



**HAL**  
open science

# Contraintes sur les violations à la symétrie de Lorentz par analyse des données de télémétrie laser Lune

Adrien Bourgoïn

► **To cite this version:**

Adrien Bourgoïn. Contraintes sur les violations à la symétrie de Lorentz par analyse des données de télémétrie laser Lune. Astrophysique [astro-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066481 . tel-01543511

**HAL Id: tel-01543511**

**<https://theses.hal.science/tel-01543511v1>**

Submitted on 21 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Île-de-France

THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Disciplines : astronomie et astrophysique

présentée par

Adrien BOURGOIN

---

CONTRAINTES SUR LES VIOLATIONS À LA SYMÉTRIE  
DE LORENTZ PAR ANALYSE DES DONNÉES DE  
TÉLÉMÉTRIE LASER LUNE

---

dirigée par

Marie-Christine ANGONIN  
et  
Christophe LE PONCIN-LAFITTE

Soutenue publiquement le 19 décembre 2016 devant un jury composé de :

<i>Président</i>	Bruno SICARDY	-	Université Pierre et Marie Curie
<i>Rapporteurs</i>	Eric GOURGOULHON	-	LUTH, Observatoire de Paris
	Anne LEMAITRE	-	NAXYS, Université de Namur
<i>Examineurs</i>	Luc BLANCHET	-	Institut d'Astrophysique de Paris
	Véronique DEHANT	-	Observatoire Royal de Belgique
	Daniel HESTROFFER	-	IMCCE, Observatoire de Paris
	Gilles MÉTRIS	-	Observatoire de la Côte d'Azur
<i>Encadrants</i>	Marie-Christine ANGONIN	-	Université Pierre et Marie Curie
	Christophe LE PONCIN-LAFITTE	-	SYRTE, Observatoire de Paris

SYRTE  
Observatoire de Paris  
61, avenue de l'Observatoire  
75 014 Paris  
France

UPMC  
4 place Jussieu  
75005 Paris  
France

\*\*\*

\*\*\*



# Remerciements



# CONTRAINTES SUR LES VIOLATIONS À LA SYMÉTRIE DE LORENTZ PAR ANALYSE DES DONNÉES DE TÉLÉMÉTRIE LASER LUNE

## Résumé

La *relativité générale* (RG) et le modèle standard des particules permettent de comprendre les quatre interactions fondamentales de la nature. La formulation d'une théorie quantique de la gravitation permettrait d'unifier ces deux tenants de la physique moderne. D'après les grandes théories d'unification, une telle union est possible moyennant la brisure de certaines symétries fondamentales apparaissant à la fois en RG et dans le modèle standard telle la *symétrie de Lorentz*. Les violations de la symétrie de Lorentz peuvent être paramétrées dans tous les domaines de la Physique par une théorie effective du champ appelée *extension du modèle standard* (SME). Une violation au principe d'invariance locale de Lorentz dans le secteur gravitationnel serait supposée engendrer des perturbations dans la dynamique orbitale des corps présents dans le système solaire, notamment la Lune. Ainsi, à partir des données extrêmement précises de télémétrie laser, l'orbite lunaire peut être minutieusement analysée afin de débusquer d'éventuelles anomalies dans son mouvement.

Dans cette optique, ELPN (*Éphéméride Lunaire Parisienne Numérique*), une nouvelle éphéméride lunaire intégrée dans le cadre du formalisme SME a été développée durant la thèse. ELPN fournit les solutions au problème lunaire sous la forme de séries temporelles datées en *temps dynamique barycentrique* (TDB). Parmi les solutions numériquement intégrées, mentionnons la position et la vitesse du vecteur barycentrique Terre-Lune, les angles de librations lunaires, la différence entre le temps terrestre et le TDB, ainsi que l'ensemble des dérivées partielles intégrées depuis l'équation aux variations. Les prédictions de l'éphéméride ont été utilisées afin de réduire les observations *lunar laser ranging* (LLR). Dans le cadre de la RG, la dispersion des résidus s'est avérée en accord avec les dispersions calculées à partir des éphémérides INPOP13b et DE430. Dans le cadre du SME minimal, l'analyse des données LLR a permis de contraindre toutes violations au principe d'invariance locale de Lorentz. Une grande attention a été portée à l'analyse des incertitudes afin de fournir des contraintes réalistes. Ainsi, dans un premier temps, les combinaisons linéaires de coefficients SME ont été isolées puis ajustées aux observations. Puis, dans un second temps, les incertitudes réalistes ont été déterminées par une méthode de ré-échantillonnage.

L'analyse des données de télémétrie laser Lune n'a pas permis de révéler de violations au principe d'invariance locale de Lorentz agissant au niveau de l'orbite lunaire. Les prédictions de la RG ont été validées avec des précisions absolues allant de  $10^{-9}$  à  $10^{-12}$ .

## Mots-clefs

relativité générale, symétrie de Lorentz, théories alternatives, tests de gravitation, éphéméride lunaire, analyse de données.



# CONSTRAINTS ON LORENTZ SYMMETRY VIOLATIONS USING LUNAR LASER RANGING OBSERVATIONS

## Abstract

*General Relativity* (GR) and the standard model of particle physics provide a comprehensive description of the four interactions of nature. A quantum gravity theory is expected to merge these two pillars of modern physics. From unification theories, such a combination would lead to a breaking of fundamental symmetry appearing in both GR and the standard model of particle physics as the *Lorentz symmetry*. Lorentz symmetry violations in all fields of physics can be parametrized by an effective field theory framework called the *standard-model extension* (SME). Local Lorentz Invariance violations in the gravitational sector should impact the orbital motion of bodies inside the solar system, such as the Moon. Thus, the accurate *lunar laser ranging* (LLR) data can be analyzed in order to study precisely the lunar motion to look for irregularities.

For this purpose, ELPN (*Éphéméride Lunaire Parisienne Numérique*), a new lunar ephemeris has been integrated in the SME framework. This new numerical solution of the lunar motion provides time series dated in *temps dynamique barycentrique* (TDB). Among that series, we mention the barycentric position and velocity of the Earth-Moon vector, the lunar libration angles, the time scale difference between the terrestrial time and TDB and partial derivatives integrated from variational equations. ELPN predictions have been used to analyze LLR observations. In the GR framework, the residuals standard deviations has turned out to be the same order of magnitude compare to those of INPOP13b and DE430 ephemerides. In the framework of the minimal SME, LLR data analysis provided constraints on local Lorentz invariance violations. Special attention was paid to analyze uncertainties to provide the most realistic constraints. Therefore, in a first place, linear combinations of SME coefficients have been derived and fitted to LLR observations. In a second time, realistic uncertainties have been determined with a resampling method.

LLR data analysis did not reveal local Lorentz invariance violations arising on the lunar orbit. Therefore, GR predictions are recovered with absolute precisions of the order of  $10^{-9}$  to  $10^{-12}$ .

## Keywords

general relativity, Lorentz symmetry, alternative theories, tests of gravitation theories, lunar ephemeris, data analysis.

---



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Les succès de la relativité générale . . . . .	1
1.1.1	Les <i>trois tests classiques</i> . . . . .	1
1.1.2	La relativité générale confirmée par l'expérience . . . . .	2
1.2	Vers une nouvelle théorie de la gravitation . . . . .	3
1.2.1	Considérations théoriques et observationnelles . . . . .	3
1.2.2	Principes fondamentaux de la relativité générale . . . . .	4
1.2.3	Théories alternatives de la gravitation . . . . .	8
1.3	Le lunar laser ranging . . . . .	12
1.3.1	Historique et principe de fonctionnement . . . . .	12
1.3.2	La physique fondamentale avec le LLR . . . . .	14
1.4	Travail réalisé dans le cadre de la thèse . . . . .	16
1.4.1	Analyse détaillée de Battat <i>et al.</i> (2007) . . . . .	17
1.4.2	Discussion de la méthodologie . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Modèle dynamique</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	Interactions newtoniennes . . . . .	24
2.2.1	Équations du mouvement . . . . .	24
2.2.2	Complément pour l'étude perturbative . . . . .	25
2.2.3	Dérivées partielles . . . . .	26
2.3	Corrections relativistes . . . . .	26
2.3.1	Choix du repère . . . . .	26
2.3.2	Positions barycentriques . . . . .	27
2.3.3	Équations du mouvement . . . . .	29
2.3.4	Dérivées partielles . . . . .	30
2.3.5	Transformation d'échelles de temps . . . . .	30
2.4	Potentiels non-sphériques . . . . .	32
2.4.1	Équations du mouvement . . . . .	32
2.4.2	Étude perturbative . . . . .	35
2.4.3	Dérivées partielles . . . . .	36
2.5	Effets de marées et de spin . . . . .	37
2.5.1	Effets dissipatifs . . . . .	37
2.5.2	Détermination des quantités retardées . . . . .	38
2.5.3	Variation des coefficients de Stokes . . . . .	39
2.5.4	Étude perturbative . . . . .	42
2.5.5	Dérivées partielles . . . . .	42
2.6	Rotation des corps étendus . . . . .	44
2.6.1	Orientation du Soleil . . . . .	44

2.6.2	Orientation de la Terre . . . . .	45
2.6.3	Orientation de la Lune . . . . .	46
2.6.4	Dérivées partielles . . . . .	52
2.7	Résumé . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Solution numérique en relativité générale</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Intégration du modèle dynamique . . . . .	58
3.2.1	Adimensionnement des équations . . . . .	58
3.2.2	Intégrateur numérique . . . . .	60
3.2.3	Dérive du barycentre du système solaire . . . . .	63
3.2.4	Procédure d'intégration des équations du mouvement . . . . .	64
3.2.5	Comparaison à d'autres éphémérides . . . . .	65
3.3	Analyse des données LLR . . . . .	75
3.3.1	Réduction des données LLR . . . . .	75
3.3.2	Ajustements par moindres carrés pondérés . . . . .	79
3.3.3	Dérivées partielles . . . . .	83
3.4	Discussion des résultats . . . . .	87
3.4.1	Résidus de l'analyse des données LLR . . . . .	87
3.4.2	Comparaison à d'autres éphémérides . . . . .	89
3.4.3	Résidus à partir d'une solution ajustée . . . . .	98
3.5	Résumé . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Solution numérique dans le cadre du formalisme SME</b>	<b>101</b>
4.1	Introduction . . . . .	101
4.2	Modélisation du SME minimal . . . . .	102
4.2.1	Présentation générale . . . . .	102
4.2.2	Partie orbitale . . . . .	103
4.2.3	Déflexion lumineuse . . . . .	104
4.3	Modélisation du couplage gravité-matière . . . . .	106
4.3.1	Présentation générale . . . . .	106
4.3.2	Partie orbitale . . . . .	107
4.3.3	Déflexion lumineuse . . . . .	108
4.4	Détermination d'erreurs réalistes . . . . .	109
4.4.1	Corrélations entre coefficients SME . . . . .	110
4.4.2	Sous-estimation des erreurs formelles . . . . .	115
4.4.3	Estimation des incertitudes systématiques . . . . .	119
4.5	Présentation des résultats . . . . .	121
4.5.1	Discussion des résultats . . . . .	121
4.5.2	Bourgoin <i>et al.</i> (2016) . . . . .	124
4.6	Résumé . . . . .	124
	<b>Conclusion</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Traitement perturbatif</b>	<b>131</b>
A.1	Introduction . . . . .	131
A.2	Accélération radiale . . . . .	131
A.3	Linéarisation des équations . . . . .	132
A.4	Fréquence de l'orbite circulaire . . . . .	133
A.5	Solutions . . . . .	133

---

<b>B Perturbation solaire et perturbations planétaires</b>	<b>137</b>
B.1 Introduction . . . . .	137
B.2 Perturbations de troisième corps . . . . .	137
B.3 Effet de la perturbation solaire . . . . .	139
B.4 Effet d'une perturbation planétaire coplanaire . . . . .	141
B.5 Précisions requises sur les orbites planétaires . . . . .	145
<b>C Perturbations engendrées par les corps non-sphériques</b>	<b>149</b>
C.1 Introduction . . . . .	149
C.2 Potentiels non-sphériques . . . . .	149
C.3 Potentiel terrestre . . . . .	152
C.4 Potentiel solaire . . . . .	160
C.5 Potentiel lunaire . . . . .	164
<b>D Perturbation engendrée par les marées lunaires</b>	<b>171</b>
D.1 Introduction . . . . .	171
D.2 Marées solides . . . . .	171
D.3 Calculs préliminaires . . . . .	173
D.4 Taux d'éloignement lunaire . . . . .	175
<b>E Publications</b>	<b>177</b>
E.1 Article à comité de lecture . . . . .	177
E.2 Proceedings de conférences . . . . .	177
E.3 Articles acceptés . . . . .	178
<b>Table des figures</b>	<b>179</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>181</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>183</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1 Les succès de la relativité générale . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1.1 Les <i>trois tests classiques</i> . . . . .	1
1.1.2 La relativité générale confirmée par l'expérience . . . . .	2
<b>1.2 Vers une nouvelle théorie de la gravitation . . . . .</b>	<b>3</b>
1.2.1 Considérations théoriques et observationnelles . . . . .	3
1.2.2 Principes fondamentaux de la relativité générale . . . . .	4
1.2.3 Théories alternatives de la gravitation . . . . .	8
<b>1.3 Le lunar laser ranging . . . . .</b>	<b>12</b>
1.3.1 Historique et principe de fonctionnement . . . . .	12
1.3.2 La physique fondamentale avec le LLR . . . . .	14
<b>1.4 Travail réalisé dans le cadre de la thèse . . . . .</b>	<b>16</b>
1.4.1 Analyse détaillée de Battat <i>et al.</i> (2007) . . . . .	17
1.4.2 Discussion de la méthodologie . . . . .	19

---

### 1.1 Les succès de la relativité générale

En Novembre 1915, Einstein présenta à l'Académie royale des sciences de Prusse, les équations du champ gravitationnel décrivant la structure de l'espace-temps. Cette publication marqua l'aboutissement d'une recherche débutée en 1905, visant à construire une théorie relativiste de la gravitation, la *relativité générale*.

#### 1.1.1 Les *trois tests classiques*

Quelques jours auparavant, en utilisant ses équations de champs, Einstein (1915b) avait lui même démontré que l'anomalie observée depuis 1845 sur le taux de précession du périhélie de Mercure pouvait être expliquée de manière naturelle dans le cadre de la relativité générale. Jusqu'alors, les astronomes parmi lesquels Urbain Le Verrier, n'avaient fait que constater l'échec de la théorie newtonienne face à l'origine du taux de précession résiduel de  $43 \text{ arcsec/siècle}$ . Ce fût le premier grand succès de la relativité générale.

Le second grand succès confirmant la théorie fit sensation peu après la fin de la première guerre mondiale en 1919, avec la découverte expérimentale de l'effet de *déflexion de la lumière* également prédit par Einstein. Deux expéditions dont l'une menée par l'astronome britannique Sir Arthur Eddington furent dépêchées, pour mesurer lors d'une éclipse totale, l'effet de courbure des rayons lumineux en provenance d'étoiles situées à proximité du

Soleil. Les résultats se révélèrent en accord avec les prédictions de la relativité générale, avec des précisions relatives de 7% pour l'expédition envoyée au Brésil et de 17% pour la deuxième expédition envoyée sur l'île Principe au large de la côte ouest africaine (Dyson *et al.*, 1920).

Le dernier des trois tests classiques de relativité générale a été le premier proposé par Einstein (1908). Il s'agit du test du *redshift gravitationnel*, qui ne sera mis en évidence qu'en 1960 suite à une expérience initialement proposée par Pound et Rebka (1959). L'expérience consistant à utiliser l'effet Mössbauer sur une différence d'altitude de 22.6 m dans la tour du Jefferson Physical Laboratory de l'université d'Harvard, afin de mesurer le décalage en fréquence perçu entre deux observateurs situés à différentes altitudes dans le champ gravitationnel de la Terre. La mesure révéla avec une précision relative de 1%, que l'effet était en accord avec la prédiction de la relativité générale.

Depuis les trois tests historiques proposés par Einstein, les confrontations entre observations et prédictions se sont poursuivies. Ainsi, un large panel d'expériences et d'observations a été imaginé puis conçu afin de tester divers aspects de la théorie. À ce jour, ni les expériences de laboratoire, ni le suivi des sondes spatiales, ni même les observations cosmologiques n'ont pu mettre en défaut la relativité générale. Bien au contraire, la plupart des nombreuses prédictions de la théorie a pu être vérifiée.

### 1.1.2 La relativité générale confirmée par l'expérience

Parmi les prédictions vérifiées mentionnons le *quatrième test*<sup>1</sup> proposé par Shapiro, en 1964. Des équations de la relativité générale, il démontra en utilisant une métrique de type Schwarzschild appliquée au cas du Soleil, que le temps d'arrivée d'un signal radio émis depuis une planète interne (Mercure ou Vénus) serait affecté d'un retard dû au potentiel gravitationnel du Soleil<sup>2</sup>. Cet effet sera confirmé, tout d'abord avec une précision relative de 5% à partir d'observations radars de Mercure et Vénus (Shapiro *et al.*, 1971), puis avec une précision relative de 0.5% et 0.1% à partir de communications radio transmises à la sonde Viking (Shapiro *et al.*, 1977; Reasenberg *et al.*, 1979).

D'après les prédictions de la relativité générale, la variation temporelle du retard Shapiro produit également un décalage en fréquence sur les signaux électromagnétiques. Ce décalage a pu être mesuré précisément par Bertotti *et al.* (2003) lors d'une conjonction solaire avec la sonde Cassini alors en transit vers l'orbite de Saturne. Bertotti *et al.* ont montré que le décalage en fréquence était en parfait accord avec la prédiction de la relativité générale, avec une précision relative de 0.002%.

Une autre prédiction faite par la théorie est l'effet Lense-Thirring (Lense et Thirring, 1918; Thirring, 1918). La relativité générale prévoit ainsi que le mouvement de rotation propre d'un corps suffisamment massif puisse entraîner l'espace-temps. Un tel effet d'entraînement doit alors générer des perturbations notamment dans la dynamique orbitale mais également dans le mouvement de précession des gyroscopes en orbite autour du corps massif. En analysant les données de la sonde Gravity Probe B, Everitt *et al.* (2011) ont montré que l'effet de précession sur les gyroscopes était en accord avec la prédiction de la relativité générale avec une précision relative de 18%. Quant à l'effet sur la dynamique orbitale, il a été mesuré à partir des données LAGEOS et LAGEOS II par Ciufolini et Pavlis (2004) qui ont montré la bonne correspondance avec les valeurs prédites par la théorie avec une précision relative de 10%.

1. Traduction du titre de l'article de Shapiro (1964), *Fourth Test of General Relativity*.

2. Cet effet est aujourd'hui désigné sous l'appellation *retard Shapiro*.

La théorie a également été confirmée par l'observation de phénomènes externes au système solaire, *e.g.* les ondes gravitationnelles. En bâtissant une théorie relativiste de la gravitation, Einstein admit le postulat de vitesse limite introduit par la relativité restreinte. Dès lors, aucune interaction, ni même la gravitation, ne pouvait se propager plus vite que la vitesse de la lumière. C'est donc Einstein (1916, 1918) lui-même, qui fit la prédiction de l'existence d'ondes de gravitation se propageant à la vitesse de la lumière. Elles furent indirectement mises en évidence à la suite de la découverte par Hulse et Taylor (1975) du pulsar binaire PSR B1913+16. L'analyse des pulses radio permit à Taylor *et al.* (1979) de vérifier que la diminution de la période orbitale était compatible avec la perte d'énergie par rayonnement d'ondes gravitationnelles avec une précision relative de 18%. Il faudra attendre un siècle après la prédiction de l'existence des ondes gravitationnelles par Einstein, pour qu'elles soient finalement observées de manière directe par les détecteurs de LIGO (Abbott *et al.*, 2016). Les signaux captés par LIGO se révélèrent en accord avec les signaux théoriques attendus lors d'émission d'ondes gravitationnelles par un système binaire de trous noirs stellaires coalescents. Cette découverte a ainsi permis de confirmer simultanément deux prédictions de la relativité générale, la double existence des ondes gravitationnelles et des trous noirs stellaires.

À l'échelle cosmologique, la relativité générale a également joué un rôle important. Elle a effectivement permis d'expliquer l'expansion de l'univers observée par Hubble en 1929. En effet, Friedmann (1922, 1924) et Lemaître (1927, 1931) ont montré indépendamment que la théorie possédait des solutions cosmologiques en expansion conduisant à l'actuel modèle du *Big Bang*. Depuis, la cosmologie est devenue une discipline à part entière, extrêmement active et en mesure d'expliquer les premiers instants de l'univers primordial à partir du fond diffus cosmologique (Planck Collaboration *et al.*, 2016a,b).

La relativité générale compte parmi les théories physiques les mieux vérifiées si l'on considère les prédictions qui ont permis de tester sa validité sur une grande gamme d'échelles de distances et de temps<sup>3</sup>. Le meilleur exemple de la confiance que les physiciens accordent à la théorie d'Einstein concerne l'utilisation qu'ils en font. La relativité générale est en effet au cœur de nombreux domaines scientifiques tels que la géodésie, l'astrodynamique, l'astrophysique ou encore la cosmologie. Cependant, malgré ces nombreux succès, certains aspects de la théorie d'Einstein laissent penser que la relativité générale ne serait probablement pas la théorie ultime de la gravitation.

## 1.2 Vers une nouvelle théorie de la gravitation

Afin de justifier l'existence d'une théorie plus large que la relativité générale, nous présentons quelques unes des possibles failles laissées en suspens par la théorie d'Einstein.

### 1.2.1 Considérations théoriques et observationnelles

- i) Tout d'abord, rappelons que la relativité générale reste une théorie classique du champ. En effet, contrairement à la théorie quantique des champs qui explique les interactions électromagnétique, faible et forte par l'échange quantique de bosons virtuels, la relativité générale stipule que l'interaction gravitationnelle est la conséquence classique de la courbure de l'espace-temps par son contenu en matière-énergie.

---

3. Pour les tests de relativité générale non mentionnés ici, nous renvoyons à la revue de Will (2014) qui propose un exposé récent, complet et référencé. Pour obtenir plus de précisions sur les méthodes mathématiques, nous renvoyons à l'ouvrage plus ancien du même auteur (Will, 1993).

Pourtant, la théorie quantique des champs est également une grande réussite de la physique moderne permettant à elle seule d'expliquer trois des quatre interactions fondamentales. Une formulation quantique de la gravitation permettrait d'expliquer l'ensemble des interactions fondamentales. Cependant, la relativité générale n'est pas renormalisable par les méthodes perturbatives standards de la théorie quantique des champs (Deser et van Nieuwenhuizen, 1974; 't Hooft et Veltman, 1974).

- ii) Ensuite, un second problème apparaît aux échelles galactiques. Dès les années 30, il fût remarqué par Zwicky (1933, 1937) que la vitesse de rotation des galaxies n'était pas compatible avec la quantité de *masse lumineuse* observée. Dans le cadre du modèle standard cosmologique, ces observations sont reproduites grâce à l'introduction de *matière noire*. Cette nouvelle composante, qui n'interagirait que par interaction gravitationnelle, constituerait 26.8% du contenu en matière-énergie total de l'univers, contre 4.9% pour la matière baryonique (Planck Collaboration *et al.*, 2016a) (le reste étant constitué d'*énergie sombre*). En considérant que les différentes expériences effectuées en laboratoire n'aient, jusqu'à présent, pas permis de mettre en évidence cette nouvelle composante, certaines théories (Milgrom, 1983; Clifton *et al.*, 2012) suggèrent de modifier la relativité générale afin d'éviter l'intervention de matière exotique.
- iii) À l'échelle cosmologique, les observations des supernovæ de type Ia laissent suggérer que l'univers est dans une phase d'expansion accélérée (Riess *et al.*, 1998; Perlmutter *et al.*, 1999). Une telle accélération peut être recouverte dans le cadre du modèle standard cosmologique moyennant l'introduction d'une *constante cosmologique* dans les équations de champ d'Einstein. Cette nouvelle entité, appelée *énergie sombre*, est alors perçue comme un fluide de pression négative produisant l'accélération observée et contribuant à hauteur de 68.3% au contenu en matière-énergie total de l'univers (Planck Collaboration *et al.*, 2016a). En considérant qu'à l'heure actuelle, la nature de l'énergie sombre reste totalement inconnue, certaines théories proposent une modélisation différente de la gravitation afin de s'en affranchir (*cf.* la revue de Clifton *et al.* (2012)).

Ces quelques points illustrent ainsi le fait que la relativité générale n'est pas complètement satisfaisante. Dans l'attente de combler les lacunes exposées ici, plusieurs grandes théories d'unification sont en cours de développement *e.g.* la *théorie des cordes*, la *gravitation quantique à boucle*, la *supergravité* ou encore la *géométrie non-commutative etc.* Cependant, ces nouvelles alternatives n'en sont qu'à des stades précoces de leur développement et n'offrent pas, à l'heure actuelle, la possibilité d'être directement confrontées aux observations. Dans cette attente, des *théories alternatives* dites *effectives* ou *phénoménologiques* ont été introduites comme cas limite des grandes théories d'unification. Ces théories alternatives impliquent l'introduction d'un cadre théorique plus large que celui de la relativité générale et autorisent des violations aux principes fondamentaux sur lesquels la théorie d'Einstein est basée.

### 1.2.2 Principes fondamentaux de la relativité générale

Nous revenons sur deux notions fondamentales de la théorie d'Einstein qui vont nous permettre de discuter les implications des différentes théories alternatives. La première est le *principe d'équivalence d'Einstein* (EEP) permettant d'assimiler la gravitation à la courbure de l'espace-temps. La seconde est incarnée par les équations du champ gravitationnel permettant de décrire la dynamique de la courbure. Ces deux concepts fondamentaux

de la théorie de la relativité générale, nous permettent ensuite d'introduire le *principe d'équivalence fort* (SEP) qui sera discuté en Sec. 1.3.2.

### Le principe d'équivalence d'Einstein

Il existe un fait remarquable propre aux champs gravitationnels et communément dénommé *principe d'équivalence faible* (WEP). Ce principe s'énonce ainsi : *la trajectoire suivie par un corps d'épreuve en chute libre est indépendante de sa structure interne ou de sa composition.*

Dans le cadre de la théorie newtonienne, cet énoncé est équivalent à l'égalité entre la masse inertielle  $m_i$  (apparaissant dans la loi fondamentale de la dynamique) et la masse gravitationnelle  $m_g$  (apparaissant dans la force gravitationnelle). Dès lors, deux corps d'épreuves de masses différentes chutent avec la même accélération dans un champ de gravitation, conformément au principe d'*universalité de la chute libre* (UFF) énoncé par Galilée en 1638. Ainsi, en vertu du principe d'UFF les champs gravitationnels peuvent être *localement* effacés dans les repères en chute libre<sup>4</sup>. De même, les repères non-inertiels peuvent dès lors être localement équivalents à certains champs de forces. Cette équivalence locale est une autre facette du WEP. L'idée fondamentale de la relativité générale est d'utiliser cette équivalence en imposant que les lois non-gravitationnelles de la physique (celles de la *relativité restreinte*) soient localement applicables dans les référentiels en chute libre. Ce dernier point est connu sous l'appellation de *principe d'équivalence d'Einstein* (EEP). D'après Will (1993) le EEP s'énonce ainsi

- i) *le WEP est valide,*
- ii) *le résultat d'une expérience locale et non-gravitationnelle est indépendant de la vitesse du repère en chute libre depuis lequel l'expérience est réalisée,*
- iii) *le résultat d'une expérience locale et non-gravitationnelle est indépendant de la position dans l'espace-temps du repère en chute libre depuis lequel l'expérience est réalisée.*

Les points ii) et iii) sont appelés respectivement *invariance locale de Lorentz* (LLI) et *invariance locale de position* (LPI) et sont deux exigences imposées par la relativité restreinte.

Dès lors, il est possible d'argumenter que le EEP implique de considérer *la gravitation comme la manifestation de la courbure de l'espace-temps*. En effet, si on nomme  $X^\alpha$  les coordonnées d'un référentiel localement en chute libre, alors à l'intérieur de ce référentiel le EEP permet d'identifier l'intervalle d'espace-temps à celui de la relativité restreinte

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta, \quad (1.1)$$

où  $\eta_{\alpha\beta}$  est la métrique de Minkowski. Ensuite, le passage du référentiel localement inertiel ( $X^\alpha$ ) à un référentiel non-inertiel quelconque de coordonnées  $x^\mu$  implique la transformation générale  $X^\alpha = X^\alpha(x^\mu)$ . Par conséquent, dans le référentiel non-inertiel, l'intervalle d'espace-temps s'écrit

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2)$$

---

4. En effet, l'inertie induite suite à l'accélération du repère contrebalance parfaitement l'accélération engendrée par le champ gravitationnel. Ainsi, les lois de la mécanique dans les repères en chute libre peuvent être localement identifiées aux lois de la mécanique dans les repères inertiels.

où les fonctions  $g_{\mu\nu}$  sont définies par

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} .$$

L'équivalence entre repères non-inertiels et champs gravitationnels permet alors de sauvegarder la forme de l'Eq. (1.2) lorsque l'on souhaite décrire la géométrie de l'espace-temps en présence de gravitation. Les champs de gravitation sont alors identifiables aux quantités  $g_{\mu\nu}$  (appelées composantes du *tenseur métrique*) décrivant la courbure de l'espace-temps.

Ainsi, le EEP implique que les déplacements soient perçus comme des mouvements libres dans un espace-temps courbe. Dès lors, la manifestation de la gravitation n'est plus interprétée comme la variation de la vitesse due à l'application d'une force mais est plutôt perçue comme la trajectoire empruntée par une particule libre circulant dans un espace-temps courbe. Ainsi, le mouvement d'une particule d'épreuve est uniquement régi par le principe de moindre action associé aux particules libres

$$S_f = -mc \int ds, \tag{1.3}$$

où  $ds$  est défini par la relation (1.2). Les quantités  $m$  et  $c$  sont respectivement la masse de la particule et la vitesse de la lumière dans le vide. La variation de l'action  $S_f$  relativement aux coordonnées  $x^\lambda$  permet de déterminer l'*équation des géodésiques* décrivant le mouvement des particules libres

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \tag{1.4}$$

Les quantités  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  sont les symboles de Christoffel. Ils sont définis en chaque point de l'espace-temps, à partir des composantes du tenseur métrique. Les symboles de Christoffel ne forment pas un tenseur à proprement parler puisqu'il est toujours possible de définir localement un système de coordonnées qualifié de *localement Lorentzien* ou de localement en chute libre, dans lequel les composantes  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ . Ceci est une manifestation du EEP qui exige que dans de tels repères, la physique de la relativité restreinte soit totalement recouverte<sup>5</sup>.

Nous verrons (*cf.* Sec. 1.2.3) que le EEP permet ainsi de différencier les théories *métriques* de la gravitation des théories *non-métriques* de la gravitation.

## Les équations d'Einstein

Si le EEP permet d'identifier la gravitation avec la métrique de l'espace-temps, il reste à déterminer les équations gouvernant l'évolution de cette métrique. De la même manière que le passage d'un repère inertiel à un repère non-inertiel modifie les composantes de la métrique, une variation du champ gravitationnel les modifiera également en vertu de l'équivalence entre repères non-inertiels et champs gravitationnels. Par conséquent, les propriétés géométriques de l'espace-temps sont déterminées par les phénomènes physiques

---

5. Dans un repère localement Lorentzien, l'Eq. (1.4) devient  $d^2 x^\lambda / ds^2 = 0$ , soit  $x^\lambda = a^\lambda s + b^\lambda$  avec  $a^\lambda$  et  $b^\lambda$  deux constantes d'intégration. Les particules libres suivent donc des lignes droites (similairement à la relativité restreinte) dans les repères en chute libre où le champ gravitationnel est localement effacé.

qui y prennent place. Dans le cadre de la théorie de la relativité générale, les équations du champ gravitationnel<sup>6</sup> s'écrivent (Einstein, 1915a)

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

où  $\kappa$  est la constante d'Einstein,  $G_{\mu\nu}$  est le tenseur d'Einstein décrivant l'évolution des composantes de la métrique de l'espace-temps et  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur d'énergie-impulsion du champ de matière.

Les équations d'Einstein décrivent la manière avec laquelle le contenu de l'espace-temps en matière-énergie gouverne sa géométrie. En contrepartie, le EEP décrit la manière avec laquelle la géométrie de l'espace-temps gouverne l'évolution du champ de matière. En relativité générale, ce point respecte le *principe de couplage minimal* selon lequel, la matière et autres champs non-gravitationnels se couplent au seul tenseur métrique. L'évolution du champ de matière peut être déterminée à partir des identités de Bianchi. La contraction de ces dernières sur une paire d'indices bien choisie permet d'aboutir à la relation  $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ , qui implique l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ , en vertu de l'Eq. (1.5). L'équation de conservation appliquée aux masses tests permet ensuite de retrouver les équations des géodésiques.

Nous verrons (*cf.* Sec. 1.2.3), que les équations du champ permettent de différencier entre elles les différentes théories *métriques* de la gravitation.

### Le principe d'équivalence fort

La forme singulière des équations d'Einstein permet d'étendre naturellement le EEP aux expériences gravitationnelles effectuées localement dans un champ de gravitation externe (*cf.* Will (1993)). Cette extension est appelée *principe d'équivalence fort* (SEP) et requiert que la dynamique gravitationnelle d'un système quelconque soit insensible au champ de gravitation global dans lequel il est plongé, pour peu qu'on puisse négliger les inhomogénéités du champ externe. En conséquence, dans la théorie de la relativité générale, le EEP s'applique également à des corps possédant des énergies gravitationnelles non-négligeables. Ce nouveau principe incluant le EEP implique que (*cf.* Will (1993))

- i) *le WEP soit valide y compris pour les corps possédant des énergies gravitationnelles non-négligeables,*
- ii) *le résultat d'une expérience locale (gravitationnelle ou non) soit indépendant de la vitesse du repère en chute libre depuis lequel l'expérience est réalisée,*
- iii) *le résultat d'une expérience locale (gravitationnelle ou non) soit indépendant de la position dans l'espace-temps du repère en chute libre depuis lequel l'expérience est réalisée.*

Il semblerait que la relativité générale soit la seule théorie viable qui satisfasse pleinement le SEP (Will, 2014). En effet, quasiment toutes les théories métriques autre que la théorie d'Einstein impliquent des champs gravitationnels auxiliaires. Ainsi, la détermination de la métrique décrivant l'expérience gravitationnelle locale dépend de la valeur des champs auxiliaires aux frontières du système local. Par conséquent, le résultat de l'expérience gravitationnelle locale devient dépendant du lieu et de la vitesse du repère relativement à l'environnement externe, violant ainsi le SEP.

---

6. sans constante cosmologique.

Si la relativité générale est effectivement la seule théorie à satisfaire pleinement le SEP on peut arguer de manière réciproque que si le SEP est valide alors il n'existe aucun champ gravitationnel auxiliaire dans l'univers, seule la métrique décrit la gravitation.

### 1.2.3 Théories alternatives de la gravitation

Il existe un très grand nombre de théories alternatives à la relativité générale. La revue de Will (2014) présente les implications de quelques unes d'entre elles, notamment à l'échelle du système solaire; la revue, également très complète, de Clifton *et al.* (2012) s'intéresse quant à elle principalement aux implications cosmologiques. Dans la suite, seuls trois formalismes seront discutés. Les deux premiers ont été largement utilisés pour contraindre les déviations à la relativité générale dans le système solaire : la recherche d'interaction sous la forme d'un *potentiel de Yukawa* (formalisme de *cinquième force*) et le formalisme *post-newtonien paramétré* (PPN pour *parametrized post-newtonian*). Le troisième qui n'est pas couvert par ces deux formalismes standards est l'*extension du modèle standard* des particules (*SME* pour *standard-model extension*).

#### La cinquième force

Après réanalyse de l'expérience réalisée par R. v. Eötvös, D. Pekar, et E. Fekete, Fischbach *et al.* (1986) suggérèrent l'existence d'une cinquième force de la nature présentant une intensité approchant quelques pourcents de la force de gravitation et une distance caractéristique d'interaction de l'ordre de la centaine de mètres. Cette nouvelle force était supposée entraîner des déviations à la loi en  $1/r^2$  de la théorie de Newton.

Ainsi, la recherche de cette cinquième force s'effectue généralement par l'introduction d'un potentiel de type *Yukawa*, sous la forme

$$\tilde{U}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t) \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{r}', t) = \mathcal{G} \left[ 1 + \alpha \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\lambda}\right) \right], \quad (1.6)$$

où  $\alpha$  représente l'intensité de l'hypothétique cinquième force et  $\lambda$  est sa distance caractéristique d'interaction. Les potentiels de ce type sont usuellement utilisés en physique des particules pour décrire une interaction via l'échange d'une particule médiatrice.

Les motivations théoriques conduisant à la recherche d'une cinquième force sont nombreuses. Tout d'abord, d'après quelques unes des grandes théories d'unification dont la théorie des cordes, il existerait d'autres dimensions spatiales en plus des trois que nous observons. Ces dimensions supplémentaires ne seraient perceptibles qu'aux très petites échelles. Cependant, cette compactification des dimensions supplémentaires pourrait générer des champs scalaires capables de produire des forces d'intensité comparable à celle de la gravitation pour des échelles de distances de l'ordre de  $100 \mu m$  (Kaplan et Wise, 2000). De tels effets seraient alors perceptibles au travers de la modification engendrée sur la loi en  $1/r^2$ .

Parmi les nombreuses théories alternatives à la relativité générale qui prédisent également aux courtes échelles des déviations à la loi de Newton en  $1/r^2$ , citons les théories en  $f(R)$  (Clifton, 2008), ou encore les théories tenseur-scalaires (Wagoner, 1970). Le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Fischbach et Talmadge (1999), puis à la revue de Adelberger *et al.* (2003) pour de plus amples informations sur le sujet.

En raison de la dépendance à la distance d'interaction,  $\lambda$ , les observations de l'intensité,  $\alpha$ , doivent être effectuées sur une large gamme de valeurs fixes de  $\lambda$ . À l'heure actuelle, les tests ont permis d'écarter toute hypothétique cinquième force agissant à des distances

caractéristiques s'étalant sur plus de 20 ordres de grandeurs; la gamme des distances testée s'étale aujourd'hui de  $10^{-5} \lesssim \lambda \lesssim 10^{16}$ . Pour la borne supérieure de  $\lambda$ , ce sont les éphémérides planétaires qui déterminent les meilleures contraintes de l'intensité  $\alpha$  à l'ordre de quelques  $10^{-8}$  (Konopliv *et al.*, 2011). Concernant les bornes inférieures, les expériences effectuées en laboratoires permettent d'atteindre des contraintes telles que  $\alpha \lesssim 10^6$  pour  $\lambda \sim 10^{-5}$  (Long *et al.*, 2003; Chiaverini *et al.*, 2003). La meilleure contrainte sur  $\alpha$  est obtenue à partir des observations *Lunar Laser Ranging* (LLR). Nous reviendrons plus en détail sur ce point en Sec. 1.3.2.

## Le PPN

À la fin des années 60, devant la recrudescence du nombre de théories alternatives de gravitation, il devenait intéressant d'essayer de bâtir un cadre théorique permettant à la fois de classer les théories mais également de comparer leurs prédictions de manière systématique. Tout d'abord, sous l'initiative de R. Dicke il fût montré que les expériences gravitationnelles sont divisibles en deux classes distinctes.

- i) La première incorpore les expériences visant à déterminer la manière avec laquelle la métrique et les champs gravitationnels auxiliaires se couplent au champ de matière.
- ii) La deuxième incorpore les expériences visant à déterminer la manière avec laquelle le champ de matière et les champs gravitationnels auxiliaires génèrent la métrique.

La première classe d'expériences contient alors les tests liés aux principes fondamentaux des théories alternatives de gravitation, *e.g.* le EEP ou encore le principe de couplage minimal. Ainsi, si la matière ne répond pas uniquement à la métrique de l'espace-temps mais interagit directement avec d'autres champs gravitationnels auxiliaires, alors les trajectoires ne sont plus des géodésiques de l'espace-temps et ne respectent plus le EEP. Cette première classe d'expériences permet ainsi de différencier les théories *métriques* des théories *non-métriques*. Le postulat des théories métriques est défini par Will (1993) en trois points

- i) *l'espace-temps est décrit par une métrique  $g_{\mu\nu}$ ,*
- ii) *les particules d'épreuve suivent des géodésiques de l'espace-temps,*
- iii) *dans les repères localement en chute libre, les lois non-gravitationnelles de la physique sont celles de la relativité restreinte.*

La deuxième classe d'expériences peut ensuite être utilisée afin de comparer les divers aspects dynamiques (équations d'Einstein modifiées) des théories alternatives, notamment les théories métriques. Ce qui différencie alors les théories métriques les unes des autres est le nombre de champs gravitationnels auxiliaires présents dans la théorie; ces champs auxiliaires interviennent uniquement dans la manière avec laquelle la matière et les autres champs non-gravitationnels génèrent la métrique de l'espace-temps. Ensuite, une fois déterminée, seule la métrique contrôle le mouvement de la matière qui empreinte toujours des géodésiques de l'espace-temps. Le formalisme PPN se classe directement dans cette deuxième catégorie d'expérience et est dédié à l'étude des théories métriques. Il fût introduit par Eddington, puis plus tard étendu par Nordtvedt (1968a,b), Will (1971), Will et Nordtvedt (1972) et Will (1973).

La comparaison entre théories métriques peut se faire de manière systématique dans la limite des vitesses faibles et des champs gravitationnels faibles<sup>7</sup>. Dans cette limite, la métrique de l'espace-temps prend une forme standard présentant une structure commune à toutes les théories métriques (*c.f.* Will (2014))

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -1 + 2U - 2\beta U^2 - 2\xi\Phi_W + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\Phi_1 + 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\Phi_2 \\
&\quad + 2(1 + \zeta_3)\Phi_3 + 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\Phi_4 - (\zeta_1 - 2\xi)\mathcal{A} - (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)w^2U \\
&\quad - \alpha_2 w^i w^j U_{ij} + (2\alpha_3 - \alpha_1)w^i V_i, \\
g_{0i} &= -\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)V_i - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)W_i \\
&\quad - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)w^i U - \alpha_2 w^j U_{ij}, \\
g_{ij} &= + (1 + 2\gamma U)\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Dans cette expression  $\beta, \gamma, \xi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  et  $\zeta_4$  sont les *paramètres post-newtoniens*,  $w^i$  est la  $i$ ème composante du vecteur vitesse du système de coordonnées relativement au référentiel de l'univers,  $U$  est le potentiel gravitationnel newtonien et  $\Phi_W, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \mathcal{A}, U_{ij}, V_i$  et  $W_i$  sont les *potentiels post-newtoniens*.

La seule manière de différencier les théories entre elles est la valeur des paramètres post-newtoniens qui diffère d'une théorie à l'autre. Par exemple, la relativité générale<sup>8</sup> prévoit que les seuls paramètres non-nuls soient  $\beta = \gamma = 1$ . Par opposition, les théories dites semi-conservatives prévoient en plus des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$ , des valeurs non-nulles pour les paramètres  $\xi, \alpha_1$  et  $\alpha_2$ . De plus, les paramètres post-newtoniens ont des significations physiques bien précises permettant de comprendre l'origine théorique des observables. Ainsi, dans la jauge standard PPN, le paramètre  $\gamma$  mesure le taux de courbure de l'espace-temps induit par une masse unité et le paramètre  $\beta$  mesure la non-linéarité dans la superposition des champs gravitationnels (*c.f.* Tab. 2 de Will (2014) pour la signification physique des autres paramètres).

Le formalisme PPN offre ainsi un cadre d'étude privilégié pour réaliser les tests de relativité générale en champs faibles. Les valeurs numériques des paramètres post-newtoniens doivent alors être déterminées par analyse de résultats d'expériences. Ainsi, l'analyse des données de radio-sciences de la sonde Cassini par Bertotti *et al.* (2003) (mentionnée en Sec. 1.1.2) a permis de fournir, à ce jour, la meilleure estimation du paramètre  $\gamma$

$$\gamma - 1 = (+2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}.$$

Quant au paramètre  $\beta$ , il a pu être déterminé à hauteur de

$$\beta - 1 = (+0.2 \pm 2.5) \times 10^{-5},$$

en utilisant les observations radio-sciences de la sonde Messenger (Verma *et al.*, 2014). Plus récemment une autre analyse a déterminé  $\beta$  avec une incertitude du même ordre de grandeur (Fienga *et al.*, 2015). Ces deux tests confirment les prédictions de la relativité générale avec une précision relative de l'ordre de 0.002%.

7. Cette limite est connue sous appellation de limite *post-newtonienne* (PN), et permet une description suffisamment précise pour les tests réalisés dans le système solaire.

8. qui est elle même une théorie métrique de la gravitation.

### L'extension du modèle standard

Comme mentionné en Sec. 1.2.1, la relativité générale présente certaines difficultés théoriques qui empêchent la formulation d'une théorie quantique de la gravitation. Ces deux pans de la physique moderne que sont la relativité générale et le modèle standard des particules sont pourtant fondés sur une théorie commune : la relativité restreinte. Ainsi, le modèle standard incorpore les lois de la relativité restreinte dans une description quantique des interactions entre particules subatomiques. Dans ce domaine, la symétrie de l'espace-temps est connue en tant que *symétrie de Lorentz*. En relativité générale, cette symétrie n'est plus globalement respectée sur l'ensemble de l'espace-temps courbe mais seulement localement, c'est en ce sens que l'on parle d'*invariance locale de Lorentz* (LLI) dans la formulation du EEP (*cf.* Sec. 1.2.2).

Cependant, malgré cette base commune, les deux théories n'ont toujours pas été conciliées de manière pleinement satisfaisante en une théorie unificatrice permettant de faire des prédictions testables. Une telle unification serait supposée fournir une unique description quantique de la nature avec des effets expérimentaux significatifs pour des échelles de l'ordre de grandeur de l'échelle de Planck  $m_P \simeq 10^{19} \text{ GeV}$ . À de tels niveaux d'énergies, aucune expérience n'est aujourd'hui réalisable. Cependant, à des énergies plus basses et moyennant une précision accrue, les effets de cette nouvelle physique pourraient hypothétiquement être observés. De plus, de récents travaux (*cf.* Refs. [17] à [42] de Bailey (2007), ou encore Mattingly (2005) et Tasson (2014)) concernant les grandes théories unificatrices ont montré que les symétries de l'espace-temps pourraient être violées à bas niveaux d'énergie, y compris pour des théories pleinement invariantes de Lorentz<sup>9</sup>.

Dans ce contexte, Colladay et Kostelecký (1997, 1998) puis Kostelecký (2004) ont développé une large théorie effective paramétrant toutes les violations possibles à la symétrie de Lorentz dans tous les domaines de la physique, depuis la physique des particules jusqu'à la relativité générale. Ce large formalisme est fondé sur le principe de moindre action et contient les lagrangiens du modèle standard et de la relativité générale en plus des termes additionnels brisant la symétrie de Lorentz. Ces derniers sont appelés *les coefficients de fond* ; ils paramétrisent la violation et permettent d'effectuer le lien entre théories et expériences. Le modèle standard et la relativité générale sont ainsi retrouvés dans le cas limite où ces coefficients s'annulent. Comme mentionné par Bailey et Kostelecký (2006), le SME est fondé sur une expansion de l'action plutôt que sur une expansion de la métrique comme l'est le formalisme PPN. Par conséquent, le principal intérêt du SME réside dans le fait qu'il n'est pas couvert par les formalismes standards (cinquième force et PPN) dans la limite post-newtonienne.

Afin d'inclure les propriétés liées au spin des particules, la formulation effective du formalisme SME en espace-temps courbe requiert l'utilisation de l'espace-temps de Riemann-Cartan (Kostelecký, 2004). Cet espace-temps peut inclure de la torsion et possède davantage de degrés de liberté que l'espace-temps de Riemann utilisé pour la description de la relativité générale. Ainsi, la métrique seule ne suffit plus à déterminer complètement la connexion, il est nécessaire d'avoir accès à l'expression de la torsion. Dans l'espace-temps de Riemann-Cartan, les identités de Bianchi font intervenir la torsion en plus du tenseur de courbure (*cf.* Eqs. (A14) de Kostelecký (2004)). Pour que la théorie effective soit pleinement consistante et satisfassent aux lois de conservation ces identités doivent

---

9. Dans de telles circonstances, la symétrie de Lorentz doit être spontanément violée.

impérativement être satisfaites. Pour cela, les coefficients de fond doivent obligatoirement être déterminés dynamiquement depuis le principe de moindre action. Cette exigence correspond au cas précédemment mentionné dans la note de bas de page n°9, où la symétrie de Lorentz doit être spontanément violée. Ce scénario est ainsi adopté pour décrire les violations à la symétrie de Lorentz dans le cadre du SME général en espace-temps courbe.

Dans la suite, nous nous intéresserons à deux facettes de ce formalisme ; le SME minimal correspondant au secteur purement gravitationnel (Bailey et Kostelecký, 2006), puis le couplage gravité-matière (Kostelecký et Tasson, 2011). La partie minimale du SME permet de déterminer la dynamique du champ gravitationnel via les équations d'Einstein modifiées (*cf.* Eqs. (6)-(8) de Bailey et Kostelecký (2006)). Quant au couplage gravité-matière, il autorise des violations au principe de couplage minimal. Chacune des deux facettes est présentée brièvement en Chap. 4.

Le SME étant une très large théorie effective du champ, la littérature abonde de tests réalisés dans les différents secteurs du formalisme. L'ensemble des contraintes expérimentales et estimations sur les divers coefficients SME étant réuni dans Kostelecký et Russell (2011), nous ne soulignons que quelques tests effectués principalement dans le secteur purement gravitationnel. Contrairement aux tests menés dans les formalismes classiques qui sont la plupart du temps effectués dans le cadre d'une *analyse globale* de données, il est assez surprenant de remarquer que les tests réalisés dans le cadre du SME minimal sont issus d'*analyses postfit*<sup>10</sup>. Ces méthodes postfit ont été appliquées dans de nombreux domaines tels que l'interférométrie atomique (Müller *et al.*, 2008; Chung *et al.*, 2009), l'analyse des données gravity probe B (Bailey *et al.*, 2013), les pulsars binaires (Shao *et al.*, 2013; Shao, 2014a,b), les éphémérides planétaires (Iorio, 2012; Hees *et al.*, 2015), l'observation de rayons cosmiques (Kostelecký et Tasson, 2015), la détection des ondes gravitationnelles (Kostelecký *et al.*, 2016) et le LLR (Battat *et al.*, 2007). Dans le SME minimal, les estimations les plus compétitives sont données par les éphémérides planétaires<sup>11</sup> et les pulsars binaires. En Sec. 1.4.1, nous reviendrons plus en détail sur les résultats de Battat *et al.* (2007) et montrerons que ce type d'analyses postfit n'est pas complètement satisfaisante et ne fournit pas des contraintes à proprement parler.

### 1.3 Le lunar laser ranging

Parmi toutes les expériences d'astrométrie, il en est une dont l'intérêt pour tester la relativité générale fût mis en évidence avant même sa réalisation : le *lunar laser ranging* (LLR). Cette section est intégralement consacrée à cette expérience que nous décrivons brièvement dans un premier temps et dont les résultats obtenus dans le cadre de la physique fondamentale sont discutés dans un deuxième temps.

#### 1.3.1 Historique et principe de fonctionnement

Cette expérience, initialement proposée par Alley *et al.* (1965), consiste à mesurer très précisément le temps mis par des photons pour parcourir la distance aller-retour entre la surface de la Terre et la surface de la Lune. L'objectif est ensuite d'analyser cette unique mesure afin d'extraire toute information en rapport avec la dynamique du système Terre-Lune.

10. Lors d'une analyse postfit, les signaux d'intérêt sont dérivés analytiquement puis ajustés dans les résidus d'analyses effectuées dans le cadre de la relativité générale.

11. Hees *et al.* (2015) ont considéré le couplage gravité-matière du SME, en plus du secteur gravitationnel.

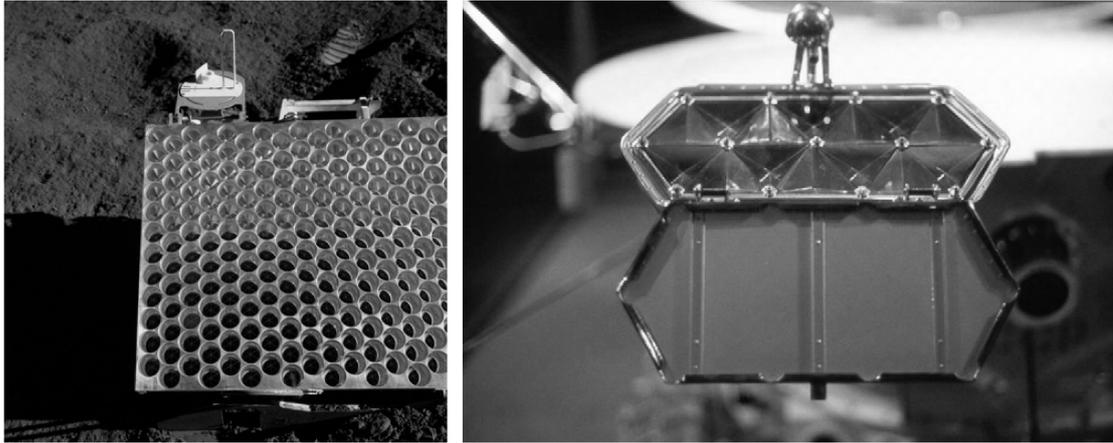


FIGURE 1.1 – Photos reprises de Murphy (2013) représentant l’architecture en coins de cubes des rétroreflecteurs. *Gauche* : photo du rétrorefacteur Apollo 15 représentant une partie des 300 coins de cubes de  $3.8\text{ cm}$  de diamètre. *Droite* : photo du rétrorefacteur Lunokhod représentant les 14 coins de cubes, chacun affichant une envergure de  $11\text{ cm}$ .

Le 21 juillet 1969, lors de la mission habitée Apollo 11, le premier rétrorefacteur fût placé sur la Lune. Dans le mois qui suivit les premiers *échos* furent détectés par plusieurs observatoires (l’Observatoire de McDonal au Texas et l’Observatoire de Lick en Californie, tous les deux aux USA). Quelques années plus tard, ce fût au tour des rétroreflecteurs Apollo 14 et 15 d’être déposés par les missions habitées du même nom. Parallèlement, des rétroreflecteurs de fabrication française furent placés sur les rovers russes Lunokhod 1 et 2 déposés sur la surface lunaire par les missions soviétiques Luna 17 et Luna 21.

Pendant plusieurs dizaines d’années seul l’Observatoire de McDonald (alors doté d’un télescope de  $2.7\text{ m}$ ) a effectué des tirs lasers avec une précision observationnelle de l’ordre de  $25\text{ cm}$  (Dickey *et al.*, 1994). Vers le milieu des années 80, une transition s’est opérée vers le *McDonald Laser Ranging Station*, (*MLRS*) (télescopes de  $0.76\text{ m}$ ) sur deux sites. Le premier, MLRS1 (1983-1988) à Saddle et le second MLRS2 (depuis 1988) qui partage son temps d’observation entre le LLR et la *satellite laser ranging* (SLR) au Mt. Fowlkes. Cette transition a permis de d’améliorer d’un ordre de grandeur la précision des observations LLR qui est alors passée sous la barre des  $5\text{ cm}$  (Dickey *et al.*, 1994). Durant cette même décennie, deux stations supplémentaires ont vu le jour, une à l’Observatoire d’Haleakala sur l’île Maui, Hawaï (USA) et l’autre du CERGA (Centre d’Études et de Recherches en Géodynamique et Astronomie) à l’*Observatoire de Côte d’Azur* (OCA) sur le plateau de Calern à proximité de Grasse (France). Alors que la première a cessé toute activité autour des années 90, la deuxième est toujours en fonctionnement et ne cesse d’améliorer la précision des observations LLR (des tirs sont réalisés en infrarouge depuis 2015). Ces dernières années, la station américaine MLRS2 a quasiment arrêté toute activité LLR (2 observations en 2015) mais deux nouvelles stations effectuent des observations LLR depuis une dizaine d’années, l’une à Matera en Italie et l’autre, *Apache Point Observatory Lunar Laser-ranging Operation* (APOLLO) située au Nouveau-Mexique (USA). Cette dernière station, avec un télescope de  $3.5\text{ m}$  et d’excellentes conditions atmosphériques permet d’atteindre des précisions sub-centimétriques (Murphy *et al.*, 2008; Murphy, 2013).

Les rétroreflecteurs Apollo se composent de centaines (100 pour Apollo 11 et 14 contre 300 pour Apollo 15) de coins de cubes de 3.8 *cm* de diamètre, montés sur des panneaux d'aluminium. Les rétroreflecteurs Lunokhod disposent quant à eux de 14 coins de cubes de 11 *cm* de diamètre. Cette architecture en coins de cubes montrée en Fig. 1.1 permet de réfléchir les photons sous la même direction que le signal incident.

La difficulté inhérente à cette expérience de télémétrie laser sur la Lune peut être résumée en quelques chiffres. Le faisceau laser émis depuis la Terre est dispersé par une divergence expérimentale (inférieure à 1 *arcsec*) et bien plus encore par les turbulences atmosphériques. Ainsi, après avoir traversé l'atmosphère terrestre le diamètre du faisceau laser atteint environ 7 *km* au niveau de la surface lunaire, *i.e.* que seul 1 photon sur  $10^9$  parvient à frapper le rétroreflecteur visé. Ensuite, le faisceau réfléchi présente une divergence de l'ordre de 12 *arcsec* en raison des imperfections des rétroreflecteurs et là encore des turbulences de l'atmosphère terrestre. Ainsi, à la surface de la Terre, le diamètre du faisceau laser réfléchi atteint environ 20 *km*, *i.e.* que pour un télescope de 1 *m* d'ouverture seul 1 photon est capté sur  $10^9$  qui sont réfléchis par le rétroreflecteur. Par conséquent, au cours des 2.5 *s* que dure le trajet aller-retour en moyenne, seul 1 photon sur  $10^{18}$  qui sont émis est finalement récupéré. En prenant en compte d'autres facteurs limitant, on arrive à un ratio de 1 photon détecté tous les  $10^{20}$  émis (*cf.* Murphy (2013) pour comprendre l'origine des autres facteurs limitant). En considérant *e.g.* le cas de la station LLR de l'OCA dont l'énergie des pulses lasers peut atteindre entre 300 et 500 *mJ*, le nombre de photons ainsi émis par pulse, et pour une longueur d'onde de 532 *nm* (laser vert) peut atteindre  $10^{18}$  à  $10^{19}$ . Ceci correspond environ à 1 photon détecté tous les 10 à 100 pulses. En considérant que le système laser produit les pulses avec un taux de 10 pulses par seconde, on enregistre alors une détection toutes les 1 à 10 secondes. Les performances actuelles de la station APOLLO permettent un taux de récupération des photons de 50 à 70 fois supérieur selon les rétroreflecteurs visés (Murphy, 2013).

La course à l'optimisation instrumentale ne cesse de repousser les précisions observationnelles. Les précisions actuelles cumulées aux 47 années d'observations contraignent très fortement la modélisation du système Terre-Lune ouvrant ainsi les champs de l'astronomie, de la géodésie, de la géodynamique, de la physique lunaire ou encore de la physique fondamentale. Dans ce dernier domaine, le LLR est en particulier à l'origine de quelques unes des meilleures contraintes obtenues sur plusieurs paramètres fondamentaux des théories de gravitation. La section suivante énumère les plus importantes d'entre elles en comparant la précision atteinte via le LLR aux précisions obtenues par d'autres techniques observationnelles.

### 1.3.2 La physique fondamentale avec le LLR

Les tests de la relativité générale par analyse des données LLR ont été initialement suggérés par Baierlein (1967) puis Nordtvedt (1968). Ce dernier proposa de tester le SEP, pilier de la théorie d'Einstein. Pour ce faire, il montra que des tirs lasers réfléchis par un rétroreflecteur déposé à la surface de la Lune permettraient de mesurer le ratio de la masse gravitationnelle à la masse inertielle ( $m_g/m_i$ ) de la Terre avec une précision telle que des effets de contributions de l'énergie gravitationnelle de la Terre pourraient être observés s'ils existaient. La conséquence observationnelle serait une différence des taux de chutes de la Terre et de la Lune dans le champ gravitationnel du Soleil, ce qui engendrerait une polarisation de l'orbite lunaire. Il montra analytiquement que la polarisation produirait

une oscillation de la distance Terre-Lune de l'ordre de

$$\delta r(t) \simeq -12\eta \cos(n-N)t \text{ m},$$

avec  $n$  le moyen mouvement lunaire et  $N$  le moyen mouvement du barycentre Terre-Lune,  $n - N$  est ainsi la fréquence synodique lunaire, le paramètre  $\eta$  est quant à lui un coefficient sans dimension<sup>12</sup> permettant de paramétrer la déviation au SEP, et  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. Il conclura que de tels tirs laser sur la Lune, s'ils possédaient une précision minimale de l'ordre de la dizaine de mètres, permettraient de mesurer  $\eta$  et donc de tester la théorie d'Einstein ( $\eta = 0$  en relativité générale) et, par là même, d'autres théories *e.g.* la théorie tenseur scalaire de Brans et Dicke (1961) pour laquelle  $\eta \neq 0$ .

D'après Williams *et al.* (1996) les énergies gravitationnelles de la Terre et de la Lune, rapportées à leur énergie de masse au repos respective sont

$$\left(\frac{\Omega}{m_i c^2}\right)_{\text{Terre}} \simeq -4.64 \times 10^{-10} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\Omega}{m_i c^2}\right)_{\text{Lune}} \simeq -1.90 \times 10^{-11}.$$

Cependant, compte-tenu du fait que les compositions internes de la Terre et de la Lune sont également différentes, la mesure des ratios  $m_g/m_i$  ne fournit pas un test pur du SEP. Ainsi, pour trancher entre une possible compensation du WEP et du SEP les résultats d'une expérience de balance de torsion<sup>13</sup> menée par Baeßler *et al.* (1999) ont été combinés par Williams *et al.* (2009) avec les dernières analyses LLR pour fournir l'estimation suivante

$$\eta = (+4.4 \pm 4.5) \times 10^{-4}.$$

Cette contrainte est à ce jour la plus forte sur le SEP.

Une autre manière de tester le principe d'équivalence (faible et fort) est de déterminer directement le ratio  $m_g/m_i$ , sans s'intéresser aux différentes formes d'énergies qui pourraient contribuer en proportion différente entre  $m_g$  et  $m_i$ . À ce jour, la meilleure estimation des ratios  $m_g/m_i$  faite via les données LLR (Williams *et al.*, 2004) est du même ordre de grandeur que les limites expérimentales réalisées en laboratoires à l'aide de balance de torsion (Schlamminger *et al.*, 2008), soit  $10^{-13}$  en précision relative.

Parmi les tests communément réalisés à partir des données LLR, on trouve également les tests de variation de la constante gravitationnelle. Un certain nombre de théories alternatives prévoit en effet la possibilité que les constantes fondamentales puissent posséder des valeurs non constantes. On pense aux théories tenseur-scalaires (*e.g.* Brans et Dicke (1961)) qui introduisent un champ scalaire dynamique. Dans ces théories le couplage gravitationnel varie avec le champ scalaire et la physique gravitationnelle peut devenir dépendante de l'emplacement du repère dans l'espace-temps. À ce jour, les meilleures contraintes sur  $\dot{G}/G$  sont de l'ordre de  $10^{-13}$  (*c.f.* Turyshev et Williams (2007)) et sont dérivées à partir des données LLR.

Nous avons précédemment évoqué la recherche d'interactions sous la forme d'un potentiel de Yukawa (recherche de cinquième force). Des analyses de données LLR effectuées dans le cadre de ce formalisme a permis de mettre des contraintes sur la force  $\alpha$  du potentiel de Yukawa pour une échelle de longueur  $\lambda$  choisie pour coïncider au maximum de

12. Il peut être introduit tel que  $m_g = m_i(1 + \eta\Omega/m_i c^2)$ , avec  $\Omega$  et  $m_i$  qui sont respectivement l'énergie gravitationnelle et la masse inerte de la Terre.

13. Expérience réalisée avec des corps de compositions similaires à celles de la Terre et de la Lune.

sensibilité offert par l'orbite lunaire. Ainsi, Müller *et al.* (2005) ont montré que

$$\alpha = (+3 \pm 2) \times 10^{-11} \quad \text{à} \quad \lambda = 4 \times 10^5 \text{ km.}$$

Dans cette gamme de  $\lambda$ , cette détermination de  $\alpha$  est la plus précise à l'heure actuelle.

Mentionnons également les tests effectués dans le formalisme PPN discuté précédemment. La plupart du temps seuls les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  sont inclus dans les modélisations d'éphémérides planétaires ou lunaires. Les données LLR ne sont pas à l'heure actuelle suffisamment sensibles au paramètre  $\gamma$  pour être compétitives avec l'estimation faite par l'analyse des données Cassini (Bertotti *et al.*, 2003). Cependant, il est possible de déduire du formalisme PPN une relation reliant le paramètre SEP  $\eta$  aux paramètres PPN  $\beta$  et  $\gamma$  (Will et Nordtvedt, 1972) :

$$\eta = 4\beta - \gamma - 3.$$

Ainsi,  $\beta$  peut être déduit de l'estimation conjointe de  $\gamma$  obtenue par analyse de l'effet Shapiro dans les données Cassini et de celle de  $\eta$  obtenue par analyse des données LLR. Williams *et al.* (2004) ont trouvé la limite de

$$\beta = (+1.2 \pm 1.1) \times 10^{-4},$$

qui reste seulement 4.5 fois moins contraignante que la valeur déterminée par Verma *et al.* (2014) (*cf.* Sec. 1.2.3), bien qu'effectuée 10 ans auparavant.

Concernant les autres paramètres du formalisme PPN, ce sont principalement les paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , reliés à des effets de repères privilégiés, qui ont été mesurés via les données LLR. Müller *et al.* (2005) ont ainsi trouvé les contraintes suivantes

$$\alpha_1 = (-7 \pm 9) \times 10^{-5} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = (+1.8 \pm 2.5) \times 10^{-5}.$$

Ces deux estimations comptent parmi les meilleures disponibles actuellement.

Enfin, mentionnons un dernier test effectué par Battat *et al.* (2007). Dans cette étude les auteurs se sont intéressés à analyser des effets de violations au principe d'invariance de Lorentz sur l'orbite lunaire. Pour ce faire, ils ont mené leur étude dans le cadre du formalisme SME (discuté en fin de Sec. 1.2.3). Ils ont ajusté les signatures théoriques préalablement dérivées par Bailey et Kostelecký (2006) (*cf.* Eq. (106)) directement dans des résidus d'observations préalablement réduits via une analyse de données effectuée dans le cadre de la relativité générale. Cette méthode sous-estimant grandement les erreurs formelles ( $\sigma$ ) déterminées par moindres carrés (Le Poncin-Lafitte *et al.*, 2016), ils ont ensuite déduit des erreurs réalistes ( $\sigma_r$ ) en multipliant leurs erreurs formelles par un certain facteur d'échelle ( $F$ ). Ce facteur d'échelle a été déterminé à partir d'une analyse postfit similaire, effectuée dans le cadre du formalisme PPN. Ainsi, les erreurs formelles obtenues sur les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  ont été comparées aux meilleures contraintes en vigueur en 2007 (Bertotti *et al.*, 2003; Williams *et al.*, 2004) afin de déterminer le facteur d'échelle. Les erreurs réalistes sur les paramètres SME ont alors été distribuées sous la forme :  $\sigma_r = F\sigma$  avec  $F = 20$ . Ils ont ainsi déduits des *pseudo-contraintes* sur les combinaisons linéaires théoriques de paramètres SME dérivées par Bailey et Kostelecký (2006). Les estimations sont reproduites en Tab. 1.1.

## 1.4 Travail réalisé dans le cadre de la thèse

Motivée par la singularité théorique du formalisme SME et par le haut degré de précision offert par les observations LLR actuelles, cette thèse vise à contraindre les violations

SME	estimations
$\bar{s}^{11} - \bar{s}^{22}$	$(+1.3 \pm 0.9) \times 10^{-10}$
$\bar{s}^{12}$	$(+6.9 \pm 4.5) \times 10^{-11}$
$\bar{s}^{01}$	$(-0.8 \pm 1.1) \times 10^{-6}$
$\bar{s}^{02}$	$(-5.2 \pm 4.8) \times 10^{-7}$
$\bar{s}_{\oplus c}$	$(+0.2 \pm 3.9) \times 10^{-7}$
$\bar{s}_{\oplus s}$	$(-1.3 \pm 4.1) \times 10^{-7}$

TABLE 1.1 – Table des combinaisons linéaires des paramètres SME ajustées par Battat *et al.*. Les combinaisons sont données de manière explicite en Eqs. (107) et (108) de Bailey et Kostelecký (2006). Les erreurs sont données à  $1\sigma_r$  avec  $\sigma_r = F\sigma$  pour  $F = 20$ .

à la symétrie de Lorentz via l’analyse globale des données de télémétrie laser sur la Lune. Afin de comprendre la différence fondamentale qu’il existe entre l’approche suivie par Battat *et al.* (2007) et celle décrite dans ce manuscrit, nous présentons dans un premier temps les faiblesses de l’analyse de Battat *et al.* (2007). Puis, dans un deuxième temps, nous décrivons la méthodologie développée en thèse afin d’améliorer la méthode d’analyse.

#### 1.4.1 Analyse détaillée de Battat *et al.* (2007)

La méthode précédemment décrite et exposée dans Battat *et al.* (2007), constitue une première approximation de l’estimation attendue sur les coefficients SME lors d’une analyse de données LLR. Cependant, il faut être précautionneux et ne pas interpréter ces estimations comme des contraintes réelles puisque ce genre d’analyse postfit néglige de nombreux points importants.

Premièrement, Le Poncin-Lafitte *et al.* (2016) ont montré à partir des données *very long baseline interferometry* (VLBI) que les analyses postfit pouvaient sous-estimer de plusieurs ordres de grandeurs les estimations réelles. En effet, dans ces analyses seuls les paramètres d’intérêts sont ajustés *i.e.* les paramètres liés au formalisme SME. Les autres paramètres tels que les conditions initiales du problème ou autres quantités physiques ont été déterminés par ajustement du modèle aux observations lors d’une étude préliminaire effectuée dans le cadre de la relativité générale. Ainsi, les paramètres d’intérêt sont déterminés sans prendre en compte les corrélations avec les paramètres globaux (conditions initiales, masses, *etc.*). La conséquence directe est une importante sous-estimation des erreurs formelles (jusqu’à deux ordres de grandeur) comparativement à une analyse effectuée lors d’un ajustement global.

La deuxième remarque que l’on peut faire concerne les signaux théoriques dérivés dans Bailey et Kostelecký (2006). Ils ont été évalués de manière purement analytique en déterminant les amplitudes et fréquences des effets engendrés sur la distance Terre-Lune par une hypothétique violation à la symétrie de Lorentz intervenant au niveau de l’orbite lunaire<sup>14</sup>. Afin de rendre intégrable le problème, de nombreuses simplifications ont été faites, nuisant à la validité dans le temps de la solution dérivée. Ainsi, la géométrie du problème étudié est identique à celle présentée en annexe C, Sec. C.3 (*cf.* Figs C.1 et C.2), pour laquelle l’angle d’inclinaison de l’orbite lunaire sur l’équateur (noté  $I$ ) et la longitude du nœud de l’orbite lunaire sur l’équateur (noté  $\Omega$ ) sont considérés constants. En réalité,

14. La paramétrisation utilisée pour décrire la violation utilise le formalisme SME.

ces deux angles oscillent avec des amplitudes respectives de  $\pm 5^\circ$  et  $\pm 13^\circ$  autour des valeurs moyennes de  $23.4^\circ$  et  $0^\circ$  (*cf.* discussion en Sec. C.3 pour comprendre l'origine de ces valeurs numériques). Cette oscillation traduit la manifestation du mouvement de précession de l'orbite lunaire sur l'écliptique qui s'effectue avec une période de 18.6 ans. Dans l'étude analytique présentée par Bailey et Kostelecký seuls les premiers termes à courte période (de l'ordre de grandeur du mouvement orbital lunaire) ont été dérivés, en négligeant les effets à plus longues périodes puisque les angles  $\Omega$  et  $I$  sont considérés constants. Par conséquent, les signaux analytiques sont suffisants pour une description de quelques années mais présentent l'inconvénient de ne jamais faire intervenir les longues périodes du problème lunaire. Or Battat *et al.* ont réalisé leur analyse postfit sur 34 ans de données, soit quasiment deux fois la période de précession de l'orbite lunaire sur l'écliptique en se basant uniquement sur les signaux à courte période dérivés par Bailey et Kostelecký.

Enfin, mentionnons un troisième et dernier point qui rejoint le premier concernant les corrélations entre paramètres d'intérêts et paramètres globaux. Lors d'une analyse postfit nous avons déjà fait mention de la non-prise en compte des corrélations pour l'évaluation des erreurs formelles. En réalité ces corrélations négligées posent un autre problème quant à la procédure même des analyses postfit. En effet, au vu des accélérations perturbatrices engendrées sur la distance Terre-Lune par une violation au principe d'invariance de Lorentz (*cf.* Eq. (104) de Bailey et Kostelecký (2006)), il est possible de montrer que les signaux ainsi engendrés interviennent à des fréquences fondamentales apparaissant dans le problème lunaire. Par exemple, Bailey et Kostelecký ont montré que l'effet généré sur la distance Terre-Lune par les combinaisons  $\bar{s}^{11} - \bar{s}^{22}$  et  $\bar{s}^{12}$  intervient sous la forme

$$\delta r_{LV}(t) = A_{LV} \cos(2nt + \omega) + B_{LV} \sin(2nt + \omega), \quad (1.7)$$

avec

$$A_{LV} = -\frac{1}{12}(\bar{s}^{11} - \bar{s}^{22})r_0 \quad \text{et} \quad B_{LV} = -\frac{1}{6}\bar{s}^{12}r_0,$$

où  $n$  représente le moyen mouvement de la Lune,  $\omega$  représente la longitude pour une date de référence et  $r_0$  est la distance Terre-Lune non perturbée.

À partir du travail développé en annexe C, nous pouvons montrer que les signatures théoriques créées par le potentiel (2,0) de la Terre (*cf.* Eq. (C.27)), de la Lune (*cf.* Eq. (C.49)) ainsi que le potentiel (2,2) (*cf.* Eq. (C.52)) de la Lune, génèrent un signal périodique de la même forme que (1.7) dont les amplitudes sont la somme des amplitudes (C.27), (C.49), et (C.52). Par conséquent, on peut suspecter au premier ordre, une possible corrélation des combinaisons SME  $\bar{s}^{11} - \bar{s}^{22}$  et  $\bar{s}^{12}$  avec les moments quadripolaires de la Terre et de la Lune et des coefficients de Stockes  $C_{22}$  et  $S_{22}$  du potentiel lunaire. Ainsi, si ces coefficients du potentiel sont ajustés lors de l'analyse préliminaire effectuée dans le cadre de la relativité générale, il se peut que tout le signal à la fréquence  $2n$  soit absorbé dans la redéfinition de ces paramètres. Par conséquent, essayer d'ajuster un signal du type (1.7) dans les résidus de l'analyse préliminaire peut être problématique dans la mesure où l'hypothétique signal peut avoir été absorbé via la redéfinition de paramètres physiques globaux potentiellement corrélés aux paramètres d'intérêts. De plus, si tel est le cas, les estimations ressorties pour les paramètres d'intérêts peuvent être largement sous-estimées en considérant que le signal recherché a pu être en partie absorbé.

Dans la section suivante, nous présentons la méthodologie adoptée en thèse afin de remplir pleinement les objectifs suivis par Battat *et al.* (2007), à savoir poser des contraintes réelles (et non des estimations) sur d'hypothétiques violations au principe d'invariance de Lorentz en analysant les données LLR.

### 1.4.2 Discussion de la méthodologie

La seule manière d'obtenir des contraintes réelles sur les coefficients SME est d'inclure les violations à la symétrie de Lorentz dans une analyse globale calculée dans le cadre du formalisme SME. Ainsi, l'ensemble des corrélations entre paramètres d'intérêts et paramètres globaux est considéré.

L'objectif de l'analyse globale est de confronter une prédiction théorique à un résultat expérimental appelé observation. Le contenu de l'observation LLR se présente sous la forme d'une série temporelle de temps allers-retours de photons entre une station émettrice sur Terre et un rétro réflecteur posé à la surface de la Lune. Ce temps de vol est appelé l'observable de mesure LLR<sup>15</sup>. L'analyse consiste donc à recréer pour chacune des dates d'émission les observables théoriques afin de les confronter aux observations. Les observables vont dépendre principalement de la distance euclidienne entre la station terrestre qui a effectué le tir et le rétro réflecteur qui l'a réfléchi. Cette distance peut être calculée précisément par la connaissance pour chaque date d'observation de :

- i) la position sur la surface terrestre de la station,
- ii) l'orientation de la Terre dans le repère céleste,
- iii) la position sur la surface lunaire du rétro réflecteur,
- iv) l'orientation lunaire dans le repère céleste,
- v) la distance théorique séparant les centres de masses de la Terre et de la Lune.

Ainsi, la modélisation de l'observable LLR et l'analyse des données nécessitent, entre autres, l'utilisation d'une éphéméride lunaire rapportant la distance Terre-Lune ainsi que l'orientation spatiale de la Lune pour toutes les dates d'émissions des tirs lasers.

De plus, rappelons que l'objectif de la thèse est de contraindre des violations à la relativité générale en se plaçant dans le formalisme d'une théorie alternative. Or l'évolution temporelle de la distance Terre-Lune est principalement régie par des phénomènes de nature gravitationnelle. Ainsi, l'évolution de l'écart entre la Terre et la Lune est dépendante de la théorie de gravitation utilisée. Par conséquent, pour effectuer une analyse dans le cadre d'une théorie alternative il est nécessaire que l'éphéméride fournissant la distance Terre-Lune, soit intégrée dans le formalisme de la théorie alternative.

Nous avons donc développé intégralement une éphéméride lunaire numérique appelée *Éphéméride Lunaire Parisienne Numérique* (ELPN), intégrée dans le formalisme SME. Le modèle dynamique de cette nouvelle éphéméride sera présenté dans son intégralité mathématique au Chap. 2. Il incorpore tous les effets physiques produisant une amplitude supérieure au millimètre sur la distance Terre-Lune pour que la précision de la prédiction soit en deçà de la précision observationnelle. De plus, l'intégration numérique des équations du mouvement permet de considérer toutes les fréquences fondamentales du problème lunaire. Ainsi, l'étude n'est pas restreinte à la seule contribution des courtes périodes mais met à profit les effets de longues périodes sur les 45 années d'observations pour permettre de décorréler entre eux les coefficients SME et les paramètres globaux.

Cette nouvelle éphéméride permet de déterminer quelques unes des grandeurs nécessaires à la simulation de l'observable. Elle fournit les positions et vitesses barycentriques

<sup>15</sup>. Dans la pratique, l'observable est une moyenne de temps allers-retours de photons effectuée sur 5 à 10 *min* de tirs afin d'augmenter le ratio signal/bruit. On parle alors de *point-normaux* (cf. Sec. 3.3.1).

des corps dans le système solaire (Soleil, planètes, Lune, Pluton et les 70 plus gros astéroïdes de la ceinture principale), les angles et vitesses angulaires du manteau et du noyau lunaire, la différence d'échelle de temps entre le *temps terrestre* (TT) et le *temps dynamique barycentrique* (TDB) ainsi que les dérivées partielles de chacune de ces quantités relativement aux conditions initiales et paramètres physiques intervenant dans le modèle dynamique. Les dérivées partielles sont intégrées numériquement depuis l'équation aux variations en même temps que les équations du mouvement. Cette méthode robuste mais délicate à implémenter sera détaillée au Chap. 3 et quelques-unes des dérivées partielles sont présentées à la fin des différentes sections du Chap. 2.

Tout ceci constitue ce que nous appelons l'*éphéméride tabulée*, dans la mesure où l'ensemble des solutions décrites précédemment sont distribuées en séries temporelles régulièrement échantillonnées. Cependant, les observations LLR se présentant sous la forme de séries temporelles irrégulièrement échantillonnées, il est nécessaire d'avoir accès aux prédictions de l'éphéméride aux dates d'émissions des tirs lasers. Afin de faciliter l'interpolation pour des dates quelconques l'éphéméride tabulée est transformée en un développement en polynôme de Tchebychev sur des intervalles courts (4 jours) constituant ainsi une *éphéméride Tchebychev*.

La procédure de calcul du temps lumière se fait via un programme de réduction de données appelé CAROLL (Calcul et Analyse des Résidus d'Observations Laser Lune). Il détermine les résidus entre temps lumière calculé et temps lumière observé à partir des prédictions apportées par l'éphéméride Tchebychev lunaire et d'un certain nombre de corrections standards tirées des conventions IERS 2003 (McCarthy et Petit, 2004) et 2010 (Petit *et al.*, 2010). Les différentes étapes permettant la conversion des positions barycentriques en temps lumière théorique seront discutées plus en détail au Chap. 3. Ensuite, en utilisant les dérivées partielles intégrées dans ELPN, les résidus sont minimisés par ajustements de paramètres et les corrections ainsi déterminées sont ajoutées aux paramètres initiaux utilisés pour effectuer la première intégration numérique. Ce schéma itératif est répété autant de fois que nécessaire jusqu'à la convergence des paramètres. La procédure complète est schématisée en Fig. 1.2.

Cette méthode d'analyse a été appliquée dans le cadre du formalisme SME, où les paramètres ajustés comprennent les coefficients SME. Afin d'être en mesure de poser de véritables contraintes sur ces derniers, il est dans un premier temps nécessaire de rechercher les combinaisons linéaires de paramètres auxquels les données LLR sont sensibles, puis dans un second temps, une fois les combinaisons linéaires isolées il reste à fournir des barres d'incertitudes *réalistes*. Tout ce travail fait l'objet du Chap. 4.

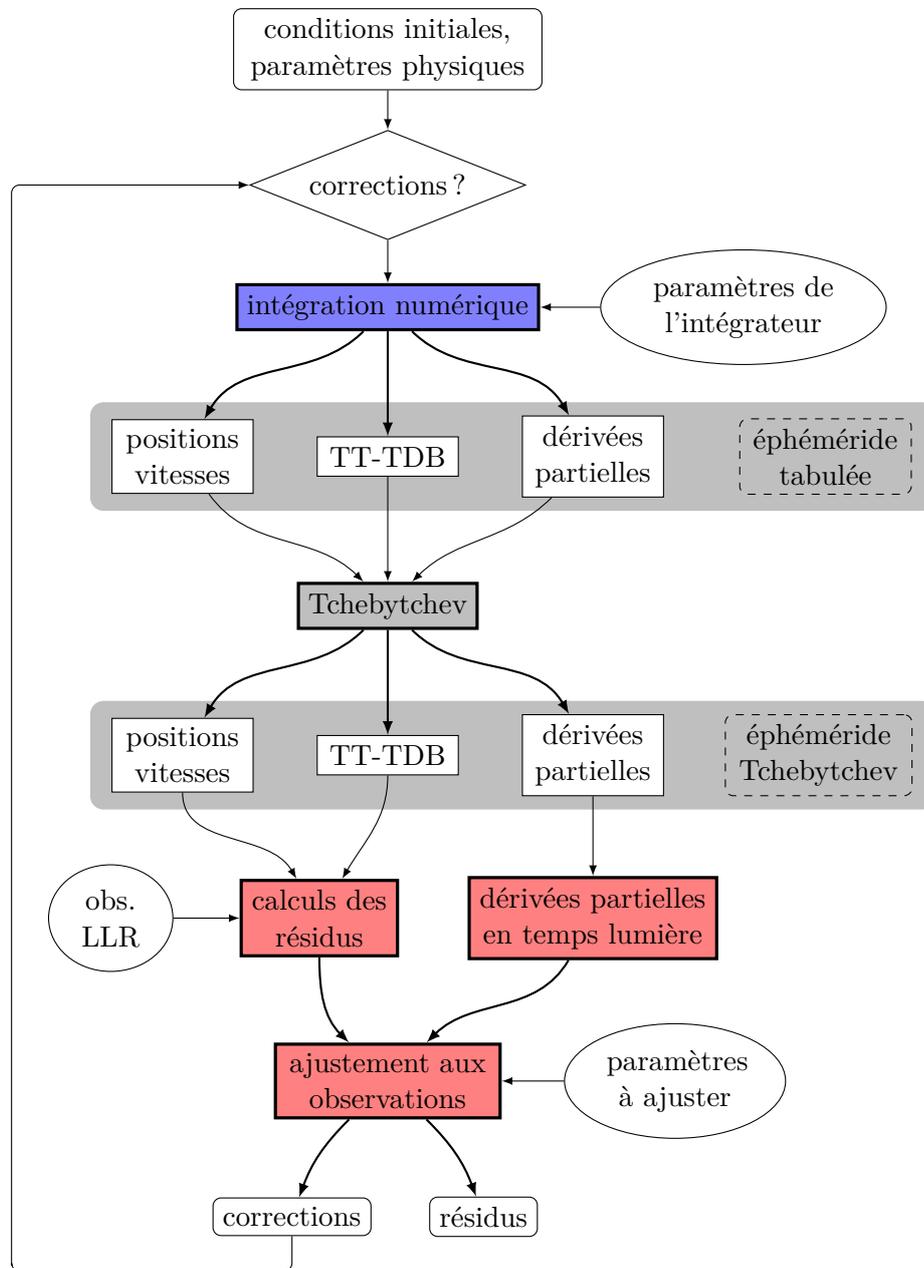


FIGURE 1.2 – Organigramme représentant la procédure d’analyse de données LLR. La couleur *bleue* fait référence au programme d’intégration numérique ELPN et la couleur *rouge* au programme de réduction de données CAROLL. La diminutif *obs. LLR* désigne les observations LLR (regroupées en points normaux).



