



HAL
open science

Variétés rationnelles et toiseurs sous les groupes linéaires : obstruction de Brauer-Manin pour les points entiers et invariants cohomologiques supérieurs

Yang Cao

► **To cite this version:**

Yang Cao. Variétés rationnelles et toiseurs sous les groupes linéaires : obstruction de Brauer-Manin pour les points entiers et invariants cohomologiques supérieurs. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Paris-Saclay, 2017. Français. NNT : 2017SACLS131 . tel-01548308

HAL Id: tel-01548308

<https://theses.hal.science/tel-01548308>

Submitted on 27 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2017SACLS131

THÈSE DE DOCTORAT

de

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : Université Paris-Sud

Laboratoire d'accueil : Laboratoire de mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

M. Yang CAO

**Variétés rationnelles et toseurs sous les groupes linéaires : obstruction
de Brauer-Manin pour les points entiers et invariants cohomologiques
supérieurs**

Date de soutenance : 06 Juin 2017

Après avis des rapporteurs : M. MIKHAIL BOROVOI (Tel-Aviv University)
M. ALEXANDER S. MERKURJEV (UCLA)

Jury de soutenance :

M. JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE	(Univ. Paris Saclay et CNRS,) Codirecteur de thèse
M. DAVID HARARI	(Univ. Paris Saclay) Directeur de thèse
M. BRUNO KAHN	(IMJ et CNRS) Président
M. MARC LEVINE	(Univ. Duisburg-Essen) Examineur
M. QING LIU	(Univ. Bordeaux) Examineur
M. EMMANUEL PEYRE	(Univ. Grenoble et CNRS) Examineur

Titre : Variétés rationnelles et toiseurs sous les groupes linéaires : obstruction de Brauer-Manin pour les points entiers et invariants cohomologiques supérieurs

Mots clés : variété rationnelle, toiseur, obstruction de Brauer-Manin, cohomologie non ramifiée

Résumé : Dans cette thèse, on s'intéresse à des propriétés arithmétiques des variétés algébriques. Elle contient deux parties : partie géométrique (sur un corps quelconque) et partie arithmétique (sur un corps de nombres). Dans la partie géométrique, j'étudie le quotient par sa partie constante du troisième groupe de cohomologie non ramifiée des surfaces (géométriquement) rationnelles et de leurs toiseurs universels. Pour les surfaces de del Pezzo de degré au moins 5, je montre que ce quotient est trivial, sauf pour des surfaces de del Pezzo de degré 8 d'un type particulier. Pour les toiseurs universels ci-dessus, je montre que ce quotient est fini et je donne une condition suffisante pour qu'il soit nul, en termes de la structure galoisienne du groupe de Picard géométrique de la surface. Dans la partie arithmétique, on étudie l'obstruction de Brauer–Manin à l'approximation forte. En collaboration avec C. Demarche et F. Xu, nous établissons l'équivalence de l'obstruction de Brauer-Manin étale et de l'obstruction de descente pour les variétés quasi-projectives. Ensuite, j'établis un théorème très général sur l'approximation forte pour les variétés ouvertes munies d'une action d'un groupe linéaire connexe G et dont un ouvert est un espace homogène de G .

Title : Rational varieties and torsors under linear algebraic groups : Brauer-Manin obstruction over the integers and higher cohomological invariants over an arbitrary field

Keywords : rational variety, torsor, Brauer-Manin obstruction, unramified cohomology

Abstract : In this Ph.D. thesis, we investigate some arithmetic properties of algebraic varieties. The thesis consists of two parts : a geometric part (over an arbitrary field) and an arithmetic part (over a number field). The geometric part is devoted to the study of the quotient by its constant part of the third unramified cohomology group of (geometrically) rational surfaces and of their universal torsors. For del Pezzo surfaces of degree at least 5, we show that this quotient is zero, except in the case of del Pezzo surfaces of degree 8 of a special type. For universal torsors as above, we show that this quotient is finite and we give a sufficient condition for it to vanish. This condition involves the Galois structure of the geometrical Picard group. The arithmetic part is devoted to the study of the Brauer-Manin obstruction to strong approximation. In collaboration with C. Demarche and F. Xu, we establish the equivalence of étale Brauer-Manin obstruction and descent obstruction. Then I establish a general theorem about strong approximation of open varieties equipped with an action of a connected linear algebraic group G and containing a G -homogeneous space as open subset.

Thèse préparée au

Département de Mathématiques d'Orsay

Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425

Université Paris Saclay (Paris Sud 11)

91405 Orsay CEDEX, France



Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude la plus profonde envers mon directeur David Harari et mon codirecteur Jean-Louis Colliot-Thélène, sans qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Jean-Louis Colliot-Thélène pour sa disponibilité, son soutien constant et son aide mathématique et non mathématique. Avec sa gentillesse et sa grande patience, il a consacré beaucoup de temps à discuter avec moi, à lire, à vérifier, et à corriger mes textes.

Je suis très honoré que Mikhail Borovoi et Alexander S. Merkurjev aient accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je remercie sincèrement Bruno Kahn, Marc Levine, Qing Liu et Emmanuel Peyre pour leur participation à mon jury de thèse. Je tiens à remercier particulièrement Bruno Kahn pour une discussion.

Je remercie vivement mon ancien directeur en Chine - Fei Xu, qui m'a appris à faire de la recherche par moi-même et qui m'a guidé dans un domaine mathématique très intéressant. Je remercie aussi mes collaborateurs : Cyril Demarche et Yongqi Liang. Cyril a vérifié mes textes et m'a invité à expliquer mes résultats en séminaire. Yongqi m'a beaucoup conseillé dans ma carrière mathématique.

Cette thèse a été effectuée au département de mathématiques d'Orsay qui m'a fourni des conditions agréables de travail, j'en remercie tous ses membres. Je tiens à remercier particulièrement Madame Lavigne et Madame Rey pour leur aide. Je remercie ici la FMJH et la DIM RDM IDF pour leur soutien financier.

Je souhaite remercier Olivier Benoist, François Charles, Jiangxue Fang, Mathieu Florence, Philippe Gille, Diego Izquierdo, Kezheng Li, Giancarlo Lucchini Arteche, Salim Tayou et Olivier Wittenberg de leurs discussions avec moi, qui m'ont inspiré dans mes travaux.

Je remercie mes camarades de 014 (à Paris : Cong, Tiago, Lison, Lucile et Mikolaj), de 1018 (à Pékin : Qijun, Xiaowen et Runjun), de 606 (à Jinan : Deyang, Dejian, Pengfei, Yanchen, Yuankai et Zhe) et de 508 (à Jinan : Dong, Jiadong et Tangfeng).

Je remercie tous mes amis chinois avec qui j'ai partagé mathématiques et bons moments : Xianglong Duan, Weiguo Foo, Lie Fu, Ziyang Gao, Zhizhong Huang, Weikun He, Yong Hu, Zhi Jiang, Yang Lan, Hsueh-Yung Lin, Bingxiao Liu, Momo, Yi Pan, Zicheng Qian, Shun Tang, Peng Shan, Cong Wang, Bo Xia, Junyi Xie, Songyan Xie, Daxin Xu, Enlin Yang, Tony Yue Yu, Lei Zhang Yinglong Zhang et Gufang Zhao. Finalement, un remerciement spécial à mes amis : Qifeng Li, Chunhui Liu, Haoyu Hu, Qijun Yan, Xiaozong Wang et Yeping Zhang.

Enfin, J'exprime ma reconnaissance du fond du coeur à mes parents et à mon frère pour leur soutien constant.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction générale	1
Partie géométrique	3
I Introduction à la partie géométrique	5
1.1 La cohomologie non ramifiée	5
1.2 Contenu du chapitre II, [1]	6
1.3 Contenu du chapitre III, [2]	6
II Cohomologie non ramifiée de degré 3 : variétés cellulaires et surfaces de del Pezzo de degré au moins 5	9
2.1 Introduction	9
2.2 Sur les variétés cellulaires et leur cohomologie non ramifiée	10
2.3 Surfaces de del Pezzo de degré au moins 5	13
2.4 Formes tordues de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	14
2.5 Calcul de $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ pour une surface de del Pezzo X de degré ≥ 5	16
2.6 Appendice : accouplements de suites spectrales	18
III Troisième groupe de cohomologie non ramifiée des toiseurs universels sur les surfaces rationnelles	19
3.1 Introduction	19
3.2 Rappels	21
3.2.1 Cohomologie motivique	21
3.2.2 Variétés toriques	21
3.2.3 Variétés cellulaires	22
3.2.4 Torseurs universels	22
3.2.5 Accouplements avec les 0-cycles	23
3.3 Cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$ d'un toiseur sous un tore	24
3.4 Cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$ des toiseurs universels sur une surface géométriquement rationnelle	29
3.5 Surfaces de Châtelet généralisées	36
3.6 Surfaces de del Pezzo	38
Partie arithmétique	43
IV Introduction à la partie arithmétique	45
4.1 Le chapitre VI	46
4.2 Le chapitre V	47

V Comparing descent obstruction and Brauer-Manin obstruction for open varieties	49
5.1 Introduction	49
5.2 Some lemmas	51
5.3 Connected linear algebraic groups or groups of multiplicative type	54
5.4 Refinement in the toric case	57
5.5 An application	60
5.6 Comparison I, $X(A_k)^{\text{desc}} \subseteq X(A_k)^{\text{et,Br}}$	63
5.7 Comparison II, $X(A_k)^{\text{et,Br}} \subseteq X(A_k)^{\text{desc}}$	65
VI Approximation forte pour les variétés avec une action d'un groupe linéaire	71
6.1 Introduction	71
6.2 Préliminaires sur les G -variétés et les toiseurs	75
6.2.1 Préliminaires sur les G -variétés	75
6.2.2 Trivialisation d'un toiseur	78
6.2.3 L'action d'un groupe sur un toiseur	80
6.3 Groupe de Brauer invariant	82
6.3.1 Définitions et propriétés	82
6.3.2 L'homomorphisme de Sansuc	85
6.3.3 Pseudo espace homogène	88
6.4 L'approximation forte hors des places archimédiennes et la question 6.1.2	91
6.5 La descente par rapport au groupe de Brauer invariant	93
6.5.1 Un cas spécial ($\text{III}^1(G) = 1$)	93
6.5.2 Applications des résolutions coflasques	94
6.5.3 Le cas général	95
6.6 La méthode de fibration et la question 6.1.3	98
6.6.1 L'approximation forte raffinée pour l'espace affine	98
6.6.2 Fibration sur une variété torique standard	101
6.6.3 Fibration sur un tore	104
6.6.4 Fibration sur un pseudo espace homogène	106
6.7 Le résultat principal	108

Introduction générale

Depuis les années 70, le groupe de Brauer des variétés algébriques a été utilisé de deux façons différentes : d'une part comme invariant birationnel des variétés projectives et lisses sur un corps quelconque, d'autre part, sur un corps de nombres, dans la définition de l'obstruction de Brauer–Manin à l'existence de points rationnels sur les variétés projectives et de points entiers sur les variétés ouvertes.

Cette dualité se retrouve dans la présente thèse. Dans une première partie, purement géométrique, on y étudie des invariants birationnels supérieurs qui généralisent le groupe de Brauer. Dans la seconde partie, plus arithmétique, on utilise le groupe de Brauer pour étudier les points entiers des variétés algébriques.

La cohomologie non ramifiée est une généralisation en degré quelconque du groupe de Brauer (lequel correspond au degré 2). En degré 3, elle a été étudiée pour certaines variétés (en particulier par CT-Ojanguren, Kahn, Merkurjev, Peyre).

Aux chapitres [II](#) et [III](#), je m'intéresse au troisième groupe de cohomologie non ramifiée des surfaces rationnelles et de leurs torseurs universels. Une description plus détaillée des résultats de ces deux chapitres est donnée dans l'introduction de la partie géométrique ([I](#)).

Sur un corps de nombres k , pour toute variété lisse connexe X , on définit grâce au groupe de Brauer un sous-ensemble $X(A_k)^{\text{Br}} \subset X(A_k)$ de l'espace des adèles. Comme l'a remarqué Manin, la théorie du corps de classes implique que l'adhérence $X(k)^{\text{top}}$ de $X(k)$ dans $X(A_k)$ se factorise par

$$X(k)^{\text{top}} \subset X(A_k)^{\text{Br}}.$$

Pour certaines classes (géométriques) de variétés, il est naturel de se demander si cette inclusion est une égalité. On dit alors que l'obstruction de Brauer–Manin à l'approximation forte est la seule obstruction. Si X est propre, les notions d'approximation forte et faible coïncident. Le cas des espaces homogènes Y de groupes linéaires G a été beaucoup étudié, ainsi que celui des compactifications lisses Y_c de tels espaces.

Au chapitre [VI](#), fruit d'un travail avec C. Demarche et F. Xu, j'établis un théorème très général pour les variétés ouvertes X munies d'une G -action et dont un ouvert est un espace homogène de G .

D'autres obstructions à l'approximation forte sur une k -variété X lisse quelconque ont été définies, via les torseurs $Z \rightarrow X$ sous des k -groupes linéaires G (Colliot-Thélène, Sansuc, Harari, Skorobogatov). Le lien avec l'obstruction de Brauer–Manin a fait l'objet de plusieurs travaux. Au chapitre [V](#), j'établis un tel lien sous des hypothèses très générales.

Une description plus détaillée des résultats de ces deux chapitres est donnée dans l'introduction de la partie arithmétique ([IV](#)).

Partie géométrique

Chapitre I

Introduction à la partie géométrique

1.1 La cohomologie non ramifiée

Soit k un corps de caractéristique 0. Pour une k -variété lisse X et un faisceau étale F sur X , on rappelle que la *cohomologie non ramifiée* de X de degré n est le groupe

$$H_{nr}^n(X, F) := H_{Zariski}^0(X, \mathcal{H}^n(X, F)),$$

où $\mathcal{H}^n(X, F)$ est le faisceau Zariski associé au préfaisceau $\{U \subset X\} \mapsto H_{\text{ét}}^n(U, F)$.

On considère le cas où $F = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ le faisceau des racines de l'unité tordu j fois. On a les propriétés ci-dessous.

(1) Le résultat de Bloch et Ogus donne canoniquement une résolution flasque de faisceaux de Zariski (*la résolution de Gersten*, cf. [CTHK] pour une démonstration du cas général). Ceci induit une suite exacte longue :

$$0 \rightarrow H_{nr}^n(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(0)}} H^n(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{n-1}(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j-1)) \rightarrow \dots$$

Lorsque X est intègre, de corps des fonctions $k(X)$, ceci donne $H_{nr}^n(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \subset H^n(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$. Pour tout ouvert non vide $U \subset X$, on a alors $H_{nr}^n(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \subset H_{nr}^n(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$.

(2) La cohomologie non ramifiée à coefficients $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ est invariante par homotopie, i.e.

$$H_{nr}^n(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \cong H_{nr}^n(X \times \mathbb{A}^1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)).$$

(3) Les groupes $H_{nr}^n(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ sont des invariants k -birationnels des k -variétés projectives lisses géométriquement connexes, réduits à $H^n(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ pour X k -rationnelle, c'est-à-dire k -birationnelle à un espace projectif (cf. [CT95, Théorème 4.1.1 et Proposition 4.1.4]).

(4) Lorsque X est géométriquement intègre, la suite exacte de Kummer et la suite spectrale

$$E_2^{p,q} := H_{Zariski}^p(X, \mathcal{H}^q(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$$

donnent $H_{nr}^0(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) = H^0(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$, $H_{nr}^1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) = H^1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ et $H_{nr}^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = \text{Br}(X)$.

(5) Lorsque X est intègre, B. Kahn établit la suite exacte ([Ka12, Prop. 2.9])

$$0 \longrightarrow CH^2(X) \longrightarrow \mathbb{H}^4(X, \mathbb{Z}(2)) \longrightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow 0,$$

pour le complexe motivique de faisceaux sur les variétés lisses $\mathbb{Z}(2)$ au sens de Lichtenbaum ou de Voevodsky.

Le but de cette partie est de calculer

$$\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} := \text{Coker}(H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))$$

pour certaines k -variétés géométriquement intègres X .

1.2 Contenu du chapitre II, [1]

Ce chapitre est consacré au calcul du troisième groupe de cohomologie non ramifiée de certaines variétés géométriquement cellulaires. Rappelons la définition d'une variété cellulaire [Ka99, Définition 3.2].

Définition 1.2.1. Un k -schéma de type fini X a une *décomposition cellulaire* (brièvement : est *cellulaire*) s'il existe un sous-ensemble fermé propre $Z \subset X$ tel que $X \setminus Z$ est isomorphe à un espace affine et Z a une décomposition cellulaire ou Z est vide.

Un k -schéma de type fini X est dit *géométriquement cellulaire* si $X_{\bar{k}}$ a une décomposition cellulaire.

Les exemples de variétés géométriquement cellulaires que j'étudie sont les surfaces projectives lisses géométriquement rationnelles (par exemple, les surfaces de del Pezzo) et certaines compactifications lisses d'un torseur universel sur une variété géométriquement cellulaire (Proposition 2.2.2, [1, Prop. 2.2]).

Voici les deux principaux résultats de ce chapitre.

Théorème 1.2.2. (Théorème 2.1.1, [1, Thm. 1.1]) Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Alors $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$, sauf peut-être si X est de degré 8, l'indice $I(X)$ de X est égal à 4, et il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$.

Rappelons que, dans ce cas, $CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$ et $I(X) := \#(CH^2(X_{\bar{k}})/\text{Im}(CH^2(X)))$. Lorsque X possède un point rationnel, ou même un zéro-cycle de degré 1, ce résultat est évident, car toute surface de del Pezzo de degré 5 qui possède un point rationnel est rationnelle sur son corps de base. Toute la difficulté est de considérer le cas général.

Théorème 1.2.3. (Théorème 2.2.7, [1, Thm. 2.7]) Soit X une k -variété projective, lisse, géométriquement intègre et géométriquement cellulaire. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel sur X et soit \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Alors le groupe $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.

Ce résultat s'applique en particulier à toute k -surface X projective, lisse, géométriquement rationnelle.

L'idée principale des démonstrations est d'utiliser la suite spectrale de B. Kahn [Ka10, Thm. 2.5] :

$$E_2^{p,q}(X, n) = H^{p-q}(k, CH^q(X_{\bar{k}}) \otimes \mathbb{Z}(n-q)) \implies H^{p+q}(X, \mathbb{Z}(n)),$$

où X est une k -variété lisse, intègre, géométriquement cellulaire, et $\mathbb{Z}(n)$ est le complexe motivique de faisceaux sur les variétés lisses sur k défini par Voevodsky. De plus, l'application d'un accouplement canonique de ces suites spectrales :

$$E_r^{p,q}(m) \times E_r^{p',q'}(n) \rightarrow E_r^{p+p',q+q'}(m+n)$$

donne explicitement les différentielles dans ces suites spectrales.

1.3 Contenu du chapitre III, [2]

Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soient $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel sur X [CTS87b] et \mathcal{T}^c une compactification lisse de \mathcal{T} . C'est une k -variété géométriquement rationnelle. En 1979, Colliot-Thélène et Sansuc [CTS80, Question Q1, p. 227] ont posé la question : si \mathcal{T}^c possède un point rationnel, la k -variété \mathcal{T}^c est-elle une k -variété k -rationnelle ? Cette question est toujours ouverte.

Les propriétés des toiseurs universels donnent

$$\frac{H_{nr}^n(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))}{H^n(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))} = 0 = \frac{H_{nr}^n(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))}{H^n(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))}$$

pour $n \leq 2$ [CTS87b]. Dans ce chapitre, je suis intéressé à calculer $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \subset H^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Le résultat principal obtenu est :

Théorème 1.3.1. (Théorème 3.4.7, [2, Thm. 4.7]) Soient X une k -surface projective lisse géométriquement rationnelle et \mathcal{T} un toiseur universel sur X . Alors

(1) Les groupes $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ et $CH^2(\mathcal{T})$ sont finis ;

(2) Si $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$ et $X(k) \neq \emptyset$, alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$, où $\text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est la deuxième puissance symétrique du réseau galoisien $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$.

Par la classification k -birationnelle des k -surfaces projectives et lisses (cf. [Koll96, Thm. 2.1]), toute k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle est k -birationnellement équivalente soit à une surface de del Pezzo soit à une surface fibrée en coniques au-dessus d'une conique. Le théorème 1.3.1 donne :

Corollaire 1.3.2. (Théorème 3.6.7, [2, Thm. 6.7]) Sous les hypothèses du théorème 1.3.1, supposons $X(k) \neq \emptyset$. Soit \mathcal{T} un toiseur universel sur X et \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Si la surface X est k -birationnellement équivalente à une surface de del Pezzo de degré ≥ 2 ou à une surface fibrée en coniques au-dessus d'une conique, alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ est purement 2-primaire.

Le cas essentiel est le cas où X est une surface de del Pezzo de degré 3. En utilisant la correspondance entre $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -module $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ et le système de racines de type E_6 muni de l'action du groupe de Weyl $W(E_6)$ ([Ma74, Thm. 23.9]), on trouve une base de permutation de $\text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3$ sous l'action de $W(E_6)$, et donc sous l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. Ceci donne

$$H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}))[3] = 0 \quad \text{et} \quad \frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[3] = 0.$$

Le cas où X est une surface de del Pezzo de degré 2 se réduit au cas où X est une surface de del Pezzo de degré 3, car les p -sous-groupes de Sylow de $W(E_7)$ et de $W(E_6)$ sont les mêmes pour tout nombre premier impair p .

Voici l'esquisse de la démonstration du théorème 1.3.1.

La partie clé est d'étudier la cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$ pour un toiseur sous un tore, où $\mathbb{Z}(2)$ est le complexe motivique de faisceaux de cohomologie étale sur les variétés lisses sur k au sens de Lichtenbaum ([L87] [L90]) pour $r = 0, 1, 2$. Ceci suit une méthode développée par A. Merkurjev [Me13] pour étudier les toiseurs sous un groupe semisimple.

Soient T un tore sur k de dimension N , et $f : Y \rightarrow X$ un toiseur sous T sur X , où X est une k -variété lisse géométriquement intègre. On définit $\mathbb{Z}_f(2)$ par le triangle dans la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux étales :

$$\mathbb{Z}_X(2) \rightarrow Rf_* \mathbb{Z}_Y(2) \rightarrow \mathbb{Z}_f(2) \rightarrow \mathbb{Z}_X(2)[1].$$

Ceci donne le lien entre $H^3(Y_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2))$ et $H^3(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2))$. Le résultat principal sur $\mathbb{Z}_f(2)$ est le triangle (Proposition 3.3.4) :

$$\mathbb{G}_{m, X} \otimes T^*[-2] \rightarrow \tau^{\leq 3} \mathbb{Z}_f(2) \rightarrow \wedge^2 T^*[-2] \rightarrow \mathbb{G}_{m, X} \otimes T^*[-1],$$

où \wedge^2 est la deuxième puissance extérieure. Ceci résulte de l'étude de la K -théorie algébrique d'un torseur trivial sous un tore ([Me03, §5]) et de l'accouplement $\mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1) \rightarrow \mathbb{Z}(2)$. De plus, la suite exacte de cohomologie induite par ce triangle est compatible avec des homomorphismes canoniques bien connus (Théorème 3.3.5, [2, Thm. 3.5]).

Dans le cas du théorème 1.3.1 avec $Y := \mathcal{T}$, le calcul ci-dessus donne une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\cup} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

où $\cup : \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$ est l'intersection.

Par ailleurs, puisque \mathcal{T}^c est géométriquement rationnelle, le calcul explicite de la résolution de Gersten sur le complémentaire $\mathcal{T}_{\bar{k}}^c \setminus \mathcal{T}_{\bar{k}}$ donne $H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$, et l'intersection

$$\text{Pic}(\mathcal{T}_{\bar{k}}) \times \text{Pic}(\mathcal{T}_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}})$$

donne $CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}) = 0$.

Une application de la suite spectrale de Hochschild-Serre de $\mathbb{Z}(2)$ ([CT15, §2.2]) donne le théorème.

Chapitre II

Cohomologie non ramifiée de degré 3 : variétés cellulaires et surfaces de del Pezzo de degré au moins 5

Résumé. Dans cet article, où le corps de base est un corps de caractéristique zéro quelconque, pour X une variété géométriquement cellulaire, on étudie le quotient du troisième groupe de cohomologie non ramifiée $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ par sa partie constante. Pour X une compactification lisse d'un torseur universel sur une surface géométriquement rationnelle, on montre que ce quotient est fini. Pour X une surface de del Pezzo de degré ≥ 5 , on montre que ce quotient est trivial, sauf si X est une surface de del Pezzo de degré 8 d'un type particulier.

Summary. We consider geometrically cellular varieties X over an arbitrary field of characteristic zero. We study the quotient of the third unramified cohomology group $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ by its constant part. For X a smooth compactification of a universal torsor over a geometrically rational surface, we show that this quotient is finite. For X a del Pezzo surface of degree ≥ 5 , we show that this quotient is zero, unless X is a del Pezzo surface of degree 8 of a special type.

2.1 Introduction

Soient k un corps de caractéristique 0, \bar{k} une clôture algébrique et Γ_k le groupe de Galois de \bar{k} sur k . Pour une variété lisse X sur k et un faisceau étale F sur X , on rappelle que la *cohomologie non ramifiée* de X de degré n est le groupe

$$H_{nr}^n(X, F) := H_{Zariski}^0(X, \mathcal{H}^n(X, F)),$$

où $\mathcal{H}^n(X, F)$ est le faisceau Zariski associé au préfaisceau $\{U \subset X\} \mapsto H_{\text{ét}}^n(U, F)$. Soit $F = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ le faisceau des racines de l'unité tordu j fois. Les groupes $H_{nr}^n(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ sont des invariants k -birationnels des k -variétés projectives lisses géométriquement connexes, réduits à $H^n(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ pour X k -rationnelle, c'est-à-dire k -birationnelle à un espace projectif. (cf. [CT95, Théorème 4.1.1 et Proposition 4.1.4]). Le groupe $H_{nr}^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ n'est autre que le groupe de Brauer de X , il a été fort étudié. On s'est intéressé plus récemment au groupe $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Le cas des coniques fut traité par Suslin. En dimension quelconque, le quotient $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est trivial pour toute quadrique lisse qui n'est pas une quadrique d'Albert (Kahn, Rost, Sujatha, voir [Ka09, Thm 10.2.4 (b)]).

Dans cet article, nous nous intéressons aux surfaces géométriquement rationnelles les plus simples, les surfaces de del Pezzo de degré au moins 5. Rappelons que l'indice $I(X)$ d'une k -variété X est le pgcd des degrés sur k des points fermés. Si une surface de del

Pezzo X de degré au moins 5 a un indice $I(X) = 1$, alors elle a un k -point et elle est k -rationnelle (cf. Thm. 2.3.1). On a donc alors $H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

Nous nous intéressons ici au cas où $X(k)$ est éventuellement vide. Nous montrons (Théorème 2.5.2) :

Théorème 2.1.1. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Alors $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$, sauf peut-être si $\deg(X) = 8$, $I(X) = 4$ et il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$.*

On construit une surface de del Pezzo X de degré 8 sur le corps $k = \mathbb{C}(x, y, z)$ pour laquelle $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} \neq 0$ (Exemple 2.5.4).

Pour les surfaces géométriquement rationnelles générales, nous montrons (Théorème 2.2.7) :

Théorème 2.1.2. *Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un toiseur universel sur X et soit \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Alors le groupe $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.*

Pour le faisceau $\mathbb{Z}/n(i) = \mu_n^{\otimes i}$ ou pour le complexe de faisceau $\mathbb{Z}(i)$ dont la définition est rappelée plus bas, on note $H^j(-, -)$ la cohomologie étale. Pour une courbe conique lisse C sur k , on note $[C] \in \text{Br}(k)$ sa classe dans le groupe de Brauer de k .

2.2 Sur les variétés cellulaires et leur cohomologie non ramifiée

On rappelle la définition d'une variété cellulaire [Ka99, Définition 3.2].

Définition 2.2.1. Un k -schéma de type fini X a une *décomposition cellulaire* (brièvement : est *cellulaire*) s'il existe un sous-ensemble fermé propre $Z \subset X$ tel que $X \setminus Z$ est isomorphe à un espace affine et Z a une décomposition cellulaire.

Un k -schéma de type fini X est dit *géométriquement cellulaire* si $X_{\bar{k}}$ a une décomposition cellulaire.

Proposition 2.2.2. *Soit k un corps algébriquement clos.*

- (1) *Une surface projective, lisse, k -rationnelle est cellulaire.*
- (2) *Une variété torique, lisse, projective sur k est cellulaire.*
- (3) *Soient T un tore sur k et T^c une T -variété torique, lisse, projective. Soient X une variété cellulaire sur k et $Y \rightarrow X$ un T -toiseur. Alors $Y^c := Y \times^T T^c$ est cellulaire.*

Démonstration. Par [Ful, Lemme, p. 103], on a l'énoncé (2).

Pour (3), par récurrence noethérienne, il suffit de montrer que si $X \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$ avec $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, alors Y^c est cellulaire. Dans ce cas, on sait que l'on a $H^1(\mathbb{A}^n, T) = 0$, $Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \times T$ et donc $Y^c \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \times T^c$. Le résultat découle de l'énoncé (2).

Pour (1), on sait (cf. [Koll96, Thm. III.2.3]) que si la surface X est minimale, alors soit X est isomorphe à \mathbb{P}^2 soit X est fibrée en \mathbb{P}^1 au-dessus de \mathbb{P}^1 . De telles surfaces sont cellulaires. Il suffit donc de montrer que si une surface lisse X est cellulaire, pour tout $x \in X(k)$, la surface éclatée $Y := \text{Bl}_x X$ est cellulaire.

Supposons que $X = \mathbb{A}^2 \cup Z$ est une décomposition cellulaire de X . Si $x \in \mathbb{A}^2$, il suffit donc de montrer que $Y := \text{Bl}_{(0,0)} \mathbb{A}^2$ est cellulaire. La variété $Y \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ est définie par l'équation $xu = yv$, où $\mathbb{A}^2 = \text{Spec } k[x, y]$ et $\mathbb{P}^1 = \text{Proj } k[u, v]$. Alors $Z(v = 0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1$ et $D(v \neq 0) = \text{Spec } k[x, y, \frac{u}{v}] / (\frac{u}{v} \cdot x = y) \cong \mathbb{A}^2$.

Si $x \in Z$, il existe un ouvert $U \subset X$ et un fermé $V \subset X$ tels que U, V soient cellulaires, $U \cap V = \emptyset$, $x \notin U \cup V$ et X ait une décomposition cellulaire $X = U \cup \mathbb{A}^1 \cup V$ ou

$X = U \cup \mathbb{A}^0 \cup V$. Ainsi $Y \times_X U$ et $Y \times_X V$ sont cellulaires. Dans le premier cas, $Y \times_X \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{A}^1$ avec $\mathbb{P}^1 \cap \mathbb{A}^1 = \{x'\}$, où \mathbb{P}^1 est le diviseur exceptionnel. On a donc $\mathbb{P}^1 \setminus \{x'\} \cong \mathbb{A}^1$ et $(Y \times_X \mathbb{A}^1) \setminus (\mathbb{P}^1 \setminus \{x'\}) \cong \mathbb{A}^1$. Dans le deuxième cas, on a $Y \times_X \mathbb{A}^0 \cong \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$. Le résultat en découle. \square

Soit de nouveau k un corps de caractéristique zéro quelconque. On utilise dans cet article le complexe motivique $\mathbb{Z}(n)$ de faisceaux sur les variétés lisses sur k (Voevodsky), sous la forme donnée par B. Kahn dans [Ka12, §2]. Pour toute k -variété lisse X , dans la catégorie dérivée, on a $\mathbb{Z}(n) = 0$ pour $n < 0$, $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m[-1]$ et une suite exacte ([Ka12, Prop. 2.9])

$$(2.2.0.1) \quad 0 \longrightarrow CH^2(X) \longrightarrow H^4(X, \mathbb{Z}(2)) \longrightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow 0.$$

On rappelle un théorème de Bruno Kahn :

Théorème 2.2.3. ([Ka10, Thm. 2.5]) *Soit X une k -variété lisse, intègre, géométriquement cellulaire. Pour tout entier $n \geq 0$, on a une suite spectrale fonctorielle :*

$$(2.2.0.2) \quad E_2^{p,q}(X, n) = H^{p-q}(k, CH^q(X_{\bar{k}}) \otimes \mathbb{Z}(n-q)) \implies H^{p+q}(X, \mathbb{Z}(n))$$

et on a un accouplement de suites spectrales :

$$(2.2.0.3) \quad E_r^{p,q}(m) \times E_r^{p',q'}(n) \rightarrow E_r^{p+p',q+q'}(m+n),$$

tel que, pour $r = 2$, l'accouplement est le cup-produit.

On trouvera dans l'appendice (§2.6) des rappels sur l'accouplement de suites spectrales. La différentielle $E_2^{1,1}(X, 1) \rightarrow E_2^{3,0}(X, 1)$ définit un homomorphisme :

$$d(1) : \text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \rightarrow \text{Br}(k).$$

La différentielle $E_2^{2,2}(X, 2) \rightarrow E_2^{4,1}(X, 2)$ définit un homomorphisme :

$$d(2) : CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \rightarrow H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times).$$

Lemme 2.2.4. *Soit X une k -variété lisse, géométriquement intègre, géométriquement cellulaire. Alors on a $\text{Im}(CH^2(X) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}) \subset \text{Ker}(d(2))$.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{Z}(n) = 0$ pour $n < 0$, dans la suite spectrale (2.2.0.2), on a $E_2^{p,q}(X, 2) = 0$ pour $q > 2$. Donc on a un morphisme canonique : $H^4(X, \mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{dx} E_\infty^{2,2}(X, 2)$ et une inclusion $E_\infty^{2,2}(X, 2) \subset E_2^{2,2}(X, 2)$. Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} CH^2(X) & \xrightarrow{i_X} & H^4(X, \mathbb{Z}(2)) & \xrightarrow{dx} & E_\infty^{2,2}(X, 2) & \longrightarrow & E_2^{2,2}(X, 2) = CH^2(X_{\bar{k}})^\Gamma \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ CH^2(X_{\bar{k}}) & \xrightarrow{i_{X_{\bar{k}}}} & H^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2)) & \xrightarrow{d_{X_{\bar{k}}}} & E_\infty^{2,2}(X_{\bar{k}}, 2) & \longrightarrow & E_2^{2,2}(X_{\bar{k}}, 2) = CH^2(X_{\bar{k}}), \end{array}$$

où $CH^2(X) \xrightarrow{i_X} H^4(X, \mathbb{Z}(2))$ désigne le morphisme dans la suite exacte (2.2.0.1). Puisque la suite spectrale (2.2.0.2) dégénère canoniquement lorsque $k = \bar{k}$, la composition dans la deuxième ligne est l'identité $id : CH^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}})$. Donc la composition dans la première ligne est le morphisme naturel $CH^2(X) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}$ et on a

$$\text{Im}(CH^2(X) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}) \subset E_\infty^{2,2}(X, 2) \subset \text{Ker}(d(2)).$$

\square

Notons désormais $\mathcal{M}(X)$ l'homologie du complexe

$$(2.2.0.4) \quad CH^2(X) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \xrightarrow{d(2)} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times).$$

On note

$$d'(2) : CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} / \text{Im} CH^2(X) \xrightarrow{d(2)} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times)$$

l'application induite par $d(2)$. On a $\mathcal{M}(X) = \ker d'(2)$.

Le théorème suivant généralise [K96, Cor. 7.1 et 7.2] :

Théorème 2.2.5. *Soit X une k -variété lisse, géométriquement intègre, géométriquement cellulaire. Si $H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) = 0$, alors les groupes $\mathcal{M}(X)$ et $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{\text{Im} H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ sont finis et on a une suite exacte :*

$$(2.2.0.5) \quad 0 \longrightarrow \frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{\text{Im} H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow H^4(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Démonstration. Par la suite exacte (2.2.0.1), on a une suite exacte :

$$CH^2(X) \longrightarrow \frac{H^4(X, \mathbb{Z}(2))}{\text{Im} H^4(k, \mathbb{Z}(2))} \longrightarrow \frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{\text{Im} H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} \longrightarrow 0.$$

Dans la suite spectrale (2.2.0.2), on a $E_2^{p,q}(X, 2) = 0$ pour $q > 2$ ou $q < 0$ et donc une suite exacte :

$$E_\infty^{3,1}(X, 2) \rightarrow \frac{H^4(X, \mathbb{Z}(2))}{\text{Im} H^4(k, \mathbb{Z}(2))} \rightarrow \text{Ker}(d(2)) \rightarrow E_2^{5,0}(X, 2).$$

D'après le lemme 2.2.4, on a une suite exacte :

$$E_\infty^{3,1}(X, 2) \longrightarrow \frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{\text{Im} H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow H^4(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Si $E_2^{3,1}(X, 2) = H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) = 0$, on a $E_\infty^{3,1}(X, 2) = 0$ et donc la suite exacte (2.2.0.5).

Par [Ka99, Lemme 3.3], $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ et $CH^2(X_{\bar{k}})$ sont des \mathbb{Z} -modules libres de type fini. Puisque $\frac{CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}}{\text{Im} CH^2(X)}$ est un groupe de torsion, le groupe $\frac{CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}}{\text{Im} CH^2(X)}$ est fini et donc $\mathcal{M}(X)$ est fini. \square

Remarque 2.2.6. Pour une k -variété lisse géométriquement connexe géométriquement cellulaire, le groupe $H^0(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible. Pour des généralisations du théorème 2.2.5 sous cette simple hypothèse, on consultera [CT15, Prop. 1.3 et Prop. 2.2].

Théorème 2.2.7. *Soit X une k -variété projective, lisse, géométriquement intègre et géométriquement cellulaire. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un toiseur universel sur X et soit \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Alors le groupe $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) / H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.*

Démonstration. Soit S le k -tore de groupe des caractères le réseau $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$. D'après [CTHS, Cor. 1], il existe une k -compactification torique lisse S^c de S . Comme le groupe $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est un invariant k -birationnel, il suffit d'établir le résultat pour $\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \times^S S^c$. D'après la proposition 2.2.2, \mathcal{T}^c est alors une variété géométriquement cellulaire. Par ailleurs, le module galoisien $\text{Pic}(\mathcal{T}_k^c)$ est un module de permutation [CTS87b, Thm. 2.1.2]. On a donc $H^1(k, \text{Pic}(\mathcal{T}_k^c) \otimes \bar{k}^\times) = 0$. Une application du théorème 2.2.5 donne alors le résultat. \square

D'après la proposition 2.2.2, le théorème 2.1.2 est un cas spécial du théorème 2.2.7.

Pour appliquer le théorème 2.2.5 au calcul du groupe $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{\text{Im} H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$, on a besoin de contrôler l'application $CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \xrightarrow{d(2)} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times)$.

Soit X une k -variété lisse, intègre, géométriquement cellulaire. L'accouplement (2.2.0.3) pour $n = m = 1$ donne un diagramme commutatif (cf. §6) :

$$\begin{array}{ccc} E_2^{1,1}(X, 1) \otimes E_2^{1,1}(X, 1) & \xrightarrow{d_\otimes} & (E_2^{3,0}(X, 1) \otimes E_2^{1,1}(X, 1)) \oplus (E_2^{1,1}(X, 1) \otimes E_2^{3,0}(X, 1)) \\ \downarrow \cup & & \downarrow \cup + \cup \\ E_2^{2,2}(X, 2) & \xrightarrow{d(2)} & E_2^{4,1}(X, 2), \end{array}$$

où $d_\otimes = d(1) \otimes id + id \otimes d(1)$. C'est-à-dire que l'on a un diagramme commutatif :

$$(2.2.0.6) \quad \begin{array}{ccc} \text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \otimes \text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} & \xrightarrow{d_\otimes} & (\text{Br}(k) \otimes \text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}) \oplus (\text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \otimes \text{Br}(k)) \\ \downarrow \cup_1 & & \downarrow \cup_2 + \cup_2 \\ CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} & \xrightarrow{d(2)} & H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times), \end{array}$$

où \cup_1 est l'intersection et \cup_2 est le cup-produit

$$H^2(k, \bar{k}^\times) \times H^0(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}})) \xrightarrow{\cup_2} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times).$$

2.3 Surfaces de del Pezzo de degré au moins 5

Une surface projective, lisse, géométriquement connexe X est appelée *surface de del Pezzo* si le faisceau anticanonique $-K_X$ est ample. Le degré d'une telle surface X est $\text{deg}(X) := (K_X, K_X)$. Par [Koll96, Exercice 3.9], X est alors géométriquement rationnelle, on a $1 \leq \text{deg}(X) \leq 9$ et $\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{10-\text{deg}(X)}$. Comme pour toute surface X projective, lisse, géométriquement rationnelle, le degré sur les zéro-cycles définit un isomorphisme $CH^2(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, et on a

$$\frac{CH^2(X_{\bar{k}})^\Gamma}{\text{Im}CH^2(X)} = \mathbb{Z}/I(X),$$

où $I(X)$ désigne l'indice de X .

Par les travaux de Enriques, Châtelet, Manin, Swinnerton-Dyer (voir [CT99, Section 4] ou [VA, Théorème 2.1]), on a :

Théorème 2.3.1. *Soit X une surface de del Pezzo de degré ≥ 5 .*

- (1) *Si $X(k) \neq \emptyset$, alors X est k -rationnelle ;*
- (2) *Si $\text{deg}(X) = 5$ ou 7 , alors $X(k) \neq \emptyset$.*

Soit X une surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Si $X(k) \neq \emptyset$, l'énoncé (1) implique que l'on a $\frac{H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{\text{Im}H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))} = 0$ pour tous entiers i et j . En particulier $\text{Br}(X)/\text{Im}\text{Br}(k) = \frac{H_{nr}^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))}{\text{Im}H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))} = 0$ (voir aussi le lemme 2.3.2) et $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{\text{Im}H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$.

En fait, soit X une surface de del Pezzo de degré au moins 4, alors $I(X) = 1$ implique $X(k) \neq \emptyset$. La question analogue est ouverte pour les del Pezzo de degré 3, i.e. les surfaces cubiques. Ceci n'utilise pas dans le présent article.

Lemme 2.3.2. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Alors $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est stablement de permutation, $H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) = 0$ et $\text{Br}(X)/\text{Im}\text{Br}(k) = 0$.*

Démonstration. Soit \mathcal{C} la classe des surfaces X/K , pour K corps extension quelconque de k , de del Pezzo de degré ≥ 5 . Par le théorème 2.3.1, si $X(K) \neq \emptyset$, alors X est K -rationnelle, et donc $\text{Pic}(X_{\bar{K}})$ est stablement de permutation comme $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -module ([CTS87b, Proposition 2.A.1]). Par [CTS87b, Théorème 2.B.1] pour chaque $X/K \in \mathcal{C}$, le $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -module $\text{Pic}(X_{\bar{K}})$ est stablement de permutation. Alors $H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) = 0$ et $H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$. Puisque $\text{Br}(X_{\bar{k}}) = 0$, par la suite spectrale de Hochschild-Serre on obtient $\text{Br}(X)/\text{Im}\text{Br}(k) = 0$. \square

Proposition 2.3.3. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . On a la suite exacte*

$$(2.3.0.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{Z}/I(X) \xrightarrow{d'(2)} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times)$$

et la suite exacte

$$(2.3.0.2) \quad 0 \longrightarrow \frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{\text{Im}H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow H^4(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)),$$

où $\mathcal{M}(X)$ est l'homologie du complexe (2.2.0.4).

Démonstration. Ceci résulte du théorème 2.2.5 et du lemme 2.3.2. \square

2.4 Formes tordues de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Rappelons (voir par exemple [AB, Exemples 3.1.3 et 3.1.4]) que l'on a :

Proposition 2.4.1. *Soit X une surface de del Pezzo de degré 8 sur un corps k . Alors on a l'une des possibilités suivantes :*

- (1) X est un éclatement de \mathbb{P}_k^2 en un k -point, et dans ce cas, $X(k) \neq \emptyset$.
- (2) Il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$.
- (3) Il existe une extension de corps K/k de degré 2 et une conique C sur K tels que $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$, où $R_{K/k}$ désigne la restriction à la Weil de K à k .
De plus, $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est un Γ_k -module de permutation.

En fait, dans le cas où $X \subset \mathbb{P}_k^3$ est un quadrique lisse, on a l'extension discriminant K/k de degré 2 (peut-être $K = k \times k$) et, pour toute section plane lisse $C \subset X$, on a $X \simeq R_{K/k}C_K$. Ceci n'utilise pas dans le présent article.

Dans le cas (2), on a :

Proposition 2.4.2. *Soient C_1, C_2 deux coniques lisses sur k et $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$. Supposons $X(k) = \emptyset$. L'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$. Si $I(X) = 2$, alors $\mathcal{M}(X) = 0$ et $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{\text{Im}H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$. Si $I(X) = 4$, alors $\mathcal{M}(X) = \mathbb{Z}/2$.*

Démonstration. On a $\text{Pic}(C_{i, \bar{k}})_{\Gamma_k}^{\Gamma} \cong \text{Pic}(C_{i, \bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$ pour $i = 1, 2$. On note $p_i : X \rightarrow C_i$ la projection, et pour $p_i^* : \mathbb{Z} \cong \text{Pic}(C_{i, \bar{k}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}})$, on note $e_i := p_i^*(1_{\mathbb{Z}})$. Alors $\text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\Gamma_k}^{\Gamma} \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ et $H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \xrightarrow{\sim} \text{Br}(k)e_1 \oplus \text{Br}(k)e_2$.

Pour $i = 1, 2$, on applique [Ka99, Theorem 4.4 (i)] à $E_2^{1,1}(-, 1) \rightarrow E_2^{3,0}(-, 1)$. On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(C_{i, \bar{k}})_{\Gamma_k}^{\Gamma} & \xrightarrow{d(C_i)} & \text{Br}(k) \\ \downarrow p_i^* & & \downarrow = \\ \text{Pic}(X_{\bar{k}})_{\Gamma_k}^{\Gamma} & \xrightarrow{d(1)} & \text{Br}(k). \end{array}$$

Notons $[C_i] := d(C_i)(1_{\text{Pic}(C_{i, \bar{k}})})$. En utilisant le diagramme (2.2.0.6), on obtient :

$$(2.4.0.1) \quad d(2)(e_1 \cup e_2) = (d(2) \circ \cup_1)(e_1 \otimes e_2) = \cup_2([C_1] \otimes e_2) + \cup_2([C_2] \otimes e_1) = [C_1]e_2 + [C_2]e_1.$$

On vérifie aisément $CH^2(X_{\bar{k}})_{\Gamma_k}^{\Gamma} \cong CH^2(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}(e_1 \cup e_2)$. On obtient : $\text{Im}(d(2)) = 0$ si et seulement si $[C_1] = [C_2] = 0$ et sinon $\text{Im}(d(2)) = \mathbb{Z}/2$. On conclut alors avec la proposition 2.3.3. \square

Dans le cas (3), le lemme suivant est dû à Olivier Benoist :

Lemme 2.4.3. Soient K/k une extension de corps de degré 2, C une conique lisse sur K et $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$ avec $X(k) = \emptyset$. Supposons que $[C] \in \text{Im}(\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(K))$. Alors $I(X) = 2$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{Br}(k)$ un élément tel que $\alpha|_K = [C] \in \text{Br}(K)$. Puisque $[C]$ est d'indice 2, l'indice de α est 2 ou 4.

Si α est d'indice 2, il existe une extension k' de degré 2 de k telle que $\alpha|_{k'} = 0 \in \text{Br}(k')$.

Si α est d'indice 4, on le représente par un k -corps gauche D de degré 4. Ainsi D est déployé sur une extension L de degré 2 de K . Alors D contient une sous-algèbre commutative isomorphe à L , donc a fortiori une sous-algèbre commutative isomorphe à K . Par un théorème d'Albert ([A32, Thm. 5], cf. [Ja, Lem. 2.9.23]), il existe une extension k' de degré 2 de k telle que D contient une sous-algèbre commutative isomorphe à $K' := k' \cdot K$.

Dans tout cas, il existe une extension k' de degré 2 de k telle que $[C]|_{K'} = 0 \in \text{Br}(K')$, où $K' = k' \cdot K$. Donc $X(k') \neq \emptyset$ et $I(X) = 2$. \square

Remarque 2.4.4. Soient K/k une extension de corps de degré 2, C une conique lisse sur K et $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$ avec $X(k) = \emptyset$. Si $[C] \notin \text{Im}(\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(K))$, alors $I(X) = 4$. Ceci sera montré dans la démonstration de la proposition 2.4.5.

Proposition 2.4.5. Soient K/k une extension de corps de degré 2, C une conique lisse sur K et $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$ avec $X(k) = \emptyset$. Alors $\mathcal{M}(X) = 0$ et $\frac{H_{tr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{\text{Im}H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$.

Démonstration. On a $X_K \xrightarrow{\sim} C \times_K C^\sigma$, où $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$, $\sigma \neq id$ et

$$C^\sigma := (C \rightarrow \text{Spec } K \xrightarrow{\sigma} \text{Spec } K).$$

Donc $CH^2(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ et $I(X)|4$. Puisque $d(2)(CH^2(X)) = 0$, on a $(\#\text{Im}(d(2)))|4$. L'hypothèse $X(k) = \emptyset$ équivaut à $C(K) = \emptyset$.

Par [Ka99, Theorem 4.4 (i) et (iii)], on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} \cong CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_K} & \xrightarrow{tr} & \mathbb{Z} \cong CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} & \xrightarrow{Res} & \mathbb{Z} \cong CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_K} \\ \downarrow d(2)_K & (1) & \downarrow d(2) & (2) & \downarrow d(2)_K \\ H^2(K, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) & \xrightarrow{tr} & H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) & \xrightarrow{Res} & H^2(K, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \end{array}$$

où tr est le transfert et Res est la restriction. Par la proposition 2.4.2, l'image de $d(2)_K$ est $\mathbb{Z}/2$. Par le carré (2), l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$ ou $\mathbb{Z}/4$. Puisque $tr(1_{CH^2(X_{\bar{k}})}) = 2 \cdot 1_{CH^2(X_{\bar{k}})}$, par le carré (1), l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$ si et seulement si $tr(\text{Im}(d(2)_K)) = 0$.

On considère :

$$\text{Br}(K) \oplus \text{Br}(K) \xrightarrow{\sim} H^2(K, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \xrightarrow{tr} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times) \xrightarrow{\sim} \text{Br}(K).$$

Pour chaque $a, b \in \text{Br}(K)$, l'action de σ sur $\text{Br}(K) \oplus \text{Br}(K)$ est définie par $\sigma(a, b) = (\sigma(b), \sigma(a))$ et $Res(a) = (a, \sigma(a))$. Alors $\sigma(a, b) + (a, b) = Res(a + \sigma(b))$ et, d'après [MVW, Exer. 6.5] et [Mi80, V.1.12], on a $tr(a, b) = a + \sigma(b)$. Par l'équation (2.4.0.1), $d(2)_K(1_{CH^2(X_{\bar{k}})}) = ([C], [C])$. Donc $tr(\text{Im}(d(2)_K)) = 0$ si et seulement si $[C] = \sigma([C])$, i.e. $[C] \in \text{Br}(K)^\sigma$. Puisque $\text{Gal}(K/k) \cong \mathbb{Z}/2$, on a $H^3(\text{Gal}(K/k), K^\times) \cong H^1(\text{Gal}(K/k), K^\times) = 0$, et donc le morphisme $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(K)^\sigma$ est surjectif.

On a alors :

(1) si $[C] \in \text{Im}(\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(K))$, l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/2$ et, par le lemme 2.4.3, on a $I(X) = 2$;

(2) si $[C] \notin \text{Im}(\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(K))$, l'image de $d(2)$ est $\mathbb{Z}/4$ et, par le lemme 2.2.4, on a $I(X) = 4$.

On conclut alors avec la proposition 2.3.3. \square

2.5 Calcul de $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ pour une surface de del Pezzo X de degré ≥ 5

Rappelons un fait bien connu.

Lemme 2.5.1. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré 6. On a :*

(1) *Il existe une extension K_1/k de degré divisant 2, une K_1 -forme X_1 de \mathbb{P}^2 sur K_1 et un morphisme $f_1 : X_{K_1} \rightarrow X_1$ birationnel.*

(2) *Il existe une extension K_2/k de degré divisant 3, une surface de del Pezzo X_2 de degré 8 sur K_2 et un morphisme $f_2 : X_{K_2} \rightarrow X_2$ tels que X_{K_2} est un éclatement de X_2 le long d'un sous-schéma réduit de dimension 0 et de degré 2. Donc l'indice $I(X_2)$ de la K_2 -surface X_2 est 1 ou 2.*

Démonstration. Cela provient du fait que la configuration des 6 courbes exceptionnelles de $X_{\bar{k}}$ est celle d'un hexagone ([CT72], ou voir [VA, Section 2.4]). \square

Théorème 2.5.2. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Alors $\mathcal{M}(X) = \mathbb{Z}/2$ si et seulement si $I(X) = 4$, $\deg(X) = 8$, et il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$.*

Sinon, $\mathcal{M}(X) = 0$ et donc $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$.

Démonstration. La dernière implication résulte de la proposition 2.3.3.

Si $X(k) \neq \emptyset$, le morphisme $CH^2(X) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}}) = \mathbb{Z}$ est surjectif. Donc $\mathcal{M}(X) = 0$. Si $\deg(X) = 5$ ou 7, par le théorème 2.3.1, $X(k) \neq \emptyset$ et donc alors $\mathcal{M}(X) = 0$. On suppose dorénavant $X(k) = \emptyset$.

Si $\deg(X) = 9$ avec $X(k) = \emptyset$, X est la variété de Severi-Brauer associée à une algèbre centrale simple A de degré 3 (cf. [VA, Théorème 1.6]). Par un théorème de Bruno Kahn [Ka99, Théorème 7.1], $d(2)(1_{CH^2(X_{\bar{k}})}) = 2[A] \in Br(k) = H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^*)$. Puisque $X(k) = \emptyset$, on a $[A] \neq 0$, $3[A] = 0$ et $I(X) = 3$. Donc $d(2)(1_{CH^2(X_{\bar{k}})}) \neq 0$ et $d'(2)$ est injectif. Alors $\mathcal{M}(X) = 0$.

Si $\deg(X) = 8$ avec $X(k) = \emptyset$, le résultat en degré 8 est donné par la proposition 2.4.1, la proposition 2.4.2 et la proposition 2.4.5.

Considérons le cas des surfaces de del Pezzo de degré 6.

S'il existe une surface de del Pezzo Y et un morphisme $f : X \rightarrow Y$ projectif, birationnel, alors f^* induit un morphisme des suites spectrales (2.2.0.2) pour Y et X . De plus, $f^* : CH^2(Y_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k}$ est un isomorphisme et $f^* : \text{Pic}(Y_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}})$ admet un inverse à gauche. Donc $E_2^{4,1}(Y, 2) \xrightarrow{f^*} E_2^{4,1}(X, 2)$ est injectif et $\text{Ker}(d(2)_Y) \xrightarrow{f^*} \text{Ker}(d(2)_X)$ est un isomorphisme. Donc $\mathcal{M}(X) \cong \mathcal{M}(Y)$.

Si $\deg(X) = 6$, avec $X(k) = \emptyset$, par le lemme 2.5.1 (2), il existe une extension K_2/k de degré divisant 3 et une surface de del Pezzo X_2 de degré 8 sur K_2 et un K_2 -morphisme $f_2 : X_{K_2} \rightarrow X_2$ projectif, birationnel, tels que $I(X_2) = 1$ ou 2. D'après ce que l'on a déjà établi pour les surfaces de del Pezzo de degré 8, on a $\mathcal{M}(X_2) = 0$ et, d'après le paragraphe ci-dessus, $\mathcal{M}(X_{K_2}) = 0$. Par [Ka99, Théorème 4.4 (3)], le transfert est bien défini pour la suite spectrale (2.2.0.2). Puisque le transfert est bien défini pour la suite exacte (2.2.0.1), le transfert est bien défini pour le complexe :

$$CH^2(X) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \xrightarrow{d(2)} H^2(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \bar{k}^\times),$$

et donc le transfert est bien défini pour $\mathcal{M}(X)$. Donc $\mathcal{M}(X)$ est annulé par 3.

Par le même argument (Lemme 2.5.1 (1)) et le résultat en degré 9, le groupe $\mathcal{M}(X)$ est annulé par 2. On a donc $\mathcal{M}(X) = 0$. \square

Corollaire 2.5.3. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré 8 avec $\mathcal{M}(X) \neq 0$. Si la dimension cohomologique $cd(k)$ de k est ≤ 3 , alors $\mathcal{M}(X) = \mathbb{Z}/2$, $I(X) = 4$ et $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = \mathbb{Z}/2$.*

Démonstration. Par la proposition 2.3.3, on a $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = \mathcal{M}(X)$. Le résultat découle du théorème 2.5.2. \square

Exemple 2.5.4. Soit $k := \mathbb{C}(t, x, y)$. Soient C_1 la conique correspondant à l'algèbre (t, x) , C_2 la conique correspondant à l'algèbre $(t+1, y)$ et $X := C_1 \times C_2$. Alors $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = \mathbb{Z}/2$.

Démonstration. Puisque la dimension cohomologique $cd(k)$ de k est 3, par le théorème 2.5.2 et le corollaire 2.5.3, il suffit de montrer que $I(X) = 4$. On note $A = (t, x) \otimes (t+1, y)$ l'algèbre de biquaternions. Par [A72, Théorème], A est un corps gauche si et seulement si, pour chaque point $x_1 \in C_1$ de degré 2 et chaque point $x_2 \in C_2$ de degré 2, on a $k(x_1) \not\cong k(x_2)$. Donc $I(X) = 4$ si et seulement si A est un corps gauche. Par [CT02, Corollaire 4], A est un corps gauche ssi t et $t+1$ sont indépendantes dans $\mathbb{C}(t)^\times / \mathbb{C}(t)^{\times 2}$, ce qui est satisfait. \square

Corollaire 2.5.5. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Supposons que toute forme quadratique en 6 variables sur k est isotrope. Alors $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$.*

Démonstration. D'après le théorème 2.5.2, il suffit de montrer que, pour toute paire de coniques lisses C_1 et C_2 sur k , on a $I(C_1 \times C_2) \neq 4$. Soient (a, b) l'algèbre de quaternion correspondant à C_1 et (c, d) l'algèbre de quaternion correspondant à C_2 . Par l'argument de la démonstration de l'exemple 2.5.4, $I(C_1 \times C_2) = 4$ si et seulement si $(a, b) \otimes (c, d)$ est un corps gauche. Par un théorème de Albert (cf. [CT02, Prop. 1]), ceci vaut si et seulement si la forme quadratique diagonale $\langle a, b, -ab, -c, -d, cd \rangle$ est anisotrope sur k . Ceci donne immédiatement le résultat annoncé. \square

Corollaire 2.5.6. *Soit X une k -surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Supposons que k satisfait la propriété (C_2) (cf. [Se, §II.4.5]). Alors $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.*

Démonstration. Par le corollaire 2.5.5 et la définition de la propriété (C_2) , on a $\frac{H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$. D'après [Se, §II.4.5 Thm. MS], la dimension cohomologique $cd(k)$ de k est ≤ 2 . Alors $H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et donc $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. \square

Le théorème 2.5.2 donne la conjecture de Hodge entière pour certaines variétés de dimension 4 (voir [CTV, §1]) :

Proposition 2.5.7. *Soit X une \mathbb{C} -variété projective et lisse de dimension 4 munie d'un morphisme dominant $X \xrightarrow{f} S$ de base une \mathbb{C} -surface projective lisse S et de fibre générique X_η une surface de del Pezzo de degré ≥ 5 . Alors la conjecture de Hodge entière en degré 4 vaut sur X .*

Démonstration. Puisque $\mathbb{C}(S)$ satisfait la propriété (C_2) (cf. [Se, §II.4.5]), d'après le corollaire 2.5.6, $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. D'après Colliot-Thélène et Voisin [CTV, Thm 3.8], il suffit alors de montrer qu'il existe une variété projective lisse Y de dimension au plus 3 et un morphisme $Y \xrightarrow{f} X$ tels que l'application induite $CH_0(Y) \xrightarrow{f_*} CH_0(X)$ soit surjective. Comme X_η est une $\mathbb{C}(S)$ -surface géométriquement rationnelle, il existe une surface T projective et lisse sur \mathbb{C} et une application génériquement finie $T \rightarrow S$, telles que $X_\eta \times_{\mathbb{C}(S)} \mathbb{C}(T)$ soit rationnelle sur $\mathbb{C}(T)$. Il existe donc une application rationnelle dominante de $\mathbb{P}^2 \times T$ vers X . Il existe alors une surface projective et lisse T' birationnelle à T et un morphisme $T' \rightarrow X$ tels que l'application induite $CH_0(T') \xrightarrow{f_*} CH_0(X)$ soit surjective. \square

2.6 Appendice : accouplements de suites spectrales

Soient X une variété lisse sur k et $Sh(X)$ la catégorie des faisceaux étales sur X . On rappelle quelques définitions données dans [Mc, Section 2.3] :

Définition 2.6.1. Un module bigradué différentiel de $Sh(X)$ est une collection d'éléments $E^{p,q} \in Sh(X)$ pour $p, q \in \mathbb{Z}$ et de morphismes $d : E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$ de bidegré $(s, 1 - s)$ pour certains $s \in \mathbb{Z}$, tels que $d \circ d = 0$.

