



HAL
open science

Étude de méthodes précises d'approximation d'équations différentielles stochastiques ou d'équations aux dérivées partielles déterministes en Finance

Lord Bienvenu Youmbi Tchuenkam

► **To cite this version:**

Lord Bienvenu Youmbi Tchuenkam. Étude de méthodes précises d'approximation d'équations différentielles stochastiques ou d'équations aux dérivées partielles déterministes en Finance. Mathématiques générales [math.GM]. Université Côte d'Azur, 2016. Français. NNT : 2016AZUR4126 . tel-01492856

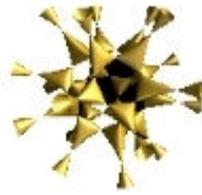
HAL Id: tel-01492856

<https://theses.hal.science/tel-01492856>

Submitted on 20 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale de SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES N° 364
Unité de recherche : LABORATOIRE JEAN ALEXANDRE DIEUDONNÉ

THÈSE DE DOCTORAT

présentée en vue de l'obtention du
grade de docteur en MATHÉMATIQUES
de
L'UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

par

Lord Bienvenu YOUMBI TCHUENKAM

ÉTUDE DE MÉTHODES PRÉCISES D'APPROXIMATION
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES
OU D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DÉTERMINISTES EN FINANCE.

Dirigée par **Stéphane DESCOMBES** et
co-encadrée par **Florian PELGRIN**

Soutenue le 12 décembre 2016

Devant le jury composé de :

Jacques BLUM	PR	Université Nice Sophia Antipolis	<i>Président</i>
Stéphane DESCOMBES	PR	Université Nice Sophia Antipolis	<i>Directeur</i>
Pauline LAFFITE	PR	École Centrale Paris	<i>Rapporteur</i>
Florian PELGRIN	PR	EDHEC Business School	<i>Co-Directeur</i>
Michael ROCKINGER	PR	HEC Université Lausanne	<i>Rapporteur</i>

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements 13

Introduction 17

CHAPITRE I MÉTHODES BASÉES SUR DES SCHÉMAS DE DISCRÉTISATIONS

1	INTRODUCTION	31
2	DISCRÉTISATIONS DE PROCESSUS STOCHASTIQUES	32
2.1	Description du modèle	32
2.2	Schémas d'approximations	33
2.2.1	<i>Partitionnement</i>	33
2.2.2	<i>Régimes asymptotiques</i>	33
2.2.3	<i>Approximation d'Euler-Maruyama</i>	34
2.2.4	<i>La méthode des trapèzes</i>	34
2.2.5	<i>Le schéma de Milstein</i>	34
3	BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS AUTO-RÉGRESSIF AR(1)	35
3.1	Formulation des estimateurs	35
3.2	Biais et erreur quadratique moyenne	36
3.3	Approche de Bao et Ullah dans le calcul du biais	38

4	BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS ORNSTEIN-UHLENBECK	39
4.1	Le modèle	39
4.2	Biais dans l'estimation du paramètre de retour à la moyenne	40
4.2.1	<i>A l'aide du modèle discret exact</i>	41
4.2.2	<i>A l'aide du modèle discret d'Euler</i>	45
4.2.3	<i>A l'aide du modèle discret des Trapèzes</i>	48
5	BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS COX-INGERSOLL-ROSS	56
5.1	Le modèle Cox, Ingersoll et Ross	56
5.2	Détermination du biais	58
5.2.1	<i>En utilisant le modèle discret exact</i>	58
5.2.2	<i>En utilisant le modèle discret de Nowman</i>	58
5.2.3	<i>En utilisant le modèle discret d'Euler</i>	60
5.2.4	<i>En utilisant le modèle discret de Milstein</i>	60
6	BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS ORNSTEIN-UHLENBECK-LÉVY	62
6.1	Préliminaires	62
6.2	Détermination du biais	63
7	SYNTHÈSE DU CHAPITRE	67

CHAPITRE II SKEWNESS ET KURTOSIS DANS UN PROCESSUS ORNSTEIN-UHLENBECK

1	INTRODUCTION	70
2	ESPÉRANCE DU PRODUIT DE DEUX FORMES QUADRATIQUES	71
2.1	Présentation du problème	71
2.2	Détermination du coefficient δ_{33}	75
2.2.1	<i>Définitions préliminaires</i>	75
2.2.2	<i>Principe de calcul</i>	77
3	DÉTERMINATION DES TRACES	79
3.1	Les traces de la forme $Tr[(C_2 \Sigma_{n+1})^p]$	79
3.1.1	<i>Cas $p = 1 : Tr[C_2 \Sigma_{n+1}]$</i>	80
3.1.2	<i>Cas $p = 2 : Tr[(C_2 \Sigma_{n+1})^2]$</i>	81
3.2	Les traces de la forme $Tr[(C_1 \Sigma_{n+1})^p]$	83
3.2.1	<i>Cas $p = 1 : Tr[C_1 \Sigma_{n+1}]$</i>	83
3.2.2	<i>Cas $p = 2 : Tr[(C_1 \Sigma_{n+1})^2]$</i>	84
4	BIAIS DU PARAMÈTRE DE RETOUR À LA MOYENNE	89

5	SIMULATIONS DE MONTE-CARLO	95
5.1	Le biais	95
5.1.1	$x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$	96
5.1.2	$x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$	97
5.2	L'erreur quadratique moyenne	99
5.2.1	$x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$	99
5.2.2	$x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$	101
6	SYNTHÈSE DU CHAPITRE	103

CHAPITRE III EXPANSION STOCHASTIQUE D'ORDRE ÉLEVÉ

1	INTRODUCTION	105
2	EXPANSION STOCHASTIQUE D'ORDRE ÉLEVÉ	106
3	ILLUSTRATION	109
3.1	Processus AR(1)	109
3.1.1	<i>Description du modèle</i>	109
3.1.2	<i>Principaux résultats</i>	110
3.2	Processus moyenne mobile d'ordre 1	112
3.2.1	<i>Définition et premières propriétés</i>	112
3.2.2	<i>Estimation, condition des moments et validation des hypothèses</i>	113
3.2.3	<i>Expansion d'ordre élevé de la condition des moments</i>	115
4	SYNTHÈSE DU CHAPITRE	120

CHAPITRE IV RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR AVEC DES DONNÉES INITIALES NON RÉGULIÈRES PAR DES MÉTHODES EXPLICITES

1	INTRODUCTION	121
2	RAPPELS SUR LES MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA	122
2.1	Origine et formulation des méthodes de Runge-Kutta	122
2.1.1	<i>Méthode de Runge-Kutta explicites</i>	124
2.1.2	<i>Méthodes de Runge-Kutta implicites</i>	125
2.1.3	<i>Méthodes de Runge-Kutta semi-implicites et SDIRK</i>	125
2.2	Equation test de Dahlquist et A-stabilité	126
2.3	Méthodes de Runge-Kutta explicites stabilisées	128
2.3.1	<i>Les méthodes par composition</i>	129
2.3.2	<i>Les méthodes par récurrence ou RKC</i>	130
2.4	Les Méthodes ROCK	130
2.4.1	<i>Vue d'ensemble</i>	130
2.4.2	<i>ROCK 2</i>	131

2.4.3	<i>ROCK4</i>	132
3	APPLICATIONS DES MÉTHODES RK POUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR AVEC DES DONNÉES INITIALES PEU RÉGULIÈRES 133	
3.1	Du modèle de Black-Scholes à l'équation de la chaleur.....	133
3.1.1	<i>Le modèle de marché de Black-Scholes</i>	133
3.1.2	<i>Le mouvement Brownien</i>	133
3.1.3	<i>Construction du mouvement Brownien</i>	134
3.1.4	<i>Le modèle de marché de Black-Scholes</i>	134
3.1.5	<i>Équation aux dérivées partielles de Black-Scholes</i>	135
3.1.6	<i>Obtention de l'équation de la chaleur</i>	136
3.2	Estimations d'erreur dans le cas des méthodes de Runge-Kutta implicites .	139
4	SYNTHÈSE DU CHAPITRE.....	142
	Conclusion	143

ANNEXE A DÉTAILS DES CALCULS D'ESPÉRANCES

A.1	ORDRE D'AMPLITUDES (PETIT O ET GRAND O).....	145
A.2	ESPÉRANCES DE PRODUITS DE FORME QUADRATIQUE.....	146
A.2.1	Preuve du Théorème 4.1.....	151
A.2.2	Preuve du Théorème 4.2.....	157
A.2.3	Preuve du Théorème 4.3.....	158

ANNEXE B PREUVE DES THÉORÈMES DU CHAPITRE III

B.1	PREUVE DES PROPOSITIONS ET THÉORÈMES.....	161
B.1.1	Preuve du Théorème 3.1.....	161
B.1.2	Preuve du lemme 3.1.....	162
B.1.3	Preuve du lemme 3.2.....	163
B.1.4	Preuve du lemme 3.3.....	163
B.1.5	Preuve des Théorèmes 3.2 et 3.3.....	164

ANNEXE C VÉRIFICATION DE LA A-STABILITÉ ET DE LA L-STABILITÉ DES MÉTHODES SDIRK4 ET RADAU5 AVEC SAGEMATH

Bibliographie

177

TABLE DES FIGURES

I.1	Biais comme fonction de κ pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$). Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en pointillée (rose) correspond au biais donnée par l'expression (I.46) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (I.48).	42
I.2	Biais comme fonction de κ pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$). Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en pointillée (rose) correspond au biais donnée par l'expression (I.46) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (I.48).	43
I.3	Biais comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$). Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en pointillée (rose) correspond au biais donnée par l'expression (I.46) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (I.48).	43
I.4	Approximations du biais à partir des expressions (I.48) et (I.49) pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$) avec $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'expression (I.48). La ligne continue (rouge) correspond à l'expression (I.49).	44
I.5	Approximations du biais à partir des expressions (I.48) et (I.49) pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$) avec $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'expression (I.48). La ligne continue (rouge) correspond à l'expression (I.49).	44
I.6	Approximations du biais à partir des expressions (I.48) et (I.49) pour des fréquences journalières ($h = 1/252$) avec $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'expression (I.48). La ligne continue (rouge) correspond à l'expression (I.49).	45

I.7 Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle d'Euler (I.59), pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l'expression (I.56), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.58) et la ligne en tiret (bleu) au biais d'estimation (I.57). 47

I.8 Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle d'Euler (I.59), pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l'expression (I.56), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.58) et la ligne en tiret (bleu) au biais d'estimation (I.57). 47

I.9 Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle d'Euler (I.59), pour des fréquences journalières ($h = 1/252$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l'expression (I.56), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.58) et la ligne en tiret (bleu) au biais d'estimation (I.57). 48

I.10 Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle des trapèzes (I.69), pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l'expression (I.66), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.68) et la ligne en tiret (bleu) au biais d'estimation (I.67). 50

I.11 Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle des trapèzes (I.69), pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l'expression (I.66), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.68) et la ligne en tiret (bleu) au biais d'estimation (I.67). 50

I.12 Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle des trapèzes (I.69), pour des fréquences journalières ($h = 1/252$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l'expression (I.66), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.68) et la ligne en tiret (bleu) au biais d'estimation (I.67). 51

I.13 Biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck, pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$) avec $T = 3, 7, 10$. Les estimateurs sont obtenus par simulation à partir des modèles discret exact, d'Euler et des trapèzes. La ligne continue (verte) correspond au biais dans le modèle d'Euler (I.71); la courbe en pointillé (rouge) correspond au biais dans le modèle des trapèzes (I.72); la ligne en tiret (bleu) correspond au biais dans le modèle discret exact (I.70). 52

I.14 Biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck, pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$) avec respectivement $T = 3, 7, 10$. Les estimateurs sont obtenus par simulation à partir des modèles discret exact, d'Euler et des trapèzes. La ligne continue (verte) correspond au biais dans le modèle d'Euler (I.71); la courbe en pointillé (rouge) correspond au biais dans le modèle des trapèzes (I.72); la ligne en tiret (bleu) correspond au biais dans le modèle discret exact (I.70). 53

I.15 Biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck, pour fréquences journalières ($h = 1/252$) avec respectivement $T = 3, 7, 10$. Les estimateurs sont obtenus par simulation à partir des modèles discret exact, d'Euler et des trapèzes. La ligne continue (verte) correspond au biais dans le modèle d'Euler (I.71) ; la courbe en pointillé (rouge) correspond au biais dans le modèle des trapèzes (I.72) ; la ligne en tiret (bleu) correspond au biais dans le modèle discret exact (I.70). 54

I.16 Erreur quadratique moyenne de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck, pour différentes valeurs de $T = 3$ (1^{ère} colonne), $T = 10$ (2^e colonne) et $h = 1/12$ (1^{ère} ligne), $h = 1/52$ (2^e ligne), $h = 1/252$ (3^e ligne). Les estimateurs sont obtenus par simulation à partir des modèles discret exact, d'Euler et des trapèzes. La ligne continue (verte) correspond à l'erreur quadratique moyenne dans le modèle d'Euler (I.71) ; la courbe en pointillé (rouge) correspond à l'erreur quadratique moyenne dans le modèle des trapèzes (I.72) ; la ligne en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne dans le modèle discret exact (I.70). 55

II.1 Biais comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$) avec $T = 3, 7, 10$, correspondant respectivement à $n = 1260, 2520, 5040$. La courbe en tiret (violet) correspond au biais donné par l'expression (II.55). La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donné par l'expression (II.56) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.57). 92

II.2 Biais comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$) avec $T = 10, 20, 50$, correspondant respectivement à $n = 2520, 5040, 12600$. La courbe en tiret (violet) correspond au biais donné par l'expression (II.55). La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donné par l'expression (II.56) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.57). 92

II.3 Biais comme fonction de κ pour une période de temps fixe $T = 50$, avec des fréquences journalières ($h = 1/252$), hebdomadaires ($h = 1/52$) et mensuelles ($h = 1/12$). La courbe en tiret (violet) correspond au biais donné par l'expression (II.55). La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donné par l'expression (II.56) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.57). 93

II.4 Biais comme fonction de κ avec un échantillon fixe de taille $n = 756$ observations, avec des fréquences journalières ($h = 1/252$), hebdomadaires ($h = 1/52$) et mensuelles ($h = 1/12$). La courbe en tiret (violet) correspond au biais donné par l'expression (II.55). La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donné par l'expression (II.56) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.57). 93

II.5 Biais comme fonction de κ avec un échantillon fixe de taille $n = 1000$ observations, avec des fréquences journalières ($h = 1/252$), hebdomadaires ($h = 1/52$) et mensuelles ($h = 1/12$). La courbe en tiret (violet) correspond au biais donné par l'expression (II.55). La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donné par l'expression (II.56) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.57). 94

II.6 Biais comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l'expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.65). 96

II.7 Biais comme fonction de κ pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l'expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.65). 97

II.8 Biais comme fonction de κ pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l'expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.65). 97

II.9 Biais comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l'expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.65). 98

II.10 Biais comme fonction de κ pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l'expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.65). 98

II.11 Biais comme fonction de κ pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l'expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.65). 99

II.12 Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.67). 100

II.13 Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.67). 100

II.14 Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.67). 101

II.15 Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.67). 101

II.16 Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.67). 102

II.17 Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.67). 102

III.1 Approximations du biais de $\hat{\phi}$ comme fonction de ϕ dans le processus MA(1) (III.60), pour différents échantillons de n observations. la ligne continue (violette) correspond au biais donné par l'expression (III.68); la courbe en tiret (bleu) au biais donné par l'expression (III.69). La ligne continue (rouge) correspond au biais donné par l'expression (III.70). 118

III.2	Approximations de l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\phi}$ comme fonction de ϕ dans le processus MA(1) (III.60), pour différents échantillons de n observations. la ligne continue (violette) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (III.71) ; la courbe en tiret (bleu) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (III.72). La ligne continue (rouge) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (III.73).	120
IV.1	Pay-off d'un Call européen pour l'équation de la chaleur.	138
IV.2	Comparaison des méthodes SDIRK4 et ROCK4 pour les deux conditions initiales. En rouge, la condition initiale en créneau, en bleu, celle en dent de scie.	140
IV.3	Degrés des polynômes utilisés par la méthode ROCK4	140
IV.4	Évolution en trois dimensions avec une condition initiale sous forme de dent de scie	141

REMERCIEMENTS

J'adresse tout d'abord mes plus vifs remerciements à Mr Stéphane DESCOMBES, qui en acceptant de diriger cette thèse, a su m'orienter et me conseiller avec justesse au cours de l'avancée de mes recherches. J'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail. Il m'a fait bénéficier de sa grande culture et m'a fait découvrir les liens saisissants opérant entre l'univers des probabilités et statistiques et la théorie des équations aux dérivées partielles.

J'exprime mes plus profonds remerciements à Mr Florian PELGRIN, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'être codirecteur de ce travail. Je me dois de le remercier pour toutes les heures qu'il a consacrées à cette recherche et j'aimerais lui dire à quel point j'ai apprécié sa patience, sa disponibilité et son humilité. Ses qualités pédagogiques et scientifiques m'ont apporté de solides points de repère au cours de la rédaction de cette thèse. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse toute ma gratitude.

J'aimerais adresser mes plus sincères remerciements, à Mr Jacques BLUM, qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Mme Pauline LAFFITE et à Mr Michael ROCKINGER qui m'ont fait l'honneur de rapporter ce travail.

Je suis profondément reconnaissant à Mr Philippe MAISONOBE, qui a manifesté un intérêt à mon travail. Je lui adresse mes remerciements, pour sa disponibilité et son aide précieuse qui ont permis l'avancement de ce travail. Il a toujours pris le temps de m'écouter. Ce fut un plaisir, et une chance, de l'avoir à mes côtés.

Je remercie mes différents collègues de bureau pour la bonne ambiance de travail créée durant ces années de doctorat et tous ceux avec lesquels j'ai passé d'excellents moments. Je remercie également tous mes amis pour tous les bon moments passés et à venir. En particulier, merci à Hubert ZOUATCHAM, avec qui j'ai eu des discussions scientifiques fructueuses.

Qu'il me soit permis de remercier aussi mes frères et sœurs, pour le soutien qu'ils ont su

m'apporter chaque jour. Je tiens en particulier à exprimer toute ma reconnaissance à Hervé YOUMBI, qui m'a toujours donné de bon conseils.

Mes pensées vont aussi au Docteur KAMGA TOGUEM PIUS et au professeur KOMGUEM.

Je ne saurais oublier pour finir Nelly dont la présence et le soutien se sont révélés déterminants au cours des années consacrées à la préparation de ce doctorat.

Je dédicace enfin cette thèse à mes parents : Mr et Mme YOUMBI. Je me dois de vous remercier du soutien, tant moral que matériel, que vous m'avez apporté au cours de ces années de doctorat. Vous avez toujours été là pour moi, dans toutes les épreuves de ma vie. Aucun mots ne sauraient exprimer ce que je ressens. Je vous dit simplement : **MILLE MERCI**.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Cette thèse est consacrée à l'étude de méthodes précises pour approcher des équations différentielles stochastiques (EDS) ou des équations aux dérivées partielles (EDP) déterministes en finance. Commençons cette introduction par rappeler le concept d'équation différentielle stochastique en débutant avec la notion de processus stochastique :

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit le temps $T \subset \mathbb{R}$. On appelle *processus stochastique*, toute famille de variables aléatoires $X_t, t \in T$ à valeurs dans \mathbb{R} . Si le temps T est un sous ensemble de \mathbb{R} , alors X_t est appelé *processus stochastique en temps discret*. Si T est un intervalle, \mathbb{R}^+ ou \mathbb{R} , on parle de *processus stochastique en temps continu*. En d'autres termes, un processus stochastique représente une évolution, en temps continu ou discret, d'une variable aléatoire.

Une équation différentielle stochastique de condition initiale $X(0) = x_0$ est de la forme :

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \zeta(dt), \quad (1)$$

où $X(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t))^t$ est un processus aléatoire continu de dimension d , $\zeta(dt)$ est un vecteur de perturbation de bruit blanc de matrice de covariance $\Sigma = \sigma(X(t))\sigma^t(X(t))$, avec $(\cdot)^t$ est l'opérateur la transposée. $\mu(\cdot)$ et $\sigma(\cdot) = (\sigma_{ij}) > 0$ sont des applications de $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Lorsque $d = 1$, le processus est dit *uni-varié*. Si $\mu(X(t)) = \mu(X(t); \theta)$ et $\sigma(X(t)) = \sigma(X(t); \theta)$, où $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ est un paramètre inconnu qui devra être estimé, le modèle est appelé *modèle paramétrique*. Dans le cas contraire, on parlera de *modèle non paramétrique*.

Cas particulier : Lorsque $\zeta(dt) = \sigma(X(t))dB(t)$, où $B(t)$ est un vecteur de mouvements Browniens standard, le modèle (1.1) est appelé *processus de diffusion*. Dans ce cas, $\mu(X(t))$ et $\sigma(X(t))$ sont respectivement appelées *fonction de dérive* et *fonction de diffusion*. Il s'agit respectivement de la moyenne et la variance conditionnelle d'un changement infinitésimal de $X(t)$. Ainsi, un processus de diffusion paramétrique est défini par l'EDS :

$$dX(t) = \mu(X(t); \theta)dt + \sigma(X(t); \theta)dB(t). \quad (2)$$

L'existence et l'unicité d'un processus $\{X(t) \in \mathbb{R}^d; t \geq 0\}$ satisfaisant (2) sont données dans Stroock et Varadhan [102, 1979].

Exemple : Si $\mu(X(t); \theta) = \mu X(t)$ et $\sigma(X(t); \theta) = \sigma X(t)$, on obtient :

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t). \quad (3)$$

Black et Scholes [26, 1973], utilisent ce modèle pour évaluer le prix ($X(t)$) d'une option sous-jacente à une action de volatilité σ , lorsque le taux d'intérêt est μ .

Les équations de type (2) n'ont généralement pas une solution exacte explicite. Il faut par conséquent les approcher grâce à l'utilisation de schémas numériques. Pour ce faire, plusieurs classes de méthodes existent, parmi lesquelles, celle dite de discrétisations approximatives (Euler, Milstein, Trapèzes), la classe dite *Infill simulations* [40, 76] et la classe dite *Closed-Form approximations* dans laquelle nous avons deux sous-classes à savoir : *Hermite expansions* [8, 9] et *Saddlepoint approximations* [35, 78] dont un excellent résumé est fait dans Phillips et Yu [82, p. 509-514].

L'essor du calcul stochastique, et en particulier le développement de la théorie des équations différentielles stochastiques au cours des dernières décennies, a permis la prolifération des modèles en temps continu multivariés dans la littérature du pricing d'options en économie financière, portée par les travaux de Black et Scholes [26, 1973]. Une des raisons principales pour lesquelles les modèles en temps continu intéressent les économistes et les financiers est que "*l'économie ne cesse d'exister entre les observations*" (Barlett[20, 1946], Phillips [79, 1988]). Avec l'avancement de la technologie et la disponibilité de plus en plus croissante des données financières, les informations arrivent à des intervalles plus courts et les activités économiques se déroulent sans interruption. Par conséquent les modèles en temps continu peuvent fournir une approximation raisonnable de la dynamique réelle du comportement économique (Yu [113, 2014]). Ces modèles sont généralement spécifiés sous la forme de processus de diffusion en temps continu, qui permettent par exemple de modéliser le prix des actifs financiers, de décrire des séries temporelles, des portefeuilles d'actifs ou encore de caractériser les taux d'intérêt et de change.

L'utilisation du modèle (2), pose le problème de l'estimation du paramètre inconnu θ qui est d'une importance fondamentale pour de nombreuses applications pratiques. Par exemple, elle fournit des paramètres estimés qui seront utilisés directement pour estimer le prix des actifs financiers et ses dérivés. La complexité ici réside dans le fait que les données observées sont disponibles à des instants (ou intervalles) de temps discret, c'est-à-dire à $n+1$ points équidistants¹ de pas h : $\{th\}_{t=0}^n = (0, h, 2h, \dots, nh)$, h étant préalablement choisi (très petit). Par exemple, nous pouvons avoir des fréquences journalières ($h = 1/252$), hebdomadaires ($h = 1/52$), ou encore mensuelles ($h = 1/12$). L'estimateur correspondant, noté $\hat{\theta}$, peut être obtenu à l'aide des méthodes d'estimation classiques telles que moindres carrés ordinaires (MCO), maximum de vraisemblance conditionnelle (MVC) ou encore méthode des moments généralisés (MMG). Pour une description de l'ensemble des méthodes d'estimations de ce type de processus, nous nous référons à [9, 10, 12, 24, 46, 55, 72].

En général, l'estimateur $\hat{\theta}$ est biaisé : la différence entre la valeur de son espérance et la vraie valeur du (vecteur des) paramètre(s) n'est pas égale à zéro.

1. Cette hypothèse d'équidistance peut être relâchée dans certains cas.

Formellement (en supposant que les espérances sont finies),

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta + b(\theta), \quad \text{avec } b(\theta) \neq 0. \quad (4)$$

Définition : On appelle **Biais** de $\hat{\theta}$ et on note $\mathbb{B}(\hat{\theta})$, la quantité définie par

$$\mathbb{B}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta). \quad (5)$$

D'une manière générale, soit Θ un espace paramétrique. Pour tout $\theta \in \Theta$, le **Biais** d'un estimateur $\hat{g}(\theta)$, du paramètre $g(\theta)$ et noté $\mathbb{B}(\hat{g}(\theta))$, se définit comme

$$\mathbb{B}[\hat{g}(\theta)] = \mathbb{E}[\hat{g}(\theta) - g(\theta)]. \quad (6)$$

Nous dirons que $\hat{\theta}$ est *sans biais*, si la valeur moyenne de $\hat{\theta}$ pour l'ensemble des échantillons possibles (espérance de la variable aléatoire $\hat{\theta}$) est égale θ , pour tout $\theta \in \Theta$. Cela se traduit par $\mathbb{B}(\hat{\theta}) = 0$, c'est-à-dire $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$. Dans le cas contraire nous dirons que $\hat{\theta}$ est *biaisé*.

Il existe, pour tout $\theta \in \Theta$, plusieurs méthodes pour corriger le biais induit par les différentes méthodes d'estimation et/ou d'approximation. Connaissant la forme explicite du biais, il existe des méthodes de correction dites simples consistant à définir l'estimateur corrigé comme différence entre l'ancien estimateur et le biais. Pour plus de clarté, supposons que nous sommes intéressés par la réduction du biais d'un estimateur $\hat{\theta}$ d'un paramètre θ , dont nous connaissons la forme explicite du biais $\mathbb{B}(\hat{\theta})$. Une correction de biais par la méthode simple est donnée par

$$\hat{\theta}_s = \hat{\theta} - \mathbb{B}(\hat{\theta}). \quad (7)$$

Considérons un exemple simple :

Exemple : Soit $\hat{\kappa}$ l'estimateur du paramètre de retour à la moyenne κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck avec une moyenne nulle. Lorsque h tend vers zéro, supposons que $\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = 2/T$. Un estimateur sans biais de κ est donné par :

$$\hat{\kappa}_s = \hat{\kappa} - \frac{2}{T}.$$

Il est important de noter que cette correction de biais, bien qu'elle permet de réduire le biais de l'estimateur $\hat{\theta}$, ne l'éliminera généralement pas complètement.

Un inconvénient avec cette méthode est qu'elle nécessite (tout comme celles basées sur l'estimation des termes d'ordre supérieur dans un développement asymptotique du biais), la connaissance explicite de l'expression du biais du paramètre estimé, ce qui est généralement impossible. Heureusement, il existe des méthodes de correction différentes, au sens où elles ne nécessitent ni la connaissance de la forme explicite de la fonction de biais, ni des expansions asymptotiques des formules de ce dernier. Cela constitue un réel avantage et cet avantage est important lorsque la fonction de vraisemblance ou toute autre fonction critère qui pourrait former la base de l'estimation est analytiquement insolvable ou trop difficile à évaluer. Quelques-unes d'entre elles sont : la méthode Jackknife de Quenouille (1956) proposée dans [81], la méthode d'inférence indirecte proposée dans [97] et [50], et la méthode de bootstrap proposée dans [103].

La première partie de cette thèse s'inscrit dans le cadre du développement de méthodes visant à corriger le biais dans les processus de diffusion paramétrique.

Le problème de l'approximation du biais dans l'estimation des modèles en temps continu est un sujet très vaste et a attiré l'attention de nombreux chercheurs. Il serait alors difficile, voir même audacieux, de prétendre le maîtriser entièrement et pouvoir le présenter complètement dans un mémoire de thèse. Ainsi, le cadre d'application auquel nous nous intéressons est issue de l'économie et de la finance. Les exemples que nous utilisons ici sont parmi les plus répandus : le modèle auto-régressif AR(1), le modèle moyenne mobile MA(1) et plus particulièrement le modèle dit Ornstein-Uhlenbeck (OU) ou de Vasicek [107, 1977]. Il s'obtient en posant dans l'EDS (2), $\mu(X(t); \theta) = \kappa[\mu - X(t)]$ et $\sigma(X(t); \theta) = \sigma$. Ainsi, un processus Ornstein-Uhlenbeck est solution de l'EDS :

$$dX(t) = \kappa[\mu - X(t)]dt + \sigma dB(t), \quad X(0) = x_0 \quad (8)$$

où, $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $\mu \geq 0$. Il est utilisé en finance pour décrire le mouvement de taux d'intérêt à court terme. Dans ce cas, μ peut être interprété comme le taux d'intérêt moyen à long terme et κ comme la vitesse à laquelle $X(t)$ est tiré vers μ .

Nous avons volontairement choisi ce modèle. L'avantage réside surtout dans le fait qu'il admet une solution explicite connue analytiquement, de sorte que les résultats d'approximation et d'estimation du biais peuvent être comparés afin de juger de la qualité des méthodes. Évidemment ce modèle n'est pas le seul à avoir une solution explicite ; pour une liste plus large mais incomplète, nous citons aussi le modèle Racine-Carrée (ou CIR), introduit par Cox et al. [31, 1985], les modèles de Merton [69, 1973], Dothan [37, 1978], Brennan et Schwartz [27, 1980] et le modèle Racine carrée inverse de Ahn et Gao [6, 1999]. De plus, dans la plupart des cas, les études effectuées ici peuvent s'étendre à d'autres cadres que celui de la finance.

Un tour d'horizon des méthodes et résultats existants sur l'approximation du biais des paramètres du modèle (8) indique que les biais de l'estimateur de la moyenne à long terme (μ) et des paramètres dans la fonction de diffusion (σ) sont quasiment nuls ; L'essentiel de notre attention se porte donc sur le paramètre κ . Le paramètre κ étant important pour l'évaluation des actifs, la gestion des risques et les prévisions, une estimation plus précise de ce dernier a reçu une très grande attention dans la littérature. Une revue de celle-ci s'est basée sur différentes références bibliographiques sur le sujet, à savoir les articles de Yu [112], Tang et Chen [103], Wang et al. [80], ainsi que ceux de Bao et Ullah [15, 16].

En particulier, il ressort que :

Non seulement l'estimateur du paramètre de retour à la moyenne (κ) peut être fortement biaisé quelque soit la méthode d'estimation utilisée, mais en plus, à notre connaissance, il n'existe aucune solution pour éliminer complètement ce biais. En d'autres termes, il n'existe pas dans la littérature actuelle, une méthode capable d'offrir une réduction de biais assez satisfaisante avec un estimateur de très bonne qualité quelles que soient les conditions dans lesquelles cette réduction est obtenue. Ces conditions peuvent être par exemple, le choix de la loi des termes d'erreurs (normal ou non), le choix de la condition initiale (fixe ou aléatoire). Le biais peut également dépendre du choix de la vraie valeur du paramètre de retour à la moyenne du modèle utilisé (proche de zéro ou loin), de la période d'échantillonnage et du pas de discrét-

tisation.

Dans l'équation (8), nous supposons que la moyenne à long terme est connue ($\mu = 0$) et que la condition initiale suit une loi normale d'espérance nulle et de variance $\sigma^2/2\kappa$. Le modèle en temps discret exact étudié est alors :

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1-\phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa), \quad (9)$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $\phi = e^{-\kappa h} < 1$ et ε_i , $i = 1, \dots, n$, sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Une estimation de κ par maximum de vraisemblance conditionnelle (MVC) donne

$$\hat{\kappa} = -\frac{\ln(\hat{\phi})}{h}, \quad (10)$$

où $\hat{\phi}$ est l'estimateur par maximum de vraisemblance conditionnelle du coefficient auto-régressif ϕ d'un processus AR(1) sans terme constant.

Dans ces conditions, en utilisant le développement de Taylor de $\hat{\kappa}$ d'ordre² $O(n^{-1})$ suivant :

$$\hat{\kappa} = -\frac{1}{h} \left[\ln(\phi) + \frac{\hat{\phi} - \phi}{\phi} + \frac{(\hat{\phi} - \phi)^2}{2\phi^2} + o_p(n^{-1}) \right], \quad (11)$$

Yu [112, équation 12] montre que lorsque κ n'est pas proche de zéro,

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} + o(T^{-1}). \quad (12)$$

Puis en utilisant une expansion de la forme (Bao et Ullah [15, 16])

$$\hat{\kappa} - \kappa = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + O_p(n^{-3/2}), \quad (13)$$

il montre que lorsque κ est proche zéro,

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} - \frac{2(1 - e^{-2n\kappa h})}{Tn(1 - e^{-2\kappa h})} + o(T^{-1}). \quad (14)$$

Contribution de la thèse : L'idée qui a motivé nos travaux est l'approximation d'ordre élevé du biais de l'estimateur $\hat{\kappa}$. Nous avons notamment dégagé les deux axes principaux suivants, issues des résultats des équations (12) et (14) énoncées ci-dessus :

1) Par un développement de Taylor de $\hat{\kappa}$ d'ordre $O(n^{-2})$.

On obtient :

$$\hat{\kappa} = -\frac{1}{h} \left[\ln(\phi) + \frac{\hat{\phi} - \phi}{\phi} + \frac{(\hat{\phi} - \phi)^2}{2\phi^2} - \frac{(\hat{\phi} - \phi)^3}{3\phi^3} + \frac{(\hat{\phi} - \phi)^4}{4\phi^4} + o_p(n^{-2}) \right]. \quad (15)$$

2. Les définitions des ordres de grandeur o et O sont données en annexes (A.1).

Malgré une expression simple, calculer le biais de $\hat{\kappa}$ à partir de l'équation (15) reste compliqué. La difficulté ici provient du fait qu'il nous faut encore connaître les résultats d'approximation des coefficients d'asymétrie (skewness) et d'excès d'aplatissement (kurtosis) de $\hat{\phi}$, notés $\gamma_1(\hat{\phi})$ et $\gamma_2(\hat{\phi})$ respectivement. La contribution principale est donc de trouver des expressions analytiques des expansions stochastiques de ces deux coefficients. L'approche utilisée s'inspire de l'article de Bao et Ullah [17, 2009], dans le cadre de deux mesures (standardisées) de l'écart de normalité pour la classe des M-estimateurs suivante :

$$\Psi_n(\hat{\beta}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n q_i(\hat{\beta}) = 0, \quad (16)$$

où $q_i(\beta) = q(Z_i; \beta)$ est une fonction des variables $Z = \{Z_i\}_{i=1}^n$ et du vecteur des paramètres $\beta \in \mathbb{R}^p$ de vraie valeur β_0 tel que $\mathbb{E}[\Psi_n(\beta)] = 0$ si et seulement si $\beta = \beta_0$.

L'obtention des résultats d'approximation de $\gamma_1(\hat{\phi})$ et $\gamma_2(\hat{\phi})$ nécessite l'évaluation de l'espérance d'un produit des puissances de deux formes quadratiques. Dans certains cas, ces espérances sont difficiles à évaluer, il faut le faire numériquement. Ces espérances, pouvant s'exprimer en termes de produit et somme des traces de matrices, pour obtenir des expressions analytiques explicites de celles-ci, nous avons développé deux algorithmes permettant de déterminer par récurrence des traces du type $Tr[(C_2\Sigma)^p]$ et $Tr[(C_1\Sigma)^p]$, pour tout entier $p \geq 3$, où $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}$ est une matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ dont l'élément de la i ème ligne et la j ème colonne est $\sigma_{ij} = \phi^{|i-j|}$, C_1 et C_2 sont deux matrices carrées de même taille que Σ définies de la manière suivante :

$C_1 = \{c_{1ij}\}$ avec $c_{1i,i+1} = 1/2$ si $1 \leq i \leq n$, $c_{1i,i-1} = 1/2$ si $2 \leq i \leq n+1$ et 0 ailleurs, $C_2 = \{c_{2ij}\}$ avec $c_{2ij} = 1$ pour $i = j = 1, 2, \dots, n$ et 0 ailleurs.

Ce travail est une collaboration avec Philippe Maisonobe.

Les deux théorèmes suivants présentent les résultats des nouvelles approximations.

Théorème : (Approximations des coefficients de skewness et de kurtosis de $\hat{\phi}$).

Considérons le modèle défini par l'équation suivante :

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1-\phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa), \quad (17)$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $|\phi| = e^{-\kappa h} < 1$ et $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.

La skewness et l'excès de kurtosis de l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle $\hat{\phi}$ du paramètre ϕ , sont respectivement être approchés par

$$\gamma_1(\hat{\phi}) = 6 \left[\frac{(9\phi^4 - 8\phi^2 - 1)(\phi^{2n} - 1)}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{2(\phi^2 - 1)(1 + 2\phi^2 + 2\phi^{2n})}{n} + \frac{48\phi(1 + 2\phi^2)(\phi^{2n} - 1)}{n^{5/2}(\phi^2 - 1)} \right. \\ \left. + \frac{2(17 + 12\phi^2 + 43\phi^{2n})}{n^{1/2}\phi} \right] \left[(1 - \phi^2) + \frac{4(1 + 9\phi^2)(\phi^{2n} - 1)}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{8(1 + 2\phi^2 + 2\phi^{2n})}{n} \right]^{-3/2}, \quad (18)$$

$$\gamma_2(\hat{\phi}) = H(\phi, n) \left[n^3(\phi^2 - 1)^3 - 2n^2(\phi^2 - 1)^2(112\phi^{2n} + 5\phi^2 - 1) + 48(1 - \phi^{2n})(1 - 19\phi^4) + 988\phi^2 \right. \\ \left. - 920\phi^{2n+2} - 68\phi^{4n+2} + 4n(\phi^2 - 1)(53\phi^{2n} + 274\phi^{2n+2} + 36\phi^4 + 122\phi^2 + 19) \right]^{-2}, \quad (19)$$

où $H(\phi, n)$ est une fonction du paramètre ϕ et de la taille de l'échantillon n dont l'expression est donnée par l'équation (A.17) en annexe.

Théorème : (Approximation du biais de $\hat{\kappa}$).

Considérons le modèle défini par l'équation suivante :

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa), \quad (20)$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $|\phi| = e^{-\kappa h} < 1$ et $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.

L'approximation du biais d'ordre $O(n^{-1}T^{-1})$ de l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle $\hat{\kappa}$ du paramètre κ est donnée par

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} + \frac{7e^{-2\kappa h} - 1 + 5e^{2\kappa h} - 3e^{4\kappa h}}{4Tn(e^{-2\kappa h} - 1)} - \frac{\gamma_1(\hat{\phi})A e^{3\kappa h}}{3Tn^4(e^{-2\kappa h} - 1)} + \frac{\gamma_2(\hat{\phi})B e^{4\kappa h}}{4Tn^3}, \quad (21)$$

où $\gamma_1(\hat{\phi})$ et $\gamma_2(\hat{\phi})$ sont respectivement approchés par les équations (18) et (19) et avec

$$A = [n(1 - e^{-2\kappa h}) + 10e^{-2\kappa h} - 2]^{3/2} [n^2(e^{-2\kappa h} - 1) + 6[n(e^{-2\kappa h} - 1) - 2e^{-2\kappa h} + 3]],$$

$$B = [n(e^{-2\kappa h} - 1) - 10e^{-2\kappa h} + 2]^2.$$

2) Par une expansion stochastique de $\hat{\kappa}$ d'ordre $O(n^{-5/2})$.

On reprend la classe des M-estimateurs définie par l'équation (16). Sous les hypothèses de Rilstone et al. [88, p. 374], il est possible d'obtenir une expansion en série de Taylor de $\Psi_n(\hat{\beta}) = 0$ dans un voisinage de β_0 . Cette expansion stochastique de $\hat{\beta}$ est de la forme

$$\hat{\beta} - \beta_0 = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2} + a_{-5/2} + O_p(n^{-5/2}), \quad (22)$$

où les termes $a_{-s/2}$ sont d'ordre $O_p(n^{-s/2})$ pour $s = 1, 2, 3, 4, 5$.

A partir de l'équation (22), nous obtenons pour l'estimateur $\hat{\kappa}$, de nouvelles expressions du biais et de l'erreur quadratique moyenne (EQM) d'ordre $O(n^{-5/2})$ et $O(n^{-3})$ respectivement. Celles-ci sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème : (Approximations du biais et de l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\kappa}$).

Considérons le modèle défini par l'équation suivante :

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa), \quad (23)$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $|\phi| = e^{-\kappa h} < 1$ et $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.

L'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle de ϕ est défini par :

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{ih} X_{(i-1)h}}{\sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^2} = \frac{U_n}{V_n}, \quad (24)$$

où $U_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{ih} X_{(i-1)h}$ et $V_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^2$.

Considérons une expansion d'ordre $O(n^{-5/2})$ de $\hat{\kappa} - \kappa$:

$$\hat{\kappa} - \kappa = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2} + O_p(n^{-5/2}),$$

où

$$\begin{aligned} a_{-1/2} &= -\frac{U_n - \phi V_n}{\phi h}, & a_{-1} &= \frac{U_n^2 - \phi^2 V_n^2}{2\phi^2 h} + a_{-1/2}, \\ a_{-3/2} &= -\frac{U_n^3 - \phi^3 V_n^3}{3\phi^3 h} + \frac{U_n^2 - \phi^2 V_n^2}{\phi^2 h} + a_{-1/2}, \\ a_{-2} &= -\frac{U_n - \phi V_n}{\phi h} + \frac{3(U_n^2 - \phi^2 V_n^2)}{2\phi^2 h} - \frac{U_n^3 - \phi^3 V_n^3}{\phi^3 h} + \frac{U_n^4 - \phi^4 V_n^4}{4\phi^4 h}. \end{aligned} \quad (25)$$

Le biais d'ordre $O(n^{-5/2})$ de l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle $\hat{\kappa}$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\kappa}) &= \mathbb{E}(a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2}) \\ &= \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} - \frac{(96 + 256 e^{-2\kappa h} + 328 e^{-4\kappa h}) e^{-2(n-2)\kappa h} + e^{-2\kappa h} - 15 + 3 e^{2\kappa h} + 3 e^{4\kappa h}}{4Tn(e^{-2\kappa h} - 1)} \\ &\quad + \frac{(24 + 484 e^{-2\kappa h} + 940 e^{-4\kappa h} + 472 e^{-6\kappa h}) e^{-2(n-2)\kappa h} + 27 e^{-4\kappa h} + 230 e^{-2\kappa h} + 488 + 206 e^{2\kappa h} + 9 e^{4\kappa h}}{2Tn^2(e^{-2\kappa h} - 1)^2} \\ &\quad - \frac{3[(1 + 45 e^{-2\kappa h} + 171 e^{-4\kappa h} + 167 e^{-6\kappa h} + 48 e^{-8\kappa h}) e^{-2(n-2)\kappa h} + 12(1 + e^{-2\kappa h}) e^{-4n\kappa h}]}{Tn^3(e^{-2\kappa h} - 1)^3} \\ &\quad + \frac{3[48 e^{-4\kappa h} + 179 e^{-2\kappa h} + 183 + 45 e^{2\kappa h} + e^{4\kappa h}]}{Tn^3(e^{-2\kappa h} - 1)^3}, \end{aligned} \quad (26)$$

et son erreur quadratique moyenne d'ordre $O(n^{-3})$ est donné par

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\kappa}) &= \mathbb{E}(a_{-1/2}^2 + 2a_{-1/2}a_{-1}) + \mathbb{E}(a_{-1}^2 + 2a_{-1/2}a_{-3/2}) \\ &= \frac{e^{2\kappa h} - 1}{Th} + \frac{32(19 e^{-2\kappa h} + 9) e^{-2(n-2)\kappa h} + 19 + 18 e^{2\kappa h} + 11 e^{4\kappa h}}{4T^2} - \frac{1107 + 402 e^{2\kappa h} + 11 e^{4\kappa h}}{T^2 n^2 (e^{-2\kappa h} - 1)^2} \\ &\quad - \frac{(88 + 1280 e^{-2\kappa h} + 1264 e^{-4\kappa h}) e^{-2(n-2)\kappa h} + 77 e^{-2\kappa h} + 719 + 571 e^{2\kappa h} + 33 e^{4\kappa h}}{2T^2 n (e^{-2\kappa h} - 1)} \\ &\quad + \frac{(11 + 402 e^{-2\kappa h} + 1035 e^{-4\kappa h} + 424 e^{-6\kappa h}) e^{-2(n-2)\kappa h} + 72 e^{-4n\kappa h} - 424 e^{-2\kappa h}}{T^2 n^2 (e^{-2\kappa h} - 1)^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Cette approche est applicable aux processus moyenne mobile d'ordre un MA(1) et auto-régressif d'ordre un AR(1). Les résultats sont résumés dans les théorèmes suivants :

Théorème : (Biais et erreur quadratique moyenne dans un modèle MA(1)).

Considérons le modèle défini par l'équation suivante :

$$X_t = \varepsilon_t - \phi \varepsilon_{t-1}, \quad (28)$$

où ϕ est un nombre réel et $(\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc de variance σ^2 .

Pour tout $t \geq 1$, l'équation (28) peut s'écrire sous la forme

$$X = C\varepsilon, \quad (29)$$

où $X = (X_1, \dots, X_n)^t$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^t$, $(\cdot)^t$ représente l'opérateur transposé et C est une matrice de taille $n \times n$ définie par

$$C = I - \phi N, \quad (30)$$

avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

nilpotente d'ordre n .

Soit $M = C^{-1}N$ une matrice triangulaire inférieure stricte, de taille $n \times n$ de terme général :

$$m_{ij} = \begin{cases} \phi^{i-j-1} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le biais et l'erreur quadratique moyenne d'ordre $O(n^{-3})$, de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance $\hat{\phi}$ sont respectivement donnés par

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = \frac{Tr(B)}{2[Tr(A)]^2} - \frac{2P_{20001} + P_{01002}}{2[Tr(A)]^3} + \frac{Tr(B)Tr(D) + 9Tr[B]P_{10002}}{6[Tr(A)]^4} - \frac{[Tr(B)]^3}{2[Tr(A)]^5}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{EQM}(\hat{\phi}) &= \frac{6}{Tr(A)} - \frac{8P_{10002}}{[Tr(A)]^3} + \frac{4[Tr(B)]^2 + 3P_{20002} + P_{01003}}{[Tr(A)]^4} - \frac{12Tr(B)P_{10003} - Tr(D)P_{00004}}{3[Tr(A)]^5} \\ &+ \frac{5[Tr(B)]^2 P_{00004}}{4[Tr(A)]^6}, \end{aligned} \quad (33)$$

où $Tr(\cdot)$ représente l'opérateur Trace, pour tout entier i, j, k, ℓ, m ,

$$P_{ijklm} = \frac{\mathbb{E}(\Gamma_\varepsilon^i \Delta_\varepsilon^j \Theta_\varepsilon^k \Lambda_\varepsilon^\ell Y_\varepsilon^m)}{\sigma^{2(i+j+k+\ell+m)}}, \quad (34)$$

avec $\Gamma_\varepsilon = \varepsilon^t A \varepsilon$, $\Delta_\varepsilon = \varepsilon^t B \varepsilon$, $\Theta_\varepsilon = \varepsilon^t D \varepsilon$, $\Lambda_\varepsilon = \varepsilon^t F \varepsilon$, $\Pi_\varepsilon = \varepsilon^t G \varepsilon$ et A, B, D, F et G sont des matrices carrés de taille $n \times n$ définies par :

$$A = 2M^2 + M^t M,$$

$$B = 6M^3 + 4M^t M^2 + 2[M^t M^2]^t,$$

$$D = 24M^4 + 18M^t M^3 + 12[M^2]^t M^2 + 6[M^3]^t M,$$

$$F = 120M^5 + 96M^t M^4 + 72[M^2]^t M^3 + 48[M^3]^t M^2 + 24[M^4]^t M,$$

$$G = 720M^6 + 600M^t M^5 + 480[M^2]^t M^4 + 360[M^3]^t M^3 + 240[M^4]^t M^2 + 120[M^5]^t M.$$

Théorème : (Biais et erreur quadratique moyenne dans un modèle AR(1))

Considérons le processus discret auto-régressif d'ordre un suivant :

$$X_t = \alpha + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (35)$$

où $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $|\phi| < 1$.

On suppose que $X_0 = x_0$ est observé et que $\alpha = 0$.

Une expansion d'ordre $O(n^{-5/2})$ de $\hat{\phi} - \phi_0$ est donnée par

$$\hat{\phi} - \phi_0 = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2} + O_p(n^{-5/2}),$$

où ϕ_0 est la vraie valeur du paramètre ϕ et

$$\begin{aligned} a_{-1/2} &= -Q\Psi_n(\phi) = W_n - \phi Z_n. \\ a_{-1} &= -QV_1 a_{-1/2} = a_{-1/2} - W_n Z_n + \phi Z_n^2 = -(Z_n - 1)a_{-1/2}. \\ a_{-3/2} &= -QV_1 a_{-1} = -a_{-1/2} + 2a_{-1} + W_n Z_n^2 - \phi Z_n^3 = (Z_n - 1)^2 a_{-1/2}. \\ a_{-2} &= -QV_1 a_{-3/2} = a_{-1/2} - 3a_{-1} + 3a_{-3/2} - W_n Z_n^3 + \phi Z_n^4 = -(Z_n - 1)^3 a_{-1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

1. Le biais d'ordre $O(n^{-2})$ et l'EQM d'ordre $O(n^{-3})$ sont respectivement donnés par

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{2\phi}{n} - \frac{2\phi(1 - \phi^{2n})}{n^2(\phi^2 - 1)}, \quad (36)$$

$$\mathbb{EQM}(\hat{\phi}) = \frac{1 - \phi^2}{n} - \frac{8(1 + 2\phi^2 + 2\phi^{2n})}{n^2} + \frac{4(1 + 9\phi^2)(\phi^{2n} - 1)}{n^3(\phi^2 - 1)}. \quad (37)$$

2. Le biais d'ordre $O(n^{-3})$ et l'EQM d'ordre $O(n^{-4})$ sont respectivement donnés par

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{2\phi}{n} - \frac{2\phi(9 + 4\phi^2 + 11\phi^{2n})}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{16\phi(1 - \phi^{2n})(1 + 2\phi^2)}{n^3(\phi^2 - 1)^2}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{EQM}(\hat{\phi}) &= \frac{1 - \phi^2}{n} + \frac{2(112\phi^{2n} + 7\phi^2 - 1)}{n^2} - \frac{4(19 + 120\phi^2 + 36\phi^4 + 53\phi^{2n} + 276\phi^{2n+2})}{n^3(\phi^2 - 1)} \\ &+ \frac{24[3\phi^{2+4n} + 38\phi^{2n+2} + (2 + 38\phi^4)(\phi^{2n} - 1) - 41\phi^2]}{n^4(\phi^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

3. Le biais d'ordre $O(n^{-4})$ et l'EQM d'ordre $O(n^{-5})$ sont respectivement donnés par

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\phi}) &= -\frac{2\phi}{n} + \frac{2\phi(85\phi^{2n} + 2\phi^2 - 3)}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{4\phi(37 + 71\phi^2 + 12\phi^4 + 83\phi^{2n} + 157\phi^{2+2n})}{n^3(\phi^2 - 1)^2} \\ &+ \frac{72\phi[\phi^{2+4n} + (2 + 10\phi^2 + 6\phi^4)\phi^{2n} - 2 - 11\phi^2 - 6\phi^4]}{n^4(\phi^2 - 1)^3}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{EQM}(\hat{\phi}) &= \mathbb{E}(a_{-1/2}^2 + 2a_{-1/2}a_{-1}) + \mathbb{E}(a_{-1}^2 + 2a_{-1/2}a_{-3/2}) + \mathbb{E}(a_{-3/2}^2 + 2a_{-1}a_{-3/2}) \\ &+ 2\mathbb{E}(a_{-1/2}a_{-2} + a_{-1}a_{-2} + a_{-3/2}a_{-2}) + \mathbb{E}(a_{-2}^2). \end{aligned} \quad (41)$$

L'expression de l'équation (41) est donnée en annexe (B.1.1).

La deuxième partie de cette thèse porte sur l'approximation d'une équation aux dérivées partielles mais toujours avec des modèles financiers sous-jacents. Nous considérons l'équation de la chaleur obtenue après changement de variables à partir du modèle de Black et Scholes. Soit Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2$ ou 3 , de frontière notée Γ et T un réel strictement positif, cette équation est de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta u(x, t) + u(x, t) = 0, & x \in \Omega, t \in]0, T[, \\ u(x, t) = 0, & x \in \Gamma, t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Comme la grande majorité des équations aux dérivées partielles, cette équation ne possède pas de solution exacte. Il faut donc approcher les solutions grâce à l'utilisation de schémas numériques. Pour ce faire, dans le cadre de la discrétisation en temps, deux grandes classes de méthodes existent, à savoir : les méthodes explicites, dont l'utilisation entraîne une sévère réduction du pas de temps et les méthodes implicites, qui ont l'avantage d'être beaucoup plus stables, mais qui peuvent être très coûteuses, surtout pour des grands systèmes, à cause de la résolution d'équations linéaires à chaque étape.

On a l'habitude de préférer l'utilisation de méthodes implicites pour résoudre des équations aux dérivées partielles paraboliques comme l'équation de la chaleur, mais depuis quelques années, les méthodes dites de Runge-Kutta explicites stabilisées, qui ont des domaines de stabilité les plus grands possible le long de l'axe des réels négatifs, sont de plus en plus utilisées. Ces méthodes étant des méthodes explicites, il y a un très grand intérêt à les utiliser. Si on désire utiliser ce type de méthodes pour des modèles financiers, les conditions initiales sont peu régulières et il n'est pas garanti que ces méthodes soient efficaces. C'est le but de ce chapitre.

Pour introduire les schémas utilisés, nous rappelons les notions sur les méthodes à un pas, donnons une formulation des méthodes de Runge-Kutta et rappelons leurs propriétés. Dans le cas de conditions initiales non régulières, les schémas implicites utilisés doivent satisfaire un certain nombre de propriétés telles que la A-stabilité ou la L-stabilité, notions dont nous redonnons les définitions. Nous développons un code de calcul formel avec SageMath pour vérifier certaines de ces propriétés pour un schéma donné. Nous en déduisons parmi les schémas possibles quel est celui qui vérifie les bonnes propriétés et qui en même temps est le moins coûteux de tous les schémas implicites, il s'agit en fait du schéma Singly-Diagonally Implicit Runge-Kutta d'ordre 4 (SDIRK4). Nous introduisons ensuite les méthodes Runge-Orthogonal-Chebyshev-Kutta (ROCK) et notamment la méthode ROCK4 qui est complètement explicite et d'ordre 4.

Nous comparons ensuite ces deux schémas sur un cas simple en dimension 1 et obtenons de très bonnes performances. Nous proposons alors des simulations numériques en trois dimensions prouvant l'efficacité des méthodes ROCK.

Après ce survol des thèmes principaux de notre travail de recherche ainsi que la présentation de nos résultats, nous allons maintenant présenter l'organisation de cette thèse.

Elle comporte quatre chapitres qui retracent le cheminement et l'évolution de nos travaux.

Le premier chapitre que l'on peut qualifier d'introductif, présente des méthodes et des résultats existants sur l'approximation du biais dans des processus de diffusion paramétrique. Même si le lecteur est supposé être familier avec certaines notions, nous les présentons de façon à rappeler les notations utilisées dans cette thèse. Il s'agit d'introduire les matériaux de base pour comprendre les processus utilisés dans ce mémoire. Nous nous attardons sur un outil très important, nécessaire dans l'approximation des équations différentielles stochastiques en temps discret, à savoir la formule de Taylor Stochastique et proposons un aperçu des trois méthodes d'approximation suivante : Euler, Trapèzes et Milstein. Nous introduisons également l'approche qui a été la notre tout au long de cette thèse et passons en revue les résultats connus du biais et de l'erreur quadratique moyenne du paramètre auto-régressif dans un processus AR(1) et du paramètre de retour à la moyenne dans les processus Ornstein-Uhlenbeck (OU) et Cox-Ingersoll-Ross (CIR).

Le second chapitre traite principalement de deux mesures (standardisées) de l'écart de normalité : le coefficient d'asymétrie (skewness) et le comportement de la queue de distribution (excès de kurtosis) pour la classe des M-estimateurs définie par l'équation (16). Il s'agit plus précisément des troisième et quatrième moments de cette même classe de M-estimateur, approchés aux ordres $O(n^{-3})$ pour le premier et $O(n^{-4})$ pour le second, où n est la taille de l'échantillon. Dans un premier temps, après avoir mis en exergue différentes méthodes de calcul de l'espérance d'un produit de forme quadratique

$$\mathbb{E}[(X^t A_1 X)^{s_1} (X^t A_2 X)^{s_2} \dots (X^t A_\ell X)^{s_\ell}], \quad (42)$$

où $s = s_1 + s_2 + \dots + s_\ell$, X est un vecteur Gaussien et les A_1, A_2, \dots, A_ℓ sont des matrices carrées symétriques de même taille que X , nous proposons une expression pour $\mathbb{E}[(X^t C_1 X)^3 (X^t C_2 X)^3]$ dans le cas particulier où $s = 6$, $s_1 = s_2 = \dots = s_6 = 1$, $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, $A_1 = A_2 = A_3 = C_1$ et $A_4 = A_5 = A_6 = C_2$, avec $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}$ est une matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ de terme général $\sigma_{ij} = \phi^{|i-j|}$, C_1 et C_2 sont deux matrices carrées de même taille que Σ telles que :

$C_1 = \{c_{1ij}\}$ avec $c_{1i,i+1} = 1/2$ si $1 \leq i \leq n$, $c_{1i,i-1} = 1/2$ si $2 \leq i \leq n+1$ et 0 ailleurs, $C_2 = \{c_{2ij}\}$ avec $c_{2ij} = 1$ pour $i = j = 1, 2, \dots, n$ et 0 ailleurs. Nous développons également deux algorithmes permettant de déterminer par récurrence les traces du type $Tr[(C_2 \Sigma)^p]$ et $Tr[(C_1 \Sigma)^p]$, pour tout entier $p \geq 3$. Nous proposons ensuite des expressions analytiques de $\gamma_1(\hat{\phi})$ et $\gamma_2(\hat{\phi})$ puis celle du biais du paramètre de retour à la moyenne dans un processus Ornstein-Uhlenbeck. A l'aide des simulations de Monte Carlo, nous montrons que cette nouvelle expression du biais est satisfaisante, au sens où elle rétablit la courbure du vrai biais et a des caractéristiques équivalentes à ce dernier.

Le troisième chapitre généralise les concepts du chapitre 2 à l'étude des processus auto-régressif AR(1) et moyenne mobile MA(1). Il réexamine l'approche de Bao et Ullah [15, 16, 17], en mettant en évidence l'impact d'une expansion stochastique d'ordre $O(n^{-2})$ sur le biais et l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans un modèle AR(1) et de l'estimateur du quasi maximum de vraisemblance dans un modèle MA(1). Nous démontrons par exemple qu'il est possible d'obtenir des approximations stochastiques d'ordre élevé en utilisant une expansion de type Nagar [71, 1959] de l'inverse du gradient de la condition des moments (16) et de calculer le biais et l'erreur quadratique moyenne d'un M-estimateur. Cela nécessite parfois d'évaluer l'espérance d'un produit de deux, trois, quatre, ou cinq formes quadratiques et d'en donner des expressions analytiques exactes.

Le quatrième et dernier chapitre présente les simulations numériques associée à l'équation de la chaleur avec des données peu régulières. Nous rappelons tous les éléments nécessaires pour définir les schémas de Runge-Kutta explicites et implicites et étudier leurs propriétés, notamment à l'aide d'un outil de calcul formel. Nous présentons des simulations numériques en trois dimensions pour montrer les performances des méthodes explicites de type ROCK.

MÉTHODES BASÉES SUR DES SCHÉMAS DE DISCRÉTISATIONS

Dans ce chapitre, nous faisons un tour d’horizon des méthodes et résultats existants sur l’approximation du biais dans des processus de diffusion paramétrique. Même si le lecteur est supposé être familier avec certaines notions, nous les présentons de façon à rappeler les notations utilisées dans cette thèse.

1 INTRODUCTION

Suite aux travaux de Black et Scholes [26] sur le pricing d’options, une grande attention s’est portée sur l’analyse économétrique des modèles en temps continu. Ces modèles sont généralement définis par des équations différentielles stochastiques (EDS), qui permettent par exemple de modéliser le prix des actifs financiers, de décrire des séries temporelles, des portefeuilles d’actifs ou encore de caractériser les taux d’intérêt et de change. Cette utilisation pose plusieurs problèmes.

Le plus courant est celui de l’estimation des paramètres du modèle. La complexité ici réside dans le fait que les données observées sont disponibles à des instants (ou intervalles) de temps discret. Il faut donc parfois utiliser des procédés de discrétisation.

L’autre problème est celui de l’approximation du biais induit par les différentes méthodes d’estimation et de discrétisation. En particulier, nous nous intéressons aux processus Ornstein-Uhlenbeck (OU) [107] et Cox-Ingersoll-Ross (CIR) [31], qui admettent chacun, une solution explicite et ont des propriétés simples et des interprétations analytiques attrayantes.

Ce chapitre est organisé comme suit :

La première section présente les matériaux de base pour comprendre les processus Ornstein-Uhlenbeck (OU) et Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Voir Glasserman [48], Protter [83] et Revuz et Yor [86].

Dans la deuxième section nous présentons un outil très important, nécessaire dans l'approximation des équation différentielles stochastiques en temps discret, à savoir la formule de Taylor Stochastique et nous donnons un aperçu de trois méthodes d'approximation¹ : Euler, Trapèzes et Milstein.

Dans la troisième section, après un bref rappel sur le biais du paramètre auto-régressif dans un processus AR(1), nous introduisons l'approche de Bao et Ullah [15, 2007] et définissons le biais et l'erreur quadratique moyenne (EQM) d'ordre élevé pour ce même paramètre. Les sections 4 et 5 sont consacrées aux résultats connus du biais et de l'erreur quadratique moyenne du paramètre de retour à la moyenne dans les processus Ornstein-Uhlenbeck et Cox-Ingersoll-Ross. En section 6, nous introduisons des sauts dans le processus Ornstein-Uhlenbeck et revisitons les nouvelles formules de biais. La section 7 conclut.

2 DISCRETISATIONS DE PROCESSUS STOCHASTIQUES

Exceptés quelques modèles classiques (Black-Scholes, OU, CIR, etc...), la grande majorité d'équations différentielles stochastiques n'admet pas de solution explicite. Il convient alors de se tourner vers des approximations discrètes du processus continu sous-jacent.

2.1 Description du modèle

Un processus de diffusion unidimensionnel $X_t = \{X_t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$ est défini par

$$dX(t) = \mu(X(t); \theta)dt + \sigma(X(t); \theta)dB(t), \quad X(0) = x_0 \quad (\text{I.1})$$

où, $\mu(\cdot; \theta)$ et $\sigma(\cdot; \theta)$ sont des applications de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ correspondant respectivement aux fonctions de dérive et de diffusion. $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ est un vecteur de dimension q dont les paramètres sont fixes, inconnus et devront être estimés. $B(t)$ est un mouvement Brownien standard.

L'existence et l'unicité d'un processus $\{X_t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$ satisfaisant (I.1) sont démontrées dans Stroock et Varadhan [102, 1979].

L'EDS (I.1) n'est rien d'autre qu'une représentation de l'intégrale stochastique

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t \mu(X(s); \theta)ds + \int_{t_0}^t \sigma(X(s); \theta)dB(s), \quad (\text{I.2})$$

1. Pour une lecture plus spécifique dédiée aux approximations encore plus précises, nous renvoyons le lecteur aux classes dite *Infill simulations* [40, 76] et *Closed-Form approximations* dans laquelle nous citons *Hermite expansions* [8, 9] et *Saddlepoint approximations* [35, 78] dont un excellent résumé est fait dans Phillips et Yu [82, p. 509-514]. Pour une description de l'ensemble des méthodes d'estimations de ce type de processus, nous nous référons à [9, 10, 12, 24, 46, 55, 72].

pour $t \in [t_0, T]$. En posant $L^1 = \sigma \frac{\partial}{\partial x}$ et en appliquant deux fois la formule d'Itô, respectivement aux fonctions $\mu(\cdot; \theta)$ et $\sigma(\cdot, \theta)$ comme fonctions de X puis à $L^1 \sigma(X_z)$, on obtient (Kloeden et Platen [60, p. 161]) :

$$\begin{aligned} X(t) = & X(t_0) + \mu(X_{t_0}; \theta) \int_{t_0}^t ds + \int_{t_0}^t dB_s \\ & + \sigma(X_{t_0}; \theta) \sigma'(X_{t_0}; \theta) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB_z dB_s + \bar{R} \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

où \bar{R} est une somme d'intégrales multiples de fonctions à intégrer non-constantes et (\prime) désigne la dérivée partielle par rapport à x .

2.2 Schémas d'approximations

Parmi différentes méthodes de discrétisations approximatives, nous présentons dans cette partie les approximations d'Euler, des Trapèzes et de Milstein. Leurs avantages étant qu'elles permettent des calculs simples et à coût réduit.

2.2.1 Partitionnement

Soit un échantillon (X_0, X_1, \dots, X_n) de $n+1$ observations. Dans la pratique, ces observations (discrètes) ne sont disponibles qu'à des instants de discrétisation équidistants $\{\tau h\}_{t=0}^n$ pour une certaine partition

$$\pi^n := \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_i < \dots < \tau_n = T\}$$

de l'intervalle $[t_0 = 0, T]$, où $T = nh$ représente le nombre total des observations et h le pas² de discrétisation. Les instants de discrétisation équidistants³ sont donc

$$\tau_i = t_0 + ih,$$

où $h := \Delta_i = \tau_i - \tau_{i-1} \equiv \Delta = (T - t_0)/n$ avec n assez large de sorte que $h \in]0, 1[$.

Sur la base du partitionnement, il existe plusieurs régimes asymptotiques dans la littérature.

2.2.2 Régimes asymptotiques

L'étude des propriétés asymptotiques se fait en utilisant l'un des trois schémas d'échantillonnages suivant :

1. $T \rightarrow \infty$, h est fixé et $n(= T/h) \rightarrow \infty$. Cela suppose que le pas de temps est fixe et la taille de l'échantillon augmente avec T . Ce type de régime est largement utilisé dans la littérature et est connu sous le nom de "*Long-span asymptotics*".
2. $h \rightarrow 0$, T est fixé et $n \rightarrow \infty$. Cette fois le pas h décroît et tend vers zéro tandis que T reste fixe et n continue de tendre vers l'infini. Ce régime est connu sous le nom de "*In-fill asymptotics*".
3. $T \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ est fixé et $n \rightarrow \infty$. Il s'agit d'une combinaison des deux premiers régimes connu sous le nom de "*Double asymptotics*".

2. Il s'agit du temps écoulé entre deux instants où l'on va simuler le processus. Si X_t est observée mensuellement $h = 1/12$, hebdomadairement $h = 1/52$ et $h = 1/252$ pour des données journalières.

3. Cette hypothèse d'équidistance peut être relâchée dans certains cas.

2.2.3 Approximation d'Euler-Maruyama

C'est l'une des méthodes les plus simples pour la résolution des équations différentielles stochastiques. On n'utilise que les deux premiers termes de la formule (I.3).

Définition 2.1 *L'approximation d'Euler d'un processus continu $X = \{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$, est un processus discret $Y = \{Y_t\}$ satisfaisant le schéma itératif*

$$Y_{ih} = Y_{(i-1)h} + \mu(Y_{(i-1)h}; \theta)\Delta_i + \sigma(Y_{(i-1)h}; \theta)\Delta B_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{I.4})$$

de condition initiale $Y_0 = X_0$ où, $Y_{ih} = Y(\tau_i)$ est la valeur de l'approximation à l'instant⁴ de discrétisation τ_i et $\Delta B_i = B_{\tau_i} - B_{\tau_{i-1}}$, représentent les accroissements d'un processus de Wiener $B = \{B_t, t \geq 0\}$ pour lequel $\Delta B_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$.

En remarquant que ΔB_i est égale à $\sqrt{h}\varepsilon_i$ en loi, où les ε_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, l'approximation d'Euler d'un processus de diffusion $X(t)$ dont la représentation est celle du modèle (I.1) est de la forme

$$X_{ih} = X_{(i-1)h} + \mu(X_{(i-1)h}; \theta)h + \sigma(X_{(i-1)h}; \theta)\sqrt{h}\varepsilon_i. \quad (\text{I.5})$$

2.2.4 La méthode des trapèzes

Bergstrom [22, 1966] suggère de considérer la moyenne des valeurs des deux extrémités de chaque sous-intervalle de discrétisation $t_{i-1} < t < t_i$ lors de l'intégration de $\mu(X(t); \theta)dt$ dans l'équation différentielle (I.1). Ainsi,

Définition 2.2 *L'approximation des Trapèzes du modèle (I.1) est un processus en temps discret $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$ satisfaisant le schéma itératif*

$$X_{ih} = X_{(i-1)h} + \frac{\Delta}{2} \{ \mu(X_{(i-1)h}; \theta) + \mu(X_{ih}; \theta) \} + \sigma(X_{(i-1)h}; \theta)\Delta B_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{I.6})$$

2.2.5 Le schéma de Milstein

Proposé par Milstein [70, 1978], l'idée principale est de prendre en compte le terme du second ordre dans le développement de Taylor (I.3), lors de l'approximation des fonctions de dérive et de diffusion. Il s'agit donc de rajouter au schéma d'Euler (I.5) le terme

$$\frac{1}{2}\sigma'(X_{(i-1)h}; \theta)\sigma(X_{(i-1)h}; \theta) [(\Delta B_i)^2 - \Delta], \quad (\text{I.7})$$

provenant de la double intégrale dans l'expansion de Taylor (I.3). En effet, sachant que

$$\begin{aligned} \int_0^t B_s dB_s &= \frac{1}{2} \int_0^t d(B_s^2) - \frac{1}{2} \int_0^t 1 ds \\ &= \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t, \end{aligned}$$

4. Pour les valeurs intermédiaires entre τ_i et τ_{i+1} on peut faire une interpolation linéaire.

l'intégral double dans (I.3) peut être exprimée par

$$\begin{aligned}
 \int_{(i-1)h}^{ih} \int_{(i-1)h}^t dB_s dB_t &= \int_{(i-1)h}^{ih} (B_t - B_{(i-1)h}) dB_t \\
 &= \int_{(i-1)h}^{ih} B(t) dB(t) - B_{(i-1)h} (B_{ih} - B_{(i-1)h}) \\
 &= \frac{1}{2} \{ (B_{ih}^2 - B_{(i-1)h}^2) - \Delta \} - B_{(i-1)h} (B_{ih} - B_{(i-1)h}) \\
 &= \frac{1}{2} \{ (B_{ih} - B_{(i-1)h})^2 - \Delta \} \\
 &= \frac{1}{2} [(\Delta B)^2 - \Delta].
 \end{aligned}$$

Définition 2.3 *L'approximation de Milstein du modèle (I.1) est un processus en temps discret $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$ satisfaisant le schéma itératif*

$$\begin{aligned}
 X_{ih} &= X_{(i-1)h} + \mu(X_{(i-1)h}; \theta) \Delta + \sigma(X_{(i-1)h}; \theta) \Delta B_i + \frac{1}{2} \sigma'(X_{(i-1)h}; \theta) \sigma(X_{(i-1)h}; \theta) [(\Delta B_i)^2 - \Delta] \\
 &= X_{(i-1)h} + \mu(X_{(i-1)h}; \theta) h + \sigma(X_{(i-1)h}; \theta) \sqrt{h} \varepsilon_i + \frac{h}{2} \sigma'(X_{(i-1)h}; \theta) \sigma(X_{(i-1)h}; \theta) (\varepsilon_i^2 - 1).
 \end{aligned} \tag{I.8}$$

3 BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS AUTO-RÉGRESSIF AR(1)

Après avoir estimé le paramètre θ , nous pouvons nous poser les questions (relatives à $\hat{\theta}$) suivantes : est-il biaisé ? quel est son écart-type ? quelle est sa variance ? etc.... Ce sont quelques-unes des préoccupations sur lesquelles nous nous pencherons dans cette section .

3.1 Formulation des estimateurs

Considérons le processus discret auto-régressif AR(1) suivant :

$$X_{ih} = \alpha + \phi X_{(i-1)h} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{I.9}$$

où $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $|\phi| < 1$. Nous supposons que $X_0 = x_0$ est observé.

L'estimation d'un tel processus peut se faire par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO), qui consiste à choisir des valeurs de m et de ϕ qui minimisent

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ih}^2 = \sum_{i=1}^n (X_{ih} - \alpha - \phi X_{(i-1)h})^2. \tag{I.10}$$

Il est à noter que l'estimateur des MCO de (α, ϕ) est équivalent à celui du maximum de vraisemblance conditionnelle (MVC) qui est obtenu en maximisant la fonction de log-vraisemblance

(conditionnellement à x_0) définie par ⁵

$$\ell_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(X_{ih}|X_{(i-1)h}), \quad (\text{I.11})$$

où $\theta = (\alpha, \phi, \sigma^2)$ et $f(X_{ih}|X_{(i-1)h})$ représentent respectivement le vecteur des paramètres à estimer et la densité de probabilité conditionnelle (supposée connue).

