



**HAL**  
open science

# Nouvelle approche basée sur la moyenne et la médiane en théorie du choix social et analyse multicritère

Ruffin-Benoît O Ngoie

► **To cite this version:**

Ruffin-Benoît O Ngoie. Nouvelle approche basée sur la moyenne et la médiane en théorie du choix social et analyse multicritère. Recherche opérationnelle [math.OC]. Université Pédagogique Nationale (UPN), 2016. Français. NNT: . tel-01521587

**HAL Id: tel-01521587**

**<https://theses.hal.science/tel-01521587>**

Submitted on 12 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RÉPUBLIQUE DÉMOCRATIQUE DU CONGO

# Université Pédagogique Nationale



## Faculté des Sciences

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE

THÈSE DE DOCTORAT N° .....

---

# NOUVELLE APPROCHE BASÉE SUR LA MOYENNE ET LA MÉDIANE EN THÉORIE DU CHOIX SOCIAL ET ANALYSE MULTICRITÈRE

---



Ruffin-Benoît NGOIE MPOY

*Diplomé d'Etudes Approfondies en Sciences*

Soutenue publiquement le 3 décembre 2016

Thèse présentée et soutenue publiquement en vue  
de l'obtention du titre de Docteur ès Sciences

Domaine : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

### JURY

Promoteur : Prof. Léonard MANYA NDJADI, PHD.  
Co-Promoteur : Prof. Boniface ENGOMBE WEDI, PHD.  
Président : Prof. François NGILAMBI-TE-AKONAMBI, PHD.  
Secrétaire : Prof. Rostin MABELA MATENDO, PHD.  
Membre : Prof. Alphonse MATAND TWILENG, PHD.  
Suppléants : Prof. Jacques SABITI KISETA, PHD.  
: Prof. Claude SUMATA MOTUKULA, PHD.

ANNÉE ACADÉMIQUE 2015 – 2016

# Identification du Jury

Cette Thèse, présentée pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences, Option : **Mathématique** ; Orientation : **Mathématiques Appliquées** ; a été soutenue devant le Jury légalement constitué par la décision rectorale n° 043/ UPN / RECT / 2016 du 09/09/2016, portant nomination des membres du Jury pour la soutenance de la thèse de Doctorat :

1. **PRESIDENT** : Professeur FRANÇOIS NGILAMBI-TE-AKONAMBI, Université Pédagogique Nationale ;
2. **SECRÉTAIRE** : Professeur ROSTIN MABELA MATENDO, Université de Kinshasa ;

## **MEMBRES :**

1. Professeur LÉONARD MANYA NDJADI, Université de Kinshasa, Promoteur ;
2. Professeur BONIFACE ENGOMBE WEDI, Université Pédagogique Nationale, Co-promoteur ;
3. Professeur ALPHONSE MATAND TWILENG, Université Pédagogique Nationale, Membre ;
4. Professeur JACQUES SABITI KISETA, Institut Supérieur de Commerce, Membre suppléant ;
5. Professeur CLAUDE SUMATA MOTUKULA, Université Pédagogique Nationale, Membre suppléant.

*A mon defunt grand-père Benoît MPOY LUKUSA dont je tiens non seulement le nom mais aussi une grande partie de mon caractère ;*

*A Falonne pour tant d'amitié durant toutes ces trois dernières années.*

Ruffin-Benoît M. Ngoie

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Ruffin-Benoît M. Ngoie', with a large, stylized flourish underneath.

*Pour qu'une forme d'élection soit bonne, il faut qu'elle donne aux électeurs le moyen de se prononcer sur le mérite de chaque sujet, comparé successivement aux mérites de chacun de ses concurrents.*

Jean-Charles le Chevalier de Borda (Dax, 1733 – Paris, 1799)

*Si on ne fait pas d'hypothèses a priori sur la nature des ordres individuels, il n'y a aucune méthode de vote qui puisse surmonter le paradoxe (...), ni le vote plural, ni un quelconque système de représentation proportionnelle aussi compliqué qu'il soit ; de la même façon, le mécanisme du marché ne crée pas un choix social rationnel.*

Kenneth J. Arrow (1963, *Social Choice and Individual Values*)

*Plus un peuple est éclairé, plus ses suffrages sont difficiles à surprendre... même sous la constitution la plus libre, un peuple ignorant est esclave.*

Jean-Marie Antoine Nicolas de Caritat, le Marquis de Condorcet  
(Ribemont, 1743 – Bourg-la-Reine, 1794)

# Remerciements

Cette thèse est le fruit certes de mes efforts qui ont été exprimés par des sacrifices et privations. Elle ne se présenterait pas, cependant, sous cette apparence sans la contribution de beaucoup de personnes. Leur nombre étant tellement grand, je ne saurai les mentionner tous dans ces quelques lignes. Que les omissions dans ces lignes ne traduisent pas mon ingratitude car tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette œuvre méritent déjà ma reconnaissance même sans être cités.

Tout d’abord, je remercie le Professeur Léonard MANYA de l’Université de Kinshasa (UNIKIN) pour avoir accepté de conduire à bon port ce travail de recherche. Qu’il trouve dans ces quelques lignes l’expression de ma gratitude pour les longs moments de discussions que nous avons eu dans son bureau. Il m’a permis précisément d’affiner la présentation des résultats et d’établir une liaison peu ambiguë entre “Théorie du Choix Social” et “Théorie des jeux”.

J’adresse aussi mes remerciements au Professeur Boniface ENGOMBE WEDI de l’Université Pédagogique Nationale (UPN) pour sa marque de bonne foi en acceptant de co-diriger cette thèse dont l’achèvement ne serait pas possible sans lui.

A tout seigneur tout honneur, j’adresse mes remerciements au Professeur Berthold ULUNGU, initiateur de cette thèse, qui, telle un maître d’orchestre, a su agencer les différentes parties de cette œuvre afin d’en obtenir un son agréable. Avec son expérience et son sens d’analyse méthodique, il a été pour moi un guide sûr qui conduit à un lieu sûr. Je n’oublierai jamais les moments de partage scientifique passés avec lui dans sa résidence. Ces instants m’ont permis d’élargir ma vision sur la “recherche” et ont indubitablement contribué à la publication des six articles (en collaboration avec lui-même) qui jalonnent cette thèse. Mon

admiration pour ce brillant scientifique me ferait écrire des milliers de pages pour son apologie. Le connaissant de manière très personnelle, je sais que ces éloges le mettraient mal à l'aise. En dépit de tout ce qu'il mérite, le simple mot "MERCI" lui ferait énormément plaisir.

Jamais l'un sans l'autre, l'œuvre de l'initiateur a été accompagnée de l'appui considérable d'un grand "maître" : le Professeur Rostin MABELA. Cet éminent scientifique a rempli avec efficacité le rôle d'encadreur dans nos recherches. Ses conseils de chercheur averti m'ont été très bénéfiques, sans oublier les multiples discussions que nous avons eues dans son bureau au sujet de la complexité des algorithmes. Sa gentillesse particulière a contribué pour beaucoup dans la réalisation de ma thèse. Qu'il trouve dans cette œuvre le meilleur "compromis" de nos divergences.

Je remercie également mon ami, le Docteur Eric KAMWA de l'Université du Havre pour avoir accepté de lire le manuscrit et la version préliminaire de cette thèse. Ses critiques constructives m'ont permis de la raffiner.

Je voudrais aussi consacrer quelques lignes à remercier le Professeur José Carlos R. ALCANTUD de l'Université de Salamanca en Espagne pour avoir été la première personne à apprécier, à sa juste valeur, la fonction MCMM. Les discussions que j'ai eues avec lui m'ont inspiré pour la rédaction de l'article sur l'analyse et la caractérisation de la MCMM.

Je m'en voudrais tellement si j'oubliais le Professeur Antoinette BAUJARD de l'Université de Saint-Etienne. Elle a, en effet, accepté de lire et critiquer cette œuvre dans sa forme finale. Cette thèse se fonde sur la plupart de ses contributions en Théorie du Choix Social.

Que le Professeur Jean-Marie KAPENGA de l'Université Pédagogique Nationale (UPN) trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour tous les moments merveilleux que j'ai passés avec lui lors de ma formation au premier et deuxième cycle à l'UPN. Il a été pour moi un bon "père". Je lui dois non seulement une bonne partie de ma formation académique mais aussi et surtout ma vie professionnelle.

Je remercie de tout cœur Zoïnabo SAVADOGO de l'Université de Ouagadougou pour la collaboration fructueuse que nous avons eue ces trois

dernières années, laquelle a produit quatre des six publications qui jalonnent cette thèse.

Je tiens aussi à remercier mes compagnons de route : d'abord les thésards de l'UPN en Mathématiques Appliquées, en particulier Joseph OKITONYUMBE, Jean-Pierre MUKEBA et Michaël KIKOMBA pour leurs conseils et leur amitié ; ensuite, tous mes collègues de l'ISP de Mbanza-Ngungu, spécialement Charles MBUYI KALUBI "mon frère", Ruffin MBAKA, Richard MBUMBA "mon Richard", Alfred DIKIAVOVAKO, Luz MPEMBA, Doudou LUKUAMA, Christophe SOLA et Jean-Roger BANSIMBA pour leur gentillesse et tant de bienfaits ; enfin, deux de mes étudiants : Pascaline KIZODISA et Télésphore NSUMBU pour avoir accepté de travailler avec moi dans le domaine de vote.

*Last but not the least*, j'adresse mes vifs remerciements à toute ma famille : d'abord ma grand-mère Alphonsine MUJINGA KALALA, ensuite mes parents Hélène MBUYI MPOY et Jean-Marie NGOIE KALADI MUABO, pour tant de sacrifices à mon égard. J'ai une pensée particulière pour ma sœur Sandra NGOIE ainsi que pour mes frères Yves et Aaron NGOIE. Que la grande famille MPOY trouve dans cette thèse une récompense de tous les espoirs qu'elle a placés sur ma formation. Je cite Léon MBIYE MPOY, Wilfried KALALA MPOY, José LONJI MPOY, Théthé NTUMBA MPOY, Micheline TSHIBANGU, Marthe KANKU MPOY, Nounou OKITEMBO, Stallone MPOY pour avoir su me remonter le moral quand tout semblait être perdu. Mon amour pour eux ne connaît aucune faille.

Les autres, sachez que chaque fois que le soleil pointera au zénith, c'est moi qui pense à vous. Je vous prie de rajouter votre nom ici si je vous ai oublié : .....

Ruffin-Benoît M. Ngoie



# Table des matières

Identification du Jury	ii
Dédicace	iii
Epigraphe	iv
Remerciements	v
Table des matières	viii
Liste des tableaux	xii
Table des figures	xiv
Sigles et Abréviations	xv
Abstract	1
Résumé	2
<b>Introduction Générale</b>	<b>3</b>
0.1 Problématique . . . . .	3
0.2 Hypothèses . . . . .	6
0.3 Objectifs de la thèse . . . . .	8
0.4 Méthodologie de la recherche . . . . .	8
0.5 Organisation de la thèse . . . . .	10
<b>1 Théorie classique du Choix Social</b>	<b>12</b>
1.1 Introduction au premier chapitre . . . . .	12
1.2 Notion de préférence . . . . .	13
1.2.1 Relation binaire . . . . .	13
1.2.2 Structure de préférence ordinale . . . . .	15
1.2.3 Structures de préférences ordinales classiques . . . . .	16

1.2.4	Extensions de la structure de préférence ordinale . . . . .	17
1.2.5	Préférence individuelle . . . . .	18
1.3	Agrégation de préférences et fonctions de choix social . . . . .	19
1.3.1	Formulation de la problématique . . . . .	20
1.3.2	Fonction de choix social . . . . .	21
1.3.3	Quelques fonctions de Choix Social . . . . .	24
1.3.4	Principe de Condorcet . . . . .	28
1.3.5	Paradoxe de Condorcet . . . . .	29
1.3.6	Théorèmes d’Impossibilité . . . . .	29
1.3.7	Propriétés démocratiques d’une fonction de choix social . . . . .	34
1.4	Sens du vote pour l’électeur . . . . .	35
1.5	Paradoxes électoraux . . . . .	38
1.5.1	Paradoxes simples . . . . .	39
1.5.2	Paradoxes conditionnels . . . . .	40
1.6	Paradoxes du scrutin à la proportionnelle . . . . .	42
1.7	Conclusion du premier chapitre . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Etat de l’art</b>	<b>47</b>
2.1	Introduction au deuxième chapitre . . . . .	47
2.2	Analyse économique des systèmes de vote . . . . .	48
2.2.1	Marché politique . . . . .	48
2.2.2	Comparaison entre marché et démocratie politique . . . . .	49
2.3	Résultats dans la Théorie du Choix Social . . . . .	52
2.3.1	Résultats d’impossibilité . . . . .	52
2.3.2	Résultats de caractérisation . . . . .	53
2.3.3	Résultats d’analyse . . . . .	56
2.3.4	Expériences sur les systèmes de vote . . . . .	59
2.4	Familles des procédures de vote . . . . .	61
2.5	Choix Social Computationnel . . . . .	64
2.5.1	Formation de coalitions . . . . .	64
2.5.2	Agrégation des jugements . . . . .	65
2.5.3	Complexité des règles de vote . . . . .	65
2.5.4	Domaine combinatoire . . . . .	65
2.5.5	Manipulabilité . . . . .	66
2.5.6	Allocation des ressources divisibles et indivisibles . . . . .	66
2.6	Conclusion du deuxième chapitre . . . . .	66

<b>3</b>	<b>Théorie du Jugement Majoritaire</b>	<b>68</b>
3.1	Introduction au troisième chapitre . . . . .	68
3.2	Contexte arrowien . . . . .	69
3.3	Contexte du Jugement Majoritaire (JM) . . . . .	71
3.3.1	Exemples de grade majoritaire . . . . .	74
3.3.2	Remarques . . . . .	74
3.3.3	Cas particuliers . . . . .	75
3.4	Tie-Breaking . . . . .	76
3.5	Expériences . . . . .	79
3.5.1	Expérience française de 2007 . . . . .	79
3.5.2	Expérience française de 2012 . . . . .	80
3.6	Propriétés du Jugement Majoritaire . . . . .	82
3.7	Conclusion du troisième chapitre . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Paradoxes du Jugement Majoritaire</b>	<b>90</b>
4.1	Introduction au quatrième chapitre . . . . .	90
4.2	Situations controversées sur le JM . . . . .	91
4.3	Conclusion du quatrième chapitre . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Théorie du Borda Majority Count (BMC)</b>	<b>102</b>
5.1	Introduction au cinquième chapitre . . . . .	102
5.2	Borda Majority Count (BMC) . . . . .	105
5.3	Propriétés du Borda Majority Count . . . . .	106
5.4	Application du BMC à des exemples particuliers . . . . .	110
5.5	Distribution des sièges . . . . .	114
5.6	Paradoxes du BMC . . . . .	115
5.7	Conclusion du cinquième chapitre . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Méthode du Compromis Moyenne-Médiane</b>	<b>119</b>
6.1	Introduction au sixième chapitre . . . . .	119
6.2	Principe de la MCMM . . . . .	122
6.2.1	Concepts et description de la MCMM . . . . .	122
6.2.2	Tie-Breaking . . . . .	124
6.3	Rangement des candidats par la MCMM . . . . .	125
6.3.1	Caractérisation de $\nu$ . . . . .	128
6.4	Propriétés de MCMM . . . . .	130
6.5	Tyrannie de la majorité . . . . .	135
6.6	Applications numériques . . . . .	137
6.7	MCMM appliquée à l'expérience de 2012 . . . . .	141

6.8	Distribution des sièges dans une chambre par MCMM . . .	143
6.8.1	Distribution des sièges par MCMM : Description . .	143
6.8.2	Exemples numériques . . . . .	144
6.9	Robustesse de la MCMM . . . . .	148
6.10	Paradoxes sur la MCMM . . . . .	150
6.11	Evaluation de la MCMM . . . . .	152
6.12	Quelques commentaires sur MCMM . . . . .	153
6.13	MCMM comparée aux fonctions de vote les plus valuées .	155
6.14	Particularité de la MCMM . . . . .	156
6.15	Conclusion du sixième chapitre . . . . .	157
<b>7</b>	<b>MCMM appliquée aux problèmes MCMD</b>	<b>160</b>
7.1	Introduction au septième chapitre . . . . .	160
7.2	Présentation d'un problème Multicritère Multidécideur . .	162
7.3	Grandes lignes de MCMM pour un problème MCMD . . .	162
7.4	Etude de la Complexité . . . . .	164
7.5	Exemples didactiques . . . . .	164
7.6	Conclusion du septième chapitre . . . . .	172
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>174</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>178</b>
	<b>Index</b>	<b>191</b>

# Liste des tableaux

1.1	Exemple de la manipulabilité . . . . .	37
1.2	Plus forts restes : première élection . . . . .	43
1.3	Plus forts restes : deuxième élection . . . . .	44
1.4	Proportionnelle : plus forts restes et plus forte moyenne . . . . .	44
3.1	Indécision du jauge majoritaire . . . . .	78
3.2	Résultats de l'expérimentation du JM en 2007 à Orsay . . . . .	79
3.3	Rangement des candidats par le jauge majoritaire pour l'expérience de 2007 . . . . .	80
3.4	Résultats de l'expérimentation du JM en 2012 . . . . .	80
3.5	Rangement des candidats par le jauge majoritaire pour l'expérience de 2012 . . . . .	82
5.1	Correspondances entre mentions et notes . . . . .	102
5.2	Attribution des sièges dans un Parlement . . . . .	115
6.1	Indices de division maximale $\nu$ . . . . .	129
6.2	MCMM comparée à JM et BMC sur les données de Balinski et Laraki (2012) . . . . .	142
6.3	Distribution de sièges aux partis . . . . .	144
6.4	Scores compilés . . . . .	145
6.5	Distribution finale des sièges aux partis . . . . .	145
6.6	Nombres de sièges attribués aux partis par les électeurs . . . . .	146
6.7	Distribution finale des sièges aux partis . . . . .	147
6.8	Scores des partis et scores globaux par BMC . . . . .	147
6.9	Distribution finale des sièges aux partis . . . . .	148
6.10	Jugements selon Electorat I . . . . .	150
6.11	Jugements selon Electorat II . . . . .	151
6.12	Jugements selon les Electorats I et II combinés . . . . .	151
6.13	Comparaison entre MCMM et les fonctions de vote les mieux cotées . . . . .	156

7.1	Matrice des jugements de $D_1$ (Décideur 1) . . . . .	165
7.2	Matrice des jugements de $D_2$ (Décideur 2) . . . . .	165
7.3	Matrice des jugements de $D_3$ (Décideur 3) . . . . .	165
7.4	Poids globaux des critères . . . . .	166
7.5	Scores globaux par critère . . . . .	166
7.6	Rangement final des produits . . . . .	166
7.7	Matrice des jugements de $D_1$ (Décideur 1) . . . . .	167
7.8	Matrice des jugements de $D_2$ (Décideur 2) . . . . .	167
7.9	Matrice des jugements de $D_3$ (Décideur 3) . . . . .	167
7.10	Poids globaux des critères . . . . .	168
7.11	Scores globaux par critère . . . . .	168
7.12	Rangement final des produits . . . . .	168
7.13	Matrice des jugements de $D_1$ (Décideur 1) . . . . .	169
7.14	Matrice des jugements de $D_2$ (Décideur 2) . . . . .	169
7.15	Matrice des jugements de $D_3$ (Décideur 3) . . . . .	170
7.16	Matrice des jugements de $D_4$ (Décideur 4) . . . . .	170
7.17	Matrice des jugements de $D_5$ (Décideur 5) . . . . .	170
7.18	Scores globaux et rangement par CHEMATRE . . . . .	171
7.19	Scores globaux par critère . . . . .	171
7.20	Scores globaux et rangement par MCMM . . . . .	172

# Table des figures

2.1	Arborescence de la théorie du choix social . . . . .	60
2.2	Classification des procédures de vote . . . . .	62
6.1	Division de la distribution des grades en $2^k$ intervalles. . .	122
6.2	Algorithme MCMM . . . . .	125
6.3	Courbe de la croissance de $\nu$ . . . . .	130
7.1	Décision de groupe. . . . .	161
7.2	Algorithme MCMM pour les problèmes MCMD . . . . .	163

# Sigles et Abréviations

AC	: Agréger puis Comparer (Aggregate then Compare)
AMCD	: Aide Multi-Critère à la Décision
AV	: Approval Voting
BMC	: Borda Majority Count
CA	: Comparer puis Agréger (Compare then Aggregate)
CENI	: Commission Electorale Nationale Indépendante
CHEMATRE	: Choix et Election de Meilleures Alternatives en Traduisant la Réalité
CNRS	: Centre National de Recherche Scientifique
ELECTRE	: Elimination et Choix Traduisant la Réalité
FTP	: Fonction de Transformation des Préférences
GMJ	: Graduated Majority Judgment
JM	: Jugement Majoritaire
MCA	: Majority Choice Approval
MCMD	: Multi-Critère Multi-Décideur
MCOMM	: Méthode du Compromis Moyenne-Médiane
MJ	: Majority Judgment
MMCM	: Mean-Median Compromise Method
PFM	: Plus Forte Moyenne
PFR	: Plus Fort Reste
PVC	: Pseudo-Vainqueur de Condorcet
RDC	: République Démocratique du Congo
VA	: Vote par Approbation/Vote par Assentiment
VC	: Vainqueur de Condorcet
VM	: Vote Majoritaire
VPT	: Vote Préférentiel Transférable



# Abstract

## **New Mean and Median-based Approach in Social Choice Theory and Multicriteria Analysis.**

Impossibility theorems highlight the fact that no voting function, as complex as it might be, can simultaneously satisfy a restricted number of fair properties in a democracy. However, the limits fixed by these theorems can be pushed back by adopting a new voting framework. This new framework boosted by Michel Balinski and Rida Laraki is based on evaluations cast by voters to competitors. It proposes an alternative to Arrowian framework which is based on candidates' rankings by voters.

Balinski and Laraki proposed a voting mechanism to accompany their model : "Majority Judgment" (MJ). It is about a social choice function which makes it possible to guarantee that the elected candidate obtains a majority approving at least or at most her or his final grade. MJ then returns as a candidate's final grade her or his median grade. Thus, the candidate with the highest median is elected. Though Balinski and Laraki's model is welcome by scientific community, it is not the same for MJ. Indeed, several paradoxes were discovered on MJ following a meticulous study by researchers. Even if MJ is robust and presents many other fair properties, it still remains very vulnerable vis-a-vis many paradoxes.

Thus, Manzoor Ahmed Zahid presents a PhD thesis on MJ insufficiencies and an alternative mean-based function : "Borda Majority Count" (BMC). This function is defined in the same framework as MJ (Balinski-Laraki's framework) but makes it possible to elect, not the candidate with the highest median, but the one with the highest average. Unfortunately, BMC is not free from any reproach at all. It is particularly vulnerable to voters' strategic behavior which consists in allotting maximum grades to candidates that they prefer the most and minimal grades to those candidates' principal rivals.

This PhD thesis proposes a new voting function – defined in Balinski-Laraki's framework – which is a hybridization of MJ and BMC : "Mean-Median Compromise Method" (MMCM). This method puts at its credit the desired properties of MJ and BMC and reduces their insufficiencies. It allows election of members in a chamber and can be used to solve Multi-Criteria Multi-Decision makers problems. Numerical applications on MMCM in competition with MJ and BMC show that it produces satisfactory results. It practically returns the same ranking as BMC in seats assignment within a chamber but it has the advantage to namely indicate people who will occupy these seats. MMCM has been also applied to data collected by Balinski and Laraki during the 2012 French presidential election. There again, MMCM returned exactly the same ranking as BMC.

Thus, MMCM fits in the list of simultaneously robust and majority-tyranny-proof functions. This is an interesting perspective for leaders' democratic elections.

**KEY WORDS :** *Borda Majority Count, Degree of division, Intermedian Grade, Majority Judgment, Mean-Median Compromise Method, Amplitude of division.*

# Résumé

## **Nouvelle Approche basée sur la Moyenne et la Médiane en Théorie du Choix Social et Analyse Multicritère.**

Les théorèmes d'impossibilité mettent en évidence le fait qu'aucune fonction de vote, aussi complexe qu'elle soit, ne puisse satisfaire à la fois un nombre restreint de propriétés souhaitées dans une démocratie. Cependant, les limites fixées par ces théorèmes peuvent être repoussées en adoptant un nouveau contexte pour le vote. Ce nouveau contexte prôné par Michel Balinski et Rida Laraki est basé sur les évaluations de chaque candidat en compétition par les électeurs. Il propose une alternative au modèle arrovien qui est basé sur les rangements des candidats par les électeurs.

Balinski et Laraki ont proposé un mécanisme de vote pour accompagner leur modèle : le Jugement Majoritaire (JM). Il s'agit d'une fonction de choix social qui permet de garantir que le candidat élu obtient une majorité approuvant au moins ou au plus sa mention finale. Le JM renvoie donc comme mention (ou note) finale d'un candidat sa mention médiane. Ainsi, le candidat avec la plus forte médiane est élu. Quoique le modèle de Balinski et Laraki soit bien accueilli par la communauté scientifique, il n'en est pas de même pour le JM. En effet, plusieurs paradoxes ont été découverts sur le JM à la suite d'une étude minutieuse par des chercheurs. Même si le JM est robuste et présente beaucoup d'autres bonnes propriétés, il reste très vulnérable face à de nombreux paradoxes.

Ainsi, Manzoor Ahmed Zahid présente une thèse sur les insuffisances du JM et en propose une fonction alternative basée sur la moyenne : le Borda Majority Count (BMC). Cette fonction est conçue dans le même contexte que le JM (contexte balinski-larakien) mais permet de faire élire, non pas le candidat avec la plus forte médiane, mais celui avec la plus forte moyenne. Malheureusement, le BMC n'est pas aussi exempt de tout reproche. Il est particulièrement vulnérable aux manipulations stratégiques des électeurs qui attribuent des notes maximales aux candidats qu'ils préfèrent le plus et minimales à leurs principaux rivaux.

Cette thèse propose une fonction de vote – conçue dans le modèle balinski-larakien – qui est une hybridation du JM et du BMC : la Méthode du Compromis Moyenne-Médiane (MCMM). Cette méthode met à son actif les propriétés souhaitées du JM et du BMC et atténue leurs insuffisances. Elle permet l'élection des membres dans une chambre et peut être utilisée pour résoudre des problèmes Multi-Critère Multi-Décideur. Les applications numériques sur la MCMM en concurrence avec le JM et le BMC montrent qu'elle produit des résultats satisfaisants. Elle renvoie pratiquement le même rangement que le BMC dans l'attribution des sièges au sein d'une chambre mais avec l'avantage qu'elle désigne nommément les personnes qui occuperont ces sièges. La MCMM a été aussi appliquée aux données recueillies par Balinski et Laraki lors de l'élection présidentielle française de 2012. Là aussi, la MCMM a renvoyé exactement le même rangement que le BMC.

La MCMM s'inscrit donc dans la liste des fonctions à la fois robustes et résistant à la tyrannie de la majorité ; une belle perspective pour les élections démocratiques des dirigeants.

*MOTS-CLÉS : Borda Majority Count, Degré de division, Grade intermédiaire, Jugement Majoritaire, Méthode du Compromis Moyenne-Médiane, Amplitude de division.*

# Introduction Générale

## 0.1 Problématique

La prise de décision dans une communauté joue un rôle très important dans le fonctionnement des sociétés humaines et des systèmes multi-agents. Les décisions collectives sont souvent prises par l'agrégation des préférences des individus par le moyen du *vote* [79]. L'élection est le cœur de la démocratie [110, 111]. Les citoyens y sont invités à exprimer, en principe, librement et équitablement leurs opinions. Le gagnant devrait être alors le candidat le mieux apprécié par la “majorité” [23].

Selon Nicolas Jean [94], l'élection correspond au processus par lequel des individus opèrent un choix qui s'exprime au travers d'un vote, dans le but de désigner un ou plusieurs individus qui auront la responsabilité d'occuper une fonction politique (syndicale ou gestionnaire).

La Théorie du Choix Social concerne l'étude des méthodes pour agréger les appréciations ou évaluations de plusieurs individus en une appréciation ou évaluation collective [168, 18, 20, 151]. Les principaux résultats de ce domaine que sont les théorèmes d'impossibilité énoncés par Arrow [6, 8, 116], Sen [144, 145], Gibbard [86] et Satterthwaite [141] – pour ne citer que ceux-là – mettent en évidence le fait qu'aucune de ces méthodes ne satisfait les exigences d'une démocratie idéale [78].

Une méthode de vote (ou *Fonction d'Agrégation* ou encore *Fonction de Choix Social*) est une application d'un ensemble des préférences ou évaluations des électeurs dans l'ensemble de vainqueur(s) d'une élection [168]. S'il n'y a que deux candidats, il suffit de choisir comme vainqueur le candidat préféré par la majorité.

Lorsqu'il y a plus de deux candidats, cependant, différents modes de scrutin peuvent fournir différents résultats et il n'est pas évident de dé-

terminer laquelle des fonctions d'agrégation est la meilleure dans le sens où elle reflèterait le mieux la volonté de la communauté.

Depuis au moins 1299, le modèle traditionnel est celui proposé par le Chevalier de Borda [39] : *“Pour qu'une forme d'élection soit bonne, il faut qu'elle donne aux électeurs le moyen de se prononcer sur le mérite de chaque sujet, comparé successivement aux mérites de chacun de ses concurrents”*.

Cette idée est précisée par le Marquis de Condorcet [56] : *“Que chaque électeur prononça son vœu complet par un jugement comparatif entre tous les candidats pris deux à deux”*.

Ce modèle induit deux paradoxes insurmontables en théorie et incontrournables en pratique : Le paradoxe de Condorcet et le paradoxe d'Arrow. La Théorie du Choix Social serait, à cet effet, voué à un échec quels que soient les efforts fournis car elle n'est guère capable de résoudre le problème à son origine.

Nous pouvons avancer une tentative d'explication rationnelle à ce constat avec d'impossibilité et son corollaire :

- *Cause* : le modèle traditionnel est inadéquat car les expressions des opinions permises aux électeurs sont inadaptées et insuffisantes.
- *Conséquence* : la théorie qui en ressort est incohérente et contradictoire.

L'idée même de la démocratie laisse entrevoir comme idéal un mode de scrutin qui identifie toujours un gagnant (c'est-à-dire qui évite le paradoxe de Condorcet), qui exclut le paradoxe d'Arrow (c'est-à-dire le gagnant entre deux candidats ne dépend pas d'un autre) et qui assure l'égalité des voix des électeurs. Malheureusement, d'après le théorème d'impossibilité d'Arrow [6, 8], aucun mode de scrutin n'est capable de garantir ces trois propriétés.

Ce théorème célèbre, appelé aussi *Théorème Général de Possibilité* [6, 8, 150, 116], a engendré l'idée qu'il n'existe pas de mode de scrutin idéal, laissant ouvert le choix à n'importe quoi et de n'importe qui [129].

Un grand nombre de méthodes ont été inventées à travers les siècles. L'histoire commence en antiquité – où les Grecs et les Romains avaient l'habitude de tirer leurs élus au sort – sinon plus tôt. L'étude scientifique des modes de scrutin a commencé quelque peu avant la révolution Française, par Le Marquis de Condorcet [56] et Le Chevalier de Borda [39]. Ils ont proposé, chacun, une méthode qui portera plus tard leurs noms respectivement. Ce n'est que récemment qu'il a été découvert que ces méthodes avaient déjà été proposées indépendamment des siècles auparavant : celle de Condorcet par Ramon Llull en 1299, celle de Borda par Nicolas Cusanus en 1433 [23].

Depuis, les théoriciens du choix social étudient et caractérisent différentes méthodes de vote, essayant de sélectionner la meilleure et d'écartier les mauvaises. Black [34] et Dasgupta-Maskin [60, 61] proposent de combiner les méthodes de Condorcet (Llull) avec celle de Borda (Cusanus). Robert Weber [162] a introduit le vote par assentiment sans savoir qu'il a été pratiqué dans la cité-état de Sparte en Grèce antique. De nos jours, il sert à élire les officiers de plusieurs sociétés savantes.

Pour des raisons évidentes de difficultés de mise en oeuvre, aucun de ces modes de scrutins n'est utilisé pour des élections politiques majeures. Les deux méthodes les plus répandues sont les scrutins majoritaires à un et deux tours. Ils sont pratiqués en France, en Grande Bretagne, aux Etats-Unis d'Amérique et dans tous les pays africains où les élections sont adoptées comme mode d'accession au pouvoir. L'Australie et l'Irlande ont recours à une méthode complexe appelée *vote alternatif*. La Belgique utilise un scrutin des listes.

Ces modes de scrutins utilisent des bulletins de vote différents. Le scrutin majoritaire demande très peu d'informations à l'électeur : il a seulement le droit de désigner un seul candidat. Le vote par assentiment lui demande de désigner autant de candidats qu'il le souhaite. Il en est de même pour le scrutin de listes. Borda, Condorcet et le vote alternatif lui demandent de classer tous les candidats du meilleur au pire. Ces trois dernières procédures diffèrent aussi par la façon dont les votes sont comptés.

Il existe deux grandes familles de procédures de vote : le *ranking* ou *classement* (contexte traditionnel ou *arrovien*) pour lequel les électeurs classent les candidats (partiellement ou totalement, avec ou sans *ex aequo*) et le *grading* ou *jugement* (contexte *balinski-larakien*) pour lequel les électeurs jugent chaque candidat soit de manière quantitative (par exemple une note allant de 1 à 10), soit de manière qualitative (excellent, bien, assez bien ...).

- Quelle procédure de vote peut-on adopter pour une vraie démocratie et dans quel contexte ?
- Lequel des deux contextes mentionnés ci-haut correspond le mieux à une démocratie idéale ?

## 0.2 Hypothèses

Un “bon” mode de scrutin doit être simple. Il doit permettre de choisir le meilleur candidat et limiter autant que possible les possibilités de manipulation [69].

Le choix social, étant une manière permettant la sélection d’un ou plusieurs meilleurs candidats parmi tant d’autres par un groupe d’individus appelés électeurs, n’est démocratique que si et seulement s’il est juste, libre et transparent. Le choix du mode de scrutin détermine de manière très significative les résultats d’une élection [29].

Nous partons de l’hypothèse que le système électoral constitue une force intermédiaire puissante qui façonne la concurrence entre les partis, dénaturant ou reproduisant fidèlement les préférences électorales des électeurs. Les élections sont, en effet, un rouage essentiel des démocraties modernes, ainsi que le principal mécanisme de participation politique pour la plupart des gens. La façon dont les votes sont traduits en sièges et la gestion de la période postélectorale constituent un facteur de paix sociale, de cohésion nationale et de confiance aux institutions qui émanent du processus électoral [128].

Il serait nécessaire de donner plus de liberté aux électeurs en leur demandant plus d'informations. Une solution proposée par Balinski et Laraki [18] est de juger tous les candidats en évaluant le mérite de chacun dans une échelle de mentions. Un tel changement de paradigme a abouti à un nouveau mode de scrutin, *le jugement majoritaire* (JM). Celui-ci attribue une mention-finale à chaque candidat, celle décidée par une majorité. Les mentions-majoritaires (ou grades majoritaires) et leurs appuis en nombres rangent les candidats, le gagnant étant le mieux jugé. Il n'y a qu'un seul tour.

Le même paradigme est utilisé par Manzoor Ahmed Zahid [167, 168] pour définir une autre fonction de vote : le *Borda Majority Count* (BMC). Contrairement au JM qui est basée sur la médiane, le BMC est basée sur la moyenne.

Les pathologies sur les fonctions de vote basées sur la médiane sont largement discutées dans la littérature sur la Théorie du Choix Social (voir [167], [168], [105] et [108]). Cependant, même le BMC n'est pas exempt de tout reproche : La moyenne est plus manipulable que la médiane.

Cette thèse serait à rapprocher des modifications expérimentales des règles de vote qui ont été réalisées dans des groupes de taille moyenne tels que des sociétés savantes ou des associations. Le vote par assentiment a ainsi été comparé à d'autres règles dans plusieurs circonstances (cf. à ce sujet la synthèse de S. Brams et P. C. Fishburn [47]) et, en particulier, lors d'élections de la *Social Choice and Welfare Society*. Le jugement majoritaire a fait récemment l'objet d'expérimentations parallèlement au vote officiel en France [16, 23, 106]. Plusieurs auteurs, après des études minutieuses, ont découvert quelques paradoxes liés au JM [167, 168, 105, 108]. A ce jour, nous n'avons que la seule expérience d'Ahmed Zahid [168] sur le BMC.

Mais ces expériences ne concernent pas des élections populaires et n'ont jamais été menées en RDC. Il conviendrait aussi que telles investigations soient menées pour étudier le comportement de l'électeur congolais face à un mode de vote prometteur.

Dans cette thèse, nous prenons le parti de soutenir qu'offrir à l'électeur la possibilité de nuancer autant que possible ses opinions sur les candidats est une arme pour réduire ses frustrations lors des élections. Le cas en République Démocratique du Congo (RDC) en est plus qu'un exemple : En 2006, pour les élections présidentielles, 33 candidats étaient en lice. En 2011, 11 candidats étaient en lice pour la présidentielle [128].

Demander alors à un électeur de ne choisir qu'un candidat parmi tant d'autres est contraire même à l'esprit démocratique et impose un comportement stratégique à ce dernier. Lorsque nous observons la situation pour les législatives en RDC où certaines circonscriptions comptaient plus de 1500 candidats pour une dizaine de sièges seulement, notre inquiétude par rapport aux frustrations de l'électeur ne peut qu'être plus grande.

### 0.3 Objectifs de la thèse

Cette thèse vise à développer une nouvelle théorie de vote réconciliant les deux grandes familles de vote : celle basée sur la médiane et celle basée sur la moyenne.

La méthode proposée devra être comparée avec ses parents mais aussi avec le vote par assentiment et le vote uninominal [2]. Il s'agira de déterminer les critères démocratiques qu'elle remplit et voir dans quelle mesure les résultats qu'elle produit coïncident avec ceux rendus par les autres modes de vote (Vote par Assentiment, Jugement Majoritaire et Borda Majority Count).

### 0.4 Méthodologie de la recherche

Le rangement (*ranking*) exige une masse d'informations plus importante que le jugement (*grading*). Par conséquent sur le plan pratique la majorité des mécanismes usuels de vote procèdent du jugement. Par ailleurs sur le plan théorique, la littérature classique, influencée notamment par Arrow [6, 8], est plus relative au rangement car on suppose généralement que chaque électeur possède une préférence individuelle qui est une relation binaire sur les candidats.

Nous expérimenterons divers modes de scrutin qui permettent plus d'expressivité de la part des électeurs. Ces modes de scrutin sont tous issus de la famille de jugement (contexte balinski-larakien). Pour notre étude, nous n'avons retenu que le Vote par Assentiment, le Jugement Majoritaire et le Borda Majority Count. Nous montrerons que les deux derniers modes de vote se réduisent au vote par approbation si les scores autorisés sont restreints aux deux valeurs 0 et 1, c'est-à-dire chaque électeur "approuve (1)" ou "désapprouve (0)" chaque candidat.

Le BMC utilise la moyenne ou la sommation des notes comme valeur globale d'un candidat tandis que le JM utilise la médiane. Les deux paramètres sont sujets à des pertes d'informations. Cependant, ils présentent, chacun pour ce qui le concerne, des avantages et désavantages.

Il conviendrait alors de réunir les avantages des deux écoles en une seule et même fonction de vote. Une telle fonction jouerait le rôle d'un compromis entre les fonctions de vote basées sur la médiane et celles basées sur la moyenne.

Une étude comparative des trois modes de scrutin rendrait compte des critères démocratiques remplis par l'un ou l'autre mode de scrutin. Telles études visent à montrer certaines situations paradoxales pour un mode de scrutin que ses concurrents contournent. Malheureusement, les tests récents de dispositifs électroniques constituent des expériences de terrain à propos de l'acte physique de vote, mais ne s'intéressent pas directement à la règle de vote.

Les résultats des analyses sur chacun des modes de vote nous permettront de déterminer les propriétés souhaitables que l'un ou l'autre système de vote ne remplit pas. Ces résultats connus sous le nom de *paradoxes* sont présentés sous forme des situations controversées d'un mode de scrutin étudié.

Comme Ahmed Zahid [168], nous confronterons le JM au BMC, c'est-à-dire opposer le paradigme de la médiane à celui de la moyenne. Une telle démarche vise à montrer que les deux écoles ont aussi bien de qualités que d'imperfections.

D’abord, il convient de considérer les points positifs de chacun des représentants des deux écoles (JM pour la médiane et BMC pour la moyenne) et d’atténuer si pas supprimer leurs imperfections.

C’est dans cette optique que nous entreprendrons d’établir un nouveau paradigme dans le domaine des systèmes électoraux : La *Méthode du Compromis Moyenne-Médiane* (MCMM) [130, 131]. Une telle théorie, voulant mettre à son actif les avantages aussi bien de la médiane que de la moyenne, ne peut être que le résultat d’un compromis entre les deux concepts (médiane et moyenne). Les imperfections de ses parents ne seront pas forcément supprimées mais sensiblement atténuées. Pour nous en rendre compte, nous appliquerons la MCMM sur les situations controversées de JM et BMC et verrons s’il correspond à ce à quoi nous nous attendons.

## 0.5 Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée de la manière que voici :

- *Chapitre 1 : Théorie Classique du Choix Social.* Ce chapitre traite de la modélisation des situations de prise de décision. Nous y présentons les principes fondamentaux de la théorie de Choix Social, plus exactement les règles d’évaluation et des décisions collectives en nous plaçant au plus haut niveau d’abstraction et de formalisme.
- *Chapitre 2 : Etat de l’art.* Dans ce chapitre, nous présentons une revue de la littérature des résultats obtenus dans le domaine du Choix Social. Pour chaque type de résultat, nous avons proposé les références les plus représentatives.
- *Chapitre 3 : Théorie du Jugement Majoritaire.* Ce chapitre présente un nouveau contexte en Théorie du Choix Social pour exprimer les préférences des décideurs. La notion de “vote” est remplacée par celle d’“évaluation”. Ce contexte est assorti d’un mode de vote basé sur la médiane.
- *Chapitre 4 : Paradoxes du Jugement Majoritaire.* Nous y présentons les limites du système basé sur l’évaluation de la plus forte médiane.

Il s'agit de présenter quelques situations controversées et parfois imaginaires qui esquissent le genre et la nature des problèmes qui peuvent être générés par l'utilisation du Jugement Majoritaire.

- *Chapitre 5 : Théorie du Borda Majority Count.* Dans ce chapitre, il sera question de présenter un système de vote conçu dans le même contexte que celui du Jugement Majoritaire mais à la différence qu'au lieu d'évaluer la plus forte médiane, il range d'après la somme pondérée (ou parfois la moyenne) la plus élevée.
- *Chapitre 6 : Méthode du Compromis Moyenne-Médiane.* Ce chapitre apporte une contribution originale dans le monde des théories de vote. Nous y présentons une nouvelle forme de vote – toujours conçu dans le contexte du Jugement Majoritaire – qui départage le *Borda Majority Count* (BMC) et le Jugement Majoritaire (JM) : la *Méthode du Compromis Moyenne-Médiane* (MCMM). De plus, Il montre qu'avec cette nouvelle méthode, une partie substantielle des paradoxes observés au BMC et au JM est élaguée.
- *Chapitre 7 : MCMM appliquée aux problèmes Multi-Critère Multi-Décideur (MCMD).* Ce chapitre est consacré à une extension de la MCMM aux problèmes MCMD. Il s'agit de trouver une solution de compromis pour plusieurs agents sur base des critères conflictuels.

# Chapitre 1

## Théorie classique du Choix Social

### 1.1 Introduction au premier chapitre

Dans ce chapitre qui consiste à définir une structure de préférence ordinale, nous allons présenter l'approche classique en théorie de la décision. L'introduction et la présentation des outils de modélisation des préférences en théorie de choix social s'inspirent de l'approche présentée dans les ouvrages comme [161] ou dans [43]. Nous rappellerons ensuite quelques structures de préférences classiques étendant la structure ordinale en y ajoutant des informations sur l'intensité de préférences par exemple.

La théorie du choix social est apparue pour la première fois en tant que discipline à part entière aux environs de la révolution française. Le sujet a été étudié pour la première fois à la fin du 18ème siècle par des mathématiciens comme Borda (en 1781) et Condorcet (en 1785) qui ont abordé les problèmes liés aux décisions sociales impliquant des intérêts et des préoccupations divergentes [149, 151]. Tout de même, ces problèmes, abordés en termes plutôt mathématiques, ont lancé la discipline formelle du choix social en termes de vote et de procédures associées.

Dans la suite, nous considérons :

- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  un ensemble fini de  $m$  éléments appelés actions ou alternatives (ou encore candidats pour le cas d'un vote).
- $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un ensemble fini de  $n$  éléments appelés votants ou électeurs.

## 1.2 Notion de préférence

Dans cette section, nous tâchons de répondre à la question : comment modéliser les préférences ? Plus précisément, nous recherchons le concept mathématique sur lequel prendre appui.

### 1.2.1 Relation binaire

Le concept de relation apparaît comme l'un des plus fondamentaux du discours rationnel. Il semble lié à la pratique de l'analyse, qui constitue elle-même l'un des aspects essentiels de la démarche discursive. L'analyse décompose les unités données dans l'expérience en éléments aussi simples que possibles, mais elle n'est réellement éclairante que si elle s'accompagne, comme d'une contrepartie, de l'opération par laquelle la pensée reconstitue le complexe à partir du simple. Or, pour rendre compte de l'unité d'une entité complexe, il faut décrire son mode de structuration ; et cela revient à faire apparaître les relations qui unissent les constituants. Il y a donc une solidarité étroite entre structure et relation. On ne peut expliquer la théorie de la relation qu'en montrant comment elle fonctionne dans des contextes appropriés.

L'outil central de modélisation des préférences est la relation binaire.

**Définition 1.1 (Relation binaire [42])** *Etant donné un ensemble  $E$ , une relation binaire  $\mathcal{R}$  est un sous-ensemble du produit cartésien  $E \times E$ .*

On emploie habituellement la notation  $x\mathcal{R}y$  pour désigner  $(x, y) \in \mathcal{R}$ .

Egalement, on peut définir (cf. [157] et [158]) :

- $\overline{\mathcal{R}}$  le complément de  $\mathcal{R}$  :  $(a, b) \in \overline{\mathcal{R}} \Leftrightarrow (a, b) \notin \mathcal{R}$
- $\mathcal{R}^{-1}$  la réciproque de  $\mathcal{R}$  :  $(a, b) \in \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$
- $\mathcal{R}^*$  le dual de  $\mathcal{R}$  :  $(a, b) \in \mathcal{R}^* \Leftrightarrow (b, a) \notin \mathcal{R}$

Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  deux relations sur  $E$ , on peut considérer les opérations suivantes :

- Inclusion :  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}' \Leftrightarrow a\mathcal{R}b \implies a\mathcal{R}'b, \forall a, b \in E$
- Union :  $a(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}')b \Leftrightarrow a\mathcal{R}b$  ou  $b\mathcal{R}'a, \forall a, b \in E$
- Intersection :  $a(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}')b \Leftrightarrow a\mathcal{R}b$  et  $b\mathcal{R}'a, \forall a, b \in E$
- Produit :  $a(\mathcal{R}.\mathcal{R}')b \Leftrightarrow \exists c \in E : a\mathcal{R}c$  et  $c\mathcal{R}'b, \forall a, b \in E$

Une relation binaire  $\mathcal{R}$  sera dite :

- Réflexive :  $\forall a \in E, a\mathcal{R}a.$
- Irréflexive :  $\forall a \in E, a\overline{\mathcal{R}}a.$
- Symétrique :  $\forall a, b \in E, a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a.$
- Antisymétrique :  $\forall a, b \in E, a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}a \implies a = b.$
- Asymétrique :  $a\mathcal{R}b \implies b\overline{\mathcal{R}}a, \forall a, b \in E.$
- Transitive :  $\forall a, b, c \in E, a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c.$
- Transitive négative :  $a\overline{\mathcal{R}}b \text{ et } b\overline{\mathcal{R}}c \implies a\overline{\mathcal{R}}c, \forall a, b, c \in E.$
- Semi-transitive :  $a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}d \text{ ou } d\mathcal{R}c, \forall a, b, c, d \in E.$
- De Ferrers :  $a\mathcal{R}b \text{ et } c\mathcal{R}d \implies a\mathcal{R}d \text{ ou } c\mathcal{R}b, \forall a, b, c, d \in E.$
- Complète :  $\forall a \neq b \in E, a\mathcal{R}b \text{ ou } b\mathcal{R}a$  (il y a un lien entre tout couple).
- Fortement complète :  $a\mathcal{R}b \text{ ou } b\mathcal{R}a, \forall a, b \in E.$

Parmi les relations binaires, certaines sont d'importance dans la modélisation des préférences, introduisons-les.

**Définition 1.2 (Relation d'équivalence)** Une relation d'équivalence, notée  $\sim$ , est une relation binaire à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Si  $\sim$  est une relation d'équivalence, l'ensemble noté

$$[x]_{\sim} = \{y \in E / x \sim y\}$$

est appelé *classe d'équivalence* de  $x$  pour  $\sim$ . Dès lors,

$$x \sim y \implies [x]_{\sim} = [y]_{\sim}$$

. L'ensemble de classes d'équivalence de  $E$  pour  $\sim$  est appelé *Ensemble-quotient*. Il forme une partition de  $E$  et est noté  $E / \sim$ .

**Définition 1.3 (Relation d'ordre)** Une relation d'ordre, notée  $\preceq$ , est une relation binaire à la fois réflexive, antisymétrique et transitive. Si de plus  $\preceq$  est complète, elle sera appelée *relation d'ordre total* sinon elle est une *relation d'ordre partiel*.

Une relation d'ordre effectue un rangement d'éléments de  $E$  sans qu'il y ait d'*ex aequo* possible. En revanche, il peut y avoir des incomparabilités si la relation n'est pas complète, c'est-à-dire si on peut trouver des éléments  $x$  et  $y \in E$  tels que  $x \not\preceq y$  et  $y \not\preceq x$ .

**Définition 1.4 (Relation de pré-ordre ou quasi-ordre)** Une relation de pré-ordre, notée  $\preceq$ , est une relation binaire à la fois réflexive et transitive.

Une relation de pré-ordre effectue aussi un rangement d'éléments de  $E$  mais cette fois-ci les *ex aequo* sont possibles.

**Définition 1.5 (Tournoi)** Une relation binaire  $\mathcal{R}$  est un tournoi si et seulement si elle est à la fois asymétrique et complète.

**Définition 1.6 (Ordre strictement total)** Une relation binaire  $\mathcal{R}$  est un ordre strictement total si et seulement si elle est asymétrique, complète et transitive. On dit aussi d'une telle relation qu'elle est un tournoi transitif.

**Définition 1.7 (Ordre strictement faible)** Une relation binaire  $\mathcal{R}$  est un ordre strictement faible si et seulement si elle est asymétrique négativement et transitive.

**Définition 1.8 (Ordre strictement partiel)** Une relation binaire  $\mathcal{R}$  est un ordre strictement partiel si et seulement si elle est asymétrique et transitive.

**Définition 1.9 (Ordre partiel)** Une relation binaire  $\mathcal{R}$  est un ordre partiel si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

### 1.2.2 Structure de préférence ordinale

Le modèle classique (voir [161], par exemple) de représentation des préférences en théorie de la décision est fondé sur la question suivante : "Étant données deux alternatives  $x$  et  $y$ ,  $x$  est-elle au moins aussi bonne que  $y$ ?". Répondre à cette question par oui ou par non de manière non ambiguë pour toute paire d'éléments  $(x, y)$  revient à définir une relation binaire (supposée, par définition, réflexive) sur l'ensemble des alternatives,  $A$ .

**Définition 1.10 (Structure de préférence ordinale)** Soit  $A$  l'ensemble d'alternatives. Une structure de préférence ordinale sur  $A$  est une relation binaire notée  $\mathcal{R}$  déterminée par la fonction  $\mathcal{R} : A \times A \longrightarrow \{0, 1\}$  définie par :

$$(x, y) \longrightarrow \mathcal{R}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\mathcal{R}y \text{ ou si } (x, y) \in \mathcal{R}, \\ 0 & \text{si } x\overline{\mathcal{R}}y \text{ ou si } (x, y) \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

où :

$\mathcal{R}(x, y) = 1$  signifie que l'alternative  $x$  est au moins aussi bonne que  $y$ .

$\mathcal{R}(x, y) = 0$  signifie que l'alternative  $x$  n'est pas au moins aussi bonne que  $y$ .

