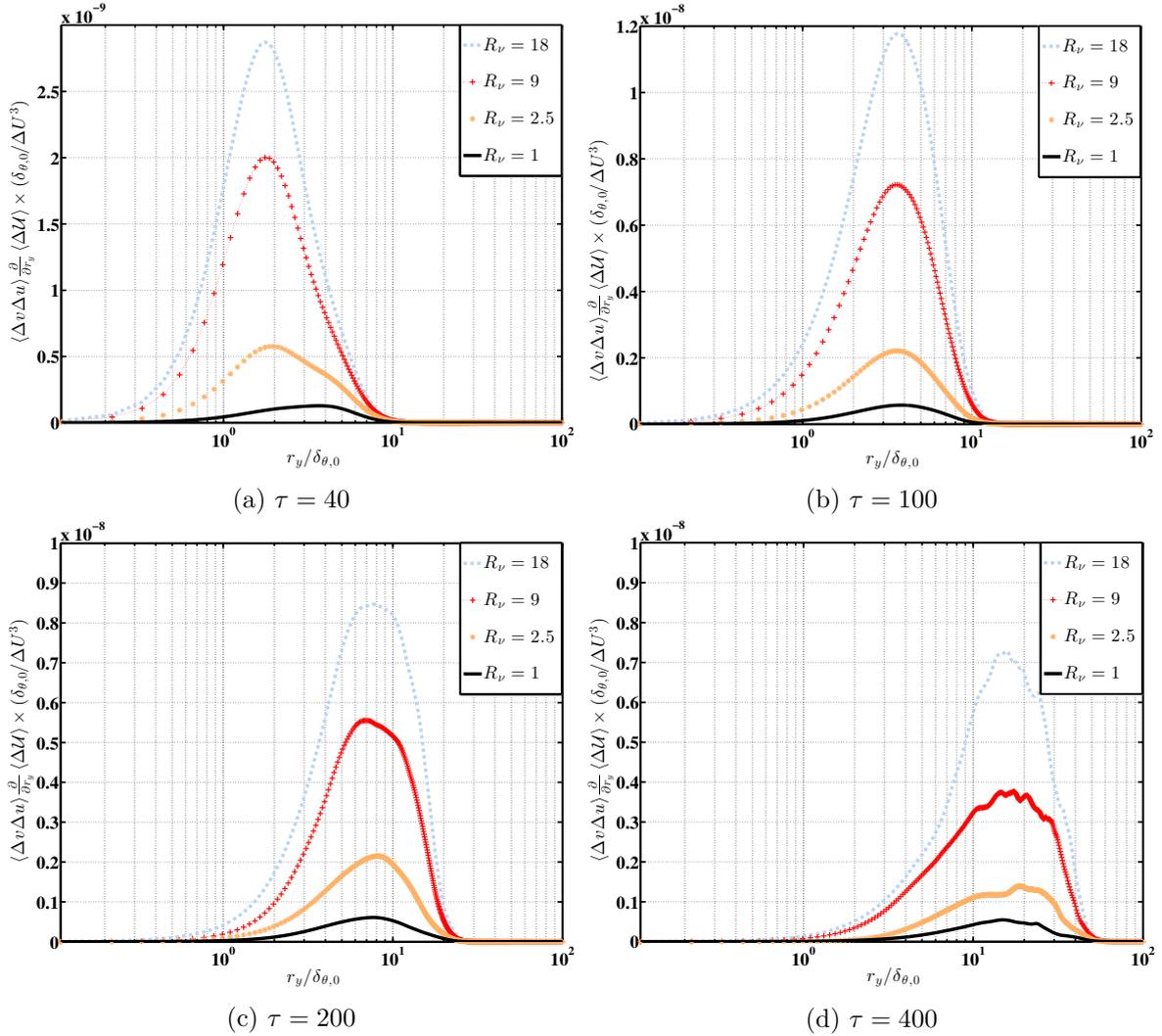


FIGURE 6.43 – Évaluation au centre de la couche de mélange, $Y = 0$, de $P_{k,r}$ pour différents rapports de viscosité R_ν et différentes valeurs de τ . Le vecteur de séparation \vec{r} est parallèle à la direction normale de l'écoulement, $\vec{r}/|\vec{y}$.

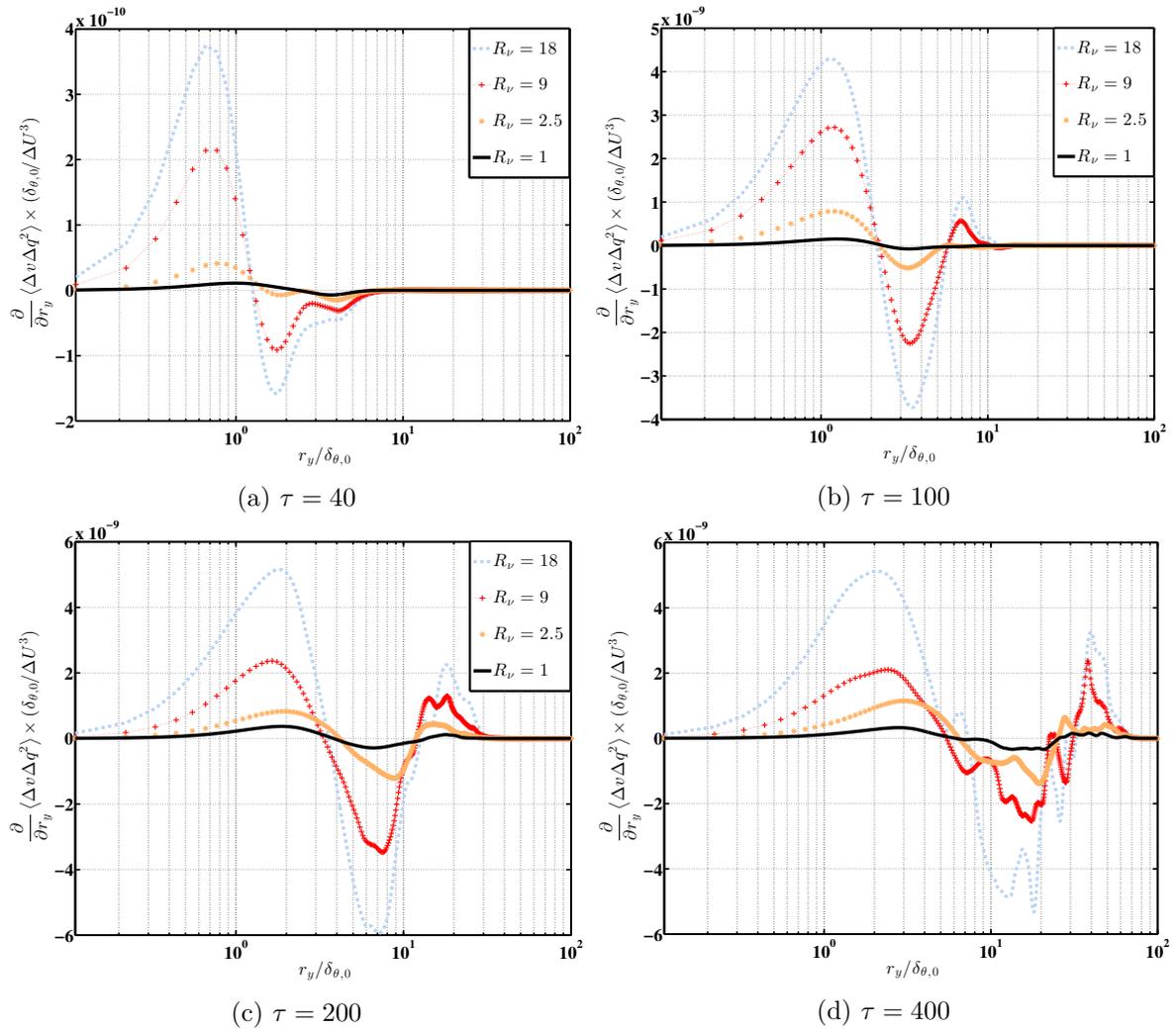


FIGURE 6.44 – Évaluation au centre de la couche de mélange, $Y = 0$, de $D_{t,r}$ pour différents rapports de viscosité R_ν et différentes valeurs de τ . Le vecteur de séparation \vec{r} est parallèle à la direction normale de l'écoulement, $\vec{r}/|\vec{y}$.

6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude des différents champs fluctuants de l'écoulement. Les résultats montrent que les variations de viscosité accélèrent le développement temporel des trois composantes de vitesse fluctuante. L'écart relatif de ces fluctuations de vitesse, par rapport à l'écoulement de référence, est proportionnel à R_ν . Une analyse détaillée des différents termes des équations de transport de vitesse a été menée. Les résultats montrent que la production des fluctuations $\langle u'^2 \rangle$ (le terme $\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$), est fortement amplifiée par les variations spatio-temporelles de la viscosité. La première cause de cette augmentation réside, comme nous l'avons montré dans le chapitre 5, dans l'amplification des gradients de vitesse moyenne. La deuxième cause est l'augmentation des tensions turbulente $\langle u'v' \rangle$. Cette augmentation est principalement due à l'amplification des fluctuations u' et v' , de manière proportionnelle avec le rapport R_ν . Les variations de viscosité exercent peu d'influence sur le niveau de corrélation entre u' et v' .

Le terme P_ν , des fluctuations $\langle u'^2 \rangle$, est, aussi surprenant soit-il, positif et contribue, comme le terme P_k , à produire les fluctuations de vitesse longitudinale. En effet, on a toujours attribué, à la viscosité, un rôle de destructeur d'énergie via le terme de dissipation. Nos résultats montrent un rôle tout à fait contraire, qui mérite d'être souligné. Néanmoins, la contribution du terme P_ν n'est importante que dans les temps proches de l'état initial, $\tau \approx 40$, elle devient négligeable à $\tau \approx 100$.

La production des fluctuations $\langle v'^2 \rangle$ et $\langle w'^2 \rangle$, est assurée par le terme de pression D_p , des équations 6.14 et 6.15, respectivement. À $\tau = 40$ et comparé à l'écoulement de référence, les résultats montrent que ces termes sont, jusqu'à 5 fois, plus importants pour l'écoulement à viscosité variable. Ceci explique l'évolution rapide des fluctuations $\langle v'^2 \rangle$ et $\langle w'^2 \rangle$ comme le montre la figure 6.1. Ce comportement résulte, en partie, par l'augmentation des fluctuations de pression, p' , par les variations de viscosité.

De manière générale, la comparaison des profils de vitesse fluctuante et des équations de transport, entre l'écoulement à viscosité constante et variable, nous permet d'affirmer que ce dernier est globalement accéléré à tous les niveaux. Autrement dit, l'écoulement à viscosité variable passe exactement par les mêmes étapes d'évolution que l'écoulement à viscosité constante, dans un temps plus court. En effet, l'apparition du régime autosimilaire est plus rapide à mesure que le rapport de viscosité augmente. À titre d'exemple, lorsque le rapport $R_\nu = 18$, les fluctuations de vitesse longitudinale présentent, déjà, un comportement autosimilaire, tandis qu'il faut un temps τ entre 200 et 280, pour l'écoulement $R_\nu = 1$, afin de voir apparaître ce régime (voir figure 6.11).

Par ailleurs, l'anisotropie du tenseur de Reynolds est influencé par les variations de viscosité. En effet, les résultats montrent que les quantités b_{11}^v , b_{22}^v et b_{33}^v , atteignent leur valeurs asymptotiques plus rapidement, au fur et à mesure que le rapport de viscosité, R_ν , augmente (voir figure 6.9). En particulier, l'isotropie des fluctuations $\langle v'^2 \rangle$ et $\langle w'^2 \rangle$, est nettement améliorée pour les écoulements à viscosité variable. À titre d'exemple, pour $R_\nu \geq 6$, les

fluctuations $\langle v'^2 \rangle$ sont quasi-isotrope ($b_{22}^v \approx 0$), entre $\tau = 130$ et 180 .

L'analyse des profils de l'enstrophie montre un effet évident des variations de viscosité. En effet, les pics de $\langle \omega_i'^2 \rangle$ sont proportionnels au rapport de viscosité R_ν , pratiquement dans tous l'intervalle $\tau \in [0 - 400]$. À $\tau = 40$, le pic d'enstrophie de l'écoulement $R_\nu = 18$ est pratiquement 8 fois plus important que celui de l'écoulement à viscosité constante ($R_\nu = 1$). L'enstrophie est plus sensible à l'effet amplifiant des variations de viscosité, bien plus que l'énergie cinétique turbulente. En effet, les termes supplémentaires, i.e. la production P'_{ω_ν} , contribuent de manière très significative dans le bilan de l'enstrophie.

Les profils de l'enstrophie sont autosimilaires pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$, dans les temps longs $\tau \in [640 - 700]$. De même pour les profils de la fraction massique de mélange $\langle Y_1'^2 \rangle$. On peut imaginer que, pour des rapports de viscosité et/ou des nombres de Schmidt plus grands, le régime autosimilaire sera difficile, voir impossible à atteindre, à l'image des écoulements présentant un grand rapport de masse volumique R_ρ .

L'analyse du champ scalaire fluctuant a révélé que le rapport de viscosité n'a pas d'influence sur l'évolution temporelle de $\langle Y_1'^2 \rangle$ dans l'intervalle $\tau \in [0 - 70]$. Néanmoins, les fluctuations $\langle Y_1'^2 \rangle$ sont largement supérieurs à celle de $\langle T_1'^2 \rangle$ dans l'intervalle $\tau \in [0 - 200]$. Ce comportement est dû, d'une part, au gradient initial de la fraction massique de notre écoulement, bien plus important que celui de la température. D'autre part, l'interaction du champ de fraction massique avec celui de la vitesse provoque une amplification des fluctuations de ces deux grandeurs. La comparaison des équations de transport de $\langle Y_1'^2 \rangle$ et $\langle T_1'^2 \rangle$, montre que le terme $\langle Y_1'v' \rangle \frac{\partial \langle Y_1 \rangle}{\partial y}$ est jusqu'à 30 fois supérieur à $\langle T'v' \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y}$, à $\tau = 40$.

L'analyse des fonctions de structures de la vitesse longitudinale, normale et transversale, a montré que le niveau des fluctuations est bien plus important, aux petites et grandes échelles, pour les grands rapports de viscosité R_ν et ce jusqu'à $\tau = 200$. À $\tau = 400$, les résultats montrent que l'évolution de ces fonctions de structures est influencée, aux grandes échelles, par le rapport R_ν . En particulier, la fonction de structure de la vitesse verticale présente un niveau énergétique plus élevé pour $R_\nu = 1$, synonyme de la persistance des structures cohérentes pour l'écoulement à viscosité constante. Le nombre de Reynolds à chaque échelle Re_r , est plus important lorsque le rapport de viscosité est élevé. Les termes de production $P_{k,r}$ et de transfert $D_{t,r}$ des incréments $\langle \Delta q \rangle^2 (0, r_y, 0 | Y = 0)$ sont également amplifiés par les variations de viscosité.

Chapitre 7

Conclusions générales et perspectives

Ces travaux, menés dans le cadre du projet ANR "MUVAR", ont pour but d'étudier numériquement l'influence des variations de viscosité dans un écoulement de couche de mélange temporelle. Plus précisément, il s'agit d'étudier l'évolution de la turbulence, depuis sa genèse, jusqu'au régime pleinement développé, dans un milieu hétérogène. Une attention particulière est portée sur la phase initiale de l'écoulement. Notre analyse est basée sur les résultats de simulations numériques directes tridimensionnelles. Cette démarche est justifiée, dans notre cas, par l'absence de modèles mathématiques pour prédire le comportement des termes supplémentaires.

Encore aujourd'hui, il existe peu de travaux dans la littérature montrant les effets de variation de viscosité sur la turbulence. Néanmoins, quelques études ont été présentées dans la première partie de ce manuscrit. Elle mettent en évidence différents rôles de la viscosité sur la dynamique de l'écoulement. Pour reproduire ces effets, nous avons, dans un premier temps, cherché les conditions initiales turbulentes adéquates. En effet, passé certains niveaux, les effets de viscosité sont complètement noyés par la diffusion turbulente de l'écoulement. Ainsi, nous avons opté pour un niveau de turbulence initial de l'ordre de 2 % par rapport à la différence de vitesse ΔU , pour toutes les simulations.

Les équations gouvernantes développées dans le contexte de fluides Newtoniens, incompressibles et à viscosité variable, ont été présentées, d'abord sous une forme générale, puis appliquées à l'écoulement de couche de mélange temporelle. Ces équations contiennent des termes supplémentaires engendrés par les gradients de viscosité. Elles sont résolues au moyen du solveur CHOC-WAVES, par l'approche temporelle en formulation faiblement compressible.

L'approximation numérique des flux convectifs a été testée suivant trois schémas : WENO standard, WENO large bande et schéma centré conservatif. Les résultats ont montré la nécessité d'utiliser le schéma WENO pour l'écoulement à viscosité variable. Malgré sa diffusion

numérique dans les régions pleinement turbulentes, le schéma WENO standard a fourni des résultats très satisfaisants, dans la phase initiale de l'écoulement. Deux modèles de viscosité de mélange ont également été testés. L'étude a montré que le modèle de Wilke, largement utilisé dans le contexte de la combustion, permet aux variations de la viscosité d'avoir des effets plus accentués, comparé à l'utilisation d'un modèle linéaire.

Dans une seconde partie, l'étude s'est intéressée aux effets de variation des viscosité pour les rapports R_ν allant de 2,5 à 18. Les résultats sont comparés à l'écoulement à $R_\nu = 1$. L'étude a montré que la viscosité agit, à la fois sur les grandes et les petites échelles de la turbulence. Ses variations provoquent l'amplification des fluctuations de vitesse, d'une part, et, d'autre part, la modification des profils de la vitesse moyenne et l'épaisseur de la couche de mélange δ_θ . Les gradients de vitesse moyenne, selon la direction inhomogène y , sont également amplifiés. Ceci a permis, en partie, l'augmentation de la production de l'énergie cinétique turbulente. Autrement dit, le caractère inflexionnel du profil de vitesse initiale, modélisé par une tangente hyperbolique, est accentué par les variations de viscosité, sans pour autant augmenter le nombre des points d'inflexion. L'équation de transport de la vitesse moyenne longitudinale a permis de mettre en évidence l'importance du terme $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y}$, dans la phase initiale. Également, l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente, a mis en évidence l'existence d'un terme de production supplémentaire, engendré par les variations de viscosité, dans la phase initiale.

Le champ de vorticité est aussi influencé par la viscosité. L'apparition des structures tourbillonnaires de Kelvin-Helmholtz est très accélérée pour les écoulements à viscosité variable. L'analyse de l'équation de transport de la vorticité moyenne transversale a montré une diffusion de la vorticité du coté du fluide ν_g vers le fluide ν_p , assurée par le terme supplémentaire $-\frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \right\rangle$ (somme sur le double indice j). Ce terme contribue à augmenter la valeur moyenne de la vorticité du coté du fluide ν_p . L'amplification de l'enstrophie est également observée pour les écoulements à viscosité variable. Outre les termes classiques, la production de l'enstrophie est accentuée par la présence de termes supplémentaires, durant la phase initiale.

De même, l'épaisseur du champ de fraction massique du mélange δ_ν (scalaire actif), des différents écoulements à viscosité variable $R_\nu \in [2, 5 - 18]$, évolue beaucoup plus rapidement que celle du champ de température δ_T (scalaire passif) de l'écoulement à viscosité constante. Lorsqu'elles sont adimensionnées par la valeur instantanée δ_θ , les épaisseurs $\delta_\nu (R_\nu > 1)$ atteignent des valeurs asymptotiques, bien plus rapidement que δ_T . La production des fluctuations du scalaire actif est bien plus intense que celle du scalaire passif, malgré l'absence de termes supplémentaires dans l'équation de transport de ces grandeurs.

Les fluctuations de vitesse sont analysées à chaque échelle par les fonctions de structures d'ordre deux. L'étude révèle que le niveau énergétique des écoulements à viscosité variable est plus important que celui à viscosité constante, pour les grandes et pour les petites échelles, durant l'intervalle $\tau \in [0 - 200]$.

L'influence du nombre de Reynolds initial est également abordée. Pour ce faire, le rapport de viscosité R_ν est fixé à 9, et nous avons construit différents nombres de Reynolds initiaux $Re_{\theta,0}$, $Re_{g,0}$, $Re_{p,0}$ et $Re_{gp,0}$. Le nombre de Reynolds $Re_{p,0}$, est fixé à zero. Les résultats montrent qu'à faible nombre de Reynolds, les gradients de viscosité présentent une influence plus importante dans la phase initiale. En particulier, les profils de vitesse moyenne et ses gradients sont très dissymétriques. Les fluctuations de vitesse sont plus importantes que le cas à viscosité constante. Néanmoins, vers les temps longs, la turbulence est très ralentie par l'apport en fluide visqueux, au sein de la zone de cisaillement. Les effets de diffusion moléculaire prennent davantage d'importance. À contrario, pour les grands nombres de Reynolds et pour le rapport $R_\nu = 9$, la turbulence est accélérée tout au long de son évolution.

En se basant sur les résultats de la présente étude, d'autres investigations peuvent être envisagées pour la suite de ce travail.

- Dans un premier temps, l'étude des effets combinés, de variations de viscosité et de masse volumique, représentant les écoulements réels, devrait être abordée par l'approche temporelle. De nombreux efforts analytiques doivent être fournis en utilisant la moyenne de Favre. L'effet de compressibilité peut également être inclus. En effet, la baisse des niveaux de turbulence, observé généralement, à hauts nombres de Mach, combinée à l'accélération de la turbulence par les variations de viscosité, serait un cas intéressant à examiner.
- Dans un second temps, l'approche spatio-temporelle de la couche de mélange doit être réalisée, pour une confrontation plus réaliste, avec les résultats des études expérimentales. Ceci permettra, entre autres, de quantifier les effets des configurations co- et contre-gradient. Les différents cas d'étude réalisés dans l'approche temporelle, devraient faciliter la compréhension et la mise en équation de l'approche spatio-temporel.

Liste des figures

1.1	Couche de mélange de Brown et Roshko[3], les lignes montrent la méthode de détermination de l'épaisseur visuelle δ_{viz}	6
1.2	Configuration des couches de mélange spatiale et temporelle, d'après [4].	7
1.3	Influence du rapport de masse volumique sur l'expansion de la couche de mélange, d'après Brown et Roshko [3].	8
1.4	Représentation schématique du point de stagnation entre deux structures cohérentes successives, d'après [13]. Les notations U_1 et U_2 représentent respectivement les vitesses U_g et U_p , la vitesse U_c est la vitesse convective des structures cohérentes.	10
1.5	Évolution du taux d'évasement de la couche de ménage compressible adimensionné par son équivalent incompressible en fonction du nombre de Mach convectif M_c , d'après [14].	11
1.6	(a) Mélange turbulent classique à viscosité constante, $R_\nu = 1$ formé entre le fluide injecté (solution de K_2CO_3) et le fluide environnant (solution de K_2CO_3). (b) Mélange à viscosité variable, $R_\nu = 400$ formé entre le fluide injecté (glycérine pure) et le fluide environnant (solution de K_2CO_3), d'après [29].	13
1.7	Extraits de signaux temporels de vitesse spatiale fluctuante $u(x)$ de mesure par anémométrie à fil chaud : a) dans le jet d'air se déchargeant dans l'air pur et b) dans le jet de propane se déchargeant dans un mélange oxydant constitué de (30% air et 70% néon), le long de l'axe longitudinal où le nombre de Reynolds local vaut $R_\lambda = 60$ pour les deux situations, d'après Talbot [30].	15
1.8	Évolution des pics d'intensités turbulentes de la vitesse longitudinale $\langle u^2 \rangle^{1/2} / U_c$ le long de l'axe des jets de propane et d'air (Mo=360), d'après [30].	16
1.9	Configurations des écoulements étudiés par [33].	18

1.10	Diagramme de stabilité montrant les régions d'instabilités convective et absolue dans le plan nombre de Reynolds (Re) et rapport de viscosité (m) pour différents nombres de Schmidt, d'après [33].	18
1.11	Effet du rapport de viscosité sur l'évolution spatiotemporelle de la fraction de mélange, tiré de [33].	19
1.12	Représentation qualitative des états stables et instables de l'écoulement triple-couches en fonction du nombre de Reynolds (Re), nombre de Schmidt (Sc) et du rapport de viscosité (m), d'après de [44].	21
2.1	Représentation schématiques des différents vecteurs position.	32
3.1	Les quatre stencils de reconstruction des flux dans le cas du schéma WENO du 5ème ordre à large bande.	54
4.1	Domaine de calcul de l'écoulement de couche de mélange temporelle.	66
4.2	Évolution temporelle de l'épaisseur $\delta_\theta/\delta_{\theta,0}$ et l'énergie cinétique de turbulence $\langle q^2 \rangle$ pour un rapport de viscosité $R_\nu = 9$. Les rapports de vitesse R_u sont 41 et 11 pour les simulations DNS-R9-Ru41 et DNS-R9, respectivement.	68
4.3	Évolution temporelle de l'épaisseur $\delta_\theta/\delta_{\theta,0}$ et l'énergie cinétique de turbulence $\langle q^2 \rangle$ pour un rapport de viscosité $R_\nu = 1$. Les valeurs de viscosité cinématique sont ν_g et ν_{ref} pour les simulations DNS-R1-M et DNS-R1), respectivement.	69
4.4	Évolution temporelle des coefficients d'autocorrélation $R_{u_i u_i}(r)/R_{u_i u_i}(0)$, le long de des directions homogènes x et z pour différents rapports de viscosité R_ν	73
4.5	Vue du maillage utilisé pour les différents calculs de couche de mélange. Il est resserré dans la zone centrale du domaine de calcul afin de mieux capturer la dynamique de l'écoulement.	75
4.6	Effet du maillage sur l'évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$	76
4.7	Effet du maillage sur l'évolution temporelle de l'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$	76
4.8	Effet du maillage sur l'évolution temporelle du taux de dissipation moyen de l'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$	77
4.9	Effet du maillage sur l'évolution spatiale de de la viscosité moyenne adimensionnelle le long de la direction inhomogène y à $\tau = 200$ pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$	77

