

Transitions de phase dans les gaz de bosons de spin 1 et les systèmes magnétiques frustrés

Thibault Debelhoir

▶ **To cite this version:**

Thibault Debelhoir. Transitions de phase dans les gaz de bosons de spin 1 et les systèmes magnétiques frustrés. Physique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066216 . tel-01432800

HAL Id: tel-01432800
https://theses.hal.science/tel-01432800

Submitted on 12 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : Physique

École doctorale : "Physique en Île-de-France"

réalisée au

Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée

présentée par

Thibault DEBELHOIR

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

Transitions de phase dans les gaz de bosons de spin 1 et les systèmes magnétiques frustrés

soutenue le 15 septembre 2016

devant le jury composé de :

M.	Fabien ALET	Rapporteur
M.	Guido PUPILLO	Rapporteur
M.	Dominique DELANDE	Examinateur
M.	Fabrice GERBIER	Examinateur
M.	Tommaso ROSCILDE	Examinateur
M.	Nicolas DUPUIS	Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Fabien Alet et Guido Pupillo d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que Dominique Delande, Fabrice Gerbier et Tommaso Roscilde de faire partie du jury. Je vous en suis reconnaissant.

J'aimerais remercier par la suite les personnes qui m'ont entouré pendant ces trois années de thèse. Je pense, en premier lieu, à Nicolas Dupuis, mon directeur de thèse. Merci pour ta confiance, ta grande disponibilité et pour avoir su me faire rebondir pour sortir des impasses dans lesquelles nous nous sommes parfois retrouvés. J'ai vraiment aimé travailler et découvrir le métier de chercheur avec toi.

Cette thèse s'est déroulée au Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée. Un grand merci à Pascal Viot, directeur de ce laboratoire, toujours prêt à m'aider quelque soit le problème (et à me mettre au défi sur d'obscures questions de culture générale). Merci aux trois secrétaires du laboratoire : Diane Domand, Liliane Cruzel et Sylvie Dalla Foglia. Je ne me suis jamais senti abandonné dans les démarches administratives. Un merci spécial à Diane, que j'ai la plus sollicitée des trois, pour son énergie et son efficacité.

Je remercie sincèrement Bertrand Delamotte pour les nombreux échanges que nous avons eus sur le groupe de renormalisation, la physique et la vie. Ton regard curieux m'a vraiment apporté. Merci à Matthieu Tissier pour l'écoute, enseigner avec toi a été un vrai plaisir. Dominique Mouhanna pour les réponses à mes questions sur le modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$. Fabrice Gerbier pour les discussions sur les gaz de bosons de spin 1. Adam Rançon pour l'aide à plusieurs reprises au cours de cette thèse. Julien Vidal pour l'attention et les nombreux conseils. Annie Lemarchand pour la bonne humeur. Hélène Berthoumieux pour l'engagement. Jean-Marie Maillard pour la lutte.

Je tiens également à remercier les différents professeurs que j'ai eu la chance de croiser dans ma scolarité. Merci à Lionel Gratreau d'avoir crié un jour « $PV = nRT$ » dans le couloir du lycée, ce qui m'a immédiatement fait retenir l'équation d'état du gaz parfait. Patrice Remaud pour une conférence sur l'histoire de la physique qui a, quand j'avais 15 ans, attisé mon intérêt. Patrick Pruja pour la précision de ton enseignement. Christophe Texier pour tes cours très inspirants. Gwendal Fève pour m'avoir montré, le premier, ce qu'est la recherche, avec gentillesse et pédagogie. Que les qualités de ces professeurs puissent infuser dans ma future façon d'enseigner.

Merci à Andréas et Elena, mes colocataires de bureau. J'ai aimé partagé ce lieu, mais pas que, avec vous. Cette thèse aurait été toute différente sans votre présence. Merci à Félix, mon frère de thèse, et Fred, respectivement pour les blagues et les débats, et tous deux pour le travail commun autour du groupe de renormalisation. Merci à Charlie, mon compagnon d'études, de thèse, d'enseignement et autres, pour avoir contribué au plaisir que j'ai pris à tout cela. Merci à Simon pour les bons moments que tu sais créer. Merci aux autres thésardes, thésards et post-docs du laboratoire qui ont permis de rendre joyeux les déjeuners et pauses-café. Merci en particulier à Boris, Charlotte, Chloé, Fred, Elsa, Jean-François, Jules, Lucas, Marie, Nicolas, Olivier, Pierre, Thiago, Thomas, Tom.

Je salue mes amis de l'École Normale Supérieure (ENS) de Paris et les remercie pour les superbes années passées ensemble. Je pense entre autres à Alexis, Andreas I., Andréas T., Antoine J., Antoine R., Bruno, Charlie, Erwan, Gerbold, Maxime, Pierre,

Sébastien, Thibaud, Tommy. Et pour l'université, je remercie Antoine, Aurore, Charlie, Fred, Hugo, Julia, Marguerite, Roméo, Samuel, Sandro, Thibaud, Thomas, Vincent et les autres pour m'avoir aidé à questionner autre chose que la physique.

J'ai une pensée également pour mes amis pictaviens de longue date, Charles, Niels, Noé, et pour les pictaviennes bien entendu, Aurore, Clara, Joséphine, Ophélie, Virginie. Ce qui nous lie a une influence certaine sur cette thèse, mais en dépasse de loin son cadre.

Merci à Agnès, Olivier, Babette, Claire pour m'avoir soutenu à plusieurs reprises. Je tiens à remercier mes parents, ma grand-mère et Naïma pour la relecture de certaines parties du manuscrit. Puis, plus généralement, mes derniers mercis vont à mes tout proches : mes frères, Mathieu, Olivier, Victor, mes parents, Françoise et Pierre. C'est un soutien, mais c'est aussi beaucoup plus. J'en suis chargé. Et Naïma, pour de nombreuses raisons, plus ou moins liées à ce travail de thèse, mais très précieuses.

Table des matières

Introduction **1**

I Deux systèmes physiques différents décrits par la même théorie **7**
I.1 Antiferroaimant sur réseau triangulaire 7
I.1.1 Un exemple de magnétisme frustré 7
I.1.2 Modèle O(N) × O(2) effectif 9
I.1.3 Schéma de brisure 10
I.1.4 Résultats expérimentaux et numériques 12
I.1.5 Résultats théoriques 13
I.2 Gaz de bosons spinoriels 16
I.2.1 Dérivation de l'hamiltonien 16
I.2.2 Champ moyen 19
I.2.3 Théorie classique équivalente 20
I.2.4 Possibilité d'une transition ferromagnétique sans condensation . 21
I.2.5 Des réalisations physiques 22
I.2.6 Analogie avec les antiferroaimants sur réseau triangulaire 24

II Groupe de renormalisation **27**
II.1 Les idées générales 27
II.1.1 L'idée initiale de Leo Kadanoff 27
II.1.2 Le perfectionnement de Kenneth Geddes Wilson 28
II.1.3 La formulation de Christof Wetterich 30
II.2 Les différentes approximations possibles 32
II.2.1 Développement en dérivées 33
II.2.2 Développement en champs 34
II.2.3 Approximation Blaizot–Méndez-Galain–Wschebor (BMW) 35
II.3 Quelques applications 35
II.3.1 Magnétisme 35
II.3.2 Gaz dilué de bosons 42
II.3.3 Transitions du premier ordre 45

III Transition de phase dans le modèle O(3) × O(2) **51**
III.1 Notre approche du problème 51
III.1.1 Approximations considérées 51
III.1.2 Résolution numérique des équations 53

III.2 Résultats pour le modèle O(3) × O(2) 54
III.2.1 Absence de point fixe 54
III.2.2 Longueur de corrélation à la transition 54
III.2.3 Exposants pseudo-critiques 58
III.2.4 Comportements pseudo-critiques 60
III.2.5 Vérification de la validité des différentes approximations 62
III.2.6 Que pourrait-on observer ? Et comment ? 64
III.3 Résultats pour le modèle O(N) × O(2) 65
III.3.1 Points fixes non-physiques 65
III.3.2 Comportements pseudo-critiques 67
III.3.3 Ordre de la transition pour le modèle O(2) × O(2) 68
III.4 À partir de l'action quantique des bosons de spin 1 71
III.4.1 Approche théorique 71
III.4.2 Résultats et estimations des incertitudes 75

Conclusion **77**

A Crossover BCS-BEC **81**

B Équations de renormalisation pour le modèle O(N) × O(2) **89**

C Équations de renormalisation pour le modèle quantique **93**

Bibliographie **97**

Introduction

L'intérêt actuel pour les gaz d'atomes froids tire principalement sa source dans le développement de la physique quantique du début du XX^{e} siècle. En 1924, le jeune physicien indien Satyendra Nath Bose comprend que si l'on traite le rayonnement électromagnétique comme un gaz de particules identiques sans masse (appelées aujourd'hui « photons »), il est possible de retrouver la formule, considérée comme étant génitrice de la physique quantique, écrite par Max Planck en 1900 sur le spectre d'émission des corps noirs [1]. Quelques mois plus tard, Albert Einstein, généralise ce résultat aux particules massives et suggère l'existence d'un nouveau et étrange phénomène [2, 3, 4]. Un système de particules, sans interaction et obéissant à la statistique de Bose, pourrait subir une transition de phase du second ordre [1]. Au-dessous de la température critique, la longueur d'onde de de Broglie commence à être du même ordre de grandeur que la distance moyenne entre les particules, et ces dernières s'accumulent dans un même état quantique, celui de plus basse énergie. C'est ce que l'on appelle la « condensation de Bose-Einstein ». Cette nouvelle structure possible de la matière, a longtemps été considérée comme un phénomène voué à rester pure spéculation théorique. En effet, pour des températures de l'ordre de celle prédite à la transition, les corps ne pouvaient *a priori* être que dans un état liquide ou solide.

Mais, en 1938, Fritz London émet l'hypothèse que la superfluidité de l'hélium 4 liquide est justement due à la condensation de Bose-Einstein. Cependant les fortes interactions entre les particules empêchent d'établir un lien clair entre ces deux phénomènes. Il a fallu attendre 1956 pour que Lars Onsager et Roger Pensore réussissent à donner un sens précis à la condensation de Bose-Einstein dans un système réel (avec des interactions entre les particules) et à établir un lien avec la superfluidité [5].

Puis, 70 ans après la proposition d'Albert Einstein, de nombreux progrès ayant été réalisés dans le refroidissement des atomes avec des lasers [6] et par évaporation, ainsi que dans le contrôle de leur déplacement (par des pièges optiques et magnétiques) [7], il a été possible d'observer le phénomène de condensation de Bose-Einstein dans des gaz dilués d'atomes alcalins bosoniques [8, 9, 10]. La très faible densité de ces systèmes permet aux collisions à trois corps d'être très rares, et donc à l'état gazeux métastable d'être préservé sur une durée suffisamment longue pour les expériences. Les températures atteintes pour observer la condensation de Bose-Einstein sont égales à quelques fractions de μK [2].

[1] Les particules doivent être indiscernables et, comme pour toute transition du second ordre, il faut prendre la limite thermodynamique pour pouvoir observer le « caractère second ordre ».

[2] Remarquons que plus la densité d'un système est faible, plus la température pour observer un « comportement » quantique est faible également.

Pour les fermions, le refroidissement par évaporation est plus délicat, car les collisions entre deux atomes identiques (qui sont nécessaires pour que les atomes les plus énergétiques sortent du piège) sont interdites à basse énergie à cause du principe de Pauli. Mais grâce à un mélange de fermions d'états internes différents ou par contact avec un gaz de bosons, le régime de dégénérescence quantique a pu être atteint à partir de 1999 [11, 12, 13]. Et la condensation de molécules constituées de paires de fermions (les molécules ont alors un caractère bosonique) a ainsi été observée [14, 15, 16].

Ces avancées expérimentales ont nettement transformé les perspectives de recherche en physique atomique, les rapprochant des problèmes d'optique quantique. Les phénomènes à une particule, généralement trop faibles pour être observés, sont ici amplifiés par une assemblée de particules qui « se comportent comme une seule ». De plus il est possible d'accéder, par des moyens optiques, à la structure de sa fonction d'onde. Ces systèmes ont donc naturellement servi à affiner notre compréhension de la physique quantique, en particulier les questions de cohérence spatiale et temporelle. On peut citer à titre d'exemples des expériences d'interférence entre deux condensats [17] et de cohérence de phase à longue portée [18]. L'observation de vortex quantifiés a pu mettre en évidence l'existence de la superfluidité dans ces systèmes [19, 20, 21].

Outre la forte isolation de ces systèmes par rapport aux perturbations extérieures, un des intérêts majeurs des gaz d'atomes froids est la simplicité avec laquelle ils peuvent être décrits. Plus précisément, les hamiltoniens décrivant ces systèmes ne dépendent que d'un tout petit nombre de paramètres. En particulier, pour prendre en compte les interactions entre atomes, il est possible, en exploitant le fait que la densité est très faible dans ces systèmes, de ne faire appel qu'à une seule grandeur supplémentaire : la longueur de diffusion a dans l'onde s. Cette grandeur caractérise entièrement l'interaction à basse densité, et peut être déterminée expérimentalement [22]. Les quantités physiques ne dépendent que de a et non du détail du potentiel d'interaction réel [23] (qui est généralement de type van der Waals à longue portée et cœur dur à courte portée).

Ainsi les gaz d'atomes froids peuvent être décrits de façon très précise par des hamiltoniens extrêmement simples. Ces derniers peuvent, au moins en théorie, prédire l'ensemble des caractéristiques de ces gaz, y compris celles concernant des quantités non-universelles. De plus, l'interaction y est généralement faible, donc les théories de champ moyen (l'équation de Gross-Pitaevskii [24, 25]) ou gaussienne (théorie de Bogoliubov) font la plupart du temps de bonnes prédictions [26, 27].

La physique des atomes froids a ainsi pu faire émerger de véritables échanges entre la théorie et l'expérience. Depuis une quinzaine d'années, un mouvement qui participe de cette dynamique a fait se rapprocher ce domaine de celui de la matière condensée [3]. Nous allons voir que cela a été permis grâce à la possibilité de contrôler les interactions et de mettre les atomes dans des réseaux optiques.

En matière condensée, l'interaction joue évidemment un rôle crucial. L'énergie associée est généralement du même ordre de grandeur voire beaucoup plus grande que l'énergie cinétique. Autre chose notable, les corrélations entre les particules sont très fortes. C'est en reproduisant ce régime que les gaz d'atomes froids ont pu commencer

[3] Le domaine des atomes froids s'est également rapproché de celui de la métrologie [28], de l'information quantique [29] ou encore de la physique hors-équilibre. Nous détaillerons dans la suite uniquement les liens avec la matière condensée.

à ressembler aux systèmes de matière condensée, et même simuler certains modèles utilisés dans ce domaine [30].

Dans cette optique, l'utilisation du phénomène de résonance de Feshbach a constitué une étape très importante. En exploitant le couplage entre un état lié et un état libre dans l'onde s de deux atomes en interaction [31], l'application d'un champ magnétique extérieur modifie l'interaction effective entre les atomes. Cette dernière peut même changer de signe. Des gaz de fermions avec une faible interaction attractive ont pu alors être réalisés et ont permis d'observer la transition prédite par la théorie BCS [32] (qui décrit de nombreux matériaux supraconducteurs) entre un gaz normal et un superfluide composé de paires de fermions (la taille des paires y est beaucoup plus grande que la distance moyenne entre les atomes). En utilisant ce contrôle précis de l'interaction entre les fermions, il a également été possible d'entrer dans un régime de fortes corrélations situé entre le superfluide BCS et le condensat de Bose-Einstein (BEC) de molécules de deux fermions [33, 34]. C'est ce que l'on appelle le « croosover BCS-BEC » [4].

Une autre façon d'observer de fortes corrélations dans ces systèmes a été de faire diminuer la dimensionnalité au moyen de pièges magnéto-optiques confinants. À deux dimensions, il a ainsi été possible d'observer la transition Berezinskii-Kosterlitz-Thouless [36] pour laquelle les corrélations décroissent algébriquement plutôt qu'en loi de puissance. Et à une dimension, un gaz de Tonks-Girardeau a été réalisé [37], qui est un cas particulier de liquide de Luttinger [38].

L'interférence de lasers contra-propageants peut créer un potentiel périodique pour les gaz d'atomes froids. Cela permet de simuler l'effet du réseau ressenti par les électrons dans un solide et d'accéder également à une physique des corrélations fortes [39]. Citons en particulier la réalisation expérimentale de la transition de phase quantique entre un superfluide et un isolant de Mott bosonique [40] et fermionique [41, 42]. Un isolant de Mott correspond à un état de la matière pour lequel les fortes interactions répulsives entre les particules empêchent leur passage par effet tunnel d'un site à l'autre, et donc les localisent sur les différents sites du réseau.

Ces dernières expériences engendrent de grands espoirs sur la possibilité de pouvoir simuler un jour le modèle de Hubbard fermionique [43], qui est une sorte de modèle minimal permettant d'étudier les interactions fortes dans les solides. Un gaz de fermions à deux composantes dans un réseau optique pourrait réaliser ce modèle de façon parfaite (sans défauts et avec une grande cohérence spatiale), alors qu'il n'était qu'un modèle effectif en matière condensée. Des travaux expérimentaux prometteurs ont pu observer les phases métalliques et isolantes [42] et sont à la recherche de la phase antiferromagnétique. Cela pourrait ouvrir la voie à une observation de la supraconductivité « à haute température critique » dans les gaz d'atomes froids et peut-être permettre de mieux la comprendre [44].

Les fortes corrélations ont donc indéniablement rapproché le domaine des atomes froids de celui de la matière condensée. Un deuxième rapprochement notable entre ces deux domaines concerne l'étude du désordre. Ce dernier peut être réalisé par un

[4] Nous avons au cours de cette thèse travaillé sur le phénomène de crossover BCS-BEC. Plus précisément nous avons calculé la taille de la région critique dans les phases haute et basse température au travers du crossover. Ce mémoire de thèse ne portera pas sur ces résultats. Néanmoins, le lecteur intéressé pourra lire notre article [35] que nous reproduisons en annexe A.

champ de tavelures laser entièrement contrôlable. La localisation d'Anderson [45], qui est une des manifestations quantiques du désordre les plus spectaculaires, a alors pu être observée dans un gaz à une dimension [46]. Cela ouvre des perspectives de recherche sur la compétition entre le désordre et les interactions, et en particulier la phase de verre de Bose. Cet axe de recherche pourrait aussi résoudre une controverse de longue date sur la nature de l'ordre présent dans les verres de spin [29].

Le dernier point de rencontre entre les atomes froids et la matière condensée que nous mentionnerons dans cette introduction concerne l'étude du magnétisme [5]. Le travail que nous présenterons par la suite s'inscrit justement dans cette dynamique.

D'une façon très générale, les degrés de liberté internes (les spins) font régulièrement émerger, dans les systèmes en interaction, de l'ordre à longue distance, et cela sous différentes formes (ferromagnétisme, antiferromagnétisme, magnétisme frustré...). Lorsque les systèmes considérés sont quantiques, le magnétisme peut mener par exemple aux phénomènes de supraconductivité en onde p et d, ou de liquides de spins. Le nombre d'états possibles de la matière est alors démultiplié. C'est pourquoi l'étude du magnétisme avec les gaz d'atomes froids est un champ de recherche en expansion.

Du ferromagnétisme itinérant dans un gaz de fermions avec une forte interaction répulsive a par exemple été récemment observé [48]. Autre exemple de systèmes d'atomes froids magnétiques sur lequel nous allons nous concentrer par la suite : les gaz de bosons ayant un degré de liberté interne de spin, appelés gaz de bosons « spinoriels » [6]. Les pièges magnétiques utilisés dans les premières expériences de condensation gelaient les degrés de liberté de spin, autrement dit sélectionnaient un des états magnétiques internes. Les atomes se comportaient alors comme s'ils n'avaient plus de spin. Cependant, en 1998, grâce à un piège purement optique, des bosons de spin 1 (^{23}Na plus précisément) ont pu être condensés pour la première fois [49]. Une expérience de type Stern et Gerlach a alors mis en évidence que les trois états internes de spin étaient condensés [7]. Le spin provoquant une dégénérescence de l'état quantique de plus basse énergie de chaque atome, il est légitime de se demander quel est le mécanisme exact de la condensation étant donné qu'il consiste normalement en une accumulation de bosons dans l'état de plus basse énergie. Nous répondrons précisément à cette question dans le chapitre I. La condensation de bosons de spin 1 a ouvert un nouveau et fructueux champ de recherche qui s'intéresse à la condensation pour des objets ayant des symétries de plus en plus complexes, et qui étudie le lien et la compétition entre la superfluidité et le magnétisme [8]. Nous conseillons aux lecteurs intéressés par ce domaine les revues [50, 51].

[5] Nous aurions pu parler aussi des récents développements théoriques qui proposent de faire des champs de jauge artificiels dans les gaz d'atomes froids. De telles expériences rendraient possible l'observation de phénomènes topologiques, habituellement étudiés en matière condensée, comme l'effet Hall quantique entier et fractionnaire [47].

[6] Cela vient du fait que l'état d'un atome interne de spin F est décrit mathématiquement par un tenseur sphérique de rang $2F$.

[7] La trajectoire des atomes se divise en trois quand on les passe dans une zone avec un champ magnétique non-uniforme.

[8] Remarquons qu'un gaz de bosons de spin 1 est clairement différent d'un mélange de trois espèces de bosons, car le nombre de bosons dans chacun des sous-états magnétiques n'est pas conservé. En effet, un boson avec $m = 1$ et un autre avec $m = -1$ peuvent interagir, échanger leur moment cinétique, et devenir deux bosons avec $m = 0$.

Un des objets de cette thèse est de montrer que les gaz de bosons de spin 1 peuvent, dans une certaine mesure, permettre d'étudier un certain type de magnétisme présent dans de nombreux matériaux : le « magnétisme frustré classique ». La notion de frustration intéresse les physiciens depuis de nombreuses années, et elle est considérée comme un élément important pour comprendre certains phénomènes collectifs (en particulier dans les verres de spin [52]). C'est un champ de recherche actif, particulièrement sur les modèles de liquides de spin [53], de glaces de spin [54, 55] et même sur des systèmes complexes généraux (comme les réseaux sociaux ou neuronaux [56]). Nous étudierons un exemple paradigmatique de la frustration dite géométrique : les antiferroaimants sur réseau triangulaire.

Notons qu'il existe déjà plusieurs propositions pour étudier le magnétisme frustré avec des gaz d'atomes froids. Par exemple des suggestions théoriques pour simuler un certain type de magnétisme frustré quantique avec des gaz de bosons dans des réseaux optiques triangulaires ou Kagomé ont été faites [57, 58]. Par ailleurs, récemment, des bosons de spin 0 sur un réseau optique triangulaire ont réussi à simuler le magnétisme frustré classique et plus particulièrement les antiferroaimants sur réseau triangulaire [59, 60]. La proposition que nous ferons est très différente de celle-ci car elle utilisera des bosons de spin 1 et pas de réseau.

Le plan de ce mémoire est le suivant. Nous présenterons tout d'abord dans le chapitre I l'analogie que nous avons établie entre les antiferroaimants sur réseau triangulaire qui sont décrits par le modèle $\mathrm{O}(N)\times\mathrm{O}(2)$, et les gaz de bosons de spin 1. Nous verrons également que, malgré les nombreuses études théoriques et expérimentales réalisées sur ce type de magnétisme frustré, il reste une controverse sur la nature de la transition de phase dans ces systèmes : premier ou second ordre. Nous proposerons un moyen de résoudre cette controverse avec les gaz de bosons de spin 1.

Le chapitre II sera l'occasion de présenter la théorie du groupe de renormalisation et plus particulièrement une version non-perturbative (due à Christof Wetterich) qui sera utilisée par la suite. Cette méthode, qui est capable de prendre en compte toutes les échelles d'énergie, permet d'étudier de nombreux problèmes de physique statistique, et de calculer, de façon relativement précise, les quantités physiques, universelles ou non. Nous montrerons comment mettre en place cette approche pour le modèle $\mathrm{O}(N)$, les gaz dilués de bosons de spin 0 et, au travers d'un travail original sur le modèle φ^6, les transitions de phase du premier ordre.

Le chapitre III sera dédié à nos résultats. Nous verrons que notre méthode prédit une transition de phase du premier ordre mais avec néanmoins des comportements « pseudo-critiques ». Cela nous permettra de définir des exposants qui pourraient être mesurés expérimentalement dans les gaz de bosons de spin 1. L'étude du modèle $\mathrm{O}(N)\times\mathrm{O}(2)$ nous aidera alors à comprendre l'origine de ces comportements en loi de puissance. Et enfin, nous pourrons préciser nos résultats en prenant en compte de façon plus précise les fluctuations quantiques.

Une partie des résultats de ce mémoire sont également présentés dans l'article [61]. Dans tout le manuscrit, nous utilisons des unités telles que $\hbar = k_B = 1$.

Chapitre I

Deux systèmes physiques différents décrits par la même théorie

Ce premier chapitre sera l'occasion de montrer un premier résultat important de cette thèse et qui fournira une base de travail pour la suite. Ce résultat consiste en la démonstration d'une analogie entre deux systèmes qui n'avaient *a priori* rien à voir. Plus précisément, nous avons prouvé qu'ils pouvaient dans une certaine mesure être décrits par la même théorie. Le premier système sera l'antiferroaimant sur réseau triangulaire, un exemple de magnétisme frustré classique. Le deuxième sera un gaz de bosons de spin 1 en interaction. Dans les deux cas, nous présenterons les résultats expérimentaux et les différentes approches théoriques.

I.1 Antiferroaimant sur réseau triangulaire

I.1.1 Un exemple de magnétisme frustré

Le système considéré dans cette partie est constitué de réseaux bidimensionnels triangulaires qui sont empilés dans une troisième direction. Chaque site est occupé par un spin classique [1], c'est-à-dire par un simple vecteur $\mathbf{S}$ avec un certain nombre de composantes, que nous noterons N, et de norme unité. Nous considèrerons que les spins interagissent uniquement entre plus proches voisins, c'est-à-dire que nous négligeons les interactions à plus longue portée. L'hamiltonien décrivant un tel système s'écrit

$$H_{\text{lat}} = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \tag{I.1.1}$$

où la somme se fait sur les paires de spins plus proches voisins. $J_{i,j}$ est égal à $J_{\parallel}$ quand les deux spins appartiennent au même plan, et à $J_{\perp}$ quand ils sont dans des plans différents. Cet hamiltonien est invariant sous les transformations du groupe $\mathrm{O}(N)$ agissant sur les spins.

Si $J_{\parallel} < 0$, l'interaction est ferromagnétique au sein de chaque plan. Le système subit alors une transition de phase à une certaine température, et dans la phase ordonnée

[1] Cela est justifié car nous étudierons ce système à température finie. En effet, assez proche de la transition, les spins, intrinsèquement quantiques, ont alors un comportement classique à grande distance.

les spins d'un même plan pointent en moyenne tous dans la même direction. Dans ce cas, le modèle O(N) que nous verrons dans la partie II.3.1 permet de décrire la transition de phase. Si l'interaction dans les plans est antiferromagnétique, c'est-à-dire $J_{\parallel} > 0$, le système subit également une transition de phase. Mais cette fois-ci, les valeurs moyennes des spins du système dans la phase ordonnée ont une configuration particulière qui est présentée sur la figure I.1. L'angle entre deux spins plus proches voisins y est de 120°.

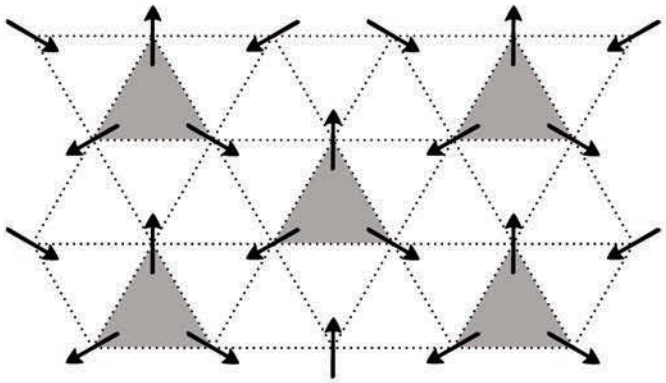


Fig. I.1 : Valeurs moyennes des spins dans l'état fondamental d'un antiferroaimant sur réseau triangulaire.

Nous observons qu'une cellule constituée de trois spins voisins se répète dans le plan (on parle de « plaquette »). Nous les avons grisées sur la figure I.1. Puisque l'interaction est antiferromagnétique, les spins voisins « ont envie » de pointer dans des directions opposées pour réduire leur énergie d'interaction, mais il est impossible de faire respecter cette règle simultanément pour chaque paire de spins. Donc le système trouve une configuration qui minimise l'énergie de l'ensemble sans pour autant satisfaire une minimisation locale de l'énergie. On parle de « frustration ». Le modèle que nous venons de décrire, appelé « STA » (pour « stacked triangular antiferromagnets »), est un archétype des systèmes frustrés. La frustration y est induite par la géométrie du réseau, on parle donc de « frustration géométrique », à opposer à la frustration qui peut émerger par exemple, pour les hélimagnétiques, de la compétition entre une interaction ferromagnétique entre plus proches voisins et antiferromagnétique à plus grande distance.

Le signe de $J_{\perp}$ ne change pas le modèle qui permet d'étudier la transition [2]. Cela changera uniquement l'orientation relative des spins plus proches voisins entre deux plans. Autrement dit, il n'y a pas de frustration supplémentaire dans la direction perpendiculaire aux plans. Nous prenons, pour la suite, $J_{\perp} > 0$.

[2] De la même façon, la transition d'un système de spins classiques interagissant entre plus proches voisins sur un réseau cubique peut être décrite par le modèle O(N) quelque soit le signe de l'interaction (si elle est antiferromagnétique, on introduit ce que l'on appelle « l'aimantation alternée » [62])

I.1.2 Modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ effectif

La physique à grande distance du modèle STA (dont les spins $\mathbf{S}_i$ sont de norme fixe) peut être décrite par des champs φ dont la norme peut fluctuer et un hamiltonien possédant une symétrie $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ dans un espace continu. Mark Yosefin et Eytan Domany [63] sont les premiers à l'avoir remarqué et à en proposer une démonstration, celle-ci est basée sur une transformation d'Hubbard-Stratonovitch puis un développement autour des deux minima de l'interaction dans l'espace de Fourier (« points d'instabilité »), cette démonstration est détaillée dans la thèse [64]. Nous n'entrerons pas ici dans ce détail et présenterons une façon de le montrer (il y en a plusieurs) plus rapide basée sur des considérations de symétrie [65].

Dans la phase ordonnée, la valeur moyenne des spins peut s'écrire

$$\langle \mathbf{S}_i \rangle = \mathbf{a} \cos(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_i + \theta) + \mathbf{b} \sin(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_i + \theta) \tag{I.1.2}$$

où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont deux vecteurs orthogonaux de même norme (égale à la norme des spins dans l'état fondamental) et $\mathbf{Q} = (4\pi/3, 0, 0)$ est le vecteur d'onde de la densité de spin. Nous avons pris la distance entre spins plus proches voisins comme longueur unité. La physique à grande distance peut donc être décrite par deux champs $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ possédant chacun N composantes tels que $\langle \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle = \mathbf{a}$ et $\langle \boldsymbol{\varphi}_2 \rangle = \mathbf{b}$.

L'invariance $\mathrm{O}(N)$ de l'hamiltonien H_{lat} I.1.1 se reflète nécessairement sur $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$. Donc l'hamiltonien H de basse énergie que nous cherchons doit être invariant sous les transformations

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_1' = R\boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_2' = R\boldsymbol{\varphi}_2 \end{cases} \tag{I.1.3}$$

où R est une matrice appartenant à $\mathrm{O}(N)$. De plus, le choix de θ et les signes devant $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans (I.1.2) sont arbitraires. Donc H doit également être invariant sous les transformations $\theta \to \theta \pm \alpha$ et $\mathbf{b} \to -\mathbf{b}$ dans (I.1.2). Cela est équivalent à la transformation

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_1' = \cos\alpha\boldsymbol{\varphi}_1 - \sin\alpha\boldsymbol{\varphi}_2 \\ \boldsymbol{\varphi}_2' = \pm(\sin\alpha\boldsymbol{\varphi}_1 + \cos\alpha\boldsymbol{\varphi}_2) \end{cases} \tag{I.1.4}$$

qui est une transformation du groupe $\mathrm{O}(2)$. Cela revient à dire que $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ jouent un rôle symétrique. Le groupe de symétrie G de l'hamiltonien H est donc $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$.

À partir de $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$, nous ne pouvons former que deux invariants $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ indépendants (comme prouvé dans l'annexe B de l'article [66]) :

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}_1^2 + \boldsymbol{\varphi}_2^2) \\ \tau = \dfrac{1}{4}(\boldsymbol{\varphi}_1^2 - \boldsymbol{\varphi}_2^2)^2 + (\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2)^2. \end{cases} \tag{I.1.5}$$

L'hamiltonien, décrivant la physique de basse énergie du modèle STA est donc, à l'ordre le plus bas en dérivées et quartique en champs [3],

$$H = \int d^3\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left[(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2)^2 \right] + r\rho + \frac{\lambda_1}{2}\rho^2 + \frac{\lambda_2}{2}\tau \right\}. \tag{I.1.6}$$

[3] Les termes qu'on ne prend pas en compte sont non-pertinents au sens du groupe de renormalisation (voir chapitre II).

La norme de l'impulsion $\mathbf{p}$ des champs $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ est limitée par une coupure ultraviolette Λ [4]. L'existence d'un état fondamental pour cet hamiltonien nécessite $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ (cela revient à une condition de stabilité). La procédure de Hubbard-Stratonovitch permet de montrer que λ_2 est nécessairement strictement positif [64][5]. Cela implique $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ orthogonaux et de même norme dans la phase ordonnée (c'est-à-dire $\tau = 0$), c'est bien ce que l'on veut pour pouvoir décrire l'ordre à basse température dans le modèle STA. La phase ordonnée est donc décrite par $\rho = \rho_0 \neq 0$ et $\tau = 0$, et la phase désordonnée par $\rho = \tau = 0$ [6]. Si λ_2 était négatif, $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ seraient colinéaires et les spins pointeraient dans le même direction. Quand $\lambda_2 = 0$, on retrouve l'hamiltonien du modèle O($2N$). Notons que la dimension critique supérieure [7] de cet hamiltonien est 4, et la dimension critique inférieure est 2 [8].

Le réseau triangulaire possède un groupe de symétrie discret[9], noté C_{3v}. Cette symétrie consiste à faire une rotation des sites au sein d'un plaquette sans changer l'orientation des spins. La méthode basée sur la transformation d'Hubbard-Stratonovitch permet de se rendre compte que la symétrie O(2) provient en fait de cette symétrie C_{3v} qui est élargie quand on ne prend pas en compte les termes d'ordre supérieur à quatre en puissances des champs dans l'hamiltonien (I.1.6) [10]. Pour la plupart des systèmes, les symétries du réseau ne sont en général pas évoquées, car elles n'interviennent pas dans le schéma de brisure de symétrie, autrement dit l'état fondamental est invariant sous ces symétries. Ici, c'est différent, comme nous allons le voir.

I.1.3 Schéma de brisure

Il est utile de rassembler les champs $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ dans une matrice rectangulaire $N \times 2$

$$\Phi = (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)\,. \tag{I.1.7}$$

L'hamiltonien (I.1.6) se réécrit alors

$$\begin{aligned} H = \int d^3\mathbf{x} \Big\{ &\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\nabla}{}^t\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi\right) + r\,\mathrm{Tr}\left({}^t\Phi\Phi\right) + \frac{\lambda_1}{2}\mathrm{Tr}\left({}^t\Phi\Phi\right)^2 \\ &+ \frac{\lambda_2}{4}\mathrm{Tr}\left({}^t\Phi\Phi - \mathrm{Tr}\left({}^t\Phi\Phi\right)\mathbb{1}/2\right)^2 \Big\}\,. \end{aligned} \tag{I.1.8}$$

[4] Celle-ci provient du réseau sous-jacent à la dérivation de cet hamiltonien. En effet, les variations les plus rapides de $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ s'opèrent à l'échelle de la distance entre deux spins, donc Λ est de l'ordre de l'inverse de cette distance.

[5] À partir de maintenant, nous ferons référence à cet hamiltonien par l'expression « modèle O(N) × O(2) », et nous supposerons implicitement que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

[6] ρ et τ sont définis ici à partir de l'équation (I.1.5) dans laquelle on a remplacé $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ par $\langle\boldsymbol{\varphi}_1\rangle$ et $\langle\boldsymbol{\varphi}_2\rangle$.

[7] Dimension au-dessus de laquelle le champ moyen donne des résultats exacts pour les exposants critiques.

[8] Dimension au-dessous de laquelle la transition de phase n'existe plus.

[9] Certaines opérations de translation sont aussi des symétries de ce réseau, mais elles ne sont *a priori* pas pertinentes car on élargit à toutes les translations de l'espace quand on passe au modèle continu (I.1.6).

[10] Ces termes sont non-pertinents au sens du groupe de renormalisation autour du point fixe gaussien (voir chapitre II).

Nous pouvons montrer que cet hamiltonien est invariant sous la transformation

$$\Phi' = R\Phi \quad \text{où } R \in \mathrm{O}(N) \tag{I.1.9}$$

ainsi que sous la transformation

$$\Phi' = \Phi U \quad \text{où } U \in \mathrm{O}(2). \tag{I.1.10}$$

Nous retrouvons donc bien la symétrie $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ que nous venons de voir. Pour trouver le schéma de brisure, il faut maintenant déterminer quelles opérations de symétrie $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ laissent inchangé l'état fondamental. Ce dernier est défini par $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ uniformes, orthogonaux et de même norme. Nous choisissons une certaine configuration uniforme des champs satisfaisant à cette contrainte :

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \varphi_0 & 0 \\ 0 & \varphi_0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{I.1.11}$$

où $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Nous remarquons que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & S & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \Phi_0 = \Phi_0 \quad \text{où } S \in \mathrm{O}(N-2) \tag{I.1.12}$$

ainsi que

$$\begin{pmatrix} V^{-1} & & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \Phi_0 V = \Phi_0 \quad \text{où } V \in \mathrm{O}(2). \tag{I.1.13}$$

Cette dernière symétrie appartient au groupe nommé $\mathrm{O}(2)_{\text{diag.}}$. Donc l'état fondamental est invariant sous les transformations du groupe $\mathrm{O}(N-2) \times \mathrm{O}(2)_{\text{diag.}}$. Ainsi le schéma de brisure des antiferroaimants sur réseau triangulaire est $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2) \to \mathrm{O}(N-2) \times \mathrm{O}(2)_{\text{diag.}}$. Donc, en soustrayant le nombre de générateurs de $\mathrm{O}(N-2) \times \mathrm{O}(2)_{\text{diag.}}$ du nombre de générateurs de $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$, nous pouvons savoir qu'il y a $2N-3$ modes de Goldstone dans la phase ordonnée. Par ailleurs l'espace du paramètre d'ordre est

$$\frac{\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)}{\mathrm{O}(N-2) \times \mathrm{O}(2)_{\text{diag.}}} \tag{I.1.14}$$

qui est isomorphe à $\mathrm{SO}(3)$ pour $N = 3$ et $\mathrm{SO}(2) \times \mathbb{Z}_2$ pour $N = 2$.

Quand $N = 3$, et comme $\mathrm{O}(1)$ s'assimile à $\mathbb{Z}_2$[11], on remarque que la symétrie de rotation dans l'espace des spins $\mathrm{SO}(3)$ est entièrement brisée dans l'état fondamental

[11] $\mathrm{O}(0)$ s'assimile lui au groupe trivial $\mathbb{1}$.

(tout comme la symétrie O(2)). Cela est différent du modèle O(3) dans lequel la symétrie SO(3) est simplement brisée jusqu'à une symétrie SO(2) (l'état fondamental de spins colinéaires est invariant sous les transformations de ce groupe).

I.1.4 Résultats expérimentaux et numériques

Nous résumons dans cette partie les observations expérimentales et numériques concernant le modèle STA. Commençons par les réalisations expérimentales. L'enjeu principal est évidemment d'obtenir des matériaux qui puissent être décrits par le modèle STA et les plus purs possible, autrement dit avec le moins de désordre. On en est maintenant capable depuis quelques années. Autre difficulté, dans beaucoup de ces matériaux, une différence entre l'interaction entre plus proches voisins au sein d'un plan et celle entre différents plans engendre une anisotropie de l'espace. Mais, à assez basse température, l'isotropie est généralement restaurée.

Il existe aussi une anisotropie de l'orientation des spins provenant d'un couplage entre les spins et le cristal. Celle-ci tend à confiner les spins dans les plans (matériaux de type XY) ou bien perpendiculairement aux plans (type Ising). Les matériaux de type XY ($CsMnBr_3$, $CsCuCl_3$, $CsNiCl_3$ et $CsMnI_3$ en sont des exemples) peuvent être décrits par un modèle STA avec des spins à deux composantes.

On ne connait pas de matériaux qui, pour toute température, peuvent être décrits par le modèle STA avec $N = 3$. Néanmoins pour certains de type Ising (comme VCl_2 et VBr_2) l'anisotropie dans l'espace des spins devient non-pertinente dans une certaine plage de températures. Pour d'autres de type Ising (comme $CsNiCl_3$ et $CsMnI_3$) placés dans un champ magnétique, il est possible d'annuler l'effet de l'anisotropie en ajustant le champ magnétique pour la compenser exactement. Enfin, il est également possible de faire des alliages très précis en trouvant la bonne proportion d'atomes favorisant les anisotropies de type Ising et de type XY afin qu'elles s'annulent l'une l'autre pour avoir un système isotrope. C'est le cas de $CsMn(Br_{0.19}I_{0.81})_3$.

La question principale qui se pose sur ces matériaux est reliée à la nature de la transition de phase (premier ou second ordre). En effet, toutes les expériences qui ont été réalisées ont trouvé des comportements en loi de puissance caractéristiques d'une transition du second ordre. Les exposants critiques mesurés ne sont pas les mêmes que ceux du modèle O(N). Cela pourrait signifier que la transition de phase du modèle STA est (pour certaines valeurs des paramètres) du second ordre et appartient à une autre classe d'universalité que celle du modèle O(N).

Cependant, certaines observations sur des matériaux décrits par le modèle STA avec $N = 2$ ou 3 (voir [67, 66] pour des revues sur ce thème en particulier) contredisent ce scénario. En effet, si on suppose que la transition est du second ordre, on peut alors utiliser les lois d'échelle reliant les exposants critiques. En particulier $\eta = 2\beta/\nu - 1$ permet d'obtenir η. Pour beaucoup de matériaux, la dimension anormale est négative, ce qui est impossible pour une théorie des champs unitaire [66, 68]. Enfin, pour certains matériaux, la loi d'échelle $\gamma + 2\beta - \nu d = 0$ n'est pas vérifiée. La quasi-totalité des matériaux étudiés, et supposés être décrits par le modèle STA avec $N = 2$ ou 3, ne respectent pas soit $\eta > 0$, soit une loi d'échelle. De plus, chose qui s'avère très importante dans le cadre de cette thèse, les exposants critiques mesurés varient d'un matériau à l'autre. Ainsi, bien que les comportements en loi de puissance fassent penser à une

transition du second ordre, on n'observe pas d'universalité, caractéristique pourtant essentielle de ce type de transition.

Ces observations pourraient signifier que la transition est faiblement du premier ordre, c'est-à-dire avec une longueur de corrélation à la transition finie mais très grande devant la maille du réseau. Le fait que la finitude de la longueur de corrélation à la transition ne soit pas observée viendrait du manque de résolution expérimentale. Les exposants mesurés seraient ce que l'on appelle des « exposants pseudo-critiques ».

Certains matériaux présentent à basse température une structure magnétique hélicoïdale, on les appelle les « hélimagnétiques ». Ils sont également décrits par l'hamiltonien (I.1.6) avec $N = 2$ (cet hamiltonien avec $N = 3$ ne peut pas décrire ce type de matériaux). Des observations similaires à celles que nous venons de décrire ont été faites [69]. Notons aussi que la transition entre les phase normale et superfluide A_1 de l'hélium 3 est aussi décrite par cet hamiltonien. Malheureusement la région critique est trop étroite pour que l'on puisse obtenir expérimentalement des exposants critiques et donc également conclure sur la nature de la transition.

De nombreuses simulations numériques Monte Carlo sur le modèle STA et sur le modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ (sur réseau) pour $N = 2$ et 3 ont été effectuées. Les résultats les plus récents [70, 71, 72, 73, 74, 75] montrent que, pour différentes gammes de paramètres des hamiltoniens, la transition est objectivement faiblement du premier ordre. De plus elle est plus faiblement du premier ordre (plus grande longueur de corrélation à la transition) pour $N = 3$ que pour $N = 2$. Seule une simulation sur le modèle $\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2)$ a permis de mettre en évidence des valeurs des paramètres (avec λ_2/λ_1 assez petit) pour lesquelles la transition semble être du second ordre [76] (nous parlerons de nouveau de cette simulation dans la partie III.3). Notons que ce genre d'études souffre d'un problème lié à la taille finie du système simulé. En effet cette taille est plus petite que la longueur de corrélation à la transition, on peut conclure à tord que la transition est du second ordre.

La question essentielle que l'on se pose ici est celle de l'ordre de la transition pour les modèles STA et $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$. On se demande s'il existe des valeurs des paramètres pour lesquelles la transition est du second ordre[12]. Ce n'est pas parce qu'elle est du premier ordre (ou du second) pour certaines valeurs de paramètres qu'elle l'est pour toutes [13]. Au vu de la quantité de simulations numériques réalisées sur le modèle STA, il est assez improbable qu'une transition du second ordre existe pour ce modèle. En revanche, pour le modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$, la question reste ouverte (notamment à cause des résultats de l'article [76]).

I.1.5 Résultats théoriques

Ces quarante dernières années ont vu de nombreux travaux théoriques sur le modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$. Les toutes premières études [77, 78] ont été réalisées en 1976 et 1977 dans le cadre de l'étude des transitions de phase dans l'hélium 3. En effet, les auteurs ont

[12] Cela est équivalent à se poser la question de l'existence d'un point fixe stable dans les équations de flot de renormalisation (voir chapitre II).

