



HAL
open science

I. Etude des EDDSRs surlinéaires II. Contrôle des EDSPRs couplées

Ahmed Mtiraoui

► **To cite this version:**

Ahmed Mtiraoui. I. Etude des EDDSRs surlinéaires II. Contrôle des EDSPRs couplées. Analyse numérique [math.NA]. Université de Toulon; Université de Sfax. Faculté des sciences. Département de mathématiques, 2016. Français. NNT : 2016TOUL0010 . tel-01504036

HAL Id: tel-01504036

<https://theses.hal.science/tel-01504036>

Submitted on 8 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TOULON

Préparée dans le cadre d'une cotutelle entre
L'UNIVERSITÉ DE TOULON ET L'UNIVERSITÉ DE SFAX -TUNISIE

Présentée et soutenue le *25 Novembre 2016* par :
Ahmed MTIRAOU

I. Etude des EDDSRs surlinéaires
II. Contrôle des EDSPRs couplées

Thèse préparée au sein du:
Laboratoire IMATH: Institut de Mathématiques de Toulon
Laboratoire des probabilités et Statistique de Sfax

JURY

MME BOSSY MIREILLE	INRIA, Sophia-antipolis	Membre
M. HAMADENE SAÏD	Université du Maine	Rapporteur
M. MNIF MOHAMED	Université Tunis El Manar	Rapporteur
M. PHAM HUYÊN	Université Paris Diderot	Membre
M. TALAY DENIS	INRIA, Sophia-antipolis	Membre

Directeurs de Thèse :
Khaled Bahlali, Université de Toulon
Hédi Nabli, Université de Sfax

Écoles doctorales:
ED 548 mer et sciences Toulon
École doctorale des sciences fondamentales de FSS-Sfax

À la mémoire de mes grands parents : Mohammed, Ribh et Bechir.

À ma famille : Omar, Naziha, Najoua et Salma.

Remerciements

Je tiens à présenter toute ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds tout particulièrement mon directeur de thèse Khaled BAHLALI pour le temps consacré à la lecture et aux réunions qui ont rythmé les différentes étapes de ma thèse, les discussions que nous avons partagées ont permis d'orienter mon travail d'une manière pertinente. Je remercie également mon directeur de thèse Hédi NABLI de m'offrir l'occasion de travailler sous sa direction dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre l'université de Toulon et l'université de Sfax.

Je suis très heureux d'avoir Rafika Gatt, Omar Kebiri, Badreddine Mansouri et Ibrahim Mezerdi comme collaborateurs de mes travaux qu'ils m'ont aidé à trouver mes résultats dans un environnement de travail en groupe.

Je voudrais ensuite remercier Mireille BOSSY, Saïd HAMADENE, Mohamed MNIF, Hûyen PHAM et Denis TALAY de m'offrir cet honneur qu'ils ont accepté de faire partir de mon jury. J'aimerais également exprimer toute ma reconnaissance à Saïd HAMADENE et Mohamed MNIF qu'ont accepté d'être mes rapporteurs.

Un grand merci aux membres du laboratoire IMATH, qui m'ont offert pendant trois ans toutes les conditions favorables pour réussir ma thèse et de travailler dans les bonnes conditions. Plus particulièrement, mes collègues de bureau des doctorants du laboratoire IMATH Houssam Abdoul Anziz, Ali Al Moussawi, Thomas Altazin, Serhii Dyshko, Jalal Lakhili, David Malthèse, Hadjer Moussaoui, Tran Duc Minh Phan, Kevin Pons pour les discussions qu'on a partagé ensemble, l'ambiance inoubliable au sein de notre bureau et leurs soutiens morales.

Sans oublier de remercier mes profs de la faculté des sciences de Sfax et tous les membres du laboratoire des probabilités et de statistique de Sfax.

Je remercie tous les personnes qui m'ont soutenu au quotidien mes amis, mes chers parents Amor et Najoua, ma chère soeur Salma, ma grande mère Naziha, mon oncle AZIZ, mes cousins Wissam MALLOULI et Hafedh CHTOUROU.

Et enfin, je ne saurai l'oublier : un immense merci à Jean Pierre BATTEUX et Amin BARKALLAH qui présentent ma deuxième famille en France.

Résumé

Cette thèse aborde deux sujets de recherches, le premier est sur l'existence et l'unicité des solutions des Équations Différentielles Doublement Stochastiques Rétrogrades (EDDSRs) et les Équations aux Dérivées partielles Stochastiques (EDPSs) multidimensionnelles à croissance surlinéaire. Le deuxième établit l'existence d'un contrôle optimal strict pour un système contrôlé dirigé par des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (EDSPRs) couplées dans deux cas de diffusions dégénérée et non dégénérée.

- Existence et unicité des solutions des EDDSRs multidimensionnels :

Nous considérons EDDSR avec un générateur de croissance surlinéaire et une donnée terminale de carré intégrable. Nous introduisons une nouvelle condition locale sur le générateur et nous montrons qu'elle assure l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions. Même si notre intérêt porte sur le cas multidimensionnel, notre résultat est également nouveau en dimension un. Comme application, nous établissons l'existence et l'unicité des solutions des EDPS semi-linéaires.

- Contrôle des EDSPR couplées :

Nous étudions un problème de contrôle avec une fonctionnelle coût non linéaire dont le système contrôlé est dirigé par une EDSPR couplée. L'objectif de ce travail est d'établir l'existence d'un contrôle optimal dans la classe des contrôles stricts, donc on montre que ce contrôle vérifie notre équation et qu'il minimise la fonctionnelle coût. La méthode consiste à approcher notre système par une suite de systèmes réguliers et on montre la convergence. En passant à la limite, sous des hypothèses de convexité, on obtient l'existence d'un contrôle optimal strict. On suit cette méthode théorique pour deux cas différentes de diffusions dégénérée et non dégénérée.

Abstract

In this Phd thesis, we considers two parts. The first one establish the existence and the uniqueness of the solutions of multidimensional backward doubly stochastic differential equations (BDSDEs in short) and the stochastic partial differential equations (SPDEs in short) in the superlinear growth generators. In the second part, we study the stochastic controls problems driven by a coupled Forward-Backward stochastic differential equations (FBSDEs in short).

- BDSDEs and SPDEs with a superlinear growth generators :

We deal with multidimensional BDSDE with a superlinear growth generator and a square integrable terminal datum. We introduce new local conditions on the generator then we show that they ensure the existence and uniqueness as well as the stability of solutions. Our work go beyond the previous results on the subject. Although we are focused on multidimensional case, the uniqueness result we establish is new in one dimensional too. As application, we establish the existence and uniqueness of probabilistic solutions to some semilinear SPDEs with superlinear growth generator. By probabilistic solution, we mean a solution which is representable throughout a BDSDEs.

- Controlled coupled FBSDEs :

We establish the existence of an optimal control for a system driven by a coupled FBDSE. The cost functional is defined as the initial value of the backward component of the solution. We construct a sequence of approximating controlled systems, for which we show the existence of a sequence of feedback optimal controls. By passing to the limit, we get the existence of a feedback optimal control. The convexity condition is used to ensure that the optimal control is strict. In this part, we study two cases of diffusions : degenerate and non-degenerate.

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Contrôle stochastique d'EDSPR couplées	1
1.1.1	Motivation	1
1.1.2	Résultats antérieurs	4
1.1.3	Résultats de la présente thèse sur le contrôle stochastique des EDSR couplées	7
1.2	Équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades et EDP stochastiques	10
1.2.1	Motivation	10
1.2.2	Résultats antérieurs	12
1.2.3	Résultats de la présente thèse sur les EDDSR et les EDPS .	15
2	Existence d'un contrôle optimal pour des EDSPR dans le cas dégénérée	21
2.1	Le résultat principal.	24
2.2	Preuves :	26
2.2.1	La régularisation des coefficients :	26
2.2.2	L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman approchée	27
2.2.3	Construction du problème de contrôle approché	27
2.2.4	Convergence du problème approché	33
2.3	Annexes	39
2.3.1	Annexe A : Estimations	39
2.3.2	Annexe B : Régularisation des coefficients	50
2.3.3	Annexe C : La condition de convexité de Filippov	53

3	Existence d'un contrôle optimal strict pour des EDSPRs dans le cas non-dégénérée	57
3.1	Le résultat principal	58
3.2	Principe de programmation dynamique et solution de HJB	62
3.2.1	Principe de programmation dynamique	62
3.2.2	Solution de viscosité de HJB	66
3.3	Preuves	73
3.3.1	Construction du problème de contrôle approché	73
3.3.2	l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman approchée	73
3.3.3	Le passage à la limite	80
4	EDDSR multidimensionnelles avec un générateur à croissance sur-linéaire et application aux EDPS.	85
4.1	Les résultats principales	87
4.1.1	Hypothèses	87
4.1.2	Quelques exemples et observations.	89
4.2	Preuves	95
4.2.1	La preuve du Théorème 4.1.1	95
4.2.2	La preuve du Théorème 4.1.2	107
4.3	Application aux EDPSs : solutions de Sobolev	108
	Bibliographie	121

Chapitre 1

Introduction générale

Dans cette thèse, on traite deux problèmes. Le premier porte sur l'existence et l'unicité des solutions des Équations Différentielles Doublement Stochastiques Rétrogrades (EDDSR), avec application aux Équations aux Dérivées partielles Stochastiques (EDPS) à croissance surlinéaire. Le deuxième concerne l'existence d'un contrôle optimal pour un système dont la dynamique est dirigée par des Équations Différentielles Stochastiques Progressives Rétrogrades (EDSPR) couplées à diffusion non dégénérée et aussi à diffusion dégénérée. La thèse est formée des travaux [15, 16, 17].

1.1 Contrôle stochastique d'EDSPR couplées

1.1.1 Motivation

Les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (EDSPR) apparaissent dans des problèmes de contrôle stochastique. Par exemple, dans la formulation stochastique du principe du maximum de Pontryagin pour des systèmes contrôlés dont la dynamique est gouvernée par une équation différentielle stochastique (EDS) d'Itô, l'équation adjointe est une équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR). Une équation différentielle stochastique progressive-rétrograde (EDSPR) est un système composé par une EDS et une EDSR. L'EDSPR est dite découplée (ou markovienne) si la variable de l'EDSR ne rentre pas dans l'EDS, et

elle est dite couplée si l'EDS et l'EDSR sont imbriquées l'une dans l'autre. En 1993, Antonelli a donné dans [3] le premier résultat d'existence et unicité des solutions pour une EDSPR. Vu les nombreuses applications de ses équations aux EDP, en finance et au contrôle stochastique, plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude des EDSPR, parmi lesquels on peut citer les travaux (Ma-Protter-Yong, Delarue, Hu-Peng, Peng-Wu, Hamadene, Li Juan [44, 27, 52, 33, 40]). En lien avec le sujet de la présente thèse, Buckdahn et al ont établi dans [24] l'existence d'un contrôle strict pour des EDSPR découplées en utilisant les équations de Hamilton Jacobi Bellman (HJB) et Bahlali et al ont établi dans [14] un résultat similaire par une méthode directe de compacité des lois des solutions de l'EDSPR contrôlée considérée. La partie contrôle d'EDSPR de cette thèse s'inspire des travaux [14, 24] et étend ces derniers aux EDSPR couplées. Dans le cas où la diffusion est dégénérée, on établit l'existence d'un contrôle optimal strict pour des EDSPR couplées sous des conditions de Lipschitz globales sur tous les coefficients et la condition de G-monotonie sur le coefficient de l'EDSR. Ces hypothèses garantissent l'existence et l'unicité de l'EDSPR considérée. Ils permettent également de montrer que la variable Z est bornée, ce qui est crucial pour la démarche suivie car ceci permet de voir Z comme un contrôle. Dans le cas où la diffusion est non dégénérée, on établit l'existence d'un contrôle optimal strict pour des EDSPR couplées sous des hypothèses de Lipschitz sur tous les coefficients. La G-monotonie est, elle, supprimée dans ce cas.

On va commencer par préciser le problème à étudier. On donnera ensuite les résultats antérieurs et enfin les deux résultats qu'on a obtenus.

Soit $T > 0$ et $t \in [0, T]$. Soient b, σ, f et Φ des fonctions définies comme suit :

$$b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d},$$

$$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}.$$

Soit $\nu := (\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de Wiener, avec Ω est l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^d ($\Omega = C_0([0, T]; \mathbb{R}^d)$), \mathcal{F} le complément du σ -algèbre de

borel sur Ω et P la mesure de Wiener. Soit W le processus canonique : $W_s(\omega) = \omega_s$, $s \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$. on note par $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_s, 0 \leq s \leq T\}$ la filtration naturel engendrée par $\{W_t\}_{t \geq 0}$ et complétée par les ensembles de mesure P -nuls.

On définit les espaces suivants :

- $\mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^m)$ est l'espace des processus continus $(X_s, s \in [t, T])$, (\mathcal{F}_t) -adaptés, à valeurs \mathbb{R}^m satisfaites $\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s|^2] < \infty$,
- $\mathcal{H}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^m)$ est l'espace des processus $(Z_s, s \in [t, T])$, (\mathcal{F}_t) -prévisibles, satisfaites $\mathbb{E}[\int_t^T |Z_s|^2 ds] < \infty$,
- $\mathcal{M}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^m)$ est l'espace de tout les martingales de carrée integrable càdlàg $M = (M_s)_{s \in [t, T]}$ à valeurs \mathbb{R}^m , avec $M_t = 0$,
- $\mathcal{U}_\nu(t)$ est l'ensemble des contrôles admissibles, c-à-d l'ensemble des processus $(u_s, s \in [t, T])$ (\mathcal{F}_t) -progressivement mesurables à valeurs dans un métrique compact \mathbb{U} de \mathbb{R}^d .

Considérons le système contrôlé d'EDSPR couplées, défini sur $[t, T]$ par :

$$\begin{cases} dX_s^{t,x,u} = b(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u}, Z_s^{t,x,u}, u_s)ds + \sigma(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u}, u_s)dW_s, \\ dY_s^{t,x,u} = -f(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u}, Z_s^{t,x,u}, u_s)ds + Z_s^{t,x,u}dW_s + dM_s^{t,x,u}, \\ \langle M^{t,x,u}, W \rangle_s = 0, \\ X_t^{t,x,u} = x, \quad Y_T^{t,x,u} = \Phi(X_T^{t,x,u}), \quad M_t^{t,x,u} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $X^{t,x,u}, Y^{t,x,u}, Z^{t,x,u}$ sont des processus (\mathcal{F}_t) adaptés, de carré integrables et $M^{t,x,u}$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale de carré integrable et orthogonale à W (la filtration (\mathcal{F}_t) n'est pas nécessairement Brownienne ce qui explique la présence de la martingale $M^{t,x,u}$). La variable contrôle u est un processus (\mathcal{F}_t) -adapté qui prend ces valeurs dans un espace métrique compact \mathbb{U} de \mathbb{R}^d . b, σ, f et Φ seront appelés coefficients de l'EDSPR.

Dans la suite, le système stochastique $\nu := (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t), W)$ varie avec le contrôle.

Définition 1.1.1 *Une solution de l'EDSPR précédente est un quadruplet $(X_t^{t,x,u}, Y_t^{t,x,u}, Z_t^{t,x,u}, M_t^{t,x,u})$ qui appartient à $\mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}_\nu^2(t, T; \mathbb{R})$ et qui vérifie l'équation (1.1).*

Définition 1.1.2 Un contrôle \hat{u} est dit optimal s'il vérifie :

$$Y_t^{t,x,\hat{u}} = \text{essinf} \left\{ Y_t^{t,x,u}, u \in \mathcal{U}_\nu(t) \right\} := V(t,x). \quad (1.2)$$

Si de plus, $\hat{u} \in \mathcal{U}_\nu(t)$ alors \hat{u} est appelé contrôle optimal strict.

La fonction V définie ci-dessus est appelée fonction valeur.

L'objectif est d'établir l'existence d'un contrôle optimal strict pour le problème (1.1)–(1.2).

1.1.2 Résultats antérieurs

Dans la suite, pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ et pour $s \in [t, T]$, on notera $Y_s^u := Y_s^{t,x,u}$. Dans [24], Buckdahn et al considèrent le système d'EDSPR découplées contrôlées suivant :

$$\begin{cases} dX_s^u = b(X_s^u, u_s)ds + \sigma(X_s^u, u_s)dW_s, \\ dY_s^u = -f(X_s^u, Y_s^u, Z_s^u, u_s)ds + Z_s^u dW_s + dM_s^u, \\ \langle M^u, W \rangle_s = 0, \\ X_t^u = x, \quad Y_T^u = \Phi(X_T^u), \quad M_t^u = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

Les coefficients b, σ, f et Φ sont définis comme suit :

$b : \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}^d, \sigma : \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}, f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ satisfont les hypothèses suivantes :

(A1) Les fonctions b et σ sont bornées.

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, les fonctions $b(x, \cdot)$ et $\sigma(x, \cdot)$ sont continues sur U .

Il existe une constante $C > 0$, telle que, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}^d$ et $v \in U$.

$$|b(x, v) - b(x', v)| + |\sigma(x, v) - \sigma(x', v)| \leq C|x - x'|.$$

(A2) Les fonctions f et Φ sont bornées.

Pour chaque $(x, y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, la fonction $f(x, y, z, \cdot)$ est continue sur U .

Pour tout $x, x' \in \mathbb{R}^d, y, y' \in \mathbb{R}, z, z' \in \mathbb{R}^d$ et $v \in U$.

$$|\Phi(x) - \Phi(x')| + |f(x, y, z, v) - f(x', y', z', v)| \leq C(|x - x'| + |y - y'| + |z - z'|).$$

Sous les hypothèses (A1) et (A2), l'EDSPR (1.3) admet une unique solution.
Hypothèse de convexité.

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \text{ il existe un sous ensemble compact } A \\ \text{de } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times U \text{ tel que} \\ A \supset \left\{ (\sigma^*(x, v)w, 0, v) \mid v \in U, w \in \mathbb{R}^d \text{ s.t. } |\sigma^*(x, v)w| \leq K \right\} \\ \text{tel que l'ensemble suivant est convexe :} \\ \{((\Sigma\Sigma^*)(x, y, z, \theta, v), \beta(x, y, z, \theta, v)) \mid (z, \theta, v) \in A\}, \end{array} \right.$$

Sous les hypothèses précédentes, Buckdahn et Li [25] ont montré que la fonction valeur associée à l'EDSPR précédente est une solution de viscosité d'une EDP de type Hamilton-Jacobi-Bellman. Dans [24], Buckdahn et al ont établi l'existence d'un contrôle optimal. Leur approche consiste à régulariser les coefficients σ , b et f , considérer la suite d'équations de HJB associées aux coefficients régularisés ainsi que la suite de problèmes de contrôle. Ils établissent alors l'existence d'une suite de contrôles feedback (ou markoviens). Ils obtiennent enfin l'existence d'un contrôle optimal strict par passage à la limite.

Théorème 1.1.3 (Buckdahn et al [24]).

On suppose que les hypothèses (A1), (A2) et (H) sont satisfaites. Alors, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, il existe un système stochastique \bar{v} , un contrôle admissible $\bar{u} \in \mathcal{U}_{\bar{v}}(t)$ et un processus $(\bar{X}^{t,x,\bar{u}}, \bar{Y}^{t,x,\bar{u}}, \bar{Z}^{t,x,\bar{u}}, \bar{M}^{t,x,\bar{u}}) \in \mathcal{S}_{\bar{v}}^2(t, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}_{\bar{v}}^2(t, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}_{\bar{v}}^2(t, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}_{\bar{v}}^2(t, T; \mathbb{R}^d)$ qui est solution de l'EDSPR (1.3) dans \bar{v} tels que

$$\bar{Y}_t^{t,x,\bar{u}} = V(t, x) = \text{essinf}_{u \in \mathcal{U}(t)_{\bar{v}}}(t) Y^{t,x,u}.$$

Dans [14], Bahlali et al ont considéré le système d'EDSPR découplées contrôlées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_s = x + \int_0^t b(s, X_s, u_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \\ Y_s = g(X_T) + \int_t^T f(X_s^u, Y_s^u, u_s) ds + \int_t^T Z_s dW_s + (M_T - M_t), \\ \langle M, W \rangle_s = 0, \quad s \in [t, T] \quad \text{et} \quad M_t = 0, \end{array} \right. \quad (1.4)$$

où les fonctions b , σ , f et Φ sont définies comme suit :

$b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonctionnelle coût est définie par :

$$J(t, x, u) := \mathbb{E} \left(l(Y_0) + \int_0^T h(s, X_s, Y_s, u_s) dt \right), \quad (1.5)$$

où h et l sont définies par $h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et satisfont les hypothèses suivantes :

(B1) Les fonctions b , σ , f et g sont continues,

Il existe une constante $K_1 > 0$ tels que, pour chaque $(t, x, y, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{U}$ on a

$$|b(t, x, u)| + |\sigma(t, x)| + |g(x)| \leq K_1(1 + |x|).$$

$$|f(t, x, y, u)| \leq K_1(1 + |x| + |y|).$$

(B2) Pour chaque $t \in [0, T]$, $x, x' \in \mathbb{R}^d$, $y, y' \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{U}$, on a

$$|f(t, x, y, u) - f(t, x', y', u)| \leq K(|x - x'| + |y - y'|).$$

$$|b(t, x, u) - b(t, x', u)| \leq K |x - x'|.$$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, x')| \leq K |x - x'|.$$

(B3) Les fonctions h et l sont continues et à croissance linéaire en (x, y) uniformément par rapport à (t, u) .

La fonction h est uniformément lipchitzienne en (x, y) .

(B4) (*Condition de convexité*). Pour tout $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, l'ensemble $(b, f, h)(x, y, \mathbb{U}) := \{b_i(t, x, u), f(t, x, y, u) \mid u \in \mathbb{A}, i = 1, 2, \dots, d\}$ est convexe fermé de \mathbb{R}^{d+1} .

Dans [14], Bahlali et al ont établi l'existence d'un contrôle optimal relaxé en utilisant la compacité des lois de Y dans l'espace \mathcal{D} de Skorokhod muni de la topologie S de Jakubowsky. La condition de convexité permet ensuite de montrer l'existence d'un contrôle optimal strict.

Théorème 1.1.4 (*Bahlali et al [14]*).

On suppose que les hypothèses (B1)–(B3) sont satisfaites. Alors, il existe un contrôle relaxé pour le problème de contrôle (1.4)–(1.5).

Si de plus on suppose que l'hypothèse (B4) sont satisfaites, alors le problème de contrôle (1.4)–(1.5) admet un contrôle optimal strict.

1.1.3 Résultats de la présente thèse sur le contrôle stochastique des EDSR couplées

Dans cette partie, on va présenter les deux résultats obtenus dans cette thèse sur l'existence d'un contrôle optimal pour des systèmes dirigés par des EDSR couplées. Ces résultats étendent, en un sens, ceux de [14, 24], aux EDSR découplées.

La fonction valeur est une solution de viscosité de l'équation de HJB suivante :

Pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) + \inf_{v \in \mathbb{U}} H(t, x, V(t, x), \nabla_x V(t, x), \nabla_{xx} V(t, x), v) = 0, \\ V(T, x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (1.6)$$

Avec,

$$\begin{aligned} H(x, y, p, A, u) = & \frac{1}{2} \text{tr} ((\sigma \sigma^*)(x, y, u) A) + b(x, y, p, \sigma(x, y, u), u) p \\ & + f(x, y, p, \sigma(x, y, u), u). \end{aligned}$$

Où $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{U}$ et $A \in \mathbb{S}^d$. \mathbb{S}^d est l'espace des matrices carrées $d \times d$ symétriques.

Les variables $\nabla_x V$ présente le gradient et $\nabla_{xx} V$ la matrice hessienne de V .

Nous avons besoin des hypothèses suivantes. On note $\lambda := (x, y, z)$.

(H1) Il existe une matrice G ($1 \times d$) de rang maximal telle que la fonction

$$A(t, \lambda) := \begin{pmatrix} -G^T f \\ Gb \\ G\sigma \end{pmatrix} (t, \lambda),$$

vérifie

$A(t, \lambda)$ est uniformément Lipschitzienne en λ , et pour chaque λ , $A(\cdot, \lambda) \in \mathcal{H}^2(0, T; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$;

$\Phi(x)$ est uniformément Lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^d$, et pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, $\Phi(x) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbb{R})$.

(H2) La condition de G-monotonie :

$$\langle A(t, \lambda) - A(t, \bar{\lambda}), \lambda - \bar{\lambda} \rangle \leq -\beta_1 |G\hat{x}|^2 - \beta_2 (|G^T \hat{y}|^2 + |G^T \hat{z}|^2),$$

$$\langle \Phi(x) - \Phi(\bar{x}), G(x - \bar{x}) \rangle \geq \mu_1 |G\hat{x}|^2, \quad \hat{x} = x - \bar{x}, \quad \hat{y} = y - \bar{y}, \quad \hat{z} = z - \bar{z},$$

avec β_1, β_2, μ_1 des constantes positives $\beta_1 + \beta_2 > 0$, $\beta_2 + \mu_1 > 0$.

(H3) Pour chaque $(x, y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ les fonctions $b(x, y, z, \cdot)$, $\sigma(x, y, \cdot)$ et $f(x, y, z, \cdot)$ sont continues en $u \in \mathbb{U}$.

(H4) Les fonctions b , σ , f et Φ sont bornées.

(H5) Il existe $K > 0$, tel que pour tout $u \in \mathbb{U}$, (x, y, z) et (x', y', z') in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

$$|\sigma(x, y, u) - \sigma(x', y', u)| \leq K(|x - x'| + |y - y'|).$$

$$|\Phi(x) - \Phi(x')| \leq K|x - x'|.$$

$$|b(x, y, u) - b(x', y', u)| \leq K(|x - x'| + |y - y'|).$$

$$|f(x, y, z, u) - f(x', y', z', u)| \leq K(|x - x'| + |y - y'| + |z - z'|).$$

(H6) Pour chaque $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$, * les fonctions $b(x, y, \cdot)$, $\sigma(x, y, \cdot)$ et $f(x, y, z, \cdot)$ sont continues.

(H7) Pour tout $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{U}$:

$$\langle \zeta, a(x, y, u)\zeta \rangle \geq \lambda|\zeta|^2, \quad \text{avec } a := \sigma\sigma^*$$

(C) *La condition de convexité*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \text{ l'ensemble suivant est convexe :} \\ \{((\sigma\sigma^*)(x, y, u), z\sigma^*(x, y, u), b(x, y, w\sigma(x, y, u), u), f(x, y, w\sigma(x, y, u), u))| \\ (u, w) \in \mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)\} , \end{array} \right.$$

Cas où la diffusion peut dégénérer

Dans cette partie, on va suivre la méthode développée par Buckdahn et al [24]. Cela consiste à approcher notre système d'EDSPR par une suite de systèmes réguliers qui possèdent des contrôles markoviens, et ensuite passer à la limite pour obtenir l'existence d'un contrôle optimal. On utilise des techniques le découplage des EDSPR, les résultats de Krylov [35] sur la régularité des solutions de HJB quand les coefficients sont réguliers et les résultats de El Karoui et al. [29] sur l'existence de contrôles relaxés pour des systèmes dirigés par des équations différentielles stochastique progressives d'Itô.

Théorème 1.1.5 *On suppose que :*

1. *L'équation de HJB (1.6) admet une unique solution de viscosité.*
2. *Les conditions (H1)–(H4) et (C) sont satisfaites.*

Alors, il existe un contrôle optimal strict pour le problème de contrôle (1.1)–(1.2).

Cas où la diffusion est non-dégénérée

Dans le cas où la diffusion est non-dégénérée, on considère le système contrôlé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_s^{t,x,u} = b(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u}, u_s)ds + \sigma(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u}, u_s)dW_s, \\ dY_s^{t,x,u} = -f(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u}, Z_s^{t,x,u}, u_s)ds + Z_s^{t,x,u}dW_s + dM_s^{t,x,u}, \\ \langle M^{t,x,u}, W \rangle_s = 0, \\ X_t^{t,x,u} = x, \quad Y_T^{t,x,u} = \Phi(X_T^{t,x,u}), \quad M_t^{t,x,u} = 0, \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Dans ce cas on remplace la condition de G-monotonie par la condition de non-dégénérescence. La difficulté est que l'EDSPR (1.7) peut ne pas avoir de solutions

pour tous les contrôles admissibles. Cependant, l'équation (1.7) admet des solutions uniques pour tous les contrôles constants, voir [27]. Donc, pour parer à la difficulté initiale, on a été amenés à changer la définition des contrôles admissibles afin de s'assurer que l'ensemble des contrôles admissibles n'est pas vide. On suivra le même schéma de raisonnement que dans le cas dégénéré précédent mais les techniques qui seront utilisées sont différentes.

Définition 1.1.6 *L'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}_v(t)$ est l'ensemble des processus (\mathcal{F}_t) -adaptés à valeurs dans un espace métrique \mathbb{U} telle que l'EDSPR (1.7) admet une unique solution.*

Théorème 1.1.7 *On suppose que :*

1. *L'équation de HJB (1.6) admet une unique solution de viscosité.*
2. *Les conditions (H4)–(H7) et (C) sont satisfaites.*

Alors, il existe un contrôle optimal strict pour le problème de contrôle ((1.7)–(1.2)).

1.2 Équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades et EDP stochastiques

1.2.1 Motivation

En 1994, Pardoux et Peng ont introduit dans [48] les équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades (EDDSR). Ils ont établi l'existence et l'unicité des solutions avec des hypothèses de Lipschitz et de contraction sur les coefficients. De plus, ils ont montré que ces équations sont liées aux équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) quasi-linéaires. Par la suite, le lien entre les EDDSR et les EDPS a été développé dans de nombreux articles (voir [2, 21, 22, 23, 26, 32, 58, 61]). Plusieurs auteurs ont réussi à établir l'existence et l'unicité des solutions dans des conditions plus générales que les hypothèses de Lipschitz (voir par exemple [41, 54, 58, 62, 64]). Dans un cas unidimensionnel, les méthodes de comparaison ont été principalement utilisées pour déduire l'existence de solutions pour des EDDSR avec des générateurs continus (voir e. g [30, 54, 64]).

Dans le cas multidimensionnel, le problème est plus délicat car les méthodes de comparaison ne fonctionnent plus. Notez également que, comme pour les EDSRs classiques, la localisation par les temps d'arrêts, est inefficace pour les EDDSR. Par conséquent, les articles précédents ont considéré des EDDSR multidimensionnelles avec des hypothèses globales sur le générateur, comme la condition de Lipschitz globale ou monotonie globale. Récemment, l'existence et l'unicité de solutions ont été établis dans [58] pour des EDDSR sous certaines hypothèses locales sur les générateurs. Cependant, les conditions utilisées dans [58] sont une retranscription de celles introduites par Bahlali et al dans [9]. Plus précisément, Wu et Zhang [58] ont étudié le cas où le générateur est localement monotone avec des conditions supplémentaires. Mais les générateurs considérés dans [58] restent de croissance sous linéaires.

Dans cette partie de la thèse, on considère des EDDSR multidimensionnels avec des générateurs à croissance surlinéaire et une donnée terminale de carrée intégrable. On introduit des nouvelles conditions locales sur les générateurs, et on montre que ces dernières assurent l'existence et l'unicité ainsi que la stabilité des solutions. En conséquence, on établit l'existence et unicité des solutions des EDPS semilinéaires associées sous les mêmes conditions sur les générateurs. On commencera par préciser le problème à étudier. On donnera ensuite les résultats antérieurs et enfin les résultats qu'on a obtenus.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $(W_t)_{t \in [0, T]}$, $(B_t)_{t \in [0, T]}$ deux mouvements Brownien standard indépendants à valeurs dans \mathbb{R}^d et \mathbb{R}^k respectivement. Pour chaque $t \in [0, T]$, on note $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{0,t}^W \vee \mathcal{F}_{s,t}^B$ avec \mathcal{F}^ν est défini pour un processus U par $\mathcal{F}_{s,t}^U = \sigma\{U_r - U_s, s \leq r \leq t\} \vee \mathfrak{N}$ où \mathfrak{N} est la classe des ensembles de \mathbb{P} -null de (\mathcal{F}) . A noter que la famille (\mathcal{F}_t) n'est pas une filtration car elle n'est ni croissante ni décroissante. On définit les espaces suivants :

- $M^2(0, T; \mathbb{R}^n) :=$ l'ensemble des processus n -dimensionnels mesurables $(\phi_t)_{0 \leq t \leq T}$ telle que $\mathbb{E}(\int_0^T |\phi_t|^2 dt) < \infty$.
- $S^2(0, T; \mathbb{R}^n) :=$ l'ensemble des processus n -dimensionnels continus $(\psi_t)_{0 \leq t \leq T}$ telle que $\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |\psi_t|^2 dt) < \infty$.

Soient $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r} \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $g : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times l}$ deux fonctions mesurables tels que pour chaque $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r}$, $f(\cdot, y, z) \in M^2(0, T; \mathbb{R}^d)$

et $g(\cdot, y, z) \in M^2(0, T; \mathbb{R}^{d \times l})$. Soit ξ une variable aléatoire (\mathcal{F}_T) -mesurable et de carrée intégrable. Considérons l'EDDSR, définie pour $s \in [0, T]$, par

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s) d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s dW_s. \quad (1.8)$$

ξ est la donnée terminale de l'équation et f le le générateur.

Définition 1.2.1 *Le couple $(Y_t, Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ est dit solution de l'équation $(E^{f,g,\xi})$ s'il est (\mathcal{F}_t) -mesurable, appartient à $M^2(0, T; \mathbb{R}^m) \times M^2(0, T; \mathbb{R}^{m \times d})$ et il vérifie l'équation $(E^{f,g,\xi})$.*

Cette partie est consacrée à l'existence et l'unicité des solutions de l'équation $(E^{f,g,\xi})$, avec application aux équations aux dérivées partielles stochastiques associées.

1.2.2 Résultats antérieurs

Wu et Zhang ont établi, dans [58], l'existence et l'unicité des solutions d'une EDDSR avec un générateur f qui est localement monotone en y , localement lipschitz en z et à croissance sous linéaire en (y, z) . En application, ils ont donné une interprétation probabiliste des solutions (dans un Sobolev) des EDPS quasilineaire associées sous les mêmes conditions. Leur approche consiste à approximer le générateur f par une suite de générateurs $(f_n)_{n \geq 1}$ qui est globalement monotone en y et globalement lipschitzienne en z . A noter que cette approche a été introduite auparavant par Bahlali et al dans [9] et [10] pour les EDSR classiques.

Dans [58], Wu et Zhang ont considéré les hypotheses suivantes :

(H1) $g(t, 0, 0) \in M^2(0, T; \mathbb{R}^{m \times k})$, et il existe deux constantes $K > 0$ et $0 < \epsilon < 1$ telles que pour tout t, y_1, z_1, y_2, z_2 :

$$|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)|^2 \leq K |y_1 - y_2|^2 + \epsilon |z_1 - z_2|^2.$$

(H2) Pour chaque (t, ω) , la fonction $f(t, \omega, \cdot, \cdot)$ est continue.

(H3) Il existe $K > 0$ and $0 \leq \gamma < 1$ telles que

$$|f(t, y, z)| \leq K (1 + |y|^\gamma + |z|^\gamma).$$

(H4) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\mu_N \in \mathbb{R}$ telles que, pour tout y_1, y_2, z satisfaisant $|y_1|, |y_2|, |z| \leq N$, on a :

$$(y_1 - y_2) \cdot (f(t, y_1, z) - f(t, y_2, z)) \leq \mu_N |y_1 - y_2|^2.$$

(H5) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $L_N > 0$ tel que, pour tout y, z_1, z_2 satisfaisant $|y|, |z_1|, |z_2| \leq N$, on a :

$$|f(t, y, z_1) - f(t, y, z_2)| \leq L_N |z_1 - z_2|.$$

Théorème 1.2.2 (Wu et Zhang [58]) *On suppose que (H1)–(H5) sont satisfaites. De plus, on assume que*

$$\frac{(1 + \mu_N^+ L_N^2) \exp(2\mu_N^+ T + L_N^2 \theta^{-1} T)}{N^{2(1-\gamma)}} \longrightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

avec $0 \leq \theta \leq 1 - \epsilon$. Alors l'EDDSR $(E^{f,g,\xi})$ admet une solution unique.

