



HAL
open science

Application de la réduction du modèle dans les analyses par éléments finis pour l'optimisation du bobinage des machines électriques

Moustafa Al Eit

► **To cite this version:**

Moustafa Al Eit. Application de la réduction du modèle dans les analyses par éléments finis pour l'optimisation du bobinage des machines électriques. Energie électrique. Université Paris Saclay (COmUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLS579 . tel-01674229

HAL Id: tel-01674229

<https://theses.hal.science/tel-01674229v1>

Submitted on 2 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLS579

**THÈSE DE DOCTORAT DE
“L’UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY”
PRÉPARÉE À
“L’UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD”**

**ÉCOLE DOCTORALE N°575
Electrical, Optical, Bio-Physics and Engineering**

Spécialité de doctorat : Physique

Par

M. Moustafa Al Eit

**Application de la réduction du modèle dans les analyses par éléments finis
pour l’optimisation du bobinage des machines électriques**

Thèse présentée et soutenue à CentraleSupélec, le 12 décembre 2016

Composition du Jury :

M. DULAR Patrick	Directeur de recherche (Université de Liège)	Président
M. REN Zhuoxiang	Professeur des universités (UPMC)	Rapporteur
M. LE MENACH Yvonnick	Professeur des universités (Lille 1)	Rapporteur
M. RANDI Sid Ali	Ingénieur de recherche (Renault)	Examinateur
M. BOUILLAULT Frédéric	Professeur des universités (UPsud/Paris Saclay)	Directeur de thèse
M. MARCHAND Claude	Professeur des universités (UPsud/Paris Saclay)	Co-Encadrant de thèse

Remerciements

Les recherches présentées dans ce mémoire ont été effectuées au sein des deux pôles "Energie, Electronique, Conception et Contrôle" (Eco2) et "Physique et Ingénierie de l'ElectroMagnétisme" (PIEM) du laboratoire de Génie électrique et électronique de Paris (GeePs). Cette thèse a été dirigée par Monsieur Frédéric BOUILLAULT et encadrée par Messieurs Claude MARCHAND et Guillaume KREBS.

Aux termes d'un travail de trois années de recherche, je suis heureux de pouvoir exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à l'ensemble des personnes qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont aidé à mener à bien les travaux présentés dans ce manuscrit.

Je voudrais exprimer tout d'abord mes plus vifs remerciements à Monsieur Frédéric BOUILLAULT, Professeur à l'université Paris-Sud, qui a dirigé cette thèse durant les trois années. Sa pleine maîtrise du contexte physique m'a permis de regarder au delà de mes propres connaissances. Il a souvent su m'apporter l'éclairage qui me manquait pour appréhender diverses difficultés. Par sa disponibilité efficace et inestimable, le travail de recherche s'est déroulé dans les meilleures conditions.

Je voudrais témoigner de ma reconnaissance à Monsieur Claude MARCHAND, directeur du laboratoire GeePs, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et pour sa participation précieuse à l'encadrement de ces travaux de recherche. Je le remercie pour ses conseils éclairés et la façon dont il a su partager ses multiples connaissances qui ont permis de faire progresser ce travail.

Je remercie très sincèrement Monsieur Guillaume KREBS, co-encadrant de thèse et Maître de conférences à l'université Paris-Sud pour l'aide importante qu'il m'a apportée tout au long de cette étude, tant sur le plan scientifique que sur celui de l'encadrement.

Je tiens à remercier Monsieur Laurent SANTANDREA, ingénieur d'étude, pour son aide précieuse au niveau informatique et langages de programmation. Qu'il trouve ici mes sincères remerciements.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Patrick DULAR, Professeur à l'Université de Liège, qui m'a accueilli pour une quinzaine de jours sous une collaboration internationale au département d'électricité, électronique et informatique à l'Institut Montefiore de l'université de Liège. J'ai beaucoup appris en travaillant avec lui. Qu'il sache que c'est avec une grande sincérité que je rends hommage aux qualités humaines, scientifiques et professionnelles dont il a fait preuve.

Je remercie très chaleureusement tout le personnel du laboratoire GeePs qui n'a jamais hésité à m'apporter toute sorte d'aides scientifiques, techniques ou morales pendant la thèse. Je lui exprime mon plus profond respect.

Je voudrais enfin remercier ma mère du fond de mon cœur. Malgré la distance qui nous sépare, elle m'a toujours entouré de sa profonde tendresse, son affection inestimable et son attention continue. A elle, ce mémoire est dédié.

Application de la réduction du modèle dans les analyses par éléments finis pour l'optimisation du bobinage des machines électriques

Résumé

La machine à réluctance variable peut être utilisée dans les véhicules électriques où pour des considérations d'autonomie, le rendement est crucial. En raison du fort champ de fuite dans la région de l'entrefer de la machine à réluctance variable due à sa géométrie particulière à pôles saillants, les pertes « cuivre » peuvent devenir conséquentes. Il est alors recommandé de ne pas placer les conducteurs au voisinage de l'entrefer. Cependant, des instructions concrètes pour la conception d'un enroulement optimal sont manquantes. Généralement, les pertes « cuivre » dans les machines électriques sont la somme des pertes Ohm DC classiques et des pertes additionnelles dites par courants de Foucault. Les pertes DC étant constantes à un point de fonctionnement donné, l'optimisation est axée alors sur la réduction des pertes par courants de Foucault en jouant sur la configuration géométrique de l'enroulement. Dans le cas de calculs répétitifs fastidieux, rencontrés par exemple lors des processus de conception et d'optimisation du bobinage des machines électriques, il y a un intérêt significatif à réduire le temps de calcul. Dans ce travail, on présente trois techniques de réduction du modèle et leurs applications dans les analyses par la méthode des éléments finis.

Outre l'influence de la fréquence d'alimentation et de la section du conducteur, plusieurs facteurs liés à la configuration de l'enroulement influent sur les pertes additionnelles par courants de Foucault:

- i) la position du conducteur dans l'encoche au voisinage de la dent du stator ou de la zone de l'entrefer.
- ii) la disposition des conducteurs envers les lignes du champ magnétique bidimensionnelles de l'encoche.
- iii) l'utilisation d'un conducteur massif ou multi filamentaire; les filaments sont connectés en parallèle et peuvent permuter leurs positions périodiquement au sein du conducteur tout au long du bobinage.

Dans cette thèse, on étudie principalement l'influence de la disposition géométrique des spires dans l'encoche et du type du conducteur utilisé s'il s'agit d'un conducteur massif, en fils de Litz ou en fils torsadés.

Les pertes par courants de Foucault sont la conséquence d'un couplage fort électrique-magnétique entre la densité du courant et la variation en fonction du temps du champ magnétique. En utilisant le modèle de Maxwell, ce couplage est décrit par une équation différentielle à dérivée partielle qui ne peut être résolue simplement. La résolution de cette équation utilisant l'approche analytique n'est possible que sous certaines hypothèses simplificatrices qui peuvent dégrader la fiabilité de la solution. La modélisation par la méthode des éléments finis permet quant à elle de prendre en compte le mouvement du rotor et la non-linéarité du circuit magnétique garantissant ainsi une meilleure précision. Néanmoins, cela conduit à une large capacité de stockage et à un temps de calcul substantiel qui peut entraver tout processus de conception ou d'optimisation. Pour surmonter ce problème, on propose dans ce manuscrit trois techniques de réduction du modèle. Ces techniques assurent une réduction efficace de la taille du système matriciel associé à la modélisation par la méthode des éléments finis et diminuent par conséquent le temps de calcul :

- i) une réduction spatiale qui évite une modélisation en 3D des conducteurs complexes en fils torsadés et en fils de Litz et propose une modélisation 2D satisfaisante.
- ii) la technique de la perturbation.
- iii) la réduction de l'ordre du modèle utilisant la méthode de la décomposition orthogonale aux valeurs propres combinée à la méthode d'interpolation empirique discrète.

La comparaison du modèle réduit à un modèle complet de référence montre l'efficacité de la réduction du modèle à réduire le temps de calcul tout en restant en deçà d'une erreur de précision acceptable.

Mots clés: Pertes « cuivre », Courants de Foucault, Méthode des éléments finis, Machine à réluctance variable, Réduction du modèle, Décomposition orthogonale aux valeurs propres, Technique de la perturbation, Méthode d'interpolation empirique discrète, Fils de Litz, Fils torsadés, Approche analytique

Application of Model Reduction Techniques in Finite Element Analyses for the Optimization of Electric Machine Windings

Abstract

The switched reluctance machine can be used in hybrid or electric vehicle where, for autonomy considerations, energy efficiency is crucial. Because of the strong stray field in the air-gap region of the switched reluctance machine due to its salient pole geometry, the copper losses can become substantial. It is firmly recommended therefore not to place the coil conductors near the air-gap region. Nevertheless, concrete instructions for optimal winding design are missing. The copper losses in electrical machines are subdivided into classical DC ohmic losses and additional eddy current losses occurring due to the time varying magnetic fields penetrating the copper conductors. Based on the fact that the DC losses are constant at a given operating point, the optimization is focused on reducing the eddy current losses by modifying the winding geometry configuration. In the case of tedious repetitive calculations, met for example during design and optimization processes of electrical machine windings, there is a significant interest in reducing the computation time. This work suggests three model reduction techniques and their applications in the finite element analyses.

Besides the frequency of the excitation current and the cross section of the coil conductors, several factors related to the winding configuration can affect the additional eddy current losses:

- i) the coil conductor position in the winding slot especially near the stator pole or close to the air gap
- ii) the disposition of the coil conductor against the two-dimensional flux lines in the slot winding
- iii) the subdivision of the solid conductor into multiple parallel strands swapping their positions periodically in the conductor cross section throughout the length of the machine winding.

This thesis mainly studies the influence of the geometric coils disposition in the slot windings and the type of the conductor used whether it is solid or stranded, with Litz or twisted wires.

The eddy current losses exit through the strong electro-magnetic coupling between the electric current density and the time dependent magnetic flux lines penetrating the conductors; it is described mathematically by a partial differential equation that cannot be solved easily. The analytical approach, which is used practically for a quick resolution of the strong electro-magnetic coupling equation, is only possible under certain simplifying assumptions that deteriorate brutally the reliability of the copper losses calculation. The finite element modeling as for it, allows taking into account the rotor motion and the non-linear behavior of the magnetic circuit, thus ensuring a higher accuracy. However, it leads under these conditions to a substantial calculation time and requires large storage capacity. These constraints are critical and may hinder therefore any process of conception or optimization. In this thesis, we suggest three different model reduction techniques that can be effective in reducing the size of large scale complete finite element models and enable therefore to shorten the computational time:

- i) the spatial reduction avoiding the 3D modeling which seems required in the case of twisted and Litz wires and suggesting an alternative satisfactory 2D modeling.
- ii) the perturbation technique.
- iii) the model order reduction using the proper orthogonal decomposition combined with the discrete empirical interpolation method.

The comparison between the reduced model solutions to that of the complete finite element model has proved the effectiveness of the proposed model reduction techniques; they allow shrinking the required computational time while staying below an acceptable error of accuracy.

Keywords: Copper losses, Eddy currents, Finite element analyses, switched reluctance machine, Model reduction, Proper orthogonal decomposition, Perturbation technique, Discrete empirical interpolation method, Litz wires, Twisted wires, Analytical approach.

SOMMAIRE

Introduction Générale	1
------------------------------------	----------

Chapitre 1

Modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis	7
--	----------

1.1 Introduction	8
1.2 Modélisation locale des phénomènes électromagnétiques	8
1.2.1 Modèle de Maxwell	8
1.2.2 Formulation du problème électromagnétique	9
1.2.3 Modèle bidimensionnel	10
1.2.4 Unicité de la solution	10
1.2.5 Couplage aux équations du circuit électrique	13
1.2.6 Résolution par la méthode des éléments finis	14
1.2.7 Discrétisation temporelle.....	23
1.2.8 Prise en compte de la non linéarité du circuit magnétique	23
1.2.10 Prise en compte du mouvement	28
1.3 Post-traitement	31
1.3.1 Modèle pour le calcul des pertes « cuivre »	31
1.3.2 Modèle pour le calcul des forces électromagnétiques nodales	32
1.3.3 Modèle pour le calcul des pertes « fer »	32
1.4 Conclusion.....	33

Chapitre 2

Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »	34
---	-----------

2.1 Introduction	35
2.2 Effet de peau dans un conducteur circulaire entouré de l'air.....	36

2.2.1 Mise en équation pour le calcul de la densité du courant	36
2.2.2 Calcul des pertes par effet de peau	40
2.2.3 Analyse en fonction de l'épaisseur de peau	41
2.2.4 Alimentation avec un courant périodique non sinusoïdal	43
2.3 Effet de peau dans un conducteur rectangulaire entouré d'air.....	45
2.3.1 Etablissement des champs électriques et magnétiques et calcul de la densité du courant.....	45
2.3.2 Alimentation avec un courant sinusoïdal	47
2.3.3 Traitement de cas particuliers	48
2.4 Conducteurs logés dans l'encoche d'un circuit magnétique.....	50
2.4.1 Etablissement des champs électriques et magnétiques et calcul de la densité du courant.....	50
2.4.2 Pertes « cuivre » totales par effet de peau et de proximité.....	53
2.4.3 Alimentation avec un courant non sinusoïdale	54
2.4.4 Cas des conducteurs circulaires logés dans l'encoche	54
2.4.4 Exemple d'application simple et comparaison avec la modélisation par éléments finis.....	55
2.4.5 Adaptation du calcul analytique dans le cas d'une machine à réluctance variable	58
2.5 Conclusion.....	66

Chapitre 3

Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs multi

filamentaires en fils torsadés et en fils de Litz	69
3.1 Introduction.....	70
3.2 Conducteur logé dans l'encoche et subdivisé en des brins en parallèles	71
3.2.1 Influence de la position du conducteur sur la répartition du courant	72
3.3 Approche 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz.....	73
3.3.1 Cas d'un conducteur en fils torsadés.....	74
3.3.2 Cas d'un conducteur en fils de Litz	76
3.3.3 Effet de la subdivision sur l'accroissement des pertes « cuivre » DC.....	76
3.4 Applications sur un bobinage simplifié d'une machine à réluctance variable.....	77
3.4.1 Bobinage simplifié avec un conducteur massif	77
3.4.2 Bobinage simplifié avec un conducteur multi filamentaire.....	80

3.5 Applications sur un bobinage plus réaliste à 18 spires par dent d'une machine à réductance variable	87
3.6 Conclusion.....	90

Chapitre 4

Réduction du modèle par la technique de la perturbation..... 92

4.1 Introduction	93
4.2 Méthode de réduction du modèle par la technique de la perturbation dans le cas d'un bobinage à conducteurs en fils de Litz	94
4.2.1 Généralité sur la technique de la perturbation	95
4.2.2 Application pour une machine à réductance variable dans le cas d'un bobinage à conducteurs en fils de Litz	95
4.2.3 Traitement du cas des maillages non conformes	99
4.2.4 Résultats et comparaison.....	101
4.2.5 Accélération en temps de calcul	105
4.3 Méthode de réduction du modèle par la technique de la perturbation dans le cas d'un bobinage à conducteurs massifs	105
4.3.1 Application à un exemple de cas-test.....	105
4.3.2 Résultats et discussion	107
4.3.3 Correction de la composante normale du champ magnétique par une condition aux limites de Neumann	109
4.3.4 Application à la machine à réductance variable	119
4.4 Conclusion.....	133

Chapitre 5

Réduction de l'ordre du modèle par la technique de la POD-DEIM ...135

5.1 Introduction	136
5.2 Rappel sur la formulation de la méthode des éléments finis	137
5.3 L'exemple d'application de la machine à réductance variable	138
5.4 Réduction totale de l'ordre du modèle en utilisant la technique duale de la POD-DEIM	140
5.4.1 Décomposition orthogonale aux valeurs propres	140
5.4.2 Méthode d'interpolation empirique discrète.....	142

5.4.3 Application dans le cas d'une machine à réductance variable	143
5.5 Réduction du sous domaine non linéaire au moyen de la POD-DEIM	149
5.5.1 Séparation des variables	149
5.5.2 Application de la POD-DEIM au sous domaine non-linéaire	150
5.5.3 Comparaison entre la réduction totale et la réduction par sous domaine (RSNL)	151
5.5.4 Résultats de la réduction efficace par la RSNL.....	152
5.5 Conclusion.....	156
Conclusions et Perspectives.....	158
Annexe A.....	163
Imposition de la composante normale du vecteur induction magnétique par une condition aux limites de Dirichlet	163
Imposition de la composante tangentielle du vecteur champ magnétique par une condition aux limites de Neumann	164
Annexe B.....	166
Calcul des forces magnétiques locales	166
Annexe C	173
Modèle pour le calcul des pertes « fer »	173
Annexe D.....	176
Calcul du rendement	176
Bibliographie	177

Table de Figures

Figure 1.1 Système électromagnétique non-linéaire couplé aux circuits électriques.....	13
Figure 1.2 Élément triangulaire de premier ordre.....	16
Figure 1.3 Exemple d'un élément triangulaire dont deux nœuds existent sur la frontière Γ du domaine.....	18
Figure 1.4 La transformation T définit de l'élément de référence à l'élément réel.....	19
Figure 1.5 La partition du domaine Ω en quatre sous domaines symétriques.....	26
Figure 1.6 Le domaine d'étude de référence.....	27
Figure 1.7 Deux sous-domaines superposés périodiques (gauche), antipériodiques (droite).27	
Figure 1.8 Modification du maillage dans la bande de mouvement suite à un déplacement du rotor.....	28
Figure 1.9 Modification du maillage dans la bande de mouvement dans le cas d'un domaine symétrique suite à un déplacement d'un angle θ	30
Figure 2.1 Section transversale du conducteur circulaire entouré par l'air.	37
Figure 2.2 Puissance normalisée du conducteur circulaire en fonction de son rayon et de la fréquence d'alimentation.....	42
Figure 2.3 Distribution de la valeur efficace de la densité du courant en fonction de la position radiale.....	43
Figure 2.4 Section transversale d'un conducteur rectangulaire entouré par l'air.....	45
Figure 2.5 Exemple de $n = 6$ conducteurs placés l'un au dessus de l'autre dans une encoche symétrique à dents parallèles.	51
Figure 2.6 Transformation des conducteurs circulaires en des conducteurs carrés à surface de sections équivalente.....	54
Figure 2.7 Exemple de l'effet de peau (gauche). Exemple de l'effet de proximité (droite). ...	55
Figure 2.8 Les pertes par effet Joule calculées par la modélisation éléments finis dans les deux problèmes de l'effet de peau et de proximité.	56
Figure 2.9 Les dix premiers coefficients de Fourier de la force magnétomotrice $I(t)$	56
Figure 2.10 Détermination de la géométrie équivalente, les 6 conducteurs verticaux de chaque couche sont fusionnés en un seul conducteur horizontal.	57
Figure 2.11 Machine à réluctance variable à 18 spires par dents.	58

Figure 2.12 Six configurations géométriques différentes dans le cas d'un enroulement à 18 spires.	59
Figure 2.13 La géométrie réelle de l'encoche d'une machine à réluctance variable (gauche). La géométrie équivalente (droite).	59
Figure 2.14 Transformation des configurations géométriques réelles d'enroulement vers des géométries équivalentes.	60
Figure 2.15 Forte influence de la géométrie d'enroulement sur les pertes par effet Joule dépendamment de la fréquence d'alimentation.	60
Figure 2.16 La formes d'onde du courant d'alimentation correspondante au point de fonctionnement à la vitesse $N = 7100 \text{ tr/min}$	61
Figure 2.17 Les pertes « cuivre » instantanées dissipées dans les diverses configurations d'enroulement.	62
Figure 2.18 Les pertes « cuivre » instantanées dissipées dans les conducteurs d'aller et de retour du même bobinage de la configuration d'enroulement (3×6).	62
Figure 2.19 Les pertes « cuivre » calculées dans les conducteurs d'aller à la proximité de l'entrefer.	63
Figure 2.20 Les pertes « cuivre » calculées dans les conducteurs de retour à la proximité de l'entrefer.	64
Figure 2.21 Les pertes « cuivre » calculées dans les conducteurs d'aller à la proximité de la dent du stator.	64
Figure 2.22 Les pertes « cuivre » calculées dans les conducteurs de retour à la proximité de la dent du stator.	65
Figure 3.1 La position des 9 brins en parallèle du même conducteur dans l'encoche de la machine à reluctance variable.	72
Figure 3.2 La répartition asymétrique du courant d'alimentation à travers les 9 brins en parallèle.	73
Figure 3.3 Section transversale d'un conducteur multi filamentaire subdivisé en 4 brins en parallèle.	74
Figure 3.4 La permutation sur un pas de torsadage de longueur Δl suivant l'axe z des positions des brins sur la périphérie d'un conducteur multi filamentaire à brins torsadés. a) $0 \leq z < \Delta l/3$, b) $\Delta l/3 \leq z < 2\Delta l/3$, c) $2\Delta l/3 \leq z < \Delta l$	74
Figure 3.5 La permutation sur un pas de torsadage de longueur Δl suivant l'axe z des positions des 4 brins d'un conducteur multi filamentaire en fils de Litz. a) $0 \leq z < \Delta l/4$, b) $\Delta l/4 \leq z < \Delta l/2$, c) $\Delta l/2 \leq z < 3\Delta l/4$, d) $3\Delta l/4 \leq z < \Delta l$	76

Figure 3.6 Le bobinage simplifié à une seule spire sur dent de la machine à réluctance variable.....	78
Figure 3.7 Les pertes « cuivre » instantanées dans les deux conducteurs d’aller et de retour dans le cas d’un conducteur solide	78
Figure 3.8 Distribution spatiale des pertes « cuivre » moyennes dans les deux conducteurs d’aller et de retour dans le cas de la spire à conducteur solide.	79
Figure 3.9 La distribution géométrique dans l’encoche des 25 brins en parallèle du conducteur d’aller et celui de retour de la même spire.	81
Figure 3.10 Les pertes « cuivre » instantanées dans le cas des conducteurs en fils torsadés avec les différents nombres de brins 25, 36, 64 et 81.	81
Figure 3.11 Les pertes « cuivre » instantanées dans le cas des conducteurs en fils de Litz avec les différents nombres de brins 25, 36, 64 et 81.	82
Figure 3.12 Les pertes « cuivre » instantanées dans les deux conducteurs d’aller et de retour dans le cas d’un conducteur subdivisé en 81 brins torsadés.	83
Figure 3.13 Distribution spatiale des pertes « cuivre » moyennes dans les deux conducteurs d’aller et de retour dans le cas d’un conducteur en 81 brins torsadés.	84
Figure 3.14 Les pertes « cuivre » instantanées dans les deux conducteurs d’aller et de retour dans le cas d’un conducteur subdivisé en 81 brins de Litz.	85
Figure 3.15 Les pertes « cuivre » instantanées dans le cas des conducteurs subdivisés en des brins en parallèle avec les différents nombres de brins 25, 36, 64 et 81.	86
Figure 3.16 Les pertes « cuivre » instantanées dans les deux conducteurs d’aller et de retour dans le cas d’un conducteur subdivisé en 81 brins en parallèle.....	86
Figure 3.17 Distribution géométrique dans l’encoche des spires horizontales, chaque conducteur de la spire est un conducteur en 9 fils de Litz.	87
Figure 3.18 Les pertes « cuivre » instantanées dans les spires horizontales à conducteur solide et à conducteur en 9 fils de Litz.....	88
Figure 3.19 La distribution de la densité du courant dans le conducteur de retour situé à la proximité de l’entrefer du coté droite du bobinage conducteur solide (haut), conducteur en fils de Litz (bas) (Position=48° électriques).	88
Figure 3.20 La distribution géométrique dans l’encoche des 18 spires verticales à conducteur en première version des fils de Litz (3x3).....	89
Figure 3.21 Les pertes « cuivre » instantanées dans les spires verticales à conducteur solide et à conducteur en première version des fils de Litz (3x3).....	89
Figure 3.22 La distribution géométrique dans l’encoche des 18 spires verticales à conducteur en deuxième version des fils de Litz (9x1).	90

Figure 3.23 Les pertes « cuivre » instantanées dans les spires verticales à conducteur solide et à conducteur en deuxième version des fils de Litz (9x1).....	90
Figure 4.1 Modèle complet de la machine avec un bobinage simplifié (une seule spire par dent) et un maillage grossier.....	96
Figure 4.2 Modèles réduits des deux encoches intégrant le bobinage réel. Gauche: Encoche gauche comportant les spires d’aller. Droite: Encoche droite comportant les spires de retour.	97
Figure 4.3 Défaut de conformité du maillage des frontières du domaine de l’encoche dans le modèle complet et le modèle réduit.	99
Figure 4.4 Une arrête de la frontière Γ formée par les nœuds 1 et 2.	100
Figure 4.5 Les trois points de Gauss-Lobatto localisés sur le segment $[s_1; s_2]$	101
Figure 4.6 Les pertes « cuivre » instantanées dans le cas des spires horizontales à conducteurs solides (modèle complet) et dans le cas des conducteurs en fils de Litz (1ère version (3x3)) (modèle complet de référence et modèle réduit).....	102
Figure 4.7 La distribution de la densité du courant à travers la section de la spire horizontale critique de retour située à la proximité de l’entrefer. Spire à conducteur massif avec un calcul par éléments finis complet (en haut), spire à conducteur en fils de Litz avec un calcul par éléments finis complet (au milieu) et avec un calcul en modèle réduit (en bas).....	102
Figure 4.8 Les pertes « cuivre » instantanées dans le cas des spires verticales à conducteurs solides (modèle complet) et dans le cas des conducteurs en fils de Litz (2 ^{ème} version (9x1)) (modèle complet de référence et modèle réduit).	103
Figure 4.9 Les pertes « cuivre » instantanées locales à travers les 9 brins de la spire verticale critique de retour à la proximité du circuit magnétique. En haut: Modèle complet par éléments finis. En bas: Modèle réduit.	103
Figure 4.10 Cas-test: Conducteur solide logé dans l’encoche d’un circuit magnétique.....	106
Figure 4. 11 Gauche: Modèle complet à densité du courant uniforme. Droite: Modèle réduit de l’encoche où on suppose la circulation des courants de Foucault.	106
Figure 4.12 Les pertes « cuivre » instantanées durant les deux périodes d’excitation calculées par le modèle complet de référence et le modèle réduit sous les conditions aux limites de Dirichlet.	107
Figure 4.13 Les trois distributions de la densité du courant électrique à travers la section du conducteur calculées par le modèle complet à densité du courant uniforme (gauche), le modèle réduit sous les conditions aux limites de Dirichlet (milieu) et le modèle complet de référence (droite). Temps = 4.7 ms.....	107
Figure 4.14 Les cartes de distribution des lignes du champ magnétique à travers le domaine de l’encoche. Gauche: Modèle complet à densité du courant uniforme. Milieu: Modèle	

réduit sous les conditions aux limites de Dirichlet. Droite: Modèle complet de référence. Temps = 4.7 ms..... 108

Figure 4.15 La distribution des lignes du champ magnétique lorsque le conducteur est alimenté avec un courant à densité uniforme..... 109

Figure 4.16 Gauche: Modèle complet à densité du courant uniforme. Droite: Modèle réduit modifié de l'encoche où la frontière Γr est décomposée en deux sous frontières ΓrD et ΓrN auxquelles on applique les conditions aux limites mixtes. 110

Figure 4.17 La bande de transition Δ du domaine Ω_c de l'encoche..... 112

Figure 4.18 Exemple de deux bandes de transitions construites sur deux domaine de la même encoche mais à deux maillages différentes non conforme. 114

Figure 4.19 Un élément triangulaire de la bande Δ formé par les nœuds 1, 2 et 3. 116

Figure 4.20 Les quatre points de Gauss-Lobatto localisés sur le triangle Δe 117

Figure 4.21 Les pertes « cuivre » instantanées durant les deux périodes d'excitation calculées par le modèle complet et le modèle réduit sous les conditions aux limites mixtes..... 118

Figure 4.22 Les deux distributions de la densité du courant électrique à travers la section du conducteur calculées par le modèle complet de référence (gauche) et le modèle réduit sous les conditions aux limites mixtes (droite). Temps = 4.7 ms. 118

Figure 4.23 Les cartes de distribution des lignes du champ magnétique à travers le domaine de l'encoche. Gauche: Modèle complet à densité du courant uniforme. Milieu: Modèle réduit sous les conditions aux limites mixtes. Droite: Modèle complet de référence. Temps = 4.7 ms. 119

Figure 4.24 Les 6 dispositions possibles des conducteurs dans l'encoche le machine dans le cas d'un bobinage à 18 spires par dents. 120

Figure 4.25 Modèle complet de la machine à bobinage simplifié à une seule spire par dent et une densité du courant uniforme. 121

Figure 4.26 Modèle réduit des deux encoches de la machine intégrant respectivement les conducteurs d'aller et de retour du bobinage réelle (configuration (3×6)) où on suppose la circulation des courants de Foucault. 122

Figure 4.27 Distribution des lignes du champ magnétique dans le cas d'une machine à bobinage simplifié pour une position donnée du rotor ($\theta_e = 60^\circ$ électrique)..... 123

Figure 4.28 Maillage grossier d'une demi-section de la machine à bobinage simplifié..... 124

Figure 4.29 Maillage fin dans les modèles réduits des encoches où on intègre les conducteurs d'aller et de retour de la configuration géométrique de l'enroulement (3×6)..... 124

Figure 4.30 Modèle complet de la machine avec un bobinage réelle (configuration (3×6)) et une densité du courant électrique incluant les courants induits de Foucault. 125

Figure 4.31 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d’aller de la configuration d’enroulement (3×6) calculées par le modèle complet et le modèle réduit. 127

Figure 4.32 Les pertes « cuivre » instantanées locales dans les 6 conducteurs d’aller critiques au voisinage de l’entrefer de la configuration d’enroulement (3×6) calculées par le modèle complet et le modèle réduit..... 127

Figure 4.33 Les deux distributions de la densité du courant électrique à travers la section du conducteur d’aller de la configuration d’enroulement (3×6) calculées par le modèle complet de référence (gauche) et le modèle réduit (droite). Position du rotor $\theta_e = 45^\circ$ électriques. 127

Figure 4.34 Les cartes de distribution des lignes du champ magnétique à travers le domaine de l’encoche intégrant les conducteurs d’aller de la configuration d’enroulement (3×6). Gauche: Modèle réduit. Droite: Modèle complet de référence. Position du rotor $\theta_e = 45^\circ$ électriques..... 128

Figure 4.35 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs de retour de la configuration d’enroulement (3×6) calculées par le modèle complet et le modèle réduit. 128

Figure 4. 36 Les pertes « cuivre » instantanées locales dans les 6 conducteurs de retour critiques au voisinage de l’entrefer de la configuration d’enroulement (3×6) calculées par le modèle complet et le modèle réduit. 128

Figure 4. 37 Les deux distributions de la densité du courant électrique à travers la section du conducteur de retour de la configuration d’enroulement (3×6) calculées par le modèle complet de référence (gauche) et le modèle réduit (droite). Position du rotor $\theta_e = 48^\circ$ électriques..... 129

Figure 4.38 Les cartes de distribution des lignes du champ magnétique à travers le domaine de l’encoche intégrant les conducteurs de retour de la configuration (3×6). Gauche: Modèle réduit. Droite: Modèle complet de référence. Position du rotor $\theta_e = 48^\circ$ électriques..... 129

Figure 4.39 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d’aller (Haut) et de retour(Bas) de la configuration (1×18) calculées par le modèle complet et le modèle réduit. 130

Figure 4.40 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d’aller (Haut) et de retour(Bas) de la configuration (2×9) calculées par le modèle complet et le modèle réduit. 131

Figure 4.41 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d’aller (Haut) et de retour(Bas) de la configuration (6×3) calculées par le modèle complet et le modèle réduit. 131

Figure 4.42 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d’aller (Haut) et de retour(Bas) de la configuration (9×2) calculées par le modèle complet et le modèle réduit. 132

Figure 4.43 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d’aller (Haut) et de retour(Bas) de la configuration (18×1) calculées par le modèle complet et le modèle réduit. 132

Figure 5.1 La machine à réluctance variable avec un bobinage à 4 spires verticales sur dent. 138

Figure 5.2 Les pertes « cuivre » totales instantanées dissipées dans le bobinage à spires verticales au cours de la première et la troisième période électrique. 139

Figure 5.3 Evolution des pertes « cuivre » calculées dans un modèle réduit à m « Snapshots ». 144

Figure 5.4 Evolution des pertes « cuivre » calculées dans un modèle réduit à $m = 40$ « Snapshots » mais à opérateur de projection discrète tronqué à nr valeurs..... 146

Figure 5.5 Les pertes « cuivre » totales instantanées dissipées dans le bobinage à spires verticales au cours de la troisième période électrique calculées par le modèle complet et le modèle totalement réduit en utilisant la POD-DEIM..... 148

Figure 5.6 Les pertes « cuivre » totales instantanées dissipées dans le bobinage à spires verticales au cours de la troisième période électrique calculées par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL. 151

Figure 5.7 La localisation des 7 points DEIM sur le maillage du domaine non linéaire..... 152

Figure 5.8 Cartes de distribution de la densité du flux magnétique à la position du rotor qui représente le plus de saturation ($\theta_e = 171^\circ$ électriques). a) Modèle par éléments finis complet, b) modèle réduit au moyen de la RSNL. 153

Figure 5.9 Les pertes « cuivre » locales instantanées calculées dans les conducteurs d’aller par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL. 154

Figure 5.10 Les pertes « cuivre » locales instantanées calculées dans les conducteurs de retour par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL. 154

Figure 5.11 La densité du courant électrique à travers la section des conducteurs calculées par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL ($\theta_e = 207^\circ$ électriques). Haut: conducteurs d’aller. Bas: conducteurs de retour..... 155

Figure 5.12 Les pertes « cuivre » totales instantanées dans le bobinage à spires horizontales au cours de la troisième période électrique calculées par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL. 155

Figure 5.13 Les pertes « cuivre » totales instantanées dans le bobinage à spires mixtes au cours de la troisième période électrique calculées par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL. 156

Figure B.1 Convertisseur électromécanique simple	166
Figure B.2 Le volume élémentaire V_e associé au domaine Ω_e	168
Figure B.3 Trace de la courbe d'aimantation $b(h)$ montrant la densité volumique de l'énergie magnétique.	169
Figure B.4 La force radiale globale appliquée sur la dent du stator.	170
Figure B.5 Eléments de calcul du couple électromagnétique.....	171
Figure B.6 La force globale exercée sur la partie mobile	171
Figure C.1 Séparation des courbes intermédiaires (C_i) reliant les maximums	174
Figure C.2 Coupe transversale de la culasse du stator, la culasse du rotor, du pôle stator et du pôle du rotor d'une machine à réluctance variable.....	174

Liste des Tableaux

Tableau 2.1 Comparaison entre le modèle analytique et le modèle par éléments finis pour le calcul des valeurs moyennes des pertes par effet Joule dans les deux exemples de cas test.	57
Tableau 2.2 Comparaison entre le modèle analytique et le modèle par éléments finis pour le calcul des valeurs moyennes des pertes par effet Joule dans les différentes configurations.	65
Tableau 3.1 Valeurs moyennes des pertes « cuivre » dans le cas des configurations à conducteur en fils torsadés et en fils de Litz en comparaison avec celles à conducteur massif.	83
Tableau 3.2 Valeurs moyennes des pertes « cuivre » dans le cas des configurations à conducteur subdivisé en des brins parallèles en comparaison avec celles à conducteur massif.	86
Tableau 4.1 Points de Gauss-Lobatto et les poids associés pour la quadrature d'ordre 3 sur le segment $[s_1; s_2]$; $m = (s_1 + s_2)/2$ et $\delta = s_2 - s_1 $.	101
Tableau 4.2 Valeurs moyennes des pertes « cuivre » dans le cas des spires à conducteurs solides (Modèle complet) et dans le cas des spires à conducteurs multi filamentaires en fils de Litz (Modèle complet et modèle réduit).	104
Tableau 4.3 Points de Gauss-Lobatto et les poids associés pour la quadrature d'ordre 3 sur le triangle élémentaire Δe ; $X_{21} = (x_2 - x_1)$, $X_{31} = (x_3 - x_1)$, $Y_{21} = (y_2 - y_1)$, $Y_{31} = (y_3 - y_1)$, et $\delta = X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21} $.	116
Tableau 4.4 Comparaison des valeurs moyennes de pertes « cuivre » calculées par le modèle complet de référence et le modèle réduit.	133
Tableau 5.1 Comparaison des valeurs quadratiques de l'erreur de calcul des pertes « cuivre » par les deux méthodes de réduction du modèle (POD totale et POD partielle) dans le cas des trois différentes configurations d'enroulement.	156

Introduction Générale

Contexte, Motivation et Objectif de la Thèse

Dans le cadre des efforts mondiaux concertés pour une démarche globale de réduction des dégagements de gaz à effet de serre, des émissions de particules polluantes et de l'utilisation des énergies fossiles, les différents moyens de transports font l'objet, durant les deux dernières décennies, d'une action importante d'électrification. Qu'il s'agisse de moyens de transports terrestres ou aériens, les évolutions dans le domaine de l'électricité permettent de concevoir des systèmes alternatifs plus légers, plus souples en termes de contrôle et plus facile à entretenir.

Au centre de ces systèmes, la machine électrique, dont l'histoire de son évolution se résume par un effort continu pour augmenter ses densités de puissance massique et volumique, doit présenter un fort couple ainsi qu'un fonctionnement sur des larges plages de vitesse. Les contraintes du milieu industriel pour la conception d'une machine électrique varient principalement entre le coût, le rendement énergétique, l'encombrement, la robustesse et la sûreté du fonctionnement. Le choix d'un certain type de machine dépend alors fortement de l'application envisagée.

La machine à réluctance variable à double saillance, à laquelle on s'intéresse dans ce travail, est une solution intéressante pour certaines applications et a sans doute un avenir prometteur [UHS+016] [BEK011] [HKL016]. Récemment, cette machine a attiré l'attention de beaucoup de constructeurs et de chercheurs particulièrement pour des applications dans le domaine de l'automobile. Elle présente de nombreux avantages. Sans balais ni collecteur, elle est de conception très simple et est constituée de matériaux peu coûteux. L'absence d'aimants et de bobines au rotor lui confère une grande robustesse. En plus, les progrès réalisés dans le domaine de l'électronique de puissance et de commande et la disponibilité des solutions efficaces pour résoudre les problèmes de l'ondulation du couple et du bruit produits, ont considérablement servi à introduire cette machine dans le monde industriel. Toutefois, la conception des machines électriques nécessite une bonne anticipation des pertes totales dissipées. Seulement si toutes les pertes de la machine sont déterminées avec une précision suffisante, une prévision efficace de la puissance utile développée en sortie de la machine et du rendement devient possible. Les pertes totales de la machine sont la somme des pertes dans les conducteurs, des pertes ferromagnétiques, des pertes mécaniques et dans le cas des machines à aimants permanents on doit ajouter les pertes par courants induits dans les aimants.

L'axe principal autour duquel s'articule ce travail concerne les pertes par effet Joule développées dans les matériaux conducteurs. Les pertes par effet Joule qu'on appelle encore pertes « cuivre » sont la somme des pertes Ohm classiques DC et des pertes additionnelles dites par courants de Foucault. En effet, les conducteurs du bobinage des machines

électriques alimentées en courant ou en tension, sont sujets à des champs magnétiques variables en fonction du temps [Sto74]. D'après la loi de Lenz-Faraday, des boucles de courants induits dites de Foucault se créent dans les matériaux conducteurs tendant à compenser les variations en flux magnétiques. Ces boucles de courants de Foucault perturbent l'homogénéité de la distribution de la densité du courant électrique à travers la section des conducteurs et contribuent alors à un accroissement conséquent des pertes « cuivre ». Simultanément, la répartition non uniforme de la densité du courant qui résulte de la circulation des boucles de courants de Foucault à travers la section des conducteurs conduit à son tour à une déviation des lignes du champ magnétique dans le domaine des encoches de la machine où sont logés ces conducteurs. Le problème des courants de Foucault et des pertes « cuivre » additionnelles associées sont alors le résultat d'un couplage fort électrique-magnétique entre la densité du courant électrique et la variation en fonction du temps du champ magnétique pénétrant les matériaux conducteurs.

Dans les démarches de conception et d'optimisation des machines électriques, l'approche analytique est souvent utilisée pour résoudre ce problème afin de quantifier les pertes par effet Joule. La résolution du problème analytiquement n'est possible que dans le cas de géométries d'encoches symétriques en tenant compte de certaines hypothèses simplificatrices. Ces hypothèses simplificatrices qui nuisent parfois au réalisme de l'état électromagnétique dans l'encoche se résument par le fait de supposer dans l'encoche un champ magnétique unidimensionnel et d'attribuer une perméabilité magnétique infinie au circuit magnétique de l'alentour. Dans le cas des machines électriques à encoches étroites, typiques des machines électriques à champs tournants comme par exemple les machines synchrones et asynchrones, les hypothèses ci-dessus sont souvent acceptables, le calcul analytique conduit alors à un résultat rapide avec un degré de précision suffisant [Dow66] [Lyo21] [HGB000].

Cependant, dans le cas des machines à bobinage dentaire et notamment à réluctance variable à double saillance, les lignes d'induction magnétiques ne sont plus unidimensionnelles. Du fait de la forte saillance du rotor, les conducteurs du bobinage qui sont localisés au voisinage de l'entrefer, sont pénétrés par des lignes d'induction magnétique bidimensionnelles dont la distribution varie avec le mouvement et la position de la dent du rotor qui passe à leur proximité. En outre, la machine à réluctance variable opère sous une saturation magnétique remarquable due au comportement non-linéaire de son circuit magnétique, donnant lieu alors à des lignes de champ de fuite importantes. Puisque la contrainte d'un champ magnétique unidimensionnel à travers l'encoche n'est pas vérifiée, le modèle analytique précédemment mentionné n'est plus adapté pour le calcul des pertes « cuivre » dans le cas des machines à réluctance variable.

En raison de l'absence d'un modèle analytique à application plus générale, les pertes additionnelles par courants de Foucault dissipées dans le bobinage sont souvent négligées dans les processus de conception des machines à réluctance variable à double saillance.

Pour quelques modèles ou applications de cette machine telles que les machines à réluctance variable à basse puissance et celles à applications en basses vitesses, cette hypothèse n'est pas trop critique, puisque ces pertes sont en effet le plus souvent négligeables. Ceci peut être justifié par le fait que dans le cas des applications à basse vitesse, la fréquence d'alimentation est faible ainsi les pertes « cuivre » par effet de peau et de proximité peuvent être supposées négligeables. Les machines de faibles puissances est un exemple dans lequel les diamètres des conducteurs sont suffisamment petits pour négliger les pertes par courants induits. Par contre, ces pertes additionnelles par courants induits gagnent en importance d'une part lorsque la surface de la section du conducteur devient importante dans le cas des machines à faible nombre de spires et à haute puissance et d'autre part lorsque la machine à réluctance variable est utilisée dans des applications pour des entraînements à très hautes vitesses. Dans certains cas, l'utilisation des conducteurs subdivisés en fils de Litz ou en fils torsadés devient alors nécessaire pour réduire des accroissements conséquents de pertes par courants de Foucault [Su199] [ASF+015] [ABM+015] [ABM+016b] [ABS+016]. Des valeurs excessives de ces pertes aboutissent le plus souvent à des échauffements anormaux, qui contraignent à réduire la puissance électrique fournie à l'entrée pour forcer la température de la machine à rester en dessous des valeurs spécifiques de fonctionnement normal. La réduction de la puissance à l'entrée entraîne simultanément une réduction de la puissance utile en sortie, provoquant ainsi une dégradation du rendement de la machine. Il faut souligner en plus que, grâce à la forte densité des lignes du champ magnétique dans la région de l'entrefer de cette machine, il est recommandé de ne pas placer les conducteurs à la proximité de cette région même si cette mesure peut amener parfois à une réduction du coefficient de remplissage au niveau des encoches de la machine. Toutefois, des instructions précises pour choisir un enroulement optimal sont toujours abandonnées.

L'existence d'une importante relation entre la position d'un conducteur ou d'une spire et les pertes « cuivre » dissipées, la forte corrélation entre les pertes additionnelles par courants de Foucault et la configuration de l'enroulement, l'influence de la subdivision en fils torsadés et en fils de Litz sur la réduction de ces pertes et la non-symétrie des pertes « cuivre » dissipées dans les deux côtés de la dent du stator des conducteurs de la même bobine dans le cas des machines à réluctance variable [ICD002] [KD006a]. Tous ces facteurs montrent la nécessité d'une démarche d'optimisation concrète dans le but de choisir un enroulement optimal en termes de pertes « cuivre » pour un nombre de spires, un coefficient de remplissage et une plage de points de fonctionnement donnés d'une machine à réluctance variable à double saillance. Cette démarche d'optimisation se base sur la méthode numérique de discrétisation en éléments finis 2D tout en garantissant un temps de calcul réduit.

La méthode des éléments finis [IB97] [Meu002] [DTL005], offre une modélisation fine du couplage fort électrique-magnétique entre la densité du courant et la variation en fonction du temps des lignes d'induction magnétiques en accédant aux variables locales et

aux variations spatio-temporelles des différentes grandeurs physiques mises en jeu. Dans le cas des machines électriques, dans le but de garantir une simulation fiable, la méthode des éléments finis peut intégrer la technique de la bande de mouvement ou d'un macro élément pour prendre en compte le mouvement du rotor et les itérations de Newton-Raphson pour modéliser la non-linéarité des circuits ferromagnétiques. Si on ajoute la nécessité d'un maillage fin dans les matériaux conducteurs et les alentours pour une modélisation plus efficace des courants de Foucault, la modélisation par la méthode des éléments finis conduit alors à une grande capacité de stockage et un temps de calcul substantiel qui peuvent entraver tout processus de conception et d'optimisation des bobinages des machines électriques. Pour surmonter cet obstacle, des techniques de réduction de modèle peuvent être utilisées [CLC011] [FF95] [Lum67]. Citons parmi les techniques de réduction les plus utilisées : les techniques de réduction spatiale du domaine d'étude [ABS+016], les techniques de réduction de l'ordre du modèle telles que la POD et la PGD [HC013] et la technique de la perturbation [SD007].

Dans le travail de thèse, est décrit le modèle par éléments finis qui permet de simuler le phénomène des courants de Foucault dans les bobinages des machines électriques et de quantifier les pertes « cuivre » additionnelles associées. Des techniques de réduction de modèle sont proposées afin de démarrer un processus à la fois précis et rapide pour l'optimisation du bobinage des machines électriques. Il faut noter que, les calculs par la méthode des éléments finis sont effectués par un ordinateur (4 core i5 3570k @3.4 GHz) disposant d'une mémoire vive de 32 Gb RAM.

Pour présenter ce travail, le mémoire est organisé en cinq chapitres.

Plan du Mémoire

Chapitre 1 - Modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis

Dans le premier chapitre, il s'agit de la présentation détaillée de la méthode des éléments finis. À partir des équations de Maxwell, nous établissons un modèle électromagnétique qui permet de simuler le phénomène des courants de Foucault dans le bobinage des machines électriques. Le mouvement du rotor et la non linéarité du circuit magnétique sont prises en compte en intégrant respectivement la technique de la bande de mouvement et la méthode de Newton-Raphson. En post-traitement, le modèle permet de calculer les pertes dans le cuivre. Une évaluation des pertes « fer » dans le matériau ferromagnétique est obtenue par la méthode "improved generalized Steimetz equation" (iGSE). La méthode des travaux virtuels est utilisée pour calculer les forces électromagnétiques locales et accéder ainsi à l'estimation du rendement.

Chapitre 2 - Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

Le deuxième chapitre présente un modèle analytique pour calculer les pertes « cuivre ». On traite le cas d'un conducteur rectangulaire ou circulaire entouré d'air et le cas des

conducteurs logés dans l'encoche d'un circuit magnétique. L'approche analytique est adaptée pour pouvoir calculer les pertes « cuivre » dans une machine à réluctance variable. La validité et la précision du modèle analytique sont testées par une comparaison à un modèle par éléments finis de la machine.

Chapitre 3 - Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs multi filamenteux en fils torsadés et en fils de Litz

Dans ce chapitre on étudie l'influence de la subdivision d'un conducteur massif en filaments sur la réduction des pertes additionnelles par courants de Foucault. Afin d'éviter une modélisation par éléments finis en 3D, on propose un modèle approché par éléments finis en 2D des bobinages complexes à conducteurs multi filamenteux en fils de Litz et en fils torsadés. Des équations supplémentaires de type circuit sont associées au modèle par éléments finis en 2D pour interpréter la permutation et le torsadage des filaments.

Chapitre 4 - Réduction du modèle par la technique de la perturbation

Le chapitre quatre est consacré à la réduction du modèle éléments finis par la technique de la perturbation. L'objectif est de réduire le domaine d'étude à l'encoche de la machine où on fait varier la configuration géométrique du bobinage. Pour cela, la technique proposée consiste à résoudre par éléments finis un seul modèle complet de la machine avec un maillage grossier, un bobinage simplifié et une densité du courant uniforme. Une fois ce problème résolu, on capte l'information sur la frontière de l'encoche et on l'applique comme condition aux limites de Neumann ou de Dirichlet sur la frontière du modèle réduit linéaire modélisant uniquement l'encoche pour des variations physiques ou géométriques de l'enroulement intégré.

Chapitre 5 - Réduction de l'ordre du modèle par la technique de la POD-DEIM

Pour réduire l'ordre du modèle éléments finis, le chapitre cinq présente la méthode de la décomposition aux valeurs propres (POD). Elle consiste à générer une projection de la solution du modèle complet vers une base réduite. Le nombre d'inconnues et par conséquent la taille du système d'équations matriciel à résoudre sont efficacement réduits. Dans le cas d'un problème non linéaire, la méthode de l'interpolation empirique discrète (DEIM) est employée pour améliorer considérablement le rendement et l'efficacité de la réduction de la dimension du problème assurée par la décomposition aux valeurs propres.

Production Scientifique

Plusieurs parties de ce mémoire ont abouti à deux revues internationales et à des présentations dans des conférences nationales et internationales

Revues internationales :

[1] M. Al Eit, F. Bouillault, C. Marchand and G. Krebs, "2-D Reduced Model for Eddy Currents Calculation in Litz Wire and Its Application for Switched Reluctance Machine," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 52, no. 3, pp. 1-4, March 2016.

[2] M. Al Eit, F. Bouillault, L. Santandrea, C. Marchand and G. Krebs, "Calculation of Copper Losses in Case of Litz and Twisted Wires. 2D Modeling and Application for Switched Reluctance Machine," *European Journal of Electrical Engineering*, vol. 18, no. (3-4), 2016.

Conférences internationales:

[1] M. Al Eit, F. Bouillault, C. Marchand, G. Krebs and L. Santandrea, "2D Modeling of Litz Wire. Reduced Model and its Application for Switched Reluctance Machine," in 20th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields (Compumag 2015), Montreal, Canada, June 2015.

[2] M. Al Eit, L. Santandrea, F. Bouillault, C. Marchand et G. Krebs "Calcul des Pertes Cuivre dans les Conducteurs Multi- filamentaires et Application aux Bobinages des Machines à Réductance Variable à Double Saillance", dans la 8ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme (NUMELEC 2015), Saint-Nazaire, France, Juin 2015.

[3] M. Al Eit, P. Dular, F. Bouillault, C. Marchand and G. Krebs, "The Boundary Condition Effects on Reduced Finite Element Models for Eddy Currents Loss Calculation," in 10th International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF 2016), Lyon, France, April 2016.

[4] M. Al Eit, F. Bouillault, C. Marchand and G. Krebs, "Model-Order Reduction of Electrical Machines by Means of the Proper Orthogonal Decomposition and Discrete Empirical Interpolation Methods for Copper Loss Calculation," in 10th International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF 2016), Lyon, France, April 2016.

[5] M. Al Eit, P. Dular, F. Bouillault, C. Marchand and Guillaume Krebs, "2D Finite Element Model Reduction for Copper Losses Calculation in Switched Reluctance Machines," in 17th biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC 2016), Miami, Florida, USA, November 2016.

Conférences nationales:

[1] M. Al Eit, F. Bouillault, C. Marchand and G. Krebs, "The Study of the Correlation between Winding Geometry and Copper Losses by Means of Analytic and Finite Element Calculations," dans la 2ème édition du Symposium de Génie Electrique (SGE 2016), Grenoble, France, juin 2016.

Chapitre 1

Modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis

I-Modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis

1.1 Introduction

En partant d'un modèle de Maxwell, l'ensemble des phénomènes physiques régissant le fonctionnement des systèmes électromagnétiques peut être décrit mathématiquement par des équations différentielles à dérivées partielles. La configuration géométrique complexe de certains systèmes tels que les machines électriques tournantes, le comportement non linéaire de leurs circuits magnétiques et l'emploi du régime temporel pour modéliser les courants induits rendent l'intégration directe des équations qui en découlent difficile voir impossible. Dans la pratique, on a recours le plus souvent à une solution approchée utilisant les méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis [IB97] [Meu002] [DTL005] ou des différences finis [Smit84]. L'approche numérique est axée le plus souvent sur une modélisation fine des phénomènes physiques accédant aux variables locales et aux variations spatio-temporelles des différentes grandeurs.

Ce chapitre est dédié à la modélisation par la méthode des éléments finis des machines électriques tournantes. Il est décomposé en deux grandes parties. Dans la première, il s'agit de la résolution par la méthode des éléments finis de la formulation magnétodynamique à travers une section 2D du système électromagnétique étudié. La deuxième partie porte sur le post-traitement, elle présente des modèles de calcul des pertes « cuivre » dans le bobinage, des pertes « fer » dans le circuit magnétique et des forces électromagnétiques nodales. Un calcul du rendement de la machine devient alors possible lorsque le couple électromagnétique utile est calculé en sommant les forces nodales motrices responsables du mouvement du rotor.

1.2 Modélisation locale des phénomènes électromagnétiques

1.2.1 Modèle de Maxwell

L'établissement du champ électromagnétique dans les systèmes électrotechniques est régi par les équations de Maxwell. Dans l'hypothèse où les courants de déplacement sont négligeables aux fréquences industrielles, les trois équations de Maxwell concernées pour décrire les propriétés locales sur le plan électrique et magnétique pourront être exprimées sous la forme différentielle suivante :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \quad (1.1)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad (1.3)$$

Où \vec{H} est le vecteur champ magnétique, \vec{E} le vecteur champ électrique, \vec{B} le vecteur induction magnétique et \vec{j} le vecteur densité du courant.

Ces équations ne peuvent être résolues sans les relations constitutives du milieu. Dans le cas des matériaux homogènes et isotropes ces relations s'écrivent :

$$\vec{H} = \nu(|\vec{B}|)\vec{B} \quad (1.4)$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \quad (1.5)$$

Où les grandeurs physiques ν et σ représentent respectivement la réductivité et la conductivité du milieu.

1.2.2 Formulation du problème électromagnétique

Un couplage aisé des équations de Maxwell (1.1), (1.2) et (1.3) avec les équations du circuit électrique conduit à utiliser d'une façon privilégiée les potentiels par exemple le potentiel vecteur magnétique \vec{A} et le potentiel scalaire électrique V .

L'équation (1.3) de Maxwell-Gauss en magnétisme montre que \vec{B} dérive d'un vecteur potentiel magnétique \vec{A} tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A}) \quad (1.6)$$

En utilisant l'expression (1.6) de \vec{B} , l'équation (1.2) de Maxwell-Faraday s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \quad (1.7)$$

En partant de l'hypothèse que le champ de vecteurs dont le rotationnel est nul dérive d'un potentiel scalaire et en considérant l'équation (1.7), on peut introduire alors le potentiel scalaire électrique V par la relation suivante :

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(V) \quad (1.8)$$

La combinaison des équations (1.4), (1.5), (1.6) et (1.8) nous permet de réécrire l'équation de Maxwell-Ampère (1.1) en terme uniquement de potentiels :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\nu(|\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})|)\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})) = -\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \sigma\overrightarrow{\operatorname{grad}}(V) \quad (1.9)$$

Les systèmes électromagnétiques possèdent souvent des structures complexes de telle façon que la circulation des lignes de champs se fait dans toutes les directions de l'espace. Une modélisation tridimensionnelle est alors incontournable.

Néanmoins, une telle modélisation s'avère souvent fastidieuse et coûteuse en particulier si certains matériaux intégrés dans le système possèdent des caractéristiques non-linéaires. En exploitant la particularité de la disposition des matériaux dans ces systèmes, leurs alimentations et les symétries de leurs structures, on peut se ramener par conséquent à des modèles réduits. Ces modèles réduits peuvent, sous certaines hypothèses simplificatrices, simuler les phénomènes électromagnétiques, avec une précision suffisante et des coûts de calcul raisonnables.

1.2.3 Modèle bidimensionnel

En effet, dans certains systèmes électrotechniques tels que les machines électriques à flux radial, la disposition des conducteurs dans le sens longitudinal parallèlement à l'axe de rotation de la machine favorise l'établissement du champ magnétique dans les plans transversaux. En partant de l'hypothèse que les dimensions longitudinales sont relativement grandes devant les dimensions transversales et que l'effet des têtes de bobines est négligeable, il en résulte que la distribution du champ est pratiquement invariante suivant la direction longitudinale. Un modèle bidimensionnel permet ainsi d'obtenir la solution avec une précision suffisante. C'est pourquoi nous limiterons notre étude à la résolution des équations électromagnétiques en 2D à travers une section transversale de la machine. Cette section transversale est ainsi le domaine d'étude qu'on appelle Ω de frontière Γ .

Si on considère, dans un repère cartésien que la section à modéliser de la machine est incluse dans le plan (x,y) transversal par rapport à l'axe longitudinal de la machine porté par l'axe z , le vecteur induction magnétique \vec{B} à l'instant t s'écrira alors sous la forme :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x(x, y, t) \\ B_y(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

1.2.4 Unicité de la solution

Le potentiel vecteur magnétique, étant invariant suivant z , s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x(x, y, t) \\ A_y(x, y, t) \\ A_z(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Le théorème de Helmholtz assure qu'on peut déterminer de façon unique un champ de vecteurs dans un domaine Ω , en donnant en chaque point du domaine son rotationnel, sa divergence et la valeur de sa composante normale à travers la frontière Γ du domaine.

Dans notre cas, la modélisation est bidimensionnelle; le domaine à étudier est une section transversale de la machine située dans le plan (x,y) . D'après les équations (1.6) et (1.10), le potentiel vecteur magnétique \vec{A} est défini par son rotationnel en chaque point du domaine

1 Modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis

Ω . On part de l'hypothèse que la composante normale de \vec{A} à travers la frontière Γ , quelque soit cette frontière, est nulle. Cette hypothèse est suffisamment vérifiée si le potentiel vecteur magnétique est supposé dirigé suivant l'axe z . Ceci implique que :

$$A_x(x, y, t) = A_y(x, y, t) = 0 \quad (1.12)$$

La jauge de Coulomb qui consiste à annuler la divergence du potentiel vecteur magnétique en tout point du domaine sera vérifiée alors implicitement en 2D puisque le potentiel vecteur magnétique est invariant suivant l'axe z , soit :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_z(x, y, t)}{\partial z} = 0 \quad (1.13)$$

D'après ce qui précède, les trois conditions du théorème de Helmholtz sont vérifiées et l'unicité du vecteur \vec{A} est alors garantie, ce potentiel vecteur magnétique sera donné à l'instant t par la représentation suivante :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z(x, y, t) = A(x, y, t) = A_t \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

En se référant aux équations (1.5) et (1.8), le vecteur densité du courant électrique sera donné par l'équation ci-dessous :

$$\vec{j} = \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \overrightarrow{\text{grad}}(V) \quad (1.15)$$

Étant donné que les conducteurs sont disposés longitudinalement, ce vecteur \vec{j} aura alors une seule composante suivant l'axe z . Cette composante dépend à chaque instant t uniquement des coordonnées x et y . Si on ajoute l'hypothèse que le potentiel scalaire électrique V varie linéairement suivant l'axe z et on tient compte des équations (1.14) et (1.15), on peut conclure que le vecteur gradient de V s'écrit sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\Delta V(x, y, t)}{l} \vec{e}_z = \Delta V_t \vec{e}_z \quad (1.16)$$

Où l est la longueur de la machine, ΔV_t la chute du potentiel scalaire électrique à l'instant t par unité de longueur et \vec{e}_z le vecteur unitaire porté par l'axe z .

Dans ces conditions, l'équation (1.9) du couplage fort électrique-magnétique, à résoudre pour un tel système, se ramène en 2D à l'équation scalaire suivante :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{vgrad}}(A_t)) = \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} + \sigma \Delta V_t \quad (1.17)$$

On suppose maintenant, dans un domaine Ω de frontière Γ ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\emptyset\}$), une fonction continue A_t telle que en tout point de Ω elle vérifie l'équation :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{vgrad}}(A_t)) - \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} = 0 \quad (1.18)$$

et satisfait pour tout instant t sur la frontière Γ l'une des conditions suivantes :

a. $A_t = 0$ sur Γ .

b. $\partial A_t / \partial n = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(A_t) = 0$ sur Γ où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la frontière Γ .

c. $A_t = 0$ sur Γ_1 et $\partial A_t / \partial n = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(A_t) = 0$ sur Γ_2 .