[13] Nous verrons dans la partie II.3.3 un modèle, ayant une symétrie $\mathbb{Z}_2$ en dimension 3, dont la transition peut être du premier ordre (pour certaines valeurs des paramètres). Le système n'est alors pas dans le bassin d'attraction du point fixe Wilson-Fisher du modèle φ^4.

montré qu'elles peuvent être étudiées par le modèle $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$. Puis plusieurs études [79, 80, 81] ont montré que les hélimagnétiques peuvent être décrits par le modèle $\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2)$.

L'ensemble de ces travaux a montré que le champ moyen appliqué à l'hamiltonien (I.1.6) prédit une transition de phase du second ordre quelque soit λ_1 et λ_2 positifs. En effet, ρ_0 calculé par le champ moyen ne subit pas de discontinuité à la transition. La théorie à grand N [77] prédit également une transition du second ordre. Puis, ils ont montré que lorsqu'on ajoute les fluctuations au-delà du champ moyen, il restait une transition du second ordre uniquement pour $N \geqslant N_\mathrm{c}(d)$, où $N_\mathrm{c}(d)$ est une fonction de d, la dimension de l'espace. Au-dessous de $N_\mathrm{c}(d)$, la transition est du premier ordre à cause des fluctuations. Le groupe de renormalisation à l'ordre d'une boucle prédit, pour $d \lesssim 4$,

$$N_\mathrm{c}(d) \sim 21.8 - 23.4\epsilon + O(\epsilon^2) \tag{I.1.15}$$

où $\epsilon = 4 - d$. On remarque que la correction à la dimension 4 est grande pour $\epsilon = 1$, donc il ne parait pas réaliste d'obtenir un résultat correct pour $d = 3$ (la dimension physique, celle qui nous intéresse) sans calculer les contributions des ordres suivants du groupe de renormalisation.

En 1985, Mark Yosefin et Eytan Domany ont montré [63], comme nous l'avons fait précédemment, que le modèle STA avec $N = 2$ peut être décrit par le modèle $\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2)$. Ce résultat a été étendu par la suite à tout N [82, 83, 84, 65]. Ces études ont également fait un état des lieux du sujet en faisant le lien avec les hélimagnétiques et en réutilisant le groupe de renormalisation perturbatif à une boucle et la théorie à grand N.

L'approximation LPA de la version Wilson-Polchinski du groupe de renormalisation non-perturbatif [14] a été appliquée au modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ dès 1993 par Gil Zumbach [85, 86, 87]. La principale conclusion est que $N_\mathrm{c}(d = 3) \sim 4.7$. Dans les cas intéressants ($N = 2$ ou 3), la transition est donc du premier ordre. La transition peut être faiblement du premier ordre pour $N = 3$. En revanche, pour $N = 2$, la transition est prédite être simplement du premier ordre et sans comportement en loi de puissance.

Les travaux de Gil Zumbach ont été améliorés par Matthieu Tissier, Bertrand Delamotte et Dominique Mouhanna [88, 89, 69, 90] dans les années 2000. Nous verrons que leur approche est très similaire à la notre, elle est basée sur une version du groupe de renormalisation non-perturbative due à Christof Wetterich. Ces études ont tout d'abord fourni un cadre général qui a permis de retrouver les résultats à grand N et ceux proches de la dimension 4. De plus, les auteurs ont obtenu $N_\mathrm{c}(d = 3) \simeq 5.4$ et une transition faiblement du premier ordre aussi bien pour $N = 3$ que pour $N = 2$ (ce qui semble plus proche des expériences que les résultats obtenus par Gil Zumbach). Enfin, les exposants pseudo-critiques sont compatibles avec ceux trouvés expérimentalement et numériquement (pour les modèles STA et $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$). Mais étant donné que le modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ ne décrit les matériaux que de façon effective, il est difficile de le relier à la réalité microscopique et donc de comparer quantitativement ces résultats avec les expériences.

De nombreuses études du modèle $\mathrm{O}(N)\times\mathrm{O}(2)$ utilisant le groupe de renormalisation perturbatif se sont penchées sur la question de l'ordre de la transition. Les résultats sont

[14] Cette version est proche de celle présentée par l'équation (II.1.5).

contradictoires. Tout d'abord, le groupe de renormalisation avec un développement à 5 boucles en ϵ [91] (à partir du schéma de soustraction minimale) donne $N_c(d = 3) = 6.1(6)$. De même le groupe de renormalisation avec un pseudo-développement à 6 boucles en ϵ [91, 92] (à partir du schéma massif à impulsion nulle) prédit $N_c(d = 3) = 6.22(12)$ et $N_c(d = 3) = 6.23(21)$. Ces résultats sont proches de ceux trouvés par le groupe de renormalisation non-perturbatif.

En revanche, le groupe de renormalisation sans développement en ϵ, c'est-à-dire directement en dimension 3, ne donne pas du tout le même genre de résultats [93, 94, 95, 96, 76]. En effet, le schéma massif à impulsion nulle à 6 boucles [96] trouve une transition du second ordre pour N au-dessus de 6.4(4) et au-dessous de 5.7(3). Entre ces deux valeurs, la transition est du premier ordre. En ce qui concerne le schéma de soustraction minimale à 5 boucles [76], celui-ci trouve une transition du second ordre pour toute valeur de N (supérieure ou égale à 2). Ces deux approches sans développement en ϵ prévoient donc une transition du second ordre pour $N = 2$ et 3, et fournissent une courbe $N_c(d)$ non-monotone. Elles prédisent des valeurs pour les exposants critiques (par exemple $\nu = 0.57(3)$ pour $N = 2$ et $\nu = 0.55(3)$ pour $N = 3$ [94]). Notons que ces valeurs ne sont pas toutes en accord avec celles mesurées expérimentalement sur des matériaux décrits par le modèle STA [66].

Ces derniers résultats ont été réexaminés et critiqués [97, 98, 99] en particulier à cause de la procédure de resommation utilisée. Les résultats dépendent en effet de certains paramètres de resommation qui ne devraient pas les influencer, et le développement en boucles ne permet pas d'obtenir des quantités critiques convergées.

Pour finir, mentionnons également de récentes études basées sur une approche non-perturbative : le « bootstrap » conforme. Le modèle d'Ising à 3 dimensions a par exemple été récemment étudié par cette approche et les meilleures estimations des exposants critiques, connues à ce jour, ont été obtenues [100, 101]. Cette méthode n'est basée sur aucun développement quelconque et donc ne souffre pas *a priori* de problèmes de convergence ou de resommation. Yu Nakayama et Tomoki Ohtsuki affirment alors trouver une transition du second ordre pour le modèle $O(N) \times O(2)$ avec $N = 2$ et 3 [102, 103]. Et les exposants trouvés coïncident très bien avec ceux du groupe de renormalisation en dimension fixée. Néanmoins cette approche trouve un seul point fixe des équations du groupe de renormalisation pour λ_1 et λ_2 positifs alors que toutes les approches dont nous venons de parler en trouvent deux (nous le verrons dans la partie III.3). De plus, cette méthode semble supposer l'invariance d'échelle, c'est-à-dire l'existence même d'une transition du second ordre, ce qui est justement l'objet de désaccord avec les autres approches théoriques. Il faudrait s'assurer qu'il n'y a pas là une forme de prophétie auto-réalisatrice [90].

Cette partie a donc mis en lumière une controverse sur l'existence d'une transition du second ordre dans le modèle $O(N) \times O(2)$ pour $N = 2$ et 3. Nous allons voir que cette controverse pourrait être résolue par une simulation du modèle $O(N) \times O(2)$ par des gaz d'atomes froids.

I.2 Gaz de bosons spinoriels

Nous consacrerons cette partie aux gaz de bosons spinoriels, plus particulièrement aux gaz de bosons de spin 1. Nous dériverons l'hamiltonien qui permet, sous certaines conditions (dont nous discuterons de la faisabilité expérimentale), d'étudier la transition superfluide à température finie dans ces systèmes. Nous verrons qu'il est identique à celui du modèle classique $\mathrm{O}(N)\times\mathrm{O}(2)$ avec $N=3$. Ceci constitue le premier résultat important de cette thèse.

I.2.1 Dérivation de l'hamiltonien

Ainsi considérons à partir de maintenant un gaz de bosons de spin $f=1$, de masse M, dans un espace continu, sans potentiel extérieur et sans champ magnétique. L'hamiltonien d'un tel système a été dérivé pour la première fois en 1998 [104, 105]. Ce système est décrit par un opérateur champ $\hat{\psi}_m(\mathbf{x})$ qui correspond à l'annihilation d'un boson au point $\mathbf{x}$ dans l'état de spin $|f,m\rangle$. m correspond à la projection du spin sur l'axe z, c'est un nombre entier compris entre $-f$ et f.

Les opérateurs $\hat{\psi}_m(\mathbf{x})$ vérifient les relations de commutation bosoniques

$$\begin{cases} \left[\hat{\psi}_m(\mathbf{x}),\hat{\psi}^\dagger_{m'}(\mathbf{x}')\right] = \delta_{m,m'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ \left[\hat{\psi}_m(\mathbf{x}),\hat{\psi}_{m'}(\mathbf{x}')\right] = \left[\hat{\psi}^\dagger_m(\mathbf{x}),\hat{\psi}^\dagger_{m'}(\mathbf{x}')\right] = 0. \end{cases} \tag{I.2.1}$$

La partie cinétique de l'hamiltonien du système est alors

$$\hat{H}_0 = \int d^3\mathbf{x} \sum_{m=-f}^{f} \hat{\psi}^\dagger_m \left(-\frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2M} - \mu\right) \hat{\psi}_m \tag{I.2.2}$$

où μ est le potentiel chimique.

Dans la suite, nous négligerons le couplage spin-orbite, ce qui a pour effet que le spin total F d'une paire atomes est conservé durant une collision (de même pour le moment cinétique orbital). Puis, nous supposerons que la densité du gaz est faible (nous parlerons de « gaz dilué »), donc nous pourrons considérer des interactions uniquement à deux corps. De plus, à basse énergie, les interactions ne se font que dans l'onde s [51].

Pour des raisons de symétrie, l'interaction entre deux atomes ne peut pas se faire avec un spin total $F=1$. En effet, la fonction d'onde de deux bosons de spin 1 en interaction est symétrique sous l'échange des deux bosons. Puisque l'interaction se fait nécessairement dans l'onde s, la partie spatiale de la fonction d'onde est symétrique également, donc la partie de spin doit l'être aussi, ce qui n'est pas le cas pour $F=1$. Autrement dit, les interactions dans l'onde s ne sont possibles que avec $F=0$ ou 2.

En utilisant la conservation du spin total des paires durant les collisions, la partie de l'hamiltonien due aux interactions peut s'écrire

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{x}' \left[v^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\hat{P}_0(\mathbf{x},\mathbf{x}') + v^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\hat{P}_2(\mathbf{x},\mathbf{x}')\right] \tag{I.2.3}$$

avec $\hat{P}_F(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ l'opérateur qui projette une paire d'atomes dans le sous-espace de spin total égal à F et les localise en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$. $\hat{P}_F$ peut s'écrire

$$\hat{P}_F(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_{\mathcal{M}=-F}^{F} \hat{A}^\dagger_{F,\mathcal{M}}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\hat{A}_{F,\mathcal{M}}(\mathbf{x},\mathbf{x}') \tag{I.2.4}$$

où

$$\hat{A}_{F,\mathcal{M}}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_{m,m'=-1}^{1} \langle F,\mathcal{M}|1,m;1,m'\rangle \hat{\psi}_m(\mathbf{x})\hat{\psi}_{m'}(\mathbf{x}') \tag{I.2.5}$$

est l'opérateur qui annihile une paire de bosons dans l'état de spin $|F,\mathcal{M}\rangle$ (de spin total F et dont la projection sur l'axe z vaut $\mathcal{M}$) localisée en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$. Nous avons noté $|1,m;1,m'\rangle$ l'état de spin de deux bosons dont les projections des spins sur l'axe z vaut m et m' [15]. Notons que $\langle F,\mathcal{M}|1,m;1,m'\rangle$ est tout simplement un coefficient de Clebsch-Gordan.

Le régime de basse énergie est défini par $Ma_F^2T, Ma_F^2\mu \ll 1$ (pour $F = 0$ ou 2), où a_F est la longueur de diffusion dans le canal de spin total F et dans l'onde s. La physique dans ce régime est dite « universelle », car les quantités physiques (par exemple les grandeurs thermodynamiques, les amplitudes de diffusion ou encore la longueur de corrélation) sont indépendantes du détail du potentiel d'interaction et ne dépendent que de trois caractéristiques du gaz : la masse M des bosons et les longueurs de diffusion a_0 et a_2 (qui peuvent être mesurées expérimentalement [51]). Nous pouvons alors considérer un hamiltonien modèle dans lequel le potentiel d'interaction $v^{(F)}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ est remplacé par un potentiel de contact

$$v^{(F)}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = g_F\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{I.2.6}$$

où g_F est une constante quantifiant la force de l'interaction dans le canal de spin total F. Il est alors nécessaire d'introduire une coupure ultra-violette Λ de l'ordre de l'inverse de a_{vdW}, la portée du potentiel d'interaction réel. Cette longueur est appelée « longueur de van der Waals » et est de l'ordre de quelques nanomètres. Dans le cadre de ce modèle d'interactions locales, les longueurs de diffusion a_F sont des fonctions de g_F et de Λ. Les quantités physiques, exprimées en fonction de a_F, ne dépendent ni de g_F ni de Λ explicitement.

Il est ensuite judicieux de changer de base. Au lieu d'utiliser la base $\{|1,m\rangle\}$, nous allons utiliser la base cartésienne définie par

$$\begin{cases} |1,x\rangle = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle) \\ |1,y\rangle = \dfrac{i}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle + |1,-1\rangle) \\ |1,z\rangle = |1,0\rangle. \end{cases} \tag{I.2.7}$$

Nous remarquons alors que $F^\alpha|1,\alpha\rangle = 0$ pour $\alpha = x,y,z$, de plus cela permet au vecteur $\hat{\boldsymbol{\psi}} = {}^t(\hat{\psi}_x,\hat{\psi}_y,\hat{\psi}_z)$ de se transformer comme un vecteur sous les rotations dans l'espace des spins [16].

[15] C'est l'état propre des opérateurs $\hat{\mathbf{F}}_1^2$,$\hat{\mathbf{F}}_2^2$,$\hat{F}_{1,z}$ et $\hat{F}_{2,z}$.

[16] Pour une rotation d'angle θ autour de l'axe $\mathbf{u}$, $\hat{\boldsymbol{\psi}}' = \hat{R}(\theta,\mathbf{u})\hat{\boldsymbol{\psi}}\hat{R}(\theta,\mathbf{u})^\dagger$ où $\hat{R}(\theta,\mathbf{u}) = \exp(-i\theta\hat{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{u})$. Le choix de la base cartésienne permet d'avoir $\hat{\psi}'_\alpha = \sum_\beta \mathcal{R}(\theta,\mathbf{u})_{\alpha,\beta}\hat{\psi}_\beta$ où $\mathcal{R} \in \mathrm{SO}(3)$ la matrice de rotation d'angle θ autour de l'axe $\mathbf{u}$.

Nous calculons alors les coefficients de Clebsch-Gordan et obtenons

$$\begin{cases} \hat{A}^\dagger_{0,0}\hat{A}_{0,0} = \dfrac{1}{3}(\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger)(\hat{\boldsymbol{\psi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}}) \\ \displaystyle\sum_{\mathcal{M}=-2}^{2}\hat{A}^\dagger_{2,\mathcal{M}}\hat{A}_{2,\mathcal{M}} = \ :(\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}})^2: -\dfrac{1}{3}(\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger)(\hat{\boldsymbol{\psi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}}) \end{cases} \tag{I.2.8}$$

où nous avons omis les dépendances en coordonnées spatiales : $\hat{A}_{F,\mathcal{M}} = \hat{A}_{F,\mathcal{M}}(\mathbf{x},\mathbf{x})$ et $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \hat{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x})$. Ce qui est entre « : » est pris dans l'ordre normal (les champs avec † avant ceux sans). Ainsi l'hamiltonien décrivant ce système est

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int d^3\mathbf{x}\Bigg[\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2M}-\mu\right)\hat{\boldsymbol{\psi}} + \frac{g_2}{2}:(\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}})^2: \\ + \frac{g_0-g_2}{6}(\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger)(\hat{\boldsymbol{\psi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}})\Bigg] \end{aligned} \tag{I.2.9}$$

où la coupure ultra-violette est de l'ordre de a^{-1}_{vdW}.

Nous pouvons mentionner aussi le fait que dans la base $\{|1,m\rangle\}$, cet hamiltonien s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int d^3r\Bigg[\sum_m \hat{\psi}^\dagger_m\left(-\frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2M}-\mu\right)\hat{\psi}_m \\ + \frac{c_0}{2}:\left(\sum_m\hat{\psi}^\dagger_m\hat{\psi}_m\right)^2: + \frac{c_2}{2}:\left(\sum_{m,m'}\hat{\psi}^\dagger_m\hat{\mathbf{F}}_{m,m'}\hat{\psi}_{m'}\right)^2:\Bigg] \end{aligned} \tag{I.2.10}$$

où $\hat{\mathbf{F}} = {}^t(\hat{F}_x,\hat{F}_y,\hat{F}_z)$ sont les matrices de spin 1, $c_0 = (g_0+2g_2)/3$ et $c_2 = (g_2-g_0)/3$. Cela permet de se rendre compte qu'il y a une interaction type densité-densité, et une de type spin-spin.

Cet hamiltonien est invariant sous les transformations

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\psi}}' = R\hat{\boldsymbol{\psi}} \quad \text{où } R\in \mathrm{O}(3) \\ \hat{\boldsymbol{\psi}}' = e^{i\theta}\hat{\boldsymbol{\psi}} \quad \text{où } \theta\in\mathbb{R} \\ \hat{\boldsymbol{\psi}}' = \hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger \end{cases} \tag{I.2.11}$$

où R et θ sont indépendants de $\mathbf{x}$ et τ. La première symétrie correspond à la rotation et à l'inversion dans l'espace des spins O(3), la deuxième à la transformation globale de jauge U(1), et la troisième au renversement du temps Θ (qui peut s'écrire aussi $\hat{\psi}'_m = (-1)^m\hat{\psi}^\dagger_{-m}$) [106]. Ainsi le groupe de symétrie de l'hamiltonien (I.2.9) est $\mathrm{O}(3)\times\mathrm{U}(1)\times\Theta$ (qui, si on écrit $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}_1 + i\boldsymbol{\varphi}_2$ où $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ sont des opérateurs réels, est équivalent au groupe $\mathrm{O}(3)\times\mathrm{O}(2)$). Si $g_0 = g_2$, la symétrie s'élargit à $U(3)$.

Il est possible d'exprimer la fonction de partition du système Z comme une intégrale fonctionnelle sur un champ classique $\boldsymbol{\psi}$ (ce n'est plus un opérateur) qui dépend toujours de $\mathbf{x}$ mais aussi d'un temps imaginaire τ :

$$Z = \int_{\boldsymbol{\psi}^{(\dagger)}(\mathbf{x},\beta)=\boldsymbol{\psi}^{(\dagger)}(\mathbf{x},0)}\mathcal{D}\boldsymbol{\psi}^\dagger\mathcal{D}\boldsymbol{\psi}e^{-S[\boldsymbol{\psi}^\dagger,\boldsymbol{\psi}]} \tag{I.2.12}$$

où l'action S est définie par

$$S[\boldsymbol{\psi}^\dagger, \boldsymbol{\psi}] = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \left[\boldsymbol{\psi}^\dagger \cdot \left(\partial_\tau - \mu - \frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2M} \right) \boldsymbol{\psi} + \frac{g_2}{2} \left(\boldsymbol{\psi}^\dagger \cdot \boldsymbol{\psi} \right)^2 + \frac{g_0 - g_2}{6} |\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}|^2 \right]. \tag{I.2.13}$$

I.2.2 Champ moyen

Dans l'approximation du champ moyen [104, 105], on considère que le champ $\boldsymbol{\psi}$ est uniforme en espace et en temps imaginaire (ce qui revient à négliger les fluctuations). On pose $\boldsymbol{\psi} = \sqrt{n_0}\boldsymbol{\chi}$ où $\boldsymbol{\chi}^\dagger \cdot \boldsymbol{\chi} = 1$ (n_0 est la densité du condensat). Ainsi l'action devient

$$S[\boldsymbol{\psi}^\dagger, \boldsymbol{\psi}] = \beta V \left[-\mu n_0 + \frac{g_2}{2} n_0^2 + \frac{g_0 - g_2}{6} n_0^2 |\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}|^2 \right] \tag{I.2.14}$$

où V est la taille du système. Deux cas se présentent à nous en fonction du signe de $g_0 - g_2$.

Le premier cas, que nous ne traiterons pas dans cette thèse (car l'analogie avec les antiferroaimants sur réseau triangulaire n'y existe pas), est celui pour lequel $g_2 > g_0$. Dans ce cas la minimisation de (I.2.14) mène à $|\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}| = 1$. L'état fondamental le plus général est

$$\boldsymbol{\psi} = \sqrt{n_0} e^{i\theta} R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta \in [0, 2\pi[\text{ et } R \in \mathrm{SO}(3). \tag{I.2.15}$$

Dans ce cas $\langle \hat{\boldsymbol{\psi}} \rangle = \boldsymbol{\psi} = {}^t(0,0,1)\sqrt{n_0}$, et $\langle \sum_{m,m'} \hat{\psi}_m^* \hat{\mathbf{F}}_{m,m'} \hat{\psi}_{m'} \rangle = 0$. On parle de « phase polaire » [17].

Le deuxième cas est celui que nous étudierons par la suite, il correspond à $g_0 > g_2$. La minimisation de (I.2.14) mène à $|\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi}| = 0$. L'état fondamental le plus général est

$$\boldsymbol{\psi} = \sqrt{\frac{n_0}{2}} R \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } R \in \mathrm{SO}(3). \tag{I.2.16}$$

On peut aussi multiplier ${}^t(1,i,0)$ par $e^{i\theta}$, mais cela est équivalent à une rotation d'angle $-\theta$ autour de l'axe z. Nous retrouvons la symétrie SO(3) du paramètre d'ordre dans le modèle O(3) × O(2) que nous avons vu dans la partie I.1.3. Dans ce cas $\langle \hat{\boldsymbol{\psi}} \rangle = \boldsymbol{\psi}$, et $\langle \sum_{m,m'} \hat{\psi}_m^* \hat{\mathbf{F}}_{m,m'} \hat{\psi}_{m'} \rangle = n_0 R^t(0,0,1)$. On parle de « phase ferromagnétique », que nous appellerons de façon plus claire « phase ferromagnétique condensée » [18].

Dans les deux phases ordonnées, les symétries U(1) et SO(3) sont toutes les deux brisées. Les bosons sont donc condensés et avec un ordre magnétique.

[17] Dans l'état $\boldsymbol{\psi} = {}^t(0,0,1)\sqrt{n_0}$, les bosons sont tous condensés dans l'état de spin $|1,0\rangle$. Ils peuvent également être tous condensés équitablement dans les états $|1,1\rangle$ et $|1,-1\rangle$ sans qu'il n'y en ait dans l'état $|1,0\rangle$. De façon générale dans la phase polaire, le nombre de bosons condensés dans $|1,1\rangle$ est égal à celui dans l'état $|1,-1\rangle$.

[18] Dans l'état $\boldsymbol{\psi} = {}^t(1,i,0)\sqrt{n_0}$, les bosons sont tous condensés dans l'état de spin $|1,-1\rangle$.

I.2.3 Théorie classique équivalente

Il est possible de se ramener à une théorie classique [107, 108] qui permet d'étudier (dans une certaine mesure que nous allons discuter) la transition entre la phase normale et la phase ferromagnétique condensée. Cela peut être fait en intégrant les fluctuations ayant des impulsions plus grandes que l'inverse de la longueur d'onde thermique de de Broglie $\lambda_{\mathrm{dB}} = (2\pi/MT)^{1/2}$ (plus précisément entre a_{vdW}^{-1} et $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$). Pour les impulsions plus grandes que $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, ce sont les fluctuations quantiques qui dominent la physique. En revanche, en dessous de $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, le comportement du système est entièrement classique. Cela peut se comprendre par le fait que le nombre de bosons avec une impulsion $\mathbf{p}$ telle que $|\mathbf{p}| \ll \lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, donné par la distribution de Bose-Einstein, est beaucoup plus grand que 1. Nous schématisons la procédure d'intégration sur le figure I.2.

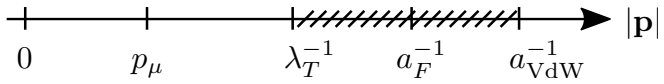


Fig. I.2 : Intégration des fluctuations ayant des impulsions plus grandes que $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$. La partie hachurée est celle que nous avons intégrée, cela correspond aux degrés de liberté intrinsèquement quantiques. Ceux de la partie non-hachurée ont un comportement classique. $p_\mu = \sqrt{2M\mu}$ correspond à l'échelle d'impulsion associée au potentiel chimique.

Lorsque l'on intègre les fluctuations ayant des impulsions comprises entre a_{vdW}^{-1} et $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, et à condition que l'on se situe dans le régime de basse énergie, c'est-à-dire $Ma_F^2\mu, Ma_F^2T \ll 1$, la constante d'interaction g_F évolue et tend vers $4\pi a_F/M$. Nous verrons ultérieurement (partie II.3.2) comment le groupe de renormalisation permet de faire explicitement cette intégration.

On obtient ainsi un hamiltonien classique

$$H[\boldsymbol{\psi}^\dagger, \boldsymbol{\psi}] = \beta \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2M} |\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi}|^2 - \mu' |\boldsymbol{\psi}|^2 + \frac{4\pi}{M} \left(\frac{a_2}{2} |\boldsymbol{\psi}|^4 + \frac{a_0 - a_2}{6} |\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}|^2 \right) \right] \quad \text{(I.2.17)}$$

où μ' est un potentiel chimique renormalisé par les fluctuations quantiques. L'expression précise de μ' n'est pas importante pour la suite. Cette procédure d'intégration fait également apparaître de nouveaux termes d'ordre plus élevé (par exemple $|\boldsymbol{\psi}|^6$) dans l'hamiltonien (I.2.17). Mais ces termes font intervenir des puissances de $an^{1/3}$ (où n est la densité du gaz), nous pouvons donc les négliger à basse densité.

Cet hamiltonien classique possède une nouvelle coupure ultra-violette Λ qui est de l'ordre de $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$. Ce n'est pas une égalité stricte car le changement de régime quantique/classique que nous venons de décrire est en réalité un passage doux. Ainsi en prenant g_F strictement égal à $4\pi a_F/M$ dans l'hamiltonien classique, nous ne connaissons pas précisément la valeur de Λ. Nous verrons que nos résultats dépendront peu du choix de cette valeur, et proposerons une approche, directement à partir de l'action quantique (I.2.13), qui permettra d'éliminer presque totalement la dépendance des résultats en Λ.

L'hamiltonien (I.2.17) peut être utilisé pour calculer les quantités physiques qui ne dépendent pas des degrés de liberté d'impulsions plus grandes que $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, en particulier

la différence entre la température de transition réelle T_c et celle de condensation de Bose-Einstein d'un gaz sans interaction T_c^0 [109]

$$T_c^0 = \frac{2\pi}{M}\left(\frac{n}{3\zeta(3/2)}\right)^{2/3} \tag{I.2.18}$$

qui s'écrit aussi selon la théorie Hartree-Fock

$$T_c^0 = \frac{2\pi}{M}\left(\frac{3M\mu}{8\pi\zeta(3/2)(a_0+5a_2)}\right)^{2/3}. \tag{I.2.19}$$

Nous détaillerons cette différence de température pour les bosons de spin 0 dans la partie II.3.2. Pour la justification sur l'utilisation d'un tel hamiltonien classique à basse énergie, nous conseillons les notes de conférence [110].

I.2.4 Possibilité d'une transition ferromagnétique sans condensation

De nombreux travaux ont étudié la possibilité que le schéma de brisure des symétries ne soit pas celui prédit par le champ moyen. En effet, l'interaction dépendant des spins dans (I.2.10) pourrait favoriser la présence d'une phase purement ferromagnétique (sans condensation) au-dessus de la phase ferromagnétique condensée [111, 112, 113, 114] à partir du moment où $c_2 < 0$ (c'est-à-dire $g_0 > g_2$, ce qui est vérifié dans la phase ferromagnétique condensée). Mais une étude plus récente [115] montre que les effets d'interactions d'échange défavorisent le ferromagnétisme. Par un calcul réalisé dans l'approximation de la phase aléatoire, les auteurs trouvent que T_c^0 est effectivement plus basse que la température de transition ferromagnétique (sans condensation) T_f, à condition seulement que $c_2/c_0 < -1/3$, c'est-à-dire à $a_0/a_2 > 5/2$. Le gaz d'atomes de ^{7}Li respecte cette contrainte, donc il devrait y avoir une phase ferromagnétique avant la condensation.

Plus précisément, l'approximation de la phase aléatoire prédit, à condition que la transition entre la phase normale et la phase purement ferromagnétique soit du second ordre, que T_f vérifie (dans la limite où $a_F n^{1/3} \ll 1$)

$$\frac{T_f - T_c^0}{T_c^0} = -\alpha\left(\frac{1}{3} + \frac{a_2 - a_0}{a_0 + 2a_2}\right)(a_0 + 2a_2)n^{1/3} \tag{I.2.20}$$

où

$$\alpha = \frac{8\pi}{[3\zeta(3/2)]^{4/3}} \simeq 1.61. \tag{I.2.21}$$

Notons que pour obtenir ce résultat, nous avons fait le même calcul que celui de l'article [115], mais n'avons pas obtenu exactement la même expression pour $T_f - T_c^0/T_c^0$ (α est divisé par 3 par rapport à celui de l'article, et a_0+2a_2 remplace a_0). Nous pensons qu'il y a peut-être une erreur dans cet article (mais qui n'a pas d'influence sur la condition $c_2/c_0 < -1/3$ que nous venons d'évoquer).

Nous ajoutons à ce résultat le fait que les interactions ont tendance à légèrement augmenter la température de condensation T_c [107]. Pour quantifier cela, nous allons nous inspirer du résultat pour les bosons de spin 0 (voir partie II.3.2). Nous supposons donc que la transition entre la phase normale et la phase ferromagnétique condensée

est du second ordre. Nous remplaçons la longueur de diffusion a des bosons de spin 0 par la combinaison $(a_0 + 5a_2)/3$ [19] et la densité n par $n/3$ [20]. On a alors, à basse densité,

$$(T_c - T_c^0)/T_c^0 = \beta \frac{a_0 + 5a_2}{3} \left(\frac{n}{3}\right)^{1/3}. \tag{I.2.22}$$

où $\beta \simeq 1.32$ [116].

Finalement, on trouve que $T_f > T_c$ quand

$$\alpha \left(\frac{1}{3} + \frac{a_2 - a_0}{a_0 + 2a_2}\right)(a_0 + 2a_2) + \frac{\beta}{3^{4/3}}(a_0 + 5a_2) < 0 \tag{I.2.23}$$

qui est équivalent à

$$a_0 > 5.48 a_2. \tag{I.2.24}$$

Les gaz de ^{7}Li (dont nous parlerons dans la prochaine partie) ne respectent pas cette condition, donc T_f n'est pas plus grande que T_c [21]. Néanmoins nous allons montrer que la transition entre la phase normale et la phase ferromagnétique condensée est du premier ordre[22], ce qui invalide ces raisonnements (en particulier l'équation (I.2.22)).

Cette question a été étudiée expérimentalement [117]. Le ferromagnétisme est observé grâce à de l'imagerie *in situ* et la condensation par une analyse du temps de vol des atomes. Malheureusement, la sensibilité des mesures et le contrôle de la température ne sont pas assez précis pour dire si les deux apparaissent en même temps ou l'un après l'autre. La possibilité d'une transition ferromagnétique sans condensation reste donc une question ouverte. Pour la suite, nous allons supposer que le schéma de brisure est bien celui prédit par le champ moyen (c'est-à-dire d'une phase normale à une phase ferromagnétique condensée).

I.2.5 Des réalisations physiques

Les atomes alcalins sont de bons candidats pour étudier les bosons de spin 1. En effet, à faible champ magnétique, l'interaction hyperfine entre le moment cinétique total de l'électron célibataire et le spin du noyau domine et engendre un état fondamental de spin 1 [23]. En fonction de l'espèce chimique considérée, les propriétés de collision entre les différents états hyperfins ne sont pas toujours favorables aux expériences utilisant ces gaz. Les collisions peuvent par exemple engendrer un réchauffement du gaz et donc des pertes atomiques, ou encore une compressibilité négative et donc un effondrement du gaz. Cela conduit à un temps de vie du gaz trop court pour que l'on puisse étudier le condensat.

[19] Car l'expression de T_c^0 en fonction de μ pour les bosons de spin 0 est identique à celle pour les bosons de spin 1 (I.2.19) à condition que a soit remplacé par $(a_0 + 5a_2)/3$.

[20] Car l'expression de T_c^0 en fonction de n pour les bosons de spin 0 est identique à celle pour les bosons de spin 1 (I.2.18) à condition que n soit remplacé par $n/3$.

[21] De plus, si on tenait compte des fluctuations au-delà de l'approximation de la phase aléatoire, elle auraient *a priori* tendance à baisser T_f (voir la partie sur le magnétisme II.3.1).

[22] Il n'est pas non plus certain que la transition entre la phase normale et la phase purement ferromagnétique soit du second ordre. Cela est pourtant supposé dans le calcul de T_f dans l'approximation de la phase aléatoire (I.2.20).

[23] Le numéro atomique étant impair pour les alcalins, le nombre de masse doit être impair pour que l'alcalin considéré soit un boson.

Néanmoins, certains atomes (avec $a_0 > a_2$) ont un temps de vie suffisant. ^{87}Rb en est un exemple, il a déjà été condensé [118, 119]. ^{41}K et ^{7}Li sont également de bons candidats. Les longueurs de diffusion dans ces gaz ont été mesurées expérimentalement ([120] pour ^{87}Rb, [121] pour ^{41}K et [51] pour ^{7}Li), nous reportons les valeurs dans le tableau I.1.

Nous n'avons pas mis de potentiel extérieur dans l'hamiltonien décrivant le système. En effet, nous ne pourrions pas faire les calculs présentés dans la suite. Or en réalité, les atomes subissent les effets du piège optique [24]. Cela entraîne une variation spatiale de la densité du gaz sur une longueur caractéristique qui dépend du piège (de l'ordre du μm).

La prise en compte théorique du piège se fait généralement au travers de l'approximation de la densité locale. Celle-ci revient à considérer que le gaz est localement uniforme et que la présence du piège se traduit uniquement par une dépendance spatiale de μ. Cela permet de faire certaines prédictions (en particulier pour l'équation d'état) quand le système n'est pas proche de la transition. En revanche, pour les quantités définies proches de la transition, cela s'avère beaucoup plus compliqué par le fait que la longueur de corrélation devient plus grande que la longueur caractéristique sur laquelle varie la densité. À titre d'exemple, l'observation du comportement en loi de puissance de la longueur de corrélation en fonction de la température n'est pas aisée [123, 124].

Néanmoins, de récents travaux, en particulier celui réalisé par Alexander L. Gaunt *et al.* [125], montrent que le piège peut être quasi-uniforme. Lorsque les atomes ne sont pas tout près des bords, ils ne sont pas donc influencés par le piège. Cela ouvre la voie à l'étude expérimentale de façon précise des propriétés critiques prédites par des travaux théoriques qui ne peuvent pas prendre en compte l'effet du piège.

Dans la suite, nous choisissons une densité à la transition

$$n = 11 \times 10^{12}\ \mathrm{cm}^{-3}, \tag{I.2.25}$$

en accord avec l'expérience de Alexander L. Gaunt *et al.* [125]. Cette densité est faible, ce qui est nécessaire dans toute l'étude qui précède. Plus précisément $a_F n^{1/3}$ est beaucoup plus petit que 1 pour les différents gaz que nous considèrerons (voir tableau I.1).

Table I.1 : a_0/a_B, a_2/a_B, $a_0 n^{1/3}$ et $a_2 n^{1/3}$ pour les différents gaz considérés, où a_B est le rayon de Bohr et $n = 11 \times 10^{12}$ cm^{-3} la densité du gaz.

	^{87}Rb	^{41}K	^{7}Li
a_0/a_B	101.8 ± 0.2	68.5 ± 0.7	23.9
a_2/a_B	100.4 ± 0.1	63.5 ± 0.6	6.8
$a_0 n^{1/3}$	1.2×10^{-2}	8.1×10^{-3}	2.8×10^{-3}
$a_2 n^{1/3}$	1.2×10^{-2}	7.5×10^{-3}	8.0×10^{-4}

[24] Certaines études réussissent à prendre en compte l'effet du piège de façon perturbative, par exemple pour le calcul de la température de transition [122].

Dans notre travail, nous avons négligé les interaction dipolaires magnétiques. Cela est justifié si le rapport ϵ_1 entre l'énergie par atome associée aux interactions dipolaires[25] $E_{\text{dip.}} = (1/3)\mu_0\mu^2 n$ et l'énergie par atome associée à l'interaction densité-densité $E_{\text{dens.}} = 4\pi\hbar^2(a_0 + 2a_2)n/(3M)$ est petit par rapport à 1. De même pour le rapport ϵ_2 entre $E_{\text{dip.}}$ et l'énergie par atome associée à l'interaction spin-spin $E_{\text{spin}} = 4\pi\hbar^2(a_2 - a_0)n/(3M)$. Nous trouvons que ϵ_2 est plus grand que ϵ_1 et vaut environ 0.4 pour ^{87}Rb, 0.05 pour ^{41}K et 0.002 pour ^{7}Li. Donc, sauf pour le ^{87}Rb, il est raisonnable de négliger les interactions dipolaires magnétiques.

Nous avons également négligé l'effet du champ magnétique externe. L'énergie associée à l'effet Zeeman linéaire devient plus grande que celle associée aux interactions entre bosons à partir du moment où le champ magnétique est de l'ordre du μG [51]. L'aimantation du système devient alors non-nulle (seul le niveau $|1\rangle$ ou $|-1\rangle$ est peuplé si le champ est selon l'axe z) et l'invariance par rotation dans l'espace des spins SO(3) est brisée. Mais, expérimentalement, il est possible de contraindre l'aimantation à être égale à une valeur précise, en particulier à 0 pour pouvoir faire condenser les trois états de spin en même temps [126]. D'un point de vue théorique, cela revient à mettre un multiplicateur de Lagrange pour conserver l'aimantation [127]. Si cette dernière est fixée à 0, le multiplicateur compense alors l'effet Zeeman linéaire. Et la symétrie SO(3) est préservée.

Mais l'effet Zeeman n'est pas strictement linéaire. Il y a aussi une contribution quadratique en champ magnétique qui brise également la symétrie SO(3). Pour un champ magnétique $\mathbf{B} = B_z\mathbf{u}_z$ orienté selon l'axe z, cet effet intervient dans l'hamiltonien sous la forme $cB_z^2\hat{F}_z^2$ (où c est une constante dépendant du type d'atomes utilisé). Pour savoir si ce terme est négligeable, il faut le comparer aux énergies d'interactions. Nous trouvons que $E_{\text{dens.}}$ et E_{spin} valent respectivement $h \times 86$ Hz et $h \times 0.40$ Hz pour ^{87}Rb, $h \times 118$ Hz et $h \times 3.0$ Hz pour ^{41}K, $h \times 132$ Hz et $h \times 60$ Hz pour ^{7}Li. Ainsi, d'après la référence [117] et la figure 1 de la référence [51], le champ magnétique extérieur doit être au plus de l'ordre de quelques mG pour que son effet soit négligeable, un bouclier magnétique est donc *a priori* nécessaire.

I.2.6 Analogie avec les antiferroaimants sur réseau triangulaire

Les hamiltoniens (I.1.6) (avec $N = 3$) et (I.2.17) sont identiques. Pour le voir, on identifie

$$\boldsymbol{\psi} = \sqrt{\frac{M}{\beta}}(\boldsymbol{\varphi}_1 + i\boldsymbol{\varphi}_2), \tag{I.2.26}$$

puis

$$\begin{cases} r = -2M\mu' \\ \lambda_1 = \dfrac{16\pi M}{\beta}a_2 \\ \lambda_2 = \dfrac{16\pi M}{3\beta}(a_0 - a_2) \end{cases} \tag{I.2.27}$$

[25] Dans cette expression, μ_0 désigne la perméabilité du vide et μ le moment magnétique d'un atome. Pour les gaz considérés, $\mu \simeq \mu_B F/(I + 1/2)$ [51] où μ_B est le magnéton de Bohr et I le spin nucléaire d'un atome égal ici à 3/2.

et enfin la coupure ultra-violette de l'hamiltonien (I.1.6) $\Lambda = \lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$. Cela prouve que la transition superfluide du gaz de bosons de spin 1 peut être étudiée par le modèle $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$, et donc l'analogie entre ce système et les antiferroaimants sur réseau triangulaire avec $N = 3$. Dans la suite, nous travaillerons à température fixe. En revanche, le paramètre r sera considéré comme libre afin de mettre le système à la transition (cela revient, en fait, à faire varier le potentiel chimique).

Si la transition est du premier ordre, ρ_0 subit un saut à la transition $\Delta\rho_0$ qui est relié à un saut Δn_0 de la densité du condensat par

$$\Delta n_0 = 4\pi\Delta\rho_0. \tag{I.2.28}$$

En pratique, pour étudier cet hamiltonien, il est préférable d'exprimer toutes les longueurs en terme de λ_{dB}. Cela nous permet d'avoir $\Lambda = 1$. Et on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 32\pi^2 \frac{a_2}{\lambda_{\mathrm{dB}}}, \\ \lambda_2 &= 32\pi^2 \frac{a_0 - a_2}{3\lambda_{\mathrm{dB}}}. \end{aligned} \tag{I.2.29}$$

M intervient uniquement *via* $\lambda_{\mathrm{dB}} = (2\pi/MT)^{1/2}$. Pour évaluer λ_{dB}, nous remplacerons la température par l'expression de T_{c}^0 (I.2.18) (ce qui est généralement raisonnable quand la densité est faible (I.2.22)). On obtient

$$\lambda_{\mathrm{dB}} = \left(\frac{3\zeta(3/2)}{n}\right)^{1/3} \tag{I.2.30}$$

qui devient alors indépendant de M (n'intervenant donc plus dans notre modèle). Pour les systèmes considérés (avec les longueurs de diffusion de la table I.1 avec la densité choisie (I.2.25)), cela donne

$$\begin{aligned} {}^{87}\mathrm{Rb} &: \lambda_1 = 1.878,\ \lambda_2 = 0.004365, \\ {}^{41}\mathrm{K} &: \lambda_1 = 1.188,\ \lambda_2 = 0.01559, \\ {}^{7}\mathrm{Li} &: \lambda_1 = 0.1272,\ \lambda_2 = 0.05331. \end{aligned} \tag{I.2.31}$$

Mentionnons qu'une analogie similaire a été trouvée [128, 129] indépendamment de notre travail. Plus précisément, les auteurs ont montré que la transition superfluide d'un gaz de bosons à 2 composantes peut être décrite par le modèle $\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2)$, et ils ont fait le lien avec les antiferroaimants sur réseau triangulaire avec $N = 2$.

Chapitre II

Groupe de renormalisation

Les prochains résultats de cette thèse reposeront en grande partie sur une méthode non-perturbative du groupe de renormalisation qui est essentiellement due à Christof Wetterich. Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord la base de cette méthode : le groupe de renormalisation de Kenneth Geddes Wilson qui s'appuie sur le concept de bloc de spins. Puis nous entrerons dans le cœur de cette approche en présentant la notion d'« action effective dépendant de l'échelle » et en dérivant une équation d'évolution exacte pour celle-ci. Nous présenterons enfin les différentes approximations possibles, leurs intérêts respectifs et quelques applications sur lesquelles nous avons travaillé. Les lecteurs désirant une présentation plus détaillée du groupe de renormalisation et de la méthode non-perturbative que nous utiliserons pourront lire [130] ou [131].

II.1 Les idées générales

II.1.1 L'idée initiale de Leo Kadanoff

Il est difficile de calculer les fonctions de corrélation et les grandeurs thermodynamiques d'un hamiltonien (microscopique) donné, en particulier quand la longueur de corrélation devient grande devant les autres échelles de longueur du système. Les théories du champ moyen et de la perturbation, en traitant sur un pied d'égalité les différents degrés de liberté et les différentes échelles d'énergie du problème, échouent à décrire le comportement des différentes grandeurs près d'une transition de phase [132].

L'idée introduite en 1966 par Leo Kadanoff est d'intégrer progressivement les degrés de liberté microscopiques du système afin d'obtenir une théorie effective de longue distance [133]. Il l'a appliquée à un système de spins sur un réseau. Plus précisément, cela consiste à regrouper les spins en plaquettes élémentaires (ou blocs) et à attribuer à chaque plaquette un nouveau spin décrivant l'orientation majoritaire des spins de la plaquette. On réduit ainsi le nombre de degrés de liberté du système initial et on obtient un nouveau système de spins sur un réseau dont le pas est plus grand que celui du réseau initial. La physique (les quantités thermodynamiques) de ces deux systèmes est identique à longue distance. En itérant cette transformation (« transformation du groupe de renormalisation »), on génère une suite de systèmes ayant le même comportement à grande distance (« flot de renormalisation »).

Le principal problème de cette méthode vient du fait que si les spins du modèle initial interagissent entre plus proches voisins uniquement, la transformation génère des interactions à plus longue portée qui n'étaient pas présentes initialement. On est obligé de faire des approximations, mais ce n'est pas évident de savoir lesquelles sont judicieuses. C'est la raison pour laquelle elle n'est pas utilisée en pratique et a été adaptée par Kenneth Geddes Wilson [134] dans le but de pouvoir y implémenter des approximations plus facilement.

II.1.2 Le perfectionnement de Kenneth Geddes Wilson

Afin de décrire cette procédure, nous choisissons un système dont la physique puisse être décrite par un champ microscopique fluctuant $\varphi(\mathbf{x})$ (choisi scalaire par simplicité) à valeur dans un espace continu. Nous savons que le comportement d'un tel système est décrit par un hamiltonien $H[\varphi]$ et que les différentes quantités thermodynamiques ainsi que les fonctions de corrélation peuvent être obtenues à partir de la fonction de partition Z définie par :

$$Z = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-H[\varphi]}. \tag{II.1.1}$$

Nous avons absorbé la température apparaissant généralement devant l'hamiltonien dans une redéfinition de ce dernier. Nous supposerons qu'il y a une coupure ultra-violette Λ, de l'ordre de l'inverse de la maille du réseau du système physique étudié. H est donc un hamiltonien effectif dans lequel les fluctuations de φ sur des distances plus petites que Λ^{-1} ont déjà été intégrées.

