



**HAL**  
open science

# Simulation directe 3-D de la propagation non-linéaire des ondes acoustiques dans l'atmosphère terrestre.

Roberto Sabatini

► **To cite this version:**

Roberto Sabatini. Simulation directe 3-D de la propagation non-linéaire des ondes acoustiques dans l'atmosphère terrestre.. Autre. Université de Lyon, 2017. Français. NNT : 2017LYSEC004 . tel-01625079

**HAL Id: tel-01625079**

**<https://theses.hal.science/tel-01625079v1>**

Submitted on 27 Oct 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

préparée à

**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

pour obtenir

**le grade de DOCTEUR de l'Université de Lyon**  
**SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE**

présentée par

Roberto SABATINI

---

## **Simulation directe 3-D de la propagation non linéaire des ondes acoustiques dans l'atmosphère terrestre**

---

Soutenue le 30 janvier 2017 devant le jury

Christophe BAILLY, Professeur des Universités, École Centrale de Lyon, Directeur de thèse

Yann DOUTRELEAU, Ingénieur en chef de l'armement, DGA, Examineur

Olaf GAINVILLE, Ingénieur de recherche CEA, Arpajon, Co-encadrant de thèse

Catherine de GROOT-HEDLIN, Researcher, University of California, San Diego, USA, Rapporteur

Dominique HABAULT, Directrice de recherche CNRS, LMA, Marseille, Examineur

Régis MARCHIANO, Professeur des Universités, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, Rapporteur

Olivier MARSDEN, Ingénieur de recherche ECMWF, Reading, UK, Codirecteur de thèse

École Doctorale de Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique (MEGA, ED-162)

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509, École Centrale de Lyon

Département Analyse et Surveillance de l'Environnement CEA/DAM/DIF



# Remerciements

Ce travail de thèse, qui a débuté en novembre 2013, s'est déroulé au Centre Acoustique du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA), situé sur le campus de l'École Centrale de Lyon (ECL), et au Département Analyse et Surveillance de l'Environnement (DASE) au sein du Laboratoire de Détection et de Géophysique (LDG) du Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies alternatives (CEA). Il a été financé par le CEA et par la Direction Générale de l'Armement (DGA).

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Christophe Bailly, pour la qualité de son encadrement, pour ses enseignements, pour son soutien quotidien et pour sa grande disponibilité depuis mon stage de deuxième année à l'ECL. Je souhaite exprimer toute ma gratitude à mon codirecteur de thèse, Olivier Marsden, pour son implication, sa patience infinie et son aide précieuse. Je suis très reconnaissant à mon encadrant de thèse au CEA, Olaf Gainville, de m'avoir transmis ses connaissances et apporté ses critiques et ses observations.

Je remercie vivement Régis Marchiano et Catherine de Groot-Hedlin, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, ainsi que Dominique Habault et Yann Doutreleau, qui ont accepté d'être membres du jury.

Mes remerciements vont aussi à Pierre-Frank Piserchia, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe au CEA, à Ludovic Aubry, pour sa grande disponibilité et son aide informatique, à Nicolas Lardjane pour ses conseils précieux, et à Jean-Philippe Braeunig, Jean-Marc Guérin et Yves Cansi pour la relecture de ce manuscrit.

J'associe également à ces remerciements Christophe Bogey, pour ses conseils, son soutien et ses beignets délicieux.

Je remercie très chaleureusement l'ensemble du personnel du Centre Acoustique et du J12, avec une pensée particulière pour Marie-Gabrielle Perriaux et Dominique Berthet, et les doctorants, postdoctorants et stagiaires que j'ai côtoyés durant ces années de thèse : Ababacar, Annabelle, Bertrand, Cyril, Fei, Gherardo, Lu, Marion, Pierre, Romain et Xu.

Je voudrais exprimer ma gratitude à mes amis de la maison Savane à Bretigny-sur-Orge : Atou, Julien, Marie, Édouard, Stapley. L'ambiance détendue et sympathique qu'ils ont créée a grandement contribué à la réussite de ma thèse. Julien, Marie et Atou méritent un deuxième tour de remerciements : Julien pour m'avoir tenu la main au CEA ; Marie pour son soutien ; Atou pour ses blagues, son affection et sa religion.

Je suis très reconnaissant à Lisa d'avoir courageusement accepté de relire ce manuscrit.

Je remercie enfin Jinjing qui m'a accompagné, soutenu et supporté dans les moments les plus difficiles.

*Les présents résultats ont été obtenus dans le cadre du laboratoire de recherche conventionné LETMA (Laboratoire Étude et Modélisation Acoustique) entre le CEA, le CNRS, l'Ecole Centrale de Lyon, C-Innov et l'Université Pierre et Marie Curie.*



# Résumé

Les infrasons sont des ondes acoustiques de fréquence inférieure à environ 20 Hz qui sont produits par une grande variété de sources naturelles (éruptions volcaniques, séismes, etc.) ou artificielles (explosions chimiques, avions, tirs de mine, etc.). Ils peuvent se propager dans l'atmosphère terrestre jusqu'à de très grandes distances, de quelques centaines à plusieurs milliers de kilomètres, et transportent des informations importantes concernant leur source. Pour cette raison, la mesure des ondes infrasonores représente aujourd'hui l'une des principales techniques utilisées dans le cadre du Traité d'interdiction complète des essais nucléaires (TICE) pour la détection, la localisation et l'identification de sources.

La modélisation de la propagation atmosphérique des infrasons a été classiquement réalisée par des approximations géométriques, comme le tracé de rayons, ou par la résolution d'équations paraboliques. Grâce à un coût de calcul raisonnable, allant de quelques secondes à une heure, ces approches sont largement employées dans le domaine opérationnel. Leur efficacité est néanmoins obtenue au détriment de la complexité physique de la propagation atmosphérique. Les avancées récentes de la simulation numérique directe en aéroacoustique rendent cependant envisageable la résolution directe des équations de Navier-Stokes instationnaires et compressibles, permettant ainsi de décrire sans approximation la propagation infrasonore.

Dans cette thèse, trois objectifs principaux ont été poursuivis. En utilisant une méthode de tracé de rayons, une caractérisation des effets non linéaires, visqueux, thermiques et de relaxation sur les ondes infrasonores produites par des sources explosives a d'abord été effectuée. La propagation non linéaire des signaux infrasonores dans l'atmosphère terrestre a ensuite été examinée à l'aide de simulations tridimensionnelles directes des équations de Navier-Stokes instationnaires et compressibles. Des sources de très grande amplitude et de fréquence de l'ordre de 0.1 Hz ont été considérées. Les calculs ont été menés jusqu'à des distances de propagation de plusieurs centaines de kilomètres et jusqu'à des altitudes de l'ordre de 140 km. Une étude détaillée de la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère a été effectuée. Une première analyse de la pénétration en zone d'ombre provoquée par des phénomènes de diffraction au niveau des caustiques a également été réalisée. Enfin, des cas tests bidimensionnels ont été formulés et des solutions de référence ont été déterminées afin de permettre la validation numérique de codes de calcul et l'évaluation des erreurs commises par les approximations usuelles.

# Abstract

Infrasounds are acoustic signals of frequency lower than about 20 Hz. They are generated by a large variety of natural events, such as volcanic eruptions or earthquakes, and by artificial sources, like nuclear or chemical explosions and supersonic booms. Infrasonic waves can propagate through the different atmospheric layers up to very large distances, from few hundreds to thousands of kilometres, and can potentially carry relevant information about their source. For this reason, within the framework of the Comprehensive Nuclear-Test-Ban Treaty (CTBT), infrasound recordings are widely employed to monitor clandestine nuclear tests.

Infrasound modelling has classically been based on simplified equations. Ray tracing and parabolic models have been the most commonly used techniques. Their efficiency in terms of computational cost is however obtained at the expense of generality and some of the main phenomena affecting infrasound propagation are inherently excluded by these methods. Over the past decade, progress has been made towards the simulation of acoustic propagation by directly solving the fluid dynamics equations. Understandably, this approach is expected to allow a finer description of atmospheric propagation and to lead to a better interpretation of experimental observations.

In the present thesis, three main objectives have been achieved. First of all, using ray theory, a characterization of nonlinear effects and absorption induced by thermo-viscous and vibrational relaxation phenomena on the propagation of infrasonic signals generated by explosive sources has been carried out. Direct numerical simulations of the three-dimensional unsteady compressible Navier-Stokes equations have been then performed to calculate the sound field generated by an infrasonic source in a realistic atmosphere. Computations have been carried out using a low-dispersive and low-dissipative finite-difference time-domain method, for very large source amplitudes and for source frequencies of order of 0.1 Hz, up to altitudes of 140 km and ranges of few hundreds of kilometres. The scattering from small-scale inhomogeneities, of characteristic dimension of the same order as the wavelength of the infrasonic wave, has been investigated. The penetration in the shadow zone induced by diffraction phenomena at the thermospheric caustic has also been studied. Two-dimensional benchmarks specific to infrasound atmospheric propagation have been finally formulated and reference solutions have been computed. They aim to allow the assessment of the accuracy of numerical solvers as well as the evaluation of the range of validity of the classical approaches.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à la propagation des infrasons dans l'atmosphère terrestre</b>	<b>1</b>
1.1	Définition des ondes infrasonores . . . . .	1
1.2	Sources infrasonores . . . . .	2
1.3	Description du milieu propagatif . . . . .	2
1.3.1	Composition chimique de l'air . . . . .	3
1.3.2	Température . . . . .	4
1.3.3	Vents . . . . .	6
1.3.4	Pression et masse volumique . . . . .	7
1.4	Introduction à la propagation des infrasons . . . . .	7
1.4.1	Réfraction des ondes acoustiques dans l'atmosphère . . . . .	8
1.4.2	Influence de la stratification de l'atmosphère sur l'amplitude des ondes acoustiques . . . . .	9
1.4.3	Caustiques et zones d'ombre . . . . .	9
1.4.4	Absorption atmosphérique et effets non linéaires . . . . .	13
1.4.5	Diffusion par les petites échelles de l'atmosphère . . . . .	14
1.4.6	Effet de la topographie et réflexion au sol . . . . .	15
1.4.7	Effet de la rotondité de la terre . . . . .	16
1.4.8	Effet de la gravité et de la rotation terrestre . . . . .	16
1.4.9	Nomenclature des phases infrasonores . . . . .	17
1.5	État de l'art de la modélisation de la propagation infrasonore . . . . .	18
1.5.1	Acoustique géométrique . . . . .	18
1.5.2	Approximation parabolique . . . . .	19
1.5.3	Modes normaux . . . . .	19
1.5.4	Résolution directe des équations de la mécanique des fluides . . . . .	19
1.5.5	Validité de l'approche continue . . . . .	20
1.6	Contexte et objectifs de la thèse . . . . .	21
1.7	Organisation du manuscrit . . . . .	23

<b>2</b>	<b>Caractérisation des effets non linéaires et d'absorption sur la propagation infrasonore par une méthode de tracé de rayons</b>	<b>25</b>
2.1	Introduction . . . . .	25
2.2	Modèle de propagation acoustique . . . . .	27
2.2.1	Effets non linéaires et d'absorption . . . . .	29
2.3	Algorithme numérique . . . . .	32
2.3.1	Calcul des rayons, de l'abscisse curviligne et du terme de divergence géométrique . . . . .	32
2.3.2	Intégration numérique de l'équation de Burgers augmentée . . . . .	33
2.4	Étude des effets non linéaires et d'absorption . . . . .	35
2.4.1	Atmosphère . . . . .	35
2.4.2	Termes d'absorption . . . . .	36
2.4.3	Forme d'onde initiale . . . . .	38
2.4.4	Paramètres de simulation . . . . .	39
2.4.5	Résultats . . . . .	41
2.5	Conclusion . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Équations pour la propagation non linéaire des infrasons dans l'atmosphère terrestre</b>	<b>49</b>
3.1	Description du milieu propagatif et équations . . . . .	49
3.2	Analyse théorique de la condition de paroi . . . . .	52
3.3	Analyse modale des équations du mouvement . . . . .	56
3.3.1	Modes dans une atmosphère isotherme . . . . .	57
3.3.2	Équations pour les modes acoustiques dans une atmosphère non isotherme	61
3.4	Analyse théorique de la source infrasonore . . . . .	63
3.4.1	Excitation des modes acoustiques et de gravité dans une atmosphère isotherme et au repos . . . . .	63
3.4.2	Étude de la forme d'onde du front principal . . . . .	67
3.4.3	Définition du modèle de source . . . . .	69
3.5	Résumé . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Développement d'un code de simulation 3-D de propagation atmosphérique</b>	<b>73</b>
4.1	Formulation du problème . . . . .	73
4.1.1	Domaine de calcul . . . . .	73
4.1.2	Équations de la mécanique des fluides . . . . .	74
4.2	Méthodes numériques . . . . .	78
4.2.1	Intégration temporelle . . . . .	78
4.2.2	Dérivées spatiales . . . . .	80
4.2.3	Filtrage sélectif . . . . .	83
4.2.4	Traitement des chocs . . . . .	84

4.2.5	Zones éponges . . . . .	92
4.2.6	Stabilité numérique . . . . .	93
4.3	Implémentation informatique . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Simulations 3-D de la propagation non linéaire des infrasons</b>	<b>99</b>
5.1	Paramètres de simulation . . . . .	99
5.1.1	Atmosphère initiale non perturbée . . . . .	99
5.1.2	Source infrasonore . . . . .	101
5.1.3	Définition des configurations étudiées . . . . .	102
5.2	Résultats . . . . .	104
5.2.1	Simulation SNL02Ape : étude de la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère . . . . .	105
5.2.2	Analyse de la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère . . . . .	115
5.2.3	Brève analyse de la caustique thermosphérique . . . . .	120
5.2.4	Analyse de la précision numérique . . . . .	121
5.3	Résumé . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Cas test de simulation pour la propagation atmosphérique à longue distance des ondes infrasonores</b>	<b>127</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>145</b>
	<b>Annexes</b>	<b>147</b>
<b>A</b>	<b>Développements analytiques</b>	<b>147</b>
A.1	Spectre d'une onde en « N » . . . . .	147
A.2	Solution de l'équation des ondes . . . . .	147
A.3	Réflexion d'une onde sphérique par une couche inhomogène . . . . .	150
<b>B</b>	<b>Profils verticaux de vitesse du son et de vent</b>	<b>155</b>
B.1	Interpolation par splines . . . . .	155
B.2	Coefficients pour les profils verticaux de vitesse du son et de vent . . . . .	155
<b>C</b>	<b>Numerical Simulation of Infrasound Propagation in the Earth's Atmosphere : Study of a Stratospherical Arrival Pair</b>	<b>159</b>
C.1	Introduction . . . . .	159
C.2	Problem statement and numerical approach . . . . .	160
C.3	Results . . . . .	161
C.4	Conclusion . . . . .	164
C.5	Acknowledgments . . . . .	164
	<b>Bibliographie</b>	<b>165</b>

# Introduction à la propagation des infrasons dans l'atmosphère terrestre

Ce chapitre est une introduction générale à la propagation à longue distance. Le domaine des ondes infrasonores est d'abord défini. Après avoir donné un aperçu des principales sources, le milieu propagatif est décrit. En particulier, la composition chimique et la structure verticale de l'atmosphère sont illustrées. Ensuite, les principaux phénomènes physiques qui affectent la propagation infrasonore sont détaillés. Un aperçu des méthodes de simulation numérique de la propagation atmosphérique est donné. Enfin, les objectifs de ce travail de thèse ainsi que l'organisation du manuscrit sont présentés.

## Définition des ondes infrasonores

L'atmosphère peut être décrite comme un système dynamique extrêmement complexe. Lorsqu'elle est perturbée, des forces de rappel se développent afin d'en rétablir l'équilibre. Une onde est, par définition, un phénomène d'oscillation autour d'un état d'équilibre. Ainsi, dans l'atmosphère, plusieurs familles d'ondes sont classiquement distinguées :<sup>143</sup> les ondes acoustiques, dues à la compressibilité de l'air, les ondes de gravité, associées, comme leur nom l'indique, à la gravité, et les ondes de Rossby, liées à la force apparente de Coriolis, à son tour induite par la rotation terrestre. Les domaines fréquentiels de ces perturbations sont relativement bien distincts. Les premières ont des fréquences supérieures à la fréquence de coupure acoustique  $f_{ac}$ ,<sup>79</sup> qui est de l'ordre de quelques milliHertz. Les ondes de gravité sont limitées à des fréquences inférieures à la fréquence de Brunt-Väisälä  $f_{bv}$ ,<sup>79</sup> elle aussi de l'ordre du milliHertz. Les ondes de Rossby, quant à elles, ont des pulsations inférieures à  $2\Omega_T$ ,<sup>143</sup>  $\Omega_T \simeq 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$  étant la vitesse de rotation de la Terre. Certaines caractéristiques fondamentales de ces trois types de perturbation sont reportées dans le schéma de la figure 1.1. Les *infrasons* sont des ondes acoustiques de fréquence inférieure à la limite du domaine audible humain, autour de 20

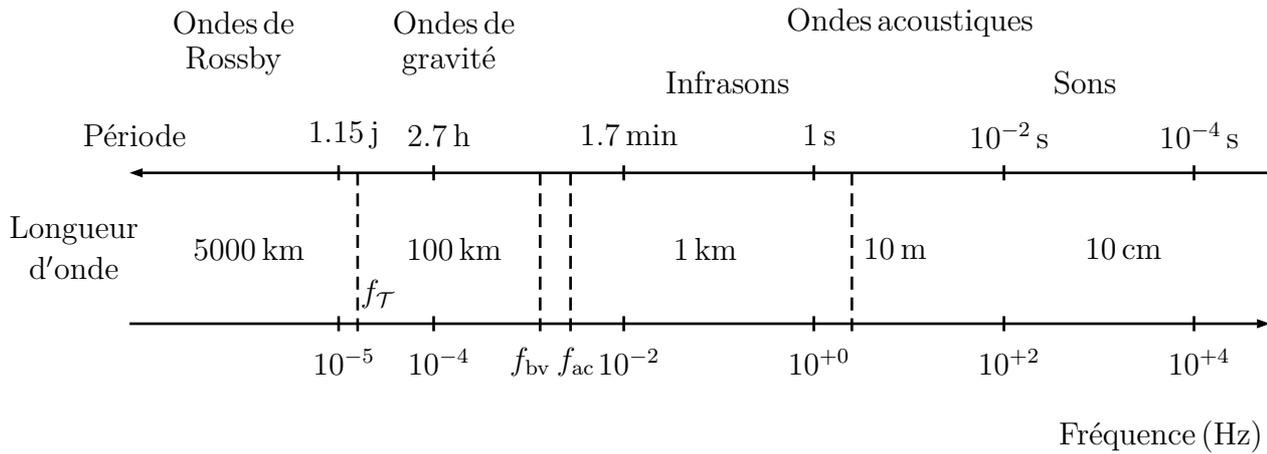


FIGURE 1.1: Caractéristiques générales des ondes atmosphériques principales.

Hz.<sup>61</sup> Leurs longueurs d'onde sont typiquement comprises entre 20 m et 8 km et leur vitesse de propagation est généralement proche de la vitesse du son ambiante.

## Sources infrasonores

Les ondes infrasonores sont produites par une grande variété de sources naturelles, telles que les éruptions volcaniques, les séismes, les aurores boréales et les éclairs, ou anthropiques, comme les explosions chimiques et nucléaires et le bang des avions supersoniques. Une revue est disponible dans les ouvrages de McKisic<sup>114</sup> et Campus & Christie,<sup>30</sup> ainsi que dans les articles de Blanc<sup>16</sup> et Hedlin *et al.*<sup>76</sup> entre autres. À titre illustratif, les principales caractéristiques des sources les plus étudiées dans la littérature sont reportées dans la table 1.1.

De manière générale, les sources infrasonores peuvent être distinguées suivant leur durée d'émission, leur amplitude, leur fréquence dominante et leur forme d'onde. La présente thèse s'intéresse plus particulièrement aux explosions localisées au niveau du sol. Ces dernières émettent des signaux impulsionnels très courts et de forte puissance, qui peuvent se propager jusqu'à des distances très élevées, de l'ordre de plusieurs milliers de kilomètres. Le spectre de l'onde au niveau d'une explosion est généralement assez large et peut s'étaler dans le domaine audible. Cependant, à cause des effets non linéaires et d'absorption, l'énergie des signaux mesurés à grande distance est portée par des fréquences typiquement inférieures à quelques Hertz.

## Description du milieu propagatif

Les ondes infrasonores sont considérablement affectées par la variabilité de l'atmosphère, un milieu fortement inhomogène dans les trois directions de l'espace et caractérisé par une multitude d'échelles de variation spatiales et temporelles. La propagation à grande distance des signaux infrasonores est favorisée en premier lieu par la présence de guides d'ondes qui sont créés par les gradients verticaux de grande échelle de la température et du vent et qui piègent l'énergie

Source	Gamme de fréquences observées (Hz)	Amplitude maximale observée (Pa)	Distance maximale de propagation (km)
Explosions nucléaires	0.002 - 20	> 20	> 20000
Explosions chimiques	0.05 - 20	$\simeq$ 10	> 5000
Bang	0.3 - 20	$\simeq$ 10	$\simeq$ 5000
Éclairs	0.5 - 20	$\simeq$ 2	$\simeq$ 50
Éruptions	0.002 - 20	> 20	> 20000
Séismes	0.005 - 10	$\simeq$ 4	> 10000
Aurores	0.008 - 20	$\simeq$ 2	$\simeq$ 4000
Tsunamis	0.5 - 2	$\simeq$ 0.1	$\simeq$ 1000
Météorites	0.01 - 20	> 10	> 20000

TABLE 1.1: Caractéristiques principales de certaines sources infrasonores explosives (en rouge) ou non explosives (en bleu) étudiées dans la littérature.<sup>30</sup>

acoustique entre la surface terrestre et environ 120 km d'altitude. Les plus petites structures, de longueur d'onde et de fréquence comparables aux longueurs d'onde et fréquences infrasonores, sont quant à elles responsables de phénomènes de diffusion acoustique. Dans cette section, le milieu atmosphérique est décrit afin de fournir les notions de base nécessaires à la compréhension des effets physiques qui influencent la propagation atmosphérique. La composition chimique et les profils verticaux de température, de vent, de pression et de masse volumique sont en particulier exposés. La description n'a pas vocation à être exhaustive. Une présentation plus détaillée est disponible dans les ouvrages de Fleagle & Businger,<sup>64</sup> de Salby,<sup>143</sup> de Jacobson,<sup>81</sup> ou encore de Vallis.<sup>158</sup>

## Composition chimique de l'air

L'atmosphère se compose principalement<sup>64</sup> d'azote  $N_2$  (78.09%), d'oxygène  $O_2$  (20.95%) et d'argon Ar (0.93%). Des traces de vapeur d'eau  $H_2O$  et de dioxyde de carbone  $CO_2$  sont également présentes en basse atmosphère, mais caractérisées par une forte variabilité spatiale et temporelle. Ces constituants mineurs sont responsables de l'absorption du rayonnement infrarouge émis par la surface terrestre (effet de serre). Par ailleurs, une couche d'ozone  $O_3$  s'étend entre 10 km et 60 km d'altitude et permet le filtrage des rayons ultraviolets provenant du Soleil. D'autres constituants ont enfin une concentration de l'ordre d'une partie par million. À cause de la force de gravité, environ 99 % de la masse totale de l'atmosphère est contenue dans les premiers 30 km d'altitude. À titre d'illustration, les densités numériques de certaines espèces sont tracées en fonction de l'altitude sur la figure 1.2(a). Les données représentées sont extraites du livre *Handbook of Geophysics*<sup>1</sup> et sont basées sur des mesures directes, réalisées principalement par des fusées sondes. Une diminution exponentielle avec l'altitude du nombre de particules par centimètre cube de l'azote, de l'oxygène et de l'argon peut être remarquée : à 180 km, ces derniers sont dix ordres de grandeurs inférieurs à ceux observés au sol. Si l'atmo-

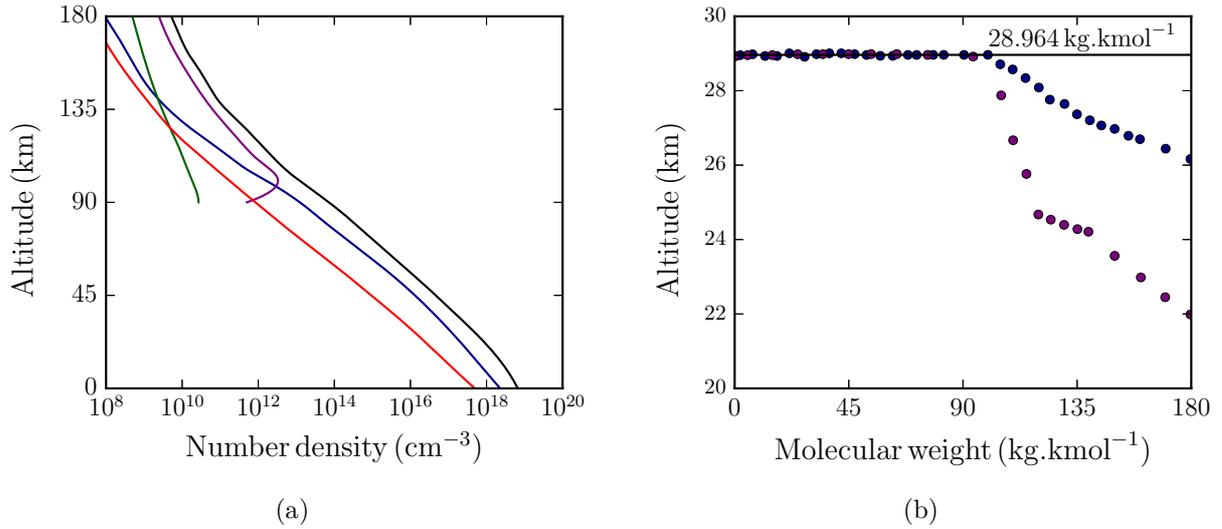


FIGURE 1.2: (a) Nombre de particules par centimètre cube de l'azote moléculaire N<sub>2</sub> (trait noir), de l'oxygène moléculaire O<sub>2</sub> (trait bleu), de l'argon Ar (trait rouge), de l'azote N (trait vert) et de l'oxygène O (trait violet) en fonction de l'altitude. (b) Masse molaire de l'air en fonction de l'altitude. Données extraites du rapport *U.S. Standard Atmosphere* (cercles bleus) et du livre *Handbook of Astronautical Engineering*<sup>87</sup> (cercles violets).

sphère était au repos, les basses couches seraient composées par les gaz les plus lourds, alors que les constituants les plus légers seraient concentrés en haute altitude. Toutefois, le brassage constant induit des proportions relativement uniformes du sol à environ 100 km. Cet aspect est illustré sur la figure 1.2(b), où un profil vertical typique de la masse molaire  $\mathcal{M}$  de l'air est tracé en fonction de l'altitude. Les données reportées sont extraites du rapport *U.S. Standard Atmosphere* et du livre *Handbook of Astronautical Engineering*. Le graphique 1.2(b) est une reproduction de la figure 10 de Sutherland & Bass.<sup>149</sup> Jusqu'à 100 km, la masse molaire est approximativement constante et les valeurs publiées par les différentes sources sont en très bon accord. Au-delà, bien que les données divergent progressivement, une diminution importante de la masse molaire  $\mathcal{M}$  est observée. À des altitudes supérieures à 100 km, l'atmosphère est en effet composée de gaz plus légers. Comme indiqué dans la section 1.4.1, ainsi que dans les chapitres 2 et 5 à suivre, la propagation des infrasons est essentiellement confinée entre le sol et environ 120 km d'altitude. Ainsi, dans le cadre de cette thèse, la masse molaire  $\mathcal{M}$  est supposée indépendante de l'altitude et prise égale à  $\mathcal{M} = 28.964 \text{ kg.kmol}^{-1}$ .

## Température

La température de l'atmosphère est d'abord contrôlée par l'absorption du rayonnement solaire et terrestre. À l'échelle planétaire, quatre couches principales peuvent être distinguées selon l'altitude (cf. figure 1.3). Suivant les recommandations de l'Organisation Météorologique Mondiale (OMM), elles ont pour suffixe *sphère*, tandis que leurs limites supérieures sont désignées

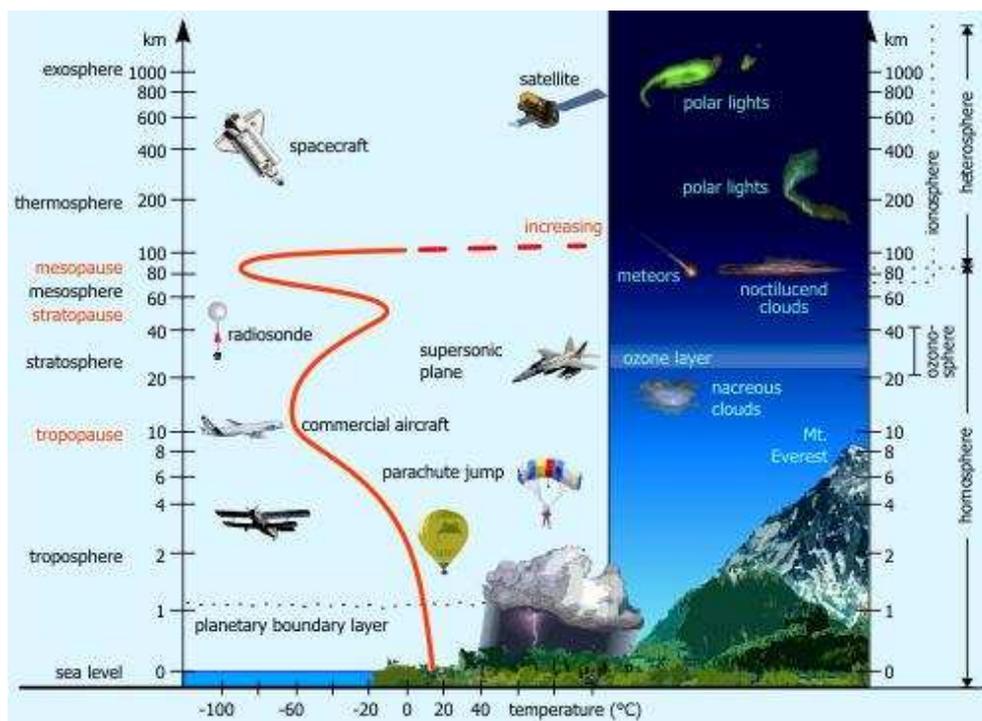


FIGURE 1.3: Structure thermique de l'atmosphère.

par le suffixe *pause*.

- La **troposphère** est la couche en contact avec le sol terrestre et s'étend jusqu'à des altitudes comprises entre 9 km et 18 km, son épaisseur étant plus importante à l'équateur qu'aux pôles. Elle contient la quasi totalité de la vapeur d'eau atmosphérique et est, par conséquent, le siège des phénomènes météorologiques principaux. Au sein de cette couche, la température décroît avec l'altitude, avec un gradient vertical de l'ordre de  $-6.5 \text{ K.km}^{-1}$ , jusqu'à la tropopause qui en représente la limite supérieure. Des minima d'environ  $-50^\circ\text{C}$  peuvent ici être enregistrés.
- La **stratosphère** se situe entre la tropopause et la stratopause, à environ 55 km d'altitude. Dans cette couche, à cause de l'absorption du rayonnement solaire ultraviolet par l'ozone  $\text{O}_3$ , la température augmente jusqu'à des maxima de l'ordre de  $0^\circ\text{C}$ .
- La **mésosphère** se trouve entre la stratopause et la mésopause, à environ 90 km d'altitude. En raison de la diminution de la quantité d'ozone  $\text{O}_3$ , la température y diminue. La mésosphère est la couche la plus froide, des pics négatifs de  $-100^\circ\text{C}$  pouvant être atteints.
- La **thermosphère** s'étend au-delà de la mésopause. À cause de l'absorption du rayonnement solaire très haute fréquence par les atomes d'azote N et d'oxygène O ionisés, la température de cette couche croît avec l'altitude. Des variations très importantes entre  $300^\circ\text{C}$  et  $1500^\circ\text{C}$  peuvent être enregistrées en fonction de l'activité solaire.<sup>64</sup>

Au-delà de la thermosphère s'étend l'exosphère, jusqu'à 50000 km d'altitude. Il s'agit de la couche externe de l'atmosphère, où la masse volumique devient extrêmement faible (inférieure

à 100 particules par centimètre cube à 5000 km d'altitude) et les particules peuvent s'échapper librement dans le milieu interplanétaire.

En guise d'illustration, un exemple de profil de température est tracé sur la figure 1.4(a). Il en reproduit les grandes échelles de variation observées au centre de lancement de White Sands au Nouveau Mexique (États-Unis), le 14 mai 1987, lors de l'expérience Misty Picture. Cette dernière a consisté en l'explosion de 4684.7 t d'ANFO (ammonium nitrate-fuel oil), agencées dans une demi-sphère en fibre de verre de rayon 13.4 m. Une description plus détaillée est disponible dans la thèse de Gainville.<sup>66</sup>

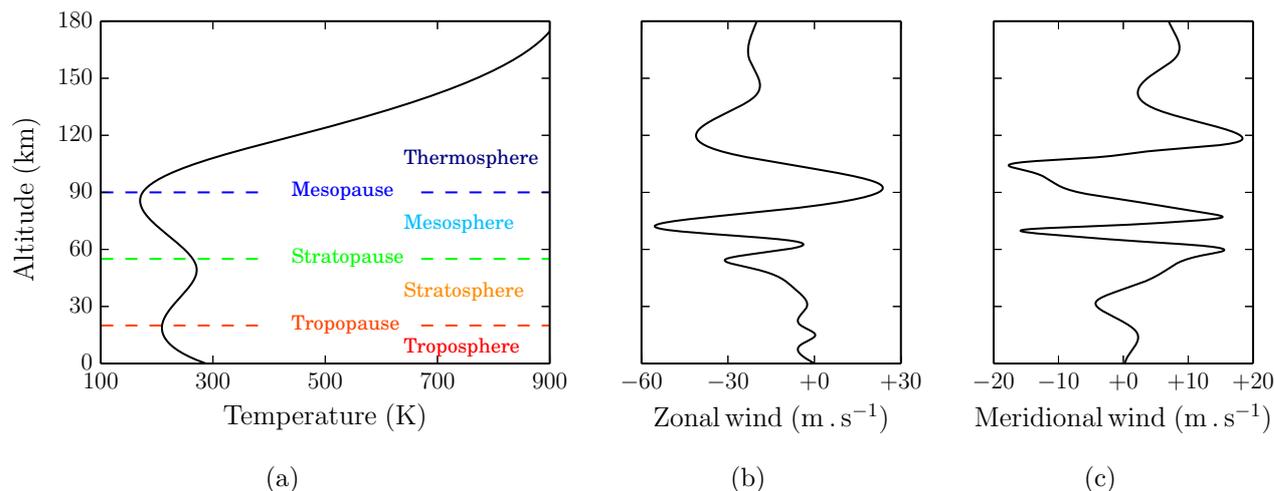


FIGURE 1.4: Grandes échelles de variation de (a) température, (b) vent zonal et (c) vent méridien, observées durant l'expérience Misty Picture, à la verticale du Centre de lancement de White Sands en Nouveau Mexique (États-Unis), le 14 mai 1987.<sup>66</sup>

La température dans l'atmosphère dépend aussi de la latitude, en raison des différences d'intensité de l'ensoleillement entre les diverses régions du globe : le chauffage moyen aux pôles est en effet beaucoup plus faible qu'à l'équateur. Des variations significatives de temps caractéristique allant de quelques heures à plusieurs semaines peuvent aussi être observées : les inversions au niveau de la mésosphère provoquées par le déferlement des ondes de gravité<sup>91</sup> où les oscillations dans la thermosphère induites par les changements de l'activité solaire peuvent être mentionnées.

Enfin, à plus petite échelle, la température est fonction d'un plus grand nombre de facteurs et est liée à la dynamique de l'atmosphère, en particulier dans la troposphère.

## Vents

L'atmosphère terrestre est essentiellement brassée par des vents horizontaux. La vitesse verticale moyennée sur un pavé horizontal de quelques kilomètres carrés est en effet de l'ordre de quelques centimètres par seconde.<sup>49</sup> En géophysique, la projection du vecteur vent sur le plan horizontal consiste en deux composantes : le vent zonal, dans la direction ouest-est, et le vent

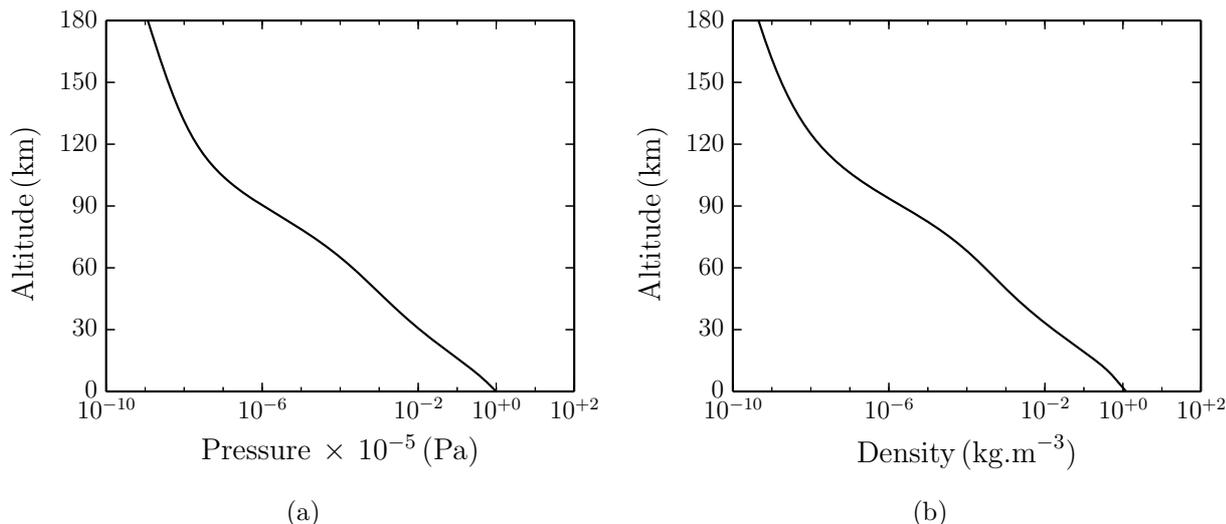


FIGURE 1.5: Grandes échelles de variation de (a) pression et (b) masse volumique, observées durant l'expérience Misty Picture.

méridien, sur l'axe sud-nord. Des courants troposphériques et stratosphériques très puissants, appelés *jet-streams* en anglais, sont souvent observés dans la direction ouest-est. Ils peuvent atteindre des vitesses de l'ordre de  $50 \text{ m.s}^{-1}$  et  $100 \text{ m.s}^{-1}$ , respectivement. Les vents méridiens sont généralement moins intenses. À titre d'illustration, les vents zonal et méridien observés durant l'expérience Misty Picture à la verticale de la source explosive sont tracés respectivement sur les figures 1.4(b) et 1.4(c) en fonction de l'altitude.

## Pression et masse volumique

À l'échelle synoptique, l'atmosphère peut être considérée comme un milieu stratifié à l'équilibre hydrostatique. Dans la direction orthogonale à la surface terrestre, la force apparente de Coriolis, les contraintes visqueuses et les vents verticaux sont négligeables. En conséquence, le poids de l'air est équilibré par le gradient vertical de pression ambiante. La force de gravité engendre ainsi une décroissance exponentielle avec l'altitude de la pression  $\bar{p}$  et de la masse volumique  $\bar{\rho}$  atmosphériques. À titre d'illustration, les profils verticaux de ces grandeurs observées durant l'expérience Misty Picture sont tracés sur les figures 1.5(a) et 1.5(b). Jusqu'à 180 km, les variables  $\bar{p}$  et  $\bar{\rho}$  diminuent approximativement d'un facteur 10 tous les 20 km.

## Introduction à la propagation des infrasons

Dans cette section, les phénomènes physiques principaux qui influencent la propagation infrasonore sont présentés. Des discussions analogues sont menées dans les thèses de Gainville<sup>66</sup> et Hanique-Cockenpot.<sup>74</sup>

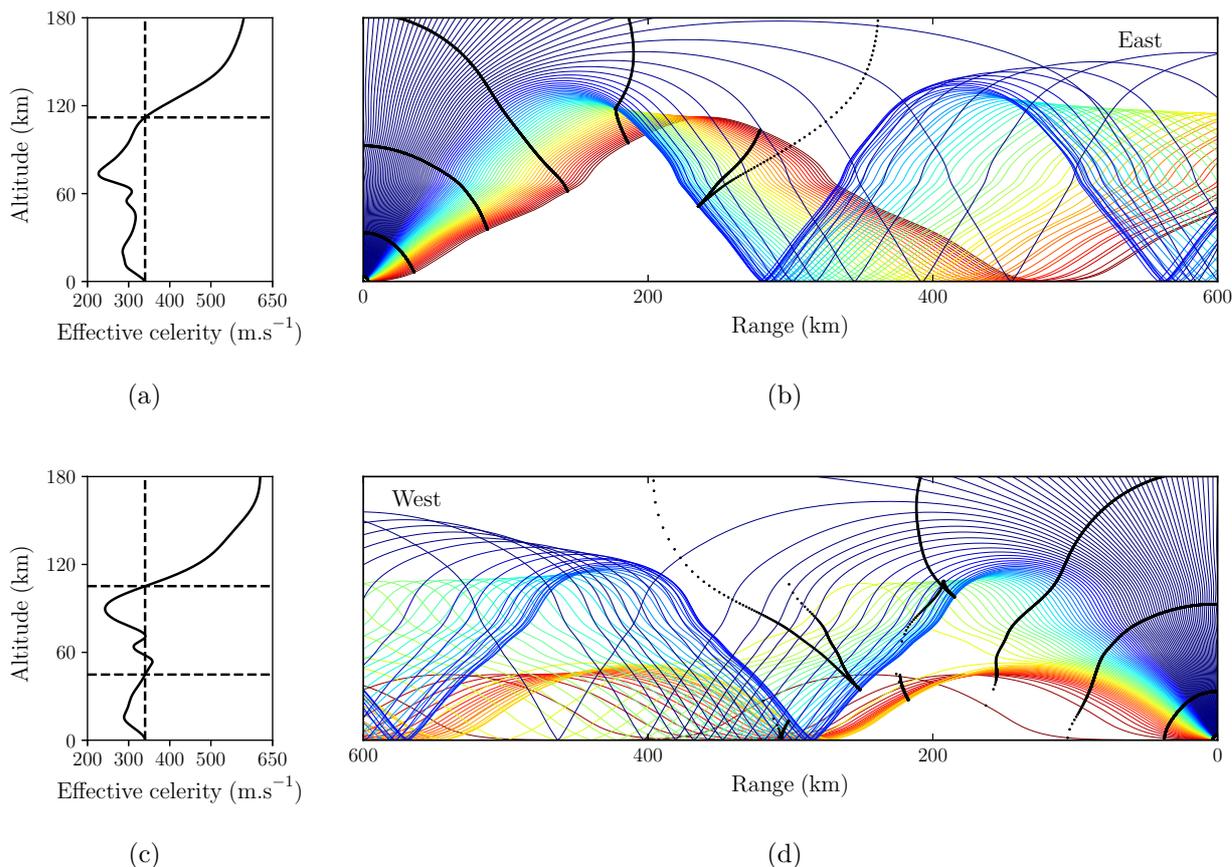


FIGURE 1.6: Expérience Misty Picture. (a),(c) Vitesse du son effective à l'est et à l'ouest de la source. (b), (d) Rayons acoustiques émis à l'est et à l'ouest de la source (lignes en couleur) et fronts d'onde à certains instants de temps (pointillés).

## Réfraction des ondes acoustiques dans l'atmosphère

La propagation des ondes infrasonores dans l'atmosphère terrestre est affectée en premier lieu par la réfraction continue induite par les variations verticales de grande échelle de la célérité effective, définie comme la somme de la vitesse du son, dépendante de la température, et du vent. La réfraction, combinée avec la réflexion sur la surface de la Terre, engendre des guides d'onde qui piègent l'énergie acoustique entre le sol et environ 120 km d'altitude. Des guides troposphériques, stratosphériques et thermosphériques peuvent généralement être distingués. Cet aspect est bien illustré sur les figures 1.6(b) et 1.6(d), où un exemple typique de tracé de rayons est reporté. Les rayons acoustiques, issus de la théorie géométrique de la propagation, représentent les trajectoires suivies par l'énergie d'une onde dans une approximation haute fréquence des équations de la mécanique des fluides. Dans l'exemple, ils sont émis par une source ponctuelle placée au sol dans une atmosphère construite à partir des profils verticaux observés durant l'expérience Misty Picture (cf. figures 1.4(a)-(c)). Ils sont retournés vers la surface de la Terre aux altitudes auxquelles la célérité effective dépasse sa valeur trace.<sup>82,128</sup>

Pour un rayon donné, cette dernière est définie par le rapport entre la vitesse du son au sol et le cosinus de l'angle d'émission du rayon par rapport à la surface terrestre. Ainsi, à l'ouest de la source, les rayons acoustiques sont réfléchis à des hauteurs de l'ordre de 45 km et 105 km, tandis que, à l'est, seul le guide d'onde thermosphérique est formé. Cette anisotropie est induite par le vent zonal, qui souffle principalement vers l'ouest.

## Influence de la stratification de l'atmosphère sur l'amplitude des ondes acoustiques

Une des conséquences les plus importantes de la stratification de l'atmosphère est la variation de l'amplitude des ondes acoustiques avec l'altitude. En l'absence d'effets dissipatifs et de fronts de choc, l'énergie acoustique se conserve.<sup>128</sup> Elle est proportionnelle au rapport  $\Phi^2 \equiv p'^2/\bar{\rho}$ , où  $p'$  indique la perturbation de pression. Ainsi, la fonction  $p' = \Phi\sqrt{\bar{\rho}}$  diminue pour une onde se propageant vers la haute atmosphère et inversement augmente pour un signal se propageant vers le sol. Le rapport  $p'/\bar{p}$ , quant-à-lui, croît avec l'altitude, la pression atmosphérique étant approximativement proportionnelle à  $\bar{\rho}$ . Cette amplification joue un rôle très important dans la haute atmosphère.

## Caustiques et zones d'ombre

La réfraction induite par les gradients verticaux de température et vent crée à la fois des régions de focalisation ou caustiques, où l'amplitude du champ acoustique est maximale, et des zones d'ombre, où la perturbation de pression décroît brusquement. Les concepts de caustique et zone d'ombre sont propres à la théorie géométrique des ondes.<sup>23, 88, 95, 128, 130</sup> Ils peuvent être illustrés à l'aide de l'exemple représenté sur les figures 1.7(a)-(c). Un front d'onde initialement parabolique  $\mathcal{W}_0$  se propage dans un milieu homogène. En l'absence de vent, les rayons acoustiques émis par chacun des points  $M$  de  $\mathcal{W}_0$  sont des droites orthogonales à  $\mathcal{W}_0$ . À cause de la forme convergente de  $\mathcal{W}_0$ , deux rayons quelconques initialement à distance infiniment petite se croisent en un point  $C$ . Le lieu géométrique des points  $C$  définit la caustique. Cette dernière divise le domaine en deux régions : une *zone insonifiée* ou *illuminée*, où chaque point  $P$  est traversé au cours du temps par trois rayons distincts, et une *zone d'ombre*, où un et un seul rayon est présent. Dans la zone insonifiée, le front d'onde  $\mathcal{W}_1$  a une forme de papillon et est constitué de deux composantes : une onde appelée incidente (trait violet sur la figure 1.7(c)) et une onde dite réfléchie (trait vert sur la figure 1.7(c)). L'acoustique géométrique prévoit un champ de pression divergent aux points  $C$ .<sup>128</sup> Cette singularité, physiquement inadmissible, est en réalité régularisée par des phénomènes particuliers, négligés par la théorie géométrique, qui se développent au voisinage de la caustique. Le comportement d'une onde dans les zones de focalisation dépend entre autres de l'amplitude de l'onde elle-même. Trois régimes principaux peuvent être distingués :<sup>32, 148</sup> le régime linéaire, le régime des chocs faibles et le régime des chocs forts. Le premier a été classiquement traité en optique.<sup>23, 88, 95</sup> Le deuxième a été largement

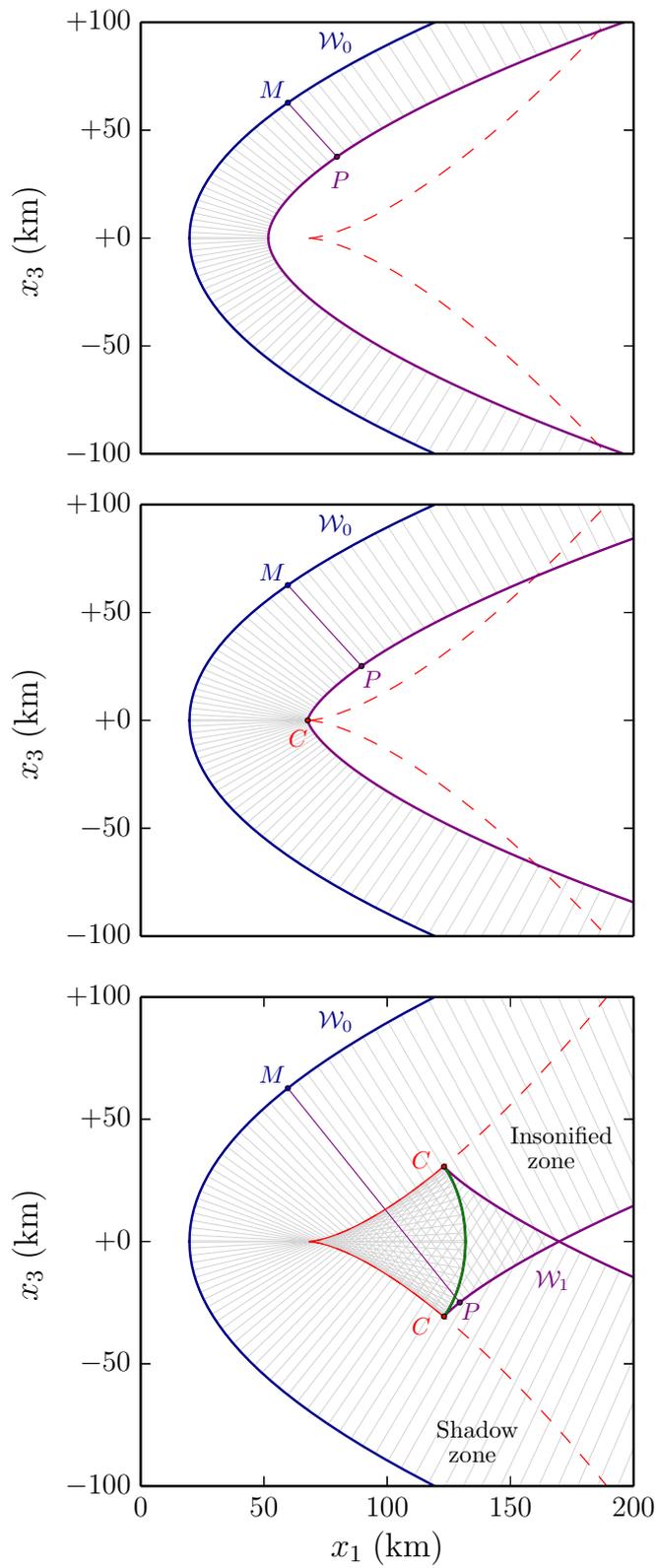


FIGURE 1.7: Propagation d'un front d'onde initialement convergent dans un milieu homogène. La ligne rouge indique la caustique cuspidée.

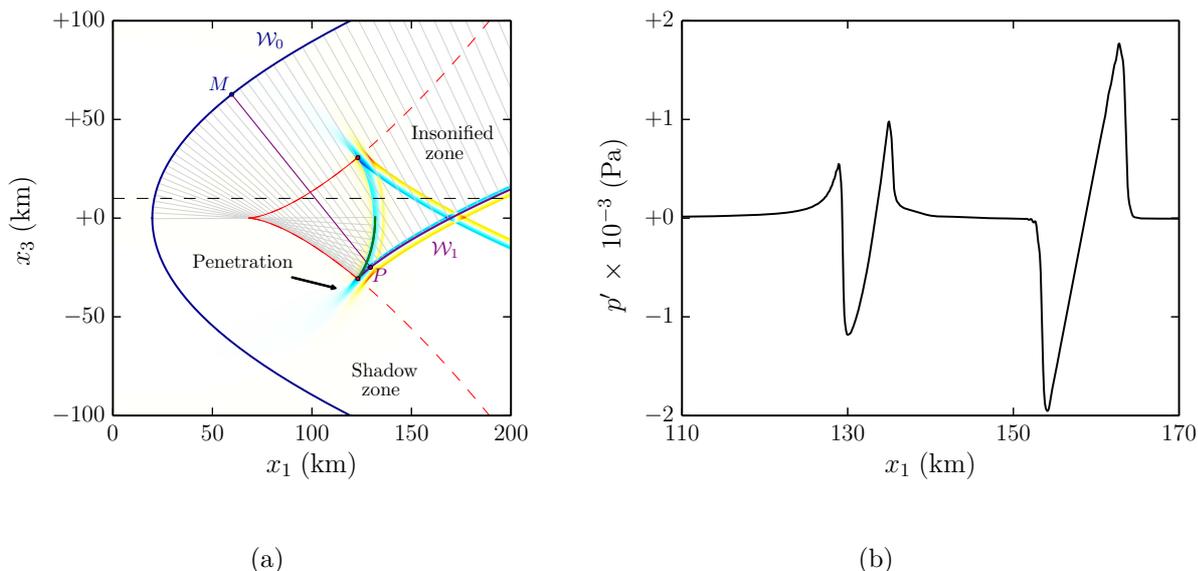


FIGURE 1.8: (a) Exemple de champ de pression autour d'une caustique obtenu par simulation directe des équations de Navier-Stokes. (b) Coupe horizontale pour  $x_3 = 10$  km.

étudié en acoustique dans les dernières décennies,<sup>45, 107–109, 125, 144</sup> en particulier afin d'analyser la focalisation du bang lors des manœuvres accélérées des avions supersoniques. En régime linéaire, la singularité du champ de pression est régularisée par les mécanismes de diffraction. Par ailleurs, il est possible de montrer que, loin de la cuspide, la forme de l'onde réfléchiée est donnée par la transformée de Hilbert de l'onde incidente. Dans le régime des chocs faibles, les effets non linéaires contribuent à la régularisation du champ acoustique. En effet, la transformation de Hilbert de signaux discontinus, tels que les ondes en « N » qui se développent dans la thermosphère, présente des singularités logarithmiques. Guiraud<sup>71</sup> et puis Rosales & Tabak<sup>138</sup> ont montré que ces dernières peuvent être levées en tenant compte des effets non linéaires, qui limitent l'amplitude au niveau des chocs.

Dans la zone d'ombre de la caustique, la théorie géométrique prévoit une amplitude nulle du champ de pression. En réalité, de l'énergie pénètre dans cette région par diffraction. La profondeur de pénétration dépend du spectre de l'onde incidente et est d'autant plus importante que la fréquence est basse.<sup>23, 128, 130</sup> Une illustration de ce phénomène est donnée par la figure 1.8(a), qui représente un exemple de champ acoustique autour d'une caustique obtenu par simulation directe des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles. Un coupe horizontale de la perturbation de pression  $p'$  pour  $x_3 = 10$  km,  $x_3$  étant l'axe vertical, est également tracée dans la figure 1.8(b), afin de montrer la transformation d'une onde en « N » en une onde en « U » dans la zone insonifiée.

Dans le cas de la propagation atmosphérique d'ondes infrasonores produites par des sources placées sur la surface terrestre, deux caustiques principales sont observées : la caustique thermosphérique, générée par les effets de réfraction induits par le gradient vertical positif de vitesse du son au-delà de la mésopause, et la caustique stratosphérique, liée à la présence de vents aux

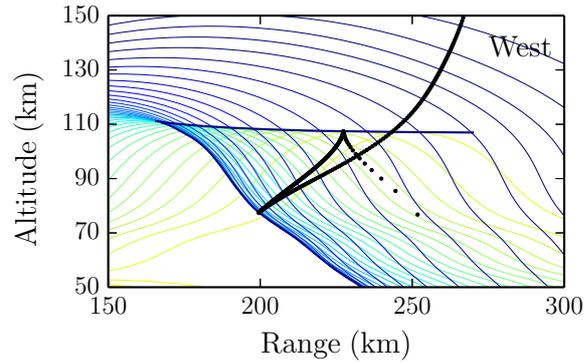


FIGURE 1.9: Agrandissement de la figure 1.6. Le trait bleu indique une partie de la caustique thermosphérique. Le front d'onde en forme de “papillon” est tracé en pointillés.

moyennes altitudes. Des zones de focalisation peuvent également être créées par les variations de petites échelles du milieu telles que la turbulence atmosphérique. Un exemple de caustique thermosphérique est tracé sur la figure 1.9, qui est un agrandissement de la figure 1.6. Mis à

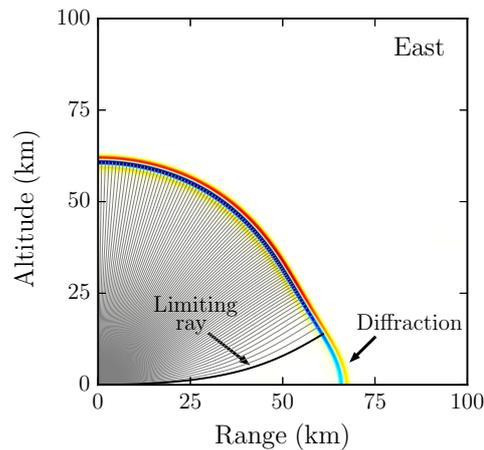


FIGURE 1.10: Exemple de diffraction dans une zone d'ombre créée par un gradient négatif de vitesse du son.

part le voisinage des caustiques, d'autres zones d'ombre géométriques peuvent être observées dans le champ acoustique. Dans le cas de la propagation atmosphérique d'ondes générées sur la surface terrestre, la plus importante se situe au sol, au voisinage de la source. Elle est provoquée par le gradient négatif de vitesse du son, qui dévie l'énergie acoustique vers la haute atmosphère. Une illustration de cette zone d'ombre est fournie par la figure 1.10, qui montre un exemple de champ acoustique engendré par une source infrasonore dans une atmosphère inhomogène construite à partir des profils de température et du vent observés durant l'expérience Misty Picture. Le résultat est à nouveau obtenu par simulation directe des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles. Au dessous d'un rayon limite, la perturbation de pression est évanescence. Au sol, elle diminue exponentiellement le long de l'axe horizontal.<sup>44, 46, 128</sup>

## Absorption atmosphérique et effets non linéaires

L'absorption atmosphérique joue un rôle fondamental dans la propagation acoustique à longue distance. Quatre mécanismes peuvent être distingués.<sup>48,149,150</sup> Les deux plus connus sont liés au cisaillement et à la conduction thermique. Le troisième résulte de la relaxation de l'énergie interne de rotation des constituants de l'air. Le dernier est une conséquence de la relaxation de l'énergie interne de vibration de quatre molécules principales : l'azote  $N_2$ , l'oxygène  $O_2$ , l'ozone  $O_3$  et le dioxyde de carbone  $CO_2$ . Une description physique de ces différents mécanismes est donnée dans Vincenti & Kruger.<sup>159</sup> Les trois premiers phénomènes sont appelés classiques, pouvant être pris en compte par les équations de la mécanique des fluides pour un gaz à l'équilibre thermodynamique. Le quatrième est un phénomène hors équilibre.

Du fait de la stratification de l'atmosphère, l'impact des processus d'absorption dépend non seulement de la fréquence de l'onde mais aussi de la trajectoire suivie par le signal avant d'arriver à la station de mesure.<sup>48</sup> Plus précisément, dans le cas des infrasons, la relaxation vibrationnelle affecte principalement les ondes troposphériques et stratosphériques, tandis que les phénomènes classiques représentent la source dominante d'absorption dans la thermosphère, notamment à cause de la réduction exponentielle avec l'altitude de la masse volumique du milieu.

La propagation des ondes infrasonores est généralement non linéaire pour plusieurs raisons. D'une part, les sources peuvent être très puissantes et générer des perturbations acoustiques de très grande énergie. D'autre part, les effets non linéaires, dépendant eux aussi de la masse volumique ambiante proportionnellement à  $1/\sqrt{\rho}$ , sont amplifiés pour les ondes se propageant vers la haute atmosphère. En outre, ils peuvent être très importants au niveau des caustiques, la focalisation augmentant l'amplitude des ondes, notamment en présence de chocs. La propagation non linéaire des ondes acoustiques est traitée par Whitham,<sup>164</sup> Pierce,<sup>128</sup> Enflo & Hedberg<sup>59</sup> et Hamilton & Blackstock,<sup>72</sup> entre autres. Les non linéarités distordent les signaux acoustiques et provoquent la formation de chocs. En guise d'exemple, l'évolution typique à trois altitudes différentes d'une onde infrasonore se propageant vers la thermosphère est illustrée sur les figures 1.11(a)-(c). La signature initiale est proche d'une période de sinusoïde (figure 1.11(a)). En l'absence d'effets de dissipation, deux étapes peuvent être distinguées. Dans un premier temps, le signal se raidit jusqu'à la formation d'une onde en « N ». Dans un second temps, les deux chocs du « N » subissent l'action de leur propre amplitude. Les surpressions se propagent à des vitesses supérieures à la vitesse du son locale, alors que les dépressions se propagent à des vitesses inférieures. En conséquence, l'onde en « N » s'allonge. Par ailleurs, l'aire sous la courbe  $\Phi(t)$  devant se conserver dans l'hypothèse de choc faible,<sup>128,164</sup> une réduction de l'amplitude accompagne son allongement. La déformation d'une onde se traduit par une redistribution de l'énergie acoustique entre composantes spectrales. Plus précisément, le maximum du spectre se décale progressivement vers les basses fréquences et, en même temps, des harmoniques supérieures sont générées. Ainsi, l'absorption dépendant de la fréquence, une forte interaction entre effets dissipatifs et non linéaires est souvent observée dans la haute atmosphère (cf. figure 1.11(c)).

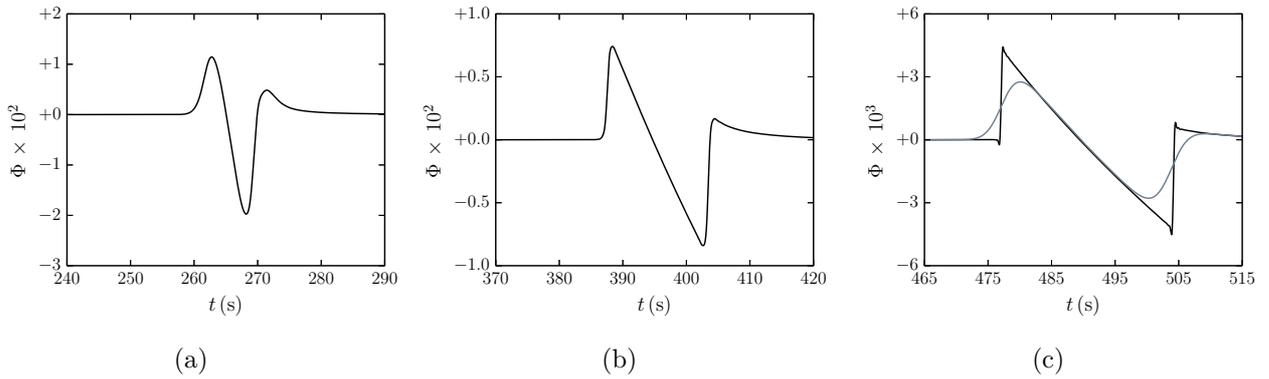


FIGURE 1.11: Évolution typique en l'absence d'effets d'absorption d'une onde infrasonore se propageant vers la thermosphère. Perturbations de pression normalisée  $\Phi$  en fonction du temps à trois altitudes différentes. Sur la figure (c), la courbe grise indique le signal obtenu en présence de dissipation visqueuse et thermique.

### Diffusion par les petites échelles de l'atmosphère

Si les variations verticales de grande échelle de la température et du vent sont responsables de la génération de différents guides d'onde, les inhomogénéités atmosphériques de longueur d'onde et fréquence comparables aux longueurs d'onde et fréquences infrasonores sont à l'origine de phénomènes de diffusion acoustique. Une description approfondie de la diffusion par

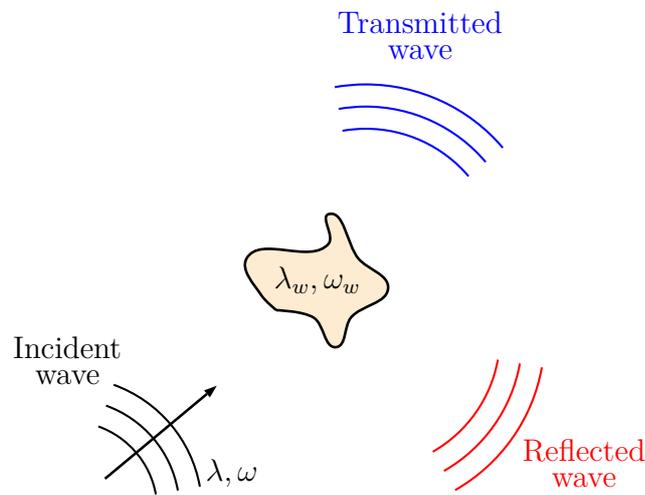


FIGURE 1.12: Propagation d'une onde acoustique au travers d'une inhomogénéité spatiale.

les petites échelles de variation d'un milieu propagatif est disponible dans les ouvrages de Ishimaru,<sup>80</sup> de Ostashev & Wilson<sup>122</sup> et de Pierce.<sup>128</sup> Lorsqu'un pulse se propage au travers d'une région inhomogène, une onde réfléchiée est générée (cf. figure 1.12). L'amplitude et la fréquence dominante de cette dernière dépendent non seulement de l'angle d'incidence avec l'inhomogénéité, mais aussi des spectres de l'onde incidente et des petites structures. Afin d'illustrer cet aspect, des simulations directes des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles ont été

réalisées. La propagation d'un pulse au travers d'une inhomogénéité de température dans un milieu au repos a été étudiée. Une onde cylindrique est produite par une source infrasonore placée sur la surface terrestre, de fréquence égale à 0.1 Hz et de longueur d'onde caractéristique  $\lambda = 3.4$  km. La vitesse du son, dépendante de la température, est fonction de l'altitude et s'écrit comme la somme d'une constante et d'une perturbation de longueur d'onde  $\lambda_w$  centrée à 40 km de hauteur, cf. figure 1.13(a). Les cartographies de pression normalisée  $\Phi$  obtenues pour différentes valeurs du rapport  $\lambda/\lambda_w$  sont illustrées en fonction de la distance au sol et de l'altitude sur les figures 1.13(b)-(d). Pour  $\lambda/\lambda_w = 6.8$ , le pulse est insensible aux variations de température. Au contraire, pour  $\lambda/\lambda_w = 1.7$  et  $\lambda/\lambda_w = 0.85$ , l'onde incidente est partiellement réfléchiée par l'inhomogénéité. Les spectres enregistrés au sol, à 100 km de distance de la source

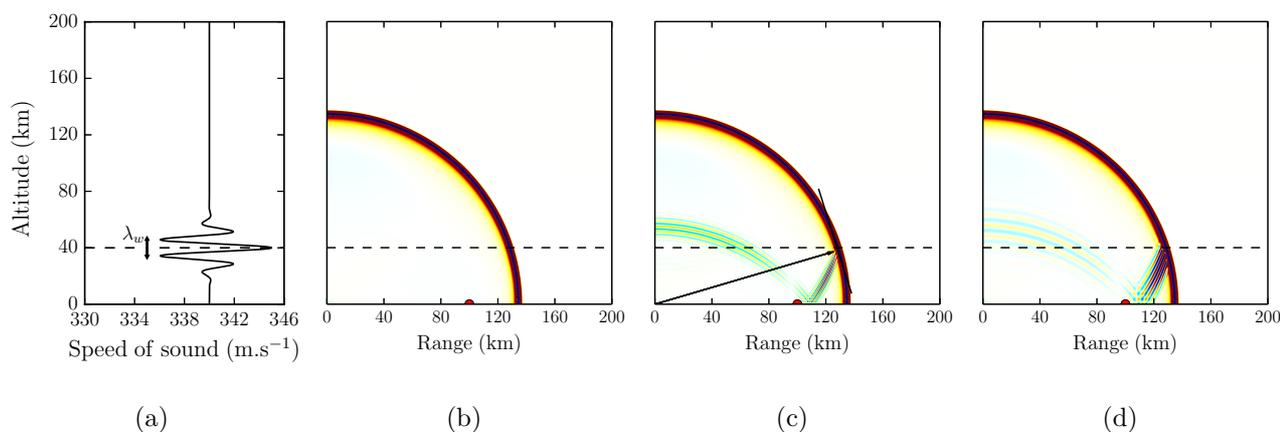


FIGURE 1.13: Propagation d'un pulse cylindrique au travers d'une inhomogénéité spatiale de température. (a) Vitesse du son. Cartographies de pression normalisée  $\Phi$  pour (b)  $\lambda/\lambda_w = 6.8$ , (c)  $\lambda/\lambda_w = 1.7$  et (d)  $\lambda/\lambda_w = 0.85$ .

infrasonore, et associés aux ondes diffusées sont tracés sur la figure 1.14. Les amplitudes des signaux réfléchis sont du même ordre de grandeur. Cependant, leurs fréquences dominantes diffèrent d'un facteur d'environ 1.85.

L'exemple analysé dans cette section montre clairement l'importance des petites structures. Ces dernières agissent comme une couche sélective qui ne réfléchit que certaines des longueurs d'onde incidentes. Pour cette raison, ce phénomène a récemment fait l'objet de différentes études,<sup>36-39</sup> qui ont, en particulier, illustré la possibilité d'exploiter les réflexions partielles pour reconstruire la structure verticale de l'atmosphère.

## Effet de la topographie et réflexion au sol

Le relief peut influencer la propagation des ondes qui longent la surface terrestre ainsi que le champ acoustique au niveau des récepteurs. Des études récentes sur les signaux mesurés par des stations situées au voisinage de volcans<sup>92, 93, 113</sup> ont montré que des irrégularités dont l'échelle caractéristique est comparable aux longueurs d'onde infrasonores peuvent avoir un

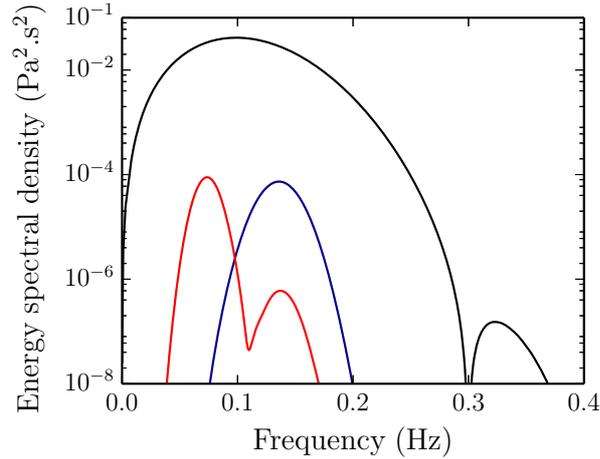


FIGURE 1.14: Densités spectrales d'énergie des perturbations de pression  $p'$  enregistrées au sol à 100 km de distance de la source : résultats pour l'onde incidente (trait noir) et pour les ondes diffusées lorsque  $\lambda/\lambda_w = 1.7$  (trait rouge) et  $\lambda/\lambda_w = 0.85$  (trait bleu).

effet significatif sur l'amplitude enregistrée. Cependant, il est raisonnable de supposer que les variations topographiques jouent un rôle mineur sur les ondes qui se propagent à longue distance en suivant des trajectoires stratosphériques et thermosphériques. Par ailleurs, bien que des phénomènes de couplage avec la surface terrestre puissent se vérifier, la réflexion des infrasons est généralement supposée totale.

### Effet de la rotondité de la terre

L'effet de la rotondité de la Terre a été étudié par Gainville.<sup>66</sup> En utilisant une méthode de tracé de rayons, il a comparé les résultats obtenus avec une planète ronde et une Terre plate et a montré que, pour une distance source-récepteur donnée, la sphéricité induit un retard dans les temps d'arrivée. Ce décalage est d'autant plus important que l'altitude de réflexion ou la distance de propagation sont élevées. À titre indicatif, il peut varier entre 1 s et 10 s pour les premiers rebonds des signaux stratosphériques et thermosphériques. Toutefois, les formes d'onde ainsi que l'amplitude restent peu affectées. En conséquence, dans le cadre de cette thèse, le sol est simplement modélisé par une surface plane.

### Effet de la gravité et de la rotation terrestre

Bien que la force de gravité et la force de Coriolis jouent un rôle majeur dans la dynamique de l'atmosphère terrestre, elles ont une influence relativement faible sur la propagation des ondes infrasonores. À titre d'illustration, pour des fluctuations de pression  $p'$ , d'amplitude  $P$  et de pulsation  $\omega$ , les perturbations de masse volumique  $\rho'$  et du champ de vitesse  $\mathbf{u}'$  sont respectivement d'ordre  $P/\bar{c}^2$  et  $P/(\bar{\rho}\bar{c})$ ,  $\bar{c}$  étant la vitesse du son locale. En conséquence, les amplitudes des rapports  $\bar{\rho}\|\partial\mathbf{u}'/\partial t\|/|\rho'g|$  et  $\bar{\rho}\|\partial\mathbf{u}'/\partial t\|/(2\Omega_{\mathcal{T}}\|\mathbf{u}'g\|)$ , entre le terme inertiel et

respectivement le terme de gravité et le terme de Coriolis, sont données par

$$\frac{\left\| \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} \right\|}{|\rho' g|} \sim \frac{\bar{c}}{\omega g} \qquad \frac{\left\| \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} \right\|}{2\Omega_{\mathcal{T}} \|\mathbf{u}'\|} \sim \frac{\omega}{2\Omega_{\mathcal{T}}}$$

et valent environ 43.6 et 8640 pour  $\bar{c} = 340 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\omega = 2\pi \times 0.1 \text{ Hz}$ .

## Nomenclature des phases infrasonores

L'existence simultanée de multiples guides d'onde, les phénomènes de diffraction et la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère entraînent une division du front d'onde initial en plusieurs phases. Ces phases suivent des chemins bien distincts et leurs temps de propagation respectifs jusqu'à une station de mesure sont généralement différents. Ainsi, les enregistrements micro-barographiques les font apparaître avec différents temps d'arrivée, ce qui permet de les distinguer et d'en étudier la signature. Plusieurs nomenclatures ont été proposées dans la littérature pour les phases infrasonores.<sup>50,66,74,75,89,90</sup> Dans le cadre de ce travail, celle définie dans les thèses de Gainville<sup>66</sup> et Hanique-Cockenpot<sup>74</sup> est utilisée. De manière générale, des phases géométriques et non géométriques ou diffractées peuvent être distinguées. Les premières prennent le nom du guide d'onde dans lequel elles se propagent. Ainsi, des phases thermosphériques, stratosphériques et troposphériques sont typiquement observées.<sup>62,67,123</sup>

- Les **phases thermosphériques**,  $I_t$ , sont réfractées au-delà de 90 km d'altitude en raison du fort gradient de température. Dans le cas d'une source placée sur la surface terrestre, des phases thermosphériques basses,  $I_{ta}$ , et hautes,  $I_{tb}$ , peuvent exister. Les premières forment une caustique cuspidée autour de 110 km d'altitude. Les secondes sont retournées vers la surface terrestre à des altitudes supérieures. Du fait de la forte atténuation en haute atmosphère, elles ne sont généralement pas observées.
- Les **phases stratosphériques**,  $I_s$ , sont retournées vers le sol à une altitude de l'ordre de 50 km. Elles sont très sensibles aux variations du vent, le gradient thermique étant généralement insuffisant pour réfracter de manière significative les ondes infrasonores. Dans des conditions particulières, un couple de signaux stratosphériques,  $I_{sa}$  et  $I_{sb}$ , peut être observé (cf. annexe C).<sup>33,60,123,140,162</sup>
- Les **phases troposphériques**,  $I_{tr}$ , sont réfractées en deçà de la tropopause. Leur existence est strictement liée à la présence d'un fort vent troposphérique et dépend de la direction de propagation.

Parmi les phases non géométriques, il est possible de distinguer : les **réflexions partielles**,  $I_p$ , dues aux inhomogénéités de température et de vent d'échelles comparables aux longueurs d'onde et fréquences infrasonores ; les **phases diffractées**,  $I_d$ , résultant de la diffraction aux frontières des guides d'onde, au voisinage des caustiques et en bordure des zones d'ombre. La diffraction affectant principalement les basses fréquences,<sup>27</sup> l'amplitude de ces dernières est d'autant plus importante que le nombre d'onde est petit.

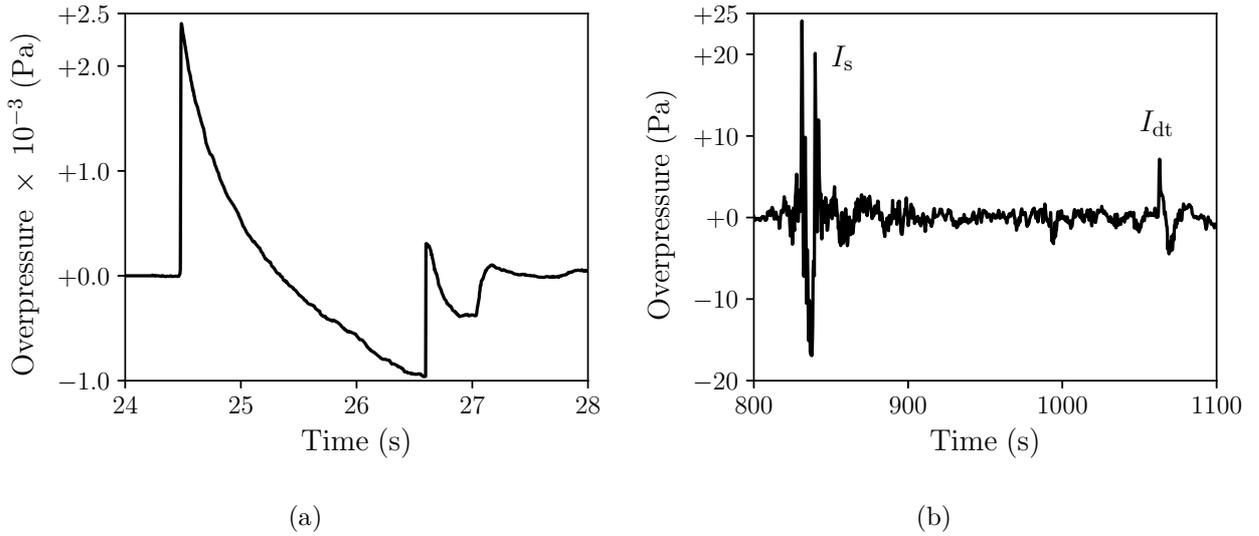


FIGURE 1.15: Signaux enregistrés durant l'expérience Misty Picture par les stations de mesure (a) Observer Area (à 8 km à l'ouest de la source) et (b) Alpine (à 247 km à l'ouest de la source).

À titre d'illustration, les signaux mesurés durant l'expérience Misty Picture par les stations Observer Area (à 8 km à l'ouest de la source) et Alpine (à 247 km à l'ouest de la source) sont tracés respectivement sur les figures 1.15(a) et 1.15(b). Le premier, enregistré au voisinage de la source, présente la forme en « N » typique des ondes générées par les explosions. Le deuxième consiste en deux phases principales : une phase stratosphérique  $I_s$ , entre 830 s et 840 s, et une phase thermosphérique diffractée  $I_{dt}$ , entre 1060 s et 1090 s. Ces deux phases ont une forme en « U », comme attendu pour une onde en « N » qui traverse les caustiques cuspidées stratosphérique et thermosphérique. Enfin, la phase  $I_{dt}$  se trouve dans la zone d'ombre géométrique et est due à la diffraction au niveau de la caustique thermosphérique.

## État de l'art de la modélisation de la propagation infrasonore

Dans cette section, les méthodes de simulation numérique de la propagation des ondes infrasonores dans l'atmosphère généralement utilisées sont décrites. Un état de l'art est fourni par Jensen *et al.*,<sup>82</sup> Norris *et al.*<sup>119</sup>

### Acoustique géométrique

Comme il a été mentionné auparavant, la théorie de l'acoustique géométrique est basée sur une approximation haute fréquence des équations de la mécanique des fluides et repose sur l'hypothèse selon laquelle les plus petites échelles spatiales et temporelles caractéristiques du

milieu propagatif sont grandes par rapport à la longueur d'onde et à la période de l'onde. Elle est décrite par Whitham,<sup>164</sup> Candel,<sup>31</sup> Pierce<sup>128,130</sup> ou encore Ostashev & Wilson.<sup>122</sup> Dans la théorie de l'acoustique géométrique, l'énergie acoustique est supposée se propager le long de trajectoires particulières, appelées rayons, qui peuvent être déterminées par résolution d'un système différentiel ordinaire.<sup>31</sup> L'évolution d'un signal le long des rayons est ensuite gouvernée par une équation de transport, telle que l'équation de Burgers augmentée.<sup>40,41,132,156</sup> L'approximation géométrique est très répandue dans le domaine de la propagation acoustique à longue distance,<sup>40,41,66,67,77,106,132,137,156</sup> notamment grâce à son faible coût de calcul numérique. Cependant, elle ne permet pas de tenir compte de la diffraction et de la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère et est limitée au régime des chocs faibles.

## Approximation parabolique

Un modèle simplifié qui permet de tenir compte des phénomènes de diffraction et diffusion par les petites échelles de l'atmosphère dérive d'une approximation parabolique des équations d'Euler hyperboliques. Cette approximation est justifiée lorsqu'il existe une direction privilégiée de propagation. Plusieurs formulations ont été proposées dans la littérature.<sup>4,9,10,47,82,120–122,145</sup> Les équations paraboliques présentent des limitations angulaires pénalisantes et sont généralement valables uniquement pour les régimes linéaire et faiblement non linéaire.

