



**Contribution à l'élaboration de modèles objectifs pour
certains problèmes de la mécanique des fluides.
Elaboration de méthodes numériques associées**

Jean-Marc Hérard

► **To cite this version:**

Jean-Marc Hérard. Contribution à l'élaboration de modèles objectifs pour certains problèmes de la mécanique des fluides. Elaboration de méthodes numériques associées. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Provence Aix-Marseille 1, 1998. tel-01583846

HAL Id: tel-01583846

<https://theses.hal.science/tel-01583846>

Submitted on 8 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à Diriger des Recherches

Contribution à l'élaboration de modèles objectifs
pour certains problèmes de la mécanique des fluides.
Elaboration de méthodes numériques associées.

Jean-Marc Hérard

Soutenance le 15 décembre 1998, UFR MIM

Université de Provence (Aix Marseille I)

Rapporteurs :

Roland Borghi
Alain-Yves Leroux
Richard Saurel

Jury :

Roland Borghi
Thierry Gallouët
Sergey Gavriluk (Président)
Alain-Yves Leroux
Richard Saurel

Plan du document de synthèse

Préambule

Introduction

Forme générale des systèmes abordés

Partie I

Méthodes numériques pour la simulation des écoulements compressibles ou incompressibles laminaires

1.1 Equations de Saint-Venant

1.2 Equations d'Euler ou de Navier-Stokes compressibles en régime laminaire.

1.3 Equations de Navier-Stokes en situation laminaire incompressible.

Partie II

Modélisation mécanique et méthodes numériques pour la simulation des écoulements turbulents en régime compressible ou incompressible

2.1 Modèles de turbulence en situation incompressible avec modélisation des équations de transport des tensions de Reynolds.

2.2 Modèles de turbulence en situation compressible avec modélisation des équations de transport des tensions de Reynolds.

2.3 Modèles linéaires ou non linéaires de turbulence en situation compressible à une ou deux équations.

Partie III

Proposition de méthodes numériques pour la simulation des écoulements diphasiques en régime compressible et en description Eulérienne

3.1 Modèles à deux fluides comportant une phase compressible

3.2 Modèles homogènes

Bibliographie

Annexe 1 : CV

Annexe 2 : texte des publications, rapports et communications.

Synthèse des travaux de recherche

Jean-Marc Hérard

Electricité de France. DER/AEE/LNH/GRET
6 quai Watier . 78400 Chatou. France.
(Jean-Marc.Hérard @ edfgdf.fr)

Préambule :

Les travaux synthétisés dans ce document ont été réalisés au Département Laboratoire National d'Hydraulique (Direction des Etudes et Recherches - Electricité de France) au cours des années 1991-1997. Ils ont été effectués en collaboration avec Sylvain Boivin, Thierry Buffard, Laure Combe, Alain Forestier, Thierry Gallouet, Xavier Louis et Markus Uhlmann. Ce travail comporte deux aspects distincts : modélisation mécanique, et simulation numérique.

La bibliographie comporte une partie des contributions écrites réalisées avec les auteurs précédents ([i] : publication, {j} : rapport interne EDF-DER d'accessibilité libre, (k) : note de congrès¹), et la bibliographie externe, qui est clairement incomplète.

Introduction

Deux types de problèmes assez distincts apparaissent dans le cadre de la modélisation en Mécanique des Fluides. Il s'agit tout d'abord en général de proposer un modèle continu censé décrire correctement le modèle physique (qui est systématiquement un système d'équations aux dérivées partielles). Etant donné l'assez grande complexité des phénomènes mis en jeu, et corrélativement des systèmes d'EDP associés, il faut ensuite examiner la pertinence thermodynamique, mécanique et si possible mathématique des équations, avant d'envisager de définir des méthodes numériques adaptées à la résolution de ces systèmes. Ces méthodes doivent moralement s'appuyer sur une bonne compréhension des mécanismes physiques et mathématiques, pour prétendre pouvoir être admissibles. Quelques modèles proposés dans la littérature sont partiellement maîtrisés, tant du point de vue physique que mathématique (par exemple, les équations des fluides monophasiques tels que le système des équations d'Euler ou de Navier-Stokes). D'autres par contre sont nettement moins bien élucidés, dans le domaine par exemple de la modélisation des écoulements turbulents monophasiques adoptant une approche purement statistique : modèles de turbulence à une ou deux équations, ou modèles de transport des contraintes de Reynolds. Le domaine qui reste certainement à l'heure actuelle le plus mal connu est celui afférent à la description Eulérienne des fluides multiphasiques. Le travail présenté ici est une contribution à la modélisation en Mécanique des Fluides.

Le document de synthèse est composé de la manière suivante. Le corps principal comporte trois parties distinctes associées respectivement à la simulation des écoulements monophasiques laminaires, à la modélisation et à la simulation numérique des écoulements turbulents monophasiques compressibles ou incompressibles, et enfin à la modélisation des écoulements diphasiques comportant une phase compressible. La première partie de la bibliographie comporte les documents figurant en annexe II, et une bibliographie dite "externe".

Forme générale des systèmes abordés

L'ensemble des systèmes d'équations abordés ici est issu de la modélisation en Mécanique des Fluides, en régime monophasique ou diphasique, incompressible ou compressible, laminaire ou turbulent. Ces systèmes se mettent sous la forme :

$$A_0(W) W_{,t} + \sum_{i=1}^3 (F_i(W))_{,i} + \sum_{i=1}^3 A_i(W) W_{,i} = \sum_{i=1}^3 (F_i^v(W, \nabla W))_{,i} + S^1(W) + S^2(W, \nabla W)$$

(1a) (1b) (2a) (3) (2b)

La variable W dans IR^P désigne (par abus de langage) la variable conservative. Les flux F_i^1 représentent les flux convectifs. Ici, ils ne dépendent pas explicitement de la variable d'espace x . Ils sont complétés dans certains cas d'effets convectifs sous forme non conservative (modèles de turbulence, modèles diphasiques bi-fluides,...) représentés formellement par A_i (pour $i=1,2,3$). Les flux diffusifs F_i^v sont tels que : $F_i^v(W, 0) = 0$; dans tous les

¹ Les documents * ne sont pas inclus dans cette synthèse.

cas ici, ils sont issus d'une modélisation faisant appel à une loi de premier gradient. Les termes sources S^1 sont différentiels d'ordre 0 par rapport à $\mathbf{W}$ (effets de traînée statique, forces de gravité, termes de changement de phase, ...), tandis que S^2 est différentiel d'ordre deux et tel que : $S^2(\mathbf{W}, 0) = 0$ (termes de "production" pour les modèles de turbulence à une ou deux équations de transport, ...). Ces systèmes sont a priori munis d'une condition initiale sur $\mathbf{W}$, et de conditions aux limites physiques.

On peut schématiquement dire que la plupart des codes de calcul développés dans les organismes à vocation industrielle sont basés sur une stratégie "terme par terme". On a en effet coutume de traiter distinctement les effets convectifs (1) des effets diffusifs-dissipatifs (2a ; 2b), et des termes sources (3). Il faut comprendre que ces systèmes sont souvent "évolutifs", et qu'un traitement très couplé des différents effets pénalise évidemment l'évolution du code associé. On sait que cette approche n'est pas optimale en termes de précision (voir par exemple [Sai95] pour le problème du couplage convection-termes sources dans un modèle diphasique bi-fluide à quatre équations) ; il faut néanmoins comprendre que l'utilisateur n'est pas nécessairement sensible à cet aspect, mais plutôt au fait que l'algorithme global est robuste et peu coûteux, qu'il respecte le principe (s'il existe) de loi de conservation, qu'il est simple à mettre en oeuvre, et génère pour tout maillage, et pour tout pas de temps, même en régime instationnaire, des valeurs admissibles des grandeurs physiques (par exemple densité positive, pression positive, principe du maximum pour les concentrations, dans le cadre des équations d'Euler ou de Navier-Stokes).

Une manière a priori de satisfaire aux deux premiers critères consiste à tirer parti des effets stabilisants des méthodes numériques décentrées "stables" dédiées aux systèmes hyperboliques homogènes, les termes visqueux (généralement naturellement stables) étant discrétisés à l'aide de techniques centrées en espace et généralement implicites en temps. La prise en compte des termes sources se fait souvent en utilisant des techniques centrées implicites, même si l'on sait dans certains cas qu'elles ne sont pas optimales. Il faut noter que la concaténation des différents effets physiques n'implique pas obligatoirement le recours à des techniques de pas fractionnaires (elles peuvent être des techniques de splitting de flux en espace, de semi implication temporelle, de formulation mixte Volumes-Finis Eléments Finis, ...).

On peut résumer les deux thèmes génériques sous jacents dans le travail de la manière suivante :

1 - Examiner la pertinence de certains des modèles continus proposés dans la littérature et contribuer dans les cas conjecturaux à l'amélioration de ces modèles. Cet examen inclut les éléments suivants :

- respect des principes d'objectivité,
- respect a priori des principes de positivité intrinsèques,
- recherche d'une caractérisation entropique des modèles,
- recherche d'une solution entropique pour le problème de Riemann associé aux systèmes de convection sous-jacents.

2 - Obtenir des approximations convergentes des systèmes de type (1) sur maillage structuré et/ou non structuré, permettant les calculs stationnaires ou instationnaires. Les schémas doivent respecter le principe des lois de conservation, et les principes de positivité pour les variables ad hoc doivent être respectés.

Il est clair que pour quelques modèles abordés ici, la partie 1 est déjà clairement élucidée, et que seule la seconde partie de mise en oeuvre numérique est éventuellement originale. La deuxième remarque du point 1 ne doit pas être négligée. Dans le cadre diphasique par exemple, et pour les modèles à deux fluides, il faut s'assurer avant tout que les systèmes continus que l'on cherche à simuler génèrent naturellement des solutions vérifiant le principe du maximum pour la variable taux de présence volumique. Il en est de même dans le cadre des modèles de turbulence monophasique (principes de réalisabilité). Si tel n'est pas le cas, on ne peut légitimement pas demander à la technique numérique mise en oeuvre de vérifier sur le plan discret ce principe. La caractérisation entropique des modèles est une étape fondamentale conditionnant la paramétrisation des champs VNL dans l'étude du problème de Riemann. L'existence d'une solution à ce dernier problème est évidemment cruciale. En effet, une telle solution permet d'envisager la construction d'un solveur de Riemann exact ; elle permet également, et ce indépendamment du choix fait pour le schéma de convection, de disposer de solutions analytiques de référence (incluant des solutions avec chocs) autorisant donc une étude numérique de convergence (qui restera néanmoins test-dépendante). Enfin, elle autorise la recherche de solveurs de Riemann linéarisés "adaptés", qui s'efforcent de respecter certaines propriétés intrinsèquement vérifiées par le solveur de Riemann exact de Godunov (positivité de variables ad hoc, préservation de certains invariants de Riemann, ...).

Les contraintes de faisabilité dans un cadre industriel, ajoutées à la complexité des systèmes qui sont abordés ici, conduisent assez naturellement à retenir une approche utilisant les techniques de Volumes Finis (en variables "colocalisées"), associées à un recouvrement spatial du domaine utilisant, dans le cadre bidimensionnel

par exemple, des triangles, quadrangles ou volumes finis de type INRIA. Cette formulation est bien entendu totalement impropre dans certains cas, en particulier lorsque les systèmes convectifs n'admettent pas de forme conservative.