On intègre alors tout d'abord les champs $\varphi(\mathbf{p})$ pour lesquels $|\mathbf{p}|$ est compris entre Λ et $\Lambda - dk$ (cela correspond au regroupement des spins par plaquette). On itère ce processus par pas successifs dk. Lorsque qu'une couche de largeur finie a été intégrée, nous définissons k comme étant l'échelle d'impulsion au-dessus de laquelle les degrés de liberté ont été intégrés. Nous séparons alors les degrés de liberté en deux catégories :

$$\varphi(\mathbf{p}) = \varphi_>(\mathbf{p}) + \varphi_<(\mathbf{p}), \tag{II.1.2}$$

avec

$$\varphi_{\lessgtr}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{p}) & \text{si } |\mathbf{p}| \lessgtr k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{II.1.3}$$

Nous représentons cela sur la figure II.1. Les degrés de liberté qui ont été intégrés $\varphi_>$ représentent, du point de vue des blocs de spin, les fluctuations intra-plaquettes, et ceux qu'il reste à intégrer $\varphi_<$ les fluctuations inter-plaquettes.

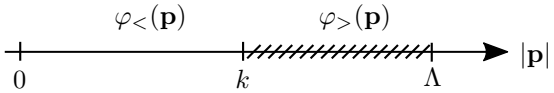


Fig. II.1 : Schéma explicatif du groupe de renormalisation « wilsonien ». Les degrés de liberté de grande impulsion sont progressivement intégrés (zone hachurée) par tranches successives de largeur dk.

Nous pouvons alors définir une suite d'hamiltoniens indicés par l'échelle k :

$$e^{-H_k[\varphi_<]} = \int \mathcal{D}[\varphi_>] e^{-H[\varphi_> + \varphi_<]}, \tag{II.1.4}$$

où H_k décrit la physique des degrés de liberté qu'il reste à intégrer et possède une nouvelle coupure ultra-violette k. Nous pouvons alors ré-exprimer H_k par rapport à l'échelle d'impulsion naturelle k (on parle d'« adimensionnement »). L'ensemble de cette procédure permet d'obtenir un hamiltonien effectif décrivant la physique de basse énergie. Kenneth Geddes Wilson a commencé par appliquer ces idées au modèle d'Ising [135] puis à l'effet Kondo [136].

Si la température est égale à celle d'une transition de phase du second ordre, il y a invariance d'échelle [132]. L'hamiltonien est donc invariant sous la transformation de groupe de renormalisation. On parle alors de « point fixe ». Les paramètres de l'hamiltonien adimensionné (excepté la température) au point fixe ne dépendent pas de l'hamiltonien initial (celui à $k = \Lambda$), ce qui explique l'universalité observée dans les transitions de phase du second ordre. De plus Kenneth Geddes Wilson a prouvé que l'invariance d'échelle engendre les comportements en loi de puissance de certaines quantités, et que les exposants critiques peuvent être calculés en linéarisant le flot au voisinage du point fixe.

Si un paramètre de l'hamiltonien s'annule quand on effectue cette série de transformation, il est qualifié de non-pertinent (par rapport au point fixe gaussien). S'il ne varie pas, on dit qu'il est marginal. Enfin si il diverge, il est dit pertinent, cela signifie que le paramètre en question est important pour décrire la physique de basse énergie du système.

Comme on l'a vu précédemment, l'intégration des degrés de liberté $\varphi_>$ génère de nouveaux termes dans l'hamiltonien. Des approximations sont généralement nécessaires pour traiter les nouveaux termes d'interaction qui apparaissent[1]. Michael Ellis Fisher et Kenneth Geddes Wilson ont montré qu'on pouvait les traiter perturbativement en faisant un développement en $\epsilon = 4 - d$ [137].

L'évolution de H_k avec k peut aussi être décrite par une équation différentielle exacte. Il y a différentes façons de l'écrire, nous présentons la version due à Joseph Polchinski [138] :

$$\partial_k H_k[\varphi_<] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \partial_k K_k(\mathbf{p}) \left(\frac{\delta^2 H_k}{\delta\varphi_<(\mathbf{p})\delta\varphi_>(-\mathbf{p})} - \frac{\delta H_k}{\delta\varphi_<(\mathbf{p})} \frac{\delta H_k}{\delta\varphi_>(-\mathbf{p})} \right), \tag{II.1.5}$$

où $K_k(\mathbf{p})$ décrit la séparation des degrés de liberté à l'échelle k (on l'appelle « régulateur »), et d est la dimension de l'espace. Cette équation est régulièrement utilisée pour des preuves formelles de certaines propriétés du groupe de renormalisation, mais très rarement pour des applications. Cela vient du fait, qu'en présence d'approximations, les résultats obtenus par cette méthode (par exemple pour les exposants critiques) dépendent fortement du régulateur utilisé [139].

[1] C'est extrêmement rare que le groupe de renormalisation permette de résoudre exactement un problème qui ne soit résoluble par une autre méthode plus simple [130].

II.1.3 La formulation de Christof Wetterich

Dans le but de remédier aux difficultés dont nous venons de parler, l'idée d'écrire une équation exacte, non pas pour le flot de l'hamiltonien mais pour des quantités contenant plus directement les propriétés physiques du système, a émergé principalement dans les travaux de Christof Wetterich [140, 141, 142, 143], mais aussi dans ceux de Ulrich Ellwanger [144], Tim Morris [139, 145, 146]. Il s'agit d'une version du groupe de renormalisation assez simple à mettre en œuvre, et dans laquelle il est relativement aisé d'y implémenter différents types d'approximations. Notons que des idées très similaires, appliquées à la physique des liquides, étaient déjà présentes dans les travaux antérieurs d'Alberto Parola et de Luciano Reatto[147, 148, 149, 150]. La dénomination « groupe de renormalisation non-perturbatif » (ou NPRG pour « nonperturbative renormalization-group ») sera utilisée pour cette formulation du groupe de renormalisation.

Nous allons donc considérer l'évolution d'un objet que nous appellerons « action effective dépendant de l'échelle » et noterons Γ_k, incluant les fluctuations ayant des impulsions comprises entre Λ et k. Initialement, quand $k = \Lambda$, nous souhaitons que Γ_Λ soit égal à H, c'est-à-dire décrive les interactions des degrés de liberté à l'échelle microscopique. Puis nous diminuerons k jusqu'à ce qu'il s'annule, et nous voulons que Γ_0 soit alors l'énergie libre de Gibbs, ou autrement dit la génératrice des diagrammes à une particule irréductible.

Pour cela, nous ajoutons un terme à l'hamiltonien initial qui permet de réduire, dans le calcul de la fonction de partition, la contribution des degrés de liberté ayant une petite impulsion (dont le module est inférieur à k) sans affecter les autres :

$$\Delta H_k[\varphi] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{p}) R_k(\mathbf{p}) \varphi(-\mathbf{p}) \tag{II.1.6}$$

où R_k est une fonction de $\mathbf{p}$ que nous appelons « régulateur ». Si celle-ci respecte les symétries du modèle, alors ces dernières seront préservées au cours du flot. Afin que ce terme remplisse son rôle, le régulateur doit respecter certaines conditions :

$$\begin{cases} R_k(\mathbf{p}) \simeq k^2 & \text{si} \quad |\mathbf{p}| \ll k \\ R_k(\mathbf{p}) \to 0 & \text{si} \quad |\mathbf{p}| \gg k. \end{cases} \tag{II.1.7}$$

Dans le langage de la théorie des champs, le régulateur agit comme une masse quand $|\mathbf{p}| \ll k$, c'est-à-dire qu'il gèle la propagation de ces degrés de liberté. Pour $|\mathbf{p}| \gg k$ nous imposons qu'il décroisse rapidement (plus rapidement qu'une loi de puissance) vers 0, afin que les degrés de liberté de haute énergie soient le moins affectés possible. Différentes formes sont alors possibles pour le régulateur, plus ou moins régulières.

Dans le travail qui fait l'objet de cette thèse, nous utiliserons deux régulateurs différents. Le premier est couramment utilisé, nous l'appellerons « régulateur exponentiel » [151] :

$$R_k^e(\mathbf{p}) = \alpha \frac{\mathbf{p}^2}{e^{\mathbf{p}^2/k^2} - 1} \tag{II.1.8}$$

où α est un paramètre libre dont nous reparlerons. Le second, appelé « régulateur thêta », est assez pratique, nous le verrons, pour réduire le temps de calcul numérique

[152] :

$$R_k^{\Theta}(\mathbf{p}) = (k^2 - \mathbf{p}^2)\Theta(k^2 - \mathbf{p}^2). \tag{II.1.9}$$

Nous présentons ces régulateurs sur la figure II.2.

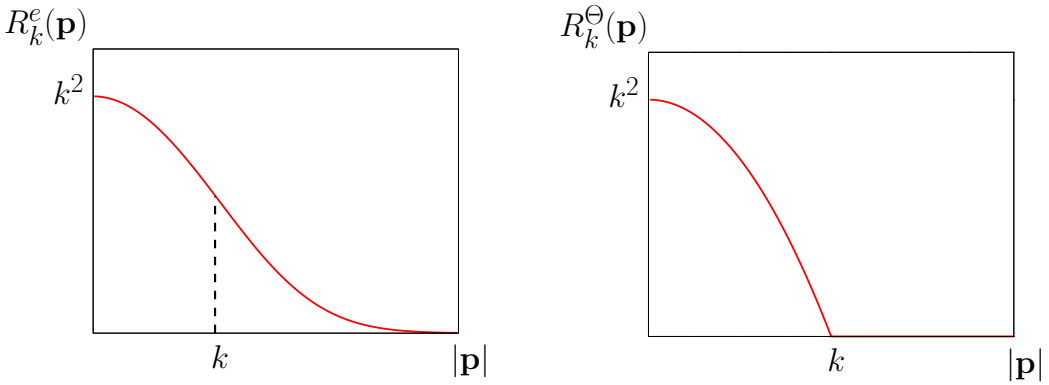


Fig. II.2 : Régulateur exponentiel (II.1.8) à gauche (pour $\alpha = 1$) et régulateur thêta (II.1.9) à droite.

La nouvelle fonction de partition (en présence d'une source qui permet de générer les fonctions de corrélation du système) s'écrit donc :

$$Z_k[J] = \int \mathcal{D}[\varphi] \exp\left(-H[\varphi] - \Delta H_k[\varphi] + \sum_{\mathbf{p}} J(\mathbf{p})\varphi(-\mathbf{p})\right). \tag{II.1.10}$$

On définit maintenant l'action effective dépendant de l'échelle Γ_k comme la transformée de Legendre de $\ln Z_k[J]$ au terme ΔH_k près :

$$\Gamma_k[\phi] = -\ln Z_k[J] + \sum_{\mathbf{p}} J(\mathbf{p})\phi(-\mathbf{p}) - \Delta H_k[\phi] \tag{II.1.11}$$

où J est obtenu en inversant $\phi(\mathbf{x}) = \langle\varphi(\mathbf{x})\rangle_J = \delta \ln Z_k[J]/\delta J(\mathbf{x})$ [2]. Γ_k est une fonctionnelle du champ $\phi(\mathbf{x})$.

Pour $k = \Lambda$, nous pouvons utiliser la méthode du col dans le calcul de la fonction de partition (II.1.10), ce qui est justifié à condition que $R_\Lambda = \infty$ (ou que Λ soit très grand devant les autres échelles d'impulsion du système [153, 154]). Nous vérifions que $\Gamma_\Lambda \simeq H$ [64] (le terme ΔH_k que nous avons ajouté dans la définition de Γ_k (II.1.11), est important pour avoir cette propriété). Puis, pour $k \to 0$, puisque que $R_k(\mathbf{p})$ tend vers 0, $\Gamma_{k=0}$ est bien égal à la transformée de Legendre habituelle de $\ln Z$, c'est-à-dire l'énergie libre de Gibbs. On a donc bien ce que l'on souhaitait avoir.

Remarquons que l'énergie libre de Gibbs $\Gamma_{k=0}$ contient toute la physique du modèle étudié. Pour des configurations uniformes (indépendantes de $\mathbf{x}$) du champ, nous pouvons définir un potentiel effectif $U_{k=0}(\phi) = \frac{1}{V}\Gamma_k[\phi_{\text{uniforme}}]$ qui permet de calculer les quantités thermodynamiques. Nous verrons aussi que la position de son minimum nous renseigne sur la phase dans laquelle se trouve le système. Les dérivées de $\Gamma_{k=0}$

[2] J est en réalité une fonctionnelle de ϕ et dépend de k, nous omettons ces dépendances.

par rapport au champ, évaluées pour des configurations uniformes du champ,

$$\Gamma^{(n)}_{k=0}\left(\{\mathbf{x}_i\};\phi\right) = \left.\frac{\delta^n \Gamma_{k=0}[\phi]}{\delta\phi(\mathbf{x}_1)\dots\delta\phi(\mathbf{x}_n)}\right|_{\phi_{\text{uniforme}}}, \tag{II.1.12}$$

sont les vertex à une particule irréductible, et donnent accès aux fonctions de corrélation. Par exemple, $\Gamma^{(2)}_{k=0} = G^{-1}$, où G est le propagateur connecté, c'est-à-dire la fonction de corrélation à deux points définie par $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})\rangle - \langle\varphi(\mathbf{x})\rangle\langle\varphi(\mathbf{y})\rangle$.

Γ_k vérifie l'équation de flot exacte [141]

$$\partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\left(\partial_k R_k\right) G_k\left[\phi\right]\right\} \tag{II.1.13}$$

où

$$G_k\left[\phi\right] = \left(\Gamma^{(2)}_k[\phi] + R_k\right)^{-1} \tag{II.1.14}$$

et

$$\mathrm{Tr}\left\{O\right\} = \int d^d\mathbf{x} O(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}} O(\mathbf{p},-\mathbf{p}). \tag{II.1.15}$$

Nous avons noté $\Gamma^{(2)}_k[\phi]$ la dérivée fonctionnelle seconde de $\Gamma_k[\phi]$ par rapport au champ ϕ. La condition initiale de l'équation (II.1.13) dépend du modèle étudié *via* $\Gamma_\Lambda[\phi] = H[\phi]$.

Cette équation possède une structure à une boucle. Pour préciser ce que nous entendons par là, écrivons Γ_k à l'ordre d'une boucle

$$\Gamma_k[\phi] = H[\phi] + \frac{1}{2}\ln\mathrm{Tr}\left(H^{(2)}[\phi] + R_k\right). \tag{II.1.16}$$

Si on prend la dérivée de cette expression par rapport à k, on obtient

$$\partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\left(\partial_k R_k\right)\left(H^{(2)}[\phi] + R_k\right)^{-1}\right\} \tag{II.1.17}$$

qui ressemble beaucoup à (II.1.13). Cette ressemblance implique que les quantités calculées par cette méthode sont exprimées par une intégrale portant sur une seule impulsion (contrairement aux approches avec développement en boucles d'ordre au moins égal à deux).

Nous ne savons pas la résoudre exactement l'équation (II.1.13) dans les cas pratiques (elle est intégro-différentielle aux dérivées partielles fonctionnelles). Néanmoins la richesse de cette approche est de pouvoir facilement mettre en place, comme nous allons le voir maintenant, des approximations intéressantes, en particulier pour leur caractère non-perturbatif par rapport aux constantes de couplage.

II.2 Les différentes approximations possibles

L'essentiel des approximations possibles consiste à résoudre l'équation dans un espace fonctionnel restreint. Les résultats dépendront nécessairement du choix de l'espace, mais si celui-ci est fait de façon judicieuse, on peut espérer être proche du résultat exact. En pratique, on propose généralement une forme (qui respecte les symétries du

modèle) pour Γ_k. Nous obtenons alors un système d'équations différentielles pour les différents paramètres de cette troncation que nous pouvons résoudre numériquement. Ces équations sont qualifiées de non-perturbatives car on ne développe pas en puissance d'un paramètre.

La difficulté dans le choix de l'approximation est de trouver une forme assez simple pour ne pas que cela soit trop compliqué de résoudre numériquement le problème, mais néanmoins suffisamment riche pour qu'elle puisse décrire convenablement la physique du système considéré. La comparaison des différents schémas d'approximation et leur optimisation ont fait l'objet de nombreux travaux [155, 156, 157, 158].

II.2.1 Développement en dérivées

En physique statistique, et en particulier dans l'étude des transitions de phase, on est généralement intéressé par les comportements des systèmes à grande distance (ce qui est le cas de la thermodynamique). Il parait alors naturel de surtout chercher à bien décrire les propriétés à petite impulsion ($|\mathbf{p}| \ll \mathbf{\Lambda}$), quitte à négliger les propriétés à grande impulsion. C'est la raison pour laquelle une approximation très courante est de développer Γ_k en puissance des dérivées spatiales et de ne garder que les premiers termes de ce développement [145, 146, 151].

Cela est justifié car la présence du régulateur dans la théorie permet aux vertex $\Gamma_k^{(n)}[\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n; \phi]$ (les dérivées fonctionnelles de Γ_k) d'être des fonctions douces des impulsions et donc de pouvoir être développés en puissances de $\mathbf{p}_i^2/k^2$ quand $|\mathbf{p}_i| \ll k$. De plus, le terme $\partial_k R_k$ dans l'équation (II.1.13) implique que les intégrales sur $\mathbf{p}$ sont dominées par $|\mathbf{p}| \lesssim k$. Cela permet d'utiliser le développement en dérivées de Γ_k dans le membre de droite de cette équation. Et ainsi le développement en dérivées donne accès aux quantités correspondantes à des échelles de longueur plus grandes que k^{-1} ou que la longueur de corrélation du système. Ces dernières restrictions ne posent pas de problème pour calculer les quantités thermodynamiques, mais peuvent en poser pour les fonctions de corrélation à impulsions non-nulles quand $k \to 0$ [64]. Nous n'aurons pas pas de problème ce type-là dans la suite.

II.2.1.1 Approximation du potentiel local

L'approximation la plus simple est dite « approximation du potentiel local » (LPA), c'est l'ordre zéro du développement. L'action effective dépendant de l'échelle prend la forme

$$\Gamma_k^{\mathrm{LPA}}[\phi] = \int d^d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x})\right)^2 + U_k\left(\phi(\mathbf{x})\right) \right\}. \tag{II.2.1}$$

Pour une configuration uniforme du champ ϕ, on a $U_k(\phi) = \frac{1}{V}\Gamma_k[\phi_{\text{uniforme}}]$ (où V est le volume du système). Si on traduit l'équation (II.1.13) pour U_k (qui s'identifie au potentiel effectif quand $k \to 0$ à un facteur de température près), nous obtenons :

$$\partial_k U_k(\phi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{\partial_k R_k(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^2 + R_k(\mathbf{p}) + U_k''(\phi)} \tag{II.2.2}$$

qui permet d'étudier certaines propriétés qualitatives du flot, excepté en basse dimension (autour de la dimension deux pour le modèle $\mathrm{O}(N)$), et déjà d'obtenir des résultats quantitatifs intéressants [158].

II.2.1.2 Approximation du potentiel local améliorée

Le fait que l'approximation du potentiel local ne donne pas de bons résultats en dimension deux s'explique en partie car cette approximation impose à la dimension anormale d'être nulle. Soit $\phi_{0,k}$ la position du minimum[3] du potentiel U_k. Nous noterons ϕ_0 la limite de $\phi_{0,k}$ quand k tend vers 0, il s'agit de la valeur physique (supposée uniforme) du champ ϕ en l'absence de sources extérieures. C'est là où sont calculées les différentes quantités thermodynamiques. De plus, au point critique, $\Gamma^{(2)}_{k=0}(\mathbf{p},-\mathbf{p};\phi_0) = G^{-1}(\mathbf{p},-\mathbf{p};\phi_0) \propto |\mathbf{p}|^{2-\eta}$ [132]. Une approximation meilleure que la précédente (nous l'appelons « LPA' ») est obtenue en multipliant la partie cinétique de Γ_k par un facteur de renormalisation Z_k (dépendant de l'échelle k mais pas du champ) :

$$\Gamma_k^{\text{LPA'}}[\phi] = \int d^d\mathbf{x} \left\{ \frac{Z_k}{2} \left(\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x})\right)^2 + U_k\left(\phi(\mathbf{x})\right) \right\} \tag{II.2.3}$$

avec

$$Z_k = \lim_{\mathbf{p}\to 0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_k^{(2)}(\mathbf{p},-\mathbf{p};\phi_{0,k}). \tag{II.2.4}$$

Z_k doit alors aussi être mis en facteur dans les membres de droite des équations (II.1.7), (II.1.8) et (II.1.9) dans le but de décrire correctement la physique à la criticalité. Nous pouvons alors définir $\eta_k = -k\partial_k \ln Z_k$ qui tend au point critique vers la dimension anormale η quand k tend vers 0 [159]. Cette approximation permet une bonne description qualitative de nombreux systèmes, même à basse dimension.

II.2.1.3 Développement en dérivées d'ordre deux et plus

Le développement en dérivées d'ordre deux consiste à considérer que Z_k dans (II.2.3) est une fonction de ϕ. On a alors la même équation que (II.2.4) où on remplace $\phi_{0,k}$ par ϕ. Le groupe de renormalisation nous donne alors deux équations différentielles couplées pour les fonctions $U_k(\phi)$ et $Z_k(\phi)$.

Nous pouvons de même résoudre numériquement les équations du développement en dérivée d'ordre quatre [157] [4]. Les résultats pour les exposants semblent converger quand on augmente l'ordre du développement et ils sont très proches des estimations fournies par d'autres méthodes (Monte Carlo, bootstrap conforme, etc.) pour la plupart des modèles qui ont été considérés.

II.2.2 Développement en champs

Une approximation supplémentaire est régulièrement utilisée afin d'alléger les calculs numériques. C'est le cas lorsque le nombre de fonctions intervenant dans la forme considérée de l'action effective dépendant de l'échelle est grand, et parfois aussi lorsque le champ ϕ possède des indices internes [151]. Cette approximation consiste à développer les fonctions en puissance du champ ϕ autour de $\phi_{0,k}$ (car nous cherchons à décrire le

[3] Afin de ne pas alourdir les explications par la suite, nous utiliserons le terme « minimum » à la place de « position du minimum ».

[4] Dans ce cas, nous ne pouvons pas utiliser le régulateur thêta car il ne régularise pas au-delà de l'ordre deux. Autrement dit, il y a des divergences dans les quantités que l'on cherche à calculer.

plus fidèlement le voisinage de $\phi_{0,k}$). Pour une fonction générique X_k,

$$X_k(\phi) = \sum_{i=0}^{p} X_{i,k}(\phi - \phi_{0,k})^i, \tag{II.2.5}$$

où p est l'ordre du développement. Cela transforme les équations aux dérivées partielles pour $X_k(\phi)$ en simples équations différentielles pour les $X_{i,k}$. Il s'avère que ce développement converge en général assez rapidement, donc p n'a pas besoin d'être très grand pour avoir des résultats précis. Cela diminue donc nettement la durée du calcul numérique dans la plupart des cas.

II.2.3 Approximation Blaizot–Méndez-Galain–Wschebor (BMW)

Les approximations précédentes permettent de calculer de façon assez précise les exposants critiques du modèle et d'obtenir les propriétés thermodynamiques. En revanche, elles ne sont justifiées que pour de grandes distances, donc de petites impulsions. Plus précisément, le développement en dérivées n'est valable que pour $|\mathbf{p}| \lesssim k$. Donc nous ne pouvons pas obtenir toute la dépendance en $\mathbf{p}$ des fonctions de corrélation.

Notons néanmoins qu'une autre approximation (dont l'idée initiale de Jean-Paul Blaizot, Ramon Méndez-Galain et Nicolas Wschebor vient de fêter ses dix ans [159, 160]) s'est développée. Elle ne ressemble pas sur le principe aux approximations dont nous venons de discuter. Les lecteurs intéressés peuvent consulter les références [161, 162].

II.3 Quelques applications

Le champ d'application du NPRG est très large [163], allant de l'étude des fermions en interaction [164, 165] à celle des systèmes désordonnés [166, 167] et hors-équilibres [168, 169] en passant par la physique des membranes [170], de l'hélium 3 [171], et même de la gravité quantique [172]. Nous allons dans cette partie aborder quelques applications qui nous seront utiles pour la suite.

II.3.1 Magnétisme

Tout d'abord, nous allons montrer comment le NPRG (et plus particulièrement l'approximation LPA') peut s'appliquer au modèle le plus étudié de la physique statistique : le modèle O(N). Cela nous permettra de voir quelques points importants pour comprendre comment utiliser le NPRG en pratique.

II.3.1.1 Modèle O(N)

Ce modèle est décrit par l'hamiltonien symétrique sous l'opération des éléments du groupe O(N) [173] :

$$H[\boldsymbol{\varphi}] = \int d^d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})\right)^2 + \frac{r_0}{2}\boldsymbol{\varphi}^2 + \frac{u_0}{4!}\left(\boldsymbol{\varphi}^2\right)^2 \right\} \tag{II.3.1}$$

où $\boldsymbol{\varphi}$ est un vecteur à N composantes. Nous supposons qu'il y a une coupure ultra-violette Λ et que $u_0 > 0$ pour que le potentiel possède un minimum. Pour une certaine valeur $r_{0,\mathrm{c}}$ de r_0, ce modèle subit une transition de phase du second ordre. Dans la phase ordonnée ($r_0 < r_{0,\mathrm{c}}$), $\boldsymbol{\phi}_0$ est non-nul, dégénéré, et le groupe de symétrie résiduel est $\mathrm{O}(N-1)$ (et il y a $N-1$ modes de Goldstone). Cette transition permet de décrire de nombreuses transitions de systèmes réels, en particulier la transition ferromagnétique-paramagnétique de la plupart des matériaux magnétiques. Lorsque le matériau considéré ne présente pas d'anisotropie de l'orientation des spins (ou que celle-ci est négligeable), nous pouvons le modéliser par l'hamiltonien (II.3.1) avec $N = 3$ (nous considèrerons que c'est le cas dans les résultats de cette partie). Nous supposons que $r_0 = \bar{r_0}(T - T_0)$ varie linéairement en $T - T_0$ (où T_0 est la température de transition prédite par le champ moyen) et que u_0 est indépendant de T. Ainsi du point de vue du champ moyen, $r_{0,\mathrm{c}} = 0$, mais nous allons voir que le NPRG abaisse cette valeur, ce qui l'amène à être négatif.

Notons que le NPRG permet de faire le lien entre différentes approches car il permet de retrouver les résultats exacts qui sont connus dans certaines limites : en dimension 4 qui est la dimension critique supérieure, en dimension 2 qui est la dimension critique inférieure, et en $N = \infty$. Nous nous concentrerons sur la dimension 3 pour les résultats que nous présenterons dans cette partie.

II.3.1.2 Équations de flot

Nous présentons dans cette partie les équations de flot obtenues par l'approximation LPA' sur le modèle $\mathrm{O}(N)$. Cette approximation revient à considérer que Γ_k s'écrit

$$\Gamma_k[\boldsymbol{\phi}] = \int d^3\mathbf{x} \left\{ \frac{Z_k}{2} \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\right)^2 + U_k\left(\rho\right) \right\} \tag{II.3.2}$$

où $\rho = \boldsymbol{\phi}^2/2$ est l'invariant de la symétrie $\mathrm{O}(N)$. On peut écrire U_k comme une fonction de ρ (c'est ce que nous ferons dans la suite de cette partie sauf si on mentionne le contraire) car Γ_k possède les symétries de l'hamiltonien.

Le terme que l'on ajoute à l'hamiltonien s'écrit

$$\Delta H_k[\boldsymbol{\varphi}] = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} R_k(\mathbf{p}) \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(\mathbf{p})\varphi_i(-\mathbf{p}), \tag{II.3.3}$$

et la source est maintenant un vecteur $\boldsymbol{J}$ à N composantes qui se couple linéairement à $\boldsymbol{\varphi}$. De plus, $G_k\left[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \phi\right]$ étant maintenant une matrice de taille $N \times N$, la trace de l'équation (II.1.13), en plus des impulsions, porte aussi sur les indices du groupe $\mathrm{O}(N)$.

$\Gamma_k^{(2)}$ peut être séparé en deux parties (transverse et longitudinale)

$$\Gamma^{(2)}_{k;i,j}\left(\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \boldsymbol{\phi}\right) = \frac{\phi_i\phi_j}{2\rho}\Gamma^{(2)}_{k,\mathrm{L}}\left(\mathbf{p}; \rho\right) + \left(\delta_{i,j} - \frac{\phi_i\phi_j}{2\rho}\right)\Gamma^{(2)}_{k,\mathrm{T}}\left(\mathbf{p}; \rho\right) \tag{II.3.4}$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}_{k,\mathrm{L}}\left(\mathbf{p}; \rho\right) &= Z_k\mathbf{p}^2 + U'_k(\rho) + 2\rho U''_k(\rho), \\ \Gamma^{(2)}_{k,\mathrm{T}}\left(\mathbf{p}; \rho\right) &= Z_k\mathbf{p}^2 + U'_k(\rho) \end{aligned} \tag{II.3.5}$$

Nous pouvons faire de même pour le propagateur

$$\begin{aligned} G_{k,\mathrm{L}}\left(\mathbf{p};\rho\right) &= \left[\Gamma^{(2)}_{k,\mathrm{L}}\left(\mathbf{p},-\mathbf{p};\rho\right)+R_k(\mathbf{p})\right]^{-1}, \\ G_{k,\mathrm{T}}\left(\mathbf{p};\rho\right) &= \left[\Gamma^{(2)}_{k,\mathrm{T}}\left(\mathbf{p},-\mathbf{p};\rho\right)+R_k(\mathbf{p})\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{II.3.6}$$

Pour expliciter l'équation de flot (II.1.13) pour U_k, nous devons inverser la matrice

$$M_{i,j} = \left[\Gamma^{(2)}_{k}\left(\mathbf{p},-\mathbf{p};\boldsymbol{\phi}\right)+R_k(\mathbf{p})\right]_{i,j} \tag{II.3.7}$$

qui est de taille $N\times N$. Pour simplifier cette inversion, nous choisissons une configuration uniforme particulière du champ $\boldsymbol{\phi}$ qui est accessible à partir de n'importe quelle configuration uniforme en appliquant les transformations du groupe $\mathrm{O}(N)$: $\boldsymbol{\phi}_{\text{uniforme}} = \phi_{\text{uniforme}}\vec{e_1}$ (où $\vec{e_1}$ est le premier vecteur de la base). Dans la suite de cette partie, nous considèrerons que le champ est dans cette configuration, ainsi $\rho=\phi^2/2$ où ϕ peut être positif ou négatif. La matrice est alors diagonale dans l'espace des indices et trivialement inversible. On trouve l'équation suivante vérifiée par le potentiel effectif

$$\begin{aligned} \partial_k U_k(\rho) &= \frac{k}{2}\int\frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\left(\partial_k R_k(\mathbf{p})\right)\left(G_{k,\mathrm{L}}\left(\mathbf{p};\rho\right)+(N-1)G_{k,\mathrm{T}}\left(\mathbf{p};\rho\right)\right) \\ &= \frac{k}{2}\int\frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\left(\partial_k R_k(\mathbf{p})\right)\left(\frac{1}{Z_k\mathbf{p}^2+R_k(\mathbf{p})+U_k'(\rho)+2\rho U_k''(\rho)}\right. \\ &\qquad\left.+\frac{N-1}{Z_k\mathbf{p}^2+R_k(\mathbf{p})+U_k'(\rho)}\right). \end{aligned} \tag{II.3.8}$$

Le deuxième terme du membre de droite provient des $N-1$ modes de Goldstone.

En ce qui concerne Z_k, sa définition pour le modèle $\mathrm{O}(N)$ est

$$Z_k = \lim_{\mathbf{p}\to 0}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}^2}\Gamma^{(2)}_{k;2,2}(\mathbf{p},-\mathbf{p};\phi_{0,k}) \tag{II.3.9}$$

où les indices $2,2$ de $\Gamma^{(2)}_k$ font référence aux indices internes de $\boldsymbol{\phi}$. L'ordre deux du développement en dérivées comporte deux termes : $\frac{Z_k(\rho)}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\right)^2$, qui est inclus dans la LPA' (avec $Z_k(\rho)=Z_k$), et $\frac{Y_k(\rho)}{4}\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2$. Il en résulte que la dépendance en $\mathbf{p}$ de $\Gamma^{(2)}_{k;i,j}\left(\mathbf{p},-\mathbf{p};\boldsymbol{\phi}\right)$ est donnée par $Z_k(\rho)\mathbf{p}^2$ si $i=j\neq 1$ et $Z_k(\rho)\mathbf{p}^2+Y_k(\rho)\rho\mathbf{p}^2$ si $i=j=1$. Pour obtenir l'équation $\partial_k Z_k$, il faut donc considérer $\Gamma^{(2)}_{k;2,2}$. L'équation (II.3.9) donne [163] :

$$\begin{aligned} \partial_k Z_k = \frac{4k}{d}\rho_{0,k}U_k''(\rho_{0,k})^2\int\frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\mathbf{p}^2\left[\left(\partial_k R_k(\mathbf{p})\right)\frac{\partial}{\partial R_k(\mathbf{p})}+\left(\partial_k Q_k(\mathbf{p})\right)\frac{\partial}{\partial Q_k(\mathbf{p})}\right] \\ \times\frac{\left(Z_k+Q_k(\mathbf{p})\right)^2}{\left(Z_k\mathbf{p}^2+R_k(\mathbf{p})+2\rho_{0,k}U_k''(\rho_{0,k})\right)^2\left(Z_k\mathbf{p}^2+R_k(\mathbf{p})\right)^2} \end{aligned} \tag{II.3.10}$$

où $Q_k(\mathbf{p})=\partial_{\mathbf{p}^2}R_k(\mathbf{p})$.

II.3.1.3 Évolution du potentiel dans les deux phases

Les équations précédentes (II.3.8) et (II.3.10) sont valables dans les deux phases : ferromagnétique (ordonnée) et paramagnétique (désordonnée). Si le minimum du potentiel $\rho_0 = \lim_{k\to 0} \rho_{0,k}$ ($\phi_0 = \sqrt{2\rho_0}$ correspond à l'aimantation du système) est non-nul, le système est dans la phase ordonnée, sinon il est dans la phase haute-température. Il n'y a que à $k = 0$ que nous sommes capables de dire dans quelle phase le système est réellement.

r_0 dans l'hamiltonien (II.3.1) dépend généralement de la température du système microscopique dont il est dérivé [5]. Donc en faisant varier le paramètre r_0, nous pouvons passer d'une phase à l'autre. Lorsque r_0 est négatif, le minimum du potentiel initial (à $k = \Lambda$) est non-nul ($\rho_{0,\Lambda} = -3r_0/u_0$). Plus la température est basse, plus le minimum se trouve loin de l'origine.

Au cours du flot, le minimum va se rapprocher de l'origine (l'ajout des fluctuations au-delà du champ moyen par le groupe de renormalisation « désordonne le système ») jusqu'à atteindre une valeur nulle à un certain $k = k_s$ (qui est de l'ordre de l'inverse de la longueur de corrélation) dans le cas de la phase désordonnée. Finalement, le potentiel finit par ne plus évoluer et converge vers une fonction présentant un minimum à l'origine (ainsi l'aimantation du système est nulle). Nous montrons l'évolution du potentiel U_k en fonction ϕ (nous comprendrons dans le paragraphe suivant pourquoi il est intéressant de le représenter en fonction de ϕ et non de ρ) sur la figure II.3 dans ce cas-là. Pour obtenir cela, nous avons résolu numériquement les équations (II.3.8) et (II.3.10) [6].

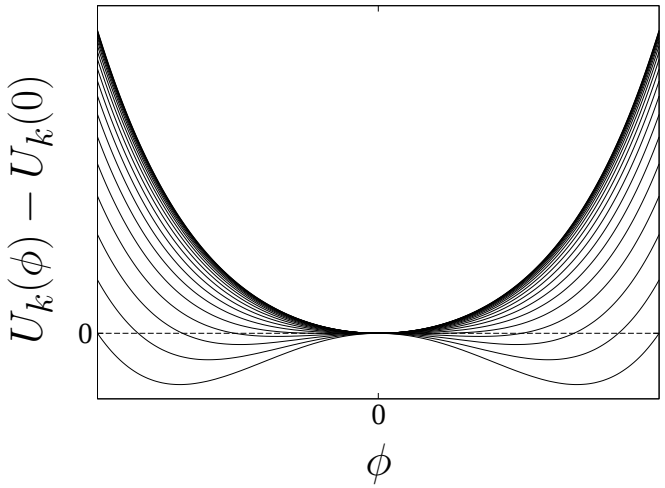


Fig. II.3 : U_k en fonction de ϕ dans la phase désordonnée pour différentes valeurs de k (pour $N = 3$ et $\alpha = 3$). Au cours du flot, les minima se rapprochent de l'origine, puis se confondent avec cette dernière, pour finalement donner à $k = 0$ un potentiel ayant l'origine comme minimum.

[5] *via* une transformation de Hubbard-Stratonovich par exemple.

[6] Par la méthode Runge-Kutta d'ordre 4, en discrétisant la variable ρ, en prenant des dérivées sur 5 points et en calculant les intégrales par la méthode de Simpson.

Dans l'autre cas, quand la température est suffisamment basse, au lieu d'atteindre l'origine, le minimum du potentiel converge vers une valeur non-nulle ρ_0 (voir figure II.4). Une fois que le minimum a quasiment atteint sa valeur asymptotique, seule la partie du potentiel compris entre 0 et le minimum continue à évoluer. En effet, celle-ci a tendance à s'aplatir, jusqu'à devenir constante pour $k = 0$. Cela apparait normal car $U_{k=0}$ doit être une fonction convexe de ϕ [174]. Cela s'explique par le fait que à $k = 0$, on a $\partial^2 \ln Z_{k=0}[J]/\partial J^2 = \langle \phi^2 \rangle_J - \langle \phi \rangle_J^2 \geqslant 0$ (où J est la première composante de $\boldsymbol{J} = J\vec{e_1}$ pris uniforme) car ϕ est réel, ainsi $\partial^2 \Gamma_{k=0}[\phi]/\partial \phi^2 \geqslant 0$ (où ϕ est pris uniforme également) [7]. Malheureusement, nous rencontrons des difficultés numériques pour aller véritablement à $k = 0$, les dénominateurs dans (II.3.8) et (II.3.10) s'approchant trop près de 0 pour $\rho = 0$, et les équations deviennent instables. Nous arrêtons donc le flot juste avant cette instabilité.

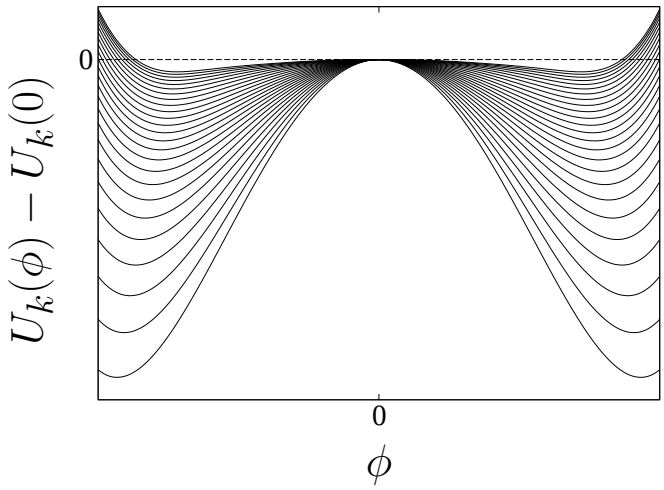


Fig. II.4 : U_k en fonction de ϕ dans la phase ordonnée pour différentes valeurs de k (pour $N = 3$ et $\alpha = 3$). Au cours du flot, les minima se rapprochent tout d'abord de l'origine, puis tendent vers une valeur absolue non-nulle. Le potentiel tend également à s'aplatir entre $-\phi_{0,k}$ et $\phi_{0,k}$, au fur et à mesure que k tend vers 0, pour s'approcher asymptotiquement d'une fonction convexe.

II.3.1.4 Point fixe

Lorsque r_0 est égal à une certaine valeur $r_{0,\mathrm{c}}$, le système est critique. $\rho_{0,k}$ tend alors vers 0 en ne s'annulant que à $k = 0$ strictement. Il s'agit du point de transition de phase. L'étude de l'évolution du potentiel dans ce cas-ci montre qu'après un régime de transition, la position de $\rho_{0,k}$ évolue comme $Z_k^{-1} k^{d-2}$. De même, $U_k(0)$ évolue comme k^d. Il est donc intéressant d'étudier le flot des variables adimensionnées suivantes :

$$\begin{cases} \rho = Z_k^{-1} k^{d-2} \tilde{\rho} \\ U_k(\rho) = k^d \widetilde{U}_k(\tilde{\rho}). \end{cases} \tag{II.3.11}$$

[7] À k fini, comme Γ_k n'est pas défini comme une vraie transformée de Legendre de $\ln Z_k$ (il y a un terme ΔH_k supplémentaire), ce n'est pas $U_k(\phi)$ qui doit être convexe mais $U_k(\phi) + \phi^2 R_k(0)/2$.

Ce changement de variable correspond à un changement d'échelle à la fois de l'espace et des champs. À la température critique, $\widetilde{U}_k$ tend vers un potentiel de point fixe $\widetilde{U}^*$ quand k tend vers 0. Cela signifie que la criticalité représente un point fixe de la transformation du groupe de renormalisation avec ces nouvelles variables, et traduit l'invariance d'échelle du système. Ce point fixe est entièrement stable[8]. Pour le modèle O(N), le point fixe à trois dimensions est généralement appelé « point fixe de Wilson-Fisher ».

On définit le « temps de groupe de renormalisation » par

$$t = \ln \frac{k}{\Lambda} \tag{II.3.12}$$

qui vaut 0 initialement, devient négatif par la suite, et tend vers $-\infty$ quand k tend vers 0.

À partir de l'équation (II.3.8), nous pouvons trouver une expression pour $\partial_t \widetilde{U}_k(\tilde{\rho})$ qui s'exprime en fonction de $\tilde{\rho}$, $\widetilde{U}_k(\tilde{\rho})$, ses dérivées, la dimension de l'espace d et η_k :

$$\partial_t \widetilde{U}_k(\tilde{\rho}) = -d\widetilde{U}_k(\tilde{\rho}) + (d - 2 + \eta_k)\tilde{\rho}\widetilde{U}'_k(\tilde{\rho}) + k^{-d}\partial_t U_k(\rho). \tag{II.3.13}$$

Par ailleurs $\eta_k = -k\partial_k \ln Z_k$. Trouver la valeur du potentiel au point fixe $\widetilde{U}^*$ et de la dimension anormale η revient alors à résoudre l'équation de point fixe $\partial_t \widetilde{U}_k(\tilde{\rho}) = 0$ (il n'y a qu'une seule solution régulière autre que celle de la théorie sans interaction [175]). Cette résolution se fait numériquement en discrétisant la variable $\tilde{\rho}$.

Une deuxième méthode pour trouver le point fixe consiste à résoudre numériquement les équations de flot $\partial_k \widetilde{U}_k(\tilde{\rho})$ et $\partial_k Z_k$, et à faire une dichotomie sur r_0 pour trouver la criticalité. Nous présentons les résultats sur les figures II.5 pour η_k et $\widetilde{\rho}_{0,k}$ en fonction de $\ln \frac{\Lambda}{k}$.

Lorsqu'on est strictement à la criticalité, η_k et $\widetilde{U}_k(\tilde{\rho})$ tendent vers des valeurs finies quand k tend vers 0. Cela se traduit par des plateaux dans les figures II.5. La dichotomie permet, en ajustant petit à petit r_0, de s'approcher de la criticalité [9]. Les plateaux se forment à mesure que l'on s'en approche. Cela permet d'avoir une estimation de plus en plus précise de η et $\widetilde{U}^*(\tilde{\rho})$.

II.3.1.5 Calcul des exposants critiques

Les deux méthodes pour trouver le point fixe dont nous venons de parler permettent aussi de calculer les exposants critiques du modèle. La première, qui consiste à résoudre l'équation de point fixe, nous donne directement la valeur pour η. En étudiant la stabilité de l'équation de point fixe, nous pouvons alors accéder à ν. On définit l'opérateur L par

$$L[\tilde{\rho}, \tilde{\rho}'] = \left.\frac{\delta \partial_t \widetilde{U}_k(\tilde{\rho})}{\delta \widetilde{U}_k(\tilde{\rho}')}\right|_{\widetilde{U}^*}. \tag{II.3.14}$$

Cet opérateur a une seule valeur propre négative (car t est négatif), cela correspond à la direction pertinente (qui est la température). On peut alors montrer que l'exposant

[8] Lorsque nous discuterons, au cours de ce manuscrit, de la stabilité des points fixes, nous considérons que le système est à la transition. On omet donc la direction instable liée à la température.

[9] Pour être strictement à la criticalité, il faut que $r_0 = r_{0,c}$. Numériquement, le système n'est donc jamais exactement à la criticalité.