## Modes normaux

La méthode des modes normaux permet de surmonter la limitation angulaire associée à l'approximation parabolique. Elle peut être utilisée lorsque les effets non linéaires sont négligeables et le milieu de propagation est stratifié. En effet, sous ces hypothèses, la solution des équations de la mécanique des fluides se décompose sur une base de modes verticaux, qui peuvent être déterminés en résolvant un problème aux valeurs propres unidimensionnel. La méthode des modes normaux est très répandue dans le domaine de la propagation sous-marine,<sup>28,82</sup> mais des études de propagation acoustique dans l'atmosphère ont également été réalisées durant la dernière décennie.<sup>15,29,160,161</sup>

## Résolution directe des équations de la mécanique des fluides

La résolution directe des équations de Navier-Stokes permet de prendre en compte l'ensemble des phénomènes qui affectent la propagation acoustique. Bien que les méthodes aux éléments finis<sup>82</sup> et aux volumes finis<sup>54,117</sup> aient été utilisées dans la littérature, les schémas aux différences finies sont généralement préférées, surtout en raison de leur facilité d'implémentation informatique.<sup>48,50–53,92,93,110,111,124,165</sup> Indépendamment de l'algorithme numérique, l'aspect le plus contraignant de cette approche est le coût de calcul, qui peut s'avérer prohibitif pour des simulations à trois dimensions et à grande distance. L'utilisation de codes de calcul paralléli-

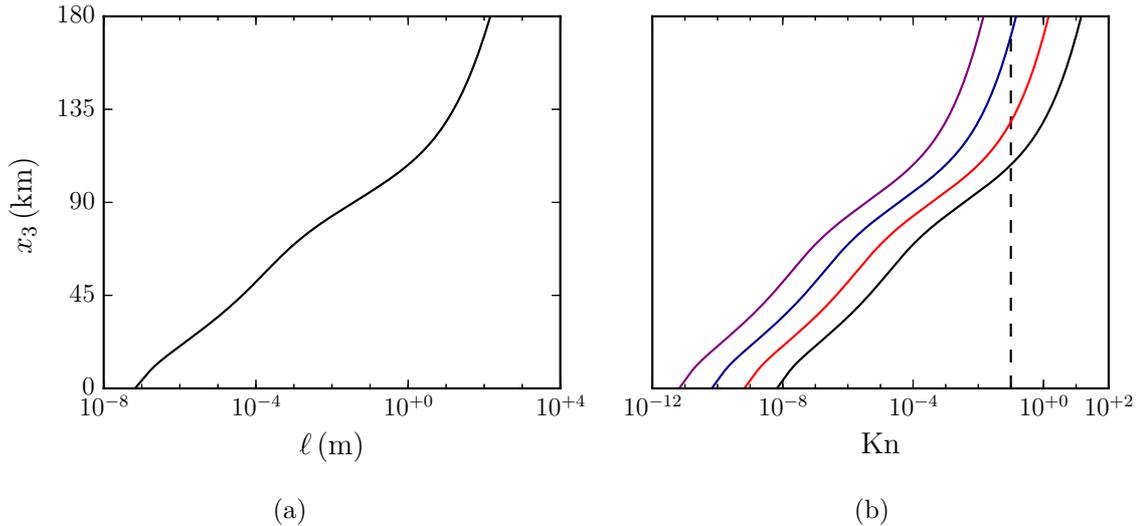


FIGURE 1.16: (a) Libre parcours moyen  $\ell$  en fonction de l'altitude  $x_3$ . (b) Nombre de Knudsen  $\text{Kn}$  en fonction de l'altitude  $x_3$  pour quatre longueurs d'onde différentes :  $\lambda = 10^1$  m (trait noir),  $\lambda = 10^2$  m (trait rouge),  $\lambda = 10^3$  m (trait bleu),  $\lambda = 10^4$  m (trait violet). Les tirets indiquent la limite conventionnelle de validité de l'approche continue,  $\text{Kn} = 0.1$ .

sés est généralement nécessaire.<sup>54,110,111</sup> Pour ces raisons, la résolution directe des équations de Navier-Stokes représente aujourd'hui un outil d'analyse de la physique de la propagation acoustique. Cependant, l'augmentation de la puissance des ordinateurs ainsi que les avancées dans les techniques de parallélisation permettent d'envisager, d'ici quelques années, des simulations en temps réel pour des applications opérationnelles.

## Validité de l'approche continue

Les modèles de propagation décrits dans cette section reposent sur une représentation continue de l'air. L'hypothèse de milieu continu est généralement acceptable si la longueur d'onde  $\lambda$ , qui est une distance caractéristique des variations macroscopiques des grandeurs décrivant le mouvement fluide, reste grande devant le libre parcours moyen  $\ell$ ,<sup>135</sup> ce dernier étant représentatif de l'échelle moléculaire. En raison de la diminution exponentielle de la densité atmosphérique dans la direction orthogonale à la surface terrestre, il est judicieux de vérifier la pertinence de cette hypothèse.<sup>73</sup> Les évolutions typiques avec l'altitude du libre parcours moyen  $\ell$  et du rapport  $\text{Kn} = \ell/\lambda$ , appelé nombre de Knudsen, sont tracées respectivement sur les figures 1.16(a) et 1.16(b). La limite conventionnelle de validité,  $\text{Kn} = 10^{-1}$ , est aussi reportée. Dans le domaine des infrasons, l'hypothèse de milieu continu n'est pas justifiée au-delà d'environ 140 km pour  $\lambda < 10^2$  m. Cependant, à cause des effets non linéaires et d'absorption, il est improbable que des ondes de longueurs d'onde inférieures à  $10^2$  m puissent se propager jusqu'à la thermosphère. Par ailleurs, l'énergie acoustique est essentiellement piégée entre le sol et 120 km d'altitude. Ainsi, l'approche continue est bien adaptée aux études réalisées dans le cadre de cette thèse.

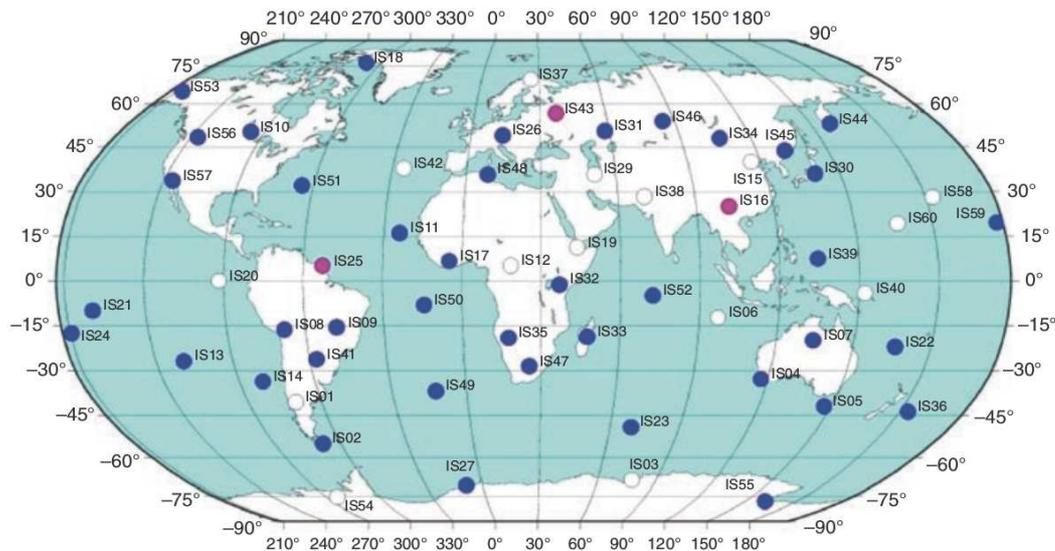


FIGURE 1.17: Stations micro-barométriques du réseau IMS. Les points bleus indiquent les stations certifiées, les points magenta celles en construction.<sup>34</sup>

## Contexte et objectifs de la thèse

La recherche dans le domaine de la propagation atmosphérique des ondes infrasonores a été fortement motivée durant les deux dernières décennies par le développement du Système de Surveillance International (International Monitoring System, IMS, en anglais). Ce dernier consiste entre autres en 60 stations micro-barométriques, capables d'enregistrer les signaux de fréquence dans l'intervalle  $[0.02 \text{ Hz}, 4 \text{ Hz}]$  (cf. figure 1.17), et est principalement destiné à la vérification du Traité d'Interdiction Complète des Essais Nucléaires (Comprehensive Test Ban Treaty, CTBT, en anglais).<sup>24,34</sup> Le réseau IMS est conçu pour pouvoir détecter et localiser toute explosion de charge supérieure à une kilotonne nucléaire (TNT). La faisabilité de la surveillance des tests clandestins est intimement liée à la capacité de discerner et caractériser, en termes d'amplitude et de fréquence dominante, une source infrasonore à partir de l'ensemble des enregistrements. En conséquence, l'évaluation de l'importance des effets non linéaires et dissipatifs sur les signaux mesurés à grande distance est cruciale pour permettre une analyse quantitative de la source. À présent, l'estimation de la puissance des explosions est basée sur des méthodes empiriques<sup>103,116,131,147</sup> et seul un nombre limité d'études théoriques a été réalisé à propos de l'influence de l'absorption atmosphérique et des non linéarités sur l'amplitude et sur le spectre des arrivées. De Groot-Hedlin<sup>48</sup> a simulé la propagation d'un signal acoustique vers la haute atmosphère et comparé les résultats obtenus avec et sans atténuation. Son approche était toutefois basée sur un modèle linéaire. Rogers & Gardner<sup>137</sup> ont analysé l'interaction entre phénomènes non linéaires et visqueux et Lonzaga *et al.*<sup>106</sup> ont présenté une illustration numérique dans un cas réaliste. Toutefois, ces deux derniers travaux n'ont pas tenu compte de la relaxation des constituants de l'air.

En raison de la diversité des sources, les ondes infrasonores sont également en train d'émerger comme moyen d'étude de la dynamique de l'atmosphère terrestre et d'analyse de certains phénomènes naturels.<sup>8</sup> Les enregistrements barométriques peuvent ainsi être utilisés comme entrée dans des algorithmes d'inversion qui permettent de reconstruire les profils verticaux de vitesse du son et de vent,<sup>2,3,39,58,94,100-102</sup> ou encore l'étude des ondes de gravité.<sup>17,112</sup> La découverte de nouvelles applications de la recherche sur les infrasons et la conséquente nécessité d'une analyse fine des signaux captés par les stations de mesure accroissent inévitablement le besoin d'une meilleure compréhension des phénomènes affectant la propagation atmosphérique. De ce point de vue, les outils classiques, basés sur l'acoustique géométrique, sur l'équation parabolique ou bien sur les modes normaux, s'avèrent insuffisants. Leur efficacité en termes de coût de calcul, qui est à l'origine de leur succès dans le domaine opérationnel, est obtenue au détriment de la complexité physique. La plupart de ces modèles repose en effet sur des hypothèses qui, de manière générale, ne sont pas complètement vérifiées. Des efforts remarquables ont été consacrés à l'étude de la propagation acoustique par résolution directe des équations de la mécanique des fluides ces dernières années. Une des premières simulations numériques tridimensionnelles du champ de pression infrasonore en régime linéaire et en l'absence de phénomènes d'absorption a été réalisée par Del Pino *et al.*<sup>54</sup> Aujourd'hui, la plupart des calculs est effectuée en deux dimensions<sup>50,74,92,93,110,111</sup> ou bien dans des configurations axisymétriques.<sup>51-53</sup> Cependant, la propagation atmosphérique est intrinsèquement tridimensionnelle : d'une part, les effets non linéaires sont liés à l'amplitude de l'onde qui est à son tour une fonction de la divergence géométrique du front ; d'autre part, l'atmosphère est généralement variable dans les trois directions de l'espace.

Dans ce contexte, trois objectifs ont été identifiés pour ce travail.

- En utilisant une méthode de tracé de rayons, une caractérisation des effets non linéaires, visqueux, thermiques et de relaxation sur les ondes infrasonores produites par des sources explosives est d'abord effectuée.
- Dans la lignée des travaux numériques effectués dans la dernière décennie, les premières simulations tridimensionnelles des équations de Navier-Stokes de la propagation non linéaire des ondes infrasonores dans l'atmosphère sont réalisées. Des sources de très grande amplitude, telles que l'explosion déclenchée durant l'expérience Misty Picture, et de fréquence de l'ordre de 0.1 Hz-0.2 Hz sont considérées. Les calculs permettent une analyse de la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère et de la diffraction par la caustique thermosphérique.
- L'évaluation de la précision des schémas numériques étant une étape cruciale dans le choix d'un algorithme de calcul, un dernier objectif est le développement de cas tests numériques spécifiques à la propagation atmosphérique à grande distance.

## Organisation du manuscrit

Le manuscrit s'articule en cinq chapitres. Dans le chapitre 2, une analyse des effets non linéaires et d'absorption est effectuée à l'aide d'une méthode de tracé de rayons. Les chapitres 3, 4 et 5 sont dédiés à des simulations numériques tridimensionnelles de la propagation non linéaire des ondes infrasonores. Dans le troisième, le domaine de calcul, la source acoustique, le milieu propagatif et les équations de Navier-Stokes sont introduits. Dans le quatrième, les schémas numériques employés sont présentés et leur précision est évaluée dans l'espace des nombres d'onde. Dans le cinquième, les résultats de différents calculs 3-D sont illustrés et une étude de la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère et de la diffraction au niveau de la caustique thermosphérique est réalisée. Dans le sixième chapitre, des cas tests spécifiques à la propagation atmosphérique à grande distance sont enfin proposés. Des solutions numériques de référence sont également fournies en deux dimensions pour la communauté des infrasons.



## CHAPITRE 2

# Caractérisation des effets non linéaires et d'absorption sur la propagation infrasonore par une méthode de tracé de rayons

Ce chapitre est consacré à la description des effets non linéaires et d'absorption sur la propagation atmosphérique d'ondes infrasonores produites par des sources explosives. L'analyse est effectuée jusqu'à des distances de propagation de l'ordre de quelques centaines de kilomètres en s'appuyant sur une approximation hautes fréquences des équations de la mécanique des fluides. Après une introduction générale, le modèle de propagation acoustique et l'algorithme de résolution numérique employé sont présentés. Les résultats obtenus sont ensuite illustrés et discutés.

Ce chapitre fait l'objet de l'article<sup>142</sup> "Characterization of absorption and non-linear effects in infrasound propagation using an augmented Burgers' equation," *Geophys. J. Int.*, **207**(3), 1432–1445, 2016.

## Introduction

Comme il a été indiqué dans le chapitre introductif, les sources explosives génèrent des ondes infrasonores de fréquence inférieure à quelques Hertz qui peuvent être mesurées jusqu'à de très grandes distances.<sup>30</sup> Les signaux enregistrés par les stations barométriques placées sur la surface terrestre se composent de phases qui se propagent au travers des différentes couches atmosphériques et qui peuvent atteindre des altitudes très élevées, supérieures à 100 kilomètres. De manière générale, des arrivées troposphériques, stratosphériques et thermosphériques sont observées au niveau du sol.<sup>62, 67, 123</sup>

L'atténuation atmosphérique joue un rôle fondamental dans la propagation acoustique à longue distance.<sup>149, 150</sup> Pour un gaz polyatomique chimiquement inerte, quatre mécanismes d'ab-

sorption peuvent être distingués. Les deux plus connus sont liés au cisaillement et à la conduction thermique. Le troisième résulte de la relaxation de l'énergie interne de rotation des molécules qui constituent le gaz atmosphérique. Enfin, le dernier est une conséquence de la relaxation de l'énergie interne de vibration. Les trois premiers phénomènes sont appelés classiques, pouvant être pris en compte par les équations de la mécanique des fluides pour un gaz en équilibre thermodynamique. Du fait de la stratification de l'atmosphère, l'impact des mécanismes d'atténuation dépend non seulement de la fréquence de l'onde mais aussi de la trajectoire suivie par le signal avant d'arriver à la station de mesure.<sup>48</sup> Plus précisément, dans le cas des infrasons, la relaxation vibrationnelle affecte principalement les phases troposphériques et stratosphériques, tandis que les phénomènes classiques constituent la source dominante d'absorption des phases thermosphériques, à cause de la réduction exponentielle avec l'altitude de la masse volumique du milieu.

La propagation des ondes produites par des sources explosives est généralement non linéaire.<sup>106,137</sup> Les effets non linéaires, eux aussi dépendants de la stratification atmosphérique, distordent les signaux acoustiques et provoquent la formation de chocs. La génération d'harmoniques et le décalage vers les basses fréquences qui en découlent induisent une redistribution de l'énergie entre les différentes composantes fréquentielles. Ainsi, l'absorption peut être remarquablement renforcée par les non linéarités. Réciproquement, la distorsion des formes d'onde peut être ralentie par les termes de dissipation.

Afin d'évaluer l'importance des effets non linéaires et d'absorption, une étude numérique de la propagation dans une atmosphère réaliste de signaux infrasonores produits par des sources explosives est ici réalisée. Elle s'appuie sur la théorie de l'acoustique géométrique, qui suppose que les plus petites échelles spatiales et temporelles caractéristiques du milieu sont grandes par rapport à la longueur d'onde et à la période de l'onde. Sous ces hypothèses, l'énergie acoustique se propage le long de trajectoires particulières, appelées rayons, qui peuvent être calculées en résolvant l'équation eikonale.<sup>31</sup> Dans le régime faiblement non linéaire, l'évolution de la forme d'onde le long des rayons est ensuite modélisée par une équation de transport, telle que l'équation de Burgers augmentée.<sup>40,41,132,156</sup> Cette méthodologie permet de prendre en compte à la fois les effets non linéaires et d'absorption avec un coût de calcul dérisoire, étant donnée la nature unidimensionnelle de l'équation de transport. Des approches analogues ont déjà été utilisées pour d'autres études bien connues dans la littérature.<sup>40,41,66,67,106,132,137,156</sup>

Dans cette analyse, une onde infrasonore est émise par une source ponctuelle placée au sol, cf. figure 2.1. Le signal initial est supposé connu à une certaine distance  $r$  et est ici modélisé par la forme d'onde proposée par Reed<sup>134</sup> pour les explosions. L'atmosphère est définie en spécifiant un profil vertical de vitesse du son qui reproduit les grandes échelles typiquement observées.<sup>66</sup> Les autres variables atmosphériques moyennes sont calculées à l'aide de l'équation d'équilibre hydrostatique et de la loi d'état des gaz parfaits. Par ailleurs, afin de simplifier l'interprétation des résultats, l'atmosphère est considérée au repos. Enfin, le modèle de Sutherland & Bass<sup>149,150</sup> est utilisé pour l'évaluation des termes d'absorption.

Ce chapitre se divise en trois parties. Dans la section 2.2, le modèle de propagation acoustique, incluant les équations pour la détermination des trajectoires de l'énergie acoustique ainsi que pour le calcul de la forme d'onde, est présenté. Une analyse théorique des termes non linéaire et d'absorption est aussi effectuée. Dans la section 2.3, la méthode numérique employée pour la résolution des ces équations est décrite. Les profils atmosphériques moyens et les paramètres des différentes simulations réalisées ainsi que les résultats obtenus sur des rayons stratosphériques et thermosphériques jusqu'à 325 km de distance de la source sont ensuite illustrés dans la section 2.4. Les conclusions de cette étude sont enfin présentées dans la section 2.5.

## Modèle de propagation acoustique

Dans le cadre de l'acoustique géométrique et en l'absence de vent, un rayon acoustique  $\mathbf{x}(t)$  est défini par le système d'équations différentielles ordinaires<sup>31</sup>

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \bar{c}\mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{dt} = (\mathbf{n} \cdot \nabla \bar{c})\mathbf{n} - \nabla \bar{c} \end{cases} \quad (2.1)$$

où le terme  $\bar{c}$  indique la vitesse du son du milieu non perturbé et  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal au front d'onde. Le système (2.1) doit être intégré à partir d'une surface d'onde initiale. Pour une source ponctuelle fixe, cette surface correspond à une sphère qui peut être paramétrée

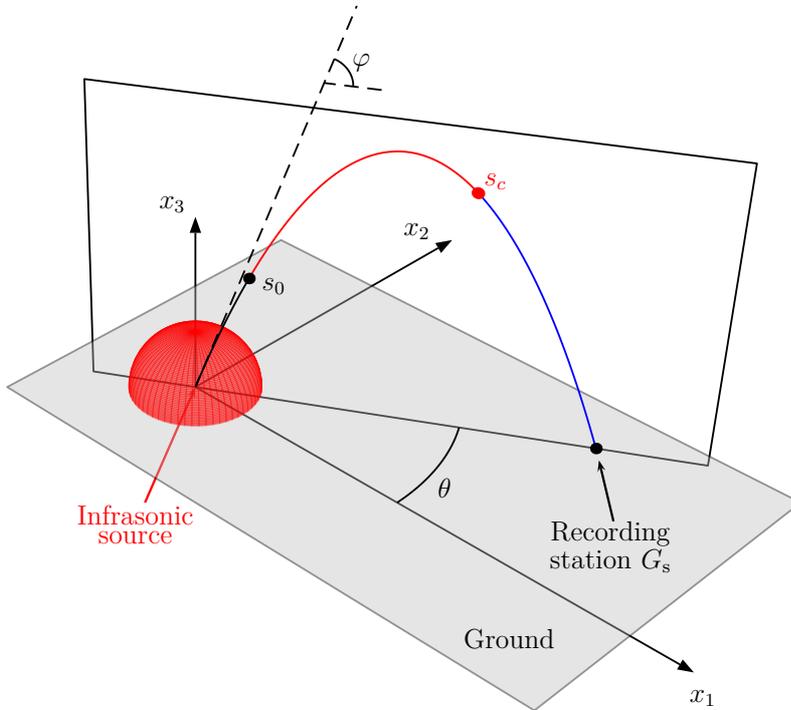


FIGURE 2.1: Représentation schématique du domaine physique. Un point source est placé à l'origine du système de coordonnées cartésiennes.

par les angles de longitude  $\theta$  et latitude  $\varphi$ . À une paire  $(\theta, \varphi)$  donnée correspond un et un seul rayon. L'atmosphère étant au repos, le front d'onde reste invariant par rapport à toute rotation autour de l'axe vertical  $x_3$  et le rayon défini par les angles  $(\theta, \varphi)$  se situe toujours dans un même plan. Par conséquent, il est suffisant d'analyser les rayons émis avec un angle longitudinal de  $\theta = 0^\circ$ . Dans ce cas, les conditions initiales nécessaires pour résoudre le système (2.1) sont

$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{n}(0) = \cos(\varphi)\mathbf{e}_1 + \sin(\varphi)\mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

la source ponctuelle étant placée à l'origine du domaine et  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , représentant les vecteurs unitaires des axes cartésiens.

Dans le régime faiblement non linéaire, l'évolution d'un signal  $p'(s, t_r)$  le long d'un rayon acoustique  $\mathbf{x}(t)$  peut être modélisée par l'équation de Burgers augmentée<sup>41</sup>

$$\frac{\partial p'}{\partial s} - \frac{\beta}{2\bar{\rho}\bar{c}^3} \frac{\partial p'^2}{\partial t_r} + \frac{p'}{2A} \frac{\partial A}{\partial s} - \frac{p'}{2\bar{\rho}\bar{c}} \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{c})}{\partial s} = \frac{\bar{\mu}_{cl}}{2\bar{\rho}\bar{c}^3} \frac{\partial^2 p'}{\partial t_r^2} + \sum_m \frac{\Delta\bar{c}_m}{\bar{c}^2} \int_{-\infty}^{t_r} e^{-(t_r-\tau)/\tau_m} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} d\tau \quad (2.3)$$

où

$$s \equiv \int_0^t \left[ \left( \frac{dx_1}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dx_3}{d\tau} \right)^2 \right]^{1/2} d\tau \quad (2.4)$$

est l'abscisse curviligne et  $t_r$  le temps retardé

$$t_r = t - \int_{s_0}^s \frac{1}{\bar{c}(\xi)} d\xi$$

$s_0$  étant un point de référence sur le rayon, où la condition initiale  $p'(s = s_0, t_r = t) = q_0(t)$  est spécifiée. Dans l'équation (2.3),  $\beta = (\gamma + 1)/2$  est le coefficient de non-linéarité,  $\gamma = 1.4$  désignant le rapport des chaleurs spécifiques. Lorsque seuls les deux premiers termes sont pris en compte, l'équation classique de Burgers est obtenue.<sup>59, 72, 128</sup> La fonction  $A(s)$  est directement liée à l'aire élémentaire  $d\Sigma(s) \equiv A(s)d\theta d\varphi$  délimitée par les quatre rayons émis avec les angles  $(\theta, \varphi)$ ,  $(\theta + d\theta, \varphi)$ ,  $(\theta, \varphi + d\varphi)$ ,  $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ , et est définie par l'expression

$$A(s) \equiv \|\mathbf{r}_\theta(s) \times \mathbf{r}_\varphi(s)\| \quad (2.5)$$

où les vecteurs  $\mathbf{r}_p = \partial\mathbf{x}/\partial p$ , avec  $p = \theta$  or  $p = \varphi$ , sont appelés éléments géodésiques. Ainsi, la troisième contribution modélise la divergence géométrique du front d'onde le long du rayon. Le quatrième terme est associé aux variations de masse volumique et de vitesse du son. Enfin, les phénomènes d'absorption sont représentés par le membre de droite de l'équation (2.3). Le premier terme est relatif aux mécanismes classiques et englobe les effets visqueux, thermiques et de relaxation rotationnelle, respectivement proportionnels à la viscosité dynamique  $\bar{\mu}$ , à la conductivité  $\bar{\kappa}$  et à la viscosité de volume  $\bar{\mu}_b$ . Le paramètre  $\bar{\mu}_{cl}$  est donné par

$$\bar{\mu}_{cl} = \frac{4}{3}\bar{\mu} + \frac{(\gamma - 1)}{c_p}\bar{\kappa} + \bar{\mu}_b \quad (2.6)$$

avec  $\bar{\kappa} = \bar{\mu}c_p/\text{Pr}$ ,  $c_p$  étant la chaleur spécifique à pression constante et  $\text{Pr}$  le nombre de Prandtl. La deuxième contribution est représentée par la relaxation vibrationnelle des molécules du milieu. Dans l'expression intégrale, la variable  $\tau_m$  indique le temps de relaxation relatif au composant  $m$  et  $\Delta\bar{c}_m$  est un coefficient associé aux variations de vitesse de phase induites par le mécanisme de relaxation  $m$ .

Afin de compenser les variations d'amplitude dues à la divergence géométrique et aux inhomogénéités de l'atmosphère, la fonction suivante est introduite

$$q = \left( \frac{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0 A}{\bar{\rho} \bar{c} A_0} \right)^{1/2} p' \quad (2.7)$$

où l'indice 0 indique que la variable est évaluée au point  $s_0$ . L'équation (2.3) se réécrit alors comme suit

$$\frac{\partial q}{\partial s} = S_{\text{nl}} + S_{\text{cl}} + S_{\text{vb}} \quad (2.8)$$

où les termes  $S_{\text{nl}}$ ,  $S_{\text{cl}}$  et  $S_{\text{vb}}$  représentent respectivement les effets non linéaires, de dissipation classique et de relaxation vibrationnelle,

$$S_{\text{nl}} = \frac{\beta_e}{2\bar{\rho}_0\bar{c}_0^3} \frac{\partial q^2}{\partial t_r}, \quad \beta_e = \beta \left( \frac{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^5 A_0}{\bar{\rho} \bar{c}^5 A} \right)^{1/2} \quad (2.9)$$

$$S_{\text{cl}} = \frac{\bar{\mu}_{\text{cl}}}{2\bar{\rho}\bar{c}^3} \frac{\partial^2 q}{\partial t_r^2} \quad (2.10)$$

$$S_{\text{vb}} = \sum_m \frac{\Delta\bar{c}_m}{\bar{c}^2} \int_{-\infty}^{t_r} e^{-(t_r-\tau)/\tau_m} \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} d\tau \quad (2.11)$$

et  $\beta_e$  est le coefficient de non linéarité effective. Il est important de noter que, comme anticipé dans l'introduction, les deux fonctions  $S_{\text{nl}}$  et  $S_{\text{cl}}$  augmentent lorsque la masse volumique ambiante diminue.

## Effets non linéaires et d'absorption

Lorsque le membre de droite de l'équation (2.8) est négligeable, la propagation est linéaire et sans atténuation. Dans ce cas, la fonction normalisée  $q$  ne varie pas avec l'abscisse curviligne  $s$  et le flux d'énergie acoustique, proportionnel à  $q^2$ , se conserve le long du rayon acoustique. Il s'ensuit que l'amplitude de la perturbation de pression  $p'$  évolue comme  $(\bar{\rho}\bar{c}/A)^{1/2}$ , tandis que sa forme reste inchangée.

De manière générale, les effets non linéaires et d'absorption ne peuvent pas être négligés. Une solution analytique de l'équation (2.8) incluant uniquement le terme source  $S_{\text{nl}}$  peut être obtenue en introduisant la variable<sup>40</sup>

$$\tilde{x}(s) = \int_{s_0}^s \frac{\beta_e(\xi)}{\beta} d\xi \quad (2.12)$$

Ainsi, l'équation (2.8) devient

$$\frac{\partial q}{\partial \tilde{x}} = \frac{\beta}{2\bar{\rho}_0\bar{c}_0^3} \frac{\partial q^2}{\partial t_r} \quad (2.13)$$

et, si  $q(\tilde{x} = 0, t_r = t) = q_0(t)$  désigne la condition initiale, la fonction  $q(\tilde{x}, t_r)$  est donnée par l'expression implicite

$$q(\tilde{x}, t_r) = q_0 \left( t_r + \frac{\beta \tilde{x} q(\tilde{x}, t_r)}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3} \right) \quad (2.14)$$

Le deuxième terme dans l'argument de  $q_0$  modifie la forme de l'onde et l'intensité de cette distorsion dépend de  $\tilde{x}$ . Pour cette raison, la variable  $\tilde{x}$  est souvent appelée distance de distorsion.<sup>40</sup> Par ailleurs, des solutions multivaluées peuvent être obtenues. Dans ce cas, le signal physique est déterminé en utilisant la règle des aires égales et en introduisant des chocs.<sup>72,164</sup>

Afin d'analyser plus en détail les effets non linéaires, de dissipation classique et de relaxation vibrationnelle, il s'avère utile d'étudier l'évolution de l'énergie  $E(s)$  du signal  $q$  le long d'un rayon acoustique. La fonction  $E(s)$  est définie par la relation

$$E(s) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} q^2(s, t_r) dt_r$$

dans l'espace temporel, ou, de manière équivalente, par l'expression

$$E(s) = \int_0^{+\infty} \mathcal{E}_q(s, f) df$$

dans l'espace de Fourier,  $\mathcal{E}_q(s, f) = 2|\hat{q}(s, f)|^2$  étant le spectre physique associé à la composante spectrale  $\hat{q}(s, f)$  de fréquence  $f$

$$\hat{q}(s, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(s, t_r) e^{-i2\pi f t_r} dt_r$$

L'équation de Burgers augmentée peut se mettre sous la forme suivante dans l'espace de Fourier

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial s} = + \frac{i\pi f \beta_e}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3} \hat{\varepsilon} - \alpha \hat{q} - i d_{vb} \hat{q} \quad (2.15)$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'absorption totale et le paramètre  $d_{vb}$  caractérise la dispersion induite par le terme de relaxation vibrationnelle,  $\hat{\varepsilon}(s, f)$  étant la transformée de Fourier de l'énergie  $q^2$

$$\hat{\varepsilon}(s, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2(s, t_r) e^{-i2\pi f t_r} dt_r$$

En utilisant les propriétés du théorème de convolution et en remarquant que la transformée de Fourier d'une fonction réelle est hermitienne, la variable  $\hat{\varepsilon}$  peut être ultérieurement développée comme

$$\hat{\varepsilon}(s, f) = \int_0^f \hat{q}(s, \zeta) \hat{q}(s, f - \zeta) d\zeta + 2 \int_f^{+\infty} \hat{q}(s, \zeta) \hat{q}(s, \zeta - f) d\zeta$$

Ainsi, la distorsion du signal  $q$  est associée à une interaction entre chaque composante de Fourier de fréquence  $f$  et ses harmoniques inférieures et supérieures. Par ailleurs, le transfert d'énergie s'effectue à la fois vers les basses et hautes fréquences.

Le complexe conjugué de l'équation (2.15) s'écrit

$$\frac{\partial \hat{q}^*}{\partial s} = -\frac{i\pi f \beta_e}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3} \hat{\varepsilon}^* - \alpha \hat{q}^* + id_{vb} \hat{q}^* \quad (2.16)$$

En multipliant les expressions (2.15) et (2.16) respectivement par  $\hat{q}^*$  et  $\hat{q}$ , et en sommant les résultats, l'équation de Lin<sup>5</sup> est obtenue

$$\frac{\partial \mathcal{E}_q}{\partial s} = \frac{\beta_e}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3} \mathcal{T} + \mathcal{D} \quad (2.17)$$

où les termes de transfert non linéaire  $\mathcal{T}$  et de dissipation  $\mathcal{D}$  sont donnés par les relations

$$\mathcal{T}(s, f) = i2\pi f [\hat{q}^*(s, f) \hat{\varepsilon}(s, f) - \hat{q}(s, f) \hat{\varepsilon}^*(s, f)] \quad (2.18)$$

$$\mathcal{D}(s, f) = -2\alpha(s, f) \mathcal{E}_q(s, f)$$

En intégrant l'équation (2.17) sur toutes les fréquences, il vient

$$\frac{dE}{ds} = \frac{\beta_e}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3} \int_0^{+\infty} \mathcal{T} df + \int_0^{+\infty} \mathcal{D} df \quad (2.19)$$

Cette expression peut aussi être retrouvée en multipliant l'équation (2.8) par  $q$  et en intégrant le résultat dans le temps. La dérivée de la fonction  $E(s)$  est alors donnée par

$$\frac{dE}{ds} = \frac{\beta_e}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3} \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{\partial q^2}{\partial t_r} dt_r + \int_{-\infty}^{+\infty} 2q(S_{cl} + S_{vb}) dt_r \quad (2.20)$$

Par conséquent, en comparant les deux expressions, il s'ensuit que

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{T} df = \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{\partial q^2}{\partial t_r} dt_r = \frac{2q^3}{3} \Big|_{t_r \rightarrow -\infty}^{t_r \rightarrow +\infty} = 0$$

le signal  $q$  s'annulant lorsque  $t_r$  tend vers  $\pm\infty$ . En conséquence, le terme de transfert non linéaire provoque une redistribution de l'énergie entre composantes spectrales, mais n'affecte pas l'énergie totale  $E$ .

Le coefficient d'absorption  $\alpha = \alpha_{cl} + \alpha_{vb}$  contient à la fois les contributions classique et de relaxation vibrationnelle

$$\alpha_{cl}(s, f) = \frac{\bar{\mu}_{cl}(s)(2\pi f)^2}{2\bar{\rho}(s)\bar{c}(s)^3} \quad (2.21)$$

$$\alpha_{vb}(s, f) = \sum_m \frac{2\pi f_m(s) \Delta \bar{c}_m(s)}{\bar{c}^2(s)} \frac{(f/f_m(s))^2}{1 + (f/f_m(s))^2} \quad (2.22)$$

où  $f_m = 1/(2\pi\tau_m)$  représente la fréquence de relaxation de la molécule  $m$ . Pour une abscisse  $s$  donnée sur le rayon acoustique, le terme  $\alpha_{cl}$  est proportionnel à  $f^2$ , tandis que le coefficient

$\alpha_{vb}$  atteint des valeurs importantes uniquement pour des fréquences  $f$  proches de  $f_m$ , mais est pratiquement négligeable pour  $f > 10^2 f_m$  ou  $f < 10^{-2} f_m$ .

Une dernière remarque concerne la dispersion induite par le terme de relaxation. Il est possible de démontrer<sup>72</sup> que la vitesse de phase  $c_\varphi$  est donnée par

$$c_\varphi = \bar{c} + \sum_m \left[ \frac{(f/f_m)^2}{1 + (f/f_m)^2} \Delta \bar{c}_m + \mathcal{O}(\Delta \bar{c}_m^2) \right]$$

et augmente monotoniquement de sa valeur à l'équilibre  $\bar{c}$  pour  $f = 0$  jusqu'à la vitesse du son gelée  $\bar{c} + \sum_m \Delta \bar{c}_m$  pour  $f \rightarrow \infty$ . Cet effet est toutefois très faible pour la plage des fréquences infrasonores.

Enfin, il est important de noter que, dans le modèle de propagation présent, les rayons acoustiques sont calculés en utilisant la valeur à l'équilibre  $\bar{c}$  de la vitesse du son. En conséquence, ils ne dépendent ni de l'amplitude de l'onde ni de la fréquence. Cette conclusion n'est généralement pas vérifiée lorsque un signal d'amplitude finie se propage dans un milieu dispersif. Cependant, dans le régime faiblement non linéaire, l'erreur produite par cette approximation s'avère assez faible. Une discussion plus détaillée sur ce sujet est disponible dans l'ouvrage de Hamilton & Blackstock.<sup>72</sup>

## Algorithme numérique

L'algorithme numérique est constitué de deux étapes. Dans un premier temps, les rayons qui relient la source avec le récepteur d'intérêt sont calculés, ce qui permet de déterminer l'abscisse curviligne  $s$  ainsi que le rapport  $A/A_0$ . Dans un deuxième temps, l'équation de Burgers augmentée est intégrée pour chaque rayon. Enfin, la perturbation de pression au récepteur est simplement donnée par la somme de toutes les contributions. Dans cette section, la procédure numérique employée dans cette étude est brièvement décrite.

### Calcul des rayons, de l'abscisse curviligne et du terme de divergence géométrique

La recherche des rayons reliant la source avec un récepteur  $G_s$  donné, appelés rayons propres, consiste à déterminer les angles  $\varphi$  pour lesquels la distance  $d(\varphi) = \left\| G_s^{sh}(\varphi) - G_s \right\|$ , entre les points  $G_s^{sh}$  et  $G_s$ , s'annule. Pour ce faire, une grille de valeurs discrètes  $\varphi_i$  est d'abord construite. Ensuite, pour chaque  $\varphi_i$ , le rayon  $\mathbf{x}(t; \varphi_i)$  est calculé en résolvant le système (2.1)-(2.2) à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 développée par Berland *et al*<sup>13</sup> et ici désignée par le sigle RK4Ber. De cette manière, une approximation de la fonction  $d(\varphi)$  est obtenue. Les rayons propres sont enfin donnés par les zéros de  $d(\varphi)$ . Pour chacun des rayons, l'abscisse curviligne est déterminée au travers de l'expression (2.4). En ce qui concerne le terme de divergence géométrique  $A/A_0$ , il est possible de montrer que, pour  $\theta = 0^\circ$  et sous l'hypothèse de symétrie

de rotation par rapport à l'axe vertical  $x_3$ , le vecteur  $\mathbf{r}_\theta$  est perpendiculaire au plan  $x_1x_3$  et égal à  $\mathbf{r}_\theta = x_1\mathbf{e}_2$ . En suivant Candel,<sup>31</sup> l'élément géodésique  $\mathbf{r}_\varphi$  peut être déterminé en intégrant le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}_\varphi}{dt} = (\mathbf{r}_\varphi \cdot \nabla\bar{c})\mathbf{n} + \bar{c}\mathbf{n}_\varphi \\ \frac{d\mathbf{n}_\varphi}{dt} = (\mathbf{n} \cdot \nabla\bar{c})\mathbf{n}_\varphi + (\mathbf{n}_\varphi \cdot \nabla\bar{c})\mathbf{n} - [\mathbf{v}_\varphi - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\varphi)\mathbf{n}] \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $\mathbf{v}_\varphi = (\mathbf{r}_\varphi \cdot \nabla)\nabla\bar{c}$ , avec les conditions initiales  $\mathbf{r}_\varphi(0) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{n}_\varphi(0) = (-\sin(\varphi)\mathbf{e}_1 + \cos(\varphi)\mathbf{e}_3)$ . L'aire du tube de rayon  $A$  est enfin donnée par l'équation (2.5). En guise d'exemple, lorsque la vitesse du son  $\bar{c}$  est constante dans le milieu, les rayons sont des lignes droites, la dérivée du vecteur unitaire  $\mathbf{n}_\varphi$  est aussi constante et  $\mathbf{r}_\varphi = \bar{c}t\mathbf{n}_\varphi$ . Par conséquent, il vient  $A(s) = \bar{c}t x_1 = (\bar{c}t)^2 \cos(\varphi)$ , conformément à ce qui est attendu dans le cas d'une configuration à symétrie sphérique.

## Intégration numérique de l'équation de Burgers augmentée

Dans un milieu inhomogène, l'aire  $A$  peut s'annuler le long des rayons acoustiques. Le lieu géométrique des points  $s_c$  où la variable  $A$  devient égale à zéro ou, de manière équivalente, où deux rayons infiniment proches s'intersectent est appelé caustique.<sup>88</sup> En propagation atmosphérique, deux types de caustiques sont typiquement rencontrés : les cuspidées ou fronces et les plis. L'effet de ces singularités sur la propagation acoustique n'est pas pris en compte par l'équation de Burgers augmentée et nécessite un traitement *ad-hoc*. Dans le cadre de cette étude, comme suggéré par Rogers & Gardner,<sup>137</sup> un déphasage est appliqué au signal acoustique lorsqu'il traverse une caustique. Plus précisément, si  $q_{\text{in}}(t_r) = q(s_c, t_r)$  désigne la perturbation normalisée de pression qui arrive au point  $s_c$ , le signal sortant est donné par la transformée de Hilbert de  $q_{\text{in}}(t_r)$

$$q_{\text{out}}(t_r) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_{\text{in}}(\tau)}{\tau - t_r} d\tau \quad (2.24)$$

Par ailleurs, dans le voisinage de  $s_c$ , l'équation de Burgers augmentée ne peut pas être intégrée avec la forme (2.8), le coefficient  $\beta_e$  tendant vers l'infini. Pour cette raison, Gainville<sup>66</sup> propose le changement de variable  $\eta = |s - s_c|^{1/2}$ . Ainsi, l'équation (2.8) se réécrit comme

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = \text{sgn}(s - s_c)\eta \frac{\beta_e}{\rho_0 \bar{c}_0^3} \frac{\partial q^2}{\partial t_r} + 2 \text{sgn}(s - s_c)\eta [S_{\text{cl}} + S_{\text{vb}}] \quad (2.25)$$

De cette manière, le paramètre  $\beta_e$  reste fini lorsque  $s \rightarrow s_c$ , l'aire du tube de rayon  $A(s)$  dans le voisinage de  $s_c$  étant donnée par

$$A(s) = A'(s_c)(s - s_c) + \mathcal{O}((s - s_c)^2)$$

En pratique, le rayon acoustique est divisé en deux parties, à gauche et à droite du point  $s_c$  (cf. figure 2.1). L'équation (2.25) est d'abord intégrée sur le premier segment, de  $\eta_0 = |s_0 - s_c|^{1/2}$

à  $\eta = 0$ . La transformée de Hilbert (2.24) est ensuite appliquée au signal temporel  $q(\eta = 0, t_r)$  obtenu pour  $s = s_c$ . Le résultat est enfin utilisé comme condition initiale pour l'intégration de l'équation (2.25) sur le segment droit, de  $\eta = 0$  jusqu'à la station d'enregistrement  $G_s$ .

L'intégration numérique de l'équation (2.25),  $\partial q / \partial \eta = \mathcal{F}(\eta, q)$ , est effectuée sur les deux segments au travers du schéma RK4Ber. À chaque sous-étape de l'algorithme, la dérivée temporelle du terme non linéaire est calculée sur une grille uniforme de pas  $\Delta t_r$  en utilisant le schéma explicite aux différences finies sur 11 points proposé par Bogey & Bailly,<sup>20</sup> désigné dans ce qui suit par le sigle FDo11p55. Le terme visqueux est obtenu avec un schéma aux différences finies standard d'ordre 2. La relaxation vibrationnelle est prise en compte à l'aide de la technique récemment développée par Yamamoto *et al.*<sup>156</sup> La fonction  $S_{vb}$  est réécrite sous la forme<sup>128</sup>

$$S_{vb}(\eta, q) = \sum_m \frac{\Delta \bar{c}_m}{\bar{c}^2} \frac{\partial q_m}{\partial t_r}$$

où les variables auxiliaires  $q_m$  vérifient l'expression

$$\left[ \frac{1}{\tau_m} + \frac{\partial}{\partial t_r} \right] q_m = \frac{\partial q}{\partial t_r} \quad (2.26)$$

La solution analytique de l'équation (2.26) est donnée par

$$\begin{aligned} q_m(\eta, t_r) &= e^{-t_r/\tau_m} q_m(\eta, -\infty) + \int_{-\infty}^{t_r} e^{-(t_r-\tau)/\tau_m} \frac{\partial q}{\partial \tau} d\tau \\ &= e^{-\Delta t_r/\tau_m} q_m(\eta, t_r - \Delta t_r) + I(\eta, t_r) \end{aligned}$$

avec

$$I(\eta, t_r) = \int_{t_r - \Delta t_r}^{t_r} e^{-(t_r-\tau)/\tau_m} \frac{\partial q}{\partial \tau} d\tau \quad (2.27)$$

En remplaçant la fonction exponentielle dans l'intégrale par sa moyenne dans l'intervalle  $[t_r - \Delta t_r, t_r]$ , les variables  $q_m$  peuvent être calculées explicitement

$$q_m(\eta, t_r) = e^{-\Delta t_r/\tau_m} q_m(\eta, t_r - \Delta t_r) + I_a(\eta, t_r)$$

où

$$I_a(\eta, t_r) = e^{-\Delta t_r/(2\tau_m)} [q(\eta, t_r) - q(\eta, t_r - \Delta t_r)] \quad (2.28)$$

Enfin, les dérivées  $\partial q_m / \partial t_r$  sont à nouveau déterminées par l'intermédiaire du schéma FDo11p55. Pour un signal harmonique de la forme  $q = e^{-i\omega t_r}$ , l'erreur  $|I - I_a|$  est donnée par l'expression

$$|I - I_a| = \frac{\omega(1 + 4\omega^2\tau_m^2)^{1/2}}{24\tau_m^2} \Delta t_r^3 + \mathcal{O}(\Delta t_r^4) \quad (2.29)$$

Par conséquent, l'approximation  $I_a$  de l'intégrale  $I$  est formellement d'ordre 3 lorsque  $\Delta t_r$  tend vers zéro. Des iso-contours de l'erreur relative  $\epsilon_I = |I - I_a|/|I|$  sont tracés sur la figure 2.2 en fonction de la pulsation adimensionnée  $\omega \Delta t_r$  et du rapport  $\Delta t_r / \tau_m$ . La droite verticale  $\omega \Delta t_r =$

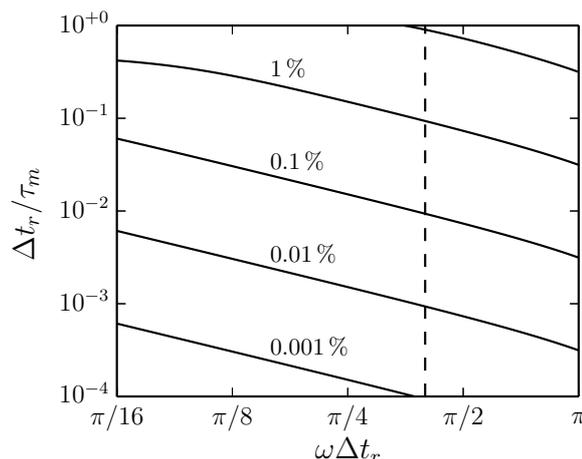


FIGURE 2.2: Erreur relative  $\epsilon_I = |I - I_a|/|I|$  en fonction de la pulsation sans dimension  $\omega\Delta t_r$  et du rapport  $\Delta t_r/\tau_m$ . Les tirets verticaux représentent la limite de résolution du schéma FD11p55, qui est de l'ordre de 5 points par période.

$\omega_a\Delta t_r$ , avec  $\omega_a\Delta t_r = 2\pi/5$ , correspondant à la limite de résolution du schéma FDo11p55,<sup>20</sup> est aussi reportée. À titre d'illustration, pour  $\Delta t_r = 0.1\tau_m$ ,  $\epsilon_I$  est inférieur à 1% pour toutes les fréquences angulaires  $\omega < \omega_a$ .

Enfin, les fréquences non résolues par le schéma FDo11p55 sont éliminées par l'intermédiaire d'un filtre sélectif.<sup>20</sup> Une technique de capture de choc est également utilisée pour le traitement des discontinuités.<sup>21</sup> Les détails de ces algorithmes seront présentés dans le chapitre 4.

## Étude des effets non linéaires et d'absorption

En utilisant la méthodologie décrite dans la section précédente, une étude de la propagation acoustique à longue distance de signaux infrasonores est réalisée. Dans cette section, l'atmosphère moyenne, la forme d'onde initiale et les paramètres de simulation sont d'abord présentés. Les résultats obtenus pour différentes amplitudes et fréquences de source sont ensuite illustrés et une discussion autour des effets non linéaires et d'absorption est menée.

### Atmosphère

#### Profils atmosphériques moyens

L'atmosphère moyenne est un milieu stratifié défini en spécifiant la vitesse du son  $\bar{c} = \bar{c}(x_3)$ . Le profil  $\bar{c}(x_3)$  utilisé est illustré sur la figure 2.3a. Deux guides d'onde sont engendrés : un guide d'onde stratosphérique, entre la surface terrestre et l'altitude du premier maximum local de  $\bar{c}$ , autour de  $x_3 = 53.5$  km, et un guide d'onde thermosphérique. La température moyenne  $\bar{T}(x_3)$  est calculée au travers de la relation  $\bar{T}(x_3) = \bar{c}^2(x_3)/(\gamma r)$ , où la constante spécifique des gaz  $r$  vaut  $r = 287.06 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $\gamma = 1.4$ . La pression  $\bar{p}(x_3)$  est obtenue en résolvant l'équation de

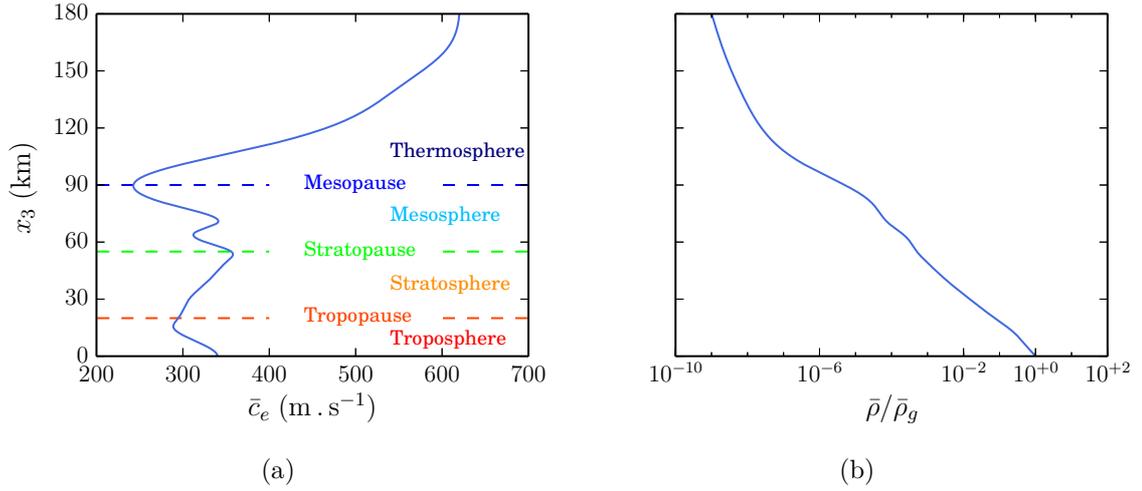


FIGURE 2.3: Atmosphère moyenne. Profils de vitesse du son (a) et de masse volumique (b) en fonction de l'altitude  $x_3$ .

l'équilibre hydrostatique

$$\frac{d\bar{p}}{dx_3} = -\bar{\rho}g = -\frac{g}{r\bar{T}}\bar{p} \quad (2.30)$$

où  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$  est l'accélération de gravité. L'équation (2.30) est intégrée numériquement avec une pression au sol fixée à  $\bar{p}_g = 101325 \text{ Pa}$ . Enfin, le profil de masse volumique  $\bar{\rho}(x_3)$  est déterminé à partir de l'équation d'état  $\bar{\rho} = \bar{p}/(r\bar{T})$ . La fonction  $\bar{\rho}(x_3)$  est tracée sur la figure 2.3b. Il est important de noter la diminution spectaculaire de  $\bar{\rho}(x_3)$  sur l'axe  $x_3$  : le rapport entre les masse volumiques à 110 km d'altitude et au sol est de l'ordre de  $10^{-8}$ .

## Termes d'absorption

La viscosité dynamique moyenne  $\bar{\mu}$  est déterminée par la loi de Sutherland<sup>149,150</sup>

$$\bar{\mu}(x_3) = \bar{\mu}_{\text{ref}} \left( \frac{\bar{T}(x_3)}{\bar{T}_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \frac{\bar{T}_{\text{ref}} + \bar{S}}{\bar{T}(x_3) + \bar{S}} \quad (2.31)$$

où  $\bar{\mu}_{\text{ref}} = 1.8192 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ,  $\bar{T}_{\text{ref}} = 293.15 \text{ K}$ ,  $\bar{S} = 117 \text{ K}$ . La viscosité de volume  $\bar{\mu}_b$  est calculée comme une fraction de la viscosité dynamique<sup>128</sup>  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\mu}_b(x_3) = 0.6\bar{\mu}(x_3)$ , et le nombre de Prandtl est fixé à  $\text{Pr} = 0.72$ . Quatre composants de l'air contribuent majoritairement à l'absorption par relaxation vibrationnelle : l'oxygène  $\text{O}_2$ , l'azote  $\text{N}_2$ , le dioxyde de carbone  $\text{CO}_2$  et l'ozone  $\text{O}_3$ . Les temps de relaxation  $\tau_m(x_3)$  et les incréments de vitesse du son  $\Delta\bar{c}_m(x_3)$  pour ces constituants sont déterminés en utilisant les expressions développées par Sutherland & Bass.<sup>149,150</sup> Le coefficient d'atténuation  $\alpha$  ainsi obtenu est tracé sur la figure 2.4 en fonction de la fréquence  $f$  et de l'altitude  $x_3$ . Des iso-contours du rapport  $\alpha_{\text{cl}}/\alpha_{\text{vb}}$  sont aussi illustrés de manière à identifier les couches atmosphériques où les mécanismes classiques et

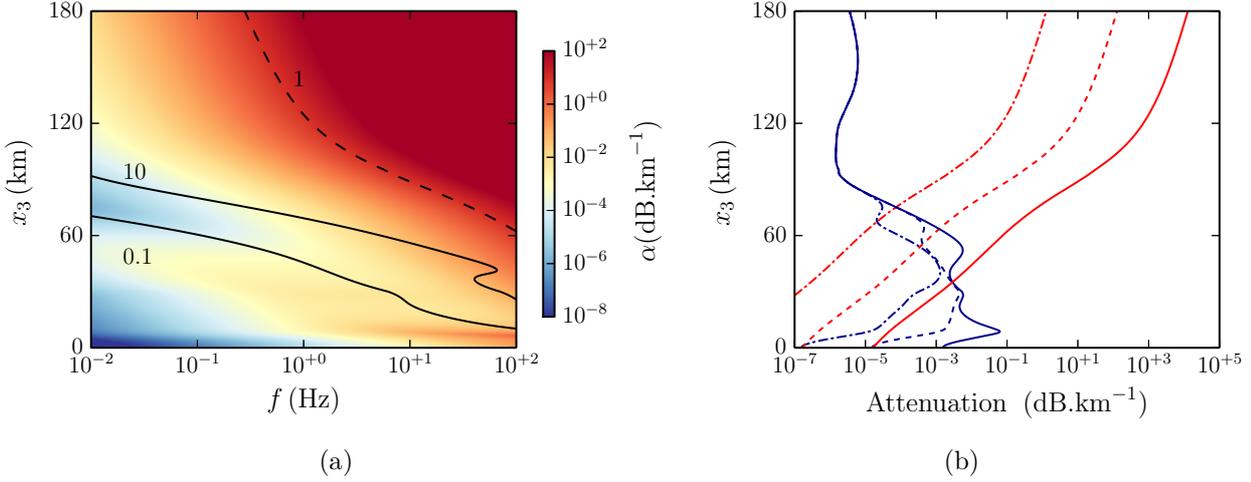


FIGURE 2.4: (a) Coefficient d'atténuation  $\alpha$  ( $\text{dB.km}^{-1}$ ) en fonction de la fréquence  $f$  et de l'altitude  $x_3$ . --- Iso-contour  $\alpha = 1 \text{ dB.km}^{-1}$ . — Iso-contour du rapport  $\alpha_{\text{cl}}/\alpha_{\text{vb}}$ . (b) Coefficients d'atténuation  $\alpha_{\text{vb}}$  (traits bleus) et  $\alpha_{\text{cl}}$  (traits rouges) en fonction de l'altitude  $x_3$  pour  $f = 0.1 \text{ Hz}$  (trait mixte),  $f = 1 \text{ Hz}$  (tirets) et  $f = 10 \text{ Hz}$  (traits continus)

de relaxation vibrationnelle sont dominants. Pour des fréquences inférieures à 10 Hz, en raison de la décroissance exponentielle de la masse volumique atmosphérique, l'absorption classique devient prépondérante dans la haute atmosphère, au-delà d'environ 60 km d'altitude. En guise d'exemple, pour  $f = 0.1 \text{ Hz}$ , le coefficient  $\alpha_{\text{cl}}$  est de l'ordre de  $0.45 \text{ dB.km}^{-1}$  à  $x_3 = 140 \text{ km}$ , ce qui implique une diminution d'amplitude de 1% sur une distance de 0.2 km. Au contraire, dans la troposphère et stratosphère, l'atténuation des ondes infrasonores est due principalement aux phénomènes de relaxation vibrationnelle. Cependant, le coefficient  $\alpha_{\text{vb}}$  reste petit pour des fréquences inférieures à environ 1 Hz. Ce comportement est aussi visible sur la figure 2.5(a), où les contributions de  $\alpha_{\text{cl}}$  et  $\alpha_{\text{vb}}$  sont illustrées pour trois fréquences différentes,  $f = 0.1 \text{ Hz}$ ,  $f = 1 \text{ Hz}$  et  $f = 10 \text{ Hz}$ . À titre d'illustration, pour  $f = 0.1 \text{ Hz}$ , l'absorption par relaxation vibrationnelle est en moyenne de l'ordre de  $10^{-4} \text{ dB.km}^{-1}$  entre la surface terrestre et 60 km d'altitude. Par conséquent, une distance de propagation d'environ  $10^3 \text{ km}$  serait nécessaire pour que l'amplitude du signal  $q$  se réduise de 1%. Globalement, l'atténuation par relaxation vibrationnelle augmente avec la fréquence dans la troposphère et stratosphère. En guise d'exemple, pour  $f = 10 \text{ Hz}$ ,  $\alpha_{\text{vb}}$  vaut en moyenne  $10^{-2} \text{ dB.km}^{-1}$  jusqu'à 60 km d'altitude, avec un pic d'environ  $10^{-1} \text{ dB.km}^{-1}$  autour de  $x_2 = 9 \text{ km}$ .

Les fréquences de relaxation  $f_m$  des quatre constituants considérés sont tracés sur la figure 2.5(b) en fonction de l'altitude  $x_2$ . L'absorption étant maximale pour  $f = f_m$ , la contribution la plus importante à l'atténuation des infrasons au dessous de la mésosphère est due à la relaxation vibrationnelle de l'oxygène  $\text{O}_2$  et de l'azote  $\text{N}_2$ .

La dispersion due au terme de relaxation vibrationnelle est toujours très faible dans notre cas. À titre d'exemple, pour la plage de fréquences étudiée, la valeur prédite par le modèle de Sutherland & Bass pour le rapport  $c_\varphi/\bar{c}$  est inférieure à  $7 \times 10^{-3}$  jusqu'à 140 km d'altitude.

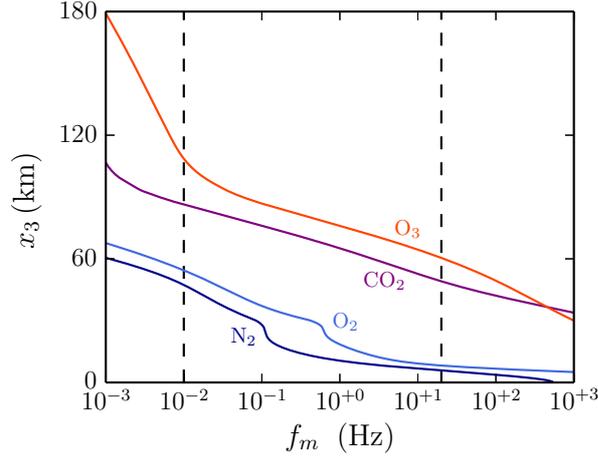


FIGURE 2.5: Fréquences de relaxation  $f_m$  de l'oxygène  $O_2$ , de l'azote  $N_2$ , du dioxyde du carbone  $CO_2$  et de l'ozone  $O_3$  en fonction de l'altitude  $x_2$ . Les tirets représentent la plage des fréquences infrasonores [0.01 Hz, 20 Hz].

Dans le modèle de propagation utilisé dans l'étude présente, la relaxation vibrationnelle est le seul mécanisme de dispersion. Le terme  $S_{c1}$  ne permet qu'une approximation de l'absorption classique et n'inclut pas d'effets dispersifs.<sup>128,133</sup> Sutherland & Bass,<sup>149</sup> Bass *et al.*,<sup>6</sup> et de Groot-Hedlin<sup>48</sup> ont toutefois souligné que la relaxation rotationnelle pourrait également induire une augmentation de la vitesse de propagation au-delà d'environ 100 km d'altitude. Cet effet serait d'autant plus important que la fréquence est élevée. En utilisant un modèle de propagation linéaire, Bass *et al.*<sup>6</sup> ont aussi fait remarquer que les composantes spectrales affectées par cet incrément de célérité seraient aussi les plus atténuées. Ainsi, ils ont conclu que la dispersion provoquée par la relaxation rotationnelle est difficilement observable en pratique. Par ailleurs, dans le cas des ondes acoustiques produites par des explosions sur la surface terrestre, cet effet de dispersion serait improbable aussi à cause des non linéarités, qui induisent globalement un décalage vers les basses fréquences.

### Forme d'onde initiale

Afin d'intégrer l'équation de Burgers augmentée, une condition initiale  $q_0$  doit être spécifiée. Dans le cadre de cette étude, la forme d'onde  $q_0$  est supposée connue à une distance  $r$  de 4 km de la source et est modélisée par l'expression proposée par Reed<sup>134</sup> pour les explosions

$$q_0(t) = Q_0 \left(1 - \frac{t}{T_+}\right) \left(1 - \frac{t}{T_0}\right) \left[1 - \left(\frac{t}{T_0}\right)^2\right] \Pi_{[0,T_0]}(t) \quad (2.32)$$

où  $Q_0$  est l'amplitude initiale,  $T_0$  la durée totale du pulse,  $T_+$  la durée de la phase positive et  $\Pi_{[0,T_0]}$  la fonction porte. Le coefficient  $T_+$  est égal à  $7T_0/25$  de manière à ce que l'aire sous la courbe de  $q_0(t)$  soit nulle. Les paramètres  $Q_0$  et  $T_+$  dépendent de la charge de la source  $W$ , qui représente le rapport entre l'énergie de l'explosion étudiée et celle d'une explosion de référence

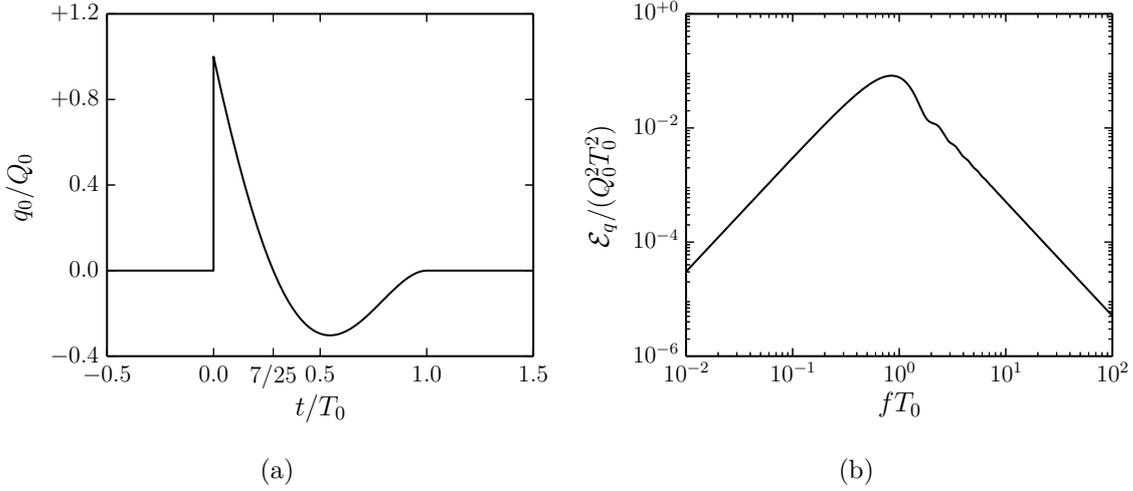


FIGURE 2.6: (a) Signature initiale  $q_0$  normalisée par rapport à son amplitude  $Q_0$ . (b) Spectre physique  $\mathcal{E}_q$ .

de 1 kg de trinitrotoluène (TNT). Comme suggéré par Gainville,<sup>67</sup> les expressions suivantes pour  $Q_0$  et  $T_+$ , dérivées en interpolant les données tabulées de Kinney & Graham,<sup>86</sup> sont employées :  $Q_0 = 0.82 \text{ m} \times \bar{p}_g z^{-1}$  et  $T_+ = 0.0041 \text{ s} \times (2W)^{1/3}$ , où  $z = r/(2W)^{1/3}$  est une distance normalisée. Un facteur 2 pour la charge de la source  $W$  est par ailleurs introduit pour des explosions au niveau de la surface terrestre. La signature  $q_0$  normalisée par rapport à son amplitude  $Q_0$  est tracée sur la figure 2.6(a) en fonction du temps adimensionné  $t/T_0$ . La perturbation de pression présente un choc à l'instant  $t/T_0 = 0$ , suivi par une phase négative régulière. Le spectre physique  $\mathcal{E}_q$  correspondant est illustré sur la figure 2.6(b) en fonction de la fréquence normalisée  $fT_0$ . La fréquence  $f_p$  du maximum de  $\mathcal{E}_q$  vaut approximativement  $f_p \simeq 0.85/T_0$  et environ 91% de l'énergie totale du signal est contenue dans l'intervalle  $f \in [0, 6f_p]$ .

## Paramètres de simulation

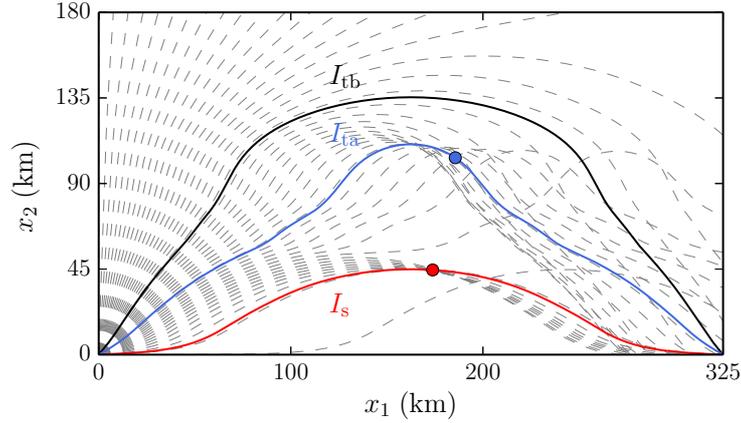
Le signal enregistré au point  $G_s = (325, 0 \text{ km}, 0 \text{ km})$  est analysé pour trois valeurs différentes de la charge  $W$ , comme reporté dans la Table 2.1. Les trois cas seront désignés respectivement par les lettres  $A$ ,  $B$  and  $C$ . Les amplitudes et fréquences centrales correspondantes sont représentatives d'une plage assez large de sources impulsives, allant des éruptions volcaniques<sup>136</sup> jusqu'aux explosions de grande charge.<sup>67</sup>

Le profil vertical de vitesse du son  $\bar{c}$  choisi pour cette étude introduit deux caustiques de type fonce dont les points de rebroussement se situent respectivement dans la stratosphère et basse thermosphère. Comme montré sur la figure 2.7, trois rayons relie la source avec la station de mesure  $G_s$ . Le rayon inférieur, émis avec un angle  $\varphi \simeq 2.496^\circ$ , atteint des altitudes de l'ordre de 45 km et traverse la caustique stratosphérique. Les deux rayons supérieurs montent jusqu'à 110.6 km et 135.4 km avant d'être réfléchis vers la surface terrestre. Ils sont émis avec des angles de  $\varphi \simeq 30.23^\circ$  et  $\varphi \simeq 50.23^\circ$ . Il est important de remarquer que seul le rayon thermosphérique

Cas	$W$	$Q_0$ (Pa)	$T_0$ (s)	$T_+$ (s)	$f_p$ (Hz)
A	$4 \times 10^6$	$4.154 \times 10^3$	2.930	0.8204	0.29
B	$4 \times 10^3$	$4.154 \times 10^2$	0.293	0.0820	2.90
C	$4 \times 10^1$	$8.950 \times 10^1$	0.063	0.0176	13.5

TABLE 2.1: Amplitude  $Q_0$ , durée totale  $T_0$ , durée de phase positive  $T_+$  et fréquence centrale  $f_p$  pour trois charges de source  $W$ .

inférieur traverse la caustique thermosphérique, tandis que l'aire  $A(s)$  ne s'annule pas sur le rayon supérieur.



(a)

FIGURE 2.7: Rayons acoustiques. Les symboles bleu et rouge indiquent les positions où l'aire du tube de rayon s'annule.

Les simulations sont effectuées avec un pas temporel constant  $\Delta t_r$ , qui dépend de la plus haute fréquence  $\omega_a \Delta t_r$  à résoudre. À titre d'illustration, suivant la discussion du paragraphe précédent, la fréquence  $f_a = \omega_a / (2\pi)$  pourrait être choisie égale à  $f_a = 20 f_p = 270$  Hz pour le cas C. En considérant une limite de résolution de cinq points par période pour le schéma FDo11p55, la valeur maximale du pas temporel  $\Delta t_r$  vaudrait  $7.4 \times 10^{-4}$  s. Ainsi, pour le cas C,  $\Delta t_r$  est fixé à  $10^{-4}$  s, ce qui implique que la fréquence la plus élevée proprement calculée est de  $f_a = 2$  kHz. Comme il a été remarqué dans la section 2.3, le terme  $S_{vb}$  n'est pas bien résolu sur les segments du rayon acoustique où  $\tau_m(s) < \Delta t_r$ . Cependant, dans ces régions, les composantes spectrales du signal qui sont affectées par la relaxation vibrationnelle possèdent une énergie négligeable et sont éliminées par la procédure de filtrage sélectif.

Le pas spatial  $\Delta \eta$  est contraint pour des raisons de stabilité numérique (cf. section 4.2.6 du chapitre 4) par le maximum de la viscosité cinématique totale  $\bar{\nu}_{cl} = \bar{\mu}_{cl} / \bar{\rho}$ , qui atteint des valeurs très élevées sur les rayons thermosphériques. Afin d'éviter un coût de calcul prohibitif, un pas  $\Delta \eta$  variable est choisi. En guise d'exemple, pour le cas B,  $\Delta \eta$  est compris entre  $3 \times 10^{-3} \text{ m}^{1/2}$  et  $3 \times 10^{-4} \text{ m}^{1/2}$  pour le segment situé avant la caustique du rayon thermosphérique inférieur.

Une dernière remarque concerne les conditions aux limites. Avant d'atteindre les caustiques, le signal  $q(\eta, t_r)$  est à support compact. Ainsi, il suffit d'intégrer l'équation de Burgers augmentée sur un domaine  $[\min t_r, \max t_r]$  incluant le pulse et imposer la condition  $q = 0$  aux extrémités. Après avoir effectué la transformée d'Hilbert aux points de caustique, la fonction  $q_{\text{out}}(\eta_c, t_r)$  présente un comportement asymptotique de la forme

$$q_{\text{out}}(\eta_c, t_r) \sim \frac{\chi_0}{t_r} + \frac{\chi_1}{t_r^2} + \dots \quad |t_r| \rightarrow \infty$$

où les termes  $\chi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , sont les moments de  $q_{\text{out}}(\eta_c, t_r)$ . Par conséquent, pour  $s > s_c$ , le signal  $q$  ne s'annule pas pour un temps  $t_r$  fini et des problèmes numériques peuvent apparaître à cause de la troncature du domaine de calcul. Dans le cadre de ce travail, la stratégie suivante est adoptée. En supposant que la moyenne du signal reste égale à zéro jusqu'au point  $\eta_c$ , il vient  $\chi_0 = 0$  et  $q_{\text{out}}(\eta_c, t_r) \sim 1/t_r^2$ . Pour cette raison, au-delà des caustiques, la condition  $\partial q / \partial t_r + 2q/t_r = 0$  est appliquée aux bornes du maillage. Néanmoins, les extrémités  $\min t_r$ ,  $\max t_r$  sont prises suffisamment loin de l'origine afin que la partie centrale de la solution ne soit pas affectée par les erreurs possibles aux limites du domaine de calcul.

## Résultats

### Cas A. Explosion de grande amplitude.

Le signal de pression enregistré à la station de mesure  $G_s$  est tracé sur la figure 2.8. Les résultats obtenus uniquement avec les termes source  $S_{\text{nl}}$  et  $(S_{\text{nl}} + S_{\text{cl}})$  sont aussi reportés. Les trois courbes sont pratiquement superposées, ce qui indique que la propagation du front d'onde initial est dominée par les effets non linéaires. Le terme de dissipation est en effet responsable de l'absorption des hautes fréquences, qui sont concentrées au niveau des chocs. Deux arrivées peuvent être distinguées. La phase stratosphérique, dénotée  $I_s$ , est observée entre les instants de temps  $t = 1040$  s et  $t = 1060$  s et présente une forme en « U », comme attendu pour une onde en « N » qui traverse une caustique. Le maximum de surpression est d'environ 28 Pa. La deuxième arrivée est enregistrée entre  $t = 1160$  s et  $t = 1300$  s et consiste en deux phases thermosphériques : une phase inférieure, labélisée  $I_{\text{ta}}$ , et une phase supérieure, indiquée par le sigle  $I_{\text{tb}}$ . La première a une forme d'onde en « U », la dernière est une onde en « N ». Leur niveau maximal est relativement faible, de l'ordre de 1.5 Pa.

L'évolution de la perturbation de pression normalisée  $q$  le long du rayon thermosphérique inférieur avant la caustique thermosphérique est tracée sur la figure 2.9(a). À cause des non-linéarités, le signal initial se transforme en une onde en « N », qui s'allonge lors de la propagation vers la haute atmosphère. La durée  $T(s)$  est d'environ 4 s à  $s_1 = 44.2$  km, 22 s à  $s_2 = 175.5$  km et 50 s à  $s = s_c = 224$  km. En conséquence, le maximum  $Q(s)$  de la perturbation de pression normalisée  $q$  suit approximativement le comportement théorique  $Q(s) \propto T^{-1}(s)$ , valable en l'absence d'effets dissipatifs.<sup>72, 128</sup>

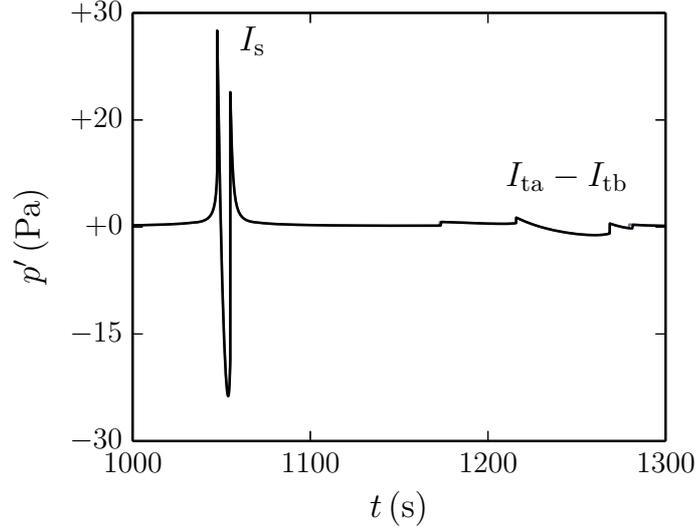


FIGURE 2.8: Signaux  $p'$  enregistrés au point  $G_s$  dans le cas  $A$  avec les termes source ( $S_{nl}$ ) (tirets noirs), ( $S_{nl} + S_{cl}$ ) (trait gris), ( $S_{nl} + S_{cl} + S_{vb}$ ) (trait noir).

L'évolution de la perturbation de pression normalisée  $q$  le long du rayon thermosphérique inférieur au-delà de la caustique thermosphérique est représentée sur la figure 2.9(b). Le signal initial au point  $s = s_c$  est une onde en « U », résultat de la transformée de Hilbert d'une forme en « N ». Pour  $s > s_c$ , deux chocs sont générés au niveau des pics et, comme montré par Rogers & Gardner,<sup>137</sup> le signal devrait à nouveau tendre vers une onde en « N ». Toutefois, l'augmentation exponentielle de la masse volumique du milieu durant la propagation au-delà du point de caustique atténue la distorsion non linéaire. La forme d'onde apparaît gelée pour  $s \gtrsim s_l = 250$  km. Cet effet peut être expliqué à l'aide de la figure 2.9(c), où la distance de distorsion  $\tilde{x}(s)$  est tracée en fonction de l'abscisse curviligne  $s$ . Pour  $s \gtrsim s_l$ , le gradient  $d\tilde{x}/ds$  devient négligeable et, quelle que soit la distance physique parcourue par l'onde au-delà du point  $s_l$ , la variable  $\tilde{x}$  reste constante. Ainsi, d'après l'équation (2.14), le taux de distorsion du signal tend à s'annuler. Ce phénomène, appelé *waveform freezing* en anglais,<sup>40</sup> se vérifie en général durant toutes les phases descendantes, l'onde se propageant dans un milieu avec masse volumique exponentiellement croissante. Il s'ensuit que la durée et la fréquence centrale des signaux enregistrés sur la surface terrestre dépendent principalement de l'allongement non linéaire durant la propagation vers la haute atmosphère et au niveau des caustiques.

La perturbation de pression normalisée  $q$  obtenue sur le rayon thermosphérique supérieur au point  $s = 245.2$  km et la densité spectrale d'énergie  $\mathcal{E}_q$  correspondante sont tracées respectivement sur les figures 2.10(a) et 2.10(b). Des régions différentes peuvent être identifiées dans le spectre. La fonction  $\mathcal{E}_q$  atteint sa valeur maximale pour  $f_p = 0.007$  Hz et environ 93% de l'énergie totale du signal est contenue dans l'intervalle  $[0, 0.04]$  Hz. Pour des fréquences  $f$  dans la plage intermédiaire  $[0.04, 0.4]$  Hz, la dissipation est négligeable et les maxima de  $\mathcal{E}_q$  diminuent suivant le comportement asymptotique  $\sim f^{-2}$ , comme attendu pour une onde en « N » (cf.