Les résultats d'estimation des paramètres α , ϕ et σ^2 sont ainsi donnés par :

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{ih} X_{(i-1)h} - n^{-2} \sum_{i=1}^n X_{ih} \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}}{n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^2 - n^{-2} \left(\sum_{i=1}^n X_{(i-1)h} \right)^2}, \\ \hat{\alpha} &= n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_{ih} - \hat{\phi} X_{(i-1)h}), \\ \hat{\sigma}^2 &= n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_{ih} - \hat{\phi} X_{(i-1)h} - \hat{\alpha})^2. \end{aligned}$$

3.2 Biais et erreur quadratique moyenne

En supposant $\alpha \neq 0$, pour $Y_{ih} = [1, X_{(i-1)h}]^t$, où $(V)^t$ désigne la transposée d'un vecteur V , l'estimateur des moindres carrés ordinaires de $\theta = (\alpha, \phi)^t$ est

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n Y_{ih} Y_{ih}^t \right)^{-1} \sum_{i=1}^n Y_{ih} X_{ih} = \theta + \left(\sum_{i=1}^n Y_{ih} Y_{ih}^t \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_{ih}.$$

L'estimateur $\hat{\phi}$ est biaisé. En effet, suivant Chambers [30, p. 145], son espérance satisfait une expansion (de type Nagar) de la forme [95]

$$\mathbb{E}(\hat{\phi}) = \phi + \frac{a_1}{n} + o(n^{-2}),$$

où a_1 est une constante. Kendall [59, p. 404] et Sargan [91, 1978] montrent que

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{1 + 3\phi}{n} + o(n^{-1}), \quad (\text{I.12})$$

tandis que Barlett [20, 1946] approche la variance de $\hat{\phi}$ par

$$\mathbb{V}ar(\hat{\phi}) = \frac{1 - \phi^2}{n} + o(n^{-1}). \quad (\text{I.13})$$

Ces résultats de biais sont analogues à ceux de Bao et Ullah [15, p. 655], obtenus en relâchant l'hypothèse de normalité des termes d'erreur et sont indépendants de la variance de ces derniers et de la condition initiale x_0 . Il est cependant possible de caractériser le terme $o(n^{-2})$ dans une

5. Pour les conditions de régularité, voir Gouriéroux et Monfort [49, 1995].

3. BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS AUTO-RÉGRESSIF AR(1)

expansion de biais. Ainsi, conditionnellement à x_0 , en supposant que les termes d'erreur soient de loi normale, on obtient (Bao [13, 2007]) :

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{1+3\phi}{n} + \frac{1}{n^2} \left[\frac{3\phi - 9\phi^2 - 1}{1-\phi} + \frac{(1+3\phi)}{(1-\phi)^2} \left(\frac{\alpha - (1-\phi)x_0}{\sigma_0} \right)^2 \right] + o(n^{-3}), \quad (\text{I.14})$$

$$\mathbb{EQM}(\hat{\phi}) = \frac{1-\phi^2}{n} + \frac{1}{n^2} \left[23\phi^2 + 10\phi - \frac{1+\phi}{1-\phi} \left(\frac{\alpha - (1-\phi)x_0}{\sigma_0} \right)^2 \right] + o(n^{-3}), \quad (\text{I.15})$$

où l'erreur quadratique moyenne d'un paramètre ϕ de dimension un est définie par

$$\mathbb{EQM}(\hat{\phi}) = \mathbb{E}[(\hat{\phi} - \phi)^2] = [\mathbb{B}(\hat{\phi})]^2 + \text{Var}(\hat{\phi}).$$

Cas particulier : $\alpha = 0$

Dans cette configuration, l'estimateur des MCO de ϕ est :

$$\hat{\phi} = \left(\sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^n X_{ih} X_{(i-1)h} = \phi + \left(\sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_{(i-1)h}. \quad (\text{I.16})$$

La variance de $\hat{\phi}$ reste donnée par (I.13) alors que le biais de $\hat{\phi}$ est approché par Mariott et Pope [67, p. 394] et White [109, 1961] par

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{2\phi}{n} + o(n^{-2}). \quad (\text{I.17})$$

Par ailleurs, Shenton et Johnson [96, p. 313] montrent que, si $x_0 = 0$,

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{2\phi}{n} + \frac{4\phi}{n^2} - \frac{2\phi(1-8\phi^2+4\phi^4)}{n^3(1-\phi^2)^2} + o(n^{-4}), \quad (\text{I.18})$$

$$\mathbb{EQM}(\hat{\phi}) = \frac{1-\phi^2}{n} - \frac{1-14\phi^2}{n^2} + \frac{5-78\phi^2+76\phi^4}{n^3(1-\phi^2)} + o(n^{-4}). \quad (\text{I.19})$$

Finalement, Bao [13, p. 1015], en relâchant l'hypothèse de normalité des résidus ε_i dans l'équation (I.9), montre que la condition initiale x_0 a un effet sur le biais et affecte le terme $o(n^{-2})$. En supposant que les termes d'erreur soient de loi normale et en ne regardant que l'effet de x_0 sur le biais, il montre que

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{2\phi}{n} + \frac{1}{n^2} \left[4\phi + \frac{2\phi x_0^2}{\sigma_0^2} \right] + o(n^{-3}), \quad (\text{I.20})$$

$$\mathbb{EQM}(\hat{\phi}) = \frac{1-\phi^2}{n} + \frac{1}{n^2} \left[14\phi^2 - 1 - \frac{(1-\phi^2)x_0^2}{\sigma_0^2} \right] + o(n^{-3}). \quad (\text{I.21})$$

Pour un modèle stationnaire, lorsque n tend vers l'infini, il peut être établi que

$$\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1 - \phi^2). \quad (\text{I.22})$$

Reprenant l'idée de Hurwicz [57, p. 383], il serait souhaitable d'étudier des problèmes analogues d'abord pour des équations différentielles d'ordre supérieur, ensuite pour des systèmes d'équations. Il serait également intéressant de voir si le biais de $\hat{\phi}$ est plus faible dans les systèmes avec un amortissement plus fort et tend vers zéro lorsque les racines caractéristiques du système sont proches de un en valeur absolue. Ces études devraient être menées indépendamment, en supposant le cas où x_0 est une constante non nécessairement nul et le cas où x_0 est une variable aléatoire.

3.3 Approche de Bao et Ullah dans le calcul du biais

Bao et Ullah [15, 16] ont construit cette méthode pour approcher le biais et l'erreur quadratique moyenne d'une classe de M-estimateurs de la forme (I.23) ci-dessous. Il s'agit d'une extension des résultats de Rilstone et al. [88, 1996] applicable pour une large gamme d'estimateurs (MVC, MCO, méthode des moments généralisés etc...) et restant valide, aussi bien pour des modèles gaussiens que non-gaussiens.

◆ Principe

Étant donné un échantillon de n observations, soit $\beta \in \mathbb{R}^p$ un vecteur de paramètres inconnus, de vraie valeur β_0 et dont l'estimateur $\hat{\beta}$, s'écrit comme solution du système⁶ suivant :

$$\Psi_n(\hat{\beta}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n q_i(\hat{\beta}) = 0, \quad (\text{I.23})$$

où $q_i(\beta) = q(Z_i; \beta)$ est une fonction des variables $Z = \{Z_i\}_{i=1}^n$ et du vecteur des paramètres β . $\beta = \beta_0$ est l'unique solution de l'équation $\mathbb{E}[\Psi_n(\beta)] = 0$. Dans la pratique, $\Psi_n(\cdot)$ peut être vue comme la condition d'orthogonalité entre les variables explicatives et les termes d'erreurs, ou encore la condition de premier ordre de certains critères d'optimisation.

Sous les hypothèses de Rilstone et al. [88, p. 374], il est possible d'obtenir une expansion de $\hat{\beta}$, en développant en série de Taylor $\Psi_n(\hat{\beta}) = 0$ dans un voisinage de β_0 . Cette expansion est de la forme :

$$\hat{\beta} - \beta_0 = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2} + \dots, \quad (\text{I.24})$$

où les $a_{-s/2}$ représentent les termes d'ordre $O_p(n^{-s/2})$ pour $s \geq 1$.

Soit $\nabla^s A(\beta)$ la matrice des dérivées partielles d'ordre s d'une matrice $A(\beta)$ par rapport à β . Bao et Ullah [15, p. 652] montrent que :

$$\begin{aligned} a_{-1/2} &= -Q\Psi_n, \\ a_{-1} &= -QV_1 a_{-1/2} - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_2) [a_{-1/2} \otimes a_{-1/2}], \\ a_{-3/2} &= -QV_1 a_{-1} - \frac{1}{2}QV_2 [a_{-1/2} \otimes a_{-1/2}] - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_2) \{ [a_{-1/2} \otimes a_{-1}] + [a_{-1} \otimes a_{-1/2}] \} \\ &\quad - \frac{1}{6}Q\mathbb{E}(H_3) [a_{-1/2} \otimes a_{-1/2} \otimes a_{-1/2}], \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

où $H_i = \nabla^i \Psi_n$ (on omet l'argument de la fonction quand elle est évaluée en β_0), $V_i = H_i - \mathbb{E}(H_i)$, $i = 1, 2, 3$, $Q = [\mathbb{E}(H_1)]^{-1}$ et \otimes représente le produit de Kronecker⁷.

6. Voir Bao et Ullah [15], pour les conditions de régularité.

7. Soient A une matrice $(m \times n)$ d'éléments a_{ij} et B une matrice $(p \times q)$. Le produit de Kronecker de A par B , noté $A \otimes B$, est la matrice $mp \times nq$ admettant la décomposition par blocs :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & \cdots & a_{pq}B \end{bmatrix}.$$

Lorsque A et B sont des matrices carrées et inversibles, $A \otimes B$ est une matrice carrée inversible et

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Définition 3.1 *Considérons une expansion de Taylor de $\hat{\beta}$ autour de β_0 de la forme :*

$$\hat{\beta} - \beta_0 = a_{-1/2} + a_{-1} + O_p(n^{-1}). \quad (\text{I.26})$$

*Le biais et l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\beta}$ sont respectivement définis par*⁸

$$\mathbb{B}(\hat{\beta}) = \mathbb{E}(a_{-1}) \quad (\text{I.27})$$

$$\mathbb{EQM}(\hat{\beta}) = \mathbb{E}(a_{-1/2}^2 + 2a_{-1/2}a_{-1}). \quad (\text{I.28})$$

Définition 3.2 *Considérons une expansion de Taylor de $\hat{\beta}$ autour de β_0 de la forme :*

$$\hat{\beta} - \beta_0 = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + O_p(n^{-3/2}). \quad (\text{I.29})$$

Le biais et l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\beta}$ sont respectivement définis par

$$\mathbb{B}(\hat{\beta}) = \mathbb{E}(a_{-1} + a_{-3/2}) \quad (\text{I.30})$$

$$\mathbb{EQM}(\hat{\beta}) = \mathbb{E}(a_{-1/2}^2 + 2a_{-1/2}a_{-1}) + \mathbb{E}(a_{-1}^2 + 2a_{-1/2}a_{-3/2}). \quad (\text{I.31})$$

En écrivant une expansion stochastique de la forme :

$$\hat{\beta} - \beta_0 = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2} + a_{-5/2} + O_p(n^{-5/2}), \quad (\text{I.32})$$

Bao et Ullah [16, p. 589-591] donnent des approximations du biais et de l'erreur quadratique moyenne, respectivement d'ordre $O(n^{-5/2})$ et $O(n^{-3})$.

4 BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS ORNSTEIN-UHLENBECK

Nous nous intéressons dans cette section au processus stochastique dit processus Ornstein-Uhlenbeck gouverné par un mouvement Brownien. Il existe des processus gouverné par un processus de Lévy. Le terme gouverné indique ici la caractérisation du terme d'erreur. Nous nous référons à Ross et al. [89, 2009] pour plus d'extensions sur le sujet.

4.1 Le modèle

Définition 4.1 *Un processus stochastique unidimensionnel $X = \{X(t), t \geq 0\}$ est un processus Ornstein-Uhlenbeck et on note (OU), s'il est solution de l'équation différentielle stochastique*

$$dX(t) = \kappa(\mu - X(t))dt + \sigma dB(t), \quad X(0) = x_0 \quad (\text{I.33})$$

où $\sigma > 0$, $\mu \geq 0$, $\kappa > 0$. Ces trois paramètres représentent respectivement la volatilité instantané, la moyenne à long terme de X_t et la vitesse d'ajustement à cette moyenne. $B(t)$ est un mouvement Brownien standard sur \mathbb{R} . x_0 peut être une constante (nulle ou non) ou une variable aléatoire indépendante de $B = \{B(t), t \geq 0\}$.

8. Par définition de (I.23), $\mathbb{E}[\Psi_n(\beta_0)] = 0$. Ce qui entraîne que $\mathbb{E}(a_{-1/2}) = 0$. L'expression (I.27) est équivalente à celle de Rilstone et al. [88, p. 376-377] pour des modèles où les observations sont indépendantes et identiquement distribuées et à celle de Bao et Ullah [15, p. 652] pour ceux où les observations ne le sont pas.

En appliquant la formule d'Itô à $f(t, x) = x e^{\kappa t}$, l'unique solution⁹ X_t de l'EDS (I.33) est définie par Protter [83, p. 297-298] :

$$X_t = x_0 e^{-\kappa t} + \mu (1 - e^{-\kappa t}) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{ks} dB(s). \quad (\text{I.34})$$

Conditionnellement à x_0 et en supposant que x_0 a une variance finie, X_t est un processus Gaussien d'espérance, variance et covariance respectivement données par

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mu(1 - e^{-\kappa t}) + e^{-\kappa t} \mathbb{E}(x_0), \quad (\text{I.35})$$

$$\text{Var}[X(t)] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} + e^{-2\kappa t} \left(\text{Var}(x_0) - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \right), \quad (\text{I.36})$$

$$\forall u \geq t \geq 0 \quad \text{Cov}(X_u, X_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} e^{-\kappa u} (e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}) + e^{-\kappa(u+t)} \text{Var}(x_0). \quad (\text{I.37})$$

Pour tout $h > 0$, la variable aléatoire X_{ih} sachant $X_{(i-1)h}$ suit une loi normale :

$$X_{ih} | X_{(i-1)h} \sim \mathcal{N} \left\{ X_{(i-1)h} e^{-\kappa h} + \mu(1 - e^{-\kappa h}), \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa h}) \right\}. \quad (\text{I.38})$$

Phillips [77, 1972] montre que le modèle en temps discret exact correspondant à (I.33) est donné par la structure auto-régressive AR(1) suivante :

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \mu(1 - \phi) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad (\text{I.39})$$

où $\phi = e^{-\kappa h}$ et les ε_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

En particulier,

- si $\kappa > 0$ alors $|\phi| < 1$ et donc le processus est dit stationnaire au sens faible.
- si $\kappa \rightarrow 0$ ou $h \rightarrow 0$ alors $|\phi| \rightarrow 1$ et le modèle converge vers un modèle à racine unitaire.
- pour des valeurs infinitésimales de κ ou de h , le modèle a une racine presque unitaire.

Par ailleurs, on peut montrer que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \mu \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[X(t)] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}.$$

En d'autres termes, X_t converge en loi vers une loi normale d'espérance μ et de variance $\sigma^2/2\kappa$.

4.2 Biais dans l'estimation du paramètre de retour à la moyenne

Dans cette sous-section nous présentons des résultats d'approximations du biais du paramètre de retour à la moyenne κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck (I.33) discrétisé à l'aide des méthodes exact, d'Euler et des Trapèzes.

9. Solution markovienne au sens fort.

4.2.1 A l'aide du modèle discret exact

Les estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnelle des paramètres κ, μ et σ sont donnés par

$$\widehat{\kappa} = -\frac{\ln \widehat{\phi}}{h}, \quad \widehat{\mu} = \frac{\widehat{\alpha}}{1 - \widehat{\phi}}, \quad \widehat{\sigma} = \widehat{\sigma} \sqrt{\frac{-2 \ln \widehat{\phi}}{h(1 - \widehat{\phi}^2)}}, \quad (\text{I.40})$$

où $\widehat{\phi}$, $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\sigma}$ sont les estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnelle des coefficients ϕ , α et $\tilde{\sigma}$ du modèle (I.9) dans lequel

$$\phi = e^{-\kappa h}, \quad \alpha = \mu(1 - \phi), \quad \tilde{\sigma} = \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}},$$

et les variables ε_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}^2)$.

Tang et Chen [103, p. 68] analysent les propriétés asymptotiques de $\widehat{\kappa}$ et montrent que, dans un processus Ornstein-Uhlenbeck stationnaire avec une condition initiale nulle $X_0 = 0$,

- si $T \rightarrow \infty$, h est fixé et $n \rightarrow \infty$ (Long-span asymptotics), alors

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = \frac{5 + 2e^{\kappa h} + e^{2\kappa h}}{2T} + o(n^{-2}), \quad (\text{I.41})$$

$$\text{Var}(\widehat{\kappa}) = \frac{e^{2\kappa h} - 1}{Th} + o(n^{-2}). \quad (\text{I.42})$$

- si κ ou h tend vers zéro (présence de racine unitaire), alors

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) \rightarrow \frac{4}{T}. \quad (\text{I.43})$$

Motivés par l'hypothèse que les données financières à haute fréquence soient de plus en plus disponibles et que les estimateurs basés sur des schémas de discrétisation nécessitent un pas de discrétisation h qui tend vers zéro, afin que l'erreur de discrétisation diminue assez rapidement vers zéro de manière à ce que les estimateurs convergent en probabilité vers les vraies valeurs des paramètres, Tang et Chen [103, Théorème 3.2.1] établissent que

- si $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, $T = nh \rightarrow \infty$ et $\forall \kappa > 2 \quad Th^{1/\kappa} \rightarrow \infty$, alors

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = 4T^{-1} - \{4\kappa n^{-1} - 7/\kappa T^2\} + o(n^{-1} + T^{-2}), \quad (\text{I.44})$$

$$\text{Var}(\widehat{\kappa}) = 2\kappa T^{-1} + o(T^{-1}). \quad (\text{I.45})$$

◆ Cas particulier : $\mu = 0$

Dans ces conditions, Yu [112, équation 12] montre que

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} + o(T^{-1}). \quad (\text{I.46})$$

En présence de racine unitaire (κ ou $h \rightarrow 0$),

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) \rightarrow \frac{2}{T}. \quad (\text{I.47})$$

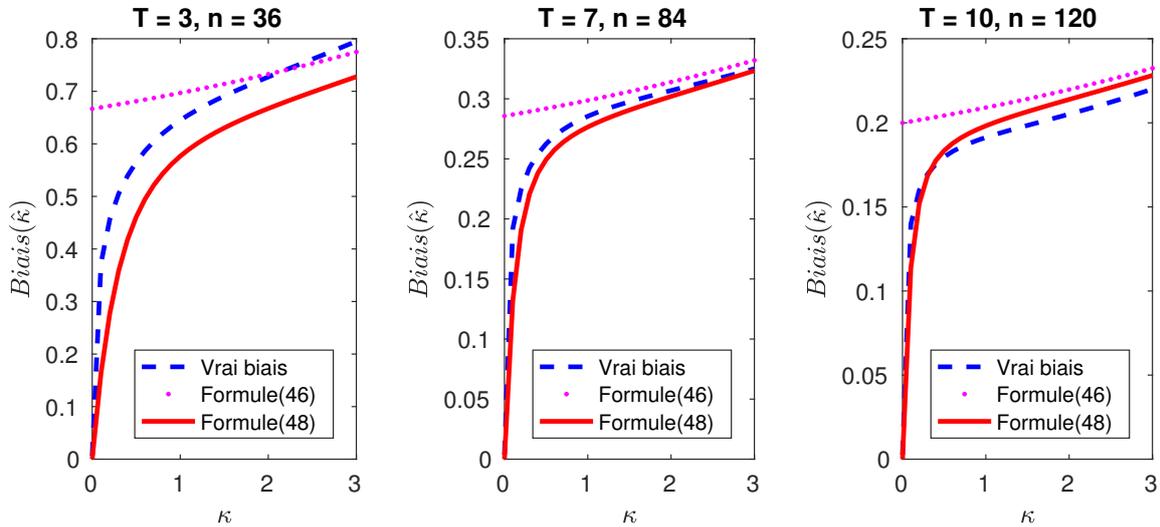
Au regard de l'équation (I.47), il apparait clairement que le biais ne disparaîtra que si $T \rightarrow \infty$. Cela contredit la conjecture faite par Hurwicz [57]. Comme mentionné dans Yu [112, p.116], cette contradiction pourrait être due à l'erreur commise en approchant la somme de Cesaro¹⁰ dans l'obtention des expressions (I.13) et (I.17), respectivement de Barlett et Marriott et Pope [20, 67].

Lorsque κ est proche zéro, en supposant que la condition initiale X_0 suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et en utilisant l'approche de Bao et Ullah, Yu [112, Théorème 2.1] montre que

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} - \frac{2(1 - e^{-2n\kappa h})}{Tn(1 - e^{-2\kappa h})} + o(T^{-1}). \quad (\text{I.48})$$

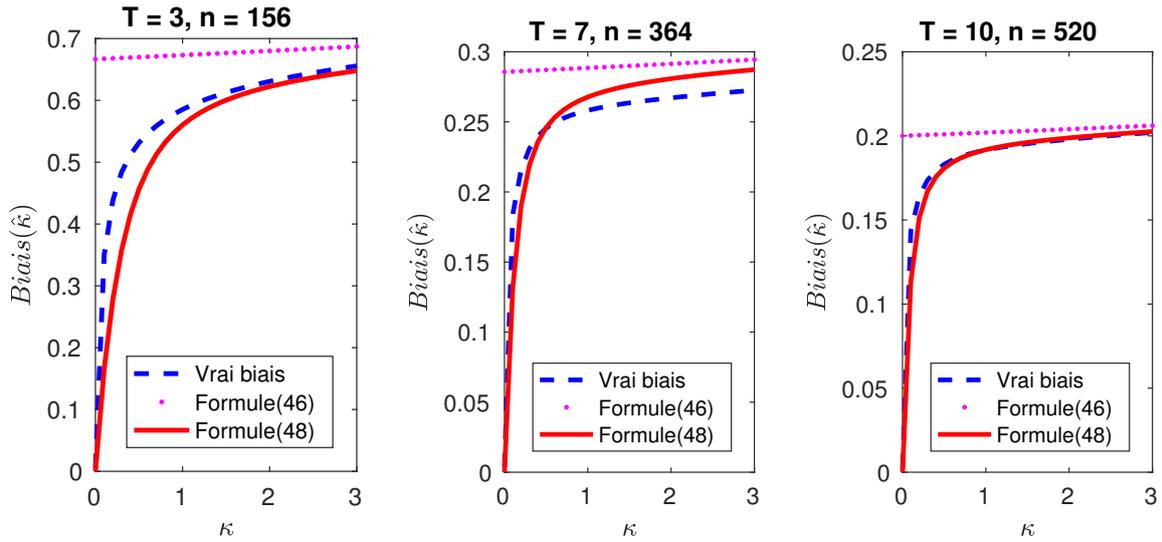
Afin de comprendre le comportement du vrai biais dans le modèle (I.33) et les performances des approximations (I.46) et (I.48), nous avons effectué 10 000 simulations du modèle discret exact avec les paramètres suivants : $\mu = 0$, $\kappa \in]0, 3]$, $\sigma = 0.01$ et la condition initiale $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$. Celles-ci ont été effectuées pour différentes valeurs de $T = 3, 7, 10$ et $h = 1/12, 1/52, 1/252$.

Les graphiques I.1, I.2 et I.3 présentent des réplifications des résultats de comparaisons existants entre les approximations de biais donnés par les expressions (I.46) et (I.48). Ils mettent notamment en exergue que le biais donné par l'expression (I.46) semble linéaire alors que celui donné par l'expression (I.48) est non linéaire et a les mêmes caractéristiques que le vrai biais. Lorsque κ tend vers 3, les trois biais sont très proches alors que lorsque κ est proche de zéro, l'approximation du biais par l'expression (I.48) tend à apporter une réelle amélioration contrairement à l'expression (I.46) dont les résultats sont éloignés du vrai biais.

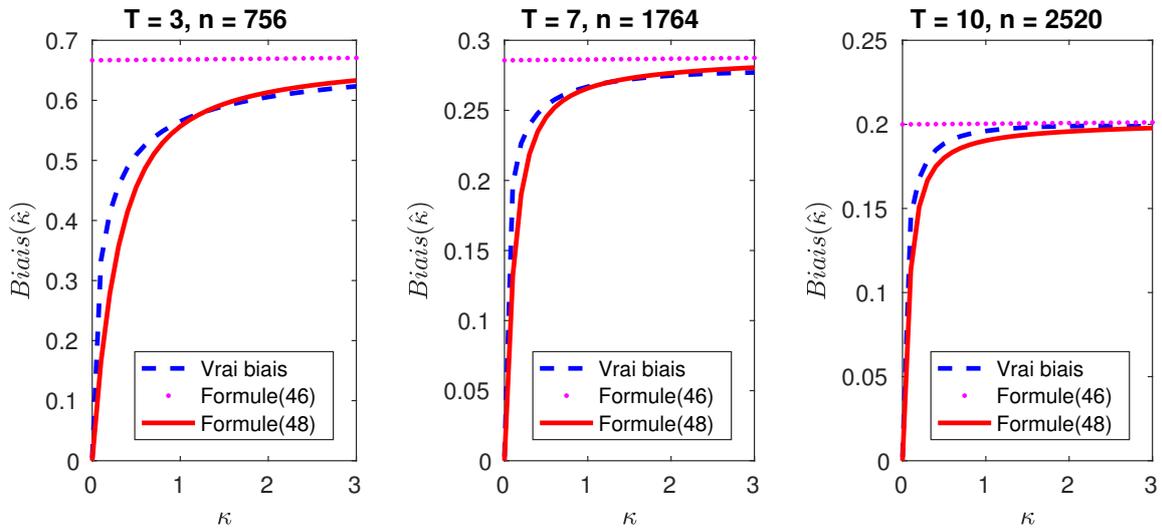


Graphique I.1 – Biais comme fonction de κ pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$). Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en pointillée (rose) correspond au biais donnée par l'expression (I.46) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (I.48).

10. Elle est définie par $\sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \phi^{|j|}$ et remplacée par $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi^{|j|} = \frac{1 + \phi}{1 - \phi}$.



Graphique I.2 – Biais comme fonction de κ pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$). Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en pointillée (rose) correspond au biais donnée par l'expression (I.46) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (I.48).

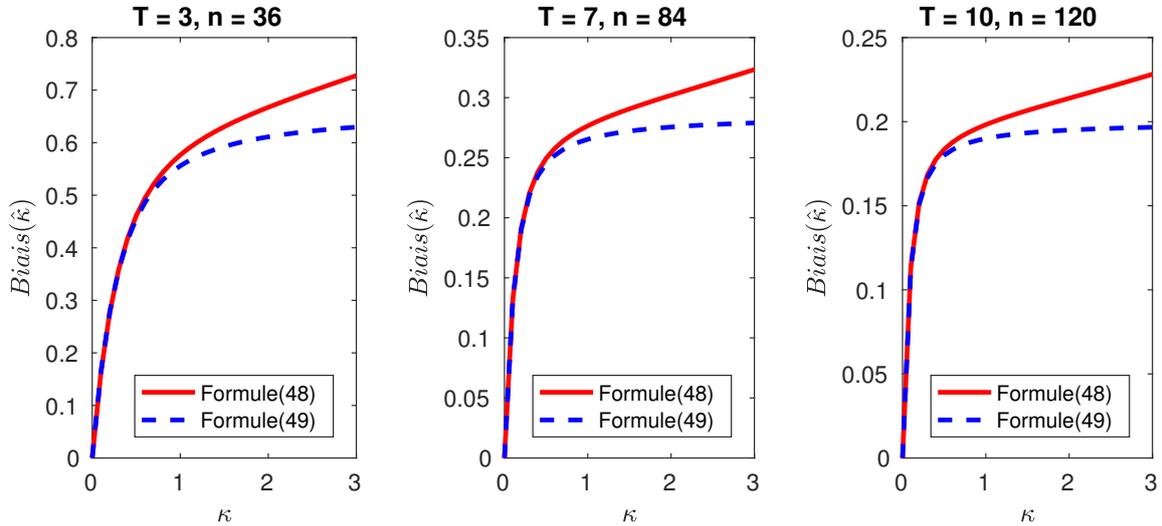


Graphique I.3 – Biais comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$). Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en pointillée (rose) correspond au biais donnée par l'expression (I.46) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (I.48).

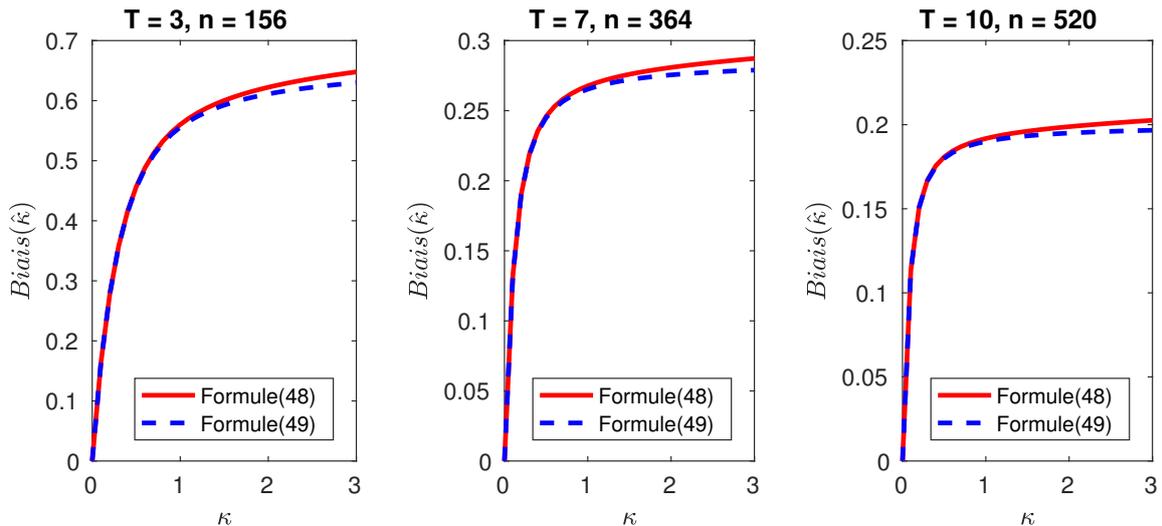
Bien que les deux cas ($h \rightarrow 0$ et $\kappa \rightarrow 0$) conduisent à une racine unitaire ($\phi \rightarrow 1$) dans le modèle exact en temps discret, les implications quand $h \rightarrow 0$ et quand $\kappa \rightarrow 0$ sont très différentes. En effet,

- Lorsque h tend vers zéro,

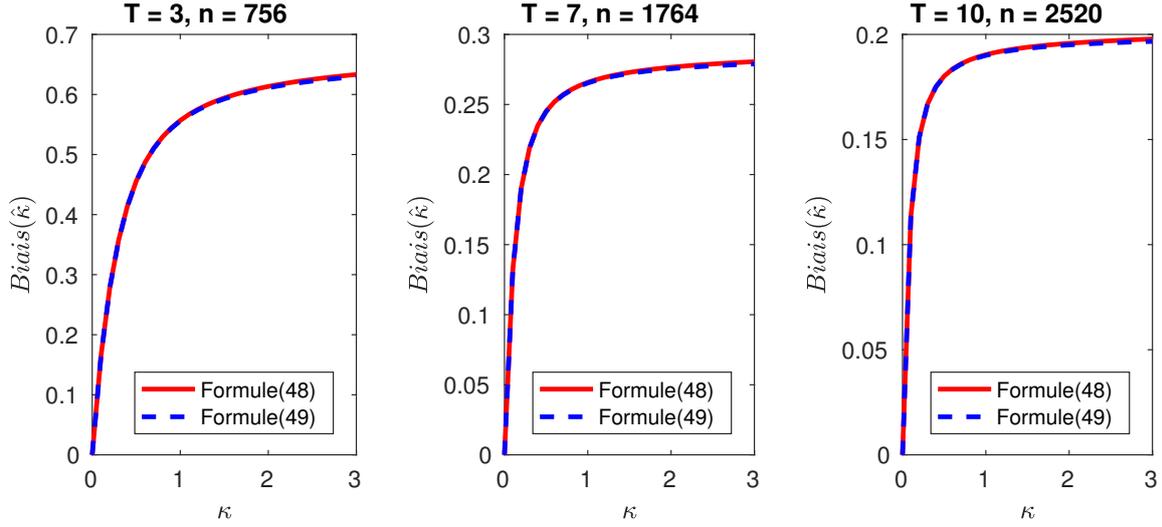
$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{T} \left\{ 2 - \frac{1 - e^{-2T\kappa}}{T\kappa} \right\}. \quad (\text{I.49})$$



Graphique I.4 – Approximations du biais à partir des expressions (I.48) et (I.49) pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$) avec $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond à l’expression (I.48). La ligne continue (rouge) correspond à l’expression (I.49).



Graphique I.5 – Approximations du biais à partir des expressions (I.48) et (I.49) pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$) avec $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond à l’expression (I.48). La ligne continue (rouge) correspond à l’expression (I.49).



Graphique I.6 – Approximations du biais à partir des expressions (I.48) et (I.49) pour des fréquences journalières ($h = 1/252$) avec $T = 3, 7, 10$. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'expression (I.48). La ligne continue (rouge) correspond à l'expression (I.49).

Les graphiques I.4, I.5 et I.6 montrent clairement que l'écart entre les courbes données par les expressions (I.48) et (I.49) se rétrécit lorsque h tend vers zéro, suggérant que si h tend vers zéro (I.49) pourrait remplacer (I.48).

- Lorsque κ tend vers zéro (la conjecture de Hurwicz est vérifiée),

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow[\kappa \rightarrow 0]{} 0, \quad (\text{I.50})$$

4.2.2 A l'aide du modèle discret d'Euler

Le modèle discret d'Euler¹¹ ou approximation d'Euler du modèle (I.33) est défini par

$$X_{ih} = (1 - \kappa h)X_{(i-1)h} + \kappa\mu h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1). \quad (\text{I.51})$$

Les estimateurs¹² du maximum de vraisemblance conditionnelle de κ, μ et σ sont donnés par

$$\hat{\kappa} = \frac{1 - \hat{\phi}}{h}, \quad \hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha}}{1 - \hat{\phi}}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\hat{\tilde{\sigma}}}{\sqrt{h}}, \quad (\text{I.52})$$

où $\hat{\phi}$, $\hat{\alpha}$ et $\hat{\tilde{\sigma}}$ sont les estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnelle des coefficients ϕ , α et $\tilde{\sigma}$ du modèle (I.9) dans lequel

$$\phi = 1 - \kappa h, \quad \alpha = \kappa\mu h, \quad \tilde{\sigma} = \sigma\sqrt{h},$$

11. Le modèle discret d'Euler (I.51) est équivalent au modèle discret exact (I.39), si on remplace dans celui-ci, les exponentiels ($e^{-\kappa h}$) par leur expansion de Taylor d'ordre un (en h) :

$$e^{-\kappa h} = 1 - \kappa h + O(h^2) \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

12. Ils sont équivalents à ceux obtenus par discrétisation de Milstein. En effet dans le modèle Ornstein-Uhlenbeck (I.33), $\sigma(X(t); \theta) = \sigma$ est constant et indépendant de $X(t)$. Ainsi, l'approximation de Milstein du modèle (I.33) est équivalente à celle d'Euler (I.51).

et les variables ε_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}^2)$.

Les propriétés asymptotiques de ces estimateurs sont étudiées dans Wang et al.[80, p. 234].

En particulier,

- si $T \rightarrow \infty$, h est fixé et $n \rightarrow \infty$ (Long-span asymptotics), alors

$$\widehat{\kappa} - \kappa \xrightarrow{p} -\frac{e^{-\kappa h} - 1 + \kappa h}{h} = O(h) \quad \text{quand } h \rightarrow 0, \quad (\text{I.53})$$

et

$$h\sqrt{n} \left(\widehat{\kappa} - \frac{1 - e^{-\kappa h}}{h} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1 - e^{-2\kappa h}). \quad (\text{I.54})$$

- si $\mu \neq 0$, alors

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = -\frac{e^{-\kappa h} - 1 + \kappa h}{h} + \frac{1 + 3e^{-\kappa h}}{T} + o(T^{-1}). \quad (\text{I.55})$$

- si $\mu = 0$, alors

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = -\frac{e^{-\kappa h} - 1 + \kappa h}{h} + \frac{2e^{-\kappa h}}{T} + o(T^{-1}). \quad (\text{I.56})$$

Dans les expressions (I.55) et (I.56), les biais induits par la méthode d'estimation dans chacun des deux modèles, sont respectivement donnés par

$$\frac{1 + 3e^{-\kappa h}}{T} + o(T^{-1}) \quad \text{et} \quad \frac{2e^{-\kappa h}}{T} + o(T^{-1}). \quad (\text{I.57})$$

Bergstrom [23, 1984] montre que le biais de discrétisation asymptotique est défini par

$$\lambda = -\frac{e^{-\kappa h} - 1 + \kappa h}{h} = O(h) \quad \text{quand } h \rightarrow 0. \quad (\text{I.58})$$

Les graphiques I.7, I.8 et I.9 rendent compte des résultats de 10000 simulations pour caractériser le biais de l'estimateur du paramètre de retour à la moyenne κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck sans moyenne ($\mu = 0$) et discrétisé en utilisant la méthode d'Euler :

$$X_{ih} = (1 - \kappa h)X_{(i-1)h} + \sigma\sqrt{h}\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1), \quad (\text{I.59})$$

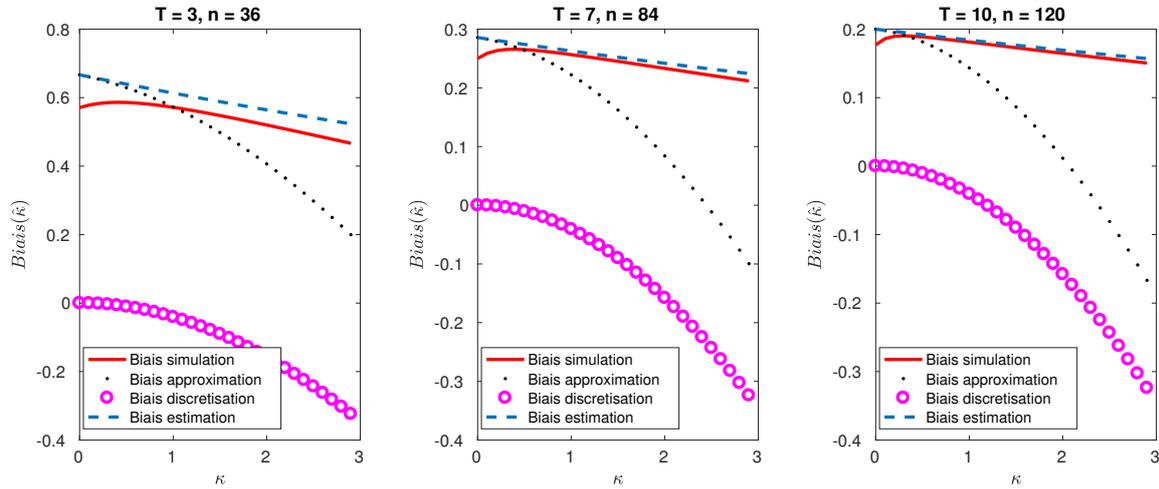
avec les paramètres suivants : $\kappa \in]0, 3]$, $\sigma = 0.01$ et la condition initiale $X_0 = 0$. Celles-ci ont été effectuées pour différentes valeurs de $T = 3, 7, 10$ et $h = 1/12, 1/52, 1/252$.

Nous y représentons les quatre biais suivants : "Biais simulation" qui représente le biais obtenu par simulation du modèle discret d'Euler. "Biais approximation" donné par la l'expression (I.56). "Biais discrétisation" donné par l'expression (I.58) et "Biais estimation" donné par l'expression (I.57).

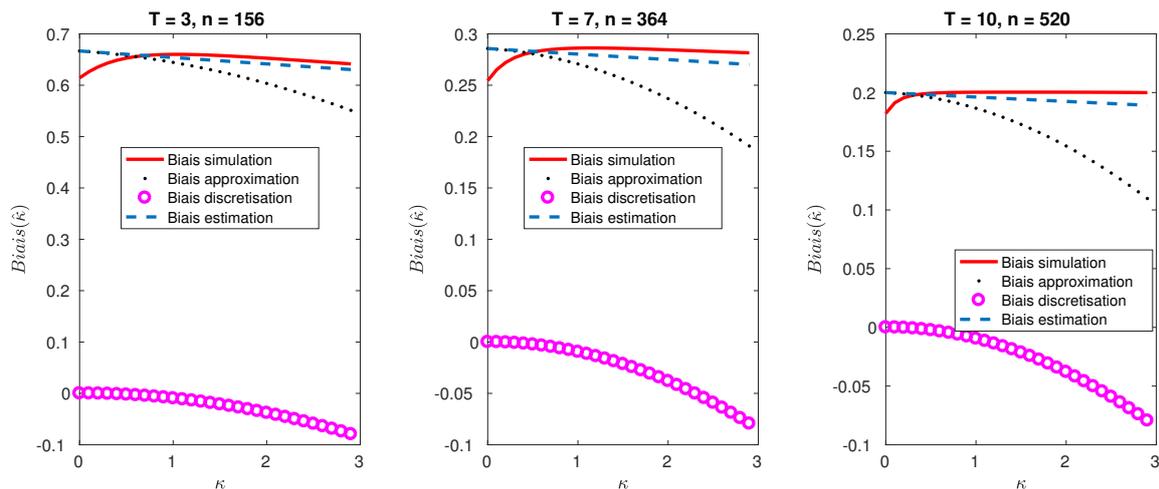
Plusieurs caractéristiques sont visibles dans les graphiques. (1) Le vrai biais est élevé dans tous les cas, spécialement lorsque κ est petit. (2) Le biais d'estimation est toujours positif alors que le biais de discrétisation est négatif, ce qui est cohérent avec la remarque 4.2 de Wang

4. BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS ORNSTEIN-UHLENBECK

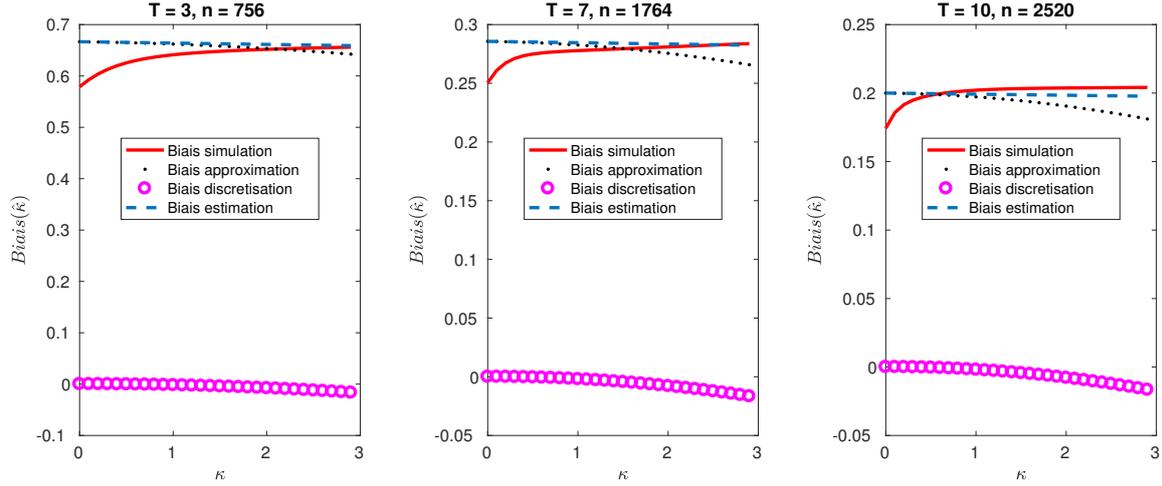
et al. [80]). (3) L'approximation du biais (I.56) est respectivement une fonction décroissante de κ et de T , quelque soit le pas de discrétisation h choisi. (4) Le biais de discrétisation a exactement les mêmes caractéristiques. (5) L'approximation du biais (I.56) est meilleur lorsque h devient petit. (6) Quelque soit le pas de discrétisation choisi, pour des valeurs de κ proches de 0, nous observons une sur-estimation du biais par l'expression (I.56) et une sous-estimation de ce dernier lorsque κ tend vers 3.



Graphique I.7 – Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle d'Euler (I.59), pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l'expression (I.56), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.58) et la ligne en tiret (bleu) au biais d'estimation (I.57).



Graphique I.8 – Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle d'Euler (I.59), pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l'expression (I.56), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.58) et la ligne en tiret (bleu) au biais d'estimation (I.57).



Graphique I.9 – Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle d'Euler (I.59), pour des fréquences journalières ($h = 1/252$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l'expression (I.56), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.58) et la ligne en tiret (bleu) au biais d'estimation (I.57).

4.2.3 A l'aide du modèle discret des Trapèzes.

Le modèle discret des trapèzes ou l'approximation des trapèzes du modèle (I.33) est décrit par :

$$X_{ih} = \left(\frac{2 - \kappa h}{2 + \kappa h} \right) X_{(i-1)h} + \frac{2\kappa\mu h}{2 + \kappa h} + \left(\frac{2\sigma\sqrt{h}}{2 + \kappa h} \right) \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1). \quad (\text{I.60})$$

Les estimateurs¹³ du maximum de vraisemblance conditionnelle de κ, μ, σ sont donnés par

$$\hat{\kappa} = \frac{2}{h} \left(\frac{1 - \hat{\phi}}{1 + \hat{\phi}} \right), \quad \hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha}}{1 - \hat{\phi}} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma} = \frac{2\hat{\tilde{\sigma}}}{\sqrt{h}(1 + \hat{\phi})}, \quad (\text{I.61})$$

où $\hat{\phi}, \hat{\alpha}$ et $\hat{\tilde{\sigma}}$ sont les estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnelle des coefficients ϕ, α et $\tilde{\sigma}$ du modèle (I.9) dans lequel

$$\phi = \frac{1 - \frac{\kappa h}{2}}{1 + \frac{\kappa h}{2}}, \quad \alpha = \frac{\kappa\mu h}{1 + \frac{\kappa h}{2}}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma\sqrt{h}}{1 + \frac{\kappa h}{2}}, \quad (\text{I.62})$$

et les variables ε_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}^2)$.

13. L'estimateur de κ par la méthode des trapèzes peut être obtenu en effectuant une expansion de Taylor du second ordre (en h) de $\phi = e^{-\kappa h}$. On obtient alors :

$$\phi = e^{-\kappa h} = 1 - \kappa h - \frac{\kappa^2 h^2}{2} [(e^{-\kappa h} - 1)] + O(h^3) \quad \text{quand } h \rightarrow 0,$$

soit $\kappa = \frac{2}{h} \left(\frac{1 - \phi}{1 + \phi} \right) + O(h^2) \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$

4. BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS ORNSTEIN-UHLENBECK

Lorsque $\kappa > 0$, les propriétés asymptotiques de ces estimateurs sont étudiées dans Wang et al. [80, Théorème 4.3].

En particulier,

- si $T \rightarrow \infty$, h est fixé et $n \rightarrow \infty$ (Long-span asymptotics), alors

$$\widehat{\kappa} - \kappa \xrightarrow{p} -\frac{2(1 - e^{-\kappa h})}{h(1 + e^{-\kappa h})} - \kappa = O(h^2) \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0, \quad (\text{I.63})$$

et

$$h\sqrt{n} \left[\widehat{\kappa} - \frac{2(1 - e^{-\kappa h})}{h(1 + e^{-\kappa h})} \right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left[0, \frac{16(1 - e^{-\kappa h})}{(1 + e^{-\kappa h})^3} \right]. \quad (\text{I.64})$$

- si $\mu \neq 0$, alors

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = -\kappa + \frac{2(1 - e^{-\kappa h})}{h(1 + e^{-\kappa h})} + \frac{8}{T(1 + e^{-\kappa h})} + o(T^{-1}). \quad (\text{I.65})$$

- si $\mu = 0$, alors

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = -\kappa + \frac{2(1 - e^{-\kappa h})}{h(1 + e^{-\kappa h})} + \frac{4}{T(1 + e^{-\kappa h})} + o(T^{-1}). \quad (\text{I.66})$$

Dans les expressions (I.65) et (I.66), les biais induits par la méthode d'estimation dans chacun des deux modèles, sont respectivement donnés par

$$\frac{8}{T(1 + e^{-\kappa h})} + o(T^{-1}) \quad \text{et} \quad \frac{4}{T(1 + e^{-\kappa h})} + o(T^{-1}). \quad (\text{I.67})$$

Sargan[90, 1974] montre que le biais de discrétisation défini dans les deux cas par

$$\nu = -\kappa + \frac{2(1 - e^{-\kappa h})}{h(1 + e^{-\kappa h})} = O(h^2) \quad \text{quand } h \rightarrow 0. \quad (\text{I.68})$$

Les graphiques I.10, I.11 et I.12 synthétisent les résultats de 10000 simulations pour caractériser le biais de l'estimateur du paramètre de retour à la moyenne κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck sans moyenne ($\mu = 0$) et discrétisé en utilisant la méthode des trapèzes :

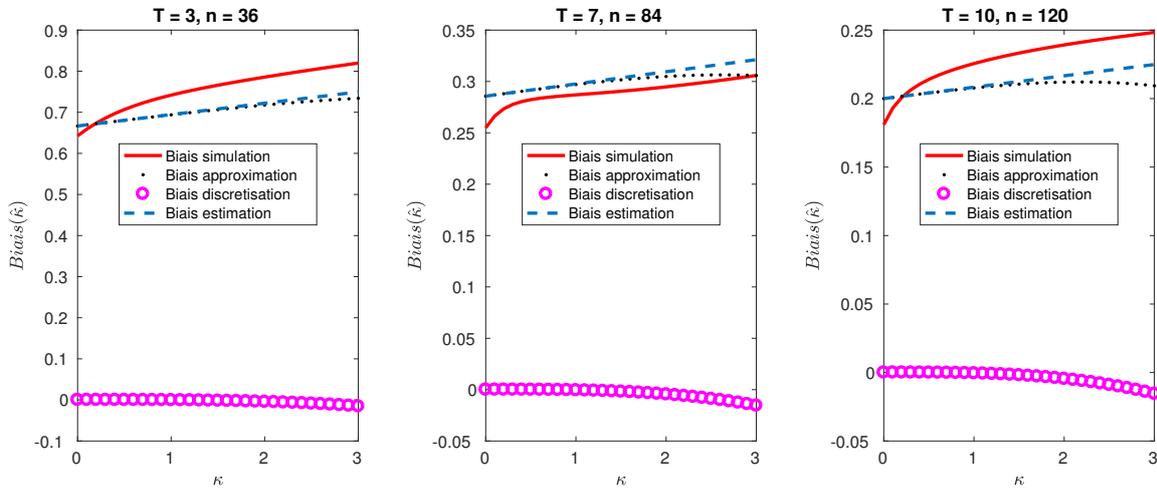
$$X_{ih} = \left(\frac{2 - \kappa h}{2 + \kappa h} \right) X_{(i-1)h} + \frac{2\kappa \mu h}{2 + \kappa h} + \left(\frac{2\sigma\sqrt{h}}{2 + \kappa h} \right) \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1), \quad (\text{I.69})$$

avec les paramètres suivants : $\kappa \in]0, 3]$, $\sigma = 0.01$ et la condition initiale $X_0 = 0$. Celles-ci ont été effectuées pour différentes valeurs de $T = 3, 7, 10$ et $h = 1/12, 1/52, 1/252$.

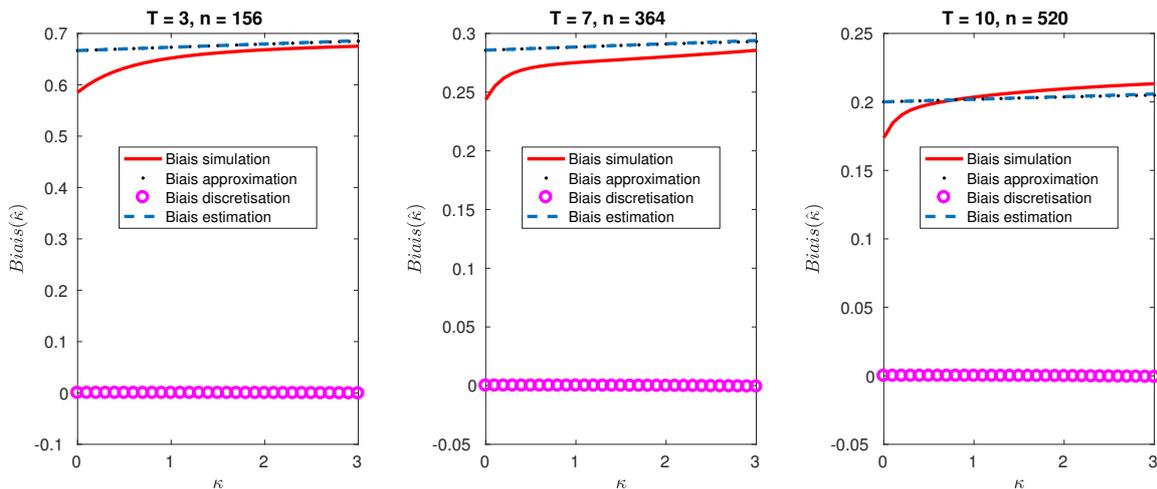
Nous y représentons les quatre biais suivants : "Biais simulation" qui représente le vrai biais, obtenu par simulation du modèle discret des trapèzes. "Biais approximation" donné par l'expression (I.66). "Biais discrétisation" donné par l'expression (I.68) et "Biais estimation" donné par l'expression (I.67).

Plusieurs caractéristiques sont apparentes dans les graphiques. (1) L'approximation du biais de discrétisation (I.68) est négatif alors que celle du biais d'estimation (I.67) est toujours positif

dans tous les cas de figures, ce qui est cohérent avec les remarque 4.5 et 4.6 de Wang et al. [80]). (2) Le vrai biais est une fonction respectivement croissante de κ et décroissante de T . (3) L'approximation du biais donnée par l'expression (I.66) semble donner une bonne approximation du vrai biais au sens où elle rétablit les caractéristiques de ce dernier.

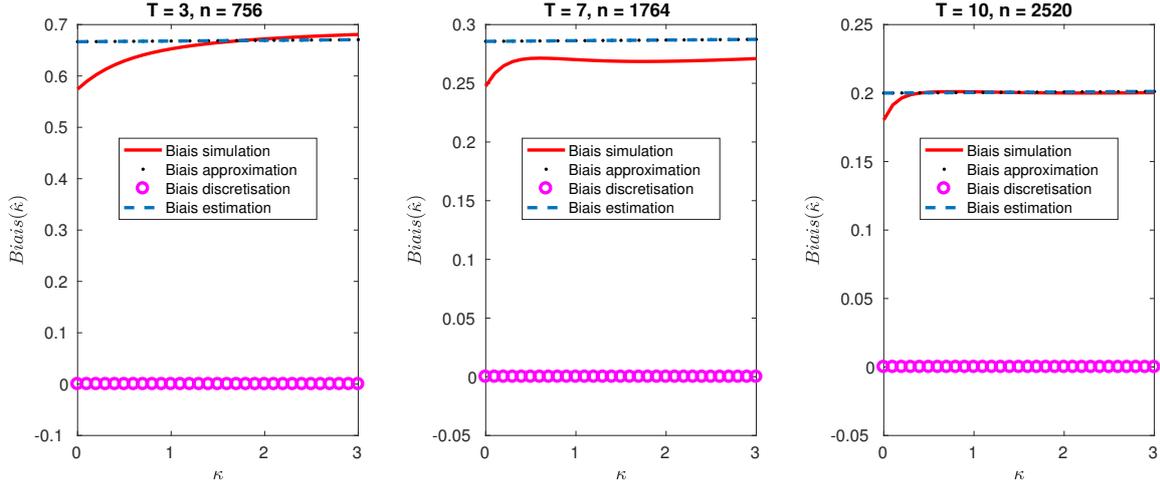


Graphique I.10 – Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle des trapèzes (I.69), pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l'expression (I.66), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.68) et la ligne en tiret (bleu) au biais d'estimation (I.67).



Graphique I.11 – Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle des trapèzes (I.69), pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l'expression (I.66), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.68) et la ligne en tiret (bleu) au biais d'estimation (I.67).

4. BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS ORNSTEIN-UHLENBECK



Graphique I.12 – Approximations du biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans le modèle des trapèzes (I.69), pour des fréquences journalières ($h = 1/252$) avec $T = 3, 7, 10$. La ligne continue (rouge) correspond au vrai biais, la courbe en pointillé (noir) à l’expression (I.66), la courbe en rond au biais de discrétisation (I.68) et la ligne en tiret (bleu) au biais d’estimation (I.67).

En ce qui concerne l’estimation du maximum du vraisemblance conditionnelle du paramètre κ dans un modèle Ornstein-Uhlenbeck, Wang et al.[80, p. 235] montrent que lorsque $\kappa > 0$, l’estimateur basé sur la méthode d’Euler conduit à un biais et une variance plus faibles que ceux basées sur la méthode des trapèzes et le modèle discret exact. En particulier,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(\hat{\kappa}_{Exacte}) - \mathbb{V}ar(\hat{\kappa}_{Euler}) &= \frac{1 - \phi^2}{Th\phi^2} - \frac{1 - \phi^2}{Th} > 0, \\ \mathbb{V}ar(\hat{\kappa}_{Trap}) - \mathbb{V}ar(\hat{\kappa}_{Euler}) &= \frac{16(1 - \phi)}{Th(1 + \phi)^3} - \frac{1 - \phi^2}{Th} = \frac{(1 - \phi)^2(3 + \phi)[4 + (1 + \phi)^2]}{Th(1 + \phi)^3} > 0, \\ \mathbb{V}ar(\hat{\kappa}_{Trap}) - \mathbb{V}ar(\hat{\kappa}_{Euler}) &= \frac{16(1 - \phi)}{Th(1 + \phi)^3} - \frac{1 - \phi^2}{Th} = \frac{(1 - \phi)^2(3 + \phi)[4 + (1 + \phi)^2]}{Th(1 + \phi)^3} > 0. \end{aligned}$$

Les performances des différentes méthodes d’approximation sont comparées dans les graphiques I.13, I.14 et I.15, dans lesquels sont représentées le biais et la variance de $\hat{\kappa}$ obtenues par la simulation :

- du modèle discret exact,

$$X_{ih} = e^{-\kappa h} X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1), \quad (\text{I.70})$$

- du modèle discret d’Euler

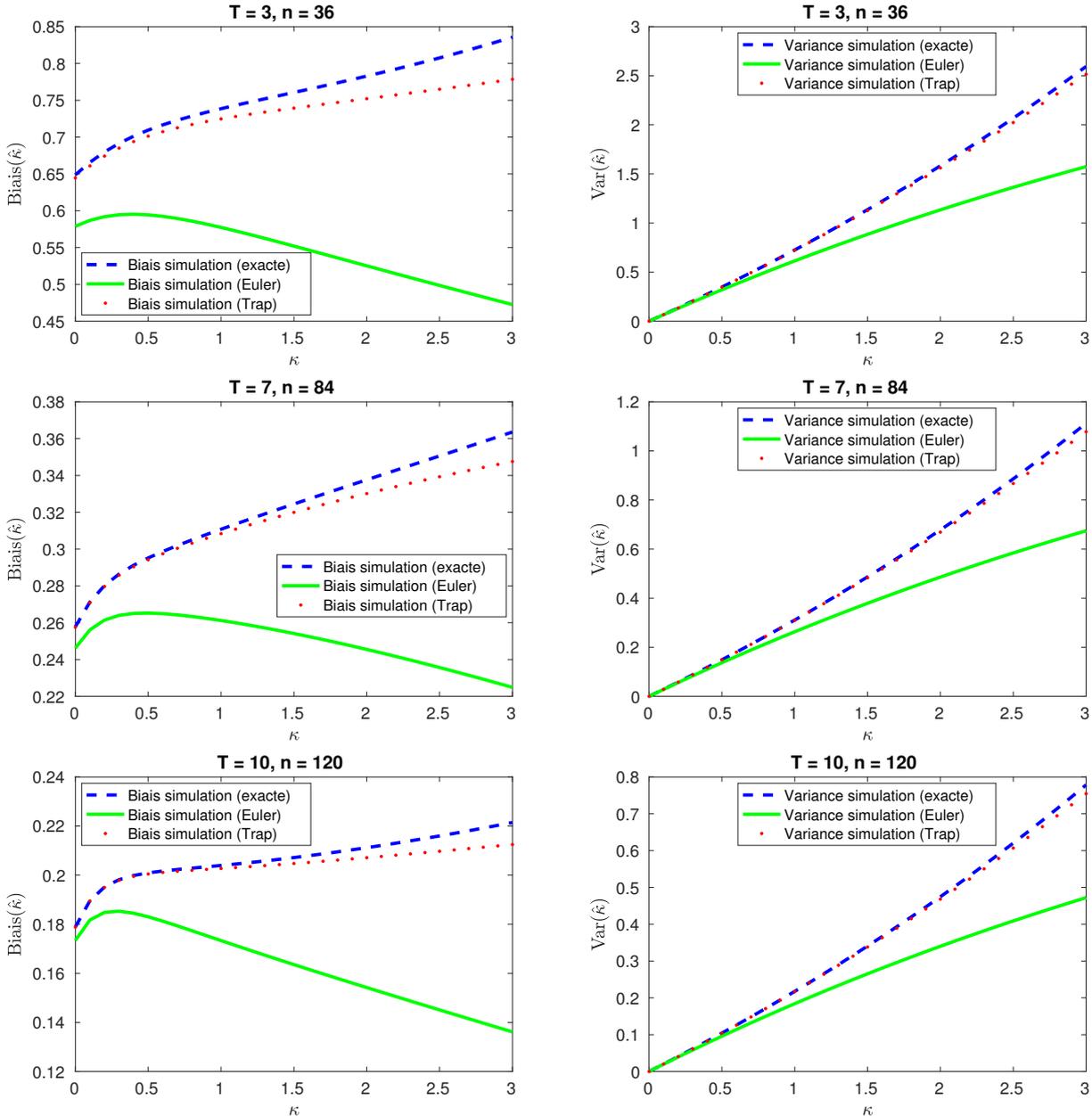
$$X_{ih} = (1 - \kappa h) X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{h} \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1), \quad (\text{I.71})$$

- et du modèle discret des trapèzes.

$$X_{ih} = \left(\frac{2 - \kappa h}{2 + \kappa h} \right) X_{(i-1)h} + \frac{2\kappa \mu h}{2 + \kappa h} + \left(\frac{2\sigma \sqrt{h}}{2 + \kappa h} \right) \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1), \quad (\text{I.72})$$

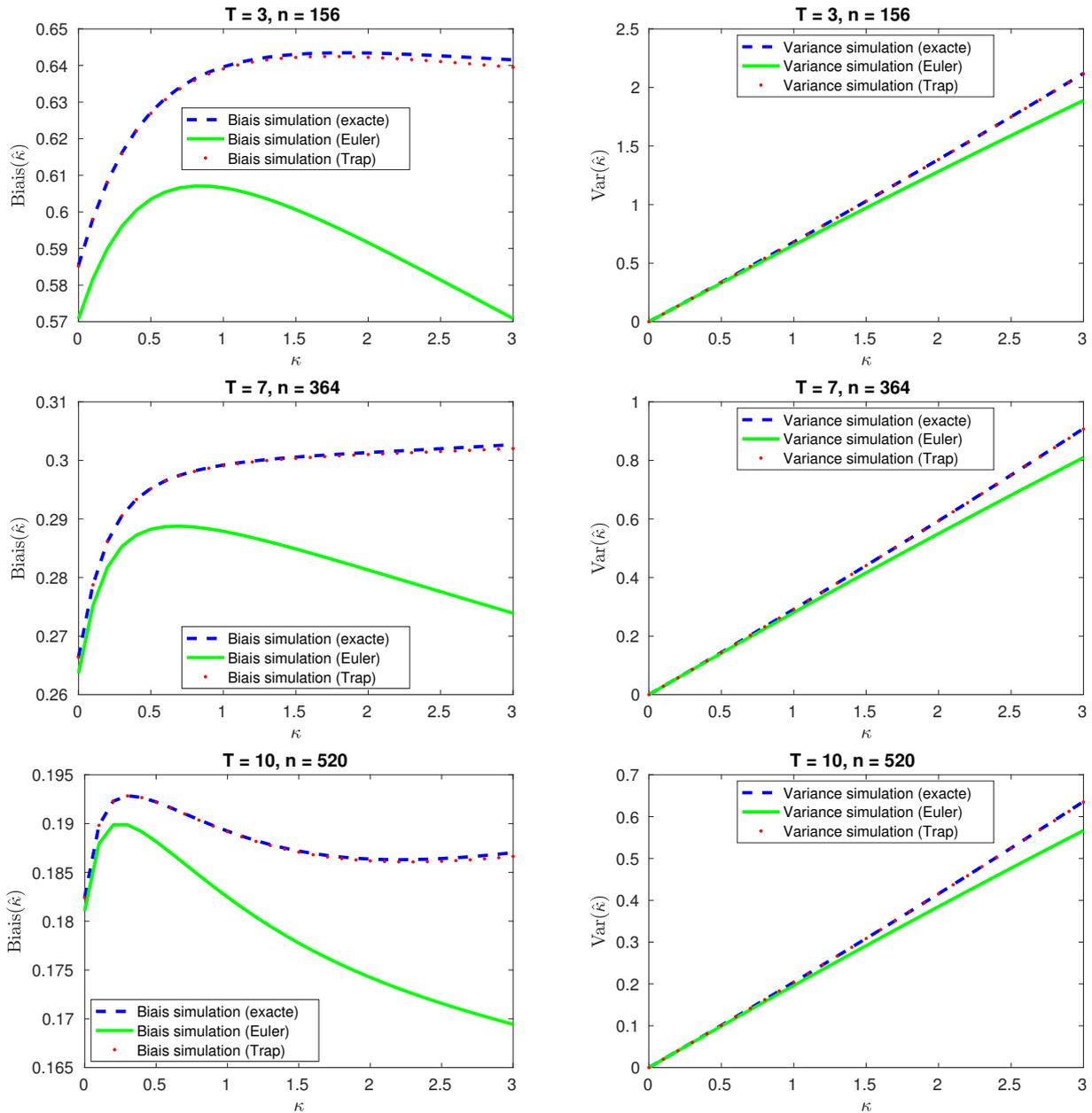
avec les paramètres suivants : $\kappa \in]0, 3]$, $\sigma = 0.01$ et la condition initiale $X_0 = 0$. Celles-ci ont été effectuées pour différentes valeurs de $T = 3, 7, 10$ et $h = 1/12, 1/52, 1/252$.

L'analyse des graphiques I.13, I.14 et I.15 montre que, la méthode d'Euler fournit des résultats plus satisfaisants (biais et variance faibles) que les deux autres méthodes, bien que les estimateurs puissent être fortement biaisés lorsque T est petit.

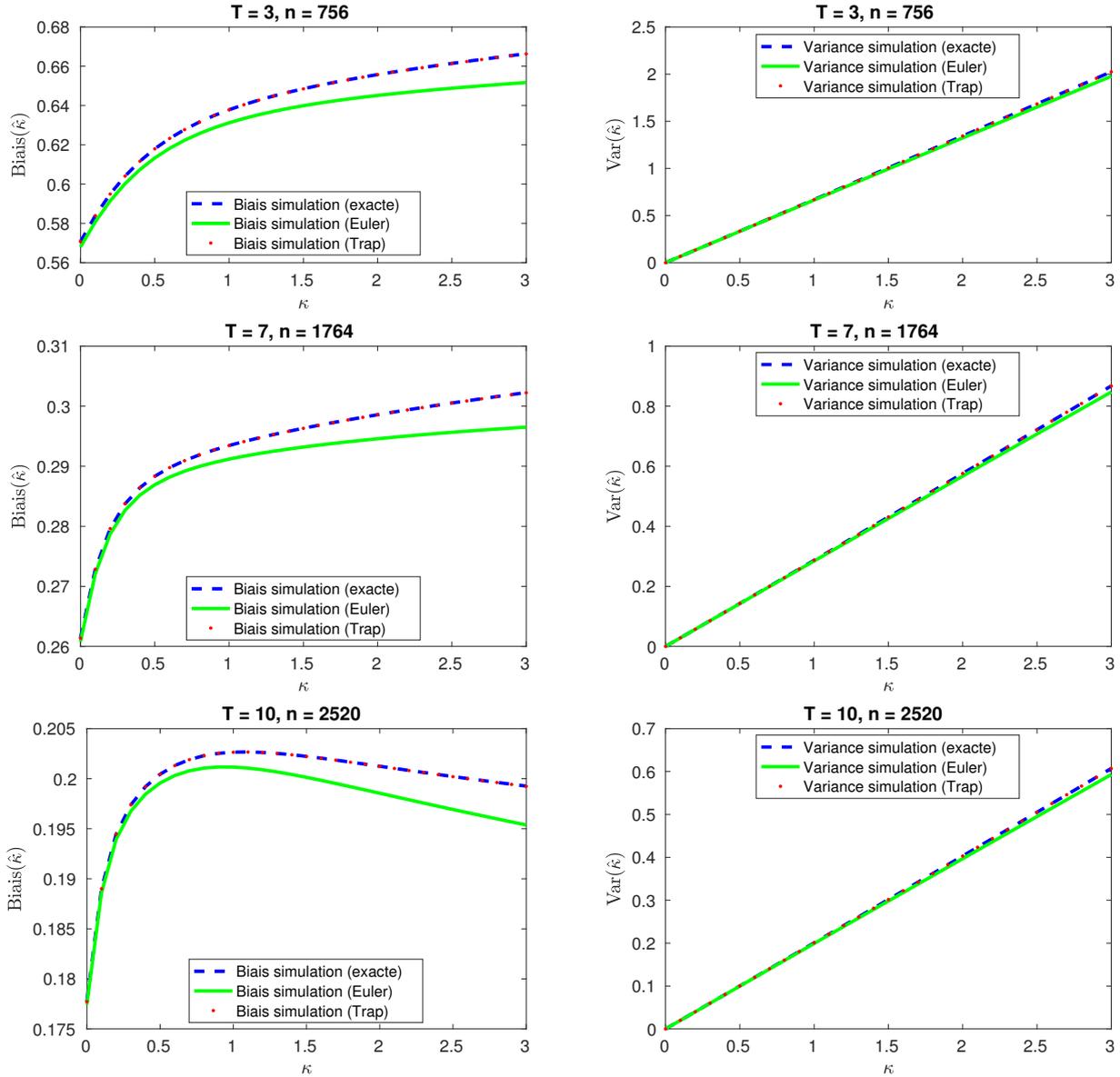


Graphique I.13 – Biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck, pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$) avec $T = 3, 7, 10$. Les estimateurs sont obtenus par simulation à partir des modèles discret exact, d'Euler et des trapèzes. La ligne continue (verte) correspond au biais dans le modèle d'Euler (I.71); la courbe en pointillé (rouge) correspond au biais dans le modèle des trapèzes (I.72); la ligne en tiret (bleu) correspond au biais dans le modèle discret exact (I.70).

4. BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS ORNSTEIN-UHLENBECK



Graphique I.14 – Biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck, pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$) avec respectivement $T = 3, 7, 10$. Les estimateurs sont obtenus par simulation à partir des modèles discret exact, d'Euler et des trapèzes. La ligne continue (verte) correspond au biais dans le modèle d'Euler (I.71) ; la courbe en pointillé (rouge) correspond au biais dans le modèle des trapèzes (I.72) ; la ligne en tiret (bleu) correspond au biais dans le modèle discret exact (I.70).



Graphique I.15 – Biais de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck, pour fréquences journalières ($h = 1/252$) avec respectivement $T = 3, 7, 10$. Les estimateurs sont obtenus par simulation à partir des modèles discret exact, d’Euler et des trapèzes. La ligne continue (verte) correspond au biais dans le modèle d’Euler (I.71) ; la courbe en pointillé (rouge) correspond au biais dans le modèle des trapèzes (I.72) ; la ligne en tiret (bleu) correspond au biais dans le modèle discret exact (I.70).

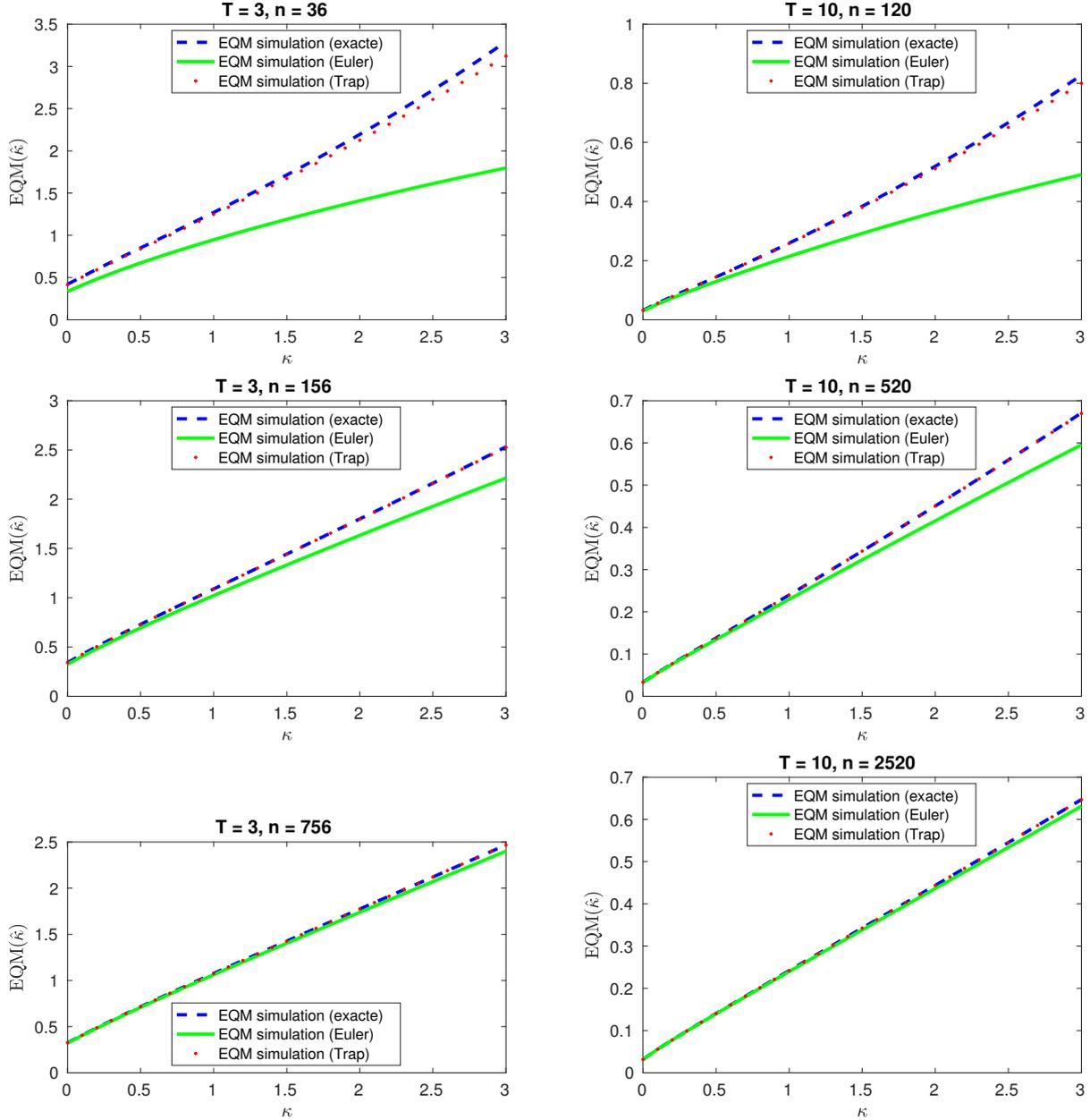
Le graphique I.16 présente les erreurs quadratiques moyennes des estimateurs du paramètre de retour à la moyenne κ suivant :

$$\hat{\kappa}_{exact} = -\frac{\ln(\hat{\phi})}{h}, \quad \hat{\kappa}_{euler} = \frac{1 - \hat{\phi}}{h}, \quad \text{et} \quad \hat{\kappa}_{trap} = \frac{2}{h} \left(\frac{1 - \hat{\phi}}{1 + \hat{\phi}} \right), \quad (\text{I.73})$$

respectivement obtenus à l’aide des modèles discret exact, d’Euler et des trapèzes. On constate que : (1) l’erreur quadratique moyenne de l’estimateur $\hat{\kappa}_{euler}$ est le plus petit parmi les trois

4. BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS ORNSTEIN-UHLENBECK

estimateurs. (2) lorsque $h = 1/52$ et $h = 1/252$, l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur $\hat{\kappa}_{trap}$ est presque équivalente à celle de $\hat{\kappa}_{exact}$. Cette équivalence est aussi vérifiée lorsque $h = 1/12$ et $\kappa < 1$, mais lorsque $\kappa > 1$, l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\kappa}_{trap}$ est plus petite que celle de $\hat{\kappa}_{exact}$.