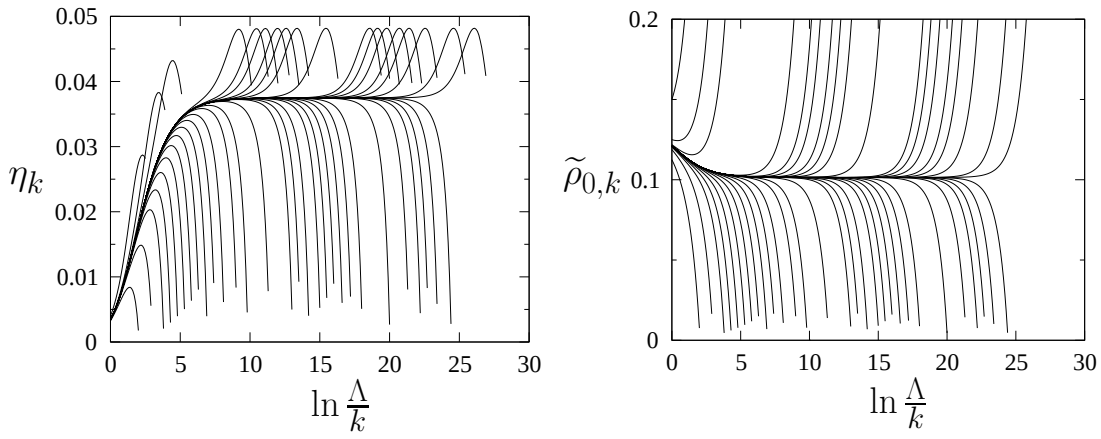


Fig. II.5 : η_k et $\widetilde{\rho}_{0,k}$ en fonction de $\ln \frac{\Lambda}{k}$ (pour $\alpha = 3$) pour différents r_0. Après avoir passé un certain temps près du plateau, le comportement de ces quantités est clairement différent d'une phase à l'autre.

critique ν est donné par l'inverse de la valeur absolue de cette valeur propre [64]. En effet, très proche du point fixe

$$\widetilde{U}_k(\tilde{\rho}) = \widetilde{U}^*(\tilde{\rho}) + e^{-\frac{t}{\nu}} u(\tilde{\rho}). \tag{II.3.15}$$

La deuxième méthode, qui consiste à intégrer le flot, permet également de trouver la valeur de η. Puis, grâce à l'équation (II.3.15), nous savons que le comportement du potentiel quand il passe tout près du point fixe et qu'il s'en échappe (comme sur les figures II.5) permet d'obtenir ν. Nous pouvons par exemple déduire ν du flot de $\rho_{0,k}$.

Une troisième méthode pour calculer ν consiste à directement utiliser que $\xi \sim (T - T_c)^{-\nu}$ près de la transition. Ce qui se traduit aussi par $\xi \sim (r_0 - r_{0,c})^{-\nu}$, ainsi la dépendance de ξ en r_0 donne également accès à ν.

Les exposants que l'on trouve avec ces trois méthodes dépendent du régulateur choisi. Si nous résolvions exactement l'équation (II.1.13), les résultats n'en dépendraient évidemment pas car ils seraient exacts. Mais comme nous avons fait une approximation pour la résoudre (en l'occurrence l'approximation LPA'), ils en dépendent légèrement. Cette dépendance peut être utilisée pour tester la solidité de l'approximation. Meilleure est l'approximation, plus faible est la dépendance.

Si on choisit par exemple le régulateur exponentiel (II.1.8), les exposants critiques dépendent de α. Une procédure pour trouver la meilleure valeur des exposants consiste à choisir l'endroit où ils varient le moins avec α. C'est ce que l'on appelle le « principe de sensibilité minimale » (PMS). En pratique, ce principe s'avère être judicieux, en effet les valeurs des exposants sont en ce point-là les plus proches des valeurs connues par d'autres méthodes théoriques et/ou numériques. Nous montrons sur la figure II.6, η en fonction de α.

Nous avons appliqué les deux premières méthodes (qui fournissent évidemment les mêmes résultats) pour trouver ν et η. Nous obtenons $\nu = 0.73$ (que ce soit avec les régulateurs thêta ou exponentiel), $\eta = 0.041$ avec le régulateur thêta et $\eta = 0.037$ avec le régulateur exponentiel (comme on peut le voir sur la figure II.6). Ces valeurs sont

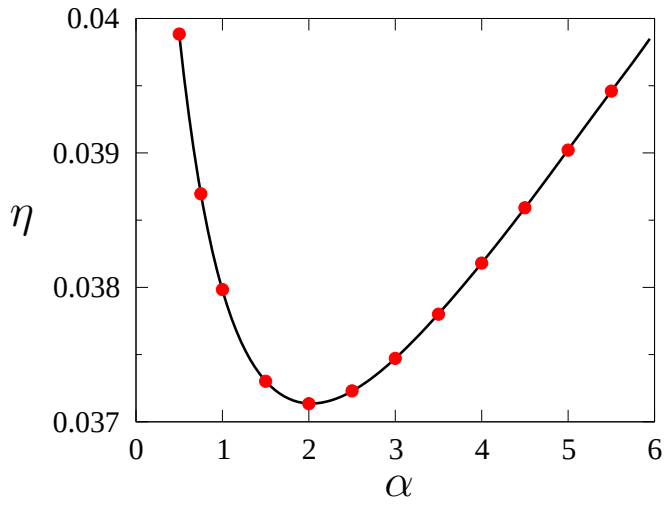


Fig. II.6 : η pour différentes valeurs de α du régulateur exponentiel (point rouges). Une interpolation polynomiale (ligne noire) permet de déterminer la valeur optimale de η.

en relativement bon accord avec les estimations Monte Carlo [176] : $\nu = 0.7112$ et $\eta = 0.0375$ [10].

II.3.2 Gaz dilué de bosons

Le NPRG a été utilisé sur les gaz dilués de bosons de spin 0 dans de nombreuses études [178, 179, 180, 181, 182, 183, 184]. Il a en particulier été possible d'étudier en détail la phase superfluide [185, 186]. Ce travail fournit un cadre clair qui permet de retrouver deux limites connues : la théorie de Bogoliubov [187] et la théorie hydrodynamique de Popov [188].

Notons également qu'a été développée une version du NPRG pour d'étudier les modèles sur réseau [153]. Cette approche a permis de décrire la physique de bosons en interaction sur un réseau optique : le modèle de Bose-Hubbard [189]. En particulier, ce travail (présenté dans la thèse [190]) permet de calculer des quantités universelles (comme les exposants critiques de la transition) et non-universelles (comme le diagramme de phase) [191, 192], et de décrire la thermodynamique à proximité de la transition entre un superfluide et un isolant de Mott [193].

Nous allons nous concentrer ici sur le cas d'un gaz de bosons de spin 0 sans réseau, et montrer comment le NPRG permet de justifier l'utilisation d'un hamiltonien classique pour étudier la physique proche de la transition à température finie entre la phase normale et la phase superfluide. Nous apporterons ainsi un éclairage supplémentaire sur l'intégration des fluctuations quantiques dans le cas des gaz de bosons de spin 1

[10] Le fait que l'exposant η que l'on trouve soit en très bon accord avec les résultats du Monte Carlo est un heureux hasard car le développement en dérivées n'est pas encore convergé pour cette quantité-là (contrairement à ν pour laquelle ça l'est quasiment). Par exemple, l'ordre deux du développement [177] donne $\nu = 0.704$ et $\eta = 0.049$

dans la partie I.2.3 (il n'y a pas de différence fondamentale entre les bosons de spin 0 et ceux de spin 1 en ce qui concerne cette intégration). L'action décrivant des bosons de spin 0 en interaction s'écrit [194]

$$S[\psi^*,\psi] = \int_0^\beta d\tau \int d^d\mathbf{x} \left[\psi^* \left(\partial_\tau - \mu - \frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2m}\right)\psi + \frac{g}{2}\left(\psi^*\psi\right)^2\right] \tag{II.3.16}$$

où ψ est un champ complexe qui dépend de $\mathbf{x}$ et d'un temps imaginaire τ, et qui satisfait des conditions aux limites périodiques sur τ : $\psi(\mathbf{x},\tau) = \psi(\mathbf{x},\tau+\beta)$. m est la masse d'un boson, μ le potentiel chimique, β l'inverse de la température. L'interaction g entre les bosons est supposée répulsive (donc $g > 0$) et locale. Les intégrales sur les impulsions sont coupées par une coupure ultra-violette Λ. Nous considérons le cas $d = 3$.

II.3.2.1 À température nulle

À température nulle, un tel système de bosons est vide si le potentiel chimique est négatif et superfluide s'il est positif. Le système subit une transition de phase du second ordre à $\mu = 0$. Le point $T = \mu = 0$ est donc un point quantique critique [11]. Pour $\mu \leq 0$, le propagateur n'est pas renormalisé et vaut

$$G(\mathbf{p}, i\omega)^{-1} = i\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu, \tag{II.3.17}$$

où ω est la fréquence, variable conjuguée à τ par transformée de Fourier. En effet, pour un système invariant galiléen, si on ajoute une particule dans le vide elle ne peut interagir avec aucune autre.

Cette transition peut être étudiée par l'approximation LPA du NPRG. Comme le propagateur n'est pas renormalisé, elle est exacte à champ nul (or justement $\langle\psi\rangle = 0$ dans le vide). L'équation de flot (avec le régulateur théta (II.1.9)) pour la constante de couplage adimensionnée $\tilde{\lambda}_k = k^{d-2}\lambda_k$ (où $\lambda_\Lambda = g$) est

$$\partial_t \tilde{\lambda}_k = (d-2)\tilde{\lambda}_k + \frac{M}{3\pi^2}\tilde{\lambda}_k^2. \tag{II.3.18}$$

Si $d \geq 2$, nous remarquons que $\tilde{\lambda}_k$ s'annule quand k tend vers 0. La constante d'interaction est donc non-pertinente au sens du groupe de renormalisation. Les autres termes du développement en champs tendent encore plus vite vers 0. Par exemple, pour la constante de couplage devant le terme en ψ^4, le facteur $d-2$ du membre de droite de l'équation (II.3.18) devient $3d-2$. Ainsi la dimension critique supérieure de ce modèle vaut 2, et le point fixe gaussien (théorie sans interaction) gouverne la physique pour $d \geq 2$. En conséquence l'exposant ν vaut $1/2$, l'exposant dynamique z vaut 2 (les excitations critiques $\omega \sim \mathbf{p}^2$ sont quadratiques en $\mathbf{p}$) et la dimension anormale vaut 0 (le propagateur n'est pas renormalisé dans le vide et donc au point critique $T = \mu = 0$).

[11] Lorsque la température est nulle, l'action (II.3.16) devient un hamiltonien classique en dimension $d+1$ (car la « longueur » temporelle qui est β devient infinie). Cet hamiltonien est alors similaire au modèle O(2) en dimension $d+1$ (les parties réelle et imaginaire du champ ψ deviennent les deux composantes du champ φ). La seule différence vient du fait que la dérivée temporelle ∂_τ n'est pas au carré, mais cette nuance est justement cruciale pour l'étude de la transition vide/superfluide.

En intégrant l'équation (II.3.18) en dimension 3, nous obtenons

$$\frac{1}{\lambda_k} = \frac{1}{g} + \frac{M}{3\pi^2}(\Lambda - k)\,. \tag{II.3.19}$$

Or, la constante de couplage renormalisée $\lambda_{k=0}$ doit être égale dans le vide à $4\pi a/m$ (qui est la valeur de la matrice T dans le vide) où a est la longueur de diffusion dans l'onde s à 3 dimensions. Ainsi, nous obtenons le lien nécessaire entre g et Λ pour reproduire la physique du vide

$$g = \frac{4\pi a}{m}\frac{1}{1 - \frac{4}{3\pi}a\Lambda}. \tag{II.3.20}$$

Réexprimer la variation de λ_k en terme de a,

$$\lambda_k = \frac{4\pi a}{m}\frac{1}{1 - \frac{4}{3\pi}ak}, \tag{II.3.21}$$

permet de comprendre que lorsque $k \ll a^{-1}$, le flot de renormalisation est complètement gouverné par le point fixe gaussien du vide. La physique est donc entièrement déterminée par m et a pour les échelles d'impulsion inférieures à a^{-1}.

II.3.2.2 À température non-nulle

Il y a deux perturbations pertinentes par rapport au point fixe gaussien $T = \mu = \tilde{\lambda} = 0$: le potentiel chimique μ et la température T. Cela introduit deux échelles d'impulsion supplémentaires que sont $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1} \sim \sqrt{2mT}$ et $p_\mu = \sqrt{2m|\mu|}$. Si elles sont plus petites que a^{-1}, ce qui est équivalent à avoir $ma^2T, ma^2|\mu| \ll 1$, toute la physique s'exprime à partir de m, a, μ et T [193]. La pression s'écrit par exemple

$$P(\mu, T) = T^{5/2}\left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2}\mathcal{F}\left(\frac{\mu}{T}, 8\pi\sqrt{2ma^2T}\right) \tag{II.3.22}$$

où $\mathcal{F}(x, y)$ est une fonction d'échelle universelle (ne dépend ni du type d'atomes ni du détail du potentiel d'interaction) [12]. $\mathcal{F}$ peut être calculée par le NPRG (voir la référence [193] en dimension 2).

A température non-nulle et $\mu > 0$, le gaz de bosons subit une transition de phase du second ordre entre un gaz normal et un superfluide. Proche de cette transition, le régime de basse énergie $ma^2T, ma^2|\mu| \ll 1$ est équivalent à un régime de basse densité $an^{1/3} \ll 1$, et ce régime implique $p_\mu \ll \lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$ [13]. Supposons que l'on applique le NPRG sur l'action (II.3.16) pour k variant de Λ à $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$ avec $\mu > 0$ et T non-nul et que le système se situe dans le régime de basse énergie. Quand $k > \lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, le flot est alors contrôlé par le point fixe gaussien (tout se passe comme si le système était dans le vide), car k n'a pas encore frappé les échelles d'impulsion dues à la température et au potentiel chimique. Une fois que k atteint $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, comme $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1} \ll a^{-1}$, la constante de

[12] La constante de couplage g est non-pertinente au sens du groupe de renormalisation mais puisque $\mathcal{F}(x, y)$ peut avoir un comportement singulier quand y tend vers 0, on ne peut pas la mettre à 0. g est dite « dangereusement non-pertinente » [195].

[13] Cela vient du fait qu'à la transition $ma^2\mu \sim (ma^2T)^{3/2}$.

couplage a convergé à $4\pi a/m$ (voir l'équation (II.3.21)). Or pour des impulsions plus petites que $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, les modes quantiques ne contribuent plus au flot. Donc le voisinage de la transition peut être étudié par l'hamiltonien classique

$$H[\psi^*,\psi] = \beta \int d^d\mathbf{x} \left[\psi^* \left(-\mu - \frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2m} \right) \psi + \frac{2\pi a}{m} \left(\psi^*\psi\right)^2 \right] \tag{II.3.23}$$

ayant une coupure ultra-violette Λ de l'ordre de $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$. On n'inclut pas les termes d'ordre supérieur en puissances de ψ, car nous avons vu qu'ils sont non-pertinents au sens du groupe de renormalisation.

II.3.2.3 Température critique

L'hamiltonien (II.3.23) est identique à celui du modèle O(2) classique en dimension d, et permet de calculer des quantités physiques qui ne dépendent pas des degrés de liberté d'impulsions plus grandes que $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$. C'est le cas par exemple pour la valeur de la température critique T_{c}, qui vérifie (dans la limite $an^{1/3} \ll 1$) [196, 107]

$$\frac{T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{c}}^0}{T_{\mathrm{c}}^0} = c(an^{1/3}) \tag{II.3.24}$$

avec T_{c}^0 la température de condensation de Bose-Einstein du gaz sans interaction, et c un nombre universel. Ce nombre est estimé à 1.37 par l'approximation BMW du NPRG [161, 162], en utilisant l'hamiltonien (II.3.23). Il est à comparer à 1.32(2) obtenu par simulation Monte Carlo sur l'hamiltonien (II.3.23) [116].

II.3.3 Transitions du premier ordre

La référence [197] (sur la transition de Coleman-Weinberg) est, à notre connaissance, le premier article montrant que le NPRG permet aussi d'étudier les transitions du premier ordre. De nombreux travaux analytiques [198] et numériques [199] (en particulier pour le calcul de taux de nucléation) ont suivi. Les auteurs de l'article [200] ont étudié la validité du développement en champs (avec l'approximation LPA) utilisé dans ces travaux antérieurs.

L'essentiel des transitions de phase étudiées dans la suite de la thèse est faiblement du premier ordre (la longueur de corrélation à la transition étant beaucoup plus grande que Λ^{-1}). Le premier article à avoir utilisé le NPRG pour cette classe de transition est [201].

II.3.3.1 Le modèle φ^6

Dans le prochain chapitre, nous appliquerons le NPRG à une transition du premier ordre. Dans un premier temps, nous souhaitons discuter un cas plus simple et comprendre certains aspects qui n'étaient, à notre connaissance, pas abordées dans la littérature, en particulier la façon dont le potentiel effectif devient convexe et comment calculer la longueur de corrélation à la transition. Ce modèle plus simple est le modèle O(N) (II.3.1) auquel on ajoute un terme en φ^6. Nous nous limiterons au cas simple où

$N = 1$, c'est-à-dire que le champ φ est scalaire. L'hamiltonien que l'on considère (qui est invariant sous les éléments du groupe O(1) qui est assimilable à $\mathbb{Z}_2$) est alors

$$H[\varphi] = \int d^d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{x})\right)^2 + \frac{r_0}{2}\varphi^2 + \frac{u_0}{4!}\varphi^4 + \frac{v_0}{6!}\varphi^6 \right\} \tag{II.3.25}$$

avec nécessairement $v_0 > 0$ pour que le système soit stable. Pour un certain $r_{0,\mathrm{c}}$, ce modèle subit une transition de phase. Si $u_0 \geqslant 0$, cette transition est du second ordre.

II.3.3.2 Champ moyen

Si en revanche, $u_0 < 0$, du point de vue de la théorie de Landau [202], la transition est du premier ordre [203]. La transition avec $u_0 = 0$ correspond à un point tricritique du diagramme de phase. Le cas où $u_0 < 0$ a été utilisé pour décrire les transitions de phase du premier ordre dans différents contextes (par exemple, pour les matériaux ferroélectriques [204] ou pour les cristaux liquides [205]).

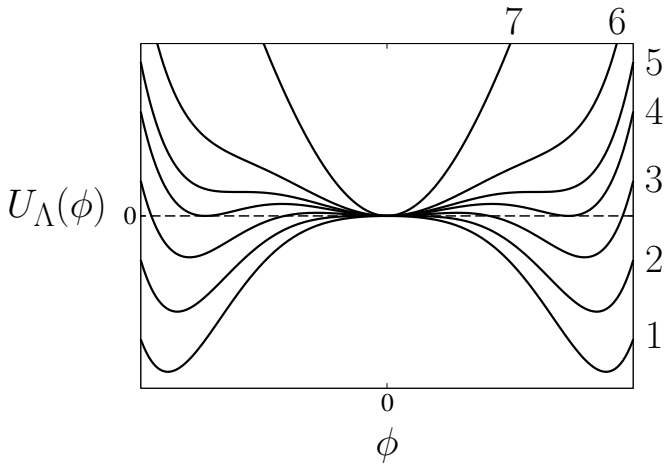


Fig. II.7 : $U_\Lambda(\phi)$ pour différentes valeurs de r_0, avec $u_0 < 0$. Les numéros des courbes augmentent avec r_0.

Le champ moyen consiste à chercher les minima de $H[\varphi]$. Comme la partie cinétique est minimisée pour des configurations uniformes du champ, cela revient à chercher les minima du potentiel $U_\Lambda(\phi) = \frac{r_0}{2}\varphi^2 + \frac{u_0}{4!}\varphi^4 + \frac{v_0}{6!}\varphi^6$ (voir figure II.7). Le minimum global de U_Λ subit une discontinuité lorsque r_0 varie, ce qui est le signe d'une transition du premier ordre [206]. Nous observons sur les courbes numérotées 1, 2 et 3 des situations où le champ moyen prédit que le système est dans la phase ordonnée, il y a deux minima globaux non-nuls. La courbe 2 correspond à $r_0 = 0$ (ce qui correspond à la dérivée seconde à l'origine). Nous observons que l'origine est un minimum local pour la courbe 3. La transition est représentée par la courbe 4 qui a 3 minima dégénérés (pour laquelle $r_{0,\mathrm{c}} = 5u_0^2/8v_0$). Les courbes 5, 6 et 7 correspondent à la phase désordonnée, le minimum global étant situé à l'origine. Le moment où les minima non-nuls disparaissent est représenté par la courbe 5.

II.3.3.3 Au-delà du champ moyen

On utilise l'approximation LPA' avec le régulateur thêta. En incluant les fluctuations au-delà du champ moyen, u_0 devient strictement négatif au point tricritique au lieu d'être nul au niveau champ moyen. C'est-à-dire que si u_0 n'est pas assez négatif, les équations de flot nous amènent vers un point fixe (non-gaussien) [14], la transition de phase est alors du second ordre. En revanche, si u_0 est suffisamment négatif, la transition reste du premier ordre même en incluant les fluctuations, le flot n'est plus attiré par le point fixe.

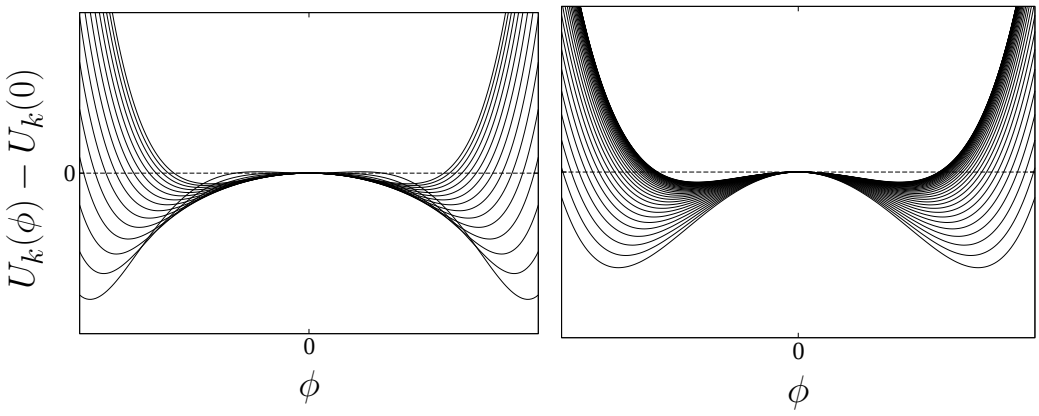


Fig. II.8 : $U_k(\phi)$ dans la phase ordonnée pour différentes valeurs de k. Le début du flot est représenté par la figure de gauche, la suite par la figure de droite.

Nous avons intégré numériquement les équations de flot lorsque $u_0 < 0$. Nous présentons sur la figure II.8 l'évolution de $U_k(\phi)$ lorsque le système est dans la phase ordonnée. Initialement, U_Λ présente 2 minima globaux opposés l'un de l'autre et un minimum local à l'origine. Le flot « désordonne » le système, les minima globaux se rapprochent de l'origine et convergent vers des valeurs de point fixe non-nulles. Dans le même temps, le minimum local à l'origine devient un maximum, et le potentiel tend à s'aplatir, entre les deux minima, au fur et à mesure que k diminue, pour s'approcher asymptotiquement d'une fonction convexe. Nous ne pouvons pas continuer le flot car nous rencontrons le même problème numérique que celui de la partie II.3.1. Mais la valeur de $\rho_{0,k}$ (le minimum global de $U_k(\rho)$) ne varie quasiment plus sur les dernières valeurs de k que l'on a. On peut alors extrapoler $\rho_{0,k}$ par une loi du type $A + Bk^{-C}$, ce qui augmente la précision sur la valeur de $\rho_0 = \lim_{k\to 0} \rho_{0,k}$.

L'évolution de $U_k(\phi)$ dans la phase désordonnée est présentée sur la figure II.9. Le début du flot est identique à ce qui précède, sauf que pour une certaine valeur de k, les minima globaux se confondent avec l'origine pour finalement donner un potentiel ayant uniquement l'origine comme minimum. Comme $\Gamma_k^{(2)}[\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \phi_0 = 0] = G_k^{-1}[\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \phi_0 = 0] = Z_k \mathbf{p}^2 + U_k''(\phi_0 = 0)$, et en utilisant la définition de la longueur de corrélation ($G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \phi_0 = 0) \sim e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/\xi}$), on peut définir une longueur de corrélation à l'échelle k

[14] Il s'agit du point fixe du modèle φ^4, ce qui correspond au modèle O(N) avec $N = 1$

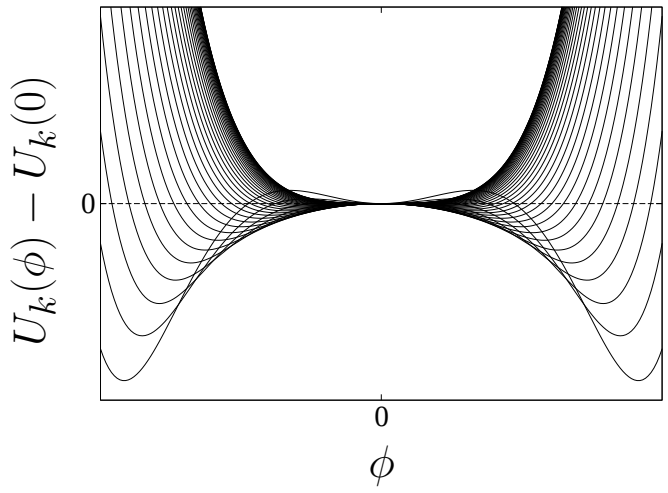


Fig. II.9 : $U_k(\phi)$ dans la phase désordonnée pour différentes valeurs de k.

par

$$\xi_k = \sqrt{\frac{Z_k}{U_k''(\phi=0)}} \tag{II.3.26}$$

qui, quand le système est dans la phase désordonnée, tend vers la véritable longueur de corrélation ξ lorsque k tend vers 0. Nous avons parfois, même dans la phase désordonnée, des problèmes numériques similaires à ceux de la phase ordonnée. $Z_k k^2 + U''(\phi)$, qui est le dénominateur de l'équation de flot pour U_k, s'approche trop près de 0, cette fois-ci pour ϕ proche du maximum de U_k [15]. La procédure d'extrapolation que nous venons de décrire pour obtenir ρ_0 dans la phase ordonnée fonctionne aussi pour avoir ξ dans la phase désordonnée. La courbure du potentiel à l'origine converge avant que la convexité du potentiel soit établie.

Enfin, l'évolution de $U_k(\phi)$, quand le système est exactement à la transition, est présentée sur la figure II.10. Les deux minima globaux s'approchent de l'origine puis tendent une valeur absolue non-nulle. La valeur de U en ces minima tend à devenir égale à celle en $\phi = 0$, si bien que $U(\phi)$ possède trois minima globaux dégénérés. Une fois que les minima et les valeurs du potentiel en ces minima ont presque atteint leurs valeurs limites, la partie du potentiel entre les minima tend finalement à s'aplatir en accord avec la convexité de $U_{k=0}(\phi)$.

Nous avons le même genre de problème numérique que nous venons de mentionner pour la phase désordonnée. La procédure que nous venons de décrire permet néanmoins d'obtenir ξ et ρ_0 à la transition (ρ_0 désigne alors le minimum non-nul de $U_0(\rho)$, et égal à $\Delta\rho_0$ le saut du minimum) de façon satisfaisante. Nous montrons sur les figures II.11 les dernières valeurs obtenues pour ξ_k et $\rho_{0,k}$ en fonction de k à la transition dans un cas où celle-ci est du premier ordre. Notons que ξ et ρ_0 à la transition dépendent des conditions initiales (u_0, v_0 et Λ), ce sont des quantités non-universelles. Pour ce qui

[15] Des instabilités similaires ont été trouvées dans les études précédentes des transitions du premier ordre par le NPRG.

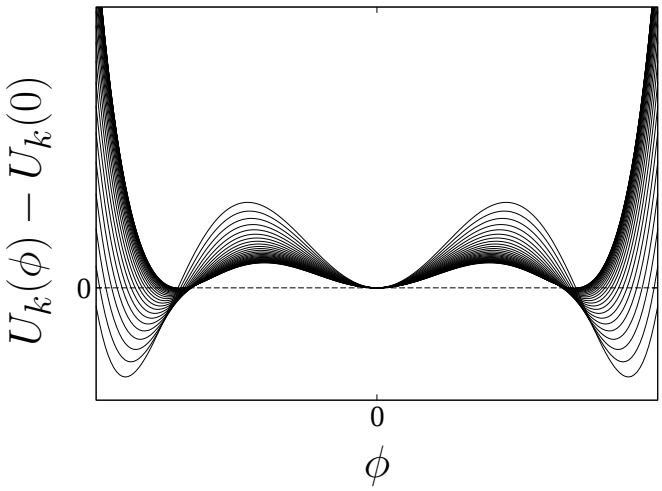


Fig. II.10 : $U_k(\phi)$ à la transition pour différentes valeurs de k.

est des quantités adimensionnées, elles divergent à la transition, il n'y a pas de point fixe. C'est la marque d'une transition du premier ordre.

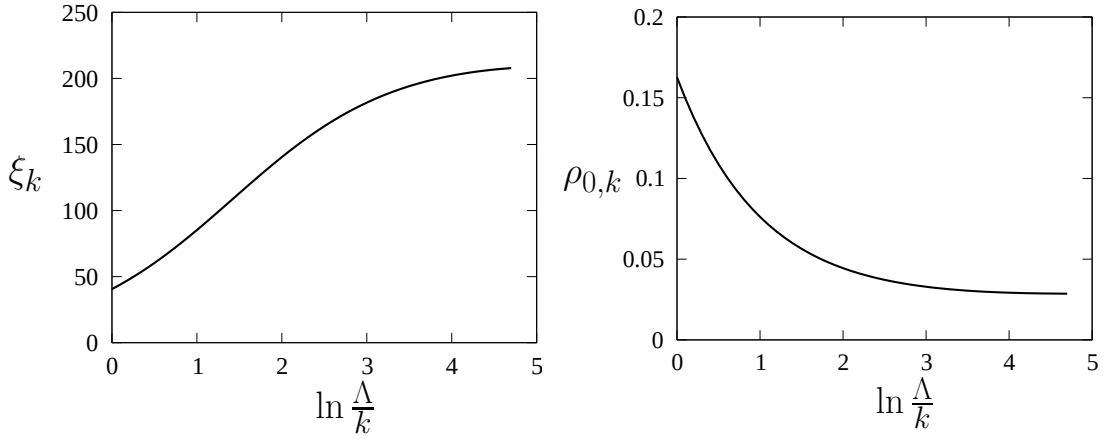


Fig. II.11 : ξ_k et $\rho_{0,k}$ en fonction de $\ln \frac{\Lambda}{k}$ pour une transition du premier ordre.

Notons également que la convexité du potentiel à la transition impose à ce dernier d'être constant entre $-\phi_0$ et ϕ_0 car on doit avoir $U_{k=0}(\phi_0) = U_{k=0}(-\phi_0) = U_{k=0}(0)$. Cela signifie que, en utilisant l'équation (II.3.26), on obtient $\xi_0 = 0$. Mais la limite $\lim_{k\to 0}\xi_k$ est elle non-nulle et nous donne une valeur pour ξ à laquelle nous croyons d'après ce qui précède. La taille de la région autour de $\phi = 0$ dans laquelle la courbure de $U_k(\phi)$ est non-nulle semble devenir de plus en plus petite quand k diminue jusqu'à disparaitre à $k = 0$.

Chapitre III

Transition de phase dans le modèle $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$

Nous avons utilisé le NPRG pour étudier le modèle $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$ et faire des prédictions quantitatives pour les gaz de bosons de spin 1. Dans un premier temps, nous présenterons nos approches théorique et numérique, puis exposerons nos résultats pour le modèle $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$ et nos prédictions pour des expériences d'atomes froids. Dans un second temps, nous montrerons comment l'étude du modèle plus général $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ peut apporter un éclaircissement aux résultats précédents. Et enfin nous expliquerons comment ces derniers peuvent être améliorés en traitant les fluctuations quantiques de façon plus rigoureuse.

III.1 Notre approche du problème

III.1.1 Approximations considérées

Nous allons détailler et justifier l'approche que nous allons utiliser pour étudier l'hamiltonien (I.1.6)

$$H[\boldsymbol{\varphi}] = \int d^3\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \left[(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_1)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}_2)^2 \right] + r\rho + \frac{\lambda_1}{2}\rho^2 + \frac{\lambda_2}{2}\tau \right\} \tag{III.1.1}$$

avec une coupure ultra-violette Λ et où

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}_1^2 + \boldsymbol{\varphi}_2^2) \\ \tau = \dfrac{1}{4}(\boldsymbol{\varphi}_1^2 - \boldsymbol{\varphi}_2^2)^2 + (\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2)^2. \end{cases} \tag{III.1.2}$$

Les travaux antérieurs de Matthieu Tissier et al. [88, 89, 69] ont montré que l'approximation LPA' (dont nous avons parlé dans la partie II.2.1), appliquée à ce modèle en dimension 3, donne des résultats très proches du développement en dérivées d'ordre 2 complet (celui-ci fait intervenir des termes de courant, en plus du terme cinétique habituel). Ainsi nous utilisons l'approximation LPA', et considérons que l'action effective dépendant de l'échelle s'écrit

$$\Gamma_k[\boldsymbol{\phi}] = \int d^3\mathbf{x} \left\{ \frac{Z_k}{2} \left[(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}_1(\mathbf{x}))^2 + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}_2(\mathbf{x}))^2 \right] + U_k\left(\rho, \tau\right) \right\} \tag{III.1.3}$$

où ρ et τ sont maintenant définis par l'équation (III.1.2) dans laquelle on remplace les champs $\boldsymbol{\varphi}_i$ par $\boldsymbol{\phi}_i = \langle \boldsymbol{\varphi}_i \rangle$ (où $i = 1, 2$). U_k peut s'écrire comme une fonction de ρ et τ car ce sont les deux seuls invariants indépendants sous les transformations du groupe $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ (qui est le groupe de symétrie de l'hamiltonien (III.1.1)) et car l'action effective possède les symétries de l'hamiltonien.

Le terme impliquant le régulateur R_k que l'on ajoute à l'hamiltonien s'écrit

$$\Delta H_k[\boldsymbol{\varphi}] = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} R_k(\mathbf{p}) \sum_{i=1,2} \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i(-\mathbf{p}), \tag{III.1.4}$$

et les sources extérieures sont constituées de deux vecteurs à N composantes $\mathbf{J}_1$ et $\mathbf{J}_2$ qui se couplent linéairement aux champs. La trace dans l'équation (II.1.13), en plus des impulsions, porte aussi sur les indices du groupe $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ ($i = 1, 2$ et $j = 1, \ldots, N$).

À partir de l'équation (II.1.13), nous pouvons obtenir les équations de flot pour $U_k(\rho, \tau)$ et pour Z_k (nous les présentons dans l'annexe B). Par la suite nous utiliserons le régulateur théta (II.1.9) sauf si on mentionne le contraire (en particulier pour tester la dépendance des résultats dans le choix du régulateur). La condition initiale ($k = \Lambda$) de ces équations de flot est donnée par

$$\begin{cases} Z_\Lambda = 1 \\ U_\Lambda = r\rho + \dfrac{\lambda_1}{2}\rho^2 + \dfrac{\lambda_2}{2}\tau. \end{cases} \tag{III.1.5}$$

Afin de simplifier la résolution numérique, nous ne résoudrons pas l'équation de $U_k(\rho, \tau)$ en toute généralité. Nous utilisons le fait que $\tau = 0$ dans les deux phases (ordonnée et désordonnée) pour développer en champs autour de $\tau = 0$ de donner de bons résultats. Un tel « semi-développement » du potentiel effectif, fonction de deux invariants, a été utilisé pour un modèle de matrices de symétrie $\mathrm{U}(N) \times \mathrm{U}(N)$ [207, 208, 200]. Nous travaillerons ainsi avec les fonctions $U_k^{(0)}(\rho)$, $U_k^{(1)}(\rho)$ et $U_k^{(2)}(\rho)$ définies par

$$U_k(\rho, \tau) = U_k^{(0)}(\rho) + \tau U_k^{(1)}(\rho) + \frac{\tau^2}{2} U_k^{(2)}(\rho). \tag{III.1.6}$$

Cela nous permet d'aller plus loin que les travaux de Matthieu Tissier et al. [88, 89, 69] qui ont fait un développement complet de U_k autour de $\rho = \rho_{0,k}$ et $\tau = 0$. Nous pouvons ainsi être plus précis dans nos résultats et retrouver la phénoménologie des transitions du premier ordre, c'est-à-dire un potentiel ($U_k^{(0)}$ en l'occurrence) où deux minima peuvent coexister. Nous verrons que ce semi-développement nous permettra d'obtenir des résultats quantitatifs pour la longueur de corrélation.

En parallèle avec nos travaux, les auteurs de l'article [90] ont étudié le même modèle avec la même approximation (à savoir LPA' avec un semi-développement en champs). Ils ont montré que l'ordre 2 du semi-développement (III.1.6) (comme celui que nous utilisons) était suffisant pour calculer la plupart des quantités. En effet, lorsque le semi-développement est réalisé jusqu'à l'ordre 4, la valeur critique [1] $N_\mathrm{c}(d)$, au-dessous de laquelle la transition devient du premier ordre, est modifiée de 2% par rapport à celle avec le semi-développement à l'ordre 2. De même l'exposant ν quand la transition est du second ordre (c'est-à-dire pour $N \geqslant N_\mathrm{c}(d)$) est modifié de moins de 1%.

[1] Cette valeur coïncide avec celle obtenue par une approche sans aucun développement du potentiel effectif [209].

III.1.2 Résolution numérique des équations

Tout comme dans la partie II.3.1, nous allons utiliser deux méthodes différentes pour résoudre numériquement les équations.

La première consiste à résoudre les équations de point fixe

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{U}_k^{(0)}(\tilde{\rho}) = 0 \\ \partial_t \widetilde{U}_k^{(1)}(\tilde{\rho}) = 0 \\ \partial_t \widetilde{U}_k^{(2)}(\tilde{\rho}) = 0 \end{cases} \tag{III.1.7}$$

qui sont des équations différentielles couplées non-linéaires pour $\widetilde{U}_k^{(0)}(\tilde{\rho})$, $\widetilde{U}_k^{(1)}(\tilde{\rho})$ et $\widetilde{U}_k^{(2)}(\tilde{\rho})$. Nous choisissons une grille en $\tilde{\rho}$ qui varie de 0 à $\tilde{\rho}_{\max}$, valeur choisie assez grande pour que les résultats n'en dépendent pas. En pratique, $\tilde{\rho}_{\max}$ de l'ordre de quelque fois $\tilde{\rho}_0$ (le minimum de $\widetilde{U}^{(0)}(\tilde{\rho})$, solution des équations de point fixe) suffit. Les dérivées par rapport à $\tilde{\rho}$ sont calculées sur cinq points. Le système d'équations différentielles couplées devient alors un système d'équations algébriques couplées pour $\widetilde{U}_k^{(0)}$, $\widetilde{U}_k^{(1)}$ et $\widetilde{U}_k^{(2)}$ aux différents points de la grille en $\tilde{\rho}$. Une méthode de type Newton-Raphson à l'aide du logiciel *Mathematica* nous permet alors de les résoudre [2].

Cette première méthode permet d'accéder au potentiel effectif de point fixe, mais aussi aux exposants critiques (en diagonalisant le flot autour du point fixe), comme nous l'avons vu dans la partie II.3.1. De plus elle est assez rapide à mettre en place. On évite aussi les problèmes d'instabilité numérique dont nous avons parlé, et on permet facilement aux solutions d'avoir des valeurs complexes (nous comprendrons l'intérêt par la suite). Néanmoins, cette méthode ne donne accès qu'au potentiel de point fixe et aux exposants critiques (et non par exemple aux grandeurs définies dans une des deux phases ou bien à la transition si elle est du premier ordre).

La deuxième méthode consiste à résoudre numériquement les équations de flot $\partial_t \widetilde{U}_k^{(0)}(\tilde{\rho})$, $\partial_t \widetilde{U}_k^{(1)}(\tilde{\rho})$, $\partial_t \widetilde{U}_k^{(2)}(\tilde{\rho})$ et $\partial_t Z_k$. Comme précédemment, nous discrétisons la variable $\tilde{\rho}$ de 0 à $\tilde{\rho}_{\max}$ (de l'ordre de quelque fois $\tilde{\rho}_{0,\Lambda}$) [3] et nous calculons les dérivées sur 5 points. Nous pouvons faire les intégrales sur $\mathbf{p}$ analytiquement dans le cas où nous utilisons le régulateur théta (comme dans l'annexe B), ce qui permet de réduire le temps de calcul. Avec le régulateur exponentiel, nous calculons les intégrales par la méthode de Simpson. Finalement, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 nous permet d'intégrer le flot en t (temps de groupe de renormalisation (II.3.12)) que l'on a également discrétisé. Le pas t doit être assez petit par rapport au pas en ρ pour que la méthode de Runge-Kutta soit stable. Ce travail numérique a été réalisé avec le langage *C*.

L'avantage principale de cette deuxième méthode est de nous donner accès tout aussi bien aux quantités universelles qu'aux quantités non-universelles. Mais elle souffre

[2] En pratique, cette méthode a besoin d'une condition initiale assez proche de la solution pour pouvoir trouver le point fixe (sinon, les solutions trouvées ne sont pas continues en $\tilde{\rho}$, ou correspondent à des points fixes instables). Pour cela, nous utilisons les résultats issus de la deuxième méthode dans un cas où nous l'avons utilisée auparavant. Puis, nous faisons varier légèrement un paramètre (par exemple N ou d) et réutilisons la solution précédente comme condition initiale pour trouver la nouvelle solution. Et ainsi de suite jusqu'à aboutir aux valeurs de paramètres qui nous intéressent.

[3] Quand $\tilde{\rho}_{0,k}$ devient trop proche de $\tilde{\rho}_{\max}$ au cours de flot (pour un certain k_a), cela signifie que l'on s'éloigne du point fixe. À ce moment-là, nous changeons la grille (fixe en $\tilde{\rho}$) définie entre 0 et $\tilde{\rho}_{\max}$ en une grille (fixe en ρ) entre 0 et $\tilde{\rho}_{\max} k_a^{d-2}/Z_{k_a}$.

de problèmes d'instabilités dont nous avons déjà parlé dans la partie II.3.1 et qui seront également présents dans l'étude de ce modèle.

En pratique, nous utiliserons l'équation sur $U^{(0)\prime}$ plutôt que sur $U^{(0)}$ car les équations de flot ne font intervenir $U^{(0)}(\rho)$ que par ses dérivées et la partie indépendante du champ n'a pas de point fixe (autrement dit, $\widetilde{U}_k^{(0)}(0)$ diverge à la criticalité). On intègre alors $U^{(0)\prime}$ pour obtenir $U^{(0)}(\rho) - U^{(0)}(0)$.

III.2 Résultats pour le modèle O(3) × O(2)

Nous détaillerons ici les résultats pour l'hamiltonien (III.1.1) avec $N = 3$. Nous avons montré dans la partie I.2.6 qu'il était équivalent à celui d'un gaz de bosons de spin 1 à la transition.

III.2.1 Absence de point fixe

Nous effectuons tout d'abord une recherche de point fixe stable par la première méthode que nous avons décrite dans la partie précédente III.1.2. Nous ne trouvons aucun point fixe avec $\lambda_2 > 0$. Il y a évidemment le point fixe gaussien, qui est instable, et le point fixe Wilson-Fisher O(6), lui aussi instable mais avec une seule direction (selon λ_2) d'instabilité[4]. Nous discuterons des différents points fixes en fonction de N dans la partie III.3.1.

Ce résultat est en accord avec les précédents travaux utilisant le NPRG de Matthieu Tissier et al. [88, 89, 69, 90]. Cette absence de point fixe avec $\lambda_2 > 0$ nous laisse penser que la transition sera du premier ordre, plus précisément « du premier ordre induite par les fluctuations » car le champ moyen prédit une transition du second ordre. Nous verrons que ce scénario sera confirmé dans les parties suivantes.

III.2.2 Longueur de corrélation à la transition

L'évolution du potentiel en fonction de k peut être suivie grâce à la deuxième méthode que nous avons décrite dans la partie III.1.2. Nous faisons varier r (cela revient à faire varier μ') pour se déplacer d'une phase à l'autre. Le minimum absolu $\rho_{0,k}$ de $U_k^{(0)}$ dans la limite où k tend vers 0 nous renseigne sur la phase dans laquelle le système se trouve. Les autres potentiels $U_k^{(1)}$, $U_k^{(2)}$ n'importent pas pour la détermination de la phase car $\tau = 0$ dans (III.1.6), et ce quelque soit la phase. Si $\rho_0 = 0$, alors le système se trouve dans la phase désordonnée ($\mu' < \mu'_c$), sinon il est dans la phase ordonnée ($\mu' > \mu'_c$).

Les résultats sont alors tout à fait similaires à ceux obtenus pour le modèle φ^6 avec $u_0 < 0$ de la partie II.3.3. La seule différence vient du fait que le champ moyen prédit ici une transition du second ordre (donc le potentiel $U_\Lambda^{(0)}$ ne présente qu'un seul minimum) alors que pour le modèle φ^6 elle est déjà du premier ordre au niveau champ moyen (U_Λ présente deux minima).

Nous présentons sur la figure III.1 $U_k^{(0)}(\rho)$ pour différentes valeurs de k, lorsque le système considéré est le gaz de ^{87}Rb (les valeurs de λ_1 et λ_2 sont données par (I.2.31)) à la transition ($\mu' = \mu'_c$). Le potentiel initial $U_\Lambda^{(0)}(\rho) = r\rho + (\lambda_1/2)\rho^2$ présente un seul

[4] Ce point fixe n'est donc accessible qu'avec $\lambda_2 = 0$.

minimum qui est non-nul ($\rho_{0,\Lambda} = -r/\lambda_1$). Donc le système est ordonné du point de vue du champ moyen. L'ajout des fluctuations (lorsqu'on fait diminuer k) « désordonne » le système, l'ordre à longue portée est supprimé petit à petit, et $\rho_{0,k}$ diminue. Dans le même temps, pour un certain k, un second minimum apparait en $\rho = 0$. Le potentiel commence à avoir une forme typique des transitions du premier ordre (avec deux minima). Dans la limite où k tend vers 0, les deux minima sont alors dégénérés lorsque $\mu' = \mu'_c$. Si μ' est très légèrement supérieur à μ'_c, le minimum absolu aura une valeur non-nulle, si μ' est très légèrement inférieur à μ'_c, il sera nul. Nous comprenons que le minimum absolu subit donc un saut à la transition, ce qui est caractéristique des transitions du premier ordre.