Un produit tensoriel de modules bigradués différentiels $(E^{*,*}(1), d(1)), (E^{*,*}(2), d(2))$ est un module bigradué différentiel $((E(1) \otimes E(2))^{*,*}, d_{\otimes})$ avec

$$(E(1) \otimes E(2))^{p,q} = \bigoplus_{r+t=p, s+u=q} E^{r,s}(1) \otimes E^{t,u}(2)$$

et $d_{\otimes}(x \otimes y) = d(1)(x) \otimes y + (-1)^{r+s} x \otimes d(2)(y)$, où $x \in E^{r,s}(1)$, $y \in E^{t,u}(2)$.

Pour deux complexes A, B , par le théorème de Künneth, on a un morphisme canonique

$$\bigoplus_{s+r=n} H^r(A) \otimes H^s(B) \xrightarrow{p} H^n(A \times B).$$

Définition 2.6.2. Soient $E_r^{*,*}(1), d_r(1)$, $E_r^{*,*}(2), d_r(2)$ et $E_r^{*,*}(3), d_r(3)$ trois suites spectrales dans $Sh(X)$. Un accouplement

$$\psi : E_r^{*,*}(1) \times E_r^{*,*}(2) \rightarrow E_r^{*,*}(3)$$

est une collection de morphismes $\psi_r : E_r^{*,*}(1) \otimes E_r^{*,*}(2) \rightarrow E_r^{*,*}(3)$ pour chaque r , tel que ψ_{r+1} est la composition :

$$E_{r+1}^{*,*}(1) \otimes E_{r+1}^{*,*}(2) \xrightarrow{\sim} H(E_r^{*,*}(1)) \otimes H(E_r^{*,*}(2)) \xrightarrow{p} H((E_r(1) \otimes E_r(2))^{*,*}) \xrightarrow{H(\psi_r)} H(E_r^{*,*}(3)) \xrightarrow{\sim} E_{r+1}^{*,*}(3)$$

où p est le morphisme dans le théorème de Künneth.

Remerciements. Nous remercions Jean-Louis Colliot-Thélène pour plusieurs discussions. Je remercie également Olivier Benoist et Bruno Kahn pour leurs commentaires. Projet soutenu par l'attribution d'une allocation de recherche Région Ile-de-France.

Chapitre III

Troisième groupe de cohomologie non ramifiée des toiseurs universels sur les surfaces rationnelles

Résumé. Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k -surface projective et lisse géométriquement rationnelle. Soit \mathcal{T} un toiseur universel sur X possédant un k -point, et soit \mathcal{T}^c une compactification lisse de \mathcal{T} . C'est une question ouverte de savoir si \mathcal{T}^c est k -birational à un espace projectif. On sait que les deux premiers groupes de cohomologie non ramifiée de \mathcal{T} et \mathcal{T}^c sont réduits à leur partie constante. On donne une condition suffisante en termes de la structure galoisienne du groupe de Picard géométrique de X assurant l'énoncé analogue pour les troisièmes groupes de cohomologie non ramifiée de \mathcal{T} et \mathcal{T}^c . Ceci permet de montrer que $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul si X est une surface de Châtelet généralisée, et que ce groupe est réduit à sa partie 2-primaire si X est une surface de del Pezzo de degré au moins 2.

Summary. Let k a field of characteristic zero. Let X be a smooth, projective, geometrically rational k -surface. Let \mathcal{T} be a universal torsor over X with a k -point et \mathcal{T}^c a smooth compactification of \mathcal{T} . There is an open question : is \mathcal{T}^c k -birational equivalent to a projective space? We know that the unramified cohomology groups of degree 1 and 2 of \mathcal{T} and \mathcal{T}^c are reduced to their constant part. For the analogue of the third cohomology groups, we give a sufficient condition using the Galois structure of the geometrical Picard group of X . This enables us to show that $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ vanishes if X is a generalised Châtelet surface and that this group is reduced to its 2-primary part if X is a del Pezzo surface of degree at least 2.

3.1 Introduction

Soit k un corps de caractéristique 0. Pour une variété X sur k et un faisceau étale F sur X , la cohomologie non ramifiée de X de degré n est ici par définition le groupe

$$H_{nr}^n(X, F) := H_{Zariski}^0(X, \mathcal{H}^n(X, F)),$$

où $\mathcal{H}^n(X, F)$ est le faisceau Zariski associé au préfaisceau $\{U \subset X\} \mapsto H_{\acute{e}t}^n(U, F)$. Ces groupes sont des invariants k -birationnels des k -variétés intègres projectives et lisses ([CT95, Thm. 4.1.1]). Si X est projective, lisse et k -rationnelle, par [CT95, Thm. 4.1.1 et Prop. 4.1.4], on a $H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \xrightarrow{\sim} H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ pour tous entiers $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$.

Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un toiseur universel sur X [CTS87b]. C'est une k -variété géométriquement rationnelle. En 1979, Colliot-Thélène et Sansuc [CTS80, Question Q1, p. 227] ont posé la question : si

\mathcal{T} possède un point rationnel, la k -variété \mathcal{T} est-elle une k -variété k -rationnelle? Cette question est toujours ouverte.

Un certain nombre d'invariants k -birationnels sont triviaux sur toute compactification lisse \mathcal{T}^c de \mathcal{T} . Ainsi les applications de restriction $H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)) \rightarrow H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1))$ sont des isomorphismes pour $i = 1$ et $i = 2$. Le cas $i = 1$ est facile. Dans le cas $i = 2$, ceci dit que l'application de restriction $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(\mathcal{T}^c)$ sur les groupes de Brauer est un isomorphisme. Pour ce résultat, voir [CTS77, Thm. 1], [CTS87b, Thm. 2.1.2], [HS03, Prop. 1.8] et Théorème 3.2.8 ci-dessous. Par ailleurs, pour \mathcal{T} possédant un k -point, on sait (Proposition 3.2.12) que pour tous $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$, l'image de $H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ dans $H_{nr}^i(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ est réduite à $H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$.

Dans le présent article, pour X, \mathcal{T} et \mathcal{T}^c comme ci-dessus, nous étudions les groupes

$$H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \subset H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Dans [1], nous avons établi que $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.

Les principaux résultats du présent article sont les suivants.

(a) Le quotient $H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.

(b) Si $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$ et $X(k) \neq \emptyset$, alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$ (Théorème 3.4.7). Pour établir ce résultat, nous appliquons aux toseurs sous un tore une technique développée par A. Merkurjev [Me13] pour étudier les toseurs sous un groupe semisimple.

(c) Si X est une surface de Châtelet généralisée, c'est-à-dire un fibré en coniques sur \mathbb{P}_k^1 possédant une section sur une extension quadratique de k , et $X(k) \neq \emptyset$, alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ est nul (Théorème 3.5.1).

(d) Si X est une surface projective, lisse, k -birationnellement équivalent à une surface de del Pezzo de degré ≥ 2 ou à une surface fibrée en coniques au-dessus d'une conique, alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ est purement 2-primaire (Théorème 3.6.7).

Conventions et notations.

Soit k un corps quelconque de caractéristique 0. On note \bar{k} une clôture algébrique.

Une k -variété X est un k -schéma séparé de type fini. Pour X une telle variété, on note $k[X]$ son anneau des fonctions globales, $k[X]^\times$ son groupe des fonctions inversibles, et $\text{Pic}(X) := H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Picard. Si X est lisse, on note $\text{Br}(X) := H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Brauer, $CH^i(X)$ son groupe de Chow de codimension i et $CH_i(X)$ son groupe de Chow de dimension i . Pour X/k projective lisse, notons $A_0(X) \subset CH_0(X)$ le groupe de classes des 0-cycles de degré 0. Pour tous $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$, on note $\frac{H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}$ le conoyau du morphisme $H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$.

Tous les groupes de cohomologie ou d'hypercohomologie utilisés dans cet article sont des groupes de cohomologie étale, sauf les groupes de cohomologie de Zariski $H^i(X, \mathcal{K}_j)$ à valeurs dans des faisceaux de K -théorie algébrique. Pour chaque schéma X , notons $D_{\text{ét}}^+(X)$ la catégorie dérivée bornée à gauche de la catégorie des faisceaux étales. Pour les propriétés de catégorie dérivée d'une catégorie abélienne, voir [KS, §13.1]. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a la sous-catégorie $D_{\text{ét}}^{\geq n}(X) \subset D_{\text{ét}}^+(X)$ (cf. [KS, Notation 13.1.11]) et les foncteurs de la troncature $\tau^{\leq n}$ et $\tau^{\geq n}$ ([KS, Déf. 12.3.1 et Prop. 13.1.5]).

Soit T un k -tore. Notons $T^* = \text{Hom}_{\bar{k}\text{-gp}}(T_{\bar{k}}, \mathbb{G}_{m, \bar{k}})$ le réseau galoisien défini par le groupe des caractères géométriques du tore T .

Pour un groupe abélien A et un entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $A[n] := \{x \in A, nx = 0\}$ et A_{tors} le sous-groupe de torsion de A . On note $\text{Sym}^2 A$ la deuxième puissance symétrique de A , i.e. $A \otimes_{\mathbb{Z}} A / \sim$, où \sim est engendré par $a \otimes b \sim b \otimes a$; et on note $\wedge^i A$ la i -ième puissance extérieure de A . Si $A \cong A_1 \oplus A_2$, on a des isomorphismes naturels

$$(3.1.0.1) \quad \text{Sym}^2 A_1 \oplus (A_1 \otimes A_2) \oplus \text{Sym}^2 A_2 \xrightarrow{\sim} \text{Sym}^2 A \quad \text{et} \quad \wedge^2 A_1 \oplus (A_1 \otimes A_2) \oplus \wedge^2 A_2 \xrightarrow{\sim} \wedge^2 A$$

Si A est un réseau, on a la suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow \wedge^2 A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow \text{Sym}^2 A \rightarrow 0$$

où $\wedge^2 A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ envoie $a \wedge b$ sur $a \otimes b - b \otimes a$.

3.2 Rappels

Dans cette section, on fait des rappels sur plusieurs sujets : cohomologie motivique, variétés toriques, variétés cellulaires, toseurs universels et leur cohomologie à coefficients \mathbb{G}_m . Soit k un corps de caractéristique 0.

3.2.1 Cohomologie motivique

Notons $K_i(A)$ le i -ième groupe de K -théorie de Quillen d'un anneau A . Sur tout schéma X , on note \mathcal{K}_i le faisceau pour la topologie de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto K_i(H^0(U, \mathcal{O}_X))$. On note $H^i(X, \mathcal{K}_j)$ ses groupes de cohomologie pour la topologie de Zariski. Par résolution de Gersten (un théorème de Quillen, cf. [CTHK] pour une démonstration du cas général), si X est une k -variété lisse, le groupe $H^i(X, \mathcal{K}_j)$ est le i -ième groupe de cohomologie du complexe :

$$(3.2.1.1) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K_j(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{j-1}(k(x)) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(j)}} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

On utilise le complexe motivique $\mathbb{Z}(r)$ de faisceaux de cohomologie étale sur les variétés lisses sur k pour $r = 0, 1, 2$, comme défini par Lichtenbaum ([L87] [L90]). On utilise le complexe motivique "de Lichtenbaum" pour pouvoir utiliser la méthode de Merkurjev dans [Me13]. Alors $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m[-1]$, et $\mathbb{Z}(2)$ est supporté en degré 1 et 2. Si X est un schéma de type fini sur k , on a un triangle dans $D_{\text{ét}}^+(\mathcal{T})$ pour $r = 0, 1, 2$:

$$(3.2.1.2) \quad \mathbb{Z}(r) \xrightarrow{n} \mathbb{Z}(r) \longrightarrow \mathbb{Z}/n(r) \xrightarrow{+1} .$$

De plus, on sait ([K96], cf. [CT15, §1]) :

Théorème 3.2.1. *Soit X une k -variété lisse géométriquement intègre de corps de fonctions $k(X)$.*

(i) *On a les égalités : $\mathbb{H}^0(X, \mathbb{Z}(2)) = 0$, $\mathbb{H}^1(X, \mathbb{Z}(2)) = K_{3, \text{indec}}(k(X))$, $\mathbb{H}^2(X, \mathbb{Z}(2)) = H^0(X, \mathcal{K}_2)$ et $\mathbb{H}^3(X, \mathbb{Z}(2)) = H^1(X, \mathcal{K}_2)$.*

(ii) *On a une suite exacte naturelle :*

$$(3.2.1.3) \quad 0 \longrightarrow CH^2(X) \longrightarrow \mathbb{H}^4(X, \mathbb{Z}(2)) \longrightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow 0.$$

3.2.2 Variétés toriques

Par [Su, Cor. 2] et [Oda, Thm. 1.10] on a :

Théorème 3.2.2. *Supposons que k est algébriquement clos. Soit X une variété torique lisse sous le tore \mathbb{G}_m^n sur k . Alors pour chaque \mathbb{G}_m^n -orbite Z de codimension i , il existe une sous-variété torique ouverte $U \subset X$ telle que $Z \subset U$ et $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m^{n-i} \times \mathbb{A}^i$ comme variété torique, où l'action de \mathbb{G}_m^n sur $\mathbb{G}_m^{n-i} \times \mathbb{A}^i$ est la multiplication.*

Comme conséquence, on a :

Corollaire 3.2.3. *Sous les hypothèses du théorème 3.2.2, soient Z_1, Z_2 deux \mathbb{G}_m^n -orbites de codimension 1 de X . Alors il existe un nombre fini de \mathbb{G}_m^n -orbites de codimension 2, notons-les S_j , telles que leurs adhérences schématiques satisfont $\overline{Z_1} \cap \overline{Z_2} = \bigcup_j \overline{S_j}$.*

3.2.3 Variétés cellulaires

Définition 3.2.4. [Ka99, Définition 3.2] Une variété X sur k a une décomposition cellulaire (brièvement : est cellulaire) s'il existe un sous-ensemble fermé propre $Z \subset X$ tel que $X \setminus Z$ soit isomorphe à un espace affine et Z ait une décomposition cellulaire.

Proposition 3.2.5. ([1, Prop. 2.2]) Soit k un corps algébriquement clos.

- (1) Une surface projective, lisse, k -rationnelle est cellulaire.
- (2) ([Ful, Lemme, p. 103]) Une variété torique, projective, lisse sur k est cellulaire.
- (3) Soient T un tore sur k et T^c une T -variété torique, projective, lisse. Soient X une variété cellulaire sur k et $Y \rightarrow X$ un T -torseur. Alors $Y^c := Y \times^T T^c$ est cellulaire.

Par [Fu84, Exemple 19.1.11], on a

Théorème 3.2.6. Supposons que k est algébriquement clos. Soient X une variété lisse cellulaire sur k et n un entier. Pour tout entier i , le groupe $CH^i(X)$ est de type fini et sans torsion, et le morphisme de cycle $CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}/n \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Z}/n)$ est un isomorphisme. Pour tout entier i impair, on a $H^i(X, \mathbb{Z}/n) = 0$ et donc $H^i(X, \mathbb{Z}_l) = 0$ pour tout premier l .

Proposition 3.2.7. Supposons que k est algébriquement clos. Soit X une variété lisse, connexe, rationnelle sur k . Si X est soit projective soit cellulaire, alors le morphisme canonique $\text{Pic}(X) \otimes k^\times \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Si X est projective, ceci résulte de A. Pirutka [Pi11, Prop. 2.6].

Si X est cellulaire, on fixe une décomposition cellulaire de X . Soient $n = \dim(X)$ et $U \subset X$ l'ouvert isomorphe à \mathbb{A}^n dans la décomposition cellulaire. Notons $Z := X \setminus U$. On a $H^0(U, \mathcal{K}_2) = K_2(k)$, $H^1(U, \mathcal{K}_2) = 0$ et $\text{Pic}(X) \cong \text{Div}_Z(X)$. Par la résolution de Gersten (3.2.1.1), on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^0(U, \mathcal{K}_2) \rightarrow \ker(\psi) \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(U, \mathcal{K}_2),$$

où $\psi : \bigoplus_{x \in Z^{(0)}} k(x)^\times \xrightarrow{\text{div}} \bigoplus_{x \in Z^{(1)}} \mathbb{Z}$. Alors $H^0(X, \mathcal{K}_2) \cong H^0(U, \mathcal{K}_2)$ et $\ker(\psi) \cong H^1(X, \mathcal{K}_2)$.

Puisque $\text{div}(k^\times) = 0$, on a $\bigoplus_{x \in Z^{(0)}} k^\times \subset \ker(\psi)$. Pour tout $x \in Z^{(0)}$, il existe une unique sous-variété réduite localement fermée V_x dans la décomposition cellulaire telle que $x \in V_x$, $V_x \cong \mathbb{A}^{n-1}$ et $V_x \cap V_{x'} = \emptyset$ pour $x \neq x' \in Z^{(0)}$. Donc

$$k^\times \cong \ker(k(x)^\times \xrightarrow{\text{div}} \bigoplus_{y \in V_x^{(1)}} \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad \ker(\psi) \subset \bigoplus_{x \in Z^{(0)}} k^\times.$$

Alors $\ker(\psi) \cong \bigoplus_{x \in Z^{(0)}} k^\times \cong \text{Div}_Z(X) \otimes k^\times \cong \text{Pic}(X) \otimes k^\times$ et le résultat en découle. \square

3.2.4 Torseurs universels

Soient X une k -variété lisse, T un k -tore et $\mathcal{T} \rightarrow X$ un T -torseur. La composition $H^1(X, T) \rightarrow H^1(X_{\bar{k}}, T_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Hom}(T^*, \text{Pic}(X_{\bar{k}}))$ associée à $\mathcal{T} \rightarrow X$ un homomorphisme galoisien $T^* \xrightarrow{\text{type}} \text{Pic}(X_{\bar{k}})$, appelé le *type du toseur*. Lorsque le type est un isomorphisme, on dit [CTS87b] que $\mathcal{T} \rightarrow X$ est un *torseur universel* sur X .

Théorème 3.2.8. Soit X une k -variété lisse, avec $\bar{k}^\times \cong \bar{k}[X]^\times$ et $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ de type fini et sans torsion. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un toseur universel. Soit T^c une T -variété torique, projective, lisse. Soit $\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \times^T T^c$.

On a les propriétés suivantes :

- (i) [CTS87b, Thm. 2.1.2] $\bar{k}^\times \cong \bar{k}[\mathcal{T}]^\times$.
- (ii) [CTS87b, Thm. 2.1.2] $\text{Pic}(\mathcal{T}_{\bar{k}}) \cong 0$.
- (iii) [CTS87b, Thm. 2.1.2] On a un isomorphisme de Γ_k -modules $\text{Div}_{\mathcal{T}^c - \mathcal{T}}(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c) \cong \text{Pic}(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)$. En particulier $\text{Pic}(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)$ est un module de permutation de type fini.

(iv) [HS03, Thm. 1.6] L'application naturelle $\mathrm{Br}(X_{\bar{k}}) \rightarrow \mathrm{Br}(\mathcal{T}_{\bar{k}})$ est un isomorphisme.

(v) [CTS87b, Rem. 2.8.4] pour toute extension K/k de corps, si X_K est projective et K -rationnelle, alors \mathcal{T}_K est stablement K -rationnelle. Si de plus $K = \bar{k}$, alors \mathcal{T}_K est rationnelle.

Par la suite spectrale de Hochschild-Serre, on a $k^\times \cong k[\mathcal{T}]^\times$, $\mathrm{Pic}(\mathcal{T}) = 0$ et $\mathrm{Br}(k) \cong \mathrm{Br}_1(\mathcal{T})$. De plus, si $X_{\bar{k}}$ est \bar{k} -rationnelle, par le corollaire 3.2.9 ci-dessous, on a $\mathrm{Br}(k) \cong \mathrm{Br}(\mathcal{T})$.

Corollaire 3.2.9. *Sous les hypothèses du théorème 3.2.8, supposons que k est algébriquement clos et X est projective et rationnelle. Alors $\mathrm{Br}(\mathcal{T}) = 0$, $H^1(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n) = 0$, $H^2(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n) = 0$ et le groupe $H^0(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible.*

Démonstration. Par le théorème 3.2.8 (iv), $\mathrm{Br}(\mathcal{T}) = 0$. Par la suite de Kummer, et le théorème 3.2.8 (i) et (ii), ceci implique $H^1(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n) = 0$ et $H^2(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n) = 0$. Par le Théorème 3.2.1 et le triangle (3.2.1.2) sur $\mathbb{Z}(2)$, on a $0 \cong H^1(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n(2)) \rightarrow H^0(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)[n]$ et $H^0(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)/n \hookrightarrow H^2(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n(2)) \cong 0$. Ainsi $H^0(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible. \square

Comme conséquence, on a $\bar{k}[\mathcal{T}^c]^\times / \bar{k}^\times = 0$, $\mathrm{Br}(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c) = 0$, et $H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c, \mathbb{Z}/n) = 0$, mais ceci résulte déjà de la rationalité de la \bar{k} -variété projective et lisse $\mathcal{T}_{\bar{k}}^c$.

Corollaire 3.2.10. *Sous les hypothèses du théorème 3.2.8, supposons qu'il existe une extension finie K/k de corps de degré d telle que la variété X_K soit projective et K -rationnelle. Alors, pour tous $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$, le groupe $\frac{H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}$ est annulé par d .*

Démonstration. D'après le théorème 3.2.8 (v), la K -variété \mathcal{T}_K est stablement K -rationnelle. Ainsi $\frac{H_{nr}^i(\mathcal{T}_K^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))} = 0$ pour tous i, j . Puisque le transfert est bien défini pour $H_{nr}^i(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et $H^i(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, on peut définir le transfert $\frac{H_{nr}^i(\mathcal{T}_K^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))} \xrightarrow{tr} \frac{H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}$. Un argument de restriction-inflation donne le résultat. \square

En utilisant la proposition 3.2.5(i), dans un précédent article j'ai établi :

Théorème 3.2.11. [1, Thm. 2.7] *Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un toseur universel sur X et soit \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Alors le groupe $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.*

3.2.5 Accouplements avec les 0-cycles

Soit X une variété projective, lisse, géométriquement intègre. Pour toute extension de corps K/k et tous $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$, on a un accouplement naturel :

$$A_0(X_K) \times H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$$

(voir [Me08, formule (3)]).

Proposition 3.2.12. *Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un toseur universel sur X et soit \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Supposons que $\mathcal{T}^c(k) \neq \emptyset$. Alors l'homomorphisme*

$$H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow \frac{H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}$$

est nul pour tous $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Il existe une T -variété torique lisse T^c (cf. [CTHS, Cor. 1]). Puisque le groupe $H_{nr}^i(\bullet, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ est un invariant birationnel des variétés projectives et lisses, et que l'existence d'un k -point est un invariant k -birationnel des k -variétés projectives et lisses (lemme de Nishimura), on peut supposer que $\mathcal{T}^c \cong T^c \times^T \mathcal{T}$. Il existe alors un morphisme $\mathcal{T}^c \xrightarrow{\pi} X$ étendant $\mathcal{T} \rightarrow X$.

Soit T un tore tel que $T^* \cong \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Alors $\mathcal{T} \rightarrow X$ est un T -torseur, i.e. $[\mathcal{T}] \in H^1(X, T)$. Par [CTS80, §II.B], pour toute extension K/k de corps, $[\mathcal{T}]$ induit un homomorphisme

$$A_0(X_K) \xrightarrow{\theta} H^1(K, T) : \sum_i x_i \mapsto \sum_i \text{Res}_{K(x_i)/K} x_i^*[\mathcal{T}]$$

Puisque $[\mathcal{T}]|_{\mathcal{T}} = 0 \in H^1(\mathcal{T}, T)$ et que tout élément de $A_0(\mathcal{T}_K^c)$ équivaut à un élément supporté sur \mathcal{T}_K (lemme de déplacement facile sur les zéro-cycles sur une variété lisse), la composition des homomorphismes

$$A_0(\mathcal{T}_K^c) \xrightarrow{\pi_*} A_0(X_K) \xrightarrow{\theta} H^1(K, T) : \sum_i t_i \mapsto \sum_i \text{Res}_{K(t_i)/K} t_i^*(\pi^*[\mathcal{T}])$$

est nulle.

D'après [CT83, Prop. 4] et [CTS81, Thm. 3], pour toute extension K/k de corps, le morphisme $A_0(X_K) \xrightarrow{\theta} H^1(K, T)$ est injectif. Ainsi le morphisme $A_0(\mathcal{T}_K^c) \xrightarrow{\pi_*} A_0(X_K)$ est nul.

Pour toute extension K/k de corps, on a des accouplements compatibles :

$$\begin{array}{ccc} A_0(\mathcal{T}_K^c) & \times & H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \xrightarrow{(\cdot)_{\mathcal{T}^c}} H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \\ \downarrow \pi_* & & \uparrow \pi^* \\ A_0(X_K) & \times & H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \xrightarrow{(\cdot)_X} H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)). \end{array}$$

Soit $t \in \mathcal{T}^c(k)$, $K := k(\mathcal{T})$ et $\eta \in \mathcal{T}$ le point générique. Alors $t - \eta \in A_0(\mathcal{T}_K^c)$ et, pour tout $\alpha \in H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$, on a

$$(t, \pi^* \alpha)_{\mathcal{T}^c} - (\eta, \pi^* \alpha)_{\mathcal{T}^c} = (t - \eta, \pi^* \alpha)_{\mathcal{T}^c} = (\pi_*(t - \eta), \alpha)_X = (0, \alpha)_X = 0 \in H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)).$$

Puisque $(\eta, -)_{\mathcal{T}^c}$ est l'inclusion canonique $H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \subset H^i(k(\mathcal{T}^c), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ et

$$\text{Im}(t, -)_{\mathcal{T}^c} \subset \text{Im}(H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))),$$

on a $\text{Im}(\pi^*) \in \text{Im}(H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)))$. \square

3.3 Cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$ d'un toseur sous un tore

Dans [Me13], A. Merkurjev a étudié la cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$ pour un toseur sous un groupe semisimple. Nous reprenons sa méthode pour étudier les toseurs sous un tore. Soient T un tore sur k de dimension N , et $f : Y \rightarrow X$ un toseur sous T sur X , où X est une k -variété lisse géométriquement intègre. On calcule la relation entre la cohomologie motivique de X et celle de Y à coefficients dans le complexe $\mathbb{Z}(2)$ (Théorème 3.3.5).

Dans ce cas, on a deux triangles dans la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux étales :

$$(3.3.0.1) \quad \mathbb{Z}_X(1) \rightarrow Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \rightarrow \mathbb{Z}_f(1) \rightarrow \mathbb{Z}_X(1)[1],$$

et

$$(3.3.0.2) \quad \mathbb{Z}_X(2) \rightarrow Rf_*\mathbb{Z}_Y(2) \rightarrow \mathbb{Z}_f(2) \rightarrow \mathbb{Z}_X(2)[1]$$

qui définissent $\mathbb{Z}_f(1)$ et $\mathbb{Z}_f(2)$.

Pour chaque Γ_k -module M continu discret, on peut voir M comme un faisceau étale sur le petit site étale ($\text{ét}/k$), et son image inverse sur le grand site étale est noté également par M . Ainsi $\bigwedge^* T^*$ est un faisceau étale.

Proposition 3.3.1. *On a $\tau^{\leq 2}\mathbb{Z}_f(1) \cong T^*[-1]$ et donc $\tau^{\leq 2}(\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)) \cong \mathbb{G}_m \otimes T^*[-2]$*

Démonstration. Puisque $\mathbb{Z}_X(1) = \mathbb{G}_m[-1]|_X$ et $\mathbb{Z}_Y(1) = \mathbb{G}_m[-1]|_Y$, on a $\mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_X(1)) \cong \mathbb{G}_m|_X$, $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_X(1)) = 0$ pour tout $i \neq 1$ et $\mathcal{H}^i(Rf_*\mathbb{Z}_Y(1)) = R^{i-1}f_*(\mathbb{G}_m|_Y)$ pour tout i . Ainsi $\mathcal{H}^i(Rf_*\mathbb{Z}_Y(1)) = 0$ pour $i \leq 0$ et le faisceau $\mathcal{H}^2(Rf_*\mathbb{Z}_Y(1))$ est le faisceau étale associé au préfaisceau :

$$U \mapsto \mathbb{H}^2(f^{-1}U, \mathbb{Z}(1)) = \text{Pic}(f^{-1}U).$$

Localement pour la topologie étale, $f^{-1}U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{G}_m^N$ et U est le spectre d'un anneau local régulier. Dans ce cas on a $0 \cong \text{Pic}(U) \cong \text{Pic}(f^{-1}U)$. Donc $\mathcal{H}^2(Rf_*\mathbb{Z}_Y(1)) = 0$.

D'après [CTS87b, Prop. 1.4.2], on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_X(1)) \rightarrow \mathcal{H}^1(Rf_*\mathbb{Z}_Y(1)) \rightarrow T^* \rightarrow 0.$$

D'après (3.3.0.1), on a $\mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_f(1)) \cong T^*$ et $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_f(1)) = 0$ pour $i \leq 0$ et $i = 2$. Ceci donne le premier énoncé.

Le deuxième énoncé résulte du fait : $\mathbb{G}_m \otimes^L (D_{\text{ét}}^{\geq 3}(X)) \subset D_{\text{ét}}^{\geq 2}(X)$ pour les catégories dérivées de \mathbb{Z} -faisceaux. \square

Ainsi $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)) = 0$ pour $i \leq 1$ et on a un isomorphisme :

$$(3.3.0.3) \quad \mathbb{G}_m \otimes T^* \cong \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)).$$

Si $Y \cong X \times T$, la projection $X \times T \rightarrow T$ induit une section de (3.3.0.1) :

$$(3.3.0.4) \quad T^*[-1] \cong \tau^{\leq 2}\mathbb{Z}_f(1) \rightarrow Rf_*\mathbb{Z}_Y(1).$$

Le résultat principal de cette section est la Proposition 3.3.4, qui calcule $\mathbb{Z}_f(2)$.

Soit $T_0 := \mathbb{G}_m^N$. Puisque $H^0(T_0, \mathcal{K}_1) = k[T_0]^\times$, l'unité de T_0 induit un homomorphisme canonique $T_0^* \rightarrow H^0(\mathbb{G}_m, \mathcal{K}_1)$. Pour chaque variété lisse intègre U et tout $n \in \mathbb{N}$, le cup-produit

$$[H^n(U, \mathcal{K}_2) \otimes H^0(T_0, \mathcal{K}_0)] \oplus [H^n(U, \mathcal{K}_1) \otimes H^0(T_0, \mathcal{K}_1)] \xrightarrow{\cup} H^n(U \times T_0, \mathcal{K}_2)$$

induit un homomorphisme :

$$(3.3.0.5) \quad H^n(U, \mathcal{K}_2) \oplus [H^n(U, \mathcal{K}_1) \otimes T_0^*] \xrightarrow{\cup} H^n(U \times T_0, \mathcal{K}_2).$$

Lemme 3.3.2. *Soit $T_0 := \mathbb{G}_m^N$ et U une variété lisse intègre. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une suite exacte canonique (où \cup est défini dans (3.3.0.5)) :*

$$0 \rightarrow H^n(U, \mathcal{K}_2) \oplus [H^n(U, \mathcal{K}_1) \otimes T_0^*] \xrightarrow{\cup} H^n(U \times T_0, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^n(U, \mathcal{K}_0) \otimes \wedge^2 T_0^* \rightarrow 0.$$

Démonstration. Notons K_i^M les groupes de K -théorie algébrique de Milnor. Par [Me03, §4], pour toute variété lisse X , on a un complexe :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K_j^M(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{j-1}^M(k(x)) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(i)}} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

et on note $A^i(X, K_j^M)$ les groupes de cohomologie de ce complexe.

Soit f_1, \dots, f_N une base de T_0^* . Ainsi $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_q}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq N}$ est un élément de $A^0(T_0, K_q)$. On affirme que $A^*(U \times T_0, K_*)$ est un $A^*(U, K_*)$ -module libre avec la base consistant des éléments $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_q}\}$ pour $q = 0, 1, \dots, N$ et tout q -uplet $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq N$. Pour $N = 1$, ceci est [Me03, Proposition 5.5]. Le cas général suit par récurrence (cf. [Me03, Corollaire 5.6]).

Pour K_2^M , on a

$$A^n(U \times T_0, K_2^M) \cong A^n(U, K_2^M) \oplus [\bigoplus_i A^n(U, K_1^M) \cup \{f_i\}] \oplus [\bigoplus_{i < j} A^n(U, K_0^M) \cup \{f_i, f_j\}].$$

Alors le cup-produit induit une injection (l'analogie de (3.3.0.5))

$$A^n(U, K_2^M) \oplus [A^n(U, K_1^M) \otimes T_0^*] \xrightarrow{\cup_{1,1}} A^n(U \times T_0^*, K_2^M)$$

et $\text{coker}(\cup_{1,1}) \cong \bigoplus_{i < j} A^n(U, K_0^M) \cup \{f_i, f_j\}$. Alors le morphisme (cf. [Me03, (5.8)]) :

$$A^n(U, K_0^M) \otimes \wedge^2 T_0^* \rightarrow \text{coker}(\cup_{1,1}) : a \otimes (f_i \wedge f_j) \rightarrow a \cup \{f_i, f_j\}$$

est bien défini et c'est un isomorphisme. Ceci donne une suite exacte

$$0 \rightarrow A^n(U, K_2^M) \oplus [A^n(U, K_1^M) \otimes T_0^*] \xrightarrow{\cup} A^n(U \times T_0, K_2^M) \rightarrow A^n(U, K_0^M) \otimes \wedge^2 T_0^* \rightarrow 0.$$

Pour tout corps F et $i = 0, 1, 2$, on a $K_i^M(F) \xrightarrow{\sim} K_i(F)$. D'après (3.2.1.1), pour $j = 0, 1, 2$, on a donc un isomorphisme canonique $A^i(X, K_j^M) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathcal{K}_j)$. Ceci donne le résultat annoncé. \square

Lemme 3.3.3. *Les faisceaux $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_f(2))$ sont nuls pour $i \leq 1$ et $i = 3$.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{Z}_X(2)$ et $\mathbb{Z}_Y(2)$ sont supportés en degré 1 et 2, on a $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_f(2)) = 0$ pour $i < 0$, $R^i f_* \mathbb{Z}_Y(2) = 0$ pour $i \leq 0$, $R^i f_* \mathbb{Z}_Y(2) \cong \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_f(2))$ pour $i \geq 3$ et $\mathcal{H}^3(\mathbb{Z}_X(2)) = 0$. Ainsi on a une suite exacte longue dans la catégorie des faisceaux étales sur X :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^0(\mathbb{Z}_f(2)) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_X(2)) \xrightarrow{s} R^1 f_* \mathbb{Z}_Y(2) \longrightarrow$$

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_f(2)) \longrightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_X(2)) \xrightarrow{s_1} R^2 f_* \mathbb{Z}_Y(2) \longrightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2)) \longrightarrow 0.$$

Les faisceaux $\mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_X(2))$ et $R^1 f_* \mathbb{Z}_Y(2)$ sont les faisceaux étales associés aux préfaisceaux :

$$U \longmapsto \mathbb{H}^1(U, \mathbb{Z}(2)) = K_{3, \text{ind}k}(U) \quad \text{et} \quad U \longmapsto \mathbb{H}^1(f^{-1}U, \mathbb{Z}(2)) = K_{3, \text{ind}k}(f^{-1}U).$$

Localement pour la topologie étale, $f^{-1}U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{G}_m^N$, et dans ce cas on a $K_{3, \text{ind}k}(U) \cong K_{3, \text{ind}k}(f^{-1}U)$, car $K_{3, \text{ind}k}(U) \cong K_{3, \text{ind}k}(U \times \mathbb{G}_m^N)$ (cf. [EKL, Lem. 6.2]). Donc s est un isomorphisme.

Les faisceaux $\mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_X(2))$ et $R^2 f_* \mathbb{Z}_Y(2)$ sont les faisceaux étales associés aux préfaisceaux :

$$U \longmapsto \mathbb{H}^2(U, \mathbb{Z}(2)) = H^0(U, \mathcal{K}_2) \quad \text{et} \quad U \longmapsto \mathbb{H}^2(f^{-1}U, \mathbb{Z}(2)) = H^0(f^{-1}U, \mathcal{K}_2).$$

Localement pour la topologie étale, $f^{-1}U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{G}_m^N$, et dans ce cas le morphisme canonique $H^0(U, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^0(f^{-1}U, \mathcal{K}_2)$ est injectif puisque que $f^{-1}U \rightarrow U$ admet alors une section. Donc s_1 est injectif.

On a donc établi $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_f(2)) = 0$ pour $i \leq 1$.

Le faisceau $R^3 f_* \mathbb{Z}_Y(2)$ est le faisceau étale associé au préfaisceau :

$$U \longmapsto \mathbb{H}^3(f^{-1}U, \mathbb{Z}(2)) = H^1(f^{-1}U, \mathcal{K}_2).$$

Localement pour la topologie étale, $f^{-1}U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{G}_m^N$. Notons $T_0 := \mathbb{G}_m^N$. Dans ce cas, par le lemme 3.3.2, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(U, \mathcal{K}_2) \oplus [H^1(U, \mathcal{K}_1) \otimes T_0^*] \rightarrow H^1(f^{-1}U, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(U, \mathcal{K}_0) \otimes \wedge^2 T_0^* \rightarrow 0.$$

Comme le faisceau associé à $\{U \longmapsto H^1(U, \mathcal{K}_*)\}$ est 0, le faisceau associé à $\{U \longmapsto H^1(f^{-1}U, \mathcal{K}_2)\}$ est 0. Donc $R^3 f_* \mathbb{Z}_Y(2)$ est 0, et $\mathcal{H}^3(\mathbb{Z}_f(2)) = 0$. \square

Notons $\mathbb{Z}_f(\otimes)$ le cône du morphisme $\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) \rightarrow Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1)$. Soit θ la composition des morphismes

$$Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \xrightarrow{\theta_1} Rf_*(\mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L f^* Rf_* \mathbb{Z}_Y(1)) \xrightarrow{\theta_2} Rf_*(\mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L \mathbb{Z}_Y(1)) \rightarrow Rf_* \mathbb{Z}_Y(2).$$

où θ_1 est le morphisme canonique induit par \otimes^L (cf. [Fu, p. 306]) et θ_2 est induit par le morphisme d'adjonction $f^* Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \rightarrow \mathbb{Z}_Y(1)$. Le morphisme θ induit un diagramme commutatif de triangles :

(3.3.0.6)

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1)[1] \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \exists h_1 & (1) & \downarrow \\ \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) & \longrightarrow & Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_f(\otimes) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1)[1] \\ \downarrow \cup & & \downarrow \theta & & \downarrow \exists h_\otimes & (2) & \downarrow \cup[1] \\ \mathbb{Z}_X(2) & \longrightarrow & Rf_* \mathbb{Z}_Y(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_f(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(2)[1]. \end{array}$$

Le morphisme $h_\otimes \circ h_1$ induit un morphisme

$$h_{1,1} : \mathbb{G}_{m,X} \otimes T^* \stackrel{(3.3.0.3)}{\cong} \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)) \rightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2)).$$

Si $Y \xrightarrow{\sim} X \times T$, d'après (3.3.0.4), le morphisme $h_{1,1}$ est exactement le cup-produit.

Supposons que $Y \xrightarrow{\sim} X \times T$ et X est géométriquement connexe sur k . Par le Lemme 3.3.2, il y a une composition de morphismes de groupes

$$H^0(Y, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^0(Y_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)^{\Gamma_k} \rightarrow (H^0(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_0) \otimes \wedge^2 T^*)^{\Gamma_k} \cong (\wedge^2 T^*)^{\Gamma_k} \xrightarrow{\sim} (\wedge^2 T^*)(X),$$

où Γ_k est le groupe de Galois de k , et $(\wedge^2 T^*)(X)$ est le groupe de sections du faisceau $(\wedge^2 T^*)$ sur X .

En général, $p_1 : Y \times_X Y \rightarrow Y$ est un torseur trivial et $p_2 : Y \times_X Y \rightarrow Y$ est T -équivariant. Il y a un morphisme

$$h'_{0,2} : H^0(Y, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{p_2^*} H^0(Y \times_X Y, \mathcal{K}_2) \rightarrow (\wedge^2 T^*)(Y) \cong (\wedge^2 T^*)(X).$$

Si $Y \cong X \times T$, le morphisme $h'_{0,2}$ est exactement $H^0(Y, \mathcal{K}_2) \rightarrow (\wedge^2 T^*)(X)$. Dans ce cas, $h'_{0,2}$ induit un morphisme des faisceaux $h'_{0,2} : R^2 f_* \mathbb{Z}_Y(2) \rightarrow \wedge^2 T^*$. La composition $\mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_X(2)) \rightarrow R^2 f_* \mathbb{Z}_Y(2) \rightarrow \wedge^2 T^*$ est nulle, parce que localement pour la topologie étale, c'est nul par le lemme 3.3.2. Donc il existe un morphisme

$$h_{0,2} : \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2)) \rightarrow \wedge^2 T^*.$$

Nous pouvons maintenant établir :

Proposition 3.3.4. *On a $\tau^{\leq 3}\mathbb{Z}_f(2) \cong \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2))[-2]$ et une suite exacte de faisceaux étales sur X :*

$$(3.3.0.7) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,X} \otimes T^* \xrightarrow{h_{1,1}} \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2)) \xrightarrow{h_{0,2}} \wedge^2 T^* \longrightarrow 0.$$

Démonstration. D'après le lemme 3.3.3, il suffit de montrer que localement pour la topologie étale la suite est exacte. Localement pour la topologie étale, $Y \xrightarrow{\sim} X \times \mathbb{G}_m^N$, le résultat découle du lemme 3.3.2. \square

Explicitons ce que donne la cohomologie de cette suite exacte de faisceaux.

Théorème 3.3.5. *Soient X une k -variété lisse géométriquement connexe, T un k -tore et $f : Y \rightarrow X$ un T -torseur. Alors on a deux suites exactes longues de Γ_k -modules :*

$$0 \rightarrow \bar{k}[X]^\times \otimes T^* \rightarrow \mathbb{H}^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \rightarrow \wedge^2 T^* \xrightarrow{h} \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes T^* \rightarrow \mathbb{H}^3(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \rightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \longrightarrow H^0(Y_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \longrightarrow \mathbb{H}^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \longrightarrow H^1(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \\ \longrightarrow H^1(Y_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \longrightarrow \mathbb{H}^3(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \longrightarrow \mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_X(2)) \longrightarrow \mathbb{H}^4(Y_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_Y(2)), \end{aligned}$$

où :

- (1) le morphisme h est donné par : $a \wedge b \mapsto a \otimes \partial(b) - b \otimes \partial(a)$ avec $\partial : T^* \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}})$ le morphisme associé au toseur $Y \rightarrow X$ sous le tore T ;
- (2) la composition de morphismes

$$\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes T^* \rightarrow \mathbb{H}^3(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \rightarrow \mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_X(2)),$$

est induite par l'intersection :

$$\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes T^* \xrightarrow{id \times \partial} \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \times \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow \mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_X(2)).$$

Démonstration. Sur \bar{k} , on a $T^* \cong \mathbb{Z}^N$, donc

$$H^1(X_{\bar{k}}, \wedge^2 T^*) = 0 \quad \text{et} \quad H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{G}_{m,X} \otimes T^*) \cong H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{G}_{m,X}) \otimes T^*$$

(le premier énoncé utilisant la lissité de X). D'après la Proposition 3.3.4, $\mathbb{H}^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \cong H^{i-2}(X_{\bar{k}}, \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2)))$ pour chaque $i \leq 3$. En appliquant $H^i(X_{\bar{k}}, -)$ aux suites exactes (3.3.0.2) et (3.3.0.7), on déduit les deux suites exactes longues.

La composition dans l'énoncé (2) est induite par $\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \rightarrow \mathbb{Z}_f(2) \rightarrow \mathbb{Z}_X(2)[1]$. D'après le carré (1) et (2) dans le diagramme (3.3.0.6), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes T^* & \xrightarrow{id \times \partial} & \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \\ \downarrow & & \downarrow \cup \\ \mathbb{H}^3(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) & \longrightarrow & CH^2(X_{\bar{k}}). \end{array}$$

L'énoncé (2) résulte du fait que \cup est l'intersection.

Établissons l'énoncé (1). On a un diagramme commutatif de triangles :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L Rf_*\mathbb{Z}_Y(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Rf_*\mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) & \longrightarrow & Rf_*\mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L Rf_*\mathbb{Z}_Y(1) & \longrightarrow & Rf_*\mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L Rf_*\mathbb{Z}_Y(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1} \\
\downarrow +1 & & \downarrow +1 & & \downarrow +1
\end{array}$$

Par la définition de $\mathbb{Z}_f(\otimes)$, on a les triangles (cf. la démonstration de [BBD, Prop. 1.1.11]) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) &\xrightarrow{h_1} \mathbb{Z}_f(\otimes) \rightarrow \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L Rf_*\mathbb{Z}_Y(1) \xrightarrow{+1}, \\
\mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) &\xrightarrow{h_2} \mathbb{Z}_f(\otimes) \rightarrow Rf_*\mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1}
\end{aligned}$$

et donc

$$[\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)] \oplus [\mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1)] \xrightarrow{h_1+h_2} \mathbb{Z}_f(\otimes) \rightarrow \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1}.$$

Notons $\mathbb{Z}(\wedge)$ le cône de $\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{h_\otimes \circ h_1} \mathbb{Z}_f(\otimes)$, où $\mathbb{Z}_f(\otimes) \xrightarrow{h_\otimes} \mathbb{Z}_f(2)$ est le morphisme dans le diagramme (3.3.0.6). Par la proposition 3.3.4, on a $\tau^{\leq 2}\mathbb{Z}(\wedge) \cong \wedge^2 T^*[-2]$.

Notons $\tau : \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) \rightarrow \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)$ l'isomorphisme canonique. Puisque le produit $\mathbb{Z}(1) \otimes^L \mathbb{Z}(1) \rightarrow \mathbb{Z}(2)$ est symétrique, on a $h_\otimes \circ h_1 \circ \tau = h_\otimes \circ h_2$ et un diagramme commutatif de triangles :

(3.3.0.8)

$$\begin{array}{ccccc}
[\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)] \oplus [\mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1)] & \xrightarrow{h_1+h_2} & \mathbb{Z}_f(\otimes) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1} \\
\downarrow id+\tau & & \downarrow h_\otimes & & \downarrow h_\cup \\
\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) & \xrightarrow{h_\otimes \circ h_1} & \mathbb{Z}_f(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(\wedge) \xrightarrow{+1}
\end{array}$$

et l'homomorphisme h est induit par le deuxième triangle. Puisque $\tau^{\leq 3}[\mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)] \cong (T^* \otimes T^*)[-2]$, le morphisme h_\cup induit un morphisme de faisceaux \bar{k} -constants : $T^* \otimes T^* \xrightarrow{h'_\cup} \wedge^2 T^*$. Donc on peut calculer h'_\cup en se ramenant au cas $Y \xrightarrow{\sim} X \times T$, et dans ce cas, h'_\cup est exactement le cup-produit. L'énoncé (1) découle du diagramme (3.3.0.8). \square

3.4 Cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$ des torseurs universels sur une surface géométriquement rationnelle

Soit k un corps de caractéristique 0. Soient X une surface projective lisse géométriquement rationnelle sur k , et $g : \mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel de X . Le résultat principal de cette section est le théorème 3.4.7.

Lemme 3.4.1. *Supposons que k est algébriquement clos. Soit X une k -variété projective, lisse, rationnelle, connexe. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel sous le tore T . Soit T^c une T -variété torique, projective, lisse. Soit $\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \times^T T^c$. Soit Z une T -orbite de codimension l dans T^c . Notons $\mathcal{Z} := Z \times^T \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^c$. Alors \mathcal{Z} est lisse, $k[\mathcal{Z}]^\times = k^\times$, $\text{Pic}(\mathcal{Z}) \cong \mathbb{Z}^l$, $\text{Br}(\mathcal{Z}) = 0$, $H^1(\mathcal{Z}, \mathbb{Z}/n) = 0$, $H_{nr}^2(\mathcal{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = 0$ et $H^2(\mathcal{Z}, \mathbb{Z}/n(1)) \cong (\mathbb{Z}/n)^l$.*

Démonstration. Notons $l' := \dim(T) - l$. Puisque Z est une T -orbite de codimension l , par le Théorème 3.2.2, il y a une sous-variété torique affine $U \subset T^c$ telle que $U \cong \mathbb{A}^l \times \mathbb{G}_m^{l'}$ comme variété torique et $Z \subset U$. Alors il y a un homomorphisme $\mathbb{G}_m^l \rightarrow T$ tel que $Z \xrightarrow{\sim} T/\mathbb{G}_m^l$. Donc \mathcal{Z} est l'image de \mathcal{T} par $H^1(X, T) \rightarrow H^1(X, T/\mathbb{G}_m^l)$. Donc \mathcal{Z} est lisse. Par [CTS87b, §2.1] (ou [S, Prop. 6.10]), on a un diagramme commutatif à horizontales exactes ($\text{Pic}(T) = 0$) :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & k[X]^\times/k^\times & \longrightarrow & k[\mathcal{Z}]^\times/k^\times & \longrightarrow & (T/\mathbb{G}_m^l)^* & \longrightarrow & \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathcal{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & k[X]^\times/k^\times & \longrightarrow & k[\mathcal{T}]^\times/k^\times & \longrightarrow & T^* & \xrightarrow{\cong} & \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathcal{T}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Alors $k[\mathcal{Z}]^\times = k^\times$ et $\text{Pic}(\mathcal{Z}) \cong \mathbb{Z}^l$. Par [HS03, Théorème 1.6] et le fait que X est rationnelle, on a $\text{Br}(\mathcal{Z}) = 0$. Ainsi $H_{nr}^2(\mathcal{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = 0$. Le résultat se déduit de la suite de Kummer. \square

Lemme 3.4.2. *Supposons que k est algébriquement clos. Soient X une k -variété projective, lisse, rationnelle et $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel. Le morphisme naturel $H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)$ est nul.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X) \otimes k^\times & \xrightarrow{\theta} & H^1(X, \mathcal{K}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 = \text{Pic}(\mathcal{T}) \otimes k^\times & \longrightarrow & H^1(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2). \end{array}$$

D'après [Pi11, Prop. 2.6], le morphisme θ est un isomorphisme. On a $\text{Pic}(\mathcal{T}) = 0$ par le théorème 3.2.8. Donc $H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)$ est nul. \square

Théorème 3.4.3. *Soit X une k -variété projective, lisse, géométriquement intègre et géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel de X . Alors on a $H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et une suite exacte naturelle de Γ_k -modules :*

$$(3.4.0.1) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \rightarrow \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\cup} CH^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}) \rightarrow 0,$$

où \cup est induit par l'intersection $\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \times \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}})$.

Démonstration. Soient T^c une T -variété torique, projective, lisse et $\mathcal{T}^c := \mathcal{T} \times^T T^c$. Puisque $X_{\bar{k}}$ est rationnelle, $H_{nr}^3(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et $\mathcal{T}_{\bar{k}}$ est rationnelle. Ainsi $H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

Par la résolution de Gersten, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \ker(\psi)$$

où

$$\psi : \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c \setminus \mathcal{T}_{\bar{k}})^{(0)}} H^2(\bar{k}(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c \setminus \mathcal{T}_{\bar{k}})^{(1)}} H^1(\bar{k}(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Soit S_1 l'ensemble des $T_{\bar{k}}$ -orbites de codimension 1 de $\mathcal{T}_{\bar{k}}^c$. Pour $Z \in S_1$, notons $\mathcal{Z} := Z \times^T \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^c$. Alors $S_1 = (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c \setminus \mathcal{T}_{\bar{k}})^{(0)}$ et

$$\ker(\psi) \subset \bigoplus_{Z \in S_1} H_{nr}^2(\mathcal{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \subset \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c \setminus \mathcal{T}_{\bar{k}})^{(0)}} H^2(\bar{k}(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)).$$

D'après le lemme 3.4.1, $\ker(\psi) = 0$, et donc $H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

Par le théorème 3.2.1, $CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2))$ et $CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}) \cong \mathbb{H}^4(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2))$. En utilisant la fibration en tores, on voit que le morphisme de restriction $CH^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}})$ est surjectif. On conclut alors avec le lemme 3.4.2 et le théorème 3.3.5. \square

Corollaire 3.4.4. *Sous les hypothèses du théorème 3.4.3, soient $U \subset X$ un ouvert et $\mathcal{T}_U := \mathcal{T} \times_X U$. Supposons que $\text{codim}(X \setminus U, X) \geq 2$ et $H^1(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \cong H^1(U_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$. Alors on a $H_{nr}^3(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et une suite exacte naturelle de Γ_k -modules :*

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathcal{K}_2) \rightarrow \text{Sym}^2 \text{Pic}(U_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(U_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}) \rightarrow 0.$$

Démonstration. Puisque la cohomologie non ramifiée ne dépend pas des sous-ensembles de codimension ≥ 2 , on a $H_{nr}^3(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et $H_{nr}^3(U_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. Par le théorème 3.2.1, $CH^2(U_{\bar{k}}) \cong \mathbb{H}^4(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2))$ et $CH^2(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}) \cong \mathbb{H}^4(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathbb{Z}(2))$. D'après le théorème 3.3.5, on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{0} & H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) & \longrightarrow & \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}) & \longrightarrow & CH^2(X_{\bar{k}}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H^1(U_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathcal{K}_2) & \longrightarrow & \text{Sym}^2 \text{Pic}(U_{\bar{k}}) & \longrightarrow & CH^2(U_{\bar{k}}) & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}) & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

Le résultat en découle. \square

Proposition 3.4.5. *Supposons que k est algébriquement clos. Soient X une k -surface projective lisse géométriquement rationnelle et \mathcal{T} un torseur universel sur X . Alors $CH^2(\mathcal{T}) = 0$.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathcal{T}) \times \text{Pic}(\mathcal{T}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^2(X) & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}). \end{array}$$

D'après le théorème 3.4.3, le morphisme $CH^2(X) \rightarrow CH^2(\mathcal{T})$ est surjectif. Donc le morphisme $\text{Pic}(\mathcal{T}) \times \text{Pic}(\mathcal{T}) \rightarrow CH^2(\mathcal{T})$ est surjectif. Puisque $\text{Pic}(\mathcal{T}) = 0$, on a $CH^2(\mathcal{T}) = 0$. \square

Une conséquence immédiate du théorème 3.4.3 et de la proposition 3.4.5 est :

Corollaire 3.4.6. *Soient X une k -surface projective lisse géométriquement rationnelle et \mathcal{T} un torseur universel sur X . On a alors une suite exacte naturelle de réseaux galoisiens*

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \rightarrow \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\cup} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Théorème 3.4.7. *Soient X une k -surface projective lisse géométriquement rationnelle et \mathcal{T} un torseur universel sur X . Alors*

- (1) Les groupes $\mathbb{H}^4(\mathcal{T}, \mathbb{Z}(2))/\mathbb{H}^4(k, \mathbb{Z}(2))$, $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ et $CH^2(\mathcal{T})$ sont finis ;
- (2) On a des suites exactes

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^4(\mathcal{T}, \mathbb{Z}(2))/\mathbb{H}^4(k, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^1(k, H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \text{Ker}(\mathbb{H}^5(k, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{H}^5(\mathcal{T}, \mathbb{Z}(2)))$$

et

$$(\text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}))^{\Gamma_k} \xrightarrow{\cup} \mathbb{Z} \cong CH^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow H^1(k, H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) \rightarrow 0;$$

- (3) Si $X(k) \neq \emptyset$, alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ est un sous-quotient de $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}))$.

Démonstration. Par la Proposition 3.4.5 et le Théorème 3.4.3, $CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}) = 0$, $\mathbb{H}^4(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2)) = 0$ et $H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ est de type fini sans torsion. Ainsi $H^1(k, H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2))$ est fini. Par [CT15, §2.2] et le fait que $H^0(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible (Corollaire 3.2.9), on a une suite exacte :

$$\mathbb{H}^4(k, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{H}^4(\mathcal{T}, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^1(k, H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \text{Ker}(\mathbb{H}^5(k, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{H}^5(\mathcal{T}, \mathbb{Z}(2))).$$

La première suite exacte en découle. Par la suite exacte (3.2.1.3), les groupes $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ et $CH^2(\mathcal{T})$ sont finis.

Puisque $\mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2)) \cong CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$, on a $H^1(k, \mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2))) = 0$. Une application du corollaire 3.4.6 donne (2).

Soit $F \subset \mathcal{T}$ un sous-ensemble fermé de codimension ≥ 2 . Alors $CH^2((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}) = 0$,

$$H_{nr}^3((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0 \quad \text{et donc} \quad H^4((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2)) = 0.$$

Par résolution de Gersten (3.2.1.1), on a un isomorphisme $H^0(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \cong H^0((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ et donc $H^0((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible. D'après [CT15, §2.2], on a un morphisme naturel injectif :

$$(3.4.0.2) \quad \mathbb{H}^4(\mathcal{T} \setminus F, \mathbb{Z}(2))/\mathbb{H}^4(k, \mathbb{Z}(2)) \hookrightarrow H^1(k, H^1((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)),$$

qui est un isomorphisme si $(\mathcal{T} \setminus F)(k) \neq \emptyset$.