Une attention particulière est portée au traitement des effets convectifs, en se focalisant sur la classe des solveurs de Riemann, et plus particulièrement sur celle des solveurs de Riemann approchés (Roe, VFRoe). Cette approche n'est d'ailleurs pas originale, de nombreux auteurs ayant choisi cette alternative depuis une vingtaine d'années. La difficulté provient ici souvent du fait que les systèmes convectifs peuvent :

- ne pas admettre de forme conservative naturelle (modèles de turbulence compressible),
- ne pas avoir un domaine d'états admissibles (ou réalisables pour les turbulenciers) s'identifiant à l'espace des états hyperboliques - ce dernier n'étant par ailleurs pas nécessairement semblable à l'espace des solutions générées par le système - et être conditionnellement hyperboliques,
- avoir des solutions "pathologiques" (assèchement pour les équations de Saint-Venant, apparition du vide pour les équations d'Euler,...)

Partie 1 :
Méthodes numériques pour la simulation des écoulements
compressibles ou incompressibles laminaires

1.1 Equations de Saint-Venant

Objectif 1.1 :

Il s'agit de simuler numériquement les équations de Saint Venant, en s'intéressant plus particulièrement à la faisabilité de la prédiction à un coût raisonnable de configurations d'écoulement faisant apparaître des recouvrements de zones sèches ou des zones de découlement, ce qui pose de réels problèmes en pratique dans les calculs industriels [GoM97].

Principe et résultats :

L'idée de base consiste à utiliser une forme sensiblement distincte du schéma VFRoe de base introduit dans [GaM96], [MFG97], qui est le schéma VFRoe en variables non conservatives. La forme générique de ce solveur linéarisé conservatif (qui nécessite une correction entropique aux points "soniques"), est brièvement rappelée dans le paragraphe 1.2.2, et est décrite plus précisément dans [8], [12], [3*]. Le système unidimensionnel conservatif considéré est :

$$h_t + (h U)_x = 0 \quad (1.1.1)$$

$$(h U)_t + (h U^2 + P(h))_x = 0 \quad (1.1.2)$$

où h et U désignent respectivement la hauteur d'eau et la vitesse, et $P(h) = 1/2 \rho g h^2$ la pression. On sait que le problème de Riemann associé au système (1.1.1-2) et à la condition initiale :

$$\begin{aligned} (h, Q)(x < 0, t=0) &= (h_L, Q_L) \\ (h, Q)(x > 0, t=0) &= (h_R, Q_R) \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

(Q désignant hU) admet une unique solution à hauteur d'eau strictement positive dès lors que la condition :

$$U_R - U_L < 2(c_L + c_R) \quad (1.1.4)$$

est vérifiée (on note ici: $c = (gh)^{1/2}$). Le choix des variables non conservatives ($u, 2c$) est tel que la célérité de l'unique état intermédiaire numérique est positive dès lors que l'inégalité (1.1.4) est satisfaite.

Synthèse et perspectives ([8]) :

Le schéma proposé se comporte bien dans tous les cas considérés, qui font intervenir des solutions de type choc-détente ou détente-détente, même si les hauteurs d'eau sont nulles (à l'initialisation), ou tendent à s'annuler (assèchement). Une deuxième phase consiste à prendre en compte les termes de "gradient de fond" (travail en cours), tout en conservant les propriétés du schéma ci-dessus décrit dans le cas des fonds plats, en s'inspirant des travaux décrits dans [GrL96]. Le principe consiste à intégrer la variable côte de fond (qui est supposée être stationnaire) dans la variable d'état du système. Les premiers essais en dimension un d'espace sont encourageants. Une des difficultés du problème est due au fait qu'il faut obtenir une "équivalence discrète" entre les opérateurs associés à :

$$g h \nabla(Z_f + h) \quad (1.1.5)$$

et à :

$$g \nabla\left(\frac{h^2}{2}\right) + g h \nabla(Z_f) \quad (1.1.6)$$

afin de maintenir au repos les plans d'eau ayant une côte de fond inhomogène. L'algorithme a été introduit dans un code bidimensionnel non structuré utilisant un recouvrement du domaine en Volumes Finis. Un autre algorithme

[Her98] utilisant le principe du schéma de Roe adapté au cadre des systèmes n'admettant pas de forme conservative décrit dans {5} semble a priori intéressant dans le cadre unidimensionnel pour les écoulements à section variable sur fond quelconque.

1.2 Equations d'Euler ou de Navier-Stokes compressibles en régime laminaire.

Objectif 1.2.1 :

Le but était de proposer et évaluer des techniques de splitting ou à pas fractionnaires pour la résolution des équations d'Euler non isentropiques (et éventuellement isentropiques), dans une perspective d'aide à la modélisation des écoulements diphasiques conditionnellement hyperboliques (modèles Eulériens à deux fluides).

Principe et résultats :

Pour le système des équations d'Euler ($\mathbf{W}^t = (\rho, \rho U, E)$), qui s'écrit en dimension un en espace, en notant ρ, U, P, E , la densité, la vitesse, la pression et l'énergie totale respectivement :

$$(\rho)_{,t} + (\rho U)_{,x} = 0 \quad (1.2.1)$$

$$(\rho U)_{,t} + (\rho U^2)_{,x} + P_{,x} = 0 \quad (1.2.2)$$

$$(E)_{,t} + (U(E + P))_{,x} = 0 \quad (1.2.3)$$

on peut proposer plusieurs types de décompositions de flux. Les deux décompositions les plus classiques (qui ne sont d'ailleurs pas constantes avec la condition d'entropie - Cf. [ViC91] -), consistent à scinder les flux en espace comme suit:

$$\mathbf{F}_1^t = (\rho U, \rho U^2, U E) \quad ; \quad \mathbf{F}_2^t = (0, P, U P) \quad (1.2.4)$$

ou :

$$\mathbf{G}_1^t = (\rho U, \rho U^2, U(E+P)) \quad ; \quad \mathbf{G}_2^t = (0, P, 0) \quad (1.2.5)$$

La seconde approche est à l'origine des schémas de type AUSM (voir [Lio96], [Lio97]). C'est la première approche qui a été retenue, dans le cadre d'une thermodynamique de gaz parfait ($P=(\gamma-1)(E-\rho U^2/2)$), pour examiner les propriétés pratiques des techniques de splitting d'opérateur dans le cadre des systèmes hyperboliques. Dans le cas particulier des équations d'Euler, et pour la décomposition (1.2.4) qui a été retenue, deux points spécifiques apparaissent. Tout d'abord, le système :

$$(\mathbf{W})_{,t} + (\mathbf{F}_1(\mathbf{W}))_{,x} = 0 \quad (1.2.6)$$

est hyperbolique dégénéré (voir [Bar91], [BBD92], [FLF92]). Dans ce cas, pour définir un schéma numérique, basé sur une technique de décentrement, l'idée de base proposée dans [BBD92] consiste à revenir à un système hyperbolique classique, en perturbant, à l'aide d'un petit paramètre ϵ , le système précédent (1.2.6). On considère alors comme schéma de résolution du système initial (1.2.6), la limite, lorsque ϵ tend vers 0, d'un flux numérique décentré de type Godunov défini sur le système perturbé. On vérifie alors que le schéma résultant permet de préserver discrètement la positivité des variables densité et pression, même dans le cadre multidimensionnel (et des fractions massiques dans le cas plus général d'un système comportant plusieurs composants inertes).

Une deuxième caractéristique de la technique de splitting considérée, est qu'aucun des champs VNL associés au sous-système :

$$(\mathbf{W})_{,t} + (\mathbf{F}_2(\mathbf{W}))_{,x} = 0 \quad (1.2.7)$$

ne peut être stationnaire. Une conséquence pratique intéressante est que le schéma global associé à (1.2.1-3) ne nécessite plus de correction entropique aux points soniques, si l'on considère le schéma de Roe classique ([Roe81]), retenu ici, pour simuler (1.2.7). Il faut noter que le problème de Riemann associé au sous-système (1.2.7) admet une solution qui préserve la positivité des variables densité et pression.

Synthèse et perspectives ([1], [7], (3)) :

Le schéma global de résolution a été testé sur des configurations stationnaires et instationnaires, en dimension un ou deux d'espace (maillage non structuré avec recouvrement du domaine en cellules triangulaires - [Buf93] -). La vitesse de convergence mesurée sur des tests analytiques incluant chocs et détente montre que le schéma global se comporte comme le schéma de Roe classique avec correction entropique, si l'on s'intéresse à une loi d'état de gaz parfait. Le fait de retenir une véritable technique à pas fractionnaires, plutôt qu'une technique de flux-splitting, apporte plus de stabilité (au sens linéaire), mais rend plus délicate la prise en compte des conditions aux limites d'entrée-sortie. La synthèse est globalement très satisfaisante, et des tests similaires réalisés dans le cadre du système des équations d'Euler isentropique ([Com97]) confirment cette tendance. Une extension de la technique WPS (Wave Particle Splitting) utilisée dans le cadre des équations d'Euler a été réalisée pour simuler un système non conservatif issu de la turbulence compressible (modèles à deux équations, voir (3)).

De manière générique, il semble bien sûr essentiel, lorsque l'on utilise ces techniques de splitting pour simuler les systèmes hyperboliques, de satisfaire a priori les critères suivants : préservation de la forme conservative et de l'invariance par rotation, préservation du domaine d'hyperbolicité initial et des états admissibles au sein de chaque sous-système. Cette analyse a permis d'aborder de manière originale le traitement de certains systèmes diphasiques (modèles à deux fluides) conditionnellement hyperboliques (voir paragraphe 3.1). Cette approche a également permis de mettre en oeuvre une technique originale ALE en couplant les approches Volumes Finis et Eléments Finis ([Pot97]).

Objectif 1.2.2 :

Il s'agissait de proposer un schéma simple permettant d'effectuer des simulations numériques sur des maillages de taille industrielle, dans une perspective de modélisation numérique à coût faible des écoulements dans les turbines ou dans les organes de robinetterie, et en retenant une thermodynamique de type "gaz réel".

Principe et résultats :

En retenant les idées principales du schéma VFRoe initialement proposé dans [GaM96], [Mas97], [MFG97], un schéma générique a été proposé dans {3*}. Ce schéma, qui constitue la base du schéma décrit dans le paragraphe 1.1, est un solveur de Riemann approché, où le flux numérique est le flux analytique d'un état numérique représentant une approximation de l'état exact obtenu en résolvant le problème de Riemann associé au système convectif considéré. L'approximation est faite en associant un système hyperbolique linéaire "tangent" au système de convection non linéaire initial. Dans l'approche VFRoenc, la linéarisation est effectuée en considérant préalablement un changement de variables, la matrice de convection étant ensuite "gelée" en un état moyen.