# Chapitre 2

## Modèle dynamique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>23</b>
<b>2.2</b>	<b>Interactions newtoniennes</b>	<b>24</b>
2.2.1	Équations du mouvement	24
2.2.2	Complément pour l'étude perturbative	25
2.2.3	Dérivées partielles	26
<b>2.3</b>	<b>Corrections relativistes</b>	<b>26</b>
2.3.1	Choix du repère	26
2.3.2	Positions barycentriques	27
2.3.3	Équations du mouvement	29
2.3.4	Dérivées partielles	30
2.3.5	Transformation d'échelles de temps	30
<b>2.4</b>	<b>Potentiels non-sphériques</b>	<b>32</b>
2.4.1	Équations du mouvement	32
2.4.2	Étude perturbative	35
2.4.3	Dérivées partielles	36
<b>2.5</b>	<b>Effets de marées et de spin</b>	<b>37</b>
2.5.1	Effets dissipatifs	37
2.5.2	Détermination des quantités retardées	38
2.5.3	Variation des coefficients de Stokes	39
2.5.4	Étude perturbative	42
2.5.5	Dérivées partielles	42
<b>2.6</b>	<b>Rotation des corps étendus</b>	<b>44</b>
2.6.1	Orientation du Soleil	44
2.6.2	Orientation de la Terre	45
2.6.3	Orientation de la Lune	46
2.6.4	Dérivées partielles	52
<b>2.7</b>	<b>Résumé</b>	<b>55</b>

---

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous exposons les différents effets considérés dans le modèle dynamique implémenté dans ELPN. Ces contributions sont nécessaires à l'élaboration d'une

éphéméride lunaire précise à l'ordre du millimètre sur la distance Terre-Lune. Nous rappelons que l'objectif est la simulation de l'observable de télémétrie laser Lune avec une précision comparable à celle des observations LLR qui sont actuellement sub-centimétriques. Ainsi, en vue d'obtenir une solution précise mais dénuée d'effets superflus, nous essaierons qualitativement et dans la mesure du possible, d'évaluer par une approche perturbative l'amplitude des effets sur la distance Terre-Lune. Ce travail est renvoyé en annexe et seuls les résultats des applications numériques sont discutés.

Nous débutons ce chapitre avec la modélisation des interactions entre corps ponctuels en commençant par la théorie Newtonienne, présentée en Sec. 2.2, puis dans le cadre de la relativité générale en Sec. 2.3. La Sec. 2.4 est dédiée aux perturbations engendrées par les potentiels non-sphériques des corps, ce qui conduit aux sections 2.5 et 2.6 où nous discutons des effets de déformations et d'orientations spatiales de ces corps étendus.

## 2.2 Interactions newtoniennes

Considérons deux corps ponctuels de masses  $m_a$  et  $m_b$  uniquement soumis à leur influence gravitationnelle mutuelle. Newton postule que l'intensité de la force perçue par les deux corps est donnée par

$$F = \frac{\mathcal{G}m_a m_b}{r^2}, \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{G}$  représente la constante universelle de gravitation et  $r = \|\mathbf{r}\|$  est la distance séparant les corps  $a$  et  $b$ .

Conformément à la seconde loi de Newton, les deux corps enregistrent alors une modification instantanée de leur vitesse, proportionnelle à la force ressentie mais également inversement proportionnelle à leur masse. On déduit alors l'intensité des accélérations respectives

$$a_a = \frac{\mu_b}{r^2} \quad \text{et} \quad a_b = \frac{\mu_a}{r^2},$$

où  $\mu_a$  et  $\mu_b$  représentent respectivement les grandeurs  $\mathcal{G}m_a$  et  $\mathcal{G}m_b$ .

### 2.2.1 Équations du mouvement

Lorsqu'on s'intéresse au cas plus général du mouvement de  $n$  corps exerçant les uns sur les autres leur influence gravitationnelle, l'accélération du corps  $a$  dans le champ gravitationnel créé par  $n - 1$  autres corps est donnée par la formule

$$\ddot{\mathbf{r}}_a = \sum_{b \neq a}^n \frac{\mu_b \mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^3} \quad \text{avec} \quad \mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a, \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{r}_a$  et  $\mathbf{r}_b$  sont deux vecteurs reliant respectivement le centre du repère inertiel au centre de masse des corps  $a$  et  $b$ . On démontre très facilement que ce repère peut être confondu avec le barycentre du système fermé contenant les  $n$  corps, dans la mesure où ce dernier décrit un mouvement purement galiléen.

En mécanique classique non relativiste, l'Eq. (2.2) décrit le mouvement absolu (rapporté au centre de masse du système) du corps ponctuel  $a$  sous l'action des potentiels gravitationnels des  $n - 1$  autres corps. Elle constituera l'équation de départ de notre intégration numérique.

### 2.2.2 Complément pour l'étude perturbative

À l'aide de l'Eq. (2.2), il est possible de déterminer l'accélération relative du corps  $b$  notée  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_{ab} = \ddot{\mathbf{r}}_b - \ddot{\mathbf{r}}_a$ , rapportée au corps  $a$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} + \sum_{c \neq a,b} \mu_c \left( \frac{\mathbf{r}_{ac} - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_{ac} - \mathbf{r}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_{ac}}{r_{ac}^3} \right) \quad \text{avec} \quad \mu = \mu_a + \mu_b.$$

Cette équation peut alors être réécrite à l'aide du potentiel képlérien  $\varphi_N(\mathbf{r})$  et du potentiel perturbateur de troisième corps noté  $\delta\varphi(\mathbf{r})$ , soit

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}}(\varphi_N + \delta\varphi), \quad (2.3)$$

avec

$$\varphi_N = -\frac{\mu}{r} \quad \text{et} \quad \delta\varphi = -\sum_{c \neq a,b} \mu_c \left( \frac{1}{\|\mathbf{r}_{ac} - \mathbf{r}\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{ac}}{r_{ac}^3} \right). \quad (2.4)$$

La formulation (2.3) des équations du mouvement est bien adaptée pour l'estimation de l'ordre de grandeur des signaux engendrés sur la distance Terre-Lune, par la présence des différents corps dans le système solaire. En effet, quelque soit le corps perturbateur considéré,  $\delta\varphi$  est une petite correction au potentiel képlérien qui présente une solution analytique connue (les coniques). Cette étude simplifiée, menée pour les effets perturbatifs du Soleil, des planètes et de quelques autres corps, fait l'objet de l'annexe B. Les différentes approximations permettant la détermination des effets perturbatifs y sont détaillées. Parmi les plus importantes, nous rappelons que l'effet perturbatif engendré par chaque corps perturbateur est évalué de manière indépendante. Les effets de résonances sont donc négligés. Nous donnons ici une brève discussion des résultats qui sont présentés en Eqs. (B.8) et (B.17), puis évalués numériquement en Tab. B.3.

La perturbation solaire (*cf.* Eq. (B.8)) est la plus importante avec une amplitude de 2800 km à deux fois la fréquence synodique lunaire. Cette oscillation représente quasiment 1% du rayon moyen de l'orbite lunaire. Concernant les autres corps perturbateurs considérés dans cette étude, Vénus produit le signal à la plus forte amplitude, de l'ordre de 140 m, tandis que l'effet de Pluton demeure en dessous du  $\mu\text{m}$ . Notons que le signal produit par les trois astéroïdes les plus massifs de la ceinture principale se place trois ordres de grandeurs au dessus de celui de Pluton, au niveau millimétrique. Il est donc important de les inclure dans la modélisation. Enfin, notons que toutes les planètes induisent un effet supérieur au mètre, exceptés Uranus et Neptune qui produisent un effet direct de l'ordre du centimètre.

Nous avons également déduit les précisions théoriques requises sur la connaissance des orbites planétaires pour les besoins de l'analyse des données LLR. Ce travail est présenté en Sec. B.5, à partir des solutions (B.8) et (B.17). Pour ce faire, nous avons supposé qu'une signature est observable lorsque la modification qu'elle induit sur la distance Terre-Lune est supérieure au seuil du millimètre. Les résultats sont répertoriés en Tab. B.4. L'orbite qui réclame la plus grande précision relative, à hauteur de  $10^{-10}$ , est le barycentre Terre-Lune. À ce degré de précision, il est nécessaire de prendre en compte les premières corrections relativistes qui interviennent pour des précisions relatives de l'ordre de  $V^2/c^2 \sim 10^{-8}$ , avec  $V$  la vitesse orbitale du barycentre Terre-Lune et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

### 2.2.3 Dérivées partielles

À partir des équations du mouvement des  $n$ -corps (*cf.* Eq. (2.2)), il est possible de déterminer simplement les dérivées partielles des accélérations en fonction des positions absolues et masses mises en jeu. On rappelle que ces dérivées sont nécessaires afin d'ajuster les paramètres du modèle dynamique à toute solution de référence ou bien directement aux observations LLR. L'utilisation des expressions dérivées ici sera illustrée au Chap. 3.

On utilise la notation indicielle sans faire de distinction entre les composantes contrariantes et covariantes, puisque nous travaillons ici dans l'espace Euclidien à trois dimensions. Ainsi, nous choisissons de désigner les composantes des vecteurs par des indices contravariants débutants par le milieu de l'alphabet latin ( $i, j, k, \dots$ ). Par opposition, les indices repérant les corps sont placés en position covariante et sont désignés par le début de l'alphabet latin ( $a, b, c, \dots$ ).

— Dérivées des positions relatives en fonction des positions absolues :

$$\frac{\partial r_{ab}^i}{\partial r_c^j} = [\delta_{bc} - \delta_{ac}] \delta^{ij}. \quad (2.5)$$

— Dérivées des accélérations absolues relativement aux masses :

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_a}{\partial \mu_b} = \frac{\mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^3}. \quad (2.6)$$

— Dérivées des accélérations absolues relativement aux positions relatives :

$$\frac{\partial \ddot{r}_a^i}{\partial r_{ab}^j} = \frac{\mu_b}{r_{ab}^3} [\delta^{ij} - 3\hat{r}_{ab}^i \hat{r}_{ab}^j], \quad (2.7)$$

où  $\hat{r}_{ab}^i$  désigne la composante  $i$  du vecteur unitaire dirigé selon  $\mathbf{r}_{ab}$ .

## 2.3 Corrections relativistes

Une modélisation précise de l'orbite lunaire nécessite l'introduction des premiers termes post-newtoniens dans le modèle dynamique, comme mentionné en fin de Sec. 2.2.2. Pour ce faire, les effets relativistes sont considérés via l'ajout d'accélérations et de moments perturbateurs dans les équations newtoniennes décrivant les mouvements orbitaux et rotationnels. Cette manière d'appréhender la relativité générale n'est conceptuellement pas la bonne<sup>1</sup>, mais reste mathématiquement valable dans le cadre de l'étude en champ faible. Dans cette section, nous présentons l'ensemble des contributions relativistes implémentées dans le modèle dynamique.

### 2.3.1 Choix du repère

L'intégration numérique est réalisée dans un référentiel inertiel dont les axes sont alignés avec ceux de l'*International Celestial Reference System* (ICRS). Le plan ( $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}$ ) est défini par l'équateur moyen de la date à l'époque J2000<sup>2</sup> et l'axe  $\hat{\mathbf{X}}$  est proche de l'intersection entre l'équateur moyen J2000 et le plan de l'écliptique moyen. L'origine de l'ICRS

1. En relativité générale, le mouvement des corps n'est pas compris comme résultant de l'action d'une force, mais plutôt perçu comme un mouvement libre dans un espace-temps courbe (*cf.* Sec. 1.2.2).

2. J2000 est définie au 1er janvier 2000 à 12h 00min 00s, soit le jours julien 2451545.0.

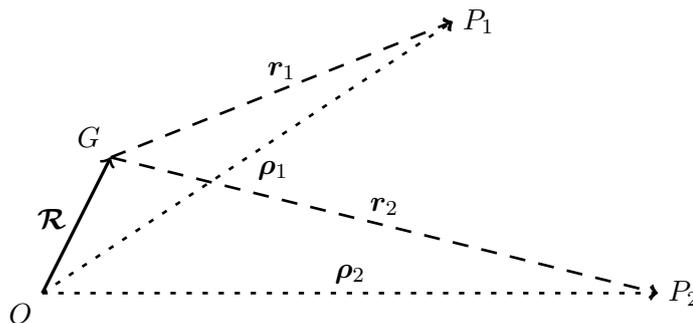


FIGURE 2.1 – Schéma représentant la position du barycentre du système solaire. Le point  $O$  représente l'origine d'un repère inertiel,  $G$  est le point superposé au barycentre du système solaire et  $P_a$  (avec  $a = 1, 2$  sur le schéma) est un point désignant la position du corps  $a$ . Lorsque  $\mathcal{R} \neq 0$ ,  $\mathbf{r}_a$  est le vecteur position barycentrique du corps  $a$  et  $\boldsymbol{\rho}_a$  est le vecteur position du corps  $a$  rapporté au centre du repère.

est centrée sur le barycentre du système solaire et les axes sont dirigés selon la direction de radio-sources extra-galactiques dont les mouvements propres sont rendus négligeables avec la distance d'éloignement. Le temps-coordonnée associé au repère de l'ICRS est le *temps dynamique barycentrique* noté TDB.

### 2.3.2 Positions barycentriques

Dans le cadre de la relativité générale, les systèmes de coordonnées ont une place toute particulière en raison de l'invariance de jauge. Il est donc primordial de s'assurer que les quantités non-jaugées<sup>3</sup> sont bien définies dans le bon repère. Compte-tenu du repère choisi (l'ICRS), il est primordial de connaître la position et la vitesse du barycentre du système solaire puisqu'il incarne le centre du système de référence (*cf.* Fig. 2.1). Ceci peut être fait à partir de l'invariant masse-énergie de la métrique de l'espace temps à  $n$ -corps (Landau et Lifshitz, 1975; Brumberg, 1991; Damour et Vokrouhlický, 1995). La quantité de masse-énergie notée  $\mathcal{M}$ , est conservée et s'exprime sous la forme

$$\mathcal{M} = \sum_a \bar{\mu}_a. \quad (2.8)$$

La sommation est faite sur tous les corps présent dans le système solaire modélisé. La quantité  $\bar{\mu}_a$  définie pour chaque corps, se note à l'approximation post-newtonienne (1PN)<sup>4</sup>

$$\bar{\mu}_a = \mu_a \left[ 1 + \frac{v_a^2}{2c^2} - \frac{1}{2c^2} \sum_{b \neq a} \frac{\mu_b}{r_{ab}} \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{r}_a$  et  $\mathbf{v}_a$  désignent respectivement les vecteurs position et vitesse barycentrique du corps  $a$ . La vitesse barycentrique est définie par l'expression  $\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{r}}_a$ , où le *point* fait référence à la dérivée relativement au TDB et  $c$  représente la vitesse de la lumière dans le vide.

La position du barycentre du système solaire (*cf.* Fig. 2.1, pour les notations) est donnée par une expression analogue au cas newtonien, où les masses sont remplacées par

3. *e.g.* les distances spatiales entre les corps.

4. L'approximation 1PN correspond à la prise en compte de termes en  $1/c^2$ .

leur contrepartie relativiste donnée en Eq. (2.9)

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\sum_a \bar{\mu}_a \boldsymbol{\rho}_a}{\mathcal{M}}. \quad (2.10)$$

On définit également la vitesse du barycentre du système solaire, telle que  $\mathcal{V} \equiv \dot{\mathcal{R}}$ , soit

$$\mathcal{V} \equiv \frac{\sum_a \bar{\mu}_a \boldsymbol{\nu}_a + \sum_a \dot{\bar{\mu}}_a \boldsymbol{\rho}_a}{\mathcal{M}}, \quad (2.11)$$

où nous avons posé  $\boldsymbol{\nu}_a \equiv \dot{\boldsymbol{\rho}}_a$ . La quantité  $\dot{\bar{\mu}}_a$  est calculée en différenciant l'Eq. (2.9) relativement au TDB, soit

$$\dot{\bar{\mu}}_a = \frac{\mu_a}{2c^2} \sum_{b \neq a} \mu_b \frac{\mathbf{r}_{ab} \cdot (\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b)}{r_{ab}^3} + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (2.12)$$

Toujours d'après la Fig. 2.1, il est clair que les positions et vitesses barycentriques sont données par les deux expressions suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a &\equiv -\mathcal{R} + \boldsymbol{\rho}_a, \\ \mathbf{v}_a &\equiv -\mathcal{V} + \boldsymbol{\nu}_a, \end{aligned}$$

où les sommes sur l'indice muet  $a$  apparaissant dans les Eqs. (2.10) et (2.11) peuvent être remplacées par des sommes sur l'indice muet  $b$ . En posant ensuite  $\boldsymbol{\rho}_b = \boldsymbol{\rho}_a + \mathbf{r}_{ab}$  et  $\boldsymbol{\nu}_b = \boldsymbol{\nu}_a + \mathbf{v}_{ab}$ , on peut sortir les vecteurs d'indices  $a$  des sommes sur  $b$  et on obtient les deux relations suivantes qui ne font intervenir que les positions et vitesses relatives entre les corps

$$\mathbf{r}_a = -\frac{\sum_{b \neq a} \bar{\mu}_b \mathbf{r}_{ab}}{\mathcal{M}}, \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{v}_a = -\frac{\sum_{b \neq a} \bar{\mu}_b \mathbf{v}_{ab} + \sum_{b \neq a} \dot{\bar{\mu}}_b \mathbf{r}_{ab}}{\mathcal{M}}. \quad (2.13b)$$

Bien entendu, la détermination des positions et vitesses barycentriques ne modifie pas les écartements relatifs entre les corps, seule l'origine des vecteurs absolus est modifiée.

Au début de l'intégration ( $t_0$ ), afin de rendre le repère cohérent avec l'ICRS, le vecteur position  $\mathcal{R}$  est fixé nul tout comme le vecteur vitesse  $\mathcal{V}$ . À partir de la Fig. 2.1, il est visible que ce choix est équivalent à superposer le centre du repère  $O$ , au barycentre du système solaire  $G$  ce qui amène les relations suivantes  $\boldsymbol{\rho}_a(t_0) = \mathbf{r}_a(t_0)$  et  $\boldsymbol{\nu}_a(t_0) = \mathbf{v}_a(t_0)$ . Mathématiquement ce choix se traduit à partir des Eqs. (2.10) et (2.11) par les deux expressions suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{R}(t_0) = 0 \\ \mathcal{V}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \sum_a \bar{\mu}_a \mathbf{r}_a(t_0) = 0 \\ \sum_a \bar{\mu}_a \mathbf{v}_a(t_0) + \sum_a \dot{\bar{\mu}}_a \mathbf{r}_a(t_0) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Le système d'Eqs. (2.14) se réduit à la même forme que les Eqs. (2.13) pour l'instant  $t_0$ . Ces dernières peuvent être résolues de manière itérative en utilisant en première approximation  $\bar{\mu}_a = \mu_a$  et  $\dot{\bar{\mu}}_a = 0$ . Par conséquent, la première itération fournit les positions et vitesses barycentriques telles qu'elles sont données par la théorie Newtonienne, ce sont donc les itérations suivantes qui ajoutent les corrections relativistes.

Connaissant désormais les positions et vitesses barycentriques, il est possible de déduire les accélérations absolues des corps à l'ordre 1PN.

### 2.3.3 Équations du mouvement

En Sec. 1.2.2, nous avons vu qu'en relativité générale, les mouvements sont décrits par l'équation des géodésiques. Cette dernière peut être exprimée en fonction du temps-coordonnée  $t$ , défini par la composante  $x^0 = ct$ . Ainsi, en réécrivant l'Eq. (1.4) pour les seules composantes spatiales de l'accélération du corps  $a$  en fonction du temps-coordonné, on obtient l'expression suivante

$$\frac{d^2 x_a^i}{dt^2} + \Gamma^i_{\beta\gamma} \frac{dx_a^\beta}{dt} \frac{dx_a^\gamma}{dt} = \frac{1}{c} \Gamma^0_{\beta\gamma} \frac{dx_a^\beta}{dt} \frac{dx_a^\gamma}{dt}. \quad (2.15)$$

Connaissant alors la métrique de l'espace-temps associée à un système de  $n$ -corps ponctuels en interaction gravitationnelle, ainsi que les dérivées premières de cette métrique relativement aux coordonnées, il est possible de déduire à partir de l'Eq. (2.15), l'accélération spatiale du corps  $a$ . On considère ainsi la métrique à  $n$ -corps en formalisme *parametrized post-newtonian*<sup>5</sup> (PPN) (Will, 1993; Klioner et Soffel, 2000), à l'ordre 1PN. Après insertion dans (2.15) et après avoir retranché l'accélération newtonienne (*cf.* Eq. (2.2)), on trouve les corrections relativistes suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_a = & \sum_{b \neq a} \frac{\mu_b \mathbf{r}_{ab}}{c^2 r_{ab}^3} \left\{ - (2\beta + 2\gamma + 1) \frac{\mu_a}{r_{ab}} - 2(\beta + \gamma) \frac{\mu_b}{r_{ab}} + \gamma v_a^2 + (\gamma + 1) v_b^2 \right. \\ & - (2\beta - 1) \sum_{c \neq a, b} \frac{\mu_c}{r_{bc}} - 2(\beta + \gamma) \sum_{c \neq a, b} \frac{\mu_c}{r_{ac}} \\ & \left. - 2(\gamma + 1) \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b - \frac{3}{2} (\hat{\mathbf{r}}_{ba} \cdot \mathbf{v}_b)^2 + \frac{1}{2} \sum_{c \neq a, b} \frac{\mu_c \mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{bc}}{r_{bc}^3} \right\} \\ & + \sum_{b \neq a} \frac{\mu_b \mathbf{v}_{ab}}{c^2 r_{ab}^3} \left\{ \mathbf{r}_{ab} \cdot \left[ (2\gamma + 2) \mathbf{v}_a - (2\gamma + 1) \mathbf{v}_b \right] \right\} \\ & + \frac{(4\gamma + 3)}{2} \sum_{b \neq a} \frac{\mu_b}{r_{ab}} \sum_{c \neq a, b} \frac{\mu_c \mathbf{r}_{bc}}{c^2 r_{bc}^3} + \mathcal{O}(c^{-4}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec  $\hat{\mathbf{r}}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}/r_{ab}$ . Dans cette expression  $\beta$  et  $\gamma$  sont les paramètres post-newtoniens égaux à l'unité en relativité générale et précédemment introduits dans le Chap. 1.

Il est clairement visible de (2.16) que l'accélération absolue d'un corps dépend à l'ordre  $1/c^2$  de sa propre masse. Ceci provient du fait que chaque corps est considéré comme une masse ponctuelle et non plus comme une particule d'épreuve qui ne fait que ressentir le champ de gravitation sans l'influencer. Par conséquent, la masse du corps  $a$  participe à la déformation de l'espace-temps. Une fois la géométrie déterminée, en vertu du EEP les corps suivent des géodésiques de l'espace-temps.

Les Eqs. (2.16) pour  $\beta = \gamma = 1$  sont connues sous le nom d'équations du mouvement EIH (pour Einstein, Infeld et Hoffmann). On trouve dans la littérature différents choix de coordonnées et différentes manières d'obtenir ces équations dans le cadre de la relativité générale (*cf. e.g.* Einstein *et al.* (1938); Fok (1964); Landau et Lifshitz (1975); Brumberg (1991); Damour *et al.* (1991); Soffel *et al.* (2003)).

5. En se limitant aux seuls termes  $\beta$  et  $\gamma$ .

### 2.3.4 Dérivées partielles

On trouvera les dérivées partielles des Eqs (2.16) relativement aux positions, vitesses et masses dans la thèse de Hees (2012). Les dérivées partielles restantes relativement aux paramètres PPN  $\beta$  et  $\gamma$ , se déduisent de manière immédiate de (2.16) et ne seront par conséquent pas présentées.

### 2.3.5 Transformation d'échelles de temps

En relativité générale, le temps n'est plus considéré comme une quantité absolue et deux notions radicalement différentes sont alors introduites. D'une part, on retrouve le temps-coordonnée ( $t$ ), qui est défini comme le temps mesuré par une horloge au repos au centre du repère. Il est utilisé pour l'intégration des équations du mouvement. D'autre part, on trouve le temps propre ( $\tau$ ) qui est défini comme le temps mesuré par une horloge comobile avec un observateur n'importe où dans l'espace-temps. La relation de passage d'un temps à l'autre est déduite de l'invariant d'espace-temps (1.2) pour  $ds^2 = c^2 d\tau^2$ , soit

$$d\tau = \left( g_{00} + 2g_{0i}\hat{v}^i + g_{ij}\hat{v}^i\hat{v}^j \right)^{1/2} dt \quad \text{avec} \quad \hat{v}^i = \frac{dx^i}{dx^0}. \quad (2.17)$$

Dans ELPN, le temps-coordonnée est le TDB. Cependant, nous verrons en Sec. 3.3, que les données LLR sont datées en *temps universel coordonné* (UTC pour *universal coordinated time*) qui peut être relié au *temps atomique international* (TAI). Par conséquent, la reconstruction de l'observable théorique nécessite la connaissance à tout instant de la transformation entre le TDB et le TAI.

Les différentielles totales des temps en Eq. (2.17) dépendent des composantes du tenseur métrique qui elles-mêmes sont des fonctions des positions et vitesses barycentriques des corps. Par conséquent, ces différentielles sont étroitement liées aux trajectoires déterminées par intégration des Eqs. (2.16). Par soucis de cohérence, nous avons donc choisi d'intégrer en plus des équations du mouvement des  $n$  corps, la différence entre les échelles des temps TDB et *temps terrestre* (TT). La différence entre le TAI et le TDB est ensuite facilement retrouvée puisque le TAI est une réalisation du TT au moyen d'une simple dépendance linéaire :  $TT = TAI + 32.184s$ .

#### TDB = $f$ (TCB)

D'après la résolution B3 de l'UAI 2006, « *dans des situations qui demandent l'utilisation d'une échelle de temps-coordonnée qui soit reliée linéairement au TCB et reste, au géocentre, proche du TT pendant un long intervalle de temps* », il est recommandé que « *TDB soit défini par la transformation linéaire suivante de TCB* » :

$$t(\text{TDB}) = t(\text{TCB}) - L_B [\text{JD} - T_0] \times 86400 + t_0(\text{TDB}), \quad (2.18)$$

où  $T_0$  est le jour julien 2443144.5003725, correspondant au 1er janvier 1977 à 0h 00min et 32.184s ;  $L_B = 1.550519768 \times 10^{-8}$  définit le taux du TDB relativement à celui du TCB ;  $t_0(\text{TDB}) = -6.55 \times 10^{-5}s$  ; JD est la date julienne en TCB.

#### TCG = $f$ (TCB)

Comme recommandé par la résolution A4 de la 21ème assemblée générale de l'UAI, tout comme d'autres auteurs comme Brumberg (1991); Damour *et al.* (1991), deux systèmes

de références sont définis dans le cadre de la relativité générale. Le premier est qualifié de global pour le système solaire et s'appelle le *système de coordonnées céleste barycentrique* (BCRS pour *barycentric celestial reference system*). Le second est un référentiel dit local utilisé pour décrire les mouvements au voisinage de la Terre, appelé le *système de coordonnées célestes géocentrique* (GCRS pour *geocentric celestial reference system*).

Le TCB est le temps-coordonnée du BCRS et le TCG est le temps-coordonnée du GCRS. Par conséquent, avec la relation précédemment définie en (2.17), et la métrique à  $n$ -corps exprimée dans le cadre PPN (Klioner et Soffel, 2000), nous déduisons

$$\frac{d\tau(\text{TCG})}{dt(\text{TCB})} = 1 + \frac{1}{c^2}A(\text{TCB}) + \frac{1}{c^4}B(\text{TCB}) + \mathcal{O}(c^{-5}), \quad (2.19)$$

où nous venons de poser

$$A(\text{TCB}) = -\frac{v_T^2}{2} - \sum_{a \neq T} \frac{\mu_a}{r_{Ta}} + \frac{\mu_S (J_2)_S (a_e)_S^2}{r_{ST}^5} \Theta_{20}^{(c)}(\mathbf{r}_{ST}), \quad (2.20)$$

$$B(\text{TCB}) = -\frac{v_T^4}{8} + \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \left[ \sum_{a \neq T} \frac{\mu_a}{r_{Ta}} \right]^2 + \sum_{a \neq T} \frac{\mu_a}{r_{Ta}} \left\{ 2(\gamma+1) \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_T - \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) v_T^2 - (\gamma+1) v_a^2 - \frac{1}{2} \mathbf{a}_a \cdot \mathbf{r}_{Ta} + \frac{1}{2} \left( \frac{-\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{r}_{Ta}}{r_{Ta}} \right)^2 + (2\beta-1) \sum_{b \neq a} \frac{\mu_b}{r_{ab}} \right\}. \quad (2.21)$$

Les fonctions  $\Theta_{nm}^{(c)}(x^i)$  sont des fonctions définies à partir des fonctions associées de Legendre et seront définies en Eq. (2.29). Le vecteur  $\mathbf{r}_{Ta} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_T$  est le vecteur position barycentrique reliant le corps  $a$  au corps  $T$ , où l'indice  $T$  désigne l'appartenance à la Terre. Les quantités  $\mu_S$ ,  $(J_2)_S$  et  $(a_e)_S$  désignent respectivement la masse ( $\mathcal{G}m_S$ ), le moment quadripolaire et le rayon équatorial solaire. Les vecteurs  $\mathbf{v}_a (= \dot{\mathbf{r}}_a)$  et  $\mathbf{a}_a (= \ddot{\mathbf{r}}_a)$  désignent respectivement la vitesse barycentrique et l'accélération du corps  $a$ . Le *point* désigne la dérivée temporelle relativement au TCB. Dans un souci de simplification, on posera  $\mathbf{v}_a(\text{TCB}) \simeq \mathbf{v}_a(\text{TDB})$  et  $\mathbf{a}_a(\text{TCB}) \simeq \mathbf{a}_a(\text{TDB})$  car en différenciant l'Eq. (2.18), on obtient l'Eq. (2.25) qui peut être simplifiée en  $d(\text{TCB}) = d(\text{TDB})$  après avoir négligé les termes en  $L_B$ . L'erreur ainsi commise en (2.19), par l'évaluation des vitesses et accélérations en fonction du TDB sont respectivement de l'ordre de  $\mathcal{O}(c^{-2}L_B)$  et  $\mathcal{O}(c^{-4}L_B)$ .

**TT = f(TCG)**

Nous avons ensuite besoin de la relation entre le TT et TCG. Comme précédemment elle se déduit de l'équation fondamentale (2.17), où les composantes géocentriques de la métrique sont données *e.g.* dans Klioner et Soffel (2000), Eq. (3.32). Par conséquent, avec l'Eq. (2.17) on trouve la relation à l'ordre  $c^{-2}$ , entre le temps propre d'un observateur fixe sur le géoïde terrestre (TT) et le TCG :

$$\tau(\text{TT}) = t(\text{TCG}) - L_G [\text{JD} - 2443144.5] \times 86400. \quad (2.22)$$

Ici,  $L_G = 6.969290134 \times 10^{-10}$  et définit le taux du TT relativement à celui du TCG ; JD est le TAI mesuré en jours julien et 2443144.5 représente le 1er janvier 1977 à 0h 00min 00s exprimé en jours julien.

$$\mathbf{TT} - \mathbf{TDB} = f(\mathbf{TDB})$$

Finalement, avec les Eqs. (2.18), (2.19) et (2.22), on déduit

$$\frac{d(\mathbf{TT})}{d(\mathbf{TDB})} = \left[1 + \frac{A}{c^2} + \frac{B}{c^4}\right] \left[1 + L_B \frac{d(\mathbf{TCB})}{d(\mathbf{TDB})}\right] - L_G \frac{d(\mathbf{TAI})}{d(\mathbf{TDB})}, \quad (2.23)$$

$$\frac{d(\mathbf{TAI})}{d(\mathbf{TDB})} = \left[1 + \frac{A}{c^2} + \frac{B}{c^4}\right] \left[1 - L_G \frac{d(\mathbf{TAI})}{d(\mathbf{TCG})}\right] \left[1 + L_B \frac{d(\mathbf{TCB})}{d(\mathbf{TDB})}\right], \quad (2.24)$$

$$\frac{d(\mathbf{TCB})}{d(\mathbf{TDB})} = 1 + L_B + L_B^2 + L_B^3 + \dots, \quad (2.25)$$

$$\frac{d(\mathbf{TAI})}{d(\mathbf{TCG})} = 1 - L_G + L_G^2 - L_G^3 + \dots. \quad (2.26)$$

Une fois combinées, ces équations fournissent l'évolution de la différence  $\mathbf{TT} - \mathbf{TDB}$ . En ne gardant que le premier ordre en  $L_G$  et  $L_B$ , on arrive à l'expression finale

$$\frac{d(\mathbf{TT} - \mathbf{TDB})}{d\mathbf{TDB}} \simeq [1 + L_B - L_G] \left(L_B + \frac{A}{c^2}\right) - L_G + \frac{B}{c^4}. \quad (2.27)$$

Cette équation est intégrée en même temps que les équations du mouvement, pareillement à Fienga *et al.* (2009), Pitjeva et Pitjev (2014) et Folkner *et al.* (2014).

l'Eq. (2.27) ne permet pas de définir univoquement la différence entre le  $\mathbf{TT}$  et le  $\mathbf{TDB}$  dans la mesure où un offset peut lui être ajouté. Ainsi, conformément à ce qui est fait dans Fienga *et al.* (2009), le terme constant est choisi tel que  $\mathbf{TT} - \mathbf{TDB} = -\tau_0(\mathbf{TDB})$  au 1er janvier 1977 à  $0h\ 00min\ 32.184s$ , où  $\tau_0(\mathbf{TDB})$  a déjà été défini en Eq. (2.18). Cette correction sera appliquée après intégration lors du passage de la solution tabulée en polynômes de Tchebychev.

## 2.4 Potentiels non-sphériques

La Lune, le Soleil et la Terre ne peuvent pas être considérés uniquement comme des masses ponctuelles comme nous l'avons supposé dans la Sec. 2.2. En effet, les contributions apportées à l'accélération par leur potentiel non-sphérique conduit à un effet supérieur à l'ordre du millimètre sur la distance Terre-Lune ou le mouvement orbital des planètes (*cf.* discussion en Sec. 2.4.2).

### 2.4.1 Équations du mouvement

D'après la formulation développée par Kaula (*cf.* Eq. (1.31) de Kaula (1966)) nous utilisons les harmoniques sphériques pour décrire le potentiel des corps étendus. En se plaçant dans un référentiel lié au centre de masse du corps étendu, le potentiel additionnel peut être exprimé sous la forme suivante (*cf.* annexe C.2 Eq. (C.14))

$$\varphi = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \varphi_{lm} \quad \text{avec} \quad \varphi_{lm} = -\frac{\mu a_e^l}{r^{2l+1}} \{C_{lm} \Theta_{lm}^{(c)}(\mathbf{r}) + S_{lm} \Theta_{lm}^{(s)}(\mathbf{r})\}, \quad (2.28)$$

où  $\mu = \mathcal{G}M$  avec  $M$  la masse du corps non-sphérique,  $a_e$  est son rayon équatorial,  $C_{lm}$  et  $S_{lm}$  étant les coefficients de Stokes du potentiel (*cf.* Eq. (C.13)).  $\Theta_{lm}^{(c)}$  et  $\Theta_{lm}^{(s)}$  sont deux fonctions dépendantes des composantes du vecteur  $\mathbf{r}$  représentant lui-même la position

relative du point où est évalué le potentiel rapporté au centre de masse du corps non-sphérique. En coordonnées sphériques  $(r, \phi, \lambda)$ , les fonctions  $\Theta_{lm}^{(c)}$  et  $\Theta_{lm}^{(s)}$  sont définies par les deux relations suivantes

$$\begin{Bmatrix} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{Bmatrix}(\mathbf{r}) = r^l P_{lm}(\sin \phi) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix}(m\lambda), \quad (2.29)$$

où les  $P_{lm}$  sont les fonctions associées de Legendre de degré  $l$  et d'ordre  $m$ .

On donne en Tab. 2.1 et 2.2 les 5 premiers degrés non nuls de  $\Theta_{lm}^{(c)}$  et  $\Theta_{lm}^{(s)}$  exprimés en coordonnées cartésiennes. Ces expressions se déduisent aisément à partir d'un logiciel de calcul formel pour n'importe quelles valeurs de  $l$  et  $m$ . Ainsi, les valeurs présentées en Tab. 2.1 et 2.2 ont été calculées avec *Mathematica* Wolfram Research (2016).

L'accélération absolue d'une masse ponctuelle due à la présence du corps non-sphérique est donnée, dans le repère lié au corps central, par l'opposé du gradient du potentiel (2.28)

$$\mathbf{a} = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \mathbf{a}_{lm},$$

où nous venons de poser

$$\mathbf{a}_{lm} = \frac{\mu a_e^l}{r^{2l+1}} \left\{ C_{lm} \left[ \frac{\partial \Theta_{lm}^{(c)}}{\partial \mathbf{r}} - (2l+1) \Theta_{lm}^{(c)} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right] + S_{lm} \left[ \frac{\partial \Theta_{lm}^{(s)}}{\partial \mathbf{r}} - (2l+1) \Theta_{lm}^{(s)} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right] \right\}. \quad (2.30)$$

Afin d'alléger l'écriture, nous avons volontairement omis de préciser la dépendance en  $\mathbf{r}$  des fonctions  $\Theta_{lm}$ . Remarquons que l'Eq. (2.30) est parfaitement adaptée pour une implémentation numérique puisqu'elle est valable pour tout degré  $l$  et tout ordre  $m$  en coordonnées cartésiennes dès lors que les fonctions  $\Theta_{lm}$  et leur gradient sont connus, ce qui est précisément le cas. C'est donc cette équation qui a été implémentée dans le programme d'intégration numérique pour modéliser les perturbations orbitales engendrées par les potentiels des corps non-sphériques. Comme nous l'avons déjà souligné, l'accélération telle qu'elle est exprimée en (2.30), appartient au repère lié au corps non-sphérique. On la transforme en une accélération exprimée dans le repère ICRS en appliquant la matrice de passage appropriée ; ce sujet fait l'objet de la Sec. 2.6. Notons enfin, qu'il est essentiel lors de l'intégration numérique, de prendre en compte l'effet de réaction induit sur les corps étendus.

Dans ELPN, les corps non-sphériques sont la Terre, la Lune et le Soleil. Le modèle utilisé pour décrire l'enveloppe lunaire est un modèle de potentiel complet incluant les harmoniques zonales, sectorielles et tessérales modélisées jusqu'au cinquième degré. Concernant la Terre et le Soleil, nous avons choisi de les modéliser comme des corps axi-symétriques puisque seules les harmoniques zonales sont prises en compte. Cette modélisation est également celle adoptée par Fienga *et al.* (2008) (*cf.* Manche (2011) pour une discussion plus détaillée) ou encore Folkner *et al.* (2014). L'avantage est la possibilité *a posteriori*, de négliger les mouvements de rotation rapide des deux corps. Ainsi, le pas d'intégration numérique peut alors être augmenté sans perte de précision puisque tous les effets de fréquences inférieures au mois sont ainsi négligés. Cependant, un avantage à l'implémentation ne pouvant être reçu comme une justification valable dans notre démarche scientifique, nous présentons dans la section suivante une explication plus physique en se basant sur le travail décrit en annexe C.

$l$	$m$	$\Theta_{lm}^{(c)}(\mathbf{r})$
2	0	$z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
2	1	$3xz$
2	2	$3(x^2 - y^2)$
3	0	$\frac{z}{2}[2z^2 - 3(x^2 + y^2)]$
3	1	$\frac{3x}{2}[4z^2 - (x^2 + y^2)]$
3	2	$15z(x^2 - y^2)$
3	3	$15x(x^2 - 3y^2)$
4	0	$\frac{1}{8}[8z^4 - 24z^2(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 + 3(x^4 + y^4)]$
4	1	$\frac{5xz}{2}[4z^2 - 3(x^2 + y^2)]$
4	2	$\frac{15}{2}[6z^2(x^2 - y^2) - (x^4 - y^4)]$
4	3	$105xz(x^2 - 3y^2)$
4	4	$105(x^4 + y^4 - 6x^2y^2)$
5	0	$\frac{z}{8}(30x^2y^2 + 15(x^4 + y^4) - 40z^2(x^2 + y^2) + 8z^4)$
5	1	$\frac{15}{8}(x^5 + 2x^3y^2 + xy^4 - 12xz^2(x^2 + y^2) + 8xz^4)$
5	2	$-\frac{105z}{2}(x^4 - y^4 - 2z^2(x^2 - y^2))$
5	3	$-\frac{105x}{2}(x^4 - 2x^2y^2 - 3y^4 - 8x^2z^2 + 24y^2z^2)$
5	4	$945z(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$
5	5	$945x(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4)$

TABLE 2.1 – Valeurs de  $\Theta_{lm}^{(c)}(\mathbf{r})$  données en coordonnées cartésiennes jusqu'au degré 5.

$l$	$m$	$\Theta_{lm}^{(s)}(\mathbf{r})$
2	1	$3yz$
2	2	$6xy$
3	1	$\frac{3y}{2}[4z^2 - (x^2 + y^2)]$
3	2	$30xyz$
3	3	$15y(3x^2 - y^2)$
4	1	$\frac{5yz}{2}[4z^2 - 3(x^2 + y^2)]$
4	2	$15xy[6z^2 - (x^2 + y^2)]$
4	3	$105yz(3x^2 - y^2)$
4	4	$420xy(x^2 - y^2)$
5	1	$\frac{15}{8}(x^4y + 2x^2y^3 + y^5 - 12yz^2(x^2 + y^2) + 8yz^4)$
5	2	$-105xyz(x^2 + y^2 - 2z^2)$
5	3	$-\frac{105y}{2}(3x^4 + 2x^2y^2 - y^4 - 24x^2z^2 + 8y^2z^2)$
5	4	$3780xyz(x^2 - y^2)$
5	5	$945y(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4)$

TABLE 2.2 – Valeurs non nulles de  $\Theta_{lm}^{(s)}(\mathbf{r})$  données en coordonnées cartésiennes jusqu'au degré 5.

### 2.4.2 Étude perturbative

Tout d'abord, en reprenant l'Eq. (2.30) nous voyons que les accélérations perturbatrices sont de la forme  $a_{lm} \propto \mu a_e^l r^{-(l+2)} (C_{lm} + S_{lm})$ . De plus, en se basant sur les Eqs. (A.26) et (A.24) de l'annexe A, on constate que le signal  $x \propto \chi \propto A_0 / (n_0^2 - n'^2)$ , où  $A_0$  est l'amplitude réelle de la perturbation, soit  $A_0 = a_{lm}$ . Les fréquences  $n_0$  et  $n'$  sont respectivement la fréquence naturelle de la perturbation radiale et la fréquence excitatrice de la perturbation. Par conséquent, on s'attend à ce que le signal engendré par une harmonique de degré  $(l, m)$  sur la distance  $r$  soit de la forme

$$x_{lm} \propto \frac{\mu a_e^l}{n^2 - n'^2} \frac{(C_{lm} + S_{lm})}{r^{l+2}}. \quad (2.31)$$

Nous avons posé  $n_0 \simeq n$ , avec  $n$  la fréquence de l'orbite circulaire.

Dès lors, les effets de non-sphéricité de nos trois corps étendus s'amenuisent en  $r^{-(l+2)}$ , par conséquent, on s'attend à ce que seules les premières harmoniques ( $l$  petit) aient des chances de produire un effet important. De plus, en considérant l'enveloppe générale de nos trois corps étendus, on s'attend à ce que les déviations relativement à la sphère soient petites. Dans ce cas, les valeurs numériques des coefficients  $C_{lm}$  et  $S_{lm}$  peuvent être petites, diminuant d'autant plus l'amplitude du signal  $x_{lm}$ .

#### Potentiel terrestre

En se basant sur ce constat, nous avons calculé en annexe C, l'ordre de grandeur des effets du potentiel terrestre de degré 2. D'après les expressions (C.27), (C.30), et (C.33), nous voyons que seul le moment quadripolaire ( $J_2$ ) a un effet supérieur au mètre alors que les autres harmoniques de degré 2 peuvent être négligées puisqu'elles sont bien en dessous du millimètre. Ce dernier point est en partie expliqué par la faible valeur des coefficients  $C_{21}$ ,  $S_{21}$ ,  $C_{22}$  et  $S_{22}$ , mais également par la fréquence de la perturbation qui se simplifie telle que  $n' \simeq mn_{\oplus}$  (cf. Eqs. (C.30) et (C.33)) pour  $m \neq 0$ , avec  $m$  l'ordre de l'harmonique et  $n_{\oplus}$  la fréquence de rotation propre de la Terre. Par conséquent, l'Eq. (2.31) devient, pour  $m \neq 0$

$$x_{2m} \propto \frac{\mu a_e^2}{m^2 n_{\oplus}^2} \frac{(C_{2m} + S_{2m})}{r^4}.$$

On voit alors apparaître un terme en  $n_{\oplus}^2$  au dénominateur, là où la perturbation  $x_{20}$  faisait intervenir un terme en  $n^2$ , or  $n_{\oplus} \gg n$  avec  $n^2/n_{\oplus}^2 \simeq 0.001$ .

Ainsi, la non modélisation des harmoniques (2,1) et (2,2) est tout à fait légitime et permet de négliger la fréquence de rotation de la Terre qui intervient uniquement dans les Eqs. (C.30), et (C.33).

#### Potentiel solaire

D'une étude analogue présentée en Sec. C.4, il apparaît que l'effet différentiel du moment quadripolaire solaire sur la distance Terre-Lune n'est pas négligeable. En effet, à partir de la solution présentée en Eqs. (C.42) et (C.43), on constate que l'effet atteint l'ordre de grandeur du millimètre dans certaines configurations, notamment lorsque l'angle d'inclinaison formé entre le plan orbital lunaire et l'équateur terrestre prend sa valeur minimale de  $18.3^\circ$  (cf. Fig C.1).

## Potentiel lunaire

De même, en Sec. C.5, nous avons essayé de quantifier l'effet du potentiel lunaire de degré 2 sur la distance Terre-Lune. Ainsi, à partir des solutions (C.49), (C.50) et (C.52) on constate que les amplitudes supérieures au  $mm$  sont générées par les coefficients  $J_2$  et  $C_{22}$  du potentiel lunaire. On voit également que les coefficients  $S_{21}$  et  $S_{22}$  produisent un effet périodique, totalement négligeable dans le cas de  $S_{22}$  et de l'ordre du  $\mu m$  sur la distance Terre-Lune pour  $S_{21}$ . En revanche, en raison d'un effet résonant entre une des fréquences induites par l'harmonique (2,1) et la fréquence naturelle de la perturbation radiale, on constate que le signal engendré sur la distance Terre-Lune par le coefficient  $C_{21}$  est juste en dessous du  $mm$ . Par conséquent, bien qu'il ne soit pas modélisé pour le moment, nous n'excluons pas dans un avenir proche de l'implémenter afin de quantifier numériquement son impact dans l'analyse des données LLR. Il semble qu'à l'heure actuelle, aucune des équipes réalisant des éphémérides lunaires ne l'ai inclus dans leur modélisation respective compte-tenu de sa valeur numérique extrêmement faible qui reste de l'ordre de  $10^{-10}$ .

### 2.4.3 Dérivées partielles

À partir l'Eq. (2.30), il est très facile de déterminer les dérivées partielles associées à l'accélération absolue créée par les potentiels non-sphériques de degré  $l$  et d'ordre  $m$ .

— Dérivée partielle de l'accélération absolue en fonction de la masse :

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{lm}}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu} \mathbf{a}_{lm} . \quad (2.32)$$

— Dérivée partielle de l'accélération absolue en fonction du rayon équatorial :

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{lm}}{\partial a_e} = \frac{l}{a_e} \mathbf{a}_{lm} . \quad (2.33)$$

— Dérivée partielle de l'accélération absolue en fonction du coefficient de Stokes  $C_{nm}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{lm}}{\partial C_{nm}} = \frac{\mu a_e^l}{r^{2l+1}} \left[ \frac{\partial \Theta_{lm}^{(c)}}{\partial \mathbf{r}} - (2l+1) \Theta_{lm}^{(c)} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right] . \quad (2.34)$$

— Dérivée partielle de l'accélération absolue en fonction du coefficient de Stokes  $S_{nm}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{lm}}{\partial S_{nm}} = \frac{\mu a_e^l}{r^{2l+1}} \left[ \frac{\partial \Theta_{lm}^{(s)}}{\partial \mathbf{r}} - (2l+1) \Theta_{lm}^{(s)} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right] . \quad (2.35)$$

— Dérivée partielle de l'accélération absolue en fonction de la position relative :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{lm}^i}{\partial r^j} = \frac{\mu a_e^l}{r^{2l+1}} \left\{ C_{lm} \left[ \frac{\partial^2 \Theta_{lm}^{(c)}}{\partial r_i \partial r^j} - \frac{(2l+1)}{r^2} \left\{ r^i \frac{\partial \Theta_{lm}^{(c)}}{\partial r^j} + r_j \frac{\partial \Theta_{lm}^{(c)}}{\partial r_i} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \Theta_{lm}^{(c)} \left[ \delta_j^i - (2l+3) \frac{r^i r_j}{r^2} \right] \right\} \right] \right. \\ \left. + S_{lm} \left[ \frac{\partial^2 \Theta_{lm}^{(s)}}{\partial r_i \partial r^j} - \frac{(2l+1)}{r^2} \left\{ r^i \frac{\partial \Theta_{lm}^{(s)}}{\partial r^j} + r_j \frac{\partial \Theta_{lm}^{(s)}}{\partial r_i} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \Theta_{lm}^{(s)} \left[ \delta_j^i - (2l+3) \frac{r^i r_j}{r^2} \right] \right\} \right] \right\} . \quad (2.36) \end{aligned}$$

Pour calculer le gradient de l'accélération totale nous devons sommer sur tous les  $l$  et  $m$ .

Ces équations, tout comme l'Eq. (2.30), restent également valables quelque soit  $l$  et  $m$  et ont donc été implémentées. Il convient de remarquer que l'Eq. (2.30) est donnée dans le repère lié au corps étendu, par conséquent le gradient de  $\mathbf{a}_{lm}$  donné par l'Eq. (2.36) est lui aussi exprimé dans le repère lié au corps étendu.

## 2.5 Effets de marées et de spin

Pour une intégration précise du mouvement orbital lunaire, un plus haut degré de modélisation est nécessaire. Puisque la Terre et la Lune sont proches l'une de l'autre, il est important de considérer les déformations engendrées sur ces deux corps étendus. Ces distorsions conduisent à des contributions additionnelles lors de l'intégration des mouvements orbitaux et rotationnels des corps et sont de deux natures différentes. La première est générée par les effets de marées dus à la présence d'autres corps situés à proximité. La seconde est la déformation due au mouvement de rotation propre des corps étendus, causée par d'éventuelles variations de leur vecteur vitesse angulaire. Parmi les corps étendus modélisés dans ELPN, seules la Terre et la Lune sont déformées par effets de marées et seules les distorsions introduites par la variation du spin lunaire sont modélisées car les vitesses angulaires de la Terre et du Soleil sont considérées constantes.

### 2.5.1 Effets dissipatifs

En vue d'obtenir une modélisation plus précise, pour notamment rendre compte du taux d'éloignement séculaire de la Lune de  $3.8 \text{ cm/an}$ , les distorsions sont introduites en considérant l'inélasticité des corps étendus. Les corps inélastiques ne réagissent pas instantanément aux perturbations externes ; ce retard à la réaction est dû à des phénomènes de frictions à l'intérieur du corps qui conduisent à des phénomènes de dissipation d'énergie.

#### Dissipation due aux marées

Dans ELPN, la dissipation due aux marées est considérée en introduisant dans la modélisation numérique les positions retardées des corps générateurs de marées. Cette modélisation est équivalente à l'insertion d'un angle de déphasage entre la position du corps générateur et la direction du bulbe de marée. La position retardée des corps générateurs de marées est calculée dans le repère lié au corps étendu grâce à l'expression suivante

$$\mathbf{r}_g^* = \mathbf{B}(t - \tau_{lm}^r) \cdot \mathbf{r}_g^I(t - \tau_{lm}^o), \quad (2.37)$$

où  $\mathbf{r}_g^*$  désigne la position retardée du corps générateur de marées,  $\mathbf{r}_g^I$  est le vecteur position du corps générateur de marée exprimé dans l'ICRF, et  $\mathbf{B}$  est la matrice de rotation permettant de passer d'un vecteur appartenant à l'ICRF à un vecteur exprimé dans l'équateur vrai de la date du corps étendu. Nous avons également introduit le temps de déphasage rotationnel noté  $\tau_{lm}^r$  qui est appliqué aux matrices de passages et le temps de déphasage orbital  $\tau_{lm}^o$  qui est appliqué au vecteur position exprimé dans l'ICRF. Ils dépendent tous deux du degré  $l$  et de l'ordre  $m$  de l'harmonique considérée.

L'Eq. (2.37) peut-être réécrite sous la forme compactée suivante

$$\mathbf{r}_g^* = \mathbf{B}^{*r} \cdot \mathbf{r}_g^{I*o}, \quad (2.38)$$

en introduisant les notations " $*r$ " et " $*o$ " désignant respectivement l'évaluation des quantités concernées aux instants  $t - \tau_{lm}^r$  et  $t - \tau_{lm}^o$ .

Dans le cas des marées levées sur la Terre, l'Eq. (2.38) peut être simplifiée à partir de considérations purement observationnelles. En effet, les quantités  $\tau_{2m}^r$  sont extrêmement faibles (de l'ordre de la dizaine de minutes) comparativement aux durées caractéristiques des mouvements de rotation de la Terre (la période de la rotation propre s'effectue en  $23h\ 56min$ , les périodes principales de la nutation en 18.6 ans, et la période de précession en 26000 ans). Ainsi, en ne conservant que l'ordre 0 du développement de  $(\mathbf{B})_T(t - \tau_{lm}^r)$ , excepté pour l'angle rapide de rotation de la Terre pour lequel on conserve le premier ordre, on parvient à l'expression suivante

$$\mathbf{r}_g^* = \left[ \mathbf{B}_{\hat{Z}}(-\tau_{lm}^r n_{\oplus}) \cdot (\mathbf{B})_T(t) \right] \cdot \mathbf{r}_g^{I*o}, \quad (2.39)$$

où  $\mathbf{B}_{\hat{Z}}(\gamma)$  est une matrice de rotation directe d'angle  $\gamma$  selon l'axe  $\hat{Z}$ . La matrice  $(\mathbf{B})_T(t)$  sera définie en Sec. 2.6 dans la partie concernant l'orientation de la Terre.

### Dissipation due à la rotation propre

Dans ELPN, on considère également la dissipation due à la rotation lunaire. De manière analogue à ce qui est fait pour la modélisation de la dissipation due aux marées, on introduit le vecteur vitesse instantanée de rotation retardé noté  $\boldsymbol{\omega}^*$ , lui aussi calculé pour l'instant  $t - \tau_{lm}^r$ . Nous verrons en Sec. 2.6.3 Eq. (2.63), que  $\boldsymbol{\omega}$  s'exprime en fonction des trois angles d'Euler regroupés dans la variable  $\boldsymbol{\xi} = {}^T(\phi, \theta, \psi)$ . Par conséquent,  $\boldsymbol{\omega}^*$  sera déterminé à partir de  $\boldsymbol{\xi}^*$ .

### 2.5.2 Détermination des quantités retardées

Il existe différentes manières de déterminer les quantités retardées  $\mathbf{r}_g^{I*o}$  et  $\boldsymbol{\xi}^*$ . Les deux premières ne considèrent que les premiers ordres des développements en  $\tau_{lm}$ . En effet, nous avons déjà mentionné que pour la Terre les temps de déphasage sont de l'ordre de la dizaine de minutes. Pour la Lune, ils sont de l'ordre de l'heure. Ainsi, il est possible de considérer que la variation des quantités retardées est faible durant ces laps de temps. Une autre méthode permettant une détermination beaucoup plus précise des quantités retardées (notamment pour la Lune) consiste à intégrer numériquement un modèle simplifié entre les instants  $t$  et  $t - \tau_{lm}$ .

#### Ordre 1 en $\tau_{lm}$

En désignant par  $\mathbf{X}$  une des quantités vectorielles comme le vecteur position et angles d'Euler, le développement de Taylor de  $\mathbf{X}$  au premier ordre en  $\tau_{lm}$  donne la relation suivante

$$\mathbf{X}(t - \tau_{lm}) = \mathbf{X}(t) - \tau_{lm} \dot{\mathbf{X}}(t) + \mathcal{O}(\tau_{lm}^2), \quad (2.40)$$

où  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  représente le vecteur vitesse qui est connu à tout instant  $t$ .

#### Ordre 2 en $\tau_{lm}$

Le développement de Taylor de  $\mathbf{X}$  à l'ordre suivant donne

$$\mathbf{X}(t - \tau_{lm}) = \mathbf{X}(t) - \tau_{lm} \dot{\mathbf{X}}(t) + \frac{1}{2} \tau_{lm}^2 \ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathcal{O}(\tau_{lm}^3), \quad (2.41)$$

où  $\ddot{\mathbf{X}}(t)$  représente le vecteur accélération qui peut être déterminé à tout instant  $t$  via une forme simplifiée en considérant que  $\tau_{lm}^2$  est une petite quantité.

### Intégration Runge-Kutta à l'ordre 4

Manche (2011) a démontré (*cf.* Part. I Chap. 6) que pour un temps de déphasage identique à celui du degré 2 de la Lune, la méthode d'ordre 1 produit des erreurs de l'ordre de la centaine de kilomètre sur la distance Terre-Lune et de l'ordre de la centaine de  $km/h$  sur la vitesse géocentrique de la Lune comparativement à une solution numérique existante (DE405)<sup>6</sup>. Quant à la méthode d'ordre 2, il a démontré que l'erreur sur la position est de l'ordre de quelques kilomètres et celle sur la vitesse de l'ordre de quelques  $km/h$ , toujours comparativement à la solution DE405. Il a alors montré qu'une intégration numérique d'un problème simplifié entre les instants  $t$  et  $t - \tau_{lm}$  permet de faire redescendre l'erreur absolue sur la position sous la barre du mètre et sous la barre du  $m/h$  pour la vitesse. Il a fait un constat identique concernant les angles d'Euler et leur dérivée temporelle. Il a ainsi démontré qu'une intégration numérique d'un problème de libration lunaire simplifié permet de faire redescendre les erreurs sur les angles d'Euler de quelques centaines de milliarcsecondes à quelques  $10^{-1} mas$  et de la dizaine de  $mas/h$  à quelques  $10^{-1} mas/h$  pour les vitesses angulaires.

Ainsi, en s'inspirant du travail de Manche (2011), les positions et vitesses ainsi que les angles d'Euler et leur dérivée temporelle retardée sont calculés par intégration numérique d'un modèle simplifié comprenant uniquement les interactions newtoniennes ponctuelles entre le Soleil, la Lune et la Terre ainsi que les librations lunaires entre les instants  $t$  et  $t - \tau_{lm}$ . L'intégration numérique entre les instants  $t$  et  $t - \tau_{lm}$  est réalisée grâce à un intégrateur de type Runge-Kutta à l'ordre 4 (RK4) préalablement implémenté. Les positions et vitesses orbitales retardées ainsi que les angles d'Euler et leur dérivée temporelle retardée sont donc données par résolutions numériques des intégrales suivantes

$$\mathbf{r}_g^{I*o} = \int_t^{t-\tau_{lm}^o} \mathbf{v}_g^I(t') dt', \quad (2.42a)$$

$$\mathbf{v}_g^{I*o} = \int_t^{t-\tau_{lm}^o} \mathbf{a}_g^I(t') dt', \quad (2.42b)$$

$$\boldsymbol{\xi}^{*r} = \int_t^{t-\tau_{lm}^r} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t') dt', \quad (2.42c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^{*r} = \int_t^{t-\tau_{lm}^r} \ddot{\boldsymbol{\xi}}(t') dt', \quad (2.42d)$$

où les expressions de  $\mathbf{a}_g^I(t')$  et  $\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t')$  sont des versions simplifiées des équations implémentées dans l'intégration principale. Ainsi,  $\mathbf{a}_g^I(t')$  ne tient compte que des effets ponctuels newtoniens de la Terre, de la Lune, et du Soleil. Quant aux librations lunaires, seul le couple extérieur exercé par la Terre sur le degré 2 du potentiel lunaire est considéré.

### 2.5.3 Variation des coefficients de Stokes

Dans ELPN les déformations non-élastiques sont modélisées selon la théorie de Love (1911). Dans cette description, la variation du potentiel d'un corps non-sphérique est proportionnelle au potentiel perturbateur externe (noté  $V_{lm}$ ) qui agit sur le corps étendu.

6. Cette comparaison a été réalisée sur 200 ans centrés sur J2000.

Le coefficient de proportionnalité est alors le nombre de Love  $k_{lm}$  (*cf.* Sec. D.2 de l'annexe D). Dans le cas des effets de marées,  $V_{lm}$  est considéré comme étant le potentiel du corps générateur de marées et est une fonction de sa position retardée et de sa masse. Dans l'autre cas où les déformations sont dues au spin,  $V_{lm}$  est une fonction du vecteur vitesse angulaire retardé. Cette modélisation permet de considérer les effets de déformations au travers de la variation des coefficients de Stokes (*cf.* Sec. D.2). Dans ELPN, nous considérons uniquement les variations du deuxième degré du potentiel des corps étendus, de manière similaire à ce qui est réalisée dans les différentes versions d'INPOP (Fienga *et al.*, 2009; Manche, 2011).

Ainsi, dans le cas des déformations introduites par les phénomènes de marées, nous avons implémenté les expressions suivantes valables quelque soit le degré et l'ordre de l'harmonique (*cf.* annexe D pour plus de détails)

$$\begin{cases} \Delta C_{lm}^T \\ \Delta S_{lm}^T \end{cases} = k_{lm}(2 - \delta_{0m}) \frac{\mu_g}{\mu} \frac{a_e^{l+1}}{r_g^{*2l+1}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \begin{cases} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{cases} (\mathbf{r}_g^*), \quad (2.43)$$

Cette expression est parfaitement analogue à L'Eq. (6.6) des conventions IERS 2010 de Petit *et al.* (2010).

Le potentiel perturbateur dû à la variation du spin est donné par l'expression suivante (*cf.* Sec. 4.2, Manche (2011))

$$V(r) = -\frac{1}{3}r^2\omega^2 - \sum_{m=0}^2 \left[ A_{2m}(\boldsymbol{\omega})\Theta_{2m}^{(c)}(\mathbf{r}) + B_{2m}(\boldsymbol{\omega})\Theta_{2m}^{(s)}(\mathbf{r}) \right], \quad (2.44)$$

faisant intervenir les fonctions définies en (2.29). Nous avons défini

$$\begin{cases} A_{2m} \\ B_{2m} \end{cases} (\boldsymbol{\omega}) = s_{2m} \begin{cases} \Theta_{2m}^{(c)} \\ \Theta_{2m}^{(s)} \end{cases} (\boldsymbol{\omega}) \quad \text{avec} \quad s_{2m} = -\frac{1}{3^{(2-\delta_{0m})}[\delta_{0m} + m^2]}. \quad (2.45)$$

Ensuite, d'après l'hypothèse de Love (1911), à la surface du corps étendu chaque harmonique de la variation du potentiel est proportionnelle à la même harmonique du potentiel perturbateur (2.44). On déduit alors (*cf.* Chap. 4, Manche (2011) pour voir le détail des calculs), l'expression de la contribution due au spin des coefficients du potentiel

$$\begin{cases} \Delta C_{2m}^S \\ \Delta S_{2m}^S \end{cases} = k_{2m} \frac{a_e^3}{\mu} \begin{cases} A_{2m} \\ B_{2m} \end{cases} (\boldsymbol{\omega}^*). \quad (2.46)$$

Ainsi, en considérant les déformations dues aux marées et celles dues à la variation du spin (*cf.* Eqs. (2.43) et (2.46)), les coefficients de Stokes du potentiel ne sont plus considérés constants mais sont désormais variables

$$C_{2m}(t) = C_{2m}^R + \Delta C_{2m}^S(k_{2m}, \boldsymbol{\omega}^*) + \sum_g \Delta C_{2m}^T(k_{2m}, \mu_g, \mathbf{r}_g^*), \quad (2.47a)$$

$$S_{2m}(t) = S_{2m}^R + \Delta S_{2m}^S(k_{2m}, \boldsymbol{\omega}^*) + \sum_g \Delta S_{2m}^T(k_{2m}, \mu_g, \mathbf{r}_g^*). \quad (2.47b)$$

L'indice R fait référence à la partie rigide indéformable du corps étendu, S représente la contribution due à la variation du spin, et T est la contribution due aux marées générées

sur le corps étendu par les corps ponctuels générateurs. Bien entendu, pour cette dernière contribution, il est nécessaire de sommer sur l'ensemble des corps générateurs de marées repéré par l'indice  $g$ . Pour la Terre non-sphérique,  $g$  représente successivement la Lune et le Soleil et pour la Lune non-sphérique, il représente la Terre et le Soleil.

On donne les expressions littérales de  $\Delta C_{2m}^T$  et  $\Delta S_{2m}^T$  déduites de (2.43)

$$\Delta C_{20}^T = k_{20} \frac{\mu_g}{\mu} \frac{a_e^3}{r_g^{*5}} \Theta_{20}^{(c)}(\mathbf{r}_g^*), \quad (2.48a)$$

$$\Delta C_{21}^T = \frac{k_{21}}{3} \frac{\mu_g}{\mu} \frac{a_e^3}{r_g^{*5}} \Theta_{21}^{(c)}(\mathbf{r}_g^*), \quad (2.48b)$$

$$\Delta C_{22}^T = \frac{k_{22}}{12} \frac{\mu_g}{\mu} \frac{a_e^3}{r_g^{*5}} \Theta_{22}^{(c)}(\mathbf{r}_g^*), \quad (2.48c)$$

$$\Delta S_{21}^T = \frac{k_{21}}{3} \frac{\mu_g}{\mu} \frac{a_e^3}{r_g^{*5}} \Theta_{21}^{(s)}(\mathbf{r}_g^*), \quad (2.48d)$$

$$\Delta S_{22}^T = \frac{k_{22}}{12} \frac{\mu_g}{\mu} \frac{a_e^3}{r_g^{*5}} \Theta_{22}^{(s)}(\mathbf{r}_g^*), \quad (2.48e)$$

ainsi que les expressions de  $\Delta C_{2m}^S$  et  $\Delta S_{2m}^S$  déduites de (2.46)

$$\Delta C_{20}^S = -\frac{k_{20}}{3} \frac{a_e^3}{\mu} [\Theta_{20}^{(c)}(\boldsymbol{\omega}^*) - n^2], \quad (2.49a)$$

$$\Delta C_{21}^S = -\frac{k_{21}}{9} \frac{a_e^3}{\mu} \Theta_{21}^{(c)}(\boldsymbol{\omega}^*), \quad (2.49b)$$

$$\Delta C_{22}^S = -\frac{k_{22}}{36} \frac{a_e^3}{\mu} \Theta_{22}^{(c)}(\boldsymbol{\omega}^*), \quad (2.49c)$$

$$\Delta S_{21}^S = -\frac{k_{21}}{9} \frac{a_e^3}{\mu} \Theta_{21}^{(s)}(\boldsymbol{\omega}^*), \quad (2.49d)$$

$$\Delta S_{22}^S = -\frac{k_{22}}{36} \frac{a_e^3}{\mu} \Theta_{22}^{(s)}(\boldsymbol{\omega}^*). \quad (2.49e)$$

On rappelle que  $\mu$  est le produit de la constante de gravitation et de la masse du corps étendu. Les deux fonctions  $\Theta_{nm}^{(c)}$  et  $\Theta_{nm}^{(s)}$  ont été définies précédemment en Eq. (2.29) avec les 5 premiers degrés exposés en Tab. 2.1 et 2.2. À partir de l'Eq. (2.49c), on conclut qu'un facteur 1/4 a été oublié dans Fienga *et al.* (2008).

Une vitesse de rotation propre constante induit une déformation elle-même constante qui tend à aplatir le corps étendu aux pôles et génère un bourrelet dans le plan de l'équateur. Nous avons retiré cette partie constante de la contribution due au spin et l'avons insérée dans la partie purement rigide du coefficient  $C_{20}$  du potentiel. Ainsi, la valeur moyenne de  $\Delta C_{20}^S$  est nulle. À noter que dans l'Eq. (2.49a) nous avons remplacé la rotation moyenne  $\bar{\omega}$  par le moyen mouvement lunaire puisque la Lune est en résonance spin-orbite (1:1).

Pour finir, l'effet des corps étendus sur les mouvements orbitaux des corps ponctuels est déterminé à partir du travail exposé en Sec. 2.4. Les valeurs des coefficients de Stokes du potentiel sont calculées à partir des Eqs. (2.47) en utilisant les Eqs. (2.43) et (2.46).

### 2.5.4 Étude perturbative

Nous avons évalué, en annexe D, l'impact sur la distance Terre-Lune engendré par les marées lunaires sur Terre. Pour ce faire, nous sommes repartis des Eqs. (2.47) appliquées au seul cas où le corps générateur de marées sur la Terre est la Lune. Ainsi, à partir de la seule contribution lunaire dans la détermination des coefficients de Stokes du potentiel, nous avons déduit, au moyen de l'Eq. (2.30), l'accélération perturbatrice s'exerçant sur les corps ponctuels. Par simplifications successives, nous avons ainsi redémontré l'accélération perturbatrice modélisée dans DE102/200 (Newhall *et al.*, 1983). Nous avons tiré profit de sa forme simplifiée afin d'évaluer l'effet sur la distance Terre-Lune. Ainsi, en se plaçant dans le repère tournant avec l'orbite de la Lune, la composante tangentielle de la perturbation présente une partie constante. La solution (*cf.* Eq. (D.10)) est alors représentée par un terme de Poisson (linéaire en temps) et la dérive est évaluée analytiquement à  $3.7 \text{ cm/an}$ . Cette valeur est très proche de la valeur observée qui est de  $3.81 \text{ cm/an}$  et qui est déterminée par les éphémérides DE430/431 (Folkner *et al.*, 2014).

### 2.5.5 Dérivées partielles

On donne ici quelques unes des dérivées partielles implémentées dans le modèle d'intégration numérique, en commençant par les dérivées partielles des quantités déphasées. On gardera à l'esprit que toutes les dérivées présentées dans cette section doivent être couplées à celles calculées en Sec. 2.4.3, car les effets de déformations passent par la variation des coefficients du potentiel dont l'impact est propagé aux différentes orbites par l'intermédiaire de l'Eq. (2.30).

Dans la mesure où les quantités déphasées en Eqs. (2.42) sont calculées par intégration numérique RK4 d'un modèle simplifié entre les instants  $t$  et  $t - \tau_{lm}$ , il est évident qu'à l'instant  $t - \tau_{lm}$ , les quantités intégrées dépendent des conditions initiales fournies à l'instant  $t$ . Par conséquent, nous avons choisi d'intégrer les dérivées partielles des quantités déphasées directement par intégration numérique RK4 depuis l'équation aux variations. Ainsi, les dérivées partielles relativement aux paramètres physiques et conditions initiales fournies à l'instant  $t$ , sont intégrées jusqu'à l'instant  $t - \tau_{lm}$  en même temps que les positions et vitesses du modèle simplifié. Les seules qui ne sont pas intégrées mais déduites à la fin de l'intégration RK4, sont les dérivées des quantités déphasées relativement aux bornes supérieures des intégrales données en Eqs. (2.42). Une fois ces dernières déterminées, on déduit alors les dérivées relativement au temps de déphasage.

— Dérivées partielles des quantités déphasées en fonction du temps de déphasage :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_g^{I*o}}{\partial \tau_{lm}^o} &= -\mathbf{v}_g^{I*o} & \text{et} & & \frac{\partial \mathbf{v}_g^{I*o}}{\partial \tau_{lm}^o} &= -\mathbf{a}_g^{I*o}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{*r}}{\partial \tau_{lm}^r} &= -\dot{\boldsymbol{\xi}}^{*r} & \text{et} & & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\xi}}^{*r}}{\partial \tau_{lm}^r} &= -\ddot{\boldsymbol{\xi}}^{*r}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

— Dérivée partielle des coefficients  $\Delta C_{lm}^T$  et  $\Delta S_{lm}^T$  relativement au nombre de Love :

$$\frac{\partial}{\partial k_{lm}} \begin{Bmatrix} \Delta C_{lm}^T \\ \Delta S_{lm}^T \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_{lm}} \begin{Bmatrix} \Delta C_{lm}^T \\ \Delta S_{lm}^T \end{Bmatrix}, \quad (2.51)$$

— Dérivée partielle des coefficients  $\Delta C_{lm}^T$  et  $\Delta S_{lm}^T$  relativement au rayon équatorial :

$$\frac{\partial}{\partial a_e} \begin{Bmatrix} \Delta C_{lm}^T \\ \Delta S_{lm}^T \end{Bmatrix} = \frac{l+1}{a_e} \begin{Bmatrix} \Delta C_{lm}^T \\ \Delta S_{lm}^T \end{Bmatrix}, \quad (2.52)$$

— Dérivée partielle des coefficients  $\Delta C_{lm}^T$  et  $\Delta S_{lm}^T$  relativement à la masse du corps non-sphérique :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \begin{Bmatrix} \Delta C_{lm}^T \\ \Delta S_{lm}^T \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{Bmatrix} \Delta C_{lm}^T \\ \Delta S_{lm}^T \end{Bmatrix}, \quad (2.53)$$

— Dérivée partielle des coefficients  $\Delta C_{lm}^T$  et  $\Delta S_{lm}^T$  relativement à la masse du corps générateur de marées :

$$\frac{\partial}{\partial \mu_g} \begin{Bmatrix} \Delta C_{lm}^T \\ \Delta S_{lm}^T \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu_g} \begin{Bmatrix} \Delta C_{lm}^T \\ \Delta S_{lm}^T \end{Bmatrix}, \quad (2.54)$$

— Dérivée partielle des coefficients  $\Delta C_{lm}^T$  et  $\Delta S_{lm}^T$  relativement à la distance relative du corps générateur de marées :

$$\frac{\partial}{\partial r_g^*} \begin{Bmatrix} \Delta C_{lm}^T \\ \Delta S_{lm}^T \end{Bmatrix} = k_{lm}(2 - \delta_{0m}) \frac{\mu_g}{\mu} \frac{a_e^{l+1}}{r_g^{*2l+1}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left[ \frac{\partial}{\partial r_g^*} \begin{Bmatrix} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{Bmatrix} - (2l+1) \begin{Bmatrix} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{Bmatrix} \frac{r_g^*}{r_g^{*2}} \right]. \quad (2.55)$$

— Dérivée partielle des coefficients  $\Delta C_{2m}^S$  et  $\Delta S_{2m}^S$  relativement au nombre de Love :

$$\frac{\partial}{\partial k_{2m}} \begin{Bmatrix} \Delta C_{2m}^S \\ \Delta S_{2m}^S \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_{2m}} \begin{Bmatrix} \Delta C_{2m}^S \\ \Delta S_{2m}^S \end{Bmatrix}, \quad (2.56)$$

— Dérivée partielle des coefficients  $\Delta C_{2m}^S$  et  $\Delta S_{2m}^S$  relativement au rayon équatorial :

$$\frac{\partial}{\partial a_e} \begin{Bmatrix} \Delta C_{2m}^S \\ \Delta S_{2m}^S \end{Bmatrix} = \frac{3}{a_e} \begin{Bmatrix} \Delta C_{2m}^S \\ \Delta S_{2m}^S \end{Bmatrix}, \quad (2.57)$$

— Dérivée partielle des coefficients  $\Delta C_{2m}^S$  et  $\Delta S_{2m}^S$  relativement à la masse du corps non-sphérique :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \begin{Bmatrix} \Delta C_{2m}^S \\ \Delta S_{2m}^S \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{Bmatrix} \Delta C_{2m}^S \\ \Delta S_{2m}^S \end{Bmatrix}, \quad (2.58)$$

— Dérivée partielle des coefficients  $\Delta C_{2m}^S$  et  $\Delta S_{2m}^S$  relativement au vecteur de vitesse angulaire du corps non-sphérique :

$$\frac{\partial}{\partial \omega^*} \begin{Bmatrix} \Delta C_{2m}^S \\ \Delta S_{2m}^S \end{Bmatrix} = s_{2m} k_{2m} \frac{a_e^3}{\mu} \frac{\partial}{\partial \omega^*} \begin{Bmatrix} \Theta_{2m}^{(c)} \\ \Theta_{2m}^{(s)} \end{Bmatrix}. \quad (2.59)$$

Une fois de plus, l'avantage de ces dérivées est leur validité quelque soit l'harmonique considérée. Elles ont donc été implémentées dans le modèle dynamique ELPN.

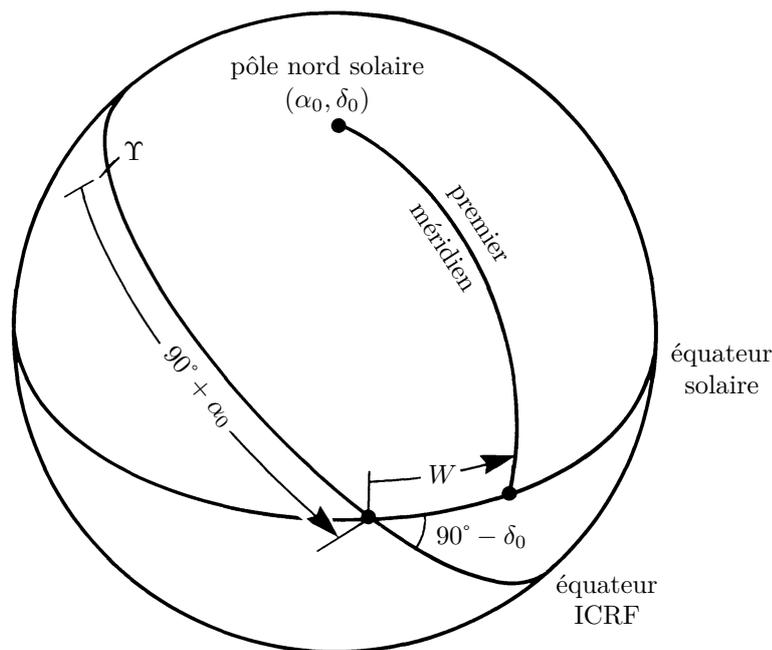


FIGURE 2.2 – Schéma tiré de Seidelmann *et al.* (2007) représentant l'orientation du pôle solaire dans l'équateur ICRF. L'équinoxe J2000 est repéré par  $\Upsilon$ . L'angle  $W$  est considéré nul dans la mesure où seul le moment quadripolaire du Soleil est modélisé ce qui permet de négliger le mouvement de rotation propre.

## 2.6 Rotation des corps étendus

Nous avons vu en Sec. 2.4 qu'en se plaçant dans un repère lié au centre de masse du corps non sphérique, il est possible d'exprimer l'accélération inertielle (*cf.* Eq. (2.30)) d'un corps ponctuel éloigné. Les composantes de cette accélération sont alors données dans le repère lié au corps étendu. L'intégration numérique étant définie dans un repère inertielle bien choisi, l'ICRS, il est nécessaire d'exprimer toutes les accélérations dans ce dernier. Il est donc primordial qu'à tout instant nous soit donnée la matrice de rotation permettant d'effectuer la transformation du repère lié à l'équateur vrai de la date du corps étendu au repère ICRS. Deux méthodes bien distinctes sont alors envisageables. La première, qui est celle utilisée pour modéliser l'orientation de la Terre et du Soleil, consiste à utiliser une solution temporelle préalablement calculée. La seconde, implémentée dans le cas de la Lune, vise à construire directement cette solution temporelle.

### 2.6.1 Orientation du Soleil

Pour le Soleil, nous supposons que son pôle de rotation est fixe pendant toute la durée d'intégration de la solution. Par conséquent, les angles de rotation sont considérés constants et nous les prenons tels qu'ils sont donnés dans Seidelmann *et al.* (2007), *i.e.*  $\alpha_0 = 286.13^\circ$  et  $\delta_0 = 63.84^\circ$ . La longitude du pôle solaire sur l'équateur ICRS est repérée par l'angle  $\alpha_0$  et la déclinaison par  $\delta_0$ , comme indiqué en Fig. 2.2. Ils sont repérés depuis l'équinoxe J2000 symbolisé par  $\Upsilon$ . Dans la mesure où seul le moment quadripolaire solaire est modélisé, il est inutile de faire appel à l'angle  $W$  permettant de repérer le premier méridien. Nous le considérons donc nul.

### 2.6.2 Orientation de la Terre

L'étude du mouvement de rotation de la Terre est une discipline à part entière. Le mouvement peut être décomposé en une partie liée à la vitesse de rotation propre de la Terre autour d'un axe de symétrie, et une partie liée à l'orientation spatiale de cet axe de symétrie. Ces deux contributions sont variables et permettent ainsi d'appréhender les différents phénomènes physiques intervenant dans le mouvement de rotation de la Terre (*cf. e.g.* l'ouvrage de Dehant et Mathews (2015) pour un exposé détaillé). Comme mentionné en Sec. 2.4, le mouvement de rotation rapide de la Terre peut être négligé pour l'intégration des équations dynamiques. Dès lors, seule la détermination de l'orientation spatiale est requise. L'évolution de l'orientation du pôle terrestre sur la sphère céleste est usuellement décomposée en un mouvement séculaire appelé la *précession*, et en de multiples mouvements périodiques appelés *nutations*; ces derniers décrivant des ellipses autour de la position du pôle moyen.

Tout comme pour le cas du Soleil, l'orientation du pôle terrestre est forcée par une solution temporelle existante afin de repérer son orientation à une date donnée. Deux modèles ont été implémentés dans ELPN afin de reproduire au mieux les solutions INPOP13c et DE430 respectivement.

Ainsi, une première solution implémentée dans ELPN fournit la matrice de passage du repère ICRF à l'équateur vrai de la date de la Terre, directement des routines *Standard Of Fundamental Astronomy*<sup>7</sup> (SOFA) de l'UAI (Wallace, 1998). Ainsi, le passage de l'ICRF à l'équateur moyen J2000 (*cf.* thèse de Lambert (2003)) est effectué via l'application d'un biais (noté  $\mathbf{Q}$ ). La modélisation du mouvement de précession (notée  $\mathbf{P}$ ) est fournie par la solution P03 de Capitaine *et al.* (2003). Cette matrice est nécessaire pour le passage de l'équateur moyen J2000 à l'équateur moyen de la date. Ensuite, les nutations en longitude et obliquité (notées  $\mathbf{N}$ ), sont obtenues des termes luni-solaires et planétaires des séries du modèle MHB2000 (Mathews, 2000) avec les corrections Capitaine *et al.* (2005). Cette matrice est nécessaire pour le passage de l'équateur moyen de la date à l'équateur vrai de la date (Wallace et Capitaine, 2006).

Le deuxième modèle de précession/nutation implémenté dans ELPN est décrit en intégralité dans Folkner *et al.* (2014). Il s'agit d'un modèle simplifié, qui comparativement à celui de l'UAI présente l'avantage de fournir la solution avec un moindre temps de calcul. Le modèle de précession est basé sur celui de l'UAI 1976 (Lieske *et al.*, 1977; Lieske, 1979). La partie nutation est reprise du modèle de l'UAI 1980 (Seidelmann, 1982) pour ne tenir compte que des premiers termes en 18.6 ans, à savoir

$$\Delta\psi = -17''.206262 \sin \Omega', \quad \text{et} \quad \Delta\epsilon = 9''.205348 \cos \Omega',$$

où  $\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$  sont respectivement la nutation en longitude et en obliquité, et  $\Omega'$  est la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique.