Remarque 1 *A noter les hypothèses (H1)–(H5) ont été initialement introduites dans [9, 10] où des résultats d'existence et unicité des solutions pour des EDSR classiques ont été obtenus sous la condition (1.9).*

On passe à l'application aux EDPS. Soient σ, b, F et G des fonctions mesurables définies comme suit :

$$\sigma : \mathbb{R}^k \longmapsto \mathbb{R}^{k \times r}, \quad b : \mathbb{R}^k \longmapsto \mathbb{R}^k, \quad H : \mathbb{R}^k \longmapsto \mathbb{R}^k, \quad F : [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r} \longmapsto \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad G : [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r} \longmapsto \mathbb{R}^{d \times l}.$$

Pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, on note $(X_s^{t,x})_{t \leq s \leq T}$ l'unique solution de l'EDS :

$$dX_s^{t,x} = b(X_s^{t,x}) ds + \sigma(X_s^{t,x}) dW_s, \quad X_t^{t,x} = x. \quad (1.10)$$

On considère l'EDPS :

$$\begin{aligned} u(s, x) = & h(x) + \int_s^T \{ \mathcal{L}(r, x) + F(r, x, u(r, x), (\sigma^* \nabla u)(r, x)) \} dr \\ & + \int_s^T G(r, x, u(r, x), (\sigma^* \nabla u)(r, x)) dB_r, \quad t \leq s \leq T, \end{aligned} \quad (1.11)$$

où

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (a_{i,j}) = \sigma \sigma^*.$$

Soit $\rho : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable continue. On note \mathcal{H} l'ensemble des champs aléatoires $\{u(t, x), 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d\}$ tels que pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, $u(t, x)$ est $(\mathcal{F}_{t,T}^B)$ -mesurable et $\sigma^* \nabla u$ appartient à $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d \times \Omega; dt \otimes \rho(x) dx \otimes d\mathbb{P})$. On considère l'EDDSR

$$\begin{aligned} Y_s^{t,x} &= h(X_T^{t,x}) + \int_s^T F(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}) dr \\ &\quad + \int_s^T G(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}) dB_r - \int_s^T Z_r^{t,x} dW_r, \quad t \leq s \leq T. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Définition 1.2.3 On dit que u est une solution au sens de Sobolev de l'EDPS (1.11), si $u \in \mathcal{H}$ et satisfait pour tout $\phi \in C_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \int_t^T u(s, x) \partial_s \phi(s, x) ds dx + \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) \phi(t, x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \phi(T, x) dx \\ &- \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_t^T (\sigma^* \nabla u)(s, x) ds dx - \int_{\mathbb{R}^d} \int_t^T u \operatorname{div}((b - A)\phi)(s, x) ds dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_t^T F(s, x, u(s, x), (\sigma^* \nabla u)(s, x)) \phi(s, x) ds dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \int_t^T G(s, x, u(s, x), (\sigma^* \nabla u)(s, x)) \phi(s, x) dB_s dx, \end{aligned}$$

où $b = (b_1, \dots, b_d)^*$, $A = (A_1, \dots, A_d)^*$, et $A_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$, $1 \leq j \leq d$.

On considère les hypothèses suivantes :

(H6) Il existe $K > 0$ et $\gamma \in [0, 1)$ tel que pour tout t, x, y, z

$$|F(t, x, y, z)| \leq K (1 + |y|^\gamma + |z|^\gamma).$$

(H7) Pour (t, x) fixé, $F(t, x, \cdot, \cdot)$ satisfait (H2), (H4) et (H5).

(H8) Pour (t, x) fixé, $G(t, x, \cdot, \cdot)$ satisfait (H1) et la fonction G vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_0^T |G(t, x, 0, 0)|^2 dt \rho(x) dx < \infty.$$

(H9) h appartient à $L^2(\mathbb{R}^d, \rho(x) dx)$

(H10) $b \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ and $\sigma \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k \times r})$

Théorème 1.2.4 (Wu et Zhang [58]) *On suppose que les hypothèses (H6)–(H10) et la condition (1.9) sont satisfaites. Alors, l'EDPS (1.11) admet une unique solution au sens de Sobolev.*

1.2.3 Résultats de la présente thèse sur les EDDSR et les EDPS

Les résultats qui suivent ont été obtenu dans [15]. Ils étendent aux EDDSR les résultats obtenus pour les EDSR classiques dans [8, 11, 13]. On établit l'existence et l'unicité ainsi la stabilité \mathbb{L}^p ($p < 2$) des solutions de l'EDDSR ($E^{(f,g,\xi)}$) lorsque le générateur f est à croissance surlinéaire en y et z .

Les coefficients f et g satisfont les hypothèses suivantes :

(B.1) La fonction f est continue en (y, z) pour presque tout (t, ω) .

(B.2) Il existe $K > 0$, $M > 0$, et $\eta \in \mathbb{L}^1(\Omega; \mathbb{L}^1([0, T]))$, tel que pour chaque $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r}$,

$$\langle y, f(t, \omega, y, z) \rangle \leq \eta_t + M|y|^2 + K|y||z| \quad \mathcal{P} - p.s., p.p.t \quad t \in [0, T].$$

(B.3) g est continue en (y, z) pour presque tout (t, ω) , et il existe $L > 0$, $0 < \lambda < 1$, $0 < \alpha_1 < 1$, et $\eta' \in \mathbb{L}^{\frac{2}{\alpha_1}}([0, T] \times \Omega)$ tel que pour chaque $(t, \omega, y, y', z, z') \in [0, T] \times \Omega \times (\mathbb{R}^d)^2 \times (\mathbb{R}^{d \times r})^2$,

$$(i) \quad |g(t, y, z) - g(t, y', z')|^2 \leq L|y - y'|^2 + \lambda|z - z'|^2$$

$$(ii) \quad |g(t, y, z)| \leq \eta'_t + L|y|^{\alpha_1} + \lambda|z|^{\alpha_1}. \quad (\text{B.4})$$

Il existe $M_1 > 0$, $0 \leq \alpha < 2$, $\alpha' > 1$ et $\bar{\eta} \in \mathbb{L}^{\alpha'}([0, T] \times \Omega)$ tel que pour chaque $(t, \omega, y, z) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r}$,

$$|f(t, \omega, y, z)| \leq \bar{\eta}_t + M_1(|y|^\alpha + |z|^\alpha).$$

(B.5) Il existe $v \in \mathbb{L}^2(\Omega; \mathbb{L}^2([0, T]))$, une suite réelle $(A_N)_{N>1}$ et deux constantes $M_2 > 1$, $r > 0$ tels que

- (i) $\forall N > 1, \quad 1 < A_N \leq N^r,$
(ii) $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N = \infty,$
(iii) Pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$ et $(t, \omega, y, y', z, z') \in [0, T] \times \Omega \times (\mathbb{R}^d)^2 \times (\mathbb{R}^{d \times r})^2$ tel que $|y|, |y'|, |z|, |z'| \leq N$, on a

$$\begin{aligned} \langle y - y', f(t, y, z) - f(t, y', z') \rangle \mathbf{1}_{\{v_s(\omega) \leq N\}} &\leq M_2 |y - y'|^2 \log A_N \\ &+ M_2 |y - y'| |z - z'| \sqrt{\log A_N} + M_2 A_N^{-1}. \end{aligned}$$

Le premier résultat de [15] est le suivant.

Théorème 1.2.5 ([15]) *Sous les hypothèses (B.1)–(B.5), l'EDDSR (1.8) admet une solution unique.*

L'application aux EDPS est la suivante. On considère l'EDS-EDDSR (1.10)–(1.12). L'EDPS associée ce système d'EDS-EDDSR est donné par l'équation (1.11). On montre que sous les hypothèses du théorème précédent, l'EDPS (Sobolev) unique.

On note par $\mathcal{C}_c^{1,\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^{1,\infty}$ à support compact.

Hypothèses. On suppose qu'il existe $\delta \geq 0$ tels que :

(B.10) La fonction h appartient à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^k, e^{-\delta|x|} dx; \mathbb{R}^d)$ et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^2 e^{-\delta|x|} dx < \infty.$$

(B.11) La fonction $F(t, x, \dots)$ est continue pour presque tout (t, x) .

(B.12) Il existe $M > 0, K > 0$ et $\eta \in \mathbb{L}^1([0, T] \times \mathbb{R}^k, e^{-\delta|x|} dt dx; \mathbb{R}_+)$, tel que

$$\langle y, F(t, x, y, z) \rangle \leq \eta(t, x) + M |y|^2 + K |y| |z| \quad \mathbb{P}\text{-a.s., a.e. } t \in [0, T].$$

(B.13) $\int_{\mathbb{R}^k} \int_0^T |G(t, x, 0, 0)|^2 e^{-\delta|x|} dt dx < \infty$ et il existe $L > 0, 0 < \lambda < 1, 0 < \alpha_1 < 1$, et $\eta \in \mathbb{L}^{\frac{2}{\alpha_1}}([0, T] \times \mathbb{R}^k, e^{-\delta|x|} dt dx; \mathbb{R}_+)$, tel que pour chaque $(t, x, y, y', z, z') \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^d)^2 \times (\mathbb{R}^{d \times r})^2$,

$$(i) \quad |G(t, x, y, z) - G(t, x, y', z')|^2 \leq L |y - y'|^2 + \lambda |z - z'|^2.$$

$$(ii) \quad |G(t, x, y, z)| \leq \eta'(t, x) + L|y|^{\alpha_1} + \lambda|z|^{\alpha_1}$$

(B.14) Il existe $M_1 > 0$, $0 \leq \alpha < 2$, $\alpha' > 1$ et $\bar{\eta} \in \mathbb{L}^{\alpha'}([0, T] \times \mathbb{R}^k, e^{-\delta|x|} dt dx; \mathbb{R}_+)$ telle que

$$|F(t, x, y, z)| \leq \bar{\eta}(t, x) + M_1 (|y|^\alpha + |z|^\alpha).$$

(B.15) Il existe $r > 0$ et $M_2 > 0$, telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, et pour tout (t, x, y, y', z, z') tel que $e^{r|x|}$, $|y|, |y'|, |z|, |z'| \leq N$, on a

$$\begin{aligned} \langle y - y', F(t, x, y, z) - F(t, x, y', z') \rangle &\leq \\ M_2 \log N \left(\frac{1}{N} + |y - y'|^2 \right) &+ \sqrt{M_2 \log N} |y - y'| |z - z'|. \end{aligned}$$

Le deuxième résultat de [15] est le suivant.

Theorem 1.2.1 ([15]) *On suppose que (B.10)–(B.15) sont satisfaites. Alors, L'EDPS (1.11) admet une solution (Sobolev) unique u telle que pour tout $t \in [0, T]$,*

$$u(s, X_s^{t,x}) = Y_s^{t,x} \quad \text{et} \quad \sigma^* \nabla u(s, X_s^{t,x}) = Z_s^{t,x}; \quad (s, \omega, x) \in [t, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k,$$

où $\{(X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}), t \leq s \leq T\}$ est l'unique solution de l'EDS-EDDSR (1.10)–(1.12).



Liste des travaux ayant contribué à la rédaction de la thèse

- [15] K.Bahlali, B.Mansouri ,R.Gatt, A.Mtiraoui. Backward doubly SDEs and SPDEs with superlinear growth generators. *Stochastics and Dynamics 2* Vol. 17, No. 1 (2017).
- [16] K.Bahlali, O.Kebiri, A.Mtiraoui. Existence of an Optimal Control for a coupled FBSDE with a degenerate diffusion coefficient. *Soumis à J. Maths. Analy. Appl.*
- [17] K.Bahlali, O.Kebiri, B. Mezerdi, A.Mtiraoui. Existence of an Optimal Control for a coupled FBSDE with a non degenerate diffusion coefficient. *Soumis à Stochastics.*

Chapitre 2

Éexistence d'un contrôle optimal pour des EDSPR dans le cas dégénérée

Introduction ¹

La théorie de contrôle stochastiques a intéressé de nombreux chercheurs, tant pour son aspect théorique, que pour ses applications liée à des problèmes dans le monde réel.

Il existe une vaste littérature consacré à la théorie de contrôle stochastique des systèmes dirigés par des équations différentielles stochastiques (EDS) et/ou des EDS-progressives rétrogrades (EDSPR) et des divers aspects ont été étudiés. Les principaux développements concernent l'existence d'un contrôle optimal, principe du maximum de Pontryagin (ou les conditions d'optimalité sont nécessaires) et le principe de Bellman (appelé aussi principe de programmation dynamique), voir par exemple [14, 20, 25, 24, 29, 31, 34, 36, 40, 41, 52]. L'existence d'un contrôle optimal strict pour des systèmes modélisés par un système d'EDSPR découplés est établit en [14] et [24] par deux méthodes différentes. Dans [14], l'approche consiste à montrer directement l'existence d'un contrôle relaxé en utilisant une méthode de

1. Dans ce chapitre, on reprend les définitions, les notations, les équations et les hypothèses considérés dans le chapitre 1 : Introduction générale.

compacité et de la S-topology de Jakubowsky. Dans [24] les auteurs passent par les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) associées au problème de contrôle. Cela leur permet de construire une suite de contrôles feedback optimaux. Ensuite, ils passent à la limite et ils utilisent le résultat de [29] et la condition de convexité afin d'obtenir l'existence d'un contrôle optimal strict.

Dans ce chapitre, on étudie un problème de contrôle optimal strict pour des systèmes contrôlés dirigés par des EDSPRs couplées. Le résultat obtenu est considéré comme l'extention des résultats de [14] et [24].

Soit $T > 0$ et $t \in [0, T]$. Soient b, σ, f et Φ des fonctions définies comme suit :

$$\begin{aligned} b &: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ \sigma &: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}, \\ f &: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Phi &: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Soit $\nu := (\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de Wiener, avec Ω est l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^d ($\Omega = C_0([0, T]; \mathbb{R}^d)$), \mathcal{F} le complément du σ -algèbre de borel sur Ω et P la mesure de Wiener. Soit W le processus canonique : $W_s(\omega) = \omega_s$, $s \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$. on note par $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_s, 0 \leq s \leq T\}$ la filtration naturel engendrée par $\{W_t\}_{t \geq 0}$ et complétée par les ensembles de mesure P -nuls.

On définit les espaces suivants :

- $\mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^m)$ est l'espace des processus continus $(X_s, s \in [t, T])$, (\mathcal{F}_t) -adaptés, à valeurs \mathbb{R}^m satisfaites $\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s|^2] < \infty$,
- $\mathcal{H}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^m)$ est l'espace des processus $(Z_s, s \in [t, T])$, (\mathcal{F}_t) -prévisibles, satisfaites $\mathbb{E}[\int_t^T |Z_s|^2 ds] < \infty$,
- $\mathcal{M}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^m)$ est l'espace de tout les martingales de carrée integrable càdlàg $M = (M_s)_{s \in [t, T]}$ à valeurs \mathbb{R}^m , avec $M_t = 0$,
- $\mathcal{U}_\nu(t)$ est l'ensemble des contrôles admissibles, c-à-d l'ensemble des processus $(u_s, s \in [t, T])$ (\mathcal{F}_t) -progressivement mesurables à valeurs dans un métrique compact \mathbb{U} de \mathbb{R}^d .

Considérons le système contrôlé d'EDSPR couplées, défini sur $[t, T]$ par :

$$\begin{cases} dX_s^{t,x,u} = b(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u}, Z_s^{t,x,u}, u_s)ds + \sigma(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u}, u_s)dW_s, \\ dY_s^{t,x,u} = -f(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u}, Z_s^{t,x,u}, u_s)ds + Z_s^{t,x,u}dW_s + dM_s^{t,x,u}, \\ \langle M^{t,x,u}, W \rangle_s = 0, \\ X_t^{t,x,u} = x, \quad Y_T^{t,x,u} = \Phi(X_T^{t,x,u}), \quad M_t^{t,x,u} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $X^{t,x,u}$, $Y^{t,x,u}$, $Z^{t,x,u}$ sont des processus (\mathcal{F}_t) -adaptés, de carré intégrables et $M^{t,x,u}$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale de carré intégrable et orthogonale à W (la filtration (\mathcal{F}_t) n'est pas nécessairement Brownienne, ce qui explique la présence de la martingale $M^{t,x,u}$). La variable contrôle u est un processus (\mathcal{F}_t) -adapté qui prend ces valeurs dans un espace métrique compact \mathbb{U} de \mathbb{R}^d . Les fonctions b , σ , f et Φ sont les coefficients de l'EDSPR.

Dans la suite, le système stochastique $\nu := (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t), W)$ varie avec le contrôle.

Définition 2.0.1 Une solution de l'EDSPR précédente est un quadruplet $(X_t^{t,x,u}, Y_t^{t,x,u}, Z_t^{t,x,u}, M_t^{t,x,u})$ qui appartient à $\mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}_\nu^2(t, T; \mathbb{R})$ et qui vérifie l'équation (2.1).

Définition 2.0.2 Un contrôle \hat{u} est dit optimal s'il vérifie :

$$Y_t^{t,x,\hat{u}} = \text{essinf} \left\{ Y_t^{t,x,u}, \quad u \in \mathcal{U}_\nu(t) \right\} := V(t, x). \quad (2.2)$$

Si de plus, $\hat{u} \in \mathcal{U}_\nu(t)$ alors \hat{u} est appelé contrôle optimal strict.

La fonction V défini ci-dessus est appelée fonction valeur.

L'objectif primordial de ce chapitre consiste à établir l'existence d'un contrôle optimal strict vérifiant le problème (2.1)–(2.2). De ce fait, on suit la méthode développée en [24].

La méthode consiste d'abord à approcher les coefficients du problème b, σ, f et Φ par des coefficients plus réguliers $(b_\delta, \sigma_\delta, f_\delta, \Phi_\delta)$ obtenues par convolution (régularisation). Puis de considérer l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman approchée associée à ces coefficients réguliers qui admet une solution unique $V^\delta \in C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ (voir [35]). Ensuite, au moins pour une sous-suite V^δ converge

dans un espace approprié vers \bar{V} . La limite \bar{V} est aussi solution de viscosité de l'équation HJB associée au problème de contrôle initial avec les coefficients b, σ, f et Φ . Par unicité de la solution de cette dernière on obtient que \bar{V} coïncide avec V , la fonction valeur du problème de contrôle (2.1)–(2.2). Ensuite le problème approché est plongé dans la classe des problèmes de contrôles de type relaxés qui a de bonnes propriétés de compacité. Et donc on peut extraire une sous-suite convergente. Enfin, grâce aux hypothèses de convexité, on utilise le résultat [29] pour établir l'existence d'un contrôle optimal strict pour le problème de contrôle (2.1)–(2.2).

On va commencer ce chapitre par préciser le problème à étudier. On donnera ensuite le résultat principal et enfin les preuves.

2.1 Le résultat principal.

Nous commençons par donner les notions de contrôle stochastique, principalement la fonctionnelle coût et la fonction valeur. Cependant, la fonction valeur est une solution de viscosité de l'équation de programmation dynamique correspondante, dans notre cas est l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman de seconde ordre (pour plus de détails voir [41]).

Pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, on définit la fonctionnelle coût et la fonction valeur respectivement :

$$J(t, x, u) := Y_t^{t,x,u}, \quad u \in \mathbb{U}.$$

$$V(t, x) = \operatorname{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}_v(t)} J(t, x, u).$$

La fonction valeur $V(t, x)$ est une solution au sens de viscosité de l'équation HJB suivante :

Pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) + \inf_{v \in \mathbb{U}} H(t, x, V(t, x), \nabla_x V(t, x), \nabla_{xx} V(t, x), v) = 0, \\ V(T, x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.3)$$

Avec,

$$H(x, y, p, A, u) = \frac{1}{2} \text{tr} ((\sigma\sigma^*)(x, y, u)A) + b(x, y, p, \sigma(x, y, u), u)p \\ + f(x, y, p, \sigma(x, y, u), u).$$

Où $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{U}$ et $A \in \mathbb{S}^d$. \mathbb{S}^d est l'espace des matrices carrées $d \times d$ symétriques.

$\nabla_x V$ présente le gradient et $\nabla_{xx} V$ la matrice hessienne de V .

Nous avons besoin des hypothèses suivantes. On note $\lambda := (x, y, z)$.

(H1) Il existe une matrice G ($1 \times d$) de rang maximal telle que la fonction

$$A(t, \lambda) := \begin{pmatrix} -G^T f \\ Gb \\ G\sigma \end{pmatrix} (t, \lambda),$$

vérifie

$A(t, \lambda)$ est uniformément Lipschitzienne en λ , et pour chaque λ , $A(\cdot, \lambda) \in \mathcal{H}^2(0, T; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$;

$\Phi(x)$ est uniformément Lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^d$, et pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, $\Phi(x) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbb{R})$.

(H2) La condition de G-monotonie :

$$\langle A(t, \lambda) - A(t, \bar{\lambda}), \lambda - \bar{\lambda} \rangle \leq -\beta_1 |G\hat{x}|^2 - \beta_2 (|G^T \hat{y}|^2 + |G^T \hat{z}|^2),$$

$$\langle \Phi(x) - \Phi(\bar{x}), G(x - \bar{x}) \rangle \geq \mu_1 |G\hat{x}|^2, \quad \hat{x} = x - \bar{x}, \quad \hat{y} = y - \bar{y}, \quad \hat{z} = z - \bar{z},$$

avec β_1, β_2, μ_1 des constantes positives $\beta_1 + \beta_2 > 0$, $\beta_2 + \mu_1 > 0$.

(H3) Pour chaque $(x, y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ les fonctions $b(x, y, z, \cdot)$, $\sigma(x, y, \cdot)$ et $f(x, y, z, \cdot)$ sont continues en $u \in \mathbb{U}$.

(H4) Les fonctions b, σ, f et Φ sont bornées.

Le résultat essentiel de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 *On suppose que :*

1. L'équation de HJB (2.3) admet une unique solution de viscosité.

2. Les conditions **(H1)**–**(H4)** et **(C)** sont satisfaites.

Alors, il existe un contrôle optimal strict pour le problème de contrôle **((2.1)–(2.2))**.

2.2 Preuves :

Comme la méthode suivie est d'approcher notre problème contrôlé par une suite de problèmes contrôlés avec des coefficients réguliers, cette section est composée de trois axes importants dont la régularisation des coefficients, l'équation de Hamilton Jacobi Bellman approchée, la construction du problème approché associée à cette dernière par découplage et la convergence du problème approché.

On commence alors par introduire la régularisation des coefficients.

2.2.1 La régularisation des coefficients :

Soit $m \geq 1$ une dimension arbitraire, on considère $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive régulière telle que son support est inclu dans la boule unité de \mathbb{R}^m avec $\int_{\mathbb{R}^m} \psi(\xi) d\xi = 1$.

Soit $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipchitizienne, on définit la régularisation de h par

$$h_\delta(\xi) = \delta^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} h(\xi - \xi') \psi(\delta^{-1}\xi') d\xi', \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \delta > 0.$$

Proposition 2.2.1 *La fonction h_δ vérifie :*

- (i) $|h_\delta(\xi) - h(\xi)| \leq K\delta$
- (ii) $|h_\delta(\xi) - h_{\delta'}(\xi)| \leq K|\delta - \delta'|$,
- (iii) $|h_\delta(\xi) - h_\delta(\xi')| \leq K|\xi - \xi'|$,

pour tout $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^m$, $\delta, \delta' > 0$,

avec K est la constante de Lipschitz de h indépendamment de δ .

La preuve est dans **Annexe B**.

Définition 2.2.2 *Pour chaque $\delta \in (0, 1]$, on note par $b_\delta, \sigma_\delta, f_\delta$ et Φ_δ les régularisés de b, σ, f et Φ , respectivement.*

2.2.2 L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman approchée

On fixe $\delta \in (0, 1]$ et on considère l'équation de HJB suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V^\delta(t, x) + \inf_{v \in \mathbb{U}} H^\delta(x, (V^\delta, \nabla_x V^\delta, \nabla_{xx} V^\delta)(t, x), v) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \\ V^\delta(T, x) = \Phi_\delta(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2.4)$$

Avec,

$$\begin{aligned} H^\delta(x, y, p, A, v) = & \frac{1}{2} \left(\text{tr}((\sigma_\delta \sigma_\delta^*)(x, y, v)) A + \delta^2 I_d \right) + b_\delta(x, y, p \sigma_\delta(x, y, v), v) p \\ & + f_\delta(x, y, p \sigma_\delta(x, y, v), v), \end{aligned}$$

pour $(x, y, p, A, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{U}$ et I_d est la matrice unité $d \times d$.

Théorème 2.2.3 *Krylov 1987 (voir. [35])*

Comme $(\sigma_\delta \sigma_\delta^*)(x, y, v) + \delta^2 I_d$ est strictement elliptique, alors il existe une unique solution bornée $V^\delta \in C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$.

La régularité de la solution V^δ et la compacité de l'ensemble \mathbb{U} prouvent le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.4 *Il existe une fonction mesurable $v^\delta : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{U}$ tel que, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, on a*

$$H^\delta(x, (V^\delta, \nabla_x V^\delta, \nabla_{xx} V^\delta)(t, x), v^\delta(t, x)) = \inf_{v \in \mathbb{U}} H^\delta(x, (V^\delta, \nabla_x V^\delta, \nabla_{xx} V^\delta)(t, x), v).$$

Ce corollaire est important pour la suite, il nous permet de considérer la fonction mesurable v^δ comme feed-back contrôle et de construire le problème de contrôle approché par le découplage des équations.

2.2.3 Construction du problème de contrôle approché

A partir de la solution de l'équation de HJB approchée et à l'aide d'un découplage, on construit notre problème approché.

On fixe les données initiales $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, on considère l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_s^\delta = b_\delta(X_s^\delta, V^\delta(s, X_s^\delta), \nabla_x V^\delta \sigma_\delta(X_s^\delta, V^\delta(s, X_s^\delta), v^\delta(s, X_s^\delta)), v^\delta(s, X_s^\delta)) ds \\ + \sigma_\delta(X_s^\delta, V^\delta(s, X_s^\delta), v^\delta(s, X_s^\delta)) dW_s + \delta dB_s^\delta, s \in [t, T], \\ X_t^\delta = x. \end{cases} \quad (2.5)$$

Sous nos hypothèses et à partir du Theorème 1 de la Section 2.6 de [36] (Krylov 1980) on montre l'existence d'une solution faible, c-à-d, il existe un système référence stochastique $\nu^\delta = (\Omega^\delta, \mathcal{F}^\delta, \mathbb{P}^\delta, (\mathcal{F}_t^\delta), W^\delta, B^\delta)$ et un processus continu \mathcal{F}_t^δ -adapté $X^\delta = (X_s^\delta)_{s \in [t, T]}$ qui vérifie (2.5), \mathbb{P}^δ -p.s.

On définit les processus Y^δ , Z^δ et U^δ :

$$Y_s^\delta := V^\delta(s, X_s^\delta), \quad Z_s^\delta := \nabla_x V^\delta(s, X_s^\delta) \sigma_\delta(X_s^\delta, V^\delta(s, X_s^\delta), u_s^\delta)$$

et $U_s^\delta := \delta \nabla_x V^\delta(s, X_s^\delta).$

Soient $u \in \mathcal{U}_{\nu^\delta}(t)$ un contrôle admissible, $(X^{\delta, x, u}, Y^{\delta, x, u}, Z^{\delta, x, u}, U^{\delta, x, u})$ est l'unique solution (\mathcal{F}_t^δ) -adapté de l'EDSPR couplées contrôlées suivante, pour $s \in [t, T]$ (voir [52]) :

$$\begin{cases} dX_s^{\delta, x, u} = b_\delta(X_s^{\delta, x, u}, Y_s^{\delta, x, u}, Z_s^{\delta, x, u}, u_s) ds + \sigma_\delta(X_s^{\delta, x, u}, Y_s^{\delta, x, u}, u_s) dW_s^\delta + \delta dB_s^\delta, \\ dY_s^{\delta, x, u} = -f_\delta(X_s^{\delta, x, u}, Y_s^{\delta, x, u}, Z_s^{\delta, x, u}, u_s) ds + Z_s^{\delta, x, u} dW_s^\delta + U_s^{\delta, x, u} dB_s^\delta + dM_s^{\delta, x, u}, \\ X_t^{\delta, t, x, u} = x, \quad Y_T^{\delta, t, x, u} = \Phi_\delta(X_T^{\delta, t, x, u}), \\ (X^{\delta, x, u}, Y^{\delta, x, u}, Z^{\delta, x, u}, U^{\delta, x, u}) \in \mathcal{S}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{S}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}^d) \\ \times \mathcal{H}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}^d), \quad M^{\delta, t, x, u} \in \mathcal{M}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}^d) \text{ orthogonale à } W^\delta \text{ et à } B^\delta \end{cases} \quad (2.6)$$

On définit la fonctionnelle coût comme la solution de la partie rétrograde de l'équation (2.6) à l'instant initiale :

$$J^\delta(t, x, u) := Y_t^{\delta, x, u}, \quad u \in \mathcal{U}_{\nu^\delta}(t),$$

où $\mathcal{U}_{\nu^\delta}(t)$ est l'ensemble des contrôles admissibles sur ν^δ .

Dans la proposition suivante on montre que le feedback contrôle $u_s^\delta := v^\delta(s, X_s^\delta)$ est optimal.

Proposition 2.2.5 *On suppose que les hypothèses (H1)–(H4) sont satisfaites. Alors il existe un contrôle admissible $u_s^\delta := v^\delta(s, X_s^\delta) \in \mathcal{U}_{v^\delta}(t)$, $s \in [0, T]$, qui est optimal pour le problème approché, c-à-d,*

$$J^\delta(t, x, u^\delta) = \operatorname{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}_{v^\delta}(t)} J^\delta(t, x, u),$$

Preuve.

À partir de la définition de la fonction valeur $V^\delta(t, x)$ (i.e $V^\delta(t, x) := \operatorname{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}_{v^\delta}(t)} J^\delta(t, x, u)$), il suffit de montrer que $J^\delta(t, x, u^\delta) = V^\delta(t, x)$. Par l'unicité de la solution de la partie progressive de (2.6) avec le processus contrôle u^δ , on obtient $X^{\delta, x, u^\delta} = X^\delta$. Puisque $Y_s^\delta = V^\delta(s, X_s^\delta)$ et la régularité de $V^\delta \in C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, on applique la formule d'Itô, par identification on a :

$Z_s^\delta = \nabla_x V^\delta(s, X_s^\delta) \sigma_\delta(X_s^\delta, V^\delta(s, X_s^\delta), u_s^\delta)$, $U_s^\delta = \delta \nabla_x V^\delta(s, X_s^\delta)$ et par l'EDP (2.4), $(Y^\delta, Z^\delta, U^\delta)$ satisfait la partie rétrograde de (2.6) pour $u = u^\delta$. Par l'unicité de la solution de la partie rétrograde (2.6), on obtient que le processus $(Y^{\delta, x, u^\delta}, Z^{\delta, x, u^\delta}, U^{\delta, x, u^\delta}) = (Y^\delta, Z^\delta, U^\delta)$ et $M^{\delta, x, u^\delta} = 0$. Finalement, par la définition $Y_t^\delta := V^\delta(t, x)$, on a,

$$J^\delta(t, x, u^\delta) = Y_t^{\delta, x, u^\delta} = Y_t^\delta = V^\delta(t, x) = \operatorname{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}_{v^\delta}(t)} J^\delta(t, x, u).$$

D'où u_s^δ est un contrôle optimal strict. \square

La proposition suivante présente l'estimation de gradient :

Proposition 2.2.6 *On suppose que les hypothèses (H1)–(H4) sont satisfaites. Alors il existe une constante C indépendante de δ et δ' telle que :*

(i) *Pour tout $t \in [0, T]$; $x, x' \in \mathbb{R}^d$ et $\delta, \delta' > 0$:*

$$|V^\delta(t, x) - V^{\delta'}(t, x')| \leq C(|\delta - \delta'|^{\frac{1}{2}} + |x - x'|).$$

(ii) *Pour tout $t \in [0, T]$; $x \in \mathbb{R}^d$ et $\delta > 0$*

$$|V^\delta(t, x) - V(t, x)| \leq C\delta^{\frac{1}{2}}.$$

C-à-d V^δ converge uniformément vers l'unique solution de viscosité de l'équation de HJB (2.3).

Preuve. On commence par montrer l'assertion (i) :

On fixe $t \in [0, T]$; $x, x' \in \mathbb{R}^d$ et $\delta, \delta' \in (0, 1]$.

Soit $X_s^{\delta', x', u^\delta} \in \mathcal{S}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}^d)$ l'unique solution de l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_s^{\delta', x', u^\delta} = b_{\delta'}(X_s^{\delta', x', u^\delta}, V^{\delta'}, \nabla_x V^{\delta'} \sigma_{\delta'}(X_s^{\delta', x', u^\delta}, V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}), u_s^\delta), u_s^\delta) ds \\ \quad + \sigma_{\delta'}(X_s^{\delta', x', u^\delta}, V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}), u_s^\delta) dW_s^\delta + \delta' dB_s^\delta, \\ X_t^{\delta', x', u^\delta} = x'. \end{cases}$$

L'extention de la solution sur l'intervalle $[0, T]$ est donnée par $X_s^{\delta', x', u^\delta} = x'$, pour $s < t$. On considère,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_s^{\delta', x', u^\delta} &:= -\frac{\partial}{\partial s} V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}) \\ &- \frac{1}{2} \text{tr} \left((\sigma_{\delta'} \sigma_{\delta'}^*) (X_s^{\delta', x', u^\delta}, V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}), u_s^\delta) + \delta'^2 I_{\mathbb{R}^d} \right) \times \nabla_{xx} V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}) \\ &- b_{\delta'}(X_s^{\delta', x', u^\delta}, V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}), \nabla_x V^{\delta'} \sigma_{\delta'}(X_s^{\delta', x', u^\delta}, V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}), u_s^\delta), u_s^\delta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

La formule d'Itô appliquée à la fonction $V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta})$, nous donne

$$\begin{aligned} Y_s^{\delta', x'} &:= V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}), \\ Z_s^{\delta', x'} &:= \nabla_x V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}) \sigma_{\delta'}(X_s^{\delta', x', u^\delta}, V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}), u_s^\delta), \\ U_s^{\delta', x'} &:= \delta' \nabla_x V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}), \quad M_s^{\delta', x'} := 0, \quad s \in [t, T], \end{aligned}$$

est l'unique solution de l'EDSR :

$$\begin{cases} dY_s^{\delta', x'} = -\tilde{f}_s^{\delta', x', u^\delta} ds + Z_s^{\delta', x'} dW_s^\delta + U_s^{\delta', x'} dB_s^\delta, \quad s \in [t, T], \\ Y_T^{\delta', x'} = \Phi_{\delta'}(X_T^{\delta', x', u^\delta}), \\ (Y^{\delta', x'}, Z^{\delta', x'}, U^{\delta', x'}) \in \mathcal{S}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{H}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}^d), \\ M^{\delta', x'} \in \mathcal{M}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}^d) \text{ is orthogonal to both } W^\delta \text{ and to } B^\delta. \end{cases} \quad (2.8)$$

On considère l'EDSR suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} dY_s^{\delta',x',u^\delta} = -f_{\delta'}(X_s^{\delta',x',u^\delta}, Y_s^{\delta',x',u^\delta}, Z_s^{\delta',x',u^\delta}, u_s^\delta) ds \\ \quad + Z_s^{\delta',x',u^\delta} dW_s^\delta + U_s^{\delta',x',u^\delta} dB_s^\delta + dM_s^{\delta',x',u^\delta}, \quad s \in [t', T], \\ Y_T^{\delta',x',u^\delta} = \Phi_{\delta'}(X_T^{\delta',x',u^\delta}), \\ (Y^{\delta',x',u^\delta}, Z^{\delta',x',u^\delta}, U^{\delta',x',u^\delta}, u^\delta) \in \mathcal{S}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{H}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}^d), \\ M^{\delta',x',u^\delta} \in \mathcal{M}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}^d) \text{ is orthogonal to } W^\delta \text{ and to } B^\delta. \end{array} \right.$$

A partir de l'équation de HJB (2.4) avec la solution classique $V^{\delta'}$ on voit que,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} V^{\delta'}(s, X_s^{\delta',x',u^\delta}) + \inf_{v \in U} H^{\delta'}(X_s^{\delta',x',u^\delta}, (V^\delta, \nabla_x V^{\delta'}, \nabla_{xx} V^{\delta'})(s, X_s^{\delta',x',u^\delta}), v) \\ &\leq \frac{\partial}{\partial t} V^{\delta'}(s, X_s^{\delta',x',u^\delta}) + H^{\delta'}(X_s^{\delta',x',u^\delta}, (V^\delta, \nabla_x V^{\delta'}, \nabla_{xx} V^{\delta'})(s, X_s^{\delta',x',u^\delta}), u_s^\delta) \\ &\leq f_{\delta'}(X_s^{\delta',x',u^\delta}, Y_s^{\delta',x',u^\delta}, Z_s^{\delta',x',u^\delta}, u_s^\delta) - \tilde{f}_s^{\delta',x',u^\delta}, \quad s \in [t, T]. \end{aligned}$$

Par le Théorème de comparaison des EDSRs, on obtient

$$\forall s \in [t, T], \quad Y_s^{\delta',x'} \leq Y_s^{\delta',x',u^\delta} \quad \mathbb{P}^\delta \text{ .p.s.}$$

Par un argument de symétrie, on déduit que :

$$|V^{\delta'}(t, x') - V^\delta(t, x)| = |Y_t^{\delta',x'} - Y_t^{\delta,x,u^\delta}| \leq |Y_t^{\delta',x',u^\delta} - Y_t^{\delta,x,u^\delta}|, \quad \mathbb{P}^\delta \text{-a.s.}$$

Comme V^δ et $V^{\delta'}$ sont des fonctions déterministes, on a

$$|V^{\delta'}(t', x') - V^\delta(t, x)| \leq E(|Y_t^{\delta',x',u^\delta} - Y_t^{\delta,x,u^\delta}| | \mathcal{F}_t^\delta)$$

Donc, il suffit d'estimer $E(|Y_t^{\delta',x',u^\delta} - Y_t^{\delta,x,u^\delta}| | \mathcal{F}_t^\delta)$.