4.10	Effet du maillage sur l'évolution temporelle de la production de l'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$	78
4.11	Comparaison des composantes du tenseur de Reynolds, $R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$ avec les études de Bell et Metha,[67], Pantano et Sarkar [7], Spencer et Jones [69] et Rogers et Moser[70]	80
4.12	Visualisation tridimensionnelle de l'écoulement de couche de mélange temporelle au moyen des iso-surfaces $\Lambda = 0.3$. À gauche ; DNS-R1, à droite ; DNS-R9. De haut en bas $\tau = 100, 200$ et 400	81
4.13	Visualisation dans le plan xy de l'écoulement de couche de mélange temporelle au moyen des iso-surfaces $\Lambda = 0.3$. À gauche ; DNS-R1, à droite ; DNS-R9. De haut en bas $\tau = 100, 200$ et 400	82
4.14	Évolution temporelle du taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique turbulente pour l'écoulement à viscosité constante, employant le schéma WENO standard (DNS-R1) et le schéma centré conservatif (DNS-R1-Centré).	83
4.15	Évolution temporelle du tau moyen de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement à viscosité variable, employant le schéma WENO standard (DNS-R9) et le schéma WENO large bande (DNS-R9-LB).	84
4.16	Évolution temporelle de l'énergie cinétique de turbulence et de l'épaisseur δ_θ pour l'écoulement à viscosité variable, employant le schéma WENO standard (DNS-R9) et le schéma WENO à large bande (DNS-R9-LB).	85
4.17	Évaluation du bilan d'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement à viscosité variable, employant le schéma WENO standard (DNS-R9) et le schéma WENO large band (DNS-R9-LB), à $\tau = 100$	86
4.18	Évolution de l'enstrophie $(\langle \omega_x'^2 \rangle + \langle \omega_y'^2 \rangle + \langle \omega_z'^2 \rangle)$ pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$ le long de la direction inhomogène y pour les deux schémas WENO standard et large bande au temps $\tau = 40$ et 100	87
4.19	Évolution de la viscosité dynamique de mélange d'un mélange gazeux binaire en fonction de la fraction massique des espèces chimiques pour l'écoulement à viscosité variable DNS-R9.	88
4.20	Évolution du gradient de viscosité $\frac{\mu(A)-\mu(B)}{\Delta y}$ (Pa.s) entre les points A et B, distants d'une longueur $\Delta y = 1\mu m$ en fonction de la fraction massique du fluide visqueux en ces points. Les valeurs de viscosité dynamique sont celles de l'écoulement DNS-R9.	89
4.21	Évolution de l'enstrophie le long de la direction inhomogène y pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$ au temps $\tau = 40$	90

4.22	Évaluation du bilan d'énstrophie sur l'évolution temporelle de la production de l'énergie cinétique de turbulence pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$.	91
4.23	Évolution de l'énergie cinétique de turbulence le long de la direction inhomogène y pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$ au temps $\tau = 40$.	92
4.24	Évaluation du bilan de l'énergie cinétique de turbulence le long de la direction inhomogène y pour l'écoulement à viscosité variable (a) DNS-R9-L et (b) DNS-R9 au temps $\tau = 40$.	92
4.25	Évolution du gradient de viscosité dynamique moyenne le long de la direction inhomogène y pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$ au temps $\tau = 40$.	93
4.26	Évolution de la vitesse moyenne le long de la direction inhomogène y pour l'écoulement à viscosité variable $R_\nu = 9$ au temps $\tau = 40$.	93
4.27	Évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement pour les situations co-courant (DNS-R9) et contre-courant (DNS-R9-CC) de la couche de mélange à viscosité variable, $R_\nu = 9$.	95
4.28	Évolution temporelle de l'épaisseur de l'énergie cinétique de turbulence pour les situations co-courant et contre-courant de la couche de mélange à viscosité variable, $R_\nu = 9$.	95
4.29	Évolution temporelle du taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence pour les situations co-courant (DNS-R9) et contre-courant (DNS-R9-CC) de la couche de mélange à viscosité variable, $R_\nu = 9$.	96
4.30	Évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement (haut) et du taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence (bas) pour les situations co-courant et contre-courant de la couche de mélange à viscosité variable, $R_\nu = 9$.	96
4.31	Évolution temporelle de (a) l'épaisseur de quantité de mouvement (b) le taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence (c) l'énergie cinétique de turbulence pour les situations DNS-R9 et DNS-R9-TH	98
4.32	Évaluation de l'équation de transport de la vitesse moyenne à $\tau = 40$ pour les situations (a) DNS-R9-TH et (b) DNS-R9.	99
4.33	Évolution temporelle des termes visqueux du bilan de l'énergie cinétique de turbulence adimensionnés par $(\delta_{\theta,0}/\Delta U^3)$ pour les situations DNS-R9-TH et DNS-R9.	100
5.1	Évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement pour différents rapports de viscosité R_ν .	105

5.2	Évolution temporelle de l'écart relatif de l'épaisseur de quantité de mouvement pour différents rapports de viscosité R_ν	105
5.3	Évolution temporelle de l'écart relatif de l'épaisseur de quantité de mouvement pour différents rapports de viscosité R_ν	106
5.4	Évolution temporelle de l'épaisseur de quantité de mouvement pour différents rapports de viscosité R_ν , ces courbes montrent l'effet du nombre de Reynolds initial sur l'évolution de la couche de mélange à viscosité variable.	107
5.5	Évolution temporelle de l'écart relatif de l'épaisseur de quantité de mouvement pour différents rapports de viscosité R_ν	108
5.6	Profil de la vitesse moyenne longitudinale tracé le long de la direction inhomogène y pour différents rapports de viscosité R_ν aux temps $\tau = 40$ et 100	109
5.7	Profil du gradient de la vitesse moyenne longitudinale $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ tracé le long de la direction inhomogène y pour différents rapports de viscosité R_ν , aux temps $\tau = 40$ et 100	110
5.8	Effet du nombre de Reynolds initial sur le profil de la vitesse moyenne longitudinale tracé le long de la direction inhomogène y pour les rapports de viscosité R_ν 9 et 1 aux temps $\tau = 40$ et 100	111
5.9	Effet du nombre de Reynolds initial sur le profil du gradient de la vitesse moyenne longitudinale tracé le long de la direction inhomogène y pour les rapports de viscosité R_ν 9 et 1 aux temps $\tau = 40$ et 100	112
5.10	Évaluation de l'équation de transport de $\langle U \rangle$ (expression 5.3) pour les rapports de viscosité $R_\nu = 1$ et 9 à $\tau = 40$	114
5.11	Évaluation de l'équation de transport de $\langle U \rangle$ (expression 5.3) pour un rapport de viscosité $R_\nu = 9$ à $\tau = 40$	117
5.12	Évaluation de l'équation de transport de $\langle U \rangle$ (expression 5.3) pour les rapports de viscosité $R_\nu = 1$ et 9 à $\tau = 40$	118
5.13	Effet du nombre initial sur l'évaluation de l'équation de transport de $\langle U \rangle$ (expression 5.3) pour un rapports de viscosité $R_\nu = 9$ à $\tau = 100$	119
5.14	Profil de la vitesse moyenne longitudinale tracé le long de la direction inhomogène y pour différents rapports de viscosité R_ν au temps long $\tau = 400$	120
5.15	Profil de la verticité moyenne transversale en fonction de la direction inhomogène y pour différents rapports de viscosité R_ν aux temps $\tau = 40$ et 100	121

5.16	Effet du nombre de Reynolds initial sur le profil de la vorticité moyenne transversale pour les cas DNS-R1-U0-80, DNS-R9-U0-320 et DNS-R9-U0-80, aux temps $\tau = 40$ et 100	122
5.17	évaluation de l'équation de transport de $\langle \omega_z \rangle$ (expression 5.4) pour deux rapports de viscosité R_ν à $\tau = 40$	124
5.18	évolution du champ de vorticité instantanée ω_z adimensionnée par $(\delta_\theta/\Delta U)^2$ dans le plan xy ($z = 0$), pour DNS-R9 et DNS-R1, dans l'intervalle $\tau \in [20 - 100]$. Pour mieux visualiser les structures de l'écoulement, le domaine de calcul est tronqué dans la direction longitudinale.	125
5.19	évolution du terme de stretching de la vorticité transversale $\langle \omega_z \rangle$ pour deux rapports de viscosité $R_\nu = 1$ et 9 à $\tau = 40$	126
5.20	évolution du terme de diffusion moléculaire de la vorticité transversale $\langle \omega_z \rangle$ pour deux rapports de viscosité $R_\nu = 1$ et 9 à $\tau = 40$	127
5.21	évaluation de l'équation de transport de $\langle \omega_z \rangle$ (expression 5.4) pour deux rapports de viscosité R_ν à $\tau = 100$	128
5.22	évaluation de l'équation de transport de $\langle \omega_z \rangle$ (expression 5.4) pour le rapport de viscosité $R_\nu = 9$, à $\tau = 40$	129
5.23	évolution temporelle de l'épaisseur thermique de l'écoulement à viscosité constante, $\delta_T - \delta_{T,0}$, et l'épaisseur visqueuse, $\delta_\nu - \delta_{\nu,0}$, des écoulements à viscosité variable, adimensionnées par les épaisseurs de quantité de mouvement $\delta_{\theta,0}$ et $\delta_\theta(\tau)$	131
5.24	évolution du champ scalaire instantanée, $T^* = \frac{T-T_p}{\Delta T}$ et Y_1 dans le plan xy ($z = 0$), pour DNS-R1 et DNS-R9, respectivement. L'intervalle de temps est $\tau \in [20 - 100]$. Pour mieux visualiser les structures de l'écoulement, le domaine de calcul est tronqué dans la direction longitudinale.	132
5.25	évaluation du profil de la température moyenne $\frac{\langle T \rangle - T_p}{\Delta T}$ (courbe noire) ainsi que du profil de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ (courbe rouge) � $\tau = 40$ et 100	134
5.26	évolution temporelle de l'épaisseur thermique de l'écoulement à viscosité constante, $\delta_T - \delta_{T,0}$, et l'épaisseur visqueuse, $\delta_\nu - \delta_{\nu,0}$, des écoulements à viscosité variable, adimensionnées par les épaisseurs de quantité de mouvement $\delta_{\theta,0}$ et $\delta_\theta(\tau)$	135
5.27	évolution du champ de scalaire instantanée Y_1 dans le plan xy ($z = 0$), pour DNS-R9-U0-80 et DNS-R9-U0-320. L'intervalle de temps est $\tau \in [20 - 100]$. Pour mieux visualiser les structures de l'écoulement, le domaine de calcul est tronqué dans la direction longitudinale.	136

5.28	Évaluation du profil de la température moyenne $\frac{\langle T \rangle - T_p}{\Delta T}$ (courbe noire) ainsi que du profil de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ (courbe rouge) à $\tau = 40$ et 100.	137
5.29	Évaluation de l'équation de transport de la température moyenne $\langle T^* \rangle$ (expression 5.7) et de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ (expression 5.8), à $\tau = 40$	139
5.30	Évaluation de l'équation de transport de la température moyenne $\langle T^* \rangle$ (expression 5.7) et de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ (expression 5.8), à $\tau = 100$	141
5.31	Évaluation de l'équation de transport la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ (expression 5.8) de l'écoulement à viscosité variable, $R_\nu = 9$, pour $Re_{\theta,0} = 128$ et $Re_{\theta,0} = 32$, à $\tau = 40$	142
5.32	Évaluation de l'équation de transport de (a) la température moyenne $\langle T^* \rangle$ et de la fraction massique moyenne $\langle Y_1 \rangle$ de l'écoulement à viscosité variable, $R_\nu = 9$, pour (b) $Re_{\theta,0} = 128$ et (c) $Re_{\theta,0} = 32$, à $\tau = 100$	143
6.1	Configs	147
6.2	Profils spatiaux des intensités de turbulence le long de la direction inhomogène y pour différents rapports de viscosité R_ν au temps $\tau = 100$	148
6.3	Évolution temporelle des écarts relatifs des trois composantes de vitesse fluctuantes, selon 6.1.	150
6.4	Configs	152
6.5	Effet du nombre de Reynolds initial sur l'évolution temporelle du terme de production de l'énergie cinétique de turbulence $P_k = \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ adimensionné par $\delta_{\theta,0}$ et ΔU^3	153
6.6	Évolution temporelle du rapport entre les fluctuations de vitesse de l'écoulement à viscosité variable et à l'écoulement à viscosité constante pour les comparaisons <i>Comp.80</i> et <i>Comp320</i>	154
6.7	Visualisation tridimensionnelle de l'écoulement de couche de mélange temporelle, $R_\nu = 9$, au moyen des iso-surfaces $\Lambda = 0.3$, pour deux nombres de Reynolds $Re_{g,0}$. Les structures turbulentes sont colorées par l'énergie cinétique de turbulence $q_2 = \frac{1}{2}u_i'^2$	155
6.8	Triangle de Lumley d'après [84]	157
6.9	Anisotropie du tenseur de Reynolds pour différents cas d'écoulements.	157

6.10	Autosimilarité des profils de $\langle U \rangle$ pour différents cas d'écoulements.	159
6.11	Autosimilarité des profils de $\langle u'u' \rangle$ pour différents cas d'écoulements.	160
6.12	Autosimilarité des profils $\langle v'v' \rangle$ pour différents cas d'écoulements.	161
6.13	Autosimilarité des profils $\langle w'w' \rangle$ pour différents cas d'écoulements.	162
6.14	Autosimilarité des profils $\langle u'v' \rangle$ pour différents cas d'écoulements.	163
6.15	Évolution temporelle de $\frac{1}{\Delta U} \frac{d\delta_\theta}{dt}$ pour différentes valeurs de R_ν	164
6.16	Autosimilarité des profils de vitesse moyenne de l'écoulement DNS-R9 dans l'intervalle $\tau \in [640 - 700]$	165
6.17	Autosimilarité des profils des vitesses fluctuantes de l'écoulement DNS-R9 dans l'intervalle $\tau \in [640 - 700]$	166
6.18	Coefficient de corrélation des grandeurs fluctuantes C_{ij}^v et C_{VP}^v pour différents cas d'écoulements.	167
6.19	Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse longitudinale $\langle \frac{u'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 40$	169
6.20	Évolution des fluctuations de pression, $\sqrt{\langle p'^2 \rangle}$ adimensionnées par $(\rho \Delta U^2)$, le long de la direction inhomogène y à $\tau = 40$	171
6.21	Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse longitudinale $\langle \frac{u'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 100$	172
6.22	Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse normale $\langle \frac{v'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 40$	173
6.23	Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse normale $\langle \frac{v'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 100$	174
6.24	Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse transversale $\langle \frac{w'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 40$	175
6.25	Évaluation de l'équation de transport des fluctuations de la vitesse transversale $\langle \frac{w'^2}{2} \rangle$ à $\tau = 100$	176
6.26	Évaluation du bilan de l'énergie cinétique de turbulence à $\tau = 40$ pour les valeurs $R_\nu = 1$ et 9	177
6.27	Évaluation du bilan de l'énergie cinétique de turbulence à $\tau = 100$ pour les valeurs $R_\nu = 1$ et 9	178

6.28	Évolution temporelle des valeurs maximales du gradient de vitesse $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ adimensionné par sa valeur initiale pour différents rapports de viscosité R_ν	179
6.29	Évolution temporelle des énergies cinétiques de l'écoulement de couche de mélange pour différentes valeurs de R_ν	180
6.30	Évaluation des profils de l'enstrophie $\frac{1}{2} (\langle \omega_x'^2 \rangle + \langle \omega_y'^2 \rangle + \langle \omega_z'^2 \rangle)$ adimensionnée par ΔU et $\delta_{\theta,0}$, pour différents rapports de viscosité R_ν et de temps τ	181
6.31	Évolution des valeurs maximales des composantes d'enstrophie en fonction du rapport de viscosité R_ν pour différentes valeur de τ	182
6.32	Évolution des valeurs maximales des composantes d'énergie cinétique de turbulence en fonction du rapport de viscosité R_ν pour différentes valeurs de τ	183
6.33	Autosimilarité des profils d'enstrophie de l'écoulement DNS-R9 dans l'intervalle $\tau \in [640 - 700]$	184
6.34	Évaluation de l'équation de transport de l'enstrophie à $\tau = 40$ pour les deux cas ; à viscosité constante et à viscosité variable.	185
6.35	Évolution temporelle des fluctuations de de température, $\sqrt{\langle T^{*2} \rangle}$, de l'écoulement à viscosité constante ($R_\nu = 1$) et des fractions massiques de mélange, $\sqrt{\langle Y_1'^2 \rangle}$, des écoulements à viscosité variable ($R_\nu = 18, 9, 4$ et $2,5$).	186
6.36	Autosimilarité des profils du champ scalaire actif fluctuant de l'écoulement DNS-R9 dans l'intervalle $\tau \in [640 - 700]$	188
6.37	Évaluation au temps $\tau = 40$ des équations de transport du champ scalaire passif et actif des écoulements DNS-R1 et DNS-R9, respectivement. Les équations 6.20 et 6.21 sont adimensionnées par $\delta_{\theta,0}$ et le profil instantané de la viscosité cinématique moyenne $\langle \nu \rangle$	189
6.38	Évaluation au centre de la couche de mélange, $y = 0$, des fonctions de structures de la vitesse longitudinale pour différents rapports de viscosité R_ν et différentes valeurs de τ . Le vecteur séparation est parallèle à la direction longitudinale ; \vec{r}'/\vec{x}	190
6.39	Évaluation au centre de la couche de mélange, $y = 0$, des fonctions de structures de la vitesse normale pour différents rapports de viscosité R_ν et de temps τ . Le vecteur séparation est parallèle à la direction longitudinale ; \vec{r}'/\vec{x}	191
6.40	Évaluation au centre de la couche de mélange, $y = 0$, des fonctions de structures de la vitesse transversale pour différents rapports de viscosité R_ν et différentes valeurs de τ . Le vecteur séparation est parallèle à la direction longitudinale ; \vec{r}'/\vec{x}	192

6.41	Évolution du nombre de Reynolds Re_r en fonction de l'échelle r , pour $R_\nu = 1$ et 9 , à différents τ . La fonction de structure $\langle \Delta q^2 \rangle$ est évaluée au centre de la couche de mélange, $y = 0$. Le vecteur de séparation \vec{r} est parallèle à la direction longitudinale de l'écoulement, $\vec{r} // \vec{x}$	193
6.42	Évaluation de l'équation d'énergie cinétique de turbulence en chaque échelle pour l'écoulement à viscosité constante au temps $\tau = 100$	195
6.43	Évaluation au centre de la couche de mélange, $Y = 0$, de $P_{k,r}$ pour différents rapports de viscosité R_ν et différentes valeurs de τ . Le vecteur de séparation \vec{r} est parallèle à la direction normale de l'écoulement, $\vec{r} // \vec{y}$	196
6.44	Évaluation au centre de la couche de mélange, $Y = 0$, de $D_{t,r}$ pour différents rapports de viscosité R_ν et différentes valeurs de τ . Le vecteur de séparation \vec{r} est parallèle à la direction normale de l'écoulement, $\vec{r} // \vec{y}$	197

Liste des tableaux

3.1	Coefficients des schémas centrés du 2 ^{ème} , 4 ^{ème} , 6 ^{ème} et 8 ^{ème} ordre.	58
4.1	Paramètres des différents principaux cas-tests. La masse volumique $\rho = 1.32$ est commune à toutes les simulations du présent tableau, $\mu_g = \rho\nu_g$, $\mu_p = \rho\nu_p$ et $\mu_{ref} = \rho\nu_{ref}$	70
4.2	Valeurs du nombre de Reynolds $Re_{g,0}$, $Re_{p,0}$ et $Re_{\theta,0}$ pour différentes simulations	71
4.3	Paramètres des différents principaux cas-tests. La masse volumique $\rho = 1.32$ $kg.m^{-3}$ est commune à toutes les simulations du présent tableau, $\mu_g = \rho\nu_g$, $\mu_p = \rho\nu_p$ et $\mu_{ref} = \rho\nu_{ref}$	72
4.4	Taille de grille utilisée	75
4.5	Comparaison des pics d'intensité turbulente dans la région pleinement développée de la couche de mélange.	79
4.6	Paramètres principaux des simulations à viscosité constante; DNS-R1, DNS-R1-Centré et celles à viscosité variable; DNS-R9 et DNS-R9-LB	83
4.7	Paramètres principaux des simulations DNS-R9 et DNS-R9-L. $\delta_{\theta,0}$ et $\delta_{\nu,0}$ représentent l'épaisseur intégrale du champ de vitesse et du champ scalaire, respectivement.	90
4.8	Paramètres principaux des simulations DNS-R9 et DNS-R9-TH	94
4.9	Paramètres principaux des simulations DNS-R9, DNS-R9-TH et DNS-R1	97
5.1	Paramètres des différentes simulations présentées dans la figure 5.1. La masse volumique $\rho = 1.32$ $kg.m^{-3}$ est commune à toutes les simulations du présent tableau, $\mu_g = \rho\nu_g$, $\mu_p = \rho\nu_p$ et $\mu_{ref} = \rho\nu_{ref}$	104
5.2	Paramètres des différents principaux cas-tests. La masse volumique $\rho = 1.32$ $kg.m^{-3}$ est commune à toutes les simulations du présent tableau, $\mu_g = \rho\nu_g$, $\mu_p = \rho\nu_p$ et $\mu_{ref} = \rho\nu_{ref}$	107

5.3	Valeurs du nombre de Schmidt pour différentes simulations. $\mathcal{D} \approx 0,76 \mu m^2 s^{-1}$	138
6.1	Nombres de Reynolds initiaux de quelques cas-tests.	151

Annexe A

Annexe

A.1 Article publié dans *Journal of Physics*

Effects of viscosity variations in temporal mixing layer

N Taguelmimt¹, L Danaila^{1,2} and A Hadjadj¹

¹ CORIA-UMR 6614- Normandie Université CNRS-Université et INSA de Rouen
Campus Universitaire du Madrillet 76800 Saint Etienne du Rouvray, France.

Abstract. The objective of the present investigation is to assess the effects of viscosity variations in low-speed temporally-evolving turbulent mixing layer. Direct Numerical Simulations (DNS) are performed for several viscosity ratios, $R_v = \nu_{\text{high}}/\nu_{\text{low}}$, varying between 1 and 9, whereas the upper and lower streams are of equal density. The space-time evolution of Variable-Viscosity Flow (VVF) is compared with the Constant-Viscosity Flow (CVF), for which $R_v = 1$. The initial Reynolds number, based on the initial momentum thickness, $\delta_{\theta,0}$, is $Re_{\delta_{\theta,0}} = 160$ for the considered cases. The study focuses on the first stages of the temporal evolution of the mixing-layer. It is shown that in VVF (with respect to CVF): (i) the birth of turbulent fluctuations is accelerated; (ii) large-scale quantities, i.e. mean longitudinal velocity and momentum thickness, are affected by the viscosity variations, thus dispelling the myth that viscosity is a ‘small-scale quantity that does not affect the large scales’; (iii) the velocity fluctuations are enhanced for VVF. In particular, the turbulent kinetic energy peaks earlier and is three times larger for VVF than CVF at the earliest stage of the mixing, and (iv) the transport equation for the turbulent kinetic energy is derived and favourably compared with simulations data.

1. Introduction

Most of the available turbulence theories (Kolmogorov, 1941) are underpinned by assumptions involving a single value of the kinematic viscosity. Moreover, the effect of viscosity is a priori expected to be felt only at small scales.

However, turbulence mostly occurs in heterogeneous fluids or multicomponent mixtures, therefore involving fluids with various viscosities. In such flows, strong viscosity gradients may exist at all scales, thereby modifying the mean velocity profiles. To examine the effects of viscosity variations on the mixing efficiency, Talbot et al. [1] have conducted an experimental study of a propane jet issuing into air; the latter is 3,5 more viscous than the air, whereas the densities are almost the same. These authors found that, in comparison with a classical air/air jet, the propane jet exhibits an accelerated decrease of the mean axial velocity. This behaviour was explained analytically by an increase of the magnitude of the viscous terms with respect to the inertial terms. Strong production of turbulent fluctuations was also observed in the very near-field of the propane jet, thus enhancing mixing, producing lateral fluctuations and accelerating the trend towards self-similarity and isotropy.

The objective of the present investigation is to assess the effects of viscosity variations in a canonical flow, the low-speed temporally-evolving turbulent mixing layer. For the particular purpose of our study, the temporal mixing layer (hereafter TML) involves two fluids with the same density. TML belongs to the family of turbulent shear layers, which have been studied since the pioneering work of Brown and Roshko [2], followed by a web of investigations of this configuration devoted to different issues, such as transition to turbulence, mixing efficiency, compressibility effects [3, 4, 5, 6], variable density effects [1, 7, 8]. The effect of the trailing edge thickness of the splitter plate was also investigated in detail [9, 10], as well as e.g. sound generation [11].

² Corresponding author : danaila@coria.fr



The paper is published in the *Journal of Physics: Conference Series*, 530 (2014) 042057. doi:10.1088/1742-6596/530/4/042057
 and the associated solver. Section 3 examines the one-point statistics (instantaneous fields, mean values of the longitudinal velocity, as well as the turbulent kinetic energy budget).

2. Mathematical formulation and numerical method

2.1. Governing equations and numerical schemes

The unsteady three-dimensional, incompressible Navier-Stokes equations, with two-species transport equations are solved using an inhouse high-order explicit solver (see [12] for more details about the numerical methodology). The convective terms are approximated by the fifth-order weighted, essentially non-oscillatory (WENO) schemes, while the diffusive terms are determined using fourth-order compact central difference. The discrete equations are time-integrated by means of an explicit, third order, Rung-Kutta scheme. The Wilke formula [13], which is widely used in combustion and chemical engineering applications, is employed to determine the mixture-viscosity coefficient in terms of mass fraction, namely $\mu = \sum_{k=1}^2 \left[\mu_k \left(\frac{Y_k}{W_k} \right) \left(\sum_{l=1}^2 Y_l \phi_{kl} / W_l \right)^{-1} \right]$ where μ_k and W_k are the viscosity and the molecular mass of the k-th species and the function ϕ_{kl} is defined as $\phi_{kl} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{W_k}{W_l} \right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_k}{\mu_l} \right)^{1/2} \left(\frac{W_l}{W_k} \right)^{1/2} \right]$.

Periodic boundary conditions are applied along the streamwise x and the spanwise z directions and a non-reflecting slip condition is imposed along the cross-stream y direction.

2.2. Initial conditions

A sketch of the simulated TML is shown in figure 1. A velocity-viscosity counter gradient is imposed; the upper stream is initialized with a low velocity, U_{low} , and a high kinematic viscosity, ν_{high} , while the lower stream is initialized with a high velocity, U_{high} , and a low kinematic viscosity, ν_{low} . The upper stream (U_{low}, ν_{high}) and the lower stream (U_{high}, ν_{low}) meet together and evolve in time. The reference velocity is $\Delta U = U_{high} - U_{low}$ and the reference viscosity is $\nu_{ref} = 0.5(\nu_{high} + \nu_{low})$. Quantities such as $\langle U \rangle$ are averaged over homogeneous directions (x, z) for a given y, at each time t. We define the normalized time, τ , such as $\tau = \frac{t \Delta U}{\delta_{\theta,0}}$. Therefore, averages are functions of two variables: vertical position y and time t. As an example, the longitudinal mean velocity is a function of both y and τ , viz. $\langle U \rangle = f(y, \tau)$. The mean longitudinal velocity is initialized by a tangent hyperbolic profile $\langle U \rangle(y, t = 0)$, while the other mean velocity components are initially set to zero. Thus,

$$\langle U \rangle(y, t = 0) = \frac{1}{2} \left[(U_{high} + U_{low}) - \Delta U \tanh \left(\frac{y}{\delta} \right) \right]. \quad (1)$$

$$\langle V \rangle = \langle W \rangle = 0. \quad (2)$$

The two streams have the same initial pressure, $P = 1$ atm, temperature, $T = 293$ K, and density, $\rho = 1.314 \text{ kgm}^{-3}$ while the velocities and the kinematic viscosities are specified as summarized in Table 1 for all investigated mixing layers cases.