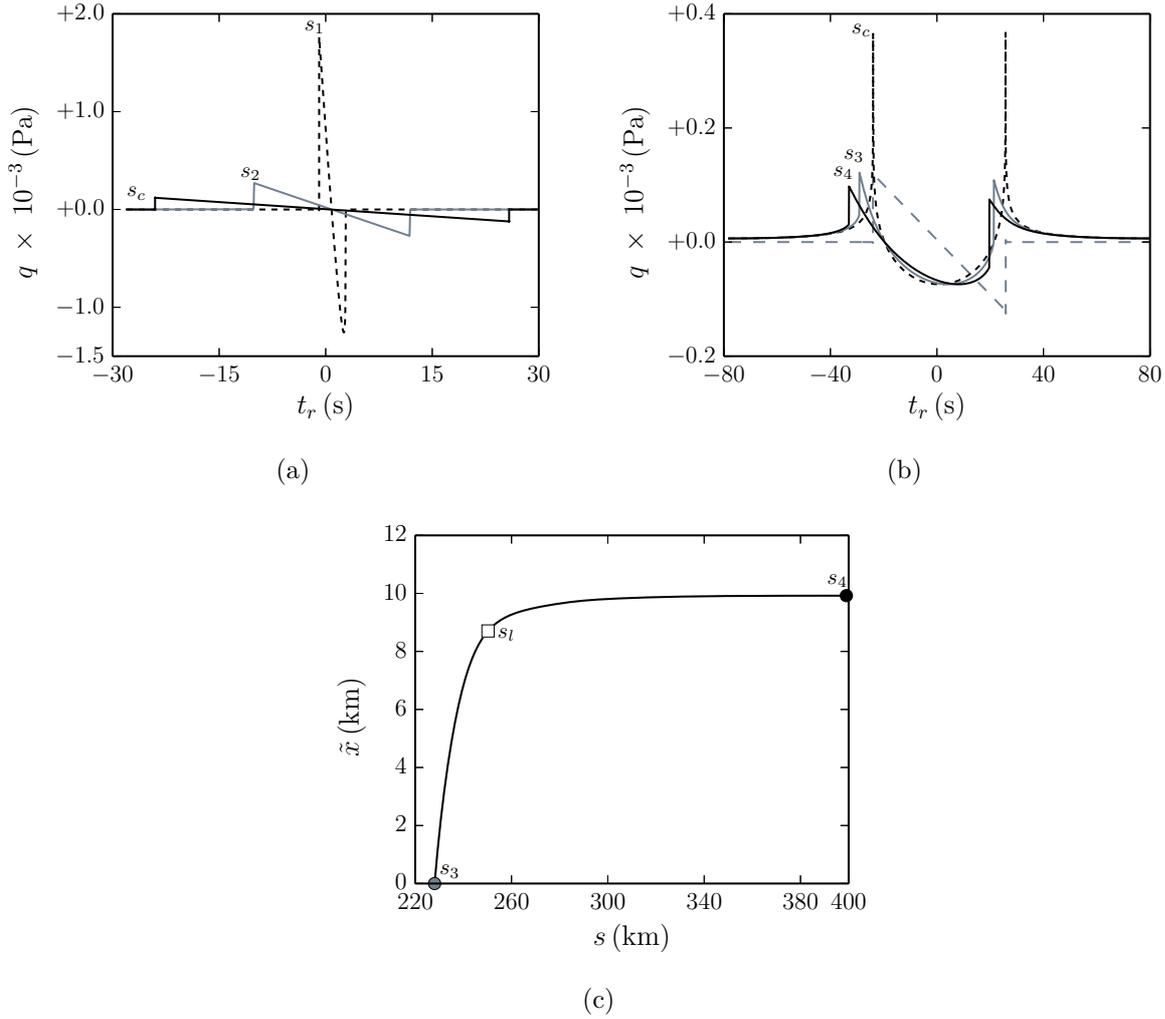


FIGURE 2.9: Résultats pour le cas *A* sur le rayon thermosphérique inférieur. (a) Signaux  $q$  obtenus aux points  $s_1 = 44.2$  km (tirets noirs),  $s_2 = 175.5$  km (trait gris) et  $s_c$  (trait noir) avant la caustique. (b) Signaux  $q$  enregistrés aux points  $s_c = 224$  km (tirets noirs),  $s_3 = 228$  km (trait gris) et  $s_4 = 399$  km (trait noir) après la caustique. (c) Distance de distorsion  $\tilde{x}$  calculée par rapport au point  $s = s_3$  en fonction de l'abscisse curviligne  $s$ .

annexe A.1). Enfin, pour  $f > 0.4$  Hz, l'absorption devient importante et la fonction  $\mathcal{E}_q$  décroît brusquement avec  $f$ . Le terme  $\mathcal{T}$  de l'équation de Lin (2.17) associé à ce signal est tracé sur la figure 2.10(c). Son signe oscillant avec  $f$ , le transfert non linéaire s'effectue à la fois vers les harmoniques inférieures et supérieures. Sur la figure 2.10(c), la fonction  $\Psi(s, f)$  définie par l'expression

$$\Psi(s, f) = \int_0^f \mathcal{T}(s, \zeta) d\zeta$$

est aussi tracée. Elle représente la quantité nette d'énergie transférée des composantes spectrales de fréquence supérieure à  $f$  vers celles de fréquence inférieure à  $f$ . À cause de la génération non linéaire des basses fréquences induite par l'allongement du signal, la variable  $\Psi(s, f)$  atteint un

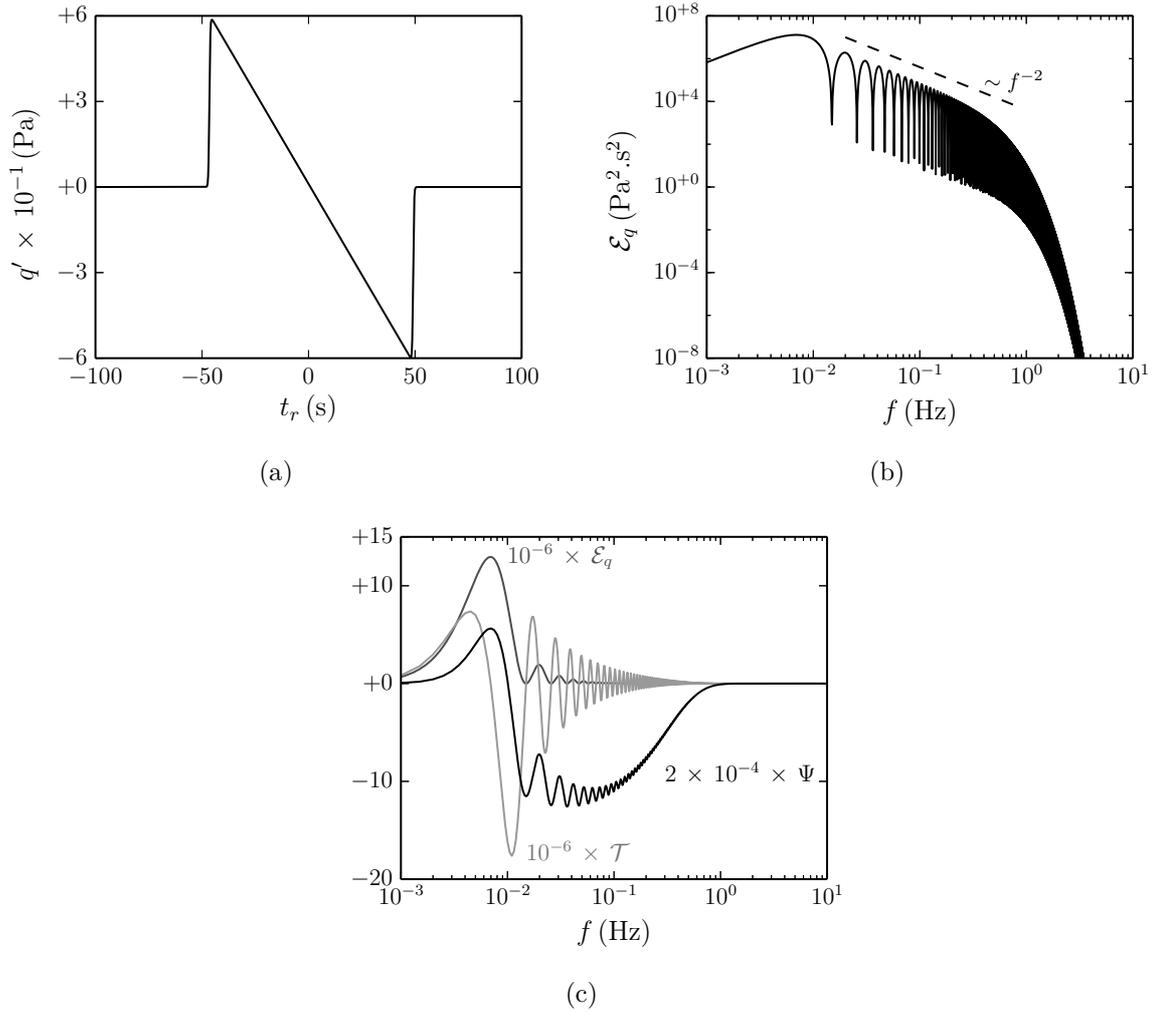


FIGURE 2.10: Cas A. (a) Signaux  $q$  enregistrés au point  $s = 245.2 \text{ km}$  sur le rayon thermosphérique supérieur et (b) densité spectrale d'énergie  $\mathcal{E}_q$ . (c) Terme de transfert non linéaire  $10^{-6} \times \mathcal{T}$  (trait gris clair), flux d'énergie des hautes fréquences vers les basses fréquences  $5 \times 10^{-3} \times \Psi$  (trait noir) et densité spectrale d'énergie (trait gris).

maximum local autour de  $f = f_p$ . Néanmoins, au-delà de ce point, la fonction  $\Psi(s, f)$  diminue et devient négative, ce qui indique que, en dépit du décalage fréquentiel, l'énergie acoustique est transférée préférentiellement vers les hautes fréquences.

Les signaux obtenus dans l'approximation linéaire aux points de caustique  $s_c$  des rayons stratosphérique et thermosphérique inférieur sont montrés respectivement sur les figures 2.11(a) et 2.11(b). Dans les deux cas, la relaxation vibrationnelle a une influence très faible sur les formes d'onde. Le terme classique joue un rôle marginal sur la trajectoire stratosphérique, mais provoque une forte atténuation de la phase thermosphérique inférieure. L'amplitude  $Q(s_c)$  de cette dernière arrivée vaut environ  $0.179 Q_0$  et son énergie  $E(s_c)$  correspond approximativement au 19.7% de la valeur initiale  $E(s_0)$ . Il est important de remarquer que, si le terme non linéaire était aussi pris en compte, le rapport  $E(s_c)/E(s_0)$  serait de l'ordre de 0.048, quatre fois inférieur

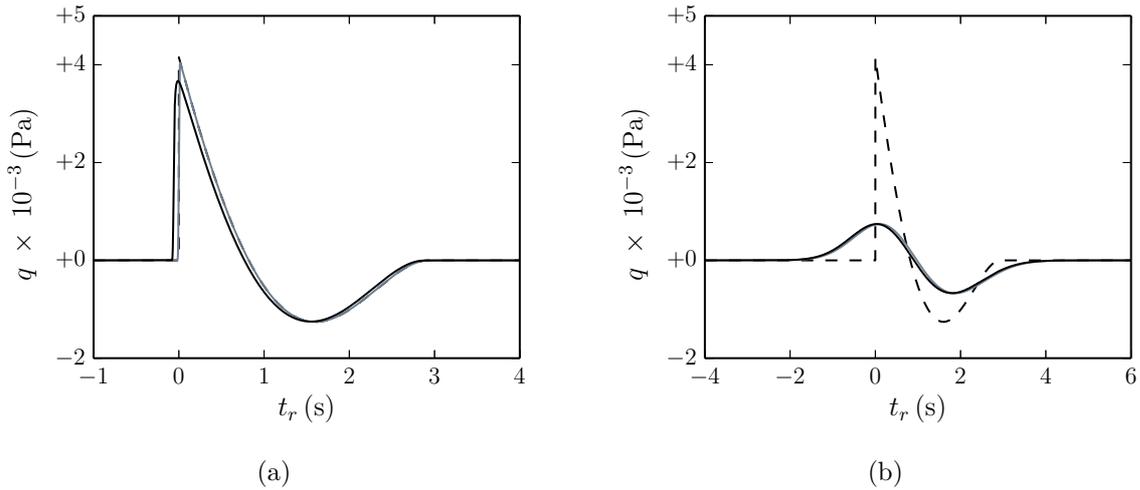


FIGURE 2.11: Cas A. Signaux  $q$  obtenus à la caustique sur les rayons (a) stratosphérique et (b) thermosphérique inférieur, avec les termes source ( $S_{cl}$ ) (trait noir) et ( $S_{cl} + S_{vb}$ ) (trait gris). Le front d'onde initial est aussi tracé (tirets noirs).

au résultat obtenu dans le cas linéaire. Cet effet est une conséquence du transfert d'énergie mentionné auparavant vers les hautes fréquences, qui sont préférentiellement atténuées par les phénomènes d'absorption classiques.

**Cas B. Explosion d'amplitude modérée.**

Les arrivées stratosphérique et thermosphérique inférieure enregistrées au point  $G_s$  sont tracées respectivement sur les figures 2.12(a) et 2.12(b). La première a une durée d'environ 1 s

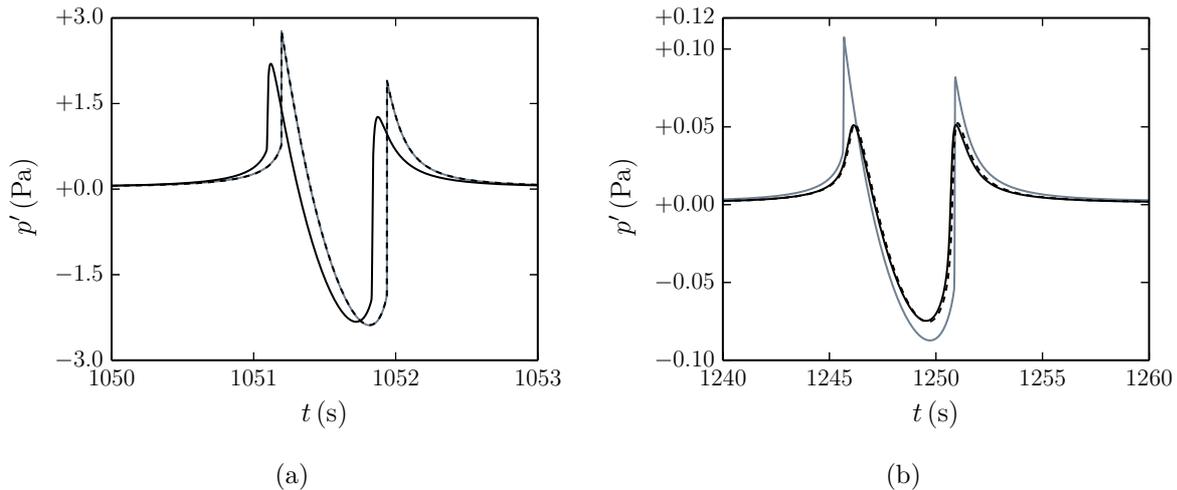


FIGURE 2.12: Cas B. Arrivées (a) stratosphérique et (b) thermosphérique inférieure enregistrées à la station de mesure  $G_s$  avec les termes source ( $S_{nl}$ ) (tirets noirs), ( $S_{nl} + S_{cl}$ ) (trait gris), ( $S_{nl} + S_{cl} + S_{vb}$ ) (trait noir).

et une amplitude maximale de l'ordre de 1 Pa. La dernière a une durée plus élevée, mais son amplitude est dix fois plus petite. En ce qui concerne l'arrivée stratosphérique, l'écart entre les résultats obtenus avec les termes source  $S_{nl}$  et  $(S_{nl} + S_{cl})$  est très faible, ce qui indique que l'absorption classique joue un rôle marginal sur la forme d'onde. Au contraire, la relaxation vibrationnelle induit une diminution d'amplitude de 20%. Le signal stratosphérique apparaît aussi dispersé. Toutefois, le décalage temporel est très faible en comparaison avec le temps d'arrivée de la phase. Un comportement opposé est observé sur le rayon thermosphérique inférieur, où l'absorption classique constitue la source principale d'atténuation. Le maximum de la perturbation de pression est réduit de 50% par rapport au cas purement non linéaire (avec le terme source  $S_{nl}$ ).

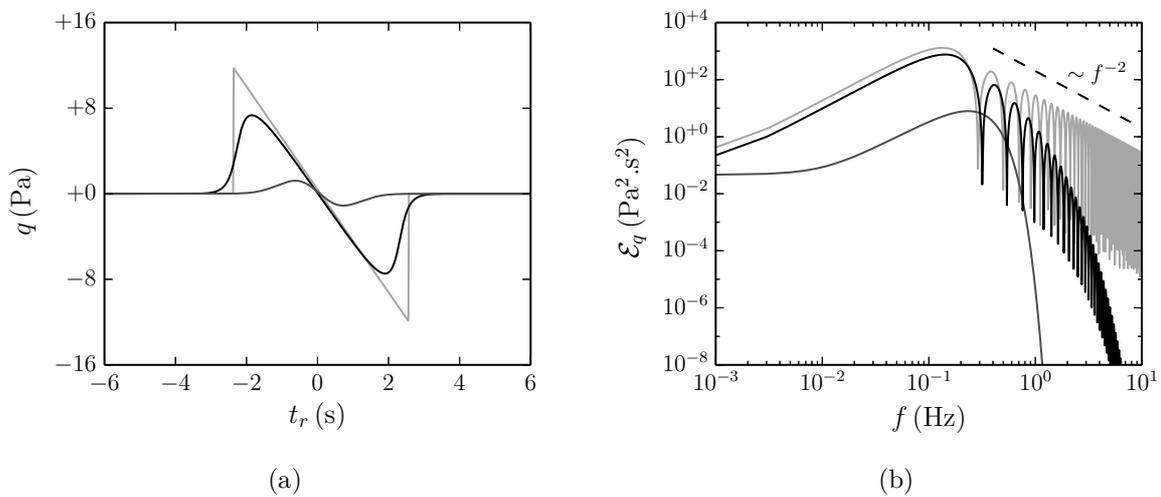


FIGURE 2.13: Cas *B*. (a) Signaux  $q$  obtenus à la caustique sur le rayon thermosphérique inférieur avec les termes source  $(S_{nl})$  (tirets noirs),  $(S_{nl} + S_{cl} + S_{vb})$  (trait gris),  $(S_{cl} + S_{vb})$  (trait noir). (b) Densités spectrales d'énergie  $\mathcal{E}_q$  correspondantes.

L'interaction entre les effets non linéaires et d'absorption est illustrée sur la figure 2.13(a), où les signaux  $q$  enregistrés au point de caustique du rayon thermosphérique inférieur avec les termes source  $S_{nl}$  et  $(S_{nl} + S_{cl} + S_{vb})$  sont tracés. Les densités spectrales d'énergie  $\mathcal{E}_q$  correspondantes sont montrées sur la figure 2.13(b). Dans ce cas, la dissipation, due principalement aux mécanismes classiques, affecte aussi les composantes spectrales de la gamme fréquentielle intermédiaire. En conséquence, l'amplitude observée est réduite d'un facteur 1.6 par rapport au cas purement non linéaire (avec le terme source  $S_{nl}$ ). La durée de la phase, qui dépend de l'allongement non linéaire, est aussi légèrement inférieure. Le signal  $q$  obtenu avec le terme source  $(S_{cl} + S_{cl})$  est également illustré sur la figure 2.13(a). Pour cette deuxième charge de source, le décalage vers les basses fréquences atténue remarquablement l'impact des effets d'absorption. En effet, si le terme  $S_{nl}$  était nul, le maximum de la perturbation de pression  $q$  serait six fois inférieur et la durée réduite de 50%.

### Cas C. Explosion de petite charge.

L'arrivée stratosphérique enregistrée à la station de mesure  $G_s$  est illustrée avec la figure 2.14. Les résultats obtenus avec les sources  $(S_{nl})$  et  $(S_{nl} + S_{cl})$  sont aussi tracés. Dans ce cas, la re-

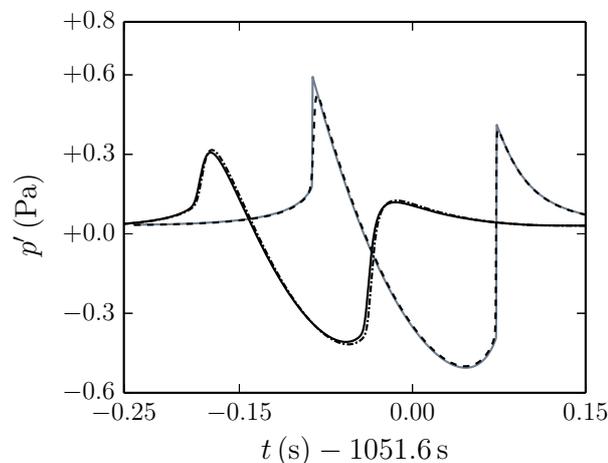


FIGURE 2.14: Cas C. Arrivée stratosphérique enregistrée à la station  $G_s$  avec les termes source  $(S_{nl})$  (tirets noirs),  $(S_{nl} + S_{cl})$  (trait gris),  $(S_{nl} + S_{cl} + S_{vb})$  (trait noir). La solution obtenue avec tous les termes source mais en incluant uniquement les effets de relaxation vibrationnelle des molécules d'oxygène et d'azote est aussi tracée avec un trait mixte.

laxation vibrationnelle a un fort impact sur l'amplitude maximale mesurée. Le signal obtenu en considérant uniquement les termes associés aux molécules de  $O_2$  et de  $N_2$  est d'ailleurs représenté. Comme attendu, l'écart par rapport au résultat du modèle complet est très faible, ce qui démontre que, pour la plage de fréquences considérée, la relaxation vibrationnelle de l'oxygène et de l'azote constitue le mécanisme d'absorption principal sur le rayon stratosphérique.

## Conclusion

En utilisant une méthode basée sur les équations des rayons et une équation de Burgers augmentée, la propagation d'ondes produites par des sources explosives dans une atmosphère réaliste a été étudiée. L'importance des effets non linéaires et d'absorption sur les signaux enregistrés au sol jusqu'à des distances de quelques centaines de kilomètres a été analysée. Trois cas ont été examinés et les résultats obtenus sur des rayons stratosphériques et thermosphériques ont été discutés dans ce chapitre. Les amplitudes et fréquences centrales correspondantes sont représentatives d'une plage assez vaste de sources impulsives, allant des éruptions volcaniques jusqu'aux explosions de grande charge. Il a été montré que la propagation de signaux de grande amplitude, de l'ordre du millier de Pascal à la source, et basse fréquence, de l'ordre du dixième de Hertz à la source, est essentiellement non linéaire. L'influence des termes de dissipation augmente lorsque la fréquence croît et l'amplitude diminue. Dans le cas des ondes infrasonores,

l'absorption est due à la relaxation vibrationnelle des molécules sur les rayons stratosphériques, tandis que les mécanismes classiques dominent les rayons thermosphériques, principalement à cause de la réduction exponentielle avec l'altitude de la masse volumique du milieu. Au dessous de la mésosphère, les modes de vibration de l'oxygène et de l'azote constituent la contribution principale à l'absorption par relaxation vibrationnelle. Néanmoins, les modes de vibration de dioxyde de carbone et de l'ozone peuvent affecter les phases thermosphériques lorsqu'elles transitent dans la mésosphère. La dispersion générée par le terme de relaxation est aussi observée dans les signaux simulés, mais cet effet peut être considéré négligeable. Globalement, l'absorption par relaxation vibrationnelle devrait être prise en compte sur les rayons stratosphériques pour des fréquences supérieures à environ 1 Hz, tandis que les mécanismes classiques peuvent être importants sur les rayons thermosphériques même pour des fréquences plus basses.

L'interaction entre les termes non linéaire et d'absorption a aussi été analysée sur le rayon thermosphérique supérieur. Pour les explosions de grande amplitude, les termes d'absorption ont une faible influence sur la forme d'onde et sont importants seulement au niveau des chocs. Au contraire, pour les explosions de plus petite charge, ces termes peuvent affecter les composantes spectrales qui contiennent l'énergie acoustique, provoquant ainsi une diminution significative de l'amplitude de l'onde et limitant l'allongement non linéaire. D'autre part, l'impact du terme non linéaire se révèle aussi très important. En effet, le décalage vers les basses fréquences permet d'éviter la forte atténuation prédite en régime linéaire.

Pour conclure, la durée des signaux enregistrés sur la surface terrestre dépend principalement de leur allongement durant leur propagation vers la haute atmosphère et au niveau des caustiques. Au-delà de ce point, la distorsion non linéaire est atténuée par l'augmentation exponentielle de la masse volumique du milieu et la propagation vers la surface de la Terre peut être considérée comme étant linéaire.

# Équations pour la propagation non linéaire des infrasons dans l'atmosphère terrestre

Ce chapitre est dédié à la description du modèle mathématique employé pour les études de propagation atmosphérique en 3-D réalisées dans le cadre de ce travail de thèse. Le problème à résoudre est d'abord formellement introduit. Le milieu propagatif et les équations du mouvement sont notamment présentés. Une étude théorique des conditions aux limites à appliquer au niveau de la surface terrestre est ensuite réalisée. Dans une deuxième partie, une analyse modale est effectuée afin de mettre en évidence les différents types de modes prévus par le système d'équations choisi. Le modèle de source utilisé pour exciter les ondes infrasonores est enfin défini.

## Description du milieu propagatif et équations

Un système de coordonnées cartésiennes orthogonales  $Ox_1x_2x_3$  est utilisé, avec l'origine  $O$  au niveau du sol et de l'axe vertical  $x_3$ , cf. figure 3.1. La surface terrestre est représentée par une plaque plane parfaitement réfléchissante. Une source infrasonore est placée au point  $O$ . L'objectif de cette étude est l'analyse du champ acoustique produit à des distances de quelques centaines de kilomètres par des sources explosives de fréquence centrale de l'ordre de 0.2 Hz. Dans cette section, les propriétés du gaz atmosphérique, l'atmosphère initiale non perturbée et les équations du mouvement sont décrites.

### Propriétés du gaz atmosphérique

L'air dans l'atmosphère est modélisé par un gaz parfait satisfaisant la loi d'état

$$p = \rho r_{\mathcal{M}} T \tag{3.1}$$

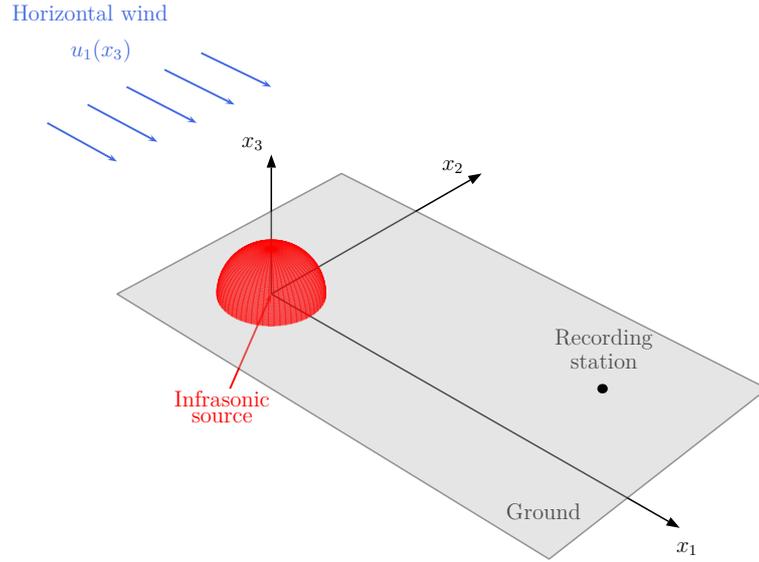


FIGURE 3.1: Représentation schématique du problème physique.

où  $p$  indique la pression,  $T$  la température et  $r_{\mathcal{M}} = R/\mathcal{M}$  le rapport entre la constante universelle des gaz  $R$  et la masse molaire  $\mathcal{M}$ . La vitesse du son  $c$  est donnée par l'expression<sup>163</sup>

$$c = \sqrt{\gamma \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T} = \sqrt{\gamma r_{\mathcal{M}} T}$$

où  $\gamma = c_p/c_v$  représente le rapport entre les chaleurs spécifiques à pression et volume constants,  $c_p$  et  $c_v$ . Ces dernières peuvent à leur tour être calculées par les relations

$$c_v = \frac{r_{\mathcal{M}}}{\gamma - 1}$$

$$c_p = c_v + r_{\mathcal{M}}$$

Dans le cadre de cette thèse, la masse molaire ainsi que les chaleurs spécifiques sont supposées constantes. Leurs valeurs sont reportées dans la table 3.1. En conséquence, l'énergie interne spécifique  $e$  et l'enthalpie spécifique  $h$  s'écrivent de la manière suivante

$$e = c_v T$$

$$h = c_p T$$

L'écoulement fluide dans l'atmosphère est décrit par les variables conservatives  $[\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho e_t]$ , où  $u_1, u_2$  et  $u_3$  sont les trois composantes du vecteur vitesse dans les directions  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , et  $e_t = (e + u_k u_k/2)$  indique l'énergie spécifique totale. Cette dernière est enfin reliée à la pression par l'expression

$$p = (\gamma - 1) \left( \rho e_t - \frac{1}{2} \rho u_k u_k \right)$$

### Atmosphère initiale non perturbée

À l'instant  $t = 0$ , l'atmosphère initiale non perturbée est définie comme un milieu stationnaire et stratifié, avec un vent porté par la direction  $x_1$ ,

$$\begin{cases} \bar{\rho} &= \bar{\rho}(x_3) \\ \bar{\rho}\bar{u}_1 &= \bar{\rho}(x_3)\bar{u}_1(x_3) \\ \bar{\rho}\bar{u}_2 &= \bar{\rho}\bar{u}_3 = 0 \\ \bar{\rho}\bar{e}_t &= \bar{\rho}(x_3)\bar{e}_t(x_3) \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour les études 3-D décrites dans le chapitre 5, un profil de vitesse de vent  $u_1(x_3)$  et un profil de vitesse du son  $\bar{c}(x_3)$  sont spécifiés. La température moyenne  $\bar{T}(x_3)$  est calculée au travers de la relation  $\bar{T}(x_3) = \bar{c}^2(x_3)/(\gamma r_{\mathcal{M}})$ . La pression  $\bar{p}(x_3)$  est obtenue en résolvant l'équation de l'équilibre hydrostatique

$$\frac{d\bar{p}}{dx_3} = -\bar{\rho}g = -\frac{g}{r_{\mathcal{M}}\bar{T}}\bar{p} \quad (3.3)$$

où  $g$  représente l'accélération de gravité, supposée indépendante de l'altitude. Les profils de masse volumique  $\bar{\rho}(x_3)$  et d'énergie spécifique totale  $\bar{e}_t(x_3)$  sont enfin déterminés respectivement par les relations  $\bar{\rho} = \bar{p}/(r\bar{T})$  et  $\bar{\rho}\bar{e}_t = \bar{p}/(\gamma - 1) + \bar{\rho}\bar{u}_1^2/2$ .

### Équations de la mécanique des fluides

Comme il a été montré dans le chapitre précédent, les effets de relaxation peuvent être négligés pour la plage de fréquences d'intérêt. La propagation acoustique dans l'atmosphère est ainsi modélisée par les équations de Navier-Stokes compressibles

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} &= \Lambda_\rho \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}^*}{\partial x_j} - \rho' g \delta_{i3} \\ \frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e_t u_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial(p' u_j)}{\partial x_j} - \bar{p} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j^*}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_i \tau_{ji}^*)}{\partial x_j} - \rho' g u_3 + \Lambda_{\rho e_t} \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $\rho' = \rho - \bar{\rho}$  représente la perturbation de masse volumique,  $p' = p - \bar{p}$  la perturbation de pression,  $\tau_{ij}^*$  le tenseur des contraintes visqueuses et  $q_i^*$  le flux de chaleur. Les fonctions  $\Lambda_\rho$  et  $\Lambda_{\rho e_t}$  sont des termes de forçage employés pour modéliser la source infrasonore.<sup>111,141</sup> Le coefficient  $\delta_{ij}$  indique enfin le symbole de Kronecker. Il est important de remarquer que, suivant Marsden *et al.*,<sup>111</sup> les équations de Navier-Stokes classiques sont ici reformulées en soustrayant la condition d'équilibre hydrostatique  $d\bar{p}/dx_3 + \bar{\rho}g = 0$ . D'un point de vue mathématique, cette opération ne comporte aucune simplification. Cependant, elle permet d'éviter les problèmes de stabilité qui découleraient des imprécisions dans l'intégration numérique du profil de pression  $\bar{p}$ . Par

ailleurs, à cause des termes non nuls  $\partial \bar{u}_1 / \partial x_3$  et  $\partial \bar{T} / \partial x_3$ , l'atmosphère initiale non perturbée (3.2) ne vérifie pas les équations de Navier-Stokes classiques, bien qu'elle soit consistante avec les équations d'Euler. Ainsi, elle tendrait à évoluer dans le temps. Afin d'éviter cette dérive, le tenseur des contraintes visqueuses  $\tau_{ij}^*$  et le flux de chaleur  $q_i^*$  sont déterminés à partir des perturbations de vitesse et température,  $u'_i = u_i - \bar{u}_i$  et  $T' = T - \bar{T}$ . Plus précisément, ils sont donnés par les expressions

$$\tau_{ij}^* = \mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$$

$$q_i^* = -\kappa \frac{\partial T'}{\partial x_i}$$

où  $\mu$  représente la viscosité dynamique et  $\kappa$  la conductivité thermique. Ces dernières sont enfin calculées au travers des relations

$$\mu(T) = \mu_{\text{ref}} \left( \frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \frac{T_{\text{ref}} + T_S}{T + T_S}$$

$$\kappa(T) = \frac{\mu(T) c_p}{\text{Pr}}$$

où  $\mu_{\text{ref}}$ ,  $T_{\text{ref}}$  et  $T_S$  sont des constantes de référence<sup>149</sup> et Pr représente le nombre de Prandtl, supposé indépendant de la température. Les valeurs des différents paramètres du modèle sont reportées dans la table 3.1.

Masse molaire	$\mathcal{M}$	28.964 kg.kmol <sup>-1</sup>
Constante universelle des gaz	$R$	8.3145 J.mol <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Constante spécifique de l'air	$r_{\mathcal{M}}$	287.06 J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Rapport des chaleurs spécifiques	$\gamma$	1.4
Nombre de Prandtl	Pr	0.72
Température de référence	$T_{\text{ref}}$	293.15 K
Température de Sutherland	$T_S$	117 K
Viscosité de référence	$\mu_{\text{ref}}$	$1.8192 \times 10^{-5}$ Pa.s
Accélération de gravité	$g$	9.81 m.s <sup>-2</sup>

TABLE 3.1: Valeurs des constantes du modèle de propagation acoustique dans l'atmosphère.

## Analyse théorique de la condition de paroi

Dans le chapitre 2, il a été montré que les termes visqueux et thermiques sont négligeables pour les ondes infrasonores jusqu'à la thermosphère. Cette conclusion n'est cependant pas applicable au voisinage de la surface terrestre. En effet, au niveau de toute interface entre un fluide

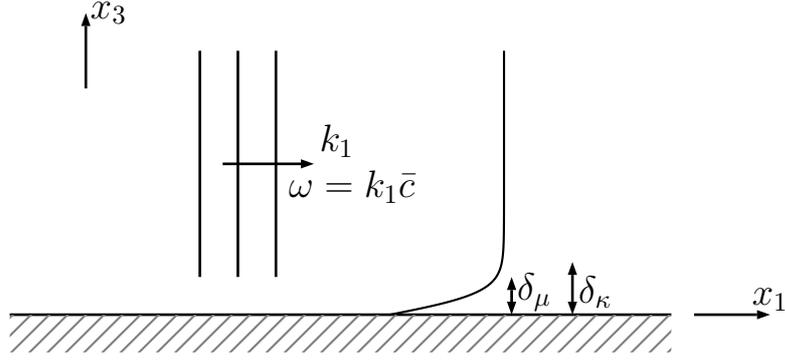


FIGURE 3.2: Propagation d'une onde plane sur une plaque plane.

visqueux et une paroi solide, différentes conditions doivent généralement être vérifiées.<sup>63, 128</sup> Premièrement, le fluide adhère à l'interface. Deuxièmement, la contrainte normale ainsi que la composante normale du flux de chaleur et la température doivent y être continues. Ces conditions sont à l'origine d'une fine couche adjacente à l'interface, appelée couche limite, où les effets visqueux et thermiques jouent un rôle essentiel.

Dans cette section, l'influence d'une paroi sur la propagation acoustique est analysée d'un point de vue théorique. Les résultats illustrés permettent de justifier le choix des conditions aux limites qui sont utilisées dans les simulations numériques réalisées dans le cadre de cette thèse. La propagation horizontale d'une onde plane au dessus d'une plaque plane est plus précisément examinée dans ce qui suit. Afin de simplifier les calculs, plusieurs hypothèses sont effectuées : tout d'abord, le milieu ambiant est considéré bidimensionnel, homogène et au repos ; deuxièmement, les effets non linéaires sont négligés ; enfin, les flux visqueux et thermiques sont supposés importants uniquement dans une petite région adjacente à la paroi (postulat à vérifier *a posteriori*). Ainsi, en l'absence de termes de forçage, une analyse des ordres de grandeur des différents termes conduit à réécrire les équations de la mécanique des fluides (3.4) et la loi d'état (3.1) sous la forme linéarisée suivante<sup>115, 157</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \left[ \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} \right] = 0 \\ \bar{\rho} \frac{\partial u'_1}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x_1} - \bar{\mu} \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_3^2} = 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma \bar{p} \left[ \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} \right] - (\gamma - 1) \bar{\kappa} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_3^2} = 0 \\ p' = \rho' r \bar{T} + \bar{\rho} r T' \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Par hypothèse, la solution des équations (3.5) doit se comporter comme une onde plane de

nombre d'onde  $k_1$  et pulsation  $\omega = k_1 \bar{c}$  lorsque  $x_3 \rightarrow +\infty$

$$\chi'(x_1, x_2 \rightarrow +\infty, t) = \hat{\chi}_\infty e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \quad \chi' = \rho', u_1', u_2', p', T' \quad (3.6)$$

avec

$$\chi' = \rho', u_1', u_2', p', T'$$

Les amplitudes des perturbations des différentes variables sont reliées par les relations  $\hat{\rho}_\infty = \hat{p}_\infty / \bar{c}^2$ ,  $\hat{u}_{1,\infty} = \hat{p}_\infty / (\bar{\rho} \bar{c})$ ,  $\hat{T}_\infty = (\gamma - 1) \hat{p}_\infty / (\gamma r \bar{\rho})$ . Au niveau de la paroi, la condition d'adhérence

$$u'_1(x_1, x_3 = 0, t) = u'_3(x_1, x_3 = 0, t) = 0 \quad (3.7)$$

est appliquée. Pour fermer le système, une condition thermique doit également être satisfaite. Pour des applications acoustiques, au lieu de la continuité de la température et de la composante normale du flux de chaleur, l'annulation de la fluctuation  $T'$  (paroi isotherme) est souvent imposée<sup>128</sup>

$$T'(x_1, x_3 = 0, t) = 0 \quad (3.8)$$

L'expression asymptotique (3.6) suggère de chercher des solutions de la forme  $\chi' = \hat{\chi}(x_3) e^{i(k_1 x_1 - \omega t)}$ . Ainsi, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho'(x_1, x_3, t) = \hat{\rho}_\infty \left[ 1 + (\gamma - 1) e^{-(1-i)x_3/\delta_\kappa} \right] e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ u'_1(x_1, x_3, t) = \hat{u}_{1,\infty} \left[ 1 - e^{-(1-i)x_3/\delta_\mu} \right] e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ u'_3(x_1, x_3, t) = \frac{(i-1)}{2} k_1 \hat{u}_{1,\infty} \left[ \delta_\mu \left( 1 - e^{-(1-i)x_3/\delta_\mu} \right) + \right. \\ \left. (\gamma - 1) \delta_\kappa \left( 1 - e^{-(1-i)x_3/\delta_\kappa} \right) \right] e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ p'(x_1, x_3, t) = \hat{p}_\infty e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ T'(x_1, x_3, t) = \hat{T}_\infty \left[ 1 - e^{-(1-i)x_3/\delta_\kappa} \right] e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \end{array} \right. \quad (3.9)$$

où  $\delta_\mu \equiv \sqrt{2\mu/(\omega\bar{\rho})}$  et  $\delta_\kappa \equiv \sqrt{2\kappa/(\omega\bar{\rho}c_p)} = \delta_\mu/\sqrt{\text{Pr}}$  représentent respectivement les épaisseurs des couches limites visqueuse et thermique. Il est intéressant de remarquer que les expressions (3.9) peuvent se réécrire comme la somme de trois modes distincts :

- le mode acoustique

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho'_{\text{ac}}(x_1, x_3, t) = \hat{\rho}_\infty e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ u'_{1,\text{ac}}(x_1, x_3, t) = \hat{u}_{1,\infty} e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ u'_{3,\text{ac}}(x_1, x_3, t) = 0 \\ p'_{\text{ac}}(x_1, x_3, t) = \hat{p}_\infty e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ T'_{\text{ac}}(x_1, x_3, t) = \hat{T}_\infty e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

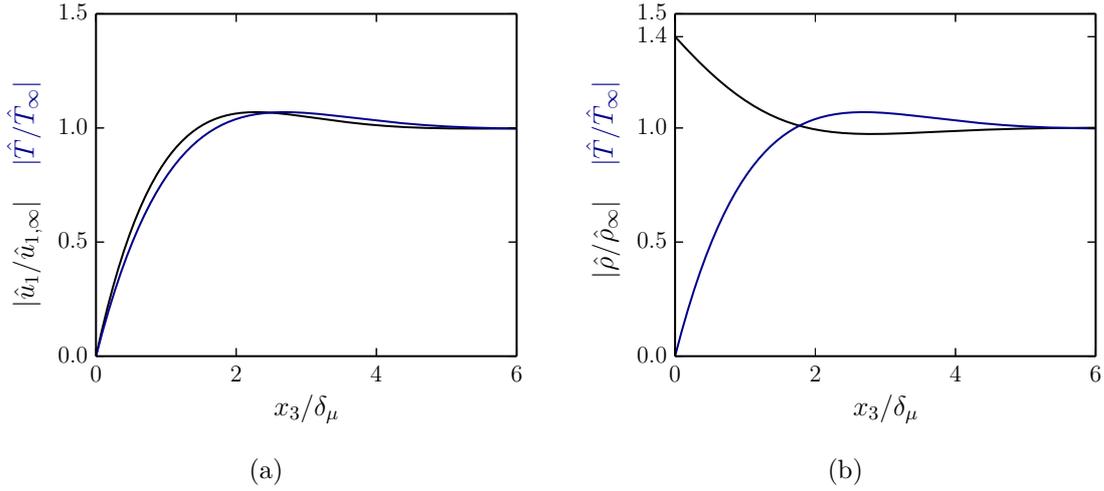


FIGURE 3.3: Couche limite acoustique. (a) Profils de vitesse horizontale  $|\hat{u}_1/\hat{u}_{1,\infty}|$  (trait noir) et de température  $|\hat{T}/\hat{T}_\infty|$  (trait bleu). (b) Profils de masse volumique  $|\hat{\rho}/\hat{\rho}_\infty|$  (trait noir) et de température  $|\hat{T}/\hat{T}_\infty|$  (trait bleu).

- le mode de vorticité

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho'_{\text{vor}}(x_1, x_3, t) = 0 \\ u'_{1,\text{vor}}(x_1, x_3, t) = -\hat{u}_{1,\infty} e^{-(1-i)x_3/\delta_\mu} e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ u'_{3,\text{vor}}(x_1, x_3, t) = \frac{(i-1)}{2} k_1 \delta_\mu \hat{u}_{1,\infty} [1 - e^{-(1-i)x_3/\delta_\mu}] e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ p'_{\text{vor}}(x_1, x_3, t) = 0 \\ T'_{\text{vor}}(x_1, x_3, t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

- le mode entropique

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho'_{\text{ent}}(x_1, x_3, t) = \hat{\rho}_\infty (\gamma - 1) e^{-(1-i)x_3/\delta_\kappa} e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ u'_{1,\text{ent}}(x_1, x_3, t) = 0 \\ u'_{3,\text{ent}}(x_1, x_3, t) = \frac{(i-1)}{2} (\gamma - 1) k_1 \delta_\kappa \hat{u}_{1,\infty} [1 - e^{-(1-i)x_3/\delta_\kappa}] e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ p'_{\text{ent}}(x_1, x_3, t) = 0 \\ T'_{\text{ent}}(x_1, x_3, t) = -\hat{T}_\infty e^{-(1-i)x_3/\delta_\kappa} e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Le premier correspond à la solution des équations d'Euler linéarisées. Les modes de vorticité et entropique, quant à eux, sont générés par l'interaction de la paroi avec l'onde acoustique et sont diffusés par les termes visqueux et thermiques. Néanmoins, leur amplitude devient négligeable au-delà de distances de l'ordre de quelques épaisseurs de couche limite. Pour des ondes de fréquence d'environ  $f = 0.2$  Hz et de longueur d'onde de  $\lambda = \bar{c}/f \simeq 1.7$  km, l'épaisseur de

vorticité  $\delta_\mu$  est autour de 1 cm, soit environ  $1.7 \times 10^{-6}\lambda$ . Ainsi, pour la gamme de fréquences d'intérêt, la solution est essentiellement dominée par le mode acoustique. Par ailleurs, il est important de noter que les conditions aux limites (3.7) et (3.8) sont satisfaites uniquement par la somme des trois ondes. L'onde acoustique vérifie la seule condition d'imperméabilité  $u'_3(x_1, x_3 = 0, t) = 0$ .

Les simulations numériques tridimensionnelles réalisées dans cette thèse sont effectuées avec un pas spatial  $\Delta$  de l'ordre de 100 m, qui ne permet pas une résolution suffisante de la sous-couche visqueuse se développant sur la surface terrestre. Imposer l'annulation des vitesses  $u_1$  et  $u_2$  et de la perturbation de température  $T'$  pourrait contaminer la solution physique et notamment les phases qui longent le sol. Pour cette raison, afin de bien reproduire le mode acoustique, les variables  $u_1$ ,  $u_2$  et  $T$  ne sont pas contraintes à la paroi. Seule la condition d'imperméabilité  $u_3(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = 0$  est appliquée.

## Analyse modale des équations du mouvement

Lorsque le système (3.4) est forcé par des sources de masse et d'énergie, plusieurs types d'onde peuvent se développer. Pour en illustrer les propriétés fondamentales, une analyse modale est réalisée dans cette section. En négligeant les termes non linéaires, visqueux et thermiques, les équations linéarisées suivantes sont obtenues

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial(\rho' \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{\rho} u'_j)}{\partial x_j} &= \Lambda_\rho \\ \frac{\partial \rho' \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} u'_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho' \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{\rho} u'_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u}_i u'_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p'}{\partial x_i} - \rho' g \delta_{i3} \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial(p' \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{p} u'_j)}{\partial x_j} &= -(\gamma - 1) \left[ \bar{p} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} + p' \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right] + \Lambda_p \end{aligned} \quad (3.13)$$

où la source de pression s'écrit

$$\Lambda_p = (\gamma - 1) [\Lambda_{\rho e t} + \bar{u}_i u'_i \Lambda_\rho]$$

Dans cette étude, le milieu ambiant est considéré libre. L'exemple d'une atmosphère isotherme ( $\bar{T}$ ,  $\bar{c}$  constants) avec un vent constant porté par la direction  $x_1$  ( $\bar{u}_1 = \text{constant}$ ,  $\bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0$ ) est d'abord examiné. Dans ce cas, une solution exacte peut être obtenue pour les différents modes. La réponse de ce milieu à un forçage par une impulsion d'énergie est par ailleurs discutée. Dans un second temps, le cas plus général d'une atmosphère non isotherme est analysé. Cette dernière discussion permet par ailleurs de présenter l'équation de Bergmann,<sup>12,129</sup> sur laquelle se base l'étude de la diffusion par les petites structures de l'atmosphère décrite dans le chapitre 5.

## Modes dans une atmosphère isotherme

Dans une atmosphère isotherme avec un vent constant dans la direction  $x_1$ , la pression et la masse volumique ambiantes sont données par

$$\begin{cases} \bar{p} = \bar{p}_g e^{-x_3/H} \\ \bar{\rho} = \bar{\rho}_g e^{-x_3/H} \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $\bar{p}_g$  et  $\bar{\rho}_g$  représentent leurs valeurs au sol et le paramètre  $H = \bar{c}^2/(\gamma g)$  est une échelle spatiale caractéristique. Pour  $\bar{c} = 340 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\gamma = 1.4$ ,  $H$  vaut 8.417 km. Ainsi, la pression et la masse volumique atmosphériques diminuent d'un facteur 10 tous les 20 kilomètres. En l'absence de termes source, le système (3.13) peut se réécrire de la manière suivante

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right] R' - \frac{u_3'}{H} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} &= 0 \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right] u_i' + \frac{\bar{c}^2}{\gamma} \frac{\partial P'}{\partial x_i} - (P' - R') g \delta_{i3} &= 0 \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right] P' - \frac{u_3'}{H} + \gamma \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

où  $P' = p'/\bar{p}$  et  $R' = \rho'/\bar{\rho}$  sont les perturbations de pression et masse volumique normalisées par rapport aux variables atmosphériques locales. Ces équations sont à coefficients constants et admettent des solutions sous forme d'ondes planes de pulsation  $\omega$  et nombre d'onde  $\mathbf{K}$

$$\chi' = \hat{\chi} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad \chi' = R', u_1', u_2', u_3', P' \quad (3.16)$$

En posant  $\Omega = \omega - k_1 \bar{u}_1$ , les amplitudes des variables  $R', u_1', u_2', u_3', P'$  vérifient le système algébrique

$$\begin{bmatrix} -i\Omega & iK_1 & iK_2 & (iK_3 - 1/H) & 0 \\ 0 & -i\Omega & 0 & 0 & iK_1 \bar{c}^2/\gamma \\ 0 & 0 & -i\Omega & 0 & iK_2 \bar{c}^2/\gamma \\ g & 0 & 0 & -i\Omega & (iK_3 \bar{c}^2/\gamma - g) \\ 0 & i\gamma K_1 & i\gamma K_2 & (i\gamma K_3 - 1/H) & -i\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R} \\ \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

qui n'a de solution non triviale que si son déterminant s'annule. Ainsi, la relation de dispersion<sup>79</sup>

$$\Omega \left[ \Omega^4 - \bar{c}^2 (K_r^2 + K_3^2) \Omega^2 + (\gamma - 1) K_r^2 g^2 - \frac{i \bar{c}^2 K_3}{H} \Omega^2 \right] = 0 \quad (3.18)$$

est obtenue,  $K_r = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$  étant le nombre d'onde radial dans le plan  $x_1 - x_2$ . Dans ce qui suit, deux configurations particulières sont discutées : le cas d'une atmosphère homogène et le cas d'une atmosphère stratifiée par la gravité et au repos. Les résultats relatifs au premier cas sont disponibles dans les ouvrages de Pierce<sup>128</sup> et Tam<sup>155</sup> entre autres ou dans l'article fondateur de Chu & Kovasznay.<sup>35</sup> Le deuxième cas a été étudié en détails par Hines.<sup>79</sup>

### Modes acoustiques, de vorticité et entropique dans une atmosphère homogène

En l'absence de gravité ( $g = 0$ ), le milieu est homogène, le paramètre  $H$  tend vers l'infini et la relation de dispersion (3.18) devient

$$\Omega^3 \left[ \Omega^2 - \bar{c}^2 (K_r^2 + K_3^2) \right] = 0 \quad (3.19)$$

Ainsi, deux solutions sont possibles. Lorsque  $\Omega = 0$ , la pulsation  $\omega$  est reliée au nombre d'onde horizontal par la relation  $\omega = K_1 \bar{u}_1$ . Dans ce cas, les amplitudes de la perturbation de pression  $\hat{P}$  et de la divergence du vecteur vitesse  $i\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}}$  sont égales à zéro (cf.  quation (3.17)) et la vitesse de groupe  $\partial\omega/\partial\mathbf{K}$  coïncide avec la vitesse constante de l'écoulement  $\bar{u}_1 \mathbf{e}_1$ . Deux modes indépendants peuvent exister : le mode entropique, correspondant à la convection des perturbations de masse volumique et de température, pour lequel les fluctuations de vitesse sont aussi nulles,  $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \hat{u}_3 = \hat{P} = 0$ ; le mode de vorticité, correspondant à des fluctuations de vitesse perpendiculaires à la direction de propagation  $\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0$ , pour lequel l'amplitude de la perturbation de masse volumique est égale à zéro,  $\hat{R} = \hat{P} = 0$ . Il est important de remarquer que, dans ce cas, les modes entropique et de vorticité sont d s uniquement à la présence du vent horizontal  $\bar{u}_1$ . Pour  $\Omega \neq 0$ , l'expression (3.19) se réduit à la relation de dispersion des ondes acoustiques  $\Omega^2 = \bar{c}^2 K^2$ ,  $K$  étant le module du vecteur d'onde. La vitesse de groupe est alors constante et donnée par

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{K}} = \bar{u}_1 \mathbf{e}_1 \pm \bar{c} \frac{\mathbf{K}}{K}$$

Par ailleurs, les amplitudes des perturbations de pression et de masse volumique sont reliées par la loi isentropique  $\hat{P} = \gamma \hat{R}$ . Enfin, le rotationnel  $i\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{u}}$  est identiquement nul, ce qui implique que les fluctuations de vitesse sont colinéaires à la direction de propagation.

### Modes acoustiques et de gravité dans une atmosphère isotherme et au repos

Dans le cas d'une atmosphère isotherme stratifiée par la gravité et en l'absence de vent, la relation de dispersion (3.18) se réduit à l'expression

$$\omega^4 - \bar{c}^2 (K_r^2 + K_3^2) \omega^2 + (\gamma - 1) K_r^2 g^2 - \frac{i\bar{c}^2 K_3}{H} \omega^2 = 0 \quad (3.20)$$

et les amplitudes des variables  $R'$ ,  $u_1'$ ,  $u_2'$ ,  $u_3'$ ,  $P'$ , qui sont linéairement dépendantes entre elles, peuvent s'écrire comme

$$\begin{cases} \hat{R} &= \frac{\bar{c}^4}{g^3} \left[ \omega^2 K_3 + \frac{i\omega^2}{H} - i(\gamma - 1)K_r^2 g \right] \\ \hat{u}_1 &= \frac{\bar{c}^4}{g^3} \left[ \omega K_1 K_3 \bar{c}^2 + i\omega K_1 g \right] \\ \hat{u}_2 &= \frac{\bar{c}^4}{g^3} \left[ \omega K_2 K_3 \bar{c}^2 + i\omega K_2 g \right] \\ \hat{u}_3 &= \frac{\bar{c}^4}{g^3} \left[ \omega^3 - \omega K_r^2 \bar{c}^2 \right] \\ \hat{P} &= \frac{\bar{c}^4}{g^3} \left[ \gamma \omega^2 K_3 + \frac{i\omega^2}{H} \right] \end{cases} \quad (3.21)$$

Pour que l'équation (3.18) soit satisfaite, le vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  ne peut pas être purement réel. Cependant, le milieu variant uniquement avec l'altitude, seul le nombre d'onde vertical possède une partie imaginaire non nulle. Un nombre d'onde horizontal complexe n'aurait en effet pas de sens physique.<sup>79</sup> En posant  $K_1 = k_1$ ,  $K_2 = k_2$  et  $K_3 = k_3 + i\sigma$  et en annulant les parties réelle et imaginaire de (3.21), il vient

$$\begin{cases} \left[ \frac{1}{H} + 2\sigma \right] k_3 = 0 \\ \left[ 1 - \frac{\omega_{bv}^2}{\omega^2} \right] k_r^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{\bar{c}^2} \left[ 1 - \frac{\omega_{ac}^2}{\omega^2} \right] + \left[ \sigma^2 + \frac{\sigma}{H} + \frac{1}{4H^2} \right] \end{cases} \quad (3.22)$$

où les pulsations  $\omega_{bv}$  et  $\omega_{ac}$ , dites respectivement pulsation de Brunt-Väisälä et pulsation de coupure acoustique, sont définies par

$$\omega_{bv} = \frac{\sqrt{\gamma - 1}g}{\bar{c}} \quad (3.23)$$

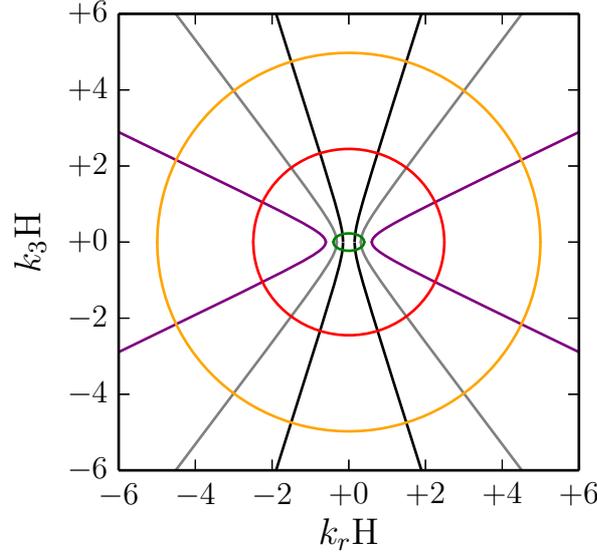
$$\omega_{ac} = \frac{\gamma g}{2\bar{c}} = \frac{\bar{c}}{2H} \quad (3.24)$$

Avec  $\gamma = 1.4$ ,  $\omega_{ac} > \omega_{bv}$ . La première des équations (3.22) admet deux solutions.

1. Si  $\sigma = -1/(2H)$ , les modes sont amplifiés avec l'altitude. Plus précisément, le rapport  $\hat{p}/\bar{p}$  et les perturbations de vitesse  $\hat{u}_i$  sont proportionnels au facteur  $e^{x_3/(2H)}$ , à son tour proportionnel à l'inverse de la racine carrée  $1/\sqrt{\bar{\rho}(x_3)}$  de la masse volumique locale. Ce résultat a déjà été mentionné auparavant dans le cadre de l'acoustique géométrique (cf. paragraphe 2.2.1 du chapitre 2). De plus, la pulsation  $\omega$  et les nombres d'onde  $k_r$  et  $k_3$  sont reliés par la relation de dispersion

$$\left[ 1 - \frac{\omega_{bv}^2}{\omega^2} \right] k_r^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{\bar{c}^2} \left[ 1 - \frac{\omega_{ac}^2}{\omega^2} \right] \quad (3.25)$$

qui ne présente de solutions réelles que pour  $\omega < \omega_{bv}$  ou  $\omega \geq \omega_{ac}$ . L'intervalle  $\omega \in [0, \omega_{bv}[$  est le domaine des ondes de gravité. Dans ce cas, l'équation (3.25) décrit une hyperbole



(a)

FIGURE 3.4: Modes acoustiques et de gravité dans une atmosphère isotherme et au repos. Iso-contours de la pulsation  $\omega$  dans le plan  $k_r - k_3$  :  $\omega = 0.25\omega_{bv}$  (hyperbole noire),  $\omega = 0.5\omega_{bv}$  (hyperbole grise),  $\omega = 0.9\omega_{bv}$  (hyperbole violette),  $\omega = 1.1\omega_{ac}$  (ellipse verte),  $\omega = 5\omega_{ac}$  (ellipse rouge),  $\omega = 10\omega_{ac}$  (ellipse orange).

dans le plan  $k_r H - k_3 H$ , dont les sommets sont localisés sur l'axe  $k_r$  (cf. figure 3.4). Lorsque  $\omega \ll \omega_{bv}$  et  $k_3 \gg \omega_{ac}^2/\bar{c}^2$ , l'expression (3.25) se simplifie comme suit

$$\omega \simeq \omega_{bv} \frac{k_r}{k_3}$$

et la vitesse de groupe  $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \simeq \frac{\omega_{bv}}{k_r k_3} \left[ k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 - \frac{k_r^2}{k_3} \mathbf{e}_3 \right]$$

est perpendiculaire au nombre d'onde  $\mathbf{k}$ . Le vecteur  $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$  variant avec  $\mathbf{k}$ , ces ondes sont dispersives.

L'intervalle  $\omega \in [\omega_{ac}, +\infty)$  est le domaine des ondes acoustiques. Dans ce cas, l'équation (3.25) représente une ellipse de demi-axe horizontal et de demi-axe vertical respectivement égaux à  $a = (\bar{c}/\omega)\sqrt{(\omega^2 - \omega_{bv}^2)/(\omega^2 - \omega_{ac}^2)}$  et  $b = \bar{c}/\sqrt{(\omega^2 - \omega_{ac}^2)}$  (cf. figure 3.4). Pour  $\omega \gg \omega_{ac}$ , cette ellipse tend vers un cercle de rayon  $\bar{c}/\omega$  et la relation de dispersion classique des ondes acoustiques  $(k_r^2 + k_3^2) \simeq \omega^2/\bar{c}^2$  est obtenue. Dans cette limite, la vitesse de groupe est constante et égale en module à la vitesse du son ambiante. De plus, le rotationnel  $i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}$  s'annule et les fluctuations de vitesse  $\hat{\mathbf{u}}$  sont colinéaires à la direction de propagation  $\mathbf{k}$ . La valeur absolue du rapport  $\gamma\hat{R}/\hat{P}$  entre les perturbations de masse volumique et de pression est enfin tracée sur la figure 3.5(a) en fonction de la pulsation

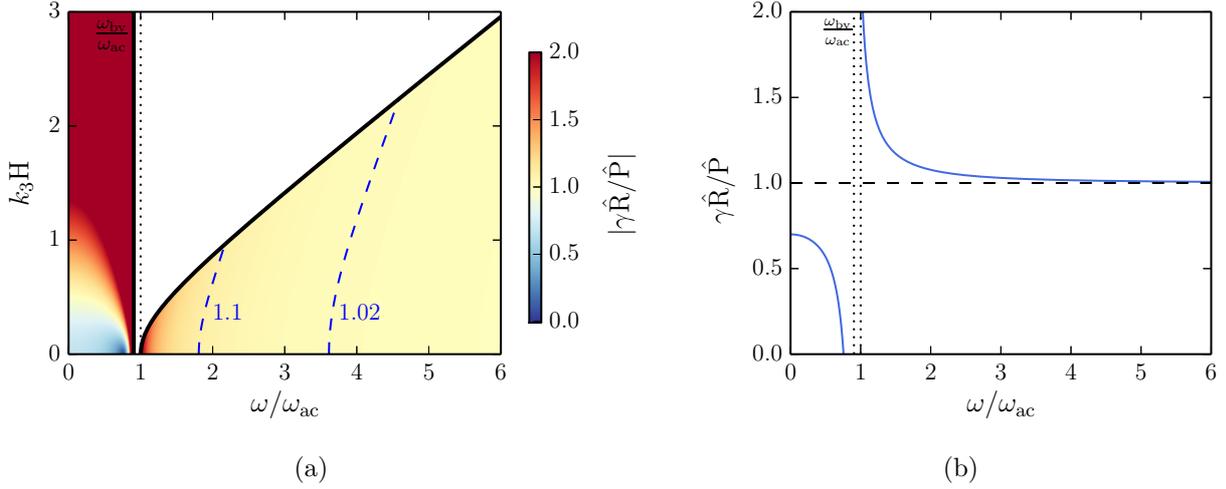


FIGURE 3.5: Modes acoustiques et de gravité dans une atmosphère isotherme et au repos. (a) Valeur absolue du rapport  $\gamma\hat{R}/\hat{P}$  en fonction de la pulsation et du nombre d'onde normalisés  $\omega/\omega_{ac}$  et  $k_3H$ . La région blanche correspond à des modes non propagatifs, pour lesquels  $k_r^2 < 0$ . Les iso-contours  $\gamma\hat{R}/\hat{P} = 1.02$  et  $\gamma\hat{R}/\hat{P} = 1.1$  sont aussi tracés en tirets bleus pour  $\omega/\omega_{ac} > 1$ . (b) Rapport  $\gamma\hat{R}/\hat{P}$  pour  $k_3H = 0$ .

et du nombre d'onde normalisés  $\omega/\omega_{ac}$  et  $k_3H$ . La fonction  $\gamma\hat{R}/\hat{P}(\omega/\omega_{ac})$  pour  $k_3H = 0$  est aussi représentée sur la figure 3.5(b). Pour  $\omega/\omega_{ac} \gg 1$ , la variable  $\gamma\hat{R}/\hat{P}$  tend vers la valeur asymptotique 1, ce qui implique que les fluctuations d'entropie  $(\hat{P} - \gamma\hat{R})/c_v$  sont très petites pour les modes acoustiques.

2. Si  $k_3 = 0$ , la propagation est horizontale. Parmi les modes pour lesquels  $k_3 = 0$ , les ondes de Lamb<sup>68, 118, 127</sup> ont été particulièrement étudiées dans la littérature. Leur pulsation et leur nombre d'onde sont reliés par la relation de dispersion  $\omega = \bar{c}k_r$ . Ainsi, ces modes se propagent à la vitesse du son  $\bar{c}$  et l'amplitude  $\hat{P}$  croît avec l'altitude comme  $e^{x_3/(\omega_{bv}^2/g)}$ .

## Équations pour les modes acoustiques dans une atmosphère non isotherme

Dans le paragraphe 3.3.1, il a été remarqué que, dans une atmosphère isotherme et au repos, les fluctuations d'entropie deviennent négligeables pour les modes acoustiques de pulsation élevée,  $\omega \gg \omega_{ac}$ . Ce résultat reste valable pour les ondes se propageant dans une atmosphère instationnaire et non isotherme lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  et la période d'onde  $2\pi/\omega$  sont petites devant les échelles caractéristiques spatiale  $\mathcal{L}$  et temporelle  $\mathcal{T}$  de variation de la pression ambiante.<sup>129</sup> Sous ces hypothèses, il est possible de montrer que le système (3.13) peut se réécrire sous la forme de l'équation d'onde convectée<sup>129</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) - \bar{\rho} D_t \left( \frac{1}{\bar{\rho}^2 \bar{c}^2} D_t \psi \right) = \mathcal{O} \left( \frac{\lambda^2}{\mathcal{L}^2}, \frac{4\pi^2}{\omega^2 \mathcal{T}^2} \right) \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.26)$$

où la variable  $\psi$  représente le potentiel acoustique. Ce dernier est défini par

$$p' = D_t \psi \quad (3.27)$$

et est relié aux perturbations du champ de vitesse par la relation

$$u'_i = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{\mathcal{L}}, \frac{2\pi}{\omega \mathcal{T}}\right) \quad (3.28)$$

Dans le cas particulier du milieu stationnaire et stratifié (3.2), dépendant uniquement de la coordonnée verticale  $x_3$ , l'expression suivante est obtenue

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\bar{c}^2} D_t^2 \psi = \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^2}{\mathcal{L}^2}\right) \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (3.29)$$

L'amplification des modes acoustiques dans la direction  $x_3$  est liée au premier terme, dépendant de la dérivée première  $\partial \psi / \partial x_3$ . Afin de s'affranchir de cet effet, le changement de variable  $\psi = \sqrt{\bar{\rho}} \Psi$  peut être effectué,<sup>12</sup> ce qui conduit à l'équation

$$-\frac{\omega_{\text{ac}}^2}{\bar{c}^2} \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\bar{c}^2} D_t^2 \Psi = \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^2}{\mathcal{L}^2}\right) \quad (3.30)$$

où  $\omega_{\text{ac}}$  est une généralisation de la fréquence de coupure acoustique (3.24)

$$\omega_{\text{ac}} = \bar{c} \sqrt{-\frac{1}{2\bar{\rho}} \frac{d^2 \bar{\rho}}{dx_3^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx_3}\right)^2} \quad (3.31)$$

Il s'ensuit que les perturbations de pression  $p'$  et de vitesse  $u'_i$  sont respectivement proportionnelles à  $\sqrt{\bar{\rho}}$  et  $1/\sqrt{\bar{\rho}}$ . Par conséquent, comme il a été remarqué auparavant, le rapport  $p'/\bar{p} \sim 1/\sqrt{\bar{\rho}}$  ainsi que la vitesse  $u'_i$  augmentent lors de la propagation vers la haute atmosphère et diminuent le long des trajectoires descendantes.

Pour conclure, en dérivant l'expression (3.29) par rapport au temps, l'équation de Bergmann<sup>12</sup> pour la variable  $p'$  est obtenue en l'absence de vent

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} \frac{\partial p'}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^2}{\mathcal{L}^2}\right) \quad (3.32)$$

Elle peut aussi se réécrire sous la forme

$$-\frac{\omega_{\text{ac}}^2}{\bar{c}^2} \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^2}{\mathcal{L}^2}\right) \quad (3.33)$$

où  $\Phi = \partial \Psi / \partial t$  représente la perturbation de pression normalisée  $\Phi = p' / \sqrt{\bar{\rho}}$ . Les équations (3.32) et (3.33) peuvent aussi être utilisées en présence d'un vent  $\bar{u}_1$ , à condition de remplacer la vitesse du son  $\bar{c}$  par la célérité effective  $\bar{c}_{\text{eff}} = \bar{c} + \bar{u}_1$ . Les limites de validité de cette hypothèse sont décrites dans le livre de Ostashev & Wilson<sup>122</sup> ainsi que par Godin.<sup>69</sup>

L'équation de Bergmann représente le point de départ d'un grand nombre de modèles linéaires de propagation utilisés dans les domaines de l'acoustique atmosphérique et sous-marine.<sup>82, 145</sup> Dans le cadre de cette thèse, elle est employée pour l'analyse de la diffusion par les petites structures de l'atmosphère (cf. chapitre 5).

## Analyse théorique de la source infrasonore

Contrairement au cas de la méthode de tracé de rayons décrite dans le chapitre précédent, le modèle de propagation acoustique présenté ici ne permet pas de spécifier de manière directe la signature en pression de la source infrasonore. Cette dernière résulte en effet d'un forçage des équations de conservation de la masse et de l'énergie. Il est ainsi crucial d'établir le lien entre les fonctions  $\Lambda_\rho$  et  $\Lambda_{\rho e_t}$  et le champ de pression  $p'$ , l'objectif étant de définir les expressions des termes  $\Lambda_\rho$  et  $\Lambda_{\rho e_t}$  qui permettent d'obtenir une forme d'onde donnée. Dans le cadre de la propagation atmosphérique des infrasons produits par des explosions, une onde en « N » est attendue.

Cette section se divise en trois parties. Dans un premier temps, l'excitation des modes acoustiques et de gravité dans une atmosphère isotherme et au repos est discutée. Deuxièmement, le forçage des ondes acoustiques est analysé dans le cas plus particulier d'un milieu homogène. Enfin, à la lumière des considérations développées, le modèle de source utilisé dans le cadre de cette thèse est introduit.

### Excitation des modes acoustiques et de gravité dans une atmosphère isotherme et au repos

Lorsque le système (3.4) est forcé par des sources de masse et d'énergie, les différentes ondes décrites dans la section précédente se développent. Le problème de l'excitation des modes a été analysé par plusieurs auteurs.<sup>42, 43, 84, 105, 126, 139</sup> Cole & Greifinger<sup>42, 43</sup> ont en particulier étudié l'effet d'une source impulsive d'énergie,  $\Lambda_\rho = 0$ ,  $\Lambda_{\rho e_t} = \delta(\mathbf{x})\delta(t)$ , placée au niveau du sol dans une atmosphère isotherme et au repos. Ils ont montré que, en tout point de l'espace  $\mathbf{x}$ , le champ de pression  $p'$  consiste en trois composantes principales : une onde acoustique, une onde de gravité et une onde de Lamb. La perturbation  $p'_{ac}$  associée à l'onde acoustique est due aux modes de pulsation supérieure à la pulsation de coupure  $\omega_{ac}$  et peut formellement s'exprimer de la manière suivante

$$p'_{ac}(\mathbf{x}, t) = 2 \times \frac{(\gamma - 1)e^{-x_3/(2H)}}{4\pi r} \left[ \delta' \left( t - \frac{r}{\bar{c}} \right) + \text{paquet d'onde secondaire} \right] \quad r = \|\mathbf{x}\|$$

où  $\delta'$  indique la dérivée première de la distribution de Dirac  $\delta$ . Le paquet d'onde secondaire n'existe que derrière le front d'onde principal, représenté par la fonction  $\delta'(t - r/\bar{c})$ , qui arrive à l'instant  $t_{ac} = r/\bar{c}$ . Ce dernier constitue la solution qui serait obtenue en l'absence de gravité. Le facteur 2 est mis en évidence pour souligner le doublement de l'amplitude provoqué par le sol. Le terme  $e^{-x_3/(2H)}$  est, comme montré dans la section précédente, induit par la stratification. La dépendance en  $1/r$  est enfin typique des ondes sphériques. La perturbation  $p'_{gr}$  liée à l'onde de gravité est, quant à elle, une somme de composantes spectrales de fréquence angulaire comprise dans l'intervalle  $[\omega_{bv} \sin(\varphi), \omega_{bv}]$ ,  $\varphi$  étant l'angle formé par le vecteur  $\mathbf{x}$  avec le plan horizontal  $x_1 - x_2$ . Ainsi, elle s'annule le long de la verticale à la source  $x_3$ . À l'instar de la perturbation

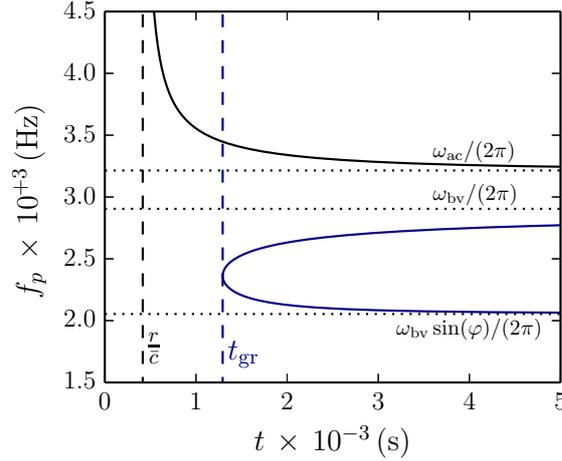


FIGURE 3.6: Évolution dans le temps de la fréquence dominante du signal enregistré au point  $P = (100 \text{ km}, 0 \text{ km}, 100 \text{ km})$  et généré par une source impulsive placée au niveau du sol dans une atmosphère isotherme et au repos.

acoustique, la fonction  $p'_{\text{gr}}$  est proportionnelle au terme  $2e^{-x_3/(2H)}/r$ . Enfin, le champ de pression  $p'_{\text{Lamb}}$  associé à l'onde de Lamb s'écrit, pour  $t > t_{\text{ac}}$ ,

$$p'_{\text{Lamb}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{2-\gamma}{2\pi\gamma} e^{-gx_3/\bar{c}^2} \frac{t}{[t^2 - (x_1^2 + x_2^2)/\bar{c}^2]^{3/2}}$$

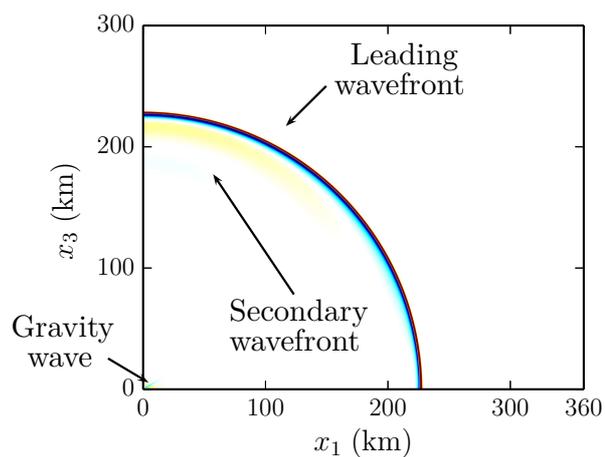
L'onde de Lamb, elle aussi, n'existe que derrière le front acoustique. Son amplitude diminue exponentiellement avec l'altitude.

Cole & Greifinger<sup>42,43</sup> ont également déterminé l'évolution dans le temps de la fréquence dominante  $f_p = \omega_p/(2\pi)$  du signal enregistré en tout point de l'espace  $\mathbf{x}$  loin de la source. La pulsation  $\omega_p(\mathbf{x}, t)$  est donnée par la valeur de  $\omega$  qui rend stationnaire la phase ( $\Omega_{\text{ph}}t_{\text{ac}} - \omega t$ ), où le terme  $\Omega_{\text{ph}}$  est défini par la relation

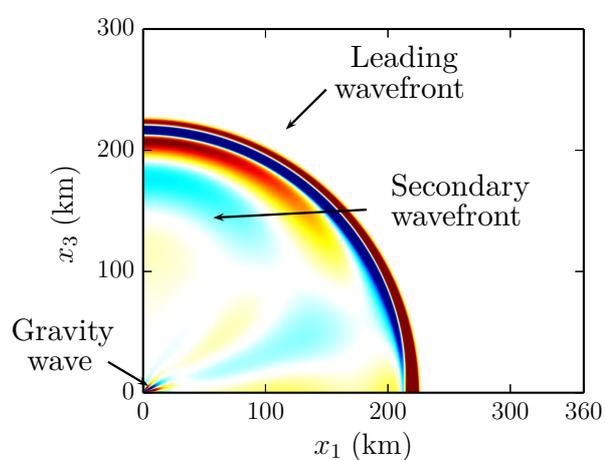
$$\Omega_{\text{ph}} = \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_{\text{ac}}^2)(\omega^2 - \omega_{\text{bv}}^2 \sin^2(\varphi))}{\omega^2 - \omega_{\text{bv}}^2}}$$

À titre d'illustration, la fonction  $f_p(t)$  obtenue au point  $(100 \text{ km}, 0 \text{ km}, 100 \text{ km})$  est tracée en fonction du temps sur la figure 3.6. Le calcul est effectué en fixant la vitesse du son ambiante à  $\bar{c} = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . À l'instant  $t = t_{\text{ac}}$ , le front principal est enregistré et sa fréquence dominante est infinie. Le paquet d'onde secondaire est ensuite observé (trait noir). Au cours du temps,  $t > t_{\text{ac}}$ , sa pulsation diminue jusqu'à atteindre la valeur asymptotique  $\omega_{\text{ac}}$ . À un instant  $t_{\text{gr}}$  supérieur à  $t_{\text{ac}}$  et qui dépend de la position  $\mathbf{x}$ , l'onde de gravité est mesurée (trait bleu). Pour  $t \rightarrow \infty$ , elle consiste en deux composantes modales de fréquences angulaires  $\omega_{\text{bv}}$  et  $\omega_{\text{bv}} \sin(\varphi)$ . Pour résumer brièvement, le spectre du signal enregistré pour  $t \rightarrow \infty$  en un point de l'espace  $\mathbf{x}$  loin de la source contient trois pics principaux de pulsations  $\omega_{\text{bv}} \sin \varphi$ ,  $\omega_{\text{bv}}$  et  $\omega_{\text{ac}}$ .

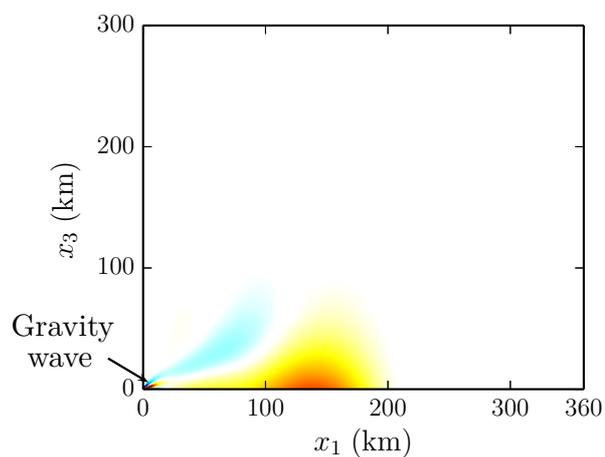
Ces résultats théoriques permettent de justifier la réponse du système d'équations (3.15) à un forçage quelconque  $(\Lambda_\rho, \Lambda_{\rho_t})$ . Ainsi, pour compléter l'étude, des simulations en deux dimensions



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.7: Champ de pression dans une atmosphère isotherme, au repos et de vitesse du son égale à  $\bar{c} = 340 \text{ m.s}^{-1}$ . Résultats obtenus à  $t = 666.67 \text{ s}$  en conséquence du forçage (3.34), d'amplitude  $\mathcal{A} = 10^{-3} \text{ J.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$  et de demi-largeur  $b_s = 600 \text{ m}$ , pour trois différentes fréquences excitatrices : (a)  $f_s = 0.1 \text{ Hz}$ , (b)  $f_s = 0.01 \text{ Hz}$ , (c)  $f_s = 0.001 \text{ Hz}$ .

des équations (3.13) ont été réalisées dans une atmosphère isotherme, au repos, de vitesse du son égale à  $\bar{c} = 340 \text{ m.s}^{-1}$  et forcée par la source

$$\begin{cases} \Lambda_\rho(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ \Lambda_{\rho e_t}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{A}_s \sin(\omega_s t) [1 - \cos(2\omega_s t)] \Pi_{[0, \pi/\omega_s]}(t) e^{-\log(2)r^2/b_s^2} \end{cases} \quad (3.34)$$

où  $\mathcal{A}_s$  est l'amplitude, fixée à  $\mathcal{A} = 10^{-3} \text{ J.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$ ,  $\omega_s$  la pulsation,  $b_s = 600 \text{ m}$  la demi-largeur et  $\Pi_{[0, \pi/\omega_s]}(t)$  la fonction porte, valant 1 dans l'intervalle  $[0, \pi/\omega_s]$  et 0 autrement. Les champs de pression normalisée  $p'/\sqrt{\bar{\rho}}$  obtenus à l'instant  $t = 666.67 \text{ s}$  pour trois différentes fréquences excitatrices,  $f_s \equiv \omega_s/(2\pi) = 0.001 \text{ Hz}$ ,  $f_s = 0.01 \text{ Hz}$  et  $f_s = 0.1 \text{ Hz}$ , sont illustrés respectivement sur les figures 3.7(a), 3.7(b) et 3.7(c). Pour  $f_s = 0.1 \text{ Hz}$ , le champ de pression est dominé par un front sphérique et isotrope, dont la forme d'onde est essentiellement liée aux variations temporelles de la fonction  $\Lambda_{\rho e_t}(\mathbf{x}, t)$ . Ce dernier peut être interprété comme étant le résultat d'une convolution entre le terme d'excitation et la dérivée première  $\delta'$  de la fonction de Dirac. Un paquet d'onde secondaire et une onde de gravité sont aussi observés, mais avec une amplitude très inférieure. À l'opposé, pour  $f_s = 0.001 \text{ Hz}$ , la fréquence du forçage étant plus petite que la fréquence de coupure acoustique, l'intensité du front principal est négligeable par rapport à celle de l'onde de gravité. La surpression observée entre  $x_1 = 100 \text{ km}$  et  $x_1 = 200 \text{ km}$  et qui s'atténue avec l'altitude pourrait être associée à une onde de Lamb. Enfin, pour  $f_s = 0.01 \text{ Hz}$ , le front principal, le paquet secondaire et l'onde de gravité ont des amplitudes comparables.

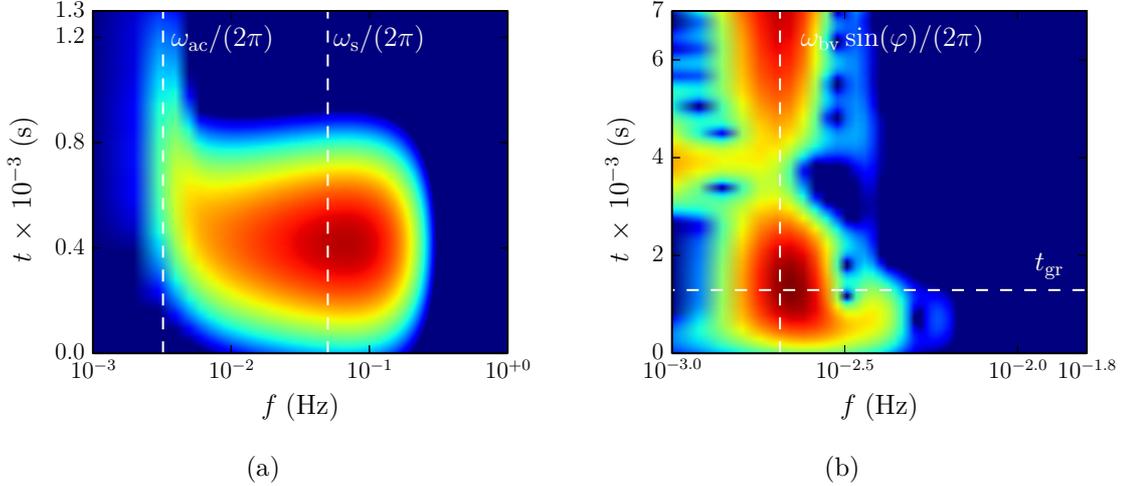


FIGURE 3.8: Module de la transformée de Fourier glissante : (a) signal enregistré pour  $f_s = 0.1 \text{ Hz}$  sur l'axe vertical  $x_3$  à  $100 \text{ km}$  d'altitude ; (b) signal enregistré pour  $f_s = 0.001 \text{ Hz}$  au point  $(100 \text{ km}, 0 \text{ km}, 100 \text{ km})$ .

Le module de la transformée de Fourier glissante du signal enregistré pour  $f_s = 0.1 \text{ Hz}$  sur l'axe vertical  $x_3$  à  $100 \text{ km}$  d'altitude est tracé sur la figure 3.7(a) en fonction de la fréquence  $f$  et du temps  $t$ . Une fenêtre gaussienne de demi-largeur de  $200 \text{ s}$  a été utilisée. Le front principal est d'abord observé, avec un pic autour de  $f = \omega_s/(2\pi)$ . Comme Cole & Greifinger<sup>42,43</sup> le

prévoient dans leur étude théorique, le front secondaire est ensuite mesuré avec une fréquence fondamentale tendant vers  $\omega_{ac}/(2\pi)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Le module de la transformée de Fourier glissante du signal enregistré pour  $f_s = 0.001$  Hz au point (100 km, 0 km, 100 km) est enfin illustré sur la figure 3.8(b) en fonction de la fréquence  $f$  et du temps  $t$ . Dans ce cas, une fenêtre gaussienne de demi-largeur de 500 s a été utilisée. Pour  $t > t_{gr}$ , la pulsation dominante de l'onde de gravité diminue et tend vers  $\omega_{bv} \sin(\varphi)/(2\pi)$ . La composante de pulsation  $\omega_{bv}$  apparaît négligeable.

L'analyse menée dans ce paragraphe dans une atmosphère isotherme et au repos se généralise, au moins qualitativement, au cas d'un milieu non homogène et en présence de vent. Il est important de noter que, à l'exception de l'onde de Lamb, le front principal, le paquet d'onde secondaire et l'onde de gravité sont bien séparés dans le temps et peuvent ainsi être bien distingués. Par ailleurs, lorsque la fréquence fondamentale du forçage est relativement élevée par rapport à la fréquence de coupure acoustique, le champ acoustique est essentiellement dominé par le front acoustique principal.