D'après la Tab. III de Chapront-Touze (1982), ces deux termes principaux sont amplement suffisants pour la modélisation de l'impact du potentiel terrestre sur le vecteur Terre-Lune. L'effet principal est une oscillation avec une amplitude de 2 *marsec* sur la longitude de la Lune, soit un déplacement de 4 *m* au niveau de l'orbite lunaire. Les termes suivants dans les expressions de la nutation en longitude et en obliquité étant de l'ordre

---

7. <http://www.iausofa.org/>.

de l'arcseconde (communication privée avec C. Bizouard), on évalue alors approximativement l'effet sur la longitude à  $0.1 \text{ marcsec}$ , soit  $20 \text{ cm}$  au niveau de l'orbite lunaire. En considérant de plus, que les données LLR contraignent principalement la distance radiale et moins la longitude, nous concluons que la prise en compte des seuls termes principaux de la nutation est suffisante pour la modélisation de l'orientation terrestre.

Pour les deux méthodes, le passage du repère inertiel au repère lié à l'équateur vrai de la date de la Terre se fait via la matrice de rotation suivante

$$(\mathbf{B})_T(t) : \text{ICRF} \longrightarrow \text{Equateur vrai de la date} \quad (2.60)$$

où nous venons de poser

$$(\mathbf{B})_T(t) = \mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}. \quad (2.61)$$

L'accélération absolue dans l'ICRS (notée  $\mathbf{a}^I$ ) est alors donnée par la relation  $\mathbf{a}^I = {}^T(\mathbf{B})_T(t) \cdot \mathbf{a}$  où  $\mathbf{a}$  est l'accélération absolue exprimée dans le repère lié au corps étendu (équateur vrai de la date) et donnée par l'Eq. (2.30).

### 2.6.3 Orientation de la Lune

Comme mentionné en début de Sec. 2.6, l'orientation de la Lune est intégrée en même temps que les équations régissant les mouvements orbitaux des corps. En effet, ces deux parties que sont la détermination des orbites d'une part et la détermination des mouvements rotationnels d'autre part, sont étroitement liées. Les positions des corps dans le système solaire vont influencer l'orientation du corps étendu au travers des couples gravitationnels qu'ils engendrent. Puis inversement, l'orientation du corps étendu via la modélisation de son potentiel non-sphérique influence la trajectoire des corps dans le système solaire. Dans le cas de la Terre et du Soleil précédemment présentés, ce couplage a été négligé dans la mesure où nous utilisons une solution temporelle de la rotation préalablement déterminée par d'autres méthodes observationnelles. Dans le cas de la Lune, le LLR est la seule méthode astrométrique offrant la possibilité de contraindre précisément le mouvement de rotation lunaire. Nous avons donc modélisé numériquement l'évolution de son orientation. Notons qu'une modélisation précise des librations lunaires nécessite l'introduction d'un noyau fluide à l'intérieur de la Lune. Ce constat a été établi et largement discuté par Williams *et al.* (2001), qui a montré que les signatures laissées par les dissipations dues aux marées et au noyau sont séparables dans les effets qu'elles engendrent sur la rotation et sur l'orbite lunaire. Les dernières éphémérides du *Jet Propulsion Laboratory* (JPL), DE430/431 (Folkner *et al.*, 2014) le prennent en compte en noyau fluide bi-axial. Son effet est visible dans les librations du manteau via l'introduction de couples à l'interface noyau/manteau. Ces couples sont de deux natures différentes. Le premier, commun aux deux versions de DE430 et DE431, est dérivé dans Sasao *et al.* (1980). Le second, est dû à un effet de friction laminaire entre le noyau fluide axisymétrique et le manteau, et dépend de la différence des vecteurs vitesses angulaires du noyau et du manteau.

Nous exposons dans un premier temps, les équations décrivant le mouvement du manteau lunaire puis, dans un second temps, celles du noyau fluide.

#### Librations du manteau lunaire

Dans ELPN, le manteau lunaire est orienté relativement à l'ICRS à l'aide des trois angles d'Euler  $\zeta = {}^T(\phi, \theta, \psi)$ , comme montré en Fig 2.3. Le repère  $(\hat{\rho}_m, \hat{\tau}_m, \hat{\sigma}_m)$  est lié à

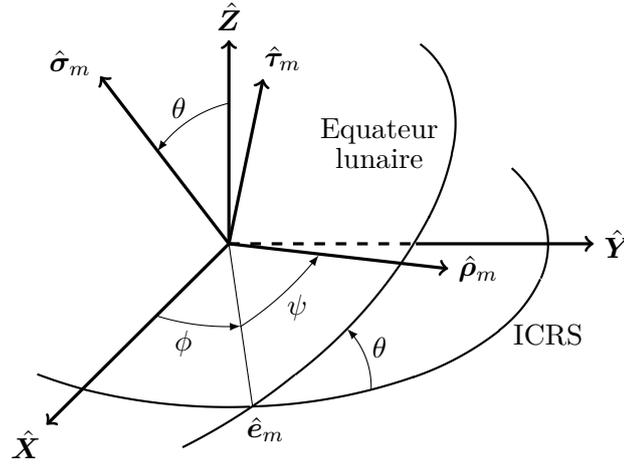


FIGURE 2.3 – Schéma représentant l'orientation du repère  $(\hat{\rho}_m, \hat{\tau}_m, \hat{\sigma}_m)$  lié à l'équateur du manteau lunaire relativement à un repère inertiel  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ . Les trois angles d'Euler sont définis tels que  $\phi$  est l'angle de précession,  $\theta$  est l'angle de nutation et  $\psi$ , l'angle de rotation du manteau lunaire.

l'équateur vrai de la date du manteau lunaire et  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  est le repère inertiel de l'ICRS, dont le plan  $(\hat{X}, \hat{Y})$  est l'équateur moyen J2000. Parmi ces trois angles d'Euler, on retrouve un angle de précession  $\phi$  de l'équinoxe J2000 de l'ICRS au nœud descendant de l'équateur lunaire, un angle de nutation  $\theta$  entre les deux équateurs, et un angle de rotation  $\psi$  compris dans le plan de l'équateur lunaire et défini à partir du nœud jusqu'au méridien origine de la Lune. Ils permettent à eux trois de parfaitement repérer l'orientation du manteau dans l'ICRS. La matrice de passage est ainsi définie à l'aide de la Fig. 2.3 par la relation suivante

$$(\mathbf{B})_L(t) = \mathbf{B}_{\hat{\sigma}_m}(\psi) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\rho}_m}(\theta) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\sigma}_m}(\phi). \quad (2.62)$$

Ainsi, la connaissance de l'évolution temporelle des angles d'Euler fournit à tout instant la matrice de passage de l'ICRS à l'équateur lunaire vrai de la date. Dans ELPN, cette évolution temporelle est intégrée en même temps que les équations du mouvement régissant la partie orbitale.

Ainsi, pour intégrer l'évolution des angles d'Euler il est nécessaire de connaître à chaque pas de temps leur accélération respective. Pour ce faire, introduisons le vecteur vitesse angulaire du manteau exprimé dans l'équateur lunaire  $(\hat{\rho}_m, \hat{\tau}_m, \hat{\sigma}_m)$ , tel que  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\hat{e}_m + \dot{\phi}\hat{Z} + \dot{\psi}\hat{\sigma}_m$ , soit

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

À partir de cette relation, on déduit la différentielle temporelle du vecteur vitesse angulaire en tant que fonction de  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = f(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta})$ . L'expression littérale est donnée par l'équation suivante

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \cos \psi - \dot{\theta}\dot{\psi} \sin \psi + \ddot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\phi}\dot{\theta} \sin \psi \cos \theta \\ -\ddot{\theta} \sin \psi - \dot{\theta}\dot{\psi} \cos \psi + \ddot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\phi}\dot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\phi}\dot{\theta} \cos \psi \cos \theta \\ \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Cette expression peut être inversée pour fournir les accélérations sur les trois angles d'Euler

en fonction des composantes du vecteur accélération angulaire

$$\ddot{\zeta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin \theta} [\dot{\omega}_x \sin \psi + \dot{\omega}_y \cos \psi + \dot{\theta}(\dot{\psi} - \dot{\phi} \cos \theta)] \\ \dot{\omega}_x \cos \psi - \dot{\omega}_y \sin \psi - \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\omega}_z + \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Les équations d'Euler du mouvement (*cf. e.g.* Landau et Lifshitz (1969); Arnold (1978)) permettent ensuite de déterminer les dérivées temporelles des composantes du vecteur vitesse instantanée de rotation du manteau. Ces équations relient l'évolution du vecteur vitesse angulaire au tenseur d'inertie lunaire et autres couples externes agissant sur la Lune. Dans le repère lié à l'équateur lunaire, les équations d'Euler du manteau s'écrivent

$$\dot{\omega} = \mathbf{I}_m^{-1} \cdot \left\{ \mathbf{C}_{\text{tot}} - \omega \times \mathbf{I}_m \cdot \omega - \dot{\mathbf{I}}_m \cdot \omega \right\}, \quad (2.66)$$

avec  $\mathbf{I}_m$  le tenseur d'inertie du manteau lunaire. La résultante des couples externes agissant sur la Lune est symbolisée par  $\mathbf{C}_{\text{tot}}$ . On rappelle que  $\mathbf{I}_m \cdot \omega$  représente le vecteur moment cinétique du manteau.

L'expression générale de la matrice d'inertie est donnée en Eq. (C.7) et nous désignerons la matrice d'inertie rigide par  $\mathbf{I}^{\text{R}}$ . Pour obtenir la partie rigide de la matrice d'inertie du manteau, il est nécessaire de soustraire à la matrice d'inertie  $\mathbf{I}^{\text{R}}$  la contribution constante du noyau fluide. Ainsi, on écrira  $\mathbf{I}_m^{\text{R}} = \mathbf{I}^{\text{R}} - \mathbf{I}_c$  avec  $\mathbf{I}_c$  la matrice d'inertie du noyau fluide. La matrice d'inertie rigide de la Lune peut être écrite dans le repère du manteau en fonction des coefficients de Stokes de degré 2, sous la forme suivante

$$\mathbf{I}^{\text{R}} = C \cdot \mathbb{1} + m_L (a_e)_L^2 \begin{pmatrix} C_{20}^{\text{R}} - 2C_{22}^{\text{R}} & -2S_{22}^{\text{R}} & -C_{21}^{\text{R}} \\ -2S_{22}^{\text{R}} & C_{20}^{\text{R}} + 2C_{22}^{\text{R}} & -S_{21}^{\text{R}} \\ -C_{21}^{\text{R}} & -S_{21}^{\text{R}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

où  $C$  est le moment principal d'inertie (contributions du noyau et du manteau),  $m_L$  est la masse totale de la Lune et  $(a_e)_L$  est son rayon équatorial. La matrice d'inertie du noyau fluide sera quant à elle définie par l'expression suivante

$$\mathbf{I}_c = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & A_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

avec  $A_c = \alpha_c C (1 - f_c)$  où  $\alpha_c = C_c / C$  représente le rapport du moment principal d'inertie du noyau fluide au moment principal d'inertie de la Lune et où  $f_c$  est l'aplatissement aux pôles du noyau.

Nous avons vu en Sec. 2.5, que les corps étendus sont assujettis à des déformations dues aux marées et à la variation de leur spin. Nous avons vu également que ces déformations pouvaient être modélisées via la variation des coefficients de Stokes de degré 2. Par conséquent, si la matrice d'inertie dépend de ces coefficients comme montré en Eq. (2.67), on conçoit dès lors qu'elle puisse posséder plusieurs contributions variables. Il convient maintenant de déterminer l'expression de la matrice d'inertie totale qui tient compte de la partie purement rigide définie en Eq. (2.67), et de la partie variable due aux déformations. En se basant sur des considérations purement observationnelles, on émet l'hypothèse que les déformations de la matrice d'inertie totale sont petites devant la contribution purement

rigide. En notant alors la matrice d'inertie totale (comprenant la partie temporelle) par  $\mathbf{I}(t)$ , on peut écrire

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}^R + \delta\mathbf{I}(t) \quad \text{avec} \quad \delta\mathbf{I}(t) \ll \mathbf{I}^R,$$

où nous pouvons noter les composantes de  $\delta\mathbf{I}(t)$  telles que

$$\delta\mathbf{I}(t) = \delta C \cdot \mathbb{1} + m_L(a_e)_L^2 \begin{pmatrix} \delta C_{20} - 2\delta C_{22} & -2\delta S_{22} & -\delta C_{21} \\ -2\delta S_{22} & \delta C_{20} + 2\delta C_{22} & -\delta S_{21} \\ -\delta C_{21} & -\delta S_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, d'après Rochester et Smylie (1974), si les déformations induisent une redistribution surfacique des masses, la trace du tenseur d'inertie est conservée. En d'autres termes, la trace de la matrice d'inertie totale avant déformations doit équaler la trace de la matrice d'inertie totale après déformations, *i.e.*

$$\text{tr}[\mathbf{I}^R] = \text{tr}[\mathbf{I}(t)], \quad \text{soit} \quad \delta C = -\frac{2}{3}m_L(a_e)_L^2 \delta C_{20}.$$

On déduit alors, la forme générale de la partie variable du tenseur d'inertie qui est donnée par l'expression suivante

$$\delta\mathbf{I}(t) = m_L(a_e)_L^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\delta C_{20} - 2\delta C_{22} & -2\delta S_{22} & -\delta C_{21} \\ -2\delta S_{22} & \frac{1}{3}\delta C_{20} + 2\delta C_{22} & -\delta S_{21} \\ -\delta C_{21} & -\delta S_{21} & -\frac{2}{3}\delta C_{20} \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Nous considérons que la partie variable n'intervient que sur les composantes du manteau et non sur celles du noyau. En termes mathématiques, nous écrivons  $\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}_m(t) + \mathbf{I}_c$  avec  $\mathbf{I}_c = \text{cste}$ . On déduit ainsi que  $\delta\mathbf{I}(t) = \delta\mathbf{I}_m(t)$ . La matrice d'inertie totale peut ainsi être obtenue en ajoutant à la partie purement rigide (*cf.* Eq. (2.67)), les contributions temporelles dues aux marées et à la variation du spin sur le manteau. Ainsi, on peut déduire l'expression de la matrice d'inertie totale du manteau

$$\mathbf{I}_m(t) = \mathbf{I}^R - \mathbf{I}_c + \Delta\mathbf{I}_m^T(t) + \Delta\mathbf{I}_m^S(t), \quad (2.70)$$

dont les deux derniers termes du second membre sont de la forme (2.69), où les variations des coefficients du potentiel sont données respectivement par les Eqs. (2.43) et (2.46).

Afin de calculer l'accélération angulaire à partir de l'équation d'Euler du mouvement (*cf.* Eq. (2.66)), il est nécessaire de connaître la variation temporelle de la matrice d'inertie totale du manteau (2.70). Il faut donc différencier l'Eq. (2.70) relativement au temps, soit

$$\dot{\mathbf{I}}_m(t) = \Delta\dot{\mathbf{I}}_m^T(t) + \Delta\dot{\mathbf{I}}_m^S(t), \quad (2.71)$$

avec

$$\delta\dot{\mathbf{I}}(t) = m_L(a_e)_L^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\delta\dot{C}_{20} - 2\delta\dot{C}_{22} & -2\delta\dot{S}_{22} & -\delta\dot{C}_{21} \\ -2\delta\dot{S}_{22} & \frac{1}{3}\delta\dot{C}_{20} + 2\delta\dot{C}_{22} & -\delta\dot{S}_{21} \\ -\delta\dot{C}_{21} & -\delta\dot{S}_{21} & -\frac{2}{3}\delta\dot{C}_{20} \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Ainsi, les deux premiers termes constants de (2.70) disparaissent et ne subsistent alors que les différentielles temporelles des deux derniers qui s'obtiennent en différenciant relativement au temps les Eqs. (2.43) et (2.46), soit

$$\begin{Bmatrix} \Delta\dot{C}_{lm}^T \\ \Delta\dot{S}_{lm}^T \end{Bmatrix} = k_{lm}(2 - \delta_{0m}) \frac{\mu_g}{\mu_L} \frac{(a_e)_L^{l+1}}{r_g^{*2l+1}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left[ \mathbf{v}_g^* \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_g^*} \begin{Bmatrix} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{Bmatrix} - (2l+1) \begin{Bmatrix} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{Bmatrix} \frac{\mathbf{r}_g^* \cdot \mathbf{v}_g^*}{r_g^{*2}} \right], \quad (2.73)$$

puis

$$\begin{Bmatrix} \Delta \dot{C}_{2m}^S \\ \Delta \dot{S}_{2m}^S \end{Bmatrix} = s_{2m} k_{2m} \frac{(a_e)_L^3}{\mu_L} \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}^*} \right] \begin{Bmatrix} \Theta_{2m}^{(c)} \\ \Theta_{2m}^{(s)} \end{Bmatrix}. \quad (2.74)$$

Le vecteur vitesse déphasé du corps générateur de marées est exprimé dans le repère lié à l'équateur vrai de la date par la relation suivante

$$\mathbf{v}_g^* = (\mathbf{B})_L^* \cdot \mathbf{v}_g^{*I} - \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{r}_g^*. \quad (2.75)$$

Quant au vecteur  $\dot{\boldsymbol{\omega}}^*$  dans (2.74), il peut être approché à partir de l'équation d'Euler du mouvement libre ( $\mathbf{C}_{\text{tot}} = \mathbf{0}$ ), soit

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^* = -[\mathbf{I}^R]^{-1} \cdot \left\{ \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{I}^R \cdot \boldsymbol{\omega}^* \right\}. \quad (2.76)$$

Les Eqs. (2.73) et (2.74) sont ensuite insérées dans (2.72) pour fournir la dérivée temporelle de la matrice d'inertie totale du manteau.

La résultante totale des couples ( $\mathbf{C}_{\text{tot}}$ ) agissant sur le manteau de la Lune inclut plusieurs contributions (pour plus de détails sur la manière d'obtenir ces contributions *cf.* thèse de Manche (2011) et les nombreuses références à l'intérieur ; pour la dernière contribution *cf.* Folkner *et al.* (2014)) :

- i) La plus importante est générée par les corps ponctuels externes qui interagissent avec la partie non-sphérique du potentiel lunaire. Dans ELPN, nous considérons les interactions jusqu'à la 5ème harmonique du potentiel. Le couple peut alors être calculé à partir des accélérations présentées en Eq. (2.30) et s'écrit

$$\mathbf{C}_p = - \sum_{a \neq L} \sum_{l=2}^5 \sum_{m=0}^l \frac{\mu_a}{\mu_L} \mathbf{r}_{La} \times (\mathbf{a}_{lm})_a. \quad (2.77)$$

- ii) La deuxième contribution la plus importante est due à l'interaction entre le potentiel axisymétrique de la Terre et celui tri-axial de la Lune. En ne considérant que les trois premiers termes principaux, l'expression finale devient

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_f = \frac{15\mu_T(a_e)_T^2(J_2)_T}{2r^5} & \left\{ \frac{(1-7\sin^2\delta)}{r^2} \mathbf{r} \times \mathbf{I} \cdot \mathbf{r} \right. \\ & \left. + \frac{2\sin\delta}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{I} \cdot \mathbf{r}) - \frac{2}{5} \hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right\}, \quad (2.78) \end{aligned}$$

où  $(J_2)_T$  est le moment quadripolaire terrestre défini par  $(J_l)_T = -(C_{l0})_T$ ,  $(a_e)_T$  est le rayon équatorial terrestre,  $\mathbf{r}$  est le vecteur position Lune-Terre,  $\hat{\mathbf{p}}$  est la direction du pôle terrestre, et  $\sin\delta$  est défini par la relation suivante :  $r \sin\delta = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ . Tous les vecteurs sont exprimés dans l'équateur lunaire vrai de la date.

- iii) La troisième contribution est due à un effet de relativité générale appelé l'effet de précession géodétique. D'après la théorie, un gyroscope mobile dans un espace-temps courbe subit un effet de précession relativement au repère inertiel. Le couple est donné par l'expression suivante

$$\mathbf{C}_g = \frac{(2\gamma+1)}{2c^2} \mathbf{v}_L \times (\ddot{\mathbf{r}}_L \times \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (2.79)$$

où  $\mathbf{v}_L$  et  $\ddot{\mathbf{r}}_L$  sont respectivement le vecteur vitesse barycentrique et le vecteur accélération barycentrique de la Lune. Les deux sont exprimés dans le repère lié à l'équateur lunaire vrai de la date. Cependant, puisque  $\ddot{\mathbf{r}}_L$  est multiplié par  $c^{-2}$  dans (2.79), seule la partie newtonienne de l'accélération est nécessaire pour l'ordre 1PN.

- iv) La dernière contribution implémentée dans ELPN provient de l'interaction entre la partie interne du manteau avec la partie externe du noyau fluide. À partir du travail de Sasao *et al.* (1980), le couple agissant sur le manteau et dû à l'interaction avec le noyau fluide peut être exprimé dans le repère du manteau comme

$$\mathbf{C}_c = -\boldsymbol{\omega}_c^\dagger \times (\mathbf{I}_c \cdot \boldsymbol{\omega}_c^\dagger),$$

où  $\boldsymbol{\omega}_c^\dagger$  représente le vecteur instantané de rotation du noyau dans le repère lié au manteau. Après projections dans le repère du manteau  $(\hat{\boldsymbol{\rho}}_m, \hat{\boldsymbol{\tau}}_m, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m)$ , on trouve l'expression suivante

$$\mathbf{C}_c = (C_c - A_c)\omega_{c,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_m}^\dagger \left[ \omega_{c,\hat{\boldsymbol{\tau}}_m}^\dagger \hat{\boldsymbol{\rho}}_m - \omega_{c,\hat{\boldsymbol{\rho}}_m}^\dagger \hat{\boldsymbol{\tau}}_m \right].$$

Le terme entre crochets est égal à  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_m \times \boldsymbol{\omega}_c^\dagger$ , soit

$$\mathbf{C}_c = (C_c - A_c)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_m \cdot \boldsymbol{\omega}_c^\dagger \left[ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m \times \boldsymbol{\omega}_c^\dagger \right].$$

En ajoutant pour finir, une contribution due à un terme dissipatif de friction, l'expression du moment d'interaction entre le manteau et le noyau fluide devient

$$\mathbf{C}_c = k_\nu(\boldsymbol{\omega}_c^\dagger - \boldsymbol{\omega}) + (C_c - A_c)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_m \cdot \boldsymbol{\omega}_c^\dagger \left[ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m \times \boldsymbol{\omega}_c^\dagger \right]. \quad (2.80)$$

On retrouve alors l'expression fournie par Folkner *et al.* (2014) en Eq. (45). Le terme dissipatif  $k_\nu$  constitue la différence fondamentale entre les éphémérides DE430 et DE431. Pour DE431,  $k_\nu = 0$  ce qui rend l'éphéméride valable sur de plus grandes échelles de temps que DE430 pour laquelle  $k_\nu \neq 0$ .

En ajoutant alors les Eqs. de (2.77) à (2.80), la résultante des moments agissants sur le manteau lunaire s'écrit

$$\mathbf{C}_{\text{tot}} = \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_f + \mathbf{C}_g + \mathbf{C}_c. \quad (2.81)$$

Ensuite, via l'équation d'Euler du mouvement (2.66), on déduit la valeur du vecteur accélération angulaire. Finalement, les Eqs. (2.65) permettent l'intégration numérique des trois angles d'Euler du manteau.

### Librations du noyau lunaire

Compte tenu de la forme de l'Eq. (2.80), il est indispensable de connaître  $\boldsymbol{\omega}_c^\dagger$  à tout instant. Il peut être intégré directement depuis l'équation d'Euler du mouvement en prenant pour la vitesse de rotation du repère tournant, celle du vecteur instantané de rotation du manteau. Il faut alors prendre en compte le couple lié à l'interaction entre le manteau et le noyau. On rappelle que l'Eq. (2.80) est donnée dans le repère du manteau par conséquent on peut écrire

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_c^\dagger = \mathbf{I}_c^{-1} \cdot \left\{ -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_c \cdot \boldsymbol{\omega}_c^\dagger - \mathbf{C}_c \right\}. \quad (2.82)$$

Si le repère lié au noyau doit être déterminé à tout instant, il est nécessaire d'intégrer les angles d'Euler du noyau  $\boldsymbol{\xi}_c = {}^T(\phi_c, \theta_c, \psi_c)$ . Ceci peut être réalisé avec un moindre coût de

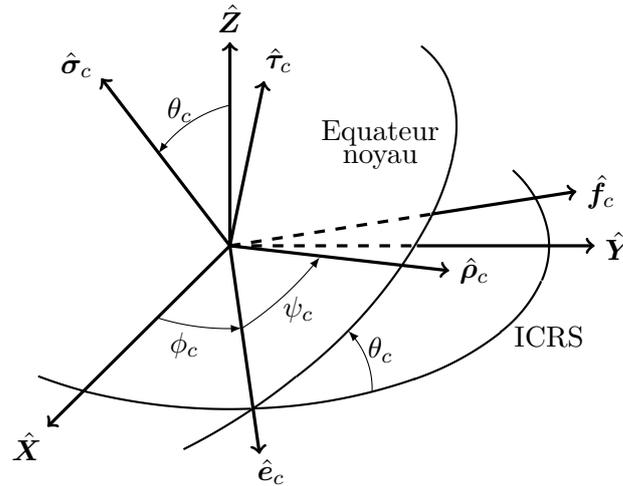


FIGURE 2.4 – Schéma représentant l'orientation du repère  $(\hat{\rho}_c, \hat{\tau}_c, \hat{\sigma}_c)$  lié à l'équateur du noyau lunaire relativement au repère inertiel de l'ICRS  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ . Les trois angles d'Euler du noyau sont définis tels que  $\phi_c$  est l'angle de précession,  $\theta_c$  est l'angle de nutation et  $\psi_c$  l'angle de rotation du noyau lunaire. Le repère  $(\hat{e}_c, \hat{f}_c, \hat{Z})$  suit le mouvement de précession du noyau mais reste contenu dans le plan  $(\hat{X}, \hat{Y})$  de l'ICRS.

calcul à partir du repère  $(\hat{e}_c, \hat{f}_c, \hat{Z})$  montré en Fig. 2.4. En effet, le vecteur instantané de rotation du noyau peut être exprimé sous la forme  $\boldsymbol{\omega}_c = \dot{\theta}_c \hat{e}_c + \dot{\phi}_c \hat{Z} + \dot{\psi}_c \hat{\sigma}_c$ . En passant  $\hat{\sigma}_c$  dans le repère  $(\hat{e}_c, \hat{f}_c, \hat{Z})$  on trouve

$$\boldsymbol{\omega}_c = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_c \\ -\dot{\psi}_c \sin \theta_c \\ \dot{\phi}_c + \dot{\psi}_c \cos \theta_c \end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}_c = \begin{pmatrix} \omega_{c,\hat{Z}} - \dot{\psi}_c \cos \theta_c \\ \omega_{c,\hat{e}_c} \\ -\frac{1}{\sin \theta_c} \omega_{c,\hat{f}_c} \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Les composantes de  $\boldsymbol{\omega}_c$  sont obtenues après passage du repère lié au manteau, au repère  $(\hat{e}_c, \hat{f}_c, \hat{Z})$ . Ainsi mathématiquement, la relation de passage s'exprime sous la forme suivante :  $\boldsymbol{\omega}_c = (\mathbf{B})_c \cdot \boldsymbol{\omega}_c^\dagger$ , où  $(\mathbf{B})_c$  est déterminée à partir des Figs. 2.3, 2.4, et de l'Eq. (2.62), par la relation suivante

$$\begin{aligned} (\mathbf{B})_c(t) &= \mathbf{B}_{\hat{Z}}(\phi_c) \cdot {}^T(\mathbf{B})_L(t) \\ &= \mathbf{B}_{\hat{Z}}(\phi_c - \phi) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\rho}_m}(-\theta) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\sigma}_m}(-\psi). \end{aligned} \quad (2.84)$$

#### 2.6.4 Dérivées partielles

Dans cette partie, nous ne donnerons que les dérivées associées aux équations d'Euler du mouvement ainsi que les dérivées des variations temporelles des coefficients de Stokes. Les autres dérivées se déduisent facilement à partir des différentes expressions littérales.

Nous commençons par réécrire l'équation d'Euler du mouvement sous une forme générale, sans spécifier les différentes appartenances au noyau ou au manteau

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1} \cdot \left\{ \mathbf{C} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} - \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} \right\}.$$

Il est commode d'écrire cette expression sous forme indicielle en faisant apparaître le pseudo-tenseur unité de Levi-Civita, de rang 3, parfaitement antisymétrique et dont les

composantes changent de signe par permutation d'indice ( $e_{123} = +1$ ,  $e_{213} = -1$ ,  $e_{312} = +1$ , ...). Du fait de la parfaite anti-symétrie, si deux indices sont répétés la composante du pseudo-tenseur est nulle. Ainsi, le produit vectoriel de deux vecteurs polaires  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  s'écrit en notation vectorielle  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , avec  $\mathbf{c}$  un vecteur axial. En notation indicielle, on aura  $c_j = \frac{1}{2}e_{jkl}c_{kl}$ , avec  $c_{kl} = a_k b_l - a_l b_k$ , où  $c_j$  est le pseudo-vecteur dual du tenseur antisymétrique  $c_{kl}$ . Nous ne ferons pas de distinction entre les composantes contravariantes et covariantes.

L'équation d'Euler s'écrit alors

$$\dot{\omega}_j = [I_{ij}]^{-1} \left\{ \mathcal{C}_i - \frac{e_{ikl}}{2} [\omega_k I_{lm} \omega_m - \omega_l I_{km} \omega_m] - \dot{I}_{im} \omega_m \right\}, \quad (2.85)$$

avec

$$[I_{ij}]^{-1} = \frac{1}{\det[I_{ij}]} T_{\text{com}}[I_{ij}], \quad (2.86)$$

où  $\text{com}[I_{ij}]$  désigne la comatrice de  $\mathbf{I}$ .

- Dérivées partielles des composantes de la matrice d'inertie relativement à ses propres composantes :

$$\frac{\partial I_{ij}}{\partial I_{ab}} = \delta_{ia} \delta_{jb}. \quad (2.87)$$

- Dérivées partielles des composantes de la matrice d'inertie symétrique relativement à ses propres composantes :

$$\frac{\partial I_{ij}}{\partial I_{ab}} = \left( \delta_{ia} \delta_{jb} [1 - \delta_{ij} \delta_{ab}] + \delta_{ja} \delta_{ib} \right), \quad \forall b \geq a. \quad (2.88)$$

Cette deuxième relation comparativement à la précédente présente l'avantage de ne pas nécessiter une sommation sur toutes les composantes de  $\mathbf{I}$ . En effet, ne sont nécessaires que celles pour lesquelles  $b \geq a$ .

- Dérivées partielles de l'inverse de la matrice d'inertie relativement aux composantes de la matrice d'inertie :

$$\frac{\partial [I_{ij}]^{-1}}{\partial I_{ab}} = \frac{1}{\det[I_{ij}]} \frac{\partial T_{\text{com}}[I_{ij}]}{\partial I_{ab}} - \frac{T_{\text{com}}[I_{ij}]}{\det[I_{ij}]^2} \frac{\partial \det[I_{ij}]}{\partial I_{ab}}. \quad (2.89)$$

- Dérivées partielles des composantes de l'accélération angulaire relativement aux composantes du moment total des forces :

$$\frac{\partial \dot{\omega}_j}{\partial \mathcal{C}_a} = [I_{aj}]^{-1}. \quad (2.90)$$

- Dérivées partielles des composantes de l'accélération angulaire relativement aux composantes de la matrice d'inertie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\omega}_j}{\partial I_{ab}} &= \frac{\partial [I_{ij}]^{-1}}{\partial I_{ab}} \left\{ \mathcal{C}_i - \frac{e_{ikl}}{2} [\omega_k I_{lm} \omega_m - \omega_l I_{km} \omega_m] - \dot{I}_{im} \omega_m \right\} \\ &\quad - [I_{ij}]^{-1} \frac{e_{ikl}}{2} \left[ \omega_k \frac{\partial I_{lm}}{\partial I_{ab}} - \omega_l \frac{\partial I_{km}}{\partial I_{ab}} \right] \omega_m. \end{aligned} \quad (2.91)$$

- Dérivées partielles des composantes de l'accélération angulaire relativement aux composantes de la variation temporelle de la matrice d'inertie :

$$\frac{\partial \dot{\omega}_j}{\partial \dot{I}_{ab}} = -[I_{ij}]^{-1} \frac{\partial \dot{I}_{im}}{\partial \dot{I}_{ab}} \omega_m. \quad (2.92)$$

- Dérivées partielles des composantes de l'accélération angulaire relativement aux composantes du vecteur instantané de rotation :

$$\frac{\partial \dot{\omega}_j}{\partial \omega_a} = [I_{ij}]^{-1} \left\{ \dot{I}_{ia} - \frac{e_{ikl}}{2} [\delta_{ka} I_{lm} \omega_m - \delta_{la} I_{km} \omega_m + \omega_k I_{la} - \omega_l I_{ka}] \right\}. \quad (2.93)$$

Nous donnons ensuite une partie des dérivées partielles des variations temporelles des corrections aux coefficients de Stokes (*cf.* Eqs. (2.73) et (2.74)). Les dérivées relativement à  $\mu_L$ ,  $\mu_g$ ,  $(a_e)_L$  et  $k_{lm}$  sont immédiates et présentent des formes analogues aux dérivées calculées en Sec. (2.5.5) et ne seront par conséquent, pas détaillées ici. Seules les dérivées relativement à  $\mathbf{r}_b^*$ ,  $\mathbf{v}_b^*$ ,  $\boldsymbol{\omega}^*$  et  $\dot{\boldsymbol{\omega}}^*$  sont présentées.

- Dérivées partielles des coefficients  $\Delta \dot{C}_{lm}^T$  et  $\Delta \dot{S}_{lm}^T$  relativement aux composantes du vecteur vitesse déphasé du corps générateur de marées :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_g^*} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \dot{C}_{lm}^T \\ \Delta \dot{S}_{lm}^T \end{array} \right\} = k_{lm} (2 - \delta_{0m}) \frac{\mu_g (a_e)_L^{l+1} (l-m)!}{\mu_L r_g^{*2l+1} (l+m)!} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_g^*} \left\{ \begin{array}{c} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{array} \right\} - (2l+1) \left\{ \begin{array}{c} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{array} \right\} \frac{\mathbf{r}_g^*}{r_g^{*2}} \right]. \quad (2.94)$$

- Dérivées partielles des coefficients  $\Delta \dot{C}_{lm}^T$  et  $\Delta \dot{S}_{lm}^T$  relativement à la composante  $i$  du vecteur position déphasé du corps générateur de marées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_{g^*}^i} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \dot{C}_{lm}^T \\ \Delta \dot{S}_{lm}^T \end{array} \right\} &= k_{lm} (2 - \delta_{0m}) \frac{\mu_g (a_e)_L^{l+1} (l-m)!}{\mu_L r_g^{*2l+1} (l+m)!} \left[ v_{g^*}^k \frac{\partial^2}{\partial r_{g^*}^k \partial r_{g^*}^i} \left\{ \begin{array}{c} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{array} \right\} \right. \\ &\quad - \frac{(2l+1)}{r_g^{*2}} \left( \left[ v_{g^*}^i - (2l+3) \frac{r_{g^*}^k v_{g^*}^k}{r_g^{*2}} r_{g^*}^i \right] \left\{ \begin{array}{c} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{array} \right\} \right. \\ &\quad \left. \left. + r_{g^*}^i v_{g^*}^k \frac{\partial}{\partial r_{g^*}^k} \left\{ \begin{array}{c} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{array} \right\} + r_{g^*}^k v_{g^*}^i \frac{\partial}{\partial r_{g^*}^i} \left\{ \begin{array}{c} \Theta_{lm}^{(c)} \\ \Theta_{lm}^{(s)} \end{array} \right\} \right) \right]. \quad (2.95) \end{aligned}$$

- Dérivées partielles des coefficients  $\Delta \dot{C}_{2m}^S$  et  $\Delta \dot{S}_{2m}^S$  relativement aux composantes du vecteur accélération angulaire déphasé :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}^*} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \dot{C}_{2m}^S \\ \Delta \dot{S}_{2m}^S \end{array} \right\} = s_{2m} k_{2m} \frac{(a_e)_L^3}{\mu_L} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}^*} \left\{ \begin{array}{c} \Theta_{2m}^{(c)} \\ \Theta_{2m}^{(s)} \end{array} \right\}. \quad (2.96)$$

- Dérivées partielles des coefficients  $\Delta \dot{C}_{2m}^S$  et  $\Delta \dot{S}_{2m}^S$  relativement à la composante  $i$  du vecteur vitesse angulaire déphasé :

$$\frac{\partial}{\partial \omega_*^i} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \dot{C}_{2m}^S \\ \Delta \dot{S}_{2m}^S \end{array} \right\} = s_{2m} k_{2m} \frac{(a_e)_L^3}{\mu_L} \left[ \dot{\omega}_*^k \frac{\partial^2}{\partial \omega_*^k \partial \omega_*^i} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Theta_{2m}^{(c)} \\ \Theta_{2m}^{(s)} \end{array} \right\}. \quad (2.97)$$

## 2.7 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons exposé les différentes équations permettant d'intégrer numériquement le modèle dynamique décrivant les mouvements orbitaux des corps dans le système solaire, le mouvement rotationnel de la Lune et l'évolution de la différence entre les échelles de temps TT et TDB. Toutes les équations présentées ici ont été reprises des références distribuées par les différents groupes réalisant des éphémérides planétaires. Les deux principales références utilisées sont Folkner *et al.* (2014) pour les éphémérides DE du JPL, NASA et la thèse très détaillée de Manche (2011) pour les éphémérides INPOP de l'IMCCE, Observatoire de Paris. Nous avons également donné quelques-unes des équations permettant d'intégrer les dérivées partielles directement depuis l'équation aux variations. Nous reviendrons plus en détail sur la manière d'intégrer ces dérivées partielles dans le chapitre suivant, Sec. 3.3.3. Enfin, nous avons exposé différentes méthodes pour déterminer *e.g.* les quantités retardées (méthode d'ordres 1 et 2 en  $\tau_{nm}$ , ou méthode RK4), ou encore l'orientation de la Terre (modèle de précession/nutation SOFA ou modèle DE430/431). Ces différentes méthodes ont été implémentées pour permettre au modèle dynamique ELPN de s'approcher au plus près des modèles de DE430/431 ou INPOP13c.



# Chapitre 3

## Solution numérique en relativité générale

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>57</b>
<b>3.2</b>	<b>Intégration du modèle dynamique</b>	<b>58</b>
3.2.1	Adimensionnement des équations	58
3.2.2	Intégrateur numérique	60
3.2.3	Dérive du barycentre du système solaire	63
3.2.4	Procédure d'intégration des équations du mouvement	64
3.2.5	Comparaison à d'autres éphémérides	65
<b>3.3</b>	<b>Analyse des données LLR</b>	<b>75</b>
3.3.1	Réduction des données LLR	75
3.3.2	Ajustements par moindres carrés pondérés	79
3.3.3	Dérivées partielles	83
<b>3.4</b>	<b>Discussion des résultats</b>	<b>87</b>
3.4.1	Résidus de l'analyse des données LLR	87
3.4.2	Comparaison à d'autres éphémérides	89
3.4.3	Résidus à partir d'une solution ajustée	98
<b>3.5</b>	<b>Résumé</b>	<b>99</b>

---

### 3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de détailler les différentes étapes nécessaires à l'aboutissement d'une éphéméride lunaire calculée dans le cadre de la relativité générale. Dans un premier temps, nous présentons la procédure suivie en thèse afin d'intégrer numériquement les équations présentées dans le Chap. 2. Nous présentons alors quelques caractéristiques liées à notre intégration numérique et nous la comparons à d'autres éphémérides (INPOP13c et DE430). Dans un deuxième temps, une fois les solutions temporelles des mouvements orbital et rotationnel de la Lune déterminées, nous exposons la méthode d'analyse permettant d'ajuster les paramètres physiques du modèle aux données LLR. Enfin, nous clôturons le chapitre par une discussion sur les résultats obtenus dans le cadre du formalisme de la relativité générale.

## 3.2 Intégration du modèle dynamique

Avant d'introduire la procédure d'intégration, il est primordial de présenter les propriétés physiques et informatiques de notre solution numérique.

### 3.2.1 Adimensionnement des équations

Une spécificité propre à ELPN est l'intégration d'équations adimensionnées. Ce choix est assez naturel, et permet de travailler pendant la phase de calculs avec des quantités sans ou partiellement dé-dimensionnées dont les valeurs numériques des distances et temps caractéristiques du système restent de l'ordre de grandeur de l'unité. Le but principal est de simplifier la représentation paramétrique du système physique étudié.

#### Principe général

Prenons l'exemple d'un système physique décrit par le Lagrangien suivant

$$L(r, v, t) = \frac{1}{2}mv^2 - U(r),$$

où  $U$  est une fonction homogène de degré  $k$  pour la variable  $r$  et  $v = dr/dt$ .

Opérons les substitutions suivantes

$$r \rightarrow r_c \rho \quad \text{et} \quad t \rightarrow t_c \tau, \quad (3.1)$$

où  $r_c$  et  $t_c$  sont deux quantités possédant respectivement la dimension d'une longueur et d'un temps. Les deux autres variables  $\rho$  et  $\tau$  sont respectivement la distance adimensionnée et le temps adimensionné.

En insérant (3.1) dans le lagrangien et en posant  $\omega = d\rho/d\tau$ , on a alors

$$L(r, v, t) = \alpha \tilde{L}(\rho, \omega, \tau) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{mr_c^2}{t_c^2},$$

et

$$\tilde{L}(\rho, \omega, \tau) = \frac{1}{2}\omega^2 - \tilde{U}(\rho) \quad \text{avec} \quad \tilde{U}(\rho) = \frac{t_c^2 r_c^{k-2}}{m} U(\rho).$$

Les valeurs des constantes  $t_c$  et  $r_c$  étant arbitraires, il est possible de les choisir telles que la valeur numérique de la quantité  $t_c^2 r_c^{k-2}/m$  soit égale à l'unité. Ainsi, la valeur numérique du potentiel adimensionné  $\tilde{U}$  coïncide avec la valeur numérique du potentiel  $U$ . On voit alors que par un choix purement arbitraire concernant les valeurs de  $t_c$  et  $r_c$ , nous avons pu rendre la valeur numérique du nouveau paramètre de masse égale à l'unité, simplifiant dans le même temps la représentation paramétrique du système physique étudié qui est désormais décrit par le lagrangien sans dimension  $\tilde{L}$ .

On démontre également que la géométrie n'est nullement affectée par les substitutions (3.1). En effet, à partir du principe de moindre action il est clairement visible que l'application d'un facteur constant au Lagrangien ne change en rien les équations du mouvement. En dénotant les intégrales d'actions associées aux Lagrangiens  $L$  et  $\tilde{L}$  par  $S$  et  $\tilde{S}$ , on déduit du principe variationnel

$$S = \alpha' \tilde{S}, \quad \text{soit} \quad \delta S = \delta \tilde{S} = 0,$$

avec  $\alpha' = \alpha t_c$ .

Le schéma de principe de l'adimensionnement est représenté en Fig. 3.1, d'où il apparaît que le facteur constant est parfaitement arbitraire. Il peut être déterminé de telle sorte que  $\tilde{A}$  soit situé n'importe où entre  $A$  et  $O$  (sauf en  $O$ ).

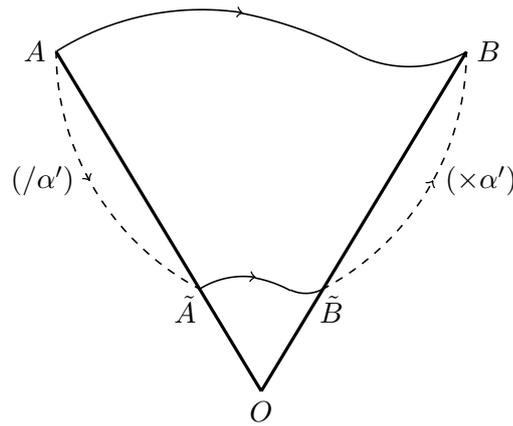


FIGURE 3.1 – Schéma représentant l'effet d'un adimensionnement d'équations du mouvement. L'intégration de l'équation du mouvement non adimensionnée est représentée par la trajectoire reliant les points  $A$  et  $B$ . L'adimensionnement par le paramètre  $\alpha'$ , fait débuter l'intégration en  $\tilde{A}$  qui se termine alors au point  $\tilde{B}$ . On redimensionne ensuite pour aller en  $B$ . Les trajectoires  $AB$  et  $\tilde{A}\tilde{B}$  sont géométriquement identiques car la dynamique n'est pas affectée par l'adimensionnement.

### Exemple d'utilisation

Nous présentons ici le principe d'adimensionnement appliqué au cas de deux corps ponctuels interagissant sous l'action de leur champ gravitationnel respectif. Les équations du mouvement décrivant l'évolution temporelle du vecteur joignant les deux corps est donnée par l'expression suivante

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} .$$

En effectuant la substitution montrée en Eq. (3.1), on trouve

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{d\tau^2} = -\frac{\mu t_c^2}{r_c^3} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} .$$

Sans aucunement altérer le problème, on peut effectuer le remplacement  $r_c^3/t_c^2 = \mu$ , qui est directement identifiable à la troisième loi de Kepler. On trouve alors qu'un choix naturel pour  $r_c$  et  $t_c$  est donné par  $r_c = a$  et  $t_c = n^{-1}$ , avec  $a$  le demi grand-axe de l'ellipse et  $n$  le moyen mouvement sur l'ellipse.

L'équation du mouvement devient alors

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{d\tau^2} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} ,$$

où  $\boldsymbol{\rho}$  et  $\tau$  sont deux quantités sans dimension.

L'adimensionnement permet ainsi de constater que la troisième loi de Kepler est une propriété caractéristique naturelle du système dynamique étudié. Elle se déduit de l'homogénéité de l'énergie potentielle gravitationnelle à la distance :  $U(r_c r) = r_c^k U(r)$  pour  $k = -1$ . Ainsi après avoir fait varier les distances  $r_c$  fois et les temps  $t_c$  fois, on déduit que la variation engendrée sur l'énergie cinétique est  $r_c^2/t_c^2$ . Cette variation est à comparer avec l'homogénéité de  $U$  aux distances, ce qui donne  $t_c = r_c^{3/2}$ . On constate alors que le temps varie comme la puissance 3/2 des distances comme le prédit la troisième loi de Kepler. On conclut que cette dernière découle ainsi du degré  $k = -1$  de l'homogénéité de  $U$  à  $r$ .

### Application à ELPN

Dans ELPN, l'adimensionnement est introduit en prenant pour valeurs numériques de  $r_c$  et  $t_c$ , le demi-grand axe (noté  $a$ ) et l'inverse du moyen mouvement lunaire (noté  $n$ ) tels qu'ils sont donnés dans les séries semi-analytiques ELP2000-82 développées par Chapront-Touze et Chapront (1983). Ainsi, en reprenant les notations et valeurs numériques de cette même référence on trouve les deux valeurs suivantes

$$n = 2.66169947305 \times 10^{-6} \text{ rad/s}, \quad (3.2a)$$

$$a = \left[ \frac{G'}{n^2(1 - \sigma_1)} \right]^{1/3} = 3.847480 \times 10^8 \text{ m}. \quad (3.2b)$$

où  $G' = \mathcal{G}m_T$  avec  $m_T$  la masse de la Terre, et où  $\sigma_1 = m_L/(m_T + m_L)$  avec  $m_L$  la masse de la Lune.

Une fois l'adimensionnement effectué, les équations sont intégrées numériquement et les solutions ainsi déterminées sont redimensionnées à la fin du calcul.

### 3.2.2 Intégrateur numérique

L'éphéméride lunaire numérique a été intégralement développée pendant la thèse. Le seul module qui a été repris de Hairer *et al.* (1993) est l'intégrateur numérique ODEX<sup>1</sup>. Il permet de résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre  $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$ , via un algorithme d'extrapolation (Gragg - Bulirsch - Stoer) basé sur la méthode du point médian. L'intégrateur est à pas variable adaptatif avec sélection de l'erreur tolérée (que nous noterons  $TOL$  dans la suite). Il est distribué en double précision (précision relative de  $10^{-16}$ ) et est écrit en FORTRAN77.

### ODEX en quadruple précision

Compte-tenu de la précision actuelle des observations LLR qui sont sub-centimétriques (Samain *et al.*, 1998; Murphy, 2013), la précision relative rapportée à la distance Terre-Lune est de l'ordre de  $10^{-12}$ , soit seulement 4 ordres de grandeurs d'écart avec la double précision numérique de l'intégrateur. Ainsi, pour ne pas risquer d'entacher les solutions intégrées par propagation des erreurs numériques, nous avons optimisé ODEX pour la quadruple précision (précision relative de  $10^{-32}$ ). Afin de s'assurer que le passage de la double à la quadruple précision a bien été pris en compte, nous avons comparé la solution numérique relativement à la solution analytique du problème à deux corps appliqué à un système fictif disposant des mêmes caractéristiques physiques (masses, excentricité, *etc.*) que le système Terre-Lune considéré isolé. Nous avons ainsi intégré numériquement les composantes cartésiennes coplanaires du vecteur Terre-Lune ( $q_1, q_2$ ) que nous avons ensuite comparées à leurs contre-parties analytiques données par les relations  $q_1 = a(\cos E - e)$  et  $q_2 = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$ . L'anomalie excentrique, notée  $E$ , étant déterminée en résolvant l'équation de Kepler par une méthode itérative :

$$\begin{aligned} \text{ordre 0 en } e &\implies E_0 = M \\ \text{ordre 1 en } e &\implies E_1 = M + e \sin E_0 \\ &\vdots \\ \text{ordre } k \text{ en } e &\implies E_k = M + e \sin E_{k-1}, \end{aligned}$$

1. <http://www.unige.ch/~hairer/software.html>.

$TOL$	$10^{-16}$	$10^{-18}$	$10^{-20}$	$10^{-24}$
$k$	13	15	16	20

TABLE 3.1 – Table reportant le nombre d’itérations minimum nécessaire à la résolution de l’équation de Képler pour une valeur donnée du paramètre d’erreur tolérée lors de l’intégration. Cette table est réalisée en prenant une excentricité  $e = 0.055$ .

où  $M$  et  $e$  sont respectivement l’anomalie moyenne et l’excentricité de la Lune<sup>2</sup>. Le nombre d’itérations nécessaires dépend alors du paramètre d’erreur tolérée ( $TOL$ ) choisi lors de l’intégration numérique. En effet, il est nécessaire de comparer des problèmes équivalents, d’où l’importance de ne pas entacher la précision de la solution analytique par une résolution de l’équation de Kepler à un ordre trop faible en excentricité. Le nombre d’itérations est déterminé facilement en imposant que l’erreur liée à la résolution de l’équation Kepler soit inférieure à l’erreur numérique tolérée, ce qui se traduit mathématiquement par

$$e^k \leq TOL < 1 \quad \text{soit} \quad k \geq \frac{\ln TOL}{\ln e}.$$

Nous donnons en Tab. 3.1, les valeurs de  $k$  correspondantes à quelques valeurs de  $TOL$ .

Finalement, on détermine, pour différentes valeurs de  $TOL$ , la propagation de l’erreur numérique commise sur la distance Terre-Lune en fonction du nombre de périodes orbitales (cf. Fig. 3.2) à l’aide de l’expression suivante

$$err_r(TOL) = \frac{|r^{(k)} - r^{(TOL)}|}{|r^{(k)}|},$$

où  $r^{(k)}$  est la distance Terre-Lune analytique déduite par résolution de l’équation de Kepler à l’ordre  $k$ , et  $r^{(TOL)}$  est la distance Terre-Lune intégrée numériquement avec ODEX optimisé pour l’intégration en quadruple précision.

À partir des courbes présentées en Fig. 3.2, il est clairement visible que l’intégrateur numérique a bel et bien été optimisé pour la quadruple précision, dans la mesure où les erreurs numériques sont en dessous de la précision relative associée à la double précision ( $10^{-16}$ ). Bien évidemment, la quadruple précision requiert un temps de calcul important. En effet, pour un problème équivalent il peut être jusqu’à 10 fois plus important que le temps de calcul nécessaire en double précision.

### Propagation des erreurs numériques

Nous avons également déterminé le paramètre optimal de l’erreur tolérée à considérer lors de l’intégration du problème lunaire complet<sup>3</sup>. Le choix est arbitraire et traduit d’un compromis entre le temps de calcul et l’erreur numérique commise. Cette dernière a été quantifiée à l’aide d’une intégration numérique aller-retour du problème lunaire complet sur 100 ans. Ainsi, l’erreur numérique absolue commise sur la solution  $x$ , est déterminée par la relation suivante

$$era_x(TOL) = \left| x^{(TOL)}(T_0) - x^{(TOL)}(T_0 \rightarrow T_0 + 100 \rightarrow T_0) \right|.$$

2. Cette méthode de résolution itérative n’est plus convergente pour des excentricités telles que  $e > 0.6627434$  (cf. Hagihara (1970) pour une discussion détaillée et cf. Murray et Dermott (2000) pour une présentation d’autres méthodes de résolution de l’Eq. de Kepler).

3. Le terme *complet* désigne l’ensemble du modèle dynamique présenté au Chap. 2.

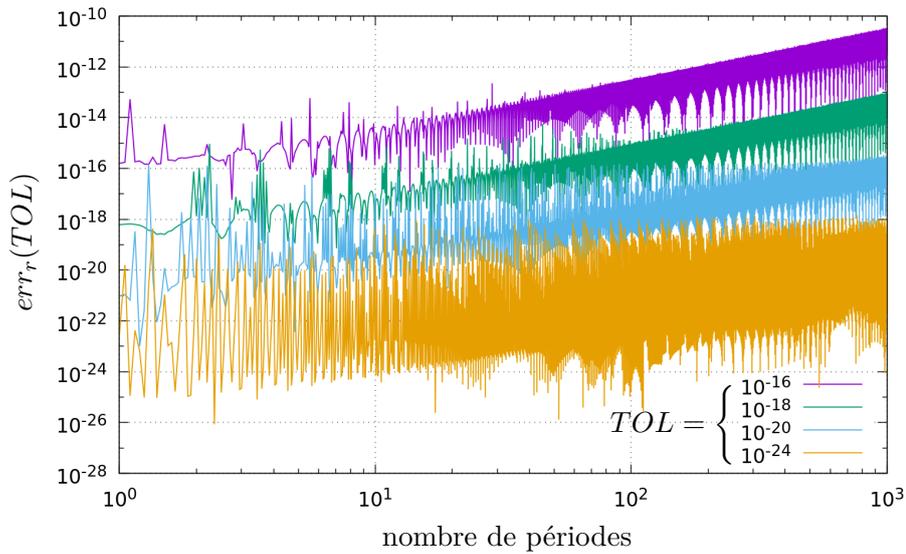


FIGURE 3.2 – Graphique représentant l'évolution de l'erreur numérique relative commise sur la distance par l'intégrateur ODEX (en quadruple précision), en fonction du nombre de périodes de révolution dans un problème à deux corps. Chacune des courbes est calculée pour une valeur différente du paramètre de tolérance d'erreur ( $TOL$ ). Les valeurs numériques sélectionnées pour les paramètres physiques sont celles du système Terre-Lune, *e.g.* l'excentricité  $e = 0.055$ .

$era_x(TOL)$	$TOL$	$10^{-18}$	$10^{-19}$	$10^{-20}$
	distance [ $\mu m$ ]		1172	64.71
longitude [ $nas$ ]		16869	932	15.96
latitude [ $nas$ ]		5385	297	5.09
$\phi$ [ $nas$ ]		3	0.206	0.003
$\theta$ [ $nas$ ]		7	0.388	0.007
$\psi$ [ $nas$ ]		19234	1062	18.18

TABLE 3.2 – Table des erreurs numériques absolues commises sur la distance Terre-Lune, la longitude, et la latitude de la Lune, ainsi que sur les trois angles d'Euler ( $\phi, \theta, \psi$ ), lors d'intégrations numériques aller-retour effectuées sur 100 ans pour le problème lunaire complet. Chaque intégration est réalisée pour une valeur différente du paramètre d'erreur tolérée ( $TOL$ ).

On donne ainsi en Tab. 3.2, les erreurs numériques absolues commises sur la distance, la longitude et la latitude géocentriques de la Lune pour différentes valeurs de la tolérance  $TOL$ . On donne également les erreurs numériques sur les angles d'Euler  $(\phi, \theta, \psi)$  permettant de repérer l'orientation spatiale de la Lune.

Le paramètre  $TOL$  est ainsi fixé à  $10^{-19}$  pour une précision sur 100 ans de  $65 \mu m$  sur la distance Terre-Lune, de  $0.9$  et  $0.3 \mu as$  sur la longitude et la latitude de la Lune, de  $0.2$  et  $0.4 nas$  sur les angles de précession et nutation de la Lune et de  $1.1 \mu as$  sur l'angle de rotation rapide.

### 3.2.3 Dérive du barycentre du système solaire

Connaissant l'ordre de grandeur de l'erreur liée à l'intégration numérique, nous nous intéressons ici à quantifier l'erreur physique liée à la dérive du barycentre du système solaire. L'invariant masse-énergie, tel qu'il est présenté en Eqs. (2.8) et (2.9) à l'ordre  $1/c^2$ , s'applique pour un ensemble de masses considérées ponctuelles. Or, nous avons vu en Sec. 2.4, que les équations intégrées ne se limitent pas à cette seule approximation mais considèrent également les effets générés par les potentiels non-sphériques de certains corps. De plus, le modèle dynamique inclut plusieurs mécanismes générateurs de dissipation d'énergie dans le système Terre-Lune (*cf.* Secs. 2.5.3 et 2.6.3). Les premiers sont liés aux forces de marées et à la variation du spin, et le dernier est lié à la friction entre le manteau et le noyau lunaire. En conséquence, l'invariant tel qu'il est présenté en Eqs. (2.8) et (2.9) est incomplet et on s'attend ainsi à observer une dérive du barycentre du système solaire.

Afin de quantifier et de visualiser cette dérive nous avons tracé en Fig. 3.3, l'évolution des composantes de  $\mathcal{R}$  en fonction du temps. Pour rappel,  $\mathcal{R}$  représente le vecteur mené du centre du repère au barycentre du système solaire. On voit alors que le barycentre s'écarte du centre du repère de manière quadratique en temps. La dérive atteint  $30 \mu m$  en un siècle, soit le même ordre de grandeur que la précision numérique ; elle est par conséquent totalement indétectable sur le mouvement des planètes ou bien l'orbite lunaire.

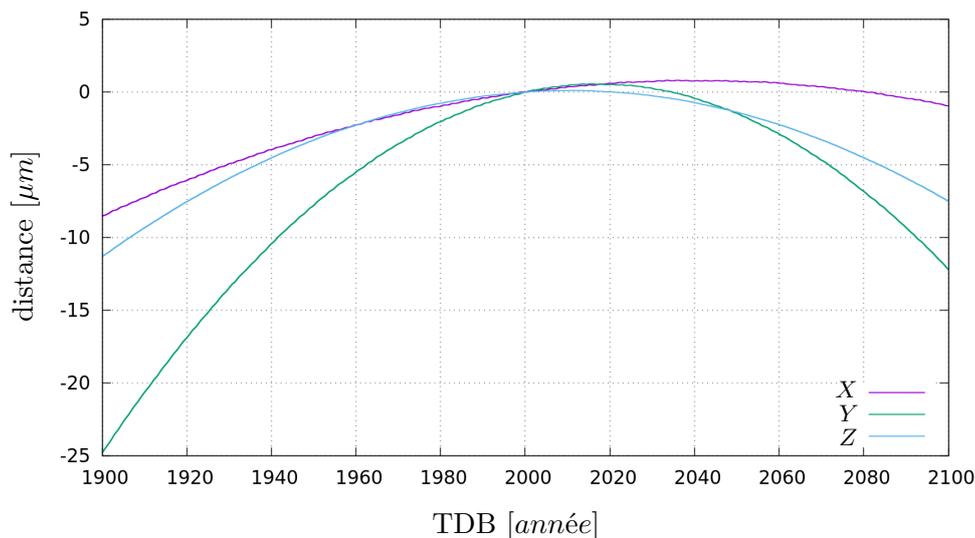


FIGURE 3.3 – Graphique représentant l'évolution des composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du vecteur  $\mathcal{R}(T)$  au cours du temps. L'instant initial est la date J2000 ( $T_0$ ) pour laquelle on a  $\mathcal{R}(T_0) = \mathbf{0}$ .

### 3.2.4 Procédure d'intégration des équations du mouvement

Connaissant maintenant le choix des quantités d'adimensionnement ainsi que les équations différentielles à intégrer, il est possible de détailler la procédure implémentée dans ELPN pour la résolution numérique du problème lunaire.

Tout d'abord, l'ensemble des conditions initiales et paramètres physiques est récupéré d'une solution existante (*e.g.* INPOP, DE ou ELPN). Ces paramètres, s'ils possèdent des dimensions de longueur ou de temps, sont adimensionnés par les valeurs (3.2). Une fois adimensionnées, les positions et vitesses barycentriques des corps sont déterminées à l'aide du travail présenté en Sec. 2.3.2. La procédure d'intégration numérique peut alors débiter.

À l'instant  $T$  :

1. Les composantes des accélérations absolues newtoniennes de tous les corps sont déterminées à l'aide de l'Eq. (2.2) ; elles sont exprimées dans l'ICRS.
2. Les composantes des accélérations dues à l'effet du moment quadripolaire du Soleil sur tous les corps sont évaluées à l'aide de l'Eq. (2.30) ; elles sont passées dans l'ICRS (*cf.* Sec. 2.6.1) et l'effet de réaction sur le Soleil est déterminé.
3. Les corrections relativistes aux accélérations absolues sont déterminées pour tous les corps, exceptés les 70 astéroïdes, dans le formalisme de la relativité générale à l'aide de l'Eq. (2.16).
4. La dérive temporelle du TT–TDB est évaluée à l'aide de l'Eq. (2.27) où les accélérations absolues des corps sont données par l'étape 1, et l'effet du moment quadripolaire solaire sur la Terre est donné par l'étape 2.
5. Les vecteurs positions déphasés des corps générateurs de marées sur Terre (la Lune et le Soleil) sont déterminés dans l'ICRS par intégration numérique RK4 entre les instants  $T$  et  $T - \tau_{lm}^o$  (*cf.* Eq. 2.42a) ; ils sont passés dans l'équateur terrestre à l'aide de l'Eq. (2.39) avec  $(\mathbf{B})_T(T)$  qui est donnée par les routines SOFA (*cf.* Sec. 2.6.2).
6. La partie non rigide des coefficients de Stokes de la Terre est évaluée pour le degré 2 à l'aide de l'Eq. (2.43) et de l'étape 5 ; les coefficients totaux sont obtenus en ajoutant aux parties non-constantes les contributions rigides (*cf.* Eqs. (2.47)).
7. Les composantes des accélérations dues aux harmoniques de la Terre sur la Lune, les planètes intérieures, Mars et Jupiter sont déterminées à l'aide de l'Eq. (2.30) où les coefficients de Stokes sont donnés par l'étape 6 ; elles sont passées dans l'ICRS (*cf.* Sec. 2.6.2) et l'effet de réaction sur la Terre est déterminé.
8. La matrice de passage (*cf.* Eq. (2.62)) ainsi que le vecteur instantané de rotation du manteau lunaire (*cf.* Eq. (2.63)) sont déterminés à partir des conditions initiales des angles d'Euler et de leur dérivée temporelle.
9. Les matrices d'inerties rigides de la Lune et de son noyau (*cf.* Eqs. (2.67) et (2.68)) sont déterminées.
10. Les vecteurs positions et vitesses des corps générateurs de marées sur la Lune (la Terre et le Soleil) dans l'ICRS, ainsi que le vecteur vitesse de rotation déphasée de la Lune sont déterminés par intégration numérique RK4 entre les instants  $T$  et  $T - \tau_{lm}^o$  (*cf.* Eqs. 2.42) ; les vecteurs positions et vitesses sont passés dans l'équateur lunaire à l'aide des Eqs. (2.38) et (2.75).
11. Le vecteur accélération angulaire déphasé de la Lune est déterminé à partir de l'Eq. (2.76) et des étapes 9 et 10.

12. Les parties non-rigides des coefficients de Stokes de la Lune sont évaluées pour le degré 2 à l'aide des Eqs. (2.43) et (2.46) et de l'étape 10 ; les coefficients totaux sont obtenus en ajoutant aux parties non-constants les contributions rigides.
13. Les dérivées temporelles des parties non-rigides des coefficients de Stokes de la Lune sont évaluées pour le degré 2 à l'aide des Eqs. (2.73) et (2.74) et des étapes 10 et 11 ; les dérivées temporelles totales sont obtenues en sommant les deux contributions.
14. La matrice d'inertie totale du manteau lunaire est évaluée à partir des Eqs. (2.70) et (2.69) en utilisant les quantités déterminées à l'étape 12.
15. La dérivée temporelle de la matrice d'inertie totale du manteau lunaire est évaluée à partir des Eqs. (2.71) et (2.72) en utilisant les quantités déterminées à l'étape 13.
16. Les accélérations dues aux harmoniques de la Lune sur la Terre, les planètes intérieures, Mars et Jupiter sont déterminées à l'aide de l'Eq. (2.30) où les coefficients de Stokes sont donnés par l'étape 12 ; elles sont passées dans l'ICRS par la transposée de la matrice  $(\mathbf{B})_L(T)$  évaluée à l'étape 8 et l'effet de réaction sur la Lune est déterminé.
17. La contribution totale des couples agissant sur le manteau lunaire est évaluée à l'aide de l'Eq. (2.81) et des accélérations dérivées aux étapes 1 et 16.
18. Le vecteur accélération angulaire du manteau lunaire est déterminé par l'équation d'Euler du mouvement en utilisant les résultats dérivés aux étapes 8, 14, 15 et 17.
19. Le vecteur accélération angulaire du noyau lunaire est déterminé par l'Eq. (2.82) en utilisant les résultats dérivés aux étapes 8, 9 en plus du couple généré à l'interface noyau/manteau calculé à l'étape 17.

Une fois l'intégration des mouvements orbitaux et rotationnel effectuée, les quantités possédant des dimensions de longueur ou de temps sont redimensionnées par les valeurs (3.2), pour être comparées à d'autres solutions.

### 3.2.5 Comparaison à d'autres éphémérides

Dans cette section, la solution intégrée numériquement est comparée à deux éphémérides planétaires DE430 (Folkner *et al.*, 2014) et INPOP13c (Fienga *et al.*, 2014). Pour ce faire, il a été réalisé deux intégrations numériques différentes permettant aux solutions intégrées de se rapprocher au plus près des modèles dynamiques de DE430 et INPOP13c. Ces solutions sont notées respectivement ELPN\_D et ELPN\_I.

#### Différences des modèles ELPN\_D et ELPN\_I

La principale différence entre les solutions ELPN\_D et ELPN\_I réside dans le modèle de libration lunaire. En effet, DE430 prend en compte un noyau fluide à l'intérieur de la Lune et modélise un terme de dissipation laminaire à l'interface noyau/manteau. Il existe donc dans DE430 deux différentes sources de dissipations d'énergie, une générée par l'interaction entre le noyau fluide et le manteau lunaire et une, commune avec INPOP13c, générée par les effets de marées et de variation du spin. L'introduction de ces deux différentes sources de dissipations dans DE430 est précisément justifiée dans un célèbre article de Williams *et al.* (2001).

La deuxième différence concerne la modélisation des coefficients du potentiel lunaire et terrestre. Dans ELPN\_D, ils sont modélisés jusqu'au degré 5 contre seulement une

modélisation jusqu'au 4ème degré dans ELPN\_I. Notons que si ELPN\_I respecte la modélisation de INPOP13c, ce n'est pas le cas de ELPN\_D puisque DE430 considère les harmoniques jusqu'au 6ème degré pour le potentiel lunaire.

La dernière différence concerne la détermination de la position des corps générateurs de marées sur la Terre. Dans ELPN\_D, toujours dans l'idée de s'approcher un maximum de DE430, la position retardée est déterminée par linéarisation à l'instant  $T - \tau_{lm}^o$  alors qu'elle est déterminée en considérant le deuxième ordre en  $\tau_{lm}^o$  dans le développement de Taylor pour ELPN\_I (cf. Sec. 2.5.2). De plus, ELPN\_I considère que les temps de déphasages orbitaux et rotationnels sont équivalents ( $\tau_{lm}^r \equiv \tau_{lm}^o \equiv \tau_{lm}$ ), là où ils diffèrent pour ELPN\_D.

Mentionnons également que les modèles d'orientations de la Terre pour les solutions ELPN\_D et ELPN\_I sont identiques à DE430 et utilisent le forçage donné par le modèle de Williams décrit en intégralité dans Folkner *et al.* (2014), alors que INPOP13c intègre numériquement la rotation de la Terre.

Enfin, notons que les solutions ELPN\_D et ELPN\_I n'intègrent que les positions et vitesses des 70 plus gros astéroïdes là où DE430 et INPOP13c en intègrent plus de 300. Notons de plus, que INPOP13c inclut un anneau pour modéliser les astéroïdes restant de la ceinture principale.

### Comparaison entre ELPN et les éphémérides DE430 et INPOP13c

Afin d'effectuer la comparaison des modèles dynamiques, les solutions ELPN\_D et ELPN\_I ont été intégrées sur 100 ans de part et d'autre de J2000 en prenant pour cette date les conditions initiales et paramètres physiques distribués par DE430 et INPOP13c respectivement. La comparaison est ainsi réalisée sans effectuer d'ajustement des modèles ELPN\_D et ELPN\_I aux éphémérides DE430 et INPOP13c. Cette étape comparative est nécessaire à la validation du modèle dynamique implémenté.

**Orbite et librations lunaires.** Tout d'abord, en se référant aux Figs. 3.4 et 3.5 on constate que les orbites lunaires, telles qu'elles sont intégrées dans ELPN\_D et ELPN\_I, sont respectivement très proches de celles de DE430 et INPOP13c. Pour les deux solutions, l'écart sur la prédiction de la distance Terre-Lune reste inférieur à 4 *cm* sur la période d'activité du LLR. Sur cette même période, l'écart de prédiction sur le demi-grand axe de l'orbite lunaire reste en dessous des 2 *cm*. Concernant la longitude et la latitude de la Lune, les écarts de prédictions sont inférieurs à respectivement 0.2 et 0.1 *mas*, ce qui représente au niveau de la Lune des déplacements de l'ordre de 40 et 20 *cm*.

Afin de bien interpréter ces chiffres, il faut alors garder à l'esprit que les différences présentées ici n'ont pas été minimisées par ajustement aux éphémérides DE430 ou INPOP13c. En conséquence, elles représentent le taux avec lequel les orbites de DE430 ou INPOP13c sont dégradées par l'intégration des solutions ELPN\_D et ELPN\_I. Ces dernières possédant des modèles dynamiquement proches (mais tout de même différents) de ceux implémentés dans les éphémérides DE430 ou INPOP13c. C'est donc l'impact de cette différence de modélisation qui est illustré ici.

D'ailleurs, la Fig. 3.6 illustre que la modélisation des librations dans ELPN\_I est absolument identique à celle de INPOP13c dans la mesure où aucun signal résiduel n'est observé (*courbes en gris*) ni sur les angles ni sur les vitesses angulaires. Quant au modèle ELPN\_D, plus complet que ELPN\_I concernant la modélisation des librations lunaires, il présente après comparaison à DE430 (*courbes en noir*), un signal périodique d'amplitude maximale égale à 50 *mas* sur les variables angulaires (soit un déplacement sur la surface lunaire d'environ 40 *cm*).

Afin d'illustrer la proximité respective des modèles ELPN\_D et ELPN\_I à DE430 et INPOP13c, nous avons intégré les solutions ELPN\_D à partir des conditions initiales fournies par l'éphéméride INPOP13c, puis nous avons ensuite comparé les prédictions obtenues à celles d'INPOP13c. Les résultats des différences sont exposés en Fig. 3.7 sur les composantes sphériques du vecteur Terre-Lune, en Fig. 3.8 sur les éléments képlériens de la Lune et en Fig. 3.9 sur les angles d'Euler et leur dérivée temporelle. On constate ainsi que les différences sont beaucoup plus importantes que les précédentes (*cf. courbes grises* des Figs. 3.4, 3.5 et 3.6) dans la mesure où le modèle dynamique ELPN\_D n'est pas conçu pour reproduire INPOP13c. La différence la plus marquante est visible sur la Fig. 3.9 où l'écart entre les modèles dynamiques des librations lunaires produit un signal périodique à  $30 \text{ arcsec}$ , soit environ  $250 \text{ m}$  sur la surface de la Lune. Ce signal est principalement expliqué par la présence dans ELPN\_D du noyau lunaire qui n'est pas modélisé dans INPOP13c.

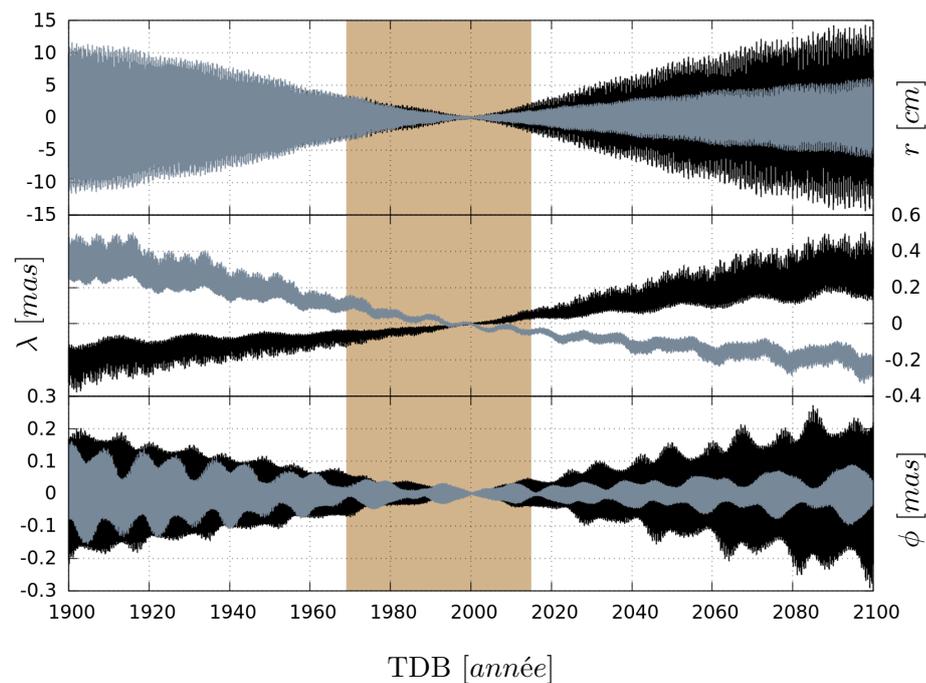


FIGURE 3.4 – Graphique représentant les différences sur les composantes sphériques ( $r, \phi, \lambda$ ) du vecteur Terre-Lune entre ELPN\_D et DE430 (*courbes en noir*) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (*courbes en gris*). La zone d'arrière plan en couleur *marron* représente la période de fonctionnement de LLR (s'étalant d'août 1969 à 2016).

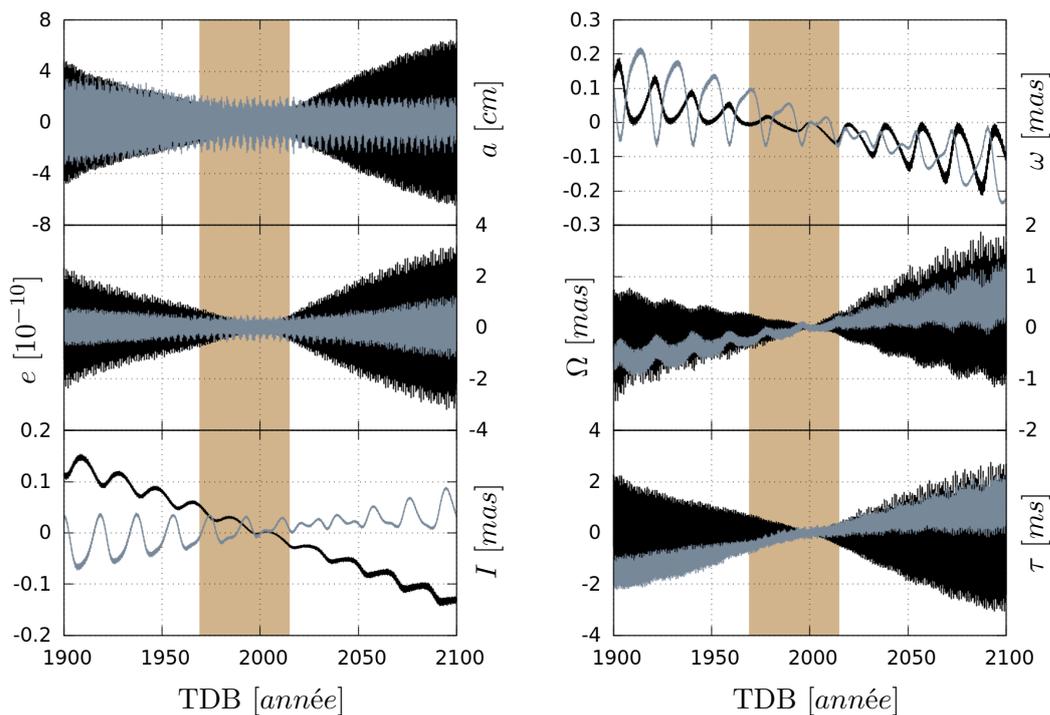


FIGURE 3.5 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de la Lune entre ELPN\_D et DE430 (courbes en noir) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (courbes en gris).

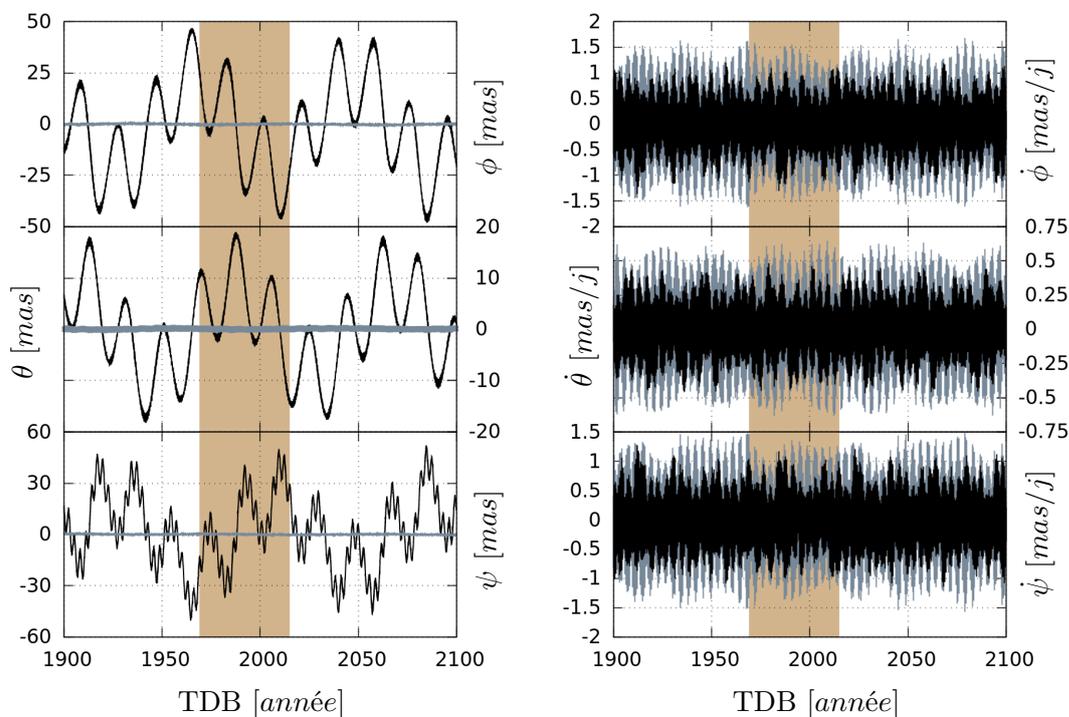


FIGURE 3.6 – Graphique représentant les différences sur les angles d'Euler de la Lune ( $\phi, \theta, \psi$ ) et leur vitesse entre ELPN\_D et DE430 (courbes en noir) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (courbes en gris).

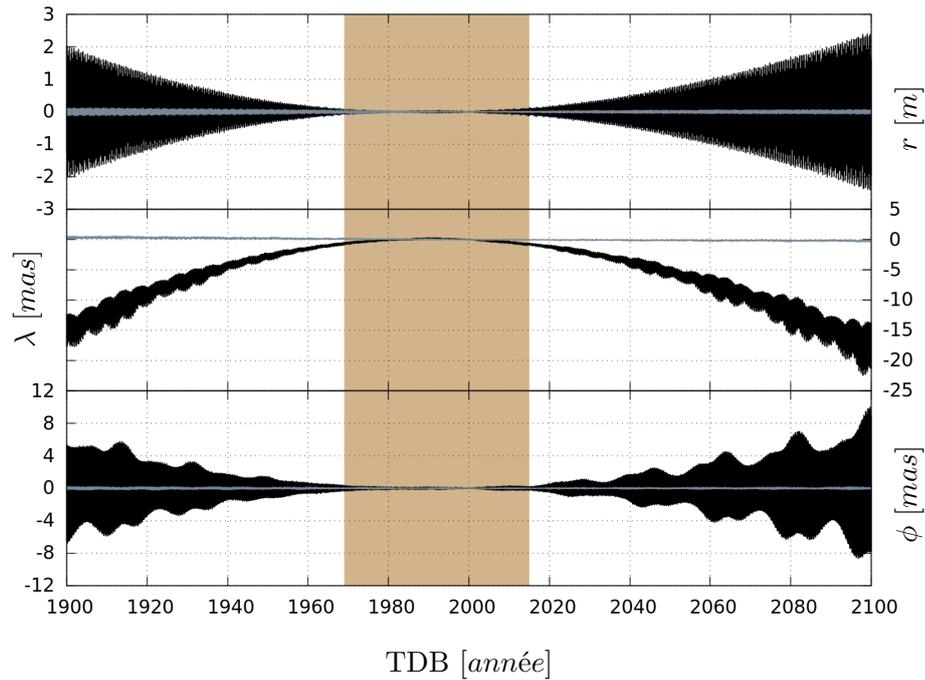


FIGURE 3.7 – Graphique représentant les différences sur les composantes sphériques ( $r, \phi, \lambda$ ) du vecteur Terre-Lune entre ELPN\_D et INPOP13c (courbes en noir) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (courbes en gris précédemment tracées de la même couleur en Fig. 3.4).

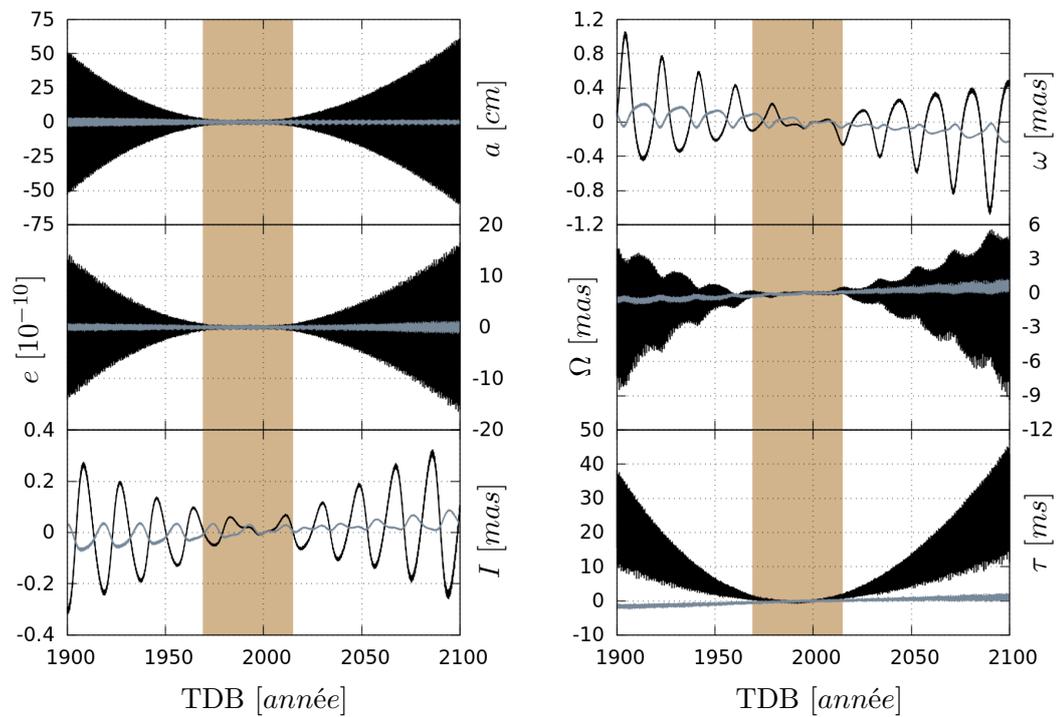


FIGURE 3.8 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de la Lune entre ELPN\_D et INPOP13c (courbes en noir) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (courbes en gris précédemment tracées de la même couleur en Fig. 3.5).