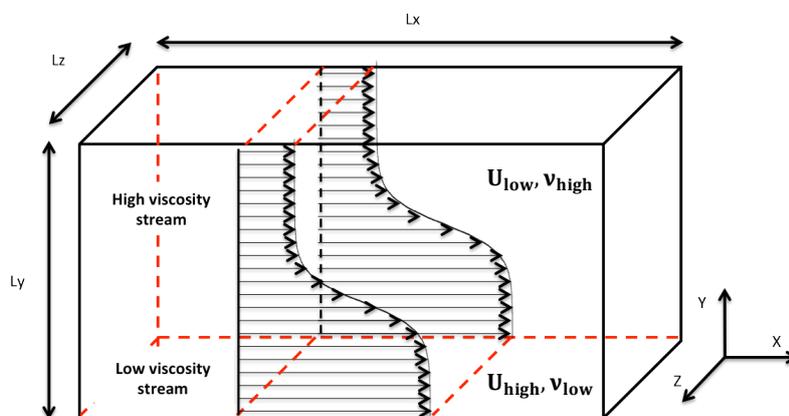


Figure 1. Computational domain. The middle of the domain is defined as $(x = 0, y = 0, z = 0)$.

To initiate turbulence, initial fluctuations are superimposed to the mean velocity field. The initial

Fluctuating Velocity: Generated using 53032014012015 filter technique [15]. The prescribed values for both Reynolds stress tensor and length scales, and generates the corresponding fluctuating velocity field at the initial time. The initial length scales along each direction are equal to $\delta_{\omega,0} = 4\delta_{\theta,0}$, the initial vorticity thickness. The initial turbulence intensity is $\left(\frac{\langle u'^2 \rangle^{0.5}}{\Delta U} = 0.020, \frac{\langle v'^2 \rangle^{0.5}}{\Delta U} = 0.013, \frac{\langle w'^2 \rangle^{0.5}}{\Delta U} = 0.012\right)$ for the considered DNS.

2.3. Simulation parameters

Five test cases are carried out as shown in table 1. The parameters of DNS-R2.5 to DNS-R9 are chosen to analyse the effects of viscosity variations on the VVF, whilst DNS-R1 provides a comparison basis in the constant viscosity flow (CVF). The viscosity ratio is $R_v = \frac{\nu_{\text{high}}}{\nu_{\text{low}}} \geq 1$. The species mixture is characterized by values for R_v of 1, 2.5, 4, 6 and 9 for DNS-R1, DNS-R2.5, DNS-R4, DNS-R6 and DNS-R9 respectively. The molecular diffusion coefficient \mathcal{D} between the two streams is kept constant for the considered cases to focus only on viscosity variations effects. The initial momentum thickness Reynolds number is $Re_{\delta_{\theta,0}} = \Delta U \delta_{\theta,0} / \nu_{\text{ref}} = 160$, the initial momentum thickness is $\delta_{\theta,0} = 18.4 \mu\text{m}$. The initial conditions are set to have the same initial Reynolds Number $Re_{\delta_{\theta,0}} = 160$ rather than the same initial free stream velocities. These velocities are determined from the initial Reynolds number as $\Delta U = \frac{Re_{\delta_{\theta,0}} \nu_{\text{ref}}}{\delta_{\theta,0}}$. Moreover, we impose that $U_{\text{high}}/U_{\text{low}} = 11$ for the test cases. For our purpose, the velocity ratio must be the same for CVF and VVF so as to assess the uniquely effect of viscosity variations. Indeed, several studies have showed that the mixing layer growth is influenced by velocity ratio.

Table 1. Parameters of DNS configuration.

Case	R_v	ν_{high} (m^2s^{-1})	ν_{low} (m^2s^{-1})	ν_{ref} (m^2s^{-1})	U_{high} (ms^{-1})	U_{low} (ms^{-1})	ΔU (ms^{-1})	$U_{\text{high}}/U_{\text{low}}$
DNS-R1	1	6.85	6.85	6.85	5.95	65.53	59.58	11
DNS-R2.5	2.5	6.85	2.74	4.78	4.17	45.87	41.70	11
DNS-R4	4	6.85	1.71	4.28	3.72	40.96	37.24	11
DNS-R6	6	6.85	1.14	3.99	3.47	38.23	34.76	11
DNS-R9	9	6.85	0.76	3.80	3.31	36.41	33.10	11

The challenge of this study is twofold. First, the grid resolution must be sufficiently high to correctly capture the dynamics of the TML from its birth to the later stages of the flow evolution.

Second, the computational domain must be wide enough to ensure the spatial development of the large-scale turbulence. The computational domain sizes, normalized by the initial momentum thickness, $\delta_{\theta,0}$, are 345, 172, 86 in x , y and z directions, respectively. The latter matches the DNS of Pantano & Sarkar [14]. The spatial resolution along the direction y is taken as $1.05 \mu\text{m}$, to ensure good discretization of the initial momentum thickness (≈ 18 points).

3. One-point statistics

In this section, we present results for one-point statistics. The morphological behavior of VVF and CVF are discussed in Subsection 3.1. The mean velocity field is analyzed in Subsection 3.2, and the turbulent kinetic budget is discussed in Subsection 3.3.

3.1. Morphology of the flow

We provide qualitative observations of the temporal evolution of the mixing layer in both CVF and VVF cases. In particular, the focus is on the way the velocity and the vorticity fluctuations are generated. Figure 2 shows the instantaneous turbulent kinetic energy $q^2 = 0.5\langle u_i u_i \rangle / \Delta U^2$ (summation applies for double indices) in the plane (x, z) , in the middle of the numerical domain ($y=0$). The maxima of energy (black surfaces) are higher for VVF than for compared to CVF. Moreover, these

Journal of Physics: Conference Series 530 (2014) 012057
 DOI:10.1088/1742-6596/530/1/012057
 velocity fluctuations are enhanced in this case. A possible scenario of the increased fluctuations for VVF is that the viscous fluid (slow fluid) acts as “spots” which decelerate the less viscous fluid (rapid fluid) leading to the creation of velocity fluctuations.

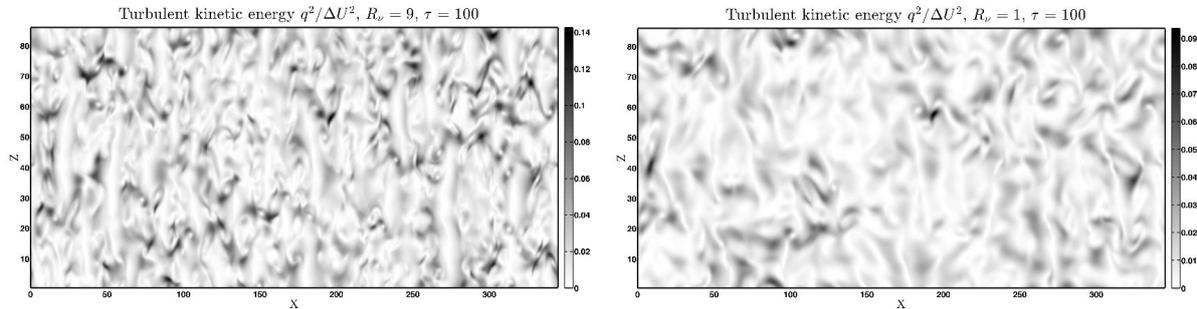


Figure 2. Middle plane ($y = 0$) spatial distribution of turbulent kinetic energy $q^2/\Delta U$ at time $\tau = 100$ for (left) $R_v = 9$ and (right) $R_v = 1$.

Figure 3 shows evidence of the modification of the vorticity field. The spanwise vorticity ω_z is modified by the viscosity variations. For VVF, the 2D rollers of Brown and Roshko are more diffused and thus destructed in the more viscous fluid. Conversely, the 2D rollers are symmetric and of higher vorticity in CVF.

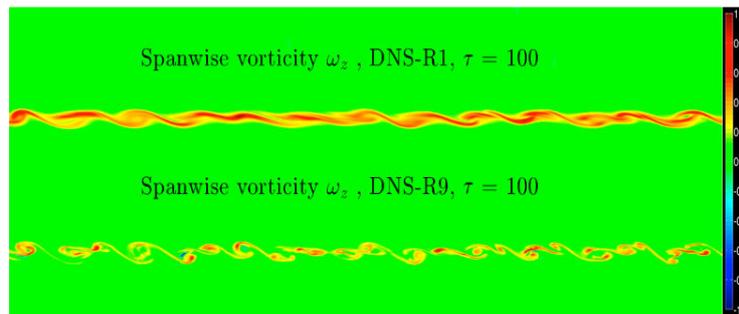


Figure 3. Middle plane ($z = 0$) spatial distribution of spanwise vorticity ω_z at time $\tau = 100$.

3.2. Effect of variable viscosity on the mixing-layer spreading and mean velocity

The growth rate of the mixing layer depends on the velocity ratio U_{high}/U_{low} as well as the density ratio ρ_{high}/ρ_{low} [4]. However, less attention was paid to the role of the viscosity variations on the temporal and spatial evolution of mixing layer thickness. The mixing layer momentum thickness is defined as

$$\delta_\theta(\tau) = \int_{-\frac{L_y}{2}}^{+\frac{L_y}{2}} \frac{[\langle U \rangle - U_{low}][U_{high} - \langle U \rangle]}{\Delta U^2} dy. \quad (3)$$

Figure 4 illustrates the TML momentum thickness for both VVF and CVF, as functions of the dimensionless time. In the early stage of the flow evolution, the TML momentum thickness is higher for VVF than for CVF. Physically, this result signifies that the VV-TML is affected to a larger extent by the same (initial) momentum. This behaviour might be the result of both

- i) an accelerated generation of momentum fluctuations, as well as
- ii) an enhanced diffusion of the momentum.

Equation (3) suggests that this behaviour is most likely attributable to differences in the mean stream-

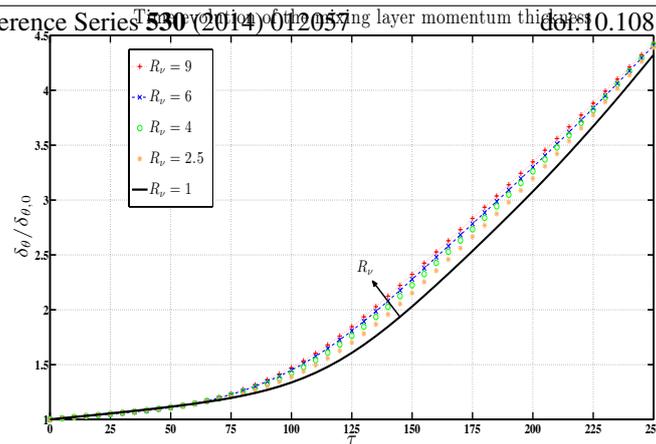


Figure 4. Temporal evolution of the TML momentum thickness, for different viscosity ratios, R_v .

wise velocity $\langle U \rangle$, all the other parameters being the same. It is then clear that the longitudinal mean velocity $\langle U \rangle$ is modified by viscosity effects. This is an a priori surprising result, which may dispel the myth that 'viscosity is a small-scale quantity with small-scale effects'. Figure 5 shows the spatial distribution along the inhomogeneous direction, y , of the mean velocity $\langle U \rangle$ and mean velocity gradient $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ profiles for different viscosity ratio at the dimensionless time $\tau = 40$. It is clear that the viscosity variations act on the mean velocity field, leading for VVF to

- i) a decrease of velocity at the centre of mixing layer at $\tau = 40$ (figure 1.a) where the viscosity gradients are important;
- ii) an increase of velocity gradient $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$ (figure 5.b); the peaks are located in the high speed stream side (less viscous).

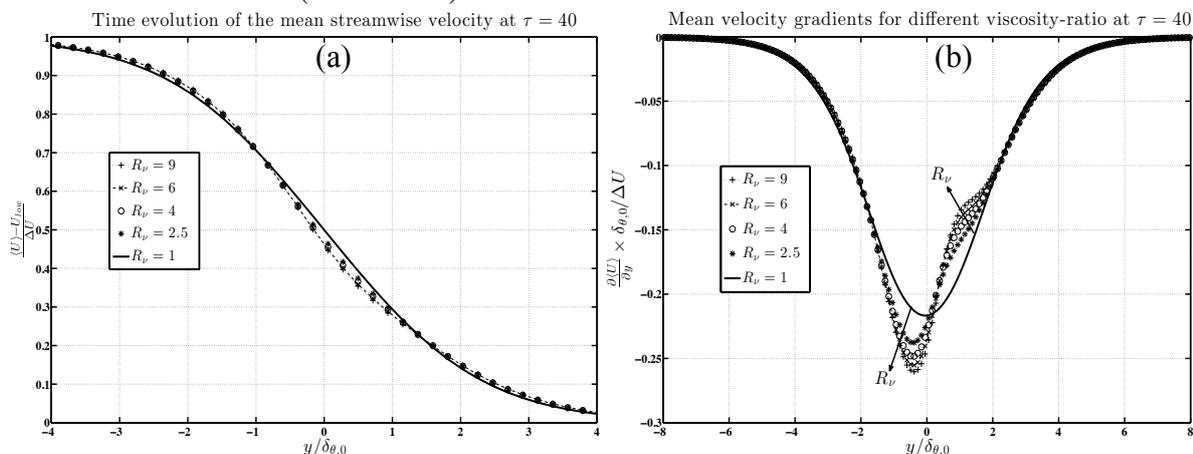


Figure 5. Spatial distribution of (a) mean dimensionless longitudinal velocity and (b) mean dimensionless longitudinal velocity gradient profiles, for different viscosity ratios R_v at $\tau = 100$.

3.3. Effect of variable viscosity on turbulent kinetic energy budget

It is found that the quantity $q^2 = 0.5(\langle u_i' u_i' \rangle) / \Delta U^2$ (summation applies for double indices) is stronger for VVF, indicating that the fluctuating velocity are increased due to the viscosity variations. However, the decay of kinetic energy is more enhanced VVF at time larger $\tau \geq 200$.

To unravel the issues associated with variations of viscosity, the one-point kinetic energy budget is derived, in its general expression, to variable viscosity flows first by Talbot and al [1]. The spatial averaging over the homogeneous directions (x and z) allows some simplifications for the particular case of TML.

The aim of this section is to provide a direct evaluation of different terms in equation (5) and to investigate the effects of viscosity variations on the classical expression of the mean energy dissipation

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + 2 \frac{\partial v}{\partial x_j} s_{ij}. \quad (4)$$

Here, double indices indicate summation and s_{ij} is the strain tensor, viz.

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right].$$

The transport equation of the turbulent kinetic energy is derived by multiplying equation (4) with the velocity fluctuations u'_i and space-averaging over the two homogeneous directions (x and z). Finally, the one-point kinetic energy budget is expressed in equation (5). Terms Tt , \mathcal{D}_T , \mathcal{P}_k and \mathcal{D}_p represent the temporal variation of the kinetic energy, the turbulent diffusion, the energy production and the pressure diffusion, respectively.

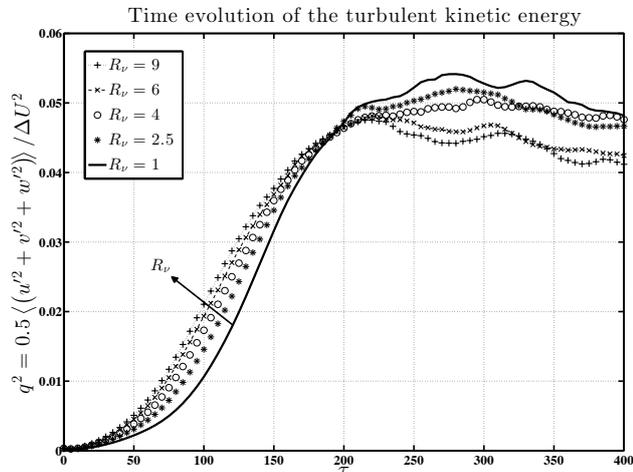


Figure 6. Temporal evolution of turbulent kinetic energy for different viscosity ratios, R_ν , at $\tau = 100$.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle u_i'^2 \rangle}{2} \right)}_{Tt} = \underbrace{-\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i'^2}{2} \right) \rangle}_{\mathcal{D}_T} - \underbrace{\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}}_{\mathcal{P}_k} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle v'p' \rangle}{\partial y}}_{\mathcal{D}_p} \quad (5.a)$$

$$+ \underbrace{\left[\left\langle \frac{\partial v}{\partial x} v' \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} u' \right\rangle \right] \cdot \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} + \langle u'v' \rangle \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial y \partial y}}_{\mathcal{P}_v} \quad (5.b)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_i} \right] \right\rangle + \frac{1}{2} \langle v \frac{\partial^2 u_i'^2}{\partial x_j^2} \rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG}} \quad (5.c)$$

$$- \underbrace{\left\langle v \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}}. \quad (5.d)$$

Terms \mathcal{P}_v (line 5.b) represent correlations between the mean velocity gradients and viscosity fluctuations. Terms $\langle \epsilon \rangle_{VG}$ regroup expressions in line (5.c), where 'VG' stands for 'Viscosity Gradients'. The last term represents the homogeneous form of $\langle \epsilon \rangle_{VV}$. Note that the viscosity is inside the brackets (spatial averages).

Different terms of equation (5) are assessed through our DNS. We now make a distinction between terms that explicitly depend on the kinematic viscosity (\mathcal{P}_v , $\langle \epsilon \rangle_{VG}$ and $\langle \epsilon \rangle_{VV}$) and terms that does not (Tt , \mathcal{D}_T , \mathcal{P}_k and \mathcal{D}_p). Figure 6 shows the one-point TKE budget for both CVF and VVF cases, plotted at time $\tau = 100$. In the caption of figure 6, 'Budget' stands as the RHS of equation (5), which collapses with the LHS for well-balanced TKE budget.

A critical comparison between the TKE budget for VVF ($R_\nu = 9$) and CVF ($R_\nu = 1$) cases is made in order to highlight the viscosity variations effect on the second-order, one-point statistics. Observations can be made on the peak of the production term \mathcal{P}_k that is higher for VVF than for CVF; turbulence production is enhanced and accelerated by viscosity variations. This peak is located within the rapid

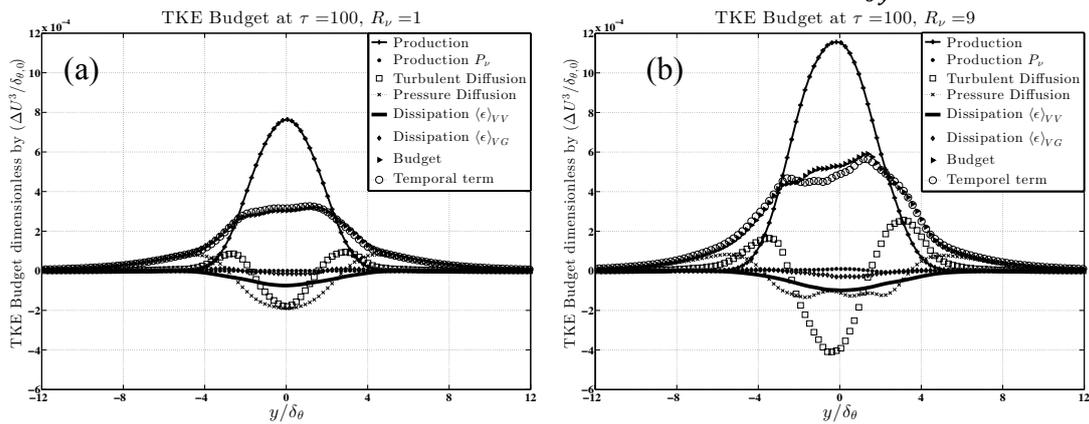


Figure 6. Turbulent kinetic energy budget for different viscosity ratios (a) $R_\nu = 1$ and (b) $R_\nu = 9$ at time $\tau = 100$.

The supplementary terms \mathcal{P}_ν and $\langle \epsilon \rangle_{VG}$, related directly to the viscosity variations, have respectively positive and negative contributions in the TKE budget at the early stages of the flow (not shown here). Their role, however, is negligible at time $\tau > 100$, as shown in figure 6 (black points and diamonds, respectively). The velocity fluctuations are stronger for VVF because their production is enhanced by the viscosity variations. It is shown in figure 6 (square symbols), that the VVF flow makes stronger turbulent diffusion (term \mathcal{D}_T) than CVF. It is obvious that viscosity variations lead to an enhanced entrainment of the irrotational fluid inwards the central zone of the mixing layer. The pressure diffusion term \mathcal{D}_p , that contributes to redistribute the kinetic energy from the centre of the TML to its edges, has a significant contribution in the TKE budget at the earlier stage of the temporal evolution of the mixing layer. Similarly to the production and turbulent diffusion terms (\mathcal{P}_k and \mathcal{D}_T), TKE is stronger for VVF. We recall that, the instantaneous kinematic viscosity ν is, for VVF, included in the averages of the mean dissipation rate of the kinetic energy $\langle \epsilon \rangle_{VV}$. The latter may be decomposed into contributions due to both the mean viscosity and viscosity fluctuations, as follows

$$\underbrace{\left\langle \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}} = \underbrace{\langle \nu \rangle \left\langle \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VVmean}} + \underbrace{\langle \nu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VVfluc}}. \quad (6)$$

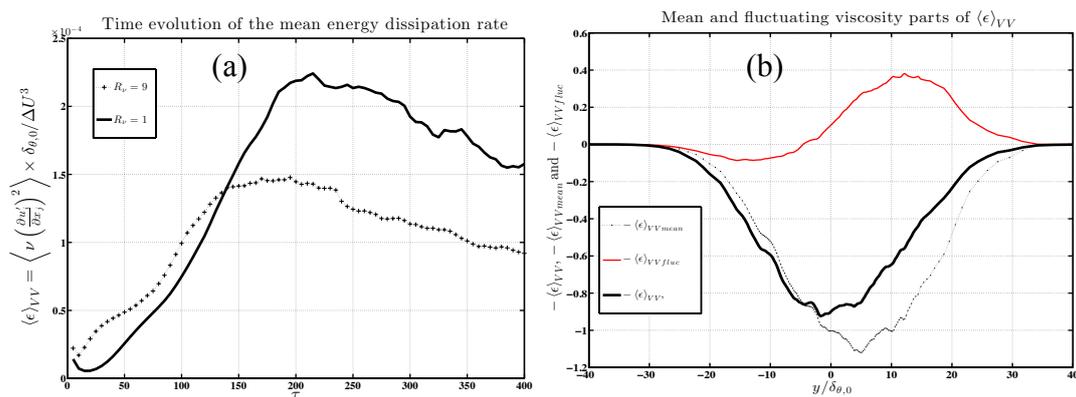


Figure 7. (a) Temporal evolution of the mean kinetic energy dissipation rate $\langle \epsilon \rangle_{VV}$ for VVF ($R_\nu = 9$) and CVF ($R_\nu = 1$), (b) Mean and fluctuating components of $\langle \epsilon \rangle_{VV}$, for VVF ($R_\nu = 9$), at the dimensionless time $\tau = 400$.

It is obvious that the term $\langle \epsilon \rangle_{VVfluc}$ is exactly equal to zero for CVF. Hence, as shown in figure 7.a, the kinetic energy is produced and dissipated in stronger way for different VVF flows, despite the fact that for CVF the kinematic viscosity coefficient is higher, or at least equal to those of VVF. Figure 7.a shows the temporal evolution of the dimensionless mean dissipation rate of the kinetic energy $\langle \epsilon \rangle_{VV}$

A.2 Article accepté dans *Flow, Trubulence and Combustion*

Effects of viscosity variations in temporal mixing layer

Noureddine Taguelmimt · Luminita
Danaila · Abdellah Hadjadj

Received: date / Accepted: date

Abstract The objective of the present investigation is to assess the effects of viscosity variations in low-speed temporally-evolving turbulent mixing layer. The two streams are density-matched, but the slow fluid is R_ν times more viscous than the rapid stream. Direct Numerical Simulations (DNS) are performed for several viscosity ratios, $R_\nu = \nu_{high}/\nu_{low}$, varying between 1 and 9. The space-time evolution of Variable-Viscosity Flow (VVF) is compared with that of the Constant-Viscosity Flow (CVF), for which $R_\nu = 1$. The initial Reynolds number, based on the initial momentum thickness, $\delta_{\theta,0}$, is $Re_{\delta_{\theta,0}} = 160$ for the considered cases. The study focuses on the first stages of the temporal evolution of the mixing-layer. It is shown that in VVF (with respect to CVF):

- (i) the velocity fluctuations occur earlier and are more enhanced for VVF. In particular, the kinetic energy peaks earlier and is up to three times larger for VVF than for CVF at the earliest stages of the flow. Over the first stages of the flow, the temporal growth rate of the fluctuations kinetic energy is exponential, in full agreement with linear stability theory.
- (ii) large-scale quantities, i.e. mean longitudinal velocity and momentum thickness, are affected by the viscosity variations, thus dispelling the myth that viscosity is a small-scale quantity that affects little the large scales;
- (iii) the transport equation for the fluctuations kinetic energy is derived and favourably compared with simulations data. The enhanced kinetic energy for VVF is mainly due to an increased production at the interface between the two fluids, and in tight correlation with enlarged values of mean velocity gradient at the inflection point of the mean velocity profile.

Keywords Variable viscosity · Temporal mixing layer · Kinetic energy · Energy dissipation rate · DNS

1 Introduction

Most of the available turbulence theories (Kolmogorov, 1941 [13]) are underpinned by assumptions involving a single value of the kinematic viscosity. Moreover, the effect of viscosity is *a priori* expected to be felt only at small scales. However, turbulence mostly occurs in heterogeneous fluids or multicomponent mixtures, therefore involving fluids with various viscosities. In such flows, strong viscosity gradients may exist at all scales, thereby modifying the mean velocity profiles. To examine the effects of viscosity variations on the mixing efficiency, Talbot et al. [22] have conducted an experimental study of a propane jet issuing into air; the latter is 3,5 more viscous than the air, whereas the densities are almost the same. These authors found that, in comparison with a classical air/air jet, the propane jet exhibits a more pronounced decrease of the mean axial velocity. This behaviour was explained analytically by an increase of the magnitude of the viscous terms with respect to the inertial terms. Strong production of turbulent fluctuations was also observed in the very near-field of the propane jet, thus enhancing mixing, producing lateral fluctuations and accelerating the trend towards self-similarity and isotropy.