### Étude de la forme d'onde du front principal

Dans ce paragraphe, la forme d'onde du front principal est analysée. Une première remarque concerne le lien entre les fonctions  $\Lambda_\rho$  et  $\Lambda_{\rho e_t}$ . En effet, comme il a été montré dans la section 3.3, les perturbations de pression et masse volumique des ondes de très haute fréquence sont approximativement reliées par la relation  $p' = \bar{c}^2 \rho'$ . En conséquence, afin d'exciter préférentiellement les modes acoustiques et limiter le forçage de l'entropie, le terme massique  $\Lambda_\rho$  est défini de la manière suivante

$$\Lambda_\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\gamma - 1}{\bar{c}^2(x_3)} \Lambda_{\rho e_t}(\mathbf{x}, t) \quad (3.35)$$

Dans ce qui suit, la source d'énergie  $\Lambda_{\rho e_t}$  est étudiée plus particulièrement dans le cas d'une atmosphère homogène et au repos, voir la figure 3.9, qui permet aisément d'obtenir une solution analytique pour le champ  $p'(\mathbf{x}, t)$ . Dans ce cadre, le système (3.15) se réduit à l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \bar{c}^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} = (\gamma - 1) \frac{\partial \Lambda_{\rho e_t}}{\partial t} \quad (3.36)$$

La perturbation de pression  $p'$  doit se comporter comme une onde sortante lorsque le rayon  $r$  tend vers l'infini. Par ailleurs, une condition au niveau du sol doit être imposée. En l'absence d'effets visqueux et thermiques, seule la vitesse verticale  $u'_3$  s'annule pour  $x_3 = 0$ , ce qui se traduit, lorsque la gravité est négligée, par l'expression

$$\left. \frac{\partial p'}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0 \quad (3.37)$$

Soit  $\hat{p}(\mathbf{x}, \omega)$  la transformée de Fourier temporelle de la perturbation de pression  $p'(\mathbf{x}, t)$

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p'(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt$$

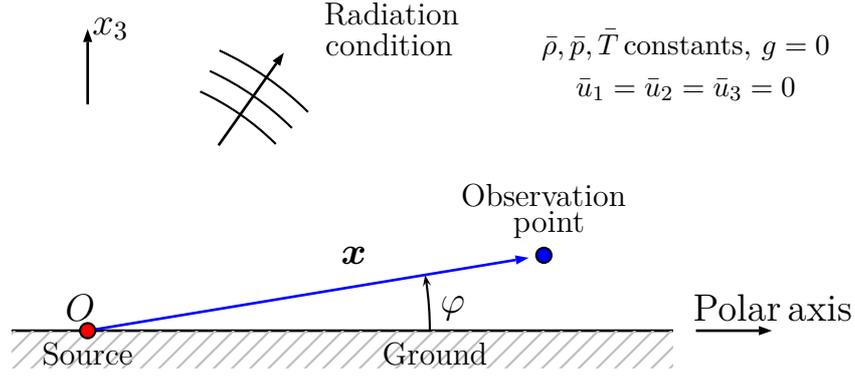


FIGURE 3.9: Excitation d'une onde acoustique par une source d'énergie et de masse dans une atmosphère homogène et au repos.

Pour une source ponctuelle de la forme  $\Lambda_{\rho_{et}}(\mathbf{x}, t) = F(t)\delta(\mathbf{x})/(\gamma - 1)$ , il est possible de montrer que la fonction  $\hat{p}$  peut s'écrire de la manière suivante (cf. annexe A)

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = 2 \times \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)e^{i\omega r/\bar{c}}}{4\pi\bar{c}^2 r}$$

où  $\hat{\mathcal{F}}$  indique la transformée de Fourier temporelle de  $dF/dt$ . La solution du problème (3.36)-(3.37) est alors donnée par l'expression

$$p'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t} dt = 2 \times \frac{1}{4\pi\bar{c}^2 r} \left. \frac{dF}{d\tau} \right|_{\tau=t-r/\bar{c}}$$

Il s'ensuit que le signal de pression est advecté dans l'espace à la vitesse du son  $\bar{c}$  et sa forme coïncide avec la dérivée de la fonction  $F$ . À nouveau, le facteur 2 représente un doublement de l'amplitude induit par le sol et le terme  $1/r$  est associé à la décroissance sphérique de l'onde.

Du fait de la discrétisation spatiale, une source ponctuelle ne peut cependant être implémentée numériquement. Par conséquent, le terme source  $\Lambda_{\rho_{et}}$  doit nécessairement présenter une étendue spatiale qui dépend typiquement du pas de maillage. Dans le cadre de ce travail, la fonction  $F(t)$  est pondérée par une enveloppe Gaussienne. Le terme de forçage  $\Lambda_{\rho_{et}}$  est donné par

$$\Lambda_{\rho_{et}}(\mathbf{x}, t) = \frac{F(t)}{(\gamma - 1)V_s} e^{-\log(2)r^2/b_s^2} \quad (3.38)$$

où  $b_s$  indique la demi-largeur et  $V_s$  le volume

$$V_s = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\pi/2} \int_0^{2\pi} e^{-r_s^2/(b/\sqrt{\log(2)})^2} r_s^2 \sin \varphi_s dr_s d\varphi_s d\theta_s = \frac{\pi\sqrt{\pi}b_s^3}{2\log(2)\sqrt{\log(2)}}$$

Dans ce cas, comme montré dans l'annexe A, la transformée de Fourier temporelle  $\hat{p}(\mathbf{x}, \omega)$  de la perturbation de pression  $p'$  s'exprime de la manière suivante

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = 2 \times \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{4\pi\bar{c}^2} \sqrt{\frac{\log(2)}{\pi b_s^2}} \left[ \frac{e^{i\omega r/\bar{c}}}{r} \Xi(-r, \omega, \bar{c}, b_s) - \frac{e^{-i\omega r/\bar{c}}}{r} \Xi(r, \omega, \bar{c}, b_s) \right] \quad (3.39)$$

où la fonction  $\Xi$  est donnée par l'intégrale

$$\Xi(r, \omega, \bar{c}, b_s) = \int_r^{+\infty} e^{i\omega\xi/\bar{c} - \log(2)\xi^2/b_s^2} d\xi \quad (3.40)$$

En particulier, dans le champ lointain, pour  $r \gg b_s$ , il vient

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = 2 \times \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{4\pi\bar{c}^2} \frac{e^{i\omega r/\bar{c}}}{r} e^{-\log(2)\omega^2/\omega_c^2}$$

avec  $\omega_c = 2 \log(2)\bar{c}/b_s$ . Ainsi, l'enveloppe Gaussienne se comporte comme un filtre passe-bas, dont la pulsation de coupure est donnée par  $\omega_c$ .

### Définition du modèle de source

La source acoustique utilisée dans le cadre de ce travail de thèse est définie par l'expression

$$\begin{cases} \Lambda_{\rho e_t}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{A}_s \sin(\omega_s t) [1 - \cos(2\omega_s t)] \Pi_{[0, \pi/\omega_s]}(t) e^{-\log(2)r^2/b_s^2} \\ \Lambda_\rho(\mathbf{x}, t) &= \frac{\gamma - 1}{\bar{c}^2(x_3)} \Lambda_{\rho e_t}(\mathbf{x}, t) \end{cases}$$

où  $\mathcal{A}_s$  représente l'amplitude,  $\omega_s$  la pulsation,  $b_s$  la demi-largeur et  $\Pi_{[0, \pi/\omega_s]}(t)$  la fonction porte, valant 1 dans l'intervalle  $[0, \pi/\omega_s]$  et 0 autrement. Le forçage est maximal à l'origine du domaine,  $r = 0$ , et devient négligeable pour des distances  $r$  supérieures à environ  $3b_s$ . La partie temporelle de l'excitation

$$F(t) = (\gamma - 1)V_s \mathcal{A}_s \sin(\omega_s t) [1 - \cos(2\omega_s t)] \Pi_{[0, \pi/\omega_s]}(t)$$

et sa dérivée  $dF(t)/dt$  sont représentées respectivement sur les figures 3.10(a) et 3.10(b). Le

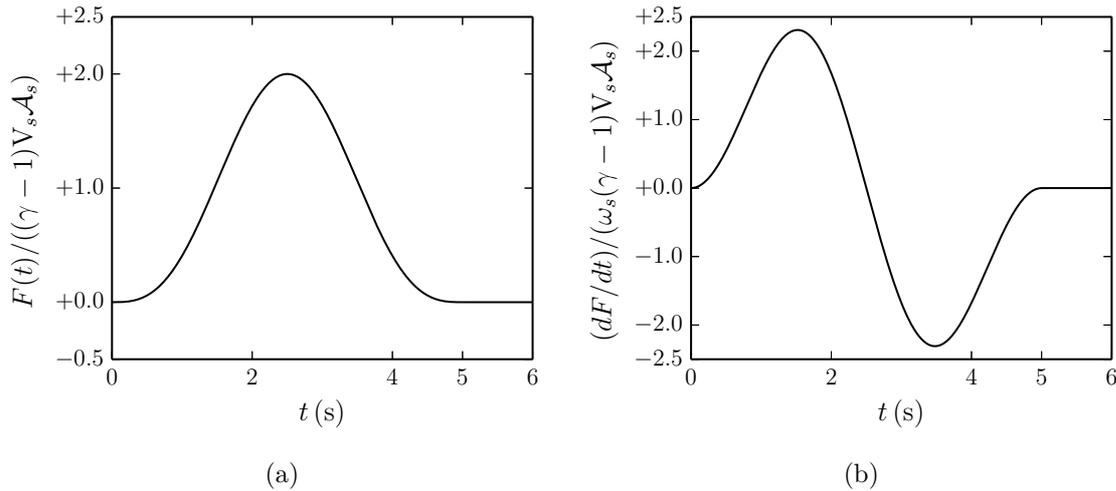


FIGURE 3.10: (a) Partie temporelle de l'excitation  $F(t)$  et (b) dérivée  $dF(t)/dt$  au point  $O$ .

forçage  $\Lambda_{\rho e_t}$  peut être interprété comme un dépôt continu d'énergie qui s'effectue sur une durée

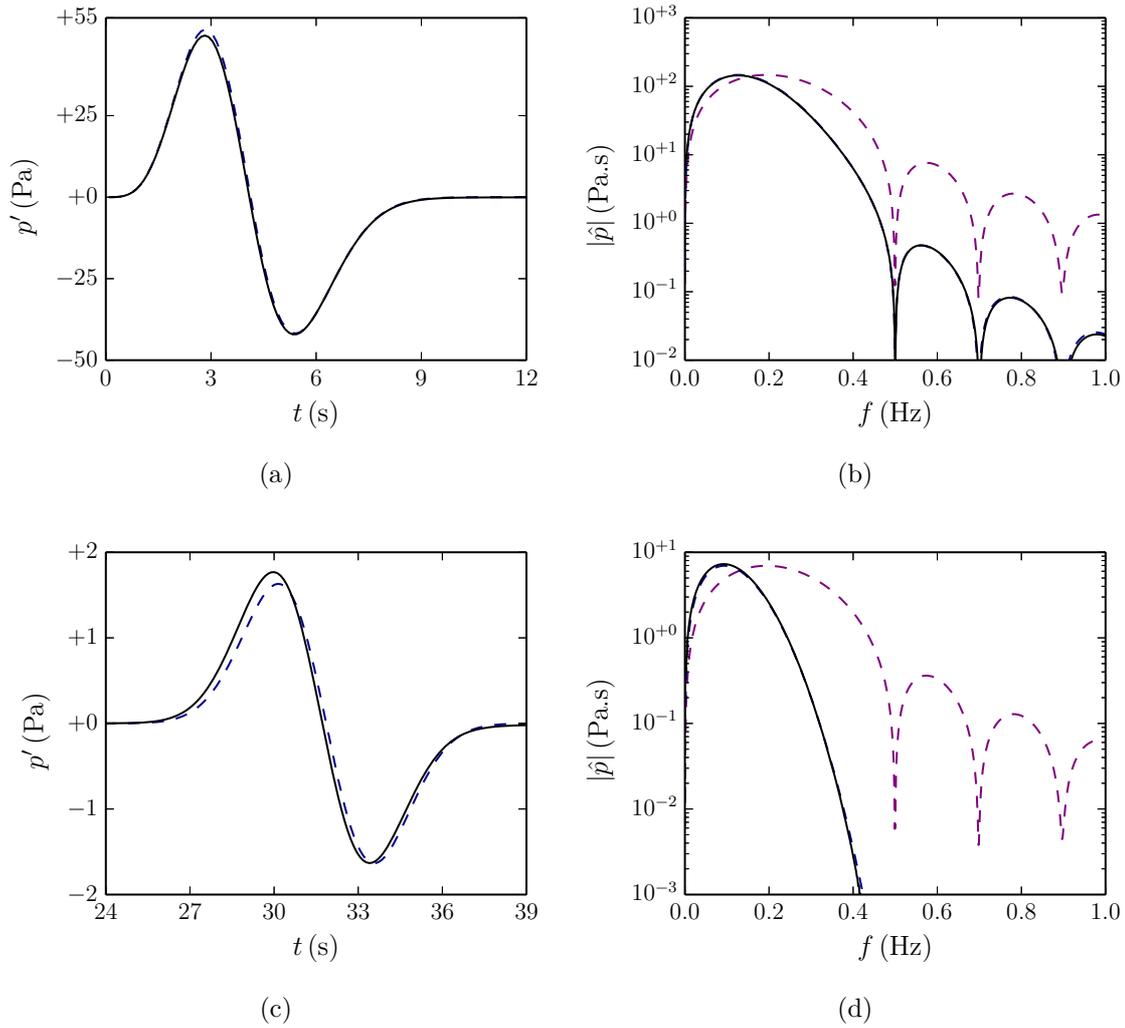


FIGURE 3.11: (a)-(b) Signal de pression enregistré au point  $O$  et spectre correspondant. (c)-(d) Signal enregistré au sol à  $x_1 = 10$  km de distance dans la direction Est-Ouest et spectre correspondant. Les résultats numériques sont représentés par les lignes noires, les courbes analytiques par les tirets bleus. Les tirets violets sont relatifs au spectre de la partie temporelle du forçage  $\Lambda_{\rho c t}$ .

égale à  $\pi/\omega_s$ . Par ailleurs, étant donnée l'évolution temporelle de la fonction  $dF/dt$ , il est attendu que la forme d'onde du signal de pression à l'origine du domaine soit proche d'une période de sinusoïde. Ainsi, lorsque l'amplitude  $\mathcal{A}_s$  est très élevée, cette sinusoïde se raidit et une onde en « N », typique des signatures produites par les explosions, est générée à une certaine distance  $r$ .

Afin de valider l'expression de la source acoustique, une simulation numérique 3-D des équations (3.4) a été réalisée dans une atmosphère inhomogène construite à partir des profils de vitesse du son et de vent zonal illustrés sur les figures 1.4(a) et 1.4(b) du chapitre introductif. Les paramètres suivants ont été utilisés :  $\mathcal{A}_s = 80 \text{ J.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$ ,  $f_s = \omega_s/(2\pi) = 0.1 \text{ Hz}$  et  $b_s = 600 \text{ m}$ . Les signaux enregistrés sur l'axe  $x_1$ , à l'origine des coordonnées  $O$  et à  $x_1 = 10 \text{ km}$

de distance dans la direction Est-Ouest sont tracés sur les figures 3.11(a) et 3.11(c). Les spectres correspondants sont illustrés sur les figures 3.11(b) et 3.11(d). Les résultats obtenus à partir de l'expression (3.39) sont aussi reportés. Un excellent accord entre le calcul numérique et la solution analytique est observé. Une légère divergence induite par l'inhomogénéité de l'atmosphère commence cependant à se manifester au point  $x_1 = 10$  km. Comme prévu, les formes d'onde dépendent principalement de la fonction  $dF/dt$  et correspondent à une période de sinusoïde. L'effet de l'enveloppe Gaussienne est aussi évident. Les spectres des deux signaux sont décalés par rapport à celui de la dérivée temporelle  $dF/dt$  (tracés en tirets violets). Pour la valeur de  $b_s$  utilisée, la fréquence de coupure  $\omega_c/(2\pi)$  est en effet relativement proche de  $f_s$ , de l'ordre de  $\omega_c/(2\pi) \simeq 0.125$  Hz.

## Résumé

Dans ce chapitre, le modèle mathématique employé pour les études de propagation atmosphérique en 3-D réalisées dans le cadre de cette thèse a été présenté. Le milieu propagatif ainsi que les équations de Navier-Stokes instationnaires et compressibles ont d'abord été introduits. Une étude théorique des conditions aux limites à appliquer au niveau de la surface terrestre a ensuite été menée. Il a été conclu que, pour les simulations réalisées dans le cadre de cette thèse, il est préférable d'imposer la seule condition d'imperméabilité, afin de bien reproduire les ondes acoustiques qui longent le sol. Dans un second temps, une analyse modale du système d'équations choisi a été effectuée. Plus particulièrement, les modes acoustiques et de gravité dans une atmosphère isotherme ont été caractérisés. L'amplification exponentielle de ces ondes avec l'altitude induite par la stratification a été mise en évidence. L'équation de Bergmann pour les modes acoustiques dans le cas plus général d'un milieu inhomogène a aussi été rappelée. Elle est à la base de l'analyse de la diffusion par les petites structures de l'atmosphère décrite dans le chapitre 5. Dans la dernière partie, le forçage des différents modes a été discuté et une source acoustique permettant d'obtenir la signature en « N » typique des explosions a été proposée.



# Développement d'un code de simulation 3-D de propagation atmosphérique

Du fait des grandes distances de propagation, la simulation numérique du champ acoustique infrasonore nécessite l'emploi d'algorithmes qui assurent une précision élevée. Dans le cadre de cette thèse, une méthode aux différences finies dans le domaine temporel (FDTD) à faibles niveaux de dispersion et de dissipation est retenue. Elle est issue des développements effectués durant les deux dernières décennies pour les applications en aéroacoustique.

Ce chapitre est dédié à la description du solveur. Dans un premier temps, le domaine de calcul est détaillé et les équations de la mécanique des fluides sont reformulées en vue de leur résolution numérique. Dans un second temps, les différents schémas sont présentés et une analyse de leurs propriétés de dispersion et de dissipation est effectuée. Certains aspects de l'implémentation informatique du code sont enfin discutés.

## Formulation du problème

### Domaine de calcul

Un système de coordonnées cartésiennes orthogonales  $Ox_1x_2x_3$ , avec l'axe vertical  $x_3$ , est utilisé (cf. figure 4.1). L'origine  $O$  se situe sur la surface terrestre, qui est représentée par le plan  $x_1 - x_2$ . La propagation d'un pulse émis par une source infrasonore placée au point  $O$  est analysée dans les directions positive de l'axe  $x_1$  et négative de l'axe  $x_2$ .

Le domaine d'étude est un parallélépipède de dimensions  $L_1 \times L_2 \times L_3$ . Toutefois, le nombre maximal de points étant nécessairement limité, la technique de la boîte glissante est utilisée<sup>52,57,140,146</sup> afin d'améliorer la résolution spatiale. L'idée est de résoudre les équations de la mécanique des fluides (C.1) uniquement au voisinage du front d'onde où le champ acoustique est non nul. Ainsi, le domaine de calcul, de taille  $L_1^{\text{box}} \times L_2 \times L_3$  ( $L_1^{\text{box}} \ll L_1$ ), se déplace dans

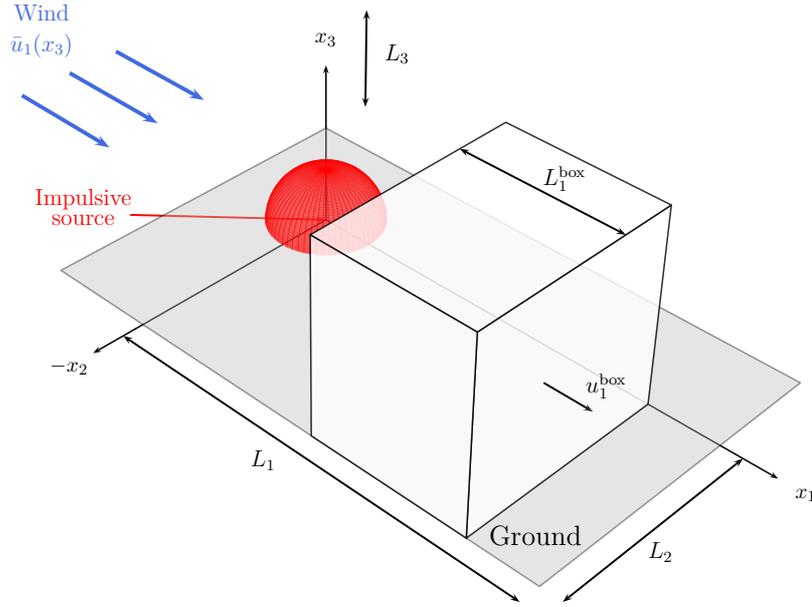


FIGURE 4.1: Représentation schématique du domaine 3-D.

la direction  $x_1$  à la vitesse  $u_1^{\text{box}}$  de manière à suivre la propagation du pulse. Une représentation schématique de la boîte glissante est donnée sur la figure 4.2. La surface terrestre est une plaque plane parfaitement réfléchissante. Par ailleurs, en l'absence d'un vent  $\bar{u}_2$  dans la direction transverse  $x_2$ , le milieu non perturbé ne dépendant que de la variable  $x_3$  et l'enveloppe spatiale de la source étant une fonction de la seule distance radiale  $r$ , le champ acoustique est symétrique par rapport au plan  $x_1-x_3$ . Le domaine physique  $L_1^{\text{phys}} \times L_2^{\text{phys}} \times L_3^{\text{phys}}$  est enfin entouré de zones éponges où des techniques particulières sont employées afin de permettre la sortie des ondes et éviter les réflexions parasites. Un maillage cartésien, constitué de  $N_1 \times N_2 \times N_3$  nœuds, est employé. Il est régulier sur l'axe  $x_1$ , tandis que la taille des mailles augmente progressivement au-delà d'une certaine distance dans les directions  $x_2$  et  $x_3$ . L'étirement de la grille sur les axes  $x_2$  et  $x_3$  est nécessaire pour deux raisons principales : d'une part, il permet d'accroître les dimensions du domaine physique ; d'autre part, à l'intérieur des zones éponges, il se combine aux techniques employées pour favoriser la sortie des ondes avec un niveau minimal de réflexions parasites.

## Équations de la mécanique des fluides

En tout point de la boîte glissante d'indices  $(j_1, j_2, j_3)$  le système d'équations (C.1) est résolu. Il peut être réécrit sous la forme vectorielle suivante

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}(t) \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{U} = [\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho e_t]_{(j_1, j_2, j_3)}^T$  est le vecteur des variables conservatives calculées au nœud  $(j_1, j_2, j_3)$  et  $\mathbf{F}$  une fonction englobant le terme source ainsi que les flux euleriens, visqueux et thermiques.

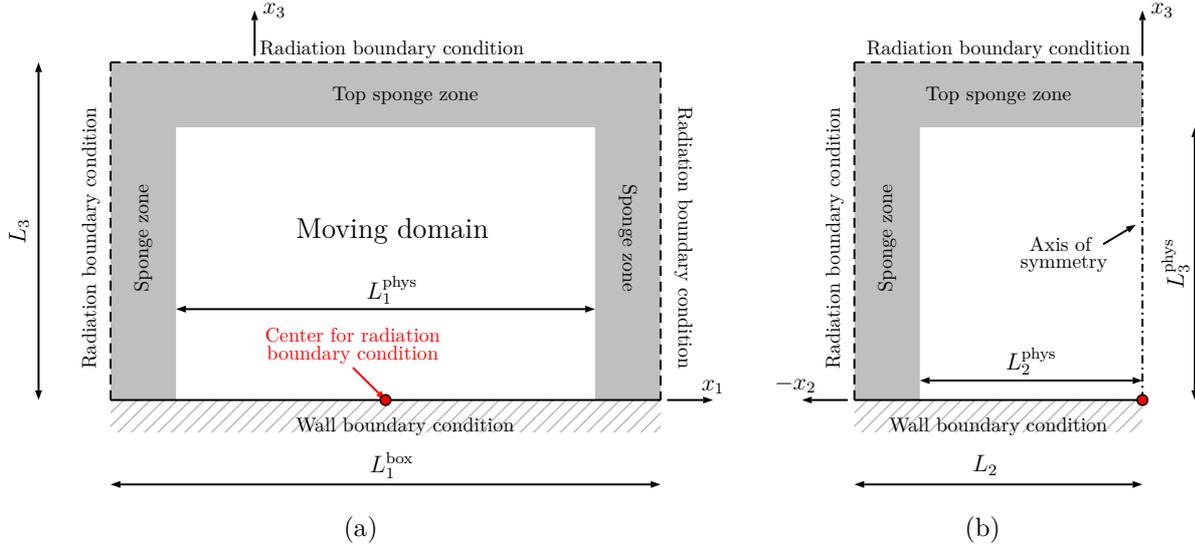


FIGURE 4.2: Représentation schématique de la boîte glissante. (a) Plan  $x_1 - x_3$ . (b) Plan  $x_2 - x_3$ .

### Équations pour les points intérieurs, condition de paroi et condition de symétrie

Aux points intérieurs et de paroi, le vecteur  $\mathbf{F}$  est défini par la relation

$$\mathbf{F} = \left[ \Lambda - \frac{\partial \mathbf{Ee}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{Fe}}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{Ge}}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathbf{Ev}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{Fv}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{Gv}}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathbf{Et}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{Ft}}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{Gt}}{\partial x_3} - \mathbf{Gg} \right]_{(j_1, j_2, j_3)} \quad (4.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda &= [\Lambda_\rho, 0, 0, 0, \Lambda_{\rho e_t}]^T \\ \mathbf{Ee} &= [\rho u_1, \rho u_1^2 + p, \rho u_1 u_2, \rho u_1 u_3, (\rho e_t + p) u_1]^T \\ \mathbf{Fe} &= [\rho u_2, \rho u_1 u_2, \rho u_2^2 + p, \rho u_2 u_3, (\rho e_t + p) u_2]^T \\ \mathbf{Ge} &= [\rho u_3, \rho u_1 u_3, \rho u_2 u_3, \rho u_3^2 + p', (\rho e_t + p') u_3]^T \\ \mathbf{Ev} &= [0, \tau_{11}^*, \tau_{21}^*, \tau_{31}^*, u_1 \tau_{11}^* + u_2 \tau_{21}^* + u_3 \tau_{31}^*]^T \\ \mathbf{Fv} &= [0, \tau_{12}^*, \tau_{22}^*, \tau_{32}^*, u_1 \tau_{12}^* + u_2 \tau_{22}^* + u_3 \tau_{32}^*]^T \\ \mathbf{Gv} &= [0, \tau_{13}^*, \tau_{23}^*, \tau_{33}^*, u_1 \tau_{13}^* + u_2 \tau_{23}^* + u_3 \tau_{33}^*]^T \\ \mathbf{Et} &= [0, 0, 0, 0, q_1^*]^T \\ \mathbf{Ft} &= [0, 0, 0, 0, q_2^*]^T \\ \mathbf{Gt} &= [0, 0, 0, 0, q_3^*]^T \\ \mathbf{Gg} &= [0, 0, 0, \rho' g, \rho' g u_3 + \bar{p} \partial u_3 / \partial x_3]^T \end{aligned} \quad (4.3)$$

À titre de rappel, dans les expressions (4.3), le symbole  $\prime$  est utilisé pour les perturbations des variables par rapport à l'atmosphère initiale non perturbée. Par ailleurs, le tenseur des

contraintes visqueuses  $\tau_{ij}^*$  et le flux de chaleur  $q_i^*$  sont donnés par les relations

$$\tau_{ij}^* = \mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$$

$$q_i^* = -\kappa \frac{\partial T'}{\partial x_i}$$

Aux nœuds situés au sol, compte tenu de la discussion théorique menée dans la section 3.2 du chapitre 3, la vitesse verticale est fixée égale à zéro. Il s'ensuit que

$$\rho(x_1, x_2, x_3 = 0, t) u_3(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = 0 \quad (4.4)$$

Enfin, aux points sur le plan  $x_1 - x_3$ , la symétrie du champ acoustique est imposée par les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2, x_3, t) &= +\rho(x_1, -x_2, x_3, t) \\ \rho(x_1, x_2, x_3, t) u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= +\rho(x_1, -x_2, x_3, t) u_1(x_1, -x_2, x_3, t) \\ \rho(x_1, x_2, x_3, t) u_2(x_1, x_2, x_3, t) &= -\rho(x_1, -x_2, x_3, t) u_2(x_1, -x_2, x_3, t) \\ \rho(x_1, x_2, x_3, t) u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= +\rho(x_1, -x_2, x_3, t) u_3(x_1, -x_2, x_3, t) \\ \rho(x_1, x_2, x_3, t) e_t(x_1, x_2, x_3, t) &= +\rho(x_1, -x_2, x_3, t) e_t(x_1, -x_2, x_3, t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

### Conditions de rayonnement

Aux frontières de la boîte glissante, des équations spécifiques sont nécessaires pour permettre la sortie des perturbations et minimiser les réflexions parasites. Les conditions aux limites

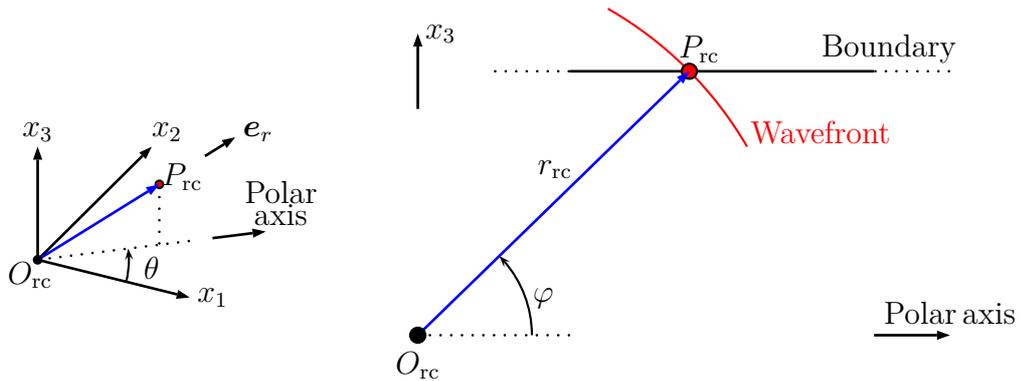


FIGURE 4.3: Coordonnées sphériques utilisées pour les conditions de rayonnement.

de rayonnement utilisées dans le cadre de cette thèse sont basées sur les développements de Bayliss & Turkel<sup>7</sup> et reposent sur une approximation en champ lointain des équations d'Euler linéarisées. Des formulations de ces conditions ont été proposées par Tam & Webb<sup>151</sup> et Tam & Dong<sup>154</sup> en deux dimensions et ont ensuite été étendues à des géométries tridimensionnelles par Bogey & Bailly.<sup>19</sup>

Aux frontières du domaine, le champ de pression est essentiellement dû au mode acoustique. De manière générale, loin des sources et à de grandes distances par rapport à la longueur d'onde, toute onde acoustique divergente peut être considérée localement sphérique. Par ailleurs, en négligeant les effets non linéaires, visqueux et thermiques, en l'absence de gravité, en milieu homogène et en présence d'un écoulement uniforme  $\bar{\mathbf{u}}$ , il est possible de montrer que les fluctuations de masse volumique, de vitesse et de pression ont un comportement asymptotique de la forme<sup>154</sup>

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ p' \end{bmatrix} = \frac{\chi\left(\frac{r_{rc}}{u_r^p} - t, \theta, \varphi\right)}{r_{rc}} \begin{bmatrix} 1/\bar{c}^2 \\ \hat{u}_1(\theta, \varphi)/(\bar{\rho}\bar{c}) \\ \hat{u}_2(\theta, \varphi)/(\bar{\rho}\bar{c}) \\ \hat{u}_3(\theta, \varphi)/(\bar{\rho}\bar{c}) \\ 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_{rc}^2}\right) \quad r_{rc} \rightarrow +\infty \quad (4.6)$$

où, comme illustré sur la figure 4.3,  $r_{rc}$  est la distance entre le centre de la sphère  $O_{rc}$  et le point d'observation  $P_{rc}$ , et  $\theta$  et  $\varphi$  indiquent les angles de longitude et latitude formés par le vecteur  $\overrightarrow{O_{rc}P_{rc}}$ . La variable  $u_r^p$  représente la vitesse de propagation effective dans la direction  $\overrightarrow{O_{rc}P_{rc}}$

$$u_r^p = \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_r + \sqrt{\bar{c}^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\theta)^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2} \quad (4.7)$$

les vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_\varphi$  étant définis en coordonnées cartésiennes par les expressions

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (\cos(\theta) \cos(\varphi), \cos(\theta) \sin(\varphi), \sin(\theta)) \\ \mathbf{e}_\theta &= (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), -\cos(\theta)) \\ \mathbf{e}_\varphi &= (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0) \end{aligned}$$

En dérivant l'équation (4.6) par rapport au temps et à la variable  $r_{rc}$ , l'expression suivante est enfin obtenue

$$\frac{1}{u_r^p} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho' \\ u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ p' \end{bmatrix} + \left( \frac{\partial}{\partial r_{rc}} + \frac{1}{r_{rc}} \right) \begin{bmatrix} \rho' \\ u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ p' \end{bmatrix} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_{rc}^3}\right) \quad r_{rc} \rightarrow +\infty \quad (4.8)$$

La relation (4.8) reste approximativement valable aussi dans le cas d'une atmosphère non homogène et en présence d'un écoulement non uniforme  $\bar{\mathbf{u}}$ , pourvu que le milieu soit lentement variable et que les effets non linéaires, visqueux et thermiques soient négligeables. Ces derniers peuvent toutefois être très importants, en particulier dans la haute atmosphère. Ainsi, afin de raccorder sans discontinuité les équations de Navier-Stokes et les conditions de rayonnement,

des techniques spécifiques sont utilisées dans les zones éponges pour limiter l'amplitude des ondes sortantes. Par ailleurs, la viscosité dynamique  $\mu$  est aussi progressivement réduite dans ces régions.

Une dernière remarque concerne la définition du point  $O_{rc}$ . Le choix est crucial pour éviter des niveaux de réflexion significatifs. En effet, l'approximation (4.8) est d'autant plus précise que  $O_{rc}$  se rapproche du centre effectif de l'onde sphérique sortante. Pour cette raison, la position de  $O_{rc}$  pourrait éventuellement varier en fonction du point d'observation  $P_{rc}$ , de manière à suivre la déformation du front d'onde. Pour les simulations réalisées dans le cadre de cette thèse, le centre des conditions de rayonnement  $O_{rc}$  se situe sur l'axe  $x_1$  au milieu de la boîte glissante.

Les équations (4.8) sont enfin appliquées sur les derniers cinq nœuds dans la direction orthogonale à chaque frontière. Pour ces points, le vecteur  $\mathbf{F}$  est donné par

$$\mathbf{F} = -u_{r,(j_1,j_2,j_3)}^p \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \rho'}{\partial r_{rc}} + \frac{\rho'}{r_{rc}} \\ \rho \frac{\partial u'_1}{\partial r_{rc}} + u_1 \frac{\partial \rho'}{\partial r_{rc}} + \frac{\rho' u_1 + \rho u'_1}{r_{rc}} \\ \rho \frac{\partial u'_2}{\partial r_{rc}} + u_2 \frac{\partial \rho'}{\partial r_{rc}} + \frac{\rho' u_2 + \rho u'_2}{r_{rc}} \\ \rho \frac{\partial u'_3}{\partial r_{rc}} + u_3 \frac{\partial \rho'}{\partial r_{rc}} + \frac{\rho' u_3 + \rho u'_3}{r_{rc}} \\ \frac{1}{\gamma - 1} \left( \frac{\partial p'}{\partial r_{rc}} + \frac{p'}{r_{rc}} \right) + \rho u_k \left( \frac{\partial u'_k}{\partial r_{rc}} + \frac{u'_k}{r_{rc}} \right) + \frac{1}{2} u_k u_k \left( \frac{\partial \rho'}{\partial r_{rc}} + \frac{\rho'}{r_{rc}} \right) \end{array} \right]_{(j_1,j_2,j_3)} \quad (4.9)$$

## Méthodes numériques

Dans cette section, les méthodes utilisées pour la résolution numérique des équations (4.1) sont présentées. Leurs propriétés de dispersion et de dissipation sont aussi discutées. L'algorithme d'intégration temporelle est d'abord introduit. Les schémas de dérivation spatiale sont décrits dans un second temps. La procédure adoptée pour le traitement des chocs qui peuvent se développer dans le champ acoustique est ensuite détaillée. Les techniques employées dans les zones éponges pour réduire l'amplitude des ondes sortantes du domaine de calcul et minimiser le niveau des réflexions parasites sont également exposées. Finalement, la stabilité numérique du code est analysée.

### Intégration temporelle

Le système d'équations différentielles ordinaires (4.1) est intégré par la méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 2 et à six sous-étapes développée par Bogey & Bailly.<sup>20</sup> Dans ce qui suit, ce schéma est identifié par le sigle RK26. Soit  $\Delta t$  le pas temporel. La valeur  $\mathbf{U}^{(n+1)}$  du vecteur

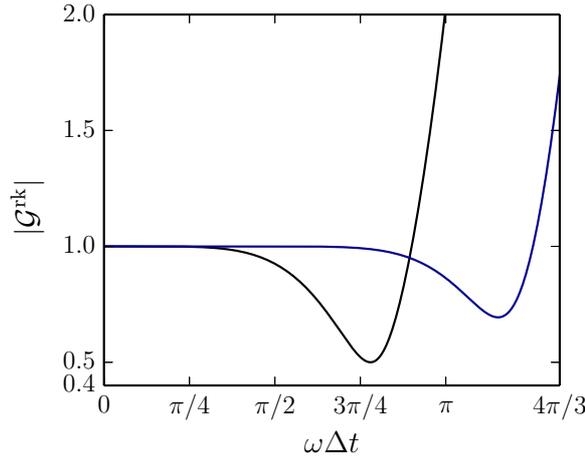


FIGURE 4.4: Taux d'amplification  $|\mathcal{G}^{\text{rk}}|$  en fonction de la pulsation normalisée  $\omega\Delta t$  pour les méthodes RK26 (trait noir) et RK4s (trait bleu).

$\mathbf{U}$  à l'instant  $t^{(n+1)} = (t^{(n)} + \Delta t)$  est calculée à partir de sa valeur  $\mathbf{U}^{(n)}$  à l'instant précédent  $t^{(n)}$  par l'intermédiaire de l'algorithme

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{(0)} &= \mathbf{U}^{(n)} \\ \mathbf{V}^{(p)} &= \mathbf{U}^{(n)} + b_p \Delta t \mathbf{F}^{(p-1)} & p = 1, \dots, 6 \\ \mathbf{U}^{(n+1)} &= \mathbf{V}^{(6)} \end{cases} \quad (4.10)$$

où les termes  $b_p$ ,  $p = 1, \dots, 6$ , représentent les coefficients de la méthode numérique, qui ont été déterminés de manière à réduire les erreurs de dissipation et de dispersion. Dans le cas particulier d'une fonction vectorielle  $\mathbf{F}$  linéaire, l'algorithme (4.10) se réécrit comme suit

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{U}^{(n)} + \sum_{p=1}^{p=6} \gamma_p \Delta t^p \left. \frac{d^p \mathbf{U}}{dt^p} \right|_{t=t^{(n)}} \quad (4.11)$$

les paramètres  $\gamma_p$ ,  $p = 1, \dots, 6$ , étant définis par la relation

$$\gamma_p = \prod_{m=6-p+1}^{m=6} b_m \quad p = 1, \dots, 6$$

En multipliant l'équation (4.11) par  $e^{i\omega t}$  et en intégrant le résultat dans le temps, l'expression suivante est obtenue

$$\hat{\mathbf{U}}^{(n+1)} = \mathcal{G}^{\text{rk}} \hat{\mathbf{U}}^{(n)}$$

où  $\hat{\mathbf{U}}^{(n)}$  est la transformée de Fourier temporelle de  $\mathbf{U}^{(n)}$

$$\hat{\mathbf{U}}^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}^{(n)} e^{i\omega t} dt$$

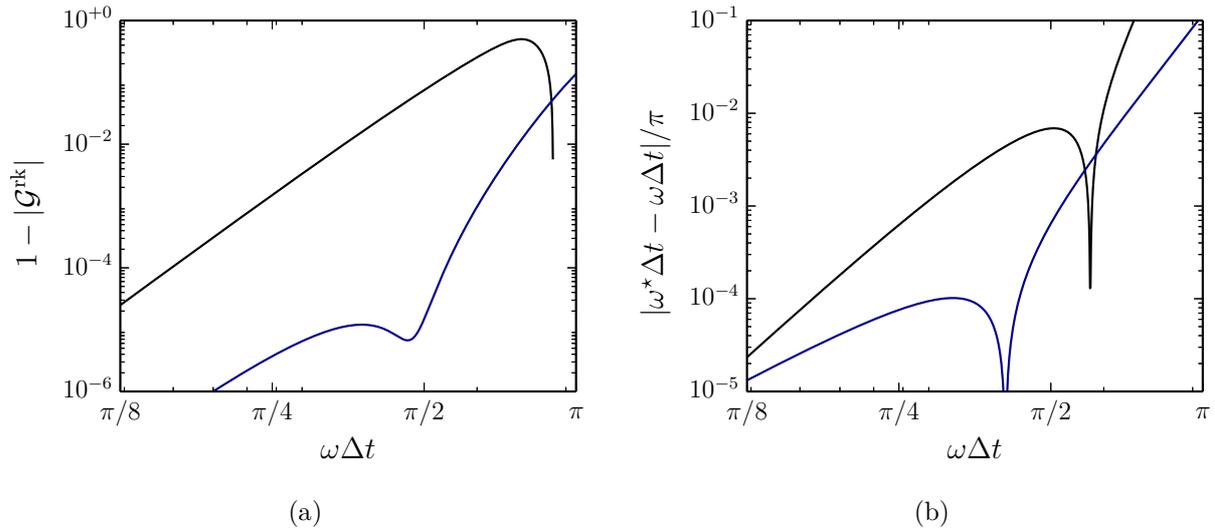


FIGURE 4.5: (a) Facteur de dissipation  $1 - |\mathcal{G}^{\text{rk}}|$  et (b) différence de phase  $|\omega\Delta t - \omega^*\Delta t|/\pi$  en fonction de la pulsation normalisée  $\omega\Delta t$  pour les méthodes RK26 (trait bleu) et RK4s (trait noir).

et

$$\mathcal{G}^{\text{rk}}(\omega\Delta t) = 1 + \sum_{p=1}^{p=6} \gamma_p (-i\omega\Delta t)^p = |\mathcal{G}^{\text{rk}}(\omega\Delta t)| e^{i\omega^*\Delta t(\omega\Delta t)} \quad (4.12)$$

est la fonction de transfert. Les termes  $|\mathcal{G}^{\text{rk}}|$  et  $\omega^*$  correspondent respectivement au taux d'amplification numérique et à la pulsation effective. Le module  $|\mathcal{G}^{\text{rk}}|$  est illustré sur la figure 4.4 en fonction de la pulsation normalisée  $\omega\Delta t$ . La courbe relative à la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 classique, identifiée par le sigle RK4s, est aussi représentée. Le schéma RK26 reste stable jusqu'à des fréquences angulaires de l'ordre de  $\omega_s = 3.95/\Delta t$ , la fonction  $|\mathcal{G}^{\text{rk}}|$  étant supérieure à 1 pour  $\omega\Delta t > \omega_s\Delta t$ . Cette valeur limite est plus élevée en comparaison à celle de la méthode RK4s, qui vaut environ  $2.83/\Delta t$ . Par ailleurs, l'expression exacte du taux d'amplification étant  $e^{i\omega\Delta t}$ , la dissipation et la dispersion numériques peuvent être quantifiées respectivement par  $1 - |\mathcal{G}^{\text{rk}}|$  et  $|\omega\Delta t - \omega^*\Delta t|/\pi$ . Ces grandeurs sont tracées sur les figures 4.5(a) et 4.5(b). Le gain par rapport à l'algorithme RK4s est clairement illustré. À titre d'exemple, le facteur de dissipation  $1 - |\mathcal{G}^{\text{rk}}|$  est inférieur à  $5 \times 10^{-5}$  jusqu'à des pulsations de l'ordre de  $\omega_p = 0.65/\Delta t$  et  $\omega_p = 1.9/\Delta t$  respectivement pour les schémas RK4s et RK26.

## Dérivées spatiales

Soit  $\Delta\xi_l$  le pas spatial constant d'un maillage 1-D dans une direction  $\xi_l$ . À un instant de temps  $t$ , la dérivée  $\partial\mathbf{G}/\partial\xi_l$  d'un vecteur  $\mathbf{G}$  au point  $\xi_{l,j}$  peut être déterminée par le schéma

explicite aux différences finies

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi_l} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}} = \frac{1}{\Delta \xi_l} \sum_{p=-M}^{p=N} a_p \mathbf{G}|_{\xi_l = \xi_{l,j} + p\Delta \xi_l} + \mathcal{O}(\Delta \xi_l^n) \quad (4.13)$$

où les indices  $M$  et  $N$  représentent les nombres de nœuds respectivement à gauche et à droite de  $\xi_{l,j}$ , les paramètres  $a_p$  sont les coefficients de la méthode et l'exposant  $n$  est l'ordre formel de la méthode. En multipliant l'équation (4.13) par  $e^{-ik_l \xi_l}$  et en intégrant le résultat dans l'espace, la relation suivante est obtenue

$$ik_l \hat{\mathbf{G}} = ik_l^* \hat{\mathbf{G}} + \mathcal{O}(\Delta \xi_l^n)$$

où  $\hat{\mathbf{G}}$  indique la transformée de Fourier spatiale de  $\mathbf{G}$

$$\hat{\mathbf{G}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G} e^{-ik_l \xi_l} d\xi_l$$

et

$$k_l^* = \frac{-i}{\Delta \xi_l} \sum_{p=-M}^N a_p e^{ipk_l \Delta \xi_l}$$

représente le nombre d'onde effectif. La dispersion et la dissipation numériques introduites par l'approximation (4.13) peuvent être mises en évidence à l'aide de l'équation unidimensionnelle d'advection

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \bar{c} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi_l} = 0$$

En supposant que l'intégration temporelle soit exacte, la solution approchée  $\hat{\mathbf{G}}(k_l, t)$  obtenue en utilisant le schéma (4.13) est donnée par l'expression

$$\hat{\mathbf{G}}(k_l, t) = \hat{\mathbf{G}}(k_l, 0) e^{-ik_l^* \bar{c} t} = \hat{\mathbf{G}}(k_l, 0) e^{-ik_l \bar{c} t} e^{i(k_l - \Re(k_l^*)) \bar{c} t} e^{\Im(k_l^*) \bar{c} t}$$

La solution exacte étant  $\hat{\mathbf{G}}(k_l, 0) e^{-ik_l \bar{c} t}$ , la dispersion et la dissipation numériques sont quantifiées respectivement par les variables  $|k_l \Delta \xi_l - \Re(k_l^* \Delta \xi_l)|/\pi$  et  $e^{\Im(k_l^* \Delta \xi_l) \bar{c}/|\bar{c}|}$ . Cette dernière est identiquement nulle pour un schéma centré ( $M = N$ ) avec des coefficients antisymétriques ( $a_{-p} = -a_p$ ,  $a_0 = 0$ ). Au contraire, lorsque  $M \neq N$ , le terme  $\Im(k_l^* \Delta \xi_l)$  ne s'annule pas et change éventuellement de signe. En conséquence, un schéma décentré peut être dissipatif pour certains nombres d'onde et amplificateur pour d'autres.

Les méthodes aux différences finies standards sont d'ordre maximal,  $n = M + N$ . Elles sont obtenues en effectuant des développements de Taylor des fonctions  $\mathbf{G}|_{\xi_l = \xi_{l,j} + p\Delta \xi_l}$  autour du point  $\xi_{l,j}$ , en réinjectant ces derniers dans l'équation (4.13), et en annulant tous les termes d'ordre inférieur à  $M + N$ , à l'exception de celui relatif à la dérivée première. Pour  $n \geq 3$ , ces méthodes s'avèrent suffisamment précises pour les grandes longueurs d'onde, mais présentent une erreur de dispersion élevée pour des longueurs d'ondes plus petites, typiquement  $\lambda_l/\Delta \xi_l \leq 10$ . Dans

les deux dernières décennies, de nombreux schémas aux différences finies ont été développés pour les applications en aéroacoustique et en mécanique des fluides en vue d'une estimation précise des flux pour les petites longueurs d'onde.<sup>14,20,151</sup> Ils sont basés sur une minimisation de la variable  $|k_l \Delta \xi_l - \Re(k_l^* \Delta \xi_l)|/\pi$  dans l'espace des nombres d'onde, au prix d'une réduction de l'ordre formel.

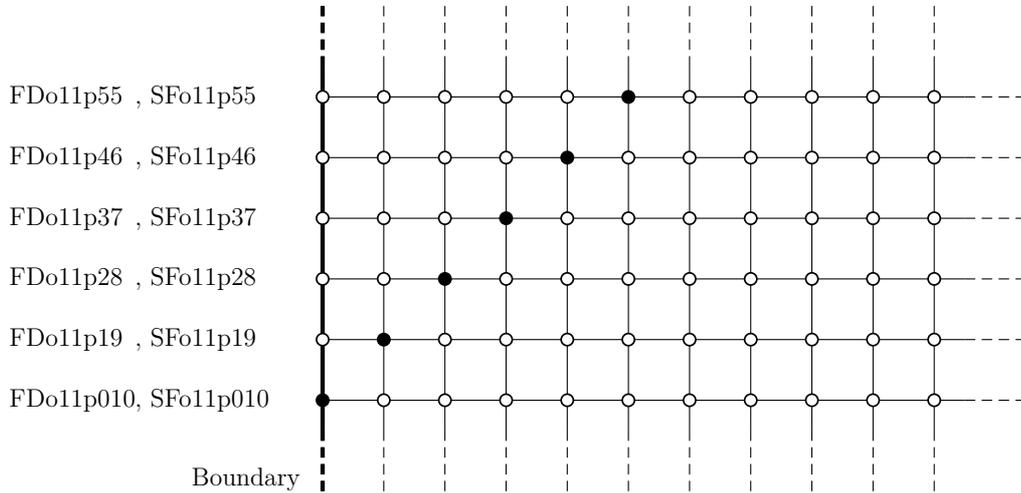


FIGURE 4.6: Nomenclature des schémas aux différences finies FDo11pMN et des filtres sélectifs SFo11pMN utilisés dans le cadre de ce travail. M et N sont les nombres de points respectivement à gauche et à droite du nœud (en noir) pour lequel la dérivée ou la fonction filtrée est calculée.

Dans le cadre de ce travail, le schéma centré développé par Bogey & Bailly<sup>20</sup> et les méthodes décentrées proposées par Berland *et al.*<sup>14</sup> sont employés respectivement à l'intérieur de la boîte glissante et au voisinage des bords du domaine. Ils sont d'ordre 4, sur 11 points et optimisés afin de réduire l'erreur de dispersion dans l'intervalle  $k_l \Delta \xi_l \in [\pi/16, \pi/2]$ . Ils sont identifiés par le sigle FDo11pMN (cf. figure 4.6). Le nombre d'onde effectif normalisé  $k_l^* \Delta \xi_l$  et l'erreur de phase  $|k_l \Delta \xi_l - \Re(k_l^* \Delta \xi_l)|/\pi$  pour l'algorithme FDo11p55 sont tracés respectivement sur les figures 4.7(a) et 4.7(b). Les courbes relatives au schéma centré standard sur 11 points, indiqué par le sigle FDo11p55, sont aussi reportées. Pour des nombres d'onde proches de zéro, la dispersion est très faible. À l'inverse, pour  $k_l \Delta \xi_l \rightarrow \pi$ , l'erreur est maximale et le nombre d'onde effectif tend vers zéro. Entre ces extrêmes,  $k_l^* \Delta \xi_l$  est proche de  $k_l \Delta \xi_l$  jusqu'à un nombre d'onde de coupure  $k_l^c \Delta \xi_l$ , au-delà duquel la précision se dégrade rapidement. Ce dernier peut être défini comme étant la valeur de  $k_l \Delta \xi_l$  à laquelle l'erreur de phase dépasse un seuil de  $5 \times 10^{-5}$ . Ainsi,  $k_l^c \Delta \xi_l$  vaut environ 6.6 pour le schéma standard et 4.6 pour la méthode optimisée.

Soit maintenant  $x_l = f(\xi_l)$ , où  $f$  est la fonction qui permet de transformer le maillage étiré dans la direction  $x_l$  en la grille uniforme sur l'axe  $\xi_l$ . La dérivée spatiale  $\partial \mathbf{G} / \partial x_l$  de la fonction

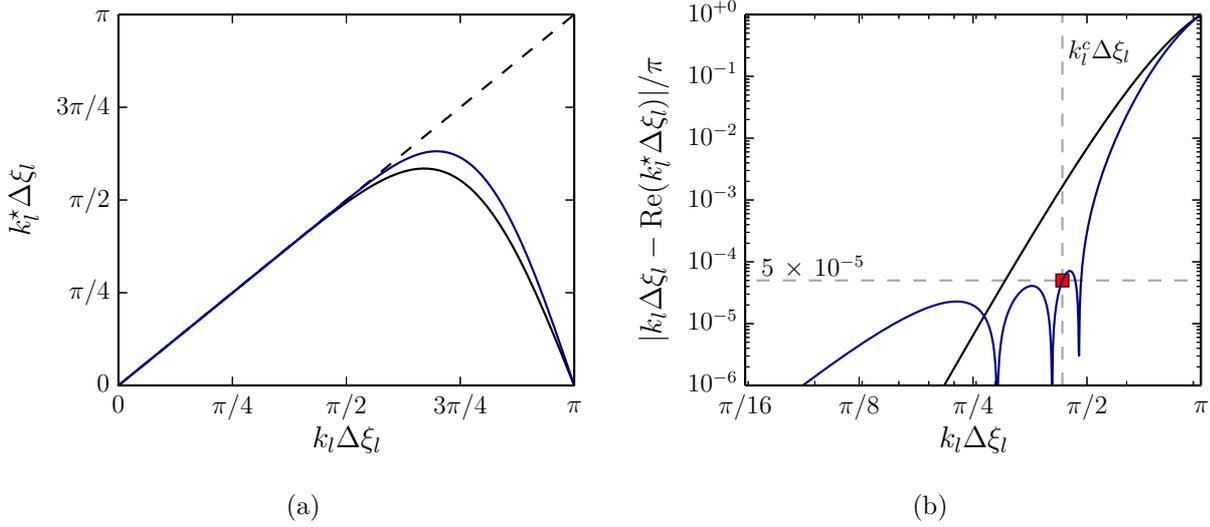


FIGURE 4.7: (a) Nombre d'onde effectif normalisé  $k_l^* \Delta \xi_l$  et (b) erreur de dispersion  $|k_l \Delta \xi_l - \Re(k_l^* \Delta \xi_l)| / \pi$  en fonction du nombre d'onde  $k_l \Delta \xi_l$  pour les schémas FDo11p55 (trait bleu) et FDs11p55 (trait noir). Les tirets noirs sur la figure (a) correspondent au nombre d'onde exact  $k_l \Delta \xi_l$ .

$\mathbf{G}$  par rapport à la variable  $x_l$  s'écrit au point  $x_{l,j}$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_l} \right|_{x_l=x_{l,j}} = \left[ \frac{1}{dx_l/d\xi_l} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi_l} \right]_{x_l=x_{l,j}}$$

En utilisant la méthode FDo11pMN, elle est approximée de la manière suivante

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_l} \right|_{x_l=x_{l,j}} = \frac{\sum_{p=-M}^{p=N} a_p \mathbf{G}|_{x_l=x_{l,j}+p\Delta x_l}}{\sum_{p=-M}^{p=N} a_p(x_{l,j} + p\Delta x_l)}$$

Une expression analytique pour le nombre d'onde effectif peut également être déterminée lorsque le taux d'étirement  $(x_{l,j+1} - x_{l,j}) / (x_{l,j} - x_{l,j-1})$  est constant.<sup>20</sup> Il est possible de montrer que la non uniformité du maillage constitue une source additionnelle de dispersion et de dissipation. Cependant, pour des taux inférieurs à environ 5 %, l'erreur est négligeable pour les nombres d'onde bien résolus.

### Filtrage sélectif

Des oscillations de très haute fréquence sont généralement engendrées par la troncature imposée par la discrétisation spatiale. Par ailleurs, d'autres ondes parasites peuvent se développer au voisinage de la source acoustique, sur la paroi, dans les zones éponges où le maillage est étiré, ou bien au niveau des conditions de rayonnement. Afin de ne pas contaminer la solution

physique, en suivant les travaux de Tam *et al.*<sup>152</sup> et Bogey & Bailly,<sup>20</sup> un amortissement sélectif, qui dissipe les nombres d'onde supérieurs à  $k_l^c \Delta \xi_l$  tout en préservant ceux qui sont bien supportés par le maillage, est employé. Pour ce faire, à chaque pas de temps et à la suite de l'algorithme d'intégration temporelle, le vecteur des perturbations des variables conservatives  $\mathbf{U}' = [\rho - \bar{\rho}, \rho u_1 - \bar{\rho} \bar{u}_1, \rho u_2 - \bar{\rho} \bar{u}_2, \rho u_3 - \bar{\rho} \bar{u}_3, \rho e_t - \bar{\rho} \bar{e}_t]^T$  est filtré séquentiellement dans les trois directions de l'espace. Pour une grille uniforme dans une direction  $\xi_l$  donnée, la procédure s'écrit

$$\mathbf{U}'^{\text{sf},l} = \mathbf{U}'^{\text{sf},l-1} - \sigma^{\text{sf}} \sum_{p=-M}^{p=N} d_p \mathbf{U}'^{\text{sf},l-1} \Big|_{\xi_l = \xi_{l,j} + p \Delta \xi_l} \quad (4.14)$$

où  $\sigma^{\text{sf}} \in [0, 1]$  est l'intensité du filtrage et  $d_p$  sont les coefficients de la méthode. En multipliant l'équation (4.14) par  $e^{-ik_l \xi_l}$  et en intégrant le résultat par rapport à la variable  $\xi_l$ , l'expression suivante est obtenue

$$\hat{\mathbf{U}}'^{\text{sf},l} = \hat{\mathbf{U}}'^{\text{sf},l-1} \left[ 1 - \mathcal{D}^{\text{sf},l}(k_l \Delta \xi_l, \sigma^{\text{sf}}) \right]$$

où le symbole  $\hat{\phantom{x}}$  indique l'opérateur de transformée de Fourier spatiale et  $\mathcal{D}^{\text{sf},l}$  est la fonction de transfert

$$\mathcal{D}^{\text{sf},l}(k_l \Delta \xi_l, \sigma^{\text{sf}}) = \sigma^{\text{sf}} \sum_{p=-M}^N d_p e^{ipk_l \Delta \xi_l}$$

Si  $M = N$  et  $d_{+p} = d_{-p}$ , le filtre est purement dissipatif. Au contraire, de la dispersion est nécessairement introduite lorsque  $M \neq N$ .

Dans le cadre de cette thèse, à l'intérieur de la boîte glissante, le schéma centré et symétrique sur 11 points ( $M = N = 5$ ) développé par Bogey *et al.*<sup>21</sup> est utilisé, tandis que, aux bords du domaine, les filtres décentrés de Berland *et al.*<sup>14</sup> sont employés. La nomenclature de ces méthodes est illustrée sur la figure 4.6. À titre d'illustration, l'évolution de  $\mathcal{D}^{\text{sf},l}$  en fonction du nombre d'onde normalisé  $k_l \Delta \xi_l$  est tracée dans les figures 4.8(a) et 4.8(b) pour le filtre SF11p55. Comme envisagé, lorsque  $k_l \Delta \xi_l$  est proche de 0 la dissipation est minimale, tandis qu'elle est très importante pour les nombres d'onde voisins et supérieurs au nombre d'onde de coupure du schéma aux différences finies FDo11p55.

## Traitement des chocs

À cause des effets non linéaires, des chocs peuvent se produire durant la propagation acoustique. Comme il a été montré dans le chapitre 2, le développement de ces discontinuités induit une redistribution d'énergie entre composantes spectrales et la génération d'harmoniques de nombre d'onde élevé. Du fait de la discrétisation spatiale, ce transfert ne peut cependant se poursuivre au-delà du nombre d'onde de coupure  $k_l^c \Delta \xi_l$  et de l'énergie peut s'accumuler autour du maximum de la fonction  $k_l^* \Delta \xi_l(k_l \Delta \xi_l)$ .<sup>153</sup> En conséquence, des oscillations peuvent apparaître et contaminer, voire rendre divergente, la solution physique des équations de la mécanique

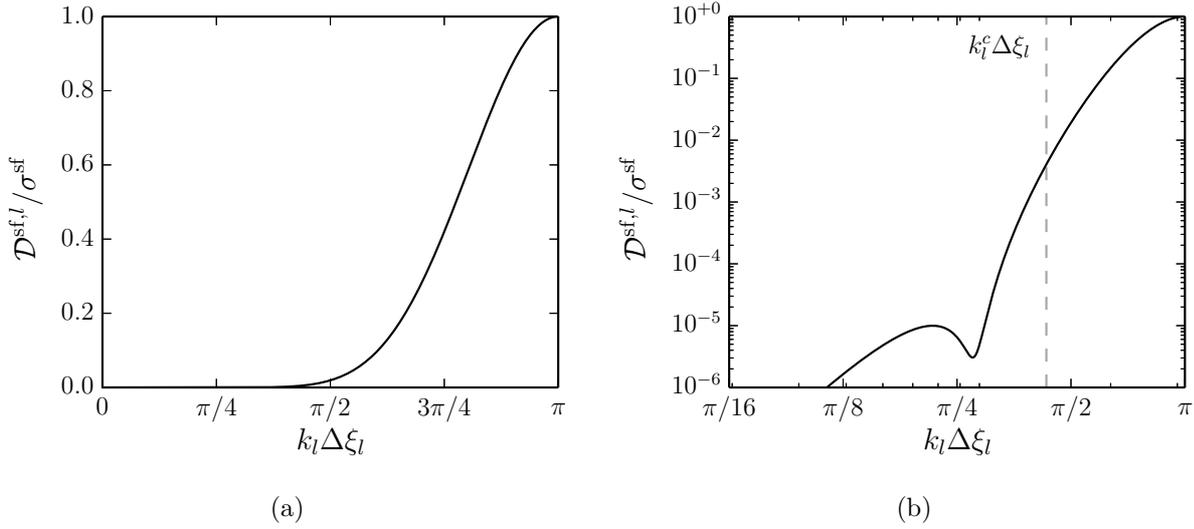


FIGURE 4.8: Fonction de dissipation  $\mathcal{D}^{\text{sf},l}$  pour le schéma SF11p55 développé par Bogey *et al.*<sup>21</sup> en (a) échelle linéaire et (b) échelle logarithmique.

des fluides. Afin d'éviter la génération de ces ondes parasites, une méthode de capture de choc est utilisée. Elle se divise en deux étapes : dans un premier temps, la position de la discontinuité est déterminée à l'aide d'un détecteur ; ensuite, un filtre très dissipatif est appliqué localement au niveau du choc. Cette technique est basée sur les développements en aéroacoustique de Bogey *et al.*<sup>21</sup> Cependant, un nouveau détecteur, spécifique aux problèmes de propagation acoustique à grande distance, est développé dans le cadre de cette thèse. À l'instar du filtrage sélectif, la procédure de capture de choc est appliquée séquentiellement dans les trois directions de l'espace aux perturbations des variables conservatives  $\mathbf{U}^{\text{sf}}$ .

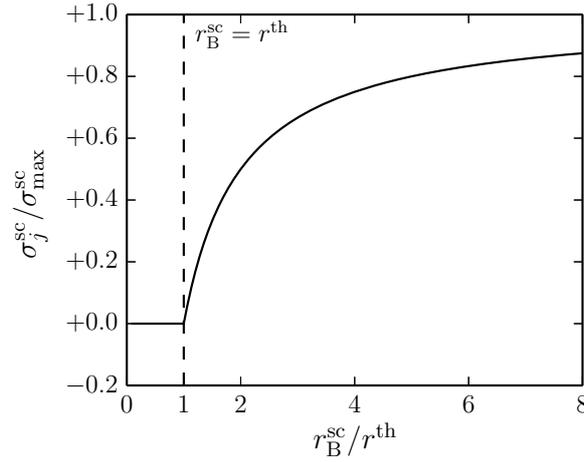
### Détection des chocs

Le détecteur développé par Bogey *et al.*<sup>21</sup> est basé sur deux idées principales : d'une part, un choc présente un spectre large bande avec un niveau élevé de hautes fréquences ; d'autre part, un choc n'a tendance à se produire que si l'amplitude de la perturbation de pression est suffisamment grande par rapport à la pression ambiante. Ainsi, il est construit de la manière suivante. Pour une direction  $\xi_l$  donnée, l'amplitude  $Dp_{l,j}$  des hautes fréquences du signal de pression  $p'_{l,j}$  au point  $\xi_{l,j}$  est d'abord calculée à l'aide d'un laplacien

$$Dp_{l,j} = \frac{-p'_{l,j-1} + 2p'_{l,j} - p'_{l,j+1}}{4} \quad p_{l,j+p} = p|_{\xi_l = \xi_{l,j} + p\Delta\xi_l}$$

L'intensité  $Dp_{l,j}^{\text{magn}}$  est ensuite estimée par la relation

$$Dp_{l,j}^{\text{magn}} = \frac{1}{2} \left[ (Dp_{l,j-1} + Dp_{l,j})^2 + (Dp_{l,j} + Dp_{l,j+1})^2 \right]$$


 FIGURE 4.9: Amplitude du filtrage des chocs en fonction du détecteur  $r^{\text{sc}}$ .

Enfin, le détecteur  $r_{\text{B}}^{\text{sc}}$  est défini comme étant le rapport entre le terme  $Dp_{l,j}^{\text{magn}}$  et le carré de la pression ambiante  $\bar{p}_{l,j}$  au point  $\xi_{l,j}$

$$r_{\text{B}}^{\text{sc}} = \frac{Dp_{l,j}^{\text{magn}}}{\bar{p}_{l,j}} + 10^{-18}$$

où le facteur  $10^{-18}$  est introduit pour éviter des divisions par zéro. L'amplitude du filtrage au point  $\xi_{l,j}$ ,  $\sigma_j^{\text{sc}}$ , est alors calculée au travers de l'expression

$$\sigma_j^{\text{sc}} = \frac{\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}}{2} \left( 1 - \frac{r^{\text{th}}}{r_{\text{B}}^{\text{sc}}} + \left| 1 - \frac{r^{\text{th}}}{r_{\text{B}}^{\text{sc}}} \right| \right)$$

où  $\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}} \in [0, 1]$  indique sa valeur maximale et  $r^{\text{th}}$  est un seuil, typiquement de l'ordre de  $10^{-5}$ . Par conséquent, comme montré sur la figure 4.9, la dissipation numérique est introduite si et seulement si  $r_{\text{B}}^{\text{sc}}$  est supérieur à  $r^{\text{th}}$ , tandis qu'elle est identiquement nulle pour  $r_{\text{B}}^{\text{sc}} < r^{\text{th}}$ .

En guise d'exemple, cette procédure de détection est appliquée à l'onde en « N », d'amplitude  $\mathcal{A}_N = 10^4$  Pa et largeur  $\xi_N = 3.4$  km, tracée en bleu sur la figure 4.10(a). Le signal est discrétisé avec un pas de maillage de  $\Delta\xi_l = 100$  m et la pression ambiante est de  $\bar{p}_{l,j} = 101325$  Pa. L'intensité  $\sigma_j^{\text{sc}}/\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}$  obtenue avec un seuil  $r^{\text{th}}$  égal à  $10^{-5}$  est reportée en rouge. Comme souhaité, le filtrage s'active uniquement aux niveaux des deux chocs, au voisinage des points  $\xi_l = \pm\xi_N/2$ , où  $\sigma_j^{\text{sc}} > 0$ , tandis que les régions régulières de l'onde en « N » ne sont pas affectées. Cependant, la variable  $\sigma_j^{\text{sc}}/\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}$  se révèle dépendante de l'amplitude  $\mathcal{A}_N$  du signal de pression  $p'$ . Sa valeur maximale  $\max_{\xi_l}(\sigma_j^{\text{sc}}/\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}})$  sur l'axe  $\xi_l$  est illustrée sur la figure 4.10(b) en fonction de  $\mathcal{A}_N$ . Pour  $\mathcal{A}_N < 1700$  Pa, la dissipation numérique ne s'applique en aucun point du maillage. En conséquence, la technique de détection développée par Bogey *et al.*<sup>21</sup> est bien adaptée aux problèmes d'aéroacoustique, mais s'avère peu performante dans le domaine de la propagation acoustique des infrasons à très grande distance et en milieu inhomogène. En effet, l'hypothèse selon laquelle un choc n'a tendance à se produire que si l'amplitude de la perturbation de

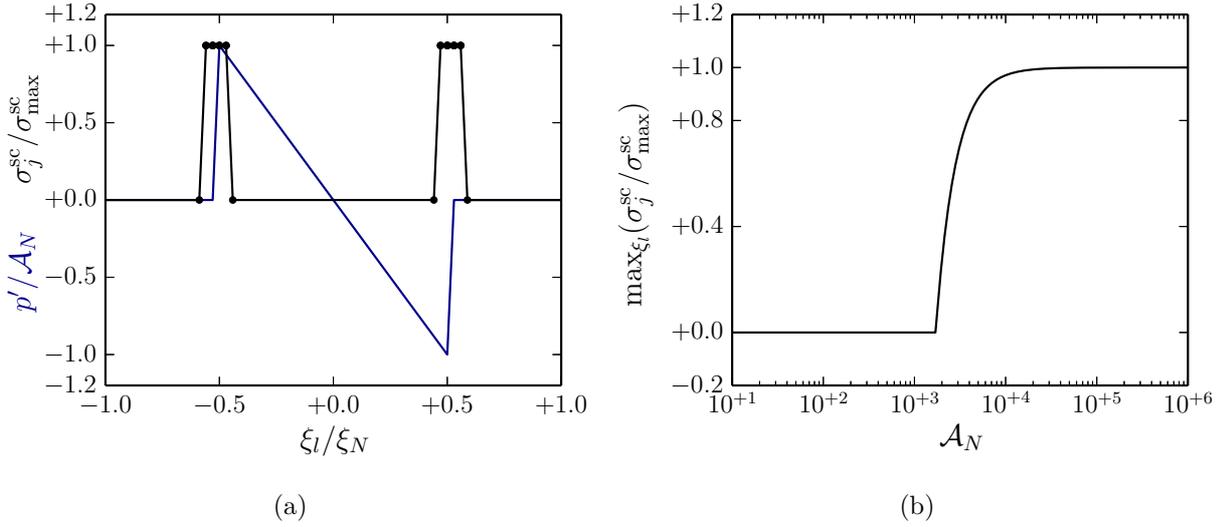


FIGURE 4.10: Exemple d'application de la procédure de détection des chocs développée par Bogey *et al.*<sup>21</sup> (a) Champ de pression  $p'$  le long de l'axe  $\xi_l$  normalisé par rapport à son amplitude  $\mathcal{A}_N$  (trait bleu) et intensité du filtrage  $\sigma_j^{\text{sc}}/\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}$  obtenue avec  $r^{\text{th}} = 10^{-5}$ . (b) Intensité maximale  $\max_{\xi_l}(\sigma_j^{\text{sc}}/\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}})$  sur l'axe  $\xi_l$  obtenue pour différentes valeurs de l'amplitude de l'onde en « N »  $\mathcal{A}_N$ .

pression est suffisamment grande par rapport à la pression ambiante n'est pas nécessairement vérifiée pour les chocs faibles, notamment lorsque les distances de propagation sont grandes et les effets non linéaires sont faibles mais cumulatifs. À titre d'exemple, une onde plane harmonique, de surpression égale à 1000 Pa et de fréquence de 0.1 Hz, se propageant au niveau du sol, génère des chocs à une distance de 64 km, correspondant à environ 20 longueurs d'onde. Ces discontinuités ne sont toutefois pas captées, l'amplitude du signal étant trop petite devant la pression ambiante. Dans le cadre de cette thèse, un nouveau détecteur, indépendant de l'amplitude du signal, est développé. Il est construit au travers des indicateurs de régularité  $\beta_m$ ,  $m = 0, 1, 2$ , issus des schémas WENO<sup>22,78,83</sup> (Weighted Essentially Non-Oscillatory schemes). Pour une direction  $\xi_l$  donnée, ces derniers sont définis par les expressions

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{13}{12} (p'_{l,j-2} - 2p'_{l,j-1} + p'_{l,j})^2 + \frac{1}{4} (p'_{l,j-2} - 4p'_{l,j-1} + 3p'_{l,j})^2 \\ \beta_1 &= \frac{13}{12} (p'_{l,j-1} - 2p'_{l,j} + p'_{l,j+1})^2 + \frac{1}{4} (p'_{l,j-1} - p'_{l,j+1})^2 \\ \beta_2 &= \frac{13}{12} (p'_{l,j} - 2p'_{l,j+1} + p'_{l,j+2})^2 + \frac{1}{4} (3p'_{l,j} - 4p'_{l,j+1} + p'_{l,j+2})^2\end{aligned}$$

et les coefficients  $\alpha_m$  et  $\omega_m$ ,  $m = 0, 1, 2$ , sont ensuite déterminés par

$$\alpha_m = \frac{1}{(\beta_m + 10^{-18})^2} \quad \omega_m = \frac{\alpha_m}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}$$

où le facteur  $10^{-18}$  est introduit pour éviter des divisions par zéro. Pour une fonction  $p'$  constante, il vient simplement  $\beta_m = 0$  et  $\omega_m = 1/3$ . Lorsque  $p'$  est une fonction quelconque,

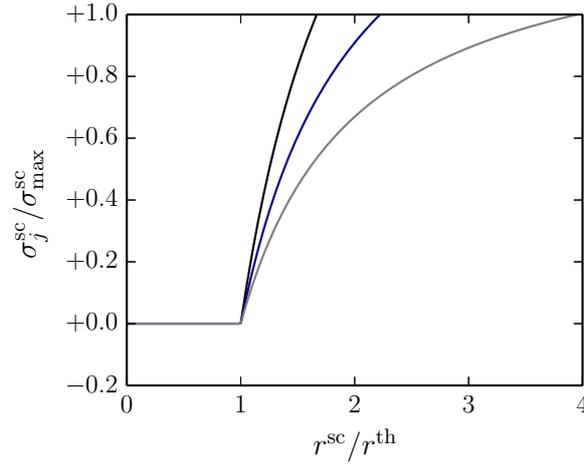


FIGURE 4.11: Amplitude du filtrage des chocs en fonction du nouveau détecteur  $r^{sc}$ , avec  $r^{th} = 0.8$  et  $n^{th} = 1$  (trait noir),  $n^{th} = 2$  (trait bleu) et  $n^{th} = 4$  (trait gris).

les paramètres  $\beta_m$  restent petits et ont le même ordre de grandeur dans les régions régulières. Plus précisément, leurs développements de Taylor à l'ordre 4 étant donnés par<sup>22,78</sup>

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \left. \frac{\partial p'}{\partial \xi_l} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}}^2 \Delta \xi_l^2 + \left[ \frac{13}{12} \left. \frac{\partial^2 p'}{\partial \xi_l^2} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}}^2 - \frac{2}{3} \left. \frac{\partial p'}{\partial \xi_l} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}} \left. \frac{\partial^3 p'}{\partial \xi_l^3} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}} \right] \Delta \xi_l^4 + \mathcal{O}(\Delta \xi_l^5) \\ \beta_1 &= \left. \frac{\partial p'}{\partial \xi_l} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}}^2 \Delta \xi_l^2 + \left[ \frac{13}{12} \left. \frac{\partial^2 p'}{\partial \xi_l^2} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}}^2 + \frac{1}{3} \left. \frac{\partial p'}{\partial \xi_l} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}} \left. \frac{\partial^3 p'}{\partial \xi_l^3} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}} \right] \Delta \xi_l^4 + \mathcal{O}(\Delta \xi_l^6) \\ \beta_2 &= \left. \frac{\partial p'}{\partial \xi_l} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}}^2 \Delta \xi_l^2 + \left[ \frac{13}{12} \left. \frac{\partial^2 p'}{\partial \xi_l^2} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}}^2 - \frac{2}{3} \left. \frac{\partial p'}{\partial \xi_l} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}} \left. \frac{\partial^3 p'}{\partial \xi_l^3} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}} \right] \Delta \xi_l^4 + \mathcal{O}(\Delta \xi_l^5) \end{aligned}$$

ils se réécrivent comme

$$\beta_m = \left[ \left. \frac{\partial p'}{\partial \xi_l} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}}^2 \Delta \xi_l^2 \right] \left[ 1 + \mathcal{O}(\Delta \xi_l^2) \right] \quad m = 0, 1, 2$$

Par conséquent, si  $\partial p' / \partial \xi_l |_{\xi_l = \xi_{l,j}} \neq 0$ , les termes  $\alpha_m$  valent

$$\alpha_m = \left[ \left. \frac{\partial p'}{\partial \xi_l} \right|_{\xi_l = \xi_{l,j}}^2 \Delta \xi_l^2 \right]^{-2} \left[ 1 + \mathcal{O}(\Delta \xi_l^2) \right] \quad m = 0, 1, 2$$

et les coefficients  $\omega_m$  tendent vers  $1/3$

$$\omega_m = \frac{1}{3} + \mathcal{O}(\Delta \xi_l^2) \quad m = 0, 1, 2$$

Enfin, lorsque  $\partial p' / \partial \xi_l |_{\xi_l = \xi_{l,j}} = 0$ , il est possible de montrer que<sup>78</sup>

$$\omega_m = \frac{1}{3} + \mathcal{O}(\Delta \xi_l) \quad m = 0, 1, 2$$

Au contraire, en présence d'une discontinuité, les paramètres  $\omega_m$  s'éloignent de la valeur limite  $1/3$ . En guise d'exemple, pour un échelon d'amplitude  $\Delta p'$  entre les points  $(j-2)$  et  $(j-1)$ , il vient :

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{4(\Delta p')^2}{3} \\ \beta_1 = \beta_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_0 = \frac{9}{16(\Delta p')^4} \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 10^{18} \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_0 \simeq 0 \\ \omega_1 = \omega_2 \simeq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le détecteur  $r^{\text{sc}}$  est alors défini par l'expression

$$r^{\text{sc}} = \left( \sum_{m=0}^2 \left| \omega_m - \frac{1}{3} \right| \right)^{n^{\text{sc}}} + 10^{-18}$$

Ainsi, il tend vers 0 en l'absence de discontinuités et augmente en fonction de l'irregularité de la solution  $p'$ . Sa valeur maximale est  $(4/3)^{n^{\text{sc}}}$ . L'amplitude du filtrage au point  $\xi_{l,j}$ ,  $\sigma_j^{\text{sc}}$ , est enfin calculée par la relation

$$\sigma_j^{\text{sc}} = \frac{\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}}{2} \frac{\left( 1 - \frac{r^{\text{th}}}{r^{\text{sc}}} + \left| 1 - \frac{r^{\text{th}}}{r^{\text{sc}}} \right| \right)}{1 - \frac{r^{\text{th}}}{(4/3)^{n^{\text{sc}}}}} \quad (4.15)$$

L'expression (4.15) est proche de celle utilisée par Bogey *et al.*,<sup>21</sup> mais le seuil  $r^{\text{th}}$  est choisi avec une valeur numérique différente, typiquement autour de 0.8. À nouveau, la dissipation numérique est introduite si et seulement si  $r^{\text{sc}}$  est supérieur à  $r^{\text{th}}$ , tandis qu'elle est identiquement nulle pour  $r^{\text{sc}} < r^{\text{th}}$ . Par ailleurs, l'exposant  $n^{\text{sc}}$  permet de contrôler la raideur du *switch*. À titre d'exemple, le rapport  $\sigma_j^{\text{sc}}/\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}$  est tracé sur la figure 4.11 en fonction de la variable  $r^{\text{sc}}/r^{\text{th}}$ , avec  $r^{\text{th}} = 0.8$  et trois valeurs de  $n^{\text{sc}}$ ,  $n^{\text{sc}} = 1$ ,  $n^{\text{sc}} = 2$  et  $n^{\text{sc}} = 4$ . Les simulations numériques réalisées dans le cadre de cette thèse sont effectuées avec  $r^{\text{th}} = 0.8$  et  $n^{\text{sc}} = 2$ .

Afin de tester le nouveau détecteur, l'exemple de l'onde en « N » examiné auparavant est maintenant reconsidéré. Le signal de pression normalisé  $p'/\mathcal{A}_N$  et la force du filtrage  $\sigma_j^{\text{sc}}/\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}$  obtenue en posant  $r^{\text{th}} = 0.8$  et  $n^{\text{th}} = 2$  sont tracés sur la figure 4.12(a). De manière analogue au senseur développé par Bogey *et al.*,<sup>21</sup> ce détecteur s'active uniquement aux niveaux des deux chocs, alors que la partie centrale de l'onde en « N » n'est pas affectée. Comme l'illustre la figure 4.10(b), l'intensité du filtrage  $\sigma_j^{\text{sc}}/\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}$  reste néanmoins indépendante de l'amplitude du signal  $\mathcal{A}_N$ .