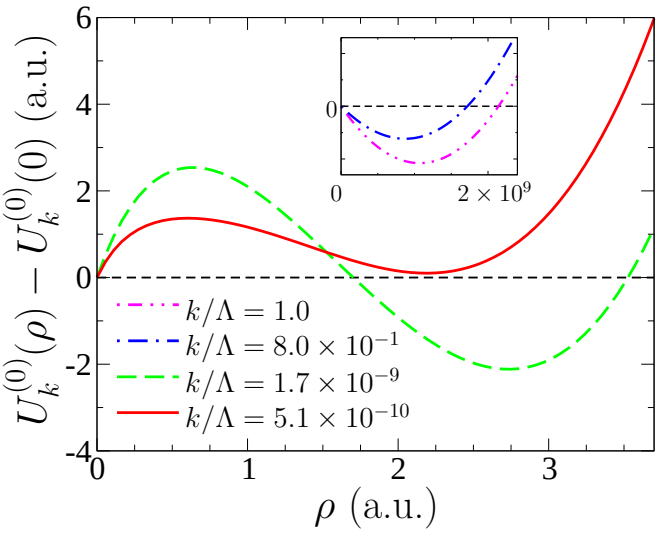


Fig. III.1 : $U_k^{(0)}(\rho)$ à la transition pour différentes valeurs de k (pour ^{87}Rb). L'encart montre le début du flot.

L'évolution de $U_k^{(1)}(\rho)$, $U_k^{(2)}(\rho)$ à la transition en fonction de k est présentée sur la figure III.2. Initialement, on a $U_\Lambda^{(1)}(\rho) = \lambda_2/2$, $U_k^{(2)}(\rho) = 0$. L'unité de ρ sur cette figure, bien qu'étant arbitraire est la même que celle de la figure III.1. $U_k^{(1)}(\rho)$ et $U_k^{(2)}(\rho)$ acquièrent une certaine structure (une dépendance en ρ importante) pour ρ inférieur ou égal à l'ordre de grandeur du minimum non-nul de $U_k^{(0)}(\rho)$.

Comme dans la partie II.3.3, nous rencontrons des difficultés numériques au-dessous d'un certain k non-nul. En effet nous ne pouvons pas prolonger le flot pour des k aussi petits possible car les équations de flot deviennent instables. Cela provient du fait que $Z_k k^2 + U_k^{(0)\prime} + 2\rho U_k^{(0)\prime\prime}$ (qui est au dénominateur des équations de flot, voir annexe B) tend vers 0 pour ρ au voisinage du maximum de $U^{(0)}(\rho)$. Nous arrêtons donc le flot juste avant l'instabilité.

Il est néanmoins possible de trouver la longueur de corrélation ξ à la transition. Nous remarquons pour cela, dans l'annexe B, que $\Gamma^{(2)}_{a_1,i_1;a_2,i_2}(\mathbf{p},-\mathbf{p})$ est diagonal et que ces éléments sont tous égaux à $Z_k\mathbf{p}^2 + U^{(0)\prime}$. Nous définissons alors la longueur de

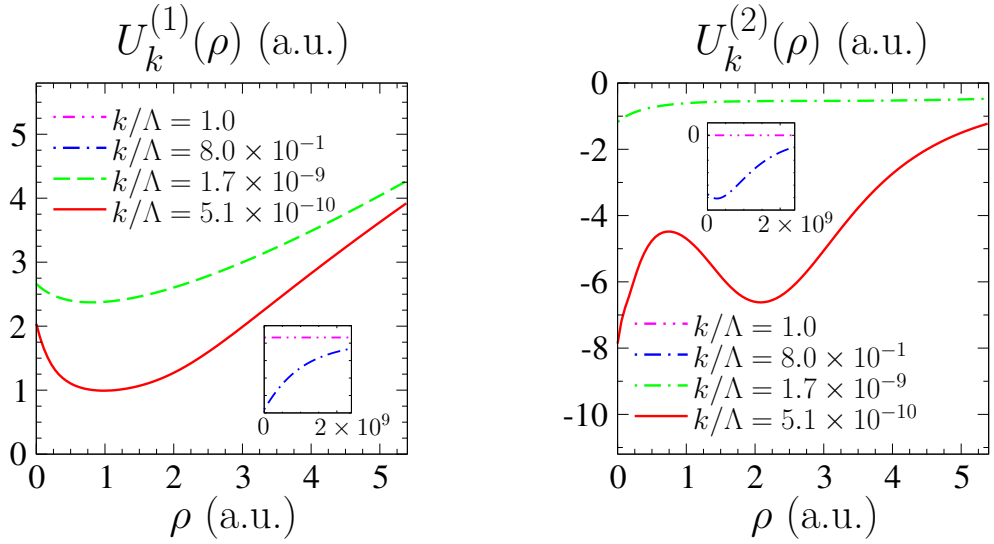


Fig. III.2 : $U_k^{(1)}(\rho)$ et $U_k^{(2)}(\rho)$ à la transition pour différentes valeurs de k (pour ^{87}Rb). Les encarts montrent le début du flot.

corrélation à l'échelle k par [5]

$$\xi_k = \sqrt{\frac{Z_k}{U_k^{(0)\prime}(\rho{=}0)}} \tag{III.2.1}$$

qui tend vers la longueur de corrélation du système quand k tend vers 0. Pour les plus petites valeurs de k que l'on a, ξ_k ne varie quasiment plus. On peut alors extrapoler ξ_k par une loi du type $A + Bk^{-C}$, ce qui donne accès à $\xi = \lim_{k\to 0}\xi_k$.

De la même manière, nous pouvons calculer ξ dans la phase désordonnée ainsi que ρ_0 (qui est la limite de $\rho_{0,k}$ quand k tend vers 0) dans la phase ordonnée et à la transition. Pour cette dernière, il y a deux minima, ρ_0 est alors défini par le minimum non-trivial, et est égal au saut du minimum $\Delta\rho_0$. La figure III.3 montre ξ_k et $\rho_{0,k}$ pour les dernières valeurs de k que l'on a (avant l'instabilité).

Les quantités ayant un intérêt physique (ξ et $\Delta\rho_0$) ont presque convergé quand on arrête le flot. Le reste du flot, que nous ne pouvons pas obtenir, concerne essentiellement, comme dans le cas du modèle φ^6 de la partie II.3.3, l'établissement de la convexité du potentiel. Néanmoins sur la figure III.2, $U_k^{(1)}$ évolue encore quand on arrête le flot. Et pour $U_k^{(2)}$, l'effet est encore plus prononcé. Cet effet semble générique lorsqu'on utilise le NPRG avec des développements en champs [6], mais comme les quantités ayant un intérêt physique ne sont pas affectées, cela ne constitue pas un problème véritable.

La table III.1 présente les valeurs obtenues pour ξ à la transition et Δn_0 pour les différents gaz de bosons de spin 1. Dans la mesure où ξ à la transition est beaucoup plus

[5] Il s'agit de la même définition (II.3.26) que celle de la partie II.3.3, car $U_k''(\phi{=}0) = U_k'(\rho{=}0)$.

[6] Nous l'avons vérifié, par exemple, pour le modèle φ^4 (modèle O(N) avec $N = 1$) sur lequel nous avons utilisé l'approximation LPA développée en champs. En effet, les coefficients du développement en champs d'ordre élevé convergent pour des plus petites valeurs de k que les coefficients d'ordre plus bas.

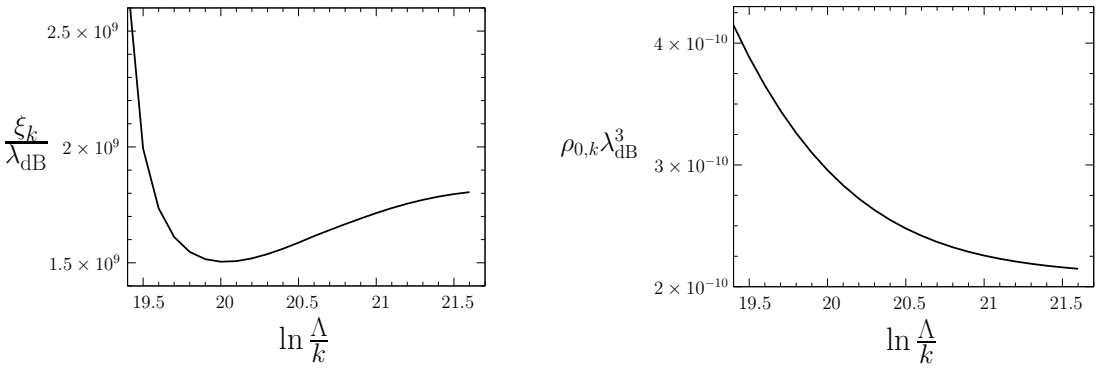


Fig. III.3 : ξ_k et $\rho_{0,k}$ en fonction de $\ln \frac{\Lambda}{k}$ pour ^{87}Rb à la transition.

grand que λ_{dB} et Δn_0 beaucoup plus petit que n, nous pouvons qualifier la transition de faiblement du premier ordre.

Table III.1 : Longueur de corrélation à la transition ξ et saut de la densité du condensat Δn_0 pour ^{87}Rb, ^{41}K et ^{7}Li. Ces valeurs seront réexaminées dans la partie III.4.

	^{87}Rb	^{41}K	^{7}Li
a_0/a_B	101.8 ± 0.2	68.5 ± 0.7	23.9
a_2/a_B	100.4 ± 0.1	63.5 ± 0.6	6.8
$\xi/\lambda_{\mathrm{dB}}$	1.8×10^9	3.0×10^7	9.1×10^3
$\Delta n_0 \lambda_{\mathrm{dB}}^3$	2.7×10^{-9}	1.9×10^{-7}	9.3×10^{-4}
$\lambda_{\mathrm{dB}}^2 \xi \Delta n_0$	4.9	5.7	8.5

La figure III.4 présente la dépendance de ξ à la transition en fonction des longueurs de corrélation a_0 et a_2. Nous observons que ξ est toujours plus élevé que λ_{dB} [7] et varie beaucoup en fonction des longueurs de diffusion.

Nous observons également que la longueur de corrélation à la transition dépend essentiellement de $(a_0 - a_2)/a_2$, c'est-à-dire de λ_2/λ_1 [8]. Plus précisément, plus $(a_0 - a_2)/a_2$ est petit, plus ξ est grand. Rappelons que si $(a_0 - a_2)/a_2 = 0$, nous avons un modèle O(6), la transition est donc du second ordre, et $\xi = \infty$.

Ce « rapprochement » vers une transition du second ordre se traduit aussi par le fait que $\lambda_{\mathrm{dB}}^2 \xi \Delta\rho_0$ a une limite universelle (de l'ordre de 0.4) quand $(a_0 - a_2)/a_2$ tend vers 0. Un résultat similaire a été trouvé sur le modèle $\mathrm{U}(N) \times \mathrm{U}(N)$ [207]. Cette limite est universelle dans le sens où elle ne dépend pas des paramètres du hamiltonien (de μ, M, a_0 ou a_2). On en déduit

$$\lambda_{\mathrm{dB}}^3 \Delta n_0 \simeq 4.9 \frac{\xi}{\lambda_{\mathrm{dB}}} \tag{III.2.2}$$

[7] La théorie Hartree-Fock appliquée à un gaz de bosons de spin 1 non-condensé permet aussi de montrer que ξ est au moins de l'ordre de λ_{dB}.

[8] ξ à la transition dépend peu de λ_1 (et de λ_2) quand λ_2/λ_1 est fixe. À titre d'exemple, si $\lambda_2/\lambda_1 \sim 1$, alors $\xi \sim 10^3 \lambda_{\mathrm{dB}}$, presque indépendamment de la valeur de λ_1 (et de λ_2).

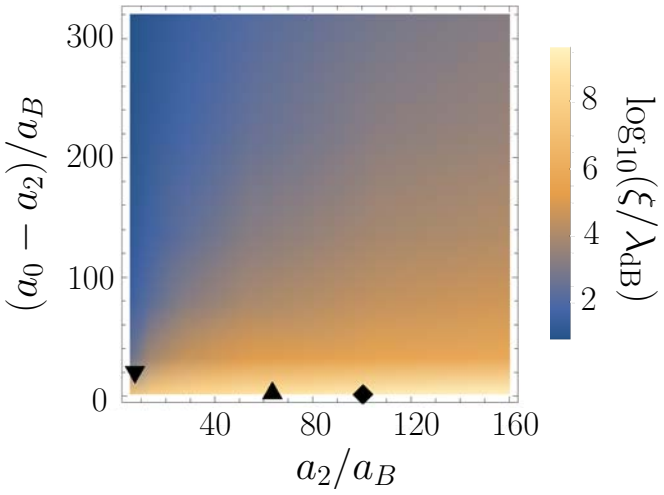


Fig. III.4 : Longueur de corrélation à la transition ξ pour différentes valeurs des longueurs de diffusion a_0 et a_2 (voir l'équation (I.2.29) pour faire le lien avec λ_1 et λ_2). Les symboles ♦, ▲ et ▼ correspondent respectivement aux ^{87}Rb, ^{41}K et ^{7}Li.

(voir table III.1). Or $n\lambda_{\mathrm{dB}}^3 \sim 1$ à la transition, donc on obtient

$$\frac{\Delta n_0}{n} \simeq 0.6 \frac{\lambda_{\mathrm{dB}}}{\xi} \tag{III.2.3}$$

pour $a_0 \simeq a_2$.

III.2.3 Exposants pseudo-critiques

Il est *a priori* difficilement envisageable que ce que nous venons de présenter puisse être observé expérimentalement. En effet, la taille des systèmes dans les expériences d'atomes froids est de l'ordre de quelques dizaines de fois λ_{dB}. Par exemple, pour l'expérience utilisant un piège quasi-uniforme [125] dont nous avons parlé dans la partie I.2.5, la taille du gaz est de l'ordre de 40 λ_{dB}. Les valeurs pour ξ à la transition présentées dans la table III.1 nous indiquent que les expériences ne pourront pas observer directement le caractère premier ordre de la transition. En effet, ce sera impossible d'observer la finitude de la longueur de corrélation à la transition ou bien le saut de la densité du condensat.

Cependant la dépendance de ξ en fonction de μ' dans la phase désordonnée va nous permettre de faire des prédictions réalistes pour les expériences. Nous présentons les résultats pour les différents gaz de bosons de spin 1 que l'on a considérés sur la figure III.5.

Dans la phase désordonnée, ξ augmente fortement lorsqu'on s'approche de la transition. Plus précisément, l'augmentation de $\ln(\xi/\lambda_{\mathrm{dB}})$ se fait de façon quasi-linéaire en $\ln[(\mu'_{\mathrm{c}} - \mu')/\mu'_{\mathrm{c}}]$ sur plusieurs décades. La pente ne varie que très légèrement (de 5% pour ^{87}Rb, 4% pour ^{41}K et 2% pour ^{7}Li). Quand le système est très proche de la transition, la longueur de corrélation sature à une valeur finie, qui est la marque d'une transition du premier ordre.

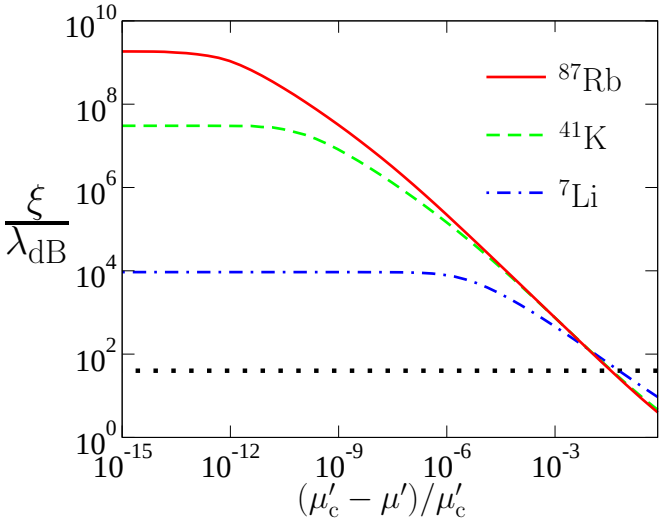


Fig. III.5 : Longueur de corrélation en fonction du potentiel chimique renormalisé μ' pour ^{87}Rb, ^{41}K et ^{7}Li. Les axes sont en échelle logarithmique. La ligne horizontale de points représente la taille typique $L \sim 40\lambda_{\mathrm{dB}}$ du système dans une expérience.

Ce comportement en loi de puissance de $\xi \sim (\mu'_{\mathrm{c}} - \mu')^{-\nu}$ en fonction de $(\mu'_{\mathrm{c}} - \mu')$ permet de définir un exposant pseudo-critique ν. Nous présentons les exposants pseudo-critiques sur la table III.2. Ils ont été obtenus en calculant

$$\nu = \left.\frac{d\ln\xi}{d\ln\mu'}\right|_{\xi\sim L} \tag{III.2.4}$$

où L est la taille typique du système (ligne horizontale de points sur la figure III.5).

Table III.2 : Exposant pseudo-critique ν pour ^{87}Rb, ^{41}K et ^{7}Li. Ces valeurs seront réexaminées dans la partie III.4.

	^{87}Rb	^{41}K	^{7}Li
a_0/a_B	101.8 ± 0.2	68.5 ± 0.7	23.9
a_2/a_B	100.4 ± 0.1	63.5 ± 0.6	6.8
ν	0.81	0.79	0.60

Notons que le même exposant caractérise la variation de ξ en température. En effet, ici, nous travaillons à température fixée en faisant varier le potentiel chimique. Si en revanche la température varie à potentiel chimique fixe, $\xi \sim (T - T_{\mathrm{c}})^{-\nu}$.

Les exposants que nous présentons dans la table III.2 sont des quantités non-universelles qui varient fortement d'un gaz à l'autre. Cela est en accord qualitatif avec ce qui est observé expérimentalement et numériquement sur le modèle STA et sur le modèle O(N) × O(2). En effet, nous avons mentionné dans la partie I.1.4 qu'un comportement en loi de puissance était systématiquement observé mais que les exposants

étaient différents les uns des autres.

Le comportement en loi de puissance s'observe dès que ξ est plus grand que quelques fois λ_{dB} (voir figure III.5), ce qui signifie que la longueur de Ginzburg [9] ξ_G est de l'ordre de λ_{dB}. Le critère de Ginzburg [10] pour un gaz de bosons de spin 0 donne

$$\frac{\xi_G}{\lambda_{\mathrm{dB}}} = \frac{\alpha}{\sqrt{Ma^2T}} \tag{III.2.5}$$

où $\alpha \sim 10^{-2}$ est une constante [11]. La valeur de α donnée ici par le critère de Ginzburg est un simple ordre de grandeur. Dans le cas des bosons de spin 1, Ma_FT varie entre 10^{-4} et 10^{-6} pour les trois systèmes que l'on a considérés compte tenu de la densité choisie [12]. Donc si on suppose que (III.2.5) est valable pour les bosons de spin 1, α doit être de l'ordre de 10^{-2}–10^{-3} pour que ξ_G soit de l'ordre de λ_{dB}, ce qui est compatible avec la valeur de α prédite par le critère de Ginzburg pour les bosons de spin 0.

III.2.4 Comportements pseudo-critiques

Pour mieux comprendre l'origine des grandes longueurs de corrélation observées, nous nous intéressons au flot du potentiel effectif adimensionné $\widetilde{U}_k^{(0)}(\tilde{\rho})$. Si la transition était du second ordre, il y aurait un point fixe, donc à la transition $\widetilde{U}_k^{(0)}(\tilde{\rho})$ serait constant en fonction de k pour $k \gg \xi_G^{-1}$. Cela se traduirait par des plateaux (comme sur la figure II.5) pour les différentes quantités issues de $\widetilde{U}_k^{(0)}(\tilde{\rho})$. La figure III.6 montre l'évolution de $\widetilde{U}_k^{(0)\prime}(0)$ en fonction de k pour différents μ' (pour ^{87}Rb et ^{7}Li). La courbe enveloppe des différentes trajectoires correspond à $\mu' = \mu'_{\mathrm{c}}$, elle sépare le plan en deux portions (qui correspondent aux deux phases).

Pour ^{87}Rb à la transition, après un régime transitoire, $\widetilde{U}_k^{(0)\prime}(0)$ atteint un quasi-plateau sur lequel il n'y a presque plus de dépendance en $t = \ln \frac{k}{\Lambda}$ (pour $5 \lesssim -t \lesssim 12$), puis sort de ce quasi-plateau (de façon approximativement exponentielle). Le comportement du flot est donc très similaire à celui d'une transition du second ordre mis à part le fait que la taille du plateau est ici finie (cette finitude est justement le signe de l'absence de point fixe). Plus précisément, lorsqu'on fait une dichotomie sur μ' pour trouver la transition, tant que l'on n'est pas très proche de μ'_{c} (de l'ordre de 10^{-12} de différence relative), on ne peut pas savoir que la transition est du premier ordre. En effet, on observe alors un plateau pour $\widetilde{U}_k^{(0)\prime}(0)$ (qui implique un comportement en loi de puissance pour ξ sur la figure III.5). Pour ^{41}K, nous obtenons qualitativement la même chose.

Pour ^{7}Li, la situation est un peu différente, car il n'y a presque pas de quasi-plateau. C'est pourquoi la longueur de corrélation à la transition est beaucoup plus petite que

[9] Quand la longueur de corrélation du système devient plus grande qu'une certaine longueur ξ_G, appelée longueur de Ginzburg, l'approximation du champ moyen n'est plus valable et on commence à observer un comportement en loi de puissance pour ξ avec un exposant ν différent de 1/2 (valeur prédite par le champ moyen). La région où l'on observe ce comportement est appelée « région critique ».

[10] Ce critère revient à dire que l'approximation du champ moyen n'est plus valide quand l'amplitude des fluctuations du champ devient du même ordre de grandeur que la valeur moyenne du champ.

[11] En effet, la taille de la région critique est donnée par $\mu - \mu_c \sim M^3 g^2 T^2$ d'après [210]. En utilisant $g \sim 4\pi a/M$, $\lambda_{\mathrm{dB}} = \sqrt{2\pi/MT}$, nous trouvons $\xi_G/\lambda_{\mathrm{dB}} \sim 1/(8\pi^{3/2}\sqrt{Ma^2T})$.

[12] $Ma_0^2T, Ma_2^2T \sim 2 \times 10^{-4}$ pour ^{87}Rb, $Ma_0^2T \sim 1 \times 10^{-4}$ et $Ma_2^2T \sim 9 \times 10^{-5}$ pour ^{41}K, $Ma_0^2T \sim 1 \times 10^{-5}$ et $Ma_2^2T \sim 1 \times 10^{-6}$ pour ^{7}Li.

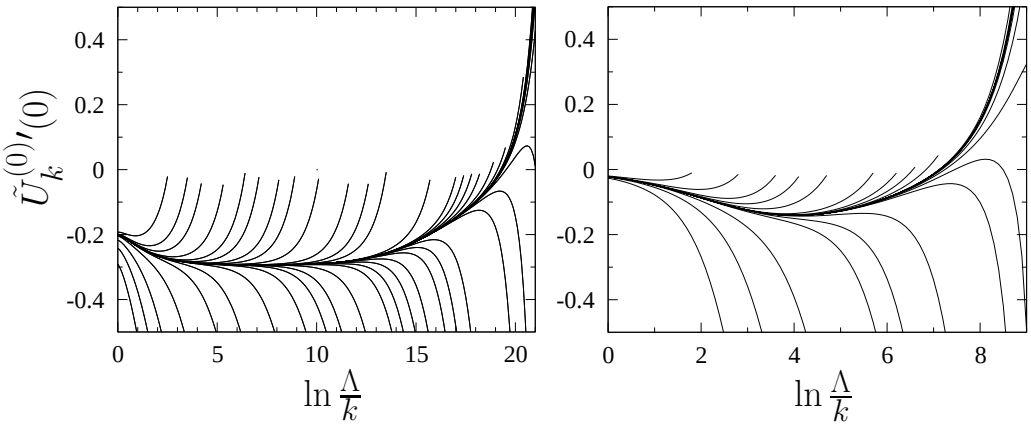


Fig. III.6 : $\widetilde{U}_k^{(0)\prime}(0)$ en fonction de $-t$ pour différents μ' proche de $\mu'_{\rm c}$. La figure de gauche correspond à ^{87}Rb, celle de droite à ^{7}Li.

pour les autres gaz. Néanmoins, elle reste grande devant la longueur d'onde thermique de de Broglie. Cela peut se comprendre en observant que $\widetilde{U}_k^{(0)\prime}(0)$ met tout de même un certain temps avant de diverger exponentiellement. En effet, l'échelle k à partir de laquelle le potentiel adimensionné commence à diverger exponentiellement est de l'ordre de ξ^{-1}.

La figure III.7 fournit une façon de comprendre l'origine des ces quasi-plateaux. Nous y présentons le flot de renormalisation à la transition dans le plan $(\tilde{\lambda}_{1,k},\tilde{\lambda}_{2,k})$, où $\tilde{\lambda}_{1,k}$ et $\tilde{\lambda}_{2,k}$ sont les constantes de couplage adimensionnées

$$\tilde{\lambda}_{i,k} = \frac{\lambda_{i,k}}{Z_k^2 k}, \tag{III.2.6}$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_{1,k} = U_k^{(0)\prime\prime}(0) \\ \lambda_{2,k} = 2U_k^{(1)}(0). \end{cases} \tag{III.2.7}$$

Pour des conditions initiales correspondant à ^{87}Rb et ^{41}K, les flots de renormalisation sont fortement attirés par le point fixe Wilson-Fisher du modèle O(6) à 3 dimensions. Mais comme ce point fixe a une direction instable (celle de $\lambda_{2,k}$), il n'est pas accessible quand $\lambda_{2,\Lambda} > 0$ (ce qui est le cas pour les trois gaz que l'on considère). Le temps très long que passent ces flots près du point fixe O(6) correspond aux quasi-plateaux dont nous avons parlé, et permet d'expliquer les grandes longueurs de corrélation que nous avons obtenues.

Le fait que les trajectoires (pour $\mu' = \mu'_{\rm c}$) ne finissent pas sur un point fixe est le signe qu'elles sont du premier ordre. Mais, quand k^{-1} atteint la taille du système, les trajectoires ne sont pas encore sorties de l'attraction du point fixe O(6). Les exposants ν que l'on a mesurés pour ^{87}Rb et ^{41}K sont donc dus qu'à un phénomène de crossover. C'est pourquoi leurs valeurs ne sont pas très éloignées de celle obtenue pour le modèle O(6) : $\nu_{\rm O(6)} \simeq 0.83$. Ces valeurs ne sont donc pas sensibles au fait qu'il y ait ou pas un point fixe stable dans la suite du flot.

Le cas du ^{7}Li est différent des deux autres. En effet, la trajectoire du flot n'est clairement pas influencée par le point fixe O(6). La valeur $\nu \simeq 0.60$ mesurée pour ^{7}Li

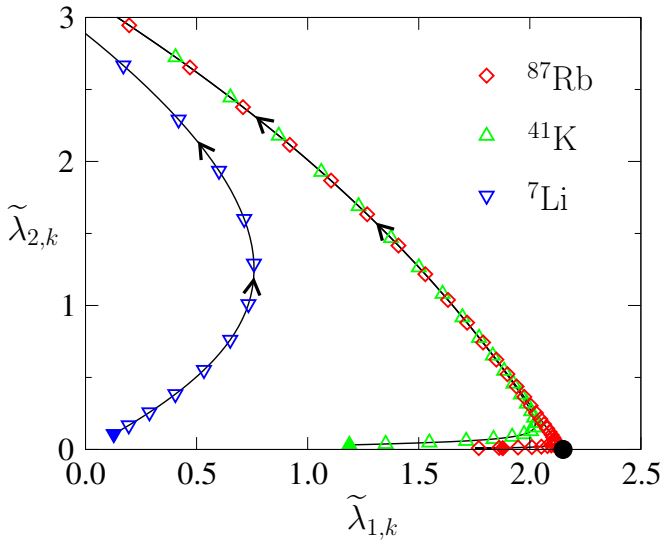


Fig. III.7 : Flot de renormalisation dans le plan $(\tilde{\lambda}_{1,k},\tilde{\lambda}_{2,k})$ pour ^{87}Rb, ^{41}K et ^{7}Li à la transition. Les symboles le long d'une trajectoire de flot sont régulièrement espacés en t. Les symboles pleins montrent les conditions initiales du flot : $(\tilde{\lambda}_{1,\Lambda},\tilde{\lambda}_{2,\Lambda})$. Le point noir montre l'emplacement du point fixe Wilson-Fisher du modèle O(6) à 3 dimensions.

(voir table III.2) n'est donc en rien reliée à l'existence d'un point fixe. Elle est non-universelle et ne dépend que des longueurs de diffusion a_0 et a_2 et de λ_{dB}. Or λ_{dB} dépend à la fois de T_{c} et de M mais cette double dépendance se réduit en une simple dépendance en n (voir l'équation (I.2.30)) quand on utilise l'expression $T_{\mathrm{c}}^0(n)$ (I.2.18). Nous détaillerons la question de la dépendance de nos résultats en M, T_{c} et n dans la partie III.4.2. Nous proposerons, dans la partie III.3, une explication au fait que la longueur de corrélation à la transition pour le ^{7}Li soit grande.

Nous avons trouvé que la longueur de corrélation à la transition ξ se comporte également en loi de puissance en λ_2 quand ce dernier est assez petit (voir la figure III.8) : $\xi \sim \lambda_2^{-\nu'}$. Ce comportement a déjà été décrit pour des transitions faiblement du premier d'ordre dans un modèle de matrices U(N) × U(N) [207]. Des déviations à ce comportement sont observées quand λ_2 est au moins de l'ordre de λ_1. Chose remarquable, la valeur de la puissance ν' est universelle, elle est en particulier indépendante de λ_1, et vaut environ 2.72.

Cette loi de puissance quand $\lambda_2 \ll \lambda_1$ s'explique par le fait que les flots de renormalisation passent alors un temps assez long près du point fixe O(6), et donc sont influencés par ce dernier. La valeur ν' que nous trouvons est en fait l'inverse de la valeur propre associée à la direction instable (selon λ_2), elle est égale à $0.37 \simeq 1/2.72$ (voir la note de bas de page 21).

III.2.5 Vérification de la validité des différentes approximations

Nous allons tester la robustesse de nos résultats et l'incertitude sur les valeurs des exposants ν (voir table III.2). Nous nous concentrons pour simplifier sur la valeur

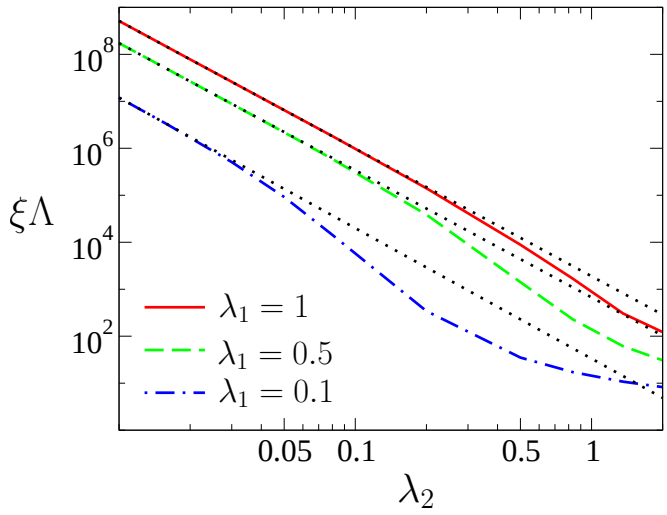


Fig. III.8 : Longueur de corrélation à la transition ξ en fonction de λ_2 pour différents λ_1. Les axes sont en échelle logarithmique. Les lignes de points noirs représentent les pentes de ξ quand λ_2 tend vers 0.

$\nu \simeq 0.60$ pour ^{7}Li.

Vérifions tout d'abord que l'approximation LPA' est raisonnable dans notre cas. Avec l'approximation LPA (qui est moins précise que l'approximation LPA'), nous trouvons une valeur pour ν différente de moins de 1%. Cela est une indication que, même à l'ordre le plus bas, le développement en dérivées a presque convergé (voir références [88, 89, 69]).

À l'ordre $O(\tau)$ du semi-développement (III.1.6) (c'est-à-dire en négligeant $U_k^{(2)}$), on trouve un exposant ν très légèrement différent (différence relative de 0.02%) par rapport à l'ordre $O(\tau^2)$. Le semi-développement en champs a donc essentiellement convergé à l'ordre 2 (comme montré dans l'article [90]).

Afin de tester la dépendance dans le choix du régulateur, nous avons calculé ν avec un régulateur exponentiel (II.1.8), et avons cherché à appliquer le principe de sensibilité minimale (comme dans la figure II.6). Nous n'avons pas trouvé de point où ν ne dépend pas du préfacteur α (voir figure III.9). ν semble tendre vers une valeur asymptotique à grand α. C'est là que ν dépend le moins de α, donc il est raisonnable de prendre cette valeur[13], c'est-à-dire $\nu \simeq 0.59$. La différence relative est de 2% environ par rapport au résultat avec le régulateur théta [14].

L'incertitude globale sur ν est donc de 2% environ (elle est essentiellement due à l'influence du choix du régulateur). Mais c'est sans compter une autre source d'erreur : la valeur exacte de la coupure ultra-violette $\Lambda \sim \lambda_{\rm dB}^{-1}$. Pour estimer cette erreur, nous avons fait varier Λ entre $0.25\lambda_{\rm dB}^{-1}$ et $4\lambda_{\rm dB}^{-1}$. Nous trouvons $0.60 \leq \nu \leq 0.62$ (ce qui ajoute

[13] Cette impossibilité d'appliquer strictement le principe de sensibilité minimale se rencontre dans d'autres situations [156, 90].

[14] De plus on observe, sur la figure III.9, que ν varie assez faiblement (moins de 3%) en fonction de α (si on prend des valeurs de α comprises entre 0.3 et 9). Cela permet de justifier de nouveau l'utilisation de l'approximation LPA' dans ce cas-ci.

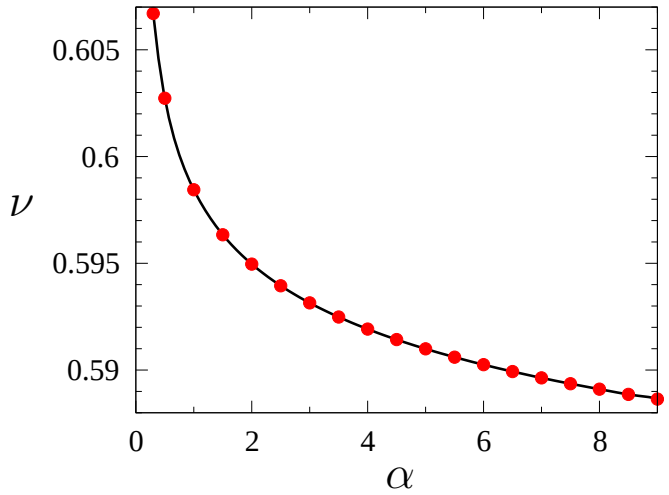


Fig. III.9 : ν pour différentes valeurs de α (le préfacteur du régulateur exponentiel). La ligne noire montre une interpolation polynomiale.

une incertitude de 3% à la valeur de ν). Une façon de remédier à cette incertitude est d'appliquer le NPRG sur l'action quantique (I.2.13), comme nous le verrons dans la partie III.4. Nous pourrons, dans une assez grande mesure, échapper à la dépendance des résultats en la coupure ultra-violette du hamiltonien classique (III.1.1).

Tester la dépendance de nos résultats en n, la densité du gaz de bosons, revient à modifier la valeur de $\lambda_{\mathrm{dB}} = [3\zeta(3/2)/n]^{1/3}$, c'est-à-dire la valeur de la coupure ultra-violette, mais pas seulement. En effet, λ_{dB} intervient également dans les expressions de λ_1 et λ_2 (voir équations (I.2.27)), cela vient du fait que l'on a exprimé la température intervenant dans l'hamiltonien (I.2.17) en fonction de λ_{dB}. En multipliant la densité par 5 et par 0.2 (c'est-à-dire qu'elle vaut respectivement 55×10^{12} cm^{-3} et 2.2×10^{11} cm^{-3}), l'exposant ν est faiblement modifié et égal respectivement à 0.61 et 0.59 [15].

III.2.6 Que pourrait-on observer ? Et comment ?

Dans la partie I.2, nous avons montré que les gaz de bosons de spin 1 sont décrits, proche de la transition superfluide, par le modèle O(3) × O(2) et discuté leur réalisation expérimentale. La longueur de corrélation ξ peut alors être déduite de la fonction de corrélation du premier ordre (fonction de Green à une particule) que l'on peut mesurer par interférométrie d'onde de matière [211, 124].

Il semble donc envisageable de mesurer les exposants pseudo-critiques de la table III.2, ce qui permettrait de vérifier nos prédictions. Si elles concordaient avec les expériences, cela donnerait du poids à notre méthode basée sur le NPRG. Or cette méthode prédit que le modèle O(3) × O(2) n'a pas de point fixe stable. Cela serait donc un signal fort dans cette direction.

Notons qu'une simple mesure d'exposants différents pour ^{87}Rb, ^{41}K et ^{7}Li n'est

[15] Nous avons ici considéré que l'expression $L \simeq 40\lambda_{\mathrm{dB}}$ est inchangée. Cela revient à ajuster L pour que le nombre de bosons dans le système soit constant quand on fait varier la densité.

pas suffisante pour conclure sur la nature des transitions de phase pour ces systèmes. En effet, la différence entre les exposants pour ^{87}Rb et ^{41}K provient essentiellement d'un phénomène de crossover dû au point fixe O(6). L'observation de cette différence n'exclurait donc pas que la transition soit du second ordre. Si c'était le cas, l'exposant mesuré pour ^{87}Rb ou ^{41}K serait alors différent du vrai exposant dû à la physique à très grande distance où le point fixe O(6) ne se fait plus sentir.

Seul ^{7}Li permet donc de tester nos prédictions. Cependant, l'exposant trouvé dans le cas du ^{7}Li, $\nu \simeq 0.60$, est très proche de la valeur obtenue par les théories prédisant une transition du second ordre pour le modèle $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$ (groupe de renormalisation perturbatif avec développement en ϵ [76] et théorie du bootstrap conforme [103]) : $\nu \simeq 0.63$. Cette proximité des valeurs n'est que fortuite selon notre approche [16], mais elle empêcherait la mesure de ν du ^{7}Li de pouvoir discriminer entre les deux scenario (premier ou second ordre). Il faudrait donc trouver un autre gaz qui, comme le ^{7}Li, n'est pas influencé par le point fixe O(6), et trouver un exposant clairement différent[17] de 0.60.

Une autre piste pour pouvoir conclure sur la nature de la transition serait d'observer directement la finitude de la longueur de corrélation à la transition. Pour cela, il faudrait trouver un gaz de bosons de spin 1 avec des longueurs de diffusion qui permettraient d'avoir ξ à la transition plus petite que la taille du gaz (voir figure III.4). Nous pourrions également modifier les longueurs de diffusion grâce à des résonances de Feshbach. Par exemple pour ^{7}Li, pour avoir $\xi \lesssim L$, il faudrait multiplier a_0 par 4 (avec a_2 fixe). Le principal problème vient du fait qu'il faut utiliser un fort champ magnétique extérieur qui, par l'effet Zeeman quadratique [51], supprimerait l'invariance par rotation dans l'espace des spins SO(3) (voir la partie I.2.5). Une manière de contourner cette difficulté serait d'utiliser des résonances de Feshbach induites par un champ micro-ondes de faible amplitude [212]. Mais cette technique n'a pas encore été réalisée expérimentalement.

III.3 Résultats pour le modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$

Nous allons étudier dans cette partie le modèle plus général $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ dans le but de mieux comprendre les observations que l'on vient de faire (en particulier le grande longueur de corrélation à la transition pour ^{7}Li).

III.3.1 Points fixes non-physiques

Appliquons tout d'abord la première méthode numérique décrite dans la partie III.1.2 qui consiste à résoudre les équations de point fixe. Nous schématisons les résultats sur la figure III.10. Ils sont en accord avec ceux prédits par le groupe de renormalisation perturbatif avec développement en $\epsilon = 4 - d$ [91, 92, 77, 78] et les précédents travaux utilisant le NPRG [88, 89, 69, 90].

[16] Nous pouvons trouver de nombreuses autres valeurs d'exposants. Par exemple, pour un gaz dont les longueurs de diffusion valent $a_0 = 190 a_B$ et $a_2 = 30 a_B$, nous trouvons $\nu \simeq 0.45$.

[17] Cette observation permettrait de s'assurer que la transition est du premier ordre pour au moins l'un des deux systèmes. En effet, elle ne serait pas compatible avec l'universalité que l'on devrait observer si la transition était du second ordre pour les deux systèmes.

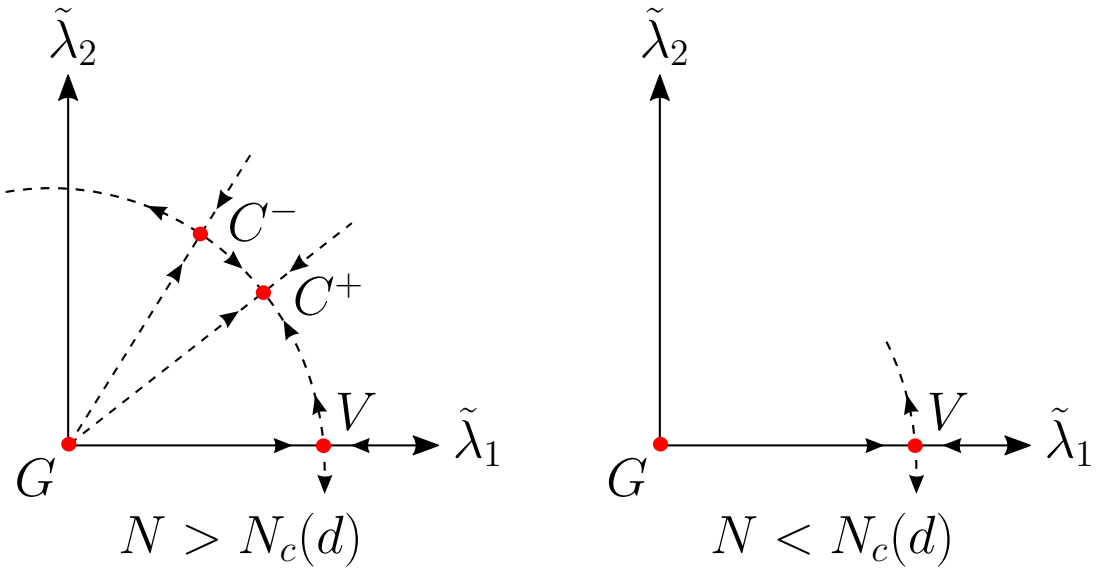


Fig. III.10 : Points fixes dans le plan (λ_1,λ_2). G désigne le point fixe gaussien, V le point fixe Wilson-Fisher du modèle O($2N$), C^+ le point fixe chiral, C^- le point fixe anti-chiral.

En accord avec les précédentes études utilisant le NPRG, nous trouvons $N_c(d = 3) \simeq 5.3$.

Lorsque N est plus grand qu'une certaine valeur $N_c(d)$, qui dépend de la dimension de l'espace, il y a quatre points fixes : le point fixe gaussien, le point fixe Wilson-Fisher du modèle O($2N$), le point fixe dit « chiral » et celui dit « anti-chiral » (ces deux derniers sont situés dans la partie du plan où λ_1 et λ_2 sont positifs). Le point fixe gaussien est entièrement instable, les points fixes O($2N$) et anti-chiral sont instables chacun selon une direction. Seul le point fixe chiral est complètement stable. Ce dernier gouverne donc des transitions du second ordre.

Quand $N = N_c(d)$, les points fixes chiral et anti-chiral fusionnent, puis disparaissent quand $N < N_c(d)$. Il ne reste que les points fixes gaussien et O($2N$) [18]. Il n'y a alors plus de point fixe entièrement stable, et le point fixe O($2N$) est accessible uniquement quand $\lambda_2 = 0$.

Lorsque $N < N_c(d)$, les équations de point fixe n'ont alors pas de solution réelle avec $\lambda_2 > 0$. Mais si on autorise des solutions complexes, on trouve deux points fixes supplémentaires conjugués l'un de l'autre. Les points fixes chiral et anti-chiral ont, en fait, simplement acquis une partie imaginaire. On parle de « points fixes non-physiques ». Cela a déjà été observé par Gil Zumbach [85] et Matthieu Tissier et al. [66]. Par exemple, pour $N = 3$, on trouve deux points fixes avec $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) = (0.689788 - 2.11946i, 3.10959 + 1.80943i)$ et $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) = (0.689788 + 2.11946i, 3.10959 - 1.80943i)$ [19].

[18] Pour N encore plus petit, il est prédit que de nouveaux points fixes apparaissent [64], mais il n'y en a pas de stable dans la région $\lambda_2 > 0$, donc cela n'influence pas nos résultats.

[19] Notons que les points fixes (physiques ou non-physiques) sont caractérisés par l'ensemble $\widetilde{U}^{(0)}(\tilde{\rho})$ et non uniquement par $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\lambda}_2$.

III.3.2 Comportements pseudo-critiques

Nous avons ensuite appliqué la deuxième méthode numérique de la partie III.1.2 au modèle O(N) × O(2) pour différentes valeurs de N. Les figures III.11 et III.12 montrent ce que nous obtenons à la transition pour le flot de $\tilde{\lambda}_{1,k}$ et $\tilde{\lambda}_{2,k}$ à 3 dimensions pour différents N.

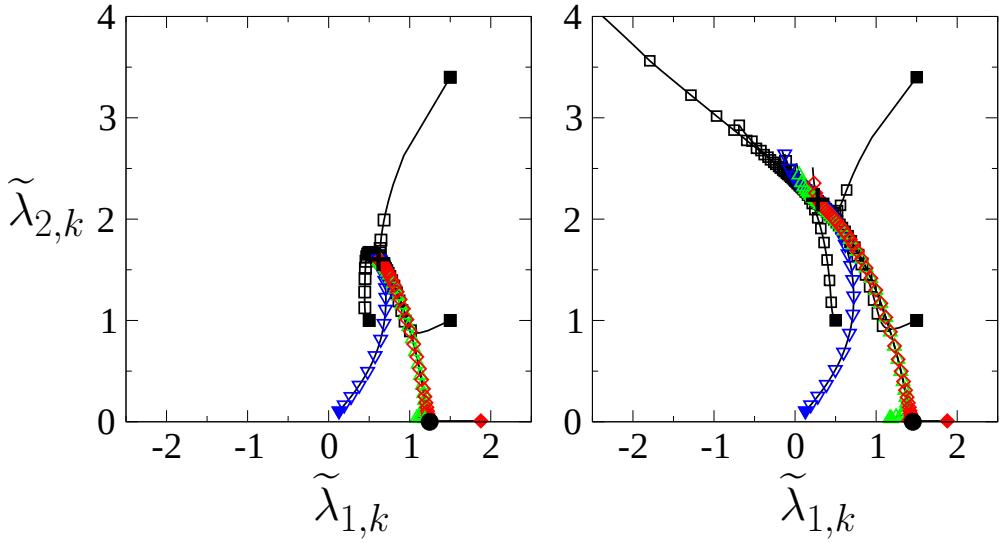


Fig. III.11 : Flot de renormalisation dans le plan ($\tilde{\lambda}_{1,k}$,$\tilde{\lambda}_{2,k}$) à la transition. Les conventions sont les mêmes que celles de la figure III.7. Outre les flots correspondant aux conditions initiales de ^{87}Rb, ^{41}K et ^{7}Li, nous montrons trois trajectoires avec des conditions initiales différentes. La figure de gauche correspond à $N = 6$, celle de droite à $N = 5$. Sur la figure avec $N = 6$, la croix noire représente le point fixe C^+ (elle n'est pas très visible, ses coordonnées sont (0.6,1.6)). Sur la figure avec $N = 5$, la croix noire représente la projection dans le plan ($\tilde{\lambda}_{1,k}$,$\tilde{\lambda}_{2,k}$) des deux points fixes non-physiques.