The objective of the present investigation is to assess the effects of viscosity variations in a canonical flow, the low-speed temporally-evolving turbulent mixing layer. For the particular purpose of our study, the temporal mixing layer (hereafter TML) involves two fluids with the same density. TML belongs to the family of turbulent shear layers, which have been studied since the pioneering work of Brown and Roshko [2], followed by a web of investigations of this configuration devoted to different issues, such as transition to turbulence, mixing efficiency, compressibility effects [19], [5], [20], [11], variable density effects [2], [4], [15]. The effect of the trailing edge thickness of the splitter plate was also investigated in detail [17], [14], as well as e.g. sound generation [16].

Because the present investigation mostly focuses on the initial stages of the flow, it is natural to relate our findings to the instabilities of the flow. Viscosity stratification is associated with three kinds of instabilities.

- i) The first class is Kelvin-Helmholtz (KH) instabilities, which are essentially a non-viscous process and is produced by the shear itself. Viscosity, as well as viscosity stratification, have *a priori* little influence on the generation of primary billow. Nonetheless, the effect of viscous diffusion may have a role on the development of the KH structures, and this issue will be addressed in this paper.
- ii) An interfacial mode, or 'Yih mode' [23], which is unstable for long wave disturbances, if the viscous layer is the thinnest. However, if the miscible flow layers present an interface sufficiently wide, the role played by the interfacial mode is reduced, and the stability is determined by shear (KH) modes.
- iii) An overlap mode [6], [8], emphasized for channel flows involving two miscible fluids, in which the stratified layer overlaps the critical layer (localized region where fluctuations are produced by interaction with the mean flow, [7]).

In the present study, emphasis is put on the role of viscosity stratification on initial instabilities and transition to turbulence. The evolution of the KH rolls will be characterized from a triple viewpoint: morphological description, the time growth of their kinetic energy with tight connection with linear instability theory, and unravelling the effects responsible for their growth in the non-linear stage.

The paper is organized as follows. Section 2 is dedicated to the description of the numerical methods. Section 3 examines the morphology of the flow and one-point statistics.

2 Mathematical formulation and numerical method

The unsteady, three-dimensional, weakly compressible Navier-Stokes equations, with two-species transport equations are solved using an in-house high-order explicit solver. The full description of the numerical scheme along with the implementation and the validation procedures are described in [3]. The convective terms are approximated by the fifth-order weighted, essentially non-oscillatory (WENO) schemes, while the diffusive terms are determined using fourth-order compact central differences. The discrete equations are time-integrated by means of an explicit, third order, Runge-Kutta scheme.

The Wilke formula [21], widely used in combustion and chemical engineering applications, is employed to determine the viscosity of the mixture, in terms of mass fractions, namely

$$\mu = \sum_{k=1}^2 \left[\mu_k \left(\frac{C_k}{W_k} \right) \left(\sum_{l=1}^2 C_l \phi_{kl} / W_l \right)^{-1} \right], \quad (1)$$

where μ_k , W_k and C_k represent respectively the viscosity, the molecular mass and the mass fraction of the k-th species. The function ϕ_{kl} is defined such as [21]

$$\phi_{kl} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{W_k}{W_l} \right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_k}{\mu_l} \right)^{1/2} \left(\frac{W_l}{W_k} \right)^{1/2} \right]. \quad (2)$$

Periodic boundary conditions are applied along the streamwise (x) and spanwise (z) directions. A non-reflecting slip condition is imposed along the cross-stream direction, y .

A sketch of the simulated TML is shown in Fig. 1. The upper stream has a low velocity, U_{low} , and a high kinematic viscosity, ν_{high} , while the lower stream is initially characterized by a high velocity, U_{high} , and a low kinematic viscosity, ν_{low} . The upper stream (U_{low}, ν_{high}) and the lower stream (U_{high}, ν_{low}) meet together and evolve in time. Thus, the configuration studied here is a viscosity-velocity counter-gradient. The reference velocity is $\Delta U = U_{high} - U_{low}$ and the reference viscosity is $\nu_{ref} = 0.5(\nu_{high} + \nu_{low})$. Directions x and z are perfectly homogeneous, whereas y is the inhomogeneous, shear direction. Statistics such as $\langle U \rangle$ are calculated by averaging over homogeneous directions (x, z) for any given y , and at each time t . We define the normalized time, τ , such as $\tau = \frac{t \Delta U}{\delta_{\theta,0}}$. Therefore, averages are functions of two variables: the vertical position y and time t . As an example, the longitudinal mean velocity is a function of both y and τ , viz. $\langle U \rangle = f(y, \tau)$. The mean longitudinal velocity is initialized by a tangent hyperbolic profile $\langle U \rangle (y, \tau = 0)$, while the other mean velocity components are initially set to zero. Note that one necessary condition for the initial profile to be unstable is to exhibit one inflection point, [10]. Thus, at $\tau = 0$,

$$\begin{aligned} \langle U \rangle (y) &= \frac{1}{2} \left[(U_{high} + U_{low}) - \Delta U \tanh \left(\frac{y}{2} \right) \right]; \\ \langle V \rangle &= \langle W \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

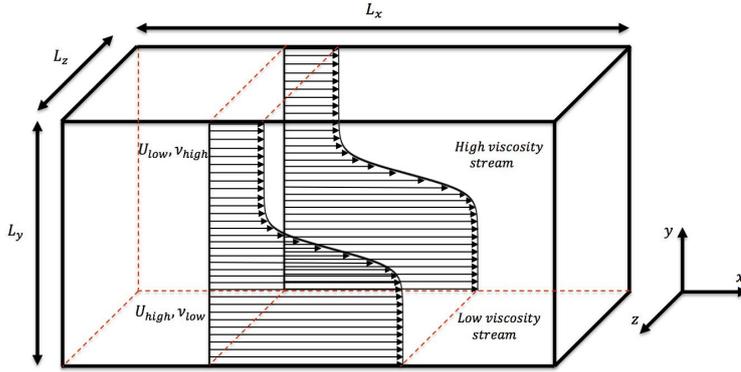


Fig. 1 Numerical domain. The middle of the domain is defined as $(x = 0, y = 0, z = 0)$.

The two streams are at the same initial pressure ($P = 1$ atm.), temperature ($T = 293K$), and density ($\rho = 1.314 \text{ kg m}^{-3}$), while the velocities and the kinematic viscosities are as summarized in Table 1 for all investigated cases. To initiate turbulence, fluctuations are superimposed to the mean velocity field. The initial fluctuations are generated using a 3D digital filter technique [12]. This procedure consists in imposing prescribed values for both Reynolds stress tensor and length scales, and generates the corresponding fluctuating velocity field at time $\tau = 0$. The Klein's method is slightly modified to generate initial turbulent conditions instead of inlet conditions as originally described in [12]. The time marching is replaced by a space advancement. The procedure is applied only at $\tau = 0$ in order to generate fully correlated turbulent structures at the beginning of the computation. The initial length scales along each direction are equal to the initial vorticity thickness, here considered as $\delta_{\omega,0} = 4\delta_{\theta,0}$. The turbulence intensities at $\tau = 0$ are ($\sqrt{\langle u'^2 \rangle} / \Delta U = 0.0193$, $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} / \Delta U = 0.0128$, $\sqrt{\langle w'^2 \rangle} / \Delta U = 0.0131$).

Five test cases are carried out, as shown in Table 1. The parameters of DNS-R2.5 to DNS-R9 are chosen with the aim to analyse the effects of viscosity variations on Variable-Viscosity Flow (VVF), whilst DNS-R1 provides the baseline in Constant Viscosity Flow (CVF). The viscosity ratio is $R_\nu \geq 1$.

The species mixture is characterized by values for R_ν of 1, 2.5, 4, 6 and 9 for the considered test cases (see Table 1). The molecular diffusion coefficient \mathcal{D} between the two streams is kept constant. The initial momentum thickness Reynolds number is $Re_{\delta_{\theta,0}} = \frac{\Delta U \delta_{\theta,0}}{\nu_{ref}} = 160$, and the initial momentum thickness is $\delta_{\theta,0} = 18.4 \mu\text{m}$.

For our purpose, the ratio U_{high}/U_{low} is the same for CVF and VVF, so the only parameter varying from one simulation to another is R_ν .

The numerical challenge is twofold. First, the grid resolution must be sufficiently high to correctly capture the dynamics of the TML from its generation to the later stages of the flow evolution. Second, the computational domain must be wide enough to ensure the spatial development of the largest scales of the flow. The computational domain sizes, normalized by the initial momentum thickness, $\delta_{\theta,0}$, are $L_x/\delta_{\theta,0} = 345$, $L_y/\delta_{\theta,0} = 172$ and $L_z/\delta_{\theta,0} = 86$ along x , y and z directions, respectively. The latter matches the DNS of Pantano & Sarkar [18]. The spatial resolution along the direction y is $1.05 \mu\text{m}$ at the center of the domain (this

Table 1 Parameters of DNS configurations. The initial Reynolds number $Re_{\delta_{\theta,0}} = \frac{\Delta U \delta_{\theta,0}}{\nu_{ref}} = 160$ and $\delta_{\theta,0} = 18.4 \mu m$ are fixed for all simulations.

case	R_ν	ν_{high} $m^2 s^{-1}$	ν_{low} $m^2 s^{-1}$	ν_{ref} $m^2 s^{-1}$	U_{high} ms^{-1}	U_{low} ms^{-1}	ΔU ms^{-1}	$\frac{U_{high}}{U_{low}}$ ms^{-1}
DNS-R1	1	6.85	6.85	6.85	65.53	5.95	59.58	11
DNS-R2.5	2.5	6.85	2.74	4.78	45.87	4.17	41.70	11
DNS-R4	4	6.85	1.71	4.28	40.96	3.72	37.24	11
DNS-R6	6	6.85	1.14	3.99	38.23	3.47	34.76	11
DNS-R9	9	6.85	0.76	3.80	36.41	3.31	33.10	11

resolution remains constant for a distance of about $22 \times \delta_{\theta,0}$, where the shear is maximum, to ensure good resolution of the initial momentum thickness (≈ 18 points). The grid size and domain lengths are summarized in Table (2). Table 3 reports the initial Kolmogorov length scale η and the initial Taylor microscale, defined respectively as $\eta = (\nu^3 / \langle \epsilon \rangle_{VV})^{1/4}$ and $\lambda = \sqrt{6\nu \langle q^2 \rangle / \langle \epsilon \rangle_{VV}}$ where ν is the kinematic viscosity of the species, $\langle q^2 \rangle \equiv 0.5 (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle)$ the fluctuations kinetic energy and $\langle \epsilon \rangle_{VV}$ the pseudo-dissipation of the turbulent kinetic energy, defined in Eq. (8).

Case	L_x^*	L_y^*	L_z^*	$N_x \times N_y \times N_z$	$\Delta x = \Delta z$ (μm)	Δy_{min} (μm)
ALL DNS	345	172	86	$768 \times 720 \times 192$	8.26	1.05

Table 2 Grid size and domain lengths of the DNS simulations. L_x^* , L_y^* and L_z^* are the dimensionless lengths of the domain along the x , y and z directions respectively. The grid is stretched on the normal direction y .

Table 3 shows that grid resolution along the inhomogeneous direction y is satisfactory. This resolution is still sufficient when the flow is fully turbulent (at $\tau = 400$), where the ratio $\Delta y_{min}/\eta_0$ is about 0.5.

Simulations were performed over times larger than $\tau \geq 400$. Results presented here span the time range between $\tau = 0$ (the generation of the flow fluctuations) and $\tau = 400$, where the flow potentially becomes self-similar. Results in the self-similar regime will be reported elsewhere. Here, the focus is on the initial and early stages of the flow. In the following, emphasis will be put on two particular times: $\tau = 40$ where we note a maximum, explicit contribution of terms associated to viscosity variations; and

$\tau = 100$, where the difference between VVF and CVF is most pronounced.

Case	η_0 (μm)	λ_0 (μm)	$\Delta y_{min}/\eta_0$
DNS-R1	7.48	34.92	0.14
DNS-R2.5	5.65	34.92	0.18
DNS-R4	4.73	34.92	0.22
DNS-R6	4.00	34.92	0.26
DNS-R9	3.34	34.92	0.31

Table 3 Turbulent length scales at the initial time $\tau = 0$.

3 Morphology and statistics of the flow

The morphology of the VVF and CVF is discussed in Subsection 3.1. The mean velocity field is analysed in Subsection 3.2, whereas the kinetic energy distribution, as well as the associated budget are discussed in Subsection 3.3.

3.1 Morphology of the flow

We provide qualitative observations of the TML in both CVF and VVF cases. In particular, the focus is on the way the vorticity and velocity fluctuations are generated.

Figure 2 shows evidence for the effect of viscosity variations on the vorticity, in the plane $(x, y, z = 0)$. The vorticity magnitude ω (here, we represent the vorticity projected along the spanwise, z direction), is normalized using the initial momentum thickness $\delta_{\theta,0}$ and velocity difference ΔU . Quasi-2D rollers (e.g., [2]) are present, associated to the early stages of the TML development. For the CVF case, the rollers are almost symmetric with respect to the plane $y = 0$. For VVF, these 2D rollers are also present, but their symmetry with respect to the plane $y = 0$ is broken. This behaviour is most likely due to the enhanced enstrophy diffusion in the more viscous fluid. It is also noticeable the fact that the maxima of ω are more important for VVF than for CVF.

These observations are to be associated with the production of kinetic energy which is particularly enhanced in the presence of viscosity variations, as further shown in this paper.

These large-scale structures originate from the Kelvin-Helmholtz instability and are responsible for the entrainment of the slow (viscous) fluid into the mixing region. In the VVF flow, it is evident that these large-scale structures are enhanced by viscosity variations and the entrainment process is accelerated for VVF than CVF at the same time, $\tau = 100$. This results into a more rapid mixing for VVF than for CVF. This is of particular relevance for e.g. combustion, where one strong requirement is that fuel and oxidizer must be mixed very quickly.

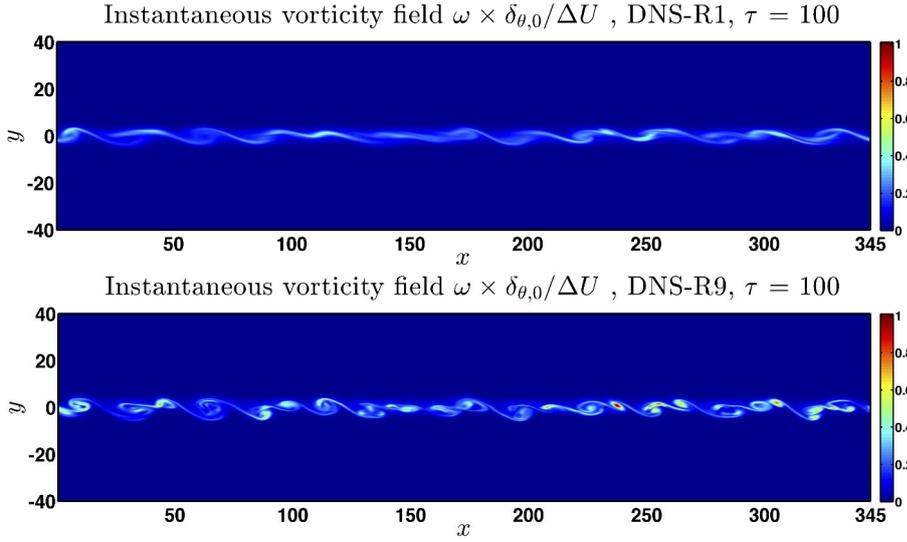


Fig. 2 Middle plane ($x, y, z = 0$) spatial distribution of the vorticity ω dimensionless by $\delta_{\theta,0}$ and ΔU , at time $\tau = 100$ for (top) $R_\nu = 1$ and (bottom) $R_\nu = 9$.

The same evidence is reinforced by Fig. 3, through the distribution of ω in the plane ($x, y = 0, z$). Again, more important values of ω are to be noted for VVF than for CVF.

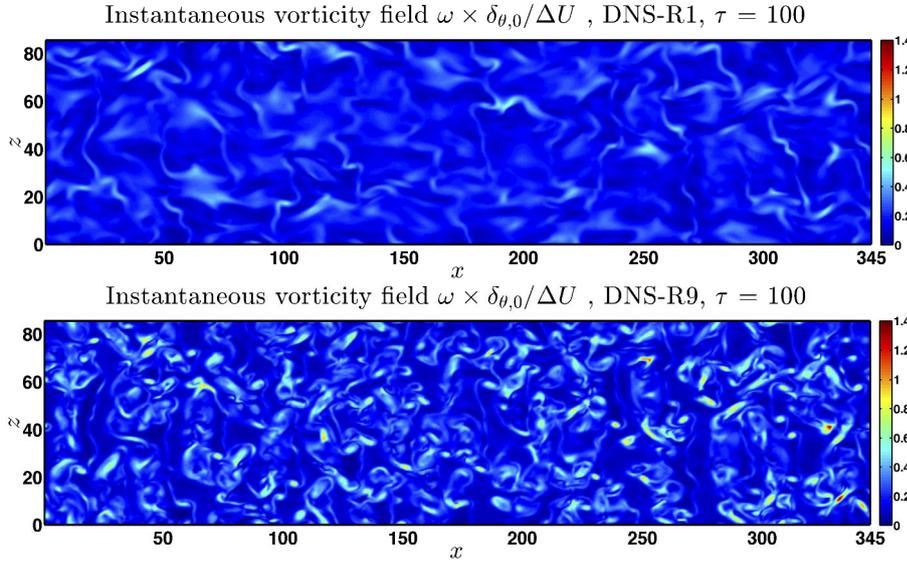


Fig. 3 Spatial distribution in the plane ($x, y = 0, z$) of the vorticity ω dimensionless by $\delta_{\theta,0}$ and ΔU , at time $\tau = 100$ for (top) $R_\nu = 1$ and (bottom) $R_\nu = 9$.

Figure 4 shows the instantaneous kinetic energy $q^2 = 0.5u_iu_i/\Delta U^2$ (summation applies for double indices) in the plane $(x, y = 0, z)$. Note that no average is performed yet, so the quantity q^2 depends on (x, y, z, τ) . The energy maxima (black surfaces) are more important for VVF than for CVF. Moreover, these maxima are uniformly distributed over the whole plane (x, z) for VVF, thus supporting the statement that velocity fluctuations are enhanced in this case.

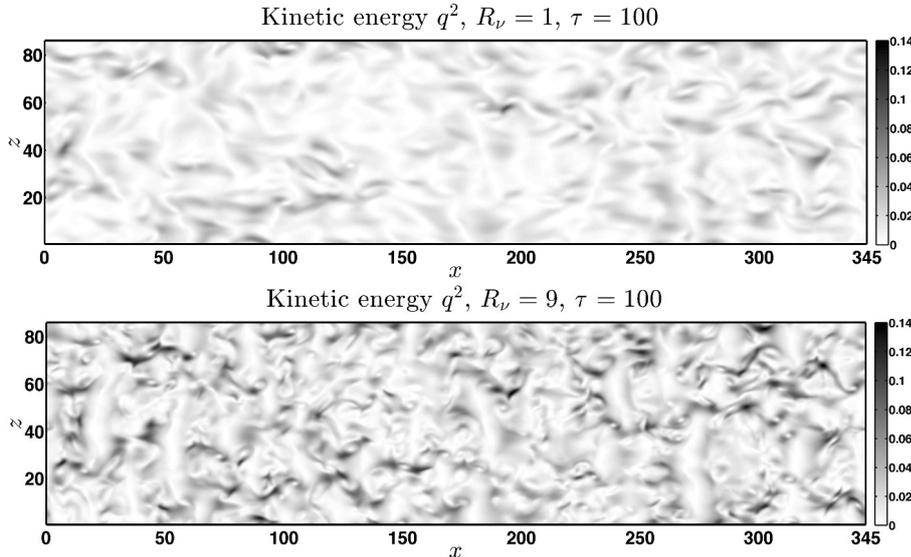


Fig. 4 Middle plane ($y = 0$) spatial distribution of the kinetic energy q^2 at time $\tau = 100$ for (top) $R_\nu = 1$ and (bottom) $R_\nu = 9$.

A possible scenario is that the viscous (slow) fluid, once enticed into the rapid stream through the interface instabilities, constitutes "blobs" which act as obstacles that decelerate the rapid fluid and ultimately lead to the generation of velocity fluctuations along the vertical direction, y . This scenario is consistent with the increased fluctuations for VVF. The vortices of the mixing layer are identified with the positive values of the second invariant of the velocity gradient tensor (Q criterion) as shown in figure (5). At time $\tau = 400$, it can be seen that the VVF flow is much more disorganized than the CVF one. In the latter case, the coherent structures are still identified, simply because the flow has not achieved a fully turbulent state yet, unlike the VVF flow. The viscosity gradients seem to enhance turbulence in the flow to achieve fully turbulent state in a shorter time compared to the CVF flow.

Linear stability analysis can be performed by linearising transport equations (Navier-Stokes, as well as two-species transport equations) around the general baseflow, here $\langle U \rangle(y)$. Superposing small perturbations written as superposition of modes, viz.

$$M(x, y, z, t) = m(y)e^{i(kx + \beta z)} \cdot e^{\sigma t - i\omega t}, \quad (4)$$

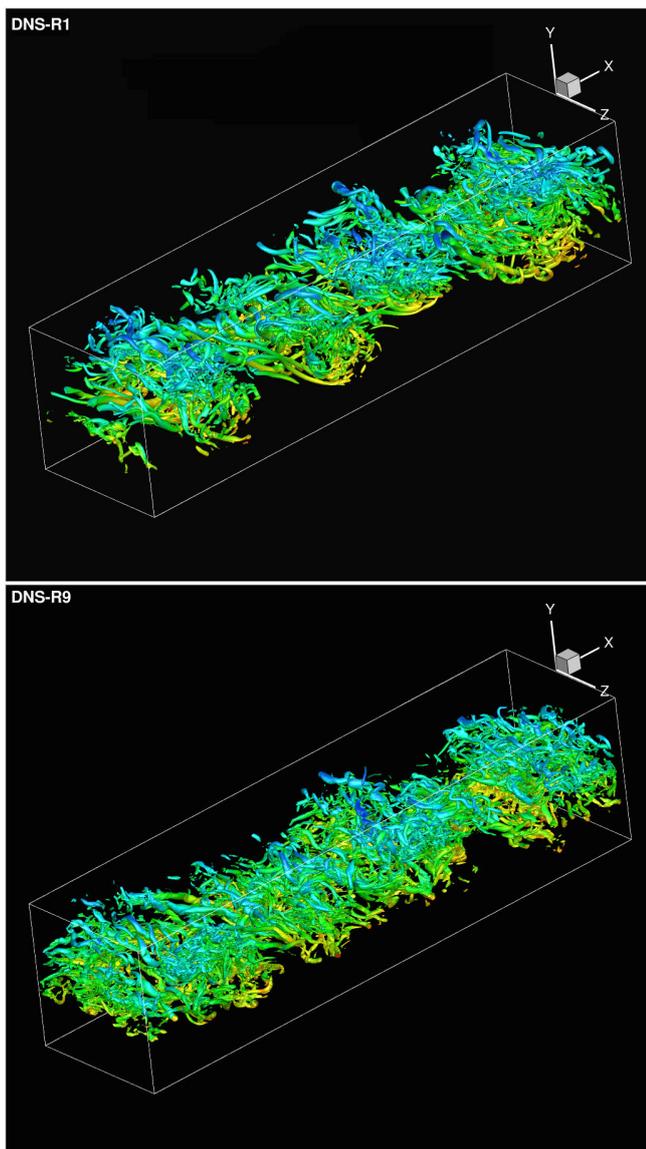


Fig. 5 Three-dimensional flow visualisation based on Q criterion ($Q = 0.015Q_{max}$) for CVF (top) and VVF ($R_\nu = 9$) flow (bottom) at $\tau = 400$. The Q -isosurface is coloured by the streamwise velocity.

where M is the perturbed field, k is the wavenumber along the direction x , β is the wavenumber along the direction z (note that both of them are homogeneous in this flow), ω is the frequency and σ is the temporal growth rate. The latter parameter is of particular interest for characterizing the stability of the flow. The normalized time is $\tau = t\Delta U/\delta_{\theta,0}$ and then $\sigma^* \equiv \sigma\delta_{\theta,0}/\Delta U$ is the appropriately normalized growth rate.

Several questions are of interest, and we focus here on the temporal growth rate of the kinetic energy $\langle q^2 \rangle$, depicted in Fig. 6 as a function of the normalized time τ , and for different viscosity ratios spanning between 1 (CVF) and 9.

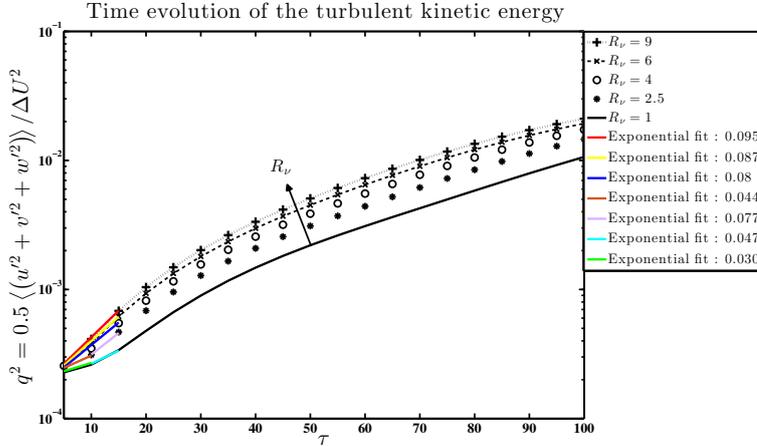


Fig. 6 Time evolution of the averaged fluctuations kinetic energy $\langle q^2 \rangle$, for different viscosity ratios $R_\nu \equiv 1, 2.5, 4, 6$ and 9 .

Several features are to be noted. First, and in full agreement with the previous observations of the flow morphology, the fluctuations kinetic energy is enhanced for increased values of the viscosity ratio R_ν . Second, the logarithmic scale of the vertical axis highlights a linear regime for the very first 10 to 20 characteristic times τ , corresponding to an exponential temporal growth. This is in full agreement with the linear stability analysis, and also consistent with the results presented by e.g. Harang et al. [9], in their Fig. 11. Their flow is similar to ours, with the notable difference that they also consider the role played by density stratification. To compare with our findings, we have carefully selected those results pertaining to very small values of the Richardson number. The linear stability analysis performed by these authors was done using the code LiSa, [1].

Moreover, the slopes at the origin (corresponding to $2\sigma^*$ because the energy is considered here, so the square of Eq. (4)), monotonically increase between 0.03 for $R_\nu = 1$, and ~ 0.1 for $R_\nu = 9$. These values are very close to those reported by [9], see their Fig. 8, by particularly selecting the Reynolds number of ~ 100 and the viscosity ratios between 1 (their parameter $W = \log_{10}(\nu_{high}/\nu_{low}) = 0$) and 9 (for which $W \simeq 1$). The evolution of $\langle q^2 \rangle$ at times $\tau \geq 20$ is characteristic to the non-linear regime, and is fully consistent with the presence of three-dimensional velocity fluctuations.