Dans le cas (3), soient $x \in X(k)$, $U := X \setminus \{x\}$ et $\mathcal{T}_U := \mathcal{T} \times_X U$. Alors $\text{codim}(\mathcal{T}_U, \mathcal{T}) \geq 2$. Par la résolution de Gersten (3.2.1.1), on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(U_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \rightarrow \mathbb{Z} \cdot x \xrightarrow{\phi} CH^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(U_{\bar{k}}) \rightarrow 0.$$

Puisque ϕ est un isomorphisme, on a $H^1(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \cong H^1(U_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ et $CH^2(U_{\bar{k}}) = 0$. D'après le corollaire 3.4.4, $H^1(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathcal{K}_2) \cong \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. D'après (3.4.0.2), $\mathbb{H}^4(\mathcal{T} \setminus F, \mathbb{Z}(2))/\mathbb{H}^4(k, \mathbb{Z}(2)) = 0$. Une application du fait $H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong H_{nr}^3(\mathcal{T}_U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ donne (3). \square

Remarque 3.4.8. Dans le théorème 3.4.7, le critère $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$ n'est pas birationnellement invariant. En fait, soit X une surface projective lisse géométriquement rationnelle avec $X(k) \neq \emptyset$ et X' un éclatement de X en un k -point. Supposons $H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}})) \neq 0$. Alors $\text{Pic}(X'_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \oplus \mathbb{Z}$ et

$$H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X'_{\bar{k}})) \cong H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \oplus \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \oplus \mathbb{Z}).$$

Alors, même si $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$, on a $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X'_{\bar{k}})) \neq 0$.

Corollaire 3.4.9. *Sous les hypothèses du Théorème 3.4.7, le morphisme canonique $H^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est surjectif.*

Démonstration. Par [CT91, Suite 3.10], on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow NH^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow CH^2(\mathcal{T}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Par le théorème 3.4.7, $CH^2(\mathcal{T})$ est fini, et donc $CH^2(\mathcal{T}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$. Alors le morphisme $H^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est surjectif. \square

Le résultat principal du reste de cette section est le théorème 3.4.13, qui donne le lien entre $H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{\Gamma_k}/CH^2(\mathcal{T}^c)$ pour un torseur universel \mathcal{T} sur une surface projective lisse géométriquement rationnelle et une certaine compactification \mathcal{T}^c . Ce résultat n'est pas utilisé dans la suite de l'article.

Lemme 3.4.10. *Soient X une variété projective lisse géométriquement rationnelle et $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel de X sous le tore T . Soient T^c une T -variété torique projective lisse, et $\mathcal{T}^c := T^c \times^T \mathcal{T}$. Soient Z' une composante connexe de $(T^c \setminus T)_{\text{lisse}}$ et $Z'_k := \mathcal{T} \times^T Z' \subset \mathcal{T}^c$. Soit k' la clôture algébrique de k dans $k(Z')$. Notons $Z'_k := Z' \times_k \bar{k}$. Alors Z'_k est une composante connexe de $(\mathcal{T}^c \setminus \mathcal{T})_{\text{lisse}}$ et on a $k[Z']^\times = k'^\times$, $\text{Pic}(Z') \cong \text{Pic}(Z'_k)^{\Gamma_k} \cong \mathbb{Z}$ et $\text{Br}(k') \cong \text{Br}(Z')$. De plus, si $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$, alors $Z'(k') \neq \emptyset$.*

Démonstration. Notons $N := \dim(T)$ et S_1 l'ensemble des T_k -orbites de T_k^c de codimension 1. Puisque la variété torique T_k^c est couverte par des $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m^{N-1}$ par le théorème 3.2.2, le lieu lisse $(T_k^c \setminus T_k)_{\text{lisse}}$ est la réunion des T_k -orbites de codimension 1. Les composantes connexes de $(T^c \setminus T)_{\text{lisse}}$ correspondent alors aux Γ_k -orbites de S_1 . Les composantes connexes de $(\mathcal{T}^c \setminus \mathcal{T})_{\text{lisse}}$ correspondent aux composantes connexes de $(T^c \setminus T)_{\text{lisse}}$.

Supposons que $k' = k$. Ainsi Z' et Z' sont géométriquement intègres sur k , c'est à dire que Z'_k est une T_k -orbite de codimension 1. Alors $T \cup Z'$ est un ouvert de T^c , et $(T \cup Z')_{\bar{k}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m^{N-1}$. Donc $(T \cup Z')$ est affine. D'après [CX1, Prop. 2.5], il existe une sous-variété torique fermée $(\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1)$ de $(T \hookrightarrow T \cup Z')$. Ainsi $Z'(k) \neq \emptyset$. On note T' le tore qui correspond à $\bar{k}[T \cup Z']^\times / \bar{k}^\times$. Donc $T'_k \cong \mathbb{G}_m^{N-1}$ et on a un morphisme $T \hookrightarrow T \cup Z' \rightarrow T'$ tel que $T' \cong T / \mathbb{G}_m$. Puisque $Z'(k) \neq \emptyset$, on a $Z' \xrightarrow{\sim} T'$, et $Z'_k \xrightarrow{\sim} T' \times^T \mathcal{T}$. Alors \mathcal{T} est un \mathbb{G}_m -torseur sur Z' .

Par la suite exacte de Sansuc ([S, Prop. 6.10]), l'homomorphisme $\text{Br}(Z') \rightarrow \text{Br}(\mathcal{T})$ est injectif et on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & k[Z']^\times / k^\times & \longrightarrow & k[\mathcal{T}]^\times / k^\times = 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Pic}(Z') & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathcal{T}) = 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bar{k}[Z']^\times / \bar{k}^\times & \longrightarrow & \bar{k}[\mathcal{T}]^\times / \bar{k}^\times = 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Pic}(Z'_k) & \longrightarrow & \text{Pic}(T_k) = 0. \end{array}$$

Donc $k[Z']^\times = k'^\times$, $\text{Pic}(Z') \cong \text{Pic}(Z'_k)^{\Gamma_k} \cong \text{Pic}(Z'_k)$, $\text{Br}(k) \cong \text{Br}(Z')$ et, si $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$, on a $Z'(k) \neq \emptyset$.

En général, on a $Z' \times_k \bar{k} \cong Z' \times_{k'} (k' \times_k \bar{k}) \cong \sqcup_{[k':k]} Z' \times_{k'} \bar{k}$. Le résultat en découle. \square

Sous les hypothèses du lemme 3.4.10, on a un diagramme commutatif :

$$(3.4.0.3) \quad \begin{array}{ccccc} \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}^c \setminus \mathcal{T})^{(0)}} K_1(k(x)) & \xrightarrow{\psi} & \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}^c \setminus \mathcal{T})^{(1)}} K_0(k(x)) & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \theta_\psi \\ \bigoplus_{x \in (T_k^c \setminus T_k)^{(0)}} K_1(k(x)) & \xrightarrow{\psi_{\bar{k}}} & \bigoplus_{x \in (T_k^c \setminus T_k)^{(1)}} K_0(k(x)) & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi_{\bar{k}}), \end{array}$$

où ψ , $\psi_{\bar{k}}$ sont définis par *div*.

Pour un Γ_k -ensemble M , notons $\mathbb{Z}^{\oplus M} := \bigoplus_{m \in M} \mathbb{Z}$ un Γ_k -module de permutation. Notons M/Γ_k l'ensemble des Γ_k -orbites de M . Alors l'application de Γ_k -ensembles $M \rightarrow M/\Gamma_k$ induit une immersion canonique $\mathbb{Z}^{\oplus M/\Gamma_k} \subset \mathbb{Z}^{\oplus M}$ telle que $\mathbb{Z}^{\oplus M/\Gamma_k} = (\mathbb{Z}^{\oplus M})^{\Gamma_k}$.

Lemme 3.4.11. *Sous les hypothèses du lemme 3.4.10 et les notations ci-dessus, soit S_i le Γ_k -ensemble des T_k -orbites de T_k^c de codimension i . Alors, le morphisme θ_ψ induit des applications de Γ_k -modules :*

$$\text{Coker}(\psi) \cong \mathbb{Z}^{\oplus S_2/\Gamma_k} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_1/\Gamma_k} \subset \mathbb{Z}^{\oplus S_2} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_1} \cong \text{Coker}(\psi_{\bar{k}}).$$

De plus, $\text{Coker}(\psi_{\bar{k}})$ est un Γ_k -module de permutation et $\theta_\psi : \text{Coker}(\psi) \cong \text{Coker}(\psi_{\bar{k}})^{\Gamma_k}$.

Démonstration. Pour une $T_{\bar{k}}$ -orbite Z , on note $\mathcal{Z} := Z \times^{T_{\bar{k}}} \mathcal{T}_{\bar{k}} \subset \mathcal{T}_{\bar{k}}^c$. Alors on a un diagramme commutatif à horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c - \mathcal{T}_{\bar{k}})^{(0)}} K_1(k(x)) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{Z \in S_1, x \in \mathcal{Z}^{(0)}} K_1(k(x)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow & & \\ \bigoplus_{Z \in S_2, x \in \mathcal{Z}^{(0)}} K_0(k(x))^c & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c - \mathcal{T}_{\bar{k}})^{(1)}} K_0(k(x)) & \longrightarrow & \bigoplus_{Z \in S_1, x \in \mathcal{Z}^{(1)}} K_0(k(x)) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\psi) \longrightarrow \bigoplus_{Z \in S_1} \bar{k}[\mathcal{Z}]^\times \xrightarrow{f_1} \bigoplus_{Z \in S_2} \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Coker}(\psi_{\bar{k}}) \longrightarrow \bigoplus_{Z \in S_1} \text{Pic}(\mathcal{Z}) \longrightarrow 0.$$

Par le Lemme 3.4.1, pour $Z \in S_1$, on a $\text{Pic}(\mathcal{Z}) = \mathbb{Z}$ et $\bar{k}[\mathcal{Z}]^\times \cong \bar{k}^\times$ est divisible. Donc $f_1 = 0$, $\bigoplus_{Z \in S_1} \text{Pic}(\mathcal{Z}) = \mathbb{Z}^{\oplus S_1}$ et on a une suite exacte

$$(3.4.0.4) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus S_2} \rightarrow \text{Coker}(\psi_{\bar{k}}) \rightarrow \bigoplus_{Z \in S_1} \text{Pic}(\mathcal{Z}) \rightarrow 0.$$

Soient $V_i \subset T^c$ un ouvert tel que $V_{i,\bar{k}}$ soit la réunion des $T_{\bar{k}}$ -orbites de $T_{\bar{k}}^c$ de codimension $\leq i$. Alors, pour tout $i \geq 1$, $V_i \setminus V_{i-1}$ est lisse et l'ensemble des composantes connexes est S_i/Γ_k . Par le même argument que ci-dessus, en utilisant le lemme 3.4.10, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus S_2/\Gamma_k} \rightarrow \text{Coker}(\psi) \rightarrow \bigoplus_{Z' \in S_1/\Gamma_k} \text{Pic}(\mathcal{Z}') \rightarrow 0.$$

Puisque $\text{Pic}(\mathcal{Z}') \cong \text{Pic}(\mathcal{Z}'_{\bar{k}})^{\Gamma_k}$ (lemme 3.4.10), on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$(3.4.0.5) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\oplus S_2/\Gamma_k} & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi) & \longrightarrow & \bigoplus_{Z' \in S_1/\Gamma_k} \text{Pic}(\mathcal{Z}') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \theta_{\psi,2} & & \downarrow \theta_\psi & & \downarrow \theta_{\psi,1} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\oplus S_2} & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi_{\bar{k}}) & \longrightarrow & \bigoplus_{Z \in S_1} \text{Pic}(\mathcal{Z}) \longrightarrow 0, \end{array}$$

où $\theta_{\psi,1}$, $\theta_{\psi,2}$ sont induits par les quotients $S_1 \rightarrow S_1/\Gamma_k$ et $S_2 \rightarrow S_2/\Gamma_k$. On applique $(-)^{\Gamma_k}$ et on a $\theta_\psi : \text{Coker}(\psi) \cong \text{Coker}(\psi_{\bar{k}})^{\Gamma_k}$.

Puisque $\text{Ext}_{\Gamma_k}^1(\mathbb{Z}^{\oplus S_1}, \mathbb{Z}^{\oplus S_2}) \cong H^1(k, \mathbb{Z}^{\oplus S_2} \otimes (\mathbb{Z}^{\oplus S_1})^\vee) = 0$, il existe un Γ_k -homomorphisme $\mathbb{Z}^{\oplus S_1} \xrightarrow{\phi} \text{Coker}(\psi_{\bar{k}})$ qui scinde (3.4.0.4). Ainsi $\phi(\mathbb{Z}^{\oplus S_1/\Gamma_k}) \subset \text{Coker}(\psi)$ et ϕ scinde la première suite de (3.4.0.5). \square

Lemme 3.4.12. *Sous les hypothèses du lemme 3.4.11, soient $F \subset \mathcal{T}$ un sous-schéma fermé de codimension ≥ 2 et*

$$S_F := \{x \in F_{\bar{k}} : \text{tr}_{\bar{k}}(k(x)) = \dim(\mathcal{T}) - 2\}$$

un Γ_k -ensemble fini. Alors on a un diagramme commutatif de suites exactes de Γ_k -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\mathcal{T} \setminus F, \mathcal{K}_2) & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_F/\Gamma_k} & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}^c) & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T} \setminus F) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi_{\bar{k}}) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_F} & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c) \longrightarrow CH^2((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Démonstration. Notons $D := \mathcal{T}^c \setminus \mathcal{T}$. On a un diagramme commutatif à colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & 0 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & \oplus_{x \in D_{\bar{k}}^{(0)}} K_1(k(x)) & \xrightarrow{(\psi, 0)} & (\oplus_{x \in D_{\bar{k}}^{(1)}} \mathbb{Z}) \oplus (\oplus_{x \in S_F} \mathbb{Z}) & \longrightarrow 0 \\
& & 0 & \longrightarrow & \oplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{(0)}} K_2(k(x)) & \longrightarrow & \oplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{(1)}} K_1(k(x)) & \longrightarrow & \oplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{(2)}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & \longrightarrow & \oplus_{x \in ((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}})^{(0)}} K_2(k(x)) & \longrightarrow & \oplus_{x \in ((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}})^{(1)}} K_1(k(x)) & \longrightarrow & \oplus_{x \in ((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}})^{(2)}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Par la résolution de Gersten (3.2.1.1), les groupes de cohomologie horizontale de ce diagramme sont les groupes $H^i(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c, \mathcal{K}_2)$, resp $H^i((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$. La suite exacte sur \bar{k} découle alors du lemme du serpent et du Lemme 3.4.2. La suite exacte sur k découle du même argument et la compatibilité est claire. \square

Théorème 3.4.13. *Soient X une surface projective lisse géométriquement rationnelle sur k et $g : \mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel de X sous le tore T . Soient T^c une T -variété torique projective lisse, et $\mathcal{T}^c := T^c \times^T \mathcal{T}$. Alors il existe un homomorphisme injectif de groupes finis :*

$$H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \hookrightarrow CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{\Gamma_k}/CH^2(\mathcal{T}^c),$$

qui est un isomorphisme si $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$.

Démonstration. D'après le théorème 3.4.7 et la proposition 3.4.5, $CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}) = 0$ et $CH^2(\mathcal{T})$ est fini. Il existe un sous-schéma fermé $F \subset \mathcal{T}$ de codimension ≥ 2 tel que $CH^2(\mathcal{T} \setminus F) = 0$. Par le lemme 3.4.12, puisque $H^1(k, \text{Coker}(\psi) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_F}) = 0$, on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Coker}(\psi) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_F}/\Gamma_k & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}^c) & \longrightarrow & 0 & & \\
\downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(\text{Coker}(\psi_{\bar{k}}) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_F})^{\Gamma_k} & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{\Gamma_k} & \longrightarrow & H^1(k, H^1((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Donc $CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{\Gamma_k}/CH^2(\mathcal{T}^c) \xrightarrow{\sim} H^1(k, H^1((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2))$.

Dans le cas où $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$, on note $t \in \mathcal{T}(k)$ un point, $x \in X(k)$ son l'image et \mathcal{T}_x la fibre. Alors $\mathcal{T}_x(k)$ est dense dans \mathcal{T}_x . Il existe un sous-schéma fermé $F_1 \subset X$ et un sous-schéma fermé $F_2 \subset \mathcal{T}$ de codimension ≥ 2 tels que F_1 soit fini, $F = g^{-1}(F_1) \cup F_2$ et F_2 ne contient pas de fibre de g . On peut supposer que $x \notin F_1$ (lemme de déplacement facile sur les zéro-cycles F_1 sur une variété lisse). Alors $\mathcal{T}_x \cap F \neq \mathcal{T}_x$ et donc $[\mathcal{T}_x \setminus (\mathcal{T}_x \cap F)](k) \neq \emptyset$. Ainsi on peut supposer plus que $(\mathcal{T} \setminus F)(k) \neq \emptyset$.

D'après (3.4.0.2), on a un homomorphisme injectif :

$$H_{nr}^3(\mathcal{T} \setminus F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \hookrightarrow H^1(k, H^1((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)),$$

qui est un isomorphisme si $(\mathcal{T} \setminus F)(k) \neq \emptyset$. L'énoncé résulte du fait $H_{nr}^3(\mathcal{T} \setminus F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. \square

3.5 Surfaces de Châtelet généralisées

Dans cette section, X est une surface de Châtelet généralisée, c'est-à-dire un fibré en coniques sur \mathbb{P}_k^1 possédant une section sur une extension quadratique k' de k . Soient \mathcal{T} un torseur universel de X et \mathcal{T}^c une compactification lisse de \mathcal{T} . Alors $X_{k'}$ est k' -rationnel et, par le corollaire 3.2.10, $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ est annulé par 2.

Le résultat principal de ce paragraphe est :

Théorème 3.5.1. *Soit X une variété lisse projective contenant un ouvert $\text{Spec } k[y, z, t]/(y^2 - az^2 = P(t))$, où $P(t)$ est un polynôme séparable. Soient \mathcal{T} un torseur universel de X et \mathcal{T}^c une compactification lisse de \mathcal{T} . Supposons que $X(k) \neq \emptyset$. Alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$.*

Démonstration. Si X et X_1 sont birationnellement équivalents, alors $X_1(k) \neq \emptyset$ et il existe un torseur universel \mathcal{T}_1^c de X_1 tel que \mathcal{T}^c et \mathcal{T}_1^c soient stablement birationnellement équivalents par [CTS87b, Prop. 2.9.2]. Donc on a $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H_{nr}^3(\mathcal{T}_1^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. C'est-à-dire que l'on peut remplacer X par X_1 . Ainsi, comme dans [Sko01, p. 135], on peut supposer que X est une variété qui vérifie les conditions de la proposition 3.5.2. Par la Proposition 3.5.2 ci-dessous, on a $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$. D'après le Théorème 3.4.7, on a $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$. \square

Proposition 3.5.2. *Soient $P(t) \in k[t]$ un polynôme séparable de degré pair, $(P_i(t))_{i \in I}$ ses facteurs irréductibles, et $a \in k$ un élément tel que a n'est un carré de $k[t]/P_i(t)$ pour aucun $i \in I$ (i.e. chaque $P_i(t)$ est irréductible dans $k(\sqrt{a})[t]$). Soit X_1 (resp. X_2) une sous-variété fermée de $\mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^1 \setminus \infty)$ (resp. de $\mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^1 \setminus 0)$) avec les coordonnées $(y : z : u; t)$ (resp. $(y' : z' : u'; t')$) donnée par $y^2 - az^2 - P(t)u^2 = 0$ (resp. $(y')^2 - a(z')^2 - P((t')^{-1})(u')^2 = 0$). On recolle X_1 et X_2 sur $\mathbb{P}^1 \setminus (0 \cup \infty)$ par $t = (t')^{-1}$, $y = y'$, $z = z'$ et $u = (t')^{n/2}u'$, et on la note par X . Notons $T^* := \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Alors on a $H^1(k, \text{Sym}^2 T^*) = 0$.*

Notons $k' := k(\sqrt{a})$. Soient $\sigma \in \text{Gal}(k'/k)$ l'élément non-trivial, $(P_i(t))_{i \in I}$ facteurs irréductibles de $P(t)$, et $(e_{j_i})_{j_i \in J_i}$ les racines de $P_i(t)$. Soient $O_{i,i'}$ l'ensemble des $\Gamma_{k'}$ -orbites de $J_i \times J_{i'}$ si $i \neq i'$, et $O_{i,i}$ l'ensemble des $\Gamma_{k'}$ -orbites de $J_i \times J_i / \sim$, où \sim est donné par $(j_i, j'_i) \sim (j'_i, j_i)$. Soit Δ_i l'orbite diagonale de $O_{i,i}$. Pour une orbite S , on note $|S|$ le nombre des éléments de S . L'action de Γ_k sur J_i et $J_{i'}$ induit une action de σ sur $O_{i,i'}$. Ainsi $\sigma(\Delta_i) = \Delta_i$.

Lemme 3.5.3. *Si $|J_{i_0}|$ est impair, alors il existe au moins une orbite $S \in O_{i_0, i}$ pour chaque $i \neq i_0$, telle que $\sigma(S) = S$.*

Démonstration. Puisque l'action de $\Gamma_{k'}$ sur J_i est transitive, pour chaque orbite $S \in O_{i_0, i}$, $|S|$ est divisible par $|J_i|$. Donc si $S \neq \sigma(S)$, $|S \cup \sigma(S)|$ est divisible par $2 \cdot |J_i|$. Puisque $|J_{i_0} \times J_i| = |J_{i_0}| \cdot |J_i|$ et $|J_{i_0}|$ est impair, il existe au moins une orbite $S \in O_{i_0, i}$ telle que $\sigma(S) = S$. \square

Lemme 3.5.4. *Pour chaque i et chaque orbite $S \in O_{i, i}$, $|S|$ est divisible par $|J_i|/2$. De plus, si $|J_i|$ est pair, alors il existe au moins une orbite $S \in O_{i, i}$, telle que $\sigma(S) = S$ et $|S| = s \cdot |J_i|/2$, où s est un entier impair.*

Démonstration. Soit (j_i, j'_i) un élément de l'orbite $S \in O_{i, i}$. Pour l'action de $\Gamma_{k'}$, soit St_j (resp. $St_{j, j'}$) le stabilisateur de j_i (resp. de (j_i, j'_i)). Ainsi s'il y a $g \in \Gamma_{k'}$ tel que $g(j_i) = j'_i$ et $g(j'_i) = j_i$, alors

$$St_{j, j'} = (St_j \cap (g \cdot St_j \cdot g)) \cup ((g \cdot St_j) \cap (g \cdot (g \cdot St_j \cdot g))) = (St_j \cap (g \cdot St_j \cdot g)) \cup (g \cdot (St_j \cap (g \cdot St_j \cdot g)));$$

si non, $St_{j, j'}$ est un sous-groupe de St_j . Ainsi $[\Gamma_{k'} : St_{j, j'}]$ est divisible par $[\Gamma_{k'} : St_j]/2$, et donc $|S|$ est divisible par $|J_i|/2$.

Supposons que $|J_i|$ est pair. On a $|J_i \times J_i| \sim |J_i||J_i - 1|/2$, où \sim est donné par $(j_i, j'_i) \sim (j'_i, j_i)$. D'après le même argument du Lemme 3.5.3, il existe au moins une orbite $S \in O_{i,i}$, telle que $\sigma(S) = S$ et $|S| = s \cdot |J_i|/2$, où s est un entier impair. \square

Démonstration de la Proposition 3.5.2. Soient F le diviseur de $X_{\bar{k}}$ défini par $t = \infty$, G le diviseur de $X_{\bar{k}}$ défini par $(u, y - \sqrt{az})$, G' le diviseur de $X_{\bar{k}}$ défini par $(u, y + \sqrt{az})$, D_{j_i} le diviseur de $X_{\bar{k}}$ défini par $(t - e_{j_i}, y - \sqrt{az})$ et D'_{j_i} le diviseur de $X_{\bar{k}}$ défini par $(t - e_{j_i}, y + \sqrt{az})$, pour chaque $i \in I$ et chaque $j_i \in J_i$. Pour chaque $i \in I$, on note $D_i := \sum_{j_i \in J_i} D_{j_i}$ et $D'_i := \sum_{j_i \in J_i} D'_{j_i}$. Pour chaque orbite $S \in O_{i,i'}$, on note $D_S := \sum_{(j_i, j_{i'}) \in S} D_{j_i} \otimes D_{j_{i'}}$ et $D'_S := \sum_{(j_i, j_{i'}) \in S} D'_{j_i} \otimes D'_{j_{i'}}$.

D'après [CTSSD, Section 7], $T^* = \text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est engendré par $(D_{j_i})_{j_i \in \cup_i J_i}$, $(D'_{j_i})_{j_i \in \cup_i J_i}$, F , G et G' , et les relations sont : $G' - G = \sum_i \sum_{j_i} D_{j_i} - \frac{\sum_i |J_i|}{2} F$ et $D_{j_i} + D'_{j_i} = F$ pour chaque j_i . Ainsi $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est engendré librement par $(D_{j_i})_{j_i \in \cup_i J_i}$, F et G , et l'action de $\Gamma_{k'}$ sur ces générateurs est de permutation. Donc l'action de $\Gamma_{k'}$ sur $\text{Sym}^2 T^*$ est aussi de permutation. Ainsi $H^1(k', \text{Sym}^2 T^*) = 0$. Donc on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(k'/k), (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}) \rightarrow H^1(k, \text{Sym}^2 T^*) \rightarrow H^0(\text{Gal}(k'/k), H^1(k', \text{Sym}^2 T^*)) = 0.$$

Ainsi il suffit de montrer que l'on a $H^1(\text{Gal}(k'/k), (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}) = 0$.

L'idée de la démonstration de $H^1(\text{Gal}(k'/k), (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}) = 0$ est de trouver des sous-groupes $A_l \subset (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}$, $l = 1, \dots, m$, tels que $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_l A_l$, le sous-groupe $\bigoplus_{l=1}^{l_0} A_l \subset (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}$ soit $\text{Gal}(k'/k)$ -invariant, et $H^1(k, A'_{l_0}) = 0$ pour tous les $l_0 = 1, \dots, m$, où $A'_{l_0} := \bigoplus_{l=1}^{l_0} A_l / \bigoplus_{l=1}^{l_0-1} A_l$.

Puisque $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est engendré librement par $(D_{j_i})_{j_i \in \cup_i J_i}$, F et G , $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}$ est engendré librement par $F \otimes F$, $F \otimes G$, $G \otimes G$, $(F \otimes D_i)_{i \in I}$, $(G \otimes D_i)_{i \in I}$ et $(D_S)_{S \in \cup_{i,i' \in I} O_{i,i'}}$.

D'après le Lemme 3.5.4, pour chaque i avec $|J_i|$ pair, on choisit une orbite $S_i^0 \in O_{i,i}$ telle que $\sigma(S_i^0) = S_i^0$ et $|S_i^0| = s_i \cdot |J_i|/2$, où s_i est un entier impair. S'il existe au moins un i_0 tel que $|J_{i_0}|$ est impair, on choisit une orbite $S_{i_0}^1 \in O_{i_0, i_0}$ telle que $\sigma(S_{i_0}^1) = S_{i_0}^1$ pour chaque $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair.

Dans le système des générateurs, on peut remplacer $D_{S_{i_0}^1}$ par $D_{i_0} \otimes D_{i_0}$ (si i_0 existe), pour tous les $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair. On définit $(A_l)_{l=1}^6$:

A_1 est engendré librement par $F \otimes F$, $(F \otimes D_i)_{i \in I, |J_i| \text{ impair}}$ et $(D_{i_0} \otimes D_{i_0})_{i_0 \neq i, |J_i| \text{ impair}}$ (si i_0 existe).

A_2 est engendré librement par $(F \otimes D_i)_{i \in I, |J_i| \text{ pair}}$ et $(D_{S_i^0})_{i \in I, |J_i| \text{ pair}}$.

A_3 est engendré librement par $G \otimes F$.

A_4 est engendré librement par $(D_S)_{S \in O_0}$, où

$$O_0 := \bigcup_{i, i' \in I} O_{i, i'} \setminus \{(\Delta_i)_i, (S_i^0)_{|J_i| \text{ pair}}, (S_i^1)_{i \neq i_0, |J_i| \text{ impair}}\}.$$

A_5 est engendré librement par $(G \otimes D_i)_{i \in I}$ et $(D_{\Delta_i})_{i \in I}$.

A_6 est engendré librement par $G \otimes G$.

On a $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{l=1}^6 A_l$. Puisque $G' - G = \sum_i \sum_{j_i} D_{j_i} - \frac{\sum_i |J_i|}{2} F$, $D_{j_i} + D'_{j_i} = F$, $\sigma(S_i^0) = S_i^0$, $\sigma(S_i^1) = S_i^1$, $\sigma(\Delta_i) = \Delta_i$ et O_0 est σ -invariant, on a que $\bigoplus_{l=1}^{l_0} A_l \subset (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}$ est $\text{Gal}(k'/k)$ -invariant pour chaque $l_0 = 1, \dots, 6$.

Il suffit de montrer que $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_{l_0}) = 0$ pour tous les $1 \leq l \leq 6$, où $A'_{l_0} := \bigoplus_{l=1}^{l_0} A_l / \bigoplus_{l=1}^{l_0-1} A_l$.

Pour $l_0 = 1$, si i_0 n'existe pas, on a $A_1 = \mathbb{Z} \cdot (F \otimes F)$ et $H^1(\text{Gal}(k'/k), A_1) = 0$.

Supposons que i_0 existe. Soit B_1 un groupe abélien engendré librement par $F \otimes D_{i_0}$ et $F \otimes D'_{i_0}$. Ainsi $H^1(\text{Gal}(k'/k), B_1) = 0$. Soit B'_1 un sous-groupe de A_1 engendré librement par $|J_{i_0}| F \otimes F$, $F \otimes D_{i_0}$, $|J_{i_0}| F \otimes D_i$ pour tous les $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair et $D_{i_0} \otimes D_i$ pour tous les $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair. Ainsi $|A_1/B'_1| = |J_{i_0}|^M$, où M est le nombre de $i \in I$ avec

J_i impair. Donc $|A_1/B'_1|$ est impair. Puisque $F \otimes D'_{i_0} = |J_{i_0}|F \otimes F - F \otimes D_{i_0}$, B_1 est un sous-groupe de B'_1 .

Notons $C_1 := B'_1/B_1$. Ainsi C_1 est engendré librement par $|J_{i_0}|F \otimes D_i$ et $D_{i_0} \otimes D_i$ pour tous les $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair. Puisque

$$\sigma(D_{i_0} \otimes D_i) = D'_{i_0} \otimes D'_i = |J_i|F \otimes D'_{i_0} - |J_{i_0}|F \otimes D_i + D_{i_0} \otimes D_i.$$

Ainsi C_1 est engendré librement par $D_{i_0} \otimes D_i$ et $\sigma(D_{i_0} \otimes D_i)$ pour tous les $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair. Donc C_1 est $\text{Gal}(k'/k)$ invariant, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), C_1) = 0$.

Puisque $H^1(\text{Gal}(k'/k), B_1) = 0$, on a B'_1 est $\text{Gal}(k'/k)$ invariant, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), B'_1) = 0$. Donc A_1/B'_1 est $\text{Gal}(k'/k)$ invariant, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), A_1/B'_1) = 0$, parce que $|A_1/B'_1|$ est impair. onc A_1 est $\text{Gal}(k'/k)$ invariant, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), A_1) = 0$.

Pour $l_0 = 2$, soit B_2 un groupe abélien engendré librement par l'élément $(\sigma(D_{S_i^0}))_{i \in I, |J_i| \text{ pair}}$ et $(D_{S_i^0})_{i \in I, |J_i| \text{ pair}}$. On a $H^1(\text{Gal}(k'/k), B_2) = 0$. Puisque $\sigma(D_{S_i^0}) - D_{S_i^0}$ est $\Gamma_{k'}$ -invariant, on a

$$\sigma(D_{S_i^0}) - D_{S_i^0} = s_i \cdot F \otimes D_i + |S_i^0|^2 F \otimes F.$$

Ainsi B_2 est un sous-groupe de A'_2 , et $|A'_2/B_2| = \prod_{i \in I, |J_i| \text{ pair}} s_i$. Ainsi $|A'_2/B_2|$ est impair, et donc $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_2/B_2) = 0$. Ainsi $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_2) = 0$.

Pour $l_0 = 3$, $\sigma(F \otimes G) = F \otimes G' = F \otimes G + \sum_i F \otimes D_i - \frac{\sum_i |J_i|}{2} F \otimes F$. Donc $(\sigma(F \otimes G) - F \otimes G) \in A_1 \oplus A_2$. Alors l'action de $\text{Gal}(k'/k)$ sur A'_3 est triviale, et donc $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_3) = 0$.

Soit $(F \otimes E) \in (Sym^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}$, où $E \in T^*$. Alors $E \in (T^*)^{\Gamma_{k'}}$. Ainsi E est une combinaison de G, F et $(D_i)_{i \in I}$, alors $(F \otimes E) \in A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$.

Pour $l_0 = 4$, on a $(D'_{j_i} \otimes D'_{j_{i'}}) = D_{j_i} \otimes D_{j_{i'}} + F \otimes (F - D_{j_i} - D_{j_{i'}})$ et donc pour chaque orbite S , $(\sigma(D_S) - D_{\sigma(S)}) \in A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$. Ainsi dans $(\bigoplus_{l=1}^4 A_l) / (\bigoplus_{l=1}^3 A_l)$, on a $\sigma(D_S) = D_{\sigma(S)}$. Donc l'action de $\text{Gal}(k'/k)$ sur A'_4 est une permutation, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_4) = 0$.

Pour $l_0 = 5$, en utilisant $G' - G = \sum_i \sum_{j_i} D_{j_i} - \frac{\sum_i |J_i|}{2} F$, on trouve

$$(G' \otimes D_i - D_{\Delta_i} - G \otimes D_i) \in A_1 \oplus A_2 \oplus A_4.$$

Ainsi A'_5 est engendré librement par $G' \otimes D_i$ et $G \otimes D_i$ pour tous les $i \in I$. On a

$$\sigma(G' \otimes D_i) = G \otimes D'_i = -G \otimes D_i + |J_i|G \otimes F.$$

Donc dans A'_5 , on a $\sigma(G' \otimes D_i) = -G \otimes D_i$. Donc $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_5) = 0$.

Pour $l_0 = 6$, en utilisant $G' - G = \sum_i \sum_{j_i} D_{j_i} - \frac{\sum_i |J_i|}{2} F$, on a

$$(\sigma(G \otimes G) - G \otimes G) \in \bigoplus_{l=1}^5 A_l.$$

Donc dans A'_6 , $\sigma(G \otimes G) = G \otimes G$, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_6) = 0$. □

3.6 Surfaces de del Pezzo

Dans cette section, soient X une surface de del Pezzo sur k et \mathcal{T} un torseur universel de X . On cherche à contrôler l'exposant de torsion du quotient $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$.

Une surface projective, lisse, géométriquement connexe X est appelée *surface de del Pezzo* si le faisceau anticanonique $-K_X$ est ample. Le degré d'une telle surface X est $\text{deg}(X) := (K_X, K_X)$. Par [Koll96, Exercice 3.9], X est alors géométriquement rationnelle, on a $1 \leq \text{deg}(X) \leq 9$ et $\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{10-\text{deg}(X)}$.

Soit X une surface de del Pezzo de degré $d \leq 6$. Soit $r = 9 - d$. Rappelons des résultats dans [Ma74, Chapter 4]. On sait ([Ma74, Prop. 25.1]) qu'il existe une base $(l_i)_{i=0}^r$ de $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ tels que

$$(3.6.0.1) \quad (l_0, l_0) = 1, \quad (l_i, l_i) = -1 \text{ si } i \neq 0, \quad (l_i, l_j) = 0 \text{ si } i \neq j \quad \text{et} \quad \omega = -3l_0 + \sum_{i=1}^r l_i,$$

où $\omega := [K_X] \in \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Soit \mathfrak{S}_r le groupe symétrique d'indice r . L'action de \mathfrak{S}_r sur $\{l_i\}_{i=0}^r$, qui préserve l_0 et permute $(l_i)_{i=1}^r$, induit une action de permutation de \mathfrak{S}_r sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Pour $r = 3, 4, 5, 6, 7, 8$, soient R_r le système de racines de type $A_1 \times A_2, A_4, D_5, E_6, E_7, E_8$ respectivement. Par [Ma74, Thm. 23.9], on a :

(1) le groupe de Weyl $W(R_r)$ agit sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ et cette action préserve ω et l'intersection ;

(2) l'action de Γ_k sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$, qui préserve ω et l'intersection, se factorise par le groupe de Weyl $W(R_r)$;

(3) l'action de \mathfrak{S}_r sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ ci-dessus, qui préserve ω et l'intersection aussi, induit une inclusion canonique $\mathfrak{S}_r \subset W(R_r)$ ne dépendant que du choix de la base $(l_i)_{i=0}^r$.

Proposition 3.6.1. *Soient X une surface de del Pezzo de degré ≥ 5 et \mathcal{T} un torseur universel de X . Alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$.*

Démonstration. Par un résultat classique (cf. [1, Lem. 3.2]), le Γ_k -module $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est stablement de permutation. D'après (3.1.0.1), on a $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$. Par le théorème 3.4.7, il suffit de montrer que l'on a $X(k) \neq \emptyset$ ou que le morphisme $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_k} \xrightarrow{\cup} CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$ dans le théorème 3.4.7 (2) est surjectif.

Notons d le degré de X .

Si $d = 5$ ou 7 , par les travaux de Enriques, Châtelet, Manin, Swinnerton-Dyer (voir [CT99, Section 4] ou [VA, Théorème 2.1]), on a $X(k) \neq \emptyset$.

Si $d = 9$, on a $\text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} = \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Puisque $X_{\bar{k}} \cong \mathbb{P}_{\bar{k}}^2$, l'homomorphisme \cup est surjectif.

Si $d = 8$, on a l'une des possibilités suivantes (voir par exemple [AB, Exemples 3.1.3 et 3.1.4]) :

(i) X est un éclatement de \mathbb{P}_k^2 en un k -point, et dans ce cas, $X(k) \neq \emptyset$.

(ii) Il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$. Dans ce cas, on a $\text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} = \text{Pic}(X_{\bar{k}})$, $X_{\bar{k}} \cong \mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\bar{k}}^1$ et donc l'homomorphisme \cup est surjectif.

(iii) Il existe une extension de corps K/k de degré 2 et une conique C sur K telles que $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k}C$, où $R_{K/k}$ désigne la restriction à la Weil de K à k . Dans ce cas, il existe $D_1, D_2 \in \text{Pic}(X_{\bar{k}})$ tels que Γ_k permute D_1, D_2 et l'intersection de D_1 et D_2 est un point. Alors $D_1 \otimes D_2 \in (\text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}))^{\Gamma_k}$, $\cup(D_1 \otimes D_2) = 1$ et donc l'homomorphisme \cup est surjectif.

Si $d = 6$, avec les notations ci-dessus, soit (cf. [Ma74, §25.5.7])

$$\sigma : \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}}) : \sum_{i=0}^3 a_i l_i \mapsto (a_0 + c)l_0 + \sum_{i=1}^3 (a_i - c)l_i \quad \text{avec} \quad c := a_0 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Puisque $\#W(R_3) = 2^3 \cdot 3$, on a $W(R_3) \cong \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2 \cdot \sigma$. Soit $L_1 := \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (l_0 - l_i) \otimes (l_0 - l_j)$ et $L_2 := l_0 \otimes (\omega + l_0)$. Puisque l'action de Γ_k se factorise par $W(R_3)$. On peut calculer que $L_1, L_2 \in (\text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}))^{\Gamma_k}$ et $\cup(L_1) = 3, \cup(L_2) = -2$. Alors \cup est surjectif. \square

Lemme 3.6.2. *Soient X une surface de del Pezzo de degré $d = 1, 2, 3, 4$ et \mathcal{T} un torseur universel de X . Alors*

$$\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[p] = 0 \quad \text{pour un nombre premier} \quad \begin{cases} p \neq 2 & \text{si } d = 4 \\ p \neq 2, 3 & \text{si } d = 2, 3 \\ p \neq 2, 3, 5 & \text{si } d = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Soit $r = 9 - d$. Avec les notations ci-dessus, d'après [Ma74, §26.6], $\#W(R_r) = 2^7 3 \cdot 5, 2^7 3^4 5, 2^{10} 3^4 5 \cdot 7, 2^{14} 3^5 5^2 7$ pour $d = 4, 3, 2, 1$ respectivement. Alors, pour le premier p dans l'énoncé, tout p -groupe de Sylow de \mathfrak{S}_r est un p -groupe de Sylow de $W(R_r)$. Dans ce cas, l'action de tout p -sous-groupe de $W(R_r)$ sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est donc de permutation. C'est donc aussi le cas sur $\text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Par un argument de corestriction-restriction, $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}))[p] = 0$ pour tout p dans l'énoncé.

On considère le morphisme dans le théorème 3.4.7 (2) : $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_k} \xrightarrow{\cup} CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$. Par la définition, $\cup(\omega \otimes \omega) = 4, 3, 2, 1$ pour $d = 4, 3, 2, 1$ respectivement. On conclut alors avec le théorème 3.4.7 (2). \square

Remarque 3.6.3. Sous les hypothèses du lemme 3.6.2, par la même méthode, on peut montrer le résultat ci-dessous (qui est déjà connu) :

$$\frac{\text{Br}(X)}{\text{Br}(k)}[p] = 0 \quad \text{pour un nombre premier} \quad \begin{cases} p \neq 2 & \text{si } d = 4 \\ p \neq 2, 3 & \text{si } d = 2, 3 \\ p \neq 2, 3, 5 & \text{si } d = 1 \end{cases}$$

Théorème 3.6.4. Soient X une surface de del Pezzo de degré 3 ou 4 et \mathcal{T} un torseur universel de X . Alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[p] = 0$ pour tout $p \neq 2$.

Démonstration. D'après le lemme 3.6.2, il suffit de montrer que $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[3] = 0$ pour toute surface de del Pezzo X de degré 3.

On suppose que le degré de X est 3.

Notons que $T^* := \text{Pic}(X_{\bar{k}})$ et $\text{Sym}^2 T^*$ la deuxième puissance symétrique de T^* . Soient $(l_i)_{i=0}^6$ une base dans (3.6.0.1) et ω le fibré à droite canonique de X . Il y a 27 courbes exceptionnelles (les 27 droites) sur $X_{\bar{k}}$. Le groupe Γ_k agit par permutation de ces droites. On les note $(D_i)_{i=1}^{27}$. D'après [Ma74, prop. 26.1], on peut supposer $D_i = l_i$ pour $1 \leq i \leq 6$, $D_i = 2l_0 - \sum_{j \neq i-6} l_j$ pour $7 \leq i \leq 12$ et $(D_i)_{i=13}^{27} = (l_0 - l_i - l_j)_{1 \leq i < j \leq 6}$.

Dans $\text{Sym}^2 T^*$, on note :

$$L := (l_0 \otimes l_0) - \sum_{i=1}^6 (l_i \otimes l_i),$$

et on peut calculer que $6L = 5(\omega \otimes \omega) - \sum_{i=1}^{27} (D_i \otimes D_i)$. Donc l'action de Γ_k sur L est triviale.

On considère le morphisme dans le théorème 3.4.7 (2) : $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_k} \xrightarrow{\cup} CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$. Puisque $\cup(\omega \otimes \omega) = 3$ et $\cup(L) = 7$, le morphisme \cup est surjectif. Par le théorème 3.4.7 (ii), il suffit de montrer que $H^1(k, \text{Sym}^2 T^*)[3] = 0$.

Il existe une matrice $A \in M_{28 \times 28}(\mathbb{Z})$, telle que dans le réseau $\text{Sym}^2 T^*$, de rang 28, on ait l'égalité de vecteurs :

$$(3.6.0.2) \quad [-L, (D_i \otimes D_i)_{i=1}^{27}]^t = A \cdot [(l_i \otimes l_i)_{i=0}^6, (-l_0 \otimes l_i)_{i=1}^6, (l_i \otimes l_j)_{1 \leq i < j \leq 6}]^t.$$

existe une surface de del Pezzo de degré 3 X' sur k' et un k' -morphisme propre, surjectif, birationnel $X_{k'} \rightarrow X'$. D'après le théorème 3.6.4 et un argument de restriction-inflation, on a $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[3] = 0$. \square

Exemple 3.6.6. Soit k un corps contenant une racine cubique de l'unité non-triviale. Soit X une surface cubique diagonale d'équation :

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$$

en les variables x, y, z, t , avec $a, b, c, d \in k^\times$. Soit $K := k(\sqrt[3]{b/a}, \sqrt[3]{ad/bc})$. Alors X_K est une K -surface K -rationnelle. D'après le corollaire 3.2.10, $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ est annulé par 9. D'après le théorème 3.6.4, on a $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$.

Théorème 3.6.7. *Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un toiseur universel sur X et soit \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Supposons que la surface X est k -birationnellement équivalente à une surface de del Pezzo de degré ≥ 2 ou à une surface fibrée en coniques au-dessus d'une conique. Alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[p] = 0$ pour tout $p \neq 2$.*

Démonstration. Soit X une surface fibrée en coniques au-dessus d'une conique C . Il existe une extension K_1/k de degré 2 telle que $C_{K_1} \cong \mathbb{P}_{K_1}^1$. Notons η le point générique de C et X_η sa fibre. Alors X_η est une conique, et donc il définit $[X_\eta] \in \text{Br}(k(C))[2]$. Puisque $\text{Br}(\bar{k}(C)) = 0$, il existe une extension finie galoisienne k'/k tel que $[X_\eta]|_{k'(C)} = 0$. Soient $k \subset K_2 \subset k'$ l'extension correspondant à un p -sous-groupe de Sylow de $\text{Gal}(k'/k)$. Alors $p \nmid [K_2 : k]$ et, par un argument de restriction-inflation, $[X_\eta]|_{K_2(C)} = 0$. Soit $K := K_1 \cdot K_2$. On a $p \nmid [K : k]$, $C_K \cong \mathbb{P}_K^1$ et $X_\eta \times_k K \cong \mathbb{P}_{K(C)}^1$. Donc X_K est K -rationnelle. D'après le corollaire 3.2.10, l'énoncé vaut pour une telle surface X .

En général, soit X_1 une surface projective, lisse, géométriquement rationnelle telle que X et X_1 soient birationnellement équivalents. Il existe un toiseur universel \mathcal{T}_1^c de X_1 tel que \mathcal{T}^c et \mathcal{T}_1^c soient stablement birationnellement équivalents par [CTS87b, Prop. 2.9.2]. Donc $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H_{nr}^3(\mathcal{T}_1^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et on peut remplacer X par X_1 . En rassemblant la proposition 3.6.1, le théorème 3.6.4, le corollaire 3.6.5 et le résultat ci-dessus pour les fibrations en coniques au-dessus d'une conique, on obtient le théorème. \square

Par la classification k -birationnelle des surfaces projectives, lisses (cf. [Koll96, Thm. 2.1]), toute surface projective, lisse, géométriquement rationnelle est k -birationnellement équivalente à soit une surface de del Pezzo, soit une surface fibrée en coniques au-dessus d'une conique. Dans le théorème 3.6.7, le seul cas que on ne traite pas est alors le cas où X est une surface de del Pezzo k -minimale de degré 1.

Remerciements. Nous remercions Jean-Louis Colliot-Thélène pour plusieurs discussions. Projet soutenu par l'attribution d'une allocation de recherche Région Ile-de-France.

Partie arithmétique

Chapitre IV

Introduction à la partie arithmétique

Soit k un corps de nombres. On note Ω_k l'ensemble des places de k et ∞_k l'ensemble des places archimédiennes de k . On note $v < \infty_k$ pour $v \in \Omega_k \setminus \infty_k$. Notons \mathcal{O}_k l'anneau des entiers de k et \mathcal{O}_S l'anneau des S -entiers de k pour un sous-ensemble fini S de Ω_k contenant ∞_k . Pour chaque $v \in \Omega_k$, on note k_v le complété de k en v et $\mathcal{O}_v \subset k_v$ l'anneau des entiers ($\mathcal{O}_v = k_v$ pour $v \in \infty_k$). Soit A_k l'anneau des adèles de k . Pour un sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$, soit A_k^S l'anneau des adèles hors de S et $k_S := \prod_{v \in S} k_v$. Par exemple, soit A_k^∞ l'anneau des adèles finis et $k_\infty := \prod_{v \in \infty_k} k_v$.

À toute k -variété lisse intègre X , on associe l'espace des points adéliques $X(A_k)$ défini de la manière suivante : Par passage à la limite, il existe un sous-ensemble fini $T \subset \Omega_k$ contenant ∞_k et un *modèle entier* \mathcal{X} sur \mathcal{O}_T , i.e. un schéma \mathcal{X} séparé, fidèlement plat et de type fini sur \mathcal{O}_T tel que $\mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_T} k \cong X$. L'espace $X(A_k)$ est le produit restreint $\prod'_{v \in \Omega_k} X(k_v)$ par rapport aux ensembles $\mathcal{X}(\mathcal{O}_v)$, $v \notin T$. Ceci ne dépend ni du choix de T ni du choix de \mathcal{X} (voir [Cod, §3]). Pour tout sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$, soit $X(A_k^S)$ l'espace des points adéliques hors de S . Notons $Pr^S : X(A_k) \rightarrow X(A_k^S)$ la projection.

Rappelons la définition de l'accouplement de Brauer-Manin. Tout point $x_v \in X(k_v)$ induit un morphisme $\text{Spec } k_v \rightarrow X$ et donc un homomorphisme $x_v^* : \text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(k_v)$. La théorie du corps de classes local donne une immersion canonique $inv_v : \text{Br}(k_v) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Pour tout élément $\xi \in \text{Br}(X)$, notons $inv_v(\xi(x_v)) := inv_v(x_v^*(\xi))$. Ceci induit une application localement constante $inv_v(\xi(-)) : X(k_v) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Pour B sous-ensemble de $\text{Br}(X)$, on définit

$$X(A_k)^B = \{(x_v)_{v \in \Omega_k} \in X(A_k) : \sum_{v \in \Omega_k} inv_v(\xi(x_v)) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \forall \xi \in B\}.$$

C'est un sous-espace fermé de $X(A_k)$. Comme l'a remarqué Manin, la théorie du corps de classes global donne $X(k) \subseteq X(A_k)^B$.

On rappelle les définitions de [CTX09], [CTX13, §2], [BD] et [CX2]. Définissons

$$(4.0.0.1) \quad X(A_k)_\bullet = \pi_0(X(k_\infty)) \times X(A_k^\infty)$$

la projection, où $\pi_0(X(k_\infty))$ est l'ensemble des composantes connexes de $X(k_\infty)$.

Puisque, pour tout $v \in \infty_k$, chaque élément de $\text{Br}(X)$ prend une valeur constante sur chaque composante connexe de $\pi_0(X(k_v))$, pour tout sous-ensemble $B \subset \text{Br}(X)$ on peut définir :

$$X(A_k)_\bullet^B = \{(x_v)_{v \in \Omega_k} \in X(A_k)_\bullet : \sum_{v \in \Omega_k} inv_v(\xi(x_v)) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \forall \xi \in B\}.$$

Définition 4.0.1. ([CTX09, CTX13]) Soient k un corps de nombres, X une k -variété et $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini.

(1) Si $X(k)$ est dense dans $Pr^S(X(A_k))$, on dit que X *satisfait l'approximation forte hors de S* .

(2) Si $X(k)$ est dense dans $Pr^S(X(A_k)^B)$ pour un sous-ensemble B de $\text{Br}(X)$, on dit que X *satisfait l'approximation forte (avec condition de Brauer–Manin) par rapport à B hors de S* .

Si $S = \infty_k$, on peut s'intéresser à une question un peu plus précise tenant compte des composantes connexes réelles : $X(k)$ est-il dense dans $X(A_k)_{\bullet}^B$ pour un sous-groupe $B \subset \text{Br}(X)$?

Dans le cas où $S \supset \infty_k$, l'approximation forte par rapport à B hors de S vaut pour X ssi l'obstruction associée à B est la seule pour le principe local-global entier de tout modèle entier \mathcal{X} de X sur \mathcal{O}_S . Pour les espaces homogènes de groupes algébriques connexes, ces questions ont fait ces dernières années l'objet d'une série de travaux [CTX09, Ha08, BD] qui prolongent des travaux classiques, et qui sont eux-mêmes utilisés dans la démonstration des résultats de cette thèse.

On s'est ensuite intéressé aux cas de variétés lisses X dont un ouvert U est un espace homogène d'un groupe linéaire connexe G . Avec Fei Xu, j'ai déjà étudié le cas où $U = G$ pour G un tore [CX1] puis pour $U = G$ pour G quelconque [CX2].

4.1 Le chapitre VI

Dans ce chapitre, j'étudie le cas $U = G/H$ avec H connexe. J'établis le résultat suivant, qui couvre la plupart des résultats de [CX1, CX2] (le cas $U = G$)

Théorème 4.1.1. (*Théorème 6.1.4, [4, Thm. 1.4]*) *Soit G un groupe linéaire connexe sur un corps de nombres k , et soit X une G -variété lisse géométriquement intègre sur k . Supposons qu'il existe un G -ouvert $U \subset X$ tel que $U \cong G/G_0$, où $G_0 \subset G$ est un sous-groupe fermé connexe. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide et supposons que $G'(k_S)$ est non compact pour chaque facteur simple G' du groupe G^{sc} (cf. (6.1.0.4)).*

(1) *Si $S \subset \infty_k$, alors $X(k)$ est dense dans $X(A_k)_{\bullet}^{\text{Br}(X)}$.*

(2) *Si $\bar{k}^\times = \bar{k}[X]^\times$, alors X satisfait l'approximation forte avec condition de Brauer–Manin par rapport à $\text{Br}(X)$ hors de S .*

La méthode géométrique utilisée est de trouver un torseur $f : Y \rightarrow X$ sous un tore quasi-trivial T_0 avec $\text{Pic}(Y_{\bar{k}}) = 0$, un ouvert dense $U \subset X$, un tore T , une variété torique $T \hookrightarrow S$ et un morphisme lisse $g : V \rightarrow T$ à fibres géométriquement intègres, où $V := U \times_X Y$, tels que le morphisme induit $g^* : \text{Br}_1(T) \rightarrow \text{Br}_1(V)$ est surjectif et le morphisme g peut être prolongé en un morphisme lisse surjectif $g' : Y \rightarrow S$ à fibres géométriquement intègres. Alors on a un diagramme commutatif de morphismes :

$$\begin{array}{ccccc} U & \longleftarrow & V & \xrightarrow{g} & T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xleftarrow{T_0\text{-torseur}} & Y & \xrightarrow{\exists! g'} & S \end{array}$$

Ensuite on contrôle les points adéliques de Y via ceux de S , car $g' : Y(\mathcal{O}_v) \rightarrow S(\mathcal{O}_v)$ est surjectif pour presque toutes les places v . Ceci donne l'approximation forte avec obstruction de Brauer–Manin en dehors de ∞ pour Y . Ensuite, on contrôle les points adéliques de X satisfaisant une condition de Brauer–Manin via ceux de Y par la méthode de descente des points adéliques que j'explique ci-dessous.

Par rapport aux articles [CX1, CX2], il y a deux ingrédients nouveaux importants : la notion de *sous-groupe de Brauer invariant* d'une part, la *méthode de descente des points adéliques* d'autre part.

Voici la définition du sous-groupe de Brauer invariant.

Définition 4.1.2. (Définition 6.3.1) Soient G un groupe algébrique et (X, ρ) une G -variété lisse géométriquement intègre. Le sous-groupe de Brauer G -invariant de X est le sous-groupe

$$(4.1.0.1) \quad \mathrm{Br}_G(X) := \{b \in \mathrm{Br}(X) : (\rho^*(b) - p_2^*(b)) \in p_1^* \mathrm{Br}(G)\}$$

de $\mathrm{Br}(X)$, où $G \times X \xrightarrow{p_1} G$, $G \times X \xrightarrow{p_2} X$ sont les projections.

Soient G un groupe linéaire, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un G -torseur. Pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, soient G_σ le tordu de G et $Y_\sigma \xrightarrow{p_\sigma} X$ le tordu de $[Y]$ correspondant (en principe on tord par un 1-cocycle).

Dans le cas où G est connexe, on a un isomorphisme canonique $\frac{\mathrm{Br}_G(Y)}{\mathrm{Im} \mathrm{Br}(k)} \cong \frac{\mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)}{\mathrm{Im} \mathrm{Br}(k)}$ (Lemme 6.5.8). Pour tout sous-groupe $B \subset \mathrm{Br}_G(Y)$ contenant $\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k))$, soit $B_\sigma \subset \mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)$ le sous-groupe correspondant. Le résultat principal de descente établi dans le chapitre VI de cette thèse est le théorème suivant :

Théorème 4.1.3. (Théorème 6.5.9, [4, Thm. 5.9]) Soient G un groupe linéaire, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un G -torseur. Soit $B \subset \mathrm{Br}_G(Y)$ un sous-groupe contenant $\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k))$ et soit $A \subset \mathrm{Br}(X)$ un sous-groupe contenant $(p^*)^{-1}B$. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$X(\mathbf{A}_k)^A = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} p_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{B_\sigma + p_\sigma^* A}).$$

Lorsque dans la définition de $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}}$ ci-dessous on se limite aux groupes G connexes, on obtient l'ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{connexe-desc}}$. Pour toute k -variété quasi-projective lisse, le théorème 4.1.3 donne l'inclusion

$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{connexe-desc}} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}},$$

qui avait été établie par Harari ([Ha02, Thm. 2]). Le théorème 4.1.3 généralise [3, Thm. 1.1 et Thm. 1.2], résultats qui eux-mêmes étendaient de nombreux travaux antérieurs. La démonstration du théorème 4.1.3 utilise des résultats de [3].

4.2 Le chapitre V

Décrivons maintenant l'un des principaux résultats du chapitre V, obtenu en collaboration avec C. Demarche et F. Xu, qui est logiquement indépendant de [4]. On s'intéresse ici à la descente via tous les toseurs sous tous les groupes linéaires.

L'inclusion $X(k) \subset X(\mathbf{A}_k)$ se factorise par les inclusions

$$X(k) \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}} := \bigcap_{k\text{-groupes linéaires } G} \bigcap_{G\text{-torseurs } Y \xrightarrow{p} X} \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} p_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k))$$

et

$$X(k) \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{ét, Br}} := \bigcap_{k\text{-groupes finis } G} \bigcap_{G\text{-torseurs } Y \xrightarrow{p} X} \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} p_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(Y_\sigma)}).$$

(La notation Y_σ a été définie ci-dessus.)

Théorème 4.2.1. (Théorème 5.1.5, [3, Thm. 1.5]) Soit X une variété lisse quasi-projective et géométriquement intègre. Alors

$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}} = X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{ét, Br}}.$$

Pour les variétés projectives, ceci avait été établi par Harari, Skorobogatov, et Demarche ([Ha02], [Sko09], [D09a]).

Chapitre V

Comparing descent obstruction and Brauer-Manin obstruction for open varieties (avec C. Demarche et F. Xu)

Abstract We provide a relation between Brauer-Manin obstruction and descent obstruction for torsors over open varieties under a connected linear algebraic group or a group of multiplicative type. Such a relation is further refined for torsors under a torus. As an application, we prove that the semi-simple part of a connected linear algebraic group G will satisfy strong approximation with Brauer-Manin obstruction if G itself satisfies strong approximation with Brauer-Manin obstruction. The equivalence between descent obstruction and étale Brauer-Manin obstruction for smooth projective varieties is extended to smooth quasi-projective varieties.