### Filtrage des chocs

Afin de minimiser l'erreur numérique sur la vitesse de propagation des discontinuités, la procédure de dissipation des chocs doit être appliquée de manière conservative.<sup>85,104</sup> Pour ce faire, le vecteur des perturbations des variables conservatives  $\mathbf{U}^{\text{sc},l}$  filtré dans la direction  $\xi_l$  d'une grille uniforme est déterminé au nœud  $\xi_{l,j}$  par l'expression

$$\mathbf{U}^{\text{sc},l} = \mathbf{U}^{\text{sc},l-1} - \left[ \sigma_{j+1/2}^{\text{sc}} \mathbf{D}_{j+1/2}^{\text{sc}} - \sigma_{j-1/2}^{\text{sc}} \mathbf{D}_{j-1/2}^{\text{sc}} \right] \quad (4.16)$$

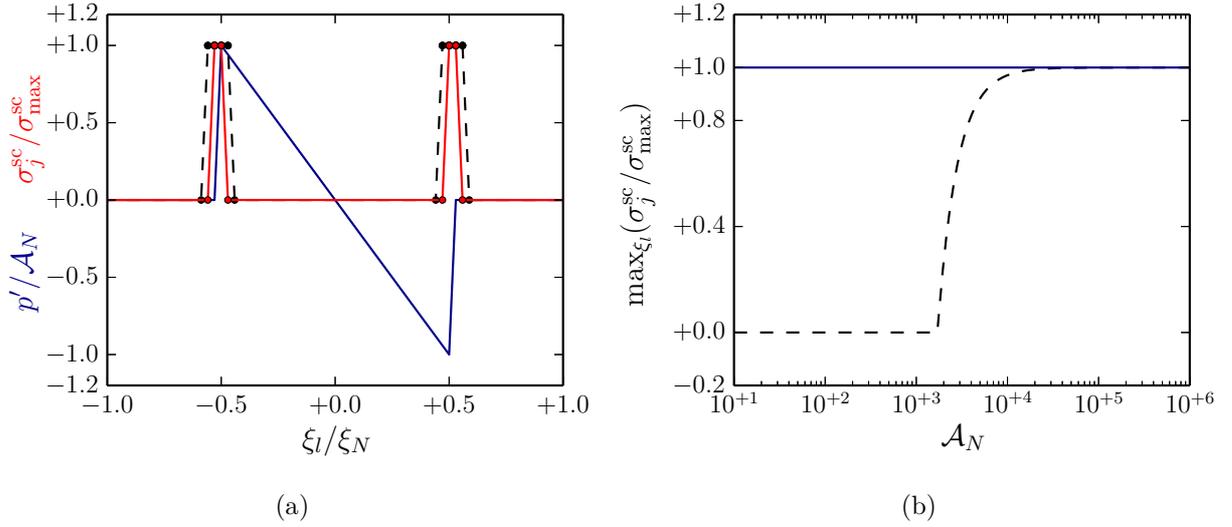


FIGURE 4.12: Exemple d'application de la nouvelle procédure de détection, avec  $r^{\text{th}} = 0.8$  et  $n^{\text{th}} = 2$ . (a) Champ de pression  $p'$  le long de l'axe  $\xi_l$  normalisé par rapport à son amplitude  $\mathcal{A}_N$  (trait bleu) et intensité du filtrage  $\sigma_j^{\text{sc}} / \sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}$ . (b) Intensité maximale  $\max_{\xi_l} (\sigma_j^{\text{sc}} / \sigma_{\text{max}}^{\text{sc}})$  sur l'axe  $\xi_l$ . Les tirets correspondent aux résultats obtenus en utilisant le détecteur développé par Bogey *et al.*<sup>21</sup>

où les termes décalés  $\sigma_{j\pm 1/2}^{\text{sc}}$  sont donnés par les relations

$$\begin{aligned}\sigma_{j-1/2}^{\text{sc}} &= (2\sigma_{j-1}^{\text{sc}} + 2\sigma_j^{\text{sc}} + \sigma_{j+1}^{\text{sc}}) / 5 \\ \sigma_{j+1/2}^{\text{sc}} &= (\sigma_{j-1}^{\text{sc}} + 2\sigma_j^{\text{sc}} + 2\sigma_{j+1}^{\text{sc}}) / 5\end{aligned}$$

Les opérateurs de filtrage  $D_{j\pm 1/2}^{\text{sc}}$  sont définis par les expressions

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{j-1/2}^{\text{sc},l} &= \sum_{p=1-n}^{p=n} c_p \mathbf{U}^{\text{sc},l-1} \Big|_{\xi_l = \xi_{l,j} + (p-1)\Delta\xi_l} \\ \mathcal{D}_{j+1/2}^{\text{sc},l} &= \sum_{p=1-n}^{p=n} c_p \mathbf{U}^{\text{sc},l-1} \Big|_{\xi_l = \xi_{l,j} + p\Delta\xi_l}\end{aligned}$$

les paramètres  $c_p$  étant les coefficients du filtre.

Afin de mettre en évidence les propriétés de dissipation et de dispersion, Bogey *et al.*<sup>21</sup> ont supposé que les amplitudes du filtrage  $\sigma_{j\pm 1/2}^{\text{sc}}$  puissent s'écrire comme somme du terme  $\sigma_j^{\text{sc}}$  et d'une variation locale  $\Delta\sigma_j^{\text{sc}} \in [-1/2, 1/2]$

$$\sigma_{j\pm 1/2}^{\text{sc}} = \sigma_j^{\text{sc}} \pm \Delta\sigma_j^{\text{sc}}$$

En multipliant l'équation (4.16) par  $e^{-ik_l \xi_l}$  et en intégrant le résultat dans l'espace, il vient

$$\hat{\mathbf{U}}^{\text{sc},l} = \hat{\mathbf{U}}^{\text{sc},l-1} \left[ 1 - \mathcal{D}^{\text{sc},l}(k_l \Delta\xi_l, \sigma_j^{\text{sc}}, \Delta\sigma_j^{\text{sc}}) \right]$$

où le symbole  $\hat{\phantom{x}}$  indique à nouveau l'opérateur de transformée de Fourier spatiale et  $\mathcal{D}^{\text{sc},l}$  est la fonction de transfert. Les parties réelle et imaginaire de  $\mathcal{D}^{\text{sc},l}$ , qui quantifient respectivement la

dissipation et la dispersion induites par le filtrage, sont données par les expressions

$$\Re(\mathcal{D}^{\text{sc},l}(k_l \Delta \xi_l, \sigma_j^{\text{sc}}, \Delta \sigma_j^{\text{sc}})) = \sigma_j^{\text{sc}} \left[ -2c_1 + 2 \sum_{p=1}^{p=n-1} (c_j - c_{j+1}) \cos(pk_l \Delta \xi_l) + 2c_n \cos(nk_l \Delta \xi_l) \right]$$

$$\Im(\mathcal{D}^{\text{sc},l}(k_l \Delta \xi_l, \sigma_j^{\text{sc}}, \Delta \sigma_j^{\text{sc}})) = \Delta \sigma_j^{\text{sc}} \left[ -2 \sum_{p=1}^{p=n-1} (c_j + c_{j+1}) \sin(pk_l \Delta \xi_l) - 2c_n \sin(nk_l \Delta \xi_l) \right]$$

Ainsi, un déphasage est nécessairement introduit lorsque l'amplitude  $\sigma_j^{\text{sc}}$  varie le long du maillage. Pour que la procédure de traitement des chocs soit efficace, il faut d'une part que le

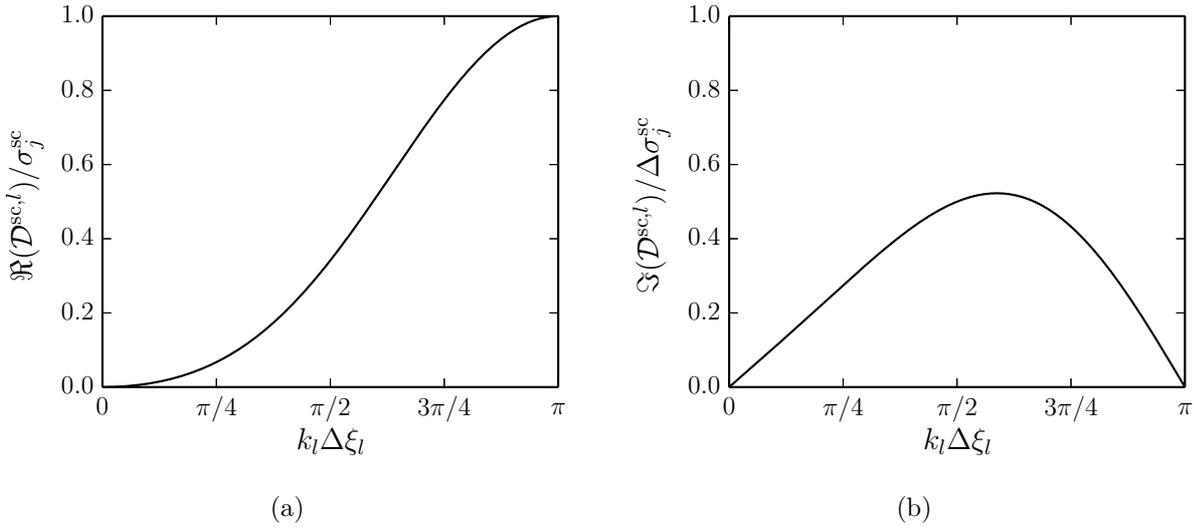


FIGURE 4.13: (a) Dissipation  $\Re(\mathcal{D}^{\text{sc},l})$  et (b) dispersion  $\Im(\mathcal{D}^{\text{sc},l})$  en fonction du nombre d'onde normalisé  $k_l \Delta \xi_l$  pour le filtre optimisé SCF développé par Bogey *et al.*<sup>21</sup>

filtre numérique soit suffisamment dissipatif pour pouvoir éliminer les nombres d'onde au-delà du maximum de la courbe  $k_l^* \Delta \xi_l(k_l \Delta \xi_l)$ , et d'autre part que le niveau de dispersion reste faible pour ne pas influencer de manière significative la propagation des chocs. Un filtre optimisé sur 4 points et d'ordre 2 a été développé par Bogey *et al.*<sup>21</sup> Les fonctions  $\Re(\mathcal{D}^{\text{sc},l})/\sigma_j^{\text{sc}}$  et  $\Im(\mathcal{D}^{\text{sc},l})/\Delta \sigma_j^{\text{sc}}$  sont illustrées sur la figure 4.13.

Pour conclure, afin de tester l'algorithme de traitement des chocs, une simulation numérique en deux dimensions de la propagation non linéaire des infrasons dans l'atmosphère terrestre a été effectuée. Plus précisément, le cas test NLW présenté dans le chapitre 6 a été considéré. Le champ de pression  $p'$  a été déterminé en utilisant à la fois le détecteur développé par Bogey *et al.*<sup>21</sup> et le nouveau senseur élaboré dans le cadre de cette thèse. Les paramètres de calcul sont reportés dans la table 4.1. Le filtre d'ordre 2 optimisé a été employé. Le signal au niveau de la source est une période de sinusoïde d'amplitude égale à 600 Pa et de fréquence dominante de l'ordre de 0.1 Hz. Les arrivées stratosphérique et thermosphérique enregistrées au sol à l'instant  $t = 1000$  s sont tracées respectivement dans les figures 4.14(a) et 4.14(b) en fonction de la distance  $x_1$ . Le long des trajectoires stratosphériques, l'amplitude des hautes fréquences de la

	$r^{\text{th}}$	$r^{\text{sc}}$	$\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}$
Détecteur de Bogey <i>et al.</i> <sup>21</sup>	$10^{-5}$	—	0.1375
Détecteur présent	0.8	2	0.1375

TABLE 4.1: Paramètres des détecteurs de choc utilisés pour la simulation test.

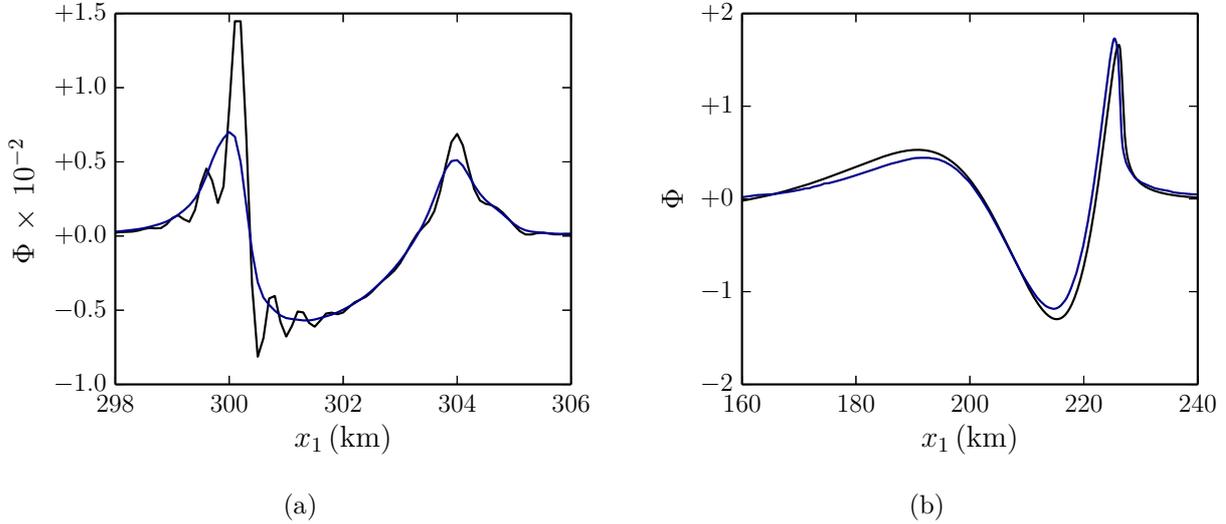


FIGURE 4.14: Cas test NLW présenté dans le chapitre 6. Arrivées stratosphérique (a) et thermosphérique (b) enregistrées au sol à l’instant  $t = 1000$ s. Résultats obtenus par le détecteur développé par Bogey *et al.*<sup>21</sup> (trait noir) et au travers du nouveau senseur (trait bleu).

variable  $p'$  est très faible par rapport à la pression locale. En conséquence, le détecteur  $r_{\text{B}}^{\text{sc}}$  reste inférieur au seuil et la dissipation numérique ne s’active pas. Ainsi, des oscillations parasites d’intensité non négligeable apparaissent sur l’arrivée stratosphérique (signal en noir). Ne dépendant pas de l’amplitude du signal, mais uniquement de la forme d’onde, le nouveau senseur permet au contraire de détecter les chocs et d’éliminer les oscillations (signal bleu). À l’opposé, à cause de la réduction exponentielle de la pression ambiante avec l’altitude, le détecteur  $r_{\text{B}}^{\text{sc}}$  se déclenche facilement le long des trajectoires thermosphériques. Le léger déphasage observé sur la figure 4.14(b) peut être attribué à un filtrage excessif induit par le senseur  $r_{\text{B}}^{\text{sc}}$ .

## Zones éponges

Afin de limiter les niveaux de réflexion aux frontières de la boîte glissante, le domaine physique est entouré de zones éponges. Leur formulation est donnée par Bogey.<sup>18</sup> À l’intérieur de ces régions un filtre laplacien est utilisé afin de réduire l’amplitude des ondes sortantes. Dans une direction  $x_l$  donnée, son intensité  $\sigma_j^{\text{ze}}$  au point  $x_{l,j}$  augmente progressivement suivant la loi

$$\sigma_j^{\text{ze}} = \sigma_{\text{max}}^{\text{ze}} \left( \frac{x_{l,j} - x_{l,\text{min}}}{x_{l,\text{min}} - x_{l,\text{max}}} \right)^2$$

où  $\sigma_{\max}^{\text{ze}}$  est sa valeur maximale, typiquement comprise entre 0.01 et 0.1,  $x_{l,\min}$  indique la coordonnée du premier point de la zone éponge et  $x_{l,\max}$  est la limite de la boîte glissante. Des termes de rappel des variables conservatives vers leurs valeurs non perturbées sont également ajoutés sous la forme

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \dots + \sigma^{\text{rappel}} \mathbf{U}'$$

où  $\sigma^{\text{rappel}}$  est un paramètre qui mesure la quantité d'énergie soustraite par pas de temps. À l'instar du coefficient  $\sigma_j^{\text{ze}}$ , ce dernier est incrémenté à l'intérieur des zones éponges suivant la relation

$$\sigma_j^{\text{rappel}} = \sigma_{\max}^{\text{rappel}} \left( \frac{x_{l,j} - x_{l,\min}}{x_{l,\min} - x_{l,\max}} \right)^2$$

Dans les directions  $x_2$  et  $x_3$ , l'augmentation graduelle de la taille des mailles favorise la réduction de l'amplitude des ondes sortantes.

Une technique supplémentaire est enfin utilisée dans la direction verticale  $x_3$ . À cause de la stratification provoquée par la force de gravité, le rapport entre la perturbation de pression et la pression ambiante  $p'/\bar{p}$  augmente durant la propagation vers la haute atmosphère. Afin d'en réduire ultérieurement l'amplitude au niveau de la frontière supérieure de la boîte glissante, en suivant Marsden *et al.*,<sup>111</sup> la constante gravitationnelle est progressivement diminuée de  $+g$  à  $-g$ .

## Stabilité numérique

L'utilisation d'un algorithme d'intégration temporelle explicite impose une contrainte de stabilité numérique qui relie le pas de temps et la taille minimale du maillage spatial. Cette contrainte est liée à la fois aux termes convectifs et aux flux visqueux et thermiques. Une analyse de stabilité peut être aisément effectuée pour l'équation unidimensionnelle d'advection-diffusion

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{c} \frac{\partial p'}{\partial \xi_l} = \bar{\nu} \frac{\partial^2 p'}{\partial \xi_l^2} \quad (4.17)$$

La fonction de transfert de l'algorithme complet de résolution numérique  $\mathcal{G}^{\text{rk}}$  (cf. (4.12)) est obtenue en remplaçant, dans l'expression (4.12), la pulsation  $\omega$  par la relation de dispersion de l'équation discrétisée  $\omega = k_l^* \bar{c} - ik_l^{*2} \bar{\nu}$ . Ainsi, il vient

$$\mathcal{G}^{\text{rk}}(k_l \Delta \xi_l, \text{CFL}, \text{Fo}) = 1 + \sum_{p=1}^{p=6} \gamma_p (-i)^p \left[ \text{CFL } k_l^* \Delta \xi_l - i \text{Fo } (k_l^* \Delta \xi_l)^2 \right]^p \quad (4.18)$$

où les paramètres CFL et Fo représentent respectivement le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy et le nombre de Fourier, définis respectivement par les relations

$$\begin{aligned} \text{CFL} &= \bar{c} \frac{\Delta t}{\Delta \xi_l} \\ \text{Fo} &= \bar{\nu} \frac{\Delta t}{(\Delta \xi_l)^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

L'algorithme est stable pour tous les couples  $(\text{CFL}, \text{Fo})$  tels que le facteur d'amplification  $|\mathcal{G}^{\text{rk}}|$  est inférieur ou égal à 1. Le module de la fonction  $\mathcal{G}^{\text{rk}}$  pour  $\text{Fo} = 0$  (viscosité nulle) et trois différentes valeurs de CFL,  $\text{CFL} = 1.8$ ,  $\text{CFL} = 1.98$  et  $\text{CFL} = 2.1$ , est tracé en fonction du nombre d'onde normalisé  $k_l \Delta \xi_l$  sur la figure 4.15(a). En incrémentant le paramètre CFL,

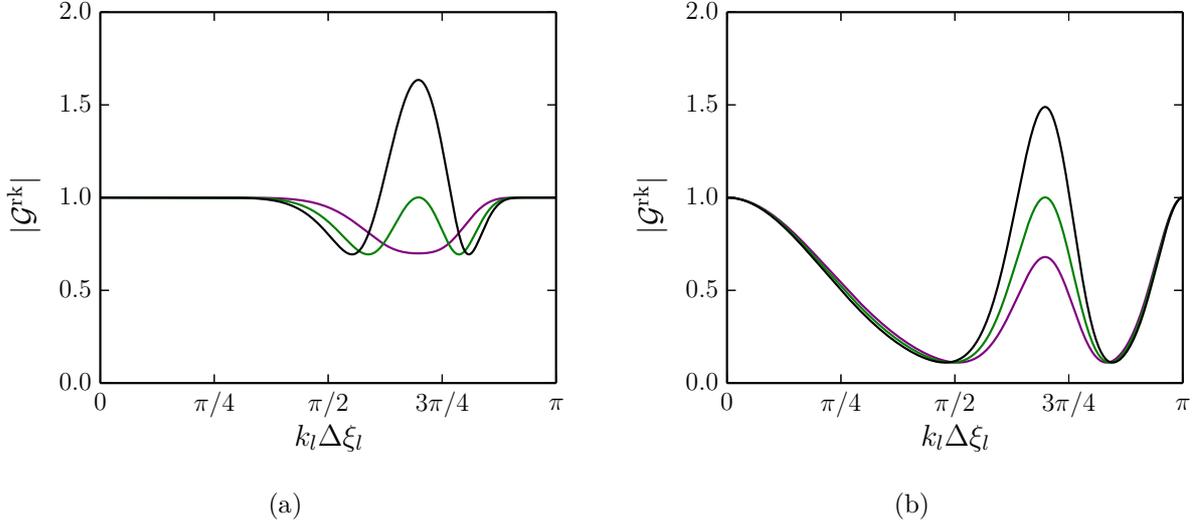


FIGURE 4.15: Facteur d'amplification  $|\mathcal{G}^{\text{rk}}|$  en fonction du nombre d'onde normalisé  $k_l \Delta \xi_l$  pour : (a)  $\text{Fo} = 0$  et  $\text{CFL} = 1.8$  (trait violet),  $\text{CFL} = 1.98$  (trait vert) et  $\text{CFL} = 2.1$  (trait noir); (b)  $\text{CFL} = 0$  et  $\text{Fo} = 1.0$  (trait violet),  $\text{Fo} = 1.054$  (trait vert) et  $\text{Fo} = 1.12$  (trait noir).

une zone d'amplification, où  $|\mathcal{G}^{\text{rk}}| > 1$ , apparaît dans la plage des hautes fréquences près de  $k_l \Delta \xi_l = 3\pi/4$ . Dans ce cas, l'algorithme est instable. Le nombre CFL maximal pour lequel le module  $|\mathcal{G}^{\text{rk}}|$  reste inférieur ou égal à 1 est  $\text{CFL}_{\text{max}} = 1.98$ .

Le module de la fonction  $\mathcal{G}^{\text{rk}}$  pour  $\text{CFL} = 0$  (vitesse du son nulle) et trois différentes valeurs de  $\text{Fo}$ ,  $\text{Fo} = 1.0$ ,  $\text{Fo} = 1.054$  et  $\text{Fo} = 1.12$ , est tracé en fonction du nombre d'onde normalisé  $k_l \Delta \xi_l$  sur la figure 4.15(b). De manière analogue au cas précédent, une zone d'amplification apparaît près de  $k_l \Delta \xi_l = 3\pi/4$  lorsque le nombre  $\text{Fo}$  augmente. La valeur maximale de ce dernier assurant la stabilité numérique est  $\text{Fo}_{\text{max}} = 1.054$ .

Lorsque le filtrage sélectif est pris en compte, la fonction de transfert  $\mathcal{G}^{\text{rk}}$  de l'algorithme complet se réécrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\text{rk}}(k_l \Delta \xi_l, \text{CFL}, \text{Fo}, \sigma^{\text{sf}}) &= \left[ 1 - \mathcal{D}^{\text{sf},l}(k_l \Delta \xi_l, \sigma^{\text{sf}}) \right] \times \\ &\times \left[ 1 + \sum_{p=1}^{p=6} \gamma_p (-i)^p \left[ \text{CFL} k_l^* \Delta \xi_l - i \text{Fo} (k_l^* \Delta \xi_l)^2 \right]^p \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Les iso-contours  $\max(|\mathcal{G}^{\text{rk}}|) = 1$  du facteur d'amplification maximal  $\max(|\mathcal{G}^{\text{rk}}|)$  avec et sans amortissement sont tracés en fonction des nombres CFL et  $\text{Fo}$  sur la figure 4.16. Ils représentent les courbes de stabilité marginale dans le plan CFL- $\text{Fo}$  et sont obtenus en fixant à 1 l'intensité

de la dissipation numérique  $\sigma^{\text{sf}}$ . Une légère augmentation de la plage de stabilité est observée

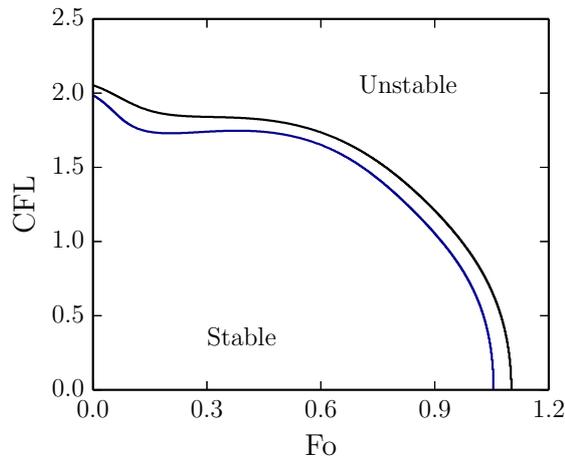


FIGURE 4.16: Iso-contours  $\max(|\mathcal{G}^{\text{rk}}|) = 1$  du facteur d'amplification maximal  $\max(|\mathcal{G}^{\text{rk}}|)$  en fonction des nombres CFL et Fo avec (trait noir) et sans amortissement sélectif (trait bleu).

grâce à la procédure de filtrage sélectif. À titre d'exemple, les limites suivantes sont obtenues : pour  $\text{Fo} = 0$ ,  $\text{CFL}_{\text{max}} = 2.05$ , et, pour  $\text{CFL} = 0$ ,  $\text{Fo}_{\text{max}} = 1.1$ .

L'analyse effectuée jusqu'à présent est relative à une équation unidimensionnelle. Pour des géométries 2-D et 3-D, avec un pas spatial  $\Delta\xi_l$  uniforme dans les différentes directions, les nombres d'onde les plus élevés sont obtenus le long des diagonales des mailles.<sup>55</sup> En effet, en considérant une perturbation ayant un nombre d'onde correctement résolu  $k_l\Delta\xi_l$  dans chacune des directions  $x_l$ , le nombre d'onde résultant sur les diagonales des mailles, et qui doit également être correctement résolu, vaut  $\sqrt{\text{dim}} k_l\Delta\xi_l$ ,  $\text{dim}$  étant la dimension de l'espace. En conséquence, l'augmentation de la dimension du domaine de calcul se traduit par une diminution des nombres critiques  $\text{CFL}_{\text{max}}^{\text{dim}}$  et  $\text{Fo}_{\text{max}}^{\text{dim}}$ , qui peuvent être calculés par les relations

$$\begin{aligned} \text{CFL}_{\text{max}}^{\text{dim}} &= \frac{\text{CFL}_{\text{max}}}{\sqrt{\text{dim}}} \\ \text{Fo}_{\text{max}}^{\text{dim}} &= \frac{\text{Fo}_{\text{max}}}{\sqrt{\text{dim}}} \end{aligned}$$

En guise d'illustration, les limites de stabilité suivantes sont obtenues :

- lorsque  $\bar{\nu} = 0$ ,

$$\begin{cases} \text{CFL}_{\text{max}} &= 1.98 \\ \text{CFL}_{\text{max}}^{2\text{-D}} &= 1.4 \\ \text{CFL}_{\text{max}}^{3\text{-D}} &= 1.14 \end{cases}$$

- lorsque  $\bar{c} = 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fo}_{\max} = 1.054 \\ \text{Fo}_{\max}^{2-D} = 0.75 \\ \text{Fo}_{\max}^{3-D} = 0.61 \end{array} \right.$$

Dans le cadre de la simulation de la propagation des infrasons dans l'atmosphère, la stabilité de l'algorithme est généralement pilotée par les termes convectifs à basse altitude et par les flux visqueux et thermiques dans la thermosphère, où des valeurs très élevées de la viscosité cinématique sont observées.

## Implémentation informatique

La simulation tridimensionnelle directe des équations de la mécanique des fluides fait couramment appel à des maillages de grande taille. Afin d'éviter des coûts de calcul prohibitifs, le solveur utilisé dans le cadre de cette thèse a été implémenté en langage C/C++ avec deux niveaux de parallélisme, comme montré sur la figure 4.17. Au travers de l'interface *MPI* (Message-Passing Interface), la boîte glissante est découpée en plusieurs blocs de taille plus petite. L'utilisation d'un maillage structuré facilite grandement cette tâche. Les opérations à l'intérieur des blocs sont effectuées par un processus *MPI*. Il est important de remarquer que les processus *MPI* ne sont pas indépendants. Le calcul des dérivées spatiales ainsi que les filtres, qui nécessitent la connaissance des valeurs des fonctions sur plusieurs points de grille, rendent en effet obligatoire un flux d'informations entre les sous-domaines adjacents. Chaque processus *MPI* gère à son tour une carte graphique ou GPU (Graphical Processing Unit) au travers d'instructions OpenCL. De manière générale, un GPU se compose d'un certain nombre d'unités de travail (work-items en anglais) qui exécutent les mêmes fonctions, appelées kernels. Dans le solveur présent, un work-item est associé à chaque nœud d'un sous-domaine et les kernels correspondent notamment aux algorithmes de dérivation et filtrage (entre autres). L'approche de programmation est de type *SPMD/SIMD* ou *Single Program-Multiple Data/Single Instruction-Multiple Data*, les mêmes instructions étant appliquées à l'ensemble des points du maillage.

Dans le cadre de cette thèse, les simulations tridimensionnelles des équations de la mécanique des fluides ont été réalisées en utilisant les nœuds hybrides du calculateur *Curie* du CEA, chacun constitué de 2 unités CPU et de 2 cartes graphiques (GPU) Nvidia M2090. Chaque GPU a une mémoire exploitable de 3 GB, qui permet de gérer un nombre maximal de points de grille de l'ordre de 14.68 millions. Le nombre total de GPU étant de 288, le maillage le plus fin pouvant être considéré contient au plus 4 milliards de points.

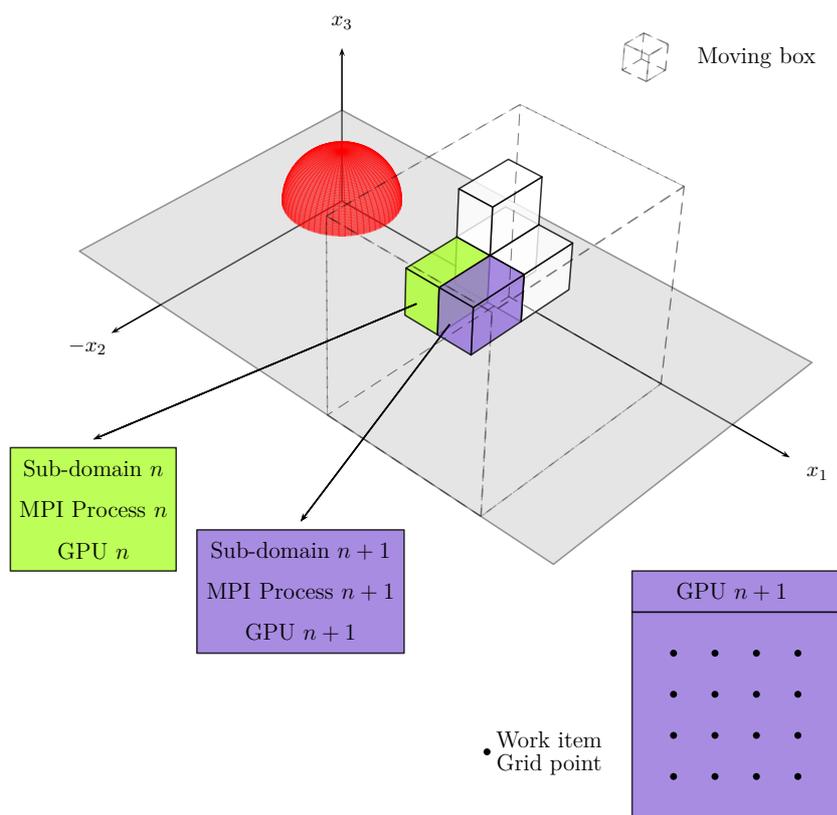


FIGURE 4.17: Schématisation des niveaux de parallélisme du solveur des équations de Navier-Stokes.



# Simulations 3-D de la propagation non linéaire des infrasons

Ce chapitre est consacré à la description de différentes simulations numériques tridimensionnelles de la propagation non linéaire des ondes infrasonores réalisées dans le cadre de la thèse. Les paramètres de calcul sont d'abord introduits et les résultats sont ensuite présentés. Après une illustration générale du champ de pression 3-D obtenu dans une simulation de référence, deux aspects physiques particuliers sont mis en évidence : dans un premier temps, la diffusion due aux petites échelles de variation de la vitesse du son et du vent est analysée ; dans un second temps, la diffraction au niveau de la caustique thermosphérique est examinée. Finalement, une étude de la précision numérique est menée.

## Paramètres de simulation

Différentes configurations tridimensionnelles de propagation non linéaire d'ondes infrasonores dans l'atmosphère terrestre ont été simulées. Dans cette section, les paramètres de calcul sont définis. L'atmosphère initiale non perturbée et la source infrasonore sont d'abord rappelées. Les paramètres numériques sont ensuite reportés.

Un système de coordonnées cartésiennes orthogonales  $Ox_1x_2x_3$ , avec l'axe vertical  $x_3$ , est utilisé (cf. figure 5.1). L'origine  $O$  se situe sur la surface terrestre, qui est représentée par le plan  $x_1 - x_2$ . La propagation d'un pulse émis par une source infrasonore placée au point  $O$  est simulée dans la direction négative de l'axe  $x_2$  et analysée dans le plan d'observation principal  $x_1-x_3$ .

## Atmosphère initiale non perturbée

À l'instant  $t = 0$ , l'atmosphère non perturbée (3.2) est construite en spécifiant la vitesse du son  $\bar{c}(x_3)$  et le vent  $\bar{u}_1(x_3)$ . Deux jeux de profils verticaux sont utilisés. Ils sont déterminés

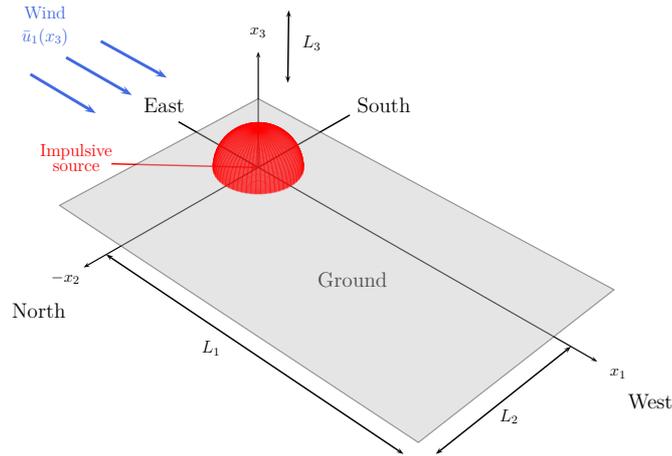


FIGURE 5.1: Représentation schématique du domaine 3-D.

en utilisant des splines cubiques, dont les coefficients sont reportés dans l'annexe B. Ils sont illustrés sur la figure 5.2. Le premier jeu de profils, indiqué par le sigle PVApe (*Profils Verticaux Avec petites échelles*), reproduit les données en partie modélisées et en partie mesurées durant l'expérience Misty Picture dans la direction est-ouest. Une description détaillée est fournie dans la thèse de Gainville.<sup>66</sup> Le deuxième jeu de profils, labellisé PVSpe (*Profils Verticaux Sans petites échelles*), est une version filtrée du premier, où seules les grandes échelles spatiales sont incluses. Les axes  $x_1$  et  $-x_2$  du repère  $Ox_1x_2x_3$  coïncident respectivement avec les directions est-

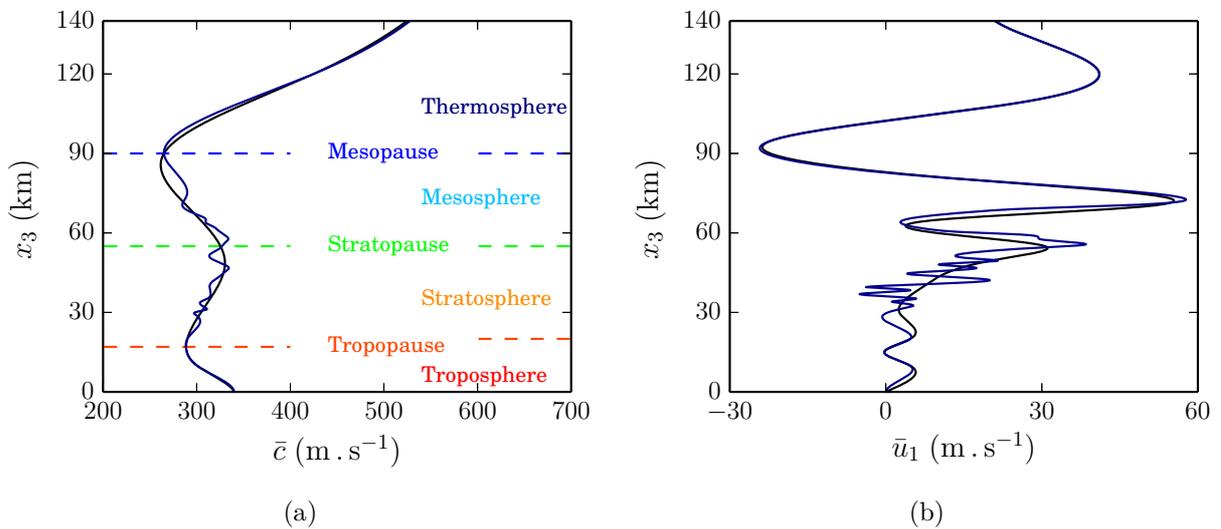


FIGURE 5.2: Profils PVApe (en bleu) et PVSpe (en noir) de (a) vitesse du son  $\bar{c}(x_3)$  et (b) vent  $\bar{u}_1(x_3)$ .

ouest et nord-sud. La température moyenne  $\bar{T}(x_3)$  est ensuite calculée au travers de la relation  $\bar{T}(x_3) = \bar{c}^2(x_3)/(\gamma r_{\mathcal{M}})$ . La pression  $\bar{p}(x_3)$  est obtenue en résolvant l'équation de l'équilibre

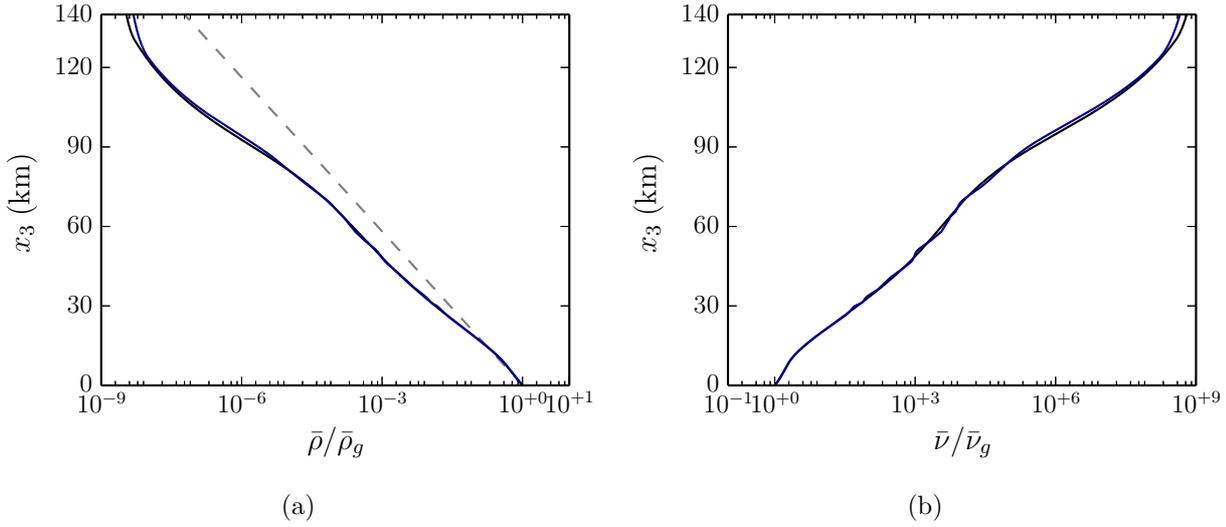


FIGURE 5.3: Profils PVApe (en bleu) et PVSpe (en noir) de (a) masse volumique  $\bar{\rho}$  et (b) viscosité cinématique  $\bar{\nu}$ .

hydrostatique

$$\frac{d\bar{p}}{dx_3} = -\bar{\rho}g = -\frac{g}{r_{\mathcal{M}}\bar{T}}\bar{p} \quad (5.1)$$

Les profils de masse volumique  $\bar{\rho}(x_3)$  et d'énergie spécifique totale  $\bar{e}_t(x_3)$  sont enfin déterminés respectivement par les relations  $\bar{\rho} = \bar{p}/(r\bar{T})$  et  $\bar{\rho}\bar{e}_t = \bar{p}/(\gamma - 1) + \bar{\rho}\bar{u}_1^2/2$ . À titre d'illustration, la fonction  $\bar{\rho}(x_3)$ , normalisée par rapport à sa valeur au sol  $\bar{\rho}_g$ , est tracée en fonction de l'altitude sur la figure 5.3(a). Une réduction de plus de huit ordres de grandeur est observée entre la surface terrestre et 140 km de hauteur. Cette diminution entraîne une augmentation remarquable de la viscosité cinématique moyenne  $\bar{\nu} = \bar{\mu}/\bar{\rho}$ . Comme illustré sur la figure 5.3(b), la fonction  $\bar{\nu}$  est de l'ordre de  $10^9\bar{\nu}_g$  pour  $x_3 = 140$  km,  $\bar{\nu}_g$  étant sa valeur pour  $x_3 = 0$  km.

## Source infrasonore

La source acoustique est modélisée par des termes de forçage des équations de conservation de la masse et de l'énergie

$$\begin{cases} \Lambda_{\rho e_t}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{A}_s \sin(\omega_s t) [1 - \cos(2\omega_s t)] \Pi_{[0, \pi/\omega_s]}(t) e^{-\log(2)r^2/b_s^2} \\ \Lambda_{\rho}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\gamma - 1}{\bar{c}^2(x_3)} \Lambda_{\rho e_t}(\mathbf{x}, t) \end{cases}$$

où  $\mathcal{A}_s$  indique l'amplitude,  $\omega_s$  la pulsation,  $b_s$  la largeur à mi-hauteur et  $\Pi_{[0, \pi/\omega_s]}(t)$  la fonction porte, valant 1 dans l'intervalle  $[0, \pi/\omega_s]$  et 0 autrement. Le forçage est maximal à l'origine du domaine et devient négligeable pour des distances  $r = \|\mathbf{x}\|$  supérieures à environ  $3b_s$ .

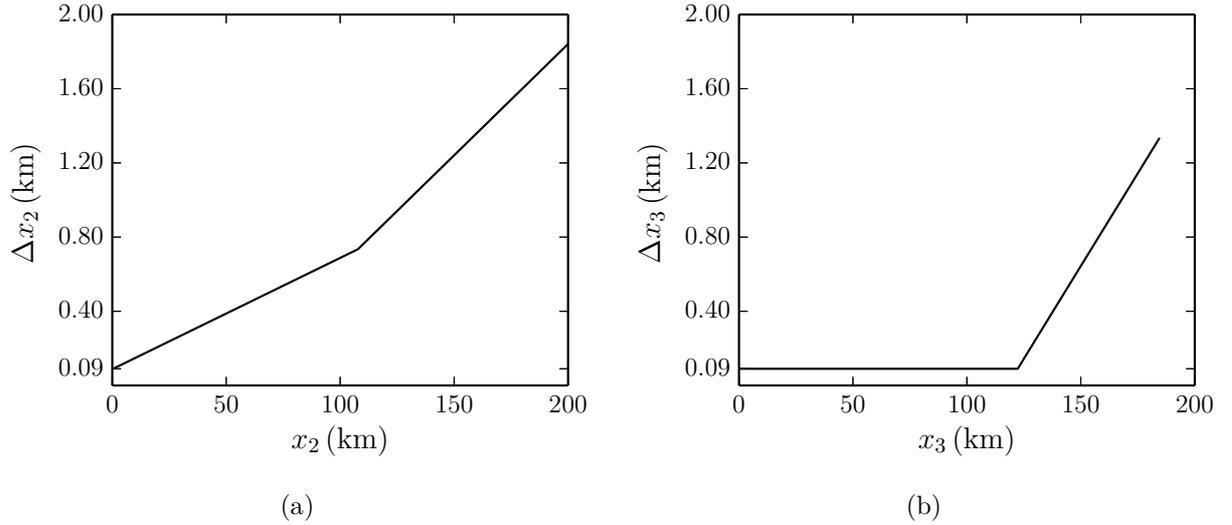


FIGURE 5.4: Maillage pour les simulations SNL02Ape et SNL02Spe. Pas spatiaux (a)  $\Delta x_2$  et (b)  $\Delta x_3$  le long des axes  $x_2$  et  $x_3$ .

## Définition des configurations étudiées

### Étude de la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère

Deux simulations, indiquées par les sigles SNL02Ape (*Strong NonLinear 0.2Hz Avec petites échelles*) et SNL02Spe (*Strong NonLinear 0.2Hz Sans petites échelles*), sont effectuées en utilisant respectivement les jeux de profils verticaux PVApe et PVSpe, jusqu'à des distances de 450 km dans la direction est-ouest et de  $L_2^{\text{phys}} = 90$  km sur l'axe nord-sud, et jusqu'à des altitudes de  $L_3^{\text{phys}} = 140$  km. Dans les deux cas, la fréquence de la source est fixée à  $f_s = 0.2$  Hz, la demi-largeur est égale à  $b_s = 360$  m et l'amplitude est de  $\mathcal{A}_s = 3 \times 10^5 \text{ J.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$ . Cette dernière est choisie de manière à obtenir, à une distance au sol de  $r = 4$  km, une surpression d'environ 4000 Pa, qui est représentative d'une explosion de grande amplitude, telle que celle déclenchée durant l'expérience Misty Picture. Ces simulations permettent de mettre en évidence l'effet de la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère sur les signaux enregistrés au sol. Les calculs sont réalisés avec un pas spatial minimal de  $\Delta \xi_l = 90$  m. Le maillage est uniforme le long de l'axe  $x_1$ . Sur l'axe  $x_2$ , il est étiré avec un taux de 0.6 % de  $x_2 = 1$  km jusqu'à  $x_2 = 105$  km et de 1.2 % au delà. Enfin, dans la direction  $x_3$ , il est uniforme jusqu'à  $x_3 = 122.5$  km et étiré avec un taux de 2.0 % au delà. En guise d'illustration, les pas spatiaux  $\Delta x_2$  et  $\Delta x_3$  sont tracés en fonction des distances  $x_2$  et  $x_3$  sur les figures 5.4(a) et 5.4(b). La boîte glissante contient  $6 \times 8 \times 3 = 144$  blocs de  $448 \times 64 \times 512$  nœuds respectivement dans les directions  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , pour un total de 2.11 milliards de points. Elle permet de couvrir une distance physique sur l'axe  $x_1$  de  $L_1^{\text{phys}} = 220$  km. Par conséquent, réaliser la même simulation dans un domaine fixe nécessiterait un nombre de nœuds de l'ordre de  $2.11 \times 450/220 = 4.32$  milliards. Le pas de temps est de  $\Delta t = 0.0699$  s. Le calcul est effectué jusqu'à 1600 s, pour un total de 23000

itérations. Les nombres de Courant-Friedrichs-Lewy CFL et de Fourier Fo construits à partir de la vitesse du son et de la viscosité cinématique ambiantes à la limite du domaine physique,  $x_3 = 140$  km, valent respectivement 0.4 et 0.07. Les intensités  $\sigma^{\text{sf}}$  et  $\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}$  des procédures de filtrage sélectif et de capture de choc sont égales respectivement à 0.2 et 0.35. À l'intérieur de la zone éponge dans la direction verticale  $x_3$ , pour  $x_3 > 140$  km, un filtre laplacien et un rappel d'intensités maximales  $\sigma_{\text{max}}^{\text{ze}} = 0.02$  et  $\sigma_{\text{max}}^{\text{rappel}} = 0.002$  sont appliqués. À l'intérieur de la zone éponge dans la direction latérale  $-x_2$ , pour  $-x_2 > 90$  km, seul un rappel d'amplitude maximale  $\sigma_{\text{max}}^{\text{rappel}} = 0.001$  est utilisé.

### Étude de la caustique thermosphérique

Trois simulations, labellisées L01Spe (*Linear 0.1Hz Sans petites échelles*), WNL01Spe (*Weakly NonLinear 0.1Hz Sans petites échelles*), SNL01Spe (*Strong NonLinear 0.1Hz Sans petites échelles*), sont effectuées en utilisant le jeu de profils verticaux PVSpe jusqu'à des distances de 600 km dans la direction est-ouest et de  $L_2^{\text{phys}} = 90$  km sur l'axe nord-sud, et jusqu'à des altitudes de  $L_3^{\text{phys}} = 140$  km. La fréquence de la source est fixée à  $f_s = 0.1$  Hz, la demi-largeur est égale à  $b_s = 600$  m et les amplitudes valent  $\mathcal{A}_s = 8 \times 10^1 \text{ J.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$ ,  $\mathcal{A}_s = 8 \times 10^3 \text{ J.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$  et  $\mathcal{A}_s = 8 \times 10^4 \text{ J.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$  respectivement dans les cas L01spe, WNL01spe et SNL01spe. Ces simulations permettent d'analyser la diffraction au niveau de la caustique thermosphérique.

Le pas spatial minimal est de  $\Delta\xi_l = 140$  m. Le maillage est uniforme le long de l'axe  $x_1$ . Sur l'axe  $x_2$ , il est étiré avec un taux de 0.5 % de  $x_2 = 1$  km jusqu'à  $x_2 = 115$  km et de 0.95 % au delà. Enfin, dans la direction  $x_3$ , il est uniforme jusqu'à  $x_3 = 130$  km et étiré avec un taux de 4.5 % au delà. La boîte glissante contient  $5 \times 8 \times 2 = 80$  blocs de  $448 \times 64 \times 512$  nœuds respectivement dans les directions  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , pour un total de 1.17 milliards de points. Elle permet de couvrir une distance physique sur l'axe  $x_1$  de  $L_1^{\text{phys}} = 287$  km. Par conséquent, réaliser la même simulation dans un domaine fixe nécessiterait un nombre de nœuds de l'ordre de  $1.17 \times 600/287 = 2.44$  milliards. Le pas de temps est de  $\Delta t = 0.109$  s. Le calcul est effectué jusqu'à 2600 s, pour un total de 24000 itérations. Les nombres de Courant-Friedrichs-Lewy CFL et de Fourier Fo valent respectivement 0.4 et 0.043. Les intensités  $\sigma^{\text{sf}}$  et  $\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}$  des procédures de filtrage sélectif et de capture de choc sont égales respectivement à 0.2 et 0.5. À l'intérieur de la zone éponge dans la direction verticale  $x_3$ , pour  $x_3 > 140$  km, un filtre laplacien et un rappel d'intensités maximales  $\sigma_{\text{max}}^{\text{ze}} = 0.02$  et  $\sigma_{\text{max}}^{\text{rappel}} = 0.002$  sont appliqués. À l'intérieur de la zone éponge dans la direction latérale  $-x_2$ , pour  $-x_2 > 90$  km, seul un rappel d'amplitude maximale  $\sigma_{\text{max}}^{\text{rappel}} = 0.001$  est utilisé.

En guise de résumé, les paramètres physiques et numériques des simulations SNL02Ape, SNL02Spe, L01Spe, WNL01Spe et SNL01Spe sont reportés dans la table 5.1.

Paramètres	Simulations				
	SNL02Ape	SNL02Spe	L01Spe	WNL01Spe	SNL01Spe
Amplitude $\mathcal{A}_s$ ( $\text{J.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$ )	$3 \times 10^5$	$3 \times 10^5$	$8 \times 10^1$	$8 \times 10^3$	$8 \times 10^4$
Fréquence $f_s$ (Hz)	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1
Demi-largeur $b_s$ (m)	360	360	600	600	600
Profils	PVApe	PVSpe	PVSpe	PVSpe	PVSpe
Distance maximale (km)	450	450	600	600	600
Distance $L_2^{\text{phys}}$ (km)	90	90	90	90	90
Altitude $L_3^{\text{phys}}$ (km)	140	140	140	140	140
Pas spatial $\Delta\xi_l$ (m)	90	90	140	140	140
Pas temporel $\Delta t$ (s)	0.0699	0.0699	0.109	0.109	0.109
Nombre d'itérations	23000	23000	24000	24000	24000

TABLE 5.1: Paramètres physiques et numériques de différentes simulations.

### Simulations numériques de validation

Le domaine de calcul étant limité, une troncature du front d'onde émanant de l'origine est nécessairement imposée au delà d'un certain temps dans les directions  $-x_2$  et  $x_3$  (cf. figures 5.5(d)-(i)). Elle pourrait affecter le champ de pression dans le plan d'observation principal  $x_1$ - $x_3$ . La distance  $x_1$  à laquelle cet effet pourrait devenir significatif est d'autant plus grande que les limites de la boîte glissante sont éloignées de l'origine. En conséquence, il s'avère important de vérifier que la troncature du front d'onde ne se traduise pas par une réduction d'amplitude sur le plan  $x_1$ - $x_3$  et que le comportement en  $r^{-1}$  typique des ondes sphériques soit bien reproduit. Ainsi, une simulation labellisée L01hom (*Linear 0.1Hz homogène*) est effectuée. L'atmosphère est homogène et au repos et la vitesse du son ambiante vaut  $\bar{c} = 340 \text{ m.s}^{-1}$ . Le domaine ainsi que les différents paramètres numériques sont identiques à ceux utilisés pour le cas L01Spe.

Afin de vérifier la précision des simulations 3-D, le cas SNL01Spe est résolu en utilisant les cinq pas spatiaux minimaux suivants :  $\Delta\xi_l^{(1)} = 75 \text{ m}$ ,  $\Delta\xi_l^{(2)} = 100 \text{ m}$ ,  $\Delta\xi_l^{(3)} = 125 \text{ m}$ ,  $\Delta\xi_l^{(4)} = 140 \text{ m}$  et  $\Delta\xi_l^{(5)} = 150 \text{ m}$ . Ces calculs de validation sont réalisés en utilisant les profils filtrés de la vitesse du son et du vent de manière à simplifier l'interprétation des résultats. Par ailleurs, le nombre maximal de points étant fixé par le calculateur, ils sont effectués avec la source de fréquence la plus petite parmi celles considérées, à savoir  $f_s = 0.1 \text{ Hz}$ , ce qui permet de considérer un jeu de maillages relativement diversifié.

## Résultats

Les principaux résultats des simulations sont présentés dans cette section. Le cas SNL02Ape est d'abord détaillé. Une description générale du champ de pression tridimensionnel est effec-

tuée. Une analyse des signaux enregistrés au niveau de la source, le long de la verticale  $x_3$  et sur la surface terrestre dans la direction  $x_1$  est aussi réalisée et les différentes phases infrasonores sont identifiées. Deux aspects physiques particuliers sont ensuite mis en évidence : dans un premier temps, la diffusion par les petites échelles de variation de la vitesse du son et du vent est considérée ; dans un second temps, la diffraction au niveau de la caustique thermosphérique est examinée à l'aide des calculs L01Spe, WNL01Spe, SNL01Spe. Une étude de la précision numérique est enfin menée.

Comme il a été remarqué dans les chapitres 2 et 3, l'amplitude de la perturbation de pression  $p' = p - \bar{p}$  varie proportionnellement à la racine carrée de la densité atmosphérique locale  $\bar{\rho}$ . Ainsi, la variable  $\Phi = p'/\sqrt{\bar{\rho}}$  est utilisée dans les analyses qui suivent. Une autre grandeur très importante à des fins opérationnelles est le maximum du signal  $p'$  enregistré au sol. La fonction  $p'_1(x_1, t) = p'(x_1, x_2 = 0 \text{ km}, x_3 = 0 \text{ km}, t)$  est ainsi examinée. Les signaux  $p'$  et  $\Phi$  sont aussi caractérisés dans le domaine fréquentiel, au travers des spectres physiques

$$\mathcal{E}_\chi(x_1, x_2, x_3, f) = 2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x_1, x_2, x_3, t) e^{i2\pi ft} dt \right|^2 \quad f \in \mathbb{R}^+ \quad \chi = p', \Phi$$

En particulier, les densités spectrales d'énergie  $\mathcal{E}_{\chi,1}(x_1, f) = \mathcal{E}_\chi(x_1, x_2 = 0 \text{ km}, x_3 = 0 \text{ km}, f)$  et  $\mathcal{E}_{\chi,1}(x_3, f) = \mathcal{E}_\chi(x_1 = 0 \text{ km}, x_2 = 0 \text{ km}, x_3, f)$ , calculées respectivement sur les axes  $x_1$  et  $x_3$ , sont étudiées.

## Simulation SNL02Ape : étude de la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère

### Description générale du champ de pression

Les champs de la pression normalisée  $\Phi$  obtenus à différents instants de temps sont illustrés sur les figures 5.5(a)-(i). Les boîtes noire et rouge représentent respectivement le domaine de calcul et le domaine physique. Le niveau des couleurs varie entre  $-10 \text{ Pa} \cdot \text{kg}^{-1/2} \cdot \text{m}^{3/2}$  (bleu) et  $+10 \text{ Pa} \cdot \text{kg}^{-1/2} \cdot \text{m}^{3/2}$  (rouge). Cet intervalle est choisi pour permettre de visualiser les diverses phases, qui peuvent avoir des amplitudes d'ordre différent. Les points beiges, enfin, indiquent des stations de mesure et sont espacés de 100 km. Le front d'onde produit par la source infrasonore est initialement sphérique (cf. figure 5.5(a)). Toutefois, à cause des variations de vitesse du son et de vent, il se déforme continûment durant la propagation dans l'atmosphère. À l'instant  $t = 216.69 \text{ s}$ , cf. figure 5.5(b), des réflexions partielles peuvent être distinguées entre 25 km et 55 km de hauteur. Elles sont induites par les gradients de vitesse du son et de vent d'échelle caractéristique comparable à la longueur d'onde du front. À l'instant  $t = 356.49 \text{ s}$ , cf. figure 5.5(c), ces réflexions apparaissent renforcées. Par ailleurs, à cause des effets non linéaires, un allongement du front est observé dans la haute atmosphère. À l'instant  $t = 566.319 \text{ s}$ , cf. figure 5.5(d), une partie de l'onde est renvoyée vers la surface terrestre, autour de 100 km de hauteur. De plus, le front sort du domaine de calcul en traversant la frontière supérieure. La boîte de calcul

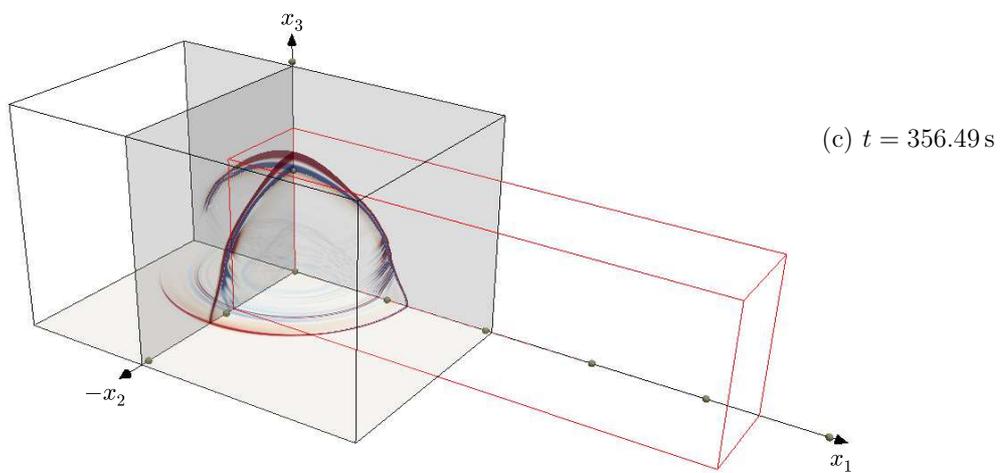
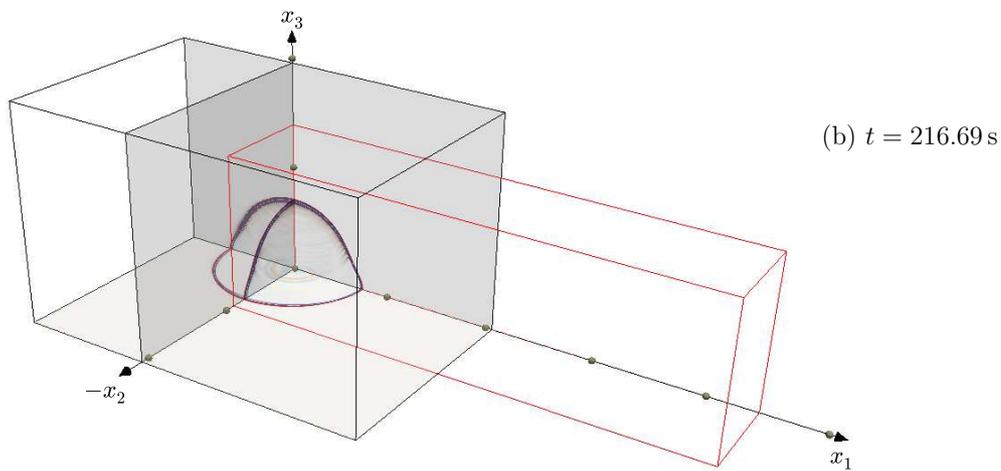
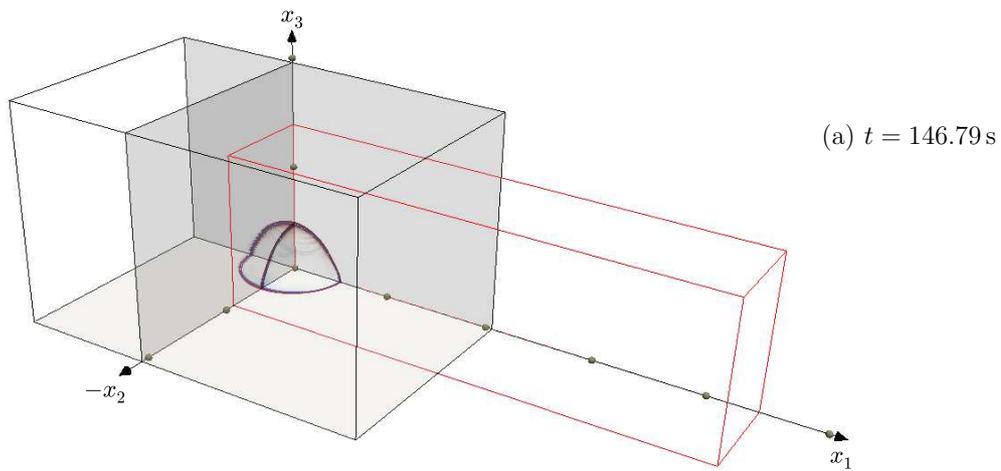
est déplacée pour  $t > 629.24$  s. Ce mouvement est ainsi visible sur la figure 5.5(e). À l'instant  $t = 775.89$  s, une phase thermosphérique est en train d'atteindre la surface terrestre et l'onde au niveau du sol est une superposition de phases diffusées et de phases stratosphériques. Enfin, le front sort du domaine de calcul au travers de la frontière latérale, avec un niveau négligeable de réflexions parasites. Il est important de remarquer que le traitement du bord dans la direction  $-x_2$  est très délicat, les conditions de rayonnement étant peu adaptées aux incidences rasantes. À l'instant  $t = 1055.49$  s, la phase thermosphérique arrive au sol. À des temps ultérieurs, le front d'onde devient de plus en plus complexe et des structures en arche apparaissent, cf. figures 5.5(f) et 5.5(g). Ces dernières sont attribuées à des réflexions partielles engendrées lors du passage de l'onde au niveau de la stratosphère. Le mouvement de la boîte glissante est finalement arrêté lorsque la frontière du domaine physique est atteinte, cf. figures 5.5(g)-(i). La simulation se termine lorsque le front d'onde est complètement sorti du domaine de calcul.

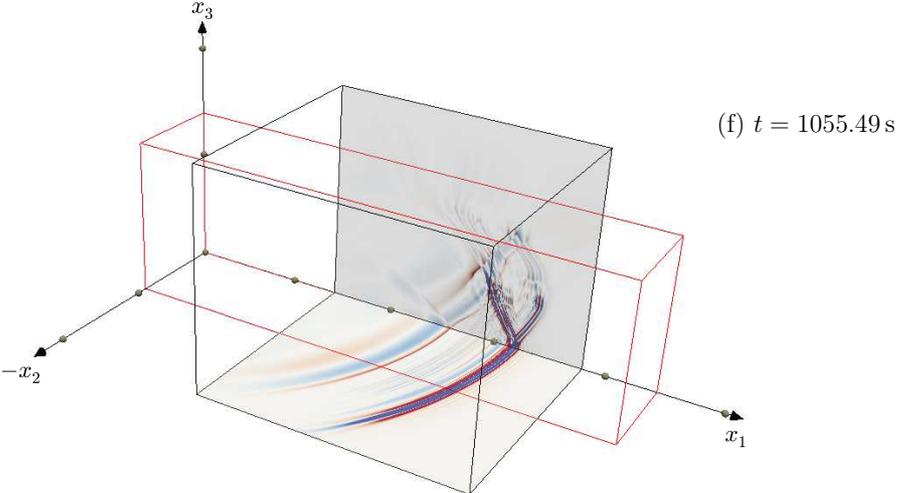
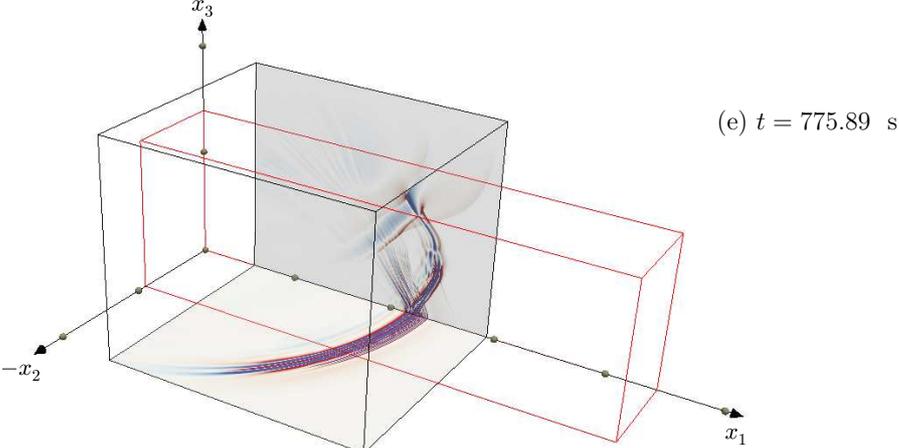
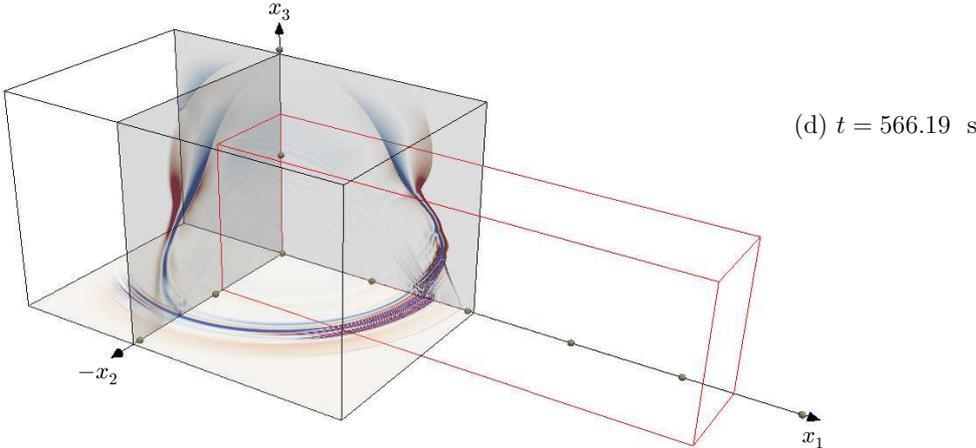
### Signal au niveau de la source

La perturbation de pression  $p'$  enregistrée au point (7.92 km, 0 km, 0 km) et la densité spectrale d'énergie  $\mathcal{E}_{p'}$  correspondante sont tracées respectivement sur les figures 5.6(a) et 5.6(b). Le signal présente une forme d'onde en « N », une amplitude maximale d'environ 2330 Pa et une durée de l'ordre de 6 s. La fréquence dominante vaut approximativement 0.13 Hz.

### Évolution du signal de la pression normalisée le long de l'axe vertical

Les perturbations de la pression normalisée  $\Phi$  enregistrées le long de l'axe vertical  $x_3$  à trois altitudes différentes sont tracées sur les figures 5.7(a)-(c). À 50 km de hauteur, une onde en « N » de période de l'ordre de 12 s est mesurée. À cause des effets non linéaires, ce signal s'allonge durant la propagation vers la haute atmosphère. Sa durée vaut environ 26 s à  $x_3 = 90$  km et 75 s à  $x_3 = 130$  km. Une réduction d'amplitude est par ailleurs associée à l'augmentation de la période de l'onde. Une diminution d'un facteur 17 est observée entre  $x_3 = 50$  km et  $x_3 = 130$  km de hauteur. De plus, à 130 km d'altitude, la partie centrale du « N » est courbe. Ainsi, la forme d'onde ne reste pas autosimilaire, comme prévu par l'équation de Burgers augmentée (cf. chapitre 2). Cette dernière est en effet valable uniquement dans le régime faiblement non linéaire, où l'amplitude de la perturbation de pression  $p'$  doit rester petite devant la pression locale  $\bar{p}$ , typiquement  $p' < 0.1\bar{p}$ . Comme illustré sur la figure 5.8, où le maximum du rapport  $P_3 = p'(0 \text{ km}, 0 \text{ km}, x_3, t)/\bar{p}(x_3)$  est tracé en fonction de l'altitude  $x_3$ , l'hypothèse  $p' \ll \bar{p}$  n'est pas vérifiée dans la haute atmosphère,  $\max_t(P_3)$  vaut environ 0.7 pour  $x_3 = 114$  km. L'équation de Burgers augmentée peut être intuitivement construite à partir de l'équation d'advection linéaire, en remplaçant la vitesse de propagation  $\bar{c}$  par le terme  $\bar{c}[1 + (\gamma + 1)/(2\gamma)p'/\bar{p}]$ .<sup>128</sup> Ce dernier contient une approximation au premier ordre en  $p'/\bar{p}$  des variations de célérité induites par la perturbation de pression, valable seulement en régime faiblement non linéaire. Le fait que la partie centrale de l'onde en « N » reste droite est une conséquence directe de la linéarité





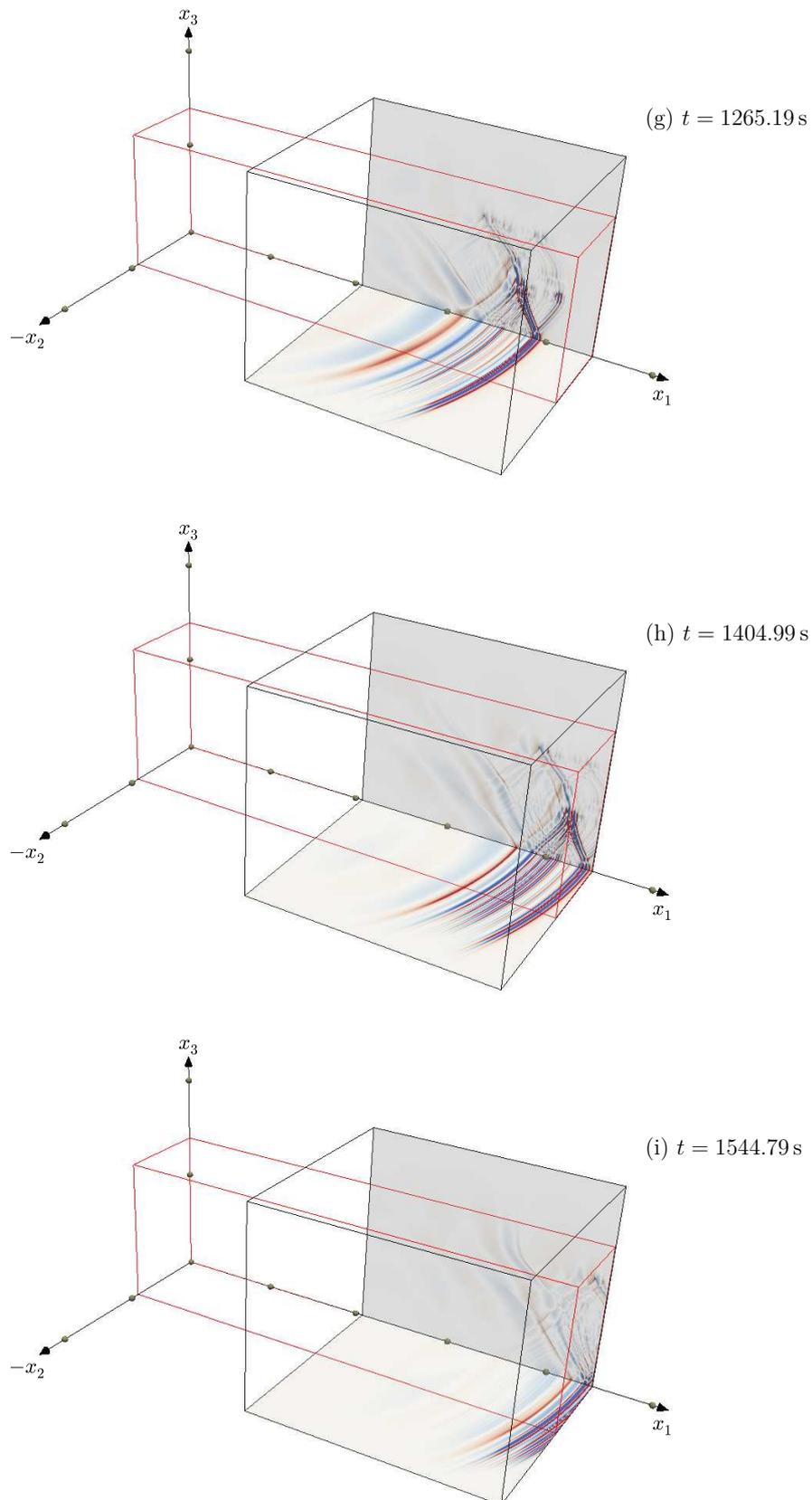


FIGURE 5.5: Champs de pression normalisée  $\Phi$  obtenus à différents instants de temps. La boîte noire indique le domaine de calcul, alors que la boîte rouge représente le domaine physique.

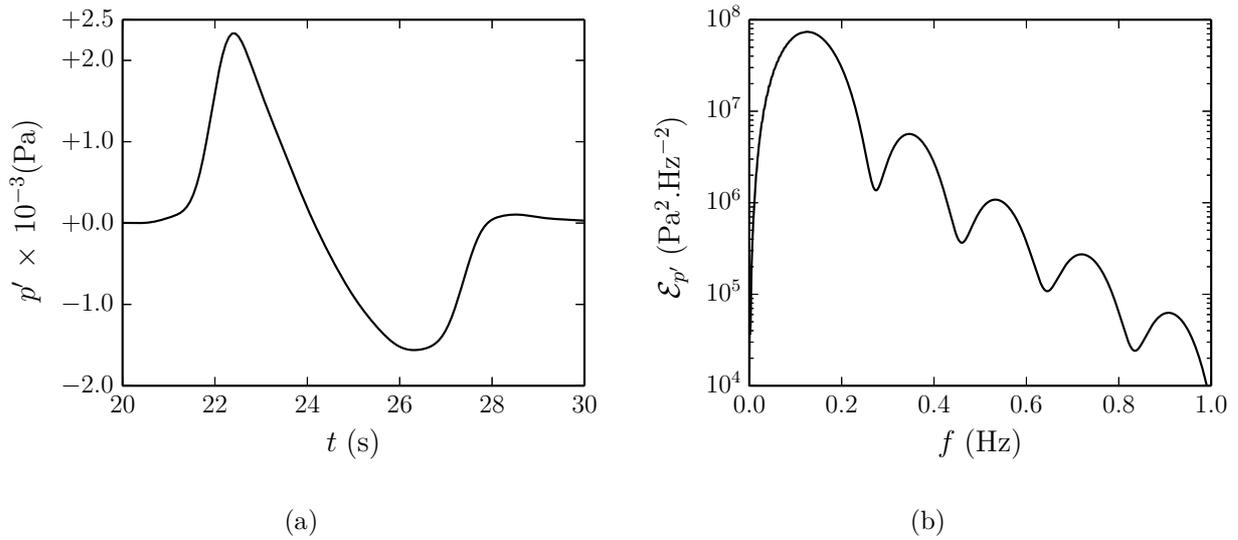


FIGURE 5.6: (a) Signal de pression  $p'$  enregistré au point  $S_1 = (8 \text{ km}, 0 \text{ km}, 0 \text{ km})$ . (b) Densité spectrale d'énergie  $\mathcal{E}_{p'}$  correspondante.

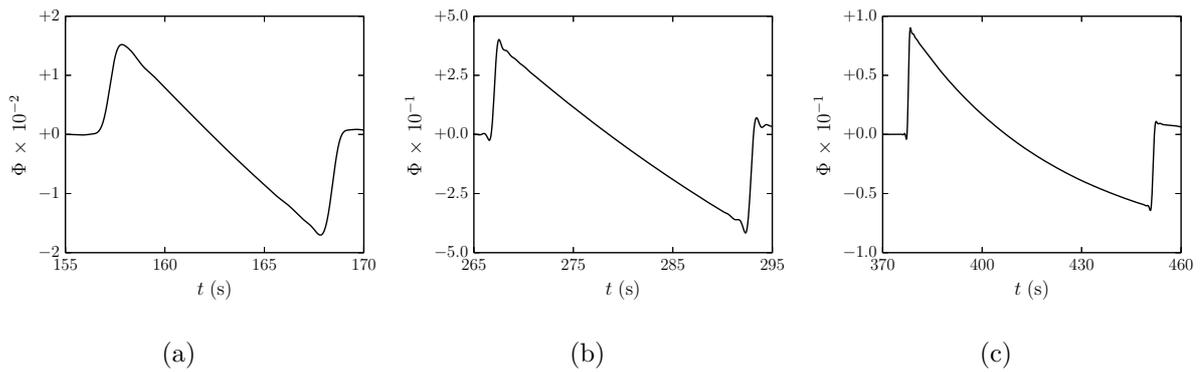


FIGURE 5.7: Signaux de pression normalisée  $\Phi$  enregistrés le long de l'axe vertical  $x_3$  à (a)  $x_3 = 50 \text{ km}$ , (b)  $x_3 = 90 \text{ km}$ , et (c)  $x_3 = 130 \text{ km}$ .

de la relation entre vitesse de propagation et rapport de pression  $p'/\bar{p}$ . La courbure observée en haute atmosphère peut donc être attribuée à des termes d'ordre supérieur en  $p'/\bar{p}$ , qui ne peuvent pas être négligés au delà d'une certaine altitude.

Le spectre  $\mathcal{E}_{\Phi,3}$  des signaux de pression normalisée  $\Phi$  enregistrés le long de l'axe  $x_3$  est tracé en fonction de la fréquence  $f$  et de l'altitude  $x_3$  sur la figure 5.9. L'allongement du signal se traduit par un décalage vers les basses fréquences. En conséquence, dans ce cas spécifique, la forme d'onde est peu affectée par les termes visqueux et thermiques. En effet, tout au long de la propagation, l'énergie du signal est portée principalement par des composantes spectrales de basse fréquence qui sont faiblement absorbées. L'absorption classique agit uniquement au voisinage des chocs qui contiennent des composantes de haute pulsation.

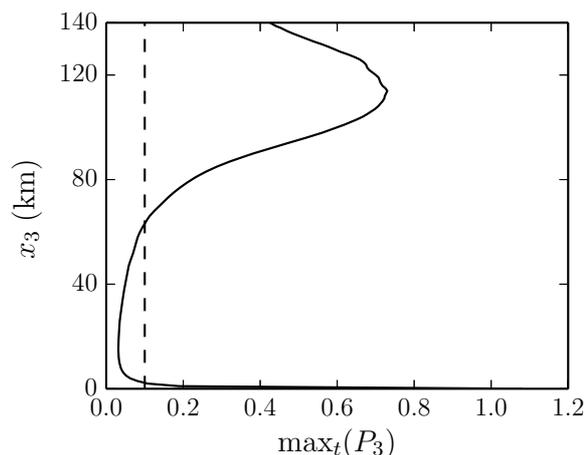


FIGURE 5.8: Maximum du rapport  $P_3$  entre la perturbation de pression  $p'$  sur l'axe  $x_3$  et la pression locale  $\bar{p}$ . Les tirets indiquent la limite conventionnelle de validité de la théorie des chocs faibles,  $\max_t(P_3) = 0.1$ .

### Identification des différentes phases

Les fronts d'onde  $\Phi$  obtenus à différents instants de temps dans le plan  $x_1 - x_3$  sont superposés sur la figure 5.10(a). Les rayons acoustiques sont aussi reportés afin de faciliter la compréhension du champ de pression. Deux guides d'onde sont produits par les profils verticaux de vitesse du son et de vent : un guide stratosphérique, entre la surface terrestre et environ 55 km d'altitude, et un guide thermosphérique, entre la surface terrestre et 115 km de hauteur. Des phases géométriques et non géométriques peuvent être distinguées. Parmi les premières, deux phases stratosphériques et une phase thermosphérique sont observées. Elles sont associées à autant de caustiques cuspidées qui se forment entre 45 km et 55 km d'altitude (pointillés oranges) et autour de 105 km de hauteur (pointillés violet). Les arrivées stratosphériques sont superposées (front 4). Ainsi, elles sont regroupées et labellisées par le sigle  $I_{s1}$ . L'arrivée thermosphérique est indiquée par le sigle  $I_{t1}$  (front 5). Différentes phases non géométriques sont aussi détectées. Une phase directe diffractée  $I_{dtr}$ , qui pénètre dans la zone d'ombre au voisinage de la source, est visible jusqu'à environ  $x_1 = 200$  km de distance (fronts 1, 2 et 3). Des réflexions partielles  $I_{ps}$  sont par ailleurs enregistrées (fronts 2 et 3). De plus, un niveau significatif de diffraction peut être remarqué autour des caustiques stratosphériques et thermosphérique. Ainsi, les deux phases géométriques  $I_{s1}$  et  $I_{t1}$  sont précédées par les arrivées diffractées  $I_{ds1}$  et  $I_{dt1}$ . Enfin, des structures en arche sont visibles au delà de  $x_1 = 300$  km. Elles sont générées lorsque les différentes phases transitent dans la stratosphère. En effet, lors du passage d'une onde quelconque à travers les inhomogénéités localisées entre 25 km et 55 km de hauteur, une onde réfléchie et une onde transmise sont produites. Ces dernières sont ensuite piégées dans les guides d'onde stratosphérique et thermosphérique. Les arrivées au sol qui en découlent sont ainsi indiquées par le sigle  $I_{pst}$ .

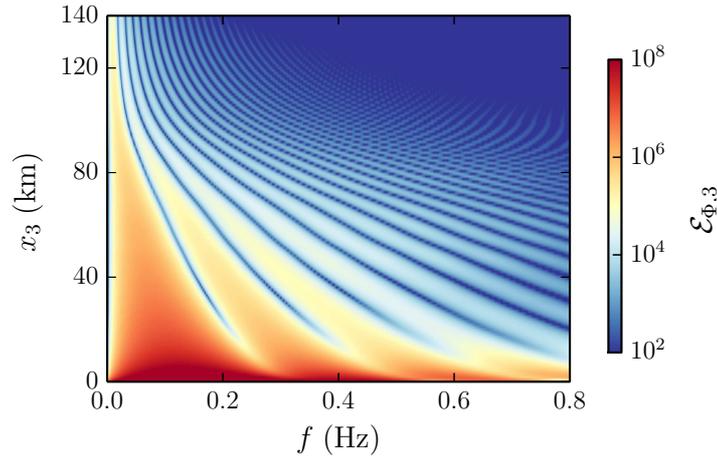


FIGURE 5.9: Spectre des signaux de pression normalisée  $\Phi$  le long de l'axe  $x_3$  en fonction de la fréquence  $f$  et de l'altitude  $x_3$ .