Compte tenu de l'une des conditions aux limites a, b ou c sur Γ , on peut démontrer que l'intégrale suivante est nulle :

$$\oint_{\Gamma} A_t v \overrightarrow{\text{grad}}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma dt = 0 \quad (1.19)$$

\forall l'instant $t = \tau > 0$ considéré, en supposant que A_t est nul à l'origine du temps on peut écrire en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau} \oint_{\Gamma} A_t v \overrightarrow{\text{grad}}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma dt - \int_0^{\tau} \iint_{\Omega} A_t \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} d\Omega dt + \int_0^{\tau} \iint_{\Omega} A_t \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} d\Omega dt \\ &= \int_0^{\tau} \iint_{\Omega} \text{div}(A_t v \overrightarrow{\text{grad}}(A_t)) d\Omega dt - \int_0^{\tau} \iint_{\Omega} A_t \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} d\Omega dt + \iint_{\Omega} \sigma \frac{A_t^2}{2} d\Omega \\ &= \int_0^{\tau} \iint_{\Omega} A_t \text{div}(v \overrightarrow{\text{grad}}(A_t)) d\Omega dt + \int_0^{\tau} \iint_{\Omega} v [\overrightarrow{\text{grad}}(A_t)]^2 d\Omega dt \\ &\quad - \int_0^{\tau} \iint_{\Omega} A_t \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} d\Omega dt + \iint_{\Omega} \sigma \frac{A_t^2}{2} d\Omega \quad (1.20) \\ &= \int_0^{\tau} \iint_{\Omega} A_t [\text{div}(v \overrightarrow{\text{grad}}(A_t)) - \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t}] d\Omega dt + \int_0^{\tau} \iint_{\Omega} v [\overrightarrow{\text{grad}}(A_t)]^2 d\Omega dt \\ &\quad + \iint_{\Omega} \sigma \frac{A_t^2}{2} d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Prenant en compte l'équation (1.18), l'intégrale $\int_0^{\tau} \iint_{\Omega} A_t [\text{div}(v \overrightarrow{\text{grad}}(A_t)) - \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t}] d\Omega dt$ est alors nulle et l'équation (1.20) s'écrit :

$$\int_0^{\tau} \iint_{\Omega} v [\overrightarrow{\text{grad}}(A_t)]^2 d\Omega dt + \iint_{\Omega} \sigma \frac{A_t^2}{2} d\Omega = 0 \quad (1.21)$$

Ceci implique que $A_t = 0$ et que $\overrightarrow{\text{grad}}(A_t) = \vec{0}$ donc A_t est une constante implicitement nulle $\forall t$.

Revenons à l'équation (1.17), A_t vérifie en tout point du domaine Ω de frontière Γ ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\emptyset\}$) une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\text{div}(v \overrightarrow{\text{grad}}(A_t)) - \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} = \sigma \Delta V_t = f(x, y, t) \quad (1.22)$$

On montre que la solution A_t du problème est déterminée de façon unique à tout instant t si la solution à l'origine du temps est donnée par A_0 et que les conditions aux limites associées au domaine Ω obéissent à l'une des conditions suivantes sur les frontières :

- a. Condition de Dirichlet : Le potentiel vecteur A_t est imposé sur la frontière Γ . On peut montrer (voir Annexe A), que ceci revient à imposer la composante normale du vecteur induction magnétique.

$$A_t = P \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.23)$$

- b. Condition de Neumann : la dérivée du potentiel vecteur A_t par rapport à la normal sur la frontière Γ est imposée. Ceci revient à imposer la composante tangentielle du vecteur champ magnétique (voir Annexe A).

$$\partial A_t / \partial n = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(A_t) = Q \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.24)$$

- c. Condition mixte : Le potentiel vecteur A_t est imposé sur la frontière Γ_1 et la dérivée du potentiel vecteur A_t par rapport à la normal sur la frontière Γ_2 est imposée.

$$\begin{aligned} A_t &= P && \text{sur } \Gamma_1 \\ \partial A_t / \partial n &= \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(A_t) = Q && \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.25)$$

La démonstration est immédiate, en supposant que A_{t1} et A_{t2} sont deux solutions aux problèmes, alors $A'_t = A_{t1} - A_{t2}$ vérifie l'équation (1.18) en tout point de Ω . La solution à l'origine du temps est $A'_0 = A_0 - A_0$ est nulle. Et par ailleurs, sur la frontière Γ , A'_t ou sa dérivé normale sont nulles. On conclut donc que $A'_t = 0$ et par suite $A_{t1} = A_{t2}$. Pour obtenir alors une solution unique du problème, nous devons imposer sur la frontière Γ du domaine d'étude des conditions aux limites de Dirichlet, de Neumann ou des conditions mixtes.

1.2.5 Couplage aux équations du circuit électrique

Une schématisation générale d'un système électromagnétique couplé aux circuits électriques est donnée par la figure suivante :

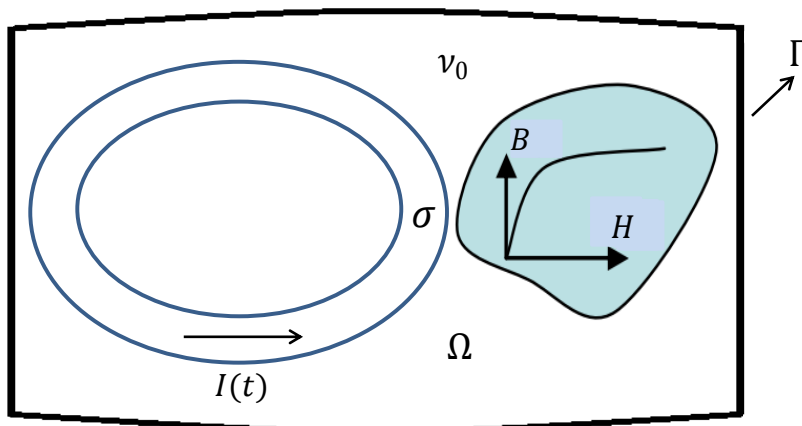


Figure 1.1 Système électromagnétique non-linéaire couplé aux circuits électriques.

Le domaine d'étude Ω de frontière Γ est une section transversale du système. Le système comprend des matériaux à caractéristique magnétique linéaire, l'air par exemple, de réductivité ν_0 . Dans les matériaux ferromagnétiques où sont présents les phénomènes de saturation, la réductivité n'est plus constante, elle dépend fortement de l'induction magnétique B comme le montre l'équation (1.4).

La courbe $B(H)$ est alors nécessaire pour décrire cette non-linéarité. σ étant la conductivité des matériaux conducteurs, la prise en compte de l'équation du circuit électrique se traduit par le fait que le courant à l'instant t traversant la section S du conducteur est $I(t)$. Ceci se traduit alors par l'équation suivante :

$$I(t) = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds} = \iint_S \left(-\sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} - \sigma \Delta V_t \right) ds \quad (1.26)$$

La résolution du problème électromagnétique couplé aux circuits électriques revient donc à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nu \overrightarrow{\operatorname{grad}}(A_t)) = \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} + \sigma \Delta V_t \\ I(t) = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds} = \iint_S \left(-\sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} - \sigma \Delta V_t \right) ds \end{cases} \quad (1.27)$$

Ce système d'équations est résolu à travers le domaine d'étude Ω de frontière Γ , en appliquant les conditions aux limites nécessaires sur la frontière Γ et en partant d'une solution à l'origine du temps donnée par A_0 .

1.2.6 Résolution par la méthode des éléments finis

La résolution de la formulation forte de l'équation (1.17) analytiquement sans s'adresser à certaines hypothèses simplificatrices est normalement difficile et paraît de même impossible du fait de la géométrie complexe du domaine étudié. Seules des méthodes numériques peuvent être utilisées: dans ce cas, au lieu de résoudre l'équation de façon continue, on discrétise le potentiel vecteur en un nombre fini de points dans le domaine d'étude. Parmi ces méthodes numériques, la méthode des éléments finis[†] [IB97] [Meu002] [SC80] est la plus utilisée. Elle discrétise une formulation intégrale faible pour conduire à un système algébrique qui fournit une solution approchée du problème étudié. Dans ce cas, le domaine étudié est décomposé en un nombre fini d'éléments. Dans chacun de ces éléments, l'inconnue est définie à partir des valeurs nodales par des fonctions d'interpolation appropriées.

Pour transformer une formulation forte d'un système d'équation aux dérivées partielles en une formulation intégrale faible, les processus les plus souvent utilisés sont la méthode des résidus pondérés [GG81] et la méthode variationnelle [Fou85].

[†] La modélisation par éléments finis est présentée en détails dans ce chapitre. Sous une sorte de rappel, on met en ordre les étapes nécessaires à l'intégration de la non-linéarité du circuit magnétique, du mouvement du rotor et des relations de périodicité dans le cas d'un système présentant une symétrie.

Avec la méthode des résidus pondérés, la mise en équations du problème étudié est obtenue en partant des équations différentielles. Quant à la méthode variationnelle, elle permet d'obtenir directement une formulation intégrale du problème à résoudre par la maximisation d'une fonctionnelle correspondante [Lon90]. Dans la suite de notre étude, on va développer la méthode des résidus pondérés.

1.2.6.1 Formulation faible par la méthode des résidus pondérés

Soit A_t une solution approchée du problème. Le résidu est alors l'erreur commise sur l'équation lorsqu'on utilise cette approximation, il est défini par :

$$R(A_t) = -\text{div}(\overline{vgrad}(A_t)) + \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} + \sigma \Delta V_t \quad (1.28)$$

Soit E_ψ un ensemble des fonctions ψ dites fonctions tests ou de pondérations, quelconques et définies sur le domaine Ω . La méthode des résidus pondérés consiste à rechercher la solution approchée A_t qui permet de minimiser le résidu en le rendant orthogonal, selon un produit scalaire précis, aux fonctions ψ sur le domaine d'étude Ω . Ce qui correspond à l'équation sous forme intégrale représentée par :

$$W = \iint_{\Omega} \psi R(A_t) d\Omega = 0; \quad \forall \psi \in E_\psi \quad (1.29)$$

En remplaçant $R(A_t)$ dans l'équation (1.29) par son expression (1.28), nous obtenons :

$$W = \iint_{\Omega} \psi [-\text{div}(\overline{vgrad}(A_t)) + \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} + \sigma \Delta V_t] d\Omega = 0 \quad (1.30)$$

Après une intégration par parties sur le premier terme de (1.30), on peut écrire :

$$\begin{aligned} W = & \iint_{\Omega} (\overline{vgrad}(\psi) \cdot \overline{grad}(A_t)) d\Omega - \oint_{\Gamma} \psi \overline{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma \\ & + \iint_{\Omega} \psi \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} d\Omega + \iint_{\Omega} \psi \sigma \Delta V_t d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Pour discrétiser la forme intégrale (1.31), on utilise la méthode des éléments finis. Elle consiste à subdiviser le domaine d'étude en sous-domaines élémentaires. Pour un domaine bidimensionnel, la plus simple des méthodes de subdivision consiste à découper en des triangles de premier ordre. On cherche alors à calculer la valeur du potentiel vecteur aux différents nœuds du maillage.

1.2.6.2 Discrétisation par la méthode des éléments finis

La discrétisation spatiale du domaine d'étude permet de ramener l'intégrale W de l'équation (1.31) sur tout le domaine Ω à une somme finie d'intégrales W^e sur les éléments ou les domaines élémentaires Ω_e qui composent le domaine complet Ω . Ce qui permet d'écrire :

$$W = \sum_{e=1}^{n_e} W^e = \sum_{e=1}^{n_e} \left[\iint_{\Omega_e} (\nabla \psi) \cdot \nabla (A_t) d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \psi \nabla (A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma_e + \iint_{\Omega_e} \psi \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} d\Omega_e + \iint_{\Omega_e} \psi \sigma \Delta V_t d\Omega_e \right] = 0 \quad (1.32)$$

Où n_e est le nombre total de domaines élémentaires Ω_e et Γ_e est la partie incluse dans l'élément Ω_e de l'interpolation linéaire de la frontière Γ . L'interpolation linéaire de la frontière Γ est la frontière du maillage résultant de la discrétisation spatiale du domaine d'étude.

Une des particularités de la méthode des éléments finis réside dans la manière dont sont construites les interpolations de fonctions qui sont définies par domaine élémentaire, c'est-à-dire par élément triangulaire. Dans notre cas, on considère que pour un point de coordonnées (x,y) donné dans l'élément Ω_e , la valeur du potentiel vecteur est obtenue par une interpolation linéaire des valeurs nodales comme suit :

$$A_t^{\Omega_e}(x, y) = (1 \quad x \quad y) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Où 1, x et y constituent la base polynomiale de l'interpolation, ce sont des monômes indépendants dont le nombre est égal au nombre de variables nodales. Les coefficients a , b et c sont appelés les variables généralisées de l'élément. Cette approximation est dite approximation généralisée ou non nodale.

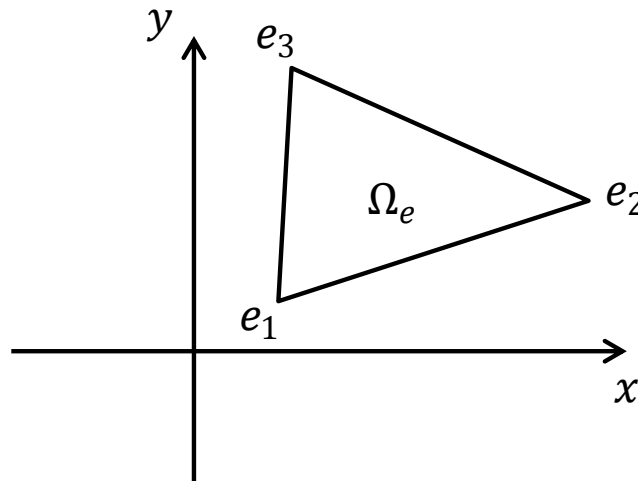


Figure 1.2 Elément triangulaire de premier ordre.

Exprimons qu'en chaque nœud d'interpolation e_i de coordonnées (x_i, y_i) , la fonction $A_t^{\Omega_e}$ prend la valeur nodal A_{it} à l'instant t où $i \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{pmatrix} A_{1t} \\ A_{2t} \\ A_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = [P] \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Soit en inversant la matrice nodale $[P]$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = [P]^{-1} \begin{pmatrix} A_{1t} \\ A_{2t} \\ A_{3t} \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

L'introduction des valeurs des coefficients a, b et c dans l'interpolation (1.33) conduit à la formule :

$$\begin{aligned} A_t^{\Omega_e}(x, y) &= A_{1t}\lambda_1(x, y) + A_{2t}\lambda_2(x, y) + A_{3t}\lambda_3(x, y) \\ &= (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) \begin{pmatrix} A_{1t} \\ A_{2t} \\ A_{3t} \end{pmatrix} = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) [A_t^{\Omega_e}] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Par opposition à l'approximation généralisée, cette approximation est dite nodale où les fonctions $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$ et $\lambda_3(x, y)$ ont pour expression :

$$\begin{cases} \lambda_1(x, y) = \frac{[(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2)]}{2S} \\ \lambda_2(x, y) = \frac{[(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y + (x_3y_1 - x_1y_3)]}{2S} \\ \lambda_3(x, y) = \frac{[(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1)]}{2S} \end{cases} \quad (1.37)$$

Où $2S = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$ est le déterminant de la matrice nodale, c'est également, en valeur absolue, deux fois l'aire du triangle.

Ces trois fonctions sont appelées fonctions d'interpolation ou fonctions de forme de l'élément triangulaire Ω_e . Elles possèdent les propriétés caractéristiques suivantes :

$$\lambda_i(x_j^e, y_j^e) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (1.38)$$

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in \Omega_e \quad (1.39)$$

Pour le calcul de l'intégrale W^e de l'équation (1.32), la méthode de Galerkin est considérée [Fle84]. Elle consiste à choisir comme fonctions de pondération les fonctions de forme des éléments finis triangulaires du maillage. L'ensemble des fonctions de pondérations dans chaque élément triangulaire sera $E_\psi = E_\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ et alors pour chaque $\lambda_i \in E_\lambda$, W^e doit vérifier :

$$\begin{aligned} W_i^e &= \iint_{\Omega_e} (v \overrightarrow{\text{grad}}(\lambda_i) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(A_t)) d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} v \lambda_i \overrightarrow{\text{grad}}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma_e \\ &\quad + \iint_{\Omega_e} \lambda_i \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} d\Omega_e + \iint_{\Omega_e} \lambda_i \sigma \Delta V_t d\Omega_e \end{aligned} \quad (1.40)$$

En premier lieu, sur la frontière Γ ou sur une partie de cette frontière, on suppose que la condition aux limites est de type Dirichlet avec une valeur homogène nulle du potentiel vecteur. Sur la figure 1.3 par exemple, le potentiel vecteur aux nœuds e_2 et e_3 existant sur cette frontière est nul :

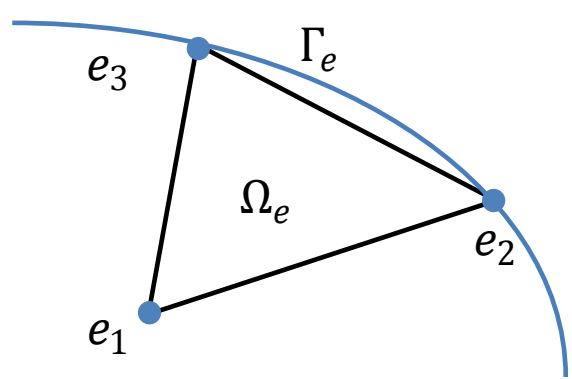
$$A_{2t} = A_{3t} = 0 \quad (1.41)$$


Figure 1.3 Exemple d'un élément triangulaire dont deux nœuds existent sur la frontière Γ du domaine.

Le potentiel vecteur en un point (x,y) de l'élément Ω_e s'écrit alors sous la forme suivante :

$$A_t^{\Omega_e}(x,y) = A_{1t}\lambda_1(x,y) \quad (1.42)$$

On remarque qu'il n'y a pas d'influence des fonctions de forme λ_2 et λ_3 sur l'interpolation linéaire du potentiel vecteur dans l'élément Ω_e on peut choisir alors $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En plus, sur le segment $\Gamma_e = [e_2, e_3]$, la fonction de forme λ_1 est nulle. On peut conclure donc que le l'intégrale curviligne élémentaire $\int_{\Gamma_e} \nu \lambda_i \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma_e$ de l'équation (1.40) est nul à travers la frontière où on impose la condition de Dirichlet homogène nulle quelque soit $\lambda_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Ou, d'une manière plus générale, si la condition aux limites imposée est de type Dirichlet que ce soit homogène ou non homogène, le potentiel vecteur magnétique est alors bien connu aux nœuds e_2 et e_3 . Les deux valeurs du potentiel vecteur aux nœuds e_2 et e_3 ne font pas partie alors des inconnues du système d'équations finales à résoudre, ainsi, les termes W_2^e et W_3^e associées à ces deux nœuds n'interviennent pas dans ce système et alors les deux intégrales $\int_{\Gamma_e} \nu \lambda_i \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma_e$ pour $i = \{2,3\}$ ne sont plus à calculer.

En deuxième lieu, sur la frontière Γ ou sur une partie de cette frontière, on suppose que la condition aux limites est de type Neumann avec une valeur homogène nulle. Ceci se traduit par le fait que $\partial A_t / \partial n = \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} = 0$, donc de même, le terme $\int_{\Gamma_e} \nu \lambda_i \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma_e$ est nul.

Généralement, les conditions aux limites affectées aux frontières des systèmes électrotechniques sont des conditions de Dirichlet ou de Neumann qui sont homogènes et nulles, par conséquent le terme $\int_{\Gamma_e} \nu \lambda_i \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma_e$ de l'équation (1.40) est nul.

1 Modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis

Au vu de ce qui précède, en considérant que le potentiel scalaire électrique est constant à travers la section du conducteur et en remplaçant A_t par son expression dans l'équation (1.36), l'équation (1.40) devient :

$$W_i^e = \iint_{\Omega_e} \left(\sqrt{\text{grad}(\lambda_i)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}((\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3)) \right) d\Omega_e [A_t^{\Omega_e}] + \iint_{\Omega_e} \lambda_i \sigma (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) d\Omega_e \frac{\partial [A_t^{\Omega_e}]}{\partial t} + \iint_{\Omega_e} \lambda_i \sigma d\Omega_e \Delta V_t \quad (1.43)$$

Dans chaque domaine élémentaire Ω_e , l'équation (1.43) est vérifiée pour les trois fonctions d'interpolation λ_1 , λ_2 et λ_3 . Cela conduit pour l'élément Ω_e aux trois relations algébriques W_1^e , W_2^e et W_3^e que l'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} W_1^e \\ W_2^e \\ W_3^e \end{pmatrix} = [S^{\Omega_e}] [A_t^{\Omega_e}] + [T^{\Omega_e}] \frac{\partial [A_t^{\Omega_e}]}{\partial t} + [d^{\Omega_e}] \Delta V_t \quad (1.44)$$

Pour calculer les termes des matrices de l'équation (1.44) on utilise le changement de variable défini par la transformation bijective T qui permet de passer d'un élément de référence triangulaire très simple Ω_r à chaque élément réel Ω_e du maillage.

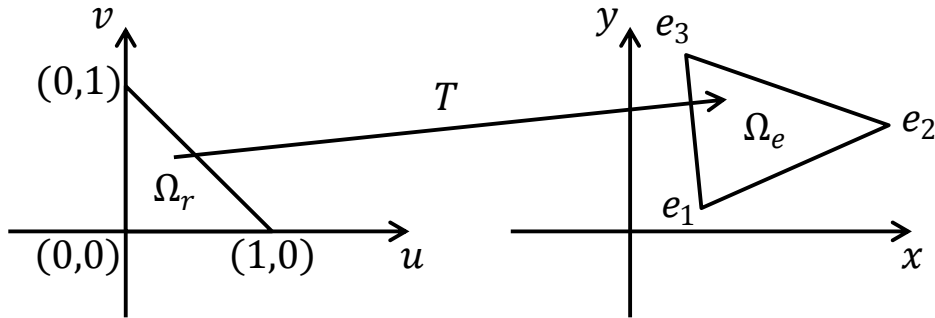


Figure 1.4 La transformation T définit de l'élément de référence à l'élément réel.

Les coordonnées réelles x et y sont données en fonction des coordonnées de référence u et v par les équations suivantes :

$$x = \alpha_x u + \beta_x v + \gamma_x \quad (1.45)$$

$$y = \alpha_y u + \beta_y v + \gamma_y \quad (1.46)$$

Les nœuds géométriques de l'élément de référence se transforment aux nœuds géométriques de l'élément réel, les coordonnées des nœuds e_1 , e_2 et e_3 peuvent s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \beta_x \\ \gamma_x \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

1 Modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_y \\ \beta_y \\ \gamma_y \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

La résolution des deux systèmes d'équations matricielles précédentes (1.47) et (1.48) permet de déterminer les coefficients α_k , β_k et γ_k tels que $k \in \{x, y\}$. Les équations (1.45) et (1.46) deviennent :

$$x = (x_2 - x_1)u + (x_3 - x_1)v + x_1 \quad (1.49)$$

$$y = (y_2 - y_1)u + (y_3 - y_1)v + y_1 \quad (1.50)$$

En utilisant la dérivation en chaîne, on peut calculer les dérivées en u et v d'une fonction à partir de ces dérivées en x et y :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

Où $[J]$ est la matrice jacobienne de la transformation géométrique T . Les termes de $[J]$ s'obtiennent aisément par la dérivation par rapport à u et v de (1.49) et (1.50). De la même manière, les dérivées en x et y d'une fonction s'obtiennent à partir des dérivées en u et v :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

Où $[J]^{-1}$ est l'inverse de $[J]$, il est donnée par l'expression suivante :

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det([J])} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

$\det([J]) = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$ est le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation T , c'est également, en valeur absolue, deux fois l'aire de l'élément réel Ω_e . L'intégrale sur l'élément réel Ω_e d'une fonction $f(x, y)$ définie dans cet élément est donnée par :

$$\iint_{\Omega_e} f(x, y) d\Omega_e = \iint_{\Omega_e} f(x, y) dx dy \quad (1.54)$$

En utilisant le changement de variables par la transformation T , cette intégrale devient donc sur l'élément de référence Ω_r :

$$\iint_{\Omega_r} f(x(u, v), y(u, v)) |\det([J])| d\Omega_r = \iint_{\Omega_r} f(x(u, v), y(u, v)) |\det([J])| du dv \quad (1.55)$$

La transformation T est bijective si la matrice $[J]$ est non singulière c'est-à-dire son déterminant est non nul. Il ne s'annule que si les trois sommets de l'élément sont alignés. Plus généralement, les angles intérieurs de tous les triangles doivent rester inférieurs à 180 degrés pour éviter que $|dét([J])|$ soit nul. En utilisant les transformations (1.49) et (1.50), les fonctions de forme de premier ordre λ_1 , λ_2 et λ_3 données dans le système d'équations (1.37), s'écrivent alors dans le système de coordonnées (u, v) :

$$\begin{cases} \lambda_1(u, v) = 1 - u - v \\ \lambda_2(u, v) = u \\ \lambda_3(u, v) = v \end{cases} \quad (1.56)$$

Vu que $\overrightarrow{grad}(\lambda_i) \cdot \overrightarrow{grad}(\lambda_j) = [\overrightarrow{grad}(\lambda_i)]^T [\overrightarrow{grad}(\lambda_j)]$ et que $\overrightarrow{grad}((\lambda_j(x, y))) = [J]^{-1} [\overrightarrow{grad}((\lambda_j(u, v)))]$, les expressions des termes des matrices $[S^{\Omega_e}]$, $[T^{\Omega_e}]$ et $[d^{\Omega_e}]$ du système (1.44) sont données, à partir de l'élément de référence, comme suit :

$$s_{ij}^{\Omega_e} = \iint_{\Omega_r} (v [\overrightarrow{grad}((\lambda_i(u, v)))]^T [J]^{-T} [J]^{-1} [\overrightarrow{grad}((\lambda_j(u, v)))] |dét([J])| d\Omega_r \quad (1.57)$$

$$t_{ij}^{\Omega_e} = \iint_{\Omega_r} \sigma \lambda_i(u, v) \lambda_j(u, v) |dét([J])| d\Omega_r \quad (1.58)$$

$$d_i^{\Omega_e} = \iint_{\Omega_r} \sigma \lambda_i(u, v) |dét([J])| d\Omega_r \quad (1.59)$$

Où $[\overrightarrow{grad}(\lambda_j)]^T$ et $[J]^{-T}$ sont les transposés de $[\overrightarrow{grad}(\lambda_j)]$ et $[J]^{-1}$ respectivement.

1.2.6.3 Assemblage et représentation matricielle

L'assemblage des matrices élémentaires $[S^{\Omega_e}]$, $[T^{\Omega_e}]$ et $[d^{\Omega_e}]$ sur tous les éléments du maillage conduit à un système d'équations algébriques de la forme :

$$[S][A_t] + [T] \frac{\partial [A_t]}{\partial t} + [d]\Delta V_t = [0] \quad (1.60)$$

En suivant la même démarche pour l'équation (1.26), on obtient :

$$\begin{aligned} I(t) &= \iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds} = \iint_S (-\sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} - \sigma \Delta V_t) ds \\ &= \sum_{e=1}^{n_s} [\iint_{\Omega_e} -\sigma (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) d\Omega_e \frac{\partial [A_t^{\Omega_e}]}{\partial t} + \iint_{\Omega_e} -\sigma d\Omega_e \Delta V_t] \\ &= \sum_{e=1}^{n_s} [[d^{\Omega_e}]^T \frac{\partial [A_t^{\Omega_e}]}{\partial t} + g^{\Omega_e} \Delta V_t] = [d]^T \frac{\partial [A_t]}{\partial t} + g \Delta V_t \end{aligned} \quad (1.61)$$

1 Modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis

Où n_s est le nombre total des sous domaines élémentaires constituant le domaine de la section S du conducteur. Dans le cas de la présence d'un nombre n_c de conducteurs, ΔV_t et $I(t)$ sont remplacés par les vecteurs $[\Delta V_t]$ et $[I(t)]$ respectivement tels que :

$$[\Delta V_t] = \begin{bmatrix} \Delta V_t^1 \\ \Delta V_t^2 \\ \vdots \\ \Delta V_t^{n_c} \end{bmatrix} \text{ et } [I(t)] = \begin{bmatrix} I(t)^1 \\ I(t)^2 \\ \vdots \\ I(t)^{n_c} \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Où ΔV_t^i est la différence du potentiel scalaire électrique par unité de longueur à travers la section du conducteur $i \in \{1, 2, \dots, n_c\}$ et $I(t)^i$ est le courant traversant la section de ce même conducteur à l'instant t .

Par conséquent, le vecteur $[d]$ et le terme g sont remplacés par la matrice $[D]$ et le vecteur ligne $[G]$ respectivement tels que :

$$[D] = [[d^1] \ [d^2] \ \dots \ [d^{n_c}]] \quad (1.63)$$

$$[G] = [g^1 \ g^2 \ \dots \ g^{n_c}] \quad (1.64)$$

$[d^i]$ est identique au vecteur $[d]$ sachant que l'assemblage des vecteurs élémentaires $[d^{\Omega_e}]$ se fait à travers tous les éléments du domaine de la section du conducteur i . De la même manière, le terme g^i est donné par :

$$g^i = \sum_{e=1}^{n_s^i} g^{\Omega_e} = \sum_{e=1}^{n_s^i} \iint_{\Omega_e} -\sigma d\Omega_e \quad (1.65)$$

Où n_s^i est le nombre des sous-domaines élémentaires constituant le domaine de la section du conducteur i .

D'après ce qui précède, en considérant le cas de n_c conducteurs, et en combinant l'équation du champ magnétique (1.60) avec l'équation du circuit électrique (1.61), on se ramène au système d'équations algébriques suivant permettant de modéliser l'ensemble structure électromagnétique-circuit électrique [LM93] [DHL99] [PR93]:

$$\begin{cases} [S(A_t)][A_t] + [T] \frac{\partial [A_t]}{\partial t} + [D][\Delta V_t] = [0] \\ [D]^T \frac{\partial [A_t]}{\partial t} + [G][\Delta V_t] = [I(t)] \end{cases} \quad (1.66)$$

Les termes de la matrice $[S]$ dépendent de la réductivité ν . Lorsque l'on considère la non-linéarité de certains matériaux tels que les matériaux ferromagnétiques, ν dépend fortement de la norme de l'induction magnétique \vec{B} . Vu que $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$, $\nu = \nu(|\vec{B}|)$ est alors fonction du potentiel vecteur magnétique et par conséquent $[S] = [S(A_t)]$. Dans le système d'équations (1.66), les inconnues sont d'une part le vecteur $[A_t]$ représentant les

valeurs du potentiel vecteur magnétique à l'instant t aux différents nœuds du maillage représentant la structure électromagnétique exceptés des nœuds dont le potentiel vecteur magnétique est imposé par une Dirichlet, et d'autre part, les courants $[I(t)]$ parcourant les n_c conducteurs électriques ou les chutes de tensions par unité de longueur $[\Delta V_t]$ à travers ces conducteurs. Ceci dépend si l'alimentation est en tension ou en courant.

1.2.7 Discrétisation temporelle

Le système d'équations (1.66) est un système d'équations différentielles du premier ordre. Pour le discrétiser en temps, on utilise la formule d'Euler implicite qui s'écrit :

$$\frac{\partial [A_t]}{\partial t} = \frac{[A_t] - [A_{t-\Delta t}]}{\Delta t} \quad (1.67)$$

L'utilisation de l'expression (1.67) permet de ramener le système (1.66), s'il s'agit d'une alimentation en courant, à la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} [S([A_t])] + \frac{[T]}{\Delta t} & [D] \\ [D]^t & \Delta t [G] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} [A_t] \\ [\Delta V_t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{[T]}{\Delta t} [A_{t-\Delta t}] \\ \Delta t [I(t)] + [D]^t [A_{t-\Delta t}] \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

Dans le cas d'une alimentation en tension, le système (1.66), après une discrétisation d'Euler implicite, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} [S([A_t])] + \frac{[T]}{\Delta t} & [0] \\ [D]^t & \Delta t \end{pmatrix} \begin{bmatrix} [A_t] \\ [I(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{[T]}{\Delta t} [A_{t-\Delta t}] - [D][\Delta V_t] \\ [D]^t [A_{t-\Delta t}] - \Delta t [G][\Delta V_t] \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

Dans ce qui suit on se limite à l'étude du cas de l'alimentation en courant.

1.2.8 Prise en compte de la non linéarité du circuit magnétique

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le système (1.68) est non linéaire. La non-linéarité qui intervient est due au comportement magnétique non-linéaire du matériau du circuit magnétique. Pour le résoudre, différentes méthodes itératives peuvent être intégrées telles que par exemple la méthode du point fixe [CCR95] et la méthode de Newton-Raphson [Kel003] [Sai99]. La méthode de Newton-Raphson paraît la méthode la plus performante et la plus avantageuse du fait qu'elle converge en très peu d'itérations. Le principe de cette méthode consiste à écrire la fonction vectorielle dont on cherche la solution sous forme d'un développement limité jusqu'à l'ordre 1. Le système non linéaire (1.68) à résoudre peut se reformuler sous la forme suivante :

$$[R([X_t])] = \begin{bmatrix} \left([S([A_t])] + \frac{[T]}{\Delta t} \right) [A_t] + [D][\Delta V_t] - \frac{[T]}{\Delta t} [A_{t-\Delta t}] \\ [D]^t [A_t] + \Delta t [G][\Delta V_t] - \Delta t [I(t)] - [D]^t [A_{t-\Delta t}] \end{bmatrix} = \quad (1.70)$$

$$\begin{bmatrix} R_1([A_t], [\Delta V_t]) \\ R_2([A_t], [\Delta V_t]) \end{bmatrix} = [0]$$

Où $[X_t]$ est le vecteur constitué par l'ensemble des inconnues $[A_t]$ et $[\Delta V_t]$:

$$[X_t] = \begin{bmatrix} [A_t] \\ [\Delta V_t] \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

Soit $[X_t^0]$ la solution approchée de $[X_t]$, le développement limité à l'ordre 1 de $R([X_t])$ au voisinage de $[X_t^0]$ est donnée par :

$$[R([X_t])] = [R([X_t^0])] + [J_{NR}([X_t^0])]([X_t] - [X_t^0]) = [0] \quad (1.72)$$

Introduisons maintenant le processus itératif tel que $[X_t^{k+1}] = [X_t]$ et $[X_t^k] = [X_t^0]$ où $[X_t^k]$ est l'approximation à l'itération k de la solution à chercher $[X_t]$, on a alors :

$$[R([X_t^k])] + [J_{NR}([X_t^k])]([X_t^{k+1}] - [X_t^k]) = [0] \quad (1.73)$$

$[J_{NR}([X_t^k])]$ est la matrice tangente (matrice jacobienne) du système à l'itération k , elle est donnée par l'expression suivante :

$$[J_{NR}([X_t^k])] = \begin{pmatrix} \partial R_1([A_t^k], [\Delta V_t^k]) / \partial [A_t] & \partial R_1([A_t^k], [\Delta V_t^k]) / \partial [\Delta V_t] \\ \partial R_2([A_t^k], [\Delta V_t^k]) / \partial [A_t] & \partial R_2([A_t^k], [\Delta V_t^k]) / \partial [\Delta V_t] \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

Remplaçant dans (1.74) R_1 et R_2 par leurs valeurs dans l'équation (1.70), on obtient :

$$[J_{NR}([A_t^k])] = \begin{pmatrix} \frac{\partial ([S([A_t])][A_t])}{\partial [A_t]} \Big|_{[A_t]=[A_t]^k} + \frac{[T]}{\Delta t} & [D] \\ [D]^t & \Delta t [G] \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

Partant de l'équation (1.73), l'approximation de la solution $[X_t]$ à l'itération $k + 1$ sera donnée alors par l'équation suivante :

$$[X_t^{k+1}] = [X_t^k] - [J_{NR}^{-1}([A_t^k])][R([X_t^k])] \quad (1.76)$$

La matrice non linéaire notée $S_{NL}([A_t]) = \partial ([S([A_t])][A_t]) / \partial [A_t]$ est l'assemblage de la matrice $\partial ([S^{\Omega_e}([A_t^{\Omega_e})])[A_t^{\Omega_e}] / \partial [A_t^{\Omega_e}]$ sur tous les éléments du maillage. Supposons que la matrice $[S^{\Omega_e}([A_t^{\Omega_e})])$ et le vecteur $[A_t^{\Omega_e}]$ dans l'élément Ω_e sont donnés par les expressions suivantes :

$$[S^{\Omega_e}([A_t^{\Omega_e})]) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}; [A_t^{\Omega_e}] = \begin{pmatrix} A_{1t} \\ A_{2t} \\ A_{3t} \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

$[S^{\Omega_e}([A_t^{\Omega_e})])[A_t^{\Omega_e}]$ est alors donné par l'expression suivante :

$$[S^{\Omega_e}([A_t^{\Omega_e})])[A_t^{\Omega_e}] = \begin{pmatrix} s_{11}A_{1t} + s_{12}A_{2t} + s_{13}A_{3t} \\ s_{21}A_{1t} + s_{22}A_{2t} + s_{23}A_{3t} \\ s_{31}A_{1t} + s_{32}A_{2t} + s_{33}A_{3t} \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

Faisant la dérivée de (1.78) par rapport au vecteur $[A_t^{\Omega_e}]$, la matrice élémentaire $\partial ([S^{\Omega_e}([A_t^{\Omega_e})])[A_t^{\Omega_e}] / \partial [A_t^{\Omega_e}]$ s'écrit alors comme la somme des deux matrices :

1 Modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis

$$\frac{\partial([S([A_t]))][A_t]}{\partial A_t} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{1i}}{\partial A_{1t}} A_{it} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{1i}}{\partial A_{2t}} A_{it} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{1i}}{\partial A_{3t}} A_{it} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{2i}}{\partial A_{1t}} A_{it} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{2i}}{\partial A_{2t}} A_{it} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{2i}}{\partial A_{3t}} A_{it} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{3i}}{\partial A_{1t}} A_{it} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{3i}}{\partial A_{2t}} A_{it} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial s_{3i}}{\partial A_{3t}} A_{it} \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

Le terme $\partial s_{ij}/\partial A_k$ est calculé en effectuant un changement de la variable de dérivation comme suit :

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial A_{kt}} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial A_{kt}} \quad (1.80)$$

Où \vec{B} est le vecteur induction magnétique dans l'élément Ω_e . En utilisant les équations (1.6), (1.14) et (1.52), \vec{B} est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_t^{\Omega_e}}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_t^{\Omega_e}}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det([J])} \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) [A_t^{\Omega_e}] \\ &= \frac{1}{\det([J])} \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1t} \\ A_{2t} \\ A_{3t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\det([J])} [A_{1t}(x_2 - x_3) + A_{2t}(x_1 - x_3) + A_{3t}(x_2 - x_1)] \\ \frac{1}{\det([J])} [A_{1t}(y_2 - y_3) + A_{2t}(y_1 - y_3) + A_{3t}(y_2 - y_1)] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.81)$$

La norme au carré de l'induction magnétique B est donnée par :

$$B^2 = \left(\frac{\partial A_t^{\Omega_e}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_t^{\Omega_e}}{\partial y} \right)^2 \quad (1.82)$$

Le terme $\frac{\partial B^2}{\partial A_{kt}}$ sera calculé en faisant la dérivée partielle par rapport à A_k de B^2 :

$$\frac{\partial B^2}{\partial A_{kt}} = 2 \left(\frac{\partial A_t^{\Omega_e}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial A_{kt}} \left(\frac{\partial A_t^{\Omega_e}}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial A_t^{\Omega_e}}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial A_{kt}} \left(\frac{\partial A_t^{\Omega_e}}{\partial y} \right) \quad (1.83)$$

Connaissant la valeur de l'induction magnétique B dans l'élément Ω_e , v et $\frac{\partial v}{\partial B^2}$ sont déterminés en utilisant une représentation analytique approchée de la courbe de saturation $B(H)$ caractéristique du matériau non-linéaire.

1.2.9 Réduction du domaine d'étude pour des raisons de symétrie

Dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle par la méthode des éléments finis, seule une section dans le plan (x, y) du dispositif électromagnétique est modélisée. Si la section présente des symétries sur les plans géométrique et magnétique, une portion de cette section est souvent suffisante pour faire la modélisation tout en assurant la même précision.

À un instant t , le champ magnétique varie périodiquement dans l'espace. Le calcul du champ magnétique se fait alors dans une seule portion, dite de référence. Suite à la symétrie spatiale, les autres portions se déduisent de la portion de référence modélisée par des translations ou des rotations. Ainsi, la solution dans les autres portions se déduit de la solution de référence par des relations de périodicité ou d'antipériodicité.

Etudions le cas d'une symétrie spatiale par rotation sur 4 portions à titre d'exemple. Le domaine Ω , pour des raisons de symétrie, est divisé en 4 portions ou sous domaines symétriques $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ et Ω_4 . Les 4 sous domaines sont séparés par les 4 frontières $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ et δ_4 à travers lesquelles $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ et \vec{u}_4 représentent respectivement les directions globales des lignes du champ magnétique. Le sous domaine Ω_1 est pris comme sous domaine de référence sur lequel les équations de Maxwell sont résolues sous des conditions aux limites appropriées périodiques ou antipériodiques sur les frontières de séparation δ_1 et δ_2 .

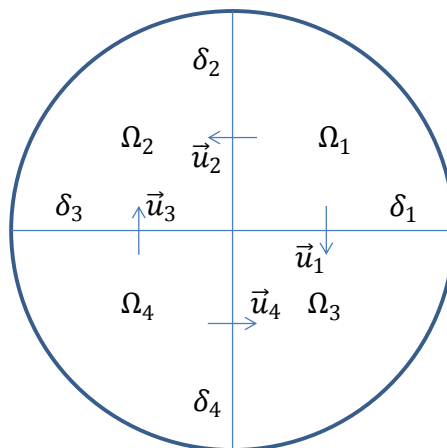


Figure 1.5 La partition du domaine Ω en quatre sous domaines symétriques.

On suppose que le sens des aiguilles d'une montre est le sens positif de la circulation des lignes du champ. Le passage des lignes de champ à travers δ_1 et δ_2 se fait alors dans deux sens contraires (Figure 1.6). Par conséquent, les frontières δ_1 et δ_2 , du point de vue potentiel vecteur magnétique, sont reliés par des conditions d'antipériodicité :

$$A(\delta_1) = -A(\delta_2) \quad (1.84)$$

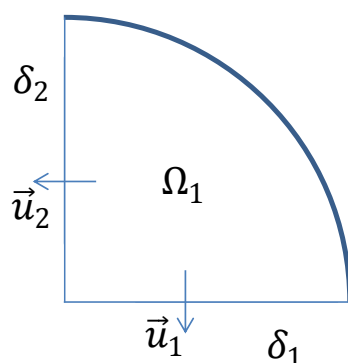


Figure 1.6 Le domaine d'étude de référence.

Si la circulation des lignes de champ à travers les frontières δ_1 et δ_2 se fait dans le même sens (Figure 1.6), on parle dans ce cas des conditions de périodicité :

$$A(\delta_1) = A(\delta_2) \quad (1.85)$$

La solution dans les autres sous-domaines non modélisés est liée à la solution du sous domaine de référence par des relations périodiques ou antipériodiques. Pour connaître le type de la relation entre la solution du sous domaine Ω_i ($i \in \{2, 3, 4\}$) par exemple et celle du sous domaine de référence Ω_1 , il faut superposer ces deux domaines. Si les sens de circulation des lignes de champ à travers les frontières superposées sont identiques (Figure 1.7), les deux sous domaines sont alors périodiques $A(\Omega_1) = A(\Omega_i)$, comme par exemple dans le cas des sous domaines Ω_1 et Ω_3 . Dans le cas contraire (Figure 1.7), les deux sous domaines sont dits antipériodiques $A(\Omega_1) = -A(\Omega_i)$ tels que les domaines Ω_1 et Ω_2 et les domaines Ω_1 et Ω_4 .

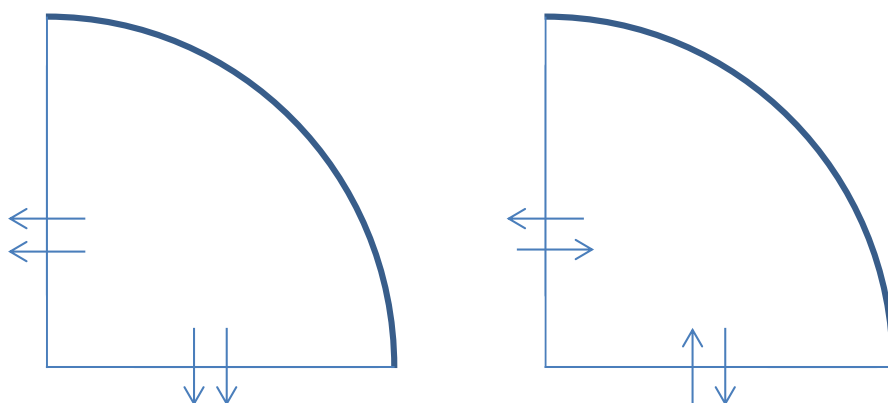


Figure 1.7 Deux sous-domaines superposés périodiques (gauche), antipériodiques (droite).

Il faut noter que, dans certains cas particuliers, les conditions de périodicité peuvent être évitées. Par exemple, lorsque les lignes du champ magnétique dans le domaine Ω_1 peuvent être par une sorte d'approximation considérées parfaitement perpendiculaires sur la frontière δ_1 ou δ_2 , la composante tangentielle du champ magnétique est alors négligée; les

conditions d'antipériodicité sont évitées et ainsi une condition aux limites de Neumann nulle peut être attribuée sur ces frontières. De même, lorsque les lignes d'induction magnétique, sous certaines approximations, sont considérés parfaitement parallèles aux frontières δ_1 ou δ_2 , la composante normale de l'induction magnétique est alors négligée et ainsi une condition aux limites de Dirichlet nulle peut être attribuée sur ces frontières.

1.2.10 Prise en compte du mouvement

Afin de prendre en compte le mouvement du rotor dans les machines électriques, différentes techniques ont été développées. Elles consistent généralement à considérer le mouvement uniquement dans une zone intermédiaire entre la partie fixe dite stator et la partie mobile ou le rotor. Les techniques les plus performantes sont principalement: le macro-élément [ACF+82], la ligne de glissement [PRS88] et la bande de mouvement [DRL85] [Ren85] [Pec90].

Dans ce travail, la technique utilisée est celle de la bande de mouvement. Il s'agit d'une bande qui peut occuper la totalité de la zone de l'entrefer ou une partie de celle-ci. Dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle, cette bande qu'on appelle "bande de mouvement" est discrétisée avec une couche d'éléments triangulaires traditionnels. Durant la rotation du rotor, le maillage du rotor et celui du stator sont inchangés; par contre, les nœuds du rotor sont déplacés par rapport aux nœuds fixes du stator; le maillage de la bande est ainsi modifié à chaque pas de mouvement de sorte à avoir le minimum de déformation sur les éléments. Pour ce faire, on utilise généralement une technique fondée sur le calcul de la distance entre les nœuds de part et d'autre de la bande afin de trouver les plus petites arêtes pour chaque triangle.

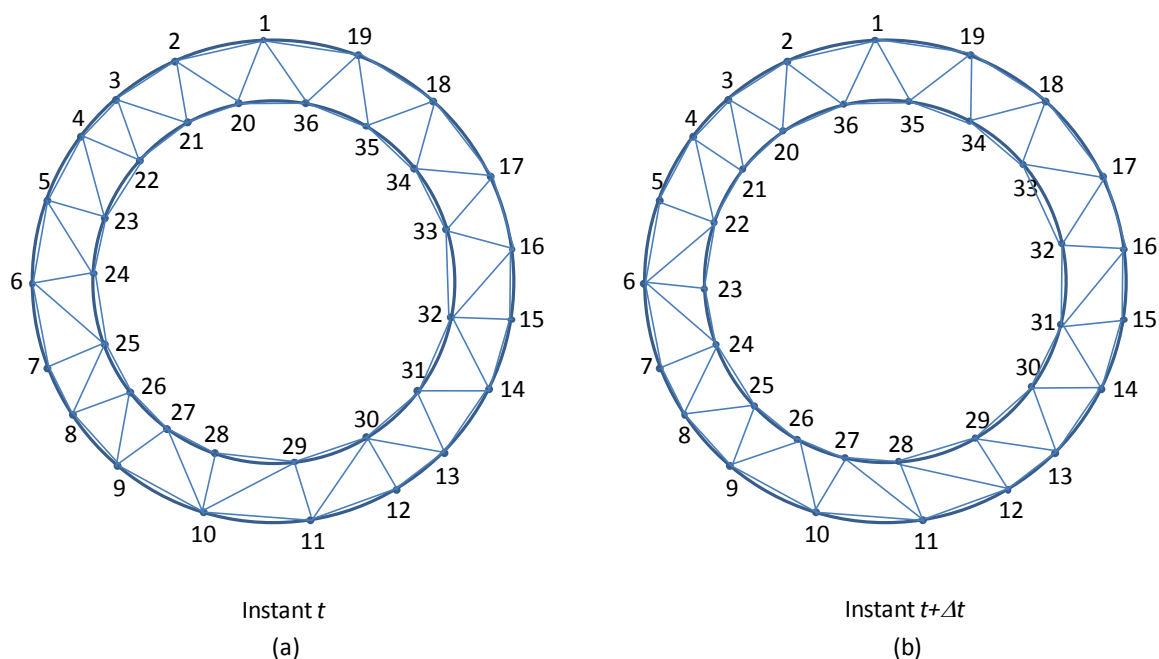


Figure 1.8 Modification du maillage dans la bande de mouvement suite à un déplacement du rotor.

1 Modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis

Soient n_r le nombre de nœuds de la bande coté rotor et n_s le nombre de nœuds coté stator ($n_r \neq n_s$). La figure 1.8 est une schématisation simplifiée de la bande pour deux positions du rotor.

Pour toute position du rotor on calcule, en premier lieu, les distances entre le nœud 1 coté stator et tous les nœuds coté rotor. Le nœud i le plus proche, du nœud 1 ($i = 20$ dans le cas de la figure 1.8 a et $i = 35$ dans le cas de la figure 1.8 b), sera le deuxième sommet du premier élément triangulaire de la bande. Ensuite on compare les distances d_1 et d_2 , respectivement entre le nœud 1 et le nœud suivant au nœud i coté rotor et entre le nœud i et le nœud suivant au nœud 1 coté stator. La distance la plus petite définit le troisième sommet du premier élément (c'est le nœud 2 dans le cas de la figure 1.8 a et le nœud 36 dans le cas de la figure 1.8 b). La même démarche est poursuivie pour définir tous les autres éléments de la bande.

Dans le cas d'un système qui présente des symétries sur les plans géométrique et magnétique, il peut être divisé, comme nous en avons déjà parlé dans la section précédente 1.2.9, en des sous domaines symétriques dans l'espace. Le sous-domaine étudié est alors une portion du système complet. Sa solution, qui est dite de référence, est liée à la solution dans les autres sous domaines de symétrie, comme déjà évoqué dans la section précédente, par les relations de périodicité ou d'anti-périodicité. Des transformations géométriques permettent le passage d'un point d'un sous domaine à son symétrie dans le sous domaine de référence.

On pose que la zone de référence modélisée est définie par le sous domaine de référence dans sa position initiale, avant tout déplacement du rotor. Durant le mouvement du rotor, des nœuds côté rotor de la bande du mouvement peuvent sortir de la zone de référence modélisée. Ces nœuds sont remplacés par ce qu'on appelle des nœuds virtuels qui entrent de l'autre côté de la zone modélisée. Les nœuds virtuels sont créés sur la bande du mouvement côté rotor et sont liés géométriquement aux nœuds réels sortants de la zone modélisée par des transformations géométriques bien définies. Les valeurs du potentiel vecteur magnétique en ces nœuds ne sont pas considérées comme de nouvelles inconnues pour le système matriciel. En effet, les valeurs du potentiel vecteur magnétique aux nœuds virtuels sont liées magnétiquement à celles des nœuds réels par les relations de périodicité ou d'anti-périodicité.

Etudions le cas des machines tournantes, la transformation géométrique qui permet le passage d'un point du sous domaine Ω_i à son symétrie dans le domaine de référence Ω_1 est une rotation plane telle que $\Delta\theta_i$ est son angle de rotation autour du centre de la machine. Le nœud j de la bande côté rotor, qui sort de la zone modélisée et entre dans le domaine Ω_i , est alors remplacé par le nœud virtuel N_{vj} . R étant le rayon interne de la bande de mouvement, dans un repère cylindrique (r, θ) lié au rotor, les nœuds j et N_{vj} vérifient alors les relations géométriques suivantes:

1 Modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis

$$r(N_{vj}) = r(j) = R \quad (1.86)$$

$$\theta(N_{vj}) = \theta(j) + \Delta\theta_i \quad (1.87)$$

Si la solution dans le domaine Ω_i est liée à la solution du domaine de référence par les relations de périodicité ou d'antipériodicité, les valeurs du potentiel vecteur magnétique aux nœuds j et N_{vj} sont alors liées magnétiquement par les relations suivantes respectivement :

$$A(N_{vj}) = A(j) \quad (1.88)$$

$$A(N_{vj}) = -A(j) \quad (1.89)$$

La figure 1.9 est une schématisation simplifiée linéaire de la bande de mouvement pour deux positions du rotor où le côté ED sort de la zone de modélisation de référence et entre dans un sous domaine de symétrie. Le côté $E'D'$ vient alors de le remplacer en entrant de l'autre côté de la zone modélisée mais de même côté de la bande de mouvement. Il faut noter qu'à la position initiale, les nœuds correspondant aux points A , B , C et D appartiennent aux frontières du domaine d'étude Ω_1 . Ce sont les frontières perpendiculaires au déplacement, les nœuds y appartenant sont alors liés par des conditions de périodicité ou d'antipériodicité. Le nœud virtuel correspondant au nœud d'extrémité au point D coïncide avec le nœud au point C , ils ont par conséquent la même valeur inconnue du potentiel vecteur magnétique. Ces deux nœuds d'extrémités permutent leurs positions d'une façon périodique et ne sont pas considérés, pour le système matriciel, comme de nouvelles inconnues.

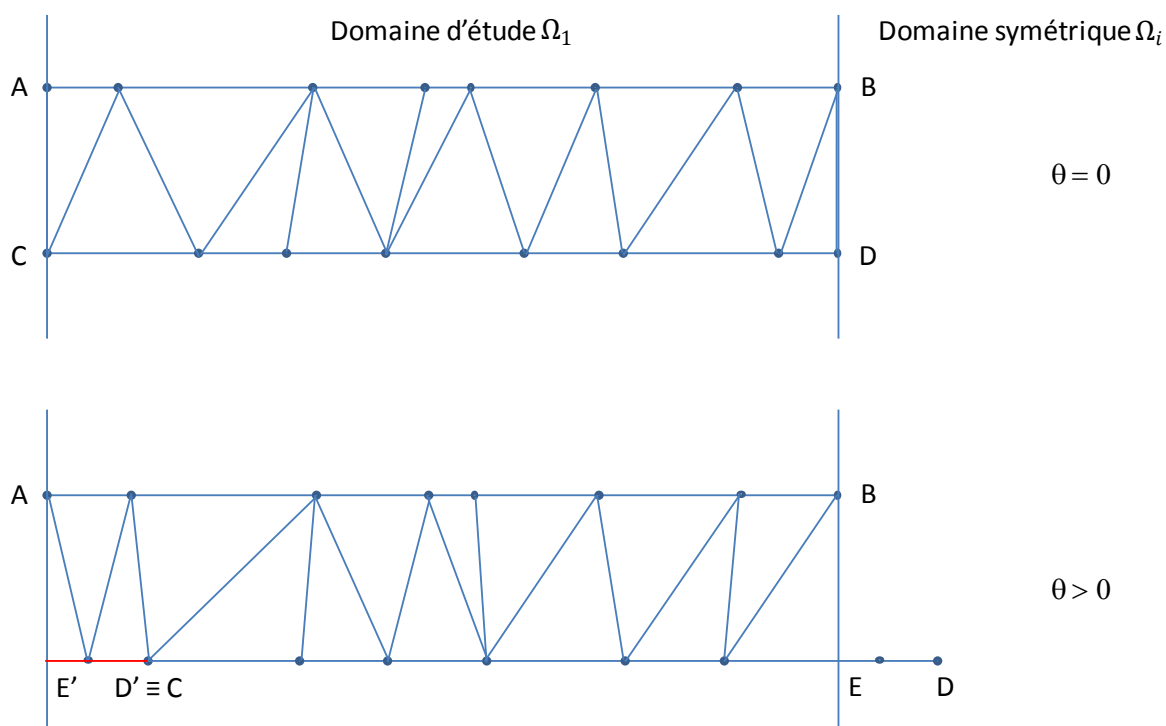


Figure 1.9 Modification du maillage dans la bande de mouvement dans le cas d'un domaine symétrique suite à un déplacement d'un angle θ .

1.3 Post-traitement

La solution du problème électromagnétique résolu par la méthode numérique de discrétisation par éléments finis est constituée des variables locales. Dans le cas d'un couplage aux équations du circuit électrique, les variables locales représentent les valeurs du potentiel vecteur magnétique aux différents nœuds du maillage et les valeurs du gradient du potentiel scalaire électrique à travers les conducteurs individuels. Pour remonter aux variables globales, telles que les pertes « cuivre », les pertes « fer », le flux embrassé par une bobine ou le couple résultant sur l'arbre d'une machine, des calculs intermédiaires connus sous le nom de calculs de post-traitement doivent être effectués.

Dans ce travail on s'intéresse particulièrement au calcul des pertes « cuivre » dans le bobinage des machines électriques. On va présenter dans cette partie, le modèle détaillé pour le calcul des pertes « cuivre » dans les matériaux conducteurs, il permet de prendre en considération les pertes additionnelles par courants de Foucault. L'évaluation de ces pertes peut s'avérer d'une extrême importance lors du dimensionnement des machines électriques, car non seulement elles entraînent des dégradations des performances et notamment la diminution du couple utile récupérée sur l'arbre du moteur mais elles peuvent aussi conduire à des échauffements anormaux. En outre, la forte dépendance de la valeur de ces pertes sur la configuration de l'enroulement montre la nécessité de sélectionner un enroulement optimal et de porter une attention particulier sur le type du conducteur utilisé.

En effet, le calcul des forces électromagnétiques nodales et l'estimation des pertes « fer » sont nécessaires pour un dimensionnement efficace des machines électriques. Pendant qu'on présente brièvement dans cette partie, les modèles de calcul des forces électromagnétiques nodales et des pertes « fer », ils sont développés en détails dans les annexes B et C respectivement. Le modèle de calcul des pertes « fer » permet d'estimer les pertes dissipées dans les circuits ferromagnétiques du stator et du rotor. Par ailleurs, le modèle de calcul des forces électromagnétiques nodales peut aboutir au calcul du couple électromagnétique et des forces radiales. En particulier, le couple électromagnétique est calculé en sommant les composantes tangentielles de toutes les forces électromagnétiques qui s'exercent sur le rotor. Lorsque la valeur de la puissance électromagnétique peut être déterminée en utilisant la valeur du couple électromagnétique et en tenant compte les valeurs des pertes « cuivre » et des pertes « fer » dissipées, un calcul du rendement de la machine devient alors possible. Connaissant la puissance électrique fournie à l'entrée et négligeant les pertes mécaniques, les équations au rendement sont établies dans l'Annexe D.

1.3.1 Modèle pour le calcul des pertes « cuivre »

Considérons un conducteur de conductivité σ , de section S et de longueur l suivant l'axe z . Son volume est ainsi $V_c = S * l$. En post-traitement de la résolution par la méthode

des éléments finis du système (1.68), les pertes « cuivre » (ou identiquement parlant les pertes par effet Joule) à travers ce conducteur sont données par l'équation suivante :

$$P_j = \iiint_{V_c} \frac{J^2}{\sigma} dV \quad (1.90)$$

J étant invariant suivant z , l'équation (1.90) s'écrit :

$$P_j = l \iint_S \frac{J^2}{\sigma} ds \quad (1.91)$$

La section S du conducteur est subdivisée en n_s éléments triangulaires Ω_e , donc :

$$P_j = \sum_{e=1}^{n_s} l \iint_{\Omega_e} \frac{J^2}{\sigma} d\Omega = \sum_{e=1}^{n_s} l \iint_{\Omega_r} \frac{J^2}{\sigma} |d\text{ét}([J])| d\Omega \quad (1.92)$$

Où la valeur de la densité du courant dans l'élément Ω_e est donnée par :

$$J = \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} + \sigma \Delta V_t = \frac{\sigma}{\Delta t} \sum_{i=1}^3 [(A_{it} - A_{i(t-\Delta t)}) \lambda_i] + \sigma \Delta V_t \quad (1.93)$$

1.3.2 Modèle pour le calcul des forces électromagnétiques nodales

En post-traitement, la valeur de la densité d'énergie magnétique peut être déterminée par élément en tenant compte des propriétés non-linéaires du matériau ferromagnétique utilisé. L'application du principe des travaux virtuels permet alors de calculer les forces électromagnétiques nodales en sommant les contributions de tous les éléments avoisinant le nœud. Ayant deux composantes, l'une azimutale et l'autre radiale, ces forces vont d'une part, contribuer à la production d'un couple utile moteur et d'autre part, déformer la structure sous l'action des forces radiales.

Pour plus de détails, le modèle pour le calcul des forces électromagnétiques nodales par la méthode des travaux virtuels, en vue des calculs du couple électromagnétique et des forces radiales, est présenté dans l'Annexe B.

1.3.3 Modèle pour le calcul des pertes « fer »

En ce qui concerne les pertes « fer », étant donné que les fonctions d'interpolation utilisées dans la méthode des éléments finis sont de premier ordre, la densité du flux magnétique est constante à travers chaque élément. Les circuits magnétiques du stator et du rotor sont alors décomposés en des portions suivant la direction globale du flux magnétique qui gouverne chaque partie; ces portions sont souvent des dents où la direction globale du flux est parallèle à son axe ou des culasses où la direction du flux est tangentielle. Ensuite la valeur moyenne instantanée de la densité du flux suivant sa direction globale est calculée dans chaque portion, et un modèle de pertes « fer » peut être ainsi établi en

utilisant l'équation généralisée améliorée de Steinmetz (dite "improved generalised steinmetz equation" (iGSE) en anglais).

On trouve le modèle détaillé pour le calcul des pertes « fer » par la méthode iGSE dans l'Annexe C, il est adapté aux formes d'ondes non sinusoïdales du flux d'induction magnétique typique des machines à réluctance variable.

1.4 Conclusion

Après un bref rappel sur les équations de Maxwell, un modèle magnétodynamique 2D associé aux équations du circuit électrique a été présenté pour décrire les phénomènes électromagnétiques dans les machines électriques. La discrétisation du domaine d'étude par la méthode des éléments finis a permis la résolution du problème, elle est bien adaptée à la prise en compte de phénomènes non linéaires dans des systèmes à géométries complexes. Le solveur de Newton-Raphson et la technique de la bande de mouvement sont intégrés dans le modèle pour prendre en compte respectivement le comportement non linéaire du circuit magnétique et le mouvement du rotor dans le cas des machines tournantes. En profitant de la symétrie de certains systèmes électromagnétiques, on peut modéliser seulement une portion de ces systèmes en exploitant les conditions de périodicité et d'anti-périodicité. Le système résultant à résoudre est un système d'équations algébrique ramené sous forme matricielle. Les inconnues sont la valeur du potentiel vecteur magnétique aux différents nœuds du maillage et la variation par unité de longueur du potentiel scalaire électrique à travers les différents conducteurs alimentés chacun par un courant d'excitation donné.