Graphique I.16 – Erreur quadratique moyenne de $\hat{\kappa}$ comme fonction de κ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck, pour différentes valeurs de $T = 3$ (1^{ère} colonne), $T = 10$ (2^e colonne) et $h = 1/12$ (1^{ère} ligne), $h = 1/52$ (2^e ligne), $h = 1/252$ (3^e ligne). Les estimateurs sont obtenus par simulation à partir des modèles discret exact, d'Euler et des trapèzes. La ligne continue (verte) correspond à l'erreur quadratique moyenne dans le modèle d'Euler (I.71) ; la courbe en pointillé (rouge) correspond à l'erreur quadratique moyenne dans le modèle des trapèzes (I.72) ; la ligne en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne dans le modèle discret exact (I.70).

Au regard de l'erreur quadratique moyenne, l'estimation basée sur la méthode d'Euler conduit à de meilleurs résultats que celle basée sur la méthode des Trapèzes qui elle même a de meilleurs résultats que la méthode exacte.

5 BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS COX-INGERSOLL-ROSS

Nous nous intéressons dans cette section au processus Cox-Ingersoll-Ross (CIR), introduit par Cox et al. [31, 1985] pour décrire le mouvement de taux d'intérêt à court terme. Il est aussi utilisé dans d'autres applications financières comme par exemple, dans le modèle à volatilité stochastique de Heston [56, 1993].

5.1 Le modèle Cox, Ingersoll et Ross

Définition 5.1 *Un processus stochastique unidimensionnel $X = \{X(t), t \geq 0\}$ est un processus CIR, si sa dynamique est représentée comme solution de l'équation différentielle stochastique*

$$dX(t) = \kappa(\mu - X(t))dt + \sigma \sqrt{X(t)} dB(t), \quad X(0) = x_0 \geq 0 \quad (\text{I.74})$$

où $B = \{B(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard, κ , σ et $\mu > 0$.

Revuz et Yor [86, p. 365] démontrent l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation différentielle stochastique (I.74).

Remarque 5.1 *Le processus $X(t)$ se déplace en direction de sa moyenne μ à une vitesse κ , le terme $\sigma^2 X_t$ représente la variance locale du processus et assure que ce dernier reste toujours positif. En particulier, choisir $2\kappa\mu \geq \sigma^2$, ferait en sorte que l'origine soit inaccessible, de façon à garantir que le processus X_t reste positif.*

Le modèle en temps discret exact correspondant à l'équation (I.74) est donné par

$$X_{ih} = X_{(i-1)h} e^{-\kappa h} + \mu(1 - e^{-\kappa h}) + \int_{(i-1)h}^{ih} \sigma \sqrt{X(s)} e^{-\kappa(ih-s)} dB(s).$$

Suivant Ludger et Tobias [74, p. 432], la fonction conditionnelle de Laplace de $\{X(t)\}$ est donnée par Kawazu et Watanabe [58, 1971] :

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda) &\equiv \mathbb{E}[e^{-\lambda X(t)} \mid X(0) = x] \\ &= \left\{ 1 + \frac{\sigma^2 \lambda}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) \right\}^{-2\kappa\mu/\sigma^2} \\ &\quad \times \exp \left\{ -x\lambda e^{-\kappa t} \left[1 + \frac{\sigma^2 \lambda}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) \right]^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I.75})$$

En faisant tendre t vers l'infini dans cette expression, $X(t)$ converge faiblement vers une distribution $\Gamma(2\kappa/\sigma^2, 2\kappa\mu/\sigma^2)$, où $\Gamma(a, b)$ est une distribution Gamma de paramètre a et b .

5. BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS
COX-INGERSOLL-ROSS

Feller [44, 1951] montre que lorsque $2\kappa\mu \geq \sigma^2$, la densité de transition du processus Cox-Ingersoll-Ross est donnée par

$$f(X_{ih}|X_{(i-1)h}) = c e^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}), \quad (\text{I.76})$$

où $c = 2\kappa/(\sigma^2(1 - e^{-\kappa h}))$, $u = c e^{-\kappa h} X_{(i-1)h}$, $v = c X_{ih}$, $q = 2\kappa\mu/\sigma^2 - 1$ et

$$I_q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{q+2j}}{j! \Gamma(q+j+1)}, \quad \text{avec} \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad z \in \mathbb{R}_+, \quad (\text{I.77})$$

et $I_q(z)$ est une fonction de Bessel¹⁴ modifiée de première espèce d'ordre q .

Sachant qu'une variable aléatoire réelle de loi du Chi-deux non centré notée $\chi_{\nu}^{\prime 2}(\lambda)$, où ν désigne le degré de liberté et λ le paramètre de non-centralité, a pour distribution : $\forall y > 0$,

$$\begin{aligned} P(\chi_{\nu}^{\prime 2}(\lambda) \leq y) &= F_{\chi_{\nu}^{\prime 2}(\lambda)}(y) \\ &\equiv e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j / j!}{2^{(\nu/2)+j} \Gamma(\frac{\nu}{2} + j)} \int_0^y z^{(\nu/2)+j-1} e^{-z/2} dz, \end{aligned} \quad (\text{I.78})$$

la loi de transition de $X(t)$ dans l'équation (I.74) peut s'exprimer par Glasserman [48, p. 122] :

$$X_{ih} = \frac{\sigma^2(1 - e^{-\kappa h})}{4\kappa} \chi_d^{\prime 2} \left\{ \frac{4\kappa e^{-\kappa h}}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa h})} X_{(i-1)h} \right\}, \quad (\text{I.79})$$

où $d = 4\kappa\mu/\sigma^2$.

Ainsi, en reprenant les notations de l'équation (I.76), $X_{ih}|X_{(i-1)h}$ est égale (en loi) à $(2c)^{-1}\vartheta$, où $\vartheta \sim \chi_d^{\prime 2}(\lambda)$, avec $d = 2q + 2$ et $\lambda = 2u$. Ce qui équivaut à (avec $F_{\chi_d^{\prime 2}(\lambda)}$ défini comme dans l'équation (I.78))

$$P(X_{ih} \leq u | X_{(i-1)h}) = F_{\chi_d^{\prime 2}(\lambda)} \left\{ \frac{4\kappa u}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa h})} \right\}. \quad (\text{I.80})$$

Par ailleurs, le processus Cox-Ingersoll-Ross a une distribution limite stationnaire. En effet, si t tend vers l'infini dans l'équation (I.79), X_{ih} converge vers une distribution $\sigma^2/4\kappa$ fois une variable du Chi-deux non centré avec d degrés de liberté et de paramètre de non centralité 0 c'est-à-dire une variable du Chi deux ordinaire.

Finalement, on vérifie facilement que l'espérance conditionnelle est définie par

$$\mathbb{E}(X_{ih} | X_{(i-1)h}) = X_{(i-1)h} e^{-\kappa h} + \mu(1 - e^{-\kappa h}). \quad (\text{I.81})$$

La variance conditionnelle est quant à elle obtenue en appliquant la formule d'Itô à la fonction $f(t, x) = x^2$ dans l'équation (I.74) puis en calculant l'espérance du résultat obtenu.

On obtient alors :

$$\text{Var}(X_{ih} | X_{(i-1)h}) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} \mu (1 - e^{-\kappa h})^2 + \frac{\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa h} - e^{-2\kappa h}) X_{(i-1)h}. \quad (\text{I.82})$$

14. Des propriétés sur la fonction Bessel modifié sont proposées dans Olivier [73, 1965].

5.2 Détermination du biais

Nous présentons dans cette sous-section, des résultats d'approximations du biais du paramètre de retour à la moyenne κ dans un processus Cox-Ingersoll-Ross (I.74) discrétisé à l'aide des méthodes exact, de Nowman, d'Euler et Milstein.

5.2.1 En utilisant le modèle discret exact

Connaissant la densité de transition conditionnelle (I.76) du processus Cox-Ingersoll-Ross, les fonctions de vraisemblance et de log-vraisemblance pour un échantillon de N observations sont respectivement données par

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{N-1} c e^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}),$$

$$\ell_n(\theta) = (N-1) \ln c + \sum_{i=1}^{N-1} \left[-u_{(i-1)h} - v_{ih} + 0.5q \ln \left(\frac{v_{ih}}{u_{(i-1)h}} \right) + \ln \left\{ I_q(2\sqrt{u_{(i-1)h}v_{ih}}) \right\} \right],$$

où $u_{(i-1)h} = c e^{-\kappa h} X_{(i-1)h}$ et $v_{ih} = c X_{ih}$.

Par suite l'estimateur¹⁵ du maximum de vraisemblance de θ peut être obtenu numériquement. Cependant, Tang et Chen [103, p. 69] étudient les propriétés asymptotiques de $\hat{\kappa}$. Les résultats sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 5.1 *Considérons un processus Cox-Ingersoll-Ross stationnaire et supposons que $\kappa\mu \geq \sigma^2$.*

- Lorsque $n \rightarrow \infty$ et h est fixé alors

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = (nh)^{-1} B_3(\theta, h) + o(n^{-2}),$$

$$\text{Var}(\hat{\kappa}) = (nh)^{-1} V_4(\theta, h) + o(n^{-2}),$$

où les expressions de $B_3(\theta, h)$ et $V_4(\theta, h)$ sont données dans Tang et Chen [103, p. 68-69].

- Si $h \rightarrow 0$, $T = nh \rightarrow \infty$ et $\forall \kappa > 2$ $Th^{1/\kappa} \rightarrow \infty$, alors

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = 4T^{-1} + o(T^{-1}), \quad \text{Var}(\hat{\kappa}) = 2\kappa T^{-1} + o(T^{-1}).$$

5.2.2 En utilisant le modèle discret de Nowman

La méthode de Nowman [72, 1997] permet d'obtenir une expression explicite de l'estimateur du pseudo-maximum de vraisemblance du paramètre $\theta = (\kappa, \mu, \sigma^2)$ dans le processus (I.74). Le principe consiste à approcher la fonction de diffusion $\sigma \sqrt{X(t)}$ par sa valeur $\sigma \sqrt{X_{(i-1)h}}$, au point d'extrémité inférieure dans chaque intervalle de la forme $[(i-1)h, ih)$ et de conserver la dérive $\kappa(\mu - X_t)$.

15. Des expressions analytiques pour $\hat{\kappa}$, $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ n'existent pas à notre connaissance dans la littérature. En fournir n'étant pas notre objectif, nous nous concentrons plutôt sur la solution numérique.

L'approximation¹⁶ de Nowman du processus (I.74) est donc définie par

$$dX_t = \kappa(\mu - X_t)dt + \sigma \sqrt{X_{(i-1)h}}dB(t) \quad \forall t \in [(i-1)h, ih]. \quad (\text{I.83})$$

Soient X_0, X_1, \dots, X_n des observations obtenues à partir du processus (I.83). Ils sont solutions du modèle en temps discret suivant :

$$X_{ih} = e^{-\kappa h} X_{(i-1)h} + (1 - e^{-\kappa h})\mu + \eta_i, \quad (\text{I.84})$$

où $\mathbb{E}(\eta_i) = 0$, $\mathbb{E}(\eta_i \eta_j) = 0$ si $i \neq j$ et $\mathbb{E}(\eta_i^2) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa h})X_{(i-1)h} := \xi(X_{(i-1)h}, \theta)$.

En supposant que η_i est Gaussien, nous obtenons la fonction de pseudo log-vraisemblance

$$\ell_n(\theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \log \tilde{\sigma}^2 + \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} [X_{ih} - \phi X_{(i-1)h} - \mu(1 - \phi)]^2 \right\}, \quad (\text{I.85})$$

où $\phi = e^{-\kappa h}$ et $\tilde{\sigma} = \sqrt{\alpha X_{(i-1)h}}$, avec $\alpha = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - \phi^2)$.

Ce qui nous conduit aux estimateurs de pseudo-vraisemblance suivants :

$$\hat{\kappa} = -\frac{\ln(\hat{\phi})}{h}, \quad \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^{-1} X_{ih} - n\hat{\phi}}{(1 - \hat{\phi}) \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^{-1}}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\kappa} \hat{\alpha}}{1 - \hat{\phi}^2}, \quad (\text{I.86})$$

où

$$\hat{\phi} = \frac{n^{-2} \sum_{i=1}^n X_{ih} \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^{-1} - n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{ih} X_{(i-1)h}^{-1}}{n^{-2} \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h} \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^{-1} - 1}, \quad (\text{I.87})$$

$$\hat{\alpha} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^{-1} \left[X_{ih} - \hat{\phi} X_{(i-1)h} - \hat{\mu}(1 - \hat{\phi}) \right]^2. \quad (\text{I.88})$$

Suivant Wang et al. [80, p. 236], les approximations du biais et de la variance de $\hat{\kappa}$ sont respectivement de la forme

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = -\frac{1}{h} \left[\frac{\mathbb{B}(\hat{\phi})}{\phi} - \frac{\mathbb{EQM}(\hat{\phi})}{2\phi^2} + O(n^{-3/2}) \right], \quad (\text{I.89})$$

$$\text{Var}(\hat{\kappa}) = \frac{1}{h^2 \phi^2} \left[\text{Var}(\hat{\phi}) + O(n^{-2}) \right], \quad (\text{I.90})$$

où les expressions explicites de $\mathbb{B}(\hat{\phi})$ et $\text{Var}(\hat{\phi})$ sont données dans Tang et Chen [103, 2009].

16. Le modèle discrétisé (I.83) n'est utilisé que pour l'estimation des paramètres. C'est le modèle Cox-Ingersoll-Ross d'origine (I.74) qui est utilisée dans l'analyse des propriétés.

5.2.3 En utilisant le modèle discret d'Euler

L'approximation d'Euler du processus CIR est donnée par

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + (1 - \phi)\mu + \sqrt{X_{(i-1)h}h} \varepsilon_i, \quad (\text{I.91})$$

où $\phi = 1 - \kappa h$ et $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.

Les estimateurs de κ, μ et σ sont

$$\hat{\kappa} = \frac{1 - \hat{\phi}}{h}, \quad \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^{-1} X_{ih} - n\hat{\phi}}{(1 - \hat{\phi}) \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^{-1}}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\hat{\alpha}}{h}}, \quad (\text{I.92})$$

où les expressions de $\hat{\phi}$ et $\hat{\alpha}$ sont respectivement données par (I.87) et (I.88).

Wang et al.[80, équations 5.10 et 5.12] montrent que :

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = -\frac{1}{h} \mathbb{B}(\hat{\phi}) - \frac{1}{h} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-\kappa h)^i}{i!}, \quad (\text{I.93})$$

$$\text{Var}(\hat{\kappa}) = \frac{1}{h^2} \text{Var}(\hat{\phi}). \quad (\text{I.94})$$

Soient $\hat{\kappa}_1$ et $\hat{\kappa}_2$ les estimateurs de κ obtenus respectivement à l'aide des méthodes de Nowman et d'Euler.

Si $\kappa > 0$ alors $\phi = e^{-\kappa h} = 1 - \kappa h + O(h^2) < 1$. Ainsi, lorsque $T \rightarrow \infty$, h est fixé et $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{\text{Var}(\hat{\kappa}_2)}{\text{Var}(\hat{\kappa}_1)} = \phi^2 + O(n^{-1}) < 1, \quad (\text{I.95})$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\kappa}_1) &\geq -\frac{1}{h} \frac{1}{\phi} \mathbb{B}(\hat{\phi}) \\ &\geq -\frac{1}{h} \mathbb{B}(\hat{\phi}) - \frac{1}{h} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-\kappa h)^i}{i!} = \mathbb{B}(\hat{\kappa}_2). \end{aligned} \quad (\text{I.96})$$

On conclut que : (1) la méthode d'Euler a un gain sur la méthode de Nowman en terme de variance. (2) Ce gain est d'autant plus grand que ϕ est petit. (3) Le biais de Nowman est plus élevé que celui d'Euler.

5.2.4 En utilisant le modèle discret de Milstein

Le modèle en temps discret obtenu par la méthode de Milstein est

$$X_{ih} = (1 - \kappa h)X_{(i-1)h} + \kappa\mu h + \sigma \sqrt{X_{(i-1)h}h} \varepsilon_i + \frac{1}{4} \sigma^2 h [\varepsilon_i^2 - 1]. \quad (\text{I.97})$$

Contrairement aux méthodes d'Euler et de Nowman, des expressions explicites des estimateurs par maximum de vraisemblance des paramètres du modèle (I.97) n'existent pas. Les performances de la méthode de Milstein sont comparées aux autres méthodes par des simulations. Le Théorème ci-dessous nous permet cependant d'obtenir une expression de la densité de transition conditionnelle de ce processus afin de mener à bien cette exercice de simulation.

Théorème 5.2 *Considérons l'équation différentielle (I.1) et supposons que les conditions usuelles d'existence et d'unicité sont satisfaites. Elerian [43, p.7] montre que sous certaines hypothèses, la densité de transition du processus (I.8), peut-être exprimée par*

$$f(X_{ih}|X_{(i-1)h}) = \frac{e^{-\lambda/2}}{|A|\sqrt{2\pi}} z_{ih}^{-1/2} e^{-\frac{z_{ih}}{2}} \cosh(\sqrt{\lambda z_{ih}}) \quad (\text{I.98})$$

où

$$z_{ih} = \frac{X_{ih} - B}{A}, \quad \lambda = \frac{1}{\Delta(b')^2}, \quad A = \frac{bb'\Delta}{2}, \quad B = -\frac{b}{2b'} + X_{(i-1)h} + a\Delta - A,$$

avec $a = \mu(X(t); \theta)$ et $b = \sigma(X(t); \theta)$. Cette densité est définie pour $z_{ih} \in \mathbb{R}_+$ et $b' \neq 0$.

En reprenant les notations du Théorème (5.2), le modèle en temps discret (I.97), obtenu par la méthode de Milstein se réécrit

$$X_{ih} = X_{(i-1)h} + \kappa(\mu - X_{(i-1)h})h - A + 2A\sqrt{\lambda}\varepsilon_i + A\varepsilon_i^2. \quad (\text{I.99})$$

En posant $Y_{ih} = -B$, l'équation (I.99) peut s'écrire sous la forme

$$Y_{ih} = 2A\sqrt{\lambda}\varepsilon_i + A\varepsilon_i^2 = A[(\varepsilon_i + \delta)^2 - \lambda], \quad (\text{I.100})$$

avec $Y_{ih} = X_{ih} - X_{(i-1)h} - \kappa(\mu - X_{(i-1)h})h + A$ et $\delta = \sqrt{\lambda}$.

En particulier, la variable aléatoire $z_{ih} := Z = (\varepsilon_i + \delta)^2$ suit une loi du Chi-deux non centré à 1 degré de liberté et de paramètre de non centralité δ^2 . Sa densité de probabilité est

$$f(z) = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{\lambda + z}{2}\right\} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{-1/4} I_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda z}),$$

où

$$I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2i}}{i! \Gamma(j + 0.5)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \{\exp(x) + \exp(-x)\}.$$

Bien qu'étant toujours positif, la discrétisation d'un processus CIR par les méthodes d'Euler ou de Milstein, peut conduire à des valeurs négatives pour le processus approché. Dans cette perspective, il est souvent utile de poser $Y_t = \log X_t$ et d'étudier le processus ainsi défini (par application du lemme d'Itô) :

$$dY_t = \left\{ \frac{\kappa}{e^{Y_t}} - \mu - \frac{\sigma^2}{2e^{Y_t}} \right\} dt + \frac{\sigma}{\sqrt{e^{Y_t}}} dB_t. \quad (\text{I.101})$$

En appliquant l'approximation de Milstein (I.8) à l'équation (I.101), nous obtenons

$$Y_{ih} = Y_{(i-1)h} + \left\{ \frac{\kappa}{e^{Y_{(i-1)h}}} - \mu - \frac{\sigma^2}{2e^{Y_{(i-1)h}}} + \frac{\sigma^2}{4e^{Y_{(i-1)h}}} \right\} h + \frac{\sigma}{e^{\frac{Y_{(i-1)h}}{2}}} \varepsilon_i - \frac{\sigma^2}{4e^{Y_{(i-1)h}}} \varepsilon_i^2,$$

où $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, h)$.

6 BIAIS ET ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE DANS UN PROCESSUS ORNSTEIN-UHLENBECK-LÉVY

Dans plusieurs domaines scientifiques (Physique, Économie, Actuariat...), les processus de Lévy jouent un rôle important. Nous présentons dans cette section, des résultats sur le biais et l'erreur quadratique moyenne du paramètre de retour à la moyenne dans un processus Ornstein-Uhlenbeck sous l'effet d'un processus de Lévy ¹⁷.

6.1 Préliminaires

Le modèle Ornstein-Uhlenbeck gouverné par un processus de Lévy est défini par

$$dX(t) = \kappa (\mu - X(t)) dt + \sigma dL(t), \quad X(0) = x_0, \quad (\text{I.102})$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$ et $L = \{L(t), t \geq 0\}$ est un processus de Lévy.

Le modèle en temps discret exact correspondant à l'équation (I.102) est représenté par

$$X_{ih} = \alpha + \phi X_{(i-1)h} + \varepsilon_i, \quad (\text{I.103})$$

où $\alpha = \mu(1 - e^{-\kappa h})$, $\phi = e^{-\kappa h}$, $\varepsilon_i = \int_{(i-1)h}^{ih} \sigma e^{-\kappa(ih-t)} dL(t)$ dépend de la spécification de la mesure de Lévy L_t .

Nous supposons ici vérifier les hypothèses suivantes :

- $|\phi| < 1$.
- X_0 peut être fixe ou stochastique et est indépendant de ε_i .
- Les variables aléatoires ε_i sont indépendantes et identiquement distribuées, de variance σ_0^2 , dont les moments $m_j = \mathbb{E}(\varepsilon_i^j)$, existent jusqu'à l'ordre huit (Bao [13, p. 1014]).

Pour caractériser la non-normalité, posons

$$\gamma_1 = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right] \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^4 \right] - 3, \quad (\text{I.104})$$

où γ_1 et γ_2 sont respectivement les mesures d'asymétrie (Skewness) et d'excès d'aplatissement (kurtosis). Dans une distribution normale, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ et elle est dite symétrique et mésokurtique.

Les approximations du biais et de l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur des moindres carrés ordinaires $\hat{\phi}$ du coefficient ϕ du modèle (I.103) sont données par Bao [13, p. 1015-1016] :

17. Nous n'avons pas l'ambition d'être complet dans cette présentation, le lecteur pourra consulter Applebaum [7], Bertoin [25], Sato [92], Schoutens [94] et Protter [83], pour un rappel des bases mathématiques nécessaires à la compréhension des processus de Lévy, ainsi que Barndorff et Shephard [21] et Papapantoleon [75], respectivement pour une étude en profondeur et pour un compte rendu détaillé sur ces processus.

• Lorsque $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\phi}) &= -\frac{1+3\phi}{n} + \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{3\phi - 9\phi^2 - 1}{1-\phi} + \frac{(1+3\phi)}{(1-\phi)^2} \left[\frac{\alpha - (1-\phi)x_0}{\sigma_0} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\phi^2(1-\phi^2)\gamma_1^2}{1-\phi^3} + 2\gamma_2\phi \right\} + o(n^{-2}), \end{aligned} \quad (\text{I.105})$$

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\phi}) &= \frac{1-\phi^2}{n} + \frac{1}{n^2} \left\{ 23\phi^2 + 10\phi - \frac{1+\phi}{1-\phi} \left[\frac{\alpha - (1-\phi)x_0}{\sigma_0} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\phi(1-\phi^2)^2\gamma_1^2}{1-\phi^3} - \gamma_2(1-\phi^2) \right\} + o(n^{-2}), \end{aligned} \quad (\text{I.106})$$

• Lorsque $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\phi}) &= -\frac{2\phi}{n} + \frac{1}{n^2} \left\{ 4\phi + \frac{2\phi x_0^2}{\sigma_0^2} + \frac{2\gamma_1^2(1+\phi+3\phi^2)(1-\phi^2)}{1-\phi^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1+\phi)x_0\gamma_1}{\sigma_0} + 2\gamma_2\phi \right\} + o(n^{-2}), \end{aligned} \quad (\text{I.107})$$

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\phi}) &= \frac{1-\phi^2}{n} + \frac{1}{n^2} \left\{ 14\phi^2 - 1 - \frac{(1-\phi^2)x_0^2}{\sigma_0^2} - \frac{4\phi(1-\phi^2)^2\gamma_1^2}{1-\phi^3} \right. \\ &\quad \left. - \gamma_2(1-\phi^2) \right\} + o(n^{-2}), \end{aligned} \quad (\text{I.108})$$

où x_0 est fixé, $\alpha = \mu(1-\phi)$ et $\sigma_0 = \sigma\sqrt{\frac{1-\phi^2}{2\kappa}}$.

Une expansion de Taylor du second ordre permet d'écrire le biais de $\hat{\kappa}$ sous la forme :

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = -\frac{1}{h\phi}\mathbb{B}(\hat{\phi}) + \frac{1}{2h\phi^2}\text{EQM}(\hat{\phi}) + o(T^{-1}). \quad (\text{I.109})$$

6.2 Détermination du biais

En remplaçant (I.105) et (I.106) dans (I.109), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\kappa}) &= \frac{e^{2\kappa h} + 2e^{\kappa h} + 5}{2T} + \frac{1}{2nT} \left\{ 23 + \frac{12e^{2\kappa h} - 16e^{\kappa h} + 18}{e^{\kappa h} - 1} - \frac{2\kappa(\mu - x_0)^2(5e^{-2\kappa h} + 2e^{-\kappa h} + 1)}{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa h})e^{-2\kappa h}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\gamma_1^2[(1 - e^{-\kappa h})(1 + e^{-\kappa h})^2 + 2e^{-2\kappa h}(1 + e^{-\kappa h})]}{e^{-\kappa h}(1 + e^{-\kappa h} + e^{-2\kappa h})} - \gamma_2(e^{2\kappa h} + 3) \right\} + o((nT)^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{I.110})$$

Les termes κ , μ , x_0 , σ^2 , γ_1 et γ_2 , affectant le biais dans l'expression (I.110), ont des effets différents sur celui-ci. En effet, vue comme fonction de μ , $\mathbb{B}(\hat{\kappa})$ décroît si $\mu > x_0$ et croît si $\mu < x_0$, traduisant respectivement que pour de grandes valeurs de μ il est faible ou élevé. Comme fonction de γ_2 , $\mathbb{B}(\hat{\kappa})$ est une fonction décroissante. En le regardant plutôt comme fonction de γ_1 , il est croissant si $\gamma_1 < 0$ et décroissant sinon.

— En présence de racine unitaire ($\kappa \rightarrow 0$), $e^{-2\kappa h} \approx 1 - 2\kappa h$ et ainsi,

$$\begin{aligned} & \bullet - \frac{2\kappa (\mu - x_0)^2 (5e^{-2\kappa h} + 2e^{-\kappa h} + 1)}{\sigma^2(1 - e^{-2\kappa h})e^{-2\kappa h}} \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} - \frac{8(\mu - x_0)^2}{\sigma^2 h}, \\ & \bullet - \frac{4\gamma_1^2 [(1 - e^{-\kappa h})(1 + e^{-\kappa h})^2 + 2e^{-2\kappa h}(1 + e^{-\kappa h})]}{e^{-\kappa h}(1 + e^{-\kappa h} + e^{-2\kappa h})} \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} - \frac{16\gamma_1^2}{3}, \\ & \bullet \frac{12e^{2\kappa h} - 16e^{\kappa h} + 18}{e^{\kappa h} - 1} \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, la non-normalité n'affecte pas le biais de $\hat{\kappa}$ et on a

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} \infty. \quad (\text{I.111})$$

— Pour des données à haute fréquence ($h \rightarrow 0$), lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{4}{T} - \frac{4(\mu - x_0)^2}{\sigma^2 T^2} + \frac{7}{\kappa T^2}. \quad (\text{I.112})$$

Finalement, lorsque κ ou h tend vers zéro, peu importe si les résidus suivent une loi normale ou une autre loi, le biais reste le même.

En utilisant les résultats précédents, Ullah et al. [105, 2010] montrent que :

si $x_0 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/2\kappa)$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\kappa}) = & \frac{e^{2\kappa h} + 2e^{\kappa h} + 5}{2T} + \frac{1}{2nT} \left\{ 23 + \frac{12e^{2\kappa h} - 16e^{\kappa h} + 18}{e^{\kappa h} - 1} - \frac{5e^{-2\kappa h} + 2e^{-\kappa h} + 1}{(1 - e^{-2\kappa h})e^{-2\kappa h}} \right. \\ & \left. - \frac{4\gamma_1^2 [(1 - e^{-\kappa h})(1 + e^{-\kappa h})^2 + 2e^{-2\kappa h}(1 + e^{-\kappa h})]}{e^{-\kappa h}(1 + e^{-\kappa h} + e^{-2\kappa h})} - \gamma_2(e^{2\kappa h} + 3) \right\} + o((nT)^{-1}), \end{aligned} \quad (\text{I.113})$$

et ne dépend plus des coefficients μ et x_0 .

Par ailleurs, si les termes d'erreur sont de loi normale alors,

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = \frac{e^{2\kappa h} + 2e^{\kappa h} + 5}{2T} + \frac{1}{2nT} \left\{ 23 + \frac{12e^{2\kappa h} - 16e^{\kappa h} + 18}{e^{\kappa h} - 1} - \frac{5e^{-2\kappa h} + 2e^{-\kappa h} + 1}{(1 - e^{-2\kappa h})e^{-2\kappa h}} \right\} + o((nT)^{-1}).$$

Dans cette situation, pour des données à haute fréquence ($h \rightarrow 0$),

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{4}{T} + \frac{5}{T^2 \kappa}. \quad (\text{I.114})$$

◆ Cas particulier : $\mu = 0$

Dans ce cas, en remplaçant (I.107) et (I.108) dans (I.109), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\kappa}) = & \frac{e^{2\kappa h} + 3}{2T} + \frac{1}{2nT} \left\{ 6 - e^{2\kappa h} - \frac{2\kappa e^{2\kappa h} x_0^2 (e^{2\kappa h} + 3)}{\sigma^2 (e^{2\kappa h} - 1)} + \frac{2(1 + e^{\kappa h})x_0\gamma_1}{\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa h}}{2\kappa}}} \right. \\ & \left. - \frac{4\gamma_1^2 (2e^{2\kappa h} + 3 + 3e^{-\kappa h} + 2e^{-2\kappa h})}{1 + e^{-\kappa h} + e^{-2\kappa h}} - \gamma_2(e^{2\kappa h} + 3) \right\} + o((nT)^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{I.115})$$

En présence de racine unitaire ou de données à haute fréquence, nous avons respectivement

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} \frac{2}{T} + \frac{1}{2nT} \left\{ 5 - \frac{4x_0^2}{\sigma^2 h} + \frac{4x_0 \gamma_1}{\sigma \sqrt{h}} - \frac{40\gamma_1^2}{3} - 4\gamma_2 \right\}, \quad (\text{I.116})$$

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{2}{T} - \frac{2x_0^2}{\sigma^2 T^2} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (\text{I.117})$$

Comparé à la l'expression de biais (I.110), le biais de $\widehat{\kappa}$ donné par (I.115) est affecté par des termes supplémentaires à savoir : γ_1^2 et le produit $x_0 \gamma_1$. Les effets de la non-normalité sur ce dernier, caractérisés par les termes incluant γ_1 et γ_2 dans les expressions (I.110) et (I.115) sont les mêmes pour la kurtosis et différents pour la skewness. Lorsque κ tend vers zéro, le bais donné par l'expression (I.115) reste encore une fonction de x_0^2 , σ^2 , γ_1^2 , γ_2 et $x_0 \gamma_1$ alors qu'il tend vers l'infini dans l'expression (I.110). Lorsque h tend vers zéro, en plus de T , le biais donné par (I.115) dépend aussi de x_0^2 , σ^2 .

Dans l'expression (I.115), si $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = & \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} + \frac{1}{2nT} \left\{ 6 - e^{2\kappa h} - \frac{3 + e^{2\kappa h}}{1 - e^{-2\kappa h}} - \frac{4\gamma_1^2(2e^{2\kappa h} + 3 + 3e^{-\kappa h} + 2e^{-2\kappa h})}{1 + e^{-\kappa h} + e^{-2\kappa h}} \right. \\ & \left. - \gamma_2(e^{2\kappa h} + 3) \right\} + o((nT)^{-1}), \end{aligned} \quad (\text{I.118})$$

si de plus les résidus sont de loi normale,

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} + \frac{2 - e^{2\kappa h} - 3e^{-2\kappa h}}{nT(1 - e^{-2\kappa h})} + o((nT)^{-1})., \quad (\text{I.119})$$

et pour des données à haute fréquence,

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{2}{T} - \frac{1}{T^2 \kappa}. \quad (\text{I.120})$$

Très récemment, en utilisant une méthode alternative, Bao et al. [19, p. 18] montrent que pour un processus Ornstein-Uhlenbeck gouverné par un processus de Lévy (I.102) :

1. Lorsque $\mu \neq 0$,

• si x_0 est fixé,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = & \frac{5 + 2e^{\kappa h} + e^{2\kappa h} + 4e^{-2(n-1)\kappa h}}{2T} + \frac{(1 - e^{-n\kappa h}) [5 + e^{2\kappa h} + 5e^{-(n-2)\kappa h} + 9e^{-n\kappa h}] (x_0 - \mu)^2}{2Tn\sigma_\varepsilon^2} \\ & + \frac{(1 - e^{-n\kappa h}) \{ (e^{\kappa h} + 5e^{-(n-1)\kappa h})(x_0^2 + \mu^2) - 2(e^{-\kappa h} - e^{\kappa h} + e^{3\kappa h} + 5e^{-(n-1)\kappa h})x_0\mu \}}{Tn\sigma_\varepsilon^2} \\ & + \frac{2[e^{-2n\kappa h} - e^{-2(n-1)\kappa h}] (x_0 - \mu)^2}{T\sigma_\varepsilon^2} - \frac{\gamma_1(1 - e^{-n\kappa h}) [e^{-(n-1)\kappa h} + e^{-(n-2)\kappa h}] (x_0 - \mu)}{Tn\sigma_\varepsilon} \\ & + \frac{(1 - e^{-n\kappa h}) [2e^{\kappa h} + 13e^{2\kappa h} + 4e^{3\kappa h} + e^{4\kappa h} + e^{-(n-4)\kappa h} + 2e^{-(n-3)\kappa h} + 9e^{-(n-2)\kappa h}]}{2(1 - e^{2\kappa h})Tn} \end{aligned} \quad (\text{I.121})$$

- si x_0 est aléatoire,

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = \frac{5 + 2e^{\kappa h} + e^{2\kappa h}}{2T} - \frac{2e^{-\kappa h}(1 - e^{-n\kappa h})(1 - e^{2\kappa h})^2 \mu^2}{Tn\sigma_\varepsilon^2} + \frac{(1 - e^{-n\kappa h})[e^{\kappa h} + 4e^{2\kappa h} + e^{3\kappa h} + 2e^{-(n-2)\kappa h}]}{(1 - e^{2\kappa h})Tn}. \quad (\text{I.122})$$

2. Lorsque $\mu = 0$, ils établissent que

- si x_0 est fixé,

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = \frac{1 + 3e^{-2\kappa h} + 4e^{-2n\kappa h}}{2Te^{-2\kappa h}} - \frac{(1 - e^{-2n\kappa h})(1 + 7e^{-2\kappa h})}{2nTe^{-2\kappa h}(1 - e^{-2\kappa h})} - \frac{4e^{-2n\kappa h}(1 - e^{-2\kappa h})x_0^2}{2T\sigma_\varepsilon^2 e^{-2\kappa h}} + \frac{(1 + 3e^{-2\kappa h})(1 - e^{-2n\kappa h})x_0^2}{2Tn\sigma_\varepsilon^2 e^{-2\kappa h}} + \frac{2(1 + e^{-\kappa h})(1 - e^{-n\kappa h})(e^{-\kappa h} - e^{-n\kappa h})x_0\gamma_1}{2Tn\sigma_\varepsilon e^{-2\kappa h}}, \quad (\text{I.123})$$

- si x_0 est aléatoire,

$$\mathbb{B}(\widehat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} - \frac{2(1 - e^{-2n\kappa h})}{Tn(1 - e^{-2\kappa h})}, \quad (\text{I.124})$$

signifiant que le résultat de Yu [112, éq. 17] est robuste à la non normalité.

7 SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Après avoir mis en avant les difficultés existantes dans l'approximation du biais du paramètre de retour à la moyenne dans les processus Ornstein-Uhlenbeck et Cox-Ingersoll-Ross, nous avons présenté dans ce chapitre, d'une part l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle dans le cadre de ces deux processus discrétisés (Euler, Trapèzes, Milstein, Nowman) et d'autre part, un certain nombre de techniques développées dans le but de favoriser l'approximation du biais du paramètre de retour à la moyenne dans ces deux modèles. Les résultats pour le processus Ornstein-Uhlenbeck sont résumés dans le tableau (7) ci-contre.

Nous avons également appris à utiliser ces techniques dans des expansions de biais de la forme

$$\widehat{\kappa} - \kappa = a_{-1/2} + a_{-1} + O_p(n^{-1}). \quad (\text{I.125})$$

Il en ressort que :

Non seulement l'estimateur du paramètre de retour à la moyenne peut être fortement biaisé quelque soit la méthode d'estimation utilisée, mais en plus, à notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature actuelle, parmi les méthodes connues¹⁸ (Jackknife, Inférence Indirecte, Bootstrap), une méthode capable d'offrir une réduction de biais assez satisfaisante avec un estimateur de très bonne qualité (sans biais, erreur quadratique moyenne faible) indépendamment du choix des termes d'erreurs (de loi normale ou non), de la condition initiale (fixe ou aléatoire), de la vraie valeur du paramètre de retour à la moyenne (proche ou loin de zéro), de la période d'échantillonnage (courte ou longue) et du pas de discrétisation (fixe ou tend vers zéro).

Toute l'analyse considérée est basée sur l'hypothèse que les termes d'erreurs sont distribués suivant des lois normales. Il se trouve que, prendre le problème uniquement de cette façon serait perdre de vue les effets que peuvent avoir la condition initiale et les mesures de Pearson (skewness et kurtosis) sur le biais comme nous l'avons vue dans la section 6.

En liant ces différents aspects, nous pouvons obtenir des expressions de biais d'ordre plus élevés telles que (I.121). En ce sens, le chapitre suivant porte sur l'obtention d'une expression de biais plus efficace, en adéquation avec tout ce qui a été exposé dans ce chapitre, et notamment se concentre sur l'approximation des mesures de Pearson de l'estimateur du coefficient ϕ dans le processus Ornstein-Uhlenbeck en temps discret exact suivant :

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad X_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa),$$

18. La méthode du Jackknife, proposée par Quenouille [84, 1996] est une méthode de réduction de biais basée sur le ré-échantillonnage. L'inférence indirecte (II), œuvre de Smith [97, 1993], est une méthode basée sur des simulations afin de calibrer la fonction de biais. Pour ce faire, il est nécessaire qu'il soit possible de simuler les données du modèle pour différentes valeurs de ses paramètres. Nous nous référons à Gouriéroux, Monfort et Renault [50, 1993], Gallant et Tauchen [46, 1996] et Gouriéroux, Renault et Touzi [51, p. 330] pour une généralisation de la méthode. Un inconvénient est qu'étant basée sur des simulations, elle peut être coûteuse d'un point de vue de calculs, contrairement à la méthode du Jackknife qui est facile à implémenter et très rapide. La méthode de Bootstrap a été introduite dans Efron [41, 1979]. Il s'agit d'une méthode avérée efficace de correction de biais et de variance présentée comme une alternative aux méthodes asymptotiques traditionnelles comme par exemple l'expansion Edgeworth. Il subsiste cependant un inconvénient car il est prouvé que certains estimateurs obtenus sont inconsistants.

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $\phi = e^{-\kappa h} < 1$ et $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.

Modèle discret exact : $X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \alpha + \tilde{\sigma}\varepsilon_i$, $\phi = e^{-\kappa h}$, $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.		
$T \rightarrow \infty$, h est fixé, $n \rightarrow \infty$	Biais de $\hat{\kappa}$: $\mathbb{B}(\hat{\kappa})$	En cas de racine unitaire
$X(0) = 0$	$\frac{5 + 2e^{\kappa h} + e^{2\kappa h}}{2T} + O(n^{-2})$	$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{\kappa, h \rightarrow 0} \frac{4}{T}$
	$\frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} + o(T^{-1})$	$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{\kappa, h \rightarrow 0} \frac{2}{T}$
$X(0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$	$\mu = 0$	$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{T} \left\{ 2 - \frac{1 - e^{-2T\kappa}}{T\kappa} \right\}$
	$\frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} - \frac{2(1 - e^{-2n\kappa h})}{Tn(1 - e^{-2\kappa h})} + o(T^{-1})$	$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} 0$
$T \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$	Biais de $\hat{\kappa}$: $\mathbb{B}(\hat{\kappa})$	En cas de racine unitaire
$X(0) = 0$	$\mu = 0$ $\frac{4}{T} - \left\{ 4\kappa n^{-1} - \frac{7}{\kappa T^2} \right\} + o(n^{-1} + T^{-2})$	$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} \infty$
Modèle discret d'Euler : $X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \alpha + \tilde{\sigma}\varepsilon_i$, $\phi = 1 - \kappa h$, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.		
$T \rightarrow \infty$, h est fixé, $n \rightarrow \infty$	Biais de $\hat{\kappa}$: $\mathbb{B}(\hat{\kappa})$	En cas de racine unitaire
$X(0) = 0$	$-\frac{e^{-\kappa h} - 1 + \kappa h}{h} + \frac{1 + 3e^{-\kappa h}}{T} + o(T^{-1})$	$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{\kappa, h \rightarrow 0} \frac{4}{T}$
	$-\frac{e^{-\kappa h} - 1 + \kappa h}{h} + \frac{2e^{-\kappa h}}{T} + o(T^{-1})$	$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{\kappa, h \rightarrow 0} \frac{2}{T}$
Modèle discret des Trapèzes : $X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \alpha + \tilde{\sigma}\varepsilon_i$, $\phi = \frac{2 - \kappa h}{2 + \kappa h}$, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.		
$T \rightarrow \infty$, h est fixé, $n \rightarrow \infty$	Biais de $\hat{\kappa}$: $\mathbb{B}(\hat{\kappa})$	En cas de racine unitaire
$X(0) = 0$	$\frac{2(1 - e^{-\kappa h})}{h(1 + e^{-\kappa h})} + \frac{8}{T(1 + e^{-\kappa h})} - \kappa + o\left(\frac{1}{T}\right)$	$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{\kappa, h \rightarrow 0} \frac{4}{T}$
	$\frac{2(1 - e^{-\kappa h})}{h(1 + e^{-\kappa h})} + \frac{4}{T(1 + e^{-\kappa h})} - \kappa + o\left(\frac{1}{T}\right)$	$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) \xrightarrow{\kappa, h \rightarrow 0} \frac{2}{T}$

TABLE I.1 – Récapitulatif des résultats d'approximation du biais de $\hat{\kappa}$ dans un processus (OU), discrétisé à l'aide des méthodes d'Euler, des Trapèzes et Exacte.

SKEWNESS ET KURTOSIS DANS UN PROCESSUS ORNSTEIN-UHLENBECK

Ce chapitre traite principalement de deux mesures (standardisées) de l'écart de normalité : le coefficient d'asymétrie (skewness) et le comportement de la queue de distribution (excès de kurtosis) pour la classe des M-estimateurs définie par l'équation (II.1). Il s'agit plus précisément des troisième et quatrième moments de cette même classe de M-estimateur, approchés aux ordres $O(n^{-3})$ pour le premier et $O(n^{-4})$ pour le second, où n est la taille de l'échantillon.

Nous développons également deux algorithmes permettant de déterminer par récurrence les traces du type $Tr[(C_2\Sigma)^p]$ et $Tr[(C_1\Sigma)^p]$, pour tout entier $p \geq 3$, où $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}$ est une matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ de terme général $\sigma_{ij} = \phi^{|i-j|}$, C_1 et C_2 sont deux matrices carrées de même taille que Σ telles que :

$C_1 = \{c_{1ij}\}$ avec $c_{1i,i+1} = 1/2$ si $1 \leq i \leq n$, $c_{1i,i-1} = 1/2$ si $2 \leq i \leq n+1$ et 0 ailleurs, $C_2 = \{c_{2ij}\}$ avec $c_{2ij} = 1$ pour $i = j = 1, 2, \dots, n$ et 0 ailleurs. Les résultats sont donnés pour $p = 1, 2, \dots, 6$. Ce travail a été mené en collaboration avec Philippe Maisonobe.

Nous proposons ensuite une nouvelle expression de l'approximation du biais d'ordre $o(n^{-1}T^{-1})$ du paramètre de retour à la moyenne dans un processus Ornstein-Uhlenbeck sans moyenne, en utilisant une expansion de Taylor de $\hat{\kappa}$ d'ordre $O(n^{-2})$, où $\hat{\kappa}$ est l'estimateur des moindres carrés ordinaires du paramètre de retour à la moyenne. Finalement, nous obtenons des nouvelles approximations d'ordre $O(n^{-3})$, du biais et de l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\kappa}$.

1 INTRODUCTION

A partir des résultats de Rilstone et al. [88, 1996], Bao et Ullah [15, 2007] s'intéressent aux deux premiers moments (espérance et variance) de la classe des M-estimateurs définie par :

$$\Psi_n(\hat{\beta}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n q_i(\hat{\beta}) = 0, \quad (\text{II.1})$$

où $q_i(\beta) = q(Z_i; \beta)$ est une fonction des variables $Z_i, i = 1, \dots, n$, et du vecteur des paramètres $\beta \in \mathbb{R}^p$ de vraie valeur β_0 tel que $\mathbb{E}[\Psi_n(\beta)] = 0$ si et seulement si $\beta = \beta_0$.

En particulier, les auteurs développent des expressions approchées par l'intermédiaire d'une expansion asymptotique de la forme

$$\hat{\beta} - \beta_0 = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + O_p(n^{-2}).$$

Cette approche est poursuivie par Bao et Ullah [17, 2009], dans le cadre de la skewness et de l'excès de kurtosis du coefficient $\hat{\beta}$ pour la classe des M-estimateurs (II.1).

Ce chapitre est organisé comme suit :

Dans la deuxième section, après avoir mis en exergue différentes méthodes de calcul de l'espérance d'un produit de forme quadratique

$$\mathbb{E}[(X^t A_1 X)^{s_1} (X^t A_2 X)^{s_2} \dots (X^t A_\ell X)^{s_\ell}], \quad (\text{II.2})$$

où $s = s_1 + s_2 + \dots + s_\ell$, X est un vecteur Gaussien et les A_1, A_2, \dots, A_ℓ sont des matrices carrées symétriques de même taille que X , nous proposons une expression pour $\mathbb{E}[(X^t C_1 X)^3 (X^t C_2 X)^3]$ dans le cas particulier où $s = 6$, $s_1 = s_2 = \dots = s_6 = 1$, $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, $A_1 = A_2 = A_3 = C_1$ et $A_4 = A_5 = A_6 = C_2$.

Dans la troisième section, nous présentons des méthodes de calcul des traces u type $Tr[(C_1 \Sigma)^p]$, $Tr[(C_2 \Sigma)^p]$, où p et q sont des entiers. En particulier, nous démontrons que la matrice $\Delta' = \{\Delta'_{ij}\}$ de taille $(n-1) \times (n-1)$, obtenue à partir de $C_1 \Sigma$ en supprimant la première et dernière ligne, puis la première et dernière colonne, est de terme général

$$\Delta'_{ij} = \phi^{|i-j+1|} + \phi^{|i-j-1|} \quad \text{pour tout } 2 \leq i, j \leq n,$$

et est symétrique. Il en est de même pour $(C_1 \Sigma)^2$, $(C_1 \Sigma)^3$. Autrement dit, les matrices $\Upsilon' = \{\Upsilon'_{ij}\}_{2 \leq i, j \leq n}$, $\Gamma' = \{\Gamma'_{ij}\}$ de taille $(n-1) \times (n-1)$, obtenues respectivement à partir de $(C_1 \Sigma)^2$ et $(C_1 \Sigma)^3$ en supprimant la première et dernière ligne, puis la première et dernière colonne, sont symétriques. Ce résultat se généralise à $(C_1 \Sigma)^p$, où $p \in \mathbb{N}$.

La quatrième section est consacrée aux approximations de $\gamma_1(\hat{\phi})$ et $\gamma_2(\hat{\phi})$. Dans la section 5, nous développons les résultats analytiques du biais du paramètre de retour à la moyenne et montrons à l'aide d'un exercice de simulations que cette expression est satisfaisante au sens où elle rétablit la courbure du vrai biais et a des caractéristiques équivalentes à ce dernier. La section 6 donne des éléments de conclusion.

2 ESPÉRANCE DU PRODUIT DE DEUX FORMES QUADRATIQUES

Dans cette section, nous présentons d'abord les résultats d'approximation des coefficients de skewness et d'excès de kurtosis, puis nous introduisons des méthodes de calcul de l'espérance d'un produit de deux formes quadratiques. Finalement, nous proposons une expression pour $\mathbb{E}[(X^t C_1 X)^3 (X^t C_2 X)^3]$, où C_1 et C_2 sont des matrices symétriques.

2.1 Présentation du problème

Considérons le modèle en temps discret exact

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad X_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa), \quad (\text{II.3})$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $|\phi| = e^{-\kappa h} < 1$ et $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.

Désignons par X_0, X_1, \dots, X_n le processus générateur des données. Le vecteur $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)^t$, est distribué selon une loi normale d'espérance nulle et de matrice de variance-covariance $(\sigma^2/2\kappa)\Sigma_{n+1}$, avec ¹

$$\Sigma_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \dots & \phi^{n-2} & \phi^{n-1} & \phi^n \\ \phi & 1 & \phi & \ddots & \ddots & \phi^{n-3} & \phi^{n-2} & \phi^{n-1} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \ddots & \ddots & \phi^{n-4} & \phi^{n-3} & \phi^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \phi^{n-4} & \dots & \ddots & 1 & \phi & \phi^2 \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & \dots & \phi & 1 & \phi \\ \phi^n & \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \dots & \dots & \phi^2 & \phi & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.4})$$

Il s'agit d'une matrice carrée dont l'élément de la i ème ligne et j ème colonne vaut $\phi^{|i-j|}$. On suppose dès maintenant que $\sigma^2 = 2\kappa$. Puisque, $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on obtient donc $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{n+1})$.

L'estimateur des moindres carrés ordinaires $\hat{\phi}$ est déterminé comme l'argument de ϕ qui minimise la fonction objectif suivante :

$$S(\phi) = \sum_{i=1}^n (X_{ih} - \phi X_{(i-1)h})^2.$$

Sous les conditions de régularité usuelles, la condition du premier ordre s'écrit :

$$n^{-1} S'(\hat{\phi}) = 0 \Leftrightarrow n^{-1} \left[\sum_{i=1}^n X_{ih} X_{(i-1)h} - \hat{\phi} \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^2 \right] = 0.$$

1. Le $n+1$ en indice indique la taille de la matrice $\Sigma := \Sigma_{n+1}$.

On obtient alors l'estimateur des moindres carrés ordinaires de ϕ (qui est également l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle)².

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i X_{i-1}}{\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2} = \frac{X^t C_1 X}{X^t C_2 X} = \frac{U_n}{V_n}, \quad (\text{II.5})$$

$$\text{où } U_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{ih} X_{(i-1)h}, \quad V_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^2,$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.6})$$

En d'autres termes, $\hat{\phi}$ est solution de l'équation

$$\Psi(\phi) = U_n - \phi V_n, \quad (\text{II.7})$$

que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\Psi(\hat{\kappa}) = U_n - e^{-\hat{\kappa}h} V_n = 0. \quad (\text{II.8})$$

L'équation (II.8) représente la condition d'identification de la classe des M-estimateurs (II.1). Ainsi, les approximations de la skewness et de l'excès de kurtosis aux ordres $O(n^{-1/2})$ et $O(n^{-1})$ respectivement, sont données par Bao et Ullah [17, p. 235]

$$\gamma_1(\hat{\phi}) = [\mathbb{E}(\xi_0^2 + 2\xi_0\xi_{-1/2})]^{-3/2} [\mathbb{E}(\xi_0^3 + 3\xi_0^2\xi_{-1/2}) - 3\mathbb{E}(\xi_0^2)\mathbb{E}(\xi_{-1/2})], \quad (\text{II.9})$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(\hat{\phi}) = & \left\{ \mathbb{E}(\xi_0^4 + 4\xi_0^3\xi_{-1/2} + 4\xi_0^2\xi_{-1} + 6\xi_0^2\xi_{-1/2}^2) - 4\mathbb{E}(\xi_0^3)\mathbb{E}(\xi_{-1}) - 4\mathbb{E}(\xi_0^3 + 3\xi_0^2\xi_{-1/2})\mathbb{E}(\xi_{-1/2}) \right. \\ & \left. + 6\mathbb{E}(\xi_0^2) [\mathbb{E}(\xi_{-1/2})]^2 \right\} \times \left\{ \mathbb{E}(\xi_0^2 + \xi_{-1/2}^2 + 2\xi_0\xi_{-1/2} + 2\xi_0\xi_{-1}) - [\mathbb{E}(\xi_{-1/2})]^2 \right\}^{-2} - 3, \end{aligned}$$

2. La condition du second ordre est vérifiée.

où $\xi_{-s/2} = \sqrt{n} a_{-(s+1)/2}$ pour $s = 0, 1, 2$ et les termes $a_{-(s+1)/2}$ sont définis par³

$$a_{-1/2} = -Q\Psi_n(\kappa) = -\frac{U_n - \phi V_n}{\phi h}, \quad (\text{II.10})$$

$$\begin{aligned} a_{-1} &= -QV_1 a_{-1/2} - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}^2, \\ &= \frac{U_n^2 - \phi^2 V_n^2}{2\phi^2 h} - \frac{U_n - \phi V_n}{\phi h}, \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

$$\begin{aligned} a_{-3/2} &= -QV_1 a_{-1} - \frac{1}{2}QV_2 a_{-1/2}^2 - Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}a_{-1} - \frac{1}{6}Q\mathbb{E}(H_3)a_{-1/2}^3, \\ &= -\frac{U_n^3 - \phi^3 V_n^3}{3\phi^3 h} + \frac{U_n^2 - \phi^2 V_n^2}{\phi^2 h} - \frac{U_n - \phi V_n}{\phi h}, \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

avec $H_i = \partial^i \Psi(\kappa) / \partial \kappa^i$, $Q = [\mathbb{E}(H_1)]^{-1}$, $V_i = H_i - \mathbb{E}(H_i)$, on trouve

$$\begin{array}{lll} H_1 = \phi h V_n & \mathbb{E}(H_1) = \phi h & V_1 = \phi h (V_n - 1) \\ H_2 = -\phi h^2 V_n & \mathbb{E}(H_2) = -\phi h^2 & V_2 = \phi h^2 (1 - V_n) \\ H_3 = \phi h^3 V_n & \mathbb{E}(H_3) = \phi h^3 & V_3 = \phi h^3 (V_n - 1). \end{array}$$

L'expression des coefficients intervenant dans (II.9) est donnée en annexe (A.2.1). Elle nécessite de pouvoir calculer (i) l'espérance des puissances de U_n et V_n et (ii) l'espérance des produits $U_n^i V_n^j$ pour $i, j \in \mathbb{N}$. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'espérance des puissances de U_n et V_n . Pour ce faire, on utilise le Théorème suivant :

Théorème 2.1 (Ghazal [47, p. 102])

Soient n matrices symétriques A_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ et $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ un vecteur de loi normale d'espérance le vecteur nul et de matrice de variance covariance Σ . L'espérance⁴ des produits de formes quadratiques $X^t A_i X$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^p X^t A_i X\right) &= \mathbb{E}[(X^t A_1 X)(X^t A_2 X) \cdots (X^t A_p X)] \\ &= \mathbb{E}(X^t A_1 X) \cdot \mathbb{E}\left(\prod_{i=2}^p X^t A_i X\right) + \mathbb{E}(W_n), \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

où

$$W_n = 2 \sum_{i=2}^n \left\{ [\mathbb{E}(X^t V_i X)] \prod_{\ell=i+1}^n X^t A_\ell X \right\}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

avec $V_i = A_1 X X^t A_2 X \cdots X^t A_i$, $i = 2, 3, \dots, n$.

3. La condition d'identification ici est (II.8) et le paramètre estimé est κ . Lorsqu'on veut estimer ϕ on utilise plutôt (II.7) comme condition d'identification. On trouve dans ce cas $H_1 = -V_n$, $H_2 = H_3 = 0$, $V_1 = 1 - V_n$, $V_2 = 0$ et par conséquent

$$\begin{aligned} a_{-1/2} &= U_n - \phi V_n, \\ a_{-1} &= a_{-1/2} - U_n V_n + \phi V_n^2, \\ a_{-3/2} &= -a_{-1/2} + 2a_{-1} + U_n V_n^2 - \phi V_n^3. \end{aligned}$$

On admet pour l'instant que $\mathbb{E}(V_n) = 1$.

4. Bao et Ullah [18, p. 1194-1195] généralisent le calcul de l'espérance des produits de formes quadratiques $Q_j = X^t A_j X$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, lorsque $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ où μ est un vecteur non nulle.

Lorsque i ou j égal zéro, il est alors possible d'évaluer les moments d'ordre p , $\delta_p = \mathbb{E}[(X^t C X)^p]$, pour $p = 1, \dots, 6$. On utilise dans ce cas le lemme suivant :

Lemme 2.1 *Considérons un vecteur $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ et une matrice carrée C symétrique tels que le produit CX soit possible. Les coefficients δ_p , sont donnés par les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \text{Tr}[C\Sigma] \\
 \delta_2 &= 2\text{Tr}[(C\Sigma)^2] + (\text{Tr}[C\Sigma])^2 \\
 \delta_3 &= 8\text{Tr}[(C\Sigma)^3] + 6\text{Tr}[C\Sigma]\text{Tr}[(C\Sigma)^2] + (\text{Tr}[C\Sigma])^3 \\
 \delta_4 &= 48\text{Tr}[(C\Sigma)^4] + 32\text{Tr}[C\Sigma]\text{Tr}[(C\Sigma)^3] + 12\text{Tr}[(C\Sigma)^2](\text{Tr}[C\Sigma])^2 + 12(\text{Tr}[(C\Sigma)^2])^2 + (\text{Tr}[C\Sigma])^4 \\
 \delta_5 &= 384\text{Tr}[(C\Sigma)^5] + 240\text{Tr}[C\Sigma]\text{Tr}[(C\Sigma)^4] + 160\text{Tr}[(C\Sigma)^2]\text{Tr}[(C\Sigma)^3] + 80(\text{Tr}[C\Sigma])^2\text{Tr}[(C\Sigma)^3] \\
 &\quad + 60\text{Tr}[C\Sigma](\text{Tr}[(C\Sigma)^2])^2 + 20\text{Tr}[(C\Sigma)^2]\text{Tr}[C\Sigma]^3 + (\text{Tr}[C\Sigma])^5 \\
 \delta_6 &= 3840\text{Tr}[(C\Sigma)^6] + 2304\text{Tr}[C\Sigma]\text{Tr}[(C\Sigma)^5] + 1440\text{Tr}[(C\Sigma)^2]\text{Tr}[(C\Sigma)^4] + 30\text{Tr}[C\Sigma]^4\text{Tr}[(C\Sigma)^2] \\
 &\quad + 960\text{Tr}[C_1\Sigma]\text{Tr}[(C\Sigma)^2]\text{Tr}[(C\Sigma)^3] + 720(\text{Tr}[C\Sigma])^2\text{Tr}[(C\Sigma)^4] + 640(\text{Tr}[(C\Sigma)^3])^2 \\
 &\quad + 180(\text{Tr}[C\Sigma])^2(\text{Tr}[(C\Sigma)^2])^2 + 160(\text{Tr}[C\Sigma])^3\text{Tr}[(C\Sigma)^3] + 120(\text{Tr}[(C\Sigma)^2])^3 + (\text{Tr}[C\Sigma])^6,
 \end{aligned}$$

où Tr désigne l'opérateur Trace.

Dans un deuxième temps, les espérances des produits $U_n^p V_n^q$, $p \in \{0, 1, 2\}$, qui se calculent à partir des résultats des moments des ratios de produits croisés de forme quadratique de Smith [98, p. 255], sont définies par

$$\begin{aligned}
 \lambda_{pq} &= \mathbb{E}\left[\frac{(X^t C_1 X)^p (X^t C_2 X)^q}{(X^t X)^{p+q}}\right] = \frac{\mathbb{E}[(X^t C_1 X)^p (X^t C_2 X)^q]}{\mathbb{E}[(X^t X)^{p+q}]} \\
 &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)_{p+q} / \left(\frac{1}{2}n\right)_{p+q}\right] C_{[p+q]}^{p,q}(C_1, C_2),
 \end{aligned} \tag{II.14}$$

où $(x)_n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$ est le symbole de Pochhammer, et

1. Pour $p = 0$, $C_{[q]}^{0,q}(C_1, C_2) = C_{[q]}(C_2)$, avec $C_{[q]}(Y) = \frac{q!}{\left(\frac{1}{2}\right)_q} d_q(Y)$, où

$$d_q(Y) = q^{-1} \sum_{j=0}^{q-1} (q-j) t_{q-j} d_j(Y), \quad t_i = \frac{1}{2} i^{-1} \text{Tr}(Y^i), \quad d_0(Y) = 1. \tag{II.15}$$

2. Pour $p = 1, 2$, les expressions de $C_{[1+q]}^{1,q}(C_1, C_2)$ et $C_{[2+q]}^{2,q}(C_1, C_2)$ sont données dans Smith [99, p. 274].

Partant de (II.14) et en posant $n_{p+q} = \mathbb{E}[(X^t X)^{p+q}] = \prod_{j=0}^{p+q-1} (n+2j)$, on obtient

$$\mathbb{E}[(X^t C_1 X)^p (X^t C_2 X)^q] = n_{p+q} \times \lambda_{pq}. \tag{II.16}$$

Les résultats des moments des produits $\delta_{ij} = \mathbb{E}[(X^t C_1 X)^p (X^t C_2 X)^q]$, pour $p \in \{1, \dots, 5\}$ et $q \in \{1, 2\}$ sont donnés en Annexe (A.2). Il reste alors à déterminer δ_{33} .

2.2 Détermination du coefficient δ_{33}

Après avoir défini une forme-A(s) pour la classe des matrices symétriques, nous explicitons le principe de calcul et proposons une expression pour δ_{33} . Il s'agit de l'espérance d'un produit de forme quadratique

$$\delta_{33} = \prod_{i=1}^6 X^t A_i X,$$

où $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, $A_1 = A_2 = A_3 = C_1$ et $A_4 = A_5 = A_6 = C_2$, avec C_1 et C_2 définies par l'équation (II.6).

2.2.1 Définitions préliminaires

Soient A_1, A_2, \dots, A_s , s matrices symétriques réelles.

Définition 2.1 (Forme -A(s))

Soit une partition de l'ensemble des indices $\{1, 2, \dots, s\}$. A l'intérieur de chaque sous-ensemble de cette partition, considérons la trace du produit des matrices A_j , où les indices j correspondent aux indices du sous-ensemble considéré. On appellera forme-A(s) le produit de toutes ces traces.

Exemples : Forme -A(3).

1. Les partitions de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont :
 - à un élément : $\{\{1, 2, 3\}\}$
 - à deux éléments : $\{\{1\}, \{2, 3\}\}; \{\{2\}, \{1, 3\}\}; \{\{3\}, \{1, 2\}\}$
 - à trois éléments : $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
2. Les traces des produits des matrices A_j pour chaque sous-ensemble sont :
 - à un élément : $\{Tr[A_1 A_2 A_3]\}$
 - à deux éléments : $\{Tr[A_1], Tr[A_2 A_3]\}; \{Tr[A_2], Tr[A_1 A_3]\}; \{Tr[A_3], Tr[A_1 A_2]\}$
 - à trois éléments : $\{Tr[A_1], Tr[A_2], Tr[A_3]\}$
3. En prenant le produit de toutes ces traces, on obtient les formes-A(3) suivantes :
$$Tr[A_1 A_2 A_3], Tr[A_1]Tr[A_2 A_3], Tr[A_2]Tr[A_1 A_3], Tr[A_3]Tr[A_1 A_2], Tr[A_1]Tr[A_2]Tr[A_3].$$

Définition 2.2 (Classe de similarité)

Deux formes -A(s) appartiennent à la même classe de similarité si et seulement si leurs sous-ensembles (de la partition des indices $\{1, 2, \dots, s\}$) respectifs, ne diffèrent que par une permutation d'indices.

Exemple :

$Tr[A_2]Tr[A_1 A_3]$, $Tr[A_1]Tr[A_2 A_3]$ et $Tr[A_3]Tr[A_1 A_2]$ sont dans la même classe de similarité tandis que $Tr[A_1]Tr[A_2]Tr[A_3]$ appartient à une classe de similarité différente.

Remarque 2.1 : $Tr[A_2]Tr[A_1 A_3]$ et $Tr[A_2]Tr[A_3 A_1]$ sont deux formes -A(3) de la même classe de similarité alors que $Tr[A_2]Tr[A_1 A_3] = Tr[A_2]Tr[A_3 A_1]$.

Définition 2.3 (Somme -A(s))

La somme de toutes les formes -A(s) différentes à l'intérieur d'une classe de similarité est appelée somme -A(s).

Exemple : les trois sommes -A(s) sont : $Tr[A_1]Tr[A_2]Tr[A_3]$, $Tr[A_1A_2A_3]$ et $\{Tr[A_1]Tr[A_2A_3] + Tr[A_2]Tr[A_1A_3] + Tr[A_3]Tr[A_1A_2]\}$.

Définition 2.4 (Polynôme -A(s))

Toute combinaison linéaire de sommes -A(s) est appelée polynôme -A(s).

Exemple : le polynôme -A(3) est : $\alpha_1 Tr[A_1]Tr[A_2]Tr[A_3] + \alpha_2 \{Tr[A_1]Tr[A_2A_3] + Tr[A_2]Tr[A_1A_3] + Tr[A_3]Tr[A_1A_2]\} + \alpha_3 Tr[A_1A_2A_3]$, avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Pour tout $s \leq 8$ le tableau suivant renseigne sur le nombre de formes -A(s) différentes, de classe de similarité et sur le coefficient de chaque somme -A(s).

Structure de la classe de similarité								Coefficient	Nombre de formes -A(s) différentes							
8	7	6	5	4	3	2	1		1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	①	0	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	2		1	1	3	6	10	15	21	28	
1	1	1	1	1	3			3	1	4	10	20	35	56		
1	1	1	1	2	2			2		3	15	45	105	210		
1	1	1	1	4				4		3	15	45	105	210		
1	1	1	2	3				4			10	60	210	560		
1	1	1	5					5			12	72	252	672		
1	1	2	2	2				3				15	105	420		
1	1	2	4					5				45	315	1260		
1	1	3	3					6				10	70	280		
1	1	⑥						6				60	420	1680		
1	2	2	3					5					105	840		
1	2	5						6					252	2016		
1	3	4						7					105	840		
1	7							7					360	2880		
2	2	2	2					4						105		
2	2	4						6						630		
2	3	3						7						280		
2	6							7						1680		
3	5							8						672		
4	4							8						315		
8								8						2520		

TABLE II.1 – Informations sur le nombre de classe de similarité, le nombre de formes -A(s) différentes et sur le coefficient de chaque somme -A(s), pour $s \leq 8$.

2.2.2 Principe de calcul

D'après le Théorème 5.1 de Magnus [65, p. 207], δ_{33} est un polynôme -A(6). Il est donc de la forme

$$\delta_{33} = \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j \vartheta_j,$$

où η et α_j sont des coefficients à déterminer qui représentent respectivement le nombre total de classes de similarité et le coefficient de la somme -A(6) ϑ_j . Pour ce faire, nous utilisons la table II.1 de Magnus [66, p. 133].

La détermination de δ_{33} se fait en quatre étapes :

Étape 1 : Dans la table (II.1), on se place en dessous de "Structure de la classe de similarité", et on copie (de droite à gauche) à partir de \mathbb{D} , les 6 (s en général) premières colonnes ; chaque colonne comportant au maximum 11 lignes et la dernière ligne ne comportant qu'un seul nombre ($s = \textcircled{6}$). Au milieu du tableau, copier les 11 premiers nombres en dessous de "coefficient" et du côté droit, copier les 11 nombres en dessous de 6. Cela donne :

Classe de similarité	Coefficient (c)	Nombre (#) de formes -A(s)
1 1 1 1 1 1	0	1
1 1 1 1 2	1	15
1 1 1 3	3	20
1 1 2 2	2	45
1 1 4	4	45
1 2 3	4	60
1 5	5	72
2 2 2	3	15
2 4	5	45
3 3	6	10
6	6	60

Étape 2 : Les nombres en dessous de "Classe de similarité" déterminent la structure de la forme -A(6), à savoir, un nombre k signifie que celle-ci contient un produit de k matrices. Par exemple "1 2 3" indique que cette forme -A(6) s'écrit $Tr[A_1] \times Tr[A_2 A_3] \times Tr[A_4 A_5 A_6]$. Au milieu le coefficient est cette fois 2^c plutôt que c .

formes-A(s) typique	Coefficient (2^c)	# formes-A(s) différentes
$Tr[A_1] Tr[A_2] Tr[A_3] Tr[A_4] Tr[A_5] Tr[A_6]$	1	1
$Tr[A_1] Tr[A_2] Tr[A_3] Tr[A_4] Tr[A_5 A_6]$	2	15
$Tr[A_1] Tr[A_2] Tr[A_3] Tr[A_4 A_5 A_6]$	8	20
$Tr[A_1] Tr[A_2] Tr[A_3 A_4] Tr[A_5 A_6]$	4	45
$Tr[A_1] Tr[A_2] Tr[A_3 A_4 A_5 A_6]$	16	45
$Tr[A_1] Tr[A_2 A_3] Tr[A_4 A_5 A_6]$	16	60
$Tr[A_1] Tr[A_2 A_3 A_4 A_5 A_6]$	32	72
$Tr[A_1 A_2] Tr[A_3 A_4] Tr[A_5 A_6]$	8	15
$Tr[A_1 A_2] Tr[A_3 A_4 A_5 A_6]$	32	45
$Tr[A_1 A_2 A_3] Tr[A_4 A_5 A_6]$	64	10
$Tr[A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6]$	64	60

Étape 3 : Il y a 11 classes de similarité et donc 11 sommes-A(s). Pour chaque somme-A(s), nous connaissons la forme-A(s) typique, le coefficient 2^c et le nombre de forme-A(s) différentes. Ainsi, les 11 sommes-A(s) $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{11}$ sont

Somme -A(s)	$\alpha = 2^c$
$\vartheta_1 = (Tr[C_1 \Sigma])^3 (Tr[C_2 \Sigma])^3$	1
$\vartheta_2 = 3Tr[C_1 \Sigma] Tr[(C_1 \Sigma)^2] (Tr[C_2 \Sigma])^3 + 9(Tr[C_1 \Sigma])^2 (Tr[C_2 \Sigma])^2 Tr[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] + 3(Tr[C_1 \Sigma])^3 Tr[C_2 \Sigma] Tr[(C_2 \Sigma)^2]$	2
$\vartheta_3 = Tr[(C_1 \Sigma)^3] (Tr[C_2 \Sigma])^3 + 9Tr[C_1 \Sigma] (Tr[C_2 \Sigma])^2 Tr[(C_1 \Sigma)^2 C_2 \Sigma] + 9Tr[C_2 \Sigma] (Tr[C_1 \Sigma])^2 Tr[C_1 \Sigma (C_2 \Sigma)^2] + (Tr[C_1 \Sigma])^3 Tr[(C_2 \Sigma)^3]$	8
$\vartheta_4 = 9(Tr[C_1 \Sigma])^2 Tr[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] Tr[(C_2 \Sigma)^2] + 9Tr[C_1 \Sigma] Tr[C_2 \Sigma] Tr[(C_1 \Sigma)^2] Tr[(C_2 \Sigma)^2] + 18Tr[C_1 \Sigma] Tr[C_2 \Sigma] (Tr[C_1 \Sigma C_2 \Sigma])^2 + 9(Tr[C_2 \Sigma])^2 Tr[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] Tr[(C_1 \Sigma)^2]$	4
$\vartheta_5 = 9(Tr[C_1 \Sigma])^2 Tr[C_1 \Sigma (C_2 \Sigma)^3] + 18Tr[C_1 \Sigma] Tr[C_2 \Sigma] Tr[(C_1 \Sigma)^2 (C_2 \Sigma)^2] + 9Tr[C_1 \Sigma] Tr[C_2 \Sigma] Tr[C_1 \Sigma C_2 \Sigma C_1 \Sigma C_2 \Sigma] + 9(Tr[C_2 \Sigma])^2 Tr[(C_1 \Sigma)^3 C_2 \Sigma]$	16
$\vartheta_6 = 3Tr[C_1 \Sigma] Tr[(C_1 \Sigma)^2] Tr[(C_2 \Sigma)^3] + 18Tr[C_1 \Sigma] Tr[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] Tr[C_1 \Sigma (C_2 \Sigma)^2] + 9Tr[C_1 \Sigma] Tr[(C_2 \Sigma)^2] Tr[(C_1 \Sigma)^2 C_2 \Sigma] + 9Tr[C_2 \Sigma] Tr[(C_1 \Sigma)^2] Tr[C_1 \Sigma (C_2 \Sigma)^2] + 18Tr[C_2 \Sigma] Tr[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] Tr[(C_1 \Sigma)^2 C_2 \Sigma] + 3Tr[C_2 \Sigma] Tr[(C_2 \Sigma)^2] Tr[(C_1 \Sigma)^3]$	16
$\vartheta_7 = 18Tr[C_1 \Sigma] Tr[(C_1 \Sigma)^3 (C_2 \Sigma)^2] + 18Tr[C_1 \Sigma] Tr[C_1 \Sigma (C_1 \Sigma C_2 \Sigma)^2] + 18Tr[C_2 \Sigma] Tr[(C_1 \Sigma)^3 (C_2 \Sigma)^2] + 18Tr[C_2 \Sigma] Tr[C_1 \Sigma (C_1 \Sigma C_2 \Sigma)^2]$	32
$\vartheta_8 = 9Tr[(C_1 \Sigma)^2] Tr[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] Tr[(C_2 \Sigma)^2] + 6(Tr[C_1 \Sigma C_2 \Sigma])^3$	8
$\vartheta_9 = 9Tr[(C_1 \Sigma)^2] Tr[C_1 \Sigma (C_2 \Sigma)^3] + 18Tr[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] Tr[(C_1 \Sigma)^2 (C_2 \Sigma)^2] + 9Tr[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] Tr[(C_1 \Sigma C_2 \Sigma)^2] + 9Tr[(C_2 \Sigma)^2] Tr[(C_1 \Sigma)^3 C_2 \Sigma]$	32
$\vartheta_{10} = Tr[(C_1 \Sigma)^3] Tr[(C_2 \Sigma)^3] + 9Tr[(C_1 \Sigma)^2 C_2 \Sigma] Tr[C_1 \Sigma (C_2 \Sigma)^2]$	64
$\vartheta_{11} = 18Tr[(C_1 \Sigma)^3 (C_2 \Sigma)^3] + 6Tr[(C_1 \Sigma C_2 \Sigma)^3] + 36Tr[(C_1 \Sigma)^2 (C_2 \Sigma)^2 C_1 \Sigma C_2 \Sigma]$	64

Étape 4 : L'espérance est donc

$$\begin{aligned}
\delta_{33} &= \vartheta_1 + 2\vartheta_2 + 8\vartheta_3 + 4\vartheta_4 + 16\vartheta_5 + 16\vartheta_6 + 32\vartheta_7 + 8\vartheta_8 + 32\vartheta_9 + 64\vartheta_{10} + 64\vartheta_{11} \\
&= 6Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2](Tr[C_2\Sigma])^3 + 64Tr[(C_1\Sigma)^3]Tr[(C_2\Sigma)^3] + 48Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[(C_2\Sigma)^3] \\
&\quad + 8(Tr[C_1\Sigma])^3Tr[(C_2\Sigma)^3] + 72Tr[C_2\Sigma](Tr[C_1\Sigma])^2Tr[C_1\Sigma(C_2\Sigma)^2] + 1152Tr[(C_1\Sigma)^3(C_2\Sigma)^3] \\
&\quad + 72Tr[C_1\Sigma]Tr[C_2\Sigma](Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma])^2 + 36Tr[C_1\Sigma]Tr[C_2\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[(C_2\Sigma)^2] \\
&\quad + 36(Tr[C_2\Sigma])^2Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2] + 288Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[C_1\Sigma(C_2\Sigma)^3] + 48(Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma])^3 \\
&\quad + 288Tr[C_1\Sigma]Tr[C_2\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2(C_2\Sigma)^2] + 288Tr[C_1\Sigma]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma]Tr[C_1\Sigma(C_2\Sigma)^2] \\
&\quad + 144(Tr[C_1\Sigma])^2Tr[C_1\Sigma(C_2\Sigma)^3] + 144Tr[C_1\Sigma]Tr[C_2\Sigma]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma C_1\Sigma C_2\Sigma] \\
&\quad + 144Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_2\Sigma)^2]Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma] + 288Tr[C_2\Sigma]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma] \\
&\quad + 144Tr[C_2\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[C_1\Sigma(C_2\Sigma)^2] + 72Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma]Tr[(C_2\Sigma)^2] \\
&\quad + 48Tr[C_2\Sigma]Tr[(C_2\Sigma)^2]Tr[(C_1\Sigma)^3] + 72Tr[C_1\Sigma](Tr[C_2\Sigma])^2Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma] \\
&\quad + 576Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^3(C_2\Sigma)^2] + 576Tr[C_1\Sigma]Tr[C_1\Sigma(C_1\Sigma C_2\Sigma)^2] \\
&\quad + 576Tr[C_2\Sigma]Tr[C_1\Sigma(C_1\Sigma C_2\Sigma)^2] + 576Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma]Tr[C_1\Sigma(C_2\Sigma)^2] + 384Tr[(C_1\Sigma C_2\Sigma)^3] \\
&\quad + 288Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma]Tr[(C_1\Sigma C_2\Sigma)^2] + 288Tr[(C_2\Sigma)^2]Tr[(C_1\Sigma)^3 C_2\Sigma] + (Tr[C_1\Sigma])^3(Tr[C_2\Sigma])^3 \\
&\quad + 2304Tr[(C_1\Sigma)^2(C_2\Sigma)^2 C_1\Sigma C_2\Sigma] + 18(Tr[C_1\Sigma])^2(Tr[C_2\Sigma])^2Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma] \\
&\quad + 144(Tr[C_2\Sigma])^2Tr[(C_1\Sigma)^3 C_2\Sigma] + 8Tr[(C_1\Sigma)^3](Tr[C_2\Sigma])^3 + 576Tr[C_2\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^3(C_2\Sigma)^2] \\
&\quad + 576Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2(C_2\Sigma)^2] + 36(Tr[C_1\Sigma])^2Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma]Tr[(C_2\Sigma)^2] \\
&\quad + 6(Tr[C_1\Sigma])^3Tr[C_2\Sigma]Tr[(C_2\Sigma)^2].
\end{aligned}$$

3 DÉTERMINATION DES TRACES

Pour évaluer les termes δ_{ij} , il nous faut déterminer les traces de la forme $Tr[(C_1\Sigma)^p]$ et $Tr[(C_2\Sigma)^p]$. Nous nous restreignons aux valeurs p qui nous intéressent.