### 1.2.3 Structures de préférences ordinales classiques

Pour toute paire d'alternatives  $(x, y)$  et pour toute structure de préférence  $\mathcal{R}$ , nous pouvons être confrontés aux trois situations mutuellement exclusives suivantes :

- Indifférence ( $\mathcal{I}$ ) :  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} x$ . Elle est une relation symétrique et réflexive.
- Préférence stricte ( $\mathcal{P}$ ) :  $x \mathcal{R} y$  et  $y \overline{\mathcal{R}} x$ . Elle est une relation asymétrique.
- Préférence faible ( $\mathcal{Q}$ ) :  $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \overline{\mathcal{R}} x$ . Elle est aussi une relation asymétrique.
- Incomparabilité ( $\mathcal{R}$ ) :  $x \overline{\mathcal{R}} y$  et  $y \overline{\mathcal{R}} x$ . Elle est une relation symétrique et irréflexive.

#### Remarques

- $\forall x, y \in \mathcal{A}$ , on a soit  $x \mathcal{I} y$  soit  $x \mathcal{P} y$  soit  $x \mathcal{Q} y$  soit  $x \mathcal{R} y$
- $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cup \mathcal{I}$
- $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$ .

Le quadruplet  $(\mathcal{I}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$  forme ce qu'on appelle un système relationnel fondamental de préférence (SRFP).

Ces relations peuvent être combinées pour former de nouvelles relations ; à titre d'exemple :

- ( $\sim$ ) Non-préférence :  $a(\mathcal{I} \cup \mathcal{R})b \Leftrightarrow a \sim b$
- ( $\succ$ ) Préférence :  $a(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})b \Leftrightarrow a \succ b$
- ( $S$ ) Surclassement :  $a(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{I})b \Leftrightarrow a S b$

Ainsi donc une structure de préférence peut être complètement caractérisée par la définition d'une relation de "préférence au sens large" :

$$a S b \quad \text{si} \quad a \mathcal{P} b \quad \text{ou si} \quad a \mathcal{I} b$$

La relation de préférence au sens large est donc la réunion d'une relation de "préférence au sens strict" (relation  $\mathcal{P}$ ) et d'une relation d'indifférence (la relation  $\mathcal{I}$ ). La relation de préférence au sens large est aussi appelée relation de surclassement, notée  $S$ .

### 1.2.4 Extensions de la structure de préférence ordinale

Dans le modèle des structures de préférences, on n'autorise que les réponses oui ou non à la question “ $x$  est-il au moins aussi bon que  $y$ ?”. Cependant, on pourrait vouloir apporter des précisions à cette réponse, par exemple en incluant des informations sur l'intensité de la préférence, ou encore des informations sur la crédibilité de la proposition “ $x$  est préféré à  $y$ ”, ou modéliser des situations d'hésitation (voir, par exemple, un modèle de préférences un peu plus général présenté dans [138]). De nombreuses structures de préférences ont été étudiées dans la littérature. Certaines permettent de prendre en compte des seuils d'indifférence, d'autres acceptent l'incomparabilité entre alternatives, d'autres incluent la notion d'incertitude ou d'imprécision. La première extension classique est la structure de préférence qualitative, qui ajoute une idée d'intensité aux préférences ; nous présentons cette extension ci-dessous.

#### Structure de préférence qualitative

Une structure de préférence qualitative sur  $E$  est un couple  $(\langle \mathcal{V}, \succeq \rangle, u)$  où  $\langle \mathcal{V}, \succeq \rangle$  est une structure de valuation quantitative formée d'un ensemble  $\mathcal{V}$  totalement ordonné par  $\succeq$  et  $u$  est une fonction d'utilité de  $E$  dans  $\mathcal{V}$ .

En d'autres termes, une structure de préférence qualitative associe à chaque alternative une valuation. Aucune hypothèse spécifique n'est requise sur l'espace de valuation, mis à part le fait qu'il soit totalement ordonné.

#### Exemple de $\langle \mathcal{V}, \succeq \rangle$

$\mathcal{V} = \{mdiocre, mauvais, moyen, bon, excellent\}$  : un tel espace pourra être muni de la relation d'ordre  $\succeq$  définie comme suit :

$$excellent \succeq bon \succeq moyen \succeq mauvais \succeq mdiocre$$

Le modèle de représentation des préférences introduit avec la structure de préférence qualitative, s'il est plus riche que la structure de préférence ordinale, est cependant trop pauvre pour effectuer des comparaisons entre les intensités. Pour pallier ce manque d'expressivité, la plupart des travaux s'intéressent à des structures de valuation numériques, qui

possèdent une loi de composition interne, permettant notamment d'ajouter les valuations, et surtout de faire leur différence.

### Structure de préférence cardinale

Une structure de préférence cardinale sur  $E$  est un couple  $(\langle \mathcal{V}, \succeq, \oplus \rangle, u)$  où  $(\langle \mathcal{V}, \succeq \rangle, u)$  est une structure de préférence qualitative et  $\oplus$  est une loi de composition interne associative et commutative sur  $\mathcal{V}$  ayant les propriétés suivantes :

- Monotonie :  $\forall a, b, c \in \mathcal{V}$  tel que  $a \succeq c$ , on a :  $(a \oplus b) \succeq (c \oplus b)$
- Élément neutre :  $\forall a \in \mathcal{V}, a \oplus \epsilon = a$ .
- Élément absorbant :  $\forall a \in \mathcal{V}, a \oplus \lambda = \lambda$
- Différence :  $\forall \beta$ , si  $\beta \succeq \alpha$  alors  $\max\{\gamma/\alpha \oplus \gamma = \beta\}$  noté  $\beta \ominus \alpha$  existe et est unique.

En d'autres termes,  $\oplus$  est une conorme pour laquelle la notion de différence est définie et  $\langle \mathcal{V}, \succeq, \oplus \rangle$  est un monoïde commutatif totalement ordonné. Classiquement, on choisit des utilités à valeurs réelles (soit  $\mathcal{V} = \overline{\mathbb{R}}$  ou  $\mathcal{V} = \overline{\mathbb{R}^+}$ ) ou à valeurs entières ( $\mathcal{V} = \overline{\mathbb{N}}$ ), ces espaces de valuation étant munis de l'ordre naturel  $\leq$  sur les nombres, et de la loi  $+$  (cf. [40]).

Dans cette définition la fonction  $u$  est appelée fonction d'utilité. Cette définition de fonction d'utilité est plus générale que celle qui est classiquement introduite dans les ouvrages traitant de la théorie du welfarisme qui ne considèrent que des fonctions d'utilités définies sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^+$ . Notre point de vue s'inspire davantage des formalismes introduits en intelligence artificielle pour la modélisation des préférences au sens large, par exemple dans les problèmes de Satisfaction de Contraintes Valuées (notion de structure de valuation juste), le cadre de Problème de Faisabilité et d'Utilité, ou les problèmes de Partage.

### 1.2.5 Préférence individuelle

La théorie du choix social étudie les règles d'évaluation et de décision collectives en se plaçant au plus haut niveau d'abstraction et de formalisme. Ces décisions doivent cependant rester les plus fidèles aux opinions individuelles des membres de la société ou collectivité. Il apparaît que la théorie du choix social veut rester le plus démocratique, c'est-à-dire

refléter le choix « du peuple, pour le peuple et par le peuple ». La décision collective issue de la confrontation des préférences individuelles de chaque membre n'en est, dès lors, qu'un résumé.

D'après ce qui a été dit précédemment,  $x\mathcal{R}y$  signifie que  $x$  est au moins aussi bon que  $y$ . Le graphe de  $\mathcal{R}$  ainsi défini est obtenu en résumant les préférences de chaque agent électeur : c'est l'agrégation des préférences de chaque  $x \in A$ . Ainsi, pour une relation de préférence  $\mathcal{R}$ , on notera  $\forall i \in N, \mathcal{R}_i$ , la préférence de l'électeur  $i$ . Alors,

$\forall x, y \in A, \forall i \in N, x\mathcal{R}_i y$  signifie que l'individu  $i$  trouve  $x$  au moins aussi bon que  $y$ .

Cette définition peut être étendue aux relations  $\mathcal{I}, \mathcal{S}$  et  $\mathcal{P}$ .

### 1.3 Agrégation de préférences et fonctions de choix social

L'agrégation consiste à rassembler les différentes préférences individuelles en une seule fonction traduisant une préférence globale qui respecte au mieux possible les préférences exprimées ; elle permet de désigner le meilleur candidat. Sa définition correspond à la définition d'une fonction de choix social.

L'importance, dans la société, d'une méthode bien définie d'agrégation semble avoir ses origines à la révolution française (1789), notamment avec la participation active des mathématiciens comme Condorcet et Borda. Chacun d'eux a présenté une méthode d'agrégation des préférences des individus dans la société en vue de ressortir une préférence collective. Leurs travaux constituent le fondement de la mathématique sociale.

Ce qui reste frappant est que les travaux de Borda et Condorcet sont restés presque dans les oubliettes jusqu'au début des années 1950 avec les travaux de Kenneth Arrow. Ce dernier avoue lui-même, lors de la deuxième édition de *Social Choice and individual Values* [8], n'avoir eu connaissance des travaux de Borda ou Condorcet qu'après 1951. Arrow connaissait cependant le paradoxe de Condorcet – qu'il nomme le “célèbre paradoxe électoral” – sans l'attribuer à son auteur.

### 1.3.1 Formulation de la problématique

La problématique se formule comme suit : Etant donné un groupe d'individus exprimant leurs préférences sur un ensemble de candidats et que ces préférences soient fondées sur des critères ou points de vues opposés les uns aux autres ; le problème doit consister à aider ce groupe à effectuer des choix collectifs de manière rationnelle et démocratique en restant le plus fidèle aux opinions ou préférences individuelles de chacun de ses membres.

Les travaux de Borda et Condorcet ont, de manière remarquable, permis de répondre, quoique partiellement, à cette préoccupation. En effet, en 1951, Arrow signe, d'après certains auteurs, "la mort de l'économie du bien-être". Cette conclusion est remise en cause par Marc Fleurbaey et Philippe Mongin [80] qui affirment déjà dans le titre de leur article que la nouvelle de la mort de l'économie du bien-être est une grande exagération.

Tout de même, nous verrons quelques fonctions usuelles de choix social avant d'établir des résultats classiques de la théorie de choix social.

**Définition 1.11 (Meilleur candidat)** Soit  $x \in A$ , un candidat et  $\mathcal{R}$  une relation de préférence sur  $A$ . On dit que  $x$  est le meilleur candidat de  $A$  si  $\forall y \in A, x\mathcal{R}y$ .

**Définition 1.12 (Profil)** Un "profil" ou "mode de scrutin" est l'association d'un quasi-ordre à chaque votant. Si  $\text{Card}(N) = n$  alors le profil  $p$  est formé de  $n$  quasi-ordre sur  $A$ .  $p \equiv (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \dots, \mathcal{R}_n)$  où les  $\mathcal{R}_i$  sont les préférences des  $i \in N$ .

**Définition 1.13 (Election)** Soit  $A$  un ensemble fini d'actions et  $p$  un profil. Le couple  $(A, p)$  est appelé situation ou élection.

**Définition 1.14 (Fonction de Transformation des Préférences [127])** Une Fonction de Transformation des Préférences (FTP) est une fonction  $\mathcal{N}$  qui associe à tout profil un autre profil, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} : \{\text{profils}\} &\longrightarrow \{\text{profils}\} \\ p &\longmapsto \mathcal{N}(p) = p' \end{aligned}$$

Une FTP est donc une transformation dans l'ensemble des profils sur  $A$ .

**Définition 1.15 (Préférence exhaustive [127])** Soit  $N$  l'ensemble d'électeurs et  $A$  l'ensemble des candidats. Une relation de préférence  $\succ$  est dite exhaustive (ou totale) si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $\forall i \in N, \forall x, y \in A : x \succ_i y$  ou  $y \succ_i x$
- $\forall x, y, z \in A : x \succ_i y$  et  $y \succ_i z \Rightarrow x \succ_i z$

**Définition 1.16 (Pseudo-vainqueur de Condorcet [127])** Soit  $p$  un profil tel que les préférences des électeurs ne sont pas exhaustives et  $\mathcal{N}$  une FTP telle que  $\mathcal{N}(p) = p'$  est un profil des préférences exhaustives. Un vainqueur de Condorcet pour  $p'$  ainsi obtenu est appelé Pseudo-Vainqueur de Condorcet (PVC).

### 1.3.2 Fonction de choix social

L'agrégation consiste à sélectionner les meilleurs candidats tout en respectant au mieux possible les préférences des électeurs. Sa définition correspond à la définition d'une fonction de choix social [62, 101].

**Définition 1.17 (Fonction de choix social)** Une fonction de choix social est une fonction  $\mathcal{C}$  qui associe à toute situation (élection) un sous-ensemble non vide de  $A$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \{situations\} &\longrightarrow \mathcal{K} \subset A \\ (A, p) &\longrightarrow \mathcal{C}(A, p) \subseteq A \text{ avec } \mathcal{C}(A, p) \neq \emptyset \end{aligned}$$

#### Propriétés d'une fonction de choix social [128]

Pour une situation donnée, il peut y avoir plusieurs manières d'agréger les préférences individuelles. Cependant, il est préférable que la méthode d'agrégation choisie remplisse un certain nombre de propriétés traduisant la notion de démocratie, à savoir :

**Propriété 1 (Domaine universel)** Le classement des candidats doit dépendre des préférences individuelles de chaque électeur, sans distinction, et il faut en toute circonstance un résultat précis, c'est-à-dire la méthode d'agrégation doit fonctionner dans tous les cas. Le domaine est standard s'il est universel et  $|A| \geq 3$  et  $|N| \geq 3$ . Où  $|A|$  désigne le nombre d'éléments que comprend  $A$ .

**Propriété 2 (Homogénéité)** Une fonction de choix social  $\mathcal{C}$  satisfait la propriété d'homogénéité si et seulement si

$$\mathcal{C}(A, kp) = \mathcal{C}(A, p) \quad \forall \quad k \in \{1, 2, \dots\}$$

où  $kp$  est la reproduction du profil  $p$   $k$  fois.

Si chaque votant se transforme donc en  $k$  votants (avec  $k > 1$ ) alors le candidat élu reste le même.

**Propriété 3 (Anonymat)** Soient  $\mathcal{C}$  une fonction de choix social,  $\pi$  une permutation sur  $N$  et  $p(p_1, p_2, \dots, p_n)$  un profil. La fonction de choix social  $\mathcal{C}$  satisfait la propriété d'anonymat si

$$\mathcal{C}(A; p_1, p_2, \dots, p_n) = \mathcal{C}(A; p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, \dots, p_{\pi(n)}).$$

Par conséquent si  $A = \{x, y\}$  et  $p, p'$  sont deux profils tels que  $\forall i \in N, \mathcal{R}'(x, y) = \mathcal{R}'_{k(i)}(x, y)$ . On dira que  $\mathcal{C}$  satisfait la propriété d'anonymat si  $\mathcal{C}(A, p) = \mathcal{C}(A, p')$ .

**Propriété 4 (Neutralité)** Une fonction de choix social  $\mathcal{C}$  est neutre si lorsque  $\mu$  est une permutation sur  $A$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  est un profil et  $\forall x, y \in A$ , on a  $\mu(x)p_i^\mu \mu(y)$  si et seulement si

$$\mu(x) \in \mathcal{C}(A; p_1, p_2, \dots, p_n)$$

. Par conséquent si  $A = \{x, y\}$  et  $p, p'$  sont deux profils tels que  $\forall i$

$$I_i(x, y) = I'_i(x, y)$$

et

$$P_i(x, y) = 1 - P'_i(x, y).$$

On dira que  $\mathcal{C}$  satisfait la propriété de neutralité si lorsque

$$\mathcal{C}(A, p) = \{x\} \text{ on a } \mathcal{C}(A, p') = \{y\}$$

$$\mathcal{C}(A, p) = \{y\} \text{ on a } \mathcal{C}(A, p') = \{x\}$$

$$\mathcal{C}(A, p) = \emptyset \text{ on a } \mathcal{C}(A, p') = \emptyset$$

$$\mathcal{C}(A, p) = \{x, y\} \text{ on a } \mathcal{C}(A, p') = \{x, y\}$$

Une fonction de choix social est donc anonyme si lorsque chaque votant renverse sa préférence, le candidat retenu change aussi.

**Propriété 5 (Monotonie)** Une fonction de choix social  $\mathcal{C}$  satisfait la propriété de monotonie si

$$x \in \mathcal{C}(A, p) \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}(A, p')$$

où  $p'$  est un profil obtenu à partir de  $p$  en le modifiant favorablement pour  $x$  vis-à-vis d'au moins une action  $y$  dans au moins un des  $n$  quasi-ordres de  $p$ .

Si un ou plusieurs électeurs reclassent mieux un candidat  $x$ , alors  $x$  ne doit pas en définitive être moins bien placé dans cette élection. Autrement dit, si  $x$  est élu lors d'une première élection et que lors d'une seconde, un votant qui avait exprimé un vote en défaveur de  $x$  change d'avis en faveur de  $x$ , alors  $x$  est encore élu.

**Propriété 6 (Indépendance des actions non-pertinentes)** Si  $p$  et  $p'$  sont deux profils qui, restreints à un sous-ensemble d'actions  $A'$  de  $A$ , sont identiques alors  $\mathcal{C}(A', p) = \mathcal{C}(A', p')$ . En d'autres termes, pour classer par exemple trois candidats parmi plusieurs autres, il doit suffire de connaître les préférences de chaque votant pour ces trois candidats – leurs choix pour les autres ne devant en rien modifier le classement entre ces trois candidats.

**Propriété 7 (Explication transitive)** Une fonction de choix social  $\mathcal{C}$  admet une explication transitive si  $\forall$  profil  $p$ , il existe une relation  $\Omega$  réflexive, transitive et complète – c'est-à-dire une relation d'équivalence – telle que

$$\mathcal{C}(a, p) = \{x \in A / x\Omega y, \forall y \in A\}$$

Si  $x$  est préféré à  $y$  et  $y$  est préféré à  $z$  alors la méthode d'agrégation doit garantir que  $x$  est préféré à  $z$ . Autrement dit, si  $x$  est élu lors d'une élection et que lors d'une seconde élection des changements d'ordre apparaissent mais affectant seulement d'autres candidats que  $x$ , alors  $x$  doit être élu aussi à cette seconde élection.

**Propriété 8 (Unanimité ou Pareto)** Une fonction de choix social est unanime(ou pareto-consistante) si

$$\forall a, b \in A, \quad aP_i b \quad \forall i \in N \Rightarrow aPb.$$

Si tous les électeurs préfèrent le candidat  $x$  au candidat  $y$  alors  $x$  doit être le vainqueur à l'élection. Autrement dit, si tous les votants préfèrent  $x$  à  $y$  alors  $y$  ne peut être élu.

### 1.3.3 Quelques fonctions de Choix Social

#### La règle de majorité simple

La règle de majorité simple est définie pour un ensemble  $A$  qui se réduit à deux actions seulement. Mais avant de définir cette règle, nous allons introduire une notation qui sera valable dans ce paragraphe mais également dans la suite de notre thèse.

Soit  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  un profil. Notons :

- $p(x, y)$  le nombre de votants  $i \in N/xP_iy$  dans le profil  $p$  ;
- $x\mathcal{W}_p y \Leftrightarrow p(x, y) > p(y, x)$  dans le profil  $p$  ;
- que les actions  $x$  et  $y$  sont égales par simple majorité si

$$p(x, y) = p(y, x) \text{ (} x \text{ ex aequo } y \text{)}.$$

**Définition 1.18 (Majorité simple)** Soit  $A = \{x, y\}$ ,  $N$  l'ensemble fini de votants et le profil  $p$ . La fonction de choix social  $C$  est une règle de majorité simple si :

$$C(A, p) = \{x\} \text{ si } x\mathcal{W}_p y;$$

$$C(A, p) = \{y\} \text{ si } y\mathcal{W}_p x;$$

$$C(A, p) = \{x, y\} \text{ si } p(x, y) = p(y, x).$$

Les actions de l'ensemble  $C(A, p)$  sont appelées vainqueurs par simple majorité.

**Théorème 1.1 (Théorème de May [117, 99])** La règle de majorité simple est la seule règle de choix social qui satisfait les quatre propriétés suivantes :

- Le domaine universel,
- L'anonymat,
- La neutralité,
- La monotonie positive.

Les commentaires assez pointus sur ce célèbre théorème sont fournis par Kelly[99].

#### Vote uninominal à un tour

Chaque électeur vote pour, au plus, un candidat. Le candidat qui obtient le plus grand nombre de voix (majorité relative) est le vainqueur. Ce mode de vote est celui appliqué en RDC, notre pays. Voir [35, 36, 37, 65, 85].

### Vote uninominal à deux tours

Chaque votant vote pour au plus un candidat. Si un candidat obtient une majorité absolue ( $> 50\%$ ), il est élu. Sinon, un deuxième tour est organisé entre les deux candidats qui ont recueilli le plus de voix. Cette règle est la plus utilisée dans le monde pour les élections directes (à suffrage universel), mais elle n'a que très peu retenu l'attention des spécialistes en Théorie du Choix Social. Autre nom : Vote majoritaire à deux tours. Voir [65].

### Vote par approbation

Chaque votant approuve autant de candidats qu'il souhaite. Le candidat qui obtient le plus d'approbations est élu. Autre nom : Vote par assentiment. Voir [28], [30], [46], et [109].

### Vote alternatif

Chaque votant établit un rangement (éventuellement incomplet) de candidats. On compte d'abord le nombre de fois que chaque candidat apparaît en tête des rangements (son score plural). Le candidat qui obtient le score plural le plus bas est éliminé. Au tour suivant, les votes du candidat éliminé sont transférés au deuxième classé dans ses listes. La procédure est alors répétée jusqu'à ce qu'un candidat classé premier par une majorité absolue de tous les votes (originaux ou transférés) soit élu. Autres noms : Système de Hare, Vote Préférentiel Transférable, Instant runoff. Voir [68].

### Copeland

Chaque votant établit un rangement de candidats. On associe à chaque candidat  $a$  le score suivant : Pour chaque autre candidat  $b \neq a$ ,  $+1$  si une majorité préfère  $a$  à  $b$ ,  $-1$  si une majorité préfère  $b$  à  $a$  et  $0$  sinon. Le candidat élu est celui qui a le plus haut score de Copeland. Voir [58].

### Kemeny

Chaque votant établit un rangement de candidats. La règle définit le rangement final comme suit : Pour tout rangement  $R$  on calcule la somme, pour toute paire de candidats  $(a, b)$ , de nombres de votants qui sont d'accord sur la manière dont  $R$  range  $a$  et  $b$ . Alors  $R^*$  est choisi tel

qu'il maximise le nombre total d'approbations de  $R$ . Cette méthode est Condorcet-consistante. Autre nom : Rangement médian. Voir [166].

### Coombs

Cette méthode est similaire au vote alternatif mais, à chaque tour, si aucun candidat n'obtient la majorité absolue de votes, le candidat éliminé est celui qui est classé le plus souvent dernier. Voir [57].

### Jugement Majoritaire

Chaque votant classe chaque candidat selon une échelle prédéfinie exprimée dans un langage précis. Pour chaque candidat, on calcule sa mention médiane. Une règle de *tie-break* décrite par Balinski et Laraki [20] est utilisée pour départager des candidats avec des grades médians les plus élevés en vue d'en choisir le meilleur. Autres noms : Vote robuste (Robust Voting), Meilleur médian. Voir [25] et [105, 108].

### Simpson

Chaque votant établit un rangement de candidats. Une matrice de comparaison de votes par paire est calculée. Alors le candidat élu est celui qui est battu par la plus petite majorité (en faveur d'un autre candidat). Autres noms : Procédure Minimax, Règle de Kramer-Simpson. Voir [107].

### Borda

Cette méthode a été proposée par Borda. Chaque votant établit un rangement de candidats. Pour  $k$  candidats, chacun reçoit  $k - 1$  points chaque fois qu'il est classé premier,  $k - 2$  points chaque fois qu'il est classé deuxième, etc. Le dernier candidat de la liste reçoit 0 point. Le candidat élu est alors celui qui recueille le plus grand nombre de points. Voir [107].

### Black

Chaque votant établit un rangement de candidats. On choisit le vainqueur de Condorcet s'il existe sinon on choisit le vainqueur de Borda. Voir [34].

**Nanson**

Chaque votant établit un rangement de candidats. Le score de Borda est calculé. Les candidats dont les scores de Borda sont inférieurs ou égaux à la moyenne sont éliminés. Alors un nouveau compte de Borda est calculé avec le profil réduit et la procédure est répétée. Cette méthode est Condorcet-consistante. Voir [126].

**Vote par note**

Chaque votant attribue à chaque candidat autant de points qu'il souhaite entre zero et, par exemple, 10 points. Le candidat élu est celui qui recueille le plus grand nombre de points. Autres noms : Utilitarisme, Vote par scorage. Voir [12] et [28].

**Top cycle (Meilleur circuit)**

Chaque votant établit un rangement de candidats. Le tournoi majoritaire est calculé. Le meilleur circuit est le plus petit ensemble de candidats tel que tous les candidats dans cet ensemble battent tous les candidats qui n'appartiennent pas à cet ensemble. Cette méthode Condorcet-consistante ne spécifie pas comment défaire les nœuds (ce qui arrive quand il n'existe pas de vainqueur de Condorcet). Voir [102].

**Uncovered set (ensemble non-recouvert)**

Chaque votant établit un rangement de candidats. Le tournoi majoritaire est calculé. Un candidat  $a$  appartient à l'ensemble non recouvert si et seulement si, pour tout autre candidat  $b$ , soit  $a$  bat  $b$  soit  $a$  bat  $c$  qui bat  $b$ . Cette méthode Condorcet-consistante ne spécifie pas comment défaire les noeuds (ce qui arrive quand il n'existe pas de vainqueur de Condorcet). Autre nom : Kings procedure (en Théorie des graphes). Voir [102].

**Leximin**

Chaque votant attribue une mention à chaque candidat selon une échelle prédéfinie de grades. Chaque candidat  $k$  est alors évalué selon la pire de mention qu'il a reçu, soit  $g(k) = \min_v g(k, v)$ . Le candidat élu est celui qui obtient la meilleure mention  $g^* = \max_k g(k)$ . Si plusieurs candidats obtiennent la même évaluation  $g^*$ , le candidat élu est

celui qui obtient le moins de mention  $g^*$ . Cette règle est un important prix de référence en économie normative. Voir [12].

### Fishburn

Cette règle est une variante de l'ensemble non-recouvert qui est utilisée quand la relation majoritaire contient des noeuds (exactement autant de votants préfèrent  $a$  à  $b$  que  $b$  à  $a$ ). Voir [107].

### Untrapped set (ensemble non-immobilisé)

Cette règle est une variante de Top-Cycle qui est utilisée quand la relation majoritaire contient des noeuds (exactement autant de votants préfèrent  $a$  à  $b$  que  $b$  à  $a$ ). Voir [107].

## 1.3.4 Principe de Condorcet

La règle du Condorcet a vocation d'étendre la règle de majorité simple au cas  $|A| \geq 3$ .

**Définition 1.19 (Vainqueur de Condorcet [82, 113])** Soit un domaine standard. On considère toutes les paires d'actions appartenant à  $A \times A$ . Pour chacune de ces paires, on applique la règle de majorité simple.

On dira que l'action  $x$  est "vainqueur de Condorcet" si  $\forall y \in A$ , on a  $p(x, y) \geq p(y, x)$  i.e.  $\#\{i \in N : xP_i y\} > \frac{n}{2}, \forall x \in A \setminus \{a\}$ .

Le principe de Condorcet consiste donc à appliquer la règle de majorité simple à toutes les paires d'actions. Il existe cependant d'autres types de procédures où l'on procède par étapes c'est-à-dire qu'au lieu d'appliquer la règle de majorité simple à toutes les paires d'actions, on l'applique successivement à une séquence d'entre elles.

Par exemple pour un ensemble  $A$  de 3 actions, un ensemble  $N$  de 3 votants, considérons le profil  $p$  suivant :

$$p : \begin{cases} z & y & x \\ x & y & z \\ x & y & z \end{cases}$$

Pour commencer, comparons toutes les paires d'actions et appliquons le principe de Condorcet.

Comme  $p(x, z) = 2 > p(z, x) = 1$ ,  $p(x, y) = 2 > p(y, x) = 1$  et  $p(y, z) = 2 >$

$p(z, y) = 1$ , on a :  $x\mathcal{W}_p z$ ,  $x\mathcal{W}_p y$  et  $y\mathcal{W}_p z$ . Ainsi il est clair que  $x$  est vainqueur de Condorcet.

A présent, si nous procédons par étapes, comparons d'abord  $x$  et  $y$ . Comme  $p(x, y) = 2 > p(y, x) = 1$ , c'est l'action  $x$  gagnante qui est confrontée à l'action  $z$  restante. Comme  $p(x, z) = 2 > p(z, x) = 1$ , c'est l'action  $x$  qui est gagnante pour cette procédure.

Nous pouvons trouver des résultats qui diffèrent de ceux donnés par la règle de Condorcet en particulier lorsque le vainqueur n'existe pas [99].

### 1.3.5 Paradoxe de Condorcet

Le principal défaut du principe de Condorcet est sans aucun doute l'absence de vainqueur de Condorcet dans certaines situations. C'est ce qu'on appelle le *paradoxe de Condorcet*.

Regardons, pour illustrer ce paradoxe, l'exemple suivant où le nombre de votants et le nombre d'actions sont égaux à trois.

$$\text{Soit le profil } p : \begin{cases} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{cases}$$

On a donc ici  $z\mathcal{W}_p x$ ,  $x\mathcal{W}_p y$  et  $y\mathcal{W}_p z$ . Il n'y a donc pas de vainqueur de Condorcet. La détermination des vainqueurs de Condorcet ne correspond donc pas à la définition d'une fonction de choix social puisqu'il faut  $\mathcal{C}(A, p) \neq \emptyset$ .

### 1.3.6 Théorèmes d'Impossibilité

#### Définition 1.20 (Dictateur)

Le votant  $j \in N$  est appelé dictateur si  $\forall$  profil  $p (p_1, p_2, \dots, p_n), \forall x, y \in A$  tel que  $x \neq y$ , lorsque  $xP_j y$  alors  $xPy$ .

#### Le théorème d'impossibilité d'Arrow

Le théorème d'Impossibilité d'Arrow [6] établit l'impossibilité de construire une fonction de choix social sur base de préférences individuelles sans recourir aux comparaisons interpersonnelles [78].

Plus précisément Arrow fut le premier à énoncer un théorème qui établit qu'il est impossible qu'une fonction de choix social vérifie un certain nombre de propriétés sans qu'il existe un dictateur [8].

**Théorème 1.2 (Théorème Général de Possibilité)** *Il n'existe aucune fonction de choix social  $C$  telle que :*

- son domaine soit standard ;
- elle satisfasse la condition forte de Pareto ;
- elle satisfasse la propriété d'indépendance des actions non-pertinentes ;
- elle admette une explication transitive ;
- qu'il n'existe aucun votant dictateur.

C'est un résultat étonnant car à première vue les conditions ne semblent pas en désaccord les unes des autres. De plus, on sait qu'il existe une quantité de fonctions de choix social différentes mais celles-ci ne peuvent remplir la liste ci-dessus des conditions. La démonstration de ce théorème est donnée dans [6] et [8]. Une autre démonstration originale (par absurde) est donnée par Benoît Lengaigne et Nicolas Postel dans [112].

### Théorème d'Impossibilité de Sen

Le célèbre paradoxe énoncé par Sen et illustré avec brio par l'exemple désormais classique de *L'amant de lady Chatterley* reflète le conflit entre les conditions posées sur la règle de choix collectif et qui, *a priori*, paraissent raisonnables. Cet exemple est illustré dans [145] et [144].

**Théorème 1.3** *Il n'existe aucune fonction de choix social  $C$  telle que :*

- son domaine soit universel ;
- elle satisfasse la condition faible de Pareto ;
- il n'existe au minimum deux dictateurs.

Ce qui est d'autant plus surprenant, c'est que la liste est relativement courte. Les conditions qui y figurent semblent désirables et incontournables pour établir une fonction de choix social qui soit démocratique [147].

Les théorèmes d'impossibilité signent pour certains auteurs la mort de l'économie normative. Plus tard, Sen va démontrer qu'ils étaient trop pessimistes. Il en fait une démonstration notamment dans son discours lors de la cérémonie de remise du prix Nobel d'économie qu'il a reçu en

1998 et qui fut publié une année plus tard sous le thème “La possibilité du choix social” [150].

Deux autres théorèmes d'impossibilité ont été énoncés par Gibbard [86, 87]. Ce ne sont en fait que des extensions du théorème de Sen.

### **Théorème de Gibbard-Satterthwaite**

Le théorème d'Arrow a stimulé une importante littérature tant il semble puissant. Ce dynamisme a notamment conduit deux chercheurs, Gibbard et Satterthwaite, à prouver — indépendamment — un autre théorème d'impossibilité tout aussi saisissant à partir du travail d'Arrow. Leur résultat, que l'on désigne comme le théorème de Gibbard-Satterthwaite, prouve qu'aucun mode de scrutin ne peut garantir que des électeurs ne mentent pas sur leurs préférences, nous le verrons à la suite, ce théorème n'épargne aucun mode de scrutin : même le vote majoritaire à deux tours cher à la France n'y échappe pas.

**Définition 1.21 (Manipulabilité)** Soit  $X$  l'ensemble des candidats. Soit  $\mathcal{B}(X)$  l'ensemble des préférences sur  $X$  (c'est-à-dire l'ensemble des classements possibles des candidats de  $X$ ). Soit  $\succsim_i$  la préférence sur  $X$  de l'individu  $i$ . Soit  $R$  un profil de préférence de la population entière et  $R_{-i}$  le profil de préférence de la population sans l'individu  $i$ . On dit que l'individu  $i$  peut manipuler la fonction de choix social  $f$  si :  $\exists(\succsim'_i) \in \mathcal{B}(X) : f(\succsim'_i \cup R_{-i}) \succsim_i f(R)$ .

On peut définir un vote comme stratégique lorsqu'un électeur appuie le parti ou le candidat pour lequel il anticipe une amélioration à son utilité après avoir considéré les préférences et stratégies des autres acteurs [100].

### **Exemple 1 : Vote stratégique**

Afin de mieux comprendre cette définition, présentons un exemple détaillé proposé par Simon Labbé St-Vincent [100]. Prenons une élection fictive où trois partis se présentent : le parti A, le parti B et le parti C. Voici le raisonnement stratégique d'un électeur rationnel : Ali. Ali préfère le parti A au parti B qu'il préfère au parti C. Pour clarifier, nous dirons que son utilité est de 5 si A gagne, de 3 si B gagne et de 0 si C gagne. Il a

donc intérêt à ce que son préféré (A) remporte, mais il préfère toutefois que son second choix (B) soit élu plutôt que son pire choix (C).

Selon Ali, les préférences des autres électeurs sont les suivantes : 1 % préfèrent A, 49 % préfèrent B et 50 % préfèrent C. Il est toutefois incertain de cette information, mais ne croit pas que ses estimations s'éloignent de plus de 5 points de pourcentage de ces estimations. Il croit que s'il vote de façon sincère, la probabilité que son vote permette à A de gagner est nulle puisque, même si tous les électeurs préférant A votent pour ce parti, A obtient trop peu de vote pour obtenir un siège. Dans ce cas, C gagnera probablement puisqu'il est perçu comme étant légèrement en tête devant B. Cette victoire de C procurerait à Ali une utilité de 0.

Toutefois, s'il déserte son premier choix, Ali croit avoir une probabilité non nulle de donner la victoire à B qui est dans une course serrée contre C. D'autres électeurs pourraient aussi suivre ce raisonnement et désertir A pour B. Si B gagne au lieu de C, l'utilité de Ali est 3 de plus. Ali vote donc pour B. Puisque nous avons des informations sur les préférences et les perceptions de cet électeur, nous pouvons affirmer qu'Ali anticipe une amélioration de son utilité en votant pour B après avoir considéré les préférences et stratégies des autres électeurs. Il vote donc de manière stratégique pour un autre parti que son préféré dans l'espoir d'aider son second choix B et éviter le pire scénario pour lui, soit l'élection de C.

Désertir le premier choix est un comportement pouvant être considéré rationnel si l'électeur anticipe un plus fort gain en agissant de la sorte. Par exemple, s'il croit que son premier choix ne parviendra pas à obtenir suffisamment de votes pour être élu et qu'un parti autre que son pire choix a des chances d'être élu. Dans ce cas, l'électeur donne son appui à un autre parti que son favori et risque ainsi de ne pas faire le gain maximum. En effet, s'il se trompe dans ses prévisions du comportement des autres électeurs et qu'il avait effectivement pu donner la victoire à son premier choix par son seul vote - un événement peu probable - sa désertion stratégique est dans ce cas une erreur, car ce vote lui nuit au final. Nous utiliserons le terme "vote sincère" lorsque le vote va au premier choix de l'électeur, qu'il soit viable ou non. Un vote qui n'est pas pour le parti préféré de tous n'est pas d'office une désertion stratégique, mais on sait avec certitude qu'il n'est pas sincère [100].

Certains auteurs définissent le vote stratégique comme une “*dévi-ation du vote sincère*” [1]. Toutefois, cette définition peut parfois être problématique puisqu’un vote stratégique, tel que défini dans cette thèse, peut également être attribué au premier choix.

### Exemple 2 : Vote stratégique pour le premier choix

Pour nous en convaincre, prenons l’exemple de Simon Labbé St-Vincent [100] : Un autre électeur rationnel, Boris, a une utilité de 0 pour A, 5 pour B et de 3 pour C. Sa perception de la distribution des préférences des autres électeurs est la même que Ali, soit 1 % A, 49 % B et 50 % C avec la même incertitude. Il croit que s’il vote pour C, son vote a une forte probabilité de contribuer à sa victoire.

En effet, B est second dans la course contre le parti C en tête. Il est possible que certains électeurs, comme Ali, décident de désertir A pour appuyer B. Selon Boris, un seul vote pourrait faire la différence entre une victoire de B (utilité de 5) ou de C (utilité de 3). Son vote pour B pourrait contribuer à augmenter son utilité de 2 points. Ainsi, Boris vote pour B, son parti préféré pour lequel il anticipe une amélioration à son utilité, par rapport aux autres choix, après avoir considéré les préférences et stratégies des autres électeurs. Cet exemple illustre que parfois, les électeurs votent de façon stratégique pour un premier choix.

### Remarques :

Ainsi une fonction de choix social est manipulable quand il existe un individu pour lequel, sous un certain profil de préférences, le résultat est strictement meilleur quand celui-ci annonce une préférence  $\succ'_i$  différente de sa préférence véritable  $\succ_i$ . Comme l’on suppose que les électeurs sont rationnels, cela revient à dire qu’un tel électeur anticipe le résultat de l’élection selon qu’il vote sincèrement ou stratégiquement, et qu’il prévoit que le résultat de son vote stratégique sera meilleur, toutes choses égales par ailleurs. Farquharson [67] le décrit comme l’élimination des stratégies de vote dominées, c’est-à-dire des façons de voter qui ne donnent pas le meilleur résultat. L’électeur n’est alors pas incité à révéler sa véritable préférence. Notons qu’en aucun cas le fait de mentir sur ses préférences ne peut permettre à des électeurs d’obtenir leur premier choix ; ils doivent toujours se contenter d’un *second-best*.

Inversement, on dit qu'une fonction de choix social est non-manipulable lorsque, quel que soit le profil de préférence de la société, aucun individu n'a intérêt à manipuler, c'est-à-dire à voter autrement que selon sa préférence véritable. Le vote stratégique et le vote sincère coïncident, et ce pour tout électeur.

**Théorème 1.4 (Théorème de Gibbard-Satterthwaite)** *S'il y a au moins trois candidats, toute fonction de choix social universelle, surjective et non-manipulable est dictatoriale.*

En fait l'universalité, la non-manipulabilité et la non-dictature sont ici des conditions incompatibles. Comme il est inadmissible d'avoir un mode de scrutin dictatorial dans une démocratie, ce théorème signifie donc que pour une élection entre trois candidats ou plus, il est possible que des électeurs ne révèlent pas leurs véritables préférences. Qu'à cela ne tienne, on pourrait peut-être imaginer une procédure de vote qui permette de reconstituer, à partir des avis émis, la véritable préférence des électeurs. Impossible d'après le principe de révélation de Gibbard : s'il existait une telle règle "indirecte" de vote, alors il existerait une règle de vote non-manipulable, ce qui est contredit par le théorème. Il faut donc renoncer, sauf en changeant les hypothèses, à obtenir à coup sûr les véritables préférences des électeurs. Plus exactement, si une élection oppose plus de deux candidats, on ne peut être certain que les préférences exprimées par les électeurs soient sincères. Comment dès lors pouvoir en tirer une quelconque leçon pour les décisions à prendre ?

### 1.3.7 Propriétés démocratiques d'une fonction de choix social [95]

Etant donné l'impossibilité de réunir certaines propriétés démocratiques sans qu'il y ait d'électeur décisif (dictateur), il est souhaitable de prendre pour une démocratie les quatre conditions ci-après :

- l'homogénéité ;
- la monotonie positive ;
- la condition faible de Pareto.
- la neutralité

Ces conditions sont celles qui sont reprises dans la quasi-totalité des constitutions dans le monde. La violation de l'une d'elles constitue un paradoxe électoral non souhaitable pour une démocratie. D'ailleurs les qualificatifs qui accompagnent souvent une élection sont : transparente,

neutre, équitable, véridique, etc. Les propriétés précitées sont non seulement moins restrictives mais conforme à l'idée première que le citoyen lambda se fait d'une élection démocratique.

## 1.4 Sens du vote pour l'électeur

D'une manière générale, le but d'une élection est de recueillir l'avis d'une population et de s'en servir pour prendre une décision qui concerne cette population. Le fait même d'organiser une élection implique la reconnaissance d'une certaine légitimité de la population à donner son avis [128].

Un système de vote est un ensemble de procédures qui déterminent comment sont élus les gens commis à une fonction. Ces procédures englobent la manière dont le vote est structuré, comment les électeurs expriment leurs votes, comment les votes sont comptabilisés et comment les vainqueurs sont retenus. Les systèmes de vote sont donc des moyens par lesquels les votes sont traduits en sièges [4, 65].

Le théorème d'Arrow nous montre que le passage des avis de chaque individu à l'avis d'une population est problématique et remet en cause le concept même de volonté générale. Nous venons désormais de voir que le biais peut également concerner les avis de chaque individu s'ils sont émis.

Appelons "réussite" le fait que le vote stratégique aboutisse à un résultat différent du vote sincère. Il est difficile de dire si la réussite d'un vote stratégique donnera un résultat "meilleur" ou "pire" que le vote sincère. Si l'on reprend l'exemple donné dans la Table 1.1, on constate que le vote stratégique a permis aux 10% préférant le candidat  $c$  et aux 44% préférant le candidat  $b$  de s'en sortir avec un meilleur résultat. Mais cela a également frustré 46% de la population, puisque  $a$  aurait été élu si tout le monde avait voté sincèrement. On aurait donc tendance à dire que dans l'ensemble, la manipulation du scrutin a été bénéfique. Ce serait conclure trop vite. Comment en effet mesurer le gain ou la perte de bien-être dans les deux cas ? Peut-on affirmer qu'obtenir son premier choix plutôt que son second apporte exactement le même bénéfice qu'obtenir son troisième choix à la place de son deuxième choix ?

Il est très difficile, voire impossible, d'obtenir une intensité des préférences. Car il n'est pas évident d'obtenir une information quantifiée sur les préférences d'un individu. Imaginons même que l'on demande à un individu de répartir 100 points entre quatre candidats, qui reçoivent respectivement 45, 35, 15 et 5 points. Cela ne prouve aucunement que l'individu préfère le premier candidat trois fois plus que le troisième (si tant est que cela ait un sens de préférer "trois fois plus").

Pour en revenir à notre exemple, il nous est donc impossible de dire précisément si le vote stratégique se révèle bénéfique ou non pour une population entière. C'est justement le cœur du débat autour du vote que de déterminer ce qui est le mieux pour une population.

Si les électeurs, en effet, connaissent les préférences des autres, alors ils peuvent anticiper ce résultat. Ainsi la troisième frange de la population, qui avait voté pour  $c$ , peut savoir que c'est  $a$  qui va être élu, le candidat qu'elle aime le moins. Si ces 10% d'électeurs décident de voter  $b$  au lieu de  $c$ , ils font élire  $b$  (avec 54% des voix) au lieu de  $a$ . Ils ont donc décidé de ne pas "gâcher" leur vote pour le candidat  $c$ , qui ne sera de toute façon pas élu, et obtiennent ainsi un meilleur résultat que s'ils avaient voté sincèrement puisqu'ils préfèrent  $b$  à  $a$ .

Dès lors, est-il dommageable qu'un mode de scrutin soit manipulable ? Rappelons d'abord que la manipulabilité d'un mode de scrutin n'implique pas nécessairement que certains électeurs voteront stratégiquement. C'est une possibilité qui dépend des préférences de l'ensemble de l'électorat. Par exemple, le scrutin à la pluralité est manipulable, comme nous l'avons montré plus haut ; mais si chaque électeur considère le candidat  $a$  comme son préféré, alors aucun électeur n'a intérêt à voter différemment de sa préférence sincère.

Cela étant dit, si l'on considère que le rôle d'un vote est avant toute chose de recueillir les avis de la population, alors la manipulabilité d'un mode de scrutin est fâcheuse, car elle conduit à une prise de décision à partir d'informations faussées.

TABLE 1.1 – Exemple de la manipulabilité. Le tableau se lit verticalement. Par exemple 44% de la population préfèrent  $b$  à  $a$  et  $a$  à  $c$ .

46%	44%	10%
$a$	$b$	$c$
$b$	$a$	$b$
$c$	$c$	$a$

Il nous est en effet impossible, à partir du simple résultat d'une élection de savoir dans quelle mesure le vote a été stratégique. Il semble pourtant légitime de pouvoir s'assurer que tous les électeurs ont la même opportunité d'exprimer leur réelle préférence. D'autant que la manipulabilité fait appel à la réflexion stratégique de chacun, et face à laquelle nous ne sommes pas tous de compétence égale. Ainsi l'a fait en son temps remarquer Charles Dodgson (alias Lewis Carroll) [53, 54] en considérant que le vote stratégique faisait de l'élection "*more as a game of skill than a real test of the wishes of the electors.*" Il faudrait alors une véritable éducation civique :

*"As my own opinion is that it is better for elections to be decided according to the wish of the majority than of those who happen to have most skill in the game, I think it desirable that all should know the rule by which this game may be won."*

Mais il n'est sans doute pas aisé d'éduquer tout le monde aux considérations stratégiques du vote, même si le "vote utile" est souvent perçu de manière spontanée. Tâchons ici d'y faire attention et n'oublions pas que l'électeur réel n'est pas seulement un maximisateur de bien-être. Le fait ou non de voter stratégiquement suppose de connaître les préférences de tous les électeurs ; cela suppose aussi que chaque électeur est rationnel et ne cherche qu'à faire élire le meilleur candidat à ses yeux. Mais le vote peut être aussi considéré comme une communication entre un électeur et son gouvernement.

Surtout dans un grand pays, l'électeur, dont la voix a marginalement peu de poids, peut choisir de sacrifier son Pouvoir électoral et d'utiliser son vote comme message. Il indique alors sa véritable préférence ou, pire encore, vote pour un parti qui n'est ni son préféré, ni celui correspondant à un vote stratégique.

Ce qu'on appelle parfois "*vote contestataire*" est une façon de communiquer son mécontentement. Au lieu de favoriser l'avènement d'un candidat qui a des chances de réussir, l'électeur peut délibérément voter pour un candidat se positionnant en contestataire du gouvernement en place ou des grands candidats, même si ce candidat n'est pas son favori.

Pour qu'un électeur puisse voter stratégiquement, on a jusqu'ici supposé qu'il avait une information parfaite : il connaît exactement les préférences de tous les électeurs, et peut alors anticiper le résultat d'un vote sincère général. L'hypothèse est bien sûr irréaliste dans un pays de 32 millions d'électeurs comme la République Démocratique du Congo. De ce fait, certains ont pu critiquer la réalité du vote stratégique au niveau d'un pays, du fait justement de la variété des préférences et la difficulté de les quantifier. Dans cette situation, il est difficile pour un électeur de savoir si son vote sera *pivotal*, c'est-à-dire déterminant ou non [128].

Néanmoins, l'électeur peut avoir une information partielle (un signal) sur l'état des préférences. Il peut connaître approximativement l'état des préférences en s'appuyant sur des sondages et des habitudes politiques. D'où le rôle crucial que jouent les sondages dans le cas spécifique du scrutin majoritaire.

## 1.5 Paradoxes électoraux

Un *paradoxe électoral* (ou *paradoxe de vote*) peut-être défini comme un résultat qu'une procédure de vote peut produire et qui peut être perçu, au premier coup d'oeil, par certaines personnes comme surprenant ou contraire à leur intuition [71, 72, 96, 160].

Nous distinguons deux types de paradoxes électoraux relatifs à une procédure de vote :

- a) *Paradoxes simples* : Ce sont des paradoxes où les données pertinentes conduisent à un résultat "surprenant" et indésirable mais justifiable. Les données pertinentes incluent le nombre de votants, le nombre de candidats, le nombre de candidats devant être élus, l'ordre de préférence de tous les votants sur les candidats concurrents, la quantité d'informations que les votants ont vis-à-vis des ordres de préférence de tous les autres votants, l'ordre dans lequel

les votants expriment leurs votes si ceux-ci ne sont pas simultanés, l'ordre dans lequel les candidats sont votés s'ils ne le sont pas simultanément, si le vote est ouvert ou secret, la manière avec laquelle le *tie-break* est opéré, etc.

b) *Paradoxes conditionnels* : Ce sont des paradoxes où modifier une donnée pertinente et garder inchangées toutes les autres données pertinentes conduit à un résultat “surprenant” et indésirable mais justifiable.

Les paradoxes (simples et/ou conditionnels) sont décrits et analysés par Fishburn [75], Young [164], Gehrlein [81], Fishburn et Brams [77], Saari [140]; Moulin [125, 124], Merlin et Saari [119]; Merlin et Valognes [120], pour ne citer que ceux-là.

### 1.5.1 Paradoxes simples

Les six paradoxes simples les plus connus qui peuvent affecter des procédures de vote conçues pour élire un candidat sur deux ou plusieurs sont les suivants :

#### Paradoxe de Condorcet (ou paradoxe du vote)

Etant donné que l'ordre de préférence de tous les votants sur tous les candidats concurrents est transitif, l'ordre (agrégé) de préférence de la majorité de votants sur les candidats peut néanmoins être intransitif lorsque plusieurs majorités sont composées de différentes personnes. Toutes les procédures de vote connues souffrent de ce paradoxe [56, 82].

#### Paradoxe du vainqueur de Condorcet

Un candidat  $x$  peut ne pas être élu en dépit du fait qu'il soit “vainqueur de Condorcet”, i.e., en dépit du fait que  $x$  soit préféré par une majorité de votants à tous ses concurrents [56, 82].

#### Paradoxe de la majorité absolue

Ce paradoxe est un cas particulier du paradoxe du vainqueur de Condorcet. Un candidat  $x$  peut ne pas être élu en dépit du fait qu'il soit le seul candidat à être classé en tête de liste par une majorité absolue de votants.

**Paradoxe du perdant de Condorcet (ou paradoxe de Borda)**

Un candidat  $x$  peut être élu en dépit du fait qu'il soit "perdant de Condorcet", i.e., en dépit du fait qu'une majorité de votants préfère tous les autres candidats à  $x$  [82]. Ce paradoxe est un cas particulier de la violation du principe de Condorcet énoncé par Smith [153]. Selon ce principe, s'il est possible de partitionner l'ensemble de candidats en deux sous-ensembles disjoints  $A$  et  $B$  tels que chaque candidat dans  $A$  est préféré, par une majorité absolue de votants, à tout candidat de  $B$ , alors aucun candidat dans  $B$  ne peut être élu à moins que tous les candidats dans  $A$  le soient aussi.

**Paradoxe du perdant absolu**

Ce paradoxe est un cas particulier du paradoxe du perdant de Condorcet. Un candidat  $x$  peut être élu en dépit du fait qu'il soit classé dernier par une majorité absolue de votants.

**Paradoxe de Pareto (ou paradoxe du candidat dominé)**

Un candidat  $x$  peut être élu tandis qu'un candidat  $y$  ne peut l'être en dépit du fait que tous les votants préfèrent  $y$  à  $x$  [75].

**1.5.2 Paradoxes conditionnels**

Les huit paradoxes conditionnels les plus connus qui peuvent affecter les procédures de vote conçues pour élire un unique candidat sont les suivants :

**Paradoxe du manque de monotonie (ou paradoxe de soutien additionnel)**

Si un candidat  $x$  est élu selon une distribution donnée de préférences des électeurs sur les candidats concurrents, il est possible que, *ceteris paribus*,  $x$  ne soit pas élu si certains votants apportent plus de soutien à  $x$  en améliorant la position de  $x$  dans leurs listes de préférence [153].

**Paradoxe de renforcement (ou paradoxe de la séparabilité)**

Si  $x$  est élu dans chacune de nombreuses circonscriptions, il est possible que, *ceteris paribus*,  $x$  ne soit pas élu si toutes les circonscriptions sont réunies en une seule circonscription [164].