En post traitement, un modèle pour le calcul des pertes « cuivre » dans les matériaux conducteurs est établi à partir des valeurs du gradient du potentiel scalaire électrique et de la variation en fonction du temps du potentiel vecteur magnétique. Les pertes « cuivre » peuvent être calculées instantanément ainsi que la distribution spatiale de la densité du courant électrique à travers les sections des conducteurs individuels.

Chapitre 2

Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

II- Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

2.1 Introduction

Les pertes par courants de Foucault sont la conséquence de la circulation des boucles de courants induits dans les matériaux conducteurs pour agir contre la variation en fonction du temps du flux d'induction magnétique. On peut distinguer les pertes par effet de peau lorsque la variation du flux d'induction est due au courant d'alimentation propre variable en fonction du temps et les pertes par effet de proximité lorsque le flux magnétique est envoyé par des conducteurs à la proximité. Dans certains systèmes électrotechniques tels que les machines électriques, ces pertes sont indésirables, elles peuvent diminuer le rendement et les performances de la machine et aboutir parfois à des échauffements critiques. Pour prendre en compte ces pertes dans le processus de conception des machines, on a recours le plus souvent au modèle analytique.

Généralement, un modèle analytique est constitué d'équations symboliques qui relient les performances d'un système à concevoir, d'une part, aux paramètres géométriques qui décrivent sa structure et d'autre part, aux paramètres physiques donnant les caractéristiques des matériaux utilisés. Les équations du modèle mettent généralement en jeu les paramètres descriptifs du système en tant que grandeurs d'entrée. Le modèle analytique permet une grande variation de tous les paramètres dans les limites de validité de ses équations, et comparé au modèle numérique, il est rapide, simple, permet d'explorer au maximum l'espace des solutions et nécessite peu de calculs. Il présente alors un grand intérêt lors de l'utilisation des procédures itératives et répétitives de dimensionnement, de conception ou d'optimisation.

En partant des équations fondamentales qui régissent la circulation des courants de Foucault dans les matériaux conducteurs, un calcul analytique préliminaire du champ électromagnétique est introduit dans ce qui suit dans le but de calculer les pertes « cuivre » dans le cas des géométries de conducteurs de formes spéciales. On va traiter les cas d'un conducteur circulaire et d'un conducteur rectangulaire entourés de l'air et le cas des conducteurs logés dans les encoches d'un circuit magnétique typique du bobinage des machines électriques. La validité et la précision du modèle analytique sont testées par une comparaison à un modèle numérique utilisant la méthode des éléments finis.

Dans ce travail on s'intéresse particulièrement au calcul des pertes « cuivre » dans le bobinage des machines électriques. Ces pertes sont la somme des pertes Ohm classiques DC et des pertes additionnelles dites par courants de Foucault. Ces dernières sont la conséquence du couplage fort électrique-magnétique entre la densité du courant électrique et la variation en fonction du temps des lignes du champ magnétique pénétrant les

conducteurs [Car007] [Dow66] [Sto74]. Les pertes par courants de Foucault dissipées à travers l'encoche des machines électrique ne dépendent pas uniquement de la fréquence d'alimentation et de la section du conducteur (effet de peau). Elles dépendent de même du flux envoyé par les conducteurs à la proximité (effet de proximité) [KD003] [KD006a] [KD006b] et de la perturbation de la distribution des lignes du champ magnétique (effet d'influence) [IUN013]. Cette perturbation de la distribution des lignes du champ magnétique dans le domaine de l'encoche est la conséquence d'une part de la fuite des lignes du champ due à la saturation du circuit magnétique et d'autre part de la variation de la reluctance magnétique attribuable au mouvement du rotor à caractère saillant. La modélisation par la méthode des éléments finis qui prend en compte le mouvement du rotor et la non linéarité du circuit magnétique permet de simuler les lignes du champ magnétique bidimensionnel à travers le domaine de l'encoche. Ceci se fait par la résolution de l'équation différentielle à dérivées partielles non-linéaire décrivant le couplage fort électrique-magnétique [Cha74]. Les pertes « cuivre » par influence pourront être alors prises en compte par la méthode des éléments finis 2D [SOB93]. L'importance de ces pertes est évaluée lorsqu'on calcule les pertes « cuivre » dans une machine à reluctance variable à double saillance [KD003] [KD006a] [ICD002]. C'est le cas d'une machine spéciale qui représente une double saillance (au niveau du circuit magnétique du stator et du rotor) et qui opère sous une saturation magnétique marquée due à son bobinage concentré autour de la dent du stator et aux niveaux élevés ainsi de la force magnétomotrice. Les pertes « cuivre » calculées par la méthode des éléments finis seront comparées à celles calculées par une approche analytique qui traite un champ unidimensionnel à travers le domaine de l'encoche négligeant par conséquent le mouvement du rotor et la non-linéarité du circuit magnétique.

2.2 Effet de peau dans un conducteur circulaire entouré de l'air

2.2.1 Mise en équation pour le calcul de la densité du courant

Comme présentées dans le premier chapitre, les équations de Maxwell en magnétostatique traduisent sous forme locale différents théorèmes qui régissent l'électromagnétisme. Elles décrivent le comportement d'un milieu sur le plan électrique et magnétique. La résolution analytique de ces équations dans le cas d'un conducteur alimenté par un courant variable en fonction du temps permet d'accéder aux densités de courants induits et ainsi aux pertes « cuivre » associés. Elle offre par ailleurs une détermination de ces pertes en fonction du courant d'alimentation, de la fréquence et de la géométrie du conducteur.

Dans un repère cylindrique de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, on suppose premièrement le cas d'un conducteur électrique d'axe z alimenté par le courant $I(t)$. Le conducteur étant supposé de rayon r_0 et de longueur $L \gg r_0$, l'évolution du champ électromagnétique est pratiquement invariante suivant la direction longitudinale. On limite alors notre étude à une section Ω transversale du conducteur (Figure 2.1). Grâce à la symétrie circulaire de la section du

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

conducteur, la distribution de la densité du courant dépend uniquement de la distance r de l'axe du conducteur. En utilisant alors la relation entre le vecteur densité du courant et le champ électrique (1.5) du chapitre précédent, le vecteur densité du courant porté par l'axe z peut être donné par l'expression suivante :

$$\vec{J} = J(r, t)\vec{e}_z = \sigma\vec{E} = \sigma E(r, t)\vec{e}_z \quad (2.1)$$

Cette distribution de la densité du courant permet d'établir des lignes du champ magnétique homogènes, circulaires et concentriques. Le vecteur champ magnétique s'écrit alors sous la forme suivant :

$$\vec{H} = H(r, t)\vec{e}_\theta \quad (2.2)$$

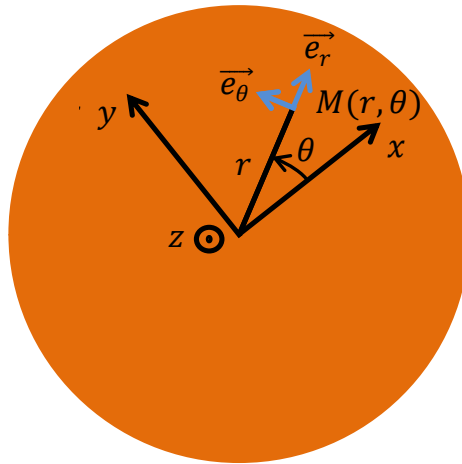


Figure 2.1 Section transversale du conducteur circulaire entouré par l'air.

Dans le repère cylindrique et en utilisant les expressions (2.1) et (2.2), les équations de Maxwell-Ampère (1.1) et de Maxwell-Faraday (1.2) s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial r}(E(r, t)) = \mu \frac{\partial}{\partial t}(H(r, t)) \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH(r, t)) = \frac{1}{r} H(r, t) + \frac{\partial}{\partial r}(H(r, t)) = \sigma E(r, t) \quad (2.4)$$

En dérivant l'équation (2.4) par rapport à t et en utilisant l'équation (2.3) on obtient l'équation différentielle suivante pour le champ électrique :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(E(r, t)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(E(r, t)) = \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t}(E(r, t)) \quad (2.5)$$

Pour résoudre cette équation différentielle on utilise la méthode de séparation des variables. La solution $E(r, t)$ est alors donnée sous la forme suivante :

$$E(r, t) = R(r)T(t) \quad (2.6)$$

En insérant (2.6) dans l'équation à résoudre (2.5) et en divisant le résultat par $\mu\sigma E(r, t)$ on obtient :

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

$$\frac{1}{\mu\sigma} \left(\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} \right) = \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (2.7)$$

Le coté gauche de l'équation (2.7) dépend uniquement de r et le coté droit dépend uniquement de t . Pour cela, les deux cotés doivent être égaux à une constante qu'on appelle c .

Le coté droit de l'équation (2.7) aboutit à l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c \quad (2.8)$$

La solution de cette équation est donnée par $T(t) = e^{ct}$.

Le coté gauche de l'équation (2.7) aboutit à son tour à l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + r \frac{\partial}{\partial r} R(r) + m^2 r^2 R(r) = 0 \quad (2.9)$$

Où

$$m^2 = -c\mu\sigma \Rightarrow m = \sqrt{-c\mu\sigma} \quad (2.10)$$

Pour résoudre cette équation différentielle on utilise le changement de variable suivant :

$$Z = mr \Rightarrow \partial r = \frac{1}{m} \partial Z \quad (2.11)$$

$$Z^2 = m^2 r^2 \Rightarrow \partial r^2 = \frac{1}{m^2} \partial Z^2 \quad (2.12)$$

L'équation (2.9) peut alors s'écrire sous la forme de l'équation standard de Bessel suivante :

$$Z^2 \frac{\partial^2}{\partial Z^2} R(Z) + Z \frac{\partial}{\partial Z} R(Z) + Z^2 R(Z) = 0 \quad (2.13)$$

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$R(Z) = c_1 J_0(Z) + c_2 Y_0(Z) \quad (2.14)$$

J_0 et Y_0 sont respectivement les fonctions de Bessel d'ordre 0 de première et de deuxième espèce. Le champ électrique sera donné alors par l'expression suivante :

$$E(r, t) = R(mr)T(t) = (c_1 J_0(mr) + c_2 Y_0(mr)) e^{ct} \quad (2.15)$$

Puisque la fonction de Bessel d'ordre 0 de deuxième espèce est singulière lorsque mr tend vers 0 et vu que la fonction de Bessel d'ordre 0 de première espèce vaut 1 lorsque mr tend

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

vers 0 et que le champ électrique est fini au centre du conducteur c'est-à-dire pour un rayon $r = 0$, la constante c_2 est alors mise à 0 ce qui simplifie par la suite l'équation (2.15) :

$$E(r, t) = R(mr)T(t) = c_1 J_0(mr) e^{ct} \quad (2.16)$$

En utilisant l'équation (2.1), la densité du courant électrique sera donnée par :

$$J(r, t) = \sigma c_1 J_0(mr) e^{ct} \quad (2.17)$$

La densité du courant étant fonction de la position radiale, elle est non homogène à travers la section du conducteur. La répartition non uniforme de la densité du courant est due à la circulation des boucles de courants de Foucault. En effet, le conducteur est parcouru par un courant variable en fonction du temps, il est alors le siège d'un champ magnétique propre variable. Selon la loi de Faraday, les boucles de courants de Foucault créent un champ magnétique de réaction qui tend à s'opposer à la variation en fonction du temps du champ magnétique pénétrant le conducteur, elles permettent par conséquent d'altérer la distribution uniforme de la densité du courant comme dans le cas d'un régime statique à courant continue. La densité du courant non-uniforme est présentée par une valeur maximale à la périphérie du conducteur ou en d'autres termes par une tendance du courant à se déplacer vers la surface du conducteur; ce phénomène s'appelle l'effet de peau, il sera illustré ultérieurement dans un exemple d'application (Figure 2.3).

La densité du courant étant donnée par l'équation (2.17), les pertes par effet Joule peuvent être calculées en utilisant l'équation suivante :

$$P_J = L \iint_S \frac{|J|^2}{\sigma} ds = L 2\pi \int_0^{r_0} \frac{|J(r, t)|^2}{\sigma} r dr \quad (2.18)$$

Les fonctions de Bessel de première espèce pour les différents ordres sont liées entre elles par la relation générale suivante :

$$J_{n+1}(Z) = n \frac{J_n(Z)}{Z} - \frac{\partial J_n(Z)}{\partial Z} \quad (2.19)$$

J_n et $\frac{\partial J_n}{\partial Z}$ sont respectivement la fonction de Bessel d'ordre n de première espèce et sa dérivée.

En utilisant la relation (2.3) entre les champs magnétique et électrique, en se servant de l'équation (2.16) et en faisant la correspondance avec l'équation (2.4), on peut déduire l'expression du champ magnétique :

$$H(r, t) = -\frac{c_1 m}{\mu c} J_1(mr) e^{ct} \quad (2.20)$$

Il faut noter que le calcul des constantes c et c_1 dépend de la forme du courant utilisé. On considère à titre d'exemple le cas d'un courant sinusoïdal $I(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$ d'amplitude

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

I , de pulsation w et de phase à l'origine du temps φ . La représentation complexe du courant $I(t)$ est donné par $\underline{I}(t) = I e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t}$.

La circulation du champ magnétique autour du conducteur est égale au courant $\underline{I} e^{j\omega t}$, ceci se traduit par l'équation suivante :

$$2\pi r_0 H(r_0, t) = -2\pi r_0 \frac{c_1 m}{\mu c} J_1(mr_0) e^{ct} = \underline{I} e^{j\omega t} \quad (2.21)$$

En faisant la correspondance, on obtient les constantes :

$$c = j\omega \quad (2.22)$$

$$c_1 = \frac{-j\omega \mu I}{2\pi r_0 m J_1(mr_0)} \quad (2.23)$$

Les expressions en notation complexe du champ magnétique, du champ électrique et de la densité du courant sont alors les suivantes :

$$\underline{H}(r, t) = \frac{\underline{I}}{2\pi r_0} \frac{J_1(mr)}{J_1(mr_0)} e^{j\omega t} \quad (2.24)$$

$$\underline{E}(r, t) = \frac{m \underline{I}}{2\pi r_0 \sigma} \frac{J_0(mr)}{J_1(mr_0)} e^{j\omega t} \quad (2.25)$$

$$\underline{J}(r, t) = \frac{m \underline{I}}{2\pi r_0} \frac{J_0(mr)}{J_1(mr_0)} e^{j\omega t} \quad (2.26)$$

$I(t)$ étant la partie réelle de sa représentation complexe, il faut noter que pour obtenir les valeurs réelles du champ magnétique, du champ électrique et de la densité du courant, il faut prendre d'une manière analogue au courant électrique, la partie réelle des expressions précédentes dans les équations (2.24), (2.25) et (2.26) respectivement.

2.2.2 Calcul des pertes par effet de peau

Dans le cas d'une alimentation par un courant uniforme $I(t) = I$, la densité du courant électrique est dans ce cas uniforme, elle est donnée par le rapport du courant à la surface de la section du conducteur $J_{DC} = I / \pi r_0^2$. Les pertes par effet Joule représentent alors les pertes Ohm classiques :

$$P_{JDC} = L \iint_{\Omega} \frac{|J|^2}{\sigma} ds = \frac{L}{\sigma \pi r_0^2} I^2 = R_{DC} I^2 \quad (2.27)$$

R_{DC} est la résistance classique DC.

On peut calculer les pertes par effet Joule en utilisant l'équation (2.18). Une autre méthode s'appuie sur le théorème de Poynting. D'après le théorème de Poynting, la puissance électromagnétique développée à l'intérieur d'un volume V est donnée par le flux entrant du vecteur de Poynting à travers la surface fermée Σ qui l'entoure.

Dans notre cas, le vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}^* = \underline{E}(r_0, t) \vec{e}_z \wedge \underline{H}^*(r_0, t) \vec{e}_\theta = -\frac{mI^2}{4\pi^2 r_0^2 \sigma} \frac{J_0(mr_0)}{J_1(mr_0)} \vec{e}_r \quad (2.28)$$

Le flux de $\vec{\Pi}$ à travers la surface Σ donne la puissance électromagnétique instantanée $s(t)$:

$$s(t) = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \vec{ds} = \frac{LmI^2}{2\pi r_0 \sigma} \frac{J_0(mr_0)}{J_1(mr_0)} \quad (2.29)$$

On est dans le cas d'une alimentation périodique sinusoidale de période $\frac{w}{2\pi}$, la puissance électromagnétique moyenne s'avère alors :

$$S = \frac{w}{2\pi} \int_0^{\frac{w}{2\pi}} s(t) dt = \frac{Lmr_0 I^2}{2\pi r_0^2 \sigma} \frac{J_0(mr_0)}{J_1(mr_0)} = P_{JDC} \frac{mr_0}{2} \frac{J_0(mr_0)}{J_1(mr_0)} = P_J + jQ \quad (2.30)$$

Les pertes actives ou les pertes par effet Joule P_J sont données par la valeur moyenne de S , la puissance réactive Q est déterminée par la partie imaginaire.

Normalisant (2.30) par rapport aux pertes Ohm classiques, on obtient :

$$\frac{P_J}{P_{JDC}} + j \frac{Q}{P_{JDC}} = \frac{mr_0}{2} \frac{J_0(mr_0)}{J_1(mr_0)} \quad (2.31)$$

2.2.3 Analyse en fonction de l'épaisseur de peau

A partir de l'équation (2.31), on peut conclure que indépendamment des pertes Ohm DC classique, les pertes additionnelles par courant de Foucault dépendent fortement du coefficient mr_0 c'est-à-dire d'une façon implicite du rayon r_0 du conducteur et de la fréquence d'alimentation $f = \frac{w}{2\pi}$. mr_0 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$mr_0 = \sqrt{-j2\pi f \mu \sigma} r_0 = (1-j)r_0 \sqrt{\pi f \mu \sigma} = (1-j) \frac{r_0}{\delta} \quad (2.32)$$

Où $\delta = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma}$ est appelée l'épaisseur de peau. Le terme épaisseur de peau est originellement utilisé dans le cas d'un conducteur plan [Har89], c'est la distance de la surface du conducteur jusqu'au niveau où l'amplitude de la densité du courant est diminué de $1/e$ ($\sim 63.2\%$).

Cette notion de l'épaisseur de peau peut être adaptée au cas d'un conducteur circulaire comme dans le cas du conducteur plan si certaines conditions géométriques étaient vérifiées. Par exemple, si le rayon du conducteur est très grand par rapport à l'épaisseur de peau, le conducteur circulaire peut être considéré dans ce cas comme un conducteur plan.

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

Sur la figure 2.2, on trace l'évolution de la partie réelle et imaginaire de la puissance normalisée par rapport aux pertes ohm classiques en fonction de la fréquence et du rayon du conducteur.

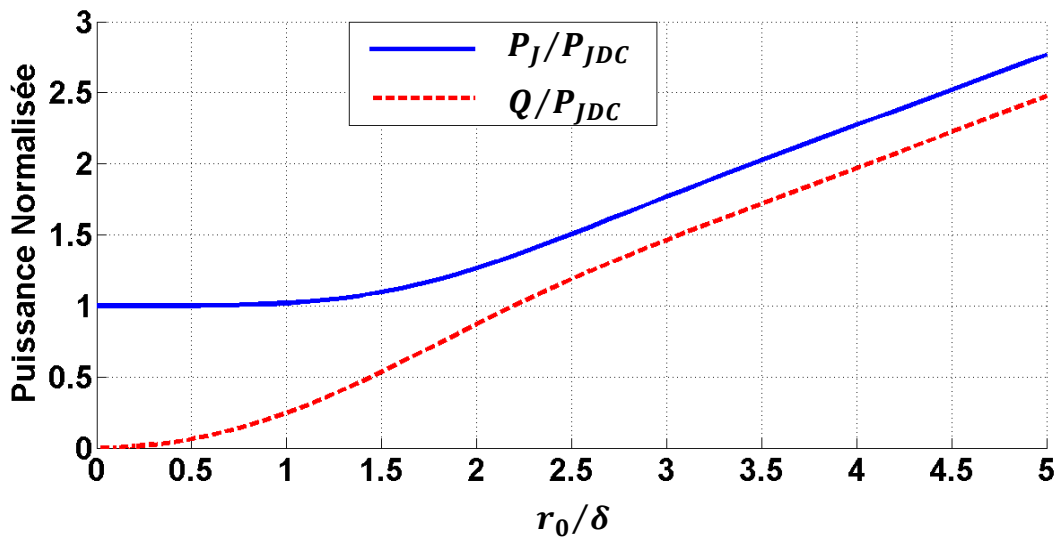


Figure 2.2 Puissance normalisée du conducteur circulaire en fonction de son rayon et de la fréquence d'alimentation.

On remarque que les pertes par effet Joule normalisées sont maximales lorsque le rayon du conducteur est très grand par rapport à l'épaisseur de peau ($r_0 \gg \delta$).

Un rayon très élevé par rapport à l'épaisseur de peau cède le passage à des boucles additionnelles par courant de Foucault, ceci permet une variation primordiale de la densité du courant et ainsi un accroissement des pertes par effet Joule. Au contraire les pertes par effet Joule sont minimales et ainsi proches des pertes Ohm classiques lorsque le rayon est très petit par rapport à l'épaisseur de peau ($r_0 \ll \delta$).

Pour illustrer le phénomène de l'effet de peau, on souhaite calculer le cas d'un conducteur circulaire de rayon $r_0 = 2,5 \text{ mm}$. Il est alimenté par le courant sinusoïdal $I(t)$ d'amplitude $I = 200 \text{ A}$ et de fréquence $f = 5000 \text{ Hz}$. Les propriétés physiques du conducteur sont telles que sa conductivité est $\sigma = 54.94 \times 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ et sa perméabilité magnétique est celle de l'air $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$. En calculant l'épaisseur de peau à $\delta = 0.96 \text{ mm}$, le rapport $\frac{r_0}{\delta} = 2.08$. Sur la figure 2.3 suivante on présente la distribution de la densité du courant suivant le rayon du conducteur. Le centre du conducteur est situé à $r = 0$ et un point quelconque de la périphérie du conducteur à $r = r_0$. Pour comparer la distribution de la densité du courant avec et sans l'effet de peau, on trace sur un graphe la valeur efficace de la densité du courant uniforme $J_{DC} = I/\sqrt{2}\pi r_0^2$ pour une alimentation avec un courant continu d'amplitude $I/\sqrt{2}$ et la valeur efficace de la densité du courant analytique J_{eff} . Grâce à l'effet du peau, la densité du courant réel J_{eff} est inférieure à la densité du courant J_{DC} au centre du conducteur, mais la dépasse clairement à la surface du conducteur (Figure 2.3).

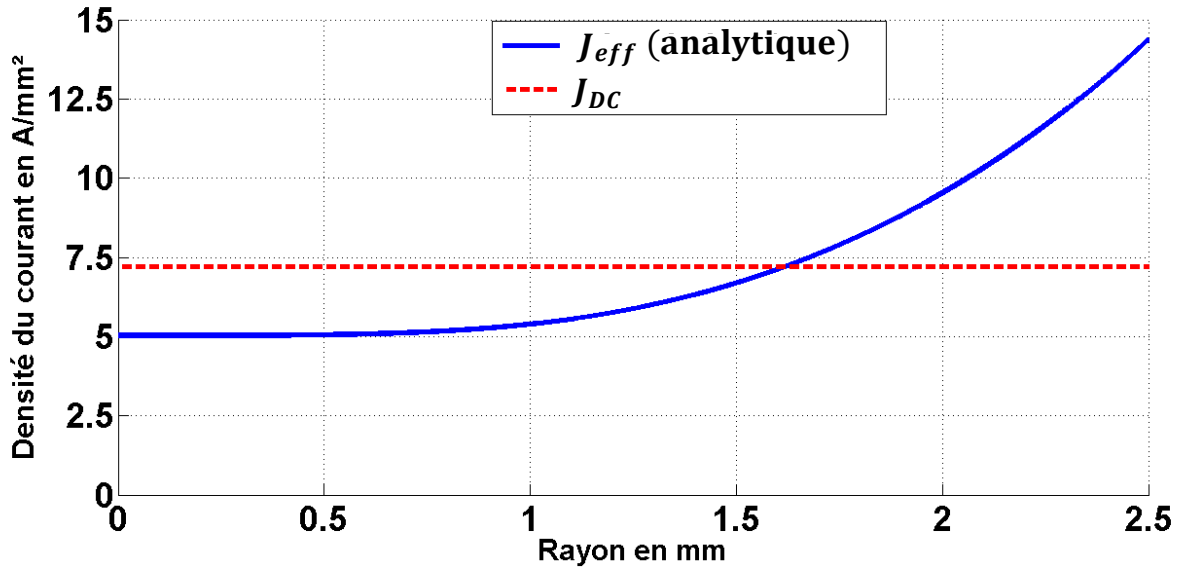


Figure 2.3 Distribution de la valeur efficace de la densité du courant en fonction de la position radiale.

2.2.4 Alimentation avec un courant périodique non sinusoïdal

Dans le cas d'une alimentation périodique non sinusoïdale, le courant $I(t)$ de fréquence $\omega/2\pi$ s'écrit sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales (dite série de Fourier) :

$$I(t) = I_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \cos(k\omega t + \varphi_k) \quad (2.33)$$

Pour calculer le champ magnétique, le champ électrique et la densité du courant on applique le théorème de la superposition. La représentation complexe du courant $I(t)$ peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie des termes $I_k e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t} = \underline{I}_k e^{jk\omega t}$.

$$\underline{I}(t) = I_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} I_k e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t} = I_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} \underline{I}_k e^{jk\omega t} \quad (2.34)$$

Pour une alimentation en courant continu, la densité du courant est uniforme $J_{DC} = \sigma E_{DC} = I_{DC} / \pi r_0^2$. La circulation du champ magnétique sur un cercle de rayon r est égale au courant

qui traverse ce cercle, ceci permet de déterminer la distribution du champ magnétique à l'intérieur du conducteur selon l'équation suivante :

$$H(r) = \frac{J_{DC} * \pi r^2}{2\pi r} = \frac{J_{DC} * r}{2} \quad (2.35)$$

Lorsque le conducteur est alimenté par le courant sinusoïdal $\underline{I}_k e^{jk\omega t}$, nous avons déterminé le champ magnétique, le champ électrique et la densité du courant, les expressions respectives sont les suivantes:

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

$$\underline{H}_k(r, t) = \frac{\underline{I}_k}{2\pi r_0} \frac{J_1(m_k r)}{J_1(m_k r_0)} e^{jkwt} \quad (2.36)$$

$$\underline{E}_k(r, t) = \frac{m \underline{I}_k}{2\pi r_0 \sigma} \frac{J_0(m_k r)}{J_1(m_k r_0)} e^{jkwt} \quad (2.37)$$

$$\underline{J}_k(r, t) = \frac{m \underline{I}_k}{2\pi r_0} \frac{J_0(m_k r)}{J_1(m_k r_0)} e^{jkwt} \quad (2.38)$$

Par superposition, on peut déterminer maintenant le champ magnétique, le champ électrique et la distribution de la densité du courant, suite à l'alimentation par le courant total $I(t)$, comme étant la somme de la composante continue avec les différentes composantes aux fréquences d'alimentation kw :

$$\underline{H}(r, t) = H_{DC}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\underline{I}_k}{2\pi r_0} \frac{J_1(m_k r)}{J_1(m_k r_0)} e^{jkwt} \quad (2.39)$$

$$\underline{E}(r, t) = E_{DC}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m \underline{I}_k}{2\pi r_0 \sigma} \frac{J_0(m_k r)}{J_1(m_k r_0)} e^{jkwt} \quad (2.40)$$

$$\underline{J}(r, t) = J_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m \underline{I}_k}{2\pi r_0} \frac{J_0(m_k r)}{J_1(m_k r_0)} e^{jkwt} \quad (2.41)$$

Dans notre cas, le vecteur de Poynting est donné par :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \vec{E} \wedge \vec{H}^* = \underline{E}(r_0, t) \vec{e}_z \wedge \underline{H}^*(r_0, t) \vec{e}_\theta \\ &= -(E_{DC}(r_0) H_{DC}(r_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m \underline{I}_k}{2\pi r_0 \sigma} \frac{J_0(m_k r_0)}{J_1(m_k r_0)} e^{jkwt} \\ &\quad * \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\underline{I}_k^*}{2\pi r_0} e^{-jkwt}) \vec{e}_r \end{aligned} \quad (2.42)$$

D'après le théorème de Poynting, le flux de $\vec{\Pi}$ à travers la surface Σ donne la puissance électromagnétique instantanée $s(t)$:

$$s(t) = \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \vec{d}s = |\vec{\Pi}| * 2\pi r_0 \quad (2.43)$$

On est dans le cas d'une alimentation périodique sinusoïdale de période $\frac{w}{2\pi}$, la puissance électromagnétique moyenne s'avère alors :

$$S = \frac{w}{2\pi} \int_0^{\frac{w}{2\pi}} s(t) dt = P_J + jQ \quad (2.44)$$

Etant donnée la valeur de l'intégrale suivante:

$$\frac{w}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{w}} e^{j(k_q - k_p)wt} = \begin{cases} 0 & \text{si } q = p \\ 1 & \text{si } q \neq p \end{cases} \quad (2.45)$$

La puissance S s'écrit alors sous la forme suivante, comme étant la somme des puissances correspondantes aux différents composants de la série de Fourier [Ven84] [HGB000] :

$$S = S_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} S_k = S_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} P_{J_k} + jQ_k = S_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k r_0}{2} \frac{J_0(m_k r_0)}{J_1(m_k r_0)} \quad (2.46)$$

Où

$$S_{DC} = P_{JDC} = R_{DC} I_{DC}^2 \quad (2.47)$$

2.3 Effet de peau dans un conducteur rectangulaire entouré d'air

2.3.1 Etablissement des champs électriques et magnétiques et calcul de la densité du courant

Dans le repère cartésien de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on considère maintenant le cas d'un conducteur de profondeur L et à section rectangulaire de longueur b et de largeur a (Figure 2.4). Ce conducteur est supposé parcouru par un courant $I(t)$ suivant l'axe z .

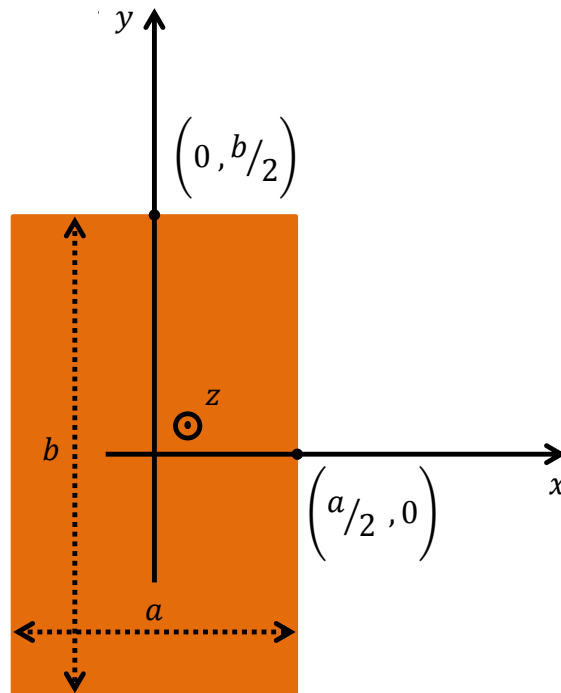


Figure 2.4 Section transversale d'un conducteur rectangulaire entouré par l'air.

La densité du courant électrique dépend des coordonnées x et y . Le vecteur densité du courant électrique est alors donné par $\vec{J} = J(x, y, t)\vec{e}_z = \sigma \vec{E} = \sigma E(x, y, t)\vec{e}_z$. En partant de l'hypothèse que la profondeur du conducteur est très grande devant les dimensions de la

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

section transversale ($L \gg a$ et $L \gg b$), l'établissement du champ magnétique est pratiquement invariant suivant la profondeur z . Le vecteur champ magnétique à travers une section transversale du conducteur s'écrit alors : $\vec{H} = H_x(x, y)\vec{e}_x + H_y(x, y)\vec{e}_y$. En utilisant les expressions précédentes de \vec{j} et de \vec{H} , l'évaluation des équations de Maxwell-Faraday (1.2) et de Maxwell-Ampère (1.1) dans le repère cartésien donne :

$$\frac{\partial}{\partial x}(H_y(x, y, t)) - \frac{\partial}{\partial y}(H_x(x, y, t)) = \sigma E(x, y, t) \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(E(x, y, t)) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(H_x(x, y, t)) \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(E(x, y, t)) = \mu \frac{\partial}{\partial t}(H_y(x, y, t)) \quad (2.50)$$

En dérivant l'équation (2.48) par rapport au temps et en y insérant les équations (2.49) et (2.50) on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E + \frac{\partial^2}{\partial y^2}E = \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t}E \quad (2.51)$$

Pour résoudre ce type d'équation différentielle, nous pouvons à nouveau utiliser la méthode des variables séparées telle que $E(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, l'équation (2.51) devient ainsi :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{1}{\mu\sigma} \left(\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right) \quad (2.52)$$

Le coté gauche de l'équation (2.52) dépend uniquement de t , le coté droit dépend uniquement de x et de y . Pour cela, les deux cotés doivent être égaux à une constante qu'on appelle c .

Le coté droit de l'équation (2.52) aboutit à l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c \quad (2.53)$$

La solution de cette équation est donnée par

$$T(t) = e^{ct} \quad (2.54)$$

Le coté gauche de l'équation (2.52) aboutit à son tour à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{\mu\sigma} \left(\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right) = c \quad (2.55)$$

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

Dans l'équation (2.55), il s'agit de l'addition de deux termes dont la somme est une constante. Puisque ces deux termes dépendent de coordonnées différentes, ils sont forcément constants :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = p^2 \quad (2.56)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = q^2 \quad (2.57)$$

Il s'agit de deux équations différentielles du second ordre dont les solutions sont respectivement :

$$X(x) = k_1 \sinh(px) + k_2 \cosh(px) \quad (2.58)$$

$$Y(y) = k_3 \sinh(qy) + k_4 \cosh(qy) \quad (2.59)$$

En utilisant l'équation (2.55), les constantes p et q sont liées respectivement par la relation suivante :

$$p^2 + q^2 = \mu\sigma c \quad (2.60)$$

Le champ électrique se déduit alors des équations (2.54), (2.58) et (2.59) selon :

$$E(x, y, t) = [k_1 \sinh(px) + k_2 \cosh(px)][k_3 \sinh(qy) + k_4 \cosh(qy)]e^{ct} \quad (2.61)$$

La densité du courant électrique sera donnée par :

$$J(x, y, t) = \sigma[k_1 \sinh(px) + k_2 \cosh(px)][k_3 \sinh(qy) + k_4 \cosh(qy)]e^{ct} \quad (2.62)$$

2.3.2 Alimentation avec un courant sinusoïdal

Dans le cas d'une alimentation par un courant sinusoïdal $I(t)$ d'amplitude I , de pulsation ω et de phase à l'origine du temps φ , $I(t)$ sera donc donné par sa représentation complexe $Ie^{j\varphi}e^{j\omega t} = \underline{I}e^{j\omega t}$. $\underline{I}e^{j\omega t}$ est alors l'intégrale de $J(x, y, t)$ à travers la section transversale du conducteur :

$$\underline{I}e^{j\omega t} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma [k_1 \sinh(px) + k_2 \cosh(px)][k_3 \sinh(qy) + k_4 \cosh(qy)] dx dy e^{ct} \quad (2.63)$$

Par identification, on peut conclure que $c = j\omega$.

Il s'agit d'un régime sinusoïdal, les équations (2.49) et (2.50) s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial y}(E(x, y, t)) = -\mu j\omega(H_x(x, y, t)) \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(E(x, y, t)) = \mu j \omega (H_y(x, y, t)) \quad (2.65)$$

On conclut alors les expressions des composantes suivant x et y du champ magnétique :

$$H_x(x, y, t) = -\frac{q}{\mu j \omega} [k_1 \sinh(px) + k_2 \cosh(px)][k_3 \cosh(qy) + k_4 \sinh(qy)] e^{j\omega t} \quad (2.66)$$

$$H_y(x, y, t) = \frac{p}{\mu j \omega} [k_1 \cosh(px) + k_2 \sinh(px)][k_3 \sinh(qy) + k_4 \cosh(qy)] e^{j\omega t} \quad (2.67)$$

En raison de la symétrie de la section rectangulaire du conducteur, la composante suivant x et la composante suivant y du champ magnétique sont nulles à $y = 0$ et $x = 0$ respectivement, ceci est valide quelque soit t :

$$H_x(x, 0, t) = -\frac{q}{\mu j \omega} [k_1 \sinh(px) + k_2 \cosh(px)][k_3 \cosh(qy)] e^{j\omega t} = 0 \quad (2.68)$$

$$H_y(0, y, t) = \frac{p}{\mu j \omega} [k_1 \cosh(px)][k_3 \sinh(qy) + k_4 \cosh(qy)] e^{j\omega t} = 0 \quad (2.69)$$

On conclut alors que $k_3 = 0$ et $k_1 = 0$. En supposant que $k = k_2 k_4$ les expressions de H_x , H_y , E et J deviennent :

$$H_x(x, y, t) = -\frac{qk}{\mu j \omega} \cosh(px) \sinh(qy) e^{j\omega t} \quad (2.70)$$

$$H_y(x, y, t) = \frac{pk}{\mu j \omega} \sinh(px) \cosh(qy) e^{j\omega t} \quad (2.71)$$

$$E(x, y, t) = k \cosh(px) \cosh(qy) e^{j\omega t} \quad (2.72)$$

$$J(x, y, t) = \sigma k \cosh(px) \cosh(qy) e^{j\omega t} \quad (2.73)$$

La constante k est déterminée en utilisant l'égalité suivante :

$$\underline{I} e^{j\omega t} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} J(x, y, t) dx dy \quad (2.74)$$

En résolvant l'équation (2.74), on obtient :

$$k = \frac{I}{4\sigma} \frac{qp}{\sinh\left(p\frac{a}{2}\right) \sinh\left(q\frac{b}{2}\right)} \quad (2.75)$$

2.3.3 Traitement de cas particuliers

Les équations (2.70), (2.71), (2.72) et (2.73) décrivent le comportement électromagnétique à travers une section transversale rectangulaire du conducteur. Par contre, la résolution du problème reste incomplète sans la détermination des constantes q

et p . L'équation (2.60) est insuffisante, il y a une équation additionnelle qui manque. La détermination de ces constantes ne se fait sans ajouter des hypothèses simplificatrices. Regardons les deux cas suivants: un conducteur de section en forme d'un carré ou situation d'un fonctionnement à basse fréquence [Ger009].

2.3.3.1 Section symétrique carré du conducteur

Dans le cas d'un conducteur à section transversale symétrique carré caractérisé par $a = b$, l'analogie entre les composantes suivant x et y du champ magnétique permet de conclure intuitivement que $q = p$. En associant l'équation (2.60), on peut extraire les valeurs de p et q :

$$q = p = \sqrt{\frac{j\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sqrt{j} \quad (2.76)$$

Où $\delta = 1/\sqrt{\pi f\mu\sigma}$ est l'épaisseur de peau dans le cas d'un conducteur plan.

2.3.3.2 Très basses fréquences

Dans le cas des très basses fréquences, on peut assumer que la valeur absolue du champ magnétique aux points $(x = a/2, y = 0)$ et $(x = 0, y = b/2)$ sont identiques. Ces deux valeurs sont données par :

$$H(x = a/2, y = 0, t) = H_y(x = a/2, y = 0, t) = \frac{pk}{\mu j\omega} \sinh(p a/2) e^{j\omega t} \quad (2.77)$$

$$H(x = 0, y = b/2, t) = H_x(x = 0, y = b/2, t) = -\frac{qk}{\mu j\omega} \sinh(q b/2) e^{j\omega t} \quad (2.78)$$

L'égalité de (2.77) et (2.78) donne l'équation suivante :

$$p \sinh(p a/2) = q \sinh(q b/2) \quad (2.79)$$

En régime continu, la pulsation ω est nulle. Puisque la distribution de la densité du courant doit être uniforme, on peut conclure en utilisant l'équation (2.73) que les constantes complexes p et q doivent être nulles et qu'aux très basses fréquences, ces constantes sont localisées au voisinage de 0. En partant de l'hypothèse que le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 1 de la fonction sinus hyperbolique est donné par : $\sinh(x) = x$, on déduit de l'équation (2.79) que :

$$p^2 a/2 = q^2 b/2 \quad (2.80)$$

Les constantes p et q seront données alors par :

$$p = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2b}{a+b}} \quad (2.81)$$

$$q = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2a}{a+b}} \quad (2.82)$$

2.4 Conducteurs logés dans l'encoche d'un circuit magnétique

Le calcul analytique effectué dans les deux sections précédentes était basé sur le fait que le conducteur circulaire ou rectangulaire est entouré par l'air. Cependant, dans le cas des transformateurs et des machines électriques, les conducteurs sont normalement logés dans des encoches du circuit magnétique. La forme géométrique de ces encoches et la distribution des conducteurs du bobinage à l'intérieur dépendent fortement du type de la machine étudié et de la méthodologie de répartition du bobinage sur les dents du stator. La présence d'un circuit magnétique à perméabilité élevé pour les différentes géométries influe la circulation des lignes du champ magnétique et le mouvement du rotor particulièrement dans le cas des machines électriques à pôles saillants favorise l'établissement d'un champ magnétique bidimensionnel. Le calcul analytique qu'on présente dans cette section concerne les encoches symétriques à dents parallèles, la perméabilité du circuit magnétique est supposée infinie et l'influence du mouvement du rotor est désormais négligée.

2.4.1 Etablissement des champs électriques et magnétiques et calcul de la densité du courant

On considère maintenant le cas de $n \geq 1$ conducteurs individuels logés l'un au dessus de l'autre dans une encoche symétrique à deux pôles parallèles. Les conducteurs sont à section transversale rectangulaire et sont alimentés chacun par le courant imposé $I(t)$. Vu que les conducteurs seront étudiés individuellement, chaque conducteur est associé alors à un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) comme le montre la figure (2.5). Pour démarrer le calcul analytique des phénomènes électromagnétiques dans ces conducteurs, on suppose les trois hypothèses simplificatrices suivantes :

1. La perméabilité magnétique du matériau ferromagnétique est infinie, d'une façon que le champ magnétique dans le circuit magnétique est négligeable.
2. Les champs magnétique et électrique sont indépendants des coordonnées x et z .
3. Les vecteurs champs électriques et magnétiques ont chacun une seule composante, suivant l'axe des x pour le champ magnétique tel que $\vec{H} = H_x(y, t)\vec{e}_x = H(y, t)\vec{e}_x$ et suivant l'axe des z pour le champ électrique tel que $\vec{E} = E_z(y, t)\vec{e}_z = E(y, t)\vec{e}_z$.

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

Dans les conducteurs électriques, le vecteur densité du courant se déduit alors par $\vec{J} = J_z(y, t)\vec{e}_z = J(y, t)\vec{e}_z = \sigma E(y, t)\vec{e}_z$ [Dow66].

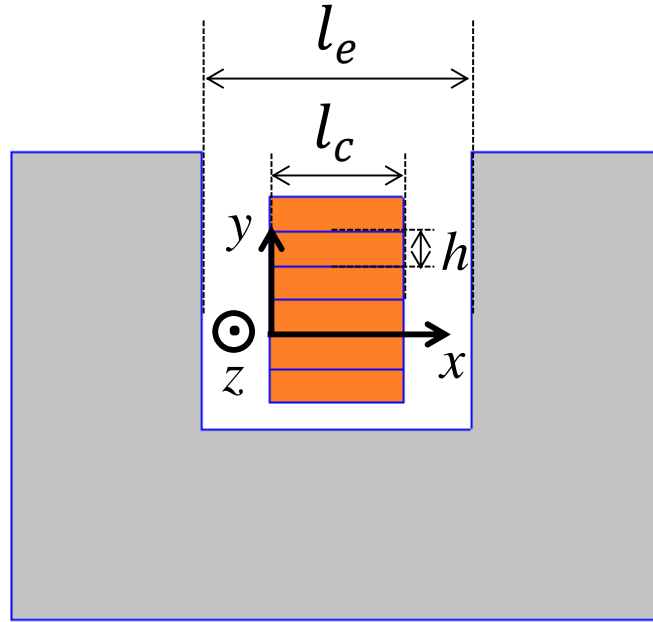


Figure 2.5 Exemple de $n = 6$ conducteurs placés l'un au dessus de l'autre dans une encoche symétrique à dents parallèles.

Le champ magnétique étant négligeable dans le matériau ferromagnétique, il ne contribue pas alors à la circulation du champ magnétique $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$. L'application maintenant du théorème d'Ampère et de la loi de Faraday à une section d'un conducteur de hauteur dy , de longueur l suivant l'axe z et de largeur l_c placé dans une encoche de largeur l_e , donne les deux équations différentielles suivantes en fonction de $H(y, t)$ et $E(y, t)$:

$$\frac{\partial(H(y, t))}{\partial y} = \frac{\sigma l_c}{l_e} E(y, t) \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial(E(y, t))}{\partial y} = \mu \partial H(y, t) / \partial t \quad (2.84)$$

Où σ et μ sont respectivement la conductivité et la perméabilité du cuivre. Ces équations (2.83) et (2.84) sont vues comme étant les équations fondamentales pour le calcul analytique des pertes « cuivre » où le rapport l_c/l_e est appelé le coefficient de Dowell. Il faut

insister sur le fait que la validité et la fidélité du calcul analytique décroît lorsque le coefficient de Dowell diminue c'est-à-dire lorsque la largeur de la couche des conducteurs l_c est petite relativement à la largeur de l'encoche l_e [Rob002a] [Rob002b]. Si on suppose le cas d'une alimentation par un courant sinusoïdal périodique $I(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$, ce courant peut être écrit sous la représentation complexe suivante $\underline{I} = I e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ où I est la valeur efficace du courant, ω la pulsation et φ la phase à l'origine du temps. En utilisant alors la notation complexe, les champs électrique et magnétique et la densité du courant

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

électrique peuvent être écrits sous leurs notations complexes correspondantes $\underline{E}(y, t) = \underline{E}(y)e^{j\omega t}$, $\underline{H}(y, t) = \underline{H}(y)e^{j\omega t}$ and $\underline{J}(y, t) = \underline{J}(y)e^{j\omega t}$ respectivement. Réciproquement, il faut noter qu'une grandeur temporelle quelconque $g(y, t)$ qui peut être le champ électrique, le champ magnétique ou la densité du courant sera déterminée par la partie réelle de sa représentation complexe $\underline{g}(y, t) = \underline{g}(y)e^{j\omega t}$ multiplié par $\sqrt{2}$ tel que $g(t) = \text{Réelle}(\sqrt{2}\underline{g}(y, t))$. La combinaison maintenant des deux équations (2.83) et (2.84) sous leurs formes complexes donne l'équation différentielle du second ordre suivante en fonction de $\underline{H}(y)$:

$$\frac{d^2(\underline{H}(y))}{dy^2} - j\omega\mu\frac{\sigma l_c}{l_e}\underline{H}(y) = 0 \quad (2.85)$$

La solution générale de l'équation (2.85) est donnée par :

$$\underline{H}(y) = c_1 e^{ry} + c_2 e^{-ry} \quad (2.86)$$

Où c_1 et c_2 sont des constantes complexes et r est donné par l'expression suivante:

$$r = \sqrt{j\omega\mu\sigma l_c/l_e} \quad (2.87)$$

Puisque les n couches de conducteurs sont isolées telles que chacune est alimentée par le courant $I(t)$, le champ électrique et consécutivement la densité du courant sont discontinues à la frontière des conducteurs. Le calcul des champs électrique et magnétique se fait alors dans chaque conducteur séparément. L'axe des x du système de coordonnées associé à chaque conducteur est supposé localisé sur la frontière inférieure du conducteur étudié. Un paramètre p est utilisé pour identifier le conducteur étudié dans l'encoche tel que $1 \leq p \leq n$, où n est le nombre total des couches de conducteurs placés l'une au dessus de l'autre. Le paramètre $p = n$ marque le conducteur le plus haut, et celui $p = 1$ marque le conducteur le plus bas. Pour déterminer maintenant les constantes complexes c_1 et c_2 on utilise les conditions aux limites du champ magnétique $\underline{H}(0)$ sur la frontière inférieure et $\underline{H}(h)$ sur la frontière supérieure du conducteur. Où h représente la hauteur de chaque conducteur. La ligne du champ magnétique qui passe le long de la frontière supérieure du conducteur p à la position $y = h$ et qui vient de se fermer dans le circuit magnétique encercle p fois le courant \underline{I} alors que celle qui passe le long de la frontière inférieure à la position $y = 0$ encercle dans ce cas $(p - 1)$ fois le courant \underline{I} . En utilisant ces deux conditions aux limites dans l'équation (2.86) on peut obtenir les deux équations suivantes à résoudre pour déterminer les constantes c_1 et c_2 :

$$(c_1 e^{rh} + c_2 e^{-rh})l_e = p\underline{I} \quad (2.88)$$

$$(c_1 + c_2)l_e = (p - 1)\underline{I} \quad (2.89)$$

La détermination des constantes c_1 et c_2 donne la distribution du champ magnétique à travers le conducteur étudié p :

$$\underline{H}(y, t) = \frac{I}{l_e \sinh(rh)} [p \sinh(ry) - (p - 1) \sinh(r(y - h))] e^{j\omega t} \quad (2.90)$$

L'utilisation de l'équation (2.84) sous sa forme complexe permet de donner l'expression du champ électrique :

$$\underline{E}(y, t) = \frac{rI}{\sigma l_c \sinh(rh)} [p \cosh(ry) - (p - 1) \cosh(r(y - h))] e^{j\omega t} \quad (2.91)$$

En multipliant le champ électrique par la conductivité σ , la distribution de la densité du courant à travers la section transversale du conducteur p est donné par :

$$\underline{J}(y, t) = \frac{rI}{l_c \sinh(rh)} [p \cosh(ry) - (p - 1) \cosh(r(y - h))] e^{j\omega t} \quad (2.92)$$

2.4.2 Pertes « cuivre » totales par effet de peau et de proximité

Les pertes totales par effet Joule dans le conducteur p de longueur l suivant l'axe z peuvent être calculées selon l'équation suivante :

$$P_J = l_c l / \sigma \int_0^h |\underline{J}(y)|^2 dy \quad (2.93)$$

Pour calculer le module de $\underline{J}(y)$, les fonctions hyperboliques doivent être scindées en leurs partie réelle et imaginaire, ainsi les pertes totales par effet Joule dans le conducteur p seront données par l'expression suivante :

$$P_{Jp} = R_{DCp} I^2 [\varphi(x) + p(p - 1) \psi(x)]; \quad x = hr / \sqrt{2j} \quad (2.94)$$

Où $R_{DCp} = 1 / \sigma h l_c$ est la résistance DC du conducteur p , et les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont données par les expressions suivantes :

$$\varphi(x) = x \frac{(\sinh 2x + \sin 2x)}{(\cosh 2x - \cos 2x)} \quad (2.95)$$

$$\psi(x) = 2x \frac{(\sinh x - \sin x)}{(\cosh x + \cos x)} \quad (2.96)$$

On détermine maintenant les pertes par effet Joule totales dans les n conducteurs en faisant la somme des pertes individuelles de chaque conducteur $p \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$:

$$P_J = \sum_{p=1}^n P_{Jp} = R_{DC} I^2 \left[\varphi(x) + \frac{(n^2 - 1)}{3} \psi(x) \right] \quad (2.97)$$

Où R_{DC} est la résistance DC totale des n conducteurs, $R_{DC} = n R_{DCp}$.

2.4.3 Alimentation avec un courant non sinusoïdale

Dans le cas d'une alimentation par un courant périodique non sinusoïdal, le courant de fréquence $w/2\pi$ peut s'écrire, comme évoquée précédemment, sous la forme d'une expansion en série de Fourier :

$$I(t) = I_{DC} + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \sin(kwt + \varphi_k) \quad (2.98)$$

Où, I_{DC} est la composante continue du courant $I(t)$, I_k et φ_k sont respectivement la valeur efficace de la composante spectral de fréquence $kw/2\pi$ et sa phase à l'origine du temps. Les pertes totales par effet Joule, comme déjà démontré, sont calculées comme étant la somme des pertes par effet Joule correspondantes à chaque composante spectrale de la série de Fourier :

$$P_{AC} = R_{DC} [I_{DC}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2 \left[\varphi(x_k) + \frac{(n^2 - 1)}{3} \psi(x_k) \right]] \quad (2.99)$$

En s'adressant aux équations (2.95) et (2.96), on peut évaluer séparément à partir de l'équation (2.99), les pertes classiques DC, les pertes AC par effet de peau et les pertes AC par effet de proximité où :

$$x_k = hr_k / \sqrt{2j} \quad \text{and} \quad r_k = \sqrt{jk\omega\mu\sigma l_c / l_s} \quad (2.100)$$

2.4.4 Cas des conducteurs circulaires logés dans l'encoche

En raison des coûts plus faibles et d'une manipulation plus facile, les spires dans les machines électriques sont fabriquées à partir des conducteurs circulaires. Pour calculer les pertes « cuivre » dans le cas des conducteurs circulaires logés dans l'encoche, une solution approximative peut être obtenue en remplaçant les conducteurs circulaires par des conducteurs carrés de même surface en section transversale. Cette simplification n'est correcte que dans de cas des diamètres de conducteurs circulaires inférieurs ou égaux à l'épaisseur de peau δ .

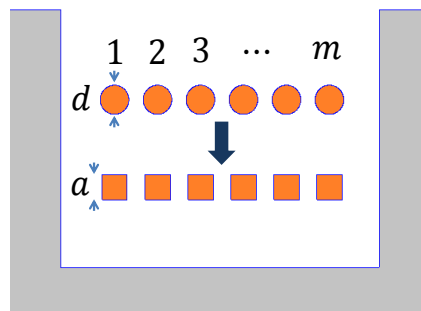


Figure 2.6 Transformation des conducteurs circulaires en des conducteurs carrés à surface de sections équivalente.

La figure 2.6 illustre le processus de transformation appliqué sur une couche formée de m conducteurs à sections circulaires logés dans l'encoche d'un circuit magnétique [Fer94] [Dow66]. D'abord les conducteurs circulaires de diamètre d sont remplacés par des conducteurs carrés de côté $a = \frac{d}{2}\sqrt{\pi}$. Enfin, il faut à nouveau rappeler que la validité du calcul analytique des pertes « cuivre » dans les conducteurs logés dans l'encoche diminue lorsque la largeur l_c de cuivre devient faible par rapport à la largeur de l'encoche l_s .

2.4.4 Exemple d'application simple et comparaison avec la modélisation par éléments finis

Pour tester la validité du modèle analytique de calcul des pertes « cuivre » dans des conducteurs logés dans l'encoche, on souhaite le comparer au modèle numérique utilisant la méthode des éléments finis.

On commence l'étude de deux exemples de cas test. Le premier est un problème illustrant l'effet de peau, il s'agit d'un seul conducteur ($n = 1$) de section S placé dans une encoche symétrique à pôles parallèles et alimenté avec un courant $I(t)$. Le deuxième est un problème étudiant l'effet de proximité, il s'agit alors de 18 conducteurs (3×6) alimentés chacun par le courant $I(t)/18$. La configuration (3×6) signifie qu'on a trois couches horizontales de conducteurs telles que chacune est constituée de 6 conducteurs placés verticalement. Chaque conducteur représente une section transversale de surface $S/18$ (Figure 2.7).

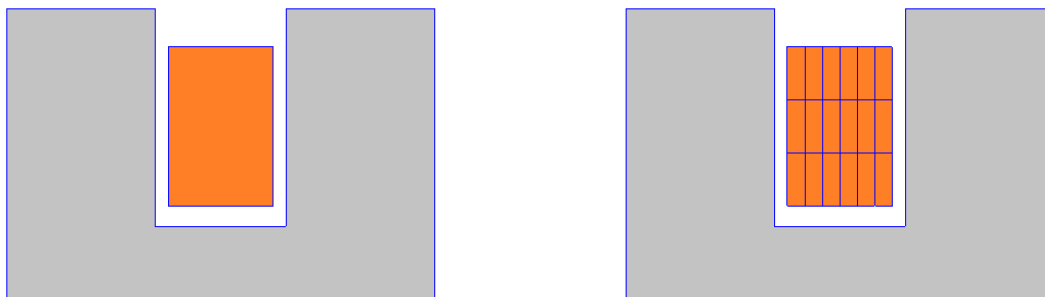


Figure 2.7 Exemple de l'effet de peau (gauche). Exemple de l'effet de proximité (droite).

Les deux problèmes étudiés développent alors la même force magnétomotrice $I(t)$ et présentent les mêmes pertes DC classiques. La forme d'onde de la force magnétomotrice $I(t)$ utilisée est typique dans le cas d'une alimentation à basse vitesse des machines à reluctance variable (Figure 2.8).

C'est une force magnétomotrice périodique non sinusoïdale à la fréquence d'alimentation de 1000 Hz, et dont les dix premiers coefficients de sa représentation en série de Fourier sont montres dans la figure 2.9. En premier lieu, la modélisation par éléments finis est implémentée. Sur la figure 2.8, les pertes par effet Joule et la courbe de pertes DC commun aux deux problèmes illustrant l'effet de peau et l'effet de proximité sont tracées en fonction du temps.

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

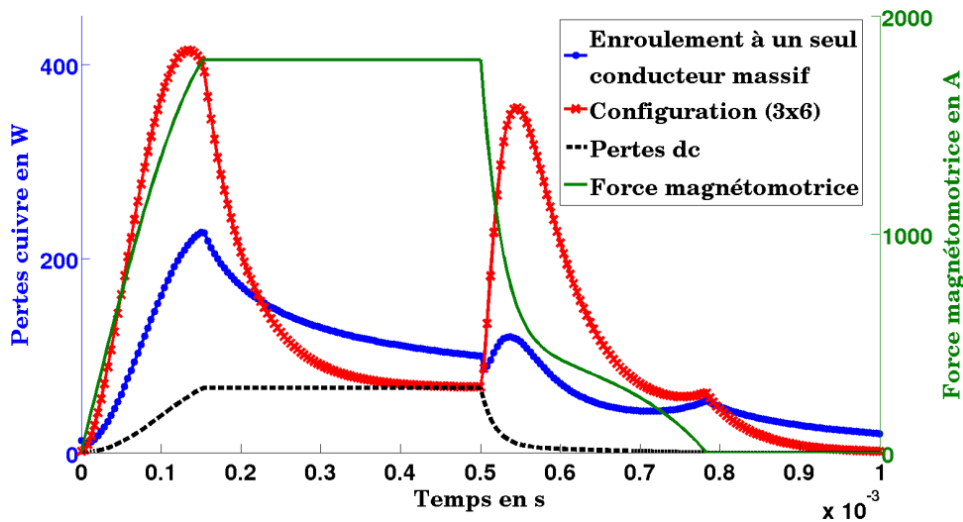


Figure 2.8 Les pertes par effet Joule calculées par la modélisation éléments finis dans les deux problèmes de l'effet de peau et de proximité.

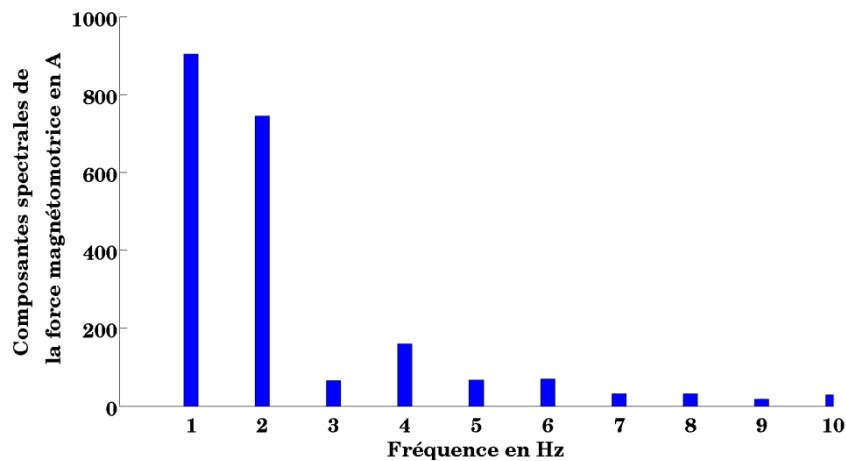


Figure 2.9 Les dix premiers coefficients de Fourier de la force magnétomotrice $I(t)$.

En deuxième lieu, le calcul analytique est employé. L'équation (2.99) présentée pour le calcul analytique des pertes totales par effet Joule dans un segment d'une encoche symétrique à dents parallèles de longueur l et de largeur l_e est définie pour des géométries de bobinages de largeur l_c et qui présente n couches de conducteurs placés horizontalement l'un au dessus de l'autre et de hauteur h chacune. Les cinq paramètres géométriques l , l_e , l_c , n et h sont alors fondamentales. Pour une géométrie d'enroulement donné, le nombre des couches de conducteurs n peut être déterminé en appliquant une transformation géométrique de la géométrie donnée vers une géométrie équivalente. Dépendamment de la géométrie réelle d'enroulement, généralement plusieurs conducteurs sont fusionnés en un seul conducteur au cours de la transformation géométrique d'une façon que les forces magnétomotrices totales de la géométrie réelle et la géométrie équivalente soient égales. Revenant aux deux exemples d'étude, d'une part dans le cas du problème de l'effet de peau, aucune transformation géométrique est demandée, le nombre de couches de conducteurs est donnée par le paramètre $n = 1$. D'autre part, pour le problème étudiant l'effet de

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

proximité, la figure 2.10 clarifie l'adaptation géométrique appliquée pour pouvoir étudier analytiquement les pertes par effet Joule dans la configuration (3 × 6). Grâce à des raisons de symétrie, les distributions de la densité du courant à travers les six conducteurs de chaque couche sont égales puisqu'en premier lieu, les conducteurs sont parcourus par le même courant et en deuxième lieu, les lignes de champs magnétiques sont horizontales partout dans l'encoche et que la valeur du champ magnétique indépendante de x est la même à travers les conducteurs placés dans la même couche. Pour la configuration (3 × 6), les six conducteurs verticaux de chaque couche sont alors fusionnés en un seul conducteur horizontal (Figure 2.10). Le problème de l'effet de proximité devient alors un problème étudiant une géométrie d'enroulement plus simple à trois conducteurs horizontaux solides ($n = 3$) tels que chaque conducteur est alimenté par le courant $6 * I(t)/18 = I(t)/3$.