Dans le cas particulier des équations d'Euler rappelées ci-dessus (équations 1.2.1-3), et pour une loi d'état quelconque:

$$e(P, \rho) = (E - \rho U^2/2) / \rho \quad (1.2.8)$$

(e désignant l'énergie interne), la variable considérée est la variable $\mathbf{Y}^t = (\tau, U, P)$, $\tau = 1/\rho$ désignant le volume spécifique. Le système linéaire associé est alors :

$$\tau_{,t} + \bar{U} \tau_{,x} - \bar{\tau} U_{,x} = 0 \quad (1.2.9)$$

$$U_{,t} + \bar{U} U_{,x} + \bar{\tau} P_{,x} = 0 \quad (1.2.10)$$

$$P_{,t} + \bar{U} P_{,x} + \bar{\gamma} \bar{P} U_{,x} = 0 \quad (1.2.11)$$

Les états intermédiaires numériques de vitesse et pression apparaissant dans la résolution du problème de Riemann associé au système linéaire (1.2.9-11) sont invariants à la traversée de la discontinuité de contact numérique. De plus, dans le cas particulier des gaz parfaits, les relations de saut associées à une discontinuité simple de (1.2.9-11) et (1.2.1-3) sont équivalentes (voir à ce propos [12], mais également [DeV94], [SaI97]). Le schéma final d'intégration numérique, décrit ici en dimension un d'espace:

$$h_i (\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n) + \Delta t (\mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{Y}_{i+1/2}^*)) - \mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{Y}_{i-1/2}^*))) = 0 \quad (1.2.12)$$

(Δt et h_i désignant respectivement le pas de temps et le pas d'espace, et $\mathbf{W}_i^n$ la valeur moyenne à l'instant $(n \Delta t)$ de $\mathbf{W}$ sur la cellule i) est évidemment conservatif et consistant par construction. Ce schéma s'étend simplement

en dimension deux ou trois d'espace, et des techniques classiques permettent d'augmenter la vitesse de convergence du schéma de base présenté ici à l'ordre "un" .

Synthèse et perspectives ([12], {3*}) :

Une évaluation du schéma VFRoe en variables non conservatives (τ , U, P) dans un cadre de lois d'état classiques (gaz parfait, loi de Van der Waals), avec comparaison avec des schémas classiques (schéma de Roe, schéma VFRoe, schéma de Godunov) a été effectuée, lorsque cela était réalisable. Cette étude inclut une étude numérique de la vitesse de convergence (cas d'une loi d'état de gaz parfait), qui paraît tout à fait satisfaisante. Le schéma est raisonnablement applicable dans un contexte industriel, pour lequel le recours à des lois d'état complexes analytiques ou même tabulées est nécessaire. Une implémentation a été effectuée dans un tel code utilisant des maillages non structurés de type INRIA, et les performances du schéma restent visiblement inchangées. On s'intéresse actuellement à la mise en oeuvre de conditions aux limites adéquates. L'examen des propositions décrites dans [Dub87], étendues au cadre des gaz réels, paraît clairement intéressante, et la mise en oeuvre pratique semble satisfaisante ({6*}). La définition des conditions aux limites de paroi est réalisée en utilisant la technique classique de l'état miroir, ce qui permet notamment le traitement des parois violemment dépressurisées, cas courant lorsque l'on simule des ouvertures de soupapes de sûreté, les phénomènes transitoires étant dans ce cas particulièrement violents. On constate ici encore que l'utilisation de la solution unidimensionnelle du problème de Riemann associé est essentielle. L'examen de schémas implicites linéarisés est également en cours. Une comparaison avec les techniques introduites dans [Kum95], [GKL96] et [In97] serait souhaitable à court terme. Enfin, on étend actuellement ce schéma au cadre des écoulements turbulents (en utilisant un modèle à deux équations).

1.3 Equations de Navier-Stokes en situation laminaire incompressible.

Objectif 1.3 :

Il s'agissait de proposer une méthode numérique conservative simple et peu coûteuse, permettant de simuler les équations de Navier-Stokes laminares en régime incompressible pur sur maillage non structuré triangulaire en dimension deux d'espace (l'élément tétraédrique correspondant au cas de la dimension trois). Le respect du principe du maximum discret pour les variables "scalaires passifs" était indispensable, et ceci quelle que soit la taille du maillage.

Principe et résultats :

La simulation numérique des équations de Navier-Stokes en situation incompressible :

$$U_{i,i} = 0 \quad (1.3.1)$$

$$(U_i)_{,t} + (U_i U_j)_{,j} + \left(\frac{P}{\rho_0}\right)_{,i} - (v U_i)_{,jj} = 0 \quad (1.3.2)$$

(U, P et v désignant respectivement la vitesse, la pression et la viscosité dynamique) est effectuée en utilisant l'algorithme temporel décrit ci-dessous.

Prédicteur : pour une donnée initiale à l'instant (n Δt) de U et P, on cherche une approximation discrète en temps à l'instant * du champ de vitesse solution de :

$$U_i^* + \Delta t (U_i^* U_j^n)_{,j} - \Delta t (v U_i^*)_{,jj} = U_i^n - \Delta t \left(\frac{P}{\rho_0}\right)_{,i}^n \quad (1.3.3)$$

Correcteur :

$$\begin{aligned} U_{i,i}^{n+1} &= 0 \\ U_i^{n+1} &= U_i^* - \Delta t \left(\frac{\phi}{\rho_0}\right)_{,i}^{n+1} \\ P^{n+1} &= P^n + \phi^{n+1} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

L'équation (1.3.3) est intégrée sur un volume de contrôle triangulaire, et l'on utilise un schéma décentré pour l'estimation des flux convectifs, et un schéma à quatre points pour le calcul des flux diffusifs. L'étape (1.3.4) nécessite une interpolation du champ vitesse normale d'interface, suivie d'une résolution d'une étape elliptique selon ϕ , et d'une reconstruction du champ de vitesse spécifique à l'élément triangulaire, de sorte que la vitesse normale d'interface reste continue aux interfaces. Lorsque des effluents inertes sont convectés, le schéma assure théoriquement le principe du maximum discret sans condition dans le cas convectif pur, et avec une restriction sur le maillage en présence d'effets de diffusion.

Synthèse et perspectives ([3], [Cay97], [BCH98]) :

Les tests récents décrits dans [Cay97] semblent confirmer que l'utilisation du schéma à quatre points analysé dans [Her95], [EGH99], n'est pas limitée en pratique aux maillages triangulaires théoriquement admissibles i.e. respectant la condition d'angle au sommet : $\theta < \pi/2$. Le schéma initial proposé dans [3] peut ainsi être notablement amélioré : interpolation des champs vitesse et pression d'interface, et évaluation des flux diffusifs, dans le cadre de maillages quelconques (incluant le découpage de rectangles en triangles pour les maillages réglés). La perte du principe du maximum discret, dans le cas de maillages non admissibles au sens de [EGH99], serait même en quelque sorte "virtuelle", puisqu'une reconstruction d'ordre deux en espace permettrait de post-traiter la solution discrète au centre de gravité de chaque élément de manière à "rétablir" ce principe du maximum pour les maillages "non-admissibles". Si cette amélioration est confirmée, une extension du schéma au cadre des écoulements diphasiques à deux phases incompressibles est possible, en se basant sur le schéma à pas fractionnaires décrit dans le paragraphe 3.1. Ce travail se poursuit actuellement dans le cadre d'une convention avec l'Université du Québec à Chicoutimi [Cay98].

Partie 2 :
Modélisation mécanique et méthodes numériques
pour la simulation des écoulements turbulents
en régime compressible ou incompressible

2.1 Modèles de turbulence en situation incompressible avec modélisation des équations de transport des tensions de Reynolds.

Objectif 2.1 :

Il y avait à la base deux objectifs distincts dans ce travail.

Tout d'abord, il s'agissait d'examiner les modèles de turbulence faisant appel à une modélisation des termes "inconnus" dans les équations de transport des contraintes de Reynolds, afin d'estimer leur adéquation a priori, en retenant les critères objectifs (et non phénoménologiques) suivants : objectivité [Spe79] et réalisabilité ([DuV77], [Sch75], [Lum78], [Lum83], [Pop85]). Ces critères sont d'autant plus incontournables que l'approche effectuée en parallèle par de nombreux auteurs s'intéressant plus particulièrement à la Simulation Directe des écoulements turbulents ne peut fournir que des grandeurs moyennes satisfaisant intrinsèquement ces différents critères (car il s'agit de reconstructions de moments a posteriori).

Dans un second temps, il s'agissait de proposer, pour des modèles satisfaisant ces critères, des méthodes numériques adéquates permettant la simulation sur maillage non structuré de tels modèles.

Principe et résultats :

La forme générique des modèles statistiques de turbulence incompressible avec modélisation des équations d'évolution des moments d'ordre deux est la suivante (si l'on décompose de manière classique la vitesse instantanée u_i en : $u_i = U_i + u'_i$, et la pression instantanée p selon : $p = P + p'$) :

$$(U_i)_{,i} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$(U_i)_{,t} + (U_i U_j)_{,j} + \frac{1}{\rho_0} (P)_{,i} + (R_{ij})_{,j} - (\nu U_i)_{,jj} = 0 \quad (2.1.2)$$

$$(R_{ij})_{,t} + (R_{ij} U_k)_{,k} + R_{ik} U_{j,k} + R_{jk} U_{i,k} = \Phi_{ij}^s + \Phi_{ij}^r - \frac{2}{3} \left(\frac{\epsilon}{I} \right) \text{trace}(R) \delta_{ij} + (\Phi_{ij}^k)_{,k} \quad (2.1.3)$$

U_i et P désignent la vitesse et la pression moyennes au sens de Reynolds. Le tenseur symétrique semi-défini positif $\mathbf{R}$:

$$R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle \quad (2.1.4)$$

est le tenseur des contraintes au sens de Reynolds. Le taux de dissipation mécanique (ϵ/I), où I représente la trace du tenseur de Reynolds, est en général obtenu par la résolution d'une équation d'évolution du taux de dissipation mécanique, ou par une relation algébrique. Les grandeurs qui doivent faire l'objet d'une modélisation sont, les corrélations "vitesse fluctuante-gradient de pression fluctuante" et le tenseur de dissipation à l'échelle du mouvement fluctuant Φ_{ij}^s , Φ_{ij}^r , ainsi que le tenseur du troisième ordre Φ_{ij}^k . Une analyse des propriétés des modèles les plus simples est effectuée dans [2], [4], [10]. Seul un modèle "lent" extrait de la littérature [Lum78] correspondant au terme Φ_{ij}^s satisfait aux principes de réalisabilité forte et d'objectivité. Quant au terme "rapide" Φ_{ij}^r , les propositions effectuées dans [FLT87] et [ShL85] satisfont le principe de réalisabilité forte, mais pas le principe d'objectivité.

Si l'on se restreint donc au seul modèle admissible ([Lum78]), dont le modèle associé à la partie "rapide" est nul, on peut s'intéresser au système de convection généralisé suivant:

$$(U_i)_{,t} + U_j (U_i)_{,j} + (R_{ij})_{,j} = 0 \quad (2.1.5)$$

$$(R_{ij})_{,t} + U_k (R_{ij})_{,k} + R_{ik} U_{j,k} + R_{jk} U_{i,k} = 0 \quad (2.1.6)$$

qui n'admet pas de forme conservative. Ce système est hyperbolique (non strict) si et seulement si le tenseur des contraintes de Reynolds est effectivement défini positif. On peut même exhiber une solution approchée au

problème de Riemann unidimensionnel associé à (2.1.5-6), si les conditions initiales satisfont le critère de réalisabilité, et si une condition sur l'écart de vitesse normale de part et d'autre de l'interface initial est vérifiée ([4], [10]). Ce résultat est obtenu en considérant la variable (U, R) , et en connectant les états par un chemin linéaire dans les deux champs VNL ([LeF88], [Col92], [LeL92]). Cette solution satisfait au principe de réalisabilité, point qui n'était a priori pas évident. On peut ainsi proposer une technique de simulation du modèle complet en utilisant un schéma analogue à celui décrit dans le paragraphe 1.3, qui utilise pour la phase de prédiction un schéma de convection basé sur l'analyse du système différentiel d'ordre un décrit ci-dessus.