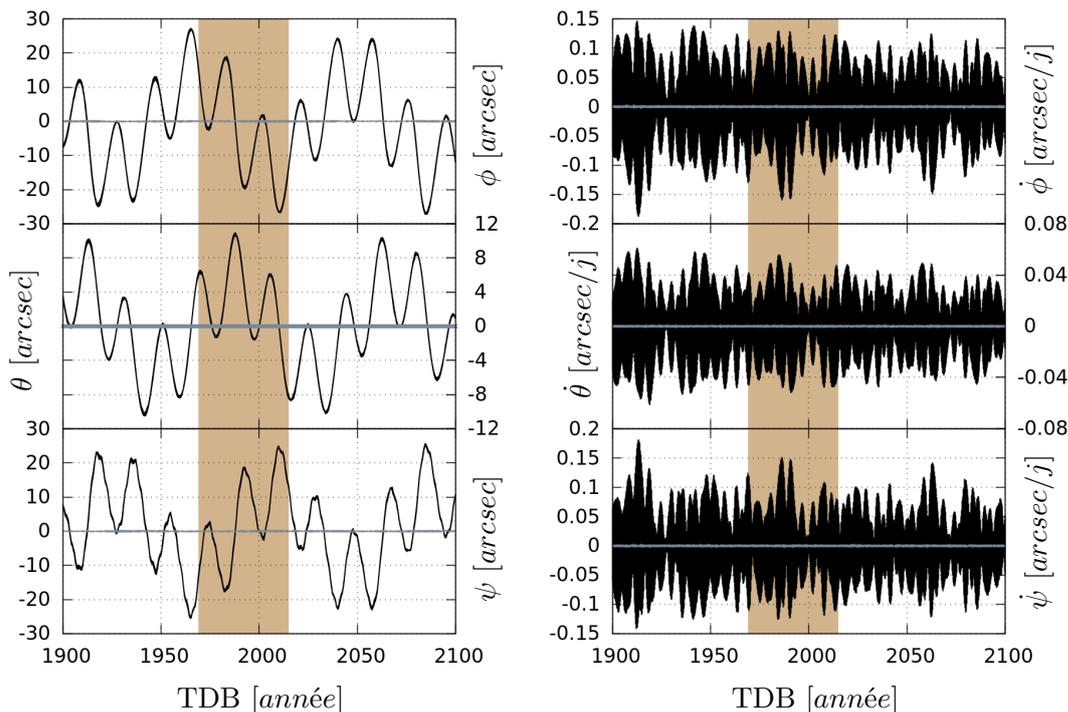


FIGURE 3.9 – Graphique représentant les différences sur les angles d’Euler de la Lune ( $\phi, \theta, \psi$ ) et leur vitesse entre ELPN\_D et INPOP13c (*courbes en noir*) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (*courbes en gris* précédemment tracées de la même couleur en Fig. 3.6).

**Orbites des planètes et de Pluton.** En Figs. 3.10 à 3.15 sont respectivement représentées les différences sur les éléments képlériens de Mercure, Vénus, du barycentre du système Terre-Lune, Mars, Jupiter et Saturne (les différences pour Uranus, Neptune et Pluton ne sont pas tracées). La première remarque concerne la bonne correspondance dans l’évolution des écarts entre ELPN\_D et DE430 puis entre ELPN\_I et INPOP13c pour les planètes intérieures et Mars (*cf.* Figs. 3.10 à 3.13). À partir de Jupiter, (*cf.* Figs. 3.14 à 3.15) on constate que l’écart entre ELPN\_I et INPOP13c (*courbes grises*) présente des offsets notamment sur les demi-grands axes, comparativement à l’écart entre ELPN\_D et DE430 (*courbes noires*). Or la différence de prédictions entre ELPN\_D et ELPN\_I sur les orbites des planètes est absolument négligeable; *e.g.*, après 100 ans d’intégration, l’orbite du barycentre Terre-Lune présente un écart sur le demi-grand axe de seulement 0.2 mm et concernant les autres orbites planétaires, l’écart reste en dessous du micromètre. Par conséquent, les offsets observés peuvent être expliqués par la présence dans INPOP13c d’un anneau d’astéroïdes qui n’est pas modélisé dans DE430.

Dans le cadre de l’analyse des données LLR, les précisions à atteindre sur le positionnement des planètes et de Pluton sont conditionnées par leurs effets perturbatifs sur le système Terre-Lune. Pour chaque orbite de planète, il est possible de définir une *précision relative moyenne* de notre solution relativement à l’éphéméride INPOP13c (ou DE430). Cette précision relative moyenne peut être définie comme étant la différence maximale ( $\delta a$ ) sur les demi-grands axes d’une planète entre ELPN\_I et INPOP13c (ou ELPN\_D et DE430) normalisée par la valeur moyenne du demi-grand axe. Une représentation graphique de cette précision relative moyenne est la valeur maximale des courbes (*grises* pour INPOP13c et *noires* pour DE430) associées au paramètre  $a$  des Figs. 3.10 à 3.15 normalisées par le demi-grand axe. Les précisions relatives moyennes ainsi obtenues sont

à comparer aux sensibilités théoriques du LLR aux orbites planétaires, dérivées en annexe B et regroupées en Tab. B.4. La comparaison est présentée en Tab. 3.3 en prenant l'éphéméride INPOP13c pour référence<sup>4</sup>. Elle montre que les orbites planétaires intégrées numériquement sont parfaitement utilisables pour effectuer une analyse de données LLR. En effet, les précisions obtenues par intégration numérique sont, relativement à la solution de référence INPOP13c, inférieures de plusieurs ordres de grandeurs (exception faite du cas de l'orbite du barycentre Terre-Lune) à la précision théorique requise pour effectuer une analyse de données LLR. Mentionnons cependant le cas de l'orbite du barycentre Terre-Lune dont la précision relative à INPOP13c n'est que 6 fois meilleure que la précision théorique requise pour l'analyse des données LLR.

Corps	Précision	Théorique requise	Modélisation numérique
		$\delta R/R$ [%]	$\delta a/a$ [%]
BTL		$1.2 \times 10^{-8}$	$2.0 \times 10^{-9}$
Vénus		$3.5 \times 10^{-4}$	$9.2 \times 10^{-10}$
Jupiter		$6.7 \times 10^{-4}$	$9.0 \times 10^{-8}$
Mercure		$2.2 \times 10^{-2}$	$5.3 \times 10^{-10}$
Mars		$1.1 \times 10^{-2}$	$2.2 \times 10^{-8}$
Saturne		$1.5 \times 10^{-2}$	$9.8 \times 10^{-8}$
Uranus		0.8	$7.0 \times 10^{-8}$
Neptune		1.7	$6.6 \times 10^{-8}$

TABLE 3.3 – Table comparative entre la précision théorique requise pour l'analyse LLR sur les rayons des orbites planétaires (*deuxième colonne*) et la précision relativement à INPOP13c de ces mêmes orbites intégrées numériquement (*troisième colonne*). La précision théorique est reprise de la Tab. B.4 et a été déterminée en faisant l'hypothèse qu'une variation du rayon d'une orbite planétaire est observable si l'effet direct qu'il induit sur la distance Terre-Lune est supérieur au millimètre. BTL désigne le barycentre du système Terre-Lune.

4. Les précisions relatives moyennes calculées à partir de DE430 sont toutes inférieures à celles calculées avec INPOP13c et ne sont donc pas présentées dans cette table.

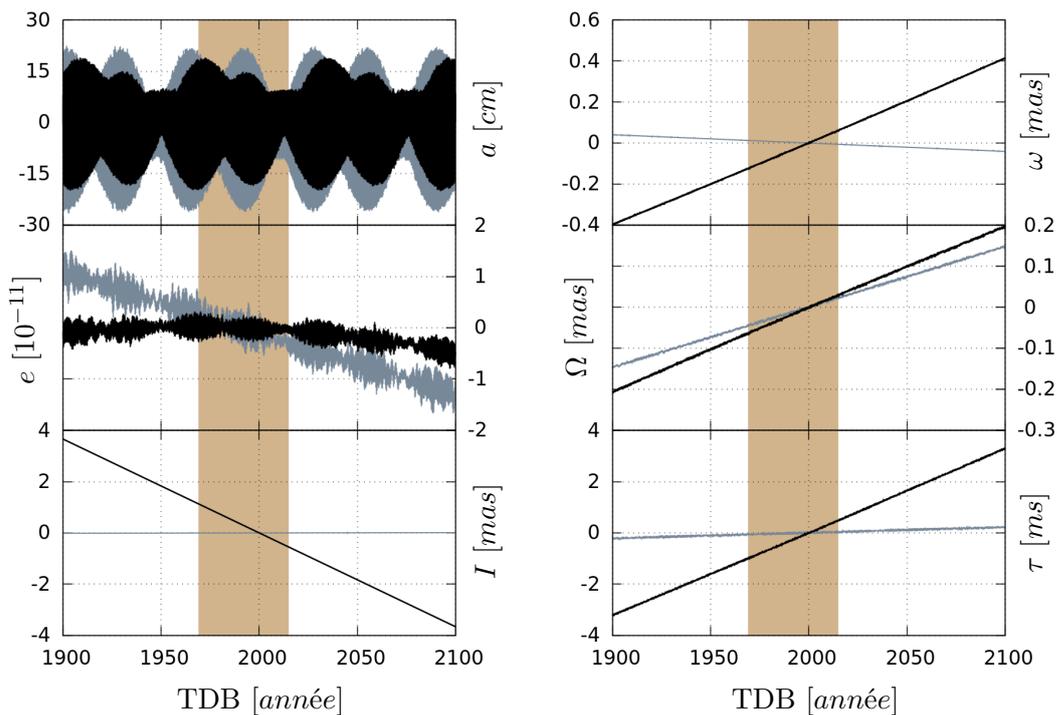


FIGURE 3.10 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de Mercure entre ELPN\_D et DE430 (courbes en noir) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (courbes en gris).

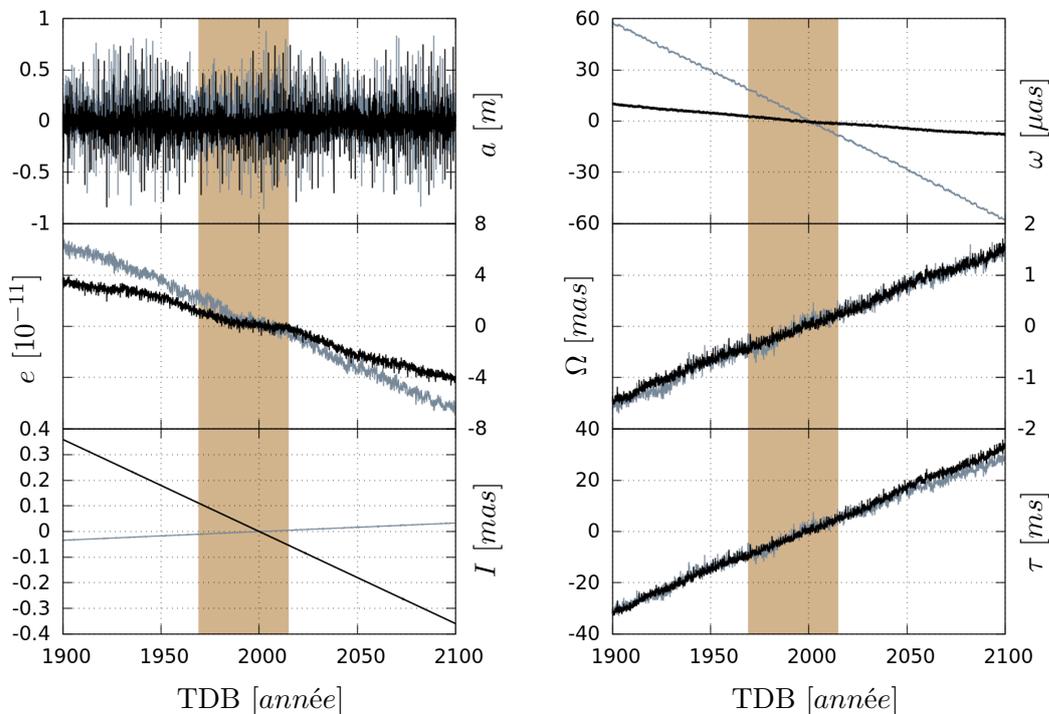


FIGURE 3.11 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de Vénus entre ELPN\_D et DE430 (courbes en noir) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (courbes en gris).

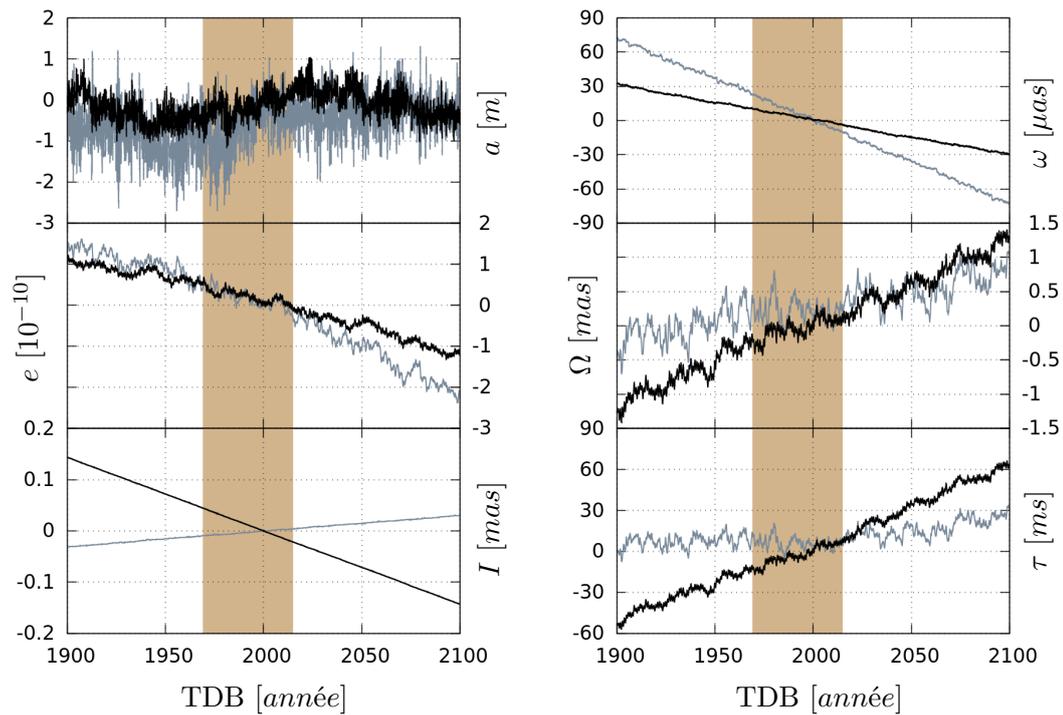


FIGURE 3.12 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) du barycentre du système Terre-Lune entre ELPN\_D et DE430 (courbes en noir) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (courbes en gris).

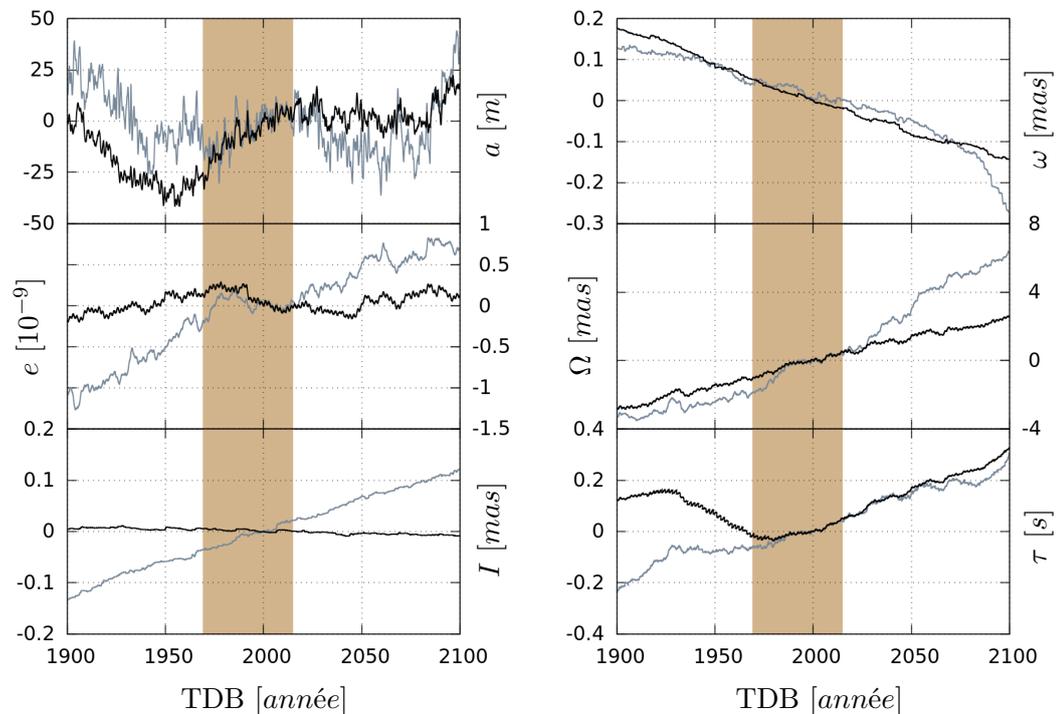


FIGURE 3.13 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de Mars entre ELPN\_D et DE430 (courbes en noir) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (courbes en gris).

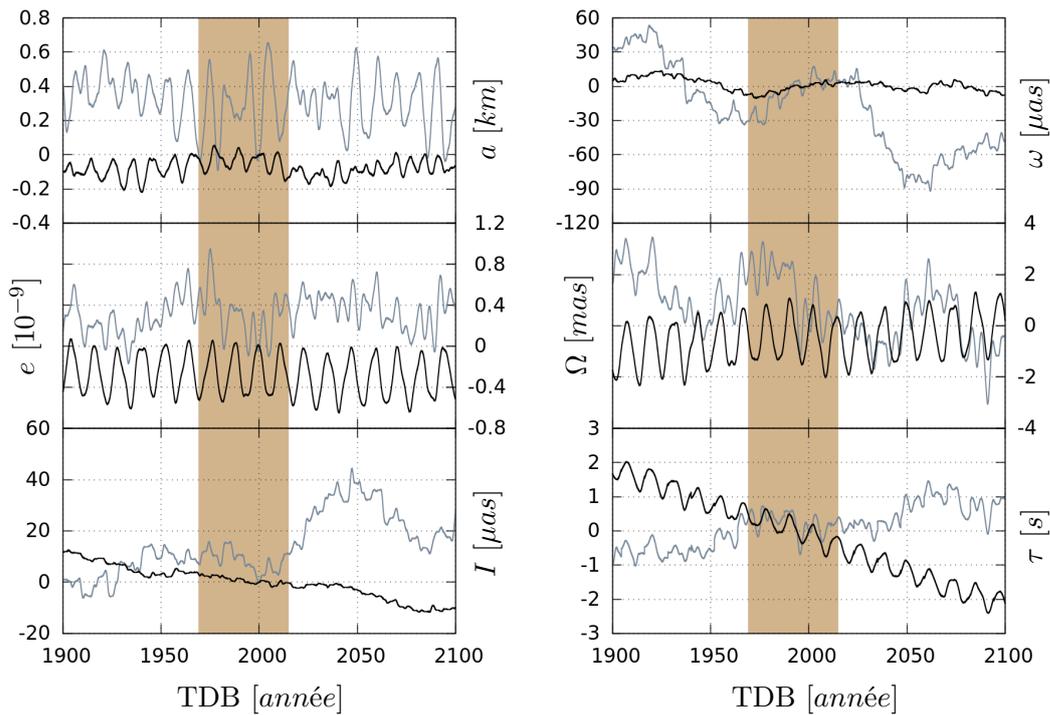


FIGURE 3.14 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de Jupiter entre ELPN\_D et DE430 (courbes en noir) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (courbes en gris).

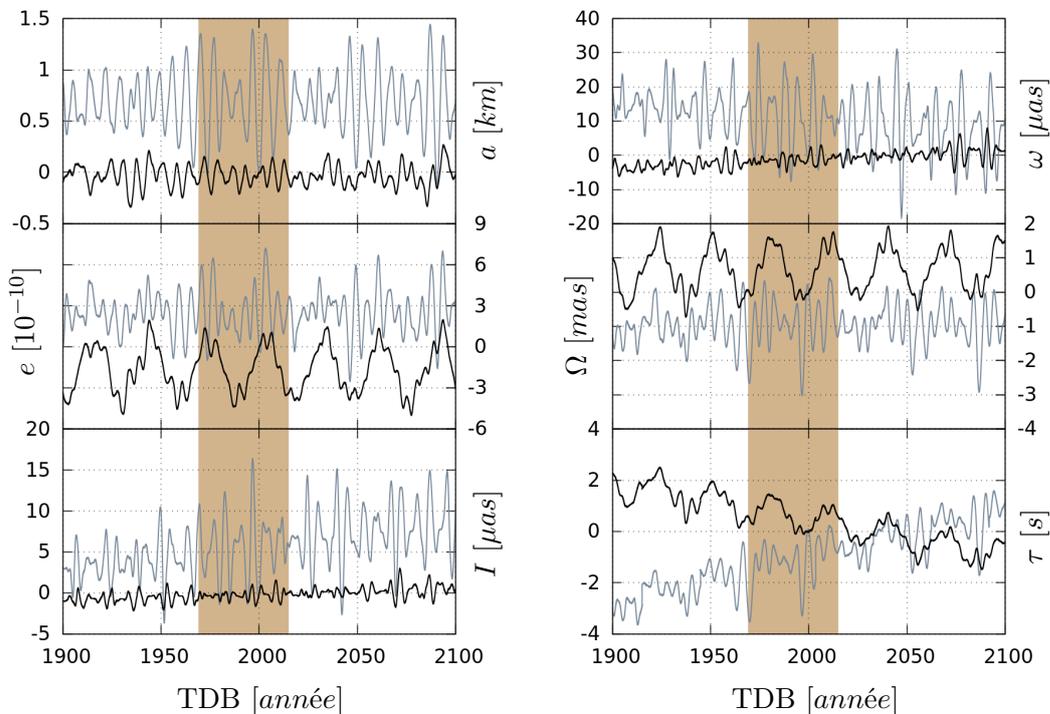


FIGURE 3.15 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de Saturne entre ELPN\_D et DE430 (courbes en noir) puis entre ELPN\_I et INPOP13c (courbes en gris).

### 3.3 Analyse des données LLR

Disposant maintenant d'un modèle numérique capable de faire des prédictions sur le mouvement orbital et rotationnel de la Lune, il est nécessaire de confronter ces prédictions aux observations. L'objectif d'une telle démarche est double puisqu'il permet dans un premier temps, de tester la fiabilité du modèle numérique ainsi créé. Puis, dans un second temps, une fois le modèle considéré fiable<sup>5</sup>, il peut être utilisé pour dériver des contraintes sur les paramètres physiques mis en jeux. Ainsi, les prédictions d'ELPN sont confrontées aux données de télémétrie laser Lune, afin de ressortir des contraintes sur les paramètres physiques intrinsèques au modèle.

#### 3.3.1 Réduction des données LLR

Le LLR est utilisé pour réaliser des mesures hautement précises du temps aller-retour de pulses laser tirés depuis une station LLR émettrice sur Terre, puis réfléchis sur un rétro-rélecteur à la surface de la Lune et enfin détectés à leur retour au niveau d'une station réceptrice sur Terre<sup>6</sup>.

#### Points normaux

Les données LLR sont distribuées pour une date donnée en tant que points normaux combinant des séries temporelles de temps allers-retours moyennées sur plusieurs minutes afin d'obtenir un meilleur ratio signal/bruit. Chaque point normal peut être considéré comme une observation indépendante. Les points normaux sont caractérisés par un temps d'émission  $t_1$  daté en UTC, un temps de vol aller-retour  $\Delta t_o$  mesuré en TAI, ainsi que d'autres données observationnelles comme la longueur d'onde des tirs laser, le nombre d'échos constituant le point normal ou encore la température, pression et humidité atmosphérique. On trouvera sur le site du groupe *Paris Observatory Lunar Analysis Center*<sup>7</sup> (POLAC) appartenant au SYRTE, plusieurs documentations sur l'analyse de données et le contenu informationnel des points normaux.

#### Principe de l'analyse

Le principe de l'analyse consiste à calculer, pour une date d'observation donnée, la quantité appelée *résidu*; le résidu est défini mathématiquement par la relation

$$\rho = \rho_o - \rho_c = \frac{c}{2}(\Delta t_o - \Delta t_c), \quad (3.3)$$

où  $\Delta t_c$  est la contre-partie théorique de  $\Delta t_o$ .

La valeur du temps lumière théorique  $\Delta t_c$  est déterminée en deux étapes comme illustré en Fig. 3.16. On additionne ainsi le temps mis par les photons pour parcourir la distance séparant la station émettrice (à l'instant  $t_1$ ) du rétro-rélecteur (à l'instant  $t_2$ ), auquel on ajoute le temps mis par les photons pour parcourir la distance séparant le rétro-rélecteur (à l'instant  $t_2$ ) de la station réceptrice (à l'instant  $t_3$ ).

5. Lorsque les prédictions reproduisent les observations au degré d'approximation souhaité.

6. Généralement la station réceptrice possède les mêmes coordonnées ITRF que la station émettrice, exception faite de la station Haleakala d'Hawaï pour laquelle les deux sont distantes de quelques mètres.

7. <http://polac.obspm.fr/llr.html>

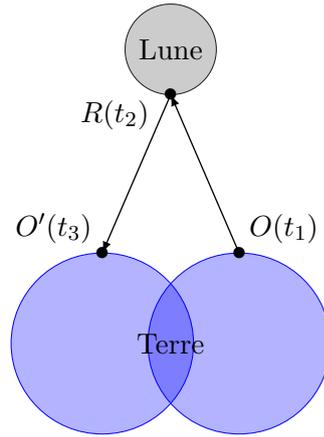


FIGURE 3.16 – Schéma de principe de la mesure des temps de vol des photons envoyés à l’instant  $t_1$  depuis une station émettrice  $O$  à la surface de la Terre, réfléchis à l’instant  $t_2$  sur un réflecteur  $R$  à la surface de la Lune et captés au sol par une station réceptrice  $O'$  à l’instant  $t_3$ .

### Notion de repère

Dans le calcul du temps de propagation de la lumière, il est indispensable de prendre en compte certains délais qui tirent leurs origines de la courbure relativiste des rayons lumineux, de l’effet troposphérique ou encore de corrections relativistes entre échelles de temps. Ces dernières sont la conséquence de l’utilisation des positions barycentriques des corps célestes, exprimées en fonction du TDB, lors du calcul de  $\Delta t_c$ . Ainsi, comme montré en Fig. 3.17, il est donc indispensable que toutes les quantités soient exprimées dans le même système de référence. Parmi tous les vecteurs utilisés pour le calcul du temps lumière théorique, on retrouve :

- les vecteurs positions barycentriques de la Terre ( $\mathbf{r}_T$ ), de la Lune ( $\mathbf{r}_L$ ) et du barycentre Terre-Lune ( $\mathbf{r}_B$ ), qui doivent être fournis par une éphéméride lunaire et planétaire. Dans notre cas, nous utilisons les prédictions apportées par ELPN,
- les vecteurs positions barycentriques des réflecteurs rapportés au centre de masse de la Lune ( $\mathbf{r}_{LR}$ ), qui doivent être fournis à l’aide d’une éphéméride lunaire distribuant les prédictions des librations lunaires. Nous utilisons également ELPN,
- les vecteurs positions barycentriques des stations rapportés au centre de masse de la Terre ( $\mathbf{r}_{TO}$ ), qui nécessitent une connaissance précise de la rotation de la Terre (précession, nutation, mouvement du pôle, ...). Nous utilisons les conventions IERS (Petit *et al.*, 2010).

### Calcul de $\Delta t_c$

D’après Chapront *et al.* (1999), la formulation théorique du temps lumière est donnée par l’expression suivante

$$\Delta t_c = [T_3 - \Delta\tau_t(T_3)] - [T_1 - \Delta\tau_t(T_1)], \quad (3.4)$$

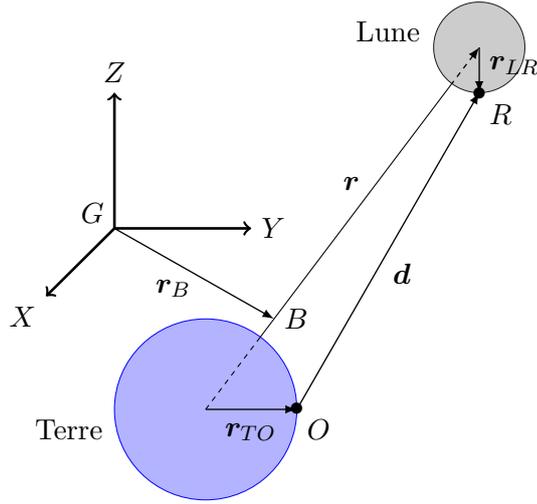


FIGURE 3.17 – Schéma de principe et notations utilisées pour l'analyse de données LLR. Le tir laser s'effectue depuis une station émettrice  $O$  sur Terre et est réfléchi à la surface de la Lune par un rétro-réflexeur  $R$ . Le point  $B$  représente le barycentre du système Terre-Lune et le repère  $(T, X, Y, Z)$  est centré sur le barycentre du système solaire  $G$ .

avec

$$T_3 = T_2 + \frac{\|\mathbf{r}_{O'}(T_3) - \mathbf{r}_R(T_2)\|}{c} + \Delta\tau_g + \Delta\tau_a, \quad (3.5a)$$

$$T_2 = T_1 + \frac{\|\mathbf{r}_R(T_2) - \mathbf{r}_O(T_1)\|}{c} + \Delta\tau_g + \Delta\tau_a, \quad (3.5b)$$

où le temps lumière théorique est exprimé en TAI afin d'être comparé à  $\Delta t_o$ . Les vecteurs  $\mathbf{r}_O$ ,  $\mathbf{r}_{O'}$  et  $\mathbf{r}_R$  sont respectivement les positions barycentriques de l'émetteur, du récepteur et du réflecteur.  $\Delta\tau_t$  est la correction relativiste entre les échelles de temps permettant de changer le TDB en TAI en passant par le TT défini au niveau de la station. La principale contribution à  $\Delta\tau_t$  est donnée par ELPN qui intègre directement la différence TT–TDB au niveau du géocentre (*cf.* Sec. 2.3.5). Des corrections liées à la vitesse barycentrique de la station permettent de définir le TT au niveau de la station. Le passage au TAI est immédiat et se fait via une simple relation linéaire.  $\Delta\tau_g$  est la correction relativiste due à la courbure des rayons lumineux et  $\Delta\tau_a$  est la correction due au passage des photons dans la troposphère et est donnée par les conventions IERS (Petit *et al.*, 2010). Les temps  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont respectivement les temps à l'émission, à la réflexion et à la réception et sont exprimés en TDB. Le temps  $T_1$  est déduit du temps d'émission observé  $t_1$  (daté en UTC), via les transformations suivantes :

$$\text{UTC} \xrightarrow{1} \text{TAI} \xrightarrow{2} \text{TT} \xrightarrow{3} \text{TDB}.$$

1. est basée sur la définition de UTC qui permet de déduire :  $\text{TAI} = \text{UTC} - n$ , avec  $n$  le nombre de secondes intercalaires déterminé par la relation  $|\text{UTC} - \text{UT1}| < 0.9 \text{ s}$ .
2. est basée sur la relation définie entre le TT et le TAI telle que  $\text{TT} = \text{TAI} + 32.184 \text{ s}$ .
3. est basée sur la relation dynamique directement intégrée dans l'éphéméride ELPN, à savoir :  $\text{TT} - \text{TDB} = f(\text{TDB})$ . Cette relation étant implicite en TDB, elle est résolue de manière itérative à l'ordre  $i$  en  $f(\text{TDB})$ , via la relation de récurrence suivante :  $\text{TDB}_i = \text{TT} - f(\text{TDB}_{i-1})$  avec  $f(\text{TDB}_0) = 0$ .

Les temps  $T_2$  et  $T_3$  sont ensuite déduits à partir des Eqs. (3.5b) et (3.5a).

Il est alors possible de réécrire le temps lumière théorique sous la forme d'une distance lumière théorique

$$\begin{aligned} \rho_c = \frac{c\Delta t_c}{2} = \frac{1}{2} \|\mathbf{r}_R(T_2) - \mathbf{r}_O(T_1)\| + \frac{1}{2} \|\mathbf{r}_{O'}(T_3) - \mathbf{r}_R(T_2)\| \\ + c\Delta\tau_g + c\Delta\tau_a + \frac{c}{2} [\Delta\tau_t(T_1) - \Delta\tau_t(T_3)], \end{aligned} \quad (3.6)$$

où les vecteurs sont définis par les relations

$$\mathbf{r}_R(T) = \mathbf{r}_B(T) + \frac{m_T}{m_T + m_L} \mathbf{r}(T) + \mathbf{r}_{LR}(T), \quad (3.7a)$$

$$\mathbf{r}_O(T) = \mathbf{r}_B(T) - \frac{m_L}{m_T + m_L} \mathbf{r}(T) + \mathbf{r}_{TO}(T), \quad (3.7b)$$

où  $m_L$  et  $m_T$  sont respectivement la masse de la Lune et celle de la Terre, et où  $\mathbf{r}$  est le vecteur Terre-Lune.

**Positions sélénocentriques des réflecteurs.** Le vecteur position barycentrique  $\mathbf{r}_{LR}(T)$  est déduit du vecteur position sélénocentrique  $\mathbf{r}'_{LR}$  via la matrice de rotation modélisant les librations lunaires  $(\mathbf{B})_L(T)$ . Une correction, notée  $\Delta\mathbf{r}_{LR}^{(m)}(T)$ , due à la déformation de la Lune par effet de marées est également prise en compte. Ainsi, on a la relation

$$\mathbf{r}_{LR}(T) = (\mathbf{B})_L(T) \cdot \mathbf{r}'_{LR} + \Delta\mathbf{r}_{LR}^{(m)}(T), \quad (3.8)$$

avec  $(\mathbf{B})_L(T)$  qui est donnée par ELPN et la correction due aux marées qui est reprise des conventions IERS (Petit *et al.*, 2010) pour être adaptée au cas de la Lune.

**Positions géocentriques des stations.** Le vecteur position barycentrique  $\mathbf{r}_{TO}(T)$  est déduit du vecteur position exprimé dans l'ITRF2008  $\mathbf{r}'_{TO}(T_R)$  auquel on ajoute la dérive de la station due à la tectonique des plaques, soit

$$\mathbf{r}'_{TO}(T) = \mathbf{r}'_{TO}(T_R) + [T - T_R] \mathbf{v}'_{TO}(T_R). \quad (3.9)$$

Le calcul des positions barycentriques des stations fait également intervenir d'autres corrections, notées  $\Delta\mathbf{r}_{TO}^{(i)}(T)$ . Ainsi,  $i =$

1. correspond aux corrections relativistes de changement de repères,
2. correspond aux corrections dues aux marées terrestres,
3. correspond aux corrections dues aux marées océaniques,
4. correspond aux corrections dues à la pression atmosphérique.

La relation finale s'écrit sous la forme suivante

$$\mathbf{r}_{TO}(T) = \mathbf{B}_T(T) \cdot \mathbf{r}'_{TO}(T) + \sum_{i=1}^4 \Delta\mathbf{r}_{TO}^{(i)}(T), \quad (3.10)$$

avec  $(\mathbf{B})_T(T)$  la matrice de rotation de la Terre permettant de passer au repère barycentrique;  $(\mathbf{B})_T(T)$  ainsi que les différentes corrections sont données par les conventions IERS (Petit *et al.*, 2010).

**Déflexion des rayons lumineux.** D'après l'Eq. (203) de Moyer (1971) ou encore l'Eq. (8.47) de Moyer (2000), en ne retenant que les actions gravitationnelles du Soleil (noté  $S$ ) et de la Terre<sup>8</sup> (notée  $T$ ) dans un système de référence barycentrique, l'équation du retard lumière est donnée par l'expression classique, à laquelle est ajouté un terme correctif en  $1/c^3$  appelé délai Shapiro

$$T_2 - T_1 = \frac{\|\mathbf{r}_R(T_2) - \mathbf{r}_O(T_1)\|}{c} + \frac{(1+\gamma)}{c^3} \sum_{b=S,T} \mathcal{G}m_b \ln \left[ \frac{r_{bO}(T_1) + r_{bR}(T_2) + \|\mathbf{r}_{bR}(T_2) - \mathbf{r}_{bO}(T_1)\| + \frac{(1+\gamma)}{c^2} \mathcal{G}m_b}{r_{bO}(T_1) + r_{bR}(T_2) - \|\mathbf{r}_{bR}(T_2) - \mathbf{r}_{bO}(T_1)\| + \frac{(1+\gamma)}{c^2} \mathcal{G}m_b} \right],$$

et

$$T_3 - T_2 = \frac{\|\mathbf{r}_{O'}(T_3) - \mathbf{r}_R(T_2)\|}{c} + \frac{(1+\gamma)}{c^3} \sum_{b=S,T} \mathcal{G}m_b \ln \left[ \frac{r_{bO'}(T_3) + r_{bR}(T_2) + \|\mathbf{r}_{bO'}(T_3) - \mathbf{r}_{bR}(T_2)\| + \frac{(1+\gamma)}{c^2} \mathcal{G}m_b}{r_{bO'}(T_3) + r_{bR}(T_2) - \|\mathbf{r}_{bO'}(T_3) - \mathbf{r}_{bR}(T_2)\| + \frac{(1+\gamma)}{c^2} \mathcal{G}m_b} \right].$$

En faisant l'approximation que les déplacements de la Terre et du Soleil sont négligeables pendant les intervalles de temps  $T_2 - T_1$  et  $T_3 - T_2$ , on peut remplacer les termes  $\mathbf{r}_{bR}(T_2) \sim \mathbf{r}_{bR}(T_1)$  et  $\mathbf{r}_{bO'}(T_3) \sim \mathbf{r}_{bO'}(T_1)$  dans les logarithmes. On peut considérer, de plus,  $\mathbf{r}_{bO'}(T_3) \sim \mathbf{r}_{bO}(T_1)$ , sans faire de distinction entre la position de la station émettrice et réceptrice d'Haleakala qui ne sont séparées que de quelques mètres. En première approximation, on pourra également négliger les termes en  $1/c^2$  dans les logarithmes. On arrive alors aux formes simplifiées suivantes

$$T_2 - T_1 = \frac{\|\mathbf{r}_R(T_2) - \mathbf{r}_O(T_1)\|}{c} + \Delta\tau_g(T_1),$$

$$T_3 - T_2 = \frac{\|\mathbf{r}_{O'}(T_3) - \mathbf{r}_R(T_2)\|}{c} + \Delta\tau_g(T_1),$$

où  $\Delta\tau_g$  est donné par l'expression

$$\Delta\tau_g(T) = \frac{2(1+\gamma)\mathcal{G}m_S}{c^3} \frac{d(T)}{r_{ST}(T) + r_{SL}(T)} + \frac{(1+\gamma)\mathcal{G}m_T}{c^3} \ln \left[ \frac{2r(T)}{r_{TO}(T) + r_{TR}(T) - d(T)} \right], \quad (3.11)$$

avec  $d$  la distance station-réflecteur (*cf.* Fig. 3.17).

Toute cette procédure permettant de calculer le temps lumière théorique a été reprise et améliorée dans le programme de réduction de données CAROLL du groupe POLAC.

### 3.3.2 Ajustements par moindres carrés pondérés

Une fois  $\rho_c$  déterminé, il convient ensuite de déduire pour chaque date d'observation le résidu donné par l'Eq. (3.3). Cette quantité est ensuite minimisée par ajustement des paramètres intervenant dans le calcul de  $\rho_c$ , grâce à la méthode des moindres carrés.

8. Le délai dû au champ gravitationnel lunaire produit un effet submillimétrique qui est par conséquent négligeable compte-tenu de la précision actuelle des données LLR. Cet effet est proportionnel à un terme en  $2\mathcal{G}m_b/c^2$ , avec  $m_b$  la masse du corps  $b$ . Pour la Lune  $2\mathcal{G}m_L/c^2 \sim 0.1 \text{ mm}$ .

### Présentation générale

On dispose d'un jeu de  $N$  données observationnelles  $(t_i, [\rho_o]_i)$  pour  $i = 1, \dots, N$ , pour lesquelles on souhaite faire correspondre au mieux les prédictions d'un modèle disposant de  $M$  paramètres ajustables  $a_m$  pour  $m = 1, \dots, M$ . La prédiction du modèle à une date quelconque est fonction du jeu de paramètres et se note  $[\rho_c]_i = \rho_c(t_i) = \rho_c(t_i; a_1, \dots, a_M)$ . Supposons que chaque valeur de l'observable  $[\rho_o]_i$  soit entachée d'une erreur aléatoire  $\Delta\rho_o$  qui soit indépendante des autres mesures et répartie autour de la prédiction  $\rho_c(t_i)$  selon une distribution Gaussienne dont l'écart-type à l'instant  $t_i$  est  $\sigma_i$ .

La formulation des moindres carrés découle de l'interrogation suivante : étant donné un jeu de paramètres  $a_1, \dots, a_M$ , quelle est la probabilité qu'à l'instant  $t_i$ , la prédiction  $\rho_c(t_i; a_1, \dots, a_M)$  fournisse la valeur de la donnée  $[\rho_o]_i$  à  $\pm\Delta\rho_o$  ?

On conçoit que plus les valeurs des paramètres sont proches des valeurs *réelles*, plus cette probabilité devient grande. En termes mathématiques, on cherche donc à déterminer le maximum de  $P([\rho_o]_i + \Delta\rho_o | a_1, \dots, a_M)$ , qui n'est autre que le maximum de vraisemblance des paramètres sachant les données<sup>9</sup>. D'après l'hypothèse concernant la distribution normale des données autour du modèle, la probabilité de retrouver la donnée  $[\rho_o]_i + \Delta\rho_o$  sachant les paramètres s'écrit (*cf.* Chap. 15 de Press *et al.* (1992)<sup>10</sup>)

$$P([\rho_o]_i + \Delta\rho_o | a_1, \dots, a_M) \propto \Delta\rho_o \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{[\rho_o]_i - \rho_c(t_i; a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right)^2 \right\},$$

et la probabilité sur tout le jeu de données est donc le produit des probabilités individuelles

$$P = \prod_{i=1}^N P([\rho_o]_i + \Delta\rho_o | a_1, \dots, a_M).$$

Le problème qui vise à déterminer la valeur  $\max[P]$  est équivalent au problème qui vise à déterminer la valeur  $\max[\log P]$ . Or le  $\max[P] \equiv \min[1/P]$ , par conséquent on déduit que rechercher la valeur  $\max[\log P] \equiv \min[-\log P]$ , avec

$$-\log P \propto \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{([\rho_o]_i - \rho_c(t_i; a_1, \dots, a_M))^2}{2\sigma_i^2} \right\} - N \log \Delta\rho_o.$$

Ainsi, en remarquant que le deuxième terme du second membre est constant, le  $\min[-\log P]$  est donné pour le  $\min[\chi^2]$ , où nous avons posé

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \frac{[\rho(t_i; a_1, \dots, a_M)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (3.12)$$

en introduisant le vecteur des résidus défini par la relation<sup>11</sup>

$$\rho(t_i; a_1, \dots, a_M) = [\rho_o]_i - \rho_c(t_i; a_1, \dots, a_M). \quad (3.13)$$

9. Le maximum de vraisemblance se note  $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_M | [\rho_o]_i + \Delta\rho_o) = P([\rho_o]_i + \Delta\rho_o | a_1, \dots, a_M)$ .

10. [http://perso.ens-lyon.fr/christophe.winisdoerffer/INTRO\\_NUM/NumericalRecipesinF77.pdf](http://perso.ens-lyon.fr/christophe.winisdoerffer/INTRO_NUM/NumericalRecipesinF77.pdf)

11. On retrouve l'Eq. (3.3).

On reconnaît dans (3.12) la formulation du moindre carré pondéré qui est donnée par la recherche de la valeur  $\min[\chi^2]$  (cf. e.g. Sillard (2001) ou Pelat (2006)<sup>12</sup>).

Ainsi, le moindre carré est un cas limite obtenu par le maximum de vraisemblance des paramètres sachant les données, pour des erreurs de mesures considérées indépendantes les unes des autres et distribuées de manière normale autour de la prédiction du modèle.

### Détermination des corrections sur les paramètres

Une modification infinitésimale des valeurs des paramètres entraînera une modification infinitésimale de l'observable calculée, telle que

$$\delta\rho_c(t_i; a_1, \dots, a_M) = \sum_{m=1}^M [\rho_c]_{i,m} \delta a_m, \quad \text{avec} \quad [\rho_c]_{i,m} = \frac{\partial[\rho_c]_i}{\partial a_m}.$$

Afin de simplifier l'écriture des équations on utilise la notation vectorielle en introduisant les vecteurs  $N$ -dimensionnels dans l'espace des observations (on utilise ici, une notation similaire à celle introduite dans Müller et Nordtvedt (1998)). Les équations précédentes se notent alors sous la forme suivante

$$\delta\rho_c(a_1, \dots, a_M) = \sum_{m=1}^M \rho_{c,m} \delta a_m, \quad \text{avec} \quad \rho_{c,m} = \frac{\partial\rho_c}{\partial a_m};$$

$\rho_{c,m}$  est appelée matrice des dérivées partielles.

Trouver le minimum de l'Eq. (3.12) par la méthode des moindres carrés aboutit à la solution suivante permettant de déterminer les corrections à apporter aux paramètres du modèle (Sillard, 2001; Pelat, 2006))

$$\delta a_m = \sum_{n=1}^M [\rho_{c,m} \cdot \rho_{c,n}]^{-1} \rho_{c,n} \cdot \rho, \quad (3.14)$$

où la matrice  $[\rho_{c,m} \cdot \rho_{c,n}]$  est appelée matrice normale des dérivées partielles et où le produit scalaire sur l'espace des observations fait intervenir la matrice de pondération

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i,j=1}^N W_{ij} a_i b_j \quad \text{avec} \quad W_{ij} = \left[ [\delta\rho_c]_i [\delta\rho_c]_j \right]^{-1}.$$

Si l'on considère que les erreurs observationnelles ne sont pas corrélées alors la matrice de pondération est simplement la matrice diagonale de l'inverse des erreurs moyennes mises au carré, soit

$$W_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sigma_i^2}. \quad (3.15)$$

L'inverse de la matrice normale est appelé matrice de variance-covariance

$$C_{mn} = \sigma_0 [\rho_{c,m} \cdot \rho_{c,n}]^{-1}, \quad (3.16)$$

où  $\sigma_0$  sera défini à l'étape 6 de la procédure d'ajustement à suivre. La matrice de corrélation entre paramètres du modèle est donnée par

$$K_{mn} = \frac{[\rho_{c,m} \cdot \rho_{c,n}]^{-1}}{\sqrt{[\rho_{c,m} \cdot \rho_{c,m}]^{-1} [\rho_{c,n} \cdot \rho_{c,n}]^{-1}}} = \frac{C_{mn}}{\sqrt{C_{mm} C_{nn}}}. \quad (3.17)$$

12. <https://media4.obspm.fr/public/M2R/supports/Dea45beta.pdf>

Ainsi, une fois les corrections déterminées pour tous les paramètres, il est possible, sans nécessairement réintégrer la prédiction  $\boldsymbol{\rho}_c(a_1 + \delta a_1, \dots, a_M + \delta a_M)$ , d'obtenir la nouvelle estimation des résidus linéarisés grâce à la formulation suivante

$$\boldsymbol{\rho}^* = \boldsymbol{\rho} - \sum_{m=1}^M \boldsymbol{\rho}_{c,m} \delta a_m,$$

soit, après insertion de (3.14)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}^* &= \boldsymbol{\rho} - \sum_{m,n=1}^M \boldsymbol{\rho}_{c,m} [\boldsymbol{\rho}_{c,m} \cdot \boldsymbol{\rho}_{c,n}]^{-1} \boldsymbol{\rho}_{c,n} \cdot \boldsymbol{\rho} \\ &\equiv (\mathbb{1} - \mathbf{P}_M) \cdot \boldsymbol{\rho}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{P}_M$  est l'opérateur de projection qui définit le sous-espace  $M$ -dimensionnel dans l'espace  $N$ -dimensionnel des observations.

Nous allons voir dans la section suivante, comment les résidus linéarisés (3.18) vont nous permettre de définir les pondérations des observations.

### Procédure d'ajustement

Les observations LLR sont partitionnées en différentes classes, notées  $\{l\}$  pour  $l = 1, \dots, L$ , en fonction de l'instrument utilisé pour les observations. Chaque classe correspond ainsi à un site d'observation et à une période de temps. La pondération est donc identique pour les  $N_{\{l\}}$  observations appartenant à une même classe.

— À la première itération :

1. Les poids par classe d'observations sont fixés à  $W_{ij}^{\{l\}} = \delta_{ij}$  pour  $l = 1, \dots, L$ .
2. Les corrections des paramètres sont déterminées par l'Eq. (3.14).
3. Les résidus linéarisés (3.18) sont déduits.

4. Le *r.m.s.* est calculé pour l'ensemble des résidus :  $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ([\rho^*]_i)^2$ .

5. Le *r.m.s.* est calculé par classe de résidus :  $\sigma_{\{l\}}^2 = \frac{1}{N_{\{l\}}} \sum_{i \in \{l\}} ([\rho^*]_i)^2$ .

6. L'erreur formelle associée à chaque paramètre est calculée pour un intervalle de confiance à  $1\sigma$  :  $\sigma_m = \sigma_0 \sqrt{[\boldsymbol{\rho}_{c,m} \cdot \boldsymbol{\rho}_{c,m}]^{-1}}$  avec  $\sigma_0^2 = \frac{1}{N-M} \sum_{i,j=1}^N W_{ij}^{\{l\}} ([\rho^*]_i)^2$ .

— À l'itération suivante :

7. Les poids par classe d'observations sont  $W_{ij}^{\{l\}} = \frac{\delta_{ij}}{\sigma_{\{l\}}^2}$  pour  $l = 1, \dots, L$ .
8. Les données produisant des résidus, tels que  $|[\rho^*]_{i \in \{l\}}| > 3\sigma_{\{l\}}$ , sont écartées.
9. Les nombres d'observations  $N$  et  $N_{\{l\}}$  sont corrigés en fonction du nombre de données écartées à l'étape précédente.
10. Les étapes 2 à 6 de la première itération sont répétées pour les nouvelles valeurs de  $N$  et  $N_{\{l\}}$  déterminées à l'étape précédente.

Lorsque le nombre de données supprimées se stabilise, une intégration numérique de la prédiction  $\rho_c(a_1 + \delta a_1, \dots, a_M + \delta a_M)$  est relancée avec les dernières corrections issues de l'étape 10.

### 3.3.3 Dérivées partielles

Nous avons vu dans la section précédente que la matrice des dérivées partielles est indissociable du moindre carré, dans la mesure où elle apparaît tout au long de la procédure. C'est notamment à partir de cette matrice que l'on détermine les erreurs formelles des paramètres, la matrice de corrélation ou encore les corrections à appliquer aux paramètres du modèle. Il est donc indispensable de déterminer la matrice des dérivées partielles précisément. Pour cela il existe deux méthodes communément utilisées. La première est une méthode purement numérique employée dans les éphémérides DE et INPOP. La deuxième est semi-numérique et consiste à intégrer les dérivées partielles depuis l'équation aux variations. Cette deuxième méthode est celle implémentée dans ELPN. Chacune d'entre elle possède ses avantages et ses inconvénients qui sont exposés dans ce qui suit.

#### Méthode purement numérique

La première méthode est une méthode purement numérique, facilement réalisable. Elle peut être déclinée en plusieurs versions faisant intervenir différents degrés d'approximation.

**Premier ordre.** Dans une première version simplifiée, la méthode purement numérique consiste à utiliser la prédiction faite par le modèle, à savoir  $\rho_c(a_1, \dots, a_M)$ . Ainsi, afin de déterminer  $\rho_{c,m}$  on réalise alors une autre prédiction en ajoutant une contribution arbitraire, notée  $\epsilon_m$ , au paramètre  $a_m$ , soit  $\rho_c(a_1, \dots, a_m + \epsilon_m, \dots, a_M)$  la nouvelle prédiction. La dérivée partielle est alors approchée au premier ordre en  $\epsilon_m$  via la relation issue du développement de Taylor linéarisé

$$\rho_{c,m}^{(1)} = \frac{\rho_c(a_1, \dots, a_m + \epsilon_m, \dots, a_M) - \rho_c(a_1, \dots, a_M)}{\epsilon_m} + \mathcal{O}(\epsilon_m). \quad (3.19)$$

**Deuxième ordre.** Pour un degré de précision supplémentaire, il est nécessaire de réaliser une deuxième prédiction, cette fois-ci en retranchant la contribution arbitraire au paramètre  $a_m$ , soit  $\rho_c(a_1, \dots, a_m - \epsilon_m, \dots, a_M)$ . La dérivée partielle est alors obtenue en effectuant deux développements de Taylor en  $a_m$ , un pour  $\rho_c(a_1, \dots, a_m + \epsilon_m, \dots, a_M)$  et l'autre pour  $\rho_c(a_1, \dots, a_m - \epsilon_m, \dots, a_M)$ . Ainsi, après avoir effectué la différence des deux séries, les termes d'ordre pair en  $\epsilon_m$  sont supprimés, par conséquent l'expression de la dérivée partielle est donnée, après division par  $2\epsilon_m$ , par la relation

$$\rho_{c,m}^{(2)} = \frac{\rho_c(a_1, \dots, a_m + \epsilon_m, \dots, a_M) - \rho_c(a_1, \dots, a_m - \epsilon_m, \dots, a_M)}{2\epsilon_m} + \mathcal{O}(\epsilon_m^2). \quad (3.20)$$

**Résumé.** Ces deux méthodes purement numériques, peuvent être implémentées très facilement sans nécessiter l'intégration d'équations supplémentaires dans le modèle dynamique. Seul le nombre d'intégration augmente; pour la méthode du premier ordre, il faut effectuer  $M$  intégrations pour déterminer toutes les composantes de  $\rho_{c,m}$  pour  $m = 1, \dots, M$ . Alors que pour la méthode du second ordre, il faut en effectuer  $2M$  en plus de  $\rho_c(a_1, \dots, a_M)$ .

Bien que facilement réalisables, ces deux méthodes présentent l'inconvénient de dépendre du paramètre arbitraire  $\epsilon_m$  choisi empiriquement. Ce choix résulte d'un compromis. Si la valeur de  $\epsilon_m$  est trop grande, nous ne sommes plus dans le cas d'application où  $\epsilon_m$  induit des différences infinitésimales entre  $\rho_c(a_1, \dots, a_m + \epsilon_m \dots, a_M)$  et  $\rho_c(a_1, \dots, a_M)$ . Par conséquent, les développements (3.19) et (3.20) ne sont plus suffisamment précis. À l'inverse, si la valeur de  $\epsilon_m$  est trop petite, les prédictions  $\rho_c(a_1, \dots, a_m + \epsilon_m \dots, a_M)$  et  $\rho_c(a_1, \dots, a_M)$  sont trop proches l'une de l'autre, et leurs différences génèrent des erreurs numériques importantes. Manche (2011) propose en Sec. 10.2.1, une méthode empirique permettant de déterminer la valeur optimale du paramètre arbitraire  $\epsilon_m$ .

En considérant l'importance de la matrice des dérivées partielles dans l'analyse par moindres carrés, nous avons préféré à ces méthodes numériques dépendantes de paramètres arbitraires, une méthode semi-numérique consistant à intégrer les dérivées partielles depuis l'équation aux variations.

### Intégration depuis l'équation aux variations

Cette méthode, permet de fournir la valeur des dérivées partielles sans faire d'approximations. Ainsi, les seules erreurs qui viennent entacher la valeur de ces dérivées sont les erreurs numériques commises par l'intégrateur numérique lui-même.

**Principe de la méthode.** Lors de l'intégration numérique, différentes quantités sont déterminées telles que les positions et vitesses orbitales des corps, les angles et vitesses angulaires de la Lune, ainsi que la différence entre échelles de temps. Toutes ces équations se présentent sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\frac{dr_b^i}{dT} &= v_b^i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_B, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_B, c_1, \dots, c_P), \\ \frac{dv_b^i}{dT} &= \alpha_b^i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_B, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_B, c_1, \dots, c_P),\end{aligned}$$

où l'indice  $b = 1, \dots, B$  désigne chacun des corps modélisés, mais également les angles d'Euler du manteau lunaire, les angles d'Euler du noyau lunaire et la différence entre échelle de temps. Ainsi, lorsque  $b$  désigne un des corps célestes,  $\mathbf{r}$  est son vecteur position tridimensionnel. Si  $b$  fait référence aux angles d'Euler du manteau lunaire ou du noyau lunaire,  $\mathbf{r}$  désigne les trois angles d'Euler associés. Enfin, si  $b$  référence la différence entre échelles de temps, les composantes  $\mathbf{r}$  sont nulles excepté la première qui contient alors la quantité TT – TDB. L'indice  $i$  permet de circuler sur les composantes spatiales de  $\mathbf{r}$ , donc  $i = 1, 2$  et  $3$ . Le vecteur  $\mathbf{v}$  désigne les différentielles temporelles de  $\mathbf{r}$  de la même manière que  $\alpha$  désigne les différentielles temporelles de  $\mathbf{v}$ . Les quantités  $c_p$  avec  $p = 1, \dots, P$ , représentent les paramètres physiques tels que les masses, les moments quadripolaires *etc.* Ainsi, les paramètres à ajuster sont représentés par

$$a_m = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_B, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_B, c_1, \dots, c_P; T_0), \quad \text{avec } m = 1, \dots, M,$$

où les différentes quantités sont données à l'instant initial de l'intégration noté  $T_0$ .

On démontre facilement (Lainey, 2002), que la détermination des dérivées partielles peut s'effectuer par intégration numérique des équations suivantes, appelées équations

variationnelles

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{\partial r_b^i}{\partial a_m} \right) = \sum_{c=1}^B \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_b^i}{\partial r_c^j} \frac{\partial r_c^j}{\partial a_m} + \sum_{c=1}^B \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_b^i}{\partial v_c^j} \frac{\partial v_c^j}{\partial a_m} + \sum_{p=1}^P \frac{\partial v_b^i}{\partial c_p} \frac{\partial c_p}{\partial a_m}, \quad (3.21a)$$

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{\partial v_b^i}{\partial a_m} \right) = \sum_{c=1}^B \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \alpha_b^i}{\partial r_c^j} \frac{\partial r_c^j}{\partial a_m} + \sum_{c=1}^B \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \alpha_b^i}{\partial v_c^j} \frac{\partial v_c^j}{\partial a_m} + \sum_{p=1}^P \frac{\partial \alpha_b^i}{\partial c_p} \frac{\partial c_p}{\partial a_m}. \quad (3.21b)$$

À l'instant initial, on a respectivement  $\partial r_b^i / \partial a_m = 1$  ou  $0$  selon que  $a_m = r_b^i(T_0)$  ou  $a_m \neq r_b^i(T_0)$ . De même, on a respectivement  $\partial v_b^i / \partial a_m = 1$  ou  $0$  selon que  $a_m = v_b^i(T_0)$  ou  $a_m \neq v_b^i(T_0)$ .

Toutes les premières dérivées, apparaissant dans les sommations ( $\partial v_b^i / \partial r_c^j$ ,  $\partial v_b^i / \partial v_c^j$ ,  $\partial v_b^i / \partial c_p$ ,  $\partial \alpha_b^i / \partial r_c^j$ ,  $\partial \alpha_b^i / \partial v_c^j$  et  $\partial \alpha_b^i / \partial c_p$ ), sont liées à la modélisation adoptée et ont été déterminées analytiquement ; quelques unes d'entre elles ont déjà été présentées dans le Chap. 2 dans les différentes sections intitulées *dérivées partielles*. Les termes restants sont relatifs à la dynamique et sont calculés par intégration numérique des équations variationnelles (3.21).

**Validation par comparaison.** Compte-tenu de la difficulté que représente l'implémentation des Eqs. (3.21), il est indispensable de s'assurer qu'aucune erreur ne s'est glissée dans le calcul des quantités dérivées ou encore dans l'implémentation de (3.21) dans le programme. Pour ça, nous utilisons les deux méthodes purement numériques précédemment introduites en Eqs. (3.19) et (3.20). Ainsi, pour un même paramètre  $a_m$ , on calcule par les trois différentes méthodes, la dérivée  $\rho_{c,m}$ . On dispose alors des quantités  $\rho_{c,m}^{(1)}$ ,  $\rho_{c,m}^{(2)}$  et  $\rho_{c,m}^{(a)}$ , où la dernière désigne la dérivée partielle intégrée depuis l'équation aux variations. Compte-tenu des approximations faites pour construire les dérivées numériques<sup>13</sup>, on s'attend à ce que l'intégration depuis l'équation aux variations fournisse, si elle est bien implémentée, une estimation qui soit plus proche de la valeur réelle comparativement aux estimations faites par les méthodes purement numériques. Par conséquent, la différence  $|\rho_{c,m}^{(2)} - \rho_{c,m}^{(a)}|$  devrait être inférieure à la différence  $|\rho_{c,m}^{(1)} - \rho_{c,m}^{(a)}|$ , dans la mesure où  $\rho_{c,m}^{(2)}$  est définie à un ordre plus élevé en  $\epsilon_m$  que  $\rho_{c,m}^{(1)}$ . Ainsi, sont calculées puis opposées, pour chaque paramètre  $a_m$ , les erreurs relatives suivantes

$$err^{(1)}[\rho_{c,m}] = \frac{|\rho_{c,m}^{(1)} - \rho_{c,m}^{(a)}|}{|\rho_{c,m}^{(a)}|} \quad \text{et} \quad err^{(2)}[\rho_{c,m}] = \frac{|\rho_{c,m}^{(2)} - \rho_{c,m}^{(a)}|}{|\rho_{c,m}^{(a)}|}. \quad (3.22)$$

À titre illustratif, nous avons représenté en Fig. 3.18, l'évolution de  $err^{(x)}[r_{,\mu}(T)]$  pour  $x = 1$  et  $2$ , et pour  $r_{,\mu}(T)$  représentant l'évolution temporelle de la dérivée de la distance Terre-Lune ( $r$ ) relativement à la masse du barycentre Terre-Lune ( $\mu$ ). Sur les 40 ans d'intégration, l'erreur  $err^{(2)}[r_{,\mu}(T)]$  est constamment plus petite d'environ 4 ordres de grandeurs comparativement à l'erreur  $err^{(1)}[r_{,\mu}(T)]$ . Ainsi, le point décisif permettant de conclure que  $r_{,\mu}^{(a)}$  a bien été implémentée n'est pas tant l'amplitude de 4 ordres de grandeurs<sup>14</sup> mais bien la constance de l'écartement dans le temps entre  $err^{(1)}[r_{,\mu}(T)]$  et  $err^{(2)}[r_{,\mu}(T)]$ . En effet, si une erreur avait été laissée dans l'expression de la dérivée partielle d'une perturbation,  $r_{,\mu}^{(a)}$  se serait écartée peu à peu des prédictions  $r_{,\mu}^{(1)}$  et  $r_{,\mu}^{(2)}$ , puis au bout d'un certain temps, les erreurs  $err^{(1)}[r_{,\mu}(T)]$  et  $err^{(2)}[r_{,\mu}(T)]$  auraient été du même ordre de grandeur.

13. On rappelle que  $\rho_{c,m}^{(1)}$  est définie au premier ordre en  $\epsilon_m$  et  $\rho_{c,m}^{(2)}$  est définie au second ordre en  $\epsilon_m$ .

14. Cette amplitude peut être modulée en jouant avec la valeur de  $\epsilon_m$ .

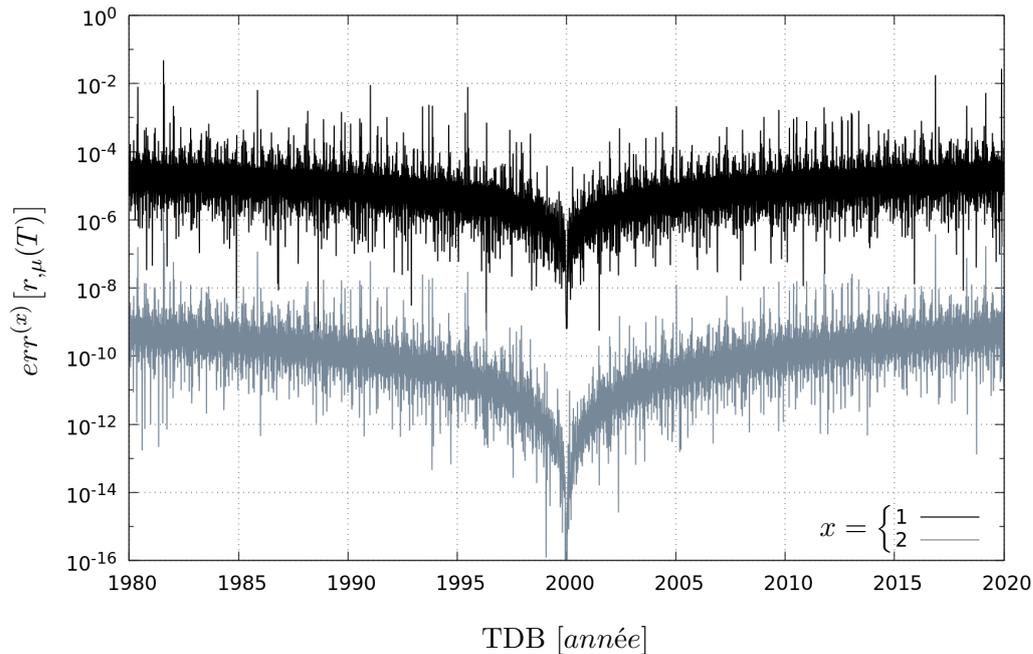


FIGURE 3.18 – Graphique représentant l'évolution des erreurs relatives des dérivées partielles numériques d'ordres 1 et 2, relativement à la dérivée partielle intégrée depuis l'équation aux variations (cf. Eqs. (3.22)). La dérivée partielle  $r_{,\mu}(T)$  représente ici la dérivée partielle de la distance Terre-Lune ( $r$ ) relativement à la masse du barycentre Terre-Lune ( $\mu$ ). Les dérivées partielles numériques d'ordres 1 et 2 ont été calculées pour  $\epsilon_{\mu} = 10^{-8}\mu$ .

**Résumé.** La méthode d'intégration des dérivées partielles depuis l'équation aux variations, bien qu'extrêmement robuste, est très délicate à implémenter pour des modèles dynamiques complexes comme l'est celui régissant les mouvements orbital et rotationnel de la Lune. Elle nécessite l'introduction d'un grand nombre d'équations supplémentaires. Ainsi, pour le Soleil, les planètes, la Lune, Pluton, les trois angles d'Euler du manteau et du noyau ainsi que la différence entre échelle de temps ( $B = 14$ ), il est nécessaire d'intégrer  $[6(B - 1) + 1]M = 79M$  équations pour un nombre de paramètres ajustables pouvant être  $M > 100$ , soit plus de 7900 équations en plus de celles régissant l'évolution des mouvements orbitaux et rotationnel. Cette méthode, comparativement à celles purement numériques, est donc extrêmement coûteuse en temps d'implémentation. Elle ne nécessite cependant qu'une seule intégration, là où la méthode numérique au deuxième ordre en requiert  $2M + 1$ . Néanmoins, en raison du nombre élevé d'équations intégrées, le temps d'intégration est beaucoup plus long comparativement au temps d'intégration de la méthode purement numérique dont chacune des  $2M + 1$  intégrations peut être effectuée de manière indépendante des autres.

Mentionnons enfin que l'intégration des dérivées partielles depuis l'équation aux variations nécessite l'implémentation des méthodes purement numériques présentées précédemment. En effet, il est indispensable de confronter les méthodes pour s'assurer que les équations variationnelles ont bien été implémentées, comme discuté dans la section précédente puis illustré par la Fig. 3.18.

## 3.4 Discussion des résultats

Connaissant désormais la procédure d'ajustement des paramètres du modèle aux observations, nous présentons dans cette section les résultats de l'analyse des données LLR effectuée dans le cadre du formalisme de la relativité générale. Cette démarche nous permettant de construire une solution numérique totalement indépendante des modèles INPOP ou DE, nous présentons les différences post-fit entre notre nouvelle solution et les autres éphémérides existantes. Enfin, nous clôturons cette section en exposant une méthode permettant de s'assurer que la solution dérivée n'est pas seulement valable sur la période de temps ajustée.

### 3.4.1 Résidus de l'analyse des données LLR

Nous sommes partis du modèle dynamique ELPN\_D (*cf.* Sec. 3.2.5 pour une discussion sur le contenu de ELPN\_D) initialement construit pour s'approcher au plus près des prédictions de DE430 qui est à l'heure actuelle l'éphéméride la plus complète concernant la modélisation du système Terre-Lune. Nous avons ainsi repris l'ensemble des constantes physiques et conditions initiales de DE430 à J2000, date de début d'intégration pour ELPN<sup>15</sup>. Les prédictions du modèle dynamique ont été utilisées aux différentes dates d'observations afin de calculer l'observable théorique  $\rho_c$  donnant accès aux résidus initiaux  $\rho_{(0)}$  (*cf.* Eq. (3.3)); pour plus de détails *cf.* Sec. 3.3.1. À partir de ces premiers résidus, on suit la procédure d'ajustement décrite en intégralité en Sec. 3.3.2, permettant d'obtenir les premières corrections à apporter aux paramètres du modèle. Disposant ainsi d'un nouveau jeu de paramètres, la réintégration des équations du modèle dynamique fournit alors une nouvelle solution, notée ELPN\_D1, associée au nouveau jeu de constantes. Les prédictions de ELPN\_D1, à partir du travail présenté en Sec. 3.3.1, fournissent ensuite de nouveaux résidus notés  $\rho_{(1)}$ . Ces nouveaux résidus sont d'une nature fondamentalement différente des résidus initiaux  $\rho_{(0)}$ . Ces derniers sont en partie arbitraires et dépendent du choix des paramètres initiaux, tandis que les résidus  $\rho_{(1)}$  sont incompressibles (après plusieurs itérations du processus) et reflètent la précision réelle des observations ainsi que les lacunes intrinsèques au modèle dynamique<sup>16</sup>. Un nouvel ajustement des mêmes paramètres suivi d'une réintégration des équations, montre que les résidus  $\rho_{(2)}$  sont quasiment identiques à  $\rho_{(1)}$ . Ainsi, la plupart du temps, une à deux réintégrations suffisent pour déterminer le nouveau jeu de paramètres.

### Résidus par stations LLR

En Fig. 3.19 sont représentés les résidus  $\rho_{(1)}$  par stations, obtenus après ajustement de 55 paramètres aux données LLR. Parmi les paramètres ajustés, on retrouve les positions des rétroreflecteurs et des stations LLR, les conditions initiales telles que la position et la vitesse du vecteur Terre-Lune ou encore les angles d'Euler et vitesse angulaire du manteau lunaire ainsi que le vecteur instantané de rotation du noyau lunaire. Concernant les paramètres physiques, les masses respectives du barycentre Terre-Lune et de la Lune ainsi que le temps de déphasage lunaire dû aux marées ou encore le coefficient  $C/m_L(a_e)_L^2$

15. Pour DE430, l'instant initial est le 28 juin 1969 soit le 2440400.5 jour Julien. Cette différence dans le choix de la date initiale induit une légère incohérence puisque les valeurs des constantes physiques distribuées par DE430 sont données pour le 28 juin 1969 et non le 1er janvier 2000. Cette incohérence est levée une fois les constantes ELPN ajustées aux observations LLR.

16. Ces lacunes sont de différentes natures et se manifestent au travers de la non-modélisation d'effet physique observable (*e.g.* la non-prise en compte de l'effet différentiel de la pression radiation solaire entre la Terre et la Lune) ou encore la non-prise en compte d'erreurs systématiques dans les données *etc.*

sont également ajustés. Les modèles des potentiels de la Terre et de la Lune n'étant pas ajustés, ils sont identiques à DE430 qui reprend, notamment pour la Lune, les valeurs des coefficients tels qu'ils sont estimés par la mission GRAIL (Konopliv *et al.*, 2014), hormis pour la contribution rigide du  $J_2$  qui est ajustée. Les données utilisées pour réaliser l'ajustement couvrent une période légèrement supérieure à 44 ans et débute d'août 1969 pour se finir en décembre 2013. En tout, ce sont 20503 points normaux qui ont été utilisés pour réaliser cet ajustement.

### Comparaison des Résidus ELPN aux résidus INPOP13b et DE430

La Fig. 3.19 présente les résidus ELPN par stations LLR en fonction de la date de tir. Elle peut être comparée à la Fig. 4 de Folkner *et al.* (2014) et à la Fig. 11 de Fienga *et al.* (2014). La Tab. 3.4 présente les moyennes et écarts-types de ces résidus par stations LLR et par instruments. Les résidus présentés en Tab. 3.4 sont à comparés à la Tab. 3.5 qui regroupe les statistiques sur les résidus calculés avec INPOP13b ainsi que ceux calculés à partir de DE430 (les écarts-types de DE430 ont été calculés à l'aide du modèle de réduction de données LLR de l'équipe INPOP et non celui réellement utilisé par Folkner *et al.* (2014) pour l'ajustement de DE430). Cette dernière comparaison montre que les résidus obtenus avec ELPN\_D1 sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus avec INPOP13b et DE430. En effet, pour les observations du CERGA (Grasse Rubis) entre 1984-1986 le *r.m.s.* des résidus est de 17.6 cm pour ELPN\_D1 là où il est respectivement de 16.0 et 14.6 cm pour INPOP13b et DE430. De même, pour les observations du CERGA (Grasse MeO) entre 2009-2013 le *r.m.s.* des résidus est de 3.6 cm pour ELPN\_D1 là où il est respectivement de 6.1 et 3.5 cm pour INPOP13b et DE430. Si on s'intéresse aux résidus de la station Apollo (Apache-point), le *r.m.s.* ELPN\_D1 est de 3.8 cm sur la période 2006-2013 contre respectivement 4.92, 6.61 et 7.62 cm pour INPOP13b sur les périodes 2006-2010, 2010-2012 et 2012-2013 et 4.15, 4.31 et 4.43 cm pour DE430 sur les mêmes périodes qu'INPOP13b.

Remarquons dans le même temps, qu'à nombre égal d'observations (21090 pour ELPN\_D1 et 21079 pour INPOP13b) le nombre total d'observations rejetées par application du critère à  $3\sigma_{\{U\}}$  (*cf.* étape 8 de la procédure d'ajustement des données) est 587 pour ELPN\_D1 contre 816 pour INPOP13b. Par conséquent, alors même qu'ELPN\_D1 présente des résidus équivalents à INPOP13b, les *r.m.s.* des résidus par station pourraient être davantage diminués en supprimant au moins 200 des données produisant les plus gros résidus.

Notons pour finir, une différence essentielle concernant la manière dont nous produisons les résidus comparativement à INPOP13b ou DE430. D'après Manche (2011) Sec. 9.6, un certain nombre de corrections constantes ou linéaires avec le temps sont susceptibles d'être ajoutées puis ajustées aux données lors du calcul des résidus dans les solutions INPOP ou DE. Le choix de l'emplacement ainsi que de la durée de telles corrections est, la plupart du temps, arbitraire et intervient généralement lorsqu'un offset, ou bien une dérive linéaire en temps sont observés dans les résidus sans nécessairement que ces écarts ne soient expliqués (même *a posteriori*) par des modifications instrumentales ou des défauts de calibrations identifiés. Dans ELPN\_D1 nous avons fait le choix de n'ajuster aucun biais ni aucune dérive linéaire sans explication expérimentale considérant que l'objectif final de la thèse est d'ajuster des paramètres de théories alternatives pouvant produire des signaux potentiellement non-ajustables dans le cadre de la relativité générale. De tels signaux d'intérêt pourraient être dégradés voir totalement effacés par l'introduction de biais arbitraires en quantité suffisante. La seule correction qui est ajoutée mais non ajustée est un biais de 0.7 ns appliqué aux observations du CERGA entre le 1er décembre 1996 et le

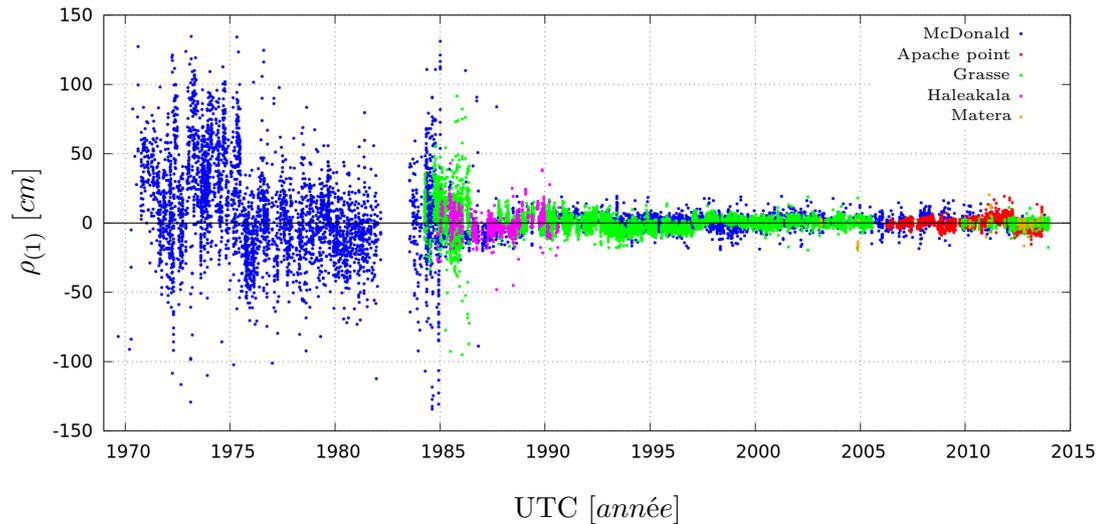


FIGURE 3.19 – Graphique représentant l’amplitude des résidus ELPN donnée pour chaque station suite à l’analyse des données LLR effectuée dans le cadre de la relativité générale.

30 juin 1998. Ce biais a été remarqué par Chapront-Touzé *et al.* (2000), puis repris par Chapront *et al.* (2002) et Aleshkina (2002) et son origine expérimentale (une erreur dans la calibration) a été depuis parfaitement identifiée.

Cette différence fondamentale dans la manière de calculer les résidus peut expliquer en partie certains des écarts obtenus sur le *r.m.s.* entre ELPN\_D1 et INPOP13b puis DE430.

### 3.4.2 Comparaison à d’autres éphémérides

Dans cette section, nous nous intéressons à la nouvelle solution ELPN\_D1 permettant d’obtenir les résidus 3.19. Nous comparons ainsi ses prédictions à celles faites par DE430 et INPOP13c. Bien entendu, contrairement à ce qui a été présenté en Sec. 3.2.5, l’étude comparative présentée ici fait désormais intervenir trois éphémérides lunaires totalement indépendantes : ELPN\_D1, DE430 et INPOP13c. En effet, on rappelle qu’en Sec. 3.2.5, les modèles ELPN\_D et ELPN\_I ne sont pas ajustés aux données et l’étude comparative représente seulement un moyen de s’assurer que les modèles dynamiques ont été implémentés correctement. Ici, l’objectif est de mettre en évidence l’ordre de grandeur des différences entre les prédictions des trois éphémérides lunaires sur une période de 200 ans centrée sur le J2000.

#### Différences entre ELPN\_D1 et DE430 puis INPOP13c

L’ajustement des conditions initiales et autres paramètres physiques liés au système Terre-Lune permet de rendre ELPN\_D1 totalement autonome et disposant de son propre jeu de constantes ; ELPN\_D1 est donc une éphéméride lunaire à part entière. On s’assure que la redéfinition des valeurs des masses n’induit pas une dérive importante du barycentre du système solaire dans ELPN\_D1. Après intégration, on constate que le barycentre ne s’écarte que de  $90 \mu\text{m}$  du centre du repère en 200 ans d’intégration. Cette dérive est supérieure à celle présentée en Fig. 3.3, mais reste totalement indétectable.

Stations LLR $\{l\}$	Période	$N_{\{l\}}$	$Ne_{\{l\}}$	$\mu_{\{l\}}$ [m]	$\sigma_{\{l\}}$ [m]
McDonald 2.7m	1969-1985	3516	88	0.094	0.350
McDonald MLRS1	1983-1988	573	58	0.003	0.351
McDonald MLRS2	1988-2013	3284	386	0.006	0.097
Grasse Rubis	1984-1986	1182	6	0.056	0.176
Grasse Yag	1987-2005	8313	11	-0.004	0.045
Grasse MeO	2009-2013	993	6	-0.002	0.036
Haleakala	1984-1990	757	13	-0.004	0.101
Matera	2003-2013	79	11	-0.017	0.130
Apache-point	2006-2013	1806	8	0.001	0.038
Totalité	1969-2013	20503	587	-	-

TABLE 3.4 – Table des moyennes  $\mu_{\{l\}}$  et écarts-types  $\sigma_{\{l\}}$  des résidus ELPN par station LLR.  $N_{\{l\}}$  et  $Ne_{\{l\}}$  représentent respectivement le nombre d'observations par station puis le nombre d'observations éliminées par stations.

Stations LLR $\{l\}$	Période	$N_{\{l\}}$	$Ne_{\{l\}}$	$\mu_{\{l\}}$ [m]	$\sigma_{\{l\}}^{\text{INPOP13b}}$ [m]	$\sigma_{\{l\}}^{\text{DE430}}$ [m]
McDonald 2.7m	1969-1983	3302	108	-0.002	0.319	0.302
McDonald 2.7m	1983-1986	182	12	0.040	0.206	0.198
McDonald MLRS1	1983-1984	44	0	0.059	0.294	0.277
McDonald MLRS1	1984-1985	358	10	-0.073	0.773	0.727
McDonald MLRS1	1985-1988	207	12	0.001	0.078	0.055
McDonald MLRS2	1988-1996	1166	33	-0.004	0.054	0.049
McDonald MLRS2	1996-2012	1972	482	0.001	0.058	0.049
Grasse Rubis	1984-1986	1161	27	0.070	0.160	0.146
Grasse Yag	1987-1995	3411	32	-0.006	0.066	0.056
Grasse Yag	1995-2006	4845	36	0.001	0.040	0.040
Grasse MeO	2009-2013	990	9	0.001	0.061	0.035
Haleakala	1984-1990	739	31	-0.004	0.086	0.083
Matera	2003-2013	83	13	0.001	0.071	0.058
Apache-point	2006-2010	940	1	0.002	0.049	0.042
Apache-point	2010-2012	504	10	0.000	0.066	0.043
Apache-point	2012-2013	359	0	-0.006	0.076	0.044
Totalité	1969-2013	20263	816	-	-	-

TABLE 3.5 – Table tirée des Tabs. 15 et 16 de Fienga *et al.* (2014), représentant les statistiques des écarts-types INPOP13b  $\sigma_{\{l\}}^{\text{INPOP13b}}$ , et DE430  $\sigma_{\{l\}}^{\text{DE430}}$ .  $N_{\{l\}}$ ,  $Ne_{\{l\}}$ , et  $\mu_{\{l\}}$  sont respectivement le nombre d'observations par station, le nombre d'observations éliminées par station et les moyennes des résidus par station, le tout est donné pour INPOP13b. Les statistiques des écarts-types de DE430 ont été calculées à partir du programme de réduction des données LLR de l'équipe INPOP.

**Orbite et librations lunaires.** Nous donnons en Fig. 3.20 les différences sur la prédiction de l'orbite lunaire entre ELPN\_D1 et DE430 puis INPOP13c. La Fig. 3.21 représentant un zoom des différences entre ELPN\_D1 et DE430. On constate alors que l'orbite lunaire telle qu'elle est prédite par ELPN\_D1 est plus proche de DE430 que d'INPOP13c. Ceci se vérifie essentiellement sur la distance radiale, puisque la différence entre ELPN\_D1 et DE430 est presque centrée sur la valeur nulle et reste quasiment constante sur la période d'intégration, alors qu'entre ELPN\_D1 et INPOP13c cette même différence présente un offset de 2.5 *m*. Lorsqu'on s'intéresse aux éléments képlériens de l'orbite lunaire, on parvient à la même conclusion, à savoir que l'orbite lunaire telle qu'elle est prédite par ELPN\_D1 est plus proche de DE430 que d'INPOP13c. En effet, d'après la Fig. 3.22 on voit que l'écart sur le demi-grand axe entre ELPN\_D1 et INPOP13c présente un offset de 11 *m* là où cet offset n'est seulement que de 1.5 *cm* entre ELPN\_D1 et DE430 (*cf.* Fig. 3.23). Si l'on s'intéresse aux librations lunaires, on s'aperçoit à partir de la Fig. 3.24 que le mouvement rotationnel de la Lune tel qu'il est prédit par ELPN\_D1 est plus proche de DE430 que d'INPOP13c. Ce constat n'est pas surprenant dans la mesure où ELPN\_D1 présente un modèle dynamique plus proche de DE430 que d'INPOP13c, puisque la modélisation des librations fait intervenir un noyau fluide.