On considère la décomposition suivante,

$$\begin{aligned} &|V^{\delta'}(t', x') - V^\delta(t, x)| \\ &\leq |Y_t^{\delta',x',u^\delta} - Y_t^{\delta,x,u^\delta}| \\ &\leq (|Y_t^{\delta',x',u^\delta} - Y_t^{\delta',x,u^\delta}| + |Y_t^{\delta',x,u^\delta} - Y_t^{\delta,x,u^\delta}|). \end{aligned}$$

Les lemmes suivants sont nécessaire pour le reste de la preuve :

Lemme 2.2.7 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que, pour tout $0 \leq t \leq T$ et $x, x' \in \mathbb{R}^d$, vérifie \mathbb{P}^δ -p.s. :*

$$E(|Y_t^{\delta, x', u^\delta} - Y_t^{\delta, x, u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta) \leq C|x - x'|^2. \quad (2.9)$$

Lemme 2.2.8 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ et δ' telle que, pour tout $0 \leq t \leq T$ vérifie, \mathbb{P}^δ -p.s. :*

$$E(|Y_t^{\delta', x, u^\delta} - Y_t^{\delta, x, u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta) \leq C|\delta - \delta'|. \quad (2.10)$$

Lemme 2.2.9 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ et δ' telle que, pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}^d$ vérifie,*

$$\begin{aligned} & E \left(\sup_{t \leq s \leq T} [|X_s^{\delta, x, u^\delta}|^2 + |X_s^{\delta', x, u^\delta}|^2 + |Y_s^{\delta, x, u^\delta}|^2 + |Y_s^{\delta', x, u^\delta}|^2] + \int_t^T |Z_r^{\delta, x, u^\delta}|^2 dr \right. \\ & \left. + \int_t^T |Z_r^{\delta', x, u^\delta}|^2 dr + \int_t^T |U_r^{\delta, x, u^\delta}|^2 dr + \int_t^T |U_r^{\delta', x, u^\delta}|^2 dr + \langle M^{\delta, x, u^\delta} \rangle_T \mid \mathcal{F}_t^\delta \right) \\ & \leq C(1 + |x|^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les preuves des lemmes sont dans la partie **Annexe A**.

A partir des estimations des lemmes précédente (2.9) et (2.10), on obtient \mathbb{P}^δ -p.s :

$$|V^{\delta'}(t, x') - V^\delta(t, x)| \leq C(|\delta - \delta'|^{\frac{1}{2}} + |x - x'|). \quad (2.12)$$

On montre (ii). Comme $V^\delta(t, x) = Y_t^{\delta, x, u^\delta}$ et les coefficients sont bornés, On utilise (2.11). Alors la suite (V^δ) est uniformément bornée, donc elle converge uniformément vers la fonction $\bar{V} \in C_b([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ quand δ tend vers 0. Puisque H^δ converge uniformément sur tout compactes vers H , par la stabilité des solutions de viscosité, on obtient que \bar{V} est une solution de viscosité de l'équation (2.3). Par l'unicité des solutions de l'équation (2.3), on montre que $\bar{V} \equiv V$. On conclut que $(V^{\delta'})$ converge vers V , lorsque δ' tend vers 0. On passe à la limite δ' tend vers 0

système d'EDSs suivantes :

$$\begin{cases} dX_s^n = b(X_s^n, Y_s^n, w_s^n \sigma(X_s^n, Y_s^n, u_s^{\delta_n})) ds + \sigma(X_s^n, Y_s^n, u_s^{\delta_n}) dW_s^{\delta_n}, \\ dY_s^n = -f(X_s^n, Y_s^n, w_s^n \sigma(X_s^n, Y_s^n, u_s^{\delta_n}), u_s^{\delta_n}) ds + w_s^n \sigma(X_s^n, Y_s^n, u_s^{\delta_n}) dW_s^{\delta_n}. \\ X_t^n = x, \quad Y_t^n = V^{\delta_n}(t, x). \end{cases} \quad (2.14)$$

On considère χ^n , r^n et le mouvement Brownien \mathcal{W}^n comme suit

$$\chi_s^n = \begin{pmatrix} X_s^n \\ Y_s^n \end{pmatrix}, \quad r_s^n = (w_s^n, 0, u_s^{\delta_n}) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}^n = \begin{pmatrix} W^{\delta_n} \\ B^{\delta_n} \end{pmatrix}.$$

On peut récrire le système contrôlé (2.14) comme l'EDS multidimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} d\chi_s^n = \beta(\chi_s^n, r_s^n) ds + \Sigma(\chi_s^n, r_s^n) d\mathcal{W}_s^n, \quad s \in [t, T], \\ \chi_t^n = \begin{pmatrix} x \\ V^{\delta_n}(t, x) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (2.15)$$

avec β et Σ sont les fonctions définissent dans le lemme 2.3.6.

Utilisant de nouveau la Proposition 2.2.6, alors la suite $w_s^n = \nabla_x V^{\delta_n}(s, X_s^{\delta_n})$ est uniformément bornée. Donc, on peut interpréter $(r_s^n, s \in [t, T])$ comme contrôle qui prend ses valeurs dans l'ensemble compacte $A := \overline{B}(0_{\mathbb{R}^d}, C) \times [0, K] \times \mathbb{U}$. Ensuite, on injecte r^n dans l'ensemble des contrôles relaxés, c-à-d on considère r^n comme variable aléatoire à valeurs dans l'espace ϑ de tout les mesures de Borel q dans $[0, T] \times A$, avec la projection $q(\cdot \times A)$ coincide avec la mesure de Lebesgue. Pour cela, on identitit le processus contrôle r^n et la mesure aléatoire

$$q^n(\omega, ds, da) = \delta_{r_s^n(\omega)}(da) ds, \quad (s, a) \in [0, T] \times A, \quad \omega \in \Omega.$$

Comme l'ensemble $\{(\Sigma(x, y, z, \theta, v), \beta(x, y, z, \theta, v)), (x, y, z, \theta, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times A\}$ est bornée et l'ensemble ϑ et compacte en respectant la topologie induite par la convergence faible des mesures. Alors $(\chi^n, q^n), n \geq 1$, est tendue dans $C([0, T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \times \vartheta$. Donc on peut trouver une mesure de probabilité Q dans $C([0, T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \times \vartheta$ et on extrait une sous-suite qui converge en loi vers le processus (χ, q) dans l'espace $C([0, T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \times \vartheta$ associé à la mesure Q .

En utilisant l'hypothèse **(C)** sur les coefficients du système contrôlé (2.15), on applique le résultat [29] on obtient l'existence du système référence stochastique $\bar{\nu} = (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P}, \bar{\mathbb{F}}, \bar{\mathcal{W}})$ associé à $(C([0, T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \times \vartheta; Q)$ et un processus $\bar{\mathbb{F}}$ -adapté \bar{r} à valeurs dans A , telle le processus χ est la solution de l'EDS

$$\begin{cases} d\chi_s = \beta(\chi_s, \bar{r}_s)ds + \Sigma(\chi_s, \bar{r}_s)d\bar{\mathcal{W}}_s, & s \in [t, T], \\ \chi_t = \begin{pmatrix} x \\ V^{\delta_n}(t, x) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

On remplace Σ et β par leur définitions et considérant

$$\chi = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} \bar{W} \\ \bar{B} \end{pmatrix} \text{ et } \bar{r} = (\bar{w}, \bar{\theta}, \bar{u}),$$

le système est équivalent à

$$\begin{cases} d\bar{X}_s = b(\bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s, \bar{u}_s)ds + \sigma(\bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{u}_s)d\bar{W}_s, \\ d\bar{Y}_s = -f(\bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s, \bar{u}_s)ds + \bar{Z}_s d\bar{W}_s + \bar{\theta}_s d\bar{B}_s, & s \in [t, T] \\ \bar{X}_t = x, \quad \bar{Y}_t = V(t, x). \end{cases}$$

2) Pour le reste de la preuve on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.10 *Il existe deux constantes K_1 and K_2 indépendante de n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_{s \in [t, T]} |X_s^{\delta_n} - X_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] &\leq K_1 \delta_n^2, \\ \mathbb{E}[\sup_{s \in [t, T]} |Y_s^{\delta_n} - Y_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] &\leq K_2 \delta_n^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Preuve. Lemme 2.2.10 On note,

$$\bar{X}_s^n := X_s^{\delta_n} - X_s^n, \quad \bar{Y}_s^n := Y_s^{\delta_n} - Y_s^n.$$

Pour $l = b, \sigma, f, A$ et $l_{\delta_n} = b_{\delta_n}, \sigma_{\delta_n}, f_{\delta_n}, A_{\delta_n}$. Soit

$$\begin{aligned} \Delta l(s) := & l_{\delta_n}(s, X_s^{\delta_n}, Y_s^{\delta_n}, w_s^n \sigma_{\delta_n}(X_s^{\delta_n}, Y_s^{\delta_n}, u_s^{\delta_n}), u_s^{\delta_n}) \\ & - l(s, X_s^n, Y_s^n, w_s^n \sigma(X_s^n, Y_s^n, u_s^{\delta_n}), u_s^{\delta_n}). \end{aligned}$$

En utilisant les Propositions 2.2.1 et 2.2.6, il existe une constante \bar{K} indépen-

dente de δ_n telle que :

$$\begin{aligned}
 |\Delta l(r)| &\leq |l_{\delta_n}(r, X_r^{\delta_n}, Y_r^{\delta_n}, w_r^n \sigma_{\delta_n}(X_r^{\delta_n}, Y_r^{\delta_n}, u_r^{\delta_n})) \\
 &\quad - l(r, X_r^{\delta_n}, Y_r^{\delta_n}, w_r^n \sigma_{\delta_n}(X_r^{\delta_n}, Y_r^{\delta_n}, u_r^{\delta_n}))| \\
 &\quad + |l(r, X_r^{\delta_n}, Y_r^{\delta_n}, w_r^n \sigma^{\delta_n}(X_r^{\delta_n}, Y_r^{\delta_n}, u_r^{\delta_n})) \\
 &\quad - l(r, X_r^{\delta_n}, Y_r^{\delta_n}, w_r^n \sigma_{\delta_n}(X_r^{\delta_n}, Y_r^{\delta_n}, u_r^{\delta_n}))| \\
 &\leq \bar{K} (\delta_n + |\bar{X}_r^n| + |\bar{Y}_r^n|),
 \end{aligned}$$

avec $(X^{\delta_n}, Y^{\delta_n})$ (resp. X^n, Y^n) est la solution de l'EDSPR approché (2.13) (resp. l'EDSPR (2.14)).

On applique la formule d'Itô et l'inégalité de Young. Alors, il existe une constante C_1 dépend uniquement de K et T , telle que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[|\bar{X}_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] &= \mathbb{E}\left[\int_t^s (2\bar{X}_r^n \Delta b(r) + |\Delta \sigma(r)|^2) dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}\right] \\
 &\leq C_1 \delta_n^2 + C_1 \mathbb{E}\left[\int_t^s (|\bar{X}_r^n|^2 + |\bar{Y}_r^n|^2) dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}\right]. \\
 &\leq C_1 \delta_n^2 + C_1 \mathbb{E}\left[\int_t^T (|\bar{X}_r^n|^2 + |\bar{Y}_r^n|^2) dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}\right]. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

De nouveau, on applique la formule d'Itô et on utilise la formule de Young. D'où, il existe une constante C_2 indépendante de δ_n

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[|\bar{Y}_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] &+ \mathbb{E}\left[\int_s^T |w_r^n \Delta \sigma(r)|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}\right] + \mathbb{E}\left[\int_s^T |U_r^{\delta_n, t, x, u^{\delta_n}}|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}\right] \\
 &\quad + \mathbb{E}[\langle M^{\delta', t, x', u^{\delta}} \rangle_T | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] \\
 &\leq C_2 (\delta_n^2 + \mathbb{E}[|\bar{X}_T^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] + \mathbb{E}\left[\int_s^T (|\bar{X}_r^n|^2 + |\bar{Y}_r^n|^2) dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}\right]), \quad t \leq s \leq T.
 \end{aligned}$$

Par l'inégalité (2.17) pour $s = T$, on obtient

$$\mathbb{E}[|\bar{Y}_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] \leq C_2 (\delta_n^2 + \mathbb{E}\left[\int_t^T (|\bar{X}_r^n|^2 + |\bar{Y}_r^n|^2) dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}\right]). \quad (2.18)$$

Par l'application de la formule d'Itô à $\langle G\bar{X}_r^n, \bar{Y}_r^n \rangle$ et l'hypothèse (B2) on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle G\bar{X}_s^n, \bar{Y}_s^n \rangle | \mathcal{F}_t^\delta] &= \mathbb{E}[\langle G\bar{X}_T^n, \bar{Y}_T^n \rangle | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] - \mathbb{E}[\delta_n \int_s^T GU_r^{\delta_n, x, u^{\delta_n}} dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] \\
&\quad - \mathbb{E}[\int_s^T \langle \Delta A(r), (\bar{X}_r^n, \bar{Y}_r^n, w_r^n \Delta \sigma_n(r)) \rangle dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] \\
&\geq \mathbb{E}[\langle G\bar{X}_T^n, \bar{Y}_T^n \rangle | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] + \mathbb{E}[\beta_1 \int_s^T |G\bar{X}_r^n|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] \\
&\quad + \mathbb{E}[\int_s^T \beta_2 (|G^T \bar{Y}_r^n|^2 + |G^T w_r^n \Delta \sigma_n(r)|^2) dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] \\
&\quad - \delta_n \mathbb{E}[\int_s^T GU_r^{\delta_n, x, u^{\delta_n}} dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] - \bar{K}^2 \delta_n^2. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Pour estimer la quantité précédente, on commence par $\mathbb{E}[\langle G\bar{X}_T^n, \bar{Y}_T^n \rangle | \mathcal{F}_t^{\delta_n}]$. Alors, par l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle G\bar{X}_T^n, \bar{Y}_T^n \rangle | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] &= \mathbb{E}[\langle G(X_T^{\delta_n} - X_T^n), \Phi_{\delta_n}(X_T^{\delta_n}) - \Phi_{\delta_n}(X_T^n) \rangle | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] \\
&\quad - \mathbb{E}[\langle G(X_T^{\delta_n} - X_T^n), \Phi(X_T^n) - \Phi_{\delta_n}(X_T^n) \rangle | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] \\
&\geq \mathbb{E}[\mu_1 |G(X_T^{\delta_n} - X_T^n)|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] - |G|K \mathbb{E}[|X_T^{\delta_n} - X_T^n| \delta_n | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] \\
&\geq (\mu_1 |G|^2 - |G|K\varepsilon) \mathbb{E}[|X_T^{\delta_n} - X_T^n|^2 \delta_n | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] - \frac{|G|K}{\varepsilon} \delta_n^2.
\end{aligned}$$

On choisit la constante de Young $\varepsilon > 0$ telle que $\varepsilon = \frac{\mu_1 |G|}{K}$ et on considère la constante $\mathbf{C} = K^2/\mu_1$, donc

$$\mathbb{E}[\langle G\bar{X}_T^n, \bar{Y}_T^n \rangle | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] \geq -\mathbf{C} \delta_n^2. \tag{2.20}$$

Puisque $U_r^{\delta_n, t, x, u^{\delta_n}} = \delta_n \nabla_x V^{\delta_n}(r, X_r^{\delta_n, t, x, u^{\delta_n}})$, et par la proposition 2.2.6 on a $\nabla_x V^{\delta_n}(t, x)$ est bornée pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$. Alors, on peut construire une constante $\bar{C}(K, T)$ qui vérifie

$$\delta_n \mathbb{E}[\int_s^T |GU_r^{\delta_n, t, x, u^{\delta_n}}| dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n}] \leq \bar{C}(K, T) \delta_n^2. \tag{2.21}$$

Par la combinaison de (2.20) et (2.21) dans (2.19) et pour $\tilde{C} = (\bar{C}(K, T) + K^2 + \mathbf{C})$,

on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle G\bar{X}_s^n, \bar{Y}_s^n \rangle | \mathcal{F}_t^{\delta^n}] + \tilde{C}\delta_n^2 &\geq \mathbb{E}[\beta_1 \int_s^T |\bar{X}_r^n|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta^n}] \\
&+ \mathbb{E}[\int_s^T \beta_2 (|G^T \bar{Y}_r^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta^n})] \\
&+ \underbrace{\mathbb{E}[\int_s^T \beta_2 |G^T w_r^n \Delta \sigma_n(r)|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta^n}]}_{\geq 0} \\
&\geq C_3 \mathbb{E}[\int_s^T (|\bar{X}_r^n|^2 + |\bar{Y}_r^n|^2) dr | \mathcal{F}_t^{\delta^n}], \quad t \leq s \leq T.
\end{aligned}$$

Pour $s = t$, il existe une constante C_4 depend de $K, T, |G|, \beta_1$ et β_2 qui vérifie

$$\mathbb{E}[\int_t^T (|\bar{X}_r^n|^2 + |\bar{Y}_r^n|^2) dr | \mathcal{F}_t^{\delta^n}] \leq C_4 (\mathbb{E}[\langle G\bar{X}_t^n, \bar{Y}_t^n \rangle | \mathcal{F}_t^{\delta^n}] + \delta_n^2).$$

Comme $\bar{X}_t^n = 0$ (Les deux processus ont le même point de départ x), on conclu que :

$$\mathbb{E}[\int_t^T (|\bar{X}_r^n|^2 + |\bar{Y}_r^n|^2) dr | \mathcal{F}_t^{\delta^n}] \leq C_4 \delta_n^2. \quad (2.22)$$

(2.17) et (2.22) montrent l'existence d'une constante K_1 depend de $K, T, |G|, \beta_1$ et β_2 telle que :

$$\mathbb{E}[|\bar{X}_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta^n}] \leq K_1 \delta_n^2, \quad t \leq s \leq T. \quad (2.23)$$

Alors il existe une constante K_2 depend de $K, T, |G|, \beta_1$ et β_2

$$\mathbb{E}[|\bar{Y}_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta^n}] \leq K_2 \delta_n^2, \quad t \leq s \leq T. \quad (2.24)$$

□

D'après le Lemme 2.2.10, la suite $(X^n, Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi, donc la suite $(X^{\delta_n}, Y^{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi en loi et les processus limites suit la même loi. De plus, en utilisant (2.16) et la Proposition 2.2.6, donc $\bar{Y}_s = V(s, \bar{X}_s)$ pour tout $s \in [t, T]$ \bar{P} -p.s.. En particulier, $Y_T = \Phi(X_T)$ \bar{P} -p.s. On identifie $\bar{M}_s = \int_t^s \bar{\theta}_r d\bar{B}_r$, qui vérifie $\langle \bar{M}, \bar{W} \rangle_s = \int_t^s \bar{\theta}_r d\langle \bar{B}, \bar{W} \rangle_r = 0$. Donc $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{M})$ satisfait (2.1).

Puisque $\bar{Y}_s = V(s, \bar{X}_s)$ pour tout $s \in [t, T]$ \bar{P} -p.s. D'autre part, par l'unicité de la

solution V de l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman (2.3),

$$V(t, x) = \operatorname{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}_t} J(t, x, u), \quad \bar{P}\text{-p.s.}$$

□

2.3 Annexes

2.3.1 Annexe A : Estimations

Lemme 2.3.1 *On suppose que les hypothèses (H1)–(H4) sont satisfaites. Alors pour chaque $t \in [0, T]$, $\delta \in (0, 1]$ et $x, x' \in \mathbb{R}^d$, il existe une constante C dépendant seulement de K, T et les bornes des coefficients, tel que*

$$\mathbb{E}[|Y_t^{\delta, x, u^\delta} - Y_t^{\delta, x', u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \leq C|x - x'|^2. \quad (2.25)$$

Preuve.

On considère les notations suivantes,

$$\bar{X}_s = X_s^{\delta, x, u^\delta} - X_s^{\delta, x', u^\delta}, \quad \bar{Y}_s = Y_s^{\delta, x, u^\delta} - Y_s^{\delta, x', u^\delta}, \quad \bar{Z}_s = Z_s^{\delta, x, u^\delta} - Z_s^{\delta, x', u^\delta},$$

Pour $l = b, \sigma, f, A$,

$$\Delta l_\delta(s) = l_\delta(s, X_s^{\delta, x, u^\delta}, Y_s^{\delta, x, u^\delta}, Z_s^{\delta, x, u^\delta}, u^\delta) - l_\delta(s, X_s^{\delta, x', u^\delta}, Y_s^{\delta, x', u^\delta}, Z_s^{\delta, x', u^\delta}, u^\delta),$$

$$\bar{U}_s = U_s^{\delta, x, u^\delta} - U_s^{\delta, x', u^\delta},$$

En utilisant la proposition 2.2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} |\Delta l_\delta(s)|^2 &= |l_\delta(s, X_s^{\delta, x, u^\delta}, Y_s^{\delta, x, u^\delta}, Z_s^{\delta, x, u^\delta}, u^\delta) - l_\delta(s, X_s^{\delta, x', u^\delta}, Y_s^{\delta, x', u^\delta}, Z_s^{\delta, x', u^\delta}, u^\delta)|^2 \\ &\leq K^2(|\bar{X}_s|^2 + |\bar{Y}_s|^2 + |\bar{Z}_s|^2). \end{aligned}$$

avec $(X^{\delta, x, u^\delta}, Y^{\delta, x, u^\delta}, Z^{\delta, x, u^\delta})$ (resp. $(X^{\delta, x', u^\delta}, Y^{\delta, x', u^\delta}, Z^{\delta, x', u^\delta})$) est la solution de l'EDSPR (2.6) qui prend comme position initiale x (resp. x').

On applique la formule d'Itô et l'inégalité de Young pour $s \in [t, T]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\bar{X}_s|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] &\leq |x - x'|^2 + \mathbb{E}[\int_t^s (2|\bar{X}_r| |\Delta b(r)| + |\Delta \sigma(r)|^2) dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &\leq |x - x'|^2 + 2K \mathbb{E}[\int_t^s |\bar{X}_r| (|\bar{X}_r| + |\bar{Y}_r| + |\bar{Z}_r|) dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &\quad + K^2 \mathbb{E}[\int_t^s (|\bar{X}_r|^2 + |\bar{Y}_r|^2) dr | \mathcal{F}_t^\delta]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\bar{X}_s|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] &\leq |x - x'|^2 + (K^2 + 8K) \mathbb{E}[\int_t^s |\bar{X}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &\quad + (K^2 + K) \mathbb{E}[\int_t^s |\bar{Y}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] + (K^2 + K) \mathbb{E}[\int_t^s |\bar{Z}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta]. \end{aligned}$$

On prend C_1 le minimum des constantes, on a

$$\mathbb{E}[|\bar{X}_s|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \leq |x - x'|^2 + C_1 \mathbb{E}[\int_t^s |\bar{X}_r|^2 + |\bar{Y}_r|^2 + |\bar{Z}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta]. \quad (2.26)$$

De nouveau, on applique la formule d'Itô

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\bar{Y}_s|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] &+ \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{Z}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{U}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\langle M^{\delta', x', u^\delta} \rangle_T | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &\leq \mathbb{E}[|\bar{Y}_T|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\int_s^T (2|\bar{Y}_r| |\Delta f(r)|) dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &\leq \mathbb{E}[|\bar{Y}_T|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] + 2K \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{Y}_r| (|\bar{X}_r| + |\bar{Y}_r| + |\bar{Z}_r|) dr | \mathcal{F}_t^\delta] \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young et l'hypothèse de lipchitz de la fonction Φ , on considère une constante C_2 dépend de K telle que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\bar{Y}_s|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] &+ \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{Z}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{U}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\langle M^{\delta', t, x', u^\delta} \rangle_T | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &\leq C_2 \left(\mathbb{E}[|\bar{X}_T|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{Y}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{X}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{Z}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] \right). \end{aligned}$$

Pour $s = T$ dans (2.26) et on modifie C_2 (si nécessaire)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\bar{Y}_s|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] &+ \mathbb{E}\left[\int_s^T |\bar{Z}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta\right] + \mathbb{E}\left[\int_s^T |\bar{U}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta\right] + \mathbb{E}[\langle M^{\delta', x', u^\delta} \rangle_T | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &\leq K^2 |x - x'|^2 + C_2 \left(\mathbb{E}\left[\int_t^T |\bar{Y}_r|^2 + |\bar{X}_r|^2 + |\bar{Z}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta\right] \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

D'autre part, par la formule d'Itô et l'hypothèse (B2), on trouve une constante C_3 dépend de K , β_1 et β_2 qui satisfait :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle G\bar{X}_s, \bar{Y}_s \rangle | \mathcal{F}_t^\delta] &= \mathbb{E}[\langle G\bar{X}_T, \bar{Y}_T \rangle | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}\left[\int_s^T \langle G\bar{X}_r, \Delta f(r) \rangle dr | \mathcal{F}_t^\delta\right] \\ &- \mathbb{E}\left[\int_s^T \langle G\Delta b(r), \bar{Y}_r \rangle dr | \mathcal{F}_t^\delta\right] - \mathbb{E}\left[\int_s^T \langle G\Delta \sigma(r), \bar{Z}_r \rangle dr | \mathcal{F}_t^\delta\right] \\ &= \mathbb{E}[\langle G\bar{X}_T, \bar{Y}_T \rangle | \mathcal{F}_t^\delta] - \mathbb{E}\left[\int_s^T \langle \Delta A(r), (\bar{X}_r, \bar{Y}_r, \bar{Z}_r) \rangle dr | \mathcal{F}_t^\delta\right] \\ &\geq \mathbb{E}[\mu_1 |G\bar{X}_T|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}\left[\beta_1 \int_s^T |G\bar{X}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_s^T \beta_2 (|G^T \bar{Y}_r|^2 + |G^T \bar{Z}_r|^2) dr | \mathcal{F}_t^\delta\right] \\ &\geq C_3 \mathbb{E}\left[\int_s^T |\bar{X}_r|^2 + |\bar{Y}_r|^2 + |\bar{Z}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta\right], \end{aligned}$$

Donc, pour $s = t$:

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T |\bar{X}_r|^2 + |\bar{Y}_r|^2 + |\bar{Z}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta\right] \leq \frac{1}{C_3} \mathbb{E}[\langle G\bar{X}_t, \bar{Y}_t \rangle | \mathcal{F}_t^\delta]. \quad (2.28)$$

On utilise (2.27) et (2.28), on obtient pour $s = t$,

$$\mathbb{E}[|\bar{Y}_t|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \leq K^2 |x - x'|^2 + C_4 \mathbb{E}[\langle G\bar{X}_t, \bar{Y}_t \rangle | \mathcal{F}_t^\delta]$$

Par l'inégalité de Young on construit une constante $C_5(K, |G|, \beta_1, \beta_2)$

$$\mathbb{E}[|\bar{Y}_t|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \leq K^2 |x - x'|^2 + C_5 \mathbb{E}[|\bar{X}_t|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] + \frac{1}{2} \mathbb{E}[|\bar{Y}_t|^2 | \mathcal{F}_t^\delta]$$

Comme $\bar{X}_t = x - x'$, alors il existe une constante C tel que

$$\mathbb{E}[|\bar{Y}_t|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \leq C |x - x'|^2$$

□

Le lemme suivant interprète la dépendance de la fonction valeur approché en δ .

Lemme 2.3.2 *on suppose que les hypothèses (H1)–(H4) sont satisfaites. Alors pour tout $t \in [0, T]$, $\delta, \delta' \in (0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une constante C indépendante de δ et δ' vérifie*

$$\mathbb{E}[|Y_t^{\delta', x', u^\delta} - Y_t^{\delta, x', u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \leq C|\delta - \delta'|. \quad (2.29)$$

Preuve. On note,

$$\bar{X}_s = X_s^{\delta', x', u^\delta} - X_s^{\delta, x', u^\delta}, \quad \bar{Y}_s = Y_s^{\delta', x', u^\delta} - Y_s^{\delta, x', u^\delta}, \quad \bar{Z}_s = Z_s^{\delta', x', u^\delta} - Z_s^{\delta, x', u^\delta},$$

Pour $l = b, \sigma, f, A$,

$$\Delta l(s) = l_{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}, Y_s^{\delta', x', u^\delta}, Z_s^{\delta', x', u^\delta}, u_s^\delta) - l_\delta(s, X_s^{\delta, x', u^\delta}, Y_s^{\delta, x', u^\delta}, Z_s^{\delta, x', u^\delta}, u_s^\delta),$$

$$\bar{U}_s = U_s^{\delta', x', u^\delta} - U_s^{\delta, x, u^\delta},$$

Par la proposition 2.2.1, on a

$$\begin{aligned} |\Delta l(s)|^2 &= |l_\delta(s, X_s^{\delta, x', u^\delta}, Y_s^{\delta, x', u^\delta}, Z_s^{\delta, x', u^\delta}, u_s^\delta) - l_{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}, Y_s^{\delta', x', u^\delta}, Z_s^{\delta', x', u^\delta}, u_s^\delta)|^2 \\ &\leq 2|l_\delta(s, X_s^{\delta, x', u^\delta}, Y_s^{\delta, x', u^\delta}, Z_s^{\delta, x', u^\delta}, u_s^\delta) - l_\delta(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}, Y_s^{\delta', x', u^\delta}, Z_s^{\delta', x', u^\delta}, u_s^\delta)|^2 \\ &\quad + 2|l_\delta(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}, Y_s^{\delta', x', u^\delta}, Z_s^{\delta', x', u^\delta}, u_s^\delta) - l_{\delta'}(s, X_s^{\delta', x', u^\delta}, Y_s^{\delta', x', u^\delta}, Z_s^{\delta', x', u^\delta}, u_s^\delta)|^2 \\ &\leq 2K^2 (|\delta - \delta'|^2 + |\bar{X}_s|^2 + |\bar{Y}_s|^2 + |\bar{Z}_s|^2). \end{aligned}$$

avec $(X^{\delta, x', u^\delta}, Y^{\delta, x', u^\delta}, Z^{\delta, x', u^\delta})$ (resp. $(X^{\delta', x', u^\delta}, Y^{\delta', x', u^\delta}, Z^{\delta', x', u^\delta})$) est la solution de l'EDSPR (2.6) associé à δ (resp. δ').

On utilise la formule d'Itô et l'inégalité de Young, il existe une constante C_1 dépend que de K et T qui vérifie :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\bar{X}_s|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] &= \mathbb{E}[\int_t^s (2\bar{X}_r \Delta b(r) + |\Delta \sigma(r)|^2 + |\delta - \delta'|^2) dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &\leq C_1 |\delta - \delta'|^2 + C_1 \mathbb{E}[\int_t^s (|\bar{X}_r|^2 + |\bar{Y}_r|^2 + |\bar{Z}_r|^2) dr | \mathcal{F}_t^\delta]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

De nouveau, on applique la formule d'Itô et l'ingalité de Young, ce qui entraîne l'existence d'une constante C_2 indépendante de δ, δ' , tel que

$$\begin{aligned}
 E^\delta[|\bar{Y}_s|^2|\mathcal{F}_t^\delta] &+ \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{Z}_r|^2 dr|\mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{U}_r|^2 dr|\mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\langle M^{\delta',x',u^\delta} \rangle_T|\mathcal{F}_t^\delta] \\
 &\leq C_2 |\delta - \delta'|^2 + C_2 \mathbb{E}[|\bar{X}_T|^2|\mathcal{F}_t^\delta] \\
 &+ C_2 \mathbb{E}[\int_s^T (|\bar{X}_r|^2 + |\bar{Y}_r|^2 + |\bar{Z}_r|^2) dr|\mathcal{F}_t^\delta], \quad t \leq s \leq T.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Par (2.30) et en modifiant C_2 (si nécessaire), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[|\bar{Y}_s|^2|\mathcal{F}_t^\delta] &+ \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{Z}_r|^2 dr|\mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\int_s^T |\bar{U}_r|^2 dr|\mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\langle M^{\delta',x',u^\delta} \rangle_T|\mathcal{F}_t^\delta] \\
 &\leq C_2 |\delta - \delta'|^2 + C_2 \mathbb{E}[\int_t^T (|\bar{X}_r|^2 + |\bar{Y}_r|^2 + |\bar{Z}_r|^2) dr|\mathcal{F}_t^\delta].
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

D'autre part, on applique de nouveau la formule d'Itô et on utilise l'hypothèse (B2), donc

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\langle G\bar{X}_s, \bar{Y}_s \rangle|\mathcal{F}_t^\delta] &= \mathbb{E}[\langle G\bar{X}_T, \bar{Y}_T \rangle|\mathcal{F}_t^\delta] - \mathbb{E}[\int_s^T \langle \Delta A(r), (\bar{X}_r, \bar{Y}_r, \bar{Z}_r) \rangle dr|\mathcal{F}_t^\delta] \\
 &- \mathbb{E}[(\delta - \delta') \int_s^T G\bar{U}_r dr|\mathcal{F}_t^\delta] \\
 &\geq \mathbb{E}[\langle G\bar{X}_T, \bar{Y}_T \rangle|\mathcal{F}_t^\delta] \\
 &+ \mathbb{E}[\beta_1 \int_s^T |G\bar{X}_r|^2 dr|\mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\int_s^T \beta_2 (|G^T \bar{Y}_r|^2 \\
 &+ |G^T \bar{Z}_r|^2) dr|\mathcal{F}_t^\delta] \\
 &- K^2 |\delta - \delta'|^2 - (\delta - \delta') \mathbb{E}[\int_s^T G\bar{U}_r dr|\mathcal{F}_t^\delta].
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Puisque $|\Phi_\delta(x) - \Phi_{\delta'}(x)| \leq |\delta - \delta'|$, et par l'application de l'inégalité de Young, on

a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle G\bar{X}_T, \bar{Y}_T \rangle | \mathcal{F}_t^\delta] &= \mathbb{E}[\langle G (X_T^{\delta,x,u^\delta} - X_T^{\delta',x,u^\delta}), \Phi_\delta(X_T^{\delta,x,u^\delta}) - \Phi_\delta(X_T^{\delta',x,u^\delta}) \rangle | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\quad - \mathbb{E}[\langle G (X_T^{\delta,x,u^\delta} - X_T^{\delta',x,u^\delta}), \Phi_{\delta'}(X_T^{\delta',x,u^\delta}) - \Phi_\delta(X_T^{\delta',x,u^\delta}) \rangle | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\geq - \mathbb{E}[|\langle G (X_T^{\delta,x,u^\delta} - X_T^{\delta',x,u^\delta}), \Phi_{\delta'}(X_T^{\delta',x,u^\delta}) - \Phi_\delta(X_T^{\delta',x,u^\delta}) \rangle| | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\quad + \mathbb{E}[\mu_1 |G(X_T^{\delta,x,u^\delta} - X_T^{\delta',x,u^\delta})|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\geq - |G| \mathbb{E}[|X_T^{\delta,x,u^\delta} - X_T^{\delta',x,u^\delta}| |\Phi_\delta(X_T^{\delta',x,u^\delta}) - \Phi_{\delta'}(X_T^{\delta',x,u^\delta})| | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\quad + \mathbb{E}[\mu_1 |G(X_T^{\delta,x,u^\delta} - X_T^{\delta',x,u^\delta})|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\geq (\mu_1 |G|^2 - |G| K \varepsilon_1) \mathbb{E}[|X_T^{\delta,x,u^\delta} - X_T^{\delta',x,u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\quad - \frac{|G| K}{\varepsilon_1} |\delta - \delta'|^2.
\end{aligned}$$

On choisi $\varepsilon_1 = \frac{\mu_1 |G|}{K}$ et $\mathbf{C} = K^2/\mu_1$, on obtient

$$\mathbb{E}[\langle G\bar{X}_T, \bar{Y}_T \rangle | \mathcal{F}_t^\delta] \geq - \mathbf{C} |\delta - \delta'|^2. \quad (2.34)$$

Par le fait $\bar{U}_r = \delta \nabla_x V^\delta(r, X_r^{\delta,x,u^\delta}) - \delta' \nabla_x V^{\delta'}(r, X_r^{\delta',x,u^\delta})$ et on utilise le lemme 2.3.1 alors $\nabla_x V^\delta(t, x)$ est uniformément bornée. Donc il existe une constante positive $\bar{C} = \bar{C}(T, |G|)$ qui vérifie

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\int_s^T |G\bar{U}_r| dr | \mathcal{F}_t^\delta] &\leq |G| \mathbb{E}[\int_s^T |\delta \nabla_x V^\delta(r, X_r^{\delta,x,u^\delta}) - \delta' \nabla_x V^{\delta'}(r, X_r^{\delta',x,u^\delta})| dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\leq |G| \mathbb{E}[\int_s^T |\delta \nabla_x V^\delta(r, X_r^{\delta,x,u^\delta})| + |\delta' \nabla_x V^{\delta'}(r, X_r^{\delta',x,u^\delta})| dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\leq |G| \mathbb{E}[\int_s^T |\nabla_x V^\delta(r, X_r^{\delta,x,u^\delta})| + |\nabla_x V^{\delta'}(r, X_r^{\delta',x,u^\delta})| dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\leq \bar{C}.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$(\delta - \delta') \mathbb{E}[\int_s^T |G\bar{U}_r| dr | \mathcal{F}_t^\delta] \leq \bar{C} |\delta - \delta'|. \quad (2.35)$$

Comme $\delta, \delta' \in (0, 1]$, donc $|\delta - \delta'| \geq |\delta - \delta'|^2$. Par (2.34), (2.35) et (2.33) on obtient,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle G\bar{X}_s, \bar{Y}_s \rangle | \mathcal{F}_t^\delta] + (\bar{C} + K^2 + \mathbf{C})|\delta - \delta'| &\geq \mathbb{E}[\beta_1 \int_s^T |G\bar{X}_r|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &\quad + \mathbb{E}[\int_s^T \beta_2 (|G^T \bar{Y}_r|^2 + |G^T \bar{Z}_r|^2) dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &\geq C_3 \mathbb{E}[\int_s^T (|\bar{X}_r|^2 + |\bar{Y}_r|^2 + |\bar{Z}_r|^2) dr | \mathcal{F}_t^\delta]. \end{aligned}$$

Il existe une constante C_4 dépend que de $K, T, |G|, \beta_1$ et β_2 tel que :

$$\mathbb{E}[\int_s^T (|\bar{X}_r|^2 + |\bar{Y}_r|^2 + |\bar{Z}_r|^2) dr | \mathcal{F}_t^\delta] \leq C_4 (\mathbb{E}[\langle G\bar{X}_s, \bar{Y}_s \rangle | \mathcal{F}_t^\delta] + |\delta - \delta'|). \quad (2.36)$$

On utilise (2.32) et (2.36), ce qui donne l'existence d'une constante $C_5(K, |G|, \beta_1, \beta_2)$,

$$|\bar{Y}_t|^2 \leq C_5 (|\delta - \delta'| + \langle G\bar{X}_t, \bar{Y}_t \rangle). \quad (2.37)$$

Comme $\bar{X}_t = 0$ (les deux processus commence par le point x),

$$\mathbb{E}[|\bar{Y}_t|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \leq C |\delta - \delta'|, \quad \text{P-p.s.} \quad (2.38)$$

□

Lemme 2.3.3 *On suppose que les hypothèses (H1)–(H4) sont satisfaites. Alors pour tout $t \in [0, T]$, $x, x' \in \mathbb{R}^d$ et $\delta, \delta' \in (0, 1]$ il existe une constante C indépendante δ tel que :*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\sup_{t \leq s \leq T} [|X_s^{\delta, x, u^\delta}|^2 + |X_s^{\delta', x, u^\delta}|^2 + |Y_s^{\delta, x, u^\delta}|^2 + |Y_s^{\delta', x, u^\delta}|^2] + \int_t^T |Z_r^{\delta, x, u^\delta}|^2 dr \right. \\ &\quad \left. + \int_t^T |Z_r^{\delta', x, u^\delta}|^2 dr + \int_t^T |U_r^{\delta, x, u^\delta}|^2 dr + \int_t^T |U_r^{\delta', x, u^\delta}|^2 dr + \langle M^{\delta, x, u^\delta} \rangle_T \mid \mathcal{F}_t^\delta \right) \\ &\leq C(1 + |x|^2). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Preuve. On note par C_l la borne de l , avec $l = b, f, \sigma$.