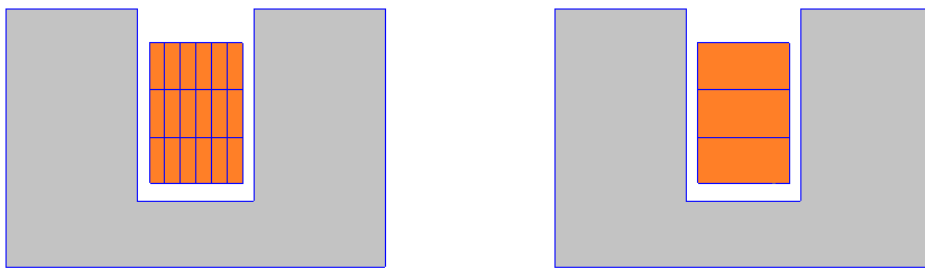


Figure 2.10 Détermination de la géométrie équivalente, les 6 conducteurs verticaux de chaque couche sont fusionnés en un seul conducteur horizontal.

Lorsque tous les paramètres géométriques des deux exemples sont déterminés, le calcul analytique peut être effectué.

Tableau 2.1 Comparaison entre le modèle analytique et le modèle par éléments finis pour le calcul des valeurs moyennes des pertes par effet Joule dans les deux exemples de cas test.

Cas test	Pertes « cuivre » en W		Pertes Ohm DC en W
	Calcul analytique	Modèle par éléments finis	
Exemple 1 ($n = 1$)	87.81	89.43	29.18
Exemple 2 ($n = 3$)	131.92	127.72	

Les deux configurations ont la même résistance DC et produisent la même force magnétomotrice, mais les pertes AC par effet Joule par contre du second exemple, sont d'environ 1,5 fois plus élevés que celles du premier exemple. Bien que les dimensions des conducteurs choisis et la fréquence d'excitation ne correspondent pas à des conditions réalistes pour un enroulement d'encoche, les deux exemples illustrent la forte corrélation entre la géométrie d'enroulement sur les pertes additionnelles par courant de Foucault. Les pertes de cuivre calculées par la modélisation par éléments finis sont très proches des valeurs analytiques avec une erreur ne dépassant pas les 3,2% (Tableau 2.1). Cette erreur faible montre la validité d'une approche analytique dans le cas d'une encoche symétrique à

dents parallèles et justifie en particulier l'utilisation de la transformation géométrique qui a permis de fusionner les conducteurs verticaux de la même couche en un seul conducteur.

2.4.5 Adaptation du calcul analytique dans le cas d'une machine à réluctance variable

Nous allons maintenant appliquer le modèle analytique pour calculer les pertes « cuivre » dissipées dans le bobinage d'une machine à réluctance variable. La forme d'onde arbitraire du courant d'alimentation, typique des machines à réluctance variable, n'est pas vu comme problème puisque le courant périodique s'écrit comme une expansion en série de Fourier où les pertes « cuivre » peuvent être calculés indépendamment pour toutes les composantes harmoniques. Cependant, les encoches d'une machine à réluctance variable ne sont pas tout à fait en accord avec les contraintes géométriques demandées pour établir le modèle analytique. En effet, les dents du circuit magnétique à la frontière de l'encoche ne sont pas parallèles et la largeur de l'encoche est considérablement large par rapport à la largeur du bobinage ne respectant pas ainsi la conclusion évoquée par Robert dans [Rob002a] [Rob002b] concernant le coefficient de Dowell [Dow66].

Une machine à réluctance variable à double saillance 8/6 est prise maintenant comme un exemple plus réaliste. Une seule phase est alimentée, elle se compose de deux bobines connectées en série sur dents; chacune d'elles a 18 spires. La moitié de la machine est étudiée pour des raisons de périodicité (Figure 2.11).

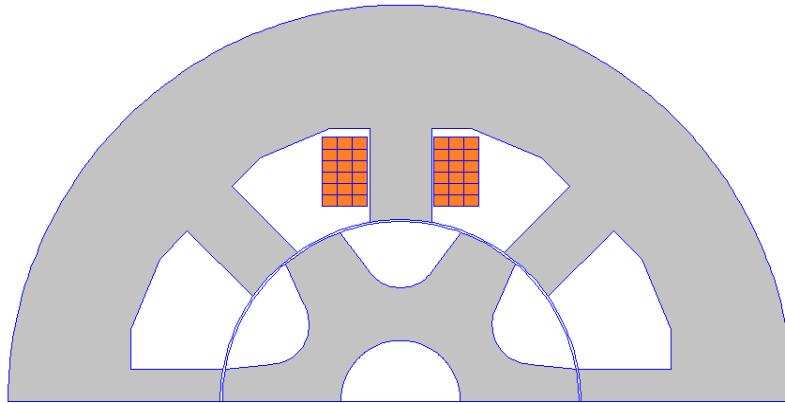


Figure 2.11 Machine à réluctance variable à 18 spires par dents.

Les 18 spires peuvent être distribuées dans l'encoche sur la dent de la machine de différentes manières ce qui conduit à diverses configurations géométriques d'enroulement. Les conducteurs de l'enroulement peuvent être placés horizontalement (18×1), verticalement (1×18) ou suivant d'autres différentes configurations, telles que (9×2), (6×3), (3×6) ou (2×9) (Figure 2.12). En se basant sur la conclusion précédente, à savoir que la valeur des pertes additionnelles par courants de Foucault est fortement liée à la manière de disposer les spires à travers l'encoche de la machine fentes, il est fermement recommandé de sélectionner la configuration d'enroulement optimal en termes de pertes totales par effet Joule [ABM+016a].

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

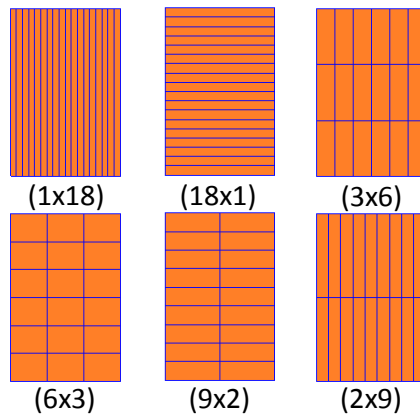


Figure 2.12 Six configurations géométriques différentes dans le cas d'un enroulement à 18 spires.

2.4.5.1 Transformation géométrique au niveau de l'encoche

Tout d'abord, les pertes « cuivre » sont calculées pour les différentes configurations géométriques d'enroulement à l'aide de la modélisation par éléments finis. Ensuite, le calcul analytique des pertes est effectué. Cependant, plusieurs paramètres l , l_e , l_c , n et h doivent être déterminés en première étape. Du coup, La géométrie réelle de l'encoche de la machine électrique est transformée en une géométrie équivalente symétrique à pôles parallèles qui permet alors l'extraction des paramètres géométriques. Les pôles de l'encoche des machines à réluctance variable n'étant pas parallèles, nous avons calculé une valeur moyenne pour l_e en utilisant l'équation (2.101) dans laquelle l_{e1} et l_{e2} représentent respectivement la largeur de l'encoche au niveau des frontières supérieure et inférieure de l'enroulement d'encoche (Figure 2.13).

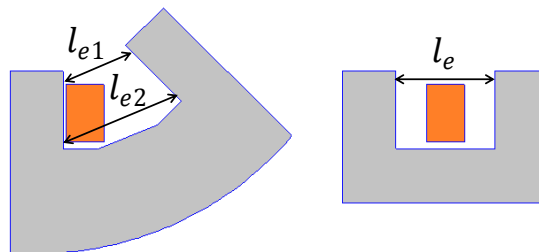


Figure 2.13 La géométrie réelle de l'encoche d'une machine à réluctance variable (gauche). La géométrie équivalente (droite).

$$l_e = \frac{l_{e1} + l_{e2}}{2} \quad (2.101)$$

2.4.5.2 Transformation géométrique au niveau de l'enroulement

La géométrie équivalente est alors une géométrie symétrique avec des pôles parallèles; on est ainsi ramené à la géométrie d'encoche qui a été étudiée dans l'exemple du cas test précédent. Ensuite, pour déterminer le nombre de couches de conducteurs n ,

quelques configurations géométriques réelles d'enroulement sont transformées en leurs géométries équivalentes (Figure 2.14).

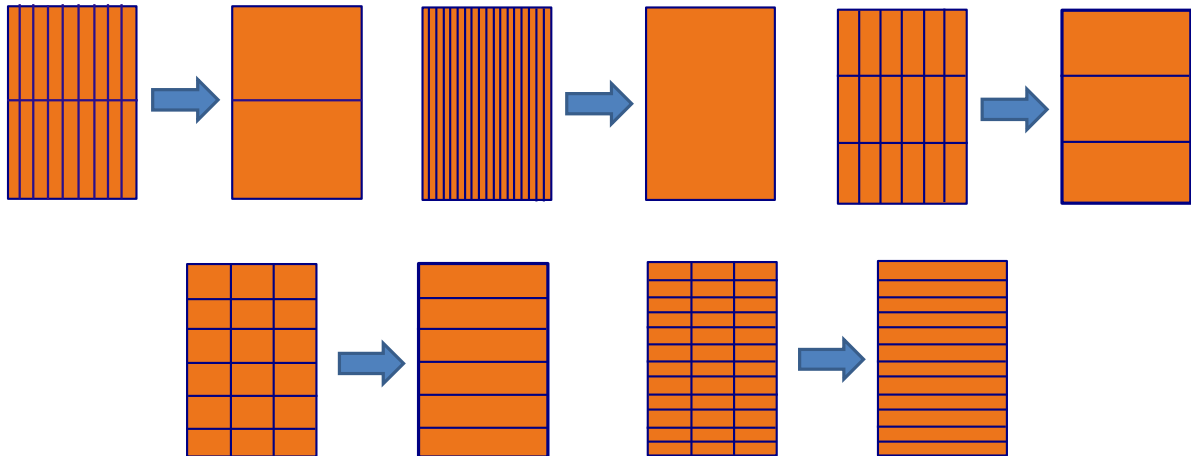


Figure 2.14 Transformation des configurations géométriques réelles d'enroulement vers des géométries équivalentes.

2.4.5.3 Influence de la géométrie de l'enroulement

Dans le cas d'une alimentation avec un courant sinusoïdal, le calcul analytique sur une plage de fréquences industrielles d'alimentation choisie entre 0 et 5000 Hz montre la forte corrélation entre les pertes par effet Joule et la géométrie d'enroulement. La figure 2.15 montre clairement que les pertes additionnelles par courant de Foucault varient d'une géométrie d'enroulement et ceci quelque soit la fréquence d'alimentation utilisée [ABM+016a].

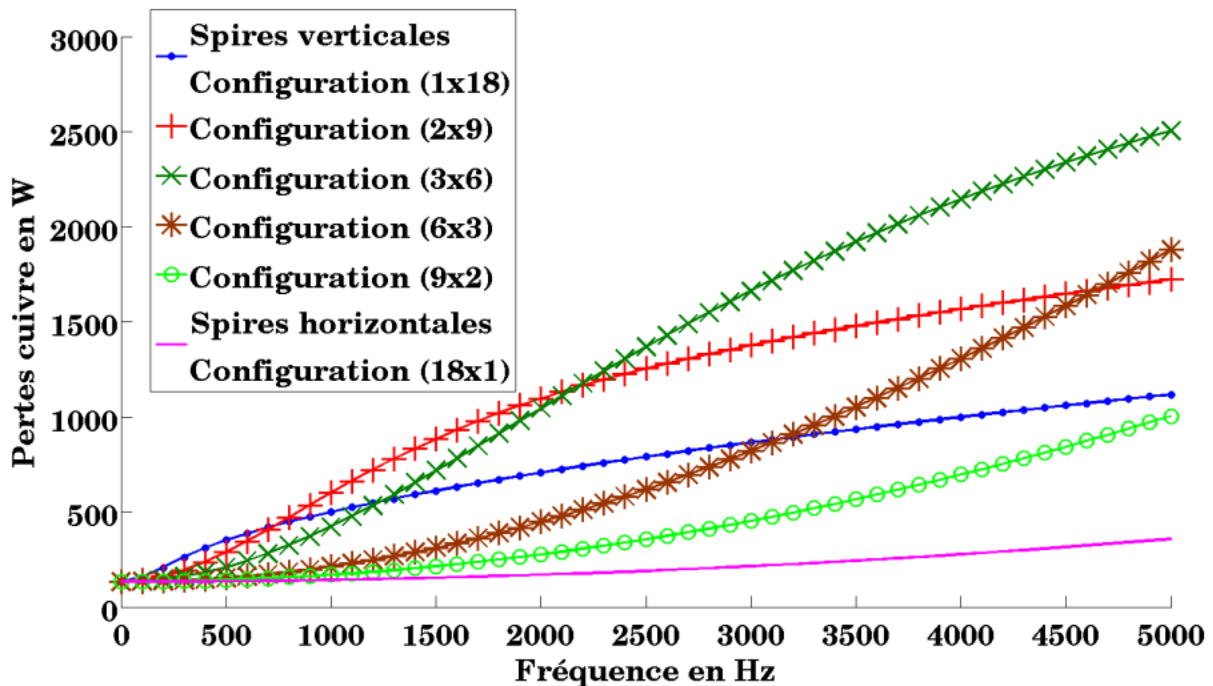


Figure 2.15 Forte influence de la géométrie d'enroulement sur les pertes par effet Joule dépendamment de la fréquence d'alimentation.

2.4.5.4 Comparaison entre le modèle analytique et le modèle numérique utilisant la méthode des éléments finis

Un point de fonctionnement réel est maintenant étudié, il s'agit d'un entraînement du rotor à la vitesse $N = 7100 \text{ tr/min}$.

Le bobinage du stator est supposé alimenté à l'aide d'un convertisseur de puissance raccordé à une source de tension continue $U_{DC} = 220 \text{ V}$.

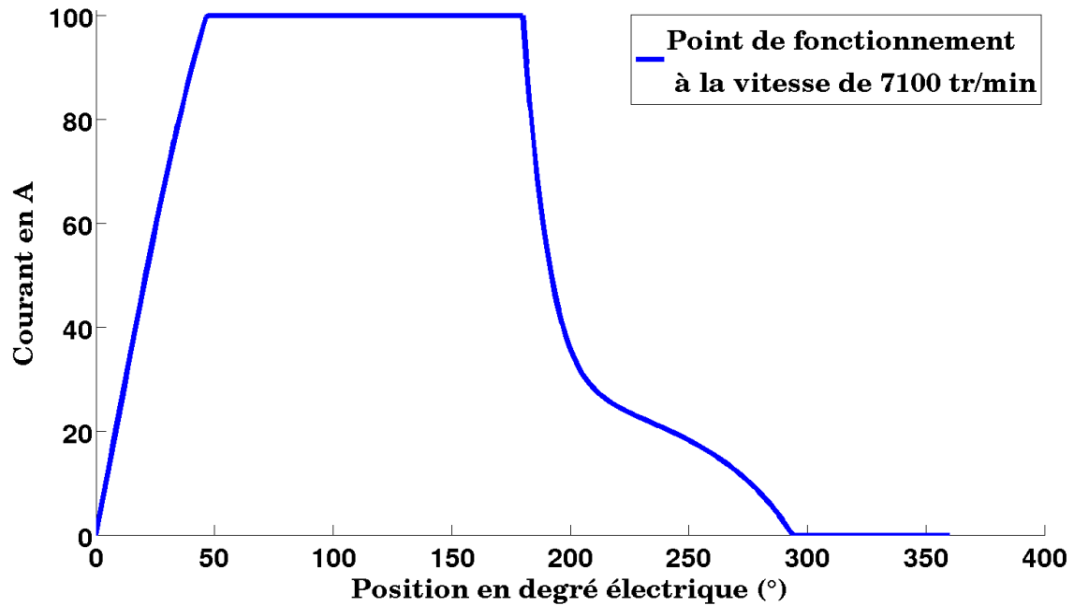


Figure 2.16 La formes d'onde du courant d'alimentation correspondante au point de fonctionnement à la vitesse $N = 7100 \text{ tr/min}$.

La forme d'onde du courant d'alimentation est précalculée à l'aide d'un logiciel de simulation de machines à réluctance variable, nommé "MRVSIM", réalisé conjointement avec les laboratoires SATIE de l'ENS de Cachan, le LGEP et Renault [BM004]. Il a été développé sous environnement MATLAB et fait appel à des interfaces graphiques qui simplifient son utilisation. À vitesse constante, la position du rotor θ est proportionnelle au temps t , on peut tracer alors la forme d'onde du courant d'alimentation, correspondante au point de fonctionnement, en fonction de la position du rotor. La position du rotor en degré électrique θ est plus intuitive qu'une échelle en temps t dans le cas de certaines machines telles que la machine à réluctance variable. Dans ce type de machine, l'évolution de la forme d'onde du courant d'alimentation afin de produire un couple utile donné à une vitesse donnée dépend fortement de la position du rotor. L'origine de l'axe du position, sur la figure 2.16, qui correspondant à $\theta = 0^\circ$ représente la position de conjonction du rotor. C'est la position du rotor de la machine à réluctance variable où la dent du stator est équidistante des deux dents adjacentes du rotor (Figure 2.11). Par contre, la position du rotor à $\theta = 180^\circ$ représente la position d'opposition, c'est la position à laquelle la dent du stator se trouve en opposition ou en face d'une dent du rotor. Il faut noter que la rotation du rotor d'une position de conjonction ou d'opposition à la position de conjonction ou d'opposition suivante respectivement correspond à une rotation de 360° électrique [Kri001].

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

Le calcul par la méthode des éléments finis a permis en post-traitement de tracer les pertes « cuivre » instantanées pour les diverses configurations géométriques d'enroulement (Figure 2.17). On voit clairement l'importante influence de la configuration géométrique d'enroulement sur les pertes « cuivre » dissipées. Pour chaque configuration, les valeurs instantanées des pertes « cuivre » dépendent fortement de la position du rotor.

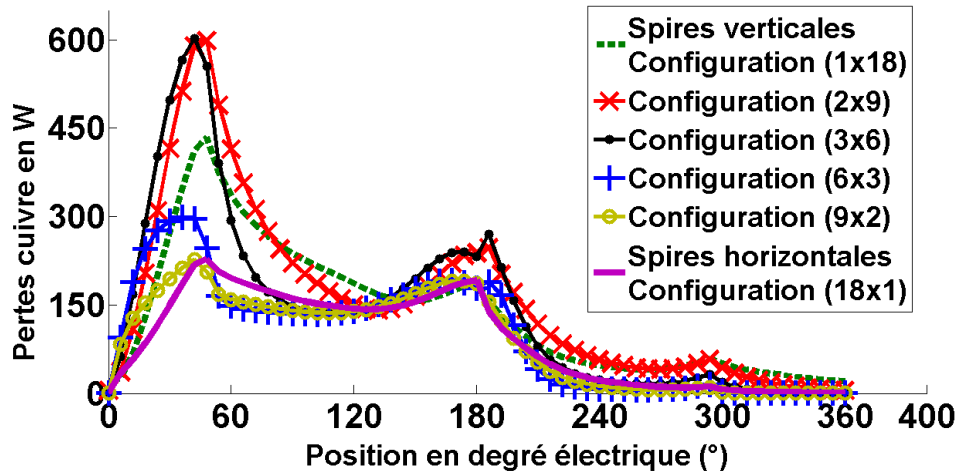


Figure 2.17 Les pertes « cuivre » instantanées dissipées dans les diverses configurations d'enroulement.

La forme d'onde du courant d'alimentation de la machine à réluctance variable n'est pas symétrique, les valeurs du courant ne sont pas identiques pour les positions de la dent du rotor de part et d'autre d'une même dent du stator. Ajoutons à ce qui précède, le fait que la machine à réluctance variable représente une double saillance au niveau du rotor et du stator, les conducteurs d'aller et de retour ne voient pas alors, à une valeur donnée du courant d'alimentation, la même position de la dent du rotor adjacente et sont sujets ainsi à des différentes influences magnétiques. Dans ce type de machine, il vaut mieux alors tracer séparément les pertes « cuivre » dissipées dans les conducteurs d'aller et de retour du même bobinage.

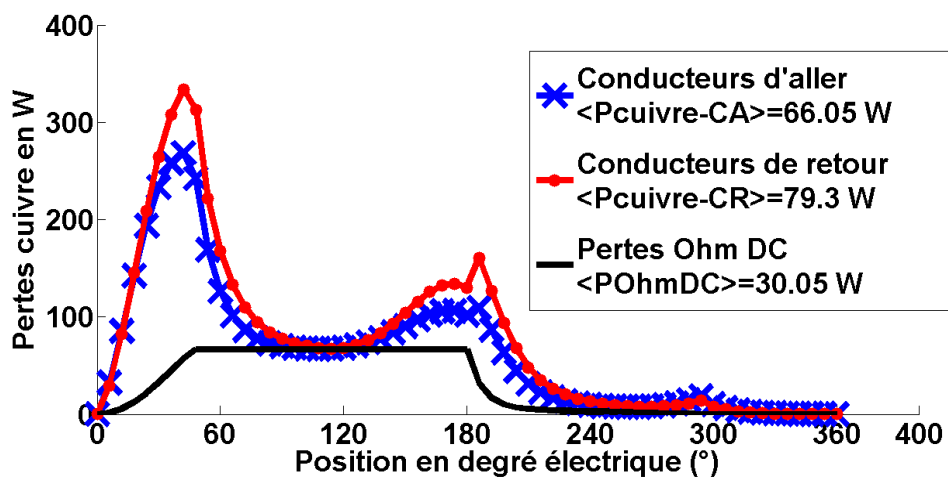


Figure 2.18 Les pertes « cuivre » instantanées dissipées dans les conducteurs d'aller et de retour du même bobinage de la configuration d'enroulement (3x6).

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

Sur la figure 2.18, on trace à titre d'exemple les pertes « cuivre » instantanées dissipées dans les conducteurs d'aller et de retour du même bobinage dans le cas de la configuration d'enroulement (3×6). Les conducteur de retour ou les conducteur du coté droit de la bobine (Figure 2.11) présentent les pertes « cuivre » les plus élevées, ce sont les conducteurs qui voient la dent du rotor à leur proximité lors de la magnétisation de la phase. Lorsque les conducteurs de retour sont parcourus par un courant maximal et voient la dent du rotor à leur proximité, ils sont sujets à un champ magnétique bidimensionnel intense à la proximité de l'entrefer. Ce champ magnétique est variable en fonction du temps grâce au mouvement du rotor saillant, il est à l'origine des pertes additionnelles conséquentes par courant de Foucault.

Dans l'approche analytique, le mouvement du rotor est négligée, ainsi ces pertes additionnelles par courant de Foucault du au mouvement du rotor ne sont pas prises en compte. Les pertes « cuivre » calculées analytiquement sont alors identiques dans les conducteurs d'aller et de retour. Le tableau 2.2 permet la comparaison des valeurs de pertes « cuivre » moyennes calculées en utilisant l'approche analytique et la modélisation par la méthode des éléments finis dans les conducteurs d'aller et de retour des différentes configurations. Les résultats montrent une différence importante entre les valeurs moyennes analytiques et numériques des pertes « cuivre ». En prenant, le modèle éléments finis comme modèle de référence, le modèle analytique pour le calcul des pertes « cuivre » présentent des erreurs importantes sur la valeur moyenne. Cette erreur qu'on note ε_m peut atteindre des valeurs élevées autour de 40%, elle met en cause la précision du modèle analytique du calcul des pertes « cuivre » dans le cas du bobinage des machines à réluctance variable. L'hypothèse d'un champ unidimensionnelle dans le modèle analytique, nous amène comme évoqué précédemment, à des pertes « cuivre » identiques à travers les conducteurs d'une même couche horizontale. Cette hypothèse n'est pas justifiée dans la modélisation numérique par éléments finis. Les pertes « cuivre », à titre d'exemple dans les 6 conducteurs d'aller et de retour placés au voisinage de l'entrefer, ne représentent plus les mêmes valeurs moyennes de pertes « cuivre ».

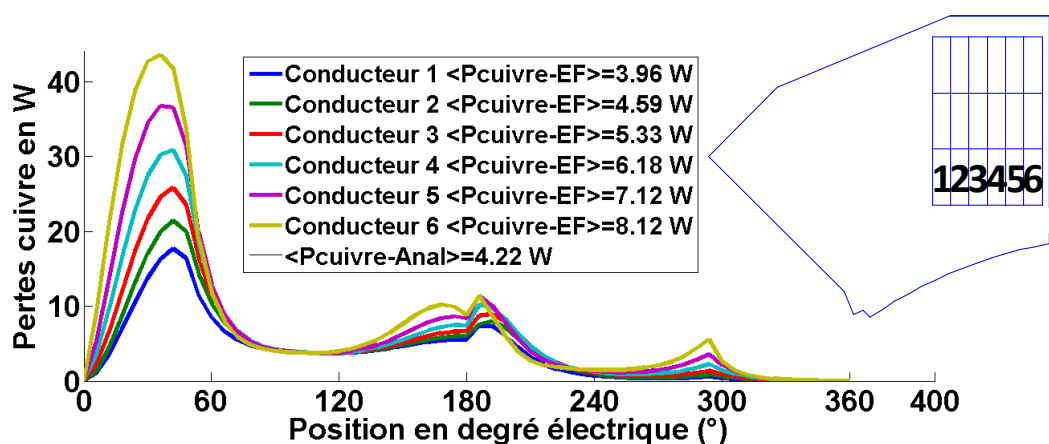


Figure 2.19 Les pertes « cuivre » calculées dans les conducteurs d'aller à la proximité de l'entrefer.

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

Ces valeurs varient énormément en fonction de la position du conducteur, elles sont maximales dans les conducteurs localisés à la proximité de l'entrefer juste à côté de la dent du stator. Cette région est le siège d'un champ magnétique bidimensionnel variable en fonction du temps avec la position du rotor à caractère saillant. Il s'agit d'un champ magnétique de fuite intense qui vient quitter la dent du stator pour rejoindre la dent du rotor en mouvement. La valeur analytique des pertes « cuivre » dans l'un de ces conducteurs est égale à 4.22 W, cette valeur calculée par la méthode des éléments finis varie entre 3.96 et 8.12 W (Figure 2.19) pour les conducteurs d'aller et entre 3.06 et 15.65 W pour les conducteurs de retour (Figure 2.20).

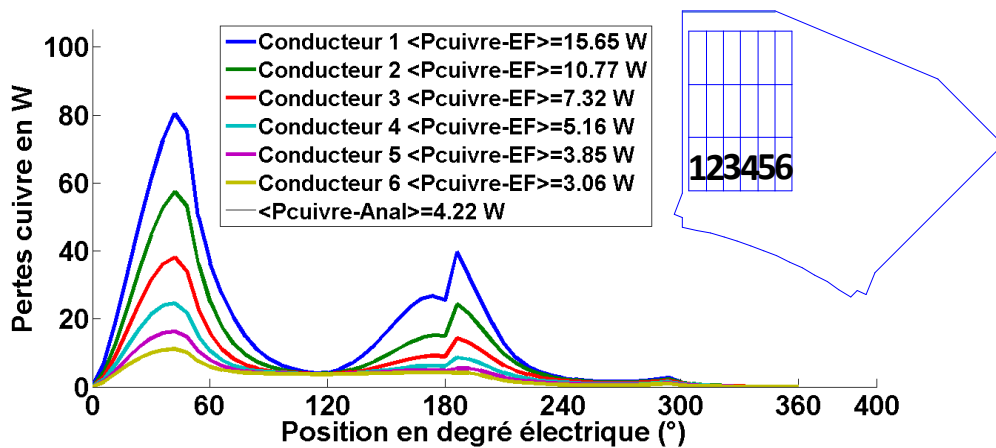


Figure 2.20 Les pertes « cuivre » calculées dans les conducteurs de retour à la proximité de l'entrefer.

De la même manière, les pertes « cuivre » dans les conducteurs d'aller et retour localisés à la proximité de la dent du stator sont calculées en utilisant le modèle analytique et le modèle numérique utilisant la méthode des éléments finis. Ces calculs montrent que les pertes « cuivre » dans des conducteurs placés verticalement augmentent lorsqu'on approche de l'entrefer (Figures 2.19 et 2.20).

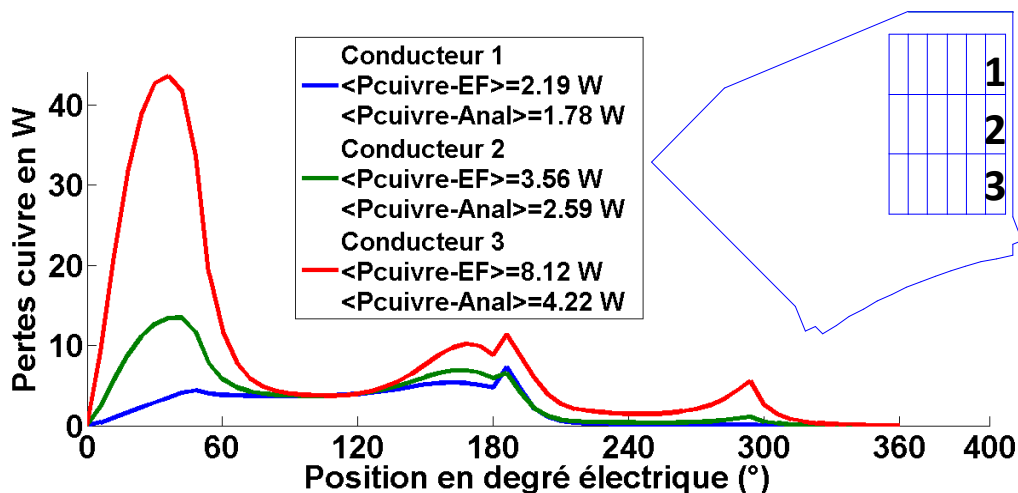


Figure 2.21 Les pertes « cuivre » calculées dans les conducteurs d'aller à la proximité de la dent du stator.

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

Par ailleurs, les valeurs des pertes moyennes ne sont pas en accord avec les valeurs numérique, une différence importante y existe, elle se traduit par des erreurs qui dépassent 73% surtout au niveau des conducteurs de retour (Figure 2.20). En dehors de l'effet important du mouvement du rotor sur l'établissement du champ bidimensionnel qui est à l'origine des pertes additionnelles par courant de Foucault, des lignes de champs de fuites à la proximité de la dent du stator peuvent avoir leur propre efficace contribution. Ces lignes de champs de fuite variables en fonction du temps, dépendent de la géométrie du circuit magnétique au stator, et deviennent intenses lorsque des régions de la dent du stator sont en saturation magnétique.

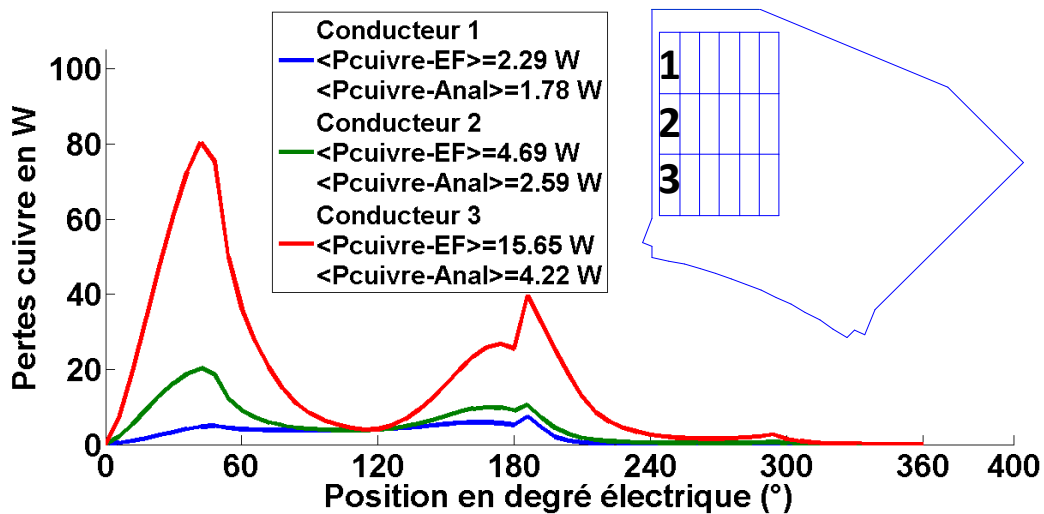


Figure 2.22 Les pertes « cuivre » calculées dans les conducteurs de retour à la proximité de la dent du stator.

Tableau 2.2 Comparaison entre le modèle analytique et le modèle par éléments finis pour le calcul des valeurs moyennes des pertes par effet Joule dans les différentes configurations

Configuration	Valeurs moyennes des pertes « cuivre » en W					
	Conducteurs d'aller			Conducteurs de retour		
	Modèle EF	Modèle analytique	ϵ_m (%)	Modèle EF	Modèle analytique	ϵ_m (%)
(1x18)	61.26	58.85	3.93	76.72	58.85	23.29
(2x9)	72.53	61.36	15.4	89.65	61.36	31.25
(3x6)	66.05	51.58	21.9	79.30	51.58	34.95
(6x3)	47.76	37.83	20.79	54.54	37.83	30.63
(9x2)	42.17	33.83	19.7	50.59	33.83	33.13
(18x1)	37.80	31.05	19.8	54.39	31.05	42.91

Revenant au choix de l'enroulement optimal. Le calcul analytique a été fait pour déterminer rapidement les valeurs des pertes « cuivre » moyennes pour les différentes configurations. Le tableau 2.2 permet la comparaison des valeurs de pertes « cuivre » moyennes calculées par l'approche analytique et la modélisation par éléments finis pour souligner la forte dépendance des pertes additionnelles par courant de Foucault de la géométrie

d'enroulement pour deux différents points de fonctionnement à basse et haute vitesse. Le choix d'un enroulement optimal s'avérerait nécessaire alors pour réduire les pertes « cuivre » et ainsi les problèmes graves d'échauffement.

À la vitesse de rotation du rotor relativement élevé de 7100 tr/min , les résultats sur le calcul des pertes « cuivre » données par la modélisation par éléments finis et le calcul analytique pour le choix de l'enroulement optimal sont en accord; ils montrent tous les deux que la disposition en spires verticales (2x9) est la configuration d'enroulement à éviter, elle conduit aux pertes « cuivre » maximale tandis que la configuration (9x2) représentent le choix optimal du point de vue pertes « cuivre » minimales. Par contre, les valeurs des pertes « cuivre » calculées par le modèle analytique et le modèle numérique par la méthode des éléments finis ne sont pas en concordance. Si le modèle numérique est pris comme modèle de référence, les valeurs des pertes « cuivre » calculées analytiquement sont données avec des erreurs qui dépassent les 42%. La non congruence parfaite des valeurs moyennes des pertes « cuivre » données par les deux approches de calcul analytique et par éléments finis était attendue. Ceci est due en particulier à l'influence du mouvement du rotor et la non-linéarité du circuit magnétique qui sont négligés dans le calcul analytique. Ajoutant à ce qui précède, d'autres simplifications plus ou moins fortes telles que les transformations simplificatrices qui ont été faites sur la configuration de l'enroulement et sur la géométrie de l'encoche d'une part et d'autre part l'hypothèse que nous avons admis concernant la représentation unidimensionnelle de champs électriques et magnétiques. L'approche analytique assure un calcul très rapide et présente une proposition préliminaire pour sélectionner la configuration optimale de la géométrie d'enroulement en fonction des pertes « cuivre ». Par contre, sa crédibilité est faible, il ne peut pas être utilisé alors comme une méthodologie de calcul fiable dans des processus d'optimisation du bobinage des machines à réluctance variable.

2.5 Conclusion

Ce chapitre éclaire les principes fondamentaux de la circulation des courants de Foucault dans les matériaux conducteurs et présente des équations analytiques pour calculer les pertes « cuivre » conséquentes. Dans le cas d'un conducteur entouré de l'air, l'approche analytique permet d'exprimer les pertes « cuivre » comme fonction de la fréquence électrique d'alimentation, des propriétés physiques du matériau (la conductivité et la perméabilité) et des dimensions du conducteur. Par ailleurs, un modèle analytique est établi pour calculer les pertes « cuivre » dans le cas des conducteurs logés dans l'encoche d'un circuit magnétique à bordures parallèles. En partant de l'hypothèse d'un champ magnétique unidimensionnel et d'une perméabilité infinie du circuit magnétique, les pertes « cuivre », calculées dans ces conducteurs comme étant la somme des pertes par effet de peau et des pertes par effet de proximité, sont données en fonction des paramètres géométriques liés à la géométrie de l'encoche et de l'enroulement. Les conducteurs circulaires sont transformés en des conducteurs rectangulaires et en admettant un champ

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

magnétique unidimensionnel, les conducteurs placés horizontalement sont fusionnés en un seul conducteur. Ce modèle analytique a été adapté pour calculer les pertes « cuivre » dans l'enroulement des machines électriques à double saillance. Les formes d'ondes carrées ou impulsionnelles, typiques pour les machines à réluctance variable, ne sont pas considérées comme un problème, car la forme d'onde du courant périodique peut être décomposée en une série de Fourier et les pertes « cuivre » associées à chaque harmonique sont alors calculées de façon indépendante. Cependant, la géométrie de l'encoche des machines à réluctance variable est en contradiction avec les contraintes géométriques nécessaires pour le calcul analytique des pertes; les bordures de l'encoche des machines à réluctance variable sont typiquement non parallèles et la contrainte de Robert n'est pas respectée vu que la largeur du conducteur est faible devant la largeur de l'encoche. En outre, la non linéarité du circuit magnétique et le mouvement du rotor à caractère saillant permettent de l'apparition des flux de champ magnétique de fuite et des déviations importantes des lignes de champ surtout du côté de la dent du stator et à la proximité de l'entrefer ce qui aboutissent à un établissement d'un champ bidimensionnel au niveau de l'encoche [IUN013]. Tous ces éléments se réunissent pour mettre en cause le modèle analytique dédié en principe à un système électromagnétique statique, négligeant la non-linéarité du circuit magnétique et admettant un champ magnétique unidimensionnel.

En revanche, le modèle numérique utilisant la discrétisation par la méthode des éléments finis, est présenté dans le chapitre 1. Il est fondé sur la résolution directe des équations décrivant, avec un faible niveau d'hypothèses, le comportement physique du système à concevoir. En utilisant la discrétisation du domaine d'étude, il fournit comme solution les valeurs des potentiels (magnétique et électrique) en chaque nœud du maillage. Les valeurs des grandeurs macroscopiques, telles que par exemple les pertes « cuivre », sont ensuite calculées à partir de celles des potentiels. Le modèle numérique est en outre habilité à intégrer des solveurs et des outils qui permettent de prendre en compte la non-linéarité du circuit magnétique et la modélisation du mouvement du rotor. Même si le modèle analytique se base sur des équations simples, rapides et nécessitant peu de calculs, sa précision est déterministe lorsqu'il est utilisée dans les processus de conception et d'optimisation. Ce modèle a vérifié son exactitude et sa performance dans le cas des machines électriques à encoches étroites, typiques dans le cas des machines électriques à champs tournantes telles que sous titres d'exemples sans y limiter les machines synchrones et asynchrones, ou les lignes d'induction magnétique dans l'encoche sont quasiment unidimensionnel. Par contre, dans le cas des machines à réluctance variable qui disposent d'une forte saillance au niveau du rotor et qui opèrent sous une saturation magnétique remarquable du au comportement non-linéaire de son circuit magnétique, le modèle analytique qui néglige les pertes « cuivre » par influence (fuite du flux magnétique et mouvement du rotor) aboutit à une imprécision critique et une erreur importante dans la quantification des pertes « cuivre » qui peut dépasser les 40% par rapport au modèle numérique par éléments finis.

2 Approche analytique pour le calcul des pertes « cuivre »

Pour garantir une bonne précision dans le calcul des pertes « cuivre », l'utilisation du modèle numérique par éléments finis devient incontournable. La méthode des éléments finis, plus particulièrement en 3D, lorsqu'elle emploie la technique de la bande du mouvement et le solveur chronophage de Newton-Raphson, aboutit à un temps de calcul substantiel et une capacité de stockage importante entravant par conséquent tout processus itératif de conception ou d'optimisation. On a recours alors à des techniques de réduction du modèle pour réduire efficacement l'ordre du modèle ou en d'autres termes la taille du système matriciel à résoudre et par la suite raccourcir le temps de calcul nécessaire. Dans les chapitres suivants, on présente trois techniques de réduction de modèles qui peuvent être utilisées séparément ou en coopération pour réduire la taille du modèle par éléments finis. Elle représente une importance élevée lorsqu'elles peuvent être utilisées dans les processus répétitifs de dimensionnement de conception ou d'optimisation. En tant que modèle fin, le modèle par éléments finis réduit peut être associé au modèle grossier analytique dans une méthodologie d'optimisation telle que par exemple la technique dite en anglais "output space mapping" [EPL+008].

Chapitre 3

Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs multi filamenteux en fils torsadés et en fils de Litz

III-Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs multi filamenteux en fils torsadés et en fils de Litz

3.1 Introduction

La conception des machines électriques pour les applications en automobile nécessite une bonne anticipation des pertes totales de la machine. Seulement si la totalité des pertes sont déterminées, une prévision précise de la puissance continue en sortie et ainsi du rendement de la machine est possible. Les pertes « cuivre » constituent une partie importante des pertes totales; elles sont la somme des pertes ohm classiques DC et des pertes additionnelles dites par courants de Foucault. Ces dernières se produisant dans les matériaux conducteurs conséquemment à la variation en fonction du temps des lignes du champ magnétique γ pénétrant. La variation en fonction du temps des lignes du champ magnétique se produit sous trois effets différents, on parle de l'effet de peau, de proximité et d'influence. Les lignes de champs varient en fonction du temps si le courant d'alimentation propre au conducteur varie temporellement, on parle dans ce cas de l'effet de peau [Dow66]. Les lignes de champs peuvent être créées et envoyées par un conducteur à la proximité dont le courant d'alimentation est variable en fonction du temps, il s'agit dans ce cas de l'effet de proximité [KD003]. On peut parler d'un troisième type de lignes de champs, ce sont les lignes du champ magnétique additionnelles dites de fuite qui pénètrent le conducteur et viennent se fermer à travers le circuit magnétique dont la réluctance est variable en fonction du temps [IUN013]. La variation de la réluctance magnétique est due au mouvement d'une ou plusieurs parties du circuit magnétique comme c'est le cas lors du mouvement du rotor saillant de la machine, on parle dans ce cas de l'effet de l'influence.

La forte corrélation entre le niveau des pertes supplémentaires par courants de Foucault et la géométrie des enroulements montre la nécessité de porter une attention particulière sur la manière de disposer les spires dans l'encoche d'une machine et sur le type du conducteur utilisé s'il s'agit d'un conducteur massif ou d'un conducteur multi filamenteux en fils torsadés ou en fils de Litz. En littérature, il est connu que la subdivision d'un conducteur en des filaments ou brins d'une part et la transposition de ces filaments d'autre part permettent de réduire les effets de peau et de proximité, ces techniques sont recommandées alors comme solution pour diminuer les pertes par courants de Foucault.

Étant donné que les pertes supplémentaires par courants de Foucault résultent du couplage fort entre grandeurs électriques et magnétiques qui lie la densité du courant à la variation en fonction du temps du champ magnétique, leur calcul nécessitera alors la mise en place d'un modèle couplant les équations du champ électromagnétique à celles du circuit électrique. Le couplage électromagnétique fort ne peut pas être résolu simplement, on a

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

recours souvent à des méthodes numériques tels que la résolution par la méthode des éléments finis. La méthode des EF 2D a montré son efficacité dans la modélisation des systèmes électromagnétiques dans le cas des enroulements à conducteurs massifs. Cependant pour limiter les pertes, l'utilisation des conducteurs multi filamentaires est recommandée. On a alors naturellement recours à une modélisation 3D si l'on souhaite en capturer les effets électromagnétiques, puisque, en effet la subdivision n'est efficace que si elle s'accompagne d'un torsadage des filaments au sein de l'encoche et le long de la machine comme pour les conducteurs en fils torsadés ou de leur transposition comme pour les conducteurs en fils de Litz. Si la résolution en 3D du problème donne une solution numérique précise par éléments finis, elle conduit à un temps de calcul conséquent et exige une capacité de stockage importante. Ces contraintes sont alors trop fortes si l'on souhaite par ailleurs appliquer une démarche de conception et d'optimisation du bobinage. L'objet de ce chapitre est de présenter une méthode par EF 2D non linéaire pour la modélisation électromagnétique des conducteurs multi filamentaires complexes tels que les conducteurs en fils de Litz et en fils torsadés. Chaque conducteur est subdivisé en des filaments qui sont torsadés ou tressés entre eux au sein de l'encoche. Des relations de type circuit en courant ou en tension électriques sont utilisées pour interpréter la transposition et le torsadage des brins au sein du conducteur multi filamentaire. Un modèle par éléments finis 2D, combiné à ces relations de type circuit, est présenté dans ce chapitre. Ce modèle permet de calculer les pertes « cuivre » et de déterminer la distribution de la densité du courant dans chaque fil individuellement.

L'exemple test d'application est le bobinage d'une machine à réluctance variable. Ce type de machine peut être utilisé dans les véhicules électriques ou hybrides où pour des considérations d'autonomie, le rendement est crucial. Plusieurs types de conducteurs sont étudiés, tels que le conducteur massif ou solide, le conducteur en fils torsadés et le conducteur en fils de Litz. En comparant les valeurs moyennes des pertes « cuivre » le long d'une période électrique d'alimentation pour les différents types de conducteurs utilisés, on peut déduire qu'avec le même coefficient de remplissage et la même force magnétomotrice d'alimentation, la subdivision du conducteur en des filaments et leur transposition montre un avantage dans la réduction des pertes additionnelles par courants de Foucault. En outre, de multiples versions des conducteurs multi filamentaires avec des différents nombres de brins, différentes techniques de torsadage et différentes géométries de distribution des brins à travers la section des conducteurs de même type sont analysées dans le but de montrer leurs influences sur la réduction des pertes par courants de Foucault.

3.2 Conducteur logé dans l'encoche et subdivisé en des brins en parallèles

On considère le cas d'un conducteur multi filamentaire logé dans l'encoche d'une machine électrique. La machine à réluctance variable à double saillance 8/6 est prise comme un exemple d'application (Figure 3.1). La moitié de la machine est modélisée pour des

raisons de symétrie. En partant de l'hypothèse que l'inductance magnétique mutuelle entre les bobinages des différentes phases est négligeable et ainsi également l'effet de proximité entre les phases de la machine, une seule phase est alimentée. Pour alléger le problème, un bobinage simplifié à une seule spire par dent est étudié. Le conducteur de la spire est multi filamentaire; il est subdivisé en 9 brins en parallèles. Ces brins sont isolés mais électriquement connectés au terminus de la bobine. La spire est supposée alimentée par le courant $I(t)$ (Figure 3.2) en créneaux périodique de fréquence 710 Hz sous une source de tension continue U_{dc} de 12 V. Les paramètres du control de ce courant d'alimentation théorique sont précalculées à l'aide du logiciel "MRVSIM".

3.2.1 Influence de la position du conducteur sur la répartition du courant

On remarque que, si les 9 brins sont mis en parallèles, le courant d'alimentation imposé se répartit d'une façon asymétrique sur les différents brins du même conducteur suivant leurs positions dans l'encoche par rapport à l'entrefer et au circuit magnétique.

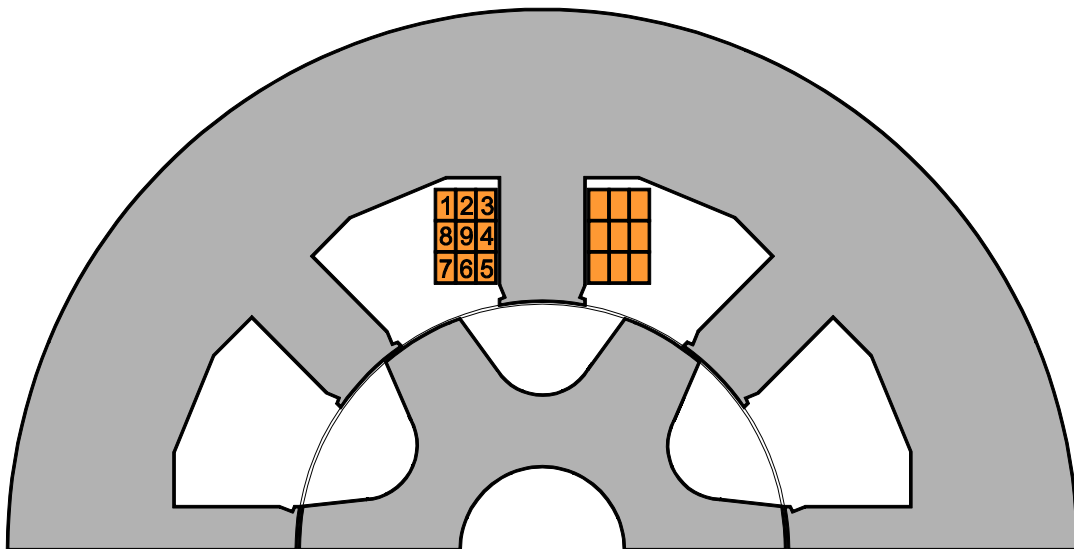


Figure 3.1 La position des 9 brins en parallèle du même conducteur dans l'encoche de la machine à reluctance variable.

Évidemment, même si les courants individuels dans les 9 brins peuvent être différents, leur somme doit être toujours égale au courant total $I(t)$. La figure 3.2 illustre clairement ce phénomène. La valeur du courant dans chaque brin est alors dépendante de la position du brin dans l'encoche [Car007].

Durant la phase de magnétisation de la bobine, la plus grande proportion du courant d'alimentation circule dans les trois brins inférieurs (5, 6 et 7) situé à la proximité de l'entrefer. Dans la période de démagnétisation, on remarque que le courant du brin 5 devient même négatif, bien que le courant total imposé de la bobine soit positif. La répartition du courant à travers les différents brins montre que le courant imposé est déplacé vers les brins situés à la proximité de l'entrefer. Ceci est dû aux boucles de courants induits dites boucles de courants de Foucault qui viennent circuler à travers les différents

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

brins du conducteur pour s'opposer à la variation en fonction du temps du champ magnétique. Ces boucles de courants induits permettent de modifier ainsi la répartition du courant d'alimentation imposé $I(t)$. En effet la répartition du courant sur les différents brins dépend de la variation en fonction du temps de la valeur du champ magnétique et de la circulation des lignes du champ au sein de chaque brin. Le champ magnétique et sa variation en fonction du temps peut changer d'un point à un autre dans l'encoche, ceci peut induire des densités des courants de Foucault non homogènes dans les matériaux conducteurs suivant leurs positions par rapport à l'entrefer et le circuit magnétique. Comme déjà mentionné, le champ magnétique en un point donné peut varier en fonction du temps d'une part si les courants varient temporellement [Su199] (effet de peau et de proximité) et/ou si la réluctance vient à varier (effet d'influence) comme c'est le cas lors du mouvement du rotor saillant d'une machine [IUN013].

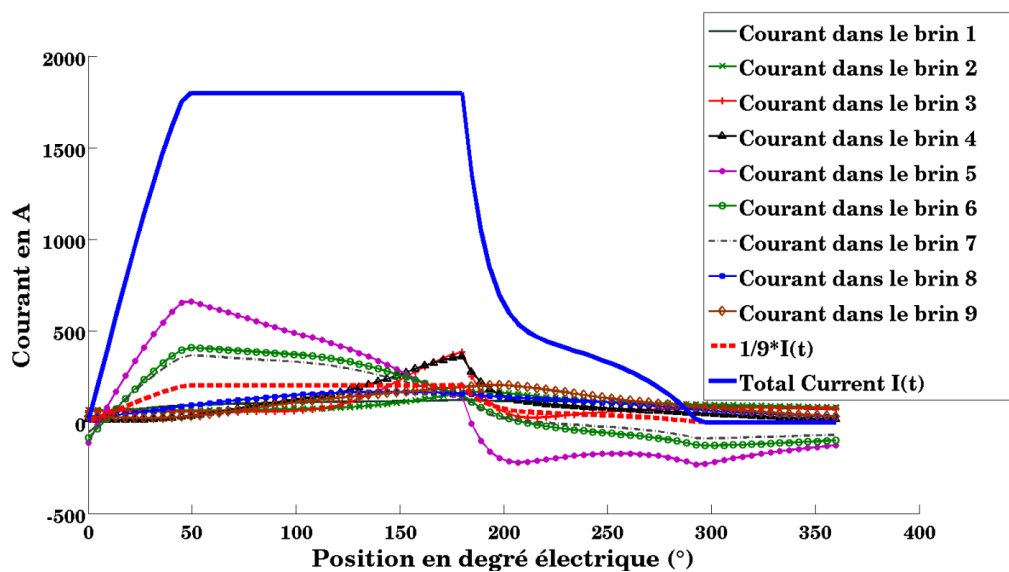


Figure 3.2 La répartition asymétrique du courant d'alimentation à travers les 9 brins en parallèle.

3.3 Approche 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz.

Nous considérons maintenant le cas d'un conducteur multi filamentaire dont les filaments ou autrement dit les brins sont montés en parallèle mais permutent cette fois ci leurs positions au sein de l'encoche le long de la machine. On parle généralement des conducteurs en fils de Litz ou en fils torsadés.

Si nous partons de l'hypothèse que l'influence des têtes de bobines est négligeable et que les phénomènes électromagnétiques sont identiques sur chaque section transversale de la machine perpendiculaire à l'axe z longitudinal, on peut conclure que les brins qui permutent leurs positions dans l'encoche et occupent globalement les mêmes positions spatiales successives, elles seront sujettes aux mêmes influence électromagnétiques. En raison du fort couplage entre la densité du courant électrique et la variation en fonction du temps du champ magnétique, les brins qui permutent sur les mêmes positions seront parcourues alors

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

par le même courant électrique. Une prise en compte de cet effet peut alors être appréhendée par une modélisation 2D en imposant le même courant dans chacun des filaments qui occupent globalement les mêmes positions au sein de l'encoche sur la longueur de la machine [LL93] [How17]. Les hypothèses que les brins sont parallèles et que ceux qui permutent leurs positions sont alimentés par le même courant sont ajoutées au système d'équations (1.68) afin d'obtenir une solution par éléments finis 2D du problème. Pour comprendre l'approche par éléments finis 2D des conducteurs multi filamentaires en fils de Litz et en fils torsadés, nous prenons l'exemple simple d'un conducteur subdivisé en 4 brins montés en parallèle comme le montre la figure 3.3. Le conducteur est supposé logé dans l'encoche d'une machine électrique et alimenté par un courant $I(t)$. Lorsque les brins sont montés en parallèle et restent en positions fixes le long de l'encoche, le courant $I(t)$, comme on a déjà vu, se distribue d'une façon asymétrique sur les 4 brins.

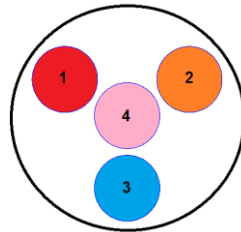


Figure 3.3 Section transversale d'un conducteur multi filamentaire subdivisé en 4 brins en parallèle.

3.3.1 Cas d'un conducteur en fils torsadés

Si le conducteur est en fils torsadés alors les brins de la périphérie numérotés 1, 2 et 3 sur la figure 3.3 permutent leurs positions au sein de l'encoche périodiquement le long de la machine tandis que le brin 4 au centre reste fixe. La figure 3.4 montre comment les positions des brins changent le long d'un pas de torsadage de longueur Δl .

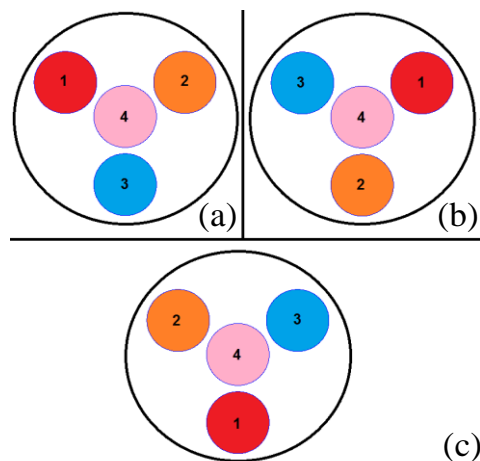


Figure 3.4 La permutation sur un pas de torsadage de longueur Δl suivant l'axe z des positions des brins sur la périphérie d'un conducteur multi filamentaire à brins torsadés. a) $0 \leq z < \frac{\Delta l}{3}$, b) $\frac{\Delta l}{3} \leq z < \frac{2\Delta l}{3}$, c) $\frac{2\Delta l}{3} \leq z < \Delta l$.

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

Sur la figure 3.4, il s'agit de trois sections du conducteur qui représentent sur un pas de torsadage les trois dispositions différentes des brins. Ces trois dispositions résument la permutation des positions des trois brins périphériques autour du brin 4 central. Une de ces trois sections est modélisée par la méthode des éléments finis 2D en utilisant le système algébrique d'équations (1.68). Des équations de type circuit sont ajoutées à ce système pour prendre en compte le torsadage des 4 brins en parallèle du conducteur:

$$I_1(t) = I_2(t) \quad (3.1)$$

$$I_1(t) = I_3(t) \quad (3.2)$$

$$\Delta V_4(t) = \Delta V_1(t)/3 + \Delta V_2(t)/3 + \Delta V_3(t)/3 \quad (3.4)$$

$$I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) = I(t) \quad (3.3)$$

En permutant leurs positions régulièrement, les brins 1,2 et 3 de la périphérie voient globalement le même état magnétique et induisent conséquemment les mêmes boucles des courants additionnels de Foucault, ils sont parcourus alors par le même courant. Ceci est pris en compte en considérant les équations (3.1) et (3.2). Pour écrire l'équation du couplage en tension on part de l'hypothèse que ΔV_i représente la variation de la tension par unité de longueur pour le conducteur i dans sa position sur la figure 3.4 (a). Du coup, le conducteur 1 sur la figure 3.4 (a) qui occupe sa position sur une longueur de $\Delta l/3$ est soumis à la tension $\Delta V_1 * \Delta l/3$. Il sera soumis par la suite à la tension $\Delta V_2 * \Delta l/3$ lorsqu'il occupe sa seconde position dans la figure 3.4 (b) et à la tension $\Delta V_3 * \Delta l/3$ dans sa troisième position sur la figure 3.1 (c). Sur un pas de torsadage, le conducteur 1 sera soumis alors à la tension somme $\Delta V = (\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3) * \Delta l/3$. Par analogie les deux autres conducteurs de la périphérie seront soumis à cette même tension vu qu'ils occupent les mêmes positions sur le pas du torsadage. Par contre, le conducteur au centre restant à sa position fixe le long du pas de torsadage Δl , il sera soumis alors à la tension $\Delta V_4 * \Delta l$. Les 4 brins sont montés en parallèle, ils sont alors les sièges de la même tension ΔV , d'où l'équation (3.3). Finalement, l'équation (3.4) à son tour assure le fait que la somme des courants des 4 brins est égale au courant imposé $I(t)$.

Dans le but de comprendre la modélisation 2D des conducteurs multi filamentaires en fils torsadés et en fils de Litz, l'exemple simple d'un conducteur à 4 brins et à deux niveaux est étudié. Dans le cas du conducteur de la figure 3.3, le premier niveau est représenté par le conducteur central fixe alors que le deuxième niveau est constitué par les trois brins périphériques en permutation. Pratiquement, le conducteur en fils torsadés peut être plus complexe et peut impliquer plusieurs niveaux de brins et même plusieurs groupes de fils torsadés qui sont, également, à leur tour, torsadés ensemble. L'étude de ces types de fils torsadés complexes plus compliqués peut être faite en suivant le même raisonnement et en appliquant les mêmes principes mentionnés dans les équations de circuit électrique déjà citées.

3.3.2 Cas d'un conducteur en fils de Litz

Maintenant, dans le cas d'un conducteur en fil de Litz, aucun brin n'est fixe, tous les brins permutent leurs positions sur chaque pas de torsadage périodiquement. On suppose que le pas de torsadage a une longueur Δl le long de l'axe z . La figure 3.5 montre pour un exemple d'un conducteur en fils de Litz à 4 brins les différentes positions qui peuvent être occupées par les 4 brins sur un pas de torsadage.

Sur la figure 3.5 les 4 brins en permutant tous leur positions, ils voient globalement les mêmes influences électromagnétiques et sont parcourus alors par le même courant électrique $I(t)/4$.

Une des 4 différentes dispositions des 4 brins est modélisée par la méthode des éléments finis, alors que la prise en compte de la permutation des brins est assurée en considérant les équations de type circuit suivantes :

$$I_1(t) = I_2(t) \quad (3.5)$$

$$I_1(t) = I_3(t) \quad (3.6)$$

$$I_1(t) = I_4(t) \quad (3.7)$$

$$I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) = I(t) \quad (3.8)$$

Les équations (3.5), (3.6) et (3.7) imposent l'égalité des 4 courants dans les 4 brins alors que l'équation (3.8) assure un courant total imposé égal à $I(t)$.