### Paradoxe de troncature

Un votant peut obtenir un meilleur résultat si, *ceteris paribus*, il aligne dans sa liste seulement une partie de sa préférence sincère sur les candidats concurrents que s'il alignait dans sa liste sa préférence sincère complète [45, 77].

### Paradoxe de la non-participation

Ce paradoxe est une version extrémiste du paradoxe de troncature. Un votant peut obtenir un meilleur résultat s'il décide de ne pas participer à une élection que si, *ceteris paribus*, il décidait de participer à l'élection et voter sincèrement pour son candidat le plus préféré [77].

### Paradoxe de jumeaux

Ce paradoxe est un cas particulier du paradoxe de la non-participation. Deux électeurs ayant la même préférence peuvent obtenir un meilleur résultat si, *ceteris paribus*, l'un d'eux décide de ne pas participer à l'élection tandis que l'autre vote sincèrement [125].

### Violation de la condition du choix de sous-ensemble

La condition du choix de sous-ensemble requiert que quand il y a au moins deux candidats et que  $x$  soit le seul vainqueur, alors  $x$  ne doit pas devenir perdant quand bien même, *ceteris paribus*, un perdant serait retiré de la liste de candidats. Cette condition est mieux connue sous le nom d'*Indépendance des Alternatives Non-Pertinentes*. Elle stipule que l'ordre entre deux candidats quelconques  $a$  et  $b$  dans la préférence sociale ne devrait dépendre que du nombre de votants qui préfèrent  $a$  à  $b$  et du nombre de votants qui préfèrent  $b$  à  $a$  et non de l'existence ou de l'absence d'un troisième candidat (non-pertinent) [75, 76].

### Paradoxe du manque d'indépendance de chemin

Si le vote entre des candidats concurrents est conduit de manière séquentielle, il est possible que le candidat  $x$  soit élu suivant une certaine séquence mais pas, *ceteris paribus*, selon une séquence alternative.

## Paradoxe du vote stratégique

*Ceteris paribus*, un votant peut obtenir un meilleur résultat s'il vote stratégiquement, i.e., s'il ne vote pas selon sa vraie préférence. Toutes les procédures de vote connues souffrent de ce paradoxe [86, 141].

## 1.6 Paradoxes du scrutin à la proportionnelle [65]

La distortion qu'induit la représentation majoritaire est le reproche essentiel que lui ont adressé les partisans de la représentation proportionnelle. Ces derniers considèrent plus l'assemblée comme une juste représentation de la population qui l'a élue. Il faut donc que le mode de scrutin retranscrive fidèlement les différents courants de pensée en proportion de leur succès. Le fonctionnement est simple : accorder proportionnellement autant de sièges à une liste qu'elle a reçu de voix. Le scrutin proportionnel est utilisé en RDC pour les élections législatives et pour les élections provinciales même si celles-ci s'appuient sur des circonscriptions, d'où son intérêt particulier dans cette dissertation [38].

Nous allons maintenant voir que la répartition des sièges entre les différentes listes ne va pas sans poser des problèmes. En effet, le nombre de postes à pourvoir est toujours beaucoup plus réduit que le nombre de votants. Il est donc impossible de respecter l'exacte proportion décimale des voix car on ne peut pas diviser un siège en plusieurs.

Les calculs se font toujours en deux temps. La première attribution est faite à partir d'un quotient électoral qui peut être déterminé à l'avance (quotient fixe), ou, cas le plus fréquent en RDC, être calculé en divisant le total des suffrages exprimés dans la circonscription par le nombre de sièges à pourvoir. Ce quotient est égal au nombre de voix nécessaire pour avoir un siège. Il existe en réalité plusieurs types de quotients, mais on n'utilise en RDC que le quotient simple :  $Q = V/S$  où  $V$  et  $S$  désignent respectivement le nombre de voix exprimées et le nombre de sièges à pourvoir (connu par avance en raison du nombre d'inscrits aux fichiers électoraux).

Dans un premier temps, chaque liste obtient autant de sièges qu'elle a atteint de fois le quotient électoral. Si une liste  $i$  reçoit  $v_i$  voix, il recevra donc  $s_{i1} = \text{ent}(\frac{v_i}{Q})$  sièges ( où *ent* signifie qu'on ne garde que la partie

entière du ratio, puisqu'on ne peut pas partager de siège). Mais cette première répartition laisse des restes, c'est-à-dire des sièges non pourvus. C'est l'existence de ces restes qui pose problème. On distingue en général deux grands types de méthodes s'appuyant sur les quotients pour répartir les sièges, qui ne donnent pas les mêmes résultats : aux plus forts restes, et à la plus forte moyenne.

La répartition aux plus forts restes (dite aussi *méthode Hamilton*) implique que dans chaque circonscription, les sièges non pourvus soient attribués à chaque liste selon l'ordre décroissant des suffrages inemployés après la première répartition. Cette méthode n'est pas parfaite, comme nous le voyons avec un exemple tiré de [115].

TABLE 1.2 – Plus forts restes : première élection

Partis	Voix	Première attrib.	Restes	Attrib. aux restes	Total
<i>a</i>	61 000	3	1 000	0	3
<i>b</i>	29 000	1	9 000	0	1
<i>c</i>	10 000	0	10 000	1	1

Supposons une circonscription de 100 000 voix devant pourvoir un conseil de cinq sièges. Le quotient électoral est alors de 20 000. Les voix que se répartissent trois partis comme indiqué dans la Table 1.2. Cette méthode avantage les petites formations, surtout dans les petites assemblées, notamment celles qui n'ont pas réussi à obtenir le quotient électoral mais qui s'en sont approchées et disposent de forts restes, comme le montre le cas du parti *c* qui obtient le même nombre de siège que *b* avec trois fois moins de voix. C'est une première entorse à la représentativité.

Imaginons maintenant que le parti *a* perde le soutien de 6000 électeurs, 4000 votant désormais pour *b* et 2000 pour *c*. L'élection suivante donne alors la répartition indiquée dans la Table 1.3. En perdant des voix, le parti *a* a perdu un siège attribué au quotient ; mais ayant ainsi augmenté ses restes, l'a regagné à l'attribution aux plus forts restes. Mais les voix qu'il a données à *b* permettent à celui-ci d'obtenir le second plus fort reste et ainsi de gagner un siège. Le paradoxe, que Balinski [13] appelle "*plus-pour-tous, moins-pour-un*" est alors le suivant : le parti *c* bien qu'ayant gagné des voix a perdu un siège. Une variante de ce paradoxe, dite *paradoxe de l'Alabama*, a poussé les Américains à abandonner cette méthode à la fin du 19<sup>e</sup> siècle.

TABLE 1.3 – Plus forts restes : deuxième élection

Partis	Voix	Première attrib.	Restes	Attrib. aux restes	Total
<i>a</i>	55 000	2	15 000	1	3
<i>b</i>	33 000	1	13 000	1	2
<i>c</i>	12 000	0	12 000	0	0

Il convient de mentionner l'autre méthode à quotient : la répartition à la plus forte moyenne. Dans la répartition à la plus forte moyenne, il s'agit de calculer quelle serait pour chaque liste la moyenne des suffrages obtenus par sièges attribués si on accordait fictivement à chacune d'elle un siège supplémentaire. La liste qui obtient la plus forte moyenne reçoit un siège. L'opération se répète autant de fois qu'il reste de sièges à pourvoir. Cette répartition ne donne pas les mêmes résultats que la méthode aux plus forts restes comme le montre la Table 1.4, dans lequel nous avons simulé l'attribution de 5 sièges dans une circonscription de 100 000 électeurs avec chacune des méthodes. La méthode de la plus forte moyenne tend à favoriser les grands partis : elle attribue les restes aux deux partis les plus forts, alors que la méthode des plus forts restes les attribuent aux deux plus petits partis. En RDC, c'est toujours la méthode des plus forts restes, très biaisée, qui est utilisée dans les scrutins proportionnels.

TABLE 1.4 – Proportionnelle : plus forts restes et plus forte moyenne

Partis	Voix	Première attrib.	Restes	Total PFR	Total PFM
<i>a</i>	43 000	2	3 000	2	3
<i>b</i>	28 000	1	8 000	1	1
<i>c</i>	17 000	0	17 000	1	1
<i>d</i>	12 000	0	12 000	1	0

## 1.7 Conclusion du premier chapitre

Tout au long de ce chapitre, nous avons posé les bases de la Théorie du Choix Social. Il s'agit d'un domaine des Mathématiques Appliquées dont les résultats les plus remarquables sont des théorèmes d'impossibilité [6, 8, 86, 87, 97, 141, 145, 144]. Ces derniers ne sont pas pour autant les seuls à rechercher dans le domaine de la Théorie du Choix Social : nous comptons aussi les résultats d'Analyse (de fonctions d'agrégation) [25, 108] et les résultats de caractérisation [18, 99].

Le plus dur est de déterminer les critères appropriés pour agréger les préférences individuelles. Si les intérêts des politiques s'accordent avec ceux du peuple qu'ils représentent, la politique peut être vue comme un cadre de négociation ou marchandage entre politiciens de différentes factions dans la société. La question est alors de savoir si le marchandage politique peut conduire avec succès au consensus entre les différentes factions politiques de sorte que les résultats politiques reflètent légitimement et sans ambiguïté la "volonté du peuple".

Comme la littérature de la Théorie du Choix Social le souligne, même si nous envisagions un monde où il existerait une parfaite harmonie entre les motivations des représentants politiques et celles des citoyens représentés, il n'y a aucune assurance que les mécanismes de création des lois correspondent aux préférences sous-jacentes des individus dans la société [136].

Avec le nombre et la diversité des paradoxes, il n'est pas étonnant qu'aucune fonction d'agrégation (méthode de vote pour notre étude) n'échappe à chacun d'eux.

Les chapitres qui suivent développent une analyse de deux principales théories de vote basées l'une sur la moyenne/somme pondérée et l'autre sur la médiane. L'une et l'autre théories sont sujettes à des incohérences qu'il faut envisager une solution de compromis : celle mettant à profit les propriétés communes aux deux mécanismes d'agrégation qui sont souhaitables dans une démocratie et qui élimine, sinon réduit, les insuffisances des deux premières théories.

Les résultats d'Arrow [6, 8] ne suggèrent pas qu'il n'existe pas de bonne justification pour un processus démocratique ni que la démocratie est livrée à un champ de bataille des politiques sans fondement théorique. Selon David van Mill [121], telles affirmations ne sont que pessimistes. La Théorie du Choix Social ne devrait être utilisée que pour contester un point de vue singulier de la démocratie et non la démocratie elle-même.

Arrow lui-même a suggéré que la Théorie du Choix Social émet une critique circonstanciée et restreinte des procédures démocratiques. Nous devons, cependant, prêter attention aux conditions démocratiques posées par Arrow avant d'affirmer ou infirmer nos points de vues.

---

Le Chapitre suivant esquisse un dessin des recherches opérées dans le domaine de la théorie du choix social. Il s'agit principalement de présenter les grandes avancées dans ce domaine, sous-branche de Recherche Opérationnelle, qui fait rarement l'objet d'une étude classique et académique. Une telle approche nous permettra de nous fixer sur ce qui a été fait et ce qui reste à faire. Etant donné le nombre trop important de publications recensées dans ce domaine, nous n'en citerons que quelques représentants et les publications considérées comme références incontournables.

# Chapitre 2

## Etat de l'art

### 2.1 Introduction au deuxième chapitre

Dans ce chapitre, nous présentons une revue de la littérature relative à notre étude. Il s'agit, d'une part, de présenter les différents travaux concernant les grands thèmes en Théorie du Choix Social et, d'autre part, en catégoriser les différents résultats en énumérant les publications les plus saillantes.

Nous pouvons appliquer les choix sociaux dans deux grands domaines : la Théorie de vote et le Mécanisme de marché [130, 156]. Le premier (le vote) concerne essentiellement les applications des modèles économiques en sciences politiques. Cette tentative a pour objectif de comprendre comment fonctionnent les processus de décision qui gouvernent la production et l'allocation de biens publics (au sens de tout ce qui est produit par l'Etat et les Administrations) : défense, justice, solidarité, redistribution, réglementation..., en tenant compte des motivations et des intérêts particuliers de différents acteurs (citoyens, fonctionnaires, représentants politiques, hommes de gouvernement), de leurs systèmes de contrainte, de sanction ou de récompense qui influencent leur action individuelle et de voir comment leurs actions influent sur le "bien être" de la société.

La communauté scientifique s'accorde à appeler cette sous-branche du choix social "Choix Public" (*Public Choice* en anglais) [52]. Le choix public est une analyse scientifique du comportement d'un gouvernement, du comportement des individus vis-à-vis du gouvernement.

Au sens strict, il n'y a pas d'implication en politique excepté le fait que, dans certains cas, l'on puisse démontrer qu'une politique particulière est

impossible à mener ou qu'il est extrêmement improbable qu'elle atteigne les objectifs qu'elle s'est assignés.

Le mécanisme de marché, quant à lui, est un domaine purement économique qui n'est pas traité dans cette thèse. Il s'agit d'une application de la théorie des jeux et des stratégies sur les marchés. Arrow [6, 8] établit une analogie entre une compétition sur le marché et une compétition politique.

Dans les prochaines lignes de ce chapitre, il sera question de déterminer les points communs et divergents de ces deux sous-branches. Le but ultime de ce chapitre est d'aboutir à un schéma (une arborescence) qui inclut tous les aspects – ou sous-domaines – de notre étude.

## 2.2 Analyse économique des systèmes de vote

Le Public Choice étend le paradigme de l'*homo oeconomicus* aux comportements des individus face à des choix non marchands. Quand l'électeur fait son choix, il intègre les "bénéfices" qu'il attend de l'Etat mais aussi les "coûts" fiscaux. Quand le bureaucrate agit, il a plutôt tendance à vouloir maximiser la taille de son budget que servir l'intérêt général. Cette Ecole s'intègre dans le vaste mouvement de vérification empirique du paradigme de l'*homo oeconomicus* entrepris depuis les années 1960 par l'Ecole de Chicago en testant son applicabilité aux diverses décisions humaines : famille, mariage, capital humain, éducation, religion, délinquance, etc. Ses principaux thèmes de recherche sont le marché politique, la bureaucratie et les groupes de pression.

### 2.2.1 Marché politique

Le système politique est considéré comme un marché où les électeurs échangent des votes contre des promesses d'action des hommes politiques. La monnaie d'échange est l'influence politique ; l'idéologie joue sur le marché politique le rôle de la marque sur les marchés privés, elle constitue un signal synthétique porteur d'information.

D'un côté, nous avons les électeurs. Les électeurs ont tout intérêt à participer au marché politique en se coalisant en groupes sociaux bien

identifiés et organisés, pour bénéficier des interventions de l'Etat.

De l'autre, nous avons les hommes politiques. Il a été montré que l'homme politique est un individu rationnel, ni plus ni moins altruiste que ses concitoyens. Il agit pour obtenir les revenus, le prestige et le pouvoir qui accompagnent les fonctions électives ; c'est un entrepreneur qui cherche à maximiser le nombre de ses électeurs en adaptant l'offre de biens publics à la demande des citoyens. Il travaille sur un marché électoral.

Ainsi, l'élu d'une circonscription rurale va "acheter" des voix en proposant d'accroître le soutien aux prix agricoles. Le maire d'une petite ville s'opposera à la fermeture de l'hôpital local car il est souvent le principal employeur de sa ville. La victoire électorale n'est pas l'unique but de l'action politique : par exemple un parti minoritaire peut faire échouer une coalition de partis car estimant que l'exercice du pouvoir fera décliner son poids au profit de ses alliés.

D'une manière générale, l'horizon de décision des hommes de l'Etat est de court terme, l'intervalle de temps qui sépare deux élections.

### 2.2.2 Comparaison entre marché et démocratie politique

Il existe certains points communs entre le marché privé et la vie politique :

- le comportement rationnel de l'électeur : il vote pour l'homme politique dont il espère que l'action se traduira pour lui par un plus personnel (analogie avec le consommateur).
- le chef d'entreprise subit la sanction du marché et l'homme politique celle de l'élection.
- le chef d'entreprise comme l'homme politique essayent de se différencier de leurs concurrents, les premiers par la marque, les seconds par le programme ou le discours.

Il existe cependant une différence radicale entre le marché et la démocratie politique. Le prix Nobel J. Buchanan [52] l'a déjà soulignée, il y a

de nombreuses années. Par exemple :

- Le degré de certitude des conséquences de ses actes diffère : il est certain sur le marché, il ne l'est pas lors d'un vote. On connaît, en général, les tenants et les aboutissants d'une transaction mais pas ceux d'un vote.
- La décision prise lors d'une transaction concerne les parties au contrat, la décision prise avec un vote concerne l'ensemble d'une communauté.
- Le degré de responsabilité diverge sensiblement. Sur le marché, les parties au contrat sont responsables de leurs actes et des conséquences de leurs actes sur des tiers au contrat ; en revanche, lors d'un vote, cette responsabilité est partagée avec des inconnus et un grand nombre de gens, de telle sorte que personne ne se sent responsable du résultat du vote.
- La nature des alternatives proposées est profondément différente. Sur le marché, les choix ne sont pas mutuellement exclusifs. On peut acheter à la fois de la bière et du vin si la contrainte de budget le permet. Lors d'un vote à la majorité, on choisira l'un ou l'autre.
- Le degré de coercition joue un rôle essentiel dans la procédure démocratique. Sur le marché, l'individu peut refuser une transaction si elle est contraire à ses préférences. En revanche, dans un processus de vote, il peut se trouver forcé d'accepter un résultat contraire à ses préférences ou à ses valeurs fondamentales.
- Les relations de pouvoir entre les individus divergent sensiblement selon les deux processus de décision. Sur le marché, celui qui détient beaucoup d'argent a plus de capacité à satisfaire ses désirs. Dans la démocratie, un vote égale une voix. La capacité d'influencer le résultat du vote est équitablement répartie entre les individus, mais leur capacité à modifier individuellement ce résultat est nulle.

Retenons la distinction essentielle entre les deux processus : le degré de coercition. Les biens et les services achetés sur un marché apportent une satisfaction positive ou négative à celui qui achète, mais

laissent inchangée la satisfaction de celui qui n'achète pas. Au contraire, dans un système démocratique, le programme de gouvernement offert aux citoyens affecte positivement la satisfaction des uns, négativement celle des autres, et affecte même la satisfaction de gens qui ne sont pas concernés par la décision. Les lois, les prélèvements fiscaux et règlements s'appliquent en effet à tous sur un territoire donné. Il existe d'autres différences :

- l'effet de seuil : en démocratie, tant que vous ne dépassez pas 50% des voix, vous n'avez aucun pouvoir, aucune possibilité de démontrer concrètement la validité de vos propositions. En revanche, 1% de part de marché peut suffire à vivre, à se développer et se diversifier, à convaincre peu à peu les clients. Le marché est un système qui n'exige l'approbation d'aucune majorité.
- la zone d'influence : la démocratie électorale s'exerce sur le territoire d'une nation ; l'entreprise n'est pas cantonnée à un territoire donné, elle peut produire ou exporter à l'étranger.
- le calendrier : si un parti perd une élection, il devra attendre la suivante pour prétendre l'emporter. L'entreprise n'est pas tenue par la date des élections, si elle manque une vente, elle peut en réaliser deux par la suite.
- l'horizon temporel : les hommes d'Etat privilégient le court terme car ils ont pour ambition première de se maintenir au pouvoir et pensent à la prochaine élection.
- sur le marché politique, les biens échangés ne peuvent faire l'objet d'une consommation individuelle, ce sont des biens collectifs. Pour savoir quelle est la "demande" il faut passer par des procédures d'agrégation des préférences individuelles ; c'est le rôle des élections de révéler la quantité et la qualité de biens publics désirée par la population.
- entre l'électeur et l'Etat intervient un intermédiaire : le régime électoral. Celui-ci n'est pas neutre. Il existe un grand nombre de techniques électorales : suffrage universel ou censitaire, règle d'unanimité, de majorité des 2/3, absolue, relative, scrutin proportionnel

ou majoritaire (1 ou 2 tours). Suivant le système adopté, le comportement des électeurs et des politiciens sera différent.

## 2.3 Résultats dans la théorie du choix social [41]

Le théorème d'Arrow et ses nombreuses extensions (cf. Chapitre 1) sont très loin d'épuiser l'ensemble des résultats en théorie du choix social concernant l'agrégation des préférences. Il est illusoire de vouloir en tenter ici une présentation d'ensemble (on pourra, pour cela, se reporter à [147]). On peut schématiquement regrouper ces résultats en trois catégories :

- les résultats de type *impossibilité* qui, dans le veine du théorème d'Arrow, montrent l'existence de contradictions logiques entre certaines conditions. De tels résultats permettent de mieux cerner les limites auxquelles se heurte la recherche d'une méthode d'agrégation "satisfaisante" ;
- les résultats de type *caractérisation* s'attachant à exhiber des conditions telles qu'une méthode d'agrégation donnée soit la seule à les satisfaire simultanément. De tels résultats visent à mettre à jour les caractéristiques essentielles d'une méthode et, ainsi, d'en mieux comprendre les spécificités et de la comparer plus aisément à d'autres ;
- les résultats de type *analyse* s'attachant à confronter une série de méthodes à un ensemble de conditions jugées souhaitables. Ils visent à permettre la mise à jour de méthodes "satisfaisantes", dans les limites indiquées par les résultats de type impossibilité.

Il est clair que cette distinction emporte une part d'arbitraire non négligeable et que ces trois types d'analyse ne sont nullement contradictoires ; idéalement, elles devraient faire appel aux mêmes conditions.

### 2.3.1 Résultats d'impossibilité

Parmi les très nombreux résultats de ce type disponibles en théorie du choix social, deux nous semblent particulièrement importants :

### Le théorème de Gibbard-Satterthwaite [86, 141]

Ce résultat montre l'impossibilité de concevoir des méthodes d'agrégation (conduisant à l'élection d'un unique candidat) vérifiant la condition d'universalité qui soient non manipulables et non dictatoriales dès lors qu'il y a plus de trois candidats. Le système électoral français est clairement non dictatorial et vérifie la condition d'universalité. En négligeant les situations d'*ex aequo* au second tour, le résultat de Gibbard et Satterthwaite nous assure alors qu'il est possible de trouver au moins une situation où un votant peut ne pas avoir intérêt à révéler ses préférences sincèrement. Notons que ce résultat a donné lieu à une abondante littérature analysant les problèmes de vote en termes de jeux non coopératifs. On trouvera un aperçu de la littérature sur ces questions dans [63], [123], [125] et [137].

### Le théorème de Sen

Ce théorème est aussi dit de l'"anarchiste parétien" (ou encore du "libéral parétien") [145, 144]. Supposons que les états sociaux soumis au vote soient définis de manière telle qu'ils concernent la sphère privée d'un individu. Il est clair qu'il existe des conflits entre le principe majoritaire, pouvant conduire à la "dictature de la majorité", et le respect, pour cet individu, de sa sphère privée à l'intérieur de laquelle il devrait seul avoir le pouvoir de décider. Le théorème de l'"anarchiste parétien" montre bien davantage puisqu'il énonce l'impossibilité de faire coexister le principe du respect d'une "sphère individuelle" et les conditions d'unanimité et d'universalité. Ce résultat a engendré une abondante littérature dont trouvera un bon aperçu dans [146] et [148].

### 2.3.2 Résultats de caractérisation

Parmi les très nombreux résultats visant à caractériser telle ou telle méthode d'agrégation, nous comptons ceux concernant la méthode de Borda (on trouvera de nombreux autres résultats de ce type dans [147]). En effet, cette méthode satisfait à la plupart des conditions présentées jusqu'à présent et est particulièrement simple à mettre en œuvre. Tout de même nous citons les résultats que voici :

### Méthode de Borda

Un des résultats de caractérisation de la méthode de Borda est dû à Young [164]. Ce résultat établit que la méthode de Borda est la seule méthode d'agrégation qui vérifie à la fois les conditions de neutralité, de loyauté, de séparabilité et d'annulation.

Il est à noter qu'une autre caractérisation de la méthode de Borda très similaire à celle de Young a été proposée par Nitzan et Rubstein [134] pour ranger et non pour choisir. De plus, différentes généralisations ont été obtenues concernant l'agrégation de relations de préférences qui ne sont pas forcément des préordres complets mais toutes sortes de relations binaires et même des relations floues.

### Majorité simple

La première caractérisation connue de la méthode de la majorité simple est due à May [117]. Cette règle traite du cas de deux candidats. Dans ce cas, la distinction entre choix et rangement n'a plus beaucoup de sens mais, pour ne pas introduire un nouveau formalisme, nous adopterons ici, de façon arbitraire, le formalisme du choix. May considère donc une procédure de choix, c'est-à-dire une méthode qui désigne un ou plusieurs candidats gagnants au départ des préférences des votants. Un candidat fait partie de l'ensemble de choix à la majorité simple si le nombre de votants le supportant n'est pas inférieur au nombre de votants supportant son adversaire. Ce résultat établit que lorsqu'il n'y a que deux candidats, la seule méthode de choix vérifiant les conditions de neutralité, anonymat et monotonie stricte est la méthode de la majorité simple.

Plus tard en 1988, un commentaire riche sur cette méthode a été donnée par Kelly [99]. Le nombre de propriétés pour la caractérisation est porté à quatre. En effet, Kelly montre que si la condition d'universalité est ajoutée à la liste de May et que la condition de monotonie soit renforcée en monotonie positive, le théorème de caractérisation de May reste vrai. Ainsi, le théorème de caractérisation de May stipule dès lors que lorsqu'il n'y a que deux candidats la seule règle de vote qui satisfait à la fois l'universalité, l'anonymat, la neutralité et la monotonie positive est la règle de la majorité simple.

Pour comprendre pourquoi ce théorème (de May [117, 99]) ne s'applique qu'au cas de deux candidats, il suffit de se rendre compte que de

nombreuses méthodes de choix différentes coïncident dans le cas de deux candidats. En l'occurrence, la méthode de Borda et de nombreuses méthodes de scorage donnent toujours le même ensemble de choix que la majorité simple, avec deux candidats. On peut alors se poser la question de l'intérêt de cette caractérisation. En fait, comme on l'a vu au chapitre 1, avec le théorème d'Arrow, la méthode de la majorité simple ne peut pas être étendue à plus de deux candidats (si on veut en conserver l'essence). Sa caractérisation avec deux candidats est donc essentielle.

### Vote par scorage

Les résultats de caractérisation pour le vote par scorage sont dus à Young [165] et Merlin [118]. Le premier stipule que le vote par évaluation (scorage) est la seule fonction de bien-être social qui est à la fois symétrique et cohérente. Le deuxième résultat établit qu'une fonction de choix social est continue si et seulement si elle est une règle de scorage.

### Vote par approbation

Le vote par approbation semble être une fonction de vote qui est très appréciée par les experts en théorie du choix social [48]. Lors d'une enquête réalisée auprès des experts sur 18 fonctions de vote par Jean-François Laslier [107], le vote par assentiment a été approuvé par 68,18% des experts.

Les travaux de caractérisation du vote par assentiment sont dus à Steven Brams et Peter Fishburn [49, 46] et José Carlos Alcantud et Annick Laruelle [2]. Leurs résultats sont corroborés par Patrick Blanchenay [38]. Les auteurs précités affirment que le vote par approbation remplit les critères d'anonymat, de monotonie, d'universalité, de participation, de renforcement, d'indépendance des alternatives non-pertinentes et de Condorcet parmi tant d'autres.

Si les premiers critères ne sont pas contestés pour le vote par approbation, le dernier (critère de Condorcet) est fort contesté au vote par approbation. Brams et Sanver [50] montrent que le vote par assentiment respecte le critère de Condorcet en ce sens que "les vainqueurs de Condorcet font toujours partie des vainqueurs par assentiment, cependant que les perdants de Condorcet peuvent ou non en faire partie". La seule possibilité qu'il y ait plusieurs vainqueurs de Condorcet est qu'ils soient *ex*

*æquo* entre eux, ce qui à l'échelle d'un grand pays est peu susceptible d'arriver. Par ailleurs, si l'on considère que pour la même raison, le vote par assentiment a peu de chances d'élire deux candidats, on peut donc considérer qu'un candidat est vainqueur par assentiment si et seulement si il est vainqueur de Condorcet. Manzoor Ahmed Zahid [168] montre qu'il n'en est rien. Le vote par approbation peut faire élire un perdant de Condorcet. Il prend l'exemple ci-dessous pour l'illustrer :

4 : Alan Tom >> John Peter Bob  
 3 : Bob >> Peter Tom John Alan  
 2 : Peter John >> Tom Bob Alan

Dans un profil, la distinction entre les alternatives qu'un votant approuve et celles qu'il désapprouve est indiquée par le symbole ">>".

Dans cet exemple Peter est le vainqueur de Condorcet et Alan est le perdant de Condorcet. Cependant, d'après le vote par approbation, nous obtenons un résultat paradoxal : Alan est vainqueur avec 4 points et Peter est perdant avec 2 points. Etant donné le profil ci-dessus, l'ordre de préférence collective par le vote par approbation est :  
 Alan  $=_S$  Tom  $\succ_S$  Bob  $\succ_S$  John  $=_S$  Peter.

Le contre-exemple de Manzoor Ahmed Zahid est une preuve indubitable que le vote par approbation, nonobstant ses nombreuses qualités, ne remplit pas le critère de Condorcet et permet même parfois l'élection du pire candidat (le perdant de Condorcet).

### 2.3.3 Résultats d'analyse

Un nombre important de publications en Théorie du Choix Social est dédié aux analyses de fonctions de vote. Les résultats de type *analyse* sont présentés sous forme des "paradoxes". Une revue de la littérature des paradoxes électoraux affectant différentes fonctions de vote est fournie par Dan S. Felsenthal [72].

Outre ces deux publications, des auteurs se sont consacrés à examiner dans leurs études des fonctions de vote particulières. Nous en citons quelques-uns.

### Vote majoritaire

Les travaux fondateurs de la Théorie du Choix Social dus à Condorcet [56] et Borda [39] mettaient déjà à nu les déboires du vote majoritaire. Les autres travaux à classer dans cette catégorie sont dus à Brams [44], Balinski [14], Moulin et [123].

### Vote par approbation

Les premières critiques adressées au vote par approbation étaient sur sa sensibilité aux manipulations stratégiques [103]. Les autres analyses sur le vote par approbations sont fournies par Brams [46, 49] et Zahid [168]. Signalons tout de même que le vote par approbation est une fonction de vote prisée par la grande majorité des spécialistes en Théorie du Choix Social (cf. [107]).

### Vote par note

Le vote par note généralise le principe du vote par approbation. Les reproches adressés contre le vote par approbation les lui sont aussi. Comme le vote par approbation, le vote par note ne prévoit aucun mécanisme pour défaire les nœuds (*tie-break*).

Les analyses de cette fonction de vote sont fournies par Baujard et Igersheim [28, 29], Balinski et Laraki [19, 20] .

### Jugement Majoritaire (JM)

Le jugement majoritaire de Balinski-Laraki présente l'avantage de faire élire un candidat pour lequel une majorité absolue de votants estime qu'il mérite au moins (ou au plus) la note finale qu'il obtient. Il est basé sur le principe de l'élection du candidat qui obtient la plus forte médiane (MaxMed). Ce principe a déjà été proposé par Basset et Persky [25]. Certaines sources (cf. <http://www.medianvrance.org>) soutiennent que l'idée du vote basé sur la plus haute médiane a déjà été considérée et discutée par plusieurs membres de l'"*electorama*" et du comité scientifique du *voting bulletin* durant les années 1996-2007. Les mêmes sources révèlent même qu'une méthode très similaire (sinon équivalente) à celle de Balinski-Laraki y a déjà été proposée.

En particulier, Chris Benham a publié sa méthode de vote nommée “*Majority Choice Approval*” (MCA) sur Internet en 2004. Le principe du MCA est le suivant :

- Chaque votant attribue une note prise dans l'ensemble  $\{-1, 0, +1\}$  à chaque candidat ;
- Si au moins un candidat a une majorité de note “+1” alors le candidat qui récolte le plus de “+1” gagne,
- Sinon, le candidat avec le plus de notes “+1” ou “0” gagne.

Cette méthode est équivalente à celle de Jameson Quinn dénommée “*Graduated Majority Judgment*” (GMJ)(cf. <http://www.medianvrage.org>). MCA peut être vu comme le vote par approbation : les notes “+1” peuvent donc être considérés comme “approbations” et si personne n'obtient plus de 50% d'approbations, le plus approuvé gagne. Sinon, on redéfinit “approuvé” en “non-négatif” et le plus approuvé gagne.

Tout de même nous considérerons dans cette thèse que le JM est une invention de Michel Balinski et Rida Laraki. En effet, nous ne trouvons pas de publications sérieuses sur cette méthode ou une méthode similaire avant celle de Balinski et Laraki en 2007 [18]. La méthode de Basset et Persky est aussi basée sur la médiane mais est conçue dans le contexte arrovien. La méthode de Basset-Persky ne remplit pas le critère d'indépendance des alternatives non-pertinentes (critère d'Arrow). Le JM est défini dans un autre contexte (le contexte balinski-larakien) et remplit aussi bien ce critère que bien d'autres souhaitables.

Les principales critiques formulées sur le JM sont données dans [105], [108], [130] et [167].

### **Borda Majority Count (BMC)**

Cette méthode est conçue dans le contexte balinski-larakien et fonctionne comme le *Range Voting* à la différence qu'elle use d'un mécanisme particulier pour défaire les nœuds. En effet, toutes les formes les plus connues de vote par note (ou par évaluation) – y compris le vote par approbation – ne prévoient pas de mécanisme de *tie-break*.

La plupart des résultats d'analyse obtenus pour le vote par approbation et/ou le vote par évaluation sont aussi valables pour le BMC. Les

critiques les plus acerbes sur les formes de vote basées sur la sommation ou la moyenne arithmétique des notes sont dues à Balinski qui les qualifie de méthodes “ridicules” à cause de leur grande susceptibilité face aux manipulations stratégiques (cf. [33]).

D'autres résultats d'analyse sur le BMC sont fournis par son auteur Manzoor Ahmed Zahid [168] et par Ngoie *et al.* [130, 131].

### 2.3.4 Expériences sur les systèmes de vote

Les expériences sur les systèmes de vote constituent un moyen très efficace pour les analyser. Les résultats aberrants que peuvent parfois produire certaines méthodes de vote (paradoxes électoraux) sont décrits par les spécialistes grâce aux expérimentations desdites méthodes.

Il existe principalement deux types d'expériences sur les systèmes de vote :

- celles qui sont réalisées sur terrain (*in situ*) : ce sont des expériences réalisées en reproduisant les conditions des élections réelles (électeurs, urnes, bulletins de vote, isolement, assesseurs, etc.) (voir [16], [21], [23] [28], [29], [27], [69], [110], [111], [106], [168]) ;
- celles qui sont réalisées dans des laboratoires (*in silico*) : ce sont des expériences obtenues grâce à des simulations au laboratoire. Les données de l'expérience (nombre de votants, votes, nombre de candidats, etc.) sont pour la plupart des cas générées par un automate en vue d'obtenir les résultats à analyser (voir [104] et [83]).

La figure 2.1 présente une arborescence de la théorie du choix social. Elle constitue une contribution à la classification des résultats obtenus dans le domaine du choix social.

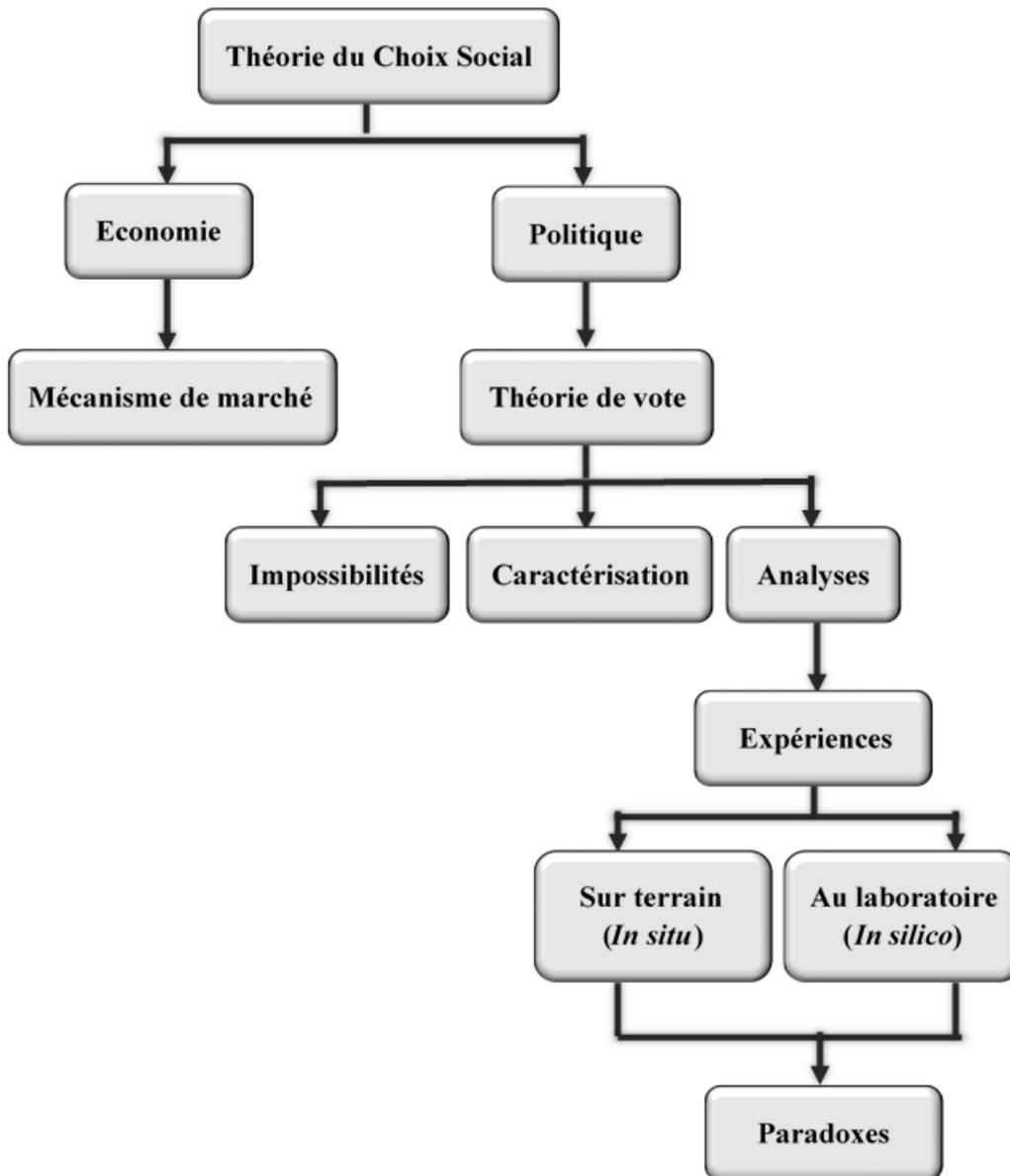


FIGURE 2.1 – Arborescence de la théorie du choix social

Les expériences *in situ* et *in silico* établissent des paradoxes sur les systèmes de vote. Les paradoxes électoraux ne sont pas toujours des arguments pour mettre en cause un système de vote mais plutôt des résultats anticipés qui préviennent les surprises susceptibles d'entacher une fonction de vote.

Les travaux de Condorcet [56] et de Borda [39] sont les premiers résultats connus de l'analyse du vote majoritaire. Les autres résultats d'analyses sont trouvés au 20<sup>me</sup> siècle à la suite des résultats d'Arrow [5, 6, 7, 8].

D'aucuns présentent le théorème d'impossibilité d'Arrow – Théorème Général de Possibilité – comme un arrêt de mort de l'économie normative [150]. Pourtant ce résultat apparemment décevant a paradoxalement engendré un enthousiasme scientifique dans la recherche des conditions à affaiblir pour contourner l'impossibilité d'Arrow. C'est dans cette optique que suivirent les travaux de Guilbaud [90], de Sen [145, 144], de Gibbard [87], de Satterthwaite [141] pour ne citer que ceux-là.

L'œuvre d'Arrow qui a contribué à son obtention du prix Nobel en 1972 est relatée dans [9]. Le lecteur pourrait y retrouver la plupart des contributions saillantes de la théorie classique du choix social. Arrow continue cette démarche dans [10] où il expose les principales découvertes en théorie du choix social. Les autres analyses peuvent être trouvées dans [139].

## 2.4 Familles des procédures de vote

Les modes de vote diffèrent tant de la manière d'exprimer les préférences des électeurs (contexte) que dans la manière de déterminer la valeur globale des candidats (agrégation). Ainsi, plusieurs procédures de vote définies dans le même contexte peuvent différer sur leur manière d'agréger. Les méthodes de Borda et Condorcet par exemple sont définies dans le même contexte mais diffèrent sur leur mode d'agrégation.

En Théorie du Choix Social, nous comptons deux grandes familles des fonctions de vote :

- les procédures de vote définies dans le contexte traditionnel inspiré par Arrow [6, 8]. Ce contexte est basé sur le classement des candidats par les électeurs (*ranking*). Les électeurs classent les candidats (partiellement ou totalement, avec ou sans *ex aequo*) ;
- les procédures de vote définies dans le nouveau contexte inspiré par Balinski et Laraki [18]. Ce contexte est basé sur le jugement (*grading*) des candidats (compétiteurs) par les électeurs (juges). Le jugement peut être rendu de manière quantitative (par exemple une note allant de 1 à 10) ou qualitative (excellent, très bien, bien, assez bien, ...).

Il est évident que le “ranking” exige une masse d’informations plus importante que le “grading”, par conséquent sur le plan pratique la majorité des mécanismes usuels de vote procèdent du “grading”. Par ailleurs sur le plan théorique, la littérature classique, influencée notamment par Arrow, est plus relative au “ranking” car on suppose généralement que chaque électeur possède une préférence individuelle qui est une relation binaire sur les candidats. Il est heureux que le nouveau contexte (qui est abondamment cité dans cette thèse) soit abordé presque dans toutes les publications récentes relatives aux fonctions de vote.

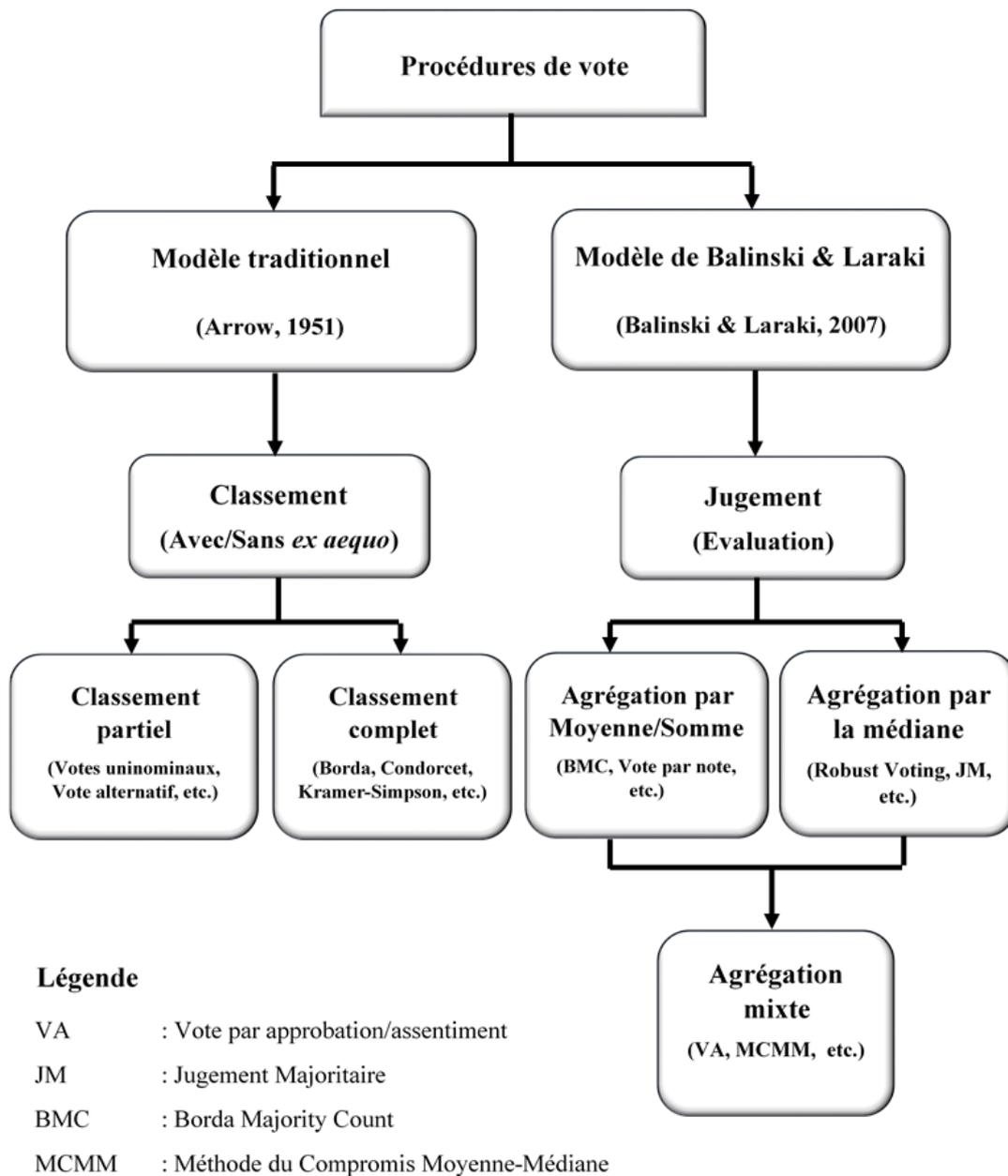


FIGURE 2.2 – Classification des procédures de vote

La famille des procédures de vote que nous prônons dans cette thèse est celle qui se base sur le jugement (ou l'évaluation) des candidats. Le jugement peut être rendu qualitativement ou quantitativement suivant une échelle des valeurs (langage commun). Lorsque l'échelle est exclusivement qualitative et que la mention finale d'un candidat doit appartenir au langage commun, seule la médiane peut agréger les jugements des électeurs. Dans tous les autres cas, la moyenne, la somme, la médiane ou les trois combinées peuvent être utilisées pour l'agrégation. Notons aussi que les résultats diffèrent généralement selon que l'on préfère utiliser un paramètre plutôt qu'un autre. Cependant, la somme des notes renvoie toujours le même rangement final que la moyenne arithmétique.

Tout de même, il existe un critérium naturel qui dicte l'attachement des peuples par rapport à l'un ou l'autre système de vote :

- *la non-complexité de l'information demandée aux électeurs sur les candidats*. Supposons par exemple que l'on demande à chaque électeur de ranger tous les candidats. S'il y a 10 candidats, il devra choisir entre  $10!$  possibilités et la complexité du choix fera fuir les électeurs ! Cette non-complexité explique l'engouement des peuples pour le vote à la pluralité (l'électeur ne choisit qu'un seul candidat) et pour le vote par assentiment – du moins par les spécialistes – (l'électeur fournit un groupe de candidats approuvés) ;
- *la simplicité dans le "calcul" de la décision collective (agrégation)*. Il est normal que chaque électeur puisse comprendre le mécanisme d'agrégation de ses votes pour obtenir le résultat collectif. Cela est évident pour la pluralité, le vote par approbation, un peu complexe pour Borda, Condorcet et pour les mécanismes définis dans le contexte balinski-larakien (médiane, moyenne ou mixte) ;
- *le caractère "démocratique" du choix* : ce sont les exigences d'anonymat, de neutralité, d'unanimité, de non dictature, de consistance, la non-manipulabilité, etc.

La tendance, lorsque l'on soutient un système particulier de vote, est de ne s'occuper que du dernier critère (le caractère démocratique). Cependant, ce sont les deux premiers critères qui permettent réellement de mettre en pratique un mécanisme de vote.

Par ailleurs, il est évident que le caractère démocratique (principalement la non-manipulabilité) d'un système est en opposition avec sa simplicité. En effet, les procédures de vote les plus simples sont aussi les plus manipulables.

## 2.5 Choix Social Computationnel

Le Choix Social Computationnel est une discipline relativement jeune qui est née du mariage de la Théorie du Choix Social et de l'informatique. La plupart des résultats *in silico* émanent de ce domaine. Si la théorie classique du Choix Social concerne la conception et l'analyse des méthodes pour la prise de décision collective et typiquement étudie l'existence des procédures qui remplissent certaines propriétés souhaitables, le Choix Social Computationnel traite l'aspect calculatoire de ces propriétés.

Nous avons sciemment ignoré ce domaine dans l'arborescence de la Théorie du Choix Social car il n'en est pas un fruit pur mais est obtenu d'une hybridation avec les méthodes informatiques. Nous nous contenterons de considérer plutôt les résultats des simulations au laboratoire qui en sont de bonnes applications en Théorie du Choix Social.

Le Choix Social Computationnel traite de plusieurs aspects que nous ne saurions pas tous énumérer. Nous n'en retiendrons que certains aspects et en donnerons éventuellement des références pour des approfondissements.

### 2.5.1 Formation de coalitions

Nous appelons *coalition* un ensemble des agents qui peuvent obtenir une plus grande récompense lorsqu'ils travaillent unis plutôt que lorsqu'ils travaillent seuls. Le problème de la formation de coalition engendre deux autres problèmes :

- Quelles sont les coalitions qui seront formées pour résoudre un problème particulier et comment les agents adhèrent-ils dans des coalitions ?
- Comment les bénéfices de la coalition seront-ils partagés entre ses membres ?

Une des propriétés souhaitables dans la formation de coalitions est sa *stabilité*. Une coalition est stable si aucun de ses agents n'a intérêt à la quitter. Les problèmes de formation de coalition sont traités dans [143] et [92].

### 2.5.2 Agrégation des jugements

L'agrégation des jugements traite de la fusion d'ensembles d'opinions. Dans ce cas, les opinions sont un ensemble des propositions en relation. Ce problème modélise le cas des comités et des panels des experts.

Les références relatives à cet aspect du Choix Social Computationnel sont [152] et [32].

### 2.5.3 Complexité des règles de vote

La complexité d'un algorithme est la mesure du nombre d'opérations fondamentales qu'il effectue sur un jeu de données. Elle est exprimée comme une fonction de la taille du jeu de données.

Si certaines règles de votes sont souples (ou commodes), d'autres ne le sont pas. C'est le cas de la règle de vote de Kemeny et de Dodgson.

Pour ces genres de problèmes, nous pouvons nous référer à [98].

### 2.5.4 Domaine combinatoire

Si l'ensemble d'alternatives est petit, il est facile de représenter les préférences entre celles-ci. Elles peuvent, en effet, être listées explicitement.

En outre, il est plus difficile d'exprimer les préférences sur des ensembles d'alternatives avec plusieurs valeurs d'attributs. L'ensemble sur lequel les préférences doivent être exprimées croît de manière exponentielle. Ceci reviendrait à dire que même les fonctions de vote les plus simples sont difficiles à appliquer.

En effet, une fonction dont la complexité est linéaire devient incommode lorsqu'elle est appliquée sur un nombre exponentiel d'objets dans le jeu.

Un problème majeur traité ici consiste à représenter les préférences de manière compacte plutôt que de toutes les lister explicitement.

Pour les détails, nous pouvons nous référer à [91], [55], [159], [163], [51].

### 2.5.5 Manipulabilité

Les résultats de type manipulabilité concernent les aspects computationnels du théorème de Gibbard-Satterthwaite. Nous pouvons nous référer à [93].

### 2.5.6 Allocation des ressources divisibles et indivisibles

Ce problème est largement traité même en dehors du cadre computationnel. Il s'agit de la juste répartition des biens entre agents. Il est d'une manière ou d'une autre impliqué dans tous les aspects du choix social. Dans la littérature sur le choix social, il est discuté sous le nom de "problème de partage" (voir [150]).

## 2.6 Conclusion du deuxième chapitre

La revue de la littérature consacrée dans ce chapitre au domaine de la théorie du choix social nous a inspiré la figure 2.1 qui décrit un arbre ayant comme racine la Théorie du Choix Social. Cet arbre constitue notre apport personnel dans la classification des résultats publiés dans le domaine du choix collectif.

Nous avons commencé par donner des résultats d'impossibilité de Gibbard & Satterthwaite et de Sen. Il a été établi que le Théorème Général de Possibilité (Arrow) est équivalent à celui de Gibbard-Satterthwaite [38, 150]. C'est la raison pour laquelle nous n'avons plus évoqué le théorème d'Arrow comme résultat d'impossibilité. En fait, tout résultat d'impossibilité sur le choix collectif ou le marché public tire son essence du théorème général de possibilité.

Etant donné le nombre très élevé de fonctions de choix social, nous ne pourrions donner tous les résultats de caractérisation de chacune d'elles. En effet, chaque défenseur de l'une ou l'autre fonction a apporté des arguments soutenant le profit que l'on pourrait en tirer lorsqu'on l'utiliserait comme fonction de choix social. Tous ces résultats sont de type "caractérisation" et/ou – dans une certaine mesure – "analyse".