On applique la formule d'Itô pour $s \in [t, T]$

$$\begin{aligned} |X_s^{\delta,x,u^\delta}|^2 &= |X_t^{\delta,x,u^\delta}|^2 + \int_t^s 2X_r^{\delta,x,u^\delta} b_\delta(X_r^{\delta,x,u^\delta}, Y_r^{\delta,x,u^\delta}, Z_r^{\delta,x,u^\delta}, u_r^\delta) dr \\ &+ \int_t^s 2X_r^{\delta,x,u^\delta} \sigma_\delta(X_r^{\delta,x,u^\delta}, Y_r^{\delta,x,u^\delta}, u_r^\delta) dW_r^\delta + \int_t^s 2X_r^{\delta,x,u^\delta} \delta dB_r^\delta \\ &+ \int_t^s |\sigma_\delta(X_r^{\delta,x,u^\delta}, Y_r^{\delta,x,u^\delta}, u_r^\delta)|^2 + \delta^2 dr. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^{\delta,x,u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] &\leq |x|^2 + 2\mathbb{E}[\int_t^T |X_r^{\delta,x,u^\delta} b_\delta(X_r^{\delta,x,u^\delta}, Y_r^{\delta,x,u^\delta}, Z_r^{\delta,x,u^\delta}, u_r^\delta) dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &+ \mathbb{E}[\int_t^T |X_r^{\delta,x,u^\delta} \sigma_\delta(X_r^{\delta,x,u^\delta}, Y_r^{\delta,x,u^\delta}, u_r^\delta)|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta]^{1/2} \\ &+ 2 \mathbb{E}[\int_t^T |X_r^{\delta,x,u^\delta}| \delta^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta]^{1/2} + T C_\sigma^2 + T \delta^2 \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Young, on a pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et $\varepsilon_3 > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^{\delta,x,u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] &\leq |x|^2 + (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3) \mathbb{E}[\int_t^T |X_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &+ \frac{2}{\varepsilon_1} C_b^2 + (T + \frac{1}{\varepsilon_2}) C_\sigma^2 + \frac{2}{\varepsilon_3} \delta^2 \\ &\leq |x|^2 + (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3) T \mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^{\delta,x,u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \\ &+ \frac{2}{\varepsilon_1} C_b^2 + (T + \frac{1}{\varepsilon_2}) C_\sigma^2 + (\frac{2}{\varepsilon_3} + 1) \delta^2 \end{aligned}$$

On choisi $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et $\varepsilon_3 > 0$ tel que $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 = \frac{1}{2T}$. Puisque $\delta < 1$, Alors il existe une constante $\bar{C}_1 > 0$ indépendante de δ qui vérifie

$$\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^{\delta,x,u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \leq \bar{C}_1(1 + |x|^2). \quad (2.40)$$

Par l'inégalité (2.40), il existe $\bar{C}_2 > 0$ indépendante de δ qui satisfait,

$$\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^{\delta',x,u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] \leq \bar{C}_2(1 + |x|^2). \quad (2.41)$$

De nouveau, on applique la formule d'Itô

$$\begin{aligned}
|Y_s^{\delta,x,u^\delta}|^2 &+ \int_s^T |Z_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 dr + \int_s^T |U_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 dr + \langle M^{\delta,x,u^\delta} \rangle_T \\
&= |Y_T^{\delta,x,u^\delta}|^2 + \int_t^s 2Y_r^{\delta,x,u^\delta} f_\delta(X_r^{\delta,x,u^\delta}, Y_r^{\delta,x,u^\delta}, Z_r^{\delta,x,u^\delta}, u_r^\delta) dr \\
&\quad - \int_s^T 2Y_r^{\delta,x,u^\delta} Z_r^{\delta,x,u^\delta} dW_r^\delta - \int_t^s 2Y_r^{\delta,x,u^\delta} U_r^{\delta,x,u^\delta} dB_r^\delta \\
&\quad - \int_t^s 2Y_r^{\delta,x,u^\delta} dM_r^{\delta,x,u^\delta}.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, il existe une constante C_2^*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^{\delta,x,u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\int_t^T |Z_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\int_t^T |U_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\quad + \mathbb{E}[\langle M^{\delta,x,u^\delta} \rangle_T | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\leq \mathbb{E}[|\Phi(X_T^{\delta,x,u^\delta})|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\int_t^T 2Y_r^{\delta,x,u^\delta} f_\delta(X_r^{\delta,x,u^\delta}, Y_r^{\delta,x,u^\delta}, Z_r^{\delta,x,u^\delta}, u_r^\delta) dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\quad + \mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} \int_s^T 2Y_r^{\delta,x,u^\delta} Z_r^{\delta,x,u^\delta} dW_r^\delta | \mathcal{F}_t^\delta] + \mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} \int_t^s 2Y_r^{\delta,x,u^\delta} U_r^{\delta,x,u^\delta} dB_r^\delta | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\quad + \mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} \int_t^s 2Y_r^{\delta,x,u^\delta} dM_r^{\delta,x,u^\delta} | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\leq C_\Phi^2 + \mathbb{E}[\int_t^T 2Y_r^{\delta,x,u^\delta} f_\delta(X_r^{\delta,x,u^\delta}, Y_r^{\delta,x,u^\delta}, Z_r^{\delta,x,u^\delta}, u_r^\delta) dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\quad + C_2^* \mathbb{E}[\int_t^T |Y_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 |Z_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta]^{1/2} + C_2^* \mathbb{E}[\int_t^T |Y_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 |U_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta]^{1/2} \\
&\quad + C_2^* \mathbb{E}[\int_t^T |Y_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 dM_r^{\delta,x,u^\delta} | \mathcal{F}_t^\delta]^{1/2}.
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^{\delta,x,u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta] + \frac{1}{2} \mathbb{E}[\int_t^T |Z_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] + \frac{1}{2} \mathbb{E}[\int_t^T |U_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E}[\langle M^{\delta,x,u^\delta} \rangle_T | \mathcal{F}_t^\delta] \leq (1/2 + 2(C_2^*)^2) \mathbb{E}[\int_t^T \sup_{t \leq r \leq T} |Y_r^{\delta,x,u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta] + \frac{T C_f^2}{2}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

On applique l'inégalité de Gronwall, on déduit qu'il existe \bar{C}_3 dépend que de T et

la borne de la fonction f tel que,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^{\delta, x, u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta \right] \leq \bar{C}_3. \quad (2.43)$$

Par l'estimation (2.44) et on identifie $\bar{C}_4 = (1/2 + 2(C_2^*)^2)T\bar{C}_3 + \frac{T}{2}C_f^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^{\delta, x, u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta \right] &+ \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_t^T |Z_r^{\delta, x, u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta \right] + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_t^T |U_r^{\delta, x, u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta \right] \\ &+ \frac{1}{2} \mathbb{E} [\langle M^{\delta, x, u^\delta} \rangle_T | \mathcal{F}_t^\delta] \leq \bar{C}_4. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Par les mêmes arguments que l'inégalité (2.43), on construit une constante \bar{C}_5 indépendante de δ satisfait

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^{\delta', x, u^\delta}|^2 | \mathcal{F}_t^\delta \right] &+ \mathbb{E} \left[\int_t^T |Z_r^{\delta', x, u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta \right] + \mathbb{E} \left[\int_t^T |U_r^{\delta', x, u^\delta}|^2 dr | \mathcal{F}_t^\delta \right] \\ &+ \mathbb{E} [\langle M^{\delta', x, u^\delta} \rangle_T | \mathcal{F}_t^\delta] \leq \bar{C}_5. \end{aligned} \quad (2.45)$$

□

Lemme 2.3.4 *On suppose que les hypothèses (H1)–(H4) sont satisfaites. Alors pour tout $t \in [0, T]$ et $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante C indépendante de δ_n*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \leq s \leq T} [|X_s^{\delta_n}|^2 + |X_s^n|^2 + |Y_s^{\delta_n}|^2 + |Y_s^n|^2] | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right) \leq C (1 + |x|^2). \quad (2.46)$$

Preuve. On note C_l la borne de la fonction l avec $l = b, f, \sigma$ and ϕ .

On applique la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned} |X_s^n|^2 &= |x|^2 + 2 \int_t^s X_r^n b(X_r^n, Y_r^n, w_r^n \sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n}), u_r^{\delta_n}) dr \\ &+ \int_t^s |\sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n})|^2 dr + \int_t^s (X_r^n \sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n})) dW_r^{\delta_n}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy's, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] &\leq |x|^2 + 2 \mathbb{E} \left[\int_t^T |b(X_r^n, Y_r^n, w_r^n \sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n}))| |X_r^n| dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] \\ &\quad + T C_\sigma^2 + C^* \mathbb{E} \left[\int_t^T |\sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n})|^2 |X_r^n|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Young, on a pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] &\leq |x|^2 + 2 \varepsilon_1 \mathbb{E} \left[\int_t^T |X_r^n|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] + \frac{2}{\varepsilon_1} T C_b^2 \\ &\quad + C^* \varepsilon_2 \mathbb{E} \left[\int_t^s |X_r^n|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] + \left(T + \frac{C^*}{\varepsilon_2} \right) C_\sigma^2. \end{aligned}$$

On choisi $\varepsilon_1 = 1/8$ et $\varepsilon_2 = \frac{1}{4C^*}$, alors il existe \tilde{C}_1 dépend que de C^*, C_b, T et C_σ .

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] \leq \tilde{C}_1 (1 + |x|^2). \quad (2.47)$$

De nouveau, on applique la formule d'Itô

$$\begin{aligned} |Y_s^n|^2 + \int_s^T |w_r^n \sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n})|^2 dr &= |Y_T^n|^2 + \int_s^T Y_r^n w_r^n \sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n}) dW_r^{\delta_n} \\ &\quad + 2 \int_s^T Y_r^n f(X_r^n, Y_r^n, w_r^n \sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n}), u_r^{\delta_n}) dr \\ &\leq K^2 |X_T^n|^2 + \int_s^T Y_r^n w_r^n \sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n}) dW_r^{\delta_n} \\ &\quad + 2 \int_s^T |Y_r^n| |f(X_r^n, Y_r^n, w_r^n \sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n}), u_r^{\delta_n})| dr. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] + \mathbb{E} \left[\int_t^T |w_r^n \sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n})|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] \\ \leq C_\Phi^2 + C^* C_\sigma C_w \mathbb{E} \left[\int_t^T |Y_r^n|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right]^{1/2} \\ + 2 \mathbb{E} \left[\int_t^T |Y_r^n| |f(X_r^n, Y_r^n, w_r^n \sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n}), u_r^{\delta_n})| dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right]. \end{aligned}$$

On applique la formule de Young, on obtient pour tout $\varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] &+ \mathbb{E} \left[\int_t^T |w_r^n \sigma(X_r^n, Y_r^n, u_r^{\delta_n})|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] \\
&\leq C_{\Phi}^2 + C^* \varepsilon_3 \mathbb{E} \left[\int_t^T |Y_r^n|^2 dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] + \frac{TC_{\sigma}^2 C^* C_w^2}{\varepsilon_3} \\
&+ 2 \varepsilon_4 \mathbb{E} \left[\int_s^T |Y_r^n| dr | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] + \frac{C_f^2 T}{\varepsilon_4}.
\end{aligned}$$

On choisit successivement $\varepsilon_3 = 1/(4C^*)$ et $\varepsilon_4 = 1/8$, alors par l'estimation (2.47) il existe une constante \tilde{C}_2 indépendant de δ_n et n satisfait :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^n|^2 | \mathcal{F}_t^{\delta_n} \right] \leq \tilde{C}_2 \tag{2.48}$$

Le reste de la preuve est une conséquence des estimations (2.40) et (2.43). \square

2.3.2 Annexe B : Régularisation des coefficients

Proposition 2.3.5 *Les fonctions régularisés vérifient les propriétés suivantes :*

- (i) $|l_{\delta}(\xi) - l(\xi)| \leq K \delta$
 - (ii) $|l_{\delta}(\xi) - l_{\delta'}(\xi)| \leq K |\delta - \delta'|$,
 - (iii) $|l_{\delta}(\xi) - l_{\delta}(\xi')| \leq K |\xi - \xi'|$,
- pour tout $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^m$, et $\delta, \delta' > 0$,

Preuve.

(i)

$$|l_{\delta}(\xi) - l(\xi)| \leq \left| \delta^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} l(\xi - x) \varphi(\delta^{-1}x) dx - l(\xi) \right|.$$

Comme $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dx = 1$, Alors

$$|l_{\delta}(\xi) - l(\xi)| \leq \left| \delta^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} l(\xi - x) \varphi(\delta^{-1}x) dx - l(\xi) \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dx \right|$$

Soit $M = \delta^{-1}x$.

$$\begin{aligned} dM &= \delta^{-m}dx \\ dx &= \delta^m dM, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |l_\delta(\xi) - l(\xi)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^m} l(\xi - \delta M) \varphi(M) dM - \int_{\mathbb{R}^m} l(\xi) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |l(\xi - \delta M) - l(\xi)| \varphi(M) dM \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} K |\xi - \delta M - \xi| \varphi(M) dM \\ &\leq K\delta \int_{\mathbb{R}^m} |M| \varphi(M) dM. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |l_\delta(\xi) - l(\xi)| &\leq K\delta \int_{\mathbb{R}^m} |M| \varphi(M) dM \\ &\leq K\delta \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(M) dM \\ &\leq K\delta. \end{aligned}$$

(ii)

$$|l_\delta(\xi) - l_{\delta'}(\xi)| \leq \delta^{-m} \left| \int_{\mathbb{R}^m} l(\xi - x) \varphi(\delta^{-1}x) dx \right| - \delta'^{-m} \left| \int_{\mathbb{R}^m} l(\xi - y) \varphi(\delta'^{-1}y) dy \right|,$$

Soient $M = \delta^{-1}x$ et $N = \delta'^{-1}y$, alors

$$\begin{aligned} dM &= \delta^{-m}dx \quad , \quad dN = \delta'^{-m}dy \\ dx &= \delta^m dM \quad , \quad dy = \delta'^m dN \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |l_\delta(\xi) - l_{\delta'}(\xi)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^m} l(\xi - \delta M) \varphi(M) dM \right| - \left| \int_{\mathbb{R}^m} l(\xi - \delta' N) \varphi(N) dN \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |l(\xi - \delta x) - l(\xi - \delta' x)| \varphi(x) dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^m} K |\delta x - \delta' x| \varphi(x) dx \\
 &\leq K |\delta - \delta'| \int_{\mathbb{R}^m} |x| \varphi(x) dx.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |l_\delta(\xi) - l_{\delta'}(\xi)| &\leq K |\delta - \delta'| \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dx \\
 &\leq K |\delta - \delta'|.
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 |l_\delta(\xi) - l_\delta(\xi')| &\leq \delta^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} |l(\xi - x) \varphi(\delta^{-1} x) - l(\xi' - x) \varphi(\delta^{-1} x)| dx \\
 &\leq \delta^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\delta^{-1} x) K |\xi - \xi'| dx \\
 &\leq \delta^{-m} K |\xi - \xi'| \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\delta^{-1} x) dx,
 \end{aligned}$$

Soit $M = \delta^{-1} x$

$$\begin{aligned}
 dM &= \delta^{-m} dx \\
 dx &= \delta^m dM.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 |l_\delta(\xi) - l_\delta(\xi')| &\leq K |\xi - \xi'| \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(M) dM \\
 &\leq K |\xi - \xi'|.
 \end{aligned}$$

□

2.3.3 Annexe C : La condition de convexité de Filippov

$$(\mathbf{C}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \text{ l'ensemble suivant est convexe :} \\ \{((\sigma\sigma^*)(x, y, u), w(\sigma\sigma^*)(x, y, u), b(x, y, w\sigma(x, y, u), u), f(x, y, w\sigma(x, y, u), u)) \\ | (u, w) \in \mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)\}, \end{array} \right.$$

où $\bar{B}_C(0) \subset \mathbb{R}^d$ la boule fermée de centre 0 de rayon C .

On introduit le lemme suivant :

Lemme 2.3.6 1. Soit la condition de convexité suivante :

$$(\mathbf{C1}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \text{ l'ensemble} \\ \{((\Sigma\Sigma^*)(x, y, w, \theta, u), \beta(x, y, w, u)) | (u, w, \theta) \in \mathbb{U} \times \bar{B}_C(0) \times [0, K]\} \\ \text{est convexe.} \end{array} \right.$$

Pour tout $(x, y, w, \theta, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{U}$,

$$\Sigma(x, y, w, \theta, u) = \begin{pmatrix} \sigma(x, y, u) & 0 \\ w\sigma(x, y, u) & \theta \end{pmatrix}$$

et

$$\beta(x, y, w, u) = \begin{pmatrix} b(x, y, w\sigma(x, y, u), u) \\ -f(x, y, w\sigma(x, y, u), u) \end{pmatrix}.$$

Si $\theta = 0$, alors l'hypothèse **(C1)** est équivalente à **(C)**.

2. On fixe $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Sous l'hypothèse **(C1)**,

$$\overline{\text{co}}\{((\Sigma\Sigma^*)(x, y, w, u, 0), \beta(x, y, w, u)) | (u, w) \in \mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)\}$$

$$\subset \{((\Sigma\Sigma^*)(x, y, w, \theta, u), \beta(x, y, w, u)) | (u, w, \theta) \in \mathbb{U} \times \bar{B}_C(0) \times [0, K]\},$$

pour tout ensemble \mathbb{E} , $\overline{\text{co}} \mathbb{E}$ présente l'enveloppe convexe de l'ensemble \mathbb{E} .

Preuve. Soit la mesure de probabilité μ dans l'espace $\mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)$. Notre objectif

est de trouver le triplet $(\bar{w}, \bar{\theta}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^d \times [0, K] \times \mathbb{U}$ qui satisfait :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)} ((\Sigma \Sigma^*)(x, y, w, 0, u), \beta(x, y, w, u)) \mu(du, dw) \\ = ((\Sigma \Sigma^*)(x, y, \bar{w}, \bar{\theta}, \bar{u}), \beta(x, y, \bar{w}, \bar{\theta}, \bar{u})). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Soit $\Phi(u, w) = ((\sigma \sigma^*)(x, y, u), w \sigma \sigma^*(x, y, u), b(x, y, u), f(x, y, w \sigma(x, y, u), u))$. Par l'hypothèse (C) et la continuité de Φ , il existe (\bar{u}, \bar{w}) appartient à $\mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)$ tel que

$$\int_{\mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)} \Phi(u, w) \mu(du, dw) = \Phi(\bar{u}, \bar{w}). \quad (2.50)$$

Par un calcul simple on a,

$$\Sigma \Sigma^*(x, y, w, \theta, u) = \begin{pmatrix} \sigma \sigma^*(x, y, u) & \sigma \sigma^*(x, y, u) w^* \\ w \sigma \sigma^*(x, y, u) & w \sigma \sigma^*(x, y, u) w^* + \theta^2 \end{pmatrix}$$

D'après l'expression de $(\Sigma \Sigma^*)(x, y, w, 0, u)$, il suffit de chercher $\bar{\theta} \in [0, K]$ pour trouver (2.49)

$$\bar{\theta}^2 = \int_{\mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)} w \sigma \sigma^*(x, y, u) w^* \mu(du, dw) - \bar{w} \sigma \sigma^*(x, y, u) \bar{w}^* := \alpha. \quad (2.51)$$

Puisque $\sigma \sigma^*(x, y, \bar{u}) = \int_{\mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)} \sigma \sigma^*(x, y, u) \mu(du, dw)$, alors on peut écrire α comme suit

$$\alpha = \int_{\mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)} w \sigma \sigma^*(x, y, u) w^* \mu(du, dw) - \int_{\mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)} \bar{w} \sigma \sigma^*(x, y, u) \mu(du, dw) \bar{w}^* \quad (2.52)$$

$$= \int_{\mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)} ((w - \bar{w}) \sigma(x, y, u)) ((w - \bar{w}) \sigma(x, y, u))^* \mu(du, dw) \quad (2.53)$$

Il résulte que $\alpha \geq 0$. donc il suffit de choisir $\bar{\theta} = \sqrt{\alpha}$.

Par (2.51) on obtient

$$\int_{\mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)} |w \sigma(x, y, u)|^2 \mu(du, dw) = |\bar{w} \sigma(x, y, u)|^2 + \bar{\theta}^2.$$

Comme $|\sigma(x, y, u)|$ est bornée et le support de μ est inclu dans $\mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)$, il résulte

que $\bar{\theta}$ est bornée, il existe $K > 0$ tel que $\bar{\theta}$ appartient à $[0, K]$.

□

Chapitre 3

Existence d'un contrôle optimal strict pour des EDSPRs dans le cas non-dégénérée

Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un problème de contrôle dirigé par des EDSPRs couplées dans le cas où la diffusion est non dégénérée. L'intérêt de ce chapitre est de montrer l'existence d'un contrôle optimal strict. L'idée d'étudier ce modèle contrôlé est de remplacer l'hypothèse de monotonie classique (dite G-monotonie) sur les coefficients dans le cas où la diffusion peut dégénérer (chapitre 2 de la présente thèse) par la condition que la diffusion est non dégénérée. Par rapport aux résultats obtenus dans le chapitre précédent et le cas découplé [24], la première difficulté est que la condition de lipschitz est insuffisante pour montrer l'existence et l'unicité des solutions de l'EDSPR contrôlée avec la définition classique des contrôles admissibles. Cela est bien expliqué dans [3] illustré par deux contre exemples. Par cette raison, on a du changer la définition des contrôles admissibles de façon que le contrôle admissible garantit l'unicité des solutions. Afin de garantir que le problème est bien posé et la nouvelle définition à un sens, c-à-d que le nouveau ensemble de contrôles admissibles soit non vide. On se réfère à l'article [27], qui montre que notre EDSPR admet une unique solution si le contrôle présente une

constante. Donc l'ensemble de contrôle admissible contient les contrôles constants. La deuxième difficulté concerne l'estimation uniforme du processus Z et la stabilité des solutions. Ce dernier exige, dans notre situation, un calcul plus difficile qui combine les techniques des EDP et les arguments des EDSRs. En supposant que le coefficient de diffusion est non dégénérée et tous les coefficients sont uniformément Lipschitzienne en (x, y, z) continues par rapport à la variable contrôle u . La méthode consiste à construire une suite de systèmes contrôlés approchés pour lesquels on montre l'existence d'une suite de feedback contrôles optimaux en utilisant les résultats de [5] et [47]. En passant à la limite, on établit l'existence d'un contrôle strict résulte de la condition de convexité. On notera que, lorsque le contrôle entre dans le coefficient de diffusion, on obtient une EDS avec une matrice de diffusion mesurable et dans ce cas on perd le critère d'unicité de la solution (même dans le sens faible). En effet, à partir de la résultat [37] que lorsque le coefficient de diffusion est simplement mesurable le critère d'unicité faible ne s'établit pas pour une EDS d'Itô de dimension strictement supérieure à 2. Cela explique, pourquoi, on ne considère que le cas lorsque le contrôle ne pénètre pas dans le coefficient de diffusion.

3.1 Le résultat principal

Soit $\nu := (\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de Wiener, avec Ω est l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^d ($\Omega = C_0([0, T]; \mathbb{R}^d)$), \mathcal{F} le complément du σ -algèbre de borel sur Ω et P la mesure de Wiener. Soit W le processus canonique : $W_s(\omega) = \omega_s$, $s \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$. on note par $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_s, 0 \leq s \leq T\}$ la filtration naturel engendrée par $\{W_t\}_{t \geq 0}$ et complétée par les ensembles de mesure P -nuls.

On définit les espaces suivants :

- $\mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^m)$ est l'espace des processus continus $(X_s, s \in [t, T])$, (\mathcal{F}_t) -adaptés, à valeurs \mathbb{R}^m satisfaites $\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s|^2] < \infty$,
- $\mathcal{H}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^m)$ est l'espace des processus $(Z_s, s \in [t, T])$, (\mathcal{F}_t) -prévisibles, satisfaites $\mathbb{E}[\int_t^T |Z_s|^2 ds] < \infty$,
- $\mathcal{M}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^m)$ est l'espace de tout les martingales de carrée intégrable càdlàg $M = (M_s)_{s \in [t, T]}$ à valeurs \mathbb{R}^m , avec $M_t = 0$,

Considérons l'EDSR contrôlée couplée suivante :

$$\begin{cases} dX_s^{t,x,u} = b(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u}, u_s)ds + \sigma(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u})dW_s, \\ dY_s^{t,x,u} = -f(X_s^{t,x,u}, Y_s^{t,x,u}, Z_s^{t,x,u}, u_s)ds + Z_s^{t,x,u}dW_s + dM_s^{t,x,u}, \\ \langle M^{t,x,u}, W \rangle_s = 0, \\ X_t^{t,x,u} = x, \quad Y_T^{t,x,u} = \Phi(X_T^{t,x,u}), \quad M_t^{t,x,u} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $X^{t,x,u}$, $Y^{t,x,u}$, $Z^{t,x,u}$ sont des processus (\mathcal{F}_t) -adaptés et $M^{t,x,u}$ est une martingale (\mathcal{F}_t) -adaptée de carré intégrable orthogonale à W .

Soit $(X^{t,x,u}, Y^{t,x,u}, Z^{t,x,u})$ une solution de (3.1). On note bien que l'espace de probabilité filtré et le mouvement brownien peut changer si le contrôle u change.

Définition 3.1.1 *L'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}_{\nu(t)}$ est l'ensemble des processus (\mathcal{F}_t) -adaptés qui prennent ses valeurs dans l'espace métrique compacte \mathbb{U} et qui garantit que l'EDSR (3.1) admet une unique solution.*

Nous présentons maintenant les notions de contrôle stochastique, principalement la fonctionnelle coût et la fonction valeur qui consiste à minimiser cette dernière sur l'ensemble de contrôle admissible avec la nouvelle définition. Cependant, comme c'est mentionné dans le chapitre 2, la fonction valeur s'interprète comme solution de viscosité de l'équation de programmation dynamique correspondante, dans notre cas est l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman de seconde ordre .

Un contrôle \hat{u} est dit optimal s'il satisfait :

$$Y_t^{t,x,\hat{u}} = \text{essinf} \left\{ Y_t^{t,x,u}, \quad u \in \mathcal{U}_{\nu}(t) \right\}$$

Si, \hat{u} appartenant à $\mathcal{U}_{\nu(t)}$, alors on dit que \hat{u} est un contrôle optimal strict.

La fonctionnelle coût est définie par la solution de la partie rétrograde à l'instant initial :

$$J(t, x, u) := Y_t^{t,x,u}, \quad \forall u \in \mathcal{U}_{\nu}(t).$$

Le problème de contrôle consiste à minimiser la fonctionnelle coût :

$$V(t, x) := Y_t^{t,x,\hat{u}} = \text{essinf} \left\{ J(t, x, u), \quad u \in \mathcal{U}_{\nu}(t) \right\}. \quad (3.2)$$

V est dite la fonction valeur.

Si σ et b dépendent que de $X^{t,x,u}$ le problème de contrôle est étudié par Buckdahn et al. [24] et Bahlali et al. [14].

Les coefficients satisfont les hypothèses suivantes :

Hypothèses **(A)**

- **(A1) 1)** Il existe une constante $K > 0$, telle que, pour tout $u \in \mathbb{U}$, (x, y, z) et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$

$$|\sigma(x, y) - \sigma(x', y')| \leq K(|x - x'| + |y - y'|),$$

$$|\Phi(x) - \Phi(x')| \leq K|x - x'|,$$

$$|b(x, y, u) - b(x', y', u)| \leq K(|x - x'| + |y - y'|),$$

$$|f(x, y, z, u) - f(x', y', z', u)| \leq K(|x - x'| + |y - y'| + |z - z'|).$$

2) Les fonctions b, σ, f et Φ sont bornées.

- **(A2)** Pour chaque $(x, y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, les fonctions $b(x, y, \cdot)$ et $f(x, y, z, \cdot)$ sont continues en u .

Hypothèse de non dégénérescence

- **(A3)** Il existe $\lambda > 0$, telle que, pour tout $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$,

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^d \quad \langle \zeta, \sigma(t, x, y)\zeta \rangle \geq \lambda|\zeta|^2.$$

Condition de convexité :

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \text{ L'ensemble suivant est convexe :} \\ \{((\sigma\sigma^*)(x, y), w(\sigma\sigma^*)(x, y), b(x, y, u), f(x, y, w\sigma(x, y), u)) \\ |(u, w) \in \mathbb{U} \times \bar{B}_C(0)\} , \end{array} \right.$$

Avec $\bar{B}_C(0) \subset \mathbb{R}^d$ est la boule fermée de centre 0 est de rayon C .

Lemme 3.1.2 *Pour $(x, y, w, \theta, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, soient*

$$\Sigma(x, y, w, \theta) = \begin{pmatrix} \sigma(x, y) & 0 \\ w\sigma(x, y) & \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta(x, y, w, u) = \begin{pmatrix} b(x, y, u) \\ -f(x, y, w\sigma(x, y), u) \end{pmatrix}.$$

Sous l'hypothèse (C), on a

$$\overline{\text{co}}\{((\Sigma\Sigma^*)(x, y, w, 0), \beta(x, y, w, u)) | (u, w) \in U \times \bar{B}_C(0)\}$$

$$\subset \{((\Sigma\Sigma^*)(x, y, w, \theta), \beta(x, y, w, u)) | (u, w, \theta) \in \mathbb{U} \times \bar{B}_C(0) \times [0, K]\}$$

avec, pour tout ensemble \mathbb{E} , $\text{co}(\mathbb{E})$ est l'enveloppe convexe de \mathbb{E} .

Sous les hypothèses (A1)–(A3) et si le contrôle est une constante, l'équation (3.1) admet une unique solution $(X^{t,x,u}, Y^{t,x,u}, Z^{t,x,u}, M^{t,x,u})$ dans l'espace $\mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^d)$ (voir [27]). On remarque que l'ensemble des contrôle admissible $\mathcal{U}_\nu(t)$ est non vide.

Dans la section qui suit, on montre que la fonction valeur satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante :

On note par \mathbb{S}^d l'espace des matrices symétriques dans \mathbb{R}^{d^2} . Pour chaque fonction V , $\nabla_x V$ désigne le gradient et $\nabla_{xx} V$ désigne la matrice hessienne de V .

Soit H est une fonction réelle définit sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{U}$ par :

$$H(x, y, p, A, u) := \frac{1}{2} \text{tr}((\sigma\sigma^*)(x, y)A) + b(x, y, u)p + f(x, y, p, \sigma(x, y), u) \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) + \inf_{u \in \mathbb{U}} H(x, V(t, x), \nabla_x V(t, x), \nabla_{xx} V(t, x), u) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \\ V(T, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (3.4)$$

Le résultat principal de ce chapitre est le Théorème suivant :

Theorem 3.1.1 *On suppose que :*

1. L'équation de HJB (3.4) admet une unique solution de viscosité.
2. Les hypothèses (A) et (C) sont satisfaites.

Alors il existe un contrôle optimal strict pour le problème de contrôle ((3.1)–(3.2)).

3.2 Principe de programmation dynamique et solution de HJB

3.2.1 Principe de programmation dynamique

On note par $\mathcal{U}_{t,T} = \mathcal{U}_{\nu(t)}$ et $\mathcal{U}_{t,\tau} = \mathcal{U}_{t,T}|_{[t,\tau]}$ pour tout $\tau \in (t, T]$. On considère les données initiales (t, x) , $0 \leq \alpha \leq T - t$, un contrôle admissible $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}$, une fonction à valeurs réels $\psi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t+\alpha}, P; \mathbb{R})$, et le processus $(\tilde{X}_s^{t,x;u}, \tilde{Y}_s^{t,x;u}, \tilde{Z}_s^{t,x;u})_{t \leq s \leq t+\alpha}$ est l'unique solution de l'EDSPR couplée suivante, pour tout $s \in [t; t + \alpha]$:

$$\begin{cases} d\tilde{X}_s^{t,x;u} = b(\tilde{X}_s^{t,x;u}, \tilde{Y}_s^{t,x;u}, u_s)ds + \sigma(\tilde{X}_s^{t,x;u}, \tilde{Y}_s^{t,x;u})dW_s \\ d\tilde{Y}_s^{t,x;u} = -f(s, X_s^{t,x;u}, \tilde{Y}_s^{t,x;u}, \tilde{Z}_s^{t,x;u}, u_s)ds + \tilde{Z}_s^{t,x;u}dW_s + dM_s, & s \in [t, t + \alpha], \\ \tilde{X}_t^{t,x;u} = x, \quad \tilde{Y}_{t+\alpha}^{t,x;u} = \psi(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t,x;u}), \end{cases} \quad (3.5)$$

On définit le semi-groupe "backward"

$$G_{s,t+\alpha}^{t,x;u}[\psi(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t,x;u})] := \tilde{Y}_s^{t,x;u}, \quad s \in [t, t + \alpha].$$

D'après l'existence et l'unicité de $(X^{t,x;u}, Y^{t,x;u}, Z^{t,x;u})$ de l'EDSPR contrôlée (3.1), on obtient

$$G_{t,T}^{t,x;u}[\Phi(X_T^{t,x;u})] = G_{t,t+\alpha}^{t,x;u}[Y_{t+\alpha}^{t,x;u}].$$

En outre,

$$\begin{aligned} J(t, x; u) &= Y_t^{t,x;u} = G_{t,T}^{t,x;u}[\Phi(X_T^{t,x;u})] = G_{t,t+\alpha}^{t,x;u}[Y_{t+\alpha}^{t,x;u}] \\ &= G_{t,t+\alpha}^{t,x;u}[J(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t,x;u,v}; u)]. \end{aligned}$$

Pour le reste de cette partie, on prend la fonction $\psi \equiv V$.

Théorème 3.2.1 *On suppose que les hypothèses (A) sont satisfaites. Alors, la fonction valeur $V(t, x)$ Satisfait le principe de programmation dynamique suivant :*

pour tout $0 \leq t < t + \alpha \leq T$, $x \in \mathbb{R}^d$,

$$V(t, x) = \operatorname{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}_{t, t+\alpha}} G_{t, t+\alpha}^{t, x; u} [V(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u})].$$

Preuve. On note par

$$V_\alpha(t, x) := \operatorname{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}_{t, t+\alpha}} G_{t, t+\alpha}^{t, x; u} [V(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u})].$$

Il suffit de montrer que $V_\alpha(t, x)$ coïncide avec $V(t, x)$. Pour cela, on introduit les lemmes suivants :

Lemme 3.2.2 *Les fonctions $V(t, x)$ et $V_\alpha(t, x)$ sont déterministes.*

On prouve ce lemme par les mêmes arguments de [41] (Proposition 3.3).

Lemme 3.2.3 $V_\alpha(t, x) \leq V(t, x)$.