5.1 Introduction

The descent theory for tori was first established by Colliot-Thélène and Sansuc in [CTS87b] and was extended by Skorobogatov for groups of multiplicative type in [Sko99]. In a series of papers [Ha02], [HS02], [HS05], Harari and Skorobogatov introduced descent obstruction for a general algebraic group and compared descent obstruction with Brauer-Manin obstruction. By various efforts of Poonen in [Po10], the second named author in [D09a], Stoll in [St] and Skorobogatov in [Sko09], it has been proved that the descent obstruction is equivalent to the étale Brauer-Manin obstruction for geometrically integral projective smooth varieties. In this paper, we study the relation between descent obstruction and Brauer-Manin obstruction for open varieties by using the new arithmetic tools developed in [BD], [CT08], [CTX09], [D11b], [Ha08] and [HSz05] and extend the equivalence between descent obstruction and étale Brauer-Manin obstruction to smooth quasi-projective varieties.

Let k be a number field, Ω_k be the set of all primes of k and A_k be the adelic ring of k . A separated scheme X of finite type over k is called a variety over k . Fix an algebraic closure \bar{k} of k , we use $X_{\bar{k}}$ to denote $X \times_k \bar{k}$. Let

$$\mathrm{Br}(X) = H_{\mathrm{et}}^2(X, \mathbb{G}_m), \quad \mathrm{Br}_1(X) = \ker(\mathrm{Br}(X) \rightarrow \mathrm{Br}(X_{\bar{k}})) \quad \text{and} \quad \mathrm{Br}_0(X) = \mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Br}(X))$$

where $X \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}(k)$ is the structure morphism and $\mathrm{Br}_a(X) = \mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}_0(X)$. For any subgroup B of $\mathrm{Br}(X)$, one can define the Brauer-Manin set

$$X(A_k)^B = \{(x_v)_{v \in \Omega_k} \in X(A_k) : \sum_{v \in \Omega_k} \mathrm{inv}_v(\xi(x_v)) = 0 \text{ for all } \xi \in B\}$$

with respect to B . When $B = \text{Br}(X)$, we simply write this Brauer-Manin set as $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$.

Suppose $Y \xrightarrow{f} X$ is a left torsor under a linear algebraic group G over k . The descent obstruction (see [Ha02], [HS02] and [HS05]) given by f is defined by the following set

$$X(\mathbb{A}_k)^f = \{(x_v) \in X(\mathbb{A}_k) : ([Y](x_v)) \in \text{Im}(H^1(k, G) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, G))\} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k))$$

where $Y^\sigma \xrightarrow{f_\sigma} X$ is the twist of $Y \xrightarrow{f} X$ by $\sigma \in H^1(k, G)$. Moreover, one can define

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} = \bigcap_{Y \xrightarrow{f} X} X(\mathbb{A}_k)^f$$

following [Po10], where $Y \xrightarrow{f} X$ runs all torsors under all linear algebraic groups over k .

The main results in this paper are the following theorems.

Théorème 5.1.1. (Theorem 5.3.4) *Let k be a number field, G be a connected linear algebraic group or a group of multiplicative type over k and X be a smooth and geometrically integral variety over k . Suppose $Y \xrightarrow{f} X$ is a left torsor under G over k . For any subgroup $\ker(f^*) \subseteq A \subseteq \text{Br}(X)$, one has*

$$X(\mathbb{A}_k)^A = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)^{f_\sigma^*(A)})$$

where $Y^\sigma \xrightarrow{f_\sigma} X$ is the twist of $Y \xrightarrow{f} X$ by σ and $\text{Br}(X) \xrightarrow{f_\sigma^*} \text{Br}(Y^\sigma)$ for each $\sigma \in H^1(k, G)$.

When G is a torus, this result can be refined as follows.

Théorème 5.1.2. (Theorem 5.4.1) *Suppose G is a torus in Theorem 5.1.1. For any subgroup $\ker(f^*) \subseteq A \subseteq \text{Br}(X)$ and any subgroups $B_\sigma \subseteq \text{Br}_1(Y^\sigma)$ such that*

$$f^{*-1} \left(\sum_{\sigma \in H^1(k, G)} \psi_\sigma(\widetilde{B}_\sigma) \right) \subseteq A$$

where \widetilde{B}_σ is the image of B_σ in $\text{Br}_a(Y^\sigma)$ and $\text{Br}_a(Y^\sigma) \xrightarrow{\psi_\sigma} \text{Br}_a(Y)$ is a canonical isomorphism for each $\sigma \in H^1(k, G)$, one has

$$X(\mathbb{A}_k)^A = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)^{B_\sigma + f_\sigma^*(A)})$$

where $Y^\sigma \xrightarrow{f_\sigma} X$ is the twist of $Y \xrightarrow{f} X$ by σ and $\text{Br}(X) \xrightarrow{f_\sigma^*} \text{Br}(Y^\sigma)$ for each $\sigma \in H^1(k, G)$.

This result is inspired by some of Harpaz's lectures. It should be pointed out that Dasheng Wei in [Wei16] put the algebraic Brauer-Manin obstruction in the argument of Harari and Skorobogatov in [HS13] by using Sansuc exact sequence in [BD] and obtained the same result as in Theorem 5.1.2 for the special case $A = \text{Br}_1(X)$ and $B_\sigma = \text{Br}_1(Y^\sigma)$ (see the first part of Corollary 5.4.2). Such a result can be applied to study strong approximation, as in [Wei16].

Définition 5.1.3. Let X be a variety over a number field k and B be a subgroup of $\text{Br}(X)$. For a finite subset S of Ω_k , we denote the projection map $pr^S : X(\mathbb{A}_k) \rightarrow X(\mathbb{A}_k^S)$ where \mathbb{A}_k^S is the adèles of k without S -components.

We say that X satisfies *strong approximation off S* if the diagonal image of $X(k)$ is dense in $pr^S(X(\mathbb{A}_k)) \neq \emptyset$.

We say that X satisfies *strong approximation with respect to B off S* if the diagonal image of $X(k)$ is dense in $pr^S(X(\mathbb{A}_k)^B) \neq \emptyset$.

As an application, we prove the sufficient condition for strong approximation with Brauer-Manin obstruction for a connected linear algebraic group given in Corollary 3.20 of [D11b] is also necessary.

Théorème 5.1.4. (Corollary 5.5.3) *Let G be a connected linear algebraic group over a number field k and S be a finite subset of Ω_k containing ∞_k . Then G satisfies strong approximation with respect to $\text{Br}_1(G)$ off S if and only if $\prod_{v \in S} G'(k_v)$ is not compact for any non-trivial simple factor G' of the semi-simple part G^{ss} of G .*

For any variety X over a number field k , following [Po10], one can define

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{et,Br}} = \bigcap_{Y \xrightarrow{f} X} \bigcup_{\sigma \in H^1(k,F)} f_\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}})$$

where $Y \xrightarrow{f} X$ runs over all torsors under all finite group schemes F over k .

Théorème 5.1.5. (Theorem 5.7.5) *If X is a smooth quasi-projective and geometrically integral variety over a number field k , then*

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} = X(\mathbb{A}_k)^{\text{et,Br}}.$$

Terminology and notation are standard if not explained. For any connected linear algebraic group G over an field k of characteristic zero, the reductive part G^{red} of G is defined by

$$1 \rightarrow R_u(G) \rightarrow G \rightarrow G^{\text{red}} \rightarrow 1$$

where $R_u(G)$ is the unipotent radical of G . The semi-simple part G^{ss} of G is defined to be $[G^{\text{red}}, G^{\text{red}}]$ which is isogenous to the product of its simple factors and the maximal toric quotient G^{tor} of G is defined to be $G^{\text{red}}/[G^{\text{red}}, G^{\text{red}}]$. We use \hat{G} for the character group of G . For a topological abelian group A , the topological dual of A is defined as $A^D = \text{Hom}_{\text{cont}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ with the compact-open topology. For any ring R , R^\times stands for all invertible elements of R with respect to multiplication. For a number field k , we use ∞_k to denote the set of all archimedean primes of k and O_S for S -integers with any finite subset S containing ∞_k . For any $v \in \Omega_k$, k_v is the completion of k with respect to v and O_v is the integral ring of k_v for $v \in \Omega_k \setminus \infty_k$.

The paper is organized as follows. In §5.2, we establish some algebraic results over an arbitrary field of characteristic zero which we need in the next sections. Then we prove Theorem 5.1.1 in §5.3, Theorem 5.1.2 in §5.4. As an application of such results, we show Theorem 5.1.4 in §5.5. Theorem 5.1.5 is proved in §5.6 and §5.7.

5.2 Some lemmas

In this section, we assume that k is an arbitrary field of characteristic 0.

Lemme 5.2.1. *Let H be a semi-simple simply connected group or a unipotent group over k . Suppose X is a smooth and geometrically integral variety over k . If $Z \xrightarrow{\rho} X$ is a torsor under H , then the induced map $\text{Br}(X) \xrightarrow{\rho^*} \text{Br}(Z)$ is an isomorphism.*

Démonstration. We first show that $\text{Br}(X) \xrightarrow{\cong} \text{Br}(X \times_k H)$, where the map is induced by the natural projection $X \times_k H \rightarrow X$. By using the spectral sequence

$$H^p(k, H^q(X_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{G}_m),$$

one only needs to show that

$$\bar{k}[X_{\bar{k}}]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\cong} \bar{k}[X_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} H_{\bar{k}}]^\times / \bar{k}^\times, \quad \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\cong} \text{Pic}(X_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} H_{\bar{k}}) \quad \text{and} \quad \text{Br}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\cong} \text{Br}(X_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} H_{\bar{k}}).$$

Since $\bar{k}[H]^\times = \bar{k}^\times$ and $\text{Pic}(H_{\bar{k}}) = \text{Br}(H_{\bar{k}}) = 0$, the first two parts are true by Proposition 6.10 in [S]. To prove the last part, Kummer exact sequence ensures that one only needs to show

$$(5.2.0.1) \quad H_{et}^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\cong} H_{et}^2(X_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} H_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/n)$$

for all $n \geq 0$. Since $H_{et}^1(H_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/n) = H_{et}^2(H_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/n) = 0$, the above (5.2.0.1) follows from Künneth formula (see P.240, Corollary 1.11 in [SGA41/2]).

In general, since $\text{Pic}(H) = 0$, one has the following short exact sequence

$$0 \rightarrow \text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(Z) \xrightarrow{m^* - p_Z^*} \text{Br}(H \times_k Z)$$

by Proposition 2.4 in [BD], where m^* and p_Z^* are induced by the multiplication $H \times_k Z \xrightarrow{m} Z$ and the projection $H \times_k Z \xrightarrow{p_Z} Z$ respectively. Since $m \circ (1_H \times id) = p_Z \circ (1_H \times id) = id$, one concludes $m^* = p_Z^*$ by the above argument. Therefore $\text{Br}(X) \xrightarrow{\cong} \text{Br}(Z)$. \square

Let H be a closed subgroup of an algebraic group G over k and $Y \xrightarrow{f} X$ be a left torsor under H . Suppose $Z \xrightarrow{p} X$ is a left torsor under G which represents the image of $[Y]$ under the natural map $H^1(X, H) \rightarrow H^1(X, G)$. Then one can assume that $Z = G \times^H Y$ by Example 3 of P.21 in [Sko01]. The projection map $G \times_k Y \xrightarrow{pr_G} G$ induces the following commutative diagram

$$(5.2.0.2) \quad \begin{array}{ccc} G \times_k Y & \longrightarrow & Z = G \times^H Y \\ \downarrow pr_G & & \downarrow \theta \\ G & \xrightarrow{\pi} & G/H \end{array}$$

where θ is given via the quotient by H .

Lemma 5.2.2. *With the above notations, for any $\gamma \in (G/H)(k)$, the restriction of $Z \xrightarrow{p} X$ to $\theta^{-1}(\gamma) \xrightarrow{p} X$ is a left torsor under H^σ obtained by twisting $Y \xrightarrow{f} X$ by the k -torsor $\pi^{-1}(\gamma)$ under H .*

Démonstration. It follows from the diagram (5.2.0.2) and Example 2 of P.20 in [Sko01]. \square

Lemma 5.2.3. *Let G be a connected linear algebraic group over k and Y be a smooth variety over k . If P is a (left) torsor under G over k and $H^3(k, \bar{k}^\times) = 0$, then*

$$h : \text{Br}_a(G \times_k Y) = \text{Br}_a(G) \oplus \text{Br}_a(Y) \cong \text{Br}_a(P) \oplus \text{Br}_a(Y) \xrightarrow{(pr_P^*, pr_Y^*)} \text{Br}_a(P \times_k Y)$$

is an isomorphism, where the first identification is defined via the element $1 \in G(k)$ by Lemma 6.6 in [S], the second one is Lemma 6.8 in [S] and

$$P \times_k Y \xrightarrow{pr_P} P, \quad P \times_k Y \xrightarrow{pr_Y} Y$$

are the projection maps.

Démonstration. By the spectral sequence $H^p(k, H_{et}^q(X_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H_{et}^{p+q}(X, \mathbb{G}_m)$, using $H^3(k, \bar{k}^\times) = 0$, one has the following commutative diagram of short exact sequences

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Pic}(G_Y)_{\bar{k}} & \longrightarrow & H^2(k, (G_Y^*)_{\bar{k}}) & \longrightarrow & \text{Br}_a(G_Y) & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(G_Y)_{\bar{k}}) & \longrightarrow & H^3(k, (G_Y^*)_{\bar{k}}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow h & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \text{Pic}(P_Y)_{\bar{k}} & \longrightarrow & H^2(k, (P_Y^*)_{\bar{k}}) & \longrightarrow & \text{Br}_a(P_Y) & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(P_Y)_{\bar{k}}) & \longrightarrow & H^3(k, (P_Y^*)_{\bar{k}}) \end{array}$$

where the vertical morphisms come from Lemma 6.5, Lemma 6.6 and Lemma 6.7 in [S], with

$$G_Y = G \times_k Y, \quad P_Y = P \times_k Y, \quad (G_Y^*)_{\bar{k}} = \bar{k}[G_Y]^\times / \bar{k}^\times \quad \text{and} \quad (P_Y^*)_{\bar{k}} = \bar{k}[P_Y]^\times / \bar{k}^\times.$$

This implies that h an isomorphism. \square

Définition 5.2.4. Let G be a connected linear algebraic group over k and X be a smooth variety over k . Assuming $H^3(k, \bar{k}^\times) = 0$. Suppose $Y \xrightarrow{f} X$ is a left torsor under G over k and P is a left torsor under G over k representing $\sigma \in H^1(k, G)$. The quotient map

$$\chi_P : P \times_k Y \rightarrow Y^\sigma = P' \times^G Y$$

defines

$$\psi_\sigma : \text{Br}_a(Y^\sigma) \xrightarrow{\chi_P^*} \text{Br}_a(P \times_k Y) \xrightarrow{h^{-1}} \text{Br}_a(G \times_k Y) \xrightarrow{(1_G \times id_Y)^*} \text{Br}_a(Y)$$

by Lemma 5.2.3, where P' is inverse right torsor of P under G over k and 1_G is the unit element of $G(k)$.

The following lemma can be regarded as an extension Lemma 1.3 in [Wei16] to torsors under connected linear algebraic groups.

Lemme 5.2.5. *The morphism ψ_σ in Definition 5.2.4 is an isomorphism.*

Démonstration. Since P can be viewed a right torsor under G^σ over k , the inverse map of the twisting bijection

$$H^1(X, G) \xrightarrow{t_P} H^1(X, G^\sigma); \quad [Y] \mapsto [P' \times_k^G Y]$$

is given by

$$H^1(X, G^\sigma) \xrightarrow{t_P^{-1}} H^1(X, G); \quad [Y] \mapsto [P \times_k^{G^\sigma} Y].$$

Then one has the quotient map $P \times_k Y^\sigma \xrightarrow{\delta_P} P \times_k^{G^\sigma} Y^\sigma = Y$. Moreover, the following diagram

$$\begin{array}{ccc} P \times_k Y & \xrightarrow{(pr_P, \chi_P)} & P \times_k Y^\sigma \\ \downarrow pr_P & & \downarrow pr_P \\ P & \xrightarrow{id} & P \end{array}$$

commutes and (pr_P, χ_P) is an isomorphism with inverse map (pr_P, δ_P) . By Lemma 5.2.3, one has

$$\text{Br}_a(Y^\sigma) = \text{Br}_a(P \times_k Y^\sigma) / pr_P^*(\text{Br}_a(P)) \cong \text{Br}_a(P \times_k Y) / pr_P^*(\text{Br}_a(P)) = \text{Br}_a(Y)$$

induced by (pr_P, χ_P) . Since the following diagram

$$\begin{array}{ccc} & \text{Br}_a(Y^\sigma) & \\ & \downarrow \chi_P^* & \\ \text{Br}_a(P) & \xrightarrow{pr_P^*} & \text{Br}_a(P \times_k Y) \\ \downarrow \cong & & \downarrow h^{-1} \\ \text{Br}_a(G) r pr_G^* & & \text{Br}_a(G \times_k Y) \xrightarrow{(1_G \times id_Y)^*} \text{Br}_a(Y) \end{array}$$

commutes with the exact bottom line, one concludes that ψ_σ is an isomorphism as desired. \square

One can interpret Theorem 2.8 in [BD] as the following proposition.

Proposition 5.2.6. *Let $f : Y \rightarrow X$ be a torsor under a connected linear algebraic group G over a number field k and $\lambda : \mathrm{Br}_1(Y) \rightarrow \mathrm{Br}_a(G)$ be the canonical map of Lemma 6.4 in [S]. Assume X is smooth and geometrically integral. For any $x \in Y(k)$ and $t \in G(k)$, one has*

$$b(t \cdot x) = \lambda(b)(t) + b(x)$$

for any $b \in \mathrm{Br}_1(Y)$.

Démonstration. Let $a_Y : G \times_k Y \rightarrow Y$ be the action of G and

$$p_G : G \times_k Y \rightarrow G \quad \text{and} \quad p_Y : G \times_k Y \rightarrow Y$$

be the two respective projections, and $e : \mathrm{Br}_a(G) \rightarrow \mathrm{Br}_1(G)$ be a section of $\mathrm{Br}_1(G) \rightarrow \mathrm{Br}_a(G)$ such that $1_G^* \circ e = 0$. Then

$$a_Y^* - p_Y^* = p_G^* \circ e \circ \lambda : \mathrm{Br}_1(Y) \rightarrow \mathrm{Br}_1(G \times Y)$$

by the commutative diagram of Theorem 2.8 in [BD]. Therefore

$$b(t \cdot x) = a_Y^*(b)(t, x) = p_Y^*(b)(t, x) + p_G^* \circ e \circ \lambda(b)(t, x) = b(x) + \lambda(b)(t)$$

for any $x \in Y(k)$, $t \in G(k)$ and $b \in \mathrm{Br}_1(Y)$. □

5.3 Connected linear algebraic groups or groups of multiplicative type

In this section, we study the relation between descent obstruction and Brauer-Manin obstruction for a general connected algebraic group or a group of multiplicative type. First we need the following fact of topological groups.

Lemme 5.3.1. *Let $f : M \rightarrow N$ be an open homomorphism of topological groups. If K is a closed subgroup of M containing $\ker(f)$, then $f(K)$ is a closed subset of N .*

Démonstration. Since K is a closed subgroup containing $\ker(f)$, one has

$$f(K) = f(M) \setminus f(M \setminus K).$$

Since f is an open homomorphism, $f(M)$ is an open subgroup of N . This implies $f(M)$ is closed in N . Since $f(M \setminus K)$ is open in N , one concludes that $f(K)$ is closed in N . □

Remarque 5.3.2. The assumption $K \supseteq \ker(f)$ in Lemma 5.3.1 can not be removed. For example, the projection map $pr^S : \mathbb{A}_k \rightarrow \mathbb{A}_k^S$ is open where \mathbb{A}_k^S is the adèles of k without S -component. It is clear that k is a discrete subgroup of \mathbb{A}_k by the product formula. However k will be dense in \mathbb{A}_k^S by strong approximation for \mathbb{G}_a when S is not empty.

For a short exact sequence of connected linear algebraic groups, one has the following result.

Proposition 5.3.3. *Let*

$$1 \rightarrow G_1 \xrightarrow{\psi} G_2 \xrightarrow{\phi} G_3 \rightarrow 1$$

be a short exact sequence of connected linear algebraic groups over a number field k . Then

(1) $\phi(G_2(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(G_2)})$ is a closed subset of $G_3(\mathbb{A}_k)$.

(2) If $G'(k_\infty)$ is not compact for each simple factor G' of semi-simple part of G_3 , one has

$$G_3(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(G_3)} = G_3(k) \cdot \phi(G_2(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(G_2)}).$$

Démonstration. Galois cohomology gives the following diagram of exact sequences

$$\begin{array}{ccccccc} G_1(k) & \xrightarrow{\psi} & G_2(k) & \xrightarrow{\phi} & G_3(k) & \xrightarrow{\partial} & H^1(k, G_1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G_1(\mathbb{A}_k) & \xrightarrow{(\psi_v)} & G_2(\mathbb{A}_k) & \xrightarrow{(\phi_v)} & G_3(\mathbb{A}_k) & \xrightarrow{(\partial_v)} & \bigoplus_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, G_1). \end{array}$$

One further has the following commutative diagram of exact sequences of topological groups and pointed topological spaces

$$\begin{array}{ccccccc} & & G_1(\mathbb{A}_k) & \xrightarrow{\theta_1} & \mathrm{Br}_a(G_1)^D & \longrightarrow & \mathrm{III}^1(k, G_1) \\ & & \downarrow (\psi_v) & & \downarrow (\psi^*)^D & & \\ 1 & \longrightarrow & \ker(\theta_2) & \longrightarrow & G_2(\mathbb{A}_k) & \xrightarrow{\theta_2} & \mathrm{Br}_a(G_2)^D \\ & & \downarrow (\phi_v) & & \downarrow (\phi^*)^D & & \\ 1 & \longrightarrow & \ker(\theta_3) & \longrightarrow & G_3(\mathbb{A}_k) & \xrightarrow{\theta_3} & \mathrm{Br}_a(G_3)^D \\ & & \downarrow (\partial_v) & & & & \\ & & \bigoplus_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, G_1) & & & & \end{array}$$

by Theorem 5.1 [D11b] and Corollary 6.11 in [S], where $\mathrm{Br}_a(G_i)^D$ is the topological dual of discrete group $\mathrm{Br}_a(G_i)$ for $1 \leq i \leq 3$. Then $\theta_1(G_1(\mathbb{A}_k))$ is a closed subgroup of $\mathrm{Br}_1(G)^D$. Since $(\psi^*)^D$ is a closed map, one obtains that $(\psi^*)^D(\theta_1(G_1(\mathbb{A}_k)))$ is a closed subgroup of $\mathrm{Br}_1(G_2)^D$. This implies that

$$\ker(\theta_2) \cdot \psi(G_1(\mathbb{A}_k)) = \theta_2^{-1}[(\psi^*)^D(\theta_1(G_1(\mathbb{A}_k)))]$$

is a closed subgroup of $G_2(\mathbb{A}_k)$ by the above commutative diagram. By Proposition 6.5 in Chapter 6 of [PR], one has that $\phi : G_2(\mathbb{A}_k) \rightarrow G_3(\mathbb{A}_k)$ is an open homomorphism of topological groups. Then $\phi(\ker(\theta_2)) = \phi(G_2(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(G_2)})$ is closed by Lemma 5.3.1 and (1) follows.

For (2), one has

$$\ker(\theta_3) = G_3(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(G_3)} = \overline{G_3(k) \cdot G_3(k_\infty)^0}$$

by Corollary 3.20 in [D11b] (see also the proof of Proposition 4.5 in [CX2]), where $G_3(k_\infty)^0$ is the connected component of identity with respect to the topology of k_∞ . One only needs to show

$$G_3(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(G_3)} \subseteq G_3(k) \cdot \phi(G_2(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(G_2)}).$$

For any $(x_v) \in \overline{G_3(k) \cdot G_3(k_\infty)^0}$, there is $h \in G_3(k)$ and $h_\infty \in G_3(k_\infty)$ such that

$$(\partial_v)(h \cdot h_\infty) = (\partial_v)(x_v)$$

because (∂_v) is a continuous map with respect to the discrete topology of $\bigoplus_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, G_1)$. Since $\phi_\infty(G_2(k_\infty)^0)$ is open and connected, one concludes

$$G_3(k_\infty)^0 = \phi_\infty(G_2(k_\infty)^0)$$

by finiteness of $H^1(k_\infty, G_1)$. Therefore

$$(h \cdot h_\infty) \in G_3(k) \cdot \phi(G_2(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(G_2)})$$

and one can replace (x_v) by $(h \cdot h_\infty)^{-1} \cdot (x_v)$. Without loss of generality, one can assume $(\partial_v)(x_v)$ is a trivial element in $\bigoplus_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, G_1)$.

Since $\text{III}^1(k, G_1)$ is finite, one can fix ξ_1, \dots, ξ_n in $G_3(k)$ such that each element of $\text{III}^1(k, G_1)$ from $\partial(G_3(k))$ is represented by them. Noting $\partial_\infty(h_\infty)$ is trivial for any $h_\infty \in G_3(k_\infty)^0$, one concludes that

$$(x_v) \in \overline{\bigcup_{i=1}^n \xi_i \phi(\ker(\theta_2))} = \bigcup_{i=1}^n \xi_i \cdot \overline{\phi(\ker(\theta_2))} \subseteq G_3(k) \cdot \phi(G_2(A_k))^{\text{Br}_1(G_2)}$$

by Corollary 1 in Page 50 of [Se] and (1). \square

The main result of this section is the following theorem.

Théorème 5.3.4. *Let X be a smooth and geometrically integral variety and $f : Y \rightarrow X$ be a left torsor under a linear algebraic group G over a number field k . Then one has*

$$X(A_k)^A = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma \left(Y^\sigma(A_k)^{f_\sigma^*(A)} \right)$$

where $Y^\sigma \xrightarrow{f_\sigma} X$ is the twist of f by σ and $\text{Br}(X) \xrightarrow{f_\sigma^*} \text{Br}(Y^\sigma)$ for each $\sigma \in H^1(k, G)$ if one of the following conditions holds :

(1) G is connected and $\ker(f^*) \subseteq A \subseteq \text{Br}(X)$.

(2) G is a group of multiplicative type and $\mathcal{K} \subseteq A \subseteq \text{Br}(X)$ where \mathcal{K} is a group generated by $\chi \cup [Y]$ for all $\chi \in H^1(k, \hat{G})$.

Démonstration. By the functoriality of Brauer-Manin pairing, one only needs to show that

$$X(A_k)^A \subseteq \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma(Y^\sigma(A_k)^{f_\sigma^*(A)}).$$

It is clear that

$$(5.3.0.1) \quad (x_v) \in \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma(Y^\sigma(A_k)) \Leftrightarrow ([Y](x_v)) \in \text{Im}[H^1(k, G) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, G)].$$

(1) When G is connected, (5.3.0.1) is equivalent to the fact that $([Y](x_v))$ is orthogonal to $\text{Pic}(G)$ by Theorem 3.1 in [CTX09]. Therefore

$$X(A_k)^{\ker(f^*)} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma(Y^\sigma(A_k))$$

by Proposition 2.9 in [CTX09] and Theorem 2.8 in [BD]. Since $\ker(f^*) \subseteq A$, one has

$$X(A_k)^A \subseteq X(A_k)^{\ker(f^*)} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma(Y^\sigma(A_k)).$$

Then the functoriality of Brauer-Manin pairing implies that

$$X(A_k)^A \subseteq \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma(Y^\sigma(A_k)^{f_\sigma^*(A)}).$$

(2) When G is a group of multiplicative type, (5.3.0.1) is equivalent to

$$\sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(\chi \cup [Y])(x_v) = 0$$

for all $\chi \in H^1(k, \hat{G})$ by Theorem 6.3 in [D11a]. Then

$$X(\mathbb{A}_k)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_{\sigma}(Y^{\sigma}(\mathbb{A}_k))$$

by Proposition 3.1 in [HS13]. Since $\mathcal{K} \subseteq A$, one has

$$X(\mathbb{A}_k)^A \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_{\sigma}(Y^{\sigma}(\mathbb{A}_k)).$$

Then the functoriality of Brauer-Manin pairing implies that

$$X(\mathbb{A}_k)^A \subseteq \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_{\sigma}(Y^{\sigma}(\mathbb{A}_k)^{f_{\sigma}^*(A)}).$$

□

Remarque 5.3.5. Since Y becomes trivial over Y , one can check that $\mathcal{K} \subseteq \ker(f^*)$ in case (2) of Theorem 5.3.4.

5.4 Refinement in the toric case

In this section, we will refine Theorem 5.3.4 for torsors under tori.

Théorème 5.4.1. *Let $f : Y \rightarrow X$ be a torsor under a torus G over a number field k . Assume that X is smooth and geometrically integral. Let $\ker(f^*) \subseteq A \subseteq \mathrm{Br}(X)$ be a subgroup and for all $\sigma \in H^1(k, G)$, let $B_{\sigma} \subseteq \mathrm{Br}_1(Y^{\sigma})$ be a subgroup such that*

$$f^{*-1} \left(\sum_{\sigma \in H^1(k, G)} \psi_{\sigma}(\widetilde{B}_{\sigma}) \right) \subseteq A$$

where $\mathrm{Br}_a(Y^{\sigma}) \xrightarrow{\psi_{\sigma}} \mathrm{Br}_a(Y)$ is the morphism of Definition 5.7.2 and \widetilde{B}_{σ} is the image of B_{σ} in $\mathrm{Br}_a(Y^{\sigma})$.

Then one has

$$X(\mathbb{A}_k)^A = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_{\sigma}(Y^{\sigma}(\mathbb{A}_k)^{B_{\sigma} + f_{\sigma}^*(A)})$$

where $Y^{\sigma} \xrightarrow{f_{\sigma}} X$ is the twist of $Y \xrightarrow{f} X$ by σ and $\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{f_{\sigma}^*} \mathrm{Br}(Y^{\sigma})$ for each $\sigma \in H^1(k, G)$.

Démonstration. Since

$$\bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_{\sigma}(Y^{\sigma}(\mathbb{A}_k)^{B_{\sigma} + f_{\sigma}^*(A)}) \subseteq \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_{\sigma}(Y^{\sigma}(\mathbb{A}_k)^{f_{\sigma}^*(A)}) \subseteq X(\mathbb{A}_k)^A$$

by the functoriality of Brauer-Manin pairing, one only needs to show the converse inclusion.

Step 1. We first prove the result is true when \hat{G} is a permutation Galois module. In this case, one has $H^1(K, G) = \{1\}$ for any field extension K/k by Shapiro Lemma and Hilbert 90. This implies that

$$X(\mathbb{A}_k)^A = f(Y(\mathbb{A}_k)^{f^*(A)})$$

by the functoriality of Brauer-Manin pairing. For any $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)^A$, there is $(y_v) \in Y(\mathbb{A}_k)^{f^*(A)}$ such that $(x_v) = f((y_v))$. By Proposition 6.10 (6.10.3) in [S], one obtains the exact sequence

$$\mathrm{Br}_1(X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Br}_1(Y) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Br}_a(G)$$

which induces the exact sequence

$$(f^*)^{-1}(B) \xrightarrow{f^*} B \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Br}_a(G)$$

for any subgroup $B \subseteq \mathrm{Br}_1(Y)$. Therefore the following sequence

$$\mathrm{Br}_a(G)^D \xrightarrow{\lambda^D} B^D \xrightarrow{(f^*)^D} ((f^*)^{-1}(B))^D$$

is exact. Assuming $(f^*)^{-1}(\tilde{B}) \subseteq A$, one has $(f^*)^D((y_v)) = 0$ by viewing $(y_v) \in B^D$ through Brauer-Manin pairing. By the aforementioned exactness, there is $\xi \in \mathrm{Br}_a(G)^D$ such that $\lambda^D(\xi) = (y_v)$. Since $\mathrm{III}^1(k, G) = \{1\}$, Theorem 2 in [Ha08] implies that every element in $\mathrm{Br}_a(G)^D$ is given by an element in $G(\mathbb{A}_k)$ through the Brauer-Manin pairing. Namely, there is $(g_v) \in G(\mathbb{A}_k)$ such that

$$b(y_v) = \lambda(b)(g_v)$$

for all $b \in B$. Then $(g_v)^{-1} \cdot (y_v) \in Y(\mathbb{A}_k)^{B+f^*(A)}$ by Proposition 5.2.6 and $(x_v) = f((g_v)^{-1} \cdot (y_v))$.

Step 2. For general G , we have the following short exact sequence of tori

$$1 \rightarrow G \rightarrow T_0 \xrightarrow{q} T_1 \rightarrow 1$$

such that \hat{T}_0 is a permutation Galois module and \hat{T}_1 is a coflasque Galois module by using a flasque resolution of the Galois module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\hat{G}, \mathbb{Z})$, see Proposition-Definition 3.1 in [CT08]. Since

$$H^3(k, \hat{T}_1) \cong \prod_{v \in \infty_k} H^3(k_v, \hat{T}_1) \cong \prod_{v \in \infty_k} H^1(k_v, \hat{T}_1) = \{1\}$$

by Proposition 5.9 in [HSz05], one concludes that the map $\mathrm{Br}_1(T_0) \rightarrow \mathrm{Br}_1(G)$ is surjective.

Let $Z \xrightarrow{\rho} X$ be a torsor under T_0 which represents the image of $[Y]$ in $H^1(T_0, X)$. Then Z is isomorphic to $T_0 \times^G Y$, hence we have the following morphism of torsors under G

$$\begin{array}{ccc} Y \xrightarrow{e_0 \times id_Y} T_0 \times_k Y & \xrightarrow{\chi} & Z = T_0 \times^G Y \\ \downarrow p_0 & & \downarrow \theta \\ T_0 & \xrightarrow{q} & T_1 \end{array}$$

where e_0 is the unit element in $T_0(k)$, p_0 is the projection map and θ is given as in diagram (5.2.0.2). Then one has the following commutative diagram of exact sequences

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Br}_1(T_1) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{Br}_1(T_0) & \longrightarrow & \mathrm{Br}_a(G) \\ \downarrow \theta^* & & \downarrow p_0^* & & \downarrow id \\ \mathrm{Br}_1(Z) & \xrightarrow{\chi^*} & \mathrm{Br}_1(T_0 \times_k Y) & \longrightarrow & \mathrm{Br}_a(G) \end{array}$$

by Proposition 6.10 (6.10.3) in [S]. Since the following sequence

$$\mathrm{Br}_1(T_0) \xrightarrow{p_0^*} \mathrm{Br}_1(T_0 \times_k Y) \xrightarrow{(e_0 \times id_Y)^*} \mathrm{Br}_a(Y) \rightarrow 1$$

is exact by Lemma 6.6 in [S] and the map $\mathrm{Br}_1(T_0) \rightarrow \mathrm{Br}_1(G)$ is surjective, one concludes that the map

$$(e_0 \times id_Y)^* \circ \chi^* : \mathrm{Br}_1(Z) \rightarrow \mathrm{Br}_1(Y)$$

is surjective by diagram chase.

For any $t \in T_1(k)$, the restriction of $Z \xrightarrow{\rho} X$ to the closed set $\theta^{-1}(t)$ is the twist

$$f^{\partial(t)} : Y^{\partial(t)} \rightarrow X \quad \text{of} \quad f : Y \rightarrow X$$

by Lemma 5.2.2, where $T_1(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k, G)$ is given by Galois cohomology. Let $i_t : \theta^{-1}(t) \rightarrow Z$ be the closed immersion for any $t \in T_1(k)$. Then $f^{\partial(t)} = \rho \circ i_t$ for any $t \in T_1(k)$. Since one has the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} q^{-1}(t) \times_k Y^{\chi_{q^{-1}(t)}} & \xrightarrow{\chi_{q^{-1}(t)}} & Y^{\partial(t)} \\ \downarrow j_t \times id_Y & & \downarrow i_t \\ T_0 \times_k Y & \xrightarrow{\chi} & Z \end{array}$$

where $j_t : q^{-1}(t) \rightarrow T_0$ is the closed immersion of fiber of q at t and $\chi_{q^{-1}(t)}$ is the restriction of χ to $q^{-1}(t) \times_k Y$ for any $t \in T_1(k)$, one obtains that

$$\begin{array}{ccc} \text{Br}_1(Z) & \xrightarrow{\chi^*} & \text{Br}_1(T_0 \times_k Y) \\ \downarrow i_t^* & & \downarrow (j_t \times id_Y)^* \\ \text{Br}_1(Y^{\partial(t)}) & \xrightarrow{\chi_{q^{-1}(t)}^*} & \text{Br}_1(q^{-1}(t) \times_k Y) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \text{Br}_1(Y) & \xrightarrow{=} & \text{Br}_1(Y) \\ \downarrow pr_Y^* & & \downarrow pr_Y^* \\ \text{Br}_1(T_0 \times_k Y) & \xrightarrow{(j_t \times id_Y)^*} & \text{Br}_1(q^{-1}(t) \times_k Y) \end{array}$$

where both pr_Y^* are injective by Lemma 5.2.3. By Definition 5.2.4, one has

$$\psi_{\partial(t)} = (e_0 \times id_Y)^* \circ (j_t \times id_Y)^* |_{pr_Y^*(\text{Br}_1(Y))}^{-1} \circ \chi_{q^{-1}(t)}^*$$

and $\psi_{\partial(t)} \circ i_t^* = (e_0 \times id_Y)^* \circ \chi^*$.

Let

$$B = [(\chi \circ (e_0 \times id_Y))^*]^{-1} \left(\sum_{t \in T_1(k)} \psi_{\partial(t)}(\widetilde{B_{\partial(t)}}) \right) \cap \text{Br}_1(Z)$$

where $\widetilde{B_{\partial(t)}}$ is the image of $B_{\partial(t)}$ in $\text{Br}_a(Y^{\partial(t)})$ and $\psi_{\partial(t)}$ is given by Definition 5.2.4 for all $t \in T_1(k)$. Since

$$(\chi \circ (e_0 \times id_Y))^* \circ \rho^* = f^* \quad \text{implies} \quad \rho^{*-1}(B) = f^{*-1} \left(\sum_{t \in T_1(k)} \psi_{\partial(t)}(\widetilde{B_{\partial(t)}}) \right) \subseteq A,$$

by our assumption, one has

$$X(\mathbb{A}_k)^A = \rho(Z(\mathbb{A}_k)^{B+\rho^*(A)})$$

by Step 1 for torsor $Z \xrightarrow{\rho} X$ under T_0 . For any $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)^A$, there is $(z_v) \in Z(\mathbb{A}_k)^{B+\rho^*(A)}$ such that $(x_v) = \rho((z_v))$. Since

$$(\chi \circ (e_0 \times id_Y))^* \circ \theta^*(\text{Br}_1(T_1)) = (e_0 \times id_Y)^* \circ p_0^* \circ q^*(\text{Br}_1(T_1)) = \text{Br}_0(Y)$$

and $(\chi \circ (e_0 \times id_Y))^*(\text{Br}_0(Z)) = \text{Br}_0(Y)$, one obtains $\theta^*(\text{Br}_1(T_1)) \subseteq \text{Br}_0(Z) + B$. This implies that

$$\theta((z_v)) \in T_1(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(T_1)}$$

by the functoriality of Brauer-Manin pairing. By Proposition 5.3.3, there are

$$\alpha \in T_1(k) \quad \text{and} \quad (\beta_v) \in T_0(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(T_0)}$$

such that $\theta((z_v)) = \alpha \cdot (\beta_v)$. Therefore

$$(\beta_v)^{-1} \cdot (z_v) \in \theta^{-1}(\alpha) \quad \text{and} \quad (\beta_v)^{-1} \cdot (z_v) \in Z(\mathbf{A}_k)^{B+\rho^*(A)}.$$

Since $(\chi \circ (e_0 \times id_Y))^*$ is surjective, one has

$$\psi_{\partial(\alpha)} \circ i_\alpha^*(\widetilde{B}) = (\chi \circ (e_0 \times id_Y))^*(\widetilde{B}) = \sum_{t \in T_1(k)} \psi_{\partial(t)}(\widetilde{B_{\partial(t)}}) \supseteq \psi_{\partial(\alpha)}(\widetilde{B_{\partial(\alpha)}})$$

where \widetilde{B} is the image of B in $\mathrm{Br}_a(Z)$. This implies $i_\alpha^*(B) + \mathrm{Br}_0(\theta^{-1}(\alpha)) \supseteq B_{\partial(\alpha)}$ by Lemma 5.2.5 and

$$(\beta_v)^{-1} \cdot (z_v) \in \theta^{-1}(\alpha)(\mathbf{A}_k)^{i_\alpha^*(B) + [(i_\alpha^* \circ \rho^*)(A)]} \subseteq \theta^{-1}(\alpha)(\mathbf{A}_k)^{B_{\partial(\alpha)} + [(i_\alpha^* \circ \rho^*)(A)]}$$

as desired. \square

The first part of the following result is also proved in Theorem 1.7 of [Wei16].

Corollaire 5.4.2. *Let X be a smooth and geometrically integral variety. If $f : Y \rightarrow X$ is a torsor under a torus G over a number field k , then*

$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(X)} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma(Y^\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(Y^\sigma)})$$

and

$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma(Y^\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(Y^\sigma) + f_\sigma^*(\mathrm{Br}(X))}).$$

Démonstration. Take $A = \mathrm{Br}_1(X)$ and $B_\sigma = \mathrm{Br}_1(Y^\sigma)$ for each $\sigma \in H^1(k, G)$ in Theorem 5.4.1 for the first part. Since $\mathrm{Pic}(G_k) = 0$, one has

$$f^{*-1} \left(\sum_{\sigma \in H^1(k, G)} \psi_\sigma(\widetilde{B}_\sigma) \right) \subseteq f^{*-1}(\mathrm{Br}_a(Y)) \subseteq \mathrm{Br}_1(X) = A$$

as required by Proposition 6.10 in [S].

The second part follows from Theorem 5.4.1 by taking $A = \mathrm{Br}(X)$ and $B_\sigma = \mathrm{Br}_1(Y^\sigma)$ for each $\sigma \in H^1(k, G)$. \square

5.5 An application

In this section, we apply the previous results to study the necessary conditions for a connected linear algebraic group satisfying strong approximation with Brauer-Manin obstruction.

When X is affine, one has $X(k)$ is discrete in $X(\mathbf{A}_k)$ by the product formula. Therefore X satisfying strong approximation off S implies that $\prod_{v \in S} X(k_v)$ is not compact. However this necessary condition for strong approximation is no longer true for strong approximation with Brauer-Manin obstruction if $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ is not finite. For example, a torus X always satisfies strong approximation with Brauer-Manin obstruction off ∞_k whenever X is anisotropic over k_∞ or not. When X is a semi-simple linear algebraic group, the necessary and sufficient condition for X satisfying strong approximation with Brauer-Manin obstruction is given by Proposition 6.1 in [CX2]. In this section, we'll extend this result to a general connected linear algebraic group.

The following lemma explains that strong approximation with Brauer-Manin obstruction for a general connected linear algebraic group can be reduced to the reductive case.

Lemme 5.5.1. *Let G be a connected linear algebraic group over a number field k and $G^{\text{red}} = G/R_u(G)$ be the reductive part of G where $R_u(G)$ is the unipotent radical of G . If $\pi : G \rightarrow G^{\text{red}}$ is the quotient map, then $G^{\text{red}}(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G^{\text{red}})} = \pi(G(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G)})$.*

In particular, for any finite subset S of Ω_k , G satisfies strong approximation with respect to $\text{Br}_1(G)$ off S if and only if G^{red} satisfies strong approximation with respect to $\text{Br}_1(G^{\text{red}})$ off S .

Démonstration. By applying Lemma 5.2.1 for k and \bar{k} , one obtains that $\pi^*(\text{Br}_1(G^{\text{red}})) = \text{Br}_1(G)$. The first part follows from Theorem 5.3.4 and Proposition 6 of §2.1 of Chapter III in [Se].

Suppose G satisfies strong approximation with respect to $\text{Br}_1(G)$ off S . For any open subset

$$M = \left[\prod_{v \in S} G^{\text{red}}(k_v) \right] \times \prod_{v \notin S} M_v$$

of $G^{\text{red}}(\mathbb{A}_k)$ such that $M \cap [G^{\text{red}}(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G^{\text{red}})}] \neq \emptyset$, one has that

$$\pi^{-1}(M) = \left[\prod_{v \in S} G(k_v) \right] \times \prod_{v \notin S} \pi^{-1}(M_v)$$

with $\pi^{-1}(M) \cap G(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G)} \neq \emptyset$ by the first part. Then there is $x \in G(k) \cap \pi^{-1}(M)$ by the assumption. This implies that $\pi(x) \in M \cap G^{\text{red}}(k)$ as required.

Conversely, suppose G^{red} satisfies strong approximation with respect to $\text{Br}_1(G^{\text{red}})$ off S . For any open subset

$$N = \left[\prod_{v \in S} G(k_v) \right] \times \prod_{v \notin S} N_v$$

of $G(\mathbb{A}_k)$ such that $N \cap G(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G)} \neq \emptyset$, one has

$$\pi(N) = \left[\prod_{v \in S} G^{\text{red}}(k_v) \right] \times \prod_{v \notin S} \pi(N_v)$$

is an open subset of $G^{\text{red}}(\mathbb{A}_k)$ with $\pi(N) \cap [G^{\text{red}}(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G^{\text{red}})}] \neq \emptyset$ by Proposition 6 of §2.1 of Chapter III in [Se], Proposition 6.5 in Chapter 6 of [PR] and the functoriality of Brauer-Manin pairing. Then there is $y \in G^{\text{red}}(k) \cap \pi(N)$ by the assumption. By Proposition 6 of §2.1 of Chapter III in [Se] again, one concludes that $\pi^{-1}(y) \cong R_u(G)$ as algebraic varieties and satisfies strong approximation off S . Since

$$\pi^{-1}(y) \cap N = \prod_{v \in S} \pi^{-1}(y)(k_v) \times \prod_{v \notin S} (\pi^{-1}(y)(k_v) \cap N) \neq \emptyset,$$

there is $z \in \pi^{-1}(y)(k) \cap N \subset G(k) \cap N$ as desired. \square

The main result of this section is the following result.

Théorème 5.5.2. *Let G be a connected linear algebraic group over a number field k and $G^{\text{qs}} = G/R(G)$ where $R(G)$ is the solvable radical of G . If $\pi : G \rightarrow G^{\text{qs}}$ is the quotient map, then*

$$G^{\text{qs}}(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G^{\text{qs}})} = \pi(G(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G)}) \cdot G^{\text{qs}}(k).$$

In particular, if G satisfies strong approximation with respect to $\text{Br}_1(G)$ off a finite subset S of Ω_k , then G^{qs} satisfies strong approximation with respect to $\text{Br}_1(G^{\text{qs}})$ off S .

Démonstration. For the first part, one only needs to show

$$G^{\text{qs}}(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G^{\text{qs}})} \subseteq \pi(G(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G)}) \cdot G^{\text{qs}}(k)$$

by functoriality of Brauer-Manin pairing. By Lemma 5.5.1, we can assume G is reductive. Then $R(G)$ is a torus contained in the center of G by Theorem 2.4 in Chapter 2 of [PR] and $\pi : G \rightarrow G^{qs}$ is a torsor under $R(G)$. For any $(x_v) \in G^{qs}(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G^{qs})}$, there are $\sigma \in H^1(k, R(G))$ and $(y_v) \in G^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G^\sigma)}$ such that $(x_v) = \pi_\sigma((y_v))$ by Corollary 5.4.2. Since $G^\sigma(k) \neq \emptyset$ by Corollary 8.7 in [S] (see also Theorem 5.2.1[Sko99]), there is $\gamma \in G^{qs}(k)$ such that $\partial(\gamma) = \sigma$ with the following exact sequence

$$1 \rightarrow R(G)(k) \rightarrow G(k) \rightarrow G^{qs}(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k, R(G)) \rightarrow H^1(k, G)$$

by Galois cohomology. Moreover, one has the following isomorphism of left G -torsors

$$\begin{array}{ccc} G^\sigma & \xrightarrow{\cong} & G \\ \downarrow \pi_\sigma & & \downarrow \pi \\ G^{qs} & \xrightarrow{\cdot \gamma^{-1}} & G^{qs} \end{array}$$

by Example 2 of P.20 in [Sko99]. This implies that

$$\pi_\sigma(G^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G^\sigma)}) = \pi(G(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G)}) \cdot \gamma$$

as desired.

Suppose G satisfies strong approximation with respect to $\text{Br}_1(G)$ off S . For any open subset

$$M = \left[\prod_{v \in S} G^{qs}(k_v) \right] \times \prod_{v \notin S} M_v$$

of $G^{qs}(\mathbb{A}_k)$ such that $M \cap [G^{qs}(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G^{qs})}] \neq \emptyset$, there is $g \in G^{qs}(k)$ such that

$$\pi^{-1}(M \cdot g) = \left[\prod_{v \in S} G(k_v) \right] \times \prod_{v \notin S} \pi^{-1}(M_v \cdot g)$$

with $\pi^{-1}(M \cdot g) \cap G(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G)} \neq \emptyset$ by the first part. Then there is $x \in G(k) \cap \pi^{-1}(M \cdot g)$ by the assumption. This implies that $\pi(x) \cdot g^{-1} \in M \cap G^{qs}(k)$ as required. \square

Corollaire 5.5.3. *Let G be a connected linear algebraic group over a number field k and S be a finite subset of Ω_k containing ∞_k . Then G satisfies strong approximation with respect to $\text{Br}_1(G)$ off S if and only if $\prod_{v \in S} G'(k_v)$ is not compact for any non-trivial simple factor G' of the semi-simple part G^{ss} of G .*

Démonstration. By Theorem 2.3 and Theorem 2.4 of Chapter 2 in [PR], the quotient map

$$G^{\text{red}} \rightarrow G/R(G) = G^{qs}$$

induces an isogeny $G^{ss} \rightarrow G^{qs}$. One side follows from Corollary 3.20 in [D11b]. The other side follows from Theorem 5.5.2 and Proposition 6.1 in [CX2]. \square

Remarque 5.5.4. All the results in this section with respect to $\text{Br}_1(G)$ is also true with respect to $\text{Br}(G)$ for a connected linear algebraic group G over a number field k . Indeed, since there is a sufficiently large subset S of Ω_k containing ∞_k such that $\prod_{v \in S} G'(k_v)$ is not compact for any non-trivial simple factor G' of G^{ss} , one concludes that

$$G(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G)} = \overline{G(k) \cdot \rho\left(\prod_{v \in S} G^{\text{scu}}(k_v)\right)} \subseteq G(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}(G)} \subseteq G(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(G)}$$

by Corollary 3.20 in [D11b], Proposition 2.6 in [CTX09] and the functoriality of Brauer-Manin pairing where $G^{\text{scu}} = G^{\text{sc}} \times_{G^{\text{red}}} G$ with the projection map $G^{\text{scu}} \xrightarrow{\rho} G$ and G^{sc} is the simply connected covering of G^{ss} .

5.6 Comparison I, $X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\text{et,Br}}$

Let $Y \xrightarrow{f} X$ be a left torsor under a linear algebraic group G over a number field k . The fundamental problem to define the descent obstruction for strong approximation with respect to $Y \xrightarrow{f} X$ is to decide if the set

$$X(\mathbb{A}_k)^f = \{(x_v) \in X(\mathbb{A}_k) : ([Y](x_v)) \in \text{Im}(H^1(k, G) \rightarrow \prod_v H^1(k_v, G))\} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, G)} f_\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k))$$

is closed or not in $X(\mathbb{A}_k)$. Indeed, this is true when G is connected or a group of multiplicative type by Theorem 5.3.4. For a general linear algebraic group G , this result is proved by Skorobogatov in Corollary 2.7 of [Sko09] when X is proper over k . The proof depends on Proposition 5.3.2 in [Sko01] or Proposition 4.4 in [HS02] which is not true for open varieties by the following example.

Example 5.6.1. The short exact sequence of linear algebraic groups

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{f} \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

where $f(x) = x^2$ can be viewed as torsor under μ_2 . For any $\sigma \in H^2(k, \mu_2) = k^\times / (k^\times)^2$, the twisted morphism $f_\sigma : \mathbb{G}_m^\sigma \rightarrow \mathbb{G}_m$ is finite étale. This implies that \mathbb{G}_m^σ is affine and $k(\mathbb{G}_m^\sigma)$ is a quadratic extension of $k(\mathbb{G}_m)$ by f_σ^* . Write $\mathbb{G}_m = \text{Spec}(k[t, t^{-1}])$. By ramification consideration, one concludes that

$$k[\mathbb{G}_m^\sigma] = k[y, y^{-1}] \quad \text{with} \quad y^2 = \sigma \cdot f_\sigma^*(t)$$

which is the integral closure of $k[t, t^{-1}]$ inside $k(\mathbb{G}_m^\sigma)$ under f_σ^* . Therefore $\mathbb{G}_m^\sigma \cong \mathbb{G}_m$ as varieties over k , hence it always contains adelic points.

The following definition is taken from [LX].

Définition 5.6.2. Let X be a variety over a number field k and S be a finite subset of Ω_k containing ∞_k . A faithful flat separated scheme \mathcal{X}_S of finite type over O_S is called an integral model of X if $\mathcal{X}_S \times_{O_S} k = X$.

The replacement for Proposition 5.3.2 in [Sko01] or Proposition 4.4 in [HS02] is the following result.

Proposition 5.6.3. *Let X be a variety over a number field k and S be a finite subset of Ω_k containing ∞_k . Fix an integral model \mathcal{X}_S of X over O_S . If $Y \xrightarrow{f} X$ is a left torsor under a linear algebraic group G over k , then the set*

$$\{[\sigma] \in H^1(k, G) : f_\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)) \cap [\prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \notin S} \mathcal{X}_S(O_v)] \neq \emptyset\}$$

is finite.

Démonstration. It follows from the same argument as the proof of Proposition 4.4 in [HS02]. \square

One can extend Corollary 2.7 in [Sko09] to open varieties by using the above replacement for Proposition 4.4 in [HS02].

Proposition 5.6.4. *Let X be a (not necessarily proper) variety over a number field k . If $Y \xrightarrow{f} X$ is a left torsor under a linear algebraic group G over k , then the set $X(\mathbb{A}_k)^f$ is closed in $X(\mathbb{A}_k)$.*

Démonstration. Take an integral model \mathcal{X}_{S_0} of X over O_{S_0} where S_0 is a finite subset of Ω_k containing ∞_k . Then

$$\left\{ \prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \in \Omega_k \setminus S} \mathcal{X}_{S_0}(O_v) \right\}_S$$

is an open covering of $X(\mathbb{A}_k)$ (see Theorem 3.6 in [Cod]), where S runs all finite subsets of Ω_k containing S_0 . Since

$$X(\mathbb{A}_k)^f \cap \left[\prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \in \Omega_k \setminus S} \mathcal{X}_{S_0}(O_v) \right]$$

is closed in $\left[\prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \in \Omega_k \setminus S} \mathcal{X}_{S_0}(O_v) \right]$ by Proposition 5.6.3 and Corollary 2.5 in [Sko09], one concludes that $X(\mathbb{A}_k)^f$ is closed in $X(\mathbb{A}_k)$. \square

Applying Proposition 5.6.3, one can also extend Lemma 2.2 and Theorem 1.1 in [Sko09] to open varieties. For any variety over a number field k , as defined in [Sko09], we write

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} = \bigcap_{Y \xrightarrow{f} X} X(\mathbb{A}_k)^f$$

where $Y \xrightarrow{f} X$ runs all torsors under all linear algebraic groups over k .

Lemma 5.6.5. *Let X be a (not necessarily proper) variety and $Y \rightarrow X$ be a torsor over a number field k . For any $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}}$, there is a twist $Y' \rightarrow X$ of $Y \rightarrow X$ such that the following property holds.*

For any surjective X -torsor morphism $Z \rightarrow Y'$ (see Definition 2.1 in [Sko09]), there is a twist $Z' \rightarrow Y'$ of $Z \rightarrow Y'$ such that (P_v) lies in the image of $Z'(\mathbb{A}_k)$.

Démonstration. Since there are a finite subset S_0 of Ω_k containing ∞_k and an integral model \mathcal{X}_{S_0} over O_{S_0} such that

$$(P_v) \in \left[\prod_{v \in S_0} X(k_v) \times \prod_{v \in \Omega_k \setminus S_0} \mathcal{X}_{S_0}(O_v) \right]$$

by Theorem 3.6 in [Cod], one obtains that there are only finitely many twists of a given torsor over X such that (P_v) lifts. As pointed out in the proof of Lemma 2.2 in [Sko09], the finite combinatorics in the first part of the proof of Proposition 5.17 in [St] are still valid. \square

Proposition 5.6.6. *Let X be a (not necessarily proper) variety over a number field k . If $Y \xrightarrow{f} X$ is a left torsor under a finite group scheme F over k , then*

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, F)} f_\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}}).$$

Démonstration. One only needs to modify the proof of Theorem 1.1 in [Sko09] by replacing Lemma 2.2 in [Sko09] with Lemma 5.6.5, Corollary 2.7 in [Sko09] with Proposition 5.6.4. Moreover, since f is finite, the induced map $Y(\mathbb{A}_k) \xrightarrow{f} X(\mathbb{A}_k)$ is topologically proper by Proposition 4.4 in [Cod]. This implies that $f^{-1}((P_v))$ is compact. \square

For any variety X over a number field k , following [Po10], one can define

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{et, Br}} = \bigcap_{Y \xrightarrow{f} X} \bigcup_{\sigma \in H^1(k, F)} f_\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}})$$

where $Y \xrightarrow{f} X$ runs over all torsors under all finite groups F over k . Since the induced map $Y(\mathbb{A}_k) \xrightarrow{f} X(\mathbb{A}_k)$ is topologically closed for any finite morphism $Y \xrightarrow{f} X$ by Proposition 4.4 in [Cod], one concludes that $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét,Br}}$ is closed in $X(\mathbb{A}_k)$ by the same argument as Proposition 5.6.4.

Corollaire 5.6.7. *If X is a smooth quasi-projective variety over a number field k , then*

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét,Br}} \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}.$$

Démonstration. One only needs to show that $X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét,Br}}$. Indeed, for any torsor $Y \xrightarrow{f} X$ under a finite group scheme F , one has

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k, F)} f_\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}})$$

by Proposition 5.6.6. Since X is quasi-projective, Y^σ is quasi-projective as well. By a theorem of Gabber (see [dJ]), one has

$$Y^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} \subseteq Y^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$$

(see the proof of Lemma 2.8 in [Sko09]) and the result follows. \square

5.7 Comparison II, $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét,Br}} \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}}$

In this section, we prove the other side containment for open varieties which implies Theorem 5.1.5. The strategy of proof is the same as in [D09a]. The second named author would like to thank Laurent Moret-Bailly warmly for finding a mistake and for suggesting the following alternative proof of Lemma 4 in [D09a] (which already appeared in [D09b]). The statement of this lemma is correct, but the proof in [D09a] uses a result of Stoll (see [St]) that is not. Note that in contrast with [D09a], all torsors (unless explicitly mentioned) are assumed to be left torsors.