Les résultats d'analyse de fonctions de choix social sont pour la plupart fournis par des négateurs desdites fonctions. En effet, pour montrer qu'une fonction de choix social ne convient pas pour des élections démocratiques, la manière la plus usuelle en Théorie du Choix Social est de présenter une situation (souvent imaginaire) où ladite fonction renvoie un résultat surprenant ou inattendu (paradoxe). Signalons aussi qu'une grande quantité de résultats de type "analyse" est fournie par des défenseurs de fonctions d'agrégation. Ces derniers expérimentent leurs fonctions de vote sur terrain (*in situ*) ou au laboratoire (*in silico*) afin de montrer que ces fonctions conviennent mieux pour des élections démocratiques que celles que l'on utilise déjà. Souvent, leurs expériences sont accompagnées des résultats d'enquêtes menées auprès des votants expérimentaux sur le niveau de compréhension et d'acceptation de la fonction expérimentée (cf. [16], [21], [23] [28], [29], [27], [69], [110], [111], [106], [107], [168]). Cette ultime enquête vise à recueillir les avis du peuple sur une fonction de vote particulière.

C'est ici le lieu de signaler qu'une fonction peut être adoptée par la communauté scientifique (les experts) mais être rejetée par le peuple. C'est le cas du vote par approbation qui a été bien accueillie par une majorité importante d'experts en théorie du choix social mais rejeté en Grande-Bretagne.

Le Chapitre 3 suivant introduit un nouveau contexte qui vise à contourner les difficultés rencontrées par le contexte traditionnel basé sur les préférences. Ce contexte est particulièrement indiqué pour le rangement, la mesure et l'élection des alternatives. Il se base sur la notion d'évaluation ou de jugement des alternatives par les électeurs. Dans ce cas, les décideurs sont indistinctement appelés *électeurs*, *votants* ou *juges*.

# Chapitre 3

## Théorie du Jugement Majoritaire

### 3.1 Introduction au troisième chapitre

Le contexte traditionnel de la Théorie du Choix Social, basée sur le rangement des candidats par les votants, est entaché de théorèmes d'impossibilité, c'est pour dire en gros qu'il ne peut exister de fonction de choix social (ou *fonction de rangement social*) ne remplissant que de bonnes propriétés (propriétés démocratiques) [11]. Dans le contexte arrowien sur la Théorie du Choix Social, tout votant est supposé établir un *rangement* d'alternatives (candidats) dans son propre langage. Par exemple, si deux votants expriment la même chose, supposons qu'ils préfèrent  $a$  à  $b$ , ils peuvent bien signifier différents avis : l'un peut signifier qu'il préfère légèrement  $a$  à  $b$  tandis que l'autre peut signifier qu'il trouve que  $a$  est excellent et que  $b$  est à rejeter. Dans le contexte de Balinski et Laraki [16, 18, 15, 20, 23], tous les électeurs sont invités à *évaluer* chaque candidat dans un *langage commun* ou *système de rangement*, dont les grades sont établis dans un langage clair et compréhensible par tous dans la société. En particulier, contrairement au contexte arrowien, dans le contexte de Balinski et Laraki il est possible d'attribuer la même évaluation à plus d'un candidat. Comme exemple, considérons le langage commun  $\{10, 9, \dots, 1\}$  de notes (grades) utilisées dans le système éducatif congolais ; nous savons que la note 4 signifie "*insuffisant*" et que la note 8 signifie "*très bien*". Dans leur expérience aux élections présidentielles françaises de 2007, Balinski et Laraki [16] ont utilisé  $\{Excellent, Trs Bien, Bien, Acceptable, Insuffisant, Rejeter\}$  comme langage commun et ont soutenu que ces six niveaux sont suffisants pour permettre aux électeurs d'exprimer convenablement leurs évaluations sur les 12 candidats en lice. Cependant, dans leur expérience aux élections présidentielles françaises de 2012, ils ont

établi une nouvelle échelle de sept niveaux [23] :

$$\{E, TB, B, AB, P, I, R\}$$

Où

$E$	: Excellent
$TB$	: Très Bien
$B$	: Bien
$AB$	: Assez-Bien
$P$	: Passable
$I$	: Insuffisant
$R$	: A rejeter

### 3.2 Contexte arrowien

Dans le contexte d'Arrow, introduit en [11], chaque électeur est invité à établir un ordre linéaire (ou faible) d'alternatives. Un profil  $p$  peut être vu comme une liste d'ordres linéaires de différents votants. Une *fonction de bien-être social* est définie comme une fonction qui associe à chaque profil un ordre faible (rang social) d'alternatives alors qu'une *fonction de choix social* (ou *fonction de décision sociale*) associe à chaque profil une unique alternative, celle qui est choisie par la société [168, 25]. Par exemple, la règle de la pluralité peut être vue à la fois comme fonction de bien-être social et de choix social. Une alternative  $a$  est préférée socialement à  $b$  selon la règle de la pluralité si le nombre de votants ayant placé  $a$  comme leur premier choix est supérieur au nombre de votants qui ont placé  $b$  comme premier choix ; et conçue comme une règle de choix social, la règle de la pluralité sélectionne l'alternative qui recueille le plus de premiers choix (supposant que pas plus d'un votant ne recueille le plus grand nombre de premiers choix).

Arrow lui-même a montré dans [11] le célèbre théorème d'impossibilité affirmant clairement que toute fonction de bien-être social qui satisfait la propriété de Pareto et l'Indépendance des Alternatives Non-Pertinentes (*IIA* = "*Independence of Irrelevant Alternatives*") doit être dictatoriale. La première propriété dit que si tous les votants préfèrent  $a$  à  $b$ , la société doit aussi préférer  $a$  à  $b$  et la deuxième propriété dit que pour comparer  $a$  à  $b$ , une troisième alternative (non-pertinente) ne doit avoir aucune influence. Une fonction de bien-être social qui satisfait ces deux

propriétés est dictatoriale, c'est-à-dire, il y a un dictateur dont la préférence sera toujours la préférence sociale, indépendante des préférences des autres votants.

Ce théorème peut être considéré comme le début de l'ère de la théorie moderne du Choix Social. Ce qui est étonnant est que tout le monde a continué à travailler dans le contexte arrowien, dans lequel les votants sont supposés avoir des ordres de préférence transitifs, c'est-à-dire, si un votant préfère  $a$  à  $b$  et  $b$  à  $c$ , alors il est supposé préférer  $a$  à  $c$ . C'est seulement récemment que ce contexte a été remis en question par Michel Balinski et Rida Laraki en une série d'articles [15, 16, 18, 23] et dans un livre récent [20].

Ils ont aussi par la suite fourni des arguments pour quitter le contexte arrowien et ont introduit un contexte plus naturel qui est actuellement utilisé dans le vécu d'un certain nombre d'élections, tel qu'en compétition de vins, patinage artistique, etc [168, 24]. Dans ce nouveau contexte, les votants ne sont plus supposés fournir un rangement de candidats mais une évaluation de candidats en des termes qui sont clairement compris par tous ceux qui sont impliqués dans le processus de vote. Avant d'introduire ce nouveau contexte, nous présenterons les nouveaux arguments apportés par Balinski et Laraki [19] pour quitter le contexte arrowien.

**Définition 3.1 (Balinski et Laraki ([20], p. 83))** *Soit  $f$  une règle de rangement, i.e.,  $f$  fusionne un profil - un ensemble arbitraire d'ordres de préférences de votants - en un ordre de préférence sociale.*

- $f$  est vainqueur (perdant) unanime := si tous les votants rangent un candidat au premier rang (resp. dernier rang), alors ce candidat est premier (resp. dernier).
- $f$  est choix-compatible := si tous les votants rangent un candidat au premier rang (resp. dernier rang) et un candidat Condorcet est ajouté au profil alors ce candidat doit être le vainqueur (resp. perdant).
- $f$  est rang-compatible := si un vainqueur est exclu de l'ensemble de candidats, alors le nouveau rangement de candidats restants reste en accord avec le rangement original.

Dans leur livre, Balinski et Laraki [20] ont démontré le théorème suivant :

**Théorème 3.1 (Balinski et Laraki ([20], p. 84))** *S'il y a au moins trois alternatives, il n'existe pas de règle de rangement gagnant-perdant unanime, choix-compatible et rangement-compatible quels que soient les profils de préférences.*

**Preuve :** Voir [20].

**Définition 3.2 (Balinski et Laraki ([20], p. 81, 82, 97))** *Soit  $f$  une règle de rangement.*

- $f$  est choix-monotone := si  $a \succeq_S b$  et que  $a$  soit strictement rangé plus haut ou que  $b$  soit classé strictement plus bas par un ou plusieurs votants, alors  $a \succeq_S b$ .
- $f$  est rang-monotone := si les estimations des votants restent les mêmes exceptées que le vainqueur soit reclassé plus haut alors, non seulement il devrait rester vainqueur, le rangement final des autres candidats ne devrait pas changer.
- $f$  est fortement monotone := si un candidat qui n'est pas vainqueur est reclassé plus bas par les votants alors le candidat gagnant reste vainqueur.

**Théorème 3.2 (Balinski et Laraki ([20], p. 88))** *Il n'existe pas de règle de rangement qui soit anonyme, neutre, vainqueur-perdant unanime, rang-monotone et choix-monotone lorsqu'il y a au moins trois alternatives.*

**Preuve :** Voir [20].

Pour des raisons mentionnées dans cette section, Balinski et Laraki [15, 18, 16, 20, 23] ont introduit un contexte complètement nouveau appelé *Jugement Majoritaire* qui est à la fois choix-monotone, rang-monotone et fortement monotone.

### 3.3 Contexte du Jugement Majoritaire (JM)

Ayant rejeté le contexte arrowien, Balinski et Laraki [15, 18, 16, 20, 23] proposent un nouveau contexte. Le JM sort du contexte arrowien : Les votants ne se prononcent plus sur les candidats en termes de “... est préféré à ...” mais ils les évaluent individuellement. En pratique, lors des concours de danse artistique et de compétitions de vins, on demande aux votants d'évaluer chaque candidat dans un langage bien compris par tous en vue de ranger tous les candidats. Le même contexte est

utilisé dans le vote par rangement [155] mais le classement social est établi différemment. Alors que, pour le vote par rangement, c'est simplement la moyenne de toutes les évaluations d'un candidat qui est retenue comme évaluation sociale, Balinski et Laraki prennent la valeur médiane de toutes les évaluations d'un candidat comme point de départ en vue de réduire les possibilités de comportement stratégique gagnant. Au cas où deux ou plusieurs candidats obtiennent la même médiane, une règle de *tie-break* décide sur le rangement social final.

Premièrement, un langage pour ranger les candidats est requis de telle manière que les évaluations soient bien comprises par les personnes concernées par le vote. Balinski et Laraki ont adopté, dans leur expérience de 2007 aux élections présidentielles françaises, le langage commun suivant :

{ *Excellent* , *Très bien* , *Bien* , *Assez Bien* , *Passable* , *Insuffisant* , *Rejeté* }

**Définition 3.3 (Langage commun)** *On appelle langage commun un ensemble*

$\mathcal{L} = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  *strictement ordonné par « > » tel que  $g_1 > g_2 > \dots > g_k$  ( $g_i \geq g_j := g_i > g_j$  ou  $g_i = g_j$ ).*

Notons que l'ensemble  $\mathcal{L}$  représentant un langage commun peut être de cardinalité infini tel que l'intervalle  $[0, 1]$ .

Remarquons la possibilité pour un votant d'attribuer la même évaluation à plus de deux candidats. A ce titre, un votant peut attribuer à un candidat  $a$  la note **TB**, à un candidat  $b$  la note **TB** et à un autre candidat  $c$  la note **B**. Dans le contexte arrowien, on dira :

«  $a$  est au moins aussi bon que  $b$  », «  $b$  est au moins aussi bon que  $a$  », «  $a$  est au moins aussi bon que  $c$  », «  $b$  est au moins aussi bon que  $c$  », «  $a$  est préféré à  $c$  », «  $b$  est préféré à  $c$  », «  $a$  est indifférent de  $b$  ».

**Définition 3.4 (Méthode de rangement ([20], p. 176))** . *Une fonction  $\mathcal{F}$  est une méthode de rangement si elle associe à tout profil un rang unique (dans le même langage) pour tout candidat. Ainsi,*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{L}^{m \times n} &\rightarrow \mathcal{L}^m \\ (g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1n}, g_{21}, \dots, g_{mn}) &\mapsto (g_1^*, g_2^*, \dots, g_m^*) \end{aligned}$$

Où  $m$  est le nombre de candidats,  $n$  le nombre de juges ou votants et  $g_i^*$  le grade finale du candidat  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ).

### Propriétés 3.1 ( Propriétés de $\mathcal{F}$ ([20], p. 180))

Une fonction de rangement social satisfait les axiomes suivants :

- **Neutralité** : Si chaque votant renverse sa préférence, le candidat élu change aussi.
- **Anonymat** : Si on permute les votants (ou même avec d'autres votants), le candidat élu ne change pas.
- **Pareto-consistance** : Si tous les votants préfèrent le candidat  $a$  au candidat  $b$  alors  $a$  doit être le vainqueur de l'élection.
- **Monotonie** : Si un ou plusieurs votants reclassent mieux un candidat  $a$  alors  $a$  ne devrait pas en définitif rester moins bien classé
- **Indépendance des Actions Non-Pertinentes** : Pour classer deux candidats parmi tant d'autres, il ne doit suffire que de connaître les préférences de chaque votant sur ces deux candidats - leurs préférences pour les autres candidats ne doivent pas influencer le rangement entre ces candidats de même que l'ajout ou le retrait d'un candidat.

**Théorème 3.3 (Balinski et Laraki ([20], p. 179))** Une méthode de rangement  $\mathcal{F}$  est dite fonction de rangement social (FRS) s'il existe une fonction d'agrégation  $f$  telle que le grade assigné à un compétiteur  $a_i$ , étant donné un profil  $(g_{ij})$ , est égal à  $f(g_{i1}, \dots, g_{in})$

**Preuve** : Voir [20].

**Définition 3.5 (Balinski et Laraki ([20], p. 189))** Soit  $F$  une fonction de rangement social et  $g$  le grade final d'un compétiteur.  $\mathcal{F}$  est graduation-résistante si lorsque l'évaluation d'un juge est  $g^+ > g$ , toute modification de cette évaluation ne peut que conduire à un grade plus bas que  $g$ ; et lorsque l'évaluation d'un juge est  $g^- < g$ , toute modification son évaluation ne peut que conduire à un grade plus élevé que  $g$ .

**N.B.** : Balinski et Laraki montrent dans [20] au Théorème 10.2 que les seules fonctions de rangement social qui sont graduation-résistantes sont les fonctions d'ordre.

**Définition 3.6 (Balinski et Laraki ([20], p. 190))** la  $k^{ime}$  fonction  $f^k$  est la fonction qui associe le  $k^{ime}$  grade à une liste de grades en entrée.

Par exemple,  $f^3(7, 9, 5, 4, 8) = 7$ .  $f^3$  désigne donc la troisième donnée dans la liste ordonnée (dans l'ordre décroissant) des grades.

Remarquons qu'un juge qui souhaite que le grade final soit plus grand que 7 ne peut que l'améliorer en augmentant le grade qu'il a attribué, mais cela ne change rien. Il en est de même, s'il souhaite que le grade final soit plus bas. Finalement, si le juge attribuait le grade 7, il s'en serait réjoui. Ainsi, aucun juge avec une préférence unimodale n'a intérêt à attribuer un grade différent de celui qu'il juge honnête.

**Propriétés 3.2 (Evaluation majoritaire)** Soit  $a_i$  un candidat ou compétiteur avec les grades  $g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}$  où  $g_{i1} \geq g_{i2} \geq \dots \geq g_{in}$ . Alors l'évaluation majoritaire ou grade majoritaire  $f^{maj}[a_i]$  est par définition :

$$f^{maj}(a_i) = \begin{cases} f^{\frac{n+1}{2}}(g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}), & \text{si } n \text{ est impair;} \\ f^{\frac{n+2}{2}}(g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}), & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

### 3.3.1 Exemples de grade majoritaire

Si 5 juges attribuent les grades 4, 8, 7, 9, 5 à  $a_i$ ,

$$f^{maj}(a_i) = f^3(9, 8, 7, 5, 4) = 7$$

Et si 8 juges attribuent les grades 9, 7, 3, 6, 5, 4, 5, 8 à  $a_i$ ,

$$f^{maj}(a_i) = f^5(9, 8, 7, 6, 5, 5, 4, 3) = 5$$

Si un candidat a les grades 10, 8, 7, 5, 2 sur une échelle de 1 à 10, son grade majoritaire sera 7, d'autant plus qu'une majorité de juges estiment que le candidat devrait avoir au moins 7, et une autre majorité de juges estiment que le candidat devrait avoir au plus le grade 7. Et si un candidat a les grades 10, 8, 7, 6, 5, 2 sur une échelle de 1 à 10, son grade majoritaire sera 6, le plus petit grade médian.

### 3.3.2 Remarques

Lorsque  $n$  est impair, la fonction d'ordre  $f^{\frac{n+1}{2}}$  est la fonction d'agrégation qui renvoie la valeur médiane. lorsque  $n$  est pair, il y a plusieurs fonctions d'agrégation qui renvoient de valeurs proches à la médiane avec  $f^{\frac{n}{2}}(g_1, \dots, g_n) \succeq f(g_1, \dots, g_n) \succeq f^{\frac{n+2}{2}}(g_1, \dots, g_n)$ . En particulier,  $f^{\frac{n}{2}}$  est la fonction d'agrégation qui renvoie la valeur médiane la plus élevée et  $f^{\frac{n+2}{2}}$  la fonction d'agrégation qui renvoie valeur médiane la plus petite (Voir [20], p. 210).

Par exemple, lorsque  $g_1 > g_2 > g_3 > g_4 > g_5 > g_6$ , toute fonction  $f$  telle que  $g_3 \geq f(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6) \geq g_4$  est une fonction qui renvoie la valeur la plus proche de la médiane. Tout grade qui n'est pas renvoyé par les fonctions à valeurs proches de la médiane est rejeté par une majorité absolue de juges qui admettent soit des grades plus élevés ou moins élevés.

### 3.3.3 Cas particuliers

Lorsque le nombre de votants est impair, le grade (ou la mention) majoritaire est la médiane ou le grade placé au milieu. Dans le cas d'un nombre pair de grades et qu'un des deux grades du milieu d'un candidats soient différents, Balinski et Laraki [15, 18, 16, 20, 23] prennent le plus petit des deux grades du milieu vu qu'ils recherchent une fonction de graduation sociale (FGS) qui respecte le *consensus*.

**Définition 3.7 (Balinski et Laraki ([20], p. 216))** *Une FGS respecte le principe du consensus := si tous les grades de  $a$  appartiennent à l'intervalle des valeurs proches de la médiane des grades de  $b$  alors le grade final de  $a$  ne peut être en dessous de celui de  $b$ .*

L'idée sous-jacente est que lorsqu'un jury est plus unanime sur le grade d'une alternative qu'il ne l'est sur le grade d'une autre, le consensus le plus fort devrait être respecté en lui attribuant un grade final non moins élevé que celui de l'autre alternative. Comme illustration, supposons que  $b$  a les évaluations 9, 8, 7, 6, 5, 4 et  $a$  n'a que les évaluations entre 7 et 6, prenons 7, 7, 6, 6, 6, 6 alors nous voudrions que le grade final de  $a$  ne soit pas moins élevé que celui de  $b$ . Pour cette raison, Balinski et Laraki [15, 18, 16, 20, 23] prennent le plus petit des valeurs de milieu comme grade majoritaire, c'est-à-dire 6.

**Définition 3.8 (Balinski et Laraki ([20], p. 220))** *Une fonction de graduation sociale est dite stratégie-résistante en rangement := si le grade final  $g^a$  de  $a$  est plus bas que celui de  $b$  noté  $g^b$ , i.e.  $g^a < g^b$  et si un juge quelconque a une conviction opposée  $g_{aj} > g_{bj}$ , alors il ne peut ni décroître le grade final de  $b$  ni accroître le grade final de  $a$ .*

**N.B.** : Balinski et Laraki [20] expriment dans leur théorème 13.1 qu'il n'existe pas de fonction de graduation sociale qui soit stratégie-résistante en rangement. Alors, l'idéal ne peut être atteint. Cependant, ils montrent que quelque chose proche de l'idéal peut être atteint.

**Définition 3.9 (Balinski et Laraki ([20], p. 221))** Une fonction de graduation sociale est partiellement stratégie-résistante en rangement := si le grade final  $g^a$  de  $a$  est plus bas que celui de  $b$  noté  $g^b$ , i.e.  $g^a < g^b$  et si un juge quelconque a une conviction opposée  $g_{aj} > g_{bj}$ , alors s'il peut décroître le grade de  $b$ , il ne peut accroître celui de  $a$  et s'il peut accroître le grade final de  $a$ , il ne peut décroître celui de  $b$ .

Dans leur théorème 13.2, Balinski et Laraki [20] montrent que les seules fonctions de graduation sociale qui sont partiellement stratégie-résistantes en rangement sont les fonctions d'ordre.

Illustrons par un exemple que la fonction d'agrégation qui renvoie la valeur la plus proche de la médiane est partiellement stratégie-résistante en rangement. Considérons le cas de deux candidats  $a$  et  $b$  qui reçoivent les grades suivants par un jury de 5 juges :

$$\begin{array}{rcccccc} a : & 95 & 85 & 75 & 73 & 66 \\ b : & 95 & 81 & 78 & 70 & 69 \end{array}$$

Le grade final de  $a$  (75) est inférieur à celui de  $b$  (78). Supposons que le juge 2 pense que  $a$  mérite un grade plus élevé (85) que  $b$  qui ne mérite que 81. Que peut-il faire ? Il peut rabattre le grade final de  $b$  en lui attribuant un grade inférieur à son grade médian (78), par exemple 50 au lieu de 81. Mais il ne peut pas à la fois augmenter le grade médian de  $a$ , car attribuer un grade plus élevé à  $a$  n'augmente pas son grade final. Et le juge 4 qui donne 73 points à  $a$  et seulement 70 à  $b$  peut augmenter le grade final de  $a$  en lui attribuant un grade plus élevé que son grade médian, par exemple 80 au lieu de 73 mais il ne peut pas en même temps décroître le grade final de  $b$ .

### 3.4 Tie-Breaking

Lorsque les grades majoritaires de deux candidats sont différents, celui qui obtient le grade majoritaire le plus élevé est classé avant l'autre. Le rangement majoritaire  $>_{maj}$  entre deux candidats évalués par un même jury est déterminé par une application répétée du grade majoritaire :

**Définition 3.10 (Balinski et Laraki ([20], p. 224))**

Si  $f^{maj}(a) > f^{maj}(b)$  alors  $a >_{maj} b$ .

Si  $f^{maj}(a) = f^{maj}(b)$  alors un grade majoritaire est rejeté de la liste des grades de chacun des candidats et la procédure est répétée [18, 20].

Balinski et Laraki [20] donnent cet exemple pour illustrer leur définition. Supposons que  $a$  et  $b$  sont évalués par un jury de 7 votants :

$$\begin{array}{l} a : 85 \quad 73 \quad 78 \quad 90 \quad 69 \quad 70 \quad 73 \\ b : 77 \quad 70 \quad 95 \quad 81 \quad 73 \quad 73 \quad 66 \end{array}$$

Alors le profil ordonné est :

$$\begin{array}{l} a : 90 \quad 85 \quad 78 \quad \underline{73} \quad 73 \quad 70 \quad 69 \\ b : 95 \quad 81 \quad 77 \quad \underline{73} \quad 73 \quad 70 \quad 66 \end{array}$$

Il est clairement visible que les premiers grades majoritaires de  $a$  et  $b$  sont les mêmes :  $f_1^{maj}(a) = f_1^{maj}(b) = 73$ . Par définition, nous rejetons un grade majoritaire (73) des deux listes d'évaluation. Nous obtenons :

$$\begin{array}{l} a : 90 \quad 85 \quad 78 \quad \underline{73} \quad 70 \quad 69 \\ b : 95 \quad 81 \quad 77 \quad \underline{73} \quad 70 \quad 66 \end{array}$$

Alors les deuxièmes grades majoritaires de  $a$  et  $b$  sont aussi égaux :  $f_2^{maj}(a) = f_2^{maj}(b) = 73$ . Ce grade est rejeté et nous obtenons :

$$\begin{array}{l} a : 90 \quad 85 \quad \underline{78} \quad 70 \quad 69 \\ b : 95 \quad 81 \quad \underline{77} \quad 70 \quad 66 \end{array}$$

Les troisièmes grades majoritaires diffèrent :  $f_3^{maj}(a) = 78$  alors que  $f_3^{maj}(b) = 77$ . Ainsi,  $a \succ_{maj} b$ .

Nous voyons clairement que le rangement majoritaire classe toujours un candidat avant l'autre à moins que les juges ne leur attribuent les mêmes grades.

Dans le cas où il y a plusieurs juges ou votants (élections présidentielles par exemple), Balinski et Laraki [20, 23] présentent une autre manière simple de traiter le *tie-break*.

### Définition 3.11 (Jauge majoritaire)

Le "jauge majoritaire" d'un candidat  $a$  avec  $f^{maj}(a) = \alpha$  est un triplet  $(p_a, \alpha^*, q_a)$  où  $p$  est le nombre ou pourcentage de grades du candidat  $a$  qui sont supérieurs au grade majoritaire,  $q$  est le nombre ou pourcentage de grades du candidat  $a$  qui sont inférieurs au grade majoritaire, et

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha^+ & \text{si } p > q \\ \alpha^- & \text{si } p \leq q \end{cases}$$

$\alpha^*$  est appelé *grade majoritaire modifié* du candidat.

Soit  $\beta$  un autre jauge. Par définition,  $\alpha^* > \beta^* \Leftrightarrow \alpha > \beta$  ou ( $\alpha = \beta$  et  $\alpha^* = \alpha^+$  et  $\beta^* = \alpha^-$ ).

Balinski et Laraki [20, 23] utilisent le jauge majoritaire pour le rangement par jauge majoritaire  $\succ_{mg}$ .

**Définition 3.12 (Rangement par jauge majoritaire)** Soient  $a$  et  $b$  deux candidats avec les jauges majoritaires  $(p_a, \alpha_a^*, q_a)$  et  $(p_b, \alpha_b^*, q_b)$  respectivement. Alors  $a \succ_{mg} b$  ou  $(p_a, \alpha_a^*, q_a) \succ_{mg} (p_b, \alpha_b^*, q_b)$  ssi  $\alpha_a^* > \alpha_b^*$  ou ( $\alpha_a^* = \alpha_b^* = \alpha^+$  et  $p_a > p_b$ ) ou ( $\alpha_a^* = \alpha_b^* = \alpha^-$  et  $q_a < q_b$ ) ([20], p. 237).

Notons que le rangement par jauge majoritaire peut ne pas décider entre deux candidats dans certains cas. Dans leur théorème 14.1, Balinski et Laraki [20] montrent que si  $a \succ_{mg} b$  alors  $a \succ_{maj} b$ .

**Théorème 3.4 (Balinski et Laraki ([20], p. 237))** Si  $a \succ_{mg} b$  alors  $a \succ_{maj} b$ .

**Preuve :** Voir [20].

Ahmed Zahid [168] prend alors un exemple (Voir Table 3.1) qui illustre un cas où  $a \succ_{mg} b$ , mais ni  $b \succ_{maj} a$  ni  $b \succ_{mg} a$ .

TABLE 3.1 – Indécision du jauge majoritaire

Candidat	$p$	Excellent	Très Bien	Bien	Passable	Insuffisant	A Rejeter	$q$	Total
$a$	5	2	3	<u>3</u>	1	3	3	7	15
$b$	6	3	3	<u>2</u>	0	2	5	7	15

Le jauge majoritaire de  $a$  est  $(5, \text{Bien}^-, 7)$  et celui de  $b$  est  $(6, \text{Bien}^-, 7)$ . Comme  $q_a = q_b = 7$ , le jauge majoritaire ne prend aucune décision et pourtant l'on vérifie aisément que  $a \succ_{maj} b$ .

## 3.5 Expériences

Le jugement majoritaire a été expérimenté deux fois en France lors des élections présidentielles de 2007 [16, 17] et celles de 2012 [23].

### 3.5.1 Expérience française de 2007

Dans leur expérience de 2007, Balinski et Laraki [16] ont invité environ 2000 votants à évaluer les 12 candidats pour la présidence de la République avec les grades  $\{Excellent, Trs\ Bien, Bien, Passable, Insuffisant, A\ Rejeter\}$ . Cette expérience a été menée à Orsay, une ville près de Paris.

Les grades majoritaires des candidats en lice sont indiqués en inscrivant le pourcentage correspondant en gras (cf. Table 3.2). Comme on peut le remarquer, Bayrou, Royal et Sarkozy ont le même grade *Bien*. Le jauge majoritaire de Bayrou est  $(44.3\%, Bien^+, 30.6\%)$ , celui de Royal est  $(39.4\%, Bien^-, 41.5\%)$  et le jauge majoritaire de Sarkozy est  $(38.9\%, Bien^-, 46.9\%)$ . Ainsi, Bayrou  $\succ_{mg}$  Royal car  $Bien^+ > Bien^-$  et Royal  $\succ_{mg}$  Sarkozy car  $41.5\% < 46.9\%$ . Par conséquent, on a aussi Bayrou  $\succ_{maj}$  Royal  $\succ_{maj}$  Sarkozy.

TABLE 3.2 – Résultats de l'expérimentation du JM en 2007 à Orsay

Candidats	Excellent	Très Bien	Bien	Passable	Insuffisant	A Rejeter
Besancenot	4.1%	9.9%	16.3%	16.0%	<b>22.6%</b>	31.1%
Buffet	2.5%	7.6%	12.5%	20.6%	<b>26.4%</b>	30.4%
Schivardi	0.5%	1.0%	3.9%	9.5%	24.9%	<b>60.4%</b>
Bayrou	13.6%	30.7%	<b>25.1%</b>	14.8%	8.4%	7.4%
Bové	1.5%	6.0%	11.4%	16.0%	<b>25.7%</b>	39.5%
Voinet	2.9%	9.3%	17.5%	<b>23.7%</b>	26.1%	20.5%
Villiers	2.4%	6.4%	8.7%	11.3%	15.8%	<b>55.5%</b>
Royal	16.7%	22.7%	<b>19.1%</b>	16.8%	12.2%	12.6%
Nihous	0.3%	1.8%	5.3%	11.0%	26.7%	<b>55.0%</b>
Le Pen	3.0%	4.6%	6.2%	6.5%	5.4%	<b>74.4%</b>
Laguiller	2.1%	5.3%	10.2%	16.6%	<b>25.9%</b>	40.1%
Sarkozy	19.1%	19.8%	<b>14.3%</b>	11.5%	7.1%	28.2%

La Table 3.3 reprend le rangement établi par le jauge majoritaire

TABLE 3.3 – Rangement des candidats par le jauge majoritaire pour l'expérience de 2007

Rang	Candidats	$p$	$\alpha^*$	$q$
1	Bayrou	44.3%	<i>Bien</i> <sup>+</sup>	30.6%
2	Royal	39.4%	<i>Bien</i> <sup>-</sup>	41.5%
3	Sarkozy	38.9%	<i>Bien</i> <sup>-</sup>	46.9%
4	Voinet	29.8%	<i>Passable</i> <sup>-</sup>	46.6%
5	Besancenot	46.3%	<i>Insuffisant</i> <sup>+</sup>	31.2%
6	Buffet	43.2%	<i>Insuffisant</i> <sup>+</sup>	30.5%
7	Bové	34.9%	<i>Insuffisant</i> <sup>-</sup>	39.4%
8	Laguiller	34.2%	<i>Insuffisant</i> <sup>-</sup>	40.0%
9	Nihous	45.0%	A rejeter	—
10	Villiers	44.5%	A rejeter	—
11	Schivardi	39.7%	A rejeter	—
12	Le Pen	25.7%	A rejeter	—

### 3.5.2 Expérience française de 2012

L'expérience de Balinski et Laraki [23] de 2012 a porté sur un échantillon de 773 votants appelés à évaluer 10 candidats à la présidence de la République. Les grades retenus pour l'évaluation sont :  $\{Excellent, Trs\ Bien, Bien, Assez\ Bien, Passable, Insuffisant, A\ Rejeter\}$ . Le choix d'une échelle de sept niveaux dans une problématique comme le vote est recommandé par des études en psychologie et confirmé par plusieurs expériences [20, 21, 122]. Le choix des mots était rattaché à leur usage ancré dans la tradition de l'école française. Les distributions des mentions des 773 bulletins sont données dans la Table 3.4.

TABLE 3.4 – Résultats de l'expérimentation du JM en 2012

Candidats	Excellent	Très bien	Bien	Assez Bien	Passable	Insuffisant	A rejeter
Joly	0.81%	2.99%	6.51%	11.80%	14.65%	24.69%	38.53%
Le Pen	5.97%	7.33%	9.50%	9.36%	13.98%	6.24%	47.63%
Sarkozy	9.63%	12.35%	16.28%	10.99%	11.13%	7.87%	31.75%
Mélenchon	5.53%	9.50%	12.89%	14.65%	17.10%	15.06%	25.37%
Poutou	0.14%	1.36%	4.48%	7.73%	12.48%	28.09%	45.73%
Arthaud	0.00%	0.14%	4.48%	7.73%	12.48%	25.24%	49.93%
Cheminade	0.41%	0.81%	2.44%	5.83%	11.67%	26.87%	51.97%
Bayrou	2.58%	9.77%	21.71%	25.24%	20.08%	11.94%	8.69%
Dupond-Aignan	0.54%	2.58%	5.97%	11.26%	20.22%	25.51%	33.92%
Hollande	12.48%	16.15%	16.42%	11.67%	14.79%	14.25%	14.24%

Le jugement majoritaire révèle que François Hollande est le candidat avec le plus de mentions positives, que François Bayrou est celui avec le moins de mentions négatives et que Marine Le Pen est rejetée par presque

une majorité. Seul un tiers des électeurs accorde la mention “Excellent” à son meilleur candidat, un tiers accorde Très bien et un dernier tiers lui accorde Bien ou moins ; en moyenne un électeur rejette 3 à 4 candidats ; enfin, 30% des électeurs attribuent leurs meilleures mentions à deux candidats ou plus. Des comportements semblables ont été observés dans toutes les expériences et applications du JM. Ces informations font sens. Elles sont ignorées par le scrutin majoritaire et par les méthodes basées sur le classement [23].

Des mentions d’un candidat est déduite sa note finale — sa *mention-majoritaire* (grade majoritaire) — et des mentions-majoritaires de tous les candidats et leurs importances relatives est déterminé le classement final – *le classement-majoritaire*. Ces choix sont imposés par des exigences théoriques validées par l’expérimentation [20].

La mention-majoritaire est la mention soutenue par une majorité contre toute autre mention. La mention-majoritaire de Nicolas Sarkozy est *Passable* car une majorité de  $60,38\% = 9,63\% + 12,35\% + 16,28\% + 10,99\% + 11,13\%$  des électeurs jugent qu’il mérite au moins *Passable* (donc toute mention inférieure n’est soutenue que par une minorité) et une majorité de  $50,75\% = 11,13\% + 7,87\% + 31,75\%$  jugent qu’il mérite au plus *Passable* (donc toute mention supérieure n’est soutenue que par une minorité).

Trois paramètres déterminent le classement :  $\alpha$  la mention-majoritaire,  $p$  le pourcentage de mentions supérieures à  $\alpha$ , et  $q$  le pourcentage de mentions inférieures à  $\alpha$ . La mention majoritaire est complétée d’un “+” si  $p > q$  et autrement d’un “-”.

TABLE 3.5 – Rangement des candidats par le jauge majoritaire pour l'expérience de 2012

Rang	Candidats	$p$	$\alpha^*$	$q$
1	Hollande	45.05%	<i>Assez – Bien</i> <sup>+</sup>	43.28%
2	Bayrou	34.06%	<i>Assez – Bien</i> <sup>-</sup>	40.71%
3	Sarkozy	49.25%	<i>Passable</i> <sup>+</sup>	39.62%
4	Mélenchon	42.47%	<i>Passable</i> <sup>+</sup>	40.43%
5	Dupond-Aignan	40.57%	<i>Insuffisant</i> <sup>+</sup>	33.92%
6	Joly	36.77%	<i>Insuffisant</i> <sup>-</sup>	38.53%
7	Poutou	26.19%	<i>Insuffisant</i> <sup>-</sup>	45.73%
8	Le Pen	46.13%	<i>Insuffisant</i> <sup>-</sup>	47.63%
9	Artaud	24.83%	<i>Insuffisant</i> <sup>-</sup>	49.93%
10	Cheminade	48.03%	<i>A rejeter</i>	—

### 3.6 Propriétés du Jugement Majoritaire

Etant donné un *langage commun*, il a été prouvé que le JM (le *grade majoritaire* et le *rangement majoritaire*) est l'un des rares mécanismes de vote connus qui puissent satisfaire à plusieurs différents critères [168, 18, 16, 20, 21]. Nous décrivons, dans cette section, les propriétés saillantes dont jouit le JM dans le cadre des expériences de ses auteurs. Ces propriétés sont essentiellement celles que ne remplissent pas simultanément les autres mécanismes de vote concurrents du JM [21].

**Ordinalité :** Le langage commun est ordinal. Aucune mesure d'intensité entre les grades n'est supposée. Ainsi, le mécanisme utilisé doit aussi être ordinal. Le jugement majoritaire est ordinal : le rangement majoritaire est indépendant de toute paramétrisation du langage. Tous les mécanismes basés sur les sommes ou moyennes des points ne sont pas ordinaux.

**Respect de la majorité :** Le grade majoritaire (ou la médiane) est le seul mécanisme qui garantit que quand la majorité de l'électorat donne le grade  $g$  à un candidat, le grade majoritaire de ce candidat est  $g$ . Tous les membres de la majorité peuvent attribuer la note  $p$  à un candidat mais la moyenne de ce candidat ne sera certainement pas (en général)  $p$ .

**Transitivité :** Le rangement majoritaire est transitif. Le paradoxe de Condorcet montre que le critère de Condorcet n'est pas transitif. Ce phénomène a été observé par Kurrild-Klitgaard.

**Indépendance des Alternatives Non-Pertinentes (IANP) :** Le jugement majoritaire est indépendant des alternatives non-pertinentes. Les grades sont absolus et non relatifs. Ainsi, si un candidat est exclu de la liste, les grades des candidats restants demeurent inchangés. Aucun des mécanismes dont les entrées sont les ordres de rangement ne satisfait au critère de l'IANP (y compris le vote uninominal, le compte de Borda et ses généralisations aux systèmes par scorage et le vote préférentiel transférable) [21].

**Monotonie :** Si tous les grades d'un candidat sont remplacés par le même grade ou un grade supérieur, la place du candidat dans le rangement majoritaire ne peut être moins bonne qu'elle ne l'était avant. Si tous les grades d'un candidat sont remplacés par des grades strictement meilleurs, le grade majoritaire du candidat doit être amélioré. Le vote préférentiel transférable ne satisfait pas ce critère : si un candidat vainqueur  $c$  est mieux reclassé dans les listes de certains votants et que les autres listes restent les mêmes,  $c$  peut ne plus être le vainqueur. Il n'est pas non plus satisfait par le vote uninominal (même à plusieurs tours) : Pour le cas des élections présidentielles françaises de 2007, Balinski et Laraki [21] nous rapportent que si les voix de Sarkozy, au premier tour, augmentaient aux dépens de Royal, Bayrou finirait en deuxième position. Alors le deuxième tour opposerait Sarkozy à Bayrou et Bayrou en serait vainqueur partant de l'hypothèse annoncée qu'en duel ce dernier semblait mieux lotis que ses deux concurrents les plus en vue.

**Résistance aux manipulations stratégiques :** Dans la Table 3.3, prenons l'exemple d'un candidat, supposons Royal dont le jauge majoritaire est

$$(39.4\%, \text{Bien}^-, 41.5\%).$$

Seul un votant pouvant changer le grade majoritaire ou le jauge majoritaire de Royal en changeant les grades qu'on lui a donnés peut avoir un effet stratégique. Qui sont ces votants et quelles seraient leurs motivations à changer de grades ?

Supposons qu'un votant estime qu'un candidat mérite le grade  $g$  au plus, le grade majoritaire de  $g$  est celui qu'il souhaite au plus pour le candidat (une motivation raisonnable). Alors la stratégie optimale de vote de cet électeur est de donner au candidat le grade  $g$  : *le jugement majoritaire est stratégie-résistante en graduation*. Plus vrai

encore le jugement majoritaire est *stratégie-résistante en graduation par groupe*. Si un groupe de votants (par exemple ceux appartenant à un même parti politique) estimait que Royal méritait mieux que “*Bien*” et ont tous élevé les grades qu’ils lui avaient attribués, son jauge majoritaire resterait le même ; s’ils avaient revu en baisse les grades qu’ils lui avaient attribués, son jauge-majoritaire diminuerait et peut-être aussi le grade majoritaire (ce qui n’est pas leur intention).

S’ils estimaient que Royal méritait moins que “*Bien*” et avaient tous abaissé les grades qu’ils lui avaient attribués, son jauge majoritaire resterait le même ; s’ils avaient tous élevé les grades qu’ils lui avaient attribués, son jauge majoritaire augmenterait et peut-être aussi son grade majoritaire (ce qui n’est pas leur intention). Si, finalement, ils estiment qu’elle méritait un “*Bien*”, et que tous avaient élevé ou abaissé les grades qu’ils lui avaient attribués, son jauge majoritaire et peut-être son grade majoritaire pourrait soit augmenter soit diminuer (ce qui n’est pas leur intention).

Ces propriétés de “*stratégie-résistance en graduation*” ne sont certainement pas vérifiées pour les mécanismes de vote basés sur les sommes et moyennes de points, ni le compte de Borda et ses dérivés. Si un votant augmente ou diminue les points qu’il a attribué à un candidat (ou reclasse mieux ou mal un candidat dans sa liste de vote), la somme ou la moyenne des points de ce candidat augmente ou diminue (même légèrement) et le candidat gagner ou perdre de places dans le rangement final. Si plusieurs votants augmentent ou diminuent les points attribués à un candidat (ou reclassent mieux ou mal un candidat dans leurs listes de vote), la somme ou la moyenne des points de ce candidat augmente ou diminue au *prorata*. Le candidat gagnera ou perdra probablement de places dans le rangement final [21].

La stratégie d’un votant peut, cependant, être basée sur le rangement final des candidats plutôt que sur leurs grades finaux. Il est impossible d’éliminer complètement la possibilité de manipulation stratégique si un votant est préparé à voir le grade final d’un candidat supérieur ou inférieur à ce qu’il estime que le candidat mérite : il n’existe pas de mécanisme de vote qui soit *stratégie-résistant en*

rangement [86, 141]. Mais le jugement majoritaire résiste mieux à cette manipulation. Si nous revenons aux données de la Table 3.3, les jauges majoritaires de Bayrou et Royal sont respectivement (44.3%, *Bien*, 30.6%) et (39.4%, *Bien*, 41.5%). Comment un électeur qui souhaite que Royal soit classée avant Bayrou peut-il manipuler ? En changeant les grades attribués pour essayer de diminuer le jauge majoritaire de Bayrou et augmenter celui de Royal.

Mais le jugement majoritaire est *partiellement stratégie-résistant en rangement* : ces électeurs qui peuvent diminuer le jauge majoritaire de Bayrou ne peuvent pas simultanément augmenter celui de Royal, ceux qui peuvent augmenter le jauge majoritaire de Royal ne peuvent diminuer celui de Bayrou. Comme on suppose qu'un tel votant peut diminuer le jauge majoritaire de Bayrou, alors il doit avoir attribué à Bayrou *Bien* ou mieux : mais préférant Royal à Bayrou, l'électeur a attribué à Royal un bien meilleur grade que *Bien*. Ainsi, il ne peut pas augmenter le jauge majoritaire de Royal.

Symétriquement, un électeur qui peut augmenter le jauge majoritaire de Royal doit lui avoir attribué *Bien* ou moins et moins que *Bien* à Bayrou. Il ne peut donc pas diminuer le jauge majoritaire de Bayrou. Comparé aux mécanismes basés sur la somme et la moyenne, le jugement majoritaire réduit de la moitié la possibilité de manipulation, peu importe que les motivations d'un votant soient bizarres (ou quelle que soit la fonction d'utilité du votant).

Nous mentionnerons par la suite d'autres propriétés remplies par les fonctions de graduation sociale.

**Définition 3.13 (Balinski et Laraki ([20], p. 289))**

Une fonction d'agrégation  $f$  est *séparable en grade* := si  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq \gamma$  et  $f(\beta_1, \dots, \beta_k) \geq \gamma$  alors  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_k) \geq \gamma$ . Ceci reste vrai si les inégalités sont inversées, strictes ou sont remplacées par des égalités.

**Théorème 3.5 (Balinski et Laraki ([20], p. 289))** Le grade majoritaire est *séparable en grade*.

**Preuve :** Voir [20].

Nous avons déjà vu à la section 3.2 qu'il n'existe pas de méthode de rangement qui soit à la fois choix-monotone et rang-monotone. Il n'y

existe pas non plus de méthode de rangement qui soit fortement monotone. Trivialement, le rangement majoritaire satisfait les trois précédentes propriétés.

**Théorème 3.6 (Balinski et Laraki ([20], p. 289))** *Le rangement majoritaire est à la fois choix-monotone, rang-monotone et fortement monotone.*

**Preuve :** Voir [20].

Balinski et Laraki [20] donnent dans leur Théorème 13.4 une caractérisation du rangement majoritaire :

**Théorème 3.7** *Le rangement majoritaire est la seule fonction renvoyant la valeur la plus proche de la médiane qui vérifie à la fois les critères suivants :*

- choix-monotonie,
- fonction de rangement social,
- privilège du consensus.

**Preuve :** Voir [20].

**Définition 3.14 (Balinski et Laraki ([20], p. 226))** *Une fonction de rangement social (FRS) est une fonction qui associe à tout ensemble de candidats un ordre de rang  $\succ_S$  en considérant les ex aequo et les grades.*

Si l'ensemble de grades d'une alternative  $a$  est par exemple  $\{11, 10, 10, 9, 6, 5, 4\}$ , alors le premier intervalle le plus proche de la médiane est  $[9, 9]$ , le deuxième est  $[10, 6]$ , le troisième est  $[10, 5]$  et le quatrième est  $[11, 4]$ . Si l'ensemble de grades de  $b$  est  $\{13, 12, 10, 9, 6, 3, 2\}$  alors le premier intervalle où  $a$  et  $b$  diffèrent est le troisième : l'intervalle de  $a$  est  $[10, 5]$  et celui de  $b$  est  $[12, 3]$ .

**Définition 3.15 (Balinski et Laraki ([20], p. 227))** *Une fonction de rangement social renvoie la valeur la plus proche de la médiane si  $a \succ_S b$  ne dépend que de l'ensemble de grades qui appartiennent au premier  $k^{ime}$  intervalle médian où ils diffèrent.*

**Définition 3.16 (Balinski et Laraki ([20], p. 227))** *Une fonction de rangement social privilégie le consensus := si tous les grades de  $a$  appartiennent strictement au  $k^{ime}$  intervalle médian des grades de  $b$ , où le  $k^{ime}$  intervalle médian considéré est le premier où les grades de  $a$  diffèrent de ceux de  $b$ , alors  $a$  est classé avant  $b$ , i.e.  $a \succ_S b$ .*

### 3.7 Conclusion du troisième chapitre

L'usage montre que les propriétés des méthodes imaginées et étudiées par les spécialistes en Théorie du Choix Social (et de vote) sont réelles. Les paradoxes d'Arrow et de Condorcet sont fréquemment observés. Les vainqueurs de Condorcet et de Borda sont éliminés dans les systèmes de vote à un et deux tours. Tout au long de l'histoire les politiciens manipulent. Ils manipulent ceux qui ont le droit de voter et ceux qui ont le droit d'être élus. A ce niveau, cette manipulation se matérialise par la manière de délimiter les circonscriptions électorales et le mode d'attribution des sièges aux partis politiques dans une chambre. Pour atteindre leurs objectifs – et la constitution le permet – ils changent les systèmes même plusieurs mois avant l'élection [20]. Des systèmes *ad hoc* sont habituellement inventés. Certains sont incroyablement complexes, d'autres sont contradictoires. L'histoire nous révèle que la plupart des gens pensent que la conception d'un système électoral n'est qu'un simple jeu d'enfant en dépit des années d'efforts et de réflexions qui ont conduit au développement de la Théorie du Choix Social [20].

L'usage a aussi montré qu'étant donné un système particulier, politiciens et votants agissent stratégiquement. Les candidats mineurs participent aux élections – peut-être par conviction personnelle, peut-être parce qu'ils sont poussés (ou payés) par les uns et les autres – et changent parfois les résultats par leur présence. L'électeur peut opérer son vote non pour son candidat favori mais pour un autre ; parfois l'électeur peut classer dernier un candidat qu'il préfère à la plupart d'autres candidats mais qui représente un danger réel à l'élection de son candidat favori. L'analyse des systèmes électoraux doit tenir compte de tel comportement stratégique.

La Théorie du Choix Social n'a pas répondu à ces défis [20]. Néanmoins, ce qui en ressort fournit un fondement solide d'idées, d'approches, de concepts et de mécanismes. Balinski et Laraki [20] soutiennent l'échec de cette théorie par une évidence expérimentale.

A ce niveau, croirait-on que la solution apportée par Balinski et Laraki est efficace et contourne les difficultés rencontrées dans le modèle traditionnel. Le Chapitre 4 relève des faiblesses au Jugement Majoritaire qui, comme le Chapitre 5 le montre, ne sont guère observées sur les méthodes

(construites assurément sur le même modèle) qui sont basées sur la sommation des points ou leur moyenne.

Balinski et Laraki préviennent déjà que, dans le nouveau contexte, aucune fonction de rangement social ne peut garantir l'élection du vainqueur de Condorcet (cf. Théorème 20.7 dans [20]). L'illustration suivante permet de nous en convaincre :

Pour raison de simplicité, prenons quatre grades 3, 2, 1 et 0 (du meilleur au pire). Il suffit de comparer les deux profils (avec  $k > 1$ ) :

Candidats	$k$ juges	1 juge	$k$ juges
$x$	1...1	0	3...3
$y$	0...0	3	2...2

et

Candidats	$k$ juges	1 juge	$k$ juges
$x$	1...1	0	3...3
$y$	2...2	3	0...0

Dans le premier profil  $x$  est le vainqueur de Condorcet avec une majorité de  $2k$  ; dans le second,  $y$  est le vainqueur de Condorcet avec une majorité de  $k + 1$ . Mais n'importe quelle fonction de rangement social rangerait  $x$  et  $y$  de la même façon dans les deux situations. En effet, dans les deux situations,  $x$  et  $y$  ont précisément les mêmes ensembles de grades. Alors la Condorcet-Consistance (ou Condorcet-cohérence) est impossible à assurer dans le modèle de Balinski-Laraki.

En conséquence, il n'existe pas de méthode de vote dans un autre modèle qui élit le vainqueur de Condorcet (lorsqu'il existe) comme un vainqueur avec équilibre forte sans tricherie. Mais dans le nouveau modèle (contexte de Balinski et Laraki) le vainqueur de Condorcet peut être élu avec les candidats recevant une majorité de grades honnêtes [20].

Le JM est une proposition pleine de réussite – bien que récente – qui attire l'attention de plusieurs chercheurs aussi bien du point de vue théorique qu'expérimental. Certaines de ses extensions – y compris les cas où l'extension dérive la règle de *tie-break* du JM – sont donnés dans [66].

Dans le chapitre suivant, nous présenterons des situations controversées concernant le JM. Il s'agira d'illustrer par des exemples que le JM

peut produire, dans certaines circonstances, des résultats surprenants (paradoxes). Ces paradoxes sont donc des points faibles du JM.

# Chapitre 4

## Paradoxes du Jugement Majoritaire

### 4.1 Introduction au quatrième chapitre

Un *paradoxe électoral* (ou *paradoxe de vote*) peut-être défini comme un résultat qu'une procédure de vote peut produire et qui peut être perçu, au premier coup d'oeil, par certaines personnes comme surprenant ou contraire à leur intuition [71, 72]. Ce concept a déjà été abordé à la section 1.5. Le JM étant un nouveau modèle introduit en Théorie du Choix Social, doit être étudié avec minutie afin d'observer son comportement lorsqu'utilisé comme fonction de vote. Il convient qu'après la présentation de ses points forts au chapitre précédent, il faille aussi consacrer un chapitre sur ses imperfections et limites.

Les paradoxes jouent un rôle important dans le domaine de la Théorie du Choix Social et sont une source importante de progrès. Déjà les pères fondateurs de la théorie du choix social, Nicolas de Caritat, mieux connu comme le Marquis de Condorcet (1743-1794) et Jean-Charles Chevalier de Borda (1733-1799) ont tiré l'attention sur quelques paradoxes, i.e., des résultats contraires à l'intuition. Par exemple, le paradoxe de Condorcet montre que sous la règle majoritaire (comparaison par paire), la préférence collective ou sociale peut être cyclique (non-transitive) même lorsque les préférences individuelles sont transitives. Le paradoxe de Borda montre que l'alternative choisie par la règle de la pluralité (i.e. l'alternative classée première par plus de votants que n'importe quelle autre alternative) peut être battue par toutes les autres alternatives en duels (comparaisons par paire).