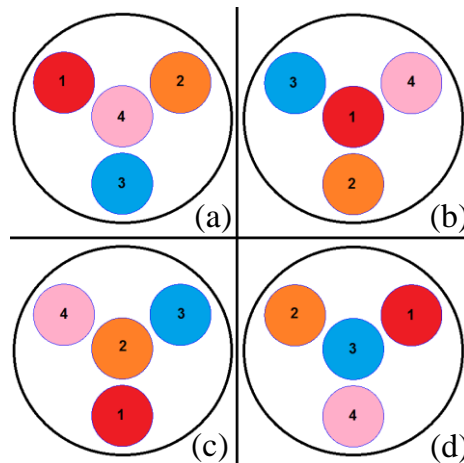


Figure 3.5 La permutation sur un pas de torsadage de longueur Δl suivant l'axe z des positions des 4 brins d'un conducteur multi filamentaire en fils de Litz. a) $0 \leq z < \frac{\Delta l}{4}$, b) $\frac{\Delta l}{4} \leq z < \frac{\Delta l}{2}$, c)

$$\frac{\Delta l}{2} \leq z < \frac{3\Delta l}{4}, \text{ d) } \frac{3\Delta l}{4} \leq z < \Delta l.$$

3.3.3 Effet de la subdivision sur l'accroissement des pertes « cuivre » DC

En effet, la résistance DC d'un brin toronné qui permute sa position au sein d'un conducteur est plus grande que celle d'un brin qui reste à une position fixe même les deux

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

brins ont la même section transversale et s'étalent tous les deux sur la même longueur spatiale du conducteur [TS003] [BNR96]. Ceci paraît évident, vu que la distance réelle parcourue par un brin qui alterne sa position est plus grande que la longueur du conducteur c'est-à-dire en d'autres termes, elle est plus grande que la distance parcourue par le brin lorsqu'il va tout droit en restant toujours dans une position fixe. Toutefois, dans ce chapitre, nous considérons que les deux brins possèdent la même résistance DC pour mieux se concentrer sur l'effet de la subdivision et la permutation des brins au sein du conducteur sur la réduction des pertes supplémentaires par courants de Foucault.

Cependant, un calcul plus précis des pertes « cuivre » totale d'un brin en transposition est donnée par :

$$P_j = P_{2DEF} \frac{l_r}{\Delta l} \quad (1.9)$$

l_r est la longueur réelle d'un brin sur un pas de torsadage qui occupe une longueur spatiale Δl du conducteur. P_j représente alors les pertes « cuivre » dans le brin en tenant compte de l'augmentation de sa longueur due à la permutation de sa position au sein du conducteur. P_{2DEF} représente les pertes « cuivre » calculées par la méthode des éléments finis 2D sur une longueur uniforme pour tous les brins. Cette longueur uniforme est prise égale à la longueur de la machine en négligeant l'effet de la transposition. Le facteur d'augmentation de la longueur $\frac{l_r}{\Delta l}$ peut varier d'un brin à un autre en raison de leurs différentes trajectoires le long du pas de torsadage au sein du même conducteur et d'un type de conducteur à un autre en raison des différentes techniques utilisées dans la permutation des brins du conducteurs en fils torsadés ou en fils de Litz ou n'importe quel autre type agréé pour la permutation des brins.

3.4 Applications sur un bobinage simplifié d'une machine à réluctance variable

3.4.1 Bobinage simplifié avec un conducteur massif

La mise en œuvre de l'approche 2D de la modélisation des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz est réalisée sur un modèle par éléments finis 2D de la machine à réluctance variable à double saillance 8/6. Dans un premier temps, un enroulement simplifié sur dent est étudié. Il se compose de deux bobines connectées en série; chacune d'eux est constituée d'une seule spire. La bobine formée d'une seule spire est constitué d'un conducteur d'aller qu'on appelle coté gauche de la bobine et d'un conducteur de retour qu'on appelle coté droit (Figure 3.6). Chaque bobine est placée sur une dent de stator. Le conducteur étudié est soit un conducteur solide de surface S et de facteur de remplissage η ou un conducteur multi filamentaire avec la même surface S et au même coefficient de remplissage η . Le conducteur multi filamentaire peut être en fils de Litz ou en fils torsadés. Il est composé de p brins parallèles isolés électriquement mais interconnectés aux bornes de

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

la bobine. Plusieurs exemples du nombre de brins sont étudiés pour les deux types de conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz, par exemple 25, 36, 64 et 81 pour montrer au même facteur de remplissage l'influence du nombre de brins ou en d'autre terme pour quantifier l'influence de la subdivision sur les pertes additionnelles par courants de Foucault. Tout d'abord, nous étudions l'enroulement pour le conducteur solide. Il a une section transversale avec une hauteur de 13 mm et une largeur de 8,5 mm. Le courant d'alimentation est à la fréquence de 710 Hz, où l'épaisseur de peau est égale à 2,54 mm. Les conducteurs solides sont logés dans les encoches de la machine avec un coefficient de remplissage η de 27%.

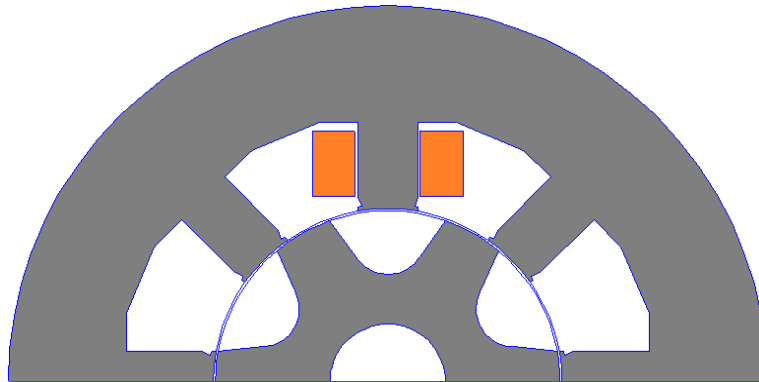


Figure 3.6 Le bobinage simplifié à une seule spire sur dent de la machine à réluctance variable.

Le calcul par éléments finis permet de calculer les pertes « cuivre » instantanées dans la bobine. Les deux courbes de pertes « cuivre » du côté gauche et du côté droite de la bobine pendant une période électrique sont présentées sur la figure 3.7.

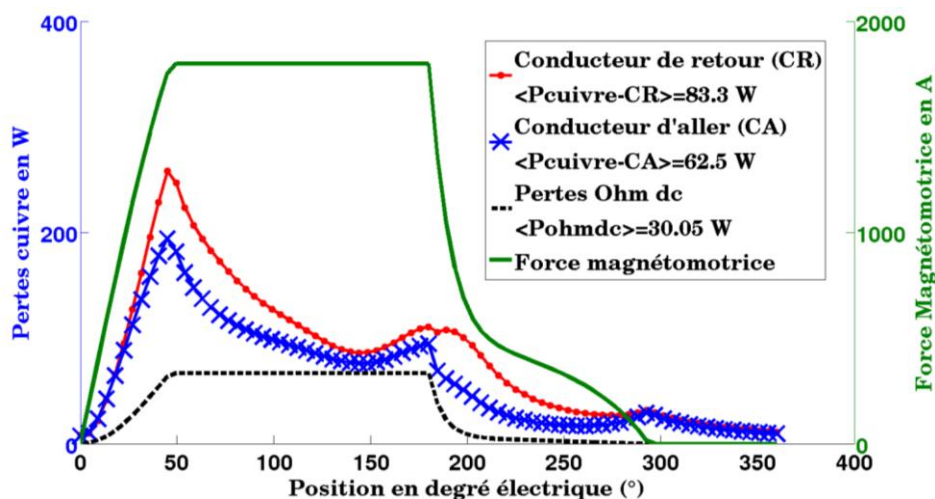


Figure 3.7 Les pertes « cuivre » instantanées dans les deux conducteurs d'aller et de retour dans le cas d'un conducteur solide

À vitesse constante, la position du rotor est proportionnelle au temps. Les pertes sont représentées graphiquement en fonction de la position du rotor, puisque les degrés électriques sont plus intuitifs que l'échelle en temps. Les courbes de pertes pour les

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

conducteurs d'aller et de retour ne sont pas identiques puisque ces deux conducteurs sont soumis à différentes influences des lignes du champ magnétique parasites pendant le mouvement du rotor. Nous admettons que le rotor se déplace dans le sens anti horaire (contraire à celui des aiguilles d'une montre). Le côté droit de la bobine ou le conducteur de retour est sujet à des valeurs plus élevées de pertes « cuivre » par rapport au conducteur d'aller. Des valeurs plus élevées des pertes « cuivre » signifient des valeurs plus élevées des pertes additionnelles par courant de Foucault. Il faut noter que le conducteur de retour est le conducteur qui voit la dent du rotor à sa proximité pendant la période d'aimantation de la phase, il est donc le siège des lignes de champ magnétique de fuite importantes.

Sur la figure 3.7 on remarque que la valeur maximale des pertes « cuivre » instantanées se produit durant la période de la magnétisation de la phase. Ensuite, durant la période où le courant d'alimentation reste constant, les pertes « cuivre » commencent à diminuer pour s'approcher des pertes ohm DC classique ($R_{dc}I(t)^2$) qui définissent la valeur la plus basse possible des pertes « cuivre ». Au début de la période de démagnétisation de la phase, les deux courbes de pertes représentent un pic de pertes pour décroître ensuite continûment avec la décroissance de la valeur du courant d'alimentation. À l'instant où le courant d'alimentation s'annule à la fin de la période de démagnétisation de la phase, on remarque qu'il y a toujours des pertes « cuivre » qui sont présentes dans les conducteurs. Ces pertes sont dues au fait que les densités du courant électrique à travers la section du conducteur ne s'annulent pas instantanément mais des boucles de courants de Foucault continuent à circuler dans le bobinage même si le courant total a travers la section du conducteur est nul. On note que la force magnétomotrice représente les ampères-tours du bobinage, dans notre cas, elle est égale au courant d'alimentation. Sur la figure 3.8, les sections transversales des conducteurs d'aller et de retour sont subdivisées en post-traitement en un nombre de portions virtuelles (dans notre cas 81 portions) dans le but de montrer la distribution spatiale des pertes « cuivre » moyennes. Les barres représentent alors les valeurs moyennes des pertes « cuivre » dans chaque portion virtuelle du conducteur solide.

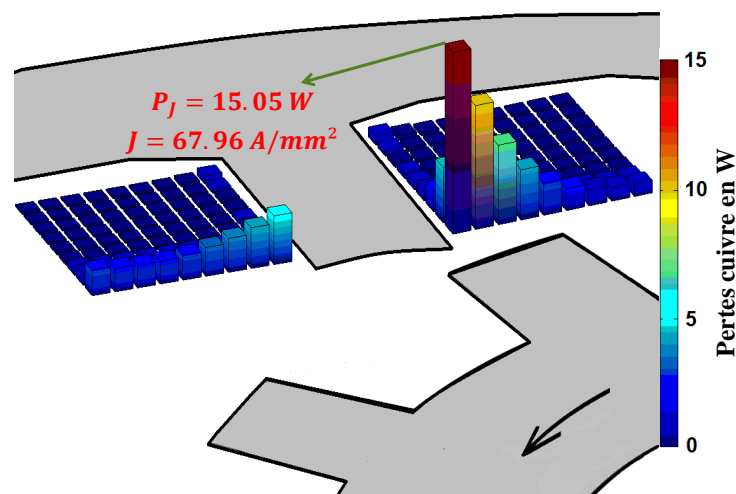


Figure 3.8 Distribution spatiale des pertes « cuivre » moyennes dans les deux conducteurs d'aller et de retour dans le cas de la spire à conducteur solide.

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

On remarque sur la figure 3.8 que les pertes « cuivre » moyennes ne sont pas uniformément distribuées à travers les sections transversales des conducteurs d'aller et de retour, elles sont minimales en fond de l'encoche et croissent en s'éloignant dans la direction de l'entrefer pour atteindre leurs valeurs maximales dans les portions du conducteur localisées à la proximité de l'entrefer juste à côté de la dent du stator.

Sur le côté droit de la bobine ou sur le conducteur de retour, les lignes de champs variables en fonction du temps sont plus denses que sur le côté gauche grâce au mouvement de la dent du rotor à sa proximité [Car007] [KD003] [KD006a]. Ces lignes de champs de fuite qui viennent traverser le conducteur permettent de créer des boucles de courants additionnelles de Foucault pour s'opposer à la variation du champ magnétique. La prédominance des pertes « cuivre » sur le côté droit de la bobine est alors la conséquence des courants additionnels de Foucault qui viennent modifier la densité du courant électrique à travers la section du conducteur.

La distribution spatiale uniforme des pertes ohm DC moyennes a comme valeur 0.37 W. Elle correspond à une valeur efficace de 8.4 A/mm² de la densité du courant électrique. En revanche, le pic de pertes de valeur 15.03 W sur le côté droite de la bobine est localisé à la proximité de l'entrefer et correspond à une valeur efficace de 69.76 A/mm² de la densité du courant. Ces valeurs excessives des pertes « cuivre » et de la densité du courant peuvent provoquer des échauffements locaux anormaux, elles représentent des valeurs beaucoup trop élevées si on adopte des méthodes de refroidissement classiques.

3.4.2 Bobinage simplifié avec un conducteur multi filamentaire

Les pertes par courants de Foucault gagnent en importance lorsque la surface de la section des conducteurs augmente, et qui est en particulier le cas des machines tournantes à puissances élevées et un faible nombre de spires. Dans de telles machines, l'utilisation des conducteurs multi filamentaires en fils torsadés ou en fils de Litz pourrait être nécessaire [MJH93].

Dans cette partie, nous étudions la configuration d'un conducteur multi filamentaire. Il est équivalent au conducteur solide déjà étudié en termes de la surface de la section transversale et du coefficient de remplissage. Il est identiquement alimenté par la même forme d'onde de la force magnétomotrice et présente par conséquence les mêmes pertes Ohm DC. La différence maintenant est que le conducteur multi filamentaire est un conducteur subdivisé en plusieurs brins ou filaments montés en parallèle (p brins).

Il est connu en littérature que la subdivision d'un conducteur en des brins parallèles, ne réduit pas efficacement les pertes « cuivre » sauf si elle s'accompagne d'un torsadage des filaments (Fils torsadés) ou de leur transposition comme pour les fils de Litz. Dans la partie précédente on a étudié le cas d'un bobinage à conducteurs massifs, dans cette partie on va traiter le cas d'un bobinage à conducteurs multi filamentaires en fils torsadés ou en fils de Litz. Comme nous l'avons mentionné auparavant, plusieurs valeurs de p sont étudiés pour

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

les deux cas. Ces valeurs sont 25, 36, 64 et 81. La figure 3.9 montre un exemple de la façon dont un conducteur est subdivisé en $p=25$ brins et comment sont logés ces brins dans l'encoche de la machine à réluctance variable.

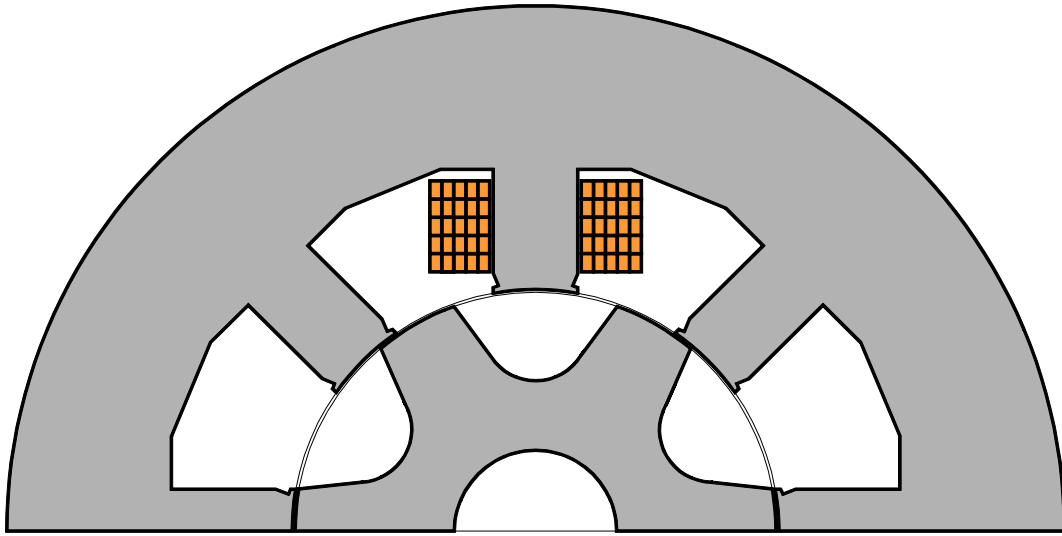


Figure 3.9 La distribution géométrique dans l'encoche des 25 brins en parallèle du conducteur d'aller et celui de retour de la même spire.

Les pertes « cuivre » instantanées dans les bobinages à conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz en fonction de l'angle de rotor sont présentées respectivement dans les figures 3.10 et 3.11.

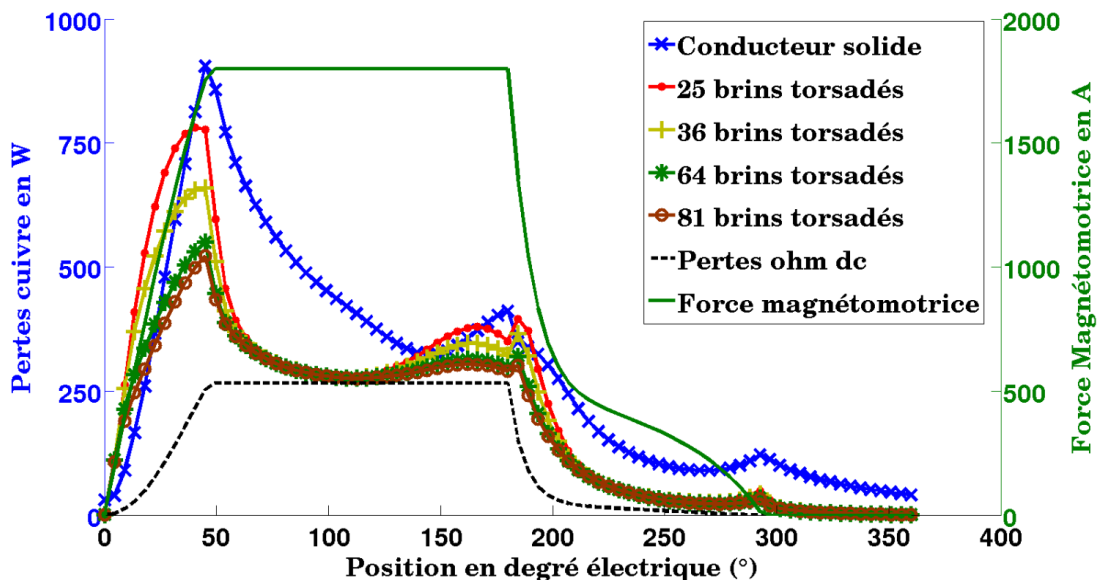


Figure 3.10 Les pertes « cuivre » instantanées dans le cas des conducteurs en fils torsadés avec les différents nombres de brins 25, 36, 64 et 81.

Par rapport à l'enroulement à conducteur solide, les pertes « cuivre » en cas des conducteurs en fils torsadés (Figure 3.10) et en fils de Litz (Figure 3.11) sont considérablement réduites. Leurs valeurs croissent et décroissent beaucoup plus rapidement au début des périodes de magnétisation et de démagnétisation de la phase respectivement.

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

Ceci reflète la présence d'une constante de temps de variation plus courte dans le cas d'un conducteur subdivisé, ce qui permet d'expliquer la raison pour laquelle les pertes « cuivre » s'approchent de la valeur nulle dans les deux cas conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz à l'instant où le courant d'alimentation du conducteur disparaît.

Les courbes des pertes « cuivre » dans les conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz atteignent leurs valeurs maximales qui sont moins élevées par rapport au pic de pertes dans le cas du conducteur solide pour finir par tomber sur le niveau des pertes ohmiques DC pour un intervalle de temps pendant la période où le courant d'alimentation demeure constant. Cet intervalle de temps où les pertes « cuivre » représentent leurs valeurs minimales est plus grand dans le cas du conducteur en fils de Litz.

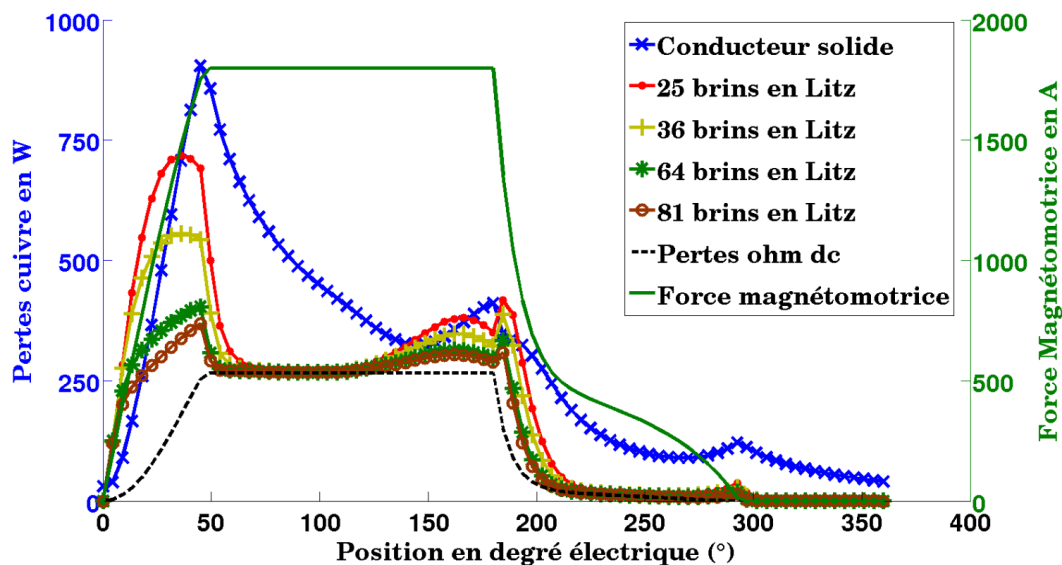


Figure 3.11 Les pertes « cuivre » instantanées dans le cas des conducteurs en fils de Litz avec les différents nombres de brins 25, 36, 64 et 81.

La comparaison entre les courbes de pertes « cuivre » dans le cas des conducteurs en fils torsadés (Figure 3.10) et en fils de Litz (Figure 3.11) pour les différents nombre de brins montrent l'avantage de la subdivision du conducteur solide en des filaments et de la permutation de ces filaments dans la réduction des pertes additionnelles par courants de Foucault. Le tableau 3.1 montre les valeurs moyennes des pertes « cuivre » pour les différents types de conducteurs solides, en fils torsadés et en fils de Litz. Plus le nombre de brins est élevé, moins le sont les pertes supplémentaires par courants de Foucault.

Nous devons noter que, dans des applications réelles, où on va très loin dans la subdivision du conducteur ou en d'autres termes lorsqu'on augmente le nombre de brins, les pertes par courants de Foucault peuvent être diminuées, mais les pertes ohm DC vont augmenter en raison de l'espace occupé par l'isolant [Sul99].

Comme nous pouvons le voir dans le tableau 3.1, Les deux topologies en fils torsadés et en fils de Litz réduisent considérablement les pertes par courants de Foucault supplémentaires avec une légère distinction des fils de Litz. La technique du torsadage des brins, étant la

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

moins chère parmi les deux techniques étudiées de la transposition des brins, pourrait être un bon compromis pour la réduction des pertes additionnelles par courant de Foucault et le prix industriel. Néanmoins, pour aller plus loin dans la réduction des pertes, la technique de la transposition des brins en fils de Litz est plus performante.

Tableau 3.1 Valeurs moyennes des pertes « cuivre » dans le cas des configurations à conducteur en fils torsadés et en fils de Litz en comparaison avec celles à conducteur massif.

Nombre de brins	Pertes « cuivre » en W			Pertes DC en W
	Fils torsadés	Fils de Litz	Conducteur solide	
25	228,9	211,9	295,6	120.2
36	209,8	188,2		
64	188,5	161,1		
81	181,4	152,9		

Les figures 3.12 et 3.14 représentent les pertes « cuivre » instantanées dans les deux conducteurs d'aller et de retour dans le cas des topologies en 81 brins torsadés et en fils de Litz respectivement. Au contraire des résultats obtenus avec le conducteur solide (Figure 3.7), les courbes de pertes « cuivre » dans les conducteurs d'aller et de retour sont moins écartées l'une de l'autre; les valeurs moyennes des pertes « cuivre » dissipées dans les deux conducteurs d'aller et de retour sont presque les mêmes dans le cas des conducteurs en fils torsadés ou en fils de Litz.

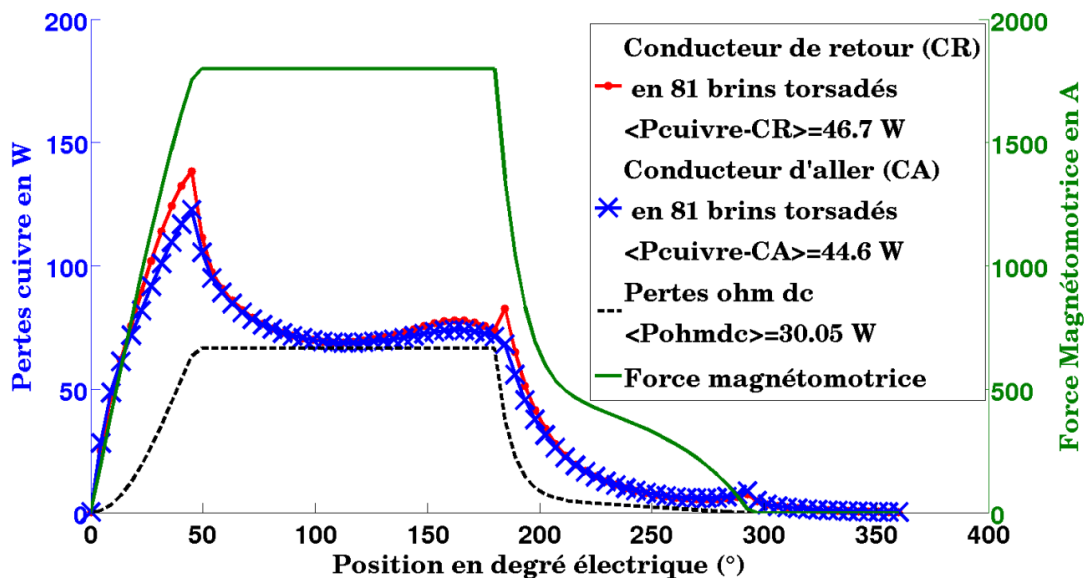


Figure 3.12 Les pertes « cuivre » instantanées dans les deux conducteurs d'aller et de retour dans le cas d'un conducteur subdivisé en 81 brins torsadés.

En outre, la répartition spatiale des pertes « cuivre » moyenne est tracée sur la figure 3.13. On se contentera par la répartition spatiale des pertes dans le cas des 81 brins torsadés. Les

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

brins transposés dans les anneaux rectangulaires concentriques permutent successivement leurs positions et voient globalement le même état magnétique, du coup, les pertes sont uniformes dans chaque groupe de brins transposés. Les pertes dans les deux cotés gauche et droit de la spire sont à peu près égales et donc l'influence du flux de fuite durant la magnétisation de la phase sur le côté gauche de la bobine est presque négligeable. Ceci est dû à la configuration des brins parallèles tout au long de la spire autour de la dent du stator. Les brins sont en parallèles et donc, les brins sur les deux cotés de la bobine sont parcourus par le même courant individuel, ce qui permet de mieux équilibrer la répartition de la densité de courant sur les deux côtés de la bobine.

Les conducteurs périphériques, en permutant leurs positions, deviennent à la proximité de l'entrefer pour une partie de leur trajet au sein de l'encoche, d'où leur valeur la plus élevée des pertes « cuivre ». La valeur moyenne maximale de pertes « cuivre » est de 0,78 W dans le conducteur périphérique du côté de la bobine droite correspond à une densité de courant de 14,27 A / mm². La répartition spatiale des pertes « cuivre » dans le cas des fils torsadés est beaucoup plus uniforme par rapport au conducteur solide. En outre, les valeurs maximales des pertes « cuivre » et les densités correspondantes du courant sont modérées, ce qui représente un avantage en ce qui concerne le refroidissement et ainsi la réduction de la température du point le plus chaud.

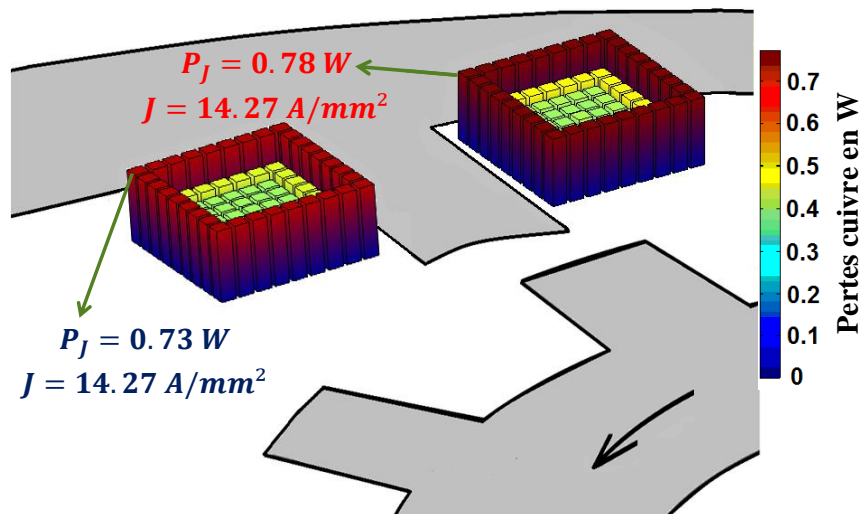


Figure 3.13 Distribution spatiale des pertes « cuivre » moyennes dans les deux conducteurs d'aller et de retour dans le cas d'un conducteur en 81 brins torsadés.

Par contre, dans le cas des 81 brins en Litz, tous les brins du même côté de la dent du stator permutent leurs positions et voient globalement les mêmes influences électromagnétique; ils vont dissiper ainsi la même quantité de pertes « cuivre ». Si on a tracé la distribution spatiale des pertes « cuivre » moyennes sur les différents brins dans le cas du conducteur en fils de Litz, nous aurions vu sur les sections du conducteur d'aller et de retour une distribution uniforme des pertes moyennes schématisées par des bâtons de même longueur. Sur les conducteur d'aller et de retour les bâtons uniformes tous devraient indiquer une valeur de pertes « cuivre » moyenne égale à 0,459 et 0,485 W respectivement

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

correspondant aux valeurs efficaces de la densité du courant respectives 12.16 et 12.5 A/mm². Ces valeurs de pertes « cuivre » moyenne peuvent être calculées en utilisant les valeurs moyennes des pertes « cuivre » sur les conducteurs d'aller et de retour. Puisque la distribution des pertes doit être uniforme, chaque brin devrait avoir une valeur de pertes égale aux pertes totales du conducteur divisée par 81 représentant le nombre de brins. Sur la figure 3.14, on trace les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d'aller et de retour en 81 brins en Litz en indiquant les valeurs moyennes des pertes de 37.2 et 39.3 W des deux conducteurs respectivement.

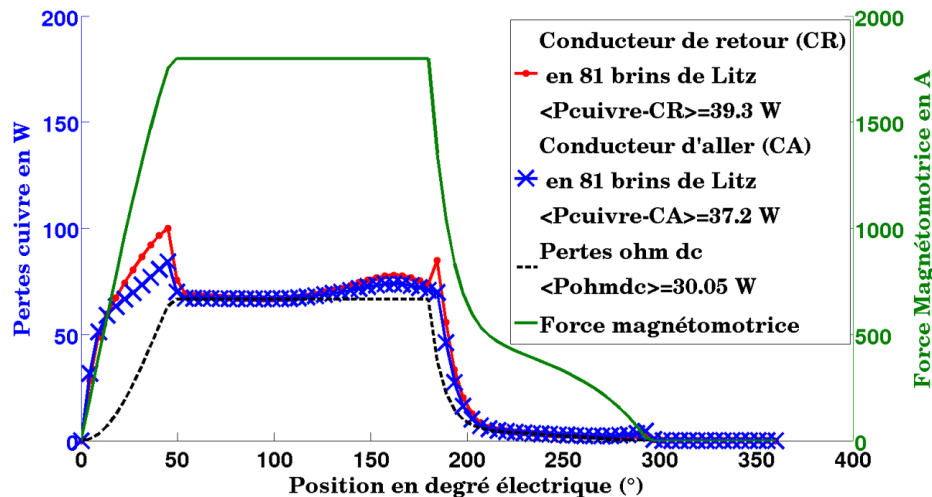


Figure 3.14 Les pertes « cuivre » instantanées dans les deux conducteurs d'aller et de retour dans le cas d'un conducteur subdivisé en 81 brins de Litz.

Par ailleurs, on a étudié le cas d'un bobinage à conducteur subdivisé en des brins parallèles sans y appliquer aucun torsadage ou aucune transposition. Ce type de conducteur a conduit d'une manière inattendue, dans le cas particulier de la machine à réluctance variable, à une réduction significative des pertes additionnelles par courants de Foucault (Figure 3.15 et Tableau 3.2). Ceci peut être expliqué par le fait que dans le cas de la machine à réluctance variable comme on a vu sur la figure 3.7, les deux cotés de la même bobine ne développent pas les mêmes pertes « cuivre » puisque ces deux cotés ne voient pas les mêmes influences électromagnétiques ou en d'autres termes les mêmes variations en fonction du temps du champ magnétique. Le fait alors de subdiviser les conducteurs en des brins en parallèles tout au long de leurs enroulements autour de la dent du stator permet de favoriser l'égalité du courant dans les différents brins sur les deux cotés de la bobine ce qui permet à son tour de limiter le couplage électromagnétique entre la densité du courant et la variation en fonction du temps du champ magnétique. Ceci améliore l'homogénéité de la distribution du courant électrique à travers les brins du même côté de la bobine et même sur les deux cotés ce qui permet de réduire les pertes additionnelles par courants de Foucault. L'avantage de la subdivision sur la réduction des pertes « cuivre » totales se voit clairement sur la figure 3.15 et sur le tableau 3.2 alors que l'effet de la subdivision sur la limitation de la différence des valeurs de pertes entre les deux cotés de la même bobine se voit clairement sur la figure 3.16. Les pertes « cuivre » du côté droit de la bobine sont légèrement supérieures à celles du

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

côté gauche avec une différence faible de 3.48% alors que cette différence était importante de l'ordre de 25% lorsqu'on était dans le cas des conducteurs massifs (figure 3.7).

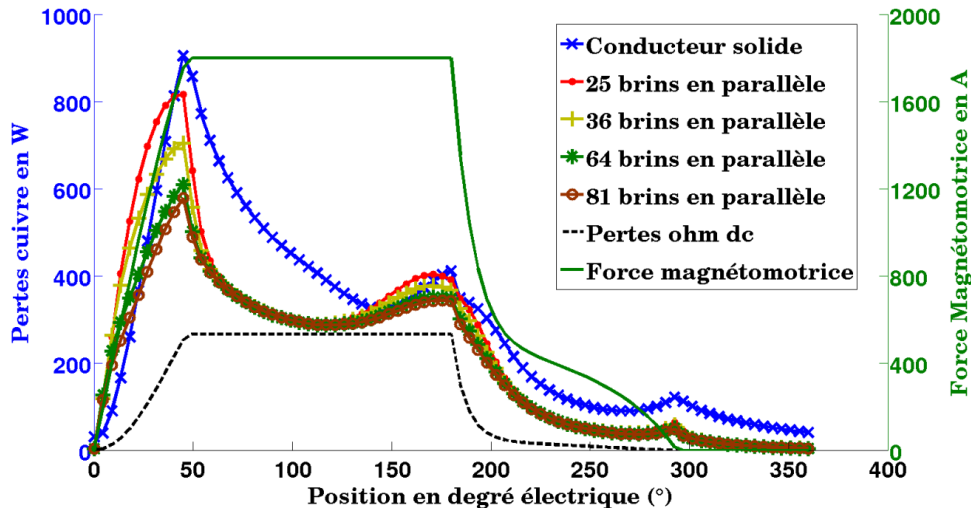


Figure 3.15 Les pertes « cuivre » instantanées dans le cas des conducteurs subdivisés en des brins en parallèle avec les différents nombres de brins 25, 36, 64 et 81.

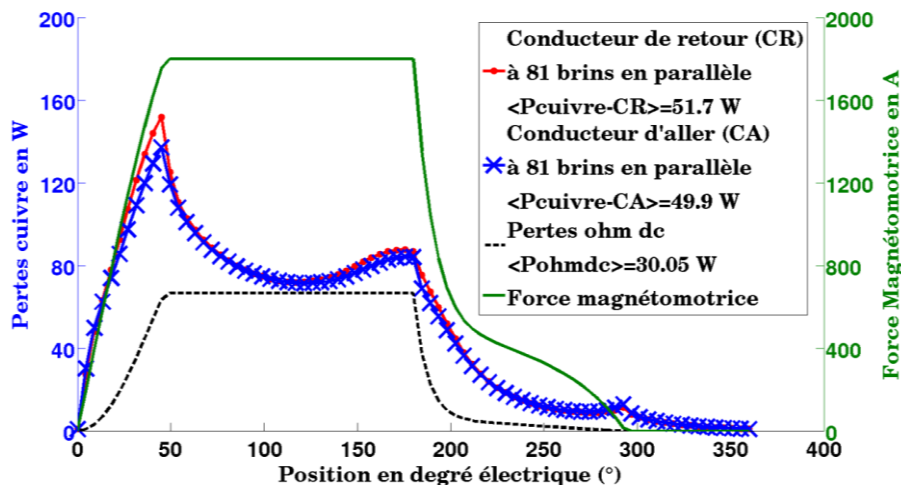


Figure 3.16 Les pertes « cuivre » instantanées dans les deux conducteurs d'aller et de retour dans le cas d'un conducteur subdivisé en 81 brins en parallèle.

Tableau 3.2 Valeurs moyennes des pertes « cuivre » dans le cas des configurations à conducteur subdivisé en des brins parallèles en comparaison avec celles à conducteur massif.

Nombre de brins	Pertes « cuivre » (W)		Pertes DC (W)
	Conducteur à brins en parallèle	Conducteur solide	
25	243.96	295,6	120.2
36	227.92		
64	210.13		
81	203.26		

3.5 Applications sur un bobinage plus réaliste à 18 spires par dent d'une machine à réluctance variable

Une deuxième étude est réalisée sur un enroulement plus réaliste. Il est constitué, contrairement au bobinage simplifié à une seule spire par dent étudié dans la partie précédente, de plusieurs spires montées en série. Toujours, une seule phase est alimentée. Elle se compose de deux bobines connectées en série. Chaque bobine est placée sur un pôle du stator; elle comporte 18 spires qui sont enroulées sous la position horizontale ou verticale des conducteurs, comme deux exemples. Il faut souligner le fait que la disposition en spires verticales est largement répandue dans l'industrie alors que la configuration en spires horizontales est très difficile à concevoir. Le coefficient de remplissage en « cuivre » est toujours le même que dans le cas précédemment étudié et la bobine est alimentée par la même forme d'onde de la force magnétomotrice. Le bobinage étant constitué de 18 spires, la force magnétomotrice représente 18 fois le courant d'alimentation. Dans le cas des spires horizontales, deux types de conducteurs sont étudiés. Dans le premier, il s'agit d'un conducteur solide de surface $s = S/18$. Dans le second type, le conducteur, de la même surface s , est en fils de Litz, qui est composé de 9 brins (3x3) comme montré dans la figure 3.17.

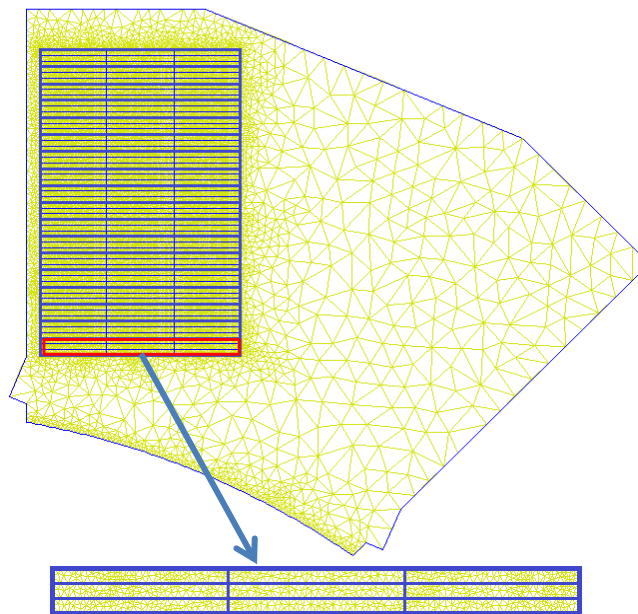


Figure 3.17 Distribution géométrique dans l'encoche des spires horizontales, chaque conducteur de la spire est un conducteur en 9 fils de Litz.

La comparaison entre les pertes « cuivre » dans les cas du conducteur solide et le conducteur subdivisé en fils de Litz montre l'avantage du dernier pour réduire les pertes par courants de Foucault et ainsi la plage de variation des densités de courant. L'utilisation des conducteurs en fil de Litz au lieu de conducteurs solides conduit à une réduction de 20% des pertes « cuivre » (figure 3.18).

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

Dans le cas des spires horizontales à conducteurs solides, le conducteur du retour appartenant au côté droit du bobinage et situé tout en bas à la proximité de l'entrefer, présente le maximum des pertes additionnelles par courant de Foucault a une large gamme de variation des densités de courant instantanées. Ces valeurs sont comprises entre -169 et 70 A/mm². Ces valeurs correspondent à la position électrique du rotor de 48° où les pertes présentent leur maximum (figure 3.18), cette plage de variation est réduite en cas d'un conducteur en fils de Litz, elle devient comprise entre -65 et 25 A/mm² (Figure 3.19). La subdivision d'un conducteur en des brins et la transposition de ces brins évite ainsi des valeurs instantanées excessives de la densité du courant.

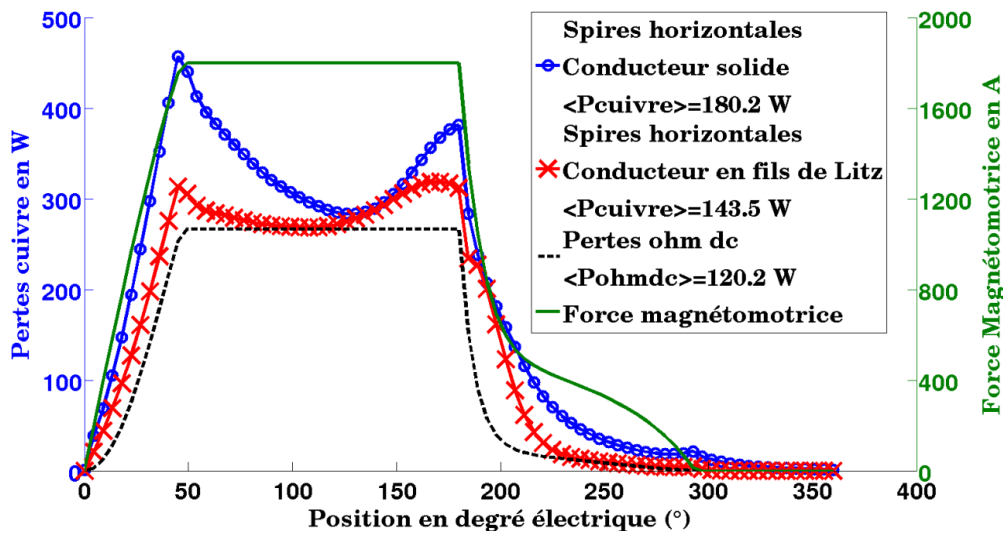


Figure 3.18 Les pertes « cuivre » instantanées dans les spires horizontales à conducteur solide et à conducteur en 9 fils de Litz

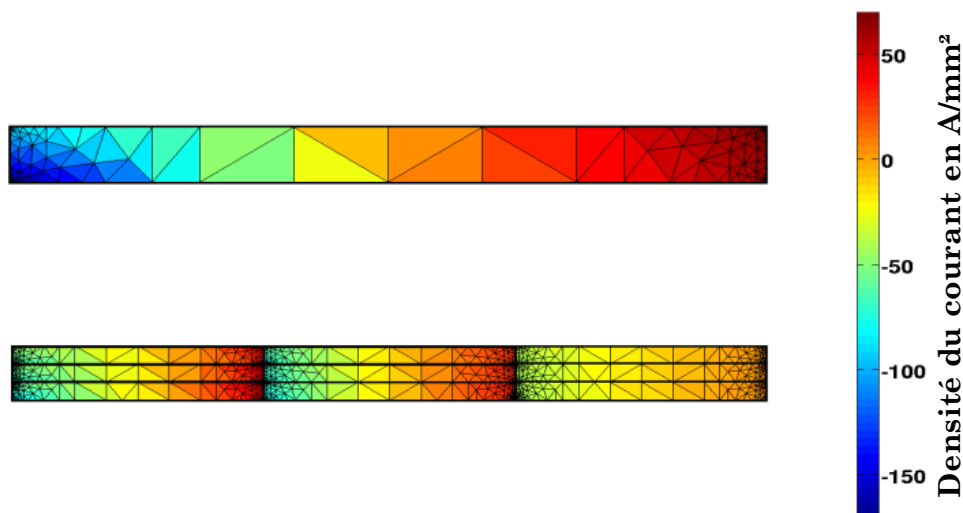


Figure 3.19 La distribution de la densité du courant dans le conducteur de retour situé à la proximité de l'entrefer du côté droite du bobinage conducteur solide (haut), conducteur en fils de Litz (bas) (Position=48° électriques).

Par contre, dans le cas des spires verticales, l'utilisation d'une première version des conducteurs en fils de Litz (3x3), comme le montre la figure 3.20, a conduit d'une manière

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

inattendue à une élévation des pertes « cuivre » moyennes (figure 3.21). Même si la transposition des filaments en fils de Litz permet homogénéisation de la répartition du courant à travers les brins, les pertes « cuivre » dans le cas des fils de Litz peuvent encore être trop dominées par l'effet de proximité, mais cette fois ci au niveau des brins [Sul99].

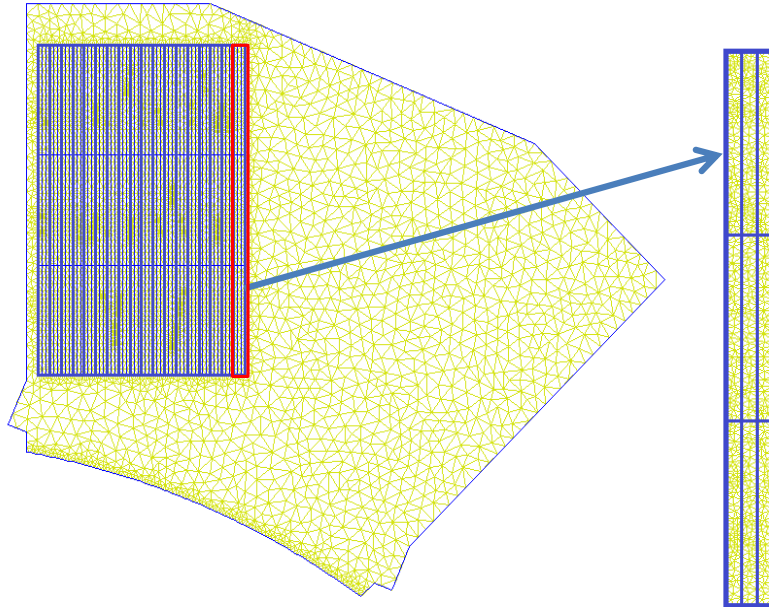


Figure 3.20 La distribution géométrique dans l'encoche des 18 spires verticales à conducteur en première version des fils de Litz (3x3).

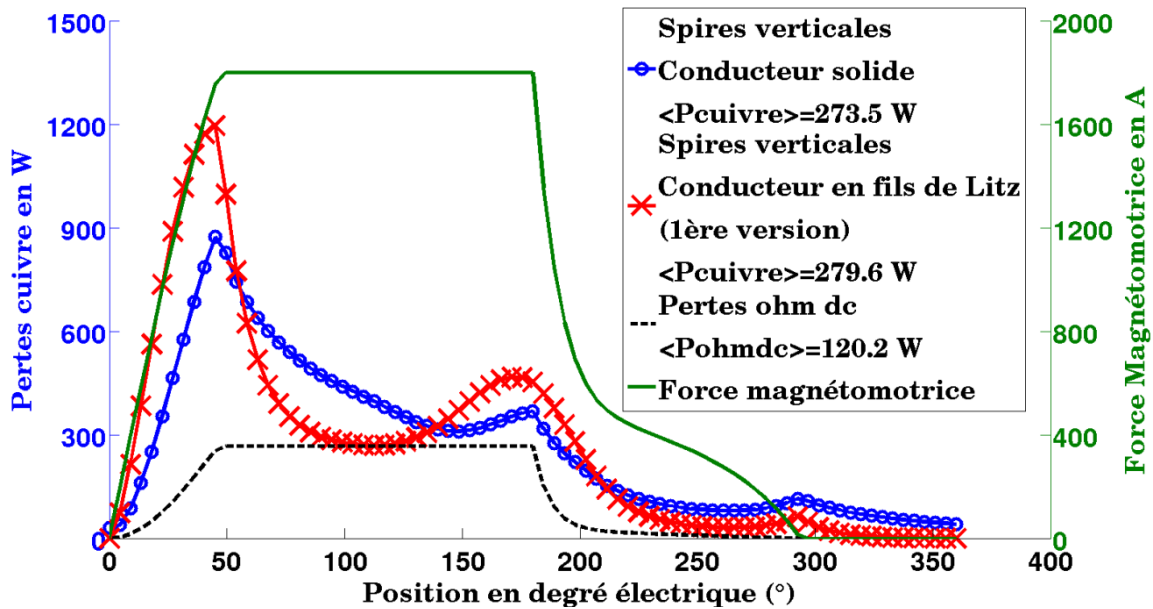


Figure 3.21 Les pertes « cuivre » instantanées dans les spires verticales à conducteur solide et à conducteur en première version des fils de Litz (3x3).

Le choix d'une deuxième version du fil de Litz, qui est composée toujours de 9 fils mais placés cette fois verticalement (9x1) (figure 3.22). Cette deuxième version conduit au contraire de la première version (3x3) à une réduction de 45% des pertes « cuivre » (figure 3.23). Ceci accentue l'importance de la géométrie de la distribution des brins à travers la

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

section du conducteur en plus de l'importance de la subdivision et du nombre de brins sur la réduction des pertes par courants de Foucault supplémentaires.

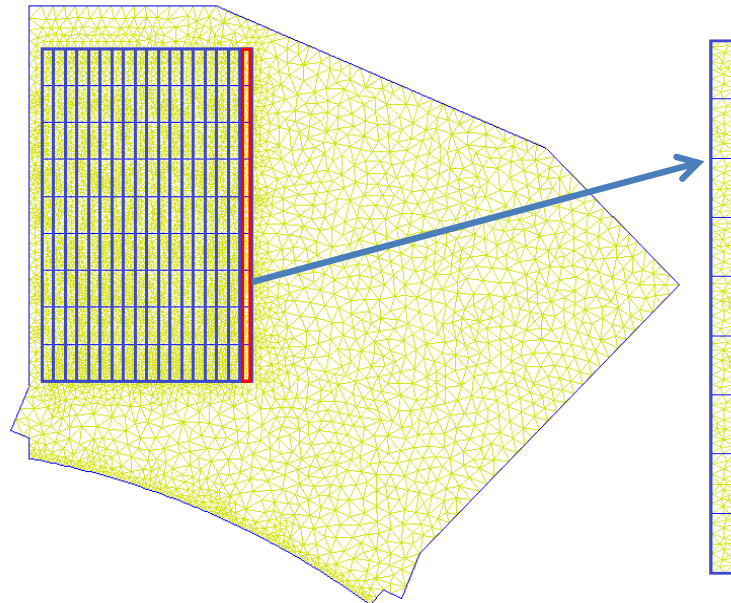


Figure 3.22 La distribution géométrique dans l'encoche des 18 spires verticales à conducteur en deuxième version des fils de Litz (9x1).

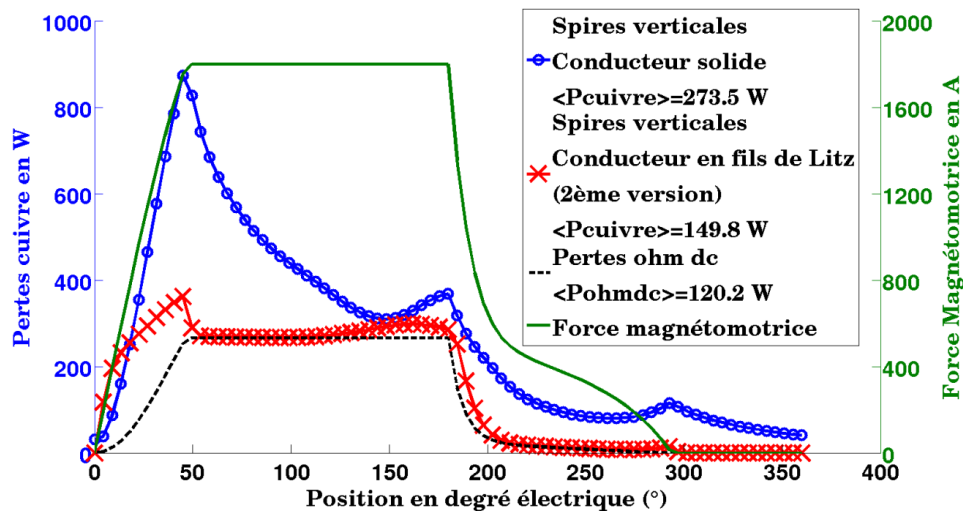


Figure 3.23 Les pertes « cuivre » instantanées dans les spires verticales à conducteur solide et à conducteur en deuxième version des fils de Litz (9x1).

3.6 Conclusion

La méthode EF 2D utilisée pour modéliser des géométries de conducteurs complexes tels que les conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz a vérifié l'intérêt de ces enroulements pour réduire les pertes par courants de Foucault supplémentaires. Nous avons souligné l'influence importante de la subdivision et du nombre de brins d'une part et de la géométrie de leur distribution à travers la section du conducteur sur la réduction des pertes « cuivre ». Lorsqu'il empêche une modélisation par éléments finis en 3D, le modèle

3 Modélisation par éléments finis 2D des conducteurs en fils torsadés et en fils de Litz

approché en 2D réduit énormément le temps de calcul et la capacité de stockage. Pratiquement, les conducteurs subdivisés en des brins transposés ne vérifient pas leur avantage par rapport au conducteur solide à moins qu'ils diminuent les pertes « cuivre » dans un facteur beaucoup plus élevé que celui de l'augmentation des pertes DC classiques. L'augmentation des pertes DC a lieu en raison de la transposition des brins et la permutation de leurs positions. La transposition des brins conduit à l'augmentation de leurs longueurs par rapport à la longueur d'un conducteur solide fixe qui va tout droit. Cette diminution des pertes additionnelles par courants de Foucault utilisant les conducteurs multi filamentaires en fils de Litz ou en fils torsadés, doit être mis en regard avec l'augmentation du à l'accroissement de la résistance DC

L'approche de modélisation 2D par la méthode des éléments finis des géométries de conducteurs complexes représentée dans ce chapitre, permet un calcul précis des densités de courant et des pertes « cuivre » instantanées dans chaque brin individuellement. Lorsqu'elle est associée à un modèle réduit de la machine qui réduit efficacement le temps de calcul, elle peut être utilisée dans de nombreux problèmes de conception et d'optimisation quand on recherche la géométrie optimale de la distribution des brins d'une part et le nombre de brins réalisable optimisé pour un bobinage donné d'une machine.

Chapitre 4

Réduction du modèle par la technique de la perturbation

IV-Réduction du modèle par la technique de la perturbation

4.1 Introduction

Les chapitres 2 et 3 ont justifié clairement la forte corrélation entre les pertes additionnelles par courants de Foucault et la géométrie du bobinage dans les machines électriques. Dans ce début de chapitre, des éléments majeurs du contexte d'étude et des conclusions de chapitres précédents vont être rappelés. En partant de l'hypothèse que les pertes « cuivre » qui comprennent les pertes additionnelles par courant de Foucault sont déterminantes au niveau du rendement de la machine, le choix d'un enroulement optimal devient par conséquent incontournable. Il est nécessaire alors de porter une attention particulière sur la manière de disposer les spires dans l'encoche telles que sous titres d'exemples sans y limiter, la disposition en spires verticales ou horizontales, et sur le type du conducteur utilisé s'il s'agit d'un conducteur massif ou multi filamentaire, en fils de Litz ou en fils torsadés. Dans le cas d'un conducteur multi filamentaire ou multibrins, il faut rappeler l'influence majeure non seulement de la subdivision ou du nombre de brins mais ainsi de la manière de répartir les brins à travers la section du conducteur et sur les techniques de torsadage ou de transposition utilisées.

L'optimisation du bobinage en termes des pertes « cuivre » incluant les pertes additionnelles par courant de Foucault nécessite une modélisation fiable des courants induits dans les matériaux conducteurs. Comme déjà évoqué, les boucles des courants de Foucault dans les matériaux conducteurs d'un système électromagnétique en général existent grâce au couplage fort électrique-magnétique entre la densité du courant électrique et la variation en fonction du temps des lignes du champ magnétique qui traversent ces conducteurs. Cette interaction entre les grandeurs électriques et magnétiques ne peut pas être résolue facilement, on a recours alors, le plus souvent, à des méthodes de discrétisation telles que la méthode des éléments finis pour donner une solution numérique au problème. Dans le cas des machines électriques, dans le but de garantir une simulation fiable, la méthode des éléments finis doit intégrer la technique de la bande de mouvement ou d'un macro élément pour prendre en compte le mouvement du rotor et les itérations de Newton-Raphson pour modéliser la non-linéarité des circuits ferromagnétiques. Si on ajoute la nécessité d'un maillage fin dans les matériaux conducteurs et les alentours pour une modélisation plus efficace des courants de Foucault, la modélisation par la méthode des éléments finis amène alors à une grande capacité de stockage et un temps de calcul substantiel qui peuvent entraver tout processus de conception et d'optimisation des bobinages des machines électriques.

Pour surmonter cet obstacle, la réduction du modèle peut être utilisée. Dans ce chapitre, on a recours à la réduction spatiale du domaine électromagnétique basée sur la

technique de la perturbation [DSK008] [SD007] [DSF+009]. Cette méthode évite, à chaque variation de la géométrie d'enroulement, une modélisation complète de la machine. Elle consiste à résoudre par éléments finis un seul modèle complet avec un maillage grossier et un bobinage simplifié. Une fois ce problème résolu, elle recherche une solution rapide et précise par éléments finis dans un domaine réduit contenant les encoches lorsque des variations physiques ou géométriques se produisent au niveau de l'enroulement. Ceci est obtenu en imposant une condition aux limites adéquate, obtenue à partir de la solution du problème précédent. La méthode de projection de mortar est utilisée pour adapter les conditions aux limites dans le cas de maillages non-conformes [BMP93] [BMP94] [ABS+006].

4.2 Méthode de réduction du modèle par la technique de la perturbation dans le cas d'un bobinage à conducteurs en fils de Litz

Dans le chapitre 2, les 18 spires de la machines à réluctance variable étaient disposées dans l'encoche suivant deux configurations de l'enroulement: en spires horizontales et en spires verticales. Ces deux configurations différentes, ayant le même coefficient de remplissage dans l'encoche et étant alimentées par la même forme d'onde de la force magnéto-motrice et sous la même fréquence d'alimentation de 710 Hz, ont abouti par contre à des valeurs différentes de pertes « cuivre » totales. Ceci a souligné l'influence de la géométrie d'enroulement sur la valeur des pertes additionnelles par courants de Foucault. Les deux enroulements étaient le siège de valeurs excessives des pertes additionnelles par courants de Foucault. Pour la configuration à spires horizontales, les pertes additionnelles par courant de Foucault constituent environ 50% des pertes DC alors que dans le cas des spires verticales cette proportion atteint le 128%. Ces pertes excessives peuvent provoquer des échauffements anormaux critiques surtout au niveau des conducteurs localisés à la proximité de l'entrefer et au voisinage de la dent du stator. Elles conduisent de même à réduire le rendement de la machine, et donc son autonomie pour une utilisation dans un véhicule électrique. La solution proposée pour réduire ces pertes excessives était l'utilisation à la place des conducteurs massifs, de conducteurs multi filamentaires à brins torsadés ou en fils de Litz. Le modèle proposé 2D pour modéliser ces types de conducteurs a montré non seulement l'influence de la subdivision à réduire les pertes additionnelles par courant de Foucault mais en plus l'influence majeure du nombre de brins d'une part et d'une autre part de la manière de répartir ces brins à travers la section du conducteur. Les techniques de permutation des brins dans l'espace que ce soit le torsadage (fils torsadés) ou la transposition (fils de Litz), favorisant chacune à sa propre manière l'homogénéisation de la répartition du courant à travers les brins du conducteur, possèdent des impacts différenciés sur la réduction des pertes additionnelles par courant de Foucault. Revenons maintenant aux deux configurations d'enroulement à 18 spires horizontales et verticales. Dans le cas de l'enroulement à spires horizontales, on a remarqué dans le chapitre 3, que l'utilisation à la place des conducteurs massifs d'une première version de conducteurs en fils de Litz formés de 9 brins chacun (3×3) a permis une réduction

de 20% des pertes « cuivre » totales d'une part et une réduction importante de la plage de variation de la densité du courant électrique ce qui permet d'éviter les échauffements locaux anormaux. Lorsque cette première version des conducteurs en fils de Litz a échoué à réduire les pertes « cuivre » dans le cas de la disposition en spires verticales, une deuxième version sous une différente répartition des brins à travers la section des conducteurs (9×1) a réussi à réduire ces pertes avec une proportion d'environ 45%. Le choix d'étudier en particulier ces deux versions de conducteurs en fils de Litz pour réduire les pertes « cuivre » est arbitraire. Techniquement, pour choisir l'enroulement optimal, il est recommandé de démarrer un processus d'une série des calculs itératifs qui permet de modifier la géométrie de l'enroulement que ce soit la disposition des spires dans l'encoche, le nombre de brins et la technique de leur permutation ou leur répartition à travers la section du conducteur multi filamentaire pour arriver à concevoir l'enroulement optimal. La méthode des éléments finis, en intégrant normalement la technique de la bande de mouvement pour prendre en compte la rotation du rotor et les boucles itératives fastidieuses de Newton-Raphson pour modéliser la non linéarité de la caractéristique magnétique des circuits ferromagnétiques, conduit à une grande capacité de stockage et un temps de calcul conséquent et peut par conséquent pénaliser, voir compromettre tout processus de conception et d'optimisation de l'enroulement en termes de pertes « cuivre ». Si l'on veut intégrer les analyses par éléments finis dans les processus de calcul répétitifs, la réduction du modèle devient alors incontournable.