Lemma 5.7.1. *Let X be a smooth geometrically connected k -variety. Let $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét,Br}}$ and $Z \xrightarrow{g} X$ a torsor under a finite k -group F . Then there are a cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$ and a connected component X' of Z^σ over k such that the restriction of g_σ to X' gives a torsor $X' \rightarrow X$ under F' , where F' is the stabilizer of X' under the action of F^σ , and the point (P_v) lifts to a point $(Q'_v) \in X'(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$.*

In particular, X' is geometrically integral and the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} X' \times_k F' & \xrightarrow{\psi \times p} & Z^\sigma \times_k F^\sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\psi} & Z^\sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{=} & X \end{array}$$

where $X' \xrightarrow{\psi} Z^\sigma$ and $F' \xrightarrow{p} F^\sigma$ are the natural inclusion maps and the two vertical maps of the upper square are given by the respective actions of F' and F^σ on X' and Z^σ .

Démonstration. By assumption, the point (P_v) lifts to some point $(Q_v) \in Z^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ for some cocycle σ with values in F . Since Z^σ is smooth, Z^σ is a disjoint union of connected components over k . By Proposition 3.3 in [LX], there is a k -connected component X' of Z^σ such that $(Q_v)_{v \notin \Xi} \in P_\Xi(X'(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}})$, where Ξ is the set of all complex primes of k and

P_{Ξ} is the projection of $X'(A_k)$ to $X'(A_k^{\Xi})$ and A_k^{Ξ} is the adèles without Ξ -components. Since $Z^{\sigma} \times_k k_v$ is a trivial torsor under a constant group scheme $F^{\sigma} \times_k k_v$ for $v \in \Xi$, one concludes that $g_{\sigma}(X'(k_v)) = X(k_v)$ for $v \in \Xi$. One can choose $Q_v \in X'(k_v)$ for $v \in \Xi$ and obtains that $(Q_v) \in X'(A_k)^{\text{Br}}$.

Since X' is connected and $X'(A_k) \neq \emptyset$, the proof of Lemma 5.5 in [St] implies that X' is geometrically connected. Eventually, X' being geometrically connected guarantees that the variety X' is an X -torsor under the stabilizer F' of X' in F^{σ} , and the required commutative diagram follows by construction. \square

For a linear algebraic group G over k , one has the following short exact sequence of algebraic groups

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$$

over k , where H is the connected component of G and F is finite over k . This induces the following diagram of short exact sequences

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

where T denotes the maximal toric quotient of H and G' is the quotient of G by the kernel of $H \rightarrow T$.

Let $Y \rightarrow X$ be a torsor under G and $Z \rightarrow X$ be the push-forward of $Y \rightarrow X$ by the morphism $G \rightarrow F$, which is a torsor under F . If $\sigma \in Z^1(k, F)$ is a 1-cocycle given by Lemma 5.7.1 applied to the torsor $Z \rightarrow X$ and the point (P_v) , we wish to show that the cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$ lifts to a cocycle $\tau \in Z^1(k, G)$ as in Proposition 5 in [D09a]. The obstruction to lift σ in $Z^1(k, G)$ gives a natural cohomology class $\eta_{\sigma} \in H^2(k, \kappa_{\sigma})$ by (5.1) in [FSS] (see also (7.7) in [B93]), where κ_{σ} is a k -kernel on $H_{\bar{k}}$. Lemma 6 in [D09a] implies that there is a canonical map $H^2(k, \kappa_{\sigma}) \rightarrow H^2(k, T^{\sigma})$ such that the class η_{σ} is neutral if and only if its image $\eta'_{\sigma} \in H^2(k, T^{\sigma})$ is zero.

We further apply the open descent theory and the extended type developed by Harari and Skorobogatov in [HS13] to establish analogue of Lemma 7 in [D09a] for open varieties. As in the proof of [D09a], the torsor $Y \rightarrow Z$ under H induces a torsor $W \xrightarrow{\varpi} Z$ under T by the natural map $H^1(Z, H) \rightarrow H^1(Z, T)$. Instead of using the type of the torsor ϖ that was used in [D09a], we consider the so-called "extended type" of the torsor ϖ that was introduced by Harari and Skorobogatov (see Definition 8.2 in [HS13]). For variety Z over k , the complex of Galois modules $[\bar{k}(Z)^*/\bar{k}^* \rightarrow \text{Div}(Z_{\bar{k}})]$ in the derived category of bounded complexes of étale sheaves over $\text{Spec}(k)$ is denoted by $KD'(Z)$. One can associate to the torsor $W \xrightarrow{\varpi} Z$ under T a canonical morphism in this derived category

$$\lambda_W : \widehat{T} \rightarrow KD'(Z)$$

called the extended type of ϖ . This induces a morphism in the derived category of bounded complexes of abelian groups

$$\lambda_W^{\sigma} : \widehat{T}^{\sigma} \rightarrow KD'(Z^{\sigma})$$

for the above $\sigma \in Z(k, F)$.

Lemma 5.7.2. *The morphism $\lambda_W^{\sigma} : \widehat{T}^{\sigma} \rightarrow KD'(Z^{\sigma})$ is a morphism in the derived category of bounded complexes of étale sheaves over $\text{Spec}(k)$.*

Démonstration. The natural left actions of F on both T and Z induces right actions of F on \widehat{T} and on $KD'(Z)$.

We first prove that the morphism λ_W is F -equivariant for those actions. For any $f \in F(\bar{k})$, we denote by $f_Z : Z_{\bar{k}} \rightarrow Z_{\bar{k}}$ the morphism of \bar{k} -varieties defined by $z \mapsto f \cdot z$. This

morphism induces a natural morphism in the derived category $f_Z^* : KD'(Z_{\bar{k}}) \rightarrow KD'(Z_{\bar{k}})$. Similarly, the element f defines a natural morphism of \bar{k} -tori $f_T : T_{\bar{k}} \rightarrow T_{\bar{k}}$ such that $f_T(t) := gtg^{-1}$, where $g \in G'(\bar{k})$ is any point lifting $f \in F(\bar{k})$. This morphism f_T induces a morphism of abelian groups $\widehat{f}_T : \widehat{T} \rightarrow \widehat{T}$ such that $\widehat{f}_T(\chi) := \chi \circ f_T$.

One needs to prove that the following diagram

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T} & \xrightarrow{\lambda_{W_{\bar{k}}}} & KD'(Z_{\bar{k}}) \\ \widehat{f}_T \downarrow & & \downarrow f_Z^* \\ \widehat{T} & \xrightarrow{\lambda_{W_{\bar{k}}}} & KD'(Z_{\bar{k}}) \end{array}$$

is commutative.

Let $f_{T,*}W_{\bar{k}}$ be the push-forward of the torsor $W_{\bar{k}} \rightarrow Z_{\bar{k}}$ under $T_{\bar{k}}$ by the \bar{k} -morphism $T_{\bar{k}} \xrightarrow{f_T} T_{\bar{k}}$ and $f_Z^*W_{\bar{k}}$ be the pullback of the torsor $W_{\bar{k}} \rightarrow Z_{\bar{k}}$ under $T_{\bar{k}}$ by the \bar{k} -morphism $f_Z : Z_{\bar{k}} \rightarrow Z_{\bar{k}}$. Then we have

$$f_Z^* \circ \lambda_{W_{\bar{k}}} = \lambda_{f_Z^*W_{\bar{k}}} \quad \text{and} \quad \lambda_{f_{T,*}W_{\bar{k}}} = \lambda_{W_{\bar{k}}} \circ \widehat{f}_T$$

by functoriality of the extended type. To prove the required commutativity $f_Z^* \circ \lambda_{W_{\bar{k}}} = \lambda_{f_Z^*W_{\bar{k}}} \circ \widehat{f}_T$, it is enough to show that the torsors $f_Z^*W_{\bar{k}} \rightarrow Z_{\bar{k}}$ and $f_{T,*}W_{\bar{k}} \rightarrow Z_{\bar{k}}$ under $T_{\bar{k}}$ are isomorphic. Indeed, we have the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} T_{\bar{k}} \times W_{\bar{k}} & \xrightarrow{g} & W_{\bar{k}} \\ \varpi \circ p_W \downarrow & & \downarrow \varpi \\ Z_{\bar{k}} & \xrightarrow{f_Z} & Z_{\bar{k}}, \end{array}$$

where p_W denotes the projection on $W_{\bar{k}}$ and the morphism g is defined by $(t, w) \mapsto (tg) \cdot w$. This diagram induces a natural $Z_{\bar{k}}$ -morphism $\phi : T_{\bar{k}} \times W_{\bar{k}} \rightarrow f_Z^*W_{\bar{k}}$. Consider now the right action of $T_{\bar{k}}$ on $T_{\bar{k}} \times W_{\bar{k}}$ defined by $(s, w) \cdot t := (sf_T(t), t^{-1} \cdot w) = (sgtg^{-1}, t^{-1} \cdot w)$. Then the morphism ϕ is $T_{\bar{k}}$ -invariant under this action, hence it induces a $Z_{\bar{k}}$ -morphism $\psi : f_{T,*}W_{\bar{k}} \rightarrow f_Z^*W_{\bar{k}}$. One can check by a simple computation that ψ is $T_{\bar{k}}$ -equivariant, i.e. that ψ is a morphism of (left) torsors over $Z_{\bar{k}}$ under $T_{\bar{k}}$. It concludes the required commutativity, hence the morphism λ_W is F -equivariant.

By definition of the twists T^σ and Z^σ , the fact that λ_W is F -equivariant implies that the morphism λ_W^σ is Galois equivariant, i.e. that λ_W^σ is a morphism in the derived category of bounded complexes of étale sheaves over $\text{Spec}(k)$. \square

By Proposition 8.1 in [HS13], there is a natural exact sequence of abelian groups

$$H^1(k, T^\sigma) \rightarrow H^1(X', T^\sigma) \xrightarrow{\lambda} \text{Hom}_k(\widehat{T}^\sigma, KD'(X')) \xrightarrow{\partial} H^2(k, T^\sigma)$$

where the map λ is the extended type. Let $\lambda'_\sigma = \psi^* \circ \lambda_W^\sigma$ with $KD'(Z^\sigma) \xrightarrow{\psi^*} KD'(X')$ by Lemma 5.7.1. The following lemma, which is an analogue of Lemma 8 in [D09a], is a crucial step for proving the main result of this section. We give here a more conceptual proof than that in [D09a], where a similar statement was proven by cocycle computations under the assumption that $\bar{k}[X]^\times = \bar{k}^\times$.

Lemme 5.7.3. *With the above notation, one has*

$$\partial(\lambda'_\sigma) = 0 \text{ if and only if } \eta'_\sigma = 0.$$

Démonstration. In the following proof, we work over the small étale site of $\text{Spec}(k)$.

Given the cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$, one can associate a $\text{Spec}(k)$ -torsor U under F with a point $u_0 \in U(\bar{k})$. This torsor U is naturally a homogeneous space of the group G' with geometric stabiliser isomorphic to $T_{\bar{k}}$. Section IV.5.1 in [Gi] implies that $\eta'_\sigma \in H^2(k, T^\sigma)$ is the class of the $\text{Spec}(k)$ -gerbe \mathcal{E}_σ banded by T^σ such that for all étale schemes S over $\text{Spec}(k)$, the category $\mathcal{E}_\sigma(S)$ is defined as follows : the objects of $\mathcal{E}_\sigma(S)$ are triples (P, p, α) where $P \rightarrow S$ is a torsor under G' , $p \in P(S_{\bar{k}})$ and $\alpha : P \rightarrow U_S$ is a G' -equivariant S -morphism. The morphisms of $\mathcal{E}_\sigma(S)$ between triples (P, p, α) and (P', p', α') are given by morphisms of torsors $P \rightarrow P'$ over S under G' that commute with α and α' .

Similarly, one can associate to the morphism λ'_σ a $\text{Spec}(k)$ -gerbe banded by T^σ that will be the obstruction for the morphism λ'_σ to be the extended type of a torsor over X' under T^σ . The morphism λ'_σ induces a morphism $\bar{\lambda}'_\sigma : \widehat{T}_{\bar{k}}^\sigma \rightarrow KD'(X'_{\bar{k}})$ in $D_{\text{ét}}^b(\bar{k})$. By construction, $\bar{\lambda}'_\sigma$ is the extended type of the torsor $Y_0 := W_{\bar{k}} \times_{Z_{\bar{k}}} X'_{\bar{k}}$ over $X'_{\bar{k}}$ under $T_{\bar{k}}^\sigma = T_{\bar{k}}$.

We now define \mathcal{L}_σ to be the fibered category defined as follows : for all étale schemes S over $\text{Spec}(k)$, the objects of the category $\mathcal{L}_\sigma(S)$ are pairs (V, φ) , where $V \rightarrow X'_S$ is a torsor under T_S^σ of extended type λ_V compatible with λ'_σ and $\varphi : V_{\bar{k}} \rightarrow Y_0 \times_{\bar{k}} S_{\bar{k}}$ is an isomorphism of torsors over $X' \times_k S_{\bar{k}}$ under $T_{S_{\bar{k}}}^\sigma$. Given two such objects (V, φ) and (V', φ') , a morphism between (V, φ) and (V', φ') in the category $\mathcal{L}_\sigma(S)$ is a pair (α, t) , where $\alpha : V \rightarrow V'$ is a morphism of torsors over X'_S under T_S^σ and $t \in T^\sigma(S_{\bar{k}})$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} V_{\bar{k}} & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & V'_{\bar{k}} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ Y_0 \times_{\bar{k}} S_{\bar{k}} & \xrightarrow[t]{} & Y_0 \times_{\bar{k}} S_{\bar{k}} \end{array}$$

commutes.

One can check that \mathcal{L}_σ is a stack for the étale topology over $\text{Spec}(k)$, and the fact that this is a gerbe is a consequence of the exact sequence of Proposition 8.1 in [HS13]

$$H^1(S, T^\sigma) \rightarrow H^1(X'_S, T^\sigma) \xrightarrow{\lambda} \text{Hom}_S(\widehat{T}^\sigma, KD'(X'_S)) \xrightarrow{\partial} H^2(S, T^\sigma)$$

provided that S is integral regular and noetherian.

The band of this gerbe is the abelian band represented by T^σ .

In addition, it is clear that \mathcal{L}_σ is neutral if and only if $\mathcal{L}_\sigma(k) \neq \emptyset$ if and only if there exists a torsor over X' under T^σ of type λ'_σ if and only if $\partial(\lambda'_\sigma) = 0$.

Let us now construct an equivalence of gerbes between \mathcal{E}_σ and \mathcal{L}_σ .

For all étale $\text{Spec}(k)$ -schemes S , consider the functor

$$m_S : \mathcal{E}_\sigma(S) \rightarrow \mathcal{L}_\sigma(S)$$

that maps an object (P, p, α) to the object (V, φ) , where V is defined to be the contracted product $V := (P \times_S^{G'} W_S) \times_{Z_S^\sigma} X'_S$ and $\varphi : V_{\bar{k}} \rightarrow Y_0 \times_{\bar{k}} S_{\bar{k}} = (W_{\bar{k}} \times_{Z_{\bar{k}}} X'_{\bar{k}}) \times_{\bar{k}} S_{\bar{k}}$ is induced by the point $p \in P(S_{\bar{k}})$. Indeed, by construction, we have a natural map $P \times_S^{G'} W_S \rightarrow U_S \times_S^F Z_S = Z_S^\sigma$, and a simple computation proves that this map is a torsor under T^σ of extended type compatible with λ'_σ .

By definition, the functor m_S sends a morphism $\varphi : (P, p, \alpha) \rightarrow (P', p', \alpha')$ to the morphism $(\tilde{\varphi}, t_0)$ such that $\tilde{\varphi} : (P \times_S^{G'} W_S) \times_{Z_S^\sigma} X'_S \rightarrow (P' \times_S^{G'} W_S) \times_{Z_S^\sigma} X'_S$ is the morphism induced by the morphism of torsors $\varphi : P \rightarrow P'$, and $t_0 \in T^\sigma(S_{\bar{k}})$ is the element such that $p' = t_0 \cdot \varphi(p)$ as $S_{\bar{k}}$ -points in $(P' \times_S^{G'} W_S) \times_{Z_S^\sigma} X'_S$.

Eventually, one checks that the collection of functors m_S defines a morphism of gerbes $m : \mathcal{E}_\sigma \rightarrow \mathcal{L}_\sigma$ banded by the identity of T^σ , which implies that $\eta'_\sigma := [\mathcal{E}_\sigma] = [\mathcal{L}_\sigma] \in H^2(k, T^\sigma)$.

Therefore, $\eta'_\sigma = 0$ if and only if $\mathcal{E}_\sigma(k) \neq \emptyset$ if and only if $\mathcal{L}_\sigma(k) \neq \emptyset$ if and only if $\partial(\lambda'_\sigma) = 0$. \square

The immediate consequence of Lemma 5.7.3 is the following result which extends Proposition 5 in [D09a] to open varieties.

Proposition 5.7.4. *Let X be a smooth geometrically integral k -variety. Let $(P_v) \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ and $Y \rightarrow X$ be a torsor under a linear k -group G . Let*

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$$

be an exact sequence of linear k -groups, where H is connected and F finite. Let $Z \rightarrow X$ be the push-forward of $Y \rightarrow X$ by the morphism $G \rightarrow F$, which is a torsor under F . Let $\sigma \in Z^1(k, F)$ be a 1-cocycle given by Lemma 5.7.1 applied to the torsor $Z \rightarrow X$ and the point (P_v) .

Then the cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$ lifts to a cocycle $\tau \in Z^1(k, G)$.

Démonstration. By construction (5.1) in [FSS] (see also (7.7) in [B93]), there is a class η_σ of $H^2(k, \kappa_\sigma)$ such that σ can be lifted to $Z^1(k, G)$ if and only if η_σ is neutral, where κ_σ is a k -kernel on $H_{\bar{k}}$. By (6.1.2) of [B93] and Lemma 6 in [D09a], there is a canonical map $H^2(k, \kappa_\sigma) \rightarrow H^2(k, T^\sigma)$ such that the class η_σ is neutral if and only if its image $\eta'_\sigma \in H^2(k, T^\sigma)$ is zero. By Lemma 5.7.3, one only needs to show that $\partial(\lambda'_\sigma) = 0$ where $\lambda'_\sigma = \psi^* \circ \lambda_{\bar{W}}^\sigma$, with $KD'(Z^\sigma) \xrightarrow{\psi^*} KD'(X')$ given by Lemma 5.7.1 and $\lambda_{\bar{W}}^\sigma$ defined by Lemma 5.7.2.

By Lemma 5.7.1, we know that $X'(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \neq \emptyset$. Therefore the map λ in the exact sequence (see Proposition 8.1 in [HS13])

$$H^1(X', T^\sigma) \xrightarrow{\lambda} \text{Hom}_k(\widehat{T^\sigma}, KD'(X')) \xrightarrow{\partial} H^2(k, T^\sigma)$$

is surjective by Corollary 8.17 in [HS13]. Hence the map ∂ is the zero map and $\partial(\lambda'_\sigma) = 0$, which concludes the proof. \square

The main result of this section is the following theorem.

Théorème 5.7.5. *If X is a smooth quasi-projective and geometrically integral variety over a number field k , then*

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}} = X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}.$$

Démonstration. By Corollary 5.6.7, one only needs to prove that $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\text{desc}}$. Since the statement 2 of Theorem 2 in [Ha02] (which we apply to X') holds for any geometrically integral variety without assumption on $\bar{k}[X']^\times$, the result follows from the same argument that Proposition 5 implies Theorem 1 (p.244-245) in [D09a]. \square

Acknowledgements. We would like to thank Jean-Louis Colliot-Thélène for several comments for the early version of this paper. The first named author acknowledges the support of the French Agence Nationale de la Recherche (ANR) under reference ANR-12-BL01-0005, the second named author acknowledges the support of the French Agence Nationale de la Recherche (ANR) under references ANR-12-BL01-0005 and ANR-15-CE40-0002-01, and the third named author acknowledges the support of NSFC grant no.11471219.

Chapitre VI

Approximation forte pour les variétés avec une action d'un groupe linéaire

Résumé. Soit G un groupe linéaire connexe sur un corps de nombres k . Soit $U \hookrightarrow X$ une inclusion G -équivariante d'un G -espace homogène U à stabilisateurs connexes dans une G -variété lisse X . On montre que X satisfait l'approximation forte avec condition de Brauer-Manin hors d'un ensemble S de places de k dans chacun des cas suivants :

- (i) S est l'ensemble des places archimédiennes ;
- (ii) S est un ensemble fini non vide quelconque, et $\bar{k}^\times = \bar{k}[X]^\times$.

La démonstration utilise le cas $X = U$, qui a fait l'objet de divers travaux.

Summary. Let G be a connected linear algebraic group over a number field k . Let $U \hookrightarrow X$ be a G -equivariant open embedding of a G -homogeneous space U with connected stabilizers into a smooth G -variety X . We prove that X satisfies strong approximation with Brauer-Manin condition off a set S of places of k under either of the following hypotheses :

- (i) S is the set of archimedean places ;
- (ii) S is a nonempty finite set and $\bar{k}^\times = \bar{k}[X]^\times$.

The proof builds upon the case $X = U$, which has been the object of several works.

6.1 Introduction

Soit k un corps de nombres. On note Ω_k l'ensemble des places de k et ∞_k l'ensemble des places archimédiennes de k . Notons \mathcal{O}_k l'anneau des entiers de k et \mathcal{O}_S l'anneau des S -entiers de k pour un sous-ensemble fini S de Ω_k contenant ∞_k . Pour chaque $v \in \Omega_k$, on note k_v le complété de k en v et $\mathcal{O}_v \subset k_v$ l'anneau des entiers ($\mathcal{O}_v = k_v$ pour $v \in \infty_k$). Soit A_k l'anneau des adèles de k . Pour un sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$, soit A_k^S l'anneau des adèles hors de S et $k_S := \prod_{v \in S} k_v$. Par exemple, soit A_k^∞ l'anneau des adèles finis et $k_\infty := \prod_{v \in \infty_k} k_v$.

On rappelle les définitions de [CTX09], [CTX13, §2], [BD] et [CX2].

Soit X une k -variété algébrique et $\text{Br}(X)$ son groupe de Brauer. Pour B sous-ensemble de $\text{Br}(X)$, on définit

$$X(A_k)^B = \{(x_v)_{v \in \Omega_k} \in X(A_k) : \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(\xi(x_v)) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \forall \xi \in B\}.$$

Comme l'a remarqué Manin, la théorie du corps de classes donne $X(k) \subseteq X(A_k)^B$.

Définissons

$$(6.1.0.1) \quad X(A_k)_\bullet = \pi_0(X(k_\infty)) \times X(A_k^\infty)$$

la projection, où $\pi_0(X(k_\infty))$ est l'ensemble des composantes connexes de $X(k_\infty)$.

Puisque, pour tout $v \in \infty_k$, chaque élément de $\text{Br}(X)$ prend une valeur constante sur chaque composante connexe de $\pi_0(X(k_v))$, pour tout sous-ensemble $B \subset \text{Br}(X)$ on peut définir :

$$X(A_k)_{\bullet}^B = \{(x_v)_{v \in \Omega_k} \in X(A_k)_{\bullet} : \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(\xi(x_v)) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \forall \xi \in B\}.$$

Définition 6.1.1. ([CTX09, CTX13]) Soient k un corps de nombres, X une k -variété et $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini. Notons $Pr^S : X(A_k) \rightarrow X(A_k^S)$ la projection.

(1) Si $X(k)$ est dense dans $Pr^S(X(A_k))$, on dit que X satisfait l'*approximation forte* hors de S .

(2) Si $X(k)$ est dense dans $Pr^S(X(A_k)^B)$ pour un sous-ensemble B de $\text{Br}(X)$, on dit que X satisfait l'*approximation forte par rapport à B* hors de S . On dit aussi alors que X satisfait l'*approximation forte de Brauer-Manin par rapport à B* hors de S .

Si $S = \infty_k$, on peut s'intéresser à une question un peu plus précise tenant compte des composantes connexes réelles : $X(k)$ est-il dense dans $X(A_k)_{\bullet}^B$ pour un sous-groupe $B \subset \text{Br}(X)$?

Pour les espaces homogènes de groupes algébriques connexes, ces questions ont fait ces dernières années l'objet d'une série de travaux [CTX09, Ha08, BD] prolongeant des travaux classiques.

Lorsqu'on cherche à étendre la classe des variétés satisfaisant les propriétés ci-dessus, il est naturel de poser les questions 6.1.2 et 6.1.3 suivantes.

Question 6.1.2. Soient X une k -variété lisse géométriquement intègre et U un ouvert de X . Si $U(k)$ est dense dans $U(A_k)_{\bullet}^{\text{Br}(U)}$, sous quelles conditions peut-on établir que $X(k)$ est dense dans $X(A_k)_{\bullet}^{\text{Br}(X)}$?

Le cas qui nous intéresse est celui où G est un groupe linéaire connexe et U est un G -espace homogène. En général, l'inclusion $\bar{k}^{\times} \subset \bar{k}[U]^{\times}$ n'est pas un isomorphisme et, dans ce cas, il existe des exemples pour lesquels U ne satisfait pas l'approximation forte par rapport à $\text{Br}(U)$ hors d'un sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$ non vide donné (par exemple $U \cong \mathbb{G}_m$, $k = \mathbb{Q}$ et $S = \{v_0\}$ avec v_0 une place non archimédienne).

Question 6.1.3. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide. Soit G un groupe linéaire connexe. Soient X une G -variété lisse géométriquement intègre et U un G -ouvert de X équipé d'un G -morphisme $X \rightarrow Z$ dans un G -espace homogène Z . Si $\bar{k}[X]^{\times} = \bar{k}^{\times}$ et toute fibre de U au-dessus d'un k -point de Z satisfait l'approximation forte hors de S , sous quelles conditions peut-on établir l'approximation forte pour X par rapport à $\text{Br}(X)$ hors de S ?

Le principal résultat de cet article est le :

Théorème 6.1.4. (cf. Théorème 6.7.6) Soit G un groupe linéaire connexe sur un corps de nombres k , et soit X une G -variété lisse géométriquement intègre sur k . Supposons qu'il existe un G -ouvert $U \subset X$ tel que $U \cong G/G_0$, où $G_0 \subset G$ est un sous-groupe fermé connexe. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide. Supposons que $G'(k_S)$ est non compact pour chaque facteur simple G' du groupe G^{sc} (cf. (6.1.0.4)).

(1) Si $S \subset \infty_k$, alors $X(k)$ est dense dans $X(A_k)_{\bullet}^{\text{Br}(X)}$.

(2) Si $\bar{k}^{\times} = \bar{k}[X]^{\times}$, alors X satisfait l'approximation forte de Brauer-Manin par rapport à $\text{Br}(X)$ hors de S .

Ce théorème est un cas spécial d'un résultat plus général mais d'énoncé technique (Théorème 6.7.6).

Le théorème 6.1.4 (1) avait déjà été établi dans les cas suivants :

(i) X est une variété torique, c'est-à-dire que G est un tore (F. Xu et l'auteur [CX1]).

(ii) X est une variété groupique, c'est-à-dire que G est un groupe linéaire connexe et que $G_0 = 1$ (F. Xu et l'auteur [CX2]).

(iii) X est comme dans le théorème, avec G_0 résoluble connexe (résultat tout récent de D. Wei [Wei16]).

Au §6.4, on donne une démonstration totalement nouvelle du théorème 6.1.4 (1), laquelle est plus simple que celles des trois travaux ci-dessus.

Le théorème 6.1.4 (2) avait déjà été établi dans les cas suivants :

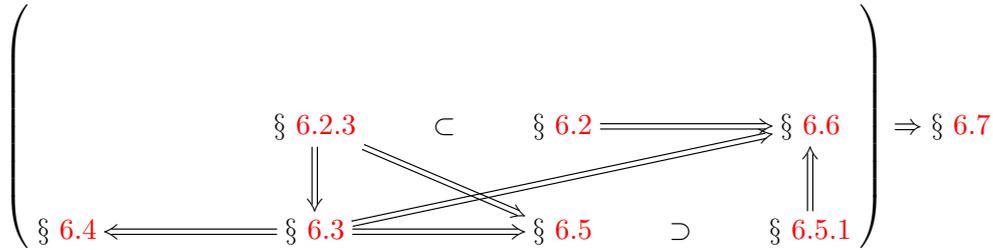
(iv) X est une variété torique (D. Wei [Wei14]).

(v) X est une variété groupique (F. Xu et l'auteur [CX2]).

Les démonstrations du théorème 6.1.4, comme celle de [CX2], reposent d'une part sur des constructions géométriques sur un corps quelconque, d'autre part sur les théorèmes d'approximation forte avec condition de Brauer-Manin pour les espaces homogènes établis dans [CTX09, Ha08, BD]. Les constructions géométriques du présent article s'inspirent de celles de [CX2] et la partie arithmétique du présent article utilise une généralisation de [3] (cf. §6.5).

Dans les quatre articles cités, on a la conclusion plus précise : dans les énoncés, on peut remplacer $\text{Br}(X)$ par le sous-groupe "algébrique" $\text{Br}_1(X) \subset \text{Br}(X)$, dont la définition est rappelée ci-dessous. Dans le cadre général où nous nous plaçons, il faut utiliser tout le groupe de Brauer $\text{Br}(X)$. L'idée clé est la notion de sous-groupe de Brauer invariant (cf. §3), qui généralise [BD, §1.2].

Soit G un k -groupe linéaire connexe. Le plan de l'article est le suivant :



La section 6.2 est consacrée à divers préliminaires géométriques, notamment sur les G -variétés et leurs toseurs sous un tore ou un groupe de type multiplicatif. Au §6.2.3, on étudie les toseurs sous un groupe de type multiplicatif sur une G -variété. On montre que tout tel toseur peut être muni canoniquement d'une action d'un groupe linéaire H qui s'envoie sur G (Théorème 6.2.7). Pour cela, on utilise un théorème de Colliot-Thélène [CT08, Thm. 5.6] sur les toseurs au-dessus d'un groupe linéaire connexe.

Au §6.3, on définit la notion de sous-groupe de Brauer G -invariant $\text{Br}_G(X)$ d'une G -variété lisse (cf. Définition 6.3.1). On donne des caractérisations équivalentes sur les sous-groupes de $\text{Br}_G(X)$ (Proposition 6.3.4). Ensuite, on définit la notion d'homomorphisme de Sansuc (cf. Définition 6.3.8) et on généralise la suite exacte de Sansuc (cf. (6.3.2.3)). On étudie la propriété de $\text{Br}_G(X)$ par rapport au passage à la fibre d'un G -morphisme vers un tore (Proposition 6.3.13). On généralise la notion de G -espace homogène à stabilisateur géométrique connexe et on définit la notion de pseudo G -espace homogène (Définition 6.3.15) qui sera utilisée aux §4 et §6.

La section 6.4 est consacrée à l'approximation forte hors des places archimédiennes. On établit le théorème 6.4.2 sur l'approximation d'un point adélique de X satisfaisant une condition de Brauer-Manin par un tel point situé sur U . Comme conséquence, on répond à la question 6.1.2 (Corollaire 6.4.5) dans ce cas. Ceci donne le théorème 6.1.4 (1).

Au §6.5, en utilisant la notion de sous-groupe G -invariant du groupe de Brauer, on combine la suite exacte (6.3.2.3) et la méthode de [3], et on généralise [3, Thm. 1.2]. On établit un théorème de descente pour un toseur sous un groupe linéaire connexe quelconque (Théorème 6.5.9). Comme conséquence, on établit une formule sur les points adéliques d'un certain G -espace homogène satisfaisant une condition de Brauer-Manin (Corollaire 6.5.13).

Au §6.6, pour une G -variété X munie d'un G -ouvert U équipé d'un G -morphisme vers une G -variété Z , on considère l'approximation d'un point adélique de X satisfaisant une condition de Brauer-Manin par un tel point situé dans la fibre au-dessus d'un point rationnel de Z (Question 6.6.1). Pour répondre à la question 6.6.1, on généralise [CX2, Prop. 3.6] et on établit au §6.6.1 un théorème plus fin sur l'approximation forte d'un espace affine (théorème 6.6.2). Ensuite, on combine ce théorème et l'étude du sous-groupe de Brauer G -invariant (§3) avec la méthode de fibration de Colliot-Thélène et Harari [CTH] et les constructions géométriques de [CX2], et on répond à la question 6.6.1 dans le cas où Z est un certain tore (Théorème 6.6.7 et Théorème 6.6.9). Dans le cas où Z est un pseudo G -espace homogène, on résout la question 6.6.1 (Théorème 6.6.11) à l'aide de tous les résultats ci-dessus (sauf ceux du §6.4).

Au §6.7, en utilisant la descente (§6.5), on établit d'abord un résultat (Proposition 6.7.4) sur l'approximation forte pour les G -espaces homogènes à stabilisateur géométrique connexe, ce qui généralise un résultat de Borovoi et Demarche ([BD, Thm. 1.4]). Ensuite, on combine ce résultat avec les résultats des §6.4 et §6.6, et on établit le théorème général (Théorème 6.7.6) sur l'approximation forte d'une G -variété munie d'un G -ouvert fibré sur un certain G -espace homogène. Le théorème 6.1.4 est un cas particulier du théorème 6.7.6.

Conventions et notations.

Soit k un corps quelconque de caractéristique 0. On note \bar{k} une clôture algébrique et $\Gamma_k := \text{Gal}(\bar{k}/k)$.

Tous les groupes de cohomologie sont des groupes de cohomologie étale. Soit X un schéma intègre. On note η_X le point générique de X .

Une k -variété X est un k -schéma séparé de type fini. Pour X une telle variété, on note $k[X]$ son anneau des fonctions globales, $k[X]^\times$ son groupe des fonctions inversibles, $\text{Pic}(X) := H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Picard et $\text{Br}(X) := H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Brauer. Notons

$$\text{Br}_1(X) := \text{Ker}[\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(X_{\bar{k}})] \quad \text{et} \quad \text{Br}_a(X) := \text{Br}_1(X)/\text{Im}\text{Br}(k).$$

Le groupe $\text{Br}_1(X)$ est le sous-groupe "algébrique" du groupe de Brauer de X . Si X est intègre, on note $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles.

Pour tout sous-groupe B de $\text{Br}(X)$ (ou de $\text{Br}(X)/\text{Im}(\text{Br}(k))$), notons

$$(6.1.0.2) \quad B^D := \text{Hom}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

le groupe des homomorphismes. On munit B de la topologie discrète et B^D de la topologie compacte-ouverte.

On note X_{sing} le lieu singulier de X , et pour un sous-ensemble fermé $D \subset X$, on note D_{sing} le lieu singulier de D comme sous-variété fermée réduite.

Un k -groupe algébrique G est une k -variété qui est un k -schéma en groupes. On note e_G l'unité de G et G^* le groupe des caractères de $G_{\bar{k}}$. C'est un module galoisien de type fini. Si G est connexe, on note

$$(6.1.0.3) \quad \text{Br}_e(G) := \text{Ker}(\text{Br}_1(G) \xrightarrow{e_G^*} \text{Br}(k)) \cong \text{Br}_a(G).$$

Soit G un k -groupe linéaire connexe. On note G^{tor} son quotient torique maximal, G^u son radical unipotent, $G^{\text{red}} := G/G^u$ son quotient réductif maximal, $G^{\text{ssu}} := \text{Ker}(G \rightarrow G^{\text{tor}})$, $G^{\text{ss}} := G^{\text{ssu}}/G^u$ et G^{sc} le revêtement simplement connexe du groupe semi-simple G^{ss} . Alors on a $G^* = (G^{\text{tor}})^*$ et un diagramme commutatif :

$$(6.1.0.4) \quad \begin{array}{ccccccc} G^u & \hookrightarrow & G^{\text{ssu}} & \hookrightarrow & G & & \\ & & \downarrow & \square & \downarrow & & \\ G^{\text{sc}} & \twoheadrightarrow & G^{\text{ss}} & \twoheadrightarrow & G^{\text{red}} & \twoheadrightarrow & G^{\text{tor}}. \end{array}$$

Soit G un k -groupe algébrique. Une G -variété (X, ρ) (ou X) est une k -variété X munie d'une action à gauche $G \times_k X \xrightarrow{\rho} X$. Un ouvert $U \subset X$ est un G -ouvert si U est invariant sous l'action de G . Un k -morphisme de G -variétés est appelé G -morphisme s'il est compatible avec l'action de G . Sauf mention explicite du contraire, un G -torseur est un G -torseur à gauche.

Soit G un k -groupe algébrique connexe et X une G -variété lisse géométriquement intègre. Notons $\mathrm{Br}_G(X)$ le sous-groupe de Brauer G -invariant (cf : Définition 6.3.1). Dans le cas où $X \cong G/G_0$ avec G linéaire et $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe, Borovoi et Demarche ont défini $\mathrm{Br}_1(X, G) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(X) \rightarrow \mathrm{Br}(G_{\bar{k}}))$ ([BD, §1.2]) En fait, on a (Proposition 6.3.9) : $\mathrm{Br}_G(X) \cong \mathrm{Br}_1(X, G)$.

Soit T un tore. Une variété torique $(T \hookrightarrow X)$ est une T -variété lisse intègre X munie d'une immersion ouverte fixée $T \hookrightarrow X$ de T -variétés. Pour une k -algèbre finie séparable K , on a une variété torique canonique : $(\mathrm{Res}_{K/k} \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathrm{Res}_{K/k} \mathbb{A}^1)$.

Soit k un corps de nombres. Soit X une k -variété. On note $X(A_k)$ l'ensemble des points adéliques de X et on note $X(A_k)_\bullet$ comme en (6.1.0.1). Soit G un k -groupe algébrique. On note $G(k_\infty)^+$ la composante connexe de l'identité de $G(k_\infty) := \prod_{v \in \infty_k} G(k_v)$.

6.2 Préliminaires sur les G -variétés et les toseurs

Dans toute cette section, k est un corps quelconque de caractéristique 0. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k -variété. Dans [CX2], le résultat de structure géométrique est [CX2, Prop. 3.12]. On en donne une généralisation (Proposition 6.2.2 et Proposition 6.2.3). Dans [CTS87b, Lem. 1.6.2], Colliot-Thélène et Sansuc ont étudié la structure des toseurs $Y \rightarrow X$ sous un tore et obtenu la suite exacte (6.2.2.1). On précise ici les morphismes de la suite exacte (6.2.2.1) (Proposition 6.2.5). Colliot-Thélène ([CT08, Thm. 5.6]) a étudié la structure des toseurs $Y \rightarrow X$ sous un groupe de type multiplicatif lorsque la base X est un groupe linéaire connexe. On considère ici le cas plus général des toseurs sur une variété X munie d'une action d'un groupe G . On établit un théorème général (Théorème 6.2.7) sur la structure de ces toseurs.

6.2.1 Préliminaires sur les G -variétés

On rappelle un résultat pour les variétés toriques lisses ([CX1, Prop. 2.10]).

Lemme 6.2.1. *Soient T un tore et $(T \hookrightarrow Z)$ une variété torique lisse. Soit $Z_1 := Z \setminus [(Z \setminus T)_{\mathrm{sing}}]$. Alors $(T \hookrightarrow Z_1)$ est une variété torique, $\mathrm{codim}(Z \setminus Z_1, Z) \geq 2$ et chaque $T_{\bar{k}}$ -orbite de $(Z_1 \setminus T)_{\bar{k}}$ est de codimension 1 et son stabilisateur géométrique est isomorphe à $\mathbb{G}_{m, \bar{k}}$.*

Démonstration. Puisque $(Z \setminus T)_{\mathrm{sing}}$ est T -invariant et $\dim((Z \setminus T)_{\mathrm{sing}}) < \dim(Z \setminus T)$, la variété $(T \hookrightarrow Z_1)$ est une variété torique et $\mathrm{codim}(Z \setminus Z_1, Z) \geq 2$.

Supposons que $k = \bar{k}$. Dans ce cas, toutes les variétés toriques lisses de dimension d ont un recouvrement par des variétés toriques $(\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{G}_m^i \times \mathbb{A}^{n-i})_i$ (cf. [CX1, Lem. 2.1]), et donc Z_1 admet un recouvrement par des variétés toriques $\mathbb{G}_m^{\dim(Z)-1} \times \mathbb{A}^1$ et $\mathbb{G}_m^{\dim(Z)}$. Le résultat en découle. \square

Proposition 6.2.2. *Soient $T \subset Z_1 \subset Z$ comme dans le lemme 6.2.1. Soit G un groupe linéaire connexe muni d'un homomorphisme surjectif $G \xrightarrow{\varphi} T$ de noyau connexe. Soit X une G -variété lisse géométriquement intègre munie d'un G -morphisme dominant $X \xrightarrow{f} Z$. Soit U un G -ouvert de X tel que $f(U) \subset T$. On a :*

(1) le morphisme $f^{-1}(Z_1) \xrightarrow{f|_{Z_1}} Z_1$ est plat ;

(2) si f induit un isomorphisme $\text{Div}_{Z_{\bar{k}} \setminus T_{\bar{k}}}(Z_{\bar{k}}) \xrightarrow{f_{\text{Div}}^*} \text{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$, alors il existe un G -ouvert X_1 de X tel que $f(X_1) \subset Z_1$, $X_1 \cap f^{-1}(T) = U$, $\text{codim}(X \setminus X_1, X) \geq 2$ et $X_1 \xrightarrow{f|_{X_1}} Z_1$ soit lisse, surjectif à fibres géométriquement intègres.

Démonstration. Par le lemme 6.2.1, Z_1 est T -invariant, $\text{codim}(Z \setminus Z_1, Z) \geq 2$ et $(Z_1 \setminus T)_{\bar{k}} = \coprod_i F_i$, où F_i est $T_{\bar{k}}$ -orbite de codimension 1. Donc $f^{-1}(Z_1)$ et $f^{-1}(T) \setminus U \subset X$ sont G -invariants.

Pour (1), on peut supposer que $X = f^{-1}(Z_1)$ et $k = \bar{k}$. Puisque Z_1 est lisse, X est intègre et f est dominant, il existe un ouvert $V \subset Z_1$ tel que $\text{codim}(Z_1 \setminus V, Z_1) \geq 2$ et $f^{-1}(V) \rightarrow V$ soit plat. Donc pour chaque i , $V \cap F_i \neq \emptyset$. En utilisant l'action de G , on voit que $f|_{Z_1}$ est plat.

Pour (2), puisque f_{Div}^* est un isomorphisme, on a

$$\text{codim}(\overline{f^{-1}(T) \setminus U}, X) \geq 2 \quad \text{et} \quad \text{codim}(f^{-1}(Z \setminus Z_1), X) \geq 2.$$

On note $X_2 := f^{-1}(Z_1) \setminus \overline{f^{-1}(T) \setminus U}$ et $X_3 := X_2 \setminus (X_2 \setminus U)_{\text{sing}}$. Alors $(X_3 \setminus U) = D \coprod E$ avec $\text{codim}(E, X_3) \geq 2$ et toutes les composantes connexes de D sont de dimension $\dim(X) - 1$. On note $X_1 := X_3 \setminus E$. Alors X_1 est G -invariant, $f(X_1) \subset Z_1$, $X_1 \cap f^{-1}(T) = U$, $\text{codim}(X \setminus X_1, X) \geq 2$ et chaque composante connexe de $(X_1 \setminus U)_{\bar{k}}$ est lisse, intègre de dimension $\dim(X) - 1$.

Puisque f_{Div}^* est un isomorphisme, $(X_1 \setminus U)_{\bar{k}} \cong \coprod_i D_i$ avec $D_i = f^{-1}(F_i) \cap X_1$. Alors chaque D_i est une $G_{\bar{k}}$ -variété lisse intègre de dimension $\dim(X) - 1$. Puisque $\text{Ker}(\varphi)$ est connexe, le stabilisateur de F_i comme $G_{\bar{k}}$ -variété est connexe. Par [CX2, Prop. 2.2], les morphismes $U \rightarrow T$ et $D_i \rightarrow F_i$ sont lisses surjectifs à fibres géométriquement intègres. Le résultat en découle. \square

Proposition 6.2.3. Soient T et T_0 deux tores avec T_0 quasi-trivial. Soient X une variété lisse géométriquement intègre et $U \subset X$ un ouvert muni d'un morphisme $U \xrightarrow{f} T_0 \times T$. Supposons que la composition

$$\Lambda : T_0^* \xrightarrow{p_1^*} T_0^* \times T^* \xrightarrow{f^*} \bar{k}[U]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\dot{\cdot} X} \text{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$$

est un isomorphisme de modules galoisiens.

(1) Alors il existe un homomorphisme $T_0 \xrightarrow{\phi} T$ et une variété torique $(T_0 \hookrightarrow \mathbb{A}^l)$ tels que :

(a) il existe une k -algèbre finie séparable K et un isomorphisme de variétés toriques :

$$(6.2.1.1) \quad (T_0 \hookrightarrow \mathbb{A}^l) \cong (\text{Res}_{K/k} \mathbb{G}_m \hookrightarrow \text{Res}_{K/k} \mathbb{A}_K^1);$$

(b) si l'on note

$$T_0 \times T \xrightarrow{\tilde{\phi}} T_0 \times T : (t_0, t) \mapsto (t_0, t \cdot \phi(t_0)^{-1}),$$

alors le morphisme $\tilde{\phi} \circ f$ peut être étendu à un unique morphisme $X \xrightarrow{f'} \mathbb{A}^l \times T$;

(c) on a un isomorphisme $f'^* : \text{Div}_{(\mathbb{A}^l \times T)_{\bar{k}} \setminus (T_0 \times T)_{\bar{k}}}((\mathbb{A}^l \times T)_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \text{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$.

(2) Soit G un groupe linéaire muni d'un homomorphisme $G \xrightarrow{\varphi} T_0 \times T$. Supposons que X est une G -variété, $U \subset X$ est un G -ouvert et f est un G -morphisme. Alors le morphisme f' est un G -morphisme, où l'action de G sur $\mathbb{A}^l \times T$ est induite par $\tilde{\phi} \circ \varphi$.

Démonstration. Soient $\{D_i\}_{i=1}^l$ les composantes irréductibles de $(X \setminus U)_{\bar{k}}$ dont la dimension est $\dim(X) - 1$. Alors $\text{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) \cong \oplus_i \mathbb{Z} \cdot [D_i]$. Puisque Λ est un isomorphisme, il existe une base $\{x_i\}$ de T_0^* telle que $\Lambda(x_i) = D_i$. Puisque $\bar{k}[T_0]^\times = \bar{k}^\times \oplus T_0^*$, on peut supposer que $x_i \in \bar{k}[T_0]^\times$ et $\{x_i\}_{i=1}^l$ est globalement $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -invariant. Soit K la k -algèbre

finie séparable qui correspond au $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -ensemble $\{x_i\}_{i=1}^l$. Alors $T_0 \cong \text{Res}_{K/k} \mathbb{G}_{m,K}$, et l'immersion ouverte

$$T_{0,\bar{k}} \cong \text{Spec } \bar{k}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_l, x_l^{-1}] \hookrightarrow \text{Spec } \bar{k}[x_1, \dots, x_l] \cong \mathbb{A}_{\bar{k}}^l \cong (\text{Res}_{K/k} \mathbb{A}_K^1)_{\bar{k}}$$

est exactement l'immersion ouverte $(\text{Res}_{K/k} \mathbb{G}_{m,K} \hookrightarrow \text{Res}_{K/k} \mathbb{A}_K^1)_{\bar{k}}$. Puisque $\mathbb{A}^l \cong \text{Res}_{K/k} \mathbb{A}_K^1$, on obtient canoniquement une variété torique $T_0 \hookrightarrow \mathbb{A}^l$.

Notons $T_{\bar{k}} \cong \text{Spec } \bar{k}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]$ et donc

$$(\mathbb{A}^l \times T)_{\bar{k}} \cong \text{Spec } \bar{k}[x_1, \dots, x_l, t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}].$$

Soit $T_0 \xrightarrow{\phi} T$ l'homomorphisme correspondant à la composition

$$\phi^* : T^* \xrightarrow{p_2^*} T_0^* \times T^* \xrightarrow{f^*} \bar{k}[U]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\div_X} \text{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\Lambda^{-1}} T_0^*.$$

Puisque l'homomorphisme $T_0^* \times T^* \xrightarrow{\tilde{\phi}^*} T_0^* \times T^*$ est défini par $(t_0, t) \mapsto (t_0 - \phi^*(t), t)$, on a

$$(\div_X \circ f^* \circ \tilde{\phi}^*)(x_i) = (\div_X \circ f^*)(x_i) = \Lambda(x_i) = D_i$$

et

$$(\div_X \circ f^* \circ \tilde{\phi}^*)(t_i) = ((\div_X \circ f^*) - (\div_X \circ f^* \circ p_1^* \circ \phi^*))(t_i) = ((\div_X \circ f^*) - (\Lambda \circ \phi^*))(t_i) = 0.$$

Puisque X est lisse, et donc normale, on a

$$(\tilde{\phi} \circ f)^*(\bar{k}[\mathbb{A}^l \times T]) \subset \bar{k}[X] \quad \text{et donc} \quad (\tilde{\phi} \circ f)^*(k[\mathbb{A}^l \times T]) \subset k[X].$$

Alors $\tilde{\phi} \circ f$ s'étend en un morphisme $X \xrightarrow{f'} \mathbb{A}^l \times T$. Un tel morphisme f' est unique ([Hart, II. Exer. 4.2]).

Pour (c), puisque dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} T_0^* & \xrightarrow{p_1^*} & T_0^* \times T^* & \xrightarrow{=} & \bar{k}[T_0 \times T]^\times / \bar{k}^\times & \xrightarrow{\div} & \text{Div}_{(\mathbb{A}^l \times T)_{\bar{k}} \setminus (T_0 \times T)_{\bar{k}}}((\mathbb{A}^l \times T)_{\bar{k}}) \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow (\tilde{\phi} \circ f)^* & & \downarrow (f')^* \\ T_0^* & \xrightarrow{p_1^*} & T_0^* \times T^* & \xrightarrow{(\tilde{\phi} \circ f)^*} & \bar{k}[U]^\times / \bar{k}^\times & \xrightarrow{\div_X} & \text{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}), \end{array}$$

les compositions horizontales sont des isomorphismes, $(f')^*$ est un isomorphisme.

Pour (2), puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \times U & \hookrightarrow & G \times X \xrightarrow{(\tilde{\phi} \circ \varphi, f')} (T_0 \times T) \times (\mathbb{A}^l \times T) \\ & & \downarrow \rho_X \qquad \qquad \downarrow \\ & & X \xrightarrow{f'} \mathbb{A}^l \times T \end{array}$$

est commutatif en $G \times U$, ce diagramme est commutatif et f' est un G -morphisme. \square

6.2.2 Trivialisation d'un toreur

Les toreurs sous un tore ou sous un groupe de type multiplicatif sont étudiés par Colliot-Thélène et Sansuc [CTS87b]. Soit T un tore. Soient X une variété lisse géométriquement intègre et $U \subset X$ un ouvert. Par [CTS87b, Lem. 1.6.2], on a une suite exacte canonique :

$$(6.2.2.1) \quad H^0(U, T) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}_k(T^*, \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})) \xrightarrow{\Psi} H^1(X, T) \longrightarrow H^1(U, T),$$

et pour chaque $\chi \in H^0(U, T) = \mathrm{Mor}(U, T)$, on a $\Phi(\chi) : T^* \xrightarrow{\chi^*} \bar{k}[U]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\dot{\chi}} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$.

Pour un T -torseur $Y \xrightarrow{p} X$ tel que $Y|_U$ soit trivial, on note $V := Y \times_X U$ et $\mathrm{Triv}_U(V, T)$ l'ensemble des trivialisations $\tau : V \xrightarrow{\sim} T \times U$ (un T -isomorphisme au-dessus de U). On a une application canonique

$$(6.2.2.2) \quad \mathrm{Triv}_U(V, T) \xrightarrow{\Upsilon} \mathrm{Hom}_k(T^*, \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}))$$

définie par : pour chaque $\tau \in \mathrm{Triv}_U(V, T)$, le morphisme $\Upsilon(\tau)$ est la composition :

$$T^* \xrightarrow{p_1^*} \bar{k}[T \times U]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\tau^*} \bar{k}[V]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\dot{\chi}} \mathrm{Div}_{Y_{\bar{k}} \setminus V_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}}) \xrightarrow{(p^*)^{-1}} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}),$$

où $\mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Div}_{Y_{\bar{k}} \setminus V_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}})$ est un isomorphisme par [CT08, Lem. B.1]. On a aussi une application canonique

$$(6.2.2.3) \quad H^0(U, T) \times \mathrm{Triv}_U(V, T) \xrightarrow{\Theta} \mathrm{Triv}_U(V, T) : (\chi, \tau) \mapsto \widehat{\chi} \circ \tau$$

où $T \times U \xrightarrow{\widehat{\chi}} T \times U : (t, u) \mapsto (t + \chi(u), u)$.

Lemme 6.2.4. *L'application Θ induit une action transitive de $H^0(U, T)$ sur $\mathrm{Triv}_U(V, T)$, et pour chaque $\tau \in \mathrm{Triv}_U(V, T)$, $\chi \in H^0(U, T)$, on a $\Upsilon(\Theta(\chi, \tau)) = \Phi(\chi) + \Upsilon(\tau)$.*

Démonstration. Pour $\chi_1, \chi_2 \in H^0(U, T)$, on a $\widehat{\chi_1 + \chi_2} = \widehat{\chi_2} \circ \widehat{\chi_1}$, et donc Θ est une action.

Notons $T \times U \xrightarrow{p_1} T$. Pour deux trivialisations $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Triv}_U(V, T)$, le morphisme $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ est un T -morphisme au-dessus de U , i.e. pour chaque $t \in T$ et $u \in U$, on a

$$(\tau_2 \circ \tau_1^{-1})(t, u) = ((p_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1^{-1})(t, u), u) = (t + (p_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1^{-1})(e_T, u), u).$$

Notons $\chi := (p_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1^{-1})(e_T, -) \in H^0(U, T)$, alors $\tau_2 = \widehat{\chi} \circ \tau_1$ et donc Θ est transitive.

Notons $T \times U \xrightarrow{p_2} U$. Pour tout $\tau \in \mathrm{Triv}_U(V, T)$ et tout $\chi \in H^0(U, T)$, on a

$$p_1 \circ \Theta(\chi, \tau) = p_1 \circ \widehat{\chi} \circ \tau = (p_1 + \chi \circ p_2) \circ \tau = p_1 \circ \tau + \chi \circ p_2 \circ \tau = p_1 \circ \tau + \chi \circ p|_U$$

dans $\mathrm{Mor}(V, T)$. Puisque les deux morphismes composés

$$\bar{k}[U]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{p_1^*} \bar{k}[V]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\dot{\chi}} \mathrm{Div}_{Y_{\bar{k}} \setminus V_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}}) \quad \text{et} \quad \bar{k}[U]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\dot{\chi}} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Div}_{Y_{\bar{k}} \setminus V_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}})$$

coïncident, on a $\dot{\chi} \circ (\chi \circ p|_U)^* = p^* \circ \dot{\chi} \circ \chi^*$ et le résultat en découle. \square

Proposition 6.2.5. *Avec les notations des (6.2.2.1) et (6.2.2.2), pour un $\phi \in \mathrm{Hom}_k(T^*, \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}))$, soit $Y \rightarrow X$ un toreur correspondant à $\Psi(\phi)$ et soit $V := Y \times_X U$. Alors, après avoir bien choisi le signe de Ψ , il existe une trivialisation $\tau \in \mathrm{Triv}_U(V, T)$ telle que $\Upsilon(\tau) = \phi$ et que, pour chaque $\tau' \in \mathrm{Triv}_U(V, T)$, on ait $\Psi(\Upsilon(\tau')) = [Y]$.*

Démonstration. D'après le lemme 6.2.4, l'énoncé est équivalent à l'existence d'une trivialisaton $\tau \in \text{Triv}_U(V, T)$ telle que $\Psi(\Upsilon(\tau)) = [Y]$.

Étape (1). Supposons que $k = \bar{k}$ et $T = \mathbb{G}_m$. Dans ce cas, $T^* \cong \mathbb{Z}$. La suite exacte (6.2.2.1) est obtenue en appliquant $H^i(X, -) = \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^i(\mathbb{Z}, -)$ à la suite exacte de faisceaux (cf. [CTS87b, Lem. 1.6.2])

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_{m,X} \rightarrow j_* \mathbb{G}_{m,U} \rightarrow \mathbf{Div}_{X \setminus U}(X) \rightarrow 0$$

où $U \xrightarrow{j} X$. Donc, après avoir choisi $1_{T^*} \in T^*$, le morphisme

$$\mathbf{Div}_{X \setminus U}(X) \xleftarrow{\sim} \text{Hom}_k(T^*, \mathbf{Div}_{X \setminus U}(X)) \xrightarrow{\Psi} H^1(X, T) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X)$$

est le morphisme canonique $\mathbf{Div}_{X \setminus U}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$. Par [CT08, Lem. B.1], pour chaque trivialisaton τ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T^* \xrightarrow{\tau^* \circ p_1^*} k[V]^\times / k^\times & \xrightarrow{\text{div}_Y} & \mathbf{Div}_{Y \setminus V}(Y) \xleftarrow{\cong} \mathbf{Div}_{X \setminus U}(X) \\ & \searrow = & \downarrow \\ & & T^* \xrightarrow{(-1) \cdot \text{type}} \text{Pic}(X). \end{array}$$

Puisque $\text{type}(1_{T^*}) = [Y]$, le résultat en découle.

Étape (2). Supposons $k = \bar{k}$. Notons $n = \dim(T)$. Alors $T \cong \mathbb{G}_m^n$, $T^* \cong \mathbb{Z}^n$, $H^1(X, T) \cong \text{Pic}(X)^{\oplus n}$ et $\text{Hom}(T^*, \mathbf{Div}_{X \setminus U}(X)) \cong \mathbf{Div}_{X \setminus U}(X)^{\oplus n}$. On se réduit ainsi à l'étape (1).

Étape (3). Supposons que T est quasi-trivial et X est projective. Dans ce cas, le morphisme $H^1(X, T) \rightarrow H^1(X_{\bar{k}}, T)$ est injectif (une conséquence de [CTS87b, (2.0.2)]). Par l'étape (2), pour chaque $\tau \in \text{Triv}_U(V, T)$, on a $\Psi(\Upsilon(\tau))|_{\bar{k}} = [Y_{\bar{k}}]$, et donc $\Psi(\Upsilon(\tau)) = [Y]$.