3.1 Les traces de la forme $Tr[(C_2\Sigma_{n+1})^p]$

Après partitionnement, les matrices C_2 et $C_2\Sigma_{n+1}$ s'écrivent

$$C_2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad C_2\Sigma_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_n & \mathbf{C} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

où \mathbf{I}_n désigne la matrice identité de taille $n \times n$, $\mathbf{C} = (\phi^n, \phi^{n-1}, \dots, \phi)^t$ un vecteur colonne, Σ_{n+1} est définie par l'équation (II.4) et Σ_n de terme général $\{\Phi_{ij}\} = \phi^{|j-i|}$ est une matrice de taille $n \times n$ dont l'élément de la i ème ligne et j ème colonne vaut $\phi^{|j-i|}$.

Propriété 3.1 : Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,

$$Tr [(C_2 \Sigma_{n+1})^p] = Tr \left[\left(\begin{array}{c|c} (\Sigma_n)^p & (\Sigma_n)^{p-1} \mathbf{C} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right] = Tr [(\Sigma_n)^p] \quad (\text{II.17})$$

Preuve de la propriété 3.1 : (par récurrence).

- Pour $n = 1$

$$Tr [C_2 \Sigma_{n+1}] = Tr \left[\left(\begin{array}{c|c} \Sigma_n & \mathbf{C} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right] = Tr [\Sigma_n].$$

- Supposons que la proposition soit vraie au rang p . On a alors,

$$Tr [(C_2 \Sigma_{n+1})^p] = Tr \left[\left(\begin{array}{c|c} (\Sigma_n)^p & (\Sigma_n)^{p-1} \mathbf{C} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right] = Tr [(\Sigma_n)^p].$$

- Au rang $p + 1$,

$$(C_2 \Sigma_{n+1})^{p+1} = \left(\begin{array}{c|c} (\Sigma_n)^{p+1} & (\Sigma_n)^p \mathbf{C} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} (\Sigma_n)^{p+1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & (\Sigma_n)^p \mathbf{C} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ainsi,

$$Tr [(C_2 \Sigma_{n+1})^{p+1}] = Tr \left[\left(\begin{array}{c|c} (\Sigma_n)^{p+1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right] = Tr [(\Sigma_n)^{p+1}].$$

■

En résumé, pour calculer les traces de la forme $Tr[(C_2 \Sigma_{n+1})^p]$, il suffit de déterminer les traces de type $Tr[(\Sigma_n)^p]$.

3.1.1 Cas $p = 1$: $Tr[C_2 \Sigma_{n+1}]$

Le cas $p = 1$ est immédiat :

$$Tr [C_2 \Sigma_{n+1}] = Tr [\Sigma_n] = \sum_{i=1}^n \Phi_{ii} = \sum_{i=1}^n 1 = n. \quad (\text{II.18})$$

3.1.2 Cas $p = 2$: $Tr[(C_2\Sigma_{n+1})^2]$

D'après la propriété 3.1,

$$Tr[(C_2\Sigma_{n+1})^2] = Tr[\Sigma_n^2],$$

où $\Sigma_n^2 := \{\Theta_{ij}\}$ est une matrice de taille $n \times n$ avec

$$\Theta_{ij} = \sum_{m=1}^n \Phi_{im}\Phi_{mj} = \sum_{m=1}^n \phi^{|m-i|+|j-m|},$$

à déterminer pour $i = j$ ⁵.

On a alors :

$$\begin{aligned} \Theta_{ii} &= \sum_{m=1}^n \phi^{2|i-m|} \\ &= \sum_{m=1}^i \phi^{2i-2m} + \sum_{m=i+1}^n \phi^{2m-2i} \\ &= \phi^{2i} \sum_{m=1}^i \phi^{-2m} + \phi^{-2i} \sum_{m=i+1}^n \phi^{2m} \\ &= \frac{\phi^{2(n-i+1)} + \phi^{2i} - \phi^2 - 1}{\phi^2 - 1}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\boxed{Tr[(C_2\Sigma_{n+1})^2] = Tr[\Sigma_n^2] = \sum_{i=1}^n \Theta_{ii} = \frac{1}{(\phi^2 - 1)^2} \left\{ n(1 - \phi^4) + 2\phi^2 (\phi^{2n} - 1) \right\}.} \quad (\text{II.20})$$

L'algorithme 1 permet alors le calcul des différentes traces de la forme $Tr[(C_2\Sigma_{n+1})^p]$, pour $p \geq 3$.

5. Les cas $i < j$ et $i > j$ seront utiles dans le calcul de $Tr[(C_2\Sigma_{n+1})^3]$. En effet, par la propriété 3.1, $Tr[(C_2\Sigma_{n+1})^3] = Tr[\Sigma_n^3]$, où $\Sigma_n^3 = \Sigma_n^2 \Sigma_n$ est une matrice carrée de taille $n \times n$, dont le terme général

$$\Psi_{ij} = \sum_{m=1}^n \Theta_{im} \Phi_{mj} = \sum_{m=1}^n \Theta_{im} \phi^{|j-m|}.$$

Ainsi, en supposant que $i < j$

$$\Psi_{ij}^{(i < j)} = \sum_{m=1}^i \Theta_{im}^{(i \geq m)} \phi^{j-m} + \sum_{m=i+1}^j \Theta_{im}^{(i < m)} \phi^{j-m} + \sum_{m=j+1}^n \Theta_{im}^{(i < m)} \phi^{m-j}. \quad (\text{II.19})$$

Algorithme 1 Méthode de calcul de $Tr[(C_2 \Sigma_{n+1})^p]$, $p \geq 3$: Les résultats peuvent être simplifiés à partir de calculs symboliques (par exemple : Mathematica ou Matlab).

1. **Initialisations :**
2. n et p de type entier.
3. ϕ de type nombre : $-1 < \phi < 1$.
4. $\Sigma_n := \{\Phi_{ij}\} \leftarrow \phi^{|j-i|}$ est une matrice carrée de taille $n \times n$.
5. $\Sigma_n^2 := \{\Theta_{ij}\} \leftarrow \sum_{m=1}^n \phi^{|m-i|+|j-m|}$
 - a. **Si** $i < j$ **alors**
 - $\Theta_{ij}^{(i < j)} = \phi^{i+j} \sum_{m=1}^i \phi^{-2m} + (j-i)\phi^{j-i} + \phi^{-i-j} \sum_{m=j+1}^n \phi^{2m}$
 - b. **Sinon si** $i \geq j$ **alors**
 - $\Theta_{ij}^{(i \geq j)} = \phi^{i+j} \sum_{m=1}^j \phi^{-2m} + (i-j)\phi^{i-j} + \phi^{-i-j} \sum_{m=i+1}^n \phi^{2m}$
 - **Fin si**
 - **Fin si**
6. **Fin si.**
7. **Début Algorithme :**
8. **Pour** $t = 3, \dots, p$
9. $\Psi_{ij}^{(i < j)} = \sum_{m=1}^i \Theta_{im}^{(i \geq m)} \phi^{j-m} + \sum_{m=i+1}^j \Theta_{im}^{(i < m)} \phi^{j-m} + \sum_{m=j+1}^n \Theta_{im}^{(i < m)} \phi^{m-j}$.
10. $\Psi_{ij}^{(i \geq j)} = \sum_{m=1}^j \Theta_{im}^{(i \geq m)} \phi^{j-m} + \sum_{m=j+1}^i \Theta_{im}^{(i \geq m)} \phi^{m-j} + \sum_{m=i+1}^n \Theta_{im}^{(i < m)} \phi^{m-j}$.
11. $\Sigma_n^t := \{\Theta_{ij}\} \leftarrow \Psi_{ij}$
12. **Fin Pour.**
13. $Tr[\Sigma_n^p] = \sum_{i=1}^n \Psi_{ii}$.

3.2 Les traces de la forme $Tr[(C_1\Sigma_{n+1})^p]$

Pour calculer les traces de la forme $Tr[(C_1\Sigma_{n+1})^p]$, nous réécrivons la matrice⁶ C_1 ainsi :

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{N} + \mathbf{N}^T, \quad (\text{II.21})$$

où

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est alors possible de déterminer une expression analytique exacte de la trace $Tr[C_1\Sigma_{n+1}]$ lorsque $p = 1$ et 2, puis de proposer un algorithme pour $p \geq 3$.

3.2.1 Cas $p = 1 : Tr[C_1\Sigma_{n+1}]$

La matrice $\mathbf{C}_1\Sigma_{n+1} = \{\Delta_{ij}\}$ est une matrice carrée de taille $(n+1) \times (n+1)$ avec

$$\Delta_{ij} = \sum_{m=1}^{n+1} c_{im} \phi^{|m-j|}, \quad (\text{II.22})$$

où le terme général c_{ij} , est défini par

$$c_{ij} = \begin{cases} c_{ij} = 0 & \text{si } |j-i| \neq 1 \\ c_{ii+1} = 1 & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ c_{ii-1} = 1 & \text{si } 2 \leq i \leq n+1. \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

En d'autres termes,

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} \phi^{|2-j|} & \text{si } i = 1 \\ \phi^{|i-j+1|} + \phi^{|i-j-1|} & \text{si } 2 \leq i \leq n \\ \phi^{|n-j|} & \text{si } i = n+1. \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

En effet,

1. Pour $i = 1$ la définition (II.22) entraîne que $\Delta_{1j} = \sum_{m=1}^{n+1} c_{1m} \phi^{|m-j|}$. D'après (II.23), $m = 2$ est le seul indice pour lequel c_{1m} est différent de zéro. On a alors $c_{12} = 1$. Par conséquent, $\Delta_{1j} = \phi^{|2-j|}$.
2. De même pour $2 \leq i \leq n$, si $i := n$, alors $m = n+1$ et $m = n-1$ sont les seuls cas pour lesquels c_{nm} est différent de zéro et vaut 1. On a alors ($n := i$), $\Delta_{ij} = \phi^{|i-j+1|} + \phi^{|i-j-1|}$.
3. Pour $i = n+1$, la seule valeur pour laquelle $c_{n+1,m} = 1$ est $m = n$ et ainsi, $\Delta_{n+1,j} = \phi^{|n-j|}$.

6. proportionnellement à un facteur $1/2$ près.

Finalement,

$$\text{Tr}[C_1\Sigma] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \Delta_{ii} = \frac{1}{2} \left[\Delta_{11} + \sum_{i=2}^n \Delta_{ii} + \Delta_{n+1,n+1} \right] = \frac{1}{2} \left[\phi + \sum_{i=2}^n 2\phi + \phi \right] = n\phi.$$

La matrice $\{\Delta_{ij}\} := \mathbf{C}_1\Sigma_{n+1}$ possède la propriété suivante :

Propriété 3.2 *La matrice $\Delta' = \{\Delta'_{ij}\}$ de taille $(n-1) \times (n-1)$, obtenue à partir de $C_1\Sigma$ en supprimant la première ($i=1$) et dernière ligne ($i=n+1$), puis la première ($j=1$) et dernière colonne $j=n+1$, de terme général*

$$\Delta'_{ij} = \phi^{|i-j+1|} + \phi^{|i-j-1|} \quad \text{pour tout } 2 \leq i, j \leq n, \quad (\text{II.25})$$

est symétrique.

Preuve de la propriété 3.2 : *La démonstration est immédiate. Il suffit d'écrire que :*

$\Delta'_{ij} = \phi^{|(i+1)-j|} + \phi^{|i-(j+1)|}$ et $\Delta'_{ji} = \phi^{|(j+1)-i|} + \phi^{|j-(i+1)|}$ et de remarquer que :
 $|(i+1)-j| = |j-(i+1)|$ et $|i-(j+1)| = |(j+1)-i|$. Par conséquent, $\Delta'_{ij} = \Delta'_{ji}$.

3.2.2 Cas $p=2$: $\text{Tr}[(C_1\Sigma_{n+1})^2]$

La matrice $(\mathbf{C}_1\Sigma_{n+1})^2 = \{\Upsilon_{ij}\}$ est une matrice carrée de taille $(n+1) \times (n+1)$ dont le terme général est

$$\Upsilon_{ij} = \sum_{m=1}^{n+1} \Delta_{im}\Delta_{mj} = \Delta_{i1}\Delta_{1j} + \Delta_{i,n+1}\Delta_{n+1,j} + \sum_{m=2}^n \Delta_{im}\Delta_{mj}, \quad (\text{II.26})$$

où la matrice Δ_{ij} est définie par (II.24).

On a alors :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11} &= \Upsilon_{n+1,n+1} = \Delta_{11}\Delta_{11} + \Delta_{1,n+1}\Delta_{n+1,1} + \sum_{m=2}^n \Delta_{1m}\Delta_{m1} \\ &= \phi^2 + \phi^{2(n-1)} + \sum_{m=2}^n \phi^{m-2}(\phi^m + \phi^{m-2}) \\ &= \phi^2 + \phi^{2(n-1)} + (\phi^{-2} + \phi^{-4}) \sum_{m=2}^n \phi^{2m} \\ &= \phi^2 - 1 - \frac{2(1 - \phi^{2n})}{\phi^2 - 1}, \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{1,n+1} &= \Upsilon_{n+1,1} = \Delta_{1,1}\Delta_{1,n+1} + \Delta_{1,n+1}\Delta_{n+1,n+1} + \sum_{m=2}^n \Delta_{1,m}\Delta_{m,n+1} \\ &= 2\phi^n + \sum_{m=2}^n (\phi^{n-2} + \phi^n) \\ &= [(n-1) + (n+1)\phi^2] \phi^{n-2}, \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_{1j}^{j \in [2, n]} &= \Delta_{11} \Delta_{1j} + \Delta_{1, n+1} \Delta_{n+1, j} + \sum_{m=2}^n \Delta_{1m} \Delta_{mj} \\
 &= \phi^{j-1} + \phi^{2n-j-1} + \sum_{m=2}^n \phi^{m-2} (\phi^{|m-j+1|} + \phi^{|m-j-1|}) \\
 &= \phi^{j-1} + \phi^{2n-j-1} + \sum_{m=2}^{j-1} \phi^{m-2} (\phi^{j-1-m} + \phi^{j+1-m}) + 2\phi^{j-1} + \sum_{m=j+1}^n \phi^{m-2} (\phi^{m-j+1} + \phi^{m-j-1}) \\
 &= \frac{\phi^{-3-j}}{\phi^2 - 1} \left\{ (2-j)\phi^{2j} - 4\phi^{2+2j} + j\phi^{4+2j} + 2\phi^{4+2n} \right\}. \tag{II.29}
 \end{aligned}$$

Les coefficients de la dernière ligne sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_{n+1, j}^{j \in [2, n]} &= \Delta_{n+1, 1} \Delta_{1j} + \Delta_{n+1, n+1} \Delta_{n+1, j} + \sum_{m=2}^n \Delta_{n+1, m} \Delta_{mj}, \\
 &= \phi^{n+j-3} + \phi^{n-j+1} + (\phi^{-1} + \phi) \phi^{n+j} \sum_{m=2}^{j-1} \phi^{-2m} + 2\phi^{n-j+1} + (n-j)(\phi^{-1} + \phi) \phi^{n-j} \\
 &= \frac{\phi^{n-j-1}}{\phi^2 - 1} \left\{ (n-j)(\phi^4 - 1) + 2(-2\phi^2 + \phi^4 + \phi^{2j}) \right\}. \tag{II.30}
 \end{aligned}$$

Pour les lignes $i \in [2, n]$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_{i1}^{i \in [2, n]} &= (\phi + \phi^{-1}) \phi^i + (\phi + \phi^{-1}) \phi^{2n-i} + \sum_{m=2}^n (\phi^{|i-m+1|} + \phi^{|i-m-1|}) (\phi^{m-2} + \phi^m) \\
 &= (\phi + \phi^{-1}) \phi^i + (\phi + \phi^{-1}) \phi^{2n-i} + \sum_{m=2}^{i-1} (\phi^{m-2} + \phi^m) (\phi^{i-m-1} + \phi^{i-m+1}) \\
 &\quad + 2\phi(\phi^{i-2} + \phi^i) + \sum_{m=i+1}^n (\phi^{m-2} + \phi^m) (\phi^{-i+m-1} + \phi^{-i+m+1}) \\
 &= \frac{(\phi^2 + 1)\phi^{-i-3}}{\phi^2 - 1} \left\{ [(2-i) - 4\phi^2 + i\phi^4] \phi^{2i} + 2\phi^{2n+4} \right\} \tag{II.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_{i, n+1}^{i \in [2, n]} &= (\phi^{-1} + \phi^{-3}) \phi^{i+n} + (\phi^3 + \phi) \phi^{n-i} + \sum_{m=2}^n (\phi^{|i-m+1|} + \phi^{|i-m-1|}) (\phi^{n-m} + \phi^{n+2-m}) \\
 &= \frac{(\phi^2 + 1)\phi^{n-i-1}}{\phi^2 - 1} \left\{ (\phi^4 - 1)(n-i) + 2(\phi^{2i} + \phi^4 - 2\phi^2) \right\}. \tag{II.32}
 \end{aligned}$$

Nous pouvons alors en déduire $\Upsilon_{ij} = \Delta_{i1} \Delta_{1j} + \Delta_{i, n+1} \Delta_{n+1, j} + \sum_{m=2}^n \Delta_{im} \Delta_{mj}$ pour $i, j \in [2, n]$.

On a : $\Delta_{i1}\Delta_{1j} = [\phi^{-2} + \phi^{-4}] \phi^{i+j}$, $\Delta_{i,n+1}\Delta_{n+1,j} = (1 + \phi^2) \phi^{2n-i-j}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^n \Delta_{im}\Delta_{mj} &= \sum_{m=2}^n [\phi^{|i-m+1|} + \phi^{|i-m-1|}] [\phi^{|m-j+1|} + \phi^{|m-j-1|}] \\ &= \sum_{m=2}^n \phi^{|i-m+1|+|m-j+1|} + \sum_{m=2}^n \phi^{|i-m+1|+|m-j-1|} \\ &\quad + \sum_{m=2}^n \phi^{|i-m-1|+|m-j+1|} + \sum_{m=2}^n \phi^{|i-m-1|+|m-j-1|}. \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Ce résultat se simplifie en utilisant les égalités suivantes :

- Si $i < j$ (le principe est le même si $i > j$),

$$1) \quad \sum_{m=2}^n \phi^{|i-m+1|+|m-j+1|} = \sum_{m=2}^i \phi^{i+j-2m} + \sum_{m=i+1}^{j-1} \phi^{j-i-2} + \sum_{m=j}^n \phi^{2m-i-j} \quad (\text{II.34})$$

$$2) \quad \sum_{m=2}^n \phi^{|i-m+1|+|m-j-1|} = \sum_{m=2}^{i+1} \phi^{i+j-2m+2} + \sum_{m=i+2}^{j+1} \phi^{j-i} + \sum_{m=j+2}^n \phi^{2m-i-j-2} \quad (\text{II.35})$$

$$3) \quad \sum_{m=2}^n \phi^{|i-m-1|+|m-j+1|} = \sum_{m=2}^{i-1} \phi^{i+j-2m-2} + \sum_{m=i}^{j-1} \phi^{j-i} + \sum_{m=j}^n \phi^{2m-i-j+2} \quad (\text{II.36})$$

$$4) \quad \sum_{m=2}^n \phi^{|i-m-1|+|m-j-1|} = \sum_{m=2}^{i-1} \phi^{i+j-2m} + \sum_{m=i}^{j+1} \phi^{j-i+2} + \sum_{m=j+2}^n \phi^{2m-i-j} \quad (\text{II.37})$$

- Si $i = j$,

$$\begin{aligned} 5) \quad \sum_{m=2}^n \phi^{2|i+1-m|} &= \sum_{m=2}^{i+1} \phi^{2(i+1-m)} + \sum_{m=i+2}^n \phi^{2(m-i-1)} \\ &= \frac{1 + \phi^2 - \phi^{2i} - \phi^{2(n-i)}}{1 - \phi^2} \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

$$\begin{aligned} 6) \quad \sum_{m=2}^n \phi^{2|i-1-m|} &= \sum_{m=2}^{i-1} \phi^{2(i-1-m)} + \sum_{m=i}^n \phi^{2(m-i+1)} \\ &= \frac{1 + \phi^2 - \phi^{2i-4} - \phi^{2(n-i+2)}}{1 - \phi^2} \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

$$\begin{aligned} 7) \quad \sum_{m=2}^n \phi^{|i+1-m|+|i-1-m|} &= \sum_{m=2}^{i-1} \phi^{2(i-m)} + \phi^2 + \sum_{m=i+1}^n \phi^{2(m-i)} \\ &= \frac{\phi^{2(i-1)} + (\phi^2 - 3)\phi^2 + \phi^{2(n-i+1)}}{\phi^2 - 1}. \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

En particulier, pour $i = j$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=2}^n \Delta_{im} \Delta_{mi} &= \sum_{m=2}^n \phi^{2|i+1-m|} + 2 \sum_{m=2}^n \phi^{|i+1-m|+|i-1-m|} + \sum_{m=2}^n \phi^{2|i-1-m|} \\
 &= \sum_{m=2}^{i+1} \phi^{2(i+1-m)} + \sum_{m=i+2}^n \phi^{2(m-i-1)} + 2 \sum_{m=2}^{i-1} \phi^{2(i-m)} + 2\phi^2 + 2 \sum_{m=i+1}^n \phi^{2(m-i)} \\
 &\quad + \sum_{m=2}^{i-1} \phi^{2(i-1-m)} + \sum_{m=i}^n \phi^{2(m-i+1)} \\
 &= \frac{1 + \phi^2 - \phi^{2i} - \phi^{2(n-i)}}{1 - \phi^2} + \frac{1 + \phi^2 - \phi^{2i-4} - \phi^{2(n-i+2)}}{1 - \phi^2} \\
 &\quad + \frac{2[\phi^{2(i-1)} + (\phi^2 - 3)\phi^2 + \phi^{2(n-i+1)}]}{\phi^2 - 1} \\
 &= \frac{\phi^{-2(2+i)}}{\phi^2 - 1} \left\{ (1 + \phi^2)^2 (\phi^{4i} + \phi^{2n+4}) + 2(\phi^4 - 4\phi^2 - 1)\phi^{2i+4} \right\}. \tag{II.41}
 \end{aligned}$$

Finalement, pour $2 \leq i \leq n$ et $2 \leq j \leq n$, le terme général Υ_{ij} est égal à

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \frac{\phi^{-2-i-j}(1 + \phi^2)}{\phi^2 - 1} \left\{ [(1 + i - j) - 6\phi^2 + (1 - i + j)\phi^4 + 2\phi^{2i}] \phi^{2j} + 2\phi^{2n+4} \right\} & \text{si } i < j, \\
 \frac{2}{\phi^2 - 1} \left\{ -1 - 4\phi^2 + \phi^4 + (2 + \phi^{-2})\phi^{2i} + (1 + \phi^2)\phi^{2-2i+2n} \right\} & \text{si } i = j, \\
 \frac{\phi^{-2-i-j}(1 + \phi^2)}{\phi^2 - 1} \left\{ [(1 - i + j) - 6\phi^2 + (1 + i - j)\phi^4 + 2\phi^{2j}] \phi^{2i} + 2\phi^{2n+4} \right\} & \text{si } i > j,
 \end{array} \right. \tag{II.42}$$

et nous remarquons que, pour tout i et j dans $\{2, \dots, n\}$

$$\Upsilon_{ij}^{(i < j)} = \Upsilon_{ji}^{(i > j)}.$$

On conclut que, la matrice $\Upsilon' = \{\Upsilon_{ij}\}_{2 \leq i, j \leq n}$ définie par (II.42) est symétrique.

Il s'ensuit que :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 Tr[(C_1 \Sigma)^2] &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^{n+1} \Upsilon_{ii} = \frac{1}{4} \left[\Upsilon_{11} + \sum_{i=2}^n \Upsilon_{ii} + \Upsilon_{n+1, n+1} \right] \\
 &= \frac{1}{(\phi^2 - 1)^2} \left\{ \frac{n(1 + 3\phi^2 - 5\phi^4 + \phi^6)}{2} + 2\phi^2(\phi^{2n} - 1) \right\}. \tag{II.43}
 \end{aligned}
 }$$

L'algorithme 2 permet alors le calcul des différentes traces de la forme $Tr[(C_1 \Sigma_{n+1})^p]$, pour $p \geq 3$.

Algorithme 2 Calcul de $Tr[\Theta^p]$, $\Theta := (C_1 \Sigma_{n+1})^p$, $p \geq 3$: Les résultats peuvent être simplifiés à partir de calculs symboliques (par exemple : Mathematica ou Matlab).

1. **Initialisations** :
2. n et p de type entier.
3. ϕ de type nombre : $-1 < \phi < 1$.
4. $C_1 \Sigma_{n+1} := \{\Delta_{ij}\}$, $(C_1 \Sigma_{n+1})^2 := \{\Upsilon_{ij}\}$ tels que définis par (II.24) et II.26 respectivement.
5. **Début Algorithme** :
6. **Pour** $t = 3, \dots, p$

$$\Theta_{11} = \theta_{n+1,n+1} := \phi \Upsilon_{11} + \phi^{n-1} \Upsilon_{1,n+1} + (1 + \phi^{-2}) \sum_{m=2}^n \Upsilon_{1m} \phi^m.$$

$$\Theta_{1j}^{j \in [2,n]} = \phi^{j-2} \Upsilon_{11} + \phi^{n-j} \Upsilon_{1,n+1} + [\phi + \phi^{-1}] \phi^j \sum_{m=2}^{j-1} \Upsilon_{1m} \phi^{-m} + 2\phi \Upsilon_{1j} + [\phi + \phi^{-1}] \phi^{-j} \sum_{m=j+1}^n \Upsilon_{1m} \phi^m.$$

$$\Theta_{1,n+1} = \theta_{n+1,1} = \phi^{n-1} \Upsilon_{11} + \phi \Upsilon_{1,n+1} + (1 + \phi^2) \phi^n \sum_{m=2}^n \Upsilon_{1m} \phi^{-m}.$$

$$\Theta_{n+1,j}^{j \in [2,n]} = \phi^{j-2} \Upsilon_{n+1,1} + \phi^{n-j} \Upsilon_{n+1,n+1} + [\phi + \phi^{-1}] \phi^j \sum_{m=2}^{j-1} \Upsilon_{n+1,m} \phi^{-m} + [\phi + \phi^{-1}] \phi^{-j} \sum_{m=j+1}^n \Upsilon_{n+1,m} \phi^m + 2\phi \Upsilon_{n+1,j}.$$

$$\Theta_{i1}^{i \in [2,n]} = \phi \Upsilon_{i1} + \phi^{n-1} \Upsilon_{i,n+1} + (1 + \phi^{-2}) \sum_{m=2}^n \Upsilon_{im} \phi^m$$

$$\Theta_{i,n+1}^{i \in [2,n]} = \phi^{n-1} \Upsilon_{i1} + \phi \Upsilon_{i,n+1} + (1 + \phi^2) \phi^n \sum_{m=2}^n \Upsilon_{im} \phi^{-m}.$$

7. **pour** $(i, j) \in [2, n] \times [2, n]$
 - a. **si** $i < j$ **alors**

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}^{(i < j)} &= \phi^{j-2} \Upsilon_{i1} + \phi^{n-j} \Upsilon_{i,n+1} + (\phi + \phi^{-1}) \phi^j \sum_{m=2}^{i-1} \Upsilon_{im}^{(i \geq m)} \phi^{-m} + (\phi + \phi^{-1}) \phi^{j-i} \Upsilon_{ii} + 2\phi \Upsilon_{ij}^{(i < j)} \\ &\quad + (\phi + \phi^{-1}) \phi^j \sum_{m=i+1}^{j-1} \Upsilon_{im}^{(i < m)} \phi^{-m} + (\phi + \phi^{-1}) \phi^{-j} \sum_{m=j+1}^n \Upsilon_{im}^{(i < m)} \phi^m. \end{aligned}$$

- b. **Sinon si** $i = j$ **alors**

$$\Theta_{ii} = \phi^{j-2} \Upsilon_{i1} + \phi^{n-j} \Upsilon_{i,n+1} + (\phi + \phi^{-1}) \phi^i \sum_{m=2}^{i-1} \Upsilon_{im}^{(i \geq m)} \phi^{-m} + 2\phi \Upsilon_{ii} + (\phi + \phi^{-1}) \phi^{-i} \sum_{m=i+1}^n \Upsilon_{im}^{(i < m)} \phi^m.$$

— **Fin si**

— **Fin si**

8. **Fin pour**
9. $\Theta_{ij}^{(i > j)} = \Theta_{ji}^{(i < j)}$; $\{\Upsilon_{ij}\} = \{\Theta_{ij}\}$.

10. **Fin Pour**

$$11. Tr[(C_1 \Sigma_{n+1})^p] = \left(\frac{1}{2}\right)^p \sum_{i=1}^{n+1} \Theta_{ii} = \left(\frac{1}{2}\right)^p \left[2\Theta_{11} + \sum_{i=2}^n \Theta_{ii} \right].$$

4 BIAIS DU PARAMÈTRE DE RETOUR À LA MOYENNE

A partir des résultats précédents, nous pouvons alors étudier le biais du paramètre de retour à la moyenne. Pour ce faire, reprenons le modèle (II.68) défini par

$$X_{ih} = e^{-\kappa h} X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1-\phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa), \quad (\text{II.44})$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $|\phi| = e^{-\kappa h} < 1$ et $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.

Les estimateurs des moindres carrés ordinaires de ϕ et κ sont respectivement

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \left(\sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^2 \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n X_{ih} X_{i-1} \right), \\ \hat{\kappa} &= -\frac{\ln(\hat{\phi})}{h}. \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

où $\hat{\phi}$ est l'estimateur des moindres carrés ordinaires du paramètre auto-régressif dans un processus AR(1) sans terme constant.

En considérant que les termes d'erreur suivent une loi quelconque, Bao [13, p. 1015-1016] montre que :

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\phi}) &= -\frac{2\phi}{n} + \frac{1}{n^2} \left\{ 4\phi + \frac{2\phi x_0^2}{\sigma_0^2} - \frac{(1+\phi)x_0\gamma_1}{\sigma_0} + \frac{2\gamma_1^2(1+\phi+3\phi^2)(1-\phi^2)}{1-\phi^3} + 2\gamma_2\phi \right\} + o(n^{-2}), \\ \mathbb{EQM}(\hat{\phi}) &= \frac{1-\phi^2}{n} + \frac{1}{n^2} \left\{ 14\phi^2 - 1 - \frac{(1-\phi^2)x_0^2}{\sigma_0^2} - \frac{4\phi(1-\phi^2)^2\gamma_1^2}{1-\phi^3} - \gamma_2(1-\phi^2) \right\} + o(n^{-2}), \end{aligned}$$

où x_0 est fixé, σ_0 , γ_1 et γ_2 représentent respectivement la variance et les coefficients de skewness et d'excès de kurtosis des termes d'erreur.

Appliqués au processus (II.44), $\sigma_0 = \sigma\sqrt{(1-\phi^2)/2\kappa}$ et $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

On déduit alors

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\phi}) &= -\frac{2\phi}{n} + \frac{1}{n^2} \left\{ 4\phi + \frac{4\kappa\phi x_0^2}{(1-\phi^2)\sigma^2} \right\} + o(n^{-2}), \\ \mathbb{EQM}(\hat{\phi}) &= \frac{1-\phi^2}{n} + \frac{1}{n^2} \left\{ 14\phi^2 - 1 - \frac{2\kappa x_0^2}{\sigma^2} \right\} + o(n^{-2}). \end{aligned}$$

De plus, comme la condition initiale x_0 est une variable aléatoire de loi normale d'espérance nulle et de variance $\sigma^2/2\kappa$, x_0 devrait être remplacé par $\mathbb{E}(x_0) = 0$ et x_0^2 par $\mathbb{E}(x_0^2) = \sigma^2/2\kappa$.

On obtient :

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{2\phi}{n} + \frac{1}{n^2} \left\{ 4\phi + \frac{2\phi}{1-\phi^2} \right\} + o(n^{-2}), \quad (\text{II.46})$$

$$\mathbb{EQM}(\hat{\phi}) = \frac{1-\phi^2}{n} + \frac{14\phi^2 - 2}{n^2} + o(n^{-2}), \quad (\text{II.47})$$

$$\text{Var}(\hat{\phi}) = \frac{1-\phi^2}{n} + \frac{2(5\phi^2 - 1)}{n^2} + o(n^{-2}). \quad (\text{II.48})$$

Les deux théorèmes suivants présentent les résultats des nouvelles approximations.

Théorème 4.1 (*Approximations des coefficients de skewness et de kurtosis de $\hat{\phi}$*).

Considérons le modèle défini par l'équation suivante :

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa), \quad (\text{II.49})$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $|\phi| = e^{-\kappa h} < 1$ et $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.

La skewness et l'excès de kurtosis de l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle $\hat{\phi}$ du paramètre ϕ , sont respectivement être approchés par

$$\begin{aligned} \gamma_1(\hat{\phi}) = 6 \left[\frac{(9\phi^4 - 8\phi^2 - 1)(\phi^{2n} - 1)}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{2(\phi^2 - 1)(1 + 2\phi^2 + 2\phi^{2n})}{n} + \frac{48\phi(1 + 2\phi^2)(\phi^{2n} - 1)}{n^{5/2}(\phi^2 - 1)} \right. \\ \left. + \frac{2(17 + 12\phi^2 + 43\phi^{2n})}{n^{1/2}\phi} \right] \left[(1 - \phi^2) + \frac{4(1 + 9\phi^2)(\phi^{2n} - 1)}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{8(1 + 2\phi^2 + 2\phi^{2n})}{n} \right]^{-3/2} \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(\hat{\phi}) = H(\phi, n) \left[n^3(\phi^2 - 1)^3 - 2n^2(\phi^2 - 1)^2(112\phi^{2n} + 5\phi^2 - 1) + 48(1 - \phi^{2n})(1 - 19\phi^4) - 920\phi^{2n+2} \right. \\ \left. - 68\phi^{4n+2} + 4n(\phi^2 - 1)(53\phi^{2n} + 274\phi^{2n+2} + 36\phi^4 + 122\phi^2 + 19) + 988\phi^2 \right]^{-2}, \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

où $H(\phi, n)$ est une fonction du paramètre ϕ et de la taille de l'échantillon n dont l'expression est donnée par l'équation (A.17) en annexe.

Preuve : voir annexe (A.2.1).

Suivant Yu [112, Remark 2.5] et en utilisant les résultats de Bao et Ullah [17, p. 235], on obtient :

Théorème 4.2 (*Approximation du biais de $\hat{\kappa}$*).

Considérons le modèle défini par l'équation suivante :

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa), \quad (\text{II.52})$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $|\phi| = e^{-\kappa h} < 1$ et $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.

L'approximation du biais d'ordre $o(n^{-1}T^{-1})$ de l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle $\hat{\kappa}$ du paramètre κ est donnée par

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} + \frac{7e^{-2\kappa h} - 1 + 5e^{2\kappa h} - 3e^{4\kappa h}}{4Tn(e^{-2\kappa h} - 1)} - \frac{\gamma_1(\hat{\phi})A e^{3\kappa h}}{3Tn^4(e^{-2\kappa h} - 1)} + \frac{\gamma_2(\hat{\phi})B e^{4\kappa h}}{4Tn^3}, \quad (\text{II.53})$$

où $\gamma_1(\hat{\phi})$ et $\gamma_2(\hat{\phi})$ sont respectivement approchés par les équations (II.50) et (II.51) et avec

$$\begin{aligned} A &= [n(1 - e^{-2\kappa h}) + 10e^{-2\kappa h} - 2]^{3/2} [n^2(e^{-2\kappa h} - 1) + 6[n(e^{-2\kappa h} - 1) - 2e^{-2\kappa h} + 3]], \\ B &= [n(e^{-2\kappa h} - 1) - 10e^{-2\kappa h} + 2]^2. \end{aligned}$$

Preuve : voir annexe (A.2.2).

Remarque 4.1 Dans le Théorème 4.2, l'expression de biais (II.53), est obtenue en considérant des approximations du biais et de l'erreur quadratique moyenne d'ordre $O(n^{-2})$ du coefficient $\hat{\phi}$. Lorsque nous la comparons à celle de Yu [112, 2012] donnée par

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} - \frac{2(1 - e^{-2n\kappa h})}{Tn(1 - e^{-2\kappa h})} + o(T^{-1}), \quad (\text{II.54})$$

nous remarquons que le premier terme est le même dans les deux expressions. Cependant, lorsque κ tend vers zéro le biais donné par (II.54) tend vers zéro ce qui n'est pas le cas de celui donné par (II.53). Les effets de la skewness et de la kurtosis sur le biais rentrent en compte à travers les 3e et 4e termes de l'expression (II.53). Ainsi, vue comme une fonction de $\gamma_2(\hat{\phi})$, $\mathbb{B}(\hat{\kappa})$ est une fonction croissante, par conséquent une grande kurtosis fournira un biais élevé. Vue comme une fonction de $\gamma_1(\hat{\phi})$, $\mathbb{B}(\hat{\kappa})$ est une fonction croissante (respectivement décroissante) si $A > 0$ (respectivement $A < 0$).

Pour étudier les conséquences du Théorème 4.2, nous procédons à des simulations de Monte-Carlo. Dans cette perspective, on suppose que κ varie entre 0.1 et 3 et on utilise successivement les paramètres suivants : à $h = 1/252$ fixé, $T = 5, 10, 20, 50$, puis à $T = 50$ fixé, $h = 1/252, 1/52, 1/52$ et enfin, à $n = 756$ ou 1000 fixé, $h = 1/252, 1/52, 1/52$. Les graphiques II.1-II.5 illustrent les résultats.

Pour chaque graphique, la courbe en tiret violet correspond à l'expression du biais

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} + o(T^{-1}), \quad (\text{II.55})$$

la courbe en tiret bleu marine correspond à l'expression du biais

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} - \frac{2(1 - e^{-2n\kappa h})}{Tn(1 - e^{-2\kappa h})} + o(T^{-1}), \quad (\text{II.56})$$

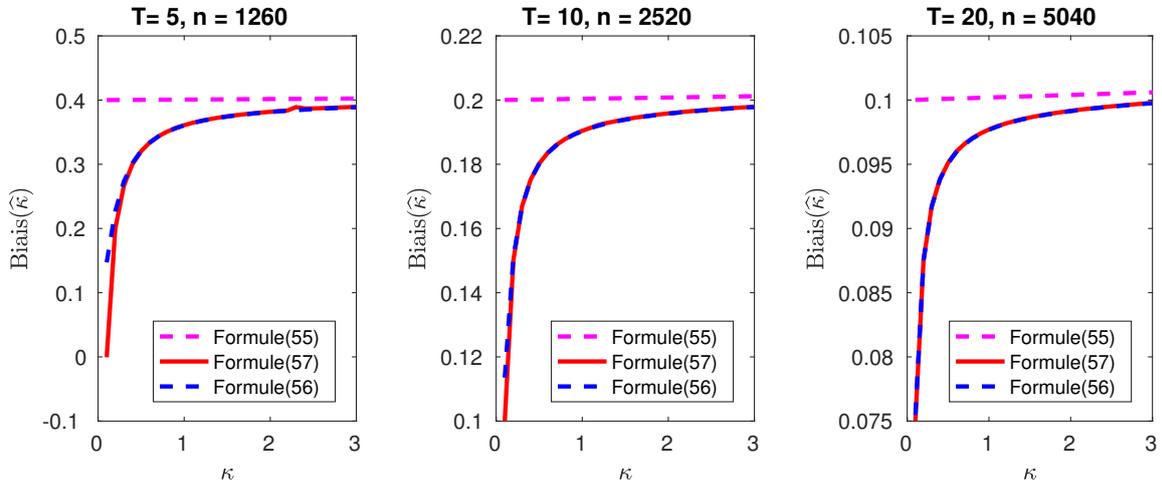
et celle en rouge correspond à l'expression du biais donnée par (II.53) :

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} + \frac{7e^{-2\kappa h} - 1 + 5e^{2\kappa h} - 3e^{4\kappa h}}{4Tn(e^{-2\kappa h} - 1)} - \frac{\gamma_1(\hat{\phi})A e^{3\kappa h}}{3Tn^4(e^{-2\kappa h} - 1)} + \frac{\gamma_2(\hat{\phi})B e^{4\kappa h}}{4Tn^3}. \quad (\text{II.57})$$

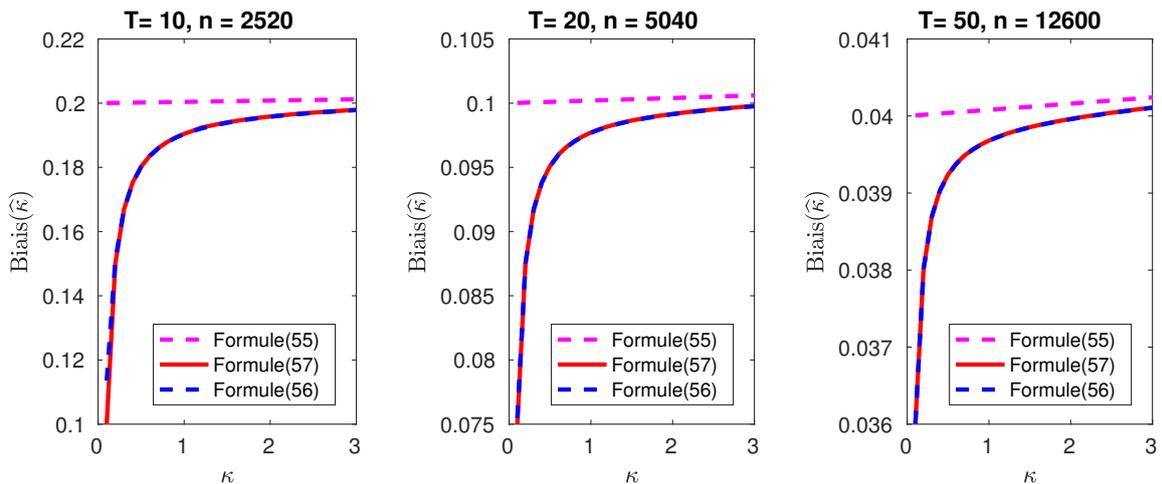
Les graphiques montrent que :

1. Notre approximation et l'expression du biais (II.56) sont des fonctions (non linéaire) croissantes de κ , alors que l'expression donnée par (II.55) semble être linéaire.
2. Le biais est une fonction décroissante de T ; A T fixé, le biais est une fonction croissante de h .
3. Pour des petites valeurs de $T (< 3)$, lorsque κ est proche de zéro, notre approximation peut fournir un résultat négatif.
4. Lorsque T est grand, le biais est faible et on remarque que les trois expressions semblent équivalentes.
5. Pour des petites valeurs de T , par exemple $T = 5$, lorsque κ est proche de 0.1, Notre approximation tend vers 0, l'expression du biais donnée par (II.56) tend vers 0,15 alors que celle du biais donnée par (II.55) est sensiblement égale à 0.4.

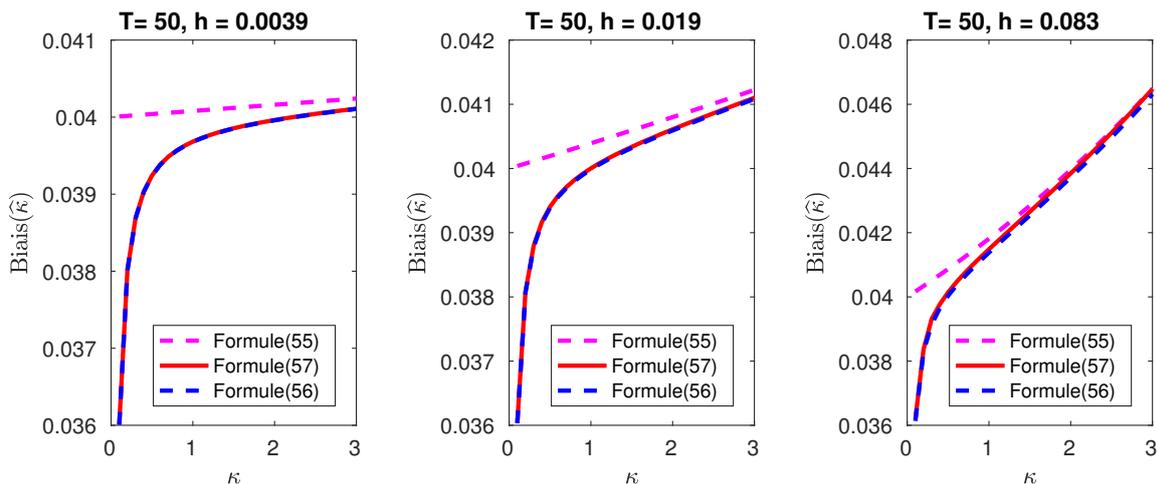
6. Notre correction de biais semble concrètement meilleur à celle donnée (II.55) dans les cas de figures, suggérant que prendre deux termes supplémentaires, dans le développement de Taylor du biais de $\hat{\kappa}$ dans un processus Ornstein-Uhlenbeck, permet clairement d'améliorer l'approximation de celui-ci.



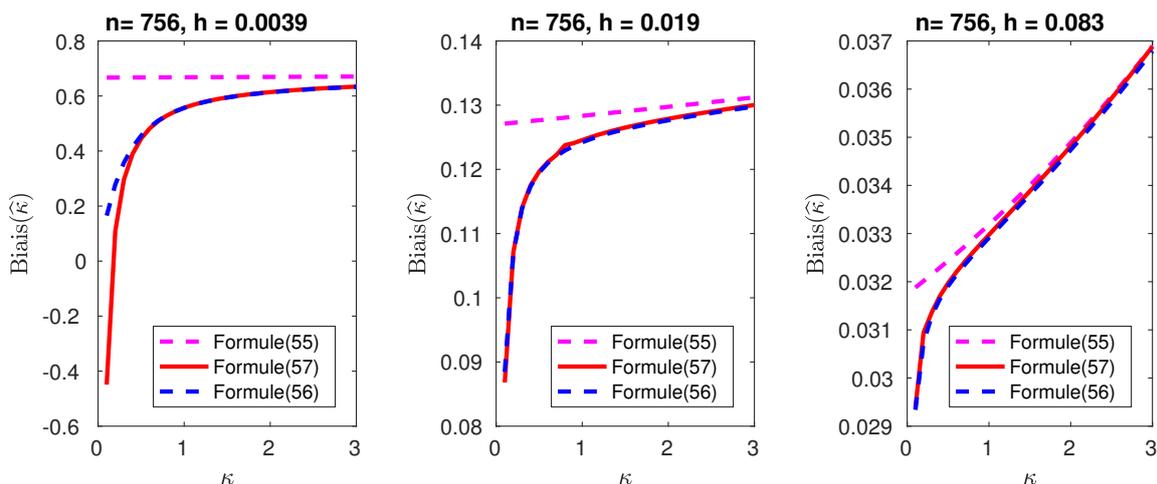
Graphique II.1 – Biais comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$) avec $T = 3, 7, 10$, correspondant respectivement à $n = 1260, 2520, 5040$. La courbe en tiret (violet) correspond au biais donné par l'expression (II.55). La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donné par l'expression (II.56) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.57).



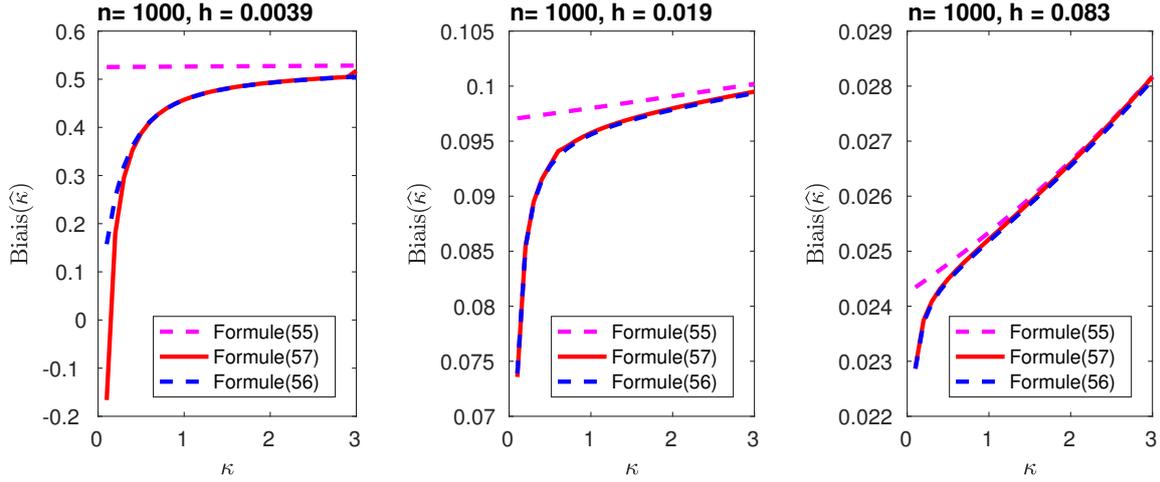
Graphique II.2 – Biais comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$) avec $T = 10, 20, 50$, correspondant respectivement à $n = 2520, 5040, 12600$. La courbe en tiret (violet) correspond au biais donné par l'expression (II.55). La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donné par l'expression (II.56) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.57).



Graphique II.3 – Biais comme fonction de κ pour une période de temps fixe $T = 50$, avec des fréquences journalières ($h = 1/252$), hebdomadaires ($h = 1/52$) et mensuelles ($h = 1/12$). La courbe en tiret (violet) correspond au biais donné par l’expression (II.55). La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donné par l’expression (II.56) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l’expression (II.57).



Graphique II.4 – Biais comme fonction de κ avec un échantillon fixe de taille $n = 756$ observations, avec des fréquences journalières ($h = 1/252$), hebdomadaires ($h = 1/52$) et mensuelles ($h = 1/12$). La courbe en tiret (violet) correspond au biais donné par l’expression (II.55). La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donné par l’expression (II.56) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l’expression (II.57).



Graphique II.5 – Biais comme fonction de κ avec un échantillon fixe de taille $n = 1000$ observations, avec des fréquences journalières ($h = 1/252$), hebdomadaires ($h = 1/52$) et mensuelles ($h = 1/12$). La courbe en tiret (violet) correspond au biais donné par l'expression (II.55). La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donné par l'expression (II.56) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.57).

Pour aller plus loin, nous déterminons une approximation d'ordre plus élevé du biais dans le cadre du modèle en temps discret exact.

Théorème 4.3 (Biais et erreur quadratique moyenne de $\hat{\kappa}$).

Considérons le modèle défini par l'équation suivante :

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa), \quad (\text{II.58})$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $|\phi| = e^{-\kappa h} < 1$ et $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.

L'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle de ϕ est défini par :

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{ih} X_{(i-1)h}}{\sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^2} = \frac{U_n}{V_n}, \quad (\text{II.59})$$

où $U_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{ih} X_{(i-1)h}$ et $V_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{(i-1)h}^2$.

Considérons une expansion d'ordre $O(n^{-5/2})$ de $\hat{\kappa} - \kappa$:

$$\hat{\kappa} - \kappa = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2} + O_p(n^{-5/2}),$$

où

$$\begin{aligned} a_{-1/2} &= -\frac{U_n - \phi V_n}{\phi h}, & a_{-1} &= \frac{U_n^2 - \phi^2 V_n^2}{2\phi^2 h} + a_{-1/2}, \\ a_{-3/2} &= -\frac{U_n^3 - \phi^3 V_n^3}{3\phi^3 h} + \frac{U_n^2 - \phi^2 V_n^2}{\phi^2 h} + a_{-1/2}, \\ a_{-2} &= -\frac{U_n - \phi V_n}{\phi h} + \frac{3(U_n^2 - \phi^2 V_n^2)}{2\phi^2 h} - \frac{U_n^3 - \phi^3 V_n^3}{\phi^3 h} + \frac{U_n^4 - \phi^4 V_n^4}{4\phi^4 h}. \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

Le biais d'ordre $O(n^{-5/2})$ de l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle $\hat{\kappa}$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\kappa}) &= \mathbb{E}(a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2}) \\ &= \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} - \frac{(96 + 256 e^{-2\kappa h} + 328 e^{-4\kappa h}) e^{-2(n-2)\kappa h} + e^{-2\kappa h} - 15 + 3 e^{2\kappa h} + 3 e^{4\kappa h}}{4Tn(e^{-2\kappa h} - 1)} \\ &\quad + \frac{(24 + 484 e^{-2\kappa h} + 940 e^{-4\kappa h} + 472 e^{-6\kappa h}) e^{-2(n-2)\kappa h} + 27 e^{-4\kappa h} + 230 e^{-2\kappa h} + 488 + 206 e^{2\kappa h} + 9 e^{4\kappa h}}{2Tn^2(e^{-2\kappa h} - 1)^2} \\ &\quad - \frac{3[(1 + 45 e^{-2\kappa h} + 171 e^{-4\kappa h} + 167 e^{-6\kappa h} + 48 e^{-8\kappa h}) e^{-2(n-2)\kappa h} + 12(1 + e^{-2\kappa h}) e^{-4n\kappa h}]}{Tn^3(e^{-2\kappa h} - 1)^3} \\ &\quad + \frac{3[48 e^{-4\kappa h} + 179 e^{-2\kappa h} + 183 + 45 e^{2\kappa h} + e^{4\kappa h}]}{Tn^3(e^{-2\kappa h} - 1)^3}, \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

et son erreur quadratique moyenne d'ordre $O(n^{-3})$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathbb{EQM}(\hat{\kappa}) &= \mathbb{E}(a_{-1/2}^2 + 2a_{-1/2}a_{-1}) + \mathbb{E}(a_{-1}^2 + 2a_{-1/2}a_{-3/2}) \\ &= \frac{e^{2\kappa h} - 1}{Th} + \frac{32(19 e^{-2\kappa h} + 9) e^{-2(n-2)\kappa h} + 19 + 18 e^{2\kappa h} + 11 e^{4\kappa h}}{4T^2} - \frac{1107 + 402 e^{2\kappa h} + 11 e^{4\kappa h}}{T^2 n^2 (e^{-2\kappa h} - 1)^2} \\ &\quad - \frac{(88 + 1280 e^{-2\kappa h} + 1264 e^{-4\kappa h}) e^{-2(n-2)\kappa h} + 77 e^{-2\kappa h} + 719 + 571 e^{2\kappa h} + 33 e^{4\kappa h}}{2T^2 n (e^{-2\kappa h} - 1)} \\ &\quad + \frac{(11 + 402 e^{-2\kappa h} + 1035 e^{-4\kappa h} + 424 e^{-6\kappa h}) e^{-2(n-2)\kappa h} + 72 e^{-4n\kappa h} - 424 e^{-2\kappa h}}{T^2 n^2 (e^{-2\kappa h} - 1)^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

Preuve : voir annexe (A.2.3).

5 SIMULATIONS DE MONTE-CARLO

Nous effectuons des simulations de Monte Carlo pour démontrer les performances de nos expressions de biais et d'erreur quadratique moyenne. Pour ce faire nous simulons le modèle en temps discret exact

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad (\text{II.63})$$

où $\phi = e^{-\kappa h}$, avec les paramètres suivants : κ varie entre 0 et 4, $\sigma = 0.01$, $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ ou $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On utilise différentes valeurs de $T = 50, 100, 200$ et $h = 1/252, 1/52, 1/12$.

5.1 Le biais

Dans les graphiques :

1. la courbe en tiret rose correspond au vrai biais (obtenu par simulation).
2. La courbe en bleu correspond à l'expression du biais :

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} - \frac{2(1 - e^{-2n\kappa h})}{Tn(1 - e^{-2\kappa h})} + o(T^{-1}). \quad (\text{II.64})$$

3. La courbe en rouge correspond à notre expression :

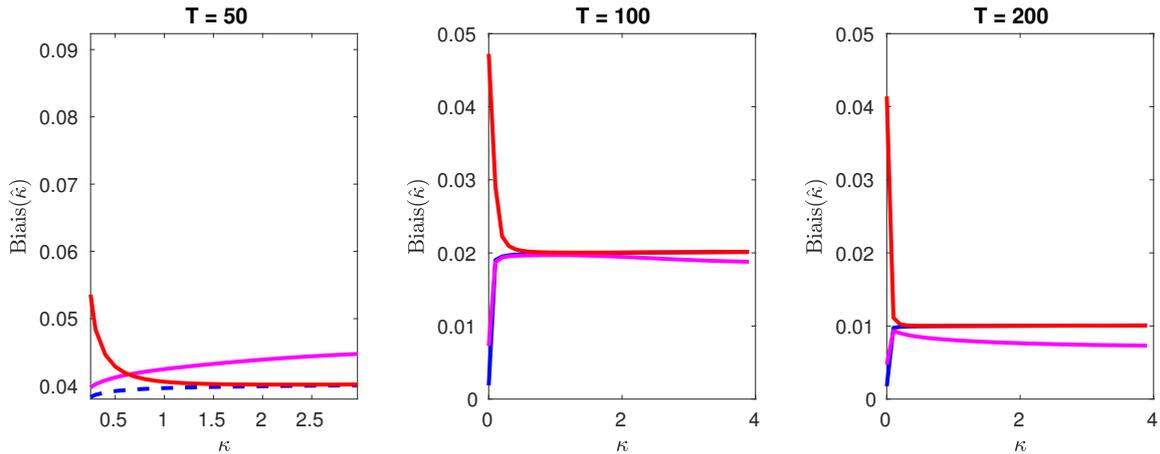
$$\begin{aligned}
 \mathbb{B}(\hat{\kappa}) = & \frac{3 + e^{2\kappa h}}{2T} - \frac{(96 + 256\phi^2 + 328\phi^4) e^{-2(n-2)\kappa h} + e^{-2\kappa h} - 15 + 3 e^{2\kappa h} + 3 e^{4\kappa h}}{4Tn(e^{-2\kappa h} - 1)} \\
 & + \frac{(24 + 484\phi^2 + 940\phi^4 + 472\phi^6) e^{-2(n-2)\kappa h} + 27 e^{-4\kappa h} + 230 e^{-2\kappa h} + 488}{2Tn^2(e^{-2\kappa h} - 1)^2} \\
 & - \frac{3[(1 + 45\phi^2 + 171\phi^4 + 167\phi^6 + 48\phi^8) e^{-2(n-2)\kappa h} + 12(1 + \phi^2) e^{-4n\kappa h}]}{Tn^3(e^{-2\kappa h} - 1)^3} \\
 & + \frac{206 e^{2\kappa h} + 9 e^{4\kappa h}}{2Tn^2(e^{-2\kappa h} - 1)^2} + \frac{3[48 e^{-4\kappa h} + 179 e^{-2\kappa h} + 183 + 45 e^{2\kappa h} + e^{4\kappa h}]}{Tn^3(e^{-2\kappa h} - 1)^3}. \quad (\text{II.65})
 \end{aligned}$$

On distingue plusieurs cas de figures.

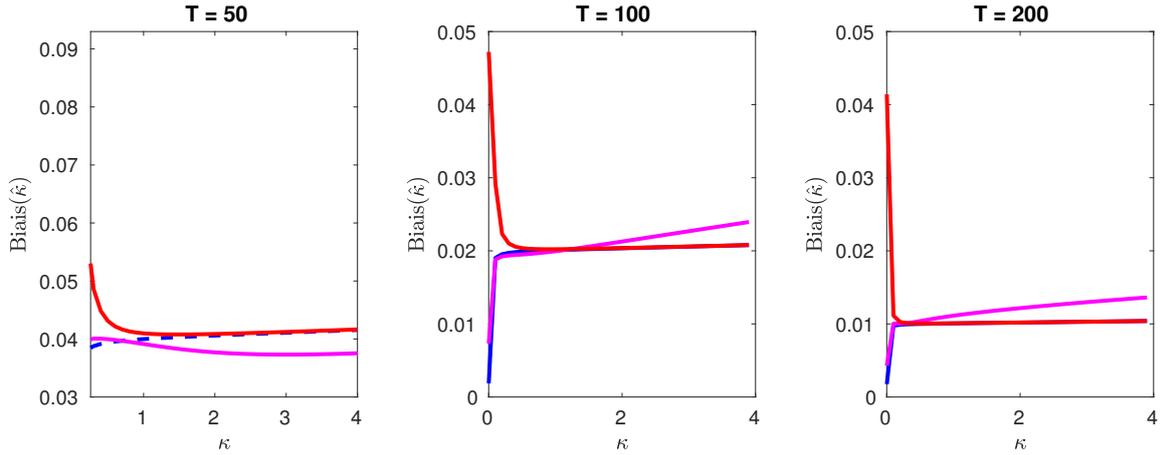
5.1.1 $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Les graphiques II.6 - II.8 rendent compte des résultats de 10000 simulations pour caractériser le biais de l'estimateur $\hat{\kappa}$.

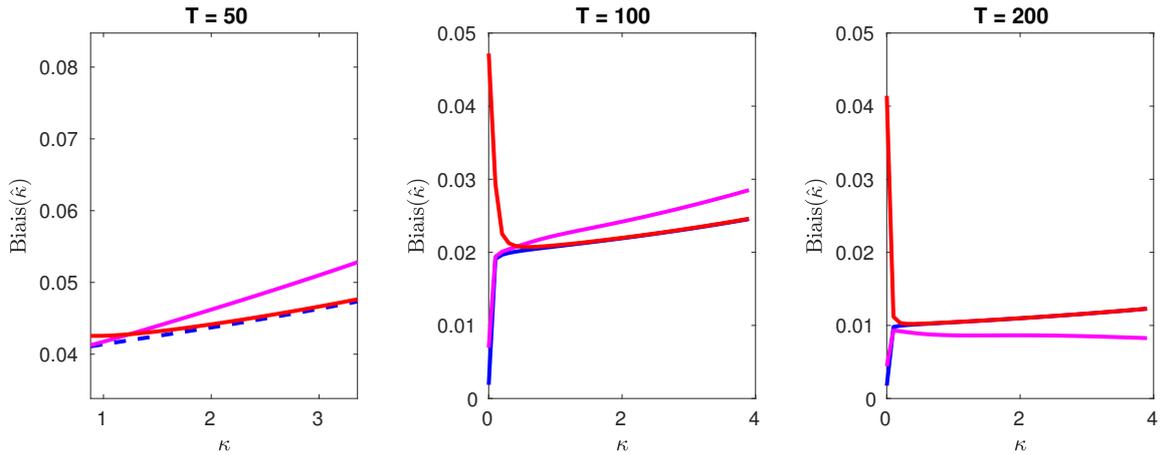
Nous observons tout d'abord que notre expression de biais capture correctement la courbure du vrai biais dans différents scénarios. On observe également que notre expression sur-estime systématiquement le biais de $\hat{\kappa}$ pour des petites valeurs de κ ($\in]0, 0.5]$) et cette surestimation est beaucoup plus importante pour des petites valeurs de T , lorsque κ est très proche de zéro. Bien que dépendant de h et T , le résultat du biais semble moins sensible à h qu'à T . En effet, une modification de h tout seul n'a aucun impact significatif sur le biais par rapport à une augmentation de T qui conduit à une baisse significative sur ce dernier. On note aussi que, tirer les termes d'erreur selon une loi normale ou non affecte le biais.



Graphique II.6 – Biais comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l'expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.65).



Graphique II.7 – Biais comme fonction de κ pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l’expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l’expression (II.65).

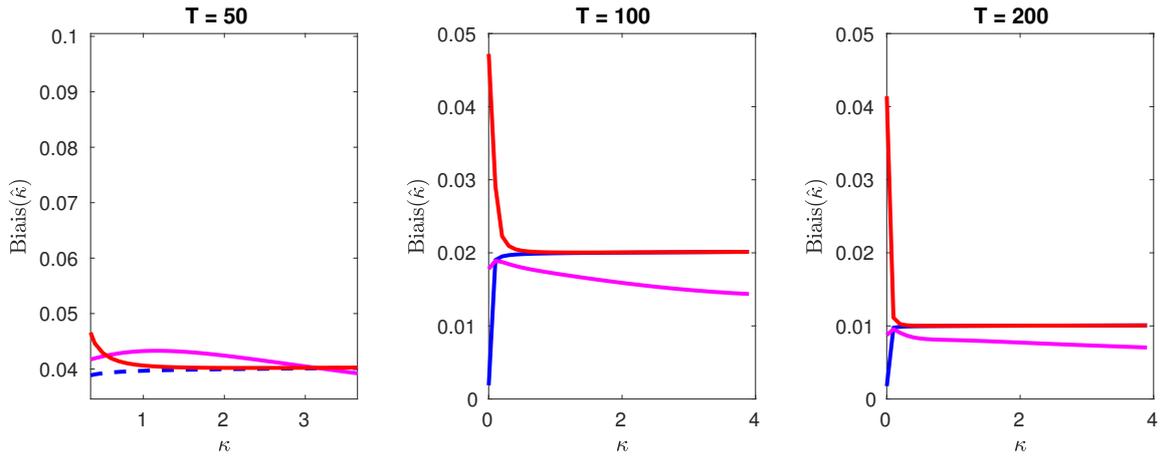


Graphique II.8 – Biais comme fonction de κ pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l’expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l’expression (II.65).

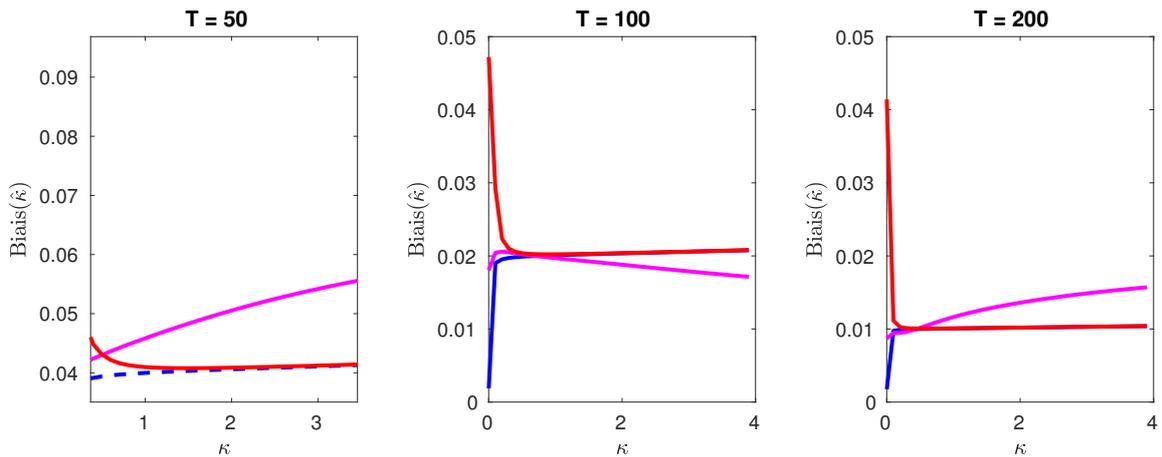
5.1.2 $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Les graphiques II.9 - II.11 rendent compte des résultats de 10000 simulations pour caractériser le biais de l’estimateur $\hat{\kappa}$.

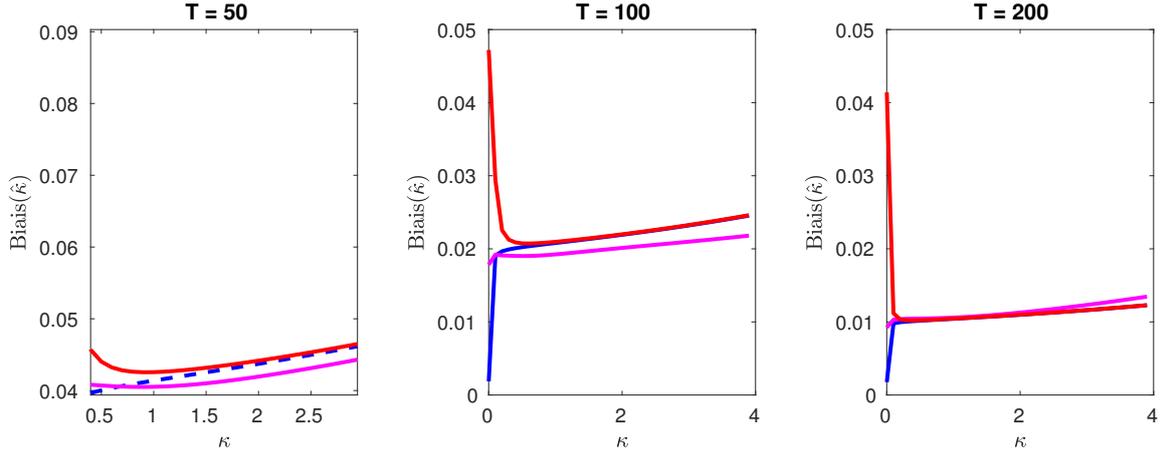
En plus des caractéristiques de la sous section précédentes, nous notons également que la condition initiale affecte biais de κ . En effet, le vrai biais semble linéaire lorsque $x_0 = 0$ alors que lorsque $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ nous avons une courbure plus prononcée.



Graphique II.9 – Biais comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l'expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.65).



Graphique II.10 – Biais comme fonction de κ pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l'expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.65).



Graphique II.11 – Biais comme fonction de κ pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond au vrai biais, celui obtenu par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond au biais donnée par l'expression (II.64) et la ligne continue (rouge) au biais donnée par l'expression (II.65).

5.2 L'erreur quadratique moyenne

Dans les graphiques :

1. La courbe en trait rose correspond à l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\kappa}$ obtenu par simulation.
2. La courbe en tiret bleu correspond à l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\kappa}$ donnée par

$$\text{EQM}(\hat{\kappa}) = \mathbb{E}(a_{-1/2}^2) = \frac{e^{2\kappa h} - 1}{Th}. \quad (\text{II.66})$$

3. La courbe en trait rouge correspond à celle donnée par

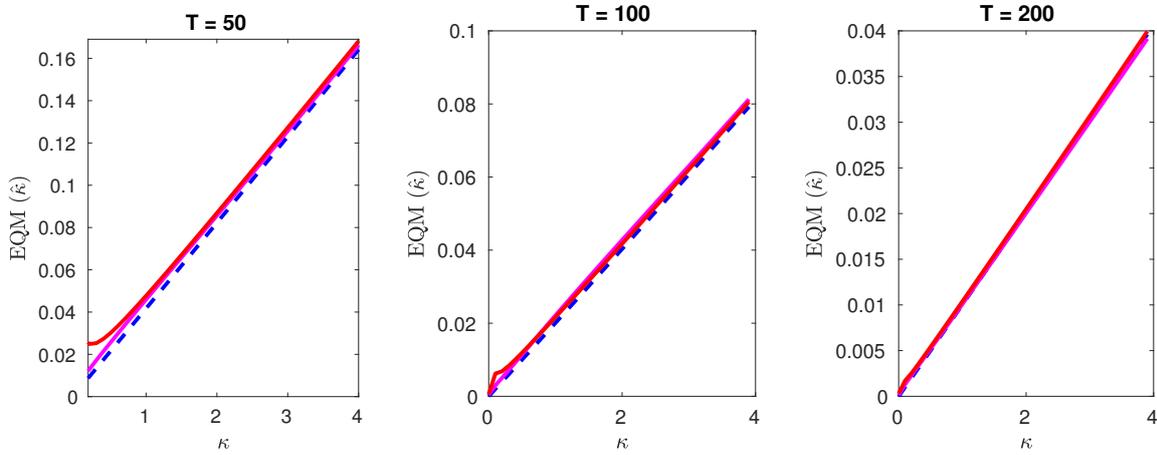
$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\kappa}) = & \frac{e^{2\kappa h} - 1}{Th} + \frac{32(19\phi^2 + 9)e^{-2(n-2)\kappa h} + 19 + 18e^{2\kappa h} + 11e^{4\kappa h}}{4T^2} - \frac{1107 + 402e^{2\kappa h} + 11e^{4\kappa h}}{T^2 n^2 (e^{-2\kappa h} - 1)^2} \\ & - \frac{(88 + 1280\phi^2 + 1264\phi^4)e^{-2(n-2)\kappa h} + 77e^{-2\kappa h} + 719 + 571e^{2\kappa h} + 33e^{4\kappa h}}{2T^2 n (e^{-2\kappa h} - 1)} \\ & + \frac{(11 + 402\phi^2 + 1035\phi^4 + 424\phi^6)e^{-2(n-2)\kappa h} + 72e^{-4n\kappa h} - 424e^{-2\kappa h}}{T^2 n^2 (e^{-2\kappa h} - 1)^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

On distingue également plusieurs cas de figures.