4.2.1 Généralité sur la technique de la perturbation

Dans ce chapitre, la méthode de réduction du modèle proposée est une approche par sous-problèmes basée sur la technique de la perturbation [DSK008]. La complexité du problème initial est ainsi largement diminuée en ne se concentrant que sur les zones les plus pertinentes. Cette méthode de réduction du modèle peut bénéficier d'une seule résolution du modèle complet de la machine par la méthode des éléments finis, pour trouver par la suite des solutions rapides dites "perturbations" uniquement dans le domaine des encoches. Ceci permet d'éviter la modélisation complète de la machine quand une variation géométrique dans la configuration de l'enroulement ou un changement des propriétés physiques du matériau conducteur se produit [SD007] [DSF+009] [ABM+016b].

4.2.2 Application pour une machine à réluctance variable dans le cas d'un bobinage à conducteurs en fils de Litz

L'exemple d'application est toujours la machine à réluctance variable à double saillance dont le bobinage d'enroulement est formé de 18 spires. Ces spires comme déjà mentionné dans les chapitres précédentes peuvent être distribuées dans l'encoche de différentes manières. Les spires sont soit des conducteurs massifs à une section transversale de surface s chacune, soit des conducteurs multi filamentaires subdivisés en un nombre de brins p dont le nombre, la répartition géométrique à travers la section du conducteur et la technique de permutation sont variables afin de trouver la géométrie

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

d'enroulement optimale en termes de pertes « cuivre ». Pratiquement, il faut faire parfois des compromis entre la réduction des pertes « cuivre », la complexité et le prix du conducteur multi filamentaire, et les contraintes industrielles. Pour éviter une modélisation par éléments finis complète de la machine à chaque changement dans la géométrie de l'enroulement, un seul modèle complet à maillage grossier de la machine, un bobinage simplifié à une seule spire par dent et une densité du courant uniforme est employé. Le bobinage du modèle complet doit maintenir le même coefficient de remplissage et produire la même force magnétomotrice que le problème réel. Etant donné que le bobinage réel de la machine est formé de 18 spires par dents, et que chaque spire est un conducteur à une section de surface s et parcourue par le courant $I(t)$, le bobinage simplifié est formée d'une seule spire de section $S = 18 * s$ et parcouru par le courant total $18 * I(t)$. Une fois ce problème résolu, la solution du potentiel vecteur magnétique sur la frontière du domaine de l'encoche, à chaque pas de temps, est appliquée comme conditions aux limites de Dirichlet sur le nouveau domaine d'étude réduit représenté par le domaine de l'encoche où on intègre maintenant la configuration réelle du bobinage.

Dans le cas particulier de la machine à réluctance variable qui représente un rotor à forte saillance et un courant d'alimentation qui n'est ni symétrique ni alterné pendant la période électrique d'alimentation, les cotés de la même bobine ou en d'autres termes les conducteurs d'aller et de retour du même bobinage ne voient pas les mêmes influences magnétiques. Les conducteurs d'aller et de retour sont les sièges de différentes trajectoires et intensités des lignes de champs de fuites et ainsi produisent comme on a vu dans les chapitres précédents, grâce au fort couplage entre la densité du courant et la variation en fonction du temps du champ magnétique, de différentes valeurs des pertes additionnelles par courants de Foucault. Par conséquent, les deux domaines d'encoches comportant les conducteurs d'aller et de retour doivent être étudiés séparément.

Dans le modèle complet de la machine, les deux sections des deux conducteurs d'aller et de retour du bobinage simplifié sont discrétisées avec un maillage grossier (Figure 4.1) puisque la densité du courant électrique à travers ces deux sections est uniforme et vaut $J_{DC} = [18 * I(t)]/S$.

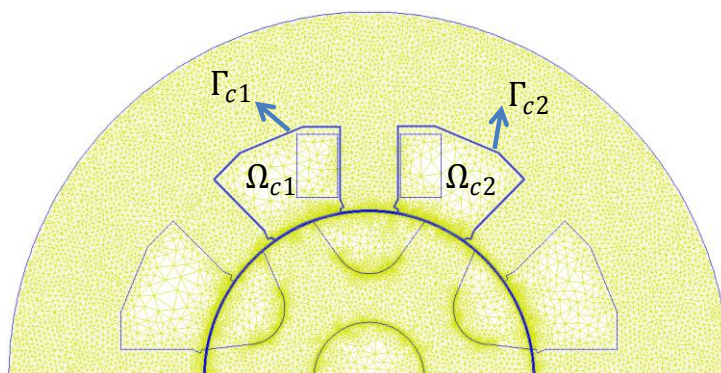


Figure 4.1 Modèle complet de la machine avec un bobinage simplifié (une seule spire par dent) et un maillage grossier.

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

Les deux domaines des encoches gauche et droite intégrant le conducteur d'aller et celui du retour respectivement, comme les montre la figure 4.1, sont nommées Ω_{c1} de frontière Γ_{c1} et Ω_{c2} de frontière Γ_{c2} .

Dans le modèle réduit, les domaines sur la figure 4.2 de l'encoche des conducteurs d'aller et de retour respectivement sont nommés Ω_{r1} de frontière Γ_{r1} et Ω_{r2} de frontière Γ_{c2} .

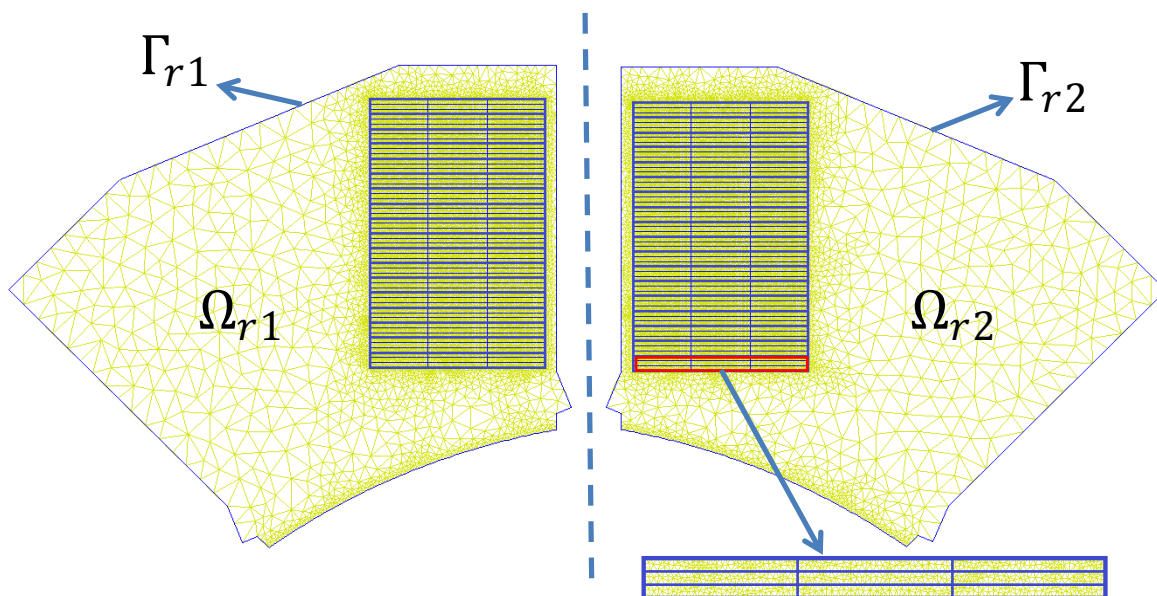


Figure 4.2 Modèles réduits des deux encoches intégrant le bobinage réel. Gauche: Encoche gauche comportant les spires d'aller. Droite: Encoche droite comportant les spires de retour.

Ces domaines sont les seuls sous-domaines modélisés de la machine après chaque changement dans la géométrie réelle de l'enroulement ou après chaque variation d'une grandeur physique telle que par exemple la conductivité σ du matériau conducteur. La répartition de la densité du courant à travers la section des conducteurs électriques est maintenant régie par l'équation $\vec{J} = \sigma \partial \vec{A} / \partial t + \sigma \overline{\text{grad}}(V)$. Pour une modélisation fiable de la distribution de la densité du courant et ainsi des phénomènes des courants additionnels de Foucault, les domaines de l'encoche en modèle réduit sont discrétisés normalement par un maillage fin. La densité du maillage en effet est fonction de plusieurs facteurs tels que les plus importants sont la fréquence d'alimentation et la surface de la section des conducteurs. Par contre, dans le modèle complet à bobinage simplifié et densité du courant uniforme, le maillage est normalement grossier à travers les conducteurs. Pour adapter ainsi les maillages non conformes, on utilise la méthode de projection classique de mortier. Elle permet de projeter la solution nodale du potentiel vecteur magnétique des frontières Γ_{c1} et Γ_{c2} vers les nœuds des frontières Γ_{r1} et Γ_{r2} respectivement. La solution du potentiel vecteur sur les frontières Γ_{r1} et Γ_{r2} constituent à chaque pas de temps les conditions aux limites de Dirichlet sur les domaines réduits Ω_{r1} et Ω_{r2} respectivement afin de résoudre l'équation du couplage fort électrique-magnétique à travers ces deux domaines par la méthode des éléments finis. Dans le modèle réduit, le problème est donc linéaire sans le mouvement. On évite ainsi les itérations fastidieuses de Newton-Raphson et l'intégration de la technique de la bande du

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

mouvement. La réduction du modèle, qui permet en plus d'adapter les maillages non conformes, représente ainsi un intérêt clair et certain dans les problèmes à calculs et analyses répétitifs tels que la conception et l'optimisation de la géométrie de l'enroulement des machines électriques.

Sur la figure 4.2, dans les deux domaines d'encoche, on modélise à titre d'exemple, la configuration réelle d'enroulement à 18 spires horizontales. Les spires sont formées par des conducteurs multi filamentaires constitués chacun de 9 brins en fils de Litz suivant la première version (3×3). Les conducteurs aller et retour sont intégrés respectivement dans les domaines réduits Ω_{r1} et Ω_{r2} .

Il faut noter que le fait d'imposer une condition aux limites de Dirichlet sur le bord du domaine réduit revient à imposer la composante normale du champ magnétique sur la frontière de l'encoche. Le modèle grossier de la machine est résolu une seule fois sous une force magnétomotrice et une fréquence d'alimentation données. La récupération de la solution du potentiel vecteur magnétique conduit donc à fixer la composante normale du champ magnétique sur la frontière des encoches dans les problèmes réduits résolus en posteriori. Le problème réduit est résolu sous la même force magnétomotrice et sous la même fréquence mais en faisant seulement varier la géométrie d'enroulement et en attribuant une conductivité σ au matériau conducteur. Dans le modèle complet de la machine, les lignes du champ magnétique sont pratiquement perpendiculaires à la frontière du circuit magnétique. Dans la zone de l'entrefer, ces lignes subissent des déviations importantes et tendent à joindre la dent du rotor lorsqu'elle passe à la proximité [IUN013]. Le fait d'imposer la composante normale du champ magnétique, dans le modèle réduit, agit au nom du circuit magnétique ou en d'autres termes remplace la présence du circuit magnétique en ce qui concerne la direction globale des lignes de champs, et prend en compte leur déviation due à l'influence de la rotation du rotor [ABM+016b].

Lorsque les conducteurs de la configuration réelle de l'enroulement intégré dans le modèle réduit sont des conducteurs multi brins en fils de Litz, la mise en parallèle des brins et leur permutation au sein du conducteur tout au long du bobinage conduit à l'homogénéisation du courant à travers les brins et favorise ainsi l'homogénéisation de la densité du courant globalement à travers les matériaux conducteurs qui constituent l'ensemble des conducteurs d'aller et de retour dans les deux différents domaines réduits des deux encoches. Par conséquent, la solution du potentiel vecteur magnétique à travers la frontière de l'encoche dans le modèle complet à densité du courant uniforme semble être compatible avec celle obtenue dans le cas de configurations d'enroulement à conducteur en fils de Litz. Dans ce cas particulier, il est prévu alors que le modèle réduit, résolu sous les conditions aux limites de Dirichlet, conduise à une bonne précision dans le calcul des pertes « cuivre ».

Par contre, lorsque les spires de l'enroulement sont à conducteurs massifs, la déviation des lignes du champ magnétique à travers la frontière de l'encoche est significative, conséquence du déplacement du courant à travers la section des conducteurs électriques.

L'analyse de ce phénomène qui vient modifier considérablement la composante normale du champ magnétique à travers la frontière de l'encoche, met en doute la validité de la condition aux limites de Dirichlet récupérée du problème à densité du courant uniforme. Ce problème et sa résolution seront repris dans la partie suivante. Actuellement, on se concentre à l'étude des cas des conducteurs multi filamentaires en fils de Litz où on pense que l'application de la condition aux limites de Dirichlet s'adapte bien pour la résolution du modèle réduit.

4.2.3 Traitement du cas des maillages non conformes

Lorsque le maillage du domaine de l'encoche dans le modèle réduit et celui dans le modèle complet sont réalisés ou condensés indépendamment ; ils ne sont pas conformes. La frontière Γ qui limite un domaine de l'encoche est unique pour les deux modèles complet et réduit mais elle est discrétisée de deux manières différentes comme le montre la figure 4.3. La méthode des éléments finis avec joint ou tout simplement la méthode de mortar (dite "mortar element method" en anglais) est utilisée pour projeter la solution du potentiel vecteur magnétique sur les nœuds de la frontière Γ_c du domaine de l'encoche dans le modèle complet que ce soit Γ_{c1} ou Γ_{c2} vers les nœuds de la frontière Γ_r du domaine de l'encoche dans le modèle réduit que ce soit respectivement Γ_{r1} ou Γ_{r2} .

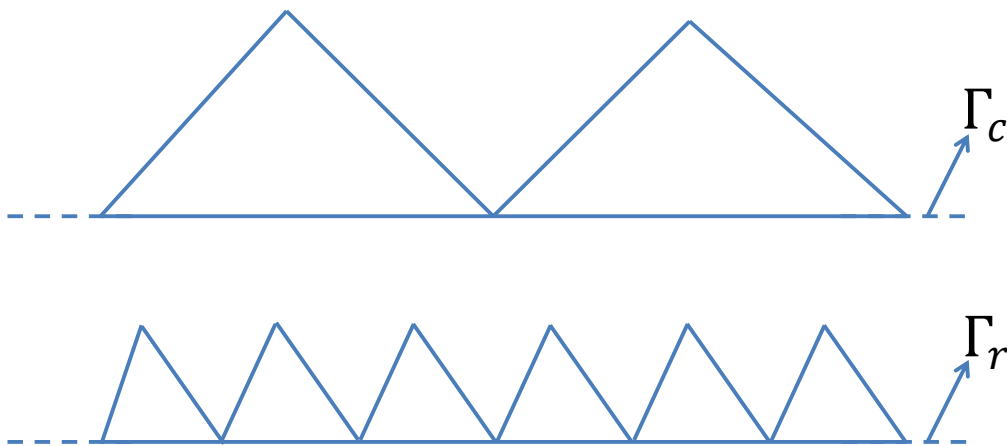


Figure 4.3 Défaut de conformité du maillage des frontières du domaine de l'encoche dans le modèle complet et le modèle réduit.

On suppose que $[A^{\Gamma_c}]$ et $[A^{\Gamma_r}]$ représentent respectivement la solution nodale du potentiel vecteur magnétique à travers les frontières Γ_c et Γ_r . En se basant sur une représentation brève de la méthode de projection de mortar dans [ABS+006], La solution $[A^{\Gamma_r}]$ qu'on cherche comme projection de la solution $[A^{\Gamma_c}]$, peut s'écrire comme fonction de cette dernière suivant les expressions équivalents suivantes :

$$[R][A^{\Gamma_r}] = [C][A^{\Gamma_c}] \quad (4.1)$$

$$[A^{\Gamma_r}] = [R]^{-1}[C][A^{\Gamma_c}] \quad (4.2)$$

$$[A^{\Gamma_r}] = [Q][A^{\Gamma_c}] \quad (4.3)$$

Les matrices $[R]$ et $[C]$ peuvent être calculées en utilisant les intégrales curvilignes suivants à travers la frontière Γ qui représente l'une des deux frontières Γ_c ou Γ_r [ABS+006]:

$$r_{i,j} = \int_{\Gamma} \psi_i \psi_j d\Gamma \quad (4.4)$$

$$c_{i,j} = \int_{\Gamma} \psi_i \varphi_j d\Gamma \quad (4.5)$$

Où les coefficients $r_{i,j}$ et $c_{i,j}$ sont respectivement les coefficients des matrices $[R]$ et $[C]$ correspondant à la ligne i et la colonne j . La fonction ψ_i est la fonction de forme nodale sur les arrêtes de la frontière Γ_r connectées au nœud i appartenant aux nœuds de discrétisation de cette frontière. ψ_i est non nulle au nœud i . Par analogie, la fonction φ_j est la fonction de forme sur les arrêtes de la frontière Γ_c connectées au nœud j . Lorsque le nombre total des nœuds de la frontière Γ_r est n et le nombre des nœuds de la frontière Γ_c est p , les matrices $[R]$ et $[C]$ ont alors comme dimensions $(n \times n)$ et $(n \times p)$ respectivement.

Si on considère une arrête sur la frontière Γ formée par les deux nœuds 1 et 2 de coordonnées en 1d s_1 et s_2 respectivement (Figure 4.4), les fonctions de formes sur cette arrête sont données par :

$$\lambda_i(s) = \begin{cases} a_i s + b_i & \text{si } s_1 \leq s \leq s_2 \text{ où } i \in \{1,2\} \\ 0 & \text{si } s < s_1 \text{ ou } s > s_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\lambda_i(s_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.7)$$



Figure 4.4 Une arrête de la frontière Γ formée par les nœuds 1 et 2.

La fonction de forme non nulle au nœud i est alors la fonction λ_i . Pour simplifier le calcul des termes des matrices $[R]$ et $[C]$ en utilisant les équations (4.4) et (4.5), on utilise la méthode numérique de quadrature qui permet d'évaluer la valeur d'une intégrale de manière approchée. L'utilisation de quadrature est pratiquement incontournable dans la méthode des éléments finis. On ne s'en sert pas exclusivement pour calculer les matrices de projection $[R]$ et $[C]$, mais pour calculer aussi les matrices du système d'équations résultant de la discrétisation par la méthode des éléments finis. En effet, comme on a déjà vu dans le chapitre 1, une fois construit l'espace d'approximation, la solution discrète s'obtient par la résolution d'un système (1.67) dont les coefficients des matrices s'évaluent à partir d'intégrales.

En 1D, une intégrale de la fonction $f(s)$ sur un segment $[s_1; s_2]$ se rapproche en utilisant la méthode de quadrature par la formule suivante :

$$\int_{[s_1; s_2]} f(s) ds = \sum_{i=1}^m w_i f(\eta_i) \quad (4.8)$$

Les points η_i inclus dans le segment $[s_1; s_2]$ sont appelés les points de Gauss-Lobatto ou les nœuds de quadrature et les coefficients réels w_i sont les poids de quadrature associés. Pour une quadrature d'ordre 3, les points de Gauss-Lobatto P_1, P_2 et P_3 (Figure 4.5) choisis sur le segment $[s_1; s_2]$ avec leurs poids de quadrature associés sont donnés par le tableau 4.1 suivant :

Tableau 4.1 Points de Gauss-Lobatto et les poids associés pour la quadrature d'ordre 3 sur le segment $[s_1; s_2]$; $m = \frac{(s_1+s_2)}{2}$ et $\delta = s_2 - s_1$.

Points de Gauss-Lobatto	Poids associés
m	$\frac{2}{3}\delta$
$m - \delta/2$	$\frac{1}{6}\delta$
$m + \delta/2$	$\frac{1}{6}\delta$

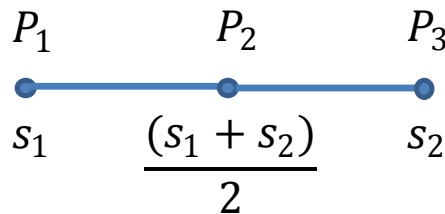


Figure 4.5 Les trois points de Gauss-Lobatto localisés sur le segment $[s_1; s_2]$.

Il faut noter que la méthode de quadrature est dite d'ordre k si k est le plus grand entier tel que l'intégrale d'une fonction quelconque appartenant à $[P_k(x)]$ est exactement égale à la formule approchée par la méthode quadrature où $[P_k(x)]$ est l'ensemble des polynômes d'ordre k .

4.2.4 Résultats et comparaison

Pour tester la validité et la précision du modèle réduit, on va comparer le calcul par la méthode des éléments finis du modèle complet avec celui du modèle réduit dans le cas des deux configurations d'enroulement à 18 spires verticales et horizontales à conducteurs multi filamenteuses en fils de Litz. Ces deux configurations étudiées, utilisant les conducteurs multi filamenteuses, sont celles utilisées dans le chapitre trois pour réduire les pertes « cuivre »

totales. La première est la configuration en spires horizontales utilisant la première version des conducteurs en fils de Litz (3×3) et la deuxième est celle en spires verticales utilisant la deuxième version (9×1). Comme on a vu précédemment, l'utilisation de ces deux versions de conducteurs en fils de Litz ont conduit, par rapport aux deux configurations utilisant les conducteurs solides, à une réduction des pertes « cuivre » totales (Tableau 4.2 et figures 4.6 et 4.8) en favorisant l'homogénéisation de la densité du courant. En effet, les conducteurs en fils de Litz ont abouti à réduire la plage de variation de la densité du courant à travers la section des conducteurs. Sur la figure 4.7, par exemple, l'extension de la densité du courant critique qui correspondait au pic de pertes « cuivre » à la position 48° du rotor dans le cas des spires horizontales à conducteurs solides, était entre -169 et 70 A/mm², elle devient en utilisant les fils de Litz entre -65 et 25 A/mm².

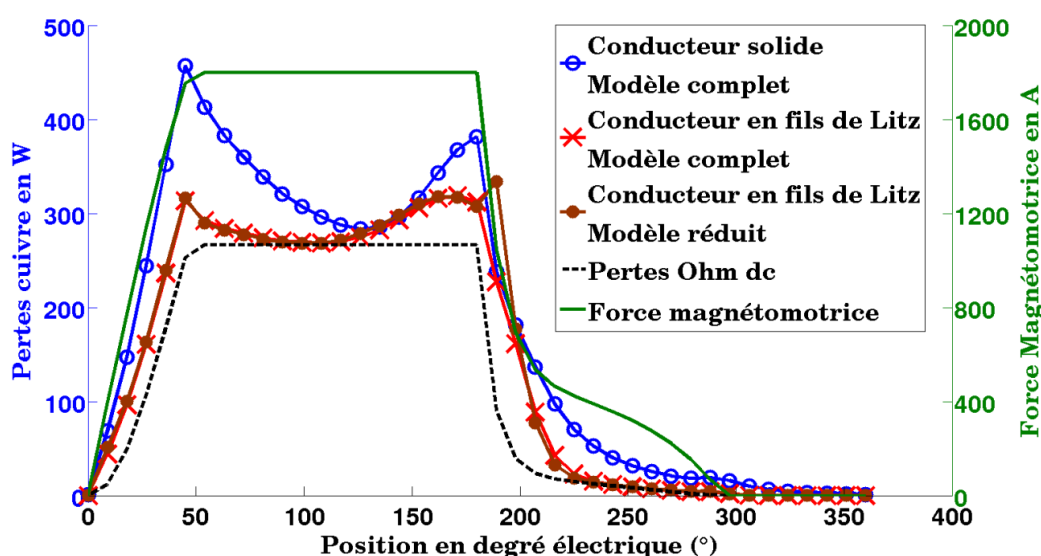


Figure 4.6 Les pertes « cuivre » instantanées dans le cas des spires horizontales à conducteurs solides (modèle complet) et dans le cas des conducteurs en fils de Litz (1ère version (3×3)) (modèle complet de référence et modèle réduit).

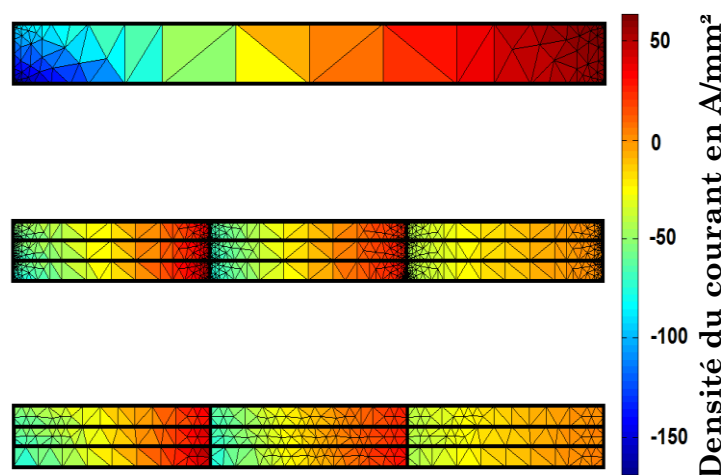


Figure 4.7 La distribution de la densité du courant à travers la section de la spire horizontale critique de retour située à la proximité de l'entrefer. Spire à conducteur massif avec un calcul par éléments finis complet (en haut), spire à conducteur en fils de Litz avec un calcul par éléments finis complet (au milieu) et avec un calcul en modèle réduit (en bas).

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

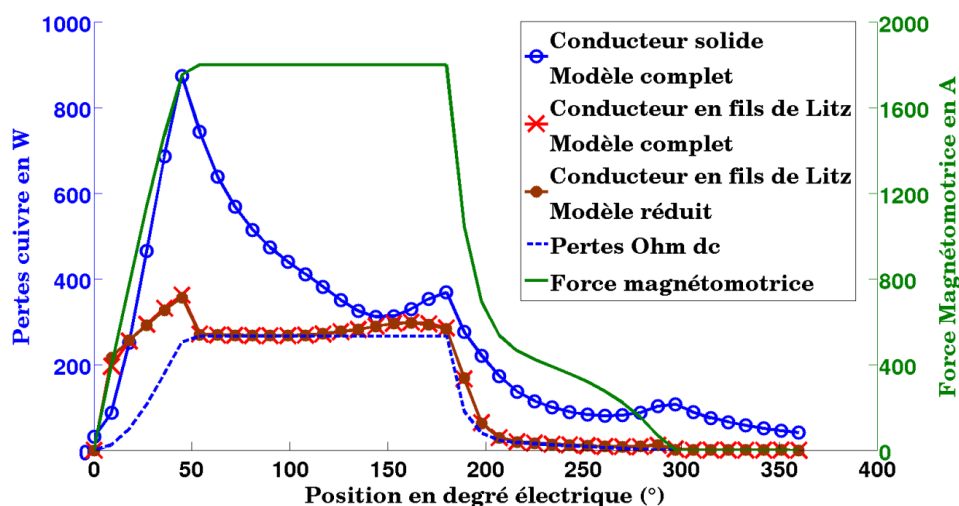


Figure 4.8 Les pertes « cuivre » instantanées dans le cas des spires verticales à conducteurs solides (modèle complet) et dans le cas des conducteurs en fils de Litz (2^{ème} version (9×1)) (modèle complet de référence et modèle réduit).

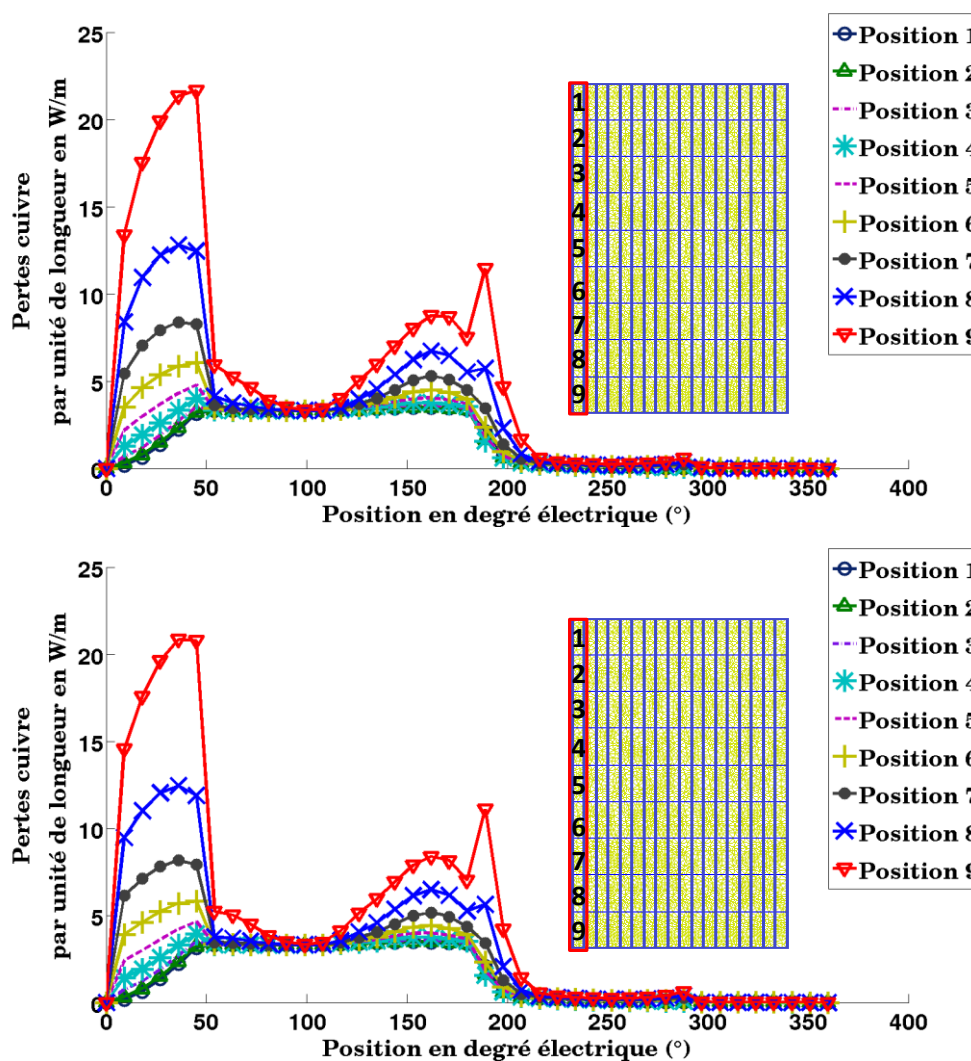


Figure 4.9 Les pertes « cuivre » instantanées locales à travers les 9 brins de la spire verticale critique de retour à la proximité du circuit magnétique. En haut: Modèle complet par éléments finis. En bas: Modèle réduit.

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

Tableau 4.2 Valeurs moyennes des pertes « cuivre » dans le cas des spires à conducteurs solides (Modèle complet) et dans le cas des spires à conducteurs multi filamenteux en fils de Litz (Modèle complet et modèle réduit).

Configuration de l'enroulement	Pertes « cuivre » (W)			Pertes ohm DC (W)
	Modèle Complet		Modèle réduit	
	Conducteur solide	Conducteur en fils de Litz	Conducteur en fils de Litz	
18 spires verticales	273,5	149,79 2 ^{ème} version (9x1)	150,59	120,2
18 spires horizontales	180,2	143,46 1 ^{ère} version (3x3)	147,16	

Comparons maintenant les deux modèles réduit et complet. De point de vue grandeurs globales, on remarque que les pertes « cuivre » totales instantanées calculées par les deux modèles sont largement congruentes (Figures 4.6 et 4.8). L'erreur quadratique ne dépasse pas les 2% et l'erreur sur la valeur moyenne des pertes « cuivre » est de même très faible, il est de l'ordre 2.5% et 0.5% respectivement, dans le cas des deux configurations en spires horizontales et verticales (Tableau 4.2).

Sur la figure 4.9, les pertes « cuivre » locales par unité de longueur sont calculées dans les différentes positions de brin du conducteur de retour de la spire vertical critique. C'est le conducteur qui représente le plus de pertes, il est localisé à la proximité de la dent du stator. On remarque que les valeurs instantanées de pertes calculées par le modèle réduit présentent des courbes qui se correspondent aisément aux pertes « cuivre » locales calculées par le modèle complet. L'erreur concernant la valeur moyenne des différentes courbes de pertes à travers les 9 différents brins ne dépassent pas les 3%.

D'autre part, de point de vue grandeurs locales, sur la figure 4.7, les deux cartes de distribution de la densité du courant, au milieu et en bas de cette figure, représentent respectivement la distribution de la densité du courant à travers les 9 brins du conducteur horizontale de retour. Elles sont évaluées à la position critique du rotor qui correspond au pic de pertes lors de la phase de magnétisation de la bobine ($\theta_e = 48^\circ$ électriques) (Figure 4.6). Le conducteur horizontal de retour choisi est celui qui est situé à la proximité de l'entrefer, et représente ainsi le plus de pertes. On remarque que la différence entre ces deux distributions est très faible d'une façon qu'il est très difficile de la détecter.

Tous ces résultats montrent clairement l'importante coïncidence entre les deux solutions calculées par le modèle réduit et le modèle complet.

4.2.5 Accélération en temps de calcul

De point de vue temps de calcul, si T_c est le temps de calcul nécessaire pour faire un calcul par la méthode des éléments finis d'un modèle complet de la machine intégrant la configuration réelle de l'enroulement et T_r celui du modèle réduit ($T_r \ll T_c$), si on veut répéter le calcul pour n configurations d'enroulement afin de choisir l'optimale, le facteur d'accélération en temps de calcul peut être donné par l'équation suivante :

$$p_{red} = \frac{nT_c}{\alpha T_c + nT_r} \quad (4.9)$$

Où αT_c est le temps nécessaire pour calculer la solution du modèle complet de la machine à bobinage simplifié et à densité du courant uniforme. Ce modèle est normalement discrétisé avec un maillage grossier par rapport au modèle complet intégrant la configuration réelle de l'enroulement et modélisant les courants de Foucault qui est discrétisé généralement en maillage fin pour des raisons de crédibilité de la modélisation du phénomène des courants de Foucault. Le coefficient α compris alors entre 0 et 1 représente la proportion de la réduction en temps de calcul du modèle complet en passant d'un maillage fin à un maillage grossier.

Dans notre cas, trois différentes versions de conducteurs en fils de Litz ($n = 3$) ont été étudiées (la version (3×3) dans le cas des spires horizontales et les deux versions (3×3) et (9×1) dans le cas des spires verticales). Si $T_c = 53$ minutes, $T_r = 36$ secondes et $\alpha = 0.35$, on peut dire que la réduction du modèle par la technique de la perturbation conduit à un gain en temps de calcul de l'ordre de 8 fois le temps nécessaire pour une modélisation complète.

On peut conclure alors que, la réduction du modèle en se basant sur la technique de la perturbation, en évitant les itérations chronophages de la non-linéarité et la technique de la bande en mouvement, permet un calcul précis et rapide des pertes de « cuivre » instantanées et des distributions de la densité du courant dans chaque brin individuellement. Elle peut être utilisée dans les processus de conception et d'optimisation des enroulements dans les systèmes électromagnétiques à sévères contraintes énergétiques telles que la machine à reluctance variable pour application en automobile.

4.3 Méthode de réduction du modèle par la technique de la perturbation dans le cas d'un bobinage à conducteurs massifs

4.3.1 Application à un exemple de cas-test

Dans cette partie on veut étudier la validité de la méthode de la réduction du modèle par la technique de la perturbation dans le cas d'un bobinage à conducteurs massifs. Pour commencer, on considère l'exemple d'un cas test simple: celui d'un seul conducteur massif, logé dans l'encoche d'un circuit magnétique comme le montre la figure 4.10.



Figure 4.10 Cas-test: Conducteur solide logé dans l'encoche d'un circuit magnétique.

Le conducteur est alimenté par un courant périodique sinusoïdal à alternances positives uniquement (semblable à celui d'une machine à réluctance variable) et de fréquence 300 Hz. En premier lieu, un premier calcul de référence avec la méthode des éléments finis est effectué sur le modèle complet de ce système électromagnétique en supposant que le conducteur étant le siège de la circulation des courants de Foucault où la densité du courant électrique est régie par la relation $\vec{j} = \sigma \partial \vec{A} / \partial t + \sigma \overrightarrow{grad}(V)$. Le domaine complet du système électromagnétique est nommé Ω_u de frontière Γ_u (Figure 4.11). Une condition aux limites de Dirichlet nulle est normalement imposée sur la frontière Γ_u .

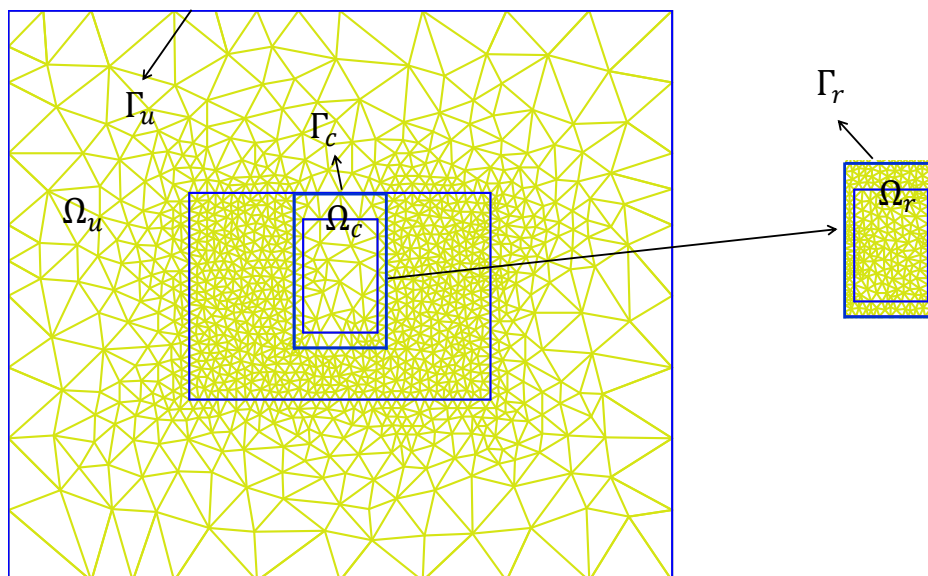


Figure 4. 11 Gauche: Modèle complet à densité du courant uniforme. Droite: Modèle réduit de l'encoche où on suppose la circulation des courants de Foucault.

En deuxième lieu, on utilise la méthode de la réduction du modèle par la technique de la perturbation. Elle consiste à faire un calcul préliminaire avec la méthode des éléments finis sur le modèle complet du système électromagnétique mais cette fois ci en supposant que la densité du courant électrique est constante à travers la section du conducteur. Une fois ce calcul effectué, on capte la solution du potentiel vecteur magnétique sur la frontière Γ_c du domaine Ω_c de l'encoche. Cette solution est appliquée comme condition aux limites de Dirichlet sur la frontière Γ_r afin de résoudre le problème dans le modèle réduit Ω_r de l'encoche où on suppose maintenant que le conducteur est à conductivité σ telle que la

densité du courant est maintenant $\vec{j} = \sigma \partial \vec{A} / \partial t + \sigma \overrightarrow{grad}(V)$. Normalement, le domaine réduit est finement maillé (Figure 4.11). Cependant dans notre cas, pour simplifier le problème, on suppose que le maillage dans le modèle réduit de l'encoche Ω_r est équivalent au maillage de l'encoche dans le modèle complet à densité du courant uniforme. Ceci a pour conséquence d'annuler l'erreur qui peut apparaître suite à la projection par la méthode classique de mortar de la solution du potentiel vecteur magnétique de la frontière Γ_c sur la frontière Γ_r .

4.3.2 Résultats et discussion

Pour tester la validité du modèle réduit, on compare les pertes « cuivre » instantanées calculées en post-traitement par le modèle complet de référence et le modèle réduit ainsi que la distribution de la densité du courant à travers la section du conducteur et la distribution des lignes de champs magnétiques dans le domaine de l'encoche.

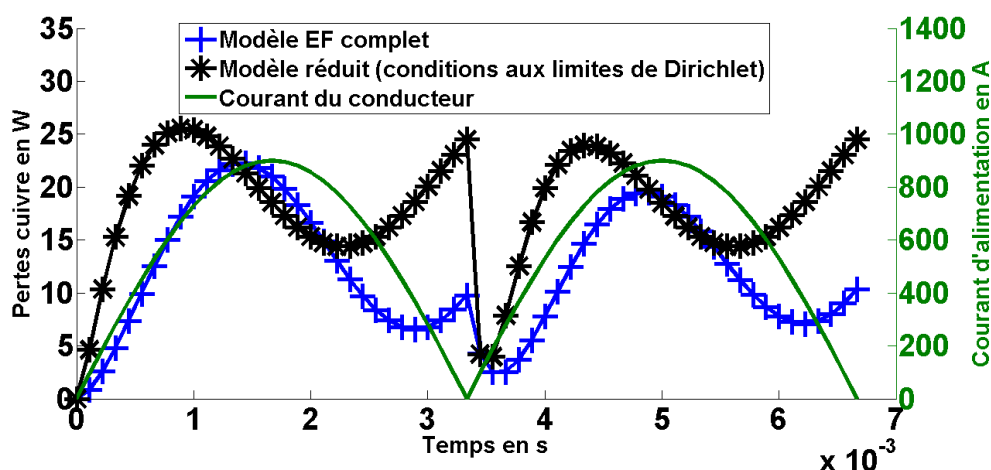


Figure 4.12 Les pertes « cuivre » instantanées durant les deux périodes d'excitation calculées par le modèle complet de référence et le modèle réduit sous les conditions aux limites de Dirichlet.

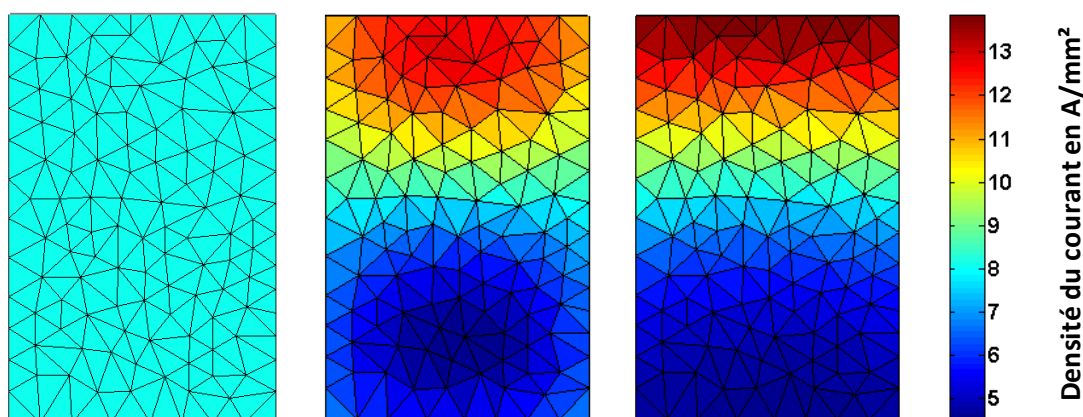


Figure 4.13 Les trois distributions de la densité du courant électrique à travers la section du conducteur calculées par le modèle complet à densité du courant uniforme (gauche), le modèle réduit sous les conditions aux limites de Dirichlet (milieu) et le modèle complet de référence (droite). Temps = 4.7 ms.

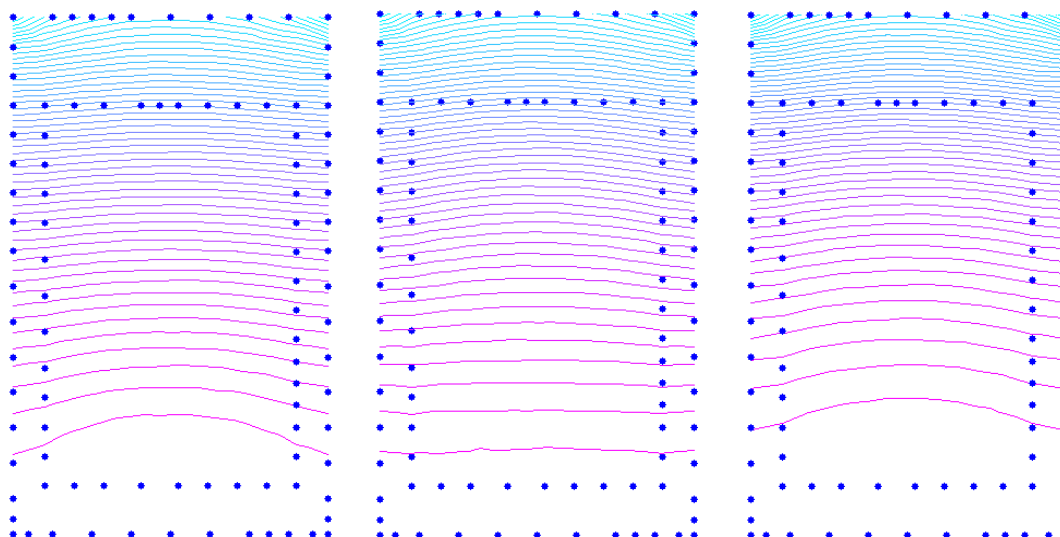


Figure 4.14 Les cartes de distribution des lignes du champ magnétique à travers le domaine de l'encoche. Gauche: Modèle complet à densité du courant uniforme. Milieu: Modèle réduit sous les conditions aux limites de Dirichlet. Droite: Modèle complet de référence.
Temps = 4.7 ms.

Sur la figure 4.12, les pertes « cuivre » instantanées calculées par le modèle complet de référence et le modèle réduit résolu sous les conditions aux limites de Dirichlet sont tracées en fonction du temps. On remarque que les conditions aux limites de Dirichlet récupérée du modèle complet résolu avec une densité du courant uniforme ne conviennent pas très bien pour la résolution du problème réduit vu que les deux courbes de pertes « cuivre » sont très écartées l'une de l'autre. Elles ne sont pas similaires: l'erreur sur la valeur moyenne dépasse le 50% alors que la valeur efficace de l'erreur instantanée approche 62%. L'écart significatif entre les courbes de pertes « cuivre » du modèle complet de référence et du modèle réduit revient à la construction non cohérente de la solution dans le domaine réduit de l'encoche. Ceci se manifeste, en outre, par une erreur importante sur la distribution de la densité du courant (Figure 4.13) et des lignes de champs magnétiques (Figure 4.14). Les figures 4.13 et 4.14 montrent respectivement la distribution de la densité du courant électrique à travers la section du conducteur et la carte de répartition des lignes du champ magnétique à travers le domaine de l'encoche à l'instant $t = 4.7 \text{ ms}$. Cet instant correspond à la valeur maximale du courant d'alimentation durant la deuxième période d'excitation (Figure 4.12).

Comme nous l'avons mentionné, l'application de la condition aux limites de Dirichlet ou en d'autres termes, l'imposition de la solution du potentiel vecteur magnétique calculée dans le modèle complet, revient à imposer sur la frontière de l'encoche dans le modèle réduit la composante normale du champ magnétique obtenue lorsque le courant électrique alimentant le conducteur est à densité du courant uniforme (Figure 4.15). Dans le cas présent, cette pratique n'est pas satisfaisante.

En effet, lorsque le conducteur de conductivité σ , est le siège des boucles des courants de Foucault, ce courant sera déplacé vers la bordure supérieure du conducteur où la densité du courant électrique représente les valeurs les plus élevées (voir la distribution de la densité

du courant à travers la section du conducteur dans le modèle complet de référence sur la figure 4.13). Cette modification de la densité du courant conduit à un déplacement important des lignes du champ magnétique à travers le domaine de l'encoche (voir la répartition des lignes du champ magnétique à travers le domaine de l'encoche sur la figure 4.14).

La figure 4.15 représente la distribution des lignes du champ magnétique à travers le système complet pour une densité du courant uniforme. Puisque les lignes du champ magnétique circulent presque dans la direction horizontale dans le domaine de l'encoche et pénètrent perpendiculairement à travers les bords du circuit magnétique (Figure 4.15), la composante du champ magnétique normale à la frontière de l'encoche sera alors la plus modifiée suite au déplacement potentiel des lignes du champ magnétique. Ce phénomène se voit clairement sur la figure 4.14 où les déplacements des lignes du champ sont dus à la circulation, à travers le conducteur, des courants additionnels de Foucault.

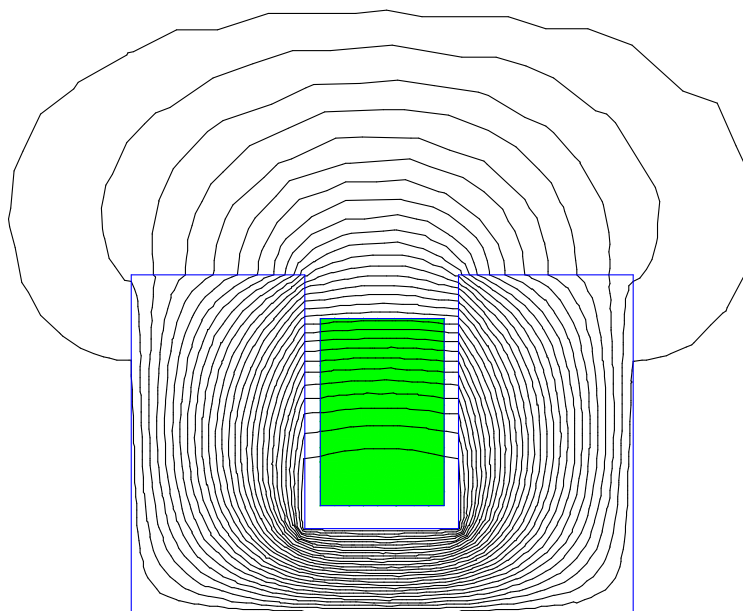


Figure 4.15 La distribution des lignes du champ magnétique lorsque le conducteur est alimenté avec un courant à densité uniforme.

4.3.3 Correction de la composante normale du champ magnétique par une condition aux limites de Neumann

Le fait alors d'imposer les conditions aux limites de Dirichlet sur le bord du domaine de l'encoche empêche toute modification de la composante normale du champ magnétique et constitue ainsi la cause principale de l'erreur importante dans la solution calculée dans le modèle réduit par rapport à la solution calculée dans le modèle complet de référence. Pour surmonter ce problème, on remplace la condition aux limites de Dirichlet, sur la frontière commune avec le circuit magnétique, par une condition aux limites appropriée qui peut corriger la composante normale du champ magnétique. C'est la condition aux limites de Neumann [ADB+016a] [ADB+016b] [BSD008].

4.3.3.1 Méthodologie

En effet, on remarque d'une part sur la figure 4.15, que les lignes du champ magnétique sont quasi parallèles à la frontière supérieure du domaine de l'encoche alors qu'elles sont pratiquement perpendiculaires aux deux autres frontières à travers lesquelles elles pénètrent dans le circuit magnétique. Même à la suite des modifications de la densité du courant suite à la circulation des boucles des courants de Foucault, ces lignes de champs sont déplacées en conservant toujours les mêmes directions globalement. On peut voir cela clairement en comparant la distribution des lignes de champs à travers le domaine de l'encoche du modèle complet dans le cas d'une alimentation à densité du courant uniforme et dans le cas du modèle complet de référence où le conducteur est le siège des boucles additionnelles des courants de Foucault (Figures 4.14 et 4.15). En partant d'autre part, des deux notions qui disent que la condition aux limites de Dirichlet permet de fixer la composante normale du champ magnétique et de corriger sa composante tangentielle sur la frontière du domaine étudié au cours de la résolution du problème et que la condition aux limites de Neumann permet au contraire de fixer la composante tangentielle et de corriger la normale, la correction du modèle réduit revient alors à décomposer la frontière Γ_r de même pour la frontière Γ_c , comme le montre la figure 4.16, en deux sous-frontières Γ_{rD} en bleu et Γ_{rN} en rouge. Sur les frontières Γ_{rD} et Γ_{rN} , on fixe respectivement les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann déjà calculées sur la frontière du domaine de l'encoche dans le modèle complet où la section du conducteur est parcourue par un courant à densité uniforme.

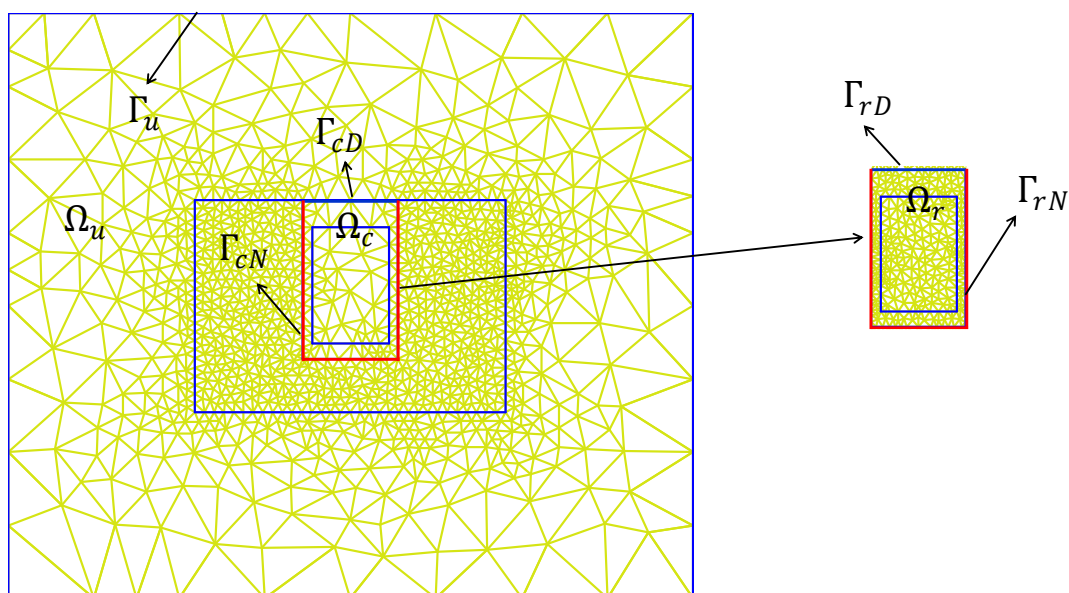


Figure 4.16 Gauche: Modèle complet à densité du courant uniforme. Droite: Modèle réduit modifié de l'encoche où la frontière Γ_r est décomposée en deux sous frontières Γ_{rD} et Γ_{rN} auxquelles on applique les conditions aux limites mixtes.

Pour expliquer la façon dont nous allons imposer les conditions de Neumann, revenons quelques instants sur la formulation aux éléments finis. Dans le modèle complet du

système électromagnétique étudié (Figure 4.15), lorsque la densité du courant à travers la section du conducteur est uniforme, son vecteur dirigé suivant l'axe des z est donné par l'équation suivante :

$$\vec{J} = \frac{I(t)}{S} \vec{e}_z \quad (4.10)$$

L'équation de Maxwell-Ampère (1.1), en se servant des équations (1.4), (1.6) et (1.14), s'écrit alors uniquement en terme du potentiel vecteur magnétique sous la forme de l'équation scalaire suivante:

$$-div \left(\nu(A_t) \overrightarrow{grad}(A_t) \right) = \frac{I(t)}{S} \quad (4.11)$$

La réductivité $\nu = \nu(A_t)$ est dépendante de la solution potentiel vecteur magnétique lorsque le circuit magnétique est à caractéristique $B(H)$ non linéaire. Soit E_ψ un ensemble des fonctions ψ dites fonctions tests ou de pondérations, quelconques et définies sur le domaine Ω_u du système électromagnétique étudié. La méthode des résidus pondérés consiste, en utilisant l'équation (4.11) et suite à une intégration par partie, à écrire l'équation sous forme intégrale suivante :

$$\iint_{\Omega_u} \left(\nu(A_t) \overrightarrow{grad}(\psi) \cdot \overrightarrow{grad}(A_t) \right) d\Omega - \oint_{\Gamma_u} \nu \psi \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma - \iint_{\Omega_u} \frac{I(t)}{S} d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

Comme on a vu précédemment dans le chapitre 1, le deuxième terme $\oint_{\Gamma_u} \nu \psi \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma$ de l'équation (4.12) est nul lorsque la condition aux limites imposée sur la frontière Γ_u est une condition de Dirichlet nulle. Par contre, lorsqu'on se limite à écrire l'équation (4.12) uniquement dans le domaine de l'encoche Ω_c de frontière Γ_c on obtient l'équation suivante :

$$\iint_{\Omega_c} \left(\nu \overrightarrow{grad}(\psi) \cdot \overrightarrow{grad}(A_t) \right) d\Omega - \oint_{\Gamma_c} \nu \psi \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma - \iint_{\Omega_c} \frac{I(t)}{S} d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

Le domaine Ω_c est à caractéristique magnétique $B(H)$ linéaire ou en d'autres termes la réductivité ν est indépendante de la solution potentiel vecteur magnétique. Le deuxième terme $-\oint_{\Gamma_c} \nu \psi \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma$ dans l'équation (4.13) ne peut pas être nul, il représente la contribution de la composante tangentielle du champ magnétique sur la frontière Γ_c de l'encoche. La discrétisation spatiale de la section 2D du domaine Ω_c de l'encoche ainsi que la formulation variationnelle de l'équation (4.13) permettent d'obtenir le système matriciel suivant :

$$[S_c][A_t] - [F_c] = [N_c] \quad (4.14)$$

$[S_c]$ est appelée la matrice de rigidité, elle est construite uniquement à travers le maillage du domaine Ω_c de l'encoche, c'est une matrice symétrique, définie positive et creuse. Le

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

vecteur $[F_c]$ est le terme source correspondant aux courants d'alimentation. Le vecteur $[N_c]$ qui est non nul uniquement pour les nœuds de la frontière Γ_c de l'encoche, il représente la contribution de la composante tangentielle du champ magnétique sur cette frontière.

Dans la pratique, le calcul du vecteur $[N_c]$ peut se faire en utilisant uniquement les nœuds appartenant à la bande de transition Δ du domaine de l'encoche Ω_c . La bande de transition Δ du côté du domaine Ω_c , comme la montre la figure 4.17, est l'ensemble des éléments du domaine Ω_c qui possèdent au moins un nœud en commun avec la frontière Γ_c . Si on appelle $[A_{t\Delta}]$ la solution potentiel vecteur magnétique aux nœuds de la bande de transition, le vecteur $[N_c]$ peut être calculé alors en utilisant l'équation suivante :

$$[S_{c\Delta}][A_{t\Delta}] - [F_{c\Delta}] = [N_c] \quad (4.15)$$

Où la matrice $[S_{c\Delta}]$ et le vecteur $[F_{c\Delta}]$ contiennent respectivement les termes de la matrice $[S_c]$ et du vecteur $[F_c]$ qui reviennent uniquement aux nœuds de la bande Δ . Du vecteur $[N_c]$ on peut retirer le vecteur $[N_c^{\Gamma_{cN}}]$ aux nœuds de la frontière Γ_{cN} , il représente la contribution de la composante tangentielle du champ magnétique sur la frontière Γ_{cN} .

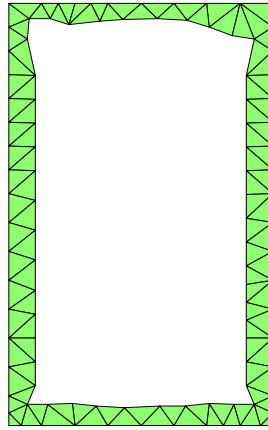


Figure 4.17 La bande de transition Δ du domaine Ω_c de l'encoche.

D'une autre part, dans le modèle réduit linéaire où le conducteur est le siège des boucles des courants de Foucault, le vecteur densité du courant est donné par l'équation suivante :

$$\vec{j} = -\left(\sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} + \sigma \Delta V_t\right) \vec{e}_z \quad (4.16)$$

L'équation de Maxwell-Ampère (1.1), en se servant des équations (1.4), (1.6) et (1.14) et en supposant une caractéristique magnétique linéaire $H = \nu B$, s'écrit alors dans le domaine de l'encoche Ω_r uniquement en terme du potentiel vecteur magnétique sous la forme de l'équation scalaire suivante:

$$\text{div} \left(\nu \overrightarrow{\text{grad}}(A_t) \right) = \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} + \sigma \Delta V_t \quad (4.17)$$

La méthode des résidus pondérés consiste, en utilisant l'équation (4.17) et suite à une intégration par partie, à écrire l'équation sous forme intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_r} \left(v \overrightarrow{grad}(\psi) \cdot \overrightarrow{grad}(A_t) \right) d\Omega - \oint_{\Gamma_r} v \psi \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma \\ + \iint_{\Omega_r} \psi \sigma \frac{\partial A_t}{\partial t} d\Omega + \iint_{\Omega_r} \psi \sigma \Delta V_t d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

La frontière Γ_r est décomposée en deux sous-frontières Γ_{rD} et Γ_{rN} , le deuxième terme de l'équation (4.18) s'écrit alors :

$$\oint_{\Gamma_r} v \psi \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma = \oint_{\Gamma_{rD}} v \psi \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma + \oint_{\Gamma_{rN}} v \psi \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (4.19)$$

Sur la frontière Γ_{rD} , on impose la solution calculée dans le modèle complet à densité du courant uniforme sur la bordure supérieure de la frontière du domaine de l'encoche Ω_c . Ceci revient en d'autres termes à imposer une conditions aux limites de Dirichlet sur Γ_{rD} . Les valeurs du potentiel vecteur magnétique sont alors connues sur les nœuds de la frontière Γ_{rD} , il n'est plus alors nécessaire d'utiliser les équations relatives à ces nœuds. Par la suite, des fonctions de forme nulles peuvent être attribuées à la frontière Γ_{rD} , et le terme $\oint_{\Gamma_{rD}} v \psi \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma$ devient alors nul.

Il reste alors à calculer le deuxième terme $\oint_{\Gamma_{rN}} v \psi \overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} d\Gamma$ qui représente la contribution de la composante tangentielle du champ magnétique sur la frontière Γ_{rN} . La discrétisation spatiale de la section 2D du domaine Ω_r de l'encoche dans le modèle réduit ainsi que la formulation variationnelle de l'équation (4.19) et l'utilisation de la formule d'Euler implicite pour la discrétisation en temps permettent d'obtenir le système matriciel suivant :

$$[S_r][A_t] + \frac{[T_r]}{\Delta t} [A_t] + [D_r][\Delta V_t] = \frac{[T_r]}{\Delta t} [A_{t-\Delta t}] + [N_r^{\Gamma_{rN}}] \quad (4.20)$$

Le vecteur $[N_r^{\Gamma_{rN}}]$ représente la contribution de la composante tangentielle du champ magnétique sur les nœuds de la frontière Γ_{rN} . De la frontière Γ_{cD} on capte la solution du potentiel vecteur magnétique sur les nœuds de cette frontière pour les appliquer comme conditions aux limites de Dirichlet directement si les maillages de Ω_c et Ω_r sont conformes ou d'appliquer leurs projections sur les nœuds de la frontière Γ_{rD} dans le cas contraire des maillages non conformes. Dans ce cas on utilise, par analogie aux équations (4.1), (4.2) et (4.3), la projection de mortar donnée par l'équation suivante :

$$[A_t^{\Gamma_{rD}}] = [Q][A_t^{\Gamma_{cD}}] \quad (4.21)$$

Où $[A_t^{\Gamma_{rD}}]$ et $[A_t^{\Gamma_{cD}}]$ sont respectivement la solution du potentiel vecteur magnétique sur les nœuds des frontières Γ_{rD} et Γ_{cD} .