Pour $N = 6$, les différents flots à la transition (avec $\lambda_{2,\Lambda} > 0$) terminent tous sur le point fixe chiral. Les différentes conditions initiales mènent donc à des transitions du second ordre gouvernées par ce point fixe.

Le point fixe chiral n'existe plus pour $N = 5 < N_c(d = 3)$. Il n'y a donc plus de point fixe stable et les transitions sont du premier ordre. Néanmoins, nous observons que toutes les trajectoires sont fortement attirées par une petite région du plan ($\tilde{\lambda}_{1,k}$,$\tilde{\lambda}_{2,k}$), y sont ralenties, puis finissent pas s'en échapper. Cette région est centrée autour de la projection dans le plan des 2 points fixes non-physiques. Bien qu'ils ne soient plus réels, ces points fixes exercent donc une certaine influence [20].

Pour $N = 4$ et $N = 3$, on n'observe plus de ralentissement du flot près de la projection des points fixes non-physiques. Leur influence s'affaiblit à mesure que N diminue [21]. Cela s'explique par le fait que leurs parties imaginaires deviennent de plus

[20] On observe pour ^{87}Rb et ^{41}K deux ralentissements qui se succèdent (donc deux quasi-plateaux). Le premier est dû à l'influence du point fixe O(10), le second à celle des points fixes non-physiques.

[21] Pour quantifier cela, nous avons calculé l'opérateur L de l'équation (II.3.14) et mesuré la valeur propre de la direction instable du point fixe O($2N$). Nous avons trouvé qu'elle varie de 0.63 à 0.37

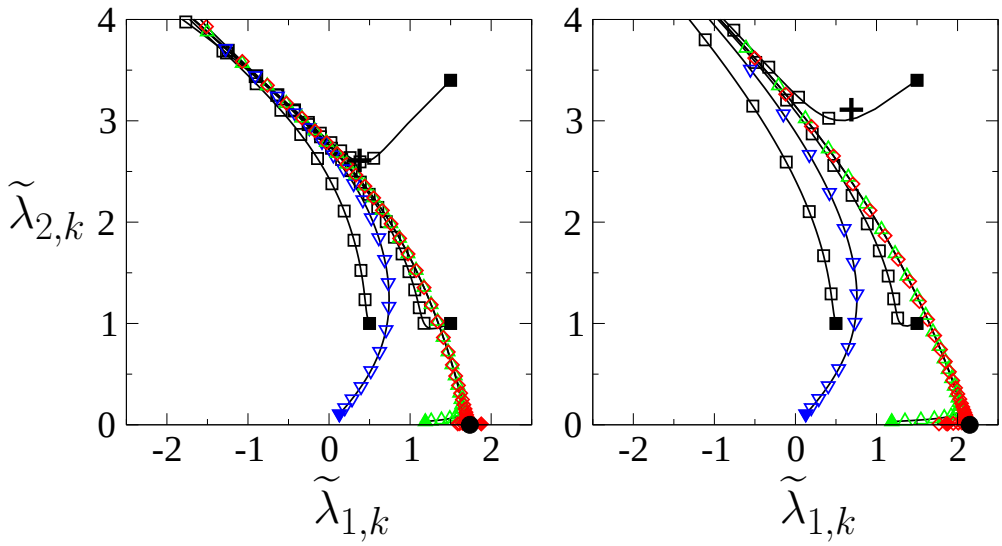


Fig. III.12 : Identique à la figure III.11 pour $N = 4$ à gauche et $N = 3$ à droite.

en plus grandes. Certaines trajectoires (comme celle la plus à gauche sur la figure III.12) passent même assez loin des points fixes non-physiques et sont très rapides. Néanmoins, les trajectoires de ^{87}Rb, ^{41}K et ^{7}Li passent tout de même relativement proche de ceux-ci et restent assez lentes bien qu'elles ne ralentissent pas.

L'existence des points fixes non-physiques apporte un éclaircissement pour le cas du ^{7}Li. En effet, leur influence permet d'expliquer que le potentiel adimensionné ne diverge pas dès le début du flot (voir figure III.6), et donc le fait que nous observions une grande longueur de corrélation.

III.3.3 Ordre de la transition pour le modèle O(2) × O(2)

Profitons de cette partie pour présenter certains résultats sur le modèle O(2) × O(2). Comme mentionné dans la partie I.1.4, les résultats numériques les plus récents [70, 71, 72, 73, 74, 75] montrent que la transition de phase dans les modèles STA et O(N)×O(2) (sur réseau) avec $N = 2$ ou 3 est du premier ordre pour les gammes de paramètres testées. Seule une simulation Monte Carlo sur le modèle O(2) × O(2) [76] conclut à l'existence d'une transition du second ordre pour certaines valeurs des paramètres. Nous venons de voir que notre méthode prédit qu'il n'y a pas de transition du second ordre pour ce modèle, néanmoins nous allons voir que nos résultats sont en très bon accord avec ceux de cette simulation. Cela permettra de questionner la conclusion de l'article [76].

quand N passe de 6 à 3. Cela montre que les flots qui passent du temps près du point fixe O($2N$) s'en échappent de moins en moins rapidement quand N diminue, et donc que l'influence des points fixes non-physiques est de plus en plus faible.

Plus précisément l'hamiltonien étudié dans cet article est

$$\begin{aligned} H = & -\beta \sum_{\mathbf{x},\boldsymbol{\mu}} (\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}+\boldsymbol{\mu}} + \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}+\boldsymbol{\mu}}) \\ & + \sum_{\mathbf{x}} \left\{ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}^2 + \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}^2 + A_4 \left[\left(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}^2 - 1 \right)^2 + \left(\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}^2 - 1 \right)^2 \right] + 2A_{22} \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}^2 \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}^2 \right\}, \end{aligned} \tag{III.3.1}$$

où $\boldsymbol{\varphi}$ et $\boldsymbol{\psi}$ sont deux champs réels à deux composantes, $\mathbf{x}$ prend ses valeurs dans un réseau cubique de L^3 sites (le pas du réseau est choisi comme l'unité de longueur), $\boldsymbol{\mu}$ est un vecteur unité égal à $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ ou $\mathbf{u}_z$ et $A_{22} > A_4$. En utilisant l'équivalence entre cet hamiltonien et celui des équations (3.6) et (3.7) de l'article [76], nous pouvons montrer que (III.3.1) est également équivalent dans la limite continue au modèle O(2) × O(2) où

$$\begin{cases} r = -6 + \dfrac{2 - 4A_4}{\beta} \\ \lambda_1 = \dfrac{8}{\beta^2} A_4 \\ \lambda_2 = \dfrac{4}{\beta^2} (A_{22} - A_4). \end{cases} \tag{III.3.2}$$

Les auteurs de [76] ont réalisé une simulation Monte Carlo sur l'hamiltonien (III.3.1) avec une taille de réseau $L = 120$ et $A_4 = 1$. Ils trouvent, pour une certaine valeur β_c de β une transition de phase qui est du premier ordre quand $A_{22} > A_{22}^* = 1.52(6)$, et du second ordre quand $A_{22} \leq A_{22}^*$ [22]. $A_4 = 1$ et $A_{22} = A_{22}^*$ serait donc un point tricritique (voir partie II.3.3). L'article [76] présente plus particulièrement les résultats pour le cas $A_4 = 1$ et $A_{22} = 7/5 < A_{22}^*$ (cas où la transition est du second ordre selon les auteurs), nous nous limiterons à ces valeurs-là.

Pour que notre modèle continu puisse correspondre au modèle sur réseau, nous introduisons une impulsion maximale $p_{\max}$. Plus précisément, au lieu d'intégrer dans tout l'espace des impulsions $\mathbf{p}$ dans les équations de groupe de renormalisation (voir annexe B), nous intégrons sur les impulsions dont la norme est inférieure à $p_{\max}$ [23]. Dans le modèle sur réseau, les impulsions devraient appartenir à la première zone de Brillouin[24] $]-\pi, \pi]^3$. Si on voulait garder le même nombre de degrés de liberté en passant au modèle continu, on aurait $\frac{4}{3}\pi p_{\max}^3 = (2\pi)^3$ donc $p_{\max} = (6\pi^2)^{1/3}$. En pratique, nous avons ajusté $p_{\max}$ de façon à reproduire la valeur de β_c de la simulation Monte Carlo (à 0.1% près), nous trouvons $p_{\max} \simeq 1.23(6\pi^2)^{1/3}$. Il est possible d'appliquer le NPRG à un modèle sur réseau de façon plus précise [153, 154], mais la formulation est assez différente et aurait demandé un travail beaucoup plus conséquent.

La coupure ultra-violette Λ est choisie de façon à ce que le champ moyen soit presque exact pour $k = \Lambda$. C'est-à-dire qu'elle doit être, comme expliqué dans la partie II.1.3, beaucoup plus grande que les autres échelles d'impulsion du problème, en particulier $p_{\max}$. Lorsqu'on augmente Λ de 100 à 200, β_c ne varie que de 0.01%, donc $\Lambda = 100$ semble être une valeur suffisante. Par ailleurs, nous avons utilisé le régulateur

[22] Remarquons que lorsque $A_{22} = A_4$, nous retrouvons un modèle O(4) et donc une transition du second ordre contrôlée par le point fixe Wilson-Fisher (voir partie II.3.1).

[23] Cette méthode a été appliquée récemment avec succès pour étudier la thermodynamique du modèle XY à deux dimensions en prenant $p_{\max} = \pi$ [213].

[24] Nous rappelons que nous avons pris le pas du réseau comme l'unité de longueur.

exponentiel (II.1.8). Afin de déterminer la valeur de α, le préfacteur du régulateur, nous avons appliqué le principe de sensibilité minimale sur la valeur de β_c (comme expliqué dans la partie II.3.1). La figure III.13 montre que β_c varie très peu en fonction de α (moins de 0.1% avec $\alpha \in [1, 4]$), et qu'il existe un point de sensibilité minimale pour $\alpha \simeq 2.5$. Nous avons donc choisi cette valeur.

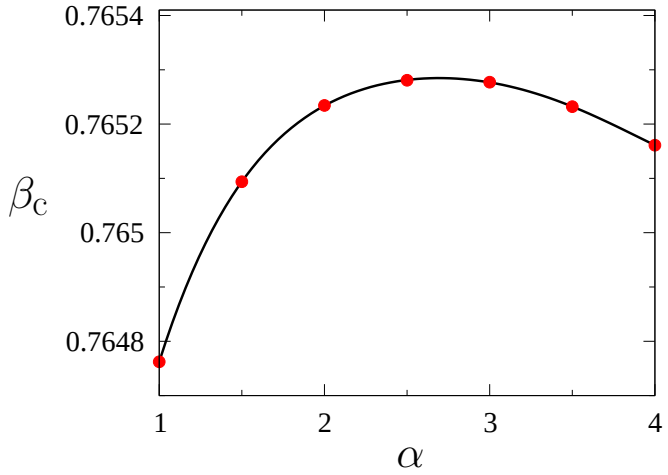


Fig. III.13 : β_c en fonction de α, paramètre du régulateur exponentiel. Les points rouges représentent les résultats de notre méthode, et la ligne noire une interpolation polynomiale.

Nous trouvons une longueur de corrélation à la transition finie mais beaucoup plus grande que la maille du réseau

$$\xi \simeq 3 \times 10^3, \tag{III.3.3}$$

ainsi la transition est faiblement du premier ordre selon notre méthode. Notons que cette valeur est beaucoup plus grande que $L = 120$ utilisée dans la simulation. La figure III.14 montre ξ en fonction de $(\beta_c - \beta)/\beta_c$ en échelle logarithme pour β proche de β_c. La pente pour $\xi \sim L$ permet de définir un exposant pseudo-critique ν. Nous trouvons $\nu \simeq 0.64$, ce qui est très proche de la valeur prédite par la simulation Monte Carlo $\nu = 0.63(7)$. Il est plus difficile d'estimer l'exposant pseudo-critique η car $\eta_k = -k\partial_k \ln Z_k$ n'atteint pas de quasi-plateau pendant le flot. Néanmoins, nous trouvons $\eta_{k=1/L} \simeq 0.065$ avec $L = 120$, ce qui n'est pas très éloigné de $\eta = 0.045(10)$ selon la simulation (compte tenu de l'incertitude) [76].

La valeur de ν obtenue est assez différente de celle du modèle O(4) : $\nu \simeq 0.77$. C'est en accord avec le fait que le flot ne passe pas dans le voisinage immédiat du point fixe Wilson-Fisher O(4) (voir figure III.15). Les auteurs de la simulation disent qu'un effet de crossover avec le point fixe O(4) les empêchent d'avoir une grande précision sur les exposants. Nous pensons que les marques de la transition du second ordre qu'ils observent sont en fait dues à cet effet de crossover. En effet, nos résultats sont en bon accord avec les leurs (du moins pour $A_4 = 1$ et $A_{22} = 7/5$), mais nous ne prédisons pas de transition du second ordre. Le caractère faiblement du premier ordre, caractérisé par une grande longueur de corrélation à la transition $\xi \simeq 3 \times 10^3$, ne peut pas être

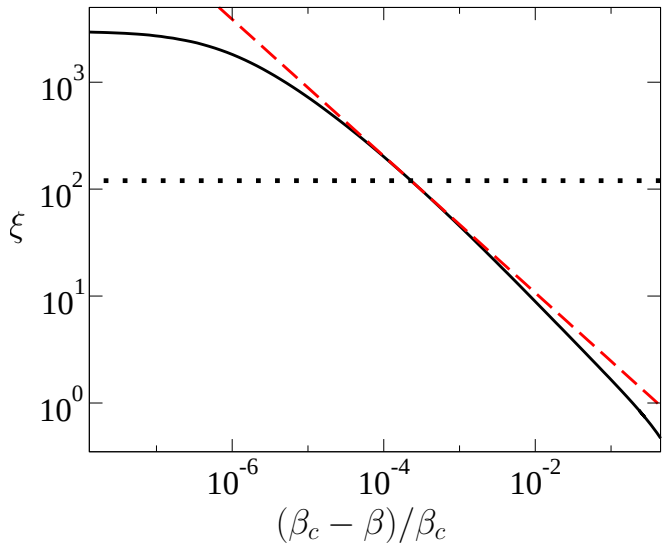


Fig. III.14 : Longueur de corrélation ξ en fonction de $(\beta_c - \beta)/\beta_c$. Les axes sont en échelle logarithmique. La ligne horizontale de points représente la taille du système simulé dans [76] $L = 120$. La ligne hachurée rouge représente la pente lorsque $\xi \sim L$.

déduit d'une simulation sur un système dont la taille $L \sim \xi/25$ est nettement inférieure à cette longueur de corrélation.

III.4 À partir de l'action quantique des bosons de spin 1

Nous présentons dans cette partie une approche différente de celle que nous venons d'utiliser. Ce travail nous permet de traiter les fluctuations quantiques de façon plus précise, et ainsi remédier en partie à l'incertitude due au choix de la coupure ultra-violette de l'hamiltonien classique.

III.4.1 Approche théorique

Nous avons vu dans la partie I.2.1 que les gaz de bosons de spin 1 à trois dimensions sont décrits par l'action S

$$S[\boldsymbol{\psi}^\dagger, \boldsymbol{\psi}] = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \left[\boldsymbol{\psi}^\dagger \cdot \left(\partial_\tau - \mu - \frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2M} \right) \boldsymbol{\psi} + \frac{g_2}{2} \left(\boldsymbol{\psi}^\dagger \cdot \boldsymbol{\psi} \right)^2 + \frac{g_0 - g_2}{6} |\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}|^2 \right]. \tag{III.4.1}$$

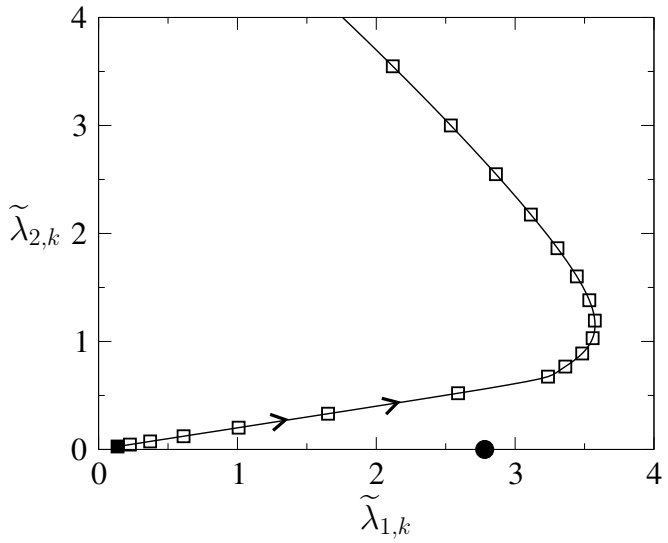


Fig. III.15 : Flot de renormalisation dans le plan $(\tilde{\lambda}_{1,k},\tilde{\lambda}_{2,k})$ à la transition. Les conventions sont les mêmes que celles de la figure III.7. Le point noir montre l'emplacement du point fixe Wilson-Fisher du modèle O(4) à 3 dimensions.

où $\boldsymbol{\psi}$ est un champ classique complexe à 3 composantes. Nous pouvons réécrire cette action[25]

$$S[\boldsymbol{\varphi}] = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \left(i\epsilon_{ij}\partial_\tau - \mu - \delta_{ij}\frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2M} \right) \boldsymbol{\varphi}_j + \frac{g_2}{2}\rho^2 + \frac{g_0 - g_2}{6}\tau \right] \tag{III.4.2}$$

où

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_1 + i\boldsymbol{\varphi}_2}{\sqrt{2}} \tag{III.4.3}$$

et ρ et τ sont définis par (I.1.5). Nous avons vu également dans la partie I.2.1 que les quantités physiques peuvent être exprimées en fonction des longueurs de diffusion a_F (où $F = 0$ ou 2), elles-mêmes fonctions de g_F et Λ_Q, la coupure ultra-violette de l'action quantique (III.4.2).

Le groupe de symétrie de l'action (III.4.2) est le même que celui décrit dans la partie I.1.2, c'est-à-dire O(3) × O(2) [26]. Nous n'allons pas faire d'analyse des points fixes car ce sont nécessairement les mêmes que ceux du modèle O(3) × O(2) classique. En effet, les transitions de phase des modèles quantiques à température finie sont contrôlées par les fluctuations classiques (comme nous l'avons vu dans la partie II.3.2).

Nous avons montré également que les quantités qui dépendent essentiellement des degrés de liberté d'impulsions plus petites que $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$ peuvent être calculées à partir

[25] τ représente à la fois le temps imaginaire et la combinaison des champs définie par l'équation (I.1.5). Mais comme il n'y a pas d'ambiguïté au niveau du sens, cette notation ne porte pas à conséquence.

[26] Dans le cas où $\lambda_2 = 0$ (c'est-à-dire $g_0 = g_2$), ce groupe de symétrie est élargi non pas à O(6) comme dans le modèle classique mais à U(3) (à cause de la dérivée temporelle) [106].

de l'hamiltonien classique (I.2.17). Cependant, le fait que la coupure ultra-violette de cet hamiltonien n'a pas de valeur précise introduit une incertitude sur les quantités que nous avons calculées (voir partie III.2.5). C'est la raison pour laquelle nous allons appliquer la méthode du NPRG directement sur l'action (III.4.2). Ce traitement sera très similaire à celui présenté dans la partie II.3.2.

Pour cela nous ajoutons un terme $\Delta S_k[\boldsymbol{\varphi}]$ à l'action. Ce terme fera intervenir, comme précédemment, un régulateur agissant uniquement sur les impulsions

$$\Delta S_k[\boldsymbol{\varphi}] = \frac{1}{4M} \sum_{\mathbf{p},\omega_n} R_k(\mathbf{p}) \sum_{i=1,2} \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{p},\omega_n) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i(-\mathbf{p},-\omega_n). \tag{III.4.4}$$

La trace de l'équation de renormalisation (II.1.13), en plus des impulsions et des indices du groupe $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$ ($i = 1,2$ et $j = 1,2,3$), porte aussi sur les fréquences de Matsubara discrètes bosoniques $\omega_n = n2\pi T$

$$\mathrm{Tr} = \sum_{\mathbf{p},\omega_n} \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2,3} . \tag{III.4.5}$$

Les sources extérieures sont constituées de deux vecteurs à N composantes $\mathbf{J}_1$ et $\mathbf{J}_2$ qui se couplent linéairement aux champs. Comme mentionné dans la partie II.3.2, une telle méthode a déjà permis d'étudier les gaz de bosons de spin 0 [178, 179, 180, 181, 182, 183, 184].

Nous appliquerons cette approche à partir de l'action quantique pour k variant de Λ_Q à $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$ (partie que nous qualifierons de « quantique »). Puis, à partir de $k \sim \lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, nous utiliserons la méthode que nous avons décrite précédemment à partir de l'hamiltonien classique (nous qualifierons cette partie de « classique »). Dans la première partie, toutes les fluctuations, classiques et quantiques, sont prises en compte. Dans la deuxième uniquement les fluctuations classiques interviennent.

La première partie permet d'affiner la condition initiale de la second partie (c'est-à-dire les valeurs des paramètres de l'hamiltonien classique) par rapport à celle que nous avons utilisée dans les parties précédentes. En effet, cette condition initiale sera légèrement différente car l'échelle $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$ ne représente pas une frontière rigide entre les régimes quantique et classique, mais plutôt une échelle de crossover. Ainsi quand $k = \lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, les constantes de couplages $g_{F,k}$ ne seront pas strictement égales à $4\pi a_F/M$, cette valeur n'étant atteinte que pour $k = 0$ et $T = \mu = 0$. De plus, les effets thermiques ont une petite influence sur le flot de renormalisation quand $k \gtrsim \lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$.

Détaillons l'approximation utilisée pour la partie quantique. Nous utiliserons le régulateur thêta (II.1.9) pour simplifier les calculs numériques (car nous pouvons alors calculer les intégrales sur les impulsions de façon analytique). De plus, nous développerons en champ à l'ordre 4 en $\boldsymbol{\phi}$ autour de zéro. Un tel développement autour de zéro est *a priori* justifié car lors de la première partie du flot (qui est contrôlé par le point fixe quantique critique à $T = \mu = 0$), seul $U_k(\boldsymbol{\phi})$ pour $\boldsymbol{\phi}$ autour de 0 renormalise (c'est-à-dire évolue en fonction k). Nous utiliserons enfin l'approximation LPA [27].

[27] L'approximation LPA', avec Z défini en $\rho = \tau = 0$, revient à l'approximation LPA car alors Z ne renormalise pas.

L'action effective dépendant de l'échelle que l'on considère s'écrit donc [28]

$$\Gamma_k[\boldsymbol{\phi}] = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} \boldsymbol{\phi}_i \cdot \left(i\epsilon_{ij}\partial_\tau - \delta_{ij} \frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2M} \right) \boldsymbol{\phi}_j + u_{0,k} + u_{1,k}\rho + \frac{u_{2,k}}{2}\rho^2 + v_{0,k}\tau \right] \tag{III.4.6}$$

où initialement

$$\begin{cases} u_{0,\Lambda_Q} = 0 \\ u_{1,\Lambda_Q} = -\mu \\ u_{2,\Lambda_Q} = g_2 \\ v_{0,\Lambda_Q} = \dfrac{g_0 - g_2}{6}. \end{cases} \tag{III.4.7}$$

Les équations de renormalisation pour les différentes quantités sont présentées dans l'annexe C. Nous ne connaissons pas *a priori* g_0 et g_2 (qui sont liés à Λ_Q par les expressions des longueurs de diffusion $a_F(g_F, \Lambda_Q)$). Pour pouvoir les déterminer, nous allons faire en sorte que notre méthode reproduise les valeurs expérimentales des longueurs de diffusion. Nous définissons alors des constantes d'interactions effectives dans chacun des deux canaux de spin total $F = 0$ et 2 par $g_{0,k} = 6v_{0,k} + u_{2,k}$ et $g_{2,k} = u_{2,k}$. Nous avons vu (dans la partie II.3.2) que dans le vide (pour $T = \mu = 0$) les constantes d'interaction renormalisent, et atteignent $4\pi a_F/M$ lorsque $k = 0$. Les équations de renormalisation dans le vide (voir annexe C) sont les mêmes pour les deux constantes d'interaction

$$\partial_t g_{F,k} = \frac{M}{3\pi^2} k g_{F,k}^2. \tag{III.4.8}$$

Ces équations ont pour solutions

$$\frac{1}{g_{F,k}} = \frac{1}{g_F} + \frac{M}{3\pi^2}(\Lambda_Q - k). \tag{III.4.9}$$

Ce résultat peut être retrouvé directement à partir de l'action modifiée $S + \Delta S_k$ sans résoudre les équations de groupe de renormalisation. Pour ce faire, il suffit de sommer les diagrammes en échelle qui sont les seuls à contribuer dans le vide [29]. En faisant cela, nous pouvons remarquer que les deux canaux d'interaction $F = 0$ et 2 ne se couplent pas, ce qui est bien le cas dans les équations de renormalisation (III.4.8).

En identifiant $g_{F,0}$ à $4\pi a_F/M$, on trouve

$$\begin{cases} u_{2,\Lambda_Q} = \dfrac{4\pi a_2}{M} \dfrac{1}{1 - \frac{4}{3\pi} a_2 \Lambda_Q} \\ v_{0,\Lambda_Q} = \dfrac{2\pi}{3M} \left(\dfrac{a_0}{1 - \frac{4}{3\pi} a_0 \Lambda_Q} - \dfrac{a_2}{1 - \frac{4}{3\pi} a_2 \Lambda_Q} \right). \end{cases} \tag{III.4.10}$$

[28] ρ et τ sont définis ici à partir de l'équation (I.1.5) dans laquelle on a remplacé $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ par $\boldsymbol{\phi}_1$ et $\boldsymbol{\phi}_2$.

[29] On obtient la même expression pour $g_{F,k}$ à condition que $R_{\Lambda_Q}(\mathbf{p}) = \infty$. Mais si cette condition n'est pas satisfaite, la différence que cela introduit ne joue aucun rôle pour la physique à basse énergie.

Nous avons vu que la coupure ultra-violette d'une théorie doit être au moins de l'ordre de sa plus grande échelle d'impulsion. Mais nous remarquons ici (avec les équations (III.4.10)) que Λ_Q ne peut pas être choisi arbitrairement grand, sinon les constantes d'interaction sont négatives et le système de bosons décrit par l'action (III.4.2) est instable (le système n'a pas d'état fondamental). En pratique nous prenons $\Lambda_Q = a_0^{-1}$.

Comme à la transition, $2MTa_F^2 \ll 1$ étant donné le choix de n (voir la note de bas de page 12), l'échelle $k \sim \lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$ pour laquelle on change de méthode, est très petite par rapport à a_F^{-1}. Les constantes d'interaction g_{F_k} ont donc quasiment convergé, vers leurs valeurs finales dans le vide $4\pi a_F/M$, au moment où l'on passe à la deuxième partie du traitement.

III.4.2 Résultats et estimations des incertitudes

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus avec la procédure en deux parties. Nous résolvons les équations de flot par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Par un changement de variable, nous pouvons montrer que les paramètres de notre modélisation se réduisent à $2MT$, $2M\mu$, a_0 et a_2. Nous fixons $2MT$ par l'expression de la température de condensation du gaz sans interaction (I.2.18), c'est-à-dire

$$2MT = 4\pi \left(\frac{n}{3\zeta(3/2)} \right)^{2/3} \tag{III.4.11}$$

où $n = 11 \times 10^{12}$ cm^{-3} comme auparavant (I.2.25). $2M\mu$ est ensuite ajusté pour que le système soit à la transition. La valeur de M n'est donc pas nécessaire. Nous trouvons la valeur de $2M\mu$ prédite par la théorie Hartree-Fock, c'est-à-dire l'équation (I.2.19), à 5% près environ. Cela est cohérent avec le fait que la température critique est très bien calculée par la théorie Hartree-Fock à basse densité (comme pour les gaz de bosons de spin 0, voir partie II.3.2).

Les résultats obtenus sont qualitativement identiques à ceux issus de la méthode entièrement classique. Seuls les résultats quantitatifs sont légèrement modifiés, ils sont présentés sur la table III.3. ν est défini ici comme la pente de $\ln \xi$ par rapport à $\ln[(\mu_{\mathrm{c}} - \mu)/\mu_{\mathrm{c}}]$ (au lieu de $\ln[(\mu'_{\mathrm{c}} - \mu')/\mu'_{\mathrm{c}}]$ auparavant) pour[30] $\ln \xi \sim \ln L = \ln(40\lambda_{\mathrm{dB}})$.

Nous n'avons pas testé l'influence du choix du régulateur sur ces résultats mais il est raisonnable de penser que l'erreur induite est, comme dans la partie III.2.5, de l'ordre de 2%. Cela constitue la principale source d'incertitude de la partie classique, mais aussi de la partie quantique. En effet, nous allons voir que les autres erreurs dues aux approximations dans la partie quantique sont négligeables. Nous avons tout d'abord fait les mêmes calculs avec un développement en champ d'ordre plus élevé. Pus précisément lorsque nous développons à l'ordre 10 en $\boldsymbol{\phi}$ (plutôt qu'à l'ordre 4), $\xi/\lambda_{\mathrm{dB}}$ et $\Delta n_0 \lambda_{\mathrm{dB}}^3$ sont modifiés de 0.02% et ν de 0.005% environ. Les termes d'ordre supérieur à 4 en puissance de $\boldsymbol{\phi}$ dans l'action classique (I.2.17) sont donc bien négligeables. Cela se comprend, car comme expliqué dans la partie I.2.3, ces termes ont des puissances de na_F^3 en facteur.

[30] Sur le domaine où $\ln \xi$ évolue quasi-linéairement en $\ln[(\mu_{\mathrm{c}} - \mu)/\mu_{\mathrm{c}}]$, la pente ne varie que très légèrement (comme avec la méthode purement classique) : de 5% pour ^{87}Rb, 5% pour ^{41}K et 2% pour ^{7}Li.

Table III.3 : Longueur de corrélation à la transition ξ, saut de la densité du condensat Δn_0 et exposant pseudo-critique ν pour ^{87}Rb, ^{41}K et ^{7}Li.

	^{87}Rb	^{41}K	^{7}Li
a_0/a_B	101.8 ± 0.2	68.5 ± 0.7	23.9
a_2/a_B	100.4 ± 0.1	63.5 ± 0.6	6.8
$\xi/\lambda_{\mathrm{dB}}$	2.4×10^{9}	3.6×10^{7}	8.7×10^{3}
$\Delta n_0 \lambda_{\mathrm{dB}}^3$	2.1×10^{-9}	1.6×10^{-7}	1.0×10^{-3}
ν	0.78	0.77	0.60

Nous avons également fait varier l'échelle où l'on passe d'un traitement quantique à un traitement classique. Plus précisément, nous l'avons fait varier entre $0.25\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$ et $4\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$. $\xi/\lambda_{\mathrm{dB}}$ et $\Delta n_0 \lambda_{\mathrm{dB}}^3$ sont alors modifiés de 0.5% et ν de 0.3% environ (au lieu de 3% dans la partie III.2.5). La précision de nos résultats est donc nettement améliorée.

Cette échelle k ne peut pas être trop petite par rapport à $\lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, car le développement en champ autour de $\boldsymbol{\phi} = 0$ de la partie quantique n'est plus justifié. En effet il ne capture alors pas l'évolution de $\rho_{0,k}$ qui commence à être importante, et ne permet pas de décrire le potentiel à deux minima qui commence à émerger. De même, cette échelle ne peut pas être trop grande non plus, car le passage au traitement classique est justifié seulement quand les fréquences non-nulles n'influencent plus[31] le flot de renormalisation.

Modifier la densité du gaz de bosons revient à faire varier la température de la transition (*via* l'expression de $2MT$ (III.4.11)). La faire varier nous donne des résultats très similaires à ceux présentés dans la partie III.2.5. Par exemple, l'exposant ν pour ^{7}Li, vaut 0.61 et 0.59 quand la densité est respectivement multipliée par 5 et 0.2 (à nombre de bosons fixe, voir la note de bas de page 15).

En conclusion, nous avons réussi, grâce à cette approche à partir de l'action quantique, à réduire nettement l'incertitude sur nos résultats. Mais aussi et surtout, en proposant un traitement plus précis des fluctuations quantiques, cette méthode permet de justifier le traitement entièrement classique que nous avons détaillé dans les parties précédentes, et de confirmer les résultats.

[31] Quand $k = \lambda_{\mathrm{dB}}^{-1}$, la contribution de ω_1 dans le membre de droite des équations de renormalisation (voir annexe C) est de l'ordre de 0.02% de celle de ω_0.

Conclusion

Le travail présenté dans ce manuscrit concerne l'étude de la transition de phase (contrôlée par la température) dans le modèle tridimensionnel $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ (avec λ_2 positif). Cette transition permet de décrire l'émergence du magnétisme frustré classique dans de nombreux matériaux, en particulier les antiferroaimants sur réseau triangulaire.

La nature exacte de cette transition, à savoir du premier ou du second ordre, est l'objet d'une controverse depuis une quarantaine d'années. Les études expérimentales démontrent l'existence de comportements en loi de puissance, mais les exposants critiques mesurés ne sont pas les mêmes d'un matériau à l'autre. Du côté des simulations numériques, la transition est du premier ordre pour de nombreuses gammes de paramètres testées. Une seule étude [76] affirme trouver une transition du second ordre pour certaines valeurs des paramètres, mais nous avons, au cours de cette thèse, mis en doute cette affirmation. Enfin les travaux théoriques sont en désaccord. Le groupe de renormalisation perturbatif avec développement en $\epsilon = 4 - d$, ainsi qu'une version non-perturbative, prédisent une transition du premier ordre pour $N = 2$ et 3. En revanche, le groupe de renormalisation perturbatif à dimension fixée à 3 et la théorie du bootstrap conforme trouvent une transition du second ordre.

Cette thèse propose une nouvelle voie expérimentale pour explorer le modèle $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$: les gaz ultra-froids de bosons de spin 1. Ces systèmes sont généralement utilisés pour étudier l'influence et la compétition pouvant exister entre le magnétisme et la condensation de Bose-Einstein. Nous avons montré que le comportement d'un tel gaz, avec interaction ferromagnétique et près de la transition de phase à température finie, peut être décrit par le modèle $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$ classique.

Nous avons étudié le modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ par le groupe de renormalisation non-perturbatif. Ce dernier prédit une transition de phase du second ordre pour N plus grand qu'une certaine valeur critique $N_\mathrm{c} \simeq 5.3$. En revanche, si $N < N_\mathrm{c}$, la transition est du premier ordre. De plus, avec $N = 2$ ou 3, la transition est génériquement faiblement du premier ordre, c'est-à-dire que la longueur de corrélation à la transition ξ est grande par rapport à la coupure ultra-violette du modèle, de l'ordre de λ_dB^{-1} pour les gaz de bosons de spin 1. Pour ces derniers, ξ est même bien plus grand que la taille du système. Néanmoins, le comportement pseudo-critique que nous avons observé nous a permis de définir un exposant pseudo-critique et d'en donner la valeur pour différents gaz de bosons de spin 1 : ^{87}Rb, ^{41}K et ^{7}Li. La précision sur ces valeurs est nettement améliorée en appliquant le groupe de renormalisation non-perturbatif directement sur l'action quantique, procédure qui nous permet aussi de justifier l'approche à partir du modèle classique.

Une confirmation expérimentale des valeurs de ν prédites par le groupe de renor-

malisation non-perturbatif, en particulier dans le cas du ^{7}Li (qui n'est pas influencé par le point fixe O(6)), serait un argument fort en faveur de notre théorie et donc du caractère premier ordre de la transition. Pour prouver de manière indéniable la non-universalité de l'exposant pseudo-critique ν, il faudrait pouvoir faire varier les longueurs de diffusion du ^{7}Li (par exemple par une technique de type résonance de Feshbach) ou trouver un autre gaz avec des longueurs de diffusion différentes. Cela permettrait en outre de distinguer nos prédictions de celles du groupe de renormalisation perturbatif en dimension fixe et de la théorie du bootstrap conforme qui obtiennent une valeur très proche de ν pour le ^{7}Li. Une preuve expérimentale directe du caractère premier ordre de la transition demanderait d'avoir un gaz pour lequel la longueur de corrélation à la transition est plus petite que la taille du système.

L'intérêt des atomes froids par rapport aux systèmes traditionnels de matière condensée (par exemple les solides présentant un ordre magnétique) provient de la simplicité et de la précision de la modélisation. Par exemple, le modèle $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$ décrit les antiferroaimants sur réseau triangulaire seulement de façon effective. Il faudrait en effet ajouter de nombreux autres termes à l'hamiltonien pour que celui-ci décrive le système réel. Mais aussi et surtout, il est très difficile de connaître les valeurs des paramètres. En revanche, les atomes froids sont extrêmement bien décrits avec des hamiltoniens à petit nombre de paramètres et leurs valeurs peuvent être mesurées avec une grande précision. Les résultats de cette thèse sont basés sur le fait qu'un gaz dilué de bosons de spin 1 est complètement paramétrisé, à basse énergie, par T, μ, a_0, a_2 et M. Cela nous a permis de faire des prédictions pour des quantités non-universelles, comme la longueur de corrélation à la transition ou l'exposant pseudo-critique, qui dépendent de ces paramètres.

Notre travail ouvre plusieurs directions de recherche possibles. D'une part, se pose la question d'une phase ferromagnétique sans condensation dans les gaz de bosons de spin 1 avec interaction ferromagnétique. En effet, la possibilité d'une transition entre la phase normale et une phase ferromagnétique à une température plus élevée que celle de la condensation reste un problème ouvert. Le groupe de renormalisation non-perturbatif pourrait apporter des éléments de réponse. Pour cela il faudrait calculer la susceptibilité de spin, ce qui peut être fait en introduisant un champ vectoriel extérieur se couplant à l'opérateur de spin $\sum_{m,m'} \hat{\psi}^\dagger_m \hat{\mathbf{F}}_{m,m'} \hat{\psi}_{m'}$. Les ordres supraconducteur ou magnétique des systèmes fermioniques sont généralement étudiés de cette façon dans les approches basées sur le groupe de renormalisation [164]. Une méthode similaire a été utilisée récemment pour analyser le mode d'amplitude de Higgs dans les gaz d'atomes froids [214]).

D'autre part, la transition dans le modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ avec $\lambda_2 < 0$ pourrait être étudiée par le groupe de renormalisation non-perturbatif. Dans les gaz de bosons de spin 1 avec interaction antiferromagnétique (comme les gaz de ^{23}Na [215]), la transition entre la phase normale et la phase polaire est décrite par ce modèle avec $N = 3$. Celui-ci permet aussi d'étudier la transition dans certains matériaux présentant une onde de densité de spin sinusoïdale [65], et la transition entre la phase normale et la phase planaire de l'hélium 3 [77]. Le schéma de brisure de la symétrie est dans ce cas : $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2) \to \mathrm{O}(N-1) \times \mathbb{Z}_{2,\mathrm{diag.}}$. Le groupe de renormalisation avec développement en ϵ prédit que la transition peut être du second ordre seulement quand N est inférieur à 1.968(1) [91]. Mais le groupe de renormalisation en dimension fixée à 3

[216, 217] et la théorie de bootstrap conforme [103] trouvent une transition du second ordre pour $N = 3$. Il semble donc y avoir également un désaccord. Comme pour la transition qui nous a intéressés dans ce manuscrit, il serait intéressant de connaître les prédictions du groupe de renormalisation non-perturbatif et d'étudier comment les gaz de bosons de spin 1 pourraient éclaircir la nature de la transition.

Annexe A
Crossover BCS-BEC

Critical region of the superfluid transition in the BCS-BEC crossover

T. Debelhoir and N. Dupuis
Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée, CNRS UMR 7600, Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
(Dated: January 27, 2016)

We determine the size of the critical region of the superfluid transition in the BCS-BEC crossover of a three-dimensional fermion gas, using a renormalization-group approach to a bosonic theory of pairing fluctuations. For the unitary Fermi gas, we find a sizable critical region $[T_G^-, T_G^+]$, of order T_c, around the transition temperature T_c with a pronounced asymmetry: $|T_G^+ - T_c|/|T_G^- - T_c| \sim 8$. The critical region is strongly suppressed on the BCS side of the crossover but remains important on the BEC side.

PACS numbers: 74.20.-z,03.75.Ss,03.75.Hh,67.85.-d

I. INTRODUCTION

Superfluidity has been well understood for a long time in two different limiting cases. The first one is the Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) superfluidity of fermions [1], the second one is the Bose-Einstein condensation (BEC) of bosons [2]. In the BCS limit, a weak attractive interaction in a highly degenerate system of fermions induces a pairing instability. Pairs form and condensate at the same temperature T_c that is orders of magnitude smaller than the Fermi energy E_F. In the BEC limit, superfluidity arises from condensation of bosonic atoms into a single quantum state. The internal structure of the bosonic atoms (made up of an even number of fermionic constituents) is irrelevant at temperatures of the order of the BEC temperature.

While most of the superfluids discovered in the 20th century are firmly in one or the other limit, recently discovered materials such as high-T_c superconductors require one to understand superfluidity beyond the standard paradigms. From an experimental point of view, this has become possible in cold atomic gases where Feshbach resonances allow us to tune the attractive interaction between atoms and span the entire BCS-BEC crossover [3]. Deep on the BCS side of the resonance, where the s-wave scattering length a between fermionic atoms in two different hyperfine states is negative and satisfies $1/k_F|a| \gg 1$ (with $n = k_F^3/3\pi^2$ the density of particles), superfluidity is well described by BCS theory. Deep on the BEC side, where $a > 0$ and $1/k_F a \gg 1$, superfluidity arises from BEC of tightly bound fermion pairs of size a. The fermion gas close to unitarity ($|a| \to \infty$) is a paradigmatic example of strongly correlated systems that exhibits several remarkable properties (for reviews, see Refs. [3–7]). In particular, it shows the highest ratio $T_c/E_F \simeq 0.15$ ever observed in a fermionic superfluid (with $E_F = k_F^2/2m = (3\pi^2 n)^{2/3}/2m$) [8]. (We set $\hbar = k_B = 1$ throughout the paper.)

An unsolved issue relates to the behavior of the unitary Fermi gas in the normal (nonsuperfluid) phase. In the BCS limit, above the transition temperature the Fermi gas is a Fermi liquid. On the BEC side, the normal phase is a Bose gas of fermion-fermion dimers which dissociate only at the pairing temperature T^*; when $T_c \leq T \ll T^*$ the fermionic spectral function exhibits a pseudogap at low energies and Fermi-liquid behavior is suppressed. The importance of pairing fluctuations and "preformed" (metastable) pairs at unitarity as well as the fate of pseudogap [9, 10] and Fermi-liquid behavior is still unsettled [11, 12]. On the experimental side, the situation is unclear. Radiofrequency spectroscopy has been interpreted as evidence for a pseudogap state [13] and the small shear viscosity suggests the absence of quasiparticles above T_c [14]. On the other hand, Fermi-liquid behavior was observed in thermodynamics [15, 16] and spin transport properties [17] in contradiction with the existence of a pseudogap.

In this paper, we study pairing fluctuations in the BCS-BEC crossover and determine the size of the critical region about the superfluid transition where thermodynamic quantities show critical behavior with critical exponents corresponding to the Wilson-Fisher fixed point of the three-dimensional classical O(2) model. In weak coupling superconductors, due to their large $T = 0$ coherence length, the critical region is too small to be observed experimentally; its size scales with $(T_c/E_F)^4$. For high-T_c superconductors, it can reach 10^{-2}. It has previously been pointed out that the size of the critical region in the unitary Fermi gas should be of order unity according to the Ginzburg criterion [18]. However, a precise determination of the critical region requires a good description of critical pairing fluctuations and is therefore beyond the reach of standard theoretical approaches such as Nozières–Schmitt-Rink (NSR) theory or T-matrix approximation [4, 19, 20]. The superfluid transition temperature of the unitary Fermi gas has been determined accurately by a diagrammatic determinant Monte Carlo method [21] but the size of the critical region has not been estimated. We have used the nonperturbative renormalization group (NPRG) to obtain an estimate of the critical region of the unitary Fermi gas [22]. Our approach differs from previous NPRG studies (for reviews, see Refs. [23, 24]) insofar as we integrate out the fermions using a complex Hubbard-Stratonovich field and deal with a bosonic theory of pairing fluctuations (for a perturbative RG approach along the same

lines, see [25]).

We compute the Ginzburg temperatures T_G^+ and T_G^- of the unitary Fermi gas and find a sizable critical region $[T_G^-, T_G^+]$ around the transition temperature T_c, of the order of T_c, with a pronounced asymmetry: $|T_G^+ - T_c|/|T_G^- - T_c| \sim 8$. The critical region in the BCS-BEC crossover is estimated from a Ginzburg criterion with the additional constraint that the NPRG results should be reproduced in the unitary limit. We find that the critical region is strongly suppressed on the BCS side of the crossover but remains important on the BEC side.