Synthèse et perspectives ([2], [4], [10], (2*), (4)) :

On peut donc proposer une classe de modèles mécaniquement admissibles, pour lesquels les termes modélisés satisfont les principes d'objectivité ([Spe79]) et de réalisabilité. Paradoxalement, il faut noter que ces principes ont fait récemment l'objet de vives polémiques. Il est possible que la mauvaise connaissance de ces systèmes, et (de manière concomitante) la difficulté à simuler ces systèmes, soit en partie à l'origine de cette remise en cause. La composante fortement hyperbolique de ces modèles n'avait pas fait l'objet d'analyses dédiées jusqu'alors, ce qui est assez surprenant puisque les répercussions sur le plan numérique sont évidentes, et que les méthodes numériques associées sont relativement simples à mettre en oeuvre, si l'on se restreint à l'utilisation de solveurs de Riemann approchés. La simulation des modèles admissibles les plus simples ne pose pas de problème a priori, si l'on retient une démarche faisant appel à une technique de splitting d'opérateurs. Cette remarque n'est plus valable dans le cas de certains modèles à matrice convective non diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Le problème devient plus délicat lorsque l'on considère des écoulements à masse volumique variable (mais en évolution très faiblement compressible). L'analyse des effets convectifs montre en effet qu'une modélisation au second ordre des flux de masse turbulents peut vérifier le principe de réalisabilité, mais qu'elle conduit a priori à une perte de principe du maximum pour la variable concentration moyenne, ce qui est évidemment physiquement inadmissible ((4), [10]). Ce point est à rapprocher de l'analyse effectuée dans le cadre des modèles diphasiques bi-fluides (paragraphe 3.1). Seule une modélisation des flux de masse turbulents selon une loi de premier gradient permet de satisfaire au principe du maximum.

2.2 Modèles de turbulence en situation compressible avec modélisation des équations de transport des tensions de Reynolds.

Objectif 2.2 :

Les objectifs sont sensiblement les mêmes que ceux décrits au paragraphe 2.1. Le cadre d'applications mettant en jeu de forts effets de compressibilité conduit naturellement à rechercher la solution du problème de Riemann associé au système convectif associé. Il est de surcroît nécessaire de proposer des algorithmes de simulation utilisant des techniques de décentrement adaptées.

Principe et résultats :

La forme générique des modèles statistiques de turbulence compressible avec modélisation des moments d'ordre deux et regroupement au sens de Favre, est, en omettant les notations classiques " $\bar{\cdot}$ " et " $\tilde{\cdot}$ " (voir pour une introduction consistante [Fav65], [FKD76]):

$$(\rho)_{,t} + (\rho U_i)_{,i} = 0 \quad (2.2.1)$$

$$(\rho U_i)_{,t} + (\rho U_i U_j)_{,j} + (P)_{,i} + (R_{ij})_{,j} + (\Sigma_{ij}^1)_{,j} = 0 \quad (2.2.2)$$

$$(E)_{,t} + (E U_j)_{,j} + (U_i(P \delta_{ij} + R_{ij}))_{,j} + (U_i(\Sigma_{ij}^1))_{,j} = ((\sigma_E^1 + \sigma_E^2) \left(\frac{P}{\rho} \right)_{,j}) + \left(\frac{\Phi_{ij}^k}{2} \right)_{,k} - \langle \langle u_i^{\tilde{\cdot}} \rangle \rangle P_{,i} \quad (2.2.3)$$

$$(R_{ij})_{,t} + (R_{ij} U_k)_{,k} + R_{ik} U_{j,k} + R_{jk} U_{i,k} = \Phi_{ij}^s + \Phi_{ij}^f - \frac{2}{3} \left(\frac{\varepsilon}{I} \right) \text{trace}(R) \delta_{ij} + (\Phi_{ij}^k)_{,k} - \langle \langle u_i^{\tilde{\cdot}} \rangle \rangle P_{,j} - \langle \langle u_j^{\tilde{\cdot}} \rangle \rangle P_{,i} \quad (2.2.4)$$

ρ , Q , P et E désignent la densité moyenne, le débit moyen, la pression moyenne et l'énergie totale moyenne au sens de Reynolds ([Van91][VaH86]). La vitesse moyenne est : $U = Q/\rho$, et n'a de sens qu'en absence de vide au sens moyen. $\mathbf{R}$ désigne le tenseur symétrique semi-défini positif des contraintes au sens de Reynolds :

$$R_{ij} = \langle \rho u_i'' u_j'' \rangle \quad (2.2.5)$$

Le tenseur du second ordre Σ^l correspond à la contribution des contraintes visqueuses moléculaires :

$$\Sigma_{ij}^l = -\mu (U_{i,j} + U_{j,i} - \frac{2}{3} U_{l,l} \delta_{ij}) \quad (2.2.6)$$

Les grandeurs supplémentaires (par rapport au cadre incompressible) qui doivent faire l'objet d'une modélisation sont les vecteurs "flux de masse turbulent" $\langle u''_j \rangle$. On s'est limité jusqu'alors au cas du gaz parfait, ce qui implique qu'au sens de la moyenne statistique considérée, on a :

$$P = (\gamma-1) (E - \frac{\rho U_j U_j}{2} - \frac{1}{2} R_{jj}) \quad (2.2.7)$$

Si $\mathbf{n}$ désigne un vecteur $\mathbf{n}$ de $\mathbb{R}^3$ de norme unitaire, les états physiquement admissibles sont tels que :

$$R_{nn}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n}^t \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} > 0 \quad (2.2.8)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad (2.2.9)$$

$$P(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad (2.2.10)$$

On peut obtenir un modèle complet satisfaisant à l'ensemble des contraintes mécaniques classiques. Si l'on ne souhaite pas négliger les flux de masse turbulents, seul le modèle simple de Ristorelli [Ris90] (tout au moins parmi ceux proposés dans la littérature actuelle) semble admissible pour satisfaire les contraintes sus-citées ([11]). Dans ce cadre, on peut extraire une caractérisation entropique du modèle, qui est par ailleurs tout à fait semblable à celle proposée dans le cadre du paragraphe 2.3. On peut alors examiner le système non visqueux différentiel du premier ordre, qui s'écrit, lorsque l'on s'intéresse au modèle admissible objectif réalisable de Lumley ([Lum78]):

$$(\rho)_{,t} + (\rho U_i)_{,i} = 0 \quad (2.2.11)$$

$$(\rho U_i)_{,t} + (\rho U_i U_j)_{,j} + (P)_{,i} + (R_{ij})_{,j} = 0 \quad (2.2.12)$$

$$(E)_{,t} + (E U_j)_{,j} + (U_i (P \delta_{ij} + R_{ij}))_{,j} = 0 \quad (2.2.13)$$

$$(R_{ij})_{,t} + (R_{ij} U_k)_{,k} + R_{ik} U_{j,k} + R_{jk} U_{i,k} = 0 \quad (2.2.14)$$

Si l'on se restreint au cadre statistiquement bidimensionnel, et si l'on s'intéresse ensuite au système de convection non conservatif unidimensionnel associé, en utilisant l'invariance par rotation, on peut proposer des relations de saut approchées obtenues en connectant les états de part et d'autre d'un choc par un chemin linéaire ([Col92], [DLM95], [LeF88], [LeL92], [Sai95]), en retenant la variable "non conservative" $\mathbf{Y}^t = (\tau, U, V, P, R_{11}, R_{22}, R_{12}, R_{33})$. On peut alors donner la construction de l'unique solution entropique du problème de Riemann unidimensionnel ([13*]) valable pour des sauts d'amplitude faible, qui s'avère respecter le principe de réalisabilité faible. Ce résultat doit impérativement être rapproché de celui décrit dans le paragraphe 2.3, et bien entendu à celui inhérent au cadre des équations d'Euler. Il importe de noter que le système contient deux ondes supplémentaires (Linéairement Dégénérées) par rapport au cadre Euler classique.

Plusieurs solveurs de Riemann peuvent alors être définis, basés sur une forme dégénérée du schéma de Roe adaptée au cadre non conservatif [11], ou sur une forme dégénérée de la formulation VFRoenc adaptée au cadre non conservatif. Markus Uhlmann a parallèlement parfaitement illustré numériquement l'inadéquation des solveurs de Riemann approchés dérivés du cadre des équations d'Euler, lorsque l'on s'intéresse à la simulation de ce type de ces systèmes ([Uhl97]).

Synthèse et perspectives ([11], [13*], (7*)) :

La mise en oeuvre numérique des schémas proposés dans ce cadre est relativement simple, bien que les systèmes soient très complexes. Les solveurs de Riemann approchés adaptés au cadre non conservatif permettent de représenter convenablement les invariants de Riemann associés aux champs linéairement dégénérés. Par contre, les trois discontinuités de contact qui sont contigües nécessitent un raffinement de maillage assez important si

L'on souhaite avoir une représentation convenable des ondes. L'utilisation de solveurs peu coûteux n'en paraît que plus incontournable (schéma VFRoenc adapté au cadre des systèmes en forme non conservative, voir [13*]). Dans un contexte industriel, on peut assez simplement envisager une implication partielle du faisceau d'ondes de manière à augmenter la précision des ondes lentes (trois discontinuités de contact), et la stabilité des ondes rapides simultanément (voir à ce propos [Gal96], [FaH97]). Dans un travail en préparation (7*), on montre que l'utilisation de la caractérisation entropique peut permettre d'obtenir une certaine communauté de techniques de résolution dans le cadre des écoulements compressibles avec modélisation au second ordre ou à l'aide de modèles à deux équations (paragraphe suivant).

2.3 Modèles linéaires ou non linéaires de turbulence en situation compressible à une ou deux équations.

Objectif 2.3 :

Il s'agissait dans un premier temps d'examiner les propriétés des modèles de turbulence compressible à une ou deux équations de transport, puis de proposer des méthodes de résolution numérique de type Volume Finis adaptées au cadre des systèmes considérés, l'objectif étant de ne pas avoir de limitation en terme de nombre de Mach classique ou de nombre de Mach de turbulence.

Principe et résultats :

En retenant ici encore le formalisme de la moyenne au sens de Favre, en conservant les notations ci-dessus pour la densité moyenne, la pression moyenne, la vitesse moyenne, l'énergie totale moyenne, et en introduisant l'énergie cinétique turbulente $K = \langle \rho u_i'' u_i'' \rangle / 2$, et la viscosité turbulente μ_t , le système global considéré s'écrit (voir par exemple [BaB90], [JJH93], [Gol94], [MoP95]) :

$$(\rho)_{,t} + (\rho U_i)_{,i} = 0 \quad (2.3.1)$$

$$(\rho U_i)_{,t} + (\rho U_i U_j)_{,j} + P_{,i} + \frac{2}{3} K_{,i} + (\Sigma_{ij}^l + \Sigma_{ij}^t)_{,j} = 0 \quad (2.3.2)$$

$$(E)_{,t} + (U_j (E + P + \frac{2}{3} K) + U_i (\Sigma_{ij}^l + \Sigma_{ij}^t))_{,j} + (\psi_j)_{,j} = 0 \quad (2.3.3)$$

$$(K)_{,t} + (U_j K + \theta_j)_{,j} + \frac{2}{3} K (U_j)_{,j} = S_K - \rho \epsilon \quad (2.3.4)$$

en introduisant :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{(K/\rho)^2}{\epsilon} \quad (2.3.5)$$

$$\Sigma_{ij}^l = -\mu (U_{i,j} + U_{j,i} - \frac{2}{3} U_{l,l} \delta_{ij}) \quad (2.3.6)$$

$$\Sigma_{ij}^t = -\mu_t (U_{i,j} + U_{j,i} - \frac{2}{3} U_{l,l} \delta_{ij}) \quad (2.3.7)$$

$$S_K = -\Sigma_{ij}^t (U_{j,i} + U_{i,j}) / 2$$

$$\theta_j = -(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K}) (\frac{K}{\rho})_{,j} \quad (2.3.8)$$

$$\psi_j = -(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K}) (\frac{K}{\rho})_{,j} - (\sigma_E^l + \sigma_E^t) (\frac{P}{\rho})_{,j}$$