3.2 Effect of variable viscosity on the mixing-layer spreading and mean velocity

The growth rate of the mixing layer depends on the velocity ratio U_{high}/U_{low} , as well as (when applicable) the density ratio ρ_{high}/ρ_{low} , [2]. However, less attention

was paid to the role of the viscosity variations on the temporal and spatial evolution of mixing layer thickness. Here, the two fluids are density-matched, and the viscosity varies between the rapid and the slow stream. The mixing layer momentum thickness is defined as

$$\delta_\theta(\tau) = \int_{-L_y/2}^{+L_y/2} \frac{[\langle U \rangle(y, \tau) - U_{low}][U_{high} - \langle U \rangle(y, \tau)]}{\Delta U^2} dy. \quad (5)$$

Figure 7 illustrates the TML momentum thickness for both VVF and CVF, as function of the dimensionless time τ . In the early stages of the flow, the TML momentum thickness is higher for VVF than for CVF. Physically, this result signifies that the VV-TML is affected to a larger extent by the same (initial) momentum. This behaviour is the result of both
 –an accelerated generation of momentum fluctuations, as well as
 –an enhanced diffusion of the momentum.

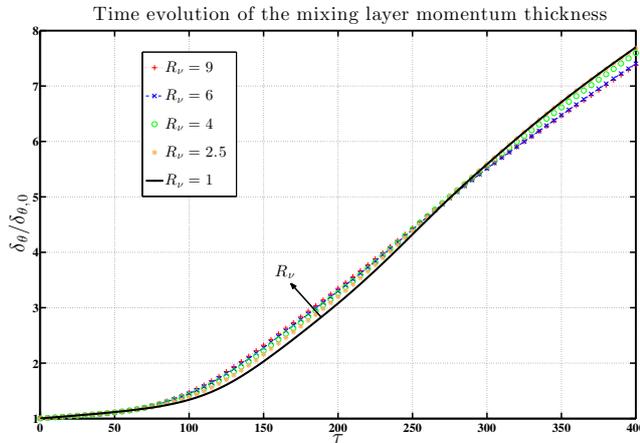


Fig. 7 Temporal evolution of the TML momentum thickness, for different viscosity ratios, R_ν .

The increase of the momentum thickness is qualitatively consistent with the temporal evolution of the mixing layer thickness reported by [9] in their Fig. 12.

Equation (5) suggests that this behaviour is most likely attributable to differences in the mean streamwise velocity $\langle U \rangle$, all the other parameters being the same. It is then clear that the longitudinal mean velocity $\langle U \rangle$ is modified by viscosity effects. This is a surprising result, which might dispel the myth that "viscosity is a small-scale quantity with small-scale effects". Figure 8 shows the values of the mean velocity $\langle U \rangle$ and the mean velocity gradient $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$, for different viscosity ratios, R_ν , at $\tau = 40$. It is clear that the viscosity variations act on the mean velocity field, leading to

- a decrease of velocity at the centre of mixing layer at $\tau = 40$ (Fig. 8-a) where the viscosity gradients are important;
- an increase of velocity gradient (Fig. 8-b). Noticeable is the fact that the peaks are located in the high-speed stream side (which is here, less viscous).

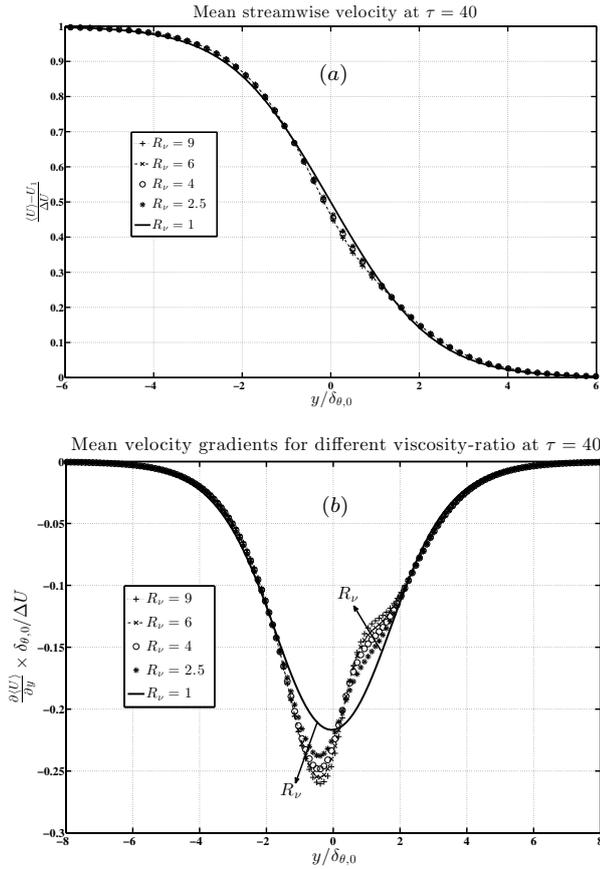


Fig. 8 Spatial distribution of (a) mean longitudinal velocity and (b) mean longitudinal velocity gradient profiles, for different viscosity ratios R_ν , at time $\tau = 40$. Arrows indicate increasing values of R_ν .

3.3 Effect of variable viscosity on the kinetic energy budget

It is found that the quantity $\langle q^2 \rangle$ (note that the latter quantity is averaged, therefore it only depends on y, τ) is stronger for VVF, indicating that the fluctuating velocity is increased due to the viscosity variations. However, the decay of kinetic energy is more enhanced for VVF at time larger $\tau \geq 200$. To unravel the issues associated with variations of viscosity, the one-point kinetic energy budget is derived, in its general expression, for VVF [22]. The spatial averaging over the homogeneous directions (x and z) allows some simplifications for the particular case of TML. The aim of this section is to investigate the effects of viscosity variations on different phenomena that contribute to the kinetic energy production, transport and dissipation. The starting point is the instantaneous Navier-Stokes equations for the total velocity field u_i , written for variable-viscosity flow as follows

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} [\nu s_{ij}], \quad (6)$$

Here, double indices signify summation and s_{ij} the instantaneous strain tensor

$$\vec{s} = s_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]. \quad (7)$$

The transport equation of the kinetic energy is derived by multiplying Eq. (6) by the velocity fluctuation u'_i (summation applies for double indices) and space-averaging over the two homogeneous directions (x and z). We then use the fact that $u = \langle U \rangle + u'$, $v = v'$, $w = w'$ ($\langle V \rangle = \langle W \rangle = 0$) and $\nu = \langle \nu \rangle + \nu'$. Finally, the one-point kinetic energy budget is expressed by Eq. (8). Terms T_t , D_t , P_k and D_p represent respectively the temporal variation of the kinetic energy, the turbulent diffusion, the kinetic energy production and the pressure diffusion.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle u_i'^2 \rangle}{2} \right)}_{T_t} = - \underbrace{\left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i'^2}{2} \right) \right\rangle}_{D_t} \quad (8a)$$

$$- \underbrace{\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}}_{P_k} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \langle v'p' \rangle}_{D_p} \quad (8b)$$

$$+ \underbrace{\left[\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x} v' \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial y} v' \right\rangle \right] \cdot \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} + \langle u' \cdot \nu' \rangle \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial y \partial y}}_{P_\nu} \quad (8c)$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} + \frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_i} \right] \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VG}} + \frac{1}{2} \left\langle \nu \frac{\partial^2 u_i'^2}{\partial x_j^2} \right\rangle \quad (8d)$$

$$- \underbrace{\left\langle \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}}. \quad (8e)$$

Terms P_ν (line 8c) are the product of the mean velocity gradients and correlations between viscosity gradients and velocity fluctuations. Terms $\langle \epsilon \rangle_{VG}$ regroup expressions in line 8d, where 'VG' stands for 'Viscosity Gradients'. The last term represents the homogeneous form of $\langle \epsilon \rangle_{VV}$. Note that the viscosity is inside the brackets (representing spatial averages), as it fluctuates.

Different terms of Eq. (8) are assessed through our DNS. We now make a distinction between terms that explicitly depend on the kinematic viscosity (P_ν , $\langle \epsilon \rangle_{VG}$ and $\langle \epsilon \rangle_{VV}$) and terms that do not explicitly depend on the viscosity (T_t , D_t , P_k and D_p). Figure 9 shows terms in the one-point kinetic energy budget for both CVF and VVF cases, plotted at time $\tau = 100$. In the legend of Fig. 9, "Budget" stands for the right-hand-side of Eq. (8), which must collapse with the left-hand-side for well-balanced kinetic energy budget.

A critical comparison between this budget for VVF ($R_\nu = 9$) and CVF ($R_\nu = 1$) cases is made in order to highlight the effect of viscosity variations on the one-point, second-order, statistics. The peak of the production term, P_k , is higher for VVF than for CVF. Thus, turbulence production is enhanced by viscosity variations. This peak is located within the rapid stream ($y < 0$), at the same location

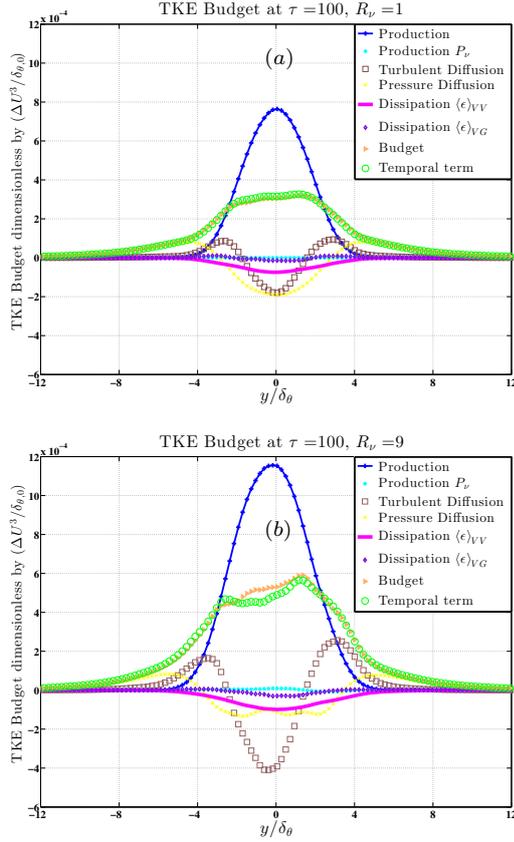


Fig. 9 Kinetic energy budget for two viscosity ratios (a) $R_\nu = 1$ and (b) $R_\nu = 9$ at time $\tau = 100$.

as the peak of the mean velocity gradient $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$. The supplementary terms P_ν and $\langle \epsilon \rangle_{VG}$, related directly to the viscosity variations, have respectively positive and negative contributions in the kinetic energy budget at the early stages of the flow, as shown in Fig. 10. Their role, however, is negligible at time $\tau > 100$, as shown in Fig. 9 (points and diamonds, respectively). The velocity fluctuations are stronger for VVF because their production is enhanced by the viscosity variations. It is shown in Fig. 9 (square symbols), that the VVF exhibits stronger diffusion of velocity fluctuations (term D_t) than CVF. It is obvious that viscosity variations lead to an enhanced entrainment of the irrotational fluid inwards the central zone of the mixing layer. The pressure diffusion term D_p , that contributes to redistribute the kinetic energy from the centre of the TML to its edges, has a significant contribution in the kinetic energy budget at the earlier stage of the temporal evolution of the mixing layer. Similarly to the production and kinetic energy diffusion terms (P_k and D_t), kinetic energy $\langle q^2 \rangle$ is stronger for VVF, as was illustrated in Fig. 6.

We recall that, the instantaneous kinematic viscosity ν is, for VVF, included in the averages of the mean dissipation rate of the kinetic energy $\langle \epsilon \rangle_{VV}$. The

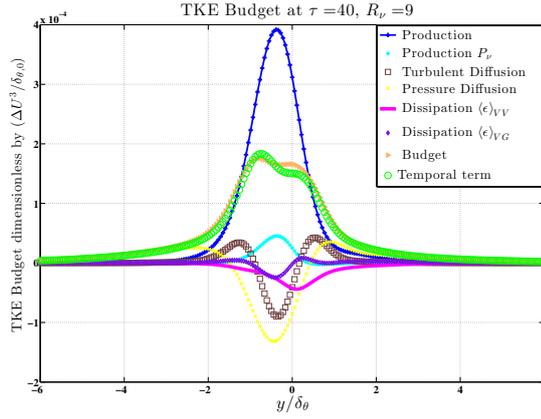


Fig. 10 Kinetic energy budget for VVF flow ($R_\nu = 9$) at time $\tau = 40$.

latter may be decomposed into contributions due to both the mean viscosity and viscosity fluctuations, as follows

$$\underbrace{\left\langle \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VV}} = \underbrace{\langle \nu \rangle \left\langle \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VVmean}} + \underbrace{\left\langle \nu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle}_{\langle \epsilon \rangle_{VVfluc}} \quad (9)$$

It is obvious that term $\langle \epsilon \rangle_{VVfluc}$ is exactly equal to zero for CVF. Figure 11 shows the temporal evolution of the dimensionless mean dissipation rate of the kinetic energy $\langle \epsilon \rangle_{VV}$ for different values of the viscosity ratio, R_ν . It can be noted that $\langle \epsilon \rangle_{VV}$ peaks earlier for VVF (at time varying between $\tau = 140$ and 250), whereas for CVF $\langle \epsilon \rangle_{VV}$ achieves stronger values but at later times before decreasing for $\tau \simeq 220$. The location of the maximum of the energy dissipation rate can be related to the transition towards turbulence. This statement suggests that the life-time of the flow is smaller for VVF, but involves more intense velocity fluctuations and a faster transition to turbulence.

Furthermore, it is shown in Fig. 12 that the contribution of the viscosity-fluctuating part $\langle \epsilon \rangle_{VVfluc}$ is far from being negligible, even at $\tau = 400$, corresponding to a fully turbulent mixing regime. Therefore, term $\langle \epsilon \rangle_{VV}$ does not reduce to the term proportional to the mean viscosity. Thus, the problem of viscosity variations is far from being trivial.

4 Conclusions

The paper aims at providing rigorous evidence of some simple, qualitative and quantitative differences between Variable-Viscosity Flow (VVF) and Constant-Viscosity-CVF, for the same initial flow conditions (Reynolds number $Re_{\delta_{\theta,0}}$ and turbulent intensities), but with drastic differences between the viscosity of the involved fluids. For the CVF, both low and high-stream flows are characterized by the same viscosity, whereas for VVF cases the low-stream is $R_\nu = 2.5, 4, 6$ and

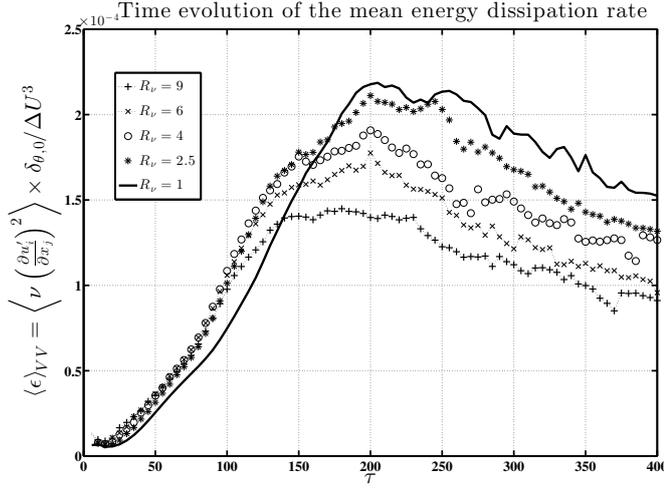


Fig. 11 Time evolution of the kinetic energy mean dissipation rate, $\langle \epsilon \rangle_{VV}$, for different viscosity ratios $R_\nu = 1, 2.5, 4, 6$ and 9 .

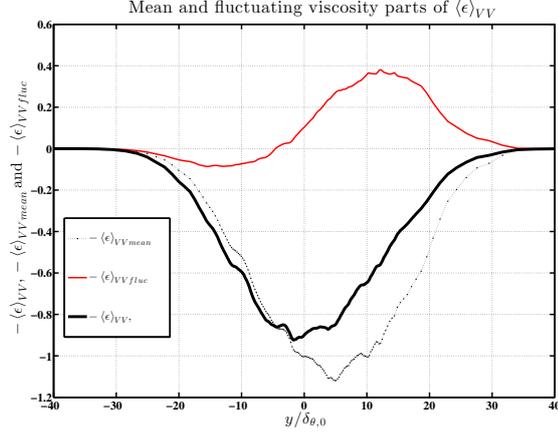


Fig. 12 Mean and fluctuating components of the kinetic energy dissipation rate, $\langle \epsilon \rangle_{VV}$, for the viscosity ratio $R_\nu = 9$, at time $\tau = 400$.

9 more viscous than the rapid part of the flow. Our DNS showed some new flow features, which are summarized as follows:

- The morphology of the VVF is significantly affected by the viscosity gradients.
- The generation of turbulence occurs earlier for VVF compared to CVF.
- Over the first stages of the flow, the temporal growth rate is exponential, in agreement with the linear stability theory.
- The kinetic energy is (up to 3 times) more important in VVF, at the same time.
- The life-time of the flow is smaller for VVF, but involves more intense velocity fluctuations and a faster transition to turbulence.

Acknowledgement. Financial support from the ANR (French National Research Agency) under the activity 'MUVAR' is gratefully acknowledged. This work benefited from computational means from CINES and CRIHAN, the contributions of which are greatly appreciated.

References

1. Antkowiak, A., Brancher, P.: On vortex rings around vortices: an optimal mechanism. *J. Fluid Mech.* **578**, 295–304 (2007)
2. Brown, G.L., Roshko, A.: On density effects and large structures in turbulent mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics* **64**, 775–816 (1974)
3. Chaudhuri, A., Hadjadj, A., Chinnayya, A., Palerm, S.: Numerical study of compressible mixing layers using high-order WENO schemes. *Journal of Scientific Computing* **47**, 170–197 (2011)
4. Dimotakis, P.E.: On the convection velocity of turbulent structures in supersonic shear layers. *AIAA Journal* **91**, 1724 (1991)
5. Elliott, G., Samimy, M.: Compressibility effects in free shear layers. *Physics of Fluids* **2**, 1231–1240 (1990)
6. Govindarajan, R.: Effect of miscibility on the linear instability of two-fluid channel flow. *Int. J. of multiphase flow* **30**, 1177–1192 (2004)
7. Govindarajan, R., L'vov, V., Procaccia, I.: Retardation of the onset of turbulence by minor viscosity contrasts. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 174,501–1 – 174,501–4 (2001)
8. Govindarajan, R., Sahu, K.C.: Instabilities in viscosity-stratified flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **46**, 331–353 (2014)
9. Harang, A., Thual, O., Brancher, P., Bonometti, T.: Kelvin-helmholtz instability in the presence of variable viscosity for mudflow resuspension in estuaries. *Environ Fluid Mech.* **14**, 743–769 (2014)
10. Hazel, P.: Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows. *J. Fluid Mech.* **51**, 39–61 (1972)
11. Jonathan, B., Freund, S., Lele, S., Moin, P.: Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer. part I. turbulence and growth rate. *Journal of Fluid Mechanics* **421**, 229–267 (2000)
12. Klein, M., Sadiki, A., Janicka: A digital filter based generation of in flow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations. *J. Computational Physics* **186**, 652–665 (2003)
13. Kolmogorov, A.N.: Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32(1)**, 16–18 (1941)
14. Laizet, S., Lardeau, S., Lamballais, E.: Direct numerical simulation of a mixing layer downstream a thick splitter plate. *Physics of Fluids* **22**, 015,104 (2010)
15. Lu, G., Lele, S.: On the density ratio effect on the compressible mixing layer. *Physics of Fluids* **6**, 1073 (1994)
16. Masayuki, H., Michihisa, T., Leung, R.: Numerical simulation of sound generation in a mixing layer by the finite difference lattice boltzmann method. *Computers and Mathematics with Applications* **59**, 2403–2410 (2010)
17. Mehta, R.: Effect of velocity ratio on plane mixing layer development: Influence of the splitter plate wake. *Experiments in Fluids* **10**, 194–204 (1991)
18. Pantano, C., Sarkar, S.: A study of compressible effects in the high-speed turbulent shear layer using direct simulation. *Journal of Fluid Mechanics* **451**, 329–371 (2002)
19. Papamoschou, D., Lele, S.K.: Vortex-induced disturbance field in a compressible shear layer. *Physics of Fluids* **5**, 1412 (1993)
20. Pullin, D., O'Reilly, G.: Structure and stability of the compressible stuart vortex. *Journal of Fluid Mechanics* **493**, 231–254 (2003)
21. Reid, R., Prausnitz, J., Poling, B.: *The Properties of Gases and Liquids*. McGraw-Hill, Inc., New York, New York (1987)
22. Talbot, B., Danaïla, L., Renou, B.: Variable-viscosity mixing in the very near field of a round jet. *Physica Scripta* **T155**, 014,006 (2013)
23. Yih, C.S.: Instability due to viscosity stratification. *Journal of Fluid Mechanics* **27(2)**, 337–352 (1967)

A.3 Article soumis dans *Journal of Turbulence*

RESEARCH ARTICLE

Effect of viscosity gradients on mean velocity profile in temporal mixing layer

N. Taguelmimt, L. Danaila and A. Hadjadj

CORIA-UMR 6614- Normandie Université CNRS-Université et INSA de Rouen
Campus Universitaire du Madrillet 76800 Saint Etienne du Rouvray, France.

(Received 00 Month 200x; final version received 00 Month 200x)

We present a phenomenological and statistical description of the very early stages of a temporal mixing layer (TML), in which the slow fluid is $R_\nu = \nu_{high}/\nu_{low}$ times more viscous than the rapid fluid. Direct Numerical Simulations (DNS) are performed for two viscosity ratios, $R_\nu = 1$ and $R_\nu = 9$, whilst the upper and lower streams are density-matched. The space-time evolution of Variable-Viscosity Flow (VVF) is compared with that of a baseline case, which is a Constant-Viscosity Flow (CVF, for which $R_\nu = 1$). The initial Reynolds number, based on the initial momentum thickness, $\delta_{\theta,0}$, is $Re_{\theta,0} \equiv (U_0 \delta_{\theta,0})/\nu_{ref} = 160$ for the two cases. It is shown that the mean velocity profile of VVF is affected by the viscosity variations, thus rectifying the myth that viscosity is a small-scale quantity that does not affect the large scales. The transport equation for mean velocity is derived and assessed through DNS data at the initial stages of the TML. The modification of the mean velocity profile is mainly due to the simultaneous occurrence of mean velocity and mean viscosity gradients.

1. Introduction

Predicting turbulence behavior is a difficult task because of the presence of a very large number of scales, and the complex transfer of energy between different scales, thus making any theoretical analysis challenging. To simplify the task, assumptions were adopted and permitted advances in understanding turbulence, but at the price of restricted generality. The most famous theory is that of Kolmogorov [1] and premises that small-scale turbulence at infinitely large Reynolds numbers is statistically independent of the large scales, and is locally stationary, homogeneous and isotropic. Under these assumptions, the statistical properties of the small scales should be determined universally by ν and $\langle \epsilon \rangle$ (the kinematic viscosity and the mean energy dissipation rate). Inertial range statistics (if the Reynolds number allows one to exist) are to be determined by $\langle \epsilon \rangle$ only. Therefore, implicit in this theory is the fact that, for Reynolds numbers sufficiently large:

- i) large and small scales are statistically separated;
- ii) the viscosity acts at the level of the smallest scales. Therefore, it acts at the smallest scales, where its role is to transform kinetic energy into heat.

Statement i) was, however, found as not being valid in 'real' flows, i.e. characterized by low and moderate Reynolds numbers, encountered in most engineering applications. Numerous experimental and numerical studies have indicated that the small scales are significantly affected by the large scales of the flow motion, [2], [3]. In addition, the effects of the anisotropic coherent structures on the small scales must be taken into account to understand the physics of real flows [4] [5]. All these studies were performed in flows involving homogeneous fluids, i.e. with the same thermo-physical properties.

Statement ii) is the concern of the present study, which we address in flows with

viscosity variations. The effects of viscosity and viscosity gradients are *a priori* expected to be felt only at the small scale level. However, it has been recently shown that, albeit for relatively small values of viscosity gradients, the effects may be present at any scale including both the smallest and the largest [6], [7], thereby modifying the mean velocity profile, among other large-scale statistics.

Talbot et al. ([8], [7]) have conducted an experimental study of a variable-viscosity jet. The fluids were propane and air, the latter being 3.5 more viscous than the propane core of the jet. The authors found that, in comparison with a classical air/air jet, the propane jet exhibited smaller values of the mean axial velocity at the same downstream position. This behaviour was explained both phenomenologically and analytically, by an increase of the viscous terms with respect to the inertial terms. Strong production of turbulence was also noted in the very near-field of the propane jet, thus producing velocity fluctuations and accelerating the trend towards self-similarity and isotropy. Therefore, statement ii) fails to be valid in flows involving heterogeneous fluids, namely with variable viscosity.

To the best of our knowledge, relatively little attention has been paid to the variable viscosity turbulent flows, which is most relevant for many practical applications (e.g. combustion, medical applications, geophysics). Moreover, in flows involving two fluids with different viscosities, the basic theory of turbulence clearly fails and many physical concepts should be carefully reconsidered.

The objective of the present investigation is to assess the effects of viscosity variations in a classical flow, the low-speed temporally evolving turbulent mixing layer, one of the simplest flows. For the particular purpose of our study, the temporal mixing layer (hereafter TML) involves two fluids with the same density. TML belongs to the family of turbulent free shear layers, which have been studied since the pioneering work of Brown and Roshko [9], followed by investigations of this configuration devoted to different issues, such as transition to turbulence, mixing efficiency, compressibility effects [10], [11], [12], [13], variable density effects [9], [14], [15]. Not the least, the effect of the trailing edge thickness of the splitter plate was also investigated in detail [16], [17], as well as sound generation [18].

Therefore, understanding, modeling and predicting the dynamics in variable-viscosity flows for a wide range of Reynolds numbers, is particularly important from both fundamental and practical applications viewpoints. This study is aimed at furthering our comprehension of variable-viscosity flows, by means of direct numerical simulations and statistical data analysis. We extend the range of applicability of canonical considerations by tackling some fundamental aspects of turbulent flow and mixing problems in the domain of variable-viscosity flow (VVF).

In this regard, a first key question is to be addressed that concern more particularly the role played by the viscosity variations on the mean velocity field. The question will be answered through a critical comparison between the VVF and a baseline case, a Constant Viscosity Flow (hereafter, CVF).