Notons que les différences entre les courbes *grises* et *noires* des Figs. 3.20, 3.22 et 3.24 fournissent les différences entre DE430 et INPOP13c sur respectivement les composantes du vecteur Terre-Lune, les éléments képlériens de l'orbite lunaire et les angles d'Euler du manteau lunaire. Comme on le voit, les écarts entre DE430 et INPOP13c puis entre ELPN\_D1 et INPOP13c sont identiques la plupart du temps excepté sur la longitude et la latitude de la Lune (*cf.* Fig. 3.20) ainsi que sur l'inclinaison et l'argument du périégée de l'orbite lunaire (*cf.* Fig. 3.22).

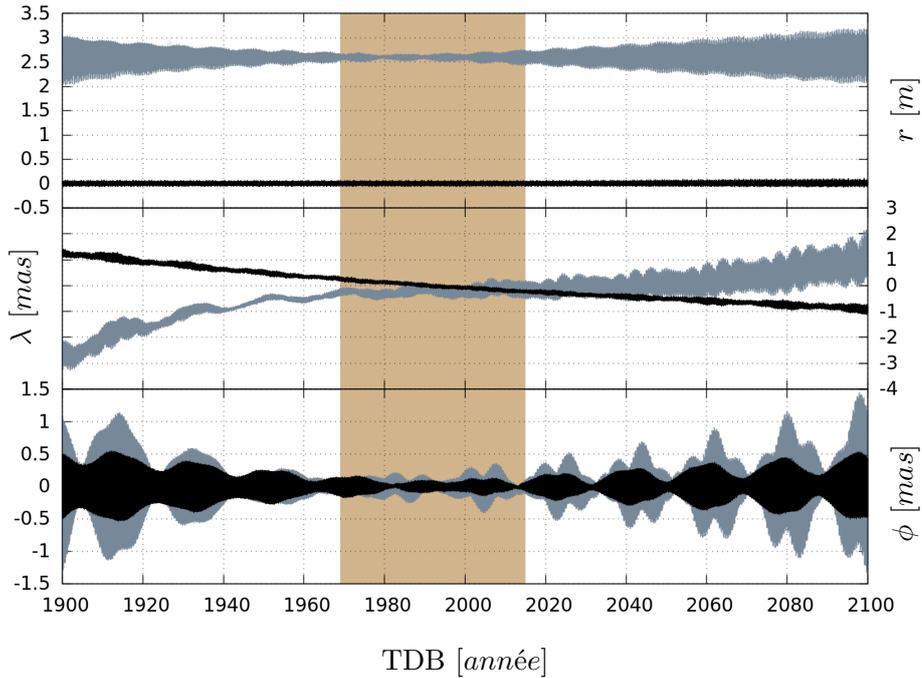


FIGURE 3.20 – Graphique représentant les différences sur les composantes sphériques ( $r, \phi, \lambda$ ) du vecteur Terre-Lune entre ELPN\_D1 ajustée aux données LLR et DE430 (courbes en noir précédemment tracées de la même couleur en Fig. 3.21) puis INPOP13c (courbes en gris). La zone d'arrière plan en couleur *marron* représente la période de fonctionnement du LLR (s'étalant d'août 1969 à 2016).

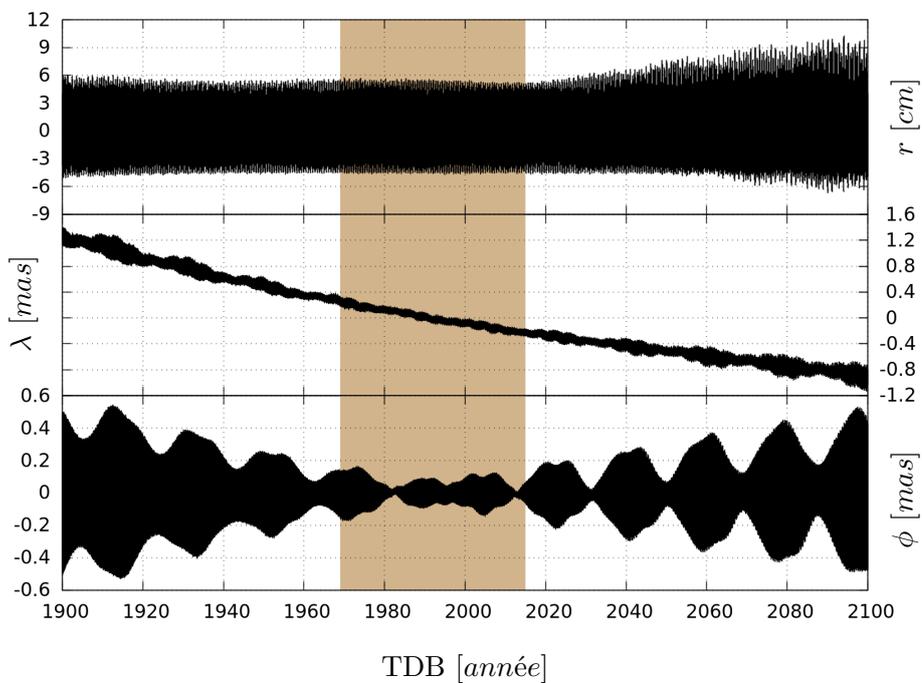


FIGURE 3.21 – Graphique représentant les différences sur les composantes sphériques ( $r, \phi, \lambda$ ) du vecteur Terre-Lune entre ELPN\_D1 ajustée aux données LLR et DE430 (courbes en noir).

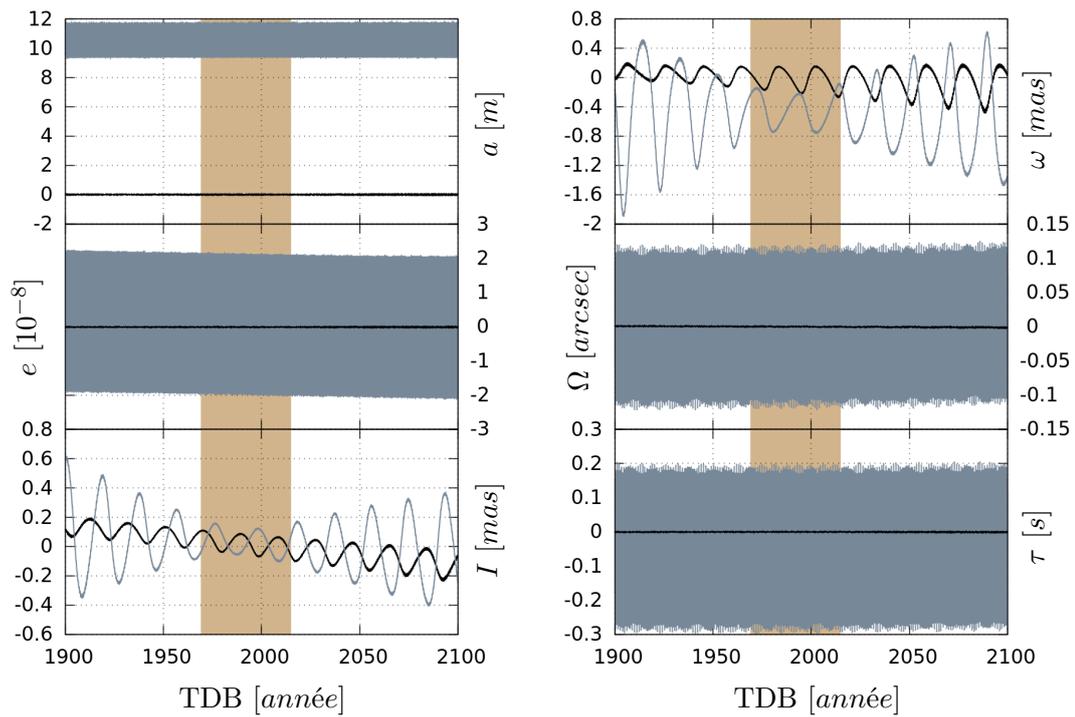


FIGURE 3.22 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de la Lune entre ELPN\_D1 ajustée aux données LLR et DE430 (courbes en noir tracées de la même couleur en Fig. 3.23) puis INPOP13c (courbes en gris).

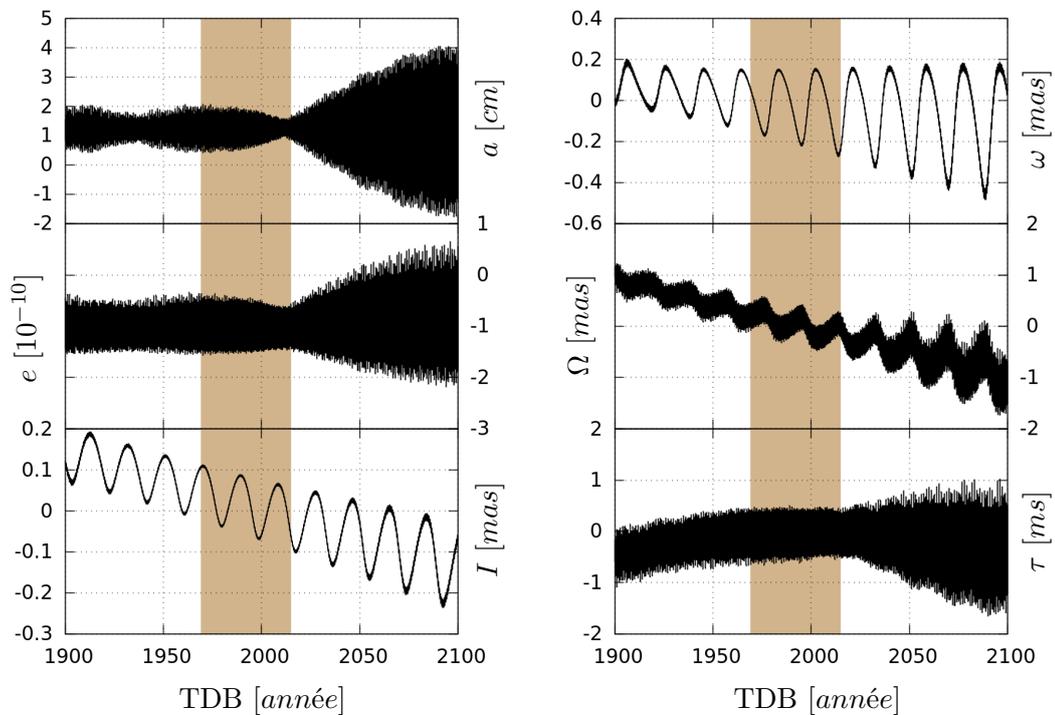


FIGURE 3.23 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de la Lune entre ELPN\_D1 ajustée aux données LLR et DE430 (courbes en noir).

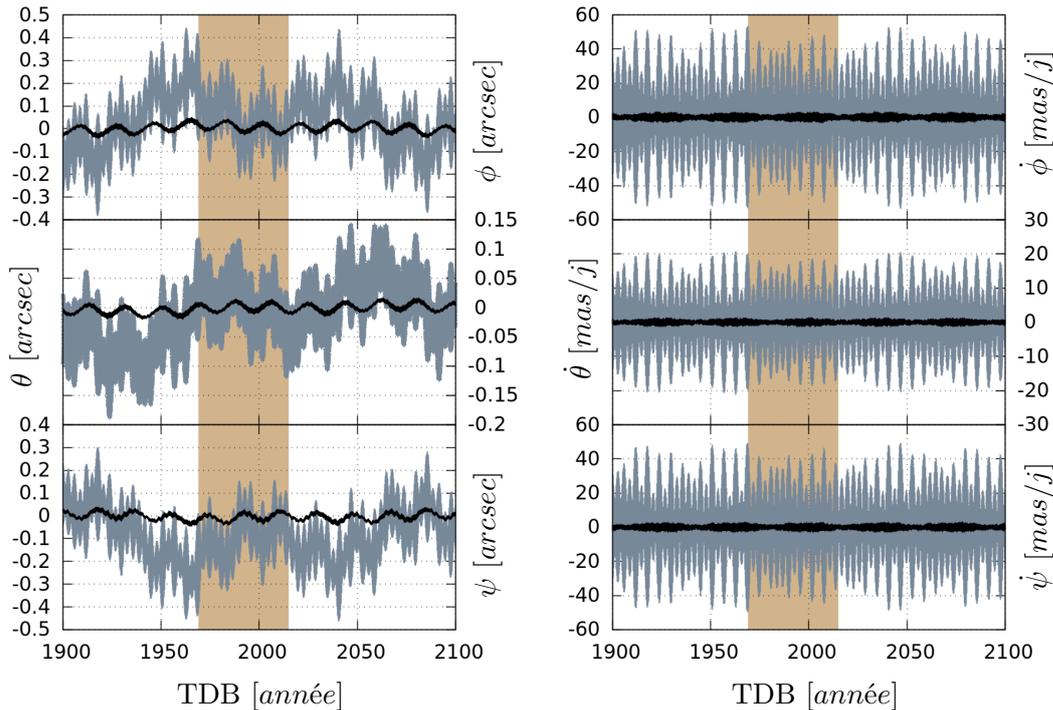


FIGURE 3.24 – Graphique représentant les différences sur les angles d’Euler de la Lune ( $\phi, \theta, \psi$ ) et leur vitesse entre ELPN\_D1 ajustée aux données LLR et DE430 (courbes en noir) puis INPOP13c (courbes en gris).

**Orbites planétaires.** ELPN\_D1, en plus d’intégrer numériquement les mouvements orbital et rotationnel de la Lune, intègre également les mouvements orbitaux des planètes pour le calcul des perturbations de troisième corps. Cependant, notre éphéméride ne contraint absolument pas les orbites des planètes dans la mesure où seules les observations LLR sont ajustées<sup>17</sup>. Par conséquent, il faut s’assurer que les orbites planétaires intégrées par ELPN\_D1 ne s’écartent pas des prédictions des éphémérides planétaires<sup>18</sup>.

Ainsi, nous avons tracé en Figs. 3.25 à 3.30, les différences sur les éléments képlériens des orbites des planètes intérieures, Mars, Jupiter et Saturne, entre ELPN\_D1 et DE430 (courbes noires) puis entre ELPN\_D1 et INPOP13c (courbes grises). Les différences sur les éléments képlériens d’Uranus, Neptune et de Pluton ne sont pas présentées car les écarts entre les courbes grises et noires deviennent trop importants; *e.g.* la différence sur le demi-grand axe d’Uranus entre ELPN\_D1 et DE430 oscille autour de la valeur nulle avec amplitude de 600 m, alors que la différence entre ELPN\_D1 et INPOP13c oscille autour de  $-390$  km avec une amplitude de 15 km. Afin de bien interpréter ces écarts ainsi que les différentes Figs. 3.25 à 3.30, il convient de préciser que les conditions initiales et paramètres de masses relatifs aux planètes sont repris de DE430 puisqu’ils ne sont pas ajustés aux données LLR. Ainsi, on comprend que les différences entre ELPN\_D1 et DE430 soient systématiquement inférieures aux différences entre ELPN\_D1 et INPOP13c.

De la même manière que ce qui a été fait en Sec. 3.2.5, il est possible à partir des écarts maximums entre ELPN\_D1 et DE430 sur les demi-grands axes des planètes, de

17. Or la sensibilité de la distance Terre-Lune aux perturbations planétaires est trop faible pour espérer déduire des contraintes précises sur les positions ou masses des planètes (*cf.* Sec. B.5).

18. L’écartement maximum toléré est défini par la précision théorique requise pour l’analyse des données LLR (*cf.* Sec. B.5).

définir une précision numérique relative à comparer à la précision théorique requise sur les orbites. Ce faisant, on constate que la précision atteinte relativement aux prédictions de DE430 est plusieurs ordres de grandeurs meilleure que la précision théorique requise (*cf.* Tab. B.4). Concernant l'orbite du barycentre Terre-Lune, on atteint une précision relative de  $6.7 \times 10^{-10} \%$  ce qui est 18 fois meilleur que la précision théorique de  $1.2 \times 10^{-8} \%$ .

Enfin mentionnons, comme nous l'avons fait en fin du paragraphe concernant l'orbite et les librations lunaires, que les différences entre les *courbes grises* et *noires* des Figs. 3.25 à 3.30 représentent les différences entre DE430 et INPOP13c. On voit alors que les écarts de prédictions sont de l'ordre du mètre sur les orbites des planètes intérieures, de l'ordre de la dizaine de mètres sur l'orbite de Mars, de l'ordre de la centaine de mètres sur les orbites de Jupiter et Saturne. On passe ensuite, à des écarts de l'ordre de la centaine de kilomètres au-delà de l'orbite de Saturne.

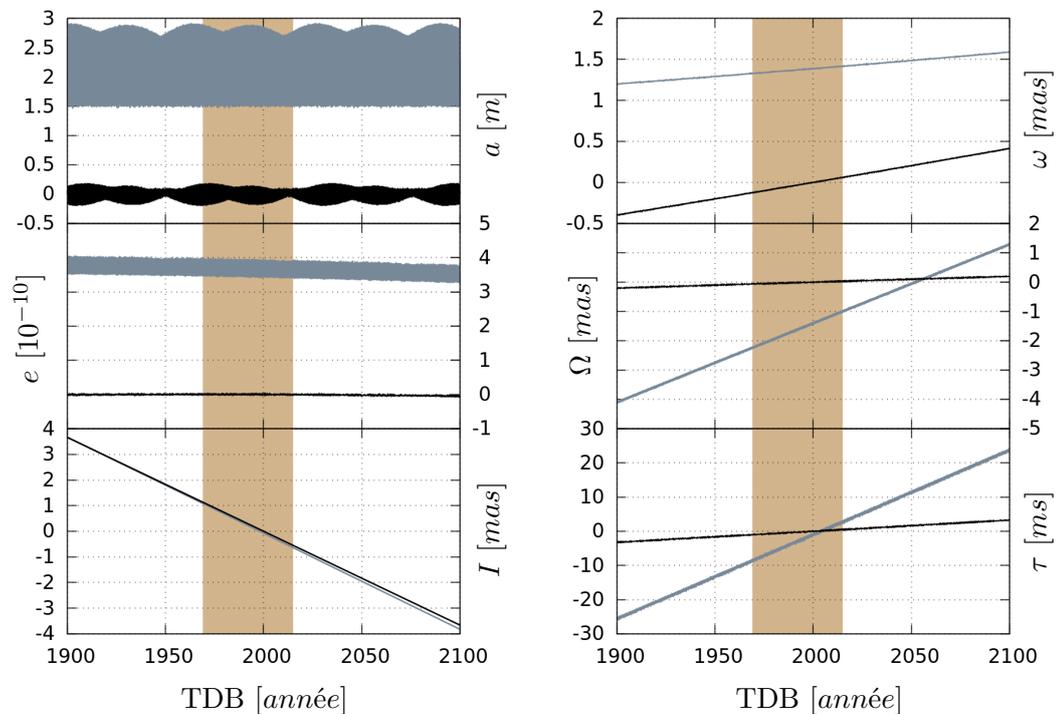


FIGURE 3.25 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de Mercure entre ELPN\_D1 ajustée aux données LLR et DE430 (*courbes en noir*) puis INPOP13c (*courbes en gris*).

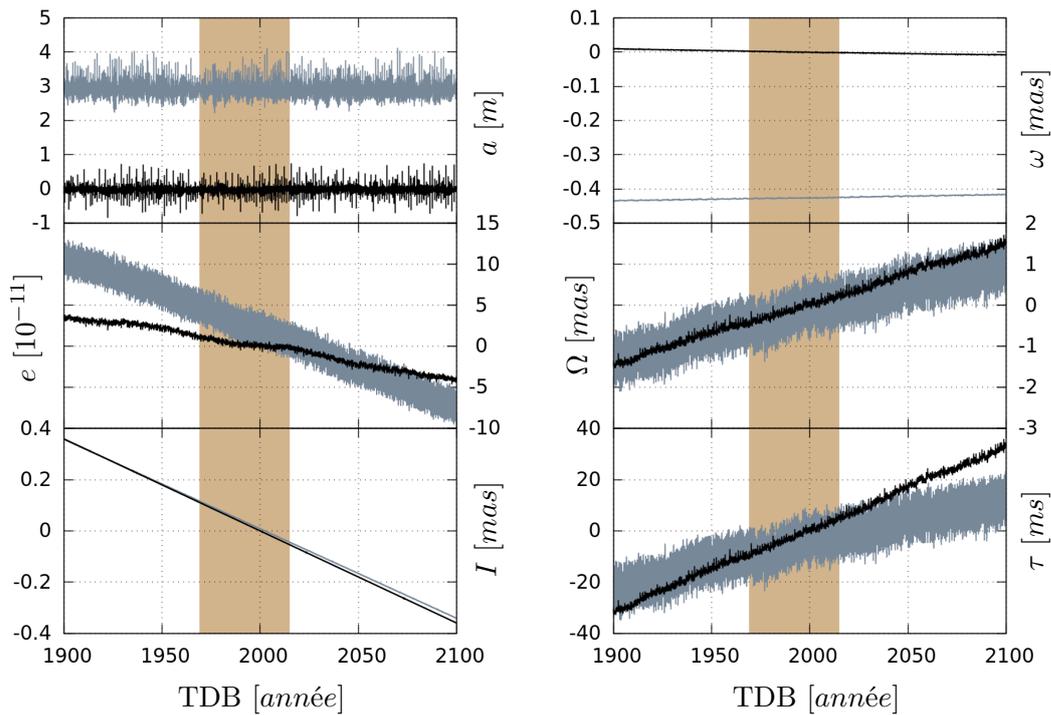


FIGURE 3.26 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de Vénus entre ELPN\_D1 ajustée aux données LLR et DE430 (courbes en noir) puis INPOP13c (courbes en gris).

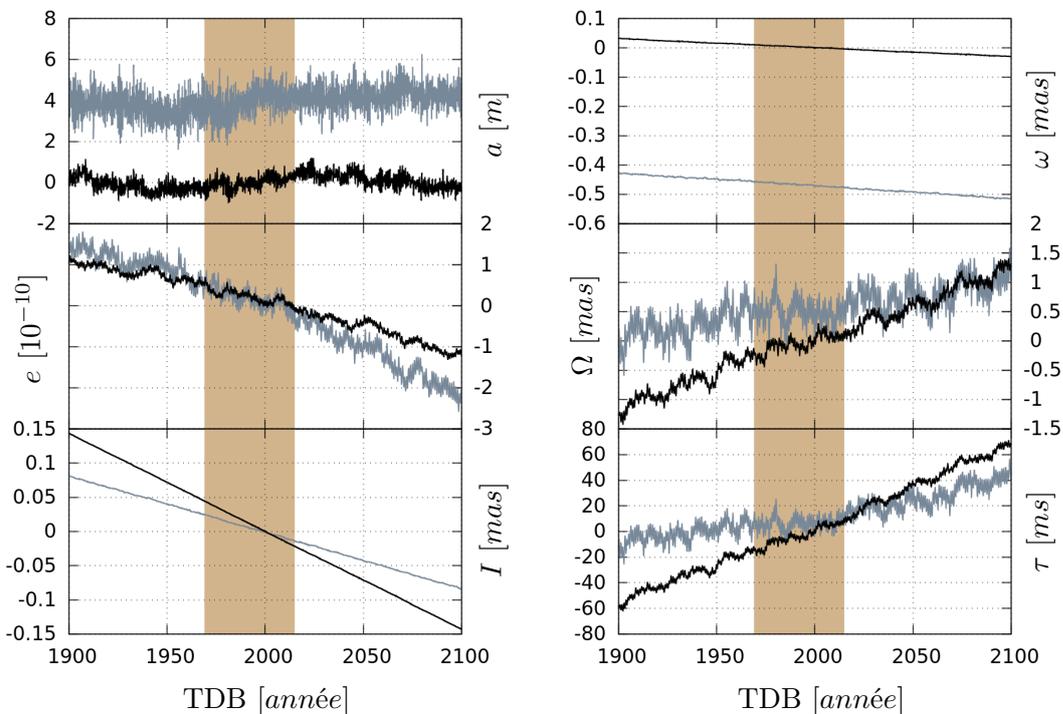


FIGURE 3.27 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) du barycentre du système Terre-Lune entre ELPN\_D1 ajustée aux données LLR et DE430 (courbes en noir) puis INPOP13c (courbes en gris).

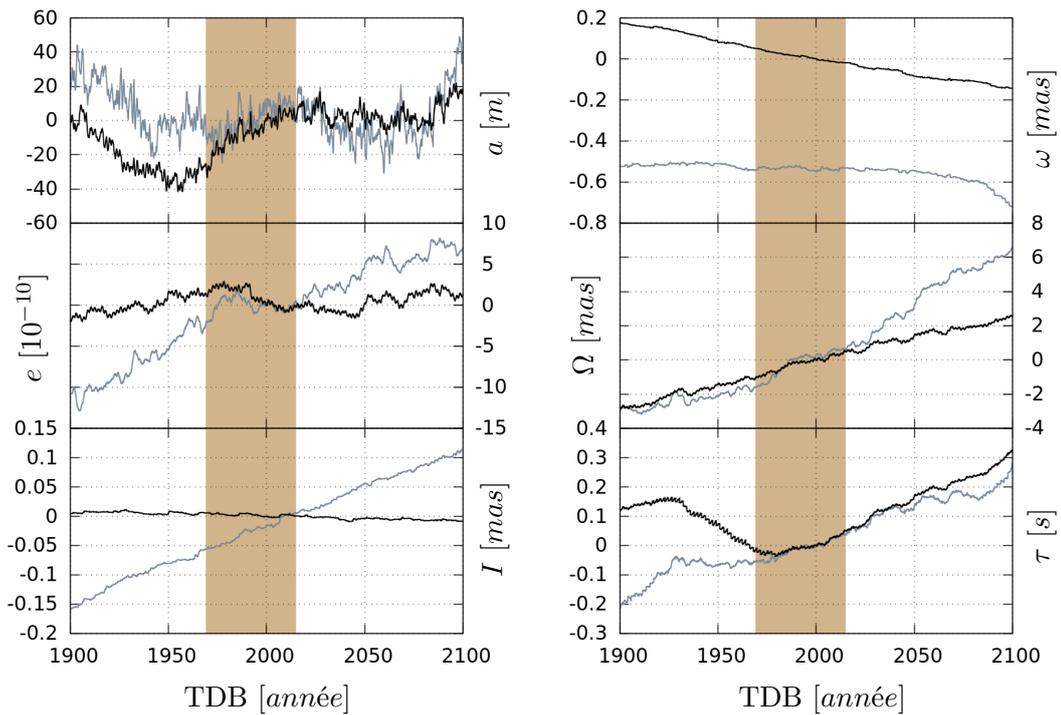


FIGURE 3.28 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de Mars entre ELPN\_D1 ajustée aux données LLR et DE430 (courbes en noir) puis INPOP13c (courbes en gris).

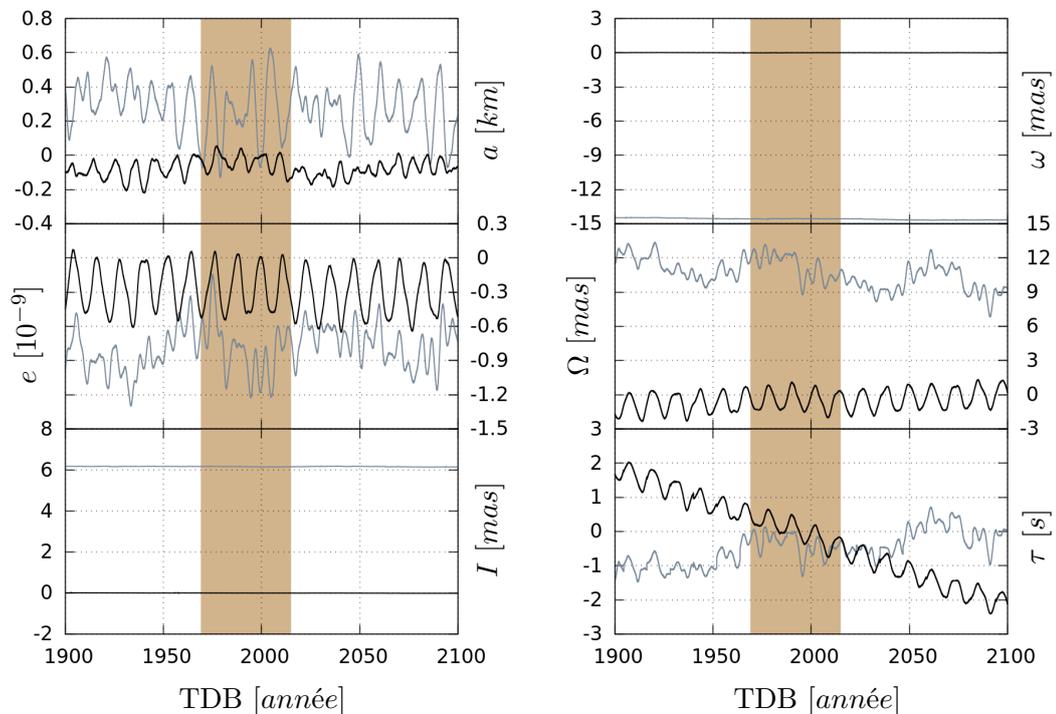


FIGURE 3.29 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de Jupiter entre ELPN\_D1 ajustée aux données LLR et DE430 (courbes en noir) puis INPOP13c (courbes en gris).

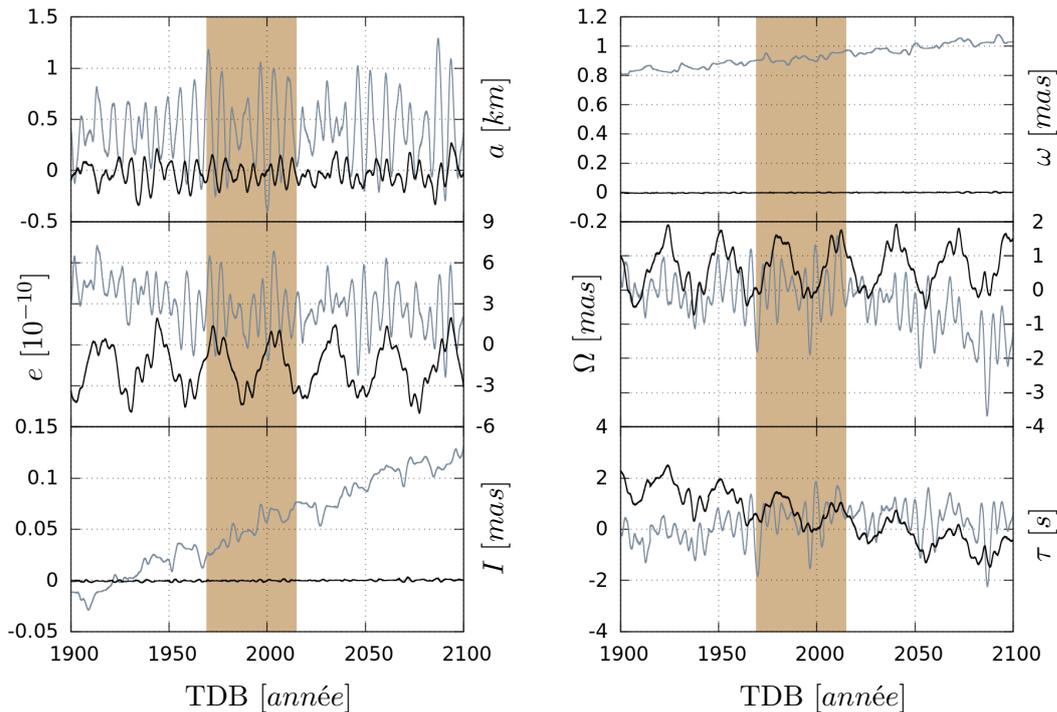


FIGURE 3.30 – Graphique représentant les différences sur les éléments képlériens ( $a, e, I, \omega, \Omega, \tau$ ) de Saturne entre ELPN\_D1 ajustée aux données LLR et DE430 (courbes en noir) puis INPOP13c (courbes en gris).

**Résumé.** Les divers écarts discutés dans cette section, concernant les prédictions des trois éphémérides, ne peuvent en aucun cas servir à conclure que *e.g.* une éphéméride est plus précise que les deux autres concernant le système Terre-Lune. En effet, chacune des trois prédictions est définie pour un jeu de conditions initiales et de paramètres physiques qui lui est propre. Par conséquent, le seul moyen de véritablement confronter les précisions des divers éphémérides est de comparer leurs résidus d’observations, à la manière de ce qui a été fait en Sec. 3.4.1. Notons pour finir, qu’ELPN est une éphéméride lunaire et non une éphéméride planétaire comme INPOP13c ou DE430. Ainsi, seules les prédictions concernant le système Terre-Lune sont fiables car ajustées aux données. En conséquence, pour les orbites planétaires il est possible de conclure que les prédictions d’ELPN sont les moins précises des trois éphémérides utilisées.

### 3.4.3 Résidus à partir d’une solution ajustée

Nous présentons ici une manière de s’assurer que la solution ELPN\_D1 nouvellement ajustée reste valide sur des échelles de temps supérieures à la période d’observation des tirs lasers. Nous rappelons qu’ELPN\_D1 est ajustée sur 44 ans, d’août 1969 à décembre 2013. L’idée est alors d’utiliser ELPN\_D1 pour calculer des temps lumières théoriques à de nouvelles dates d’observations. Ces nouvelles dates d’observations s’étalant du 1er janvier 2014 au 31 décembre 2015 soit deux années supplémentaires de données sur lesquelles la prédiction d’ELPN\_D1 n’a pas été ajustée. Si le nouveau jeu de paramètres déterminé par ajustement du modèle sur la période 1969-2013 est proche du jeu de paramètres réels, on s’attend à ce que la prédictions des temps lumières fournissent des résidus présentant le même *r.m.s.* que les résidus déterminés à la fin de la période d’ajustement. À l’inverse

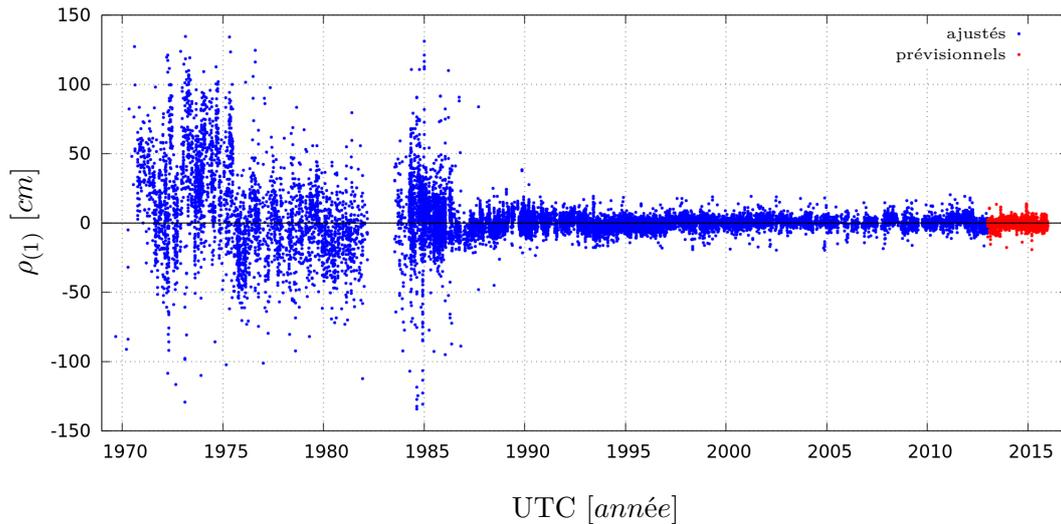


FIGURE 3.31 – Graphique représentant l’amplitude des résidus. Les résidus représentés en *bleu* ont été utilisés pour réaliser l’ajustement. Les résidus représentés en *rouge* sont calculés à partir d’un nouveau jeu de données n’ayant pas été utilisé pour effectuer l’ajustement.

si le nouveau jeu de paramètres a mal été déterminé, on s’attend à ce que les résidus prévisionnels s’écartent de la valeur moyenne. En Fig. 3.31, on présente ainsi l’évolution des résidus prévisionnels (tracée en *rouge*) pour la période du 1er janvier 2014 au 31 décembre 2015. Les résidus tracés en *bleu* sont ceux précédemment présentés en Fig. 3.19. Il est clairement visible que pour ces deux années supplémentaires les *r.m.s.* sur les résidus prévisionnels sont constants et du même ordre de grandeur que les résidus déterminés à la fin de la période d’ajustement.

### 3.5 Résumé

Dans ce chapitre nous avons présenté les spécificités physiques et informatiques du modèle dynamique de l’éphéméride ELPN. Nous avons ensuite présenté la procédure implémentée dans le programme de réduction de données CAROLL. Cette procédure permet de calculer le temps lumière théorique que mettent les photons pour parcourir à un instant  $T$  donné, la distance entre une station émettrice à la surface de la Terre et un rétro-rélecteur à la surface de la Lune. Ensuite, nous avons exposé la démarche à suivre afin de minimiser le résidu d’observation en ajustant la valeur des paramètres du modèle. Nous avons alors vu que la dérivée partielle de l’observable relativement à chacun des paramètres à ajuster était un outil indispensable et avons montré comment ces quantités sont calculées simultanément avec les équations du mouvement. Enfin, nous avons montré que la nouvelle éphéméride lunaire ELPN\_D1 intégrée dans le cadre de la relativité générale produit des *r.m.s.* sur les résidus du même ordre de grandeur que ceux d’INPOP13b et de DE430.



# Chapitre 4

## Solution numérique dans le cadre du formalisme SME

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>101</b>
<b>4.2</b>	<b>Modélisation du SME minimal</b>	<b>102</b>
4.2.1	Présentation générale	102
4.2.2	Partie orbitale	103
4.2.3	Déflexion lumineuse	104
<b>4.3</b>	<b>Modélisation du couplage gravité-matière</b>	<b>106</b>
4.3.1	Présentation générale	106
4.3.2	Partie orbitale	107
4.3.3	Déflexion lumineuse	108
<b>4.4</b>	<b>Détermination d'erreurs réalistes</b>	<b>109</b>
4.4.1	Corrélations entre coefficients SME	110
4.4.2	Sous-estimation des erreurs formelles	115
4.4.3	Estimation des incertitudes systématiques	119
<b>4.5</b>	<b>Présentation des résultats</b>	<b>121</b>
4.5.1	Discussion des résultats	121
4.5.2	Bourgoin <i>et al.</i> (2016)	124
<b>4.6</b>	<b>Résumé</b>	<b>124</b>

---

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre est présenté l'aboutissement de la thèse, à savoir traiter les observations de télémétrie laser sur la Lune dans le cadre d'un formalisme alternatif à la relativité générale ; le formalisme SME. Ainsi, dans un premier temps, nous présentons les modifications qui ont été introduites dans la procédure de traitement de données présentée en Chap. 3, afin d'inclure d'hypothétiques violations à l'invariance locale de Lorentz. Les violations introduites sont de deux natures différentes et s'inscrivent dans deux cadres théoriques bien distincts, le secteur gravitationnel du SME minimal (*cf.* Sec. 4.2) et le couplage gravité-matière (*cf.* Sec. 4.3). Dans un deuxième temps, nous présentons en Sec. 4.4 des méthodes statistiques permettant d'obtenir des erreurs réalistes sur les paramètres d'intérêts. Puis finalement, nous clôturons ce chapitre en exposant les résultats obtenus dans le cadre du formalisme SME.

## 4.2 Modélisation du SME minimal

Dans cette section, nous effectuons dans un premier temps, une brève introduction sur la nature du SME minimal dans le secteur gravitationnel. Dans un deuxième temps, nous présentons les corrections apportées sur la dynamique orbitale des corps (en particulier le système Terre-Lune) suite à l'introduction du formalisme. Puis, nous clôturons cette section en présentant les corrections à apporter à l'expression du délai gravitationnel des photons, toujours dans le cadre du secteur purement gravitationnel du SME.

### 4.2.1 Présentation générale

Le cadre théorique du SME minimal est construit moyennant plusieurs simplifications. La première consiste à réduire l'espace-temps de Riemann-Cartan requis pour la description du SME global en espace-temps courbes, à l'espace-temps de Riemann pour lequel la torsion est définie nulle (Kostelecký, 2004). Deuxièmement, la partie dite invariante de Lorentz de la théorie se réduit à la seule action de la relativité générale (action d'Einstein-Hilbert). Enfin, ne sont considérés que les termes de premier ordre dans la violation à la symétrie de Lorentz (Bailey et Kostelecký, 2006; Bailey, 2007).

Moyennant ces hypothèses, l'action effective du SME minimal s'écrit sous la forme

$$S = S_g + S_m, \quad \text{avec} \quad S_g = S_{\text{EH}} + S_{\text{LV}}, \quad (4.1)$$

et  $S_m$  l'action élargie de la matière. Cette dernière incorpore les contributions des champs décrivant l'intensité des violations de Lorentz en plus du contenu en énergie impulsion de la matière ordinaire.

L'action  $S_g$  représente l'action du champ gravitationnel et se compose, d'une part, de l'action d'Einstein-Hilbert qui est définie par la relation

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (4.2)$$

où  $\kappa = 8\pi\mathcal{G}c^{-4}$  est la constante d'Einstein,  $g$  est le déterminant du tenseur métrique  $g_{\alpha\beta}$  et  $R$  est le scalaire de courbure. Comme il est d'usage dans l'espace pseudo-Riemannien, tous les degrés de liberté du champ gravitationnel sont contenus dans la métrique et la courbure. De plus, la torsion étant nulle, la connexion est alors équivalente au symbole de Christoffel dont les composantes sont déterminées à partir des seules composantes de la métrique et de ses dérivées premières relativement aux coordonnées.

L'action  $S_g$  contient également les champs supplémentaires liés à la violation locale de la symétrie de Lorentz, et s'exprime d'après Bailey et Kostelecký (2006)

$$S_{\text{LV}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left( -uR + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^T + t^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\beta\mu\nu} \right), \quad (4.3)$$

où  $R_{\mu\nu}^T \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R$  est le tenseur de Ricci de trace nulle,  $C_{\alpha\beta\mu\nu}$  est le tenseur de Weyl et  $u$ ,  $s^{\mu\nu}$  et  $t^{\alpha\beta\mu\nu}$  sont les champs liés à une hypothétique violation à l'invariance de Lorentz. En tout, ce sont 20 coefficients indépendants permettant de quantifier l'intensité des violations, qui doivent être estimés par confrontation directe à l'expérience ; le premier provient de  $u$ , 9 sont donnés par le tenseur symétrique de trace nulle  $s^{\mu\nu}$  et 10 sont donnés par  $t^{\alpha\beta\mu\nu}$ .

Rappelons (*cf.* Chap. 1) que dans la phénoménologie SME, les violations interviennent par brisure spontanée à la symétrie de Lorentz signifiant que  $u$ ,  $s^{\mu\nu}$  et  $t^{\alpha\beta\mu\nu}$  sont à la fois déterminés par la dynamique mais également acteurs de la dynamique via la variation de l'action  $S$ . Par conséquent, l'obtention des équations d'Einstein linéarisées s'effectue en deux temps. Tout d'abord, par les méthodes perturbatives traditionnelles *i.e.* en travaillant au premier ordre pour les fluctuations autour de la métrique Minkowskienne de fond ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  avec  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ). Puis dans un second temps, en considérant que les fluctuations générées par la dynamique sur les champs  $u$ ,  $s^{\mu\nu}$  et  $t^{\alpha\beta\mu\nu}$  sont faibles devant leur valeur attendue dans le vide ( $\bar{u}$ ,  $\bar{s}^{\mu\nu}$  et  $\bar{t}^{\alpha\beta\mu\nu}$ ). En parallèle, il est également considéré que les variations de ces dernières relativement à des coordonnées asymptotiquement inertielles sont nulles, ce qui permet d'assurer la conservation des moments et de l'énergie dans les repères asymptotiquement Minkowskiens.

Moyennant d'autres hypothèses simplificatrices, Bailey et Kostelecký (2006) ont dérivé les équations d'Einstein linéarisées en Eqs. (23) et (24). Dans ces dernières, les champs additionnels brisant la symétrie de Lorentz<sup>1</sup> viennent seulement moduler la manière avec laquelle la métrique d'espace-temps est générée. Ainsi, dans le cadre du formalisme SME restreint au seul secteur gravitationnel, les particules d'épreuves suivent des géodésiques de l'espace-temps. La métrique post-newtonienne permettant de résoudre les équations d'Einstein linéarisées est dérivée dans Bailey et Kostelecký (2006) puis comparée à celle du formalisme PPN (Will, 1993) afin de mettre en évidence le non-recouvrement des deux phénoménologies. Il est également montré que  $\bar{u}$  est inobservable dans la mesure où il peut être absorbé dans la redéfinition de la constante  $\mathcal{G}$ .

#### 4.2.2 Partie orbitale

À partir des composantes de la métrique il est possible de déterminer les équations du mouvement en utilisant l'équation des géodésiques. Ainsi, les corrections SME aux équations du mouvement de  $n$ -corps à l'ordre post-newtonien sont données par l'expression (52) de Bailey et Kostelecký (2006)

$$\begin{aligned}
a_a^J = & \frac{3}{2} \bar{s}^{TT} \sum_{b \neq a} \frac{\mathcal{G} m_b r_{ab}^J}{r_{ab}^3} - \bar{s}^{JK} \sum_{b \neq a} \frac{\mathcal{G} m_b r_{ab}^K}{r_{ab}^3} + \frac{3}{2} \bar{s}^{KL} \sum_{b \neq a} \frac{\mathcal{G} m_b r_{ab}^J r_{ab}^K r_{ab}^L}{r_{ab}^5} \\
& - \bar{s}^{TJ} \sum_{b \neq a} \frac{\mathcal{G} m_b (v_b^K r_{ab}^K - 2v_a^K r_{ab}^K)}{c r_{ab}^3} - \bar{s}^{TK} \sum_{b \neq a} \frac{\mathcal{G} m_b (2v_a^K r_{ab}^J - v_b^J r_{ab}^K + v_b^K r_{ab}^J)}{c r_{ab}^3} \\
& - 3 \bar{s}^{TK} \sum_{b \neq a} \frac{\mathcal{G} m_b v_b^L r_{ab}^L r_{ab}^J r_{ab}^K}{c r_{ab}^5} + \mathcal{O}(4), \tag{4.4}
\end{aligned}$$

où  $a_a^J$  représente la composante  $J$  de l'accélération absolue du corps  $a$  créée par les  $n - 1$  autres corps. Nous avons utilisé ici le référentiel barycentrique de coordonnées  $(T, X, Y, Z)$ . Ces corrections font intervenir les 10 composantes du tenseur symétrique  $\bar{s}^{\mu\nu}$  symbolisant l'intensité des violations à la symétrie de Lorentz. Le tenseur  $\bar{s}^{\mu\nu}$  possède en réalité 9 composantes indépendantes car sa trace est nulle (dans l'Eq. (4.3),  $\bar{s}^{\mu\nu}$  est associé au tenseur de Ricci de trace nulle). Ainsi, nous avons la relation  $\eta_{\mu\nu} \bar{s}^{\mu\nu} = \bar{s}^\nu{}_\nu = 0$ , d'où l'on tire la condition  $\bar{s}^{XX} + \bar{s}^{YY} + \bar{s}^{ZZ} - \bar{s}^{TT} = 0$ . Dans les analyses SME, il est alors d'usage de travailler avec le tenseur symétrique tri-dimensionnel de trace nulle défini par la relation suivante (Bailey *et al.*, 2013)

$$\bar{s}_t^{JK} = \bar{s}^{JK} - \frac{1}{3} \bar{s}^{TT} \delta^{JK}. \tag{4.5}$$

1.  $\bar{u}$  et  $\bar{s}^{\mu\nu}$  uniquement puisque  $\bar{t}^{\alpha\beta\mu\nu}$  n'intervient pas dans la version linéarisée du SME minimal.

Ainsi, après introduction de (4.5) dans (4.4), le coefficient devant le premier terme du second membre devient  $5/3$  et les  $\bar{s}^{JK}$  et  $\bar{s}^{KL}$  sont respectivement remplacés par  $\bar{s}_t^{JK}$  et  $\bar{s}_t^{KL}$ . Par conséquent, le premier terme du second membre est analogue à l'accélération newtonienne du problème des  $n$ -corps (*cf.* Eq. (2.2)) au facteur  $\frac{5}{3}\bar{s}^{TT}$  près. Ainsi, le coefficient  $\bar{s}^{TT}$  est inobservable dans la dynamique des corps et peut-être absorbé dans la redéfinition de  $\mathcal{G}$  (Bailey et Kostecký, 2006; Bailey *et al.*, 2013; Hees *et al.*, 2015)

$$\mathcal{G}_N = \mathcal{G} \left( 1 + \frac{5}{3} \bar{s}^{TT} \right). \quad (4.6)$$

En tenant compte des modifications précédentes, l'application des Eqs. (4.4) pour les composantes des accélérations absolues de la Terre et de la Lune, permet de trouver l'accélération relative  $a^J = a_L^J - a_T^J$ , avec  $a_L^J$  et  $a_T^J$  les  $J$ èmes composantes des accélérations absolues respectives de la Lune et de la Terre. L'accélération relative est ainsi donnée par la relation suivante (*cf.* Eq. (104) de Bailey et Kostecký (2006))

$$a^J = \frac{\mathcal{G}_N M}{r^3} \left[ \bar{s}_t^{JK} r^K - \frac{3}{2} \bar{s}_t^{KL} \hat{r}^K \hat{r}^L r^J + 3 \bar{s}^{TK} \hat{V}^K r^J - \bar{s}^{TJ} \hat{V}^K r^K - \bar{s}^{TK} \hat{V}^J r^K + 3 \bar{s}^{TL} \hat{V}^K \hat{r}^K \hat{r}^L r^J + 2 \frac{\delta m}{M} \left( \bar{s}^{TK} \hat{v}^K r^J - \bar{s}^{TJ} \hat{v}^K r^K \right) \right], \quad (4.7)$$

où  $\mathcal{G}_N$  est donc la constante gravitationnelle observée. L'ensemble des notations utilisées ici est détaillé en Tab. 4.1 et est repris de Bailey et Kostecký (2006). Les indices latins sont utilisés pour faire référence aux coordonnées spatiales ( $X, Y, Z$ ) et  $T$  représente toujours le temps coordonnée exprimé en TDB (*c.f.* Bailey et Kostecký (2006) pour une description plus détaillée à propos des conventions généralement adoptées lors d'analyses effectuées dans le cadre du formalisme SME).

On trouvera également en appendix A de Bailey et Kostecký (2006) une étude similaire à celle présentée en annexe A et permettant d'évaluer l'effet de la perturbation (4.7) sur l'orbite de la Lune. Les signaux ainsi dérivés ont été utilisés par Battat *et al.* (2007) pour réaliser l'étude postfit des données LLR.

### 4.2.3 Déflexion lumineuse

En plus de l'effet sur la dynamique orbitale, il est également impératif de bien modéliser les effets gravitationnels sur le temps lumière des photons. D'après l'Eq. (24) de Bailey (2009), l'expression du délai Shapiro dans le cadre du formalisme SME est donnée dans la jauge harmonique standard ( $a_1 = a_2 = 1$ ), à l'ordre post-newtonien, par la relation

$$\Delta\tau_g = \sum_{b=S,T} \left\{ \frac{2\mathcal{G}_N m_b}{c^3} \left[ 1 - \frac{2}{3} \bar{s}^{TT} - \bar{s}^{TJ} \hat{d}^J \right] \ln \left[ \frac{r_{bO} + r_{bR} + d}{r_{bO} + r_{bR} - d} \right] - \frac{\mathcal{G}_N m_b}{c^3} \left[ \frac{2}{3} \bar{s}^{TT} - \bar{s}^{TJ} \hat{d}^J - \bar{s}_t^{JK} \hat{h}_b^J \hat{h}_b^K \right] \left( \hat{r}_{bR}^K \hat{d}^K - \hat{r}_{bO}^K \hat{d}^K \right) - \frac{\mathcal{G}_N m_b}{c^3} \left[ \frac{1}{3} \bar{s}^{TT} \hat{d}^K \hat{h}_b^K - \bar{s}^{TJ} \hat{h}_b^J + \bar{s}_t^{JK} \hat{d}^J \hat{h}_b^K \right] \frac{h_b(r_{bR} - r_{bO})}{r_{bO} r_{bR}} \right\}, \quad (4.8)$$

où nous avons utilisé  $\mathcal{G}_N$  la constante gravitationnelle observée, précédemment définie en Eq. (4.6). Les vecteurs  $d^J$  et  $h_b^J$  sont définis en Tab. (4.1). Le coefficient 1 présent dans le premier crochet du second membre fait référence à l'expression du délai Shapiro en relativité générale lorsque tous les  $\bar{s}^{\mu\nu}$  sont nuls.

Variable	Définition
$N_S^w$	nombre de particules d'espèce $w$ dans le Soleil,
$N_T^w$	nombre de particules d'espèce $w$ dans la Terre,
$N_L^w$	nombre de particules d'espèce $w$ dans la Lune,
$m_S$	masse du Soleil,
$m_T$	masse de la Terre,
$m_L$	masse de la Lune,
$M = m_T + m_L$	masse du barycentre Terre-Lune,
$\delta m = m_T - m_L$	différence entre la masse de la Terre et celle de la Lune,
$r^J$	vecteur position géocentrique de la Lune,
$r = \sqrt{r^J r^J}$	distance Terre-Lune,
$\hat{r}^J = r^J / r$	vecteur unité position géocentrique de la Lune,
$d^J$	vecteur station-réfecteur,
$d = \sqrt{d^J d^J}$	distance station-réfecteur,
$\hat{d}^J = d^J / d$	vecteur unité station-réfecteur,
$r_{bO}^J$	vecteur reliant le corps $b$ à une station LLR,
$r_{bR}^J$	vecteur reliant le corps $b$ à un rétro-réfecteur lunaire,
$h_b^J = r_{bR}^J - r_{bR}^K \hat{d}^K \hat{d}^J$	vecteur paramètre d'impact,
$h_b = \sqrt{h_b^J h_b^J}$	paramètre d'impact,
$\hat{h}_b^J = h_b^J / h_b$	vecteur unitaire paramètre d'impact,
$c$	vitesse de la lumière dans le vide,
$v^J$	vecteur vitesse géocentrique de la Lune,
$\hat{v}^J = v^J / c$	vecteur unité vitesse géocentrique de la Lune,
$V^J = (m_T v_T^J + m_L v_L^J) / M$	vecteur vitesse héliocentrique du barycentre Terre-Lune,
$\hat{V}^J = V^J / c$	vecteur unité vitesse héliocentrique du barycentre Terre-Lune.

TABLE 4.1 – Table des notations employées pour la modélisation du SME.

### 4.3 Modélisation du couplage gravité-matière

Après le secteur purement gravitationnel, on s'intéresse dans cette section au secteur matière du SME. Une description détaillée est donnée dans Kostelecký (2004) et Kostelecký et Tasson (2011). Dans la première des sous-sections à suivre, nous présentons quelques unes des implications principales en lien avec notre application. Dans la deuxième sous-section, on s'intéresse à l'interaction entre la gravité et la matière et à l'effet produit sur la dynamique du système Terre-Lune. Enfin, l'effet sur la propagation des photons sera présenté dans la dernière sous-section.

#### 4.3.1 Présentation générale

L'action effective du SME dans le secteur matière s'écrit d'après Kostelecký et Tasson (2011), sous la forme suivante

$$S = S_g + S_f + S_m, \quad (4.9)$$

où les termes  $S_g$  et  $S_m$  ont été introduits en Sec. 4.2. Le terme  $S_f$  décrit l'action d'une particule libre dans le cadre de l'interaction gravité-matière et se présente sous la forme suivante

$$S_f = - \int cd\lambda \left[ m \sqrt{(g_{\mu\nu} + c_{\mu\nu})u^\mu u^\nu} + (a_{\text{eff}})_\mu u^\mu \right], \quad (4.10)$$

où  $\lambda$  est un paramètre défini tout le long de la ligne d'univers de la particule  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ , soit  $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$  la quadrivitesse de la particule ;  $c_{\mu\nu}$  est un coefficient associé à l'intensité de la violation de Lorentz et est introduit comme un offset dans la manière dont le carré de la quadrivitesse est déterminé en espace courbe. Dans la suite, nous considérerons le cas  $c_{\mu\nu} = 0$  ;  $(a_{\text{eff}})_\mu$  est un paramètre possédant la dimension d'une masse. Il représente la combinaison linéaire mesurable lors d'expériences gravitationnelles ayant pour but de mettre en évidence d'hypothétiques effets d'interactions entre la gravité et la matière.

Ce dernier point est souligné par la manière dont  $(a_{\text{eff}})_\mu$  est introduit dans l'action (4.10). En effet, il apparaît sous une forme similaire à l'interaction entre la charge des particules et les champs électromagnétiques (*cf.* Eq. (23.1) de Landau et Lifshitz (1975) ou encore le terme  $I_{\text{int}}$  en Eq. (2.40) de Will (1993)). Ainsi, de part l'introduction de ce terme d'interaction entre matière et gravité, il est dès lors sous-entendu que si  $(a_{\text{eff}})_\mu \neq 0$ , alors les particules libres ne suivent plus des géodésiques de l'espace-temps et ne sont dès lors plus soumises au EEP. Ceci est directement visible de l'action des particules libres qui se présente en relativité sous la forme (1.3) et qui conduit à l'équation des géodésiques une fois qu'elle est dérivée relativement au quadrivecteur position de la particule. Dans le cas présent, une variation de (4.10) relativement aux coordonnées  $x^\mu$  fournit les équations du mouvement présentées en Eq. (78) de Kostelecký et Tasson (2011). Ces équations du mouvement présentes deux termes : i) l'équation du mouvement en relativité générale et ii) une déviation au mouvement géodésique de la particule dans l'espace-temps.

De plus, d'après Kostelecký et Tasson (2011) le champs  $(a_{\text{eff}})_\mu$  dépend de la composition du corps ou de la particule considérée via la relation

$$(a_{\text{eff}})_\mu = \sum_w N^w (a_{\text{eff}}^w)_\mu + (a'_{\text{eff}})_\mu, \quad (4.11)$$

avec  $w$  désignant les différents constituants (électrons, protons et neutrons) composant l'objet macroscopique étudié. Le coefficient  $N^w$  désignant le nombre de ces constituants et  $(a'_{\text{eff}})_\mu$  étant le coefficient associé à l'énergie de liaison qui contribue à  $(a_{\text{eff}})_\mu$ . D'après Kostelecký et Tasson (2011) on a  $(a'_{\text{eff}})_\mu \simeq 0$ .

Ainsi, d'après l'Eq. (4.11) le terme d'interaction gravité-matière est dépendant de la composition des corps. Cette dépendance se retrouve également dans l'équation modifiée du mouvement (*cf.* Eq. (78) de Kostelecký et Tasson (2011)) ce qui conduit à une violation apparente du WEP puisque le mouvement des particules tests dépend de leur composition.

Dans le cadre du formalisme SME, comme mentionné précédemment, les violations interviennent par brisure spontanée à la symétrie de Lorentz. Ainsi, les coefficients associés aux champs mesurant l'intensité de la violation se décomposent en deux parties. La première partie est constante relativement à des coordonnées asymptotiquement inertielles et représente leur valeur attendue dans le vide  $(\bar{a}_{\text{eff}})_{\mu}$ . Quant à la deuxième partie, elle fluctue autour de la partie constante. Cette décomposition permet ensuite de déduire les corrections à apporter à  $h_{\mu\nu}$  pour tenir compte de la violation de Lorentz dans le secteur matière du SME, mais également de calculer la déviation à l'équation des géodésiques produites par l'action modifiée (4.10).

### 4.3.2 Partie orbitale

Connaissant alors les composantes de la métrique, il est possible à partir de l'équation du mouvement (*cf.* Eq. (78) de Kostelecký et Tasson (2011)) de déterminer l'accélération perturbatrice du vecteur Terre-Lune due à d'hypothétiques violations à la symétrie de Lorentz dans le secteur matière du formalisme SME. Cette accélération est ainsi donnée par l'Eq. (177) de Kostelecký et Tasson (2011). En ne gardant que les termes d'intérêt pour cette étude, on trouve l'expression suivante

$$a^J = -\frac{\mathcal{G}M}{r^3} \sum_w \left[ 2 \frac{n_3^w}{M} \alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^T r^{rJ} + 2 \frac{n_3^w}{M} \alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^K \hat{V}^K r^{rJ} + 2 \frac{n_2^w}{M} \alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^J \hat{v}^K r^{rK} - 2 \frac{n_2^w}{M} \alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^K \hat{v}^K r^{rJ} \right], \quad (4.12)$$

où l'indice  $w$  désigne tour à tour les électrons ( $e$ ), les protons ( $p$ ) et les neutrons ( $n$ ). Le quadrivecteur  $\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^\mu$  est une fonction des coefficients liés à l'intensité de la violation de Lorentz pour le constituant  $w$  et possède la dimension d'une masse ( $GeV/c^2$ ). Les quantités  $n_2^w$  et  $n_3^w$  sont définies par les deux relations suivantes

$$n_2^w = N_L^w - N_T^w, \quad (4.13a)$$

$$n_3^w = M \left( \frac{N_L^w}{m_L} - \frac{N_T^w}{m_T} \right), \quad (4.13b)$$

où  $N_L^w$  et  $N_T^w$  sont définis en Tab. 4.1. Pour la Terre, nous adopterons les valeurs suivantes  $N_T^e = N_T^p \approx N_T^n \simeq 1.8 \times 10^{51}$  avec  $N_T^n - N_T^p \simeq 10^{49}$  (Allègre *et al.*, 1995). Cette dernière différence est principalement due à la présence du noyau métallique à l'intérieur de la Terre. Dans le cas de la Lune, nous reprendrons les valeurs de Lodders et Fegley (1998), à savoir  $N_L^e/m_L = N_L^p/m_L \approx N_L^n/m_L \simeq 0.5 (GeV/c^2)^{-1}$ .

On peut remarquer que le premier terme entre crochets dans l'Eq. (4.12) est identique, au facteur  $2 \sum_w n_3^w \alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^T / M$  près, à l'accélération newtonienne perçue entre la Terre et la Lune. Ainsi, à la manière de ce qui a été fait précédemment concernant la partie orbitale dans le secteur purement gravitationnel du SME, il est possible de redéfinir la valeur de la constante gravitationnelle pour faire disparaître ce premier terme. Par conséquent, en

reprenant les résultats précédemment introduits en Eq. (4.6), on trouve

$$\mathcal{G}_N = \mathcal{G} \left( 1 + \frac{5}{3} \bar{s}^{TT} + 2 \sum_w \frac{n_3^w}{M} \alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^T \right). \quad (4.14)$$

Ainsi, l'expression générale de la perturbation dans le formalisme SME (minimal et couplage gravité-matière) se laisse désormais écrire sous la forme

$$\begin{aligned} a^J = \frac{\mathcal{G}_N M}{r^3} & \left\{ \bar{s}_t^{JK} r^K - \frac{3}{2} \bar{s}_t^{KL} \hat{r}^K \hat{r}^L r^J - \bar{s}^{TJ} \hat{V}^K r^K - \bar{s}^{TK} \hat{V}^J r^K + 3 \bar{s}^{TL} \hat{V}^K \hat{r}^K \hat{r}^L r^J \right. \\ & + 3 \left[ \bar{s}^{TK} - \frac{2}{3} \sum_w \frac{n_3^w}{M} \alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^K \right] \hat{V}^K r^J + 2 \frac{\delta m}{M} \left[ \bar{s}^{TK} + \sum_w \frac{n_2^w}{\delta m} \alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^K \right] \hat{v}^K r^J \\ & \left. - 2 \frac{\delta m}{M} \left[ \bar{s}^{TJ} + \sum_w \frac{n_2^w}{\delta m} \alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^J \right] \hat{v}^K r^K \right\}. \quad (4.15) \end{aligned}$$

On retrouve alors l'Eq. (17) de Hees *et al.* (2015) qui a été utilisée afin de redéfinir les combinaisons linéaires théoriques des paramètres SME auxquelles les données LLR sont sensibles lorsqu'on tient compte de l'interaction gravité-matière en plus du SME minimal. Pour ce faire, les auteurs ont utilisés la méthode perturbative présentée en appendix A de Bailey et Kostelecký (2006).

Dans ELPN, la dynamique du système Terre-Lune intégrée dans le cadre du formalisme SME est donc décrite par la perturbation totale (4.15). Cette perturbation tient compte des corrections calculées dans le secteur purement gravitationnel ainsi que des corrections calculées dans le secteur matière du formalisme SME. Seules les contributions apportées par la Terre et la Lune sont considérées, il n'est pas tenu compte de l'effet de troisième corps. Pour les besoins de l'analyse des données LLR, les dérivées partielles de l'accélération perturbatrice relativement à l'ensemble des paramètres intervenant dans l'expression ont été calculées analytiquement puis implémentées dans le modèle dynamique. Parmi ces paramètres on retrouve les coefficients  $\bar{s}^{\mu\nu}$  mesurant l'intensité de la violation à l'invariance locale de Lorentz dans le secteur purement gravitationnel, ainsi que les coefficients  $\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^\mu$  mesurant l'intensité de la violation dans le secteur matière.

### 4.3.3 Déflexion lumineuse

Connaissant maintenant l'effet produit sur la dynamique orbitale du système Terre-Lune, on s'intéresse maintenant à l'effet de l'interaction gravité-matière sur le délai gravitationnel des photons. Ce dernier est déterminé en Eq. (203) de Kostelecký et Tasson (2011). En ajoutant la contribution apportée par la relativité générale (effet Shapiro), l'expression s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \Delta\tau_g = \sum_{b=S,T} & \left\{ \frac{2\mathcal{G}m_b}{c^3} \left[ 1 + \frac{\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^b)^T}{m_b} + \frac{\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^b)^J}{m_b} \hat{d}^J \right] \ln \left[ \frac{r_{bO} + r_{bR} + d}{r_{bO} + r_{bR} - d} \right] \right. \\ & - \frac{\mathcal{G}m_b}{c^3} \left[ \frac{\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^b)^T}{m_b} + \frac{\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^b)^J}{m_b} \hat{d}^J \right] \left( \hat{r}_{bR}^K \hat{d}^K - \hat{r}_{bO}^K \hat{d}^K \right) \\ & \left. - \frac{\mathcal{G}m_b}{c^3} \left[ \frac{\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^b)^J}{m_b} \hat{h}_b^J \right] \frac{h_b(r_{bR} - r_{bO})}{r_{bO} r_{bR}} \right\}, \quad (4.16) \end{aligned}$$

En ajoutant ces corrections apportées par le secteur matière du SME, à celles préalablement déterminées en Eq. (4.8) dans le cadre du SME minimal, on obtient le délai gravitationnel sur le temps de vol des photons dans le formalisme SME (minimal et couplage gravité-matière)

$$\begin{aligned} \Delta\tau_g = \sum_{b=S,T} \left\{ \frac{2\mathcal{G}_N m_b}{c^3} \left( 1 - \frac{2}{3} \bar{s}^{TT} + \frac{\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^b)^T}{m_b} \right. \right. \\ \left. \left. - \left[ \bar{s}^{TJ} - \frac{\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^b)^J}{m_b} \right] \hat{d}^J - 2 \sum_w \frac{n_3^w}{M} \alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^w)^T \right) \ln \left[ \frac{r_{bO} + r_{bR} + d}{r_{bO} + r_{bR} - d} \right] \right. \\ \left. - \frac{\mathcal{G}_N m_b}{c^3} \left( \frac{2}{3} \bar{s}^{TT} + \frac{\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^b)^T}{m_b} - \left[ \bar{s}^{TJ} - \frac{\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^b)^J}{m_b} \right] \hat{d}^J - \bar{s}_t^{JK} \hat{h}_b^J \hat{h}_b^K \right) \left( \hat{r}_{bR}^K \hat{d}^K - \hat{r}_{bO}^K \hat{d}^K \right) \right. \\ \left. - \frac{\mathcal{G}_N m_b}{c^3} \left( \frac{1}{3} \bar{s}^{TT} \hat{d}^K \hat{h}_b^K - \left[ \bar{s}^{TJ} - \frac{\alpha(\bar{a}_{\text{eff}}^b)^J}{m_b} \right] \hat{h}_b^J + \bar{s}_t^{JK} \hat{d}^J \hat{h}_b^K \right) \frac{h_b(r_{bR} - r_{bO})}{r_{bO} r_{bR}} \right\}, \quad (4.17) \end{aligned}$$

où nous avons inséré la constante gravitationnelle observée dont l'expression est donnée en Eq. (4.14).

L'Eq. (4.17) est donc celle qui est implémentée dans le programme de réduction des données LLR CAROLL. Elle inclut la contribution de la relativité générale, celle du secteur purement gravitationnel du formalisme SME ainsi que la contribution du secteur matière. De plus, pour les besoins de l'ajustement aux données LLR, chacune des dérivées partielles de (4.17) relativement à chacun des paramètres apparaissant dans l'expression, ont été déterminées analytiquement puis également implémentées.

## 4.4 Détermination d'erreurs réalistes

L'intégration des équations du mouvement incluant les corrections (4.15) permet de fournir des prédictions sur la position géocentrique de la Lune dans le cadre du formalisme SME considérant d'hypothétiques violations à l'invariance locale de Lorentz. À partir de ces prédictions et en suivant la procédure d'ajustement présentée en Sec. 3.3, il est alors possible de calculer les résidus d'observations LLR dans le cadre du formalisme SME. Pour cela,  $\Delta\tau_g$  (apparaissant dans l'Eq. (3.5)) est déterminé à partir de l'Eq. (4.17). Les résidus sont alors minimisés par ajustements successifs des paramètres d'intérêts en utilisant les dérivées partielles obtenues par intégration des équations variationnelles calculées analytiquement. La matrice de variance-covariance (*cf.* Eq. 3.16) permet alors de déterminer les erreurs formelles associées à chacun des paramètres.

Cependant, comme mentionné dans Williams *et al.* (1996), on s'attend à ce que l'analyse de données présente des erreurs statistiques et systématiques dans les estimations des paramètres du modèle. De telles erreurs peuvent être dues à de mauvaises manipulations lors des observations ou bien résulter de lacunes dans la modélisation des observations *e.g.* la non prise en compte de corrélations entre observations *etc.* La conséquence directe est la sous-estimation des erreurs formelles calculées directement par la méthode des moindres carrés comparativement à l'*erreur réelle*. Il est donc indispensable, notamment dans le cadre de la physique fondamentale, d'être en mesure de fournir des erreurs réalistes prenant en considération d'éventuels biais systématiques qui auraient pu être négligés durant la modélisation. Il reste donc à débusquer et quantifier l'ordre de grandeurs de ces biais afin d'être en mesure de pouvoir fournir de vraies contraintes sur les paramètres d'intérêts.

	$\bar{s}^{TT}$	$\bar{s}^{TX}$	$\bar{s}^{TY}$	$\bar{s}^{TZ}$	$\bar{s}_t^{XX}$	$\bar{s}_t^{XY}$	$\bar{s}_t^{XZ}$	$\bar{s}_t^{YY}$	$\bar{s}_t^{YZ}$	$\bar{s}_t^{ZZ}$
$\bar{s}^{TT}$	<b>1.00</b>	-0.11	-0.03	0.03	-0.01	0.01	-0.04	0.02	-0.08	0.07
$\bar{s}^{TX}$	-0.11	<b>1.00</b>	-0.01	0.02	0.08	-0.03	-0.01	-0.11	<b>0.73</b>	<b>-0.62</b>
$\bar{s}^{TY}$	-0.03	-0.01	<b>1.00</b>	<b>-0.99</b>	-0.02	-0.09	-0.05	-0.02	-0.05	0.03
$\bar{s}^{TZ}$	0.03	0.02	<b>-0.99</b>	<b>1.00</b>	0.02	0.09	0.05	0.01	0.07	-0.05
$\bar{s}_t^{XX}$	-0.01	0.08	-0.02	0.02	<b>1.00</b>	-0.14	-0.16	<b>0.95</b>	0.14	0.40
$\bar{s}_t^{XY}$	0.01	-0.03	-0.09	0.09	-0.14	<b>1.00</b>	0.30	-0.12	-0.07	-0.02
$\bar{s}_t^{XZ}$	-0.04	-0.01	-0.05	0.05	-0.16	0.30	<b>1.00</b>	-0.12	-0.09	-0.01
$\bar{s}_t^{YY}$	0.02	-0.11	-0.02	0.01	<b>0.95</b>	-0.12	-0.12	<b>1.00</b>	-0.12	<b>0.64</b>
$\bar{s}_t^{YZ}$	-0.08	<b>0.73</b>	-0.05	0.07	0.14	-0.07	-0.09	-0.12	<b>1.00</b>	<b>-0.84</b>
$\bar{s}_t^{ZZ}$	0.07	<b>-0.62</b>	0.03	-0.05	0.40	-0.02	-0.01	<b>0.64</b>	<b>-0.84</b>	<b>1.00</b>

TABLE 4.2 – Table des corrélations entre coefficients du SME minimal. Les valeurs absolues des corrélations supérieures à 0.50 sont surlignées. Les valeurs sont obtenues lors de l’ajustement par moindres carrés à partir de l’Eq. (3.17).

Dans cette section, nous présentons la procédure suivie afin d’obtenir des erreurs réalistes sur les paramètres d’intérêts. Ces paramètres seront limités à la seule contribution du secteur purement gravitationnel du SME minimal (nous poserons dans toute la suite  $\alpha(a_{\text{eff}}^w)^\mu = 0$ ). Ainsi, dans une première sous-section, nous traitons le problème des corrélations entre les différents coefficients SME qui peut détériorer les estimations obtenues. Ceci afin de ne pas présenter des contraintes sur des paramètres trop fortement corrélés. Dans un deuxième temps, nous présentons dans les deux dernières sous-sections un moyen empirique permettant de mettre en évidence et d’isoler la provenance de biais négligés dans l’analyse de données LLR. Enfin, nous présentons une méthode statistique permettant de quantifier les erreurs systématiques.

#### 4.4.1 Corrélations entre coefficients SME

Dans cette partie, nos paramètres d’intérêts seront les coefficients SME mesurant l’intensité d’une hypothétique violation à l’invariance locale de Lorentz en repère barycentrique  $(T, X, Y, Z)$ . Ces coefficients d’intérêts sont ainsi les dix composantes du tenseur symétrique  $\bar{s}^{\mu\nu}$  dont la partie purement spatiale est définie par le tenseur tri-dimensionnel présenté en Eq. (4.5). Dans un premier temps, nous laissons de côté la condition de trace nulle afin d’étudier les corrélations des 10 composantes.

#### Sensibilité des données

Un ajustement brutal de ces 10 coefficients<sup>2</sup> fournit les corrélations présentées en Tab. 4.2, où les valeurs absolues supérieures à 0.50 sont mises en évidence en gras. Ainsi, on constate que principalement deux paires de coefficients SME sont hautement corrélées ( $\bar{s}^{TY}$  et  $\bar{s}^{TZ}$  à hauteur de -0.99 puis  $\bar{s}_t^{XX}$  et  $\bar{s}_t^{YY}$  à hauteur de 0.95) et 4 autres paires présentent

2. en plus des autres paramètres globaux tels que les conditions initiales sur les positions et vitesses du vecteur Terre-Lune, les conditions initiales sur les angles, vitesses angulaires et vecteur instantané de rotation, les masses du barycentre Terre-Lune et de la Lune, le moment quadripolaire terrestre, les temps de déphasage des déformations terrestres diurnes et semi-diurnes, les nombres de Love de la Lune, le temps de déphasage de la Lune, le moment principal d’inertie de la Lune et l’ensemble de ses coefficients du potentiel jusqu’au degré 4, le moment d’inertie du noyau, son aplatissement ou encore le terme dissipatif lié à la friction à l’interface noyau/manteau.

des corrélations légèrement plus faibles faisant intervenir les coefficients  $\bar{s}^{TX}$ ,  $\bar{s}_t^{XX}$ ,  $\bar{s}_t^{YY}$ ,  $\bar{s}_t^{ZZ}$  et  $\bar{s}_t^{YZ}$ . Ces corrélations sont une indication quant à la sensibilité des données LLR relativement aux coefficients SME. Il en ressort que les données ne sont pas directement sensibles aux seuls coefficients mais à des combinaisons linéaires de ces coefficients, comme l'avait déjà mentionné Bailey et Kostelecký (2006).

### Condition de trace nulle

Avant de discuter la possibilité de faire diminuer les corrélations, mentionnons que les corrections déduites de l'ajustement des 10 coefficients de  $\bar{s}^{\mu\nu}$  ne sont pas physiquement viables car non soumises à l'exigence de trace nulle imposée par l'action (4.3). Ainsi, comme nous l'avons déjà mentionné en Sec. 4.2, les 10 composantes indépendantes peuvent être réduites à 9 en utilisant la condition de trace nulle. Dans la littérature (Bailey, 2009; Hees *et al.*, 2015), afin de maintenir cette condition après plusieurs ajustements des coefficients SME, les deux combinaisons linéaires suivantes sont généralement ajustées en remplacement des 3 paramètres diagonaux de  $\bar{s}_t^{JK}$

$$\bar{s}^A = \bar{s}_t^{XX} - \bar{s}_t^{YY}, \quad (4.18a)$$

$$\bar{s}^B = \bar{s}_t^{XX} + \bar{s}_t^{YY} - 2\bar{s}_t^{ZZ}. \quad (4.18b)$$

Ainsi, à partir de ces deux combinaisons et de la condition spatiale de trace nulle, on retrouve les trois coefficients via les relations suivantes

$$\bar{s}_t^{XX} = \frac{1}{6}[\bar{s}^B + 3\bar{s}^A], \quad (4.19a)$$

$$\bar{s}_t^{YY} = \frac{1}{6}[\bar{s}^B - 3\bar{s}^A], \quad (4.19b)$$

$$\bar{s}_t^{ZZ} = -\frac{1}{3}\bar{s}^B. \quad (4.19c)$$

Dès lors, il n'est pas nécessaire de modifier les dérivées partielles intégrées depuis l'équation aux variations pour ajuster  $\bar{s}^A$  et  $\bar{s}^B$ . En effet, on déduit aisément les dérivées relativement à  $\bar{s}^A$  et  $\bar{s}^B$  connaissant les dérivées relativement à  $\bar{s}_t^{XX}$ ,  $\bar{s}_t^{YY}$  et  $\bar{s}_t^{ZZ}$ . Ainsi, la transformation à opérer se note

$$h(\bar{s}_t^{XX}, \bar{s}_t^{YY}, \bar{s}_t^{ZZ}) \longrightarrow \tilde{h}(\bar{s}^A, \bar{s}^B), \quad (4.20)$$

avec  $h$  une fonction quelconque des coefficients SME et  $\tilde{h}$  la fonction définie après avoir opéré dans  $h$  les changements (4.19) faisant apparaître les nouvelles combinaisons linéaires. L'identification des différentielles totales de  $h$  et  $\tilde{h}$  fournit, à l'aide des Eqs. (4.19), les relations suivantes permettant de passer d'un jeu de dérivées à l'autre

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{s}^A} = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \bar{s}_t^{XX}} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \bar{s}_t^{YY}}, \quad (4.21a)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{s}^B} = \frac{1}{6} \frac{\partial h}{\partial \bar{s}_t^{XX}} + \frac{1}{6} \frac{\partial h}{\partial \bar{s}_t^{YY}} - \frac{1}{3} \frac{\partial h}{\partial \bar{s}_t^{ZZ}}. \quad (4.21b)$$

Avec cette méthode, on détermine sans difficulté les dérivées partielles relativement à n'importe quelle combinaison linéaire de coefficients.

### Détermination des combinaisons linéaires

En ajustant désormais les 9 paramètres indépendants (dont deux sont des combinaisons linéaires de coefficients SME) plutôt que les 10 initialement ajustés, nous avons supprimé la forte corrélation entre  $\bar{s}_t^{XX}$  et  $\bar{s}_t^{YY}$  montrée en Tab. 4.2. Cependant, la corrélation la plus importante (valeur absolue de 0.99) entre  $\bar{s}^{TY}$  et  $\bar{s}^{TZ}$  n'est pas modifiée par la transformation (4.20). Il convient alors de déterminer à quelle combinaison linéaire de  $\bar{s}^{TY}$  et  $\bar{s}^{TZ}$  les données LLR sont sensibles.

Il existe pour ça une méthode statistique appelée Décomposition en Valeur Singulière (SVD) qui permet d'inverser des matrices qui sont numériquement proches d'être singulières. De plus, la méthode SVD permet de déterminer les différentes combinaisons linéaires qui permettent de décorrélérer les paramètres. On trouvera dans Press *et al.* (1992) une présentation détaillée de la décomposition SVD. Bien qu'extrêmement robuste, cette méthode n'est pas celle suivie pour déterminer les combinaisons linéaires.

**Principe de la méthode utilisée.** La méthode que nous avons utilisée est présentée en Sec. 4.5.3 de Hees (2012) et est basée sur la comparaison des dérivées partielles relativement aux paramètres corrélés. Pour ce faire, nous avons considéré des paires de paramètres hautement corrélés et avons travaillé de manière itérative jusqu'à faire diminuer l'ensemble des corrélations. Afin d'illustrer la méthode, prenons deux paramètres  $a$  et  $b$  fortement corrélés. De part leur corrélation importante, il est sous-entendu que les données LLR ne sont pas directement sensibles à  $a$  puis à  $b$ , mais bien à une combinaison linéaire des deux que nous noterons  $c = \alpha a + \beta b$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux coefficients réels. Ainsi, si on note  $f_i$  l'observable simulée du LLR pour chaque date d'observation  $i$ , on a la dépendance  $f_i = f_i(c)$ . Alors la différentielle totale de  $f_i$  est donnée par

$$df_i = \alpha f_{i,c} da + \beta f_{i,c} db \quad \text{avec} \quad f_{i,c} = \frac{\partial f_i}{\partial c}, \quad (4.22)$$

Nous venons d'utiliser la différentielle totale de  $c$  qui est donnée par  $dc = \alpha da + \beta db$ . On déduit alors de (4.22) les deux équations suivantes

$$f_{i,a} = \alpha f_{i,c} \quad \text{et} \quad f_{i,b} = \beta f_{i,c}. \quad (4.23)$$

Ainsi, la comparaison des dérivées partielles (4.23) donne accès au ratio des deux paramètres réels, soit

$$\frac{f_{i,a}}{f_{i,b}} = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (4.24)$$

Un ajustement par la méthode des moindres carrés permet ensuite de déterminer la valeur du ratio  $\alpha/\beta$ .

**Application.** Nous présentons le cas concret des deux coefficients  $\bar{s}^{TY}$  et  $\bar{s}^{TZ}$  qui présentent une anti-corrélation de -0.99. La combinaison linéaire unissant ces deux coefficients est notée  $\bar{s}^C = \iota \bar{s}^{TY} + \zeta \bar{s}^{TZ}$ . Nous introduisons d'ores et déjà les quantités  $[\rho_c]_{i,\bar{s}^{TY}}$  et  $[\rho_c]_{i,\bar{s}^{TZ}}$  désignant respectivement les dérivées partielles de l'observable LLR donnée à l'instant  $i$  (*cf.* Eq. (3.6)), relativement aux coefficients  $\bar{s}^{TY}$  puis  $\bar{s}^{TZ}$ . En Fig. 4.1, nous avons représenté en *rouge* l'évolution du ratio des dérivées partielles pour chaque date d'observation. La moyenne (tracée en *noir*) est déterminée en ajustant un offset représentant la valeur du ratio  $\iota/\zeta$ . Après ajustement on trouve la valeur de  $\iota/\zeta = 2.731 \pm 0.009$ , soit  $\zeta/\iota = 0.366 \pm 0.001$ . En choisissant de manière purement arbitraire  $\iota = 1$ , on obtient la combinaison linéaire suivante  $\bar{s}^C = \bar{s}^{TY} + 0.37\bar{s}^{TZ}$ .

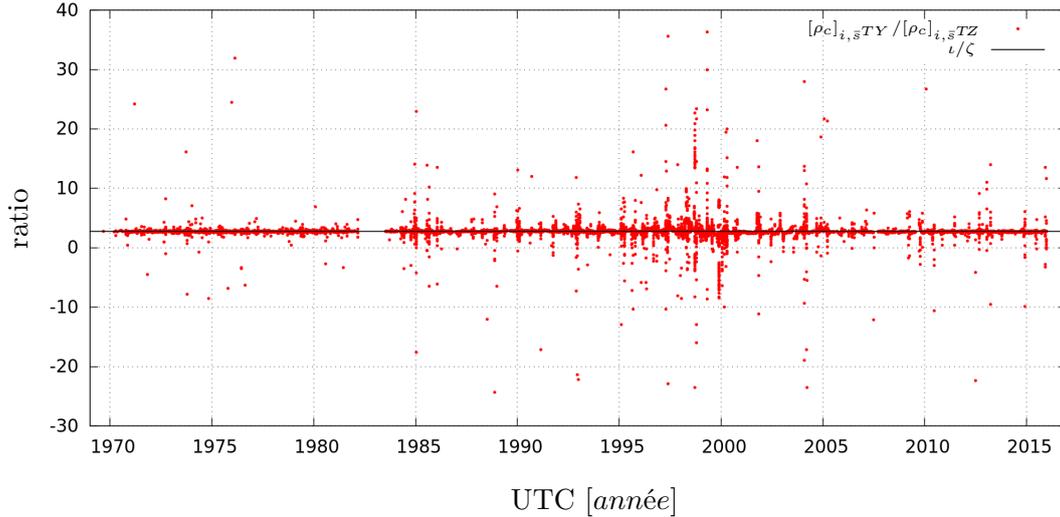


FIGURE 4.1 – Schéma représentant le principe de détermination de la valeur numérique intervenant dans la combinaison linéaire entre les coefficients SME  $\bar{s}^{TY}$  et  $\bar{s}^{TZ}$ . Chaque point *tracé en rouge* représente le ratio calculé à partir des dérivées partielles de l’observable LLR relativement à  $\bar{s}^{TY}$  puis  $\bar{s}^{TZ}$  à une date donnée. La droite *tracée en noir* représente la moyenne ajustée par la méthode des moindres carrés, soit  $\nu/\zeta = 2.731 \pm 0.009$ .