Afin de caractériser les différentes phases qui atteignent la surface terrestre, la perturbation de pression  $p'$  qui y est enregistrée est tracée sur la figure 5.10(b) en fonction de la distance  $x_1$  et du temps retardé  $t_r = t - x_1/\bar{c}(0 \text{ km})$ . Ce diagramme permet de comparer les temps d'arrivée des phases infrasonores avec celui d'une onde hypothétique longeant le sol à la vitesse  $\bar{c}(0 \text{ km})$ . Les pointillés représentent les phases géométriques et sont obtenus par une méthode de tracé de rayons 3-D.<sup>66</sup> Le maximum de la fonction  $p'_1$  est de plus illustré sur la figure 5.10(c). Les contributions de certaines arrivées sont représentées en couleur. La phase  $I_{\text{dtr}}$  est enregistrée sans délai, sa vitesse de propagation étant proche de la célérité au sol. Son amplitude diminue dans la direction  $x_1$ , avec un taux supérieur, en valeur absolue, à celui typique des ondes sphériques en milieu homogène. Cette réduction est induite par le gradient négatif de vitesse du son dans la troposphère, qui dévie l'énergie acoustique vers la haute atmosphère.<sup>44,128</sup> La phase directe constitue la contribution dominante jusqu'à une distance de  $x_1 = 130 \text{ km}$ . L'arrivée diffusée  $I_{\text{ps}}$  est enregistrée tout au long de la surface terrestre, avec un délai qui diminue avec  $x_1$ . Elle est mesurée à un temps retardé valant environ  $t_r = 200 \text{ s}$  au voisinage de la position de la source et environ  $t_r = 100 \text{ s}$  au delà de  $x_1 = 100 \text{ km}$ . L'amplitude de  $I_{\text{ps}}$  est de l'ordre de  $1 \text{ Pa}$  entre  $x_1 = 0 \text{ km}$  et  $x_1 = 70 \text{ km}$ . Elle atteint un minimum local au voisinage de la station de mesure située à  $x_1 = 70 \text{ km}$ . Enfin, elle augmente le long de l'axe  $x_1$ , jusqu'à des valeurs de  $15 \text{ Pa}$  à  $x_1 = 140 \text{ km}$ . De plus, en correspondance du point  $x_1 = 70 \text{ km}$ , une inversion de phase est observée. L'arrivée stratosphérique  $I_{\text{ds1}} - I_{\text{s1}}$  est enregistrée pour  $x_1 \gtrsim 120 \text{ km}$ . Elle est diffractée jusqu'à  $x_1 \simeq 212 \text{ km}$ . Au delà, elle est prévue par la théorie de l'acoustique géométrique. La phase stratosphérique constitue la contribution principale au signal de pression. Son amplitude reste supérieure à  $10 \text{ Pa}$  pour  $x_1 > 120 \text{ km}$  et jusqu'à au moins  $x_1 = 450 \text{ km}$ , avec des maxima locaux de  $75 \text{ Pa}$  et  $65 \text{ Pa}$  respectivement à  $x_1 = 230 \text{ km}$  et  $x_1 = 275 \text{ km}$ . L'arrivée thermosphérique  $I_{\text{dt1}} - I_{\text{t1}}$  est mesurée avec un niveau supérieur à environ  $0.5 \text{ Pa}$  pour  $x_1 \gtrsim 180 \text{ km}$ . Elle est induite par la diffraction au niveau de la caustique thermosphérique

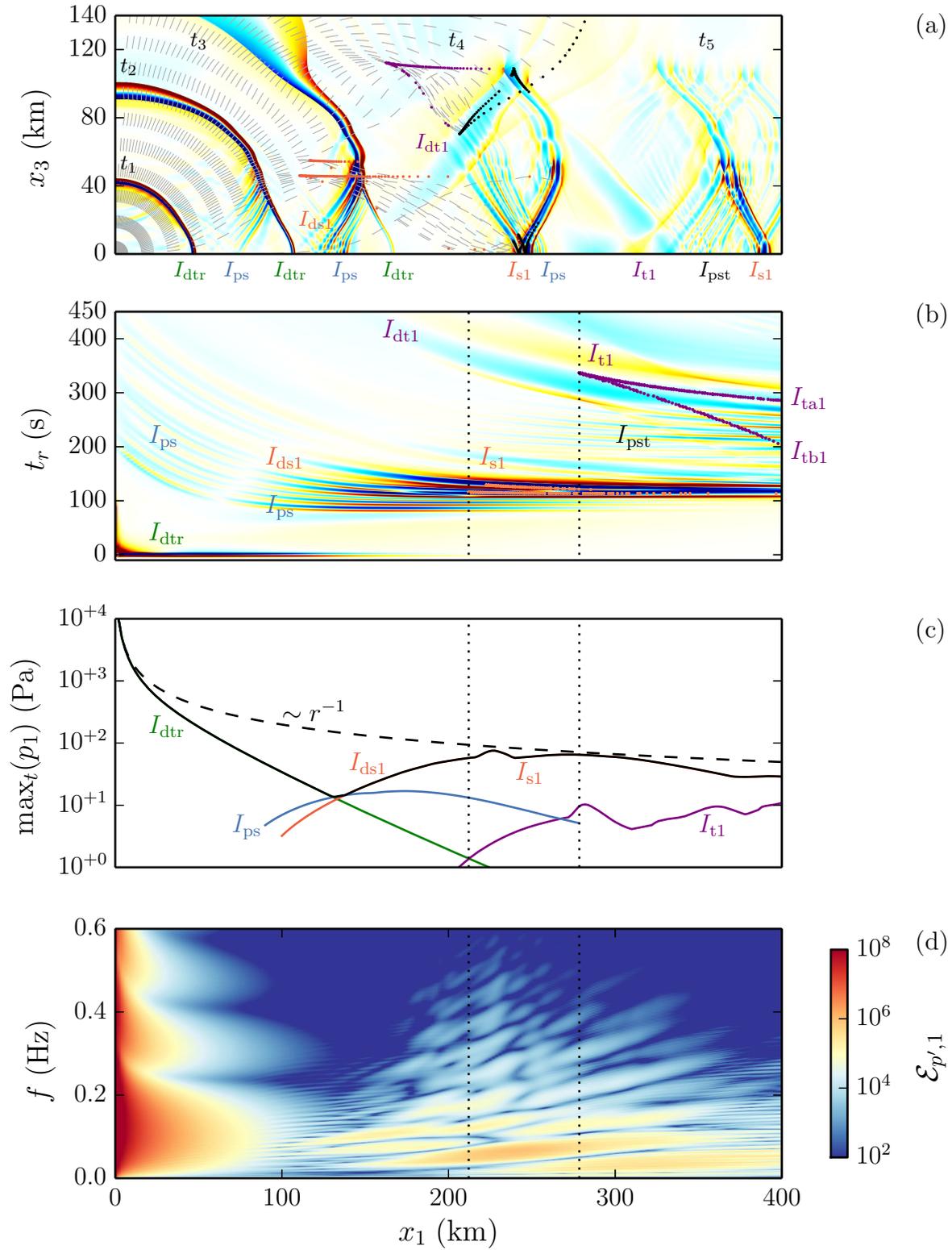


FIGURE 5.10: (a) Superposition des champs de la pression normalisée  $\Phi$  à  $t_1 = 139.8$  s,  $t_2 = 314.55$  s,  $t_3 = 489.3$  s,  $t_4 = 838.8$  s et  $t_5 = 1258.2$  s. (b) Perturbation de pression  $p'$  enregistrée le long de l'axe  $x_1$  en fonction de la distance  $x_1$  et du temps retardé  $t_r = t - x_1/\bar{c}(0 \text{ km})$ . (c) Maximum de surpression  $\max_t(p'_1)$  de la perturbation de pression  $p'$  enregistrée le long de l'axe  $x_1$ . (d) Spectre  $\mathcal{E}_{p',1}$  des signaux de pression  $p'$  enregistrés sur la surface terrestre en fonction de la distance  $x_1$  et de la fréquence  $f$ .

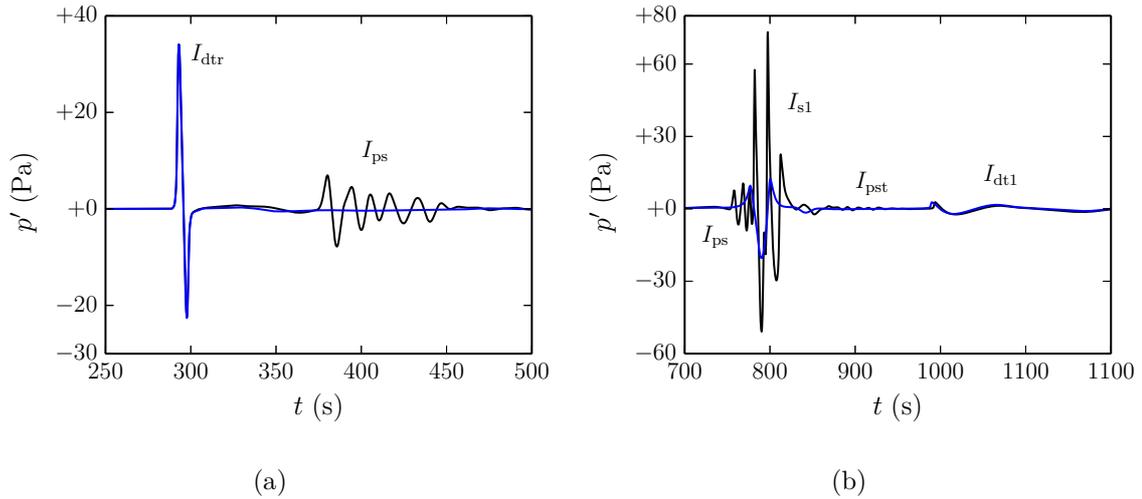


FIGURE 5.11: Perturbations de pression  $p'$  enregistrées à  $x_1 = 100$  km (a) et  $x_1 = 230$  km (b). À titre de comparaison, les courbes bleues obtenues dans la simulation SNL02Spe, où les profils de vitesse du son et de vent filtrés PVApe sont employés, sont aussi représentées.

jusqu'à  $x_1 \simeq 278$  km. Au delà, elle est prévue par la théorie de l'acoustique géométrique et consiste en deux contributions, indiquées par les sigles  $I_{ta1}$  et  $I_{tb1}$ . La seconde est retournée vers la surface terrestre à une altitude supérieure par rapport à la hauteur de réflexion de la première. Par ailleurs, elle est mesurée avec un délai inférieur par rapport à celui de la phase  $I_{ta1}$ . En raison de l'allongement non linéaire subit par l'onde lors de la propagation dans la haute atmosphère, l'arrivée thermosphérique présente une amplitude plus petite par rapport à celle de la phase stratosphérique.

Le spectre  $\mathcal{E}_{p',1}$  des arrivées enregistrées le long de l'axe  $x_1$  est enfin tracé sur la figure 5.10(d) en fonction de la distance  $x_1$  et de la fréquence  $f$ . Jusqu'à environ  $x_1 = 100$  km, le signal de pression est dominé par la phase directe, qui conserve la forme d'onde en « N » générée par la source infrasonore. La densité spectrale d'énergie  $\mathcal{E}_{p',1}$  présente ainsi un spectre relativement large. Au contraire, le spectre des arrivées mesurées au delà de  $x_1 = 100$  km est essentiellement contenu dans la bande fréquentielle  $[0, \text{Hz}, 0.2 \text{ Hz}]$ .

### Signaux enregistrés sur l'axe $x_1$ à $x_1 = 100$ km et $x_1 = 230$ km

Le signal de pression  $p'$  enregistré sur l'axe  $x_1$  à  $x_1 = 100$  km est tracé en noir sur la figure 5.11(a). Il consiste en deux phases : l'arrivée directe  $I_{dtr}$  est mesurée entre 290 s et 300 s et a une amplitude égale à environ 34 Pa ; l'arrivée diffusée  $I_{ps}$  est observée entre 370 s et 460 s et le maximum de surpression vaut approximativement 7 Pa. Le signal de pression  $p'$  mesuré à  $x_1 = 230$  km est tracé en noir sur la figure 5.11(b). L'arrivée stratosphérique  $I_{s1}$  est enregistrée entre 780 s et 820 s. Son amplitude maximale est égale à 73 Pa. Comme montré sur la figure 5.12(a), elle est une superposition de deux ondes ; ces dernières sont réfléchies au niveau des deux caustiques stratosphériques, entre 45 km et 55 km de hauteur. La durée de

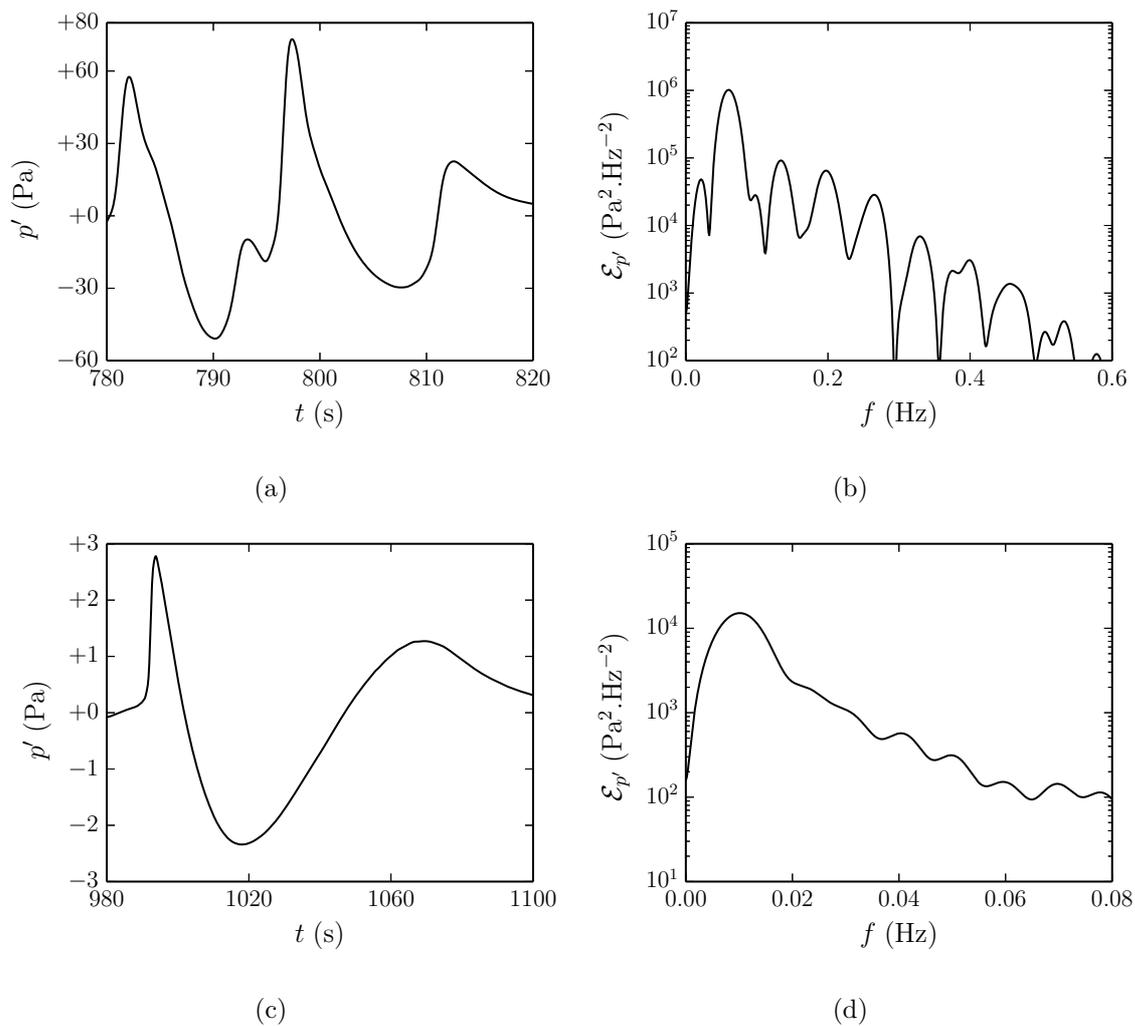


FIGURE 5.12: Perturbation de pression  $p'$  enregistrée à  $x_1 = 230$  km. (a) Arrivée stratosphérique  $I_{s1}$  et (b) spectre correspondant. (c) Arrivée thermosphérique diffractée  $I_{dt1}$  et (d) spectre correspondant.

$I_{s1}$  est de 35 s et sa fréquence principale vaut 0.06 Hz. L'arrivée thermosphérique  $I_{dt1}$  observée à  $x_1 = 230$  km n'est pas prévue par la théorie de l'acoustique géométrique et est engendrée par diffraction le long de la caustique thermosphérique. Elle présente une signature en « U », typique des ondes en « N » qui traversent une caustique. Sa durée est de 90 s et sa fréquence dominante vaut environ 0.1 Hz.

## Analyse de la diffusion par les petites échelles de l'atmosphère

Les courbes bleues reportées sur les figures 5.11 représentent les résultats observés dans la simulation SNL02Spe, où les profils de vitesse du son et de vent filtrés sont utilisés. Les inhomogénéités d'échelle caractéristique comparable à la longueur d'onde infrasonore ont une influence remarquable sur les signaux mesurés au sol. Non seulement elles font apparaître une

phase diffusée, mais elles affectent aussi la forme d'onde et l'amplitude de l'arrivée stratosphérique  $I_{s1}$ . À titre d'illustration, au point  $x_1 = 230$  km sur l'axe  $x_1$ , le rapport entre les maxima de suppression de  $I_{s1}$  obtenus dans les simulations SNL02Ape et SNL02Spe est égal à environ 6. La sensibilité des enregistrements microbarométriques aux petites échelles de l'atmosphère a récemment fait l'objet de plusieurs études.<sup>15,36-39</sup> Chunchuzov *et al.*<sup>38,39</sup> ont, en particulier, montré la possibilité d'exploiter les réflexions partielles pour reconstruire la structure verticale de l'atmosphère. Le spectre des arrivées diffusées est en effet directement lié à celui des variations des grandeurs ambiantes, ces dernières agissant comme une couche sélective qui ne réfléchit que certaines composantes du signal incident.

Dans cette section, une analyse plus détaillée de la phase  $I_{ps}$  est effectuée. Afin d'expliquer qualitativement les observations, un modèle phénoménologique est proposé. Pour ce faire, le problème simplifié illustré schématiquement sur la figure 5.13 est considéré : un front sphérique est émis par une source ponctuelle placée à l'origine des coordonnées  $O$  dans un milieu infini  $Ox_1x_2x_3$ , isotherme et au repos et traverse une inhomogénéité de température, générant ainsi une onde réfléchie et une onde transmise.

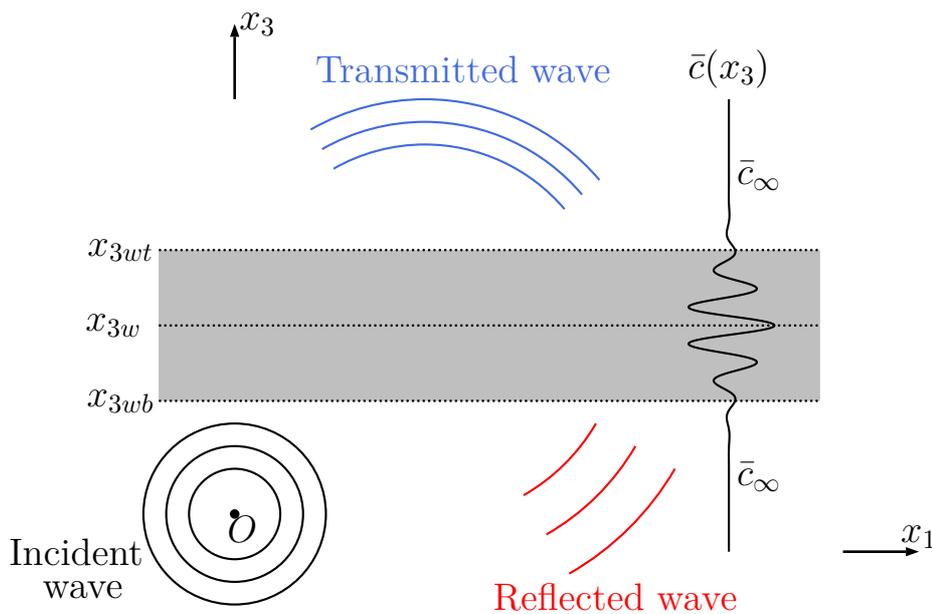


FIGURE 5.13: Propagation d'une onde sphérique à travers une inhomogénéité de vitesse du son.

quement sur le signal réfléchi. Afin de simplifier les développements analytiques, les effets non linéaires, visqueux et thermiques sont négligés. Ainsi, le champ de pression normalisée  $\Phi$  peut être décrit par l'équation de Bergmann (cf. chapitre 3)

$$-\frac{\omega_{ac}^2(x_3)}{\bar{c}^2(x_3)}\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_i} - \frac{1}{\bar{c}^2(x_3)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{F(t)}{\sqrt{\bar{\rho}(x_3)}}\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \quad (5.2)$$

où  $F(t)$  indique l'enveloppe temporelle de l'impulsion et

$$\omega_{\text{ac}}(x_3) = \bar{c}(x_3) \sqrt{-\frac{1}{2\bar{\rho}(x_3)} \frac{d^2\bar{\rho}(x_3)}{dx_3^2} + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{\bar{\rho}(x_3)} \frac{d\bar{\rho}(x_3)}{dx_3} \right)^2}$$

est la pulsation de coupure acoustique (cf. chapitre 3). Dans le cadre de ce modèle, la fonction  $\bar{c}$  est définie par la somme d'une constante  $\bar{c}_\infty$  et d'une fluctuation localisée à l'altitude  $x_{3w}$  et de longueur d'onde  $\lambda_w$

$$\bar{c}(x_3) = \bar{c}_\infty \left[ 1 + \epsilon_{\bar{c}} e^{-z^2/2} \cos(2\pi z) \right] \quad z = \frac{x_3 - x_{3w}}{\lambda_w} \quad (5.3)$$

Pour des inhomogénéités dont la vitesse du son est très inférieure à la célérité  $\bar{c}_\infty$ , c'est-à-dire pour  $\epsilon_{\bar{c}} \ll 1$ , le gradient vertical de masse volumique ambiante peut être développé de la manière suivante

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} \equiv -\frac{\gamma g}{\bar{c}^2} - \frac{2}{\bar{c}} \frac{d\bar{c}}{dx_3} = -\frac{1}{H_\infty} - \frac{2}{\bar{c}_\infty} \frac{d\bar{c}'}{dx_3} + 2 \frac{\bar{c}'}{\bar{c}_\infty} \left[ \frac{1}{H_\infty} + \frac{1}{\bar{c}_\infty} \frac{d\bar{c}'}{dx_3} \right] + \mathcal{O}(\epsilon_{\bar{c}}^2)$$

avec  $\bar{c}' = \bar{c} - \bar{c}_\infty$  et  $H_\infty = \bar{c}_\infty^2/(\gamma g)$ . Compte tenu du fait que, pour les petites échelles de l'atmosphère,  $\lambda_w \ll H_\infty$ , la fonction  $(d\bar{\rho}/dx_3)/\bar{\rho}$  est dominée par les deux premières contributions. Par ailleurs, le terme constant  $-1/H_\infty$ , dû à la force de gravité, n'induit pas de réflexion. Ainsi, en première approximation, seules les variations de masse volumique provoquées par le gradient de température affectent l'onde réfléchie.

Afin de ne pas alourdir la discussion, les détails de calcul sont présentés dans l'annexe A. Dans la suite de la section, les résultats les plus significatifs sont reportés. En particulier, pour  $x_3 \ll x_{3w}$ , la transformée de Fourier temporelle  $\hat{\Phi}_r$  du champ réfléchi  $\Phi_r$ ,

$$\hat{\Phi}_r(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_r(x_1, x_2, x_3, t) e^{i\omega t} dt$$

est donnée par l'intégrale<sup>26,65</sup>

$$\hat{\Phi}_r(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\hat{F}(\omega)}{4\pi\sqrt{\rho_g}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\mathcal{R}_c e^{+i[k_1x_1+k_2x_2-k_3(k_1,k_2,\omega)x_3]}}{2\pi k_3(k_1, k_2, \omega)} dk_1 dk_2 \quad (5.4)$$

où  $k_1, k_2$  et  $k_3 = \sqrt{(\omega/\bar{c}_\infty)^2 - (k_1^2 + k_2^2)}$  sont les nombres d'onde dans les directions  $x_1, x_2, x_3$ ;  $\omega$  indique la pulsation,  $\hat{F}$  la transformée de Fourier de l'enveloppe temporelle de l'impulsion et  $\mathcal{R}_c$  le coefficient de réflexion de la couche inhomogène. En conséquence, le champ diffusé peut être vu comme une somme d'ondes planes monochromatiques,  $e^{i(k_1x_1+k_2x_2-k_3x_3)}$ , dont les amplitudes sont proportionnelles au paramètre  $\mathcal{R}_c$  ainsi qu'au spectre incident. Le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_c$  dépend de l'angle d'incidence  $\varphi = \text{atan}(k_3/\sqrt{k_1^2 + k_2^2})$  par rapport au plan horizontal, de la pulsation  $\omega$  et de la longueur d'onde  $\lambda_w$  de la fluctuation de vitesse du son. Comme montré dans l'annexe A, il peut être déterminé en résolvant une équation différentielle ordinaire de Riccati.<sup>25,96</sup> Le module et la phase de  $\mathcal{R}_c$  obtenus pour le profil de vitesse du son (5.3) sont

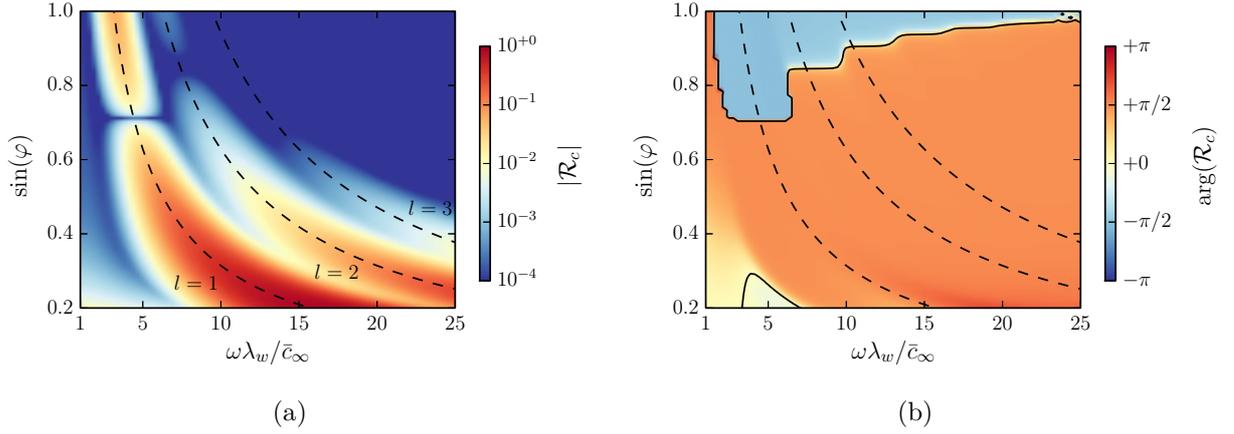


FIGURE 5.14: Coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_c$  pour le profil de vitesse du son (5.3) en fonction de la pulsation normalisée  $\omega\lambda_w/\bar{c}_\infty$  de l'onde incidente et de l'angle d'incidence  $\varphi$ . (a) Module  $|\mathcal{R}_c|$ . Les tirets représentent la loi de Bragg  $2\lambda_w \sin(\varphi) = l\lambda$  pour  $l = 1, l = 2$  et  $l = 3$ . (b) Phase  $\arg(\mathcal{R}_c)$  (à une constante additionnelle près). Le trait continu indique le contour  $\arg(\mathcal{R}_c) = 0$ .

tracés sur les figures 5.14(a) et 5.14(b) en fonction de la pulsation normalisée  $\omega\lambda_w/\bar{c}_\infty$  et du sinus de l'angle d'incidence  $\sin(\varphi)$ . La fonction  $|\mathcal{R}_c|$  prend des valeurs significatives uniquement dans certaines bandes fréquentielles et ses maxima suivent la loi de Bragg

$$2\lambda_w \sin(\varphi) = l\lambda \quad (5.5)$$

où  $l$  est un nombre entier et  $\lambda = 2\pi\bar{c}_\infty/\omega$  indique la longueur d'onde incidente. Ce résultat est relativement bien connu dans la littérature.<sup>9,11</sup> Le module  $|\mathcal{R}_c|$  augmente remarquablement lorsque  $\varphi$  tend vers 0, *i.e.* pour une incidence rasante par rapport à la couche inhomogène, et est pratiquement unitaire pour toute incidence  $\varphi$  inférieure à  $10^\circ$ . Dans ces cas, l'onde est complètement réfléchiée. À l'intérieur des différentes bandes, il existe un angle  $\varphi_t$ , appelé angle d'intromission, en correspondance duquel le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_c$  s'annule et le signal est parfaitement transmis. À titre d'exemple,  $\varphi_t$  est de  $45^\circ$  pour  $l = 1$  et vaut environ  $57.3^\circ$  pour  $l = 2$ . Par ailleurs, un saut de phase de  $\pi$  est observé pour  $\varphi = \varphi_t$ . L'existence d'un angle d'intromission est liée aux fluctuations de masse volumique. Pour  $\varphi = \varphi_t$ , ces dernières compensent parfaitement l'effet de l'inhomogénéité de température.

En utilisant la méthode de la phase stationnaire,<sup>26</sup> il est possible de montrer que, pour une station de mesure  $S_R$  donnée (cf. figure 5.15), l'intégrale (5.4) peut être approchée par l'expression

$$\hat{\Phi}_r(\mathbf{x}, \omega) \simeq \frac{\hat{F}(\omega)}{\sqrt{\rho_g}} \mathcal{R}(\varphi_{st}, \omega) \frac{e^{-i\omega r_\star/\bar{c}_\infty}}{4\pi r_\star} \quad r_\star = \|\overrightarrow{O'S_R}\| \quad \varphi_{st} = \text{atan} \left( \frac{x_{3w}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2/2}} \right) \quad (5.6)$$

où  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c e^{-i2k_3 x_{3w}}$  est un nombre imaginaire pur. Comme illustré sur la figure 5.15, la variable  $\varphi_{st}$  indique l'angle par rapport au plan horizontal formé par le rayon acoustique qui relie la

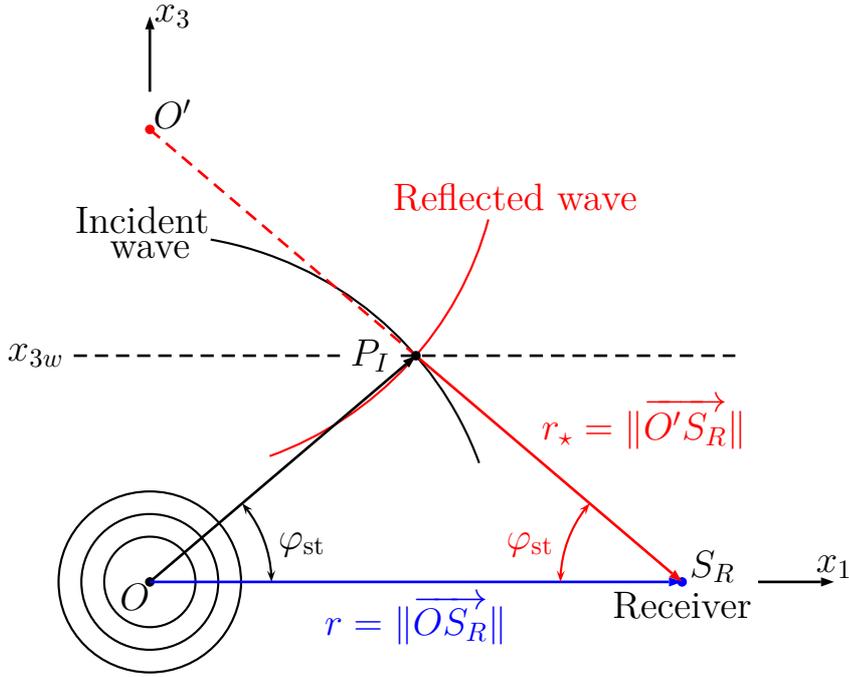


FIGURE 5.15: Propagation d'une onde sphérique à travers une couche inhomogène.

source  $O$  avec le point d'intersection entre le front sphérique incident et l'axe de symétrie  $x_3 = x_{3w}$  du profil de vitesse du son. Le terme  $r_*$  est enfin la distance entre le point image  $O'$ , situé à l'altitude  $x_3 = 2x_{3w}$ , et le récepteur  $S_R$ . Le champ diffusé  $\hat{\Phi}_r$  peut ainsi être interprété comme une onde sphérique émise par une source image située au point  $x_3 = 2x_{3w}$  et dont l'amplitude est proportionnelle au produit entre le spectre incident  $\hat{F}(\omega)$  et le coefficient de réflexion d'une onde plane qui impacte la couche inhomogène avec l'angle  $\varphi = \varphi_{st}$ . Le module de  $\hat{\Phi}_r$  le long de l'axe  $x_1$  est enfin donné par l'expression

$$\left| \hat{\Phi}_r(x_1, 0 \text{ km}, 0 \text{ km}, \omega) \right| \simeq 2 \left| \frac{\hat{F}(\omega) \mathcal{R}(\varphi_{st}, \omega)}{4\pi r_*} \right| \quad r_* = \sqrt{x_1^2 + 4x_{3w}^2} \quad \varphi_{st} = \text{atan} \left( \frac{x_{3w}}{x_1/2} \right) \quad (5.7)$$

où le facteur 2 est introduit pour tenir compte de la réflexion de l'onde diffusée au sol. Pour des valeurs de  $\varphi_{st}$  inférieures à l'angle d'intromission  $\varphi_t$ , la relation (5.7) reste valable lorsque la vitesse du son est constante partout et la fluctuation  $\epsilon_{\bar{c}}$  est introduite dans le profil de vent. Au contraire, aucune réflexion n'est engendrée lorsque l'incidence est normale à l'inhomogénéité de vent. L'expression (5.7) peut également être employée dans le régime non linéaire, à condition de remplacer la fonction  $\hat{F}(\omega)$  par la transformée de Fourier du signal temporel mesuré au point  $P_I$ , de manière à considérer l'allongement du signal avant l'impact avec l'inhomogénéité, et en supposant que la propagation de l'onde réfléchie reste linéaire. Enfin, la relation (5.7) peut aussi être utilisée lorsque la vitesse du son  $\bar{c}_\infty$  varie lentement avec l'altitude. La généralisation du modèle en cas de fluctuations quelconques de vitesse du son et de vent est plus délicate et n'est pas reportée dans ce manuscrit. De manière générale, toute fonction  $\epsilon_{\bar{c}}$  à moyenne nulle peut être exprimée comme somme de termes élémentaires ou ondelettes du type  $e^{-z^2/2} \cos(2\pi z)$ , de longueur d'onde  $\lambda_w$  et position  $x_3 = x_{3w}$ . Ainsi, en première approximation, le signal diffusé

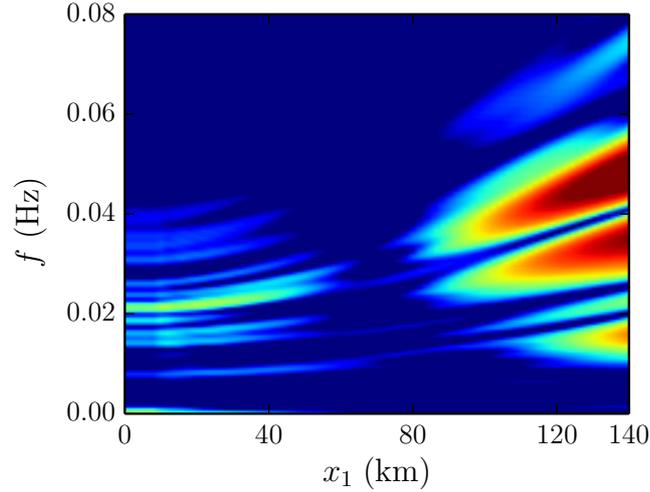


FIGURE 5.16: Spectre  $\mathcal{E}_{p',1}$  de l'arrivée diffusée  $I_{ps}$  en fonction de la distance  $x_1$  et de la fréquence  $f$ .

qui atteint la surface terrestre est une somme des ondes réfléchies par chaque ondelette.

Le modèle développé dans cette section permet de comprendre les propriétés principales de la phase diffusée  $I_{ps}$  le long de l'axe  $x_1$ . Tout d'abord, il faut remarquer que, comme illustré sur les figures 5.2(a) et 5.2(b), la couche inhomogène est ici essentiellement localisée entre  $x_{3w} = 25$  km et  $x_{3w} = 55$  km de hauteur. La contribution dominante à l'arrivée  $I_{ps}$  mesurée à un point  $x_1$  est associée à l'angle  $\varphi_{st} = \text{atan}(x_{3w}/(x_1/2))$ . Ce dernier vaut  $90^\circ$  pour  $x_1 = 0$  km et tend vers  $0^\circ$  lorsque  $x_1 \rightarrow \infty$ . L'évolution de l'amplitude de  $I_{ps}$  peut être ainsi déduite en parcourant le graphique 5.14 de  $\sin(\varphi_{st}) = 1.0$  vers  $\sin(\varphi_{st}) \rightarrow 0.0$ . La surpression enregistrée jusqu'à 70 km de la source est de l'ordre de 1 Pa. Le minimum d'amplitude autour de  $x_1 = 70$  km peut être justifié en remarquant que, pour  $x_1 = 70$  km, la valeur de  $\varphi_{st}$  est proche de l'angle d'intromission. Par ailleurs, le déphasage observé sur la figure 5.12(b) autour du point  $x_1 = 70$  km peut être attribué au saut de phase du coefficient de réflexion pour  $\varphi_{st} = \varphi_t$ . Enfin, l'amplitude de l'onde  $I_{ps}$  pour  $x_1 \gtrsim 70$  km croît à cause de l'augmentation de l'incidence  $\varphi_{st}$ . En guise d'illustration, à  $x_1 = 140$  km, le maximum de surpression est d'environ 15 Pa. La densité spectrale d'énergie  $\mathcal{E}_{p',1}$  de  $I_{ps}$  est illustrée sur la figure 5.16 en fonction de la distance  $x_1$  et de la fréquence  $f$ . Pour  $x_1 < 140$  km, elle est essentiellement contenue dans l'intervalle  $[0 \text{ Hz}, 0.08 \text{ Hz}]$ . À cause de l'augmentation de  $\varphi_{st}$  le long de l'axe  $x_1$ , la fréquence dominante tend à croître avec  $x_1$ . Par ailleurs, le spectre  $\mathcal{E}_{p',1}$  s'élargit avec  $x_1$ . Ce comportement est lié au fait que, comme illustré sur la figure 5.14, lorsque l'incidence  $\varphi_{st}$  diminue vers  $0^\circ$ , la couche inhomogène devient de moins en moins sélective et tend à réfléchir tous les nombres d'onde.

## Brève analyse de la caustique thermosphérique

Comme il a été remarqué auparavant, l'arrivée  $I_{dt1}$  enregistrée sur l'axe  $x_1$  à  $x_1 = 230$  km n'est pas prévue par la théorie de l'acoustique géométrique, mais provient de la diffraction

au niveau de la caustique thermosphérique. Afin d'étudier ce phénomène, les trois simulations L01Spe, WNL01Spe et SNL01Spe, avec différentes amplitudes de source ont été effectuées. Des premiers résultats sont décrits dans cette section.

Les champs de la pression normalisée  $\Phi$  obtenus sur le plan  $x_1 - x_3$  à l'instant  $t = 870.06$  s par les trois calculs sont illustrés sur les figures 5.17(a)-(c). Les rayons thermosphériques sont aussi reportés. La caustique est tracée en bleu et les points noirs indiquent le front d'onde géométrique. Le niveau des couleurs est normalisé par rapport au maximum de suppression mesuré au point de tangence entre la caustique et le rayon limite (points verts sur les figures 5.17(a)-(c)). La pénétration dans la zone d'ombre s'avère fortement dépendante de l'amplitude de la source. Ce comportement peut être expliqué, au moins qualitativement, en exploitant les résultats de la théorie linéaire de la diffraction. Selon cette théorie, dans la zone d'ombre et le long d'une direction orthogonale à la caustique  $\zeta$ , l'amplitude de chaque composante spectrale de fréquence  $f$  décroît comme  $\text{Ai}(\eta)$ , où  $\text{Ai}$  est la fonction d'Airy et  $\eta$  une variable spatiale normalisée proportionnelle à  $f^{2/3}$ . En conséquence, la pénétration est d'autant plus importante que la fréquence  $f$  est petite. L'augmentation spectaculaire de la profondeur de pénétration avec l'amplitude de la source est ainsi directement liée au décalage vers les basses fréquences associé à l'allongement non linéaire de l'onde lors de la propagation vers la haute atmosphère.

## Analyse de la précision numérique

### Mécanismes physiques et numériques de dissipation

Lorsque le système d'équations (4.1) est résolu en utilisant les méthodes présentées dans le chapitre précédent, quatre mécanismes d'absorption de l'énergie acoustique affectent la solution : la diffusion physique induite par les termes visqueux et thermiques et les dissipations numériques dues au filtrage sélectif, à la procédure de capture des chocs et à l'algorithme d'intégration temporelle. Les schémas de dérivation spatiale employés pour les points intérieurs sont centrés et antisymétriques et ne comportent pas d'absorption. Seules les méthodes décentrées appliquées aux bords du domaine introduisent de la dissipation. Cet effet peut toutefois être considéré comme négligeable ici, ces méthodes étant utilisées sur un nombre limité de nœuds. Afin de comparer les différentes contributions, les fonctions de transfert des quatre mécanismes sont évaluées en fonction du nombre d'onde adimensionné  $k_l \Delta \xi_l$ ,  $\Delta \xi_l$  étant le pas spatial uniforme dans une direction  $\xi_l$  quelconque. La fonction de transfert  $\mathcal{F}^{\nu,l}$  associée à l'absorption physique est donnée par  $\mathcal{F}^{\nu,l} = \bar{\nu} k_l^2 = \bar{\nu} (k_l \Delta \xi_l)^2 / \Delta \xi_l^2$ . Le filtrage sélectif est appliqué à la fin de l'algorithme d'intégration temporelle avec une amplitude  $\sigma^{\text{sf}}$ . Sa fonction de transfert  $\mathcal{F}^{\text{sf},l}$  peut être estimée par la relation  $\mathcal{F}^{\text{sf},l} = \mathcal{D}^{\text{sf},l}(k_l \Delta \xi_l, \sigma^{\text{sf}}) / \Delta t$ , où  $\mathcal{D}^{\text{sf},l}$  représente la transformée de Fourier de l'opérateur de filtrage. De manière analogue, la fonction de transfert  $\mathcal{F}^{\text{sc},l}$  de la procédure de capture des chocs est calculée par l'expression  $\mathcal{F}^{\text{sc},l} = \Re(\mathcal{D}^{\text{sc},l}(k_l \Delta \xi_l, \sigma_{\text{max}}^{\text{sc}})) / \Delta t$ , où  $\mathcal{D}^{\text{sc},l}$  est à nouveau la transformée de Fourier de l'opérateur de filtrage. Enfin, la fonction de transfert  $\mathcal{F}^{\text{ts}}$  associée à l'avancement temporel s'écrit  $\mathcal{F}^{\text{ts}}(k_l \Delta \xi_l) = 1 - |\mathcal{G}^{\text{rk}}(k_l \Delta \xi_l)| / \Delta t$ , où

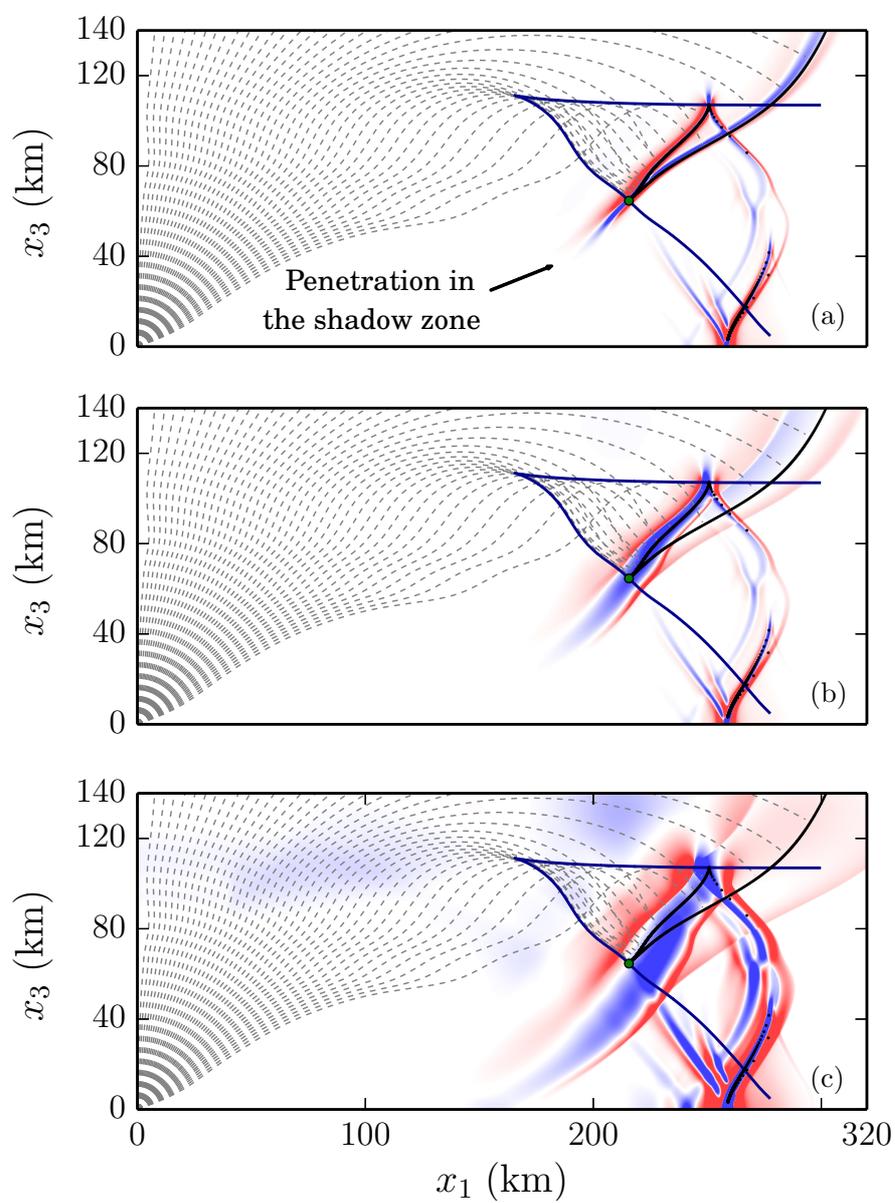


FIGURE 5.17: Perturbation de la pression normalisée  $\Phi$  dans le plan  $x_1 - x_3$  pour  $t = 870.06$  s. (a) Simulation L01Spe, (b) simulation WNL01Spe, (c) simulation SNL01Spe.

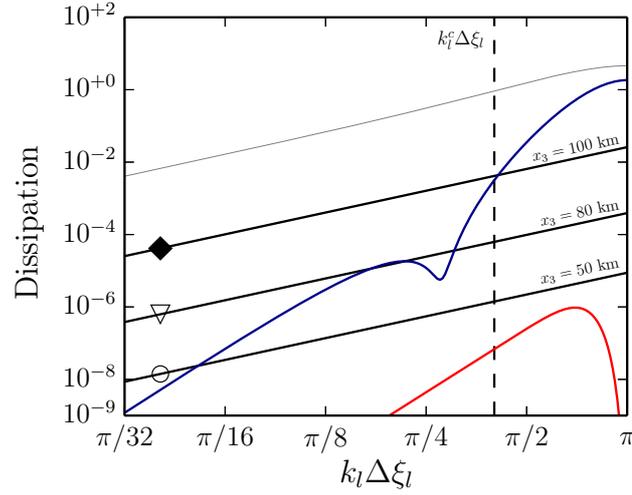


FIGURE 5.18: Fonctions de transfert des mécanismes de dissipation.  $\mathcal{F}^{\nu,l}$  à  $x_3 = 50$  km ( $\circ$ ),  $\mathcal{F}^{\nu,l}$  à  $x_3 = 80$  km ( $\nabla$ )  $\mathcal{F}^{\nu,l}$  à  $x_3 = 100$  km ( $\blacklozenge$ ),  $\mathcal{F}^{sf,l}$  (trait bleu),  $\mathcal{F}^{sc,l}$  (trait gris),  $\mathcal{F}^{ts}$  (trait rouge).

$|\mathcal{G}^{\text{rk}}|$  est le facteur d'amplification de la méthode de Runge-Kutta RK26. Ce dernier est exprimé en fonction du nombre d'onde adimensionné  $k_l \Delta \xi_l$  au travers de la relation de dispersion  $\omega \Delta t = \bar{c}_u(k_l^* \Delta \xi) \Delta t / \Delta \xi_l$ , où  $\bar{c}_u$  est la vitesse du son à la limite verticale du domaine physique,  $x_3 = 140$  km. Les fonctions de transfert des mécanismes de dissipation dans les simulations SNL02Ape et SNL02Spe sont tracées sur la figure 5.18. En particulier, la fonction  $\mathcal{F}^{\nu,l}$  est illustrée pour trois différentes altitudes :  $x_3 = 50$  km,  $x_3 = 80$  km et  $x_3 = 100$  km. La dissipation due à l'algorithme d'intégration temporelle est négligeable comparée à celle induite par le filtrage sélectif. Ce dernier représente le mécanisme d'absorption principal, tout en restant très faible, jusqu'à environ 80 km d'altitude. Au delà, l'absorption physique est dominante. Enfin, la procédure de capture de choc est très dissipative. Néanmoins, elle est appliquée uniquement au niveau des chocs et n'affecte pas les régions régulières de la solution. En conséquence, il est possible d'affirmer que les effets visqueux et thermiques, qui deviennent très importants dans la thermosphère, sont bien reproduits.

### Vérification de la décroissance sphérique des ondes en trois dimensions

Durant la dernière simulation L01hom, le signal de pression a été enregistré dans le plan  $x_1$ - $x_3$  le long de quatre droites différentes, qui forment les angles suivants par rapport à l'axe  $x_1$  :  $0^\circ$ ,  $22.5^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ . Les rapports  $P = \max(p') / \max(p'_{\text{ref}})$  entre la surpression maximale  $\max(p')$  obtenue en un point  $\mathbf{x}$  donné et l'amplitude maximale  $\max(p'_{\text{ref}})$  à une distance de référence sont illustrés sur la figure 5.19 en fonction du rayon  $r = \|\mathbf{x}\|$ . Le comportement théorique en  $r^{-1}$ , traduisant la divergence sphérique de l'onde, est bien reproduit. L'effet de la dissipation artificielle dans la zone éponge supérieure est aussi visible. Sur l'axe vertical  $x_3$  (à  $90$  degrés par rapport à la direction  $x_1$ ), une chute d'amplitude plus marquée est en effet observée au delà de 140 km.

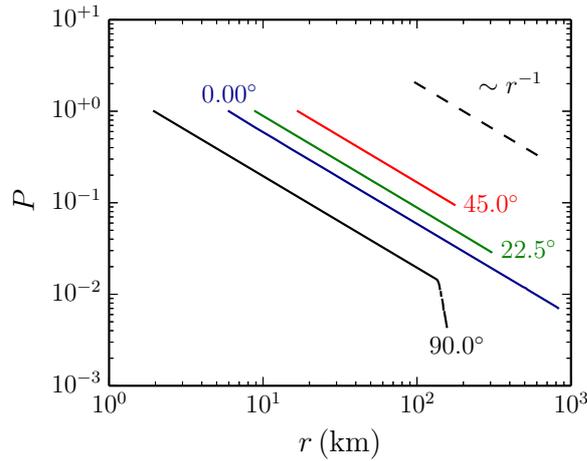


FIGURE 5.19: Simulation L01hom. Rapport  $P$  le long de quatre droites différentes, qui forment les angles suivants par rapport à l'axe  $x_1$  :  $0^\circ$  (trait bleu),  $22.5^\circ$  (trait violet),  $45^\circ$  (trait rouge),  $90^\circ$  (trait noir).

### Convergence

Les signaux  $\Phi$  enregistrés au point (0 km, 0 km, 63 km) dans les simulations de validation sont représentés sur la figure 5.20(a). Du fait de la forte amplitude initiale, une onde en « N » est observée à cette altitude. Les résultats obtenus par les différents maillages semblent en très bon accord. En particulier, les positions des chocs amont et arrière sont correctement estimées. La partie centrale de l'onde est aussi correctement discrétisée. Les densités spectrales d'énergie  $\mathcal{E}_\Phi$  correspondantes sont tracées sur la figure 5.20(b). Le comportement en  $f^{-2}$  typique d'un signal en « N » est également illustré. Comme attendu, l'écart entre les différentes courbes augmente avec la fréquence. Cependant, le lobe fondamental ainsi que les trois premières harmoniques, qui contiennent environ 95 % de l'énergie totale du signal, sont bien reproduits par tous les maillages. Par ailleurs, un très faible niveau de dispersion est observé.

Les arrivées stratosphériques  $\Phi$  obtenues au point (294 km, 0 km, 0 km) au travers des quatre pas spatiaux  $\Delta\xi_l^{(2)}$ ,  $\Delta\xi_l^{(3)}$ ,  $\Delta\xi_l^{(4)}$  et  $\Delta\xi_l^{(5)}$  sont représentées sur la figure 5.21(a). À cause du passage du front d'onde à travers la caustique stratosphérique, une forme en « U » est observée. La phase négative semble être bien résolue, tandis que des erreurs plus significatives sont visibles sur les deux maxima locaux. Ce résultat est tout-à-fait plausible, les pics positifs étant associés à deux chocs. Un zoom autour du choc arrière est illustré sur la figure 5.21(b). La position de ce dernier est bien reproduite par les différents maillages. De plus, en diminuant le pas spatial, le signal se raidit et sa valeur maximale augmente. Les densités spectrales d'énergie  $\mathcal{E}_\Phi$  des arrivées stratosphériques sont enfin reportées sur la figure 5.21(c). L'écart est assez faible jusqu'à la deuxième harmonique, mais augmente pour les fréquences supérieures, qui sont contenues dans les deux chocs.

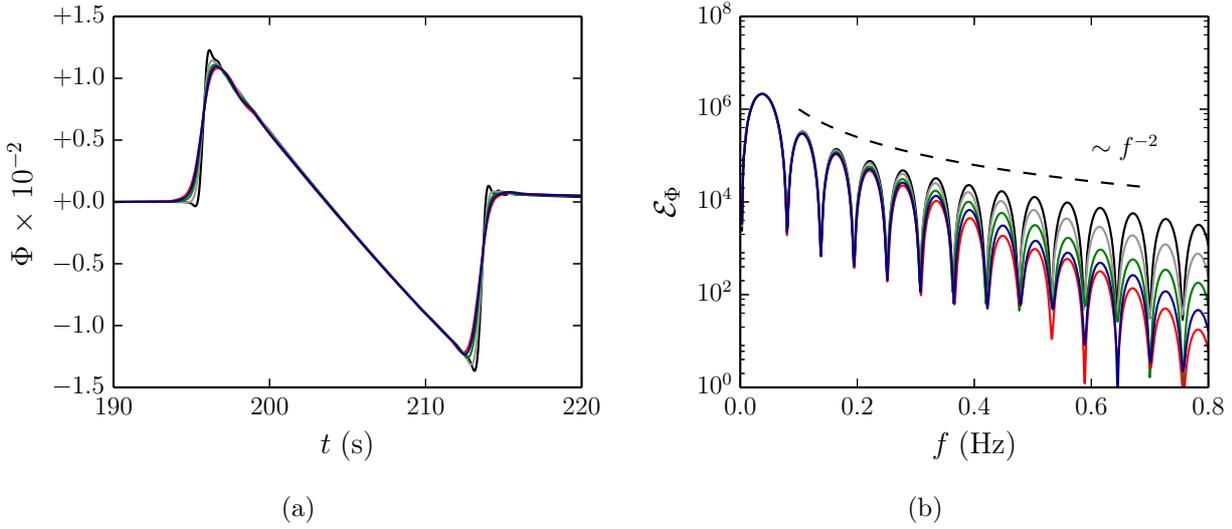


FIGURE 5.20: (a) Signaux de la pression normalisée  $\Phi$  enregistrés au point  $(0\text{ km}, 0\text{ km}, 63\text{ km})$  et obtenus en utilisant le pas spatiaux  $\Delta\xi_l^{(1)}$  (trait noir),  $\Delta\xi_l^{(2)}$  (trait gris),  $\Delta\xi_l^{(3)}$  (trait vert),  $\Delta\xi_l^{(4)}$  (trait bleu),  $\Delta\xi_l^{(5)}$  (trait rouge). (b) Densités spectrales d'énergie  $\mathcal{E}_\Phi$  correspondantes.

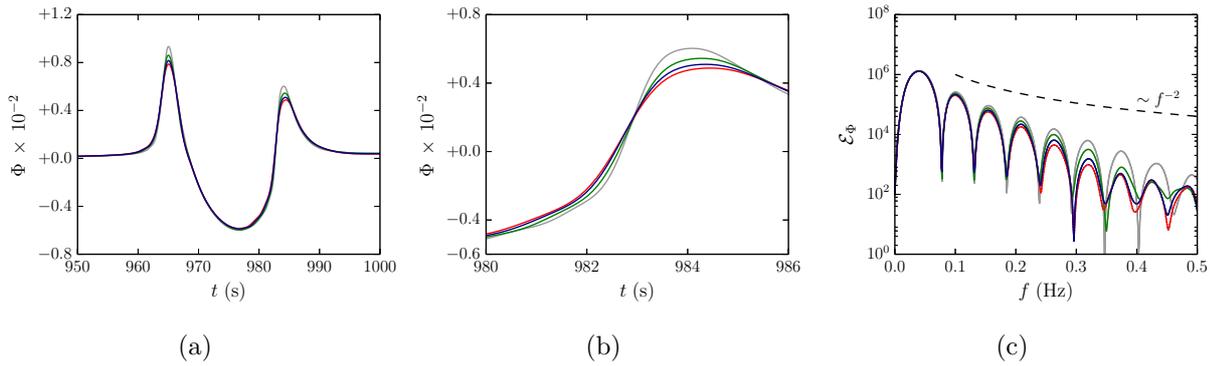


FIGURE 5.21: (a) Signaux de la pression normalisée  $\Phi$  enregistrés au point  $S_5 = (294\text{ km}, 0\text{ km}, 0\text{ km})$  et obtenus en utilisant le pas spatiaux  $\Delta\xi_l^{(2)}$  (trait gris),  $\Delta\xi_l^{(3)}$  (trait vert),  $\Delta\xi_l^{(4)}$  (trait bleu),  $\Delta\xi_l^{(5)}$  (trait rouge). (b) Zoom autour du choc arrière. (c) Densités spectrales d'énergie  $\mathcal{E}_\Phi$  correspondantes.

## Résumé

Dans ce chapitre, les résultats de plusieurs simulations numériques tridimensionnelles de la propagation non linéaire des ondes infrasonores ont été discutés. Une description générale du champ de pression obtenu dans un calcul de référence a d'abord été effectuée. Une analyse des signaux enregistrés à différentes altitudes ainsi qu'au sol a été ensuite réalisée. Il a été montré que, lorsque l'amplitude de la source est très élevée, les effets non linéaires deviennent très importants dans la haute atmosphère et l'allongement du front d'onde ne peut plus être

décrit par la théorie des chocs faibles. La sensibilité des enregistrements micro-barométriques aux inhomogénéités d'échelle comparable à la longueur d'onde a été aussi clairement illustrée. Un modèle phénoménologique permettant d'expliquer qualitativement l'évolution au sol du spectre de l'arrivée diffusée  $a$ , par ailleurs, été développé. L'importance de la diffraction au niveau des caustiques a enfin été mise en évidence. La profondeur de pénétration dans la zone d'ombre augmente avec l'amplitude de la source. En effet, elle est d'autant plus importante que la fréquence dominante de l'onde arrivant dans la thermosphère est petite. Cette dernière est dépendante de l'allongement non linéaire lors de la propagation verticale, qui est à son tour fonction de l'énergie de la source.

Une analyse de la précision numérique a enfin été menée dans la dernière section du chapitre. En premier lieu, il a été vérifié que la dissipation numérique introduite par l'algorithme de calcul est négligeable pour les nombres d'onde résolus et que les termes visqueux et thermiques sont correctement pris en compte dans la haute atmosphère. Dans un second temps, il a été vérifié que le code de simulation permet de bien reproduire la décroissance sphérique des ondes en trois dimensions, au moins jusqu'aux distances de propagation d'intérêt. Enfin, une étude de convergence a été effectuée et il a été montré que le maillage considéré permet une bonne résolution des signaux au moins jusqu'à la troisième harmonique.

## CHAPITRE 6

# Cas test de simulation pour la propagation atmosphérique à longue distance des ondes infrasonores

Dans ce dernier chapitre, quatre cas test de simulation de difficulté croissante et spécifiques à la propagation atmosphérique à grande distance sont proposés. Des solutions de référence sont aussi fournies. L'objectif de ces *benchmarks* est de permettre l'évaluation de la précision des algorithmes numériques employés par la communauté des infrasons. Ils peuvent également être utilisés pour analyser les erreurs commises par les modèles de propagation classiques, tels que ceux basés sur la théorie de l'acoustique géométrique ou sur les approximations paraboliques des équations de la mécanique des fluides.

Ce chapitre fait l'objet de l'article<sup>141</sup> "A numerical study of nonlinear infrasound propagation in a windy atmosphere," *J. Acoust. Soc. Am.*, **140**(1), 641–656, 2016, qui est intégralement reporté sans traduction en langue française.



## A numerical study of nonlinear infrasound propagation in a windy atmosphere

R. Sabatini,<sup>a)</sup> O. Marsden, C. Bailly, and C. Bogey

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, Unité Mixte de Recherche CNRS 5509, Ecole Centrale de Lyon, Université de Lyon, 69134 Écully Cedex, France

(Received 11 December 2015; revised 16 June 2016; accepted 5 July 2016; published online 27 July 2016)

Direct numerical simulations of the two-dimensional unsteady compressible Navier-Stokes equations are performed to study the acoustic field generated by an infrasonic source in a realistic atmosphere. Some of the main phenomena affecting the propagation of infrasonic waves at large distances from the source are investigated. The effects of thermal and wind-related refraction on the signals recorded at ground level are highlighted, with particular emphasis on the phase shift induced by the presence of caustics in the acoustic field. Nonlinear waveform steepening associated with harmonic generation, and period lengthening, both of which are typical of large source amplitudes, are illustrated, and the importance of thermoviscous absorption in the upper atmosphere is clearly demonstrated. The role of diffraction in the shadow zone, around caustics and at stratospheric altitudes is also pointed out. The Navier-Stokes equations are solved using high-order finite-differences and a Runge-Kutta time integration method both originally developed for aeroacoustic applications, along with an adaptive shock-capturing algorithm which allows high-intensity acoustic fields to be examined. An improvement to the shock detection procedure is also proposed in order to meet the specificities of nonlinear propagation at long range. The modeling as well as the numerical results are reported in detail and discussed. © 2016 Acoustical Society of America. [<http://dx.doi.org/10.1121/1.4958998>]

[MDV]

Pages: 641–656

### I. INTRODUCTION

Infrasound waves can be generated in the atmosphere by natural events, such as volcanic eruptions, earthquakes, and meteors, or by man-made sources, like explosions or supersonic flights. These waves can propagate over thousands of kilometers through the Earth's atmosphere and can potentially carry relevant information about their source. Accordingly, a worldwide infrasound monitoring network has been developed<sup>1,2</sup> to verify compliance with the Comprehensive Nuclear-Test-Ban Treaty (CTBT), which prohibits all types of nuclear detonation. At the date of writing the present paper, the network consists of about 48 certified ground stations, that record pressure fluctuations of frequency lower than 4 Hz. Infrasound monitoring can also be used in the field of atmospheric tomography,<sup>3</sup> for instance, to study gravity waves.<sup>4</sup>

The determination of the nature of infrasound sources as well as their spatial location, based on pressure signals recorded by the CTBT stations, depends on the ability to simulate long-range atmospheric propagation in a time-accurate manner. While a preliminary analysis of the acoustic field can be carried out by techniques accounting only for refraction effects induced by both temperature and wind speed gradients,<sup>5</sup> the computation of an accurate acoustic time signature requires the integration of nonlinear distortion<sup>6–8</sup> and thermoviscous atmospheric absorption<sup>9</sup> among other phenomena. More specifically, the exponential reduction with altitude

of the mean atmospheric density tends to amplify nonlinearities, which lead to signal steepening and lengthening. Thermoviscous absorption also increases as the mean atmospheric density diminishes, due to the increase of the mean kinematic viscosity. Furthermore, a caustic is generally observed in the thermosphere.<sup>6</sup> Signals detected at barometric stations located in the audibility zone of the caustic are strongly affected. In particular, a phase shift is induced by the caustic,<sup>10</sup> so that for an incoming N-like wave, typical for instance of explosive phenomena, a U-shaped signature is observed at ground level.<sup>6,11,12</sup>

Numerical approaches for atmospheric infrasonic propagation studies have naturally been based on simplified equations. Ray tracing,<sup>7,8,13</sup> parabolic models<sup>14</sup> or the normal mode theory have been the most commonly used techniques.<sup>15</sup> Their efficiency in terms of computational time is however obtained at the expense of generality and some of the aforementioned phenomena are inherently excluded by these approaches. Over the past decade, progress has been made toward the simulation of acoustic propagation by directly solving the fluid dynamics equations. One of the first numerical investigations was carried out by Wochner *et al.*<sup>16</sup> to analyze a realistic absorption model accounting for molecular relaxation. Currently, most numerical simulations are performed in two dimensions,<sup>17–19</sup> but a proof of concept computation in three dimensions, based on simplified linearized Euler equations, was performed by Del Pino *et al.*<sup>20</sup> A complete Navier-Stokes modeling in an axisymmetric cylindrical coordinate system was proposed by de Groot-Hedlin,<sup>21</sup> with some example calculations of infrasound propagation at short range. Understandably, progress

<sup>a)</sup>Also at Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives, Direction des Applications Militaires, Île de France, 91297 Arpajon, France. Electronic mail: roberto.sabatini@doctorant.ec-lyon.fr

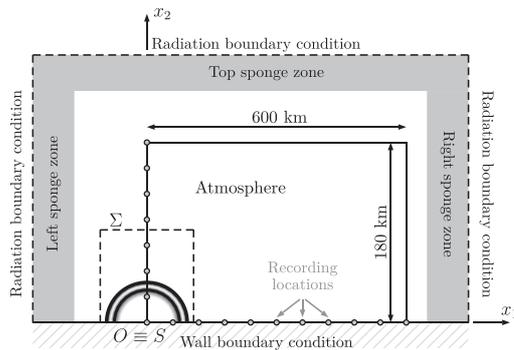


FIG. 1. Sketch of the computational domain. The source is located at the origin  $O \equiv S$ , and the inner black rectangle indicates the physical domain.

in the direct simulation of the fluid dynamics equations is expected to lead to better interpretation of experimental observations and improved physical modeling of infrasonic waves. However, as also highlighted by the previous authors, numerical accuracy is an essential requirement, in particular, for the computation of the nonlinear propagation of infrasonic signals over very large distances. In a recent work of Marsden *et al.*,<sup>22</sup> the feasibility of using numerical simulation of the Navier-Stokes equations for the detailed description of long-range infrasound propagation in the atmosphere was analyzed. In particular, a first investigation of the sound field generated by an infrasonic source of main frequency of 0.1 Hz in a realistic atmosphere at rest was computed using a high-order finite-difference time-domain (FDTD) method originally developed for aeroacoustic applications.<sup>23–25</sup> The numerical schemes,<sup>26–28</sup> designed to minimize the numerical dispersion and dissipation errors, were shown to be well suited for the simulation of nonlinear acoustic propagation over very large distances.

In the present work, numerical simulations of the two-dimensional Navier-Stokes equations are carried out for four different configurations in order to investigate some of the main physical phenomena affecting acoustic signals recorded at long range, namely, refraction due to the temperature gradient, refraction due to the wind profile, thermoviscous absorption, nonlinear waveform modifications and diffraction. The aim is not to provide direct comparisons with experiments, as undertaken in Gainville *et al.*,<sup>29</sup> for instance, which is precluded by the two-dimensional nature of this study, but rather to highlight some specific physical features of infrasonic waves propagating in the Earth's atmosphere. In each case, the atmospheric propagation of a finite-duration signal emitted from an infrasonic source of frequency of 0.1 Hz and placed at ground level is computed. The realistic atmosphere specification includes the definition of range-independent vertical temperature and wind profiles, which follow the main trends observed during the *Misty Picture experiment* from the ground up to an altitude of 180 km.<sup>29,30</sup> The physical domain of interest spans 600 km in the horizontal direction and 180 km the vertical direction. The infrasonic source is implemented as a forcing term in the energy equation. The

two-dimensional Navier-Stokes equations are solved on a regular Cartesian grid with the explicit finite-difference time-domain (FDTD) algorithm employed in the earlier work of Marsden *et al.*<sup>22</sup> Spatial discretization is performed with a low-dissipation and low-dispersion optimized 11-point stencil scheme, while time integration is carried out thanks to a six-step second-order optimized low-storage Runge-Kutta algorithm.<sup>26,27</sup> In order to handle the acoustic shocks which are generated during the propagation of large-amplitude signals, the shock-capturing technique proposed by Bogey *et al.*<sup>28</sup> is used. The methodology consists in applying artificial dissipation only where necessary, i.e., only near shock fronts, in such a way that smooth regions of the solution are not affected. Clearly, the efficacy of the method strongly depends on

TABLE I. Spline coefficients for the speed of sound and the wind.

$x_2$ (km)	$\bar{c}$ (m s <sup>-1</sup> )	$\bar{c}''$ (m km <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )
0	340	-1.2000000000
10	300	+ 0.7040957867
20	290	+ 0.1836168532
50	330	-0.2576768707
70	290	+ 0.0129590737
90	265	+ 0.4308405759
120	425	-0.1281079686
160	580	-0.0935025416
180	600	-0.0452688129
250	550	-0.0038182448
300	480	-0.0005818014
350	410	+ 0.0061454503
400	350	+ 0.0000000000
$x_2$ (km)	$\bar{u}_1$ (m s <sup>-1</sup> )	$\bar{u}_1''$ (m km <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )
0	+ 00.0	+ 0.0000000000
10	+ 04.6	-0.4234911283
15	-00.3	+ 0.8129467697
20	+ 04.7	-0.4522959507
30	+ 02.6	+ 0.2244144671
40	+ 07.4	-0.0313619178
50	+ 21.5	+ 0.4590332040
55	+ 30.6	-2.1994753882
60	+ 09.7	+ 1.1388683490
65	+ 10.2	+ 2.7800019922
70	+ 49.8	-2.8748763180
80	+ 16.7	+ 0.4966279578
95	-21.8	+ 0.5584910193
110	+ 28.2	-0.3705920349
125	+ 38.6	-0.1321228796
140	+ 21.0	+ 0.1524168868
160	+ 22.6	-0.0583669442
180	+ 20.0	+ 0.0180508898
200	+ 18.0	-0.0048366151
220	+ 16.0	+ 0.0012955706
240	+ 14.0	-0.0003456673
260	+ 12.0	+ 0.0000870984
280	+ 10.0	-0.0000027265
300	+ 08.0	-0.0000761925
320	+ 06.0	+ 0.0003074966
340	+ 04.0	-0.0011537937
360	+ 02.0	+ 0.0043076783
380	+ 01.0	-0.0010769196
400	+ 00.0	+ 0.0000000000

the ability to identify the presence of discontinuities. To this end, a new shock sensor based on the smoothness indicators first proposed for the weighted essentially non-oscillatory schemes<sup>31,32</sup> is also developed in this work. The entire algorithm is implemented in OpenCL and runs on a AMD R290 Graphic Processing Unit (GPU), allowing very high computational performance to be achieved.<sup>22</sup>

The paper is organized as follows. The present numerical modeling of long-range atmospheric infrasound propagation is presented in Sec. II. The computational domain and the atmospheric mean flow are first defined. The set of governing equations and the infrasonic source are then described and a detailed illustration of the numerical method is given. The results obtained for the four configurations are reported in Sec. III. Time signals at various altitudes and at ground level are examined and the aforementioned physical aspects are discussed. Concluding remarks are finally drawn in Sec. IV.

## II. NUMERICAL MODELING OF LONG-RANGE ATMOSPHERIC INFRASOUND PROPAGATION

### A. Computational domain

The present studies involve computing the two-dimensional acoustic field generated by a source of infrasound in a realistic atmosphere up to 180 km altitude and 600 km range. A sketch of the computational domain is given in Fig. 1. A Cartesian coordinate system  $Ox_1x_2$  with its origin at ground level is used. The Earth's surface is modeled as a perfectly reflecting flat wall and the atmosphere, as a vertically stratified medium. The infrasonic source  $S$  is placed at the origin of the domain. The physical domain of  $[0, 600]$  km  $\times$   $[0, 180]$  km is surrounded by sponge zones in order for outgoing waves to leave the computational domain without appreciable reflections.

### B. Atmospheric mean flow

For the purpose of the present investigations, air in the atmosphere is assumed to behave as a single ideal gas satisfying the equation of state  $p = \rho r T$ , where  $p$  is the pressure,  $\rho$  the fluid density,  $T$  the temperature and  $r$  the specific gas constant. The atmosphere is defined as a vertically-stratified and range-invariant medium, constructed from a spline-based profile of sound speed  $\bar{c}(x_2)$  which reproduces the large scales observed

during the *Misty Picture experiment*<sup>29</sup> from 0 km to around 180 km. Spline knot locations and values are taken from a previous study,<sup>30</sup> with additional knots specified to allow the profile to be defined throughout the entire computational domain. They are provided in Table I and discussed in Appendix A. The resulting profile is illustrated in Fig. 2(a), along with a synthetic nomenclature of the different atmospheric layers.

The mean temperature  $\bar{T}(x_2)$  is computed from the speed of sound according to  $\bar{T}(x_2) = \bar{c}(x_2)^2 / (\gamma r)$ , where  $\gamma$  represents the ratio of specific heats, while pressure  $\bar{p}(x_2)$  is obtained by solving the hydrostatic equilibrium condition

$$\frac{d\bar{p}}{dx_2} = -\bar{\rho}g = -\frac{g}{r\bar{T}}\bar{p}, \quad (1)$$

where  $g$  is the gravitational acceleration, here considered to be independent of altitude. Equation (1) is integrated numerically from  $x_2 = 0$  km with the ground-level pressure fixed to  $\bar{p}_g = 10^5$  Pa. Finally, the density profile  $\bar{\rho}$  is determined from the equation of state  $\bar{\rho} = \bar{p}/(r\bar{T})$ . Mean pressure and density vertical profiles are shown in Fig. 2(c).

To complete the construction of the mean atmospheric state, a horizontal wind  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1(x_2), \bar{u}_2 \equiv 0)$  is specified by a spline-based profile  $\bar{u}_1(x_2)$  derived from data observed during the *Misty Picture experiment* in the East-West direction. The spline values are reported in Table I and the wind profile is shown in Fig. 2(b). Strong wind gradients are clearly visible in the stratosphere and mesosphere.

### C. Governing equations

Sound propagation is governed by the two-dimensional compressible Navier-Stokes equations, which can be written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} - \rho' g \delta_{i2}, \\ \frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e_t u_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial(p' u_j)}{\partial x_j} - \bar{p} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial q'_j}{\partial x_j} \\ &\quad + \frac{\partial(u_i \tau'_{ij})}{\partial x_j} - \rho' g u_2 + \Lambda_s, \end{aligned} \quad (2)$$

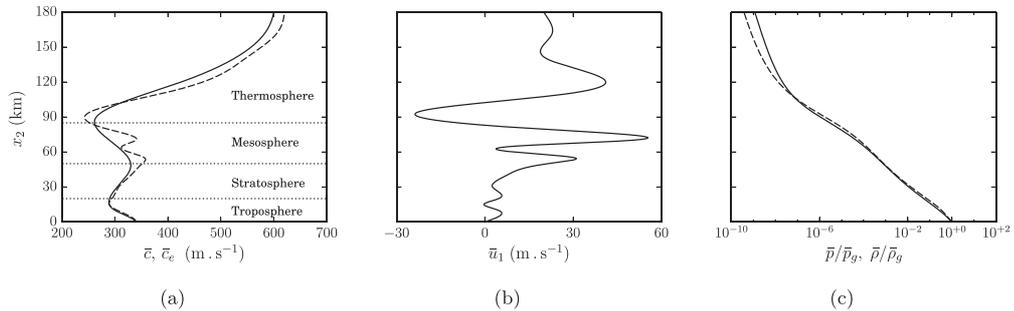


FIG. 2. (a) Atmospheric speed of sound  $\bar{c}$  (solid line) and effective celerity  $\bar{c}_e = \bar{c} + \bar{u}_1$  (dashed line) profiles; (b) wind profile  $\bar{u}_1$ ; (c) atmospheric pressure  $\bar{p}$  (solid line) and density  $\bar{\rho}$  (dashed line) profiles normalized with respect to their values at ground level.

where  $u_i$  is the velocity component in the  $i$ th direction,  $p' = p - \bar{p}$  the pressure perturbation,  $\rho' = \rho - \bar{\rho}$  that of density,  $e$ , the total energy per unit mass,  $\tau'_{ij}$  the viscous stress tensor,  $q'_i$  the heat flux and  $\Lambda_s$  the source forcing term. Note that, following Marsden *et al.*,<sup>22</sup> the hydrostatic equilibrium condition  $d\bar{p}/dx_2 = -\bar{\rho}g$  is here subtracted from the classical Navier-Stokes system in order to avoid its high-precision computation at each time step. Moreover, because of the non-vanishing terms  $\partial\bar{\tau}_{12}/\partial x_1$  and  $\partial\bar{q}_2/\partial x_2$ , the initial mean atmosphere is not fully consistent with the Navier-Stokes equations and thus tends to evolve in time. To take into account this issue, the numerical solution is computed by neglecting the diffusion of the mean flow during the acoustic propagation. The viscous and thermal terms are thus calculated using the perturbed variables  $u'_i = u_i - \bar{u}_i$  and  $T' = T - \bar{T}$ . More specifically, the viscous stress tensor and the heat flux are computed, respectively, as

$$\tau'_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (3)$$

$$\Lambda_s(x_1, x_2, t) = \frac{\mathcal{A}_s}{2} \begin{cases} \sin(\omega_s t) [1 - \cos(\omega_s t)] e^{-\log(2)(x_1^2 + x_2^2)/b_s^2} & t \in [0, T_s] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

The parameter  $\mathcal{A}_s$ , expressed in  $\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}$ , is used to adjust the source strength. The Gaussian half-width of the source is set to  $b_s = 600 \text{ m}$  and the central frequency to  $f_s = \omega_s/(2\pi) = 1/T_s = 0.1 \text{ Hz}$ . The total emission duration is thus  $T_s = 10 \text{ s}$ . The temporal evolution of  $\Lambda_s$  is chosen in order to generate a N-like pressure signature at the source location.

## E. Numerical method

System (2) is solved on a Cartesian grid using a high-order finite-difference time-domain (FDTD) algorithm

### 1. Spatial and time derivatives

At the inner points, spatial discretization is performed with explicit fourth-order 11-point centered finite differences optimized to reduce dispersion for wavelengths longer than about five grid spacings.<sup>26</sup> Close to the boundaries, optimized 11-point stencil non-centered finite differences are

TABLE II. Values of the constants used for the atmospheric model.

Ratio of specific heats	$\gamma$	1.4
Specific gas constant	$r$	$287.06 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Prandtl number	Pr	0.72
Reference temperature	$T_{\text{ref}}$	293.15 K
Sutherland's temperature	$T_s$	117 K
Reference viscosity	$\mu_{\text{ref}}$	$1.8192 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$
Gravity constant	$g$	$9.81 \text{ m s}^{-2}$

and

$$q'_i = -\frac{\mu c_p}{\text{Pr}} \frac{\partial T'}{\partial x_i}, \quad (4)$$

where  $\mu$  is the dynamic viscosity, Pr is the fluid's Prandtl number and  $c_p = \gamma r/(\gamma - 1)$  the specific heat at constant pressure. Finally, the dynamic viscosity is calculated as<sup>9</sup>

$$\mu(T) = \mu_{\text{ref}} \left( \frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \frac{T_{\text{ref}} + T_s}{T + T_s}. \quad (5)$$

It is worth emphasizing that, except for the viscous and thermal terms, system (2) is mathematically equivalent to the classical Navier-Stokes equations as long as the mean fields are invariant in the  $x_1$  direction.

The numerical values of all the constants are provided in Table II.

## D. Definition of the infrasound source

The source of infrasound is implemented as a time-dependent forcing term  $\Lambda_s$  in the energy equation<sup>17,22</sup>

used.<sup>27</sup> Time integration is carried out by a six-step second-order low-storage Runge-Kutta algorithm.<sup>26</sup>

## 2. Selective and shock-capturing filtering

At the end of each time step, spatial low-pass filtering is performed on the perturbations of conservative variables  $U' = (\rho - \bar{\rho}, \rho u_1 - \bar{\rho} \bar{u}_1, \rho u_2 - \bar{\rho} \bar{u}_2, \rho e_t - \bar{\rho} \bar{e}_t)$  to damp out grid-to-grid oscillations and ensure numerical stability.<sup>26</sup> For this purpose, an explicit sixth-order 11-point stencil filter, designed to remove fluctuations discretized by less than four grid points per wavelength, while leaving larger wavelengths unaffected,<sup>28</sup> is used with a strength  $\sigma^{\text{sf}}$  equal to 0.1.<sup>26</sup> Additionally, a shock-capturing procedure is employed to handle acoustic shocks which are generated during the propagation for sufficiently large source amplitudes. Interested readers can find a detailed description of the methodology in Appendix B.

## 3. Boundary conditions

Near the wall, viscous and thermal effects are expected to be negligible for the considered acoustic wavelengths. Accordingly, only the velocity in the  $x_2$  direction is set to 0, whereas no condition is imposed on the other conservative variables, which are advanced in time by solving the Navier-Stokes equations. Indeed, to implement a no-slip condition, a refinement of the mesh near the ground would be necessary

in order to correctly describe the evolution of the boundary layers. At the left, right, and top boundary, Tam and Dong's<sup>33</sup> radiation condition is applied.