Preuve. Comme $V_\alpha(t, x) = \operatorname{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}_{t, t+\alpha}} G_{t, t+\alpha}^{t, x; u} [V(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u})]$ et par la définition de $G_{t, t+\alpha}^{t, x; u}[\cdot]$, on a

$$\begin{aligned} V_\alpha(t, x) &\leq G_{t, t+\alpha}^{t, x; u} [V(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u})], \quad \text{P-p.s.} \\ &= \tilde{Y}_t^{t, x; u}, \quad \text{P-p.s.} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Par la définition de la fonction valeur, la fonctionnelle coût et l'unicité de l'EDSPR (1.7) on obtient que

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{t+\alpha}^{t, x; u} &= V(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u}), \\ &\leq J(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u}), \\ &= Y_{t+\alpha}^{t, x; u}, \quad \text{P-p.s.} \end{aligned}$$

D'après le théorème de comparaison des EDSPR (voir [41] Théorème 5.11),

$$\tilde{Y}_t^{t, x; u} \leq Y_t^{t, x; u}, \quad \text{P-p.s.}$$

L'inégalité (3.6) nous donne,

$$V_\alpha(t, x) \leq Y_t^{t,x;u}, \quad \text{P-p.s.}$$

Il résulte que,

$$V_\alpha(t, x) \leq V(t, x).$$

□

Lemme 3.2.4 $V_\alpha(t, x) \geq V(t, x)$.

Preuve. Soit $u_1 \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}$.

$u_1 \oplus u_2 := u_1 \mathbf{1}_{[t,t+\alpha]} + u_2 \mathbf{1}_{(t+\alpha,T]}$ est l'extention de $u_1(\cdot)$ dans $\mathcal{U}_{t,T}$.

$$V_\alpha(t, x) = \text{essinf}_{u_1 \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}} G_{t,t+\alpha}^{t,x;u_1} [V(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t,x;u_1})], \quad \text{P-p.s.}$$

Il existe une suite $\{u_i^1, i \geq 1\} \subset \mathcal{U}_{t,t+\alpha}$ telle que

$$\begin{aligned} V_\alpha(t, x) &= \text{essinf}_{u_1 \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}} G_{t,t+\alpha}^{t,x;u_1} [V(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t,x;u_1})] \\ &= \inf_{i \geq 1} G_{t,t+\alpha}^{t,x;u_i^1} [V(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t,x;u_i^1})], \quad \text{P-p.s.} \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère

$\tilde{\Gamma}_i := \{G_{t,t+\alpha}^{t,x;u_i^1} [V(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t,x;u_i^1})] - \varepsilon \leq V_\alpha(t, x)\} \in \mathcal{F}_t$, $i \geq 1$. Alors $\Gamma_1 := \tilde{\Gamma}_1$, $\Gamma_i := \tilde{\Gamma}_i \setminus (\cup_{l=1}^{i-1} \tilde{\Gamma}_l) \in \mathcal{F}_t$, $i \geq 2$, est une (Ω, \mathcal{F}_t) -partition

et $u_1^\varepsilon := \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{\Gamma_i} u_i^1$ appartient à $\mathcal{U}_{t,t+\alpha}$. De plus, par l'unicité des solutions des EDSPRs, on déduit que

$$G_{t,t+\alpha}^{t,x;u_1^\varepsilon} [V(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t,x;u_1^\varepsilon})] = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{\Gamma_i} G_{t,t+\alpha}^{t,x;u_i^1} [V(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t,x;u_i^1})], \quad \text{P-p.s.}$$

Et par suite,

$$\begin{aligned} V_\alpha(t, x) &\geq \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{\Gamma_i} G_{t,t+\alpha}^{t,x;u_i^1} [V(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t,x;u_i^1})] - \varepsilon \\ &= G_{t,t+\alpha}^{t,x;u_1^\varepsilon} [V(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t,x;u_1^\varepsilon})] - \varepsilon, \quad \text{P-p.s.} \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$

$$V(t + \alpha, y) \geq \operatorname{essinf}_{u_2 \in \mathcal{U}_{t+\alpha, T}} J(t + \alpha, y; u_2), \text{ P-a.s..}$$

Alors,

$$V(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon}) \geq \operatorname{essinf}_{u_2 \in \mathcal{U}_{t+\alpha, T}} J(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon}; u_2), \text{ P-a.s..}$$

Pour estimer la partie droite de l'inégalité précédente, il existe une suite $\{u_j^2, j \geq 1\} \subset \mathcal{U}_{t+\alpha, T}$ such that

$$\operatorname{essinf}_{u_2 \in \mathcal{U}_{t+\alpha, T}} J(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon}; u_2) = \inf_{j \geq 1} J(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon}; u_j^2), \text{ P-a.s..}$$

D'où, on considère

$\tilde{\Delta}_j := \{\operatorname{essinf}_{u_2 \in \mathcal{U}_{t+\alpha, T}} J(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon}; u_2) \geq J(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon}; u_j^2) - \varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t+\alpha}$, $j \geq 1$;
on prend $\Delta_1 := \tilde{\Delta}_1$, $\Delta_j := \tilde{\Delta}_j \setminus (\cup_{l=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_l) \in \mathcal{F}_{t+\alpha}$, $j \geq 2$, une $(\Omega, \mathcal{F}_{t+\alpha})$ -partition
et $u_2^\varepsilon := \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{\Delta_j} u_j^2 \in \mathcal{U}_{t+\alpha, T}$. De nouveau, on utilise l'unicité de la solution de
l'EDSPR, on a

$$\begin{aligned} J(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon}; u_2^\varepsilon) &= Y_{t+\alpha}^{t+\alpha, X_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon}; u_2^\varepsilon} \\ &= \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{\Delta_j} Y_{t+\alpha}^{t+\alpha, X_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon, \beta_1(u_1^\varepsilon)}; u_j^2} \\ &= \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{\Delta_j} J(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon}; u_j^2), \quad \text{P-a.s..} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} V(t + \alpha, \tilde{X}_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon}) &\geq \operatorname{essinf}_{u_2 \in \mathcal{U}_{t+\alpha, T}} J(t + \alpha, X_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon}; u_2) \\ &\geq \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{\Delta_j} Y_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon \oplus u_j^2} - \varepsilon \\ &= Y_{t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon \oplus u_2^\varepsilon} - \varepsilon \\ &= Y_{t+\alpha}^{t, x; u_2^\varepsilon} - \varepsilon, \quad \text{P-a.s.,} \end{aligned}$$

Avec $u^\varepsilon := u_1^\varepsilon \oplus u_2^\varepsilon \in \mathcal{U}_{t,T}$. D'après le théorème de comparaison

$$\begin{aligned}
 V_\alpha(t, x) &\geq G_{t, t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon, \beta_1(u_1^\varepsilon)} [Y_{t+\alpha}^{t, x; u^\varepsilon} - \varepsilon] - \varepsilon \\
 &\geq G_{t, t+\alpha}^{t, x; u_1^\varepsilon} [Y_{t+\alpha}^{t, x; u^\varepsilon}] - (C + 1) \varepsilon \\
 &= G_{t, t+\alpha}^{t, x; u^\varepsilon} [Y_{t+\alpha}^{t, x; u^\varepsilon}] - (C + 1) \varepsilon \\
 &= Y_t^{t, x; u^\varepsilon} - (C + 1) \varepsilon \\
 &\geq \operatorname{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}_{t,T}} Y_t^{t, x; u} - (C + 1) \varepsilon, \quad \text{P-a.s.}
 \end{aligned}$$

Finalement, on tend $\varepsilon \downarrow 0$, on obtient $V_\alpha(t, x) \geq V(t, x)$. □

3.2.2 Solution de viscosité de HJB

On note par \mathbb{S}^d l'espace des matrices symétriques dans \mathbb{R}^{d^2} . Pour chaque fonction V , $\nabla_x V$ désigne le gradient et $\nabla_{xx} V$ désigne la matrice hessienne de V . Soit H est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{U}$ par :

$$H(x, y, p, A, u) := \frac{1}{2} \operatorname{tr}((\sigma \sigma^*)(x, y)A) + b(x, y, u)p + f(x, y, p, \sigma(x, y), u) \quad (3.7)$$

On considère l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) + \inf_{u \in \mathbb{U}} H(x, V(t, x), \nabla_x V(t, x), \nabla_{xx} V(t, x), u) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \\ V(T, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (3.8)$$

Définition 3.2.5 *L'espace $C_{l,b}^3([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions à valeurs réelle, trois fois continument différentiable et les dérivées sont bornées.*

1. Une fonction $V \in C([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ est une sur-solution de viscosité si $V(T, x) \geq \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ et pour toutes fonction $\varphi \in C_{l,b}^3([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, $V - \varphi$ atteint un minimum locale en (t, x) ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) + \inf_{u \in \mathbb{U}} H(x, \varphi(t, x), \nabla_x \varphi(t, x), \nabla_{xx} \varphi(t, x), u) \leq 0.$$

2. Une fonction $V \in C([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ est une sous-solution de viscosité si

$V(T, x) \leq \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ et pour toutes fonction $\varphi \in C_{l,b}^3([0, T] \times \mathbb{R}^d)$,
 $V - \varphi$ atteint un maximum locale en (t, x) ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) + \inf_{u \in \mathbb{U}} H(x, \varphi(t, x), \nabla_x \varphi(t, x), \nabla_{xx} \varphi(t, x), u) \geq 0.$$

Théorème 3.2.6 *On suppose que les hypothèses (A) sont satisfaites. Alors, la fonction valeur $V(t, x)$ est une solution de viscosité de (3.8).*

Preuve. On voit facilement que $V(T, x) = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. On montre que V est une sous-solution de viscosité, la preuve de sur-solution est similaire. On considère $\varphi \in C_{l,b}^3([0, T] \times \mathbb{R})$ et que $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ telle que $W - \varphi$ atteint un maximum en (t, x) . Comme V est continue bornée, on considère que $W - \varphi$ atteint un maximum globale en (t, x) . On prend $\varphi(t, x) = V(t, x)$. Considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_s^u = b(s, X_s^u, Y_s^u, u_s)ds + \sigma(s, X_s^u, Y_s^u)dW_s, \\ dY_s^u = -f(s, X_s^u, Y_s^u, Z_s^u, u_s)ds + Z_s^u dB_s, \quad s \in [t, t + \alpha], \\ X_t^u = x, \quad Y_{t+\alpha}^u = \varphi(t + \alpha, X_{t+\alpha}^u), \quad 0 \leq \alpha \leq T - t. \end{cases} \quad (3.9)$$

Comme σ est non dégénérée et u est un contrôle admissible, l'équation (3.9) admet une unique solution $(X_s^u, Y_s^u, Z_s^u)_{t \leq s \leq t+\alpha} \in \mathcal{S}^2(t, t+\alpha; \mathbb{R}) \times \mathcal{S}^2(t, t+\alpha; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2(t, t+\alpha; \mathbb{R}^d)$. Les coefficients sont bornées, alors pour $p \geq 2$,

- (i) $\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq t+\alpha} |X_s^u|^p + \sup_{t \leq s \leq t+\alpha} |Y_s^u|^p + (\int_t^{t+\alpha} |Z_s^u|^2 ds)^{\frac{p}{2}} \mid \mathcal{F}_t] \leq C$, P-a.s.;
- (ii) $\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq t+\alpha} |X_s^u - x|^p \mid \mathcal{F}_t] \leq C\alpha^{\frac{p}{2}}$, P-a.s.;
- (iii) $\mathbb{E}[(\int_t^{t+\alpha} |Z_s^u|^2 ds)^{\frac{p}{2}} \mid \mathcal{F}_t] \leq C\alpha^{\frac{p}{2}}$, P-a.s.

Par la définition de semi-groupe "backward" des EDSR, on a

$$G_{s,t+\alpha}^{t,x;u}[\varphi(t + \alpha, X_{t+\alpha}^u)] = Y_s^u, \quad s \in [t, t + \alpha].$$

D'après le théorème de programmation dynamique, on a

$$\varphi(t, x) = V(t, x) = \text{essinf}_{u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}} G_{t,t+\alpha}^{t,x;u}[V(t + \alpha, \widetilde{X}_{t+\alpha}^{t,x,u})].$$

Comme $W(s, y) \leq \varphi(s, y)$, $(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, on a,

$$\text{essinf}_{u \in \mathcal{U}_{t, t+\alpha}} G_{t, t+\alpha}^{t, x; u} [\varphi(t + \alpha, X_{t+\alpha}^u)] - \varphi(t, x) \geq 0. \quad (3.10)$$

On définit

$$\begin{aligned} Y_s^{1, u} &= Y_s^u - \varphi(s, X_s^u) \\ &= \int_s^{t+\alpha} f(r, X_r^u, Y_r^u, Z_r^u, u_r) dr - \int_s^{t+\alpha} Z_r^u dW_r + \varphi(t + \alpha, X_{t+\alpha}^u) - \varphi(s, X_s^u). \end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô à $\varphi(s, X_s^u)$, on obtient

$$\begin{cases} Y_s^{1, u} &= \int_s^{t+\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, X_r^u) + D\varphi(r, X_r^u) \cdot b(r, X_r^u, Y_r^u, u_r) + f(r, X_r^u, Y_r^u, Z_r^u, u_r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma \sigma^T(X_r^u, Y_r^u) D^2 \varphi(r, X_r^u)) \right] dr - \int_s^{t+\alpha} Z_r^{1, u} dW_r, \\ Z_s^{1, u} &= Z_s^u - D\varphi(s, X_s^u) \cdot \sigma(s, X_s^u, Y_s^u), \quad t \leq s \leq t + \alpha. \end{cases} \quad (3.11)$$

Par l'inégalité (3.10), on a

$$\text{essinf}_{u \in \mathcal{U}_{t, t+\alpha}} Y_t^{1, u} \geq 0, \text{ P-a.s.}$$

For $(s, x, y, z, u) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U}$, on définit les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} L(s, x, y, z, u) &= \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, x) + D\varphi(s, x) \cdot b(s, x, y + \varphi(s, x), u) \\ &\quad + f(s, x, y + \varphi(s, x), z, u) + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma \sigma^T(s, x, y + \varphi(s, x)) D^2 \varphi(s, x)), \\ F(s, x, y, z, u) &= L(s, x, y, z + D\varphi(s, x) \cdot \sigma(s, x, y + \varphi(s, x), u), u). \end{aligned}$$

On réécrit l'équation (3.11) comme suit :

$$\begin{cases} dY_s^{1, u} &= -F(s, X_s^u, Y_s^{1, u}, Z_s^{1, u}, u_s) ds + Z_s^{1, u} dW_s, \quad s \in [t, t + \alpha], \\ Y_{t+\alpha}^{1, u} &= 0, \end{cases}$$

On introduit l'EDSR suivante :

$$\begin{cases} dY_s^{2,u} &= -L(s, x, 0, \hat{Z}_s^u, u_s)ds + Z_s^{2,u}dW_s, \quad s \in [t, t + \alpha], \\ Y_{t+\alpha}^{2,u} &= 0, \end{cases}$$

avec $\hat{Z}_s^u = Z_s^{1,u} + D\varphi(s, x) \cdot \sigma(s, x, Y_s^{1,u} + \varphi(s, x), u_s)$, $s \in [t, t + \alpha]$. Comme les coefficients sont des fonctions uniformément lipschitziennes bornées, alors, pour tout $(s, x, y, z, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U}$.

- (i) $|L(s, x, y, z, u) - L(s, x, y', z', u)| \leq C(|y - y'| + |z - z'|)$;
- (ii) $|L(s, x, y, z, u)| \leq C$.

Pour le reste de la preuve, on a besoin des lemme suivants

Lemme 3.2.7 *Pour chaque $u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}$, on a*

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+\alpha} (|Y_s^{1,u}| + |Z_s^{1,u}|)ds \mid \mathcal{F}_t\right] \leq C\alpha^{\frac{3}{2}}, \quad P\text{-p.s.},$$

où la constante C est indépendante de u et de $\alpha > 0$.

Preuve. .

$$\begin{aligned} |Y_s^{1,u}| &= |\mathbb{E}[\int_s^{t+\alpha} f(r, X_r^u, Y_r^u, Z_r^u, u_r)dr \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\varphi(t + \alpha, X_{t+\alpha}^u) - \varphi(s, X_s^u) \mid \mathcal{F}_s]| \\ &\leq \mathbb{E}[\int_s^{t+\alpha} C_f dr \mid \mathcal{F}_s] + C\alpha + C\mathbb{E}[|X_{t+\alpha}^u - X_s^u| \mid \mathcal{F}_s] \\ &\leq C\alpha. \end{aligned}$$

d'autre part, $|Y_s^u| \leq C$, P-p.s., $s \in [t, t+\alpha]$. et $Z_s^{1,u} = Z_s^u - D\varphi(s, X_s^u) \cdot \sigma(s, X_s^u, Y_s^u)$,
we have

$$|Z_s^{1,u}| \leq C, \quad P\text{-a.s.}, \quad s \in [t, t + \alpha].$$

Alors,

$$\begin{aligned} |Y_t^{1,u}|^2 &+ \mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} |Z_r^{1,u}|^2 dr \mid \mathcal{F}_t] \\ &= 2\mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} Y_r^{1,u} F(r, X_r^u, Y_r^{1,u}, Z_r^{1,u}, u_r)dr \mid \mathcal{F}_t] \\ &\leq C \alpha. \end{aligned}$$

Therefore, from (4.13), (4.15) and (4.4)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} (|Y_s^{1,u}| + |Z_s^{1,u}|) ds \mid \mathcal{F}_t] \\ & \leq C\alpha^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} |Y_s^{1,u}|^2 dr \mid \mathcal{F}_t])^{\frac{1}{2}} + C\alpha^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} |Z_r^{1,u}|^2 dr \mid \mathcal{F}_t])^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C\alpha^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.8 Pour tout $u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}$, on a

$$|Y_t^{1,u} - Y_t^{2,u}| \leq C\alpha^{\frac{5}{4}}, \quad P\text{-a.s.},$$

où la constante C est indépendante de u et de $\alpha > 0$.

Preuve. . On définit : $g(s) = L(s, X_s^u, 0, Z_s^u, u_s) - L(s, x, 0, Z_s^u, u_s)$. Comme L est bornée, alors, $|g(s)| \leq C$, $s \in [t, t + \alpha]$. Par les définitions de F et L et comme L est lipschitizienne, on a

$$\begin{aligned} |Y_t^{1,u} - Y_t^{2,u}| &= |E[(Y_t^{1,u} - Y_t^{2,u}) \mid \mathcal{F}_t]| \\ &= |\mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} (L(s, X_s^u, Y_s^{1,u}, Z_s^u, u_s) - L(s, x, 0, \hat{Z}_s^u, u_s)) ds \mid \mathcal{F}_t]| \\ &\leq \mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} [C|Y_s^{1,u}| + C|Z_s^u - \hat{Z}_s^u| + g(s)] ds \mid \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} |Z_s^u - \hat{Z}_s^u| ds \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} |Z_s^{1,u} + D\varphi(s, X_s^u) \cdot \sigma(s, X_s^u, Y_s^{1,u} + \varphi(s, X_s^u), u_s) \\ & \quad - (Z_s^{1,u} + D\varphi(s, x) \cdot \sigma(s, x, Y_s^{1,u} + \varphi(s, x), u_s))| ds \mid \mathcal{F}_t] \\ &\leq C\alpha^{\frac{3}{2}}, \quad P\text{-p.s.}; \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} g(s) ds \mid \mathcal{F}_t] &\leq \alpha^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} g(s)^2 ds \mid \mathcal{F}_t])^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\alpha^{\frac{3}{2}}, \quad P\text{-a.s.} \end{aligned}$$

□

On considère l'EDSR suivante :

$$\begin{cases} dY_s^{3,u} &= -L(s, x, 0, D\varphi(s, x) \cdot \sigma(s, x, \varphi(s, x), u_s), u_s) ds + Z_s^{3,u} dB_s, \quad s \in [t, t + \alpha], \\ Y_{t+\alpha}^{3,u} &= 0, \end{cases}$$

avec $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}$. Il est facile de voir,

$$L(s, x, 0, D\varphi(s, x) \cdot \sigma(s, x, \varphi(s, x), u_s), u_s) = F(s, x, 0, 0, u_s).$$

Lemme 3.2.9 Pour tout $u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}$, on a

$$|Y_t^{2,u} - Y_t^{3,u}| \leq C\alpha^{\frac{5}{4}}, \quad P\text{-a.s.},$$

où la constante C est indépendante de u et de $\alpha > 0$.

Preuve.

$$\begin{aligned} |Y_t^{2,u} - Y_t^{3,u}| &= |\mathbb{E}[\int_t^{t+\alpha} (L(s, x, 0, \hat{Z}_s^u, u_s) \\ &\quad - L(s, x, 0, D\varphi(s, x) \cdot \sigma(s, x, \varphi(s, x), u_s), u_s)) ds \mid \mathcal{F}_t]| \\ &\leq C\alpha^{\frac{3}{2}}, \quad P\text{-a.s.} \end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.10 On introduit $Y_0(\cdot)$ la solution l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{Y}_0(s) &= -F_0(s, x, 0, 0), \quad s \in [t, t + \alpha], \\ Y_0(t + \alpha) &= 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

avec

$$F_0(s, x, 0, 0) = \inf_{u \in U} F(s, x, 0, 0, u).$$

Alors, P -p.s.,

$$\text{essinf}_{u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}} Y_t^{3,u} = Y_0(t).$$

Preuve. . On observe que, (3.12) admet une unique solution $Y_0(t) = \int_t^{t+\alpha} F_0(s, x, 0, 0) ds$. Par la définition de $F_0(s, x, 0, 0)$, on a

$$F_0(s, x, 0, 0) \leq F(s, x, 0, 0, u_s), \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}.$$

Alors, Par la théorème de comparaison des EDSR (Lemma 2.2 [25]),

$$\tilde{Y}_0(s) \leq Y_s^{3,u}, \text{ P-p.s., pour tout } s \in [t, t + \alpha], \text{ pour tout } u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha},$$

avec $(\tilde{Y}_0(\cdot), \tilde{Z}_0(\cdot))$ est la solution de l'EDSR suivante :

$$\begin{cases} d\tilde{Y}_0(s) &= -F_0(s, x, 0, 0)ds + \tilde{Z}_0(s)dB_s, \quad s \in [t, t + \alpha], \\ \tilde{Y}_0(t + \alpha) &= 0. \end{cases}$$

Comme, $(\tilde{Y}_0(s), \tilde{Z}_0(s)) = (Y_0(s), 0)$. Donc, $Y_0(t) \leq Y_t^{3,u}$, P-p.s., pour tout $u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}$.

D'autre part, comme $F_0(s, x, 0, 0) = \inf_{u \in U} F(s, x, 0, 0, u)$, il existe une fonction mesurable $\tilde{u}(s, x) : [t, t + \alpha] \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$, telle que $F(s, x, 0, 0, \tilde{u}(s, x)) = F_0(s, x, 0, 0)$. On définit le feedback contrôle $\tilde{u}_s^0 = \tilde{u}(s, x)$, $s \in [t, t + \alpha]$, alors $\tilde{u}^0 \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}$ et $F_0(s, x, 0, 0) = F(s, x, 0, 0, \tilde{u}_s^0)$, $s \in [t, t + \alpha]$. Par conséquent, $Y_0(t) = Y_t^{3, \tilde{u}^0}$, P-p.s., donc, $\text{essinf}_{u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}} Y_t^{3,u} = Y_0(t)$, P-p.s. \square

Comme $\text{essinf}_{u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}} Y_t^{1,u} \geq 0$, P-a.s. Alors

$$\text{essinf}_{u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}} Y_t^{3,u} = \text{essinf}_{u \in \mathcal{U}_{t,t+\alpha}} (Y_t^{3,u} - Y_t^{2,u} + Y_t^{2,u} - Y_t^{1,u} + Y_t^{1,u}) \geq -C\alpha^{\frac{3}{2}}, \text{ P-a.s.}$$

Il résulte que, $Y_0(t) \geq -C\alpha^{\frac{3}{2}}$, . Alors,

$$\frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} F_0(s, x, 0, 0)ds \geq -C\alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Par le passage à la limite $\alpha \rightarrow 0$ that

$$\inf_{u \in U} F(t, x, 0, 0, u) = F_0(t, x, 0, 0) \geq 0.$$

Par la définition de F , on a V est une sur-solution de viscosité de (3.8). \square

3.3 Preuves

3.3.1 Construction du problème de contrôle approché

Pour une dimension arbitraire $m \geq 1$, on considère une fonction positive $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ à support inclu dans la boule unité de \mathbb{R}^m et $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\xi) d\xi = 1$. Soit $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément lipschitzienne. On définit la régularisation de la fonction g par

$$g_\delta(\xi) := \delta^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} g(\xi - \xi') \varphi(\delta^{-1}\xi') d\xi', \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \delta > 0.$$

La proposition suivante présente les propriétés de la régularisé g_δ .

Proposition 3.3.1 *Pour chaque $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^m$, et $\delta, \delta' > 0$, On a :*

- (i) $|g_\delta(\xi) - g(\xi)| \leq L_g \delta$.
- (ii) $|g_\delta(\xi) - g_{\delta'}(\xi)| \leq L_g |\delta - \delta'|$,
- (iii) $|g_\delta(\xi) - g_\delta(\xi')| \leq L_g |\xi - \xi'|$.

Avec L_g est la constante de lipschitz de g .

Définition 3.3.2 *Pour tout $\delta \in (0, 1]$ on définit par $b_\delta, \sigma_\delta, f_\delta$ et Φ_δ les régularisations des fonctions b, σ, f et Φ , respectivement.*

3.3.2 l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman approchée

On suppose que les hypothèses **(A)** sont satisfaites. Pour $(x, y, p, A, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{U}$, on définit la fonction dite hamiltonien H^δ par :

$$H^\delta(x, y, p, A, v) = \frac{1}{2} (\text{tr}((\sigma_\delta \sigma_\delta^*)(x, y)) A) + b_\delta(x, y, v) p + f_\delta(x, y, p \sigma_\delta(x, y), v). \quad (3.13)$$

Soit l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V^\delta(t, x) + \inf_{v \in \mathbb{U}} H^\delta(x, (V^\delta, \nabla_x V^\delta, \nabla_{xx} V^\delta)(t, x), v) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \\ V^\delta(T, x) = \Phi_\delta(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (3.14)$$

Comme H^δ est assez régulier et $(\sigma_\delta \sigma_\delta^*)(x, y)$ est uniformément elliptique, alors par les résultats de [35] (Théorèmes 6.4.3 et 6.4.4), l'équation (3.14) admet une unique solution V^δ qui appartient à $C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$.

La régularité de V^δ et la compacité de l'ensemble des contrôles \mathbb{U} montrent l'existence d'une fonction mesurable $v^\delta : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{U}$ telle que, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$,

$$H^\delta \left(x, (V^\delta, \nabla_x V^\delta, \nabla_{xx} V^\delta)(t, x), v^\delta(t, x) \right) = \inf_{v \in \mathbb{U}} H^\delta \left(x, (V^\delta, \nabla_x V^\delta, \nabla_{xx} V^\delta)(t, x), v \right). \quad (3.15)$$

Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$. Pour $\delta > 0$, soit V^δ la solution de l'EDP (3.14) et v^δ la fonction définie par (3.15). On considère l'EDS :

$$\begin{cases} dX_s^\delta = b_\delta(X_s^\delta, V^\delta(s, X_s^\delta), v^\delta(s, X_s^\delta))ds + \sigma_\delta(X_s^\delta, V^\delta(s, X_s^\delta))dW_s^\delta, & s \in [t, T], \\ X_t^\delta = x. \end{cases} \quad (3.16)$$

Comme $b_\delta(x, V^\delta(s, x), \nabla_x V^\delta(s, x)\sigma_\delta(x, V^\delta(s, x)), v^\delta(s, x))$ et $\sigma_\delta(x, V^\delta(s, x))$ sont bornées mesurables par rapport à (t, x) et $\sigma_\delta(x, V^\delta(s, x))$ est lipschitzienne en x et uniformément elliptique, en utilisant le résultat [5], Théorème 2.1 pp 56 (voir aussi [4]), l'équation (3.16) admet une unique solution trajectorielle X^δ .

Pour $s \in [t, T]$, soient

$$Y_s^\delta := V^\delta(s, X_s^\delta) \quad \text{and} \quad Z_s^\delta := \nabla_x V^\delta(s, X_s^\delta)\sigma_\delta(X_s^\delta, V^\delta(s, X_s^\delta)). \quad (3.17)$$

On applique la formule d'Itô à $V^\delta(s, X_s^\delta)$, on obtient :

$$\begin{cases} dX_s^\delta = b_\delta(X_s^\delta, Y_s^\delta, v^\delta(s, X_s^\delta))ds + \sigma_\delta(X_s^\delta, Y_s^\delta)dW_s^\delta, & s \in [t, T] \\ X_t^\delta = x, \\ dY_s^\delta = -f_\delta(X_s^\delta, Y_s^\delta, Z_s^\delta, v^\delta(s, X_s^\delta))ds + Z_s^\delta dW_s^\delta, \\ Y_T^\delta = \Phi_\delta(X_T^\delta) \end{cases} \quad (3.18)$$

f_δ est uniformément Lipschitzienne en (y, z) , alors par le résultat [47], la partie rétrograde de l'équation (3.18) admet une unique solution (Y^δ, Z^δ) dans $\mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^d)$. Alors $(X^\delta, Y^\delta, Z^\delta)$ est l'unique solution de l'EDSPR (3.18) dans $\mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}_\nu^2(t, T; \mathbb{R}^d)$. On déduit par rapport à la nouvelle dé-

finition de contrôles admissibles que $u_s^\delta := v^\delta(s, X_s^\delta)$ est un feedback contrôle admissible.

Soit $u \in \mathcal{U}_{\nu^\delta(t)}$ un contrôle admissible.

On définit par le processus $(X^{\delta,t,x,u}, Y^{\delta,t,x,u}, Z^{\delta,t,x,u})$ l'unique continue solution (\mathcal{F}_t) -adapté de l'EDSPR suivante sur $[t, T]$:

$$\begin{cases} dX_s^{\delta,t,x,u} = b_\delta(X_s^{\delta,t,x,u}, Y_s^{\delta,t,x,u}, u_s) ds + \sigma_\delta(X_s^{\delta,t,x,u}, Y_s^{\delta,t,x,u}) dW_s^\delta, \\ X_t^{\delta,t,x,u} = x, \\ dY_s^{\delta,t,x,u} = -f_\delta(X_s^{\delta,t,x,u}, Y_s^{\delta,t,x,u}, Z_s^{\delta,t,x,u}, u_s) ds + Z_s^{\delta,t,x,u} dW_s^\delta + dM_s^{\delta,t,x,u}, \\ Y_T^{\delta,t,x,u} = \Phi_\delta(X_T^{\delta,t,x,u}), \\ M^\delta \in \mathcal{M}_{\nu^\delta}^2(t, T; \mathbb{R}^d) \text{ orthogonale à } W^\delta. \end{cases} \quad (3.19)$$

Le coût fonctionnel associé à l'EDSPR contrôlée (3.19) est défini par :

$$J^\delta(u) := Y_t^{\delta,t,x,u}, \quad u \in \mathcal{U}_{\nu^\delta(t)}.$$

Le processus $(X^\delta, Y^\delta, Z^\delta)$ satisfait l'EDSPR (3.19) pour $u = u^\delta$, avec $M^\delta = 0$, alors par l'argument d'unicité de la solution de l'EDSPR (3.19), on a $(X^\delta, Y^\delta, Z^\delta) = (X^{\delta,t,x,u^\delta}, Y^{\delta,t,x,u^\delta}, Z^{\delta,t,x,u^\delta})$. En particulier $Y_t^{\delta,t,x,u^\delta} = Y_t^\delta = V^\delta(t, x)$. Alors le lemme suivant est prouvé.

Lemme 3.3.3 *On suppose que les hypothèses (A) sont satisfaites. Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe un feedback contrôle admissible $u_s^\delta := v^\delta(s, X_s^\delta)$ défini pour $s \in [0, T]$ telle que :*

$$J^\delta(u^\delta) = V^\delta(t, x) = \operatorname{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}_{\nu^\delta(t)}} J^\delta(u), \quad (3.20)$$

Les deux lemmes suivants sont nécessaire pour la construction du contrôle. Le deuxième lemme montre que la variable Z^δ est uniformément bornée, donc on peut considérer Z^δ comme contrôle.

Lemme 3.3.4 *On suppose que les hypothèses (A) sont satisfaites. Alors,*

(i) *il existe une constante positive C dépend de K, T et les bornes des coeffi-*

cients telle que,

$$\left| V^\delta(t, x) - V^{\delta'}(t', x') \right| \leq C(|\delta - \delta'| + |x - x'| + |t - t'|^{\frac{1}{2}}). \quad (3.21)$$

(ii) V^δ converge uniformément vers une fonction bornée V , qui est l'unique solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (3.4).

Preuve. (i) Par l'argument d'unicité de la partie progressive de l'EDSPR contrôlée avec le contrôle u^δ , donc $X^{\delta, u^\delta} = X^\delta$.

Soit $\delta' > 0$ et $(t', x') \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$. Pour $\delta > 0$, soit $X^{\delta', t', x', u^\delta} \in \mathcal{S}_{\nu^\delta}^2(t', T; \mathbb{R}^d)$ est l'unique solution de l'EDS progressive suivante sur $[t', T]$:

$$\begin{cases} dX_s^{\delta', t', x', u^\delta} = b_{\delta'}(X_s^{\delta', t', x', u^\delta}, V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', t', x', u^\delta}), u_s^\delta) ds \\ \quad + \sigma_{\delta'}(X_s^{\delta', t', x', u^\delta}, V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', t', x', u^\delta})) dW_s^\delta \\ X_{t'}^{\delta', t', x', u^\delta} = x'. \end{cases}$$

L'extention de la solution sur l'intervalle $[0, T]$ est comme suit $X_s^{\delta', t', x', u^\delta} = x'$, pour $s < t'$.

on considère pour $s \in [t', T]$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_s^{\delta', t', x', u^\delta} = & - \left(\frac{\partial}{\partial s} V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', t', x', u^\delta}) \right. \\ & + \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma_{\delta'} \sigma_{\delta'}^*(X_s^{\delta', t', x', u^\delta}, V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', t', x', u^\delta})) \times \nabla_{xx} V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', t', x', u^\delta})) \\ & \left. + b_{\delta'}(X_s^{\delta', t', x', u^\delta}, V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', t', x', u^\delta})) \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Par la formule d'Itô appliqué à $V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', t', x', u^\delta})$, on obtient

$$\begin{aligned} Y_s^{\delta', t', x'} & := V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', t', x', u^\delta}), \\ Z_s^{\delta', t', x'} & := \nabla_x V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', t', x', u^\delta}) \sigma_{\delta'}(X_s^{\delta', t', x', u^\delta}, V^{\delta'}(s, X_s^{\delta', t', x', u^\delta})), \\ M_s^{\delta', t', x'} & := 0, \quad s \in [t', T], \end{aligned}$$

est la solution de l'EDSR

$$\begin{cases} dY_s^{\delta',t',x'} = -\tilde{f}_s^{\delta',t',x',u^\delta} ds + Z_s^{\delta',t',x'} dW_s^\delta + dM_s^{\delta',t',x'}, & s \in [t', T], \\ Y_T^{\delta',t',x'} = \Phi_{\delta'}(X_T^{\delta',t',x'}), \\ (Y^{\delta',t',x'}, Z^{\delta',t',x'}) \in \mathcal{S}_{\nu^\delta}^2(t', T; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}_{\nu^\delta}^2(t', T; \mathbb{R}^d), \\ M^{\delta',t',x'} \in \mathcal{M}_{\nu^\delta}^2(t', T; \mathbb{R}^d) \text{ is orthogonal to } W^\delta. \end{cases} \quad (3.23)$$

Afin de calculer les estimations, on définit l'EDSR

$$\begin{cases} dY_s^{\delta',t',x',u^\delta} = -f_{\delta'}(X_s^{\delta',t',x',u^\delta}, Y_s^{\delta',t',x',u^\delta}, Z_s^{\delta',t',x',u^\delta}, u_s^\delta) ds \\ \quad + Z_s^{\delta',t',x',u^\delta} dW_s^\delta + dM_s^{\delta',t',x',u^\delta}, & s \in [t', T], \\ Y_T^{\delta',t',x',u^\delta} = \Phi_\delta(X_T^{\delta',t',x',u^\delta}), \\ (Y^{\delta',t',x',u^\delta}, Z^{\delta',t',x',u^\delta}) \in \mathcal{S}_{\nu^\delta}^2(t', T; \mathbb{R}) \times \mathcal{H}_{\nu^\delta}^2(t', T; \mathbb{R}^d), \\ M^{\delta',t',x',u^\delta} \in \mathcal{M}_{\nu^\delta}^2(t', T; \mathbb{R}^d) \text{ is orthogonal to } W^\delta. \end{cases} \quad (3.24)$$

Comme $V^{\delta'}$ est la solution classique de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, il résulte

$$\tilde{f}_s^{\delta',t',x',u^\delta} \leq f_{\delta'}(X_s^{\delta',t',x',u^\delta}, Y_s^{\delta',t',x',u^\delta}, Z_s^{\delta',t',x',u^\delta}, u_s^\delta), \quad s \in [t', T].$$

Alors, par le théorème de comparaison, on obtient $Y_s^{\delta',t',x'} \leq Y_s^{\delta',t',x',u^\delta}$, $s \in [t', T]$, \mathbb{P} -p.s.