En répétant cette opération sur tous les paramètres d’intérêts fortement corrélés, on parvient à extraire les différentes combinaisons linéaires exposées en Eqs. (4.25b) et (4.25c). En résumé, on donne ci-dessous l’ensemble des combinaisons linéaires auquel les données LLR sont sensibles :

$$\bar{s}^A = \bar{s}_t^{XX} - \bar{s}_t^{YY}, \quad (4.25a)$$

$$\bar{s}^C = \bar{s}^{TY} + 0.37\bar{s}^{TZ}, \quad (4.25b)$$

$$\bar{s}^D = \bar{s}_t^{XX} + \bar{s}_t^{YY} - 2\bar{s}_t^{ZZ} - 1.89\bar{s}_t^{YZ}. \quad (4.25c)$$

Notons alors que 4 coefficients SME ( $\bar{s}^{TT}$ ,  $\bar{s}^{TX}$ ,  $\bar{s}_t^{XY}$  et  $\bar{s}_t^{XZ}$ ) peuvent ainsi être estimés directement sans faire intervenir de combinaisons linéaires. Nous présentons en Tab. 4.3 les valeurs des corrélations entre coefficients SME et combinaisons linéaires ; il est clairement visible que toutes les corrélations importantes ont été effacées.

Notons également que les combinaisons linéaires (4.25) sont différentes de celles dérivées analytiquement par Bailey et Kostelecký (2006) et évaluées en Eqs. (111) et (112). Cependant, Bailey et Kostelecký ont utilisé une valeur numérique erronée de la longitude moyenne du nœud de l’orbite lunaire sur l’équateur terrestre. En effet, la longitude  $\Omega$  n’est pas égale à  $125^\circ$  comme les auteurs l’ont supposé, mais oscille autour de  $0^\circ$  avec une amplitude de  $\pm 13^\circ$  en raison des perturbations newtoniennes (*cf.* discussion en début de Sec. C.3). Hees *et al.* (2015) ont ainsi repris les expressions littérales des combinaisons linéaires dérivées en Eqs. (107) et (108) de Bailey et Kostelecký (2006) afin de recalculer les coefficients numériques. Les sensibilités théoriques ainsi corrigées sont présentées en Eqs. (16) de Hees *et al.* (2015). Notons alors qu’elles sont différentes des combinaisons linéaires estimées numériquement en Eqs. (4.25). Ainsi, seule la combinaison (16c) de Hees *et al.* (2015) est identique à l’Eq. (4.25b) et les deux études s’accordent également sur la possibilité d’estimer directement  $\bar{s}^{TX}$  via les données LLR. Cependant, d’après Bailey et Kostelecký (2006) et Hees *et al.* (2015), les données LLR ne sont directement sensibles qu’au seul coefficient  $\bar{s}^{TX}$  et à cinq autres combinaisons linéaires là où la présente étude montre que quatre coefficients sont mesurables ainsi que trois combinaisons linéaires.

	$\bar{s}^{TT}$	$\bar{s}^{TX}$	$\bar{s}_t^{XY}$	$\bar{s}_t^{XZ}$	$\bar{s}^A$	$\bar{s}^C$	$\bar{s}^D$
$\bar{s}^{TT}$	<b>1.00</b>	-0.07	0.00	-0.04	0.00	0.03	-0.02
$\bar{s}^{TX}$	-0.07	<b>1.00</b>	0.04	0.09	-0.01	-0.04	0.04
$\bar{s}_t^{XY}$	0.00	0.04	<b>1.00</b>	0.28	-0.02	0.03	-0.08
$\bar{s}_t^{XZ}$	-0.04	0.09	0.28	<b>1.00</b>	-0.07	-0.05	-0.12
$\bar{s}^A$	0.00	-0.01	-0.02	-0.07	<b>1.00</b>	0.04	-0.31
$\bar{s}^C$	0.03	-0.04	0.03	-0.05	0.04	<b>1.00</b>	0.00
$\bar{s}^D$	-0.02	0.04	-0.08	-0.12	-0.31	0.00	<b>1.00</b>

TABLE 4.3 – Table des corrélations entre combinaisons linéaires et coefficients du SME minimal. Les valeurs absolues des corrélations supérieures à 0.50 sont surlignées. Les valeurs sont obtenues lors de l’ajustement par moindres carrés à partir de l’Eq. (3.17).

Tout d’abord, la différence sur le nombre d’estimations permises dans le cadre du SME minimal via les données LLR vient de l’effet gravitationnel sur la déflexion des rayons lumineux. Cet effet n’est pas considéré dans le cadre de l’étude théorique menée par Bailey et Kostelecký (2006), par conséquent le coefficient  $\bar{s}^{TT}$  apparaissant dans la partie orbitale a été absorbé dans la redéfinition de  $\mathcal{G}$  et a ainsi été négligé. Dans le paragraphe suivant, nous traitons plus en détail la possible estimation de  $\bar{s}^{TT}$  via les données LLR.

Ensuite, la différence sur le nombre d’estimations directes des coefficients provient des hypothèses utilisées pour réaliser l’étude analytique. Afin de simplifier la résolution de l’effet engendré sur la distance Terre-Lune par d’hypothétiques violations de l’invariance de Lorentz, Bailey et Kostelecký n’ont considéré que les courtes périodes du problème lunaire en négligeant les périodes supérieures à l’année (*e.g.* l’effet de précession du nœud de l’orbite lunaire sur l’écliptique qui s’effectue en 18.6 ans.). Cette hypothèse simplificatrice rigidifie grandement l’orbite lunaire en négligeant *e.g.* les oscillations de  $\Omega$  en 18.6 ans de  $\pm 13^\circ$ . Or compte-tenu des 45 années d’observations LLR, ces oscillations à grandes périodes permettent précisément de décorréler les coefficients SME entre eux et d’éviter ainsi de devoir faire appel aux combinaisons linéaires. En intégrant numériquement les équations du mouvement, les courtes et longues périodes sont prises en compte, ce qui explique que seules trois combinaisons soient nécessaires contre cinq dans le cas de l’étude analytique.

### Estimation peu compétitive

De part l’inclusion de l’effet de violation à l’invariance de Lorentz sur la propagation des rayons lumineux, les données LLR sont théoriquement sensibles au paramètre  $\bar{s}^{TT}$ . Compte-tenu de la précision courante des observations LLR ( $\delta\rho_o \approx 1\text{ mm}$ ), il est possible d’estimer l’ordre de grandeur de la précision atteignable pour  $\bar{s}^{TT}$  via la modélisation de l’Eq. (4.17). Ainsi, en ne considérant que l’effet dominant du Soleil sur la courbure des rayons lumineux et en évaluant les quantités  $d$ ,  $r_{bO}$  et  $r_{bR}$  à l’ordre 0 pour  $b = S$  avec  $S$  désignant le Soleil, on trouve  $\delta\bar{s}^{TT} \approx 10^{-4}$ , soit  $|\bar{s}^{TT}| < 10^{-4}$ .

Cette borne supérieure théorique est à comparer aux contraintes actuelles résumées en Tab. 4.4. Ainsi, en 2013, l’analyse des données LLR aurait fourni une contrainte du même ordre de grandeur que l’estimation dérivée à partir des données de Gravity Probe B. En revanche, après 2014 les contraintes LLR sont laissées quelques deux ordres de grandeurs loin derrière les estimations et contraintes obtenues par l’analyse des données de pulsars binaires ainsi que les données VLBI.

$ \bar{s}^{TT} $	Expérience	Référence
$< 10^{-4}$	LLR	–
$< 3,8 \times 10^{-3}$	Gravity Probe B	Bailey <i>et al.</i> (2013)
$< 1,6 \times 10^{-5}$	pulsars binaires	Shao (2014a)
$ (-5 \pm 8) \times 10^{-5} $	VLBI	Le Poncin-Lafitte <i>et al.</i> (2016)

TABLE 4.4 – Table des estimations et contraintes sur le coefficients  $\bar{s}^{TT}$  déterminées par diverses techniques observationnelles. Pour le LLR, l'estimation est déduite de manière théorique pour une précision observationnelle de l'ordre du millimètre. Les résultats issus de l'analyse de Gravity Probe B et des pulsars binaires ne sont pas des contraintes à proprement parler mais plutôt des estimations dans la mesure où les auteurs ont effectué des analyses postfit. En revanche, le résultat obtenu par analyse des données VLBI constitue une véritable contrainte puisque effectué dans le cadre d'une analyse globale considérant les corrélations entre tous les paramètres du modèle.

Par conséquent, dans la suite, nous n'ajusterons pas le coefficient  $\bar{s}^{TT}$ , ce qui restreint désormais notre analyse à la détermination des contraintes sur trois coefficients ( $\bar{s}^{TX}$ ,  $\bar{s}_t^{XY}$  et  $\bar{s}_t^{XZ}$ ) et trois combinaisons linéaires ( $\bar{s}^A$ ,  $\bar{s}^C$  et  $\bar{s}^D$ ).

#### 4.4.2 Sous-estimation des erreurs formelles

Connaissant désormais les paramètres d'intérêts à estimer, il est primordial de s'intéresser ensuite aux erreurs formelles associées. En effet, rappelons que l'objectif est d'être en mesure de poser des contraintes réalistes sur ces coefficients d'intérêts. Pour ce faire, il est au préalable nécessaire de localiser et de mettre en évidence les erreurs statistiques et systématiques éventuellement négligées dans la modélisation. Nous avons ainsi réalisé différents tests permettant d'observer les sensibilités des erreurs formelles des paramètres d'intérêts, à la période d'ajustement, au nombre de paramètres globaux ajustés, et aux jeux de données sélectionnés.

##### Sensibilité à la période d'ajustement

Nous avons représenté en Fig. 4.2 l'évolution des estimations et des erreurs formelles associées aux coefficients SME en fonction du nombre de données considéré pour l'ajustement. Ainsi, nous avons tout d'abord ajusté les paramètres d'intérêts en ne considérant que les 15 premières années d'observations du LLR. L'idée est ensuite de recommencer les ajustements en ajoutant successivement cinq années de données supplémentaires afin d'observer l'évolution des erreurs formelles de chacun des coefficients.

De la Fig. 4.2, on constate premièrement que les erreurs formelles diminuent avec l'accumulation de données ce qui est en accord avec la loi de propagation des erreurs en  $N^{-1/2}$  avec  $N$  le nombre de données. Deuxièmement, on remarque que pour chaque coefficient SME il n'existe pas de zone de recouvrement commune aux erreurs formelles déterminées pour des plages d'ajustement différentes. Ainsi, pour quasiment tous les coefficients SME (à l'exception de  $\bar{s}^C$ ), l'intervalle de l'erreur formelle calculée à partir des données de 1969 à 1985, ne recouvre pas l'intervalle de l'erreur formelle calculée à partir des données de 1969 à 2015. Or les coefficients SME sont des quantités universelles indépendantes de la plage temporelle sélectionnée pour l'ajustement aux données. Par conséquent, ce dernier point montre que les erreurs formelles telles qu'elles sont calculées par la méthode des moindres carrés sont sous-estimées.

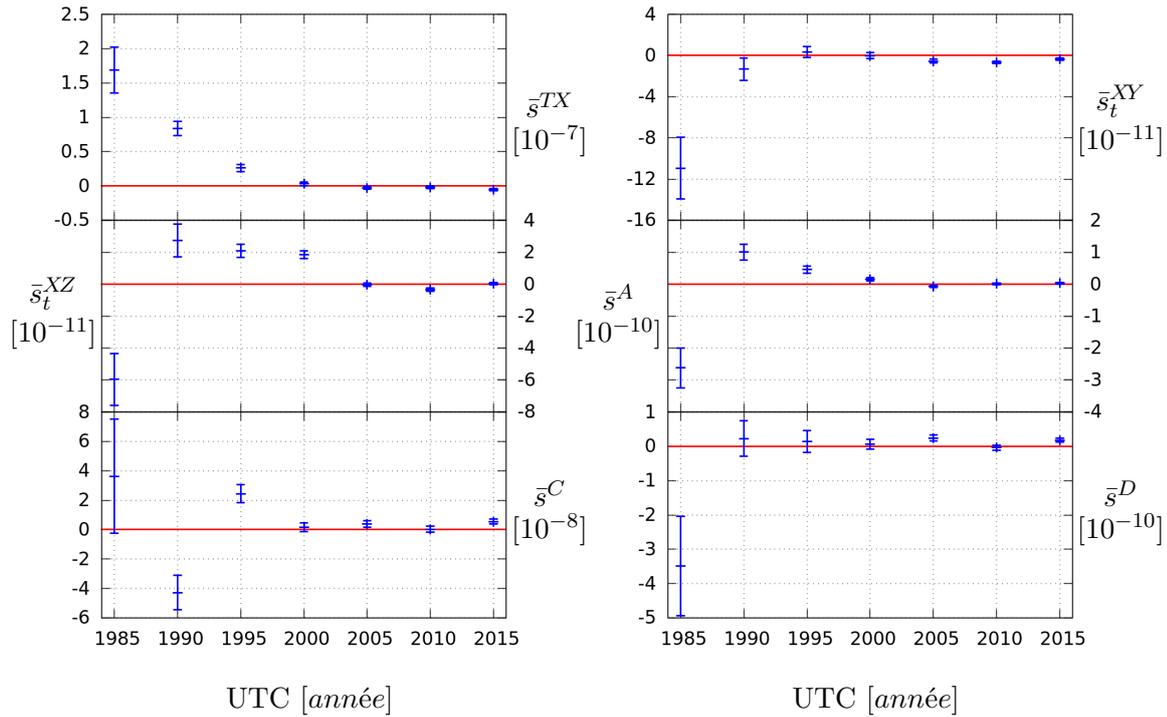


FIGURE 4.2 – Graphique représentant l'évolution des erreurs formelles (*tracée en bleu*) en fonction du nombre de données considérées pour l'ajustement. L'axe des abscisses donne la période d'ajustement (depuis 1969). Les barres d'erreurs sont données pour un intervalle de confiance à 68%. Les courbes *tracées en rouge* représentent les valeurs théoriques des coefficients SME dans le cadre de la relativité générale.

### Sensibilité aux nombres de paramètres ajustés

En Fig. 4.3 est représentée l'évolution des erreurs formelles des paramètres d'intérêts en fonction du nombre de paramètres ajustés. Nous avons tout d'abord ajusté les seuls coefficients SME sans aucun autre paramètre. Puis, un à un, 46 paramètres ont été ajoutés, en plus des paramètres d'intérêts en opérant systématiquement un ajustement.

De la Fig 4.3, on remarque tout d'abord l'augmentation des erreurs formelles avec l'accroissement du nombre de paramètres ajustés. Ceci est tout à fait prévisible dans la mesure où des corrélations entre paramètres d'intérêts et paramètres globaux sont introduites. Deuxièmement, on constate qu'il n'existe pas de zone de recouvrement entre les erreurs formelles d'un même coefficient SME. Par exemple, l'intervalle de l'erreur formelle déterminé en ajustant que les coefficients SME (Nb. paramètres nul de la Fig 4.3) ne possède pas de zone commune avec l'intervalle de l'erreur formelle déterminé en ajustant tous les paramètres (46 paramètres) en plus des coefficients SME. Or comme mentionné précédemment, les coefficients SME sont des quantités universelles qui doivent être indépendantes du nombre de paramètres sélectionnés pour l'ajustement aux données. Par conséquent, ce dernier point vient confirmer le constat du paragraphe précédent, à savoir que les erreurs formelles telles qu'elles sont calculées par la méthode des moindres carrés sont sous-estimées par la présence de biais observationnels ou instrumentaux non modélisés dans le traitement statistique des données.

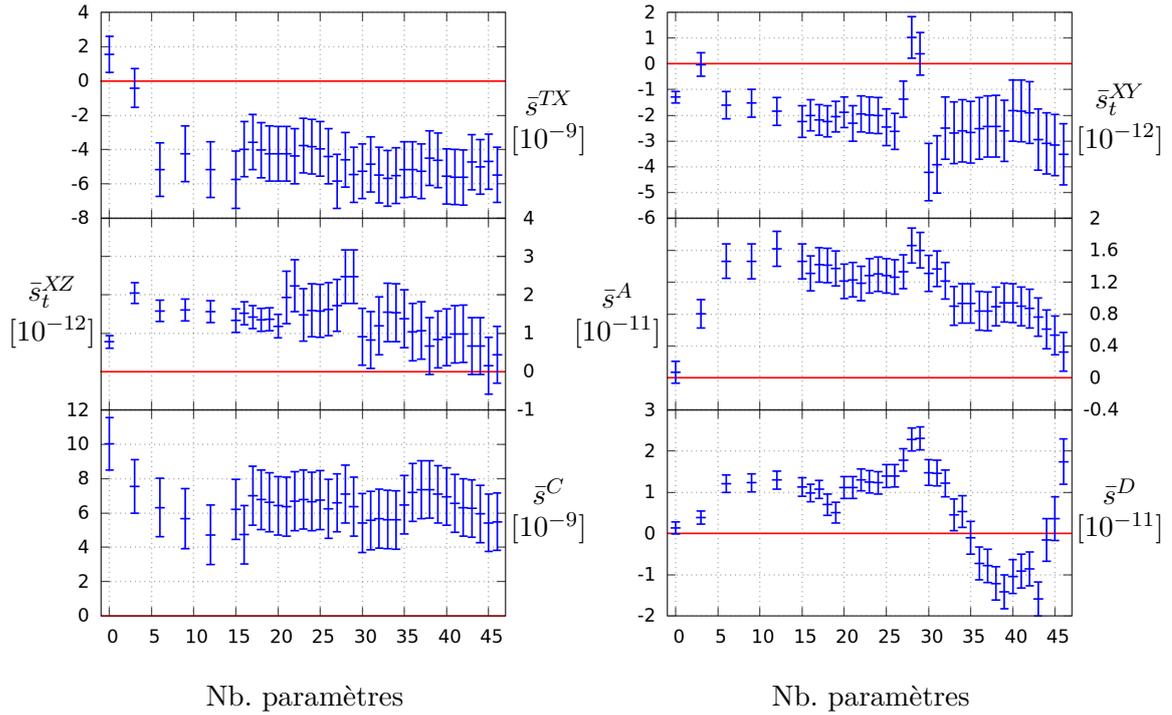


FIGURE 4.3 – Graphique représentant l'évolution des erreurs formelles (*tracée en bleu*) en fonction du nombre de paramètres ajustés. L'axe des abscisses précise le nombre de paramètres ajustés en plus des coefficients SME. Les barres d'erreurs sont données pour un intervalle de confiance à 68%. Les courbes *tracées en rouge* représentent les valeurs théoriques des coefficients SME dans le cadre de la relativité générale.

### Sensibilité aux couples stations-instruments

Afin d'évaluer la sensibilité des erreurs formelles aux données des stations LLR, nous avons réalisé des sous-ensembles de données (numérotés de 1 à 16 en Tab. 4.5). Chaque sous-ensemble est construit en supprimant toutes les observations acquises par un couple station-instrument sur une période donnée. À titre illustratif, le sous-ensemble n°11 (*cf.* Tab. 4.5) comprend toutes les données LLR excepté 3479 d'entre elles acquises entre les années 1995 et 2001 par l'instrument Yag de la station Grasse. Nous avons ainsi déterminé les erreurs formelles des coefficients SME à partir de ces 16 sous-ensembles de données. Les résultats sont reportés en Fig. 4.4.

On constate que la suppression de certains jeux de données peut fortement influencer la détermination des paramètres SME. Ainsi, la suppression des données de Grasse entre 1987 et 1991 (indice n°9) change légèrement l'estimation de  $\bar{s}^{TX}$ . De la même manière, la suppression des données de Grasse entre 2001 et 2006 (indice n°12) change les estimations de  $\bar{s}_t^{XY}$  et  $\bar{s}^A$ . Dès lors, on conclut *e.g.* que la détermination de  $\bar{s}_t^{XY}$  est totalement dominée par les données de Grasse entre 2001 et 2006 puisque la suppression des autres jeux de données a un effet très limité sur la détermination finale. On notera de même, que la détermination finale de  $\bar{s}^C$  est fortement influencée par les données de Grasse entre 1995 à 2001 (indice n°11).

Un autre point important qui est étroitement lié à la domination de certains couples stations-instruments dans la détermination des paramètres, concerne le non-recouvrement entre erreurs formelles. Comme nous l'avons déjà mentionné, les coefficients SME sont des

Indice ( $l$ )	$N_{\{l\}}$	Station	Instrument	Période
0	-	-	-	-
1	1590	McDonald	2.7m	1969-1975
2	1739	McDonald	2.7m	1975-1983
3	187	McDonald	2.7m	1983-1987
4	573	McDonald	MLRS1	1983-1989
5	469	McDonald	MLRS2	1988-1994
6	2048	McDonald	MLRS2	1994-2000
7	767	McDonald	MLRS2	2000-2015
8	1182	Grasse	Rubis	1984-1987
9	1494	Grasse	Yag	1987-1991
10	1942	Grasse	Yag	1991-1995
11	3479	Grasse	Yag	1995-2001
12	1398	Grasse	Yag	2001-2006
13	1661	Grasse	MeO	2009-2015
14	757	Haleakala	-	1984-1991
15	2378	Apache-point	-	2006-2015
16	107	Matera	-	2003-2015

TABLE 4.5 – Table de définitions des sous-ensembles de données. Chaque indice désigne un sous-ensemble comprenant toutes les données LLR excepté celles acquises par la station associée à l'indice pendant la période correspondante. Le nombre de données ainsi concernées est noté  $N_{\{l\}}$ . Le sous-ensemble n°0 contient toutes les données LLR disponibles. Les indices sont utilisés en Fig. 4.4 pour désigner les sous-ensembles de données.

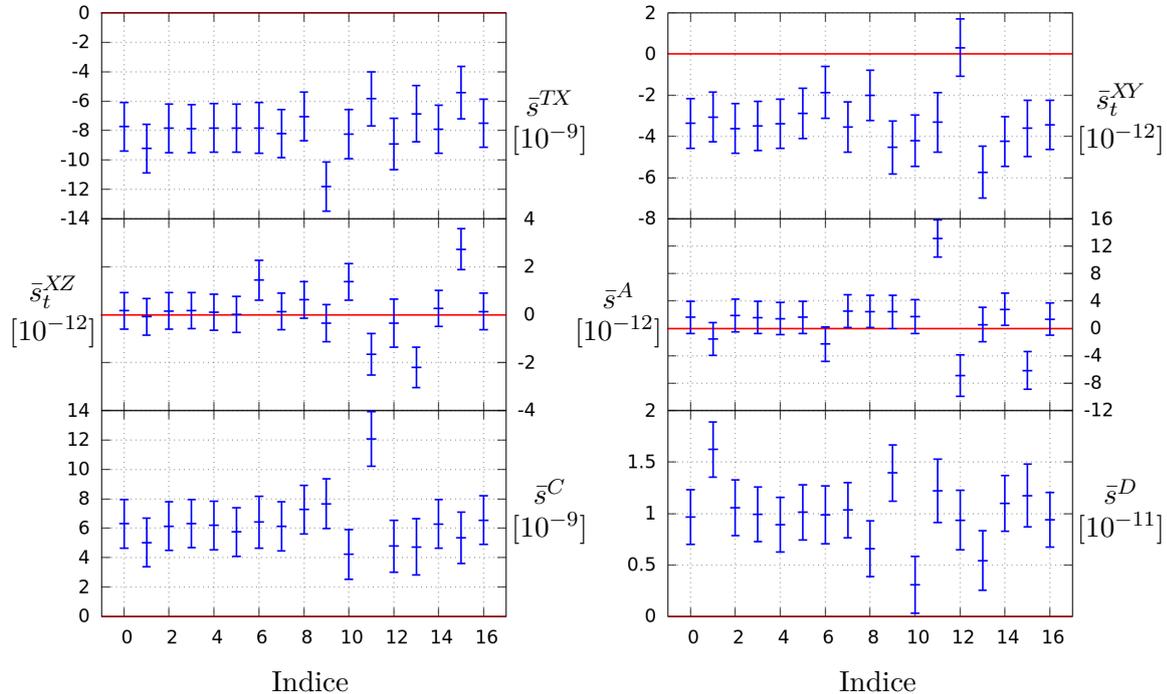


FIGURE 4.4 – Graphique représentant l'évolution des erreurs formelles (*tracée en bleu*) en fonction des sous-ensembles de données LLR. L'axe des abscisses précise le sous-ensemble utilisé pour réaliser l'ajustement et reprend la nomenclature introduite en Tab. 4.5. Les barres d'erreurs sont données pour un intervalle de confiance à 68%. Les courbes *tracées en rouge* représentent les valeurs théoriques des coefficients SME dans le cadre de la relativité générale.

quantités universelles, par conséquent, les différentes déterminations effectuées à partir des sous-ensembles de données devraient présenter une région commune à toutes les erreurs formelles. De la Fig. 4.4, il apparaît très clairement que ce n'est le cas pour aucun des paramètres SME. Ce dernier point est un fort indicateur quant à la présence d'erreurs systématiques non-modélisées qui seraient introduites via les différents couples de stations-instruments utilisés.

### Sensibilité aux réflecteurs

De manière identique à ce que nous venons de faire avec les stations LLR, on s'intéresse ici aux sensibilités des erreurs formelles des coefficients SME aux réflecteurs lunaires. Pour ce faire, nous avons généré des sous-ensembles de données en supprimant toutes les observations dont les tirs ont été réfléchis par un des cinq réflecteurs. À partir de ces cinq sous-ensembles de données nous avons pu déterminer l'évolution des erreurs formelles. Les résultats sont présentés en Fig. 4.5.

Tout d'abord, notons l'augmentation des amplitudes des erreurs formelles avec la suppression de données. L'illustration est donnée quelque soit le coefficient concerné par la suppression des données du réflecteur Apollo XV regroupant  $\sim 74\%$  du nombre total de données considérées.

On constate également que les estimations des coefficients SME peuvent être différentes en fonction du jeu de données supprimé. Ainsi, la suppression des observations dont les tirs ont été réfléchis par Apollo XI influence légèrement la détermination de  $\bar{s}_i^{XZ}$  et  $\bar{s}^A$ . De même, lorsque les observations dont les tirs ont été réfléchis par Apollo XV sont supprimées, les estimations de tous les coefficients changent, excepté celles de  $\bar{s}^C$ . Ainsi, la détermination de tous les coefficients, mis à part  $\bar{s}^C$ , est largement dominée par les observations utilisant Apollo XV. Par conséquent, de part l'universalité des coefficients SME, nous sommes une fois de plus en présence d'une forte indication de la présence d'erreurs systématiques non-modélisées et principalement liées au réflecteur Apollo XV.

#### 4.4.3 Estimation des incertitudes systématiques

Sachant désormais qu'il existe des erreurs systématiques provenant des stations LLR et réflecteurs, il est ensuite impératif de les quantifier pour fournir des contraintes réalistes sur les coefficients SME. Ainsi, nous avons opté pour une méthode de ré-échantillonnage de type *jackknife*<sup>3</sup> (Lupton, 1993; Gottlieb, 2003). La méthode jackknife permet d'estimer les incertitudes systématiques simplement par l'analyse de sous-ensembles de données.

**Principe de la méthode.** Appelons  $\mathcal{D}$  l'ensemble des données disponibles et considérons que  $\mathcal{D}$  est constitué de sous-ensembles  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ . Supposons que l'on souhaite estimer un paramètre d'intérêt  $\theta$  au moyen de  $\mathcal{D}$ . On construit pour ça un estimateur de  $\theta$  que l'on note  $\phi_n(\mathcal{D}) \equiv \phi_n(\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n)$ . La méthode de ré-échantillonnage jackknife vise alors à déterminer un intervalle de confiance pour l'estimation de  $\theta$ , en se basant uniquement sur l'étude des sous-ensembles  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ .

Pour ce faire, on construit  $n$  estimations de  $\theta$ , telles que

$$ps_i(\mathcal{D}) = \phi_n(\mathcal{D}) + (n-1) \left[ \phi_n(\mathcal{D}) - \phi_{n-1}(\mathcal{D}_{[i]}) \right], \quad (4.26)$$

3. On trouvera plusieurs applications de cette méthode de ré-échantillonnage notamment dans le contexte d'observation d'astéroïdes (Masiero *et al.*, 2009), de la cosmologie (Pope et Szapudi, 2008; Henry *et al.*, 2009), ou encore de l'étude du centre galactique (Boehle *et al.*, 2016)).

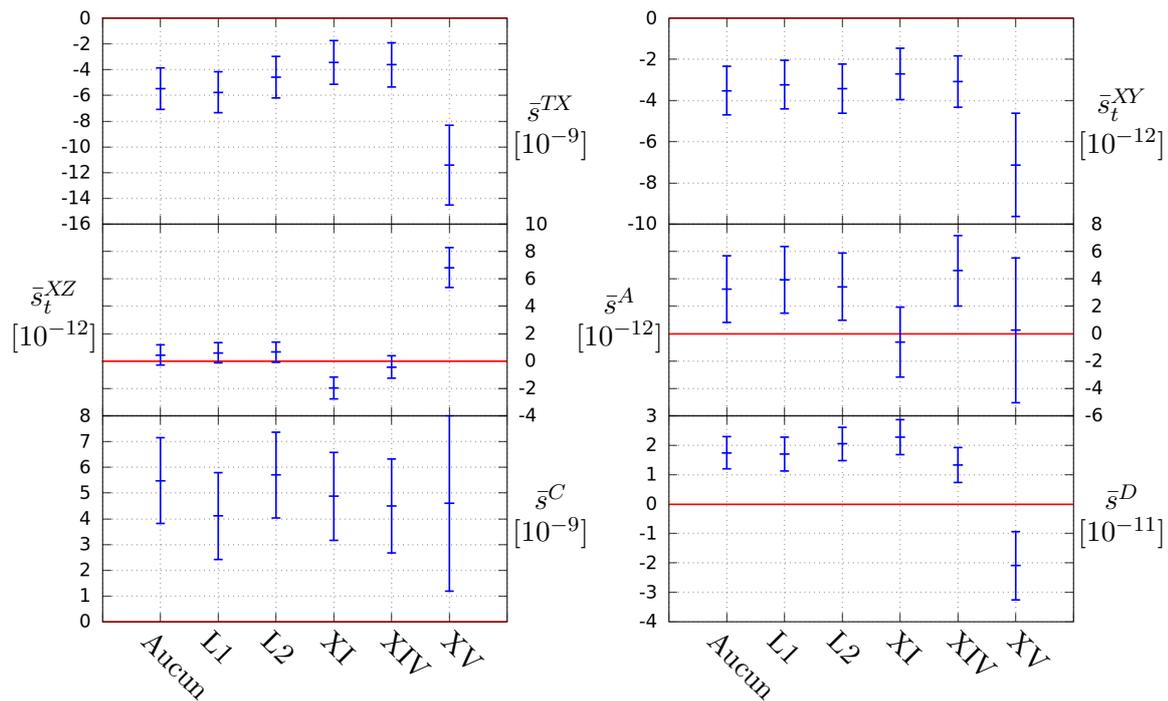


FIGURE 4.5 – Graphique représentant l'évolution des erreurs formelles (*tracée en bleu*) en fonction des réflecteurs. L'axe des abscisses précise quel jeu de données a été supprimé pour réaliser l'ajustement. L1 et L2 font référence aux réflecteurs Lunokhod 1 et 2 puis XI, XIV et XIV aux réflecteurs Apollo 11, 14 et 15. Les barres d'erreurs sont données pour un intervalle de confiance à 68%. Les courbes *tracées en rouge* représentent les valeurs théoriques des coefficients SME dans le cadre de la relativité générale.

où  $ps_i(\mathcal{D})$  est la  $i$ ème *pseudo-valeur* de  $\phi_n(\mathcal{D})$  pour  $i = 1, \dots, n$ . L'ensemble  $\mathcal{D}_{[i]}$  désigne l'ensemble  $\mathcal{D}$  privé du sous-ensemble  $\mathcal{D}_i$ , ainsi  $\mathcal{D}_{[i]}$  est un ensemble de taille  $n - 1$ .

Chacune des pseudo-valeurs  $ps_i(\mathcal{D})$  est ensuite traitée comme étant une variable indépendante et aléatoire de moyenne  $\theta$ . On calcule ensuite la moyenne et la variance des pseudo-valeurs à l'aide du théorème de la centrale limite

$$ps(\mathcal{D}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ps_i(\mathcal{D}) \quad \text{et} \quad V_{ps}(\mathcal{D}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [ps_i(\mathcal{D}) - ps(\mathcal{D})]^2. \quad (4.27)$$

Ainsi, l'intervalle de confiance à 68% pour  $ps(\mathcal{D})$  est alors donné par  $\sigma(\mathcal{D}) = \pm \sqrt{\frac{1}{n} V_{ps}(\mathcal{D})}$ .

**Application.** Dans notre cas, les paramètres d'intérêts dont les erreurs doivent être estimées sont les coefficients SME, et la méthode de minimisation du  $\chi^2$  constitue l'estimateur de nos paramètres. Compte-tenu de la présence de biais introduits par les stations et réflecteurs, la méthode jackknife précédemment présentée a été appliquée de manière successive à deux sous-ensembles différents de données. L'un est partitionné par stations-instruments et l'autre par réflecteurs. Ainsi, en appliquant successivement les Eqs. (4.26) et (4.27) aux deux sous-ensembles de données, on parvient à estimer deux intervalles de confiance réalistes  $\sigma_{\text{sta}} \equiv \sigma(\mathcal{D}_{\text{sta}})$  et  $\sigma_{\text{ref}} \equiv \sigma(\mathcal{D}_{\text{ref}})$  tenant compte des biais éventuellement négligés. L'erreur réaliste finale associée à un paramètre d'intérêt et tenant compte des biais est présentée sous la forme

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_{\text{sta}}^2 + \sigma_{\text{ref}}^2}. \quad (4.28)$$

On rappelle que  $\sigma$  est l'erreur formelle déterminée par minimisation du  $\chi^2$ .

## 4.5 Présentation des résultats

Étant désormais en mesure de fournir des contraintes réalistes sur les paramètres d'intérêts, nous discutons dans cette section des résultats obtenus via les données LLR analysées dans le cadre du SME minimal. Nous revenons ainsi sur les anciennes estimations déterminées par analyses postfit et discutons des corrélations entre coefficients SME et paramètres globaux. Enfin, nous clôturons cette dernière section en présentant l'article qui a été soumis à *Physical Review Letters*<sup>4</sup>, dans le cadre de cette thèse.

### 4.5.1 Discussion des résultats

Les contraintes de la présente analyse des données LLR dans le cadre du SME minimal sont regroupées en Tab. 4.6 et comparées à des précédentes estimations basées sur des analyses postfit. Les erreurs réalistes présentées ici sont déduites de l'Eq. (4.28). Notons que les contraintes présentées en Tab. 4.6 sont légèrement différentes de celles présentées en Tab. 1 de Bourgoïn *et al.* (2016). Deux facteurs expliquent ces différences. Le premier concerne le nombre de données LLR utilisé ; dans la présente analyse nous avons considéré 21 771 points normaux s'étalant d'août 1969 à décembre 2015, contre 20 721 points normaux dans Bourgoïn *et al.* (2016) couvrant une période d'août 1969 à décembre 2013. Le deuxième concerne l'utilisation de la méthode jackknife ; dans Bourgoïn *et al.* (2016) cette dernière a été appliquée à cinq sous-ensembles de données répartis par station, alors que dans l'étude présentée ici, la méthode statistique a été appliquée à 16 sous-ensembles de données répartis par couple station-instrument (*cf.* Tab. 4.5).

4. <http://journals.aps.org/prl/>

SME	Analyse		Postfit			Globale (Travaux de thèse)
	Technique	LLR & Interf. atomique	Pulsars binaires	LLR & Éphém. planét.	LLR	
$\bar{s}^{TX}$	$[10^{-9}]$	(+50 ± 620)	(-5.2 ± 5.3)	(+4.3 ± 2.5)	(-5.5 ± 7.9)	
$\bar{s}_t^{XY}$	$[10^{-12}]$	(-600 ± 1500)	(-35 ± 36)	(+65 ± 32)	(-3.4 ± 5.7)	
$\bar{s}_t^{XZ}$	$[10^{-12}]$	(-2700 ± 1400)	(-20 ± 20)	(+20 ± 10)	(+0.2 ± 8.6)	
$\bar{s}^A$	$[10^{-12}]$	(-1200 ± 1600)	(-100 ± 100)	(+96 ± 56)	(+1.6 ± 9.3)	
$\bar{s}^C$	$[10^{-9}]$	(-100 ± 2900)	(-10 ± 9)	(-5 ± 24)	(+6.3 ± 7.3)	
$\bar{s}^D$	$[10^{-11}]$	(+200 ± 3800)	(-12 ± 12)	(+16 ± 8)	(+1.0 ± 2.3)	

TABLE 4.6 – Table comparative entre estimations (*cf.* analyses postfit) et contraintes (*cf.* analyse globale) sur les coefficients SME obtenues à partir de différentes techniques. La première colonne des analyses postfit mixe les estimations obtenues via les données LLR (Battat *et al.*, 2007) & les données de gravimètres à interférométrie atomique (Müller *et al.*, 2008; Chung *et al.*, 2009). Les estimations présentées en deuxième colonne des analyses postfit sont reprises d’analyses de données de pulsars binaires (Shao, 2014b.a). La dernière colonne des analyses postfit mixe les estimations obtenues via les données LLR (Battat *et al.*, 2007) & les données d’éphémérides planétaires sur les mouvements des planètes (Hees *et al.*, 2015). La dernière colonne présente les contraintes réelles obtenues pendant la thèse à partir des seules données LLR (Bourgoin *et al.*, 2016).

### Amélioration des contraintes

À partir de la Tab 4.6 on constate que l'amélioration des contraintes sur la détermination des coefficients du SME minimal est quasi générale. La contrainte la moins compétitive relativement aux précédentes estimations est celle dérivée sur le coefficient  $\bar{s}^{TX}$  qui reste du même ordre de grandeur que l'estimation déduite des éphémérides planétaires et pulsars binaires. Elle améliore cependant, d'un facteur 80, l'ancienne estimation dérivée d'une analyse postfit des données LLR. L'amélioration sur la combinaison  $\bar{s}^C$  impliquant les autres paramètres  $\bar{s}^{TJ}$  est double relativement à la détermination via les pulsars binaires, et trois fois meilleure que la détermination via les éphémérides planétaires. En revanche, cette nouvelle contrainte est 400 fois meilleure que la pseudo-contrainte dérivée via la première analyse postfit des données LLR effectuée par Battat *et al.* (2007). Le facteur d'amélioration atteint même 1600 lorsqu'on compare la nouvelle contrainte avec l'ancienne estimation sur la combinaison  $\bar{s}^D$ . Comparativement aux études postfit plus récentes, on améliore la contrainte sur  $\bar{s}^A$  de respectivement un et un demi ordre de grandeur relativement aux pulsars binaires et éphémérides planétaires.

La part la plus significative de l'amélioration relativement aux estimations dérivées par Battat *et al.* (2007) est principalement due au nombre de points normaux considérés ; 14 401 dans l'étude de Battat *et al.* contre 21 771 dans la présente étude. Une autre part est directement reliée à la méthode d'analyse utilisée. Dans notre étude, les violations à l'invariance de Lorentz sont considérées au travers des courtes et longues périodes du problème lunaire. Par conséquent, les  $\bar{s}^{\mu\nu}$  sont contraints non seulement à partir des effets à courtes périodes qu'ils sont supposés engendrés, mais également à partir des effets longues périodes contrairement à l'analyse postfit de Battat *et al.*.

Outre la détermination de limites plus contraignantes, mentionnons également l'amélioration liée à la méthode utilisée qui est beaucoup plus robuste qu'une analyse postfit (Le Poncin-Lafitte *et al.*, 2016).

### Corrélation avec les paramètres globaux

Un point essentiel de l'analyse globale est la détermination des corrélations entre paramètres globaux et paramètres d'intérêts, contrairement à l'analyse postfit qui n'estime que les paramètres d'intérêts.

Ainsi, l'analyse des données LLR met en évidence le fait que certains coefficients SME (notamment  $\bar{s}^D$ ) montrent de fortes corrélations avec les paramètres apparaissant dans la partie rotationnelle du mouvement lunaire *e.g.* le ratio  $C/m_L(a_e)_L^2$  (0.68), le nombre de Love  $k_2$  (0.72), le ratio du moment principal d'inertie du noyau sur le moment d'inertie total (0.51) ou encore les composantes équatoriales du vecteur instantané de rotation du noyau (0.58 et 0.53). La composante polaire du vecteur instantané de rotation du noyau étant fortement corrélée au coefficient  $\bar{s}_t^{XY}$  à hauteur de 0.81. Notons également les fortes corrélations avec les paramètres liés au potentiel terrestre *e.g.*, entre  $\bar{s}_t^{XZ}$  et les temps de déphasage rotationnels des déformations diurnes et semi-diurnes (à hauteur de respectivement 0.78 et 0.72). On note également une forte corrélation de  $\bar{s}^D$  avec le moment quadripolaire terrestre à hauteur de 0.89.

Une analyse simultanée des données LLR avec les données *gravity recovery and interior laboratory* (GRAIL) (Konopliv *et al.*, 2014; Lemoine *et al.*, 2014) pourrait permettre de

décorrélés les coefficients SME et les paramètres lunaires. De la même manière une analyse LLR et *satellite laser ranging* (SLR) permettrait de décorrélés les paramètres du potentiel terrestre avec les coefficients SME. On s'attend ainsi à ce que ces analyses simultanées améliorent les contraintes SME.

#### 4.5.2 Bourgoïn *et al.* (2016)

L'ensemble du travail exposé dans cette thèse est résumé dans l'article Bourgoïn *et al.* (2016) soumis à *Physical Review Letters*.

### Testing Lorentz symmetry with Lunar Laser Ranging

A. Bourgoïn<sup>1</sup>, A. Hees<sup>2</sup>, S. Bouquillon<sup>1</sup>, C. Le Poncin-Lafitte<sup>1</sup>, G. Francou<sup>1</sup>, and M.-C. Angonin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*SYRTE, Observatoire de Paris, PSL Research University,  
CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, LNE  
61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France*

<sup>2</sup>*Department of Physics and Astronomy, University of California,  
Los Angeles, CA 90095, USA*

(Dated : September 16, 2016)

Lorentz symmetry violations can be parametrized by an effective field theory framework that contains both general relativity and the standard model of particle physics called the standard-model extension (SME). We present new constraints on pure gravity SME coefficients obtained by analyzing lunar laser ranging (LLR) observations. We use a new numerical lunar ephemeris computed in the SME framework and we perform a LLR data analysis using a set of 20721 normal points covering the period of August, 1969 to December, 2013. We emphasize that linear combination of SME coefficients to which LLR data are sensitive and not the same as those fitted in previous postfit residuals analysis using LLR observations and based on theoretical grounds. We found no evidence for Lorentz violation at the level of  $10^{-8}$  for  $\bar{s}^{TX}$ ,  $10^{-12}$  for  $\bar{s}^{XY}$  and  $\bar{s}^{XZ}$ ,  $10^{-11}$  for  $\bar{s}^{XX} - \bar{s}^{YY}$  and  $\bar{s}^{XX} + \bar{s}^{YY} - 2\bar{s}^{ZZ} - 4.5\bar{s}^{YZ}$  and  $10^{-9}$  for  $\bar{s}^{TY} + 0.43\bar{s}^{TZ}$ . We improve previous constraints on SME coefficient by a factor up to 5 and 800 compared to postfit residuals analysis of respectively binary pulsars and LLR observations.

## 4.6 Résumé

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au traitement des données LLR dans le cadre du formalisme SME. Même si l'analyse a été effectuée dans le secteur purement gravitationnel nous avons néanmoins présenté les équations à intégrer afin d'ajouter le secteur matière du SME. Nous avons intégré numériquement les perturbations sur le vecteur Terre-Lune liées à des violations au principe d'invariance de Lorentz dans le secteur purement gravitationnel. Nous avons également pris en compte l'effet de ces violations sur la trajectoire des rayons lumineux. Par analyse des dérivées partielles nous avons isolé les différentes combinaisons linéaires auxquelles les données LLR sont sensibles. Nous avons montré que trois paramètres SME ( $\bar{s}^{TX}$ ,  $\bar{s}_t^{XY}$ , et  $\bar{s}_t^{XZ}$ ) peuvent être directement ajustés. Ensuite, afin de fournir des contraintes réelles sur les coefficients SME nous avons présenté une méthode statistique de ré-échantillonnage (méthode jackknife) permettant de quantifier les biais éventuellement négligés dans la modélisation. Nous avons ainsi fourni les premières contraintes dérivées d'une analyse globale utilisant les données LLR, là où les précédentes études postfit ne donnaient accès qu'à des pseudo-contraintes. Ainsi, en plus d'améliorer la robustesse de part la méthode d'analyse utilisée, nous avons également amélioré les limites expérimentales sur la détermination des coefficients SME liés à

---

d'hypothétiques violations à l'invariance locale de Lorentz intervenant sur l'orbite lunaire. Pour finir, nous avons montré que les coefficients SME sont corrélés avec des paramètres globaux liés *e.g.* au mouvement de rotation de la Lune ou encore au potentiel terrestre.



# Conclusion

Nous commençons par passer en revue le travail développé tout au long de la thèse en énumérant les problèmes rencontrés et les éventuelles approximations faites. Nous discutons la validité des résultats obtenus que nous comparons aux précédents travaux. Dans un deuxième temps, nous présentons quelques possibles améliorations futures à opérer à la fois au programme d'intégration numérique et au programme de réduction de données. Enfin, nous évoquons les futures possibilités permises grâce à l'outil générique développé durant cette thèse.

## Résumé du travail réalisé

L'objectif de la thèse était de traiter les données LLR dans le cadre d'une théorie alternative à la relativité générale. La théorie sélectionnée est le formalisme SME paramétrant toutes violations possibles à la symétrie de Lorentz dans tous les domaines de la Physique. Le choix de se tourner vers ce formalisme s'est fait d'une part compte tenu des motivations théoriques qui ont conduit à sa formulation, et d'autre part en considérant sa nature fondamentalement différente des formalismes standards avec lesquels il n'existe quasiment aucun recouvrement.

Afin de réduire les données LLR, nous avons créé une nouvelle éphéméride lunaire, ELPN implémentée dans le cadre du formalisme SME. Dans le Chap. 2, nous avons présenté le modèle dynamique de l'éphéméride ainsi que quelques unes des dérivées partielles intégrées depuis l'équation aux variations. Les équations régissant la dynamique orbitale des corps et la dynamique rotationnelle de la Lune ont été reprises principalement de Manche (2011) et de Folkner *et al.* (2014). Nous avons ainsi modélisé les interactions ponctuelles relativistes entre le Soleil, les planètes, la Lune et Pluton (pour les 70 astéroïdes les plus massifs de la ceinture principale seules les interactions newtoniennes sont modélisées), les interactions dues à la non-sphéricité de la Terre, de la Lune et du Soleil, les effets de marées solides sur la Terre et la Lune puis les librations du manteau lunaire via l'introduction du noyau fluide de la Lune.

À partir des solutions intégrées numériquement, nous avons exposé dans le Chap. 3 l'approche suivie en thèse afin d'ajuster les données LLR dans le cadre de la relativité générale. En suivant cette méthodologie, nous avons construit une éphéméride lunaire totalement indépendante et découplée des éphémérides INPOP ou DE. Les conditions de cette dernière ont été reprises pour réaliser le premier ajustement aux données. Les prédictions de cette toute nouvelle éphéméride lunaire (que nous avons appelé ELPN\_D1 dans le Chap. 3) ont été comparées à celles d'INPOP13c et de DE430. Ces comparaisons ont montrées qu'ELPN était alors plus proche de DE430 que d'INPOP13c, en raison principalement de l'inclusion dans la modélisation du noyau lunaire qui n'est pas modélisé dans INPOP13c. D'autres raisons peuvent être évoquées *e.g.*, le fait qu'INPOP13c inclut un anneau d'astéroïdes qui n'est modélisé ni dans ELPN ni dans DE430, ou encore le

fait que les masses, positions et vitesses initiales des planètes dans ELPN soient reprises de DE430 sans être ajustées. Les *r.m.s* sur les résidus ont également été comparés afin de s'assurer de la validité de l'éphéméride implémentée. La comparaison a révélé que les résidus des observations LLR calculés avec ELPN sont totalement compétitifs avec ceux de DE430 et d'INPOP13c.

Étant donné les résidus compétitifs obtenus dans le cadre de la relativité générale, nous nous sommes intéressés à prolonger cette analyse de données dans le cadre du formalisme SME. Ce travail a fait l'objet du Chap. 4. Ainsi, dans un premier temps, nous avons exposé les corrections introduites dans le modèle dynamique ainsi que dans le modèle de traitement des observations LLR. Les corrections ainsi implémentées proviennent de deux facettes du SME, le minimal correspondant au secteur purement gravitationnel et le secteur matière. Nous avons ensuite déterminé par l'étude des dérivées partielles les combinaisons linéaires de coefficients SME auxquelles le LLR est sensible. Finalement après l'ajustement de ces combinaisons linéaires nous nous sommes intéressés à la détermination d'erreurs réalistes. Pour ce faire, nous avons dans un premier temps isolé les sources de systématiques négligées dans la modélisation et avons montré qu'elles pouvaient être reliées aux différents instruments utilisés au niveau des stations LLR, ainsi qu'aux cinq réflecteurs lunaires. Dans un deuxième temps, nous avons quantifié ces erreurs systématiques à l'aide de la méthode de ré-échantillonnage jackknife. Nous avons finalement distribué les erreurs finales en prenant en compte les biais systématiques liés aux stations LLR et rétro-réflecteurs lunaires. Les contraintes ainsi dérivées ont été comparées aux meilleures estimations en vigueur. Il s'est avéré que conjointement à l'amélioration de la robustesse de la méthode utilisée, la détermination des erreurs est également plus contraignante et pose désormais des limites expérimentales de  $10^{-9}$  à  $10^{-12}$  sur les coefficients SME, représentant par ailleurs des améliorations jusqu'à 1600 fois plus contraignantes que les pseudo-contraintes dérivées par Battat *et al.* (2007). Ainsi, aucune violation à la relativité générale n'a été observée sur l'orbite lunaire à partir des données de télémétrie laser Lune.

## Perspectives

Nous avons montré (*cf.* discussion en Sec. 4.5.1) que les coefficients SME sont corrélés avec certains paramètres apparaissant dans la description du mouvement de rotation de la Lune. Ces corrélations pourraient probablement être abaissées via une analyse simultanée des données LLR avec les données GRACE. L'abaissement des corrélations pourrait alors diminuer les erreurs formelles des coefficients SME. De la même manière on enregistre des corrélations avec le  $J_2$  terrestre qui pourraient elles aussi être diminuées via l'analyse simultanée des données LLR et SLR. Ces analyses couplées pourraient également permettre d'améliorer d'autres contraintes de physique fondamentale telle que l'effet Lense-Thirring qui s'avère lui aussi fortement corrélé au  $J_2$  terrestre (Ciufolini *et al.*, 2016).

Concernant le secteur purement gravitationnel du SME, une future analyse des données LLR devrait être effectuée en considérant les perturbations de troisième corps. En effet, dans l'étude présentée ici seules la Terre et la Lune subissent les effets d'une violation à la symétrie de Lorentz et l'effet relatif est ainsi recherché dans l'oscillation de la distance Terre-Lune. Cependant, au niveau newtonien la perturbation solaire est la première en amplitude à générer une déviation au mouvement képlérien de l'ordre de 1% de la distance Terre-Lune (*cf.* Sec. B.3). On s'attend par conséquent, à ce que l'effet d'une violation à la symétrie de Lorentz introduit sur le système Terre-Lune par la présence solaire soit entre un et deux ordres de grandeurs plus faible que celui généré par la Terre et la Lune (*cf.* Eq. (4.7)). En considérant les 45 années d'observations, il est fortement probable que les

données LLR soient sensibles à cette hypothétique violation introduite par le Soleil. Si tel est le cas on s'attend à ce que les combinaisons linéaires des coefficients SME soient légèrement changées et les erreurs formelles améliorées.

Dans un futur proche, l'étude présentée ici sera étendue au secteur matière du SME. Comme nous l'avons montré au Chap. 4, la modélisation des violations au EEP est déjà introduite dans l'éphéméride lunaire et dans le programme de traitement des données LLR (*cf.* Eqs. (4.15) et (4.17)). Nous avons déjà réalisé cette étude dans le cadre d'une analyse postfit (Hees *et al.*, 2015), ce qui n'est pas complètement satisfaisant. L'analyse globale permettra de fournir de vraies contraintes sur de possibles violations au EEP paramétrées dans le cadre du secteur matière du formalisme SME.

Le programme développé en thèse permettra d'analyser les données LLR non seulement pour les besoins de la physique fondamentale mais il pourra également servir à l'étude de la physique du système Terre-Lune.



# Annexe A

## Traitement perturbatif

### Sommaire

---

A.1 Introduction . . . . .	131
A.2 Accélération radiale . . . . .	131
A.3 Linéarisation des équations . . . . .	132
A.4 Fréquence de l'orbite circulaire . . . . .	133
A.5 Solutions . . . . .	133

---

### A.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode utilisée pour évaluer analytiquement l'impact d'une perturbation sur la distance Terre-Lune. Elle a été introduite par Hill (Brouwer et Clemence, 1961) puis appliquée à l'étude de la théorie de la Lune. Cette méthode bien qu'approchée, donne une estimation raisonnable de l'ordre de grandeur et de la fréquence d'un effet perturbatif. Elle a été abondamment utilisée par Nordtvedt (Nordtvedt, 1968, 1973, 1991) afin d'évaluer les signaux attendus lors d'un *range* entre la Terre et la Lune. Dans la première section, nous présentons la forme des équations du mouvement perturbé. Dans la deuxième section, ces équations sont linéarisées autour d'une orbite circulaire et sont résolues dans la troisième section dans le cas d'une perturbation oscillante.

### A.2 Accélération radiale

Considérons un corps de masse  $m$  en orbite circulaire autour d'un corps central de masse  $M$ . Nous supposons que  $m \ll M$ . Notons  $\mathbf{r}$  le vecteur reliant le corps central massif au corps de faible masse. La résolution du problème classique de deux corps ponctuels interagissant sous l'action de leur champ gravitationnel, montre que la norme du moment angulaire par unité de masse est une quantité conservée pouvant s'écrire  $h = r^2 n$ , soit

$$rn^2 = h^2/r^3. \tag{A.1}$$

La différentielle temporelle de  $h$  (qui est nulle) fournit alors l'expression suivante

$$\frac{\dot{h}}{r} = r\dot{n} + 2n\dot{r}. \tag{A.2}$$

Ainsi, en insérant les Eqs. (A.1) et (A.2) dans les équations du mouvement écrites en présence d'une perturbation  $\mathbf{a}(t)$  dépendante du temps, on obtient

$$\ddot{r} = -\varphi'(r) + \frac{h^2}{r^3} + a_\rho(t), \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{h} = ra_\tau(t). \quad (\text{A.4})$$

Les indices  $(\rho)$  et  $(\tau)$  font respectivement référence à la composante radiale et à la composante tangentielle de la perturbation. Le *prime* représente la dérivation relativement à la distance radiale et le *point* fait référence à la dérivation temporelle. Par la suite, nous omettrons de préciser que les perturbations radiale et tangentielle dépendent du temps afin d'alléger l'écriture.

Le potentiel radial  $\varphi$  est la somme du potentiel newtonien ( $\varphi_N$ ) et d'une ou plusieurs contributions radiales d'autres potentiels ( $\delta\varphi \ll \varphi_N$ ) *e.g.* le moment quadripolaire du corps central ou bien la perturbation d'autres corps éloignés. Ainsi, le potentiel radial s'écrit sous la forme suivante

$$\varphi(r) = \varphi_N(r) + \delta\varphi(r). \quad (\text{A.5})$$

### A.3 Linéarisation des équations

Afin de résoudre les Eqs. (A.3) et (A.4), supposons que l'orbite du corps de faible masse est circulaire au premier ordre. Ainsi, compte-tenu de la petitesse de la perturbation relativement au potentiel newtonien, la solution finale s'écrit sous la forme suivante

$$r = r_0 + x(t), \quad (\text{A.6})$$

$$h = h_0 + \delta h(t), \quad (\text{A.7})$$

où  $r_0$  et  $h_0$  sont respectivement le rayon et la norme du moment angulaire de l'orbite circulaire. Les quantités  $x$  et  $\delta h$  sont considérées petites devant  $r_0$  et  $h_0$  et sont dépendantes du temps. Par la suite, nous omettrons de le préciser afin d'alléger l'écriture.

En développant  $\varphi(r)$  en série de Taylor et en ne gardant que le terme du premier ordre en  $x$ , on trouve

$$\varphi(r) = \varphi(r_0) + x\varphi'(r)|_{r=r_0} + \mathcal{O}(x^2). \quad (\text{A.8})$$

Nous utilisons la notation  $\varphi'(r_0)$  pour désigner  $\varphi'(r)|_{r=r_0}$ , qui sous-entend toujours que la dérivation est effectuée relativement à  $r$  puis évaluée en  $r = r_0$ . En effectuant la dérivation radiale de l'expression (A.8) on trouve au premier ordre en  $x$

$$\varphi'(r) = \varphi'(r_0) + x\varphi''(r_0). \quad (\text{A.9})$$

En injectant les solutions linéarisées (A.6) et (A.7) ainsi que la dérivée radiale du potentiel (A.9) dans les Eqs. (A.3) et (A.4), on déduit les équations du mouvement linéarisées autour d'une orbite circulaire

$$\ddot{x} = -x\varphi''(r_0) - \frac{3h_0^2}{r_0^4}x + \frac{2h_0\delta h}{r_0^3} + a_\rho, \quad (\text{A.10})$$

$$\delta\dot{h} = r_0a_\tau, \quad (\text{A.11})$$

où nous avons utilisé l'Eq. (A.3) appliquée au cas d'une orbite circulaire sans perturbation afin de faire disparaître l'ordre 0.

En intégrant ensuite l'expression (A.11), on trouve

$$\frac{\delta h}{r_0} = \int a_\tau dt, \quad (\text{A.12})$$

qu'on injecte dans l'Eq. (A.10), pour déduire

$$\ddot{x} + n_0^2 x = a_r + 2n \int a_\tau dt, \quad (\text{A.13})$$

avec

$$n_0^2 = \varphi''(r_0) + 3n^2, \quad (\text{A.14})$$

$$n^2 = \frac{h_0^2}{r_0^4}. \quad (\text{A.15})$$

L'effet de la perturbation radiale est donc déterminé en résolvant l'équation d'un oscillateur harmonique forcé, où  $n$  représente la fréquence de l'orbite circulaire et  $n_0$  est la fréquence naturelle de la perturbation radiale.

## A.4 Fréquence de l'orbite circulaire

Il est possible de déterminer la forme générale de  $n$ , à partir de l'équation du mouvement radial appliquée au cas d'une orbite circulaire. Ainsi, à l'ordre 0 on a

$$\ddot{r}_0 = -\varphi'(r_0), \quad \text{soit} \quad \ddot{r}_0 + n^2 r_0 = 0,$$

où

$$n^2 = \frac{\varphi'(r_0)}{r_0}. \quad (\text{A.16})$$

Dans le cas d'un mouvement purement képlérien,  $\delta\varphi$  et ses dérivées sont nuls de sorte que  $n^2 = \mu/r_0^3$ , ce qui correspond effectivement à la 3ème loi de Kepler pour une orbite circulaire. *A contrario*, si  $\delta\varphi$  et ses dérivées ne sont pas nuls, l'expression générale de  $n^2$  sera donnée par l'expression suivante

$$n^2 = \frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\delta\varphi'}{r_0}.$$

## A.5 Solutions

Nous présentons ici, la solution finale déterminant le mouvement relatif du corps de faible masse lorsque ce dernier est soumis à une perturbation. La solution générale étant donnée par une solution homogène et une solution particulière.

### Homogène

L'Eq. (A.13) présente une solution homogène simple

$$x(t) = C \cos(n_0 t + \Delta),$$

avec  $C$  et  $\Delta$  deux constantes à déterminer. Pour ce faire, il suffit d'identifier la solution homogène à la solution bien connue du problème des deux corps<sup>1</sup>

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)}, \quad (\text{A.17})$$

lorsque le mouvement elliptique est quasiment circulaire ( $a \sim r_0$  et  $e \ll 1$ ), soit

$$r \simeq r_0 - er_0 \cos(\theta - \omega). \quad (\text{A.18})$$

L'identification de cette dernière équation avec (A.6), permet de déduire que  $C = -er_0$ ,  $\theta = n_0 t$  et  $\Delta = -\omega$ . Par conséquent, la solution homogène de l'Eq. (A.13) s'écrit

$$x(t) = -er_0 \cos(n_0 t - \omega). \quad (\text{A.19})$$

Cette solution représente le mouvement des orbites elliptiques. Si on ne considère que le seul potentiel képlérien ( $n_0 = n$ ), l'ellipse est fixe. À l'inverse si le potentiel radial tient compte d'autres contributions ( $n_0 = n - \delta n$ ) alors l'orbite effectue un mouvement de précession. Dans les deux cas, le passage au périhélie a lieu à l'instant  $\omega/n_0$  et se répète avec une période de  $2\pi/n_0$ . Le taux de précession du périhélie est quant à lui défini par la quantité  $\delta n = n - n_0$ .

En appliquant l'Eq. (A.19) au cas de l'orbite lunaire ( $e \sim 0.055$  et  $n_0 = n$ ) on trouve

$$x(t) \simeq -21 \cdot 10^3 \cos(nt - \omega) \text{ km.}$$

On retrouve bien ce même terme lié à l'excentricité de l'orbite, chez Chapront-Touze et Chapront (1988) ou Dickey *et al.* (1994).

## Particulière

Pour trouver une solution particulière à l'Eq. (A.13), supposons que la perturbation est oscillante, et s'écrive sous la forme générale

$$a_\rho(t) = Ae^{in't}, \quad (\text{A.20})$$

$$a_\tau(t) = Be^{in't}, \quad (\text{A.21})$$

où  $A$  et  $B$  sont deux quantités complexes. Ces dernières sont définies par les relations  $A = A_0 e^{i\phi_r}$  et  $B = B_0 e^{i\phi_\tau}$ , où  $A_0$  et  $B_0$  sont deux amplitudes réelles, puis  $\phi_r$  et  $\phi_\tau$  sont les déphasages respectifs des perturbations radiale et tangentielle.

Ainsi, en injectant les Eqs. (A.20) et (A.21) dans l'équation du mouvement (A.13) on obtient la relation

$$\ddot{x} + n_0^2 x = \left( A - 2iB \frac{n}{n'} \right) e^{in't}. \quad (\text{A.22})$$

La solution particulière est donnée pour  $x = Ce^{in't}$ , où  $C$  est une quantité complexe à déterminer. Ceci peut être fait en insérant les valeurs de  $x$  et de  $\ddot{x}$  dans (A.22), on trouve l'expression de l'amplitude complexe, qui est donnée par

$$C = \frac{1}{n_0^2 - n'^2} \left( A - 2iB \frac{n}{n'} \right),$$

---

1. On a alors  $\delta\varphi = \delta\varphi' = 0$ . Par conséquent, d'après l'Eq. (A.14) on trouve  $n_0^2 = 3n^2 - 2\varphi'(r_0)/r_0$ . Or, à partir de l'Eq. (A.16), on déduit  $-2\varphi'(r_0)/r_0 = -2n^2$ , ainsi on trouve  $n_0 = n$ . On conclut que dans le problème des deux corps, la fréquence naturelle de la perturbation radiale se réduit à la fréquence de l'orbite circulaire et le taux de précession de l'orbite ( $\delta n = n - n_0$ ) est nul.

soit,

$$x(t) = \frac{1}{n_0^2 - n'^2} \left( A_0 - 2iB_0 \frac{n}{n'} e^{i\delta\phi} \right) e^{i(n't + \phi_r)}, \quad (\text{A.23})$$

où nous avons posé  $\delta\phi = \phi_r - \phi_r$ .

La solution (A.23) s'écrit donc sous la forme  $x(t) = X e^{i(n't + \phi_r)}$ , avec  $X$  un nombre complexe tel que  $X = \chi e^{i\phi}$ . La valeur de  $X$  est directement donnée par l'Eq. (A.23), soit

$$X = \frac{1}{n_0^2 - n'^2} \left( A_0 + 2B_0 \frac{n}{n'} [\sin \delta\phi - i \cos \delta\phi] \right).$$

On trouve sans difficulté les valeurs de  $\chi$  et  $\phi$  à partir de l'expression précédente de  $X$ , sachant que  $\chi^2 = X X^*$ . Ainsi,

$$\chi = \frac{A_0}{n_0^2 - n'^2} \sqrt{1 + 4\Lambda [\Lambda + \sin \delta\phi]}, \quad (\text{A.24})$$

$$\tan \phi = -\frac{2\Lambda \cos \delta\phi}{1 + 2\Lambda \sin \delta\phi}, \quad (\text{A.25})$$

où nous avons posé  $\Lambda = \frac{n}{n'} \frac{B_0}{A_0}$ .

Ainsi, la solution (A.23) s'écrit sous la forme  $x(t) = \chi e^{i(n't + \phi_r + \phi)}$ , qui devient, en ne gardant que la partie réelle

$$x(t) = \chi \cos(n't + \phi_r + \phi). \quad (\text{A.26})$$

À ce stade, il est bon de formuler quelques hypothèses quant aux quantités introduites. Nous verrons dans la plupart des applications que nous allons étudier par la suite, que les termes de perturbation radiale sont exprimables sous forme de cosinus et ceux de perturbation tangentielle sous forme de sinus. En remarquant alors que le sinus d'un angle est déphasé de  $-\frac{\pi}{2}$  relativement au cosinus du même angle, on déduit que  $\delta\phi = -\frac{\pi}{2}$ . Ce sera effectivement le cas dans la majorité de nos applications. En conséquence, d'après (A.25), on déduit  $\tan \phi = 0$ , ce qui signifie que le déplacement sur la distance Terre-Lune oscille en phase avec la perturbation radiale qui l'a engendrée. En appliquant ces approximations à l'Eq. (A.26), on trouve la solution particulière finale :

$$x(t) = \frac{A_0}{n_0^2 - n'^2} [1 - 2\Lambda] \cos(n't + \phi_r). \quad (\text{A.27})$$

L'Eq. (A.27) sera utilisée, excepté pour le cas résonnant ( $n' = n_0$ ), afin d'évaluer l'amplitude et la fréquence d'une perturbation, sur la distance Terre-Lune. On rappelle que  $n$  représente la fréquence orbitale de l'orbite circulaire,  $n_0$  est la fréquence naturelle de la perturbation radiale et  $n'$  est la fréquence de la perturbation (fréquence de forçage).



# Annexe B

## Perturbation solaire et perturbations planétaires

### Sommaire

---

<b>B.1 Introduction</b>	<b>137</b>
<b>B.2 Perturbations de troisième corps</b>	<b>137</b>
<b>B.3 Effet de la perturbation solaire</b>	<b>139</b>
<b>B.4 Effet d'une perturbation planétaire coplanaire</b>	<b>141</b>
<b>B.5 Précisions requises sur les orbites planétaires</b>	<b>145</b>

---

### B.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous essayons de déterminer par l'approche perturbative présentée en annexe A, les amplitudes et fréquences des signaux produits sur la distance Terre-Lune par le Soleil, les planètes, Pluton, Cérès, Vesta et Pallas. En Sec. B.2, nous présentons les différentes hypothèses simplificatrices qui vont nous permettre de réaliser ce travail. En Sec. B.3, nous présentons la démarche à suivre pour calculer le signal produit par le Soleil, puis celui produit par les autres corps en Sec. B.4. Nous clôturons ce chapitre avec la Sec. B.5, en calculant les précisions théoriques requises sur les orbites planétaires pour l'analyse de données LLR.

### B.2 Perturbations de troisième corps

Dans cette étude, nous allons considérablement simplifier le problème. Le but étant de pouvoir estimer l'amplitude et la fréquence des premiers termes perturbatifs. On considère à l'ordre 0 que les orbites de la Terre et de la Lune sont parfaitement circulaires et donc que les excentricités sont nulles. De plus, on suppose que l'inclinaison du plan orbital de la Lune sur l'écliptique est également nulle et nous prenons la Terre infiniment plus massive que la Lune menant à un ratio des masses Lune/Terre infiniment petit. L'ordre de grandeur des valeurs numériques actuelles des paramètres cités sont respectivement : 0.017, 0.055, 0.09 *radians* et 1/81. De plus, afin de simplifier davantage les calculs, on considère le problème coplanaire des planètes en orbite circulaire dans l'écliptique. Leur excentricité et leur inclinaison sur l'écliptique sont considérées nulles.

Variable	Définition
$\mu$	masse du barycentre Terre-Lune,
$\mu_{\odot}$	masse du Soleil,
$\mu_a$	masse de la planète $a$ ,
$\mathbf{r}$	vecteur Terre-Lune,
$\mathbf{R}$	vecteur Soleil-Terre,
$\mathbf{R}_a$	vecteur Soleil-planète $a$ ,
$\mathbf{\Delta}_a$	vecteur Terre-planète $a$ ,
$n$	moyen mouvement de la Lune,
$N$	moyen mouvement de la Terre,
$N_a$	moyen mouvement de la planète $a$ .

TABLE B.1 – Table des notations.

De manière générale, nous considérons toujours que  $\Delta_b \gg r$ , où  $\Delta_b$  représente la distance entre la Terre et un corps  $b$  autre que la Lune et où  $r$  est la distance Terre-Lune. Ceci est considéré vrai y compris pour les planètes les plus proches de la Terre. Les valeurs numériques du rapport  $r/\Delta_b$  pour les planètes Mars et Vénus en état de conjonction avec la Terre, sont respectivement 0.0094 et 0.0050. En conséquence, le premier terme entre parenthèses dans l'Eq. (2.4) peut être développé en série de Taylor de  $r/\Delta_b$ , tel que

$$f(\mathbf{\Delta}_b - \mathbf{r}) = f(\mathbf{\Delta}_b) - r_i \partial^i f(\mathbf{\Delta}_b) + \frac{1}{2} r_i r_j \partial^i \partial^j f(\mathbf{\Delta}_b) + \dots,$$

où le gradient est calculé relativement à l'extrémité du vecteur  $\mathbf{\Delta}_b$ . Les indices  $i$  et  $j$  font référence aux composantes d'un vecteur si l'indice est en position contravariant, où d'un covecteur si l'indice est en position covariante<sup>1</sup>. La fonction  $f(\mathbf{\Delta}_b)$  représente l'inverse de la norme du vecteur  $\mathbf{\Delta}_b$ , soit  $f(\mathbf{\Delta}_b) = \|\mathbf{\Delta}_b\|^{-1} = \Delta_b^{-1}$ . On déduit le deuxième et le troisième terme du développement précédent

$$\partial^i f(\mathbf{\Delta}_b) = -\frac{\Delta_b^i}{\Delta_b^3} \quad \text{et} \quad \partial^i \partial^j f(\mathbf{\Delta}_b) = -\frac{1}{\Delta_b^3} \left( \delta^{ij} - \frac{3\Delta_b^i \Delta_b^j}{\Delta_b^2} \right),$$

afin d'obtenir l'approximation de  $f(\mathbf{\Delta}_b - \mathbf{r})$  au deuxième ordre en  $r/\Delta_b$

$$\frac{1}{\|\mathbf{\Delta}_b - \mathbf{r}\|} \simeq \frac{1}{\Delta_b} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Delta}_b}{\Delta_b^3} - \frac{r_i r_j}{2\Delta_b^3} \left( \delta^{ij} - \frac{3\Delta_b^i \Delta_b^j}{\Delta_b^2} \right).$$

Le potentiel perturbateur (*cf.* Eq. (2.4)) du corps  $b$  sur la distance Terre-Lune peut alors être ramené à la forme suivante

$$\delta\varphi_b \simeq -\frac{\mu_b}{\Delta_b} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{\Delta_b^2} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Delta}_b)^2}{\Delta_b^4} \right). \quad (\text{B.1})$$

Cette formule constitue le point de départ des deux applications suivantes dans lesquelles nous utilisons les notations définies en Tab. B.1.

1. En pratique, dans l'espace euclidien il n'y a pas lieu de faire la distinction. Dans ce cas, tout indice répété, qu'on choisisse une convention contra ou covariante, représente une sommation.

### B.3 Effet de la perturbation solaire

En appliquant l'Eq. (B.1) au cas d'une perturbation produite par le Soleil, avec  $\Delta_{\odot} = -\mathbf{R}$  le potentiel perturbateur devient

$$\delta\varphi_{\odot} \simeq -\frac{\mu_{\odot}}{R} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})^2}{R^4} \right).$$

Avec la 3ème loi de Kepler, on peut alors poser  $N^2 = (\mu_{\odot} + \mu)/R^3$  soit  $N^2 \simeq \mu_{\odot}/R^3$ , d'où

$$\delta\varphi_{\odot} \simeq -\frac{\mu_{\odot}}{R} - \frac{N^2 r^2}{4} - \frac{3N^2}{2} \left[ \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})^2}{R^2} - \frac{r^2}{2} \right].$$

On déduit alors l'accélération du vecteur Terre-Lune à partir de l'Eq. (2.3), soit

$$\ddot{\mathbf{r}} + n^2 \mathbf{r} = \mathbf{a}_{\odot}, \quad (\text{B.2})$$

où nous avons posé

$$n^2 = \frac{\mu}{r^3} - \frac{N^2}{2}, \quad (\text{B.3})$$

et

$$\mathbf{a}_{\odot} = 3N^2 r \left[ (\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \hat{\mathbf{R}} - \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}}{2} \right]. \quad (\text{B.4})$$

Nous avons utilisé  $\mathbf{r} = r \hat{\boldsymbol{\rho}}$  et  $\mathbf{R} = R \hat{\mathbf{R}}$ , où  $\hat{\boldsymbol{\rho}}$  et  $\hat{\mathbf{R}}$  sont deux vecteurs unitaires dans les directions de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{R}$ . Par la suite, nous omettrons l'indice " $\odot$ " car dans cette section, seul l'effet perturbatif du Soleil est considéré.

À partir de l'Eq. (B.4), on déduit les composantes radiale ( $a_{\rho}$ ) et tangentielle ( $a_{\tau}$ ) de l'accélération perturbatrice créée par le Soleil. Prenons  $\hat{\boldsymbol{\rho}}$  le vecteur unitaire dirigé suivant  $\mathbf{r}$  et  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  celui dirigé suivant  $\dot{\mathbf{r}}$ . En raison de l'orbite circulaire ils sont tous deux orthogonaux et en rotation uniforme à la fréquence  $n$ . On déduit alors  $a_{\rho} = \mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}$ , soit

$$a_{\rho} = 3N^2 r \left[ (\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{R}})^2 - \frac{1}{2} \right],$$

où  $\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = \cos Dt$  avec  $Dt$  l'angle formé entre les vecteurs  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{r}$ .  $D$  représente la fréquence synodique lunaire qui n'est autre que l'élongation de la Lune rapportée au Soleil et peut être déduite à l'aide de la Fig. B.1 qui représente l'évolution des angles en fonction du temps. Nous obtenons ainsi  $Dt_2 - Dt_1 = (n - N)\delta t$  avec  $\delta t = t_2 - t_1$ , soit  $D = n - N$ . On peut alors écrire

$$a_{\rho} = \frac{3N^2 r}{2} \cos 2Dt. \quad (\text{B.5})$$

La composante tangentielle nous est donnée par  $a_{\tau} = \mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$ , soit

$$a_{\tau} = 3N^2 r (\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}),$$

où  $\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = \cos Dt$  et  $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = -\sin Dt$ , d'où

$$a_{\tau} = -\frac{3N^2 r}{2} \sin 2Dt. \quad (\text{B.6})$$

Afin de déduire l'amplitude et la phase du signal produit sur la distance Terre-Lune par la perturbation solaire, nous allons conformément à ce qui a été fait en annexe A,

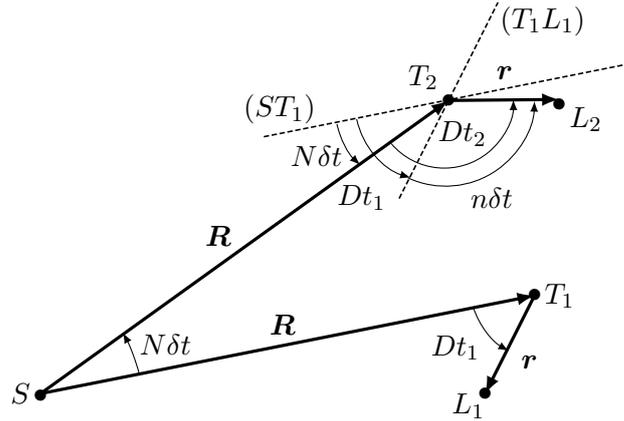


FIGURE B.1 – Schéma représentant l'évolution des variables angulaires entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , pour une Lune orbitant dans l'écliptique;  $\delta t$  représentant la différence  $t_2 - t_1$ . Le point  $S$  faisant référence au Soleil,  $T_i$  étant la position de la Terre à l'instant  $i$  et  $L_i$  celle de la Lune à l'instant  $i$ .

Eq. (A.13), développer les équations du mouvement au voisinage d'une orbite circulaire. La fréquence de l'orbite circulaire nous est alors donnée par l'Eq. (B.3), et la fréquence naturelle de la perturbation radiale peut être déduite de l'Eq. (A.15),

$$n_0^2 = n^2 - \frac{3N^2}{2}. \quad (\text{B.7})$$

On constate alors que le taux de précession de l'orbite est environ égal à  $\delta n \simeq \frac{3}{4}N^2/n$  soit  $\delta n \simeq 5.47 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ/j$ , ce qui représente une période effectuée en approximativement 18 ans. Cette valeur doit être comparée aux valeurs observées des taux de précessions de la ligne des apsides et du nœud de l'orbite lunaire sur l'écliptique qui sont respectivement de 8.9 et 18.6 ans. La valeur précédemment calculée dans le cadre du problème coplanaire est donc dans le bon ordre de grandeur malgré les nombreuses simplifications.

De l'Eq. (A.27), on déduit le signal engendré sur la distance Terre-Lune, en injectant la composante radiale et la composante tangentielle de la perturbation solaire (*cf.* Eqs. (B.5) et (B.6)). En sachant que la valeur numérique du coefficient  $N/n$  est 0.07, on trouve en ne gardant que les termes du premier ordre en  $N/n$

$$x(2D; t) = -\frac{N^2 r}{n^2} \left[ 1 + \frac{19N}{6n} + \dots \right] \cos 2(n-N)t, \quad (\text{B.8})$$

soit,

$$x(2D; t) \simeq -2.8 \cdot 10^3 \cos 2(n-N)t \text{ km.}$$

On retrouve ce même terme chez Chapront-Touze et Chapront (1988) ou encore chez Dickey *et al.* (1994) note 16. On comprendra que le troisième terme de Dickey *et al.* (1994) ne soit pas présent dans notre approximation, il est lié au couplage des fréquences de l'orbite excentrique et de la perturbation solaire. Le deuxième terme est celui donné en annexe A, Eq. (A.19). Notons que l'approche simpliste exposée en annexe A et appliquée ici à un modèle lunaire simplifié, nous a permis de retrouver la bonne estimation des quelques premiers termes indépendants comme celui en  $\cos 2Dt$ .

## B.4 Effet d'une perturbation planétaire coplanaire

Afin d'évaluer l'effet des perturbations planétaires nous repartons de l'Eq. (B.1) du potentiel perturbateur exercé par la planète  $a$  sur la distance Terre-Lune. Les équations du mouvement, dues aux perturbations planétaires et solaire s'écrivent alors

$$\ddot{\mathbf{r}} + n^2 \mathbf{r} = \mathbf{a}_\odot + \sum_a \mathbf{a}_a, \quad (\text{B.9})$$

où nous avons posé

$$n^2 = \frac{\mu}{r^3} - \frac{N^2}{2} - \sum_a \frac{2\mu_a}{\Delta_a^3}, \quad (\text{B.10})$$

et

$$\mathbf{a}_a = \frac{3\mu_a r}{\Delta_a^3} [(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Delta}}_a) \hat{\boldsymbol{\Delta}}_a - \hat{\boldsymbol{\rho}}]. \quad (\text{B.11})$$

La sommation étant effectuée sur l'indice  $a$  représentant l'ensemble des planètes. Comme précédemment nous avons utilisé les termes radiaux des perturbations pour définir à l'ordre 0 la fréquence de l'orbite circulaire comme montré en Eq. (B.10). Nous garderons à l'esprit que même pour la planète Vénus en état de conjonction avec la Terre, le troisième terme de l'Eq. (B.10) est inférieur de 4 ordres de grandeurs au deuxième terme, lui même inférieur de 2 ordres de grandeurs au premier terme. Nous allons donc le négliger, et ne garder que la contribution solaire. De plus, dans cette section, nous nous intéressons uniquement à l'accélération perturbatrice de la planète  $a$ . Par conséquent, les effets perturbateurs de chaque planète sont étudiés séparément et les termes résonnants sont négligés. Par conséquent, ces différentes omissions, en plus du problème coplanaire avec une lune dans l'écliptique, sont un facteur limitant à la validité des solutions trouvées. Cependant, nous rappelons que l'objectif principal est de déterminer l'ordre de grandeur des perturbations et non de construire une éphéméride analytique précise.

On projette l'accélération sur  $\hat{\boldsymbol{\rho}}$  afin d'obtenir la composante radiale qui est définie par  $a_\rho = \mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}$ , où nous avons volontairement omis l'indice  $a$  précisant que la perturbation est engendrée par la planète  $a$ . De plus, on a  $\hat{\boldsymbol{\Delta}}_a = \hat{\boldsymbol{R}}_a - \hat{\boldsymbol{R}}$ , ainsi on trouve

$$a_\rho = \frac{3\mu_a r}{\Delta_a^3} [(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}_a)^2 + (\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}})^2 - 2(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}_a)(\hat{\boldsymbol{R}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) - 1].$$

Nous savons déjà d'après la Fig. B.1 que  $\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}} = \cos Dt$ , quant au produit scalaire  $\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}_a$ , nous le déduisons de la Fig. B.2, soit  $\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}_a = \cos D_a t$  où  $D_a t$  est l'angle sous-tendu entre les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{R}_a$ , avec  $D_a = n - N_a$ . En effet, quelque soit la planète considérée on aura toujours  $n > N_a$ , par conséquent pour que  $D_a$  soit défini dans le sens direct on doit avoir  $D_a t_2 - D_a t_1 = (n - N_a) \delta t$ . On déduit alors l'expression de la composante radiale de l'accélération perturbatrice

$$a_\rho = \frac{3\mu_a r}{2\Delta_a^3} [\cos 2Dt + \cos 2D_a t - 2\cos \Theta_a t - 2\cos (D + D_a)t], \quad (\text{B.12})$$

où  $\Theta_a$  sera défini en Eq. (B.14).