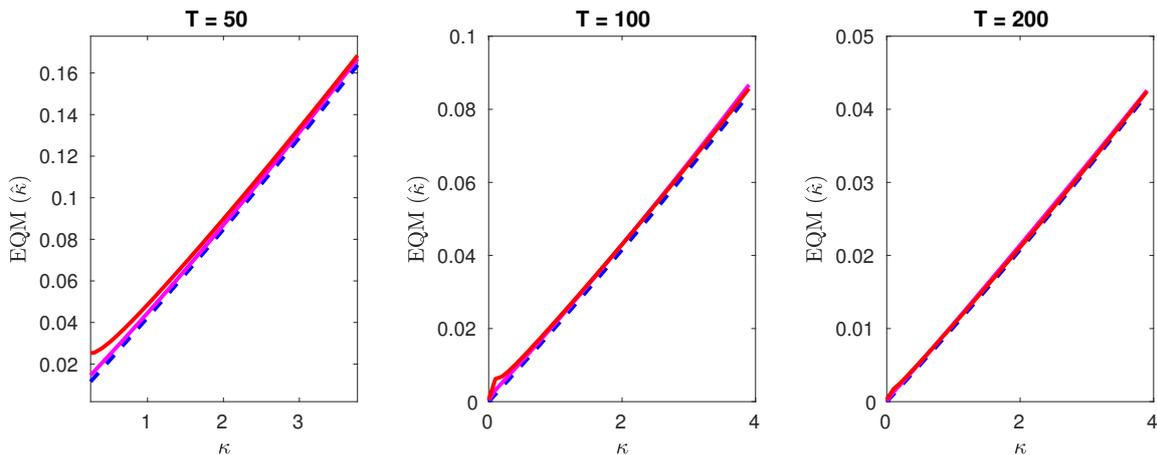
5.2.1 $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Les graphiques indiquent que l'expression de l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\kappa}$ que nous proposons conduit à une bonne approximation de la vraie erreur quadratique moyenne en ce sens qu'elle reproduit la courbure cette dernière et en a les mêmes caractéristiques. cette erreur quadratique moyenne est une fonction décroissante de T et croissante de h . Nous observons une

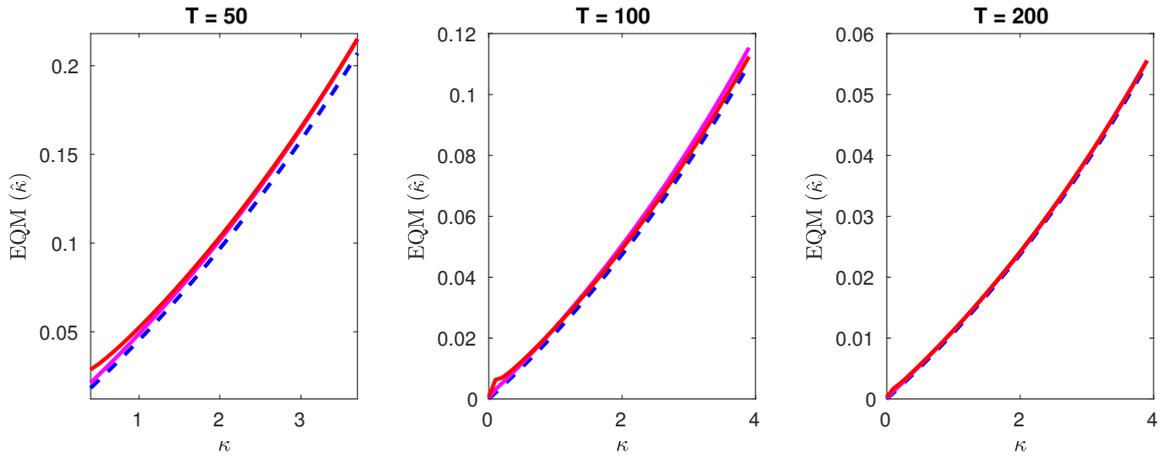
surestimation de l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\kappa}$ dans tous les scénarios, et cette surestimation est plus prononcée pour de très petites valeurs κ lorsque T est petit. Pour de très grandes valeurs de T , on observe que toutes erreurs quadratiques moyennes sont équivalentes.



Graphique II.12 – Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.67).



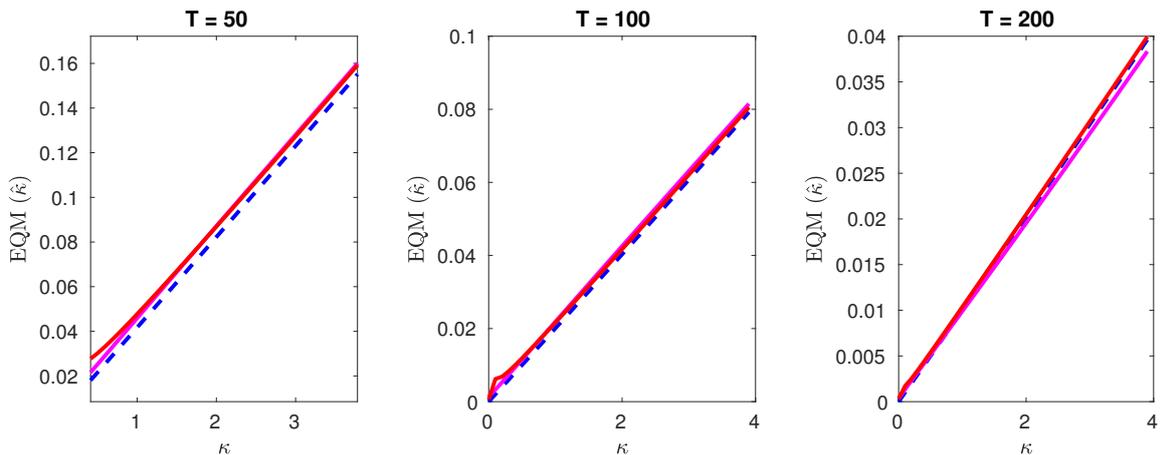
Graphique II.13 – Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.67).



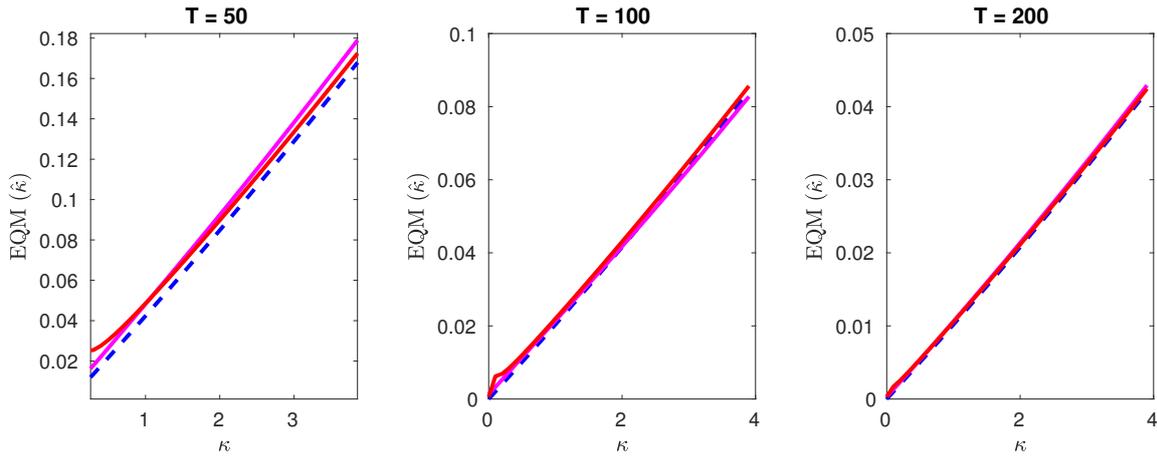
Graphique II.14 – Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$), avec $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa)$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.67).

5.2.2 $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$

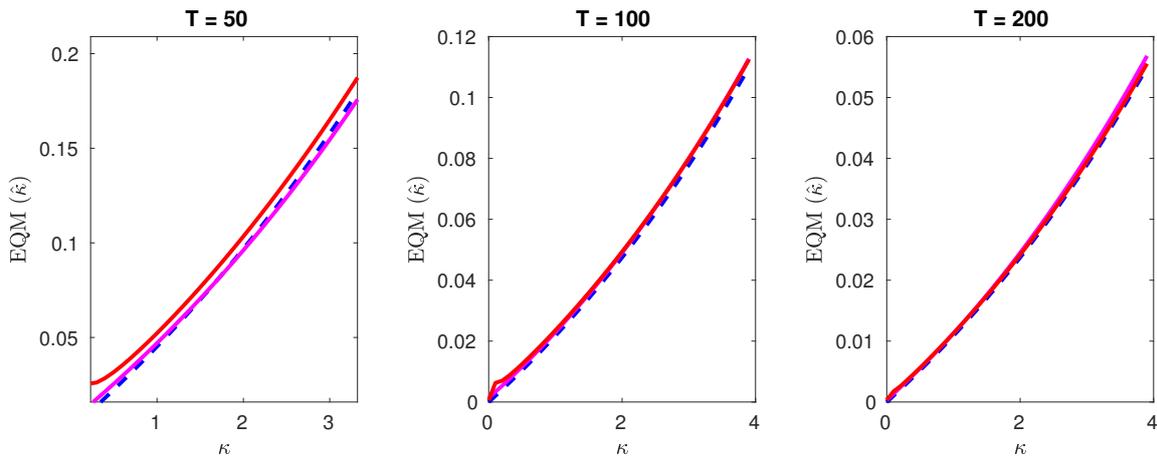
Les graphiques II.15 - II.17 rendent compte des résultats de 10000 simulations pour caractériser l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur $\hat{\kappa}$.



Graphique II.15 – Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences journalières ($h = 1/252$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (II.67).



Graphique II.16 – Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences hebdomadaires ($h = 1/52$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l’erreur quadratique moyenne donnée par l’expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l’erreur quadratique moyenne donnée par l’expression (II.67).



Graphique II.17 – Erreur quadratique moyenne comme fonction de κ pour des fréquences mensuelles ($h = 1/12$), avec $x_0 = 0$ et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les trois graphes correspondent respectivement à $T = 50, 100, 200$. La courbe en tiret (rose) correspond à vraie erreur quadratique moyenne, celle obtenue par simulation du modèle discret exact. La courbe en tiret (bleu) correspond à l’erreur quadratique moyenne donnée par l’expression (II.66) et la ligne continue (rouge) à l’erreur quadratique moyenne donnée par l’expression (II.67).

En plus des caractéristiques de la sous section précédentes, nous notons également que l’erreur quadratique moyenne est insensible au changement de condition initiale.

6 SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Dans ce chapitre,

- En utilisant les résultats donnés par l'équation (II.9), nous avons présenté de nouvelles expressions pour l'approximation des coefficients de skewness et d'excès de kurtosis du coefficient ϕ du modèle

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad x_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa), \quad (\text{II.68})$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $|\phi| = e^{-\kappa h} < 1$ et $\varepsilon_i \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$.

Ces résultats nécessitent l'évaluation des espérances des termes $\xi_{-s/2}$ pour $s = 0, 1, 2$ avec l'aide de certains résultats sur les traces des matrices produits. Dans certains cas, ces espérances sont difficiles à évaluer, il faut le faire numériquement. Pour obtenir des expressions explicites, nous avons développé deux algorithmes de détermination par récurrence des traces du type $Tr[(C_2 \Sigma)^p]$ et $Tr[(C_1 \Sigma)^p]$, pour tout $p \geq 3$, où $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}$ de taille $(n+1) \times (n+1)$ avec $\sigma_{ij} = \phi^{|i-j|}$ pour $i, j = 1, 2, \dots, n+1$, $C_1 = \{c_{1ij}\}$ est une matrice $(n+1) \times (n+1)$ avec $c_{1i,i+1} = 1/2$ si $1 \leq i \leq n$, $c_{1i,i-1} = 1/2$ si $2 \leq i \leq n+1$ et 0 ailleurs, $C_2 = \{c_{2i,j}\}$ est une matrice $(n+1) \times (n+1)$ avec $c_{2ij} = 1$ pour $i = j = 1, 2, \dots, n$ et 0 ailleurs. En utilisant ces algorithmes, nous avons pu obtenir une expression explicite

pour $\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^s (X^t C_j X)\right]$, avec $s = 6$, $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ et les C_j sont des matrices symétriques telles que $C_1 = C_2 = C_3$, $C_4 = C_5 = C_6$ et $C_1 \neq C_4$.

- Nous avons aussi proposé deux nouvelles expressions du biais et une expression de l'erreur quadratique moyenne du paramètre de retour à la moyenne dans un processus Ornstein-Uhlenbeck stationnaire avec une moyenne nulle. La première expression est obtenue par une simple expansion de Taylor de $\hat{\kappa}$ d'ordre $O(n^{-2})$ qui suggère la connaissance dans des coefficients de skewness et d'excès de kurtosis donnés par le Théorème 4.1. La seconde est basée sur la technique de Bao [15, 2007] et ressemble à celle de Yu [112, 2012]. Une analyse de l'erreur quadratique moyenne indique que des expansions d'ordre plus élevé semblent apporter peu pour corriger le biais. Cependant, on observe un gain concernant l'efficacité. Un exercice de simulation confirme bien que ces formules sont satisfaisantes au sens où elle rétablissent la courbure du vrai biais et a des caractéristiques équivalentes à ce dernier. Cependant, lorsque T est petit et κ est proche de zéro, ce qui correspond au cas de racine presque unitaire, nos simulations révèlent que nos formules n'approchent pas correctement le vrai biais.

EXPANSION STOCHASTIQUE D'ORDRE ÉLEVÉ

Dans ce chapitre nous généralisons les concepts du chapitre 2 à l'étude des processus auto-régressif AR(1) et moyenne mobile MA(1). Nous réexaminons l'approche de Bao et Ullah [15, 16, 17], en mettant en évidence l'impact d'une expansion stochastique de la forme

$$\hat{\beta} - \beta_0 = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2} + O_p(n^{-5/2}), \quad (\text{III.1})$$

sur le biais et l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans un processus AR(1) et de l'estimateur du quasi maximum de vraisemblance dans un processus MA(1). La méthode utiliser consiste à évaluer explicitement toutes les espérances et d'en donner des expressions analytiques exactes.

1 INTRODUCTION

Reprenons la classe des M-estimateurs définie par :

$$\Psi_n(\hat{\beta}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n q_i(\hat{\beta}) = 0, \quad (\text{III.2})$$

où $q_i(\beta) = q(Z_i; \beta)$ est une fonction des variables $Z_i, i = 1, \dots, n$, et du vecteur des paramètres $\beta \in \mathbb{R}^p$ de vraie valeur β_0 tel que $\mathbb{E}[\Psi_n(\beta)] = 0$ si et seulement si¹ $\beta = \beta_0$, où β_0 désigne la

1. La condition $\mathbb{E}[\Psi_n(\beta_0)] = 0$, n'est ni nécessaire, ni vrai en général lorsqu'on cherche à obtenir des résultats d'ordre élevé basés sur la condition des moments (III.2). Elle est nécessaire pour assurer l'efficacité asymptotique et non la convergence en probabilité [111, p. 180].

vrai valeur du paramètre β .

Dans le prolongement de l'approche de Bao et Ullah [15, 16, 17], il est possible d'obtenir des approximations stochastiques d'ordre élevé de $\hat{\beta} - \beta_0$, en utilisant une expansion de type Nagar [71, 1959] de l'inverse du gradient de la condition des moments (III.2) et de calculer le biais et l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\beta}$. Cela nécessite parfois d'évaluer l'espérance d'un produit de deux, trois ou quatre formes quadratiques.

2 EXPANSION STOCHASTIQUE D'ORDRE ÉLEVÉ

Dans cette section, nous mettons l'accent sur des modèles non linéaires à un seul paramètre ($p = 1$).

Notations et hypothèses

En reprenant les notations de Rilstone et al. [88] et de Bao et Ullah [15, 16], $\Psi_n = \Psi_n(\beta_0)$ (on supprime l'argument de la fonction lorsque celle-ci est évaluée en β_0), $H_i = \nabla^i \Psi_n$, $Q = [\mathbb{E}(H_1)]^{-1}$ et $V_i = H_i - \mathbb{E}(H_i)$, $i \in \mathbb{N}$, \otimes représente le produit de Kronecker. Pour toute matrice $M(\beta)$, $\nabla^s M(\beta)$ désigne la matrice des dérivées partielles d'ordre s de $M(\beta)$ par rapport à β et $\|A\|$ la norme usuelle $\text{Tr}[AA^t]^{1/2}$.

Pour l'estimateur $\hat{\beta} = \arg\{\Psi_n(\beta) = 0\}$, on supposera les conditions usuelles de régularités suivantes [88, p. 374] :

1. Pour tout s , $\nabla^s q_i(\beta)$ existe pour β dans un voisinage de β_0 et $\mathbb{E}(\|\nabla^s q_i(\beta_0)\|^2) < \infty$,
2. Pour β dans un voisinage de β_0 , $[\nabla \Psi_n(\beta)]^{-1} = O_p(1)$,
3. $\|\nabla^s q_i(\beta) - \nabla^s q_i(\beta_0)\| \leq \|\beta - \beta_0\| T_i$ for β dans un voisinage de β_0 , où $\mathbb{E}(|T_i|) < C < \infty$ pour une constante positive C .

Expansion de type Nagar [71, 1959] sur le gradient $[\nabla \Psi_n]^{-1}$:

L'expansion utilisée est de la forme :

$$\begin{aligned}
 [\nabla \Psi_n]^{-1} &= (Q^{-1} + V_1)^{-1} = (I + QV_1)^{-1}Q & \text{(III.3)} \\
 &= Q + \begin{cases} + \varepsilon_{-1/2} \\ - QV_1Q + \varepsilon_{-1} \\ - QV_1Q + QV_1QV_1Q + \varepsilon_{-3/2} \\ - QV_1Q + QV_1QV_1Q - QV_1QV_1QV_1Q + \varepsilon_{-2} \\ - QV_1Q + QV_1QV_1Q - QV_1QV_1QV_1Q + QV_1QV_1QV_1QV_1Q + \varepsilon_{-5/2}, \end{cases}
 \end{aligned}$$

et dépend du degré de précision nécessaire. $V_1 = O_p(n^{-1/2})$ et $\varepsilon_{-s/2} = O_p(n^{-s/2})$, $s = 1, \dots, 5$.

Supposons que nous utilisons une expansion infinie en série de Taylor pour $\hat{\beta} - \beta_0$ et regroupons les termes selon l'ordre de grandeur en probabilité. L'expansion stochastique serait de la

forme

$$\begin{aligned}\hat{\beta} - \beta_0 &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j/2} \\ &= a_{-1/2} + a_{-1} + \cdots + a_{-q/2} + \xi^*,\end{aligned}\tag{III.4}$$

où $\xi^* = O_p(n^{-(q/2)-s})$, $s > 0$, et l'expression pour $a_{-j/2}$ est d'ordre $O_p(n^{-j/2})$ comprenant des sommes et des produits de moyennes d'échantillon. Maintenant, si on approche l'erreur d'estimation $(\hat{\beta} - \beta_0)$ de la somme tronquée $S = a_{-1/2} + \cdots + a_{-q/2}$ des q premiers termes dans l'expansion et négligeons les termes restants, la différence entre l'erreur d'estimation et la somme tronquée est d'ordre $O_p(n^{-q/2})$. Les propriétés de la somme tronquée S fournissent des informations utiles sur les propriétés de $\hat{\beta}$ à condition que n soit suffisamment grand pour la précision de l'approximation. Nous pouvons énoncer le Théorème suivant :

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses 1-3, il est possible d'obtenir une expansion de $\hat{\beta} - \beta_0$ d'ordre $O(n^{-5/2})$, en développant en série de Taylor en probabilité $\Psi_n(\hat{\beta}) = 0$ dans un voisinage de β_0 . Cette approximation stochastique de $\hat{\beta}$ est de la forme [16, p. 589]*

$$\hat{\beta} - \beta_0 = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2} + O_p(n^{-5/2}),\tag{III.5}$$

où les $a_{-s/2}$ représentent les termes d'ordre $O_p(n^{-s/2})$ pour $s = 1, 2, 3, 4, 5$, définis par

$$\begin{aligned}a_{-1/2} &= -Q\Psi_n, & a_{-1} &= -QV_1a_{-1/2} - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}^2, \\ a_{-3/2} &= -QV_1a_{-1} - \frac{1}{2}QV_2a_{-1/2}^2 - Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}a_{-1} - \frac{1}{6}Q\mathbb{E}(H_3)a_{-1/2}^3, \\ a_{-2} &= -QV_1a_{-3/2} - QV_2a_{-1/2}a_{-1} - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_2)(2a_{-1/2}a_{-3/2} + a_{-1}^2) - \frac{1}{6}QV_3a_{-1/2}^3 \\ &\quad - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_3)a_{-1/2}^2a_{-1} - \frac{1}{24}Q\mathbb{E}(H_4)a_{-1/2}^4.\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2.1 : En réalisant des expansions en série de Taylor du 1er, 2e, 3e, 4e et 5e ordre de $\Psi_n(\hat{\beta}) = 0$, on obtient respectivement :

$$\begin{aligned}0 &= \Psi_n + \nabla\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0] + \varepsilon_{-1}, \\ 0 &= \Psi_n + \nabla\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0] + \frac{1}{2}\nabla^2\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0]^2 + \varepsilon_{-3/2}, \\ 0 &= \Psi_n + \nabla\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0] + \frac{1}{2}\nabla^2\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0]^2 + \frac{1}{6}\nabla^3\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0]^3 + \varepsilon_{-2}, \\ 0 &= \Psi_n + \nabla\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0] + \frac{1}{2}\nabla^2\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0]^2 + \frac{1}{6}\nabla^3\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0]^3 + \frac{1}{24}\nabla^4\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0]^4 + \varepsilon_{-5/2}.\end{aligned}$$

En multipliant par $-\nabla\Psi_n^{-1} = O_p(1)$, cela nous conduit à :

$$\hat{\beta} - \beta_0 = -\nabla\Psi_n^{-1}\Psi_n + O_p(n^{-1}),\tag{III.6}$$

$$\hat{\beta} - \beta_0 = -\nabla\Psi_n^{-1}\Psi_n - \frac{1}{2}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^2\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0]^2 + O_p(n^{-3/2}),\tag{III.7}$$

$$\hat{\beta} - \beta_0 = -\nabla\Psi_n^{-1}\Psi_n - \frac{1}{2}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^2\Psi_n(\hat{\beta} - \beta_0)^2 - \frac{1}{6}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^3\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0]^3 + O_p(n^{-2}),\tag{III.8}$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta} - \beta_0 &= -\nabla\Psi_n^{-1}\Psi_n - \frac{1}{2}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^2\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0]^2 - \frac{1}{6}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^3\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0]^3 \\ &\quad - \frac{1}{24}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^4\Psi_n[\hat{\beta} - \beta_0]^4 + O_p(n^{-5/2}).\end{aligned}\tag{III.9}$$

En utilisant (III.3), on remplace $\nabla\Psi_n^{-1} = Q + \varepsilon_{-1/2}$ dans (III.6) et on obtient l'expansion du premier ordre de $\hat{\beta}$,

$$\hat{\beta} - \beta_0 = -Q\Psi_n + O_p(n^{-1}) = a_{-1/2} + \varepsilon_{-1},\tag{III.10}$$

où $a_{-1/2} = -Q\Psi_n$.

En remplaçant (III.10) dans (III.7), on obtient

$$\begin{aligned}\hat{\beta} - \beta_0 &= -\nabla\Psi_n^{-1}\Psi_n - \frac{1}{2}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^2\Psi_n[a_{-1/2} + \varepsilon_{-1}]^2 + \varepsilon_{-3/2} \\ &= -\nabla\Psi_n^{-1}\Psi_n - \frac{1}{2}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^2\Psi_n a_{-1/2}^2 + \varepsilon_{-3/2},\end{aligned}\quad (\text{III.11})$$

puis on utilise (III.3) et on remplace respectivement $\nabla\Psi_n^{-1}$ dans les deux premiers termes de (III.11), par $Q - QV_1Q + \varepsilon_{-1}$ et $Q + \varepsilon_{-1/2}$.

On trouve alors,

$$\begin{aligned}\hat{\beta} - \beta_0 &= -[Q - QV_1Q + \varepsilon_{-1}]\Psi_n - \frac{1}{2}[Q + \varepsilon_{-1/2}]\nabla^2\Psi_n a_{-1/2}^2 + \varepsilon_{-3/2} \\ &= -Q\Psi_n - QV_1a_{-1/2} - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}^2 + \varepsilon_{-3/2} \\ &= a_{-1/2} + a_{-1} + \varepsilon_{-3/2},\end{aligned}\quad (\text{III.12})$$

où $a_{-1} = -QV_1a_{-1/2} - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}^2$.

L'étape suivante consiste à substituer à droite de l'équation (III.8), $\hat{\beta} - \beta_0$ par (III.12) dans le 2e terme et par (III.10) dans le 3e terme,

$$\begin{aligned}\hat{\beta} - \beta_0 &= -\nabla\Psi_n^{-1}\Psi_n - \frac{1}{2}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^2\Psi_n(\beta_0)(a_{-1/2} + a_{-1} + \varepsilon_{-3/2})^2 \\ &\quad - \frac{1}{6}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^3\Psi_n(a_{-1/2} + \varepsilon_{-1})^3 + \varepsilon_{-2},\end{aligned}\quad (\text{III.13})$$

puis à respectivement remplacer $\nabla\Psi_n^{-1}$ dans les trois premiers termes de (III.13) par $(Q - QV_1Q + QV_1QV_1Q + \varepsilon_{-3/2})$, $(Q - QV_1Q + \varepsilon_{-1})$, et $(Q + \varepsilon_{-1/2})$.

On obtient :

$$\begin{aligned}\hat{\beta} - \beta_0 &= -(Q - QV_1Q + QV_1QV_1Q + \varepsilon_{-3/2})\Psi_n - \frac{1}{2}(Q - QV_1Q + \varepsilon_{-1})(\mathbb{E}(H_2) + V_2)(a_{-1/2} + a_{-1})^2 \\ &\quad - \frac{1}{6}(Q + \varepsilon_{-1/2})\mathbb{E}(H_3)a_{-1/2}^3 + \varepsilon_{-2} \\ &= a_{-1/2} - QV_1a_{-1/2} + QV_1QV_1a_{-1/2} - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}^2 - Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}a_{-1} \\ &\quad + \frac{1}{2}QV_1Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}^2 - \frac{1}{2}QV_2a_{-1/2}^2 - \frac{1}{6}Q\mathbb{E}(H_3)a_{-1/2}^3 \\ &= a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + \varepsilon_{-2},\end{aligned}\quad (\text{III.14})$$

où $a_{-3/2} = -QV_1a_{-1} - \frac{1}{2}QV_2a_{-1/2}^2 - Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}a_{-1} - \frac{1}{6}Q\mathbb{E}(H_3)a_{-1/2}^3$.

De la même manière, pour obtenir une expansion stochastique du 4e ordre, il faut substituer à droite de l'équation (III.9), $\hat{\beta} - \beta_0$ par (III.14) dans les 2e terme, (III.12) dans le 3e terme et (III.10) dans le 4e terme,

$$\begin{aligned}\hat{\beta} - \beta_0 &= -\nabla\Psi_n^{-1}\Psi_n - \frac{1}{2}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^2\Psi_n[a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2}]^2 - \frac{1}{6}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^3\Psi_n[a_{-1/2} + a_{-1}]^3 \\ &\quad - \frac{1}{24}\nabla\Psi_n^{-1}\nabla^4\Psi_n[a_{-1/2}]^4 + O_p(n^{-5/2}),\end{aligned}\quad (\text{III.15})$$

puis il faut respectivement remplacer $\nabla\Psi_n^{-1}$ dans les quatre premiers termes de (III.15) par $(Q - QV_1Q + QV_1QV_1Q - QV_1QV_1QV_1Q + \varepsilon_{-2})$, $(Q - QV_1Q + QV_1QV_1Q + \varepsilon_{-3/2})$, $(Q - QV_1Q + \varepsilon_{-1})$, et $(Q + \varepsilon_{-1/2})$.

On obtient,

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} - \beta_0 &= -(Q - QV_1Q + QV_1QV_1Q - QV_1QV_1QV_1Q)\Psi_n \\
&\quad - \frac{1}{2}(Q - QV_1Q + QV_1QV_1Q)(\mathbb{E}(H_2) + V_2)(a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2})^2 \\
&\quad - \frac{1}{6}(Q - QV_1Q)(\mathbb{E}(H_3) + V_3)(a_{-1/2} + a_{-1})^3 - \frac{1}{24}Q(\mathbb{E}(H_4) + V_4)a_{-1/2}^4 + \varepsilon_{-5/2}, \\
&= a_{-1/2} - QV_1a_{-1/2} + QV_1QV_1a_{-1/2} - QV_1QV_1QV_1a_{-1/2} - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}^2 - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1}^2 \\
&\quad - Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}a_{-1} - Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}a_{-3/2} + \frac{1}{2}QV_1Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}^2 + QV_1Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}a_{-1} \\
&\quad - \frac{1}{2}QV_1QV_1Q\mathbb{E}(H_2)a_{-1/2}^2 - \frac{1}{2}QV_2a_{-1/2}^2 - QV_2a_{-1/2}a_{-1} + \frac{1}{2}QV_1QV_2a_{-1/2}^2 - \frac{1}{6}QV_3a_{-1/2}^3 \\
&\quad + \frac{1}{6}QV_1Q\mathbb{E}(H_3)a_{-1/2}^3 - \frac{1}{6}Q\mathbb{E}(H_3)a_{-1/2}^3 - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_3)a_{-1/2}^2a_{-1} - \frac{1}{24}Q\mathbb{E}(H_4)a_{-1/2}^4 \\
&= a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2} + O_p(n^{-5/2}), \tag{III.16}
\end{aligned}$$

où $a_{-2} = -QV_1a_{-3/2} - QV_2a_{-1/2}a_{-1} - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_2)(2a_{-1/2}a_{-3/2} + a_{-1}^2) - \frac{1}{6}QV_3a_{-1/2}^3 - \frac{1}{2}Q\mathbb{E}(H_3)a_{-1/2}^2a_{-1} - \frac{1}{24}Q\mathbb{E}(H_4)a_{-1/2}^4$ avec V_1, V_2, V_3 et V_4 d'ordre $O_p(n^{-1/2})$ par l'hypothèse 3.

3 ILLUSTRATION

Il s'agit dans cette section d'appliquer les résultats du Théorème (2.1) aux processus AR(1), MA(1) et de tester la qualité des approximations d'ordre élevé. Dans cette perspective, nous proposons pour chacun de ces processus, des expressions d'ordres $O(n^{-5/2})$ et $O(n^{-3})$, respectivement du biais et de l'erreur quadratique moyenne.

3.1 Processus AR(1)

3.1.1 Description du modèle

Considérons le processus discret auto-régressif d'ordre un suivant :

$$X_t = \alpha + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \tag{III.17}$$

où $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $|\phi| < 1$. Nous supposons que $X_0 = x_0$ est observé et $\alpha = 0$. Le vecteur $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)^t$, est distribuée selon une loi normale d'espérance nulle et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}$ de taille $(n+1) \times (n+1)$ avec $\sigma_{ij} = \sigma_\varepsilon^2 \phi^{i-j} / (1 - \phi^2)$ pour $i, j = 1, 2, \dots, n$.

L'estimateur des moindres carrés ordinaires (MCO) de ϕ est basée sur la condition des moments $\Psi_n(\hat{\phi}) = 0$, où

$$\Psi_n(\phi) = n^{-1}[X^t C_1 X - \phi X^t C_2 X], \tag{III.18}$$

avec $C_1 = \{c_{1ij}\}$ est une matrice $(n+1) \times (n+1)$ avec $c_{1i,i+1} = 1/2$ si $1 \leq i \leq n$, $c_{1i,i-1} = 1/2$ si $2 \leq i \leq n+1$ et 0 ailleurs, $C_2 = \{c_{2ij}\}$ est une matrice $(n+1) \times (n+1)$ avec $c_{2ij} = 1$ pour

$i = j = 1, 2, \dots, n$ et 0 ailleurs. Par suite, nous avons

$$\begin{aligned} H_1 &= \nabla \Psi_n(\phi) = -n^{-1} X^t C_2 X, & H_2 &= H_3 = H_4 = H_5 = 0 \\ Q &= [\mathbb{E}(H_1)]^{-1} = -[n^{-1} \text{Tr}[C_2 \Sigma]]^{-1} = -1 \\ V_1 &= H_1 - \mathbb{E}(H_1) = H_1 + 1, & V_2 &= V_3 = V_4 = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Posons $W_n = n^{-1} X^t C_1 X$ et $Z_n = n^{-1} X^t C_2 X$.

Les coefficients $a_{-s/2}$ de l'équation (III.5) sont donc définis par

$$\begin{aligned} a_{-1/2} &= -Q \Psi_n(\phi) = W_n - \phi Z_n. \\ a_{-1} &= -Q V_1 a_{-1/2} = a_{-1/2} - W_n Z_n + \phi Z_n^2 = -(Z_n - 1) a_{-1/2}. \\ a_{-3/2} &= -Q V_1 a_{-1} = -a_{-1/2} + 2a_{-1} + W_n Z_n^2 - \phi Z_n^3 = (Z_n - 1)^2 a_{-1/2}. \\ a_{-2} &= -Q V_1 a_{-3/2} = a_{-1/2} - 3a_{-1} + 3a_{-3/2} - W_n Z_n^3 + \phi Z_n^4 = -(Z_n - 1)^3 a_{-1/2}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que $\mathbb{E}(a_{-1/2}) = 0$ et par conséquent, pour une expansion d'ordre $O(n^{-1/2})$,

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = \mathbb{E}(a_{-1/2}) = 0, \quad (\text{III.20})$$

$$\text{EQM}(\hat{\phi}) = \mathbb{E}(a_{-1/2}^2) = \frac{1 - \phi^2}{n}. \quad (\text{III.21})$$

3.1.2 Principaux résultats

Les résultats traditionnels, connus de la littérature sont ceux de Mariott et Pope [67, p. 394] et White [109, 1961]

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{2\phi}{n} + o(n^{-2}), \quad (\text{III.22})$$

et Barlett [20, 1946]

$$\text{Var}(\hat{\phi}) = \frac{1 - \phi^2}{n} + o(n^{-2}). \quad (\text{III.23})$$

Par ailleurs, Bao [13, p. 1015], en relâchant l'hypothèse de normalité des résidus ε_i dans l'équation (III.26), montre que la condition initiale x_0 a un effet sur le biais et affecte le terme $o(n^{-2})$. En effet, lorsque les résidus sont de loi normale, il montre (en n'étudiant que l'effet de x_0) que :

si $x_0 \sim \mathcal{N}(\sigma^2/2\kappa)$,

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{2\phi}{n} + \frac{4\phi}{n^2} + \frac{2\phi}{n^2(1 - \phi^2)} + o(n^{-3}), \quad (\text{III.24})$$

$$\text{EQM}(\hat{\phi}) = \frac{1 - \phi^2}{n} + \frac{14\phi^2 - 2}{n^2} + o(n^{-3}). \quad (\text{III.25})$$

Le Théorème suivant fournit de nouveaux résultats sur le biais et l'erreur quadratique moyenne du paramètre auto-régressif ϕ dans un processus AR(1), en utilisant un expansion de la forme (III.5).

Théorème 3.1 (Biais et erreur quadratique moyenne dans un modèle AR(1))

Considérons le processus discret auto-régressif d'ordre un suivant :

$$X_t = \alpha + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{III.26})$$

où $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $|\phi| < 1$.

On suppose que $X_0 = x_0$ est observé et que $\alpha = 0$. Une expansion d'ordre $O(n^{-5/2})$ de $\hat{\phi} - \phi_0$ est donnée par

$$\hat{\phi} - \phi_0 = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2} + O_p(n^{-5/2}),$$

où ϕ_0 est la vraie valeur du paramètre ϕ et

$$\begin{aligned} a_{-1/2} &= -Q\Psi_n(\phi) = W_n - \phi Z_n. \\ a_{-1} &= -QV_1 a_{-1/2} = a_{-1/2} - W_n Z_n + \phi Z_n^2 = -(Z_n - 1)a_{-1/2}. \\ a_{-3/2} &= -QV_1 a_{-1} = -a_{-1/2} + 2a_{-1} + W_n Z_n^2 - \phi Z_n^3 = (Z_n - 1)^2 a_{-1/2}. \\ a_{-2} &= -QV_1 a_{-3/2} = a_{-1/2} - 3a_{-1} + 3a_{-3/2} - W_n Z_n^3 + \phi Z_n^4 = -(Z_n - 1)^3 a_{-1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

1. Le biais d'ordre $O(n^{-2})$ et l'EQM d'ordre $O(n^{-3})$ sont respectivement donnés par

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{2\phi}{n} - \frac{2\phi(1 - \phi^{2n})}{n^2(\phi^2 - 1)}, \quad (\text{III.27})$$

$$\text{EQM}(\hat{\phi}) = \frac{1 - \phi^2}{n} - \frac{8(1 + 2\phi^2 + 2\phi^{2n})}{n^2} + \frac{4(1 + 9\phi^2)(\phi^{2n} - 1)}{n^3(\phi^2 - 1)}. \quad (\text{III.28})$$

2. Le biais d'ordre $O(n^{-3})$ et l'EQM d'ordre $O(n^{-4})$ sont respectivement donnés par

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{2\phi}{n} - \frac{2\phi(9 + 4\phi^2 + 11\phi^{2n})}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{16\phi(1 - \phi^{2n})(1 + 2\phi^2)}{n^3(\phi^2 - 1)^2}, \quad (\text{III.29})$$

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\phi}) &= \frac{1 - \phi^2}{n} + \frac{2(112\phi^{2n} + 7\phi^2 - 1)}{n^2} - \frac{4(19 + 120\phi^2 + 36\phi^4 + 53\phi^{2n} + 276\phi^{2n+2})}{n^3(\phi^2 - 1)} \\ &+ \frac{24[3\phi^{2+4n} + 38\phi^{2n+2} + (2 + 38\phi^4)(\phi^{2n} - 1) - 41\phi^2]}{n^4(\phi^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

3. Le biais d'ordre $O(n^{-4})$ et l'EQM d'ordre $O(n^{-5})$ sont respectivement donnés par

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\phi}) &= -\frac{2\phi}{n} + \frac{2\phi(85\phi^{2n} + 2\phi^2 - 3)}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{4\phi(37 + 71\phi^2 + 12\phi^4 + 83\phi^{2n} + 157\phi^{2+2n})}{n^3(\phi^2 - 1)^2} \\ &+ \frac{72\phi[\phi^{2+4n} + (2 + 10\phi^2 + 6\phi^4)\phi^{2n} - 2 - 11\phi^2 - 6\phi^4]}{n^4(\phi^2 - 1)^3}, \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\phi}) &= \mathbb{E}(a_{-1/2}^2 + 2a_{-1/2}a_{-1}) + \mathbb{E}(a_{-1}^2 + 2a_{-1/2}a_{-3/2}) + \mathbb{E}(a_{-3/2}^2 + 2a_{-1}a_{-3/2}) \\ &+ 2\mathbb{E}(a_{-1/2}a_{-2} + a_{-1}a_{-2} + a_{-3/2}a_{-2}) + \mathbb{E}(a_{-2}^2). \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

L'expression de l'équation (III.32) est donnée en annexe (B.1.1).

Preuve du Théorème 3.1 : Voir annexe (B.1.1).

3.2 Processus moyenne mobile d'ordre 1

3.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1 On appelle processus moyenne mobile d'ordre un et on note $MA(1)$, un processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ défini par :

$$X_t = \varepsilon_t - \phi \varepsilon_{t-1}, \quad (\text{III.33})$$

où ϕ est un nombre réel et $(\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc de variance σ^2 .

La relation (III.33) peut encore s'écrire :

$$X_t = (1 - \phi L)\varepsilon_t, \quad (\text{III.34})$$

où L est l'opérateur retard.

Sous forme matricielle,

$$X = C\varepsilon, \quad \forall t \geq 1 \quad (\text{III.35})$$

où $X = (X_1, \dots, X_t, X_{t+1}, \dots, X_n)^t$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^t$, C définie par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\phi & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.36})$$

est une matrice $n \times n$.

Posons $C = I - \phi N$, avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.37})$$

est une matrice nilpotente d'ordre n : $N^n = 0$.

On remarquera que

$$N = -\frac{\partial C}{\partial \phi}. \quad (\text{III.38})$$

Le vecteur ε peut ainsi s'écrire

$$\varepsilon = X + \phi N\varepsilon. \quad (\text{III.39})$$

Notons aussi que, contrairement au cas d'un AR(1), la définition d'un MA(1) est explicite et ne pose donc pas de problème : le processus X_t est parfaitement défini par (III.33) et est stationnaire au sens faible (ou en covariance).

On a alors :

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t) - \phi\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}) = 0, \quad (\text{III.40})$$

$$\gamma_0 = \mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\varepsilon_t) + \phi^2\mathbb{V}(\varepsilon_{t-1}) = (1 + \phi^2)\sigma^2 \quad (\text{III.41})$$

$$\gamma_1 = \mathbb{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \mathbb{Cov}(\varepsilon_t - \phi\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \phi\varepsilon_{t-2}) = -\phi\mathbb{V}(\varepsilon_{t-1}) = -\phi\sigma^2. \quad (\text{III.42})$$

Le coefficient d'auto-corrélation d'ordre 1 vaut donc

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\phi\sigma^2}{(1 + \phi^2)\sigma^2} = \frac{-\phi}{1 + \phi^2}. \quad (\text{III.43})$$

Pour tout $|h| > 1$, on a

$$\gamma_h = \mathbb{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{Cov}(\varepsilon_t - \phi\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-h} - \phi\varepsilon_{t-h-1}) = 0. \quad (\text{III.44})$$

Donc les coefficients d'auto-corrélation d'ordre supérieur à un sont nuls :

$$\forall |h| > 1 \quad \rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = 0. \quad (\text{III.45})$$

Lorsque $|\phi| < 1$, le polynôme $1 - \phi L$ est inversible et son inverse admet un développement dans les puissances positives de L . ε_t est donc l'innovation à la date t . Ainsi,

$$X_t = (1 - \phi L)\varepsilon_t \Leftrightarrow \frac{1}{(1 - \phi L)}X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k L^k \right) X_t = \varepsilon_t. \quad (\text{III.46})$$

Cette nouvelle écriture permet de donner une autre forme d'un processus MA(1) :

$$X_t = \varepsilon_t - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \phi^k B^k \right) X_t = \varepsilon_t - \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k X_{t-k}. \quad (\text{III.47})$$

Dans la suite, sauf mention contraire, on supposera que $|\phi| < 1$ et $\varepsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

3.2.2 Estimation, condition des moments et validation des hypothèses

En utilisant la structure multivariée gaussienne du processus, la matrice de variance-covariance d'un processus MA(1) gaussien est

$$\sigma^2\Gamma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 + \phi^2 & -\phi & 0 & \cdots & 0 \\ -\phi & 1 + \phi^2 & -\phi & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 + \phi^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{III.48})$$

où la matrice Γ est telle que

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} 1 + \phi^2 & si \quad i = j \\ -\phi & si \quad |j - i| = 1 \\ 0 & ailleurs. \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

Ainsi, le vecteur $X = (X_1, \dots, X_t, X_{t+1}, \dots, X_n)^t$ est distribué selon une loi normale d'espérance nulle et de matrice de variance-covariance $\sigma^2 \Gamma$.

On suppose que $\varepsilon_0 = 0$. La distribution conditionnelle de $X_1 | \varepsilon_0 = \varepsilon_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Plus généralement, si ε_{t-1} est connu, $X_t | \varepsilon_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Ainsi, conditionnellement à $\varepsilon_0 = 0$, la log-vraisemblance est

$$\mathcal{L}(\phi, \sigma^2) = n \left[-\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2n\sigma^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \right]. \quad (\text{III.50})$$

Pour que le paramètre ϕ soit un extrémum, il faut que la dérivée partielle

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \sigma^2)}{\partial \phi} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \phi} \varepsilon_i,$$

s'annule en $\phi = \hat{\phi}$.

Avec les notations de la condition des moments (III.2), nous obtenons :

$$\Psi_n(\phi) = n^{-1} \sum_{i=1}^n -\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \phi} \varepsilon_i. \quad (\text{III.51})$$

Lemme 3.1 Soit $M = C^{-1}N$. Les 5 premières dérivées partielles de ε par rapport à ϕ sont :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} = M\varepsilon, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \phi^2} = 2M^2\varepsilon, \quad \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \phi^3} = 6M^3\varepsilon, \quad \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial \phi^4} = 24M^4\varepsilon, \quad \frac{\partial^5 \varepsilon}{\partial \phi^5} = 120M^5\varepsilon.$$

Preuve : voir annexe (B.1.2).

Il est plus pratique d'écrire l'équation (III.51) sous forme matricielle. Celle-ci est donnée par

$$\Psi_n(\phi) = -n^{-1} \sigma^{-2} Y_\varepsilon, \quad (\text{III.52})$$

où $Y_\varepsilon = \varepsilon^t C^{-1} N \varepsilon$, avec $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$.

Vérifions maintenant que l'espérance² $\mathbb{E}[\Psi_n(\phi)] = 0$.

$$\mathbb{E}[\Psi_n(\phi)] = -n^{-1} \sigma^{-2} \mathbb{E}[Y_\varepsilon] = -n^{-1} \text{Tr}[C^{-1}N]. \quad (\text{III.53})$$

Il nous faut calculer $\text{Tr}[C^{-1}N]$. Pour ce faire, introduisons le lemme suivant.

2. Dans tout le chapitre, le calcul des espérances de type $\mathbb{E}(Y_\varepsilon)$, se fait en utilisant les résultats d'espérance de deux formes quadratiques donnés en annexe A.2, valables pour $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$. Toutefois, lorsque (comme ici) $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$. On remplacera $C_i \Sigma$ par $\sigma^2 C_i$. De plus, pour des matrices C quelconques, on a la relation suivante :

$$\varepsilon^t C \varepsilon = \varepsilon^t \left(\frac{C+C^t}{2} \right) \varepsilon,$$

où $\frac{C+C^t}{2}$ est toujours symétrique.

Lemme 3.2 *Pour toute matrice nilpotente N définie par (III.37) et tout réel ϕ on a :*

1. $[I - \phi N][I + \phi N + (\phi N)^2 + \cdots + (\phi N)^n] = I$
2. $Tr[N^k] = 0 \quad \forall k \in [1, n]$.

Preuve : voir annexe (B.1.3).

La propriété 1. du lemme 3.2 permet d'écrire

$$C^{-1}N = [I - \phi N]^{-1}N = N + \phi N^2 + \phi^2 N^3 + \cdots + \phi^{n-1}N^n. \quad (\text{III.54})$$

En utilisant la propriété 2. du même lemme on obtient :

$$Tr[C^{-1}N] = Tr[N] + \phi Tr[N^2] + \cdots + \phi^{n-1}Tr[N^n] = 0. \quad (\text{III.55})$$

On en déduit que $\mathbb{E}[\Psi_n(\phi)] = 0$; ce qui est cohérent avec les hypothèses de Bao et Ullah [14].

3.2.3 Expansion d'ordre élevé de la condition des moments

La première étape consiste à calculer les dérivées successives $H_i = \nabla^i \Psi_n$ de la condition des moments (III.52). On introduit alors le lemme suivant :

Lemme 3.3 *Soit $M = C^{-1}N$. Les dérivées partielles de M par rapport à ϕ sont :*

$$\frac{\partial M}{\partial \phi} = (C^{-1}N)^2, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \phi^2} = 2(C^{-1}N)^3, \quad \frac{\partial^3 M}{\partial \phi^3} = 6(C^{-1}N)^4, \quad \frac{\partial^4 M}{\partial \phi^4} = 24(C^{-1}N)^5, \quad \frac{\partial^5 M}{\partial \phi^5} = 120(C^{-1}N)^6.$$

Preuve : voir annexe (B.1.4)

On pose ensuite :

$$\Gamma_\varepsilon = \varepsilon^t A \varepsilon, \quad \Delta_\varepsilon = \varepsilon^t B \varepsilon, \quad \Theta_\varepsilon = \varepsilon^t D \varepsilon, \quad \Lambda_\varepsilon = \varepsilon^t F \varepsilon, \quad \Pi_\varepsilon = \varepsilon^t G \varepsilon, \quad (\text{III.56})$$

où et A, B, D, F et G sont des matrices carrés de taille $n \times n$ définies par :

$$A = 2M^2 + M^t M,$$

$$B = 6M^3 + 4M^t M^2 + 2[M^t M^2]^t,$$

$$D = 24M^4 + 18M^t M^3 + 12[M^2]^t M^2 + 6[M^3]^t M,$$

$$F = 120M^5 + 96M^t M^4 + 72[M^2]^t M^3 + 48[M^3]^t M^2 + 24[M^4]^t M,$$

$$G = 720M^6 + 600M^t M^5 + 480[M^2]^t M^4 + 360[M^3]^t M^3 + 240[M^4]^t M^2 + 120[M^5]^t M.$$

On obtient les $H_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$,

$$H_1 = -\frac{\Gamma_\varepsilon}{n\sigma^2}, \quad H_2 = -\frac{\Delta_\varepsilon}{n\sigma^2}, \quad H_3 = -\frac{\Theta_\varepsilon}{n\sigma^2}, \quad H_4 = -\frac{\Lambda_\varepsilon}{n\sigma^2}, \quad H_5 = -\frac{\Pi_\varepsilon}{n\sigma^2}, \quad (\text{III.57})$$

et leurs espérances :

$$\mathbb{E}(H_1) = -\frac{Tr[A]}{n}, \quad \mathbb{E}(H_2) = -\frac{Tr[B]}{n}, \quad \mathbb{E}(H_3) = -\frac{Tr[D]}{n}, \quad \mathbb{E}(H_4) = -\frac{Tr[F]}{n}, \quad \mathbb{E}(H_5) = -\frac{Tr[G]}{n}.$$

Ainsi,

$$Q = [\mathbb{E}(H_1)]^{-1} = -\frac{n}{\text{Tr}[A]}, \quad (\text{III.58})$$

et on définit enfin les $V_i = H_i - \mathbb{E}(H_i)$ par

$$V_i = n^{-1}m_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (\text{III.59})$$

où

$$m_1 = \text{Tr}[A] - \frac{\Gamma_\varepsilon}{\sigma^2}, \quad m_2 = \text{Tr}[B] - \frac{\Delta_\varepsilon}{\sigma^2}, \quad m_3 = \text{Tr}[D] - \frac{\Theta_\varepsilon}{\sigma^2}, \quad m_4 = \text{Tr}[F] - \frac{\Lambda_\varepsilon}{\sigma^2}.$$

En introduisant tous ces coefficients dans les définitions de $a_{-s/2}$ données dans le Théorème (2.1), nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Considérons le processus $MA(1)$ suivant :*

$$X_t = \varepsilon_t - \phi\varepsilon_{t-1}, \quad (\text{III.60})$$

où ϕ est un nombre réel et $(\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc de variance σ^2 .

La condition des moments est donnée par

$$\Psi_n(\phi) = -n^{-1}\sigma^{-2}Y_\varepsilon, \quad (\text{III.61})$$

où $Y_\varepsilon = \varepsilon^t C^{-1} N \varepsilon$, avec $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$ et C définie par l'équation (III.36).

Sous les hypothèses 1-3, il est possible d'obtenir une expansion de Taylor du coefficient $\hat{\phi}$, estimé à partir de (III.61) de la forme

$$\hat{\phi} - \phi_0 = a_{-1/2} + a_{-1} + a_{-3/2} + a_{-2} + O_p(n^{-5/2}), \quad (\text{III.62})$$

où,

$$a_{-1/2} = -\frac{1}{\sigma^2 \text{Tr}(A)} Y_\varepsilon, \quad a_{-1} = -\frac{m_1}{\sigma^2 [\text{Tr}(A)]^2} Y_\varepsilon - \frac{\text{Tr}(B)}{2\sigma^4 [\text{Tr}(A)]^3} Y_\varepsilon^2,$$

$$a_{-3/2} = -\frac{m_1^2}{\sigma^2 [\text{Tr}(A)]^3} Y_\varepsilon + \frac{Y_\varepsilon^2}{2\sigma^4 [\text{Tr}(A)]^3} \left[m_2 - \frac{3\text{Tr}(B)m_1}{\text{Tr}(A)} \right] + \frac{Y_\varepsilon^3}{2\sigma^6 [\text{Tr}(A)]^4} \left[\frac{\text{Tr}(D)}{3} - \frac{[\text{Tr}(B)]^2}{\text{Tr}(A)} \right],$$

$$a_{-2} = \lambda_1 Y_\varepsilon + \lambda_2 Y_\varepsilon^2 + \lambda_3 Y_\varepsilon^3 + \lambda_4 Y_\varepsilon^4,$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{m_1^3}{\sigma^2 [\text{Tr}(A)]^4} \\ \lambda_2 &= \frac{3m_1 m_2}{2\sigma^4 [\text{Tr}(A)]^4} - \frac{3m_1^2 \text{Tr}(B)}{\sigma^4 [\text{Tr}(A)]^5} \\ \lambda_3 &= -\frac{m_3}{6\sigma^6 [\text{Tr}(A)]^4} + \frac{3m_2 \text{Tr}(B) + 2m_1 \text{Tr}(D)}{3\sigma^6 [\text{Tr}(A)]^5} - \frac{5m_1 [\text{Tr}(B)]^2}{2\sigma^6 [\text{Tr}(A)]^6} \\ \lambda_4 &= -\frac{\text{Tr}(F)}{24\sigma^8 [\text{Tr}(A)]^5} + \frac{5\text{Tr}(B)\text{Tr}(D)}{12\sigma^8 [\text{Tr}(A)]^6} - \frac{5[\text{Tr}(B)]^3}{8\sigma^8 [\text{Tr}(A)]^7}. \end{aligned}$$

Les résultats d'approximation du biais et de l'erreur quadratique moyenne sont résumés dans les deux théorèmes suivant :

Théorème 3.2 *Le biais d'ordre $O(n^{-2})$ et l'erreur quadratique moyenne d'ordre $O(n^{-3})$, de l'estimateur du quasi maximum de vraisemblance conditionnelle $\hat{\phi}$ dans le processus (III.33) sont respectivement donnés par*

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = \frac{Tr[B]}{6[Tr(A)]^2} = \frac{[\phi^2 - 1][n(\phi^4 - \phi^{2n}) + (n - 2)\phi^2(\phi^{2n} - 1)]}{\phi[\phi^{2n} - 1 + n(1 - \phi^2)]^2}, \quad (\text{III.63})$$

$$\mathbb{EQM}(\hat{\phi}) = \frac{3}{Tr(A)} - \frac{2P_{10002}}{[Tr(A)]^3} + \frac{[Tr(B)]^2}{[Tr(A)]^4}, \quad (\text{III.64})$$

où $\sigma^{2(i+j+k+\ell+m)} P_{ijklm} = \mathbb{E}(\Gamma_\varepsilon^i \Delta_\varepsilon^j \Theta_\varepsilon^k \Lambda_\varepsilon^\ell Y_\varepsilon^m)$.

Preuve : voir annexe (B.1.5).

Théorème 3.3 *Le biais d'ordre $O(n^{-3})$ et l'erreur quadratique moyenne d'ordre $O(n^{-4})$ de l'estimateur du quasi maximum de vraisemblance conditionnelle $\hat{\phi}$ dans un processus (III.33) sont respectivement donnés par*

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = \frac{Tr(B)}{2[Tr(A)]^2} - \frac{2P_{20001} + P_{01002}}{2[Tr(A)]^3} + \frac{Tr(B)Tr(D) + 9Tr[B]P_{10002}}{6[Tr(A)]^4} \quad (\text{III.65})$$

$$- \frac{[Tr(B)]^3}{2[Tr(A)]^5}, \quad (\text{III.66})$$

$$\mathbb{EQM}(\hat{\phi}) = \frac{6}{Tr(A)} - \frac{8P_{10002}}{[Tr(A)]^3} + \frac{4[Tr(B)]^2 + 3P_{20002} + P_{01003}}{[Tr(A)]^4} - \frac{12Tr(B)P_{10003} - Tr(D)P_{00004}}{3[Tr(A)]^5} + \frac{5[Tr(B)]^2 P_{00004}}{4[Tr(A)]^6}. \quad (\text{III.67})$$

Preuve : voir annexe (B.1.5).

Remarque 3.1 : *Les Théorèmes 3.2 et 3.3 indiquent que le biais et l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\phi}$ sont indépendant de σ^2 .*

Afin de comprendre les performances des approximations de Bao et Ullah [15, 2007]

$$\mathbb{B}_1(\hat{\phi}) = \frac{\phi}{n}, \quad (\text{III.68})$$

et celles du biais données par l'expression (III.63)

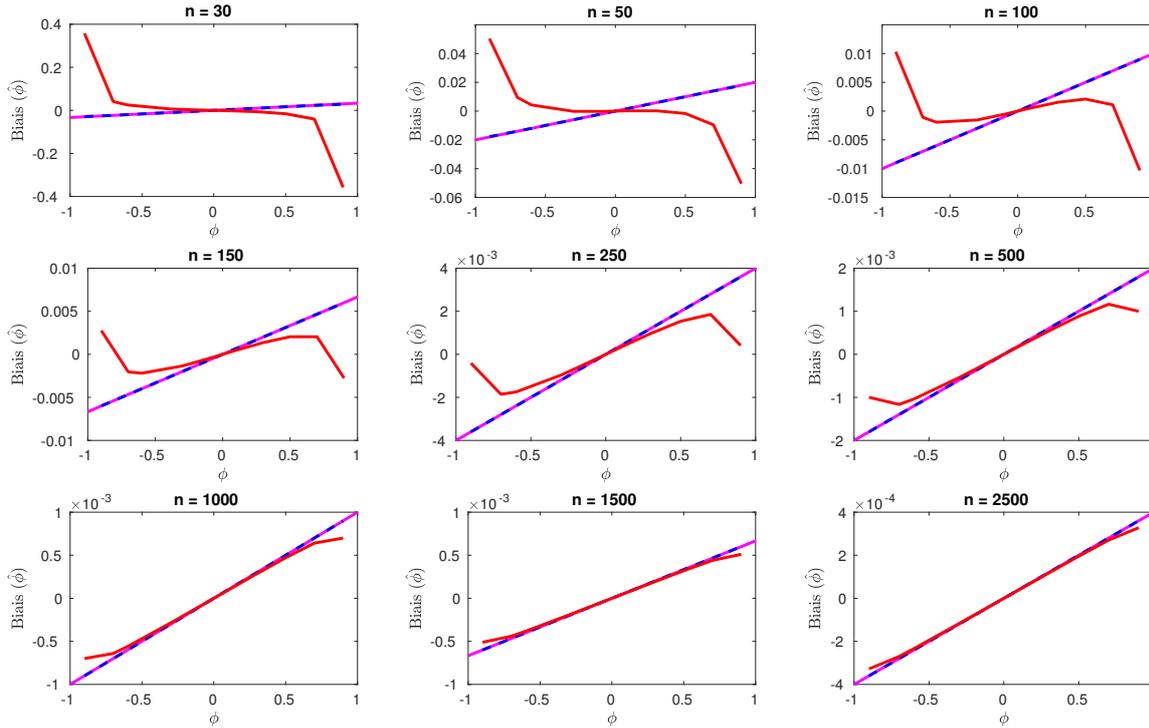
$$\mathbb{B}_2(\hat{\phi}) = \frac{Tr[B]}{6[Tr(A)]^2}, \quad (\text{III.69})$$

et par l'expression (III.66)

$$\mathbb{B}_3(\hat{\phi}) = \frac{Tr(B)}{2[Tr(A)]^2} - \frac{2P_{20001} + P_{01002}}{2[Tr(A)]^3} + \frac{Tr(B)Tr(D) + 9Tr[B]P_{10002}}{6[Tr(A)]^4} - \frac{[Tr(B)]^3}{2[Tr(A)]^5}, \quad (\text{III.70})$$

nous avons réalisé des simulations de Monte-Carlo avec le paramètre $\phi \in]-1, 1[$. Celles-ci ont été effectuées pour différentes valeurs de $n = 30, 50, 100, 150, 250, 500, 1000, 1500, 2500$.

Le graphique (III.1) présente les résultats de comparaisons existants entre les approximations du biais donnés par les expressions (III.68), III.69 et (III.70).



Graphique III.1 – Approximations du biais de $\hat{\phi}$ comme fonction de ϕ dans le processus MA(1) (III.60), pour différents échantillons de n observations. la ligne continue (violette) correspond au biais donné par l'expression (III.68) ; la courbe en tiret (bleu) au biais donné par l'expression (III.69). La ligne continue (rouge) correspond au biais donné par l'expression (III.70).

Le graphique III.1 met en exergue les différents points suivants :

1. Les expressions du biais données par les équations (III.68) et (III.69) sont des fonctions linéaires et équivalentes : $\mathbb{B}_1(\hat{\phi}) = \mathbb{B}_2(\hat{\phi})$. Ce sont des fonctions croissantes de ϕ et décroissantes de n .
2. Le biais donné par l'expression (III.70) est une fonction non monotone de ϕ . Il s'agit également d'une fonction décroissante de n .
3. Lorsque $n = 30$, $\mathbb{B}_1(\hat{\phi}) = \mathbb{B}_2(\hat{\phi})$ est sensiblement égal à zéro, traduisant que $\hat{\phi}$ pourrait être un estimateur sans biais de ϕ lorsqu'il est approché par (III.68) ou par (III.69). Ce qui n'est pas vérifié pour $\mathbb{B}_3(\hat{\phi})$. Cela pourrait s'expliquer par l'hypothèse que la taille de l'échantillon n'est pas suffisante pour réaliser l'expérience.
4. Les trois expressions de biais sont symétriques par rapport à $\phi = 0$.

5. Pour tout échantillon n , lorsque $\phi < 0$ (respectivement $\phi > 0$), le graphe donné par l'expression (III.70) est au dessus (respectivement en dessous) du graphe donné par les deux autres expressions. Cette différence, mise en évidence par l'écart entre les différentes courbes, se rétrécit lorsque n devient très grand, suggérant ainsi que pour de très grandes valeurs de n , les trois expressions du biais sont équivalentes.
6. Pour toutes les valeurs de n , le biais de $\hat{\phi}$ donné par l'expression (III.68) est toujours négatif lorsque $\phi < 0$. Inversement, lorsque $\phi > 0$, il est toujours positif. Pour le biais donné par l'expression (III.70), cette remarque ne reste valable que pour de grandes valeurs de $n = 250, 500, 1000, 1500, 2500$. Pour de petites valeurs de n , par exemple $n = 100$ et 150 , on peut simultanément obtenir des valeurs positives et des valeurs négatives avec l'expression (III.70), peu importe le signe de ϕ .

Le graphique III.2 présente les résultats de comparaisons existants entre l'approximation de l'erreur quadratique moyenne (en violette) donnée par

$$\text{EQM}_1(\hat{\phi}) = \mathbb{E}(a_{-1/2}^2) = \frac{1}{\text{Tr}[A]}, \quad (\text{III.71})$$

celle (en bleue) donnée par

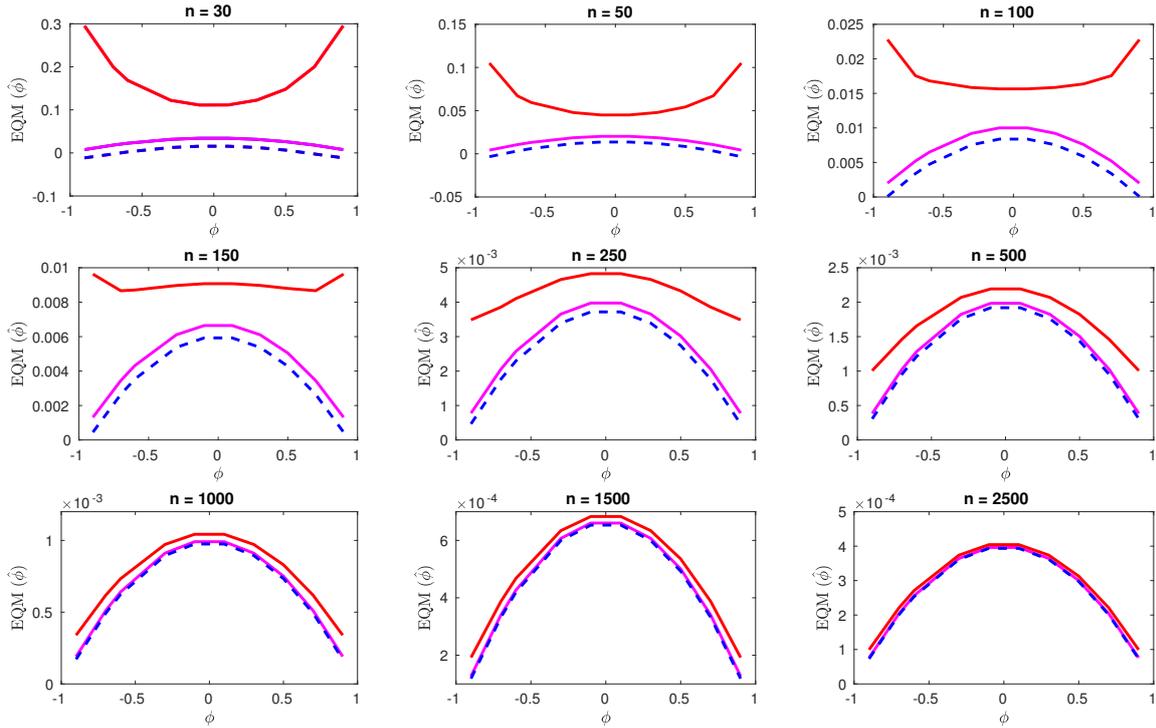
$$\text{EQM}_2(\hat{\phi}) = \frac{3}{\text{Tr}(A)} - \frac{2P_{10002}}{[\text{Tr}(A)]^3} + \frac{[\text{Tr}(B)]^2}{[\text{Tr}(A)]^4}, \quad (\text{III.72})$$

et celle (en rouge) donnée par

$$\begin{aligned} \text{EQM}_3(\hat{\phi}) = & \frac{6}{\text{Tr}(A)} - \frac{8P_{10002}}{[\text{Tr}(A)]^3} + \frac{4[\text{Tr}(B)]^2 + 3P_{20002} + P_{01003}}{[\text{Tr}(A)]^4} \\ & - \frac{12\text{Tr}(B)P_{10003} - \text{Tr}(D)P_{00004}}{3[\text{Tr}(A)]^5} + \frac{5[\text{Tr}(B)]^2P_{00004}}{4[\text{Tr}(A)]^6}. \end{aligned} \quad (\text{III.73})$$

Le graphique III.2 montre que :

1. Pour des petites valeurs de n , l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (III.73) est une fonction convexe, avec un minimum qui devient de plus en plus petit au fur et à mesure que n augmente.
2. Les erreurs quadratiques moyennes données par les expressions (III.71) et (III.72) sont des fonctions concaves, avec un maximum qui devient de plus en plus petit. Cette propriété est également vérifiée avec l'expression (III.73) pour des n très grand ($n \geq 250$).
3. Lorsque $n = 30$ ou 50 , les expressions de biais données par les expressions (III.71) et (III.72) sont proches de zéro, avec $\text{EQM}_2(\hat{\phi}) < \text{EQM}_1(\hat{\phi})$.
4. Les trois expressions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $\text{EQM}(\hat{\phi}) = 0$.
5. La relation suivante est vérifiée : $\text{EQM}_2(\hat{\phi}) < \text{EQM}_1(\hat{\phi}) < \text{EQM}_3(\hat{\phi})$, sauf pour de très grandes valeurs de n (2500 par exemple), où les expressions sont équivalentes. Ainsi, au regard des erreurs quadratiques moyennes, bien que $\mathbb{B}_1(\hat{\phi}) = \mathbb{B}_2(\hat{\phi})$, on choisira $\mathbb{B}_2(\hat{\phi})$ comme meilleur approximation.



Graphique III.2 – Approximations de l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\phi}$ comme fonction de ϕ dans le processus MA(1) (III.60), pour différents échantillons de n observations. la ligne continue (violette) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (III.71) ; la courbe en tiret (bleu) à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (III.72). La ligne continue (rouge) correspond à l'erreur quadratique moyenne donnée par l'expression (III.73).

4 SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Nous avons proposé de nouveaux résultats analytiques du biais et de l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur des moindres carrés ordinaires dans un processus auto-régressif d'ordre un et de l'estimateur du quai maximum de vraisemblance conditionnelle dans un processus MA(1). Ces résultats ont été obtenus en considérant une expansion stochastique d'ordre $O(n^{-5/2})$ de la condition des moments.

Nous montrons que ces expressions peuvent s'exprimer en termes d'espérance de produit croisés de formes quadratiques. Ces termes ont été exprimés explicitement, sans aucune d'approximations dans le calcul des traces impliquées dans les expressions, c'est-à-dire en fournissant des résultats exacts de ces différentes traces. Comparés aux expressions d'ordre moins élevé, les résultats de simulations montrent en général une meilleure correction de biais par nos expressions. Toutefois, pour des échantillons de très grande taille, nous observons une convergence de toutes les expressions de biais ainsi que des erreurs quadratiques moyennes.

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR AVEC DES DONNÉES INITIALES NON RÉGULIÈRES PAR DES MÉTHODES EXPLICITES

1 INTRODUCTION

La grande majorité des équations aux dérivées partielles ne possède pas de solution exacte, il faut par conséquent approcher les solutions grâce à l'utilisation de schémas numériques. Pour ce faire, dans le cadre de la discrétisation en temps, deux grandes classes de méthodes existent, à savoir, les méthodes explicites dont l'utilisation entraîne une sévère réduction du pas de temps et les méthodes implicites qui ont l'avantage d'être beaucoup plus stables, mais qui peuvent être très coûteuses, surtout pour des grands systèmes, à cause de la résolution d'équations non linéaires à chaque étape. On a souvent l'habitude de préférer l'utilisation de méthodes implicites pour résoudre des équations aux dérivées partielles paraboliques comme l'équation de la chaleur mais depuis quelques années, les méthodes dites de Runge-Kutta explicites stabilisées, qui ont des domaines de stabilité les plus grands possible le long de l'axe des réels négatifs, sont de plus en plus utilisées [38, 39]. Si on désire utiliser ce type de méthodes pour des modèles financiers, les conditions initiales étant peu régulières, il n'est pas garanti que ces méthodes soient efficaces.

Ce chapitre présente les premiers résultats montrant l'efficacité de ces méthodes dans ce cadre et est organisée en deux parties : dans la première nous rappelons les notions sur les méthodes à un pas et donnons une formulation des méthodes de Runge-Kutta (RK) et rappelons leurs propriétés. Nous développons un code de calcul formel avec SageMath pour vérifier certaines de ces

propriétés pour un schéma donné. Nous introduisons ensuite les méthodes Runge-Orthogonal-Chebyshev-Kutta (ROCK). Dans la deuxième partie, nous rappelons l'obtention de l'équation de la chaleur à partir des équations de Black-Scholes et proposons des simulations numériques en trois dimensions prouvant l'efficacité des méthodes ROCK. Ce travail est une collaboration avec Thierry Dumont de l'Université de Lyon.

2 RAPPELS SUR LES MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA

Cette section est dédiée à des rappels sur la résolution approchée de systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) du premier ordre de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad (\text{IV.1})$$

où p est un entier strictement positif, $y \in \mathbb{R}^p$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R}^p$ est une fonction suffisamment régulière. On se limitera à des méthodes dites à un pas avec pas uniforme que nous présentons rapidement, supposons pour simplifier que $t_0 = 0$ et donnons nous une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq T, \quad (\text{IV.2})$$

de l'intervalle $[0, T]$. Posons $h = t_{n+1} - t_n$, ($0 \leq n < N$), l'idée des méthodes à un pas est de chercher une approximation y_{n+1} de $y(t_{n+1})$ qui s'obtient uniquement à partir de t_n , de h et de la valeur approchée y_n de $y(t_n)$ obtenue au pas précédent. Ces méthodes sont de la forme

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h), \quad y(t_0) = y_0,$$

où Φ est une fonction qui ne dépend que de f . Pour une étude générale des méthodes de ce type et les rappels présentés dans cette section sur les méthodes de Runge-Kutta, nous renvoyons le lecteur à [33, Chap. 5]. Pour être efficaces, ces méthodes doivent être les plus précises possible et une définition importante est celle de l'ordre d'une méthode que nous présentons maintenant en notant $\|\cdot\|$ une norme de \mathbb{R}^p :

Définition 2.1 Une méthode à un pas est d'ordre p si pour tout problème (IV.1), il existe une constante $K \geq 0$ telle que

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| \leq Kh^p, \quad (\text{IV.3})$$

autrement dit la série de Taylor de la solution exacte $y(t_n + h)$ et y_{n+1} coïncident jusqu'au terme h^p (inclus).

Une méthode d'ordre plus élevé qu'une première est donc plus précise que celle-ci.

2.1 Origine et formulation des méthodes de Runge-Kutta

Parmi de nombreuses méthodes existantes pour la résolution de (IV.1), énumérons de manière chronologique, quelques-unes d'entre elles. Commençons par la plus simple :

1. La méthode d'Euler (1768)

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad (\text{IV.4})$$

cette méthode très simple et novatrice provient de l'approximation de la version intégrale de (IV.1) par la méthode des rectangles à gauche. Sa précision est assez limitée puisqu'elle n'est que d'ordre 1 et pour obtenir des méthodes plus précises, il a fallu utiliser des formules de quadratures numériques également plus précises.

2. La méthode du point milieu ou la méthode des trapèzes

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{y_{n+1} + y_n}{2} \right), \quad (\text{IV.5})$$

qui comme son nom l'indique provient de l'utilisation de la méthode des trapèzes et est d'ordre 2.

3. La méthode de Runge (1895)

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n) \right) \quad (\text{IV.6})$$

qui est d'ordre 2.

4. La méthode de Heune (1900)

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h \left\{ f(t_n, y_n) + 3f \left(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}h\kappa \right) \right\}, \\ \kappa = f \left(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hf(t_n, y_n) \right) \end{array} \right\}, \quad (\text{IV.7})$$

qui est d'ordre 3.

Généralisant cette idée aux formules de quadrature d'ordre plus élevé, c'est finalement Kutta qui donne la formulation générale des méthodes dites *de Runge-Kutta* à s étages pour le problème (IV.1).