Aussi, le résultat d'Arrow [6] des années 1950 était considéré comme paradoxal. Ce résultat montre qu'il ne peut exister une règle de préfé-

rence sociale qui produise un rangement social transitif et qui soit à la fois non-dictatoriale, Pareto optimale et indépendante des alternatives non-pertinentes (IANP). A première vue, ces conditions semblent très naturelles et légères. D'après les récentes analyses de Saari [140], le problème est posé par le fait que la condition de l'IANP force la règle de préférence à ignorer la transitivité des ordres de préférences individuelles.

Tous les paradoxes susmentionnés supposent que les électeurs ont des ordres de préférence transitifs, un point de vue remis en question par Balinski et Laraki [20]. Comme nous l'avons vu au Chapitre 4, ils rejettent ce contexte et le remplacent par un autre dans lequel les votants donnent une évaluation de candidats dans un langage commun de grades au lieu d'un ordre de rangement transitif d'alternatives. Néanmoins, on peut soutenir que dans leur contexte aussi, des situations paradoxales peuvent advenir. Cependant, dans le Chapitre 16 de [20], les auteurs expliquent le caractère paradoxal des exemples fournis. Dans ce chapitre, nous discuterons un certain nombre de tels exemples afin de mesurer l'ampleur de ces paradoxes et les conséquences d'une élection s'appuyant sur le JM.

## 4.2 Situations controversées sur le JM

Dans [167] et [168] sont donnés un certain nombre d'exemples dans lesquels le Jugement Majoritaire produit, au moins à première vue, des résultats qui semblent contraires à l'intuition. C'est pour cette raison qu'ils sont appelés *paradoxes* dans ces publications. Ces exemples ont été communiqués à Balinski et Laraki qui en font référence dans leur livre [20]. Dans le Chapitre 16 de [20], Balinski et Laraki discutent des exemples similaires à ceux donnés dans [167] et [168].

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons les grades suivants : *Excellent (Ex)*, *Trs Bien (TB)*, *Bien (B)*, *Passable (P)*, *Insuffisant (I)*, et *Rejet (R)*.

**Exemple 4.1** *Considérons un concours entre deux vins  $a$  et  $b$ , et neuf juges qui donnent les évaluations suivantes :*

	Juge 1	Juge 2	Juge 3	Juge 4	Juge 5	Juge 6	Juge 7	Juge 8	Juge 9	$f^{maj}$
$a$	TB	B	B	B	B	I	R	R	R	B
$b$	Ex	Ex	Ex	TB	P	P	P	P	I	P

Même si tous les juges sauf un ont attribué à  $b$  un grade supérieur à celui de  $a$ , c'est  $a$  qui est le vainqueur pour le JM.

Dans l'exemple 16.2 de [20], les auteurs discutent un exemple similaire.

**Exemple 4.2** *Considérons  $2k + 1$  juges qui évaluent deux candidats au moyen des grades compris entre 20 et 1 :*

	$k$ juges	1 juge	$k$ juges	$f^{maj}$
$a$	12...12	12	4...4	12
$b$	16...16	8	8...8	8

Ici aussi, le candidat majoritaire dans le contexte traditionnel est  $b$  avec  $2k$  voix contre 1 voix pour  $a$ . Cependant, le grade majoritaire de  $a$  est 12 et celui de  $b$  est 8.  $a$  est alors le vainqueur du jugement majoritaire. La justification ou défense de Balinski et Laraki est la suivante ([20], p. 281-282) :

Cette situation est très artificielle ; rien de pareil n'a été rencontré en pratique. En plus, en termes de probabilité mathématique, elle est rare. En supposant qu'un électorat est composé de  $2k + 1$  votants, la probabilité que la moitié d'électeurs attribuent à deux candidats des grades supérieurs à leurs grades majoritaires est de  $\frac{1}{2^k}$ . De plus, un juge peut faire que le grade majoritaire de  $a$  soit un grade compris entre 4 et 12 et le grade majoritaire de  $b$  entre 8 et 16.

Dans tous les cas, il est parfaitement raisonnable que  $a$  soit le vainqueur : une majorité absolue donne le grade 12 à  $a$  et une autre majorité donne le grade 8 à  $b$ . Pourquoi cette décision majoritaire – une décision prise en considérant l'exemple *horizontalement* – serait-elle moins valide que la décision majoritaire traditionnelle – une décision prise en considérant l'exemple *verticalement* – ? La notion de majorité n'est pas un axiome du modèle traditionnel. L'unanimité est aussi une exigence. Elle est satisfaite par le jugement majoritaire : lorsque tous les grades de  $x$  sont supérieurs à ceux de  $y$ ,  $x$  est classé avant  $y$ .

Des arguments similaires peuvent être avancés pour justifier que  $a$  est le vainqueur du jugement majoritaire dans l'exemple 4.2.

**Exemple 4.3** *Supposons qu'il y a deux alternatives  $a$  et  $b$  et 100 juges dont les évaluations sont résumées dans le tableau suivant :*

	$p$	$Ex$	$TB$	$B$	$P$	$I$	$R$	$q$
$a$	48	18	30	52	0	0	0	0
$b$	49	18	31	21	15	8	7	30

D'après la théorie du Jugement Majoritaire de Balinski et Laraki [18, 20, 23],  $a$  et  $b$  ont le même grade majoritaire  $B(ien)$ , le jauge majoritaire de  $a$  est  $(48, B^+, 0)$  et celui de  $b$  est  $(49, B^+, 30)$ . D'après les deux règles de *tie-break*,  $b$  est le vainqueur.

Remarquons qu'il n'y a aucun juge qui attribue à  $a$  un grade inférieur à  $Bien$ , alors qu'il y en a 30 qui le font pour  $b$ . On peut soutenir que " $b$  est vainqueur" est le résultat produit par le votant de plus qui a jugé  $b$  comme  $TB$  en ne considérant pas les 30 votants qui jugent  $b$  en-dessous de  $B$ . En considérant les grades cumulés du jugement majoritaire indiqués dans le tableau ci-dessous, on s'attendrait à ce que  $a$  soit le vainqueur.

Au moins	$Ex$	$TB$	$B$	$P$	$I$	$R$
$a$	18	48	100	100	100	100
$b$	18	49	70	85	93	100

Comme l'indique le tableau ci-dessus, le candidat  $a$  est évalué au moins  $Bien$  par 100% de votants alors que 70% de votants seulement évaluent  $b$  au moins  $Bien$ . Néanmoins,  $b$  (et non  $a$ ) est vainqueur d'après la théorie du Jugement Majoritaire.

**Exemple 4.4** Supposons qu'il y a deux alternatives  $a$  et  $b$  et 100 juges dont les évaluations sont résumées dans le tableau suivant :

	$p$	$Ex$	$TB$	$B$	$P$	$I$	$R$	$q$
$a$	49	9	40	51	0	0	0	0
$b$	4	4	47	0	0	0	49	49

Dans cet exemple, le grade majoritaire de  $a$  est  $B$  et celui de  $b$  est  $TB$ . Ainsi,  $b$  est le vainqueur. Ici encore, puisque tous les votants jugent que  $a$  mérite au moins le grade  $B$  alors que 49 votants rejettent  $b$ , on soutiendrait intuitivement que  $a$  soit vainqueur et non  $b$ . Après tout, une majorité de votants préfèrent  $a$  à  $b$ . Néanmoins, dans leur livre, Balinski et Laraki [20] soutiennent qu'il est raisonnable que  $b$  soit vainqueur dans ce cas avançant ces arguments :

1. Une majorité juge que  $b$  mérite au moins le grade  $TB$ , alors qu'une telle majorité n'existe pas pour  $a$ .
2. Les majorités de grades sont clairement considérablement des décisions plus judicieuses que les majorités de préférences. Il n'y a aucune raison que ces deux types différents de décision de majorité puissent converger, ni encore coïncider avec le vainqueur par sommation de points ([20], p. 283).
3.  $a$  est le plus centriste, plus consensuel candidat ;  $b$  est le candidat avec le plus d'opinions politiques confirmées – et ainsi, il a plus de grades élevés et plus de grades moins élevés que  $a$  – et il arrive à obtenir un grade plus élevé par la majorité et gagne par le jugement majoritaire ([20], p. 284).

**Exemple 4.5** *Trois amis souhaitent acheter un plat commun à partager mais l'un d'eux est musulman et donc ne peut manger la viande de porc. Tous aiment la viande de bœuf mais les non-musulmans préfèrent légèrement la viande de porc. Leur profil se présente comme suit :*

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
Porc	9	9	0
Boeuf	8	8	9

La médiane pour le porc est 9 et celle pour le bœuf est 8. Pourtant, la viande de bœuf est la seule qui rencontre l'assentiment de tous. Cet exemple est tiré de [155].

**Exemple 4.6** *Considérons un concours de tir avec deux concurrents  $a$  et  $b$  ; ils ont tiré dix fois et les grades suivants leur ont été attribués :*

	$p$	$Ex$	$TB$	$B$	$P$	$I$	$R$	$q$
$a$	5	2	2	1	0	0	5	0
$b$	0	0	0	0	0	6	4	4

Le grade majoritaire de  $a$  est  $R$  alors que celui de  $b$  est  $I$ . Ainsi,  $b$  gagne par le JM. A première vue, on s'attendrait à ce que  $a$  gagne car il a été évalué 5 fois  $B$  ou plus alors que le meilleur grade pour  $b$  n'est que  $I$ .

**Exemple 4.7** *Considérons deux candidats  $a$  et  $b$  et cinq juges avec les résultats suivants :*

	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$j_4$	$j_5$	$f^{maj}$
$a$	<i>Ex</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>B</i>
$b$	<i>Ex</i>	<i>Ex</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>P</i>

Ainsi,  $a$  est vainqueur par le JM avec le grade majoritaire  $B$  alors que le grade majoritaire de  $b$  n'est que  $P$ . Le Jugement Majoritaire n'incite pas à la participation : supposons qu'un sixième juge donne un  $I$  à  $a$  et un  $R$  à  $b$ . Alors  $b$  devient le vainqueur par le JM car le grade majoritaire de  $a$  devient  $I$  et celui de  $b$  devient  $P$ .

Balinski et Laraki fournissent la justification suivante dans le chapitre 16 de [20] pour le phénomène ici observé.

1. Qui sait quelles sont les intentions [du sixième juge] ? S'il donne à  $a$  et  $b$  des grades inférieurs, [tel qu'il a fait dans l'exemple 4.7] il n'a qu'une opinion relativement faible sur les deux candidats. Il serait indifférent de ce que l'un des deux gagne et serait plutôt heureux de voir leurs grades diminués. [De même que s'il donnait aux deux des grades élevés].
2. S'il préférerait fortement  $a$  à  $b$  et donnait au premier un grade [entre  $B$  et  $Ex$  et à  $b$  un grade entre  $P$  et  $R$ ], alors  $a$  resterait vainqueur.

**Exemple 4.8** *Considérons qu'il y a deux sous-ensembles de l'électorat, soit  $I$  et  $II$  avec deux candidats  $a$  et  $b$ . Dans l'électorat  $I$ , il y a 10 juges rendant leurs jugements de la manière suivante :*

<i>Electorat I</i>	$p$	<i>Ex</i>	<i>TB</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	$q$
$a$	3	3	3	1	1	1	1	4
$b$	4	2	2	4	2	0	0	2

Dans l'électorat  $I$ , le grade majoritaire du candidat  $a$  est  $TB$  (Très Bien) et celui de  $b$  est  $B$  (Bien). Ainsi, dans l'électorat  $I$ ,  $a \succ_{maj} b$ .

Dans l'électorat  $II$ , il y a les mêmes candidats  $a$  et  $b$  et 15 juges fournissant les évaluations que voici :

<i>Electorat II</i>	$p$	<i>Ex</i>	<i>TB</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	$q$
$a$	5	1	2	2	3	4	3	7
$b$	7	2	2	2	1	4	4	4

Dans l'électorat II, le grade majoritaire du candidat  $a$  est  $P$  (Passable) et celui de  $b$  est  $I$  (Insuffisant). Ainsi, dans l'électorat II aussi,  $a \succ_{maj} b$ .

Maintenant, observons les résultats dans les deux électors combinés comme montrés ci-dessous :

	$p$	$Ex$	$TB$	$B$	$P$	$I$	$R$	$q$
$a$	9	4	5	3	4	5	4	9
$b$	8	4	4	6	3	4	4	11

Dans l'électorat unifié, le grade majoritaire final du candidat  $a$  est  $P$  (Passable) et celui de  $b$  est  $B$  (Bien). Ainsi, bien que  $a \succ_{maj} b$  dans les deux électors (I et II), nous avons  $b \succ_{maj} a$  dans l'électorat unifié. En d'autres termes,  $a$  gagne dans chacun des circonscriptions I et II alors que c'est  $b$  qui gagne lorsque les deux sont réunies. Ainsi, le Jugement Majoritaire ne prend une décision cohérente ni sur le vainqueur ni sur le rangement.

Le théorème suivant est facilement vérifié :

**Théorème 4.1 (Balinski and Laraki ([20], p. 287))**

Si  $f^{maj}(a) = \alpha$ ,  $f^{maj}(b) = \beta$  et  $\alpha > \beta$  et qu'un nouveau juge attribue à  $a$  le grade  $\alpha$  ou un grade supérieur et attribue à  $b$  un grade strictement inférieur à  $\alpha$ , ou symétriquement, s'il attribue à  $b$   $\beta$  ou un grade inférieur et attribue à  $a$  un grade strictement supérieur à  $\beta$ , alors  $a$  reste vainqueur.

Comme justification à ce phénomène, Balinski et Laraki [20] argumente comme suit au Chapitre 16, p. 289 :

1. Pourquoi  $a$  devrait-il rester vainqueur dans l'électorat unifié ? Les deux circonscriptions peuvent avoir été d'accord sur les rangements mais pas certainement sur les évaluations. ... Pourquoi un accord sur les rangements serait-il plus important qu'un accord sur les évaluations ? Les évaluations sont plus judicieuses de simples rangements.
2. Le fait que le JM ne remplisse pas le critère de renforcement (séparabilité) est réel mais rare. Plusieurs théorèmes simples avec des évidences expérimentales en expliquent le pourquoi. Dans la section 3.6, nous avons déjà vu que le grade majoritaire est séparable en grade, i.e. si  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq \gamma$  et  $f(\beta_1, \dots, \beta_k) \geq \gamma$  alors  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_k) \geq \gamma$ . Ceci reste vrai si les inégalités sont inversées, strictes ou sont remplacées par des égalités. ... Ce théorème stipule

que quand deux électorats sont en accord sur leurs évaluations d'un candidat pour le JM, alors l'électorat unifié l'est aussi. Dans le nouveau contexte [15, 18, 20], le point le plus important est d'assurer une cohérence dans les évaluations et non une cohérence sur les rangements (ordres de candidats). Le JM l'assure.

Le JM ne décide pas convenablement sur le vainqueur : Supposons dans l'exemple 4.7 le sixième juge attribue  $I$  aux deux candidats  $a$  et  $b$ , alors  $b$  devient encore vainqueur par le JM. Cette situation paradoxale peut aussi être illustrée comme suit :

**Exemple 4.9** *Supposons que deux amis Roméo et Juliette avaient décidé de ne pas voter parce que Roméo préférerait le candidat  $a$  et voulait lui donner un grade légèrement supérieur à celui qu'il donnerait à  $b$ , par exemple  $Ex$  et  $TB$  respectivement  $a$  et  $b$ . Juliette qui préfère légèrement  $b$  à  $a$  donne à son favori un grade légèrement supérieur à son concurrent, par exemple  $TB$  et  $Ex$  respectivement  $a$  et  $b$ . Puisqu'ils s'attendent à ce que leurs votes se neutralisent, ils ont décidé de ne pas voter. Cependant, voyons ce qui arriverait s'ils avaient voté dans le cas de l'Exemple 4.7. Alors  $b$  est vainqueur à la place de  $a$  :*

	Jugements								$f^{maj}$
$a$	$Ex$	$Ex$	$TB$	$B$	$B$	$I$	$R$	$R$	<b><math>B</math></b>
$b$	$Ex$	$Ex$	$Ex$	$TB$	$P$	$P$	$R$	$R$	<b><math>TB</math></b>

Ici aussi, nous pouvons reconstruire les arguments de Balinski et Laraki en faisant remarquer que :

1. Roméo et Juliette donnent à  $a$  et  $b$  des grades élevés, ils ne se soucient pas vraiment de celui qui peut gagner et seraient contents de voir les grades majoritaires de  $a$  et  $b$  augmenter.
2. Ici encore, les évaluations sont plus judicieuses que les rangements. Aussi, rappelons-nous le Théorème 4.1 et que le JM est séparable en grade.

**Exemple 4.10** *Le fait que le JM n'incite pas à la participation peut aussi être illustré dans cet exemple. Supposons que Roméo et Juliette sont deux nouveaux votants qui donnent tous deux au vainqueur  $a$  de l'Exemple 4.7 le grade  $Ex$  et à  $b$  le grade  $TB$ . Alors nous avons la situation suivante :*

		Jugements						$f^{maj}$
$a$	<i>Ex</i>	<i>Ex</i>	<i>Ex</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<b><i>B</i></b>
$b$	<i>Ex</i>	<i>Ex</i>	<i>TB</i>	<i>TB</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<b><i>TB</i></b>

Ici encore,  $b$  devient le vainqueur à la place de  $a$ . On peut conclure qu'un soutien accru pour le candidat  $a$  peut le faire basculer du vainqueur au perdant. Dans ce cas, il est préférable à Roméo et Juliette de ne pas voter car le candidat favori gagnera sans leurs votes alors que  $b$  gagnera s'ils votent. Dans la littérature ceci est connu comme "No-show paradox".

Pour citer Hannu Nurmi [135] :

*"La vulnérabilité au no-show paradox est un sérieux désavantage pour un système de vote. Après tout, tout votant rationnel s'attendrait à ce qu'en votant il contribue à faire gagner son candidat favori. La réalisation par un électeur que l'acte même de communiquer ses vraies préférences empire le résultat que s'il n'allait pas voter peut être démoralisant. Elle démotive l'électeur rationnel pour aller voter".*

Cependant, d'après Manzoor Ahmed Zahid [168], Balinski et Laraki se défendraient probablement de la manière suivante :

1. Une majorité évalue  $b$  au moins *TB* ; il n'existe pas une telle majorité pour  $a$ .
2. Si Roméo et Juliette préféraient fortement  $a$  à  $b$ , ils auraient dû attribuer à  $a$  *Bien* ou plus et à  $b$  *Passable* ou moins, cas dans lequel  $a$  resterait vainqueur.
3. Les évaluations sont plus judicieuses que les rangements.

Balinski et Laraki font remarquer que les échecs à remplir les critères de participation (ou non-incitation à la participation), renforcement et décision convenable sur le vainqueur sont essentiellement des phénomènes équivalents et avancent les arguments que voici ([20], p. 287) :

*"Tous les arguments avancés ci-haut suggèrent que le no-show paradox n'est pas d'une grande importance. La violation du critère de décision convenable sur le vainqueur est une propriété positive et non négative. Le JM donne à chaque votant la possibilité de modifier le rangement, même s'il est indifférent ou non de plusieurs candidats ou tous. ... Ceci est une incitation claire à la participation. Ceci n'est pas vérifié pour les systèmes de vote basés sur la sommation des points qui décident convenablement sur le vainqueur".*

**Exemple 4.11** *Considérons la situation suivante avec deux alternatives  $a$  et  $b$  et 100 juges dont les jugements sont représentés comme suit :*

	$p$	$Ex$	$TB$	$B$	$P$	$I$	$R$	$q$
$a$	1	1	99	0	0	0	0	0
$b$	50	50	1	0	0	0	49	49

Le jauge majoritaire de  $a$  est  $(1, TB^+, 0)$  et celui de  $b$  est  $(50, TB^+, 49)$ . Ainsi,  $b \succ_{mg} a$  et de là  $b \succ_{maj} a$ . Cependant, tous les juges s'accordent à dire que  $a$  mérite au moins  $TB$  contre que 51 seulement pour  $b$ . Considérant les grades majoritaires cumulés indiqués dans le tableau ci dessous, on pourrait soutenir que  $a$  devrait gagner et non  $b$ .

	Au moins	$Ex$	$TB$	$B$	$P$	$I$	$R$
$a$		1	100	100	100	100	100
$b$		50	51	51	51	51	100

Comment Balinski et Laraki justifieraient-ils ce résultat ? dans ce cas, il y a une majorité qui juge que les candidats  $a$  et  $b$  méritent tous les deux le grade  $TB$ . Bien sûr, la situation semble très artificielle. Aussi, ils pourraient soutenir que le seul juge qui attribue à  $b$  la mention  $TB$  pourrait lui attribuer toute note comprise entre  $Ex$  et  $R$ . Dans le premier cas, une majorité de juges s'accorde à dire que  $b$  mérite la mention  $Ex$  et il n'existe pas une telle majorité pour  $a$ . Et si ce juge attribue  $b$  la mention  $B$  ou moins que cela au lieu  $TB$ , le grade majoritaire de  $b$  deviendra  $B$  ou moins que cela, et  $a$  serait vainqueur.

### 4.3 Conclusion du quatrième chapitre

Il est relativement facile d'inventer des exemples extrêmes qui semblent, à première vue, avilir une méthode. L'exemple suivant proposé par Balinski et Laraki [20], où  $2k + 1$  votants ou juges attribuent les grades à deux compétiteurs  $x$  et  $y$ , devrait sembler surprenant :

Candidats	$k$ juges	1 juge	$k$ juges
$x$	20 ... 20	10	0 ... 0
$y$	19 ... 19	9	19 ... 19

Si les grades sont ordonnés d'après les juges, et un grade supérieur signifiant une préférence pour le candidat, le candidat majoritaire dans le

modèle traditionnel (contexte arrowien) est  $x$  avec  $k + 1$  votes contre  $y$  avec  $k$  votes.

Cependant, le grade majoritaire de  $x$  est 10 tandis que celui de  $y$  est 19. Toute méthode basée sur la moyenne ou la sommation des points donnerait le même résultat.

Nous avons dit à la section 3.7 que le critère de Condorcet n'est pas pris en compte dans ce modèle. Le modèle d'Arrow et celui de Balinski-Laraki ont des points de vue tout à fait incompatibles.

Tout celui qui observe cet exemple admet que  $y$  gagne, mais le modèle traditionnel décide autrement. Pour être plus utiles, les exemples doivent montrer comment l'une ou l'autre propriété est violée pour qu'ainsi les conséquences logiques de cette propriété soient examinées.

Les exemples de type "Tout le monde admettrait que  $x$  soit élu à la place de  $y$ " – par exemple du point de vue sommation de points – ne peuvent pas constituer des bases sur lesquelles les méthodes devraient être jugées et comparées : beaucoup d'entre ces paradoxes disparaissent lorsqu'ils sont placés dans un contexte pratique spécifique et, dans tous les cas, ils sont des cas extrêmes [20].

Quels sont les paradoxes qui ont déjà été observés en pratique ? Le paradoxe d'Arrow dans les élections (par exemple Bush en 2000, Chirac en 1995 et 2002, Sarkozy en 2007) et dans les compétition (par exemple en patinage artistique). Pour l'élection présidentielle américaine de 2000, les sondages indiquaient que si Ralph Nader n'avait pas été candidat, ses électeurs voteraient pour Albert Gore qui serait élu président de la république avec une avance confortable sur Bush : sans la candidature de Ralph Nader dans l'état de Floride, Albert Gore aurait eu le plus grand nombre de voix dans cet état, donc ses 25 voix des grands électeurs, et serait élu Président des Etats-Unis. Sylvain Durand [64] nous rapporte que l'élection présidentielle française du 07 mai 1995 était paradoxale.

En effet, Jacques Chirac était élu président de la république. Il battait au second tour Lionel Jospin avec 15 551 412 voix contre 13 975 871. Pourtant, si Lionel Jospin n'avait pas réussi à convaincre certains électeurs potentiels d'Edouard Balladur, il aurait peut-être gagné l'élection :

avec 689 828 voix de plus récupérées dans l'électorat de Lionel Jospin au premier tour, Edouard Balladur aurait battu Jacques Chirac. Il aurait été opposé à Lionel Jospin au second tour. Si 787 771 (5%) des électeurs ayant voté pour Jacques Chirac au second tour avaient préféré Lionel Jospin à Edouard Balladur, ce dernier aurait perdu l'élection.

Ainsi, s'il avait été un peu moins bon au premier tour, Lionel Jospin aurait pu être président de la république.

En 2007, une dizaine de sondages montraient que François Bayrou aurait battu largement Nicolas Sarkozy ou Ségolène Royal s'il avait été qualifié au second tour. Les quelques très rares sondages de face-à-face de 2012 donnaient Bayrou au coude-à-coude contre François Hollande et largement devant Sarkozy [23]. La démocratie serait donc piégée par le système qui l'incarne.

Une méthode d'agrégation doit satisfaire l'Indépendance des Alternatives Non Pertinentes. Dans le contexte traditionnel ceci laisse la règle majoritaire pair-par-pair de Condorcet comme la seule règle possible [61]. Mais elle n'est pas nécessairement transitive dans tous les domaines. Excepté pour les élections politiques, il n'est pas possible de restreindre le domaine pour obtenir la transitivité. Dans les élections politiques, l'information préalable permet une manipulation et conduit à des résultats intransitifs [20].

Une méthode d'agrégation doit rendre des résultats transitifs dans tous les cas. En conclusion, les rangements individuels doivent être ignorés ; seules les méthodes basées sur la distribution de grades peuvent être considérées. Par conséquent, nous admettons qu'un vainqueur entre deux candidats ne soit pas nécessairement celui qui est préféré par la majorité de votants. Quelles sont les méthodes qui restent alors ? Le Jugement Majoritaire et les méthodes basées sur les sommes pondérées et moyenne (et bien sûr aussi le vote par approbation).

Le chapitre suivant est consacré à une méthode de vote basée sur le contexte Balinski-Larakien qui est en fait une combinaison du JM et du Compte de Borda [168]. Nous verrons aussi que cette nouvelle méthode contourne certains paradoxes du JM.

# Chapitre 5

## Théorie du Borda Majority Count (BMC)

### 5.1 Introduction au cinquième chapitre

Nous avons vu à la section 4.2 que le Jugement Majoritaire peut produire des résultats controversés dans certains cas. Aussi, il n'est pas clairement établi que le Jugement Majoritaire de Balinski et Laraki peut être utilisé pour la distribution de sièges entre différents partis dans un parlement. Pour cette raison, Manzoor Ahmed Zahid [168] adapte le Jugement Majoritaire comme suit : On suppose que le langage commun de graduation est  $\{Ex, TB, B, P, I, R\}$ , où  $Ex$  désigne "Excellent",  $TB$  désigne "Trs Bien",  $B$  désigne "Bien",  $P$  désigne "Passable",  $I$  désigne "Insuffisant" et  $R$  désigne "A Rejeter". Il identifie chaque évaluation à un nombre entier de points tel qu'indiqué dans le tableau ci-dessous.

TABLE 5.1 – Correspondances entre mentions et notes

Grades	Points associés
$Ex$	5
$TB$	4
$B$	3
$P$	2
$I$	1
$R$	0

Le Borda Majority Count (BMC) d'un candidat est alors le nombre total de points attribués à ce candidat par les votants. Cette procédure contient des éléments de la méthode de Borda (appelé aussi *Compte de Borda*), du Jugement Majoritaire et du Vote par évaluation (ou *Vote par scorage*) comme nous allons l'expliquer plus loin.

En 1770, le mathématicien français Jean-Charles de Borda proposa le Compte de Borda comme méthode pour élire les membres de l'Académie Française des Sciences. Dans le contexte d'Arrow, les votants sont supposés fournir un ordre de préférence sur les alternatives, chacun dans son propre langage. Si un votant range les alternatives  $\{a_1, \dots, a_m\}$  de sorte que  $a_{\sigma(1)} \succ a_{\sigma(2)} \succ \dots a_{\sigma(m)}$  (où  $\sigma$  désigne une permutation de  $\{1, \dots, m\}$ ),  $a_{\sigma(1)}$  obtient  $m - 1$  points de Borda,  $a_{\sigma(2)}$  obtient  $m - 2$  points de Borda, ...,  $a_{\sigma(m)}$  obtient 0 point de Borda. Le score de Borda d'une alternative donnée  $a$  est le nombre total de points de Borda attribués par les votants à  $a$ . Le rangement social des alternatives et le(s) vainqueur(s) sont obtenus en comparant les scores de Borda de différentes alternatives.

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 3, le jugement Majoritaire de Balinski et Laraki [15, 18, 20, 19, 23] utilise un contexte différent dans lequel les votants sont invités à évaluer chaque candidat dans un langage commun ou un système de grades. Ainsi, les votants peuvent fournir beaucoup plus d'informations que dans le contexte arrowien. Le message d'un juge est un grade (mention) ou un mot dans un langage commun. Ces grades ont des significations absolues dans ce sens que chaque votant évalue le mérite d'une alternative ou candidat selon ses propres normes ou critères. Le résultat est le grade médian des grades attribués par les votants aux candidats. Quoique le Jugement Majoritaire a des propriétés intéressantes, en particulier en rapport avec la manipulation stratégique, il peut produire des résultats controversés dans certains cas comme nous l'avons vu à la section 4.2. Ces paradoxes sont dus partiellement au fait que le JM soit une méthode d'agrégation basée sur la médiane.

Le vote par rangement (*Range Voting*), introduit par Warren D. Smith [155, 154, 2], est similaire au Jugement Majoritaire de Balinski et Laraki dans ce sens qu'il admet aussi un langage commun ou rangement de grades (mentions). Par exemple, les grades peuvent être rangés de 0 jusqu'à 99, en d'autres termes, le langage commun peut être  $\{99, 98, \dots, 1, 0\}$ , mais de plus petits ensembles de grades sont possibles, bien sûr. Le grade final d'un candidat ou alternative est simplement la somme de grades lui attribués par les différents votants. L'avantage de grands ensembles de grades est, bien sûr, qu'il y a moins de chance d'obtenir des *ex aequo*. D'autre part, le désavantage d'un grand ensemble de grades est qu'il rend

la manipulation plus facile : Si  $a$  et  $b$  sont deux compétiteurs et qu'un électeur ait de préférence pour  $a$ , il peut donner 99 points à  $a$  et 0 point à  $b$ , même si son évaluation sincère pour  $b$  serait 90 points, par exemple. Le vote par rangement présente de très bonnes propriétés, comme expliqué dans [155], mais sa faiblesse est qu'il est facile à manipuler [168]. De plus, l'interprétation n'est pas aisée. Que représente un écart d'un, deux ou trois points entre candidats ?

Le Borda Majority Count (BMC), qui est introduit dans ce chapitre, demande aussi à l'électeur d'évaluer chaque alternative dans un langage commun, comme avec le Jugement Majoritaire et le vote par rangement. La différence est que son langage commun préféré est  $\{Ex, B, P, I, R\}$ , en abandonnant le grade  $TB$ , ou en termes de grades l'ensemble  $\{4, 3, 2, 1, 0\}$ . Le grade final d'un candidat ou alternative est alors simplement la somme de grades attribués par les électeurs à l'alternative en question qui nous rappelle le Compte de Borda.

La différence avec le Compte de Borda est que dans la procédure de Borda, les électeurs sont supposés donner un rangement de candidats, sans qu'ils ne puissent exprimer les intensités. Ainsi, par exemple, si un votant préfère  $a_1$  à  $a_2$ , cela peut vouloir dire qu'il évalue  $a_1$  comme excellent et  $a_2$  comme bon, mais aussi il peut bien vouloir dire qu'il évalue  $a_1$  comme excellent et  $a_2$  comme insuffisant. Aussi, dans la procédure de Borda l'électeur n'est pas permis d'évaluer également bons ou mauvais deux ou plusieurs candidats. La différence entre le Borda Majority Count et le Jugement Majoritaire est que le premier (Borda Majority Count) prend la somme des évaluations d'un candidat donné par les différents votants comme grade final de cette alternative, tandis que le second (Jugement Majoritaire) prend le grade médian comme grade final de l'alternative en question. La différence entre le Borda Majority Count et le vote par rangement est que les grades sont exprimés par des mots tels que *excellent*, *bien (bon)*, *passable*, *insuffisant*, *à rejeter*, et que l'ensemble de grades est relativement petit [168].

Le Borda Majority Count a l'avantage de permettre aussi une distribution de sièges entre partis dans une chambre du parlement par exemple, alors que le Jugement Majoritaire ne définit pas clairement la distribution de sièges.

## 5.2 Borda Majority Count (BMC)

Soit  $a$  une alternative et  $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  un ensemble de grades hiérarchisés dans l'ordre  $g_1 > g_2 > \dots > g_k$ . Soit  $p_j$  le nombre de votants ayant donné le grade  $g_j$  à  $a$ , où  $j = 1, 2, \dots, k$ .

On définit alors le BMC de  $a$  par la formule  $BMC(a) = \sum_{j=1}^k p_j \cdot (k - j)$ .

Par exemple, supposons que nous ayons 5 grades : Excellent ( $Ex$ ), Bien ( $B$ ), Passable ( $P$ ), Insuffisant ( $I$ ), Rejeté ( $R$ ). On attribue 4 points à  $Ex$ , 3 points à  $B$ , 2 points à  $P$ , 1 point à  $I$  et 0 point à  $R$ . Avec ce codage, supposons que 10 votants se soient exprimés de la manière suivante sur le candidat  $a$  :

<b>Ex</b>	<b>B</b>	<b>P</b>	<b>I</b>	<b>R</b>
1	2	3	3	1

Alors  $BMC(a) = 1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 0 = 19$ .

Bien sûr, nous pouvons diviser le Borda Majority Count d'une alternative par le nombre de votants pour obtenir une sorte d'évaluation moyenne ou score moyen. Ainsi, nous définissons  $BMC_{av}(a)$  comme

$$BMC(a)/n$$

où  $n$  désigne le nombre de votants [168].

Même si la probabilité que le BMC attribue le même grade final à deux ou plusieurs alternatives est relativement faible, il peut bien sûr arriver qu'il y ait deux alternatives  $a$  et  $b$  telles que  $BMC(a) = BMC(b)$ , en d'autres termes il y a un *nœud* entre  $a$  et  $b$ . Dans un tel cas, Ahmed Zahid [168] propose de défaire le nœud en rejetant les grades le plus faible puis recalculer le Borda Majority Count dans la nouvelle situation avec un grade en moins. C'est-à-dire si les grades initiaux étaient  $Ex, B, P, I, R$  correspondant aux grades 4, 3, 2, 1, 0, dans la nouvelle situation les grades sont  $Ex, B, P, I$  mais correspondant maintenant aux grades 3, 2, 1, 0 respectivement. S'il y a encore un nœud, on rejette le grade  $I$  (*insuffisant*) et on recalcule le BMC ; on continue avec le processus de rejet de grades étape par étape du plus bas au plus élevé jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'*aequo* (que le nœud soit défait).

Le candidat qui obtient le plus grand BMC est le *vainqueur majoritaire de Borda* ou simplement *vainqueur de BMC*. En général, le Borda Majority Count entre deux compétiteurs est déterminé de la manière que voici :

**Définition 5.1 (Rangement majoritaire de Borda [168])**

- Si  $BMC(a) > BMC(b)$  alors  $a \succ_{BMC} b$
- Si  $BMC(a) = BMC(b)$ , alors on rejette les grades les plus bas et on recalcule le BMC. Cette procédure est répétée étape par étape en rejetant les grades du plus bas au plus élevé jusqu'à ce qu'un vainqueur soit trouvé entre  $a$  et  $b$ .

**Exemple :** Considérons le cas de 100 juges qui ont rendu leurs jugements sur trois candidats  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , tels qu'indiqués ci-dessous :

	Ex	B	P	I	R	BMC-I	BMC-II
$a$	23	21	29	17	10	230	140
$b$	24	20	25	24	7	230	137
$c$	19	22	35	18	6	230	136

Dans cet exemple, nous voyons que les alternatives  $a$ ,  $b$  et  $c$  ont le même Borda Majority Count, indiqué par BMC-I dans le tableau ci-dessus. Puisqu'il y a un nœud, nous rejetons les grades R de toutes les alternatives et recalculons le Borda Majority Count, mais en identifiant cette fois Ex, B, P, I à 3, 2, 1, 0 respectivement. Alors, il se dégage que l'alternative  $a$  obtient le plus grand Borda Majority Count, tel qu'indiqué par BMC-II, et gagne l'élection. Le rangement majoritaire de Borda est  $a \succ_{BMC} b \succ_{BMC} c$ .

Clairement, le Borda Majority Count range toujours un candidat avant un autre, à moins que les deux se voient attribués les mêmes ensemble de grades par les juges.

$$a \succeq_{BMC} b \Rightarrow a \succ_{BMC} b \text{ ou } a \text{ et } b \text{ sont attribués les mêmes grades.}$$

### 5.3 Propriétés du Borda Majority Count

D'abord, il est important de remarquer que le Borda Majority Count d'une alternative  $a$  est égal à la somme des évaluations cumulées de  $a$  si on identifie, par exemple, le langage  $\{Ex, TB, B, P, I, R\}$  aux grades  $\{5, 4, 3, 2, 1, 0\}$ . Un exemple pour clarifier ce que nous exprimons a été

donné par Ahmed Zahid [168]. Considérons les résultats des trois principaux candidats Bayrou, Royal et Sarkozy dans l'expérience de Balinski et Laraki [16, 21] à Orsay en 2007 :

	Ex	TB	B	P	I	R
Bayrou	13.6	30.7	25.1	14.8	8.4	7.4
Royal	16.7	22.7	19.1	16.8	12.2	12.6
Sarkozy	19.1	19.8	14.3	11.5	7.1	28.2

Comme nous l'avons vu à la section 3.5.1, l'ordre social résultant du Jugement Majoritaire est Bayrou  $\succ_{maj}$  Royal  $\succ_{maj}$  Sarkozy. Balinski et Laraki ([20], p. 257) soulignent que ce résultat est tel qu'il devrait être, en observant les grades cumulés du Jugement Majoritaire des candidats en question tels que donnés dans le tableau ci-dessous :

Au moins	Ex	TB	B	P	I	Somme	BMC
Bayrou	13.6	44.3	69.4	84.2	92.6	304.1	304.1
Royal	16.7	39.4	58.5	75.3	87.5	277.4	277.4
Sarkozy	19.1	38.9	53.2	64.7	71.8	247.7	247.7

Balinski et Laraki ([20], p. 257) soutiennent que les résultats bruts du Jugement Majoritaire expriment avec éloquence que Bayrou est premier, Royal est deuxième et Sarkozy est troisième pour la raison suivante : *Excepté pour Ex – dont les pourcentages pris singulièrement donnent l'ordre inverse – les pourcentages de au moins très bon, au moins bon, ..., au moins insuffisant corroborent tous cet ordre. Presque tout mécanisme de vote raisonnable devrait corroborer ce classement des trois importants candidats ; les votes uninominaux à un et deux tours en font exception mais ils ne sont pas raisonnables.*

Ce que nous voulons relever ici est que le Borda Majority Count de Bayrou, par exemple, est égal à la somme  $13.6 + 44.3 + 69.4 + 84.2 + 92.6$  des nombres dans la première ligne du dernier tableau. Après une petite réflexion on voit pourquoi : BMC(Bayrou) est par définition  $13.6 \times 5 + 30.7 \times 4 + 25.1 \times 3 + 14.8 \times 2 + 8.4 \times 1$  ; et dans les grades cumulés du Jugement Majoritaire dans le dernier tableau, le grade Ex est répété 5 fois, le grade TB est répété 4 fois, etc.

**Théorème 5.1 (Zahid [168])** *Le Borda Majority Count d'une alternative est la somme des grades cumulés du candidat en question.*

Dans la définition 3.4, nous avons présenté une méthode de rangement comme une fonction  $F : \mathcal{L}^{m \times n} \rightarrow \mathcal{L}^m$ . En remplaçant  $\mathcal{L}^m$  par  $\mathbb{R}^m$ , nous pouvons aussi dire que le  $BMC_{av}$  est une méthode de rangement.

**Théorème 5.2 (Zahid [168])**  $BMC_{av} : \mathcal{L}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfait les propriétés d'une fonction de rangement social (cf. Définition 3.4).

1.  $BMC_{av}$  est neutre : lorsque les lignes ou compétiteurs dans un profil sont permutés,  $BMC_{av}$  donne le résultat identique permuté dans le même sens.
2.  $BMC_{av}$  est anonyme : lorsque les colonnes ou juges dans un profil sont permutés,  $BMC_{av}$  donne les mêmes grades à chaque compétiteur.
3.  $BMC_{av}$  est unanime : si un compétiteur se voit attribué le même grade  $g$  par tous les juges,  $BMC_{av}$  lui attribue le même grade  $g$ .
4.  $BMC_{av}$  est monotone : si en comparant deux profils, les grades d'un compétiteur dans le second profil sont inférieurs ou égaux que ceux dans le premier profil alors  $BMC_{av}$  ne peut attribuer au compétiteur un grade plus élevé dans le second cas que celui qu'il obtiendrait dans le premier cas. De plus, si tous les grades du compétiteur sont strictement moins élevés dans le second profil alors  $BMC_{av}$  lui attribue un grade strictement moins élevé dans le second cas.
5.  $BMC_{av}$  est indépendant des alternatives non-pertinentes en rangement (IIAG signifiant Independence of Irrelevant Alternatives in Grading) : si les listes de grades attribués par les juges à un compétiteur dans deux profils sont les mêmes alors dans les deux cas  $BMC_{av}$  attribue le même grade au compétiteur en question.

**Preuve :** Voir [168].

Soit  $f_{BMC} : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction d'agrégation correspondant à  $BMC_{av}$ . Cette fonction d'agrégation est anonyme, unanime et monotone comme expliqué à la propriété 3.1 .

Il est aussi clair que cette fonction d'agrégation  $f_{BMC} : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , correspondant à  $BMC_{av}$  est séparable en grade : si  $f_{BMC}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \geq \gamma$  et  $f_{BMC}(\beta_1, \dots, \beta_l) \geq \gamma$  alors on a aussi  $f_{BMC}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l) \geq \gamma$  et ceci reste vrai si les inégalités sont inversées, strictes ou sont remplacées par des égalités.

**Théorème 5.3 (Manzoor Ahmed Zahid [168])**  $f_{BMC} : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est séparable en grade.

De plus, il est facile de voir que le Borda Majority Count satisfait les propriétés suivantes :

**Théorème 5.4 (Manzoor Ahmed Zahid [168])**

- *BMC est choix-monotone : si  $a \succeq_{BMC} b$  et que  $a$  croît strictement ou  $b$  décroît strictement dans les évaluations de certains votants alors  $a \succ_{BMC} b$ .*
- *BMC est rang-monotone : si les estimations des votants restent les mêmes excepté que celles exprimées pour le vainqueur croissent alors non seulement il devrait rester vainqueur mais aussi le rangement final parmi les autres devrait rester le même.*
- *BMC est strictement (fortement) monotone : lorsque un candidat qui n'est pas vainqueur décroît dans les estimations des votants, le candidat gagnant devrait rester le même.*

Comme le Borda Majority Count (BMC) est un cas particulier du vote par rangement (*Range Voting*) [155], il satisfait toutes les propriétés du vote par rangement. Dans [154] Warren D. Smith décrit ces propriétés comme suit.

**Définition 5.2 (Warren D. Smith [154])**

1. *Expressivité : plus varié sera un vote, plus expressif il sera aussi.*
2. *Un système de vote est participation-sûr si voter honnêtement ne peut jamais rendre le résultat d'une élection pire (du point de vue de l'électeur) que si on n'avait pas voté du tout.*
3. *Un système de vote est favori-sûr s'il est "sûr" de voter pour son candidat favori, i.e. il n'est jamais plus stratégique que de voter un candidat non-favori devant son candidat favori.*
4. *Un système de vote est clone-sûr si le fait qu'un "clone" d'un candidat (candidat évalué presque identique au candidat original par tous les votants) participe ou se retire de la course n'affecte pas le vainqueur (à part le fait d'un possible remplacement par un clone).*
5. *Un système de vote est monotone ssi*

- i. un votant faisant croître son vote pour un candidat  $c$  (laissant le reste de ses votes inchangés) ne peut pas diminuer les chances de  $c$  de gagner l'élection,
  - ii. un votant faisant décroître son vote pour un candidat  $c$  (laissant le reste de ses votes inchangés) ne peut pas faire accroître les chances de  $c$  de gagner l'élection.
6. Un système de vote est sûr en retrait de perdant := si un candidat perdant  $x$  est jugé inéligible pour prendre part à la course, alors les mêmes suffrages devraient être utilisables pour conduire une élection avec  $x$  écarté et devrait élire le même vainqueur.
7. Un système de vote est circonscription-comptable := si chaque circonscription pouvait publier le (sous)total de votes opérés chez lui alors le vainqueur sur tout le pays peut être déterminé à partir des sous-totaux des circonscriptions.

## 5.4 Application du BMC à des exemples particuliers

Dans cette section, nous reprenons les exemples controversés sur le Jugement Majoritaire (cf. section 4.2) et montrons que le Borda Majority Count contourne toutes les difficultés évoquées. Il sera aussi question de vérifier si les résultats produits par le BMC sont vraiment ceux que nous espérons pour une démocratie dans tous les exemples controversés du JM. Manzoor Ahmed Zahid [168] montre que le BMC appliqué aux évaluations obtenues dans l'expérience de Balinski et Laraki à l'élection présidentielle française de 2007 produit pratiquement le même résultat que le JM.

**Exemple 5.1** *Considérons un concours entre deux vins  $a$  et  $b$  et neuf juges qui donnent les évaluations suivantes :*

	Juge 1	Juge 2	Juge 3	Juge 4	Juge 5	Juge 6	Juge 7	Juge 8	Juge 9	JM	BMC
$a$	TB	B	B	B	B	I	R	R	R	B	17
$b$	Ex	Ex	Ex	TB	P	P	P	P	I	P	28

Même si tous les juges sauf un donnent à  $b$  un grade plus élevé que celui donné à  $a$ ,  $a$  est le vainqueur du Jugement Majoritaire. Cependant,  $BMC(a) = 4 + 4 \times 3 + 1 + 3 \times 0 = 17$  et  $BMC(b) = 3 \times 5 + 4 + 4 \times 2 + 1 = 28$ . Ainsi, par le Borda Majority Count,  $b$  est vainqueur. Rappelons-nous que Balinski et Laraki ont argumenté dans [20] que cet exemple était artificiel et que rien de pareil n'a jamais été rencontré en pratique. Il

serait parfaitement raisonnable, d'après eux, que  $a$  soit vainqueur car une majorité de juges donne à  $a$  un grade au moins égal à  $B$  alors qu'une autre majorité donne à  $b$  un grade au moins égal à  $P$ .

**Exemple 5.2** Supposons qu'il y a deux alternatives  $a$  et  $b$  et 100 juges dont les évaluations sont résumées dans le tableau suivant :

	<i>Ex</i>	<i>TB</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>BMC</i>
$a$	18	30	52	0	0	0	366
$b$	18	31	21	15	8	7	315

D'après la théorie du Jugement majoritaire de Balinski et Laraki [15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 23], le grade majoritaire de  $a$  et  $b$  est  $B$ . D'après les deux règles de *tie-break* du JM,  $b$  est vainqueur. Ceci semble paradoxal parce que tous les votants évaluent  $a$  comme  $B$  ou mieux alors que seulement 70% de votants évaluent  $b$  au moins  $B$ . Balinski et Laraki ont avancé l'argument que la sommation de points favorise les centristes plus que ne le fait le Jugement Majoritaire. Pourtant, le Borda Majority Count de  $a$  est de loin supérieur à celui de  $b$  :  $a \succ_{BMC} b$ .

**Exemple 5.3** Trois amis souhaitent acheter un plat commun à partager mais l'un d'eux est musulman et donc ne peut manger la viande de porc. Tous aiment la viande de bœuf mais les non-musulmans préfèrent légèrement la viande de porc. Leur profil se présente comme suit :

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	<i>BMC</i>
<i>Porc</i>	9	9	0	18
<i>Boeuf</i>	8	8	9	25

La médiane pour le porc est 9 et celle pour le bœuf est 8. Pourtant, la viande de bœuf est la seule qui rencontre l'assentiment de tous. Le BMC indique que le bœuf devance de loin le porc.

**Exemple 5.4** Considérons un concours de tir avec deux concurrents  $a$  et  $b$ ; ils ont tiré dix fois et les grades suivants leur ont été attribués :

	<i>Ex</i>	<i>TB</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>BMC</i>
$a$	2	2	1	0	0	5	21
$b$	0	0	0	0	6	4	6

D'après le Jugement Majoritaire,  $b$  est le vainqueur parce que son grade majoritaire est  $P$  alors que celui de  $a$  est  $R$ . Ici encore, on peut émettre une objection selon laquelle la moitié de votants ont attribué à  $a$  la mention  $B$  ou plus alors que le meilleur grade recueilli par  $b$  est  $I$ . On peut facilement voir que  $a$  est le vainqueur du Borda Majority Count :  $a \succ_{BMC} b$ .

**Exemple 5.5** *Considérons deux candidats  $a$  et  $b$  et cinq juges avec les résultats suivants :*

	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$j_4$	$j_5$	$f^{maj}$	BMC
$a$	Ex	B	B	I	R	B	12
$b$	Ex	Ex	P	P	R	P	15

Ainsi,  $a$  est le vainqueur du Jugement Majoritaire avec le grade majoritaire  $B$ , tandis que le grade majoritaire de  $b$  n'est que  $P$ . Maintenant supposons qu'un sixième juge donne une mention  $I$  à  $a$  et  $R$  à  $b$ , alors  $b$  devient le vainqueur du Jugement Majoritaire, car le grade majoritaire de  $a$  devient  $I$  et celui de  $b$  devient  $P$ . En d'autres termes, le Jugement Majoritaire n'incite pas à la participation. Dans le Chapitre 4, nous avons donné la justification de Balinski et Laraki sur ce phénomène : Si le sixième juge donne à  $a$  et  $b$  des grades trop faibles, alors il ne souciera pas de qui gagnera et serait content de voir leurs grades finaux diminués. Balinski et Laraki [20] donnent plus tard les conditions sous lesquelles le vainqueur ne change pas, telles que formulées dans le Théorème 4.1 de cette thèse.

D'après le Borda Majority Count,  $b$  sera le vainqueur dans le cas de cinq juges et restera vainqueur même si le sixième juge avait part aux évaluations.

**Exemple 5.6** *Considérons qu'il y a deux sous-ensembles de l'électorat, soit  $I$  et  $II$  avec deux candidats  $a$  et  $b$ . Dans l'électorat  $I$ , il y a 10 juges rendant leurs jugements de la manière suivante :*

	Electorat I	Ex	TB	B	P	I	R	BMC
$a$		3	3	1	1	1	1	33
$b$		2	2	4	2	0	0	34

Dans l'électorat  $I$ , le grade majoritaire du candidat  $a$  est  $TB$  (Très Bien) et celui de  $b$  est  $B$  (Bien). Ainsi, dans l'électorat  $I$ ,  $a \succ_{maj} b$ .

Dans l'électorat II, il y a les mêmes candidats  $a$  et  $b$  et 15 juges fournissant les évaluations que voici :

<i>Electorat II</i>	<i>Ex</i>	<i>TB</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>BMC</i>
$a$	1	2	2	3	4	3	29
$b$	2	2	2	1	4	4	30

Maintenant, observons les résultats dans les deux électors combinés comme montrés ci-dessous :

<i>Electorats I et II</i>	<i>Ex</i>	<i>TB</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>BMC</i>
$a$	4	5	3	4	5	4	62
$b$	4	4	6	3	4	4	64

Comme nous l'avons vu dans l'exemple 4.8, d'après le Jugement Majoritaire,  $a \succ_{maj} b$  dans les deux électors I et II, mais  $b \succ_{maj} a$  dans l'électorat unifié. Balinski et Laraki [20] avancent l'argument que les deux électors peuvent être d'accord sur les rangements mais ils ne le sont pas certainement sur les évaluations ; pourquoi un accord sur les rangements serait-il plus important que les évaluations ? Plus tard, Balinski et Laraki admettront que l'*inséparabilité* est réelle mais rare et soulignent que le Jugement Majoritaire est *séparable en grade*.

Remarquons que d'après le Borda Majority Count, nous avons  $b \succ_{BMC} a$  dans les deux électors I et II, et  $a \succ_{BMC} b$  dans les deux combinés aussi. Dans le Théorème 5.3, nous avons en effet dit que le Borda Majority Count est séparable [168].

Comme dernier exemple, nous allons appliquer le Borda Majority Count aux résultats de l'expérience de Balinski et Laraki en 2007 à Orsay. Les résultats sont indiqués ci-dessous, ensemble avec les comptes majoritaires de Borda des différents candidats présidents.