II. NPRG APPROACH

We consider a system of neutral fermions with two possible hyperfine states and dispersion $\epsilon_{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^2/2m$, and Hamiltonian

$$\hat{H} = \int d^3r \Big\{ \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \hat{\psi}_\sigma^\dagger \left(-\frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2m} - \mu \right) \hat{\psi}_\sigma - g \hat{\psi}_\uparrow^\dagger \hat{\psi}_\downarrow^\dagger \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow \Big\} \tag{1}$$

where the chemical potential μ controls the density of particles. We take $g > 0$ so that the interaction between fermions is attractive. The s-wave scattering length is then defined by

$$\frac{m}{4\pi a} = -\frac{1}{g} + \int_{|\mathbf{q}| \leq \Lambda_F} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{q}}}, \tag{2}$$

where the ultraviolet momentum Λ_F on the fermion dispersion is introduced to regularize the zero-range interaction potential $g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. We set $\hbar = k_B = 1$ throughout the paper.

The partition function $Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \hat{H}}$ can be written as a functional integral over anticommuting Grassmann fields with (Euclidean) action

$$S = \int_0^\beta d\tau \Big\{ \int d^3r \sum_\sigma \psi_\sigma^* \partial_\tau \psi_\sigma + H[\psi^*, \psi] \Big\}. \tag{3}$$

Decoupling the interaction term in the particle-particle channel using a complex Hubbard-Stratonovich field φ and integrating out the fermion field ψ, we obtain the action

$$S[\varphi^*, \varphi] = \frac{1}{g} \int_0^\beta d\tau \int d^3r |\varphi(x)|^2 - \mathrm{Tr} \ln(\mathcal{G}_0^{-1} + \hat{\varphi}), \tag{4}$$

where $\beta = 1/T$ and $x = (\mathbf{r}, \tau)$.

$$\mathcal{G}_0^{-1}(\mathbf{q}, i\omega_n) = \begin{pmatrix} i\omega_n - \epsilon_{\mathbf{q}} + \mu & 0 \\ 0 & i\omega_n + \epsilon_{\mathbf{q}} - \mu \end{pmatrix} \tag{5}$$

and

$$\hat{\varphi}(x, x') = \delta(x - x') \begin{pmatrix} 0 & \varphi(x) \\ \varphi(x)^* & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

are 2×2 matrices in the Nambu space defined by the two-component spinor $\Psi = (\psi_\uparrow, \psi_\downarrow)^T$. Here $\mathcal{G}_0(\mathbf{q}, i\omega_n)$ denotes the Fourier transform of $\mathcal{G}_0(x, x')$ with $\omega_n = (2n+1)\pi T$ (n integer) a fermionic Matsubara frequency.

The action $S[\varphi^*, \varphi]$ contains all information about pairing fluctuations and criticality. A saddle-point computation of the partition function $Z = \int \mathcal{D}[\varphi^*, \varphi] e^{-S[\varphi^*, \varphi]}$ reproduces the BCS mean-field theory. Including Gaussian fluctuations about the saddle-point solution yields the NSR approach [19]. To take into account fluctuations beyond the perturbative approach, we use the NPRG [26–28]. We add to the action the infrared regulator term

$$S_k^{\mathrm{reg}}[\varphi^*, \varphi] = \sum_{\mathbf{p}, \omega_m} \varphi^*(\mathbf{p}, i\omega_m) R_k(\mathbf{p}, i\omega_m) \varphi(\mathbf{p}, i\omega_m) \tag{7}$$

($\omega_m = 2m\pi T$ is a bosonic Matsubara frequency) indexed by a momentum scale k such that fluctuations are smoothly taken into account as k is lowered from a microscopic scale Λ down to zero.

The central quantity in the NPRG approach is the scale-dependent effective action (or Gibbs free energy)

$$\Gamma_k[\Delta^*, \Delta] = -\ln Z_k[J^*, J] + \int_0^\beta d\tau \int d^3r (J^* \Delta + \Delta^* J) - S_k^{\mathrm{reg}}[\Delta^*, \Delta] \tag{8}$$

defined as a (slightly modified) Legendre transform of the (scale-dependent) free energy $-\ln Z_k[J^*, J]$ that includes the subtraction of $S_k^{\mathrm{reg}}[\Delta^*, \Delta]$. Here J is a complex external source that couples linearly to the pairing field φ and $\Delta(x) = \langle \varphi(x) \rangle$ is the order parameter. The cutoff function $R_\Lambda(p)$ at the microscopic scale Λ is chosen very large so that it suppresses all fluctuations and the mean-field theory becomes exact: $\Gamma_\Lambda[\Delta^*, \Delta] = S[\Delta^*, \Delta]$. For a generic value of k, $R_k(p)$ suppresses fluctuations with $|p|, |\omega_m|/c \lesssim k$ but leaves unaffected those with $|p|, |\omega_m|/c \gtrsim k$ where c is the velocity of low-energy excitations. The effective action of the original model (4) is given by $\Gamma_{k=0}$ provided that $R_{k=0}$ vanishes. The variation of the effective action with k is governed by Wetterich's equation [29],

$$\partial_k \Gamma_k[\Delta^*, \Delta] = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left\{ \frac{\partial R_k}{\partial k} \big(\Gamma_k^{(2)}[\Delta^*, \Delta] + R_k \big)^{-1} \right\}, \tag{9}$$

where $\Gamma_k^{(2)}$ denotes the second-order functional derivative of Γ_k. Thus the NPRG approach aims at finding $\Gamma_{k=0}$ using Eq. (9) starting from the initial condition Γ_Λ.

At momentum scale Λ, all physical quantities of interest can be obtained from $\Gamma_\Lambda[\Delta^*, \Delta] = S[\Delta^*, \Delta]$. In particular, the state of the system (normal or superfluid) is determined by the constant (i.e., uniform and time-independent) minimum Δ_Λ of Γ_Λ. At unitarity, Δ_Λ becomes nonzero below the mean-field transition temperature $T_c^{\mathrm{MF}} \simeq 0.5 E_F$. In the following, we want to study the vicinity of the (true) transition temperature

$T_c \simeq 0.15E_F$ which is much smaller than $T_c^{\rm MF}$ [21]. This implies that Δ_Λ is a large energy scale of the order of $\Delta_\Lambda(T=0) \simeq 0.69E_F$ [30]. Restricting ourselves to fluctuations satisfying $|\mathbf{p}|, |\omega|/c_\Lambda \lesssim \Delta_\Lambda$ (with c_Λ the Bogoliubov-Anderson mode velocity at mean-field level), we can expand the effective action Γ_Λ to second order in derivatives. Assuming a similar derivative expansion for all values of k smaller than Λ, this leads us to the ansatz

$$\Gamma_k[\Delta^*,\Delta] = \int_0^\beta d\tau \int d^3r \big\{\Delta^*(Z_{C,k}\partial_\tau - V_{A,k}\partial_\tau^2 - Z_{A,k}\boldsymbol{\nabla}^2)\Delta + U_k(\rho)\big\} \quad (10)$$

for the scale-dependent effective action, where the effective potential U_k is a function of the U(1) invariant $\rho = |\Delta|^2$. We further expand U_k to quartic order in the field about the equilibrium state $\rho = \rho_{0,k}$ defined by the minimum of U_k,

$$U_k(\rho) = U_k(\rho_{0,k}) + \delta_k(\rho-\rho_{0,k}) + \frac{\lambda_k}{2}(\rho-\rho_{0,k})^2, \quad (11)$$

where $\delta_k = U_k'(\rho_{0,k})$ vanishes if $\rho_{0,k} > 0$.

Since the derivative expansion (10) is appropriate only for low-energy fluctuations satisfying $|\mathbf{p}|, |\omega_m|/c_\Lambda \lesssim \Delta_\Lambda/c_\Lambda$, the initial momentum cutoff Λ must be of the order of Δ_Λ/c_Λ. We thus assume that high-energy fluctuations do not significantly alter the transition temperature and the size of the critical region. The precise value of the cutoff Λ is fixed so as to reproduce the known transition temperature $T_c \simeq 0.15E_F$ of the unitary Fermi gas [21], and internal consistency of our approach requires $\Lambda \sim \Delta_\Lambda/c_\Lambda$.

The initial values δ_Λ and λ_Λ are obtained from

$$\delta_\Lambda = \frac{\partial U_\Lambda(\rho)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_{0,\Lambda}}, \quad \lambda_\Lambda = \frac{\partial^2 U_\Lambda(\rho)}{\partial\rho^2}\bigg|_{\rho=\rho_{0,\Lambda}}, \quad (12)$$

whereas

$$Z_{C,\Lambda} = \lim_{p\to0}\frac{\partial}{\partial\omega_m}\Gamma^{(2)}_{\Lambda,12}(p),$$
$$V_{A,\Lambda} = \lim_{p\to0}\frac{\partial}{\partial\omega_m^2}\Gamma^{(2)}_{\Lambda,22}(p), \quad (13)$$
$$Z_{A,\Lambda} = \lim_{p\to0}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}^2}\Gamma^{(2)}_{\Lambda,22}(p).$$

U_Λ is the mean-field effective potential and

$$\Gamma^{(2)}_{\Lambda,ij}(p) = \frac{\delta^2\Gamma_\Lambda[\Delta^*,\Delta]}{\delta\Delta_i(-p)\delta\Delta_j(p)}\bigg|_{\Delta(x)=\Delta_\Lambda} = \frac{\delta_{i,j}}{g} + \frac{(-1)^{i+j}}{2}\int_q \mathrm{tr}[\mathcal{G}_\Lambda(q)\tau^i\mathcal{G}_\Lambda(q+p)\tau^j] \quad (14)$$

the mean-field two-point vertex in a uniform and time-independent field Δ (see appendix). We use the notation $p = (\mathbf{p}, i\omega_m)$ and $q = (\mathbf{q}, i\omega_n)$ with ω_m (ω_n) a bosonic (fermionic) Matsubara frequency. $\mathcal{G}_\Lambda^{-1}(q) = \mathcal{G}_0^{-1}(q) + \Delta_\Lambda\tau^1$ is the mean-field fermion propagator and (τ^1,τ^2,τ^3) stands for the Pauli matrices. Δ_1 and Δ_2 refer to the real and imaginary parts of the pairing field $\Delta = (\Delta_1 + i\Delta_2)/\sqrt{2}$. With no loss of generality, we have assumed $\Delta_\Lambda = \rho_{0,\Lambda}^{1/2}$ to be real.

The bosonic effective action (10) has been studied in the context of superfluidity in Bose gases and we refer to previous publications for details about the solution of the flow equation (9) [31–34]. We have used an exponential cutoff function,

$$R_k(p) = Z_{A,k}Yr(Y), \quad r(Y) = (e^Y-1)^{-1}, \quad Y = \frac{\mathbf{p}^2}{k^2} + \frac{\omega_m^2}{k^2c_\Lambda^2}, \quad (15)$$

acting both on momenta and frequencies [33].

III. CRITICAL REGION OF THE UNITARY FERMI GAS

To study the unitary limit, we compute both the effective potential U_Λ and the two-point vertex $\Gamma^{(2)}_\Lambda$ in the limit $\Lambda_F \to \infty$ and $g \to 0$ in such a way that $1/a = 0$ (see appendix). We then fix the chemical potential μ to an arbitrary value and determine the superfluid transition temperature T_c from the vanishing of $\rho_{0,k}$ for $k \to 0$. Finally we fine tune the value of the ultraviolet cutoff Λ so as to obtain $T_c = 0.15E_F$ where $n = -dU_{k=0}(\rho_{0,k=0})/d\mu$ is the fermion density and $E_F = k_F^2/2m = (3\pi^2 n)^{2/3}/2m$. We find $\Lambda \simeq 0.97k_F$ to be of the order of $\Delta_\Lambda(T=0)/c_\Lambda = 0.77k_F$ [30]. When we compute physical quantities (e.g., the correlation length) away from the transition temperature, we adjust the value of the chemical potential so as to maintain the fermion density n constant.

Figure 1 shows the superfluid correlation length

$$\xi = \left(\frac{Z_{A,k=0}}{\delta_{k=0}}\right)^{1/2} \quad (16)$$

in the normal phase. Near T_c, $\xi \sim (T-T_c)^{-\nu}$ diverges with the critical exponent $\nu \simeq 0.62$, which is the known result for the three-dimensional classical O(2) model with the approximations used here to solve the RG equation (9). Defining the Ginzburg temperature T_G^+ by the criterion

$$\frac{\ln(\xi k_F) - \ln(\xi_c k_F)}{\ln(\xi_c k_F)} = 0.02, \quad (17)$$

where $\xi_c \sim t^{-\nu}$ corresponds to the asymptotic behavior of the correlation length for $t \to 0$, we find that the critical region $[T_c, T_G^+]$ extends up to the Ginzburg temperature $T_G^+ \simeq 1.75T_c \simeq 0.26E_F$. The Ginzburg temperature is of course sensitive to the precise criterion that we use. For example, one finds $T_G^+ \simeq 1.66T_c$ (and $T_G^- \simeq 0.94T_c$)

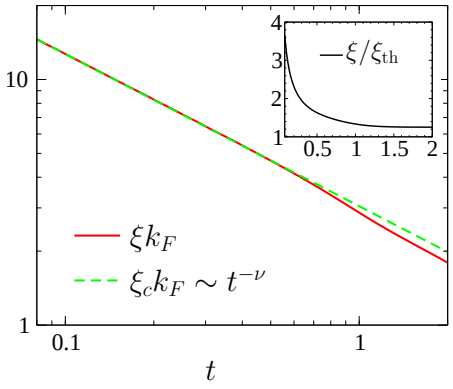


FIG. 1. (Color online) Superfluid correlation length ξ vs $t = (T-T_c)/T_c$ in the normal phase ($T > T_c$). The (green) dashed line shows the critical behavior $\xi \sim t^{-\nu}$ when $t \to 0^+$. (Inset) Ratio between the correlation length ξ and the fermion de Broglie thermal wavelength $\xi_{\rm th} = v_F/\pi T$.

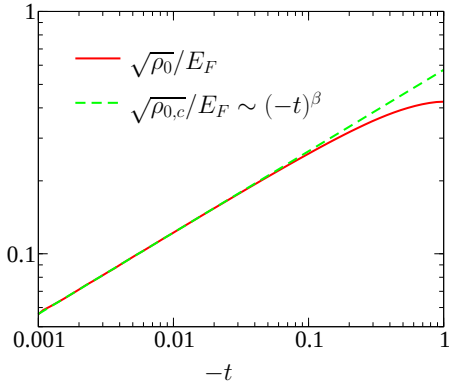


FIG. 2. (Color online) Order parameter $\sqrt{\rho_0}$ vs $t = (T - T_c)/T_c$ in the superfluid phase ($T < T_c$). The (green) dashed line shows the critical behavior $\sqrt{\rho_0} \sim (-t)^\beta$ when $t \to 0^-$.

with 0.01 instead of 0.02 in (17), and $T_G^+ \simeq 1.97 T_c$ (and $T_G^- \simeq 0.79 T_c$) with 0.05.

Figure 1 (inset) also shows the ratio between the correlation length ξ and the fermion de Broglie thermal length $\xi_{\rm th} = v_F/\pi T$ ($v_F = k_F/m$). $\xi/\xi_{\rm th}$ is of order one for $T \gtrsim T_G^+$ but rapidly increases for temperatures below T_G^+.

We show in Fig. 2 the order parameter $\sqrt{\rho_0} \equiv \sqrt{\rho_{0,k=0}}$ in the superfluid phase. Near T_c, $\sqrt{\rho_0} \sim (T_c - T)^\beta$ vanishes with the exponent $\beta \simeq 0.33$. The critical behavior extends from the transition temperature $T_c = 0.15 E_F$ down to the Ginzburg temperature $T_G^- \simeq 0.90 T_c \simeq 0.14 E_F$. The latter is obtained from the criterion (17) with ξk_F replaced by $\sqrt{\rho_0}/E_F$ and $\sqrt{\rho_{0,c}} \sim (-t)^\beta$.

We conclude that the critical region $[T_G^-, T_G^+]$ is sizable and strongly asymmetric: $(T_G^+ - T_c)/(T_c - T_G^-) \sim 8$. This asymmetry is partially explained by the fact that we vary the temperature at fixed density while the chemical potential μ strongly varies with T in the normal phase. At fixed chemical potential we find a smaller asymmetry: $(T_G^+ - T_c)/(T_c - T_G^-) \simeq 3$.

To clarify the origin of this asymmetry we have studied the classical O(2) model (φ^4 theory for a two-component field) using the NPRG. We have found that the asymmetry is small when the interaction is weak but can be large when the interaction is strong. This shows that the critical regime is generically asymmetric when the interaction is of order one, which is the case in the unitary Fermi gas. However, in the O(2) model the critical regime is larger in the low-temperature phase, i.e., $T_G^- > T_G^+$, while the reverse is true in the unitary Fermi gas. A crucial difference between the O(2) model and our theory of the unitary Fermi gas is that in the latter case, the initial condition of the RG approach is given by the mean-field BCS theory and is temperature dependent. By contrast, the only temperature dependence in the O(2) model comes from the coefficient of the quadratic (φ^2) term. This, we believe, might explain the difference between the O(2) model and the unitary Fermi gas but we have not been able to find a simple physical explanation.

IV. CRITICAL REGION IN THE BCS-BEC CROSSOVER

A priori it should be possible to follow a similar procedure to compute the size of the critical regime in the whole BCS-BEC crossover. While this is indeed the case on the BCS side (see below), in the BEC limit we encounter the following difficulty. When $1/k_F a \gg 1$, superfluidity is due to the BEC of pointlike composite bosons. The initial effective action then corresponds to a bosonic action with a local interaction. To leading order in $n^{1/3}a$, the transition temperature is given by the BEC temperature of bosons with mass $m_B = 2m$ and density $n_B = n/2$. As is well known in the theory of the dilute Bose gas, the BEC temperature is not correctly computed if one imposes a cutoff on frequencies. Technically this is due to the propagator of the bosonic field (i.e., Δ) vanishing as $1/i\omega_m$ in the large frequency limit. The calculation of the particle density then requires one to sum over all Matsubara frequencies (with an appropriate convergence factor). We expect that a cutoff acting only on momenta would allow us to explore the BEC limit but one would then have to go beyond the derivative expansion (for the frequency dependence), a very difficult task in practice.

To estimate the critical regime in the BCS-BEC crossover and in particular in the BEC limit, it is possible to use the Ginzburg criterion, with the additional constraint that the NPRG results should be reproduced in the unitary limit. Let us consider the classical limit

$$\Gamma_{\rm cl}[\Delta^*, \Delta] = \beta \int d^3r \{ Z_A |\boldsymbol{\nabla}\Delta|^2 + U(\rho) \} \qquad (18)$$

of the effective action $\Gamma_{k=\Lambda}$ obtained by considering only fluctuation modes with vanishing Matsubara frequencies [35]. We can then define two characteristic

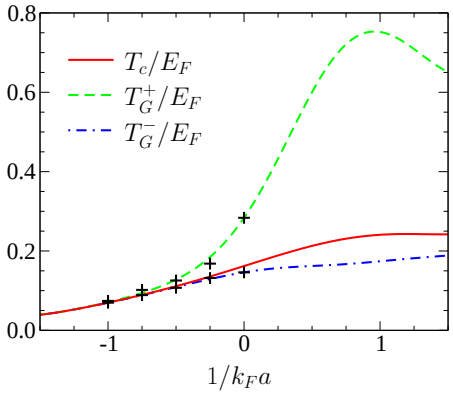


FIG. 3. (Color online) Critical region of the superfluid transition in the BCS-BEC crossover. The transition temperature T_c is obtained from a Luttinger-Ward approach [41]. The Ginzburg temperatures T_G^+ and T_G^- (dashed and dot-dashed lines) are deduced from (19). The black crosses on the BCS side show the results obtained directly from the NPRG approach (as in the unitary limit).

lengths. The first one is the $T = 0$ healing length $\xi_h = (Z_A/\lambda\rho_0)^{1/2}$; the second one is the Ginzburg length $\xi_G = Z_A^2/\lambda T_c$ [36]. The size of the critical region is determined by the Ginzburg criterion

$$\frac{|T_G^\pm - T_c|}{T_c} = t_G^\pm = \alpha_\pm \frac{\xi_h^2}{\xi_G^2}, \tag{19}$$

where $\alpha_\pm$ is a constant. Here we distinguish between the critical region in the normal (t_G^+) and superfluid (t_G^-) phases. ξ_h and ξ_G are computed vs $1/k_Fa$ using mean-field theory (see appendix) and we fix the constants $\alpha_\pm$ by requiring that for $1/a = 0$ we reproduce the NPRG results obtained for the unitary gas in Sec. III: $\alpha_+ \simeq 4.0 \times 10^{-3}$ and $\alpha_- \simeq 5.2 \times 10^{-4}$. The asymmetry of the critical region is then independent of $1/k_Fa$ and equal to α_+/α_-. We therefore do not expect the Ginzburg criterion (19) to be quantitatively valid beyond the BCS-BEC crossover region $1/k_F|a| \lesssim 1$.

Using the results of the appendix, in the BCS limit we find that $t_G^\pm \sim (T_c/E_F)^4$ is exponentially small, since $T_c \sim E_F e^{-\pi/k_F|a|}$, so that the critical region is too small to be observed experimentally. In the BEC limit, $t_G^\pm \sim k_Fa(T_c/E_F)^2 \sim k_Fa$ [18, 37] is also small although not as strongly suppressed as in the BCS limit. For $1/k_Fa \gg 1$, using $T_c \simeq 0.218E_F$ (and the results of the appendix) [38], we obtain $t_G^+ \simeq 7n^{1/3}a \ll 1$ in agreement with known results of the dilute Bose gas [39, 40]. By contrast, $t_G^\pm$ is of order unity at unitarity. Note that the maximum of T_G^+ is on the BEC side of the resonance ($1/k_Fa \simeq 1$), not far away from the maximum of T_c.

The critical region in the BCS-BEC crossover is shown in Fig. 3, where we have used the transition temperature T_c computed in Ref. [41] within a Luttinger-Ward approach. On the BCS side $1/k_Fa < 0$, we also show the critical region obtained from the NPRG approach following the procedure used in the unitary limit (the cutoff Λ is fixed in order to reproduce the transition temperature computed in Ref. [41]). There is a good agreement with the results obtained from the Ginzburg criterion. By contrast, on the BEC side $1/k_Fa > 0$, the NPRG approach yields a much narrower critical region than what is predicted by the Ginzburg criterion. We ascribe this disagreement to the failure of our NPRG approach (with a frequency cutoff) to determine correctly the particle density when there are composite bosons (bound pairs of fermions); see the discussion at the beginning of this section.

The overall picture of the critical region is in qualitative agreement with the results of Ref. [18]. Evidence for a large critical region close to unitarity was also found in Ref. [42], where a diagrammatic analysis showed that diagrams that are subleading for $T \gg T_c$ exceed leading ones in a wide region, of order T_c, above the transition temperature.

V. CONCLUSION

In summary, we have determined the width of the critical region in a Fermi gas through the BCS-BEC crossover. To circumvent the breakdown of perturbation theory in the critical region, we have used a NPRG approach. Close to unitarity, we find that the critical region is very wide (of the order of the transition temperature T_c) and asymmetric, being larger in the normal phase than in the superfluid phase. The critical region is also more pronounced on the BEC side than on the BCS side where it becomes unobservable. An interesting and open issue relates to the interplay between critical fluctuations, Fermi-liquid behavior, and the (much debated) possible existence of a pseudogap [43].

In Ref. [18], it was pointed out that the critical region is strongly suppressed in trapped gases due to their inhomogeneity, although critical behavior could be observed in the compressibility by measuring the density profile. Nonetheless, the possibility to load gases in the three-dimensional quasiuniform potential of an optical box trap opens up new prospects to observe criticality in trapped gases [44].

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank A.-M. Tremblay for useful discussions on the pseudogap issue in fermion systems.

APPENDIX: EFFECTIVE POTENTIAL AND TWO-POINT VERTEX IN THE MEAN-FIELD APPROXIMATION

At the initial stage of the RG procedure, the effective action is given by mean-field theory: $\Gamma_\Lambda[\Delta^*, \Delta] =$

$S[\Delta^*,\Delta]$, where S is given by (4). An elementary calculation then gives

$$U_\Lambda(\rho,\mu)=\frac{1}{g}+\int_{\mathbf{q}}\{\xi_{\mathbf{q}}-2T\ln[2\cosh(\beta E_{\mathbf{q}}/2)]\} \tag{20}$$

and

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}_{\Lambda,11}(p;\rho)&=\frac{1}{g}+\frac{1}{2}\int_q\{2F(q)F(p+q)\\&\quad-G(q)[G(p-q)+G(-p-q)]\},\\ \Gamma^{(2)}_{\Lambda,22}(p;\rho)&=\frac{1}{g}-\frac{1}{2}\int_q\{2F(q)F(p+q)\\&\quad+G(q)[G(p-q)+G(-p-q)]\},\\ \Gamma^{(2)}_{\Lambda,12}(p;\rho)&=-\frac{i}{2}\int_q G(q)[G(p-q)-G(-p-q)],\end{aligned} \tag{21}$$

in a constant field $\Delta=\sqrt{\rho}$ (i.e., $\Delta_1=\sqrt{2\rho}$ and $\Delta_2=0$), with

$$\begin{aligned}G(q)&=-\frac{i\omega_n+\xi_{\mathbf{q}}}{\omega_n^2+E_{\mathbf{q}}^2},\qquad F(q)=\frac{\sqrt{\rho}}{\omega_n^2+E_{\mathbf{q}}^2},\\ E_{\mathbf{q}}&=\sqrt{\xi_{\mathbf{q}}^2+\rho},\qquad \xi_{\mathbf{q}}=\epsilon_{\mathbf{q}}-\mu.\end{aligned} \tag{22}$$

We use the notation

$$\int_q\equiv T\sum_{\omega_n}\int_{\mathbf{q}}\equiv T\sum_{\omega_n}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \tag{23}$$

The fermionic Matsubara sums in (21) can be done analytically. The interaction constant g can be eliminated using (2). We then take the limit $\Lambda_F\to\infty$ in the momentum integrals with a fixed.

Derivative expansion

Equations (20) and (21) yield

$$\begin{aligned}\lambda_\Lambda&=\frac{1}{4}\int_{\mathbf{q}}\left[\frac{1}{E_{\mathbf{q}}^3}\tanh(\beta E_{\mathbf{q}}/2)-\frac{\beta}{2E_{\mathbf{q}}^2}\cosh^{-2}(\beta E_{\mathbf{q}}/2)\right],\\ Z_{A,\Lambda}&=\frac{1}{8m}\int_{\mathbf{q}}\left(\xi_{\mathbf{q}}+\frac{2\mathbf{q}^2}{dm}\right)\left[\frac{1}{E_{\mathbf{q}}^3}\tanh(\beta E_{\mathbf{q}}/2)-\frac{\beta}{2E_{\mathbf{q}}^2}\cosh^{-2}(\beta E_{\mathbf{q}}/2)\right]\\&\quad-\frac{1}{8m^2d}\int_{\mathbf{q}}\mathbf{q}^2\xi_{\mathbf{q}}^2\left[\frac{3}{E_{\mathbf{q}}^5}\tanh(\beta E_{\mathbf{q}}/2)-\frac{3\beta}{2E_{\mathbf{q}}^4}\cosh^{-2}(\beta E_{\mathbf{q}}/2)-\frac{\beta^2}{2E_{\mathbf{q}}^3}\frac{\tanh(\beta E_{\mathbf{q}}/2)}{\cosh^2(\beta E_{\mathbf{q}}/2)}\right],\\ Z_{C,\Lambda}&=\frac{1}{4}\int_{\mathbf{q}}\xi_{\mathbf{q}}\left[\frac{1}{E_{\mathbf{q}}^3}\tanh(\beta E_{\mathbf{q}}/2)-\frac{\beta}{2E_{\mathbf{q}}^2}\cosh^{-2}(\beta E_{\mathbf{q}}/2)\right],\\ V_{A,\Lambda}&=\frac{1}{8}\int_{\mathbf{q}}\left[\frac{1}{E_{\mathbf{q}}^3}\tanh(\beta E_{\mathbf{q}}/2)-\frac{\beta}{2E_{\mathbf{q}}^2}\cosh^{-2}(\beta E_{\mathbf{q}}/2)-\frac{\beta^2}{2E_{\mathbf{q}}}\frac{\tanh(\beta E_{\mathbf{q}}/2)}{\cosh^2(\beta E_{\mathbf{q}}/2)}\right],\end{aligned} \tag{24}$$

where $d=3$ and the right-hand side is evaluated at the minimum of the effective potential defined by $U'_\Lambda(\rho_{0,\Lambda})=0$.

In the $T=0$ BCS limit, we obtain

$$U_\Lambda(\rho)\simeq-\Theta(\mu)\frac{2}{15\pi^2}(2m)^{3/2}\mu^{5/2}, \tag{25}$$

and

$$\begin{aligned}\sqrt{\rho_{0,\Lambda}}&=8e^{-2}\epsilon_F e^{-\pi/2k_F|a|},\quad \lambda_\Lambda=\frac{mk_F}{4\pi^2\rho_{0,\Lambda}},\\ Z_{A,\Lambda}&=\frac{\bar n}{8m\rho_{0,\Lambda}},\quad Z_{C,\Lambda}\simeq 0,\quad V_{A,\Lambda}=\frac{mk_F}{8\pi^2\rho_{0,\Lambda}},\end{aligned} \tag{26}$$

where $\bar n=-dU_\Lambda/d\mu=k_F^3/3\pi^2$, $k_F=\sqrt{2m\epsilon_F}$, and $\epsilon_F=\mu$.

In the $T=0$ BEC limit, we find

$$U_\Lambda(\rho)=-\frac{m\rho}{4\pi a}+\frac{\rho(2m)^{3/2}|\mu|^{1/2}}{8\pi}+\frac{\rho^2(2m)^{3/2}|\mu|^{-3/2}}{256\pi} \tag{27}$$

and

$$\begin{aligned}\rho_{0,\Lambda}&=\frac{4\pi\bar n}{m^2a}=\frac{4}{ma^2}\delta\mu,\quad \lambda_\Lambda=\frac{m^3a^3}{16\pi},\\ Z_{A,\Lambda}&=\frac{ma}{32\pi},\quad Z_{C,\Lambda}=\frac{m^2a}{8\pi},\quad V_{A,\Lambda}=\frac{m^3a^3}{32\pi},\end{aligned} \tag{28}$$

where $\mu=-1/2ma^2+\delta\mu$ ($0\le\delta\mu\ll 1/2ma^2$).

[1] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
[2] N. N. Bogoliubov, J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947).
[3] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **80**, 1215 (2008).
[4] Q. Chen, J. Stajic, S. Tan, and K. Levin, Physics Reports **412**, 1 (2005).
[5] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
[6] W. Zwerger, editor, *The BCS-BEC Crossover and the Unitarity Fermi Gas* (Lecture Notes in Physics, Springer, New York, 2012).
[7] M. Randeria and E. Taylor, Annual Review of Condensed Matter Physics **5**, 209 (2014).
[8] The highest T_c is actually reached slightly on the BEC side of the Feshbach resonance.
[9] J. Stajic, J. N. Milstein, Q. Chen, M. L. Chiofalo, M. J. Holland, and K. Levin, Phys. Rev. A **69**, 063610 (2004).
[10] A. Perali, P. Pieri, L. Pisani, and G. C. Strinati, Phys. Rev. Lett. **92**, 220404 (2004).
[11] A. Perali, F. Palestini, P. Pieri, G. C. Strinati, J. T. Stewart, J. P. Gaebler, T. E. Drake, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **106**, 060402 (2011).
[12] S. Nascimbène, N. Navon, S. Pilati, F. Chevy, S. Giorgini, A. Georges, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **106**, 215303 (2011).
[13] J. P. Gaebler, J. T. Stewart, T. E. Drake, D. S. Jin, A. Perali, P. Pieri, and G. C. Strinati, Nature Phys. **6**, 569 (2010).
[14] C. Cao, E. Elliott, J. Joseph, H. Wu, J. Petricka, T. Schaefer, and J. E.Thomas, Science **331**, 58 (2011).
[15] S. Nascimbène, N. Navon, K. J. Jiang, F. Chevy, and C. Salomon, Nature (London) **463**, 1057 (2010).
[16] N. Navon, S. Nascimbène, F. Chevy, and C. Salomon, Science **328**, 729 (2010).
[17] A. Sommer, M. Ku, G. Roati, and M. W. Zwierlein, Nature (London) **472**, 201 (2011).
[18] E. Taylor, Phys. Rev. A **80**, 023612 (2009).
[19] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, J. Low Temp. Phys. **59**, 195 (1985).
[20] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria, and J. R. Engelbrecht, Phys. Rev. Lett. **71**, 3202 (1993).
[21] E. Burovski, E. Kozik, N. Prokof'ev, B. Svistunov, and M. Troyer, Phys. Rev. Lett. **101**, 090402 (2008).
[22] The NPRG approach has been used previously to determine the critical region in quantum Ising models; see P. Jakubczyk, P. Strack, A. A. Katanin, and W. Metzner, Phys. Rev. B **77**, 195120 (2008); P. Strack and P. Jakubczyk, Phys. Rev. B **80**, 085108 (2009).
[23] M. M. Scherer, S. Floerchinger, and H. Gies, Phil. Trans. R. Soc. A **369**, 2779 (2011).
[24] I. Boettcher, J. M. Pawlowski, and S. Diehl, Nucl. Phys. B **228**, 63 (2012).
[25] K. B. Gubbels and H. T. C. Stoof, Phys. Rev. A **84**, 013610 (2011).
[26] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Phys. Rep. **363**, 223 (2002).
[27] B. Delamotte, in *Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems*, Lecture Notes in Physics, Vol. 852, edited by A. Schwenk and J. Polonyi (Springer, Berlin/Heidelberg, 2012), pp. 49–132.
[28] P. Kopietz, L. Bartosch, and F. Schütz, *Introduction to the Functional Renormalization Group* (Springer, Berlin, 2010).
[29] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
[30] Note that for physical quantities defined at scale $k = \Lambda$, the density and therefore the Fermi energy $E_F = k_F^2/2m$ are obtained from mean-field theory. In practice, we find a small change in the density (corresponding to a change in k_F of order 1 percent) when fluctuations beyond mean field are taken into account in the RG approach.
[31] C. Wetterich, Phys. Rev. B **77**, 064504 (2008).
[32] S. Floerchinger and C. Wetterich, Phys. Rev. A **77**, 053603 (2008).
[33] N. Dupuis, Phys. Rev. A **80**, 043627 (2009).
[34] A. Sinner, N. Hasselmann, and P. Kopietz, Phys. Rev. A **82**, 063632 (2010).
[35] In a finite-temperature phase transition, critical fluctuations are thermal (classical). Quantum fluctuations are not important for the critical behavior and can be ignored when one considers the Ginzburg criterion determining the size of the critical region.
[36] Since the transition temperature T_c is much smaller than the mean-field transition temperature, when estimating the Ginzburg length ξ_G one can use the $T = 0$ values of Z_A and λ.
[37] In the BCS limit, we use $Z_A = k_F^3/24\pi^2 m\rho_0$, $\lambda = mk_F/4\pi^2\rho_0$ with $\rho_0 \sim T_c^2$. In the BEC limit, $Z_A = ma/32\pi$, $\lambda = (ma)^3/16\pi$, and $\rho = 4k_F^3/3\pi m^2 a$.
[38] The transition temperature $T_c = 0.218E_F$ corresponds to the BEC temperature of a bosonic (dimer) gas with density $n_B = n/2$ and mass $m_B = 2m$.
[39] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Phys. Rev. A **54**, R4633 (1996).
[40] The result $t_G^+ \simeq 7n^{1/3}a$ can also be written as $t_G^+ \simeq 4.4n_B^{1/3}a_B$ where $n_B = n/2$ and $a_B = 2a$ are the density and (mean-field) scattering length of the dimers, respectively.
[41] R. Haussmann, W. Rantner, S. Cerrito, and W. Zwerger, Phys. Rev. A **75**, 023610 (2007).
[42] Strinati, G. C., Pieri, P., and Lucheroni, C., Eur. Phys. J. B **30**, 161 (2002).
[43] See, for instance, M. Sun and X. Leyronas, Phys. Rev. A **92**, 053611 (2015).
[44] A. L. Gaunt, T. F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R. P. Smith, and Z. Hadzibabic, Phys. Rev. Lett. **110**, 200406 (2013).

Annexe B

Équations de renormalisation pour le modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$

Afin de dériver les équation pour U_k et Z_k à partir de l'équation (II.1.13), nous choisissons la configuration uniforme des champs suivante

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_\beta \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{B.0.1}$$

car elle est accessible à partir de n'importe quelle autre configuration uniforme en appliquant les transformations du groupe $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$.

On a alors [1]

$$\Gamma^{(2)}_{a_1,i_1;a_2,i_2}(\mathbf{p},-\mathbf{p};\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & C & & & & \\ 0 & E & D & 0 & & & 0 & \\ 0 & D & F & 0 & & & & \\ C & 0 & 0 & B & & & & \\ & & & & G & & & \\ & & & & & H & & \\ & 0 & & & & & G & \\ & & & & & & & H \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{B.0.2}$$

où $a_j = 1 \dots N$ et $i_j = 1, 2$. La première ligne de correspond aux éléments de matrices

[1] Pour simplifier l'écriture, nous allons omettre les dépendances en k.

$(1,1;1,1),(1,1;1,2),(1,1;2,1)\dots(1,1;N,2)$. Nous avons défini

$$\begin{aligned}
A &= Z\mathbf{p}^2 + U^{(0)\prime} + 2\sqrt{\tau}U^{(1)} + \phi_\alpha^2\left(U^{(0)\prime\prime} + 4\sqrt{\tau}U^{(1)\prime} + 4\tau U^{(2)} + 2U^{(1)}\right),\\
B &= Z\mathbf{p}^2 + U^{(0)\prime} - 2\sqrt{\tau}U^{(1)} + \phi_\beta^2\left(U^{(0)\prime\prime} - 4\sqrt{\tau}U^{(1)\prime} + 4\tau U^{(2)} + 2U^{(1)}\right),\\
C &= \phi_\alpha\phi_\beta\left(U^{(0)\prime\prime} - 4\tau U^{(2)} - 2U^{(1)}\right),\\
D &= 2\phi_\alpha\phi_\beta U^{(1)},\\
E &= Z\mathbf{p}^2 + U^{(0)\prime} - 2\sqrt{\tau}U^{(1)} + 2\phi_\alpha^2 U^{(1)},\\
F &= Z\mathbf{p}^2 + U^{(0)\prime} + 2\sqrt{\tau}U^{(1)} + 2\phi_\beta^2 U^{(1)},\\
G &= Z\mathbf{p}^2 + U^{(0)\prime} + 2\sqrt{\tau}U^{(1)},\\
H &= Z\mathbf{p}^2 + U^{(0)\prime} - 2\sqrt{\tau}U^{(1)}
\end{aligned} \tag{B.0.3}$$

où les primes désignent des dérivées par rapport à ρ.

Pour obtenir les équation de flot de U et Z, on utilise

$$\begin{aligned}
\partial_t U(\rho,\tau) &= \frac{1}{V}\partial_t\Gamma[\boldsymbol{\phi}_{\text{uniforme}}],\\
\partial_t Z &= \lim_{\mathbf{p}\to 0}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}^2}\Gamma^{(2)}_{3,1;3,1}(\mathbf{p},-\mathbf{p};\boldsymbol{\phi})
\end{aligned} \tag{B.0.4}$$

où la configuration uniforme du champ est définie par (B.0.1) et (I.1.7) et $\partial_t Z$ doit être évalué au minimum du potentiel effectif, c'est-à-dire pour $\rho=\rho_0$ et $\tau=0$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}
\partial_t U = {}& 4v_d k\int_0^\infty dp p^{d-1}\left(\partial_k R(p)\right)\left\{(N-2)\frac{1}{D_1}\left[Zp^2 + R(p) + U^{(0)\prime}\right]\right.\\
&+ \frac{1}{D_2}\left[Zp^2 + R(p) + U^{(0)\prime} + 2U^{(1)}\rho\right]\\
&\left.+ \frac{1}{D_3}\left[Zp^2 + R(p) + U^{(0)\prime} + 2\rho U^{(1)} + \rho U^{(0)\prime\prime} + 4\tau(U^{(1)\prime} + \rho U^{(2)})\right]\right\},\\
\partial_t Z = {}& \frac{16kv_d}{d}\rho\int_0^\infty dp p^{d+1}\left[\left(\partial_k R(p)\right)\frac{\partial}{\partial R(p)} + \left(\partial_k Q(p)\right)\frac{\partial}{\partial Q(p)}\right]\\
&\times\left\{\frac{\left(Z+Q(p)\right)^2}{D_4}\left[\left(8{U^{(1)}}^2 + {U^{(0)\prime\prime}}^2\right)\left(Zq^2 + R(p) + U^{(0)\prime}\right)^2\right.\right.\\
&+ 8\rho U^{(1)}U^{(0)\prime\prime}\left(4U^{(1)} + U^{(0)\prime\prime}\right)\left(Zq^2 + R(p) + U^{(0)\prime}\right)\\
&\left.\left.+ 48\rho^2{U^{(1)}}^2{U^{(0)\prime\prime}}^2\right]\right\}\Bigg|_{\rho=\rho_0,\tau=0}
\end{aligned} \tag{B.0.5}$$

où $Q(p) = \partial_{p^2} R(p)$,

$$\begin{aligned}
D_1 =& \left(Zp^2 + R(p) + U^{(0)\prime}\right)^2 - 4{U^{(1)}}^2\tau,\\
D_2 =& \left(Zp^2 + R(p) + U^{(0)\prime}\right)\left(Zp^2 + R(p) + U^{(0)\prime} + 4\rho U^{(1)}\right) + 4{U^{(1)}}^2\tau,\\
D_3 =& \left(Zp^2 + R(p) + U^{(0)\prime} + 4\rho U^{(1)}\right)\left(Zp^2 + R(p) + U^{(0)\prime} + 2\rho U^{(0)\prime\prime}\right)\\
&+ 4\tau\left(2\left(Zp^2 + R(p)\right)\left(U^{(1)\prime} + \rho U^{(2)}\right) + 2U^{(0)\prime}\left(U^{(1)\prime} + \rho U^{(2)}\right)\right.\\
&\left.-3U^{(1)}\left(U^{(0)\prime\prime} + U^{(1)}\right) - 4\rho U^{(1)\prime}\left(U^{(1)} + \rho U^{(1)\prime}\right) + 4\rho^2 U^{(0)\prime\prime}U^{(2)}\right]\\
&- 16\tau^2\left[U^{(2)}\left(U^{(1)} + U^{(0)\prime\prime}\right) - {U^{(1)\prime}}^2\right],\\
D_4 =& D_1 D_3^3,
\end{aligned} \tag{B.0.6}$$

et $v_d^{-1} = 2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)$, $d = 3$.

Avec le régulateur thêta (II.1.9), les intégrales sur p peuvent être faites analytiquement. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\partial_t U =& \frac{8v_d}{d(2+d)} Zk^{2+d}(2+d-\eta)\left\{(N-2)\frac{1}{D_1}\left[Zk^2 + U^{(0)\prime}\right]\right.\\
&+ \frac{1}{D_2}\left[Zk^2 + U^{(0)\prime} + 2\rho U^{(1)}\right]\\
&\left.+ \frac{1}{D_3}\left[Zk^2 + U^{(0)\prime} + 2\rho U^{(1)} + \rho U^{(0)\prime\prime} + 4\tau(U^{(1)\prime} + \rho U^{(2)})\right]\right\},\\
\partial_t Z =& -\frac{16v_d}{d} Z^2 k^{2+d}\rho\frac{1}{D_4}\left[{U^{(0)\prime\prime}}^2\left(Zk^2 + U^{(0)\prime}\right)\left(Zk^2 + U^{(0)\prime} + 8\rho U^{(1)}\right)\right.\\
&\left.+ 8{U^{(1)}}^2\left(Zk^2 + U^{(0)\prime} + 2\rho U^{(0)\prime\prime}\right)^2 + 16\rho^2 {U^{(0)\prime\prime}}^2 {U^{(1)}}^2\right]\Big|_{\rho=\rho_0,\tau=0}
\end{aligned} \tag{B.0.7}$$

où

$$\begin{aligned}
D_1 =& \left(Zk^2 + U^{(0)\prime}\right)^2 - 4\tau{U^{(1)}}^2,\\
D_2 =& \left(Zk^2 + U^{(0)\prime}\right)\left(Zk^2 + U^{(0)\prime} + 4\rho U^{(1)}\right) + 4\tau{U^{(1)}}^2,\\
D_3 =& \left(Zk^2 + U^{(0)\prime} + 2\rho U^{(0)\prime\prime}\right)\left(Zk^2 + U^{(0)\prime} + 4\rho U^{(1)}\right)\\
&+ 4\tau\left[2Zk^2\left(U^{(1)\prime} + \rho U^{(2)}\right) + 2U^{(0)\prime}\left(U^{(1)\prime} + \rho U^{(2)}\right)\right.\\
&\left.-3U^{(1)}\left(U^{(0)\prime\prime} + U^{(1)}\right) - 4\rho U^{(1)\prime}\left(U^{(1)} + \rho U^{(1)\prime}\right) + 4\rho^2 U^{(0)\prime\prime}U^{(2)}\right]\\
&- 16\tau^2\left[U^{(2)}\left(U^{(1)} + U^{(0)\prime\prime}\right) - {U^{(1)\prime}}^2\right],\\
D_4 =& D_1 D_3^2.
\end{aligned} \tag{B.0.8}$$

Pour la résolution numérique des équations de flot, il est préférable d'utiliser les équations de flot pour les quantités adimensionnées définies par

$$\begin{cases}
\widetilde{U}(\tilde{\rho},\tilde{\tau}) = k^{-d}U(\rho,\tau)\\
\qquad\tilde{\rho} = Zk^{2-d}\rho\\
\qquad\tilde{\tau} = Z^2 k^{4-2d}\tau.
\end{cases} \tag{B.0.9}$$

Annexe C

Équations de renormalisation pour le modèle quantique

Nous choisissons la même configuration uniforme des champs que celle de l'annexe B

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_\beta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.0.1}$$

car elle est accessible à partir de n'importe quelle autre configuration uniforme en appliquant les transformations du groupe $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$.