Dans cette approche, le tenseur de Reynolds $\mathbf{R}$ est modélisé de la manière suivante :

$$R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} = -\mu_t (U_{i,j} + U_{j,i} - \frac{2}{3} U_{l,l} \delta_{ij}) \quad (2.3.9)$$

S_K désigne le terme de "production". Les constantes σ_K , σ_E sont strictement positives. La constante γ est le rapport des chaleurs spécifiques ; μ est la viscosité moléculaire. La fonction C_μ est strictement positive. Une équation supplémentaire donne le taux de dissipation turbulente ϵ . On se focalise ici encore sur une loi d'état de type gaz parfait, la pression moyenne étant donnée par :

$$P = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho U_j U_j - K \right) \quad (2.3.10)$$

Ces modèles à deux pressions (pression moyenne et énergie turbulente) n'admettent pas de forme conservative physiquement admissible. Une caractérisation entropique de ces modèles a été réalisée. La forme naturelle du terme source dans l'inégalité d'entropie rappelle notamment que le taux de dissipation à l'échelle du mouvement fluctuant n'est pas contraint à respecter une condition de positivité, et que le terme de production, qui est proportionnel à l'intensité de la viscosité turbulente, n'est qu'un terme d'échange entre l'énergie cinétique à l'échelle du mouvement moyen ($\rho U_i U_i / 2$), et l'énergie cinétique K à l'échelle du mouvement fluctuant. L'entropie η n'est d'ailleurs pas une fonction strictement convexe de la variable "conservative" $\mathbf{W}$. Le système de convection non conservatif associé :

$$(\rho)_{,t} + (\rho U_i)_{,i} = 0 \quad (2.3.11)$$

$$(\rho U_i)_{,t} + (\rho U_i U_j)_{,j} + P_{,i} + \frac{2}{3} K_{,i} = 0 \quad (2.3.12)$$

$$(E)_{,t} + (U_j (E + P + \frac{2}{3} K))_{,j} = 0 \quad (2.3.13)$$

$$(K)_{,t} + (U_j K)_{,j} + \frac{2}{3} K (U_j)_{,j} = 0 \quad (2.3.14)$$

est (ici encore) inconditionnellement hyperbolique dès lors que les variables pression, densité et énergie cinétique turbulente restent positives. Pour un choix de relations de saut approchées particulier (chemin linéaire en retenant la variable $\mathbf{Y}^t = (\tau, U, P, K)$), on peut ici encore montrer que le problème de Riemann unidimensionnel associé à (2.3.11-14) admet une unique solution entropique dès lors qu'une condition portant sur l'écart de vitesse initial est satisfait. Là encore, la solution respecte la positivité des variables ρ , P et K .

Synthèse et perspectives ([6], (3), (6), (7*), {1}, {2}, {4})

Une analyse partielle des modèles linéaires de turbulence compressible à une ou deux équations a été réalisée dans {1}, [6]. Contrairement aux modèles de turbulence du second ordre (voir ci-dessus), ils conservent une composante parabolique forte liée à la présence d'une viscosité turbulente d'amplitude élevée dans les écoulements cisailés. Cette intensité est d'ailleurs depuis peu partiellement remise en cause, notamment parce que leur caractère prédictif au voisinage des points d'arrêt est assez médiocre. Il ne faut d'ailleurs pas oublier que ces modèles sont issus du contexte de la modélisation des écoulements incompressibles d'une part, et que le calibrage de certaines fonctions ayant de surcroît été effectué dans une configuration d'écoulement particulier, n'a pas vocation à être généralisé.

Une analyse du système convectif sous jacent a permis de proposer et de tester plusieurs méthodes numériques pour la simulation de ces modèles. Tous ces schémas sont issus de "schémas-pères" classiques, et ont été adaptés au cadre des systèmes non conservatifs, sans effectuer de reformulation conservative des équations. Un schéma inspiré du schéma de Godunov a été proposé dans [Lou95], [6], [FHL98]. Un schéma plus simple à mettre en oeuvre, s'inspirant des linéarisées de Roe, a été proposé dans {2}. De même, une adaptation du schéma VFRoenc au cadre des systèmes en forme non conservative semble satisfaisante (6*). Des techniques de splitting peuvent également être mises en oeuvre (3). L'implémentation dans des codes industriels ne pose pas de problème particulier si on se limite au cadre des solveurs de Riemann approchés, et n'est évidemment pas restreinte au cadre des maillages structurés. On renvoie également le lecteur à [Ber98], [BeC98] pour une étude approfondie des travelling waves pour le système de convection diffusion associé au modèle.

Dans un autre volet de ce travail ({4}), il s'agissait de proposer une technique de modélisation algébrique des tensions de Reynolds de manière à satisfaire aux principes d'objectivité et de réalisabilité, ce qui n'est pas le cas des modèles proposés actuellement dans la littérature (Cf. [SSL94], ...). Seule la phase préliminaire de ce travail a été réalisée ; les modèles proposés sont non linéaires selon le tenseur vitesse de déformation moyen. Les axes propres du tenseur de Reynolds modélisé restent néanmoins alignés avec les axes propres du tenseur vitesse de déformation, tout comme dans le cadre des modèles linéaires.

Partie 3 :
Proposition de méthodes numériques
pour la simulation des écoulements diphasiques
en régime compressible et en description Eulérienne

3.1 Modèles à deux fluides comportant une phase compressible

Objectif 3.1 :

Il s'agissait de montrer la faisabilité de simulations d'écoulements instationnaires diphasiques gaz-solide par une approche bi-fluide, en effectuant une mise en oeuvre sur maillage non structuré. Il fallait évaluer également l'adéquation de modèles et de méthodes numériques au cadre des écoulements très denses en particules (allant jusqu'au niveau de compactage maximal), et dans des configurations d'écoulements où les vitesses relatives entre phases peuvent être élevées. Ce travail, qui comportait donc une composante essentiellement numérique au départ, a nécessité de s'interroger sur la pertinence de lois de fermetures concernant la pression intergranulaire.

Principe et résultats :

Une des idées de base concernait l'utilisation de techniques de pas fractionnaires préservant l'espace des états hyperboliques, la conservativité, et l'objectivité des fermetures. En second lieu, au regard du principe du maximum pour la variable taux de présence volumique de phase, il est rapidement apparu qu'il fallait distinguer les écoulements diphasiques gaz-solide où les deux phases étaient supposées être totalement incompressibles (dans ce cas, le principe du maximum est assuré au sens où l'on est assuré d'avoir : $\alpha_k \in [0,1]$), du cas où la phase gazeuse (indexée dorénavant par 1) est compressible. C'est ce second cas qui a servi de base à l'approche synthétisée ici. Il semble à l'heure actuelle que les seuls modèles admissibles au regard de ce principe du maximum soient extraits du contexte des milieux granulaires denses (Cf. [GSG96] par exemple) ; on peut en effet ramener dans un premier temps le problème du mélange diphasique au cadre d'un milieu constitué de particules (sphériques, toutes identiques, indéformables, avec des collisions élastiques), le gaz étant totalement absent ($p_1 = 0$) , et s'intéresser au système d'évolution du milieu supposé continu et géré par (ρ , U , P et e désignant respectivement la densité, la vitesse, la pression et l'énergie interne):

$$\frac{d(1/\rho)}{dt} - \frac{\partial U}{\partial h} = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\frac{dU}{dt} + \frac{\partial P}{\partial h} = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\frac{d(E/m)}{dt} + P \frac{\partial U}{\partial h} = I \quad (3.1.3)$$

et en notant : $\rho \equiv \rho_2 \alpha_2$, (ρ_2 étant constant) , et également :

$$\rho = h_x$$

L'énergie interne est alors définie par : $e = E/m$. Ce système correspond aux équations d'Euler munies d'une loi d'état assez particulière, l'équation d'énergie totale comportant un terme source proportionnel à I . Si on néglige I , et si l'on s'intéresse alors à une configuration de double choc symétrique, associée à une condition initiale (ρ , $U > 0$, P) à gauche de la membrane initiale, et (ρ , $-U < 0$, P) à droite, l'énergie cinétique initiale (à gauche par exemple) peut être prise arbitrairement grande ($> A$) ; elle se transformera en énergie de pression pure sur la caractéristique associée à la position de la membrane initiale. Il importe donc que cette pression ne soit pas bornée selon l'argument ρ . Si l'on réintroduit alors la phase gazeuse, on se trouve alors rapidement en présence de systèmes couplés par des termes d'échange devant faire l'objet de modélisations supplémentaires. On se restreindra ici au cadre de modèles à quatre équations : deux équations de bilan de masse et deux équations de bilan de quantité de mouvement. Pour la phase gazeuse, la loi de pression moyenne au sein de la phase gazeuse est supposée correspondre à une solution polytropique de l'équation d'énergie totale de la phase gazeuse ; $P_1(\rho_1) = K_1 \rho_1^\gamma$. La loi de pression intergranulaire sera prise sous la forme :

$$\Xi(\alpha_2) = \frac{2}{3} \rho_2 K_2 \alpha_2^{5/3} \left\{ 1 + 2 (1+e_c) \alpha_2 \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2^{\max}} \right)^{\frac{5}{2} \alpha_2^{\max}} \right\} \exp \left\{ \frac{4}{3} (1+e_c) \frac{\alpha_2^{\max}}{\frac{5}{2} \alpha_2^{\max} - 1} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2^{\max}} \right)^{1 - \frac{5}{2} \alpha_2^{\max}} \right\} \quad (3.1.4)$$

$\Xi(\alpha_2)$ est une fonction monotone croissante de α_2 . Dans cette loi, e_c désigne le coefficient d'inélasticité ($e_c = 1$ pour un milieu élastique). $\alpha_2^{\max}$ désigne le taux de compactage maximal. Pour les écoulements dilués, cette loi est voisine des lois considérées dans [Sai95].

$$\Xi(\alpha_2) = \frac{2}{3} \rho_2 K_2 \alpha_2^{5/3} \quad (3.1.5)$$

Le système global s'écrit alors (en notant $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$ le taux de présence volumique de la phase gazeuse), $\mathbf{U}^i$ la vitesse moyenne dans la phase i :

$$(\alpha_1 \rho_1)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \mathbf{U}^1) = 0 \quad (3.1.5)$$

$$(\alpha_2 \rho_2)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \mathbf{U}^2) = 0 \quad (3.1.6)$$

$$(\alpha_1 \rho_1 \mathbf{U}^1)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \mathbf{U}^1 \otimes \mathbf{U}^1) + \alpha_1 \nabla P_1(\rho_1) - \alpha_1 \rho_1 \mathbf{g} = \mathbf{I}_1 - \nabla \cdot (\alpha_1 \Sigma_1^{\text{visc}}) \quad (3.1.7)$$

$$(\alpha_2 \rho_2 \mathbf{U}^2)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \mathbf{U}^2 \otimes \mathbf{U}^2) + \alpha_2 \nabla P_1(\rho_1) + \nabla \Xi(\alpha_2) - \alpha_2 \rho_2 \mathbf{g} = -\mathbf{I}_1 - \nabla \cdot (\alpha_2 \Sigma_2^{\text{visc}}) \quad (3.1.8)$$

avec les fermetures suivantes :

$$\Sigma_1^{\text{visc}} = -\mu_1 \left\{ \nabla(\mathbf{U}^1) + \nabla^t(\mathbf{U}^1) - \frac{2}{3} \nabla \cdot (\mathbf{U}^1) \mathbf{I} \right\} \quad (3.1.9)$$

$$\Sigma_2^{\text{visc}} = -\mu_2 \left\{ \nabla(\mathbf{U}^2) + \nabla^t(\mathbf{U}^2) - \frac{2}{3} \nabla \cdot (\mathbf{U}^2) \mathbf{I} \right\} - \lambda_2 \nabla \cdot (\mathbf{U}^2) \mathbf{I} \quad (3.1.10)$$

Les forces extérieures d'accélération de pesanteur sont prises en compte. Le terme de transfert de quantité de mouvement interfacial $\mathbf{I}_1$ (loi de trainée statique) est proportionnel à la vitesse relative:

$$\mathbf{I}_1 = K \alpha_1 \rho_1 (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1) \quad (3.1.11)$$

Le coefficient de trainée K , qui dépend de la norme de la vitesse relative, du diamètre moyen des particules, de la viscosité du gaz, est positif.