Remarquons que l'utilisation du Jugement Majoritaire produit plusieurs nœuds qui doivent être défaits : les trois grands candidats Bayrou, Royal et Sarkozy ont le même grade majoritaire  $B$ , Voynet a le grade majoritaire  $P$ , Besancenot, Buffet, Bové et Laguiller ont le même grade majoritaire  $I$  et les quatre candidats restants ont tous le même grade  $R$ . Pour le Borda Majority Count, la probabilité de nœuds est (très) faible [168].

Candidats	Excellent	Très Bien	Bien	Passable	Insuffisant	A Rejeter	BMC
Besancenot	4.1%	9.9%	16.3%	16.0%	22.6%	31.1%	163.6
Buffet	2.5%	7.6%	12.5%	20.6%	26.4%	30.4%	148.0
Schivardi	0.5%	1.0%	3.9%	9.5%	24.9%	60.4%	62.1
Bayrou	13.6%	30.7%	25.1%	14.8%	8.4%	7.4%	<b>304.1</b>
Bové	1.5%	6.0%	11.4%	16.0%	25.7%	39.5%	123.4
Voynet	2.9%	9.3%	17.5%	23.7%	26.1%	20.5%	177.7
Villiers	2.4%	6.4%	8.7%	11.3%	15.8%	55.5%	102.1
Royal	16.7%	22.7%	19.1%	16.8%	12.2%	12.6%	<b>277.4</b>
Nihous	0.3%	1.8%	5.3%	11.0%	26.7%	55.0%	73.3
Le Pen	3.0%	4.6%	6.2%	6.5%	5.4%	74.4%	70.4
Laguiller	2.1%	5.3%	10.2%	16.6%	25.9%	40.1%	121.4
Sarkozy	19.1%	19.8%	14.3%	11.5%	7.1%	28.2%	<b>247.7</b>

De manière très intéressante, le rangement par Borda Majority Count est très similaire au rangement par Jugement Majoritaire. Pour les deux  $\succ = \succ_{maj}$  et  $\succ = \succ_{BMC}$  nous trouvons Bayrou  $\succ$  Royal  $\succ$  Sarkozy  $\succ$  Voynet  $\succ$  Besancenot  $\succ$  Buffet  $\succ$  Bové  $\succ$  Laguiller. Cependant, le rangement de  $\succ_{maj}$  ne peut être déterminé que par *tie-break* alors que  $\succ_{BMC}$  est immédiatement rendu par les comptes majoritaires de Borda. C'est seulement à la queue des rangements qu'il y a des différences : Nihous  $\succ_{maj}$  Villiers  $\succ_{maj}$  Schivardi  $\succ_{maj}$  Le Pen, tandis que, pour  $\succ_{BMC}$ , le rangement de ces quatre derniers candidats est le suivant : Villiers  $\succ_{BMC}$  Nihous  $\succ_{BMC}$  Le Pen  $\succ_{BMC}$  Schivardi.

## 5.5 Distribution des sièges

Jusqu'à présent, nous avons utilisé le Borda Majority Count pour la sélection d'un vainqueur ou pour déterminer le rangement de candidats/compétiteurs. Mais il est aussi facile à utiliser pour la distribution des sièges dans un parlement ou chambre des représentants. Manzoor Ahmed Zahid [168] donne la simple formule suivante pour calculer le nombre de sièges de chaque parti. Soit  $C$  l'ensemble de candidats (partis) et  $a \in C$ .

$$\text{Allocation de sièges au parti } a = \frac{BMC(a) \times \text{nombre total de sièges}}{\sum_{c \in C} BMC(c)}$$

**Exemple 5.7 ([168], p. 80)** Supposons qu'il y ait sept partis : A, B, C, D, E, F, G ; 150 sièges dans la chambre des représentants et 100 votants qui évaluent les différents partis comme indiqué ci-dessous. Alors l'allocation de sièges d'après la formule ci-dessus est indiquée dans la dernière colonne ci-dessous.

TABLE 5.2 – Attribution des sièges dans un Parlement

Partis	Ex	TB	B	P	I	R	BMC	Sièges
A	12	15	26	16	10	21	240	22
B	10	17	30	21	12	10	262	24
C	13	18	28	25	16	0	287	27
D	2	14	43	35	4	2	269	25
E	4	15	28	42	10	1	258	24
F	3	5	10	15	25	42	120	11
G	1	8	12	35	36	8	179	17
Somme							1615	150

Alors que la distribution des sièges dans un parlement n'est pas clairement définie pour le Jugement Majoritaire, pour le Borda Majority Count cela est directe.

## 5.6 Paradoxes du BMC

Dans cette section, nous allons montrer que le BMC qui donne l'impression de surclasser le JM sur plusieurs critères est aussi sujet à de graves incohérences. Son auteur, Manzoor Ahmed Zahid, a relevé quelques objections au BMC dans sa thèse (cf. [168], p. 81 - 83). Ces objections portent essentiellement sur deux points :

- La susceptibilité aux manipulations stratégiques,
- Les objections contre les méthodes basées sur la sommation des points.

Notre contribution dans ce chapitre est de présenter d'autres paradoxes liés au Borda Majority Count lesquels n'ont pas été évoqués par son auteur.

**Exemple 5.8** Cinq juges évaluent la prestation de deux danseurs artistiques. Le tableau des résultats se présente comme suit :

Danseurs	Juge 1	Juge 2	Juge 3	Juge 4	Juge 5	BMC
<i>a</i>	10	5	6	4	2	27
<i>b</i>	4	7	7	5	3	26

Le BMC du danseur *a* est 27 et celui du danseur *b* est 26 et on peut déduire alors que  $a \succ_{BMC} b$ . Pourtant 4 juges sur 5 (soit 80%) estiment que *b* vaut mieux que *a*. Le Jugement Majoritaire qui est une approche

par la médiane donne bien  $b \succ_{maj} a$ .

Le Juge 1, à cause de son évaluation trop élevée pour  $a$ , a imposé sa préférence à tout le jury. Ce qui n'est pas juste pour une communauté se voulant démocratique.

L'on pourrait penser que cet exemple n'est que purement imaginaire et qu'il ne peut se produire dans le monde réel. L'exemple suivant est quelque peu réaliste.

**Exemple 5.9** Dans le contexte de Balinski et Laraki, on donne les résultats suivants pour deux candidats :

Candidats	5	4	3	2	1	0	BMC
Candidat $a$	25%	10%	18%	5%	12%	30%	<b>241</b>
Candidat $b$	0%	25%	30%	10%	25%	10%	<b>235</b>

$$BMC(\text{Candidat } a) = 25 \times 5 + 10 \times 4 + 18 \times 3 + 5 \times 2 + 12 \times 1 + 30 \times 0 = 241$$

$$BMC(\text{Candidat } b) = 0 \times 5 + 25 \times 4 + 30 \times 3 + 10 \times 2 + 25 \times 1 + 10 \times 0 = 235$$

Le BMC donne le candidat  $a$  vainqueur alors que c'est le candidat  $b$  qui est le mieux accepté par la société. 30% de la population ont attribué la note 0 au candidat  $a$  contre 10% seulement pour le candidat  $b$ . Excepté pour la note maximale, pour toutes les autres notes supérieures à 0,  $b$  a une proportion de la population supérieure à celle de  $a$ . Les 25% de la population qui ont exprimé une forte préférence pour  $a$  l'ont emporté sur les 30% qui l'ont rejeté. En Afrique, par exemple, l'élection de  $a$  risquerait de troubler la paix et la stabilité sociales.

Le 08 Février 2009, dans le Wall Street Journal, ont été repris ces propos attribués à Michel Balinski : “ Prof. Balinski calls [mean-based] range voting a ‘ridiculous’ method because it can be manipulated by strategic voters” [33]. Au regard de cet exemple, Balinski n'avait peut-être pas tout à fait tort de qualifier cette méthode (basée sur la moyenne) de “ridicule” ! Le JM donne bien le candidat  $b$  vainqueur.

## 5.7 Conclusion du cinquième chapitre

La méthode proposée par Manzoor Ahmed Zahid [168] est inspirée de celle prônée par Warren D. Smith [155]. Elle est pour autant construite sur le modèle de Balinski et Laraki et contourne donc le paradoxe d'Arrow.

Etant donné la similitude qui existe entre cette méthode et celle de Borda dans le calcul de score obtenu par un candidat, son auteur l'a baptisée *Borda Majority Count*.

Comme le Jugement Majoritaire (JM), le Borda Majority Count (BMC) n'est pas Condorcet-consistante. La justification à cela a été donnée au chapitre précédent : Le critère de Condorcet (Condorcet-consistance) n'est pas un critère pertinent dans le modèle de Balinski et Laraki.

Le Borda Majority Count propose un mécanisme d'attribution de sièges aux partis dans une chambre. Cet aspect n'est pas clairement indiqué dans le Jugement Majoritaire. Néanmoins, nous ne pouvons nullement décider de la suprématie du BMC sur le JM que sur ce seul point. Pour différents niveaux d'élections, les pays recourent à des mécanismes de vote différents (suffrages directs/indirects, votes à un/deux tours, etc.). En République Démocratique du Congo, par exemple, pour les élections présidentielles, on utilise le vote uninominal à un tour (en 2011) ou à deux tours (en 2006) et pour les législatives, on utilise le vote uninominal mais avec la règle du *plus fort reste* (PFR) comme règle de *tie-break*. Pour les provinciales, la même règle PFR est appliquée. Cependant, pour les sénatoriales et élections des gouverneurs, on recourt au suffrage indirect. Les natures de ces élections étant aussi variées que différentes, il n'est pas toujours nécessaire d'appliquer la même forme de vote à tous les niveaux.

La règle suggérée par Manzoor Ahmed Zahid [168] ne montre nullement comment, au sein d'un parti, les sièges sont distribués. Elle ne se limite qu'à attribuer un nombre entier de sièges à un parti et ne se prononce pas sur les personnes qui occuperont ces sièges.

La solution proposée par le vote à liste bloquée est une solution de compromis pour rendre les élus indépendants des opinions singulières

---

de leurs partis et de prendre position en toute conscience pour les intérêts qu'ils jugent en faveur de la population. C'est cela l'esprit même de *représentant du peuple*.

Lorsque le peuple élit des représentants dans une chambre, il s'attend à ce que ces derniers prennent des décisions qui sont en sa faveur. Les représentants ne prennent, en principe, pas leurs propres décisions mais celles qui sont dictées par la base (le peuple) dont ils sont porte-paroles. C'est exactement cette dimension qui manque à la règle de Manzoor Ahmed Zahid.

Le chapitre suivant propose une méthode "originale" qui étend les limites des deux premières méthodes (JM et BMC). Cette méthode a particulièrement l'avantage de permettre une distribution de sièges entre les partis au sein d'une chambre en se prononçant sur les personnes qui les occuperont. Ceci – nous l'avons déjà dit – est un aspect du partage de pouvoir qui n'est que partiellement pris en compte par le Borda Majority Count. Il n'est, cependant, guère pris en compte par le Jugement Majoritaire.

# Chapitre 6

## Méthode du Compromis Moyenne-Médiane (MCMM)

### 6.1 Introduction au sixième chapitre

Les théorèmes d'impossibilité mettent à nu les insuffisances et paradoxes liés aux systèmes de vote. Récemment, Michel Balinski et Rida Laraki ont proposé une nouvelle théorie de vote nommée *Jugement Majoritaire* qui tente de contourner cette limitation. Les électeurs y sont invités à évaluer les candidats en des termes pris dans un langage commun bien connu. Le candidat vainqueur est alors celui qui obtient la médiane la plus élevée. Depuis, des auteurs ont détecté des insuffisances à ce nouveau système de vote. Dans ce chapitre, nous nous assignons la tâche de présenter une méthode qui vise à réduire ces insuffisances. Nous proposons donc un système de vote départageant le vote basé sur la médiane – dont le JM est le plus grand représentant – et celui basé sur la moyenne – avec comme principal représentant le BMC –. Il propose, en outre, une nouvelle façon de faire le *tie-break* basée sur la moyenne des grades intermédians.

Plusieurs résultats aujourd'hui connus sous le nom de “paradoxes” abondent dans le sens de montrer les imperfections des systèmes électoraux. Ces résultats contrarient aussi bien les méthodes de vote les plus utilisées en pratique que celles qui ne sont utilisées dans aucun pays du monde. Au lieu de décourager les chercheurs en Economie et en Théorie du Choix Social, les paradoxes ainsi que les théorèmes d'impossibilité les ont au contraire instigués à concevoir et même expérimenter plusieurs nouvelles méthodes ou fonctions d'agrégation en vue d'être proposées comme alternatives à celles qui sont publiquement prises [130, 131, 132].

A titre d'exemple, le vote par approbation a été expérimenté en France lors du premier tour des élections présidentielles de 2002 par une équipe dirigée par Jean-François Laslier et Karine Van Der Straeten [110]. Une deuxième expérience a été réalisée dans les mêmes conditions en 2007 pour le vote par approbation et le vote par note par Antoinette Baujard et Herrade Igersheim [29, 31]. Le même jour du scrutin de 2007, une autre équipe menée par Etienne Farvaque, Hubert Jayet et Lionel Rago [69, 70] a expérimenté le vote préférentiel transférable. Différentes équipes ont encore entrepris des votes expérimentaux parallèlement au vote officiel le 22 Avril 2012 [26, 27, 23].

De tous les modes de scrutin expérimentés en France, un semble se démarquer des autres sur le plan philosophique : il s'agit de celui proposé par Michel Balinski et Rida Laraki. Cette théorie de vote est basée sur la médiane et utilise plusieurs façons, plus ou moins compliquées, de déterminer le rangement des candidats. Cette nouvelle théorie a été baptisée par ses auteurs *Jugement Majoritaire* (JM) [16, 18, 20]. Le JM a été expérimenté à deux reprises en France lors des élections présidentielles de 2007 et 2012. Philosophiquement, il s'oppose au vote traditionnel qui consiste à opérer des sommes des voix de préférences individuelles en vue d'obtenir la valeur d'un candidat dans une élection ou — plus formellement — une situation donnée. Il demande à chaque électeur d'évaluer chacun des candidats au lieu de voter simplement pour un ou plusieurs candidats selon ses préférences.

Cependant, le JM, quoique naissant, connaît déjà tant d'éloges que d'attaques de la part de la communauté Scientifique. Salué en particulier par les Prix Nobel Kenneth Arrow, Robert Aumann et Eric Maskin car donnant la possibilité d'enrichir et de nuancer l'expression de son choix politique [24], il est tout de même décrié par certains scientifiques, notamment :

- Jean-François Laslier du CNRS (Centre National de Recherche Scientifique /France) qui détaille toute une théorie mettant à nu toutes les faiblesses inhérentes au choix basé sur l'évaluation de la meilleure médiane [105, 108] ;
- William Gehrlein et Dominique Lepelley qui présentent les limites du vote basé sur la règle de la plus forte médiane [84] ;

- Warren D. Smith, défenseur emblématique du vote par rangement [basé sur la moyenne] (voir [154]) qui a consacré toute une page Web aux faiblesses du JM [155] ;
- Dan S. Felsenthal et Moshé Machover qui relèvent les anomalies relatives au JM au-delà de celles évoquées dans cette thèse. Ils établissent que le JM est sujet à au moins 10 paradoxes, plus vulnérable que seize autres fonctions de vote éprouvées à un test de quatorze paradoxes (voir [73] et [72]) ;
- Manzoor Ahmed Zahid qui propose une thèse mettant en relief les pathologies du JM et lui préfère une méthode basée sur la moyenne : le *Borda Majority Count* (BMC). Cette méthode est similaire au vote par note sauf que contrairement à ce dernier (vote par note), le BMC prévoit un mécanisme particulier pour défaire les noeuds (*tie-break*) (voir [168]). Manzoor Ahmed Zahid présente dans sa thèse sept résultats paradoxaux relatifs au JM que le BMC a pu lever.

Le Chapitre 4 a présenté tous les déboires du JM par quelques paradoxes, notamment ceux qui sont repris dans la thèse de Zahid [168]. A la section 5.6 du Chapitre 5 précédent, il a été discuté quelques paradoxes sur le BMC.

Il est donc clair que ni la moyenne, ni la médiane ne peuvent se prévaloir l'une sur l'autre. Au lieu de les opposer, nous prenons le parti, dans cette thèse, de concilier les deux concepts afin de tirer profit des avantages que présentent l'un et l'autre. Il est ici question d'hybrider le JM et le BMC afin d'obtenir une nouvelle méthode.

L'avantage d'une telle hybridation est naturellement qu'elle hérite des avantages de ses deux parents. Signalons, cependant, que les méthodes hybrides n'héritent pas que des avantages de leurs parents mais aussi de leurs insuffisances. Le lecteur est d'ores et déjà averti que la méthode présentée dans cette thèse est aussi frappée par les théorèmes d'impossibilité auxquels n'échappe d'ailleurs aucune procédure de vote.

Nous montrerons, en contre-partie, que certains paradoxes du JM et/ou du BMC ne le sont guère dans la nouvelle méthode ou s'ils le sont, ils ne sont pas de la même ampleur que chez ses parents.

## 6.2 Principe de la Méthode du Compromis Moyenne-Médiane (MCMM)

Prenant appui sur les approches JM et BMC, nous élaborons une méthode susceptible d'aborder distinctement ainsi que conjointement les deux théories et qui lèverait un maximum de paradoxes présentés aux Chapitres 4 et 5.

### 6.2.1 Concepts et description de la MCMM

La méthode que nous présentons dans cette thèse est basée à la fois sur la médiane et la moyenne. On procède par une division de la distribution des grades pour un candidat en  $2^k$  intervalles de même amplitude. Cette division détermine  $2^k + 1$  grades qui sont les points qui bornent les intervalles. La fonction renvoie pour évaluation d'un candidat la moyenne olympique des  $2^k + 1$  grades retenus.

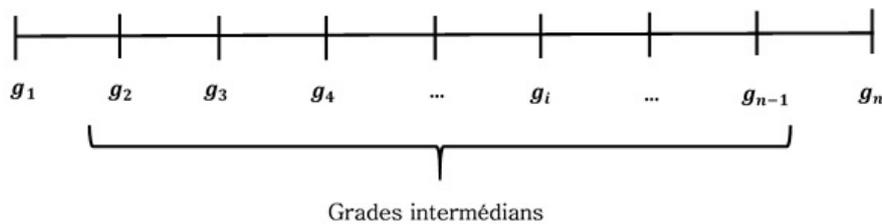


FIGURE 6.1 – Division de la distribution des grades en  $2^k$  intervalles.

**Définition 6.1 (Moyenne olympique)** . Soit  $g_1, g_2, \dots, g_n$  une suite de  $n$  données telle que  $g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_n$ . On appelle moyenne olympique de ces données le nombre :

$$\bar{g}_o = \frac{1}{n-2} \sum_{i=2}^{n-1} g_i \quad (6.1)$$

La moyenne olympique de  $n$  données est donc la moyenne arithmétique de ces données, mises à l'écart les deux valeurs extrêmes (la plus grande et la plus petite) (voir Figure 6.1).

**Définition 6.2 (Amplitude d'une division)** Soit  $N$  l'ensemble de  $n$  juges, on appelle amplitude d'une division le nombre réel :

$$\varrho = \frac{n+1}{2^k} \text{ avec } k \geq 2 \quad (6.2)$$

$k$  est un nombre entier fixé à l'avance que l'on appelle **degré de division**.

**Définition 6.3 (Grade intermédiaire)** . Soit  $a_i$  un candidat ou compétiteur ayant les grades  $g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}$  tels que  $g_{i1} \geq g_{i2} \geq \dots \geq g_{in}$ . Un grade  $g_{ij}$  est dit intermédiaire si et seulement si  $\exists m \in \mathbb{N}$  [ avec  $1 \leq m \leq 2^k - 1$  ] |  $[\varrho.m] = j$  où  $[\varrho.m]$  désigne la valeur arrondie à l'unité près du nombre  $\varrho.m$  et  $\varrho$  l'amplitude de la division pour un degré de division  $k$  fixé.

On note  $\mathcal{M}_k$  l'ensemble de grades intermédiaires non-redondants obtenu avec un degré de division  $k$ .

$\mathcal{M}_k$  ainsi défini est l'ensemble de données entrant dans le calcul de la moyenne olympique des points qui sont bornes (supérieures ou inférieures) des  $2^k$  intervalles obtenus après division.

**Définition 6.4 (Compromis Majoritaire Moyen)** Soit  $a_i$  un candidat ou compétiteur avec les grades  $g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}$  avec  $g_{i1} \geq g_{i2} \geq \dots \geq g_{in}$  et  $\mathcal{M}_k = \{g'_{i1}, g'_{i2}, \dots, g'_{ij}\}$  l'ensemble de ses grades intermédiaires obtenus avec un degré de division  $k$ . Alors le **Compromis majoritaire moyen ou l'évaluation majoritaire moyenne** ou encore **grade majoritaire moyen**  $f^{mm}(a_i)$  est par définition :

$$f^{mm}(a_i) = \frac{1}{j} \sum_{l=1}^j g'_{il} \quad (6.3)$$

**Exemple 6.1** Si 5 juges attribuent les grades 4, 8, 7, 9, 5 à  $a_i$ .

$$\text{On se fixe } k = 2, \varrho = \frac{5 + 1}{2^2} = 1.5$$

Les grades classés dans l'ordre décroissant donnent : 9, 8, 7, 5, 4

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ f^{[1 \times 1.5]}, f^{[2 \times 1.5]}, f^{[3 \times 1.5]} \right\} = \{f^2, f^3, f^5\} = \{8, 7, 4\}$$

$$\text{Ainsi } f^{mm}(a_i) = \frac{8 + 7 + 4}{3} = \frac{19}{3} = 6.33.$$

Et si 8 juges attribuent les grades 9, 7, 3, 6, 5, 4, 5, 8 à  $a_i$ . Pour  $k = 3$ ,  $\varrho = \frac{8 + 1}{2^3} = 1.125$

Les grades classés dans l'ordre décroissant donnent : 9, 8, 7, 6, 5, 5, 4, 3

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_3 &= \left\{ f^{[1 \times 1.125]}, f^{[2 \times 1.125]}, f^{[3 \times 1.125]}, f^{[4 \times 1.125]}, f^{[5 \times 1.125]}, f^{[6 \times 1.125]}, f^{[7 \times 1.125]} \right\} \\
&= \left\{ f^{[1.125]}, f^{[2.25]}, f^{[3.375]}, f^{[4.5]}, f^{[5.625]}, f^{[6.75]}, f^{[7.875]} \right\} \\
&= \{ f^1, f^2, f^3, f^5, f^6, f^7, f^8 \} = \{ 9, 8, 7, 5, 5, 4, 3 \}
\end{aligned}$$

$$\text{Alors } f^{mm}(a_i) = \frac{9 + 8 + 7 + 5 + 5 + 4 + 3}{7} = \frac{41}{7} = 5.8$$

### 6.2.2 Tie-Breaking

Lorsque les grades majoritaires moyens de deux candidats sont différents, celui qui obtient le grade majoritaire moyen le plus élevé est classé avant l'autre. Le classement majoritaire  $\succ_{mm}$  entre deux candidats évalués par un même jury est déterminé par une application répétée du grade majoritaire moyen :

- On commence avec  $k = 2$
- Si  $f_k^{mm}(a) > f_k^{mm}(b)$  alors  $a \succ_{mm} b$
- Si  $f_k^{mm}(a) = f_k^{mm}(b)$  alors la procédure est répétée pour  $k + 1$ .

### 6.3 Rangement des candidats par la MCMM

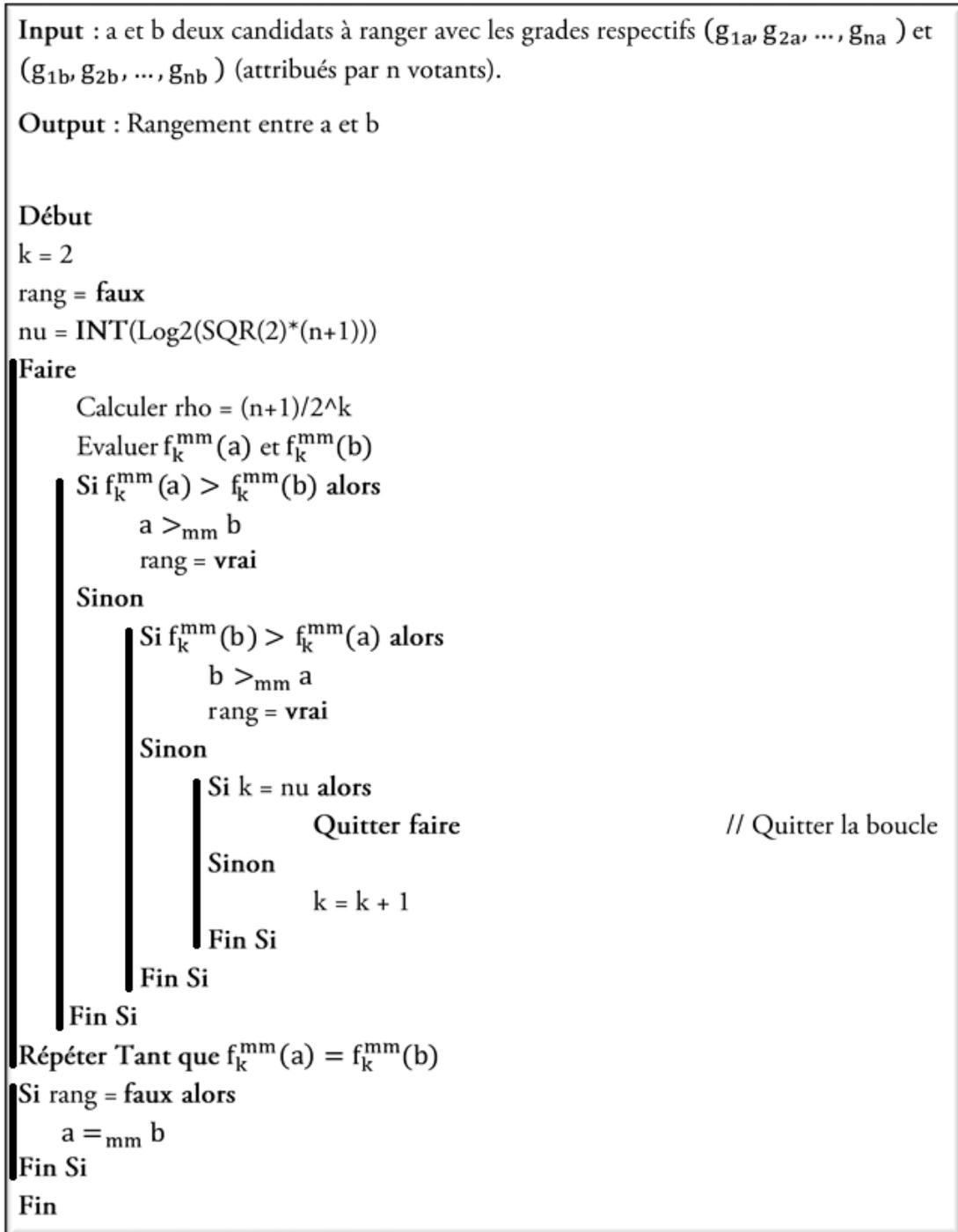


FIGURE 6.2 – Algorithme MCMM

Prenons l'exemple suivant pour illustrer cette définition :

### Exemple 6.2

Supposons que  $a$  et  $b$  sont évalués par un jury de 7 votants :

$a$ :	85	73	78	90	69	70	71
$b$ :	77	72	95	83	73	73	66

Le profil ordonné est :

$a$ :	90	85	78	73	71	70	69
$b$ :	95	83	77	73	73	72	66

$$\varrho = \frac{7+1}{2^2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\mathcal{M}_2 = \{f^2, f^4, f^6\}$$

$$\mathcal{M}_2(a) = \{85, 73, 70\} \text{ et } f_2^{mm}(a) = \frac{85 + 73 + 70}{3} = 76$$

$$\mathcal{M}_2(b) = \{83, 73, 72\} \text{ et } f_2^{mm}(b) = \frac{83 + 73 + 72}{3} = 76$$

$f_2^{mm}(a) = f_2^{mm}(b) = 76$ . Par définition, on répète la procédure pour  $k = 3$  et on obtient :

$$\varrho = \frac{7+1}{2^3} = 1$$

$$\mathcal{M}_3 = \{f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7\}$$

$$\mathcal{M}_3(a) = \{90, 85, 78, 73, 71, 70, 69\}$$

$$\text{et } f_3^{mm}(a) = \frac{90 + 85 + 78 + 71 + 70 + 69}{7} = 76.57$$

$$\mathcal{M}_3(b) = \{95, 83, 77, 73, 73, 72, 66\}$$

$$\text{et } f_3^{mm}(b) = \frac{95 + 83 + 77 + 73 + 73 + 72 + 66}{7} = 77$$

$f_3^{mm}(b) = 77 > f_3^{mm}(a) = 76.56$ . Alors  $b \succ_{mm} a$ .

Dans cet exemple l'évaluation majoritaire moyenne donne exactement le même résultat que la moyenne. Cela est dû au fait que l'ensemble de grades intermédiaires de chaque compétiteur est égal à l'ensemble de ses grades.

**Définition 6.5 (Indice de division maximale)** . Soit  $a_i$  un candidat ou compétiteur et  $G_i = \{g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}\}$  l'ensemble de grades de  $a_i$  avec  $g_{i1} \geq g_{i2} \geq \dots \geq g_{in}$  et  $\mathcal{M}_k = \{g'_{i1}, g'_{i2}, \dots, g'_{ij}\}$  l'ensemble de ses grades intermédiaires obtenus avec un degré de division  $k$ . Alors, le plus petit entier  $k$  tel que  $G_i = \mathcal{M}_k$  est appelé **indice de division maximale** ou **indice de division totale**. On le note  $\nu$ .

Dans l'exemple ci-haut, l'indice de division maximale est  $\nu = 3$ .

### Théorème 6.1

Soit  $a_i$  un candidat ou compétiteur et  $G_i = \{g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}\}$  avec  $g_{i1} \geq g_{i2} \geq \dots \geq g_{in}$ . Si  $k = 1$  alors  $f^{mm}(a_i) = f^{maj}(a_i)$ .

#### Preuve :

Pour  $k = 1$ ,  $\alpha = \frac{n+1}{2}$ . Le seul grade intermédiaire est  $f^{[\frac{n+1}{2}]}(g_{i1} \geq g_{i2} \geq \dots \geq g_{in})$ . C'est exactement cette valeur que  $f^{mm}(a_i)$  va renvoyer.

Si  $n$  est impair  $\left[\frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1}{2}$  et si  $n$  est pair  $\left[\frac{n+1}{2}\right] = \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$

Et on voit bien que dans ce cas  $f^{mm}(a_i) = f^{maj}(a_i)$  ■

Ce théorème montre que si  $k = 1$ , le résultat donné par la MCMM est le même que celui donné par la méthode de Balinski et Laraki. La MCMM ne s'éloigne pas de la philosophie du JM dans la mesure où elle se base sur la mesure et non sur la préférence (cadre arrowien). D'ailleurs à ce propos, Balinski et Laraki [18, 17] soutiennent qu'un juge peut détester un vin et lui attribuer un grade élevé à cause de son mérite. Il peut aussi aimer un vin et lui attribuer un grade peu élevé à cause de son démerite.

La MCMM peut aussi donner le même résultat que le JM pour d'autres valeurs de  $k$  différentes de 1.

**Théorème 6.2** Soit  $a_i$  un candidat ou compétiteur et  $G_i = \{g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}\}$  avec  $g_{i1} \geq g_{i2} \geq \dots \geq g_{in}$ . Si  $k = \nu$  alors  $f^{mm}(a_i) = \frac{BMC(a_i)}{n}$ .

**Preuve :**

Considérons  $G_i = \{g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}\}$ . Pour  $k = \nu$ ,  $G_i = \mathcal{M}_k$ . D'où

$$f^{mm}(a_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_{ij}$$

Or

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} = BMC(a_i)$$

On a enfin,

$$f^{mm}(a_i) = \frac{BMC(a_i)}{n} \quad \blacksquare$$

Ce résultat montre que, lorsque la division est totale, le résultat de la MCMC est le même que celui rendu par le BMC. La MCMC est dans cette acception une méthode intermédiaire entre le JM (basé sur la médiane la plus élevée) et le BMC (basé sur la moyenne la plus élevée). Pour des valeurs de  $k$  variant entre 1 à  $\nu$ , elle permet de nuancer et équilibrer entre les avantages et inconvénients de l'une ou l'autre méthode.

### 6.3.1 Caractérisation de $\nu$

Lorsque le nombre de juges est connu, il peut être utile de déterminer le nombre maximum d'itérations à opérer pour départager entre deux compétiteurs. Il va de soi que ce nombre est égal à l'indice de division maximale  $\nu$ . Le théorème 6.3 ci-dessous fournit une formule mathématique permettant de déterminer  $\nu$  connaissant le cardinal  $n$  de l'ensemble  $N$  de juges (ou votants).

**Théorème 6.3 (Caractérisation de  $\nu$ )** *Etant donné  $N$  un ensemble de  $n$  juges, l'indice de division maximale  $\nu$  est alors déterminé par la formule :*

$$\nu = Arr\left(\frac{1}{2} + \log_2(n+1)\right) \quad (6.4)$$

Où  $Arr\left(\frac{1}{2} + \log_2(n+1)\right)$  désigne l'entier le plus proche du réel  $\frac{1}{2} + \log_2(n+1)$

**Preuve :**

Nous savons que la division est maximale lorsque  $\mathcal{M}_k = N$ . Pour cela, il faut que

$$\frac{1}{2} \leq \varrho \leq 1$$

où  $\varrho = \frac{n+1}{2^k}$  désigne l'amplitude de la division pour un degré de division  $k$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{n+1}{2^k} \leq 1 \\ 1 &\leq \frac{2^k}{n+1} \leq 2 \\ n+1 &\leq 2^k \leq 2(n+1) \end{aligned}$$

Et on a

$$\log_2(n+1) \leq k \leq 1 + \log_2(n+1)$$

Le seul nombre entier  $k$  compris entre  $\log_2(n+1)$  et  $1 + \log_2(n+1)$  est

$$\nu = \text{Arr}\left(\frac{1}{2} + \log_2(n+1)\right) \quad \blacksquare$$

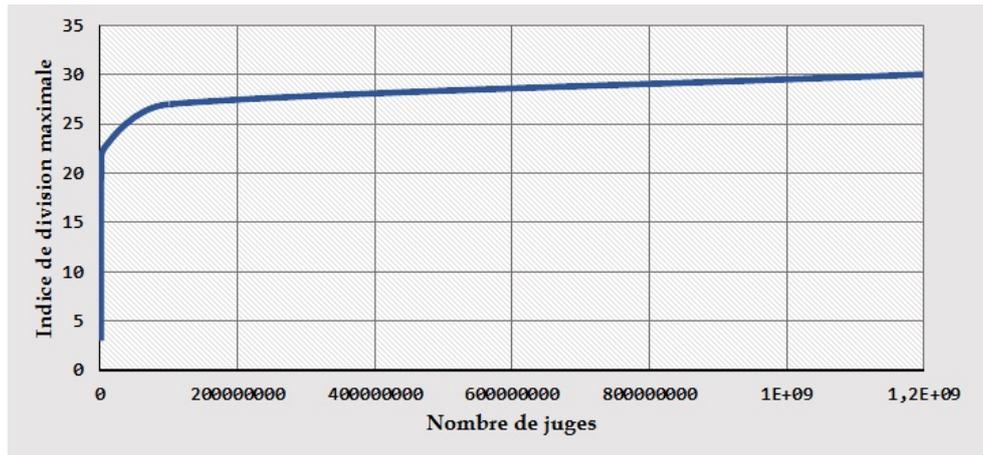
L'indice de division maximale exprime aussi la complexité de la MCMM. Au vu de ce résultat, nous pouvons affirmer que la MCMM est de complexité  $\mathcal{O}(\log n)$ . Cette complexité est d'une croissance logarithmique et donc lente.

La Table 6.1 ci-dessous indique, au côté de chaque nombre  $n$  de votants, l'indice de division maximale  $\nu$ . Nous pouvons y lire par exemple que lorsque le nombre de votants ou juges est de  $12 \times 10^8$ ,  $\nu$  ne vaut que 31. De plus, pour rendre les calculs plus simples, nous pouvons nous contenter de transformer toutes les proportions en pourcentage. Ceci est un moyen astucieux de réduire un électorat, aussi grand soit-il, à 100.

TABLE 6.1 – Indices de division maximale  $\nu$

Nombre de juges	$\nu$
10	4
100	7
1000	10
10000	17
1000000	20
10000000	24
100000000	27
1200000000	31

La croissance de  $\nu$  peut être facilement observée dans Figure 6.3 où l'on voit clairement qu'à de fortes variations de  $n$  correspondent de très faibles variations de  $\nu$ .

FIGURE 6.3 – Courbe de la croissance de  $\nu$ 

## 6.4 Propriétés de MCMM

D'abord, remarquons que les votes uninominaux à un et deux tours sont les plus utilisés à travers le monde pour les élections des dirigeants. Le cas de l'Australie et l'Irlande qui ont recours à une méthode complexe appelée le *vote alternatif* ne sont qu'à mettre dans l'actif des exceptions. A celles-ci (exceptions), ajoutons le cas de la Belgique qui utilise un scrutin à liste. Toutes les fonctions de vote ici évoquées sont conçues dans le contexte traditionnel dit *contexte arrovien*. Elles souffrent des incohérences qu'il ne serait pas juste d'affirmer qu'elles reflètent la volonté du peuple. Pour nous en convaincre, il suffit d'observer les résultats paradoxaux des élections présidentielles françaises de 1995, 2002 et 2007 : A toutes ces élections ont été observés les paradoxes d'Arrow (*Indépendance des Alternatives Non-Pertinentes*), du vainqueur de Condorcet et/ou du perdant de Condorcet [64, 72].

La fonction de choix social MCMM a été construite dans la perspective d'éviter les écueils des fonctions de vote qui l'ont précédée. Nous montrons dans cette thèse que la plupart des paradoxes qui affectent ces fonctions n'inquiètent guère la MCMM [132].

**Définition 6.6 (Neutralité ([132], p. 179))** Une fonction d'agrégation  $f$  est neutre si le vainqueur entre deux ou plusieurs candidats change dès que tous les votants renversent leurs préférences (ou évaluations).

L'idée de la neutralité veut que si les préférences changent radicalement, le vainqueur de l'élection doit aussi changer.

**Théorème 6.4** *La MCMM est neutre.*

**Preuve :** Considérons un électorat  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  de  $n$  votants ( $n \geq 2$ ). Si deux candidats  $x$  et  $y$  sont évalués par ces  $n$  votants et que leurs notes soient données respectivement par  $X = \{g_{1x}, g_{2x}, \dots, g_{nx}\}$  et  $Y = \{g_{1y}, g_{2y}, \dots, g_{ny}\}$  où  $g_{i\alpha}$  désigne la note attribuée par l'électeur  $i$  au candidat  $\alpha$  ( $i = 1, \dots, n; \alpha = x$  ou  $y$ ).

Supposons que  $f^{mm}(X) > f^{mm}(Y)$ , alors  $x \succ_{mm} y$ .

Si chaque votant renverse son évaluation (i.e.  $g_{ix}$  devient  $g_{iy}$  et vice versa  $\forall i = 1, \dots, n$ ), l'ensemble de notes de  $x$  devient  $Y = \{g_{iy}\}_{i=1, \dots, n}$  et celui de  $y$  devient  $X = \{g_{ix}\}_{i=1, \dots, n}$ .

On a alors  $f^{mm}(X) > f^{mm}(Y) \Rightarrow y \succ_{mm} x$ . ■

**Note :** le théorème de neutralité a déjà été établi pour le JM et le BMC. Une méthode obtenue par hybridation des deux méthodes précitées ne peut aussi que le vérifier.

**Définition 6.7 (Anonymat ([132], p. 180))** *Une fonction d'agrégation  $f$  est anonyme si le vainqueur entre deux ou plusieurs candidats ne change pas dès qu'on permute les votants.*

Cette définition indique que si deux électeurs échangent leurs bulletins de votes, la fonction doit renvoyer le même résultat dans les deux situations.

**Théorème 6.5** *MCMM est anonyme.*

**Preuve :** Soit  $x$  un candidat dont l'ensemble des notes attribuées par  $n$  votants ( $n \geq 2$ ) est  $X = \{g_{1x}, g_{2x}, \dots, g_{nx}\}$ . Si deux électeurs  $i$  et  $j$  permutent (i.e.  $g_{ix}$  devient  $g_{jx}$  et vice versa quels que soient  $i, j = 1, \dots, n$ ),  $X$  ne changera pas.

Ainsi  $f^{mm}(X)$ , qui est l'évaluation finale du candidat  $x$  par MCMM, ne changera pas même si on permutait les électeurs. Comme  $x$  est quelconque, ceci reste vrai pour tout candidat. ■

**Note :** Même si cette propriété semble faible, elle n'est pas remplie par les élections par circonscriptions telles que celles appliquées aux Etats-Unis d'Amérique ou les scrutins à la proportionnelle appliqué en RDC pour les législatives et provinciales.

**Définition 6.8 (Unanimité ou Pareto-Consistance ([132], p. 180))**

*Une fonction d'agrégation  $f$  est unanime si elle renvoie toujours comme vainqueur entre deux ou plusieurs candidats un candidat qui est jugé meilleur de tous par tous les votants.*

Cette définition suggère que lorsque tous les électeurs préfèrent un candidat aux autres en lice, ce candidat ne doit en aucun cas, quel que soit le profil, être perdant.

**Théorème 6.6** *MCMM est Pareto-consistante.*

**Preuve :** Soient  $x$  et  $y$  deux candidats avec des grades respectifs  $G_x = \{g_{1x}, g_{2x}, \dots, g_{nx}\}$  et  $G_y = \{g_{1y}, g_{2y}, \dots, g_{ny}\}$  tels que  $g_{ix} > g_{iy} \forall 1 \leq i \leq n$ . On aura pour un degré de division  $k$  (avec  $k \geq 1$ ) :

$\mathcal{M}_k(x) = \{g_{1x}^*, g_{2x}^*, \dots, g_{mx}^*\}$  et  $\mathcal{M}_k(y) = \{g_{1y}^*, g_{2y}^*, \dots, g_{my}^*\}$  (avec  $m = 2^k - 1$ ) où  $\mathcal{M}_k(\alpha)$  désigne l'ensemble des grades intermédiaires du candidat  $\alpha$ .

Comme  $g_{ix} > g_{iy} \forall 1 \leq i \leq n$ , on a  $g_{ix}^* > g_{iy}^* \forall 1 \leq i \leq m$  et donc,

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_{ix}^* > \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_{iy}^* \Rightarrow f^{mm}(x) > f^{mm}(y) \Rightarrow x \succ_{mm} y. \quad \blacksquare$$

**Définition 6.9 (Monotonie ([132], p. 180))** *Une fonction d'agrégation  $f$  est monotone si elle renvoie comme vainqueur un candidat avec un profil  $p$  et le garde comme vainqueur avec un profil  $p'$  sachant que dans le dernier profil, au moins un électeur a amélioré sa note pour ce candidat.*

Un candidat ne devrait donc pas être moins bien classé si au moins un juge revoyait en hausse sa mention.

**Théorème 6.7** *MCMM est monotone.*

**Preuve :**

Soit deux candidats  $x$  et  $y$  avec des grades respectifs  $G_x = \{g_{1x}, g_{2x}, \dots, g_{nx}\}$  et  $G_y = \{g_{1y}, g_{2y}, \dots, g_{ny}\}$  tels que  $f^{mm}(x) > f^{mm}(y)$  (i.e.  $x \succ_{mm} y$ ).

Supposons qu'un électeur  $i$  ayant précédemment attribué le grade  $g_{ix}$  à  $x$  le reclasse mieux en lui attribuant un grade  $g'_{ix}$  tel que  $g'_{ix} > g_{ix}$  et toutes choses restant égales par ailleurs. Trois cas sont alors possibles :

– Le grade  $g'_{ix}$  ne modifie pas la constitution de l'ensemble des grades intermédiaires  $\mathcal{M}_k(x)$ .  $f^{mm}(x)$  reste alors le même et  $f^{mm}(x) > f^{mm}(y)$ .

– Le grade  $g'_{ix}$  est lui-même devenu un intermédiaire (i.e. l'électeur  $i$  est pivot) et  $f_i^{mm}(x)$  qui est l'évaluation finale par la MCMM de  $x$  en tenant compte de la modification de préférence de  $i$ .

Ainsi,  $f_i^{mm}(x) > f^{mm}(x) > f^{mm}(y) \Rightarrow f_i^{mm}(x) > f^{mm}(y)$ .

- Le grade  $g'_{ix}$  n'est pas intermédiaire mais modifie la constitution de l'ensemble  $\mathcal{M}_k(x)$ . Dans ce cas, un grade intermédiaire est remplacé par un autre par décalage d'un rang à gauche. Soit  $g_{jx}^*$  le grade remplacé. Ce grade est remplacé par  $g_{(j-1)x}^*$ . Or  $g_{(j-1)x}^* > g_{jx}^*$  (les grades étant ordonnés de manière décroissante avant d'évaluer  $f^{mm}$ ). On a alors  $f_i^{mm}(x) > f^{mm}(x) > f^{mm}(y) \Rightarrow f_i^{mm}(x) > f^{mm}(y)$ . ■

### Définition 6.10 (Indépendance des Alternatives Non-Pertinentes)

Une fonction d'agrégation  $f$  est indépendante des alternatives non-pertinentes si elle n'établit le rangement entre deux candidats que sur base des préférences (ou évaluations) des électeurs sur ces candidats. L'ajout ou le retrait d'un autre candidat ne devant en aucun cas modifier ce rangement ([132], p. 181).

Le non-respect de ce critère est un résultat connu sous le nom de Paradoxe d'Arrow. Lorsqu'une fonction d'agrégation ne remplit pas ce critère, on dit qu'elle est vulnérable au paradoxe d'Arrow. Ce paradoxe est très fréquent dans les élections de par le monde. Il a été observé notamment aux Etats-Unis d'Amérique en 2000 (candidature de Ralph Nader favorisant l'élection de Georges Bush au détriment d'Albert Gore), en France en 2002 (candidature d'Edouard Balladur empêchant à Lionel Jospin d'atteindre le second tour) et 2007 (s'il n'y avait pas de candidature socialiste ou de l'UMP, Bayrou serait élu président de la république – d'après tous les sondages, il était le vainqueur de Condorcet). En RDC, certains sondages indiquaient qu'un candidat de l'opposition remporterait les élections présidentielles de 2011 devant le candidat de la Majorité Présidentielle (MP) s'il n'y avait pas eu multiplicité de candidature de l'opposition.

**Théorème 6.8** *MCMM est indépendante des alternatives non-pertinentes.*

**Preuve :** Les évaluations par les électeurs se font sur base des performances des candidats indépendamment les uns des autres. Ainsi, si un électeur  $i$  attribue un score ou grade  $g_{ix}$  au candidat  $x$  et  $g_{iy}$  à un autre candidat  $y$  tels que  $g_{ix} \geq g_{iy}$ , quel que soit le grade  $g_{iz}$  attribué par ailleurs au candidat  $z$ , l'ordre  $g_{ix} \geq g_{iy}$  ne sera jamais modifié. ■

Dans une enquête réalisée par Jean-François Laslier [107], des experts en théorie du choix social ont été invités à se prononcer sur 18 systèmes de votes. Ces systèmes de vote étaient considérés comme des candidats

à une élection de type *vote par assentiment*. Le vainqueur à cette expérience a été le vote par approbation avec 68.18% d'électeurs (spécialistes) l'ayant approuvé. Pourtant, le vote assentiment (ou par approbation) est un cas particulier du vote par évaluation (en anglais *range voting*) et du jugement majoritaire (cf. [155]).

Dans cette expérience de Laslier, le jugement majoritaire ne vient qu'en huitième position avec 22.73% d'électeurs l'ayant approuvé et le vote par évaluation arrive en onzième position avec 9.09% d'électeurs l'ayant approuvé. Nous montrons dans cette thèse que le vote par assentiment est aussi un cas particulier de la MCMM [131].

**Théorème 6.9** *Lorsque les grades autorisés sont restreints aux deux valeurs 0 et 1, la MCMM est réduite au vote par approbation.*

En énonçant ce théorème nous voulons montrer que le résultat de la MCMM est le même que celui rendu par le vote par approbation si les seuls scores autorisés sont 0 (pour coder "approuvé") et 1 (pour coder "désapprouvé"). Comme l'expérience de Laslier [107] le montre, cela ne nous garantit pas son acceptation de la part de tous les partisans du vote par approbation. Ainsi, ce théorème ne reste qu'une contribution ou un argument pour défendre la MCMM.

**Preuve :**

Si les seuls scores autorisés sont 0 et 1, pour tout  $x, y$  deux candidats avec les scores respectifs  $G_x = \{g_{1x}, g_{2x}, \dots, g_{nx}\}$  et  $G_y = \{g_{1y}, g_{2y}, \dots, g_{ny}\}$  où  $g_{ij} = 0$  ou  $1 \forall i = 1, \dots, n, \forall j = x$  ou  $y$ .

D'après le vote par assentiment,  $x \succ y$  si  $G_x$  compte plus de "1" (ou approbations) que  $G_y$ . Supposons que ce résultat ne soit pas corroboré par la MCMM i.e.  $G_x$  compte plus de "1" que  $G_y$  et  $f^{mm}(x) < f^{mm}(y)$ . Ceci veut dire que  $\exists k \geq 1$  tel que  $\mathcal{M}_k(x)$  comprend moins de "1" que  $\mathcal{M}_k(y)$ . Ce résultat est absurde car d'après [130, 131, 132],  $\mathcal{M}_k(x)$  converge vers  $G_x$  et  $\mathcal{M}_k(y)$  vers  $G_y$  lorsque  $k$  tend vers  $\nu$  (indice de division maximale) (cf. Théorème 5.2 dans [130], [131] et [132]). Comme  $G(x)$  compte plus de "1" que  $G_y$ ,  $\mathcal{M}_k(x)$  devrait compter au moins autant de "1" que  $\mathcal{M}_k(y)$ . D'où on doit avoir  $f^{mm}(x) > f^{mm}(y) \Rightarrow x \succ_{mm} y$ . ■

## 6.5 Tyrannie de la majorité

Un scénario typique de la “tyrannie de la majorité” – qui, selon certaines sensibilités, est grossier pour être discuté dans une thèse – est le vote de “tuer les juifs”. Ce problème est tiré de [155]. C’est-à-dire, il y a une majorité de non-juifs et une minorité de juifs. Tous (juifs et non-juifs) doivent voter sur la question “les juifs doivent-ils être tués pour que leur fortune soit utilisée pour réduire les taxes des survivants?”

Quoique paraissant surréaliste, ce problème intervient beaucoup plus fréquemment dans nos sociétés que l’on pourrait le croire. Pour notre cas en RDC, il suffit de sonder les avis de la population sur la situation des commerçants chinois dans notre pays. De la question de savoir si les magasins chinois (qui vendent aussi les produits en détail) devraient être repris à leurs propriétaires (les chinois) pour être confiés aux congolais, nous aboutissons à un problème similaire à celui formulé par Smith [155].

Dans ces genres de votes, certaines propositions ont des effets néfastes sur la minorité mais un effet légèrement bon sur la majorité. Le mal peut l’emporter sur le bien. Il est malheureux que la plupart de méthodes de vote, avec des votes honnêtes, tueront les juifs (naturellement confisqueront leurs magasins aux chinois).

Les méthodes de vote basées sur la moyenne (ou la sommation des notes) sont comptés parmi les rares méthodes pouvant aller à l’encontre de la volonté de la majorité. Ceci arrive seulement si la minorité exprime de fortes préférences tandis que la majorité exprime de faibles préférences (supposant toujours que ces préférences sont honnêtes). Cela voudrait dire que le BMC et le *Range Voting* sauveraient les juifs (respectivement les magasins chinois) alors que presque toutes les autres fonctions de vote les tueraient (respectivement confisqueraient leurs magasins aux chinois).

A ce sujet, le JM semble être plus vulnérable à la “tyrannie de la majorité” que le BMC (et le *Range Voting*). Explicitement, imaginons que les notes autorisées vont de 0 à 9 et qu’il y ait exactement deux types de vote : votes à préférences fortes “tuer (resp. confisquer)=0, laisser vivre (resp. ne pas confisquer)=9” opérés par les juifs (resp. les pro-

chinois) et les votes à préférences faibles “*tuer* (resp. *confisquer*)=5, *laisser vivre* (resp. *ne pas confisquer*)=4” opérés par les non-juifs (resp. les anti-chinois).

Dans un tel scénario, si les juifs (resp. les pro-chinois) dépassent les 10% de la population, le BMC et le *Range Voting* les laisseraient vivre (resp. laisserait les chinois gérer leurs magasins). Cependant, le JM tuera toujours les juifs (resp. confisquerait leurs magasins aux chinois) quelle que soit la proportion de juifs (resp. pro-chinois) – pourvu que cette proportion soit minoritaire – et quels que soient les quatre scores particuliers (dans notre cas 0, 9, 4 et 5).