The paper is organized as follows. Section 2 is dedicated to the description of the numerical tool and the problem set-up. Section 3 examines the mean values of the velocity field, in tight connection with the flow morphology. Conclusions are drawn in Section 4.

2. Problem formulation and numerical method

2.1. Governing equations and numerics

The unsteady three-dimensional, Navier-Stokes equations, along with two-species transport equations are solved using an inhouse high-order explicit solver [19]. The

equations can be written under compressible and conservative form, namely

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\tau_{ij}) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p) u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i (-\tau_{ij})}{\partial x_j} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho Y_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho Y_\alpha u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho Y_\alpha V_{\alpha,j}) = 0, \quad (4)$$

where ρ is the density, $u_i \equiv (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ is the velocity vector, p is the pressure derived from the equation of state, E is the total energy, q_j is the heat flux. The summation convention applies for double roman indices. Y_α is the mass fraction of the species α (here, α is either 1 or 2). The Newtonian shear stress τ_{ij} and species diffusion velocity $V_{\alpha,j}$ write

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}; \\ V_{\alpha,j} &= -\mathcal{D}_\alpha \frac{1}{Y_\alpha} \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (5)$$

where μ is the dynamic viscosity of the mixture and \mathcal{D}_α is the molecular diffusivity of each species.

For the purpose of this study, the density and temperature are kept nearly constant. The binary molecular diffusivity of the species ($\mathcal{D}_{1,2} = \mathcal{D}_{2,1}$) is also constant. The Wilke formula [20], which is widely used in combustion and chemical engineering applications, is employed to determine the viscosity of the mixture in terms of the mass fraction, namely

$$\mu = \sum_{\alpha=1}^2 \left[\mu_\alpha \left(\frac{Y_\alpha}{W_\alpha} \right) \left(\sum_{\beta=1}^2 Y_\beta \phi_{\alpha\beta} / W_\beta \right)^{-1} \right], \quad (6)$$

where μ_α and W_α are the dynamical viscosity and the molecular mass of the α -th species and the function $\phi_{\alpha\beta}$ is defined such as [20]

$$\phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{W_\alpha}{W_\beta} \right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_\beta} \right)^{1/2} \left(\frac{W_\beta}{W_\alpha} \right)^{1/2} \right]. \quad (7)$$

The convective terms are approximated by the fifth-order weighted essentially non-oscillatory (WENO) scheme, while the diffusive terms are determined by means of a fourth-order compact central difference [?] [?]. The discrete equations are time-integrated by means of the explicit third-order total variation diminishing Runge-Kutta algorithm. Periodic boundary conditions are applied along the homogeneous (x and z) directions and a non-reflecting slip condition is imposed along the shear (y) direction.

2.2. Initial conditions

A sketch of the simulated TML is shown in Fig. 1. For the VVF configuration, a velocity-viscosity counter gradient is imposed; the upper stream is initialized with a zero velocity, $U_{upper} = 0$, and a high kinematic viscosity, ν_{high} , while the lower stream is initialized with a velocity, $U_{lower} = U_0$, and a low viscosity ν_{low} . The upper stream $(0, \nu_{high})$ and the lower stream (U_0, ν_{low}) meet each other and evolve in time.

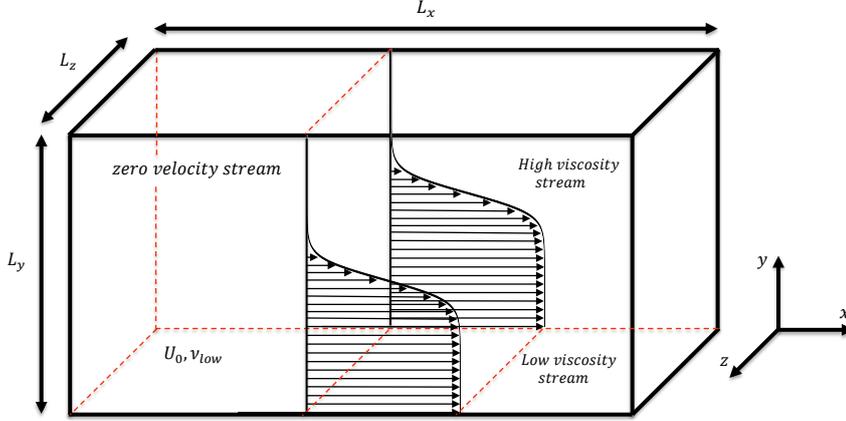


Figure 1. Computational domain. The origin of the axis ($x = 0, y = 0, z = 0$) is placed at the middle of the domain.

The CVF configuration is characterized by the kinematic viscosity ν_{low} in both streams. The initial Reynolds number defined as follows

$$Re_{\theta,0} = \frac{U_0 \times \delta_{\theta,0}}{\nu_{low}}, \quad (8)$$

where $\delta_{\theta,0}$ is the initial momentum thickness of the TML, kept fixed for all simulations. Thus, the parameters of the CVF are: the viscosity, the initial momentum thickness and the initial Reynolds number (the initial rapid velocity U_0 is calculated from the above parameters).

For VVF, the initial free stream velocity U_0 is calculated from the initial Reynolds number, defined as follows

$$Re_{\theta,0} = \frac{U_0 \times \delta_{\theta,0}}{\nu_{ref}}, \quad (9)$$

where ν_{ref} is the viscosity reference of the VVF flow. The reference viscosity is defined as arithmetic mean viscosity of the upper and lower streams of the mixing layer, i.e. $\nu_{ref} = 0.5(\nu_{high} + \nu_{low})$. For VVF, one disposes only of the mean value of Reynolds number whereas the Reynolds number is only roughly given by from Eq. (9). To better represent the physics of each stream, we define another Reynolds number that reflects the turbulence level of each side of the mixing layer, by taking into account the velocity, the characteristic length and the viscosity of each stream, as follows

$$Re_{upper,0} = \frac{U_{upper} \times \delta_{upper,0}}{\nu_{high}}; \quad (10)$$

$$Re_{lower,0} = \frac{U_{lower} \times \delta_{lower,0}}{\nu_{lower}}, \quad (11)$$

where $\delta_{upper,0}$ and $\delta_{lower,0}$ are characteristic length scales equal to half the initial mixing layer momentum thickness, $\delta_{upper,0} = \delta_{lower,0} = \delta_{\theta,0}/2$. The Reynolds number of the upper stream is equal to zero ($U_{upper} = 0$) whereas the Reynolds number of the lower stream is comparable to that of the CVF.

The Reynolds numbers expressed in Eqs. (8), (9) and (11) are specified for the investigated cases in Table 1. The DNS-R1 and DNS-R9-1 are initialized with same lower stream Reynolds number $Re_{lower,0}$ while DNS-R1 and DNS-R9-2 are initialized with $Re_{\theta,0}$ equal to 128 and 160 respectively (therefore, very nearly equal).

The reference velocity is the velocity of the lower stream U_0 . The initial value of the mean streamwise velocity is a hyperbolic tangent profile $\langle U \rangle(y)$, while the other mean velocity components are initially set to zero. Thus, at time $t = 0$

$$\begin{aligned} \langle U \rangle(y) &= \frac{1}{2} \left[U_0 - U_0 \tanh\left(\frac{y}{2}\right) \right]; \\ \langle V \rangle &= \langle W \rangle = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Changing the \tanh function into the erf function does not affect the conclusions outlined here, because both profiles ensure the existence of an inflection point at the same space location as for the mean viscosity profile [21]. For CVF and VVF simulations, the two streams are at the same pressure ($P = 1 \text{ atm}$), temperature ($T = 293\text{K}$) and density ($\rho = 1.314 \text{ kg/m}^3$). The dynamic viscosity of CVF is $\mu_{low} = 0.5 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$. For VVF, the dynamic viscosity of the upper stream is $\mu_{high} = 4.5 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$, and that in the lower stream $\mu_{low} = 0.5 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$. These simulation parameters are summarized in Table 1.

To initiate turbulence, initial fluctuations are superimposed to the mean velocity field. The initial fluctuations are generated using a 3D digital filtering technique. This procedure starts from prescribed Reynolds stress tensor and length scales and generates the corresponding fluctuating velocity field at the initial time. The length scales are chosen equal to $\delta_{\omega,0}$ (the vorticity thickness, defined in Subsection 2.3) along each direction. The Reynolds stress tensor is selected such as to apply low initial turbulence intensities ($\sqrt{\langle u'^2 \rangle}/U_0 = 0.020$, $\sqrt{\langle v'^2 \rangle}/U_0 = 0.013$, $\sqrt{\langle w'^2 \rangle}/U_0 = 0.012$), where ' denotes fluctuations of u , v and w .

2.3. Simulation parameters

The DNS cases investigated here are DNS-R1, DNS-R9-1 and DNS-R9-2. The parameters of DNS-R9-(1 and 2) are chosen to analyse the effects of viscosity variations in the flow, whilst DNS-R1 provides a baseline case. The viscosity ratio is defined as

$$R_\nu = \nu_{high}/\nu_{low}, \quad R_\nu \geq 1, \quad (13)$$

where ν_{high} and ν_{low} are the kinematic viscosities of the upper stream (high viscosity) and the lower stream (low viscosity). The mixture is characterized by $R_\nu = 9$ for VVF and $R_\nu = 1$ for CVF. For all the investigated DNS, the initial vorticity thickness is $\delta_{\omega,0} = 4\delta_{\theta,0}$.

The numerical challenge is twofold. First, the grid resolution must be sufficiently high to correctly capture the TML dynamics from its initial stage. Second, the computational domain must be sufficiently wide to allow turbulence to freely develop. The grid sizes and the computational domain lengths are summarized in table 2. These are identical to those used in the DNS of Pantano & Sarkar

Case	DNS-R1		DNS-R9-1		DNS-R9-2	
	Upper	lower	Upper	lower	Upper	lower
μ ($\mu Pa.s$)	5	5	45	5	45	5
U ($m.s^{-1}$)	0	33	0	33	0	132
R_ν	1.00		9.00		9.00	
$Re_{\delta_{\theta,0}}$	160		32		128	
$Re_{\delta_{lower,0}}$	80		80		320	
$\delta_{\theta,0}$ (μm)	18.4		18.4		18.4	
P (atm)	1.00		1.00		1.00	
T (K)	293		293		293	
ρ ($kg.m^{-3}$)	1.31		1.31		1.31	

Table 1. Main parameters of the DNS simulations

Case	$N_x \times N_y \times N_z$	$L_x \times L_y \times L_z$	Δy_{min} (μm)	$\Delta x = \Delta z$ (μm)
Investigated DNS	$768 \times 720 \times 192$	$345 \times 172 \times 86$	1.05	8.26

Table 2. Simulation parameters. L_x , L_y , and L_z denote computational domain lengths normalized by the initial momentum thickness $\delta_{\theta,0}$. N_x , N_y and N_z denote the number of grid points along x , y and z directions, respectively. Δy_{min} is the space resolution along the non-homogeneous direction y , in the shear region.

[22]. The mesh size is uniform for the homogeneous directions x and z , while the mesh along the y direction is refined in the shear region, where the resolution is of $1.05 \mu m$, thus ensuring a correct discretization of the initial momentum thickness (≈ 18 mesh points).

The evolution of the TML will be expressed as a function of the normalized time τ defined as

$$\tau = \frac{tU_0}{\delta_{\theta,0}}. \quad (14)$$

Furthermore, it is important to make sure that the computational domain is sufficiently wide along x and z directions, for the large scales of the flow to be accounted correctly. This requirement is fulfilled, as supported for instance by the values of the two-point autocorrelation of any function α ($\alpha \equiv u, v$ or w), viz.

$$R_{\alpha\alpha}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \alpha'_k(\vec{x}) \alpha'(\vec{x} + \vec{r}). \quad (15)$$

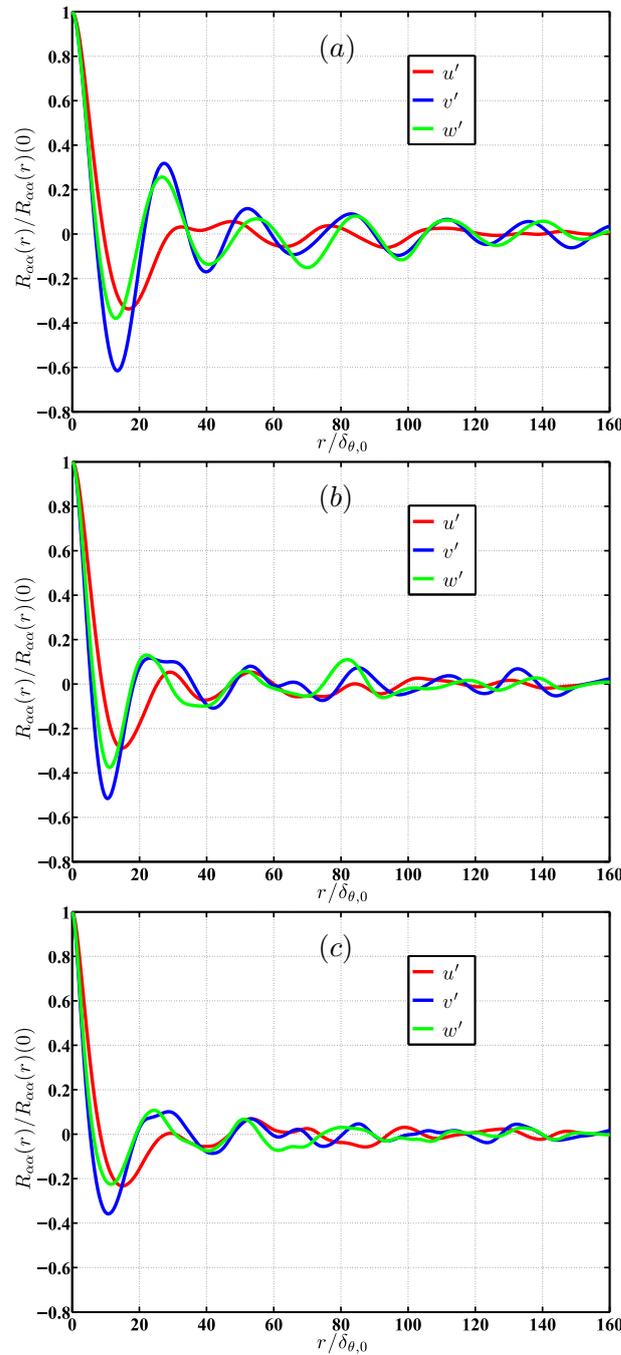


Figure 2. Autocorrelation coefficients, for dimensionless time $\tau = 100$ in the streamwise direction for (a) DNS-R1, (b) DNS-R9-1 and (c) DNS-R9-2. The oscillations for high values of the scale r suggest the presence of coherent structures in the flow, the maximum peak is obtained for DNS-R1 for the normal velocity autocorrelations.

Here, prime denotes fluctuations, $r = |\vec{r}| = k\Delta$, $k \in [1, N]$, and $N\Delta$ represents half of the computational domain along the considered direction.

Values of the two-point autocorrelations $R_{\alpha\alpha}(r)/R_{\alpha\alpha}(0)$ are shown in Figs. 2 and 3 at dimensionless time $\tau = 100$, as a function of the separation r , considered along the streamwise direction x and the spanwise direction z respectively. These functions are equal to 1 for $r = 0$ and fall to zero after distances that may be different from one function to another. Typically, they decay to 0 over distances such as $L_x/2$ and $L_z/2$, thus ensuring that the streamwise as well as the spanwise extents of the computational domain are sufficiently wide to allow the development

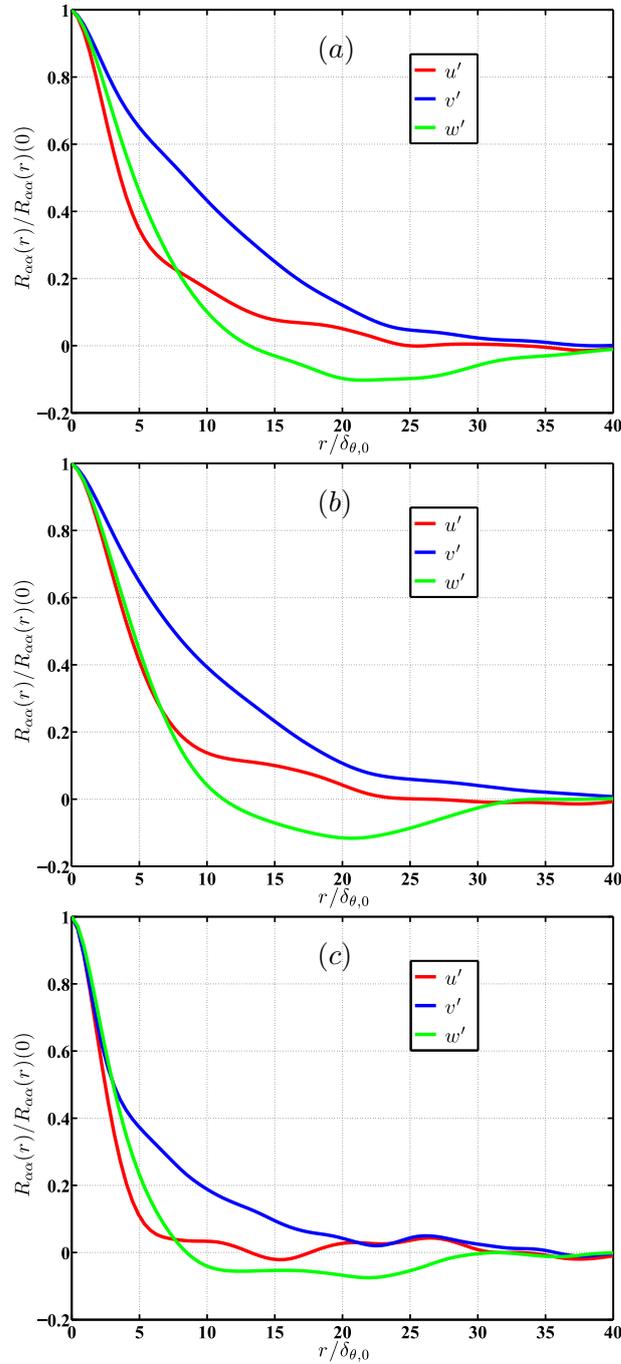


Figure 3. Autocorrelation coefficients, for dimensionless time $\tau = 100$ in the spanwise direction for (a) DNS-R1, (b) DNS-R9-1 and (c) DNS-R9-2.

of the large scales of the flow. Note that at dimensionless time $\tau = 100$ and for the three investigated DNS, all the streamwise correlation coefficients (see Fig. 2) exhibit quasi-periodic oscillations, thereby suggesting the presence of quasi-coherent, periodic motions. However, this periodic motion is clearly identified for DNS-R1, whereas DNS-R9-1 and DNS-R9-2 show a less coherent motion. This behaviour suggests that VVF flows shows an accelerated transition to turbulence regime where the quasi-coherent, periodic motions are less and less visible. Along the spanwise direction z , the periodicity is barely noticeable, suggesting that the coherent rolls characterized by a concentrated vorticity in the plane (x, y) . The highest correlation is observed for the v component, most likely in tight connection

with the energy injection along y direction.

3. Influence of viscosity gradients on the mean velocity profile

In this section, results are presented for low-order statistics of the velocity field, for both the VVF and the baseline case, CVF. First, the global morphology of VVF is described (subsection 3.1). The mean velocity field will be analysed through the mean momentum transport equation (subsection 3.2).

3.1. Some aspects of the morphology of the TML

The growth rate of the TML is best represented by the momentum thickness δ_θ , which evolves in time.

Before defining the momentum thickness, it is appropriate to mention that statistics are calculated by averaging a fluctuating quantity e.g. α over the homogeneous planes (x, z) at any time t . Therefore, the averages depend on two variables (y and t), i.e. $\langle \alpha \rangle(y, t)$. In particular, the averaged longitudinal mean velocity $\langle U \rangle$ is a function of both y and t . Therefore, the TML momentum thickness, δ_θ , is defined as

$$\delta_\theta(\tau) = \int_{-L_y/2}^{+L_y/2} \frac{[\langle U \rangle(y, \tau)][U_0 - \langle U \rangle(y, \tau)]}{U_0^2} dy. \quad (16)$$

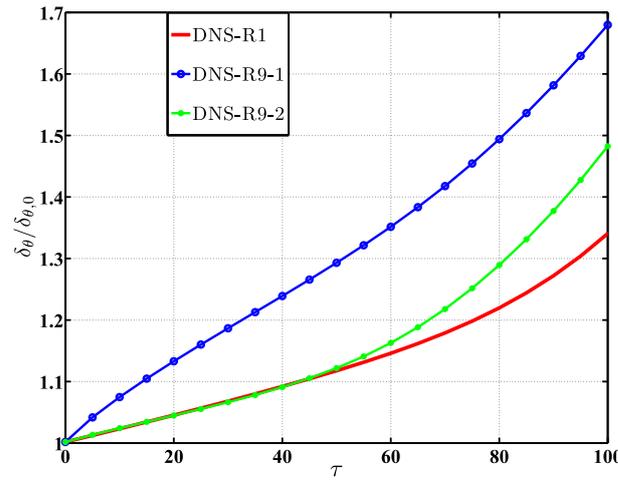


Figure 4. Temporal evolution of the TML momentum thickness, at early stages of the flow.

Figure 4 shows the temporal evolution of the mixing layer momentum thickness. First, the momentum thickness grows faster for VVF (DNS-R9-1 and DNS-R9-2) than CVF (DNS-R1), with remarkable greater values for DNS-R9-1. We recall here that the VVF simulations have the same viscosity ratio ($R_\nu = 9$), but initialized with different Reynolds number ($Re_{\delta_{lower,0}}$ for DNS-R9-1, see Table 1). For VVF flows, the difference in the temporal evolution of the momentum thickness suggests that the initial Reynolds number is a critical parameter that modifies the later evolution of the flow, despite the same viscosity ratio. Furthermore, the enhancement of the mixing layer momentum thickness for VVF implies that the latter is affected to a larger extent by the same (initial) momentum.

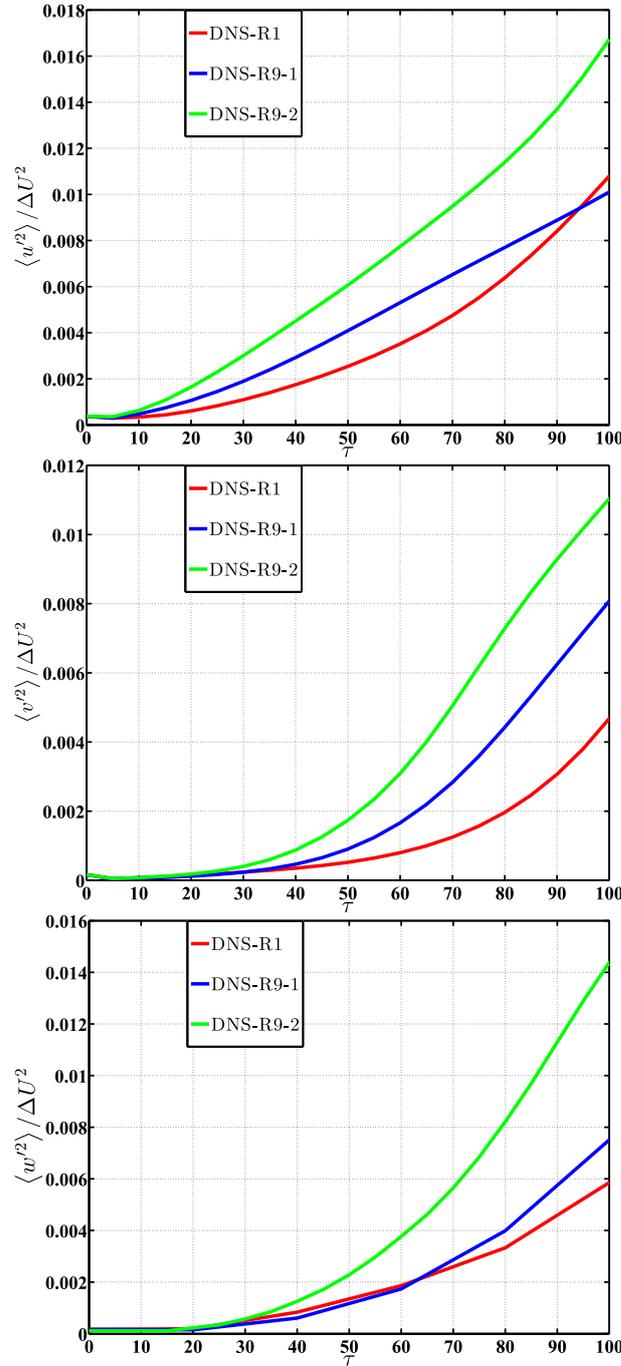


Figure 5. Distributions of I_x (top), I_y (middle) and I_z (bottom), as functions of $y/\delta_{\theta,0}$, for different values of dimensionless time τ . Solid lines: VVF; points (CVF).

This behaviour is clearly attributable to the differences in the mean streamwise velocity $\langle U \rangle$, all the other parameters being the same for both VVF and CVF. It is then clear that the longitudinal mean velocity $\langle U \rangle(y, \tau)$ is modified by viscosity effects. This is an *a priori* surprising result, which may dispel the myth that "viscosity is a small-scale quantity with small-scale effects". This question is investigated to some extent in subsection (3.2), where the transport equation for $\langle U \rangle(y, \tau)$ is analyzed for both VVF and CVF.