5. Les méthodes de Runge-Kutta (1901) à s étages

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j \kappa_{n,j}, \\ t_{n,i} = t_n + c_i h, \quad i = 1, \dots, s, \\ \kappa_{n,i} = f \left(t_{n,i}, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \kappa_{n,j} \right), \quad i = 1, \dots, s. \end{array} \right. \quad (\text{IV.8})$$

Pour les méthodes (IV.8), il est d'usage de ranger les vecteurs $b, c \in \mathbb{R}^s$ et la matrice $A \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ respectivement définis par $b = (b_1, \dots, b_s)^T$, $c = (c_1, \dots, c_s)^T$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq s}$ dans un tableau dit de Butcher [29, p. 51] de la forme

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

On supposera toujours la condition suivante vérifiée

$$\sum_{j=1}^s b_j = 1,$$

pour intégrer de manière exacte le cas où la fonction f est égale à 1. Selon la nature de la matrice A , pleine, triangulaire inférieure, triangulaire inférieure stricte, on utilise des noms différents pour les méthodes de Runge-Kutta. Nous allons les présenter séparément.

2.1.1 Méthode de Runge-Kutta explicites

Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont caractérisées par une matrice triangulaire strictement inférieure A ($a_{ij} = 0$ si $j \geq i$) et sont donc définies, pour le problème (IV.1) par

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i \kappa_i \tag{IV.9}$$

et les calculs intermédiaires sont donnés par

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= f(t_n, y_n) \\ \kappa_2 &= f(t_n + c_2 h, y_n + h a_{21} \kappa_1) \\ \kappa_3 &= f(t_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} \kappa_1 + a_{32} \kappa_2)) \\ &\dots \\ \kappa_s &= f(t_n + c_s h, y_n + h(a_{s1} \kappa_1 + \dots + a_{s,s-1} \kappa_{s-1})), \end{aligned}$$

leur tableau de Butcher est donc de la forme

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s \end{array}$$

dans lequel et par habitude, on a omis les 0. Comme on peut le remarquer, ces méthodes sont explicites puisque on ne doit résoudre aucun système pour calculer y_{n+1} à partir de y_n . Donnons comme exemple les tableaux associés aux méthodes explicites que nous avons déjà définies, à savoir les méthodes d'Euler explicite, de Runge et de Heune :

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

La détermination des coefficients de ces méthodes pour des ordres p supérieurs ou égaux à 3 devient vite complexe car le nombre de conditions à vérifier croît exponentiellement. La méthode actuellement la plus utilisée est celle d'ordre 4 et communément appelée "la" méthode de Runge-Kutta elle a été obtenue par Kutta en 1901 et est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_1 = f(t_n, y_n), \\ \kappa_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}\kappa_1), \\ \kappa_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}\kappa_2), \\ \kappa_4 = f(t_n + h, y_n + h\kappa_3), \\ y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{1}{6}\kappa_1 + \frac{1}{3}\kappa_2 + \frac{1}{3}\kappa_3 + \frac{1}{6}\kappa_4 \right), \end{array} \right. \tag{IV.10}$$

avec son tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
 \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
 \end{array}$$

2.1.2 Méthodes de Runge-Kutta implicites

Quand la matrice A est pleine, nous avons un système de $p \times s$ équations à $p \times s$ inconnues à résoudre et on parle donc de méthodes de Runge-Kutta implicites. Elles sont beaucoup plus coûteuses à mettre en œuvre que les méthodes explicites mais sont parfois nécessaires comme nous allons le voir dans cette partie. Une famille célèbre de méthodes de Runge-Kutta implicites a été construite par Ehle dans [42], ces méthodes sont appelées des méthodes de Radau IIA car elles sont basées sur les formules de quadrature dues à Christophe Radau dans [85]. Pour un nombre d'étages donné s , ces méthodes sont d'ordre $2s - 1$. Pour $s = 1$, il s'agit de la méthode d'Euler implicite de tableau

$$\begin{array}{c|c}
 1 & 1 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

pour $s = 2$, le tableau est donné par

$$\begin{array}{c|cc}
 1/3 & 5/12 & -1/12 \\
 1 & 3/4 & 1/4 \\
 \hline
 & 3/4 & 1/4
 \end{array}$$

et enfin pour $s = 3$, on obtient la méthode appelée Radau5 de tableau

$$\begin{array}{c|ccc}
 \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{6}}{10} & \frac{11}{45} - \frac{7\sqrt{6}}{360} & \frac{37}{225} - \frac{169\sqrt{6}}{1800} & -\frac{2}{225} + \frac{\sqrt{6}}{75} \\
 \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{6}}{10} & \frac{37}{225} + \frac{169\sqrt{6}}{1800} & \frac{11}{45} + \frac{7\sqrt{6}}{360} & -\frac{2}{225} - \frac{\sqrt{6}}{75} \\
 1 & \frac{4}{9} - \frac{\sqrt{6}}{36} & \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{6}}{36} & \frac{1}{9} \\
 \hline
 & \frac{4}{9} - \frac{\sqrt{6}}{36} & \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{6}}{36} & \frac{1}{9}
 \end{array}$$

2.1.3 Méthodes de Runge-Kutta semi-implicites et SDIRK

Un cas particulier de méthodes de Runge-Kutta implicites correspond au cas où la matrice A est triangulaire inférieure ($a_{ij} = 0$ si $j > i$) on parle de méthodes de Runge-Kutta semi-implicites. Il faut dans ce cas résoudre s systèmes de p équations à p inconnues ce qui est déjà beaucoup plus simple. Pour encore simplifier les choses, on peut supposer que les coefficients diagonaux sont les mêmes, ce qui permet de résoudre s fois le même système, on parle alors de méthode de type SDIRK, Singly-Diagonally Implicit Runge-Kutta. Un exemple de ce type de méthode d'ordre 4, que nous appellerons SDIRK4 est donné par Hairer et Wanner [53, p. 100] avec le tableau suivant

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
$\frac{11}{20}$	$\frac{17}{50}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{1}{4}$	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{371}{1360}$	$-\frac{137}{2720}$	$\frac{15}{544}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{25}{24}$	$-\frac{49}{48}$	$\frac{125}{16}$	$-\frac{85}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{25}{24}$	$-\frac{49}{48}$	$\frac{125}{16}$	$-\frac{85}{12}$	$\frac{1}{4}$

Nous allons maintenant tester ces différentes méthodes pour une équation très simple et introduire la notion de A-stabilité.

2.2 Equation test de Dahlquist et A-stabilité

Considérons l'équation test de Dahlquist [34]

$$y'(t) = \lambda y(t), t > 0, \quad y_0 = 1, \quad (\text{IV.11})$$

λ appartenant à \mathbb{C} . La solution exacte de cette équation est donnée par

$$y(t) = e^{\lambda t}.$$

Une conséquence directe de cette formule explicite est que si $\Re \lambda \leq 0$, cette solution est bornée pour $t \geq 0$, on peut espérer que la solution numérique ait la même propriété. En appliquant une méthode de Runge-Kutta pour résoudre (IV.11), nous trouvons comme solution

$$y_{n+1} = \mathcal{R}(h\lambda)y_n,$$

que l'on peut réécrire de manière récursive

$$y_n = [\mathcal{R}(h\lambda)]^n y_0.$$

La fonction \mathcal{R} de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est appelée la fonction de stabilité de la méthode, il s'agit d'une fraction rationnelle en λ quand la méthode est implicite et une fonction polynomiale quand la méthode est explicite. Comme nous l'avons signalé quand $\Re \lambda \leq 0$, la solution de (IV.11) est bornée ce qui amène à la notion de A-stabilité d'une méthode :

Définition 2.2 Une méthode de Runge-Kutta est dite A-stable si son domaine de stabilité défini par

$$S := \{z \in \mathbb{C}; |\mathcal{R}(z)| \leq 1\}$$

satisfait

$$\{z \in \mathbb{C}; \Re z \leq 0\} \subset S.$$

Exemple 2.1 Pour la méthode d'Euler explicite (IV.4) nous avons

$$\mathcal{R}(z) = 1 + z,$$

et le domaine de stabilité s'écrit

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}; |1 + z| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C}; |z - (-1)| \leq 1\}.$$

Il s'agit du cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1. Cette méthode n'est donc pas A-stable.

Pour la méthode d'Euler implicite, nous avons

$$\mathcal{R}(z) = \frac{1}{1 - z},$$

et le domaine de stabilité s'écrit

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}; |1 - z| \geq 1\}.$$

Il s'agit du complémentaire du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1. Cette méthode est A-stable.

De manière générale une méthode de Runge-Kutta explicite n'est jamais A-stable car sa fonction de stabilité est un polynôme qui ne peut pas être borné pour des grandes valeurs de λ . Seules des méthodes implicites peuvent être A-stables et un outil de calcul formel peut être utilisé pour cela. En effet, comme cela est démontré par Hairer et Wanner [53, p. 41], la fonction de stabilité d'une méthode de Runge Kutta est donnée par

$$R(z) = \frac{\det (Id - zA + z\mathbf{1}b^t)}{\det (Id - zA)}$$

avec $\mathbf{1}$ le vecteur de taille s défini par

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le principe du maximum, on remarque alors que pour que la méthode soit A-stable, il suffit de supposer que

1. R est une fonction analytique de z pour $\Re z < 0$ (il suffit pour cela de s'assurer que les pôles de cette fonction sont à partie réelle strictement positive),
2. $|R(iy)| \leq 1$ pour tout réel y (qui peut-être vérifié en étudiant cette fonction de y).

Nous avons développé un code SageMath qui permet de vérifier qu'une méthode de Runge-Kutta donnée par son tableau de Butcher est A-stable ou non, nous présentons en annexe deux exemples celui de la méthode SDIRK4 présentée précédemment et la méthode Radau5 qui sont toutes les deux A-stables.

Longtemps, les méthodes de Runge-Kutta implicites A-stables ont été utilisées pour résoudre des problème du type

$$y'(t) = -A_h y(t), t > 0, \tag{IV.12}$$

où A est une matrice symétrique définie positive ayant des valeurs propres de grandes tailles, cas que l'on rencontre typiquement quand on discrétise en espace l'équation de la chaleur. Cependant depuis quelques années, on utilise à nouveau des méthodes explicites dites stabilisées que nous allons présenter.

2.3 Méthodes de Runge-Kutta explicites stabilisées

Dans le cadre de la résolution des équations (IV.12), les méthodes de Runge-Kutta explicites stabilisées évitent la résolution de grands systèmes linéaires à chaque pas et leur domaine de stabilité étendue le long de l'axe des réels négatifs fait en sorte qu'elles souffrent moins que les méthodes explicites classiques de la réduction du pas de temps. Pour des détails supplémentaires nous nous référons à l'article de Verwer [108, 1996]. Nous nous inspirons également de Hairer et Wanner [54, p. 31-36] et Abdulle [3, 2011] qui sont d'excellent résumés sur ce type de méthodes.

Le problème considéré est de construire des méthodes numériques d'ordre p avec des polynômes \mathcal{R}_s de degré s ayant une stabilité optimale (c'est-à-dire un intervalle de stabilité maximal) autour de l'axe des réels négatifs, appelés polynômes de stabilité optimal. Cela revient à trouver une famille de polynômes de degré s de la forme

$$\mathcal{R}_s(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_s z^s, \quad \alpha_j = \frac{1}{j!}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (\text{IV.13})$$

avec $s \geq p + 1$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour $i \geq p + 1$ et satisfaisant avec $\ell_s > 0$ aussi grand que possible

$$|\mathcal{R}(z)| \leq 1, \quad \text{pour } z \in [-\ell_s, 0]. \quad (\text{IV.14})$$

De tels polynômes existent, sont uniques [87] et satisfont à la propriété d'ondulation égale sur $s - p + 1$ points suivante :

Propriété 2.1 : si \mathcal{R}_s est un polynôme de stabilité optimal, alors il existe

$$-\ell_s = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{s-p} < 0, \quad (\text{IV.15})$$

telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_s(z_i) &= -\mathcal{R}_s(z_{i+1}) & \forall i = 0, 1, \dots, s-p-1 \\ |\mathcal{R}_s(z_i)| &= 1 & \forall i = 0, 1, \dots, s-p. \end{aligned}$$

Cas particulier : Polynôme de stabilité du premier ordre

Dans le cas particulier où $p = 1$, le polynôme de stabilité optimal \mathcal{R}_s (maximisant ℓ_s) est connu [45, 52, 93] et est donné par les polynômes de Chebyshev décalé

$$\mathcal{R}_s(z) = T_s \left(1 + \frac{z}{s^2} \right), \quad (\text{IV.16})$$

avec $\ell_s = 2s^2$, de sorte que

$$\mathcal{R}_s(0) = 1, \quad \mathcal{R}'_s(0) = 1 \quad \text{et} \quad |\mathcal{R}(z)| \leq 1 \quad \text{pour } z \in [-2s^2, 0], \quad (\text{IV.17})$$

et où les T_s sont les polynômes de Chebyshev définis par

$$T_s(z) = \cos(s \arccos z), \quad z \in [-1, 1] \quad (\text{IV.18})$$

ou par la relation de récurrence à trois termes

$$T_0(z) = 1, \quad T_1(z) = z, \quad T_s(z) = 2zT_{s-1}(z) - T_{s-2}(z), \quad s \geq 2, \quad (\text{IV.19})$$

qui restent bornés entre -1 et 1 .

Cependant pour les points $z_i \in \mathbb{R}^-$ où $\mathcal{R}_s(z_i) = \pm 1$ le domaine de stabilité a une largeur nulle. Guillou et Lago [52] suggèrent donc de remplacer la condition de stabilité (IV.14) par

$$|\mathcal{R}_s(z)| \leq \eta < 1, \quad \text{pour } z \in [-\ell_{s,\eta}, -\delta_n], \quad (\text{IV.20})$$

où $\delta_n > 0$ dépend de $\eta > 0$ (très petit) et de remplacer le polynôme (IV.16) par

$$\mathcal{R}_s(z) = \frac{T_s(\omega_0 + \omega_1 z)}{T_s(\omega_0)}, \quad \omega_0 = 1 + \frac{\eta}{s^2}, \quad \omega_1 = \frac{T_s(\omega_0)}{T_s'(\omega_0)}, \quad (\text{IV.21})$$

de sorte que pour tout ω_0 , $\mathcal{R}_s'(0) = 1$, ω_0 est le "*paramètre d'amortissement*". Suivant Verwer [108, p. 365], en utilisant les valeurs de $T_s'(1) = s^2$ et de $T_s''(1) = \frac{1}{3}s^2(s^2 - 1)$, il peut-être vérifié que

$$\ell_{s,\eta} = \frac{(1 + \omega_0)T_s'(\omega_0)}{T_s(\omega_0)} \approx (2 - \frac{4}{3}\eta)s^2. \quad (\text{IV.22})$$

Par conséquent, les polynômes $\mathcal{R}_s(z)$ oscillent entre $1 - \eta$ et $1 + \eta$ tandis que le domaine de stabilité le long de l'axe des réels négatif se rétrécit d'approximativement $(\frac{4}{3}\eta)s^2$. ($\eta = 0.05$ est un choix judicieux). Une liste assez exhaustive des méthodes de ce type est donnée dans [3].

Deux grandes familles de méthodes basées sur ce type d'idées sont nées : les méthodes par composition et les méthodes par récurrence.

2.3.1 Les méthodes par composition

Cette première famille est celle des méthodes dites de type Lebedev [63] dont l'idée est (par exemple) lorsque $p = 1$ d'écrire les polynômes de stabilité sous la forme [52, 93]

$$\mathcal{R}_s(z) = \prod_{i=1}^s (1 + \delta_i z), \quad \delta_i = -\frac{1}{z_i}, \quad (\text{IV.23})$$

où les z_i sont les racines de $\mathcal{R}_s(z)$, et de représenter les schémas de RK comme composition d'étapes d'Euler explicites

$$\begin{aligned} g_0 &= y_n \\ g_i &= g_{i-1} + h\delta_i f(g_{i-1}), \quad i = 1, \dots, s, \\ y_{n+1} &= g_s. \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Un inconvénient de cette méthode est qu'il n'existe aucune expression analytique pour les polynômes de stabilité optimal d'ordre $p \geq 2$ [64, 68]. Dans la pratique ils sont approchés numériquement [62] et jouissent tout comme ceux du premier ordre d'une croissance quadratique (avec s) de la région de stabilité le long de l'axe des réels négatif. Par exemple pour $p = 2$, $\ell_s = 0.82s^2$ et pour $p = 4$, $\ell_s = 0.34s^2$. Ce type de méthodes a été implémenté dans les méthodes (ou code) de DUMKA [61, 63].

2.3.2 Les méthodes par récurrence ou RKC

Connue sous le nom de méthode de Runge-Kutta-Chebyshev (RKC), cette méthode fût développée par Van der Houwen et Sommeijer [106] qui utilisent la relation de récurrence (IV.19) des polynômes de Chebychev. La méthode est basée sur l'introduction d'une correction du polynôme de Chebychev décalé du premier ordre pour obtenir un polynôme du second ordre de la manière suivante [11] :

$$\mathcal{R}_s(z) = a_s + b_s T_s(\omega_0 + \omega_1 z), \quad \omega_0 = 1 + \frac{\eta}{s^2}, \quad \eta = \frac{2}{13}, \quad (\text{IV.25})$$

où les conditions du second ordre [106, éq. (2.15)]

$$\mathcal{R}_s(0) = a_s + b_s T_s(\omega_0) = 1, \quad \mathcal{R}'_s(0) = b_s \omega_1 T'_s(\omega_0) = 1, \quad \mathcal{R}''_s(0) = b_s \omega_1^2 T''_s(\omega_0) = 1, \quad (\text{IV.26})$$

nous conduisent à

$$a_s = 1 - b_s T_s(\omega_0), \quad \omega_1 = \frac{T'_s(\omega_0)}{T''_s(\omega_0)}, \quad b_s = \frac{T''_s(\omega_0)}{[T'_s(\omega_0)]^2} \quad (\text{IV.27})$$

et leurs intervalles de stabilité sont approximativement donnés par $-0.65s^2$ et couvrent environ 80% des intervalles de stabilité des polynômes de stabilité optimal du second ordre. Sous certaines conditions (voir [101]) sur les étapes internes dans le calcul des coefficients et en utilisant la formule de récurrence à trois termes (IV.19), les méthodes RKC sont construites par le schéma suivant [100, p. 317] :

$$\begin{aligned} g_0 &= y_n \\ g_1 &= g_0 + \kappa_1 h f(g_0) \\ g_i &= (1 - \mu_i - \nu_i)g_0 + \mu_i g_{i-1} + \nu_i g_{i-2} \\ &\quad + \kappa_i h f(g_{i-1}) - [1 - b_{i-1} T_{i-1}(\omega_0)] \kappa_i h f(g_0), \quad i = 2, \dots, s, \\ y_{n+1} &= g_s, \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

où les coefficients sont

$$\kappa_1 = b_1 \omega_1, \quad \mu_i = \frac{2b_i \omega_0}{b_{i-1}}, \quad \nu_i = \frac{-b_i}{b_{i-2}}, \quad \kappa_i = \frac{2b_i \omega_1}{b_{i-1}}, \quad b_0 = b_2, \quad b_1 = b_2 \quad (2 \leq i \leq s).$$

2.4 Les Méthodes ROCK

2.4.1 Vue d'ensemble

Ces méthodes, basées sur des polynômes orthogonaux utilisent une relation de récurrence à trois termes pour construire des polynômes de stabilité presque optimal le long de l'axe des réels négatifs. Elles sont vues comme une combinaison des méthodes de type Lebedev (DUMKA) et de type Van der Houwen-Sommeijer (RKC) implémentées dans les codes appelés ROCK2 [4] et ROCK4 [2]. La dénomination ROCK, Runge-Orthogonal-Chebyshev-Kutta, vient d'un jeu de mots puisque l'on devrait écrire Runge-Kutta-Chebyshev-Orthogonal. Un résultat important est donné dans le théorème suivant.

Théorème 2.1 (Abdulle [1, p. 179])

Les polynômes de stabilité optimal (IV.13) possèdent exactement p racines complexes si p est pair et exactement $p - 1$ si p est impair. Les racines réels restantes sont distinctes et appartiennent à l'intervalle $[-\ell_s, 0]$. De plus $\mathcal{R}_s(z_{s-p}) = (-1)^p$ pour tout s .

Ainsi, pour un p donné, l'idée est de chercher une approximation de (IV.13) satisfaisant la condition (IV.14) de la forme

$$\mathcal{R}_s(z) = \omega_p(z)P_{s-p}(z), \quad (\text{IV.29})$$

où ω_p est un polynôme positif de degré p n'ayant que des racines complexes si p est pair et une seule racine réel si p est impair. Les P_{s-p} sont des polynômes orthogonaux associée à la fonction poids $\omega_p^2(z)/\sqrt{1-z^2}$, tel que $\mathcal{R}_s(z)$ entraîne un polynôme de stabilité d'ordre p qui restent bornés aussi longtemps que possible sur l'axe des réels négatifs.

Une fois les polynômes de stabilité presque optimale construits, grâce à la relation de récurrence à trois termes des polynômes orthogonaux $P_i(z)$

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = 1 + \mu_1 z, \quad P_i(z) = (\mu_i z - \nu_i)P_{i-1}(z) - \kappa_i P_{i-2}(z), \quad (\text{IV.30})$$

avec $i = 2, \dots, s - p$, on peut définir les étapes internes de la méthode

$$g_i = h\mu_i f(g_{i-1}) - \nu_i g_{i-1} - \kappa_i g_{i-2}, \quad i = 2, \dots, s - p. \quad (\text{IV.31})$$

2.4.2 ROCK 2

La fonction de stabilité du ROCK2 ($p = 2$) est donnée par

$$\mathcal{R}_s(z) = \omega_2(z)P_{s-2}(z), \quad (\text{IV.32})$$

où le polynôme ω_2 choisi tel que \mathcal{R}_s satisfasse

$$\mathcal{R}_s(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \mathcal{O}(z^3), \quad z \rightarrow 0, \quad (\text{IV.33})$$

pour un intervalle de stabilité défini avec $\ell_s = 0.81 \cdot s^2$ et le paramètre de "damping" est $\eta = 0.95$.

La relation de récurrence à trois termes des polynômes orthogonaux est utilisée pour définir les étapes internes de la méthode suivante [101]

$$\begin{aligned} g_0 &= y_n \\ g_1 &= g_0 + \mu_1 h f(g_0) \\ g_i &= h\mu_i f(g_{i-1}) - \nu_i g_{i-1} - \kappa_i g_{i-2}, \quad i = 2, \dots, s - 2 \\ g_{s-1}^* &= g_{s-2} + h\sigma f(g_{s-2}) \\ g_s^* &= g_{s-1}^* + h\sigma f(g_{s-1}^*) \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

$$y_{n+1} = g_s^* - h\sigma \left(1 - \frac{\tau}{\sigma^2}\right) (f(g_{s-1}^*) - f(g_{s-2})).$$

Les coefficients (μ_i, ν_i, κ_i) sont calculés (cf. [4, p. 13]) en insérant trois valeurs différentes de z dans l'équation

$$\widehat{P}_n(z) = (\mu_n z - \nu_n)\widehat{P}_{n-1}(z) - \kappa_n \widehat{P}_{n-2}(z), \quad (\text{IV.35})$$

puis, en résolvant le système

$$\mu_n r_i \widehat{P}_{n-1}(r_i) - \nu_n \widehat{P}_{n-1}(r_i) - \kappa_n \widehat{P}_{n-2}(r_i) = \widehat{P}_n(r_i) \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{IV.36})$$

de sorte que

$$\begin{vmatrix} r_1 \widehat{P}_{n-1}(r_1) & \widehat{P}_{n-1}(r_1) & \widehat{P}_{n-2}(r_1) \\ r_2 \widehat{P}_{n-1}(r_2) & \widehat{P}_{n-1}(r_2) & \widehat{P}_{n-2}(r_2) \\ r_3 \widehat{P}_{n-1}(r_3) & \widehat{P}_{n-1}(r_3) & \widehat{P}_{n-2}(r_3) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{IV.37})$$

Quant aux coefficients σ et τ , ils sont choisis tels que $\omega_2(z) = 1 + 2\sigma z + \tau z^2$ et (IV.33) soit vérifié. Nous avons [5, p. 872] pour $3 \leq s \leq 200$, $\sigma \in (0.367, 0.410)$ et $\tau \in (0.2, 0.4)$.

2.4.3 ROCK4

L'objectif est de construire une famille de polynômes d'ordre 4 dépendant du degré s de la forme

$$\widetilde{\mathcal{R}}_s(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \mathcal{O}(z^5). \quad (\text{IV.38})$$

de sorte que

$$|\widetilde{\mathcal{R}}_s(z)| \leq 1, \quad \text{pour } z \in [-\widetilde{\ell}_s, 0]. \quad (\text{IV.39})$$

D'après le Théorème (2.1) ces polynômes peuvent s'écrire comme

$$\widetilde{\mathcal{R}}_s(z) = \widetilde{\omega}_4(z) \widetilde{P}_{s-4}(z), \quad (\text{IV.40})$$

où $\widetilde{\omega}_4(z) = (1 - /t_1)(1 - /t_1)(1 - /t_2)(1 - /t_2)$, t_i sont des nombres (conjugués) complexes, et $\widetilde{P}_{s-4}(z)$ ne possède que des racines réelles. L'idée est maintenant d'approcher ces polynômes par

$$\mathcal{R}_s(z) = \omega_4(z) P_{s-4}(z), \quad (\text{IV.41})$$

où $\omega_4(z) = (1 - /z_1)(1 - /z_1)(1 - /z_2)(1 - /z_2)$ et $P_{s-4}(z)$ est un polynôme orthogonal associé à la fonction poids $\omega_4^2(z)/\sqrt{1-z^2}$. Nous voulons trouver une telle décomposition qui satisfasse (IV.39) pour $z \in [-\ell_s, 0]$ avec ℓ_s proche de $\widetilde{\ell}_s$. Dans le même temps nous voulons que le produit satisfasse (IV.38).

Les coefficients de la fonction poids $\omega_4(z)$ doivent être calculés de sorte que les (8) conditions d'ordre 4 soient satisfaites. Abdulle [2] utilise la théorie sur la construction de méthodes de composition explicite d'ordre p faite dans [68, p.381-387] pour obtenir les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4. Notée WP le procédé se fait en 2 étapes de la manière suivante :

1. Construire une première méthode, nommée P , qui possède $P_{s-4}(z)$ comme polynôme de stabilité. Cela se fait en utilisant la relation de récurrence (IV.30) pour définir les étapes internes (IV.31), cette fois avec $p = 4$.
2. Déterminer la seconde méthode, nommée W , qui possède $\omega_4(z)$ comme polynôme de stabilité afin d'atteindre l'ordre 4 pour la méthode "composite" désignée par WP . Le calcul des coefficients de la méthode W est donnée dans [2, p. 2046-2047].

3 APPLICATIONS DES MÉTHODES RK POUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR AVEC DES DONNÉES INITIALES PEU RÉGULIÈRES

Soit Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2$ ou 3 , de frontière notée Γ et T un réel strictement positif. On s'intéresse dans cette partie à la résolution numérique de l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta u(x, t) + u(x, t) = 0, & x \in \Omega, t \in]0, T[, \\ u(x, t) = 0, & x \in \Gamma, t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

pour des données initiales peu régulières, par exemple en une dimension, on peut supposer que la condition initiale est une fonction continue mais non dérivable. Ce choix de conditions initiales est motivé par des modèles financiers comme nous allons le détailler dans une première partie. Dans une deuxième partie, nous montrerons pourquoi on utilise habituellement des méthodes implicites pour résoudre ce type de problème mais montrerons également que l'utilisation des méthodes ROCK peut s'avérer très efficace.

3.1 Du modèle de Black-Scholes à l'équation de la chaleur

3.1.1 Le modèle de marché de Black-Scholes

Commençons par définir le mouvement Brownien, œuvre de Robert Brown [28, 1828] qui a observé le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. Après de nombreuses recherches sur cette notion, et ce, durant de longues années, Wiener [110, 1923] fût le premier à apporter une preuve mathématique de l'existence du Brownien.

3.1.2 Le mouvement Brownien

Définition 3.1 *Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous décrivons le mouvement Brownien standard ou processus de Wiener standard sur $[0, T]$, comme un processus stochastique $W = \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ Gaussien, à accroissements indépendants et stationnaires pour lequel*

- $W_0 = 0$ presque sûrement,
- Pour tout $0 < s < t$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$,

et ayant les propriétés (classiques) suivantes :

- Les trajectoires $t \mapsto W_t(\omega)$ de W sont continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} pour presque tout $\omega \in \Omega$.
- $\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t | W_s] = W_s$.
- Pour tous réels $s, t \geq 0$, $Cov(W_t, W_s) = \mathbb{E}[W_t W_s] = \min(t, s)$.

3.1.3 Construction du mouvement Brownien

Remarque 3.1 Une conséquence de la définition (3.1) est que

$$W(t) \sim \mathcal{N}(0, t), \quad \text{pour tout } 0 < t \leq T.$$

Ainsi, pour des constantes μ et σ , nous dirons qu'un processus $X(t)$ est un mouvement Brownien de coefficient de dérive μ et de diffusion σ^2 si (Glasserman [48, P. 80])

$$\frac{X(t) - \mu t}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Nous pourrions donc construire X à partir d'un mouvement Brownien standard W en posant

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t).$$

Il s'ensuit que $X(t) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$ et X est solution de l'EDS

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t).$$

3.1.4 Le modèle de marché de Black-Scholes

Pour deux processus $B = (B_t)_{t \geq 0}$ et $S = (S_t)_{t \geq 0}$ respectivement déterministes, stochastique et évoluant dans le temps, considérons le modèle de marché (B, S) dans lequel :

- Le processus B représente l'actif non-risqué. Sa valeur à la date t est

$$B_t = B_0 e^{rt} \tag{IV.43}$$

où B_0 représente sa valeur à la date $t = 0$ et r le taux d'intérêt supposé constant. Par exemple pour $B_0 = 1$, B vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$dB_t = r B_t dt \tag{IV.44}$$

- Le processus S représente l'actif risqué. Pour tout t , S_t prend comme valeurs le prix que l'actif peut atteindre. Ce prix S_t tient compte de la tendance du marché et de la volatilité du prix de l'action. Son évolution est celle du mouvement Brownien géométrique à coefficients constants dont la dynamique est caractérisée par l'EDS

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = s_0, \tag{IV.45}$$

où $W(t)$ est un processus de Wiener standard. Cette EDS est celle utilisée par Black-Scholes [26] pour l'évaluation du prix (Pricing) S_t d'une option sous-jacente (de type européen) à une action de volatilité σ , lorsque le taux d'intérêt est μ .

3. APPLICATIONS DES MÉTHODES RK POUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR AVEC DES DONNÉES INITIALES PEU RÉGULIÈRES

La solution explicite de l'équation (IV.45) est donnée par

$$S_t = s_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\},$$

obtenue en appliquant la formule d'Itô à la fonction $f(t, s) = \ln s$ pour trouver

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t, \quad \ln S_0 = \ln s_0.$$

Par ailleurs, pour tout t , $\ln S_t \sim \mathcal{N} \left\{ \log s_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right\}$.

Finalement, le marché sera formé des actifs B et S et de tous les actifs dérivés construits sur S. Le problème qui est posé aux agents du marché est celui de l'évaluation des prix (*pricing*) des dérivés. Il est supposé que l'on peut acheter, vendre, emprunter ou prêter à tout moment des quantités quelconques, éventuellement fractionnaires, de tout produit présent sur le marché ; on peut ainsi vendre un actif que l'on ne possède pas (*ventes à découvert ou short selling*). Enfin, le marché est supposé posséder la propriété *d'absence d'opportunité d'arbitrage*.

3.1.5 Équation aux dérivées partielles de Black-Scholes

Soit $f(t, S_t)$ Le prix à la date t d'une option européenne dont la date d'expiration est T et de pay-off $f_T(s)$ construit sur un actif risqué S .

Désignons par K le prix d'exercice fixé de l'option et rappelons que :

- Pour une option d'achat européenne

$$f_T(S_T) = \max(S_T - K, 0) \tag{IV.46}$$

- Pour une option de vente européenne

$$f_T(S_T) = \max(K - S_T, 0) \tag{IV.47}$$

L'agent qui a écrit l'option veut se couvrir en utilisant une stratégie (opérant en temps continu) de couverture en " Δ -neutre" de l'option. Il se constitue donc un portefeuille de couverture \mathcal{P} comportant :

- -1 option : le moins indiquant qu'il a vendu l'option,
- une quantité $\varphi_t = \frac{\partial f}{\partial S}$ d'actif S ,
- une quantité $\psi_t = (f(t, S_t) - \varphi_t S_t) e^{-rt}$ d'actifs non-risqué, actualisée au taux d'intérêt r du marché.

A chaque instant t , la valeur du portefeuille qu'il détient est nulle :

$$\mathcal{P}_t = -f_t + \varphi_t S_t + \psi_t e^{rt} = 0.$$

Le portefeuille (ψ_t, φ_t) étant autofinancé

$$d(\varphi_t S_t + \psi_t B_t) = \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t, \tag{IV.48}$$

et donc

$$d\mathcal{P}_t = -df_t + \varphi_t dS_t + r\psi_t e^{rt} dt = 0. \quad (\text{IV.49})$$

La formule d'Itô appliquée à f_t donne

$$df_t = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right\} dt + \varphi_t dS_t,$$

que nous remplaçons dans (IV.49) pour obtenir

$$- \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right\} dt + r \left\{ f - \frac{\partial f}{\partial S} S_t \right\} dt = 0. \quad (\text{IV.50})$$

Le prix f_t de l'option est donc solution de l'EDP dite Black-Scholes

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf, \quad (\text{IV.51})$$

de condition au bord $f(T, S_T) = f_T(S_T)$.

3.1.6 Obtention de l'équation de la chaleur

Reprenons l'EDP de Black-Scholes (IV.51) :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S, t) + rS_t \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t) = rf(S, t). \quad (\text{IV.52})$$

Nous allons la transformer de façon à obtenir une équation de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall \tau > 0 \\ u(x, 0) = u_x(0). \end{cases}$$

Nous procédons en deux étapes :

1ère étape : Éliminer les coefficients en S et S^2 .

Pour cela on pose $S = K e^x$, $t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$ et $f(S, t) = K v(x, \tau)$. On obtient alors

$$v(x, \tau) = K^{-1} f(S, t) = K^{-1} f(K e^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}),$$

avec comme condition au bord $v(x, 0) = K^{-1} f(K e^x, T)$ ($t = T$ donne $\tau = 0$).

Partant de là, en notant que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial S} \times \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial x} \right], \quad (\text{IV.53})$$

et en remarquant que $\partial S / \partial x = S$ et $\partial t / \partial x = 0$, on trouve :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{S}{K} \times \frac{\partial f}{\partial S}. \quad (\text{IV.54})$$

3. APPLICATIONS DES MÉTHODES RK POUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR AVEC DES DONNÉES INITIALES PEU RÉGULIÈRES

En posant $\ell(S, t) = \frac{S}{K} \times \frac{\partial f}{\partial S}$, on obtient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \ell}{\partial x}.$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial \ell}{\partial x} = \left[\frac{\partial \ell}{\partial S} \times \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial \ell}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{S}{K} \times \frac{\partial f}{\partial S} \right] \times S \\ &= \frac{S}{K} \left[\frac{\partial S}{\partial S} \times \frac{\partial f}{\partial S} + S \times \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right] \\ &= \frac{S}{K} \times \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{S^2}{K} \times \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}. \end{aligned} \tag{IV.55}$$

Enfin (sachant que $\partial S / \partial \tau = 0$)

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{2}{K\sigma^2} \times \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{IV.56}$$

Des équations (IV.54), (IV.55) et (IV.56) nous tirons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{K\sigma^2}{2} \times \frac{\partial v}{\partial \tau} \\ \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{K}{S} \times \frac{\partial v}{\partial x} \\ S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = K \times \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - K \times \frac{\partial v}{\partial x}. \end{array} \right. \tag{IV.57}$$

En effectuant les opérations (simples) suivantes : remplacer les équations de (IV.57) dans (IV.52) puis multiplier le résultat obtenu par $\frac{2}{K\sigma^2}$ et enfin poser $\gamma = \frac{2r}{\sigma^2}$, on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\gamma - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma v. \tag{IV.58}$$

2ème étape : Changement de variable.

Posons

$$v(x, \tau) = e^{ax+b\tau} \times u(x, \tau). \tag{IV.59}$$

La condition au bord $v(x, 0) = e^{ax} \times u(x, 0)$, fournit

$$u(x, 0) = e^{-ax} \times v(x, 0) = e^{-ax} \times K^{-1} f(K e^x, T). \tag{IV.60}$$

On calcule $\frac{\partial v}{\partial \tau}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x^2}$ qu'on remplace dans (IV.58) pour obtenir

$$e^{ax+b\tau} \left(bu + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = e^{ax+b\tau} \left\{ \left[a^2 u + 2a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + (\gamma - 1) \left(au + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \gamma u \right\}, \quad (\text{IV.61})$$

qu'on arrange termes à termes pour avoir

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2a + \gamma - 1) \frac{\partial u}{\partial x} + [a^2 + (\gamma - 1)a - \gamma - b] u. \quad (\text{IV.62})$$

Il nous reste maintenant à éliminer les termes en u et $\frac{\partial u}{\partial x}$. On vérifie aisément que $a = -\frac{1}{2}(\gamma - 1)$ et $b = -\frac{1}{4}(\gamma + 1)^2$ vérifient

$$\begin{cases} 2a + \gamma - 1 = 0 \\ a^2 + (\gamma - 1)a - \gamma - b = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.63})$$

Par conséquent,

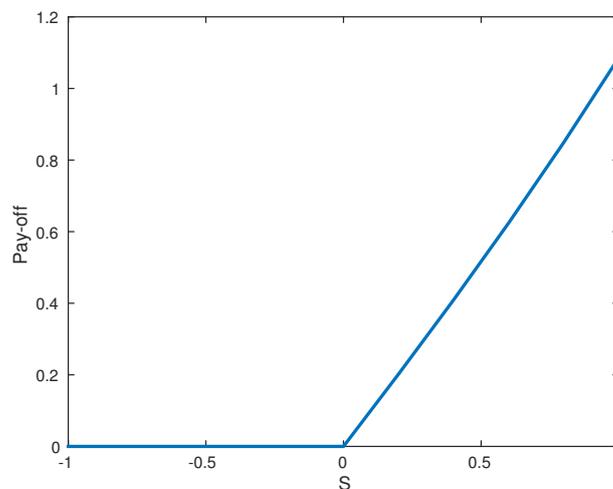
$$v = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\gamma - 1)x - \frac{1}{4}(\gamma + 1)^2 \tau \right\} u(x, \tau), \quad (\text{IV.64})$$

et donc u vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall \tau > 0 \\ u(x, 0) = e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)x} \times K^{-1} f(K e^x, T). \end{cases} \quad (\text{IV.65})$$

Donnons un exemple de condition initiale :

Considérons un Call européen de prix d'exercice $K = 100$ et de maturité $T = 1$ ans. Pour un taux d'intérêt $r = 2\%$ et une volatilité $\sigma = 0.7$ de l'actif sous-jacent, après changement de variables, le graphique (IV.1) montre une représentation de cette condition initiale qui, comme on peut le constater, n'est pas C^1 .



Graphique IV.1 – Pay-off d'un Call européen pour l'équation de la chaleur.

3.2 Estimations d'erreur dans le cas des méthodes de Runge-Kutta implicites

Nous revenons maintenant à l'équation (IV.42) et utilisons les résultats de Michel Crouzeix [32] pour donner quelques estimations d'erreur. Introduisons l'opérateur non borné défini par son domaine $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $A = -\Delta + Id$, $H^2(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev d'ordre 2 usuel et $H_0^1(\Omega)$ celui d'ordre 1 avec trace nulle sur Γ .

L'équation (IV.42) s'écrit de manière équivalente

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in]0, T[, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{IV.66})$$

et il est connu que ce problème possède une unique solution u telle que appartient à $C^1(]0, +\infty[, D(A)) \cap C(]0, +\infty[, L^2(\Omega))$. Il suffit donc de supposer que la donnée initiale appartient à $L^2(\Omega)$ pour avoir existence d'une solution sans supposer plus de régularité sur la condition initiale, ce que nous ne pourrions pas faire puisque par exemple, dans l'exemple précédent, nous avons choisi une donnée non dérivable qui ne peut donc pas être dans $H^2(\Omega)$. Quand on approche l'équation (IV.66) par un schéma en temps, les estimations d'erreur que l'on peut obtenir dépendent au moins de Au_0 , puisqu'il faut supposer que la condition initiale soit régulière mais il existe quand même une majoration d'erreur dans le cas où la donnée initiale appartient seulement à $L^2(\Omega)$. Il est démontré dans [32] que si l'on utilise un méthode de Runge-Kutta de la forme rappelée au début de ce chapitre, c'est-à-dire

$$u^{n+1} = R(hA)u^n,$$

pour $n \geq 0$ avec une condition initiale $u^0 = u_0$, alors à condition que R satisfasse

1. il existe un entier p tel que au voisinage de $z = 0$, $R(z) = e^{-z} + O(|z|^{p+1})$,
2. $|R(z)| < 1$ pour tout z réel strictement négatif et $|R(\infty)| < 1$,

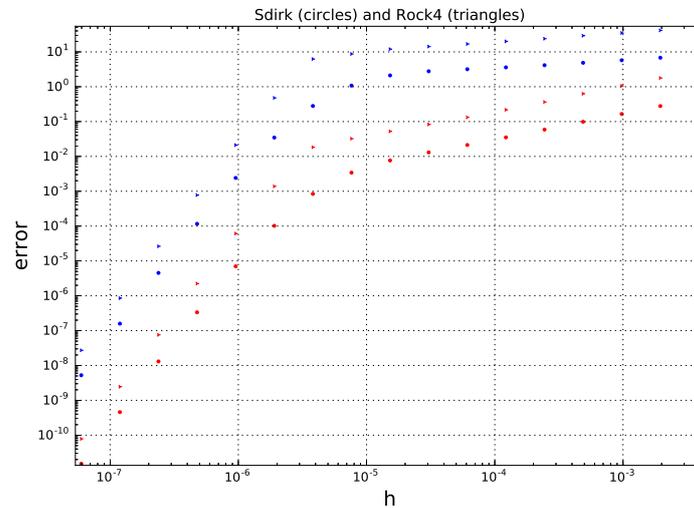
on a pour tout n supérieur ou égal à 2

$$|u(t_n) - u^n| \leq \frac{Ch^p}{t_n^p} |u_0|_{L^2}.$$

Pour avoir une estimation d'erreur, il est donc important de supposer que la méthode utilisée est implicite, satisfait $|R(z)| < 1$ pour tout z réel strictement négatif et $|R(\infty)| < 1$. Dans le cas où $|R(\infty)| = 0$, on dit que la méthode est L-stable. Comme nous pourrions le voir dans l'annexe, les méthodes SDIRK4 et Radau5 satisfont tous ces critères. La méthode Radau5 étant beaucoup plus coûteuse que la méthode SDIRK4, c'est celle que l'on a intérêt à choisir. Mais cette méthode d'ordre 4 reste implicite et donc plus coûteuse qu'une méthode explicite. Nous allons donc comparer numériquement cette méthode, SDIRK4, à la méthode ROCK4. Nous allons faire cette comparaison en une dimension sur l'intervalle $[0, 1]$ avec le schéma aux différences finies à trois points habituel et un pas de discrétisation en espace de $\Delta x = 1/256$ et des conditions de Neumann au bord pour simplifier, et cela pour deux types de conditions initiales :

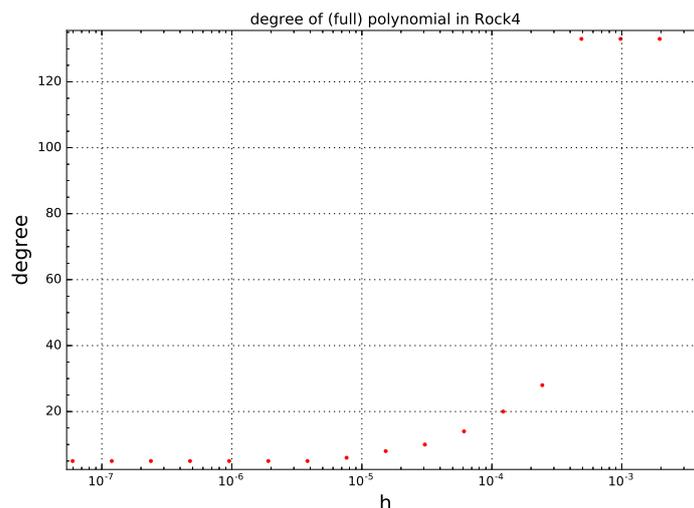
1. une fonction *créneau* qui vaut 0 sur $[0, 1/2]$ et 1 sur $[1/2, 1]$,
2. une fonction *dent de scie* qui vaut x sur $[0, 1/2]$ et $1 - x$ sur $[1/2, 1]$.

En utilisant un développement en séries de Fourier de ces deux conditions, on peut obtenir les solutions exactes pour tout temps et ainsi comparer l'erreur commise. Le graphique représente l'erreur commise pour une itération des deux méthodes SDIRK4 et ROCK4 en fonction du pas de temps choisi.



Graphique IV.2 – Comparaison des méthodes SDIRK4 et ROCK4 pour les deux conditions initiales. En rouge, la condition initiale en créneau, en bleu, celle en dent de scie.

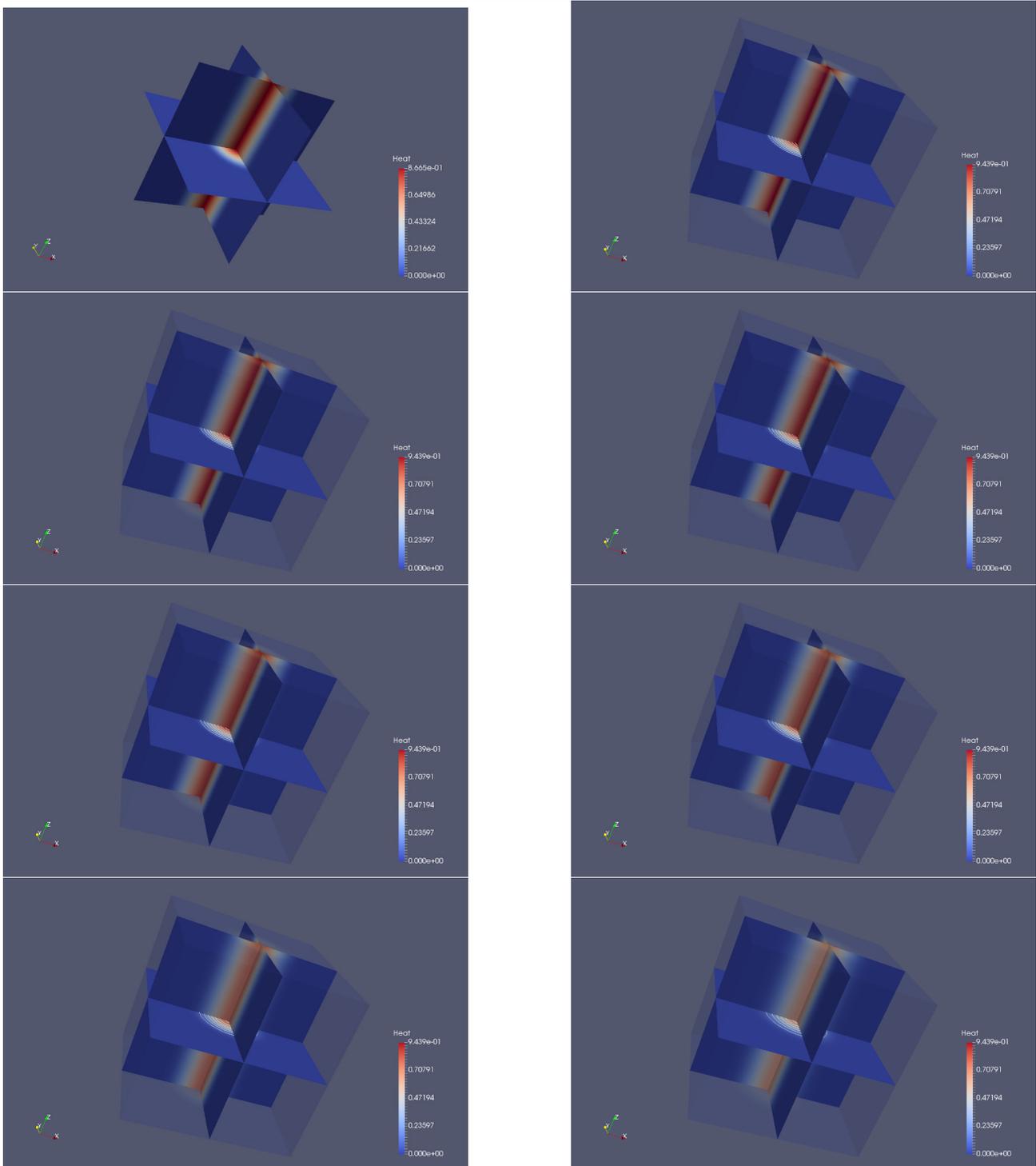
Nous pouvons déduire de ces simulations que l'on peut utiliser la méthode ROCK4 qui est même plus performante que la méthode SDIRK4. Nous pouvons même aller plus loin, en effet, le graphique montre que pour des petits pas de temps, la méthode ROCK4 qui adapte le degré des polynômes pour garantir une stabilité reste à un degré égal à 5, on peut donc fixer cette valeur dans le code de calcul.



Graphique IV.3 – Degrés des polynômes utilisés par la méthode ROCK4

Terminons ce chapitre en proposant une simulation numérique du même style mais cette fois-ci en trois dimensions sur $[0, 1]^3$ avec le schéma aux différences finies à sept points habituel

3. APPLICATIONS DES MÉTHODES RK POUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR AVEC DES DONNÉES INITIALES PEU RÉGULIÈRES



Graphique IV.4 – Évolution en trois dimensions avec une condition initiale sous forme de dent de scie

et un pas de discrétisation en espace de $h = 1/256$ dans chaque direction. La condition initiale est en forme de dent de scie en suivant l'axe z et nous montrons l'évolution de la solution qui tend vers 0. Notons qu'en utilisant les méthodes développées dans [36], on peut réduire le temps de calcul en augmentant le nombre de cœurs.

4 SYNTHÈSE DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons rappelé le principe des schémas de Runge-Kutta en insistant sur la différence entre les schémas explicites et les schémas implicites. Nous avons ensuite présenté les méthodes de Runge-Kutta explicites stabilisées comme les schémas ROCK. Nous avons alors considéré l'équation de la chaleur avec de données peu régulières et avons montré l'intérêt d'utiliser ces schémas ROCK sur ce type d'équation. Les résultats sont prometteurs et montrent qu'il est possible d'envisager une résolution avec un schéma explicite. L'extension naturelle sera de considérer des modèles de Black et Scholes avec plusieurs actifs ce qui augmentera la dimension, on passera par exemple à un Laplacien dans \mathbb{R}^d , d grand et l'usage de méthodes explicites sera réellement nécessaire.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La correction du biais dans les processus de diffusion et la résolution performante d'équations aux dérivées partielles pour des données initiales peu régulières sont des sujets de recherche toujours d'actualité. En effet, les difficultés qui en découlent, aussi bien théoriques qu'expérimentales, ne sont pas des moindres. Dans cette thèse, nous avons abordé plusieurs aspects de ces difficultés. Ce dernier chapitre permet de faire une synthèse qui met en évidence nos contributions principales et identifie les questions ouvertes ainsi que les perspectives de nos travaux.

Nous avons présenté de nouvelles expressions pour l'approximation des coefficients de skewness et d'excès de kurtosis du coefficient ϕ du modèle

$$X_{ih} = \phi X_{(i-1)h} + \sigma \sqrt{\frac{1-\phi^2}{2\kappa}} \varepsilon_i, \quad X_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2\kappa), \quad (\text{IV.67})$$

où $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $\phi = e^{-\kappa h} < 1$ et ε_i , $i = 1, \dots, n$, sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Ces résultats nécessitent l'évaluation des espérances des termes $\xi_{-s/2}$ pour $s = 0, 1, 2$ avec l'aide de certains résultats sur les traces des matrices produits. Dans certains cas, ces espérances sont difficiles à évaluer, il faut le faire numériquement. Pour obtenir des expressions explicites, nous avons également développé deux algorithmes permettant de déterminer par récurrence les traces du type $Tr[(C_2 \Sigma)^p]$ et $Tr[(C_1 \Sigma)^p]$, pour tout entier $p \geq 3$, où $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}$ est une matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ de terme général $\sigma_{ij} = \phi^{|i-j|}$, C_1 et C_2 sont deux matrices carrées de même taille que Σ telles que :

$C_1 = \{c_{1ij}\}$ avec $c_{1i,i+1} = 1/2$ si $1 \leq i \leq n$, $c_{1i,i-1} = 1/2$ si $2 \leq i \leq n+1$ et 0 ailleurs, $C_2 = \{c_{2ij}\}$ avec $c_{2ij} = 1$ pour $i = j = 1, 2, \dots, n$ et 0 ailleurs. Les résultats sont donnés pour $p = 1, 2, \dots, 6$.

Nous avons aussi proposé deux nouvelles expressions du biais et une expression de l'erreur quadratique moyenne du paramètre de retour à la moyenne dans un processus Ornstein-Uhlenbeck stationnaire avec une moyenne nulle. La première est obtenue par une simple expansion de Taylor d'ordre $O(n^{-2})$ de $\hat{\kappa}$ qui suggère la connaissance dans des coefficients coefficients de skewness et d'excès de kurtosis donnés par le Théorème 4.1. La seconde est basée sur la technique de Bao [15, 2007] et ressemble à celle de Yu [112, 2012]. Une analyse de l'erreur quadratique moyenne

indique que des expansions d'ordre plus élevé semblent apporter peu pour corriger le biais. Cependant, on observe un gain concernant l'efficacité. Un exercice de simulation confirme bien que ces expressions sont satisfaisantes au sens où elle rétablissent la courbure du vrai biais et a des caractéristiques équivalentes à ce dernier. Cependant, lorsque T est petit et κ est proche de zéro, ce qui correspond au cas de racine presque unitaire, nos simulations révèlent que nos formules n'approchent pas correctement le vrai biais.

Nous avons proposé de nouveaux résultats analytiques du biais et de l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur des moindres carrés ordinaires dans le modèle auto-régressif AR(1) et de l'estimateur du quai maximum de vraisemblance dans le modèle MA(1). Ces résultats ont été obtenus en considérant une expansion stochastique d'ordre $O(n^{-5/2})$ de la condition des moments. Nous montrons que ces expressions peuvent s'exprimer en termes d'espérance de produit croisés de formes quadratiques. Ces termes ont été exprimés explicitement, sans faire d'approximations dans le calcul des traces impliquées dans ces expressions, c'est-à-dire en fournissant des résultats exacts de ces différentes traces. Comparés aux expressions d'ordre moins élevé, les résultats de simulations montrent en général une meilleure correction de biais par nos expressions. Toutefois, pour des échantillons de très grande taille, nous observons une convergence de toutes les expressions de biais ainsi que des erreurs quadratiques moyenne.

Nous avons également proposé une résolution numérique de l'équation de la chaleur avec des données initiales peu régulières par des méthodes de discrétisation en temps complètement explicites. Le choix de ce type de données est motivé par les applications en finance où l'on utilise des modèles comme celui de Black et Scholes. Nous avons comparé nos résultats avec des schémas implicites A-stables et L-stables et avons également montré numériquement que l'utilisation de plusieurs cœurs permet de diviser le temps de calcul quand on utilise ce type de schémas explicites.

Quelques pistes de recherche

Suite aux travaux menés dans le cadre de cette thèse, nous proposons quelques pistes de recherche susceptibles d'en constituer un prolongement naturel.

Les méthodes utilisées ici pourraient par exemple être appliquées aux :

1. Processus uni-variés avec sauts de Poisson.
2. Modèles classiques d'économétrie (équations simultanées, vecteur auto-régressif (VAR), spatial auto-régressif (SAR) etc...)
3. Certains processus stochastiques multivariés.
4. Pour le modèle de Black et Scholes, généraliser au cas d'options portant sur plusieurs actifs, ce qui montrera l'importance des techniques développées dans un cas à hautes dimensions.

DÉTAILS DES CALCULS D'ESPÉRANCES

A.1 ORDRE D'AMPLITUDES (PETIT O ET GRAND O)

Soit k un nombre réel. Étant donnée une séquence particulière $\{X_n\}$, sa mesure d'amplitude est définie en regardant le comportement de $\{X_n\}$ lorsque n tend vers l'infini.

Définition A.1.1 (Ullah [104, p. 197]) *La séquence de nombres réels $\{X_n\}$ est dite être au moins d'ordre n^k et on note*

$$X_n = O(n^k), \quad \text{si } \frac{X_n}{n^k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c,$$

pour une constante $c > 0$. Si de plus, $\{X_n\}$ est une séquence de variables aléatoires, alors elle est dite être au moins d'ordre n^k en probabilité, notée

$$X_n = O_p(n^k), \quad \text{si } \frac{X_n}{n^k} - c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ en probabilité,}$$

où c_n est une séquence non stochastique.

Définition A.1.2 (Ullah [104, p. 198]) *La séquence de nombres réels $\{X_n\}$ est dite être d'ordre $o(n^k)$ et on note*

$$X_n = o(n^k), \quad \text{si } \frac{X_n}{n^k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Si de plus $\{X_n\}$ est stochastique alors

$$X_n = o_p(n^k), \quad \text{si } \frac{X_n}{n^k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ en probabilité.}$$

L'ordre des amplitudes satisfait les propriétés suivantes.

Si $X_n = O(n^k)$ et $Y_n = O(n^\ell)$ alors

1. $X_n Y_n = O(n^{k+\ell})$.
2. $X_n^r = O(n^{kr})$.
3. $X_n + Y_n = O(n^{\ell_0})$, avec $\ell_0 = \max(k, \ell)$.

Les mêmes résultats sont valables lorsqu'on remplace O par o . Par ailleurs, si $X_n = O(n^k)$ et $Y_n = o(n^\ell)$, alors

1. $X_n Y_n = O(n^{k+\ell})$.
2. $X_n + Y_n = O(n^k)$.

A.2 ESPÉRANCES DE PRODUITS DE FORME QUADRATIQUE

Les résultats d'espérance de produits de forme quadratique $\delta_{pq} = \mathbb{E} [(X^t C_1 X)^p (X^t C_2 X)^q]$, où C_1 et C_2 sont des matrices symétriques et $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, sont donnés par [14, p. 412] et [17, p. 246-247] :

$$\delta_{11} = \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[C_2 \Sigma] + 2 \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma].$$

$$\delta_{21} = (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^2 \text{Tr}[C_2 \Sigma] + 8 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2 C_2 \Sigma] + 4 \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] \text{Tr}[C_1 \Sigma] + 2 \text{Tr}[C_2 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2].$$

$$\begin{aligned} \delta_{31} = & (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^3 \text{Tr}[C_2 \Sigma] + 48 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^3 C_2 \Sigma] + 24 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2 C_2 \Sigma] \text{Tr}[C_1 \Sigma] + 12 \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2] \\ & + 8 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^3] \text{Tr}[C_2 \Sigma] + 6 \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[C_2 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2] + 6 \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} = & (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^2 (\text{Tr}[C_2 \Sigma])^2 + 32 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2 (C_2 \Sigma)^2] + 16 \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)(C_2 \Sigma)^2] + 16 \text{Tr}[C_2 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2 (C_2 \Sigma)] \\ & + 16 \text{Tr}[(C_1 \Sigma C_2 \Sigma)^2] + 8 \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[C_2 \Sigma] \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] + 8 (\text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma])^2 + 4 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2] \text{Tr}[(C_2 \Sigma)^2] \\ & + 2 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2] (\text{Tr}[C_2 \Sigma])^2 + 2 \text{Tr}[(C_2 \Sigma)^2] (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{32} = & (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^3 (\text{Tr}[C_2 \Sigma])^2 + 192 \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma (C_1 \Sigma)^2 (C_2 \Sigma)] + 192 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^3 (C_2 \Sigma)^2] + 96 \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2 (C_2 \Sigma)^2] \\ & + 96 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2 (C_2 \Sigma)] \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] + 96 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^3 (C_2 \Sigma)] \text{Tr}[C_2 \Sigma] + 48 \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2 (C_2 \Sigma)] \text{Tr}[C_2 \Sigma] \\ & + 48 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)(C_2 \Sigma)^2] + 24 (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^2 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)(C_2 \Sigma)^2] + 24 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2] \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] \text{Tr}[C_2 \Sigma] \\ & + 48 \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma C_2 \Sigma)^2] + 24 \text{Tr}[C_1 \Sigma] (\text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma])^2 + 16 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^3] \text{Tr}[(C_2 \Sigma)^2] \\ & + 12 \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2] \text{Tr}[(C_2 \Sigma)^2] + 12 (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^2 \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] \text{Tr}[C_2 \Sigma] + 8 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^3] (\text{Tr}[C_2 \Sigma])^2 \\ & + 6 \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2] (\text{Tr}[C_2 \Sigma])^2 + 2 (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^3 \text{Tr}[(C_2 \Sigma)^2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{41} = & (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^4 \text{Tr}[C_2 \Sigma] + 384 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^4 C_2 \Sigma] + 192 \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^3 C_2 \Sigma] + 48 \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2] \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] \\ & + 96 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2 C_2 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2] + 64 \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^3] + 32 \text{Tr}[C_1 \Sigma] \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^3] \text{Tr}[C_2 \Sigma] \\ & + 12 (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^2 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2] \text{Tr}[C_2 \Sigma] + 12 (\text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2])^2 \text{Tr}[C_2 \Sigma] + 8 \text{Tr}[C_1 \Sigma]^3 \text{Tr}[C_1 \Sigma C_2 \Sigma] + 48 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^4] \text{Tr}[C_2 \Sigma] \\ & + 48 \text{Tr}[(C_1 \Sigma)^2 C_2 \Sigma] (\text{Tr}[C_1 \Sigma])^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{42} = & (Tr[C_1\Sigma])^4(Tr[C_2\Sigma])^2 + 1536Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma(C_1\Sigma)^3 C_2\Sigma] + 1536Tr[(C_1\Sigma)^4(C_2\Sigma)^2] + 768Tr[(C_1\Sigma)^4 C_2\Sigma]Tr[C_2\Sigma] \\
 & + 768Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma] + 768Tr[C_1\Sigma]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma] + 384Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma] \\
 & + 384Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^3 C_2\Sigma]Tr[C_2\Sigma] + 384Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[(C_1\Sigma)^2(C_2\Sigma)^2] + 192Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma]Tr[C_2\Sigma] \\
 & + 384(Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma])^2 + 96Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma]Tr[C_2\Sigma] + 96Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma]Tr[C_2\Sigma] \\
 & + 192(Tr[C_1\Sigma])^2 Tr[(C_1\Sigma)^2(C_2\Sigma)^2] + 192Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma C_1\Sigma C_2\Sigma] + 192Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[C_1\Sigma(C_2\Sigma)^2] \\
 & + 128Tr[(C_1\Sigma)^3]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma]Tr[C_2\Sigma] + 256Tr[(C_1\Sigma)^3]Tr[(C_1\Sigma)(C_2\Sigma)^2] + 96(Tr[C_1\Sigma])^2 Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma]Tr[C_2\Sigma] \\
 & + 96Tr[(C_1\Sigma)^2](Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma])^2 + 96Tr[(C_1\Sigma)^4]Tr[(C_2\Sigma)^2] + 96Tr[(C_1\Sigma)^4]Tr[(C_2\Sigma)^2] + 48Tr[(C_1\Sigma)^4](Tr[C_2\Sigma])^2 \\
 & + 96(Tr[C_1\Sigma])^2 Tr[(C_1\Sigma C_2\Sigma)^2] + 24(Tr[(C_1\Sigma)^2])^2 Tr[(C_2\Sigma)^2] + 48(Tr[C_1\Sigma])^2 (Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma])^2 \\
 & + 64Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^3]Tr[(C_2\Sigma)^2] + 32(Tr[C_1\Sigma])^3 Tr[C_1\Sigma(C_2\Sigma)^2] + 32Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^3](Tr[C_2\Sigma])^2 \\
 & + 24(Tr[C_1\Sigma])^2 Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[(C_2\Sigma)^2] + 16(Tr[C_1\Sigma])^3 Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma]Tr[C_2\Sigma] + 12(Tr[C_1\Sigma])^2 Tr[(C_1\Sigma)^2](Tr[C_2\Sigma])^2 \\
 & + 768Tr[(C_1\Sigma)^3 C_2\Sigma]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma] + 12(Tr[(C_1\Sigma)^2])^2 (Tr[C_2\Sigma])^2 + 2(Tr[C_1\Sigma])^4 Tr[(C_2\Sigma)^2].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{51} = & (Tr[C_1\Sigma])^5 Tr[C_2\Sigma] + 3840Tr[(C_1\Sigma)^5 C_2\Sigma] + 1920Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^4 C_2\Sigma] + 960Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[(C_1\Sigma)^3 C_2\Sigma] \\
 & + 640Tr[(C_1\Sigma)^3]Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma] + 480Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma] + 480(Tr[C_1\Sigma])^2 Tr[(C_1\Sigma)^3 C_2\Sigma] \\
 & + 480Tr[(C_1\Sigma)^4]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma] + 384Tr[(C_1\Sigma)^5]Tr[C_2\Sigma] + 320Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^3]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma] \\
 & + 240Tr[C_1\Sigma]Tr[(C_1\Sigma)^4]Tr[C_2\Sigma] + 160Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[(C_1\Sigma)^3]Tr[C_2\Sigma] + 120(Tr[C_1\Sigma])^2 Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma] \\
 & + 120(Tr[(C_1\Sigma)^2])^2 Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma] + 80Tr[C_1\Sigma]^3 Tr[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma] + 80(Tr[C_1\Sigma])^2 Tr[(C_1\Sigma)^3]Tr[C_2\Sigma] \\
 & + 60Tr[C_1\Sigma](Tr[(C_1\Sigma)^2])^2 Tr[C_2\Sigma] + 20(Tr[C_1\Sigma])^3 Tr[(C_1\Sigma)^2]Tr[C_2\Sigma] + 10(Tr[C_1\Sigma])^4 Tr[C_1\Sigma C_2\Sigma].
 \end{aligned}$$

Pour évaluer toutes ces espérances, il faut connaître les traces impliquées dans les calculs. En utilisant les algorithmes 3.1.2 et 3.2.2, pour $p = 4, 5$ et 6 , on obtient :

$$\begin{aligned}
 Tr[(C_2\Sigma)^3] &= \frac{n(1 + 4\phi^2 + \phi^4 + 6\phi^{2+2n})}{(\phi^2 - 1)^2} + \frac{6\phi^2(1 + \phi^2)(1 - \phi^{2n})}{(\phi^2 - 1)^3}. \\
 Tr[(C_2\Sigma)^4] &= \frac{8n^2\phi^{2+2n}}{(\phi^2 - 1)^2} - \frac{n(\phi^2 + 1)(1 + 8\phi^2 + \phi^4 + 20\phi^{2+2n})}{(\phi^2 - 1)^3} + \frac{2\phi^2(\phi^{2n} - 1)[6 + \phi^2(17 + 6\phi^2 + \phi^{2n})]}{(\phi^2 - 1)^4}. \\
 Tr[(C_2\Sigma)^5] &= \frac{n^2\phi^{2+2n}}{(\phi^2 - 1)^2} \left\{ \frac{20n}{3} - \frac{30(1 + \phi^2)}{\phi^2 - 1} \right\} - \frac{10\phi^2(1 + \phi^2)}{(\phi^2 - 1)^5} \left\{ 2(1 + \phi^4)(\phi^{2n} - 1) + (\phi^{4n} + 8\phi^{2n} - 9)\phi^2 \right\} \\
 &+ \frac{n\{10(13\phi^2 + 34\phi^4 + 13\phi^6)\phi^{2n} + 30\phi^{4+4n}\}}{3(\phi^2 - 1)^4} + \frac{n\{1 + 16\phi^2 + 36\phi^4 + 16\phi^6 + \phi^8\}}{(\phi^2 - 1)^4}. \\
 Tr[(C_2\Sigma)^6] &= \frac{1}{(\phi^2 - 1)^6} \left\{ -n(\phi^4 - 1)[1 + 24\phi^2(1 + \phi^4) + 76\phi^4 + \phi^8 + 77(\phi^2 + 296\phi^4 + 77\phi^6)\phi^{2n} + 54\phi^{4+4n}] \right. \\
 &- 2\phi^2[15(1 + \phi^8)(1 - \phi^{2n}) + \phi^2(1 + \phi^4)(135 - 120\phi^{2n}) + (262 - 225\phi^{2n})\phi^4] + 4n^4\phi^{2+2n}(\phi^2 - 1)^4 \\
 &+ 2\phi^2[(15\phi^2 + 36\phi^4 + 15\phi^6)\phi^{4n} + \phi^{4+6n}] + n^2\phi^{2+2n}(\phi^2 - 1)^2[71(1 + \phi^4) + 182\phi^2 + 24\phi^{2+2n}] \\
 &\left. - 28n^3\phi^{2+2n}(\phi^2 - 1)^3(1 + \phi^2) \right\}. \\
 Tr[(C_1\Sigma)^3] &= \frac{\phi}{4(\phi^2 - 1)^2} \left\{ 6(1 + 6\phi^2 + \phi^4)(1 - \phi^{2n}) + n(\phi^2 - 1)[9 + 19\phi^2 - 5\phi^4 + \phi^6 + 12(1 + \phi^2)\phi^{2n}] \right\}. \\
 Tr[(C_1\Sigma)^4] &= \frac{1}{8(\phi^2 - 1)^4} \left\{ 16n^2\phi^{2n}(\phi^4 - 1)^2 + 2(\phi^{2n} - 1)[1 + 44(\phi^2 + \phi^6) + 142\phi^4 + \phi^8 + 8\phi^{4+2n}] \right. \\
 &\left. + n[3 + 64\phi^2 + 35\phi^4 - 120\phi^6 + 25\phi^8 - 8\phi^{10} + \phi^{12} + 8\phi^{2n}(1 + 18\phi^2 - 18\phi^6 - \phi^8)] \right\}. \\
 Tr[(C_1\Sigma)^5] &= \frac{1}{48\phi(\phi^2 - 1)^5} \left\{ 30[(6 - 5n)\phi^2 + (6 - 7n)\phi^{10} - n\phi^{14}] + 15(184 - 85n)\phi^4 + (6600 - 378n)\phi^6 + 3n(45\phi^{12} + \phi^{16}) \right. \\
 &+ 5n(1 + 8n^2)(\phi^{12} - 1)\phi^{2n} - 180[(1 + 4n^2)(1 + \phi^8) - 3n(\phi^8 - 1)]\phi^{2+2n} + 15(184 + 127n)\phi^8 - 720\phi^{6+4n} \\
 &\left. + 15[(8n^3 - 247n)(1 - \phi^4) - 176(1 + \phi^4)]\phi^{4+2n} + 120[(12n^2 - 49)\phi^{6+2n} + [(2n - 1)\phi^4 - (1 + 2n)]\phi^{4+4n}] \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Tr[(C_1\Sigma)^6] = & \frac{1}{32\phi^2(\phi^2-1)^6} \left\{ (555n-972)\phi^4 - 2(6+115n)\phi^{14} + n(66\phi^{16} - 12\phi^{18} + \phi^{20}) + 64\phi^{8+6n} + 2(5n-6)\phi^2 \right. \\
 & + (7668-9462n-96n^2+720n^3)\phi^{2(5+n)} + 2[468-1177n+1192n^2-8n^3]\phi^{2(6+n)} + 6(461n-1414)\phi^6 \\
 & + 6(2-13n+16n^2-40n^3)\phi^{2(7+n)} + n(1+4n+8n^2+8n^3)\phi^{2(8+n)} - 32n^4\phi^{2(6+n)} + 2(231n-8516)\phi^8 \\
 & - 2[16n^4\phi^2 - 8n^3(15+\phi^2) - 6(1+78\phi^2) - 8n^2(6+149\phi^2) - n(39+1177\phi^2)]\phi^{2n+2} - 12(81+5n)\phi^{12} \\
 & + 6[1278+1577n-120n^3+(8n^4+2408)\phi^2 - 4n^2(4+199\phi^2)]\phi^{2n+6} + 12(3-12n+16n^2)\phi^{4(3+n)} \\
 & + 12[3+12n+16n^2+(120n+68)\phi^2 + (210-32n^2)\phi^4 + (68-120n)\phi^6]\phi^{4n+4} - 6(593n+1414)\phi^{10} \\
 & \left. - n(1-4n+8n^2-8n^3)\phi^{2n} \right\}.
 \end{aligned}$$