Si nous observons cette situation de près, nous voyons que le fait qu’une proportion de 10% l’emporte sur 90% est un résultat qui n’est ni démocratique, ni juste. Il serait plutôt vu comme un résultat paradoxal. Pourtant, Warren D. Smith [155] se sert de cet exemple pour montrer que le *Range Voting* – et naturellement toutes les fonctions de vote basées sur la moyenne et la sommation des notes – résiste mieux à la tyrannie de la majorité que le JM.

Lorsque l’on utilise telles formes de votes, les électeurs qui expriment de fortes préférences ont plus de pouvoir que ceux qui en expriment de faibles. Même si nous devrions être d’accord que la tyrannie de la majorité doit être combattue dans une démocratie, il conviendrait de définir une **minorité qualifiée** pour battre la majorité. Il semble évident qu’une minorité de 10% n’est guère suffisante.

Si nous appliquons la MCMM à ce même problème, nous trouvons que cette minorité qualifiée est ramenée à plus de 25%. En effet, avec les mêmes données, si la proportion de juifs (resp. pro-chinois) dépassent 25%, l’option minoritaire l’emporterait sur la majorité.

La MCMM est donc résistante à la tyrannie de la majorité mais avec une minorité qualifiée bien meilleure que celle donnée par le BMC et le *Range Voting*. Ceci revient à dire que la MCMM est à la fois robuste (comme le JM) et s’oppose à la dictature de la majorité (comme le BMC).

## 6.6 Applications numériques

Dans cette section, nous appliquons la MCMM aux situations controversées de JM et de BMC pour montrer qu'elle est vraiment une méthode de compromis pour départager les deux méthodes opposées.

### PROBLEME 1

Trois amis souhaitent acheter un plat et l'un d'eux est un musulman qui ne peut manger la viande de porc. Tous aiment la viande de bœuf mais les non-musulmans préfèrent légèrement la viande de porc.

Leur profil se présente comme suit :

	A1	A2	A3
Porc	9	9	0
Bœuf	8	8	9

Comme nous l'avons déjà affirmé, le JM (qui donne le porc comme meilleure alternative) n'émet pas un jugement correct. Le bœuf est plus approuvé que le porc. Le BMC corrobore ce résultat. La MCMM donnera le même résultat que le BMC car  $\nu = 2$ .

### PROBLEME 2

5 juges évaluent la prestation de deux danseurs artistiques  $a$  et  $b$  comme suit :

	Juge 1	Juge 2	Juge 3	Juge 4	Juge 5
$a$	10	5	6	4	2
$b$	4	7	7	5	3

Profil ordonné :

$$a : 10 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 2$$

$$b : 7 \quad 7 \quad 5 \quad 4 \quad 3$$

$$\varrho = \frac{5 + 1}{2^2} = 1.5$$

$$\mathcal{M}_2 = \{f^2, f^3, f^5\}$$

$$f_2^{mm}(a) = \frac{6 + 5 + 2}{3} = 4.33 \text{ et } f_2^{mm}(b) = \frac{7 + 5 + 3}{3} = 5$$

MCMM donne ici le même résultat que le JM :  $b \succ_{mm} a$ .

### PROBLEME 3

Dans le contexte de Balinski et Laraki, on donne les résultats suivants pour deux candidats :

	5	4	3	2	1	0
Candidat $a$ :	25%	10%	18%	5%	12%	30%
Candidat $b$ :	0%	25%	30%	10%	25%	10%

$$\varrho = \frac{100 + 1}{2^2} = 25.25$$

$$\mathcal{M}_2 = \{f^{25}, f^{51}, f^{76}\}$$

$$\mathcal{M}_2(a) = \{5, 3, 0\} \text{ et } \mathcal{M}_2(b) = \{4, 3, 2\}$$

$$f_2^{mm}(a) = f_2^{mm}(b) = 2.66$$

Comme il y a *ex aequo*, on répète la procédure avec  $k = 3$ .

$$\varrho = \frac{100 + 1}{2^3} = 12.625$$

$$\mathcal{M}_3 = \{f^{13}, f^{25}, f^{38}, f^{51}, f^{63}, f^{76}, f^{88}\}$$

$$\mathcal{M}_3(a) = \{5, 5, 3, 3, 1, 0, 0\} \text{ et } f_3^{mm}(a) = \frac{17}{7} = 2.42$$

$$\mathcal{M}_3(b) = \{4, 4, 3, 3, 2, 1, 1\} \text{ et } f_3^{mm}(b) = \frac{18}{7} = 2.57$$

$$f_3^{mm}(b) > f_3^{mm}(a) \Rightarrow b \succ_{mm} a$$

Ce résultat est celui donné par le JM qui s'était avéré plus adéquat pour cette situation.

**PROBLEME 4**

Dans le même contexte que l'exemple précédent, on donne :

	Excellent	Très Bien	Bien	Médiocre	Insuffisant	Rejeté
a	9%	41%	50%	0%	0%	0%
b	4%	47%	3%	5%	12%	29%

$$\varrho = \frac{100 + 1}{2^2} = 25.25$$

$$\mathcal{M}_2 = \{f^{25}, f^{51}, f^{76}\}$$

$$\mathcal{M}_2(a) = \{\text{Très Bien, Bien, Bien}\} \text{ et } \mathcal{M}_2(b) = \{\text{Très Bien, Très Bien, Rejeté}\}$$

En attribuant la note appropriée à chaque grade, on a :

$$\mathcal{M}_2(a) = \{4, 3, 3\} \text{ et } f_2^{mm}(a) = \frac{4 + 3 + 3}{3} = 3.33$$

$$\mathcal{M}_2(b) = \{4, 4, 0\} \text{ et } f_2^{mm}(b) = \frac{4 + 4 + 0}{3} = 2.66$$

$$f_3^{mm}(a) > f_3^{mm}(b) \Rightarrow a \succ_{mm} b$$

Ce résultat est celui donné par le BMC qui s'était avéré plus adéquat pour cette situation.

**PROBLEME 5**

Dans le contexte balinski-larakien, on donne :

	Excellent	Très Bien	Bien	Médiocre	Insuffisant	Rejeté
a	1%	98%	1%	0%	0%	0%
b	50%	1%	0%	0%	0%	49%

$$\varrho = \frac{100 + 1}{2^2} = 25.25$$

$$\mathcal{M}_2 = \{f^{25}, f^{51}, f^{76}\}$$

$$\mathcal{M}_2(a) = \{\text{Très Bien}, \text{Très Bien}, \text{Bien}\} \text{ et } \mathcal{M}_2(b) = \{\text{Excellent}, \text{Très Bien}, \text{Rejeté}\}$$

En attribuant la note appropriée à chaque grade, on a :

$$\mathcal{M}_2(a) = \{4, 4, 4\} \text{ et } f_2^{mm}(a) = \frac{4 + 4 + 4}{3} = 4$$

$$\mathcal{M}_2(b) = \{5, 4, 0\} \text{ et } f_2^{mm}(b) = \frac{5 + 4 + 0}{3} = 3$$

$$f_3^{mm}(a) > f_3^{mm}(b) \Rightarrow a \succ_{mm} b$$

Ce résultat est celui donné par le BMC qui s'était avéré plus adéquat pour cette situation. La MCMM lève aussi ce paradoxe du JM.

**PROBLEME 6**

On donne, dans le contexte de Balinski-Laraki :

	Excellent	Très Bien	Bien	Médiocre	Insuffisant	Rejeté
a	50%	0%	0%	0%	0%	50%
b	0%	0%	0%	0%	51%	49%

$$\varrho = \frac{100 + 1}{2^2} = 25.25$$

$$\mathcal{M}_2 = \{f^{25}, f^{51}, f^{76}\}$$

$$\mathcal{M}_2(a) = \{\text{Excellent}, \text{Rejeté}, \text{Rejeté}\} \text{ et}$$

$$\mathcal{M}_2(b) = \{\text{Insuffisant}, \text{Insuffisant}, \text{Rejeté}\}$$

En attribuant la note appropriée à chaque grade, on a :

$$\mathcal{M}_2(a) = \{5, 0, 0\} \text{ et } f_2^{mm}(a) = \frac{5 + 0 + 0}{3} = 1.66$$

$$\mathcal{M}_2(b) = \{1, 1, 0\} \text{ et } f_2^{mm}(b) = \frac{1 + 1 + 0}{3} = 0.66$$

$$f_3^{mm}(a) > f_3^{mm}(b) \Rightarrow a \succ_{mm} b$$

D'après le JM,  $b$  gagne quoique 100% de l'électorat estiment qu'il est au plus « Insuffisant » (avec 49% de rejet) et que  $a$  est jugé « Excellent » par la moitié de l'électorat. La MCMM donne le même résultat que BMC.

## 6.7 MCMM appliquée à l'expérience de Balinski et Laraki de 2012

Nous appliquons dans cette section la MCMM aux données recueillies dans l'expérience de Balinski et Laraki sur les élections présidentielles de 2012. Les résultats obtenus seront comparés à ceux qui ont été obtenus par le JM et le BMC. Les données considérées sont celles inscrites à la Table 3.4 à la page 80.

TABLE 6.2 – MCMM comparée à JM et BMC sur les données de Balinski et Laraki (2012)

Rang	Candidats	Jauge majoritaire	BMC	MCMM 1	MCMM 2	MCMM 3
1	Hollande	(45.05%, $AB^+$ , 43.28%)	300.15	<b>3</b>	2.85	–
2	Bayrou	(34.06%, $AB^-$ , 40.71%)	278.99	<b>3</b>	2.71	–
3	Sarkozy	(49.25%, $P^+$ , 39.62%)	247.75	<b>2</b>	2.28	–
4	Mélenchon	(42.97%, $P^+$ , 40.43%)	225.45	<b>2</b>	2.14	–
5	Dupond-Aignan	(40.57%, $I^+$ , 33.92%)	139.75	<b>1</b>	1.28	–
6	Joly	(36.77%, $I^-$ , 38.53%)	135.24	<b>1</b>	<b>1</b>	1.2
7	Poutou	(26.19%, $I^-$ , 45.73%)	101.8	<b>1</b>	<b>1</b>	0.93
8	Le Pen	(46.13%, $I^-$ , 47.63%)	172.75	1.33	–	–
9	Arthaud	(24.83%, $I^-$ , 49.93%)	92.01	0.66	–	–
10	Cheminade	(48.03%, $R$ , –)	83.97	0.33	–	–

La Table 6.2 montre que le rangement par le JM est Hollande  $\succ_{mg}$  Bayrou  $\succ_{mg}$  Sarkozy  $\succ_{mg}$  Mélenchon  $\succ_{mg}$  Dupond-Aignan  $\succ_{mg}$  Joly  $\succ_{mg}$  Poutou  $\succ_{mg}$  Le Pen  $\succ_{mg}$  Arthaud  $\succ_{mg}$  Cheminade. Le BMC et la MCMM rendent un résultat quelque différent : Hollande  $\succ$  Bayrou  $\succ$  Sarkozy  $\succ$  Mélenchon  $\succ$  Le Pen  $\succ$  Dupond-Aignan  $\succ$  Joly  $\succ$  Poutou  $\succ$  Arthaud  $\succ$  Cheminade.

La MCMM livre donc un résultat cohérent : elle corrobore le rangement rendu par le BMC. Ce rangement est en accord avec celui rendu par le JM pour les quatre premiers et deux derniers candidats. Cependant, le *tie-break* de Balinski & Laraki [23] est appliquée plusieurs fois pour établir le rangement par le JM. Il faut aller jusqu'à trois itérations pour établir un rangement complet par la MCMM. Aucun mécanisme de *tie-break* n'est pourtant exigé pour le BMC. La vulnérabilité du BMC face aux manipulations stratégiques des électeurs n'étant plus à prouver, la MCMM lui serait préférable car étant plus robuste quoique plus lent à défaire les nœuds.

En effet, il est quasiment impossible à un électeur, même ayant suffisamment des informations sur les intentions des autres électeurs, de savoir comment noter un candidat de sorte que la note attribuée soit intermédiaire.

## 6.8 Distribution des sièges dans une chambre par MCMM

Jusqu'à présent, la Méthode du Compromis Moyenne-Médiane n'a été utilisée que pour l'élection d'un unique candidat ou pour établir un rangement de candidats/compétiteurs. Dans cette section, nous décrivons comment l'utiliser pour la répartition des sièges au sein d'une chambre (par exemple Assemblée Nationale, Chambre des représentants, Sénat, etc.).

Nous abordons ce problème vu qu'il n'a pas complètement été résolu par le BMC de Zahid [168]. En effet, la distribution des sièges par le BMC ne prévoit pas de mécanisme pour la désignation des personnes qui occuperont les sièges attribués à un parti. Face à une telle indécision, l'on peut s'imaginer que les partis seront appelés à désigner eux-mêmes leurs représentants pour occuper ces sièges.

Cette manière de procéder peut générer bien d'autres problèmes : Sur base de quels critères faut-il désigner les occupants de ces sièges ? Les personnes désignées par les partis pour occuper les sièges ont-elles une approbation directe du peuple ou de leurs partis ? Faut-il organiser d'autres élections au sein des partis pour désigner les personnes qui occuperont les sièges qui leur sont attribués ?

Plutôt que de tenter de résoudre les problèmes générés par les insuffisances d'une méthode d'agrégation (en l'occurrence BMC), nous présentons une nouvelle approche qui résout à la fois le problème de distribution des sièges et celui de la désignation des occupants de ces sièges. Cette nouvelle méthodologie utilise la fonction MCMM.

### 6.8.1 Distribution des sièges par MCMM : Description

Etant donné  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un ensemble de  $n$  votants ;  $\mathcal{L} = \{P_1, P_2, \dots, P_p\}$  un ensemble de  $p$  partis, le problème de distribution de sièges consiste à répartir  $m$  sièges (avec  $m \geq 1$ ) entre les  $p$  partis en compétition.

Ce problème est résolu de la manière que voici :

1. Chaque votant  $i$  approuve  $s_{ij}$  candidats dans la liste du parti  $P_j$  de telle manière que  $\sum_{j=1}^p s_{ij} \leq m$ .

2. Appliquer MCMM pour  $k = 2$  en vue d'obtenir les scores pour chaque parti ;
3. Chaque parti reçoit un nombre de sièges égal à la partie entière de son score par MCMM ;
4. S'il reste de sièges à pourvoir, les attribuer aux partis dans l'ordre décroissant des parties décimales des scores MCMM. En cas d'égalité des parties décimales entre deux partis, privilégier le parti qui a déjà le plus de sièges ;
5. Si la procédure 4 n'arrive pas à répartir les partis, appliquer MCMM pour  $k + 1$  et revenir à l'étape 3.

### 6.8.2 Exemples numériques

Nous présentons ici des exemples en précisant la manière dont les électeurs se sont exprimés pour montrer comment mettre en œuvre la méthode de manière efficiente.

**Exemple 6.3** Soit 10 électeurs et 3 partis  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On cherche à répartir entre ces partis 5 sièges étant donné le profil ci-dessous :

TABLE 6.3 – Distribution de sièges aux partis

Electeurs	$A$	$B$	$C$
1	2	2	1
2	3	0	1
3	2	3	0
4	1	1	3
5	2	1	2
6	4	0	1
7	0	1	4
8	5	0	0
9	2	3	0
10	0	5	0

Les scores compilés des partis sont :

Pour  $k = 2$ , on a  $\varrho = \frac{10 + 1}{2^2} = 2.75$  et  $\mathcal{M}_2 = \{f^3, f^6, f^8\}$ .

Ainsi,

$$\mathcal{M}_2(A) = \{3, 2, 1\} \Rightarrow f^{mm}(A) = \frac{3 + 2 + 1}{3} = 2$$

TABLE 6.4 – Scores compilés

	5	4	3	2	1	0	Total
<i>A</i>	1	1	1	4	1	2	10
<i>B</i>	1	0	2	1	3	3	10
<i>C</i>	0	1	1	1	3	4	10

$$\mathcal{M}_2(B) = \{3, 1, 0\} \Rightarrow f^{mm}(B) = \frac{3 + 1 + 0}{3} = 1.33$$

$$\mathcal{M}_2(C) = \{2, 1, 0\} \Rightarrow f^{mm}(C) = \frac{2 + 1 + 0}{3} = 1$$

A la première distribution, on obtient :

*A* : 2 sièges

*B* : 1 siège

*C* : 1 siège

Il reste un siège à pourvoir. Ce siège revient au parti dont la partie décimale du score MCMM est la plus proche de l'unité : Parti *B*. On a finalement,

*A* : 2 sièges

*B* : 2 sièges

*C* : 1 siège

Ces sièges peuvent alors être attribués aux candidats selon leurs nombres d'approbations. Par exemple, le parti *A* attribue ses deux sièges aux deux candidats les plus approuvés de sa liste.

Cette répartition des sièges est corroborée par le BMC :

TABLE 6.5 – Distribution finale des sièges aux partis

Parti	Score BMC	Sièges obtenus
<i>A</i>	21	2
<i>B</i>	16	2
<i>C</i>	12	1
Total	49	5

Les deux méthodes (BMC et MCMM) produisent le même résultat avec un avantage pour la MCMM qui décrit précisément le mécanisme par lequel les occupants de ces sièges sont désignés.

**Exemple 6.4** Soit 20 électeurs et 5 partis *A*, *B*, *C*, *D* et *E*. On cherche à répartir entre ces partis 8 sièges étant donné le profil ci-dessous :

TABLE 6.6 – Nombres de sièges attribués aux partis par les électeurs

Electeurs	A	B	C	D	E
1	4	1	2	0	1
2	0	2	3	2	1
3	5	1	0	0	2
4	6	1	1	0	0
5	1	3	1	4	0
6	2	0	4	1	1
7	3	4	0	0	1
8	0	7	0	1	0
9	3	5	0	0	0
10	1	2	2	3	0
11	2	0	1	1	4
12	3	0	0	2	3
13	1	0	0	0	7
14	1	0	1	0	6
15	1	2	0	0	5
16	8	0	0	0	0
17	3	0	4	0	1
18	7	0	0	0	1
19	1	1	5	0	1
20	0	0	0	6	2

Pour  $k = 2$ , on a  $\varrho = \frac{20 + 1}{2^2} = 5.25$  et  $\mathcal{M}_2 = \{f^5, f^{11}, f^{16}\}$ .  
Ainsi,

$$\mathcal{M}_2(A) = \{4, 2, 1\} \Rightarrow f^{mm}(A) = \frac{4 + 2 + 1}{3} = 2.66$$

$$\mathcal{M}_2(B) = \{2, 1, 0\} \Rightarrow f^{mm}(B) = \frac{2 + 1 + 0}{3} = 1$$

$$\mathcal{M}_2(C) = \{2, 0, 0\} \Rightarrow f^{mm}(C) = \frac{2 + 0 + 0}{3} = 0.66$$

$$\mathcal{M}_2(D) = \{2, 0, 0\} \Rightarrow f^{mm}(D) = \frac{2 + 0 + 0}{3} = 0.66$$

$$\mathcal{M}_2(E) = \{3, 1, 0\} \Rightarrow f^{mm}(E) = \frac{3 + 1 + 0}{3} = 1.33$$

A la première distribution, on obtient :

$A$  : 2 sièges

$B$  : 1 siège

$C$  : 0 siège

$D$  : 0 siège

$E$  : 1 siège

Il reste 4 sièges à pourvoir. Ces sièges reviennent aux quatre partis dont les parties décimales du score MCMC sont les plus proches de l'unité : les partis  $A$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$ . On a finalement,

$A$  : 3 sièges  
 $B$  : 1 siège  
 $C$  : 1 siège  
 $D$  : 1 siège  
 $E$  : 2 sièges

Ici aussi, la répartition des sièges par MCMM est corroborée par le BMC :

TABLE 6.7 – Distribution finale des sièges aux partis

Parti	Score BMC	Sièges obtenus
$A$	52	3
$B$	29	1
$C$	24	1
$D$	20	1
$E$	36	2
Total	161	8

BMC et MCMM produisent le même résultat mais la MCMM a l'avantage de décrire précisément le mécanisme par lequel les occupants de ces sièges sont désignés.

**Exemple 6.5** *Trois partis  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On cherche à répartir entre ces partis 5 sièges étant donné le profil ci-dessous :*

TABLE 6.8 – Scores des partis et scores globaux par BMC. Les nombres donnés sont exprimés en %

Partis	5	4	3	2	1	0	Total	BMC
$A$	10.2	9.7	10.1	40.2	10.3	19.5	100	210.8
$B$	9.8	0.3	19.9	10.1	29.9	30.0	100	160
$C$	0.4	10.1	9.6	9.9	30.7	39.4	100	121.7

Pour  $k = 2$ , on a  $\varrho = \frac{100 + 1}{2^2} = 25.25$  et  $\mathcal{M}_2 = \{f^{25}, f^{51}, f^{76}\}$ .

Ainsi,

$$\mathcal{M}_2(A) = \{3, 2, 1\} \Rightarrow f^{mm}(A) = \frac{3 + 2 + 1}{3} = 2$$

$$\mathcal{M}_2(B) = \{3, 1, 0\} \Rightarrow f^{mm}(B) = \frac{3 + 1 + 0}{3} = 1.33$$

$$\mathcal{M}_2(C) = \{2, 1, 0\} \Rightarrow f^{mm}(C) = \frac{2 + 1 + 0}{3} = 1$$

A la première distribution, on obtient :

$A$  : 2 sièges

$B$  : 1 siège

$C$  : 1 siège

Le seul siège à pourvoir revient au parti B qui a le plus fort reste. On a finalement,

$A$  : 2 sièges

$B$  : 2 sièges

$C$  : 1 siège

En attribuant à chaque parti les sièges proportionnellement à leurs scores par BMC et après arrondissement, on obtient :

TABLE 6.9 – Distribution finale des sièges aux partis

Parti	Score BMC	Sièges obtenus
$A$	210.8	2
$B$	160	2
$C$	121.7	1
Total	492.5	5

Les deux méthodes (BMC et MCMM) sont ici encore en accord pour la distribution des sièges.

## 6.9 Robustesse de la MCMM

Par “robustesse” nous entendons la capacité qu’a une fonction de résister aux manipulations des électeurs stratégiques.

Le théorème d’impossibilité énoncé par Balinski et Laraki [20] stipule qu’il n’existe pas de fonction de graduation sociale qui soit stratégie-résistante en rangement. Par l’exemple donné au paragraphe 3.3.3, nous pouvons voir clairement que la MCMM n’est pas non plus partiellement stratégie-résistante en rangement. Elle remplit cependant une autre propriété intéressante.

**Définition 6.11 (Stratégie-résistance par intervalle)** Une fonction de graduation sociale est partiellement stratégie-résistante en rangement par intervalle := si le grade final  $g^a$  de  $a$  est plus bas que celui de  $b$  noté  $g^b$ , i.e.  $g^a < g^b$  et si un juge quelconque  $j$  a une conviction opposée  $g_j^a > g_j^b$ , alors il ne peut décroître le grade final de  $b$  que s’il lui attribue un grade inférieur

à un grade bien précis, il ne peut accroître celui de  $a$  que s'il lui attribue un grade au delà d'un grade bien précis.

Illustrons par un exemple que la fonction d'agrégation MCMM est partiellement stratégie-résistante en rangement par intervalle. Considérons le cas de deux candidats  $a$  et  $b$  qui reçoivent les grades suivants par un jury de 10 juges :

$a$  : 90 84 **75** 79 69 **66** 64 **45** 44 30  
 $b$  : 92 79 **78** 75 73 **72** 57 **51** 19 10

Le grade final de  $a$  par MCMM (62) est inférieur à celui de  $b$  (67). Supposons le juge 7 qui pense que  $a$  mérite un grade plus élevé (64) que  $b$  qui ne mérite que 57. Que peut-il faire ? S'il veut rabattre le grade final de  $b$ , il doit lui attribuer un grade en-deçà de 51. S'il veut accroître le grade final de  $a$ , il doit lui attribuer un grade supérieur à 66. Bien entendu, il peut aussi bien décroître le grade final de  $a$  (en lui attribuant un grade inférieur à 45) qu'accroître le grade final de  $b$  (en lui attribuant un grade supérieur à 72), ce qui n'est pas son intention.

Dans cet exemple, seuls les juges 3, 6 et 8 sont pivotaux. Ils peuvent modifier les grades des candidats à leur guise. La difficulté pour eux est de savoir à l'avance quel grade attribuer aux candidats pour que ces grades soient retenus comme intermédiaires ? Réussir à chaque coup une telle prédiction est un événement quasi-impossible.

La propriété énoncée dans la définition 6.11 est vérifiée pour la MCMM même par groupe. Si nous reprenons les données de la Table 3.3, nous avons pour Ségolène Royal,

Candidats	Excellent	Très Bien	Bien	Passable	Insuffisant	A Rejeter
Royal	16.7%	22.7%	19.1%	16.8%	12.2%	12.6%

Les grades intermédiaires sont "Très Bien", "Bien" et "Insuffisant". Les 16.7% des votants qui ont attribué la mention "Excellent" à Royal ne peuvent décroître sa valeur finale que s'ils rabaissent cette mention à "Bien" ce qui ne peut être raisonnablement leur vœu. Par contre, si au moins 14.4% des électeurs qui avaient jugé Royal "Très Bien" revoient leur jugement pour lui attribuer une quelconque mention inférieure à "Très Bien", ils peuvent rabattre la valeur finale du candidat. Réciproquement, au moins 8.3% de ces électeurs qui l'ont jugée "Très Bien" peuvent améliorer la valeur finale de Ségolène Royal.

La MCMM se comporte dans certains cas comme le JM, particulièrement lorsqu'il y a beaucoup de valeurs égales aux intermédiants. Considérons le cas où on évalue un athlète par 20 juges sur une échelle de notes allant de 0 à 10. Soit le profil ci-dessous :

10, 10, 9, 8, **8**, 8, 7, 7, 7, 6, **6**, 5, 5, 5, 4, **3**, 3, 2, 2, 0

La valeur globale de l'athlète est  $\frac{17}{3}$  par la MCMM et 6 par le JM. Par la MCMM comme par le JM, aucun juge qui estime que l'athlète mérite au moins la note 6 ne peut améliorer sa note finale ; un tel juge peut cependant décroître la note finale de l'athlète en attribuant une note inférieure à 6 (ce qui n'est évidemment pas son vœu). Il en est de même pour un juge qui estime que l'athlète mérite au plus la note 6 : il ne peut pas décroître la valeur finale de l'athlète quelle que soit la note qu'il lui attribuerait. Il n'a le pouvoir que d'améliorer la note finale de l'athlète en lui attribuant une note supérieur à 6 (ce qui n'est vraisemblablement pas son intention). Nous voyons donc que, dans ce cas, la MCMM et le JM remplissent la propriété de la stratégie-résistance partielle en rangement.

## 6.10 Paradoxes sur la MCMM

Dans cette section, nous montrons quelques résultats controversés sur la MCMM. Nous pouvons remarquer que la MCMM n'est pas une fonction parfaite. Cependant, certains de ces exemples paradoxaux sont tellement rares que nous pourrions nous poser des questions sur leur pertinence dans l'étude des théories de vote [133].

**Exemple 6.6** *Supposons qu'il y ait deux circonscriptions électorales, soit I et II, avec deux candidats  $a$  et  $b$ . Dans l'électorat I, il y a 10 juges qui rendent leurs jugements tels qu'indiqués à la Table 6.10 ci-dessous :*

TABLE 6.10 – Jugements selon Electorat I

Electorat I	5	4	3	2	1	0
$a$	3	3	1	1	1	1
$b$	2	2	4	2	0	0

D'après l'électorat I, le compromis majoritaire moyen du candidat  $a$  est  $\frac{11}{3}$  et celui de  $b$  est  $\frac{10}{3}$ . Ainsi dans l'électorat I,  $a \succ_{mm} b$ .

Dans l'électorat II, nous avons les mêmes candidats  $a$  et  $b$  avec 15 juges qui évaluent les candidats de la manière que voici :

TABLE 6.11 – Jugements selon Electorat II

Electorat II	5	4	3	2	1	0
$a$	1	2	2	3	4	3
$b$	2	2	2	1	4	4

D'après les données fournies à la Table 6.11, les compromis majoritaires moyens pour les candidats  $a$  et  $b$  sont respectivement 2 et  $\frac{5}{3}$ . Et donc pour l'électorat II,  $a \succ_{mm} b$ .

Maintenant observons le résultat dans l'électorat unifié tel qu'indiqué dans la Table 6.12 ci-dessous :

TABLE 6.12 – Jugements selon les Electorats I et II combinés

Electorat I et II	5	4	3	2	1	0
$a$	4	5	3	4	5	4
$b$	4	4	6	3	4	4

Dans l'électorat unifié, le compromis majoritaire moyen du candidat  $a$  est  $\frac{7}{3}$  et celui de  $b$  est  $\frac{8}{3}$ . Ainsi, alors qu'on a  $a \succ_{mm} b$  dans chacun des électorats I et II, nous obtenons  $b \succ_{mm} a$  dans l'électorat unifié. En d'autres termes,  $a$  gagne dans chaque circonscription I et II alors que  $b$  gagne lorsque les évaluations des deux circonscriptions sont réunies. Par conséquent, la MCMM n'est pas séparable [133].

**Exemple 6.7** Supposons deux candidats  $a$  et  $b$  avec six juges dont les jugements sont les suivants :

$$\begin{aligned} a : & 10 \quad 8 \quad 6 \quad 6 \quad 5 \quad 1 \\ b : & 10 \quad 8 \quad 8 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \end{aligned}$$

Ainsi,  $a$  est vainqueur par MCMM avec un compromis majoritaire moyen de  $\frac{19}{3}$ , tandis que celui de  $b$  n'est que 6. Supposons qu'un septième juge s'ajoute et attribue respectivement les notes 9 et 8 à  $a$  et  $b$ . Nous obtenons alors le profil suivant :

$$\begin{array}{l} a : 10 \quad 10 \quad 8 \quad 6 \quad 6 \quad 5 \quad 1 \\ b : 10 \quad 9 \quad 8 \quad 8 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \end{array}$$

$b$  devient vainqueur plutôt que  $a$  d'autant plus que son compromis majoritaire moyen est  $\frac{22}{3}$  alors que celui de  $a$  n'est que 7.

On peut conclure que le soutien accru pour un candidat peut le faire basculer du statu de vainqueur à celui de perdant. Dans ce cas, il vaudrait mieux pour le septième électeur de ne pas exprimer son vote puisque son candidat favori gagne, tandis que  $b$  gagnerait s'il exprimait sa vraie préférence. Dans la littérature sur la Théorie de vote ceci est connu sous le nom de *paradoxe de la non-participation*. On dira alors que la MCMM n'incite pas à la participation ou n'est pas participation-consistante.

## 6.11 Evaluation de la MCMM

Dans [133], il a été montré que la Méthode du Compromis Moyenne-Médiane satisfait les propriétés suivantes :

- MCMM est *choix-monotone* : si  $a \succ_{mm} b$  et que soit  $a$  croît strictement soit  $b$  décroît strictement dans les évaluations d'un ou plusieurs votants, alors  $a \succ_{mm} b$  ;
- MCMM est *rang-monotone* : si les évaluations des votants restent les mêmes excepté le fait que le vainqueur croît dans les préférences de certains d'entre eux, non seulement il doit rester vainqueur, mais le rangement entre les autres candidats ne doit pas changer ;
- MCMM est *strictement monotone* : quand un candidat qui n'est pas vainqueur décroît dans les préférences des votants, le candidat gagnant ne doit pas changer.

Dans cette thèse, nous montrerons d'autres propriétés relatives à la MCMM.

### Définition 6.12 (Voir [20, 133, 154])

- Expressivité : Plus les types de votes sont divers, plus le votant a de l'expressivité ;
- Un système de vote est *favori-sûr* s'il est plus "sûr" de voter pour son candidat favori, c'est-à-dire qu'il n'est pas plus stratégique de ranger un candidat non-favori avant son favori ;
- Un système de vote est *clone-sûr* si un "clone" d'un candidat (évalué presque identique au candidat original par tous les électeurs) participe à l'élection ou en est éliminé, cela ne devrait pas affecter le

- vainqueur (qu'il s'agisse même du remplacement d'un candidat par un clone).
- Un système de vote est monotone si
    - i) un votant augmente sa préférence pour un candidat  $c$  (laissant les autres préférences inchangées), cela ne devrait pas diminuer les chances de  $c$  de gagner l'élection, et
    - ii) un votant diminue sa préférence pour un candidat  $c$  (laissant les autres préférences inchangées), cela ne devrait pas augmenter les chances de  $c$  de gagner l'élection.
  - Un système de vote est *sûr en l'absence du perdant* := si un candidat perdant  $x$  est jugé inéligible pour participer à l'élection, alors les mêmes votes devraient être utilisés pour conduire une élection avec  $x$  écarté, et devrait toujours faire élire le même vainqueur.

**Théorème 6.10 (Voir [132])** *La Méthode du Compromis Moyenne-Médiane (MCMM) est expressive, favori-sûre, clone-sûre, monotone et sûre en l'absence du perdant.*

**Preuve :** Voir [132], pages 179-181.

## 6.12 Quelques commentaires sur MCMM

Ci-dessous nous commentons les propriétés citées pour la MCMM :

1. Avec le vote à la pluralité dans une élection de  $m$  candidats, chaque votant n'a que  $m$  votes possibles. Avec le vote par approbation, il y a  $2m$  votes possibles pour tout votant. Pour le *Range Voting* [155], et par conséquent le *Borda Majority Count* (BMC) [168], le *Jugement Majoritaire* [15, 18, 16, 17, 20, 19, 21, 23, 24, 22] et la *Méthode du Compromis Moyenne-Médiane* [130, 131, 132, 133], dans une échelle de 0 à 4 par exemple, il y a  $5m$  possibilités de vote. Lorsque l'échelle de note est 0 – 99, nous aurons  $100m$  votes possibles. Bien sûr, avec les systèmes de vote par rangement (comme Borda et Condorcet par exemple), nous aurons  $m!$  votes possibles. MCMM requiert donc moins d'information de l'électeur puisque l'ordre de sa complexité est le même que celui de du vote à la pluralité (complexité polynomiale).
2. Par exemple, la règle majoritaire n'est pas favori-sûr. Considérons le profil ci-dessous :

$$\begin{array}{l} 4 : a \ b \ c \\ 3 : b \ c \ a \\ 2 : c \ b \ a \end{array}$$

Avec la règle majoritaire  $a$  gagnera. Mais si les deux électeurs de  $c$  plaçaient le candidat  $b$  (qui n'est pas leur favori) avant le candidat  $c$  (qui est leur favori),  $b$  gagnerait, ce qui est un bien meilleur résultat pour eux. Le vote par approbation et, plus généralement, la MCMM sont favori-sûrs. Un électeur rationnel n'a pas besoin de trahir son candidat favori pour obtenir un meilleur résultat. Sa seule meilleure stratégie est d'attribuer la note maximale à son favori. Aux autres candidats qu'il estime moins ou équivalents à son favori, il peut attribuer au plus la même note.

3. Le vote à la pluralité et le Compte de Borda ne sont pas clone-sûrs de différentes manières. Pour la règle majoritaire, si un candidat  $a$  a plusieurs clones  $a_1, a_2, \dots$ , les votes en faveur de  $a$  peuvent être distribués entre les clones et tous peuvent perdre. Pour le Compte de Borda, supposons que  $3 : a \ b$  et  $2 : b \ a$ , alors  $a$  recevra le plus grand score de Borda, mais si  $b$  est remplacé par deux clones  $b_1$  et  $b_2$ , la situation peut devenir  $3 : a \ b_1 \ b_2$  et  $2 : b_1 \ b_2 \ a$  et  $b_1$  aura le plus de points de Borda. Avec MCMM [133], les deux clones se verront attribués le même grade final et  $a$  serait toujours gagnant (respectivement perdant) pourvu qu'il soit devant (respectivement derrière)  $b$ .
4. La règle majoritaire, le Compte de Borda, le Jugement Majoritaire, le vote par approbation, le vote par rangement, le BMC et la Méthode du Compromis Moyenne-Médiane (MCMM) sont monotones, mais il est bien connu que le vote alternatif et le vote préférentiel transférable ne le sont pas (voir section 1.5.2 dans [168]).
5. Le Jugement Majoritaire, le vote par approbation, le BMC et la MCMM ont clairement la propriété d'être sûrs en l'absence de perdant, mais la règle majoritaire, la règle d'appariement (Condorcet), le compte de Borda et le vote alternatif ne le sont pas. Par exemple, étant donné un profil  $p$  :

$$\begin{array}{l} 4 : a \ b \ c \\ 3 : b \ c \ a \\ 2 : c \ b \ a \end{array}$$

Avec la règle majoritaire,  $a$  est le vainqueur et  $c$  est perdant, mais en retirant  $c$  de la course,  $b$  devient vainqueur à la place de  $a$ . Le

retrait du candidat  $c$  ne devrait pas modifier le rangement entre  $a$  et  $b$  lorsque l'on utilise MCMM puisque nous le savons déjà, elle est indépendante des alternatives non-pertinentes.

Alors que la règle majoritaire et le vote alternatif peuvent favoriser les candidats extrêmes (aux opinions très prononcées), Warren D. Smith [154, 155] soutient que le *Range Voting*, et en particulier le BMC, a une très faible tendance à encourager à nuancer la bipolarisation de l'espace politique (Gauche-Droite, Majorité-Opposition, Démocrates-Républicains, etc.) à la faveur des centristes (candidats aux opinions nuancées). dans le Chapitre 19 de [20], p. 350, Balinski et Laraki soutiennent, sur base d'une évidence expérimentale que le Jugement Majoritaire semble être le plus apte à faire élire les centristes. Ainsi pourrions-nous aussi dire de la Méthode du Compromis Moyenne-Médiane.

### 6.13 MCMM comparée aux fonctions de vote les plus valuées

Il serait intéressant d'introduire dans cette étude un tableau synoptique qui compare les fonctions de vote les plus représentatives sur base de certains critères démocratiques. La MMCM est comparée au jugement majoritaire (JM), au *Borda Majority Count* (BMC), au vote par assentiment (VA) et au vote majoritaire (VM). Dans le tableau 7.10 ci-dessous, "1" dans une cellule signifie que la fonction de choix social dans la colonne relative remplit le critère sur la ligne associée. Si la fonction ne remplit pas le critère, nous marquons "0".

TABLE 6.13 – Comparaison entre MCMM et les fonctions de vote les mieux cotées

Propriétés	MCMM	JM	BMC	VA	VM
Neutralité	1	1	1	1	1
Anonymat	1	1	1	1	1
Unanimité	1	1	1	1	1
Monotonie	1	1	1	1	0
Indépendance des alternatives non-pertinentes	1	1	1	1	0
Généralisation du VA	1	1	1	1	0
Grande expressivité de l'électeur	1	1	1	0	0
Robustesse	1	1	0	0	0
Résistance à la tyrannie de la majorité	1	0	1	0	0
Election des membres d'une chambre	1	0	1	0	1
Résistance au candidat clône	1	1	1	1	0
Assurance sur l'absence du perdant	1	1	1	1	0
Assurance sur le favori	1	1	1	1	0
Nuance entre la Gauche–Droite	1	1	0	0	0
Séparabilité	0	0	1	1	1
Incitation à la participation	0	0	1	1	0
Monotonie forte	1	1	1	1	0
Stratégie-résistance par intervalle	1	1	0	0	0

Au-delà des critères susmentionnés, la MCMM satisfait encore d'autres critères comme l'honnêteté des électeurs (trahir son candidat favori ne profite en aucun cas à l'électeur), la tolérance de votes sans opinion, le fait qu'il échappe au paradoxe des jumeaux [132].

## 6.14 Particularité de la MCMM

Nous avons soutenu dans ce chapitre que la MCMM est une hybridation du JM et du BMC. Soulignons tout de même qu'elle ne prend en compte que les résultats rendus par les deux dernières méthodes avant l'application de leurs mécanismes de *tie-break*. La MCMM prouve son originalité en rendant parfois des résultats différents du JM et du BMC après usage des leurs *tie-breaks* respectifs.

L'exemple 6.8 montre que le classement des alternatives par la MCMM peut fortement différer de ceux rendus par la JM et le BMC.

**Exemple 6.8** Dans le contexte de Balinski et Laraki, on donne les résultats suivants pour deux candidats :

	<i>Ex</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>BMC I</i>	<i>BMC II</i>	<i>JM</i>	<i>MCMM</i>
<i>a</i>	23	21	29	17	10	230	140	(44, $P^+$ , 27)	2
<i>b</i>	19	22	35	18	6	230	136	(41, $P^+$ , 24)	2.3

Comme nous pouvons le constater, le BMC ne départage pas les deux candidats. Il faut recourir au *tie-break* de Zahid [168] pour établir que  $a \succ_{BMC} b$ . De même, les deux candidats obtiennent la même médiane. Le *tie-break* de Balinski et Laraki [18, 20] établit que  $a \succ_{mg} b$ . Ce résultat n'est pas corroboré par la MCMM qui produit un rangement contraire :  $f^{mm}(a) = 2$  et  $f^{mm}(b) = 2.3 \Rightarrow b \succ_{mm} a$ .

La MCMM se montre donc indépendante des mécanismes de *tie-break* particuliers du JM et BMC qui dénaturent aussi bien le choix basé sur la médiane que celui basé sur la moyenne. Elle se veut n'être le compromis que de la moyenne et de la médiane sans aucune application d'une quelconque forme de *tie-break*.

## 6.15 Conclusion du sixième chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau système de vote obtenu par une combinaison du Borda Majority Count [168] et du Jugement Majoritaire [18, 20, 23]. Cette extension de chacune des deux méthodes précitées consiste en une division de la liste ordonnée des grades ou notes en  $m$  parties égales et à ne retenir que les extrémités des parties internes. La valeur renvoyée par la Méthode du Compromis Moyenne-Médiane (MCMM) est la moyenne des grades ou notes retenus (intermédiants). Nous proposons aussi un mécanisme de *tie-break* en augmentant le nombre de parties dans la liste de grades ou notes. Le *tie-break* proposé diffère aussi bien du BMC que du JM.

La MCMM coïncide avec le BMC lorsque le nombre de division est égal à l'indice de division maximale et coïncide avec le JM lorsque le nombre de division est égal à 1. Nous avons bon jugé que, puisque la coïncidence avec le JM peut être aussi observée pour des valeurs de nombre de division différents de 1, il faille commencer le processus avec un nombre de division égal à 2.

Nous proposons dans ce chapitre six exemples didactiques constituant des situations controversées pour le BMC et le JM. Pour chaque paradoxe évoqué, si l'une des deux méthodes opposées le contourne, la MCMM le contourne aussi. La MCMM se révèle donc comme un meilleur compromis entre les deux méthodes. Elle garde, en effet, les propriétés communes de ses parents :

- Elle maximise l'expressivité des électeurs ;
- Elle remplit les critères d'anonymat, de neutralité, d'unanimité, de monotonie et d'Arrow (Indépendance des Actions Non-Pertinentes) ;
- Elle se réduit au vote par approbation si les scores autorisés sont retroints aux deux valeurs 0 et 1, i.e. chaque électeur "approuve" ou "désapprouve" chaque candidat ;
- Elle se passe en un tour ;
- Elle peut susciter l'enthousiasme et la participation des électeurs à utiliser une nouvelle méthode d'élection vraiment démocratique où ils peuvent s'exprimer pleinement ;
- Elle est immunisée contre le clonage de candidat ;
- Elle remplit la propriété que trahir son candidat favori ne profite pas à l'électeur ;
- Elle permet des votes sans opinion ;
- Elle échappe dans une certaine mesure aux théorèmes d'impossibilité d'Arrow et de Gibbard-Satterthwaite.

Cependant, elle hérite aussi des insuffisances de ses parents (Voir [74]) :

- Elle n'est pas Condorcet-consistante (cf. Problème 1) ;
- Elle ne remplit pas le critère de séparabilité et de participation (vu que le JM ne les remplit pas) ;
- L'effet compensatoire de la moyenne arithmétique (dont souffre le BMC), bien que réduit, existe toujours.

Les faiblesses évoquées ci-haut ne sont pas dans la même ampleur que pour le BMC et le JM. D'ailleurs, le critère de Condorcet, comme le montre le problème 1, n'est pas toujours une condition souhaitable dans une élection. Il ne serait pas étonnant qu'on retrouve des cas où la MCMM soit vulnérable à la séparabilité et au *No-Show paradox* parce que le JM en souffre.

En plus d'être appliquée pour l'élection d'un unique candidat, la MCMM est aussi applicable pour la distribution des sièges au sein d'une chambre. Cette propriété n'est pas remplie par le JM et l'est partiellement par le BMC. En effet, comme montré dans [168], le BMC permet la distribution des sièges au sein d'une chambre. Cependant, les personnes qui occuperont, pour un parti donné, les sièges lui attribués ne sont pas déterminées par la fonction d'agrégation. Cette tâche est laissée au parti à qui les sièges sont attribués.

La principale difficulté en est que le parti peut désigner les occupants de ses sièges sur bases des critères subjectifs ou illégitimes et provoquer des frustrations au sein de la population. Il est à noter que le rôle premier d'une élection est de reproduire le plus fidèlement la volonté du peuple. Il va donc de soi que, même si le parti fait confiance à un candidat  $x$  plutôt qu'à un autre candidat  $y$ , ce choix ne peut en aucun cas l'emporter sur la volonté du peuple si ce dernier porte son choix sur  $y$  plutôt que  $x$ .

La MCMM résout efficacement ces deux problèmes : celui de la répartition des sièges et celui de la désignation des personnes occupant ces sièges. Notons cependant que les évaluations individuelles pour la MCMM et le BMC ne sont pas identiques lorsqu'il s'agit de la distribution des sièges. En effet, dans le cas de la MCMM, chaque évaluateur (votant) est appelé à approuver un nombre de candidats au plus égal au nombre de sièges à pourvoir dans sa circonscription. Cette condition n'est pas requise pour le BMC qui demande que les votants attribuent des notes aux partis. Ainsi pour le BMC, pour une circonscription à 5 sièges par exemple, un juge (votant) peut attribuer à un parti  $A$  la note 5, à un parti  $B$  la note 5 et à un autre parti  $C$  la note 3. Un bulletin rempli de cette manière est nul lorsqu'il s'agirait de la MCMM qui exige aux juges de n'approuver sur toutes les listes qu'au plus 5 candidats. De même, la MCMM n'est pas applicable sur les données de la Table 5.2 à la page 115.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons une extension de la MCMM au contexte Multicritère Multi-Décideur (MCMD). Il s'agit d'appliquer la méthode sur des problèmes de rangement partiel ou total des alternatives sur base de plusieurs critères souvent contradictoires et en s'appuyant sur des avis des décideurs dont les intérêts sont en conflit.

# Chapitre 7

## MCMM appliquée aux problèmes Multicritère Multi-Décideur

### 7.1 Introduction au septième chapitre

Décider est une tâche très complexe et difficile. Certains soutiennent même que notre capacité de prendre des décisions dans des situations complexes est la principale caractéristique qui nous distingue des animaux [43].

Jusqu'aux années 1990, quand un gestionnaire d'entreprise devait prendre une décision, il pouvait consulter des experts, se baser sur des cas similaires au sien ou utiliser les techniques classiques de la Recherche Opérationnelle. En effet, ces techniques ne sont dédiées qu'à l'optimisation d'une fonction économique. La prise de décision, de nos jours, va au-delà du cadre d'un unique décideur qui s'isole pour prendre une décision. La tendance actuelle est de considérer les avis d'un groupe d'individus concernés par la décision. Il convient donc de prendre en compte plusieurs points de vue contradictoires émanant des décideurs concernés [142].

D'après Jean-Luc Marichal [114], les fonctions d'agrégation sont généralement définies et utilisées pour combiner et résumer plusieurs valeurs numériques en une seule de telle sorte que le résultat final de l'agrégation prenne en compte, d'une manière prescrite, toutes les valeurs individuelles. Ce chapitre vise à présenter un modèle d'agrégation de plusieurs modèles de fonction de valeur additive en un seul dans une problématique de rangement.

La multiplicité des décideurs met en lumière l'importance de la décision collective au sein des organisations. En effet, chaque décideur apporte son jugement par rapport à chaque action. Ensuite on obtient un rangement collectif d'où un résultat de consensus comme indiqué dans la figure 7.1. La problématique de rangement ou procédure de classement notée  $p.\gamma$  consiste à ordonner les actions d'un ensemble  $A$ .

Dans cette problématique, c'est surtout l'esprit de compétition qui s'impose sans qu'une sélection d'actions ne soit nécessaire. C'est le cas des problèmes décisionnels du type suivant : Comment ranger les candidats à un concours par ordre décroissant des mérites ? Il peut y avoir des *ex aequo*. On peut classer les actions par ordre décroissant y compris les *ex aequo*. Le rangement consiste à affecter un rang de classement à chaque action d'un ensemble  $A'$  de  $A$ , deux actions ayant même rang lorsque les données ne permettent pas de les départager. Le rang des classes permet de les ordonner complètement ou partiellement.

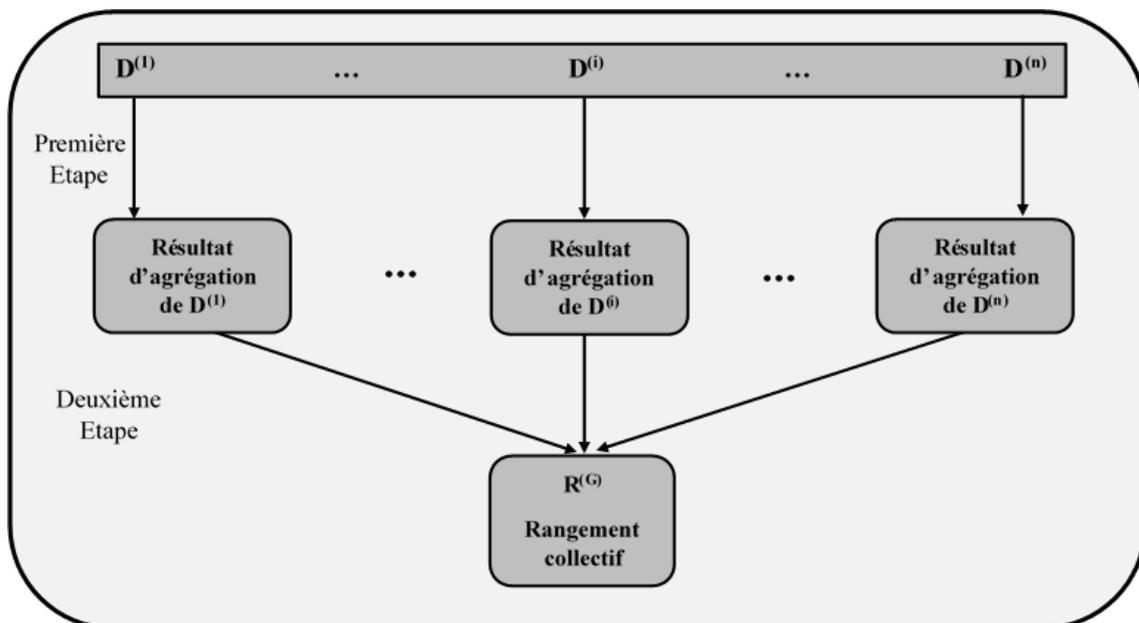


FIGURE 7.1 – Décision de groupe.

Nous adaptons dans cette thèse la méthode MCMM à la résolution d'un problème Multicritère Multidécideur. La méthode est testée sur les données fournies par Rasmi Ginting [89] et d'autres situations plus complexes.

## 7.2 Présentation d'un problème Multicritère Multidé- cideur

La plupart des problèmes d'aide à la décision impliquent plusieurs critères et plusieurs décideurs [42]. De tels problèmes interviennent lorsque :

- Nous avons 5 ensembles :
  - $D = \{d_1, d_2, \dots, d_s\}$  de tous les  $s$  décideurs ;
  - $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  une collection de  $n$  alternatives ou actions ;
  - $C = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  désignant les  $m$  critères retenus ;
  - $X = \{x_{ij} = g_j(a_i), i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$  un ensemble comprenant les scores de l'alternative  $i$  sur le critère  $j$ .
  - $X^l = \{x_{ij}^l = g_j(a_i), i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; l = 1, \dots, s\}$  désignant les performances de l'alternative  $i$  sur le critère  $j$  pour le  $l^{\text{ème}}$  décideur.
- Aucun décideur n'est dictateur ;
- Aucune alternative ne domine toutes les autres sur chaque critère ;

Nous avons besoin d'une aide multicritère à la décision pour établir une bonne solution de compromis.

## 7.3 Grandes lignes de MCMM pour un problème MCMD

MCMM [130, 131] est naturellement conçue pour un problème multi-agent (multi-décideur). L'adaptation proposée dans cette thèse se fixe comme objectif une agrégation de type « AC » (Agréger puis Comparer). L'algorithme est le suivant :

- Appliquer la fonction MCMM sur les poids de chaque critère pour en trouver le poids global ;
- Appliquer la fonction MCMM sur les scores attribués à chaque alternative sur chaque critère pour trouver les scores globaux des alternatives sur chacun des critères retenus ;
- Appliquer la somme pondérée pour déterminer les performances globales des alternatives ;
- Arrêter le processus lorsque les comparaisons ont été opérées.