On peut donner une caractérisation entropique de ce modèle bi-fluide, mais on ne peut pas résoudre le problème de Riemann associé au système convectif non conservatif, pour deux données initiales arbitrairement distinctes, même si l'on adjoint à ce système des relations de saut approchées. De surcroît, on ne peut simplement interpréter l'inégalité d'entropie, comme on peut le faire par exemple dans le cadre des équations de type Euler. Par contre, celle-ci peut être utilisée numériquement pour différencier les chocs des zones de fortes détente. Si l'on s'intéresse dans un premier temps au système de convection pur (non conservatif) associé au modèle complet, à savoir :

$$(\alpha_1 \rho_1)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \mathbf{U}^1) = 0 \quad (3.1.12)$$

$$(\alpha_2 \rho_2)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \mathbf{U}^2) = 0 \quad (3.1.13)$$

$$(\alpha_1 \rho_1 \mathbf{U}^1)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \mathbf{U}^1 \otimes \mathbf{U}^1) + \alpha_1 \nabla P_1(\rho_1) = 0 \quad (3.1.14)$$

$$(\alpha_2 \rho_2 \mathbf{U}^2)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \mathbf{U}^2 \otimes \mathbf{U}^2) + \alpha_2 \nabla P_1(\rho_1) + \nabla \Xi(\alpha_2) = 0 \quad (3.1.15)$$

on peut donner une expression approchée des valeurs propres de la matrice de convection, en opérant un développement soit par rapport au taux de présence volumique de la phase dispersée, soit par rapport à la vitesse relative. Ceci permet d'envisager la construction de solveurs de Riemann approchés, qui peuvent être utilisés pour le calcul d'écoulements dilués (voir [Sai96] par exemple). L'approche retenue ici est totalement différente, et se rapprocherait plus de celle proposée dans [CEG96] pour aborder le traitement des écoulements de type eau-

vapeur, pour des configurations diluées à denses. Le principe est exposé succinctement ci-dessous. Considérant un état discret à l'instant $(n\Delta t)$, considéré alors comme condition initiale, on cherche dans un premier temps une approximation de la solution du système hyperbolique non dégénéré suivant (sous réserve que l'état vérifie les conditions de positivité $\rho_1 \geq 0$; $\alpha_2 \in [0, \alpha_2^{\max}]$) :

$$(\alpha_1 \rho_1)_{,t} = 0 \quad (3.1.16)$$

$$(\alpha_2 \rho_2)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \mathbf{U}^2) = 0 \quad (3.1.17)$$

$$(\alpha_1 \rho_1 \mathbf{U}^1)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \mathbf{U}^1 \otimes \mathbf{U}^1) = 0 \quad (3.1.18)$$

$$(\alpha_2 \rho_2 \mathbf{U}^2)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \mathbf{U}^2 \otimes \mathbf{U}^2) + \nabla \Xi(\alpha_2) = 0 \quad (3.1.19)$$

Le problème (3.1.16-19) découple partiellement les deux phases ; le problème de Riemann unidimensionnel associé est solvable pour des conditions initiales (presque) arbitraires. Le point fondamental est que le principe du maximum pour le taux de présence volumique est satisfait par la solution du PbR, et que par voie de conséquence, la densité du gaz reste également positive. Il faut noter que ce résultat est dû au choix de la pression intergranulaire particulière (3.1.4). L'état final de cette première étape devient alors la condition initiale pour le second pas. Ce dernier nécessite d'obtenir une approximation numérique du système hyperbolique non conservatif non dégénéré suivant (toujours conditionné par : $\rho_1 \geq 0$; $\alpha_2 \in [0, \alpha_2^{\max}]$) :

$$(\alpha_1 \rho_1)_{,t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \mathbf{U}^1) = 0 \quad (3.1.20)$$

$$(\alpha_2 \rho_2)_{,t} = 0 \quad (3.1.21)$$

$$(\alpha_1 \rho_1 \mathbf{U}^1)_{,t} + \alpha_1 \nabla P_1(\rho_1) = 0 \quad (3.1.22)$$

$$(\alpha_2 \rho_2 \mathbf{U}^2)_{,t} + \alpha_2 \nabla P_1(\rho_1) = 0 \quad (3.1.23)$$

Si l'on retient des relations de saut approchées très simples, le problème de Riemann unidimensionnel associé est ici encore solvable pour des conditions initiales arbitraires réalisables, et la solution est telle que : $\rho_1 \geq 0$; $\alpha_2 \in [0, \alpha_2^{\max}]$. L'algorithme n'est pas restreint au cadre des écoulements où la vitesse relative est faible.

L'implémentation a été effectuée dans un cadre non structuré (Volumes Finis INRIA). Le schéma a été testé dans de très nombreuses configurations unidimensionnelles incluant quatre chocs, quatre détente, deux chocs et deux détente, et le plus souvent dans des configurations très denses en particules. L'inégalité d'entropie discrète permet clairement d'identifier les ondes de choc. La plupart des calculs ont été menés en supposant que les effets de compressibilité de la phase gazeuse étaient non négligeables. Plus récemment, des configurations de lits fluidisés denses ($\{8\}$), faisant intervenir des nombres de Mach (U_1 / c_1) faibles, ont été simulées à l'aide de cet algorithme. Dans ces configurations de calcul (voir [Bas93], [Boe97]), on observe par moment des passages dans des zones non hyperboliques au sein de certaines bulles. L'algorithme utilisé permet de poursuivre naturellement la simulation ; on renvoie à [BeS97] pour un début d'analyse mathématique de cette configuration qui a fait (et fait toujours) l'objet de larges débats.

Synthèse et perspectives ([5], [9], (8)):

Les résultats obtenus dans le cadre des premiers modèles bi-fluides examinés sont intéressants, et répondent aux contraintes industrielles sus-citées. L'approche par pas fractionnaires peut être vue en fait comme un artifice pour générer des schémas consistants possédant une certaine stabilité, dès lors évidemment que l'on utilise des schémas stables dans chaque sous-pas. En particulier, on peut utiliser cette technique pour former un schéma de flux-splitting. Cette approche a été également retenue comme alternative dans [Mas97] pour effectuer des simulations d'écoulements diphasiques pétroliers. Dans ce travail ([Mas97]), cette approche a été comparée à la technique VFRoe appliquée au système complet. De même, il semble important de rappeler qu'une technique à pas fractionnaires a été parallèlement proposée dans [CEG96], [EIA97], pour simuler un modèle bi-fluide non conservatif conditionnellement hyperbolique d'écoulement eau-vapeur. Cette dernière approche permet elle aussi d'obtenir numériquement un principe du maximum discret sur la variable fraction volumique, et ce indépendamment des vitesses relatives dans l'écoulement.

Plusieurs voies de prolongation de ce travail sont engagées. Il s'agit d'une part d'étendre les résultats obtenus au cadre de modèles gaz-solide bi-fluides plus complexes (et comportant notamment une cinquième équation décrivant les évolutions de la pression granulaire, -voir [Boe97], (8*)-) . On s'efforce d'autre part d'étendre

ce type d'algorithme au cadre des écoulements gaz-solide où les effets de compressibilité de la phase gazeuse sont totalement négligeables [Cay98], en se basant sur l'approche décrite ci-dessus (§ 1.3). Enfin, on s'efforce également actuellement de reposer le problème fondamental du respect pour les modèles à deux fluides du principe du maximum pour la variable taux de présence dans le cadre des écoulements eau-vapeur, où les deux phases sont intrinsèquement compressibles. Il semble que l'on puisse ici encore retrouver ce résultat, si l'on s'appuie sur les modèles tels que proposés dans le cadre "pseudo-turbulent" [Sim95].

3.2 Modèles homogènes

Objectif 3.2 :

Il s'agit ici de proposer des méthodes numériques pour effectuer des simulations de modèles diphasiques de type eau-vapeur, en retenant une thermodynamique complexe, mais en négligeant les écarts de vitesse entre phases. Cette hypothèse est a priori assez raisonnable, puisque les applications concernent les écoulements dans les organes de robinetterie, où la phase omniprésente est l'eau sous forme liquide, celle-ci pouvant se vaporiser presque instantanément par dépressurisation rapide (passage brusque de cent bar à une atmosphère par ouverture de vanne). Les tuyauteries sont à section variable en espace, et peuvent même vibrer (section variable en temps). On se restreint dans la présentation au cadre des tuyauteries stationnaires.

Principe et résultats :

Le modèle considéré pour effectuer les simulations est le modèle HRM (Homogeneous Relaxation Model). C'est un modèle à quatre équations (deux équations de bilan de masse, une équation de bilan de quantité de mouvement, une équation de bilan d'énergie totale), qui est a priori bien adapté sur le plan physique, et qui admet une caractérisation entropique classique. Une difficulté est liée au fait que le modèle initialement sous forme conservative, devient non conservatif (équation de quantité de mouvement), car on décrit les évolutions dans la tuyauterie de manière unidimensionnelle (voir le problème classique de la tuyère). Il faut donc pouvoir traiter des solutions avec chocs (stationnaires ou non) dans ce type de configuration. De plus, la thermodynamique devient d'une grande complexité lorsque le fluide passe la courbe de saturation, et le terme de transfert de masse intervient de manière brusque. Le système s'écrit, avec des notations classiques pour les variables densité, vitesse, pression et énergie totale (ρ , U , P , E), et en notant A la section de passage, et x le taux de présence massique de la vapeur :

$$(\rho A)_{,t} + (\rho A U)_{,x} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$(\rho x A)_{,t} + (\rho x A U)_{,x} = \Gamma \quad (3.2.2)$$

$$(\rho A U)_{,t} + (\rho A U^2)_{,x} + A P_{,x} = s \quad (3.2.3)$$

$$(A E)_{,t} + (A U (E + P))_{,x} = r \quad (3.2.4)$$

la loi d'état étant donnée par :

$$E = \rho e(P, \rho, x) + \frac{1}{2} \rho U^2. \quad (3.2.5)$$

La méthode numérique actuellement mise en oeuvre pour discrétiser les termes convectifs fait appel à la technique VFRoe adaptée au cadre non conservatif (voir [Mas97], (6)), en considérant la variable non conservative $\mathbf{Y}^t = (\tau, x, U, P)$. Le système convectif pur s'écrit en effet pour les solutions régulières comme suit :

$$\tau_{,t} + U \tau_{,x} - \tau U_{,x} = \tau U \text{Log}(A)_{,x} \quad (3.2.6)$$

$$x_{,t} + U x_{,x} = 0 \quad (3.2.7)$$

$$U_{,t} + U U_{,x} + \tau P_{,x} = 0 \quad (3.2.8)$$

$$P_{,t} + U P_{,x} + \hat{\gamma} P U_{,x} = -\hat{\gamma} U P \text{Log}(A)_{,x} \quad (3.2.9)$$

On note en particulier que le principe du maximum pour la fraction massique est respecté par les états intermédiaires du solveur Volumes-Finis VFRoe. La discrétisation des sections est effectuée sur le maillage centré sur les interfaces des volumes de contrôle portant la variable physique $\mathbf{W}^t = (\rho, \rho x, \rho U, E)$. L'intégration des

termes sources est faite de manière implicite sur deux demi-pas de temps, et permet de préserver la positivité des fractions x et $(1-x)$. Une seconde technique de prise en compte des termes sources proposée dans la littérature et qui ne fait pas appel à la technique de pas fractionnaires ne semble pas à l'heure actuelle donner de meilleurs résultats. Ceci s'explique par le fait que le pas de temps associé à la condition CFL est plus faible que l'échelle de temps θ qui intervient dans la définition du transfert de masse Γ .