Les traces de type $Tr[(C_1\Sigma)^p(C_2\Sigma)^q]$ se calculent suivant un principe équivalent. On obtient :

$$Tr[(C_1\Sigma)(C_2\Sigma)] = \frac{\phi}{(\phi^2-1)^2} \left\{ (1+\phi^2)(\phi^{2n}-1) - 2n(\phi^2-1) \right\}.$$

$$Tr[(C_1\Sigma)^2C_2\Sigma] = \frac{1}{4(\phi^2-1)^3} \left\{ 2n(\phi^2-1)(1+10\phi^2+\phi^4+2[1+4\phi^2+\phi^4]\phi^{2n}) - (1+23\phi^2[1+\phi^2]+\phi^6)(\phi^{2n}-1) \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 Tr[(C_1\Sigma)^3C_2\Sigma] = & \frac{1}{2\phi(\phi^2-1)^4} \left\{ 6(n-1)\phi^2 + (22n-52)\phi^4 - 2(26+11n)\phi^6 + n^2\phi^{2n}(1+\phi^{10}) + 2\phi^{4+4n}(1+\phi^2) \right. \\
 & \left. - 6(1+n)\phi^8 + [(6+5n^2)(1+\phi^6) + 16n(1-\phi^6)]\phi^{2n+2} + [(50-6n^2)(1+\phi^2) + 32n(1-\phi^2)]\phi^{2n+4} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Tr[(C_1\Sigma)^4C_2\Sigma] = & \frac{1}{48\phi^2(\phi^2-1)^5} \left\{ 18[(1-n)\phi^2 + 5(11+7n)\phi^{10} + (1+n)\phi^{12} + 5(11-7n)\phi^4] + 12(436-115n)\phi^6 \right. \\
 & - 3[(24n^3-685n)(\phi^6-1) + (270n^2+318)(\phi^6+1)]\phi^{2n+4} - n[(1+8n^2)(\phi^{14}-1) + 6n(\phi^{14}+1)]\phi^{2n} \\
 & + [(56n^3+79n)(\phi^{10}-1) - (18+222n^2)(\phi^{10}+1)]\phi^{2n+2} - 12[3+8n-(3-8n)\phi^6]\phi^{4n+4} \\
 & + 3[(40n^3-1011n)(1-\phi^2) + (342n^2-1596)(1+\phi^2)]\phi^{2n+6} + 12(436+115n)\phi^8 \\
 & \left. + 12[(37+16n)\phi^2 + (37-16n)\phi^4]\phi^{4n+4} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Tr[(C_1\Sigma)^5C_2\Sigma] = & \frac{1}{96\phi^3(\phi^2-1)^6} \left\{ 6[(6168-1675n^2+20n^4)(1+\phi^2) + (3638n-336n^3)(1-\phi^2)]\phi^{2n+8} \right. \\
 & + n[(19+152n^2)(1-\phi^{14}) + (36n^3-27n)(1+\phi^{14})]\phi^{2n+2} + 6(820n-1819)\phi^6 + 18(20n-29)\phi^4 \\
 & + 12[(451-64n^2)(1+\phi^2) + 272n(1-\phi^2)]\phi^{4n+8} + 6[(151+96n^2)(1+\phi^6) + 368n(1-\phi^6)]\phi^{4n+6} \\
 & + 6[(3+32n^2)(1+\phi^{10}) + 16n(1-\phi^{10})]\phi^{4n+4} + n(1+n)(1+2n)^2\phi^{2(9+n)} - 36(1181+212n)\phi^{10} \\
 & + 2[(252+1398n^2-24n^4)(1+\phi^{10}) + (875n+472n^3)(1-\phi^{10})]\phi^{2n+4} + n(1-2n)^2(n-1)\phi^{2n} \\
 & + 2[(616n^3-9283n)(\phi^6-1) - (56n^4-5004-3638n^2)(1+\phi^6)]\phi^{2n+6} - 6(1819+820n)\phi^{12} \\
 & \left. + 36(212n-1181)\phi^8 - 18(29+20n)\phi^{14} + 96(1+\phi^2)\phi^{6n+8} \right\}
 \end{aligned}$$

$$Tr[(C_2\Sigma)^2C_1\Sigma] = \frac{3n\phi(1+\phi^2)(1+\phi^{2n})}{(\phi^2-1)^2} - \frac{2(\phi+4\phi^3+\phi^5)(\phi^{2n}-1)}{(\phi^2-1)^3}.$$

$$\begin{aligned}
 Tr[(C_2\Sigma)^3C_1\Sigma] = & \frac{\phi}{(\phi^2-1)^4} \left\{ 4n^2\phi^{2n}(\phi^2-1)^2(1+\phi^2) - n(\phi^2-1)[(7+26\phi^2+7\phi^4)\phi^{2n} + 4(1+3\phi^2+\phi^4)] \right. \\
 & \left. - (1+\phi^2)[3(1+\phi^4)(1-\phi^{2n}) + (23-22\phi^{2n}-\phi^{4n})\phi^2] \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Tr[(C_2\Sigma)^4C_1\Sigma] = & \frac{\phi}{3(\phi^2-1)^5} \left\{ n^2\phi^{2n}(\phi^2-1)^2[10n(\phi^4-1) - 3(11+38\phi^2+11\phi^4)] - 12\phi^{2+4n} \right. \\
 & + 5n(\phi^4-1)[(1+\phi^4)(3+7\phi^{2n}) + (15+46\phi^{2n}+3\phi^{4n})\phi^2] - 12(3+\phi^2)\phi^{4+4n} \\
 & \left. + 12[(1+\phi^8)(1-\phi^{2n}) + (1+\phi^4)\phi^2(15-14\phi^{2n}) + \phi^4(33-30\phi^{2n})] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Tr[(C_2\Sigma)^5C_1\Sigma] = & \frac{\phi}{6(\phi^2-1)^6} \left\{ 3n^2\phi^{2n}(\phi^2-1)^2(1+\phi^2)(41+242\phi^2+41\phi^4+24\phi^{2+2n}) + 12n^4\phi^{2n}(\phi^2-1)^4(1+\phi^2) \right. \\
 & - n(\phi^2-1)[(1+\phi^8)(36+101\phi^{2n}) + (\phi^2+\phi^6)(360+1270\phi^{2n}+132\phi^{4n}) + (720+2658\phi^{2n}+384\phi^{4n})\phi^4] \\
 & + 6(1+\phi^2)[5(1+\phi^8)(\phi^{2n}-1) + 10(\phi^2+\phi^6)(10\phi^{2n}-1+\phi^{4n}) + (\phi^{6n}+46\phi^{4n}+285\phi^{2n}-332)\phi^4] \\
 & \left. - 16n^3\phi^{2n}(\phi^2-1)^3(4+13\phi^2+4\phi^4) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Tr[(C_1\Sigma)^2(C_2\Sigma)^2] &= \frac{1}{4(\phi^2-1)^4} \left\{ [1 + 50\phi^2(1 + \phi^4) + \phi^8][\phi^{2n} - 1] - 2\phi^4[65 + (61 + 4\phi^{2n})\phi^{2n}] \right. \\
 &\quad \left. - n[\phi^4 - 1][2 + 36\phi^2 + 2\phi^4 + 5\phi^{2n}(1 + 70\phi^2 + 5\phi^4)] + n^2\phi^{2n}(\phi^2 - 1)^2(7 + 18\phi^2 + 7\phi^4) \right\}. \\
 Tr[(C_1\Sigma)^3(C_2\Sigma)^2] &= \frac{1}{24\phi(\phi^2-1)^5} \left\{ [(1780n - 85n^3)(\phi^4 - 1) - (1392 + 93n^2)(1 + \phi^4)]\phi^{2n+4} + 12(71n^2 - 232)\phi^{6+2n} \right. \\
 &\quad + (1464 - 660n)\phi^4 + 12(122 + 55n)\phi^8 - [24(3 + 5n) - 336\phi^2 + 24(5n - 3)\phi^4]\phi^{4n+4} + 3120\phi^6 \\
 &\quad + (96 + 90n)\phi^{10} - 3n^2(1 + 5n)\phi^{2n} - (96 - 310n + 330n^2 - 20n^3)\phi^{2(5+n)} + 3n^2(5n - 1)\phi^{2(6+n)} \\
 &\quad \left. + (96 - 90n)\phi^2 - 2(48 + 155n + 165n^2 + 10n^3)\phi^{2+2n} \right\}. \\
 Tr[(C_1\Sigma)^4(C_2\Sigma)^2] &= \frac{1}{192\phi^2(\phi^2-1)^6} \left\{ 24[(46n^2 + 11)(1 + \phi^8) + 4\phi^2(2n^2 + 56)(1 + \phi^4)]\phi^{4n+4} - 72(229n + 727)\phi^{10} \right. \\
 &\quad + 48[n\{21(1 - \phi^8) + 174(1 - \phi^4)\phi^2\} - (54n^2 - 293)\phi^4]\phi^{4n+4} + 72[(229n - 727)\phi^6 + (n - 1)\phi^2] \\
 &\quad + 4[(17n^4 + 196n^2 + 18)(1 + \phi^{12}) + (289n^3 + 92n)(1 - \phi^{12})]\phi^{2n+2} + 4(253n^3 + 3827n)(1 - \phi^8)\phi^{2n+4} \\
 &\quad + n[(31n^3 + 5n)(1 + \phi^{16}) - (26n^2 - 2)(1 - \phi^{16})]\phi^{2n} - 4(65n^4 - 3359n^2 - 1470)(1 + \phi^8)\phi^{2n+4} \\
 &\quad + 96[(39n - 64)\phi^4 - (39n + 64)\phi^{12} + 4\phi^{6n+8}] + (458n^4 - 31106n^2 + 84240)\phi^{2n+8} - 98688\phi^8 \\
 &\quad \left. + [(46968 - 68n^4 + 1328n^2)(1 + \phi^4) - (5388n^3 - 54672n)(1 - \phi^4)]\phi^{2n+6} - 72(n + 1)\phi^{14} \right\}. \\
 Tr[(C_2\Sigma)^3(C_1\Sigma)^2] &= \frac{1}{12(\phi^2-1)^5} \left\{ + 3(1 + \phi^2)[(1 + \phi^8)(1 - \phi^{2n}) + \phi^2(1 + \phi^4)(85 - 84\phi^{2n}) + \phi^4(348 - 310\phi^{2n})] \right. \\
 &\quad + n^2\phi^{2n}(\phi^2 - 1)^2[n(\phi^2 - 1)(19 + 42\phi^2 + 19\phi^4) - 33(1 + \phi^6)] - 3(1 + \phi^2)(1 + 38\phi^2 + \phi^4)\phi^{4n+2} \\
 &\quad + n\phi^2(\phi^2 - 1)(1 + \phi^4)(186 + 530\phi^{2n}) - 327n^2(\phi^2 - 1)^2(1 + \phi^2)\phi^{2n+2} + 96n(\phi^2 - 1)\phi^{4+4n} \\
 &\quad \left. + n(\phi^2 - 1)[(1 + \phi^8)(6 + 17\phi^{2n}) + \phi^4(456 + 1306\phi^{2n}) + 12(1 + \phi^4)\phi^{2+4n}] \right\}. \\
 Tr[(C_2\Sigma)^4(C_1\Sigma)^2] &= \frac{1}{48(\phi^2-1)^6} \left\{ - 2n(\phi^4 - 1)[1116\phi^{4n+4} + 90\phi^2(1 + \phi^4)(6 + \phi^{4n}) + 12(1 + \phi^8) + 1920\phi^4] \right. \\
 &\quad - n^2(\phi^2 - 1)^2\{14n(\phi^2 - 1)[11\phi^6 + 85\phi^2(1 + \phi^2) + 11]\phi^{2n} - 792\phi^{4n+4}\} + 96\phi^{6n+6} - 12 \\
 &\quad + n^2(\phi^2 - 1)^2[8214\phi^4 + 20\phi^2(1 + \phi^4)(175 + 9\phi^{2n}) + 169(1 + \phi^8)]\phi^{2n} + 12(128 + \phi^2)\phi^{2(n+5)} \\
 &\quad - 2n(\phi^4 - 1)[6918\phi^4 + 1904\phi^2(1 + \phi^4) + 37(1 + \phi^8)]\phi^{2n} - 12[\phi^{12} + 1083\phi^4(1 + \phi^4)] \\
 &\quad + 12[1 + 128\phi^2 + 961\phi^4(1 + \phi^4) + 1780\phi^6]\phi^{2n} + 12[\phi^2(1 + \phi^8)(3\phi^{4n} - 131) - 2066\phi^6] \\
 &\quad \left. + n^4(\phi^2 - 1)^4(47\phi^4 + 98\phi^2 + 47)\phi^{2n} + 12[122\phi^2(1 + \phi^4) + 278\phi^4]\phi^{4n+2} \right\}. \\
 Tr[(C_1\Sigma)^3(C_2\Sigma)^3] &= \frac{1}{48\phi(\phi^2-1)^6} \left\{ [(87n^4 - 5367n^2 + 18264)(1 + \phi^2) - (1384n^3 - 10672n)(1 - \phi^2)]\phi^{2n+6} + 48\phi^{6n+6} \right. \\
 &\quad + 12[(42n^2 + 84n + 31) + (42n^2 - 84n + 31)\phi^6]\phi^{4n+4} + (2796 - 528n^2 + 2160n)\phi^{4n+6} + 24n^2\phi^{4n+2} \\
 &\quad + [(5256 - 99n^4 + 4167n^2)(1 + \phi^6) - (568n^3 - 9376n)(1 - \phi^6)]\phi^{2n+4} + 3n^2(7n^2 - 8n + 1)\phi^{2(n+7)} \\
 &\quad + [(240 - 9n^4 + 1197n^2)(1 + \phi^{10}) + (584n^3 + 880n)(1 - \phi^{10})]\phi^{2n+2} - 12(44n^2 + 180n - 233)\phi^{4n+8} \\
 &\quad - 12[2(9n + 10)\phi^{12} + (218n + 469)\phi^{10} + (264n + 1759)\phi^8 - 4\phi^{6n+8}] + 3n^2(7n^2 + 8n + 1)\phi^{2n} \\
 &\quad \left. + 12[2n^2\phi^{4(n+3)} + 2(9n - 10)\phi^2 + (218n - 469)\phi^4 + (264n - 1759)\phi^6] \right\}. \\
 Tr[(C_1\Sigma C_2\Sigma)^3] &= \frac{1}{8\phi(\phi^2-1)^6} \left\{ [(17n^4 - 866n^2 + 3120)(1 + \phi^2) + (304n^3 - 1801n)(\phi^2 - 1)]\phi^{2n+6} + 8(1 + \phi^6)\phi^{6n+4} \right. \\
 &\quad + 6[(7n^2 + 22)(1 + \phi^6) + 36n(1 - \phi^6)]\phi^{4n+4} + 18[(2n - 3)\phi^2 - (2n + 3)\phi^{12}] - 4(109n + 233)\phi^{10} \\
 &\quad - 6[(10n^2 - 65)(1 + \phi^2) - 16n(1 - \phi^2)]\phi^{4n+6} + 6[88n(1 - \phi^2) - 585(1 + \phi^2)]\phi^6 + 4(109n - 233)\phi^4 \\
 &\quad + n[(3n^3 + 6n)(1 + \phi^{14}) + (8n^2 + 1)(1 - \phi^{14})]\phi^{2n} + 6[(3n^2 + 1)(1 + \phi^{10}) - 4n(\phi^{10} - 1)]\phi^{4n+2} \\
 &\quad + [(n^4 + 200n^2 + 48)(1 + \phi^{10}) + (76n^3 + 179n)(1 - \phi^{10})]\phi^{2n+2} \\
 &\quad \left. + [(1499n - 44n^3)(1 - \phi^6) + (792 - 21n^4 + 660n^2)(1 + \phi^6)]\phi^{2n+4} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr[(C_1\Sigma C_2\Sigma)^2] &= \frac{1}{2(\phi^2-1)^4} \left\{ 2\phi^{2n+4}(1+\phi^{2n+2}) + \phi^2(1+\phi^4)(22\phi^{2n}-24) + n^2\phi^{2n}(\phi^2-1)^2(3+10\phi^2+3\phi^4) \right. \\ &\quad \left. + (1+\phi^8+66\phi^4)(\phi^{2n}-1) - n(\phi^4-1)(1+18\phi^2+\phi^4+4\phi^{2n}(1+8\phi^2+\phi^4)) \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr[(C_1\Sigma C_2\Sigma)^2 C_2\Sigma] &= \frac{1}{48(\phi^2-1)^5} \left\{ n^2\phi^{2n}(\phi^2-1)^2[n(\phi^2-1)(17+46\phi^2+17\phi^4) - 321\phi^2(1+\phi^2) - 39(1+\phi^6)] \right. \\ &\quad + 6(1+\phi^2)[\phi^2(1+\phi^4)(42-38\phi^{2n}) - (1+162\phi^4+\phi^8)\phi^{2n} - 4(1+3\phi^2+\phi^4)\phi^{4n+2} + 174\phi^4] \\ &\quad + 2n(\phi^2-1)[14\phi^{2n+8} + (18+24\phi^2+18\phi^4)\phi^{2+4n} + 228\phi^4 + \phi^2(1+\phi^4)(93-261\phi^{2n})] \\ &\quad \left. + 2n(\phi^2-1)[3+3\phi^8 + (14+650\phi^4)\phi^{2n}] + 6(1+\phi^2)(1+\phi^8) \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr[(C_2\Sigma C_1\Sigma)^2 C_1\Sigma] &= \frac{1}{24\phi(\phi^2-1)^5} \left\{ (1428-660n)\phi^4 - 6[1+4n+2(11+6n)\phi^2 - 2(6n-11)\phi^6 - (4n-1)\phi^8]\phi^{2+4n} \right. \\ &\quad + n[(2+13n^2)(\phi^{12}-1) - 15n(\phi^{12}+1)]\phi^{2n} + 12(79n^2-246)\phi^{6+2n} + (114-90n)\phi^2 \\ &\quad - 2[(54+141n^2)(1+\phi^8) + (169n+14n^3)(1-\phi^8)]\phi^{2n+2} + 6(19+15n)\phi^{10} - 204\phi^{6+4n} \\ &\quad \left. - [(1296+177n^2)(1+\phi^4) + (1718n-95n^3)(1-\phi^4)]\phi^{2n+4} + 3156\phi^6 + 12(119+55n)\phi^8 \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr \{[(C_1\Sigma)^2 C_2\Sigma]^2\} &= \frac{1}{96\phi^2(\phi^2-1)^6} \left\{ 4[(11n^4+160n^2+9)(1+\phi^{12}) + (121n^3+53n)(1-\phi^{12})]\phi^{2n+2} - 49776\phi^8 \right. \\ &\quad + n^2(13n^2-6n-7)\phi^{2(n+8)} + 24[(14n^2+11)(1+\phi^8) + 38n(1-\phi^8)]\phi^{4n+4} - 6(1374n+4289)\phi^{10} \\ &\quad + 6[(16n^2+551)(1+\phi^4) + 536n(1-\phi^4)]\phi^{4n+6} + 6[(4n+1)^2 + (1-4n)\phi^{12}]\phi^{4n+2} - 192\phi^{6n+8} \\ &\quad - 48(22n^2-115)\phi^{4n+8} + 6(6n-7)\phi^2 + 2(127n^4-8389n^2+22032)\phi^{2n+8} + 24(78n-137)\phi^4 \\ &\quad + 4[(173n^3+1948n)(1-\phi^8) + (756-35n^4+1475n^2)(1+\phi^8)]\phi^{2n+4} + n^2(13n^2+6n-7)\phi^{2n} \\ &\quad - 4[(11n^4-464n^2-5607)(1+\phi^4) + (715n^3-6745n)(1-\phi^4)]\phi^{2n+6} + 6(1374n-4289)\phi^6 \\ &\quad \left. - 24(78n+137)\phi^{12} - 6(6n+7)\phi^{14} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr \{[(C_2\Sigma)^2 C_1\Sigma]^2\} &= \frac{n^4}{8(\phi^2-1)^2} \left\{ (7\phi^4+18\phi^2+7)\phi^{2n} \right\} - \frac{n^3}{12(\phi^2-1)^3} \left\{ (41\phi^6+295\phi^4+295\phi^2+41)\phi^{2n} \right\} \\ &\quad + \frac{n^2}{8(\phi^2-1)^4} \left\{ [12\phi^2(1+\phi^4)(5\phi^{2n}+49) + 2\phi^4(36\phi^{2n}+671) + 37(1+\phi^8)]\phi^{2n} \right\} \\ &\quad - \frac{n(\phi^2+1)}{12(\phi^2-1)^5} \left\{ (3474+408\phi^{2n})\phi^{2n+4} + 960\phi^4 + \phi^2[1+\phi^4][270+(932-120\phi^{2n})\phi^{2n}] \right. \\ &\quad \left. + (1+\phi^8)(6+31\phi^{2n}) \right\} - \frac{1}{2(\phi^2-1)^6} \left\{ \phi^4(1+\phi^4)(541-477\phi^{2n}-64\phi^{4n}) + \phi^{12} + 1030\phi^6 + 1 \right. \\ &\quad \left. + \phi^2(1+\phi^8)(67-7\phi^{4n}) - 4\phi^{6n+6} - 60(\phi^2+1)\phi^{2(n+5)} - [1+60\phi^2+904\phi^6]\phi^{2n} - 122\phi^{4n+6} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr [(C_1\Sigma)^2 (C_2\Sigma)^2 C_1\Sigma C_2\Sigma] &= \frac{1}{96\phi(\phi^2-1)^6} \left\{ [9(1112-27n^4-881n^2)(1+\phi^6) + 2(416n^3-9209n)(\phi^6-1)]\phi^{2n+4} \right. \\ &\quad - 24[(29n^2-211)(1+\phi^2) + 110n(\phi^2-1)]\phi^{4n+6} + (3208n^3-21574n)(\phi^2-1)\phi^{2n+6} \\ &\quad + 12[(19n^2+3)(1+\phi^{10}) + 16n(1-\phi^{10})]\phi^{4n+2} + (199n^4-10429n^2+36984)(1+\phi^2)\phi^{2n+6} \\ &\quad + 12[(39n^2+103)(1+\phi^6) + 188n(1-\phi^6)]\phi^{4n+4} - 12(36n+47)\phi^{12} + 96(66n-439)\phi^6 \\ &\quad + [(7n^4+2459n^2+528)(1+\phi^{10}) + 2(520n^3+953n)(1-\phi^{10})]\phi^{2n+2} - 12(436n+937)\phi^{10} \\ &\quad + 12(436n-937)\phi^4 + 12(36n-47)\phi^2 + n[(37n^3+41n)(1+\phi^{14}) + (72n^2+6)(1-\phi^{14})]\phi^{2n} \\ &\quad \left. + 96[(1+\phi^2)\phi^{6n} - (66n+439)\phi^2]\phi^6 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr [C_1 \Sigma C_2 \Sigma (C_1 \Sigma)^3 C_2 \Sigma] &= \frac{1}{48\phi^2(\phi^2 - 1)^6} \left\{ 2[(173n^3 + 1924n)(1 - \phi^8) + (732 - 34n^4 + 1528n^2)(1 + \phi^8)]\phi^{2n+4} \right. \\
&\quad - 6[6(26n + 45)\phi^{12} + (687n - 2152)\phi^6 + 2(18n^2 - 42n + 13)\phi^{4(n+3)}] + 6(3n - 4)\phi^2 \\
&\quad + 12[2n^2 + (18n^2 + 42n + 13)\phi^2 + 6(n^2 + 22n + 21)\phi^4]\phi^{4n+2} - 6(687n + 2152)\phi^{10} \\
&\quad + [(3000 - 624n^2) + 72(n^2 - 22n + 21)\phi^2 + 24n^2\phi^6]\phi^{4n+8} + n^2(7n^2 - 3n - 4)\phi^{2(n+8)} \\
&\quad + 48(1 + \phi^4)\phi^{6n+6} - 6(3n + 4)\phi^{14} + 36(26n - 45)\phi^4 + 2(61n^4 - 4108n^2 + 10920)\phi^{2n+8} \\
&\quad + 2[(10n^4 + 146n^2 + 12)(1 + \phi^{12}) + (121n^3 + 65n)(1 - \phi^{12})]\phi^{2n+2} + n^2(7n^2 + 3n - 4)\phi^{2n} \\
&\quad \left. - 24840\phi^8 - 2[(10n^4 - 382n^2 - 5676)(1 + \phi^4) + (715n^3 - 6757n)(1 - \phi^4)]\phi^{2n+6} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr [C_2 \Sigma C_1 \Sigma (C_2 \Sigma)^3 C_1 \Sigma] &= \frac{n^3}{12} \left\{ \frac{n(11\phi^4 + 26\phi^2 + 11)\phi^{2n}}{(\phi^2 - 1)^2} - \frac{[41(1 + \phi^6) + 295\phi^2(1 + \phi^2)]\phi^{2n}}{(\phi^2 - 1)^3} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2(\phi^2 - 1)^6} \left\{ \phi^{12} + \phi^4(1 + \phi^4)(540 - 2\phi^{6n}) + 67\phi^2(1 + \phi^8) - [7\phi^2(1 + \phi^8) + 128\phi^6]\phi^{4n} \right. \\
&\quad \left. + 1032\phi^6 + 1 - [1 + 60\phi^2 + 904\phi^6 + \phi^4(1 + \phi^4)](477 + 61\phi^{2n})\phi^{2n} - (60 + \phi^2)\phi^{2(n+5)} \right\} \\
&\quad - \frac{n(\phi^2 + 1)}{12(\phi^2 - 1)^5} \left\{ (6 + 31\phi^{2n})(1 + \phi^8) + \phi^2(1 + \phi^4)(270 + 944\phi^{2n}) + 108(1 + 4\phi^2 + \phi^4)\phi^{4n+2} \right. \\
&\quad \left. + 30(115\phi^{2n} + 32)\phi^4 \right\} + \frac{n^2[\phi^2(1 + \phi^4)(66\phi^{2n} + 866) + 3(52\phi^{2n} + 682)\phi^4 + 55(1 + \phi^8)]\phi^{2n}}{12(\phi^2 - 1)^4}
\end{aligned}$$

A.2.1 Preuve du Théorème 4.1

Nous avons d'une part, $\mathbb{E}(U_n) = n^{-1}\mathbb{E}(X^t C_1 X) = n^{-1}Tr[C_1 \Sigma]$ et $\mathbb{E}(V_n) = n^{-1}\mathbb{E}(X^t C_2 X) = n^{-1}Tr[C_2 \Sigma]$, et d'autre part, $Tr[C_1 \Sigma] = n\phi$ et $Tr[C_2 \Sigma] = n$. Donc $\mathbb{E}(U_n) = \phi$, $\mathbb{E}(V_n) = 1$ et par conséquent

$$\mathbb{E}(\xi_0) = -\frac{\sqrt{n}}{h\phi} \left\{ \mathbb{E}(U_n) - \phi\mathbb{E}(V_n) \right\} = 0.$$

Pour le coefficient ξ_0^2 , des calculs intermédiaires permettent d'obtenir :

$$\mathbb{E}(U_n^2) = n^{-2}\mathbb{E}[(X^t C_1 X)^2] = \phi^2 - \frac{4\phi^2(1 - \phi^{2n})}{n^2(1 - \phi^2)^2} + \frac{-\phi^4 + 4\phi^2 + 1}{n(1 - \phi^2)}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbb{E}(V_n^2) = n^{-2}\mathbb{E}[(X^t C_2 X)^2] = 1 - \frac{4\phi^2(1 - \phi^{2n})}{n^2(1 - \phi^2)^2} + \frac{2(\phi^2 + 1)}{n(1 - \phi^2)}, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbb{E}(U_n V_n) = n^{-2}\mathbb{E}[(X^t C_1 X X^t C_2 X)] = \phi - \frac{2(\phi^2 + 1)\phi(1 - \phi^{2n})}{n^2(1 - \phi^2)^2} + \frac{4\phi}{n(1 - \phi^2)}. \quad (\text{A.3})$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(\xi_0^2) = \frac{n}{h^2\phi^2} \left\{ \mathbb{E}(U_n^2) + \phi^2\mathbb{E}(V_n^2) - 2\phi\mathbb{E}(U_n V_n) \right\} = \frac{1 - \phi^2}{h^2\phi^2} = \frac{e^{2\kappa h} - 1}{h^2}. \quad (\text{A.4})$$

A partir de (A.1) et (A.2), on trouve que

$$\mathbb{E}(U_n^2) - \phi^2\mathbb{E}(V_n^2) = \frac{1 + 2\phi^2 - 3\phi^4}{n(1 - \phi^2)} - \frac{4\phi^2 - 4\phi^{2n+2}}{n^2(1 - \phi^2)}.$$

Donc, Puisque $\mathbb{E}[U_n - \phi V_n] = 0$,

$$\mathbb{E}(\xi_{-1/2}) = \frac{\sqrt{n}}{2h\phi^2} \left\{ \mathbb{E}(U_n^2) - \phi^2\mathbb{E}(V_n^2) \right\} = \sqrt{n} \left\{ \frac{(\phi^{-2} + 3)}{2nh} - \frac{2(1 - \phi^{2n})}{n^2 h(1 - \phi^2)} \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Concernant le coefficient ξ_0^3 , on utilise les formules de δ_3 et δ_{21} données par le lemme 2.1 et l'annexe A.2, pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_n^3) &= \phi^3 + \frac{3\phi}{n^2} \left\{ \frac{n(1-\phi^4+4\phi^2)}{1-\phi^2} - \frac{4\phi^2(1-\phi^{2n})}{(1-\phi^2)^2} \right\} + \frac{2\phi}{n^2} \left\{ \frac{12(\phi^2+1)(\phi^{2n}+1)}{(1-\phi^2)^2} + \phi^2 - 3 \right\} \\ &\quad - \frac{12\phi(\phi^4+6\phi^2+1)(1-\phi^{2n})}{n^3(1-\phi^2)^3}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbb{E}(V_n^3) = 1 - \frac{48(\phi^2+1)\phi^2(1-\phi^{2n})}{n^3(1-\phi^2)^3} + \frac{1}{n^2} \left\{ 8 + \frac{48\phi^2(\phi^{2n}+1)}{(1-\phi^2)^2} \right\} + \frac{3}{n^2} \left\{ \frac{2n(\phi^2+1)}{1-\phi^2} - \frac{4\phi^2(1-\phi^{2n})}{(1-\phi^2)^2} \right\}, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbb{E}(U_n^2 V_n) = \phi^2 + \frac{1+12\phi^2-\phi^4}{n(\phi^2-1)} + \frac{4(1+8\phi^2+\phi^{2n}(2+10\phi^2+3\phi^4))}{n^2(\phi^2-1)^2} - \frac{2(1+\phi^2)(1+22\phi^2+\phi^4)(\phi^{2n}-1)}{n^3(\phi^2-1)^3}, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbb{E}(U_n V_n^2) = \phi + \frac{2\phi(5+\phi^2)}{n(\phi^2-1)} + \frac{4\phi(5+4\phi^2+\phi^{2n}(7+8\phi^2))}{n^2(\phi^2-1)^2} - \frac{16\phi(1+4\phi^2+\phi^4)(\phi^{2n}-1)}{n^3(\phi^2-1)^3}. \quad (\text{A.9})$$

Le résultat s'obtient en remplaçant (A.6), (A.7), (A.8) et (A.9) dans l'expression suivante :

$$\mathbb{E}(\xi_0^3) = -\frac{n^{3/2}}{h^3\phi^3} \left\{ \mathbb{E}(U_n^3) - \phi^3\mathbb{E}(V_n^3) - 3\phi \left[\mathbb{E}(U_n^2 V_n) - \phi\mathbb{E}(U_n V_n^2) \right] \right\} = \frac{6\sqrt{n}}{nh^3\phi^2} \left\{ (\phi^2-1) + \frac{1-\phi^{2n}}{n} \right\}, \quad (\text{A.10})$$

Nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_n^4) &= n^{-4} \mathbb{E}[(X^t C_1 X)^4] \\ &= \phi^4 + \frac{6\phi^2}{n} \left\{ \phi^2 - 1 - \frac{2(1+\phi^2)}{\phi^2-1} \right\} + \frac{3+96\phi^2+170\phi^4-64\phi^6+11\phi^8+24(4+12\phi^2+9\phi^4)\phi^{2n}}{n^2(\phi^2-1)^2} \\ &\quad - \frac{6(3+55\phi^2+38\phi^4-22\phi^6+7\phi^8-\phi^{10})+24(2+41\phi^2+54\phi^4+3\phi^6)\phi^{2n}}{n^3(\phi^2-1)^3} \\ &\quad - \frac{12}{n^4(\phi^2-1)^4} \left\{ 138\phi^4 - (126+12\phi^{2n})\phi^{2n+4} + (1+44\phi^2[1+\phi^4]+\phi^8)(1-\phi^{2n}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_n^4) &= n^{-4} \mathbb{E}[(X^t C_2 X)^4] \\ &= 1 - \frac{12(\phi^2+1)}{n(\phi^2-1)} + \frac{4\phi^2(150\phi^{2n}+11\phi^2+32)+44}{n^2(\phi^2-1)^2} - \frac{48(1+\phi^2)(25\phi^{2n+2}+\phi^4+3\phi^2+1)}{n^3(\phi^2-1)^3} \\ &\quad + \frac{144\phi^2}{n^4(\phi^2-1)^4} \left\{ 4(1+\phi^4)(\phi^{2n}-1) + (\phi^{4n}+10\phi^{2n}-11)\phi^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_n^3 V_n) &= n^{-4} \mathbb{E}[(X^t C_1 X)^3 X^t C_2 X] \\ &= \frac{1}{n^4\phi(\phi^2-1)^4} \left\{ 24n^2\phi^{2n} + 54n^2\phi^{2(n+5)} + 72\phi^{4n+4} + 72\phi^{4n+6} + 6(n^4+13n^3+37n^2+4n-24)\phi^8 \right. \\ &\quad + 6[4(7n^2+17n+6) - (17n^2-172n-192)\phi^2 - (57n^2+148n-192)\phi^4 + (33n^2-92n+24)\phi^6] \phi^{2n+2} \\ &\quad - 2(2n^4+33n^3+175n^2+204n+612)\phi^6 + (n^4+15n^3+104n^2+264n-1224)\phi^4 + n^2(n^2+3n+2)\phi^{12} \\ &\quad \left. - n^2(4n^2+33n+20)\phi^{10} + 3(n^3+14n^2+40n-48)\phi^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_n V_n^3) &= n^{-4} \mathbb{E}[(X^t C_1 X)^3 X^t C_2 X] \\ &= \phi - \frac{6\phi(\phi^2+3)}{n(\phi^2-1)} + \frac{2\phi(135\phi^{2n}+165\phi^{2n+2}+4\phi^4+55\phi^2+49)}{n^2(\phi^2-1)^2} - \frac{12\phi(33+130\phi^2+37\phi^4)\phi^{2n}}{n^3(\phi^2-1)^3} \\ &\quad - \frac{12\phi(7\phi^4+22\phi^2+11)}{n^3(\phi^2-1)^3} + \frac{72\phi(\phi^2+1)}{n^4(\phi^2-1)^4} \left\{ (2+14\phi^2+2\phi^4)\phi^{2n} + \phi^{4n+2} - 2\phi^4 - 15\phi^2 - 2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

En calculant l'espérance de $\xi_0^2 \xi_{-1/2}$ défini par

$$\mathbb{E}(\xi_0^2 \xi_{-1/2}) = \frac{n^{3/2}}{2h^3 \phi^4} \left\{ \mathbb{E}(U_n^4) - \phi^4 \mathbb{E}(V_n^4) - 2\phi [\mathbb{E}(U_n^3 V_n) - \phi^2 \mathbb{E}(U_n V_n^3)] \right\} + \mathbb{E}(\xi_0^3), \quad (\text{A.15})$$

et en y introduisant (A.11), (A.12), (A.6), (A.7), (A.13), (A.14), (A.8) et (A.9), nous obtenons

$$\mathbb{E}(\xi_0^2 \xi_{-1/2}) = \frac{3\sqrt{n}}{h^3 \phi^4} \left\{ \frac{(1 - \phi^2)(16\phi^{2n} + 3\phi^2 + 1)}{2n} - \frac{2(24\phi^4 + 23\phi^2 + 1)(\phi^{2n} - 1)}{n^3(\phi^2 - 1)} + \frac{(8\phi^{2n} + 50\phi^{2n+2} + 9\phi^4 + 26\phi^2 + 3)}{n^2} \right\}$$

La connaissance de

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_n^2 V_n^2) &= n^{-4} \mathbb{E}[(X^t C_1 X)^2 (X^t C_2 X)^2] \\ &= \phi^2 - \frac{\phi^4 + 22\phi^2 + 1}{n(\phi^2 - 1)} + \frac{2[(48 + 174\phi^2 + 78\phi^4)\phi^{2n} - \phi^6 + 25\phi^4 + 79\phi^2 + 5]}{n^2(\phi^2 - 1)^2} - \frac{4[5 - 2\phi^6 + 45\phi^4 + 72\phi^2]}{n^3(\phi^2 - 1)^3} \\ &\quad - \frac{4[(19 + 264\phi^2 + 291\phi^4 + 26\phi^6)\phi^{2n}]}{n^3(\phi^2 - 1)^3} + \frac{8\{2[1 + 35\phi^2(1 + \phi^4) + 90\phi^4 + \phi^8]\phi^{2n} + 3[\phi^2 + 4\phi^4 + \phi^6]\phi^{4n}\}}{n^4(\phi^2 - 1)^4} \\ &\quad - \frac{8[2(\phi^8 + 96\phi^4 + 1) + 73\phi^2(1 + \phi^4)]}{n^4(\phi^2 - 1)^4}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

combinée à (A.11), (A.12), (A.6) et (A.7), permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_0^4) &= \frac{n^2}{h^4 \phi^4} \left\{ \mathbb{E}(U_n^4) + \phi^4 \mathbb{E}(V_n^4) - 4\phi [\mathbb{E}(U_n^3 V_n) + \phi^2 \mathbb{E}(U_n V_n^3)] + 6\phi^2 \mathbb{E}(U_n^2 V_n^2) \right\}, \\ &= \frac{3}{h^4 \phi^4} \left\{ \frac{4(8\phi^2 + 1)(\phi^{2n} - 1)}{n^2} - \frac{2(\phi^2 - 1)(8\phi^{2n} + 7\phi^2 + 3)}{n} + (\phi^2 - 1)^2 \right\}. \end{aligned}$$

On utilise le même principe pour calculer les terme suivants, dont on a besoin pour le calcul des résultats d'approximation (II.9) :

$$\mathbb{E}(\xi_0 \xi_{-1/2}) = -\frac{n}{2h^2 \phi^3} \left\{ \mathbb{E}(U_n^3) + \phi^3 \mathbb{E}(V_n^3) - \phi [\mathbb{E}(U_n^2 V_n) + \phi \mathbb{E}(U_n V_n^2)] \right\} + \mathbb{E}(\xi_0^2)$$

$$\mathbb{E}(\xi_{-1}) = -\frac{n^{1/2}}{h \phi^3} \left\{ \frac{1}{3} [\mathbb{E}(U_n^3) - \phi^3 \mathbb{E}(V_n^3)] - \frac{1}{2} \phi [\mathbb{E}(U_n^2) - \phi^2 \mathbb{E}(V_n^2)] \right\}$$

$$\mathbb{E}(\xi_0 \xi_{-1}) = \frac{n}{3h^2 \phi^4} \left\{ \mathbb{E}(U_n^4) + \phi^4 \mathbb{E}(V_n^4) - \phi [\mathbb{E}(U_n^3 V_n) + \phi^2 \mathbb{E}(U_n V_n^3)] \right\} + \mathbb{E}(\xi_0 \xi_{-1/2})$$

$$\mathbb{E}(\xi_{-1/2}^2) = \frac{n}{4h^2 \phi^4} \left\{ \mathbb{E}(U_n^4) + \phi^4 \mathbb{E}(V_n^4) - 2\phi^2 \mathbb{E}(U_n^2 V_n^2) \right\} + 2\mathbb{E}(\xi_0 \xi_{-1/2}) - \mathbb{E}(\xi_0^2)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_0^3 \xi_{-1/2}) &= -\frac{n^2}{h^4 \phi^5} \left\{ \frac{1}{2} [\mathbb{E}(U_n^5) + \phi^5 \mathbb{E}(V_n^5)] - \phi [\mathbb{E}(U_n^4) + \phi^4 \mathbb{E}(V_n^4)] - \frac{3}{2} \phi [\mathbb{E}(U_n^4 V_n) + \phi^3 \mathbb{E}(U_n V_n^4)] \right. \\ &\quad \left. + 4\phi^2 [\mathbb{E}(U_n^3 V_n) + \phi^2 \mathbb{E}(U_n V_n^3)] + \phi^2 [\mathbb{E}(U_n^3 V_n^2) + \phi \mathbb{E}(U_n^2 V_n^3)] - 6\phi^3 \mathbb{E}(U_n^2 V_n^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_0^2 \xi_{-1/2}^2) &= \frac{n^2}{h^4 \phi^6} \left\{ \frac{1}{4} [\mathbb{E}(U_n^6) + \phi^6 \mathbb{E}(V_n^6)] + 3\phi^2 [\mathbb{E}(U_n^4 V_n) + \phi^3 \mathbb{E}(U_n V_n^4)] - \frac{1}{2} \phi [\mathbb{E}(U_n^5 V_n) + \phi^4 \mathbb{E}(U_n V_n^5)] \right. \\ &\quad - \phi [\mathbb{E}(U_n^5) + \phi^5 \mathbb{E}(V_n^5)] + \phi^2 [\mathbb{E}(U_n^4) + \phi^4 \mathbb{E}(V_n^4)] - 4\phi^3 [\mathbb{E}(U_n^3 V_n) + \phi^2 \mathbb{E}(U_n V_n^3)] + \phi^3 \mathbb{E}(U_n^3 V_n^3) \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \phi^2 [\mathbb{E}(U_n^4 V_n^2) + \phi^2 \mathbb{E}(U_n^2 V_n^4)] - 2\phi^3 [\mathbb{E}(U_n^3 V_n^2) + \phi \mathbb{E}(U_n^2 V_n^3)] + 6\phi^4 \mathbb{E}(U_n^2 V_n^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_0^3 \xi_{-1}) &= \frac{n^2}{h^4 \phi^6} \left\{ \frac{1}{3} [\mathbb{E}(U_n^6) + \phi^6 \mathbb{E}(V_n^6)] - \frac{1}{2} \phi [\mathbb{E}(U_n^5) + \phi^5 \mathbb{E}(V_n^5)] + \phi^2 [\mathbb{E}(U_n^4) + \phi^4 \mathbb{E}(V_n^4)] \right. \\ &\quad + \frac{3}{2} \phi^2 [\mathbb{E}(U_n^4 V_n) + \phi^3 \mathbb{E}(U_n V_n^4)] - 4\phi^3 [\mathbb{E}(U_n^3 V_n) + \phi^2 \mathbb{E}(U_n V_n^3)] + \phi^2 [\mathbb{E}(U_n^4 V_n^2) + \phi^2 \mathbb{E}(U_n^2 V_n^4)] \\ &\quad \left. - \phi [\mathbb{E}(U_n^5 V_n) + \phi^4 \mathbb{E}(U_n V_n^5)] - \phi^3 [\mathbb{E}(U_n^3 V_n^2) + \phi \mathbb{E}(U_n^2 V_n^3)] - \frac{2}{3} \phi^3 \mathbb{E}(U_n^3 V_n^3) + 6\phi^4 \mathbb{E}(U_n^2 V_n^2) \right\} \end{aligned}$$

Pour le coefficient $\xi_3^3 \xi_{-1/2}$, il nous faut encore calculer des termes supplémentaires, à savoir :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(U_n^5) &= \frac{1}{n^5 \phi (\phi^2 - 1)^5} \left\{ 40[(35n^3 + 414n^2 - 185n - 1032) - 3(15n^3 - 58n^2 - 322n + 168)\phi^2] \phi^{2n+6} - 40n(8n^2 + 1)\phi^{2n} \right. \\
 &\quad + 60[n(18n^2 + 1)\phi^2 - 3(6n^3 + 68n^2 - 35n + 8)] \phi^{2(n+5)} + 5(n^5 + 22n^4 + 197n^3 + 926n^2 + 912n + 4320)\phi^8 \\
 &\quad + 5n(2n^4 + 42n^3 + 263n^2 + 426n + 212)\phi^{12} - 5(2n^4 + 51n^3 + 466n^2 + 1164n - 4320)\phi^4 - 5(48n^4 + 409n^3)\phi^{10} \\
 &\quad + n(n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24)\phi^{16} - 5n(n^4 + 16n^3 + 65n^2 + 98n + 48)\phi^{14} - 720[(4n + 2) + (n + 12)\phi^2] \phi^{4n+4} \\
 &\quad - 60[(8n^3 + 104n^2 + 75n + 24) - (20n^3 - 84n^2 - 551n - 336)\phi^2] \phi^{2n+2} - 5(2n^5 + 1218n^2 + 732n - 288)\phi^{10} \\
 &\quad \left. - 15(n^3 + 18n^2 + 68n - 96)\phi^2 + (49920 - n^5 + 305n^3 + 2370n^2 + 5096n)\phi^6 + 720(5n - 2)\phi^{4n+8} \right\} \\
 \mathbb{E}(V_n^5) &= -\frac{1920\{\phi^2(\phi^2 + 1)[(4 + 14\phi^2 + 4\phi^4)\phi^{2n} + 3\phi^{4n+2} - 4\phi^4 - 17\phi^2 - 4]\}}{n^5(\phi^2 - 1)^5} + \frac{20[5(50\phi^{2n} + 4)\phi^2 + 7\phi^4 + 7]}{n^2(\phi^2 - 1)^2} \\
 &\quad - \frac{20(\phi^2 + 1)}{n(\phi^2 - 1)} + 1 + \frac{16\{4\phi^2(1 + \phi^4)(31 + 325\phi^{2n}) + [13(13 + 250\phi^{2n}) + 405\phi^{4n}]\phi^4 + 24(1 + \phi^8)\}}{n^4(\phi^2 - 1)^4} \\
 &\quad - \frac{80(\phi^2 + 1)(225\phi^{2n+2} + 5\phi^4 + 23\phi^2 + 5)}{n^3(\phi^2 - 1)^3} \\
 \mathbb{E}(U_n^3 V_n^2) &= \frac{1}{n^5 \phi (\phi^2 - 1)^5} \left\{ [12n(54n^2 - 27n + 2)\phi^2 + 36(12n^3 - 253n^2 + 198n - 44)] \phi^{2(n+5)} - 16n(17n^2 + 9n + 1)\phi^{2n} \right. \\
 &\quad - 12(74n^3 + 519n^2 + 466n + 132)\phi^{2n+2} - (n^5 + 26n^4 + 332n^3 + 2404n^2 + 4320n - 22320)\phi^4 - 72\phi^{4n+10} \\
 &\quad + [12(160n^3 - 531n^2 - 2770n - 1656) + 8(205n^3 + 2781n^2 - 388n - 5196)\phi^2] \phi^{2n+4} + 72(37n - 34)\phi^{4n+8} \\
 &\quad - 24(145n^3 + 3n^2 - 1450n + 828)\phi^{2n+8} + n^2(n^3 + n^2 - 4n - 4)\phi^{14} - 3(n^4 + 24n^3 + 176n^2 + 312n - 552)\phi^2 \\
 &\quad - n(5n^4 + 42n^3 - 76n^2 - 60n + 8)\phi^{12} - 2(5n^5 + 110n^4 + 688n^3 + 364n^2 - 1308n - 11160)\phi^8 + 360n\phi^{4n+10} \\
 &\quad + (10n^5 + 155n^4 + 344n^3 - 1448n^2 - 672n + 1656)\phi^{10} + (5n^5 + 135n^4 + 1364n^3 + 5052n^2 + 3320n)\phi^6 \\
 &\quad \left. - 72(4n + 1)\phi^{4n+2} - 216(n + 30)\phi^{4n+6} - 72(35n + 34)\phi^{4n+4} + 48048\phi^6 \right\} \\
 \mathbb{E}(U_n^2 V_n^3) &= \phi^2 - \frac{1}{n} \left\{ \frac{5\phi^4 + 34\phi^2 + 1}{\phi^2 - 1} \right\} + \frac{2}{n^2(\phi^2 - 1)^2} \left\{ (318 + 1084\phi^2 + 618\phi^4)\phi^{2n} + \phi^6 + 115\phi^4 + 215\phi^2 + 9 \right\} \\
 &\quad - \frac{2}{n^3(\phi^2 - 1)^3} \left\{ (477 + 5553\phi^2 + 6783\phi^4 + 867\phi^6)\phi^{2n} + 159\phi^6 + 1303\phi^4 + 1133\phi^2 - (4\phi^8 - 49)(\phi^2 - 1)^3 \right\} \\
 &\quad + \frac{4}{n^4(\phi^2 - 1)^4} \left\{ [(198 + 828\phi^2 + 234\phi^4)\phi^{2n+2} + 3838\phi^6 + 8770\phi^4 + 3310\phi^2 + 111]\phi^{2n} - 45\phi^8 - 416\phi^6 + 15 \right. \\
 &\quad \left. - 362\phi^4 + 148\phi^2 + 171(\phi^2 - 1)^4\phi^{2n+8} \right\} + \frac{24(\phi^2 + 1)}{n^5(\phi^2 - 1)^5} \left\{ 3(1 + \phi^8)(1 - \phi^{2n}) + 203\phi^2(1 + \phi^4)(203 - 188\phi^{2n}) \right. \\
 &\quad \left. - 15(\phi^2 + 10\phi^4 + \phi^6)\phi^{4n} + (808 + 658\phi^{2n})\phi^4 \right\} \\
 \mathbb{E}(U_n^4 V_n) &= \frac{1}{n^5 \phi^2 (\phi^2 - 1)^5} \left\{ 12n(18n^2 + 9n + 1)\phi^{2(n+7)} - (10n^5 + 240n^4 + 1913n^3 + 4374n^2 + 1440n - 7776)\phi^{10} \right. \\
 &\quad - (n^5 + 16n^4 + 99n^3 + 950n^2 + 2420n - 40080)\phi^6 + (5n^5 + 130n^4 + 1377n^3 + 6506n^2 + 7336n + 40080)\phi^8 \\
 &\quad - 16(40n^3 + 117n^2 + 41n + 9)\phi^{2n+2} + 36(4n^3 - 267n^2 - 497n - 204)\phi^{2n+4} + n^2(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)\phi^{16} \\
 &\quad + 4[580n^3 + 1779n^2 - 7921n - 8688 - 2(85n^3 - 2277n^2 - 3382n + 4344)\phi^2] \phi^{2n+6} - 8n(8n^2 - 6n + 1)\phi^{2n} \\
 &\quad - n(5n^4 + 64n^3 + 129n^2 + 74n + 4)\phi^{14} - 3(2n^4 + 53n^3 + 470n^2 + 1068n - 2592)\phi^4 - 144(8n + 3)\phi^{4n+4} \\
 &\quad + (10n^5 + 190n^4 + 915n^3 + 338n^2 - 148n + 144)\phi^{12} - 144(19n + 37)\phi^{4n+6} - 3(n^3 + 14n^2 + 40n - 48)\phi^2 \\
 &\quad \left. + 12[(90n^3 - 321n^2 + 77n - 12)\phi^2 - 18(11n^3 + 47n^2 - 103n + 34)] \phi^{2(n+5)} + 144[17n - 37 + (10n - 3)\phi^2] \phi^{4n+8} \right\} \\
 \mathbb{E}(U_n V_n^4) &= \phi + \frac{4\phi}{n^2(\phi^2 - 1)^2} \left\{ 50(14\phi^2 + 11)\phi^{2n} + 11\phi^4 + 90\phi^2 + 69 - n(\phi^2 - 1)(3\phi^2 + 7) \right\} \\
 &\quad - \frac{16\phi}{n^3(\phi^2 - 1)^3} \left\{ (375 + 1425\phi^2 + 450\phi^4)\phi^{2n} + 3\phi^6 + 77\phi^4 + 182\phi^2 + 68 \right\} \\
 &\quad + \frac{16\phi}{n^4(\phi^2 - 1)^4} \left\{ (332 + 2548\phi^2 + 2602\phi^4 + 368\phi^6)\phi^{2n} + (198\phi^2 + 207\phi^4)\phi^{4n} + 214\phi^2 + 32\phi^6 + 151\phi^4 + 68 \right\} \\
 &\quad + \frac{768\phi}{n^5(\phi^2 - 1)^5} \left\{ 2(1 + \phi^8)(1 - \phi^{2n}) + (63 - 54\phi^{2n} - 9\phi^{4n})\phi^4 + \phi^2(1 + \phi^4)(29 - 26\phi^{2n} - 3\phi^{4n}) \right\}
 \end{aligned}$$

Et pour $\xi_0^2 \xi_{-1/2}^2$ et $\xi_0^3 \xi_{-1}$, nous avons encore besoin de

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_n V_n^5) &= \frac{8\phi}{n^4(\phi^2-1)^4} \left\{ (10530 + 11340\phi^2)\phi^{4n+2} + 25(563 + 4077\phi^2 + 4233\phi^4 + 667\phi^6)\phi^{2n} + 48\phi^8 + 1933\phi^6 + 8403\phi^4 \right. \\ &\quad \left. + 8313\phi^2 + 1733 \right\} - \frac{160\phi}{n^5(\phi^2-1)^5} \left\{ 19\phi^8 + 35\phi^6 + 126\phi^4 - (481 + 5936\phi^2 + 12330\phi^4 + 6104\phi^6 + 529\phi^8)\phi^{2n} \right. \\ &\quad \left. + (873 + 2592\phi^2 + 909\phi^4)\phi^{4n+2} + 239\phi^2 + 67 \right\} + \phi + \frac{480\phi(\phi^2+1)}{n^6(\phi^2-1)^6} \left\{ (1909\phi^{2n} + 543\phi^{4n} + 15\phi^{6n} - 2467)\phi^4 \right. \\ &\quad \left. + 40[(1+\phi^8)(\phi^{2n}-1) + 3\phi^2(1+\phi^4)(\phi^{4n}+6\phi^{2n}-7)] \right\} + \frac{10\phi}{n^2(\phi^2-1)^2} \left\{ 25(65 + 85\phi^2)\phi^{2n} + 14\phi^4 + 87\phi^2 \right. \\ &\quad \left. + 61 - 2n(\phi^2-1)(\phi^2+2) \right\} - \frac{40\phi}{n^3(\phi^2-1)^3} \left\{ (1775 + 6500\phi^2 + 2225\phi^4)\phi^{2n} + 10\phi^6 + 155\phi^4 + 314\phi^2 + 109 \right\} \\ \mathbb{E}(U_n^5 V_n) &= \frac{1}{n^6\phi^3(\phi^2-1)^6} \left\{ -360[2(58n^2 - 324n - 445) + 2(103n^2 + 288n - 445)\phi^2 - (50n^2 - 20n + 3)\phi^6]\phi^{4n+8} \right. \\ &\quad \left. + 10(1949n^4 + 7132n^3 - 82397n^2 - 92938n + 126240)\phi^{2(n+5)} - 10(2640n^3 + 461n^2 - 1622n + 2052)\phi^{14} \right. \\ &\quad \left. - 2(3n^6 + 105n^5 + 1645n^4 + 15620n^3 + 75587n^2 + 86110n + 795000)\phi^{10} - 10(2n^6 + 65n^5 + 722n^4)\phi^{14} \right. \\ &\quad \left. + 360[16n(1+2n) + 3 + (120n^2 - 448n + 151)\phi^8 + (120n^2 + 380n + 151)\phi^2]\phi^{4n+4} + n^6(\phi^8 + 15\phi^{16} - 6\phi^{18}) \right. \\ &\quad \left. - 10(318n^4 - 18752n^3 - 42453n^2 + 94118n - 36408)\phi^{2(n+6)} + n^2(n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24)\phi^{20} \right. \\ &\quad \left. - 30[(450n^4 + 2880n^3 - 7523n^2 + 3242n - 648) - n(171n^3 - 684n^2 - 38)\phi^2]\phi^{2(n+7)} - (4880n^3 + 4846n^2)\phi^8 \right. \\ &\quad \left. + 10[(40n^4 + 5720n^3 + 12479n^2 + 7294n + 1944)\phi^2 + 4n(52n^3 + 152n^2 - 25n)]\phi^{2n+2} + 7200(1+\phi^2)\phi^{6n+8} \right. \\ &\quad \left. - 2n(55n^4 + 225n^3 + 340n^2 + 177n + 10)\phi^{18} + 15(30n^3 + 278n^2 + 636n - 1368)\phi^4 - 40n(n-1)(1-2n)^2\phi^{2n} \right. \\ &\quad \left. - 10[(1048n^4 + 2088n^3 - 44683n^2 - 80502n - 36408)\phi^6]\phi^{2n} + 10(n^5 + 40n^4 + 648n^3 + 4769n^2 + 8594n)\phi^6 \right. \\ &\quad \left. + 5n[(78n^4 + 574n^3 + 848n^2 + 446n)\phi^{16} + 6(3n+1)^2(3n+2)\phi^{2(n+9)} + 76\phi^{16} + 3n^3\phi^4] + 14540n\phi^8 \right. \\ &\quad \left. + 5(3n^6 + 110n^5 + 1594n^4 + 10396n^3 + 21374n^2 + 14940n - 83688)\phi^{12} + 10(n^5 - 33n^4 - 159000)\phi^8 \right. \\ &\quad \left. - 10[(91n^4 + 19508n^3 + 39497n^2 - 109022n - 126240)\phi^6 - 255n^2\phi^{14} + 76n]\phi^{2n+2} - 41844\phi^6 \right\} \\ \mathbb{E}(U_n^6) &= \frac{1}{n^6\phi^2(\phi^2-1)^6} \left\{ 60[32n^4 + 504n^3 + 208n^2 + 24 - (72n^4 - 716n^3 - 5514n^2 - 4939n - 1800)\phi^2]\phi^{2n+2} \right. \\ &\quad \left. + 2160[16n^2 + (8n^2 + 125n + 68)\phi^2 + (25n^2 - 15n + 3)\phi^8]\phi^{4n+4} + n(n^5 + 15n^4 + 85n^3 + 225n^2 + 274n)\phi^{20} \right. \\ &\quad \left. - 2160[(39n^2 - 23n - 206) - (10n^2 + 145n - 68)\phi^2]\phi^{4n+8} + 15(7300n - 64608)\phi^6 + 120n\phi^{20} - 1440\phi^2 \right. \\ &\quad \left. + 60[2n(8n^3 - 8n^2 + 4n - 1) + (204n^4 + 2836n^3 - 4896n^2 - 22699n + 13704)\phi^{10}]\phi^{2n} + 45(n^4 + 33n^3)\phi^4 \right. \\ &\quad \left. + 60[3n(27n^3 + 18n^2 + 1)\phi^8 + 145n^4 - 1890n^3 - 13858n^2 + 3291n + 23808]\phi^{2n+8} - 3n(1078n + 480)\phi^{18} \right. \\ &\quad \left. - 180[54n^4 - 432n^3 - 3098n^2 + 2157n - 600 - (36n^4 - 136n^2 + 77n - 8)\phi^2]\phi^{2n+12} + 15(n^3 + 18n^2 + 68n)\phi^2 \right. \\ &\quad \left. - 60(136n^4 + 1934n^3 - 3304n^2 - 21011n - 13704)\phi^{2n+6} + 45(354n^2 + 980n - 2544)\phi^4 + 15n^5(n+35)\phi^{12} \right. \\ &\quad \left. + 15[n(n^5 + 29n^4 + 272n^3 + 872n^2 + 1152n + 524)\phi^{16} + (n^5 + 544n^3 + 4104n^2)\phi^6] + 2160(12n+3)\phi^{4n+4} \right. \\ &\quad \left. - 5(4n^6 + 135n^5 + 1660n^4 + 8088n^3 + 11080n^2 + 4620n + 288)\phi^{14} + 15(3494n^3 + 9548n^2 + 7580n - 7632)\phi^{12} \right. \\ &\quad \left. + (n^6 - 15n^5 - 1280n^4 - 19200n^3 - 99296n^2 - 191700n - 1887840)\phi^8 - 3n^3(2n^3 + 45n^2 + 300n + 855)\phi^{18} \right. \\ &\quad \left. - 3(2n^6 + 55n^5 + 4390n^3 + 26868n^2 + 20020n + 323040)\phi^{10} + 60n[(159 + 1566n^2\phi^{10}) + 18n\phi^{14}]\phi^{2n+2} \right. \\ &\quad \left. + n^4(7470\phi^{12} + 540\phi^6 - 1740\phi^{10}) + 14400\phi^{6n+8} \right\} \\ \mathbb{E}(V_n^6) &= 1 + \frac{16}{n^4(\phi^2-1)^4} \left\{ \phi^2(1+\phi^4)(2459 + 26625\phi^{2n}) + 274(1+\phi^8) + [15(4400\phi^{2n} + 729\phi^{4n}) + 4749]\phi^4 \right\} \\ &\quad - \frac{10}{n^3(\phi^2-1)^3} \left\{ 12(\phi^2+1)[1750\phi^{2n+2} - 15\phi^4 + 68\phi^2 + 15] + 2n(\phi^2-1)[1875\phi^{2n+2} + 47\phi^2 + 17(1+\phi^4)] \right. \\ &\quad \left. - 3n^2(\phi^2-1)^2(\phi^2+1) \right\} - \frac{480(\phi^2+1)}{n^5(\phi^2-1)^5} \left\{ \phi^2(1+\phi^4)(38 - 770\phi^{2n}) + 8(1+\phi^8) - (2690\phi^{2n} + 729\phi^{4n} + 11)\phi^4 \right\} \\ &\quad + \frac{2880\phi^2}{n^6(\phi^2-1)^6} \left\{ [649 + 503\phi^{2n} + 5\phi^{6n}]\phi^4 + 141\phi^{4n+4} + 20[\phi^2(1+\phi^4)(14\phi^{2n} - 3\phi^{4n} + 17) + 2(1+\phi^8)(\phi^{2n}-1)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(U_n^3 V_n^3) &= \frac{1}{n^6 \phi (\phi^2 - 1)^6} \left\{ 18[n(219n^3 - 240n^2 + 44n)\phi^8 + 375n^4 - 12560n^3 - 30404n^2 + 52984n + 70392]\phi^{2n+6} \right. \\
 &\quad + 24n[(95n^3 + 136n^2 + 58n + 8) - 6(38n^3 + 57n^2 - 475n - 414)\phi^5]\phi^{2n} + 144n[28n - 33 + (4n - 1)\phi^2]\phi^{4n+11} \\
 &\quad + 144n[(30n^3 + 345n^2 - 583n - 508)\phi^5 - (38n^3 - 57n^2 - 475n + 414)\phi^7 + 1]\phi^{2n+4} + n^2(n^4 - 3n^3 - 8n^2)\phi^{16} \\
 &\quad + 144n[(30n^3 - 345n^2 - 583n + 508)\phi^{2n+7} + (28n + 33)\phi^{4n+5}] + 1728\phi^{4n+12} + 72(178n^2 - 129n)\phi^{4n+12} \\
 &\quad - 12(1465n^4 - 6828n^3 - 38188n^2 + 67656n - 29940)\phi^{2(n+5)} - 6(467n^4 + 13024n^3 - 21836n^2 + 12872n)\phi^{2(n+6)} \\
 &\quad + 24[63n^4 + 2666n^3 + 5028n^2 + 3364n + 816 + 2n(10n^3 + 297n^2 + 323n + 102)\phi]\phi^{2n+2} + 6480\phi^{6n+6}(1 + \phi^2) \\
 &\quad - 6(2647n^4 + 5520n^3 - 75196n^2 - 135144n - 59880)\phi^{2n+4} + 216(52n^2 + 41n + 8)\phi^{4n+2} + 720(1 + \phi^6)\phi^{6n+4} \\
 &\quad + 12[\phi(1815n^4 + 16040n^3 - 51336n^2 - 79712n + 105588)]\phi^{2n+7} + n^2(12n + 16)\phi^{16} + (83784n - 426960)\phi^4 \\
 &\quad + 144[n(4n + 1) - (373n^2 - 1390n - 2133)\phi^3 - (428n^2 + 1356n - 2133)\phi^5]\phi^{4n+3} - 1152n(4n + 7)\phi^{4n+9} \\
 &\quad + 72[(634n^2 + 1977n + 930)\phi^2 - 16n(4n - 7)\phi^5 + (634n^2 - 2039n + 930)\phi^8]\phi^{4n+2} + 48n^2(14n^2 + 9n + 1)\phi^{2n+1} \\
 &\quad + 3(n^5 + 36n^4 + 460n^3 + 2160n^2 + 2968n - 7104)\phi^2 - 3n(2n^5 + 13n^4 - 122n^3 + 124n^2 + 312n + 112)\phi^{14} \\
 &\quad + 3(5n^6 + 79n^5 - 66n^4 - 2540n^3 - 1256n^2 - 3992n - 7104)\phi^{12} + (n^6 + 39n^5 + 754n^4 + 9012n^3 + 37288n^2)\phi^4 \\
 &\quad - (20n^6 + 495n^5 + 2600n^4 - 11820n^3 - 42832n^2 + 78312n + 426960)\phi^{10} + 720n[6n - 7 + (6n + 7)\phi^{10}]\phi^3 \\
 &\quad + 3(5n^6 + 165n^5 + 1780n^4 + 4140n^3 - 6816n^2 - 27264n - 526896)\phi^8 + 144n[190n - 447 + (190n + 447)\phi^6]\phi^5 \\
 &\quad - 3(2n^6 + 79n^5 + 1254n^4 + 8884n^3 + 20488n^2 - 26576n + 526896)\phi^6 - 576n[(55n - 141)\phi^9 + (55n + 141)\phi^7] \\
 &\quad \left. + 48n[10n^3 - 297n^2 + 323n - 102 + n(14n^2 - 9n + 1)\phi^2]\phi^{2n+13} + 19584\phi^{2(n+6)} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(U_n^4 V_n^2) &= \frac{1}{n^6 \phi^2 (\phi^2 - 1)^6} \left\{ 72[2(216n^2 + 337n + 96) + (3302n + 2431)\phi^2 - 8(161n^2 - 30n - 649)\phi^4]\phi^{4n+4} + 240n^4 \phi^4 \right. \\
 &\quad + (15n^6 + 324n^5 + 1360n^4 - 3848n^3 - 1324n^2 + 2504n - 1656)\phi^{14} + 3(n^4 + 24n^3 + 176n^2 + 312n - 552)\phi^2 \\
 &\quad + 72[(32n^2 + 8n + 1) - (18n^2 + 3412n - 2431)\phi^8 + (50n^2 - 10n + 1)\phi^{12}]\phi^{4n+2} + 2880(1 + 3\phi^2 + \phi^4)\phi^{6n+6} \\
 &\quad + 4(2944n^4 + 64660n^3 - 17041n^2 - 320734n)\phi^{2(n+5)} + 144(270n^2 - 401n + 96)\phi^{4(n+3)} + 6(n^5 + 5868n)\phi^4 \\
 &\quad + 12[(234n^4 - 4824n^3 + 3541n^2 - 1034n + 132) + n(207n^3 - 29n - 2)\phi^2]\phi^{2(n+7)} - 2(60340n + 926688)\phi^8 \\
 &\quad + 4[(872n^4 + 6668n^3 + 5653n^2 + 2278n + 396)\phi^2 + 4n(44n^3 - 10n^2 - 8n + 1)]\phi^{2n} + 6(3878n^2 - 20448)\phi^4 \\
 &\quad + 4(27216 - 1432n^4 + 16232n^3 + 82999n^2 + 82642n)\phi^{2n+4} + 2n(4 - 3n^5 - 39n^4 + 2n^3 + 128n^2 + 94n)\phi^{16} \\
 &\quad - 4[(3326n^4 + 40280n^3 - 52589n^2 - 313046n) - 200004(1 + \phi^4)]\phi^{2n+6} + n^2(n^4 + 4n^3 - n^2 - 16n - 12)\phi^{18} \\
 &\quad + 4(4645n^4 - 28160n^3 - 245173n^2 + 25850n + 367728)\phi^{2n+8} - 2(295n^5 + 2604n^4 + 3216n^3 - 21958n^2)\phi^{12} \\
 &\quad - 12[(1734n^4 + 1536n^3 - 36823n^2 + 33326n - 9072)\phi^{2(n+6)} - 1512n^2 \phi^{4n+6}] - 2(10n^6 - 21676n + 61344)\phi^{12} \\
 &\quad + (n^6 + 28n^5 + 376n^4 + 5224n^3 + 49516n^2 + 68728n - 977928)\phi^6 - 2(3n^6 + 117n^5 + 1982n^4 + 17552n^3)\phi^8 \\
 &\quad \left. + (15n^6 + 540n^5 + 7190n^4 + 36200n^3 + 13084n^2 - 30056n - 977928)\phi^{10} + 2n^2(1824n\phi^4 - 64582\phi^8) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(U_n^2 V_n^4) &= \phi^2 - \frac{4}{n^3 (\phi^2 - 1)^3} \left\{ 638\phi^6 + 3050\phi^4 - n(\phi^2 - 1)[(1600 + 4925\phi^2 + 2850\phi^4)\phi^{2n} + 8\phi^6 + 161\phi^4 + 229\phi^2 + 7] \right. \\
 &\quad + 69 + \phi^8 + 2122\phi^2 + 10(475 + 4190\phi^2 + 5045\phi^4 + 790\phi^6)\phi^{2n} \left. \right\} - \frac{16}{n^5 (\phi^2 - 1)^5} \left\{ 3589\phi^4 - 741\phi^8 + 1860\phi^2 + 68 \right. \\
 &\quad + (572 + 22044\phi^2 + 101638\phi^4 + 104452\phi^6 + 24366\phi^8)\phi^{2n} + (2736 + 18693\phi^2 + 19296\phi^4 + 3015\phi^6)\phi^{4n+2} \\
 &\quad + 728\phi^{2n+10} - 88\phi^{10} + 172\phi^6 \left. \right\} + \frac{16}{n^4 (\phi^2 - 1)^4} \left\{ [1259 + 24492\phi^2 + 62523\phi^4 + 29092\phi^6 + 1884\phi^8]\phi^{2n} + 2494\phi^6 \right. \\
 &\quad + (2169 + 6192\phi^2 + 2574\phi^4)\phi^{4n+2} - 3\phi^{10} + 165\phi^8 + 5277\phi^4 + 2214\phi^2 + 68 \left. \right\} + \frac{192}{n^6 (\phi^2 - 1)^6} \left\{ 1941\phi^{4n+6} \right. \\
 &\quad + \phi^4(1 + \phi^4)[4165\phi^{2n} + 915\phi^{4n} + 15\phi^{6n} - 5095] + 8\phi^2(1 + \phi^8)(71\phi^{2n} + 9\phi^{4n} - 80) + [7663\phi^{2n} - 9649]\phi^6 \\
 &\quad \left. + 45\phi^{6n+6} - n^5(\phi^2 - 1)^5(11\phi^4 + 48\phi^2 + 1) + 8(1 + \phi^{12})(\phi^{2n} - 1) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(\phi, n) = & -2\phi^2(\phi + 1) \left[-6(8128n^6 + 21364n^5 - 320685n^4 + 293248n^3 + 288n^2 - 276672n + 415872)\phi^{2(n+5)} \right. \\
& - 16n^3(172n^3 - 14n^2 - 46n + 5)\phi^{2n} - 12(3280n^6 - 40370n^5 - 26523n^4 + 7798n^3)\phi^{2n+5} \\
& - 4n(208n^5 + 45874n^4 - 3583n^3 - 61294n^2 - 65688n + 98496)\phi^{2(n+6)} + 6936(1 + \phi)\phi^{8n+6} \\
& - 16n^3(172n^3 - 14n^2 - 46n + 5)\phi^{2n+1} - 4(2560n^6 + 155260n^5)\phi^{2n+7} \\
& + 6(2752n^6 - 8484n^5 - 12971n^4)\phi^{2n+2} + 6(4992n^6 - 7044n^5 - 12811n^4)\phi^{2n+3} \\
& + 6(1 + \phi)[(1632n^3 + 1312n^2 - 3264n - 1152)\phi^{2n+2} + 272(28n^2 - 137n + 114)\phi^{6n+8}] \\
& - 12[(5200n^6 - 15890n^5 - 603n^4 + 15958n^3) - (29716n^2 + 40548n + 22896)(1 + \phi)]\phi^{2n+4} \\
& + 4(19040n^6 - 187660n^5 - 33071n^4 - 56000n^3)\phi^{2n+6} + 960n^4(14n^2 - 9n + 1)\phi^{2(n+7)} \\
& + 4(1 + \phi)[(303336n^2 - 436716n - 747384)\phi^{2n+6} + 12(24987 - 2797n^2 + 61377n)\phi^{4n+6}] \\
& + 48(180n^6 - 36193n^4 - 23451n^2 + 20562n - 108756)(1 + \phi)\phi^{2n+8} + 2880n^3(4n - 1)\phi^{4(n+3)} \\
& + 48(1395n^5 + 39762n^3)\phi^{2n+9} + 48(19395n^5 - 17598n^3)\phi^{2n+8} + 3(130846n^4 - 271328n^3)\phi^7 \\
& + 6(6272n^6 + 236n^5 + 40845n^4 - 78208n^3 - 288n^2 + 276672n - 415872)\phi^{2n+11} \\
& - 4n(5968n^5 - 27566n^4 + 74177n^3 - 85774n^2 - 65688n + 98496)\phi^{2n+13} + 33n^5(1 + \phi)\phi^{14} \\
& + 48(1334n^4 + 2908n^3 + 2069n^2 + 636n + 72)(1 + \phi)\phi^{4n+2} - 3(89824n^4 + 193440n^3)\phi^{11} \\
& - 24(10192n^4 - 10208n^3)\phi^{4n+5} + 24(45067n^2 + 30330n + 5112)(1 + \phi)\phi^{4n+4} \\
& + 24[2(7284n^4 - 33060n^3)\phi^2 + 2(9204n^4 - 31020n^3)\phi^3 - (10672n^4 - 10088n^3)]\phi^{4n+4} \\
& - 24(12112n^4 + 140565n^2 + 28188n - 97128)(1 + \phi)\phi^{4n+8} + 24n^3(71392 + 82192\phi)\phi^{4n+8} \\
& + 48(2534n^4 - 15328n^3)\phi^{4n+10} + 48(614n^4 - 13288n^3)\phi^{4n+11} - 3(80354n^4 - 191392n^3)\phi^6 \\
& + 48(48477n^2 - 63084n + 25992)(1 + \phi)\phi^{4n+10} + 3n^2(4960n - 2186n^2 + 10368)(1 + \phi)\phi^{14} \\
& + 816(1 + \phi)[(56n^2 + 53n + 12)\phi^{6n+4} - (112n^2 - 221n - 230)\phi^{6n+6}] \\
& + 24n[(181n^3 + 2245n^2)\phi^{13} + (3781n^3 + 6445n^2)\phi^{12} - (7n^4 - 14972n - 16416)(1 + \phi)\phi^{12}] \\
& + 3(115n^5 + 75120n^2 + 456000n + 415872)(1 + \phi)\phi^{10} + 3(121376n^4 + 269280n^3)\phi^{10} \\
& - 24n^3(62158\phi - 63362)\phi^8 - 24(15n^5 + 7833n^4 + 52901n^2 + 3620n - 112632)(1 + \phi)\phi^8 \\
& + 3(65n^5 + 95856n^2 - 459856n + 531848)(\phi^6 + \phi^7) + 4n^3(386689n + 266560)\phi^{2n+7} \\
& + [(5744n^2 - 3648n) + 3(n^5 - 292n^4 - 2336n^3 + 1152)](\phi^2 + \phi^3) - 24n^3(766n + 2919)\phi^4 \\
& \left. - 24[(2n^5 - 14543n^2 + 11858n - 5928)(\phi^4 + \phi^5) - n^3(2834n - 7119)\phi^5] \right]. \tag{A.17}
\end{aligned}$$

A.2.2 Preuve du Théorème 4.2

Étant donné (II.45), un développement de Taylor de $\ln(\hat{\phi})$ d'ordre $O(n^{-2})$ donne

$$\hat{\kappa} = \kappa - \frac{(\hat{\phi} - \phi)}{h\phi} + \frac{(\hat{\phi} - \phi)^2}{2h\phi^2} - \frac{(\hat{\phi} - \phi)^3}{3h\phi^3} + \frac{(\hat{\phi} - \phi)^4}{4h\phi^4} + o(n^{-1}T^{-1}).$$

En calculant l'espérance de chaque côté de cette égalité on obtient :

$$\mathbb{B}(\hat{\kappa}) = -\frac{\mathbb{B}(\hat{\phi})}{h\phi} + \frac{EQM(\hat{\phi})}{2h\phi^2} - \frac{\mathbb{E}[(\hat{\phi} - \phi)^3]}{3h\phi^3} + \frac{\mathbb{E}[(\hat{\phi} - \phi)^4]}{4h\phi^4} + o(n^{-1}T^{-1}). \tag{A.18}$$

Sachant que $\mathbb{E}[\hat{\phi} - \mathbb{E}(\hat{\phi})] = 0$ et en remarquant que $\hat{\phi} - \phi = \hat{\phi} - \mathbb{E}(\hat{\phi}) + \mathbb{E}(\hat{\phi}) - \phi$, on a :

$$\mathbb{E}[(\hat{\phi} - \phi)^3] = \mathbb{E}[(\hat{\phi} - \mathbb{E}(\hat{\phi}))^3] + 3\text{Var}(\hat{\phi}) \times \mathbb{B}(\hat{\phi}) + [\mathbb{B}(\hat{\phi})]^3,$$

or par définition de la skewness de $\hat{\phi}$, $\mathbb{E}[(\hat{\phi} - \mathbb{E}(\hat{\phi}))^3] = \gamma_1(\hat{\phi}) \times [\text{Var}(\hat{\phi})]^{3/2}$, donc

$$\mathbb{E}[(\hat{\phi} - \phi)^3] = \gamma_1(\hat{\phi})[\text{Var}(\hat{\phi})]^{3/2} + 3\text{Var}(\hat{\phi}) \times \mathbb{B}(\hat{\phi}) + [\mathbb{B}(\hat{\phi})]^3. \quad (\text{A.19})$$

De même,

$$\mathbb{E}[(\hat{\phi} - \phi)^4] = \mathbb{E}[(\hat{\phi} - \mathbb{E}(\hat{\phi}))^4] + 4\mathbb{E}[(\hat{\phi} - \mathbb{E}(\hat{\phi}))^3] \times \mathbb{B}(\hat{\phi}) + 6\text{Var}(\hat{\phi}) \times [\mathbb{B}(\hat{\phi})]^2 + [\mathbb{B}(\hat{\phi})]^4,$$

par définition de la kurtosis de $\hat{\phi}$, $\mathbb{E}[(\hat{\phi} - \mathbb{E}(\hat{\phi}))^4] = [\gamma_2(\hat{\phi}) + 3] \times [\text{Var}(\hat{\phi})]^2$, et par conséquent

$$\mathbb{E}[(\hat{\phi} - \phi)^4] = [\gamma_2(\hat{\phi}) + 3][\text{Var}(\hat{\phi})]^2 + 4\gamma_1(\hat{\phi})[\text{Var}(\hat{\phi})]^{3/2}\mathbb{B}(\hat{\phi}) + 6\text{Var}(\hat{\phi})[\mathbb{B}(\hat{\phi})]^2 + [\mathbb{B}(\hat{\phi})]^4. \quad (\text{A.20})$$

(A.19) et (A.20) dans (A.18), la nouvelle formule de biais, d'ordre $o(n^{-1}T^{-1})$ est

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\hat{\kappa}) = & -\frac{\mathbb{B}(\hat{\phi})}{h\phi} + \frac{\mathbb{EQM}(\hat{\phi})}{2h\phi^2} + \frac{[3\mathbb{B}(\hat{\phi}) - \phi][\text{Var}(\hat{\phi})]^{3/2}}{3h\phi^4}\gamma_1(\hat{\phi}) + \frac{[\text{Var}(\hat{\phi})]^2}{4h\phi^4}\gamma_2(\hat{\phi}) \\ & - \frac{3\text{Var}(\hat{\phi})\mathbb{B}(\hat{\phi}) + [\mathbb{B}(\hat{\phi})]^3}{3h\phi^3} + \frac{3[\text{Var}(\hat{\phi})]^2 + 6\text{Var}(\hat{\phi})[\mathbb{B}(\hat{\phi})]^2 + [\mathbb{B}(\hat{\phi})]^4}{4h\phi^4}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

où, les approximations de $\mathbb{B}(\hat{\phi})$, $\mathbb{EQM}(\hat{\phi})$ et $\text{Var}(\hat{\phi})$ sont respectivement données par (II.46), (II.47) et (II.48), tandis que celles de $\gamma_1(\hat{\phi})$ et $\gamma_2(\hat{\phi})$ sont données par (II.50) et (II.51). Il suffit ensuite de remplacer (II.46), (II.47) et (II.48) dans (A.21) pour obtenir la nouvelle formule.