Étape (4). En général, soit X^c une compactification lisse de X et soit T_0 un tore avec un isomorphisme $T_0^* \xrightarrow{\iota} \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$. Notons $\sigma^* := \iota^{-1} \circ \phi$ et $T_0 \xrightarrow{\sigma} T$ le morphisme correspondant de tores. L'égalité $\mathbf{Div}_{X_{\bar{k}}^c \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}^c) \cong \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}}^c \setminus X_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}^c) \oplus \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$ donne des morphismes

$$\iota_c : T_0^* \xrightarrow{\iota} \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) \hookrightarrow \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}}^c \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}^c) \quad \text{et} \quad \pi : \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}}^c \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}^c) \rightarrow \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$$

tels que $\pi \circ \iota_c = \iota$. Par la suite exacte (6.2.2.1), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_k(T_0^*, \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}}^c \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}^c)) & \xrightarrow{\pi \circ -} & \text{Hom}_k(T_0^*, \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})) & \xrightarrow{- \circ \sigma^*} & \text{Hom}_k(T^*, \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})) \\ \downarrow \Psi_c & & \downarrow \Psi_0 & & \downarrow \Psi \\ H^1(X^c, T_0) & \xrightarrow{(-)|_X} & H^1(X, T_0) & \xrightarrow{\sigma_*} & H^1(X, T). \end{array}$$

Alors $\Psi_c(\iota_c)$ donne un T_0 -torseur Y_0^c sur X^c tel que $\pi \circ \iota_c \circ \sigma^* = \phi$, $\sigma_*[Y_0^c|_X] = [Y] \in H^1(X, T)$ et que $V_0 := Y_0^c|_U \cong T_0 \times U$. Ceci donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Triv}_U(V_0, T_0) & \xrightarrow{=} & \text{Triv}_U(V_0, T_0) & \xrightarrow{\sigma^*} & \text{Triv}_U(V, T) \\ \downarrow \Upsilon_c & & \downarrow \Upsilon_0 & & \downarrow \Upsilon \\ \text{Hom}_k(T_0^*, \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}}^c \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}^c)) & \xrightarrow{\pi \circ -} & \text{Hom}_k(T_0^*, \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})) & \xrightarrow{- \circ \sigma^*} & \text{Hom}_k(T^*, \mathbf{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})) \end{array}$$

et le résultat découle de l'étape (3). \square

6.2.3 L'action d'un groupe sur un toreur

Soit S un groupe de type multiplicatif et soit G un groupe linéaire connexe. Colliot-Thélène a montré que tout S -torseur H sur G avec $H(k) \neq \emptyset$ peut être muni d'une structure de groupe telle que $H \rightarrow G$ soit un homomorphisme de groupes, s'il possède un point rationnel au-dessus de e_G (cf. [CT08, Thm. 5.6]). On donne une généralisation de ce résultat (Théorème 6.2.7).

On commence par une généralisation de [CT08, Lem. 5.5].

Lemme 6.2.6. *Soient X_1, X_2 deux variétés lisses géométriquement intègres. Soit S un groupe de type multiplicatif. Supposons que X_1 est géométriquement rationnelle et $X_1(k) \neq \emptyset$. Alors pour chaque $e \in X_1(k)$ et $i = 0$ ou 1 , on a un isomorphisme canonique :*

$$H_e^i(X_1, S) \oplus H^i(X_2, S) \xrightarrow{\sim} H^i(X_1 \times X_2, S)$$

où $H_e^i(X_1, S) := \text{Ker}(H^i(X_1, S) \xrightarrow{e^*} H^i(k, S))$.

Démonstration. Si $S = \mathbb{G}_m$, l'énoncé découle de [S, Lem. 6.5 et Lem. 6.6]. Si S est quasi-trivial, i.e. il existe une k -algèbre finie étale K tel que $S = \text{Res}_{K/k} \mathbb{G}_m$, l'énoncé découle du fait $H^i(-, S) \cong H^i((-)_K, \mathbb{G}_m)$.

En général, on note $H_1^i(S) := H_e^i(X_1, S) \oplus H^i(X_2, S)$ et $H_2^i(S) := H^i(X_1 \times X_2, S)$ pour $i = 0$ ou 1 . Il existe un tore T , un tore quasi-trivial T_0 et une suite exacte :

$$0 \rightarrow S \rightarrow T_0 \rightarrow T \rightarrow 0.$$

Elle induit un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1^0(S) & \longrightarrow & H_1^0(T_0) & \longrightarrow & H_1^0(T) & \longrightarrow & H_1^1(S) & \longrightarrow & H_1^1(T_0) & \longrightarrow & H_1^1(T) \\ & & \downarrow \phi_S^0 & & \downarrow \cong & & \downarrow \phi_T^0 & & \downarrow \phi_S^1 & & \downarrow \cong & & \downarrow \phi_T^1 \\ 0 & \longrightarrow & H_2^0(S) & \longrightarrow & H_2^0(T_0) & \longrightarrow & H_2^0(T) & \longrightarrow & H_2^1(S) & \longrightarrow & H_2^1(T_0) & \longrightarrow & H_2^1(T). \end{array}$$

Alors ϕ_S^0 est injectif pour tout groupe de type multiplicatif S . Donc ϕ_T^0 est injectif. Par le lemme des cinq, ϕ_S^0 est isomorphe pour tout groupe de type multiplicatif S . Par la même méthode, ϕ_T^0 et ϕ_S^1 sont isomorphes. \square

Théorème 6.2.7. *Soient G un groupe linéaire connexe et (X, ρ) une G -variété lisse géométriquement intègre. Soient S un groupe de type multiplicatif et $Y \xrightarrow{p} X$ un S -torseur. Alors il existe un groupe linéaire H et un homomorphisme $H \xrightarrow{\psi} G$ tels que ψ soit surjectif de noyau S central et que l'action ρ_S de S sur Y s'étende une action ρ_H de H sur Y qui fait de p un H -morphisme.*

De plus :

(1) le groupe H est unique, i.e. si $H_1 \xrightarrow{\psi_1} G$ satisfait les conditions ci-dessus, alors il existe un isomorphisme de k -groupes $\vartheta : H_1 \xrightarrow{\sim} H$ tel que l'on ait un diagramme commutatif :

$$(6.2.3.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & H_1 & \xrightarrow{\psi_1} & G \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow = & & \downarrow \vartheta & & \downarrow = \\ 1 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\psi} & G \longrightarrow 1; \end{array}$$

(2) si $\rho^*[Y] = p_2^*[Y]$ dans $H^1(G \times X, S)$, alors $H \cong S \times G$;

(3) pour chaque choix d'une action ρ_H , chaque homomorphisme $G \xrightarrow{\phi} S$ induit une nouvelle action $H \times Y \xrightarrow{\rho_{H,\phi}} Y$ satisfaisant les conditions ci-dessus, où

$$\rho_{H,\phi}(h, y) = (\phi \circ \psi)(h) \cdot \rho_H(h, y) \quad \text{pour chaque } h \in H, y \in Y,$$

et toutes les actions satisfaisant les conditions ci-dessus sont obtenues de cette façon.

Démonstration. On suit la démonstration de Colliot-Thélène [CT08, Thm. 5.6]. D'après le lemme 6.2.6, pour chaque élément $\alpha \in H^1(X, S)$, puisque $\rho^*(\alpha)|_{e_G \times X} = \alpha$, il existe un unique $\beta \in H_{e_G}^1(G, S)$ tel que $\rho^*(\alpha) = p_2^*(\alpha) + p_1^*(\beta)$, où p_1, p_2 sont les projections. Si $\alpha = [Y]$, on note $\beta = (H \xrightarrow{\psi} G)$. Par [CT08, Thm. 5.6 et Cor. 5.7], il existe une structure unique de k -groupe linéaire sur H (à (6.2.3.1) près) telle que ψ soit un homomorphisme de noyau S central.

Notons $S \xrightarrow{i} H$ l'immersion. L'égalité $\rho^*[Y] = p_1^*[H] + p_2^*[Y]$ donne un diagramme commutatif :

$$(6.2.3.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \rho_H & & & \\ & & & \curvearrowright & & & \\ S \times Y & \xrightarrow{i \times id_Y} & H \times Y & \xrightarrow{\rho_+} & \rho^*Y & \xrightarrow{\rho_Y} & Y \\ \downarrow & \square & \downarrow \psi \times p & & \downarrow & \square & \downarrow p \\ e_G \times X & \longrightarrow & G \times X & \xrightarrow{=} & G \times X & \xrightarrow{\rho} & X, \end{array}$$

tel que ρ_+ induise un isomorphisme $H \times^S Y \xrightarrow{\sim} \rho^*Y$ et $\rho_H := \rho_Y \circ \rho_+$ soit un $S \times S$ -morphisme, où l'action $S \times S \curvearrowright Y : (s_1, s_2, y) \mapsto \rho_S(s_1 \cdot s_2, y)$. Donc $\rho_H|_{e_S \times Y} \in \text{Hom}_X(Y, Y)$ est un S -morphisme, et donc un isomorphisme. Remplaçant ρ_Y par $(\rho_H|_{e_S \times Y})^{-1} \circ \rho_Y$, on peut supposer que $\rho_H|_{e_S \times Y}$ est l'identité, et donc $\rho_S = \rho_H \circ (i \times id_Y)$.

Montrons que ρ_H est une action. Notons m_H la multiplication sur H . Puisque ρ est une action, les morphismes $\rho_1 := \rho_H \circ (m_H \times id_Y)$ et $\rho_2 := \rho_H \circ (id_H \times \rho_H)$ induisent un morphisme

$$\Psi : H \times H \times Y \xrightarrow{(\rho_1, \rho_2)} Y \times_X Y \xrightarrow{\sim} Y \times S \xrightarrow{p_2} S, \quad \text{i.e.} \quad \rho_H(h_1 \cdot h_2, y) = \Psi(h_1, h_2, y) \cdot \rho_H(h_1, \rho_H(h_2, y))$$

pour chaque $h_1, h_2 \in H$ et $y \in Y$. Puisque ρ_H est un $S \times S$ -morphisme et S est central dans H , il existe un morphisme $G \times G \times X \xrightarrow{\Psi_1} S$ tel que $\Psi = \Psi_1 \circ (\psi \times \psi \times p)$. Par le lemme de Rosenlicht (voir [S, Lem. 6.5]), il existe des homomorphismes $\chi_1, \chi_2 : G \rightarrow S$ et un morphisme $X \xrightarrow{\chi_0} S$ tels que

$$\Psi_1(g_1, g_2, x) = \chi_1(g_1) \cdot \chi_2(g_2) \cdot \chi_0(x)$$

pour chaque $g_1, g_2 \in G$ et $x \in X$. Puisque $\rho_H(e_H, y) = y$ pour chaque $y \in Y$, on a

$$\chi_1(g) = \chi_2(g) = \chi_0(x) = e_S$$

pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$. Donc ρ_H est une action.

Pour (1), s'il existe un groupe linéaire H qui satisfait l'énoncé du théorème, alors H et l'action ρ_H sur Y induisent le diagramme (6.2.3.2) tel que $\rho_H := \rho_Y \circ \rho_+$ et $H \times^S Y \xrightarrow{\sim} \rho^*Y$. Alors dans $H^1(G \times X, S)$, on a $p_1^*[H] + p_2^*[Y] = \rho^*[Y]$, ce qui détermine uniquement H par l'argument ci-dessus.

Pour (2), si $\rho^*[Y] = p_2^*[Y]$, on a $[H] = 0$ et, d'après (1), on a $H \cong S \times G$.

Pour (3), il est clair que $\rho_{H, \phi}|_{S \times Y} = \rho_S$ et $p \circ \rho_{H, \phi} = \rho \circ (\psi \times p)$. Par ailleurs, soit ρ'_H une action satisfaisant les conditions. Alors on a un morphisme

$$\Phi : H \times Y \xrightarrow{(\rho_H, \rho'_H)} Y \times_X Y \xrightarrow{\sim} Y \times S \xrightarrow{p_2} S \quad \text{i.e.} \quad \rho'_H(h, y) = \Phi(y, h) \cdot \rho_H(h, y)$$

pour chaque $h \in H$ et $y \in Y$. Puisque $\rho'_H|_{S \times Y} = \rho_S$, il existe $G \times X \xrightarrow{\Phi_1} S$ tel que $\Phi = \Phi_1 \circ (\psi \times p)$. Par le lemme de Rosenlicht (voir [S, Lem. 6.5]), il existe un homomorphisme $G \xrightarrow{\phi} S$ et un morphisme $X \xrightarrow{\chi} S$ tels que $\Phi_1(g, x) = \phi(g) \cdot \chi(x)$ pour chaque $g \in G$ et $x \in X$. Puisque $\rho'_H(e_H, y) = y$ pour chaque $y \in Y$, on a $\chi(x) = e_S$ pour tout $x \in X$. Donc $\rho'_H = \rho_{H, \phi}$. \square

Corollaire 6.2.8. Soient G un k -groupe linéaire connexe et X_1, X_2 deux G -variétés lisses géométriquement intègres munies d'un G -morphisme $X_1 \rightarrow X_2$. Soit S un groupe de type multiplicatif. Pour $i = 1, 2$, soient $Y_i \rightarrow X_i$ un S -torseur et H_i le groupe linéaire donné par le théorème 6.2.7. Si $Y_1 \cong Y_2 \times_{X_2} X_1$ comme S -torseurs, alors $H_1 \cong H_2$ et, après avoir changé l'action de H_1 sur Y_1 ou l'action de H_2 sur Y_2 , on peut imposer que $Y_1 \cong Y_2 \times_{X_2} X_1 \rightarrow Y_2$ soit un H_1 -morphisme.

Démonstration. L'action de H_2 sur Y_2 induit canoniquement une action de H_2 sur $Y_2 \times_{X_2} X_1$ telle que $Y_2 \times_{X_2} X_1 \rightarrow X_1$ soit un H_2 -morphisme. Par l'unicité dans le théorème 6.2.7, $H_1 \cong H_2$. Le résultat découle du fait que la différence de deux actions est un homomorphisme $G \rightarrow S$, qui ne dépend pas de X_i . \square

Corollaire 6.2.9. Sous les hypothèses du théorème 6.2.7, si le S -torseur $[Y]$ est trivial sur un G -ouvert U de X , alors $H \cong S \times G$.

Démonstration. En appliquant le théorème 6.2.7 (2) à U et le corollaire 6.2.8 à $U \rightarrow X$, on obtient le résultat. \square

Corollaire 6.2.10. Sous les hypothèses du théorème 6.2.7, supposons que $X \cong G/G_0$, où $G_0 \subset G$ est un sous-groupe fermé connexe. Si $Y(k) \neq \emptyset$, alors il existe un sous-groupe connexe fermé H_0 de H tel que $Y \cong H/H_0$ et $H_0 \cong G_0$.

Démonstration. Soient $y \in Y(k)$, $x := p(y)$ et $G \xrightarrow{\pi} X$ le morphisme induit par x . Alors $Y_G := Y \times_X G$ a un k -point sur e_G . Par [CT08, Thm. 5.6], Y_G est un groupe satisfaisant les conditions du théorème 6.2.7. Par le corollaire 6.2.8, $Y_G \cong H$ et $H \xrightarrow{\pi_Y} Y$ est un H -morphisme. Donc $H_0 := \pi_Y^{-1}(y) \cong \pi^{-1}(x) \cong G_0$. \square

6.3 Groupe de Brauer invariant

Dans toute cette section, k est un corps quelconque de caractéristique 0. Sauf mention explicite, une variété est une k -variété et les morphismes sont les k -morphisms. Soit G un groupe linéaire et soit X une G -variété lisse. On définit la notion de sous-groupe G -invariant de $\text{Br}(X)$ (Définition 6.3.1). Ensuite on établit "l'algébricité" de $\text{Br}_G(X)$ (Proposition 6.3.7). On définit la notion d'homomorphisme de Sansuc (cf. Définition 6.3.8) et on obtient un diagramme commutatif canonique de suites exactes de Sansuc (Théorème 6.3.10).

6.3.1 Définitions et propriétés

Définition 6.3.1. Soient G un groupe linéaire connexe et (X, ρ) une G -variété lisse géométriquement intègre. Le sous-groupe de Brauer G -invariant de X est le sous-groupe

$$(6.3.1.1) \quad \text{Br}_G(X) := \{b \in \text{Br}(X) : (\rho^*(b) - p_2^*(b)) \in p_1^* \text{Br}(G)\}$$

de $\text{Br}(X)$, où $G \times X \xrightarrow{p_1} G$, $G \times X \xrightarrow{p_2} X$ sont les projections.

Dans la proposition 6.3.4, pour un sous-groupe $B \subset \text{Br}(X)$, on montre que $B \subset \text{Br}_G(X)$ si et seulement si B est " G -invariant".

Proposition 6.3.2. Sous les hypothèses de la Définition 6.3.1, alors :

(1) pour toute extension de corps K/k , l'homomorphisme $\pi^* : \text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(X_K)$ induit par $\pi : X_K \rightarrow X$ vérifie $\pi^*(\text{Br}_G(X)) \subset \text{Br}_{G_K}(X_K)$;

(2) pour tout groupe linéaire connexe H , tout homomorphisme $H \xrightarrow{\psi} G$, toute H -variété Y et tout H -morphisme $p : Y \rightarrow X$ (compatible avec ψ) on a $p^*(\text{Br}_G(X)) \subset \text{Br}_H(Y)$;

(3) pour tout G -ouvert dense $U \subset X$, on a $\text{Br}_G(X) = \text{Br}_G(U) \cap \text{Br}(X)$;

- (4) on a $\text{Br}_1(X) \subset \text{Br}_G(X)$;
(5) pour toute G -variété Y munie d'un G -morphisme $Y \xrightarrow{p} X$, si p est un torseur sous un groupe linéaire connexe H , on a $(p^*)^{-1}\text{Br}_G(Y) = \text{Br}_G(X)$, où $\text{Br}(X) \xrightarrow{p^*} \text{Br}(Y)$;
(6) sous les hypothèses de (4), on a

$$\text{Br}_1(X, Y) := \text{Ker}(\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(Y_{\bar{k}})) \subset \text{Br}_G(X).$$

Démonstration. Les énoncés (1), (2) et (3) découlent de la définition.

Pour (4), par [S, Lem. 6.6], $\text{Br}_1(G \times X) = \text{Br}_a(G) \oplus \text{Br}_1(X) = p_1^*\text{Br}_1(G) + p_2^*\text{Br}_1(X)$. Pour tout $\alpha \in \text{Br}_1(X)$, on a $(\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha))|_{e_G \times X} = 0$ et donc $(\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha)) \subset p_1^*\text{Br}_1(G)$.

Pour (5), puisque $G \times Y \xrightarrow{id_G \times p} G \times X$ est aussi un H -torseur, par la suite exacte de Sansuc ([S, Prop. 6.10]), on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc} \text{Pic}(H) & \longrightarrow & \text{Br}(X) & \xrightarrow{p^*} & \text{Br}(Y) \\ \downarrow = & & \downarrow p_2^* & & \downarrow p_{2,Y}^* \\ \text{Pic}(H) & \longrightarrow & \text{Br}(G \times X) & \xrightarrow{(id_G \times p)^*} & \text{Br}(G \times Y). \end{array}$$

Donc, pour tout $\alpha \in (p^*)^{-1}\text{Br}_G(Y)$, on a

$$\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha) \in p_1^*\text{Br}(G) + \text{ImPic}(H) \subset p_1^*\text{Br}(G) + p_2^*\text{Br}(X).$$

Puisque $(\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha))|_{e_G \times X} = 0$, on peut voir que $\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha) \in p_1^*\text{Br}(G)$.

Par (4) et (5), $\text{Br}_1(X, Y) \subset \text{Br}_G(X)$. □

Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 6.3.3. *Soient X, Y deux variétés lisses intègres et $Y \xrightarrow{p} X$ un morphisme fidèlement plat à fibres géométriquement intègres. Soit $B \subset \text{Br}(k(X))$ (resp. $B \subset \text{Br}(U)$ avec $U \subset X$ un ouvert) un sous-groupe. Alors*

$$p^*(B \cap \text{Br}(X)) = (p^*B) \cap \text{Br}(Y).$$

Démonstration. Pour tout $x \in X$, la fibre Y_x est intègre et $H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(k(Y_x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est injectif. En appliquant la suite exacte naturelle [CT95, (3.9)] à X et à Y , on obtient le résultat. □

Proposition 6.3.4. *Sous les hypothèses de la Définition 6.3.1, pour un sous-groupe $B \subset \text{Br}(X)$, les énoncés ci-dessous sont équivalents :*

- (1) $B \subset \text{Br}_G(X)$;
(2) $\rho^*B + p_1^*\text{Br}(G) = p_2^*B + p_1^*\text{Br}(G)$;

(3) pour toute extension de corps K/k et tout $g \in G(K)$, l'action $\rho_g : X_K \xrightarrow{g(-)} X_K$ induit un morphisme $\text{Br}(X_K) \xrightarrow{\rho_g^*} \text{Br}(X_K)$ tel que

$$(6.3.1.2) \quad \rho_g^*\pi^*B + \text{ImBr}(K) = \pi^*B + \text{ImBr}(K),$$

où $X_K \xrightarrow{\pi} X$;

(4) pour tout $b \in B$, toute extension de corps K/k et tout $g \in G(K)$, on a

$$(\rho_g^*\pi^*(b) - \pi^*(b)) \in \text{ImBr}(K),$$

où π et ρ_g^* sont définis dans (3) ;

(5) pour toute extension de corps K/k telle que k soit algébriquement clos dans K , et tout $g \in G(K)$, on a (6.3.1.2), où π et ρ_g^* sont définis dans (3).

Démonstration. Les implications (4) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (5) sont claires.

Pour (2) \Rightarrow (1), on note $i_e : X \xrightarrow{e_G \times id_X} G \times X$ l'immersion fermée. Pour $b \in B$, il existe $b' \in B$ et $a \in \text{Br}(G)$ tels que $\rho^*(b) = p_2^*(b') + p_1^*(a)$. Puisque $\rho \circ i_e = p_2 \circ i_e = id_X$ et que $p_1 \circ i_e$ se factorise par $\text{Spec } k$, on a $b - b' \in \text{ImBr}(k)$ et donc

$$(\rho^*(b) - p_2^*(b)) \in (p_1^*\text{Br}(G) + \text{ImBr}(k)) = p_1^*\text{Br}(G).$$

Pour (1) \Rightarrow (4), on note $i_g : X_K \xrightarrow{g \times id_X} G \times X$ le morphisme et $A := \text{ImBr}(K)$. Alors $\pi \circ \rho_g = \rho \circ i_g$ et $\pi = p_2 \circ i_g$. Puisque $i_g^*(p_1^*\text{Br}(G)) \subset A$, on a

$$\rho_g^* \pi^*(b) + A = i_g^*(p_1^*\text{Br}(G) + \rho^*(b)) + A = i_g^*(p_1^*\text{Br}(G) + p_2^*(b)) + A = \pi^*(b) + A.$$

Pour (5) \Rightarrow (2), notons $X_{\eta_G} \xrightarrow{\pi} X$ la projection et $X_{\eta_G} \xrightarrow{i_\eta} G \times X$ l'immersion canonique. Alors $\text{Br}(G \times X) \rightarrow \text{Br}(X_{\eta_G})$ est injectif. Par le lemme 6.3.3, $p_1^*\text{Br}(\eta_G) \cap \text{Br}(G \times X) = p_1^*\text{Br}(G)$. Donc il suffit de montrer que :

$$(i_\eta^* \rho^*)B + \text{ImBr}(\eta_G) = (i_\eta^* p_2^*)B + \text{ImBr}(\eta_G).$$

Le résultat découle de $p_2 \circ i_\eta = \pi$ et $\rho \circ i_\eta = \pi \circ \rho_{\eta_G}$. \square

Soient X une variété lisse géométriquement intègre et $U \subset X$ un ouvert non vide. Supposons que $D := (X \setminus U)$ est lisse de codimension 1. Par le théorème de pureté pour la cohomologie étale à support dans un fermé lisse (cf. [Mi80, §VI.5]), on a une suite exacte :

$$H^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^2(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^1(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^3(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)).$$

Puisque $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(U)$ est surjectif et $\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(U)$ est injectif, d'après la suite exacte de Kummer, on a la suite exacte (cf. Grothendieck [Gro])

$$(6.3.1.3) \quad 0 \rightarrow \text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(U) \xrightarrow{\partial} H^1(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^3(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)).$$

Soit G un groupe linéaire connexe. Si X est munie d'une G -action $\rho : G \times X \rightarrow X$ respectant U , on a un diagramme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Br}(X) & \longrightarrow & \text{Br}(U) & \xrightarrow{\partial} & H^1(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ & & \downarrow \theta^* & & \downarrow \theta_U^* & & \downarrow \theta_D^* \\ 0 & \longrightarrow & \text{Br}(G \times X) & \xrightarrow{\text{Res}} & \text{Br}(G \times U) & \longrightarrow & H^1(G \times D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \end{array}$$

où $G \times X \xrightarrow{\theta} X$ est soit p_2 soit ρ . On a :

Lemme 6.3.5. *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, on a :*

$$(1) \quad p_{2,D}^* \partial(\text{Br}_G(U)) = \rho_D^* \partial(\text{Br}_G(U));$$

(2) *pour tout $b \in \text{Br}_G(U)$, il existe un revêtement fini étale galoisien abélien $D' \xrightarrow{\pi} D$ tel que D' soit une G -variété, π soit un G -morphisme et que $\pi^*(\partial(b)) = 0 \in H^1(D', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Puisque $p_{1,U}^*\text{Br}(G) \subset \text{Im}(\text{Res})$, l'énoncé (1) découle de la proposition 6.3.4 (2). Pour $b \in \text{Br}_G(U)$, soit $n \in \mathbb{Z}$ l'ordre de $\partial(b)$. Alors $\partial(b) \in H^1(D, \mathbb{Z}/n)$. Soit $D' \xrightarrow{\pi} D$ un \mathbb{Z}/n -torseur tel que $[D'] = \partial(b)$. Par (1), $p_{2,D}^*[D'] = \rho_D^*[D'] \in H^1(G \times D, \mathbb{Z}/n)$. D'après le théorème 6.2.7 (2), D' est une G -variété. \square

Lemme 6.3.6. *Soient G un groupe linéaire connexe et P un G -torseur. Alors $\text{Br}_G(P) = \text{Br}_1(P)$.*

Démonstration. D'après la proposition 6.3.2 (1) et (4), il suffit de montrer que $\text{Br}_G(P_{\bar{k}}) = 0$. On peut supposer $k = \bar{k}$ et $P \cong G$.

Si G est un tore de dimension n , alors $G \cong \mathbb{G}_m^n$ est un ouvert de \mathbb{A}^n canoniquement. Soit $X := \mathbb{A}^n \setminus [(\mathbb{A}^n \setminus G)_{\text{sing}}]$. Alors $\text{codim}(\mathbb{A}^n \setminus X, \mathbb{A}^n) \geq 2$, $\text{Br}(X) = 0$, G est un ouvert de X et $X \setminus G = \sqcup_{i=1}^n D_i$, chaque D_i étant un G -espace homogène de stabilisateur \mathbb{G}_m . D'après [CX2, Prop. 2.2], pour tout revêtement fini étale galoisien $D'_i \xrightarrow{\pi_i} D_i$ tel que D'_i soit une G -variété intègre et que π_i soit un G -morphisme, le morphisme π_i est un isomorphisme. D'après le lemme 6.3.5 (2) et (6.3.1.3), $\text{Br}_G(G) \subset \text{Br}(X) = 0$.

Si G est réductif, soit T le tore maximal de G . Par la décomposition de Bruhat, il existe un ouvert U de G tel que $U \cong \mathbb{A}^n \times T \times \mathbb{A}^n$, où $2n = \dim(U) - \dim(T)$ (voir la démonstration de [CT-Beijing, Prop. 4.2]). Donc $\text{Br}(G) \rightarrow \text{Br}(T)$ est injectif. Le résultat découle de la proposition 6.3.2 (2).

En général, par [3, Lem. 2.1], le morphisme $\text{Br}(G^{\text{red}}) \rightarrow \text{Br}(G)$ est un isomorphisme. Le résultat découle de la proposition 6.3.2 (2). \square

Proposition 6.3.7. *Soient G un groupe linéaire connexe et (X, ρ) une G -variété lisse géométriquement intègre. Pour tout $b \in \text{Br}_G(X)$, on a $(\rho^*(b) - p_2^*(b)) \in p_1^* \text{Br}_e(G)$.*

Démonstration. Pour la définition de $\text{Br}_e(G)$, voir (6.1.0.3). Notons $X \xrightarrow{e_G \times id_X} G \times X$. Puisque $p_2 \circ (e_G \times id_X) = \rho \circ (e_G \times id_X)$, il suffit de montrer que, pour tout $b \in \text{Br}_G(X)$, on a $(\rho^*(b) - p_2^*(b)) \in p_1^* \text{Br}_1(G)$.

On peut supposer $k = \bar{k}$. Un point $x \in X(k)$ induit un morphisme $G \xrightarrow{i_x} X$. Notons m la multiplication sur G . Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Br}(X) & \xrightarrow{p_2^* - \rho^*} & \text{Br}(G \times X) & \xleftarrow{p_1^*} & \text{Br}(G) \\ \downarrow i_x^* & & \downarrow (id_G \times i_x)^* & & \downarrow = \\ \text{Br}(G) & \xrightarrow{p_2^* - m^*} & \text{Br}(G \times G) & \xleftarrow{p_1^*} & \text{Br}(G). \end{array}$$

Le résultat découle du lemme 6.3.6, de la proposition 6.3.2 (2) et de l'injectivité de p_1^* . \square

6.3.2 L'homomorphisme de Sansuc

Soient G un groupe algébrique connexe et (X, ρ) une G -variété lisse géométriquement intègre. Notons $G \times X \xrightarrow{p_1} G$, $G \times X \xrightarrow{p_2} X$ les deux projections. Soit $\text{Br}_G(X)$ le sous-groupe de Brauer G -invariant de X (Définition 6.3.1). Pour la définition de $\text{Br}_e(G)$, voir (6.1.0.3).

Par [S, Lem. 6.6], on a $\text{Br}_a(G \times X) = \text{Br}_a(G) \oplus \text{Br}_a(X)$, et donc $p_1^*|_{\text{Br}_e(G)}$ est injectif. Par la proposition 6.3.7, il existe un unique homomorphisme $\text{Br}_G(X) \xrightarrow{\lambda} \text{Br}_e(G)$ tel que

$$(6.3.2.1) \quad p_1^* \circ \lambda = \rho^* - p_2^* : \text{Br}_G(X) \rightarrow \text{Br}(G \times X).$$

Définition 6.3.8. Soient G un groupe linéaire connexe et (X, ρ) une G -variété lisse géométriquement intègre. L'unique homomorphisme $\text{Br}_G(X) \xrightarrow{\lambda} \text{Br}_e(G)$ satisfaisant (6.3.2.1) est appelé *l'homomorphisme de Sansuc*.

Proposition 6.3.9. *Sous les hypothèses de la définition 6.3.8, on a :*

(1) *pour toute extension de corps K/k , et tous $x \in X(K)$, $g \in G(K)$, $\alpha \in \text{Br}_G(X)$, on a*

$$(g \cdot x)^*(\alpha) = g^*(\lambda(\alpha)) + x^*(\alpha) \in \text{Br}(K);$$

(2) *si $X(k) \neq \emptyset$, alors, pour tout $x \in X(k)$, on a*

$$(6.3.2.2) \quad \lambda = \rho_x^* - x^*,$$

où $G \xrightarrow{\rho_x} X : g \mapsto g \cdot x$, $\text{Spec } k \xrightarrow{x} X$ est le point x et $\text{Br}(X) \xrightarrow{x^*} \text{Br}(k) \subset \text{Br}(G)$.

(3) si $X \cong G/G_0$ avec $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe, alors

$$\text{Br}_G(X) \cong \text{Br}_1(X, G) := \text{Ker}(\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(G_{\bar{k}})).$$

Démonstration. Pour (1), on a

$$(g \cdot x)^*(\alpha) = (g, x)^*(\rho^*(\alpha)) = (g, x)^*(p_2^*(\alpha) + p_1^*(\lambda(\alpha))) = g^*(\lambda(\alpha)) + x^*(\alpha) \in \text{Br}(K).$$

Dans le cas (2), pour tout $\alpha \in \text{Br}_G(X)$, on obtient $(\rho^* - p_2^*)(\alpha)|_{G \times x} = (\rho_x^* - x^*)(\alpha)$. L'énoncé (3) résulte de la proposition 6.3.2 (2) (5) et du lemme 6.3.6. \square

Si $X \xrightarrow{f} Z$ est un G -torseur, par définition, l'homomorphisme de Sansuc $\lambda|_{\text{Br}_1(X)}$ est exactement le morphisme dans la suite exacte de Sansuc à isomorphisme canonique $\text{Br}_e(G) \cong \text{Br}_a(G)$ près (cf. [BD, Thm. 2.8]).

Théorème 6.3.10. *Soient G un groupe linéaire connexe, Z une variété lisse géométriquement intègre et $X \xrightarrow{f} Z$ un G -torseur. Notons $G \times X \xrightarrow{p} X$ l'action de G . Alors l'homomorphisme de Sansuc λ induit un diagramme commutatif de suites exactes, fonctoriel en (X, Z, f, G) :*

$$(6.3.2.3) \quad \begin{array}{ccccccc} \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(G) & \longrightarrow & \text{Br}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \text{Br}_G(X) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Br}_e(G) \cong \text{Br}_a(G) \\ \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow p_1^* \\ \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(G) & \longrightarrow & \text{Br}(Z) & \longrightarrow & \text{Br}(X) & \xrightarrow{\rho^* - p_2^*} & \text{Br}(G \times X). \end{array}$$

Démonstration. D'après Borovoi et Demarche [BD, Thm. 2.8], on a une suite exacte

$$\text{Pic}(G) \rightarrow \text{Br}(Z) \xrightarrow{f^*} \text{Br}(X) \xrightarrow{\rho^* - p_2^*} \text{Br}(G \times X)$$

telle que $(\rho^* - p_2^*)(\text{Br}_1(X)) \subset p_1^* \text{Br}_e(G)$. Le résultat découle de la proposition 6.3.7. \square

Corollaire 6.3.11. *Soient $1 \rightarrow N \rightarrow H \xrightarrow{\psi} G \rightarrow 1$ une suite exacte de groupes linéaires connexes et (X, ρ) une G -variété lisse géométriquement intègre.*

(1) On a $\text{Br}_G(X) = \text{Br}_H(X)$.

(2) S'il existe une H -variété Y et un H -morphisme $Y \xrightarrow{p} X$ tels que $Y \rightarrow X$ soit un N -torseur, alors $\text{Br}(X) \xrightarrow{p^*} \text{Br}(Y)$ satisfait $(p^*)^{-1} \text{Br}_H(Y) = \text{Br}_G(X)$ et on a une suite exacte (où λ est l'homomorphisme de Sansuc), fonctorielle en (X, Y, p, N) :

$$\text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(N) \xrightarrow{\chi} \text{Br}_G(X) \xrightarrow{p^*} \text{Br}_H(Y) \xrightarrow{\lambda} \text{Br}_e(N).$$

Démonstration. Puisque $H \times X \xrightarrow{\psi_X} G \times X$ est un N -torseur, par le diagramme (6.3.2.3), on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Pic}(N) & \longrightarrow & \text{Br}(G) & \longrightarrow & \text{Br}_N(H) & \longrightarrow & \text{Br}_e(N) \\ \downarrow = & & \downarrow p_1^* & & \downarrow p_1^* & & \downarrow = \\ \text{Pic}(N) & \longrightarrow & \text{Br}(G \times X) & \xrightarrow{\psi_X^*} & \text{Br}_N(H \times X) & \longrightarrow & \text{Br}_e(N) \end{array}$$

Donc $(\psi_X^*)^{-1}(p_1^* \text{Br}_N(H)) = p_1^* \text{Br}(G)$. Puisque $\text{Br}_e(H) \subset \text{Br}_1(H) \subset \text{Br}_N(H)$ (Proposition 6.3.2 (4)), la proposition 6.3.7 donne (1).

Appliquons la proposition 6.3.2 (5) au N -torseur $Y \rightarrow X$ (avec l'action de H). On a (en utilisant (1))

$$\chi(\text{Pic}(N)) \subset (p^*)^{-1}(0) \subset (p^*)^{-1}(\text{Br}_H(X)) = \text{Br}_H(X) = \text{Br}_G(X).$$

Une application du diagramme (6.3.2.3) au N -torseur $Y \rightarrow X$ donne (2). \square

Comme conséquence, par le lemme 6.3.6, on a une suite exacte ([S, Cor. 6.11]) :

$$(6.3.2.4) \quad \text{Pic}(N) \rightarrow \text{Br}_1(G) \rightarrow \text{Br}_1(H) \rightarrow \text{Br}_e(N).$$

Lemme 6.3.12. *Soient G, N deux groupes linéaires connexes et X une G -variété lisse géométriquement intègre. Soient $H := N \times G$ et P une H -variété telle que P soit un N -torseur sur k . Soient $Y := P \times X$ et $Y \xrightarrow{p_1} P, Y \xrightarrow{p_2} X$ les deux projections. Si $P(k) \neq \emptyset$ ou $H^3(k, \bar{k}^\times) = 0$, on a un isomorphisme :*

$$(p_1^*, p_2^*) : \text{Br}_a(P) \oplus \text{Br}_G(X) / \text{ImBr}(k) \xrightarrow{\sim} \text{Br}_H(Y) / \text{ImBr}(k).$$

De plus, cet isomorphisme induit un isomorphisme : $(p_1^*, p_2^*) : \text{Br}_a(P) \oplus \text{Br}_a(X) \xrightarrow{\sim} \text{Br}_a(Y)$.

Démonstration. Par la proposition 6.3.2 (1) et le lemme 6.3.6, on a $\text{Br}_H(P) = \text{Br}_1(P)$. D'après le corollaire 6.3.11 (2) et l'isomorphisme $\text{Br}_e(N) \cong \text{Br}_a(N)$, on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Pic}(P) & \xrightarrow{\vartheta_1} & \text{Pic}(N) & \longrightarrow & \text{Br}(k) & \longrightarrow & \text{Br}_1(P) & \xrightarrow{\vartheta_2} & \text{Br}_a(N) \\ \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow p_1^* & & \downarrow = \\ \text{Pic}(Y) & \longrightarrow & \text{Pic}(N) & \longrightarrow & \text{Br}_G(X) & \xrightarrow{p_2^*} & \text{Br}_H(Y) & \longrightarrow & \text{Br}_a(N). \end{array}$$

Puisque $P(k) \neq \emptyset$ ou $H^3(k, \bar{k}^\times) = 0$, par [S, Lem. 6.7 et 6.8], ϑ_1 et ϑ_2 sont surjectifs. Alors on a une suite exacte

$$(6.3.2.5) \quad 0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}_1(P) \oplus \text{Br}_G(X) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} \text{Br}_H(Y) \rightarrow 0.$$

Puisque le morphisme $\text{Br}(X_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Br}((P \times X)_{\bar{k}}) \cong \text{Br}(Y_{\bar{k}})$ est injectif, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}_1(P) \oplus \text{Br}_1(X) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} \text{Br}_1(Y) \rightarrow 0.$$

Le résultat en découle. \square

Proposition 6.3.13. *Soient T un tore et $1 \rightarrow G_0 \rightarrow G \xrightarrow{\psi} T \rightarrow 1$ une suite exacte de groupes linéaires connexes. Soient X une G -variété lisse, géométriquement intègre et $X \xrightarrow{f} T$ un G -morphisme. Notons $\text{Br}_a(G) \xrightarrow{\vartheta} \text{Br}_a(G_0)$ l'homomorphisme induit par $G_0 \subset G$. Alors, pour tout $t \in T(k)$, la fibre X_t est G_0 -invariante et on a un isomorphisme naturel $\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \cong \text{Pic}(X_{t, \bar{k}})$ et deux suites exactes naturelles*

$$0 \rightarrow T^* \xrightarrow{f^*} \bar{k}[X]^\times / \bar{k}^\times \rightarrow \bar{k}[X_t]^\times / \bar{k}^\times \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \text{Br}_e(T) \rightarrow \text{Br}_G(X) \rightarrow \text{Br}_{G_0}(X_t) \rightarrow \text{coker}(\vartheta).$$

Démonstration. D'après [CX2, Prop. 2.2], X_t est lisse, géométriquement intègre. Puisque T est commutatif, X_t est G_0 -invariant. Notons :

$$X_t \xrightarrow{i} G \times X_t : x \mapsto (e_G, x) \quad \text{et} \quad G \times X_t \xrightarrow{\rho} X : (g, x) \mapsto g \cdot x.$$

Alors $\rho \circ i$ est l'immersion $X_t \subset X$. On fixe des actions

$$G \times G_0 \curvearrowright G \times X_t : (g, g_0) \times (g', x) \mapsto (gg'g_0^{-1}, g_0 \cdot x) \quad \text{et} \quad G \times G_0 \curvearrowright G : (g, g_0) \times g' \mapsto gg'g_0^{-1}.$$

Par définition, $X \cong G \times^{G_0} X_t$ et on a un diagramme commutatif de $G \times G_0$ -morphisms

$$\begin{array}{ccc} X_t & \xleftarrow{p_2} & G \times X_t & \xrightarrow{p_1} & G \\ & & \downarrow \rho & & \downarrow t \cdot \psi(-) \\ & & X & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

tel que les colonnes soient des G_0 -torseurs.

D'après [S, Lem. 6.5 et Lem. 6.6], on a

$$\bar{k}[G \times X_t]^\times / \bar{k}^\times \cong \bar{k}[G]^\times / \bar{k}^\times \oplus \bar{k}[X_t]^\times / \bar{k}^\times \quad \text{et} \quad \text{Pic}(G_{\bar{k}} \times X_{t,\bar{k}}) \cong \text{Pic}(G_{\bar{k}}) \oplus \text{Pic}(X_{t,\bar{k}}).$$

Par la suite exacte de Sansuc [S, Prop. 6.10 et Cor. 6.11], on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & T^* & \longrightarrow & \frac{\bar{k}[G]^\times}{\bar{k}^\times} & \longrightarrow & \frac{\bar{k}[G_0]^\times}{\bar{k}^\times} & \longrightarrow & \text{Pic}(T_{\bar{k}}) & \longrightarrow & \text{Pic}(G_{\bar{k}}) & \longrightarrow & \text{Pic}(G_{0,\bar{k}}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\ 0 & \longrightarrow & \frac{\bar{k}[X]^\times}{\bar{k}^\times} & \longrightarrow & \frac{\bar{k}[G \times X_t]^\times}{\bar{k}^\times} & \longrightarrow & \frac{\bar{k}[G_0]^\times}{\bar{k}^\times} & \longrightarrow & \text{Pic}(X_{\bar{k}}) & \longrightarrow & \text{Pic}((G \times X_t)_{\bar{k}}) & \longrightarrow & \text{Pic}(G_{0,\bar{k}}) & & \end{array} .$$

Puisque $\text{Pic}(T_{\bar{k}}) = 0$, une application du lemme du serpent donne l'isomorphisme et la première suite exacte de l'énoncé.

D'après (6.3.2.5), on a un isomorphisme : $\text{Br}_e(G) \oplus \text{Br}_{G_0}(X_t) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} \text{Br}_{G \times G_0}(G \times X_t)$. Le corollaire 6.3.11 donne un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Pic}(G_0) & \longrightarrow & \text{Br}_1(T) & \longrightarrow & \text{Br}_1(G) & \xrightarrow{\lambda_G} & \text{Br}_e(G_0) \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow p_1^* & & \downarrow = \\ \text{Pic}(G_0) & \longrightarrow & \text{Br}_G(X) & \xrightarrow{\rho^*} & \text{Br}_{G \times G_0}(G \times X_t) & \longrightarrow & \text{Br}_e(G_0) \\ & & & & \downarrow i^* & & \\ & & & & \text{Br}(X_t) / \text{Im}(\text{Br}(k)) & & \end{array} .$$

D'après la proposition 6.3.9 (2), $\text{Coker}(\vartheta) \cong \text{Coker}(\lambda_G)$. Puisque $p_2 \circ i = \text{id}$ et $i^* \circ p_1^* = 0$, on a $\text{Br}_{G_0}(X_t) = \text{Im}(i^*) \cong \text{Coker}(p_1^*)$. Une chasse au diagramme donne l'énoncé. \square

Corollaire 6.3.14. *Sous les hypothèses de la proposition 6.3.13, soient $U \subset X$ un G -ouvert et $B \subset \text{Br}_G(U)$ un sous-groupe. Alors, pour tout $t \in T(k)$, de fibre $U_t \subset X_t \xrightarrow{i_t} X$, on a :*

$$i_t^*(B \cap \text{Br}(X)) = (i_t^*(B) \cap \text{Br}(X_t)).$$

Démonstration. D'après la proposition 6.3.13, on a un diagramme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Br}_e(T) & \longrightarrow & \text{Br}_G(X) & \longrightarrow & \text{Br}_{G_0}(X_t) & \longrightarrow & \text{Coker}(\vartheta) \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ \text{Br}_e(T) & \longrightarrow & \text{Br}_G(U) & \xrightarrow{i_t^*} & \text{Br}_{G_0}(U_t) & \longrightarrow & \text{Coker}(\vartheta). \end{array}$$

Une chasse au diagramme donne l'énoncé. \square

6.3.3 Pseudo espace homogène

Soit G un groupe linéaire connexe. Pour les besoins de cet article, on introduit la notion de pseudo G -espace homogène. Elle généralise la notion de G -espace homogène avec un k -point à stabilisateur géométrique connexe (cf. exemple 6.3.16 (1)).

Définition 6.3.15. Soit G un groupe linéaire connexe. Une G -variété Z est appelée *pseudo G -espace homogène* si Z est lisse, géométriquement intègre, $\text{Pic}(Z_{\bar{k}})$ est de type fini, $Z(k) \neq \emptyset$ et $\frac{\text{Ker}(\lambda)}{\text{Br}(k)}$, $\text{Br}_{G_{\bar{k}}}(Z_{\bar{k}})$ sont finis, où $\lambda : \text{Br}_G(Z) \rightarrow \text{Br}_e(G)$ est l'homomorphisme de Sansuc (cf. Définition 6.3.8).

Fixons $z \in Z(k)$ et notons $\rho_z : G \rightarrow Z : g \mapsto g \cdot z$. D'après (6.3.2.2), le groupe $\frac{\text{Ker}(\lambda)}{\text{Br}(k)}$ est fini si et seulement si $\text{Ker}(\rho_z^*) \cap \text{Br}_G(Z)$ est fini, où $\text{Br}(Z) \xrightarrow{\rho_z^*} \text{Br}(G)$.

Exemple 6.3.16. Soit G un groupe linéaire connexe.

(1) Soit $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe. Alors G/G_0 est un pseudo G -espace homogène.

(2) Soient W une variété lisse géométriquement intègre et $Z \rightarrow W$ un G -torseur. Si $\text{Pic}(W)$ est de type fini, $\text{Br}(W)/\text{Br}(k)$, $\text{Br}(W_{\bar{k}})$ sont finis et $Z(k) \neq \emptyset$, alors Z est un pseudo G -espace homogène.

Démonstration. L'énoncé (1) résulte de [BD, Thm. 2.8] et de la proposition 6.3.9 (3). L'énoncé (2) résulte du corollaire 6.3.11 (2). \square

Proposition 6.3.17. Soient G un groupe linéaire connexe et Z un pseudo G -espace homogène. Soient T un tore, $Z' \rightarrow Z$ un T -torseur et H le groupe linéaire connexe déterminé dans le théorème 6.2.7. Si $Z'(k) \neq \emptyset$, alors Z' est un pseudo H -espace homogène.

Démonstration. Fixons $z' \in Z'(k)$ et $z \in Z(k)$ l'image de z' . Notons $\rho_{z'} : H \rightarrow Z' : h \mapsto h \cdot z'$ et $\rho_z : G \rightarrow Z : g \mapsto g \cdot z$. D'après la suite exacte de Sansuc [S, Prop. 6.10], $\text{Pic}(Z'_{\bar{k}})$ est de type fini. Par le corollaire 6.3.11 (2) et (6.3.2.4), on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Pic}(T) & \longrightarrow & \text{Br}_G(Z) & \longrightarrow & \text{Br}_H(Z') & \longrightarrow & \text{Br}_e(T) \\ \downarrow = & & \downarrow \rho_z^* & & \downarrow \rho_{z'}^* & & \downarrow = \\ \text{Pic}(T) & \longrightarrow & \text{Br}_1(G) & \longrightarrow & \text{Br}_1(H) & \longrightarrow & \text{Br}_e(T), \end{array}$$

et un isomorphisme $\text{Br}_{G_{\bar{k}}}(Z_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Br}_{H_{\bar{k}}}(Z'_{\bar{k}})$. Ainsi $\text{Br}_{H_{\bar{k}}}(Z'_{\bar{k}})$ est fini. Puisque $\text{Ker}(\rho_z^*)$ est fini, le groupe $\text{Ker}(\rho_{z'}^*)$ est fini et Z' est un pseudo H -espace homogène. \square

Proposition 6.3.18. Soient G un groupe linéaire connexe et Z un pseudo G -espace homogène. Alors $\text{Br}_G(Z)/\text{Br}_1(Z)$ est fini.

Démonstration. Ceci vaut car $\text{Br}_G(Z)/\text{Br}_1(Z)$ est un sous-groupe de $\text{Br}_{G_{\bar{k}}}(Z_{\bar{k}})$. \square

Pour un corps de nombres, le lemme suivant est bien connu.

Lemme 6.3.19. Supposons que k est un corps de nombres. Soit M un Γ_k -module de type fini avec $M \neq 0$. On a :

- (i) si M est sans torsion, alors $H^2(k, M)$ est infini ;
- (ii) M est sans torsion ssi $H^1(k, M)$ est fini.

Démonstration. Si M est fini, par l'approximation très faible de M (cf. le cas $G = 1$ de [Ha07, Thm. 1]), il existe un sous-ensemble fini $S_0 \subset \Omega$ tel que, pour tout sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$ avec $S \cap S_0 = \emptyset$, l'homomorphisme $H^1(k, M) \rightarrow \bigoplus_{v \in S} H^1(k_v, M)$ soit surjectif. Il existe un nombre infini de $v \in \Omega_k$ tel que l'action de Γ_{k_v} sur M soit triviale. Dans ce cas, $H^1(k_v, M) \neq 0$. Donc $H^1(k, M)$ est infini.

En général, la suite exacte $0 \rightarrow M_{\text{tor}} \rightarrow M \rightarrow M_{\text{free}} \rightarrow 0$ induit une suite exacte

$$M_{\text{free}}^{\Gamma_k} \xrightarrow{\vartheta} H^1(k, M_{\text{tor}}) \rightarrow H^1(k, M),$$

où $M_{\text{tor}} \subset M$ est le sous-module torsion maximal et $M_{\text{free}} := M/M_{\text{tor}}$. Ainsi M_{free} est de type fini et donc $\text{Im}(\vartheta)$ est fini. Si $H^1(k, M)$ est fini, M est donc sans torsion. Par ailleurs, si M est sans torsion, $H^1(k, M)$ est fini. Ceci donne (ii).

Si M est sans torsion, la suite exacte $0 \rightarrow M \xrightarrow{n} M \rightarrow M/n \rightarrow 0$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$) induit une suite exacte : $H^1(k, M) \rightarrow H^1(k, M/n) \rightarrow H^2(k, M) \xrightarrow{n} H^2(k, M)$. Alors $H^1(k, M/n)$ est infini et (ii) implique (i). \square

Lemme 6.3.20. *Supposons que k est un corps de nombres. Soit $\phi : M \rightarrow N$ un homomorphisme de Γ_k -modules de type fini sans torsion. Si $\text{Ker}(H^2(k, M) \xrightarrow{\phi_*} H^2(k, N))$ est fini, alors ϕ est injectif et $\text{coker}(\phi)$ est sans torsion.*

Démonstration. Notons $I := \text{Im}(\phi)$, $K := \text{Ker}(\phi)$ et $C := \text{coker}(\phi)$. Alors I et K sont de type fini sans torsion et on a deux suites exactes :

$$H^1(k, I) \rightarrow H^2(k, K) \rightarrow H^2(k, M) \xrightarrow{\theta_1} H^2(k, I)$$

et

$$H^1(k, N) \rightarrow H^1(k, C) \rightarrow H^2(k, I) \xrightarrow{\theta_2} H^2(k, N).$$

Ainsi $H^1(k, I)$, $H^1(k, N)$ et $\text{Ker}(\theta_1)$ sont finis. Alors $H^2(k, K)$ est fini et donc $K = 0$ (Lemme 6.3.19). Ainsi $\text{Ker}(\theta_2)$ est fini. Alors $H^1(k, C)$ est fini et donc C est sans torsion (Lemme 6.3.19). \square

Lemme 6.3.21. *Supposons que k est un corps de nombres. Soient G un groupe linéaire connexe, T un tore et $G \xrightarrow{\psi} T$ un homomorphisme. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) le groupe $\text{Ker}(\text{Br}_1(T) \xrightarrow{\psi^*} \text{Br}_1(G))$ est fini ;
- (ii) le morphisme ψ est surjectif de noyau connexe ;
- (iii) la G -variété T est un pseudo G -espace homogène.

Démonstration. D'après l'exemple 6.3.16 (1), on a (ii) \Rightarrow (iii). Par la phrase après la définition 6.3.15, on a (iii) \Rightarrow (i). Pour (i) \Rightarrow (ii), puisque ψ se factorise par G^{tor} , on peut remplacer G par G^{tor} et supposer que G est un tore. Dans ce cas, puisque $\text{Br}_a(T) \cong H^2(k, T^*)$, le noyau de $H^2(k, T^*) \xrightarrow{\psi^*} H^2(k, G^*)$ est fini. Le lemme 6.3.20 ci-dessus donne (ii). \square

Soient G un groupe linéaire connexe et Z un pseudo G -espace homogène (cf. Définition 6.3.15). Soient $(Z^{\text{tor}})^* := \bar{k}[Z]^\times / \bar{k}^\times$ un Γ_k -module libre de type fini et Z^{tor} le tore correspondant. Pour tout $z \in Z(k)$, on a un morphisme canonique $Z \xrightarrow{\pi_z} Z^{\text{tor}}$ tel que $\pi_z(z) = e_{Z^{\text{tor}}}$ (Rosenlicht). Soit ψ_z la composition $G \rightarrow G \cdot z \hookrightarrow Z \xrightarrow{\pi_z} Z^{\text{tor}}$.

Proposition 6.3.22. *Le morphisme ψ_z ne dépend pas du choix de z , et c'est un homomorphisme tel que Z^{tor} soit une G -variété et π_z soit un G -morphisme.*

De plus, si k est un corps de nombres, la G -variété Z^{tor} est un pseudo G -espace homogène.

Démonstration. Notons $\rho : G \times Z \rightarrow Z$ l'action de G . Par le lemme de Rosenlicht, ψ_z est un homomorphisme. D'après le lemme 6.2.6, on a un isomorphisme canonique

$$H_{e_G}^0(G, Z^{\text{tor}}) \oplus H^0(Z, Z^{\text{tor}}) \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1^* \cdot p_2^*} \\ \xleftarrow{\theta} \end{array} H^0(G \times Z, Z^{\text{tor}}) : \quad (\psi_z, \pi_z) \longmapsto \psi_z \cdot \pi_z$$

tel que $\theta(\pi_z \circ \rho) = ((\pi_z \circ \rho)|_{G \times z}, (\pi_z \circ \rho)|_{e_G \times Z}) = (\psi_z, \pi_z)$. Alors $\pi_z \circ \rho = \psi_z \cdot \pi_z$ et π_z est un G -morphisme.

Pour tout $z' \in Z(k)$, on a $\pi_{z'} = \pi_z(z')^{-1} \cdot \pi_z$ et donc $\theta(\pi_{z'} \circ \rho) = (\psi_z, \pi_z(z')^{-1} \cdot \pi_z)$. Ainsi $\psi_{z'} = \psi_z$.

La suite spectrale de Hochschild-Serre donne une suite exacte

$$\text{Pic}(Z) \rightarrow \text{Pic}(Z_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \rightarrow \text{Br}_1(Z^{\text{tor}}) \xrightarrow{\pi_z^*|_{\text{Br}_1}} \text{Br}(Z).$$

Puisque $\text{Pic}(Z_{\bar{k}})$ est de type fini et $\text{Br}_1(Z^{\text{tor}})$ est de torsion, le groupe $\text{Ker}(\pi_z^*|_{\text{Br}_1})$ est fini.

Puisque $\text{Ker}(\text{Br}_G(Z) \xrightarrow{\rho_z^*} \text{Br}(G))$ est fini, le groupe $\text{Ker}(\text{Br}_1(Z^{\text{tor}}) \xrightarrow{\psi_z^*|_{\text{Br}_1}} \text{Br}(G))$ est fini. Si k est un corps de nombres, une application du lemme 6.3.21 donne l'énoncé. \square

Définition 6.3.23. Dans la proposition 6.3.22, une fois qu'on a choisi $z \in Z(k)$, le morphisme $Z \xrightarrow{\pi} Z^{\text{tor}}$ est appelé *le quotient torique maximal*. Il ne dépend du choix de z qu'à translation près. Si k est un corps de nombres, le morphisme $G \rightarrow Z^{\text{tor}}$ dans la proposition 6.3.22 est surjectif de noyau G_0 connexe. Le groupe G_0 est appelé *le stabilisateur de G sur Z^{tor}* .

6.4 L'approximation forte hors des places archimédiennes et la question 6.1.2

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite, une variété est une k -variété. Soit G un groupe linéaire connexe. Pour répondre à la question 6.1.2, on établit le théorème 6.4.2. Comme conséquence, on montre le théorème 6.1.4 (1).

Rappelons la notion de sous-groupe de Brauer invariant (cf. Définition 6.3.1).

Lemme 6.4.1. *Soit G un groupe linéaire connexe. Alors l'homomorphisme induit par l'accouplement de Brauer-Manin $G(\mathbb{A}_k)_\bullet \xrightarrow{\theta_G} \text{Br}_a(G)^D$ est ouvert, où $(-)^D := \text{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (cf. (6.1.0.2)).*

Démonstration. Dans $G(\mathbb{A}_k)_\bullet$, les sous-groupes ouverts compacts forment une base topologique de e_G . Pour tout tel sous-groupe C , l'image $\theta_G(C) \subset \text{Br}_a(G)^D$ est compacte, et donc fermée. Il suffit alors de montrer que cette image est d'indice fini. Par la finitude du nombre de classes de G ([PR, Thm. 5.1]), il existe un tel sous-groupe C_0 tel que le double quotient $C_0 \backslash G(\mathbb{A}_k)_\bullet / G(k)$ soit fini. Puisque $\text{III}^1(G)$ est fini, d'après [D11b, Thm. 5.1], $\theta_G(C_0)$ est d'indice fini. Pour tout tel sous-groupe C , le quotient $C_0 / (C \cap C_0)$ est fini, car C_0 est compact. Donc $\theta_G(C)$ est d'indice fini. \square

Théorème 6.4.2. *Soient G un groupe linéaire connexe, X une G -variété lisse géométriquement intègre et $U \subset X$ un G -ouvert. Soient $A \subset \text{Br}(X)$ un sous-groupe fini et $B \subset \text{Br}_G(U)$ (cf. (6.3.1.1)) un sous-groupe. Supposons que $\frac{B \cap \text{Ker}(\lambda)}{B \cap \text{ImBr}(k)}$ est fini, où $\text{Br}_G(U) \xrightarrow{\lambda} \text{Br}_e(G)$ est l'homomorphisme de Sansuc (Définition 6.3.8). Alors, pour tout ouvert $W \subset X(\mathbb{A}_k)$ satisfaisant $W^{(A+B) \cap \text{Br}(X)} \neq \emptyset$, on a $W \cap U(\mathbb{A}_k)^{A+B} \neq \emptyset$.*

Démonstration. On peut supposer que $\text{ImBr}(k) \subset B$. Après avoir rétréci W , on peut supposer que tout élément de A s'annule sur W et $W \cong W_\infty \times W_f$ avec $W_\infty \subset X(k_\infty)$, $W_f \subset X(\mathbb{A}_k^\infty)$ tel que W_f soit compact.