Synthèse et perspectives ([14*], {5}, {6*}, (5*)):

La méthode numérique instationnaire semble se comporter très correctement, dans le cadre monophasique pur (calcul en eau, ou en gaz -vapeur d'eau), ou lors des apparitions de "flash". L'extension au cadre des tuyauteries vibrantes se fait très naturellement en considérant un pas fractionnaire entropique, qui préserve de surcroît la positivité des différentes grandeurs thermodynamiques. Parallèlement, ce modèle est en cours d'implantation dans un code de calcul bidimensionnel avec recouvrement en Volumes Finis non structurés. Ceci va permettre de comparer les résultats de l'approche monodimensionnelle en moyenne, et bidimensionnelle.

Les applications industrielles de ce type de modèle sont nombreuses, et d'une grande importance pour les concepteurs de vannes et soupapes. L'effort doit néanmoins porter sur l'amélioration des modèles de transfert de masse.

Un second aspect, qui concerne les modèles homogènes dans le cadre des écoulements diphasiques gaz-solide a été abordé dans (5*) et {5}.

Articles

- [1] Buffard T., Hérard J.M. "A conservative splitting scheme to solve Euler equations on unstructured meshes" *C.R.A.S. Paris*, II-316, pp. 575-582, (1993).
- [2] Hérard J.M. "Basic analysis of some second moment closures". Part I : incompressible isothermal turbulent flows" *Theor. Comp. Fluid Dynamics*, vol. 6, n°4, pp. 213-233 (1994)
- [3] Boivin S., Hérard J.M. "Un schéma de type Volumes Finis pour résoudre les équations de Navier-Stokes sur une triangulation" *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 5, N° 4, pp. 461-490 (1996)
- [4] Hérard J.M. "Realisable non degenerate second moment closures for incompressible turbulent flows" *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.322, IIb, pp. 371-377, (1996).
- [5] Combe L., Hérard J.M. "Un schéma Volumes Finis pour la simulation d'un modèle bi-fluide d'écoulements diphasiques compressibles gaz-solide" *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 6, N° 2, pp. 197-231 (1997)
- [6] Forestier A., Hérard J.M., Louis X. "A Godunov type solver to compute turbulent compressible flows" *C.R.A.S. Paris*, I-324, pp. 919-926 (1997).
- [7] Buffard T., Hérard J.M. "A fractional step method to solve non isentropic Euler equations " *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 144, pp. 199-225 (1997)
- [8] Buffard T., Gallouet T., Hérard J.M. "Un schéma simple pour les équations de Saint-Venant" *C.R.A.S. Paris*, I-326, pp. 385-390, (1998).
- [9] Combe L., Hérard J.M. "A finite volume algorithm to compute dense compressible gas-solid flows" à paraître dans *AIAA Journal* (Vol. 37, n°2, 1999)
- [10] Hérard J.M. "Basic analysis of some second moment closures. Part II : incompressible turbulent flows including buoyant effects" *en préparation*
- [11] Brun G., Hérard J.M., Jeandel D., Uhlmann M. "An approximate Riemann solver for second-moment closures" *version révisée acceptée pour publication à J. Computational Physics* (1998).
- [12] Buffard T., Gallouet T., Hérard J.M. "A sequel to a rough Godunov scheme. Application to real gases" *version révisée soumise à Computers and Fluids*
- [13*] Berthon C., Coquel F., Hérard J.M., Uhlmann M. "An approximate solution of the Riemann problem for a realisable second-moment turbulent closure" *soumis a publication (également HE-41/98/054/A)*.
- [14*] Barret M., Faucher E., Hérard J.M., Toulemonde C. "Computation of flashing flows in variable cross section ducts" *en cours de soumission (également HE-41/98/040/A)*.

Rapports internes non publiés :

- {1} Forestier A., Hérard J.M., Louis X. "A non strictly hyperbolic system to describe compressible turbulence" rapport EDF HE-41/94/011A, également *Coll. Notes internes DER 95NB00003*, (1994)
- {2} Hérard J.M. " Solveur approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible" rapport EDF HE-41/95/009/A, (1995)
- {3*} Buffard T., Gallouet T., Hérard J.M. "Schéma VFRoe en variables caractéristiques. Principe de base et applications aux gaz réels" rapport interne EDF HE-41/96/041/A, (1996)
- {4} Hérard J.M. " Modèles de turbulence compressible non linéaires à deux équations. Formulation objective réalisable" rapport interne EDF HE-41/95/050/A, (1996)
- {5} Combe L., Hérard J.M. "Principe du maximum pour un modèle diphasique gaz-solide à trois équations" rapport EDF HE-41/96/045/A (1996)
- {6*} Hérard J.M. " Modélisation d'écoulements instationnaires en robinetterie. Propositions et tests de méthodes numériques" rapport interne EDF/DER (*en préparation*)

Articles de congrès à comité de lecture :

- (1*) Hérard J.M. " A fractional step method to investigate gas-solid flows" *ASME FED*, vol. 196, pp. 187-196 (1994)
- (2*) Hérard J.M. "Suitable algorithms to preserve the realisability of Reynolds stress closures " *ASME FED*, vol. 215, pp. 73-80 (1995).
- (3) Buffard T., Hérard J.M. "Two approximate Riemann solvers to compute turbulent compressible one and two-equation models" " *ASME FED*, vol. 238, pp. 189-196 (1996).
- (4) Hérard J.M. "Second-order modelling of incompressible turbulent buoyant flows : some comments on the maximum principle" selected papers from IUTAM Symposium on Variable density low speed turbulent flows. Kluwer Academic Publisher (1997)
- (5*) Combe L., Hérard J.M. "Computation of two-phase flows on unstructured meshes" proc. de la 10th Int. Conference on Numerical Methods for Laminar and Turbulent Flows, rapport EDF HE-41/97/043A (1997)
- (6) Buffard T., Gallouet T., Hérard J.M. "A naive scheme to compute a non conservative hyperbolic system" (proceedings of HYP98, ETH Zurich, 9-13 février 1998), rapport EDF HE-41/98/011A (1998).

- (7*) **Hérard J.M.** "Entropy consistent splitting algorithms for some turbulent compressible flows" AIAA paper 98-2650, proceedings de la 29eme AIAA Fluid Dynamics Conference (Albuquerque, New Mexico, USA - 15-18 juin 1998)
- (8*) **Combe L., Hérard J.M.** "On the maximum principle for some gas-solid flows" Proceedings of ICMF'98, Lyon France, 8-12 juin 1998.
- (9*) **Buffard T., Gallouet T., Hérard J.M.** " A rough Godunov scheme to compute turbulent real gas flow models " en préparation.

Bibliographie

- [BaS93] Balzer G., Simonin O. "Extension of Eulerian gas-solid flow modelling to dense fluidized bed prediction" Proc. of 5th Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Paris, 7-10 september (1993).
- [BaB90] Baldwin, B.S., Barth, T.J. "A one equation turbulence transport model for high Reynolds number wall- bounded flows", NASA TM 102847, (1990)
- [Bar91] Baraille R. , thèse de doctorat, Université de Bordeaux I (1991)
- [BBD92] Baraille R., Bourdin G., Dubois F., Leroux A.Y. "Une version à pas fractionnaires du schéma de Godunov pour l'hydrodynamique" C.R.A.S Paris, I-314, pp. 147-152 (1992)
- [BMO94] Baranger J, Maitre J.F., Oudin F. "Application de la théorie des éléments finis mixtes à l'étude d'une classe de schémas aux volumes différences finis pour les problèmes elliptiques" C.R.A.S Paris, I-319, pp. 401-404 (1994)
- [BMO96] Baranger J, Maitre J.F., Oudin F. "Connection between Finite Volume and mixed Finite Element methods" Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, vol. 30, n°4, pp. 445-465 (1996)
- [BeS97] Bedjaoui N., Sainsaulieu L. "Analysis of a non hyperbolic system modelling two-phase flows. Part 1 : the effects of diffusion and relaxation" MMAS, vol. 20, n° 9 (1997)
- [BeV94] Bermudez A., Vazquez M.E. "Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms" Computers and Fluids, vol. 23, n°8, pp. 1049-1071 (1994)
- [Ber98] Berthon C. , thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris (en préparation)
- [BeC98] Berthon C., Coquel F. "Travelling waves solutions of a convective-diffusive system with first and second-order terms in non-conservative form" 7th Int. Conf. for hyperbolic systems. Theory, numerics and applications. Zürich , ETH, 9-13 février 1998 (1998)
- [Boe97] Boelle A. , thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris (1997)
- [BCH98] Boivin S., Cayré F., Hérard J.M. "Un schéma Volumes Finis pour la simulation des équations de Navier Stokes sur maillage non structuré", en préparation
- [BoH96] Botta N., Hempel D. "A Finite Volume projection method for the numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations on triangular grids" Finite Volumes for Complex Applications, pp. 355-363 (1996)
- [Buf93] Buffard T., thèse de doctorat, Université Paris VI, (1993)
- [BGH97] Buffard T., Gallouet T., Hérard J.M. "Quelques applications du schéma VFRoe en variables non conservatives" Séminaire sur les "Méthodes numériques avancées pour la mécanique des fluides", ENS de Cachan (1997)
- [BuS95] Burman E., Sainsaulieu L. "Numerical analysis of two operator splitting methods for an hyperbolic system of conservation laws with stiff relaxation terms" Comp. Methods in Applied Mechanics and Eng., Vol. 128, pp. 291-314, (1995).
- [Cay97] Cayré F. "Schémas Volumes Finis pour un problème elliptique sur maillage triangulaire. Etude numérique de convergence" rapport EDF HE-41/97/057/A, (1997)
- [Cay98] Cayré F. , annexe technique au contrat CERD de l'UQAC (1998)
- [ChG92] Champier S., Gallouet T. "Convergence d'un schéma décentré amont sur maillage triangulaire pour un problème hyperbolique linéaire" MMAN, vol. 26(7) , pp. 835-853 (1992)
- [CGH92] Champier S., Gallouet T., Herbin R. "Convergence of an upstream Finite Volume scheme on a triangular mesh for a non linear hyperbolic equation" Numer. Math. , vol. 66, pp. 139-157 (1993)
- [Col92] Colombeau J.F. "Multiplication of distributions" Springer-Verlag (1992).
- [CEG96] Coquel F., El Amine K., Godlewski G., Perthame B., Rascle P. "Numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows" Publications du LAN de l'Université Paris VI, R96014 (1996)
- [Com97] Combe L., thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, (27 / 10 / 1997)
- [DLM95] Dal Maso G., Le Floch P.G., Murat F. "Definition and weak stability of non conservative products" J. Math. Pures Appl., vol. 74, pp. 483-548 (1995).
- [DeV94] De Vuyst F. thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris (1994)
- [Dub87] Dubois F. "Boundary conditions and the Osher scheme for the Euler equations of gas dynamics", rapport CMAP 170 (1987)
- [DuV77] Du Vachat R. "Realizability inequalities in turbulent flows" Physics of Fluids, vol. 20, n°4, pp. 551-556 (1977)
- [EMR91] Einfeldt B., Munz C.D., Roe P.L., Sjogreen B. "On Godunov type methods near low densities" J.C.P., vol 92 (1991)
- [ElA97] El Amine K. PhD thesis, Université Paris VI, Paris (1997)
- [EsV96] Estivalezes J.L., Villedieu P. "High order positivity-preserving kinetic schemes for the compressible Euler equations" SIAM J. Num. Anal., vol. 33, n°5, pp. 2050-2067, (1996).
- [EGH99] Eymard R., Gallouet T., Herbin R. "Finite Volume methods" Handbook for numerical analysis, P.G. Ciarlet and P.L. Lions editors, (1999).
- [Fab93] Fabre J. "Ecoulements polyphasiques" Cours de l'ENSEEIH (1993)