L'accélération tangentielle est donnée par  $a_\tau = \mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$ , soit

$$a_\tau = \frac{3\mu_a r}{\Delta_a^3} [(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}_a)(\hat{\boldsymbol{R}}_a \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}) - (\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}})(\hat{\boldsymbol{R}}_a \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}) - (\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}_a)(\hat{\boldsymbol{R}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}) + (\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{R}})(\hat{\boldsymbol{R}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}})],$$

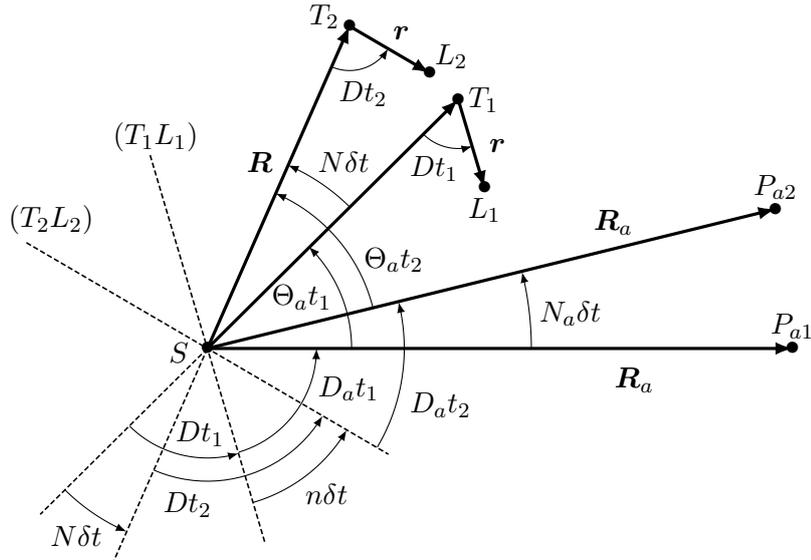


FIGURE B.2 – Schéma représentant l'évolution des variables angulaires entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , pour une Lune orbitant dans l'écliptique;  $\delta t$  représentant la différence  $t_2 - t_1$ . Le point  $S$  faisant référence au Soleil,  $T_i$  étant la position de la Terre à l'instant  $i$ ,  $L_i$  celle de la Lune à l'instant  $i$  et  $P_{ai}$  celle de la planète  $a$  à l'instant  $i$ .

d'où

$$a_\tau = -\frac{3}{2} \frac{\mu_a r}{\Delta_a^3} \left[ \sin 2Dt + \sin 2D_a t - 2 \sin (D + D_a)t \right]. \quad (\text{B.13})$$

Ici, plutôt que de développer  $\Delta_a^{-2s}$  avec  $s = 3/2$ , en polynôme de Legendre comme il est d'usage, un développement en série de Fourier de l'angle  $\Theta_a t$  est plus approprié. En effet, pour les planètes intérieures et Mars le rapport des distances de  $R$  et  $R_a$  peut ne pas être  $\ll 1$  et rend le développement lentement convergent. Il est plus approprié de remarquer que  $\Delta_a^{-2s}$  est une fonction  $2\pi$  périodique et paire pour la variable  $\Theta_a t$ . En effet, cette fonction s'écrit

$$\left( \frac{\rho}{\Delta_a} \right)^{2s} = (1 - 2\alpha_a \cos \Theta_a t + \alpha_a^2)^{-s},$$

où nous avons posé

$$\rho = \begin{cases} R \\ R_a \end{cases}, \quad \Theta_a = \begin{cases} -(N - N_a) \\ +(N - N_a) \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha_a = \begin{cases} R_a/R & \text{si } R > R_a \\ R/R_a & \text{si } R < R_a. \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Ainsi, l'expression de  $\Delta_a^{-2s}$  admet un développement en série de Fourier de la forme

$$\left( \frac{\rho}{\Delta_a} \right)^{2s} = \frac{b_s^0(\alpha_a)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_s^k(\alpha_a) \cos k\Theta_a t,$$

où les coefficients  $b_s^k(\alpha_a)$  sont les coefficients de Laplace (*cf.* Laplace (1798), ou Duriez (2007)), définis comme

$$b_s^k(\alpha_a) = 2\alpha_a^k \binom{s+k-1}{k} F(s, s+k, k+1; \alpha^2).$$

Corps	$\alpha \backslash k$	0	1	2	3
	$\alpha$				
Mercure	0.387	2.871	1.575	0.747	0.334
Vénus	0.723	9.971	8.850	7.366	5.935
Mars	0.656	6.846	5.718	4.395	3.248
Vesta	0.423	3.101	1.839	0.949	0.463
Cérès	0.362	2.736	1.414	0.629	0.263
Pallas	0.361	2.731	1.408	0.625	0.261
Jupiter	0.192	2.176	0.618	0.148	0.033
Saturne	0.104	2.050	0.318	0.041	0.005
Uranus	0.052	2.012	0.157	0.010	0.001
Neptune	0.033	2.005	0.099	0.004	0.000
Pluton	0.025	2.003	0.075	0.002	0.000

TABLE B.2 – Table des premiers coefficients de Laplace  $b_s^k(\alpha)$  pour  $s = 3/2$  donné à  $10^{-3}$  près.

Les quantités  $\binom{m}{l}$  sont les coefficients binomiaux

$$\binom{m}{l} = \frac{m!}{l!(m-l)!},$$

et  $F(a, b, c; x)$  est la fonction hypergénométrique de Gauss

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}.$$

Les  $(a)_n$  sont les coefficients de Pochhammer définis tels que

$$(a)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1), \\ = (a+n-1)(a)_{n-1}.$$

Nous donnons en Tab. B.2, les premiers coefficients de Laplace  $b_s^k(\alpha_a)$  calculés avec *Mathematica* (Wolfram Research, 2016), pour  $s = 3/2$ ,  $k = 0, \dots, 3$  et  $\alpha$  donné pour toutes les planètes, Pluton, Cérès, Vesta et Pallas.

On réécrit ainsi l'Eq. (B.12) représentant l'accélération perturbatrice radiale, comme

$$a_\rho = \frac{3}{4} \frac{\mu_a r}{\rho^3} \left\{ \begin{aligned} &+ b_{3/2}^0 \cos 2Dt && + \sum_{k=1} b_{3/2}^k [\cos(2D+k\Theta_a)t + \cos(2D-k\Theta_a)t] \\ &+ b_{3/2}^0 \cos 2D_a t && + \sum_{k=1} b_{3/2}^k [\cos(2D_a+k\Theta_a)t + \cos(2D_a-k\Theta_a)t] \\ &- 2[b_{3/2}^0 + b_{3/2}^2] \cos \Theta_a t && - 2 \sum_{k=2} [b_{3/2}^{k-1} + b_{3/2}^{k+1}] \cos k\Theta_a t \\ &- 2b_{3/2}^0 \cos(D+D_a)t && - 2 \sum_{k=1} b_{3/2}^k [\cos(D+D_a+k\Theta_a)t + \cos(D+D_a-k\Theta_a)t] \end{aligned} \right\}. \quad (\text{B.15})$$

Le terme constant correspondant à  $k = 1$  dans le 6ème terme entre accolades contribue à l'évaluation de la fréquence de l'orbite circulaire à hauteur de  $+\frac{3}{2}b_{3/2}^1\mu_a/\rho^3$ . Il peut être négligé devant la contribution solaire (*cf.* Eq. (B.10)).

Concernant la composante tangentielle de l'Eq. (B.13), on arrive après insertion du développement en série de Fourier de  $\Delta_a^{-2s}$  pour  $s = 3/2$ , à l'expression

$$a_\tau = -\frac{3}{4} \frac{\mu_a r}{\rho^3} \left\{ +b_{3/2}^0 \sin 2Dt \quad + \sum_{k=1} b_{3/2}^k [\sin (2D+k\Theta_a)t + \sin (2D-k\Theta_a)t] \right. \\ + b_{3/2}^0 \sin 2D_a t \quad + \sum_{k=1} b_{3/2}^k [\sin (2D_a+k\Theta_a)t + \sin (2D_a-k\Theta_a)t] \\ \left. - 2b_{3/2}^0 \sin (D+D_a)t - 2 \sum_{k=1} b_{3/2}^k [\sin (D+D_a+k\Theta_a)t + \sin (D+D_a-k\Theta_a)t] \right\}. \quad (\text{B.16})$$

Nous donnons les expressions des différentes contributions à la perturbation de la distance Terre-Lune en fonction des fréquences, sans préciser la planète dont il s'agit. De plus, lorsqu'un facteur  $k$  apparaît il n'est fait aucune approximation sur l'importance des quantités car  $k$  peut être relativement grand. Pour le reste, nous considérons, comme nous l'avons déjà fait, que  $n \gg N$  et  $n \gg N_a$ . Cependant, pour les planètes intérieures pour lesquelles on observe  $N_a > N$ , le rapport  $N_a/n$  n'est pas suffisamment petit pour ne garder que des termes du premier ordre. Notamment pour Mercure, nous allons devoir développer au moins jusqu'au 3ème ordre en  $N_a/n$  pour avoir une estimation correcte. Comme précédemment, nous allons rejeter les termes en  $N^2/n^2$  et nous allons garder ceux en  $NN_a/n^2$ . Après calculs, on obtient les signaux suivants

$$\begin{aligned} x(2D; t) &= A_{2D} \cos 2(n-N)t \\ x(2D_a; t) &= A_{2D_a} \cos 2(n-N_a)t \\ x(D+D_a; t) &= A_{D+D_a} \cos (2n-N-N_a)t \\ x(2D \pm k\Theta_a; t) &= A_{2D \pm k\Theta_a} \cos [2(n-N) \pm k\Theta_a]t \\ x(2D_a \pm k\Theta_a; t) &= A_{2D_a \pm k\Theta_a} \cos [2(n-N_a) \pm k\Theta_a]t \\ x(D+D_a \pm k\Theta_a; t) &= A_{D+D_a \pm k\Theta_a} \cos (2n-N-N_a \pm k\Theta_a)t \\ x(\Theta_a; t) &= A_{\Theta_a} \cos \Theta_a t \\ x(k\Theta_a; t) &= A_{k\Theta_a} \cos k\Theta_a t, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

où nous venons de poser

$$\begin{aligned} A_{2D} &= -\frac{1}{2} \frac{b_{3/2}^0 \mu_a r}{n^2 \rho^3} \left[ 1 + \frac{19}{6} \frac{N}{n} + \dots \right] \\ A_{2D_a} &= -\frac{1}{2} \frac{b_{3/2}^0 \mu_a r}{n^2 \rho^3} \left[ 1 + \frac{19}{6} \frac{N_a}{n} + \frac{137}{18} \frac{N_a^2}{n^2} + \frac{895}{54} \frac{N_a^3}{n^3} + \dots \right] \\ A_{D+D_a} &= \frac{b_{3/2}^0 \mu_a r}{n^2 \rho^3} \left[ 1 + \frac{19}{12} \frac{N}{n} + \frac{19}{12} \frac{N_a}{n} + \frac{137}{72} \frac{N_a^2}{n^2} + \frac{137}{36} \frac{NN_a}{n^2} + \frac{895}{432} \frac{N_a^3}{n^3} + \dots \right] \\ A_{2D \pm k\Theta_a} &= -\frac{1}{4} \frac{b_{3/2}^k \mu_a r}{n^2 \rho^3} \left[ \frac{4n-2N \pm k\Theta_a}{2n-2N \pm k\Theta_a} \right] \left[ \frac{1}{1 - \frac{8}{3} \frac{N}{n} \pm \frac{4k}{3} \frac{\Theta_a}{n} \left[ 1 - \frac{N}{n} \right] + \frac{k^2}{3} \frac{\Theta_a^2}{n^2} + \frac{11}{6} \frac{N^2}{n^2}} \right] \\ A_{2D_a \pm k\Theta_a} &= -\frac{1}{4} \frac{b_{3/2}^k \mu_a r}{n^2 \rho^3} \left[ \frac{4n-2N_a \pm k\Theta_a}{2n-2N_a \pm k\Theta_a} \right] \left[ \frac{1}{1 - \frac{8}{3} \frac{N_a}{n} \pm \frac{4k}{3} \frac{\Theta_a}{n} \left[ 1 - \frac{N_a}{n} \right] + \frac{k^2}{3} \frac{\Theta_a^2}{n^2} + \frac{4}{3} \frac{N_a^2}{n^2} + \frac{1}{2} \frac{N^2}{n^2}} \right] \\ A_{D+D_a \pm k\Theta_a} &= -\frac{3}{2} \frac{b_{3/2}^k \mu_a r}{n^2 \rho^3} \left[ \frac{4n-N-N_a \pm k\Theta_a}{2n-N-N_a \pm k\Theta_a} \right] \left[ \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \frac{N^2}{n^2} - 4 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{N}{n} - \frac{1}{2} \frac{N_a}{n} \pm \frac{k}{2} \frac{\Theta_a}{n} \right]^2} \right] \\ A_{\Theta_a} &= -\frac{3}{2} \frac{(b_{3/2}^0 + b_{3/2}^2) \mu_a r}{n^2 \rho^3} \left[ 1 + \frac{N_a^2}{n^2} - 2 \frac{NN_a}{n^2} + \dots \right] \\ A_{k\Theta_a} &= -\frac{3}{2} \frac{(b_{3/2}^{k-1} + b_{3/2}^{k+1}) \mu_a r}{n^2 \rho^3} \left[ \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \frac{N^2}{n^2} - k^2 \frac{\Theta_a^2}{n^2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Pour la dernière équation  $k \geq 2$ .

Nous donnons en Tab. B.3, les trois amplitudes maximales ainsi que les fréquences associées, calculées numériquement avec *Mathematica* Wolfram Research (2016) à partir des Eqs. (B.18). Notons que l'amplitude maximale est attribuée à Vénus qui produit un signal périodique avec une oscillation à  $\pm 140$  m sur la distance Terre-Lune. Notons que l'effet de Pluton est deux ordres de grandeur en dessous de celui de Pallas.

## B.5 Précisions requises sur les orbites planétaires

Les Eqs. (B.18) donnant les amplitudes des signaux générés sur la distance Terre-Lune par les planètes et autres corps présentent un grand intérêt. En effet, il devient ainsi possible d'estimer de manière analytique, un seuil de sensibilité sur la distance Terre-Lune relativement aux positions des corps externes.

Tout d'abord, on constate que toutes les amplitudes (B.18) peuvent être simplifiées selon la formulation suivante

$$A_\omega = \frac{C_\omega}{\rho^3},$$

où  $\omega$  désigne la fréquence correspondante à l'amplitude sélectionnée et où  $C_\omega$  est une quantité possédant la dimension d'une longueur à la puissance quatrième. Développons cette équation autour de  $\rho_0$ , correspondant aux valeurs numériques observées qui ont permis de fournir les estimations présentées en Tab. B.3, puis linéarisons. Ceci fait, on trouve l'expression suivante

$$A_\omega = \frac{C_\omega}{\rho_0^3} \left[ 1 - 3 \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right],$$

que l'on réécrit comme

$$\epsilon_\omega = \left| 3A_\omega^{(0)} \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right| \quad \text{avec} \quad \epsilon_\omega = \left| A_\omega - A_\omega^{(0)} \right|, \quad (\text{B.19})$$

où  $A_\omega^{(0)}$  représente l'amplitude calculée pour  $\rho_0$ . Nous avons également introduit la quantité  $\delta\rho$  représentant un déplacement tel que  $\delta\rho \ll \rho_0$ . Ainsi, nous définissons  $\epsilon_\omega$  comme étant la valeur seuil de sensibilité des données LLR, pour la fréquence  $\omega$ .

Ainsi, pour tout corps affichant  $A_\omega^{(0)} \gg \epsilon_\omega$ , nous pouvons déterminer une précision théorique sur leur position à partir de la sensibilité des données LLR. Pour les corps qui présentent une amplitude  $A_\omega^{(0)} \lesssim \epsilon_\omega$ , l'hypothèse de linéarisation des rayons des orbites ( $\delta\rho \ll \rho_0$ ) n'est plus valable. En effet, à partir de l'Eq. (B.19), on déduit  $\delta\rho \gtrsim \rho_0/3$ . Par conséquent, nous laissons de côté les cas de Cérès, Vesta, Pallas et Pluton.

On estime qu'un effet est perceptible si le signal qu'il engendre sur la distance Terre-Lune est supérieur à la précision des observations courantes, c'est à dire  $\epsilon_\omega \gtrsim 1\text{mm}$ . De cette condition, on peut déduire la valeur seuil théorique pour que la variation d'une orbite planétaire soit observable avec le LLR

$$|\delta\rho| \gtrsim \frac{1}{3} \frac{\rho_0}{|A_\omega^{(0)}|} \times 10^{-6} \text{ km}. \quad (\text{B.20})$$

On donne en Tab. B.4 les estimations de  $\delta\rho$  pour chacun des corps utilisés dans cette section.

Corps	Amplitudes ( $m$ )	Fréquences
Vénus (V)	-140.5	$N_V - N$
	-120.7	$2N_V - 2N$
	-99.6	$3N_V - 3N$
Jupiter (J)	-52.8	$N - N_J$
	-36.4	$2n - N - N_J$
	-20.7	$2n - 2N$
Mercure (Me)	-3.9	$2n + N - 3N_{Me}$
	3.7	$2n - 2N_{Me}$
	3.6	$2n + 2N - 4N_{Me}$
Mars (Ma)	-3.4	$N - N_{Ma}$
	-2.7	$2N - 2N_{Ma}$
	-2.0	$3N - 3N_{Ma}$
Saturne (S)	-2.3	$N - N_S$
	1.7	$2n - N - N_S$
	-1.0	$2n - 2N$
Uranus (U)	-0.04	$N - N_U$
	0.03	$2n - N - N_U$
	-0.02	$2n - 2N$
Neptune (N)	-0.02	$N - N_N$
	0.01	$2n - N - N_N$
	0.006	$2N - 2N_N$
Cérès (C)	$-2.5 \cdot 10^{-4}$	$N - N_C$
	$-1.5 \cdot 10^{-4}$	$2N - 2N_C$
	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$2n - N - N_C$
Vesta (Ve)	$-1.4 \cdot 10^{-4}$	$N - N_{Ve}$
	$-1.0 \cdot 10^{-4}$	$2N - 2N_{Ve}$
	$0.8 \cdot 10^{-4}$	$2n - N - N_{Ve}$
Pallas (Pa)	$-5.5 \cdot 10^{-5}$	$N - N_{Pa}$
	$-3.4 \cdot 10^{-5}$	$2N - 2N_{Pa}$
	$-2.0 \cdot 10^{-5}$	$2n - 2N$
Pluton (Pl)	$-7.2 \cdot 10^{-7}$	$N - N_{Pl}$
	$5.3 \cdot 10^{-7}$	$2n - N - N_{Pl}$
	$-3.0 \cdot 10^{-7}$	$2n - 2N$

TABLE B.3 – Table des trois amplitudes maximales et des fréquences associées à l'effet perturbateur de chaque corps extérieur sur la distance Terre-Lune. On a supposé un modèle simplifié dans lequel les corps perturbateurs orbitent dans l'écliptique. De plus, on rappelle que chaque effet perturbateur est évalué de manière individuelle.

Corps	$\delta\rho$ [km]	$\delta\rho/R_a$ [%]
Soleil	$1.8 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-8}$
Vénus	$3.7 \times 10^{+2}$	$3.5 \times 10^{-4}$
Jupiter	$5.1 \times 10^{+3}$	$6.7 \times 10^{-4}$
Mercure	$1.2 \times 10^{+4}$	$2.2 \times 10^{-2}$
Mars	$2.5 \times 10^{+4}$	$1.1 \times 10^{-2}$
Saturne	$2.1 \times 10^{+5}$	$1.5 \times 10^{-2}$
Uranus	$2.4 \times 10^{+7}$	0.8
Neptune	$7.4 \times 10^{+7}$	1.7

TABLE B.4 – Table des valeurs théoriques (*cf.* Eq. (B.20)) des variations planétaires ( $\delta\rho$  [km]), générant une modification du signal sur la distance Terre-Lune supérieure au millimètre. En troisième colonne est calculée la précision relative requise sur les orbites des corps.

Sans surprise, on constate que le déplacement minimal observable par LLR est causé par le Soleil. Ainsi, un déplacement du barycentre Terre-Lune de 18 *m* entraînerait une modification de la distance Terre-Lune de 1 *mm*. Ainsi, pour les besoins d'analyse des données LLR, on constate qu'il est important de modéliser l'orbite du barycentre Terre-Lune avec une précision relative de  $10^{-10}$ . Viennent ensuite les orbites de Vénus et Jupiter qui réclament une précision relative de  $10^{-6}$ . Deux ordres de grandeurs en dessous on retrouve les orbites de Mercure, Mars et Saturne qui réclament une précision relative de  $10^{-4}$ .

Enfin, notons que les précisions théoriques calculées en Tab. B.4 ne tiennent pas compte des effets résonants entre planètes. On rappelle que chaque perturbation planétaire sur la distance Terre-Lune a été traitée de manière indépendante, par conséquent l'estimation (B.20) n'est plus valable sur des temps longs.



## Annexe C

# Perturbations engendrées par les corps non-sphériques

### Sommaire

---

C.1 Introduction . . . . .	149
C.2 Potentiels non-sphériques . . . . .	149
C.3 Potentiel terrestre . . . . .	152
C.4 Potentiel solaire . . . . .	160
C.5 Potentiel lunaire . . . . .	164

---

### C.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'évaluation des effets de non-sphéricité sur la distance Terre-Lune. Comme mentionné en Sec. 2.4, nous nous intéressons aux potentiels du Soleil, de la Lune et de la Terre. Dans un premier temps, nous rappelons quelques concepts sur les potentiels non-sphériques et démontrons comment développer le potentiel aux premiers ordres. Nous présentons ensuite le cadre théorique simplifié qui va nous servir à établir le premier ordre des effets perturbatifs à courtes périodes. Pour finir, nous appliquons ce cadre théorique à nos trois corps non-sphériques en commençant par la Terre.

### C.2 Potentiels non-sphériques

En mécanique newtonienne, l'équation de Poisson est donnée par

$$\Delta\varphi = 4\pi\mathcal{G}\rho, \tag{C.1}$$

où  $\rho$  est la densité de masse du corps étendu.

Par analogie avec ce qui est fait en électrostatique, on déduit immédiatement que la solution de l'Eq. (C.1) se présente sous la forme

$$\varphi = -\mathcal{G} \int \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\|\mathbf{R} - \mathbf{r}\|} dV, \tag{C.2}$$

où  $\mathbf{R}$  est le vecteur position mené du centre du repère au point d'observation, et  $\mathbf{r}$  représente le vecteur mené du centre du repère à l'élément de masse  $dM(\equiv \rho dV)$ . Lorsque le

point d'observation est situé à des distances grandes devant le rayon du corps étendu on peut développer  $\|\mathbf{R} - \mathbf{r}\|^{-1}$  en série de Taylor, telle que

$$\frac{1}{\|\mathbf{R} - \mathbf{r}\|} = \frac{1}{R} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\mathbf{r} \cdot \nabla)^l \frac{1}{R}, \quad (\text{C.3})$$

où nous avons posé  $R = \|\mathbf{R}\|$ .

### Les tenseurs multipolaires

En insérant alors (C.3) dans (C.2), on trouve l'expression suivante

$$\varphi = -\mathcal{G} \left( \frac{M}{R} - \partial^i \frac{1}{R} \int \rho r_i dV + \frac{1}{2} \partial^i \partial^j \frac{1}{R} \int \rho r_i r_j dV + \dots \right). \quad (\text{C.4})$$

En se plaçant dans un repère lié au centre de masse du corps étendu, on conçoit que le deuxième terme du développement (C.4), appelé moment dipolaire, s'annule. En effet, la répartition de masse est la même dans toutes les directions, ainsi en prenant l'intégrale sur tout le volume le deuxième terme disparaît. Concernant le troisième terme, il est possible d'opérer la transformation suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial^i \partial^j \frac{1}{R} \int \rho r_i r_j dV &= \frac{1}{6} \partial^i \partial^j \frac{1}{R} \left[ \int \rho (3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) dV + \int \rho (r^2 \delta_{ij}) dV \right] \\ &= \frac{1}{6} \partial^i \partial^j \frac{1}{R} \int \rho (3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) dV + \frac{1}{6} \delta_{ij} \partial^i \partial^j \frac{1}{R} \int \rho r^2 dV, \end{aligned}$$

or nous savons d'après l'équation de Laplace, que  $\Delta R^{-1} = 0$ . Ainsi, en réécrivant le Laplacien en notation indicielle on a  $\Delta = \partial_i \partial^i = \delta_{ij} \partial^i \partial^j$ , d'où on conclut que  $\delta_{ij} \partial^i \partial^j R^{-1} = 0$ . On trouve alors

$$\varphi = -\mathcal{G} \left( \frac{M}{R} + \frac{1}{6} D_{ij} \partial^i \partial^j \frac{1}{R} + \dots \right), \quad (\text{C.5})$$

où nous avons posé

$$D_{ij} = \int \rho (3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) dV. \quad (\text{C.6})$$

Ce terme est appelé tenseur du moment quadripolaire des masses et peut être comparé au tenseur d'inertie défini par la relation (*cf.* Landau et Lifshitz (1969))

$$I_{ij} = \int \rho (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dV. \quad (\text{C.7})$$

On trouve alors les relations évidentes

$$D_{ij} = I_k^k \delta_{ij} - 3I_{ij}. \quad (\text{C.8})$$

Notons que le tenseur (C.6) est de trace nulle,  $\delta^{ij} D_{ij} = D_i^i = 0$  car  $\delta_i^i = 3$ . De plus, on déduit que  $\partial^i \partial^j R^{-1} = (3\hat{R}^i \hat{R}^j - \delta^{ij}) R^{-3}$  où nous venons de poser  $\hat{R}^i$  la composante  $i$  du vecteur unitaire dirigée selon  $R^i$ . Ainsi on peut écrire (C.5) sous la forme

$$\varphi = -\mathcal{G} \left( \frac{M}{R} + \frac{1}{2} \frac{D_{ij} \hat{R}^i \hat{R}^j}{R^3} + \dots \right). \quad (\text{C.9})$$

Il est possible d'étendre le développement du potentiel  $\varphi$ , le  $l$ -ième terme faisant apparaître un tenseur d'ordre  $l$ . Une discussion plus détaillée sur le sujet peut être trouvée dans Landau et Lifshitz (1975) ou encore Blanchet et Damour (1986), Damour *et al.* (1991) ou Poisson et Will (2014) pour l'introduction des tenseurs symétriques et sans trace.

### Les harmoniques sphériques

Il est possible de reformuler l'Eq. (C.3), en introduisant les polynômes de Legendre une fois l'expression  $\|\mathbf{R} - \mathbf{r}\|^{-1}$  écrite en terme de l'angle  $\chi$  sous-tendu entre les vecteurs  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{r}$ . Ainsi,

$$\frac{1}{\|\mathbf{R} - \mathbf{r}\|} = \frac{1}{R} \left(1 - 2\alpha \cos \chi + \alpha^2\right)^{-1/2},$$

où nous venons de poser  $\alpha = r/R$ .

Un développement en série entière permet de retrouver les fonctions de Legendre et l'équation précédente se note alors

$$\frac{1}{\|\mathbf{R} - \mathbf{r}\|} = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{+\infty} \alpha^l P_{l0}(\cos \chi). \quad (\text{C.10})$$

En introduisant pour les vecteurs  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{r}$ , les coordonnées sphériques suivantes

$$\begin{cases} X = R \cos \Phi \cos \Lambda \\ Y = R \cos \Phi \sin \Lambda \\ Z = R \sin \Phi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = r \cos \phi \cos \lambda \\ y = r \cos \phi \sin \lambda \\ z = r \sin \phi, \end{cases}$$

l'expression du cosinus de l'angle  $\chi$  peut-être changée telle que

$$\cos \chi = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{rR} = \sin \Phi \sin \phi + \cos \Phi \cos \phi \cos (\Lambda - \lambda).$$

D'après quelques formules fondamentales des fonctions de Legendre, il vient

$$P_{l0}(\cos \chi) = \sum_{m=0}^l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\sin \Phi) P_{lm}(\sin \phi) \cos [m(\Lambda - \lambda)]. \quad (\text{C.11})$$

La valeur du potentiel du corps étendu au point d'observation  $\mathbf{R}$  exprimé en coordonnées sphériques, est obtenue en insérant alors l'Eq. (C.11) dans l'Eq. (C.10), puis en injectant le tout dans (C.2). L'expression ainsi trouvée est la formulation bien connue du potentiel développé en harmoniques sphériques :

$$\varphi(R, \Phi, \Lambda) = -\frac{\mathcal{G}M}{R} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_e}{R}\right)^l P_{lm}(\sin \Phi) [C_{lm} \cos m\Lambda + S_{lm} \sin m\Lambda], \quad (\text{C.12})$$

avec

$$\begin{cases} C_{lm} \\ S_{lm} \end{cases} = (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{1}{M a_e^l} \int r^l P_{lm}(\sin \phi) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (m\lambda) dM, \quad (\text{C.13})$$

où  $a_e$  est le rayon équatorial du corps central.

Il est possible de définir ce potentiel en fonction des coordonnées cartésiennes en introduisant les fonctions précédemment définies en Eq. (2.29). Ainsi l'expression du potentiel devient

$$\varphi(X, Y, Z) = -\mathcal{G}M \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \frac{a_e^l}{R^{2l+1}} [C_{lm} \Theta_{lm}^{(c)}(\mathbf{R}) + S_{lm} \Theta_{lm}^{(s)}(\mathbf{R})], \quad (\text{C.14})$$

Cette formulation du potentiel a été présentée en Sec. 2.4.

### C.3 Potentiel terrestre

Pour évaluer les effets des harmoniques terrestres sur le vecteur Terre-Lune, nous nous plaçons dans un repère lié à l'équateur moyen de la Terre. Nous supposons en première approximation que les mouvements de précession et de nutation (*cf.* Sec. 2.6) sont négligeables. Par conséquent, le problème étudié ici revient à évaluer l'impact sur l'orbite lunaire d'une Terre non-sphérique dont l'axe de rotation rapide demeure fixe dans le temps.

#### Repères utilisés

Nous utilisons le système de coordonnées inertiel  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  qui s'aligne sur une position moyenne de l'équateur terrestre à une date donnée, (*e.g.* J2000). Par définition, l'axe unitaire  $\hat{Z}$  est colinéaire à l'axe de rotation de la Terre, et l'axe  $\hat{X}$  pointe dans la direction du Soleil lors du passage au point vernal (situé sur la ligne des équinoxes au niveau du nœud ascendant<sup>1</sup>). On définit également un autre système de coordonnées noté  $(\hat{\rho}, \hat{\tau}, \hat{\sigma})$ , non-inertiel et tournant avec la Lune. On choisit  $\hat{\rho}$  aligné dans la direction Terre-Lune,  $\hat{\tau}$  perpendiculaire à  $\hat{\rho}$  et aligné selon la vitesse transversale de l'orbite circulaire de la Lune et enfin  $\hat{\sigma}$  perpendiculaire au plan orbital lunaire, tel que  $(\hat{\rho}, \hat{\tau}, \hat{\sigma})$  forment un trièdre direct (*cf.* Fig. C.1). On définit alors  $\mathbf{B}$ , la matrice permettant de passer du système de coordonnées inertiel au système de coordonnées tournant avec l'orbite lunaire, telle que

$$\mathbf{B} : (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) \longrightarrow (\hat{\rho}, \hat{\tau}, \hat{\sigma}),$$

avec  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\hat{\sigma}}(nt + \omega) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\rho}}(I) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\sigma}}(\Omega)$ , où  $\mathbf{B}_a(\gamma)$  est une matrice de rotation directe autour de l'axe  $\mathbf{a}$  et d'angle  $\gamma$ .

On obtient alors, les relations qui déterminent les composantes des vecteurs  $\hat{X}, \hat{Y}$  et  $\hat{Z}$  dans le repère tournant, en appliquant la transposée de  $\mathbf{B}$  aux vecteurs unitaires  $\hat{\rho}, \hat{\tau}$  et  $\hat{\sigma}$ . On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \hat{\rho} [\cos(nt + \omega) \cos \Omega - \sin(nt + \omega) \cos I \sin \Omega] \\ &\quad - \hat{\tau} [\sin(nt + \omega) \cos \Omega + \cos(nt + \omega) \cos I \sin \Omega] \\ &\quad + \hat{\sigma} \sin I \sin \Omega, \end{aligned} \tag{C.15a}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= \hat{\rho} [\cos(nt + \omega) \sin \Omega + \sin(nt + \omega) \cos I \cos \Omega] \\ &\quad - \hat{\tau} [\sin(nt + \omega) \sin \Omega - \cos(nt + \omega) \cos I \cos \Omega] \\ &\quad - \hat{\sigma} \sin I \cos \Omega, \end{aligned} \tag{C.15b}$$

$$\hat{Z} = \hat{\rho} \sin(nt + \omega) \sin I + \hat{\tau} \cos(nt + \omega) \sin I + \hat{\sigma} \cos I. \tag{C.15c}$$

Dans les applications, nous considérerons les angles  $\Omega$  et  $I$  constants. En effet, la valeur numérique observée de  $I$  oscille autour de  $23.4^\circ$  (inclinaison de l'équateur sur l'écliptique notée  $\epsilon$ ) avec une amplitude de  $\pm 5.1^\circ$ . En effet, le plan orbital lunaire est incliné d'environ  $5.1^\circ$  sur l'écliptique qui lui-même est incliné d'environ  $23.4^\circ$  relativement à l'équateur. Par conséquent, lorsque le plan orbital de la Lune est compris entre l'écliptique et l'équateur (*cf.* Fig. C.2),  $I \simeq (23.4 - 5.1)^\circ$  et inversement,  $I \simeq (23.4 + 5.1)^\circ$  lorsque la configuration est telle que c'est l'écliptique qui est compris entre le plan orbital et l'équateur (typiquement lorsque le point  $N$  de la Fig. C.2 a été déplacé de  $\pi$  après 9.3 ans.).

1. Instant où la position apparente du Soleil passe dans l'hémisphère nord de l'équateur céleste. Le plan de l'écliptique est alors situé au dessus du plan de l'équateur céleste.

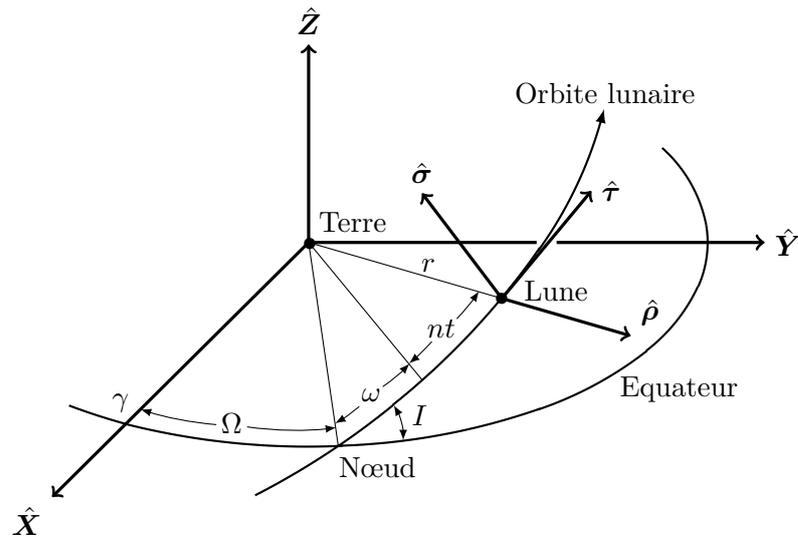


FIGURE C.1 – Schéma représentant l'orientation de l'ellipse orbitale de la Lune relativement à un repère inertiel  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  centré sur la Terre. Le plan  $(\hat{X}, \hat{Y})$  est fixe et confondu avec l'équateur moyen à une date donnée (J2000). La direction des équinoxes (intersection entre l'écliptique et l'équateur) est repérée par la lettre  $\gamma$ . La longitude du nœud dans l'équateur est repérée par l'angle  $\Omega$  et l'inclinaison du plan orbital lunaire sur l'équateur est repérée par l'angle  $I$ .

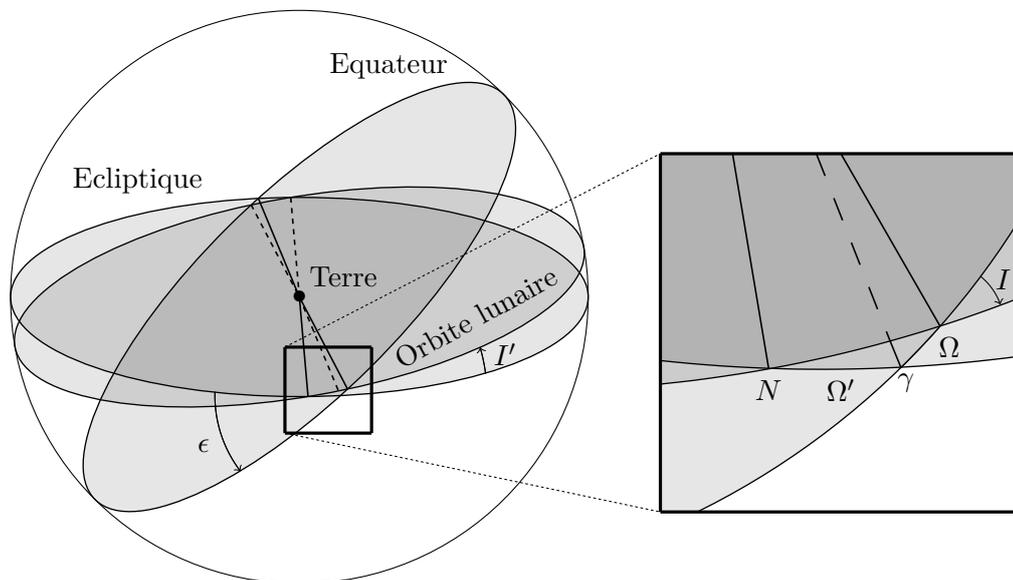


FIGURE C.2 – Schéma représentant l'intersection des plans de l'équateur de l'orbite lunaire à une date donnée, et de l'écliptique avec la sphère céleste centrée sur la Terre ( $T$ ). L'angle formé entre le plan de l'écliptique et l'équateur est  $\epsilon \sim 23.4^\circ$  et l'angle sous-tendu entre les plans de l'écliptique et de l'orbite lunaire est  $I' \sim 5.1^\circ$ . Le point  $N$  sur la partie zoomée représente le nœud de l'orbite lunaire (intersection entre l'ellipse orbitale de la Lune et l'écliptique) dont le mouvement de précession s'effectue en 18.6 ans. Les angles  $\Omega$  et  $I$  ont été définis en Fig. C.1 et  $\Omega' = \widehat{\gamma TN}$  représente la longitude du nœud de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique.

Concernant l'angle  $\Omega$ , nous le supposons constant et nul. En effet, il représente la libration du nœud de l'orbite lunaire sur l'équateur. Or, le mouvement de précession du nœud a lieu dans l'écliptique pour une période d'environ 18,6 ans. Or, l'orbite lunaire est inclinée de  $5^\circ$  sur l'écliptique qui présente lui-même une inclinaison de  $23.4^\circ$  relativement à l'équateur, on estime que  $\Omega$  libre autour de  $0^\circ$  (lorsque  $N$  et  $\gamma$  sont superposés) avec une amplitude de  $\pm 5.1^\circ / \sin 23.4^\circ \simeq \pm 13^\circ$  (lorsque l'angle  $\Omega' \simeq \pi/2$  et  $3\pi/2$ , soit 4.65 ou 13.95 ans après la configuration montrée en Fig. C.2).

Par conséquent, les Eqs. (C.15) peuvent être simplifiées telles que

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\rho} \cos(nt + \omega) - \hat{\tau} \sin(nt + \omega), \quad (\text{C.16a})$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\rho} \sin(nt + \omega) \cos I + \hat{\tau} \cos(nt + \omega) \cos I - \hat{\sigma} \sin I, \quad (\text{C.16b})$$

$$\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\rho} \sin(nt + \omega) \sin I + \hat{\tau} \cos(nt + \omega) \sin I + \hat{\sigma} \cos I. \quad (\text{C.16c})$$

Nous n'avons pas pris la moyenne des Eqs. (C.15), mais avons supposé que la Lune se déplaçait sur une orbite fixe en dehors de l'équateur. Nous avons ensuite choisi son orientation de telle manière que les angles  $\Omega$  et  $I$  représentent les valeurs moyennes des angles observés. En d'autres termes, nous ne regardons pas les effets séculaires, seulement les effets périodiques à très court terme.

Afin d'étudier les effets des harmoniques  $m \neq 0$  de la Terre, nous définissons un nouveau repère non-inertiel, tournant avec la rotation propre de la Terre. Nous le notons  $(\hat{\mathbf{X}}', \hat{\mathbf{Y}}', \hat{\mathbf{Z}}')$ , et le choisissons tel que son origine soit superposée au centre de masse de la Terre et tel que ses axes soient confondus avec les moments principaux d'inertie de la Terre. Ainsi, par définition, nous avons  $\hat{\mathbf{Z}} \equiv \hat{\mathbf{Z}}'$ , et le passage du repère inertiel au repère tournant avec la rotation terrestre se fait par l'intermédiaire de la matrice  $\mathbf{B}_{\hat{\mathbf{Z}}}(n_{\oplus}t + \vartheta)$ , où  $n_{\oplus}$  ( $\simeq 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ ) représente la fréquence de rotation et  $\vartheta$  est la longitude d'un point fixe appartenant à la Terre et repéré depuis l'axe  $\hat{\mathbf{X}}$  à une date donnée.  $\vartheta$  est assimilable au temps sidéral de Greenwich à la date de référence choisie. Le passage du repère tournant avec l'orbite lunaire au repère tournant avec la rotation terrestre,  $(\hat{\rho}, \hat{\tau}, \hat{\sigma}) \rightarrow (\hat{\mathbf{X}}', \hat{\mathbf{Y}}', \hat{\mathbf{Z}}')$  est défini à partir de la composition suivante  $\mathbf{B}_{\hat{\sigma}}(n_{\oplus}t + \vartheta) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\sigma}}(-\Omega) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\rho}}(-I) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\sigma}}(-nt - \omega)$ . On déduit ainsi, les relations suivantes

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}' &= \frac{\hat{\rho}}{2} \left\{ \eta \cos \left[ (n_{\oplus} - n)t + \vartheta - \omega \right] + \bar{\eta} \cos \left[ (n_{\oplus} + n)t + \vartheta + \omega \right] \right\} \\ &+ \frac{\hat{\tau}}{2} \left\{ \eta \sin \left[ (n_{\oplus} - n)t + \vartheta - \omega \right] - \bar{\eta} \sin \left[ (n_{\oplus} + n)t + \vartheta + \omega \right] \right\} \\ &- \hat{\sigma} \sin I \sin(n_{\oplus}t + \vartheta), \end{aligned} \quad (\text{C.17a})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}}' &= -\frac{\hat{\rho}}{2} \left\{ \eta \sin \left[ (n_{\oplus} - n)t + \vartheta - \omega \right] + \bar{\eta} \sin \left[ (n_{\oplus} + n)t + \vartheta + \omega \right] \right\} \\ &+ \frac{\hat{\tau}}{2} \left\{ \eta \cos \left[ (n_{\oplus} - n)t + \vartheta - \omega \right] - \bar{\eta} \cos \left[ (n_{\oplus} + n)t + \vartheta + \omega \right] \right\} \\ &- \hat{\sigma} \sin I \cos(n_{\oplus}t + \vartheta), \end{aligned} \quad (\text{C.17b})$$

$$\hat{\mathbf{Z}}' = \hat{\rho} \sin I \sin(nt + \omega) + \hat{\tau} \sin I \cos(nt + \omega) + \hat{\sigma} \cos I, \quad (\text{C.17c})$$

où nous venons de poser  $\eta = 1 + \cos I$  et  $\bar{\eta} = 1 - \cos I$ . On s'assure alors que  $\hat{\mathbf{Z}} \equiv \hat{\mathbf{Z}}'$ .

### Notations et définitions

Les lettres latines capitales ( $I, J, K, \dots$ ) font référence au repère inertiel et par opposition les lettres latines minuscules ( $i, j, k, \dots$ ) dénotent l'appartenance au repère tournant avec l'orbite lunaire. Les lettres latines minuscules ( $a, b, c, \dots$ ) font, quant à elles, référence au repère tournant avec la rotation propre de la Terre.

Les composantes du vecteur Terre-Lune,  $\mathbf{r}$ , peuvent ainsi s'écrire de différentes manières. Dans le repère inertiel nous avons

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{X}} + y\hat{\mathbf{Y}} + z\hat{\mathbf{Z}} \quad \text{soit} \quad r^J = x\hat{X}^J + y\hat{Y}^J + z\hat{Z}^J \quad (\text{C.18})$$

et

$$\mathbf{r} = r\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \text{soit} \quad r^j = r\hat{\rho}^j, \quad (\text{C.19})$$

dans le repère mobile.

Grâce aux notations indicielles, remarquons que  $z = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{Z}}$ , se note  $z = r^J \hat{Z}_J$ , avec  $\hat{Z}_J$  la  $J$ ème composante de  $\hat{\mathbf{Z}}$  qui est donc exprimé dans le repère inertiel avec  $\hat{Z}_J = (0, 0, 1)$ . Cette même composante  $z$  peut être également notée  $z = r^j \hat{Z}_j$ . En effet, en multipliant les deux membres de l'Eq. (C.18) par  $B_J^j$ , où  $B_J^j$  représente la matrice de passage du repère inertiel au repère mobile :  $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}}) \longrightarrow (\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ , on obtient les équations suivantes

$$B_J^j r^J = r^j = r\hat{\rho}^j \quad (\text{C.20a})$$

$$= xB_J^j \hat{X}^J + yB_J^j \hat{Y}^J + zB_J^j \hat{Z}^J \quad (\text{C.20b})$$

$$= x\hat{X}^j + y\hat{Y}^j + z\hat{Z}^j, \quad (\text{C.20c})$$

où nous avons introduit (C.19) dans (C.20a). Une fois multipliée par  $\hat{Z}_j$ , l'Eq. (C.20c) permet bien de retrouver  $z = r^j \hat{Z}_j$ . Cependant,  $\hat{Z}_j$  représente maintenant la  $j$ ème composante de  $\hat{\mathbf{Z}}$  exprimé dans le repère mobile avec (*cf.* Eq. (C.15c))

$$\hat{Z}_j = \hat{\rho}_j \sin(nt+\omega) \sin I + \hat{\tau}_j \cos(nt+\omega) \sin I + \hat{\sigma}_j \cos I, \quad (\text{C.21})$$

avec  $\hat{\rho}_j = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{\tau}_j = (0, 1, 0)$  et  $\hat{\sigma}_j = (0, 0, 1)$ . L'expression de  $z$  peut ainsi être déterminée à partir des Eqs. (C.20a) et (C.21), soit

$$z = r\hat{\rho}^j \hat{Z}_j = r \sin(nt+\omega) \sin I.$$

En plus des notations indicielles, l'étude des effets du potentiel terrestre sur la distance Terre-Lune nécessite la connaissance des valeurs numériques des coefficients de Stokes de la Terre. Pour cela, nous utilisons les quantités calculées par Chen *et al.* (2014). Dans cette Ref., les coefficients sont normalisés ( $\bar{C}_{lm}$ , et  $\bar{S}_{lm}$ ). Le coefficient de normalisation est donné *e.g.* dans les conventions IERS 2010 (Petit *et al.*, 2010). Nous retenons pour le degré 2, les quelques valeurs suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{20} = \sqrt{5} \bar{C}_{20} \\ C_{21} = \sqrt{\frac{5}{3}} \bar{C}_{21} \\ C_{22} = \sqrt{\frac{5}{12}} \bar{C}_{22}, \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{20} \simeq 2.24 \bar{C}_{20} \\ C_{21} \simeq 1.29 \bar{C}_{21} \\ C_{22} \simeq 0.65 \bar{C}_{22}. \end{array} \right. \quad (\text{C.22})$$

Les coefficients numériques restent identiques pour les  $S_{2m}$  car les quantités de normalisation ne dépendent que du degré et de l'ordre de l'harmonique.

### Effet du moment quadripolaire

En reprenant l'Eq. (2.30), il est possible de déduire l'accélération inertielle (notée  $a_{nm}^J$ ) d'un corps ponctuel perturbé par le potentiel de degré  $l$  et d'ordre  $m$  d'un autre corps central étendu. L'application au cas du système Terre-Lune pour l'harmonique  $l = 2$  et  $m = 0$ , fournit la relation suivante exprimée dans l'équateur terrestre<sup>2</sup>

$$a_{20}^J = -\frac{3Q_2 r^J}{2r^5} - \frac{3Q_2 z \delta^{J\hat{Z}}}{r^5} + \frac{15Q_2 z^2 r^J}{2r^7}, \quad (\text{C.23})$$

où nous avons posé  $Q_2 = J_2 \mu a_e^2$  avec  $\mu$  la masse de la Terre et  $a_e$  son rayon équatorial.  $J_2 = -C_{20}$  est appelé moment quadripolaire de la Terre.

Le premier terme de l'expression (C.23) devient un terme purement radial une fois multiplié par  $B_J^j$  (cf. Eq. (C.20a)). Il contribue donc à l'évaluation de la fréquence de l'orbite circulaire. L'équation simplifiée du mouvement (on ne tient pas compte des perturbations des autres corps excepté l'effet radial du Soleil) peut être exprimée sous la forme

$$\ddot{r}^J + n^2 r^J = a_{20}^J, \quad (\text{C.24})$$

où nous avons redéfini

$$a_{20}^J = -\frac{3Q_2 z \hat{Z}^J}{r^5} + \frac{15Q_2 z^2 r^J}{2r^7}, \quad (\text{C.25})$$

et où,  $n$  est la fréquence de l'orbite circulaire définie par

$$n^2 = \frac{\mu}{r^3} - \frac{N^2}{2} + \frac{3Q_2}{2r^5}. \quad (\text{C.26})$$

Afin d'évaluer l'effet de la perturbation  $\mathbf{a}_{20}$ , sur la distance Terre-Lune nous déterminons les composantes radiale et tangentielle de l'Eq. (C.25), en appliquant la matrice de passage  $B_J^j$ . La perturbation s'écrit alors  $a_{20}^j$ . La partie radiale est obtenue en faisant la projection  $a_{20}^{\hat{\rho}} = a_{20}^j \hat{\rho}_j$ , soit

$$a_{20}^{\hat{\rho}} = \frac{9Q_2}{4r^4} \sin^2 I - \frac{9Q_2}{4r^4} \sin^2 I \cos(2nt + 2\omega).$$

Par conséquent, le premier terme de  $a_{20}^{\hat{\rho}}$  va contribuer à l'évaluation de la fréquence de l'orbite circulaire à hauteur de  $-\frac{9}{4}Q_2 \sin^2 I / r^5$ . Cette contribution ainsi que le troisième terme de l'Eq. (C.26) sont totalement négligeables. Ils sont en effet inférieurs de 5 à 6 ordres de grandeurs comparativement au terme en  $N^2/2$ . La fréquence naturelle de la perturbation radiale devient alors identique à l'Eq. (B.7).

La composante tangentielle est donnée par  $a_{20}^{\hat{\tau}} = a_{20}^j \hat{\tau}_j$ , soit

$$a_{20}^{\hat{\tau}} = -\frac{3Q_2}{2r^4} \sin^2 I \sin(2nt + 2\omega).$$

À partir des composantes radiale et tangentielle, l'oscillation engendrée sur la distance Terre-Lune par le moment quadripolaire du potentiel terrestre peut être déduite de l'Eq. (A.27). On trouve après simplifications

$$x_{20}(2n, 2\omega; t) \simeq \frac{1}{4} \frac{Q_2 \sin^2 I}{n^2 r^4} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{N^2}{n^2} \right] \cos(2nt + 2\omega). \quad (\text{C.27})$$

2. Normalement, l'Eq. (2.30), doit être exprimée dans le repère lié au corps, en l'occurrence la Terre. Cependant, pour l'harmonique (2,0),  $a_{20}^a$  et  $a_{20}^J$  ( $= B_a^J a_{20}^a = [\mathbf{B}_{\hat{Z}}(n_{\oplus} t + \vartheta)]_a^J a_{20}^a$ ) sont parfaitement identiques puisque la matrice  $B_a^J$  laisse inchangé  $\delta^{J\hat{Z}}$  dans l'Eq. (C.23), car les axes  $\hat{Z}$  et  $\hat{Z}'$  sont confondus.

L'amplitude est évaluée à  $4.1J_2$  km, soit

$$x_{20}(2n, 2\omega; t) \simeq 4.5 \cos(2nt + 2\omega) \text{ m},$$

avec  $J_2 \simeq 1.08 \times 10^{-3}$  d'après Folkner *et al.* (2014).

Cette amplitude étant supérieure au centimètre, la modélisation du moment quadripolaire terrestre est donc primordiale pour l'obtention d'une éphéméride lunaire précise au centimètre. Nous rappelons une fois de plus que l'oscillation (C.27) ne tient compte que des courtes périodes; les effets séculaires interviennent sur la longitude lunaire et se moyennent sur la distance radiale (Chapront-Touze, 1982). Notons que la fréquence de rotation propre de la Terre n'intervient pas dans l'expression (C.27). La modélisation de harmoniques zonales ne nécessite donc aucunement l'intervention des fréquences liées à la rotation propre des corps étendus.

### Effet de l'harmonique (2,1)

De même qu'au paragraphe précédent, l'Eq. (2.30) permet de déterminer l'accélération perturbatrice agissant sur le vecteur Terre-Lune et induite par l'harmonique  $l = 2$  et  $m = 1$  du potentiel terrestre. On rappelle que cette accélération inertielle est donnée dans le repère lié au corps étendu, en l'occurrence la Terre. Après calculs, on trouve

$$a_{21}^a = \frac{3Q_{21}^{(c)}}{r^5} \left[ z\delta^a \hat{X}' + x\delta^a \hat{Z}' - \frac{5xzr^a}{r^2} \right] + \frac{3Q_{21}^{(s)}}{r^5} \left[ z\delta^a \hat{Y}' + y\delta^a \hat{Z}' - \frac{5yzr^a}{r^2} \right], \quad (\text{C.28})$$

où nous avons posé  $Q_{21}^{(c)} = C_{21}\mu a_e^2$  et  $Q_{21}^{(s)} = S_{21}\mu a_e^2$ .

L'application de la matrice  $B_a^j$  à l'Eq. (C.28) permet d'exprimer les composantes de l'accélération ( $a_{21}^j$ ) dans le repère tournant avec l'orbite lunaire. Ceci fait, les composantes des vecteurs  $\hat{X}'^{ij}$  et  $\hat{Y}'^{ij}$  sont introduites dans l'équation, en plus de celles du vecteur  $\hat{Z}'^{ij}$  qui n'évolue qu'avec le moyen mouvement lunaire (*cf.* Eq. (C.17c)). En revanche, les composantes  $\hat{X}'^{ij}$  et  $\hat{Y}'^{ij}$  n'évoluent pas seulement avec  $n$ , mais également avec la fréquence de rotation terrestre (*cf.* Eqs. (C.17a) et (C.17b)). En conséquence, si les amplitudes des signaux générés sur la distance Terre-Lune par l'harmonique (2,1) du potentiel terrestre sont suffisamment importantes, la fréquence de rotation propre de la Terre ne pourra être négligée.

Après projections sur  $\hat{\rho}_j$  et  $\hat{\tau}_j$  on trouve les deux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a_{21}^{\hat{\rho}} &= -\frac{9}{4} \frac{Q_{21}^{(s)} \sin I}{r^4} [\eta - \bar{\eta}] \cos(n_{\oplus} t + \vartheta) - \frac{9}{4} \frac{Q_{21}^{(c)} \sin I}{r^4} [\eta - \bar{\eta}] \cos\left(n_{\oplus} t + \vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{9}{4} \frac{Q_{21}^{(s)} \eta \sin I}{r^4} \cos\left[(n_{\oplus} - 2n)t + \vartheta - 2\omega\right] + \frac{9}{4} \frac{Q_{21}^{(c)} \eta \sin I}{r^4} \cos\left[(n_{\oplus} - 2n)t + \vartheta - 2\omega - \frac{\pi}{2}\right] \\ &\quad - \frac{9}{4} \frac{Q_{21}^{(s)} \bar{\eta} \sin I}{r^4} \cos\left[(n_{\oplus} + 2n)t + \vartheta + 2\omega\right] - \frac{9}{4} \frac{Q_{21}^{(c)} \bar{\eta} \sin I}{r^4} \cos\left[(n_{\oplus} + 2n)t + \vartheta + 2\omega - \frac{\pi}{2}\right], \\ a_{21}^{\hat{\tau}} &= -\frac{3}{2} \frac{Q_{21}^{(s)} \eta \sin I}{r^4} \sin\left[(n_{\oplus} - 2n)t + \vartheta - 2\omega\right] + \frac{3}{2} \frac{Q_{21}^{(c)} \eta \sin I}{r^4} \sin\left[(n_{\oplus} - 2n)t + \vartheta - 2\omega + \frac{\pi}{2}\right] \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{Q_{21}^{(s)} \bar{\eta} \sin I}{r^4} \sin\left[(n_{\oplus} + 2n)t + \vartheta + 2\omega\right] + \frac{3}{2} \frac{Q_{21}^{(c)} \bar{\eta} \sin I}{r^4} \sin\left[(n_{\oplus} + 2n)t + \vartheta + 2\omega + \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

La fréquence de l'orbite circulaire conserve la même expression que (C.26), sans son troisième terme qui est négligé. La fréquence naturelle de la perturbation radiale est par conséquent, toujours donnée par l'Eq. (B.7).

On déduit alors, le signal sur la distance Terre-Lune créé par le terme oscillant en  $n_{\oplus}$  et de phase  $\vartheta$ . L'autre terme de même fréquence mais de phase  $\vartheta - \frac{\pi}{2}$ , fournit une différence de phase entre la partie radiale et tangentielle de  $\delta\phi = \frac{\pi}{2}$  (cf. Eq. (A.23)). Par conséquent, à partir de l'expression générale (A.26) et en utilisant l'Eq. (A.24) pour  $\delta\phi = \frac{\pi}{2}$ , on trouve une oscillation donnée par un terme en sinus. À partir d'un raisonnement analogue, on peut déduire les signaux engendrés par tous les autres termes. L'expression générale s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} x_{21}(t) = & A_{n_{\oplus},\vartheta} \cos(n_{\oplus}t + \vartheta) + B_{n_{\oplus},\vartheta} \sin(n_{\oplus}t + \vartheta) \\ & + A_{n_{\oplus}-2n,\vartheta-\omega} \cos[(n_{\oplus}-2n)t + \vartheta - 2\omega] + B_{n_{\oplus}-2n,\vartheta-\omega} \sin[(n_{\oplus}-2n)t + \vartheta - 2\omega] \\ & + A_{n_{\oplus}+2n,\vartheta+\omega} \cos[(n_{\oplus}+2n)t + \vartheta + 2\omega] + B_{n_{\oplus}+2n,\vartheta+\omega} \sin[(n_{\oplus}+2n)t + \vartheta + 2\omega], \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

où nous avons posé

$$A_{n_{\oplus},\vartheta} \simeq \frac{9 Q_{21}^{(s)} \eta \sin I}{4 n_{\oplus}^2 r^4} \left[ 1 - \frac{\bar{\eta}}{\eta} + \frac{n^2}{n_{\oplus}^2} - \frac{3 N^2}{2 n_{\oplus}^2} \right], \quad (\text{C.30a})$$

$$B_{n_{\oplus},\vartheta} = A_{n_{\oplus},\vartheta} \frac{Q_{21}^{(c)}}{Q_{21}^{(s)}}, \quad (\text{C.30b})$$

$$A_{n_{\oplus}-2n,\vartheta-\omega} \simeq -\frac{9 Q_{21}^{(s)} \eta \sin I}{4 n_{\oplus}^2 r^4} \left[ 1 + \frac{16 n}{3 n_{\oplus}} + 7 \frac{n^2}{n_{\oplus}^2} - \frac{3 N^2}{2 n_{\oplus}^2} \right], \quad (\text{C.30c})$$

$$B_{n_{\oplus}-2n,\vartheta-\omega} = B_{n_{\oplus}-2n,\vartheta-\omega} \frac{Q_{21}^{(c)}}{Q_{21}^{(s)}}, \quad (\text{C.30d})$$

$$A_{n_{\oplus}+2n,\vartheta+\omega} \simeq -\frac{9 Q_{21}^{(s)} \bar{\eta} \sin I}{4 n_{\oplus}^2 r^4} \left[ 1 - \frac{16 n}{3 n_{\oplus}} + 5 \frac{n^2}{n_{\oplus}^2} - \frac{3 N^2}{2 n_{\oplus}^2} \right], \quad (\text{C.30e})$$

$$B_{n_{\oplus}+2n,\vartheta+\omega} = -B_{n_{\oplus}+2n,\vartheta+\omega} \frac{Q_{21}^{(c)}}{Q_{21}^{(s)}}. \quad (\text{C.30f})$$

Une application numérique des Eqs. (C.30) fournit les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} A_{n_{\oplus},\vartheta} & \simeq 239.1 S_{21} \text{ m}, \\ B_{n_{\oplus},\vartheta} & \simeq 239.1 C_{21} \text{ m}, \\ A_{n_{\oplus}-2n,\vartheta-\omega} & \simeq -287.9 S_{21} \text{ m}, \\ B_{n_{\oplus}-2n,\vartheta-\omega} & \simeq -287.9 C_{21} \text{ m}, \\ A_{n_{\oplus}+2n,\vartheta+\omega} & \simeq -8.1 S_{21} \text{ m}, \\ B_{n_{\oplus}+2n,\vartheta+\omega} & \simeq 8.1 C_{21} \text{ m}. \end{aligned}$$

Compte tenu des valeurs extrêmement faibles de  $C_{21}$  et  $S_{21}$  (Chen *et al.*, 2014), les contributions (C.29) peuvent être négligées sans perte de précision.

### Effet de l'harmonique (2,2)

L'accélération perturbatrice due à l'harmonique  $l = 2$  et  $m = 2$  du potentiel terrestre s'écrit toujours à partir de l'Eq. (2.30). On trouve

$$a_{22}^a = \frac{6Q_{22}^{(c)}}{r^5} \left[ x\delta^{a\hat{X}'} - y\delta^{a\hat{Y}'} - \frac{5(x^2 - y^2)r^a}{2r^2} \right] + \frac{6Q_{22}^{(s)}}{r^5} \left[ y\delta^{a\hat{X}'} + x\delta^{a\hat{Y}'} - \frac{5xyr^a}{r^2} \right], \quad (\text{C.31})$$

où nous avons posé  $Q_{22}^{(c)} = C_{22}\mu a_e^2$  et  $Q_{22}^{(s)} = S_{22}\mu a_e^2$ .

Après projections selon les directions radiale et tangentielle, on obtient les deux équations suivantes qui vont nous permettre de déterminer l'effet produit sur la distance Terre-Lune

$$\begin{aligned} a_{22}^{\hat{r}} &= -\frac{3}{4} \frac{Q_{22}^{(c)} \eta \bar{\eta}}{r^4} \cos(2n_{\oplus}t + 2\vartheta) + \frac{9}{2} \frac{Q_{22}^{(s)} \eta \bar{\eta}}{r^4} \cos\left(2n_{\oplus}t + 2\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \frac{9}{4} \frac{Q_{22}^{(c)} \eta^2}{r^4} \cos\left[2(n_{\oplus} - n)t + 2\bar{\vartheta}'\right] + \frac{9}{4} \frac{Q_{22}^{(s)} \eta^2}{r^4} \cos\left[2(n_{\oplus} - n)t + 2\bar{\vartheta}' - \frac{\pi}{2}\right] \\ &\quad - \frac{9}{4} \frac{Q_{22}^{(c)} \bar{\eta}^2}{r^4} \cos\left[2(n_{\oplus} + n)t + 2\vartheta'\right] + \frac{9}{4} \frac{Q_{22}^{(s)} \bar{\eta}^2}{r^4} \cos\left[2(n_{\oplus} + n)t + 2\vartheta' - \frac{\pi}{2}\right], \\ a_{22}^{\hat{t}} &= \frac{3}{2} \frac{Q_{22}^{(c)} \eta^2}{r^4} \sin\left[2(n_{\oplus} - n)t + 2\bar{\vartheta}'\right] + \frac{3}{2} \frac{Q_{22}^{(s)} \eta^2}{r^4} \sin\left[2(n_{\oplus} - n)t + 2\bar{\vartheta}' + \frac{\pi}{2}\right] \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{Q_{22}^{(c)} \bar{\eta}^2}{r^4} \sin\left[2(n_{\oplus} + n)t + 2\vartheta'\right] - \frac{3}{2} \frac{Q_{22}^{(s)} \bar{\eta}^2}{r^4} \sin\left[2(n_{\oplus} + n)t + 2\vartheta' + \frac{\pi}{2}\right], \end{aligned}$$

avec  $\vartheta' = \vartheta + \omega$  et  $\bar{\vartheta}' = \vartheta - \omega$ .

Le terme de fréquence  $2n_{\oplus}$  et de phase  $2\vartheta$  génère sur la distance Terre-Lune un signal en cosinus, quant au terme de même fréquence mais de phase  $2\vartheta - \frac{\pi}{2}$ , il génère un signal en sinus. En appliquant le même raisonnement à tous les autres termes, on trouve une expression finale pouvant s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} x_{22}(t) &= A_{2n_{\oplus}, 2\vartheta} \cos(2n_{\oplus}t + 2\vartheta) + B_{2n_{\oplus}, 2\vartheta} \sin(2n_{\oplus}t + 2\vartheta) \\ &\quad + A_{2(n_{\oplus} - n), 2\bar{\vartheta}'} \cos\left[2(n_{\oplus} - n)t + 2\bar{\vartheta}'\right] + B_{2(n_{\oplus} - n), 2\bar{\vartheta}'} \sin\left[2(n_{\oplus} - n)t + 2\bar{\vartheta}'\right] \\ &\quad + A_{2(n_{\oplus} + n), 2\vartheta'} \cos\left[2(n_{\oplus} + n)t + 2\vartheta'\right] + B_{2(n_{\oplus} + n), 2\vartheta'} \sin\left[2(n_{\oplus} + n)t + 2\vartheta'\right], \quad (\text{C.32}) \end{aligned}$$

Les coefficients sont donnés par les expressions suivantes

$$A_{2n_{\oplus},2\vartheta} \simeq \frac{3}{16} \frac{Q_{22}^{(c)} \eta \bar{\eta}}{n_{\oplus}^2 r^4} \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{n^2}{n_{\oplus}^2} - \frac{3}{8} \frac{N^2}{n_{\oplus}^2} \right], \quad (\text{C.33a})$$

$$B_{2n_{\oplus},2\vartheta} = -6 A_{2n_{\oplus},2\vartheta} \frac{Q_{22}^{(s)}}{Q_{22}^{(c)}}, \quad (\text{C.33b})$$

$$A_{2(n_{\oplus}-n),2\bar{\vartheta}'} \simeq \frac{9}{16} \frac{Q_{22}^{(c)} \eta^2}{n_{\oplus}^2 r^4} \left[ 1 + \frac{5}{3} \frac{n}{n_{\oplus}} + \frac{7}{12} \frac{n^2}{n_{\oplus}^2} - \frac{3}{8} \frac{N^2}{n_{\oplus}^2} \right], \quad (\text{C.33c})$$

$$B_{2(n_{\oplus}-n),2\bar{\vartheta}'} = -A_{2(n_{\oplus}-n),2\bar{\vartheta}'} \frac{Q_{22}^{(s)}}{Q_{22}^{(c)}}, \quad (\text{C.33d})$$

$$A_{2(n_{\oplus}+n),2\vartheta'} \simeq \frac{9}{16} \frac{Q_{22}^{(c)} \bar{\eta}^2}{n_{\oplus}^2 r^4} \left[ 1 - \frac{5}{3} \frac{n}{n_{\oplus}} + \frac{7}{12} \frac{n^2}{n_{\oplus}^2} - \frac{3}{8} \frac{N^2}{n_{\oplus}^2} \right], \quad (\text{C.33e})$$

$$B_{2(n_{\oplus}+n),2\vartheta'} = -A_{2(n_{\oplus}+n),2\vartheta'} \frac{Q_{22}^{(s)}}{Q_{22}^{(c)}}, \quad (\text{C.33f})$$

Une application numérique aux Eqs. (C.33) fournit les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} A_{2n_{\oplus},2\vartheta} &\simeq 4.1 C_{22} \text{ m}, \\ B_{2n_{\oplus},2\vartheta} &\simeq -24.5 S_{22} \text{ m}, \\ A_{2(n_{\oplus}-n),2\bar{\vartheta}'} &\simeq 311.8 C_{22} \text{ m}, \\ B_{2(n_{\oplus}-n),2\bar{\vartheta}'} &\simeq -311.8 S_{22} \text{ m}, \\ A_{2(n_{\oplus}+n),2\vartheta'} &\simeq 48 C_{22} \text{ cm}, \\ B_{2(n_{\oplus}+n),2\vartheta'} &\simeq -48 S_{22} \text{ cm}. \end{aligned}$$

En remplaçant les valeurs de  $C_{22}$  et  $S_{22}$  déduites de Chen *et al.* (2014) on constate que les amplitudes les plus importantes sont celles correspondantes à la fréquence  $2(n_{\oplus} - n)$  et à la phase  $2\bar{\vartheta}'$  (*cf.* Eqs. (C.33c) et (C.33d)), qui valent respectivement 0.5 et -0.5 mm. Quant aux autres, elles sont parfaitement négligeables. Dans les éphémérides lunaires et planétaires, les harmoniques  $C_{22}$  et  $S_{22}$  sont tout de même négligées car sans elles la fréquence de rotation rapide de la Terre  $n_{\oplus}$ , n'apparaît pas dans les équations à intégrer.

## C.4 Potentiel solaire

Nous réutilisons les notations employées dans la Sec. C.3; le repère inertiel est toujours désigné par  $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}})$ . Nous reprenons également les mêmes définitions concernant ses axes principaux, et ajoutons que le repère est désormais centré sur le Soleil. Nous supposons, que les masses des planètes sont négligeables devant celle du Soleil et que par conséquent, le Soleil est superposé au barycentre du système solaire. Dans ce repère, l'orbite terrestre est inclinée de  $\epsilon \simeq 23.4^\circ$  relativement au plan  $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}})$  qu'elle intersecte suivant la direction des équinoxes : l'axe  $\hat{\mathbf{X}}$  (*cf.* Fig. C.3). Nous supposons que la Terre est en orbite circulaire dans l'écliptique. Son emplacement le long de l'orbite est repéré par l'angle  $Nt$  où  $N$  ( $\simeq 2 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$ ) est le moyen mouvement de la Terre.

### Repères mobiles

Nous introduisons de plus, un repère mobile tournant à la fréquence  $N$ , et dont l'un des axes  $(\hat{\mathbf{P}})$  est dirigé suivant la direction de  $\mathbf{R}$  (nous réutilisons les notations introduites

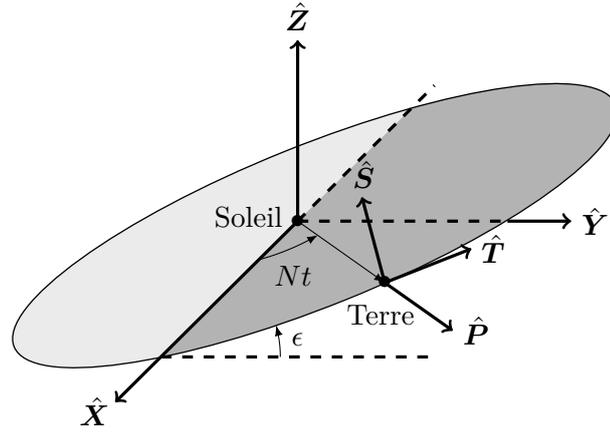


FIGURE C.3 – Schéma représentant l'orientation du plan orbital de la Terre relativement au plan de l'équateur moyen de la date. Ce dernier est noté  $(\hat{X}, \hat{Y})$ . Le plan orbital de la Terre n'est autre que l'écliptique, par conséquent l'inclinaison  $\epsilon \simeq 23.4^\circ$ . Deux axes  $(\hat{P}, \hat{T})$  du repère mobile  $(\hat{P}, \hat{T}, \hat{S})$  sont compris dans le plan de l'écliptique et le troisième  $(\hat{S})$  lui est perpendiculaire.

en Tab. B.1). L'un des deux autres axes noté  $\hat{T}$  est, quant à lui, perpendiculaire à  $\hat{P}$  et dirigé suivant  $\hat{R}$ . Le dernier noté  $\hat{S}$ , est défini tel que  $(\hat{P}, \hat{T}, \hat{S})$  soit un trièdre direct (cf. Fig. C.3). Ensuite, nous supposons que le pôle du Soleil est fixe dans l'équateur moyen de la date  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ , et est repéré au moyen de deux angles, un pour la longitude sur l'équateur noté  $\alpha_0$  et l'autre pour la déclinaison sur l'équateur noté  $\delta_0$ . Les valeurs de  $\alpha_0$  et  $\delta_0$  sont reprises de Davies *et al.* (1986), et valent respectivement  $286.13^\circ$  et  $63.87^\circ$  (cf. Fig. 2.2). Nous noterons le repère lié à l'équateur du Soleil,  $(\hat{X}', \hat{Y}', \hat{Z}')$ .

Nous reprenons les conventions introduites dans la Sec. C.3 ; lorsqu'un vecteur est défini dans le repère inertiel, ses composantes sont désignées par des indices latins majuscules tels que  $(I, J, K, \dots)$ . Les indices latins minuscules  $(i, j, k, \dots)$  sont employés pour désigner les composantes d'un vecteur exprimées dans le repère mobile  $(\hat{P}, \hat{T}, \hat{S})$ . Enfin, les lettres latines majuscules du début de l'alphabet  $(A, B, C, \dots)$  désignent les composantes d'un vecteur exprimées dans le repère lié à l'équateur solaire, que nous avons appelé  $(\hat{X}', \hat{Y}', \hat{Z}')$ . Les matrices de passage entre les différents repères sont désignées par la lettre  $B$  et suivies des indices associés à la transformation, de telle sorte qu'il n'y a pas lieu de confondre deux matrices de passage différentes. Par exemple,  $B_A^J$  et  $B_J^A$  désignent respectivement la matrice permettant de passer du repère inertiel au repère lié à l'équateur solaire, et, celle permettant de passer du repère mobile au repère inertiel.

Commençons tout d'abord par exprimer la matrice permettant le passage du repère lié à l'équateur solaire au repère inertiel. D'après Davies *et al.* (1986), les composantes associées à la transformation inverse sont données par  $[B]_J^A = [B_{\hat{X}}(\frac{\pi}{2} - \delta_0) \cdot B_{\hat{Z}}(\frac{\pi}{2} + \alpha_0)]_J^A$ . La transposée de  $B_J^A$ , notée  $B_A^J$  est alors donnée par l'expression suivante :

$$B_A^J = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_0 & -\sin \delta_0 \cos \alpha_0 & \cos \delta_0 \cos \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 & -\sin \delta_0 \sin \alpha_0 & \cos \delta_0 \sin \alpha_0 \\ 0 & \cos \delta_0 & \sin \delta_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.34})$$

Dans le repère lié au Soleil, le pôle solaire a les composantes suivantes :  $\hat{Z}'_A = (0, 0, 1)$ .

Par conséquent, dans le repère inertiel elles sont données par  $\hat{Z}'^J = B_A^J \hat{Z}'^A$ , soit

$$\hat{Z}'^J = \begin{pmatrix} \cos \delta_0 \cos \alpha_0 \\ \cos \delta_0 \sin \alpha_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.35})$$

que l'on notera  $\hat{Z}'_J = (s_1, s_2, s_3)$  afin d'alléger l'écriture.

De plus, les composantes de la matrice de passage du repère inertiel au repère tournant à la fréquence  $N$ , sont définies par  $[\mathbf{B}]_J^j = [\mathbf{B}_{\hat{Z}}(Nt) \cdot \mathbf{B}_{\hat{X}}(\epsilon)]_J^j$ , soit

$$B_J^j = \begin{pmatrix} \cos Nt & \cos \epsilon \sin Nt & \sin \epsilon \sin Nt \\ -\sin Nt & \cos \epsilon \cos Nt & \sin \epsilon \cos Nt \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix}. \quad (\text{C.36})$$

Ainsi, les composantes du pôle solaire dans le repère tournant, sont données par l'expression,  $\hat{Z}'^j = B_J^j \hat{Z}'^J (= B_J^j B_A^J \hat{Z}'^A)$  où  $\hat{Z}'^J$  est défini en (C.35). On déduit alors

$$\hat{Z}'^j = \begin{pmatrix} s_1 \cos Nt + \bar{s}_1 \sin Nt \\ \bar{s}_1 \cos Nt - s_1 \sin Nt \\ \bar{s}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.37})$$

où nous avons posé  $\bar{s}_1 = s_2 \cos \epsilon + s_3 \sin \epsilon$  et  $\bar{s}_2 = s_3 \cos \epsilon - s_2 \sin \epsilon$ .

### Effet du moment quadripolaire

On s'intéresse maintenant à l'effet direct du  $(J_2)_S$  solaire sur le vecteur Terre-Lune. L'analyse présentée ici consiste à quantifier l'effet différentiel exercé entre la Terre et la Lune par le moment du quadripôle solaire. L'équation du mouvement simplifiée peut alors s'écrire

$$\ddot{r}^A + n^2 r^A = a_{20}^A, \quad (\text{C.38})$$

où  $n$  est défini en (C.26), et la perturbation solaire est définie par

$$a_{20}^A = -3(Q_2)_S \hat{Z}'^A \left[ \frac{z_L}{R_L^5} - \frac{z_T}{R^5} \right] + \frac{15(Q_2)_S}{2} \left[ \frac{z_L^2 R_L^A}{R_L^7} - \frac{z_T^2 R^A}{R^7} \right], \quad (\text{C.39})$$

avec  $(Q_2)_S = \mu_S (a_e)_S^2 (J_2)_S$ . Les indices  $T$ ,  $L$  et  $S$  font respectivement référence à la Terre, la Lune et le Soleil. Dans la suite, nous omettrons l'indice  $S$  pour désigner  $(Q_2)_S$ .

Nous supposons que la Lune orbite dans l'écliptique (en réalité,  $I' \simeq 5.1^\circ$  cf. Sec. C.3), ainsi la composante  $z_X$ , avec  $X = T$  puis  $L$ , est définie telle que  $z_X = R_X^A \hat{Z}'_A = R_X^j \hat{Z}'_j$ , où  $\hat{Z}'_j$  est donnée en (C.37). Ainsi, on écrit

$$\begin{aligned} z_X &= R_X \hat{P}^j \hat{Z}'_j \\ &= R_X \left[ s_1 \cos N_X t + \bar{s}_1 \sin N_X t \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

Pour la suite, nous posons  $\rho = r/R$  et nous ne considérons plus les termes d'ordre supérieur à  $\rho$ . Nous savons déjà d'après l'Eq. (C.40) que  $z_T = R[s_1 \cos Nt + \bar{s}_1 \sin Nt]$ . Ainsi, pour la Lune on déduit une expression similaire où  $R$  est remplacé par  $R_L$  et où  $N$  est remplacé par  $N_L$ , avec

$$N_L t = Nt - \rho \sin nt + \mathcal{O}(\rho^2),$$

puis

$$\frac{R_L}{R} = 1 + \rho \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}} + \mathcal{O}(\rho^2).$$

Après quelques étapes de calculs, on trouve

$$z_L \simeq z_T + \frac{\zeta}{2} r, \quad (\text{C.41})$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} \zeta = & s_1 \cos nt + \bar{s}_1 \sin nt \\ & - s_1 \cos (n+N)t - \bar{s}_1 \sin (n+N)t \\ & + s_1 \cos (n-N)t - \bar{s}_1 \sin (n-N)t \\ & + \bar{s}_1 \cos (n-2N)t - \bar{s}_1 \sin (n-2N)t + \mathcal{O}(\rho). \end{aligned}$$

Ici, nous n'avons pas gardé les termes en  $\rho$  puisque dans (C.41) le terme  $z_T \propto R$ . Ainsi, seuls les termes d'ordre  $\mathcal{O}(\rho)$  sont contenus dans l'expression de  $z_L$ . Nous utilisons donc l'expression suivante  $z_L/z_T \simeq 1 + \frac{1}{2}\zeta\rho'$ , où  $\rho' = r/z_T$ . On déduit alors, l'expression de la perturbation (C.39) au premier ordre en  $\rho$

$$\begin{aligned} a_{20}^A \simeq & -3Q_2 \hat{Z}'^A \frac{z_T}{R^5} \left[ 1 - 5\rho \cos (n-N)t + \frac{\rho'\zeta}{2} \right] \\ & + \frac{15Q_2}{2} \frac{z_T^2}{R^7} \left[ r^A \left( 1 - 7\rho \cos (n-N)t + \rho'\zeta \right) - R^A \left( 7\rho \cos (n-N)t - \rho'\zeta \right) \right]. \end{aligned}$$

On trouve l'accélération dans le repère lié à l'équateur terrestre de la date, en multipliant par la matrice (C.34). Puis, le passage de l'équateur au plan orbital lunaire se fait grâce à la matrice  $B_j^i$  précédemment utilisée en Sec. C.3. On détermine alors, les composantes radiale et tangentielle de la perturbation. En rejetant tous les termes d'ordre  $\rho$ , la composante radiale s'écrit

$$\begin{aligned} a_{20}^{\hat{\rho}} = & -\frac{3}{2} \frac{Q_2}{R^4} \left\{ [s_1^2 - \tilde{s}_1 \bar{s}_1] \cos [(n+N)t + \omega] + [s_1^2 + \tilde{s}_1 \bar{s}_1] \cos [(n-N)t + \omega] \right. \\ & \left. + 2s_1 \tilde{s}_1 \sin [(n+N)t + \omega] + [s_1 \tilde{s}_1 - s_1 \bar{s}_1] \sin [(n-N)t + \omega] \right\}, \end{aligned}$$

et la composante tangentielle est définie par

$$\begin{aligned} a_{20}^{\hat{t}} = & -\frac{3}{2} \frac{Q_2}{R^4} \left\{ [s_1 \tilde{s}_1 - \tilde{s}_1 \bar{s}_1] \cos [(n+N)t + \omega] + [s_1 \tilde{s}_1 - \tilde{s}_1 \bar{s}_1] \cos [(n-N)t + \omega] \right. \\ & \left. + [s_1 \tilde{s}_1 - s_1^2] \sin [(n+N)t + \omega] + [\tilde{s}_1 \bar{s}_1 + s_1 \bar{s}_1] \sin [(n-N)t + \omega] \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons posé  $\tilde{s}_1 = s_2 \cos I + s_3 \sin I$ .

Après quelques calculs, on trouve à partir de l'équation générale (A.26) la forme du signal engendré sur la distance Terre-Lune,

$$\begin{aligned} x(n \pm N, \omega; t) = & A_{n \pm N, \omega} \cos [(n \pm N)t + \omega] + B_{n \pm N, \omega} \sin [(n \pm N)t + \omega] \\ & + A_{n - N, \omega} \cos [(n - N)t + \omega] + B_{n - N, \omega} \sin [(n - N)t + \omega], \quad (\text{C.42}) \end{aligned}$$

où nous venons de poser

$$A_{n+N,\omega} \simeq \frac{3}{4} \frac{Q_2}{nNR^4} [s_1^2 - \tilde{s}_1 \bar{s}_1] \left\{ 1 + 2 \frac{[s_1^2 - s_1 \tilde{s}_1]}{[s_1^2 - \tilde{s}_1 \bar{s}_1]} - \frac{5N}{2n} \left( 1 + \frac{14}{5} \frac{[s_1^2 - s_1 \tilde{s}_1]}{[s_1^2 - \tilde{s}_1 \bar{s}_1]} \right) \right\}, \quad (\text{C.43a})$$

$$B_{n+N,\omega} \simeq \frac{3}{2} \frac{Q_2 s_1 \tilde{s}_1}{nNR^4} \left\{ 1 + \frac{[\tilde{s}_1 - \bar{s}_1]}{\tilde{s}_1} - \frac{5N}{2n} \left( 1 + \frac{7}{5} \frac{[\tilde{s}_1 - \bar{s}_1]}{\tilde{s}_1} \right) \right\}, \quad (\text{C.43b})$$

$$A_{n-N,\omega} \simeq -\frac{3}{4} \frac{Q_2}{nNR^4} [s_1^2 - \tilde{s}_1 \bar{s}_1] \left\{ 1 + 2 \frac{[\tilde{s}_1 \bar{s}_1 - s_1 \bar{s}_1]}{[s_1^2 + \tilde{s}_1 \bar{s}_1]} + \frac{5N}{2n} \left( 1 + \frac{14}{5} \frac{[\tilde{s}_1 \bar{s}_1 - s_1 \bar{s}_1]}{[s_1^2 + \tilde{s}_1 \bar{s}_1]} \right) \right\}, \quad (\text{C.43c})$$

$$B_{n-N,\omega} \simeq -\frac{9}{4} \frac{Q_2 s_1}{nNR^4} [\tilde{s}_1 - \bar{s}_1] \left[ 1 + \frac{19N}{6n} \right]. \quad (\text{C.43d})$$

Une application numérique aux Eqs. (C.43) fournit les ordres de grandeurs suivants

$$A_{n+N,\omega} \simeq -477.1 (J_2)_S m,$$

$$B_{n+N,\omega} \simeq 202.5 (J_2)_S m,$$

$$A_{n-N,\omega} \simeq 920.9 (J_2)_S m.$$

En utilisant la valeur de  $(J_2)_S$  de Folkner *et al.* (2014), on trouve  $A_{n+N,\omega} = -0.1 \text{ mm}$ ,  $B_{n+N,\omega} = 0.04 \text{ mm}$  et  $A_{n-N,\omega} = 0.2 \text{ mm}$ . On notera que  $B_{n-N,\omega}$  est nul, puisque dans notre approximation nous avons choisi  $I = \epsilon$  donc  $\tilde{s}_1 = \bar{s}_1$  (*cf.* Sec. C.3). En réalité,  $I$  oscille autour de  $\epsilon$  avec une amplitude  $I'$ . Notons que dans le cas où  $I$  possède sa valeur minimale de  $18.3^\circ$ , l'amplitude de  $A_{n-N,\omega}$  peut atteindre le millimètre. On voit donc que l'effet différentiel du moment quadripolaire du Soleil entre la Terre et la Lune, même s'il reste en dessous du centimètre sur la distance Terre-Lune, pourra s'avérer d'importance non-négligeable dans certaines configurations.