Pour tout $w \in W_f$, il existe un ouvert $W_w \subset W_f$ contenant w et un ouvert $C_w \subset G(\mathbb{A}^\infty)$ tel que $C_w \cdot W_w \subset W_f$. Puisque W_f est compact, il existe un sous-ensemble fini $I \subset W_f$ tel que $\cup_{w \in I} W_w = W_f$. Soit C_f le sous-groupe de $G(\mathbb{A}^\infty)$ engendré par $\cap_{w \in I} C_w$. Alors $C_f \cdot W_f \subset W_f$ et C_f est ouvert dans $G(\mathbb{A}^\infty)$. Soit $C := (e_G)_\infty \times C_f \subset G(\mathbb{A}_k)$. Alors $C \cdot W = W$ et l'image de C dans $G(\mathbb{A}_k)_\bullet$ est ouvert.

Notons $G(\mathbb{A}_k) \xrightarrow{\theta_G} \text{Br}_a(G)^D$ et $U(\mathbb{A}_k) \xrightarrow{\theta_U} B^D$ les applications induites par l'accouplement de Brauer-Manin, où $(-)^D := \text{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (cf. (6.1.0.2)). D'après le lemme 6.4.1, $\theta_G(C) \subset \text{Br}_a(G)^D$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini. Puisque $\frac{B \cap \text{Ker}(\lambda)}{\text{ImBr}(k)}$ est fini, $(\lambda^D \circ \theta_G)(C) \subset (B/\text{ImBr}(k))^D$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini, où l'homomorphisme

$$\lambda : B \subset \text{Br}_G(U) \rightarrow \text{Br}_e(G) = \text{Br}_a(G) \text{ induit } \lambda^D := \text{Hom}(\lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : \text{Br}_a(G)^D \rightarrow (B/\text{ImBr}(k))^D.$$

Donc il existe un sous-groupe fini $B_1 \subset B$ tel que

$$(6.4.0.1) \quad \text{Ker}((B/\text{ImBr}(k))^D \xrightarrow{\vartheta} (B_1)^D) \subset (\lambda^D \circ \theta_G)(C),$$

où ϑ est induit par $B_1 \subset B \rightarrow B/\text{ImBr}(k)$.

D'après le lemme formel d'Harari ([Ha94, Cor. 2.6.1]), $W \cap U(\mathbb{A}_k)^{B_1} \neq \emptyset$. On a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G(\mathbb{A}_k) & & U(\mathbb{A}_k) \\ \downarrow \theta_G & & \downarrow \theta_U \\ \mathrm{Br}_a(G)^D & \xrightarrow{\lambda^D} & (B/\mathrm{ImBr}(k))^D \xrightarrow{\vartheta} (B_1)^D. \end{array}$$

Soit $u \in W \cap U(\mathbb{A}_k)^{B_1}$, alors $\vartheta(\theta_U(u)) = 0$ et, d'après (6.4.0.1), il existe $g \in C$ tel que $g^{-1} \cdot u \in W$ et $(\lambda^D \circ \theta_G)(g) = \theta_U(u)$. D'après la proposition 6.3.9 (1), on a $\theta_U(g^{-1} \cdot u) = 0$. \square

Remarque 6.4.3. Dans le théorème 6.4.2, si $G = 1$, alors ce théorème est équivalent au lemme formel d'Harari ([Ha94, Cor. 2.6.1]).

Comme conséquence directe, on a :

Corollaire 6.4.4. Avec les hypothèses et notations du théorème 6.4.2, pour tout sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$, s'il existe un ouvert X_1 de X tel que $U \subset X_1$ et X_1 satisfasse l'approximation forte par rapport à $\mathrm{Br}(X_1) \cap (A + B)$ hors de S , alors X satisfait l'approximation forte par rapport à $\mathrm{Br}(X) \cap (A + B)$ hors de S .

Corollaire 6.4.5. Avec les hypothèses et notations du théorème 6.4.2, s'il existe un ouvert X_1 de X tel que $U \subset X_1$ et $X_1(k)$ soit dense dans $X_1(\mathbb{A}_k)_{\bullet}^{\mathrm{Br}(X_1) \cap (A+B)}$, alors $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)_{\bullet}^{\mathrm{Br}(X) \cap (A+B)}$.

Soit G un groupe linéaire connexe. Pour la notion de pseudo G -espace homogène, voir la Définition 6.3.15.

Théorème 6.4.6. Soient G un groupe linéaire connexe et Z un pseudo G -espace homogène. Soient X une G -variété lisse, géométriquement intègre et $U \subset X$ un G -ouvert muni d'un G -morphisme $U \xrightarrow{f} Z$. Soient $A \subset \mathrm{Br}(X)$ et $B \subset \mathrm{Br}_G(U)$ (cf. (6.3.1.1)) deux sous-groupes finis. Alors, pour tout ouvert $W \subset X(\mathbb{A}_k)$ satisfaisant $W^{\mathrm{Br}(X) \cap (A+B+f^*\mathrm{Br}_G(Z))} \neq \emptyset$,

- (1) on a $W \cap U(\mathbb{A}_k)^{A+B+f^*\mathrm{Br}_G(Z)} \neq \emptyset$;
- (2) si $G(k_\infty)^+ \cdot Z(k)$ est dense dans $Z(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(Z)}$, il existe $z \in Z(k)$ de fibre U_z tel que

$$(G(k_\infty)^+ \cdot W) \cap U_z(\mathbb{A}_k)^{A+B} \neq \emptyset.$$

Démonstration. Notons $\mathrm{Br}_G(Z) \xrightarrow{\lambda_Z} \mathrm{Br}_a(G)$, $\mathrm{Br}_G(U) \xrightarrow{\lambda_U} \mathrm{Br}_a(G)$ les homomorphismes de Sansuc (cf. Définition 6.3.8). Puisque $\mathrm{Ker}(\lambda_Z)/\mathrm{ImBr}(k)$ est fini et $\lambda_Z = \lambda_U \circ f^*$, le quotient $\frac{\mathrm{Ker}(\lambda_U) \cap (B+f^*\mathrm{Br}_G(Z))}{\mathrm{ImBr}(k)}$ est fini. Une application du théorème 6.4.2 donne (1).

D'après [Cod, Thm. 4.5], l'application $U(\mathbb{A}_k) \rightarrow Z(\mathbb{A}_k)$ est ouverte et on obtient (2). \square

Démonstration du théorème 6.1.4 (1). D'après un théorème de Kneser et Platonov (cf. [PR, Thm. 7.12]), $G^{sc}(k)$ est dense dans $G^{sc}(\mathbb{A}_k^{\infty k})$. Par la proposition 6.3.9 (3) et l'approximation forte pour les espaces homogènes à stabilisateur géométrique connexe (Borovoi et Demarche [BD, Thm. 1.4]), $U(k)$ est dense dans $U(\mathbb{A}_k)_{\bullet}^{\mathrm{Br}_G(U)}$. Une application du théorème 6.4.6 (2) au quintuple

$$(G, U \subset X, U \xrightarrow{f=id_U} U, 0 \subset \mathrm{Br}(X), 0 \subset \mathrm{Br}_G(U))$$

donne l'énoncé. \square

6.5 La descente par rapport au groupe de Brauer invariant

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k -variété. La méthode de descente des points adéliques est établie par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTS87b]. Dans [3], C. Demarche, F. Xu et l'auteur étudient la méthode de descente des points adéliques orthogonaux à certains groupes de Brauer dans le cas des toiseurs sous un tore. On suit leur méthode et considère ici le cas plus général des toiseurs sous un groupe linéaire connexe (Théorème 6.5.9).

Pour la notion de sous-groupe de Brauer invariant, voir la définition 6.3.1.

6.5.1 Un cas spécial ($\text{III}^1(G) = 1$)

Soient G un groupe linéaire connexe, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un G -toiseur (à gauche). Pour tout $\sigma \in Z^1(k, G)$, soient P_σ le G -toiseur à droite correspondant et G_σ le tordu par 1-cocycle σ . Alors P_σ est un G_σ -toiseur à gauche. Soit $Y_\sigma \xrightarrow{p_\sigma} X$ le tordu de Y , i.e. $Y_\sigma = P_\sigma \times^G Y$. Alors Y_σ est un G_σ -toiseur à gauche sur X . Soit $\text{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)$ le sous-groupe de Brauer G_σ -invariant de Y_σ (Définition 6.3.1).

Lemme 6.5.1. *Supposons que $\text{III}^1(G) = 1$. Alors pour tout sous-groupe $B \subset \text{Br}_G(Y)$, on a :*

$$p(Y(\mathbb{A}_k)^{p^*((p^*)^{-1}B)}) = p(Y(\mathbb{A}_k)^B),$$

où $\text{Br}(X) \xrightarrow{p^*} \text{Br}(Y)$.

Démonstration. Puisque $p^*((p^*)^{-1}B) \subset B$, on a $p(Y(\mathbb{A}_k)^B) \subset p(Y(\mathbb{A}_k)^{p^*((p^*)^{-1}B)})$.

Par le théorème 6.3.10, on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc} (p^*)^{-1}B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \text{Br}_a(G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ \text{Br}(X) & \longrightarrow & \text{Br}_G(Y) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Br}_a(G). \end{array}$$

Il induit un diagramme commutatif avec suite exacte :

$$\begin{array}{ccccc} G(\mathbb{A}_k) & & Y(\mathbb{A}_k) & \xrightarrow{p} & X(\mathbb{A}_k) \\ \downarrow a_G & & \downarrow a_Y & & \downarrow a_X \\ \text{Br}_a(G)^D & \xrightarrow{\lambda^D} & B^D & \xrightarrow{p^{*D}} & ((p^*)^{-1}B)^D \end{array}$$

où $(-)^D := \text{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (cf. (6.1.0.2)) et a_G, a_Y, a_X sont induits par l'accouplement de Brauer-Manin. Par la proposition 6.3.9, pour tout $y \in Y(\mathbb{A}_k)$ et tout $g \in G(\mathbb{A}_k)$, on a

$$a_Y(g \cdot y) = (\lambda^D \circ a_G)(g) + a_Y(y).$$

Puisque $\text{III}^1(G) = 1$, par la suite exacte de Poitou-Tate de G (Demarche [D11b, Thm. 5.1]), a_G est surjectif. Pour tout $y \in p(Y(\mathbb{A}_k)^{p^*((p^*)^{-1}B)})$, on a $x := p(y) \in X(\mathbb{A}_k)^{(p^*)^{-1}B}$. Alors $(p^{*D} \circ a_Y)(y) = a_X(x) = 0$ et il existe $g \in G(\mathbb{A}_k)$ tel que $(\lambda^D \circ a_G)(g) = a_Y(y)$. Donc $a_Y(g^{-1} \cdot y) = 0$ et $p(g^{-1} \cdot y) = x$. \square

Proposition 6.5.2. *Soient G un groupe linéaire connexe, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un G -toiseur. Soit $A \subset \text{Br}(X)$ un sous-groupe et, pour chaque $\sigma \in H^1(k, G)$, soit $B_\sigma \subset \text{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)$ un sous-groupe. Supposons que $\text{III}^1(G) = 1$ et que, pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, on a $(p_\sigma^*)^{-1}(B_\sigma) \subset A$, où $\text{Br}(X) \xrightarrow{p_\sigma^*} \text{Br}(Y_\sigma)$. Alors on a :*

$$X(\mathbb{A}_k)^A = \cup_{\sigma \in H^1(k, G)} p_\sigma(Y_\sigma(\mathbb{A}_k)^{B_\sigma + p_\sigma^* A}).$$

Démonstration. Le résultat découle de [3, Thm. 1.1] et du lemme 6.5.1. \square

Corollaire 6.5.3. *Soit T un tore quasi-trivial. Soient X une variété lisse, géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un T -torseur. Soient $U \subset X$ un ouvert et $V = p^{-1}(U)$. Alors pour tous sous-groupes $A \subset \text{Br}(U)$, $B \subset \text{Br}_T(V)$, si $(p^*)^{-1}(B) \subset A$, où $\text{Br}(U) \xrightarrow{p^*} \text{Br}(V)$, on a*

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}(X) \cap A} = p(Y(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}(Y) \cap (B + p^*A)}).$$

Démonstration. Par le lemme 6.3.3, on a $(p^*)^{-1}(\text{Br}(Y) \cap (p^*A + B)) = \text{Br}(X) \cap A$. D'après la proposition 6.3.2, on a $(\text{Br}(Y) \cap (p^*A + B)) \subset \text{Br}_T(Y)$. L'énoncé résulte de la proposition 6.5.2. \square

6.5.2 Applications des résolutions coflasques

Par [CTS87a], un Γ_k -module M de type fini est appelé *coflasque* si M est sans torsion et, pour tout sous-groupe fermé $\Gamma \subset \Gamma_k$, on a $H^1(\Gamma, M) = 0$. Un k -tore T est appelé *coflasque* si T^* est coflasque. Alors $H^1(k, T^*) = 0$ et, pour tout $v \in \Omega_k$, on a $H^1(k_v, T^*) = 0$. On renvoie à [CTS87a, Prop. 1.3] pour les résolutions par tores coflasque et tores quasi-triviaux.

Lemme 6.5.4. *Soit T un tore. Alors $H^3(k, T^*) \cong \prod_{v \in \infty_k} H^3(k_v, T^*) \cong \prod_{v \in \infty_k} H^1(k_v, T^*)$.*

Démonstration. Pour tout $v \in \infty_k$, puisque $\Gamma_{k_v} \cong \mathbb{Z}/2$, on a $H^3(k_v, T^*) = H^1(k_v, T^*)$. Par la ligne 3 de la démonstration de [HSz05, Prop. 5.9], on a $H^3(k, T^*) = \prod_{v \in \infty_k} H^3(k_v, T^*)$. Le résultat en découle. \square

Lemme 6.5.5. *Soit*

$$1 \rightarrow G \xrightarrow{\psi} H \xrightarrow{\phi} T \rightarrow 1$$

une suite exacte de groupes linéaires connexes avec T un tore.

(1) *Si $H^3(k, T^*) = 0$, alors l'homomorphisme $\text{Br}_a(H) \xrightarrow{\psi^*} \text{Br}_a(G)$ est surjectif.*

(2) *Si G est réductif, alors l'homomorphisme $\partial : T(k) \rightarrow H^1(k, G)$ induit par cette suite exacte vérifie $\text{Im}(\partial) \subset \text{Im}(H^1(k, Z(G)) \rightarrow H^1(k, G))$, où $Z(G)$ est le centre de G .*

Démonstration. Par la suite exacte de Sansuc [S, Cor. 6.11], on a une suite exacte de Γ_k -modules

$$0 \rightarrow T^* \rightarrow H^* \rightarrow G^* \rightarrow 0$$

et un isomorphisme de Γ_k -modules $\text{Pic}(H_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(G_{\bar{k}})$. Par [CTX09, Lem. 2.1] (modulo $H^2(k, \bar{k}^\times) \cong \text{Br}(k)$), on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(k, H^*) & \longrightarrow & \text{Br}_a(H) & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(H_{\bar{k}})) & \longrightarrow & H^3(k, \bar{k}^\times \oplus H^*) \\ \downarrow \psi_1 & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \psi_2 \\ H^2(k, G^*) & \longrightarrow & \text{Br}_a(G) & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}(G_{\bar{k}})) & \longrightarrow & H^3(k, \bar{k}^\times \oplus G^*). \end{array}$$

Si $H^3(k, T^*) = 0$, alors ψ_1 est surjectif et ψ_2 est injectif. Ceci donne (1).

Pour (2), puisque G est réductif, H est réductif et l'homomorphisme $Z(H) \rightarrow H^{\text{tor}}$ est surjectif. Donc la composition $Z(H) \rightarrow H \rightarrow T$ est surjective. Soit $S := Z(H) \cap G \subset Z(G)$. Ceci induit un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & Z(H) & \longrightarrow & T \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & T \longrightarrow 1. \end{array}$$

Ainsi $\text{Im}(\partial) \subset \text{Im}(H^1(k, S) \rightarrow H^1(k, G))$ et on a (2). \square

Proposition 6.5.6. *Soit G un groupe réductif connexe. Alors il existe un groupe réductif connexe H , un tore T et une suite exacte :*

$$1 \rightarrow G \xrightarrow{\psi} H \xrightarrow{\phi} T \rightarrow 1$$

tels que $\text{III}^1(H) = 0$, $H^3(k, T^*) = 0$ et $\text{Br}_a(H) \xrightarrow{\psi^*} \text{Br}_a(G)$ soit surjectif.

De plus, si G est un tore, on peut imposer que H soit un tore quasi-trivial.

Démonstration. Puisque G est réductif, il existe une suite exacte $0 \rightarrow S \rightarrow G \rightarrow G^{ad} \rightarrow 0$ telle que S soit le centre de G et G^{ad} soit le groupe adjoint de G . Alors S est un groupe de type multiplicatif. Par [CTS87a, Prop. 1.3], il existe un tore quasi-trivial T_0 et un homomorphisme injectif $S \xrightarrow{\chi} T_0$ tels que $T := T_0/S$ soit un tore coflasque. Alors, pour tout $v \in \infty_k$, on a $H^1(k_v, T^*) = 0$. Par le lemme 6.5.4, on a $H^3(k, T^*) = 0$.

Soit $H := G \times^S T_0$. Alors H est un groupe linéaire et on a deux suites exactes

$$1 \rightarrow G \xrightarrow{\psi} H \xrightarrow{\phi} T \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad 1 \rightarrow T_0 \rightarrow H \rightarrow G^{ad} \rightarrow 1.$$

Par le lemme 6.5.5 (1), le morphisme $\text{Br}_a(H) \xrightarrow{\psi^*} \text{Br}_a(G)$ est surjectif. Par [S, Cor. 5.4], on a $\text{III}^1(G^{ad}) = 0$. Puisque T_0 est quasi-trivial, on a $\text{III}^1(H) = 0$. \square

Proposition 6.5.7. *Soit X une variété lisse géométriquement intègre. Supposons que $X(k) \neq \emptyset$ et que $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est de type fini. Alors il existe un tore quasi-trivial T et un T -torseur $Y \rightarrow X$ tels que $\text{Pic}(Y_{\bar{k}}) = 0$ et $H^3(k, \bar{k}[Y]^\times / \bar{k}^\times) = 0$.*

Démonstration. Il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $\text{Pic}(U_{\bar{k}}) = 0$. Soient T_0 un tore tel que $T_0^* := \text{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$ et $Y_0 \rightarrow X$ le T_0 -torseur induit par l'homomorphisme Ψ de la suite exacte (6.2.2.1). Par la suite exacte de Sansuc [S, Prop. 6.10], $\text{Pic}(Y_{0, \bar{k}}) = 0$. Soit T_1 le tore tel que $T_1^* \cong \bar{k}[Y_0]^\times / \bar{k}^\times$. Puisque $X(k) \neq \emptyset$ et que T_0 est quasi-trivial, on a $Y_0(k) \neq \emptyset$. À un point de $Y_0(k)$ on associe un morphisme $Y_0 \xrightarrow{\pi} T_1$ (envoyant ce point sur e_{T_1}) tel que $T_1^* \xrightarrow{\pi^*} \bar{k}[Y_0]^\times / \bar{k}^\times$ soit un isomorphisme.

D'après [CTS87a, Prop. 1.3], il existe une suite exacte $0 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow T_1 \rightarrow 0$ telle que T_2 soit quasi-trivial et que T_3 soit coflasque. Soit $Y := Y_0 \times_{T_1} T_3$ un T_2 -torseur sur Y_0 . Par la suite exacte de Sansuc [S, Prop. 6.10], $\text{Pic}(Y_{\bar{k}}) = 0$, $\bar{k}[Y]^\times / \bar{k}^\times = T_3^*$ et, d'après le lemme 6.5.4, on a $H^3(k, \bar{k}[Y]^\times / \bar{k}^\times) = 0$.

Soit $T := T_0 \times T_2$. Puisque T_0, T_2 sont quasi-triviaux, on a $H^1(T_0, T_2) = 0$ et, d'après [CT08, Cor. 5.7], toute extension centrale de T_0 par T_2 est isomorphe à $T_0 \times T_2$. D'après le théorème 6.2.7, il existe une action de T sur Y compatible avec les actions T_2 sur Y et T_0 sur Y_0 . Alors Y est un T -torseur sur X . \square

6.5.3 Le cas général

Soient G un groupe linéaire connexe, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un G -torseur (à gauche). Pour tout $\sigma \in Z^1(k, G)$, soient P_σ le G -torseur à droite correspondant et G_σ le tordu par le 1-cocycle σ . Alors P_σ est un G_σ -torseur à gauche. Soit $Y_\sigma \xrightarrow{p_\sigma} X$ le tordu de Y , i.e. $Y_\sigma = P_\sigma \times^G Y$. Alors Y_σ est un G_σ -torseur à gauche sur X . Soit $\text{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)$ le sous-groupe de Brauer G_σ -invariant de Y_σ (Définition 6.3.1).

Notons $\theta_Y^\sigma : P_\sigma \times Y \rightarrow Y_\sigma$. Le lemme 6.3.12 donne un isomorphisme canonique :

$$(p_1^*, p_2^*) : \text{Br}_a(P_\sigma) \oplus \text{Br}_G(Y) / \text{ImBr}(k) \xrightarrow{\sim} \text{Br}_{G_\sigma \times G}(P_\sigma \times Y) / \text{ImBr}(k).$$

Ceci induit un morphisme canonique

$$\Theta_Y^\sigma : \text{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma) / \text{ImBr}(k) \xrightarrow{(\theta_Y^\sigma)^*} \text{Br}_{G_\sigma \times G}(P_\sigma \times Y) / \text{ImBr}(k) \rightarrow \text{Br}_G(Y) / \text{ImBr}(k).$$

Soit $Q_{\sigma^{-1}}$ le torseur inverse de P_σ (cf. [Sko01, P. 20, Exemple 2]). Alors $Q_{\sigma^{-1}}$ est un G_σ -torseur à droite et aussi un G -torseur à gauche. Notons $\sigma^{-1} := [Q_{\sigma^{-1}}] \in H^1(k, G_\sigma)$. Pour tout G_σ -torseur à gauche $Y' \rightarrow X$, soit $Y'_{\sigma^{-1}} := Y' \times^{G_\sigma} Q_{\sigma^{-1}}$ (un G -torseur à gauche sur X).

Lemme 6.5.8. *On a $Y \cong (Y_\sigma)_{\sigma^{-1}}$ et l'homomorphisme Θ_Y^σ est un isomorphisme d'inverse $\Theta_{Y_\sigma}^{(\sigma^{-1})}$.*

Démonstration. On a $(Y_\sigma)_{\sigma^{-1}} = P_\sigma \times^{G_\sigma} P_\sigma \times^G Y \cong G \times^G Y \cong Y$. On a un isomorphisme canonique $P_\sigma \times Y \xrightarrow{p_1 \times \theta_Y^\sigma} P_\sigma \times Y_\sigma$ d'inverse $p_1 \times \theta_{Y_\sigma}^{(\sigma^{-1})}$. Par le lemme 6.3.12, on a :

$$\mathrm{Br}_a(P_\sigma) \oplus \mathrm{Br}_G(Y) / \mathrm{ImBr}(k) \cong \mathrm{Br}_{G_\sigma \times G}(P_\sigma \times Y) / \mathrm{ImBr}(k)$$

et

$$\mathrm{Br}_a(P_\sigma) \oplus \mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma) / \mathrm{ImBr}(k) \cong \mathrm{Br}_{G_\sigma \times G}(P_\sigma \times Y_\sigma) / \mathrm{ImBr}(k).$$

Le résultat en découle. \square

Pour un sous-groupe $B_\sigma \subset \mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)$ contenant $\mathrm{ImBr}(k)$, on note $\widetilde{\Theta}_Y^\sigma(B_\sigma) \subset \mathrm{Br}_G(Y)$ l'image inverse de $\Theta_Y^\sigma(B_\sigma)$. Alors $\Theta_{Y_\sigma}^{(\sigma^{-1})}(\widetilde{\Theta}_Y^\sigma(B_\sigma)) = B_\sigma$.

Théorème 6.5.9. *Soient G un groupe linéaire connexe, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{P} X$ un G -torseur. Soit $A \subset \mathrm{Br}(X)$ un sous-groupe et, pour chaque $\sigma \in H^1(k, G)$, soit $B_\sigma \subset \mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)$ un sous-groupe contenant $\mathrm{ImBr}(k)$. Supposons que, pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, on a*

$$(p_\sigma^*)^{-1} \left(\sum_{\sigma' \in \mathrm{III}^1(G_\sigma)} \widetilde{\Theta}_{Y_\sigma}^{\sigma'}(B_{\sigma+\sigma'}) \right) \subset A$$

où $\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{p_\sigma^*} \mathrm{Br}(Y_\sigma)$ et $Y_{\sigma+\sigma'} := (Y_\sigma)_{\sigma'}$. Alors on a :

$$X(\mathbb{A}_k)^A = \cup_{\sigma \in H^1(k, G)} p_\sigma(Y_\sigma(\mathbb{A}_k)^{B_{\sigma+p_\sigma^*A}}).$$

Démonstration. La démonstration ci-dessous suit celle de [3, Thm. 4.1].

Par [3, Thm. 1.1], il suffit de montrer que, pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, on a :

$$p_\sigma(Y_\sigma(\mathbb{A}_k)^{p_\sigma^*A}) \subset \cup_{\sigma' \in \mathrm{III}^1(G_\sigma)} p_{\sigma+\sigma'}(Y_{\sigma+\sigma'}(\mathbb{A}_k)^{B_{\sigma+\sigma'}+p_{\sigma+\sigma'}^*A}).$$

On peut supposer que $\sigma = 0$. Pour tout v , puisque $H^1(k_v, G^u) = 0$, le morphisme $Y(k_v) \rightarrow (G^{\mathrm{red}} \times^G Y)(k_v)$ est surjectif. Puisque $\mathrm{III}^1(G) \cong \mathrm{III}^1(G^{\mathrm{red}})$ ([S, Prop. 4.1]) et que l'on a $\mathrm{Br}(Y) \cong \mathrm{Br}(G^{\mathrm{red}} \times^G Y)$ ([3, Lem. 2.1]), on peut supposer que G est réductif.

Par la proposition 6.5.6, il existe un groupe linéaire connexe H , un tore T et une suite exacte :

$$1 \rightarrow G \xrightarrow{\psi} H \xrightarrow{\phi} T \rightarrow 1$$

tels que $\mathrm{III}^1(H) = 0$, $H^3(k, T^*) = 0$ et $\mathrm{Br}_a(H) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Br}_a(G)$ soit surjectif. Par [Se, Prop. 36 du Chapitre 1], on a une suite exacte d'ensembles pointés :

$$1 \rightarrow G(k) \rightarrow H(k) \rightarrow T(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, H),$$

telle que, pour tout $t \in T$, on ait $\partial(t) := [\phi^{-1}(t)]$. Alors $\mathrm{III}^1(G) \subset \mathrm{Im}(\partial)$ et, pour tout $t \in T(k)$, on a $G_{\partial(t)} \cong G$ (Lemme 6.5.5 (2)).

Soient $Y_H := H \times^G Y$ et $Y \xrightarrow{i} Y_H$ le morphisme canonique. Alors $Y_H \xrightarrow{p_H} X$ est un H -torseur sur X et $T \times^H Y_H \cong T \times X$. Alors on a un morphisme canonique $Y_H \xrightarrow{\mu} T$ tel que, pour tout $t \in T(k)$, on a $\mu^{-1}(t) \cong \phi^{-1}(t) \times^G Y \cong Y_{\partial(t)}$. Notons $\mu^{-1}(t) \xrightarrow{i_t} Y_H$. Par la définition de $\Theta_Y^{\partial(t)}$, on a : $\Theta_Y^{\partial(t)} \circ i_t^* = i^*$. Par la proposition 6.3.13, le lemme 6.5.8 et la surjectivité de ψ^* , les morphismes $\text{Br}_H(Y_H) \xrightarrow{i^*} \text{Br}_G(Y)$ et $\text{Br}_H(Y_H) \xrightarrow{i_t^*} \text{Br}_G(\mu^{-1}(t))$ sont surjectifs.

Notons

$$B := \text{Br}_H(Y_H) \cap (i^*)^{-1} \left(\sum_{\sigma \in \text{III}^1(G)} \widetilde{\Theta}_Y^{\sigma}(B_{\sigma}) \right) \subset \text{Br}_H(Y_H).$$

Alors $(p_H^*)^{-1}(B) \subset A$ et $B_{\partial(t)} \subset i_t^* B$. Puisque $\mu \circ i$ se factorise par $\text{Spec } k$, on a $\mu^* \text{Br}_1(T) \subset B$.

Pour un $y \in Y(\mathbb{A}_k)^{p^* A}$, par le lemme 6.5.1, il existe $y_1 \in Y_H(\mathbb{A}_k)^{B+p_H^* A}$ tel que $p_H(y_1) = p(y)$. Alors il existe $h \in H(\mathbb{A}_k)$ tel que $y_1 = h \cdot y$. Donc $\mu(y_1) \in \phi(H(\mathbb{A}_k)) \cap T(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(T)}$.

Par [3, Prop. 3.3], on a :

$$T(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(T)} = T(k) \cdot \phi(H(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(H)}).$$

Donc il existe $h_1 \in H(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(H)}$ tel que

$$t := \mu(h_1 \cdot y_1) \in T(k) \cap \phi(H(\mathbb{A}_k)).$$

Donc $\partial(t) \subset \text{III}^1(G)$. Puisque $\text{Br}_H(H) = \text{Br}_1(H)$ (Lemme 6.3.6), par la proposition 6.3.9 (1),

$$y_2 := h_1 \cdot y_1 \in Y_H(\mathbb{A}_k)^{B+p_H^* A} \quad \text{et donc} \quad y_2 \in \mu^{-1}(t)(\mathbb{A}_k)^{B_{\partial(t)}+p_{\partial(t)}^* A}.$$

Le résultat découle de $p_{\partial(t)}(y_2) = p_H(y_2) = p(y)$. \square

Corollaire 6.5.10. *Sous les hypothèses du théorème 6.5.9, soit*

$$X(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k, G) : z \mapsto [p^{-1}(z)]$$

le morphisme canonique. Supposons que pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, la variété Y_{σ} satisfait le principe de Hasse par rapport à $B_{\sigma} + p_{\sigma}^* A$. Alors

$$X(\mathbb{A}_k)^A = \cup_{\sigma \in \text{Im}(\partial)} p_{\sigma}(Y_{\sigma}(\mathbb{A}_k)^{B_{\sigma}+p_{\sigma}^* A}).$$

Démonstration. Pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, si $Y_{\sigma}(\mathbb{A}_k)^{B_{\sigma}+p_{\sigma}^* A} \neq \emptyset$, alors on a $Y_{\sigma}(k) \neq \emptyset$ et donc $\sigma \in \text{Im}(\partial)$. Le résultat en découle. \square

Corollaire 6.5.11. *Soient G un groupe linéaire connexe, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un G -torseur. Soit $\text{Br}_1(X, Y) := \text{Ker}(\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(Y_{\bar{k}}))$. Alors on a :*

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(X, Y)} = \cup_{\sigma \in H^1(k, G)} p_{\sigma}(Y_{\sigma}(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_1(Y_{\sigma})}).$$

Démonstration. Pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, puisque le morphisme $\text{Br}(Y_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Br}((P_{\sigma} \times Y)_{\bar{k}})$ est injectif, on a $\text{Br}_1(X, Y_{\sigma}) \subset \text{Br}_1(X, Y)$. Donc $\text{Br}_1(X, Y_{\sigma}) = \text{Br}_1(X, Y) = (p^*)^{-1} \text{Br}_1(Y)$.

Pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, par le lemme 6.3.12 et le lemme 6.5.8, le morphisme Θ_Y^{σ} induit un isomorphisme $\text{Br}_a(Y_{\sigma}) \xrightarrow{\sim} \text{Br}_a(Y)$. Donc $\widetilde{\Theta}_Y^{\sigma}(\text{Br}_1(Y_{\sigma})) = \text{Br}_1(Y)$. Le résultat découle du théorème 6.5.9. \square

Remarque 6.5.12. La démonstration du théorème 6.5.9 n'utilise pas l'approximation forte pour les espaces homogènes à stabilisateur géométrique connexe (Borovoi et Demarche [BD, Thm. 1.4]), mais elle utilise [BD, Thm. 2.8].

Corollaire 6.5.13. Soient G un groupe linéaire connexe, $G_0 \subset G$ un sous groupe fermé connexe et $Z := G_0 \backslash G$. Notons $G \xrightarrow{\pi} Z$ la projection. Alors on a

$$Z(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(Z)} = \pi(G(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(G)}) \cdot Z(k).$$

Démonstration. Puisque $G \xrightarrow{\pi} Z$ est un G_0 -torseur à gauche, pour tout $P_\sigma \in H^1(k, G_0)$ (un G_0 -torseur à droite), le tordu $P_\sigma \times^{G_0} G$ est un G torseur à droite. Donc $P_\sigma \times^{G_0} G$ satisfait le principe de Hasse par rapport à $\mathrm{Br}_1(P_\sigma \times^{G_0} G)$ (Sansuc, cf. [Sko01, Thm. 5.2.1]). Le résultat découle du corollaire 6.5.10. \square

C'est clair que le corollaire 6.5.13 vaut aussi pour $Z := G/G_0$.

6.6 La méthode de fibration et la question 6.1.3

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k -variété. Pour traiter la question 6.1.3, on est amené à étudier la question :

Question 6.6.1. Soit G un groupe linéaire. Soient X et Z deux G -variétés lisses géométriquement intègres. Soient $U \subset X$ un G -ouvert et $U \xrightarrow{f} Z$ un G -morphisme. Soient $B \subset \mathrm{Br}(U)$ un sous-groupe fini, $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide et $W \subset X(\mathbb{A}_k)$ un ouvert. Sous quelles conditions peut-on montrer que, si $W^{\mathrm{Br}(U) \cap (B + f^* \mathrm{Br}_G(Z))} \neq \emptyset$, alors il existe $z \in Z(k)$ de fibre U_z tel que $((G(k_S) \cdot W) \cap U_z(\mathbb{A}_k))^B \neq \emptyset$?

Dans [CTH], Colliot-Thélène et Harari étudient la méthode de fibration au dessus de \mathbb{A}^1 . On suit leur méthode et répond à la question 6.6.1 d'abord dans le cas où Z est un tore quasi-trivial et f s'étend à un morphisme de X vers une Z -variété torique standard (Théorème 6.6.7). Ensuite, en utilisant ce résultat, on résout cette question dans le cas où Z est un tore (Théorème 6.6.9). En utilisant la descente (§6.5.1), on établit le théorème 6.6.11 dans le cas plus général où Z est un pseudo G -espace homogène. Ceci sera utilisé dans la section 6.7 pour traiter le cas d'un G -espace homogène Z à stabilisateur géométrique connexe.

6.6.1 L'approximation forte raffinée pour l'espace affine

Pour un ouvert U d'un espace affine \mathbb{A}^n satisfaisant $\mathrm{codim}(\mathbb{A}^n \setminus U, \mathbb{A}^n) \geq 2$, l'approximation forte hors d'une place v_0 a été établie par Fei Xu et l'auteur dans [CX1, Prop. 3.6], et raffinée lorsque la place v_0 est archimédienne dans [CX2, Prop. 4.6 et Cor. 4.7], où l'on montre que $U(k) \cap T(k_{v_0})^+ \subset \mathbb{A}^n(k_{v_0})$ est dense dans $U(\mathbb{A}_k^{v_0})$ pour une variété torique ($T \hookrightarrow \mathbb{A}^n$) comme (6.6.1.1) ci-dessous. On généralise maintenant ce résultat au cas où v_0 est une place quelconque.

Théorème 6.6.2. Soient K une k -algèbre finie séparable de degré n et

$$(6.6.1.1) \quad (T \hookrightarrow \mathbb{A}^n) := (\mathrm{Res}_{K/k} \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathrm{Res}_{K/k} \mathbb{A}^1)$$

la variété torique correspondante. Soit $U \subset \mathbb{A}^n$ un ouvert tel que $\mathrm{codim}(\mathbb{A}^n \setminus U, \mathbb{A}^n) \geq 2$. Soient v_0 une place et $D_{v_0} \subset T(k_{v_0})$ un sous-groupe ouvert d'indice fini. Alors, pour tout ouvert $W \subset U(\mathbb{A}^{v_0})$ non vide et tout ouvert $W_0 \subset \mathbb{A}^n(k_{v_0})$ non vide D_{v_0} -invariant, on a

$$U(k) \cap (W_0 \times W) \neq \emptyset.$$

Démonstration. Étape (0). Par approximation faible pour le tore quasi-trivial T , il existe un $\alpha \in T(k) \cap W_0$. Ainsi on a $D_{v_0} \subset \alpha^{-1} \cdot W_0$. En remplaçant U par $\alpha^{-1}U$ et W par $\alpha^{-1}W$, on peut supposer que $W_0 = D_{v_0}$. Si v_0 est complexe, on a $D_{v_0} = T(k_{v_0})$ et l'énoncé découle de [CX1, Prop. 3.6]. On suppose que v_0 n'est pas complexe.

Étape (1). Supposons que $v_0 \in \infty_k$ et $T = \mathbb{G}_m^n$. Puisque $D_{v_0} \subset T(k_{v_0})$ est ouvert et donc fermé, le sous-groupe D_{v_0} contient la composante connexe de l'identité de $T(k_{v_0})$. Ainsi l'énoncé est équivalent à [CX2, Prop. 4.6].

Étape (2). Supposons que $v_0 \notin \infty_k$, $n = 1$ et $T = \mathbb{G}_m$. On a $U = \mathbb{A}^1$. Par définition, Il existe un sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k \setminus \{v_0\}$ contenant ∞_k , un élément $a_v \in k_v$ pour chaque $v \in S$ et $0 < \epsilon < 1$ tels que

$$\prod_{v \in S} \{x \in k_v : |x - a_v| < \epsilon\} \times \prod_{v \notin S \cup \{v_0\}} \mathcal{O}_v \subset W.$$

On fixe une uniformisante π_{v_0} de k_{v_0} . Pour le sous-groupe d'indice fini $D_{v_0} \subset k_{v_0}^\times$, il existe un entier $N > 0$ tel que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (1 + \pi_{v_0}^{iN} \mathcal{O}_{v_0}) \cdot \pi_{v_0}^{iN} \subset D_{v_0}.$$

Par approximation forte sur \mathbb{A}^1 , il existe $\alpha, \beta \in k^\times$ tels que

$$\alpha \in k_{v_0} \times \prod_{v \in S} \{x \in k_v : |x - a_v| < \frac{1}{2}\epsilon\} \times \prod_{v \notin S \cup \{v_0\}} \mathcal{O}_v$$

et

$$\beta \in k_{v_0} \times \prod_{v \in S} \{x \in k_v : |x| < \frac{1}{2}\epsilon\} \times \prod_{v \notin S \cup \{v_0\}} \mathcal{O}_v.$$

D'après la formule du produit, $l := -v_0(\beta) > 0$ et donc $\pi_{v_0}^l \beta \in \mathcal{O}_{v_0}^\times$. Alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ assez grand tel que

$$(\beta \pi_{v_0}^l)^m \in (1 + \pi_{v_0}^N \mathcal{O}_{v_0}) \quad \text{et} \quad v_0(\alpha \beta^{-m}) > N.$$

Ainsi

$$\alpha + \beta^{mN} = \pi_{v_0}^{-mlN} (\beta \pi_{v_0}^l)^{mN} (1 + \alpha \beta^{-mN}) \in (1 + \pi_{v_0}^N \mathcal{O}_{v_0}) \pi_{v_0}^{-mlN} \subset D_{v_0}.$$

Ceci implique que $\alpha + \beta^{mN} \in D_{v_0} \times W$.

Étape (3). Supposons que $v_0 \notin \infty_k$, $T \cong \mathbb{G}_m^n$ et, sous cet isomorphisme, $D_{v_0} \cong \prod_{i=1}^n D_i$ avec $D_i \subset k_{v_0}^\times$ un sous-groupe ouvert d'indice fini. On établit le résultat en utilisant la projection $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^1$ sur le premier facteur. L'argument donné pour v_0 réel dans [CX2, Prop. 4.6] vaut pour tout v_0 en remplaçant \mathbb{R} par D_1 .

Étape (4). En général, d'après (1) et (3), il reste à montrer qu'il existe des sous-groupes ouverts $\{D_i\}_{i=1}^n$ de $k_{v_0}^\times$ d'indice fini et un isomorphisme

$$\psi : \text{Res}_{K/k} \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \quad \text{tels que} \quad \prod_{i=1}^n D_i \subset \psi(D_{v_0}).$$

Si v_0 est réel, ceci est établi dans la démonstration de [CX2, Cor. 4.7]. On peut alors supposer que $v_0 \notin \infty_k$ et $K = k(\theta)$ soit un corps.

Soit $\{w_j\}_j$ les places de K au-dessus de v_0 et, pour tout j , soient π_j une uniformisante de K_{w_j} et \mathcal{O}_j l'anneau des entiers de K_{w_j} . Pour π_{v_0} une uniformisante de k_{v_0} et pour chaque j , soit $e_j := w_j(\pi_{v_0}) \leq n$. Puisque D_{v_0} est un sous-groupe ouvert de $T(k_{v_0}) \cong \prod_j K_{w_j}^\times$, il existe un entier $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que

$$(6.6.1.2) \quad \prod_j [\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} (1 + \pi_j^{lN} \mathcal{O}_j) \pi_j^{lN}] \subset D_{v_0}.$$

Après avoir remplacé θ par $\theta + \pi_{v_0}^{-cN}$ avec $c \gg 0$ suffisamment divisible, on peut supposer que

$$(6.6.1.3) \quad w_j(\theta) = -e_j cN, \quad \theta \pi_j^{e_j cN} \in (1 + \pi_j^N \mathcal{O}_j) \quad \text{et} \quad (\pi_{v_0} \pi_j^{-e_j})^c \in (1 + \pi_j^N \mathcal{O}_j).$$

Soit $M := cn^2N$. Alors, pour tout j et tous entiers m, m' avec $0 \leq m < m' \leq n-1$, on a

$$|m' - m| |w_j(\theta)| < ne_j cN \leq M \quad \text{et donc} \quad 0 < (w_j(\theta^m) - w_j(\theta^{m'})) < M.$$

Donc, pour tous $\alpha, \alpha' \in k_{v_0}^\times$ satisfaisant $M|v_0(\alpha)$ et $M|v_0(\alpha')$, on a

$$(6.6.1.4) \quad w_j(\alpha\theta^m) \neq w_j(\alpha'\theta^{m'}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_j(\alpha') > w_j(\alpha) & \text{si } w_j(\alpha\theta^m) < w_j(\alpha'\theta^{m'}) \\ w_j(\alpha) \geq w_j(\alpha') & \text{si } w_j(\alpha\theta^m) > w_j(\alpha'\theta^{m'}) \end{cases}.$$

Donc

$$(6.6.1.5) \quad \begin{cases} w_j(\alpha'\theta^{m'}) - w_j(\alpha\theta^m) > M - (m' - m)(-w_j(\theta)) & \text{si } w_j(\alpha\theta^m) < w_j(\alpha'\theta^{m'}) \\ w_j(\alpha\theta^m) - w_j(\alpha'\theta^{m'}) > (m' - m)(-w_j(\theta)) & \text{si } w_j(\alpha\theta^m) > w_j(\alpha'\theta^{m'}) \end{cases}.$$

L'élément θ induit un isomorphisme $\psi : \text{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^n$, qui est défini par

$$\text{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1(A) = \sum_{i=0}^{n-1} A\theta^i \xrightarrow{\psi} \mathbb{A}^n(A) = A^n : \quad \sum_{i=0}^{n-1} a_i\theta^i \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$$

pour toute k -algèbre A . Soit

$$D := \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} (1 + \pi_{v_0}^N \mathcal{O}_{v_0}) \pi_{v_0}^{lM} \subset k_{v_0}^\times$$

un sous-groupe ouvert d'indice fini. D'après (6.6.1.3), on a $D \subset \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} (1 + \pi_j^N \mathcal{O}_j) \pi_j^{lN}$. Pour tout j et tout $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in D^n$, il existe un $0 \leq i_j \leq n-1$ tel que

$$w_j(x_{i_j}\theta^{i_j}) = \min_{0 \leq i \leq n-1} \{w_j(x_i\theta^i)\} = w_j\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i\theta^i\right),$$

où la deuxième égalité découle par (6.6.1.4). Pour $i \neq i_j$, d'après (6.6.1.5), on a

$$w_j(x_i\theta^i) - w_j(x_{i_j}\theta^{i_j}) \geq \begin{cases} (i - i_j)e_j cN \geq N & \text{si } i > i_j \\ M - (i_j - i)e_j cN \geq N & \text{si } i < i_j. \end{cases}$$

Alors

$$\psi^{-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i\theta^i \in x_{i_j}\theta^{i_j} (1 + \pi_j^N \mathcal{O}_j) \subset \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} (1 + \pi_j^N \mathcal{O}_j) \pi_j^{lN}.$$

D'après (6.6.1.2), on a $D^n \subset \psi(D_{v_0})$. □

On rappelle la définition des variétés toriques standards ([CX1, Déf. 2.12])

Définition 6.6.3. Soit K une k -algèbre finie séparable. La variété torique standard par rapport à K/k est la sous-variété torique $(\text{Res}_{K/k}\mathbb{G}_m \hookrightarrow Z)$ de $(\text{Res}_{K/k}\mathbb{G}_m \hookrightarrow \text{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1)$ avec

$$Z := \text{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1 \setminus [(\text{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1 \setminus \text{Res}_{K/k}\mathbb{G}_m)_{\text{sing}}].$$

Corollaire 6.6.4. Soit $(T \hookrightarrow Z)$ une variété torique standard. Soient v_0 une place de k et $D_{v_0} \subset T(k_{v_0})$ un sous-groupe ouvert d'indice fini. Pour tout fermé $F \subset Z$ de codimension ≥ 2 et tout ouvert non vide $W \subset (Z \setminus F)(A_k)$, si $(D_{v_0} \cdot W) \cap (Z \setminus F)(A_k) = W$, alors on a $T(k) \cap W \neq \emptyset$.

Démonstration. Puisque $\text{codim}(\text{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1 \setminus Z, \text{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1) \geq 2$, une application du théorème 6.6.2 donne le résultat. □

6.6.2 Fibration sur une variété torique standard

On a besoin d'une généralisation du théorème de Tchebotarev "géométrique" (Ekedahl [E, Lem. 1.2]) :

Lemme 6.6.5. *Soient X, Y, Z des schémas intègres de type fini sur \mathcal{O}_k , et $Y \xrightarrow{p} X, X \xrightarrow{f} Z$ deux \mathcal{O}_k -morphisms. Supposons que f et $f \circ p$ sont lisses à fibres géométriquement intègres et p est fini étale galoisienne de groupe de Galois Γ . Soit C une classe de conjugaison de Γ et $c := |C|/|\Gamma|$. Pour chaque place $v \in \Omega_k$ et chaque $z \in Z(k(v))$, soit $N_C(z)$ le nombre de $x \in X_z(k(v))$ tel que le Frobenius Fr_x de x soit dans C . Alors*

$$\frac{N_C(z)}{|X_z(k(v))|} - c = O(|k(v)|^{-1/2})$$

où la constante dans $O(-)$ ne dépend ni de v ni de z .

Démonstration. Le résultat découle de la démonstration standard de [E, Lem. 1.2] avec la formule des traces de Lefschetz

$$\sum_{x \in X_z(k(v))} \chi(Fr_x) = \sum_{0 \leq i \leq 2\dim(X_z)} (-1)^i \text{Tr}(Fr^*, H_c^i(X_{\bar{z}}, V_\chi)),$$

où V_χ est défini dans la démonstration de [E, Lem. 1.2]. Puisque $R^i f_! V_\chi$ est constructible et $H_c^i(X_{\bar{z}}, V_\chi) = (R^i f_! V_\chi)_{\bar{z}}$, les dimensions des $H_c^i(X_{\bar{z}}, V_\chi)$ sont bornées uniformément. De plus, la valeur absolue de la valeur propre de Fr^* en $H_c^i(X_{\bar{z}}, V_\chi)$ est inférieure ou égale à $|k(v)|^{\frac{i}{2}}$. Le reste de la démonstration est la même que celle de [E, Lem. 1.2]. \square

Lemme 6.6.6. *Soient Z un ouvert de \mathbb{A}^n satisfaisant $\text{codim}(\mathbb{A}^n \setminus Z, \mathbb{A}^n) \geq 2$ et V un ouvert de Z . Soient $\{C_i\}_{i \in I}$ les composantes connexes de $Z \setminus V$ et k_i la fermeture intégrale de k dans $k(C_i)$. Alors la suite exacte (6.3.1.3) induit un isomorphisme*

$$(6.6.2.1) \quad \partial : \text{Br}_a(V) \xrightarrow{\sim} \oplus_i H^1(k_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Démonstration. On peut supposer que $Z \setminus V$ est lisse. Puisque $\text{codim}(\mathbb{A}^n \setminus Z, \mathbb{A}^n) \geq 2$, on a $\text{Br}(Z) \cong \text{Br}(k)$ et $H^i(Z_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = 0$ pour $i = 1, 2$. Puisque $V(k) \neq \emptyset$, le morphisme

$$H^3(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \oplus H^3(Z_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$$

est donc injectif (suite spectrale de Hochschild-Serre). La suite exacte (6.3.1.3) induit un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Br}(Z) & \longrightarrow & \text{Br}(V) & \longrightarrow & \oplus_i H^1(C_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) & \longrightarrow & H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Br}(Z_{\bar{k}}) = 0 & \longrightarrow & \text{Br}(V_{\bar{k}}) & \longrightarrow & \oplus_i H^1(C_{i, \bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(Z_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) & \longrightarrow & H^3(V_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \end{array},$$

d'où le résultat. \square

Théorème 6.6.7. *Soient $(T \hookrightarrow Z)$ une variété torique standard, G un groupe linéaire connexe et $G \xrightarrow{\varphi} T$ un homomorphisme surjectif de noyau connexe. Soient X une G -variété lisse, géométriquement intègre et $X \xrightarrow{f} Z$ un G -morphisme lisse surjectif à fibres géométriquement intègres. Notons $U := X \times_Z T$. Soit $B \subset \text{Br}_G(U)$ (cf. (6.3.1.1)) un sous-groupe fini. Soient $v_0 \in \Omega_k$ une place et $G(k_{v_0})^0 \subset G(k_{v_0})$ un sous-groupe d'indice fini. Alors, pour tout fermé $F \subset X$ de codimension ≥ 2 et tout ouvert W de $(X \setminus F)(\mathbb{A}_k)$ satisfaisant $W^{\text{Br}(X) \cap (B + f_!^* \text{Br}_e(T))} \neq \emptyset$, il existe $t \in T(k)$ de fibre $F_t \subset X_t$, tel que*

$$\text{codim}(F_t, X_t) \geq 2 \quad \text{et} \quad (X_t \setminus F_t)(\mathbb{A}_k)^B \cap (G(k_{v_0})^0 \cdot W) \neq \emptyset.$$

Démonstration. Puisque f est lisse, il existe un fermé $F_1 \subset Z$ tel que $f(X \setminus F) = Z \setminus F_1$.

Soient $\{C_i\}_{i \in I}$ les composantes connexes de $Z \setminus T$ et $D_i := X \times_Z C_i$ les composantes connexes de $X \setminus U$. Par hypothèse, les variétés C_i et D_i sont lisses intègres. D'après (6.3.1.3), on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(X) \cap (B + f|_U^* \mathrm{Br}_e(T)) \rightarrow (B + f|_U^* \mathrm{Br}_e(T)) \xrightarrow{\partial} \oplus_i H^1(D_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Par le lemme 6.3.5, pour tout i , il existe un revêtement fini étale galoisien abélien $D'_i \xrightarrow{\pi_i} D_i$ tel que D'_i soit une G -variété intègre, π_i soit un G -morphisme et $\partial(b) \in H^1(D'_i/D_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Soient k_i la fermeture intégrale de k dans $k(C_i)$ et k'_i la fermeture intégrale de k dans $k(D'_i)$. Par hypothèse, la fermeture intégrale k dans $k(D_i)$ est k_i . D'après [CX2, Prop. 2.2], le morphisme $D'_i \rightarrow C_i \times_{k_i} k'_i$ est lisse à fibres géométriquement intègres.

Soit $B_X := \mathrm{Br}(X) \cap (B + f|_U^* \mathrm{Br}_e(T))$. D'après le lemme 6.3.3, $(f|_U^* \mathrm{Br}_e(T)) \cap \mathrm{Br}(X) = 0$ et donc B_X est fini. D'après la proposition 6.3.2 (2) et (3), on a $B_X \subset \mathrm{Br}_G(X)$. D'après le lemme 6.6.6 pour T et la suite exacte (6.3.1.3), on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & B & \xrightarrow{\partial_B} & \oplus_i H^1(D'_i/D_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & B_X & \longrightarrow & (B + f|_U^* \mathrm{Br}_e(T)) & \xrightarrow{\partial_0} & \oplus_i H^1(D_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ & & \uparrow & & \uparrow f|_U^* & & \uparrow \\ & & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}_e(T) \cong \mathrm{Br}_a(T) & \xrightarrow{\cong} & \oplus_i H^1(k_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array}$$

Alors $\mathrm{Im}(\partial_0) \subset \oplus_i H^1((D'_i \times_{k'_i} \bar{k})/D_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ceci induit un diagramme commutatif de suites exactes :

(6.6.2.2)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & B & \xrightarrow{\partial} & \oplus_i H^1(D'_i/(D_i \times_{k_i} k'_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \\ & & & \downarrow & & \downarrow \cong & \\ 0 & \longrightarrow & (B_X + f|_U^* \mathrm{Br}_e(T)) & \longrightarrow & (B + f|_U^* \mathrm{Br}_e(T)) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \oplus_i H^1((D'_i \times_{k'_i} \bar{k})/(D_i \times_{k_i} \bar{k}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{array}$$

Soit $\mathrm{Br}_G(X) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Br}_e(G)$ l'homomorphisme de Sansuc (cf. Définition 6.3.8). Après avoir rétréci le sous-groupe d'indice fini $G(k_{v_0})^0$, on peut supposer que tout élément de $\lambda(B_X)$ s'annule sur $G(k_{v_0})^0$. Par la proposition 6.3.9, pour tout $x \in X(A_k)$, on a que tout élément de B_X est constant sur $G(k_{v_0})^0 \cdot x$.

Soient $l := \dim(Z)$, $\Gamma_i := \mathrm{Gal}(D'_i/k'_i D_i)$ et $W_1 := (G(k_{v_0})^0 \cdot W) \cap (X \setminus F)(A_k)$.

Puisque T est quasi-trivial, il existe des extensions de corps L_j/k telles que $T \cong \mathrm{Res}_{\prod_j L_j/k} \mathbb{G}_m$. En fait, $\prod_j L_j \cong \prod_i k_i$, mais on ne l'utilise pas. Soit Ω_0 l'ensemble des places $v \in \Omega_k$ totalement décomposées dans la fermeture galoisienne de k'_i/k pour tout i et de L_j/k pour tout j . Alors Ω_0 est infini et pour tout $v \in \Omega_0$, on a $T_{k_v} \cong \mathbb{G}_{m, k_v}^l$. Par la définition 6.6.3, on a

$$Z_{k_v} \cong \mathrm{Spec} k_v[t_1, \dots, t_l] \setminus \cup_{n \neq m} V(t_n, t_m) \quad \text{et} \quad T_{k_v} \cong \mathrm{Spec} k_v[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_l, t_l^{-1}].$$

Soit S un sous-ensemble fini de Ω_k tel que $v_0 \cup \infty_k \subset S$. On agrandit S de façon à avoir les propriétés suivantes :

(a) Le k -morphisme f s'étend en un \mathcal{O}_S -morphisme lisse à fibres géométriquement intègres $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ de \mathcal{O}_S -schémas lisses, tel que pour tout point fermé $z \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{F}_1$, la fibre $f^{-1}(z)$ possède un $k(z)$ -point $x \notin \mathcal{F}$, où \mathcal{F} est l'adhérence de F dans \mathcal{X} et \mathcal{F}_1 est l'adhérence de F_1 dans \mathcal{Z} . Ceci est possible par les estimées de Lang-Weil [Sko90, Thm. 1, étape 3].

Par le lemme de Hensel, pour tout $v \notin S$, l'application $(\mathcal{X} \setminus \mathcal{F})(\mathcal{O}_v) \rightarrow (\mathcal{Z} \setminus \mathcal{F}_1)(\mathcal{O}_v)$ est donc surjective.

(b) Les extensions k_i/k et k'_i/k_i induisent des revêtements finis étales $\mathcal{O}_{k_i,S}/\mathcal{O}_S$ et $\mathcal{O}_{k'_i,S}/\mathcal{O}_{k_i,S}$.

(c) Le sous-schéma $\mathcal{C}_i := \overline{\mathcal{C}_i} \subset \mathcal{Z}$ est lisse à fibres géométriquement intègres sur $\mathcal{O}_{k_i,S}$. Soient $\mathcal{D}_i := \mathcal{C}_i \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{X}$, $\mathcal{T} := \mathcal{Z} \setminus \cup_i \mathcal{C}_i$ et $\mathcal{U} := \mathcal{T} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{X}$.

(d) Les éléments de B_X appartiennent à $\text{Br}(\mathcal{X})$ et les éléments de B appartiennent à $\text{Br}(\mathcal{U})$.

(e) Le revêtement $\mathcal{D}'_i \xrightarrow{\pi_i} \mathcal{D}_i$ s'étend en un \mathcal{O}_S -revêtement fini étale galoisien abélien $\mathcal{D}'_i \rightarrow \mathcal{D}_i$ tel que \mathcal{D}'_i soit un schéma sur $\mathcal{O}_{k'_i,S}$, les résidus des éléments de B soient dans $H^1(\mathcal{D}'_i/\mathcal{D}_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $\mathcal{D}'_i \rightarrow \mathcal{C}_i \times_{\mathcal{O}_{k_i,S}} \mathcal{O}_{k'_i,S}$ soit lisse à fibres géométriquement intègres.

(f) Il existe un ouvert $W_2 \subset W_1 \subset (X \setminus F)(A_k)$ tel que

$$W_2^{B_X} = W_2 \neq \emptyset, \quad W_2 = (G(k_{v_0})^0 \cdot W_2) \cap (X \setminus F)(A_k), \quad \text{et} \quad W_2 = W_{v_0} \times W_{S \setminus v_0} \times \prod_{v \notin S} (\mathcal{X} \setminus \mathcal{F})(\mathcal{O}_v)$$

avec $W_{S \setminus v_0} \subset \prod_{v \in S \setminus \{v_0\}} (X \setminus F)(k_v)$ un ouvert et $W_{v_0} \subset (X \setminus F)(k_{v_0})$ un ouvert.

(g) Pour tout $v \in \Omega_0 \setminus (\Omega_0 \cap S)$, on note $\mathcal{C}_{i,v} := \mathcal{C}_i \times_{\mathcal{O}_{k_i,S}} \mathcal{O}_v$, $\mathcal{D}_{i,v} := \mathcal{D}_i \times_{\mathcal{O}_{k_i,S}} \mathcal{O}_v$ et $\mathcal{D}'_{i,v} := \mathcal{D}'_i \times_{\mathcal{O}_{k'_i,S}} \mathcal{O}_v$. On a un diagramme commutatif de schémas intègres :

$$(6.6.2.3) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}'_{i,v} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{i,v} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{i,v} & \longrightarrow & \mathcal{O}_v \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}'_i & \longrightarrow & \mathcal{D}_i \times_{\mathcal{O}_{k_i,S}} \mathcal{O}_{k'_i,S} & \longrightarrow & \mathcal{C}_i \times_{\mathcal{O}_{k_i,S}} \mathcal{O}_{k'_i,S} & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O}_{k'_i,S} \end{array}$$

De plus, on a $\Gamma_i \cong \text{Gal}(\mathcal{D}'_i/(\mathcal{D}_i \times_{\mathcal{O}_{k_i,S}} \mathcal{O}_{k'_i,S})) \cong \text{Gal}(\mathcal{D}'_{i,v}/\mathcal{D}_{i,v})$.