Donc,

$$V^{\delta'}(t', x') - V^\delta(t, x) \leq Y_{t'}^{\delta',t',x',u^\delta} - Y_t^{\delta,t,x,u^\delta}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Par un argument de symétrie, on déduit :

$$|V^{\delta'}(t', x') - V^\delta(t, x)| \leq |Y_{t'}^{\delta',t',x',u^\delta} - Y_t^{\delta,t,x,u^\delta}|, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Puisque V^δ et $V^{\delta'}$ sont déterministe, on a

$$|V^{\delta'}(t', x') - V^\delta(t, x)| \leq \mathbb{E}(|Y_{t'}^{\delta',t',x',u^\delta} - Y_t^{\delta,t,x,u^\delta}|)$$

alors il suffit d'estimer $\mathbb{E}(|Y_{t'}^{\delta',t',x',u^\delta} - Y_t^{\delta,t,x,u^\delta}|)$.

On suppose que $t' < t$, et pour $s < t'$, $Y_s^{\delta',t',x',u^\delta} = Y_{t'}^{\delta',t',x',u^\delta}$, $Z_s^{\delta',t',x',u^\delta} = 0$ et $M_s^{\delta',t',x',u^\delta} = 0$.

On obtient,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Y_t^{\delta,t,x,u^\delta} - Y_{t'}^{\delta',t',x',u^\delta}|^2) &\leq C_1 \mathbb{E}(|Y_t^{\delta',t',x',u^\delta} - Y_{t'}^{\delta',t',x',u^\delta}|^2 + |Y_t^{\delta,t,x,u^\delta} - Y_t^{\delta',t',x',u^\delta}|^2) \\ &\leq C_1(|t - t'| + \mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^{\delta,t,x,u^\delta} - Y_s^{\delta',t',x',u^\delta}|^2]) \end{aligned}$$

avec C_1 est une constante positive qui dépend de T , K et les bornes de b , σ , f et Φ et non de t , x , et δ .

Ce qui implique :

$$\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^{\delta,t,x,u^\delta} - Y_s^{\delta',t',x',u^\delta}|^2] \leq C(|x - x'|^2 + |\delta - \delta'|^2), \quad (3.25)$$

avec C est une constante positive dépend que de T , K et les bornes de b , σ , f et Φ et non de t , x , δ .

Dans le reste de la preuve, la constante positive C peut changer de ligne en ligne. Cette constante dépend que de T , K et les bornes de b , σ , f et Φ et non de t , x , δ . Pour simplifier les notations, on considère

$$X_s^{\delta,t,x,u^\delta} := X_s^\delta, \quad Y_s^{\delta,t,x,u^\delta} := Y_s^\delta, \quad Z_s^{\delta,t,x,u^\delta} := Z_s^\delta,$$

et

$$X_s^{\delta',t',x'^\delta} := X_s^{\delta'\delta}, \quad Y_s^{\delta',t',x'^\delta} := Y_s^{\delta'\delta}, \quad Z_s^{\delta',t',x'^\delta} := Z_s^{\delta'\delta}$$

Comme tous les coefficients et la condition terminale sont bornés, en utilisant des arguments standards des EDSRs. On montre l'existence d'une constante positive $C > 0$ qui dépend que de T et les bornes des fonctions b , σ , Φ et f tel que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \leq s \leq T} [|X_s^\delta|^2 + |X_s^{\delta'\delta}|^2 + |Y_s^\delta|^2 + |Y_s^{\delta'\delta}|^2] + \int_t^T |Z_r^\delta|^2 dr + \int_t^T |Z_r^{\delta'\delta}|^2 dr \right) \leq C \quad (3.26)$$

On utilise la proposition 3.3.1, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|Y_T^\delta - Y_T^{\delta'}|^2) &\leq 2 K^2[|\delta - \delta'|^2 + \mathbb{E}(|X_T^\delta - X_T^{\delta'}|^2)] \\ &\leq 2 K^2[|\delta - \delta'|^2 + \mathbb{E}(\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^\delta - X_s^{\delta'}|^2)]\end{aligned}\quad (3.27)$$

De nouveau, on utilise la proposition 3.3.1 et les estimations standards des EDSRs (l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, etc.) et l'estimation (3.27), il résulte que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^\delta - Y_s^{\delta'}|^2) &\leq C \left(|\delta - \delta'|^2 + \mathbb{E}(\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^\delta - X_s^{\delta'}|^2) \right. \\ &\quad \left. + \int_t^T \mathbb{E}(\sup_{t \leq s \leq r} |Y_s^\delta - Y_s^{\delta'}|^2) dr \right)\end{aligned}\quad (3.28)$$

et

$$\mathbb{E}(\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^\delta - X_s^{\delta'}|^2) \leq C \left(|\delta - \delta'|^2 + |x - x'|^2 + \int_t^T \mathbb{E}(\sup_{t \leq s \leq r} |Y_s^\delta - Y_s^{\delta'}|^2) dr \right)\quad (3.29)$$

On utilise les inégalité (3.25), (3.26), (3.28), (3.29) et le lemme de Gronwall, alors l'assertion (i) est prouvée.

On montre maintenant l'assertion (ii). Par l'assertion (i), (V^δ) est une suite de Cauchy par rapport au norme de la convergence uniforme en $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$. Alors, elle converge uniformément vers une fonction \bar{V} lorsque δ tend vers 0. De plus, l'inégalité (3.26) montre que V^δ est uniformément bornée en (t, x, δ) . Donc $\bar{V} \in C_b([0, T] \times \mathbb{R}^d)$. Comme H^δ converge uniformément sur tout compact vers H . Par la stabilité des solutions de viscosité, on a \bar{V} est une solution de viscosité de l'équation (3.4). Par l'unicité de la solution de l'équation (3.4), on obtient $\bar{V} = V$. Il résulte que la suite $(V^{\delta'})$ converge vers V , lorsque δ' tend vers 0. En utilisant l'estimation (3.21), on deduit que $|V^\delta(t, x) - V(t, x)| \leq C\delta$, pour tout $\delta \in (0, 1]$ et $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$. \square

3.3.3 Le passage à la limite

Dans cette partie, on montre la convergence du problème approché vers notre problème initial. On considère la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (0, 1]$ qui décroît vers 0 lorsque n tend vers ∞ .

On note $w_s^{\delta_n} := \nabla_x V^{\delta_n}(s, X_s^{\delta_n})$ et $Z_s^{\delta_n} := w_s^{\delta_n} \sigma(X_s^{\delta_n}, Y_s^{\delta_n})$ avec $(X^{\delta_n}, Y^{\delta_n}, Z^{\delta_n}, u^{\delta_n})$ est la suite de problème de contrôle approché. Comme u^{δ_n} et w^{δ_n} sont uniformément bornés, on identifie le couple $(u^{\delta_n}, w^{\delta_n})$ comme contrôle. On montre que $(X^{\delta_n}, Y^{\delta_n}, Z^{\delta_n}, u^{\delta_n})$ admet une sous-suite qui converge en loi vers un certain système contrôlé. Et par l'hypothèse de convexité **(C)**, on utilise le résultat de [29] pour montrer que le contrôle limite est un contrôle optimal strict.

Preuve. du résultat principal.

On introduit la suite intermédiaire (X^n, Y^n) solution de l'EDS progressive contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dX_s^n = b(X_s^n, Y_s^n, u_s^{\delta_n})ds + \sigma(X_s^n, Y_s^n)dW_s^{\delta_n}, \\ X_t^n = x, \\ dY_s^n = -f(X_s^n, Y_s^n, w_s^{\delta_n}\sigma(X_s^n, Y_s^n), u_s^{\delta_n})ds + w_s^n\sigma(X_s^n, Y_s^n)dW_s^{\delta_n}. \\ Y_t^n = V^{\delta_n}(t, x), \quad s \in [t, T]. \end{cases} \quad (3.30)$$

avec $u_s^{\delta_n} := v^{\delta_n}(s, X_s^{\delta_n})$ et $w_s^{\delta_n} := \nabla_x V^{\delta_n}(s, X_s^{\delta_n})$.

Lemme 3.3.5 *Il existe une constante $L > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_{s \in [t, T]} |X_s^{\delta_n} - X_s^n|^2] &\leq L\delta_n^2, \\ \mathbb{E}[\sup_{s \in [t, T]} |Y_s^{\delta_n} - Y_s^n|^2] &\leq L\delta_n^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $(X^{\delta_n}, Y^{\delta_n})$ satisfait l'EDSPR (3.18).

Preuve. Voir le lemme 3.3.4, assertion (i). □

On note que pour tout n , le processus $(X_s^{\delta_n}, Y_s^{\delta_n})$ est une solution faible de

L'EDS progressive contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dX_s^{\delta_n} = b_{\delta_n}(X_s^{\delta_n}, Y_s^{\delta_n}, u_s^{\delta_n})ds + \sigma_{\delta_n}(X_s^{\delta_n}, Y_s^{\delta_n})dW_s^{\delta_n}, & s \in [t, T] \\ X_t^{\delta_n} = x, \\ dY_s^{\delta_n} = -f_{\delta_n}(X_s^{\delta_n}, Y_s^{\delta_n}, w_s^n \sigma_{\delta_n}(X_s^{\delta_n}, Y_s^{\delta_n}), u_s^{\delta_n})ds + w_s^n \sigma_{\delta_n}(X_s^{\delta_n}, Y_s^{\delta_n})dW_s^{\delta_n}. \\ Y_t^{\delta_n} = V^{\delta_n}(t, x). \end{cases} \quad (3.32)$$

Par identification avec la construction du problème approché (3.17), on a pour tout $t \leq s \leq T$,

$$Y_s^{\delta_n} = V^{\delta_n}(s, X_s^{\delta_n}) \quad \text{et} \quad u_s^{\delta_n} = v^{\delta_n}(s, X_s^{\delta_n}).$$

Puisque la fonction $(s, x) \mapsto V^{\delta_n}(s, x)$ est de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ est elle vérifie l'équation (3.4). Alors, en appliquant la formule d'Itô pour $t \leq s \leq T$

$$\begin{aligned} Y_s^{\delta_n} &= \Phi_{\delta_n}(X_T^{\delta_n}) + \int_s^T f_{\delta_n}(X_r^{\delta_n}, Y_r^{\delta_n}, w_r^{\delta_n} \sigma_{\delta_n}(X_r^{\delta_n}, Y_r^{\delta_n}), u_r^{\delta_n})dr \\ &\quad - \int_s^T w_r^{\delta_n} \sigma_{\delta_n}(X_r^{\delta_n}, Y_r^{\delta_n})dW_r^{\delta_n}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

On considère B^{δ_n} un mouvement Brownien indépendant de W^{δ_n} . Si on pose

$$\chi_s^n := \begin{pmatrix} X_s^n \\ Y_s^n \end{pmatrix}, \quad r_s^n := (w_s^n, 0, u_s^{\delta_n}) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}^n := \begin{pmatrix} W^{\delta_n} \\ B^{\delta_n} \end{pmatrix}.$$

Alors, on peut récrire le système contrôlé (3.30) :

$$\begin{cases} d\chi_s^n = \beta(\chi_s^n, r_s^n)ds + \Sigma(\chi_s^n, r_s^n)d\mathcal{W}_s^n, & s \in [t, T], \\ \chi_t^n = \begin{pmatrix} x \\ V^{\delta_n}(t, x) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.34)$$

avec β et Σ sont les fonctions définies dans le Lemme 3.1.2.

par le lemme 3.3.4, le processus $w_s^n := \nabla_x V^{\delta_n}(s, X_s^{\delta_n})$ est uniformément borné. Donc, on peut interpréter $(r_s^n, s \in [t, T])$ comme contrôle qui prend ses valeurs dans l'ensemble compacte $A := \bar{B}_C(0) \times [0, K] \times \mathbb{U}$.

Afin de passer à la limite en n , on injecte le contrôle r^n dans l'ensemble de

contrôles relaxés, comme suit : on considère r^n comme variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'espace \mathcal{V} de tout les mesures de Borel q on $[0, T] \times A$, avec la projection $q(\cdot \times A)$ concide avec la mesure de Lebesgue. Pour cela, on identifie le processus contrôle r^n avec la mesure aléatoire :

$$q^n(\omega, ds, da) = \delta_{r_s^n(\omega)}(da)ds, \quad (s, a) \in [0, T] \times A, \omega \in \Omega. \quad (3.35)$$

L'ensemble $\{(\Sigma(x, y, z, \theta), \beta(x, y, z, \theta, v)), (x, y, z, \theta, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times A\}$ est borné et l'ensemble \mathcal{V} est compacte, par rapport à la topologie induite par la convergence faible des mesures, on obtient que $(\chi^n, q^n), n \geq 1$, est tendue sur $C([0, T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \times \mathcal{V}$. Donc, il existe une mesure de probabilité Q dans $C([0, T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \times \mathcal{V}$ et on peut extraire une sous-suite noté aussi (χ^n, q^n) , qui converge en loi vers (χ, q) dans l'espace $C([0, T]; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \times \mathcal{V}$ muni de la mesure Q .

Comme les coefficients du système (3.34) satisfait la condition de convexité (C), alors par le résultat [29], il existe un système référence stochastique $\bar{\nu} = (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}_t, \bar{\mathbb{P}}, \bar{\mathcal{F}}_t, \bar{\mathcal{W}})$ et un processus $(\bar{\mathcal{F}}_t)$ -adapté (χ, \bar{r}) (\bar{r} prend ses valeurs dans A), qui satisfait

$$\begin{cases} d\chi_s = \beta(\chi_s, \bar{r}_s)ds + \Sigma(\chi_s, \bar{r}_s)d\bar{\mathcal{W}}_s, \quad s \in [t, T], \\ \chi_t = \begin{pmatrix} x \\ V(t, x) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Si on considère, $\chi := \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}$, $\bar{\mathcal{W}} := \begin{pmatrix} \bar{W} \\ \bar{B} \end{pmatrix}$ et $\bar{r} := (\bar{w}, \bar{\theta}, \bar{u})$, alors le système (3.36) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} d\bar{X}_s = b(\bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{u}_s)ds + \sigma(\bar{X}_s, \bar{Y}_s)d\bar{W}_s, \\ d\bar{Y}_s = -f(\bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s, \bar{u}_s)ds + \bar{Z}_s d\bar{W}_s + \bar{\theta}_s d\bar{B}_s, \quad s \in [t, T] \\ \bar{X}_t = x, \quad \bar{Y}_t = V(t, x). \end{cases}$$

Le lemme 3.3.5 montre que la suite $(X^n, Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi, alors $(X^{\delta_n}, Y^{\delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi et les limites suit le même loi. A partir de (3.31) et le lemme 3.3.4, on déduit que $\bar{Y}_s = V(s, \bar{X}_s)$, pour tout $s \in [t, T]$, $\bar{\mathbb{P}}$ -p.s. En particulier, $Y_T = \Phi(X_T)$, $\bar{\mathbb{P}}$ -p.s. On identifie $\bar{M}_s = \int_t^s \bar{\theta}_r d\bar{B}_r$, donc $\langle \bar{M}, \bar{W} \rangle_s = \int_t^s \bar{\theta}_r d\langle \bar{B}, \bar{W} \rangle_r = 0$ et $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{M})$ satisfait (3.1).

Comme $\bar{Y}_s = V(s, \bar{X}_s)$ pour tout $s \in [t, T]$, $\bar{\mathbb{P}}$ -p.s. et par l'unicité de la solution de viscosité V de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (3.4), on obtient

$$V(t, x) = \operatorname{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}_{\bar{v}, \delta}(t)} J(t, x, u), \bar{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

□

Remarques et observations 1 (i) *Comme c'est expliqué dans l'introduction, la condition de Lipschitz uniforme ne suffit pas pour garantir l'existence de solutions et donc l'existence de contrôle optimal échoue également.*

(ii) *Lorsque les coefficients σ et / ou b dépendent aussi de la variable z , l'existence et l'unicité de solutions a été établi dans le [27] pour les EDSRs avec un générateur de diffusion non dégénérée et des coefficients uniformément Lipschitzienne. Mais l'existence de contrôle optimal, dans ce cas, semble difficile à obtenir. Toutefois, si on remplace la condition non de dégénérescence sur σ par les hypothèses de G -monotonie des coefficients introduits dans [52], l'existence d'un contrôle optimal peut être obtenu même lorsque le coefficient b dépend de la variable z et le coefficient de diffusion σ dépend de u (voir chapitre 2).*

(iii) *Il y a quelques résultats récents sur l'existence et unicité des solutions des EDSRs fortement couplées où les coefficients dépendent des trois variables x , y et z sous hypothèses de Lipschitz uniformes, voir [43, 57, 60]. Mais dans le meilleur de notre la connaissance, l'existence d'un contrôle optimal en fonction des hypothèses de [43, 57, 60] n'est pas encore étudié.*

À notre avis l'existence d'un contrôle optimal sous la conditions utilisées dans [60] peut être obtenu en utilisant la méthode qu'on a développé ici.

Un problème difficile consiste à établir l'existence d'un contrôle optimal pour des EDSR fortement couplées lorsque le coefficient σ dépend de z et u . Dans ce cas, l'existence de solutions suit de [57] et le principe de programmation dynamique de Bellman est donné dans [41].

Chapitre 4

EDDSR multidimensionnelles avec un générateur à croissance surlinéaire et application aux EDPS.

Dans ce chapitre, nous considérons des équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades (EDDSR) multidimensionnelles ayant un générateur $f(s, y, z)$ de croissance surlinéaire en les variables (y, z) , et une condition terminale de carré intégrable. On établit alors l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions. En raison des conditions que nous imposons sur le générateur, les méthodes classiques ne fonctionnent pas. En particulier, ni le lemme de Gronwall, ni le lemme de Bihari ne peuvent être utilisés. Notons également que les techniques de localisation par des temps d'arrêts ne fonctionnent pas dans les EDDSR. En nous appuyant sur les idées de [7, 8, 11, 13] dans les EDSR classiques, nous développons des méthodes basées sur une estimation entre les solutions d'EDDSR. Ceci nous permet d'obtenir simultanément l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions à partir de la même estimation. Notre travail étend les précédents articles sur les EDDSR multidimensionnelles avec des conditions locales sur le générateur, qui est en outre de croissance surlinéaire. En application, nous établissons l'existence et l'unicité de solutions (au sens de Sobolev) pour des équations aux dérivées partielles sto-

chastiques (EDPS) de croissance surlinéaires.

Introduction

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité complet, $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ deux mouvements browniens indépendants définissent sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans \mathbb{R}^d et \mathbb{R} , respectivement.

On considère les filtrations $\mathcal{F}_t^W := \sigma(W_s; 0 \leq s \leq t)$ et $\mathcal{F}_{t,T}^B := \sigma(B_s - B_t; t \leq s \leq T)$, complétés par les ensemble P -null. Le σ -algèbre $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$. On note que (\mathcal{F}_t) ne correspond pas une famille croissante, et donc il n'est pas une filtration.

Soit $\mathcal{M}^2(0, T, \mathbb{R}^d)$ présente l'ensemble des processus mesurables d -dimensionnel $\{\varphi_t; t \in [0, T]\}$ qui satisfait :

- i) Le processus φ_t is (\mathcal{F}_t) -adapté.
- ii) $E \int_0^T |\varphi_t|^2 dt < \infty$.

On définit par $\mathcal{S}^2([0, T], \mathbb{R})$ l'ensemble des processus continues $\{\varphi_t; t \in [0, T]\}$, qui satisfait :

- i) Le processus φ_t is (\mathcal{F}_t) -adapté.
- ii) $E(\sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_t|^2) < \infty$.

Soient $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r} \mapsto \mathbb{R}^d$, $g : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r} \mapsto \mathbb{R}^{d \times l}$ sont des fonctions mesurables telles que, pour chaque $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r}$, $f(\cdot, y, z) \in \mathcal{M}^2(0, T, \mathbb{R}^d)$ et $g(\cdot, y, z) \in \mathcal{M}^2(0, T, \mathbb{R}^{d \times l})$.

Soit la variable aléatoire ξ de carré intégrable (\mathcal{F}_T) -mesurable.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit $\rho_N(f) := \mathbb{E} \int_0^T \sup_{|y|, |z| \leq N} |f(s, y, z)| ds$.

On considère alors l'EDDSR,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s) d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (E^{f,g,\xi})$$

La variable aléatoire ξ est dite condition terminale et f est le générateur.

Définition 4.0.1 *Le processus $(Y^{f,g}, Z^{f,g})$ est dite solution de l'équation $(E^{f,g,\xi})$ si $(Y^{f,g}, Z^{f,g})$ appartient à $\mathcal{S}^2(0, T, \mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2(0, T, \mathbb{R}^{d \times r})$ et satisfait $(E^{f,g,\xi})$.*

On commence par donner un exemple, Soit $g(s, y, z)$ une fonction uniformément lipschitzienne en (y, z) à croissance surlinéaire. On considère l'EDDSR suivante :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Y_s \log |Y_s| ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s) d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s dW_s \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.1)$$

Le générateur de l'équation précédente est à croissance surlinéaire par rapport à la variable y . Il est également ni localement monotone ni uniformément continue. Dans le reste de ce chapitre, on voit bien que cet exemple est couvert par le résultat obtenu.

Par conséquent, la non-linéarité dite logarithmique $y \log |y|$ qui apparaît dans (4.1) est intéressante. A notre connaissance, lorsque la dimension est supérieur à un, il n'y a pas des résultats de la littérature qui couvrent cet exemple intéressant. La même question se pose également pour la non-linéarité $h(y)z\sqrt{\log |z|}$ où h est une telle fonction.

Le problème étudié dans ce chapitre est une extention des résultats [8, 11, 13] sur les EDDSRs. On établit l'existence et l'unicité ainsi la stabilité \mathbb{L}^p ($p < 2$) des solutions de l'EDSPR $(E^{(f,g,\xi)})$ lorsque le générateur f est à croissance surlinéaire en y, z . De plus, la condition terminale ξ est seulement de carrée intégrable. On introduit une nouvelle hypothèse locale qui couvre l'exemple d'EDDSR précédent. Par rapport au résultat [58], le générateur est ni localement monotone en y ni localement lipschitzienne en z .

4.1 Les résultats principales

4.1.1 Hypothèses

On considère les hypothèses suivantes :

(H.1) La fonction f est continue en (y, z) pour p.t. (t, ω) .

(H.2) Il existe $K > 0$, $M > 0$, et $\eta \in \mathbb{L}^1(\Omega; \mathbb{L}^1([0, T]))$ tels que pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r}$,

$$\langle y, f(t, \omega, y, z) \rangle \leq \eta_t + M|y|^2 + K|y||z| \quad P - p.s., \text{ pour } t \in [0, T].$$

(H.3) La fonction g est continue en (y, z) pour presque tout (t, ω) , et, il existe $L > 0$, $0 < \lambda < 1$, $0 < \alpha_1 < 1$, et $\eta' \in \mathbb{L}^{\frac{2}{\alpha_1}}([0, T] \times \Omega)$ telles que pour tout $(t, \omega, y, y', z, z') \in [0, T] \times \Omega \times (\mathbb{R}^d)^2 \times (\mathbb{R}^{d \times r})^2$,

$$(i) \quad |g(t, y, z) - g(t, y', z')|^2 \leq L|y - y'|^2 + \lambda|z - z'|^2$$

$$(ii) \quad |g(t, y, z)| \leq \eta'_t + L|y|^{\alpha_1} + \lambda|z|^{\alpha_1}.$$

(H.4) Il existe $M_1 > 0$, $0 \leq \alpha < 2$, $\alpha' > 1$ et $\bar{\eta} \in \mathbb{L}^{\alpha'}([0, T] \times \Omega)$ tels que pour tout $(t, \omega, y, z) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r}$,

$$|f(t, \omega, y, z)| \leq \bar{\eta}_t + M_1(|y|^\alpha + |z|^\alpha).$$

(H.5) Il existe $v \in \mathbb{L}^2(\Omega; \mathbb{L}^2([0, T]))$, une suite réelle $(A_N)_{N>1}$ et des constantes $M_2 > 1$, $r > 0$ telles que

$$(i) \quad \forall N > 1, \quad 1 < A_N \leq N^r,$$

$$(ii) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} A_N = \infty,$$

(iii) Pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$ et $(t, \omega, y, y', z, z') \in [0, T] \times \Omega \times (\mathbb{R}^d)^2 \times (\mathbb{R}^{d \times r})^2$ tel que $|y|, |y'|, |z|, |z'| \leq N$, on a

$$\begin{aligned} \langle y - y', f(t, y, z) - f(t, y', z') \rangle \mathbf{1}_{\{v_s(\omega) \leq N\}} &\leq M_2|y - y'|^2 \log A_N \\ &\quad + M_2|y - y'||z - z'| \sqrt{\log A_N} + M_2 A_N^{-1}. \end{aligned}$$

Théorème 4.1.1 (Existence et unicité) *On suppose que les hypothèses (H.1)–(H.5) sont satisfaites et ξ est de carée intégrable. Alors l'équation $(E^{f,g,\xi})$ admet une unique solution.*

Le deuxième résultat principal de ce chapitre est la stabilité des solutions

dans tous les espaces \mathbb{L}^q pour $q < 2$. Soit (f_n) une suite de processus (\mathcal{F}_t) -progressivement mesurables pour tout n . Soit (ξ_n) une suite de variables aléatoires (\mathcal{F}_T) -adaptées de carrée intégrable. On suppose que pour tout n , l'EDDSR (E^{f_n, g, ξ_n}) correspondant aux données (f_n, g, ξ_n) admet des solutions (non nécessairement unique). Chaque solution de l'équation (E^{f_n, g, ξ_n}) est notée par (Y^n, Z^n) . Soit (Y, Z) l'unique solution de l'EDDSR $E^{(f, g, \xi)}$. On suppose que les hypothèses supplémentaires suivantes sont satisfaites :

(H.6) Pour chaque N , $\rho_N(f_n - f) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

(H.7) $E(|\xi_n - \xi|^2) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

(H.8) Il existe $K > 0$, $M > 0$ et $\eta \in \mathbb{L}^1(\Omega; \mathbb{L}^1([0, T]))$ telles que pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r}$,

$$\sup_n \langle y, f_n(t, \omega, y, z) \rangle \leq \eta_t + M|y|^2 + K|y||z| \quad P - p.s., p.t. t \in [0, T].$$

(H.9) Il existe $M_1 > 0$, $0 \leq \alpha < 2$, $\alpha' > 1$ et $\bar{\eta} \in \mathbb{L}^{\alpha'}([0, T] \times \Omega)$ telles que pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r}$,

$$\sup_n |f_n(t, \omega, y, z)| \leq \bar{\eta}_t + M_1(|y|^\alpha + |z|^\alpha).$$

Théorème 4.1.2 (Stabilité des solutions) *On suppose que les hypothèses (H.1)-(H.9) sont satisfaites. Alors, pour tout $q < 2$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^n - Y_t|^q + \mathbb{E} \int_0^T |Z_s^n - Z_s|^q ds \right) = 0.$$

4.1.2 Quelques exemples et observations.

Dans cette partie, on donne quelques remarques et des exemples afin d'expliquer nos hypothèses et nos résultats. Ces exemples sont couverts par les résultats principales de ce chapitre. Par le mieux de notre connaissance, ils ne sont pas couverts par d'autres travaux sur les EDDSRs.

Remarques et observations 2 — *L'hypothèse (H.2) peut être remplacé*

par :

(H'.2) Il existent $M > 0$, $\eta \in \mathbb{L}^1(\Omega; \mathbb{L}^1([0, T]))$ et $\gamma > 0$ satisfont $2\gamma + \lambda < 1$ tel que,

$$\langle y, f(t, \omega, y, z) \rangle \leq \eta_t + M|y|^2 + \gamma|z|^2 \quad P - p.s., p.t. t \in [0, T].$$

avec λ est la constante définit dans **(H.3)**.

Dans ce cas, des modifications mineures sont nécessaires dans les preuves.

- Les EDDSRs ainsi que les EDPS qu'on considère dans ce chapitre sont intéressantes puisque le générateur f est non linéaire en (t, y, z) ne peut être ni localement Lipschitz en z ni localement monotone en y . En outre, puisque f est à croissance surlinéaire en y et z , alors il ne peut pas être uniformément continue.
- Dans [12], les auteurs ont étudié les EDSRs à croissance logarithmique $K|z|\sqrt{|\log|z||}$ qui apparaissent également dans certains problèmes de contrôle stochastique. On espère que le résultat de ce chapitre sera utilisé pour le contrôle stochastique du SDE-EDDSRs.
- Comme le système des EDPSs associé à la version Markovienne de l'EDDSR $(E^{(\xi, f, g)})$ peut être dégénérée, alors notre résultat couvre aussi certain système d'EDPSs de première ordre.

L'exemple suivant traite une EDDSR avec un générateur localement Lipschitz.

Exemple 1 On suppose que ξ est de carrée intégrable et la fonction g satisfait l'hypothèse **(H.3)**. On considère la fonction f satisfait **(H.1)**, **(H.2)** et **(H.4)**. On suppose qu'il existe une constante positive C tel que, pour chaque $N > 0$ et $|y|, |z|, |y'|, |z'| \leq N$,

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z)| \leq C(\log N)|y - y'|.$$

et

$$|f(t, y, z) - f(t, y, z')| \leq C(\sqrt{\log N})|z - z'|.$$

Alors l'EDDSR $(E^{(f, g, \xi)})$ admet une unique solution qui est stable au sens du Théorème 4.1.2.

Preuve. L'hypothèse **(H.5)** est satisfaite pour $A_N = N$. □

Dans l'exemple suivant, on considère le cas où le générateur est à croissance logarithmique par rapport à la variable y . Plus précisément, lorsque $f(t, y, z) = y \log |y|$ pour une telle dimension $d > 1$. L'intérêt d'étudier les générateurs de type $y \log |y|$ est une continuation naturelle des travaux [6, 7, 8, 9] dans le cas des EDSRs. En effet, on considère l'EDDSR $(E^{\xi, f, g})$ et on assume pour la simplicité que le générateur f ne dépend pas de la variable z . Soit f est L_N -localement Lipchitz et à croissance au plus linéaire. A partir de l'exemple précédent que L_N se comporte comme $\log N$, alors l'EDDSR $(E^{\xi, f, g})$ admet une unique solution. Si on ignore la condition de croissance linéaire sur f . Alors l'hypothèse $L_n \sim \log N$ implique que $|f(y)| \leq K(1 + |y| \log |y|)$ pour une constante K positive. Les question qui se posent :

L'EDDSR (4.1) admet-elle des solutions ? Si oui, quelles sont les critères vérifiés par les solutions : unicité et stabilité ?

Les réponses sont comme suit :

Exemple 2 *On suppose que ξ est de carrée intégrable et g satisfait l'hypothèse **(H.3)**. Alors, l'EDDSR (4.1) admet une unique solution. De plus, cette solution est stable au sens du Théorème 4.1.2.*

Preuve. Comme $\langle y, f(y) \rangle \leq 1$ et $|f(y)| \leq 1 + \frac{1}{\varepsilon} |y|^{1+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors on déduit que la fonction f satisfait **(H.1)**, **(H.2)** et **(H.4)**. Il nous reste à vérifier l'hypothèse **(H.5)**. En utilisant l'inégalité triangulaire, on sépare les deux cas :

$$0 \leq |y|, |y'| \leq \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} \leq |y|, |y'| \leq N.$$

$$\text{Le cas où } 0 \leq |y|, |y'| \leq \frac{1}{N}.$$

Puisque la fonction $x \mapsto -x \log x$ est décroissante sur l'intervalle $]0, e^{-1}]$, alors

pour $N > e$

$$\begin{aligned} |f(y) - f(y')| &\leq |f(y)| + |f(y')| \\ &\leq 2 \frac{\log N}{N} \end{aligned}$$

Le cas où $\frac{1}{N} \leq |y|, |y'| \leq N$.

Par le Théorème accroissements finis appliquées à f , on a

$$|f(y) - f(y')| \leq (1 + \log N)|y - y'|.$$

Donc, l'hypothèse **(H.5)** est satisfaite pour tout $N > e$ avec $v_s = 0$ et $A_N = N$. \square

L'exemple suivant traite le cas où le générateur est à croissance surlinéaire par rapport à la variable z .

Exemple 3 On suppose que ξ est de carée intégrable et g satisfait l'hypothèse **(H.3)**. Soient $\varepsilon_0 \in]0, 1[$, $l(y) := y \log \frac{|y|}{1+|y|}$ et $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{dr}; \mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{dr} - \{0\}; \mathbb{R}_+)$ tel que

$$h(z) = \begin{cases} |z| \sqrt{-\log |z|} & \text{si } |z| < 1 - \varepsilon_0 \\ |z| \sqrt{\log |z|} & \text{si } |z| > 1 + \varepsilon_0 \end{cases}$$

Alors, l'EDDSR $(E^{(f,g,\xi)})$, avec le générateur $f(y, z) := l(y)h(z)$, admet une unique solution qui est stable au sens du Théorème 4.1.2.

Preuve. Il est facile de voir que la fonction f satisfait **(H.1)**. Il reste à prouver que la fonction f satisfait les hypothèses **(H.2)**, **(H.4)** et **(H.5)**. Comme $\langle y, f(y, z) \rangle = \langle y, l(y) \rangle h(z) \leq 0$, alors l'hypothèse **(H.2)** est satisfaite.

(i) Puisque l est continue, $l(0) = 0$ et $|l(y)|$ tend vers 1 lorsque $|y|$ tend vers ∞ , on déduit que l est bornée. De plus, l satisfait $\langle y - y', l(y) - l(y') \rangle \leq 0$. Dans le cas unidimensionnel, il n'est pas difficile de voir que l est une fonction décroissante. Comme, $-\langle y, y' \rangle \log \frac{|y|}{1+|y|} \leq -|y||y'| \log \frac{|y|}{1+|y|}$ (car $\log \frac{|y|}{1+|y|} \leq 0$), alors le problème

est réduit au cas unidimensionnel en utilisant le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 \langle y - y', l(y) - l(y') \rangle &\leq |y|^2 \log \frac{|y|}{1 + |y|} + |y'|^2 \log \frac{|y'|}{1 + |y'|} \\
 &\quad - |y||y'| \left(\log \frac{|y|}{1 + |y|} + \log \frac{|y'|}{1 + |y'|} \right) \\
 &= (|y| - |y'|) \left(|y| \log \frac{|y|}{1 + |y|} - |y'| \log \frac{|y'|}{1 + |y'|} \right) \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

(ii) Comme $\sqrt{2\varepsilon \log |z|} = \sqrt{\log |z|^{2\varepsilon}} \leq |z|^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $|z| > 1$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ la fonction h satisfait

$$0 \leq h(z) \leq M + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} |z|^{1+\varepsilon}, \quad \text{avec } M = \sup_{|z| \leq 1+\varepsilon_0} |h(z)|.$$

L'hypothèse **(H.4)** est satisfaite par les deux observations (i) et (ii). Pour vérifier **(H.5)**, il suffit de montrer qu'il existe une constante positive c telle que pour chaque z, z' satisfaisant $|z|, |z'| \leq N$, donc pour N assez grand, on a

$$|h(z) - h(z')| \leq c \left(\sqrt{\log N} |z - z'| + \frac{\log N}{N} \right) \quad (4.2)$$

L'inégalité précédente peut être établie en séparant les cinq cas suivants, $0 \leq |z|, |z'| \leq \frac{1}{N}$, $\frac{1}{N} \leq |z|, |z'| \leq 1 - \varepsilon_0$, $1 - \varepsilon_0 \leq |z|, |z'| \leq 1 + \varepsilon_0$ et $1 + \varepsilon_0 \leq |z|, |z'| \leq N$.

Le cas $0 \leq |z|, |z'| \leq \frac{1}{N}$. Puisque la fonction $x \mapsto x\sqrt{-\log x}$ est décroissante sur l'intervalle $[0, \frac{1}{e}]$, alors pour chaque $N > \sqrt{e}$,

$$\begin{aligned}
 |h(z) - h(z')| &\leq |h(z)| + |h(z')| \\
 &\leq 2 \frac{1}{N} \sqrt{-\log \frac{1}{N}} \\
 &\leq \frac{2 \log N}{N}.
 \end{aligned}$$

Les autres cas peuvent être prouver par le théorème d'accroissement fini. □

Remarque 2 Si on prend $C_t = 0$ dans l'exemple précédent, alors par l'inégalité (4.3) cet exemple est couvert par notre résultat et la condition sur le générateur est dite log-lipschitzienne par rapport à z .

4.2 Preuves

4.2.1 La preuve du Théorème 4.1.1

Lemme 4.2.1 (L'approche de f) On considère une fonction f qui satisfait les hypothèses (H.1)– (H.5). Alors, il existe une suite (f_n) telle que,

(a) Pour chaque n , f_n est bornée et globalement Lipschitzienne en (y, z) pour p.t. (t, ω) .