A la fin du processus, un rangement complet ou partiel est obtenu sur l'ensemble  $A$  des alternatives .

**Entrée :**

- $\{c_l\}_{l=1,\dots,k}$  l'ensemble de k critères
- $\{d_j\}_{j=1,\dots,m}$  l'ensemble de m décideurs
- $\{a_i\}_{i=1,\dots,n}$  l'ensemble de n alternatives
- $\{w_{lj}\}_{l=1,\dots,k;j=1,\dots,m}$  l'ensemble de poids attribués aux critères l par les décideurs j
- $\{g_{ij}^l\}_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m;l=1,\dots,k}$  l'ensemble de notes attribuées aux alternatives i par les décideurs j sur les critères l.

**Sortie :**

- Rangement des alternatives de la meilleure à la pire

**Début**

// Déclaration des variables

**Tableau :** p[k] des réels

**Tableau :** g[n, k] des réels

**Tableau :** Score[n] des réels

// Action principale

**Pour** x ← 1 à n **faire**

**Pour** y ← 1 à k **faire**

$$p[x] \leftarrow \prod_{y=1}^m (w_{y1}, w_{y2}, \dots, w_{ym})$$

$$g[x, y] \leftarrow \prod_{l=1}^k (g_{x1}^y, g_{x2}^y, \dots, g_{xm}^y)$$

**Fin Pour**

**Fin Pour**

**Pour** z ← 1 à n **faire**

    Score[z] ← 0

**Pour** t ← 1 à k **faire**

$$\text{Score}[z] \leftarrow \text{Score}[z] + g[z, t] * p[t]$$

**Fin Pour**

**Fin Pour**

Trilns(Score[1], Score[2], ..., Score[n]) // Fonction de tri par insertion

**Fin**

FIGURE 7.2 – Algorithme MCMM pour les problèmes MCMD

## 7.4 Etude de la Complexité

Dans la première boucle, nous retrouvons une autre boucle. Le nombre d'opérations est  $T_1 = c_1 \cdot n \cdot k$  où  $c_1$  indique un nombre constant d'opérations supplémentaires (réservation mémoire, affectations, évaluation de la fonction  $f_2^{mm}$ , etc.)

Si on a  $k \leq n$  (resp.  $n \leq k$ ) alors  $n \cdot k \leq n^2$  (resp.  $n \cdot k \leq k^2$ ). Ainsi, la complexité de  $T_1$  au pire des cas est en  $\mathcal{O}(n^2)$  (polynomiale)

De même, la deuxième boucle comprend une autre boucle telle que le nombre d'opérations soit  $T_2 = c_2 \cdot n \cdot k$  où  $c_2$  indique un nombre constant d'opérations supplémentaires (réservation mémoire, affectations, multiplications, additions, etc.). Sa complexité au pire des cas vaut aussi  $\mathcal{O}(n^2)$ .

L'opération de tri à la fin est réalisée par la fonction Tri-Insertion qui a une complexité en  $\mathcal{O}(n^2)$  (cf. [59]).

Tout compte fait, nous réalisons que l'algorithme MCMM pour les problèmes MCMD a une complexité en  $3 * \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(3 * n^2) = \mathcal{O}(n^2)$ .

## 7.5 Exemples didactiques

**Exemple 7.1 (Tiré de [88])** *Le problème consiste à trouver le meilleur produit de l'ensemble,  $A = \{\text{Produit 1, Produit 2, Produit 3, Produit 4}\}$ , l'ensemble des actions. L'ensemble des critères est  $F = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ . Où :*

- $C_1$  : Prix de production (Francs/litre),
- $C_2$  : Longévité de la peinture (ans),
- $C_3$  : Nocivité de peinture (Très peu nocif, Moyennement nocif, Très nocif),
- $C_4$  : Durée de séchage,
- $C_5$  : Odeur de peinture (pas forte, moyen, forte, très forte).

Les données sont fournies par les décideurs (ou affectées aux critères) sous forme de notes. L'étendue des échelles de notation peut différer d'un décideur à l'autre, et chacun des critères peut être affecté d'un coefficient de pondération. Le résultat obtenu, est une répartition sur l'ensemble  $A$

des actions (produits), une ou plusieurs surclassant les autres.

Le principe est le suivant : le produit qui surclasse les autres doit être accepté par le plus grand nombre possible de décideurs, et ne devrait pas être trop rejeté même par l'un d'eux. Chaque décideur établit sa matrice de jugements avec des échelles dont la valeur minimale est 0 et la valeur maximale est 10.

TABLE 7.1 – Matrice des jugements de  $D_1$  (Décideur 1)

	Prix	Longévité	Odeur	Séchage	Nocivité
Poids	6	3	2	4	3
Produit 1	6	5	2	4	5
Produit 2	5	6	3	3	4
Produit 3	7	5	4	6	3
Produit 4	6	4	5	3	6

TABLE 7.2 – Matrice des jugements de  $D_2$  (Décideur 2)

	Prix	Longévité	Odeur	Séchage	Nocivité
Poids	7	5	3	3	4
Produit 1	7	6	2	3	3
Produit 2	6	5	2	5	3
Produit 3	5	7	3	6	4
Produit 4	5	4	4	4	3

TABLE 7.3 – Matrice des jugements de  $D_3$  (Décideur 3)

	Prix	Longévité	Odeur	Séchage	Nocivité
Poids	6	4	2	3	3
Produit 1	6	5	2	4	4
Produit 2	7	6	3	5	3
Produit 3	6	5	4	3	5
Produit 4	5	4	3	6	4

D'après la méthode ELECTRE I fuzzifié utilisé par Ginting et Dou [89], le vainqueur est  $P_3$ .

**Solution par MCMM :** Comme il y a trois décideurs,  $\nu = 2$ , toutes les notes sont des intermédiaires. Les poids globaux des critères sont :

TABLE 7.4 – Poids globaux des critères

Critères	Prix	Longévité	Odeur	Séchage	Nocivité
Poids globaux	6.33	4	2.66	3.33	3.33

Dans le Tableau 7.4 ci-dessus, la performance du critère *Longévité* par exemple est obtenue de la manière que voici :

Les trois décideurs ont attribué respectivement les notes 3, 5 et 4 au critère *Longévité*, alors  $MCMM(Longvit) = \frac{5 + 4 + 3}{3} = 4$ .

La même fonction MCMM est appliquée sur les performances de alternatives sur chaque critère. Nous obtenons donc le tableau suivant :

TABLE 7.5 – Scores globaux par critère

Critères	Prix	Longévité	Odeur	Séchage	Nocivité	Score final
Poids globaux	6.33	4.00	2.66	3.33	3.33	
$P_1$	6.33	5.33	2.00	3.66	4.00	92.2167
$P_2$	6.00	5.66	2.66	4.33	3.33	93.2034
$P_3$	6.00	5.66	3.66	5.00	4.00	100.3256
$P_4$	5.33	4.00	4.00	4.33	4.33	89.2167

Le rangement final est donné par le Tableau 7.6 ci-dessous :

TABLE 7.6 – Rangement final des produits

Produit	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
Score	92.2167	93.2034	100.3256	89.2167
Rang	III	II	I	IV

Le Tableau 7.6 ci-dessus montre que  $P_3$  est le meilleur produit. Le produit  $P_2$  est classé deuxième et ainsi de suite.

**Exemple 7.2 (Tiré de [89])** Ce problème consiste à choisir un partenaire de l'ensemble suivant :

$A = \{Nippon Paint KK (P_1), Courtaoulds Coatings Holding (P_2), Kansai Paint (P_3), International Paint (P_4), US sec of navy (P_5)\}$ . L'ensemble des critères est  $F = C_1, C_2, C_3, C_4$  où :

- $C_1$  : La qualité des produits (Bon, Moyen, Mauvais),
- $C_2$  : Technologie (Bon, Moyen, Mauvais),
- $C_3$  : Coût (Francs),
- $C_4$  : Temps.

Chaque décideur construit sa matrice de jugement. Les échelles de notes restent les mêmes que celles présentées à l'exemple précédent.

TABLE 7.7 – Matrice des jugements de  $D_1$  (Décideur 1)

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
Poids	3	4	3	5
$P_1$	6	8	9	4
$P_2$	4	5	6	7
$P_3$	7	6	8	4
$P_4$	6	8	4	7
$P_5$	5	4	7	6

TABLE 7.8 – Matrice des jugements de  $D_2$  (Décideur 2)

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
Poids	4	3	2	5
$P_1$	7	5	3	8
$P_2$	3	6	8	4
$P_3$	6	8	4	3
$P_4$	5	4	6	7
$P_5$	2	3	7	5

TABLE 7.9 – Matrice des jugements de  $D_3$  (Décideur 3)

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
Poids	4	5	3	5
$P_1$	8	3	6	7
$P_2$	6	5	7	3
$P_3$	5	8	4	2
$P_4$	4	7	3	6
$P_5$	7	6	5	8

D'après les méthodes ELECTRE I fuzzifié [89] et CHEMATRE [142], le vainqueur est  $P_1$ .

**Solution par MCMM :** Nous procéderons de la même manière qu'avec l'exemple précédent.

TABLE 7.10 – Poids globaux des critères

Critères	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
Poids globaux	3.66	4	2.66	5

Les performances globales des alternatives sur chaque critère sont les suivantes :

TABLE 7.11 – Scores globaux par critère

Critères	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	Score
Poids globaux	3.66	4.00	2.66	5.00	MCMM
$P_1$	7.00	5.33	6.00	6.33	94.5500
$P_2$	4.33	5.33	7.00	4.66	79.0878
$P_3$	6.00	7.33	5.33	3.00	80.4578
$P_4$	5.00	6.33	4.33	6.66	88.4378
$P_5$	4.66	4.33	6.33	6.33	82.8634

Le Tableau 7.12 ci-dessous montre que  $P_1$  est le meilleur produit. Le produit  $P_4$  est classé deuxième et ainsi de suite.

TABLE 7.12 – Rangement final des produits

Produit	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
Score	94.5500	79.0878	80.4578	88.4378	82.8634
Rang	I	V	IV	II	III

**Exemple 7.3** Ce problème consiste à choisir un hôtel pour cinq partenaires qui désirent passer ensemble des vacances à Mbanza-Ngungu. Ce choix est tributaire de 3 critères :

- $C_1$  : Le Prix,
- $C_2$  : Le Confort,
- $C_3$  : La Qualité de la cuisine.

Le guide touristique utilisé par les cinq partenaires répertorie quatre hôtels pour la cité de Mbanza-Ngungu, à savoir :

- $H_1$  : Auberge “La Rose”,
- $H_2$  : Hôtel MAKANI,
- $H_3$  : Hôtel “Les Cascades”,
- $H_4$  : Poulet Show.

Comme dans les exemples précédents, chaque partenaire construit sa matrice de jugement et les échelles de notes sont inchangées. Pour faciliter la comparaison, les scores par CHEMATRE [142] sont repris à la dernière colonne de chaque matrice de jugement.

TABLE 7.13 – Matrice des jugements de  $D_1$  (Décideur 1)

Critères	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Somme
Poids	8	4	6	pondérée
$H_1$	6	5	7	110
$H_2$	5	7	5	98
$H_3$	6	8	4	104
$H_4$	7	6	7	122

TABLE 7.14 – Matrice des jugements de  $D_2$  (Décideur 2)

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Somme
Poids	6	6	7	pondérée
$H_1$	7	6	5	113
$H_2$	6	5	5	101
$H_3$	7	7	6	126
$H_4$	6	6	5	107

TABLE 7.15 – Matrice des jugements de  $D_3$  (Décideur 3)

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Somme
Poids	7	5	6	pondérée
$H_1$	8	9	6	137
$H_2$	7	7	6	120
$H_3$	6	6	7	114
$H_4$	7	5	6	110

TABLE 7.16 – Matrice des jugements de  $D_4$  (Décideur 4)

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Somme
Poids	6	4	5	pondérée
$H_1$	7	8	8	114
$H_2$	7	6	7	101
$H_3$	8	7	7	111
$H_4$	7	6	7	101

TABLE 7.17 – Matrice des jugements de  $D_5$  (Décideur 5)

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Somme
Poids	6	7	5	pondérée
$H_1$	8	8	6	134
$H_2$	6	9	7	134
$H_3$	6	7	7	120
$H_4$	7	6	5	109

Les scores obtenus par chaque hôtel par la méthode CHEMATRE sont les suivants :

TABLE 7.18 – Scores globaux et rangement par CHEMATRE

Alternatives	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$
Score	121.071	109.959	114.752	109.59
Rang	I	III	II	IV

**Solution par MCMM :** Les performances globales des alternatives sur chaque critère sont les suivantes :

TABLE 7.19 – Scores globaux par critère

Critères	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Score
Poids globaux	6.33	5.00	5.66	final
$H_1$	7.00	7.00	6.00	113.2700
$H_2$	6.00	6.33	6.00	103.5900
$H_3$	6.33	6.66	6.00	107.3289
$H_4$	6.66	5.66	6.00	104.4178

Dans le tableau des scores globaux, pour obtenir le score de  $H_2$  sur le critère  $C_1$  par exemple, on procède comme suit :

Les notes attribuées par les décideurs (partenaires) à l'alternative  $H_2$  pour le critère  $C_1$  sont respectivement : 5, 6, 7, 7, 6. Si on les ordonne de manière décroissante, on a 7, 7, 6, 6, 5. Pour  $k = 2$ ,  $\varrho = \frac{5+1}{2^2} = 1.5$  et les intermédians sont  $g_2$ ,  $g_3$  et  $g_5$ . Ainsi, la performance globale de  $H_2$  sur le critère  $C_1$  par l'évaluation majoritaire moyenne est

$$f^{mm} = \frac{7 + 6 + 5}{3} = 6$$

Quoique le rangement par MCMM (cf. Tableau 7.20) diffère légèrement de celui rendu par CHEMATRE (cf. Tableau 7.18),  $H_1$  est pour les deux méthodes le meilleur choix pour nos cinq partenaires. Les deux méthodes sont aussi en accord pour la deuxième meilleure alternative.

TABLE 7.20 – Scores globaux et rangement par MCMM

Alternatives	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$
Score	113.2700	103.5900	107.3289	104.4178
Rang	I	IV	II	III

## 7.6 Conclusion du septième chapitre

La fonction d'agrégation présentée dans ce chapitre est une variante ou extension obtenue d'une fonction de vote. Elle résiste mieux aux manipulations stratégiques que les fonctions basées uniquement sur les sommes pondérées et moyennes.

Comme PROMETHEE [3], CHEMATRE [142] et toutes les versions d'ELECTRE [138, 3], MCMM est dédiée à la problématique de rangement. Ce rangement est rendu grâce à la relation d'ordre usuelle sur les nombres réels établie sur les scores finaux des alternatives.

Même si l'extension de MCMM présentée dans ce chapitre est calculatoirement plus complexe que CHEMATRE, elle se montre beaucoup plus robuste que cette dernière. En effet, le choix de la moyenne géométrique plutôt que la moyenne arithmétique dans la fonction CHEMATRE, quoique renforçant sa robustesse, ne permet que de réduire de peu seulement l'impact des décideurs stratégiques sur le résultat final. En amont, les sommes pondérées portent déjà de fortes doses de manipulations stratégiques.

La MCMM cependant n'utilise la somme pondérée qu'en dernière étape. La manipulabilité n'est pas complètement annihilée mais fortement réduite par l'utilisation des intermédiens. Il est quasiment impossible pour un décideur de deviner quelle note attribuer à un critère ou une alternative pour qu'il soit pivotale, c'est-à-dire pour que la note qu'il attribue soit un intermédiaire.

Comme nous avons pu l'expérimenter, les résultats de MCMM sont corroborés par ELECTRE I et CHEMATRE. Signalons que même si les rangements rendus par ces différentes méthodes ne sont pas identiques en tout point, ils sont cependant en accord avec les meilleures et les pires alternatives dans la plupart des cas traités dans cette thèse.

Il y a lieu de présenter d'autres exemples numériques en vue de comparer les résultats obtenus avec différentes méthodes dédiées à la résolution des problèmes d'aide multicritère à la décision avec plusieurs décideurs.

# Conclusion Générale

## Problèmes étudiés

Le nouveau contexte introduit par Balinski et Laraki [18, 20] demande au votant d'évaluer les alternatives au lieu de donner seulement la première préférence ou un rangement des candidats. De cette manière, l'électeur est capable de fournir beaucoup plus d'informations que dans le contexte traditionnel de la Théorie du Choix Social qui est inspiré par Arrow [6, 8].

Dans le contexte balinski-larakien, l'électeur peut donner la même évaluation à deux ou plusieurs candidats et aussi exprimer à quel degré il préfère un candidat à un autre. A partir d'une évaluation, nous pouvons déduire un pré-ordre ou un rangement entre candidats, mais à l'inverse, nous ne pouvons déduire aucune évaluation à partir d'un rangement.

Balinski et Laraki [18, 20] utilisent la médiane des mentions attribuées aux candidats par les électeurs comme valeur globale d'un candidat en vue d'un rangement social des alternatives en compétition. Manzoor Ahmed Zahid [168] préfère utiliser la moyenne ou la somme pondérée comme évaluation finale d'un candidat.

Les limites de l'une ou l'autre fonction ont été longuement discutées dans cette thèse. Nous avons cependant consacré un chapitre entier aux insuffisances du JM car il s'agit du système de vote qui a accompagné et soutenu le nouveau contexte introduit par Balinski et Laraki [18]. La plupart des paradoxes du JM rapportés dans cette thèse sont inspirés des exemples fournis dans la thèse de Manzoor Ahmed Zahid [168] qui propose le BMC comme une alternative au JM.

Nous avons montré tout au long de cette thèse que ni le JM, ni le BMC ne répond individuellement aux exigences d'une vraie démocratie.

Il convient de mettre en contribution les forces de chacune d'elles en éliminant autant que possible leurs faiblesses. La Méthode de Compromis Moyenne-Médiane (MCMM) répond à cette exigence. Les imperfections du JM et du BMC inhérentes à leurs différents mécanismes de *tie-break* y sont exclues. Le seul reproche à cette méthode est liée à son mécanisme particulier de *tie-break* obtenu par augmentation du degré de division.

Une extension de la MCMM a aussi été proposée pour la résolution des problèmes MCMD. Cette extension est dédiée à la problématique de rangement ( $P_\gamma$ ). Elle s'avère très robuste face aux manipulations stratégiques des agents qui attribuent des notes extrêmes aux alternatives ou critères qu'ils préfèrent les plus (resp. qu'ils préfèrent les moins).

## Contributions

Au delà de la méthode proposée, cette thèse apporte plusieurs contributions dans le domaine du Choix Social, notamment :

- L'introduction des notions de *pseudo-vainqueur de Condorcet* et de *fonction de transformation des préférences* au Chapitre 1 .
- La revue de la littérature donnée au Chapitre 2 sur la Théorie du Choix Social, son arborescence et la classification des résultats en précisant les références les plus saillantes.
- Les contributions à l'analyse du Jugement Majoritaire données au Chapitre 3. Ces contributions sont notamment la démonstration par un contre-exemple que le rangement par grade majoritaire n'est pas équivalent au rangement par jauge majoritaire, la robustesse du JM face aux manipulations stratégiques, l'analyse des résultats de l'expérience de Balinski et Laraki en 2007 et 2012 (cf. [16], [23], [21] et [24]).
- Les discussions relatives aux limites du Jugement Majoritaire présentées sous forme de résultats controversés (paradoxes) (cf. Chapitre 4).
- Les paradoxes du Borda Majority Count montrant qu'il est parfois

judicieux d'opérer un choix en se basant sur les résultats rendus par le JM (cf. Chapitre 5).

- La proposition de la méthode MCMM comme solution de compromis entre le choix basé sur la moyenne et celui basé sur la médiane (cf. Chapitre 6).
- L'énonciation et la démonstration des théorèmes 6.1 à 6.9 relatifs à la caractérisation de la MCMM (cf. Chapitre 6) ;
- l'introduction de la propriété de la *stratégie-résistance partielle par intervalle* dont jouit la MCMM, et par conséquent le JM.
- L'introduction de la notion de *minorité qualifiée* pour annihiler les effets néfastes de la tyrannie de la majorité (cf. Chapitre 6).
- L'utilisation de la MCMM pour la distribution des sièges au sein d'un parlement (cf. Chapitre 6).
- Les paradoxes sur la MCMM montrant ses limites et inconvénients ;
- L'extension de la MCMM pour la résolution des problèmes Multi-Critère Multi-Décideur (MCMD) (cf. Chapitre 7).

## Perspectives

Même si les apports de cette thèse sont apparemment abondants, il reste quand même nombre de problèmes non traités. Nous ne prétendons les énumérer tous au risque d'en omettre certains qui seraient aussi importants. Nous mentionnerons cependant quelques-uns que nous avons pu relever à notre niveau :

- Analyse de la robustesse de la MCMM à l'aide des simulateurs électroniques ;
- Expérimentation de la MCMM parallèlement au vote officiel en adoptant le même protocole que ce dernier (urnes, isolement, assesseurs, file et durée d'attente, témoin, etc.) ;

- Simulation des probabilités de chaque paradoxe étudié ;
- Autres résultats paradoxaux sur la MCMM ;
- Enonciation et démonstration d'un théorème de caractérisation de la MCMM ;
- Aspects computationnels sur la méthode MCMM ;
- Possibilité d'implémentation d'une application informatique pour le vote électronique *online* et/ou *offline* avec la MCMM.

Nous espérons voir les différents aspects théoriques de la méthode MCMM être développés dans d'autres recherches en vue de parfaire la méthode. Quoique perfectible, la méthode MCMM se montre déjà satisfaisante car elle permet de lever nombreux paradoxes sur le JM et le BMC.

En rédigeant cette thèse, nous avons toujours tenté de lier nos considérations parfois techniques à des réflexions de nature politique sur l'organisation de la vie du citoyen.

Nous avons essayé d'éclairer les choix techniques des modalités de la démocratie par les conceptions sous-jacentes qui les motivent. Nous avons lié autant que possible la théorie du choix social et la science politique même, en essayant de les éclairer l'une par l'autre.

Nous pensons que la politique, pensée par les théoriciens ou vécue par les élus, peut apprendre beaucoup de la théorie du choix social. Et si les citoyens se familiarisent avec les concepts de la théorie du choix social, le débat politique en sera profondément enrichi. Avec cet objectif, nous avons tenté de rédiger cette thèse de manière aussi compréhensible que possible. Nous espérons qu'elle profitera au plus grand nombre.

# Bibliographie

- [1] Paul R. Abramson, John H. Aldrich, André Blais, Matthew Diamond, Abraham Diskin, Indridi H. Indridason, Daniel Lee, and Renan Levine. Comparing strategic voting under FPTP and PR systems. *Comparative Political Studies*, 43(1) :61–90, 2010.
- [2] José Carlos R. Alcantud and Annick Laruelle. Disapproval voting : a characterization. *Social Choice and Welfare*, 43(1) :1–10, 2014.
- [3] Fuad Aleskerov, Denis Bouyssou, and Bernard Monjardet. *Utility Maximization, Choice and Preference*. Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
- [4] Douglas J. Amy. *Behind the ballot box. A citizen's guide for voting systems*. Praeger, Westport, Connecticut, 2000.
- [5] Kenneth J. Arrow. A difficulty in the concept of social welfare. *Journal of Political Economy*, 58(4) :328–346, August 1950.
- [6] Kenneth J. Arrow. *Social Choice and individual values*. Yale University Press, 1951.
- [7] Kenneth J. Arrow. Le principe de la rationalité dans les décisions collectives. *Economie appliquée*, 5 :469–484, 1952.
- [8] Kenneth J. Arrow. *Social Choice and individual values*. Yale University Press, 1963.
- [9] Kenneth J. Arrow. General Economic Equilibrium : Purpose, Analytic techniques, Collective choice. *Nobel Memorial Lecture*, December 12 1972.
- [10] Kenneth J. Arrow. Current developments in the theory of social choice. *Social research*, 44 :607–622, 1977.
- [11] Kenneth J. Arrow. *Collected Papers, Volume 1 : Social Choice and Justice*. Harvard University Press, Cambridge, 1983.
- [12] Kenneth J. Arrow, Amartya K. Sen, and Kotaro Suzumura. *Handbook of Social Choice and Welfare*, volume 1. Elsevier, 2002.

- 
- [13] Michel Balinski. Répartition des sièges. *Pour la Science*, 294 :52–57, 2002.
- [14] Michel Balinski. *Le suffrage universel inachevé*. Belin, Paris, 2004.
- [15] Michel Balinski and Rida Laraki. A theory of measuring, electing and ranking. Cahier n° 2006-11, CNRS, Paris, 2006.
- [16] Michel Balinski and Rida Laraki. Election by majority judgement : Experimental evidence. Cahier n° 2007-28, CNRS, 2007.
- [17] Michel Balinski and Rida Laraki. Le jugement majoritaire : Plan détaillée. Cahier n° 2007-06, CNRS, Avril 2007.
- [18] Michel Balinski and Rida Laraki. A theory of measuring, electing and ranking. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, pages 8720–8725, 2007.
- [19] Michel Balinski and Rida Laraki. Judge : Don't vote. Cahier n° 2010-27, CNRS, November 2010.
- [20] Michel Balinski and Rida Laraki. *Majority Judgment : measuring, ranking and electing*. MIT Press, 2010.
- [21] Michel Balinski and Rida Laraki. Election by majority judgment : experimental evidence. In B. Dolez, B. Grofman, and A. Laurent, editors, *In Situ and Laboratory experiments on electoral law reform*. Springer, Berlin, 2011.
- [22] Michel Balinski and Rida Laraki. How best to rank wines : Majority judgment. Cahier n° 2012-26, CNRS, June 2012.
- [23] Michel Balinski and Rida Laraki. Jugement majoritaire vs vote majoritaire (via les présidentielles 2011-2012). Cahier n° 2012-37, CNRS, 2012.
- [24] Michel Balinski and Rida Laraki. Rendre les élections aux électeurs. Technical report, Terra Nova, 2012.
- [25] Gilbert W. Basset and Joseph Persky. Robust voting. *Public Choice*, 99 :299–310, 1999.
- [26] Antoinette Baujard, Frédéric Gavrel, Herrade Igersheim, Jean-François Laslier, and Isabelle Lebon. Vote par approbation, vote par note : une expérimentation lors de l'élections présidentielle du 22 Avril 2012. *Revue économique*, 64(2) :345–356, 2013.
- [27] Antoinette Baujard, Frédéric Gavrel, Herrade Igersheim, Jean-François Laslier, and Isabelle Lebon. Who's favored by evaluative

- voting? an experiment conducted during the 2012 french presidential election. Cahier n° 2013-05, CNRS, 2013.
- [28] Antoinette Baujard and Herrade Igersheim. Expérimentation du vote par note et du vote par approbation lors de l'élection présidentielle française du 22 avril 2007. Technical report, Centre d'analyse stratégique, 2007.
- [29] Antoinette Baujard and Herrade Igersheim. Expérimentation du vote par note et du vote par approbation le 22 avril 2007. Premiers résultats. *Revue économique*, 60(1) :189–201, 2009.
- [30] Antoinette Baujard and Herrade Igersheim. Frame-field experiments on approval voting in the political context. In Jean-François Laslier and Remzi Sanver, editors, *Handbook on approval voting*. Springer, Heilderberg, 2010.
- [31] Antoinette Baujard and Herrade Igersheim. Frame-Field Experiment on Approval Voting and Evaluation Voting. Some Teachings to Reform the French Presidential Electoral System. In B. Dolez, B. Grofman, and A. Laurent, editors, *In Situ and Laboratory experiments on electoral law reform*, pages 69–90. Springer, Berlin, 2011.
- [32] Dorothea Maria Baumeister. *Computational Complexity in three areas of Computational Social Choice : Possible winners, unidirectional covering sets, and Judgment Aggregation*. PhD thesis, Universität Düsseldorf, July 2012.
- [33] Carl Bialik. And the oscar goes to... not its voting system. *The Wall Street Journal*, February 6, 2009.
- [34] Duncan Black. *The theory of committees and elections*. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [35] André Blais, Simon Labbé-Saint-Vincent, Jean-François Laslier, Nicolas Sauger, and Karine Van der Straeten. One-round vs two-round elections : An experimental Study. *French Politics*, 5 :278–286, 2007.
- [36] André Blais, Simon Labbé-Saint-Vincent, Jean-François Laslier, Nicolas Sauger, and Karine Van der Straeten. Strategic vote choice in one round and two round elections. *Political Research Quaterly*, 20 :1–9, 2010.
- [37] André Blais, Simon Labbé-Saint-Vincent, Jean-François Laslier, Nicolas Sauger, and Karine Van der Straeten. Strategic vote choice

- in one round and two round elections. *Political Research Quarterly*, 4(3) :637–645, 2011.
- [38] Patrick Blanchenay. Paradoxes de vote et modes de scrutin en France. Master's thesis, École des Hautes Études Commerciales Majeure Économie, 2004.
- [39] Le Chevallier de Borda. *Mémoire sur les élections au scrutin*. Histoire de l'Académie royale des sciences, 1784.
- [40] Sylvain Bouveret. *Allocation et partage équitables des ressources indivisibles : modélisation, complexité et algorithmique*. PhD thesis, Université de Toulouse, France, 2007.
- [41] Denis Bouyssou, Thierry Marchant, and Patrice Perny. Théorie du choix social et aide multicritère à la décision. Draft, Octobre 2005.
- [42] Denis Bouyssou, Thierry Marchant, Marc Pirlot, Patrice Perny, Alexis Tsoukiàs, and Philippe Vincke. *Evaluation and decision models : a critical perspective*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [43] Denis Bouyssou and Philippe Vincke. *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision*, volume 1, chapter 2 : Relations binaires et modélisation des préférences. Lavoisier, 2006.
- [44] Steven J. Brams. *Paradoxes in Politics*. The Free Press, New-York, 1976.
- [45] Steven J. Brams. The AMS nominating system is vulnerable to truncation of preferences. *Notices of the American Mathematical Society*, 29 :136–138, 1982.
- [46] Steven J. Brams and Peter C. Fishburn. *Approval Voting*. Birkäuser, Cambridge, 1983.
- [47] Steven J. Brams and Peter C. Fishburn. Going from theory to practice : The mixed success of approval voting. Document de travail, New York University, 2002.
- [48] Steven J. Brams and Peter C. Fishburn. Going from theory to practice : the mixed success of Approval Voting. Annual meeting of American Political Science Association, August 2003.
- [49] Steven J. Brams and Peter C. Fishburn. *Approval voting*. Springer Science, 2nd edition, 2007.
- [50] Steven J. Brams and Remzi Sanver. Voter sovereignty and election outcomes. C.V. Starr Center for Applied Economics, New York University, 2003.

- 
- [51] Markus Brill. *Set-Valued Solution Concepts in Social Choice and Game Theory. Axiomatic and Computational Aspects*. PhD thesis, Technische Universität München, 5 July 2012.
- [52] James M. Buchanan. Individual choice in voting and the market. *Journal of Political Economy*, 62 :334–343, 1954.
- [53] Lewis Carroll (Charles Dodgson). *Through the looking glass*. Macmillan, 1871.
- [54] Lewis Carroll (Charles Dodgson). *Alice’s adventures in wonderland*. New York : Sam’l Gabriel Sons, 1916. Originally published London : Macmillan, 1865.
- [55] Yann Chevaleyre, Jérôme Lang, Nicolas Maudet, Jérôme Monnot, and Lirong Xia. New candidates welcome ! Possible winners with respect to the addition of new candidates. *Mathematical Social Sciences*, 64 :74–88, 2012.
- [56] Le Marquis Jean-Marie de Condorcet. *Essai sur l’application de l’analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Imprimerie Royale, 1785.
- [57] Clyde H. Coombs. *Theory of data*. Wiley, New-York, 1964.
- [58] Arthur H. Copeland. A “reasonable” social welfare function. *Seminar on Applications of Mathematics to the Social Sciences*. University of Michigan, 1951.
- [59] Thomas Cormen, Charles Leiserson, Ronald Rivest, and Clifford Stein. *Introduction à l’algorithmique*. Dunod, Paris, 1994.
- [60] Partha Dasgupta and Eric Maskin. The fairest vote of all. *Scientific American*, 290 :92–97, mars 2004.
- [61] Partha Dasgupta and Eric Maskin. On the robustness of majority rule. *Journal of the European Economics Association*, pages 6949–6973, 2008.
- [62] Larry Diamond and Marc F. Plattner, editors. *Electoral Systems and Democracy*. The John Hopkins University Press, Baltimore, 2006.
- [63] Helen Dummet. *Voting procedures*. Oxford University Press, Oxford, 1984.
- [64] Sylvain Durand. *Sur quelques paradoxes en Théorie du Choix Social et en décision multicritère*. PhD thesis, Université Joseph Fourier-Grenoble 1, 2000.

- 
- [65] Jean-Louis Esambo Kangashe. *Le droit électoral congolais*. Academia-L'Harmattan, Louvain-la-Neuve, 2014.
- [66] Edurne Falco and José Luis Garcia-Lapresta. A distance-based extension of the majority judgement voting system. In *Acta Universitatis Belii*, Mathematics 18, pages 17–27, 2011.
- [67] Robin Farquharson. *Theory of Voting*. Yale University Press, New Haven, CT, 1969.
- [68] David M. Farrell and Ian McAllister. *The australian electoral system : origins, variations, and consequences*. University of New South Wales Press, Sydney, 2006.
- [69] Etienne Farvaque, Hubert Jayet, and Lionel Ragot. Quel mode de scrutin pour quel “vainqueur” ? une expérience sur le vote préférentiel transférable. *Revue d'économie politique*, 119(2) :221–246, 2009.
- [70] Etienne Farvaque, Hubert Jayet, and Lionel Ragot. French Presidential Elections : A Field Experiment on the Single Transferable Vote. In B. Dolez, B. Grofman, and A. Laurent, editors, *In Situ and Laboratory experiments on electoral law reform*, pages 55–68. Springer, Berlin, 2011.
- [71] Dan S. Felsenthal. Review of paradoxes afflicting various voting procedures where one out of  $m$  candidates ( $m \geq 2$ ) must be elected. To be presented at the Leverhulme Trust sponsored 2010 Voting Power in Practice workshop held at Chateau du Baffy, Normandy, France, 30 July – 2 August, 2010, May 2010.
- [72] Dan S. Felsenthal. *Electoral Systems. Paradoxes, Assumptions, and Procedures*, chapter 3 : Review of Paradoxes Afflicting Procedures for Electing a Single Candidate. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [73] Dan S. Felsenthal and Moshé Machover. The majority judgment procedure : a critical evaluation. *Homo Oeconomicus*, 25 :319–334, 2008.
- [74] Frederico Ferrara, Erik S. Herron, and Misa Nishikawa. *Mixed Electoral Systems Combination and its Consequences*. Delgrave MacMillan, New-York, 2005.
- [75] Peter C. Fishburn. Paradoxes of voting. *American Political Science Review*, 68 :537–546, 1974.

- 
- [76] Peter C. Fishburn. Condorcet social choice functions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 33 :469–489, 1977.
- [77] Peter C. Fishburn and Steven J. Brams. Paradoxes of preferential voting. *Mathematics Magazine*, 56 :207–214, 1983.
- [78] Marc Fleurbaey. Choix social : une difficulté et des multiples possibilités. *Revue économique*, 51(5) :1215–1232, Septembre 2000.
- [79] Marc Fleurbaey and François Maniquet. *A Theory of Fairness and Social Welfare*. Cambridge University Press, New-York, 2011.
- [80] Marc Fleurbaey and Philippe Mongin. The news of death of welfare economics is greatly exaggerated. *Social Choice and welfare*, Springer, 25 :381–418, 2005.
- [81] William V. Gehrlein. Condorcet’s paradox. *Theory and Decision*, 15 :161–197, 1983.
- [82] William V. Gehrlein. *Condorcet’s Paradox*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [83] William V. Gehrlein and Peter C. Fishburn. Proportions of profiles with a majority candidate. *Computers and Mathematics with Applications*, 5 :117–124, 1979.
- [84] William V. Gehrlein and Dominique Lepelley. On some limitations of the median voting rule. *Public Choice*, 117 :177–190, 2003.
- [85] Benny Geys. ‘Rational’ Theories of Voter Turnout : A Review. *Political Studies Review*, 4 :16–35, 2006.
- [86] Allan Gibbard. Manipulation of voting schemes : a general result. *Econometrica*, 41 :587–601, 1973.
- [87] Allan Gibbard. A pareto-consistent libertarian claim. *Journal of Economic Theory*, 7 :338–410, 1974.
- [88] Rasmi Ginting. *Intégration du système d’aide multicritère et du système d’intelligence économique dans l’ère concurrentielle*. PhD thesis, Université de Droit et des Sciences d’Aix-Marseille, Janvier 2000.
- [89] Rasmi Ginting and Henri Dou. L’approche multidécideur multicritère d’aide à la décision. Technical Report, Institut de Technologie d’Indonésie, 2000.
- [90] Georges Th. Guilbaud. Les théories de l’intérêt général et le problème logique de l’agrégation. *Economie appliquée*, 5 :501–551, 1952.

- 
- [91] Bhupesh Gupta, Sandip Kumar Goyal, and Ashish Oberon. A review on query clustering algorithms for search engine optimization. *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*, 2(2), February 2012.
- [92] Noam Hazon. *Social Interactions under Uncertainty in Multi Agent Systems*. PhD thesis, Bar-Ilan University, October 2010.
- [93] D. Sunshine Hillygus and Sarah A. Treul. Assessing strategic voting in the U.S. presidential primaries : the role of electoral context, institutional rules, and negative votes. *Public Choice*, 161(3-4) :517–536, December 2014.
- [94] Nicolas Jean. *Environnement politique et élections : Une étude des déterminants du vote appliquée aux élections municipales françaises*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2012.
- [95] Jerry S. Kelly. Necessity Conditions in Voting Theory. *Journal of Economic Theory*, 8(2) :149–160, June 1974.
- [96] Jerry S. Kelly. Voting Anomalies, the Number of Voters and the Number of Alternatives. *Economica*, 42(2) :239–251, March 1974.
- [97] Jerry S. Kelly. *Arrow Impossibility Theorems*. Academic Press, New-York, 1978.
- [98] Jerry S. Kelly. Social Choice and Computational Complexity. *Journal of Mathematical Economics*, 17(1) :1–8, 1988.
- [99] Jerry S. Kelly. *Social Choice Theory : An introduction*. Springer-Verlag, 1988.
- [100] Simon Labbé St-Vincent. *Élections expérimentales : La désertion stratégique et la participation sous différents modes de scrutin*. PhD thesis, Université de Montréal, Canada, 2011.
- [101] Annick Laruelle and Frederico Valenciano. *Voting and Collective Decision-Making. Bargaining and Power*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [102] Jean-François Laslier. Tournament solutions and majority voting. In *Series studies in Economic Theory*, volume 7. Springer, Heilderberg edition, 1997.
- [103] Jean-François Laslier. Strategic approval voting in a large electorate. Cahier n° 2004-001, CNRS, 2004.
- [104] Jean-François Laslier. *In silico* voting experiments. Cahier n° 2009-18, CNRS, May 2009.

- 
- [105] Jean-François Laslier. A note on choosing the alternative with the best median evaluation. Cahier n° 2010-17, CNRS, 2010.
- [106] Jean-François Laslier. *In Situ and Laboratory Experiments on Electoral Law Reform*, chapter 5 : Lessons from In Situ Experiments during French Elections. Studies in Public Choice. Springer, 2011.
- [107] Jean-François Laslier. *Electoral systems*, chapter 13 : And the loser is... Plurality Voting. Springer-Verlag, Berlin Heilderberg, 2012.
- [108] Jean-François Laslier. On choosing the alternative with the best median evaluation. *Public Choice*, 153(3) :269–277, 2012.
- [109] Jean-François Laslier and Remzi M. Sanver (Eds). *Handbook on approval voting*. Springer, Heilderberg, 2010.
- [110] Jean-François Laslier and Karine Van der Straeten. Une expérience de vote par assentiment. *Revue Française de Science Politique*, 54(1) :99–130, 2004.
- [111] Jean-François Laslier and Karine Van der Straeten. Approval voting in the french 2002 presidential election : A live experiment. *Experimental economics*, 11(1) :97–105, 2008.
- [112] Benoît Lengaigne and Nicolas Postel. Arrow et l'impossibilité : une démonstration par l'absurde. *Revue du MAUSS*, 2(24) :388–410, 2004.
- [113] Dominique Lepelley and Vincent Merlin. Choix social positionnel et principe majoritaire. *Annales d'Economie et de Statistique*, (51) :29–48, 1998.
- [114] Jean-Luc Marichal. *Fonctions d'agrégation pour la décision*. Brigham Young University, 2003.
- [115] Pierre Martin. *Les systèmes électoraux et les modes de scrutin*. Clefs Politique. Montchrestien, 2<sup>me</sup> édition, 1997.
- [116] Eric Maskin and Amartya K. Sen. *The Arrow impossibility theorem*. Columbia University Press, New-York, 2014.
- [117] Kenneth O. May. A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions. *Econometrica*, 20 :680–684, 1952.
- [118] Vincent Merlin. The axiomatic characterizations of majority voting and scoring rules. *Math. & Sci. Hum. / Mathematical Social Sciences*, (161) :87–109, 2003. 41<sup>me</sup> année.

- [119] Vincent Merlin and Donald G. Saari. The Copeland method II : Manipulation, monotonicity and paradoxes. *Journal of Economic Theory*, 72 :148–172, 1997.
- [120] Vincent Merlin and F. Valognes. The impact of indifferent voters on the likelihood of some voting paradoxes. *Mathematical Social Sciences*, 48 :343–361, 2004.
- [121] David van Mill. *Deliberation, Social Choice and Absolutist Democracy*. Routledge innovations in Political Theory, London and New-York, 2006.
- [122] George A. Miller. Magical number seven plus or minus two : Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 63 :81–87, 1956.
- [123] Hervé Moulin. *La stratégie du vote. Monographies du séminaire d'économétrie*. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1980. ISBN 2-222-02561-3.
- [124] Hervé Moulin. *Axioms of cooperative decision making*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [125] Hervé Moulin. Condorcet's principle implies the no-show paradox. *Journal of Economic Theory*, 53–64 :53–64, 1988.
- [126] Edward J. Nanson. Methods of elections. *Transactions and Proceedings of the Royal Society of Victoria*, 19 :197–240, 1883.
- [127] Ruffin-Benoît M. Ngoie and Berthold E.-L. Ulungu. Choix social et préférence collective : analyse a posteriori de l'élection présidentielle de 2011 en République Démocratique du Congo. Paper n° 64538, MPRA, 28 November 2013. <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/64538/>.
- [128] Ruffin-Benoît M. Ngoie. Choix social et partage équitable : une analyse mathématique a posteriori des élections présidentielles et législatives de 2006 et 2011 en RDC. Master's thesis, Université Pédagogique Nationale, Kinshasa, 2012. <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/64915/>.
- [129] Ruffin-Benoît M. Ngoie and Ruffin B. Mbaka. Mathématique et Démocratie : une contribution de la théorie du choix social à la pratique de la démocratie en RDC. *CRIDUPN*, 060c :237–249, Juillet-Septembre 2014. <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/64591/>.

- 
- [130] Ruffin-Benoît M. Ngoie, Zoinabo Savadogo, and Berthold E.-L. Ulungu. Median and average as tools for measuring, electing and ranking : new prospects. *Fundamental Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1(1) :9–30, 2014. <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/64731/>.
- [131] Ruffin-Benoît M. Ngoie, Zoinabo Savadogo, and Berthold E.-L. Ulungu. New prospects in Social Choice Theory : Median and average as tools for measuring, electing and ranking. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 25(1) :19–38, 2015. <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/64155/>.
- [132] Ruffin-Benoît M. Ngoie and Berthold E.-L. Ulungu. Mean-Median Compromise Method as an innovating voting rule in Social Choice Theory. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 4(1) :177–182, 2015. DOI : 10.14419/ijamr.v4i1.4139. <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/62938/>.
- [133] Ruffin-Benoît M. Ngoie and Berthold E.-L. Ulungu. On Analysis and Characterization of the Mean-Median Compromise Method. *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research*, 3(3) :56–64, 2015. <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/64154/>.
- [134] Shmuel Nitzan and A Rubinstein. A further characterization of Borda ranking method. *Public Choice*, 36(1) :153–158, 1981.
- [135] Hannu Nurmi. *Voting Paradoxes and How to Deal with Them*. Heidelberg, New-York, springer verlag edition, 1999.
- [136] Francesco Parisi. Public choice theory from the perspective of law. In Charles K. Rowler and Friedrich Schneider, editors, *The Encyclopedia of Public Choice*, volume I, pages 214–235. Kluwer Academic Publishers, New-York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2004.
- [137] Bezalel Peleg. *Game theoretic analysis of voting in committees*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [138] Bernard Roy. *Méthodologie Multicritère d'aide à la décision*. Economica, Paris, 1985.
- [139] Donald G. Saari. Mathematical structure of voting paradoxes. *Economic Theory*, 15 :1–53, 55–102, 2000.
- [140] Donald G. Saari and Vincent Merlin. A geometric examination of the Kemeny's rule. *Social Choice and Welfare*, 17 :403–438, 2000.

- [141] Mark A. Satterthwaite. Strategy-proofness and arrow's conditions : existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, 10 :187–217, 1975.
- [142] Zoinabo Savadogo, Ruffin-Benoît M. Ngoie, Berthold E.-L. Ulungu, and Blaise Somé. An aggregation function to solve multicriteria ranking problem involving several decision makers. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 3(4) :511 – 517, 2014. DOI : 10.14419/ijamr.v3i4.3600. <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/64730/>.
- [143] Ozer Selçuk. *Structural restrictions in cooperation*. PhD thesis, Tilburg University, 2014.
- [144] Amartya K. Sen. *Collective choice and social welfare*. Holden-Day, London, 1970.
- [145] Amartya K. Sen. The impossibility of a paretian liberal. *Journal of Political Economy*, 78 :152–157, 1970.
- [146] Amartya K. Sen. Liberty and social choice. *Journal of Philosophy*, 80 :5–28, 1983.
- [147] Amartya K. Sen. *Social Choice Theory*. HandBook of Mathematical Economics, North-Holland, 1986.
- [148] Amartya K. Sen. Minimal liberty. *Economica*, 59 :139–159, 1992.
- [149] Amartya K. Sen. Well-being, capability and public policy. *Gionale degli Economisti e annali di Economia*, 53(7-9) :333 – 347, Septembre 1994.
- [150] Amartya K. Sen. La possibilité du choix social. *American Economics Review*, 89 :7–62, 1999. Conférence Nobel.
- [151] Amartya K. Sen. From Social Choice to Development, The Influence of Nicolas de Condorcet and Jean-Charles de Borda. *Revue Tiers Monde*, 2(198) :263–267, 2009. DOI :10.3917/rtm.198.0263.
- [152] Marija Slavkovikj. *Judgment aggregation for multiagent systems*. PhD thesis, Université de Luxembourg, Janvier 2012.
- [153] John H. Smith. Aggregation of preferences with variable electorate. *Econometrica*, 41 :1027–1041, 1973.
- [154] Warren D. Smith. Tilburg lecture on range voting. <http://www.rangevoting.org/TBlecture.html>, 2008.

- 
- [155] Warren D. Smith. Range voting. <http://rangevoting.org/RangeVoting.html>, 2012.
- [156] Allan Taylor. *Social Choice and the Mathematics of Manipulation*. Cambridge University Press, New York, 2005.
- [157] Jacques Teghem. *Recherche Opérationnelle*, volume 1 : Méthodes d'optimisation. Ellipses, Bruxelles, 2012.
- [158] Jacques Teghem. *Recherche Opérationnelle*, volume 2 : Gestion de production, Modèles aléatoires, Aide multicritère. Ellipses, Bruxelles, 2012.
- [159] Julie Tisserond. *Three essays on Microeconomics : bounded rationality, choice procedures and costumer loyalty*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, France, December 2012.
- [160] Gordon Tullock, Arthur Seldon, and Gordon L. Brady. *Government Failure*. CATO Institute, Washington, D.C., 2002.
- [161] Philippe Vincke. *L'Aide multi-critère à la décision*. Ellipses, Bruxelles, 1989.
- [162] Robert Weber. *Comparison of public choice systems*. Cowles Foundation Discussion paper 498. Yale University, 1977.
- [163] Lirong Xia. *Computational Voting Theory : Game-Theoretic and Combinatorial Aspects*. PhD thesis, Duke University, 2011.
- [164] H. Peyton Young. An axiomatization of Borda's rule. *Journal of Economic Theory*, 9 :43–52., 1974.
- [165] H. Peyton Young. Social choice scoring functions. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 28 :824–838, 1975.
- [166] H. Peyton Young and A. Levenglick. A consistent extension of Condorcet's election principle. *SIAM Journal on applied Mathematics*, 35 :285–300, 1978.
- [167] Manzoor Ahmed Zahid. Majority judgment and paradoxical results. *International Journal of Arts and Sciences*, 4(20) :121–131, 2009.
- [168] Manzoor Ahmed Zahid. *A new framework for elections*. PhD thesis, Tilburg University, 2012.

# Index

- Agrégation, 14
- Anonymat, 97
- Arrow, 4, 14, 52
- Black, 19
- Borda, 3, 9, 14, 19, 39, 45, 61
- Borda Majority Count (BMC), 6, 7, 75, 77, 78, 81, 82, 100, 114, 146, 147
- Candidat, 54, 76, 77
- Choix Social, 5, 52
- Choix Social Computationnel, 47
- Choix-compatible, 52
- Clone, 80
- Clone-sûr, 113
- Compte de Borda, 76
- Condorcet, 4, 9, 14, 21, 25, 45, 52, 61
- Condorcet-cohérence, 65
- Condorcet-consistance, 65, 86
- Conorme, 13
- Consensus, 56
- Coombs, 19
- Copeland, 18
- Critère de Condorcet, 41
- Décision, 3
- Dictateur, 22
- Electeur, 14, 28, 76
- Election, 3, 15, 26
- Electorat, 61
- Expressivité, 113
- Favori-sûr, 113
- Fishburn, 20
- Fonction d'agrégation, 55, 56, 110
- Fonction de Transformation des Préférences (FTP), 15, 149
- Grade majoritaire, 56
- Grade majoritaire modifié, 57
- Indépendance des Alternatives Non Pertinentes, 52, 74, 79, 96
- Independence of Irrelevant Alternatives, 52, 79
- Independence of Irrelevant Alternatives in Grading, 79
- Inséparabilité, 83
- Jauge majoritaire, 57–59
- Jugement Majoritaire (JM), 6–8, 51, 53, 58, 60, 69, 70, 76–78, 81, 82, 100, 146, 147
- Kemeny, 19
- Langage commun, 54
- Leximin, 20
- Médiane, 56
- Méthode de rangement, 54
- Méthode du Compromis Moyenne-Médiane (MCMM), 7, 8, 114, 120, 146, 147
- Majorité, 17, 69
- Manipulabilité, 23, 27
- Marché, 37
- Mode de scrutin, 5
- Monoïde, 13

- 
- Monotonie, 17, 26, 113
  - Nanson, 19
  - Neutralité, 96
  - Ordinalité, 61
  - Paradoxes, 7, 28
  - Pareto, 17, 52
  - Pareto-Consistance, 97
  - Perdant unanime, 52
  - Pluralité, 52, 114
  - Préférence, 12, 14
  - Préférence exhaustive, 15
  - Prise de décision, 118
  - Problème MCMD, 119
  - Pseudo-vainqueur de Condorcet, 15
  - Public Choice, 35
  - Règle de rangement, 52
  - Règle majoritaire, 114
  - Range Voting, 76, 100
  - Rangement, 53, 58
  - Rangement majoritaire, 61
  - Rangement majoritaire de Borda, 78
  - Rangement par jauge majoritaire, 58
  - Relation binaire, 10
  - Relation d'ordre, 11, 128
  - Séparabilité, 83
  - Scorage, 20
  - Simpson, 19
  - Stratégie-résistance, 56
  - Système de vote, 26
  - Théorème Général de Possibilité, 4
  - Théorie du Choix Social, 3, 9, 51
  - Tie-break, 57
  - Top cycle, 20
  - Unanimité, 97
  - Uncovered set, 20
  - Untrapped set, 20
  - Vainqueur de Condorcet, 41, 64
  - Vainqueur majoritaire de Borda, 77
  - Vainqueur unanime, 52
  - Votant, 52
  - Vote, 35
  - Vote à la pluralité, 114
  - Vote alternatif, 18, 114
  - Vote majoritaire, 114
  - Vote par assentiment/approbation, 6, 18, 114, 146
  - Vote par note, 42
  - Vote par rangement, 53, 76, 77
  - Vote Préférentiel Transférable, 61, 114
  - Welfarisme, 13, 14