Other differences are also observed for VVF. The normalized Reynolds stress $R_{ii} = \langle u_i'^2 \rangle / U_0^2$ ($i=1, 2$ and 3 and double indices indicate summation); $R_{11} = \langle u'^2 \rangle / U_0^2$, $R_{22} = \langle v'^2 \rangle / U_0^2$ and $R_{33} = \langle w'^2 \rangle / U_0^2$, which are functions of y and di-

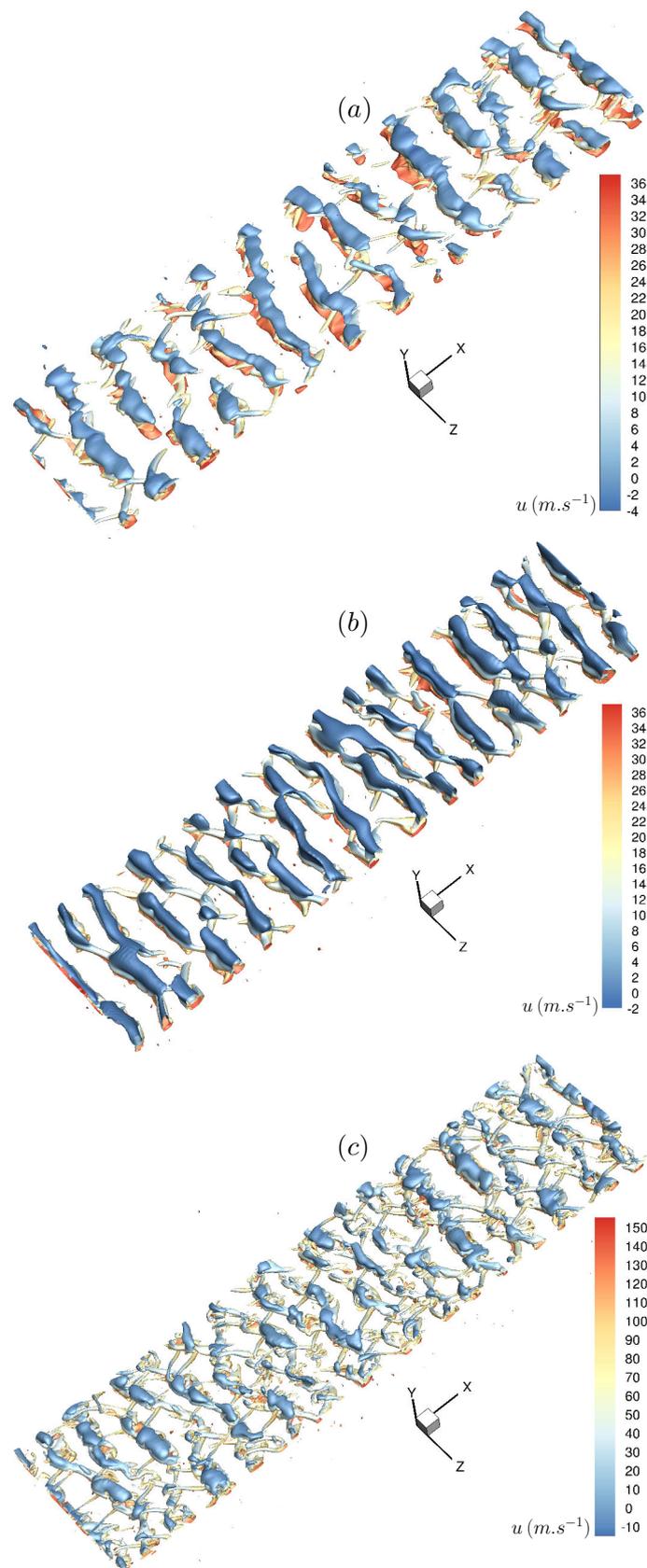


Figure 6. Iso-surfaces of the dimensionless Q criterion ($Q=0.2$) at $\tau = 100$ colored by the streamwise velocity for (a) DNS-R1, (b) DNS-R9-1 and (c) DNS-R9-2.

dimensionless time τ , have been calculated for the early stages of the flow. Figure 5 illustrates R_{11} , R_{22} and R_{33} as functions of τ , for both CVF and VVF simulations.

It is obvious that Reynolds stress components R_{ii} are more pronounced for VVF (DNS-R9-1 and DNS-R9-2) than CVF (DNS-R1), with remarkable greater values for DNS-R9-2 corresponding to an enhancement of fluctuations and mixing by the viscosity variations. This behaviour was investigated through the analysis of the turbulent kinetic energy budget for both CVF and VVF in [?].

Figure 6 shows the dimensionless Q criterion isosurfaces ($Q = 0.2$) for the three instigated DNS at time $\tau = 100$, this criterion identifies vortices as flow regions with positive second invariant of the velocity gradient tensor [?]. The Q criterion is defined as follows

$$Q = \frac{\omega_{ij}\omega_{ij} - s_{ij}s_{ij}}{\omega_{ij}\omega_{ij} + s_{ij}s_{ij}}, \quad (17)$$

where $s_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$ and $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$.

The results show that the dynamic structure of the mixing layer is completely different for DNS-R9-2 than the two others simulations at the same time $\tau = 100$. Indeed, DNS-R9-2 contains much smaller structures related to a stronger enstrophy stretching in the flow. Moreover, DNS-R9-2 shows up a significant number of streamwise vortices called "ribs", which connect two successive spanwise rollers and are responsible for the transition from laminar to turbulent regime. However, DNS-R9-1 and DNS-R1 show comparable structure dynamics, suggesting that the VVF flow is damped by the higher viscosity at time $\tau = 100$ because the initial momentum thickness Reynolds number $Re_{\theta,0} = 32$ is very small compared to CVF one.

3.2. Longitudinal mean velocity

As already emphasized, the increased growth rate of the TML for VVF is the result of the particular spatio-temporal distribution of the mean longitudinal velocity field. Indeed, the TML momentum thickness depends, as suggested by Eq. (16), on the instantaneous mean velocity profile $\langle U \rangle (y, \tau)$.

Figure 7 shows the temporal evolution of the mean velocity $\langle U \rangle$ for both CVF and VVF situations at dimensionless times $\tau = 20$ and $\tau = 100$. First, at $\tau = 20$ the velocity of the lower stream ($y/\delta_{\theta,0} < 0$) is less affected by viscosity variations than the velocity of the upper stream ($y/\delta_{\theta,0} > 0$). Indeed, the upper stream is accelerated for VVF compared to CVF. At the same time, the velocity at center of the mixing layer ($y/\delta_{\theta,0} = 0$) is characterized by an enhanced deceleration for VVF. As noticed for the mixing layer momentum thickness, the velocity profile of the DNS-R9-1 is more affected by viscosity variations in contrast to DNS-R9-2. Furthermore, at time $\tau = 100$ the lower stream is decelerated and the upper stream is accelerated for VVF. However, the velocity at the center of the mixing layer is, for DNS-R9-2, very close to that of DNS-R1.

The modification of velocity profile for VVF is better illustrated in Fig. 8, where the profiles of the mean velocity gradients $\left(\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right)$ normalized with the initial and maximal velocity gradient $\left(\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right)_{max,t=0}$ are shown, for times $\tau = 20$ and $\tau = 100$. At time $\tau = 20$, it is obvious that in VVF, the profiles are asymmetric, as a result of the deceleration/acceleration of the rapid/zero-velocity fluids, respectively. The maximal values of velocity gradients are larger than the initial value and

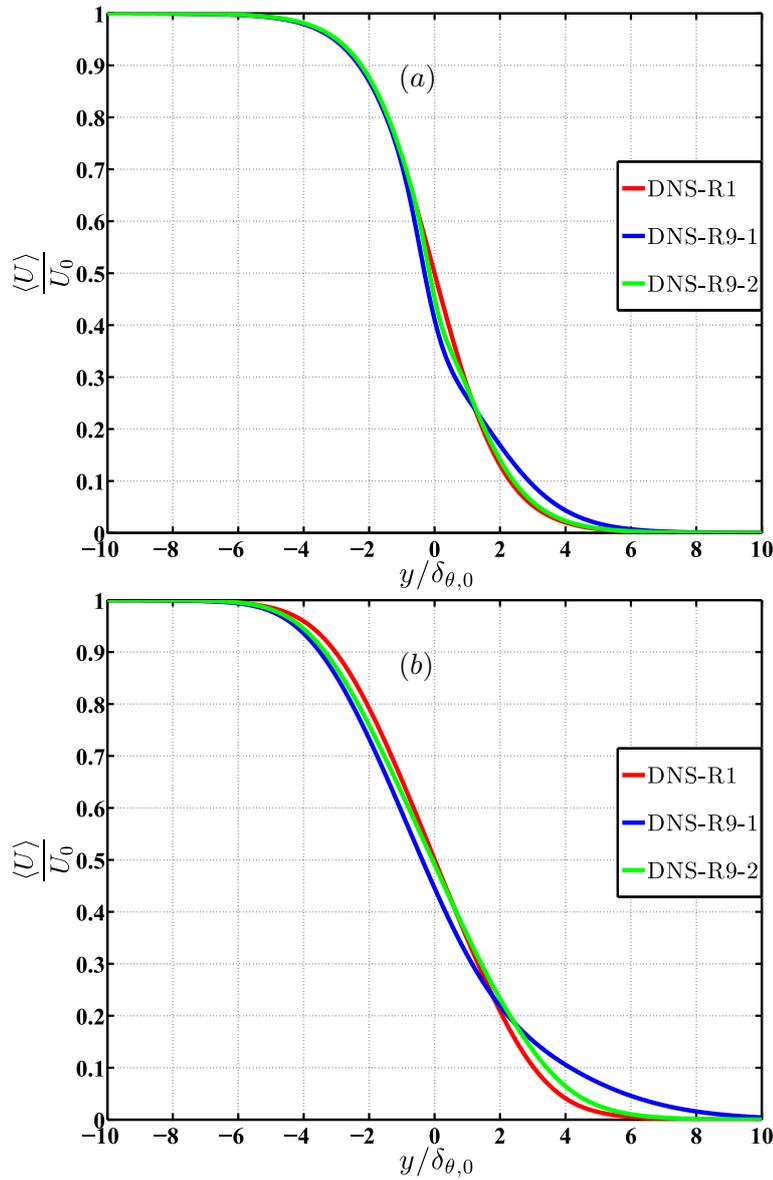


Figure 7. Longitudinal mean velocity profile for different cases at dimensionless time (a) $\tau = 20$ and (b) $\tau = 100$, as functions of $y/\delta_{\theta,0}$.

are located on the rapid stream side. These are fully correlated with the location where $\partial\langle\nu\rangle/\partial y$ is maximum/minimum. However, at $\tau = 100$ the velocity gradient is more important for CVF than VVF. The scenario of variable viscosity flows is the following: at early times, VVF produces intense velocity gradients and therefore fluctuations. At later times, the velocity gradients decrease more rapidly for VVF than CVF.

As mentioned above, the mean longitudinal velocity at the center of the mixing layer is highly affected by viscosity variations, as shown in Fig. 9. The dimensionless velocity decreases up to 0.4 for DNS-R9-1 while it remains constant and equal to 0.5 for DNS-R1.

In the following, to unravel the intricacies associated with viscosity variations at large scales in TML, we pay attention to the mean momentum transport equations for VVF. The starting point is the Navies-Stokes equations, which can be written

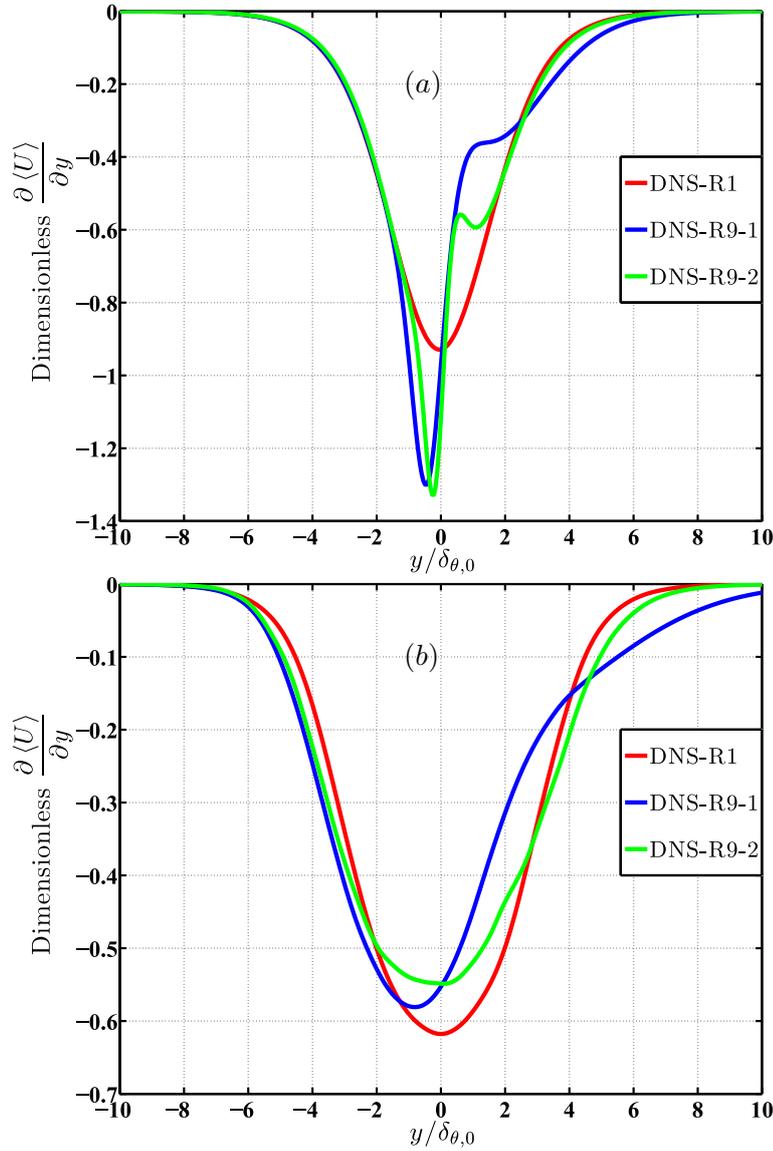


Figure 8. Gradient of the longitudinal mean velocity for different cases at dimensionless time (a) $\tau = 20$ and (b) $\tau = 100$, as functions of $y/\delta_{\theta,0}$.

for VVF with constant density, as

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} [\nu s_{ij}], \quad (18)$$

where u_i is the instantaneous velocity component along the i -th direction. Developing the third term in the right hand side of Eq. (18), considering that the kinematic viscosity ν is a space-time variable, and using incompressibility assumption ($\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$), the full Navier-Stokes equations can be written as follows

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right], \quad (19)$$

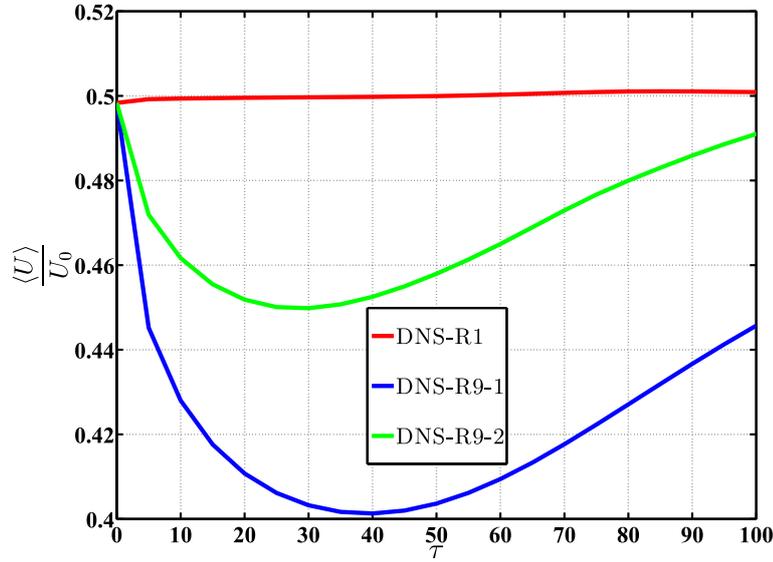


Figure 9. Temporal evolution of the longitudinal mean velocity at the center of the TML, $y = 0$.

that finally yields

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + 2 \frac{\partial \nu}{\partial x_j} s_{ij}. \quad (20)$$

The Navier-Stokes equations for VVF with constant density, Eq. (20), involve an additional term $2 \frac{\partial \nu}{\partial x_j} s_{ij}$ which explicitly accounts for viscosity gradients. Using vectorial notations, with $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ and $\vec{u} = (u, v, w)$, Eq. (20) becomes

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + 2 \nabla \nu \cdot \vec{s}, \quad (21)$$

where $\nabla \nu$ is the viscosity gradient and $\nabla \nu \cdot \vec{s}$ is the contraction of the viscosity gradient with the strain-rate tensor.

The mean momentum equations can be written by space-averaging the instantaneous Navier-Stokes equations. Note that $u_i = \langle U_i \rangle_{xz} + u'_i$, $p = \langle P \rangle_{xz} + p'$, ρ is constant, and ν is space-time variable with $\nu = \langle \nu \rangle_{xz} + \nu'$ where $\langle \cdot \rangle_{xz}$ is the Reynolds average (the mean of the fluctuating quantity being equal to zero $\langle \cdot \rangle_{xz} = 0$) that, in our case, is obtained by plane-averaging along the periodic x and z directions.

For the sake of lightness, the subscript " xz " is dropped off and the instantaneous mean momentum equation writes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \langle \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + \left\langle \nu' \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \\ \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right] + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Given that x and z are homogeneous directions, the space-averages " $\langle \cdot \rangle$ " depend

only on y . Therefore,

$$\frac{\partial \langle \cdot \rangle}{\partial x} = \frac{\partial \langle \cdot \rangle}{\partial z} = 0. \quad (23)$$

The continuity equation further writes

$$\frac{\partial \langle V \rangle}{\partial y} = 0, \quad (24)$$

then, because $\langle V \rangle = 0$ at $y = 0$, it follows that

$$\langle V \rangle = 0 \quad (25)$$

at any location y .

Taking into account relations (23) and (25), the mean momentum equation is

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \langle v' u'_i \rangle = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \langle \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial y \partial y} + \left\langle \nu' \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \\ \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Under a compact form, the mean momentum equation becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \langle v' u'_i \rangle = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \langle \nu \rangle \nabla_{j=2}^2 \langle U_i \rangle + \langle \nu' \nabla^2 u'_i \rangle + \\ \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial y} + \langle \nabla \nu' \cdot (s'_{ij}) \rangle \end{aligned} \quad (27)$$

where s'_{ij} represents the fluctuation part of the instantaneous tensor s_{ij} and $\nabla_{j=2}^2$ represents the second term of the Laplacian ∇^2 operator.

Finally, the mean transport equation for longitudinal velocity component $\langle U \rangle$ is the following

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} = -\frac{\partial \langle u' v' \rangle}{\partial y} + \langle \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \\ + \left\langle \nu' \frac{\partial^2 u'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x} \right\rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

Equation (28) contains, with respect to the classical CVF equations, supplementary terms which are products between mean viscosity gradients and mean velocity gradients, e.g. $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$.

The terms in Eq. (28) are rescaled by $\delta_{\theta,0}/U_0^2$ and plotted in Figs. 10 and 11 for both CVF and VVF flows, at two different times, $\tau = 20$ and $\tau = 100$. Terms are normalised by $\delta_{\theta,0}/U_0^2$. The right-hand-side of Eq. (28) is represented by the green

curve and should be equal to the temporal derivative of the mean velocity $\langle U \rangle$ (orange curve) to balance the momentum budget. For both cases, the budgets are reasonably closed, thus illustrating the fact that our calculations were able to take into account all the effects associated to the particular physics of variable-viscosity flow.

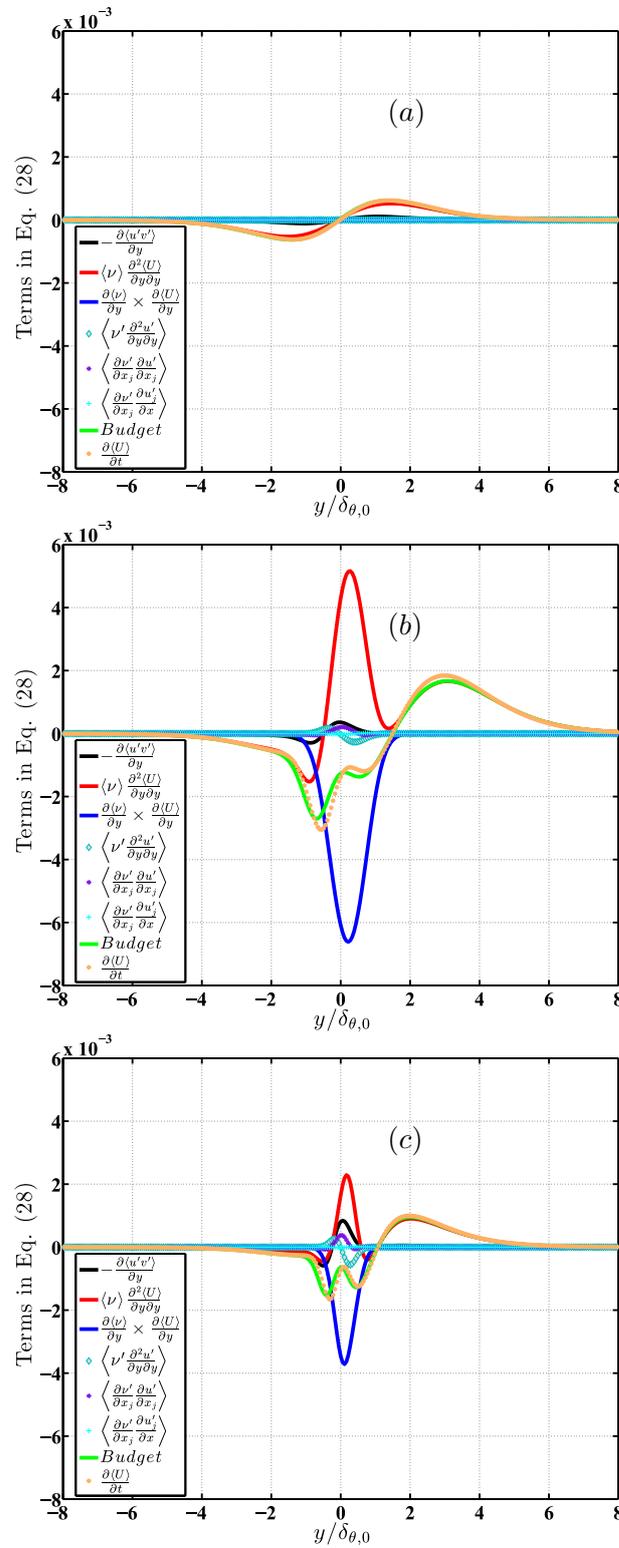


Figure 10. Terms in the transport equation for $\langle U \rangle$ at $\tau = 20$. (a) DNS-R1, (b) DNS-R9-1 and (c) DNS-R9-2.

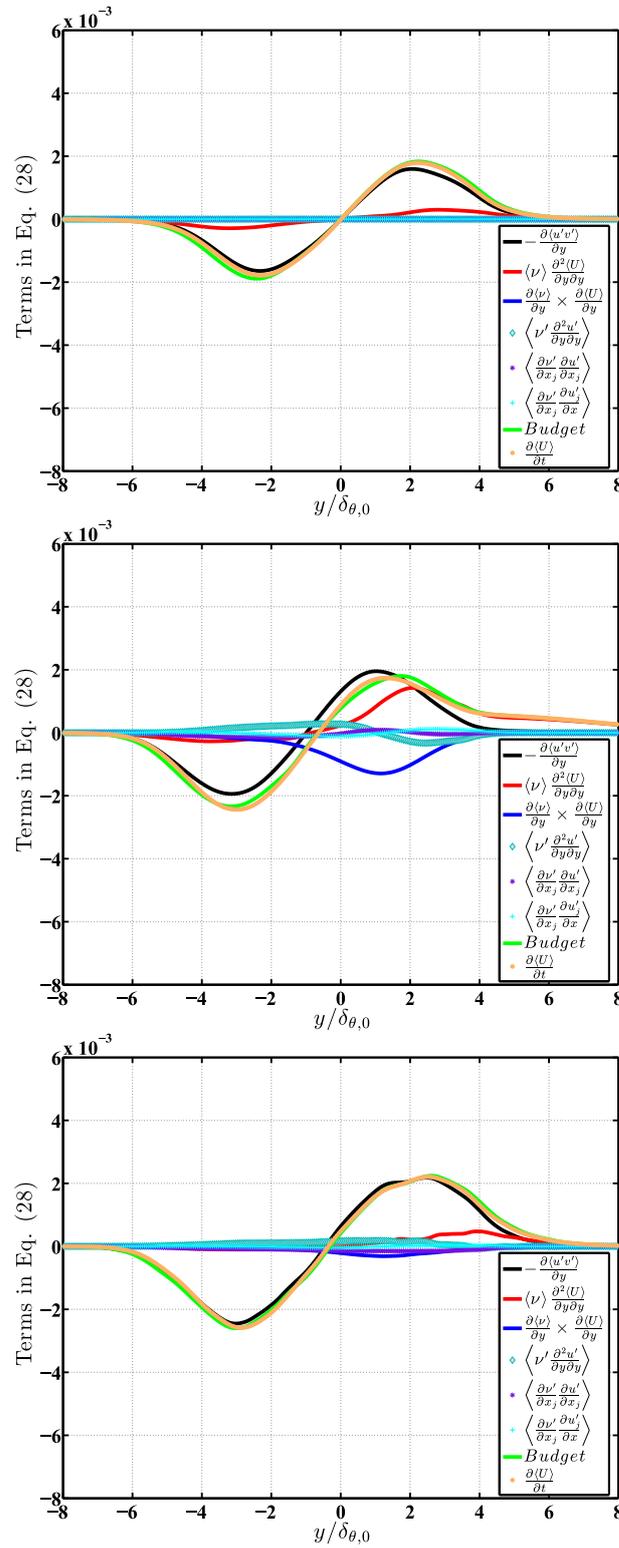


Figure 11. Terms in the transport equation for $\langle U \rangle$ at $\tau = 100$. (a) DNS-R1, (b) DNS-R9-1 and (c) DNS-R9-2.

The different contributions are discussed hereafter.

- Term $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t}$.

The time-derivative contribution (represented by the orange curve) is important because of the temporal-growing of the mixing layer. This term is more important

for VVF case, reflecting an enhanced decrease of the mean longitudinal velocity on the side of the rapid stream, in contrast with the zero-velocity stream that is accelerated more than in the CVF case. This behaviour is simply due to the fact that the zero-velocity stream transports more viscous fluid, which tends to keep this part of the flow at low velocity.

- Term $-\frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle$.

The normal gradient of the shear stress $\langle u'v' \rangle$ is negligible for the dimensionless time $\tau = 20$ for DNS-R9-2, as shown in Fig. 10. This term significantly grows when the TML evolves and transition towards turbulence occurs. It is interesting to note that at $\tau = 100$ (Fig. 11), the peak of the fluctuating velocity gradients is still more important for VVF than CVF, despite the fact that the investigated DNS starts with the same initial fluctuations (Section 2.1). This is corroborated by the fact that the kinematic viscosity ν acts as an active scalar on the flow, here enhancing the production of the velocity fluctuations.

- Term $\langle \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial x_j \partial x_j}$.

For CVF, the mean viscosity $\langle \nu \rangle$ is equal to ν_{low} (low viscosity for the upper and lower streams), whereas the Laplacian of the mean velocity $\langle U \rangle$ is more important for VVF, as illustrated in Fig. 7. Therefore, the correlation between the mean viscosity and the Laplacian of the mean velocity, i.e. $\langle \nu \rangle \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial x_j \partial x_j}$, is stronger for VVF than for CVF.

- Terms $\left\langle \nu' \frac{\partial^2 u'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$, $\left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial u'}{\partial x_j} \right\rangle$ and $\left\langle \frac{\partial \nu'}{\partial x_j} \frac{\partial v'}{\partial x} \right\rangle$.