- [Fai91] **Faïlle I.** thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, 1992.
- [Fai92] **Faïlle I.** "A control volume method to solve an elliptic equation on a two-dimensional irregular mesh" *Comp. Methods in Applied Mechanics and Eng.*, vol. 100, pp. 275-290 (1992)
- [FaH97] **Faïlle I., Heintzé F.** "A rough Finite Volume scheme for modelling two-phase flow in a pipeline" soumis à publication (1997)
- [Fav65] **Favre A.** "Equations des gaz turbulents compressibles" *Jour. Mec.*, vol. 4, pp. 391-421 (1965)
- [FKD76] **Favre A., Kovasnay S.G., Dumas R., Gaviglio J., Coantic M.** "La turbulence en Mécanique des Fluides" Gautier-Vilars (1976)
- [FHL98] **Forestier A., Hérard J.M., Louis X., Xeuxet E.** "A Godunov type Riemann solver to compute two-equation turbulent compressible models", en préparation.
- [FLF92] **Forestier A., Le Floch P.** "Multivalued solutions to some non-linear and non strictly hyperbolic systems" *Jap. J. of Ind. and Applied Mathematics*, vol. 9, pp.1-23 (1992)
- [FLT87] **Fu S., Launder B., Tselepidakis D.P.** , "Accommodating the effect of high strain rates in modelling the pressure strain correlations" *UMIST Mech. Eng. Dept. TDF 87/5* (1987)
- [Gal92] **Gallouet T.** "An introduction to Finite-Volume methods" *Cours CEA/EDF/INRIA* (1992)
- [Gal97] **Gallouet T.** "Rough schemes for complex hyperbolic systems" *Finite Volumes for complex applications*, ed. Hermès, pp. 5-14 (1996)
- [GaM96] **Gallouet T., Masella J.M.** "A rough Godunov scheme" *C.R.A.S Paris*, I-323, pp. 77-84 (1996).
- [GKL96] **Ghidaglia J.M., Kumbaro A., Le Coq G.** "Une approche Volumes Finis à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation" *C.R.A.S Paris*, I-322, pp. 981-988 (1996).
- [Gid94] **Gidaspow D.** "Multiphase flow and fluidization" Academic Press, (1994)
- [God59] **Godunov S.K.** "A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics" *Math Sb.*, Vol. 47, pp. 217-300 (1959)
- [Gol94] **Goldberg U.C.** "Towards a pointwise turbulence model for wall-bounded and free shear flows", *ASME FED* vol 184, pp. 113-118 (1994).
- [GSG96] **Goldstein A., Shapiro M., Gutfinger G.** "Mechanics of collisional motion of granular materials" *J.F.M.* , vol. 316, pp. 29-51 (1996)
- [GoM97] **Goutal N., Maurel F.** "Proceedings of the 2nd Workshop on dam-break wave simulation" note EDF HE-43/97/016/A, (1997).
- [GrL96] **Greenberg J.M., Leroux A.Y.** "A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations" *S.I.A.M. J. Num. Anal.* vol 33, n° 1, pp. 1-16, 1996.
- [Her95] **Herbin R.** "An error estimate for a Finite-Volume scheme for a diffusion-convection problem on a triangular mesh" *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol 11, pp. 165-173 (1995)
- [Her98] **Hérard J.M.** "Schéma de Roe non conservatif. Application au cadre des équations de Saint Venant unidimensionnelles en section variable avec gradient de fond" note interne EDF/DER en préparation.
- [IN97] **In A.** "Numerical evaluation of an energy relaxation method for inviscid real fluids" soumis à *SIAM Journal of Scientific Computing* (1997)
- [JJH93] **Jansen K., Johan Z., Hughes T.J.R** "Implementation of a one-equation turbulence model within a stabilized finite element formulation of a symmetric advective-diffusive system" *Comp. Methods in Applied Mechanics and Eng.*, vol. 105, pp. 405-433 (1993)
- [Kum93] **Kumbaro A.** , thèse de doctorat, Université Paris VI (1993)
- [Kum95] **Kumbaro A.** "Schéma Volume Fini à flux caractéristique. Implémentation, tests et résultats numériques" rapport EDF HT-30/95/017/A (1995)
- [Lax73] **Lax P.D.** "Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves" *SIAM Regional Conference Series in Applied Mathematics*, vol. 11, (1973)
- [LeF88] **Le Floch P.** "Entropy weak solutions to non linear hyperbolic systems in non conservative form" *Comm. in Part. Diff. Eq.*13(6), pp. 669-727, (1988)
- [LeL92] **Le Floch P., Liu T. P.** "Existence theory for non linear hyperbolic systems in non conservative form" rapport CMAP 254 (1992)
- [Lew93] **Lewandowski R.** "Modèles de turbulence et équations paraboliques" *C.R.A.S* I-317, pp. 835-840 (1993)
- [Lew94] **Lewandowski R.** "Les équations de Stokes et Navier-Stokes couplées avec l'équation de l'énergie cinétique turbulente" *C.R.A.S* I-318, pp. 1097-1102 (1994)
- [Lio96] **Liou M.** "A sequel to AUSM : AUSM+" *J.C.P.* , vol. 129, n°2, pp. 364-382 (1996)
- [Lio97] **Liou M.** "Probing numerical fluxes : mass flux, positivity, entropy-satisfying property" *AIAA paper* 97-2035 (1997)
- [Lou95] **Louis X.** , thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris, France (08/07/1995)
- [Lum78] **Lumley J.L.** "Computational modelling of turbulent flows" *Advances in Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 123-176 (1978)
- [Lum83] **Lumley J.L.** "Turbulence modelling" *J. of Applied Mechanics*, vol. 50, pp. 1097-1103 (1983)
- [Mas97] **Masella J.M.** , thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris, France (29/05/1997)

- [MFG97] Masella J.M., Faille I, Gallouet T. "On a rough Godunov scheme" a paraitre dans International Journal of Computational Fluid Dynamics (1998)
- [MoP95] Mohamadi B., Pironeau O. "Analysis of the K- ϵ turbulence model" Masson- Wiley (1994)
- [PaU96] Page A, Uhlmann M. "Traitement de la partie hyperbolique du système des équations de Navier-Stokes moyennées et des équations de transport issues d'une fermeture au premier ordre pour un fluide compressible " internal report of Ecole Centrale de Lyon (1996)
- [PeS96] Perthame B., Shu C. "On positive preserving Finite Volume schemes for compressible Euler equations" Numer. Math. vol. 73, pp. 119-130 (1996)
- [Pop85] Pope S.B. " PDF methods for turbulent reactive flows " Prog. Energy Combust Sci., vol. 11, pp. 119-192 (1985)
- [Pot97] Potapov S., thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris (08/10/1997)
- [Ris90] Ristorcelli J. "A representation for the turbulent massflux contribution to Reynolds stress and two-equation closures for compressible turbulence" technical report 93-88, NASA ICASE (1993)
- [Roe81] Roe P.L. "Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes" J. Comp. Physics , vol 43 (1981)
- [Sai91] Sainsaulieu L. "Ondes progressives solutions de systèmes convectifs diffusifs et systèmes hyperboliques non conservatifs" CRAS Paris I-312., pp. 491-494 (1991).
- [Sai95] Sainsaulieu L. Thèse d'habilitation, Université Paris VI, Paris, France (20/01/1995).
- [Sai96] Sainsaulieu L. "Finite-Volume approximation of two phase-fluid flows based on an approximate Roe-type Riemann solver" J. C.P. , vol. 121, pp. 1-28 (1995)
- [SaI97] Sallas M.D., Iollo A. "Entropy jump across an inviscid shock wave" Theoretical and Computational Fluid Dynamics, vol 8, n°5, pp. 365-375 (1997)
- [SFV97] Saurel R., Forestier A., Veyret D., Loraud J.C. "A finite volume scheme for two-phase compressible flows" Int. J. for Num. Methods in Fluids , vol. 18, pp. 803-819 (1994)
- [Sch77] Schumann. V "Realisability of Reynolds stress turbulence models" Physics of Fluids, vol. 20, n°5, pp. 721-725 (1977)
- [ShL85] Shih T.S., Lumley J.L. " Modelling of pressure correlation terms in Reynolds stress and scalar flux equations" Cornell University report FDA 85-3 (1985)
- [SSL94] Shih T., Shabbir A., Lumley J.L. "Realisability in second moment turbulence closures revisited" NASA Technical Memorandum 106469 (1994)
- [Sim95] Simonin O. "Modélisation numérique des écoulements turbulents diphasiques à inclusions dispersées" Ecole de Printemps de Mécanique des Fluides Numérique, Carcans-Maubuisson (1995)
- [Smo83] Smoller J. "Shock waves and reaction-diffusion equations" Springer-Verlag (1983)
- [Spe79] Speziale C.G. " Invariance of turbulent closure models" Physics of Fluids A, vol. 22, n° 6, pp. 1033-1037 (1979)
- [Tor96] Toro E.F. "Riemann solvers and numerical methods for Fluid Dynamics" Springer (1997)
- [ToK96] Toumi I., Kumbaro A. "An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model" J.C.P. , vol. 124, pp. 286-300 (1996)
- [Uhl97] Uhlmann M., thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France (17/04/1997).
- [Van91] Vandromme D. "Turbulence modelling for compressible flows and implementation in Navier-Stokes solvers" Lecture series, Von Karman Institute for fluid dynamics (1991)
- [VaH86] Vandromme D., Ha Minh H. "About the coupling of turbulence closure models with averaged Navier-Stokes equations" J. Comp. Physics , vol 65, n° 2, pp. 386-409 (1986)
- [Vaz96] Vazquez M.E. "An efficient upwind scheme with finite volume of the edge type for the bidimensional shallow water equations" Finite Volumes for Complex Applications, Hermès , ed. F. Benkhaldoun and R. Vilsmeier, pp. 605-612 (1996)
- [ViC91] Vila J.P., Chalabi A. "Operator splitting, fractional step method and entropy condition" Third Int. Conf. on Hyperbolic Problems, Upssala , Sweden (1990)