D'autre part, pour imposer la condition aux limites de Neumann sur la frontière Γ_{rN} ou en d'autres termes pour imposer la composante tangentielle du champ magnétique sur cette

frontière, si les deux maillages des deux domaines Ω_c et Ω_r sont conformes, il suffit d'égaliser les deux termes suivants $[N_r^{\Gamma_{rN}}] = [N_c^{\Gamma_{cN}}]$. Par contre, si les deux maillages ne sont pas conformes et ainsi les deux bandes de transitions ne sont pas identiques on peut projeter la solution potentiel vecteur magnétique $[A_{tc\Delta}]$ aux nœuds de la bande de transition Δ du domaine Ω_c vers les nœuds de la bande de transition Δ_r du domaine Ω_r pour obtenir la solution $[A_{tr\Delta}]$ aux nœuds de cette bande. La méthode de mortar est toujours utilisée pour réaliser cette projection. Le vecteur $[N_r]$ peut être calculé alors par l'équation suivante :

$$[N_r] = [S_{u\Delta}][A_{tr\Delta}] - [F_{r\Delta}] \quad (4.22)$$

Où la matrice $[S_{r\Delta}]$ et le vecteur $[F_{r\Delta}]$ renferment les termes de la matrice de rigidité $[S_r]$ et du vecteur terme source $[F_r]$ construites tous les deux sur le maillage fin du domaine Ω_r et qui reviennent uniquement aux nœuds de la bande Δ_r . Du vecteur $[N_r]$ on peut retirer le vecteur $[N_r^{\Gamma_{rN}}]$ aux nœuds de la frontière Γ_{rN} et qui représente la contribution de la composante tangentielle du champ magnétique sur la frontière Γ_{rN} . Le vecteur $[N_r^{\Gamma_{rN}}]$ lorsqu'on le remplace par cette valeur calculée à partir de la solution potentiel vecteur du modèle complet à densité du courant uniforme permet d'imposer une condition aux limites de Neumann sur la frontière Γ_{rN} ou en d'autres termes, permet d'imposer la composante tangentielle du champ magnétique à travers la frontière Γ_{cN} du modèle complet à densité du courant uniforme sur la frontière Γ_{rN} . Le problème réduit s'avère alors un problème auquel on impose deux conditions aux limites, l'une de Dirichlet sur la frontière Γ_{rD} qui permet de fixer la composante normale du champ magnétique et de corriger sa composante tangentielle et l'autre de Neumann sur la frontière Γ_{rN} qui permet au contraire de fixer la composante tangentielle et corriger la composante normale, il s'agit alors d'un modèle réduit à conditions aux limites mixtes.

4.3.3.2 Traitement du cas des maillages non conformes

Si les maillages des deux domaines Ω_c et Ω_r ne sont pas conformes (Figure 4.18), les bandes Δ_c et Δ_r ne sont plus identiques, et ainsi une projection de la solution par la méthode de mortar est nécessaire.

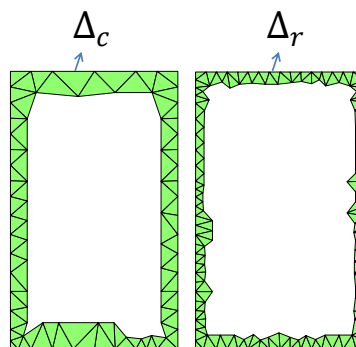


Figure 4.18 Exemple de deux bandes de transitions construites sur deux domaine de la même encoche mais à deux maillages différentes non conforme.

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

Cette dernière se fait d'une façon analogue à celle expliquée dans la partie précédente lorsqu'on était dans le cas de la projection de la solution d'une frontière vers une autre frontière différemment discrétisée. La différence maintenant est que le vecteur solution à projeter $[A_{tc\Delta}]$ est le vecteur solution potentiel vecteur magnétique sur les nœuds des éléments triangulaires de la bande Δ_c . Ce vecteur doit se projeter en utilisant la méthode de mortar classique sur les nœuds des éléments triangulaires de la bande Δ_r dans le domaine de l'encoche du modèle réduit pour obtenir le vecteur solution sur la bande $[A_{tr\Delta}]$.

Le vecteur $[A_{tc\Delta}]$ peut s'écrire alors comme fonction du vecteur $[A_{tr\Delta}]$ en utilisant les relations équivalentes suivantes :

$$[R_\Delta][A_{tr\Delta}] = [C_\Delta][A_{tc\Delta}] \quad (4.23)$$

$$[A_{tr\Delta}] = [R_\Delta]^{-1}[C_\Delta][A_{tc\Delta}] \quad (4.24)$$

$$[A_{tr\Delta}] = [Q_\Delta][A_{tc\Delta}] \quad (4.25)$$

Les matrices $[R_\Delta]$ et $[C_\Delta]$ peuvent être calculées en utilisant les intégrales surfaciques suivants à travers la bande Δ qui représente l'une des deux frontières Δ_c ou Δ_r :

$$r_{\Delta i,j} = \int_{\Delta} \psi_i \psi_j d\Gamma \quad (4.26)$$

$$c_{\Delta i,j} = \int_{\Delta} \psi_i \varphi_j d\Gamma \quad (4.27)$$

Où les coefficients $r_{\Delta i,j}$ et $c_{\Delta i,j}$ sont respectivement les coefficients des matrices $[R_\Delta]$ et $[C_\Delta]$ correspondant à la ligne i et la colonne j . La fonction ψ_i est la fonction de forme nodale sur les éléments triangulaires de la bande Δ_r connectés au nœud i qui appartient aux nœuds de discrétisation de cette bande. ψ_i est la fonction de forme non nulle au nœud i . Par analogie, La fonction φ_j est la fonction de forme sur les éléments triangulaires de la bande Δ_c connectés au nœud j . Lorsque le nombre total des nœuds de la bande Δ_r est n et le nombre des nœuds de la bande Δ_c est p , les matrices $[R_\Delta]$ et $[C_\Delta]$ ont alors comme dimensions $(n \times n)$ et $(n \times p)$ respectivement.

Si on considère un élément triangulaire quelconque sur la frontière Δ formé par les trois nœuds 1, 2 et 3 de coordonnées en 2d (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) respectivement (Figure 4.19), les fonctions de formes sur ce triangle sont données par :

$$\lambda_i(x, y) = \begin{cases} a_i x + b_i y + c_i & \text{si le point } (x, y) \text{ est inclus dans le triangle} \\ 0 & \text{si le point } (x, y) \text{ est en dehors du triangle} \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\lambda_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.29)$$

La fonction de forme non nulle au nœuds i est alors la fonction λ_i . Pour calculer les intégrales de surface dans les équations (4.26) et (4.27) afin de déterminer les termes des

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

matrices $[R_\Delta]$ et $[C_\Delta]$, on utilise la méthode numérique de quadrature qui permet d'évaluer la valeur d'une intégrale de manière approchée.

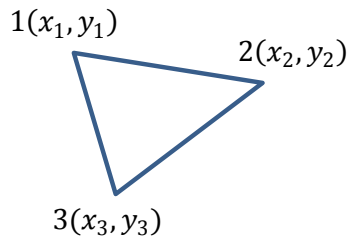


Figure 4.19 Un élément triangulaire de la bande Δ formé par les nœuds 1, 2 et 3.

En 2D, une intégrale de la fonction $f(x, y)$ sur un élément triangulaire par exemple celui de la figure (4.19) s'obtient en utilisant la méthode de quadrature par la formule suivante :

$$\iint_{\Delta^e} f(x, y) = \sum_{i=1}^m w_i f(\eta_i) \quad (4.30)$$

Les points η_i inclus dans l'élément triangulaire Δ^e sont appelés les points de Gauss-Lobatto ou les nœuds de quadrature et les coefficients réels w_i sont les poids de quadrature associés. m représente le nombre de ces points, dans notre cas on choisit $m = 4$. Pour une quadrature d'ordre de précision 3, les 4 points de Gauss-Lobatto P_1, P_2, P_3 et P_4 (Figure 4.20) choisis dans le triangle élémentaire Δ^e avec leurs poids de quadrature associés sont donnés par le tableau 4.3 suivant :

Tableau 4.3 Points de Gauss-Lobatto et les poids associés pour la quadrature d'ordre 3 sur le triangle élémentaire Δ^e ; $X_{21} = (x_2 - x_1)$, $X_{31} = (x_3 - x_1)$, $Y_{21} = (y_2 - y_1)$, $Y_{31} = (y_3 - y_1)$, et $\delta = |X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21}|$.

Points de Gauss-Lobatto	Poids associés
$x_{P_1} = \frac{1}{3} * X_{21} + \frac{1}{3} * X_{31} + x_1$ $y_{P_1} = \frac{1}{3} * Y_{21} + \frac{1}{3} * Y_{31} + y_1$	$-\frac{27}{48} \delta$
$x_{P_2} = \frac{1}{5} * X_{21} + \frac{3}{5} * X_{31} + x_1$ $y_{P_2} = \frac{1}{5} * Y_{21} + \frac{3}{5} * Y_{31} + y_1$	$\frac{25}{48} \delta$
$x_{P_3} = \frac{1}{5} * X_{21} + \frac{1}{5} * X_{31} + x_1$ $y_{P_3} = \frac{1}{5} * Y_{21} + \frac{1}{5} * Y_{31} + y_1$	$\frac{25}{48} \delta$
$x_4 = \frac{3}{5} * X_{21} + \frac{1}{5} * X_{31} + x_1$ $y_{P_4} = \frac{3}{5} * Y_{21} + \frac{1}{5} * Y_{31} + y_1$	$\frac{25}{48} \delta$

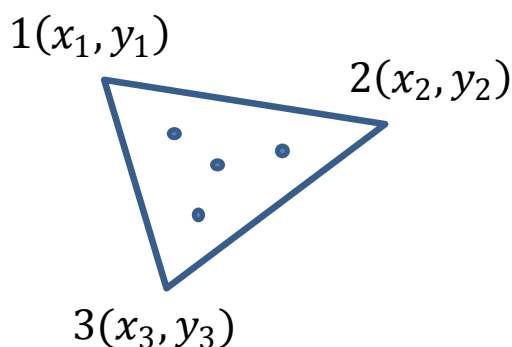


Figure 4.20 Les quatre points de Gauss-Lobatto localisés sur le triangle Δ^e .

Dans notre cas, les deux domaines de l'encoche Ω_c et Ω_r dans le modèle complet à densité du courant uniforme et dans le modèle réduit respectivement sont discrétisés avec le même maillage. Ceci permet d'annuler l'erreur qui peut être due à la projection de la solution potentiel vecteur magnétique de la bande Δ_c vers la bande Δ_r . Le cas des maillages non conformes sera étudié dans la section suivante 4.3.4 pour une application plus réaliste à la machine à reluctance variable. Lorsque le modèle complet à densité du courant uniforme est résolu, on capte l'information de la frontière Γ_c à partir de laquelle le potentiel vecteur magnétique sur la frontière Γ_{cD} et sa dérivée par rapport à la normale de la frontière Γ_{cN} sont imposées comme conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann respectivement sur les deux frontières Γ_{rD} et Γ_{rN} du domaine Ω_r de l'encoche. On rappelle que le fait d'imposer le potentiel vecteur magnétique sur la frontière Γ_{rD} revient à imposer la composante normale du champ magnétique et corriger la composante tangentielle alors que le fait d'imposer la dérivée du potentiel vecteur magnétique suivant la direction normale revient au contraire à imposer la composante tangentielle du champ magnétique et permet de corriger sa composante normale.

Le modèle réduit consiste à résoudre le problème électromagnétique par la méthode des éléments finis uniquement dans le domaine de l'encoche. On intègre le conducteur à conductivité σ et on impose sur la frontière les conditions aux limites mixtes de Neumann et de Dirichlet. Une fois les conditions aux limites imposées, le problème du modèle réduit peut être alors résolu. Pour évaluer la précision du modèle réduit, sa solution est comparée à la solution du modèle complet de référence. Le modèle complet de référence est le modèle complet résolu par la méthode des éléments finis du système électromagnétique étudié où le conducteur logé dans l'encoche a une conductivité σ .

4.3.3.3 Résultats et discussion

La figure 4.21 représente les pertes « cuivre » totales dissipées dans le conducteur. Elles sont calculées respectivement par le modèle complet de référence, le modèle réduit sous les conditions aux limites pur Dirichlet et le modèle réduit sous les conditions aux limites mixtes de Neumann-Dirichlet. La courbe des pertes « cuivre » du modèle réduit sous la condition de Dirichlet est, comme nous l'avons vu précédemment, clairement éloignée de la courbe des pertes « cuivre » de référence, avec une erreur quadratique de l'ordre de 62%.

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

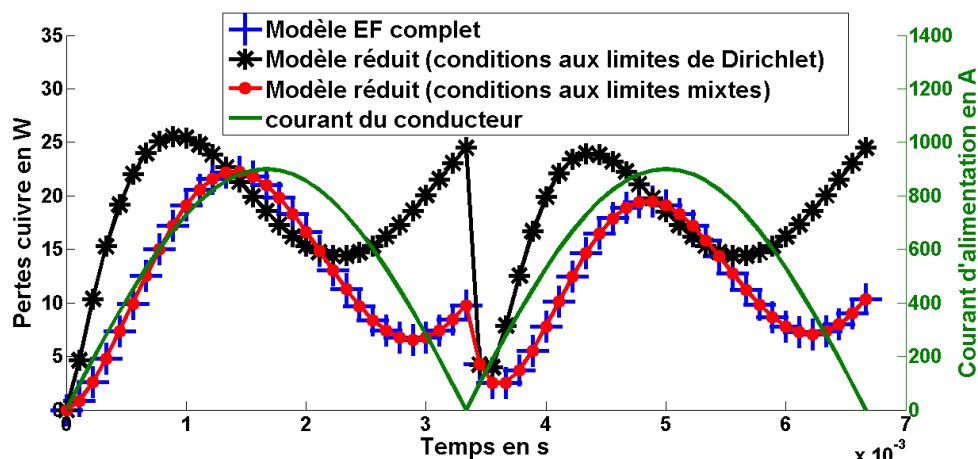


Figure 4.21 Les pertes « cuivre » instantanées durant les deux périodes d'excitation calculées par le modèle complet et le modèle réduit sous les conditions aux limites mixtes.

Le modèle réduit modifié à conditions aux limites mixtes permet de corriger cette erreur telle que la courbe de perte est ostensiblement conforme avec la courbe de perte de référence avec une erreur quadratique sur les valeurs instantanées très faibles qui ne dépassent pas 0.01%.

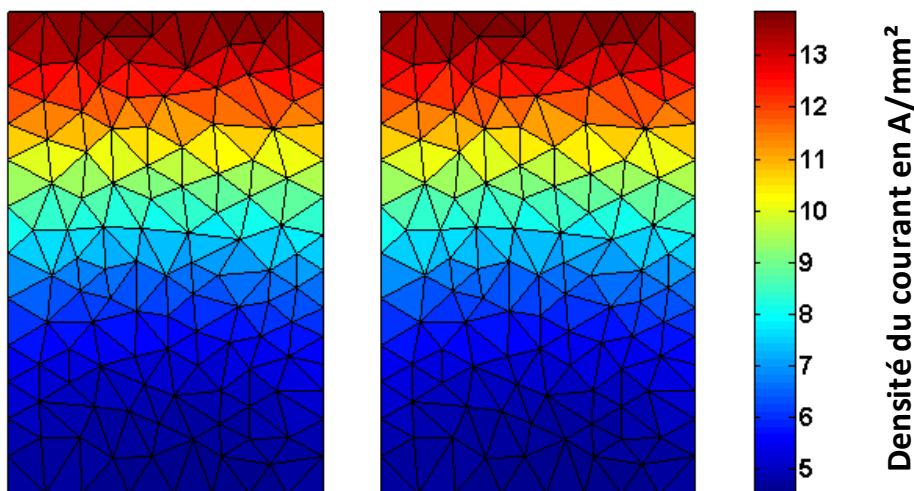


Figure 4.22 Les deux distributions de la densité du courant électrique à travers la section du conducteur calculées par le modèle complet de référence (gauche) et le modèle réduit sous les conditions aux limites mixtes (droite). Temps = 4.7 ms.

Sur la figure 4.22 on représente les deux distributions de la densité du courant électrique calculées par le modèle réduit et le modèle complet de référence respectivement. Cette densité du courant est calculée à l'instant $T = 4.7 \text{ ms}$ où le courant d'alimentation représente sa valeur maximale durant la deuxième période d'excitation. La différence entre la distribution de la densité du courant électrique du modèle réduit et du modèle complet de référence est très faible, voir difficilement détectable. On remarque ainsi que la précision du modèle réduit résolu sous les conditions aux limites mixtes est excellente, sa solution est pratiquement superposée avec la solution du modèle de référence. La condition aux limites de Neumann sur la frontière Γ_{rN} de l'encoche commune avec le circuit magnétique permet

de corriger la composante normale du champ magnétique qui en pénètre à travers cette frontière. Cette correction de la composante normale du champ magnétique a permis une prise en compte de la déviation des lignes du champ magnétique dans le domaine de l'encoche. Cette déviation du courant est due au déplacement du courant dans le conducteur vers sa bordure supérieure suite à la variation de la densité du courant à travers sa section qui est due à son tour à la circulation des boucles des courants induits additionnelles de Foucault (Figure 4.22). Sur la figure 4.23 on représente les trois distributions des lignes du champ magnétique dans le domaine de l'encoche du modèle complet à densité du courant uniforme, du modèle réduit sous les conditions aux limites mixtes et du modèle complet de référence.

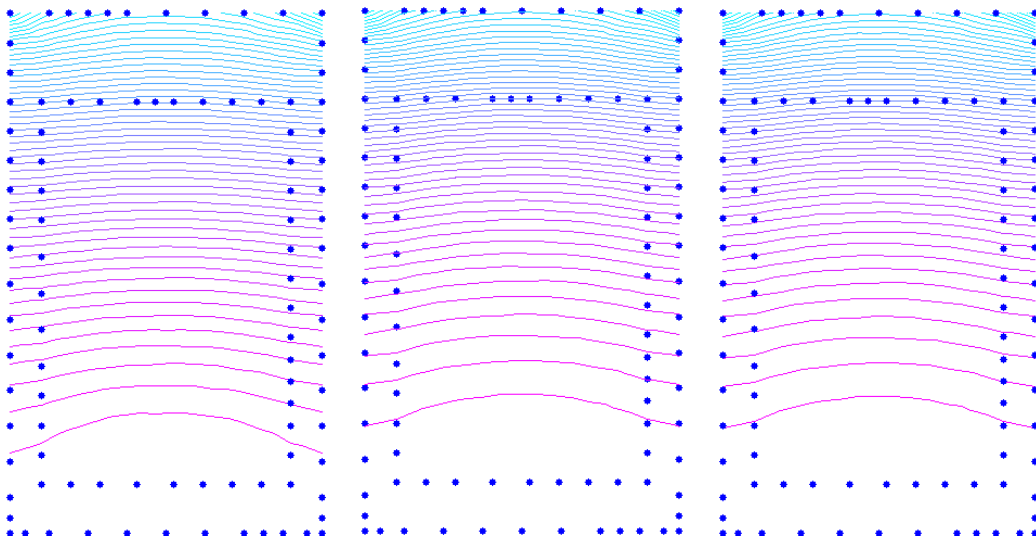


Figure 4.23 Les cartes de distribution des lignes du champ magnétique à travers le domaine de l'encoche. Gauche: Modèle complet à densité du courant uniforme. Milieu: Modèle réduit sous les conditions aux limites mixtes. Droite: Modèle complet de référence. Temps = 4.7 ms.

Le déplacement des lignes du champ magnétique dans le modèle complet à courants induits par rapport aux lignes du champ magnétique du modèle complet à densité du courant uniforme a été prise en compte dans le modèle réduit par l'intermédiaire de la condition aux limites de Neumann sur la frontière Γ_{rN} . Les deux distributions des lignes du champ dans le modèle complet de référence et le modèle réduit, à travers le domaine de l'encoche, sont identiques. Ceci indique d'une part véritablement la compatibilité entre la solution du modèle réduit avec la solution du modèle complet de référence et souligne d'une autre part le fait que la modification des lignes du champ magnétique sortant de l'encoche grâce à la circulation des boucles des courants de Foucault peut être bien représentée et interprétée dans le modèle réduit au moyen de la condition aux limites imposée de Neumann.

4.3.4 Application à la machine à réluctance variable

Comme on a vu précédemment, la méthode de réduction du modèle par la technique de la perturbation, dans le cas des bobinages à conducteurs massifs logés dans des encoches

du circuit magnétique, n'est efficace que si elle permet d'attribuer au domaine réduit de l'encoche des conditions aux limites mixtes de Neumann-Dirichlet. Des conditions aux limites de type Neumann permettent la correction de la composante normale du champ magnétique sur la frontière du domaine. Cette déviation est la conséquence de la circulation des boucles de courants additionnelles de Foucault qui favorisent la non-homogénéité de la distribution de la densité du courant et entraînent alors le déplacement du courant à travers la section des conducteurs massifs.

4.3.4.1 Position du problème et méthodologie

L'exemple étudié dans la partie précédente était un exemple simple où il s'agissait d'un seul conducteur massif logé dans l'encoche d'un circuit magnétique symétrique. On souhaite par contre dans cette partie appliquer la méthode de réduction du modèle par la technique de la perturbation sur l'exemple de la machine à réductance variable. Dans cet exemple, il y a le mouvement du rotor qui vient s'ajouter pour modifier à son tour la déviation des lignes du champ à travers le domaine de l'encoche. Le bobinage de la machine est formé de 18 spires par dent et alimenté par le courant $I(t)$. Chaque spire est formée d'un conducteur massif à section transversale rectangulaire de surface s qui peut être dimensionné de différentes manières donnant la possibilité d'avoir six différentes configurations d'enroulement ou en d'autres termes six différentes géométries de distribution des conducteurs dans le domaine d'encoche de la machine (Figure 4.24).

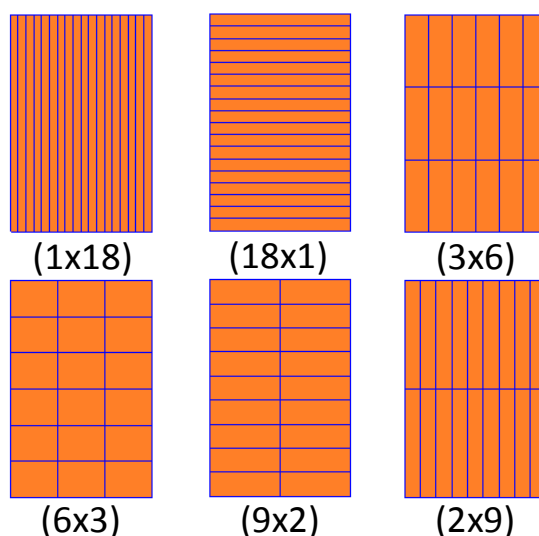


Figure 4.24 Les 6 dispositions possibles des conducteurs dans l'encoche le machine dans le cas d'un bobinage à 18 spires par dents.

Les pertes « cuivre » sont la somme des pertes Ohm classiques et des pertes additionnelles par courants de Foucault. Ces dernières lorsqu'elles existent avec une proportion importante, conduisent à dégrader fatalement le rendement de la machine. En se basant sur l'hypothèse qui dit que les pertes par courant de Foucault sont fortement corrélées à la configuration de l'enroulement, il est alors fortement recommandé de choisir la configuration optimale. D'une part, la méthode de discrétisation par éléments finis

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

lorsqu'elle modélise la non linéarité du circuit magnétique par les itérations de Newton-Raphson, prend en compte le mouvement du rotor par la technique de la bande de mouvement, et adapte un maillage fin dans les matériaux conducteurs, permet, comme on a déjà vérifié dans le chapitre 2, une bonne interprétation du phénomène des courants de Foucault et ainsi un calcul précis des pertes « cuivre » totales dans la machine. Le calcul par éléments finis aboutit généralement à une grande capacité de stockage et un temps de calcul conséquent, il entrave ainsi tout processus de conception et d'optimisation de la configuration de l'enroulement en termes de pertes « cuivre ». D'autre part, La méthode analytique lorsqu'elle travaille sous des hypothèses simplificatrices réductrices de la complexité du problème telle que à titres d'exemples, sans s'y limiter, la négligence de la non linéarité du circuit magnétique et le mouvement du rotor, elle réduit considérablement le temps de calcul mais perd simultanément l'intérêt de calculer avec une précision acceptée les pertes cuivres dans les enroulements des machines. La méthode de réduction du modèle par la technique de la perturbation, en adaptant les conditions aux limites appropriées sur la frontière du domaine réduit, est proposée alors comme un compromis. Pour éviter pour chaque nouvelle configuration d'enroulement ou après chaque modification de la conductivité du matériau conducteur un calcul par éléments finis du modèle complet non linéaire de la machine, un seul calcul par éléments finis du modèle complet non linéaire de la machine avec un maillage grossier, un bobinage simplifié et une densité du courant uniforme est nécessaire. Le bobinage simplifié est constitué d'une seule spire massive ou en d'autres termes de deux conducteurs massifs d'aller et de retour de surface $S = 18 * s$ chacun et alimentée par le courant $18 * I(t)$ (Figure 4.25).

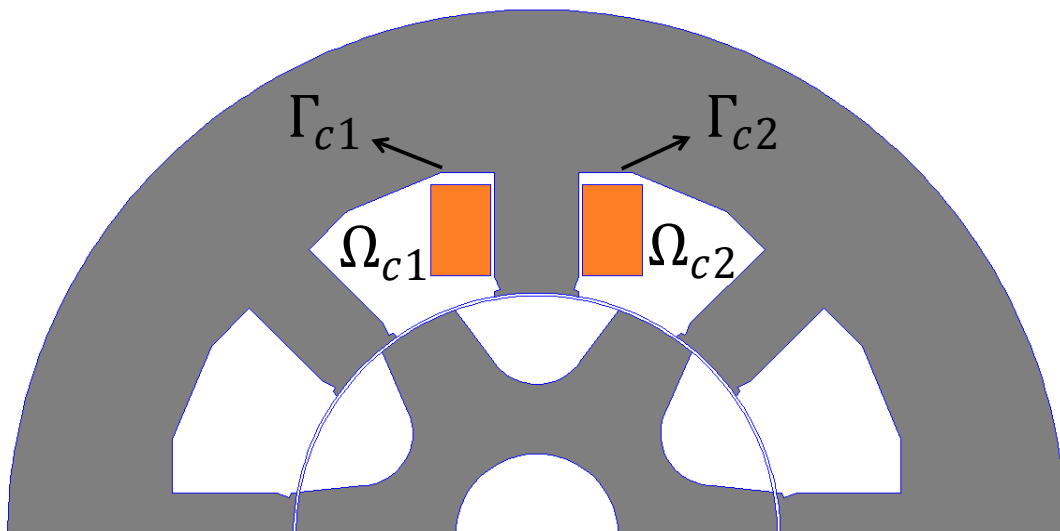


Figure 4.25 Modèle complet de la machine à bobinage simplifié à une seule spire par dent et une densité du courant uniforme.

Une fois ce modèle résolu, on capte l'information sur la frontière du domaine de l'encoche que ce soit la composante normale de l'induction magnétique ou la composante tangentielle du champ magnétique. Ces deux composantes sont appliquées comme des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann respectivement à travers la frontière du domaine de

l'encoche où on intègre maintenant la configuration géométrique réelle de l'enroulement. Contrairement au modèle grossier où le bobinage simplifié était alimenté par un courant à densité uniformément répartie, le bobinage réel du domaine réduit est constitué d'un matériau conducteur à conductivité σ , il est donc le siège des courants additionnels de Foucault. Le modèle réduit consiste alors à résoudre par la méthode des éléments finis le problème électromagnétique uniquement dans le domaine linéaire de l'encoche. Les conducteurs d'aller et de retour du même bobinage ne voient pas les mêmes influences électromagnétiques et développent ainsi des pertes par courant de Foucault différentes. Les deux domaines de l'encoche de part et d'autre de la dent du stator sont alors modélisés pour obtenir la valeur des pertes « cuivre » totales du bobinage. Il faut noter que les conducteurs d'aller et de retour dans les deux encoches, appartiennent au même bobinage et sont alimentés par le même courant $I(t)$. Cependant, ces conducteurs ne voient pas les mêmes influences électromagnétiques parce qu'en fait, grâce à la saillance du rotor, ces conducteurs, à la même valeur du courant, ne voient pas la même position des deux dents du rotor les plus proches. En résumé, lorsque le modèle complet à densité du courant uniforme est résolu, on capte alors l'information sur les frontières Γ_{c1} et Γ_{c2} des deux domaines de l'encoche Ω_{c1} et Ω_{c2} afin d'être attribuée comme condition aux limites de Neumann et de Dirichlet sur les frontières Γ_{r1} et Γ_{r2} des deux domaines de l'encoche Ω_{r1} et Ω_{r2} où on intègre les conducteurs d'aller et de retour respectivement (Figure 4.26).

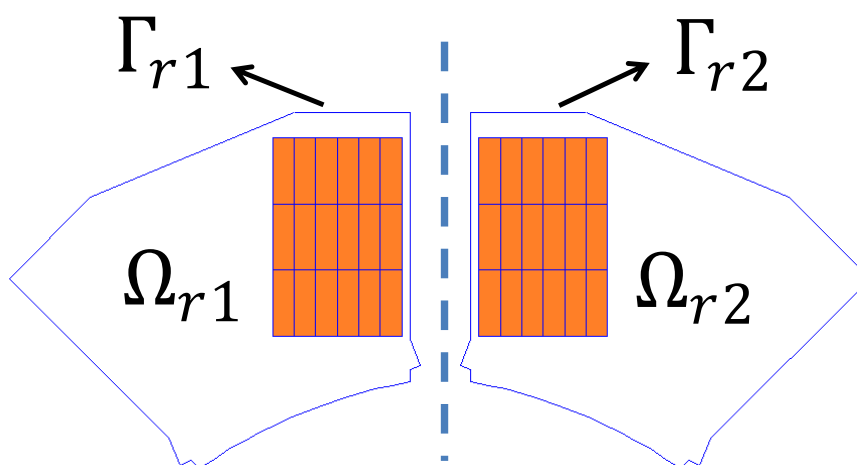


Figure 4.26 Modèle réduit des deux encoches de la machine intégrant respectivement les conducteurs d'aller et de retour du bobinage réelle (configuration (3x6)) où on suppose la circulation des courants de Foucault.

Sur l'exemple du cas test de la partie précédente, le fait d'ajouter une condition aux limites de Neumann sur la frontière du domaine de l'encoche Γ_{rN} commune avec le circuit magnétique, permet de corriger la composante normale du champ magnétique sur cette frontière. Ceci avait pour conséquence de prendre en compte le déplacement intense des lignes du champ magnétique qui peut avoir lieu grâce à la circulation des boucles additionnelles des courants du Foucault. La condition de type Neumann est la condition aux limites appropriée sur la frontière Γ_{rN} , puisque les lignes du champ magnétique pénétrant dans le circuit magnétique sont quasi perpendiculaires à cette frontière. Les lignes du champ

magnétique étant quasi parallèles à la frontière Γ_{rD} , la condition aux limites de Dirichlet correspond parfaitement sur cette frontière.

La figure 4.27 représente la distribution des lignes du champ magnétique à travers une demi-section de la machine à réluctance variable dans le cas d'un bobinage simplifié à densité de courant uniforme. Sur cette figure, on remarque, également à l'exemple précédent du cas-test, que les lignes du champ magnétique pénètrent sous une direction quasi-perpendiculaire à travers la frontière commune au circuit magnétique. De même, sur la frontière qui est localisée du côté de l'entrefer, les lignes du champ magnétique traversent quasi-perpendiculairement cette frontière pour joindre la dent du rotor qui passe à la proximité. Sur la frontière de l'encoche, les lignes du champ magnétique sortent perpendiculairement pour joindre le circuit magnétique fixe du stator ou mobile du rotor, la condition aux limites de Neumann est alors la condition qui va être imposée sur l'intégralité de cette frontière pour permettre la correction de la composante normale du champ magnétique. Cette composante est prévue d'être largement modifiée lorsqu'on intègre la configuration d'enroulement réelle de conductivité σ dans le domaine de l'encoche du modèle réduit. Pour s'assurer que la solution à chaque pas de temps ne soit pas quelconque et imposer alors le fait que le problème réduit intégrant la configuration réelle de l'enroulement soit une correction de la solution dans l'encoche du modèle complet à densité de courant uniforme, il faut imposer la valeur du potentiel vecteur magnétique en un seul nœud sur la frontière. C'est la valeur du potentiel vecteur magnétique qui a été calculée dans le modèle complet à densité de courant uniforme en ce même nœud. Ce nœud est généralement choisi sur un coin de l'encoche pour qu'il ne varie pas en changeant la densité du maillage du domaine de l'encoche. Le fait d'imposer le potentiel vecteur magnétique, en un seul nœud, revient donc à imposer une condition aux limites de Dirichlet en ce nœud, et le problème réduit dans le domaine de l'encoche sera résolu alors sous les conditions aux limites mixtes de Neumann-Dirichlet.

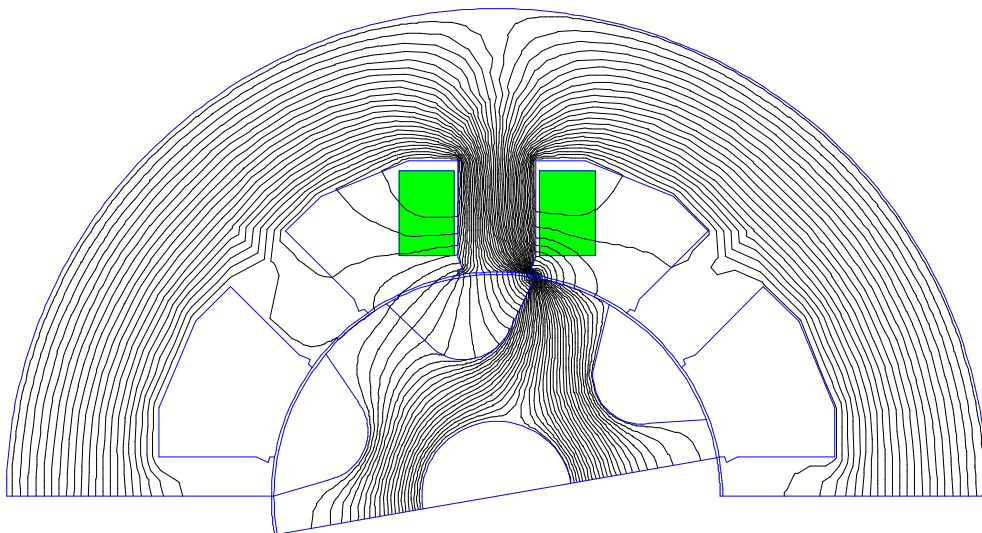


Figure 4.27 Distribution des lignes du champ magnétique dans le cas d'une machine à bobinage simplifié pour une position donnée du rotor ($\theta_e = 60^\circ$ électrique).

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

Normalement, les maillages des encoches dans le modèle complet à densité du courant uniforme et dans le modèle réduit où on intègre la configuration réelle de l'enroulement, ne sont pas conformes (Figure 4.28 et 4.29).

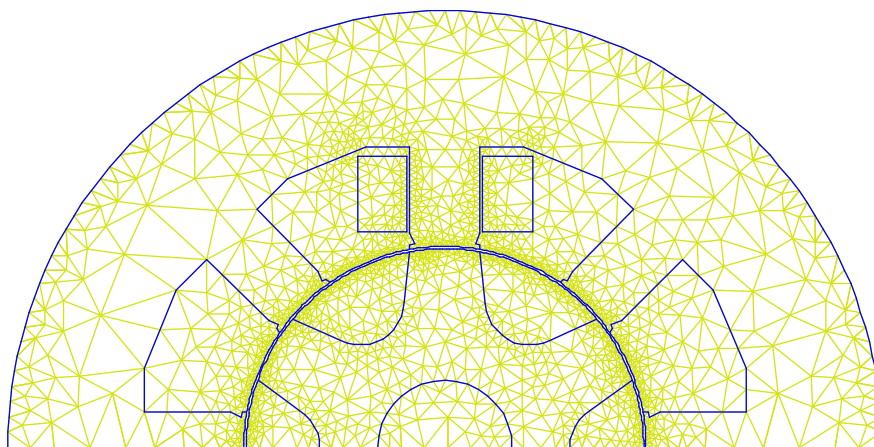


Figure 4.28 Maillage grossier d'une demi-section de la machine à bobinage simplifié.

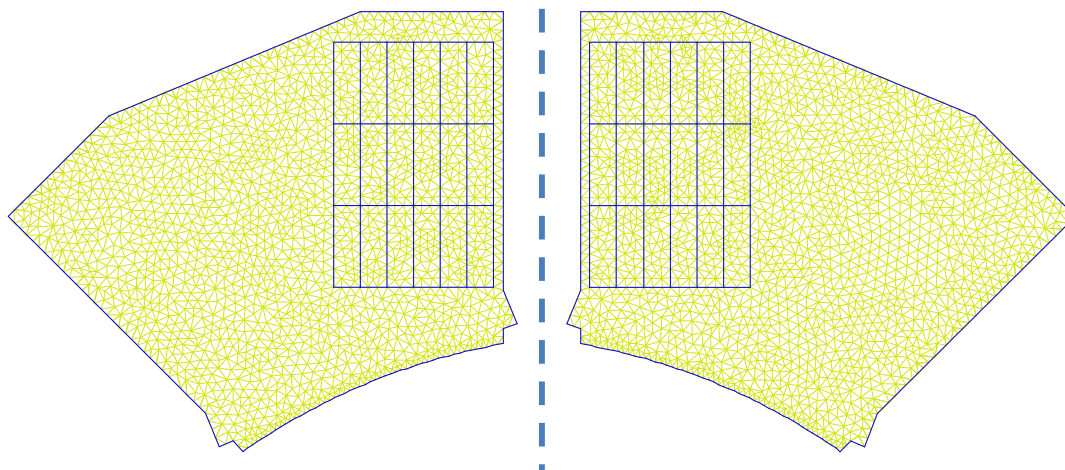


Figure 4.29 Maillage fin dans les modèles réduits des encoches où on intègre les conducteurs d'aller et de retour de la configuration géométrique de l'enroulement (3x6).

Ceci est dû au fait que le modèle complet est à densité du courant uniforme, ainsi un maillage grossier du conducteur est suffisant. Tandis que dans le modèle réduit, on intègre le bobinage à conductivité σ dans le domaine de l'encoche et un maillage fin est pratiquement nécessaire pour prendre en compte les effets des courants de Foucault. Un maillage différent dans les deux domaines implique des discrétisations différentes de leurs frontières. Pour la condition de Dirichlet, la valeur du potentiel vecteur est imposée en un seul nœud de la frontière, aucune projection est alors nécessaire par contre pour projeter la composante tangentielle du champ magnétique afin de l'appliquer comme une condition aux limites de Neumann sur la frontière du modèle réduit, la projection de mortar est utilisée : la solution du potentiel vecteur magnétique est alors projetée de la bande de transition du domaine de l'encoche dans le modèle complet vers la bande de transition de celui dans le modèle réduit. La bande de transition étant la bande ou la couche des éléments triangulaires de maillage

incluses dans le domaine de l'encoche et ayant des nœuds en commun avec la frontière du domaine de l'encoche. Une fois, l'information est captée des frontières Γ_{c1} et Γ_{c2} des deux domaines de l'encoche Ω_{c1} et Ω_{c2} , elle sera projetée sur les frontières Γ_{r1} et Γ_{r2} . Le problème réduit dans les domaines de l'encoche Ω_{r1} et Ω_{r2} pourra être résolu ainsi pour chaque nouvelle configuration réelle de l'enroulement.

4.3.4.2 Résultats et discussion

Pour valider le modèle réduit et apprécier sa précision, on compare sa solution dans les deux encoches intégrant les conducteurs d'aller et de retour avec la solution calculée par le modèle complet de la machine (Figure 4.30). Ce modèle complet non linéaire, dit de référence, intègre la configuration réelle de l'enroulement à conductivité σ qui est alors le siège des boucles additionnelles de courants de Foucault.

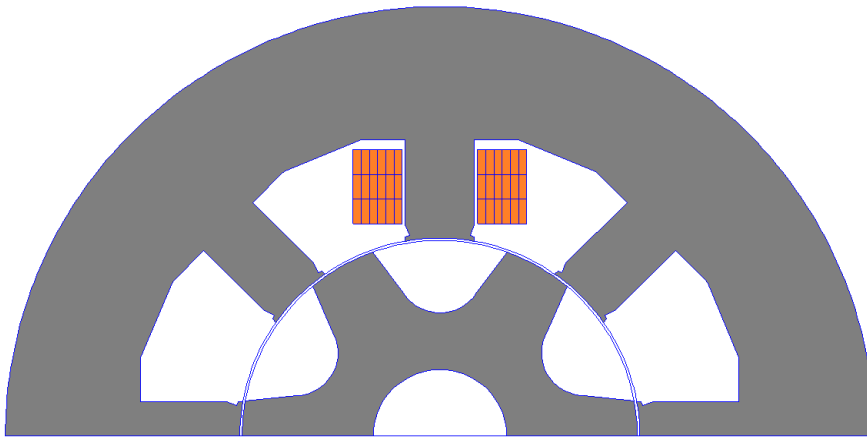


Figure 4.30 Modèle complet de la machine avec un bobinage réelle (configuration (3×6)) et une densité du courant électrique incluant les courants induits de Foucault.

Entre le modèle complet de référence et le modèle réduit, les grandeurs comparées sont :

- les pertes « cuivre » totales instantanées dans les conducteurs d'aller et de retour.
- les pertes « cuivre » locales instantanées dans les six conducteurs critiques à la proximité de l'entrefer.
- la distribution de la densité du courant électrique dans les conducteurs d'aller et de retour à la position du rotor qui représente le plus de pertes.
- la distribution des lignes du champ magnétique à travers les deux domaines des encoches à gauche et à droite intégrant les conducteurs d'aller et de retour respectivement à cette même position du rotor.

Les six conducteurs critiques d'aller et de retour sont les conducteurs qui représentent le plus des pertes additionnelles par courants de Foucault, ils sont localisés à la proximité de l'entrefer. Les positions du rotor auxquelles les pertes « cuivre » instantanées représentent

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

leur maximum dans les conducteurs d'aller et de retour sont respectivement en degré électrique $\theta_{e1} = 45^\circ$ et $\theta_{e2} = 48^\circ$. Sur les figures 4.31 et 4.35, on trace respectivement les pertes « cuivre » dissipées dans les conducteur d'aller et de retour respectivement. Ces pertes dans chaque cas sont calculées par le modèle complet de référence et le modèle réduit dans le domaine de l'encoche. Les courbes calculées par le modèle complet de référence et le modèle réduit se superposent l'une sur l'autre, elles sont largement congruentes avec une erreur quadratique très faible de $\varepsilon_{eff} = 1.53\%$ et $\varepsilon_{eff} = 1.87\%$ dans les conducteurs d'aller et de retour respectivement. Lorsque les valeurs moyennes des pertes « cuivre » dans les conducteurs d'aller et de retour calculées par le modèle complet de référence sont $\langle P_{cuivre} - MEFC \rangle = 66.04 \text{ W}$ et $\langle P_{cuivre} - MEFC \rangle = 79.3 \text{ W}$, le modèle réduit sous les conditions aux limites mixtes indique les valeurs suivantes $\langle P_{cuivre} - MRCLM \rangle = 64.74 \text{ W}$ et $\langle P_{cuivre} - MRCLM \rangle = 79.02 \text{ W}$ avec une erreur très légère sur la valeur moyenne de $\varepsilon_m = 0.46\%$ et $\varepsilon_m = 0.35\%$ respectivement. Il faut noter que les abréviations MEFC et MRCLM correspondent respectivement à "modèle éléments finis complet" et "modèle réduit sous les conditions aux limites mixtes". Les résultats du modèle réduit sont très satisfaisants, pas seulement au niveau des pertes totales, mais pareillement au niveau des pertes locales dans les différents conducteurs individuels et plus particulièrement dans les conducteurs critiques qui sont localisés à la proximité de l'entrefer et qui présentent le plus de pertes. Les pertes « cuivre » locales instantanées produites par ces 6 conducteurs d'aller et de retour sont tracées respectivement sur les figures 4.32 et 4.36. On remarque que ces pertes calculées par le modèle réduit présentent des courbes qui correspondent aisément à celles calculées par le modèle complet de référence avec des erreurs efficaces faibles et des erreurs sur la valeur moyenne qui ne dépassent pas le 1%.

De point de vue grandeurs locales telles que la densité du courant électrique, les figures 4.33 et 4.37 donnent la distribution de la densité du courant électrique à travers le maillage des conducteurs d'aller et de retour respectivement. Ce calcul de la distribution de la densité du courant est effectué à la position du rotor où les pertes « cuivre » présentent leur valeur maximale de pertes. La différence entre les distributions de la densité du courant électrique calculées par le modèle complet de référence et le modèle réduit est particulièrement faible d'une façon qu'on ne peut pas la remarquer. Les figures 4.34 et 4.38 représentent les cartes de distribution des lignes du champ magnétique à travers les domaines des encoches localisés de part et d'autre de la dent du stator et qui renferment respectivement les conducteur d'aller et de retour de la configuration d'enroulement (3×6). La distribution des lignes du champ dans les domaine des encoches sont quasiment identiques dans le modèle complet de référence et dans le modèle réduit, ce qui montre d'une part l'importante coïncidence entre les deux solutions calculées par le modèle réduit et le modèle complet de référence. Cela souligne d'une autre part le fait que la modification des lignes du champ magnétique sortant de l'encoche grâce à la circulation des boucles des courants de Foucault peut être bien prise en compte dans le modèle réduit par la condition aux limites de type Neumann qui permet la correction de la composante normale du champ magnétique.

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

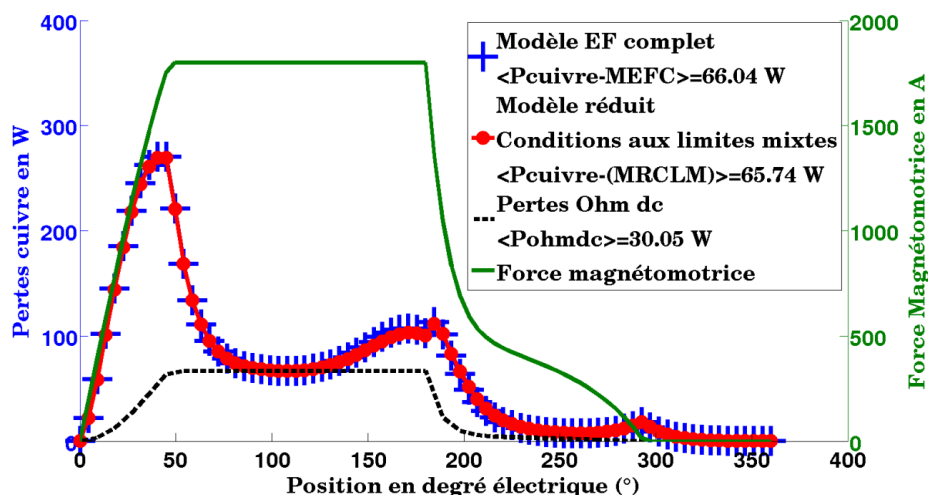


Figure 4.31 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d’aller de la configuration d’enroulement (3×6) calculées par le modèle complet et le modèle réduit.

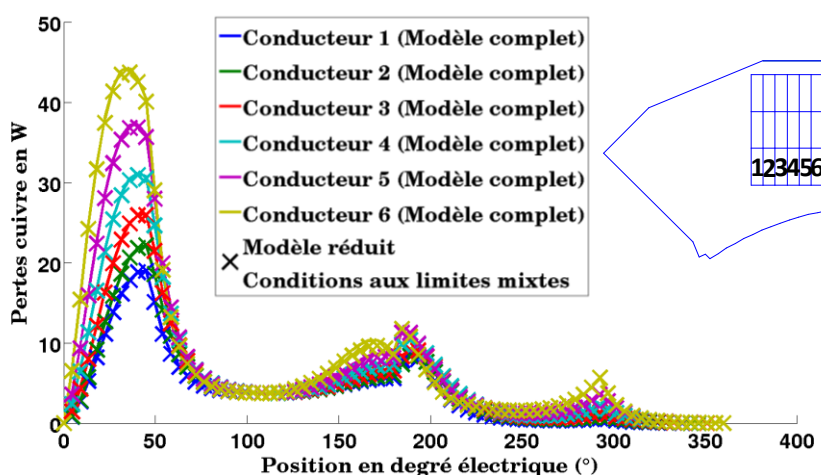


Figure 4.32 Les pertes « cuivre » instantanées locales dans les 6 conducteurs d’aller critiques au voisinage de l’entrefer de la configuration d’enroulement (3×6) calculées par le modèle complet et le modèle réduit.

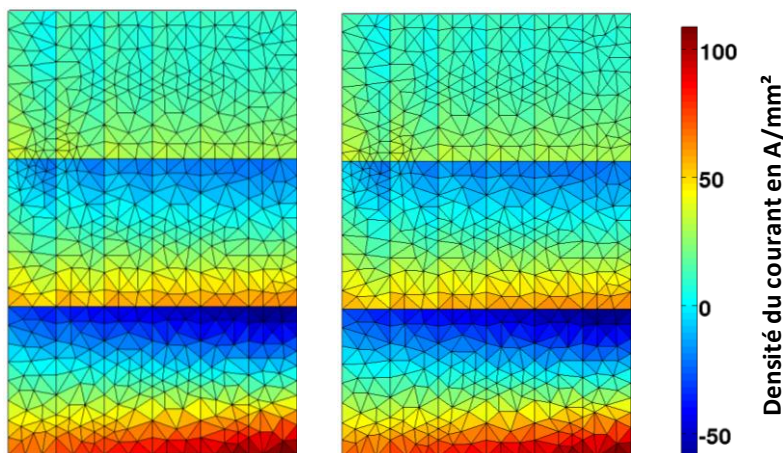


Figure 4.33 Les deux distributions de la densité du courant électrique à travers la section du conducteur d’aller de la configuration d’enroulement (3×6) calculées par le modèle complet de référence (gauche) et le modèle réduit (droite). Position du rotor $\theta_e = 45^\circ$ électriques.

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

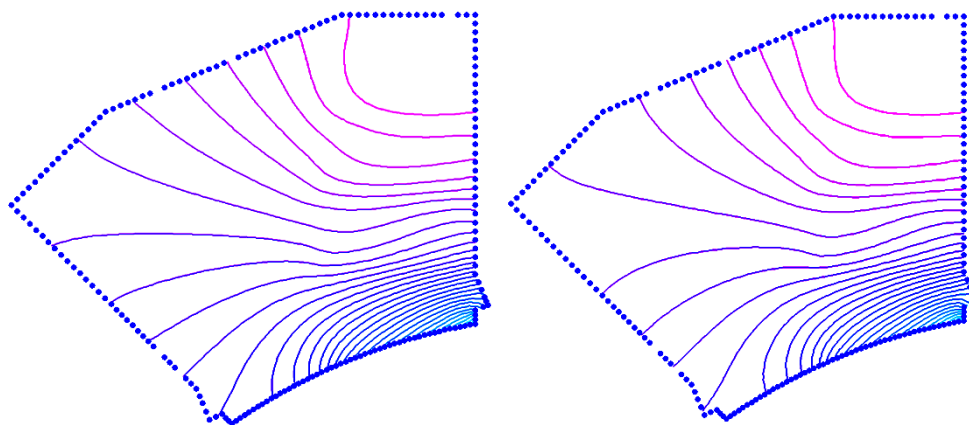


Figure 4.34 Les cartes de distribution des lignes du champ magnétique à travers le domaine de l'encoche intégrant les conducteurs d'aller de la configuration d'enroulement (3×6). Gauche: Modèle réduit. Droite: Modèle complet de référence. Position du rotor $\theta_e = 45^\circ$ électriques.

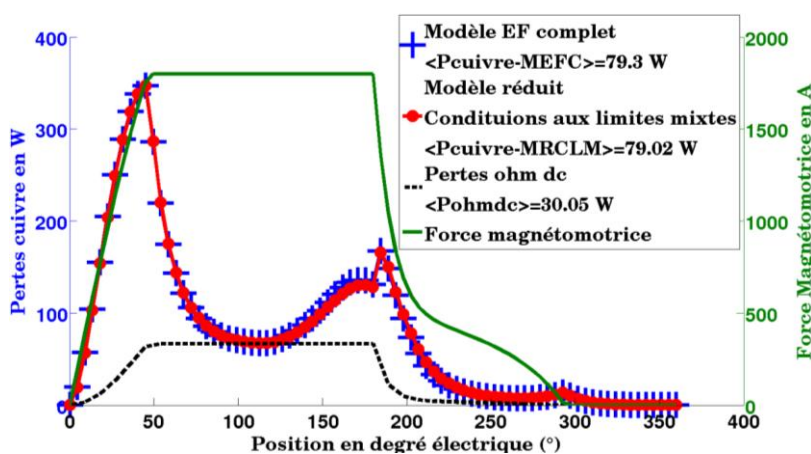


Figure 4.35 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs de retour de la configuration d'enroulement (3×6) calculées par le modèle complet et le modèle réduit.

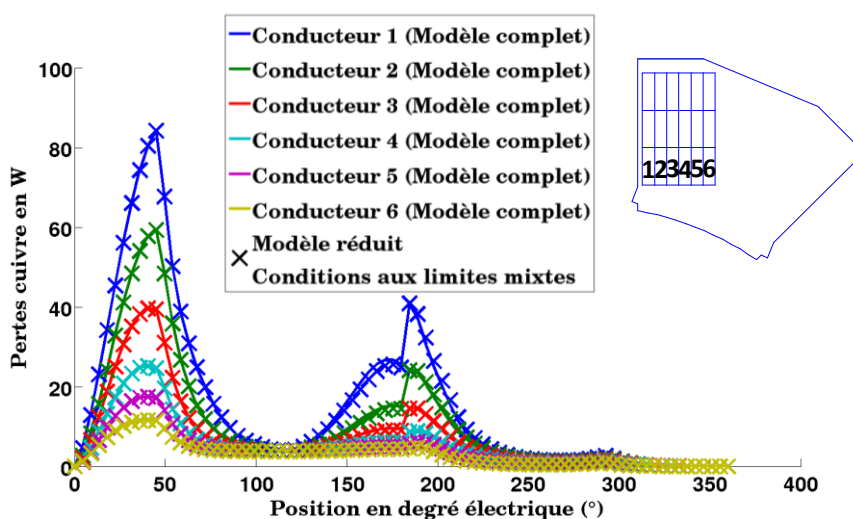


Figure 4. 36 Les pertes « cuivre » instantanées locales dans les 6 conducteurs de retour critiques au voisinage de l'entrefer de la configuration d'enroulement (3×6) calculées par le modèle complet et le modèle réduit.

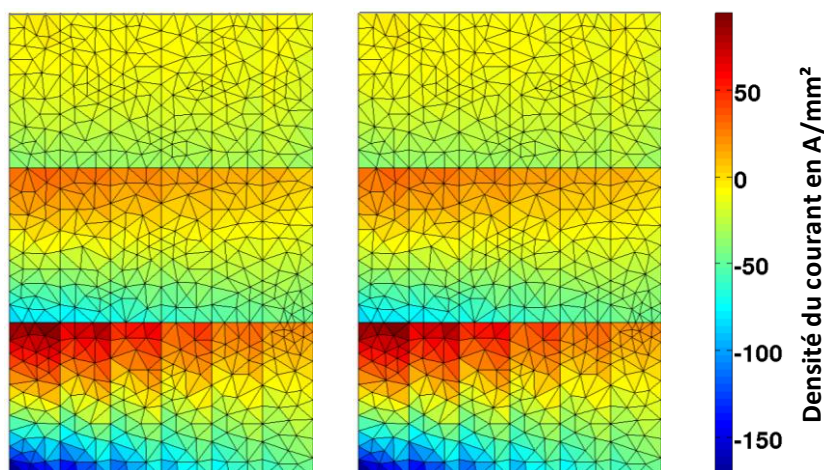


Figure 4. 37 Les deux distributions de la densité du courant électrique à travers la section du conducteur de retour de la configuration d’enroulement (3×6) calculées par le modèle complet de référence (gauche) et le modèle réduit (droite). Position du rotor $\theta_e = 48^\circ$ électriques.

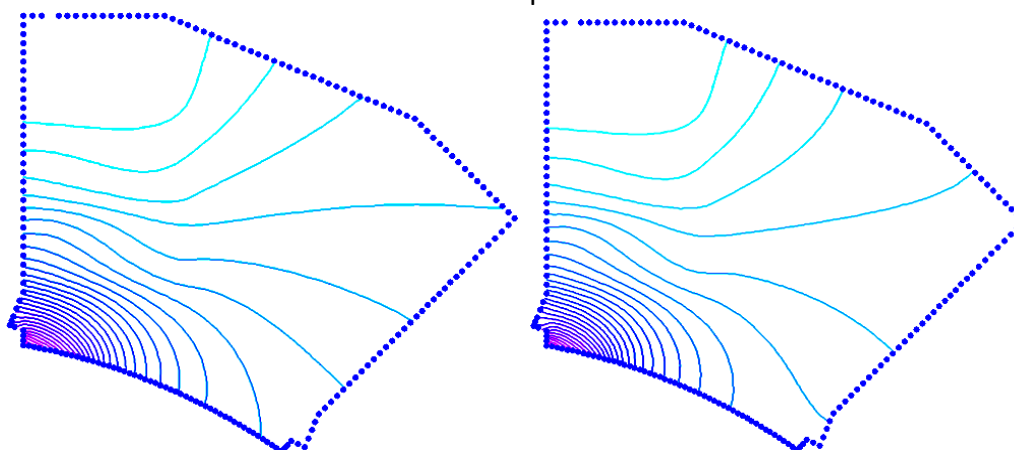


Figure 4.38 Les cartes de distribution des lignes du champ magnétique à travers le domaine de l’encoche intégrant les conducteurs de retour de la configuration (3×6). Gauche: Modèle réduit. Droite: Modèle complet de référence. Position du rotor $\theta_e = 48^\circ$ électriques.

Le même calcul a été fait pour les autres configurations d’enroulement (1x18) qui représente la disposition en spires verticales, (2x9), (6x3), (9x2) et (18x1) qui représentent à son tour la disposition en spires horizontales. Les pertes « cuivre » développées dans les conducteurs d’aller et de retour de ces différentes configurations sont représentées sur les figures (4.39), (4.40), (4.41), (4.42) et (4.43) respectivement. Ces courbes de pertes qui sont calculées par le modèle complet de référence et le modèle réduit se correspondent largement avec des erreurs efficaces et des erreurs sur la valeur moyenne très faibles. Ceci montre clairement l’efficacité et la précision du modèle réduit dans le calcul des effets électromagnétiques des courants de Foucault dans les encoches des machines telles que la machine à réluctance variable. Les valeurs moyennes des pertes « cuivre » dans les conducteurs d’aller et de retour pour les différentes configurations d’enroulement calculées par le modèle complet de référence et le modèle réduit sont synthétisées dans le tableau 4.4. Ce tableau représente en plus, les valeurs de l’erreur relative efficace (erreur quadratique) ε_{eff} et l’erreur sur la

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

valeur moyenne ε_m . L'erreur efficace représente la valeur efficace de l'erreur sur les valeurs instantanées.

De point de vue accélération en temps de calcul, on peut dire que, par analogie à la réduction du modèle qui a été employée dans le cas des spires à conducteurs en fils de Litz, l'accélération en temps de calcul en se servant de l'équation (4.9) peut être donnée par $p_{red} = nT_c / (\alpha T_c + nT_r)$. La résolution du modèle complet non-linéaire de référence (modèle magnétodynamique) se fait en $T_c = 43$ minutes. Par contre, La résolution du modèle complet non linéaire à bobinage simplifié, avec une densité de courant uniforme (magnétostatique) et un maillage grossier est réalisée en 18 minutes. Le coefficient α peut être calculé ainsi: $\alpha = 18/43 \cong 0.4$. Le modèle réduit est linéaire, sa résolution est alors très rapide, elle se fait en $T_r = 27$ secondes. Dans notre cas, on veut étudier $n = 6$ différentes configurations géométriques d'enroulement (Figure 4.24), et du coup, on tombe alors sur un gain important en temps de calcul qui est de l'ordre de 15. En évitant ainsi une modélisation complète non linéaire de la machine pour chacune des six différentes configurations géométriques de l'enroulement, la réduction du modèle permet de déterminer la configuration d'enroulement optimale (configuration en spires horizontales (18x1)) avec une accélération de 15 fois en temps de calcul et une erreur quadratique faible qui ne dépasse pas les 3%.