On a alors [1]

$$\Gamma^{(2)}_{a_1,i_1;a_2,i_2}(\tilde{p},-\tilde{p};\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} A & I & 0 & C & & \\ -I & E & D & 0 & 0 & \\ 0 & D & F & I & & \\ C & 0 & -I & B & & \\ & 0 & & & G & I \\ & & & & -I & H \end{pmatrix} \tag{C.0.2}$$

où $\tilde{p} = (\mathbf{p}, \omega_n)$, $a_j = 1,2,3$ et $i_j = 1,2$. La première ligne de correspond aux éléments de matrices $(1,1;1,1), (1,1;1,2), (1,1;2,1) \ldots (1,1;3,2)$. Nous avons défini

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U^{(0)\prime} + 2\sqrt{\tau}U^{(1)} + \phi_\alpha^2 \left(U^{(0)\prime\prime} + 4\sqrt{\tau}U^{(1)\prime} + 4\tau U^{(2)} + 2U^{(1)} \right), \\
B &= \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U^{(0)\prime} - 2\sqrt{\tau}U^{(1)} + \phi_\beta^2 \left(U^{(0)\prime\prime} - 4\sqrt{\tau}U^{(1)\prime} + 4\tau U^{(2)} + 2U^{(1)} \right), \\
C &= \phi_\alpha \phi_\beta \left(U^{(0)\prime\prime} - 4\tau U^{(2)} - 2U^{(1)} \right), \\
D &= 2\phi_\alpha \phi_\beta U^{(1)}, \\
E &= \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U^{(0)\prime} - 2\sqrt{\tau}U^{(1)} + 2\phi_\alpha^2 U^{(1)}, \\
F &= \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U^{(0)\prime} + 2\sqrt{\tau}U^{(1)} + 2\phi_\beta^2 U^{(1)},
\end{aligned} \tag{C.0.3}$$

[1] Pour simplifier l'écriture, nous allons omettre les dépendances en k.

$$\begin{aligned} G &= \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U^{(0)\prime} + 2\sqrt{\tau}U^{(1)}, \\ H &= \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + U^{(0)\prime} - 2\sqrt{\tau}U^{(1)}, \\ I &= \omega_n \end{aligned} \tag{C.0.4}$$

où les primes désignent des dérivées par rapport à ρ.

Pour obtenir l'équation de flot de U, on utilise

$$U(\rho,\tau) = u_0 + u_1\rho + \frac{u_2}{2}\rho^2 + v_0\tau \tag{C.0.5}$$

et

$$\partial_t U(\rho,\tau) = \frac{1}{\beta V}\partial_t\Gamma[\phi_{\text{uniforme}}] \tag{C.0.6}$$

où la configuration uniforme du champ est définie par (C.0.1) et (I.1.7).

Avec le régulateur théta (II.1.9), on obtient alors

$$\begin{aligned}
\partial_t u_0 &= \frac{24v_d}{d}\frac{k^{2+d}}{2M}T\sum_{\omega_n}\frac{\frac{k^2}{2M}+u_1}{\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)^2+{\omega_n}^2}, \\
\partial_t u_1 &= -\frac{8v_d}{d}\frac{k^{2+d}}{2M}(u_2+3u_2+4v_0)T\sum_{\omega_n}\frac{\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)^2-{\omega_n}^2}{\left[\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)^2+{\omega_n}^2\right]^2}, \\
\partial_t u_2 &= \frac{16v_d}{d}\frac{k^{2+d}}{2M}\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right) \\
&\quad\times\left\{\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)^2\left[7u_2^2+8u_2v_0+16v_0^2\right]T\sum_{\omega_n}\frac{1}{\left[\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)^2+{\omega_n}^2\right]^3}\right. \\
&\quad\left.-\left[17u_2^2+24u_2v_0+48v_0^2\right]T\sum_{\omega_n}\frac{{\omega_n}^2}{\left[\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)^2+{\omega_n}^2\right]^3}\right\}, \\
\partial_t v_0 &= \frac{32v_d}{d}\frac{k^{2+d}}{2M}\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)v_0 \\
&\quad\times\left\{3\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)^2(u_2+v_0)T\sum_{\omega_n}\frac{1}{\left[\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)^2+{\omega_n}^2\right]^3}\right. \\
&\quad\left.+(-5u_2+3v_0)T\sum_{\omega_n}\frac{{\omega_n}^2}{\left[\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)^2+{\omega_n}^2\right]^3}\right\},
\end{aligned} \tag{C.0.7}$$

$v_d^{-1} = 2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)$ et $d = 3$. On peut calculer explicitement les sommes sur les fréquences

$$\begin{aligned}
\partial_t u_0 &= \frac{12 v_d}{d}\frac{k^{2+d}}{2M}\coth\left(\frac{\frac{k^2}{2M}+u_1}{2T}\right),\\
\partial_t u_1 &= -\frac{8 v_d}{d}\frac{k^{2+d}}{2M}\frac{u_2+v_0}{T}\mathrm{csch}^2\left(\frac{\frac{k^2}{2M}+u_1}{2T}\right),\\
\partial_t u_2 &= \frac{2 v_d}{d}\frac{k^{2+d}}{2M}\mathrm{csch}^2\left(\frac{\frac{k^2}{2M}+u_1}{2T}\right)\left\{\frac{2\left(3{u_2}^2+4u_2v_0+8{v_0}^2\right)}{T^2}\coth\left(\frac{\frac{k^2}{2M}+u_1}{2T}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{{u_2}^2}{T\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)}\left[1+\frac{T}{\frac{k^2}{2M}+u_1}\sinh\left(\frac{\frac{k^2}{2M}+u_1}{T}\right)\right]\right\},\\
\partial_t v_0 &= \frac{4 v_d}{d}\frac{k^{2+d}}{2M}\frac{v_0}{T}\mathrm{csch}^2\left(\frac{\frac{k^2}{2M}+u_1}{2T}\right)\left\{\frac{2u_2}{T}\coth\left(\frac{\frac{k^2}{2M}+u_1}{2T}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{u_2+3v_0}{\frac{k^2}{2M}+u_1}\left[1+\frac{T}{\frac{k^2}{2M}+u_1}\sinh\left(\frac{\frac{k^2}{2M}+u_1}{T}\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{C.0.8}$$

Lorsque la température est nulle, les équations de flot deviennent

$$\begin{aligned}
\partial_t u_0 &= \frac{12 v_d}{d}\frac{k^{2+d}}{2M},\\
\partial_t u_1 &= 0,\\
\partial_t u_2 &= \frac{4 v_d}{d}\frac{k^{2+d}}{2M}\frac{u_2^2}{\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)^2},\\
\partial_t v_0 &= \frac{8 v_d}{d}\frac{k^{2+d}}{2M}\frac{v_0(u_2+3v_0)}{\left(\frac{k^2}{2M}+u_1\right)^2}.
\end{aligned} \tag{C.0.9}$$

Bibliographie

[1] Bose, "Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese", Zeitschrift für Physik **26**, 178–181 (1924).

[2] A. Einstein, "Preussische akademie der wissenschaften", Phys.-Math. Klasse, Sitzungsberichte p. 261–267 (1924).

[3] A. Einstein, "Preussische akademie der wissenschaften", Phys.-Math. Klasse, Sitzungsberichte p. 3–14 (1925).

[4] C. Cohen-Tannoudji, J. Dalibard, et F. Laloë, "La condensation de Bose-Einstein dans les gaz", dans "Einstein aujourd'hui," (CNRS Editions et EDP Sciences, 2005). URL : http://www.phys.ens.fr/~dalibard/publications/einstein_2005.pdf.

[5] O. Penrose et L. Onsager, "Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium", Phys. Rev. **104**, 576–584 (1956).

[6] S. Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable, et A. Ashkin, "Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure", Phys. Rev. Lett. **55**, 48–51 (1985).

[7] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, et D. E. Pritchard, "Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure", Phys. Rev. Lett. **59**, 2631–2634 (1987).

[8] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, et E. A. Cornell, "Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor", Science **269**, 198–201 (1995).

[9] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, et R. G. Hulet, "Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions", Phys. Rev. Lett. **75**, 1687–1690 (1995).

[10] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. A. Joffe, M. R. Andrews, et W. Ketterle, "Evaporative Cooling of Sodium Atoms", Phys. Rev. Lett. **74**, 5202–5205 (1995).

[11] B. DeMarco et D. S. Jin, "Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas", Science **285**, 1703–1706 (1999).

[12] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, et C. Salomon, "Quasipure Bose-Einstein Condensate Immersed in a Fermi Sea", Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001).

[13] A. G. Truscott, K. E. Strecker, W. I. McAlexander, G. B. Partridge, et R. G. Hulet, "Observation of Fermi Pressure in a Gas of Trapped Atoms", Science **291**, 2570–2572 (2001).

[14] M. Greiner, C. A. Regal, et D. S. Jin, "Emergence of a molecular Bose–Einstein condensate from a Fermi gas", Nature **426**, 537–540 (2003).

[15] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. H. Denschlag, et R. Grimm, "Bose-Einstein condensation of molecules", Science **302**, 2101–2103 (2003).

[16] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic, et W. Ketterle, "Observation of Bose-Einstein Condensation of Molecules", Phys. Rev. Lett. **91**, 250401 (2003).

[17] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, et W. Ketterle, "Observation of Interference Between Two Bose Condensates", Science **275**, 637–641 (1997).

[18] I. Bloch, T. W. Hänsch, et T. Esslinger, "Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition", Nature **403**, 166–170 (2000).

[19] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, et E. A. Cornell, "Vortices in a Bose-Einstein Condensate", Phys. Rev. Lett. **83**, 2498–2501 (1999).

[20] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, et J. Dalibard, "Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate", Phys. Rev. Lett. **84**, 806–809 (2000).

[21] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, et W. Ketterle, "Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates", Science **292**, 476–479 (2001).

[22] J. Weiner, V. S. Bagnato, S. Zilio, et P. S. Julienne, "Experiments and theory in cold and ultracold collisions", Rev. Mod. Phys. **71**, 1–85 (1999).

[23] J. O. Andersen, "Theory of the weakly interacting Bose gas", Rev. Mod. Phys. **76**, 599–639 (2004).

[24] E. P. Gross, "Structure of a quantized vortex in boson systems", Il Nuovo Cimento (1955-1965) **20**, 454–477 (1961).

[25] L. Pitaevskii, "Vortex lines in an imperfect Bose gas", Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961) URL : http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/e/13/2/p451?a=list.

[26] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, "Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases", Rev. Mod. Phys. **71**, 463–512 (1999).

[27] A. J. Leggett, "Bose-Einstein condensation in the alkali gases : Some fundamental concepts", Rev. Mod. Phys. **73**, 307–356 (2001).

[28] L. Fallani et A. Kastberg, "Cold atoms : A field enabled by light", EPL (Europhysics Letters) **110**, 53001 (2015).

[29] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen(De), et U. Sen, "Ultracold atomic gases in optical lattices : mimicking condensed matter physics and beyond", Advances in Physics **56**, 243–379 (2007).

[30] I. Bloch, J. Dalibard, et S. Nascimbène, "Quantum simulations with ultracold quantum gases", Nature Physics **8**, 267–276 (2012).

[31] T. Köhler, K. Góral, et P. S. Julienne, "Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances", Rev. Mod. Phys. **78**, 1311–1361 (2006).

[32] J. Bardeen, L. N. Cooper, et J. R. Schrieffer, "Theory of Superconductivity", Phys. Rev. **108**, 1175–1204 (1957).

[33] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, et W. Ketterle, "Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance", Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004).

[34] N. Navon, S. Nascimbène, F. Chevy, et C. Salomon, "The Equation of State of a Low-Temperature Fermi Gas with Tunable Interactions", Science **328**, 729–732 (2010).

[35] T. Debelhoir et N. Dupuis, "Critical region of the superfluid transition in the BCS-BEC crossover", Phys. Rev. A **93**, 023642 (2016).

[36] Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Cheneau, B. Battelier, et J. Dalibard, "Berezinskii–Kosterlitz–Thouless crossover in a trapped atomic gas", Nature **441**, 1118–1121 (2006).

[37] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Folling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hansch, et I. Bloch, "Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice", Nature **429**, 277–281 (2004).

[38] M. A. Cazalilla, "Bosonizing one-dimensional cold atomic gases", Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics **37**, S1 (2004).

[39] I. Bloch, J. Dalibard, et W. Zwerger, "Many-body physics with ultracold gases", Rev. Mod. Phys. **80**, 885–964 (2008).

[40] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, et I. Bloch, "Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms", Nature **415**, 39–44 (2002).

[41] R. Jördens, N. Strohmaier, K. Günter, H. Moritz, et T. Esslinger, "A Mott insulator of fermionic atoms in an optical lattice", Nature **455**, 204–207 (2008).

[42] U. Schneider, L. Hackermüller, S. Will, T. Best, I. Bloch, T. A. Costi, R. W. Helmes, D. Rasch, et A. Rosch, "Metallic and Insulating Phases of Repulsively Interacting Fermions in a 3D Optical Lattice", Science **322**, 1520–1525 (2008).

[43] W. Hofstetter, J. I. Cirac, P. Zoller, E. Demler, et M. D. Lukin, "High-Temperature Superfluidity of Fermionic Atoms in Optical Lattices", Phys. Rev. Lett. **89**, 220407 (2002).

[44] P. A. Lee, N. Nagaosa, et X.-G. Wen, "Doping a Mott insulator : Physics of high-temperature superconductivity", Rev. Mod. Phys. **78**, 17–85 (2006).

[45] P. W. Anderson, "Absence of Diffusion in Certain Random Lattices", Phys. Rev. **109**, 1492–1505 (1958).

[46] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, et A. Aspect, "Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder", Nature **453**, 891–894 (2008).

[47] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas, et P. Öhberg, "*Colloquium* : Artificial gauge potentials for neutral atoms", Rev. Mod. Phys. **83**, 1523–1543 (2011).

[48] G. Valtolina, F. Scazza, A. Amico, A. Burchianti, A. Recati, T. Enss, M. Inguscio, M. Zaccanti, et G. Roati, "Evidence for ferromagnetic instability in a repulsive Fermi gas of ultracold atoms", ArXiv e-prints (2016) URL : `https://arxiv.org/abs/1605.07850`.

[49] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, et W. Ketterle, "Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate", Phys. Rev. Lett. **80**, 2027–2030 (1998).

[50] Y. Kawaguchi et M. Ueda, "Spinor Bose–Einstein condensates ", Physics Reports **520**, 253–381 (2012).

[51] D. M. Stamper-Kurn et M. Ueda, "Spinor Bose gases : Symmetries, magnetism, and quantum dynamics", Rev. Mod. Phys. **85**, 1191–1244 (2013).

[52] M. Mézard, G. Parisi, et M.-A. Virasoro, *Spin glass theory and beyond* (World Scientific Publishing Co., Inc., Pergamon Press, 1990).

[53] L. Balents, "Spin liquids in frustrated magnets", Nature **464**, 199–208 (2010).

[54] C. Lacroix, P. Mendels, et F. Mila, *Introduction to Frustrated Magnetism : Materials, Experiments, Theory*, vol. 164 (Springer Science & Business Media, 2011). URL : `http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-642-10589-0`.

[55] H. Diep, *Frustrated spin systems* (World Scientific, 2013).

[56] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, et J. F. F. Mendes, "Critical phenomena in complex networks", Rev. Mod. Phys. **80**, 1275–1335 (2008).

[57] L. Santos, M. A. Baranov, J. I. Cirac, H.-U. Everts, H. Fehrmann, et M. Lewenstein, "Atomic Quantum Gases in Kagomé Lattices", Phys. Rev. Lett. **93**, 030601 (2004).

[58] A. Eckardt, P. Hauke, P. Soltan-Panahi, C. Becker, K. Sengstock, et M. Lewenstein, "Frustrated quantum antiferromagnetism with ultracold bosons in a triangular lattice", EPL (Europhysics Letters) **89**, 10010 (2010).

[59] A. Kosior et K. Sacha, "Simulation of frustrated classical XY models with ultracold atoms in three-dimensional triangular optical lattices", Phys. Rev. A **87**, 023602 (2013).

[60] J. Struck, C. Ölschläger, R. Le Targat, P. Soltan-Panahi, A. Eckardt, M. Lewenstein, P. Windpassinger, et K. Sengstock, "Quantum Simulation of Frustrated Classical Magnetism in Triangular Optical Lattices", Science **333**, 996–999 (2011).

[61] T. Debelhoir et N. Dupuis, "Simulating frustrated magnetism with spinor Bose gases", Phys. Rev. A **93**, 051603 (2016).

[62] A. Auerbach, *Interacting electrons and quantum magnetism* (Springer, 1994). doi :10.1007/978-1-4612-0869-3.

[63] M. Yosefin et E. Domany, "Phase transitions in fully frustrated spin systems", Phys. Rev. B **32**, 1778–1795 (1985).

[64] M. Tissier, "Une approche non perturbative de systèmes frustrés et de systèmes désordonnés", Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII (2001). URL : `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00001045/`.

[65] H. Kawamura, "Renormalization-group analysis of chiral transitions", Phys. Rev. B **38**, 4916–4928 (1988).

[66] B. Delamotte, D. Mouhanna, et M. Tissier, "Nonperturbative renormalization-group approach to frustrated magnets", Phys. Rev. B **69**, 134413 (2004).

[67] M. F. Collins et O. A. Petrenko, "Review/Synthèse : Triangular antiferromagnets", Canadian Journal of Physics **75**, 605–655 (1997).

[68] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena* (Oxford Clarendon Press, 2002).

[69] M. Tissier, B. Delamotte, et D. Mouhanna, "XY frustrated systems : Continuous exponents in discontinuous phase transitions", Phys. Rev. B **67**, 134422 (2003).

[70] M. Itakura, "Monte Carlo renormalization group study of the Heisenberg and the XY antiferromagnet on the stacked triangular lattice and the chiral φ^4 model", Journal of the Physical Society of Japan **72**, 74–82 (2003).

[71] A. Peles, B. W. Southern, B. Delamotte, D. Mouhanna, et M. Tissier, "Critical properties of a continuous family of XY noncollinear magnets", Phys. Rev. B **69**, 220408 (2004).

[72] G. Quirion, X. Han, M. L. Plumer, et M. Poirier, "First Order Phase Transition in the Frustrated Triangular Antiferromagnet $CsNiCl_3$", Phys. Rev. Lett. **97**, 077202 (2006).

[73] S. Bekhechi, B. W. Southern, A. Peles, et D. Mouhanna, "Short-time dynamics of a family of XY noncollinear magnets", Phys. Rev. E **74**, 016109 (2006).

[74] M. Zelli, K. Boese, et B. W. Southern, "Short-time dynamics study of Heisenberg noncollinear magnets", Phys. Rev. B **76**, 224407 (2007).

[75] V. T. Ngo et H. T. Diep, "Phase transition in Heisenberg stacked triangular antiferromagnets : End of a controversy", Phys. Rev. E **78**, 031119 (2008).

[76] P. Calabrese, P. Parruccini, A. Pelissetto, et E. Vicari, "Critical behavior of $O(2) \bigotimes O(N)$ symmetric models", Phys. Rev. B **70**, 174439 (2004).

[77] D. Bailin, A. Love, et M. A. Moore, "Phase transitions not controlled by stable fixed points", Journal of Physics C: Solid State Physics **10**, 1159 (1977).

[78] D. R. T. Jones, A. Love, et M. A. Moore, "Phase transitions in superfluid ^{3}He", Journal of Physics C: Solid State Physics **9**, 743 (1976).

[79] T. Garel et P. Pfeuty, "Commensurability effects on the critical behaviour of systems with helical ordering", Journal of Physics C: Solid State Physics **9**, L245 (1976).

[80] P. Bak, S. Krinsky, et D. Mukamel, "First-Order Transitions, Symmetry, and the ϵ Expansion", Phys. Rev. Lett. **36**, 52–55 (1976).

[81] Z. Barak et M. B. Walker, "First-order phase transitions in Tb, Dy, and Ho", Phys. Rev. B **25**, 1969–1972 (1982).

[82] H. Kawamura, "Phase Transition of the Three-Dimensional Heisenberg Antiferromagnet on the Layered-Triangular Lattice", Journal of the Physical Society of Japan **54**, 3220–3223 (1985).

[83] H. Kawamura, "Phase Transition of the Three-Dimensional XY Antiferromagnet on the Layered-Triangular Lattice", Journal of the Physical Society of Japan **55**, 2095–2098 (1986).

[84] H. Kawamura, "New Critical Behavior I–Heisenberg Antiferromagnet on the Layered-Triangular Lattice", Journal of the Physical Society of Japan **56**, 474–491 (1987).

[85] G. Zumbach, "Almost second order phase transitions", Phys. Rev. Lett. **71**, 2421–2424 (1993).

[86] G. Zumbach, "Phase transitions with O(n) symmetry broken down to O(n – p)", Nuclear Physics B **413**, 771 – 791 (1994).

[87] G. Zumbach, "The local potential approximation of the renormalization group and its applications", Physics Letters A **190**, 225 – 230 (1994).

[88] M. Tissier, D. Mouhanna, et B. Delamotte, "Nonperturbative approach of the principal chiral model between two and four dimensions", Phys. Rev. B **61**, 15327–15330 (2000).

[89] M. Tissier, B. Delamotte, et D. Mouhanna, "Frustrated Heisenberg Magnets : A Nonperturbative Approach", Phys. Rev. Lett. **84**, 5208–5211 (2000).

[90] B. Delamotte, M. Dudka, D. Mouhanna, et S. Yabunaka, "Functional renormalization group approach to noncollinear magnets", Phys. Rev. B **93**, 064405 (2016).

[91] P. Calabrese et P. Parruccini, "Five-loop ϵ expansion for $O(n) \times O(n)$ spin models", Nuclear Physics B **679**, 568–596 (2004).

[92] Y. Holovatch, D. Ivaneyko, et B. Delamotte, "On the criticality of frustrated spin systems with noncollinear order", Journal of Physics A: Mathematical and General **37**, 3569 (2004).

[93] S. Antonenko, A. Sokolov, et K. Varnashev, "Chiral transitions in three-dimensional magnets and higher order ϵ expansion", Physics Letters A **208**, 161 – 164 (1995).

[94] A. Pelissetto, P. Rossi, et E. Vicari, "Large-n critical behavior of O (n)× O (m) spin models", Nuclear Physics B **607**, 605 – 634 (2001).

[95] P. Calabrese, P. Parruccini, et A. I. Sokolov, "Chiral phase transitions : Focus driven critical behavior in systems with planar and vector ordering", Phys. Rev. B **66**, 180403 (2002).

[96] P. Calabrese, P. Parruccini, et A. I. Sokolov, "Critical thermodynamics of a three-dimensional chiral model for $N > 3$", Phys. Rev. B **68**, 094415 (2003).

[97] B. Delamotte, Y. Holovatch, D. Ivaneyko, D. Mouhanna, et M. Tissier, "Fixed points in frustrated magnets revisited", Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2008**, P03014 (2008).

[98] B. Delamotte, M. Dudka, Y. Holovatch, et D. Mouhanna, "Relevance of the fixed dimension perturbative approach to frustrated magnets in two and three dimensions", Phys. Rev. B **82**, 104432 (2010).

[99] B. Delamotte, M. Dudka, Y. Holovatch, et D. Mouhanna, "Analysis of the 3d massive renormalization group perturbative expansions : a delicate case", Condens. Matter Phys. **13**, 43703 (2010).

[100] S. El-Showk, M. F. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin, et A. Vichi, "Solving the 3D Ising model with the conformal bootstrap", Phys. Rev. D **86**, 025022 (2012).

[101] S. El-Showk, M. F. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin, et A. Vichi, "Solving the 3d Ising Model with the Conformal Bootstrap II. c-Minimization and Precise Critical Exponents", Journal of Statistical Physics **157**, 869–914 (2014).

[102] Y. Nakayama et T. Ohtsuki, "Approaching the conformal window of $O(n)\times O(m)$ symmetric Landau-Ginzburg models using the conformal bootstrap", Phys. Rev. D **89**, 126009 (2014).

[103] Y. Nakayama et T. Ohtsuki, "Bootstrapping phase transitions in QCD and frustrated spin systems", Phys. Rev. D **91**, 021901 (2015).

[104] T. Ohmi et K. Machida, "Bose-Einstein Condensation with Internal Degrees of Freedom in Alkali Atom Gases", Journal of the Physical Society of Japan **67**, 1822–1825 (1998).

[105] T.-L. Ho, "Spinor Bose Condensates in Optical Traps", Phys. Rev. Lett. **81**, 742–745 (1998).

[106] Y. Kawaguchi et M. Ueda, "Symmetry classification of spinor Bose-Einstein condensates", Phys. Rev. A **84**, 053616 (2011).

[107] G. Baym, J.-P. Blaizot, M. Holzmann, F. Laloë, et D. Vautherin, "The Transition Temperature of the Dilute Interacting Bose Gas", Phys. Rev. Lett. **83**, 1703–1706 (1999).

[108] G. Baym, J.-P. Blaizot, et J. Zinn-Justin, "The transition temperature of the dilute interacting Bose gas for N internal states", EPL (Europhysics Letters) **49**, 150 (2000).

[109] M. V. Simkin et E. G. D. Cohen, "Magnetic properties of a Bose-Einstein condensate", Phys. Rev. A **59**, 1528–1532 (1999).

[110] J.-P. Blaizot, "Nonperturbative renormalization group and Bose-Einstein condensation", dans "Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems," (Springer, 2012), p. 1–48. URL : `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-27320-9_1`.

[111] Q. Gu et R. A. Klemm, "Ferromagnetic phase transition and Bose-Einstein condensation in spinor Bose gases", Phys. Rev. A **68**, 031604 (2003).

[112] Q. Gu, K. Bongs, et K. Sengstock, "Spin waves in ferromagnetically coupled spinor Bose gases", Phys. Rev. A **70**, 063609 (2004).

[113] K. Kis-Szabó, P. Szépfalusy, et G. Szirmai, "Static properties and spin dynamics of the ferromagnetic spin-1 Bose gas in a magnetic field", Phys. Rev. A **72**, 023617 (2005).

[114] C. Tao, P. Wang, J. Qin, et Q. Gu, "Thermodynamic properties of the itinerant-boson ferromagnet", Phys. Rev. B **78**, 134403 (2008).

[115] S. S. Natu et E. J. Mueller, "Pairing, ferromagnetism, and condensation of a normal spin-1 Bose gas", Phys. Rev. A **84**, 053625 (2011).

[116] P. Arnold et G. Moore, "BEC Transition Temperature of a Dilute Homogeneous Imperfect Bose Gas", Phys. Rev. Lett. **87**, 120401 (2001).

[117] M. Vengalattore, J. Guzman, S. R. Leslie, F. Serwane, et D. M. Stamper-Kurn, "Periodic spin textures in a degenerate $F = 1$ ^{87}Rb spinor Bose gas", Phys. Rev. A **81**, 053612 (2010).

[118] M. D. Barrett, J. A. Sauer, et M. S. Chapman, "All-Optical Formation of an Atomic Bose-Einstein Condensate", Phys. Rev. Lett. **87**, 010404 (2001).

[119] Chang Ming-Shien, Qin Qishu, Zhang Wenxian, You Li, et Chapman Michael S., "Coherent spinor dynamics in a spin-1 Bose condensate", Nat Phys **1**, 111–116 (2005).

[120] E. G. M. van Kempen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, D. J. Heinzen, et B. J. Verhaar, "Interisotope Determination of Ultracold Rubidium Interactions from Three High-Precision Experiments", Phys. Rev. Lett. **88**, 093201 (2002).

[121] S. Falke, H. Knöckel, J. Friebe, M. Riedmann, E. Tiemann, et C. Lisdat, "Potassium ground-state scattering parameters and Born-Oppenheimer potentials from molecular spectroscopy", Phys. Rev. A **78**, 012503 (2008).

[122] P. Arnold et B. Tomášik, "$T_{\mathbf{c}}$ for trapped dilute Bose gases : A second-order result", Phys. Rev. A **64**, 053609 (2001).

[123] X. Zhang, C.-L. Hung, S.-K. Tung, et C. Chin, "Quantum critical behavior of ultracold atoms in two-dimensional optical lattices", Science **335**, 1070 (2012).

[124] T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, A. Öttl, M. Köhl, et T. Esslinger, "Critical Behavior of a Trapped Interacting Bose Gas", Science **315**, 1556–1558 (2007).

[125] A. L. Gaunt, T. F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R. P. Smith, et Z. Hadzibabic, "Bose-Einstein Condensation of Atoms in a Uniform Potential", Phys. Rev. Lett. **110**, 200406 (2013).

[126] J.-F. Clément, J.-P. Brantut, M. Robert-de Saint-Vincent, R. A. Nyman, A. Aspect, T. Bourdel, et P. Bouyer, "All-optical runaway evaporation to Bose-Einstein condensation", Phys. Rev. A **79**, 061406 (2009).

[127] J. Stenger, S. Inouye, D. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. Chikkatur, et W. Ketterle, "Spin domains in ground-state Bose–Einstein condensates", Nature **396**, 345–348 (1998).

[128] G. Ceccarelli, J. Nespolo, A. Pelissetto, et E. Vicari, "Bose-Einstein condensation and critical behavior of two-component bosonic gases", Phys. Rev. A **92**, 043613 (2015).

[129] G. Ceccarelli, J. Nespolo, A. Pelissetto, et E. Vicari, "Phase diagram and multicritical behaviors of mixtures of three-dimensional bosonic gases", Phys. Rev. A **93**, 033647 (2016).

[130] B. Delamotte, "An Introduction to the Nonperturbative Renormalization Group", dans "Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems," (Springer, 2012), p. 49–132. URL : `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-27320-9_2`.

[131] L. Canet, "Processus de réaction-diffusion : une approche par le groupe de renormalisation non perturbatif", Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot-Paris VII (2004). URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00006919/.

[132] M. Le Bellac, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge-Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs* (EDP sciences, 2012).

[133] L. P. Kadanoff, "Scaling laws for Ising models near T_c", Physics **2**, 263–272 (1966) URL : https://inspirehep.net/record/50012?ln=fr.

[134] K. G. Wilson, "Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture", Phys. Rev. B **4**, 3174–3183 (1971).

[135] K. G. Wilson, "Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior", Phys. Rev. B **4**, 3184–3205 (1971).

[136] K. G. Wilson, "The renormalization group : Critical phenomena and the Kondo problem", Rev. Mod. Phys. **47**, 773–840 (1975).

[137] K. G. Wilson et M. E. Fisher, "Critical Exponents in 3.99 Dimensions", Phys. Rev. Lett. **28**, 240–243 (1972).

[138] J. Polchinski, "Renormalization and effective lagrangians", Nuclear Physics B **231**, 269 – 295 (1984).

[139] T. R. Morris, "The Exact Renromalization Group and Approximate Solutions", International Journal of Modern Physics A **09**, 2411–2449 (1994).

[140] C. Wetterich, "Average action and the renormalization group equations", Nuclear Physics B **352**, 529 – 584 (1991).

[141] C. Wetterich, "Exact evolution equation for the effective potential", Physics Letters B **301**, 90 – 94 (1993).

[142] C. Wetterich, "The average action for scalar fields near phase transitions", Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **57**, 451–469 (1993).

[143] C. Wetterich, "Improvement of the average action", Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **60**, 461–469 (1993).

[144] U. Ellwanger, "Flow equations for N point functions and bound states", Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **62**, 503–510 (1994).

[145] T. R. Morris, "Derivative expansion of the exact renormalization group", Physics Letters B **329**, 241 – 248 (1994).

[146] T. R. Morris, "On truncations of the exact renormalization group", Physics Letters B **334**, 355 – 362 (1994).

[147] A. Parola et L. Reatto, "Liquid-State Theory for Critical Phenomena", Phys. Rev. Lett. **53**, 2417–2420 (1984).

[148] A. Parola, "A smooth cut-off formulation of the hierarchical reference theory of fluids", Journal of Physics C: Solid State Physics **19**, 5071 (1986).

[149] A. Parola, D. Pini, et L. Reatto, "First-order phase transitions, the Maxwell construction, and the momentum-space renormalization group", Phys. Rev. E **48**, 3321–3332 (1993).

[150] A. Parola et L. Reatto, "Liquid state theories and critical phenomena", Advances in Physics **44**, 211–298 (1995).

[151] N. Tetradis et C. Wetterich, "Critical exponents from the effective average action", Nuclear Physics B **422**, 541 – 592 (1994).

[152] D. F. Litim, "Optimisation of the exact renormalisation group", Physics Letters B **486**, 92 – 99 (2000).

[153] N. Dupuis et K. Sengupta, "Non-perturbative renormalization-group approach to lattice models", The European Physical Journal B **66**, 271–278 (2008).

[154] T. Machado et N. Dupuis, "From local to critical fluctuations in lattice models : A nonperturbative renormalization-group approach", Phys. Rev. E **82**, 041128 (2010).

[155] D. F. Litim, "Derivative expansion and renormalisation group flows", Journal of High Energy Physics **2001**, 059 (2001).

[156] L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, et J. Vidal, "Optimization of the derivative expansion in the nonperturbative renormalization group", Phys. Rev. D **67**, 065004 (2003).

[157] L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, et J. Vidal, "Nonperturbative renormalization group approach to the Ising model : A derivative expansion at order ∂^4", Phys. Rev. B **68**, 064421 (2003).

[158] L. Canet, "Optimization of field-dependent nonperturbative renormalization group flows", Phys. Rev. B **71**, 012418 (2005).

[159] J.-P. Blaizot, R. Méndez-Galain, et N. Wschebor, "Non-perturbative renormalization group calculation of the scalar self-energy", The European Physical Journal B **58**, 297–309 (2007).

[160] J.-P. Blaizot, R. Méndez-Galain, et N. Wschebor, "A new method to solve the non-perturbative renormalization group equations", Physics Letters B **632**, 571 – 578 (2006).

[161] F. Benitez, J.-P. Blaizot, H. Chaté, B. Delamotte, R. Méndez-Galain, et N. Wschebor, "Solutions of renormalization-group flow equations with full momentum dependence", Phys. Rev. E **80**, 030103 (2009).

[162] F. Benitez, J.-P. Blaizot, H. Chaté, B. Delamotte, R. Méndez-Galain, et N. Wschebor, "Nonperturbative renormalization group preserving full-momentum dependence : Implementation and quantitative evaluation", Phys. Rev. E **85**, 026707 (2012).

[163] J. Berges, N. Tetradis, et C. Wetterich, "Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics", Physics Reports **363**, 223–386 (2002).

[164] W. Metzner, M. Salmhofer, C. Honerkamp, V. Meden, et K. Schönhammer, "Functional renormalization group approach to correlated fermion systems", Rev. Mod. Phys. **84**, 299–352 (2012).

[165] N. Dupuis, "Nonperturbative renormalization-group approach to fermion systems in the two-particle-irreducible effective action formalism", Phys. Rev. B **89**, 035113 (2014).

[166] G. Tarjus et M. Tissier, "Nonperturbative Functional Renormalization Group for Random-Field Models : The Way Out of Dimensional Reduction", Phys. Rev. Lett. **93**, 267008 (2004).

[167] M. Tissier et G. Tarjus, "Supersymmetry and Its Spontaneous Breaking in the Random Field Ising Model", Phys. Rev. Lett. **107**, 041601 (2011).

[168] L. Canet, B. Delamotte, O. Deloubrière, et N. Wschebor, "Nonperturbative Renormalization-Group Study of Reaction-Diffusion Processes", Phys. Rev. Lett. **92**, 195703 (2004).

[169] L. Canet, H. Chaté, B. Delamotte, et N. Wschebor, "Nonperturbative Renormalization Group for the Kardar-Parisi-Zhang Equation", Phys. Rev. Lett. **104**, 150601 (2010).

[170] J.-P. Kownacki et D. Mouhanna, "Crumpling transition and flat phase of polymerized phantom membranes", Phys. Rev. E **79**, 040101 (2009).

[171] M. Kindermann et C. Wetterich, "Phase Transitions in Liquid ^3He", Phys. Rev. Lett. **86**, 1034–1037 (2001).

[172] M. Reuter, "Nonperturbative evolution equation for quantum gravity", Phys. Rev. D **57**, 971–985 (1998).

[173] M. Le Bellac, G. Barton *et al.*, *Quantum and statistical field theory* (Clarendon Press Oxford, 1991).

[174] N. Goldenfeld, *Lectures on phase transitions and the renormalization group* (Addison-Wesley, Advanced Book Program, Reading, 1992).

[175] C. Bagnuls et C. Bervillier, "Exact renormalization group equations : an introductory review", Physics Reports **348**, 91 – 157 (2001).

[176] M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, P. Rossi, et E. Vicari, "Critical exponents and equation of state of the three-dimensional Heisenberg universality class", Phys. Rev. B **65**, 144520 (2002).

[177] G. v. Gersdorff et C. Wetterich, "Nonperturbative renormalization flow and essential scaling for the Kosterlitz-Thouless transition", Phys. Rev. B **64**, 054513 (2001).

[178] C. Castellani, C. Di Castro, F. Pistolesi, et G. C. Strinati, "Infrared Behavior of Interacting Bosons at Zero Temperature", Phys. Rev. Lett. **78**, 1612–1615 (1997).

[179] F. Pistolesi, C. Castellani, C. Di Castro, et G. C. Strinati, "Renormalization-group approach to the infrared behavior of a zero-temperature Bose system", Phys. Rev. B **69**, 024513 (2004).

[180] N. Dupuis et K. Sengupta, "Non-perturbative renormalization group approach to zero-temperature Bose systems", EPL (Europhysics Letters) **80**, 50007 (2007).

[181] S. Floerchinger et C. Wetterich, "Functional renormalization for Bose-Einstein condensation", Phys. Rev. A **77**, 053603 (2008).

[182] A. Sinner, N. Hasselmann, et P. Kopietz, "Spectral Function and Quasiparticle Damping of Interacting Bosons in Two Dimensions", Phys. Rev. Lett. **102**, 120601 (2009).

[183] A. Sinner, N. Hasselmann, et P. Kopietz, "Functional renormalization-group approach to interacting bosons at zero temperature", Phys. Rev. A **82**, 063632 (2010).

[184] N. Dupuis, "Infrared behavior in systems with a broken continuous symmetry : Classical O(N) model versus interacting bosons", Phys. Rev. E **83**, 031120 (2011).

[185] N. Dupuis, "Infrared behavior and spectral function of a Bose superfluid at zero temperature", Phys. Rev. A **80**, 043627 (2009).

[186] N. Dupuis et A. Rançon, "Infrared behavior of interacting bosons at zero temperature", Laser Physics **21**, 1470–1479 (2011).

[187] N. N. Bogolyubov, "On the theory of superfluidity", J. Phys. (USSR) **11**, 23–32 (1947) URL : http://ufn.ru/pdf/jphysussr/1947/11_1/3jphysussr19471101.pdf.

[188] V. Popov et A. Seredniakov, "Low-frequency asymptotic form of the self-energy parts of a superfluid Bose system at $T = 0$", Zh. Eksp. Teor. Fiz **77**, 377–382 (1979) URL : http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/e/50/1/p193?a=list.

[189] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, et D. S. Fisher, "Boson localization and the superfluid-insulator transition", Phys. Rev. B **40**, 546–570 (1989).

[190] Rançon, A., "Criticalité quantique et universalité d'un gaz de Bose au voisinage de la transition de Mott", Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI (2012). URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00761694/.

[191] A. Rançon et N. Dupuis, "Nonperturbative renormalization group approach to the Bose-Hubbard model", Phys. Rev. B **83**, 172501 (2011).

[192] A. Rançon et N. Dupuis, "Nonperturbative renormalization group approach to strongly correlated lattice bosons", Phys. Rev. B **84**, 174513 (2011).

[193] A. Rançon et N. Dupuis, "Thermodynamics of a Bose gas near the superfluid–Mott-insulator transition", Phys. Rev. A **86**, 043624 (2012).

[194] A. Altland et B. D. Simons, *Condensed matter field theory* (Cambridge University Press, 2010).

[195] S. Sachdev, *Quantum phase transitions* (Cambridge University Press, 2011).

[196] P. Grüter, D. Ceperley, et F. Laloë, "Critical Temperature of Bose-Einstein Condensation of Hard-Sphere Gases", Phys. Rev. Lett. **79**, 3549–3552 (1997).

[197] S. Bornholdt, N. Tetradis, et C. Wetterich, "Coleman-Weinberg phase transition in two-scalar models", Physics Letters B **348**, 89 – 99 (1995).

[198] N. Tetradis et D. Litim, "Analytical solutions of exact renormalization group equations", Nuclear Physics B **464**, 492 – 511 (1996).

[199] J. Berges, N. Tetradis, et C. Wetterich, "Coarse graining and first order phase transitions", Physics Letters B **393**, 387–394 (1997).

[200] K. Fukushima, K. Kamikado, et B. Klein, "Second-order and fluctuation-induced first-order phase transitions with functional renormalization group equations", Phys. Rev. D **83**, 116005 (2011).

[201] N. Tetradis, "Renormalization-group study of weakly first-order phase transitions", Physics Letters B **431**, 380 – 386 (1998).

[202] L. Landau et E. Lifshitz, *Statistical Physics*, vol. 5 (Pergamon Press, 1958).

[203] J.-C. Tolédano et P. Tolédano, *The Landau theory of phase transitions* (World Scientific, 1987).

[204] J. Lajzerowicz, "Domain wall near a first order phase transition : role of elastic forces", Ferroelectrics **35**, 219–222 (1981).

[205] C. C. Huang et J. M. Viner, "Nature of the smectic-A—smectic-C phase transition in liquid crystals", Phys. Rev. A **25**, 3385–3388 (1982).

[206] K. Binder, "Theory of first-order phase transitions", Reports on Progress in Physics **50**, 783 (1987).

[207] J. Berges et C. Wetterich, "Equation of state and coarse grained free energy for matrix models", Nuclear Physics B **487**, 675 – 720 (1997).

[208] G. Fejös, "Fluctuation induced first order phase transition in $U(n)\times U(n)$ models using chiral invariant expansion of functional renormalization group flows", Phys. Rev. D **90**, 096011 (2014).

[209] S. Yabunaka et B. Delamotte, "The Local Potential Approach to frustrated antiferromagnets", ArXiv e-prints (2016) URL : https://arxiv.org/abs/1604.01916.

[210] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, "Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas", Phys. Rev. A **54**, R4633–R4636 (1996).

[211] N. Navon, A. L. Gaunt, R. P. Smith, et Z. Hadzibabic, "Critical dynamics of spontaneous symmetry breaking in a homogeneous Bose gas", Science **347**, 167–170 (2015).

[212] D. J. Papoular, G. V. Shlyapnikov, et J. Dalibard, "Microwave-induced Fano-Feshbach resonances", Phys. Rev. A **81**, 041603 (2010).

[213] P. Jakubczyk et A. Eberlein, "Thermodynamics of the two-dimensional XY model from functional renormalization", Phys. Rev. E **93**, 062145 (2016).

[214] F. Rose, F. Léonard, et N. Dupuis, "Higgs amplitude mode in the vicinity of a $(2+1)$-dimensional quantum critical point : A nonperturbative renormalization-group approach", Phys. Rev. B **91**, 224501 (2015).

[215] V. Corre, "Magnetism in spin-1 Bose-Einstein condensates with antiferromagnetic interactions", Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure - ENS PARIS (2014). URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01117109/.

[216] P. Calabrese, A. Pelissetto, et E. Vicari, "Multicritical behavior in frustrated spin systems with non-collinear order", Nuclear Physics B **709**, 550 – 577 (2005).

[217] M. De Prato, A. Pelissetto, et E. Vicari, "Normal-to-planar superfluid transition in ^{3}He", Phys. Rev. B **70**, 214519 (2004).

Thibault DEBELHOIR **15 septembre 2016**

Sujet : Transitions de phase dans les gaz de bosons de spin 1 et les systèmes magnétiques frustrés

Résumé : Cette thèse porte sur l'étude des gaz tridimensionnels de bosons de spin 1 avec interaction ferromagnétique. Nous montrons que la transition superfluide à température finie peut être étudiée par une théorie des champs classique de symétrie $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$. Ce type de modèle est utilisé pour décrire le magnétisme frustré dans de nombreux matériaux, en particulier les antiferroaimants sur réseau triangulaire. La nature de la transition de phase dans le modèle $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$ (premier ou second ordre) fait l'objet d'une controverse d'ordre à la fois expérimental, numérique et théorique. Notre approche théorique est basée sur le groupe de renormalisation non-perturbatif et prédit une transition faiblement du premier ordre avec un comportement « pseudo-critique ». Nous relions ce dernier au comportement critique observé dans le modèle $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ lorsque $N \geqslant N_{\mathrm{c}} \simeq 5.3$. Dans les gaz de bosons de spin 1 (^{87}Rb, ^{41}K et ^{7}Li), la longueur de corrélation à la transition est grande devant la taille typique des gaz dans les expériences actuelles. Néanmoins les comportements en loi de puissance observés près de la transition permettent de définir des exposants « pseudo-critiques » non-universels. La valeur de ces exposants varie d'un gaz à l'autre. Nous discutons dans quelle mesure la détermination expérimentale de ces exposants permettrait d'apporter des éléments concrets en faveur d'une transition du premier ordre dans le modèle $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$.

Mots clés : transitions de phase, bosons de spin 1, atomes froids, superfluidité, magnétisme frustré, groupe de renormalisation non-perturbatif

Subject : Phase transitions in spin-1 Bose gases and frustrated magnetic systems

Abstract: We study tridimensional spin-1 Bose gases with ferromagnetic interaction. The superfluid transition at finite temperature can be studied by a classical field theory with $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$ symmetry. This kind of model has been used to describe frustrated magnetism in several materials, in particular antiferromagnets on a triangular lattice. The nature of the phase transition in the $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$ model (first or second-order) has been the subject of experimental, numerical and theoretical controversy. Our theoretical approach is based on the nonperturbative renormalization group and predicts a weakly first-order transition with "pseudo-critical" behavior. We relate the latter to the critical behavior observed in the $\mathrm{O}(N) \times \mathrm{O}(2)$ model when $N \geqslant N_{\mathrm{c}} \simeq 5.3$. In spin-1 Bose gases (^{87}Rb, ^{41}K and ^{7}Li), the correlation length at the transition is larger than the typical size of the system in current experiments. However the power-law behavior observed near the transition allows one to define nonuniversal "pseudo-critical" exponents. The value of these exponents varies from one gas to the other. We discuss to what extent the experimental determination of these exponents could support the claim of a first order transition in the $\mathrm{O}(3) \times \mathrm{O}(2)$ model.

Keywords : phase transitions, spin-1 bosons, cold atoms, superfluidity, frustrated magnetism, nonperturbative renormalization group