Il existe $M' > 0$, tels que :

(b) $\sup_n |f_n(t, \omega, y, z)| \leq \bar{\eta} + M' + M_1(|y|^\alpha + |z|^\alpha)$ pour p.t. (t, ω) ,

(c) $\sup_n \langle y, f_n(t, \omega, y, z) \rangle \leq \eta_t + M' + M|y|^2 + K|y||z|$ pour p.t. (t, ω) ,

(d) Pour chaque N , $\rho_N(f_n - f) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Preuve. . Soit $\bar{\rho}_n : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une suite de fonctions régulières à support compacte qui approxime la mesure de Dirac en 0 et satisfait $\int \bar{\rho}_n(u) du = 1$. Soit $\varphi_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ une suite de fonctions régulières telle que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n(u) = 1$ pour $|u| \leq n$ et $\varphi_n(u) = 0$ pour $|u| \geq n + 1$. On définit la suite ψ_n de $\mathbb{R}^{d \times r}$ vers \mathbb{R}_+ . On considère, $f_{q,n}(t, y, z) = \mathbf{1}_{\{\bar{\eta} \leq q\}} \int f(t, (y, z) - u) \bar{\rho}_q(u) du \varphi_n(y) \psi_n(z)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $q(n)$ un entier tel que $q(n) \geq n + n^\alpha$. La suite (f_n) , définit pour chaque n par $f_n := f_{q(n),n}$, satisfait alors les assertions (a)-(d). \square

Estimation des solutions de l'EDDSR $(E^{f_n, g, \xi})$

Lemme 4.2.2 Soient f, g et ξ les données du Théorème 4.1.1. Soit (f_n) la suite de fonctions approchées associée à la fonction f du lemme 4.2.1. Pour chaque entier n , on note par (Y^n, Z^n) l'unique solution de l'équation $(E^{f_n, g, \xi})$. Alors, il existe une constante positive ℓ tels que

$$a) \mathbb{E} \int_0^T e^{2Ms} |Z_s^n|^2 ds \leq \frac{K_0}{(1-\lambda)} \left[e^{2MT} \mathbb{E} |\xi|^2 + 2 \mathbb{E} \int_0^T e^{2Ms} (\eta_s + M' + (\eta'_s)^2) ds \right] = K_1,$$

$$b) \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} (e^{2Mt} |Y_t^n|^2) \leq \ell K_1 = K_2,$$

$$c) \mathbb{E} \int_0^T e^{2Ms} |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)|^{\bar{\alpha}} ds \leq K_3,$$

avec $K_3 = 4^{\bar{\alpha}-1} \left[\mathbb{E} \int_0^T e^{2Ms} ((\bar{\eta}_s + M')^{\bar{\alpha}} + 4) ds + M_1^{\bar{\alpha}} K_1 + T M_1^{\bar{\alpha}} K_2 \right]$ et $\bar{\alpha} = \min(\alpha', \frac{2}{\alpha})$.

$$d) \mathbb{E} \int_0^T e^{2Ms} |g(s, Y_s^n, Z_s^n)|^2 ds \leq K_4.$$

Preuve. En utilisant la formule d'Itô et le Lemme 4.2.1 (c), on obtient pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} e^{2Mt} |Y_t^n|^2 &+ 2M \int_t^T e^{2Ms} |Y_s^n|^2 ds \leq e^{2MT} |\xi|^2 \\ &+ 2 \int_t^T e^{2Ms} (\eta_s + M' + M |Y_s^n|^2 + K |Y_s^n| |Z_s^n|) ds \\ &+ 2 \int_t^T e^{2Ms} (Y_s^n, Z_s^n) dW_s \\ &+ 2 \int_t^T e^{2Ms} \langle Y_s^n, g(s, Y_s^n, Z_s^n) \rangle d\overleftarrow{B}_s \\ &+ \int_t^T e^{2Ms} (L |Y_s^n|^2 + \lambda |Z_s^n|^2 + (\eta'_s)^2) ds \\ &- \int_t^T e^{2Ms} |Z_s^n|^2 ds. \end{aligned}$$

Par l'inégalité suivante $K|y||z| \leq \frac{K^2}{\varepsilon}|y|^2 + \varepsilon|z|^2$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{2Mt} |Y_t^n|^2 + (1 - \varepsilon - \lambda) \mathbb{E} \int_t^T e^{2Ms} |Z_s^n|^2 ds &\leq e^{2MT} \mathbb{E} |\xi|^2 \\ &+ 2 \mathbb{E} \int_t^T e^{2Ms} (\eta_s + M' + (\eta'_s)^2) ds \\ &+ 2 \mathbb{E} \int_t^T e^{2Ms} (M + L + \frac{K^2}{\varepsilon}) |Y_s^n|^2 ds. \end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon = \frac{1-\lambda}{4}$ alors par le lemme de Gronwall, on obtient l'assertion a). On utilise l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on montre b). Les assertions c) et d) résulte du Lemme 4.2.1 b) et l'hypothèse (H.4). Finalement, l'hypothèse (H.3) et les assertions a), b), on obtient e). \square

Par l'extraction des sous-suites, on a

Corollary 4.2.1 *Il existe $Y \in \mathbb{L}^2(\Omega, L^\infty[0, T])$, $Z \in \mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T])$, $F \in \mathbb{L}^{\bar{\alpha}}(\Omega \times [0, T])$, $\bar{g} \in \mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T])$ tel que*

$$\begin{aligned} Y^n &\rightharpoonup Y, \text{ faiblement dans } \mathbb{L}^2(\Omega, L^\infty[0, T]) \\ Z^n &\rightharpoonup Z, \text{ faiblement dans } \mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T]) \\ f_n(\cdot, Y^n, Z^n) &\rightharpoonup \bar{f} \text{ faiblement dans } \mathbb{L}^{\bar{\alpha}}(\Omega \times [0, T]), \\ g_n(\cdot, Y^n, Z^n) &\rightharpoonup \bar{g} \text{ faiblement dans } \mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T]) \end{aligned}$$

De plus,

$$Y_t = \xi + \int_t^T \bar{f}(s) ds + \int_t^T \bar{g}(s) d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \forall t \in [0, T].$$

Le lemme technique suivant est un résultat directe de l'application des inégalités de Hölder et Schwartz.

Lemme 4.2.3 *Pour tout $\beta \in]1, 2[$, $0 < \lambda < 1$, $A > 0$, $(y)_{i=1..d} \subset \mathbb{R}$ et $(z)_{i=1..d, j=1..r} \subset \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned} A \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r z_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{(1-\lambda)(2-\beta)}{2} \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{-1} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^d y_i z_{ij} \right)^2 \\ - \frac{1-\lambda}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r z_{ij}^2 \leq \frac{1}{(1-\lambda)(\beta-1)} A^2 \sum_{i=1}^d y_i^2 - \frac{(1-\lambda)(\beta-1)}{4} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r z_{ij}^2. \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant l'inégalité suivante $ab \leq \frac{\alpha^2}{2} a^2 + \frac{1}{2\alpha^2} b^2$ on a

$$\begin{aligned} A \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r z_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{(1-\lambda)(2-\beta)}{2} \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{-1} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^d y_i z_{ij} \right)^2 \\ - \frac{1-\lambda}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r z_{ij}^2 \leq \frac{\alpha^2}{2} A^2 \sum_{i=1}^d y_i^2 + \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r z_{ij}^2 - \frac{1-\lambda}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r z_{ij}^2 \\ + \frac{(1-\lambda)(2-\beta)}{2} \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{-1} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^d y_i z_{ij} \right)^2. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient $\sum_{i=1}^d y_i z_{ij} \leq \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^d z_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& A \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r z_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1-\lambda}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r z_{ij}^2 \\
& + \frac{(1-\lambda)(2-\beta)}{2} \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{-1} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^d y_i z_{ij} \right)^2 \\
& \leq \frac{\alpha^2}{2} A^2 \sum_{i=1}^d y_i^2 + \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r z_{ij}^2 - \frac{1-\lambda}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r z_{ij}^2 \\
& + \frac{(1-\lambda)(2-\beta)}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^d z_{ij}^2.
\end{aligned}$$

Pour finir la preuve, on choisit $\alpha^2 = \frac{2}{(1-\lambda)(\beta-1)}$. \square

La proposition suivante est très utile dans les EDDSRs et les EDPSs à croissance surlinéaire.

Proposition 4.2.4 *Soit (Y, Z) appartient à $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$. On suppose que **(H.4)** est satisfaite. Soit $\bar{\alpha} := \frac{2}{\alpha} \wedge \alpha'$. Alors, il existe une constante positive $K(\bar{\alpha}, T, M_1) := K$, telle que*

$$E \int_0^T |f(s, Y_s, Z_s)|^{\bar{\alpha}} ds \leq K \left[1 + E \int_0^T \bar{\eta}_s^{\bar{\alpha}} ds + E \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s|^2 \right) + E \int_0^T |Z_s|^2 ds \right].$$

Preuve. On utilise l'hypothèse **(H.4)**, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_0^T |f(s, Y_s, Z_s)|^{\bar{\alpha}} ds & \leq E \int_0^T (\bar{\eta}_s + M_1 |Y_s|^\alpha + M_1 |Z_s|^\alpha)^{\bar{\alpha}} ds \\
& \leq 3^{\bar{\alpha}} M_1^{\bar{\alpha}} E \int_0^T (\bar{\eta}_s^{\bar{\alpha}} + |Y_s|^{\alpha \bar{\alpha}} + |Z_s|^{\alpha \bar{\alpha}}) ds \\
& \leq 3^{\bar{\alpha}} M_1^{\bar{\alpha}} E \int_0^T \left((1 + \bar{\eta}_s)^{\bar{\alpha}} + (1 + |Y_s|)^{\alpha \bar{\alpha}} + (1 + |Z_s|)^{\alpha \bar{\alpha}} \right) ds \\
& \leq K \left[1 + E \int_0^T \bar{\eta}_s^{\bar{\alpha}} ds + E \sup_s |Y_s|^2 + E \int_0^T |Z_s|^2 ds \right].
\end{aligned}$$

\square

Estimation entre deux solutions approchées.

Proposition 4.2.5 Soient f, g et ξ les données définissent dans le Théorème 4.1.1. Soit (f_n) la suite des fonctions approchées associée à f . Pour tout entier n , on note par (Y^n, Z^n) l'unique solution de l'EDDSR $(E^{f_n, g, \xi})$. Soient $\nu_R := \sup \{(A_N \log A_N)^{-1}, N \geq R\}$ et $C_N := \frac{\beta L}{2} + \frac{M_2^2 \beta \log A_N}{(1-\lambda)(\beta-1)} + \beta M_2 \log A_N$.

Alors, pour chaque $R \in \mathbb{N}, \beta \in]1, \min(3 - \frac{2}{\alpha}, 2)[$, $\varepsilon > 0$ et

$$\delta' < (1-\lambda)(\beta-1) \min \left(\frac{1}{2M_2^2 + 2M_2(1-\lambda)(\beta-1)}, \frac{\kappa}{rM_2^2\beta + r\beta M_2(1-\lambda)(\beta-1)} \right),$$

il existe $N_0 > R$ telle que pour chaque $N > N_0$ et $T' \leq T$,

$$\begin{aligned} \limsup_{n,m \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \sup_{(T'-\delta')^+ \leq t \leq T'} |Y_t^n - Y_t^m|^\beta + \mathbb{E} \int_{(T'-\delta')^+}^{T'} \frac{|Z_s^n - Z_s^m|^2}{(|Y_s^n - Y_s^m|^2 + \nu_R)^{\frac{2-\beta}{2}}} ds \\ \leq \varepsilon + \frac{\ell}{(1-\lambda)(\beta-1)} e^{C_N \delta'} \limsup_{n,m \rightarrow +\infty} \mathbb{E} |Y_{T'}^n - Y_{T'}^m|^\beta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

avec ℓ une constante universelle positive.

Avant de donner la preuve de cette proposition, on donne quelques explications à ce sujet. En raison de la croissance du générateur surlinéaire, les techniques utilisées dans [6, 7] sont très utile pour donner une estimation entre deux solutions approchées. En particulier, ni l'inégalité de Gronwall ni le Lemme de Bihari peuvent être utilisés dans notre situation. En outre, on ne peut pas estimer les quantités de type $|Y_t^n - Y_t^m|^2$ ou de type $e^{at}|Y_t^n - Y_t^m|^2$. Seulement les quantité de type (4.4) sont estimable. Pour cela, on peut estimer les quantité de type $|Y_t^n - Y_t^m|^\beta$ pour $\beta < 2$. Sinon, les intégrales peuvent être infinis. Donc, estimer (4.4) est suffisant pour l'estimation entre deux solutions approchées. Notant que, cette estimation établit la stabilité des solutions dans $\mathcal{S}^q \times \mathcal{M}^q$ pour tout $q < 2$. La stabilité dans $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$ est probablement fausse sous nos hypothèses. La preuve de la proposition 4.2.5 nécessite de nombreux calculs. On les divise en plusieurs étapes présentées comme des Lemmes.

L'idée de la preuve est comme suit : En utilisant le Lemme 4.2.2, la suite (Y^n, Z^n) converge faiblement dans \mathbb{L}^2 . Afin de montrer que (Y^n, Z^n) converge

fortement dans \mathbb{L}^1 , on définit un nouveau processus pour $N \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\Delta_t := |Y_t^n - Y_t^m|^2 + (A_N \log A_N)^{-1}. \quad (4.5)$$

On applique la formule d'Itô à $e^{Ct} \Delta_t^{\frac{\beta}{2}}$ pour $0 < \beta < 2$. Alors on passe à la limite en n et N pour avoir l'existence et l'unicité des solutions pour une petite durée de temps. Enfin, on utilise une procédure répétitive pour prolonger le résultat à une durée arbitraire de temps.

Lemme 4.2.6 *On suppose que les hypothèses de la Proposition 4.2.5 sont satisfaites. Alors, pour tout $C > 0$ on a*

$$\begin{aligned} e^{Ct} \Delta_t^{\frac{\beta}{2}} + C \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}} ds &\leq e^{CT'} \Delta_{T'}^{\frac{\beta}{2}} + I_1 + I_2 + I_3 \\ &+ \beta \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} \langle Y_s^n - Y_s^m, g(s, Y_s^n, Z_s^n) - g(s, Y_s^m, Z_s^m) \rangle d\overleftarrow{B}_s \\ &- \beta \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} \langle Y_s^n - Y_s^m, (Z_s^n - Z_s^m) dW_s \rangle, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 := 2\beta e^{CT'} [2N^2 + \nu_1]^{\frac{\beta-1}{2}} &\left[\int_t^{T'} \sup_{|y|, |z| \leq N} |f_n(s, y, z) - f(s, y, z)| ds \right. \\ &\left. + \int_t^{T'} \sup_{|y|, |z| \leq N} |f_m(s, y, z) - f(s, y, z)| ds \right], \end{aligned}$$

$$I_2 := \beta \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} \langle Y_s^n - Y_s^m, f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m) \rangle \mathbf{1}_{\{\Phi(s) > N\}} ds,$$

$$\text{avec} \quad \Phi(s) := |Y_s^n| + |Y_s^m| + |Z_s^n| + |Z_s^m| + v_s,$$

$$\begin{aligned} I_3 := &\left(\frac{\beta L}{2} + \frac{\beta M_2^2 \log A_N}{(1-\lambda)(\beta-1)} + \beta M_2 \log A_N \right) \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}} ds \\ &- \beta \frac{(1-\lambda)(\beta-1)}{4} \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-2} |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds. \end{aligned}$$

Preuve. La formule d'Itô (appliquée à la processus $e^{Ct}\Delta_t^{\frac{\beta}{2}}$) et l'hypothèse **(H3)**-(i), donnent pour tout $t \leq T'$,

$$\begin{aligned}
e^{Ct}\Delta_t^{\frac{\beta}{2}} + C \int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}} ds &\leq e^{CT'}\Delta_{T'}^{\frac{\beta}{2}} + I'_1 + I''_1 + I_2 \\
&\quad - \frac{\beta}{2} \int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds \\
&\quad + \frac{\beta}{2} \int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} (L|Y_s^n - Y_s^m|^2 + \lambda|Z_s^n - Z_s^m|^2) ds \\
&\quad - \beta \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) \int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-2} \\
&\quad \quad \quad \times \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^d (Y_{i,s}^n - Y_{i,s}^m) (Z_{i,j,s}^n - Z_{i,j,s}^m) \right)^2 ds \\
&\quad + \beta \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) \int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-2} |Y_s^n - Y_s^m| \\
&\quad \quad \quad \times (L|Y_s^n - Y_s^m| + \lambda|Z_s^n - Z_s^m|) ds \\
&\quad + \beta \int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} \langle Y_s^n - Y_s^m, \\
&\quad \quad \quad g(s, Y_s^n, Z_s^n) - g(s, Y_s^m, Z_s^m) \rangle d\overleftarrow{B}_s \\
&\quad - \beta \int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} \langle Y_s^n - Y_s^m, (Z_s^n - Z_s^m) \rangle dW_s,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
I'_1 := \beta \int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} &\left[\langle Y_s^n - Y_s^m, f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^n, Z_s^n) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle Y_s^n - Y_s^m, f(s, Y_s^m, Z_s^m) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m) \rangle \right] \mathbf{1}_{\{\Phi(s) \leq N\}} ds,
\end{aligned}$$

$$I''_1 := \beta \int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} \langle Y_s^n - Y_s^m, f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^m, Z_s^m) \rangle \mathbf{1}_{\{\Phi(s) \leq N\}} ds.$$

Comme $|Y_s^n - Y_s^m| \leq \Delta_s^{\frac{1}{2}}$, il résulte que

$$I'_1 \leq I_1. \tag{4.6}$$

On observe que $\mathbf{1}_{\{\Phi(s) \leq N\}} \leq \mathbf{1}_{\{v_s \leq N\}}$ alors par l'hypothèse **(H.5)** on obtient

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_2'' &\leq \beta M_2 \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} \left[|Y_s^n - Y_s^m|^2 \log A_N \right. \\
 &\quad \left. + A_N^{-1} + |Y_s^n - Y_s^m| |Z_s^n - Z_s^m| \sqrt{\log A_N} \right] \mathbf{1}_{\{\Phi(s) \leq N\}} ds \\
 &\leq \beta M_2 \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} \left[\Delta_s \log A_N + |Y_s^n - Y_s^m| |Z_s^n - Z_s^m| \sqrt{\log A_N} \right] \mathbf{1}_{\{\Phi(s) \leq N\}} ds.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

On définit par

$$\begin{aligned}
 J &:= \bar{I}_1'' - \frac{\beta}{2} \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds \\
 &\quad + \frac{\beta}{2} \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} (L|Y_s^n - Y_s^m|^2 + \lambda |Z_s^n - Z_s^m|^2) ds \\
 &\quad - \beta \left(\frac{\beta}{2} - 1 \right) \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-2} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^d (Y_{i,s}^n - Y_{i,s}^m) (Z_{i,j,s}^n - Z_{i,j,s}^m) \right)^2 ds \\
 &\quad + \beta \left(\frac{\beta}{2} - 1 \right) \int_t^{T'} e^{Cs} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-2} |Y_s^n - Y_s^m| (L|Y_s^n - Y_s^m| + \lambda |Z_s^n - Z_s^m|) ds.
 \end{aligned}$$

Par le Lemme 4.2.3, on voit que

$$J \leq I_3 \tag{4.8}$$

Le lemme 4.2.6 est prouvé. □

Le Lemme suivant explique l'utilité de l'hypothèse **(H.5)**.

Lemme 4.2.7 *Soit $\gamma := \frac{M_2^2 \delta' \beta}{(1-\lambda)(\beta-1)} + \delta' \beta M_2$. On suppose que les hypothèses de la Proposition 4.2.5 sont satisfaites. Alors, il existe une constante universelle ℓ telle*

que,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{(T'-\delta')^+ \leq t \leq T'} |Y_t^n - Y_t^m|^\beta + \mathbb{E} \int_{(T'-\delta')^+}^{T'} \frac{|Z_s^n - Z_s^m|^2}{(|Y_s^n - Y_s^m|^2 + \nu_R)^{\frac{2-\beta}{2}}} ds \\
& \leq \frac{\ell}{(1-\lambda)(\beta-1)} \left(e^{C_N \delta'} \mathbb{E} |Y_{T'}^n - Y_{T'}^m|^\beta + \frac{A_N^\gamma}{(A_N \log A_N)^{\frac{\beta}{2}}} \right. \\
& \quad + 2\beta K_3^{\frac{1}{\alpha}} (4TK_2 + T\ell)^{\frac{\beta-1}{2}} (8TK_2 + 8K_1)^{\frac{\kappa}{2}} \frac{A_N^\gamma}{(A_N)^{\frac{\kappa}{r}}} \\
& \quad \left. + 2\beta e^{C_N \delta'} [2N^2 + \nu_1]^{\frac{\beta-1}{2}} [\rho_N(f_n - f) + \rho_N(f_m - f)] \right).
\end{aligned}$$

Preuve. On choisit $C = C_N := \frac{\beta L}{2} + \frac{M_2^2 \beta \log A_N}{(1-\lambda)(\beta-1)} + \beta M_2 \log A_N$ dans le Lemme 4.2.6 pour obtenir

$$\begin{aligned}
& e^{C_N t} \Delta_t^{\frac{\beta}{2}} + \beta \frac{(1-\lambda)(\beta-1)}{4} \int_t^{T'} e^{C_s} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds \\
& \leq e^{C_N T'} \Delta_{T'}^{\frac{\beta}{2}} + I' + I'' + I_2 \\
& \quad + \beta \int_t^{T'} e^{C_s} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} \langle Y_s^n - Y_s^m, g(s, Y_s^n, Z_s^n) - g(s, Y_s^m, Z_s^m) \rangle d\overleftarrow{B}_s \\
& \quad - \beta \int_t^{T'} e^{C_s} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} \langle Y_s^n - Y_s^m, (Z_s^n - Z_s^m) dW_s \rangle.
\end{aligned}$$

En utilisant les estimations (4.6) et (4.7), les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy et Hölder (comme $\frac{(\beta-1)}{2} + \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{\alpha} = 1$), ce qui montre l'existence de la constante $\ell > 0$ telle que pour tout $\delta' > 0$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{(T'-\delta')^+ \leq t \leq T'} \left[e^{C_N t} \Delta_t^{\frac{\beta}{2}} \right] + \mathbb{E} \int_{(T'-\delta')^+}^{T'} e^{C_N s} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} |Z_s^n - Z_s^m|^2 ds \\
& \leq \frac{\ell}{(1-\lambda)(\beta-1)} e^{C_N T'} \left\{ \mathbb{E} \left[\Delta_{T'}^{\frac{\beta}{2}} \right] + \frac{\beta}{N^\kappa} \left[\mathbb{E} \int_0^T \Delta_s ds \right]^{\frac{\beta-1}{2}} \left[\mathbb{E} \int_0^T \Phi(s)^2 ds \right]^{\frac{\kappa}{2}} \right. \\
& \quad \left. \times \left[\mathbb{E} \int_0^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)|^{\bar{\alpha}} ds \right]^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \beta[2N^2 + \nu_1]^{\frac{\beta-1}{2}} \mathbb{E} \left[\int_0^T \sup_{|y|,|z| \leq N} |f_n(s, y, z) - f(s, y, z)| ds \right. \\ & \left. + \int_0^T \sup_{|y|,|z| \leq N} |f_m(s, y, z) - f(s, y, z)| ds \right] \Big\}. \end{aligned}$$

On utilise l'hypothèse **(H.5)** et le Lemme 4.2.2, on obtient, pour chaque $N > R$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{(T'-\delta')^+ \leq t \leq T'} |Y_t^n - Y_t^m|^\beta + \mathbb{E} \int_{(T'-\delta')^+}^{T'} \frac{|Z_s^n - Z_s^m|^2}{(|Y_s^n - Y_s^m|^2 + \nu_R)^{\frac{2-\beta}{2}}} ds \\ & \leq \frac{\ell}{(1-\lambda)(\beta-1)} e^{C_N \delta'} \left\{ (A_N \log A_N)^{-\frac{\beta}{2}} + \beta \frac{2K_3^{\frac{1}{\alpha}}}{N^\kappa} (4TK_2 + T\ell)^{\frac{\beta-1}{2}} (8TK_2 + 8K_1)^{\frac{\kappa}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \mathbb{E}|Y_{T'}^n - Y_{T'}^m|^\beta + \beta[2N^2 + \nu_1]^{\frac{\beta-1}{2}} [\rho_N(f_n - f) + \rho_N(f_m - f)] \right\} \\ & \leq \frac{\ell}{(1-\lambda)(\beta-1)} e^{C_N \delta'} \mathbb{E}|Y_{T'}^n - Y_{T'}^m|^\beta + \frac{\ell}{(1-\lambda)(\beta-1)} \frac{A_N^\gamma}{(A_N \log A_N)^{\frac{\beta}{2}}} \\ & \quad + \frac{2\ell}{(1-\lambda)(\beta-1)} \beta K_3^{\frac{1}{\alpha}} (4TK_2 + T\ell)^{\frac{\beta-1}{2}} (8TK_2 + 8K_1)^{\frac{\kappa}{2}} \frac{A_N^\gamma}{(A_N)^{\frac{\kappa}{r}}} \\ & \quad + \frac{2\ell}{(1-\lambda)(\beta-1)} e^{C_N \delta'} \beta[2N^2 + \nu_1]^{\frac{\beta-1}{2}} [\rho_N(f_n - f) + \rho_N(f_m - f)]. \end{aligned}$$

Le Lemme 4.2.7 est prouvé. \square

Preuve. Proposition 4.2.5 On choisit δ' telle que

$$\delta' < (1-\lambda)(\beta-1) \min \left(\frac{1}{2M_2^2 + 2M_2(1-\lambda)(\beta-1)}, \frac{\kappa}{rM_2^2\beta + r\beta M_2(1-\lambda)(\beta-1)} \right),$$

il résulte que

$$\frac{A_N^\gamma}{(A_N \log A_N)^{\frac{\beta}{2}}} \longrightarrow 0, \text{ lorsque } N \rightarrow \infty$$

et

$$\frac{A_N^\gamma}{(A_N)^{\frac{\kappa}{r}}} \longrightarrow 0, \text{ lorsque } N \rightarrow \infty.$$

On utilise assertion (d) du Lemme 4.2.1. On conclut la preuve de la Proposition 4.2.5. \square

On prouve maintenant le Théorème 4.1.1.

Preuve. Théorème 4.1.1. On prend successivement $T' = T$, $T' = (T - \delta')^+$, $T' = (T - 2\delta')^+ \dots$ dans la Proposition 4.2.5 on voit que, pour tout $\beta \in]1, \min(3 - \frac{2}{\alpha}, 2)[$,

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \left(\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^n - Y_t^m|^\beta + \mathbb{E} \int_0^T \frac{|Z_s^n - Z_s^m|^2}{(|Y_s^n - Y_s^m|^2 + \nu_R)^{\frac{2-\beta}{2}}} ds \right) = 0.$$

On déduit que,

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^n - Y_t^m|^\beta = 0$$

D'autre part, par l'inégalité de Schwartz on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T |Z_s^n - Z_s^m| ds &\leq \left(\mathbb{E} \int_0^T \frac{|Z_s^n - Z_s^m|^2}{(|Y_s^n - Y_s^m|^2 + \nu_R)^{\frac{2-\beta}{2}}} ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\mathbb{E} \int_0^T (|Y_s^n - Y_s^m|^2 + \nu_R)^{\frac{2-\beta}{2}} ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 4.2.2, il résulte que,

$$\sup_{n,m} \left(\mathbb{E} \int_0^T \left(|Y_s^n - Y_s^m|^2 + \nu_R \right)^{\frac{2-\beta}{2}} ds \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Et par suite, on a

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \left(\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^n - Y_t^m|^\beta + \mathbb{E} \int_0^T |Z_s^n - Z_s^m| ds \right) = 0.$$

Donc, il existe une sous-suite noté encore (Y^n, Z^n) telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (|Y_t^n - Y_t| + |Z_t^n - Z_t|) = 0 \quad a.e. (t, \omega).$$

Comme (Y^n) et (Z^n) sont de carrée intégrable, il en résulte que pour tout $q < 2$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_0^T (|Y_t^n - Y_t|^q + |Z_t^n - Z_t|^q) ds = 0. \quad (4.9)$$

On montre que (Y, Z) satisfait l'EDDSR $E^{f,g,\xi}$. On a

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \int_0^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^n, Z_s^n)| ds \\
 & \leq \mathbb{E} \int_0^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^n, Z_s^n)| \mathbb{1}_{\{|Y_s^n| + |Z_s^n| \leq N\}} ds \\
 & + \mathbb{E} \int_0^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^n, Z_s^n)| \frac{(|Y_s^n| + |Z_s^n|)^{(2-\frac{2}{\alpha})}}{N^{(2-\frac{2}{\alpha})}} \mathbb{1}_{\{|Y_s^n| + |Z_s^n| \geq N\}} ds \\
 & \leq \rho_N(f_n - f) + \frac{2K_3^{\frac{1}{\alpha}} [TK_2 + K_1]^{1-\frac{1}{\alpha}}}{N^{(2-\frac{2}{\alpha})}}.
 \end{aligned}$$

On passe à la limite, d'abord en n et puis en N , on obtient

$$\lim_n \mathbb{E} \int_0^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^n, Z_s^n)| ds = 0.$$

On utilise **(H.1)**, les Lemmes 4.2.1 et 4.2.2 pour avoir,

$$\lim_n \mathbb{E} \int_0^T |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s, Z_s)| ds = 0.$$

Comme la constante α_1 de l'hypothèse **(H.3)** est strictement inférieure à 1, on utilise alors l'inégalité de Hölder (parce que $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{2-\alpha_1}{2} = 1$), l'hypothèse **(H.3)** et le Lemme 4.2.2 nous donnent

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \int_0^T |g(s, Y_s^n, Z_s^n) - g(s, Y_s, Z_s)|^2 ds \\
 & \leq \mathbb{E} \int_0^T (|g(s, Y_s^n, Z_s^n)| + |g(s, Y_s, Z_s)|) |g(s, Y_s^n, Z_s^n) - g(s, Y_s, Z_s)| ds \\
 & \leq \left(\mathbb{E} \int_0^T (|g(s, Y_s^n, Z_s^n)| + |g(s, Y_s, Z_s)|^{\frac{2}{\alpha_1}}) ds \right)^{\frac{\alpha_1}{2}} \\
 & \quad \times \left(\mathbb{E} \int_0^T |g(s, Y_s^n, Z_s^n) - g(s, Y_s, Z_s)|^{\frac{2}{2-\alpha_1}} ds \right)^{\frac{2-\alpha_1}{2}} \\
 & \leq \bar{K} \left(\mathbb{E} \int_0^T (|Y_s^n - Y_s|^{\frac{2}{2-\alpha_1}} + |Z_s^n - Z_s|^{\frac{2}{2-\alpha_1}}) ds \right)^{\frac{2-\alpha_1}{2}},
 \end{aligned}$$

avec

$$\bar{K} := \sup(L, \lambda) \sup_n \left(\mathbb{E} \int_0^T (2(\eta'_s)^{\frac{1}{\alpha_1}} + K|Y_s^n| + K|Z_s^n| + K|Y_s| + K|Z_s|)^2 ds \right)^{\frac{2-\alpha_1}{2}}$$

et $\bar{K} < \infty$.

Puisque $\frac{2}{2-\alpha_1} < 2$, alors par (4.9), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T |g(s, Y_s^n, Z_s^n) - g(s, Y_s, Z_s)|^2 ds = 0$$

L'existence des solutions est prouvée.

Unicité. Soient (Y, Z) et (Y', Z') deux solutions de l'équation $(E^{f,g,\xi})$. De façon similaire que l'existence de solutions, on montre que pour tout $R > 2$, $\beta \in]1, \min(3 - \frac{2}{\alpha}, 2)[$, $\varepsilon > 0$ et

$$\delta' < (1 - \lambda)(\beta - 1) \min \left(\frac{1}{2M_2^2 + 2M_2(1-\lambda)(\beta-1)}, \frac{\kappa}{rM_2^2\beta + r\beta M_2(1-\lambda)(\beta-1)} \right),$$

il existe $N_0 > R$ telle que pour chaque $N > N_0$ et $T' \leq T$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{(T'-\delta')^+ \leq t \leq T'} |Y_t - Y'_t|^\beta + \mathbb{E} \int_{(T'-\delta')^+}^{T'} \frac{|Z_s - Z'_s|^2}{(|Y_s - Y'_s|^2 + \nu_R)^{\frac{2-\beta}{2}}} ds \\ & \leq \varepsilon + \frac{\ell}{(1-\lambda)(\beta-1)} e^{C_N \delta'} \mathbb{E} |Y_{T'} - Y'_{T'}|^\beta. \end{aligned}$$

On prend successivement $T' = T$, $T' = (T - \delta')^+$, $T' = (T - 2\delta')^+ \dots$, on obtient l'unicité des solutions.

Le Théorème 4.1.1 est prouvé. □

4.2.2 La preuve du Théorème 4.1.2

On développe les mêmes idée et techniques utilisées dans la preuve du Théorème 4.1.1. D'abord l'estimation entre deux solutions nous permet de prouver le résultat dans un intervalle de temps petit. Ensuite par un procédé répéti-

tif, on prouve le résultat sur un intervalle de temps arbitraire. **Preuve.** Soient (\bar{Y}^n, \bar{Z}^n) la solution de l'EDDSR $E^{(f^n, g, \xi^n)}$ et (Y, Z) l'unique solution de l'EDDSR $E^{(f, g, \xi)}$. On raisonne comme dans la preuve du Théorème 4.1.1, on voit que, pour tout $R > 2$, $\varepsilon > 0$, $\beta \in]1, \min\left(3 - \frac{2}{\alpha}, 2\right)[$ et $\delta' < (1 - \lambda)(\beta - 1) \min\left(\frac{1}{2M_2^2 + 2M_2(1-\lambda)(\beta-1)}, \frac{\kappa}{rM_2^2\beta + r\beta M_2(1-\lambda)(\beta-1)}\right)$, il existe $N_0 > R$ telle que pour tout $N > N_0$ et $T' \leq T$,

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \sup_{(T' - \delta')^+ \leq t \leq T'} |\bar{Y}_t^n - Y_t|^\beta + \mathbb{E} \int_{(T' - \delta')^+}^{T'} \frac{|\bar{Z}_s^n - Z_s|^2}{\left(|\bar{Y}_s^n - Y_s|^2 + \nu_R\right)^{\frac{2-\beta}{2}}} ds \\ & \leq \varepsilon + \frac{\ell}{\beta - 1} e^{C_N \delta'} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} |\bar{Y}_{T'}^n - Y_{T'}|^\beta. \end{aligned}$$

On prend successivement $T' = T$, $T' = (T - \delta')^+$, $T' = (T - 2\delta')^+$..., on établit alors la convergence sur l'intervalle $[0, T]$. En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(|\bar{Y}^n - Y| + |\bar{Z}^n - Z| \right) = 0.$$

Comme (\bar{Y}^n) et (\bar{Z}^n) sont de carrée intégrable, on fini la preuve par un argument d'intégrabilité uniforme. Le Théorème 4.1.2 est prouvé. \square

4.3 Application aux EDPSs : solutions de Sobolev

Dans cette section, on étudie l'existence et l'unicité des solutions de sobolev de l'EDPS associée au système d'EDS-EDDSR découplées suivant :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(X_r^{t,x}) dr + \int_t^s \sigma(X_r^{t,x}) dW_r \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} Y_s^{t,x} = H(X_T^{t,x}) + \int_s^T F(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}) dr & + \int_s^T G(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}) d\overleftarrow{B}_r \\ & - \int_s^T Z_r^{t,x} dW_r \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec σ, b, F et G sont des fonctions mesurables définies comme suit :

$$\sigma : \mathbb{R}^k \longmapsto \mathbb{R}^{k \times r}, \quad b : \mathbb{R}^k \longmapsto \mathbb{R}^k, \quad H : \mathbb{R}^k \longmapsto \mathbb{R}^k, \quad F : [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r} \longmapsto \mathbb{R}^d$$

$$\text{et } G : [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r} \longmapsto \mathbb{R}^{d \times l}.$$

L'EDPS associée au système d'EDS-EDDSR précédent est donnée par, pour $t \leq s \leq T$:

$$\begin{aligned} u(s, x) = & H(x) + \int_s^T \mathcal{L}u(r, x) + F(r, x, u(r, x), \sigma^* \nabla u(r, x)) dr \\ & + \int_s^T G(r, x, u(r, x), \sigma^* \nabla u(r, x)) d\overleftarrow{B}_r \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_{ij}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{with } (a_{ij}) := \sigma \sigma^* \quad (4.13)$$

On suppose que :

$$b \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k) \quad \text{et} \quad \sigma \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k \times r}) \quad (4.14)$$

Pour $0 < q < 2$, soit \mathcal{H} l'ensemble des champs aléatoires

$$\{u(t, x), 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^k\},$$

telle que pour tout (t, x) , $u(t, x)$ est $(\mathcal{F}_{t,T}^B)$ -mesurable et

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^q = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^k} \int_0^T (|u(r, x)|^q + |(\sigma^* \nabla u)(r, x)|^q) dr e^{-\delta|x|} dx \right] < \infty \quad (4.15)$$

Le couple $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ est un espace de Banach.

On note par $\mathcal{C}_c^{1,\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions à support compact $\varphi(t, x)$ qui sont continûment dérivables par rapport à la variable t et infiniment continûment dérivables par rapport à la variable x .