Sponge zones are based on the combination of a Laplacian spatial filtering with grid stretching to dissipate outgoing disturbances and reduce reflections.<sup>34</sup> A specific implementation is required for the top sponge zone to take into account the amplification of waves due to gravity stratification.<sup>22</sup> More specifically, in this zone the gravity profile is progressively reduced from  $g$  to  $-g$ . Once negative gravity has been reached, the ratio of pressure fluctuations to ambient pressure no longer increases but decreases, allowing standard grid stretching techniques and low-order dissipation to operate as in typical sponge zones.

#### 4. Parameters and performance

The entire computational domain contains  $7168 \times 2560 \simeq 20 \times 10^6$  grid points with a grid spacing of  $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 100$  m. In the present simulations, as a result of the high values of the kinematic viscosity  $\nu = \mu/\rho$  reached in the upper atmosphere, the time step  $\Delta t$  is constrained by the viscous and thermal fluxes rather than by the advection term. To alleviate this constraint, the value of  $\mu$  above the physical domain is progressively reduced down to 0 in the top sponge zone. The Courant-Friedrichs-Lewy and Fourier numbers are defined here, respectively, as  $\text{CFL} = \bar{c}_u \Delta t / \Delta$  and  $\text{Fo} = \bar{\nu}_u \Delta t / \Delta^2$ , where the subscript  $u$  indicates the *upper* boundary of the physical domain, i.e.,  $x_2 = 180$  km. It is found that Fo should be lower than around  $\text{Fo}_{\max} = 0.4$  to avoid numerical instabilities, so that, with  $\Delta = 100$  m, the maximum allowed time step  $\Delta t_{\max} \simeq 0.4 \Delta^2 / \bar{\nu}_u$  is about 0.045 s. For all the computations,  $\Delta t$  is set to 1/30 s, which yields a CFL number of 0.2 and a Fourier number of 0.287. Simulations are carried out until  $t_{\max} = 2800$  s, corresponding to 84 000 time steps.

The numerical algorithm is implemented in the OpenCL language and runs on a AMD Radeon R9 200 Series GPU with a memory allocation limit of 4 GB. A comparative study of the computational time required on a variety of CPUs and GPUs was carried out by Marsden *et al.*<sup>22</sup> Performance on GPUs was found to be considerably higher than on CPUs. For the present computations using the OpenCL code, one time step takes about one second, which leads to a total time duration of about 24 h per simulation.

#### F. Numerical dissipation versus physical dissipation

When system (2) is solved with the algorithm described in Sec. II E, four dissipation mechanisms affect the numerical solution: the physical diffusion due to the molecular viscosity, and numerical dissipation due to the selective filter, the shock-capturing procedure and the time advancement scheme. Spatial derivatives at the inner points of the computational domain are based on centered schemes and do not induce dissipation.<sup>26</sup> In order to compare the different contributions, the transfer functions of all these mechanisms<sup>24,35</sup> are evaluated as a function of the normalized wavenumber  $k\Delta$ . The dissipation transfer function  $\mathcal{F}_\nu$  associated with the molecular viscosity is given by  $\bar{\nu}k^2$ , yielding  $\mathcal{F}^\nu(k\Delta) = \bar{\nu}(k\Delta)^2/\Delta^2$ .

Regarding the selective filtering procedure, which is applied to the flow variables at every time step  $\Delta t$ , the transfer function can be written as<sup>26</sup>  $\mathcal{F}^{\text{sf}}(k\Delta) = (\sigma^{\text{sf}}/\Delta t)\mathcal{D}^{\text{sf}}(k\Delta)$ , where  $\mathcal{D}^{\text{sf}}$  is the Fourier transform of the operator  $D^{\text{sf}}$ . The same reasoning can be applied to the shock-capturing procedure. Its transfer function is  $\mathcal{F}^{\text{sc}}(k\Delta) = (\sigma^{\text{sc}}/\Delta t)\mathcal{D}^{\text{sc}}(k\Delta)$ , where  $\mathcal{D}^{\text{sc}}$  is the Fourier transform of the second-order filter used in the procedure<sup>28</sup> and  $\sigma_{\max}^{\text{sc}}$  its maximum strength, which is here set equal to 0.25. Finally, the dissipation transfer function linked to the time integration  $\mathcal{F}^{\text{ts}}$  is given by  $\mathcal{F}^{\text{ts}}(k\Delta) = [1 - |G(\omega\Delta t)|]/\Delta t$ , where  $|G(\omega\Delta t)|$  is the amplification factor per time step of the Runge-Kutta algorithm.<sup>27</sup> The normalized pulsation  $\omega\Delta t$  is computed as  $\omega\Delta t = \bar{c}_u(k^*\Delta)\Delta t/\Delta$ , where  $k^*$  denotes the approximated wavenumber provided by the finite difference scheme.

The transfer functions are plotted in Fig. 3. In particular, the dissipation transfer function  $\mathcal{F}_\nu$  is shown for three different altitudes of 50, 80, and 100 km. For the spacing  $\Delta$  used here, the dissipation due to time integration is negligible compared to that of the selective filtering. At altitudes where absorption phenomena become important, namely, above 100 km in the present cases, physical dissipation is found to be stronger than the filtering dissipation, at least for the well resolved wavenumbers below  $k\Delta = \pi/2$ . Finally, the shock-capturing procedure is highly dissipative, but, according to the sensor strength in Eq. (B4), it is applied only near the shocks and not in the smooth regions of the solution. The molecular absorption phenomena are thus correctly taken into account in the upper atmosphere by the present numerical algorithm.

### III. RESULTS

One of the most spectacular features of infrasound propagation in the atmosphere is the observation at ground level of signals, also called *phases*, that have reached very high altitudes during their propagation. These various arrivals are generated by downward refraction stemming in large part from the atmospheric mean speed of sound profile  $\bar{c}(x_2)$ ,

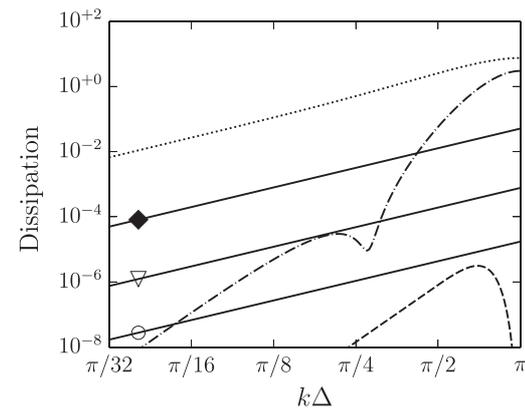


FIG. 3. Dissipation transfer functions.  $\mathcal{F}^\nu$  at 50 km ( $\circ$ ), 80 km ( $\nabla$ ) and 100 km ( $\blacklozenge$ ),  $\mathcal{F}^{\text{sf}}$  (dash dotted line),  $\mathcal{F}^{\text{sc}}$  (dotted line),  $\mathcal{F}^{\text{ts}}$  (dashed line).

TABLE III. Simulation parameters.

Case	Wind profile	Source parameters			Energy flux	Max. overpressure
		$\mathcal{A}_s$ ( $\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}$ )	$f_s$ (Hz)	$b_s$ (m)	$I_a$ ( $\text{J m}^{-1}$ )	$\max_t(p')$ (Pa)
L	no wind	$1.0 \times 10^{-1}$	0.1	600	$1.066 \times 10^{-2}$	$2.62 \times 10^{-2}$
LW	$\bar{u}_1(x_2)$	$1.0 \times 10^{-1}$	0.1	600	$1.066 \times 10^{-2}$	$2.62 \times 10^{-2}$
NL	no wind	$2.5 \times 10^{+2}$	0.1	600	$6.662 \times 10^{+4}$	$6.48 \times 10^{+1}$
NLW	$\bar{u}_1(x_2)$	$2.5 \times 10^{+3}$	0.1	600	$6.673 \times 10^{+6}$	$6.59 \times 10^{+2}$

which increases with altitude both in the stratosphere and the thermosphere, as shown in Fig. 2(a). The infrasonic waves are continuously refracted downward as they cross the atmospheric layers and propagate along periodic arched paths which curve toward the Earth's surface. Because of successive reflections from the land surface, such rays form acoustic light and shadow zones even at long distances from the source.<sup>5</sup> A first case, labeled L (*Linear*), is defined to underline this waveguide effect. A weak source amplitude  $\mathcal{A}_s$  is chosen, in order for nonlinear terms to be negligible,<sup>22</sup> and the atmosphere is specified to be at rest.

Alongside the downward refraction due to the profile of sound speed, the presence of strong wind also induces possible refraction phenomena. Depending on its profile, temperature-related ducting can be amplified or attenuated, and, furthermore, additional acoustic signals can be recorded at ground level.<sup>29</sup> To highlight these aspects, the aforementioned horizontal wind profile is included in a second case denoted LW (*Linear with Wind*).

Real-world problems usually involve strong source amplitudes, which result in significant modifications to the waveforms recorded at ground levels.<sup>30</sup> To evaluate the importance of non-linearities, the previous configurations are reexamined with larger and more realistic source amplitudes. Two cases, labeled NL (*Nonlinear*) and NLW (*Nonlinear with Wind*), are thus designed. The main numerical parameters of the four selected configurations are summarized in Table III.

As highlighted by Bergmann,<sup>36</sup> the amplitude of pressure fluctuations is proportional to the square root of the mean density. The following normalized pressure fluctuation is therefore defined

$$\Phi(x_1, x_2, t) = \frac{p(x_1, x_2, t) - \bar{p}(x_2)}{\mathcal{A}_s \sqrt{\bar{\rho}(x_2)}}. \quad (7a)$$

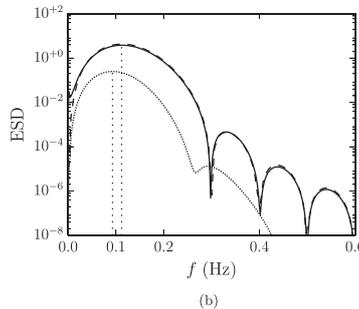
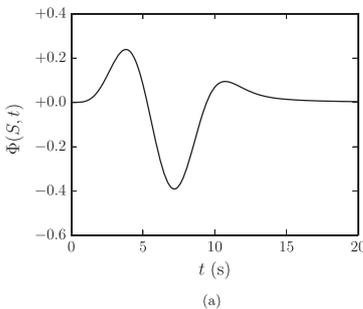


FIG. 4. NLW case. (a) Normalized pressure  $\Phi$  [Eq. (7a)] recorded at the source location  $S$ . (b) One-sided energy spectral density ESD [Eq. (7c)] of the normalized pressure  $\Phi$  at points  $S$  (solid line) and  $B_1$  (dotted line); exact solution of the Helmholtz equation for a homogeneous medium at  $S$  (dashed line).

The source amplitude  $\mathcal{A}_s$  is introduced to allow comparisons between the different cases. The maximum overpressure at ground level

$$\Phi_g(x_1) = \max_t \Phi(x_1, x_2 = 0 \text{ km}, t) \quad (7b)$$

is studied as well. The pressure signature is analyzed in the frequency domain, through its one-sided energy spectral density

$$\text{ESD}(x_1, x_2, f) = 2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x_1, x_2, t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2, \quad f \in \mathbb{R}^+. \quad (7c)$$

In particular, the ESD computed on the  $x_1$  and  $x_2$  axes, that is  $\text{ESD}_1 = \text{ESD}(x_1, 0 \text{ km}, f)$  and  $\text{ESD}_2 = \text{ESD}(0 \text{ km}, x_2, f)$ , are investigated. To characterize the infrasound source, two parameters are examined, the peak overpressure at the source location  $P_s = \max_t(p(S, t) - \bar{p}_g)$  and the energy flux  $I_a$ , calculated according to

$$I_a = \int_0^{t_\infty} \left( \int_{\Sigma} (p - \bar{p})(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot d\mathbf{\Sigma} \right) dt, \quad (7d)$$

where the surface  $\Sigma$  is chosen as the boundary of the domain  $[-5, +5] \times [0, 10] \text{ km}^2$  (see Fig. 1). The integral in Eq. (7d) is to be calculated up to a time  $t_\infty$  sufficiently large for the wavefront emitted by the source to cross the integration line.

## A. Overview of results

### 1. Characterization of the infrasonic source

The normalized pressure  $\Phi$  recorded at the source location  $S$  for the NLW case is plotted in Fig. 4(a), along with the corresponding one-sided energy spectral density ESD [Fig. 4(b)]. The peak overpressure  $P_s$  detected at the point  $S$  is of about 598.4 Pa and the frequency corresponding to the maximum ESD is around 0.11 Hz. The waveform at  $S$  is found to be nearly independent from both the source amplitude  $\mathcal{A}_s$  and the presence of wind, at least for values of  $\mathcal{A}_s$  up to  $10^4 \text{ J m}^{-3} \text{ s}^{-1}$ . This result is also confirmed by the good agreement between the present numerical solution and the analytical ESD obtained by solving the classical Helmholtz equation for a homogeneous medium [see Fig. 4(b)]. For the range of amplitudes considered here, the peak overpressure

$P_s$  scales approximately as  $\mathcal{A}_s/4$ . The one-sided energy spectral density ESD of the signal recorded at point  $B_1 = (0 \text{ km}, 5 \text{ km})$  is also reported in Fig. 4(b). A slight shift toward a lower value of the frequency corresponding to the maximum ESD is observed as a result of the non-compactness of the source, whose Helmholtz number  $\text{He} = k_s b_s = 2\pi f_s b_s / \bar{c}(S)$  is around 1.1. The Gaussian source distribution acts as a low-pass filter applied to the source term  $\Lambda_s$ . The intensity  $I_a$  [Eq. (7d)] is also found to be almost independent from the presence or not of the wind, and it scales as  $I_a \sim \mathcal{A}_s^2$ . Values of  $P_s$  and  $I_a$  for the four configurations are reported in Table III.

## 2. Linear case

Some snapshots of the normalized pressure  $\Phi$  obtained with  $\mathcal{A}_s = 10^{-1} \text{ J m}^{-3} \text{ s}^{-1}$  are shown in Fig. 5 for different time instants. Acoustic rays are also superimposed. Owing to the vertically stratified speed of sound, acoustic waves are refracted while propagating through the atmosphere. A waveguide is generated between the Earth's surface and about 110 km altitude, where the speed of sound becomes greater than its value at ground level.<sup>5</sup> Consequently, the wavefront emitted by the infrasonic source rapidly loses its cylindrical shape visible in Fig. 5(a). Various arrivals are observed at ground level, depending on the distance from the source. Up to about  $x_1 = 140 \text{ km}$  range, only the direct phase, noted  $I_w$ , is recorded. Its amplitude decays exponentially with the distance along the  $x_1$ -axis.<sup>10,37</sup> This diminution is not attributed to physical dissipation, but to a more complex redistribution of energy in the waveguide. Indeed, a stratospheric phase is rapidly generated. It is clearly visible in Fig. 5(b) at about 40 km altitude, where the lower part of the wavefront begins to split into two different arrivals. The new phase is not predicted by ray theory, since associated with low-frequency or diffraction phenomena. It is refracted toward the ground around the altitude of the local maximum of the speed of sound profile, whose value is relatively close to the celerity at ground level. It is labeled  $I_{s1}$ . At  $t = 700 \text{ s}$ , a strong cusp caustic appears around 113 km altitude [Fig. 5(c)]. The acoustic rays which have reached the thermosphere now turn toward the Earth's surface. The refracted wave consists of two wavefronts generated by the lower and higher thermospheric rays. As a result of the diffraction at the caustic, the amplitude of the associated thermospheric phases, noted, respectively,  $I_{ta1}$  and  $I_{tb1}$ , becomes appreciable at about  $x_1 = 200 \text{ km}$  [Fig. 5(d)], whereas the arrival range predicted by ray theory is around 290 km. At larger distances from the source, in spite of a longer path length, the higher thermospheric wave  $I_{tb1}$  arrives before the lower phase  $I_{ta1}$  thanks to the greater propagation speed in the upper atmosphere. For simulation times larger than about 1200 s, the fluctuating pressure field becomes more and more complex and a multitude of arrivals reaches the Earth's surface. Along with the two thermospheric phases, arch-like wavefronts are generated in the waveguide [Fig. 5(e)]. Besides, the thermospheric rays reflected by the ground are again refracted back toward the Earth's surface. The subsequent thermospheric phases,

labeled  $I_{ta2}$  and  $I_{tb2}$ , hit ground more than 500 km away from the source [Fig. 5(f)].

In order to gain more insight into the generation of the arch-like wavefronts, which cannot be captured by ray theory, a zoom of  $\Phi$  at three different times is reported in Fig. 6. At 1000 s, the wavefront  $W_{s1}^r$ , produced by the reflection of the first stratospheric phase  $I_{s1}$ , propagates upward [Fig. 6(a)]. At about 49 km altitude [Fig. 6(b)],  $W_{s1}^r$  is partially reflected down toward the ground ( $W_{s2}^i$ ) and partially transmitted into the mesosphere ( $W_{s1}^t$ ). This waveguide effect is induced by the variations of the mean speed of sound: it has a local maximum at  $x_2 = 49 \text{ km}$ , which is close to its value at ground level. When the wavefront  $W_{s2}^i$  reaches the ground, a new stratospheric phase, labeled  $I_{s2}$ , is recorded.  $W_{s2}^i$  is in turn reflected by the Earth's surface, so that the process of generation of a new arch structure starts again [Fig. 6(c)]. More generally, partial reflections and transmissions around  $x_2 = 49 \text{ km}$  can be observed whenever a wavefront propagates downward or upward in the stratosphere. An example is given in Fig. 6(c), where a new arch is generated by the wavefront  $W_{ta1}^i$  associated with the first thermospheric phase.

The normalized pressure  $\Phi$  recorded at the ground station  $S_1 = (300 \text{ km}, 0 \text{ km})$  is shown in Fig. 7(a). Two different arrivals can be distinguished: the first stratospheric phase,  $I_{s1}$ , between 980 and 1040 s, and a combination of the first lower and upper thermospheric phases,  $I_{ta1}$  and, between 1220 and 1280 s. This result is in good agreement with the geometrical acoustic theory, which yields an arrival time of about  $t = 1240 \text{ s}$  for  $I_{ta1}$ . Furthermore, the thermospheric waveform coincides with the Hilbert transform of the signal recorded at the source location, as expected for rays passing through a caustic.<sup>10</sup>

The normalized pressure  $\Phi$  recorded at the ground station  $S_2 = (600 \text{ km}, 0 \text{ km})$  is shown in Fig. 7(b). Several arrivals can be observed: the diffracted stratospheric arrivals and the thermospheric ones. As at  $S_1$ , the maximum overpressure is due to the lower thermospheric phases. Furthermore, a phase shift can be again noticed on the signal  $I_{ta2}$ .

The normalized pressure  $\Phi$  recorded at ground level is illustrated in Fig. 8(a) as a function of the distance from the source  $x_1$  and of the reduced time  $t_r = t - x_1/\bar{c}(0 \text{ km})$ , to better visualize the various phases and their arrival times. Additionally, the normalized maximum overpressure  $\Phi_g$  is shown in Fig. 8(b), along with the contributions of the different arrivals. The amplitude of the direct phase  $I_w$  is found to decay faster than the classical two-dimensional cylindrical spreading behavior,  $\Phi_g \sim x_1^{-1/2}$ . This reduction is attributed to the negative gradient of the speed of sound near the ground, which deviates the acoustic rays toward higher altitudes.<sup>10,37</sup> At about  $x_1 = 100 \text{ km}$ , the maximum overpressure of  $I_w$  is found to be 1% of the value at the origin of the domain. The direct phase  $I_w$  is recorded almost without delay since it propagates at a speed close to the celerity at ground level. The first diffracted arrival  $I_{s1}$  is recorded with an appreciable level at distances from the source greater than 140 km, and at a reduced time between 110 and 160 s. This means that the overpressure induced by this phase is delayed by about 110 s with respect to a hypothetical direct wave.

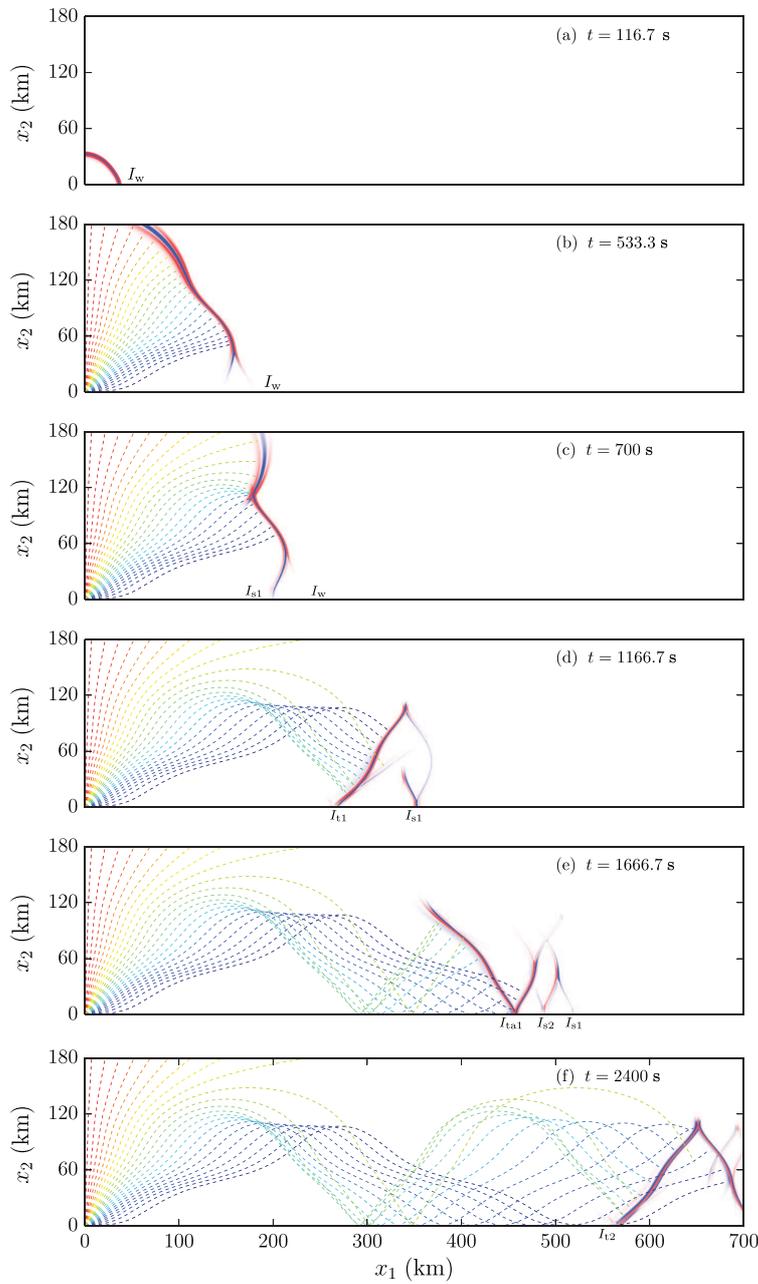


FIG. 5. L case. Snapshots of the normalized pressure  $\Phi$  at different time instants.

The first thermospheric phases are detected with non negligible amplitudes for  $x_1 > 200$  km at a reduced time which diminishes with increasing distance  $x_1$ . The higher arrival  $I_{tb1}$ , which travels faster than the lower phase  $I_{ta1}$ , is even recorded at  $x_1 = 600$  km with no delay. Between  $x_1 = 400$  km and  $x_1 = 500$  km, a second diffracted arrival  $I_{s2}$  is generated. It is detected with a delay of about 250 s. Finally,

the second thermospheric arrivals,  $I_{ta2}$  and  $I_{tb2}$ , become detectable for distances from the source greater than 500 km and with a delay of around 750 s. Beyond the first geometrical shadow zone, the function  $\Phi_g$  exhibits a peak at about  $x_1 = 300$  km, as a consequence of the first lower thermospheric arrival  $I_{ta1}$ ; the phase  $I_{ta1}$  is responsible for the maximum overpressure visible between  $x_1 = 300$  km and

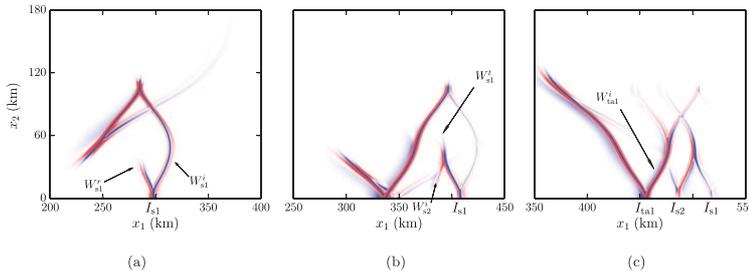


FIG. 6. L case. Zoom of the snapshots of the normalized pressure  $\Phi$  at (a) 1000 s, (b) 1333.3 s, and (c) 1666.7 s.

$x_1 = 600$  km; over this range,  $\Phi_g$  is about 5% to 10% of the overpressure measured at the source location  $S$ .

The spectrogram  $ESD_1$  of the signals detected at ground level is reported in Fig. 8(c), where color indicates the ESD level as a function of frequency  $f$  for each recording location  $x_1$ . Most of the energy is found around the source frequency  $f_s = 0.1$  Hz, even at distances larger than 200 km from the source, where the maximum overpressure is due in large part to the thermospheric phases. This is a consequence of the small source amplitude  $\mathcal{A}_s$ : nonlinear effects are not appreciable. By integrating the ESD function over  $x_1$  and  $f$ , it is found that about 99.3% of the energy is associated with frequencies in the interval [0 Hz, 0.2 Hz].

The ESD computed along the  $x_2$  axis is plotted in Fig. 9(a) as a function of frequency  $f$  and distance from the source  $x_2$ . As a result of the small source mean amplitude, the signal  $\Phi$  undergoes negligible distortion during its vertical propagation up to about 120 km. Below 120 km, and outside the source region, the frequency  $f_p(x_2)$  of the maximum ESD<sub>2</sub> for a given altitude  $x_2$  remains constant with a value of  $f_p \simeq 0.093$  Hz. Furthermore, until 120 km, the amplitude of the pressure fluctuations decreases, owing essentially to the cylindrical spreading.

For higher altitudes, thermoviscous dissipation becomes increasingly important due to the exponential diminution of the mean density, as also demonstrated by the departure of the Navier-Stokes result from that of the Euler model. The

signal amplitude drops, and a shift toward lower frequencies is observed, since absorption phenomena depend not only on the value of the kinematic viscosity  $\bar{\nu}$  but also on the square of the frequency.<sup>9,10</sup> The frequency  $f_p$  is about 0.042 Hz at  $x_2 = 180$  km.

### 3. Linear with Wind case

The presence of a wind profile in the atmosphere generally has a strong impact on the acoustic field recorded at ground level. The arrival time of the different phases as well as their amplitude and waveform are affected.<sup>29,38</sup> The generation of new arrivals can be also observed. As an illustration, a snapshot of  $\Phi$  at  $t = 666.7$  s is shown in Fig. 10. Acoustic rays are also superimposed. The initially isotropic wavefront is deformed by the stratification of the mean atmosphere.

Furthermore, a caustic appears at an altitude of about 111 km. The influence of the wind profile on the acoustic field is clearly visible at stratospheric and mesospheric altitudes, where multiple reflections toward the Earth's surface are generated. In particular, a second caustic is formed at a height of about 45 km, where the effective speed of sound  $\bar{c}_{\text{eff}} = \bar{c} + \bar{u}_1$  exceeds its ground level value<sup>5,10</sup> [see Fig. 2(a)]. The amplitude of the subsequent stratospheric arrival  $I_{s1}$  becomes noticeable at about  $x_1 = 150$  km. This value should be compared to the arrival range predicted by the geometrical acoustic theory, of around 270 km. Moreover,

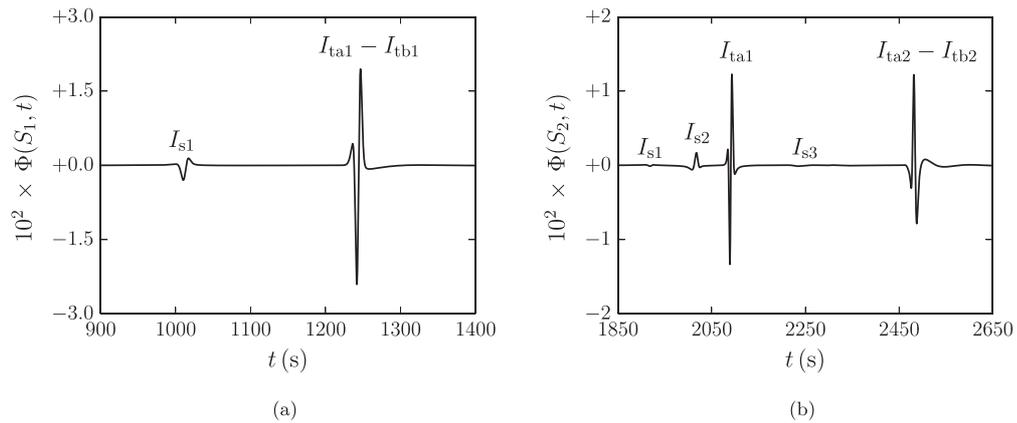


FIG. 7. L case. Normalized pressure  $\Phi$  recorded at stations (a)  $S_1$  and (b)  $S_2$ .

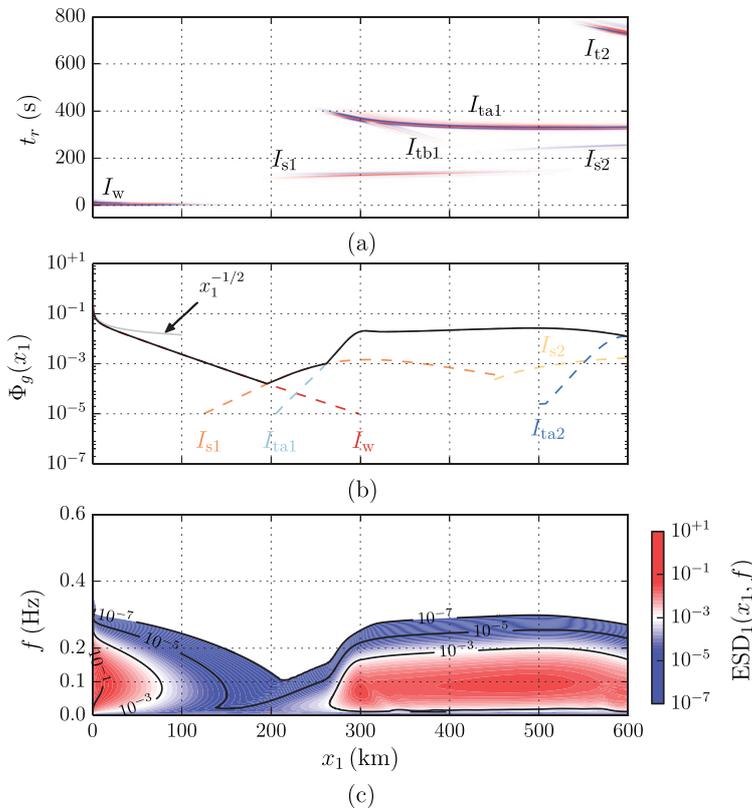


FIG. 8. L case. Ground recordings: (a) normalized pressure  $\Phi$  as a function of range  $x_1$  and of reduced time  $t_r$ ; (b) normalized maximum overpressure  $\Phi_g$  at ground level; (c) spectrogram  $ESD_1$  of  $\Phi$  as a function of  $x_1$  and frequency  $f$ .

an additional reflection is observed around  $x_2 = 70$  km, near a local maximum of the effective speed of sound. This diffracted phase is labeled  $I_{m1}$ .

The pressure signal  $\Phi$  recorded at the ground station  $S_3 = (270 \text{ km}, 0 \text{ km})$  is shown in Fig. 11(a). The signal obtained without wind is also reported in light gray for comparison. The thermospheric signature remains almost untouched by the horizontal wind. The amplitude is however doubled, and the arrival time, reduced. The time lag between the maximum overpressures is of about 35 s, corresponding to a difference between the apparent propagation speeds of  $7.06 \text{ m s}^{-1}$ . The mean atmospheric profile considerably reinforces the stratospheric ducting. The stratospheric arrival  $I_{s1}$

has an amplitude 20 times higher than that of the diffracted phase  $I_{s1}$  recorded in the absence of wind. The time lag between the maximum stratospheric overpressures is of 15 s. The signature detected in the presence of wind is also modified. Since it passes through the stratospheric caustic, it exhibits a shape close to the Hilbert transform of the signal recorded at the source location. The additional mesospheric phase has a very low amplitude, about two orders of magnitude smaller than the stratospheric signal.

The maximum overpressure  $\Phi_g$  at ground level is plotted in Fig. 11(b) as a function of  $x_1$ . The contributions of the different phases are reported in dashed line; the result obtained without wind is also plotted in gray for comparison.

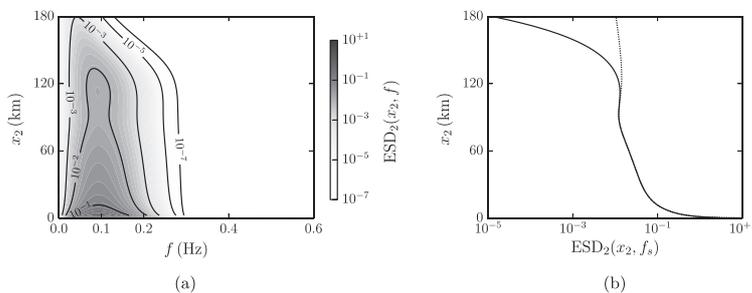


FIG. 9. L case. (a) ESD of the whole signal recorded along the  $x_2$  axis and above the source; (b) ESD profile for  $f = f_s$ , obtained by the Navier-Stokes model (black solid line) and without viscous and thermal terms (dotted line).

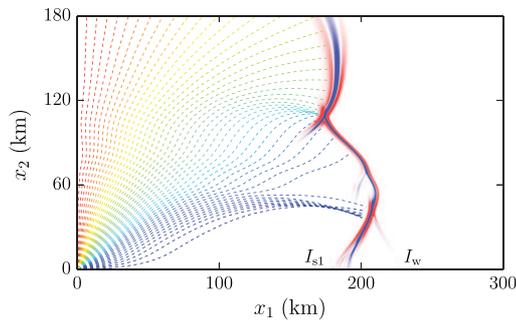


FIG. 10. LW case. Snapshot of the normalized pressure  $\Phi$  at  $t = 666.7$  s.

The decay rate of the amplitude of the direct phase is reduced in the presence of wind. A moving medium with velocity  $\bar{u}_1$  and speed of sound  $\bar{c}$  can be considered to a first approximation as a medium at rest with an effective speed of sound  $\bar{c}_e = \bar{c} + \bar{u}_1$  (Ref. 13) [see Fig. 2(a)]. Considering that the wind profile is globally positive near the ground, the decay rate diminishes as the effective celerity gradient is decreased by the horizontal flow. Finally, beyond the shadow zone and except for distances from the source between roughly 350 and 520 km, the generally larger amplitude of the stratospheric arrivals induced by the horizontal wind produces an increase in the peak overpressure measured at ground level.

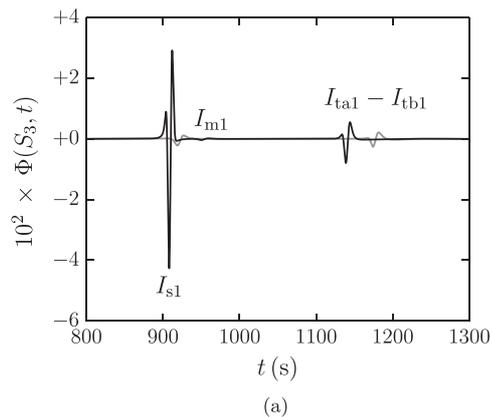
#### 4. Nonlinear case

The amplitude of the infrasonic source is found to have a negligible influence on the geometrical structure of the acoustic field: the number and features of arrivals remain the same, at least for the cases under study. However, the signature recorded at a given distance  $r$  is highly affected by nonlinear effects. For large source amplitudes  $\mathcal{A}_s$ , the initially smooth wavefront is distorted during propagation and, at a characteristic distance  $r_{\text{shock}}$ , which decreases with  $\mathcal{A}_s$ ,

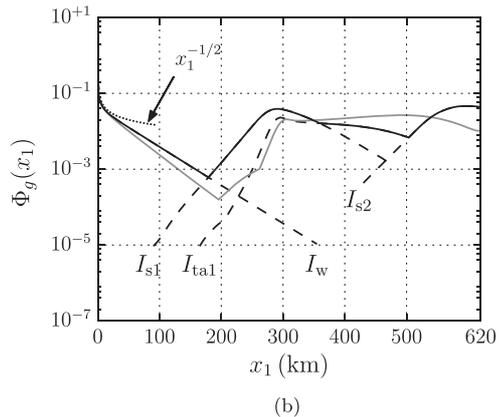
shock waves are formed. To highlight this aspect, the normalized pressure  $\Phi$  recorded at three different altitudes along the  $x_2$  axis,  $B_2 = (0 \text{ km}, 80 \text{ km})$ ,  $B_3 = (0 \text{ km}, 120 \text{ km})$  and  $B_4 = (0 \text{ km}, 170 \text{ km})$ , is plotted in Fig. 12.

At the point  $B_2$ ,  $\Phi$  is still a smooth function, but its waveform has undergone appreciable modifications from the source [see Fig. 12(a) and 4(a)]. Moreover, its amplitude has diminished by a factor 20 as a consequence of the two-dimensional cylindrical spreading. The waveform steepens with increasing time and distance and evolves into an N-shaped wave [Fig. 12(b)]. Once the N-wave is formed, it lengthens while propagating toward the upper atmosphere [Fig. 12(c)]. Its duration is about 25 s at  $B_3$  and 50 s at  $B_4$ . The importance of the viscous and thermal terms is again emphasized in Fig. 12(c), where the signal resulting from the Euler equations is also reported in gray. The maximum overpressure is almost halved by the thermoviscous absorption phenomenon. The central part of the wave and the frequency  $f_p$  of the maximum ESD<sub>2</sub> remains however untouched.

The ESD computed along the  $x_2$  axis is displayed in Fig. 13(a). The shock formation coincides with a rapid widening of the spectrum. For distances from the source smaller than about 40 km, most of the energy is around the source frequency, whereas above 40 km, the energy of higher harmonics becomes significant. The behavior of the ESD as a function of altitude is shown in Fig. 13(b) for three different spectral component frequencies,  $f = n f_s$ , with  $n = 1, 2, 3$ . As the shock formation implies a transfer of energy toward shorter waves, the energy associated with the fundamental frequency drops with height, whereas the ESD of the harmonics rapidly increases and reaches a maximum value around  $x_2 = 95 \text{ km}$ . For higher altitudes, the lengthening of the N-wave causes a shift of the frequency  $f_p$  toward lower values, and thermoviscous absorption erases higher harmonics. Therefore, a shock formation distance  $x_2^{\text{shock}}$  can be defined here as the distance  $x_2$  from the source at which the ESD of the first harmonic reaches its maximum value,  $x_2^{\text{shock}} \simeq 94.8 \text{ km}$  in the present case.



(a)



(b)

FIG. 11. LW case. (a) Pressure  $\Phi$  recorded at the station  $S_3$ . (b) Maximum overpressure  $\Phi_g$  obtained with (black solid line) and without (gray solid line) wind: contributions of the different phases (dashed line) in the presence of the wind.

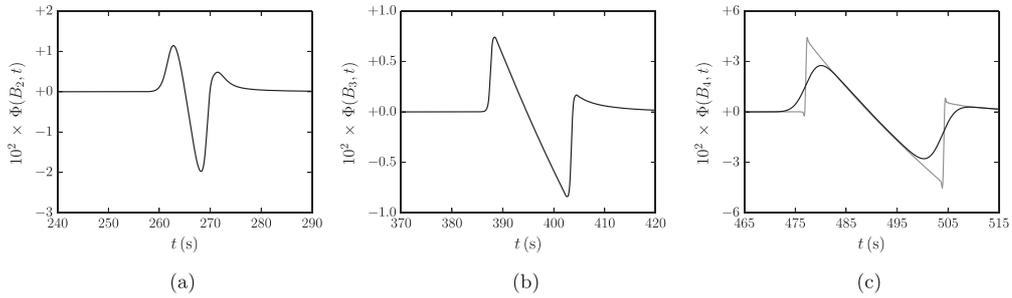


FIG. 12. NL case. Normalized pressure  $\Phi$  recorded at altitudes (a)  $B_2$ , (b)  $B_3$ , and (c)  $B_4$ ; in gray, result obtained without viscous and thermal terms.

It is interesting to note that the diminution of the atmospheric density contributes highly not only to the increase in thermoviscous absorption but also to the development of nonlinear effects. Waveform distortion primarily depends on the term  $\bar{\rho}^{-1/2}$  which varies strongly between the ground and the thermosphere.<sup>39</sup>

The pressure  $\Phi$  recorded at the ground station  $S_1$  is illustrated in Fig. 14. The signal obtained in the L case is also reported in light gray for comparison. The stratospheric arrival  $I_{s1}$  is found to be untouched by nonlinear effects [Fig. 14(a)]: these effects become appreciable beyond the stratospheric waveguide limit, where this phase is refracted back toward the Earth’s surface. Conversely, nonlinear distortion has a strong impact on the thermospheric phases  $I_{ta1}$  and  $I_{tb1}$ . The U-shape wave visible in Fig. 14(b) is generated by the N-wave of the lower signal  $I_{ta1}$  which passes through the thermospheric cusp caustic.<sup>6,10,11</sup> Furthermore, as a result of the lengthening of the signal, the peak overpressure is brought forward by about 15 s compared to the arrival time for the lowest source amplitude. The peak overpressure itself is reduced in relative terms by the nonlinear effects.

**5. Nonlinear with Wind case**

The aim of the last study is to investigate the combined effects of non-linearity and wind gradient on the acoustic

field produced by an infrasound source. As in the LW-case, the presence of a wind profile generates a second caustic at about 50 km altitude and tends to magnify the peak overpressure associated with the subsequent stratospheric arrival. Unlike in the NL-case, the source amplitude is now strong enough for non-linear modifications to be significant also on the stratospheric arrival. This aspect is highlighted in Fig. 15(a), which displays the pressure  $\Phi$  recorded at the ground station  $S_3$  corresponding to this phase. Results obtained in the NL and LW cases are also reported for comparison. The stratospheric signal detected in the NLW case is clearly distorted by nonlinear effects. It exhibits a U-shaped waveform, which suggests that an N-wave is generated as rays climb toward the stratosphere before reaching the stratospheric caustic. Following the criterion described in the previous paragraph, shock formation occurs at  $x_2 = 63$  km altitude.

As in the NL case, once the N-wave is created, it lengthens while propagating in the vertical direction. This lengthening corresponds to a shift toward lower frequencies. At  $x_2 = 63$  km,  $f_p$  is about 0.08 Hz, whereas, above  $x_2 = 140$  km,  $f_p$  is around 0.01 Hz. Furthermore, it is found that the frequency  $f_p$  varies as  $\sim 1/(3\tau^+)$ , where  $\tau^+$  represents the duration of the positive phase of the N-wave.<sup>6,40</sup> For the present source amplitude, thermoviscous effects are found to play a minor role on the shape of the signal. When the wavefront arrives in

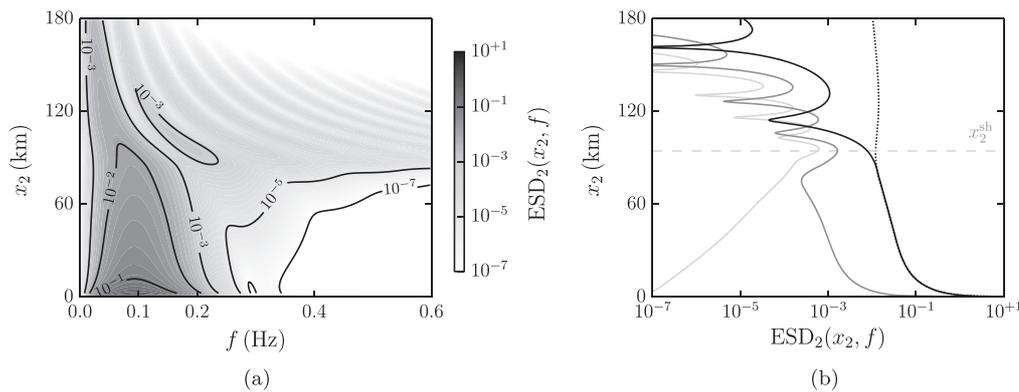


FIG. 13. NL case. (a) ESD of the whole signal recorded along the  $x_2$  axis and above the source; (b) ESD profiles for  $f=f_s$  (black solid line),  $f=2f_s$  (slate gray solid line) and  $f=3f_s$  (light gray solid line); in dotted line, result obtained in the Linear case without viscous and thermal terms.

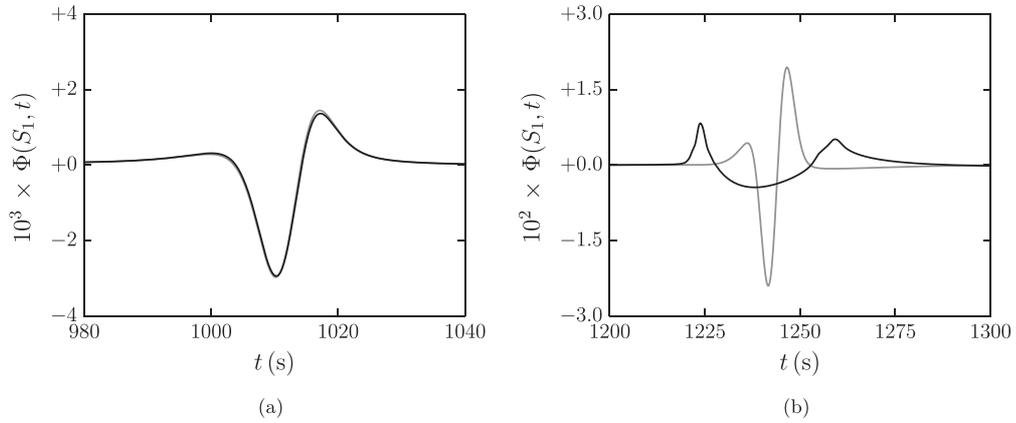


FIG. 14. NL case. Pressure  $\Phi$  recorded at the station  $S_1$ ; (a) stratospheric arrival  $I_{S1}$ ; (b) thermospheric arrivals  $I_{th1} - I_{th1}$ . The L case result is reported in gray.

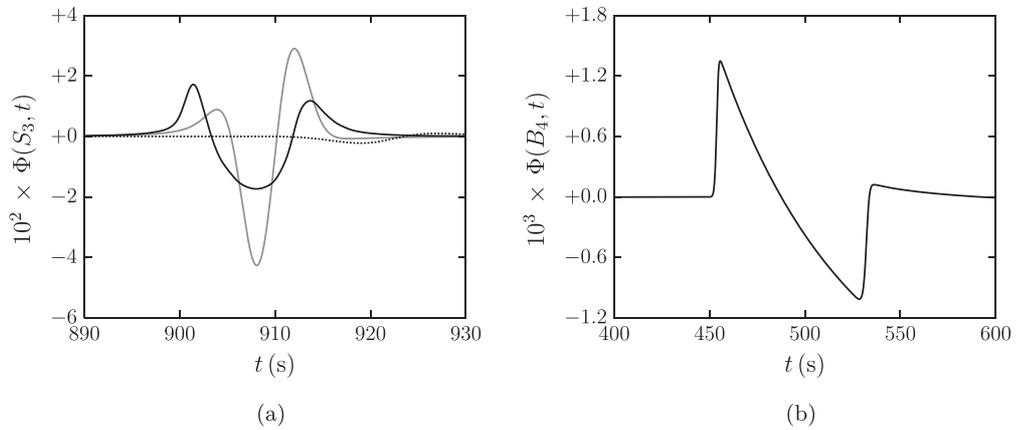


FIG. 15. NLW case. (a) Pressure  $\Phi$  recorded at the ground station  $S_3$ ; result for the NLW case (black line), NL case (dotted line) and LW case (gray line). (b) Pressure  $\Phi$  recorded at the point  $B_4$ .

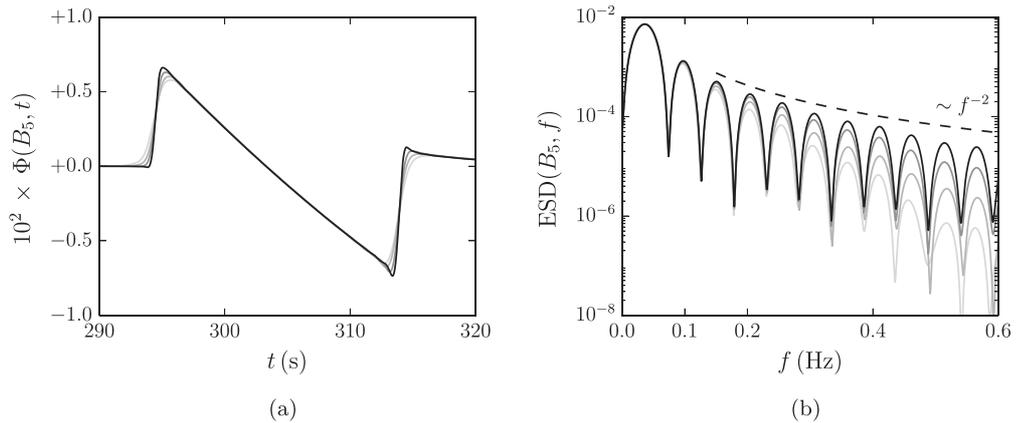


FIG. 16. Numerical accuracy. (a) Temporal signals and (b) corresponding one-sided energy spectral densities obtained at  $B_5$  with  $\alpha = 0.75$  (black line),  $\alpha = 1.0$  (slate gray line),  $\alpha = 1.25$  (gray line) and  $\alpha = 1.5$  (light gray line).

the thermosphere, most of the energy is contained in frequencies too low for significant attenuation to be observed below 180 km altitude [Fig. 15(b)]. The signal would have to propagate over far larger distances for viscous and thermal terms to affect the central part of the wave.

**Numerical accuracy**

To illustrate the capability of the present algorithm, the signals recorded at the point  $B_5 = (0 \text{ km}, 90 \text{ km})$  using different grid spacings  $\alpha\Delta$ , with  $\alpha = 0.75, 1.0, 1.25, 1.5$ , are shown in Fig. 16(a). Because of the large source amplitude, a N-wave is observed at this location. The agreement between the different solutions is fairly good. In particular, the positions of the front and rear shocks seem to be well predicted even on the coarsest grid. The central part of the N-wave is also well resolved.

The energy spectral densities obtained with the four grid spacings are plotted in Fig. 16(b). The  $f^{-2}$ -behavior expected for the maxima of the spectrum of a balanced zero-mean N-wave is also reported in dashed line for comparison. Differences with respect to the ESD obtained on the finest grid appear at higher and higher frequencies as the mesh is refined. Convergence is observed for all grids on the first two lobes, which contain about 90% of the total energy of the signal, and despite appreciable attenuation with increasing frequency, the position of the maxima and minima is well reproduced even on the coarsest grid. Moreover, the relative error between the maxima of the energy spectral densities computed with  $\alpha = 0.75$  and  $\alpha = 1.0$  is lower than 50% up to the seventh harmonic, corresponding to a frequency of about 0.4 Hz. Finally, the relative error between the total energies obtained with  $\alpha = 0.75$  and  $\alpha = 1.0$  is around 2%.

**IV. CONCLUDING REMARKS**

Long-range infrasound propagation is investigated in this work by performing direct numerical simulations of the two-dimensional Navier-Stokes equations. The aim is to highlight some specific physical features of infrasonic waves propagating in the Earth's atmosphere that are not properly captured by simplified modeling approaches. Four configurations with increasing source amplitudes are simulated. The refraction effects induced by temperature gradients are first illustrated, and the importance of thermoviscous dissipation during the linear propagation toward the upper atmosphere is clearly shown. The signature of different thermospheric signals is discussed with emphasis placed on the phase shift induced by a thermospheric caustic, and the behavior of the amplitude of ground level recordings as a function of the distance from the source is analyzed. An exponential-like decay of the amplitude is seen in the first shadow zone adjacent to the source, as also predicted by previous authors, whereas an overpressure up to 10% of the value at the source location can be observed beyond 300 km range. The influence of a wind profile on various phases is investigated in the second computation, and the effects of a stratospheric waveguide on the overpressure recorded at ground level are analyzed. A third

configuration, with a high source amplitude and in an atmosphere at rest, is investigated in order to examine the influence of non-linearities on the signature, amplitude and spectrum of thermospheric phases. The joint effects of wind and non-linearities are then illustrated in the last computation. In particular, it is shown that, for sufficiently large source energies, the signature of stratospheric phases can also be strongly affected. The roles of non-linearities and molecular dissipation during the propagation in the upper atmosphere, both of which are magnified by the decrease of the mean density with altitude, are also demonstrated, and it is found that, as a result of the low frequency generation associated with period lengthening, thermoviscous absorption effects can become less important for increasing source amplitudes.

The transfer functions of the numerical dissipation mechanisms in Fourier space are provided and it is shown that all the physical effects under study are correctly taken into account by the present numerical algorithm. A convergence analysis on a N-wave observed in the thermosphere in the last computation is reported as well, and an example of application of an improved and robust shock-capturing procedure is finally illustrated.

The numerical approach followed in this work is directly applicable to three-dimensional simulations of the Navier-Stokes equations for future work, which should allow insightful comparisons with measurements.

**ACKNOWLEDGMENTS**

Present results have been obtained within the framework of Laboratoire Études et Modélisation Acoustique, a Contractual Research Laboratory shared between Commissariat à l'énergie et aux énergies alternatives, École Centrale de Lyon, C-Innov and Université Pierre et Marie Curie. This work was granted access to the High Performance Computing resources of the Très Grand Centre de calcul du CEA (TGCC) under the allocation 2015-200204 made by Grand Equipement National de Calcul Intensif. The first author thanks the Direction Générale de l'Armement for financial support and O. Gainville for discussions.

**APPENDIX A: ATMOSPHERIC PROFILES AND CONSTANTS**

The speed of sound and wind profiles are defined by cubic splines, whose coefficients are reported in Table I. For a given altitude  $x_2 \in [x_{2,j}, x_{2,j+1}]$ , the value of  $\bar{f}$  at  $x_2$  is given by

$$\bar{f}(x_2) = a\bar{f}_i + b\bar{f}_{i+1} + \frac{1}{6} [(a^3 - a)\bar{f}_i'' + (b^3 - b)\bar{f}_{i+1}''] (x_{2,i+1} - x_{2,i})^2$$

where  $\bar{f} = \bar{c}$  or  $\bar{f} = \bar{u}_1$ . The two factors  $a$  and  $b$  are defined as

$$a = \frac{x_{2,i+1} - x_2}{x_{2,i+1} - x_{2,i}}, \quad b = 1 - a.$$

## APPENDIX B: SHOCK-CAPTURING METHODOLOGY

To handle the acoustic shocks generated during the propagation for sufficiently large source amplitudes, the shock-capturing technique proposed by Bogey *et al.*<sup>28</sup> is employed at each time step after the selective filtering procedure. It consists in adding artificial dissipation only where necessary, i.e., only near shock fronts, in such a way that smooth regions of the solution are not affected. The methodology involves two main steps. The locations of the discontinuities are first determined through a shock sensor. Then, a second-order filter is applied in conservative form with a strength  $\sigma^{\text{sc}}$  which is significant around the shocks but nil everywhere else. In the present work, the shock detector of Bogey *et al.*<sup>28</sup> is replaced by a new indicator, which is specifically developed for acoustic applications using the smoothness variables employed in the weighted essentially non-oscillatory schemes.<sup>31,32</sup> In a one-dimensional mesh, the following parameters  $\beta_k$ ,  $k=0, 1, 2$ , are first calculated as

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{13}{12} (p'_{i-2} - 2p'_{i-1} + p'_i)^2 + \frac{1}{4} (p'_{i-2} - 4p'_{i-1} + 3p'_i)^2, \\ \beta_1 &= \frac{13}{12} (p'_{i-1} - 2p'_i + p'_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (p'_{i-1} - p'_{i+1})^2, \\ \beta_2 &= \frac{13}{12} (p'_i - 2p'_{i+1} + p'_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3p'_i - 4p'_{i+1} + p'_{i+2})^2,\end{aligned}\quad (\text{B1})$$

where  $p'_i$  is the perturbation of pressure at node  $i$ . These indicators are combinations of centered and non-centered finite difference approximations of the first and second derivatives of  $p'$  and constitute an estimate of the regularity of the solution at point  $i$ . The coefficients  $\alpha_k$  and  $\omega_k$ ,  $k=0, 1, 2$ , are then computed as

$$\alpha_k = \frac{1}{(\beta_k + \epsilon)^2}, \quad \omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_i \alpha_i}, \quad (\text{B2})$$

where  $\epsilon = 10^{-18}$  is a constant introduced to avoid divisions by zero. It is straightforward to show that, in smooth regions, the coefficients  $\beta_k$  are very small and the terms  $\omega_k$  tend to  $\frac{1}{3}$ .<sup>32</sup> The following sensor is thus introduced

$$r = \left( \sum_{k=0}^2 \left| \omega_k - \frac{1}{3} \right| \right)^2, \quad (\text{B3})$$

and the filtering strength  $\sigma_i^{\text{sc}}$  at the node  $i$  is calculated according to<sup>28</sup>

$$\sigma_i^{\text{sc}} = \frac{\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}}}{2} \left( 1 - \frac{r_{\text{th}}}{r} + \left| 1 - \frac{r_{\text{th}}}{r} \right| \right), \quad (\text{B4})$$

where  $r_{\text{th}}$  is a threshold value equal to 0.8. The filtering magnitude  $\sigma_i^{\text{sc}}$  is thus nil away from shocks, where  $r < r_{\text{th}}$ , and takes increasing values up to  $\sigma_{\text{max}}^{\text{sc}} \in [0, 1]$  for increasing shock intensities. Finally, for the application of the conservative form of the shock-capturing filtering, the strengths  $\sigma_{i\pm 1/2}^{\text{sc}}$  [Eq. (24) in Bogey *et al.*<sup>28</sup>] are determined as the weighted averages

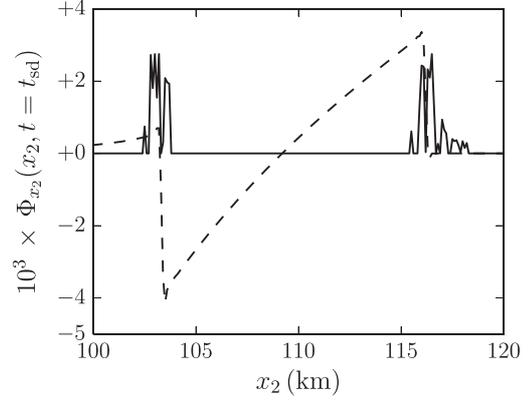


FIG. 17. Vertical cut  $\Phi_{x_2}(x_2, t_{\text{sd}})$  of the normalized pressure taken at  $t_{\text{sd}} = 366.7$  s (dashed line) and shock sensor  $\sigma^{\text{sc}}/50$  (solid line).

$$\begin{aligned}\sigma_{i-1/2}^{\text{sc}} &= \frac{1}{5} (2\sigma_{i-1}^{\text{sc}} + 2\sigma_i^{\text{sc}} + \sigma_{i+1}^{\text{sc}}), \\ \sigma_{i+1/2}^{\text{sc}} &= \frac{1}{5} (\sigma_{i-1}^{\text{sc}} + 2\sigma_i^{\text{sc}} + 2\sigma_{i+1}^{\text{sc}}).\end{aligned}\quad (\text{B5})$$

As an illustration, a vertical cut of the normalized pressure  $\Phi$  obtained in the NLW case,  $\Phi_{x_2}(x_2, t_{\text{sd}}) = \Phi(0 \text{ km}, x_2, t_{\text{sd}})$ , is shown in Fig. 17. The cut is taken at  $t_{\text{sd}} = 366.7$  s. The shock sensor  $\sigma^{\text{sc}}$  computed by performing the detection procedure along the  $x_2$  axis is also plotted. The highly dissipative second-order filter is applied only in two limited zones around the front and rear shocks, where  $\sigma^{\text{sc}}$  does not vanish, whereas the smooth central part of the N-wave is left unaffected.

<sup>1</sup>A. J. Bedard and T. M. Georges, “Atmospheric infrasound,” *Phys. Today* **53**(3), 32–37 (2000).

<sup>2</sup>A. Le Pichon, E. Blanc, and A. Hauchecorne, *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies* (Springer, Dordrecht, the Netherlands, 2010), Chaps. 2–3, pp. 29–118.

<sup>3</sup>A. Le Pichon, E. Blanc, D. Drob, S. Lambotte, J. X. Dessa, M. Lardy, P. Bani, and S. Vergnolle, “Infrasound monitoring of volcanoes to probe high-altitude winds,” *J. Geophys. Res.* **110**(D13), 1–12, doi:10.1029/2004JD0005587 (2005).

<sup>4</sup>J. Marty, D. Ponceau, and F. Dalaudier, “Using the international monitoring system infrasound network to study gravity waves,” *Geophys. Res. Lett.* **37**, L19802, doi:10.1029/2010GL044181 (2010).

<sup>5</sup>S. N. Kulichkov, I. P. Chunchuzov, G. A. Bush, and V. G. Perepelkin, “Physical modeling of long-range infrasonic propagation in the atmosphere,” *Iz. Atmos. Oceanic Phys.* **44**(2), 175–186 (2008).

<sup>6</sup>P. H. Rogers and J. H. Gardner, “Propagation of sonic booms in the thermosphere,” *J. Acoust. Soc. Am.* **67**(1), 78–91 (1980).

<sup>7</sup>O. Gainville, Ph. Blanc-Benon, and J. Scott, “Infrasound propagation in realistic atmosphere using nonlinear ray theory,” *AIP Conf. Proc.* **1474**(1), 343–346 (2012).

<sup>8</sup>J. B. Lonzaga, R. M. Waxler, J. D. Assink, and C. L. Talmadge, “Modelling waveforms of infrasound arrivals from impulsive sources using weakly nonlinear ray theory,” *Geophys. J. Int.* **200**(3), 1347–1361 (2015).

<sup>9</sup>L. C. Sutherland and H. E. Bass, “Atmospheric absorption in the atmosphere up to 160 km,” *J. Acoust. Soc. Am.* **115**(3), 1012–1032 (2004); “Erratum: ‘Atmospheric absorption in the atmosphere up to 1600 km,’” *J. Acoust. Soc. Am.* **120**(5), 2985 (2006).

- <sup>10</sup>A. D. Pierce, *Acoustics: An Introduction to its Physical Principles and Applications* (Acoustical Society of America, New York, 1985), Chaps. 8–11, pp. 371–615.
- <sup>11</sup>R. Marchiano, F. Coulouvrat, and J.-L. Thomas, “Nonlinear focusing of acoustic shock waves at a caustic cusp,” *J. Acoust. Soc. Am.* **117**(2), 566–577 (2005).
- <sup>12</sup>R. Waxler, L. G. Evers, J. Assink, and P. Blom, “The stratospheric arrival pair in infrasound propagation,” *J. Acoust. Soc. Am.* **137**(4), 1846–1856 (2015).
- <sup>13</sup>D. I. Blokhintsev, “Acoustics of a nonhomogeneous moving medium,” Tech. Mem. 1399, NACA (1956), Chaps. 1–2, pp. 1–66.
- <sup>14</sup>J. F. Lingeitch, M. D. Collins, and W. L. Siegmann, “Parabolic equations for gravity and acousto-gravity waves,” *J. Acoust. Soc. Am.* **105**(6), 3049–3056 (1999).
- <sup>15</sup>F. B. Jensen, W. Kuperman, M. Porter, and H. Schmidt, *Computational Ocean Acoustics* (Springer, New York, 2011), Chaps. 3–6, pp. 155–527.
- <sup>16</sup>M. S. Wochner, A. A. Atchley, and V. W. Sparrow, “Numerical simulation of finite amplitude wave propagation in air using a realistic atmospheric absorption model,” *J. Acoust. Soc. Am.* **118**(5), 2891–2898 (2005).
- <sup>17</sup>O. Marsden, L. Vayno, C. Bogey, and C. Bailly, “Study of long-range infrasound propagation with high-performance numerical schemes applied to the Euler equations,” in *Proceedings of the 13th Long Range Sound Propagation Symposium*, Lyon, France (2008), pp. 201–216.
- <sup>18</sup>C. de Groot-Hedlin, M. A. H. Hedlin, and K. Walker, “Finite difference synthesis of infrasound propagation through a windy, viscous atmosphere: Application to a bolide explosion detected by seismic networks,” *Geophys. J. Int.* **185**(1), 305–320 (2011).
- <sup>19</sup>R. Sabatini, O. Marsden, C. Bailly, and O. Gainville, “Numerical simulation of infrasound propagation in the Earth’s atmosphere: Study of a stratospheric arrival pair,” *AIP Conf. Proc.* **1685**(1), 090002 (2015).
- <sup>20</sup>S. Del Pino, B. Després, P. Havé, H. Jourden, and P. F. Piserchia, “3D finite volume simulation of acoustic waves in the Earth atmosphere,” *Comput. Fluids* **38**, 765–777 (2009).
- <sup>21</sup>C. de Groot-Hedlin, “Nonlinear synthesis of infrasound propagation through an inhomogeneous, absorbing atmosphere,” *J. Acoust. Soc. Am.* **132**(2), 646–656 (2012).
- <sup>22</sup>O. Marsden, C. Bogey, and C. Bailly, “A study of infrasound propagation based on high-order finite difference solutions of the Navier-Stokes equations,” *J. Acoust. Soc. Am.* **135**(3), 1083–1095 (2014).
- <sup>23</sup>O. Marsden, C. Bogey, and C. Bailly, “Direct noise computation of the turbulent flow around a zero-incidence airfoil,” *AIAA J.* **46**(4), 874–883 (2008).
- <sup>24</sup>C. Bogey, O. Marsden, and C. Bailly, “Large-eddy simulation of the flow and acoustic fields of a reynolds number  $10^5$  subsonic jet with tripped exit boundary layers,” *Phys. Fluids* **23**(3), 035104 (2011).
- <sup>25</sup>O. Marsden, C. Bogey, and C. Bailly, “Investigation of flow features around shallow round cavities subject to subsonic grazing flow,” *Phys. Fluids* **24**(12), 125107 (2012).
- <sup>26</sup>C. Bogey and C. Bailly, “A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for noise computations,” *J. Comput. Phys.* **194**(1), 194–214 (2004).
- <sup>27</sup>J. Berland, C. Bogey, O. Marsden, and C. Bailly, “High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems,” *J. Comput. Phys.* **224**, 637–662 (2007).
- <sup>28</sup>C. Bogey, N. De Cacqueray, and C. Bailly, “A shock-capturing methodology based on adaptive spatial filtering for high-order nonlinear computations,” *J. Comput. Phys.* **228**, 1447–1465 (2009).
- <sup>29</sup>O. Gainville, Ph. Blanc-Benon, E. Blanc, R. Roche, C. Millet, F. Le Piver, B. Despres, and P. F. Piserchia, “Misty picture: A unique experiment for the interpretation of the infrasound propagation from large explosive sources,” in *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies* (Springer, Dordrecht, the Netherlands, 2010), Chap. 18, pp. 575–598.
- <sup>30</sup>O. Marsden and O. Gainville, “Nonlinear effects in infrasound propagation simulations,” in *Proceedings of the Acoustics 2012 Nantes Conference*, Nantes, France, 23–27 April 2012, pp. 4031–4036.
- <sup>31</sup>G.-S. Jiang and C.-W. Shu, “Efficient implementation of weighted ENO schemes,” *J. Comput. Phys.* **126**, 202–228 (1996).
- <sup>32</sup>R. Borges, M. Carmona, B. Costa, and W. S. Don, “An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws,” *J. Comput. Phys.* **227**, 3191–3211 (2008).
- <sup>33</sup>C. K. W. Tam and Z. Dong, “Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow,” *J. Comp. Acoust.* **04**(2), 175–201 (1996).
- <sup>34</sup>D. J. Bodony, “Analysis of sponge zones for computational fluid mechanics,” *J. Comput. Phys.* **212**(2), 681–702 (2006).
- <sup>35</sup>C. Bogey and C. Bailly, “Turbulence and energy budget in a self-preserving round jet: Direct evaluation using large-eddy simulation,” *J. Fluid Mech.* **627**, 129–160 (2009).
- <sup>36</sup>P. G. Bergmann, “The wave equation in a medium with a variable index of refraction,” *J. Acoust. Soc. Am.* **17**(4), 329–333 (1946).
- <sup>37</sup>F. Coulouvrat, “Théorie géométrique non linéaire de la diffraction en zone d’ombre” (“Nonlinear geometrical theory of diffraction in the shadow zone”) *C. R. Acad. Sci. Paris.* **325**, 69–75 (1997).
- <sup>38</sup>G. Hanique-Cockenpot, “Étude numérique de la propagation non linéaire des infrasons dans l’atmosphère” (“A numerical study of nonlinear infrasound propagation in atmosphere”), Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Lyon, France (2011), No. 2011-32.
- <sup>39</sup>R. O. Cleveland, “Propagation of sonic booms through a real, stratified atmosphere,” Ph.D. dissertation, The University of Texas at Austin, TX 1995.
- <sup>40</sup>S. N. Kulichkov, “Evidence for nonlinear atmospheric effects in infrasound propagation from explosions of different types and yields,” in *Nonlinear Acoustics - Fundamentals and Applications: 18th International Symposium on Nonlinear Acoustics - ISNA 18*, edited by B. O. Enflo, C. M. Hedberg, and L. Kari (AIP, New York, 2008), pp. 401–404.



## Conclusion et perspectives

Ce travail a porté sur l'étude de la propagation atmosphérique d'ondes infrasonores produites sur la surface terrestre par des sources de type explosif. Trois objectifs principaux ont été poursuivis.

En premier lieu, à l'aide d'une méthode basée sur l'acoustique géométrique, l'importance des effets non linéaires et d'absorption sur les signaux enregistrés au sol jusqu'à des distances de quelques centaines de kilomètres a été examinée. Les résultats de cette analyse ont été présentés dans le chapitre 2. Il a été plus particulièrement démontré que la propagation d'ondes de grande amplitude, de l'ordre du millier de Pascal à la source, et de basse fréquence, de l'ordre du dixième de Hertz à la source, est essentiellement non linéaire. L'influence des termes de dissipation augmente lorsque la fréquence croît et que l'amplitude diminue. En raison de la réduction exponentielle de la masse volumique atmosphérique avec l'altitude, les flux visqueux et thermiques constituent la contribution dominante à l'absorption sur les rayons thermosphériques. En revanche, la relaxation vibrationnelle affecte plus spécialement les rayons stratosphériques. Toutefois, elle n'est significative que pour des signaux de fréquence supérieure à environ 1 Hz. Cette étude a également permis de mettre en évidence un phénomène relativement bien connu dans la littérature concernant le bang sonique, appelé *waveform freezing* en anglais. Plus précisément, il a été montré que la durée des signaux mesurés au sol dépend principalement de leur allongement durant leur propagation vers la haute atmosphère et au niveau des caustiques. Au contraire, le long des trajectoires descendantes vers la surface terrestre, la distorsion non linéaire est atténuée par l'augmentation exponentielle de la masse volumique.

Dans un second temps, des simulations numériques 3-D des équations de Navier-Stokes instationnaires et compressibles ont été effectuées afin de déterminer le champ acoustique produit par des sources de très grande amplitude et de fréquence de l'ordre du dixième de Hertz. Les calculs ont été menés jusqu'à des distances de propagation de plusieurs centaines de kilomètres et jusqu'à des altitudes de l'ordre de 140 km, en s'appuyant sur une méthode aux différences finies d'ordre élevé et à faibles niveaux de dissipation et de dispersion. À notre connaissance,

il s'agit des premières simulations tridimensionnelles en régime non linéaire réalisées dans le domaine de la propagation infrasonore. Le modèle de propagation et les méthodes numériques ont été introduits respectivement dans les chapitres 3 et 4. Les résultats ont ensuite été discutés dans le chapitre 5. Les calculs effectués ont permis de mettre en évidence certains aspects physiques qui font l'objet d'un nombre encore restreint d'analyses. À titre d'exemple, lorsque l'amplitude de la source est très élevée, les effets non linéaires deviennent très importants dans la haute atmosphère et l'allongement du front d'onde ne peut plus être décrit par la théorie des chocs faibles. Une étude détaillée de la diffusion acoustique due aux inhomogénéités d'échelle comparable à la longueur d'onde a aussi été réalisée. Un modèle phénoménologique permettant d'expliquer qualitativement l'évolution au sol du spectre des réflexions partielles a été développé. La diffraction au niveau de la caustique thermosphérique a aussi été illustrée. La profondeur de pénétration de l'énergie acoustique dans la zone d'ombre de la caustique augmente avec l'amplitude de la source. En effet, elle est d'autant plus élevée que la fréquence dominante de l'onde arrivant dans la thermosphère est petite. Cette dernière est dépendante de l'allongement non linéaire lors de la propagation verticale, qui est à son tour fonction de l'énergie de la source.

Enfin, des cas test bidimensionnels spécifiques à la propagation atmosphérique à grande distance ont été proposés dans le chapitre 6. Des solutions de référence ont également été déterminées. Ces *benchmarks* ont été développés avec un double objectif. D'une part, ils peuvent être utilisés pour l'évaluation préliminaire de la précision numérique d'un solveur de calcul et, d'autre part, ils peuvent être employés pour analyser les limites des modèles de propagation classiques.

Le travail réalisé apporte également de nombreuses perspectives. Tout d'abord, le solveur développé pourrait être employé en l'état pour effectuer une première comparaison entre les résultats numériques et les signaux enregistrés durant l'expérience Misty Picture. En effet, l'utilisation du code pour l'analyse de cet événement pourrait maintenant être envisagée. Le signal mesuré à une distance de 8 km de l'explosion a une durée d'environ 2 s, trois fois plus petite que celle de l'onde synthétisée dans les simulations effectuées avec le maillage le plus fin, ce dernier étant imposé par la mémoire relativement réduite des GPU installées dans le ordinateur employé. Ainsi, la discrétisation du champ acoustique au voisinage de la source aurait nécessité un nombre de nœuds au moins vingt-sept fois plus élevé pour assurer un niveau de précision équivalent à celui des calculs réalisés dans cette thèse. L'extension du modèle de diffusion acoustique élaboré dans le chapitre 5 à des inhomogénéités tridimensionnelles est également possible à brève échéance. Une étude plus détaillée de la diffraction au niveau des caustiques est par ailleurs requise pour une compréhension plus fine de la pénétration du champ acoustique dans les zones d'ombre. Enfin, la prise en compte de la topographie, de la turbulence de l'écoulement atmosphérique ainsi que des ondes de gravité est à envisager dans les travaux futurs.

## ANNEXE A

# Développements analytiques

## Spectre d'une onde en « N »

Le spectre physique  $\mathcal{E}_q = 2|\hat{q}|^2$  d'une onde en « N » de la forme

$$q(t_r) = \begin{cases} -\frac{Q}{T}t_r & t_r \in ]-T, +T[ \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

est donné par l'expression

$$\mathcal{E}_q = \frac{2Q^2}{T^2} \left[ \frac{T \cos(2\pi fT)}{\pi f} - \frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi^2 f^2} \right]^2$$

et les maxima diminuent en suivant le comportement asymptotique  $\sim f^{-2}$  lorsque la fréquence  $f$  tend vers  $+\infty$ .

## Solution de l'équation des ondes

Dans ce paragraphe, le problème représenté sur la figure A.1 est analysé : une onde acoustique est émise par une source placée au niveau du sol dans une atmosphère homogène et au repos ; les effets non linéaires, visqueux et thermiques sont supposés négligeables. Sous ces hypothèses, le système (3.15) se réduit à l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} = (\gamma - 1) \frac{\partial \Lambda_{\rho e t}}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

La perturbation de pression  $p'$  doit se comporter comme une onde sortante lorsque le rayon  $r = \|\mathbf{x}\|$  tend vers l'infini.

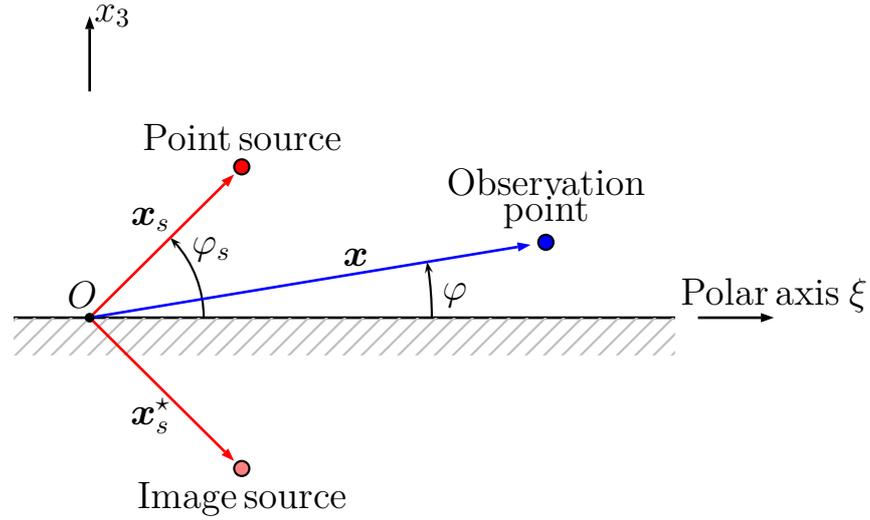


FIGURE A.1: Excitation du mode acoustique par une source d'énergie et de masse.

Par ailleurs, une condition au niveau du sol doit être imposée. En l'absence d'effet visqueux et thermiques, seule la vitesse verticale  $u'_3$  s'annule pour  $x_3 = 0$ , ce qui se traduit, lorsque la gravité est négligée, par l'expression

$$\left. \frac{\partial p'}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0$$

Soient

$$\Lambda_{\rho e t}(\mathbf{x}, t) = \frac{F(t)}{(\gamma - 1)V_s} e^{-\log(2)\|\mathbf{x}\|^2/b_s^2} \quad V_s = \frac{\pi\sqrt{\pi}b_s^3}{2\log(2)\sqrt{\log(2)}}$$

la source acoustique, de demi-largeur  $b_s$  et de volume  $V_s$ , et  $\hat{p}(\mathbf{x}, t)$  la transformée de Fourier temporelle de  $p'(\mathbf{x}, t)$

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p'(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt$$

La transformée de Fourier inverse  $p'(\mathbf{x}, t)$  est donnée par

$$p'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

La fonction  $\hat{p}(\mathbf{x}, \omega)$  vérifie l'équation de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\omega^2}{\bar{c}^2} \hat{p} = -\frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{\bar{c}^2} \frac{e^{-\log(2)\|\mathbf{x}\|^2/b_s^2}}{V_s}$$

où  $\hat{\mathcal{F}}(\omega)$  est la transformée de Fourier temporelle de  $dF/dt$ . La fonction de Green  $\mathcal{G}$  adaptée à la condition de paroi pour une source ponctuelle  $-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$  placée au point  $\mathbf{x}_s$  s'écrit<sup>65</sup>

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = \frac{e^{i\omega\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s\|/\bar{c}}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s\|} + \frac{e^{i\omega\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s^*\|/\bar{c}}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s^*\|}$$

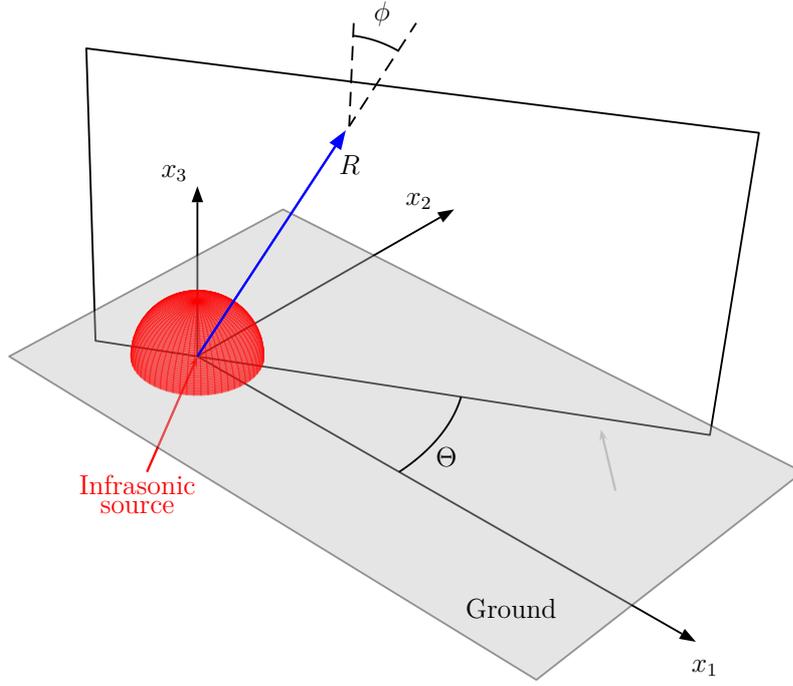


FIGURE A.2: Coordonnées sphériques.

où  $\mathbf{x}_s^*$  désigne le point image. Il s'ensuit que

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{\bar{c}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{e^{i\omega\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s\|/\bar{c}}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s\|} + \frac{e^{i\omega\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s^*\|/\bar{c}}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s^*\|} \right] \frac{e^{-\log(2)\|\mathbf{x}_s\|^2/b_s^2}}{V_s} d\mathbf{x}_s$$

Cette intégrale peut se réécrire de la manière suivante

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{\bar{c}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s\|/\bar{c}}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s\|} \frac{e^{-\log(2)\|\mathbf{x}_s\|^2/b_s^2}}{V_s} d\mathbf{x}_s \quad (\text{A.2})$$

Ce résultat traduit le fait que le champ acoustique généré par une source demi-sphérique sur une plaque plane est égal à celui produit par une source sphérique en milieu libre. Lorsque  $b_s \rightarrow 0$ , le terme  $e^{-\log(2)\|\mathbf{x}_s\|^2/b_s^2}/V_s$  tend vers une distribution de Dirac d'amplitude double,  $2\delta(\mathbf{x}_s)$ , et

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = 2 \times \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{\bar{c}^2} \frac{e^{i\omega r/\bar{c}}}{4\pi r}$$

Le cas avec  $b_s = 0$  est traité dans la thèse de Dragna.<sup>56</sup> En effectuant le changement de variables  $\mathbf{X} = \mathbf{x}_s - \mathbf{x}$ , il vient

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{\bar{c}^2 V_s} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\|\mathbf{X}\|/\bar{c}} e^{-\log(2)\|\mathbf{X}+\mathbf{x}\|^2/b_s^2}}{4\pi\|\mathbf{X}\|} d\mathbf{X}$$

Afin de calculer les intégrales, les coordonnées sphériques  $(R, \Theta, \phi)$ , avec  $R \in [0, +\infty[$ ,  $\Theta \in [0, 2\pi[$ ,  $\phi \in [0, \pi[$ , sont utilisées (c.f. figure A.2). Par ailleurs, le problème étant à symétrie

sphérique, le champ acoustique ne dépend que de la distance  $r$  et il suffit de déterminer le résultat dans une direction quelconque. Sur l'axe  $x_3$ , la pression  $\hat{p}(\mathbf{x}, \omega)$  est donnée par

$$\hat{p}(0, 0, x_3, \omega) = \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{4\pi\bar{c}^2V_s} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{i\omega R/\bar{c}} e^{-\log(2)(R^2+x_3^2+2Rx_3\cos(\phi))/b_s^2} R \sin(\phi) dR d\Theta d\phi$$

Les intégrales par rapport aux variables  $\Theta$  et  $\phi$  peuvent être aisément calculées. Ainsi,

$$\begin{aligned} p(0, 0, x_3, \omega) &= \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{2\bar{c}^2V_s} \int_0^{+\infty} e^{i\omega R/\bar{c}} e^{-\log(2)(R^2+x_3^2)/b_s^2} R \left[ \int_0^\pi e^{-2\log(2)Rx_3\cos(\phi)/b_s^2} \sin(\phi) d\phi \right] dR = \\ &= \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{2\pi\bar{c}^2x_3} \sqrt{\frac{\log(2)}{\pi b_s^2}} \int_0^{+\infty} e^{i\omega R/\bar{c}} \left[ e^{-\log(2)(R-x_3)^2/b_s^2} - e^{-\log(2)(R+x_3)^2/b_s^2} \right] dR \end{aligned}$$

En définissant la fonction

$$\Xi(z, \omega) = \int_z^{+\infty} e^{i\omega\xi/\bar{c}} e^{-\log(2)\xi^2/b_s^2} d\xi$$

la solution  $\hat{p}(0, 0, x_3, \omega)$  s'écrit

$$\hat{p}(0, 0, x_3, \omega) = 2 \times \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{4\pi\bar{c}^2} \sqrt{\frac{\log(2)}{\pi b_s^2}} \left[ \frac{e^{i\omega x_3/\bar{c}}}{x_3} \Xi(-x_3, \omega, b_s) - \frac{e^{-i\omega x_3/\bar{c}}}{x_3} \Xi(x_3, \omega, b_s) \right]$$

Plus généralement, le champ de pression  $\hat{p}(\mathbf{x}, \omega)$  à une distance  $r$  dans une direction quelconque vaut

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = 2 \times \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{4\pi\bar{c}^2} \sqrt{\frac{\log(2)}{\pi b_s^2}} \left[ \frac{e^{i\omega r/\bar{c}}}{r} \Xi(-r, \omega, b_s) - \frac{e^{-i\omega r/\bar{c}}}{r} \Xi(r, \omega, b_s) \right]$$

Lorsque  $r \rightarrow +\infty$ , la fonction  $\Xi(r, \omega, b_s)$  s'annule, alors que le terme  $\Xi(-r, \omega, b_s)$  tend vers la transformée de Fourier d'une gaussienne

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \Xi(-r, \omega, b_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\xi/\bar{c}} e^{-\log(2)\xi^2/b_s^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi b_s^2}{\log(2)}} e^{-\omega^2 b_s^2 / (4 \log(2) \bar{c}^2)}$$

En conséquence, il vient

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = 2 \times \frac{\hat{\mathcal{F}}(\omega)}{4\pi\bar{c}^2} \frac{e^{i\omega r/\bar{c}}}{r} e^{-\omega^2/\omega_c^2}$$

où  $\omega_c = 2 \log(2) \bar{c} / b_s$ . Ainsi, l'enveloppe gaussienne agit comme un filtre passe-bas, dont la pulsation de coupure est donnée par  $\omega_c$ .