(h) Pour tout $v \in \Omega_0 \setminus (\Omega_0 \cap S)$, tout $\sigma \in \Gamma_i$ et tout $c \in \mathcal{C}_{i,v}(k(v))$ avec $c \notin \mathcal{F}_1$, la fibre $(\mathcal{D}_{i,v})_c$ possède un $k(v)$ -point d avec $d \notin \mathcal{F}$ dont le Frobenius est σ . Ceci est possible en appliquant le lemme 6.6.5 à (6.6.2.3).

(i) Pour tout $v \in \Omega_0 \setminus (\Omega_0 \cap S)$, on note $(-)\mathcal{O}_v := (-) \times_{\mathcal{O}_{k,S}} \mathcal{O}_v$ et on a

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{O}_v} \cong \text{Spec } \mathcal{O}_v[t_1, \dots, t_l] \setminus \cup_{n \neq m} V(t_n, t_m), \quad \mathcal{T}_{\mathcal{O}_v} \cong \text{Spec } \mathcal{O}_v[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_l, t_l^{-1}]$$

et il existe une partition $\{1, \dots, l\} = \coprod_i I_i$ telle que $\mathcal{C}_{i,\mathcal{O}_v} = \cup_{n \in I_i} V(t_n) \subset \mathcal{Z}$ et que $V(t_n) \cong \mathcal{C}_{i,v}$.

Pour chaque i , on choisit une place $v_i \in \Omega_0 \setminus (\Omega_0 \cap S)$ et un $n_i \in I_i$ tels que pour $i \neq j$, on ait $v_i \neq v_j$. Soient $\mathcal{C}_{i,n_i} := V(t_{n_i}) \subset \mathcal{C}_{i,\mathcal{O}_{v_i}}$, $\mathcal{D}_{i,n_i} := \mathcal{C}_{i,n_i} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{X}$ et

$$E_i := \{(t_1, \dots, t_l) \in \mathcal{O}_{v_i}^l : t_{n_i} \in m_{v_i} \setminus m_{v_i}^2 \text{ et } t_n \in \mathcal{O}_{v_i}^\times \text{ pour } n \neq n_i\}$$

un ouvert de $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_{v_i})$. Alors $\mathcal{C}_{i,n_i} \cong \mathcal{C}_{i,v_i}$, $\mathcal{D}_{i,n_i} \cong \mathcal{D}_{i,v_i}$ et $\mathcal{D}'_i \times_{\mathcal{D}} \mathcal{D}_{i,n_i} \cong \bigsqcup_{[k'_i:k_i]} \mathcal{D}'_{i,v_i}$. Donc le Frobenius en un point de $\mathcal{D}_{i,n_i}(k(v_i))$ pour le revêtement $\mathcal{D}'_i/\mathcal{D}_i$ est dans Γ_i .

Pour tout $b \in B$ et tout $P_i \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_{v_i})$ avec $f(P_i) \in E_i$, on a $\bar{P}_i := P_i(k(v_i)) \in \mathcal{D}_{i,n_i}(k(v_i))$. On a la formule [Ha94, Cor. 2.4.3 et p. 244-245] (voir [CTH, Formule (3.6)])

$$(6.6.2.4) \quad b(P_i) = \partial_i(b)(Fr_{\bar{P}_i}) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

où $Fr_{\bar{P}_i} \in \Gamma_i \subset \text{Gal}(\mathcal{D}'_i/\mathcal{D}_i)$ est le Frobenius en \bar{P}_i pour le revêtement $\mathcal{D}'_i/\mathcal{D}_i$ et

$$\partial_i : \text{Br}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{D}'_i/\mathcal{D}_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathcal{D}'_{i,v_i}/\mathcal{D}_{i,v_i}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}(\Gamma_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Par la functorialité du résidu, l'application $\bar{\partial}$ de (6.6.2.2) satisfait $\bar{\partial} = \oplus_i \partial_i$.

Notons $T(k_{v_0})^0 := \varphi(G(k_{v_0})^0)$. Puisque $H^1(k_{v_0}, \text{Ker}(\varphi))$ est fini ([PR, Thm. 6.14]), le sous-groupe $T(k_{v_0})^0 \subset T(k_{v_0})$ est d'indice fini. D'après [Cod, Thm. 4.5], $f(W_2)$ est un ouvert de $(Z \setminus F_1)(A_k)$. Pour tout $z \in (Z \setminus F_1)(k_{v_0})$, l'ouvert $(X_z \setminus F_z)(k_{v_0})$ est dense dans $X_z(k_{v_0})$. Donc

$$(T(k_{v_0})^0 \cdot f(W_{v_0})) \cap (Z \setminus F_1)(k_{v_0}) = f(W_{v_0}) \quad \text{et} \quad (T(k_{v_0})^0 \cdot f(W_2)) \cap (Z \setminus F_1)(A_k) = f(W_2).$$

Par le corollaire 6.6.4, il existe $t \in T(k) \cap f(W_2)$ tel que $t|_{v_i} \in E_i$ pour tout i et que $\text{codim}(F_t, X_t) \geq 2$. Alors il existe $(P_v) \in W_2$ tel que $f(P_v) = t$.

Soit $t_i \in \mathcal{Z}(k(v_i))$ la spécialisation de t , alors $t_i \in \mathcal{C}_{i, n_i}(k(v_i))$ et $t_i \notin \mathcal{F}_1$. D'après (6.6.2.2), on a un diagramme avec suite exacte :

$$\begin{array}{ccc} \oplus_i((\mathcal{D}_{i, n_i})_{t_i} \setminus \mathcal{F}_{t_i})(k(v_i)) & & (X_t \setminus F_t)(A_k) \cap W_2 \\ \downarrow Fr & & \downarrow a_U \\ \oplus_i \Gamma_i & \xrightarrow{\bar{\partial}^D} & (B + f|_U^* \text{Br}_e(T))^D \xrightarrow{\text{Res}} (B_X + f|_U^* \text{Br}_e(T))^D, \end{array}$$

où a_U est l'accouplement de Brauer-Manin, $(-)^D := \text{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (cf. (6.1.0.2)) et, pour $u \in f^{-1}(t_i)$, l'élément $Fr(u)$ est son Frobenius. Donc Fr est surjectif par (h). Puisque $\text{Res} \circ a_U = 0$, il existe $\{\sigma_i\}_i \in \oplus_i \Gamma_i$ tel que $\bar{\partial}^D(\{\sigma_i\}) = a_U(\{P_v\})$. Alors il existe $u_i \in ((\mathcal{D}_{i, n_i})_{t_i} \setminus \mathcal{F}_{t_i})(k(v_i))$ tel que $Fr(u_i) = Fr(\bar{P}_{v_i}) - \sigma_i$. Par le lemme de Hensel, il existe un point $Q_{v_i} \in (X_t \setminus F_t)(\mathcal{O}_{v_i})$ relevant u_i . Soit $Q_v := P_v$ pour tout v distinct de l'un des v_i . Par (6.6.2.4), $\{Q_v\} \in (X_t \setminus F_t)(A_k)^B$. Donc $\{Q_v\} \in (X_t \setminus F_t)(A_k)^B \cap (G(k_{v_0})^0 \cdot W)$, d'où le résultat. \square

6.6.3 Fibration sur un tore

Lemme 6.6.8. Soient X et Z deux variétés lisses géométriquement intègres, et $X \xrightarrow{f} Z$ un morphisme lisse surjectif à fibres géométriquement intègres. Soit $U \subset X$ un ouvert tel que $f|_U$ soit surjectif. Soient $W \subset X(A_k)$ un ouvert et $x \in W$. Alors il existe $u \in W \cap U(A_k)$ tel que $f(u) = f(x)$.

Démonstration. Pour chaque $z \in Z$, la fibre X_z est lisse intègre et l'ouvert $U_z \subset X_z$ est donc dense. Soit $\{z_v\}_v = f(x)$. Pour chaque v , l'ouvert $U_{z_v}(k_v)$ est dense en $X_{z_v}(k_v)$. Puisque $f|_U$ est surjectif, le morphisme $f|_U$ est lisse à fibres géométriquement intègres. Après avoir fixé un modèle entier $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Z}$ de $f|_U$, on a que, pour presque toute place v , le morphisme $\mathcal{U}(\mathcal{O}_v) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{O}_v)$ est surjectif (la démonstration de [Cod, Thm. 4.5]). Le résultat en découle. \square

Le théorème suivant, d'énoncé un peu technique, joue un rôle clé dans la démonstration du théorème 6.6.11.

Théorème 6.6.9. Soient T, T_0 deux tores avec T_0 quasi-trivial, G un groupe linéaire connexe, $G \xrightarrow{\varphi} T_0 \times T$ un homomorphisme surjectif de noyau connexe et $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe. Soient X une G -variété lisse géométriquement intègre, $U \subset X$ un G -ouvert et $U \xrightarrow{f} T_0 \times T$ un G -morphisme. Soit $B \subset \text{Br}_G(U)$ (cf. (6.3.1.1)) un sous-groupe fini. Supposons que :

(1) la composition $T_0^* \xrightarrow{p_1^*} T_0^* \times T^* \xrightarrow{f^*} \bar{k}[U]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\dot{-}^X} \text{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$ est un isomorphisme ;

(2) pour l'action de G_0 sur X , le morphisme $\bar{k}[X]^\times / \bar{k}^\times \rightarrow \bar{k}[G_0]^\times / \bar{k}^\times$ défini par Sansuc ([S, (6.4.1)]) est injectif.

Alors, pour tout $v_0 \in \Omega_k$, tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_{v_0})^0 \subset G(k_{v_0})$ et tout ouvert $W \subset X(A_k)$ satisfaisant $W^{\text{Br}(X) \cap (B + f^* \text{Br}_1(T_0 \times T))} \neq \emptyset$, il existe $t \in (T_0 \times T)(k)$ de fibre U_t , tel que

$$(G(k_{v_0})^0 \cdot G_0(k_\infty)^+ \cdot W) \cap U_t(A_k)^B \neq \emptyset.$$

Démonstration. Par la proposition 6.2.3, après avoir remplacé f par $\tilde{\phi} \circ f$ et φ par $\tilde{\phi} \circ \varphi$ avec $\tilde{\phi}$ un automorphisme de $T_0 \times T$, on peut supposer que :

- (i) il existe une variété torique $(T_0 \hookrightarrow \mathbb{A}^l)$ satisfaisant (6.2.1.1) ;
- (ii) le morphisme f s'étend en un G -morphisme $X \xrightarrow{f_X} Z$ où $Z := \mathbb{A}^l \times T \supset T_0 \times T$;
- (iii) on a $f_X(U) \subset T_0 \times T$ et un isomorphisme $\text{Div}_{Z_{\bar{k}} \setminus (T_0 \times T)_{\bar{k}}}(Z_{\bar{k}}) \xrightarrow{f_X^*} \text{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$.
Soit $Z_0 := \mathbb{A}^l \setminus [(\mathbb{A}^l \setminus T_0)_{\text{sing}}]$. Alors $(T_0 \hookrightarrow Z_0)$ est une variété torique standard et

$$Z_1 := Z_0 \times T \cong Z \setminus [(Z \setminus T_0 \times T)_{\text{sing}}].$$

D'après la proposition 6.2.2, il existe un G -ouvert $X_1 \subset X$ tel que $f(X_1) \subset Z_1$, $X_1 \cap f_X^{-1}(T) = U$, $\text{codim}(X \setminus X_1, X) \geq 2$, $\text{Br}(X) \cong \text{Br}(X_1)$ et que le morphisme $X_1 \xrightarrow{f_X|_{X_1}} Z_1$ soit lisse surjectif à fibres géométriquement intègres.

Notons $\phi : X \xrightarrow{f_X} \mathbb{A}^l \times T \xrightarrow{p_2} T$. Pour chaque $t \in T(k)$, notons $X_{1,t} := \phi^{-1}(t) \cap X_1$, $U_t := U \cap X_{1,t}$, $X_{1,t} \xrightarrow{i_t} X_1$ et $X_{1,t} \xrightarrow{f_t} Z_0$. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
X_{1,t} & \xrightarrow{i_t} & X_1 & \hookrightarrow & X \\
\downarrow f_t & & \downarrow & & \downarrow f_X \\
Z_0 \times t & \xrightarrow{t} & Z_1 \cong Z_0 \times T & \hookrightarrow & \mathbb{A}^l \times T \\
\downarrow t & & \downarrow & & \downarrow \\
t & \xrightarrow{t} & T & \xrightarrow{=} & T
\end{array}
\quad \phi
\quad
\begin{array}{c}
G \\
\downarrow \varphi \\
T_0 \times T \\
\downarrow p_2 \\
T.
\end{array}$$

On a les propriétés ci-dessous :

(a) le morphisme f_t satisfait les hypothèses géométriques du théorème 6.6.7 par rapport à $\text{Ker}(G \xrightarrow{p_2 \circ \varphi} T) \rightarrow T_0$;

(b) l'homomorphisme $G_0 \xrightarrow{p_2 \circ \varphi} T$ est surjectif et donc $(p_2 \circ \varphi)(G_0(k_\infty)^+) = T(k_\infty)^+$;

(c) Soient $B_1 := B + f^* \text{Br}_1(T_0 \times T)$ et $B_2 \subset (\text{Br}(X) \cap B_1)$ un sous-groupe fini tels que le morphisme $B_2 \rightarrow \frac{\text{Br}(X) \cap B_1}{\text{Br}(X) \cap f^* \text{Br}_1(T_0 \times T)}$ soit surjectif, alors $i_t^* B \cap \text{Br}(X_{1,t}) \subset i_t^* B_2$.

L'énoncé (a) est clair.

Pour (b), d'après [CX2, Prop. 2.2], ϕ est lisse surjectif à fibres géométriquement intègres. Donc $\bar{k}[T]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\phi^*} \bar{k}[X]^\times / \bar{k}^\times$ est injectif. Notons $\bar{k}[X]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\theta_X} \bar{k}[G_0]^\times / \bar{k}^\times$ et $\bar{k}[T]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\theta_T} \bar{k}[G_0]^\times / \bar{k}^\times$ les morphismes définis par Sansuc ([S, (6.4.1)]). Ainsi $\theta_T = \theta_X \circ \phi^*$ est injectif. Par l'argument de Sansuc ([S, P. 39]), $\theta_T = ((p_2 \circ \varphi)|_{G_0})^*$. Alors $G_0 \xrightarrow{p_2 \circ \varphi} T$ est surjectif.

Pour (c), d'après le lemme 6.3.3, on a

$$\text{Br}(X_1) \cap f^* \text{Br}_1(T_0 \times T) \cong f_X^* \text{Br}_1(Z_1) \cong \phi^* \text{Br}_1(T) \quad \text{et} \quad B_1 \cap \text{Br}(X_1) = B_2 + \phi^* \text{Br}_1(T).$$

Par le corollaire 6.3.14, on a

$$i_t^* B_2 = i_t^*(B_2 + \phi^* \text{Br}_1(T)) = i_t^*(B_1 \cap \text{Br}(X_1)) = i_t^* B_1 \cap \text{Br}(X_{1,t}) \supset i_t^* B \cap \text{Br}(X_{1,t}).$$

Ceci donne (c).

On considère l'ouvert W de l'énoncé. Après avoir rétréci W , on peut supposer que tout élément de B_2 s'annule sur W .

On note $W_1 := W \cap X_1(A_k)$. Soit $x \in W^{\phi^* \text{Br}_1(T)}$. En appliquant le lemme 6.6.8 au triple $(X_1 \subset X, X \xrightarrow{\phi} T, W)$, on voit qu'il existe $x_1 \in W_1$, tel que $\phi(x_1) = \phi(x)$. Donc $W_1^{\phi^* \text{Br}_1(T)} \neq \emptyset$ et $\phi(W_1)^{\text{Br}_1(T)} \neq \emptyset$.

Soit $W_2 := G_0(k_\infty)^+ \cdot W_1$. D'après (b), on a $\phi(W_2) = T(k_\infty)^+ \cdot \phi(W_1)$. Puisque T satisfait l'approximation forte par rapport à $\text{Br}_1(T)$ hors de ∞_k (Harari [Ha08, Thm. 2]),

il existe $t \in T(k) \cap \phi(W_2)$. Donc $X_{1,t}(\mathbb{A}_k) \cap W_2 \neq \emptyset$. Puisque l'accouplement de Brauer-Manin est constant sur $G_0(k_\infty)^+$, d'après (c), $(X_{1,t}(\mathbb{A}_k) \cap W_2)^{i_t^* B \cap \text{Br}(X_{1,t})} \neq \emptyset$.

Soit $W_3 := G(k_{v_0})^0 \cdot W_2 \supset W_2$. D'après le théorème 6.6.7, il existe $u \in W_3 \cap U_t(\mathbb{A}_k)^{i_t^* B}$ tel que $f_t(u) \in T_0(k)$. \square

Corollaire 6.6.10. *Avec les hypothèses et notations du théorème 6.6.9, soit $F \subset X$ un sous-schéma fermé G_0 -invariant de codimension ≥ 2 . Alors, pour tout $v_0 \in \Omega_k$ et tout $\tilde{W} \subset (X \setminus F)(\mathbb{A}_k)$ satisfaisant $\tilde{W}^{\text{Br}(X) \cap (B + f^* \text{Br}_1(T_0 \times T))} \neq \emptyset$, il existe un $t \in (T_0 \times T)(k)$ tel que*

$$\text{codim}(F \cap U_t, U_t) \geq 2 \quad \text{et} \quad (G(k_{v_0})^0 \cdot G_0(k_\infty)^+ \cdot \tilde{W}) \cap (U_t \setminus (F \cap U_t))(\mathbb{A}_k)^B \neq \emptyset.$$

Démonstration. Avec les constructions et notations de la démonstration du théorème 6.6.9, soit

$$\tilde{W}_1 := \tilde{W} \cap (X_1 \setminus F)(\mathbb{A}_k), \quad \tilde{W}_2 := G_0(k_\infty)^+ \cdot \tilde{W}_1 \quad \text{et} \quad \tilde{W}_3 := (G(k_{v_0})^0 \cdot \tilde{W}_2) \cap (X_1 \setminus F)(\mathbb{A}_k).$$

Le résultat découle du même argument que dans la démonstration du théorème 6.6.9, en remplaçant W_1, W_2, W_3 par $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \tilde{W}_3$. \square

6.6.4 Fibration sur un pseudo espace homogène

Soit G un groupe linéaire connexe. Rappelons la notion de pseudo G -espace homogène (cf. Définition 6.3.15). Soit Z un pseudo G -espace homogène, on peut définir son quotient torique maximal $Z \xrightarrow{\pi} Z^{\text{tor}}$ et le stabilisateur de G sur Z^{tor} (cf. Définition 6.3.23).

Théorème 6.6.11. *Soient G un groupe linéaire connexe, Z un pseudo G -espace homogène, $Z \xrightarrow{\pi} Z^{\text{tor}}$ le quotient torique maximal et G_0 le stabilisateur de G sur Z^{tor} . Soit X une G -variété lisse géométriquement intègre telle que $\bar{k}[X]^\times / \bar{k}^\times = 0$. Soient $U \subset X$ un G -ouvert et $U \xrightarrow{f} Z$ un G -morphisme. Soient $A \subset \text{Br}(X)$, $B \subset \text{Br}_G(U)$ (cf. (6.3.1.1)) deux sous-groupes finis. Pour tout ouvert $W \subset X(\mathbb{A}_k)$ satisfaisant $W^{\text{Br}(X) \cap (A+B+f^* \text{Br}_G(Z))} \neq \emptyset$, on a :*

(1) *pour toute place $v_0 \in \Omega_k$ et tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_{v_0})^0 \subset G(k_{v_0})$, il existe un $t \in Z^{\text{tor}}(k)$ de fibre $U_t \xrightarrow{f_t} Z_t$, tel que*

$$(G(k_{v_0})^0 \cdot W) \cap U_t(\mathbb{A}_k)^{A+B+f_t^* \text{Br}_{G_0}(Z_t)} \neq \emptyset;$$

(2) *s'il existe un sous-ensemble fini non vide $S \subset \Omega_k$ tel que, pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G_0(k_S)^0 \subset G_0(k_S)$ et tout $t \in Z^{\text{tor}}(k)$ de fibre Z_t , l'adhérence $\overline{G_0(k_S)^0 \cdot Z_t(k)}^{\text{Br}_{G_0}(Z_t)}$ contient $Z_t(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_{G_0}(Z_t)}$, alors, pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_S)^0 \subset G(k_S)$, il existe un $z \in Z(k)$ de fibre U_z tel que $(G(k_S)^0 \cdot W) \cap U_z(\mathbb{A}_k)^{A+B} \neq \emptyset$.*

Démonstration. On considère (1).

Soient T_0 un tore tel que $T_0^* \cong \text{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$ et $Y_0 \rightarrow X$ le T_0 -torseur induit par l'homomorphisme Ψ de la suite exacte (6.2.2.1).

D'après la proposition 6.5.7, il existe un tore quasi-trivial T_1 et un T_1 -torseur $Z_1 \xrightarrow{p_{1,Z}} Z$ tels que $\text{Pic}(Z_{1,\bar{k}}) = 0$ et $H^3(k, \bar{k}[Z_1]^\times / \bar{k}^\times) = 0$. Par le théorème 6.2.7, il existe un groupe linéaire connexe H muni d'un homomorphisme surjectif $H \rightarrow G$ de noyau central T_1 tel que Z_1 soit une H -variété et que $p_{1,Z}$ soit un H -morphisme. De plus, $Z_1(k) \neq \emptyset$ et, d'après la proposition 6.3.17, Z_1 est un pseudo H -espace homogène.

Soient $T_2 := T_0 \times T_1$ et $V_1 := U \times_Z Z_1$ un T_1 -torseur sur U . Puisque T_1 est quasi-trivial, l'homomorphisme $H^1(X, T_1) \rightarrow H^1(U, T_1)$ est surjectif. Ainsi il existe un T_1 -torseur $Y_1 \rightarrow X$ tel que $[Y_1]_U = [V_1]$. L'isomorphisme canonique $H^1(X, T_0) \oplus H^1(X, T_1) \xrightarrow{\theta} H^1(X, T_2)$

donne un T_2 -torseur $Y \rightarrow X$ tel que $[Y] = \theta([Y_0], [Y_1])$. Maintenant on obtient des T_1 -torseurs $Z_1 \rightarrow Z$, $V_1 \rightarrow U$ et des T_2 -torseurs $Y \rightarrow X$, $V \rightarrow U$ tels que $f^*[Z_1] = [V_1]$, $[Y]|_U = [V]$ et $[V] = [T_0 \times V_1]$.

Par le théorème 6.2.7, le corollaire 6.2.8 et le corollaire 6.2.9, il existe un homomorphisme surjectif $T_0 \times H \xrightarrow{\psi} G$ de noyau central T_2 et un diagramme commutatif de $T_0 \times H$ -variétés et de $T_0 \times H$ -morphisms :

$$(6.6.4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \xrightarrow{f_V} & & \\ & & & & \nearrow & & \\ Y & \longleftarrow & V & \xrightarrow{\tau} & T_0 \times V_1 & \xrightarrow{f_1} & T_0 \times Z_1 & \xrightarrow{id \times \pi_1} & T_0 \times Z_1^{tor} \\ \downarrow p & \square & \downarrow p & & \downarrow & \square & \downarrow p_Z & & \downarrow p_{Z^{tor}} \\ X & \longleftarrow & U & \xrightarrow{=} & U & \xrightarrow{f} & Z & \xrightarrow{\pi} & Z^{tor}, \end{array}$$

où τ est une trivialisations, $Z_1 \xrightarrow{\pi_1} Z_1^{tor}$ est le quotient torique maximal, $f_V := (id \times \pi_1) \circ f_1 \circ \tau$ est la composition et $p_Z := p_{1,Z} \circ p_2$.

Montrons :

(a) on peut supposer que la composition

$$T_0^* \xrightarrow{p_1^*} \bar{k}[T_0 \times V_1]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\tau^*} \bar{k}[V]^\times / \bar{k}^\times \xrightarrow{\dot{\tau}} \text{Div}_{Y_{\bar{k}} \setminus V_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}})$$

est un isomorphisme.

(b) le stabilisateur H_0 de H sur Z_1^{tor} est connexe et donc les morphismes f_V , π , π_1 et $\pi \circ f$ sont lisses à fibres géométriquement intègres ([CX2, Prop. 2.2]).

(c) on a

$$(6.6.4.2) \quad X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}(X) \cap (B + f^* \text{Br}_G(Z))} = p(Y(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}(Y) \cap [p^* B + (f_1 \circ \tau)^* \text{Br}_{T_0 \times H}(T_0 \times Z_1)]}).$$

(d) il existe un sous groupe fini $B_1 \subset \text{Br}_{T_0 \times H}(V)$ tel que

$$B_1 + f_V^* \text{Br}_1(T_0 \times Z_1^{tor}) = (f_1 \circ \tau)^* \text{Br}_{T_0 \times H}(T_0 \times Z_1) \subset \text{Br}(V).$$

(e) pour tout $(t_0, t_1) \in (T_0 \times Z_1^{tor})(k)$, la restriction $\text{Br}_{T_0 \times H}(T_0 \times Z_1) \rightarrow \text{Br}_{H_0}(Z_{1,t_1})$ est surjective, où $V_{(t_0, t_1)} \xrightarrow{f_1|_{(t_0, t_1)}} t_0 \times Z_{1,t_1} \rightarrow (t_0, t_1)$ est la fibre de $V \xrightarrow{f_1 \circ \tau} T_0 \times Z_1 \rightarrow T_0 \times Z_1^{tor}$.

L'énoncé (a) résulte de la proposition 6.2.5. La proposition 6.3.22 et le lemme 6.3.21 donnent (b).

Pour (c), puisque $\text{Pic}(T_2) = 0$ (car T_2 est quasi-trivial), par le corollaire 6.3.11 et la suite exacte de Sansuc [S, Prop. 6.10], on a deux diagrammes commutatifs de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Br}_G(Z) & \xrightarrow{p_Z^*|_{\text{Br}_G}} & \text{Br}_{T_0 \times H}(T_0 \times Z_1) & \longrightarrow & \text{Br}_a(T_2) & \text{ et } & 0 & \longrightarrow & \text{Br}(Z) & \xrightarrow{p_Z^*} & \text{Br}(T_0 \times Z_1) \\ & & \downarrow f^*|_{\text{Br}_G} & & \downarrow (f_1 \circ \tau)^*|_{\text{Br}_{T_0 \times H}} & & \downarrow = & & \downarrow f^* & & \downarrow (f_1 \circ \tau)^* & & \downarrow (f_1 \circ \tau)^* \\ 0 & \longrightarrow & \text{Br}_G(U) & \xrightarrow{p^*|_{\text{Br}_G}} & \text{Br}_{T_0 \times H}(V) & \longrightarrow & \text{Br}_a(T_2) & & 0 & \longrightarrow & \text{Br}(U) & \xrightarrow{p^*} & \text{Br}(V). \end{array}$$

et $(p^*)^{-1} \text{Br}_{T_0 \times H}(V) = \text{Br}_G(U)$. Donc $(p^*)^{-1}((f_1 \circ \tau)^* \text{Br}_{T_0 \times H}(T_0 \times Z_1)) = f^* \text{Br}_G(Z)$. Une application du corollaire 6.5.3 au toseur $Y \xrightarrow{p} X$ sous le tore quasi-trivial T_2 et aux sous-groupes :

$$(B + f^* \text{Br}_G(Z)) \subset \text{Br}(U) \quad \text{et} \quad (f_1 \circ \tau)^* \text{Br}_{T_0 \times H}(T_0 \times Z_1) \subset \text{Br}_{T_0 \times H}(V) \subset \text{Br}_{T_2}(V)$$

donne (c).

Pour (d), par la construction, on a $\bar{k}[Z_1^{tor}]^\times \cong \bar{k}[Z_1]^\times$, $\text{Pic}(Z_{1,\bar{k}}) = 0$ et $Z_1(k) \neq \emptyset$. Par la suite spectrale de Hochschild-Serre et [S, Lem. 6.6], on a $\text{Br}_1(T_0 \times Z_1^{tor}) \cong \text{Br}_1(T_0 \times Z_1)$. L'énoncé (d) découle de la proposition 6.3.18.

Pour (e), puisque $H^3(k, Z_1^{tor,*}) = 0$, d'après le lemme 6.5.5, le morphisme $\text{Br}_a(H) \rightarrow \text{Br}_a(H_0)$ est surjectif. La proposition 6.3.13 donne (e).

On considère l'ouvert W de l'énoncé. Après avoir rétréci W , on peut supposer que tout élément de A s'annule sur W . D'après (c) et (d), on a $(p^{-1}(W))^{\text{Br}(Y) \cap (p^*B+B_1+f_V^*\text{Br}_1(T_0 \times Z_1^{tor}))} \neq \emptyset$.

Par la suite exacte de Sansuc [S, Prop. 6.10] et l'hypothèse $\bar{k}[X]^\times / \bar{k}^\times = 0$, le morphisme canonique $\bar{k}[Y]^\times / \bar{k}^\times \rightarrow \bar{k}[T_2]^\times / \bar{k}^\times$ est injectif. Puisque $p^*B + B_1 \subset \text{Br}_{T_0 \times H}(V)$ est fini, une application du théorème 6.6.9 au quintuple

$$(6.6.4.3) \quad (T_0 \times H \rightarrow T_0 \times Z_1^{tor}, T_2 \subset T_0 \times H, V \subset Y, V \xrightarrow{f_V} T_0 \times Z_1^{tor}, p^*B + B_1)$$

montre qu'il existe

$$v \in [(T_0 \times H)(k_{v_0})^0 \cdot T_2(k_\infty)^+ \cdot p^{-1}(W)] \cap V(A_k)^{p^*B+B_1} \quad \text{tel que} \quad (t_0, t_1) := f_V(v) \in (T_0 \times Z_1^{tor})(k),$$

où $(T_0 \times H)(k_{v_0})^0 := \psi^{-1}(G(k_{v_0})^0)$.

D'après (d) et (e) on a $v \in V_{(t_0, t_1)}(A_k)^{p^*B+f_1|_{(t_0, t_1)}^*\text{Br}_{H_0}(Z_1, t_1)}$. Donc $t := \pi_{Z^{tor}}((t_0, t_1)) \in Z^{tor}(k)$ et $u := p(v) \in (G(k_{v_0})^0 \cdot W) \cap U_t(A_k)^{B+f^*\text{Br}_{G_0}(Z)}$. Ce qui donne (1).

On considère (2).

Fixons $v_0 \in S$. On a le plongement canonique de groupes $G(k_{v_0}) \subset G(k_S)$. Puisque $G(k_S)^0 \subset G(k_S)$ est ouvert d'indice fini, les sous-groupes

$$G(k_{v_0})^0 := G(k_S)^0 \cap G(k_{v_0}) \subset G(k_{v_0}) \quad \text{et} \quad G_0(k_S)^0 := G(k_S)^0 \cap G_0(k_S) \subset G_0(k_S)$$

sont ouverts d'indice fini. Pour tout $t \in Z^{tor}(k)$, l'ensemble $W_t := (G(k_{v_0})^0 \cdot W) \cap U_t(A_k)^{A+B}$ est ouvert dans $U_t(A_k)$. D'après (1), il existe $t \in Z^{tor}(k)$ tel que $W_t^{f^*\text{Br}_{G_0}(Z_t)} \neq \emptyset$ et donc $f_t(W_t)^{\text{Br}_{G_0}(Z_t)} \neq \emptyset$. D'après [Cod, Thm. 4.5], $f_t(W_t) \subset Z_t(A_k)$ est ouvert. Par hypothèse, il existe $z \in Z_t(k) \cap f_t(G_0(k_S)^0 \cdot W_t)$ et ceci établit (2). \square

Remarque 6.6.12. On peut établir le théorème 6.4.6 par la méthode de la démonstration du théorème 6.6.11. Mais l'argument donné au §6.4 est plus simple.

Corollaire 6.6.13. Avec les hypothèses et notations du théorème 6.6.11, soit $F \subset X$ un sous-schéma fermé de codimension ≥ 2 . Alors, pour tout $v_0 \in \Omega_k$, tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_{v_0})^0 \subset G(k_{v_0})$ et tout ouvert $\tilde{W} \subset (X \setminus F)(A_k)$ satisfaisant $\tilde{W}^{\text{Br}(X) \cap (A+B+f^*\text{Br}_G(Z))} \neq \emptyset$, il existe un $t \in Z^{\text{tor}}(k)$ tel que

$$\text{codim}(F \cap U_t, U_t) \geq 2 \quad \text{et} \quad (G(k_{v_0})^0 \cdot \tilde{W}) \cap (U_t \setminus (F \cap U_t))(A_k)^{B+A+f_t^*\text{Br}_{G_0}(Z_t)} \neq \emptyset.$$

Démonstration. Avec les constructions et notations de la démonstration du théorème 6.6.11, d'après (6.6.4.2), on a

$$(X \setminus F)(A_k)^{\text{Br}(X) \cap (B+f^*\text{Br}_G(Z))} = p((Y \setminus p^{-1}F)(A_k)^{\text{Br}(Y) \cap (p^*B+B_1+f_V^*\text{Br}_1(T_0 \times Z_1^{tor}))}).$$

Une application du corollaire 6.6.10 au quintuple (6.6.4.3) donne le résultat. \square

6.7 Le résultat principal

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k -variété. Dans cette section, on établit le résultat principal : le théorème 6.7.6 (ou le théorème 6.7.5 sur la version de la fibration).

Rappelons la notion de sous-groupe de Brauer invariant (cf. Définition 6.3.1).

Soit G un groupe linéaire connexe. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini. On considère tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_S)^0$ de $G(k_S)$. Alors $G(k_S)^0$ est fermé dans $G(k_S)$ et on a directement :

Lemme 6.7.1. *Si $S = \infty_k$, alors $G(k_\infty)^+ \subset G(k_\infty)$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini et tout tel sous-groupe $G(k_S)^0$ contient $G(k_\infty)^+$.*

Lemme 6.7.2. *Soit G un groupe linéaire connexe et simplement connexe. Soit $v \in \Omega_k$ une place. Supposons que G est unipotent ou que G est semi-simple et absolument simple avec $G(k_v)$ non compact. Alors $G(k_v)$ ne possède pas de sous-groupe ouvert d'indice fini non-trivial.*

Démonstration. Si $G \cong \mathbb{G}_a$, ceci vaut car $G(k_v) \cong k_v$ est uniquement divisible. Dans le cas où G est unipotent, ceci vaut car il existe une filtration de G de facteurs \mathbb{G}_a ([Bo, Cor. 15.5 (ii)]). Ceci vaut aussi pour tout tel G défini sur k_v .

Dans le cas où G est semi-simple, simplement connexe et absolument simple avec $G(k_v)$ non compact, si $v \in \infty_k$, ceci vaut par E. Cartan (cf. [PR, Prop. 7.6]). Si $v \notin \infty_k$, ceci vaut car $G(k_v)$ est engendré par les k_v -points des sous-groupes unipotents de G sur k_v (la conjecture de Kneser-Tits établie par Platonov, cf. [PR, Thm. 7.6]). \square

Proposition 6.7.3. *Soit G un groupe linéaire connexe et simplement connexe. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide tel que $G'(k_S)$ soit non compact pour chaque facteur simple G' du groupe G^{sc} . Alors, pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_S)^0 \subset G(k_S)$ et tout G -torseur P sur k , l'ensemble $G(k_S)^0 \cdot P(k)$ est dense dans $P(A_k)$.*

Démonstration. On peut supposer que $P(A_k) \neq \emptyset$. Puisque $\text{Br}_a(G) = 0$, par le principe de Hasse pour un G -torseur (Kneser, Harder et Chernousov, cf. [Sko01, Thm. 5.1.1 (e)]), on a $P(k) \neq \emptyset$. Alors on peut supposer que $G \cong P$.

Si G est soit unipotent soit semi-simple, simplement connexe et absolument simple, par hypothèse il existe une place $v \in S$ tel que $G(k_v)$ soit non compact. D'après le lemme 6.7.2, $G(k_v)^0 := G(k_S)^0 \cap G(k_v)$ est exactement $G(k_v)$. Une application de l'approximation forte de G (Kneser, Platonov, cf. [PR, Thm. 7.12]) donne l'énoncé.

Si G est semi-simple, simplement connexe et simple, il existe une extension fini K/k et un K -groupe linéaire semi-simple, simplement connexe et absolument simple G' tel que $G \cong \text{Res}_{K/k} G'$. L'énoncé en découle.

En général, le groupe G possède une filtration de facteurs soit unipotents soit semi-simples simplement connexes et simples. Une application de la méthode de fibration ([CTX13, Prop. 3.1]) donne l'énoncé. \square

Proposition 6.7.4. *Soient G un groupe linéaire connexe, et Z un G -espace homogène à stabilisateur géométrique connexe. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide tel que $G'(k_S)$ soit non compact pour chaque facteur simple G' du groupe G^{sc} . Supposons que $S = \infty_k$ ou que $\bar{k}[Z]^\times = \bar{k}^\times$. Alors, pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_S)^0 \subset G(k_S)$ et tout ouvert $W \subset Z(A_k)$ satisfaisant $W^{\text{Br}_G(Z)} \neq \emptyset$, on a $Z(k) \cap (G(k_S)^0 \cdot W) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Le cas où $S = \infty_k$ a été établi par Borovoi et Demarche ([BD, Thm. 1.4]). Ici, on donne une démonstration unifiée des deux cas considérés.

Puisque l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule pour un espace homogène à stabilisateur géométrique connexe (Borovoi [B96], cf. [Sko01, Thm. 5.2.1 (a)]), on a $Z(k) \neq \emptyset$. Un k -point de Z permet de définir un G -morphisme $\pi : G \rightarrow Z$ tel que $Z \cong G/G_0$ avec $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe.

Par la résolution flasque [CT08, Prop. 5.4], il existe un groupe linéaire connexe H et un homomorphisme surjectif $H \xrightarrow{\psi} G$ tels que $\text{Ker}(\psi)$ soit un tore et H soit quasi-trivial, i.e. H^{tor} soit quasi-trivial et $H^{sc} = H^{ss}$. Alors Z est un H -espace homogène à stabilisateur géométrique connexe, $H^{sc} \cong G^{sc}$ et, d'après le corollaire 6.3.11 et la proposition 6.3.9, on a $\text{Br}_G(Z) = \text{Br}_H(Z)$. Le sous-groupe $H(k_S)^0 := \psi^{-1}(G(k_S)^0) \subset H(k_S)$ est ouvert d'indice fini. Alors on peut remplacer G par H et supposer que G est quasi-trivial.

Notons $G \xrightarrow{\phi} G^{tor}$ le quotient torique maximal. Alors ϕ est lisse à fibres géométriquement intègres et donc $G(\mathbb{A}_k) \rightarrow G^{tor}(\mathbb{A}_k)$ est ouvert ([Cod, Thm. 4.5]). D'après le corollaire 6.5.13, il existe un ouvert $W_1 \subset G(\mathbb{A}_k)$ et un point $z \in Z(k)$ tels que $\pi(W_1) \cdot z \subset W$ et $W_1^{\text{Br}_1(G)} \neq \emptyset$. Puisque G^{tor} satisfait l'approximation forte par rapport à $\text{Br}_1(G^{tor})$ hors de ∞_k (Harari [Ha08, Thm. 2]), il existe

$$t \in G^{tor}(k) \cap (G^{tor}(k_\infty)^+ \cdot \phi(W_1)).$$

Notons G_t la fibre de ϕ au-dessus de t et $G^{ssu}(k_S)^0 := G(k_S)^0 \cap G^{ssu}(k_S)$. Ainsi G_t est un G^{ssu} -torseur. D'après la proposition 6.7.3, l'ensemble $G^{ssu}(k_S)^0 \cdot G_t(k)$ est dense dans $G_t(\mathbb{A}_k)$.

Dans le cas où $S = \infty_k$, puisque l'homomorphisme $G(k_\infty)^+ \rightarrow G^{tor}(k_\infty)^+$ est surjectif, il existe

$$a \in G_t(\mathbb{A}_k) \cap (G(k_\infty)^+ \cdot W_1) \quad \text{et donc} \quad g \in G_t(k) \cap (G^{ssu}(k_S)^0 \cdot G(k_\infty)^+ \cdot W_1).$$

Par le lemme 6.7.1, on a $G^{ssu}(k_S)^0 \cdot G(k_\infty)^+ \subset G(k_S)^0$ et donc $g \cdot z \in Z(k) \cap (G(k_S)^0 \cdot W)$.

Dans le cas où $\bar{k}[Z]^\times = \bar{k}^\times$, par la suite exacte de Sansuc [S, Prop. 6.10], $G_0^{tor} \rightarrow G^{tor}$ est surjectif et donc $G_0 \rightarrow G \rightarrow G^{tor}$ est surjectif. Ainsi $G_0(k_\infty)^+ \rightarrow G^{tor}(k_\infty)^+$ est surjectif. Alors il existe $a \in G_t(\mathbb{A}_k) \cap (G_0(k_\infty)^+ \cdot W_1)$ et donc

$$g \in G_t(k) \cap (G^{ssu}(k_S)^0 \cdot G_0(k_\infty)^+ \cdot W_1).$$

Ainsi $g \cdot z \in Z(k) \cap (G(k_S)^0 \cdot W)$. □

Théorème 6.7.5. *Soient G un groupe linéaire connexe, $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe et $Z := G/G_0$. Soient X une G -variété lisse géométriquement intègre, $U \subset X$ un G -ouvert et $U \xrightarrow{f} Z$ un G -morphisme. Soient $A \subset \text{Br}(X)$ et $B \subset \text{Br}_G(U)$ (cf. (6.3.1.1)) deux sous-groupes finis. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide tel que $G'(k_S)$ soit non compact pour chaque facteur simple G' du groupe G^{sc} . Supposons que $S = \infty_k$ ou que $\bar{k}[X]^\times / \bar{k}^\times = 0$. Alors, pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_S)^0 \subset G(k_S)$ et tout ouvert $W \subset X(\mathbb{A}_k)$ satisfaisant $W^{\text{Br}(X) \cap (A+B+f^*\text{Br}_G(Z))} \neq \emptyset$, il existe un $z \in Z(k)$ de fibre U_z , tel que*

$$(G(k_S)^0 \cdot W) \cap U_z(\mathbb{A}_k)^{B+A} \neq \emptyset.$$

Démonstration. Le cas où $S = \infty_k$ découle du théorème 6.4.6 (2) et de la proposition 6.7.4.

Soit $\pi : Z \xrightarrow{\pi} Z^{tor}$ le quotient torique maximal de Z et $G_1 \subset G$ le stabilisateur de G sur Z^{tor} (cf. Définition 6.3.23). Pour tout $t \in Z^{tor}(k)$, notons Z_t la fibre de π au-dessus de t . Alors Z_t est un G_1 -espace homogène à stabilisateur géométrique connexe. Par la proposition 6.3.13, on a $\bar{k}[Z_t]^\times = \bar{k}^\times$. D'après la proposition 6.7.4, l'adhérence $\overline{G_0(k_S)^0 \cdot Z_t(k)}$ contient $Z_t(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_{G_0}(Z_t)}$.

Le cas où $\bar{k}[X]^\times = \bar{k}^\times$ découle du théorème 6.6.11 (2) (avec les mêmes notations sauf remplacer G_0 par G_1). □

Théorème 6.7.6. *Soient G un groupe linéaire connexe, $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe et $Z := G/G_0$. Soient X une G -variété lisse géométriquement intègre, $U \subset X$ un G -ouvert et $U \xrightarrow{f} Z$ un G -morphisme. Soient $A \subset \text{Br}(X)$ et $B \subset \text{Br}_G(U)$ (cf. (6.3.1.1)) deux sous-groupes finis. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide tel que $G'(k_S)$ soit non compact pour chaque facteur simple G' du groupe G^{sc} .*

(1) *Si $S = \infty_k$ et, pour tout $z \in Z(k)$ de fibre U_z , l'ensemble $U_z(k)$ est dense dans $U_z(\mathbb{A}_k)^{A+B}$, alors $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}(X) \cap (A+B+f^*\text{Br}_G(Z))}$.*

(2) *Si $\bar{k}[X]^\times = \bar{k}^\times$ et, pour tout $z \in Z(k)$, la fibre U_z satisfait l'approximation forte de Brauer-Manin par rapport à $A + B$ hors de S , alors X satisfait l'approximation forte de Brauer-Manin par rapport à $\text{Br}(X) \cap (A + B + f^*\text{Br}_G(Z))$ hors de S .*

Démonstration. Ceci suit immédiatement du théorème 6.7.5. □

Le cas où $U \cong Z$, $f = id$ et $A = B = 0$ donne le théorème 6.1.4.

Remerciements. Je remercie très chaleureusement Jean-Louis Colliot-Thélène et Fei Xu pour plusieurs discussions. Je remercie également Cyril Demarche, Qifeng Li et Giancarlo Lucchini Arteche pour leurs commentaires. Projet soutenu par l'attribution d'une allocation de recherche Région Ile-de-France.

Bibliographie

- [1] Y. Cao : *Cohomologie non ramifiée de degré 3 : variétés cellulaires et surfaces de del Pezzo de degré au moins 5*, arXiv : 1607.01739 (2016) (voir chapitre II).
- [2] Y. Cao : *Troisième groupe de cohomologie non ramifiée des toiseurs universels sur les surfaces rationnelles*, arXiv : 1609.05117 (2016) (voir chapitre III).
- [3] Y. Cao, C. Demarche, F. Xu : *Comparing descent obstruction and Brauer-Manin obstruction for open varieties*, arXiv : 1604.02709 (2016) (voir chapitre V).
- [4] Y. Cao : *Approximation forte pour les variétés avec une action d'un groupe linéaire*, arXiv : 1604.03386 (2016) (voir chapitre VI).
- [A32] A. A. Albert : *A note on division algebras of order sixteen*, Bull AMS 38 (1932) 703–706.
- [A72] A. A. Albert : *Tensor products of quaternion algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 65–66.
- [AB] Asher Auel, Marcello Bernardara : *Semiorthogonal decompositions and birational geometry of del Pezzo surfaces over arbitrary fields*, <http://arxiv.org/abs/1511.07576>.
- [BBD] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne : *Faisceaux pervers*, Astérisque, 100, Soc. Math. France (1982).
- [Bo] A. Borel : *Linear algebraic groups*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [B93] M. Borovoi : *Abelianization of the second nonabelian galois cohomology* Duke Math. J. 72 (1993) 217–239.
- [B96] M. Borovoi : *The Brauer-Manin obstruction to the Hasse principle for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. 473 (1996), 181–194.
- [BD] M. Borovoi et C. Demarche : *Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces*, Comment. Math. Hev. 88 (2013), 1-54.
- [CL] Y. Cao, Y. Liang : *Local global principle for certain biquadratic normic bundles*, Acta Arithmetica 164 (2014), 137-144. Voir : arXiv : 1301.0202.
- [CX1] Y. Cao, F. Xu : *Strong Approximation with Brauer-Manin Obstruction for Toric Varieties*, arXiv : 1311.7655 (2013).
- [CX2] Y. Cao, F. Xu : *Strong Approximation with Brauer-Manin Obstruction for Groupic Varieties*, arXiv : 1507.04340 (2015).
- [CLX] Y. Cao, Y. Liang, F. Xu : *Arithmetic purity of strong approximation*, arXiv 1701.07259 (2017).
- [CT72] Jean-Louis Colliot-Thélène : *Surfaces de Del Pezzo de degré 6*, C.R.A.S. Paris t.275 (1972) 109–111.
- [CT83] J.-L. Colliot-Thélène : *Hilbert's theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. math. 71 (1983) 1–20.

- [CT91] J.-L. Colliot-Thélène : *Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique*, in Arithmetic Algebraic Geometry (CIME, Trento, 1991, E. Ballico, ed.) J.-L. Colliot-Thélène, K. Kato, P. Vojta, Springer L.N.M. 1553 (1993) p. 1–49.
- [CT95] Jean-Louis Colliot-Thélène : *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, in K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 58, Part I (1995) 1–64.
- [CT99] Jean-Louis Colliot-Thélène : *Points rationnels sur les variétés non de type général. Chapitre II : Surfaces rationnelles*, notes 1999.
- [CT02] Jean-Louis Colliot-Thélène : *Exposant et indice d’algèbres simples centrales non ramifiées (avec un appendice par Ofer Gabber)*, L’Enseignement Mathématique 48 (2002) 127–146.
- [CT-Beijing] J.-L. Colliot-Thélène : *Lectures on linear algebraic groups*, notes, april 2007, voir : <http://www.math.u-psud.fr/~colliot/BeijingLectures2Juin07.pdf>.
- [CT08] J.-L. Colliot-Thélène : *Résolutions flasques des groupes linéaires connexes*, J. reine angew. Math. 618 (2008), 77-133.
- [CT15] Jean-Louis Colliot-Thélène : *Descente galoisienne sur le second groupe de Chow : mise au point et applications*, Documenta Mathematica, Extra Volume : Alexander S. Merkurjev’s Sixtieth Birthday (2015) 195–220.
- [CTH] J.-L. Colliot-Thélène et D. Harari : *Approximation forte en famille*, J. reine angew. Math. 710 (2016), 173-198.
- [CTHK] J.-L. Colliot-Thélène, R. T. Hoobler, B. Kahn : *The Bloch-Ogus-Gabber theorem*, in Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996), 31–94, Fields Inst. Commun., 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [CTHS] Jean-Louis Colliot-Thélène, David Harari, Alexei N. Skorobogatov : *Compactification équivariante d’un tore (d’après Brylinski et Künnemann)*, Expositiones mathematicae 23 (2005) 161–170.
- [CTS77] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : *Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles*, C.R.A.S. Paris t.284 (1977) 967–970.
- [CTS80] J.-L. Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc : *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d’Angers (Juillet 1979), édité par A. Beauville, Sijthof and Noordhof (1980) 223-237.
- [CTS81] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J. 48 (1981) 421–447.
- [CTS87a] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc : *Principal homogeneous spaces under flasque tori, applications*, Journal of Algebra 106 (1987) 148-205.
- [CTS87b] Jean-Louis Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc : *La descente sur les variétés rationnelles II*, Duke Math. J.54 (1987) 375–492.
- [CTSSD] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer : *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces II*, J. fr die reine und angew. Math. 374 (1987) 72–168.
- [CTV] Jean-Louis Colliot-Thélène, Claire Voisin : *Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière*, Duke Mathematical Journal 161 (2012) 735–801.
- [CTX09] J.-L. Colliot-Thélène et F. Xu : *Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representations by integral quadratic forms*, Compos. Math. 145(2009) 309-363.

- [CTX13] J-L. Colliot-Thélène, F. Xu : *Strong approximation for the total space of certain quadric fibrations*, Acta Arithmetica 157 (2013), 169-199.
- [Cod] B. Conrad : *Weil and Grothendieck approaches to adelic points*, Enseign. Math. 58 (2012), 61–97.
- [D09a] C. Demarche : *Obstruction de descente et obstruction de Brauer-Manin étale*, Algebra Number Theory 3 (2009) 237–254.
- [D09b] C. Demarche : *Méthodes cohomologiques pour l'étude des points rationnels sur les espaces homogènes*, PhD thesis, University Paris-Sud XI (2009) Available at <https://webusers.imj-prg.fr/~cyril.demarche/these/these.pdf>.
- [D11a] C. Demarche : *Suites de Poitou-Tate pour les complexes de tores à deux termes*, Int. Math. Res. Not. (2011) 135–174.
- [D11b] C. Demarche : *Le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes*, Proc.London Math. Soc. 102 (2011), 563-597.
- [dJ] A.J. de Jong : *A result of Gabber*, Available at <http://www.math.columbia.edu/~dejong/papers>.
- [E] Ekedahl, T : *An effective version of Hilbert's irreducibility theorem*, in : Séminaire de théorie des nombres de Paris, 1988-1989, Progress Math. 91, Birkhäuser (1990), 241-248.
- [EKL] H. Esnault, B. Kahn, M. Levine, E. Viehweg : *The Arason invariant and mod 2 algebraic cycles*, J. Amer. Math. Soc. 11 (1998), no. 1, 73–118.
- [FSS] Y.Z. Flicker, C. Scheiderer et R. Sujatha : *Grothendieck's theorem on non-abelian H^2 and local-global principles*, J. Amer. Math. Soc. 11 (1988) 731–750.
- [Fu] L. Fu : *Étale cohomology theory*, Nankai Tracts in Mathematics, Vol. 13, World Scientific, 2011.
- [Fu84] W. Fulton : *Intersection theory*, Springer, 1984.
- [Ful] William Fulton : *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton N.J. (1993).
- [Gi] J. Giraud : *Cohomologie non-abélienne* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag 179 (1971).
- [Gro] A. Grothendieck : *Le groupe de Brauer, I, II, III*, in : Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland & Masson 1968.
- [Ha94] D. Harari : *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. 75 (1994), 221-260.
- [Ha02] D. Harari : *Groupes algébriques et points rationnels*, Math. Ann. 322 (2002) 811–826.
- [Ha07] D. Harari : *Quelques propriétés d'approximation reliées à la cohomologie galoisienne d'un groupe algébrique fini*, Bull. Soc. Math. France. 135, No 4, 549–564 (2007).
- [Ha08] D. Harari : *Le défaut d'approximation forte pour les groupes algébriques commutatifs*, Algebra & Number Theory 2 (5)(2008) 595-611.
- [Hart] R. Hartshorne : *Algebraic Geometry*(GTM 52), Springer Science+Business Media, Inc 1977.
- [HS02] D. Harari et A. N. Skorobogatov : *Non-abelian cohomology and rational points* Compos. Math. 130 (2002) 241–273.
- [HS03] D. Harari et A. Skorobogatov : *The Brauer group of torsors and its arithmetic applications*, The Brauer group of torsors and its arithmetic applications, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) t. 53, no. 7 (2003) 1987–2019.

- [HS05] D. Harari et A. N. Skorobogatov : *Non-abelian descent and the arithmetic of enriques surfaces*, Intern. Math. Res. Notices 52 (2005) 3203–3228.
- [HS13] D. Harari et A.N. Skorobogatov : *Descent theory for open varieties*, London Mathematical Society Lecture Note Series 405 (2013) 250–279.
- [HSz05] D. Harari and T. Szamuely. *Arithmetic duality theorems for 1-motives*, J. reine angew. Math. 578 (2005) 93-128.
- [Ja] Nathan Jacobson : *Finite dimensional division algebras over fields*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.
- [K96] Bruno Kahn : *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. 1 (1996), 395–416.
- [Ka99] Bruno Kahn : *Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties*, Algebraic K-theory (Seattle, 1997), Proc. Symposia Pure Math. 67, AMS, Providence, 1999, 149–174.
- [Ka09] Bruno Kahn : *Formes quadratiques sur un corps*, Cours Spécialisés **15**, Soc. Math. France, Paris, 2009.
- [Ka10] Bruno Kahn : *Cohomological approaches to SK_1 and SK_2 of central simple algebras*, Documenta Mathematica , Extra Volume : Andrei A. Suslin’s Sixtieth Birthday (2010), 317–369.
- [Ka12] Bruno Kahn : *Classes de cycles motiviques étales*, Algebra & Number theory 6-7 (2012), 1369–1407.
- [Koll96] János Kollár : *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 32, Springer, Berlin, 1996.
- [KS] M. Kashiwara, P. Schapira : *Categories and sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 332, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [L87] S. Lichtenbaum : *The construction of weight-two arithmetic cohomology*, Invent. math. 88 (1987) 183–215.
- [L90] S. Lichtenbaum : *New results on weight-two motivic cohomology*, The Grothendieck Festschrift, vol. 3, Progress in Math. 88, Birkhäuser, Boston, 1990, 35–55.
- [LX] Q. Liu et F. Xu *Very strong approximation for certain algebraic varieties*, Math. Ann. 363 (2015) 701–731.
- [Ma74] Yuri Manin : *Cubic forms : algebra, geometry, arithmetic*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974.
- [Me03] A. Merkurjev : *Rost invariants of simply connected algebraic groups*, in Cohomological Invariants in Galois Cohomology, S. Garibaldi, A. Merkurjev, J-P. Serre, University Lecture Series 28 (2003), American Math. Soc.
- [Me08] A. Merkurjev : *Unramified elements in cycle modules*, J. London Math. Soc., 78 (2008), 51–64.
- [Me13] A. Merkurjev : *Weight two motivic cohomology of classifying spaces for semisimple groups*, 2013. To appear in American Journal of Math.
- [Mc] John McCleary : *A user’s guide to spectral sequences (second edition)*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 57, Cambridge University Press, 2001.
- [Mi80] J. S. Milne : *Étale Cohomology*, Princeton Math. Ser 33, Princeton University Press, Princeton 1980.
- [MVW] C. Mazza, V. Voevodsky et C. Weibel : *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Math. Monographs, vol. 2, American Mathematical Soc., 2006.
- [Oda] T. Oda : *Convex bodies and algebraic geometry*, Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge. A series of modern surveys in mathematics, 15, 1987.

- [Pi11] A. Pirutka *Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis*, Algebra and Number Theory 5-6 (2011) 803–817.
- [PR] V. P. Platonov et A. S. Rapinchuk : *Algebraic groups and number theory*, Academic Press, 1994.
- [Po10] B. Poonen : *Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers*, Ann. of Math. 171 (2010) 2157–2169.
- [S] J.-J. Sansuc : *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew Math. 327 (1981), 12-80.
- [Se] J-P. Serre : *Cohomologie galoisienne (cinquième édition, révisée et complétée)*, Lecture Notes in Mathematics 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [SGA41/2] P. Deligne : *Cohomologie étale*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, SGA 4 1/2, Lecture Notes in Mathematics 569, Springer-Verlag (1977).
- [Sko90] A. N. Skorobogatov : *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, in : Séminaire de théorie des nombres de Paris, 1988-1989, Progress Math. 91, Birkhäuser (1990), 205-219.
- [Sko99] A. N. Skorobogatov : *Beyond the Manin obstruction*, Invent. Math. 135 (1999) 399–424.
- [Sko01] A. N. Skorobogatov : *Torsors and Rational Points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, 2001.
- [Sko09] A. N. Skorobogatov : *Descent obstruction is equivalent to étale Brauer-Manin obstruction*, Math. Ann. 344 (2009) 501–510.
- [St] M. Stoll : *Finite descent obstructions and rational points on curves*, Algebra Number Theory 1 (2007) 349–391.
- [Su] H. Sumihiro : *Equivariant completion I*, J. Math. Kyoto Univ., 14, 1974, 1–28.
- [VA] Anthony Várilly-Alvarado : *Arithmetic of del Pezzo surfaces*, Birational geometry, rational curves, and arithmetic (F. Bogomolov, B. Hassett and Y. Tschinkel eds.) Simons Symposia 1 (2013), 293–319.
- [Wei14] D. Wei, *Strong approximation for the variety containing a torus*, arxiv : 1403.1035 (2014).
- [Wei16] D. Wei, *Open descent and strong approximation*, arXiv : 1604.00610 (2016).