Définition 4.3.1 *On dit que u est une solution de Sobolev de l'EDPS (4.12), si $u \in \mathcal{H}$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^{1,\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$,*

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T u(r, x) \frac{\partial \varphi(r, x)}{\partial r}(r, x) dr dx + \int_{\mathbb{R}} u(r, x) \varphi(r, x) dx - \int_{\mathbb{R}^k} H(x) \varphi(T, x) dx \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T \sigma^* u(r, x) \sigma^* \varphi(r, x) dr dx - \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T u \operatorname{div} [(b - A)\varphi](r, x) dr dx \\
& = \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T F(r, x, u(r, x), \sigma^* \nabla u(r, x)) \varphi(r, x) dr dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T G(r, x, u(r, x), \sigma^* \nabla u(r, x)) \varphi(r, x) d\overleftarrow{B}_r dx
\end{aligned}$$

avec A est l'opérateur défini par , $A_j := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$ pour $1 \leq j \leq d$.

Hypothèses. Il existe $\delta \geq 0$ telle que :

(H.10) H appartient à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^k, e^{-\delta|x|} dx; \mathbb{R}^d)$, telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |H(x)|^2 e^{-\delta|x|} dx < \infty.$$

(H.11) $F(t, x, \dots)$ est continue pour presque tout (t, x) .

(H.12) Il existe $M > 0$, $K > 0$ et $\eta \in \mathbb{L}^1([0, T] \times \mathbb{R}^k, e^{-\delta|x|} dt dx; \mathbb{R}_+)$, telles que,

$$\langle y, F(t, x, y, z) \rangle \leq \eta(t, x) + M|y|^2 + K|y||z| \quad \mathbb{P}\text{-p.s., p.t.t} \in [0, T].$$

(H.13) $\int_{\mathbb{R}^k} \int_0^T |G(t, x, 0, 0)|^2 e^{-\delta|x|} dt dx < \infty$ et il existe $L > 0$, $0 < \lambda < 1$, $0 < \alpha_1 < 1$, et $\eta \in \mathbb{L}^{\frac{2}{\alpha_1}}([0, T] \times \mathbb{R}^k, e^{-\delta|x|} dt dx; \mathbb{R}_+)$, telles que, pour chaque $(t, x, y, y', z, z') \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^d)^2 \times (\mathbb{R}^{d \times r})^2$,

$$(i) |G(t, x, y, z) - G(t, x, y', z')|^2 \leq L|y - y'|^2 + \lambda|z - z'|^2.$$

$$(ii) |G(t, x, y, z)| \leq \eta'(t, x) + L|y|^{\alpha_1} + \lambda|z|^{\alpha_1}$$

(H.14) Il existe $M_1 > 0$, $0 \leq \alpha < 2$, $\alpha' > 1$ et $\bar{\eta} \in \mathbb{L}^{\alpha'}([0, T] \times \mathbb{R}^k, e^{-\delta|x|} dt dx; \mathbb{R}_+)$

telles que

$$|F(t, x, y, z)| \leq \bar{\eta}(t, x) + M_1 (|y|^\alpha + |z|^\alpha).$$

(H.15) Il existe $r > 0$ et $M_2 > 0$, telles que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, et pour tout (t, x, y, y', z, z') telle que $e^{r|x|}$, $|y|, |y'|, |z|, |z'| \leq N$, on a

$$\begin{aligned} \langle y - y', F(t, x, y, z) - F(t, x, y', z') \rangle &\leq M_2 \log N \left(\frac{1}{N} + |y - y'|^2 \right) \\ &\quad + \sqrt{M_2 \log N} |y - y'| |z - z'|. \end{aligned}$$

Il est bien connu que, sous la condition (4.14), l'EDS progressive (4.10) admet une unique solution (\mathcal{F}_t^W) -adaptée X . De plus, par le Théorème 4.1.1, l'EDDSR (4.11) admet une unique solution (\mathcal{F}_t) -adaptée. Le résultat principal de cette section est donnée par le Théorème suivant :

Théorème 4.3.2 *On suppose que (H.10)–(H.15) sont satisfaites. Alors, L'EDPS (4.12) possède une unique solution de Sobolev u tel que pour tout $t \in [0, T]$,*

$$u(s, X_s^{t,x}) = Y_s^{t,x} \quad \text{et} \quad \sigma^* \nabla u(s, X_s^{t,x}) = Z_s^{t,x}; \quad (s, \omega, x) \in [t, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k,$$

avec $\{(X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}), t \leq s \leq T\}$ est l'unique solution de l'EDS-EDDSR (4.10)-(4.11).

Pour la preuve de ce Théorème, on a besoin des lemmes suivants. Le premier lemme est classique, on peut le trouver dans certains travaux par exemples [19, 38, 39].

Lemme 4.3.3 *Soit $\{X_s^{t,x}, 0 \leq s \leq T\}$ l'unique solution de l'EDS (4.10). Alors il existe une constante $K_{\delta,T} > 1$, telle que pour tout $\Phi \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^k, \mathbb{P} \otimes e^{-\delta|x|} dx)$*

$$\begin{aligned} K_{\delta,T}^{-1} \left[\int_{\mathbb{R}^k} |\Phi(x)| e^{-\delta|x|} dx \right] &\leq E \left[\int_{\mathbb{R}^k} |\Phi(X_s^{t,x})| e^{-\delta|x|} dx \right] \\ &\leq K_{\delta,T} \left[\int_{\mathbb{R}^k} |\Phi(x)| e^{-\delta|x|} dx \right] \end{aligned}$$

et pour tout $\Psi \in L^1\left(\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{P} \otimes dt \otimes e^{-\delta|x|} dx\right)$

$$\begin{aligned} K_{\delta,T}^{-1} \left[\int_{\mathbb{R}^k} \int_t^T |\Psi(s, x)| ds e^{-\delta|x|} dx \right] &\leq E \left[\int_{\mathbb{R}^k} \int_t^T |\Psi(s, X_s^{t,x})| ds e^{-\delta|x|} dx \right] \\ &\leq K_{\delta,T} \left[\int_{\mathbb{R}^k} \int_t^T |\Psi(s, x)| ds e^{-\delta|x|} dx \right]. \end{aligned}$$

Le lemme suivant peut être prouvé en utilisant les arguments qu'on a développés dans les preuves du Théorème 4.1.1 et le Théorème 4.1.2.

Lemme 4.3.4 *On suppose que les hypothèses (H.10)–(H.15) sont satisfaites. Soit $(X^{t,x})$ l'unique solution de l'EDS (4.10). Soit $(Y^{t,x}, Z^{t,x})$ l'unique solution de l'EDDSR (4.11). Soit (F^n) la suite de fonctions associée à F qui vérifie le Lemme 4.2.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on note par $(Y^{n,t,x}, Z^{n,t,x})$ l'unique solution de l'EDDSR suivante :*

$$\begin{aligned} Y_s^{n,t,x} &= H(X_T^{t,x}) + \int_s^T F^n(r, X_r^{t,x}, Y_r^{n,t,x}, Z_r^{n,t,x}) dr \\ &\quad + \int_s^T G(r, X_r^{t,x}, u^n(r, X_r^{t,x}, Y_r^{n,t,x}, Z_r^{n,t,x})) d\overleftarrow{B}_r - \int_t^T Z_r^{n,t,x} dW_r. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Alors,

(i) *il existe $K(T, t, \cdot) \in \mathbb{L}^1(e^{-\delta|x|} dx)$ telle que*

$$\sup_n \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq T} |Y_s^{n,t,x}|^2 + \sup_{s \leq T} |Y_s^{t,x}|^2 + \int_s^T |Z_s^{n,t,x}|^2 ds + \int_s^T |Z_s^{t,x}|^2 ds \right] \leq K(T, t, x) \quad (4.17)$$

(ii) *pour chaque $q < 2$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{n,t,x} - Y_s^{t,x}|^q + \mathbb{E} \int_0^T |Z_s^{n,t,x} - Z_s^{t,x}|^q ds \right) = 0. \quad (4.18)$$

Preuve. Théorème 4.3.2. L'unicité de solutions résulte de l'unicité de solutions de l'EDDSR (4.11). La preuve de l'existence est partagé sur quatre étapes. La stratégie est de construire une suite d'EDPSs associée à la suite (F^n) . A partir du résultat [48] on sait que pour chaque n , l'EDPS associée à F^n admet une unique solution u^n . Par le passage à la limite, on voit que le processus limite

$u := \lim_{n \rightarrow \infty} u^n$ résout l'EDPS (4.12). Pour cela, on utilise les argument développés dans la preuve du Théorème 4.1.1.

Étape 1. *L'EDPS approchée de l'EDPS (4.12).*

Soit (F^n) la suite de fonctions définie dans le lemme précédent. Pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions u^n et v^n par :

$$u^n(t, x) := Y_t^{n,t,x} \quad \text{et} \quad v^n(t, x) := Z_t^{n,t,x}$$

avec $(Y^{n,t,x}, Z^{n,t,x})$ est l'unique solution de l'EDDSR (4.16).

Par le Théorème 4.5 de [58] (on peut utiliser également le Théorème 2.1, p. 253 dans [39]), on obtient $v^n(s, x) = (\sigma^* \nabla u^n)(s, x)$ et u^n est la solution de Sobolev de l'EDPS suivante :

$$(\mathcal{P}^{(f^n, g)}) \quad \begin{cases} u^n(s, x) = H(x) + \int_s^T \{ \mathcal{L}u^n(r, x) + F^n(r, x, u^n(r, x), \sigma^* \nabla u^n(r, x)) \} dr \\ \quad + \int_s^T G(r, x, u^n(r, x), \sigma^* \nabla u^n(r, x)) d\overleftarrow{B}_r, \quad t \leq s \leq T, \end{cases}$$

telle que

$$(u_n(s, X_s^{t,x}), \sigma^* \nabla u_n(s, X_s^{t,x})) = (Y_s^{n,t,x}, Z_s^{n,t,x}) \quad p.s. \omega, p.t. s \in [t, T], x \in \mathbb{R}^k \quad (4.19)$$

avec $(Y^{n,t,x}, Z^{n,t,x})$ est l'unique solution de l'EDDSR (4.16).

L'unicité de u^n résulte de l'unicité de l'EDDSR (4.16).

Étape 2. *Convergence du problème $(P^{(f^n, g)})$.*

Les limites qu'on étudie ci-dessous tiennent le long d'une sous-suite. Pour simplifier les notations, la sous-suite est indexé aussi par n . Par le Lemme 4.3.3 et le

Lemme 4.3.4 on a

$$\begin{aligned}
 & E \int_{\mathbb{R}^k} \int_t^T (|u^n(s, x)|^2 + |v^n(s, x)|^2) ds e^{-\delta|x|} dx \\
 & \leq K_{\delta, T}^{-1} E \left\{ \left[\int_{\mathbb{R}^k} \left(\sup_t |Y_t^{n, t, x}|^2 + \int_t^T |Z_s^{n, t, x}|^2 ds \right) e^{-\delta|x|} dx \right] \right. \\
 & \leq K_{\delta, T}^{-1} \int_{\mathbb{R}^k} K(T, t, x) e^{-\delta|x|} dx \\
 & < \infty
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

En utilisant l'hypothèse **(H.3)**, on obtient

$$|G(s, x, u^n(s, x), v^n(s, x))|^2 \leq 2|G(s, x, 0, 0)|^2 + 2L|u^n(s, x)|^2 + 2\lambda|v^n(s, x)|^2$$

Par l'inégalité (4.20), on déduit que

$$\begin{aligned}
 & E \left[\int_{\mathbb{R}^k} \int_t^T (|F^n(s, x, u^n(s, x), v^n(s, x))|^{\bar{\alpha}} \right. \\
 & \quad \left. + |G(s, x, u^n(s, x), v^n(s, x))|^2) ds e^{-\delta|x|} dx \right] < \infty
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Par le Lemme 4.3.3, le Lemme 4.3.4-(ii) le théorème de convergence dominée, on obtient pour chaque $q < 2$,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n, m} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^k} |u^n(s, x) - u^m(s, x)|^q e^{-\delta|x|} dx = 0 \\
 & \lim_{n, m} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^k} |\sigma^* \nabla u^n(s, x) - \sigma^* \nabla u^m(s, x)|^q e^{-\delta|x|} dx = 0
 \end{aligned}$$

Par le Lemme 4.3.3 et le fait que l'espace \mathcal{H} est complet, il résulte qu'il existe

$u \in \mathcal{H}$ telle que pour tout $q < 2$,

$$(i) \quad \lim_n \int_0^T \int_{\mathbb{R}^k} |u^n(s, x) - u(s, x)|^q e^{-\delta|x|} dx = 0$$

$$(ii) \quad \lim_n \int_0^T \int_{\mathbb{R}^k} |\sigma^* \nabla u^n(s, x) - \sigma^* \nabla u(s, x)|^q e^{-\delta|x|} dx = 0$$

$$(iii) \quad \sup_{0 \leq s \leq T} \int_{\mathbb{R}^k} |u(s, x)|^q e^{-\delta|x|} dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^k} |\sigma^* \nabla u(s, x)|^q e^{-\delta|x|} dx < \infty$$

Étape 3. On montre que $u(s, X_s^{t,x}) = Y_s^{t,x}$ et $\sigma^* \nabla u(s, X_s^{t,x}) = Z_s^{t,x}$.

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^k} \int_0^T (|u(s, X_s^{t,x}) - Y_s^{t,x}|) ds e^{-\delta|x|} dx \\ & \leq \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^k} \int_0^T (|u(s, X_s^{t,x}) - u^n(s, X_s^{t,x})|) ds e^{-\delta|x|} dx \\ & \quad + \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^k} \int_0^T (|u^n(s, X_s^{t,x}) - Y_s^{t,x}|) ds e^{-\delta|x|} dx \end{aligned}$$

Le Lemme 4.3.3 et l'assertion (i) montrent que le premier terme, dans la partie droite de l'inégalité précédente, tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ . Puisque $u^n(s, X_s^{t,x}) = Y_s^{n,t,x}$, alors on utilise le Lemme 4.3.4-(ii) et le théorème de convergence dominée on montre que le second terme tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ . Donc $u(s, X_s^{t,x}) = Y_s^{t,x}$. Il reste à montrer que $\sigma^* \nabla u(s, X_s^{t,x}) = Z_s^{t,x}$. De nouveau, par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^k} \int_0^T (|\sigma^* \nabla u(s, X_s^{t,x}) - Z_s^{t,x}|) ds e^{-\delta|x|} dx \\ & \leq \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^k} \int_0^T (|\sigma^* \nabla u(s, X_s^{t,x}) - \sigma^* \nabla u^n(s, X_s^{t,x})|) ds e^{-\delta|x|} dx \\ & \quad + \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^k} \int_0^T (|\sigma^* \nabla u^n(s, X_s^{t,x}) - Z_s^{t,x}|) ds e^{-\delta|x|} dx. \end{aligned}$$

Le Lemme 4.3.3 et l'assertion (ii) montrent que le premier terme, dans la partie droite de l'inégalité précédente, tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ . Comme

$\sigma^* \nabla u^n(s, X_s^{t,x}) = Z_s^{n,t,x}$, alors par le Lemme 4.3.4-(ii), on montre que le second terme tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ .

Étape 4. On montre que u est une solution de Sobolev de l'EDPS (4.12).

On a vu dans l'étape 2 que u appartient à \mathcal{H} . Donc, il reste à montrer que u vérifie la définition 4.3.1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^{1,\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$. Comme pour chaque n , u^n est une solution de Sobolev du problème $(P^{(f^n, g)})$, on a alors

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T u^n(r, x) \frac{\partial \varphi(r, x)}{\partial r}(r, x) dr dx + \int_{\mathbb{R}^k} u^n(r, x) \varphi(r, x) dx - \int_{\mathbb{R}^k} H(x) \varphi(T, x) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T \sigma^* u^n(r, x) \sigma^* \varphi(r, x) dr dx - \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T u^n \operatorname{div}[(b - A)\varphi](r, x) dr dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T F^n(r, x, u^n(r, x), \sigma^* \nabla u^n(r, x)) \varphi(r, x) dr dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T G(r, x, u^n(r, x), \sigma^* \nabla u^n(r, x)) \varphi(r, x) d\overleftarrow{B}_r dx. \end{aligned} \quad (4.22)$$

$\varphi \in \mathcal{C}_c^{1,\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, $b \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ et $\sigma \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k \times r})$, alors la partie gauche de l'égalité précédente tend vers la quantité suivante lorsque n tend vers ∞ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T u(r, x) \frac{\partial \varphi(r, x)}{\partial r}(r, x) dr dx + \int_{\mathbb{R}^k} u(r, x) \varphi(r, x) dx - \int_{\mathbb{R}^k} H(x) \varphi(T, x) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T \sigma^* u(r, x) \sigma^* \varphi(r, x) dr dx - \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T u \operatorname{div}[(b - A)\varphi](r, x) dr dx. \end{aligned}$$

Il reste à calculer la limite de l'autre partie de l'égalité. Par la Proposition 4.2.4, on a

$$\begin{aligned} & E \int_0^T |F^n(s, X_s^{t,x}, u^n(s, X_s^{t,x}), \sigma^* \nabla u^n(s, X_s^{t,x}))|^{\bar{\alpha}} ds \\ & \leq C \left[1 + E \int_0^T \bar{\eta}_s^{\bar{\alpha}} ds + E \int_0^T \sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{n,t,x}|^2 + E \left(\int_0^T |Z_s^{n,t,x}|^2 ds \right) \right] \\ & \leq C'. \end{aligned}$$

avec C' est une constante dépend que de $\bar{\eta}$, M_1 , α , η' et T .

Puisque $(u^n(s, X_s^{t,x}), \sigma^* \nabla u^n(s, X_s^{t,x})) = (Y_s^{n,t,x}, Z_s^{n,t,x})$

et $(u(s, X_s^{t,x}), \sigma^* \nabla u(s, X_s^{t,x})) = (Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})$,

alors on utilise (4.18) et l'argument de la preuve du Théorème 4.1.1, on obtient

$$\lim_n E \int_0^T \left| F^n(s, X_s^{t,x}, u^n(s, X_s^{t,x}), \sigma^* \nabla u^n(s, X_s^{t,x})) \right. \\ \left. - F(s, X_s^{t,x}, u(s, X_s^{t,x}), \sigma^* \nabla u(s, X_s^{t,x})) \right| ds = 0.$$

Donc, par le Théorème de convergence dominée, il résulte que la quantité suivante

$$E \int_0^T \int_{\mathbb{R}^k} \left| F^n(s, X_s^{t,x}, u^n(s, X_s^{t,x}), \sigma^* \nabla u^n(s, X_s^{t,x})) \right. \\ \left. - F(s, X_s^{t,x}, u(s, X_s^{t,x}), \sigma^* \nabla u(s, X_s^{t,x})) \right| ds e^{-\delta|x|} dx$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On utilise le Lemme 4.3.3, on obtient

$$\lim_n E \int_0^T \int_{\mathbb{R}^k} \left| F^n(s, x, u^n(s, x), \sigma^* \nabla u^n(s, x)) \right. \\ \left. - F(s, x, u(s, x), \sigma^* \nabla u(s, x)) \right| ds e^{-\delta|x|} dx = 0,$$

ce qui implique que le premier terme du côté droit de l'égalité (4.22) satisfait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T F^n(r, x, u^n(r, x), \sigma^* \nabla u^n(r, x)) \varphi(r, x) dr dx \\ = \int_{\mathbb{R}^k} \int_s^T F(r, x, u(r, x), \sigma^* \nabla u(r, x)) \varphi(r, x) dr dx.$$

Il reste à calculer la limite de la seconde terme du côté droit de l'égalité (4.22).

On Raisonne comme dans la preuve du Théorème 4.1.1, on voit que

$$\int_0^T \left[G(s, X_s^{t,x}, u^n(s, X_s^{t,x}), \sigma^* \nabla u^n(s, X_s^{t,x})) \right. \\ \left. - G(s, X_s^{t,x}, u(s, X_s^{t,x}), \sigma^* \nabla u(s, X_s^{t,x})) \right] d\overleftarrow{B}_s$$

tend vers 0 *en probabilité*.

Il est facile de voir que la fonction

$$\begin{aligned} \Phi(x) := & \int_s^T \left[G(r, x, u^n(r, x), \sigma^* \nabla u^n(r, x)) \right. \\ & \left. - G(r, x, u(r, x), \sigma^* \nabla u(r, x)) \right] \varphi(r, x) e^{\delta|x|} d\overleftarrow{B}_r \end{aligned}$$

appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^k, e^{-\delta|x|})$.

Donc, Par le Lemme 4.3.3 on obtient, pour tout $s \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{E} \left| \int_s^T \left[G(r, x, u^n(r, x), \sigma^* \nabla u^n(r, x)) - G(r, x, u(r, x), \sigma^* \nabla u(r, x)) \right] \right. \\ & \quad \left. \times \varphi(r, x) e^{\delta|x|} d\overleftarrow{B}_r \right| e^{-\delta|x|} dx \\ & \leq K \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{E} \left| \int_s^T \left[G(r, X_r^{t,x}, u^n(r, X_r^{t,x}), \sigma^* \nabla u^n(r, X_r^{t,x})) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - G(r, X_r^{t,x}, u(r, X_r^{t,x}), \sigma^* \nabla u(r, X_r^{t,x})) \right] \times \varphi(r, X_r^{t,x}) e^{\delta|X_r^{t,x}|} d\overleftarrow{B}_r \right| e^{-\delta|x|} dx \\ & \leq K \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{E} \left| \int_s^T \left[G(r, X_r^{t,x}, Y_r^{n,t,x}, Z_r^{n,t,x}) - G(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}) \right] \right. \\ & \quad \left. \times \varphi(r, X_r^{t,x}) e^{\delta|X_r^{t,x}|} d\overleftarrow{B}_r \right| e^{-\delta|x|} dx \\ & := I_n. \end{aligned}$$

On va montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers ∞ .

Comme,

$$\begin{aligned} \sup_n \mathbb{E} \left| \int_s^T \left[G(r, X_r^{t,x}, Y_r^{n,t,x}, Z_r^{n,t,x}) \right. \right. \\ \left. \left. - G(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}) \right] \varphi(r, X_r^{t,x}) e^{\delta|X_r^{t,x}|} d\overleftarrow{B}_r \right|^2 < \infty, \end{aligned}$$

et

$$\int_s^T \left[G(r, X_r^{t,x}, Y_r^{n,t,x}, Z_r^{n,t,x}) - G(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}) \right] \varphi(r, X_r^{t,x}) e^{\delta|X_r^{t,x}|} d\overleftarrow{B}_r \text{ tend vers } 0 \text{ en probabilité,}$$

il résulte que

$$\lim_n \mathbb{E} \left| \int_s^T \left[G(r, X_r^{t,x}, Y_r^{n,t,x}, Z_r^{n,t,x}) - G(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}) \right] \varphi(r, X_r^{t,x}) e^{\delta|X_r^{t,x}|} d\overleftarrow{B}_r \right| = 0$$

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, on déduit que I_n tend vers 0 quand n tend vers ∞ . Le Théorème 4.3.2 est prouvé. \square

Bibliographie

- [1] J.J. Alibert, K. Bahlali, *Genericity in deterministic and stochastic differential equations*, Séminaire de Probabilités XXXV, Lecture Notes in Math. no. 1755 (2001), 220-240, Springer, Berlin.
- [2] A. Auguste, A. Elouafin, M. A. Diop , Representation theorem for SPDEs via backward doubly SDEs, *Electr. Comm. Probab (ECP)*, 18(64), 2013.
- [3] F. Antonelli, *Backward-forward stochastic differential equations*. *Ann. Appl. Probab.* 3 (1993), no. 3, 777–793.
- [4] K. Bahlali, *Sur la propriété de non-confluence des solutions d'équations différentielles stochastiques à coefficients non lipschitziens*, *C.R.A.S Paris*, t. 310, serie I, (1990), 445-447.
- [5] K. Bahlali *Flows of homeomorphisms of stochastic differential equations with measurable drift*, *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 67 : (1999) 53–82.
- [6] K. Bahlali, Backward stochastic differential equations with locally Lipschitz coefficient. *C.R.A.S*, Paris, serie I Math. 331, 481-486, (2001).
- [7] K.Bahlali, Existence, uniqueness and stability for solutions of backward stochastic differential equations with locally Lipschitz coefficient. *Electron. Comm. Probab.*, 7, 169-179, (2002).
- [8] K. Bahlali, E.H. Essaky, M. Hassani, E. Pardoux, Existence, uniqueness and stability of backward stochastic differential equation with locally monotone coefficient. *C.R.A.S. Paris*, 335, no. 9, 757-762, (2002).
- [9] Bahlali, K. ; Essaky, E. H. ; Ouknine, Y. Reflected backward stochastic differential equation with locally monotone coefficient. *Stochastic Anal. Appl.* 22 (2004), no. 4, 939-970.

-
- [10] K. Bahlali, E. Essaky, B Labed, Reflected backward stochastic differential equations with super-linear growth coefficient, *Proceedings of the Internationale conference on stochastic analysis and applications*, Kluwer Publ, pp. 195-211, (2004).
- [11] K. Bahlali, E.H. Essaky, M. Hassani, Multidimensional BSDEs with super-linear growth coefficient. Application to degenerate systems of semilinear PDEs. *Comptes Rendus Mathematique* **348**, Issues 11-12, 677-682, (2010).
- [12] K. Bahlali, I. El Asri, Stochastic contrôl and BSDEs with logarithmic growth, *BULSM (Bull. Sci. Math.)*, 136 (2012), no. 6, 617–637.
- [13] Bahlali, K. ; Essaky, E. ; Hassani, M. ; Existence and Uniqueness of Multi-dimensional BSDEs and of Systems of Degenerate PDEs with Superlinear Growth Generator. *SIAM J. Math. Anal.* 47 (2015), no. 6, 4251-4288.
- [14] K. Bahlali , B. Gherbal , B. Mezerdi, *Existence of optimal controls for systems driven by FBSDEs*, *Sys. Control Letters* 60 (2011) pp.344-349.
- [15] K.Bahlali, B.Mansouri ,R.Gatt, A.Mtiraoui. Backward doubly SDEs and SPDEs with superlinear growth generators. *Stochastics and Dynamics* 2 Vol. 17, No. 1 (2017).
- [16] K.Bahlali, O.Kebiri, A.Mtiraoui. Existence of an Optimal Control for a coupled FBSDE with a non degenerate diffusion coefficient. *Soumis à J. Maths. Anal. Appl.*
- [17] K.Bahlali, O.Kebiri, B. Mezerdi, A.Mtiraoui. Existence of an Optimal Control for a coupled FBSDE with a non degenerate diffusion coefficient. *Soumis à Stochastics*.
- [18] S. Bahlali, *Necessary and sufficient optimality conditions for relaxed and strict control problems of backward systems*, (2008).
- [19] Bally, V. ; Matoussi, A. Weak Solutions for SPDEs and Backward Doubly Stochastic Differential Equations. *Journal of Theoretical Probability*, Vol. 14, No. 1, 2001, 125-164.
- [20] R. Buckdahn, N. Ichihara, *Limit Theorem for Controlled Backward SDEs and Homogenization of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, *Appl. Math. Optim.* 51 (2005), pp.1-33.

-
- [21] Buckdahn, Rainer ; Ma, Jin Stochastic viscosity solutions for nonlinear stochastic partial differential equations. I. Stochastic Process. Appl. 93 (2001), no. 2, 181-204.
- [22] Buckdahn, Rainer ; Ma, Jin Stochastic viscosity solutions for nonlinear stochastic partial differential equations. II. Stochastic Process. Appl. 93 (2001), no. 2, 205-228.
- [23] Buckdahn, Rainer ; Ma, Jin Pathwise stochastic Taylor expansions and stochastic viscosity solutions for fully nonlinear stochastic PDEs. Ann. Probab. 30 (2002), no. 3, 1131-1171.
- [24] R. Buckdahn, B. Labeled, C. Rainer and L. Tamer *Existence of an optimal control for stochastic control systems with nonlinear cost functional*, Stochastic An International Journal of Probability and Stochastic Processes : formerly Stochastic and Stochastic Reports, 82 :3, (2010) 241-256
- [25] R. Buckdahn, J. Li, *Stochastic differential games and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs equations*, SIAM J. Control Optim. 47, no. 1 (2008), pp.444-475.
- [26] Boufoussi, Brahim ; Van Casteren, Jan ; Mrhardy, N. Generalized backward doubly stochastic differential equations and SPDEs with nonlinear Neumann boundary conditions. Bernoulli 13 (2007), no. 2, 423-446.
- [27] F. Delarue, *On the existence and uniqueness of solutions to FBSDE in a non-degenerate case*, Stochastic Process. Appl. 99 (2002) pp.209-286.
- [28] N. El Karoui, S. Peng, M.C. Quenez, Backward stochastic differential equations in finance. Mathematical finance, vol 7, N 1 (1997), 1-71.
- [29] N. El Karoui, D.H. Nguyen, M. Jeanblanc-Piqué, *Compactification Methods in the Control of Degenerate Diffusions : Existence of an Optimal Control*, Stochastics, Vol.20 (1987), pp.169-219.
- [30] I. Faye, A. B. Sow, Backward doubly stochastic differential equation driven by Lévy process : a Comparison theorem, Afrika Matematika, Volume 25, Issue 4 (2014), 869-880.

-
- [31] W. H. Fleming, H. M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, 2nd ed., Stochastic Modeling and Applied Probability 25, New York, NY : Springer, 2006.
- [32] A. Gomez, K. Lee, C. Mueller, A. Wei, J. Xiong, Strong uniqueness for an SPDE via backward doubly stochastic differential equations, *Statistics and Probability Letters* 83 (2013), 2186-2190.
- [33] S. Hamadène, *Backward-forward SDEs and stochastic differential games*, *Stochastic Processes and their Applications* 77 (1998), pp.1-15.
- [34] U.G. Haussmann, J.P. Lepeltier, *On the existence of optimal controls*, *SIAM J. Control Optim.* 28, No.4 (1990), pp.851-902.
- [35] N.K. Krylov, *Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of Second Order*, Reidel, Dordrecht, 1987.
- [36] N.K. Krylov, *Controlled Diffusion Processes*, Applications of Mathematics 14, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.
- [37] Krylov, N. V. On weak uniqueness for some diffusions with discontinuous coefficients. *Stochastic Processes and their applications*, 113, 37-64, 2004.
- [38] H. Kunita, Stochastic flow acting on Schwartz distributions, *J. Theoret. Probab.* 7(2) (1994), 247-278.
- [39] H. Kunita, Generalized solution of stochastic partial differential equation. *J. Theor. Prob.* 7(2) (1994), 279-308.
- [40] J. Li, *Note on stochastic control problems related with general fully coupled forward-backward stochastic differential equations* 2012, To appear.
- [41] J. Li, and Q.M. WEI. *Optimal control problems of fully coupled FBSDEs and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, *SIAM J. Control Optim.* To appear.
- [42] Qian Lin, Zhen Wu, A Comparison Theorem and Uniqueness Theorem of Backward Doubly Stochastic Differential Equations, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, Vol. 27, No. 2 (2011), 223-232.
- [43] J. Ma, Z. Wu, D. Zhang, J. Zhang, *On wellposedness of forward-backward SDEs-a unified approach*. *Ann. Appl. Probab.* Vol ; 25, number 4 (2015), 2168–2214.

-
- [44] J. Ma, P. Protter, J. Yong, *Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly - a four step scheme*, Probab. Theory Related Fields 98 (1994) pp.339-359.
- [45] J. MA and J.M. YONG. *Forward-backward stochastic differential equations and their applications*, Springer, Berlin, 1999.
- [46] Mrhardy, Naoual An approximation result for nonlinear SPDEs with Neumann boundary conditions. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 346 (2008), no. 1-2, 79-82.
- [47] E. Pardoux, S.G. Peng, *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*, Systems Control Lett. 14, No.1-2 (1990), 55-61.
- [48] Pardoux, E., Peng, S. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs. Probability Theory and Related Fields, 98 (1994), 209-227.
- [49] E. Pardoux, S. Tang, *Forward-backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic PDEs*, Probab. Theory Related Fields, 114, no. 2 (1999), pp.123-150.
- [50] Peng, S., Monotonic limit theorem of BSDE and nonlinear decomposition theorem of Doob-Meyer's type. Probab. Theory Related Fields 113 (1999), no. 4, 473-499.
- [51] S.Peng, *A generalized dynamic programming principle and Hamilton-Jacobi-Bellman equation*, Stochastics and Stochastics Reports, Vol.38 (1992), 119-134.
- [52] S.G. Peng and Z. Wu, Fully coupled forward-backward stochastic differential equations and applications to optimal control, SIAM Control Optim. 37(3) (1999), pp. 825-843.
- [53] D.W.D. Stroock, S.R.S Varadhan, *Multidimensional diffusion processes*, Classics in Mathematics, Springer Verlag, 1979.
- [54] Y. Shi, Y. Gu and K. Liu, Comparison Theorems of backward doubly stochastic differential equations and applications, Stochastic Analysis and Applications 23 (2005) 97-110.

- [55] N. Touzi *Optimal stochastic control, stochastic target problem, and backward differential equation*, (2010).
- [56] D.W.D. Stroock, S.R.S Varadhan, *Multidimensional diffusion processes*, Classics in Mathematics, Springer Verlag, 1979.
- [57] Z. Wu and Z. Yu, Probabilistic Interpretation for System of Quasilinear Parabolic PDE combined with algebraic equations, *Stochastic Process. Appl.* 124 (2014), 3921–3947.
- [58] Z. Wu, F. Zhang, BDSDEs with locally monotone coefficients and Sobolev solutions for SPDEs, *J. Differential Equations*, 251, (2011), 759-784.
- [59] J. Yong, Forward backward stochastic differential equations with mixed initial terminal conditions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 362 (2010), 1047–1096.
- [60] J.F. Zhang, The wellposedness of FBSDEs, *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B* 6 (2006), 927-940.
- [61] Q. Zhang, H. Zhao, Stationary Solution of SPDEs and Infinite horizon BDSDEs, *Journal of Functional Analysis*, 252 (2007),171-219.
- [62] B. Zhu, B. Han, Backward Doubly Stochastic Differential Equations with infinite time horizon. *Application of Mathematics*, no. 6, (2012), 641-653.
- [63] Q. Zhu, Y. Shi, Backward Doubly Stochastic Differential Equations with Jumps and Stochastic Partial Differential-Integral Equations, *Chin. Ann. Math.* 33B (1) (2012), 127-142.
- [64] Q. Zhu, Y. Shi, A Class of Backward Doubly Stochastic Differential Equations with Discontinuous Coefficients, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, doi/10.1007/s10255-011-0136-0.

I. Etude des EDDSRs surlinéaires
II. Contrôle des EDSRs couplées

Cette thèse aborde deux sujets de recherches, le premier est sur l'existence et l'unicité des solutions des Équations Différentielles Doublement Stochastiques Rétrogrades (EDDSRs) et les Équations aux Dérivées partielles Stochastiques (EDPSs) multidimensionnelles à croissance surlinéaire. Le deuxième établit l'existence d'un contrôle optimal strict pour un système contrôlé dirigé par des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (EDSRs) couplées dans deux cas de diffusions dégénérée et non dégénérée.

- Existence et unicité des solutions des EDDSRs multidimensionnels :
Nous considérons EDDSR avec un générateur de croissance surlinéaire et une donnée terminale de carré intégrable. Nous introduisons une nouvelle condition locale sur le générateur et nous montrons qu'elle assure l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions. Même si notre intérêt porte sur le cas multidimensionnel, notre résultat est également nouveau en dimension un. Comme application, nous établissons l'existence et l'unicité des solutions des EDPS semi-linéaires.

- Contrôle des EDSR couplées :
Nous étudions un problème de contrôle avec une fonctionnelle coût non linéaire dont le système contrôlé est dirigé par une EDSR couplée. L'objectif de ce travail est d'établir l'existence d'un contrôle optimal dans la classe des contrôles stricts, donc on montre que ce contrôle vérifie notre équation et qu'il minimise la fonctionnelle coût. La méthode consiste à approcher notre système par une suite de systèmes réguliers et on montre la convergence. En passant à la limite, sous des hypothèses de convexité, on obtient l'existence d'un contrôle optimal strict. on suit cette méthode théorique pour deux cas différentes de diffusions dégénérée et non dégénérée.

I. Study of a BDSDE with a superlinear growth generator.
II. Coupled controlled FSDEs.

In this Phd thesis, we considers two parts. The first one establish the existence and the uniqueness of the solutions of multidimensional backward doubly stochastic differential equations (BDSDEs in short) and the stochastic partial differential equations (SPDEs in short) in the superlinear growth generators. In the second part, we study the stochastic controls problems driven by a coupled Forward-Backward stochastic differential equations (FBSDEs in short).

- BDSDEs and SPDEs with a superlinear growth generators :
We deal with multidimensional BDSDE with a superlinear growth generator and a square integrable terminal datum. We introduce new local conditions on the generator then we show that they ensure the existence and uniqueness as well as the stability of solutions. Our work go beyond the previous results on the subject. Although we are focused on multidimensional case, the uniqueness result we establish is new in one dimensional too. As application, we establish the existence and uniqueness of probabilistic solutions to some semilinear SPDEs with superlinear growth generator. By probabilistic solution, we mean a solution which is representable throughout a BDSDEs.

- Controlled coupled FBSDEs :
We establish the existence of an optimal control for a system driven by a coupled FBSDE. The cost functional is defined as the initial value of the backward component of the solution. We construct a sequence of approximating controlled systems, for which we show the existence of a sequence of feedback optimal controls. By passing to the limit, we get the existence of a feedback optimal control. The convexity condition is used to ensure that the optimal control is strict. In this part, we study two cases of diffusions : degenerate and non-degenerate.