## C.5 Potentiel lunaire

Pour l'étude du potentiel lunaire, nous modifions quelque peu les notations introduites en Sec. C.3. Le repère stationnaire dénoté par le trièdre  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  désigne désormais l'écliptique inertiel à une date donnée et non plus l'équateur moyen. Ainsi, le passage de l'écliptique au repère tournant avec la Lune se fait par l'intermédiaire de la matrice de rotation désignée par  $[\mathbf{B}]_J^j = [\mathbf{B}_{\hat{\sigma}}(nt + \omega) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\rho}}(I') \cdot \mathbf{B}_{\hat{\sigma}}(\Omega')]_J^j$ , où  $I'$  représente toujours l'angle d'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique et  $\Omega'$  est la longitude du nœud de l'orbite lunaire sur l'écliptique. Dans l'écliptique,  $\Omega'$  est une fonction linéaire du temps puisqu'il est  $2\pi$  périodique en 18.6 ans. Par conséquent, le moment cinétique total, qui est à majorité perpendiculaire au plan de l'orbite lunaire, dispose également d'une composante selon  $\hat{Z}$  due à la précession de l'orbite. En considérant la valeur faible de  $I' = 5.5^\circ$ , on ne retient que la contribution selon  $\hat{\sigma}$  soit  $\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma} = n(1 + \delta n \cos I') \sim n(1 + \delta n)$ , où  $\delta n$  est le ratio du taux de précession de l'orbite sur l'écliptique, rapporté au moyen mouvement de la Lune. La valeur numérique de  $\delta n$  est  $\sim 4 \times 10^{-3}$ , par conséquent nous poursuivons notre étude du potentiel lunaire en négligeant la précession, ce qui limite la durée de validité de la solution trouvée.

### Repère mobile

Nous introduisons un nouveau système de coordonnées lié à l'équateur lunaire, que nous notons  $(\hat{\rho}_1, \hat{\tau}_1, \hat{\sigma}_1)$  et dans lequel les coordonnées des vecteurs sont repérées par des indices latins minuscules primés ( $i', j', k', \dots$ ). Le trièdre est défini de telle manière que

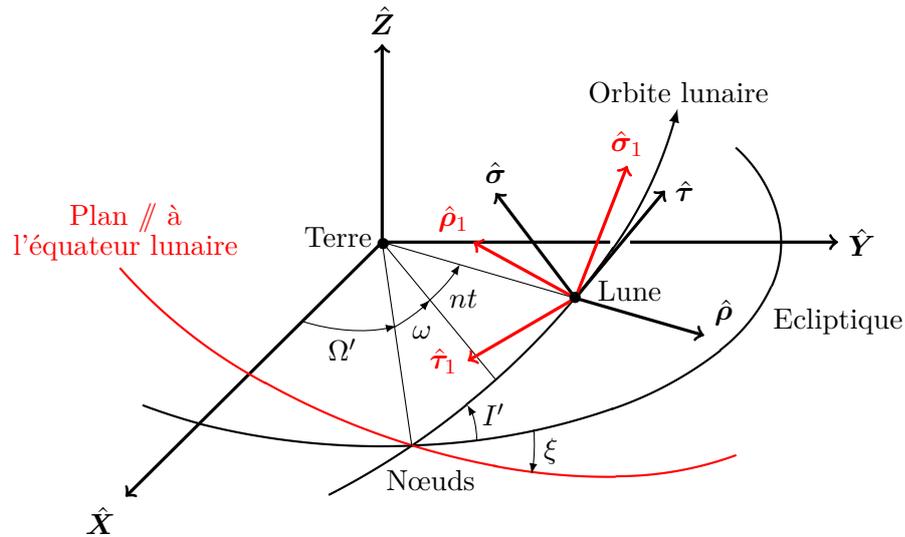


FIGURE C.4 – Schéma représentant l'orientation du repère lunaire relativement à l'écliptique de la date. L'équateur lunaire déterminé par la troisième loi de Cassini, est symbolisé par le plan  $(\hat{\rho}_1, \hat{\tau}_1)$  tandis que  $\hat{\sigma}_1$  représente la direction du pôle nord lunaire. Dans un cas, l'appellation *Nœuds* désigne le nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique, et dans l'autre cas, le nœud descendant de l'équateur lunaire sur l'écliptique (3ème loi de Cassini). On rappelle que dans l'écliptique, le nœud de l'orbite lunaire ( $\Omega'$ ) circule avec une période de 18.6 ans. Quant aux angles  $I'$  et  $\xi$ , ils sont considérés constants et possèdent les valeurs respectives de  $5.1^\circ$  et  $1.5^\circ$ .

ses axes coïncident avec ceux des moments principaux d'inerties de la Lune. Ainsi,  $\hat{\rho}_1$  sera dirigé selon la direction moyenne de la Terre,  $\hat{\sigma}_1$  sera aligné sur la direction du pôle nord lunaire et  $\hat{\tau}_1$  complétera le trièdre direct. À noter que  $\hat{\rho}_1$  est exactement aligné avec la direction Lune-Terre lorsque la Lune se trouve au nœud ascendant et au nœud descendant. Les angles et repères sont représentés en Fig C.4.

De plus, dans un souci de simplification du problème nous supposons que l'orientation de la Lune obéit aux lois empiriques formulées par J. D. Cassini en 1693 à savoir :

- i) *Le mouvement de rotation de la Lune s'effectue à vitesse uniforme selon son axe polaire, avec une période de rotation égale à la période sidérale de son moyen mouvement orbital autour de la Terre.*
- ii) *L'angle d'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique est faible; sa valeur numérique est approximativement  $\xi \simeq 1.5^\circ$ .*
- iii) *Le nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique coïncide avec le nœud descendant de l'équateur lunaire sur l'écliptique.*

Ainsi d'après les lois de Cassini, l'équateur lunaire est incliné d'un angle constant avec le plan orbital, d'une valeur approximative de  $\xi' = I' + \xi \simeq 6.6^\circ$ .

À partir de la Fig. C.4, il est possible de déduire trois angles permettant de passer de l'écliptique au système de coordonnées lié à l'équateur lunaire. Ainsi, on introduit un angle de précession,  $\phi$ , égal à la longitude du nœud descendant de l'équateur lunaire, un angle d'inclinaison,  $\theta$ , entre l'écliptique à l'équateur, puis finalement, un angle de rotation rapide,  $\psi$ , défini entre le nœud descendant et l'axe  $\hat{\rho}_1$ .

Mathématiquement, ces angles sont définis par les relations suivantes

$$\phi = \Omega', \quad \theta = -\xi \quad \text{et} \quad \psi = \pi + nt + \omega. \quad (\text{C.44})$$

Par conséquent, la matrice de passage de l'écliptique à l'équateur lunaire est donnée par la relation suivante

$$[\mathbf{B}]_J^{j'} = [\mathbf{B}_{\hat{\sigma}_1}(\psi) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\rho}_1}(\theta) \cdot \mathbf{B}_{\hat{\sigma}_1}(\phi)]_J^{j'}.$$

La matrice permettant de passer du repère lié à l'équateur au repère tournant est notée  $B_{j'}^j = B_J^j B_{j'}^J$ . Elle donne accès aux expressions suivantes

$$\hat{\rho}_1 = -\frac{\hat{\rho}}{2}[\eta + \bar{\eta} \cos(2nt + 2\omega)] + \frac{\hat{\tau}}{2}\bar{\eta} \sin(2nt + 2\omega) + \hat{\sigma} \sin \xi' \sin(nt + \omega), \quad (\text{C.45a})$$

$$\hat{\tau}_1 = \frac{\hat{\rho}}{2}\bar{\eta} \sin(2nt + 2\omega) - \frac{\hat{\tau}}{2}[\eta - \bar{\eta} \cos(2nt + 2\omega)] + \hat{\sigma} \sin \xi' \cos(nt + \omega), \quad (\text{C.45b})$$

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{\rho} \sin \xi' \sin(nt + \omega) + \hat{\tau} \sin \xi' \cos(nt + \omega) + \hat{\sigma} \cos \xi', \quad (\text{C.45c})$$

où nous avons posé  $\eta = 1 + \cos \xi'$  et  $\bar{\eta} = 1 - \cos \xi'$ .

À partir de ces dernières relations de passage, on estime les effets produits par le potentiel lunaire sur la distance Terre-Lune. Cependant, il convient de remarquer que l'effet de réaction de la Terre, suite à l'action du potentiel lunaire, n'est pas négligeable. En effet, dans la Sec. C.3, nous avons implicitement fait l'approximation  $\ddot{\mathbf{r}} = (1 + \varepsilon)(\mathbf{a}_{nm})_L \simeq (\mathbf{a}_{nm})_L$ , où  $(\mathbf{a}_{nm})_L$  est l'accélération absolue de la Lune tirée de l'Eq. (2.30) et  $\varepsilon$  est le ratio de la masse lunaire à la masse de la Terre, valant approximativement 1/81. Cependant, dès lors qu'on s'intéresse au potentiel de la Lune sur le vecteur Terre-Lune, le bilan des forces nous conduit à l'expression

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{(1 + \varepsilon)}{\varepsilon}(\mathbf{a}_{nm})_T \simeq -\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{a}_{nm})_T, \quad (\text{C.46})$$

où  $(\mathbf{a}_{nm})_T$  est l'accélération absolue de la Terre donnée par l'Eq. (2.30).

### Effet du moment quadripolaire

En ne s'intéressant qu'à la perturbation du potentiel  $l = 2$  et  $m = 0$  de la Lune sur le vecteur Terre-Lune, et en considérant l'expression (C.46), les équations du mouvement prennent la forme simplifiée suivante

$$\ddot{r}^J + n^2 r^J = \Gamma_{20}^J, \quad (\text{C.47})$$

avec  $n^2$  qui est donnée par l'Eq. (C.26),  $\Gamma_{20}^J = -\frac{1}{\varepsilon} B_{j'}^J (a_{20}^{j'})_T$  et  $B_{j'}^J$  qui a été défini à l'aide des angles (C.44). L'expression de l'accélération perturbatrice de la Terre est donnée par l'Eq. (2.30)

$$(a_{20}^{j'})_T = \frac{3(Q_2)_L r^{j'}}{2r^5} + \frac{3(Q_2)_L z \hat{\sigma}_1^{j'}}{r^5} - \frac{15(Q_2)_L z^2 r^{j'}}{2r^7}, \quad (\text{C.48})$$

où  $r^{j'}$  représente la  $j'$ ème composante du vecteur Lune-Terre et  $z = r^{j'} \hat{\sigma}_{j'}$ . Par la suite, nous omettrons l'indice  $L$  lorsque nous désignerons  $(Q_2)_L$  qui vaut  $(J_2)_{L\mu_L} (a_e)_L^2$ .

Le premier terme de l'expression (C.48) a été mis en contribution de la fréquence de l'orbite circulaire à hauteur de  $+\frac{3}{2}Q_2/\varepsilon r^5$ . La projection du reste de la perturbation dans le repère  $(\hat{\rho}, \hat{\tau}, \hat{\sigma})$  tournant avec l'orbite lunaire fournit les deux composantes suivantes

$$\begin{aligned}\Gamma_{20}^{\hat{\rho}} &= \frac{9}{4} \frac{Q_2 \sin^2 \xi'}{\varepsilon r^4} - \frac{9}{4} \frac{Q_2 \sin^2 \xi'}{\varepsilon r^4} \cos(2nt + 2\omega), \\ \Gamma_{20}^{\hat{\tau}} &= -\frac{3}{2} \frac{Q_2 \sin^2 \xi'}{\varepsilon r^4} \sin(2nt + 2\omega).\end{aligned}$$

Après insertion dans l'Eq. (A.27), on déduit le signal engendré sur la distance Terre Lune par l'effet du moment quadripolaire lunaire

$$x_{20}(2n, 2\omega; t) = \frac{1}{4} \frac{Q_2 \sin^2 \xi'}{\varepsilon n^2 r^4} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{N^2}{n^2} \right] \cos(2nt + 2\omega). \quad (\text{C.49})$$

L'application numérique donne une amplitude de  $25.6(J_2)_L m$ . La valeur du moment quadripolaire tirée de Folkner *et al.* (2014) est de  $(J_2)_L \simeq 2.03 \times 10^{-4}$ , soit

$$x_{20}(2n, 2\omega; t) \simeq 4.9 \cos(2nt + 2\omega) \text{ mm}.$$

### Effet de l'harmonique (2,1)

L'expression de la perturbation induite par les harmoniques  $l = 2$  et  $m = 1$  du potentiel lunaire est analogue à celle de l'Eq. (C.28), à ceci près qu'elle est ici exprimée dans le repère lié à l'équateur lunaire. Nous la notons  $(a_{21}^{j'})_T$ . Nous introduisons les coefficients  $Q_{21}^{(c)}$  et  $Q_{21}^{(s)}$  exprimés en fonction du rayon équatorial lunaire et des coefficients de Stokes de la Lune. Une fois de plus, l'accélération perturbatrice est exprimée dans le repère tournant avec l'orbite lunaire afin d'évaluer l'effet sur le vecteur Terre-Lune. Les composantes radiale et tangentielle sont alors données par les deux expressions suivantes

$$\begin{aligned}\Gamma_{21}^{\hat{\rho}} &= -\frac{9}{4} \frac{Q_{21}^{(s)} \bar{\eta} \sin \xi'}{\varepsilon r^4} \cos(nt + \omega) + \frac{9}{2} \frac{Q_{21}^{(c)} \eta \sin \xi'}{\varepsilon r^4} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\bar{\eta}}{\eta} \right] \cos\left(nt + \omega - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{9}{4} \frac{Q_{21}^{(s)} \bar{\eta} \sin \xi'}{\varepsilon r^4} \cos(3nt + 3\omega) + \frac{9}{4} \frac{Q_{21}^{(c)} \bar{\eta} \sin \xi'}{\varepsilon r^4} \cos\left(3nt + 3\omega - \frac{\pi}{2}\right), \\ \Gamma_{21}^{\hat{\tau}} &= -\frac{3}{2} \frac{Q_{21}^{(s)} \eta \sin \xi'}{\varepsilon r^4} \sin(nt + \omega) - \frac{3}{2} \frac{Q_{21}^{(c)} \eta \sin \xi'}{\varepsilon r^4} \sin\left(nt + \omega + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{Q_{21}^{(s)} \bar{\eta} \sin \xi'}{\varepsilon r^4} \sin(3nt + 3\omega) - \frac{3}{2} \frac{Q_{21}^{(c)} \bar{\eta} \sin \xi'}{\varepsilon r^4} \sin\left(3nt + 3\omega + \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Après injection dans l'expression générale (A.26), on obtient la solution suivante

$$\begin{aligned}x_{21}(t) &= A_{n,\omega} \cos(nt + \omega) + B_{n,\omega} \sin(nt + \omega) \\ &\quad + A_{3n,3\omega} \cos(3nt + 3\omega) + B_{3n,3\omega} \sin(3nt + 3\omega),\end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

où nous avons posé

$$A_{n,\omega} \simeq -\frac{2Q_{21}^{(s)}\eta\sin\xi'}{\varepsilon N^2 r^4} \left[1 - \frac{3\bar{\eta}}{4\eta}\right], \quad (\text{C.51a})$$

$$B_{n,\omega} \simeq \frac{3}{2}A_{n,\omega} \frac{Q_{21}^{(c)}}{Q_{21}^{(s)}} \left[1 - \frac{3\bar{\eta}}{4\eta}\right], \quad (\text{C.51b})$$

$$A_{3n,3\omega} \simeq -\frac{5}{32} \frac{Q_{21}^{(s)}\bar{\eta}\sin\xi'}{\varepsilon n^2 r^4} \left[1 - \frac{3}{16} \frac{N^2}{n^2}\right], \quad (\text{C.51c})$$

$$B_{3n,3\omega} = A_{3n,3\omega} \frac{Q_{21}^{(c)}}{Q_{21}^{(s)}}. \quad (\text{C.51d})$$

L'application numérique donne les valeurs suivantes

$$A_{n,\omega} = -634.8S_{21} \text{ km},$$

$$B_{n,\omega} = -949.8C_{21} \text{ km},$$

$$A_{3n,3\omega} = -92.1S_{21} \text{ cm},$$

$$B_{3n,3\omega} = -92.1C_{21} \text{ cm}.$$

On constate que les amplitudes des coefficients  $A_{n,\omega}$  et  $B_{n,\omega}$  sont extrêmement élevées. Ceci est dû à la fréquence de l'excitation de l'harmonique (2,1) du potentiel lunaire qui se trouve être quasiment égale à la fréquence naturelle de la perturbation radiale conduisant à un effet résonant. À partir des valeurs des coefficients de Stokes du potentiel lunaire déduites de la mission GRAIL (Konopliv *et al.*, 2014; Lemoine *et al.*, 2014), on déduit  $A_{n,\omega} = -5.1 \mu\text{m}$ ,  $B_{n,\omega} = -0.1 \text{ mm}$ , tandis que  $A_{3n,3\omega}$  et  $B_{3n,3\omega}$  sont parfaitement négligeables en raison des valeurs extrêmement faibles de  $C_{21}$  et  $S_{21}$ .

### Effet de l'harmonique (2,2)

L'expression de l'accélération perturbatrice exprimée dans le repère lié à l'équateur lunaire est donnée par l'Eq. (C.31). On déduit alors à partir des Eqs. (C.45) l'équation suivante pour la composante radiale

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^{\hat{r}} &= -\frac{9}{2} \frac{Q_{22}^{(c)}}{\varepsilon r^4} \eta\bar{\eta} \cos(2nt + 2\omega) + \frac{9}{2} \frac{Q_{22}^{(s)}}{\varepsilon r^4} \eta\bar{\eta} \cos\left(2nt + 2\omega - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \frac{9}{4} \frac{Q_{22}^{(c)}}{\varepsilon r^4} \eta\bar{\eta} \cos(4nt + 4\omega) + \frac{9}{4} \frac{Q_{22}^{(s)}}{\varepsilon r^4} \bar{\eta}^2 \cos\left(4nt + 4\omega - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

où le terme  $-\frac{9}{4}Q_{22}^{(c)}\eta^2/\varepsilon r^4$  a été retiré pour contribuer à l'évaluation de l'orbite circulaire.

La composante tangentielle fournit l'expression suivante

$$\Gamma_{22}^{\hat{t}} = +\frac{3}{2} \frac{Q_{22}^{(s)}\eta^2}{\varepsilon r^4} - \frac{15}{4} \frac{Q_{22}^{(c)}\bar{\eta}^2}{\varepsilon r^4} \sin(4nt + 4\omega) - \frac{3}{2} \frac{Q_{22}^{(s)}\bar{\eta}^2}{\varepsilon r^4} \sin\left(4nt + 4\omega + \frac{\pi}{2}\right).$$

À partir de l'Eq. (A.13), on voit qu'une contribution constante dans la partie tangentielle de l'accélération génère un terme de Poisson dans l'expression finale du signal engendré sur la distance Terre-Lune. Ce terme se présente donc comme une fonction linéaire du temps de la forme :  $x(t) = 2a_\tau t n/n_0^2$  (*cf.* annexe A pour les notations). Il est un facteur limitant quant à la durée de validité de l'expression trouvée, puisqu'il tend

vers l'infini pour des temps infinis. Il est généré directement par les lois de Cassini qui contraignent la Lune à posséder une orientation quasi-constante dans le repère tournant avec l'orbite. Cette remarque peut-être directement vérifiée à partir des Eqs. (C.45). En effet, à la limite où  $\xi' \rightarrow 0$  ces dernières montrent que le passage d'un repère à l'autre devient simplement  $\mathbf{B}_{\hat{\sigma}}(\pi) = \text{diag}(-1, -1, +1)$ . Par conséquent, la projection de la perturbation (C.31) génère un terme en  $r(\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}_1)(\hat{\tau}_1 \cdot \hat{\tau})$  (le deuxième terme dans le second crochet de l'Eq. (C.31)). Cette expression est effectivement constante à l'ordre 0 puisque  $\mathbf{r}$  est principalement dirigé selon  $\hat{\rho}_1$  et que d'après les lois de Cassini,  $\hat{\tau}_1$  est principalement dirigé selon  $\hat{\tau}$ .

En remplaçant  $a_\tau$  par sa valeur, le terme de Poisson devient

$$x(t) \simeq \frac{3Q_{22}^{(s)}\eta^2}{n\varepsilon r^4} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{N^2}{n^2} \right] t,$$

soit environ une dérive de  $80 \mu m \cdot an^{-1}$ , ce qui est parfaitement négligeable dans le cadre de notre étude à court terme.

Après insertion dans l'Eq. (A.26) des composantes radiale et tangentielle de la perturbation (2,2) du potentiel lunaire, on détermine le signal suivant

$$\begin{aligned} x_{22}(t) &= A_{2n,2\omega} \cos(2nt + 2\omega) + B_{2n,2\omega} \sin(2nt + 2\omega) \\ &+ A_{4n,4\omega} \cos(4nt + 4\omega) + B_{4n,4\omega} \sin(4nt + 4\omega), \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

où nous avons posé

$$A_{2n,2\omega} \simeq \frac{3Q_{22}^{(c)}\eta\bar{\eta}}{\varepsilon n^2 r^4} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{N^2}{n^2} \right], \quad (\text{C.53a})$$

$$B_{2n,2\omega} = -A_{2n,2\omega} \frac{Q_{22}^{(s)}}{Q_{22}^{(c)}}, \quad (\text{C.53b})$$

$$A_{4n,4\omega} \simeq \frac{3}{20} \frac{Q_{22}^{(c)}\eta\bar{\eta}}{\varepsilon n^2 r^4} \left[ 1 - \frac{5}{6} \frac{\bar{\eta}}{\eta} - \frac{1}{10} \frac{N^2}{n^2} \right], \quad (\text{C.53c})$$

$$B_{4n,4\omega} \simeq -\frac{1}{10} \frac{Q_{22}^{(s)}\eta^2}{\varepsilon n^2 r^4} \left[ 1 - \frac{1}{10} \frac{N^2}{n^2} \right]. \quad (\text{C.53d})$$

L'application numérique fournit les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} A_{2n,2\omega} &\simeq 308.3C_{22} \text{ m}, \\ B_{2n,2\omega} &\simeq -308.3S_{22} \text{ m}, \\ A_{4n,4\omega} &\simeq 15.4C_{22} \text{ m}, \\ B_{4n,4\omega} &\simeq -3.4S_{22} \text{ cm}. \end{aligned}$$

En prenant les coefficients de Stokes dans les références Konopliv *et al.* (2014) et Lemoine *et al.* (2014), on trouve après substitutions  $A_{2n,2\omega} \simeq 6.9 \text{ mm}$  et  $A_{4n,4\omega} \simeq -0.3 \text{ mm}$ , les autres coefficients étant négligeables compte tenu de la valeur de  $S_{22} \propto 10^{-11}$ . Par conséquent, seule la modélisation de  $C_{22}$  est nécessaire.



# Annexe D

## Perturbation engendrée par les marées lunaires

### Sommaire

---

D.1 Introduction . . . . .	171
D.2 Marées solides . . . . .	171
D.3 Calculs préliminaires . . . . .	173
D.4 Taux d'éloignement lunaire . . . . .	175

---

### D.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous évaluons analytiquement l'effet sur la distance Terre-Lune des marées solides lunaires levées sur Terre. Dans un premier temps, nous exposons la méthode permettant de redémontrer l'équation des perturbations de marées telles qu'elles sont décrites dans DE405, à partir des équations du mouvement implémentées dans ELPN. Dans un second temps, on simplifie ces équations afin d'obtenir le modèle simplifié implémenté dans DE200. Enfin, à partir de l'accélération perturbatrice DE200, on détermine l'amplitude de l'effet de marées sur la distance Terre-Lune.

### D.2 Marées solides

Nous reprenons la théorie des potentiels non-sphériques des corps, introduite brièvement en début de l'annexe C. Considérons une fois de plus, le repère lié au corps étendu et désignons par  $\mathbf{R}_g$ , le vecteur reliant le centre du repère à un corps lointain considéré ponctuel et nommé corps générateur de marées. Les composantes de  $\mathbf{R}_g$  seront données en coordonnées sphériques par  $(R_g, \Phi_g, \Lambda_g)$ , et en coordonnées cartésiennes par  $(X_g, Y_g, Z_g)$ . Le potentiel du corps générateur de marées peut être exprimé en un point  $\mathbf{r}$ , de coordonnées  $(r, \phi, \lambda)$ , appartenant au corps étendu, via l'expression suivante

$$V_g(r, \phi, \lambda) = -\frac{\mathcal{G}M_g}{\|\mathbf{R}_g - \mathbf{r}\|} .$$

En suivant ce qui a été fait en début d'annexe C, on peut alors écrire

$$V_g(r, \phi, \lambda) = -\frac{\mathcal{G}M_g}{R_g} \sum_{l=0}^{+\infty} \alpha_g^l P_{l0}(\cos \chi_g),$$

avec  $\alpha_g = r/R_g$  et  $\chi_g$  l'angle sous-tendu entre les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{R}_g$ . Le cosinus de  $\chi_g$  peut alors être défini tel que

$$\cos \chi_g = \sin \Phi_g \sin \phi + \cos \Phi_g \cos \phi \cos (\Lambda_g - \lambda).$$

Le potentiel du corps générateur de marées est ainsi évalué en un point de coordonnées  $(r, \phi, \lambda)$ , appartenant au corps étendu via la relation suivante

$$V_g(r, \phi, \lambda) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_{lm}^g(r, \phi, \lambda)$$

avec

$$V_{lm}^g(r, \phi, \lambda) = -\alpha_g^l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)! \mathcal{G}M_g}{(l+m)! R_g} P_{lm}(\sin \Phi_g) P_{lm}(\sin \phi) \cos [m(\Lambda_g - \lambda)].$$

Un calcul direct de la force exercée sur le corps étendu, en prenant l'inverse du gradient de  $V_{lm}^g$ , montre que  $l = 0$  ne génère aucun effort sur le corps non-sphérique puisque  $V_{00}^g$  est constant. De même, l'harmonique  $l = 1$  génère une force qui est identique en tous points du corps étendu. Par conséquent, il n'existe pas de force différentielle entre les points du corps non-sphérique via les harmoniques  $l = 0$  et 1. Les premiers termes non-nuls apparaissent pour  $l = 2$ .

D'après les travaux de Love (1911) sur les corps déformables, chaque harmonique de la variation du potentiel à la surface d'un corps est proportionnelle à la même harmonique du potentiel perturbateur ; le coefficient de proportionnalité étant exactement égal au nombre de Love noté  $k_{lm}$ . En termes mathématiques, cette hypothèse se traduit par la relation

$$\Delta\varphi(a_e, \phi, \lambda) = \sum_{l \geq 2} \sum_{m=0}^l k_{lm} V_{lm}^g(a_e, \phi, \lambda).$$

Afin de déterminer la forme générale de  $\Delta\varphi$  donné pour un point quelconque  $\mathbf{R}$  de coordonnées  $(R, \Phi, \Lambda)$ , il faut ensuite résoudre le problème de Dirichlet. À savoir que  $\Delta\varphi(R, \Phi, \Lambda)$  doit être de laplacien nul et défini continue à l'extérieur du corps. De plus, sa valeur sur la frontière ( $R = a_e$ ) est définie par  $\Delta\varphi(a_e, \phi, \lambda)$ . Ainsi on détermine la relation suivante

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(R, \Phi, \Lambda) &= -\frac{\mathcal{G}M}{R} \sum_{l \geq 2} \sum_{m=0}^l k_{lm} (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{a_e}{R}\right)^l \left(\frac{a_e}{R_g}\right)^{l+1} \\ &\quad \times P_{lm}(\sin \Phi_g) P_{lm}(\sin \Phi) \left[ \cos m\Lambda \cos m\Lambda_g + \sin m\Lambda \sin m\Lambda_g \right]. \end{aligned}$$

On réécrit cette dernière expression comme

$$\Delta\varphi(R, \Phi, \Lambda) = -\frac{\mathcal{G}M}{R} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_e}{R}\right)^l P_{lm}(\sin \Phi) \left[ \Delta C_{lm} \cos m\Lambda + \Delta S_{lm} \sin m\Lambda \right], \quad (\text{D.1})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta C_{lm} \\ \Delta S_{lm} \end{array} \right\} = k_{lm} (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)! M_g}{(l+m)! M} \left(\frac{a_e}{R_g}\right)^{l+1} P_{lm}(\sin \Phi_g) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} (m\Lambda). \quad (\text{D.2})$$

Il est alors intéressant de remarquer que l'Eq. (D.1) s'écrit sous la même forme que l'Eq. (C.12). On démontre alors que le potentiel total comprenant la partie rigide (*cf.* Eq. (C.12)) ainsi que la partie due à l'influence d'un corps générateur de marée (*cf.* Eq. (D.1)) peut être exprimé sous la forme suivante

$$U_{lm}(R, \Phi, \Lambda) = \varphi_{lm}(R, \Phi, \Lambda) + \Delta\varphi_{lm}(R, \Phi, \Lambda),$$

après quelques manipulations on déduit

$$U_{lm}(R, \Phi, \Lambda) = -\frac{\mathcal{G}M}{R} \left(\frac{a_e}{R}\right)^l P_{lm}(\sin \Phi) \left[ (C_{lm} + \Delta C_{lm}) \cos m\Lambda + (S_{lm} + \Delta S_{lm}) \sin m\Lambda \right]. \quad (\text{D.3})$$

Les expressions de  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ ,  $\Delta C_{lm}$  et  $\Delta S_{lm}$  sont données par les Eqs. (C.13) et (D.2).

### D.3 Calculs préliminaires

En Sec. 2.5, nous avons détaillé la manière utilisée pour modéliser les effets de marées dans ELPN. Pour rappel, cette modélisation passe par la variation des coefficients de Stokes du potentiel, puis l'effet de non-sphéricité des corps étendus sur les orbites des corps perturbés est déterminé à partir de l'Eq. (2.30). La valeur des coefficients de Stokes est déterminée en ajoutant différentes contributions. La première est constante et provient de la partie purement rigide du corps étendu. Les deux contributions suivantes sont variables et proviennent respectivement des effets de marées causés par les corps perturbateurs, et de la variation du vecteur vitesse angulaire du corps non-sphérique.

Ainsi, en se restreignant à l'étude de la contribution due aux marées, l'Eq. (2.30) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\Delta a_{lm} = \frac{\mu a_e^l}{r^{2l+1}} \left\{ \Delta C_{lm}^T \left[ \frac{\partial \Theta_{lm}^{(c)}}{\partial \mathbf{r}} - (2l+1) \Theta_{lm}^{(c)} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right] + \Delta S_{lm}^T \left[ \frac{\partial \Theta_{lm}^{(s)}}{\partial \mathbf{r}} - (2l+1) \Theta_{lm}^{(s)} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right] \right\}.$$

À partir des expressions de  $\Delta C_{lm}^T$  et  $\Delta S_{lm}^T$ , précédemment présentées en Eq. (2.43), on déduit l'expression générale suivante

$$\Delta a_{lm} = \mu_g k_{lm} (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)! a_e^{2l+1}}{(l+m)! r^{2l+1}} \left\{ \sum_g \frac{\Theta_{lm}^{(c)}(\mathbf{r}_g^*)}{r_g^{*2l+1}} \left[ \frac{\partial \Theta_{lm}^{(c)}}{\partial \mathbf{r}} - (2l+1) \Theta_{lm}^{(c)} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right] + \sum_g \frac{\Theta_{lm}^{(s)}(\mathbf{r}_g^*)}{r_g^{*2l+1}} \left[ \frac{\partial \Theta_{lm}^{(s)}}{\partial \mathbf{r}} - (2l+1) \Theta_{lm}^{(s)} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right] \right\}, \quad (\text{D.4})$$

Notons que la position du corps générateur de marées fait intervenir les composantes déphasées repérées par l'indice "\*". Or, la position déphasée est déterminée par la relation  $\mathbf{r}_g^* = \mathbf{r}_g(t - \pi_{lm})$  où  $\pi_{lm}$  est le temps de déphasage. Par conséquent, les composantes déphasées sont également dépendantes du degré et de l'ordre de l'harmonique considérée.

L'Eq. (D.4) reste évidemment valable quelque soit l'harmonique considérée et est exprimée dans le repère lié au corps étendu. Elle représente l'accélération perturbatrice absolue ressentie par un corps ponctuel perturbé par les effets de marées engendrés par des corps générateurs sur le potentiel non-sphérique d'un corps étendu.

### Effets de marées DE405

À partir de l'Eq. (D.4) ainsi que des Tabs. 2.1 et 2.2, les gradients des fonctions  $\Theta_{lm}$  peuvent être calculés afin de déduire l'accélération absolue de la Lune générée par les effets de marées lunaires sur le potentiel terrestre. En réalisant la substitution pour  $l = 2$ , on trouve les trois expressions suivantes qui font apparaître les composantes des vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}_g$  notées respectivement  $(x, y, z)$  et  $(x_g, y_g, z_g)$ .

— Accélération absolue de la Lune pour  $l = 2, m = 0$  :

$$\Delta a_{20} = \frac{3}{2} \mu k_{20} \frac{(a_e)_T^5}{r^7} \sum_g \frac{2z_g^{*2} - x_g^{*2} - y_g^{*2}}{2r_g^{*5}} \begin{Bmatrix} x(x^2 + y^2 + 4z^2) \\ y(x^2 + y^2 - 4z^2) \\ z(3x^2 + 3y^2 - 2z^2) \end{Bmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

— Accélération absolue de la Lune pour  $l = 2, m = 1$  :

$$\Delta a_{21} = \frac{3}{2} \mu k_{21} \frac{(a_e)_T^5}{r^7} \left[ \sum_g \frac{2x_g^* z_g^*}{r_g^{*5}} \begin{Bmatrix} z(-4x^2 + y^2 + z^2) \\ -5xyz \\ x(x^2 + y^2 - 4z^2) \end{Bmatrix} + \sum_g \frac{2y_g^* z_g^*}{r_g^{*5}} \begin{Bmatrix} -5xyz \\ z(x^2 - 4y^2 + z^2) \\ y(x^2 + y^2 - 4z^2) \end{Bmatrix} \right]. \quad (\text{D.6})$$

— Accélération absolue de la Lune pour  $l = 2, m = 2$  :

$$\Delta a_{22} = \frac{3}{2} \mu k_{22} \frac{(a_e)_T^5}{r^7} \left[ \sum_g \frac{x_g^{*2} - y_g^{*2}}{2r_g^{*5}} \begin{Bmatrix} x(-3x^2 + 7y^2 + 2z^2) \\ y(-7x^2 + 3y^2 - 2z^2) \\ -5z(x^2 - y^2) \end{Bmatrix} + \sum_g \frac{2x_g^* y_g^*}{r_g^{*5}} \begin{Bmatrix} y(-4x^2 + y^2 + z^2) \\ x(x^2 - 4y^2 + z^2) \\ -5xyz \end{Bmatrix} \right]. \quad (\text{D.7})$$

Ces trois expressions, une fois réarrangées et additionnées, sont parfaitement cohérentes avec l'Eq. (32) de Folkner *et al.* (2014) au facteur  $(1 + \varepsilon)$  près avec  $\varepsilon = \mu/\mu_T$  et  $\mu$  la masse lunaire multipliée par la constante de gravitation. Ce facteur apparaît lorsque l'on distribue l'accélération du vecteur Terre-Lune et non l'accélération absolue de la Lune comme nous l'avons proposé ici.

### Effets de marées DE200

La passage au modèle de marées implémenté dans DE200 se fait moyennant quelques hypothèses simplificatrices. Considérons premièrement que la Lune soit le seul corps générateur de marées sur la Terre. Par conséquent, les sommes sur  $g$  disparaissent des Eqs. (D.5), (D.6) et (D.7). On constate donc que dans cette approximation, la Lune est à la fois le corps générateur et le corps perturbé par le potentiel terrestre. Faisons également les approximations suivantes  $k_{20} = k_{21} = k_{22} = k$  et  $\tau_{20} = \tau_{21} = \tau_{22} = \tau$ , qui permettent de rendre les composantes de  $\mathbf{r}_g^*$  indépendantes au degré et à l'ordre de l'harmonique. Ainsi, elles deviennent identiques dans les trois Eqs. (D.5), (D.6) et (D.7). Enfin, supposons négligeable l'arc orbital parcouru par la Lune pendant les  $9min$  et  $20s$  que représente le temps de déphasage  $\tau$ . Par conséquent, on peut supposer que l'angle de déphasage noté  $\delta$ , entre les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}_g$  n'est dû qu'à la rotation propre de la Terre. Ainsi, on déduit  $\delta = \tau n_\oplus$ , soit  $\delta \simeq 4.02 \times 10^{-2} \text{ rad}$ . On peut alors poser  $\mathbf{r}_g = \mathbf{B}_3(\delta) \cdot \mathbf{r}$ , soit en considérant  $\delta \ll 1$  :

$$\mathbf{r}_g \simeq \begin{pmatrix} x - y\delta \\ y + x\delta \\ z \end{pmatrix}.$$

En injectant alors toutes ces simplifications dans chacune des Eqs. (D.5), (D.6) et (D.7) et en les ajoutant ensemble, on trouve finalement l'expression suivante

$$(\Delta a_2)_L = -3\mu k \frac{(a_e)_T^5}{r^8} \begin{pmatrix} x + y\delta \\ y - x\delta \\ z \end{pmatrix}. \quad (\text{D.8})$$

On retrouve bien, au facteur  $(1 + \varepsilon)$  près, l'expression de DE200 (Newhall *et al.*, 1983).

## D.4 Taux d'éloignement lunaire

À partir de l'Eq. (D.8), nous pouvons estimer l'effet sur la distance Terre-Lune des marées lunaires levées sur la Terre. L'Eq. (D.8) représente donc l'accélération absolue de la Lune exprimée dans le repère lié à la Terre. En ne modélisant la Terre que par ses harmoniques zonales, le repère lié à l'équateur terrestre peut alors être considéré inertiel en négligeant également les mouvements de précession/nutation de l'axe de rotation. Nous choisissons ainsi le repère tel qu'il a été défini en annexe C Sec. C.3 (*cf.*  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ ). Ainsi, le passage du repère inertiel au repère tournant avec l'orbite de la Lune se fait via les relations (C.15), en considérant toujours  $\Omega = 0$ . l'accélération absolue (D.8) peut être transformée en une accélération relative du vecteur Terre-Lune via l'insertion du facteur  $(1 + \varepsilon)$ , soit

$$\Delta a_2^J = -3\mu(1 + \varepsilon)k \frac{(a_e)_T^5}{r^8} [x\hat{X}^J + y\delta\hat{X}^J - x\delta\hat{Y}^J + y\hat{Y}^J + z\hat{Z}^J]. \quad (\text{D.9})$$

On rappelle que dans le repère choisi

$$\begin{aligned} x &= r \cos(nt + \omega), \\ y &= r \sin(nt + \omega) \cos I, \\ z &= r \sin(nt + \omega) \sin I. \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit les composantes radiale et tangentielle de l'accélération en projetant directement l'Eq. (D.9) sur  $\hat{\rho}$  et  $\hat{\tau}$ . On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \Delta a_2^{\hat{\rho}} &= -3\mu(1 + \varepsilon)k \frac{(a_e)_T^5}{r^7}, \\ \Delta a_2^{\hat{\tau}} &= 3\mu(1 + \varepsilon)k\delta \cos I \frac{(a_e)_T^5}{r^7}. \end{aligned}$$

On obtient alors deux termes constants. Le terme de la composante radiale doit contribuer à l'évaluation de la fréquence de l'orbite circulaire, cependant il peut être négligé devant la contribution en  $N^2/2$  apportée par le Soleil (*cf.* Eq. (B.3)). En revanche, la partie constante de la composante tangentielle, ne peut être négligée et comme mentionné en annexe C, Sec. C.5, elle conduit à une solution du type  $x(t) = 2a_7 t n / n_0^2$  (*cf.* annexe A pour les notations). Ainsi, en reprenant l'expression de la fréquence naturelle de la perturbation radiale telle qu'elle est donnée en Eq. (B.7), on conclut que le terme de Poisson s'écrit sous la forme

$$x(t) \simeq 6\mu k \delta \cos I \frac{(a_e)_T^5}{nr^7} \left[ 1 + \varepsilon + \frac{3}{2} \frac{N^2}{n^2} \right] t. \quad (\text{D.10})$$

Une application numérique directe fournie une dérive de  $3.7 \text{ cm/an}$ , ce qui correspond tout à fait à la valeur observée par Folkner *et al.* (2014) qui est de  $3.81 \text{ cm/an}$ .



# Annexe E

## Publications

### Sommaire

---

E.1 Article à comité de lecture . . . . .	177
E.2 Proceedings de conférences . . . . .	177
E.3 Articles acceptés . . . . .	178

---

### E.1 Article à comité de lecture

Septembre 2015,  
**Testing Lorentz symmetry with planetary orbital dynamics**  
A. Hees, Q. G. Bailey, C. Le Poncin-Lafitte, A. Bourgoin, A. Rivoldini, B. Lamine, F. Meynadier, C. Guerlin et P. Wolf,  
*Physical Review D* 92.064049, ArXiv e-prints 1508.03478 [gr-qc].

### E.2 Proceedings de conférences

Juillet 2016,  
**Constraints on SME Coefficients from Lunar Laser Ranging, Very Long Baseline Interferometry, and Asteroid Orbital Dynamics**  
C. Le Poncin-Lafitte, A. Bourgoin, A. Hees, S. Bouquillon, S. Lambert, G. Francou, M.-C. Angonin, Q. G. Bailey, D. Hestroffer, F. Meynadier et P. Wolf,  
*Seventh Meeting on CPT and Lorentz Symmetry, Bloomington, Indiana, June 20-24, 2016.*

Décembre 2015,  
**A new 4-D dynamical modelling of the Moon orbital and rotational motion developed at POLAC**  
A. Bourgoin, C. Le Poncin-Lafitte, S. Bouquillon, G. Francou et M.-C. Angonin,  
*SF2A-2015: Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics* 111-114.

Octobre 2014,  
**Model of the Moon orbital and rotational motion developed by Paris Observatory Lunar Analysis Center**  
A. Bourgoin, C. Le Poncin-Lafitte, S. Bouquillon, G. Francou et M.-C. Angonin,  
*ILRS 2014: Proceedings of 19th International Workshop on Laser Ranging.*

### E.3 Articles acceptés

Octobre 2016,

**Tests of Lorentz symmetry in the gravitational sector**

A. Hees, Q. G. Bailey, A. Bourgoin, H. Pihan-le-Bars, C. Guerlin et C. Le Poncin-Lafitte, soumis à *MDPI Universe*, ArXiv e-prints 1610.04682 [gr-qc].

Juillet 2016,

**Testing Lorentz symmetry with Lunar Laser Ranging**

A. Bourgoin, A. Hees, S. Bouquillon, C. Le Poncin-Lafitte, G. Francou et M.-C. Angonin, soumis à *Physical Review Letters*, ArXiv e-prints 1607.00294 [gr-qc].

# Table des figures

1.1	Photos de l'architecture coins de cube des rétroreflecteurs. . . . .	13
1.2	Schémas de principe de l'analyse LLR. . . . .	21
2.1	Position du barycentre du système solaire. . . . .	27
2.2	Schéma d'orientation du pôle solaire dans l'ICRF. . . . .	44
2.3	Représentation des trois angles d'Euler. . . . .	47
2.4	Représentation des trois angles d'Euler du noyau. . . . .	52
3.1	Adimensionnement des trajectoires. . . . .	59
3.2	Erreur numérique relative en fonction du nombre de périodes. . . . .	62
3.3	Dérive du barycentre du système solaire. . . . .	63
3.4	Différences sur les composantes du vecteur Terre-Lune. . . . .	67
3.5	Différences sur les éléments képlériens de la Lune. . . . .	68
3.6	Différences sur les angles d'Euler de la Lune. . . . .	68
3.7	Différence de modèle sur les composantes du vecteur Terre-Lune. . . . .	69
3.8	Différence de modèle sur les éléments képlériens de la Lune. . . . .	69
3.9	Différence de modèle sur les angles d'Euler de la Lune. . . . .	70
3.10	Différences sur les éléments képlériens de Mercure. . . . .	72
3.11	Différences sur les éléments képlériens de Vénus. . . . .	72
3.12	Différences sur les éléments képlériens du barycentre Terre-Lune. . . . .	73
3.13	Différences sur les éléments képlériens de Mars. . . . .	73
3.14	Différences sur les éléments képlériens de Jupiter. . . . .	74
3.15	Différences sur les éléments képlériens de Saturne. . . . .	74
3.16	Téléométrie laser sur la Lune ; principe de la mesure. . . . .	76
3.17	Téléométrie laser sur la Lune ; notations pour le système Terre-Lune. . . . .	77
3.18	Evolution des erreurs relatives sur les dérivées partielles. . . . .	86
3.19	Résidus d'analyse LLR en relativité générale. . . . .	89
3.20	Différences post-fit de modèles sur les composantes du vecteur Terre-Lune. . . . .	92
3.21	Différences post-fit sur les composantes du vecteur Terre-Lune. . . . .	92
3.22	Différences post-fit de modèles sur les éléments képlériens de la Lune. . . . .	93
3.23	Différences post-fit sur les éléments képlériens de la Lune. . . . .	93
3.24	Différences post-fit de modèles sur les angles d'Euler de la Lune. . . . .	94
3.25	Différences post-fit sur les éléments képlériens de Mercure. . . . .	95
3.26	Différences post-fit sur les éléments képlériens de Vénus. . . . .	96
3.27	Différences post-fit sur les éléments képlériens du barycentre Terre-Lune. . . . .	96
3.28	Différences post-fit sur les éléments képlériens de Mars. . . . .	97
3.29	Différences post-fit sur les éléments képlériens de Jupiter. . . . .	97
3.30	Différences post-fit sur les éléments képlériens de Saturne. . . . .	98
3.31	Résidus sur de nouvelles données LLR. . . . .	99

---

4.1	Ajustement des combinaisons linéaires. . . . .	113
4.2	Sensibilité des coefficients SME à l'ajout de données. . . . .	116
4.3	Sensibilité des coefficients SME à l'ajout de paramètres. . . . .	117
4.4	Sensibilité des coefficients SME aux stations LLR. . . . .	118
4.5	Sensibilité des coefficients SME aux réflecteurs. . . . .	120
B.1	Evolution des variables angulaires d'une Lune dans l'écliptique. . . . .	140
B.2	Evolution des variables angulaires d'un système de planètes coplanaires. . .	142
C.1	Orientation de l'orbite lunaire. . . . .	153
C.2	Schémas de la sphère céleste centrée sur la Terre. . . . .	153
C.3	Plan orbital terrestre dans l'équateur moyen. . . . .	161
C.4	Représentation des lois de Cassini. . . . .	165

# Liste des tableaux

1.1	Combinaisons linéaires SME ajustées par Battat <i>et al.</i> . . . . .	17
2.1	Valeurs de $\Theta_{lm}^{(c)}(\mathbf{r})$ données jusqu'au degré 5. . . . .	34
2.2	Valeurs non nulles de $\Theta_{lm}^{(s)}(\mathbf{r})$ données jusqu'au degré 5. . . . .	34
3.1	Nombre d'itérations nécessaires à la résolution de l'équation de Képler. . . . .	61
3.2	Erreur numérique absolue après 100 ans d'intégration. . . . .	62
3.3	Sensibilités théoriques et numériques aux orbites planétaires. . . . .	71
3.4	Statistiques des résidus ELPN par station LLR. . . . .	90
3.5	Statistiques des résidus INPOP et DE par station LLR. . . . .	90
4.1	Notations employées pour le SME. . . . .	105
4.2	Corrélations entre coefficients du SME minimal. . . . .	110
4.3	Corrélations entre combinaisons linéaires du SME minimal. . . . .	114
4.4	Estimations courantes de $\bar{\mathbf{s}}^{TT}$ . . . . .	115
4.5	Définition des sous-ensembles de données par couples stations-instruments. . . . .	118
4.6	Comparaison entre contraintes et estimations des coefficients SME. . . . .	122
B.1	Notations. . . . .	138
B.2	Premiers coefficients de Laplace. . . . .	143
B.3	Signaux générés par les corps extérieurs sur la distance Terre-Lune. . . . .	146
B.4	Valeurs théoriques des déplacements planétaires observables. . . . .	147



# Bibliographie

- B. P. ABBOTT, R. ABBOTT, T. D. ABBOTT, M. R. ABERNATHY, F. ACERNESE, K. ACKLEY, C. ADAMS, T. ADAMS, P. ADDESSO, R. X. ADHIKARI et al. : Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, 116(6): 061102, février 2016. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2016PhRvL.116f1102A>.
- E. G. ADELBERGER, B. R. HECKEL et A. E. NELSON : Tests of the Gravitational Inverse-Square Law. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 53:77–121, décembre 2003. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003ARNPS..53...77A>.
- E. Y. ALESHKINA : Lunar numerical theory and determination of parameters  $k_2$ ,  $\delta a_M$  from analysis of LLR data. *A&A*, 394:717–721, novembre 2002. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002A%26A...394..717A>.
- C. J. ALLÈGRE, J.-P. POIRIER, E. HUMLER et A. W. HOFMANN : The chemical composition of the Earth. *Earth and Planetary Science Letters*, 134:515–526, septembre 1995. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1995E%26PSL.134..515A>.
- C. O. ALLEY, P. L. BENDER, R. H. DICKE, J. E. FALLER, P. A. FRANKEN, H. H. PLOTKIN et D. T. WILKINSON : Optical Radar Using a Corner Reflector on the Moon. *J. Geophys. Res.*, 70:2267–2269, mai 1965. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1965JGR...70.2267A>.
- V. I. ARNOLD : *Mathematical methods of classical mechanics*. 1978. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1978mmcm.book.....A>.
- S. BAESSLER, B. R. HECKEL, E. G. ADELBERGER, J. H. GUNDLACH, U. SCHMIDT et H. E. SWANSON : Improved Test of the Equivalence Principle for Gravitational Self-Energy. *Physical Review Letters*, 83:3585–3588, novembre 1999. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1999PhRvL..83.3585B>.
- R. BAIERLEIN : Testing General Relativity with Laser Ranging to the Moon. *Physical Review*, 162:1275–1287, octobre 1967. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1967PhRv..162.1275B>.
- Q. G. BAILEY : *Lorentz violation and gravity*. Thèse de doctorat, Indiana University, 2007. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007PhDT.....21B>.
- Q. G. BAILEY : Time delay and doppler tests of the lorentz symmetry of gravity. *Physical Review D*, 80(4):044004, août 2009. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009PhRvD..80d4004B>.
- Q. G. BAILEY, R. D. EVERETT et J. M. OVERDUIN : Limits on violations of Lorentz symmetry from Gravity Probe B. *Phys. Rev. D*, 88(10):102001, novembre 2013. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013PhRvD..88j2001B>.

- Q. G. BAILEY et V. A. KOSTELECKÝ : Signals for lorentz violation in post-newtonian gravity. *Phys. Rev. D*, 74(4):045001, août 2006. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006PhRvD...74d5001B>.
- J. B. R. BATTAT, J. F. CHANDLER et C. W. STUBBS : Testing for Lorentz Violation : Constraints on Standard-Model-Extension Parameters via Lunar Laser Ranging. *Physical Review Letters*, 99(24):241103, décembre 2007. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007PhRvL...99x1103B>.
- B. BERTOTTI, L. IESS et P. TORTORA : A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature*, 425:374–376, septembre 2003. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003Natur.425...374B>.
- L. BLANCHET et T. DAMOUR : Radiative gravitational fields in general relativity. i - general structure of the field outside the source. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 320:379–430, décembre 1986. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1986RSPTA.320...379B>.
- A. BOEHLE, A. M. GHEZ, R. SCHÖDEL, L. MEYER, S. YELDA, S. ALBERS, G. D. MARTINEZ, E. E. BECKLIN, T. DO, J. R. LU, K. MATTHEWS, M. R. MORRIS, B. SITARSKI et G. WITZEL : An Improved Distance and Mass Estimate for Sgr A\* from a Multistar Orbit Analysis. *ApJ*, 830:17, octobre 2016. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2016ApJ...830...17B>.
- A. BOURGOIN, A. HEES, S. BOUQUILLON, C. LE PONCIN-LAFITTE, G. FRANCOU et M.-C. ANGININ : Testing Lorentz symmetry with Lunar Laser Ranging. *ArXiv e-prints*, juillet 2016. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2016arXiv160700294B>.
- C. BRANS et R. H. DICKE : Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, 1961.
- D. BROUWER et G. M. CLEMENCE : *Methods of celestial mechanics*. 1961. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1961mcm...book...B>.
- V. A. BRUMBERG : *Essential relativistic celestial mechanics*. 1991. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1991ercm.book...B>.
- N. CAPITAINÉ, P. T. WALLACE et J. CHAPRONT : Expressions for IAU 2000 precession quantities. *A&A*, 412:567–586, décembre 2003. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003A%26A...412..567C>.
- N. CAPITAINÉ, P. T. WALLACE et J. CHAPRONT : Improvement of the iau 2000 precession model. *A&A*, 432:355–367, mars 2005. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005A%26A...432..355C>.
- J. CHAPRONT, M. CHAPRONT-TOUZÉ et G. FRANCOU : Determination of the lunar orbital and rotational parameters and of the ecliptic reference system orientation from LLR measurements and IERS data. *A&A*, 343:624–633, mars 1999. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1999A%26A...343..624C>.
- J. CHAPRONT, M. CHAPRONT-TOUZÉ et G. FRANCOU : A new determination of lunar orbital parameters, precession constant and tidal acceleration from LLR measurements. *A&A*, 387:700–709, mai 2002. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002A%26A...387..700C>.

- M. CHAPRONT-TOUZE : The ELP solution for the main problem of the moon and some applications. *Celestial Mechanics*, 26:63–69, janvier 1982. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1982CeMec...26...63C>.
- M. CHAPRONT-TOUZE et J. CHAPRONT : The lunar ephemeris ELP 2000. *A&A*, 124:50–62, juillet 1983. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1983A%26A...124...50C>.
- M. CHAPRONT-TOUZE et J. CHAPRONT : Elp 2000-85 - a semi-analytical lunar ephemeris adequate for historical times. *A&A*, 190:342–352, janvier 1988. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/1988A%26A...190...342C>.
- M. CHAPRONT-TOUZÉ, J. CHAPRONT et G. FRANCOU : Determination of UT0 with LLR observations. In M. SOFFEL et N. CAPITAINE, éditeurs : *Journées 1999 - systèmes de référence spatio-temporels IX. Lohrmann-Kolloquium. Motion of celestial bodies, astrometry and astronomical reference frames*, pages 217–220, 2000. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000jsrs.meet...217C>.
- W. CHEN, J. CHENG LI, J. RAY, W. BIN SHEN et Li Huang C. : Consistent estimates of the dynamic figure parameters of the earth. *Journal of Geodesy*, 2014.
- J. CHIAVERINI, S. J. SMULLIN, A. A. GERACI, D. M. WELD et A. KAPITULNIK : New experimental constraints on non-newtonian forces below 100  $\mu\text{m}$ . *Phys. Rev. Lett.*, 90:151101, Apr 2003. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.151101>.
- K.-Y. CHUNG, S.-W. CHIOU, S. HERRMANN, S. CHU et H. MÜLLER : Atom interferometry tests of local Lorentz invariance in gravity and electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 80(1):016002, juillet 2009. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009PhRvD...80a6002C>.
- I. CIUFOLINI, A. PAOLOZZI, E. C. PAVLIS, R. KOENIG, J. RIES, V. GURZADYAN, R. MATZNER, R. PENROSE, G. SINDONI, C. PARIS, H. KHACHATRYAN et S. MIRZOYAN : A test of general relativity using the LARES and LAGEOS satellites and a GRACE Earth gravity model. Measurement of Earth’s dragging of inertial frames. *European Physical Journal C*, 76:120, mars 2016. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2016EPJC...76...120C>.
- I. CIUFOLINI et E. C. PAVLIS : A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense-Thirring effect. *Nature*, 431:958–960, octobre 2004. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004Natur.431...958C>.
- T. CLIFTON : Parametrized post-Newtonian limit of fourth-order theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 77(2):024041, janvier 2008. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008PhRvD...77b4041C>.
- T. CLIFTON, P. G. FERREIRA, A. PADILLA et C. SKORDIS : Modified gravity and cosmology. *Phys. Rep.*, 513:1–189, mars 2012. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2012PhR...513....1C>.
- D. COLLADAY et V. A. KOSTELECKÝ : CPT violation and the standard model. *Phys. Rev. D*, 55:6760–6774, juin 1997. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1997PhRvD...55.6760C>.
- D. COLLADAY et V. A. KOSTELECKÝ : Lorentz-violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D*, 58(11):116002, décembre 1998. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998PhRvD...58k6002C>.

- T. DAMOUR, M. SOFFEL et C. XU : General relativistic celestial mechanics. i. method and definition of reference systems. *Physical Review D*, 43:3273–3307, octobre 1991. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1991PhRvD...43.3273D>.
- T. DAMOUR et D. VOKROUHLICKÝ : Conservation laws for systems of extended bodies in the first post-newtonian approximation. *Physical Review D*, 52:4455–4461, octobre 1995. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1995PhRvD...52.4455D>.
- M. E. DAVIES, V. K. ABALAKIN, M. BURSA, T. LEDERLE, J. H. LIESKE, R. H. RAPP, P. K. SEIDELMAN, A. T. SINCLAIR, V. G. TEIFEL et Y. S. TJUFLIN : Report of the IAU/IAG/COSPAR working group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites - 1985. *Celestial Mechanics*, 39:103–113, mai 1986. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1986CeMec...39..103D>.
- V. DEHANT et P. M. MATHEWS : *Precession, Nutation and Wobble of the Earth*. avril 2015. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2015pnwe.book.....D>.
- S. DESER et P. van NIEUWENHUIZEN : One-loop divergences of quantized einstein-maxwell fields. *Phys. Rev. D*, 10:401–410, Jul 1974. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.401>.
- J. O. DICKEY, P. L. BENDER, J. E. FALLER, X. X. NEWHALL, R. L. RICKLEFS, J. G. RIES, P. J. SHELUS, C. VEILLET, A. L. WHIPPLE, J. R. WIAN, J. G. WILLIAMS et C. F. YODER : Lunar Laser Ranging : A Continuing Legacy of the Apollo Program. *Science*, 265:482–490, juillet 1994. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1994Sci...265..482D>.
- L. DURIEZ : *Cours de mécanique céleste*. 2007.
- F. W. DYSON, A. S. EDDINGTON et C. DAVIDSON : A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 220:291–333, 1920. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1920RSPTA.220..291D>.
- A. EINSTEIN : Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 4, 1908. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1908JRE.....4..411E>.
- A. EINSTEIN : Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 844-847., 1915a. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....844E>.
- A. EINSTEIN : Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 831-839., 1915b. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW...831E>.
- A. EINSTEIN : Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 688-696., 1916. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1916SPAW.....688E>.
- A. EINSTEIN : Über Gravitationswellen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 154-167., 1918. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1918SPAW.....154E>.

- A. EINSTEIN, L. INFELD et B. HOFFMANN : The gravitational equations and the problem of motion. *Annals of Mathematics*, 39(1):65–100, janvier 1938. URL <http://www.jstor.org/stable/1968714>.
- C. W. F. EVERITT, D. B. DEBRA, B. W. PARKINSON, J. P. TURNEAURE, J. W. CONKLIN, M. I. HEIFETZ, G. M. KEISER, A. S. SILBERGLEIT, T. HOLMES, J. KOLODZIEJCZAK, M. AL-MESHARI, J. C. MESTER, B. MUHLFELDER, V. G. SOLOMONIK, K. STAHL, P. W. WORDEN, Jr., W. BENCZE, S. BUCHMAN, B. CLARKE, A. AL-JADAAN, H. AL-JIBREEN, J. LI, J. A. LIPA, J. M. LOCKHART, B. AL-SUWAIDAN, M. TABER et S. WANG : Gravity Probe B : Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity. *Physical Review Letters*, 106(22):221101, juin 2011. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011PhRvL.106v1101E>.
- A. FIENGA, J. LASKAR, P. EXERTIER, H. MANCHE et M. GASTINEAU : Numerical estimation of the sensitivity of INPOP planetary ephemerides to general relativity parameters. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 123:325–349, novembre 2015. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2015CeMDA.123..325F>.
- A. FIENGA, J. LASKAR, T. MORLEY, H. MANCHE, P. KUCHYNKA, C. LE PONCIN-LAFITTE, F. BUDNIK, M. GASTINEAU et L. SOMENZI : Inpop08, a 4-d planetary ephemeris : from asteroid and time-scale computations to esa mars express and venus express contributions. *Astronomy and Astrophysics*, 507:1675–1686, décembre 2009. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009A%26A...507.1675F>.
- A. FIENGA, H. MANCHE, J. LASKAR et M. GASTINEAU : Inpop06 : a new numerical planetary ephemeris. *A&A*, 477:315–327, janvier 2008. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008A%26A...477..315F>.
- A. FIENGA, H. MANCHE, J. LASKAR, M. GASTINEAU et A. VERMA : Inpop new release : Inpop13b. *ArXiv e-prints*, mai 2014. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014arXiv1405.0484F>.
- E. FISCHBACH, D. SUDARSKY, A. SZAFER, C. TALMADGE et S. H. ARONSON : Reanalysis of the Eotvos experiment. *Physical Review Letters*, 56:3–6, janvier 1986. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1986PhRvL...56....3F>.
- E. FISCHBACH et C. L. TALMADGE : *The Search for Non-Newtonian Gravity*. 1999. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1999snng.book.....F>.
- V. A. FOK : *The theory of space, time and gravitation*. décembre 1964. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1964tstg.book.....F>.
- W. M. FOLKNER, J. G. WILLIAMS, D. H. BOGGS, R. S. PARK et P. KUCHYNKA : The planetary and lunar ephemerides de430 and de431. *Interplanetary Network Progress Report*, 42-196:1–81, février 2014. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014IPNPR.196C...1F>.
- A. FRIEDMANN : Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10(1):377–386, 1922. ISSN 0044-3328. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01332580>.
- A. FRIEDMANN : Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 21(1):326–332, 1924. ISSN 0044-3328. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01328280>.

- Alex D. GOTTLIEB : Asymptotic equivalence of the jackknife and infinitesimal jackknife variance estimators for some smooth statistics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 55(3):555–561, 2003. ISSN 1572-9052. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02517807>.
- Y. HAGIHARA : *Celestial mechanics. Vol.1 : Dynamical principles and transformation theory*. 1970. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1970ceme.book.....H>.
- Ernst HAIRER, Syvert Paul NORSETT et Gerhard WANNER : *Solving Ordinary Differential Equation I. Nonstiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics, 1993.
- A. HEES : *Signature d'observables en théories alternatives de la gravitation*. Thèse de doctorat, ORB, 2012.
- A. HEES, Q. G. BAILEY, C. LE PONCIN-LAFITTE, A. BOURGOIN, A. RIVOLDINI, B. LAMINE, F. MEYNADIER, C. GUERLIN et P. WOLF : Testing Lorentz symmetry with planetary orbital dynamics. *Physical Review D*, 92(6):064049, septembre 2015. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2015PhRvD...92f4049H>.
- J. P. HENRY, A. E. EVRARD, H. HOEKSTRA, A. BABUL et A. MAHDAVI : The X-Ray Cluster Normalization of the Matter Power Spectrum. *ApJ*, 691:1307–1321, février 2009. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...691.1307H>.
- E. HUBBLE : A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15:168–173, mars 1929. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1929PNAS...15..168H>.
- R. A. HULSE et J. H. TAYLOR : Discovery of a pulsar in a binary system. *ApJ*, 195:L51–L53, janvier 1975. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1975ApJ...195L..51H>.
- L. IORIO : Orbital effects of Lorentz-violating standard model extension gravitomagnetism around a static body : a sensitivity analysis. *Classical and Quantum Gravity*, 29(17):175007, septembre 2012. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2012CQGra...29q5007I>.
- D. B. KAPLAN et M. B. WISE : Couplings of a light dilaton and violations of the equivalence principle. *Journal of High Energy Physics*, 8:037, août 2000. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000JHEP...08..037K>.
- W. M. KAULA : *Theory of satellite geodesy. Applications of satellites to geodesy*. 1966. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1966tsga.book.....K>.
- S. A. KLIONER et M. H. SOFFEL : Relativistic celestial mechanics with ppn parameters. *Physical Review D*, 62(2):024019, juillet 2000. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000PhRvD...62b4019K>.
- A. S. KONOPLIV, S. W. ASMAR, W. M. FOLKNER, Ö. KARATEKIN, D. C. NUNES, S. E. SMREKAR, C. F. YODER et M. T. ZUBER : Mars high resolution gravity fields from mro, mars seasonal gravity, and other dynamical parameters. *Icarus*, 211:401–428, janvier 2011. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011Icar...211..401K>.
- A. S. KONOPLIV, R. S. PARK, D.-N. YUAN, S. W. ASMAR, M. M. WATKINS, J. G. WILLIAMS, E. FAHNESTOCK, G. KRUIZINGA, M. PAIK, D. STREKALOV, N. HARVEY, D. E. SMITH et M. T. ZUBER : High-resolution lunar gravity fields from the GRAIL

- Primary and Extended Missions. *Geophys. Res. Lett.*, 41:1452–1458, mars 2014. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014GeoRL...41.1452K>.
- V. A. KOSTELECKÝ : Gravity, Lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, 69(10):105009, mai 2004. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004PhRvD...69j5009K>.
- V. A. KOSTELECKÝ, A. C. MELISSINOS et M. MEWES : Searching for photon-sector Lorentz violation using gravitational-wave detectors. *Physics Letters B*, 761:1–7, octobre 2016. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2016PhLB...761....1K>.
- V. A. KOSTELECKÝ et N. RUSSELL : Data tables for Lorentz and CPT violation. *Reviews of Modern Physics*, 83:11–32, janvier 2011. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011RvMP...83....11K>.
- V. A. KOSTELECKÝ et J. D. TASSON : Matter-gravity couplings and lorentz violation. *Phys. Rev. D*, 83(1):016013, janvier 2011. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011PhRvD...83a6013K>.
- V. A. KOSTELECKÝ et J. D. TASSON : Constraints on Lorentz violation from gravitational Čerenkov radiation. *Physics Letters B*, 749:551–559, octobre 2015. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2015PhLB...749...551K>.
- V. LAINEY : *Théorie dynamique des satellites galiléens*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris, 2002.
- S. LAMBERT : *Analyse et modélisation de haute précision pour l'orientation de la Terre*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris, 2003.
- L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ : *Mechanics*. 1969. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1969mech.book.....L>.
- L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ : *The classical theory of fields*. 1975. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1975ctf..book.....L>.
- P. S. LAPLACE : *Traité de mécanique céleste T. I*. Oeuvres complètes T. I, 1798.
- C. LE PONCIN-LAFITTE, A. HEES et S. LAMBERT : Lorentz symmetry and Very Long Baseline Interferometry. *ArXiv e-prints*, avril 2016. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2016arXiv160401663L>.
- G. LEMAÎTRE : Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 47:49–59, 1927. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1927ASSB...47...49L>.
- G. LEMAÎTRE : Expansion of the universe, A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. *MNRAS*, 91:483–490, mars 1931. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1931MNRAS...91..483L>.
- F. G. LEMOINE, S. GOOSSENS, T. J. SABAKA, J. B. NICHOLAS, E. MAZARICO, D. D. ROWLANDS, B. D. LOOMIS, D. S. CHINN, G. A. NEUMANN, D. E. SMITH et M. T. ZUBER : GRGM900C : A degree 900 lunar gravity model from GRAIL primary and extended mission data. *Geophys. Res. Lett.*, 41:3382–3389, mai 2014. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014GeoRL...41.3382L>.

- J. LENSE et H. THIRRING : Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 19, 1918. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1918PhyZ...19..156L>.
- J. H. LIESKE : Precession matrix based on IAU /1976/ system of astronomical constants. *A&A*, 73:282–284, mars 1979. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1979A%26A...73..282L>.
- J. H. LIESKE, T. LEDERLE, W. FRICKE et B. MORANDO : Expressions for the precession quantities based upon the IAU /1976/ system of astronomical constants. *A&A*, 58:1–16, juin 1977. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1977A%26A...58....1L>.
- K. LODDERS et B. FEGLEY : *The planetary scientist's companion / Katharina Lodders, Bruce Fegley*. 1998. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998psc..book.....L>.
- J. C. LONG, H. W. CHAN, A. B. CHURNSIDE, E. A. GULBIS, M. C. M. VARNEY et J. C. PRICE : Upper limits to submillimetre-range forces from extra space-time dimensions. *Nature*, 421:922–925, février 2003. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003Natur.421..922L>.
- A. E. H. LOVE : *Some Problems of Geodynamics*. 1911. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1911spge.book.....L>.
- R. LUPTON : *Statistics in theory and practice*. 1993. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1993stp..book.....L>.
- H. MANCHE : *Elaboration de l'éphéméride INPOP : modèle dynamique et ajustements aux données de télémétrie laser Lune*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris, 2011.
- J. MASIERO, R. JEDICKE, J. ĀURECH, S. GWYN, L. DENNEAU et J. LARSEN : The Thousand Asteroid Light Curve Survey. *Icarus*, 204:145–171, novembre 2009. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009Icar..204..145M>.
- P. MATHEWS : Improved models for precession and nutations. In K. J. JOHNSTON, D. D. MCCARTHY, B. J. LUZUM et G. H. KAPLAN, éditeurs : *IAU Colloq. 180 : Towards Models and Constants for Sub-Microarcsecond Astrometry*, page 212, 2000. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000tmcs.conf..212M>.
- D. MATTINGLY : Modern Tests of Lorentz Invariance. *Living Reviews in Relativity*, 8, septembre 2005. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005LRR.....8....5M>.
- D. D. MCCARTHY et G. PETIT : IERS Conventions (2003). *IERS Technical Note*, 32, 2004. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004ITN....32....1M>.
- M. MILGROM : A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *ApJ*, 270:365–370, juillet 1983. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1983ApJ...270..365M>.
- T. D. MOYER : *Mathematical formulation of the Double-Precision Orbit Determination Program (DPODP)*. 1971. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1971mfdo.book.....M>.

- T. D. MOYER : *Formulation for Observed and Computed Values of Deep Space Network Data Types for Navigation Monograph 2*. Deep Space Communications and Navigation Series. 2000.
- H. MÜLLER, S.-W. CHIOU, S. HERRMANN, S. CHU et K.-Y. CHUNG : Atom-Interferometry Tests of the Isotropy of Post-Newtonian Gravity. *Physical Review Letters*, 100(3):031101, janvier 2008. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008PhRvL.100c1101M>.
- J. MÜLLER et K. NORDTVEDT : Lunar laser ranging and the equivalence principle signal. *Phys. Rev. D*, 58(6):062001, septembre 1998. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998PhRvD..58f2001M>.
- J. MÜLLER, J. G. WILLIAMS et S. G. TURYSHEV : Lunar laser ranging contributions to relativity and geodesy. *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*, septembre 2005. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005gr.qc.....9114M>.
- T. W. MURPHY : Lunar laser ranging : the millimeter challenge. *Reports on Progress in Physics*, 76(7):076901, juillet 2013. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013RPPh..76g6901M>.
- T. W. MURPHY, Jr., E. G. ADELBERGER, J. B. R. BATTAT, L. N. CAREY, C. D. HOYLE, P. LEBLANC, E. L. MICHELSEN, K. NORDTVEDT, A. E. ORIN, J. D. STRASBURG, C. W. STUBBS, H. E. SWANSON et E. WILLIAMS : The Apache Point Observatory Lunar Laser-ranging Operation : Instrument Description and First Detections. *PASP*, 120:20–37, janvier 2008. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008PASP..120...20M>.
- C. D. MURRAY et S. F. DERMOTT : *Solar System Dynamics*. février 2000. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000ssd..book.....M>.
- X. X. NEWHALL, E. M. STANDISH et J. G. WILLIAMS : De 102 - a numerically integrated ephemeris of the moon and planets spanning forty-four centuries. *Astronomy and Astrophysics*, 125:150–167, août 1983. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1983A%26A...125..150N>.
- K. NORDTVEDT : Equivalence Principle for Massive Bodies. I. Phenomenology. *Physical Review*, 169:1014–1016, mai 1968a. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1968PhRv..169.1014N>.
- K. NORDTVEDT : Equivalence Principle for Massive Bodies. II. Theory. *Physical Review*, 169:1017–1025, mai 1968b. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1968PhRv..169.1017N>.
- K. NORDTVEDT : Testing relativity with laser ranging to the moon. *Phys. Rev. D.*, 170:1186–1187, juin 1968. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1968PhRv..170.1186N>.
- K. NORDTVEDT : Post-newtonian gravitational effects in lunar laser ranging. *Phys. Rev. D.*, 7:2347–2356, avril 1973. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1973PhRvD...7.2347N>.
- K. NORDTVEDT : Lunar laser ranging reexamined : The non-null relativistic contribution. *Phys. Rev. D.*, 43:3131–3135, mai 1991. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1991PhRvD..43.3131N>.
- D. PELAT : *Bases et méthodes pour le traitement des données*. 2006.

- S. PERLMUTTER, G. ALDERING, G. GOLDHABER, R. A. KNOP, P. NUGENT, P. G. CASTRO, S. DEUSTUA, S. FABBRO, A. GOOBAR, D. E. GROOM, I. M. HOOK, A. G. KIM, M. Y. KIM, J. C. LEE, N. J. NUNES, R. PAIN, C. R. PENNYPACKER, R. QUIMBY, C. LIDMAN, R. S. ELLIS, M. IRWIN, R. G. MCMAHON, P. RUIZ-LAPUENTE, N. WALTON, B. SCHAEFER, B. J. BOYLE, A. V. FILIPPENKO, T. MATHESON, A. S. FRUCHTER, N. PANAGIA, H. J. M. NEWBERG, W. J. COUCH et T. S. C. PROJECT : Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae. *ApJ*, 517:565–586, juin 1999. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1999ApJ...517..565P>.
- G. PETIT, B. LUZUM et ET AL. : IERS Conventions (2010). *IERS Technical Note*, 36, 2010. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ITN....36....1P>.
- E. V. PITJEVA et N. P. PITJEV : Development of planetary ephemerides EPM and their applications. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 119:237–256, août 2014. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2014CeMDA.119..237P>.
- PLANCK COLLABORATION, R. ADAM, P. A. R. ADE, N. AGHANIM, Y. AKRAMI, M. I. R. ALVES, F. ARGÜESO, M. ARNAUD, F. ARROJA, M. ASHDOWN et et AL. : Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results. *A&A*, 594:A1, septembre 2016a. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2016A%26A...594A...1P>.
- PLANCK COLLABORATION, P. A. R. ADE, N. AGHANIM, M. ARNAUD, M. ASHDOWN, J. AUMONT, C. BACCIGALUPI, A. J. BANDAY, R. B. BARREIRO, N. BARTOLO et et AL. : Planck 2015 results. XIV. Dark energy and modified gravity. *A&A*, 594:A14, septembre 2016b. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2016A%26A...594A..14P>.
- E. POISSON et C. M. WILL : *Gravity*. mai 2014. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014grav.book.....P>.
- A. C. POPE et I. SZAPUDI : Shrinkage estimation of the power spectrum covariance matrix. *MNRAS*, 389:766–774, septembre 2008. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008MNRAS.389..766P>.
- R. V. POUND et G. A. REBKA : Gravitational red-shift in nuclear resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 3:439–441, Nov 1959. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.3.439>.
- W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING et B. P. FLANNERY : *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*. 1992. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1992nrfa.book.....P>.
- R. D. REASENBERG, I. I. SHAPIRO, P. E. MACNEIL, R. B. GOLDSTEIN, J. C. BREIDENTHAL, J. P. BRENKLE, D. L. CAIN, T. M. KAUFMAN, T. A. KOMAREK et A. I. ZYGIELBAUM : Viking relativity experiment - Verification of signal retardation by solar gravity. *ApJ*, 234:L219–L221, décembre 1979. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1979ApJ...234L.219R>.
- A. G. RIESS, A. V. FILIPPENKO, P. CHALLIS, A. CLOCCHIATTI, A. DIERCKS, P. M. GARNAVICH, R. L. GILLILAND, C. J. HOGAN, S. JHA, R. P. KIRSHNER, B. LEIBUNDGUT, M. M. PHILLIPS, D. REISS, B. P. SCHMIDT, R. A. SCHOMMER, R. C. SMITH, J. SPYROMILIO, C. STUBBS, N. B. SUNTZEFF et J. TONRY : Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *AJ*, 116:1009–1038, septembre 1998. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998AJ....116.1009R>.

- M. G. ROCHESTER et D. E. SMYLIE : On changes in the trace of the earth's inertia tensor. *Journal of Geophysical Research*, 79:4948–4951, 1974. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1974JGR....79.4948R>.
- E. SAMAIN, J. F. MANGIN, C. VEILLET, J. M. TORRE, P. FRIDELANCE, J. E. CHABAUDIE, D. FERAUDY, M. GLENTZLIN, J. PHAM VAN, M. FURIA, A. JOURNET et G. VIGOUROUX : Millimetric Lunar Laser Ranging at OCA (Observatoire de la Cote d'Azur). *A&AS*, 130: 235–244, juin 1998. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998A%26AS..130..235S>.
- T. SASAO, S. OKUBO et M. SAITO : A Simple Theory on Dynamical Effects of Stratified Fluid Core upon Nutational Motion of the Earth. In R. L. DUNCOMBE, éditeur : *Nutation and the Earth's Rotation*, volume 78 de *IAU Symposium*, page 165, 1980. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1980IAUS...78..165S>.
- S. SCHLAMMINGER, K.-Y. CHOI, T. A. WAGNER, J. H. GUNDLACH et E. G. ADELBERGER : Test of the Equivalence Principle Using a Rotating Torsion Balance. *Physical Review Letters*, 100(4):041101, février 2008. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008PhRvL.100d1101S>.
- P. K. SEIDELMANN : 1980 IAU theory of nutation - The final report of the IAU Working Group on Nutation. *Celestial Mechanics*, 27:79–106, mai 1982. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1982CeMec...27...79S>.
- P. K. SEIDELMANN, B. A. ARCHINAL, M. F. A'HEARN, A. CONRAD, G. J. CONSOLMAGNO, D. HESTROFFER, J. L. HILTON, G. A. KRASINSKY, G. NEUMANN, J. OBERST, P. STOOKE, E. F. TEDESCO, D. J. THOLEN, P. C. THOMAS et I. P. WILLIAMS : Report of the IAU/IAG Working Group on cartographic coordinates and rotational elements : 2006. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 98:155–180, juillet 2007. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007CeMDA...98..155S>.
- L. SHAO : New pulsar limit on local Lorentz invariance violation of gravity in the standard-model extension. *Phys. Rev. D*, 90(12):122009, décembre 2014a. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014PhRvD...90l2009S>.
- L. SHAO : Tests of Local Lorentz Invariance Violation of Gravity in the Standard Model Extension with Pulsars. *Physical Review Letters*, 112(11):111103, mars 2014b. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014PhRvL.112k1103S>.
- L. SHAO, R. N. CABALLERO, M. KRAMER, N. WEX, D. J. CHAMPION et A. JESSNER : A new limit on local Lorentz invariance violation of gravity from solitary pulsars. *Classical and Quantum Gravity*, 30(16):165019, août 2013. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013CQGra...30p5019S>.
- I. I. SHAPIRO : Fourth test of general relativity. *Physical Review Letters*, 13:789–791, décembre 1964. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1964PhRvL...13..789S>.
- I. I. SHAPIRO, M. E. ASH, R. P. INGALLS, W. B. SMITH, D. B. CAMPBELL, R. B. DYCE, R. F. JURGENS et G. H. PETTENGILL : Fourth Test of General Relativity : New Radar Result. *Physical Review Letters*, 26:1132–1135, mai 1971. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1971PhRvL...26.1132S>.
- I. I. SHAPIRO, R. D. REASENBERG, P. E. MACNEIL, R. B. GOLDSTEIN, J. P. BREngle, D. L. CAIN, T. KOMAREK, A. I. ZYGIELBAUM, W. F. CUDDIHY et W. H. MICHAEL,

- Jr. : The Viking relativity experiment. *J. Geophys. Res.*, 82:4329–4334, septembre 1977. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1977JGR...82.4329S>.
- P. SILLARD : *Estimation par moindres carrés*. Lavoisier, 2001.
- M. SOFFEL, S. A. KLIONER, G. PETIT, P. WOLF, S. M. KOPEIKIN, P. BRETAGNON, V. A. BRUMBERG, N. CAPITAINE, T. DAMOUR, T. FUKUSHIMA, B. GUINOT, T.-Y. HUANG, L. LINDEGREN, C. MA, K. NORDTVEDT, J. C. RIES, P. K. SEIDELMANN, D. VOKROUHLICKÝ, C. M. WILL et C. XU : The iau 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics, and metrology in the relativistic framework : Explanatory supplement. *Astronomical Journal*, 126:2687–2706, décembre 2003. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003AJ...126.2687S>.
- G. 'T HOOFT et M. VELTMAN : One-loop divergencies in the theory of gravitation. *Annales de L'Institut Henri Poincaré Section Physique Théorique*, 20:69–94, 1974. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1974AnIHP...20...69T>.
- J. D. TASSON : What do we know about Lorentz invariance? *Reports on Progress in Physics*, 77(6):062901, juin 2014. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014RPPh...77f2901T>.
- J. H. TAYLOR, L. A. FOWLER et P. M. MCCULLOCH : Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR 1913+16. *Nature*, 277:437–440, février 1979. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1979Natur.277..437T>.
- H. THIRRING : Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 19, 1918. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1918PhyZ...19...33T>.
- S. G. TURYSHEV et J. G. WILLIAMS : Space-Based Tests of Gravity with Laser Ranging. *International Journal of Modern Physics D*, 16:2165–2179, 2007. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007IJMPD...16.2165T>.
- A. K. VERMA, A. FIENGA, J. LASKAR, H. MANCHE et M. GASTINEAU : Use of MESSENGER radioscience data to improve planetary ephemeris and to test general relativity. *A&A*, 561:A115, janvier 2014. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014A%26A...561A.115V>.
- R. V. WAGONER : Scalar-Tensor Theory and Gravitational Waves. *Phys. Rev. D*, 1:3209–3216, juin 1970. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1970PhRvD...1.3209W>.
- P. T. WALLACE : Sofa : Standards of fundamental astronomy. *Highlights of Astronomy*, 11:191, 1998. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998HiA....11..191W>.
- P. T. WALLACE et N. CAPITAINE : Precession-nutation procedures consistent with iau 2006 resolutions. *A&A*, 459:981–985, décembre 2006. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006A%26A...459..981W>.
- C. M. WILL : Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. ii. parametrized post-newtonian hydrodynamics, and the nordtvedt effect. *ApJ*, 163:611, février 1971. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1971ApJ...163..611W>.
- C. M. WILL : Relativistic Gravity in the Solar System. 111. Experimental Disproof of a Class of Linear Theories of Gravitation. *ApJ*, 185:31–42, octobre 1973. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1973ApJ...185...31W>.

- C. M. WILL : *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. mars 1993. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1993tegp.book.....W>.
- C. M. WILL : The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Reviews in Relativity*, 17, juin 2014. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014LRR....17....4W>.
- C. M. WILL et K. NORDTVEDT, Jr. : Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. i. preferred-frame theories and an extended ppn formalism. *ApJ*, 177:757, novembre 1972. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1972ApJ...177..757W>.
- J. G. WILLIAMS, D. H. BOGGS, C. F. YODER, J. T. RATCLIFF et J. O. DICKEY : Lunar rotational dissipation in solid body and molten core. *J. Geophys. Res.*, 106:27933–27968, novembre 2001. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2001JGR...10627933W>.
- J. G. WILLIAMS, X. X. NEWHALL et J. O. DICKEY : Relativity parameters determined from lunar laser ranging. *Phys. Rev. D*, 53:6730–6739, juin 1996. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1996PhRvD..53.6730W>.
- J. G. WILLIAMS, S. G. TURYSHEV et D. H. BOGGS : Progress in lunar laser ranging tests of relativistic gravity. *Physical Review Letters*, 93(26):261101, décembre 2004. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004PhRvL..93z1101W>.
- J. G. WILLIAMS, S. G. TURYSHEV et D. H. BOGGS : Lunar Laser Ranging Tests of the Equivalence Principle with the Earth and Moon. *International Journal of Modern Physics D*, 18:1129–1175, 2009. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009IJMPD..18.1129W>.
- Inc. WOLFRAM RESEARCH : Mathematica, 2016. Version 10.4.
- F. ZWICKY : Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, 1933. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1933AcHPh...6..110Z>.
- F. ZWICKY : On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *ApJ*, 86:217, octobre 1937. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1937ApJ...86..217Z>.