The terms depending on viscosity fluctuations, i.e. $\left\langle \nu' \frac{\partial^2 u'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$ are naturally identically zero for CVF. Conversely, for VVF, the viscosity gradients create viscosity fluctuations at small-scale level, at least at early time of the flow. These terms are not significant for VVF, neither at $\tau = 20$, nor at $\tau = 100$. One possible explanation of this result stands in inhibition of viscosity fluctuations at the small-scale level by the strong anisotropic shear of the investigated TML.

- Term $\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y}$.

This term is identically zero for CVF ($\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} = 0$). For VVF, it is the most important at time $\tau = 20$, and it is significant at time $\tau = 100$. Term $\left(\frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} \cdot \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right)$ is a large-scale quantity that represents the product between velocity and viscosity gradients. Its sign is negative for the investigated, counter-gradient, configuration.

4. Conclusions

We have provided rigorous evidence of qualitative and quantitative differences among Variable-Viscosity Flow (VVF) and Constant-Viscosity-flow CVF, with the same initial conditions (the same initial mean longitudinal velocity and fluctuations), but with drastic differences between the viscosity of the involved fluids. For CVF, both slow and rapid stream are characterized by the same viscosity, whereas for VVF case the slow stream is $R_\nu = 9$ more viscous than the rapid one. The current DNS have highlighted the following features of the flow, at least at the initial stages of the flow.

i) The morphology of the VVF is significantly affected by viscosity gradients. Turbulence initiates via quasi-2D streamwise rolls, with a length comparable with the

width of the numerical domain. The diameter of these structures is first smaller for VVF than for CVF, followed by an increase of their size at later times of the simulation. The latter effect is most likely the result of the increased local viscosity in the TML, thus diffusing the local enstrophy. These rolls act as obstacles for the rapid stream, in the wakes of which fluctuations are born at smaller scales, thus supporting the possibility that small-scale turbulence is enhanced for VVF, [?].

ii) As a result of the mixing that progressively takes place between the viscous and less viscous (rapid) fluid, the longitudinal mean velocity is seriously modified over lateral distances that are more pronounced for VVF than CVF. This results in an increased value of the TML momentum thickness (up to 40% larger).

iii) The temporal evolution of the longitudinal mean velocity has been assessed through its transport equation, in which terms revealing correlations between viscosity and velocity gradients have been highlighted and quantified in this flow.

These effects were quantified for a given value of the viscosity ratio (here, of 9) and for a geometrical configuration called 'counter-gradient', i.e. the product between the gradients along the inhomogeneous direction y of the longitudinal mean velocity and the viscosity, e.g. $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \cdot \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} < 0$, corresponding to the rapid stream which is here less viscous. Whether or not there is an important role played by the value itself of R_ν is subject of current investigation and will be reported elsewhere. As far as a "co-gradient" geometrical configuration is concerned $\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \cdot \frac{\partial \langle \nu \rangle}{\partial y} > 0$, it is reasonable to expect that the effects will strongly depend on the competition between values of the rapid stream velocity and those of the local (larger) values of the viscosity. It is possible that a rapid mixing of the two streams be reached after some time, the value of which obviously depends on the exact values of the velocity and viscosity (large-scale) gradients.

Acknowledgements. The support of ANR "Agence Nationale de la Recherche" under grant ANR-12-BS09-0016-01 (MUVAR project) is gratefully acknowledged.

References

- [1] A.N. Kolmogorov, *Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 32(1) (1941), pp. 16–18.
- [2] L. Danaïla, R.A. Antonia, and P. Burattini, *Progress in studying small-scale turbulence using 'exact' two-point equations.*, New Journal of Physics 6 (2004), p. 128.
- [3] L. Danaïla, J.F. Krawczynski, F. Thiesset, and B. Renou, *Yaglom-like equation in axisymmetric anisotropic turbulence*, Physica D: Nonlinear Phenomena 241 (2012), pp. 216–223.
- [4] F. Thiesset, L. Danaïla, R.A. Antonia, and T. Zhou, *Scale-by-scale energy budgets which account for the coherent motion*, in *Journal of Physics: Conference Series*, 2011.
- [5] F. Thiesset, L. Danaïla, and R.A. Antonia, *Dynamical effect of the total strain induced by the coherent motion on local isotropy in a wake*, J. Fluid Mech. 720 (2013), pp. 393–423.
- [6] B. Talbot, *Mélange et dynamique de la turbulence en écoulements libres à viscosité variable*, INSA de Rouen, 2009.
- [7] B. Talbot, L. Danaïla, and B. Renou, *Variable-viscosity mixing in the very near field of a round jet*, Physica Scripta T155 (2013), p. 014006.
- [8] B. Talbot, N. Mazellier, B. Renou, L. Danaïla, and M. Boukhalfa, *Time-resolved velocity and concentration measurements in variable-viscosity turbulent jet flow*, Experiments in Fluids 47 (2009), pp. 769–787.
- [9] G.L. Brown, and A. Roshko, *On density effects and large structures in turbulent mixing layers*, Journal of Fluid Mechanics 64 (1974), pp. 775–816.
- [10] G. Elliott, and M. Samimy, *Compressibility Effects in Free Shear Layers*, Physics of Fluids 2 (1990), pp. 1231–1240.
- [11] D. Pullin, and G. O'Reilly, *Structure and stability of the compressible Stuart vortex*, Journal of Fluid Mechanics 493 (2003), pp. 231–254.
- [12] B. Jonathan, S. Freund, S. Lele, and P. Moin, *Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer. Part 1. Turbulence and growth rate*, Journal of Fluid Mechanics 421 (2000), pp. 229–267.
- [13] D. Papamoschou, and S.K. Lele, *Vortex-induced disturbance field in a compressible shear layer*, Physics of Fluids 5 (1993), p. 1412.

- [14] P.E. Dimotakis, *On the convection velocity of turbulent structures in supersonic shear layers*, AIAA Journal 91 (1991), p. 1724.
- [15] G. Lu, and S. Lele, *On the density ratio effect on the of a compressible mixing layer*, Physics of Fluids 6 (1994), p. 1073.
- [16] R. Mehta, *Effect of velocity ratio on plane mixing layer development: Influence of the splitter plate wake*, Experiments in Fluids 10 (1991), pp. 194–204.
- [17] S. Laizet, S. Lardeau, and E. Lamballais, *Direct numerical simulation of a mixing layer downstream a thick splitter plate*, Physics of Fluids 22 (2010), p. 015104.
- [18] H. Masayuki, T. Michihisa, and R. Leung, *Numerical simulation of sound generation in a mixing layer by the finite difference lattice Boltzmann method*, Computers and Mathematics with Applications 59 (2010), pp. 2403–2410.
- [19] A. Chaudhuri, A. Hadjadj, A. Chinnayya, and S. Palerm, *Numerical Study of Compressible Mixing Layers Using High-Order WENO Schemes*, Journal of Scientific Computing 47 (2011), pp. 170–197.
- [20] R. Reid, J. Prausnitz, and B. Poling *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill, Inc., New York, New York, 1987.
 - A. Hadjadj, H.C. Yee, and B. Sjogreen, *LES of temporally evolving mixing layers by an eighth-order filter scheme*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 70 (2012), pp. 1405–1427.
 - H. Yee, B. Sjogreen, and A. Hadjadj, *Comparative Study of Three High Order Methods for LES of Temporally Evolving Mixing Layers*, (2012).
- [21] A. Harang, O. Thual, P. Brancher, and T. Bonometti, *Kelvin-Helmholtz instability in the presence of variable viscosity for mudflow resuspension in estuaries*, Environ Fluid Mech. 14 (2014), pp. 743–769.
- [22] C. Pantano, and S. Sarkar, *A study of compressible effects in the high -speed turbulent shear layer using direct simulation*, Journal of Fluid Mechanics 451 (2002), pp. 329–371.

Acronymes

CHOC-WAVES CHOC-WAVES Compressible High-Order Code using Weno Adaptive Stencils.

DNS Simulation Numérique Directe ou *Direct Numerical Simulation*.

ENO Essentially Non-Oscillatory.

TKE Énergie cinétique turbulente ou *Turbulent Kinetic Energy*.

WENO WENO Weighted Essentially Non-Oscillatory.

WENO-BWO WENO-BWO Weighted Essentially Non-Oscillatory Bandwidth Optimized.

Symboles

c_g Vitesse sonique du courant rapide de la couche de mélange.

c_p Vitesse sonique du courant lent de la couche de mélange.

δ_θ Épaisseur de quantité de mouvement de la couche de mélange.

δ_ν Épaisseur du champ de viscosité (scalaire actif) de la couche de mélange.

δ_T Épaisseur du champ de température (scalaire) de la couche de mélange.

ΔU Différence des vitesses longitudinales $U_g - U_p$.

Δu_i Différence des vitesses fluctuantes instantanées en chaque échelle r.

$\Delta \mathcal{M}$ Différence des vitesses longitudinales moyennes en chaque échelle r.

E_r Énergie cinétique correspondant à une échelle r.

L_x, L_y, L_z Dimensions longitudinale, normale et transversale du domaine de calcul.

μ_g Viscosité dynamique du fluide à forte viscosité.

M_g Nombre de Mach du courant rapide de la couche de mélange.

μ_p Viscosité cinématique du fluide à faible viscosité.

M_p Nombre de Mach du courant lent de la couche de mélange.

M_c Nombre de Mach convectif.

ν_g Viscosité cinématique du fluide à forte viscosité.

ν_p Viscosité cinématique du fluide à faible viscosité.

N_x, N_y, N_z Nombre de points dans les directions longitudinale, normale et transversale de la grille.

p Pression statique.

Re_{gp} Nombre de Reynolds basé sur la vitesse du courant rapide, U_g , et la viscosité du fluide le plus visqueux ν_g .

Re_p Nombre de Reynolds relatif au courant lent de la couche de mélange.

Re_θ Nombre de Reynolds de la couche de mélange.

ρ_g Masse volumique du fluide lourd.

ρ_p Masse volumique du fluide léger.

R_ν Rapport de viscosité cinématique ν_g/ν_p .

R_μ Rapport de viscosité dynamique μ_g/μ_p .

R_ρ Rapport de masse volumique ρ_g/ρ_p .

R_u Rapport de vitesse longitudinale U_g/U_p .

Re_g Nombre de Reynolds relatif au courant rapide de la couche de mélange.

Re_r Nombre de Reynolds calculé pour une échelle r .

\vec{r} Vecteur de séparation d'échelle.

T Température statique.

U_g Vitesse du courant rapide de la couche de mélange.

U_p Vitesse du courant lent de la couche de mélange.

U_c Vitesse de convection des structures cohérentes.

Y_k Fraction massique de mélange.

$\langle \cdot \rangle$ Opérateur de moyenne spatiale obtenue suivant les directions homogènes x et z .

Bibliographie

- [1] Lord Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-11(1) :57–72, 1879. 6
- [2] P. Bhattacharya, M. P. Manoharan, R. Govindarajan, and R. Narasimha. The critical reynolds number of a laminar incompressible mixing layer from minimal composite theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 565 :105–114, 10 2006. 6
- [3] G. L. Brown and A. Roshko. On density effects and large structures in turbulent mixing layers. *Journal of Fluids Mechanics*, 64 :775–816, 1974. 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 66, 67, 204
- [4] V. Fortuné. *Étude par simulation numérique directe du rayonnement acoustique de couches de mélange isothermes et anisothermes*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2000. 7, 204
- [5] Amir Atoufi, Mani Fathali, and Bamdad Lessani. Compressibility effects and turbulent kinetic energy exchange in temporal mixing layers. *Journal of Turbulence*, 16(7) :676–703, 2015. 7, 12, 149
- [6] Dong Li, Li Guo, Xing Zhang, and GuoWei He. A numerical study of a turbulent mixing layer and its generated noise. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 56(6) :1157–1164, 2013. 7
- [7] C. Pantano and S. Sarkar. A study of compressible effects in the high -speed turbulent shear layer using direct simulation. *Journal of Fluids Mechanics*, 451 :329–371, 2002. 7, 60, 74, 75, 78, 79, 80, 206
- [8] S. Laizet, S. Lardeau, and E. Lamballais. Direct numerical simulation of a mixing layer downstream a thick splitter plate. *Physics of Fluids*, 22 :015104, 2010. 7, 12
- [9] Y. Wang, M. Tanahashi, and T. Miyauchi. Coherent fine scale eddies in turbulence transition of spatially-developing mixing layer. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 28(6) :1280–1290, 12 2007. 7
- [10] A. Attili and F. Bisetti. Structure function scaling in a $re_\lambda = 250$ turbulent mixing layer. *Journal of Physics : Conference Series*, 318(4) :042001, 2011. 7
- [11] Mounir Bouslimi, Adel Gharbi, Muriel Amielh, and Taieb Lili. Scalar triple moments in variable-density turbulent jets : experiment and model. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 25(5) :283 – 291, 2001. 8
- [12] M. S. Uberoi and Louis C. Garby. Effect of density gradients on an air jet. *Physics of Fluids*, 10 :S200, Jan-01-1967 1967. 8

- [13] D. Papamoschou and A. Roshko. The compressible turbulent shear layer : an experimental study. *Journal of Fluid Mechanics*, 197 :453–477, 12 1988. 8, 9, 10, 66, 67, 78, 204
- [14] M. D. Slessor, M. Zhuang, and P. E. Dimotakis. Turbulent shear-layer mixing : growth-rate compressibility scaling. *Journal of Fluid Mechanics*, 414 :35–45, 7 2000. 8, 10, 11, 204
- [15] P. E. Dimotakis. On the convection velocity of turbulent structures in supersonic shear layers. *AIAA Journal*, 91 :1724, 1991. 9
- [16] D. W. Bogdanoff. Compressibility effects in turbulent shear layers. *AIAA Journal*, 21(6) :926–927, 2015/07/07 1983. 9
- [17] D.I. Pullin and G.O. O’Reilly. Structure and stability of the compressible stuart vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 493 :231–254, 2003. 10
- [18] N. D. Sandham and W. C. Reynolds. Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 224 :133–158, 3 1991. 10
- [19] G. S. Elliott and M. Samimy. Compressibility effects in free shear layers. *Physics of Fluids A*, 2(7) :1231–1240, 1990. 10
- [20] W. D. Urban and M. G. Mungal. Planar velocity measurements in compressible mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 431 :189–222, 2001. 11
- [21] S. G. Goebel and J. C. Dutton. Experimental study of compressible turbulent mixing layers. *AIAA Journal*, 29(4) :538–546, 2015/07/07 1991. 11
- [22] L. Qibing and F. Song. Numerical simulation of high-speed planar mixing layer. *Computers & Fluids*, 32(10) :1357 – 1377, 2003. 11
- [23] D. Papamoschou. Zones of influence in the compressible shear layer. *Fluid Dynamics Research*, 11(5) :217, 1993. 11
- [24] Papamoschou D. and S.K. Lele. Vortex-induced disturbance field in a compressible shear layer. *Physics of Fluids*, 5 :1412, 1993. 11
- [25] S. Sarkar. The pressure–dilatation correlation in compressible flows. *Physics of Fluids A*, 4(12) :2674–2682, 1992. 11
- [26] S. Sarkar. The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 282 :163–186, 1 1995. 12
- [27] A. W. Vreman, N. D. Sandham, and K. H. Luo. Compressible mixing layer growth rate and turbulence characteristics. *Journal of Fluid Mechanics*, 320 :235–258, 8 1996. 12, 78
- [28] R. Mehta. Effect of velocity ratio on plane mixing layer development : Influence of the splitter plate wake. *Experiments in Fluids*, 10 :194–204, 1991. 12, 67
- [29] I. H. Campbell and J. S. Turner. Turbulent mixing between fluids with different viscosities. *Letters to Nature*, 313 :39–42, 1985. 13, 14, 21, 204
- [30] B. Talbot. *Mélange et dynamique de la turbulence en écoulements libres à viscosité variable*. PhD thesis, INSA de Rouen, 2009. 15, 16, 159, 204

-
- [31] B. Talbot, N. Mazellier, B. Renou, L. Danaila, and M. Boukhalfa. Time-resolved velocity and concentration measurements in variable-viscosity turbulent jet flow. *Experiments in Fluids*, 47 :769–787, 2009. 15
- [32] B. Talbot, L. Danaila, and B. Renou. Variable-viscosity mixing in the very near field of a round jet. *Physica Scripta*, T155 :014006, 2013. 16, 154, 159
- [33] K. C. Sahu, H. Ding, P. Valluri, and O. K. Matar. Linear stability analysis and numerical simulation of miscible two-layer channel flow. *Physics of Fluids*, 21(4) :-, 2009. 17, 18, 19, 20, 204, 205
- [34] Balaji T. Ranganathan and Rama Govindarajan. Stabilization and destabilization of channel flow by location of viscosity-stratified fluid layer. *Physics of Fluids*, 13(1) :1–3, 2001. 17, 70
- [35] Rama Govindarajan. Effect of miscibility on the linear instability of two-fluid channel flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 30(10) :1177 – 1192, 2004. 17
- [36] B. Selvam, S. Merk, R. Govindarajan, and E. Meiburge. Stability of miscible core–annular flows with viscosity stratification. *Journal of Fluid Mechanics*, 592 :23–49, 12 2007. 17, 21
- [37] Rama Govindarajan, Victor S. L’vov, and Itamar Procaccia. Retardation of the onset of turbulence by minor viscosity contrasts. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :174501, Oct 2001. 17
- [38] Daniel D. Joseph, Michael Renardy, and Yuriko Renardy. Instability of the flow of two immiscible liquids with different viscosities in a pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, 141 :309–317, 4 1984. 17
- [39] Howard H. Hu and Daniel D. Joseph. Lubricated pipelining : stability of core-annular flow. part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 205 :359–396, 8 1989. 17
- [40] D. D. Joseph, R. Bai, K. P. Chen, and Y. Y. Renardy. Core-annular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 29(1) :65–90, 1997. 17
- [41] Chia-Shun Yih. Instability due to viscosity stratification. *Journal of Fluid Mechanics*, 27 :337–352, 2 1967. 17
- [42] C. Hickox. Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric pipe flow. *Physics of fluids*, 14(2) :251–262, 1971. 17
- [43] Charalampos Kouris and John Tsamopoulos. Dynamics of the axisymmetric core-annular flow. ii. the less viscous fluid in the core, saw tooth waves. *Physics of Fluids*, 14(3) :1011–1029, 2002. 17
- [44] Rama Govindarajan and Kirti Chandra Sahu. Instabilities in viscosity-stratified flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 46(1) :331–353, 2014. 17, 20, 21, 144, 177, 205
- [45] K. Lee, S. Girimaji, and J. Kerimo. Validity of Taylor’s dissipation-viscosity independence postulate in variable-viscosity turbulent fluid mixtures. *Phys. Rev. Lett.*, 101(7) :074501–, August 2008. 21
- [46] J. Fontane. *Transition des écoulements cisailés libre à densité variable*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005. 22

- [47] R.C. Reid, J.M. Prausnitz, and B.E. Poling. *The Properties of Gases and Liquids*. McGraw-Hill, Inc., New York, New York, 1987. 46, 87, 101
- [48] Arnab Chaudhuri, Abdellah Hadjadj, and Ashwin Chinnayya. On the use of immersed boundary methods for shock/obstacle interactions. *Journal of Computational Physics*, 230(5) :1731 – 1748, 2011. 49
- [49] M.S. Shadloo, A. Hadjadj, and F. Hussain. Statistical behavior of supersonic turbulent boundary layers with heat transfer at. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 53 :113 – 134, 2015. 49
- [50] A. Hadjadj, O. Ben-Nasr, M.S. Shadloo, and A. Chaudhuri. Effect of wall temperature in supersonic turbulent boundary layers : A numerical study. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 81 :426 – 438, 2015. 49
- [51] A. Sow, A. Chinnayya, and A. Hadjadj. Computational study of non-ideal and mildly-unstable detonation waves. *Computers & Fluids*, 119 :47 – 57, 2015. 49
- [52] Aliou Sow, Ashwin Chinnayya, and Abdellah Hadjadj. Mean structure of one-dimensional unstable detonations with friction. *Journal of Fluid Mechanics*, 743 :503–533, 3 2014. 49
- [53] A. Chaudhuri, A. Hadjadj, A. Chinnayya, and S. Palerm. Numerical study of compressible mixing layers using high-order weno schemes. *Journal of Scientific Computing*, 47 :170–197, 2011. 49, 55, 164
- [54] M.P. Martín, E.M. Taylor, M. Wu, and V.G. Weirs. A bandwidth-optimized {WENO} scheme for the effective direct numerical simulation of compressible turbulence. *Journal of Computational Physics*, 220(1) :270 – 289, 2006. 53
- [55] Ellen M. Taylor, Minwei Wu, and M. Pino Martín. Optimization of nonlinear error for weighted essentially non-oscillatory methods in direct numerical simulations of compressible turbulence. *Journal of Computational Physics*, 223(1) :384 – 397, 2007. 54, 55
- [56] Sergio Pirozzoli. Generalized conservative approximations of split convective derivative operators. *Journal of Computational Physics*, 229(19) :7180 – 7190, 2010. 55, 57
- [57] M. Klein, A. Sadiki, and Janicka. A digital filter based generation of in flow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations. *J. Computational Physics*, 186 :652–665, 2003. 61
- [58] S. L. Brich and J. M. Eggers. A critical review of the experimental data for developed free turbulent shear layers. *NASA SP*, 321 :11–40, 1972. 66
- [59] T. R. Meyer, J. C. Dutton, and R. P. Lucht. Coherent structures and turbulent molecular mixing in gaseous planar shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 558 :179–205, 7 2006. 67
- [60] Fude Guo, Bin Chen, Liejin Guo, and Ximin Zhang. Effects of velocity ratio on turbulent mixing layer at high reynolds number. *Journal of Physics : Conference Series*, 147(1) :012049, 2009. 67

-
- [61] W. M. Pitts. Effects of global density ratio on the centerline mixing behavior of axisymmetric turbulent jets. *Experiments in Fluids*, 11 :125–134, 1991. 67
- [62] C.D. Richards and W. M. Pitts. Global density effect on the self preservation of turbulent free jets. *Experiments in Fluids*, 254 :417–435, 1993. 67
- [63] G. Lu and S.K. Lele. On the density ratio effect on the mixing layer. *Physics of Fluids*, 6 :1073, 1994. 67
- [64] M. C. Soteriou and A. F. Ghoniem. Effects of the freestream density ratio on free and forced spatially developing shear layers. *Physics of fluids*, 7 :2036–, 1995. 67
- [65] M. Amielh, T. Djeridane, F. Anselmet, and L. Fulachier. Velocity near-field of variable density turbulent jets. *International Journal of Heat and mass transfer*, 39 :2149–2164, 1996. 67
- [66] Kirti Chandra Sahu and Rama Govindarajan. Instability of a free-shear layer in the vicinity of a viscosity-stratified layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 752 :626–648, 8 2014. 70, 115
- [67] J. H. Bell and R. D. Mehta. Contraction design for small low-speed wind tunnel. *Joint Institute for Aeronautics and acoustics*, 84 :1–37, 1988. 78, 79, 80, 206
- [68] D. Papamoschou. *Experimental investigation of heterogeneous compressible shear layers*. PhD thesis, California Institute of Technology., 1986. 78
- [69] B.W. Spencer and B. G. H. Jones. Statistical investigation of pressure and velocity fields in the turbulent two-stream mixing layer. *AIAA Paper*, pages 71–613, 1971. 80, 206
- [70] M. M. Rogers and R. D. Moser. Direct simulation of a self similar turbulent mixing layer. *Physics of Fluids*, 6(2) :903–923, 1994. 80, 206
- [71] J. C. R. Hunt, A. Wray, and P. Moin. Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows. *Center for turbulence research report*, CTR-S88(193-208), 1988. 79
- [72] P. Atsavapranee and M. Gharib. Structures in stratified plane mixing layers and the effects of cross-shear. *Journal of Fluid Mechanics*, 342 :53–86, 7 1997. 80
- [73] L. P. Bernal and A. Roshko. Streamwise vortex structure in plane mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 170 :499–525, 9 1986. 80
- [74] David G. Schowalter, Charles W. Van Van Atta, and Juan C. Lasheras. A study of streamwise vortex structure in a stratified shear layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 281 :247–291, 12 1994. 80
- [75] Ralph W. Metcalfe, Steven A. Orszag, Marc E. Brachet, Suresh Menon, and James J. Riley. Secondary instability of a temporally growing mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 184 :207–243, 11 1987. 80
- [76] Pedro José Martínez Ferrer. *Étude par simulation numérique de l'auto-allumage en écoulement turbulent cisailé supersonique*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, 2013. 131, 156
- [77] S Kodjovi. *Etude expérimentale de la turbulence dans une couche de mélange anisotherme*. PhD thesis, Université de Rennes, 2013. 133

- [78] Jewe Schröder, Agnes Kleinhan, Yvonne Serfert, Stephan Drusch, Heike P. Schuchmann, and Volker Gaukel. Viscosity ratio : A key factor for control of oil drop size distribution in effervescent atomization of oil-in-water emulsions. *Journal of Food Engineering*, 111(2) :265 – 271, 2012. 134
- [79] Zhouhang Li, Yuxin Wu, Hairui Yang, Chunrong Cai, Hai Zhang, Kazuaki Hashiguchi, Keiji Takeno, and Junfu Lu. Effect of liquid viscosity on atomization in an internal-mixing twin-fluid atomizer. *Fuel*, 103 :486 – 494, 2013. 134
- [80] Choongil Kim and Luis Bernal. *Density and viscosity ratio effects in droplet formation*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2015/08/30 2000. 134
- [81] Madjid Birouk, C O Iyogun, and Neil Popplewell. Role of viscosity on trajectory of liquid jets in a cross-airflow. *Atomization and Sprays*, 17(3) :267–287, 2007. 134
- [82] I. H. Campbell and J. S. Turner. The influence of viscosity on fountains in magma chamber. *Journal of Petrology*, 27 :1–30, 1986. 149, 151
- [83] William D. Smyth and James N. Moum. Anisotropy of turbulence in stably stratified mixing layers. *Physics of Fluids*, 12(6) :1343–1362, 2000. 156
- [84] L. Pietri, M. Amielh, and A. Anselmet, F. ans Petroff. Anisotropie de la turbulence dans une couche limite sur couvert végétal. In *20^{eme} Congr e Français de Mécanique*, 2011. 157, 210
- [85] John L. Lumley. *Computational Modeling of Turbulent Flows*, volume 18 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 123 – 176. Elsevier, 1979. 156
- [86] William K George. The self-preservation of turbulent flows and its relation to initial conditions and coherent structures. *Advances in turbulence*, pages 39–73, 1989. 162
- [87] Pooya Movahed. *High-fidelity numerical simulations of compressible turbulence and mixing generated by hydrodynamic instabilities*. PhD thesis, Université du Michigan, 2014. 183
- [88] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30(4) :301–305, 1941. 190
- [89] L. Danaila, R.A. Antonia, and P. Burattini. Comparison between kinetic energy and passive scalar energy transfer in locally homogeneous isotropic turbulence. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 241(3) :224–231, February 2012. 193