## Réflexion d'une onde sphérique par une couche inhomogène

Dans cette section, le problème représenté schématiquement sur la figure A.3 est considéré : une onde sphérique est émise par une source ponctuelle placée à l'origine des coordonnées  $O$

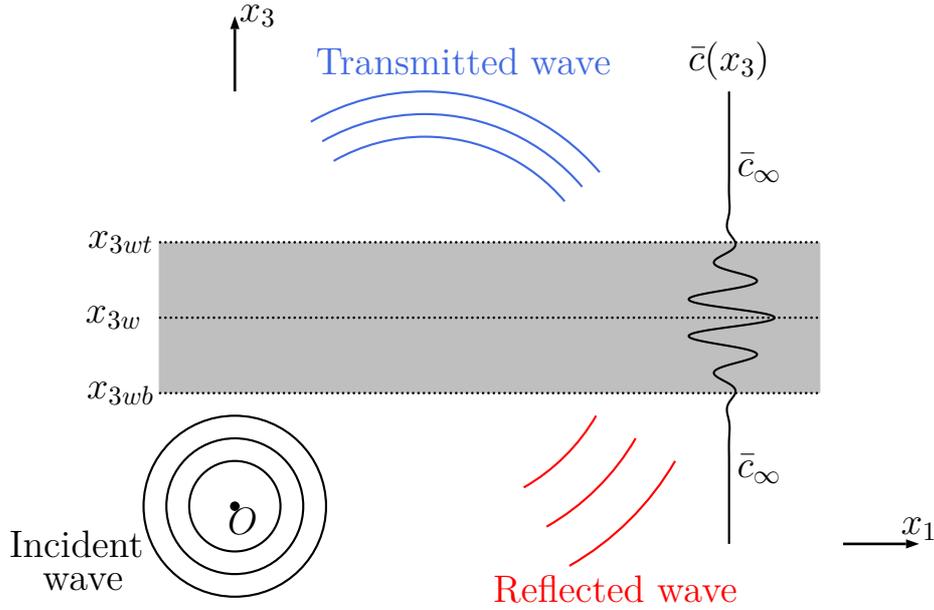


FIGURE A.3: Propagation d'une onde sphérique au travers d'une inhomogénéité de vitesse du son.

dans un milieu infini  $Ox_1x_2x_3$  et au repos, et traverse une zone inhomogène, localisée entre les altitudes  $x_{3wb}$  et  $x_{3wt}$ . Les effets non linéaires, visqueux et thermiques sont négligés. Ainsi, le champ de pression acoustique  $\Phi = p'/\sqrt{\bar{\rho}}$  peut être décrit par l'équation de Bergmann<sup>12</sup>

$$-\frac{\omega_{ac}^2}{\bar{c}^2(x_3)}\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_i} - \frac{1}{\bar{c}^2(x_3)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{F(t)}{\sqrt{\bar{\rho}(x_3)}}\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \quad (\text{A.3})$$

où  $F(t)$  indique l'enveloppe temporelle de l'impulsion et

$$\omega_{ac} = \bar{c} \sqrt{-\frac{1}{2\bar{\rho}}\frac{d^2\bar{\rho}}{dx_3^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dx_3}\right)^2}$$

est la pulsation de coupure acoustique. En multipliant l'expression (A.3) par  $e^{-i(k_1x_1+k_2x_2-\omega t)}/(2\pi)^{3/2}$  et en l'intégrant par rapport aux variables  $x_1$ ,  $x_2$  et  $t$ , l'équation suivante est obtenue

$$\frac{d^2\hat{\Phi}}{dx_3^2} + \left[ \frac{\omega^2}{\bar{c}^2(x_3)} - \frac{\omega_{ac}^2}{\bar{c}^2(x_3)} - k_\rho^2 \right] \hat{\Phi} = -\frac{\hat{F}(\omega)}{2\pi\sqrt{\bar{\rho}(x_3)}}\delta(x_3) \quad (\text{A.4})$$

où  $k_\rho = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  est le nombre d'onde polaire et  $\hat{\Phi}$  et  $\hat{F}$  représentent les transformées de Fourier des fonctions  $\Phi$  et  $F$

$$\hat{\Phi}(k_1, k_2, x_3, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x_1, x_2, x_3, t) e^{-i(k_1x_1+k_2x_2-\omega t)} dx_1 dx_2 dt$$

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\omega t} dt$$

Les transformées inverses sont données par

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(k_1, k_2, x_3, \omega) e^{+i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega$$

$$F(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

La vitesse du son  $\bar{c}$  est constante partout et égale à  $\bar{c}_\infty$  sauf dans la région inhomogène. Par conséquent, en supposant que cette dernière se trouve loin de la source,  $x_{3wb} \gg 0$ , en négligeant le terme  $\omega_{ac}$  par rapport à la pulsation  $\omega$ , la solution pour  $x_3 \ll x_{3wb}$  peut être approchée par l'expression

$$\hat{\Phi}(k_1, k_2, x_3, \omega) = \begin{cases} \alpha_1 e^{ik_3 x_3} + \alpha_2 e^{-ik_3 x_3} & x_3 > 0 \\ \beta_1 e^{ik_3 x_3} + \beta_2 e^{-ik_3 x_3} & x_3 < 0 \end{cases}$$

où  $k_3(k_1, k_2, \omega) = \sqrt{\omega^2/\bar{c}_\infty^2 - k_\rho^2(k_1, k_2)}$  est le nombre d'onde vertical. Les constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  doivent être déterminées en appliquant la condition de rayonnement à l'infini et des relations de raccordement au niveau de la source. Tout d'abord, la solution  $\hat{\Phi}$  doit se comporter comme une onde sortante pour  $x_3 \rightarrow -\infty$ . Il s'ensuit que  $\beta_1 = 0$ . Par ailleurs, pour  $x_3 \rightarrow 0^+$ , le rapport  $\alpha_2/\alpha_1$  doit correspondre au coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_c$  pour une onde plane  $e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)}$  incidente sur la couche inhomogène. De plus, la fonction  $\hat{\Phi}$  doit être continue en  $x_3 = 0$ , ce qui implique l'expression  $\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_2 = 0$ . Enfin, en intégrant l'équation (A.4) dans l'intervalle  $[-x_{3\epsilon}, +x_{3\epsilon}]$  et en prenant la limite pour  $x_{3\epsilon} \rightarrow 0$ , la relation de saut suivante est obtenue

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^+} \frac{d\hat{\Phi}}{dx_3} - \lim_{x_3 \rightarrow 0^-} \frac{d\hat{\Phi}}{dx_3} = -\frac{\hat{F}}{2\pi\sqrt{\rho_g}}$$

d'où la condition  $\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 = i\hat{F}/(2\pi\sqrt{\rho_g}k_3)$ . Ainsi, pour  $x_3 \ll x_{3wb}$ , la solution  $\hat{\Phi}$  est donnée par

$$\hat{\Phi}(k_1, k_2, x_3, \omega) = \frac{i\hat{F}(\omega)}{4\pi\sqrt{\rho_g}k_3(k_1, k_2, \omega)} \left[ e^{ik_3(k_1, k_2, \omega)|x_3|} + \mathcal{R}_c e^{-ik_3(k_1, k_2, \omega)x_3} \right] \quad (\text{A.5})$$

Par conséquent, la transformée de Fourier temporelle  $\hat{\Phi}(\mathbf{x}, \omega)$  du champ acoustique  $\Phi$  au dessous de la couche peut s'écrire comme somme de l'onde incidente  $\hat{\Phi}_i$

$$\hat{\Phi}_i(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\hat{F}(\omega)}{4\pi\sqrt{\rho_g}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i e^{+i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3(k_1, k_2, \omega)|x_3|)}}{2\pi k_3(k_1, k_2, \omega)} dk_1 dk_2 \quad (\text{A.6})$$

qui existerait aussi en l'absence de l'inhomogénéité, et de l'onde réfléchie  $\hat{\Phi}_r$

$$\hat{\Phi}_r(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\hat{F}(\omega)}{4\pi\sqrt{\rho_g}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\mathcal{R}_c e^{+i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_3(k_1, k_2, \omega)x_3)}}{2\pi k_3(k_1, k_2, \omega)} dk_1 dk_2 \quad (\text{A.7})$$

L'intégrale double dans l'expression (A.6) est égale à la fonction de Green en champ libre<sup>26, 65</sup>

$$\frac{e^{i\omega r/\bar{c}_\infty}}{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i e^{+i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3(k_1, k_2, \omega)|x_3|)}}{2\pi k_3(k_1, k_2, \omega)} dk_1 dk_2 \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

décrivant l'onde sphérique, de centre l'origine des coordonnées  $O$ , produite en milieu homogène par une source ponctuelle harmonique de pulsation  $\omega$ . En conséquence, il vient

$$\Phi_i(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{F}(\omega)}{\sqrt{\rho_g}} \frac{e^{-i\omega(t-r/\bar{c}_\infty)}}{4\pi r} d\omega = \frac{F(t-r/\bar{c}_\infty)}{4\pi\sqrt{\rho_g}r}$$

Il s'ensuit que le signal de pression normalisée  $\Phi_i$  est advecté dans l'espace à la vitesse du son  $\bar{c}_\infty$ , sa forme est donnée par la fonction  $F$  et son amplitude décroît proportionnellement au terme  $1/r$ .

Le signal réfléchi est une somme d'onde planes  $e^{+i(k_1x_1+k_2x_2-k_3(k_1,k_2,\omega)x_3)}$ , de pulsation  $\omega$  et de nombres d'onde  $k_1$ ,  $k_2$  et  $-k_3$ , pondérées par le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_c$ , qui traduit l'effet de la couche inhomogène. Ce dernier dépend de l'angle d'incidence  $\varphi = \text{atan}(k_3/k_\rho)$  et de la pulsation  $\omega$ , et peut être déterminé à partir des résultats de la théorie de la réflexion.<sup>25,26,96-99</sup> Plus précisément, pour une onde plane  $e^{+i(k_1x_1+k_2x_2-k_3(k_1,k_2,\omega)x_3)}$  donnée, il est défini par la limite

$$\mathcal{R}_c = \lim_{x_3 \rightarrow -\infty} r_c(x_3) e^{2i\tilde{k}_3(x_3)x_3}$$

où le nombre d'onde  $\tilde{k}_3$  s'écrit

$$\tilde{k}_3^2(x_3) = \frac{\omega^2}{\bar{c}^2(x_3)} - \frac{\omega_{ac}^2}{\bar{c}^2(x_3)} - k_\rho^2 = \frac{\omega^2}{\bar{c}^2(x_3)} - \frac{\omega_{ac}^2}{\bar{c}^2(x_3)} - \frac{\omega^2}{\bar{c}_\infty^2} \cos^2(\varphi)$$

et la fonction  $r_c(x_3)$  vérifie l'équation de Riccati

$$\frac{dr_c}{dx_3} + 2i\tilde{k}_3 r_c - \frac{1}{2\tilde{k}_3} \frac{d\tilde{k}_3}{dx_3} (1 - r_c) = 0$$

avec la condition

$$\lim_{x_3 \rightarrow +\infty} r_c = 0$$

Une approximation du coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_c$  est donnée par l'intégrale<sup>96</sup>

$$\mathcal{R}_c = \frac{i}{2k_3} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{k}_3^2(x_3) - k_3^2] e^{2ik_3x_3} dx_3$$

Ainsi, si le profil de vitesse du son  $\bar{c}$  est symétrique par rapport à un axe  $x_{3w}$  et si seules les variations de masse volumique dues au gradient de température sont prises en compte, le terme  $\mathcal{R}_c$  s'écrit comme produit d'un coefficient imaginaire pur  $\mathcal{R}$  et de l'exponentiel  $e^{2ik_3x_{3w}}$ . L'onde réfléchie  $\hat{\Phi}_r$  est alors donnée par

$$\hat{\Phi}_r(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\hat{F}(\omega)}{4\pi\sqrt{\rho_g}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\mathcal{R} e^{+i[k_1x_1+k_2x_2-k_3(k_1,k_2,\omega)(x_3-2x_{3w})]}}{2\pi k_3(k_1, k_2, \omega)} dk_1 dk_2 \quad (\text{A.8})$$

En utilisant la méthode de la phase stationnaire, l'approximation suivante est obtenue<sup>26</sup>

$$\hat{\Phi}_r(\mathbf{x}, \omega) \simeq \frac{\hat{F}(\omega)}{\sqrt{\rho_g}} \mathcal{R}(\varphi_{st}, \omega) \frac{e^{-i\omega r_\star/\bar{c}_\infty}}{4\pi r_\star} \quad (\text{A.9})$$

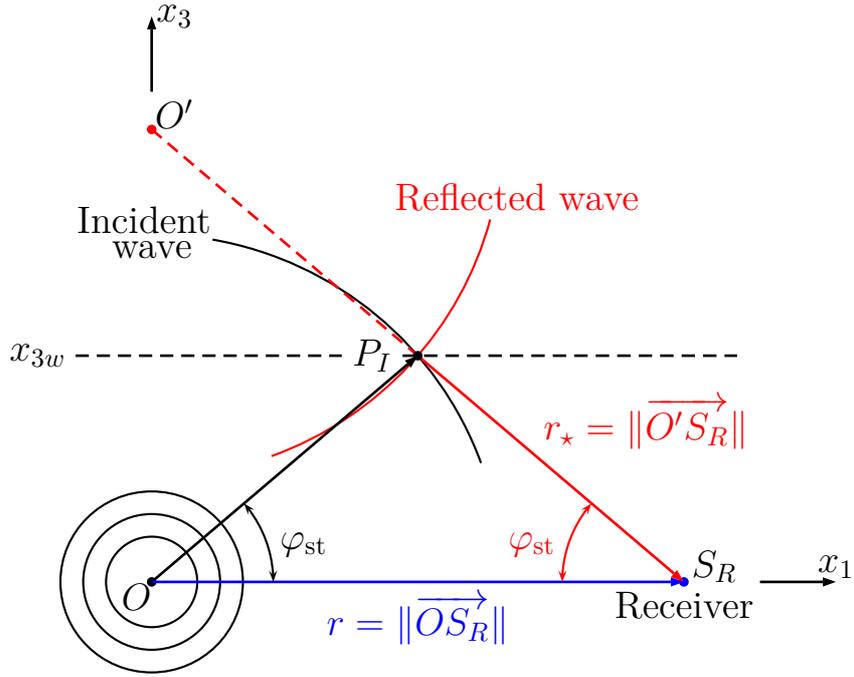


FIGURE A.4: Propagation d'une onde sphérique au travers d'une couche inhomogène.

avec

$$\varphi_{st} = \text{atan} \left( \frac{2x_{3w}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)$$

$$r_* = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 2x_{3w})^2}$$

Comme illustré sur la figure A.4, la variable  $\varphi_{st}$  indique l'angle par rapport au plan horizontal formé par le rayon acoustique qui relie la source  $O$  avec le point d'intersection entre le front sphérique incident et l'axe de symétrie  $x_3 = x_{3w}$  du profil de vitesse du son. Le terme  $r_*$  est enfin la distance entre le point image  $O'$ , situé à l'altitude  $x_3 = 2x_{3w}$ , et le récepteur  $S_R$ . Le champ diffusé  $\hat{\Phi}_r$  peut être ainsi interprété comme une onde sphérique émise par une source image située au point  $x_3 = 2x_{3w}$  et dont l'amplitude est proportionnelle au produit entre le spectre incident  $\hat{F}(\omega)$  et le coefficient de réflexion d'une onde plane qui impacte la couche inhomogène avec l'angle  $\varphi = \varphi_{st}$ .

## ANNEXE B

# Profils verticaux de vitesse du son et de vent

## Interpolation par splines

Les profils verticaux de vitesse du son et de vent sont définis à l'aide de *splines* cubiques. À l'altitude  $x_3$  entre deux points  $x_{3,j}$  et  $x_{3,j+1}$ , la valeur de la fonction  $\bar{f}$  ( $\bar{f} = \bar{c}$  ou  $\bar{f} = \bar{u}_1$ ) est calculée par la relation

$$\bar{f}(x_3) = a\bar{f}_j + b\bar{f}_{j+1} + \frac{1}{6} \left[ (a^3 - a)\bar{f}_j'' + (b^3 - b)\bar{f}_{j+1}'' \right] (x_{3,j+1} - x_{3,j})^2$$

Les deux paramètres  $a$  et  $b$  sont donnés par les expressions

$$a = \frac{x_{3,j+1} - x_3}{x_{3,j+1} - x_{3,j}} \quad b = 1 - a$$

Les coefficients  $\bar{f}_j$  et  $\bar{f}_j''$  sont reportés dans les tableaux B.1 et B.2.

## Coefficients pour les profils verticaux de vitesse du son et de vent

$x_3$ (km)	$\bar{c}$ (m.s <sup>-1</sup> )	$d^2\bar{c}/dx_3^2$ (m.km <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )
0.000000000000000e + 00	3.400000000000000e + 02	-1.639540523678053e + 00
1.000000000000000e + 01	3.000000000000000e + 02	+8.790810473561063e - 01
1.600000000000000e + 01	2.889000000000000e + 02	+1.941352868975181e - 01
2.000000000000000e + 01	2.900000000000000e + 02	+8.982019944782651e - 01
2.909004417261298e + 01	2.989417989417989e + 02	-2.204543728980001e + 00
3.011756710839279e + 01	2.989417989417989e + 02	+2.972429377039965e + 01
3.090180088345227e + 01	3.095238095238095e + 02	-3.121585060576602e + 01
3.192796466190961e + 01	3.084656084656085e + 02	+2.501986177253489e + 00
3.295005096839959e + 01	3.042328042328043e + 02	+3.055012752257401e + 00
3.397757390417941e + 01	3.042328042328043e + 02	+9.505981249304648e + 00
3.501325178389398e + 01	3.105820105820106e + 02	-5.389407435861188e + 00
3.655997281685354e + 01	3.148148148148148e + 02	-1.534247420542962e + 00
3.912742099898063e + 01	3.137566137566138e + 02	+8.052622073877314e - 01
4.170030581039755e + 01	3.169312169312169e + 02	+2.151922063128741e + 00
4.299150526673463e + 01	3.222222222222222e + 02	-1.176434795239093e + 00
4.505606523955147e + 01	3.296296296296296e + 02	+9.968023129236360e - 01
4.711654774040095e + 01	3.338624338624339e + 02	-7.278166698341696e + 00
4.813727488956846e + 01	3.285714285714286e + 02	-6.170468483826984e - 01
5.171457696228337e + 01	3.137566137566138e + 02	+5.411001123347637e + 00
5.378185524974516e + 01	3.232804232804233e + 02	-3.090384546865650e + 00
5.610193679918451e + 01	3.296296296296296e + 02	+2.029845826197828e + 00
5.764865783214408e + 01	3.338624338624339e + 02	-5.513652310690572e + 00
6.020659191301394e + 01	3.253968253968254e + 02	+2.285672004964651e + 00
6.250764525993885e + 01	3.169312169312169e + 02	-4.487221399815890e + 00
6.352701325178388e + 01	3.105820105820106e + 02	+9.066535574936335e + 00
6.532381923207612e + 01	3.095238095238095e + 02	-7.042458560400149e + 00
6.710839279646619e + 01	2.989417989417989e + 02	+1.181208077523607e + 00
6.991641182466870e + 01	2.851851851851852e + 02	+2.814147202626607e + 00
7.325993883792049e + 01	2.883597883597884e + 02	-8.519231796634673e - 01
9.000000000000000e + 01	2.650000000000000e + 02	+6.416137778010609e - 01
1.200000000000000e + 02	4.250000000000000e + 02	-1.781411630519833e - 01
1.600000000000000e + 02	5.800000000000000e + 02	-7.646626266885406e - 02
1.800000000000000e + 02	6.000000000000000e + 02	-4.742009788290901e - 02
2.500000000000000e + 02	5.500000000000000e + 02	-3.153877334479778e - 03
3.000000000000000e + 02	4.800000000000000e + 02	-7.589660441387253e - 04
3.500000000000000e + 02	4.100000000000000e + 02	+6.189741511034679e - 03
4.000000000000000e + 02	3.500000000000000e + 02	+0.000000000000000e + 00

$x_3$ (km)	$\bar{u}_1$ (m.s <sup>-1</sup> )	$d^2\bar{u}_1/dx_3^2$ (m.km <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )
0.000000000000000e + 00	+0.000000000000000e + 00	+4.309025121151864e - 01
1.000000000000000e + 01	+4.600000000000000e + 00	-5.858050242303728e - 01
1.500000000000000e + 01	-3.000000000000000e - 01	+9.250251211518642e - 01
2.000000000000000e + 01	+4.700000000000000e + 00	-7.382954603770842e - 01
3.119777158774373e + 01	+2.680006821670176e + 00	+1.090395728088907e + 00
3.320334261838440e + 01	+4.143255073617183e + 00	-7.512357847833268e + 00
3.409470752089136e + 01	+1.201750895344205e + 00	+1.925274557169583e + 01
3.520891364902508e + 01	+5.851401284747880e + 00	-2.305756308596126e + 01
3.587743732590529e + 01	+1.686089477573759e + 00	-2.487208882122165e + 00
3.699164345403899e + 01	-4.929566255471542e + 00	+2.337174096824546e + 01
3.855153203342618e + 01	+4.371781024387488e + 00	-3.258114771668350e + 01
3.944289693593315e + 01	-3.712580296742644e + 00	+3.710844636868570e + 01
4.011142061281336e + 01	+4.486385083281306e - 01	+7.533621129604561e + 00
4.122562674094706e + 01	+1.489420726507873e + 01	-1.007555747676175e + 01
4.233983286908078e + 01	+1.978875561366608e + 01	-1.339183101847644e + 01
4.323119777158774e + 01	+1.366357796600534e + 01	-2.966753940800420e + 00
4.389972144846796e + 01	+7.294184526178157e + 00	+7.864216976260384e + 00
4.479108635097492e + 01	+4.352680347905192e + 00	+1.661950884481265e + 01
4.590529247910862e + 01	+1.316559604343130e + 01	-5.757953381517564e + 00
4.701949860724234e + 01	+1.683565459610028e + 01	-1.844331674731374e + 01
4.813370473537604e + 01	+1.021999886305497e + 01	+2.981997751363019e + 01
4.947075208913648e + 01	+2.148121198340061e + 01	-2.952998692721545e + 01
5.036211699164345e + 01	+1.658052413165824e + 01	+9.218220916651932e + 00
5.147632311977715e + 01	+1.339343982718435e + 01	+4.641606486723338e + 00
5.325905292479108e + 01	+2.024512534818942e + 01	+1.715785296772370e + 00
5.437325905292478e + 01	+2.881314308453187e + 01	+4.364363935169290e + 00
5.548746518105850e + 01	+3.811585469842532e + 01	-1.562243797622556e + 01
5.749303621169916e + 01	+3.002808254220908e + 01	+9.136165508537825e + 00
5.949860724233983e + 01	+2.487908589619692e + 01	-1.653851657493254e + 01
6.016713091922006e + 01	+1.630561082371668e + 01	+1.284177893099056e + 01
6.128133704735376e + 01	+8.710363253936677e + 00	+1.181178590279020e + 00
6.328690807799441e + 01	+3.316468648740837e + 00	+1.538343279012490e + 00
6.551532033426183e + 01	+4.779034733670642e + 00	+2.099753686052515e + 00
6.707520891364902e + 01	+1.138650446250924e + 01	+1.371983159617831e + 00
6.818941504178272e + 01	+1.824023648456597e + 01	+7.890631369178707e - 01
6.930362116991643e + 01	+2.876743789437781e + 01	+1.322577959883326e + 01
6.997214484679665e + 01	+3.978579955659144e + 01	-8.727208666872876e + 00
7.331476323119776e + 01	+5.691842419419021e + 01	-2.084094915189972e + 00
8.000000000000000e + 01	+1.670000000000000e + 01	+6.163783285811780e - 01
9.500000000000000e + 01	-2.180000000000000e + 01	+5.264055788069713e - 01
1.100000000000000e + 02	+2.820000000000000e + 01	-3.620006438090627e - 01
1.250000000000000e + 02	+3.860000000000000e + 01	-1.344030035707204e - 01
1.400000000000000e + 02	+2.100000000000000e + 01	+1.529459914252775e - 01
1.600000000000000e + 02	+2.260000000000000e + 01	-5.850871731043091e - 02
1.800000000000000e + 02	+2.000000000000000e + 01	+1.808887781644615e - 02
2.000000000000000e + 02	+1.800000000000000e + 01	-4.846793955353664e - 03
2.200000000000000e + 02	+1.600000000000000e + 01	+1.298298004968505e - 03
2.400000000000000e + 02	+1.400000000000000e + 01	-3.463980645203562e - 04
2.600000000000000e + 02	+1.200000000000000e + 01	+8.729425311291944e - 05
2.800000000000000e + 02	+1.000000000000000e + 01	-2.778947931321590e - 06
3.000000000000000e + 02	+8.000000000000000e + 00	-7.617846138763307e - 05
3.200000000000000e + 02	+6.000000000000000e + 00	+3.074927934818539e - 04
3.400000000000000e + 02	+4.000000000000000e + 00	-1.153792712539782e - 03
3.600000000000000e + 02	+2.000000000000000e + 00	+4.307678056677275e - 03
3.800000000000000e + 02	+1.000000000000000e + 00	-1.076919514169319e - 03
4.000000000000000e + 02	+0.000000000000000e + 00	+0.000000000000000e + 00

TABLE B.1: Coefficients des *splines* cubiques pour les profils de vitesse du son et de vent avec petites échelles de l'atmosphère (PVape).

$x_3$ (km)	$\bar{c}$ (m.s <sup>-1</sup> )	$d^2\bar{c}/dx_3^2$ (m.km <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )
0.000000000000000e + 00	3.400000000000000e + 02	-1.200000000000000e + 00
1.000000000000000e + 01	3.000000000000000e + 02	+7.040957867070640e - 01
2.000000000000000e + 01	2.900000000000000e + 02	+1.836168531717430e - 01
5.000000000000000e + 01	3.300000000000000e + 02	-2.576768706936690e - 01
7.000000000000000e + 01	2.900000000000000e + 02	+1.295907371073300e - 02
9.000000000000000e + 01	2.650000000000000e + 02	+4.308405758507390e - 01
1.200000000000000e + 02	4.250000000000000e + 02	-1.281079686429520e - 01
1.600000000000000e + 02	5.800000000000000e + 02	-9.350254163772100e - 02
1.800000000000000e + 02	6.000000000000000e + 02	-4.526881288776900e - 02
2.500000000000000e + 02	5.500000000000000e + 02	-3.818244759450000e - 03
3.000000000000000e + 02	4.800000000000000e + 02	-5.818013974800000e - 04
3.500000000000000e + 02	4.100000000000000e + 02	+6.145450349370000e - 03
4.000000000000000e + 02	3.500000000000000e + 02	+0.000000000000000e + 00

$x_3$ (km)	$\bar{u}_1$ (m.s <sup>-1</sup> )	$d^2\bar{u}_1/dx_3^2$ (m.km <sup>-2</sup> .s <sup>-1</sup> )
0.000000000000000e + 00	+0.000000000000000e + 00	+0.000000000000000e + 00
1.000000000000000e + 01	+4.600000000000000e + 00	-4.234911282894900e - 01
1.500000000000000e + 01	-3.000000000000000e - 01	+8.129467697369430e - 01
2.000000000000000e + 01	+4.700000000000000e + 00	-4.522959506582810e - 01
3.000000000000000e + 01	+2.600000000000000e + 00	+2.244144671063720e - 01
4.000000000000000e + 01	+7.400000000000000e + 00	-3.136191776720700e - 02
5.000000000000000e + 01	+2.150000000000000e + 01	+4.590332039624560e - 01
5.500000000000000e + 01	+3.060000000000000e + 01	-2.199475388240323e + 00
6.000000000000000e + 01	+9.699999999999999e + 00	+1.138868348998836e + 00
6.500000000000000e + 01	+1.020000000000000e + 01	+2.780001992244981e + 00
7.000000000000000e + 01	+4.980000000000000e + 01	-2.874876317978761e + 00
8.000000000000000e + 01	+1.670000000000000e + 01	+4.966279578137930e - 01
9.500000000000000e + 01	-2.180000000000000e + 01	+5.584910192731970e - 01
1.100000000000000e + 02	+2.820000000000000e + 01	-3.705920349065820e - 01
1.250000000000000e + 02	+3.860000000000000e + 01	-1.321228796468690e - 01
1.400000000000000e + 02	+2.100000000000000e + 01	+1.524168868273910e - 01
1.600000000000000e + 02	+2.260000000000000e + 01	-5.836694416071600e - 02
1.800000000000000e + 02	+2.000000000000000e + 01	+1.805088981547200e - 02
2.000000000000000e + 02	+1.800000000000000e + 01	-4.836615101170000e - 03
2.200000000000000e + 02	+1.600000000000000e + 01	+1.295570589210000e - 03
2.400000000000000e + 02	+1.400000000000000e + 01	-3.456672556710000e - 04
2.600000000000000e + 02	+1.200000000000000e + 01	+8.709843347400001e - 05
2.800000000000000e + 02	+1.000000000000000e + 01	-2.726478224000000e - 06
3.000000000000000e + 02	+8.000000000000000e + 00	-7.619252057800000e - 05
3.200000000000000e + 02	+6.000000000000000e + 00	+3.074965605380000e - 04
3.400000000000000e + 02	+4.000000000000000e + 00	-1.153793721573000e - 03
3.600000000000000e + 02	+2.000000000000000e + 00	+4.307678325753000e - 03
3.800000000000000e + 02	+1.000000000000000e + 00	-1.076919581438000e - 03
4.000000000000000e + 02	+0.000000000000000e + 00	+0.000000000000000e + 00

TABLE B.2: Coefficients des *splines* cubiques pour les profils de vitesse du son et de vent sans petites échelles de l'atmosphère (PVSpe).

# Numerical Simulation of Infrasound Propagation in the Earth's Atmosphere : Study of a Stratospherical Arrival Pair

R. Sabatini<sup>1,2</sup>, O. Marsden<sup>1</sup>, C. Bailly<sup>1</sup> and O. Gainville<sup>2</sup>

Cet annexe reporte une étude numérique bidimensionnel du champ infrasonore produit par l'explosion du dépôt de carburant de Buncefield (UK), en 2005. Cette analyse a fait l'objet d'une présentation lors du congrès international 20th International Symposium on Nonlinear Acoustics tenu à Lyon (France), du 29 juin au 3 juillet 2015.

## Abstract

A direct numerical simulation of the two-dimensional unsteady compressible Navier-Stokes equations is performed in order to compute the sound field generated by a high-amplitude infrasonic source in a realistic stratified atmosphere and in the presence of a stratospheric wind. Nonlinear distortion as well as wind convection effects on the stratospheric arrivals recorded at ground level are investigated and discussed. Finally, a comparison with infrasonic signals collected from the vapour cloud explosion occurred at Buncefield, UK, in 2005, is also carried out.

## Introduction

Infrasonic waves propagate in the Earth's atmosphere along cyclic trajectories induced by the speed of sound and wind gradients, and can be recorded at distances of hundreds to thou-

---

1. LMFA, UMR CNRS 5509 & École Centrale de Lyon, 69134 Écully cedex, France.

2. CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France.

Corresponding author : roberto.sabatini@doctorant.ec-lyon.fr

sands of kilometres from their source.<sup>90</sup> They are typically refracted upward in the troposphere, due to the decrease of the temperature, and then refracted back towards the ground at stratospheric and thermospheric altitudes. Stratospheric arrivals are generally detected in the direction of wind jets. Furthermore, they can arrive in pairs and at very high celerities (Figure C.1(a)), the celerity being defined as the quotient between the distance source-recording station and the travel time.<sup>33</sup> A spectacular manifestation of this phenomenon was observed just after the large

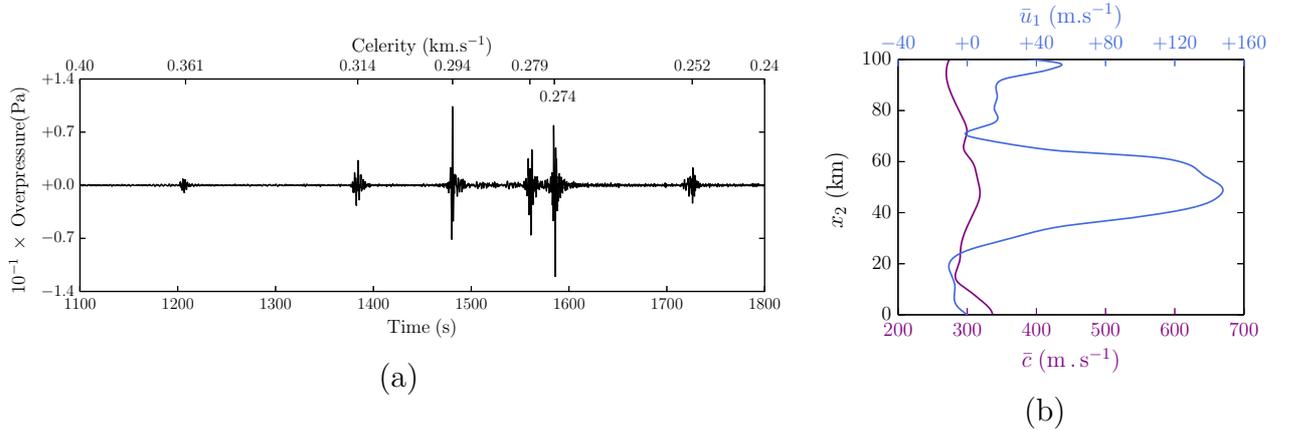


FIGURE C.1: (a) Overpressure  $p'$  recorded at the ground station DIA, located in the Netherlands at 435 km from Buncefield. (b) Speed of sound  $\bar{c}$  and horizontal wind  $\bar{u}_1$  profiles.

vapour cloud explosion occurred at the Buncefield Oil Depot, United Kingdom, in 2005.<sup>33,60,123</sup> Fast stratospheric signals with frequencies in the range [0.1 Hz, 1 Hz] were detected in the Netherlands with celerities even greater than the speed of sound at ground level. These fast arrivals were induced by a strong wind propagating eastwards with a velocity of almost 150 m.s<sup>-1</sup> at about 50 km altitude.

In the present work, a simulation of the two-dimensional unsteady compressible Navier-Stokes equations is performed to analyse the propagation of a high-amplitude infrasonic signal in a realistic stratified atmosphere constructed from the sound speed and horizontal wind profiles measured between the Buncefield source location and the DIA infrasound array (Netherlands). A high-order finite-difference time-domain method originally developed for aeroacoustic applications is employed for the computations. Nonlinear distortion and wind effects on the stratospheric arrivals recorded at ground level are investigated. A comparison between the numerical results and the infrasonic signal detected at DIA is also presented.

## Problem statement and numerical approach

The physical two-dimensional domain extends up to 600 km range in the main direction of the wind and 60 km altitude. The Earth's surface is modelled as a perfectly reflecting flat wall and the atmosphere as a vertically stratified medium. A Cartesian coordinate system  $Ox_1x_2$

with origin at ground level is used. Sound propagation is governed by the two-dimensional Navier-Stokes equations including possible gravity effects<sup>111</sup>

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{V}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial x_2} + \mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}_s \quad \mathbf{U} = [\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho e_t]^T \quad (\text{C.1})$$

The infrasonic source is placed at the origin of the domain and implemented as a forcing term in the energy equation, that is  $\mathbf{\Lambda}_s = [0, 0, 0, \Lambda_s]$ , with

$$\Lambda_s(x_1, x_2, t) = \mathcal{A}_s \sin(\omega_s t) [1 - \cos(\omega_s t)] \exp\left(-\log(2)(x_1^2 + x_2^2)/b_s^2\right) \quad \text{for } t \in [0, T_s]$$

In this expression,  $\mathcal{A}_s$  is the amplitude,  $b_s$  the half-width and  $f_s = \omega_s/(2\pi) = 1/T_s$  the frequency. In this work,  $b_s$  is set to 150 m and  $f_s$  to 0.4 Hz, so that the total emission duration is of  $T_s = 2.5$  seconds. Finally, the amplitude is equal to  $\mathcal{A}_s = 1.5 \times 10^5 \text{ J.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$  and is chosen to obtain an overpressure of about 3000 Pa at 2 km from the source. The mean atmosphere,  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(x_2)$ ,  $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_2)$ ,  $\bar{u}_2 \equiv 0$  and  $\bar{\rho}\bar{e}_t = \bar{\rho}(x_2)\bar{e}_t(x_2)$ , is constructed from spline-based speed of sound  $\bar{c}(x_2)$  and wind  $\bar{u}_1(x_2)$  profiles, which reproduces the large scales observed during the Buncefield explosion. Data are extracted from the ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) profiles given in Waxler *et al.*<sup>162</sup> The atmospheric temperature  $\bar{T}$  is computed according to the expression  $\bar{T}(x_2) = \bar{c}(x_2)^2/(\gamma r)$ , whereas the pressure profile  $\bar{p}$  is obtained by solving the hydrostatic equilibrium equation  $d\bar{p}/dx_2 = -g\bar{p}/(r\bar{T})$ . Finally, the density  $\bar{\rho}$  is given by  $\bar{\rho} = \bar{p}/(r\bar{T})$ . Refer also to Marsden *et al.*<sup>111</sup> for further details on the present infrasound modelling.

System (C.1) is solved on a regular Cartesian grid with an optimized finite-difference time-domain algorithm.<sup>14,20</sup> Spatial discretization is performed with an explicit fourth-order 11-point centered scheme. Time integration is carried out with a six-step second-order low-storage Runge-Kutta algorithm. An explicit fourth-order 11-point stencil spatial low-pass filter is applied to ensure stable computations. A shock-capturing procedure is employed to handle acoustic shocks which are generated during propagation.<sup>21</sup> Moreover, a moving domain technique is used to reduce the computing time and memory.<sup>146</sup> A regular grid with spacing  $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 25$  m and a time step  $\Delta t = 0.02$  s are adopted. The horizontal moving frame contains  $7680 \times 2816 \sim 22$  million points and allows to cover a net range of 200 km. The numerical algorithm is implemented in the OpenCL environment and executed on a AMD Radeon R9 200 Series GPU (Graphics Processing Unit) with a memory allocation limit of 4 GB. The computation is carried out up to  $t_{\max} = 2000$  s, requiring a total computational cost of about 24 hours.

## Results

The amplitude of the acoustic fluctuations is proportional to the square root of the local mean density.<sup>12</sup> The following normalized pressure variable is thus defined  $\Phi = (p - \bar{p})/\sqrt{\bar{\rho}}$ . Some snapshots of the field  $\Phi$  are shown in Figure C.2(a). Owing to the variations with height

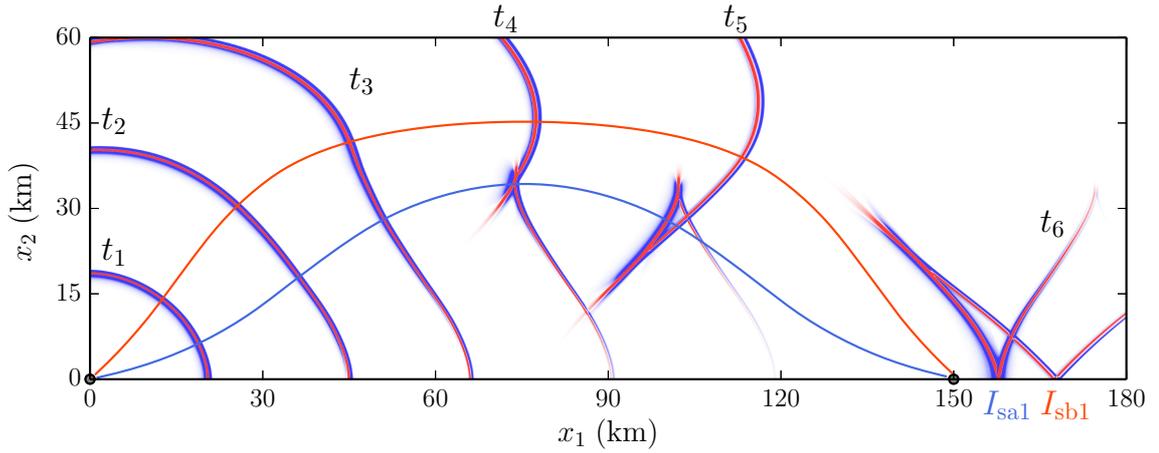


FIGURE C.2: Snapshots of the overpressure  $\Phi$  at different time instants (wavefronts  $t_1$  to  $t_6$ )

of the speed of sound and wind, acoustic waves are continuously refracted while propagating through the atmosphere. The wavefront released by the infrasonic source rapidly loses its initial cylindrical shape and a waveguide is generated between the Earth's surface and about 40 km altitude, where the effective speed of sound,  $\bar{c}_e = \bar{c} + \bar{u}_1$ , becomes greater than its value at the ground. This waveguide effect is induced by the strong stratospheric wind. At  $t = t_4 = 250$  s, a cusp caustic is observed, see also Figure C.2. The acoustic rays which have reached the stratosphere turn now towards the Earth surface. The refracted wave consists of two wavefronts generated by the lower and higher stratospheric rays. They are clearly visible at  $t = t_6 = 520$  s, where the upper arrival  $I_{sb1}$  precedes the lower one  $I_{sa1}$ .

The evolution of the acoustic signature along the  $x_2$ -axis is illustrated in Figures C.3(a) and C.3(b). Near the ground, at the point  $B_1 = (0 \text{ km}, 2 \text{ km})$ , the signal emitted by the in-

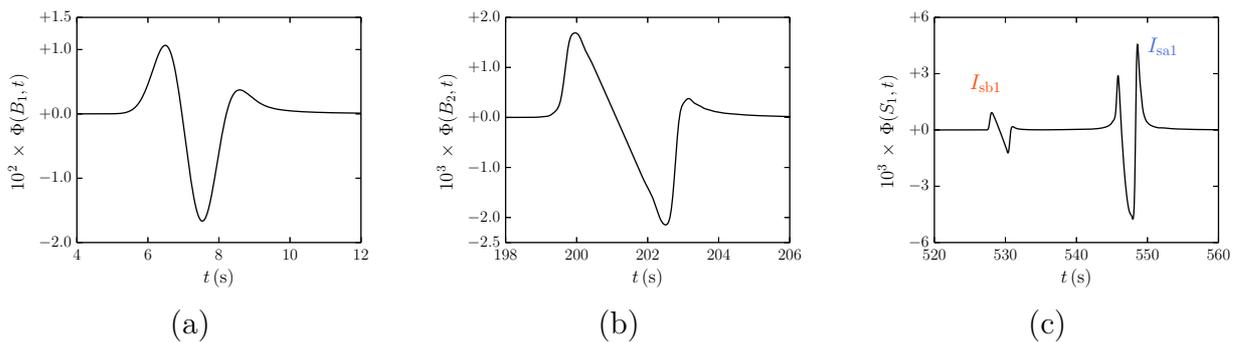


FIGURE C.3: Overpressure  $\Phi$  at  $B_1 = (0 \text{ km}, 2 \text{ km})$  (a), at  $B_2 = (0 \text{ km}, 40 \text{ km})$  (b) and at  $S_1 = (150 \text{ km}, 0 \text{ km})$  (c).

fasonic source exhibits a smooth sinusoidal shape with a central frequency  $f_c$  around 0.34. At higher altitudes, as a consequence of the large amplitude and the reduction with height of the mean density, non-linearities become important and shocks are generated. At the point

$B_2 = (0 \text{ km}, 40 \text{ km})$ , an N-wave is observed, with a duration almost doubled.

The signal recorded at the ground station  $S_1 = (150 \text{ km}, 0 \text{ km})$  is plotted in Figure C.3(c). The two stratospheric arrivals  $I_{sa1}$  and  $I_{sb1}$  are well separated. In particular, the higher phase  $I_{sb}$  is detected slightly earlier than the lower signal  $I_{sa1}$ , even though it propagates on a longer path (Figure C.2). This effect is induced by the stratospheric wind speed, which is larger on the higher stratospheric rays. Finally, the lower arrival  $I_{sa1}$  exhibits the typical U-shaped waveform of an N-wave having passed through a caustic.

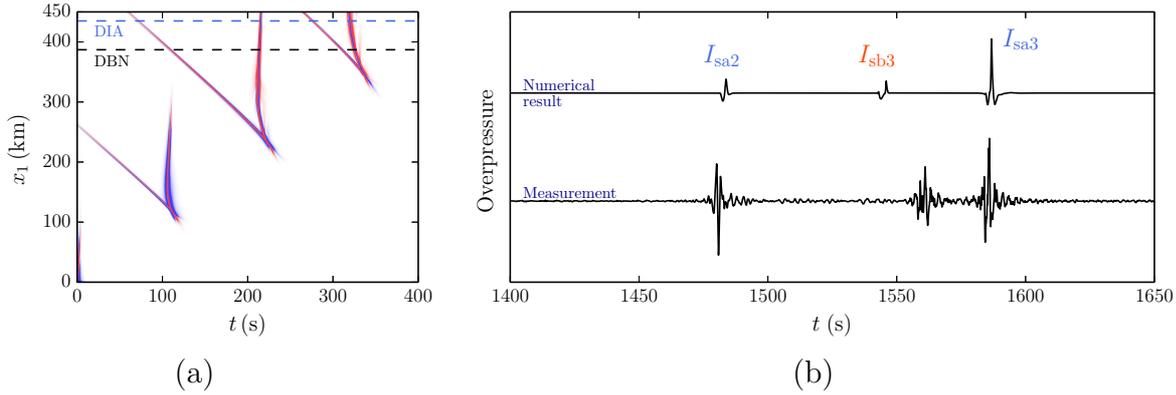


FIGURE C.4: Numerical prediction of the overpressure detected at the DIA ground station (upper signal) and recorded data

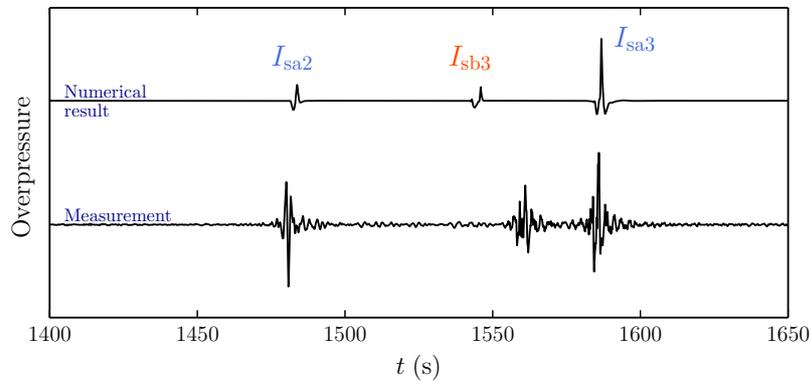


FIGURE C.5: Numerical prediction of the overpressure detected at the DIA ground station (upper signal) and recorded data

The overpressure detected at the DIA ground station is plotted in Figure C.5 along with the recorded data. The numerical prediction on the travel times globally agrees with measurements. The largest misfits are found on the amplitude and waveforms of the different phases. Since the computation is performed in a two-dimensional frame, nonlinear effects are overestimated. More specifically, shock formation in the initial vertical propagation occurs at low altitude and the duration of the phases is consequently lengthened. However, it should be noted that the

amplitude of the real source is not known and the value of 3000 Pa used in this work is chosen on the basis of a yield of 30  $ktn_{\text{TNT}}$ , whereas different studies may suggest lower intensities.<sup>33</sup>

## Conclusion

The propagation of infrasonic signals in a realistic atmosphere and in the presence of a strong stratospheric wind is investigated in this work. A direct numerical simulation of the two-dimensional Navier-Stokes equations is performed to calculate the acoustic field. An optimized finite-difference time-domain method originally developed for aeroacoustic applications coupled with a moving frame technique is employed. Pairs of stratospheric arrivals are recorded at ground levels. At particular distances from the source, it is found that, in spite of a longer path length, the higher phase arrives earlier than the lower signal. All the physical phenomena involved in long-range infrasound propagation are included in the present modelling. This is however a first step towards three-dimensional simulations.

## Acknowledgments

Present results have been obtained within the frame of LETMA (Laboratoire Études et Modélisation Acoustique), Contractual Research Laboratory between CEA, CNRS, École Centrale de Lyon, C-Innov and Université Pierre et Marie Curie. This work was granted access to the HPC resources of the Très Grand Centre de calcul du CEA (TGCC). The first author thanks the Direction Générale de l'Armement (DGA) for the financial support and the Labex CeLya of Université de Lyon.

# Bibliographie

- [1] Air Force Geophysics Directorate, “Handbook of Geophysics”, The Macmillan Company, New York, 1960.
- [2] J. D. Assink, R. Waxler, W. G. Frazier & J. Lonzaga, “The estimation of upper atmospheric wind model updates from infrasound data,” *J. Geophys. Res. Atmos.*, **118**, 10707–10724, 2013.
- [3] J. D. Assink, A. Le Pichon, E. Blanc, M. Kallel & L. Khemiri, “Evaluation of wind and temperature profiles from ECMWF analysis on two hemispheres using volcanic infrasound,” *J. Geophys. Res. Atmos.*, **119**, 8659–8683, 2014.
- [4] M. V. Averyanov, V. A. Khokhlova, O. A. Sapozhnikov, Ph. Blanc-Benon & R. O. Cleveland, “Parabolic equation for nonlinear acoustic wave propagation in inhomogeneous moving media,” *Acoustic. Phys.*, **52**(6), 623–632, 2006.
- [5] C. Bailly & G. Comte-Bellot, *Turbulence*. Springer, Cham 2015.
- [6] H. E. Bass, C. H. Hetzer & R. Raspet, “On the speed of sound in the atmosphere as a function of altitude and frequency.” *J. Geophys. Res. Atmos.*, **112**(D15), 2007.
- [7] A. Bayliss & E. Turkel, “Far field boundary conditions for compressible flows,” *J. Comput. Phys.*, **48**, 182–199, 1982.
- [8] A.J. Bedard & T.M. Georges, “Atmospheric infrasound,” *Physics Today*, **53**(3), 32–37 (2000).
- [9] Ph. Blanc-Benon, L. Dallois & D. Juvé, “Long range sound propagation in a turbulent atmosphere within the parabolic approximation,” *Acta Acust.*, **87**, 659–669, 2001.
- [10] Ph. Blanc-Benon, B. Lipkens, L. Dallois, M. Hamilton & D. T. Blackstock, “Propagation of finite amplitude sound through turbulence : modeling with geometrical acoustics and the parabolic approximation,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **111**(1), 487–498 (2002).
- [11] Ph. Blanc-Benon, “Outdoor sound propagation modelling in complex environments : recent developments in the parabolic equation method,” RTO-MP-SET-107, 2006.

- [12] P.G. Bergmann, “The wave equation in a medium with a variable index of refraction,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **17**(4), 329–333 (1946).
- [13] J. Berland, C. Bogey, & C. Bailly, “Low-dissipation and low-dispersion fourth-order Runge-Kutta algorithm,” *Comp. Fluids*, **35**, 1459–1463, 2006.
- [14] J. Berland, C. Bogey & C. Bailly, “High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multi-scale and boundary problems,” *J. Comput. Phys.*, **224**(2), 637–662, 2007.
- [15] M. Bertin, C. Millet & D. Bouche, “A low-order reduced model for the long range propagation of infrasounds in the atmosphere,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **136**(1), 37–52, 2014.
- [16] E. Blanc, “Observations in the upper atmosphere of infrasonic waves from natural or artificial sources : a summary,” *Annales Geophysicae.*, **3**, 673–688, 1985.
- [17] E. Blanc, A. Le Pichon, L. Ceranna, T. Farges, J. Marty & P. Herry, “Global scale monitoring of acoustic and gravity waves for the study of the atmospheric dynamics,” In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, Springer, Dordrecht, Chap. 21, pp. 647–664, 2010.
- [18] C. Bogey, “Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides”, PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, No. 2000-11, 2000.
- [19] C. Bogey & C. Bailly, “Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations : far field formulation and validation test cases,” *Acta Acust. Unit. Ac.*, **88**, 463–471, 2002.
- [20] C. Bogey & C. Bailly, “A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for noise computations,” *J. Comput. Phys.*, **194**(1), 194–214, 2004.
- [21] C. Bogey, N. De Cacqueray & C. Bailly, “A shock-capturing methodology based on adaptive spatial filtering for high-order nonlinear computations,” *J. Comput. Phys.*, **228** 1447–1465, 2009.
- [22] R. Borges, M. Carmona, B. Costa and W. S. Don, “An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws,” *J. Comput. Phys.*, **227**, 3191–3211 (2008).
- [23] D. Bouche, F. Molinet, & R. Mittra, *Asymptotic Methods in Electromagnetics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [24] N. Brachet, D. Brown, R. Le Bras, Y. Cansi, P. Mialle, J. Coyne, “Monitoring the Earth’s atmosphere with the global IMS infrasound network,” In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, Springer, Dordrecht, Chap. 3, pp. 77–118, 2010.
- [25] L. M. Brekhovskikh & O. A. Godin, *Acoustics of layered media I*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- [26] L. M. Brekhovskikh & O. A. Godin, *Acoustics of layered media II*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

- [27] R. N. Buchal & J. B. Keller, “Boundary layer problems in diffraction theory,” *Comm. Pure Appl. Math.*, **13**(1) 85–114, 1960.
- [28] M. J. Buckingham & E. M. Giddens, “On the acoustic field in a Pekeris waveguide with attenuation in the bottom half-space,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **119**(1), 123–142, 2006.
- [29] M. J. Buckingham & E. M. Giddens, “Theory of sound propagation from a moving source in a three-layer Pekeris waveguide,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **120**(4), 1825–1841, 2006.
- [30] P. Campus & D. R. Christie, “Worldwide observations of infrasonic waves,” In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, Springer, Dordrecht, Chap. 6, pp. 185–234, 2010.
- [31] S. M. Candel, “Numerical solution of conservation equations arising in linear wave theory : application to aeroacoustics,” *J. Fluid Mech.*, **83**(3), 465–493, 1977.
- [32] J. E. Cates & B. Sturtevant, “Shock wave focusing using geometrical shock dynamics,” *Phys. Fluids*, **9**(10), 3058–3068, 1997.
- [33] L. Ceranna, A. Le Pichon, D. N. Green & P. Mialle, “The Buncefield explosion : a benchmark for infrasound analysis across Central Europe,” *Geophys. J. Int.*, **177**(2), 491–508, 2009.
- [34] D. R. Christie & P. Campus, “The IMS infrasound network : design and establishment of infrasound stations,” In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, Springer, Dordrecht, Chap. 2, pp. 29–75, 2010.
- [35] B. T. Chu & L. S. G. Kovasznay, “Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas,” *J. Fluid Mech.*, **3**(5), 494–514, 1958.
- [36] I. P. Chunchuzov, S. N. Kulichkov, O. E. Popov, R. Waxler & J. Assink, “Infrasound scattering from atmospheric anisotropic inhomogeneities,” *Iz. Atmos. Oceanic Phys.*, **47**(5), 540–557, 2011.
- [37] I. P. Chunchuzov, S. N. Kulichkov & P. P. Firstov, “On acoustic N-wave reflections from atmospheric layered inhomogeneities,” *Iz. Atmos. Oceanic Phys.*, **49**(3), 258–270, 2013.
- [38] I. P. Chunchuzov, S. N. Kulichkov, O. E. Popov & M. Hedlin, “Modeling propagation of infrasound signals observed by a dense seismic network,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **135**(1), 38–48, 2014.
- [39] I. P. Chunchuzov, S. N. Kulichkov, O. E. Popov, V. G. Perepelkin, A. P. Vasilev, A. I. Glushkov & P. P. Firstov, “Characteristics of a fine vertical wind-field structure in the stratosphere and lower thermosphere according to infrasonic signals in the zone of acoustic shadow,” *Iz. Atmos. Oceanic Phys.*, **51**(1), 57–74, 2015.
- [40] R. O. Cleveland, *Propagation of sonic booms through a real, stratified atmosphere*, PhD Dissertation, The University of Texas at Austin, 1995.
- [41] R. O. Cleveland, M. F. Hamilton & D. T. Blackstock, “Time-domain modeling of finite-amplitude sound in relaxing fluids,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **99**(6), 3312–3318, 1996.

- [42] J. D. Cole & C. Greifinger, “Acoustic-gravity waves produced by energy release,” *Rand Corp. Rept. RM-5738*, 1968.
- [43] J. D. Cole & C. Greifinger, “Acoustic-gravity waves from an energy source at the ground in an isothermal atmosphere,” *J. Geophys. Res., Space Physics*, **74**(14), 3693–3703, 1969.
- [44] F. Coulouvrat, “Théorie géométrique non linéaire de la diffraction en zone d’ombre”, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, t. **325**, Série II b, 69–75 (1997).
- [45] F. Coulouvrat, “Focusing of weak shock waves at a caustic cusp,” *Wave motion*, **32**, 233–245, 2000.
- [46] F. Coulouvrat, “Sonic boom in the shadow zone : a geometrical theory of diffraction,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **111**(1), 499–508 (2002).
- [47] L. Dallois, Ph. Blanc-Benon & D. Juvé, “A wide-angle parabolic equation for acoustic waves in inhomogeneous moving media : applications to atmospheric sound propagation,” *J. Comput. Ac.*, **9**(2), 477–494, 2001.
- [48] C. de Groot-Hedlin, “Finite-difference time-domain synthesis of infrasound propagation through an absorbing atmosphere,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **124**(3), 1430–1441, 2008.
- [49] C. de Groot-Hedlin, M. A. H. Hedlin & D. P. Drob, “Atmospheric variability and infrasound monitoring,” In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, Springer, Dordrecht, Chap. 15, pp. 475–507, 2010.
- [50] C. de Groot-Hedlin, M. A. H. Hedlin & K. Walker, “Finite difference synthesis of infrasound propagation through a windy, viscous atmosphere : application to a bolide explosion detected by seismic networks,” *Geophys. J. Int.*, **185**(1), 305–320, 2011.
- [51] C. de Groot-Hedlin, “Nonlinear synthesis of infrasound propagation through an inhomogeneous, absorbing atmosphere,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **132**(2), 646–656, 2012.
- [52] C. de Groot-Hedlin, “Long-range propagation of nonlinear infrasound waves through an absorbing atmosphere,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **139**(4), 1565–1577, 2016.
- [53] S. de Larquier, V. P. Pasko, H. C. Stenbaek-Nielse, C. R. Wilson & J. V. Olson, “Finite-difference time-domain modeling of infrasound from pulsating auroras and comparison with recent observations,” *Geophys. Res. Lett.*, **37**(L06804), 1–4, 2010.
- [54] S. Del Pino, B. Després, P. Havé, H. Jourdain, and P.F. Piserchia, “3D finite volume simulation of acoustic waves in the Earth atmosphere,” *Comput. Fluids*, **38**, 765–777, 2009.
- [55] D. Desvigne, “Bruit rayonné par un écoulement subsonique affleurant une cavité cylindrique : caractérisation expérimentale et simulation numérique par une approche multidomaine d’ordre élevé”, PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, No. 2011-35, 2011.
- [56] D. Dagna, “Modélisation par une approche temporelle de la propagation acoustique en milieu extérieur : traitement des frontières complexes et validation sur site ferroviaire”, PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, No. 2010-36, 2010.

- [57] D. Dagna & P. Blanc-Benon, “Towards realistic simulations of sound radiation by moving sources in outdoor environments,” *Int. J. Aeroacoustics*, **13**(5-6), 405–426, 2014.
- [58] A. Le Pichon, J. Vergoz, Y. Cansi, L. Ceranna & D. Drob, “Inversion of infrasound signals for passive atmospheric remote sensing,” In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, Springer, Dordrecht, Chap. 24, pp. 701–731, 2010.
- [59] B. O. Enflo & C. M. Hedberg, *Theory of Nonlinear Acoustics in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, New York, 2004.
- [60] L. G. Evers & H. W. Haak, “Infrasonic forerunners : exceptionally fast acoustic phase,” *Geophys. Res. Lett.*, **34**, L10806, 1–5, 2007.
- [61] L. G. Evers & H. W. Haak, “The characteristics of infrasound, its propagation and some early history,” In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, Springer, Dordrecht, Chap. 1, pp. 3–27, 2010.
- [62] D. Fee, R. Waxler, J. Assink, Y. Gitterman, J. Given, J. Coyne, P. Mialle, M. Garces, D. Drob, D. Kleinert, R. Hofstetter & P. Grenard, “Overview of the 2009 and 2011 Sayarim infrasound calibration experiments.” *J. Geophys. Res. Atmos.*, **118**, 6122–6143, 2013.
- [63] P. Filippi, D. Habault, J.-P. Lefebvre, A. Bergassoli, *Acoustics : Basic Physics, Theory, and Methods*. Academic Press, London, 1991.
- [64] R. G. Fleagle & J. A. Businger, *An introduction to atmospheric physics*. Academic Press, Inc., New York, 1980.
- [65] G. V. Frisk, *Ocean and seabed acoustics. A theory of wave propagation*. PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, 1994.
- [66] O. Gainville, “Modélisation de la propagation atmosphérique des ondes infrasonores par une méthode de tracé de rayons non linéaire”, PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, No. 2008-07, 2008.
- [67] O. Gainville, P. Blanc-Benon, E. Blanc, R. Roche, C. Millet, F. Le Piver, B. Despres, & P. F. Piserchia, “Misty picture : a unique experiment for the interpretation of the infrasound propagation from large explosive sources,” In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, Springer, Dordrecht, Chap. 18, pp. 575–598, 2010.
- [68] C. J. R. Garret, “Atmospheric edge waves,” *Quart. J. R. Met. Soc.*, **95**, 731–753, 1969.
- [69] O. A. Godin, “An effective quiescent medium for sound propagating through an inhomogeneous, moving fluid,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **112**(4), 1269–1275, 2002.
- [70] O. A. Godin, “Acoustic-gravity waves in atmospheric and oceanic waveguides,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **132**(2), 657–669, 2012.
- [71] J. P. Guiraud, “Acoustique géométrique, bruit balistique des avions supersoniques, focalisation,” *J. Mécanique*, **4**(2), 215–267, 1965.
- [72] M. F. Hamilton & D. T. Blackstock, *Nonlinear acoustics*. Acoustical Society of America, 2008.

- [73] A. D. Hanford & Lyle N. Long, “The direct simulation of acoustics on Earth, Mars, and Titan,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **125**(2), 640–650, 2009.
- [74] G. Hanique-Cockenpot, “Étude numérique de la propagation non linéaire des infrasons dans l’atmosphère”, PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, No. 2011-32, 2011.
- [75] M. A. H. Hedlin, D. Drob, K. Walker & C. de Groot-Hedlin, “A study of acoustic propagation from a large bolide in the atmosphere with a dense seismic network,” *J. Geophys. Res.*, **115**(B11), 1–17, 2010.
- [76] M. A. H. Hedlin, K. Walker, D. Drob & C. de Groot-Hedlin, “Infrasound : connecting the solid Earth, oceans, and atmosphere,” *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **40**, 327–354, 2012.
- [77] M. Henneton, O. Gainville & F. Coulouvrat, “Numerical simulation of sonic boom from hypersonic meteoroids,” *AIAA Journal*, **53**(9), 2560–2570, 2015.
- [78] A. K. Henrick, T. D. Aslam, J. M. Powers, “Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes : Achieving optimal order near critical points,” *J. Comput. Phys.*, **207**, 542–567 (2005).
- [79] C. O. Hines, “Internal Atmospheric Gravity Waves at Ionospheric Heights,” *Canadian Journal of Physics*, **38**(11), 1441–1481, 1960.
- [80] A. Ishimaru, *Wave propagation and scattering in random media*. Volumes I and II. Academic Press, Inc., New York, 1978.
- [81] M. Z. Jacobson, *Fundamentals of atmospheric modeling*. Cambridge University Press, New York, 2005.
- [82] F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porte & H. Schmidt, *Computational ocean acoustics*. Springer, New York, 2011.
- [83] G-S. Jiang and C-W Shu, “Efficient implementation of weighted ENO schemes,” *J. Comput. Phys.*, **126**, 202–228 (1996).
- [84] H. Kanamori, J. Mori & D. G. Harkrider, “Excitation of atmospheric oscillations by volcanic eruptions,” *J. Geophys. Res.*, **99**(B11), 21947–21961, 1994.
- [85] J. W Kim & D. J. Lee, “Adaptive nonlinear artificial dissipation model for computational aeroacoustics,” *AIAA Journal*, **39**(5), 810-818, 2001.
- [86] G. F. Kinney & K. J. Graham, “Explosive shocks in air,” Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.
- [87] H. H. Koelle, *Handbook of astronautical engineering*. McGraw-Hille, New York, 1961.
- [88] Yu. A. Kravtsov & Yu. I. Orlov, *Caustics, Catastrophes and Wave Fields*. Springer-Verlag, 1993.
- [89] S.N. Kulichkov, “Long-range propagation and scattering of low-frequency sound pulses in the middle atmosphere,” *Meteorol Atmos Phys*, **85**, 47–60, 2004.

- [90] S.N. Kulichkov, I.P. Chunchuzov, G.A. Bush, and V.G. Perepelkin, “Physical modeling of long-range infrasonic propagation in the atmosphere,” *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, **44**(2), 175–186, 2008.
- [91] V. S. Kumar, Y. B. Kumar, K. Raghunath, P. B. Rao, M. Krishnaiah, K. Mizutani, T. Aoki, M. Yasui & T. Itabe, “Lidar measurements of mesospheric temperature inversion at a low latitude,” *Annales Geophysicae*, **19**, 1039–1044, 2001.
- [92] G. Lacanna & M. Ripepe, “Influence of near-source volcano topography on the acoustic wavefield and implication for source modeling,” *J. Volcan. Geot. Res.*, **250**, 9–18, 2013.
- [93] G. Lacanna, M. Ichihara, M. Iwakuni, M. Takeo, M. Iguchi & M. Ripepe, “Influence of atmospheric structure and topography on infrasonic wave propagation,” *J. Geophys. Res. Solid Earth*, **119**, 2988–3005, 2014.
- [94] J.-M. Lalonde, O. Sèbe, M. Landès, Ph. Blanc-Benon, R. S. Matoza, A. Le Pichon & E. Blanc, “Infrasound data inversion for atmospheric sounding,” *Geophys. J. Int.*, **190**, 687–701, 2012.
- [95] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*. Pergamno Press plc, 1975.
- [96] J. Lekner, *Theory of reflection of electromagnetic and particle waves*. Springer Science+Business Media, Dordrecht, 1987.
- [97] J. Lekner, “Matrix methods in reflection and transmission of compressional waves by stratified media,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **87**(6), 2319–2324, 1990.
- [98] J. Lekner, “Reflection and transmission of compressional waves : some exact results,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **87**(6), 2325–2331, 1990.
- [99] J. Lekner, “Reflection and transmission of compressional waves by a stratification with discontinuities in density and/or sound speed,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **88**(6), 2876–2879, 1990.
- [100] A. Le Pichon, E. Blanc, D. Drob, S. Lambotte, X. Dessa, M. Lardy, P. Bani & S. Vergnolle, “Acoustic propagation and atmosphere characteristics derived from infrasonic waves generated by the Concorde,” *J. Acous. Soc. Am.*, **111**(1), 629–641, 2002.
- [101] A. Le Pichon, E. Blanc, D. Drob, S. Lambotte, X. Dessa, M. Lardy, P. Bani & S. Vergnolle, “Infrasound monitoring of volcanoes to probe high-altitude winds,” *J. Geophys. Res.*, **110**(D13106), 1–12, 2006.
- [102] A. Le Pichon, J. Vergoz, Y. Cansi, L. Ceranna & D. Drob, “Contribution of infrasound monitoring for atmospheric remote sensing,” In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, Springer, Dordrecht, Chap. 20, pp. 629–646, 2010.
- [103] A. Le Pichon, L. Ceranna & J. Vergoz, “Incorporating numerical modeling into estimates of the detection capability of the IMS infrasound network,” *J. Geophys. Res.*, **117**(D05121), 1–12, 2012.

- [104] R. J. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [105] C. H. Liu & K. C. Yeh, “Excitation of acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere,” *Tellus*, **23**(2), 150–163, 1971.
- [106] J. B. Lonzaga, R. M. Waxler, J. D. Assink & C. L. Talmadge, “Modelling waveforms of infrasound arrivals from impulsive sources using weakly nonlinear ray theory,” *Geophys. J. Int.*, **200**(3), 1347–1361, 2015.
- [107] R. Marchiano, F. Coulouvrat & R. Grenon, “Numerical simulation of shock wave focusing at fold caustics, with application to sonic boom,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **114**(4), 1758–1770, 2003.
- [108] R. Marchiano, F. Coulouvrat & J.-L. Thomas, “Nonlinear focusing of acoustic shock waves at a caustic cusp,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **117**(2), 566–577, 2005.
- [109] R. Marchiano, “A detailed analysis about penumbra caustics,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **127**(4), 2129–2140, 2010.
- [110] O. Marsden, C. Bailly & C. Bogey, “Study of long-range infrasound propagation with high-performance numerical schemes applied to the Euler equations,” *Proceedings of the 13th Long Range Sound Propagation symposium*, Lyon, France, pp. 201–216, 2008.
- [111] O. Marsden, C. Bailly & C. Bogey, “A study of infrasound propagation based on high-order finite difference solutions of the Navier-Stokes equations,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **135**(3), 1083–1095, 2014.
- [112] J. Marty, D. Ponceau, and F. Dalaudier, “Using the International Monitoring System infrasound network to study gravity waves,” *Geophys. Res. Lett.*, **37**(L19802), 1–5, 2010.
- [113] M. H. McKenna, R. G. Gibson, B. E. Walker, J. McKenna, N. W. Winslow & A. S. Kofford, “Topographic effects on infrasound propagation,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **131**(1), 35–46, 2012.
- [114] J.M. McKisic, “Infrasound and the infrasonic monitoring of atmospheric nuclear explosions : a litterature review,” *Technical Report PL-TR-97-2123*, Dept. of Energy, Phillips Laboratory, 1997.
- [115] M. N. Mikhail & M. R. El-Tantawy, “The acoustic boundary layers : a detailed analysis ,” *J. Comput. Appl. Math.*, **51**, 15–36, 1994.
- [116] J. P. Mutschlecner & R. W. Whitaker, “Some atmospheric effects on infrasound signal amplitudes,” In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, Springer, Dordrecht, Chap. 14, pp. 455–474, 2010.
- [117] M. Nguyen-Dinh, O. Gainville & N. Lardjane, “Simulation of blast wave propagation from source to long distance with topography and atmospheric effects,” *AIP Conf. Proc.*, **1685**, 090009, 2015.
- [118] K. Nishida, N. Kobayashi & Y. Fukao, “Background Lamb waves in the Earth’s atmosphere,” *Geophys. J. Int.*, **196**, 312–316, 2014.

- [119] D. Norris, R. Gibson & K. Bongiovanni, “Numerical methods to model infrasonic propagation through realistic specifications of the atmosphere,” In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, Springer, Dordrecht, Chap. 17, pp. 541–573, 2010.
- [120] V. E. Ostashev, D. Juvé & Ph. Blanc-Benon, “Derivation of a wide-angle parabolic equation for sound waves in inhomogeneous moving media,” *Acta Acustica*, **83**, 455–460, 1997.
- [121] V. E. Ostashev, E. M. Salomons, S. F. Clifford, R. J. Lataitis, D. K. Wilson, Ph. Blanc-Benon & D. Juvé, “Sound propagation in a turbulent atmosphere near the ground : a parabolic equation approach,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **109**(5), 1894–1908, 2001.
- [122] V. E. Ostashev & D. K. Wilson, *Acoustics in Moving Inhomogeneous Media*. CRC Press, 2016.
- [123] L. Ottemöller & L. G. Evers, “Seismo-acoustic analysis of the Buncefield oil depot explosion in the UK, 2005 December 11.” *Geophys. J. Int.*, **172**, 1123–1134, 2008.
- [124] V. P. Pasko, “Infrasonic waves generated by supersonic auroral arcs,” *Geophys. Res. Lett.*, **39**(L19105), 1–5, 2012.
- [125] A. A. Piacsek, “Atmospheric turbulence conditions leading to focused and folded sonic boom wave fronts,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **111**(1), 520–529, 2002.
- [126] A. D. Pierce, “Propagation of acoustic-gravity waves from a small source above the ground in an isothermal atmosphere,” *J. Acous. Soc. Am.*, **35**(11), 1798–1807, 1963.
- [127] A. D. Pierce & J. W. Posey, “Theory of the excitation and propagation of Lamb’s atmospheric edge mode from nuclear explosions,” *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **26**, 341–368, 1971.
- [128] A.D. Pierce, *Acoustics : an introduction to its physical principles and applications*. Acoustical Society of America, 1985.
- [129] A. D. Pierce, “Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow,” *J. Acous. Soc. Am.*, **87**(6), 2292–2299, 1990.
- [130] A.D. Pierce & R. N. Thurston, *High frequency and pulse scattering*. Academic Press, Inc., San Diego, 1992.
- [131] J. W. Posey & A. D. Pierce, “Estimation of nuclear explosion energies from microbarograph records,” *Nature*, **232**, 253, 1971.
- [132] S. K. Rallabhandi, “Advanced sonic boom prediction using augmented Burgers’ equation,” *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 4 January - 7 January 2011, Orlando, Florida.
- [133] J. W. S. Rayleigh, *The theory of sound. Volume II.* Dover Publications, New York, 1878, Second edition published in 1945.
- [134] J. W. Reed, “Atmospheric attenuation of explosion waves,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **61**(1), 1977.

- [135] S. W. Rienstra & A. Hirschberg, “An introduction to acoustics,” *IWDE report 92-06 (TUE)*, 1992. Extended and improved reprint (August 2016).
- [136] M. Ripepe E. & Marchetti, “Array tracking of infrasonic sources at Stromboli volcano,” *Geophys. Res. Lett.*, **29**(22), 2002.
- [137] P. H. Rogers & J. H. Gardner, “Propagation of sonic booms in the thermosphere,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **67**(1), 78–91, 1980.
- [138] R. R. Rosales & E. G. Tabak, “Caustics of weak shock waves,” *Phys. Fluids*, **10**(1), 206–222, 1998.
- [139] R. V. Row, “Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere due to a nuclear detonation and an earthquake,” *J. Geophys. Res.*, **72**(5), 1599–1609, 1966.
- [140] R. Sabatini, O. Marsden, C. Bailly & O. Gainville, “Numerical simulation of infrasound propagation in the Earth’s atmosphere : study of a stratospherical arrival pair,” *AIP Conf. Proc.*, **1685**, 090002, 2015.
- [141] R. Sabatini, O. Marsden, C. Bailly & C. Bogey, “A numerical study of nonlinear infrasound propagation in a windy atmosphere,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **140**(1), 641–656, 2016.
- [142] R. Sabatini, O. Marsden, C. Bailly & O. Gainville, “Characterization of absorption and non-linear effects in infrasound propagation using an augmented Burgers’ equation,” *Geophys. J. Int.*, **207**(3), 1432–1445, 2016.
- [143] M. L. Salby, *Fundamentals of atmospheric physics*. Academic Press, Inc., San Diego, 1996.
- [144] J. A. Salamone III, V. W. Sparrow & K. J. Plotkin, “Solution of the lossy nonlinear Tricomi equation applied to sonic boom focusing,” *AIAA Journal*, **51**(7), 1745–1754, 2013.
- [145] E. M. Salomons, *Computational atmospheric acoustics*. Springer Science+Business Media, Dordrecht, 2001.
- [146] E. M. Salomons, R. Blumrich & D. Heimann, “Eulerian Time-domain model for sound propagation over a finite-impedance ground surface. Comparison with frequency-domain models,” *Acta Acust. Unit. Ac.*, **88**, 483–492, 2002.
- [147] J. L. Stevens, I. I. Divnov, D. A. Adams, J. R. Murphy, V. N. Bouchik, “Constraints on infrasound scaling and attenuation relations from Soviet Explosion Data,” *Pure Appl. Geophys.*, **159**, 1045–1062, 2002.
- [148] B. Sturtevant & V. A. Kulkarny, “The focusing of weak shock waves,” *J. Fluid Mech.*, **73**(4), 651–671, 1976.
- [149] L. C. Sutherland & H. E. Bass, “Atmospheric absorption in the atmosphere up to 160 km,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **115**(3), 1012–1032, 2004.
- [150] L. C. Sutherland & H. E. Bass, “Erratum : Atmospheric absorption in the atmosphere up to 160 km,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **120**(5), 2985, 2006.

- [151] C. K. W. Tam & J. C. Webb, “Dispersion-relation-preserving finite-difference schemes for computational acoustics,” *J. Comput. Phys.*, **107**, 262-281, 1993.
- [152] C. K. W. Tam, J. C. Webb & Z. Dong, “A study of the short wave components in computational acoustics,” *J. Comput. Acoust.*, **1**, 1-30, 1993.
- [153] C. K. W. Tam & H. Shen, “Direct computation of nonlinear acoustic pulses using high-order finite difference schemes,” *AIAA Paper*, 93-4325, 1993.
- [154] C. K. W. Tam & Z. Dong, “Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow,” *J. Comput. Acoust.*, **4**(2), 175-201, 1996.
- [155] C. K. W. Tam, *Computational aeroacoustics. A wave number approach*. Cambridge University Press, New York, 2012.
- [156] M. Yamamoto, A. Hashimoto, T. Aoyama & T. Sakai, “A unified approach to an augmented Burgers’ equation for the propagation of sonic booms,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **137**(4), 1857–1866, 2015.
- [157] T. Ytrehus & J. J. Smolderen, “Structure of linearized Navier-Stokes equations for compressible flows,” *Phys. Fluids*, **25**, 429–435, 1982.
- [158] G. K. Vallis, *Atmospheric and oceanic fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [159] W. G. Vincenti & C. H. K. Kruger, *Introduction to physical gas dynamics*. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1965.
- [160] R. Waxler, “A vertical eigenfunction expansion for the propagation of sound in a downward-refracting atmosphere over a complex impedance plane,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **112**(6), 2540–2552, 2002.
- [161] R. Waxler, “Modal expansions for sound propagation in the nocturnal boundary layer,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **115**(4), 1437–1448, 2004.
- [162] R. Waxler, L. G. Evers, J. Assink & P. Bloom, “The stratospheric arrival pair in infrasound propagation,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **137**(4), 1846–1856, 2015.
- [163] F. M. White, *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill, Inc. New York, 1991.
- [164] G. B. Whitham F. R. S., *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [165] M. S. Wochner, A. A. Atchley & V. W. Sparrow, “Numerical simulation of finite amplitude wave propagation in air using a realistic atmospheric absorption model,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **118**(5), 2891–2898, 2005.



## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur C. BAILLY

et les rapports de

M. R. MARCHIANO  
Professeur - Sorbonne Universités - UMPC - Institut Jean le Rond d'Alembert (case 162)  
4 place Jussieu - 75252 Paris cedex 05

et de

Mme C. DE GROOT-HEDLIN  
Professeure - University for Atmospheric Acoustics - Institute of Geophysics and Planetary  
Physics - Scripps Institution of Oceanography - University of California - San Diego  
9500 Gilman Drive - La Jolla - CA 92093-0225 - Etats-Unis

**Monsieur SABATINI Roberto**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 12 janvier 2017

P/Le directeur de l'E.C.L.  
La directrice des Etudes