A.2.3 Preuve du Théorème 4.3

Les définitions (II.10), (II.11) et (II.12) combinées aux résultats de calcul d'espérance de la forme $U_n^p V_n^q$ donnés en (A.2.1) permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(a_{-1}) &= \frac{3 + \phi^{-2}}{2T} - \frac{2(1 - \phi^{2n})}{Tn(1 - \phi^2)} \\ \mathbb{E}(a_{-3/2}) &= \frac{2(4\phi^{2n} + 8\phi^{2n+2} + \phi^4 + 8\phi^2 + 3)}{hn^2\phi^2(\phi^2 - 1)} - \frac{4(4\phi^4 + 7\phi^2 + 1)(\phi^{2n} - 1)}{hn^3\phi^2(\phi^2 - 1)^2} \\ \mathbb{E}(a_{-1/2}^2) &= \frac{1 - \phi^2}{h^2n\phi^2} \\ \mathbb{E}(a_{-1/2}a_{-1}) &= \frac{5(3\phi^2 + 1)(\phi^{2n} - 1)}{h^2n^3\phi^2(\phi^2 - 1)} - \frac{8\phi^{2n} + 5\phi^2 + 7}{h^2n^2\phi^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(a_{-2}) = & -\frac{3}{4hn^4\phi^4(\phi^2 - 1)^3} \left\{ n^2(\phi^2 - 1)^2(32\phi^{2n} + 96\phi^{2n+2} + 128\phi^{2n+4} + 3\phi^6 + 19\phi^4 + 9\phi^2 + 1) \right. \\ & - 2n(\phi^2 - 1)[(8 + 164\phi^2 + 332\phi^4 + 168\phi^6)\phi^{2n} + 9\phi^8 + 66\phi^6 + 144\phi^4 + 66\phi^2 + 3] \\ & \left. + 4[(1 + 45\phi^2 + 171\phi^4 + 167\phi^6 + 48\phi^8)\phi^{2n} + 12\phi^{4n+4} + 12\phi^{4n+6} - 48\phi^8 - 179\phi^6 - 183\phi^4 - 45\phi^2 - 1] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(a_{-1}^2) = & \frac{1}{4h^2n^4\phi^4(\phi^2 - 1)^2} \left\{ n^2(\phi^2 - 1)^2(96\phi^{2n} + 224\phi^{2n+2} + 19\phi^4 + 26\phi^2 + 3) \right. \\ & - 2n(\phi^2 - 1)(24\phi^{2n} + 444\phi^{2n+2} + 436\phi^{2n+4} + 21\phi^6 + 227\phi^4 + 183\phi^2 + 9) \\ & \left. + 4(3\phi^{2n} + 130\phi^{2n+2} + 355\phi^{2n+4} + 136\phi^{2n+6} + 24\phi^{4n+4} - 136\phi^6 - 379\phi^4 - 130\phi^2 - 3) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(a_{-1/2}a_{-3/2}) = & \frac{1}{h^2n^4\phi^4(\phi^2 - 1)^2} \left\{ n^2(\phi^2 - 1)^2(24\phi^{2n} + 56\phi^{2n+2} + 5\phi^4 + 6\phi^2 + 1) \right. \\ & - 2n(\phi^2 - 1)(8\phi^{2n} + 107\phi^{2n+2} + 111\phi^{2n+4} + 7\phi^6 + 54\phi^4 + 46\phi^2 + 3) \\ & \left. + 4(\phi^{2n} + 34\phi^{2n+2} + 85\phi^{2n+4} + 36\phi^{2n+6} + 6\phi^{4n+4} - 36\phi^6 - 91\phi^4 - 34\phi^2 - 1) \right\} \end{aligned}$$

Les résultats s'obtiennent en utilisant les définitions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\hat{\kappa}) &= \mathbb{E}(a_{-1}) + \mathbb{E}(a_{-3/2}) + \mathbb{E}(a_{-2}) \\
 &= \frac{3\phi^2 + 1}{2hn\phi^2} - \frac{96\phi^{2n} + 256\phi^{2n+2} + 328\phi^{2n+4} + \phi^6 - 15\phi^4 + 3\phi^2 + 3}{4hn^2\phi^4(\phi^2 - 1)} \\
 &\quad + \frac{24\phi^{2n} + 484\phi^{2n+2} + 940\phi^{2n+4} + 472\phi^{2n+6} + 27\phi^8 + 230\phi^6 + 488\phi^4 + 206\phi^2 + 9}{2hn^3\phi^4(\phi^2 - 1)^2} \\
 &\quad - \frac{3[(1 + 45\phi^2 + 171\phi^4 + 167\phi^6 + 48\phi^8)\phi^{2n} + 12\phi^{4n+4} + 12\phi^{4n+6} - 48\phi^8 - 179\phi^6 - 183\phi^4 - 45\phi^2 - 1]}{hn^4\phi^4(\phi^2 - 1)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{EQM}(\hat{\kappa}) &= \mathbb{E}(a_{-1/2}^2 + 2a_{-1/2}a_{-1}) + \mathbb{E}(a_{-1}^2 + 2a_{-1/2}a_{-3/2}) \\
 &= -\frac{\phi^2 - 1}{h^2n\phi^2} + \frac{32(19\phi^2 + 9)\phi^{2n} + 19\phi^4 + 18\phi^2 + 11}{4h^2n^2\phi^4} - \frac{(88 + 1280\phi^2 + 1264\phi^4)\phi^{2n} + 77\phi^6 + 719\phi^4 + 571\phi^2 + 33}{2h^2n^3\phi^4(\phi^2 - 1)} \\
 &\quad + \frac{11\phi^{2n} + 402\phi^{2n+2} + 1035\phi^{2n+4} + 424\phi^{2n+6} + 72\phi^{4n+4} - 424\phi^6 - 1107\phi^4 - 402\phi^2 - 11}{h^2n^4\phi^4(\phi^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

PREUVE DES THÉORÈMES DU CHAPITRE III

B.1 PREUVE DES PROPOSITIONS ET THÉORÈMES

B.1.1 Preuve du Théorème 3.1

Ces preuves se font en utilisant les définitions (III.20) des $a_{-s/2}$, les résultats donnés par (A.2) et ceux donnés par (A.2.1). Les calculs sont simplifiés à l'aide de mathématica.

Le biais d'ordre $O(n^{-2})$ et l'erreur quadratique moyenne d'ordre $O(n^{-3})$ sont respectivement donné par

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(\hat{\phi}) &= \mathbb{E}(a_{-1}) = -\mathbb{E}(W_n Z_n) + \phi \mathbb{E}(Z_n^2). \\ \mathbb{EQM}(\hat{\phi}) &= \mathbb{E}(a_{-1/2}^2 + 2a_{-1/2}a_{-1}) = 3\mathbb{E}(W_n^2) + 3\phi^2\mathbb{E}(Z_n^2) - 6\phi\mathbb{E}(W_n Z_n) - 2\mathbb{E}(W_n^2 Z_n) + 4\phi\mathbb{E}(W_n Z_n^2) - 2\phi^2\mathbb{E}(Z_n^3).\end{aligned}$$

On calcul ensuite $\mathbb{E}(a_{-3/2})$, $\mathbb{E}(a_{-1}^2) = \mathbb{E}(a_{-1/2}a_{-3/2})$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(a_{-3/2}) &= 2\mathbb{E}(a_{-1}) + \mathbb{E}(W_n Z_n^2) - \phi\mathbb{E}(Z_n^3) = -\frac{8\phi(2 + \phi^2 + 3\phi^{2n})}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{16\phi(1 - \phi^{2n})(1 + 2\phi^2)}{n^3(\phi^2 - 1)^2}, \\ \mathbb{E}(a_{-1}^2) &= \mathbb{E}(W_n^2) - 2\phi\mathbb{E}(W_n Z_n) + \phi^2\mathbb{E}(Z_n^2) - 2\mathbb{E}(W_n^2 Z_n) + 4\phi\mathbb{E}(W_n Z_n^2) + \mathbb{E}(W_n^2 Z_n^2) - 2\phi^2\mathbb{E}(Z_n^3) \\ &\quad + 2\phi\mathbb{E}(W_n Z_n^3) + \phi^2\mathbb{E}(Z_n^4),\end{aligned}$$

et ainsi, pour une expansion d'ordre $O(n^{-3/2})$, le biais et l'erreur quadratique moyenne sont respectivement donnés par

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(\hat{\phi}) &= \mathbb{E}(a_{-1} + a_{-3/2}) \\ \mathbb{EQM}(\hat{\phi}) &= \mathbb{E}(a_{-1/2}^2 + 2a_{-1/2}a_{-1}) + \mathbb{E}(a_{-1}^2 + 2a_{-1/2}a_{-3/2}).\end{aligned}$$

En poursuivant cette idée, on trouve :

$$\mathbb{E}(a_{-2}) = \frac{12\phi(1 + \phi^2 + 16\phi^{2n})}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{12\phi(11 + 21\phi^2 + 4\phi^4 + 29\phi^{2n} + 55\phi^{2+2n})}{n^3(\phi^2 - 1)^3} + \frac{72\phi(2 + 6\phi^4)(\phi^{2n} - 1)}{n^4(\phi^2 - 1)^3} + \frac{72\phi(\phi^{4n} + 10\phi^{2n} - 11)\phi^2}{n^4(\phi^2 - 1)^3},$$

$$\mathbb{E}(a_{-1}a_{-3/2}) = -\frac{4}{n^5(\phi^2 - 1)^3} \left\{ 144n^3(\phi^2 - 1)^3\phi^{2n} - 2n^2(\phi^2 - 1)^2(150\phi^{2n} + 576\phi^{2n+2} + 19\phi^4 + 37\phi^2 + 4) + 3n(\phi^2 - 1)[(61 + 794\phi^2 + 761\phi^4)\phi^{2n} + 96\phi^{4n+2} + 32\phi^6 + 211\phi^4 + 190\phi^2 + 15] - 18[(2 + 64\phi^2 + 160\phi^4 + 66\phi^6)\phi^{2n} + 9\phi^{4n+2} + 25\phi^{4n+4} - 66\phi^6 - 185\phi^4 - 73\phi^2 - 2] \right\}.$$

$$\mathbb{E}(a_{-3/2}^2) = \frac{3584\phi^{2n}}{n^2} - \frac{4(3440\phi^{2n} + 10704\phi^{2n+2} + 27\phi^4 + 30\phi^2 + 3)}{n^3(\phi^2 - 1)} + \frac{192(384\phi^2 + 1725\phi^4 + 1784\phi^6 + 408\phi^8)\phi^{2n}}{n^6(\phi^2 - 1)^4} + \frac{16[(1070 + 10439\phi^2 + 9437\phi^4)\phi^{2n} + 1872\phi^{4n+2} + 29 + 127\phi^6 + 618\phi^4 + 444\phi^2]}{n^4(\phi^2 - 1)^2} - \frac{16[2574 + 6255\phi^2]\phi^{4n+2}}{n^5(\phi^2 - 1)^3} + \frac{192[8\phi^{2n} - 408\phi^8 - 8 + (72 + 459\phi^2 + 372\phi^4)\phi^{4n+2} + 15\phi^{6n+4} - 2156\phi^6 - 2199\phi^4 - 456\phi^2]}{n^6(\phi^2 - 1)^4} - \frac{16[(12416\phi^2 + 29702\phi^4 + 12060\phi^6 + 536)\phi^{2n} + 104 + 240\phi^8 + 2580\phi^6 + 5243\phi^4 + 2210\phi^2]}{n^5(\phi^2 - 1)^3} \Big\}.$$

Après avoir remarqué que $\mathbb{E}(a_{-3/2}^2) = \mathbb{E}(a_{-1}a_{-2})$, $\mathbb{E}(a_{-1/2}a_{-5/2}) = -\mathbb{E}(a_{-1}a_{-2})$, $\mathbb{E}(a_{-1}a_{-3/2}) = \mathbb{E}(a_{-1/2}a_{-2})$,

$$\mathbb{E}(a_{-5/2}) = \frac{1280\phi^{2n+1}}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{32\phi(8 + 17\phi^2 + 5\phi^4 + 141\phi^{2n} + 249\phi^{2+2n})}{n^3(\phi^2 - 1)^2} + \frac{64\phi[20 + 83\phi^2 + 6\phi^6 + (74 + 350\phi^2 + 206\phi^4)\phi^{2n}]}{n^4(\phi^2 - 1)^3} + \frac{64\phi[56\phi^4 + 45\phi^{2+4n}]}{n^4(\phi^2 - 1)^3} - \frac{384\phi[(4 + 16\phi^6)(\phi^{2n} - 1) - 42\phi^2 - 63\phi^4 + (36\phi^2 + 54\phi^4)\phi^{2n} + (6 + 9\phi^2)\phi^{2+4n}]}{n^5(\phi^2 - 1)^4}.$$

Pour une expansion d'ordre $O(n^{-5/2})$, le biais et l'EQM sont respectivement donnés par

$$\mathbb{B}(\hat{\phi}) = -\frac{2\phi}{n} + \frac{2\phi(725\phi^{2n} + 2\phi^2 - 3)}{n^2(\phi^2 - 1)} - \frac{4\phi(101 + 207\phi^2 + 52\phi^4 + 1211\phi^{2n} + 2149\phi^{2+2n})}{n^3(\phi^2 - 1)^2} + \frac{8\phi(610 + 2890\phi^2 + 1702\phi^4)\phi^{2n}}{n^4(\phi^2 - 1)^3} + \frac{8\phi[369\phi^{2+4n} + 48\phi^6 + 394\phi^4 + 565\phi^2 + 142]}{n^4(\phi^2 - 1)^3} - \frac{384\phi[(4 + 16\phi^6)(\phi^{2n} - 1) + (36\phi^2 + 54\phi^4)\phi^{2n} + (6 + 9\phi^2)\phi^{4n+2}]}{n^5(\phi^2 - 1)^4} + \frac{384\phi[42\phi^2 + 63\phi^4]}{n^5(\phi^2 - 1)^4},$$

$$\mathbb{EQM}(\hat{\beta}) = \frac{1 - \phi^2}{n} + \frac{2(752\phi^{2n} + 7\phi^2 - 1)}{n^2} + \frac{4[89\phi^4 + 146\phi^2 + 10 - (2293 + 6372\phi^2)\phi^{2n}]}{n^3(\phi^2 - 1)} + \frac{8[62\phi^6 - 144\phi^4 - 375\phi^2 - 38]}{n^4(\phi^2 - 1)^2} + \frac{8[(1780 + 16228\phi^2 + 14422\phi^4)\phi^{2n} + 3177\phi^{4n+2}]}{n^4(\phi^2 - 1)^2} - \frac{16[(500 + 11264\phi^2 + 26822\phi^4 + 10872\phi^6)\phi^{2n} + 3768\phi^6]}{n^5(\phi^2 - 1)^3} - \frac{16[2412\phi^{4n+2} + 5805\phi^{4n+4} + 240\phi^8 + 8573\phi^4 + 3524\phi^2 + 140]}{n^5(\phi^2 - 1)^3} + \frac{192[15\phi^{6n+4} - 2156\phi^6 - 2199\phi^4 - 456\phi^2]}{n^6(\phi^2 - 1)^4} + \frac{192[(72\phi^2 + 459\phi^4 + 372\phi^6)\phi^{4n} + (384\phi^2 + 1725\phi^4 + 1784\phi^6)\phi^{2n} + (408\phi^8 + 8)(\phi^{2n} - 1)]}{n^6(\phi^2 - 1)^4}.$$

B.1.2 Preuve du lemme 3.1

La preuve est assez immédiate et se fait en calculant les dérivées successives $\frac{\partial^k X}{\partial \phi^k} = 0$, pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$. On a par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \phi} &= \frac{\partial C}{\partial \phi} \varepsilon + C \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} = -C^{-1} \frac{\partial C}{\partial \phi} \varepsilon = C^{-1} N \varepsilon. \\ \frac{\partial^2 X}{\partial \phi^2} &= 2 \frac{\partial C}{\partial \phi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} + C \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \phi^2} = 0 \Leftrightarrow C \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \phi^2} = 2NC^{-1}N\varepsilon \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \phi^2} = 2(C^{-1}N)^2 \varepsilon. \\ \frac{\partial^3 X}{\partial \phi^3} &= 3 \frac{\partial C}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \phi^2} + C \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \phi^3} = 0 \Leftrightarrow C \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \phi^3} = 6N(C^{-1}N)^2 \varepsilon \Rightarrow \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \phi^3} = 6(C^{-1}N)^3 \varepsilon. \end{aligned}$$

B.1.3 Preuve du lemme 3.2

La propriété 1. est assez triviale. En effet en analyse, $(1-x)(1+x^2+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$, qui se traduirait en algèbre (en posant $x = \phi N$) par $(I-\phi N)(1+(\phi N)^2+\dots+(\phi N)^n) = I-(\phi N)^{n+1}$. On conclut en remarquant que $N^{n+1} = 0$.

Pour la propriété 2., puisque N est nilpotente, pour tout $k \in [1, n]$, N^k est nilpotente et donc 0 est l'unique valeur propre dans \mathbb{C} de N^k . Par suite, $\forall k \in [1, n]$, $Tr[N^k] = 0$.

B.1.4 Preuve du lemme 3.3

Les matrices C^{-1} et N commutent, par conséquent tous les résultats d'analyse sur les dérivées sont applicables. On a :

$$C^{-1} = \frac{1}{I - \phi N} = \sum_{k=0}^n \phi^k N^k \Rightarrow C^{-1}N = \frac{N}{I - \phi N}.$$

Donc,

$$\frac{\partial(C^{-1}N)}{\partial\phi} = \frac{\partial C^{-1}}{\partial\phi}N = \frac{N^2}{(I - \phi N)^2} = (C^{-1}N)^2.$$

De même,

$$\frac{\partial^2(C^{-1}N)}{\partial\phi^2} = 2\frac{\partial C^{-1}}{\partial\phi}N(C^{-1}N) = 2(C^{-1}N)^3,$$

et ainsi de suite.

Corollaire : Soit $M = C^{-1}N$. Des lemmes (3.2) et (3.3), on déduit que :

$$\frac{\partial M}{\partial\phi}\varepsilon = M\frac{\partial\varepsilon}{\partial\phi}; \quad \frac{\partial^2 M}{\partial\phi^2}\varepsilon = M\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\phi^2} = 2\frac{\partial M}{\partial\phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\phi}; \quad \frac{\partial^2 M}{\partial\phi^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\phi} = \frac{\partial M}{\partial\phi}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\phi^2}$$

$$\frac{\partial^3 M}{\partial\phi^3}\varepsilon = M\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial\phi^3} = 3\frac{\partial^2 M}{\partial\phi^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\phi} = 3\frac{\partial M}{\partial\phi}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\phi^2}; \quad \frac{\partial^4 M}{\partial\phi^4}\varepsilon = M\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial\phi^4} = 4\frac{\partial^3 M}{\partial\phi^3}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\phi} = 6\frac{\partial^2 M}{\partial\phi^2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\phi^2} = 4\frac{\partial M}{\partial\phi}\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial\phi^3}$$

$$\frac{\partial^5 M}{\partial\phi^5}\varepsilon = M\frac{\partial^5\varepsilon}{\partial\phi^5} = 5\frac{\partial^4 M}{\partial\phi^4}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\phi} = 10\frac{\partial^3 M}{\partial\phi^3}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\phi^2} = 10\frac{\partial^2 M}{\partial\phi^2}\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial\phi^3} = 5\frac{\partial M}{\partial\phi}\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial\phi^4}$$

En utilisant ce corollaire on obtient :

$$H_1 = -\frac{1}{n\sigma^2} \left\{ \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\phi} \right)^t M\varepsilon + 2\varepsilon^t \frac{\partial M}{\partial\phi}\varepsilon \right\} = -\frac{1}{n\sigma^2} \left\{ \varepsilon^t [(C^{-1}N)^t(C^{-1}N) + 2(C^{-1}N)^2]\varepsilon \right\}.$$

$$\begin{aligned} H_2 &= -\frac{1}{n\sigma^2} \left\{ \left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\phi^2} \right)^t M\varepsilon + 4\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\phi} \right)^t \frac{\partial M}{\partial\phi}\varepsilon + 3\varepsilon^t \frac{\partial^2 M}{\partial\phi^2}\varepsilon \right\} \\ &= -\frac{1}{n\sigma^2} \left\{ \varepsilon^t \left[2[(C^{-1}N)^t(C^{-1}N)^2]^t + 4(C^{-1}N)^t(C^{-1}N)^2 + 6(C^{-1}N)^3 \right] \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3 &= -\frac{1}{n\sigma^2} \left\{ \left(\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial\phi^3} \right)^t M\varepsilon + 6\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\phi^2} \right)^t \frac{\partial M}{\partial\phi}\varepsilon + 9\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\phi} \right)^t \frac{\partial^2 M}{\partial\phi^2}\varepsilon + 4\varepsilon^t \frac{\partial^3 M}{\partial\phi^3}\varepsilon \right\} \\ &= -\frac{1}{n\sigma^2} \left\{ \varepsilon^t \left[24(C^{-1}N)^4 + 18(C^{-1}N)^t(C^{-1}N)^3 + 6[(C^{-1}N)^3]^t C^{-1}N + 12[(C^{-1}N)^2]^t(C^{-1}N)^2 \right] \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

$$H_4 = -\frac{1}{n\sigma^2} \left\{ \left(\frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial \phi^4} \right)^t M \varepsilon + 8 \left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \phi^3} \right)^t \frac{\partial M}{\partial \phi} \varepsilon + 18 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \phi^2} \right)^t \frac{\partial^2 M}{\partial \phi^2} \varepsilon + 16 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} \right)^t \frac{\partial^3 M}{\partial \phi^3} \varepsilon + 5 \varepsilon^t \frac{\partial^4 M}{\partial \phi^4} \varepsilon \right\}.$$

$$H_5 = -\frac{1}{n\sigma^2} \left\{ \left(\frac{\partial^5 \varepsilon}{\partial \phi^5} \right)^t M \varepsilon + 10 \left(\frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial \phi^4} \right)^t \frac{\partial M}{\partial \phi} \varepsilon + 30 \left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \phi^3} \right)^t \frac{\partial^2 M}{\partial \phi^2} \varepsilon + 40 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \phi^2} \right)^t \frac{\partial^3 M}{\partial \phi^3} \varepsilon + 25 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} \right)^t \frac{\partial^4 M}{\partial \phi^4} \varepsilon + 6 \varepsilon^t \frac{\partial^5 M}{\partial \phi^5} \varepsilon \right\}.$$

B.1.5 Preuve des Théorèmes 3.2 et 3.3

La matrice $C^{-1}N$, définie par

$$C^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \phi & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \phi^2 & \phi & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \phi^{n-2} & \phi^{n-1} & \cdots & \phi & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

est une matrice triangulaire inférieure stricte, de taille $n \times n$ dont le coefficient hors diagonale égale à ϕ^{i-j-1} .

$$C^{-1}N = M = m_{ij} = \begin{cases} \phi^{i-j-1} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque la matrice $C^{-1}N$ est nilpotente, alors $\forall k \in [1, n], \text{Tr}[(C^{-1}N)^k] = 0$.

Donc $\text{Tr}[(C^{-1}N)(C^{-1}N)^t] = \text{Tr}[A]$ et $\text{Tr}[B] = 6\text{Tr}[(C^{-1}N)^t(C^{-1}N)^2]$.

La matrice $\Theta = (C^{-1}N)(C^{-1}N)^t$ de terme général θ_{ij} est symétrique et on a :

$$\theta_{ii} = \sum_{\ell=1}^n m_{i\ell}^t m_{\ell j} = \frac{1 - \phi^{2(n-i)}}{1 - \phi^2},$$

où $m_{i\ell}^t$ représente le terme général de la matrice $(C^{-1}N)^t$. on déduit alors

$$\text{Tr}[A] = \text{Tr}[\Theta] = \sum_{\ell=1}^n \theta_{ii}$$

Les matrices $\Delta = (C^{-1}N)^2$ et $\Omega = (C^{-1}N)^3$ sont respectivement définies par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}^{i>j} = (i-j-1)\phi^{i-j-2} \\ \delta_{ij}^{i\leq j} = 0 \end{cases}, \quad \omega_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij}^{i>j} = \frac{1}{2}(i-j-1)(i-j-2)\phi^{i-j-3} \\ \omega_{ij}^{i\leq j} = 0 \end{cases}$$

et $\Phi = (C^{-1}N)^t(C^{-1}N)^2 = \varphi_{ij} = \sum_{\ell=1}^n \theta_{i\ell} m_{\ell j}$. Ainsi, la matrice $A = a_{ij} = 2\delta_{ij} + \theta_{ij}$ est telle que

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^{i\leq j} = \frac{\phi^{-i-j}(\phi^{2j} - \phi^{2n})}{1 - \phi^2} \\ a_{ij}^{i>j} = \phi^{-i-j} \left[2(i-j-1)\phi^{2i-2} + \frac{(\phi^{2i} - \phi^{2n})}{1 - \phi^2} \right] \end{cases},$$

et $B = b_{ij} = 6\omega_{ij} + 4\varphi_{ij} + 2\varphi_{ij}^t$.

Posons maintenant $T = C^{-1}N + (C^{-1}N)^t$, $S = A + A^t$ et $U = B + B^t$. On a alors

$$t_{ij} = \begin{cases} t_{ij}^{i < j} = \phi^{j-i-1} \\ t_{ij}^{i > j} = \phi^{i-j-1} \\ t_{ii} = 0 \end{cases} \quad s_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^t \quad u_{ij} = b_{ij} + b_{ij}^t.$$

Les termes intervenant dans le calcul de (III.63), (III.64), (III.66) et (III.67) sont :

$$P_{00001} = 0, \quad P_{00002} = Tr[A], \quad P_{00003} = Tr[B]$$

$$P_{00004} = 3[Tr[A]]^2 + 3Tr[T^4], \quad P_{10002} = Tr[T^2S] + \frac{1}{2}Tr[A]Tr[T^2], \quad P_{20001} = Tr[TS^2] + Tr[A]Tr[TS]$$

$$P_{10003} = 3Tr[A]Tr[B] + 3Tr[T^3S], \quad P_{01003} = [Tr[B]]^2 + \frac{3}{2}Tr[A]Tr[TU] + 3Tr[T^3U],$$

$$P_{20002} = 2Tr[A]Tr[T^2S] + Tr[S^2]Tr[A] + \frac{8}{9}[Tr[B]]^2 + [Tr[A]]^3 + 2Tr[T^2S^2] + Tr[TS].$$

Les traces impliquées dans ces coefficients sont

$$Tr[A] = \frac{n}{1 - \phi^2} - \frac{1 - \phi^{2n}}{(\phi^2 - 1)^2}$$

$$Tr[B] = \frac{6[n(\phi^4 - \phi^{2n}) + (n - 2)\phi^2(\phi^{2n} - 1)]}{\phi(\phi^2 - 1)^3}$$

$$Tr[D] = -\frac{12[3n\phi^6 - (n - 2)\phi^2 - 2(n - 5)\phi^4 + (n - 2n^2)\phi^{2n} + 2(2n^2 - 5n - 1)\phi^{2n+2} + (9n - 2n^2 - 10)\phi^{2n+4}]}{\phi^2(\phi^2 - 1)^4}$$

$$Tr[TS] = \frac{8[n(\phi^4 - \phi^{2n}) + (n - 2)\phi^2(\phi^{2n} - 1)]}{\phi(\phi^2 - 1)^3}$$

$$Tr[T^2] = \frac{2n}{1 - \phi^2} - \frac{2(1 - \phi^{2n})}{(\phi^2 - 1)^2} = 2Tr[A]$$

$$Tr[T^4] = \frac{2}{\phi^2(\phi^2 - 1)^4} \left\{ [(4 - 8n^2 + 24n)\phi^2 + (4n^2 - 22n + 24)\phi^4 + 2n(2n - 1)]\phi^{2n} + \phi^{4n+2} - 7n\phi^6 \right. \\ \left. + 4(n - 6)\phi^4 + (3n - 5)\phi^2 \right\}$$

$$Tr[S^2] = -\frac{4}{\phi^2(\phi^2 - 1)^4} \left\{ [4(2n^2 - 6n - 1)\phi^2 + (22n - 4n^2 - 24)\phi^4 - 2n(2n - 1)]\phi^{2n} - \phi^{4n+2} + 7n\phi^6 \right. \\ \left. - 4(n - 6)\phi^4 + (5 - 3n)\phi^2 \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 Tr[TS^2] &= \frac{8}{\phi^3(\phi^2-1)^5} \left\{ [n(6n^2-25n+3)\phi^2 - n(2n^2-3n+1) - (6n^3-41n^2+55n+22)\phi^4] \phi^{2n} + 8n\phi^8 \right. \\
 &\quad \left. + (2n^3-19n^2+53n-42)\phi^{2n+6} - 2n\phi^{4n+2} + 2(n-2)\phi^{4n+4} + 2(n+21)\phi^6 + (26-10n)\phi^4 \right\} \\
 Tr[T^2S] &= -\frac{2}{\phi^2(\phi^2-1)^4} \left\{ [2(6n^2-17n-3)\phi^2 + (31n-6n^2-34)\phi^4 - 3n(2n-1)] \phi^{2n} + (34-6n)\phi^4 - \phi^{4n+2} \right. \\
 &\quad \left. + 10n\phi^6 + (7-4n)\phi^2 \right\} \\
 Tr[T^2U] &= \frac{12}{\phi^3(\phi^2-1)^5} \left\{ [(6n^3-23n^2+3n)\phi^2 - n(2n^2-3n+1) - (6n^3-37n^2+\phi^{2n}+47n+23)\phi^4] \phi^{2n} \right. \\
 &\quad \left. + (2n^3-17n^2+45n-31)\phi^{2n+6} + (n-1)\phi^{4n+4} + 7n\phi^8 + \phi^6(36-5\phi^{2n}+n) \right. \\
 &\quad \left. + \phi^4(3\phi^{2n}-8n+22) - n\phi^{4n+2} \right\} \\
 Tr[T^2S^2] &= -\frac{4}{3\phi^4(\phi^2-1)^6} \left\{ 3(20n^2-52n-5)\phi^{4n+4} - 3(10n^2-49n+52)\phi^{4n+6} - 3n(10n-3)\phi^{4n+2} \right. \\
 &\quad - 2n(4n^3-12n^2+11n-3)\phi^{2n} + 18(9n+43)\phi^8 + (960-234n)\phi^6 + (69-30n)\phi^4 + 102n\phi^{10} \\
 &\quad - 3(16n^4-144n^3+284n^2+62n+17)\phi^{2n+4} + (32n^4-384n^3+1330n^2-999n-804)\phi^{2n+6} \\
 &\quad \left. - 2(4n^4-60n^3+305n^2-606n+387)\phi^{2n+8} + n(32n^3-192n^2+154n-33)\phi^{2n+2} - 3\phi^{6n+4} \right\} \\
 Tr[TU] &= -\frac{12}{\phi^2(\phi^2-1)^4} \left\{ [n-2n^2+(4n^2-10n-2)\phi^2 + (9n-2n^2-8)\phi^4] \phi^{2n} + 3n\phi^6 - (n-2)\phi^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2\phi^4(\phi^{2n}+n-5) \right\} \\
 Tr[T^3U] &= \frac{4}{\phi^4(\phi^2-1)^6} \left\{ (9-24n^2+48n)\phi^{4n+4} + (3-16n^4+92n^3-74n^2+16n)\phi^{2n+2} + 3n(4n-1)\phi^{4n+2} \right. \\
 &\quad + n(4n^3-12n^2+11n-3)\phi^{2n} + 3(8n^4-68n^3+128n^2-\phi^{2n}+2n(\phi^{2n}+13)+5)\phi^{2n+4} \\
 &\quad + (4n^4-56n^3+269n^2-523n+297)\phi^{2n+8} + \phi^8(39\phi^{2n}-66n-336) - 9\phi^6(3\phi^{2n}-11n+46) \\
 &\quad + [180n^3-16n^4-590n^2-6n(\phi^{2n}-72)+9(2\phi^{2n}+43)]\phi^{2n+6} + 3(4n^2-15n+12)\phi^{4n+6} \\
 &\quad \left. - 45n\phi^{10} - 3\phi^{2n+2} + 3\phi^4(3\phi^{2n}+4n-10) \right\} \\
 P_{10001} &= \frac{4}{\phi(\phi^2-1)^3} \left\{ -n\phi^{2n} + (n-2)\phi^{2n+2} + n\phi^4 - (n-2)\phi^2 \right\} = \frac{2}{3} Tr[B] \\
 P_{20001} &= -\frac{8}{\phi^3(\phi^2-1)^5} \left\{ [n(2n^2-3n+1) - 2n(3n^2-13n+2)\phi^2 + (6n^3-43n^2+59n+18)\phi^4] \phi^{2n} + 3n\phi^{4n+2} \right. \\
 &\quad \left. + (n^2+7n-24)\phi^4 + (n-2n^2-42)\phi^6 - 2(n^3-10n^2+28n-21)\phi^{2n+6} - 3(n-2)\phi^{4n+4} + (n-8)n\phi^8 \right\} \\
 P_{10002} &= \frac{1}{\phi^2(\phi^2-1)^4} \left\{ 6n(2n-1)\phi^{2n} + (10-24n^2+70n)\phi^{2n+2} + 4(3n^2-16n+17)\phi^{2n+4} - 2(n^2-7n+34)\phi^4 \right. \\
 &\quad \left. + (n^2+6n-13)\phi^2 + 3\phi^{4n+2} + (n-20)n\phi^6 \right\} \\
 P_{01002} &= -\frac{6}{\phi^3(\phi^2-1)^5} \left\{ [2n(2n^2-3n+1) - (12n^3-47n^2+7n)\phi^2 + (12n^3-76n^2+3\phi^{2n}+97n+43)\phi^4] \phi^{2n} \right. \\
 &\quad + \phi^4[n^2+n(\phi^{2n}+13) - 7(\phi^{2n}+6)] + [(10-n)\phi^{2n}-2n^2+n-72]\phi^6 + n(n-14)\phi^8 - 3(n-1)\phi^{4n+4} \\
 &\quad \left. + (35n^2-4n^3-92n+62)\phi^{2n+6} + 3n\phi^{4n+2} \right\} \\
 P_{00004} &= \frac{3}{\phi^2(\phi^2-1)^4} \left\{ 4n(2n-1)\phi^{2n} + (6-16n^2+50n)\phi^{2n+2} + (8n^2-46n+48)\phi^{2n+4} - 2(n^2-5n+24)\phi^4 \right. \\
 &\quad \left. + (n^2+4n-9)\phi^2 + 3\phi^{4n+2} + (n-14)n\phi^6 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{01003} &= \frac{6}{\phi^4(\phi^2-1)^6} \left\{ +3(12n^2-43n+34)\phi^{4n+6} + 3[16n^4-142n^3+275n^2-3\phi^{2n}+n(8\phi^{2n}+38)+5]\phi^{2n+4} \right. \\
 &\quad - 3\phi^8[(9n^2-26\phi^{2n}+n(6\phi^{2n}+23)+224)+3\phi^6[3n^2+7n\phi^{2n}-28\phi^{2n}+2\phi^{2n+2}+48n-258] \\
 &\quad - 3\phi^4[-n^2-7\phi^{2n}+n(\phi^{2n}-5)+18]+2n(4n^3-12n^2+11n-3)\phi^{2n}(27-72n^2+138n)\phi^{4n+4} \\
 &\quad + (-32n^4+190n^3-157n^2+35n+6)\phi^{2n+2} + (8n^4-118n^3+577n^2-1091n+594)\phi^{2n+8}-6\phi^{2n+2} \\
 &\quad \left. + [378n^3-32n^4-1267n^2+54\phi^{2n}+n(948-24\phi^{2n})+696]\phi^{2n+6} + 9n(4n-1)\phi^{4n+2} + 15(n-6)n\phi^{10} \right\} \\
 P_{20002} &= \frac{1}{3\phi^4(\phi^2-1)^6} \left\{ (207-912n^2+2169n)\phi^{4n+4} + 3(152n^2-679n+680)\phi^{4n+6} - 48(2n-3)\phi^7 + 24n\phi^{13} \right. \\
 &\quad - 3n(n^2-100n+272)\phi^{10} - 4n(64n^3-414n^2+353n-81)\phi^{2n+2} + 3(n^3+25n^2+7n-137)\phi^4 \\
 &\quad + 3\phi^6[50n^2-3n^3+n(64\phi^{2n}+269)+8(4\phi^{2n+2}-16\phi^{2n}-275)] + 24(n-2)\phi^5 + 144(n-1)\phi^9 \\
 &\quad + (64n^4-1080n^3+5717n^2-10788n+6192)\phi^{2n+8} + 16n(4n^3-12n^2+11n-3)\phi^{2n} + (48-96n)\phi^{11} \\
 &\quad - 2[128n^4-1716n^3+6247n^2+n(96\phi^{2n}-4959)-24(4\phi^{2n}+97)]\phi^{2n+6} + 12n(38n-11)\phi^{4n+2} \\
 &\quad + 24n\phi^{2n+3} + (48-96n)\phi^{2n+5} + 144(n-1)\phi^{2n+7} - 48(2n-3)\phi^{2n+9} + 24(n-2)\phi^{2n+11} + 51\phi^{6n+4} \\
 &\quad \left. + 3[128n^4-1272n^3+2671n^2+2n(32\phi^{2n}+99)+51]\phi^{2n+4} + 3\phi^8[3n^3-175n^2-4n(16\phi^{2n}+1)-2064] \right\} \\
 P_{10003} &= -\frac{2}{\phi^3(\phi^2-1)^5} \left\{ 8n(2n^2-3n+1)\phi^{2n}-3n(16n^2-71n+11)\phi^{2n+2} + 27n\phi^{4n+2} - 9(3n-5)\phi^{4n+4} \right. \\
 &\quad - 3\phi^6[6n^2+3n(\phi^{2n}-1)+116] + 3\phi^4[3n^2+n(3\phi^{2n}+19)-3(\phi^{2n}+22)] + 3n(3n-22)\phi^8 \\
 &\quad \left. + [348-16n^3+165n^2-458n]\phi^{2n+6} + 3[16n^3-118n^2+3\phi^{2n}+161n+51]\phi^{2n+4} \right\}
 \end{aligned}$$

Les espérances nécessaires pour faire le calcul sont donc données par :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(a_{-1/2}^2) &= \frac{1}{\sigma^4(\text{Tr}[A])^2} \mathbb{E}[Y_\varepsilon^2] = \frac{1}{\text{Tr}[A]} \\
 \mathbb{E}(a_{-1/2}a_{-1}) &= \frac{1}{\text{Tr}[A]} - \frac{P_{10002}}{[\text{Tr}(A)]^3} + \frac{[\text{Tr}(B)]^2}{2[\text{Tr}(A)]^4} \\
 \mathbb{E}(a_{-3/2}) &= \frac{\text{Tr}(B)}{3[\text{Tr}(A)]^2} - \frac{2P_{20001}+P_{01002}}{2[\text{Tr}(A)]^3} + \frac{\text{Tr}(B)\text{Tr}(D)+9\text{Tr}[B]P_{10002}}{6[\text{Tr}(A)]^4} - \frac{[\text{Tr}(B)]^3}{2[\text{Tr}(A)]^5} \\
 \mathbb{E}(a_{-1}^2) &= \frac{1}{\text{Tr}[A]} - \frac{2P_{10002}}{[\text{Tr}(A)]^3} + \frac{P_{20002}}{[\text{Tr}(A)]^4} + \frac{\text{Tr}(A)[\text{Tr}(B)]^2 - \text{Tr}(B)P_{10003}}{[\text{Tr}(A)]^5} + \frac{[\text{Tr}(B)]^2 P_{00004}}{4[\text{Tr}(A)]^6} \\
 \mathbb{E}(a_{-1/2}a_{-3/2}) &= \frac{1}{\text{Tr}[A]} - \frac{2P_{10002}}{[\text{Tr}(A)]^3} + \frac{2P_{20002}+P_{01003}+2[\text{Tr}(B)]^2}{2[\text{Tr}(A)]^4} - \frac{9\text{Tr}(B)P_{10003}+\text{Tr}(D)P_{00004}}{6[\text{Tr}(A)]^5} \\
 &\quad + \frac{[\text{Tr}(B)]^2 P_{00004}}{2[\text{Tr}(A)]^6}.
 \end{aligned}$$

Finalement, le biais d'ordre $O(n^{-2})$ et l'erreur quadratique moyenne d'ordre $O(n^{-3})$ sont respectivement donné par

$$\begin{aligned}
 \mathbb{B}(\hat{\phi}) &= -\frac{1}{\sigma^2(\text{Tr}[A])^2} \mathbb{E}[m_1 Y_\varepsilon] - \frac{\text{Tr}[B]}{2\sigma^4(\text{Tr}[A])^3} \mathbb{E}[Y_\varepsilon^2] = \frac{\text{Tr}[B]}{6(\text{Tr}[A])^2} \\
 \text{EQM}(\hat{\phi}) &= \frac{1}{\sigma^4(\text{Tr}[A])^2} \mathbb{E}[Y_\varepsilon^2] + \frac{2}{\sigma^4(\text{Tr}[A])^3} \mathbb{E}[m_1 Y_\varepsilon^2] + \frac{\text{Tr}[B]}{\sigma^6(\text{Tr}[A])^4} \mathbb{E}[Y_\varepsilon^3]
 \end{aligned}$$

Le biais d'ordre $O(n^{-3})$ et l'erreur quadratique moyenne d'ordre $O(n^{-3})$ sont respectivement

$$\begin{aligned}
 \mathbb{B}(\hat{\phi}) &= \mathbb{E}(a_{-1} + a_{-3/2}) \\
 \text{EQM}(\hat{\phi}) &= \mathbb{E}(a_{-1/2}^2 + 2a_{-1/2}a_{-1}) + \mathbb{E}(a_{-1}^2 + 2a_{-1/2}a_{-3/2})
 \end{aligned}$$

———— ANNEXE C ————

VÉRIFICATION DE LA A-STABILITÉ ET DE LA L-STABILITÉ DES
MÉTHODES SDIRK4 ET RADAU5 AVEC SAGEMATH

Vérification de la A-stabilité et de la L-stabilité des méthodes SDIRK4 et Radau5 avec SageMath

1) Cas de la méthode SDIRK4

```
In [1]: from IPython.display import display, Math, Latex
```

Étant donné le tableau de Butcher d'une formule de Runge-Kutta, calculons sa fonction de stabilité et étudions sa stabilité.

On calcule dans $\overline{\mathbb{Q}}$ (sauf redéfinition dans la formule). Tous les calculs sont donc exacts (mais les valeurs non rationnelles sont imprimées sous la forme xxx,yyyyyy?).

Quelques fonctions et classes utiles :

Calculer les racines du polynôme pol. Le calcul est effectué dans $\hat{\mathbb{Q}}$. Si le degré de pol est ≥ 5 , on ne peut affirmer que toutes les racines sont calculées. On renvoie donc: les racines calculées, un test et le nombre de racines (avec leur multiplicité) réellement calculées.

```
In [2]: def RootsChecked(pol):
    q=pol.change_ring(QQbar)
    rac=q.roots()
    n=sum([s[1] for s in rac])
    return rac, pol.degree()==n, n
class RootsException(Exception):
    def __init__(self, ncomp, pol):
        self.ncomp=ncomp
        self.degree=pol.degree
        self.pol=pol
    def __str__(self):
        return "for "+str(self.pol)+" (degree= "+str(self.degree)+
            " ), only "+str(self.ncomp)+" where computed."
```

- "conjugué" d'un polynôme (I -> -I).
- partie imaginaire.
- partie réelle.

```
In [3]: def conj(P):
    # conjugue d'un polynome:
    Pc=P.coefficients()
    return sum([Pc[p]*x^p for p in range(0, len(Pc)) if Pc[p].imag()==0])
    - \ sum([Pc[p]*x^p for p in range(0, len(Pc)) if Pc[p].imag() !=0])
def impart(P):
    # partie imaginaire:
    Pc=P.coefficients()
    return sum([-QQbar(I)*Pc[p]*x^p for p in range(0, len(Pc))
    if Pc[p].imag() !=0])
def realpart(P):
    # partie relle:
    Pc=P.coefficients()
    return sum([Pc[p]*x^p for p in range(0, len(Pc)) if Pc[p].imag() ==0])
toreal=lambda x: x.real()
def realify(P):
```

```

Pc=P.coefficients()
l=[toreal(s) for s in Pc]
x=P.numerator().parent().gen()
return sum([l[i]*x^i for i in range(0,len(l))])

```

Calcul de la fonction de stabilité à partir du tableau de Butcher (Proposition 3.2, Hairer et Wanner Tome 2, page 41).

```

In [4]: def ButcherArray2Rac(A,B):
n=A.dimensions()[0]
Rng=A.parent().base()
K=matrix(Rng,[B for i in range(0,n)])
II=identity_matrix(Rng,n)
D=II-z*A
N=D+z*K
return N.determinant()/D.determinant()

```

Lecture de la formule :

```
In [5]: load("sdirk.sage")
```

```
In [6]: P.<z>=AA[]
print "Calcul dans:",P
```

Calcul dans: Univariate Polynomial Ring in z over Algebraic Real Field

```
In [7]: print comment, ". p=",p ,",s=",s
```

See Hairer and Wanner II, page 100 . p= 4 ,s= 5

```
In [8]: Math(latex(A))
```

Out[8]:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{17}{50} & -\frac{1}{25} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{371}{1360} & -\frac{137}{2720} & \frac{15}{544} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{25}{24} & -\frac{49}{48} & \frac{125}{16} & -\frac{85}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

```
In [9]: Math(latex(B))
```

Out[9]:

$$\left[\frac{25}{24}, -\frac{49}{48}, \frac{125}{16}, -\frac{85}{12}, \frac{1}{4} \right]$$

Fonction de stabilité :

```
In [10]: R=ButcherArray2Rac(A,B)
```

```
In [11]: Math(latex(R))
```

```
Out[11]:
```

$$\frac{\frac{7}{768}z^4 + \frac{1}{96}z^3 - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{4}z + 1}{-\frac{1}{1024}z^5 + \frac{5}{256}z^4 - \frac{5}{32}z^3 + \frac{5}{8}z^2 - \frac{5}{4}z + 1}$$

Si la méthode est implicite, où sont les pôles de R ?

```
In [12]: if R.denominator().degree() == 0:
    print "La méthode est explicite."
    explicit=True
    PolesOk=False
else:
    explicit=False
    RDroots,ok,nr=RootsChecked(R.denominator())
    if not ok:
        raise RootsException(nr,R.denominator())
    llp=len([s for s in RDroots if s[0].real()<0 ])
    PolesOk=llp==0
    if PolesOk:
        print "Tous les pôles ont leur partie réelle positive."
    else:
        print llp," pôles ont leur partie réelle négative."
```

Tous les pôles ont leur partie réelle positive.

Comportement le long de l'axe réel négatif (|R| est-elle bornée par 1 ?)

```
In [15]: p1=R.numerator()-R.denominator()
    p2=R.numerator()+R.denominator()
```

```
In [16]: l1,ok1,nr1=RootsChecked(p1)
    l2,ok2,nr2=RootsChecked(p2)
    if not ok1:
        raise RootsException(nr1,p1)
    if not ok2:
        raise RootsException(nr2,p2)
    #print ok1,ok2
    l=l1+l2
    n1=[s[0] for s in l if s[0].imag()==0]
```

```
In [17]: if len([x for x in n1 if x<0])==0 and n1[0]==0:
    print "|R| < 1 sur R- -{0}"
else:
    print "|R| n'est pas borné par 1 sur l'axe réel:"
```

|R| < 1 sur R- -{0}

Comportement le long de l'axe imaginaire

```
In [18]: PP.<x>=QQ[]
```

```
In [19]: RIaxe=R(z=QQbar(I)*x) #fraction rationnelle sur l'axe imaginaire
```

Calcul du module de R au carré.

```
In [20]: RIaxeN=RIaxe.numerator()
         RIaxeD=RIaxe.denominator()
```

```
In [21]: m2N=RIaxeN*conj(RIaxeD) #numérateur
         m2NR=realpart(m2N)
         m2NI=impart(m2N)

         m2n=m2NR^2+m2NI^2
         m2d=RIaxeD*conj(RIaxeD)
```

```
In [22]: m2=m2n/m2d^2 #module au carré
```

Cherchons les extrémaux du (carré du) module de R sur l'axe imaginaire:

```
In [23]: q=diff(m2,x)
         if q==0:
             print "module de R constant sur l'axe imaginaire"
             isConstantOnImaxis=True
         else:
             m2der=realify(q.numerator())/realify(q.denominator())
             isConstantOnImaxis= m2der==0
```

```
In [24]: if not isConstantOnImaxis:#inutile ?
         m2dn=m2der.numerator()
         rr,ok,nr=RootsChecked(m2dn)
         if not ok:
             raise RootsException(nr,m2dn)
```

```
In [25]: print m2(x=1).real()
         print m2(x=1)<1
```

```
12778256/12778713
```

```
True
```

Il reste à vérifier que le module, s'il n'est pas constant, est bien partout compris entre -1 et +1, excepté en 0:

```
In [26]: if not isConstantOnImaxis:
         ll,ok,n=RootsChecked(m2.numerator()-m2.denominator())
         if not ok:
             RootsException(n,m2.numerator()-m2.denominator())
```

Liste des valeurs de x où le module atteint ± 1 :

```
In [27]: if not isConstantOnImaxis:
         l1m1=[s[0] for s in l1 if s[0].imag()==0 ]
         print l1m1
         l1m1realp=[s.real() for s in l1m1 if s >= 0]

[0]
```

On ne peut pas conclure dans tous les cas que les racines calculées ci-dessus sont réelles. Il faut donc tester les alternances de signes.

```
In [28]: if not isConstantOnImaxis:
         l1r=len(l1m1realp)
         points=[(l1m1realp[i]+l1m1realp[i+1])/2 for i in range(0,l1r-1)]
         points.append(l1m1realp[l1r-1]*3/2)
         signes=[sign(abs(m2(x=s).real())-1) for s in points]
         ModuleLessOrEqualOneOnImagAxis=len([x for x in signes if x >=0])==1
         print ModuleLessOrEqualOneOnImagAxis
```

True

A-Stabilité et L-stabilité, conclusion :

```
In [29]: Astable=not isConstantOnImaxis and PolesOk and
         ModuleLessOrEqualOneOnImagAxis#
```

```
In [30]: if Astable:
         print "La méthode est A-Stable."
         else:
         print "La méthode n'est pas A-Stable"
```

La méthode est A-Stable.

```
In [31]: if Astable and R.numerator().degree()<R.denominator().degree():
         print "La méthode est L-stable."
```

La méthode est L-stable.

2) Cas de la méthode Radau5

Calcul de la fonction de stabilité à partir du tableau de Butcher (Proposition 3.2, Hairer et Wanner Tome 2, page 41).

Out [11] :

$$\frac{0.05000000000000000z^2 + 0.4000000000000000z + 1}{-0.01666666666666667z^3 + 0.1500000000000000z^2 - 0.6000000000000000z + 1}$$

Si la méthode est implicite, où sont les pôles de R ?

Tous les pôles ont leur partie réelle positive.

Comportement le long de l'axe réel négatif (|R| est-elle bornée par 1 ?)

|R| < 1 sur $\mathbb{R}^- - \{0\}$

Comportement le long de l'axe imaginaire

True

A-Stabilité et L-stabilité, conclusion :

La méthode est A-Stable.

La méthode est L-stable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABDULLE, A. On roots and error constants of optimal stability polynomials. *BIT Numer. Math.* 40, 1 (2000), 177–182. pages 131
- [2] ABDULLE, A. Fourth order Chebyshev methods with recurrence relation. *SIAM J. Sci. Comput.* 23, 6 (2002), 2041–2054. pages 130, 132
- [3] ABDULLE, A. Explicit Stabilized Runge-Kutta methods. *Mathematics Institute of Computational science and Engineering*, 27 (2011). pages 128, 129
- [4] ABDULLE, A., AND MEDOVIKOV, A. A. Second order Chebyshev methods based on orthogonal polynomials. *Numer. Math*, 90 (2001), 1–18. pages 130, 131
- [5] ABDULLE, A., AND VILMART, G. Pirock : A swiss-knife partitioned implicit-explicit orthogonal Runge-Kutta Chebyshev integrator for stiff diffusion-advection-reaction problems with or without noise. *Journal of Computational Physics* 242 (2013), 869–888. pages 132
- [6] AHN, D., AND GAO, B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *Review of Financial Studies* 12 (1999), 721–762. pages 20
- [7] APPLEBAUM, D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2004. pages 62
- [8] AÏT-SAHALIA, Y. Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions. *Journal of Finance* 54 (1999), 1361–1395. pages 18, 32
- [9] AÏT-SAHALIA, Y. Maximum Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions : A Closed-Form Approximation Approach. *Econometrica* 70, 1 (2002), 223–262. pages 18, 32
- [10] AÏT-SAHALIA, Y. Closed-Form Likelihood Expansions for Multivariate Diffusions. *Annal of Statistics* 36 (2008), 906–937. pages 18, 32
- [11] BAKKER, M. Analytical aspects of a minimax problem. *Technical Note TN 62, Mathematical Centre, Amsterdam* (1971). pages 130

- [12] BALL, C. A., AND TOROUS, W. N. Unit Roots and the Estimation of Interest Rate Dynamics. *Journal of Empirical Finance* 3 (1996), 215–238. pages 18, 32
- [13] BAO, Y. The approximate moments of the least squares estimator for the stationary autoregressive model under a general error distribution. *Econometric Theory* 23, 5 (2007), 1013–1021. pages 37, 62, 89, 110
- [14] BAO, Y., AND ULLAH, A. Finite sample properties of maximum likelihood estimator in spatial models. *Journal of Econometrics* 137 (2007), 396–413. pages 115, 146
- [15] BAO, Y., AND ULLAH, A. The second-order bias and mean squared of estimators in time-series models. *Journal of Econometrics* 140 (2007), 650–669. pages 20, 21, 28, 32, 36, 38, 39, 70, 103, 105, 106, 117, 143
- [16] BAO, Y., AND ULLAH, A. Higher-order bias and mse of nonlinear estimators. *Pak. J. Statist.* 25, 4 (2009), 587–594. pages 20, 21, 28, 38, 39, 105, 106, 107
- [17] BAO, Y., AND ULLAH, A. On skewness and kurtosis of econometric estimators. *Econometrics Journal* 12 (2009), 232–247. pages 22, 28, 70, 72, 90, 105, 106, 146
- [18] BAO, Y., AND ULLAH, A. Expectation of quadratic forms in normal and nonnormal variables with applications. *Journal of Statistical Planning and Inference* 140 (2010), 1193–1205. pages 73
- [19] BAO, Y., ULLAH, A., WANG, Y., AND YU, J. Bias in the estimation of the mean reversion in continuous-time lévy processes. *Economics Letters*, 134 (2015), 16–19. pages 65
- [20] BARLETT, M. S. On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time-series. *Journal of Royal Statistical Society* 8, 1 (1946), 27–41. pages 18, 36, 42, 110
- [21] BARNDORFF-NIELSEN, O. E., AND SHEPHARD, N. Non-gaussian orstein-uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B* 63, 2 (2001), 167–241. pages 62
- [22] BERGSTROM, A. R. Nonrecursive models as discrete approximation to systems of stochastic differential equations. *Econometrica* 34, 1 (1966), 173–182. pages 34
- [23] BERGSTROM, A. R. Continuous time stochastic models and issues of aggregation over time. *Handbook of Econometrics* 2 (1984), 1146–1211. pages 46
- [24] BERGSTROM, A. R. Continuous Time Econometric Modelling. *Oxford University Press, Oxford* (1990). pages 18, 32
- [25] BERTOIN, J. *Lévy Processes*. volume 121 of Cambridge Tracts in Mathematics , Cambridge University Press, 1996. pages 62
- [26] BLACK, F., AND SHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81 (1973), 637–654. pages 18, 31, 134
- [27] BRENNAN, M. J., AND SCHWATZ, E. S. Analyzing convertible bonds. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15 (1980), 907–929. pages 20
- [28] BROWN, R. A brief account of microscopical observations made on the particles contained in the pollen of plants. *Philosophical Magazine* 4 (1828), 161–173. pages 133

- [29] BUTCHER, J. C. Implicit runge-kutta processes. *Mathematics of Computation* 18, 85 (1964), 50–64. pages 123
- [30] CHAMBERS, M. J. Jackknife estimation of stationary autoregressive models. *Journal of Econometrics* 172 (2013), 142–157. pages 36
- [31] COSS, J. C., INGERSOLL, J. E., AND ROSS, S. A. A Theory of The Term Structure of Interest Rates. *Econometrica* 53, 2 (1985), 385–407. pages 20, 31, 56
- [32] CROUZEIX, M. Approximation des équations paraboliques. *Ecole d'automne de Jaca*, 6. pages 139
- [33] CROUZEIX, M., AND MIGNOT, A. L. *Analyse Numérique des Equations Differentielles*. Seconde édition révisée et augmentée. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, 1992. pages 122
- [34] DAHLQUIST, G. A special stability problem for linear multistep methods. *Nordisk Tidskr. Informations-Behandling* 3 (1963), 27–43. pages 126
- [35] DANIELS, H. E. Saddlepoint approximations in statistics. *Annals of Mathematical Statistics* 25 (1954), 631–650. pages 18, 32
- [36] DESCOMBES, S., DUARTE, M., DUMONT, T., GUILLET, T., LOUVET, V., AND MASSOT, M. Task-based adaptive multiresolution for time-space multi-scale reaction-diffusion systems on multi-core architectures. Nov. 2015. pages 141
- [37] DOTHAN, R. L. On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics* 6 (1973), 59–69. pages 20
- [38] DUARTE, M., DESCOMBES, S., TENAUD, C., CANDEL, S., AND MASSOT, M. Time-space adaptive numerical methods for the simulation of combustion fronts. *Combustion and Flame* 160, 6 (2013), 1083–1101. pages 121
- [39] DUARTE, M., MASSOT, M., DESCOMBES, S., TENAUD, C., DUMONT, T., LOUVET, V., AND LAURENT, F. New resolution strategy for multiscale reaction waves using time operator splitting, space adaptive multiresolution, and dedicated high order implicit/explicit time integrators. *SIAM J. Sci. Comput.* 34, 1 (2012), A76–A104. pages 121
- [40] DURHAM, G., AND GALLANT, A. R. Numerical Techniques for Maximum Likelihood Estimation of Continuous-time Diffusion Processes. *Journal of Business and Economic Statistics* 20 (2002), 297–316. pages 18, 32
- [41] EFRON, B. Bootstrap methods : Another look at the jackknife. *Annals of Statistics* 7 (1979), 1–26. pages 67
- [42] EHLE, B. A-stable methods and Padé approximations to the exponential. *SIAM J. Math. Anal.* 4 (1973), 671–680. pages 125
- [43] ELERIAN, O. A note on the existence of a closed-form conditional transition density for the milstein scheme. *Economics discussion paper 1998-W18, Nuffield College, Oxford* (1998). pages 61
- [44] FELLER, W. Two Singular Diffusion Problems. *Annals of Mathematics* 54, 1 (1951), 173–182. pages 57

- [45] FRANKLIN, J. N. Numerical stability in digital and analogue computation for diffusion problems. *J. Math. Phys.* 37 (1959), 305–315. pages 128
- [46] GALLANT, A. R., AND TAUCHEN, G. Wich moments to match? *Econometric Theory* 12 (1996), 657–681. pages 18, 32, 67
- [47] GHAZAL, G. A. recurrence formula for expectations of products of quadratic forms. *Statistics & Probability Letters* 27 (1996), 101–109. pages 73
- [48] GLASSERMAN, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Volume 53 of Applications of mathematics, Springer-Verlag, New York, 2004. pages 32, 57, 134
- [49] GOURIÉROUX, C., AND MONFORT, A. *Séries temporelles et Modèles Dynamiques*. Economica 2^e édition, 1995. pages 36
- [50] GOURIÉROUX, C., MONFORT, A., AND RENAULT, E. Indirect inference. *Journal of Applied Econometrics* 8 (1993), S85–S118. pages 19, 67
- [51] GOURIÉROUX, C., RENAULT, E., AND TOUZI, N. Calibration by simulation for small sample bias correction. in *R.S. Mariano, T. Schuermann and M. Weeks (eds.), Simulation-Based Inference in Economics : Methods and Applications*, Cambridge University Press (2000), 328–358. pages 67
- [52] GUILLOU, A., AND LAGO, B. Domaine de stabilité associé aux formules d’intégration numérique d’équations différentielles à pas séparés et à pas liés. recherche de formules à grands rayons de stabilité. *1er Cong. Assoc. Fran. Calcul, AFCAL, Grenoble* (1961), 43–56. pages 128, 129
- [53] HAIRER, E., AND WANNER, G. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer Series in Comp. Math. 8, Springer-Verlag, 1987. pages 125, 127
- [54] HAIRER, E., AND WANNER, G. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Second revised edition. Springer Series in Comp. Math. 14, Springer-Verlag, 1996. pages 128
- [55] HANSEN, L. P., AND SCHEINKMAN, J. A. Back to the future : Generating moment implications for continuous-time Markov processes. *Econometrica* 63 (1995), 767–804. pages 18, 32
- [56] HESTON, S. A closed-form solution of options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies* 6, 2 (1993), 327–343. pages 56
- [57] HURWICZ, L. Least-squares bias in time series. In : *Koopmans, T. (Ed.), Statistical Inference in Dynamic Economic Models*. Wiley, New York (1950), 365–383. pages 37, 42
- [58] KAWAZU, K., AND WATANABE, S. Branching processes with immigration and related limit theorems. *Theory of Probability and Its Applications* 16 (1971), 36–54. pages 56
- [59] KENDALL, M. G. Note on bias in the estimation of autocorrelation. *Biometrika* 41 (1954), 403–404. pages 36
- [60] KLOEDEN, P. E., AND PLATEN, E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Volume 23 of Applications of Mathematics. Springer, 1992. pages 33
- [61] LEBEDEV, V. I. Explicit difference schemes with time-variable steps for solving stiff systems of equations. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling* 4, 2 (1989), 111–135. pages 129

- [62] LEBEDEV, V. I. A new method for determining the zeros of polynomials of least deviation on a segment with weight and subject to additional conditions. part ii. *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling* 8 (1993), 397–426. pages 129
- [63] LEBEDEV, V. I. How to solve stiff systems of differential equations by explicit methods. *Numerical Methods and Applications (CRC Press, Boca Raton)* (1994), 45–80. pages 129
- [64] LEBEDEV, V. I., AND MEDOVIKOV, A. A. An explicit methods of the second order of accuracy for solving stiff systems of ordinary differential equations. *Russian Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 9 (1998), 55–63. pages 129
- [65] MAGNUS, J. R. The moments of products of quadratic forms in normal variables. *Statistica Neerlandica*, 32 (1978), 201–210. pages 77
- [66] MAGNUS, J. R. The expectation of products of quadratic forms in normal variables : the practice. *Statistica Neerlandica*, 33 (1979), 131–136. pages 77
- [67] MARRIOTT, F. H. C., AND POPE, J. A. Bias in the estimation of autocorrelations. *Biometrika* 41, 3/4 (1954), 390–402. pages 37, 42, 110
- [68] MEDOVIKOV, A. A. High order explicit methods for parabolic equations. *BIT Numer. Math.* 38, 2 (1998), 372–390. pages 129, 132
- [69] MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 1 (1973), 141–183. pages 20
- [70] MILSTEIN, G. N. A method of second-order accuracy integration of stochastic differential equations. *Theory of Probability and its Applications* 23 (1978), 396–401. pages 34
- [71] NAGAR, A. L. The bias and moment matrix of the general k-class estimators of the parameters in simultaneous equations. *Econometrica* 27, 4 (1959), 575–595. pages 28, 106
- [72] NOWMAN, K. B. Gaussian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates. *Journal of Finance* 52 (1997), 1695–1703. pages 18, 32, 58
- [73] OLIVER, F. W. J. *Bessel Functions of Integer Order*. Handbook of Mathematical Functions, New York : Dover, 1965. pages 57
- [74] OVERBECK, L., AND RYDÉN, T. Estimation in the Coss-Ingersoll-Ross Model. *Econometric Theory* 13, 3 (1997), 430–461. pages 56
- [75] PAPAPANTOLEON, A. An introduction to lévy process with application to finance. *arXiv :0804.0482v2* (3 Nov 2008). pages 62
- [76] PEDERSON, A. A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observation. *Scandinavian Journal of Statistics* 22 (1995), 55–71. pages 18, 32
- [77] PHILLIPS, P. C. B. The structural estimation of a stochastic differential equation system. *Econometrica* 6 (1972), 1021–1041. pages 40
- [78] PHILLIPS, P. C. B. Edgeworth and Saddlepoint approximations in a first order non-circular autoregression. *Biometrika* 65 (1978), 91–98. pages 18, 32

- [79] PHILLIPS, P. C. B. An interview with professor A.R. Bergstrom. *Economic Theory* 4 (1988), 301–328. pages 18
- [80] PHILLIPS, P. C. B., WANG, X., AND YU, J. Bias in estimating multivariate and univariate diffusions. *Journal of Econometrics* 161 (2011), 228–245. pages 20, 46, 47, 49, 50, 51, 59, 60
- [81] PHILLIPS, P. C. B., AND YU, J. Jackknifing bond option prices. *Review of Financial Studies* 18 (2005a), 707–742. pages 19
- [82] PHILLIPS, P. C. B., AND YU, J. Maximum Likelihood and Gaussian Estimation of Continuous Time Models in Finance. *Handbook of Financial Time Series* (2009), 497–530. pages 18, 32
- [83] PROTTER, P. *Stochastic Integration and Differential Equations. Applications of Mathematics* 2nd édition , Springer, 2004. pages 32, 40, 62
- [84] QUENOUILLE, M. H. Notes on bias in estimation. *Biometrika* 43 (1956), 353–360. pages 67
- [85] RADAU, R. Etude sur les formules d’approximation qui servent à calculer la valeur numérique d’une intégrale définie. *J. Math. Pures Appl. (6)* (1880), 283–336. pages 125
- [86] REVUZ, D., AND YOR, M. *Continuous Martingales And Brownian Motion.* Berlin : Third Edition., Springer-Verlag, 1999. pages 32, 56
- [87] RIHA, W. Optimal stability polynomials. *Computing* 9 (1972), 37–43. pages 128
- [88] RILSTONE, P., SRIVASTAVA, V. K., AND ULLAH, A. The second-order bias and mean squared error of nonlinear estimators. *Journal of Econometrics* 75 (1996), 369–395. pages 23, 38, 39, 70, 106
- [89] ROSS, A. M., MÜLLER, G., AND SZIMAYER, A. Ornstein-Uhlenbeck Processes and Extensions. *Handbook of Financial Time Series* (2009), 421–437. pages 39
- [90] SARGAN, J. D. Some discrete approximations to continuous time stochastic models. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 36 (1984), 74–90. pages 49
- [91] SARGAN, T. The exact moments of the least squares estimator for the autoregressive model. *Journal of Econometrics* 8 (1978), 159–172. pages 36
- [92] SATO, K. I. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* Cambridge University Press, 1991. pages 62
- [93] SAUL’EV, V. K. Integration of parabolic type equations with the method of nets . *Moscow, Fizmatgiz (in Russian)* (1960). pages 128, 129
- [94] SCHOUTENS, W. *Lévy processes in Finance :Pricing Financial Derivatives.* Wiley Series In Probability And Statistics, 2003. pages 62
- [95] SHAMAN, P., AND STINE, R. A. The bias of autoregressive coefficient estimators. *Journal of the American Statistical Association*, 66 (1988), 524–533. pages 36
- [96] SHENTON, L. R., AND JOHNSON, W. I. Moments of a serial correlation coefficient. *Journal of Royal Statistical Society Series B* 27, 2 (1965), 308–320. pages 37
- [97] SMITH, A. A. Estimating nonlinear time-series models using simulated vector autoregressions. *Journal of Applied Econometrics* 8 (1993), S63–S84. pages 19, 67

- [98] SMITH, M. D. On the expectation of a ratio of quadratic forms in normal variables. *Journal of Multivariate Analysis* 31 (1989), 244–257. pages 74
- [99] SMITH, M. D. Expectations of ratios of quadratic forms in normal variables : Evaluating some top-order invariant polynomials. *Australian Journal of Statistics* 35, 3 (1993), 271–282. pages 74
- [100] SOMMEIJER, B. P., SHAMPINE, L. F., AND VERWER, J. G. RKC : An explicit solver for parabolic PDEs. *J. Comput. Appl. Math.* 88, 2 (1997), 315–326. pages 130
- [101] SOMMEIJER, B. P., AND VERWER, J. G. A performance evaluation of a class of Runge-Kutta-Chebyshev methods for solving semi-discrete parabolic differential equations. *Report NW91/80, Mathematisch Centrum, Amsterdam* (1980). pages 130, 131
- [102] STROOCK, D., AND VARADHAN, S. Multidimensional diffusion processes. *Springer* (1979). pages 18, 32
- [103] TANG, C. Y., AND CHEN, S. X. Parameter estimation and bias correction for diffusion processes. *Journal of Econometrics* 149 (2009), 65–81. pages 19, 20, 41, 58, 59
- [104] ULLAH, A. *Finite Sample Econometrics*. Oxford University Press, 2004. pages 145
- [105] ULLAH, A., WANG, Y., AND YU, J. Bias in the Mean Reversion Estimator in the Continuous-Time Gaussian and Lévy Processes. pages 64
- [106] VAN DER HOUWEN, P. J., AND SOMMEIJER, B. P. On the Internal Stability of Explicit, m-Stage Runge-Kutta Methods for Large m-Values. *ZAMM*. 60 (1980), 479–485. pages 130
- [107] VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5 (1977), 177–186. pages 20, 31
- [108] VERWER, J. G. Explicit Runge-Kutta methods for parabolic partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics* 22 (1996), 359–379. pages 128, 129
- [109] WHITE, J. S. Asymptotic expansions for the mean and variance of the serial correlation coefficient. *Biometrika* 48 (1961), 85–94. pages 37, 110
- [110] WIENER, N. Norbert wiener papers. *MC 22, box X, Massachusetts institute of technology institute, Archives and Special Collections, Cambridge, Massachusetts*. pages 133
- [111] YANG, Z. A general method for third-order bias and variance corrections on a nonlinear estimator. *Journal of Econometrics* 186 (2015), 178–200. pages 105
- [112] YU, J. Bias in the estimation of the mean reversion parameter in continuous time models. *Journal of Econometrics* (2012). pages 20, 21, 41, 42, 66, 90, 91, 103, 143
- [113] YU, J. Econometric analysis of continuous time models : A survey of peter phillips’ work and some new results. *Econometric Theory; Research collection school of economics* 30, 4 (2014), 773–774. pages 18

RÉSUMÉ

Les travaux exposés dans cette thèse sont consacrés à l'étude de méthodes précises pour approcher des équations différentielles stochastiques (EDS) ou des équations aux dérivées partielles (EDP) déterministes. La première partie s'inscrit dans le cadre du développement de méthodes visant à corriger le biais dans les processus de diffusion paramétrique. Trois modèles sont étudiés en particulier : Ornstein-Uhlenbeck, Auto-régressif et Moyenne mobile. A l'issue de ce travail, plusieurs approximations de biais ont été proposées suivant deux approches : la première consiste en un développement de Taylor de l'estimateur obtenu alors que la seconde s'appuie sur une expansion stochastique de celui-ci.

La deuxième partie de cette thèse porte sur l'approximation de l'équation de la chaleur obtenue après changement de variables à partir du modèle de Black et Scholes. En général, on préfère utiliser de méthodes implicites pour résoudre des EDP paraboliques mais depuis quelques années, les méthodes dites de Runge-Kutta explicites stabilisées, sont de plus en plus utilisées. Nous montrons que l'utilisation de ce type de méthodes explicites et notamment les schémas ROCK donnent de très bons résultats même si les conditions initiales sont peu régulières, ce qui est le cas dans les modèles financiers.

Mots-clés : Biais, Équation différentielle stochastique, Expansion stochastique, Expansion de type Nagar, Processus de diffusion, Équations aux dérivées partielles, méthodes ROCK (Runge-Orthogonal-Chebyshev-Kutta).

ABSTRACT

The work presented in this thesis is devoted to the study of precise methods for approximating stochastic differential equations or deterministic partial differential equations (PDE). The first part is devoted to the development of bias correction methods in parametric diffusion processes. Three models are studied in particular : Ornstein-Uhlenbeck, auto-regressive and Moving average. At the end of this work, several approximations of bias have been proposed following two approaches : the first consists in a Taylor development of the obtained estimator while the second one relies on a stochastic expansion of the latter.

The second part of this thesis deals with the approximation of the heat equation obtained after changing variables from the Black-Scholes model. Like the vast majority of PDE, this equation does not have an exact solution, so solutions must be approached using explicit or implicit time schemes. It is often customary to prefer the use of implicit methods to solve parabolic PDE such as the heat equation, but in the past few years, the stabilized explicit Runge-Kutta methods which have the largest possible domains of stability along the negative real axis, are increasingly used. We show that the use of this type of explicit methods and in particular the ROCK (Runge-Orthogonal-Chebyshev-Kutta) schemes give very good results even if the initial conditions are not very regular, which is the case in the financial models.

Keywords : Bias, Stochastic differential equation, Stochastic expansion, Nagar's type expansion, Diffusion process, partial differential equation, ROCK methods.