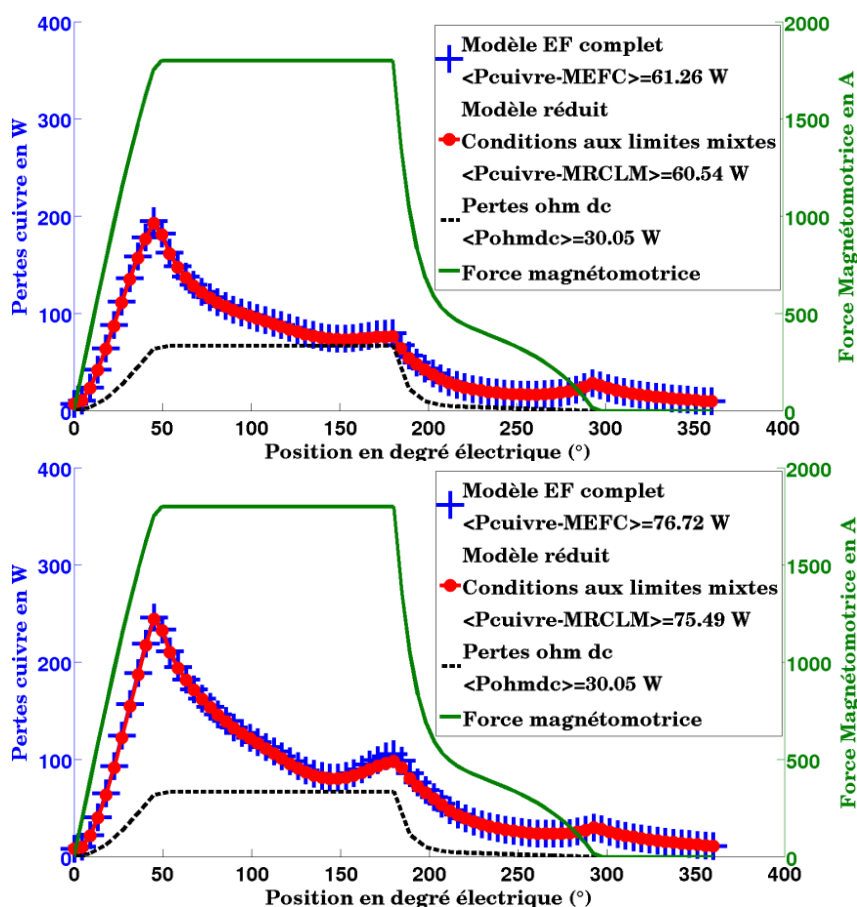


Figure 4.39 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d'aller (Haut) et de retour (Bas) de la configuration (1x18) calculées par le modèle complet et le modèle réduit.

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

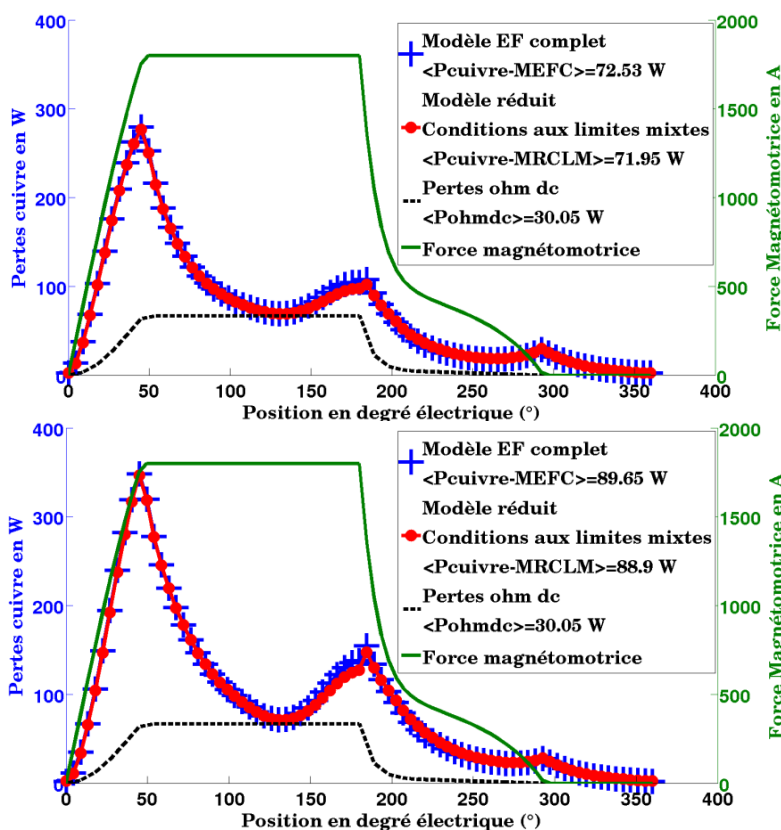


Figure 4.40 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d’aller (Haut) et de retour(Bas) de la configuration (2×9) calculées par le modèle complet et le modèle réduit.

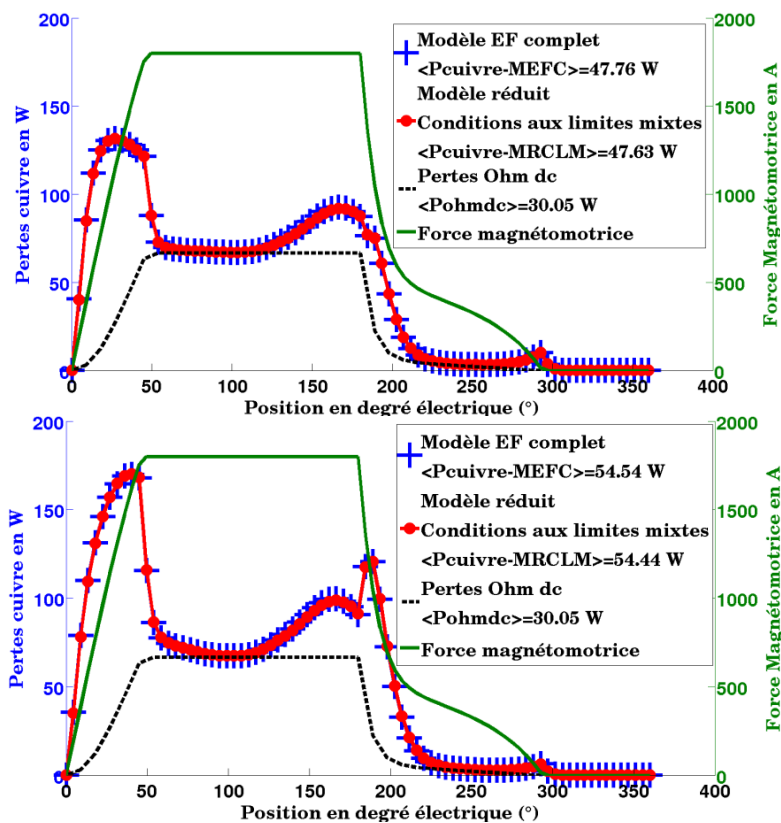


Figure 4.41 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d’aller (Haut) et de retour(Bas) de la configuration (6×3) calculées par le modèle complet et le modèle réduit.

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

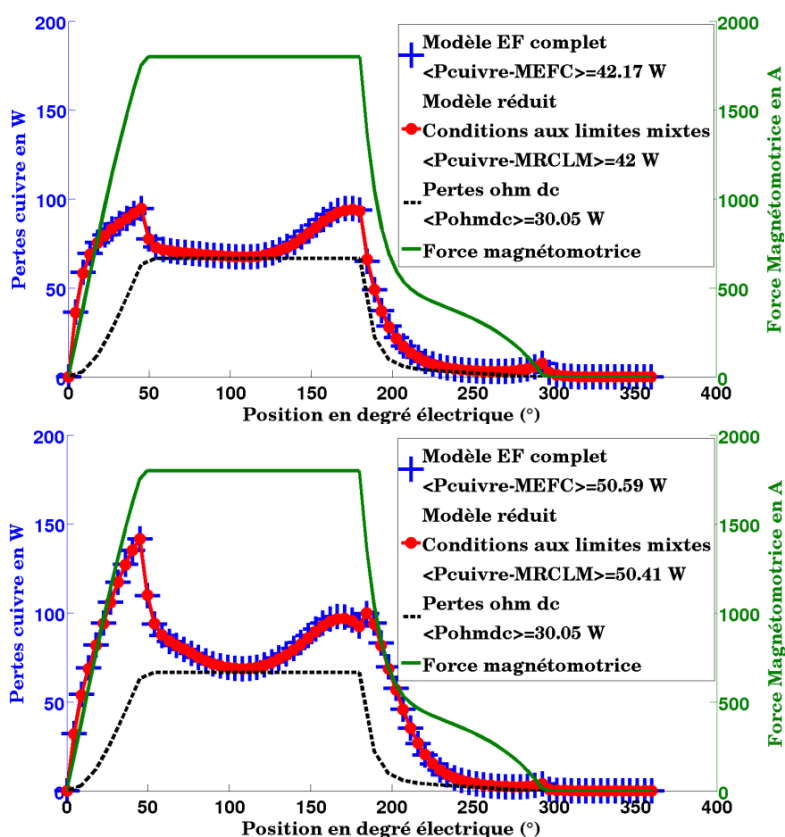


Figure 4.42 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d’aller (Haut) et de retour(Bas) de la configuration (9×2) calculées par le modèle complet et le modèle réduit.

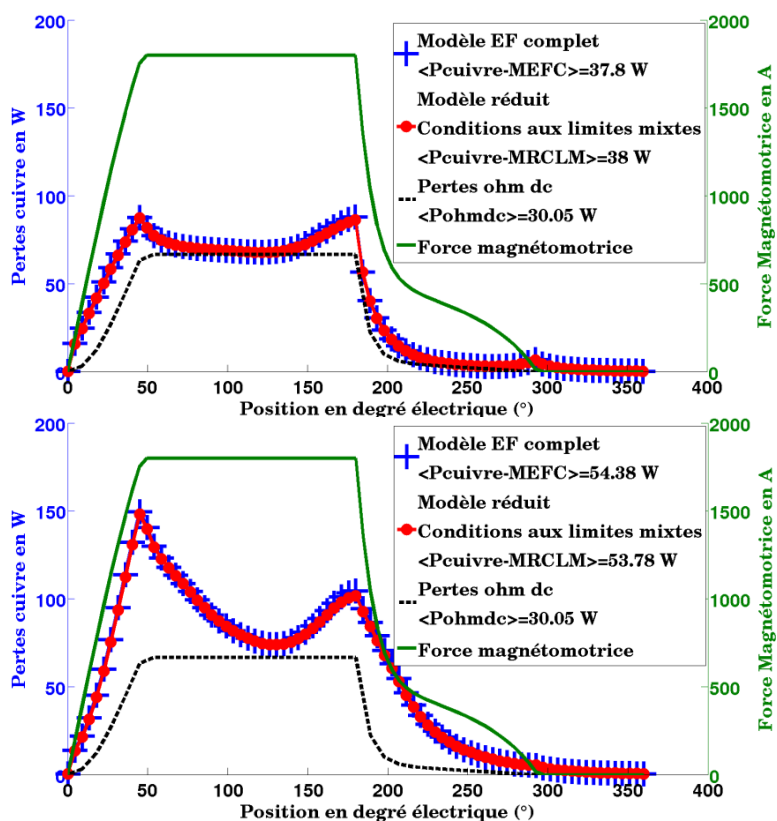


Figure 4.43 Les pertes « cuivre » instantanées dans les conducteurs d’aller (Haut) et de retour(Bas) de la configuration (18×1) calculées par le modèle complet et le modèle réduit.

Tableau 4.4 Comparaison des valeurs moyennes de pertes « cuivre » calculées par le modèle complet de référence et le modèle réduit.

Configuration	Valeurs moyennes des pertes « cuivre » en W							
	Bobine gauche				Bobine droite			
	Modèle complet	Modèle réduit	ϵ_m	ϵ_{eff}	Modèle complet	Modèle réduit	ϵ_m	ϵ_{eff}
(1x18)	61.26	60.54	1.17	1.45	76.72	74.49	1.61	2.19
(2x9)	72.53	71.95	0.86	2.27	89.65	88.90	0.83	2.65
(3x6)	66.05	64.74	0.46	1.53	79.30	79.02	0.35	1.87
(6x3)	47.76	47.63	0.26	0.52	54.54	54.44	0.19	0.59
(9x2)	42.17	42.00	0.39	0.74	50.59	50.41	0.35	0.74
(18x1)	37.80	38.03	0.59	0.89	54.39	53.78	1.11	1.58

4.4 Conclusion

La forte corrélation entre les pertes « cuivre » et la géométrie de l'enroulement montre la nécessité de porter une attention particulière sur la manière de répartir les spires dans l'encoche et sur le type du conducteur utilisé. Les résultats seront différents suivant qu'on utilise un conducteur massif ou multi filamentaire, en fils torsadés ou en fils de Litz. Si on dispose d'un enroulement à n spires alimenté avec un point de fonctionnement donné et occupant un tel coefficient de remplissage à travers la surface de l'encoche d'une machine électrique, afin d'avoir le minimum de pertes par courants de Foucault, il est recommandé alors de choisir la configuration optimale de l'enroulement. Sous des contraintes budgétaires et industrielles, de divers choix pour la configuration de l'enroulement et de divers types de conducteurs peuvent être mis en œuvre. La modélisation du système complet conduit à des temps de calculs conséquents. En effet, des résultats précis ne peuvent être obtenus qu'en considérant la non-linéarité des matériaux magnétiques, la prise en compte du mouvement et la distribution non uniforme du courant dans les conducteurs. Ceci donne lieu à un nombre élevé de calculs répétitifs longs si on voudrait modéliser complètement la machine électrique après chaque changement de la configuration de l'enroulement. Pour choisir alors la configuration optimale en termes de pertes « cuivre » suivant un processus d'optimisation, la modélisation complète de la machine électrique par la méthode des éléments finis devient délicate et constitue une pierre d'achoppement. Afin de réduire le temps de calcul on a recours normalement aux méthodes de réduction du modèle. Dans ce chapitre, pour éviter, en particulier, les modélisations complètes répétitives, on a appliqué alors la méthode de réduction du modèle par la technique de la perturbation.

Dans le but de calculer les influences électromagnétiques des courants de Foucault uniquement dans le domaine des encoches des machines électriques, la réduction du modèle par la technique de la perturbation peut s'avérer intéressante. Elle consiste à utiliser les conditions aux frontières du domaine de l'encoche pré-calculées à partir d'un unique modèle complet non linéaire de la machine à bobinage simplifié et à densité du courant uniforme, et permet ainsi de faire des calculs répétitifs rapides dans le domaine linéaire de

4 Réduction du modèle par la technique de la perturbation

l'encoche uniquement où on intègre et on fait varier la configuration réelle de l'enroulement. La comparaison entre les résultats issus du modèle réduit et du modèle complet non linéaire de référence dans le cas des spires à conducteurs massifs et à conducteurs multi filamentaires a permis de valider l'approche. La similitude des résultats des deux problèmes a été vérifiée non seulement sur le plan des grandeurs globales mais également sur celui des grandeurs locales. Le modèle réduit a prouvé alors son efficacité à pouvoir réduire de façon conséquente le temps de calcul tout en conservant une précision suffisante.

On peut conclure alors que, la réduction du modèle en se basant sur la technique de la perturbation, en évitant les itérations chronophages de la non-linéarité et la technique de la bande en mouvement, permet un calcul précis et rapide des pertes de « cuivre » instantanées et des distributions de la densité de courant dans chaque conducteur et chaque brin individuellement. Elle peut alors être utilisée dans les processus de conception et d'optimisation des enroulements dans les systèmes électromagnétiques à sévères contraintes énergétiques telles que la machine à reluctance variable pour application en automobile.

Les deux conditions aux limites de types Dirichlet et Neumann sont étudiées. La condition aux limites de Dirichlet, est récupérée d'un modèle complet de la machine à bobinage à densité de courant uniforme. Elle permet d'imposer la composante normale de l'induction magnétique sur la frontière de l'encoche, et d'agir ainsi au nom du circuit magnétique et du mouvement du rotor pour établir une distribution convenable des lignes du champ magnétique. Elle est compatible pour un problème traitant les conducteurs en fils de Litz qui favorisent l'homogénéisation du courant à travers la section du conducteur. Par contre, la condition aux limites de Neumann s'avère nécessaire pour corriger la composante normale du champ magnétique dans le cas des déviations significatives des lignes du champ magnétique. Ces lignes de champ sortent suivant une direction pratiquement perpendiculaire à la frontière de l'encoche pour pénétrer dans le circuit magnétique ou joindre la dent du rotor la plus proche. Cette condition de type Neumann convient alors pour des problèmes traitant les conducteurs massifs sujets à des déplacements importants du courant dus à la circulation des boucles de courants induits.

Chapitre 5

Réduction de l'ordre du modèle par la technique de la POD-DEIM

V-Réduction de l'ordre du modèle par la technique de la POD-DEIM

5.1 Introduction

La méthode des éléments finis associée à un schéma de discrétisation en temps est souvent utilisée pour calculer les pertes « cuivre » dans les systèmes électromagnétiques couplée à des équations du circuit électrique. Elle permet d'attribuer une solution numérique au couplage électromagnétique fort entre la densité du courant électrique sous sa distribution non uniforme à travers la section des conducteurs et le champ magnétique variable en fonction du temps. En post traitement, pour un calcul précis des pertes « cuivre » à partir de la solution numérique du problème, il faut veiller à ce que les données évaluées décrivent le comportement du système sans aucune composante transitoire. Dans ce type de problème dépendant du temps, les solutions transitoires dans les premières périodes électriques de simulation sont la conséquence d'un choix d'une condition initiale arbitraire, qui est souvent une solution imposée nulle à l'origine du temps. Ainsi, plusieurs périodes électriques doivent être simulées successivement pour atteindre finalement les conditions d'un régime permanent. Lorsqu'un maillage fin et un faible pas de temps bien adaptés, sont choisis, le temps nécessaire pour la résolution d'un système non-linéaire à grande échelle peut être prohibitif. Pour aborder ce problème, des techniques de réduction de l'ordre du modèle peuvent être utilisées, elles sont efficaces dans la réduction du nombre d'inconnues, et par conséquent, du temps de calcul nécessaire à la résolution par la méthode des éléments finis des systèmes électromagnétiques dépendant du temps [ARF008] [HC013] [CLC011]. Ces techniques de réduction se basent généralement sur la réalisation d'une projection de la solution du problème complet vers une base réduite. Elles peuvent réduire alors efficacement la taille du système d'équations à résoudre.

Dans la littérature, la méthode de la décomposition aux valeurs propres (dite en anglais "Proper Orthogonal Decomposition" ou tout simplement "POD") [Lum67] [Sir87] [SC012] [Cha000] combinée à l'approche des « Snapshots » est l'une des techniques les plus connues de réduction de l'ordre du modèle. Elle consiste à générer un projecteur de la solution du modèle complet vers une base réduite à partir des « Snapshots », ce sont des solutions pré-calculées dans le modèle complet. Dans la base réduite, le nombre des inconnues et ainsi la taille du système d'équations à résoudre sont fortement réduits, l'approche POD conduit alors dans le cas d'un problème linéaire à une réduction importante du temps de calcul. Par contre, dans le cas d'un problème non linéaire, cette méthode n'est pas assez efficace. Le coût élevé du calcul des termes non linéaires réduit effectivement sa performance. En fait, ces termes non linéaires nécessitent pour leur calcul des appels supplémentaires aux solutions du modèle complet à chaque itération du solveur itératif de la non-linéarité. La reconstruction de la solution du modèle complet est alors indispensable à

chaque itération, ceci annule alors partiellement les avantages offerts par la méthode de POD en termes d'exigences de mémoire et du temps de calcul. Pour résoudre ce problème, la méthode d'interpolation empirique discrète (dite "Describe Empirical Interpolation Method" en anglais ou "DEIM") [CS010] [BMN+004] peut être couplée à la POD. La DEIM permet d'interpoler le comportement non-linéaire de la perméabilité du champ magnétique sur le domaine complet du circuit magnétique à partir de l'évaluation de son comportement dans un nombre réduit de domaines élémentaires préalablement définis et localisés. Ainsi, le temps de calcul des termes non linéaires en appliquant la technique combinée POD-DEIM est efficacement réduit. Néanmoins, dans le cas des problèmes à courants induits et à fréquences d'alimentation relativement élevées, lorsqu'on applique une réduction totale du domaine d'étude par la POD-DEIM, on rencontre des faibles précisions dans le calcul de la solution dans les matériaux conducteurs. Pour faire face à ce problème, nous proposons l'approche de la réduction partielle du domaine d'étude. La réduction du modèle attaque uniquement les domaines non-linéaires, tandis que les domaines des matériaux linéaires et des matériaux conducteurs particulièrement, sont entièrement modélisés.

5.2 Rappel sur la formulation de la méthode des éléments finis

On rappelle, comme déjà mentionné dans le chapitre 1, que l'établissement du champ magnétique dans un système électromagnétique non linéaire couplé à des équations du circuit électrique est décrit par le système d'équations algébrique (1.66).

Lorsqu'un schéma d'Euler implicite est utilisé pour la discrétisation en temps et les itérations de Newton-Raphson sont intégrées pour prendre en compte la non linéarité du circuit ferromagnétique, on est ramené à résoudre l'équation suivante :

$$[X_t^{k+1}] = [X_t^k] - \mathcal{J}_{NR}^{-1}([A_t^k])[R([X_t^k])] \quad (5.1)$$

Il est recommandé de rappeler que le vecteur solution, la matrice jacobienne et le vecteur résidu à l'instant t et à l'itération k sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$[X_t^k] = \begin{bmatrix} [A_t^k] \\ [\Delta V_t^k] \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\mathcal{J}_{NR}([A_t^k]) = \begin{pmatrix} [S_{NL}([A_t^k])] + [T]/\Delta t & [D] \\ [D]^t & \Delta t[G] \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$$[R([X_t^k])] = \begin{bmatrix} [R_1([A_t^k], [\Delta V_t^k])] \\ [R_2([A_t^k], [\Delta V_t^k])] \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Lorsqu'il s'agit de n_c conducteurs, le vecteur tension $[\Delta V_t^k]$ aura pour dimension $n_c \times 1$. Le vecteur $[A_t^k]$ de dimension $n_n \times 1$ représente les valeurs du potentiel vecteur magnétique à l'instant t et à l'itération k aux différents nœuds du maillage sans ceux imposés par une condition aux limites de Dirichlet. n_n représente ainsi le nombre de degré de liberté. La

dimension du vecteur solution $[X_t^k]$ sera alors $n_{un} \times 1$ où $n_{un} = (n_n + n_c)$ est le nombre total d'inconnues du système d'équations (5.1) à résoudre.

5.3 L'exemple d'application de la machine à réductance variable

L'exemple d'application est toujours la machine à réductance variable à double saillance. Le bobinage dans ce cas est formé de 4 spires par dent comme le montre la figure 5.1. Ces spires peuvent être réparties sous trois différentes configurations :

- La configuration en spires verticales ou configuration (1×4) (Figure 5.1).
- La configuration en spires horizontales ou configuration (4×1) .
- La configuration en spires mixtes ou configuration (2×2) .

On va développer notre étude sur le bobinage avec la configuration en spires verticales. Les résultats concernant les deux autres configurations seront récapitulés à la fin.

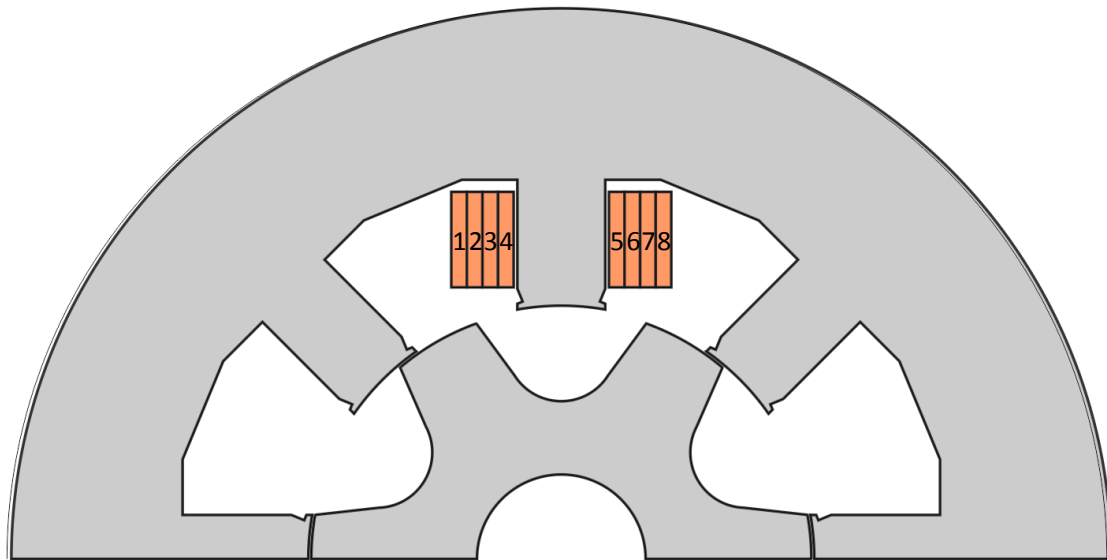


Figure 5.1 La machine à réductance variable avec un bobinage à 4 spires verticales sur dent.

Le bobinage est alimenté par le courant imposé $I(t)$ à la fréquence 2000 Hz tel que la force magnétomotrice produite par les 4 spires est donnée par $F.m.m(t) = 4I(t)$. La forme d'onde de la force magnétomotrice est représentée sur la figure 5.2, elle est pré-calculée par le logiciel "MRVSIM" sous une tension d'alimentation $U_{DC} = 520 V$.

En partant d'une solution nulle à l'origine du temps, le système (5.1) est résolu pour donner l'état magnétique de la machine électrique à chaque pas de temps et les pertes « cuivre » sont calculées par la suite en post traitement. La figure 5.2 montre les pertes « cuivre » instantanées dissipées dans le bobinage durant la première et la troisième période électrique d'excitation. À l'instant où le courant d'alimentation s'annule, on remarque, comme déjà évoqué précédemment dans le chapitre 3, que des pertes « cuivre » sont toujours présentes dans le bobinage. Ces pertes sont dues au fait que les densités du

courant électrique à travers la section des conducteurs du bobinage ne s'annulent pas instantanément mais des boucles de courants de Foucault continuent à circuler même si le courant total à travers la section des conducteurs est nul. Etant donné que des boucles de courants de Foucault circulent toujours dans les conducteurs du bobinage à la fin de la période électrique d'excitation, le potentiel vecteur magnétique à travers la machine électrique n'est alors plus égal à zéro au début du déclenchement d'une nouvelle période d'excitation. Une solution nulle à l'origine du temps ne correspond donc pas à la solution en régime permanent, elle nous amène alors à une situation transitoire. Généralement, pour calculer de manière fiable les pertes « cuivre » en post traitement, la solution traitée ne doit présenter aucune composante transitoire. Pour se faire, plusieurs périodes électriques de simulation fastidieuses doivent être mises en œuvre pour atteindre finalement la solution en régime permanent. Trois périodes électriques sont simulées alors pour atteindre enfin les conditions du régime permanent. À partir de la troisième période électrique, on a constaté que la solution du problème commence à se stabiliser. Étant donné que la solution de la quatrième période correspond très bien à celle de la troisième période avec une erreur qui ne dépasse pas le 1%, la simulation de trois périodes électriques est considérée alors suffisante pour atteindre les conditions d'un régime permanent. En effet, les pertes « cuivre » instantanées, en régime transitoire, calculées dans la première période représentent un écart important d'environ 31% par rapport à celles calculées en régime permanent dans la troisième période. Cette valeur représente l'écart quadratique alors que l'écart sur la valeur moyenne est égale à 18.5%.

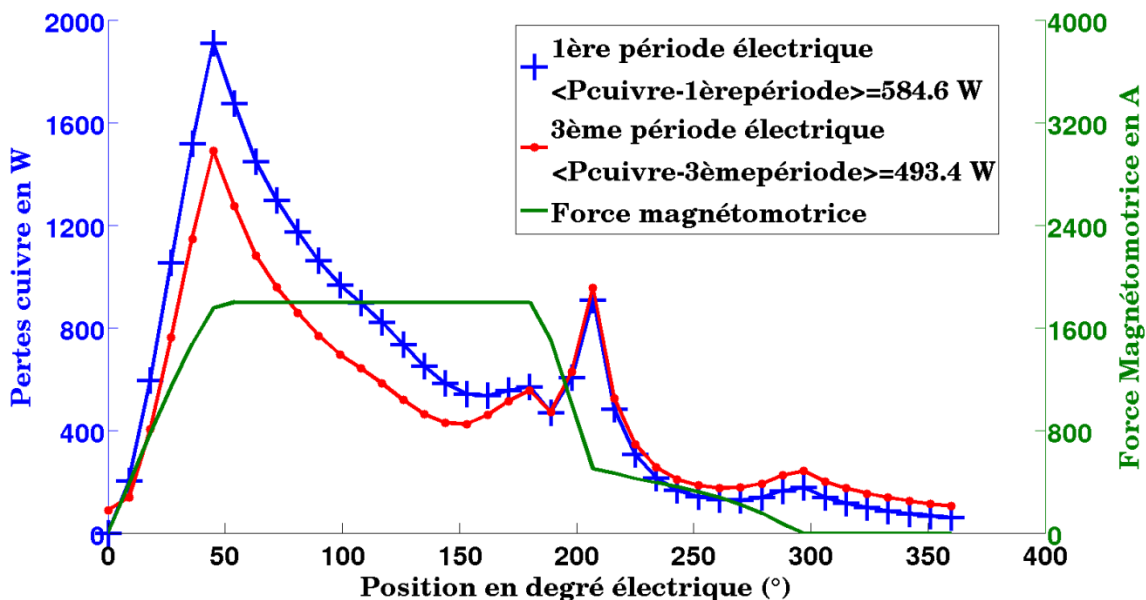


Figure 5.2 Les pertes « cuivre » totales instantanées dissipées dans le bobinage à spires verticales au cours de la première et la troisième période électrique.

La Figure 5.2 clarifie ce phénomène. On voit nettement la nécessité de résoudre le problème sur plusieurs périodes de simulations afin de calculer une valeur plus représentative des pertes « cuivre » de la machine en régime permanent. Pour éviter ces simulations répétitives et longues du modèle complet de la machine, la méthode de réduction de l'ordre de modèle

est adoptée. Elle bénéficie de la solution transitoire du modèle par éléments finis complet (MEFC) de la machine dans la première période électrique, pour calculer la solution du modèle réduit dans les périodes d'excitation ultérieures en utilisant la technique de la POD combinée avec la méthode de la DEIM.

5.4 Réduction totale de l'ordre du modèle en utilisant la technique duale de la POD-DEIM

La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres ou Proper Orthogonal Decomposition (POD) est une technique élégante et très efficace d'analyse de données. Elle permet d'approximer un système de dimension élevée par un autre de dimension nettement plus faible.

Essentiellement, cette méthode est une procédure linéaire, qui consiste à déterminer une base de modes propres orthogonaux représentatifs par définition des réalisations les plus probables. Elle est très répandue dans la réduction des problèmes en électromagnétiques [HC014] [ABM+016c] [FRM+015].

5.4.1 Décomposition orthogonale aux valeurs propres

Généralement, l'idée de la réduction de l'ordre d'un modèle spatio-temporel est basée sur le fait d'exprimer la solution à un instant donné, en fonction de la combinaison linéaire pondérée des m solutions précédentes calculées aux premiers m pas de temps. Si $[A_1], [A_2], \dots [A_m]$ sont les solutions du problème aux instants t_1, t_2, \dots, t_m respectivement, la solution à l'instant t sera donnée par :

$$[A(t)] = \sum_{i=1}^m [A_i] \alpha_i \quad (5.5)$$

α_i est le coefficient ou le poids de pondération correspondant à la solution $[A_i]$. Si n_n est le nombre de degrés de liberté du système spatiotemporel à résoudre à chaque pas de temps, $m \ll n_n$. La base constituée par les vecteurs solutions qu'on appelle les « Snapshots », n'est pas forcément orthonormée, ce qui peut conduire le plus souvent à une divergence de la solution.

Pour résoudre le problème, définissons maintenant la matrice des « Snapshots » $[M_s]$ de dimension $(n_n \times m)$ comme étant l'ensemble des vecteurs solutions calculés aux premiers m pas de temps :

$$[M_s] = ([A_j])_{1 \leq j \leq m} \quad (5.6)$$

La méthode de décomposition aux valeurs singulières (dite en anglais "Singular Value Decomposition" ou "SVD") permet d'écrire la matrice $[M_s]$ sous la forme factorisée suivante :

$$[M_s] = [Y][\Sigma][W]^t \quad (5.7)$$

Les matrices $[Y_{n_n \times n_n}]$ et $[W_{m \times m}]$ sont des matrices orthonormées. La matrice $[\Sigma_{n_n \times m}]$ est une matrice diagonale contenant les éléments $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ appelés valeurs singulières de $[M_s]$, telles que $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \dots \dots \leq \sigma_r$. r est le rang de la matrice $[M_s]$, il est égal au nombre de valeurs singulières non nulles. Un opérateur $[\Psi_{n_n \times m}]$ peut être calculé par le produit des matrices $[Y]$ et $[\Sigma]$ tel que :

$$[\Psi_{n_n \times m}] = [Y][\Sigma] \quad (5.8)$$

Si on pose que le rang r de la matrice $[M_s]$ est égale à m ($r = m$), l'opérateur $[\Psi_{n_n \times m}]$ sera constitué de m vecteurs colonnes orthonormées, la matrice $[M_s]$ peut s'écrire ainsi sous la forme suivante :

$$[M_s] = [\Psi_{n_n \times m}][W]^t \quad (5.9)$$

Par conséquent, chaque vecteur colonne « Snapshot » de la matrice $[M_s]$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire pondérée des m vecteurs colonnes orthonormées de la matrice $[\Psi_{n_n \times m}]$. $[\Psi_{n_n \times m}]$ est alors la base orthonormée qu'on cherche. Utilisons l'équation (5.9) dans l'équation (5.5) revient alors à écrire la solution $[A(t)]$ sous la forme de la projection suivante [HC015] [FRM+015] :

$$[A(t)] = [\Psi_{n_n \times m}][A_m(t)] \quad (5.10)$$

La solution $[A(t)]$ s'écrit alors sous la forme d'une combinaison linéaire pondérée des vecteurs orthonormés obtenus à partir d'une décomposition aux valeurs singulières de la matrice $[M_s]$, d'où le nom de « décomposition orthogonales aux valeurs propres » (POD). $[A_m(t)]$ est le vecteur à l'instant t des coefficients de pondération.

Passant maintenant à la réduction du problème. Pour assurer une réduction efficace, il est parfois conseiller de tronquer la matrice $[\Psi_{n_n \times m}]$ à l'ordre n_r [CF008]. Des valeurs faibles de σ seront alors évitées, la présence ainsi des vecteurs « Snapshots » quasi-colinéaires, qui peuvent amener à des erreurs de calculs numériques conséquentes et parfois des divergences, est provisoirement remédiée. La décomposition aux valeurs Singulières tronquée (Truncated Singular Value Decomposition) à l'ordre n_r de la matrice des « Snapshots » consiste à ne conserver que les n_r premiers vecteurs colonnes de la base $[\Psi_{n_n \times m}]$. En se basant sur le fait que, la réduction de l'ordre du modèle, dans notre cas, se fait uniquement sur le potentiel vecteur magnétique, le vecteur solution du potentiel vecteur magnétique du modèle complet $[A(t)]$ est remplacé par le vecteur réduit $[A_{n_r}(t)]$ de dimension $n_r \times 1$ ($n_r \ll n_n$). $[\Psi_{n_n \times n_r}]$ qu'on note désormais $[\Psi]$, est appelé l'opérateur de projection discret. La réduction de l'ordre du modèle par la méthode de la POD conduit alors à vérifier la relation suivante entre le vecteur solution du modèle complet et celui du modèle réduit :

$$[A(t)] = [\Psi][A_{n_r}(t)] \quad (5.11)$$

En intégrant l'opérateur de projection discret $[\Psi]$ dans le système (5.1), le nouveau système à résoudre dans la base réduite devient [HC015]:

$$\begin{bmatrix} [A_{n_r}(t)^{k+1}] \\ [\Delta V(t)^{k+1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{n_r}(t)^k] \\ [\Delta V(t)^k] \end{bmatrix} - [J_{NRn_r}^{-1}([A_t^k])] \left[R_{n_r} \left(\begin{bmatrix} [A_{n_r}(t)^k] \\ [\Delta V(t)^k] \end{bmatrix} \right) \right] \quad (5.12)$$

Où :

$$\left[R_{n_r} \left(\begin{bmatrix} [A_{n_r}(t)^k] \\ [\Delta V(t)^k] \end{bmatrix} \right) \right] = \begin{pmatrix} [\Psi]^t & 0 \\ 0 & [I_d] \end{pmatrix} [R([X^k(t)])] \quad (5.13)$$

$$[J_{NRn_r}([A(t)^k])] = \begin{pmatrix} [S_{NLn_r}([A(t)^k])] + [T_{n_r}]/\Delta t & [D_{n_r}] \\ [D_{n_r}]^t & \Delta t[G] \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Il faut noter que $[I_d]$ est la matrice identité, $[S_{NLn_r}([A(t)^k])] = [\Psi]^t [S_{NL}([A(t)^k])] [\Psi]$, $[T_{n_r}] = [\Psi]^t [T] [\Psi]$ et $[D_{n_r}] = [\Psi]^t [D]$.

5.4.2 Méthode d'interpolation empirique discrète

Avec la présence d'une non-linéarité générale, la technique standard de la POD réduit la dimension ou l'ordre du modèle dans le sens où beaucoup moins d'inconnues sont présentes dans le système matriciel à résoudre, cependant, la complexité de l'évaluation des termes non linéaires demeure équivalente à celle du problème original. Dans le cas d'un problème non linéaire. La méthode de l'interpolation empirique discrète (DEIM) est employée pour réduire considérablement la complexité de calcul de la méthode de décomposition en valeurs propres, et améliore ainsi le rendement et l'efficacité de la réduction du modèle.

Pour résoudre le problème réduit, il faut construire la matrice jacobienne donnée par son expression dans l'équation (5.14) et ainsi calculer la matrice non-linéaire $[S_{NL}([A(t)^k])]$ à chaque itération de Newton-Raphson. Ce calcul nécessite de projeter le vecteur solution réduit $[A_{n_r}(t)^k]$, à l'itération k , pour construire la solution dans la base originale du modèle complet en utilisant la projection $[A(t)^k] = [\Psi][A_{n_r}(t)^k]$. Ce processus répétitif et fastidieux accroît le temps de calcul et fait perdre ainsi les performances de la réduction de l'ordre du modèle assurée par la POD.

Pour l'éviter, on a donc recours à la méthode de la DEIM qui, en se basant sur la projection et l'interpolation, permet de faire une approximation de la matrice $[S_{NL}([A(t)^k])]$ en calculant seulement un nombre réduit de ces composantes. Du coup, la DEIM, en réduisant considérablement le nombre des termes à calculer dans la matrice du modèle complet, permet d'accélérer efficacement la résolution du problème réduit non-linéaire.

En utilisant la solution du modèle complet dans les m premiers pas de temps, une matrice qu'on appelle $[D]$ de dimension $(n_n \times m)$ est construite à partir des m vecteurs qui résultent du produit de la matrice non linéaire par les m vecteurs solutions du potentiel

vecteur magnétique $[S_{NL}(A^j)][A^j]$, où A^j est le vecteur solution au $j^{\text{ème}}$ pas de temps et $1 \leq j \leq m$. On applique maintenant sur la matrice $[D]$ la décomposition aux valeurs singulières de la même manière déjà mentionné dans l'équation (5.7), telle que $[D] = [E][F][G]^t$. Ensuite, les n_{DEIM} modes f_i ($1 \leq i \leq n_{DEIM}$) les plus significatifs qui correspondent aux valeurs propres les plus élevées de la matrice $[F]$ sont enregistrées afin de construire l'opérateur de projection en DEIM qu'on note $[U]$ à partir des n_{DEIM} premiers vecteurs de la matrice orthogonale $[E]$. À ce stade, on utilise un algorithme bien déterminé de type « glouton » présenté dans la référence [CS010], il permet de localiser les n_{DEIM} nœuds sur le maillage du domaine non linéaire. Par la suite, une matrice $[P]$ de dimension $(n_n \times n_{DEIM})$ sera construite à partir des n_{DEIM} vecteurs colonnes de la matrice identité $[I_d]$ de dimension $(n_n \times n_n)$. Les indices de ces n_{DEIM} vecteurs colonnes ainsi que la localisation des n_{DEIM} nœuds sur le maillage sont définies à partir des indices des termes les plus significatifs de la matrice $[U]$. Le nombre des nœuds n_{DEIM} est choisi par le programmeur de sorte qu'on converge mieux vers la solution recherchée.

Au-delà, la matrice non-linéaire $[S_{NL}([A(t)^k])]$ est calculée en considérant uniquement les contributions des éléments connectés aux n_{DEIM} nœuds du maillage prédéfinis. La matrice non linéaire dans la base réduite $[S_{NLn_r,DEIM}]$ sera approximée alors selon la méthode de la DEIM en utilisant la projection suivante :

$$[S_{NLn_r,DEIM}] = [\Psi]^t (UP^t)^{-1} P^t [S_{NLDEIM}] [\Psi] \quad (5.15)$$

Où, la matrice $[S_{NLDEIM}([A(t)^k])]$ est déterminée en extrayant seulement n_{DEIM} vecteurs colonnes de la matrice non-linéaire $[S_{NL}([A(t)^k])]$.

5.4.3 Application dans le cas d'une machine à réductance variable

5.4.3.1 Choix des « Snapshots »

Comme déjà évoqué dans la section 5.3, la machine à réductance variable à double saillance est prise comme un exemple d'application. On va comparer les résultats de la modélisation complète de référence par éléments finis à celles obtenues par la réduction de l'ordre du modèle utilisant la technique de la POD-DEIM. Il faut noter que le modèle entier de la machine subit une réduction totale à l'aide de la POD. Le nombre des inconnues passe de 4462 dans le modèle complet de la machine à n_r inconnues virtuelles dans le problème réduit. Les 4462 inconnues du modèle complet représentent les valeurs qu'on cherche du potentiel vecteur magnétique aux différents nœuds du maillage du domaine complet exceptés des nœuds de Dirichlet.

La solution calculée par le modèle complet est considérée comme solution référence. Du point de vue temps de calcul, le modèle complet par éléments finis exige une durée de 63 minutes pour simuler trois périodes de simulations électriques afin d'arriver au régime permanent. On note que chaque période électrique de simulation s'étale sur 40 pas de temps.

Evidemment, la sélection des « Snapshots » est déterminante au niveau de la qualité de la solution et de sa convergence, puisque en fait, l'opérateur de projection de la solution du modèle complet vers le modèle réduit dépend totalement sur une décomposition aux valeurs singulières de la matrice des « Snapshots ». Pratiquement, des outils automatiques tels que la méthode de la base réduite (dite en anglais "Reduced Basis Method") [NP80] sont très répandus et efficaces dans la sélection des « Snapshots ». Dans notre cas, la sélection des « Snapshots » se fait manuellement en se basant sur plusieurs essais.

On rappelle que, dans notre cas, les « Snapshots » sont choisis parmi les solutions transitoires de la première période d'excitation. Pour faire des essais, la matrice des « Snapshots » est constituée à partir des m premières solutions aux m premiers pas de temps. m peut prendre les valeurs 10, 20, 30 et 40. On suppose qu'en premier lieu l'opérateur discret de projection $[\Psi]$, n'est pas tronqué, ainsi on choisit un nombre d'inconnues $n_r = m$ dans le modèle réduit. La technique combinée de la POD-DEIM est appliquée pour réduire le modèle de la machine, et les pertes « cuivre » instantanées sont calculées dans les différents modèles réduits associés aux différents valeurs du nombre m de « Snapshots ». Pour confronter ces modèles réduits, les différentes courbes de pertes « cuivre » correspondantes sont comparées à la courbe de pertes calculées par le modèle complet de référence.

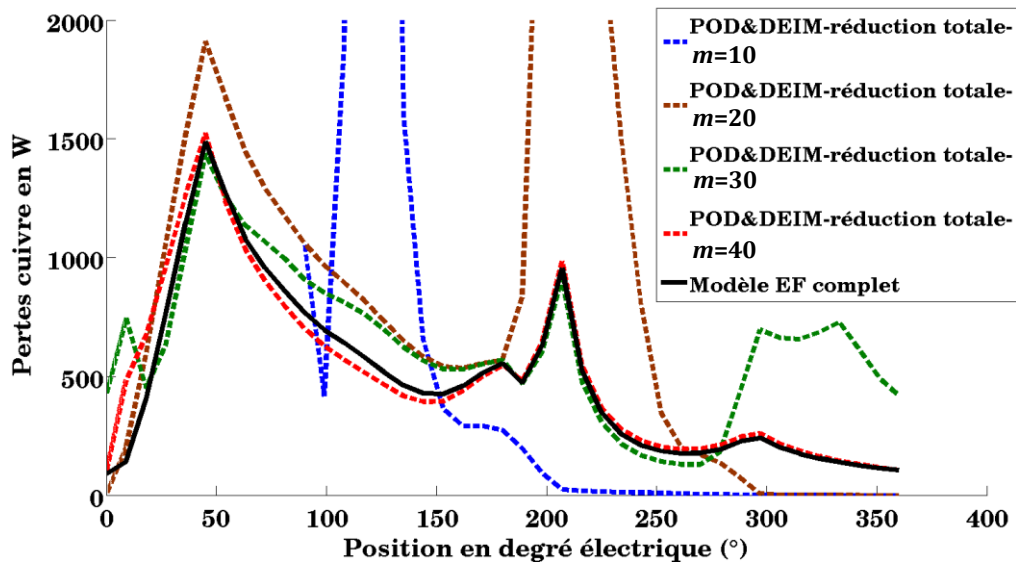


Figure 5.3 Evolution des pertes « cuivre » calculées dans un modèle réduit à m « Snapshots ».

Les résultats sont présentés sur la figure 5.3, on remarque que l'écart entre les courbes de pertes calculées dans le modèle réduit et la courbe de pertes de référence diminuent lorsque le nombre m des « Snapshots » augmente. En plus, peut constater que pour $m = 10$ et $m = 20$ les courbes de pertes du modèle réduit conduisent à des divergences conséquentes. Pour $m = 30$, l'erreur maintenant est plus faible, les deux courbes de pertes du modèle réduit et du modèle de référence se rapprochent sur un nombre important de pas de temps de la période de simulation, par contre, un écart important apparaît

brusquement en dernière phase. Le cas de $m = 40$ est le plus favorable, les deux courbes se correspondent pratiquement sur l'intégralité de la période de simulation. Les écarts dans ce cas sont les plus faibles. On peut conclure alors d'une part, que lorsque le nombre de « Snapshots » augmente, l'erreur produite par la réduction du modèle est plus faible. D'autre part, dans le cas de $m = 10$, $m = 20$ et $m = 30$, on peut remarquer sur la figure 5.3, que les divergences et l'écart important de la courbe de pertes du modèle réduit par rapport à la courbe de référence surviennent brusquement à l'instant qui correspond à la dernière solution pré-calculée utilisée dans la matrice des « Snapshots ». En plus, le fait d'avoir une erreur minimale avec un $m = 40$ montre que les différentes solutions sont nécessaires pour construire la base orthonormée. Ceci peut être expliqué dans notre cas par les deux propositions suivantes:

- a. La machine modélisée est la machine à réluctance variable à courant d'alimentation non symétrique. Elle représente un rotor à forte saillance et opère à une saturation importante du circuit magnétique. Pour cela, la prise en compte des différentes solutions à différentes positions du rotor et différentes valeurs du courant électrique permet d'enrichir la base orthonormée.
- b. La réduction du modèle se fait par l'intermédiaire de la technique de la POD-DEIM. Généralement, l'intégration de la DEIM dans un problème non-linéaire, demande un nombre plus élevé de « Snapshots » pour éviter les divergences, converger plus rapidement, et pour avoir une solution plus proche de la solution d'un problème complet de référence [HC014].

En conclusion, pour avoir une erreur minimale, la matrice $[M_s]$ des « Snapshots » est alors construite par les $m = 40$ solutions transitoires de la première période de simulation.

Par ailleurs, la troncature de l'opérateur de projection, comme déjà mentionné, est couramment utilisée pour réduire efficacement la dimension du problème réduit lorsque le nombre de « Snapshots » est très élevé, et conduit alors à une résolution plus rapide du système. Elle consiste à ne conserver que les valeurs singulières les plus élevées de la matrice diagonale $[\Sigma]$ qui résultent de la décomposition aux valeurs singulières de la matrice des « Snapshots » $[M_s]$. En effet, ces modes les plus significatifs sont associés aux vecteurs orthogonaux les plus fondamentales de la base orthonormée. Les valeurs singulières les plus faibles, sont la conséquence la plus souvent de la présence des vecteurs quasi-colinéaires dans la matrice de « Snapshots ». Éviter ces valeurs conduit alors à éviter les divergences graves et à réduire les erreurs numériques conséquentes. Comme déjà évoqué, nous avons décidé de construire la matrice des « Snapshots », à partir des 40 solutions de la première période transitoire, la troncature de l'opérateur de projection consiste à choisir les premiers n_r vecteurs orthogonaux. Dans notre cas, on étudie 4 cas différents traitant 4 valeurs différentes de n_r . n_r peut prendre les valeurs 10, 20, 30 et 40. Par contre, il faut noter que, le fait de prendre $n_r = 40$ consiste effectivement à ne pas tronquer.

Pour valider l'effet de la troncature, 4 modèles réduits sont réalisés pour les différentes valeurs de n_r . Les pertes « cuivre » instantanées sont calculées dans chaque modèle afin de les comparer à la courbe de pertes « cuivre » donnée par le modèle complet de référence de la machine. Les résultats sont montrés sur la figure 5.4, ils correspondent aux pertes « cuivre » calculées dans la troisième période électrique de simulation. On remarque que la troncature de 10 et 20 vecteurs orthogonaux de l'opérateur de projection $[\Psi]$ ont aboutit à une divergence locale des courbes de pertes. Dans le cas où $n_r = 30$, la courbe de pertes vient converger vers la courbe de référence sauf en quelques positions du rotor où elle présente des écartements à faible amplitude.

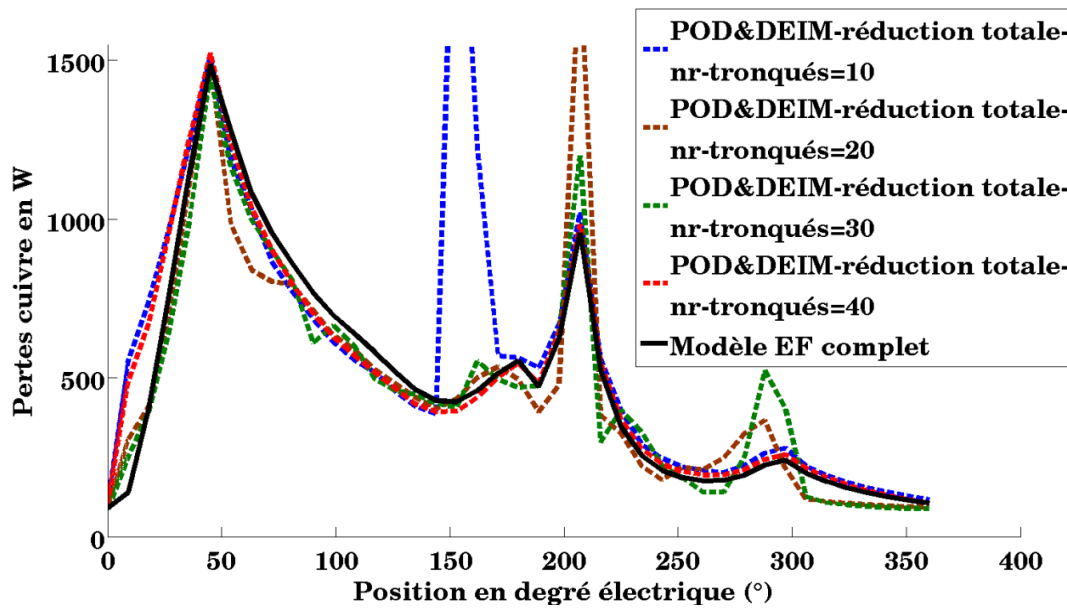


Figure 5.4 Evolution des pertes « cuivre » calculées dans un modèle réduit à $m = 40$ « Snapshots » mais à opérateur de projection discrète tronqué à n_r valeurs.

Dans le dernier cas correspondant à $n_r = 40$ où aucune troncature n'a été faite, les écarts sont très légers et l'erreur quadratique est le plus faible comparativement aux trois autres valeurs de n_r . Dans notre exemple, la construction d'une base plus riche s'avère ainsi indispensable pour augmenter la précision de la solution du problème réduit. Le fait d'avoir besoin des $n_r = 40$ vecteurs dans la base orthonormée pour avoir une erreur minimale, peut être la conséquence non seulement, de la forte saillance du rotor et de la saturation remarquable du circuit magnétique, mais encore de la déviation considérable des lignes du champ à travers le domaine des encoches. Cette déviation, qui dépend fortement du mouvement du rotor, est le résultat de la circulation des boucles de courants induits importants sous une fréquence d'alimentation élevée de 2000 Hz.

On remarque alors que, dans notre cas particulier de la machine à réductance variable, la prise en compte des 40 vecteurs de l'opérateur de projection semble fondamentale pour la construction de la solution dans la deuxième et la troisième période de simulation à partir de la solution transitoire de la première période. En plus, la troncature qui est utilisée pratiquement pour réduire efficacement la dimension du problème réduit, n'est pas très

importante dans notre cas puisque le nombre des inconnues du problème réduit ($n_r = 40$) est déjà relativement faible.

5.4.3.2 Résultats et discussion

Une demi-section de la machine à réluctance variable est modélisée en 2D, son maillage spatial est constitué de 4822 nœuds et 8912 éléments triangulaires alors que le nombre de degrés de liberté est 4462. En termes de temps de calcul, si on suppose trois périodes électriques de simulation avec 40 pas de temps par périodes, le système (5.1) associé au modèle complet de référence est résolu en 63 minutes.

Comme déjà mentionné, la matrice des « Snapshots » $[M_s]$ est construite en utilisant les 40 solutions de la première période de simulation. Par une décomposition aux valeurs singulières (SVD) de la matrice $[M_s]$, l'opérateur discret de projection est calculé, il est constitué de ($n_r = 40$) vecteurs orthonormés. En utilisant la projection de la solution du modèle complet vers le modèle réduit, Les 4462 inconnues réelles sont remplacées alors par 40 inconnues virtuelles.

Premièrement, le système réduit (5.12) est résolu sans utiliser la DEIM, il a besoin de 45 minutes pour calculer la solution sur trois périodes électriques. Ce temps de calcul comprend le temps nécessaire pour calculer la solution transitoire de la première période. Pour 40 « Snapshots », il est d'environ 21 minutes.

En employant maintenant la DEIM pour calculer la matrice non linéaire $[S_{NLn_r}([A(t)^k])]$ par l'intermédiaire d'une projection et d'une interpolation comme dans l'équation (5.15), le temps de calcul décroît de 45 à 24 minutes seulement. En plus l'erreur quadratique par rapport à un modèle complet de référence est quasiment le même dans les deux cas (POD : 13.8%, POD+DEIM : 14%), d'où le rôle important de la DEIM, elle permet d'améliorer considérablement l'efficacité de la POD dans la réduction de la dimension du problème en maintenant presque la même précision du calcul.

Si on exclut les 21 minutes nécessaire pour calculer la solution dans la première période, le temps restant qui vaut approximativement 3 minutes est le temps nécessaire pour construire les matrices de projection vers la base réduite et les matrices de projection et d'interpolation concernant la technique de la DEIM d'une part et pour résoudre le modèle réduit sur la deuxième et la troisième période d'autre part.

En effet, la réduction du temps de calcul de 63 minutes à 24 minutes montre une accélération d'environ 2.5. Malheureusement, les pertes « cuivre » calculées par le modèle totalement réduit par la POD-DEIM ne présentent pas une courbe en grande concordance avec celle des pertes « cuivre » calculées par le modèle complet de référence (Figure 5.5).

L'erreur instantanée est significative de valeur quadratique d'environ 14% alors que l'erreur sur la valeur moyenne est de 3%. Ce résultat peut être expliqué par le fait qu'on est en train

d'étudier le cas d'une excitation à fréquence relativement élevée de l'ordre de 2000 Hz où le déplacement du courant à travers la section du conducteur grâce à la circulation des courants additionnels de Foucault est très important. Par conséquent, la reconstruction de la solution dans la deuxième et la troisième période avec une grande précision à partir de la solution transitoire de la première période au moyen d'une réduction totale du domaine par la POD-DEIM semble incertaine.

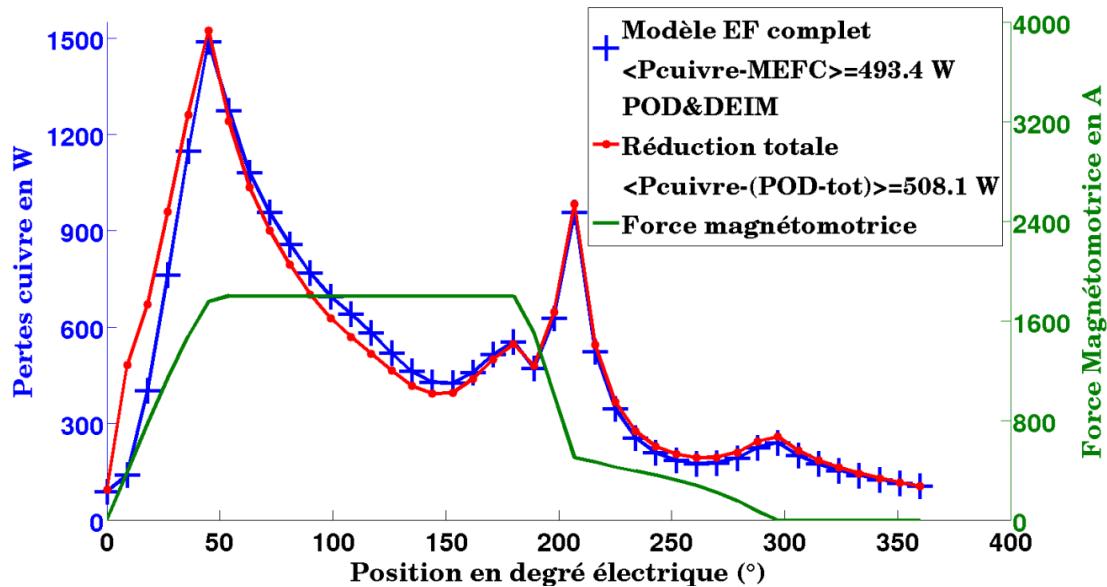


Figure 5.5 Les pertes « cuivre » totales instantanées dissipées dans le bobinage à spires verticales au cours de la troisième période électrique calculées par le modèle complet et le modèle totalement réduit en utilisant la POD-DEIM.

Pour surmonter ce problème, on propose comme solution alternative la méthode de réduction du sous domaine non linéaire (RSNL). Elle présente une analogie avec la méthode de réduction par sous domaines présentée dans [SSC014] et [SSC013], bien que, contrairement à notre cas, la réduction dans ces deux références est appliquée aux sous domaines linéaires. La RSNL est une approche de réduction de l'ordre du modèle qu'on peut considérer comme une extension de la méthode de réduction développée dans la section précédente, elle consiste à réduire au moyen de la méthode de la POD-DEIM uniquement les sous domaines non-linéaires du système électromagnétique. Les sous domaines linéaires, par contre, tels que l'air et les matériaux conducteurs restent entièrement modélisés. Autrement dit, cette approche peut être considérée comme une réduction partielle de l'ordre du modèle.

Sur le plan du temps de calcul, l'influence de la réduction partielle du modèle via la POD-DEIM agit dans trois directions principales.

En premier lieu, la réduction de la dimension des matrices de projection et d'interpolation de la DEIM qui sont utilisées répétitivement dans chaque itération de Newton-Raphson, permet de réduire le temps de calcul davantage par rapport à un problème totalement réduit.

Cependant, en deuxième lieu, la modélisation complète des sous domaines non linéaires amène normalement à une augmentation du temps de calcul par comparaison au problème totalement réduit. Globalement, le pourcentage d'augmentation du temps de calcul est relativement à petite échelle par comparaison à celui de sa réduction. Les domaines entièrement modélisés sont les sous domaines linéaires où la méthode des éléments finis peut résoudre le problème typiquement d'une manière très rapide.

En troisième lieu, dans le cas d'une réduction partielle par la RSNL, la dimension de la matrice des « Snapshots » est fortement réduite. Le calcul de l'opérateur de projection $[\Psi]$ et par la suite le calcul des différentes matrices dans la base réduite du système d'équations à résoudre, est moins couteux par rapport à celui d'un problème traitant la réduction totale. Enfin de compte, sous certaines approximations, la diminution du temps de calcul par la réduction partielle du modèle (réduisant le sous domaine non-linéaire) est prévue d'être similaire à celle d'un problème totalement réduit.

5.5 Réduction du sous domaine non linéaire au moyen de la POD-DEIM

5.5.1 Séparation des variables

La sous-structuration du domaine spatial du système électromagnétique en fonction de la linéarité et la non linéarité des sous domaines conduit à la séparation des nœuds qui appartiennent au sous domaine non-linéaire des autres. Si le vecteur $[A(t)]$ est, à l'instant t , l'ensemble des variables nodales discrètes du potentiel vecteur magnétique sur le maillage du modèle complet, en utilisant la réorganisation des variables, ce vecteur peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$[A(t)] = \begin{bmatrix} [A_1(t)] \\ [A_2(t)] \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Où $[A_1(t)]$ est l'ensemble des valeurs inconnues du potentiel vecteur magnétique des nœuds du maillage appartenant au sous domaine non-linéaire et $[A_2(t)]$ est celui des nœuds qui restent et qui appartiennent ainsi aux sous domaines linéaires tels que l'air et les matériaux conducteurs. Cette séparation des variables nodales conduit en se basant sur l'équation (1.68) à la formule résiduelle couplée suivante :

$$\begin{pmatrix} [S_{11}(A_1(t))] & [S_{12}] & 0 \\ [S_{12}]^t & [S_{22}] + [T]/\Delta t & [D] \\ 0 & [D]^t & \Delta t[G] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} [A_1(t)] \\ [A_2(t)] \\ [\Delta V(t)] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{[T]}{\Delta t} [A_2(t - \Delta t)] \\ \Delta t[I(t)] + [D]^t [A_2(t - \Delta t)] \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$= [R([X(t)])] = \begin{bmatrix} [R_1([X(t)])] \\ [R_2([X(t)])] \\ [R_3([X(t)])] \end{bmatrix}$$

Intégrant maintenant le processus itératif de Newton-Raphson pour résoudre la non-linéarité, on obtient alors le système différentiel à résoudre suivant :

$$[X^{k+1}(t)] = [X^k(t)] - \mathcal{J}^{-1}([X^k(t)])[R([X^k(t)])] \quad (5.18)$$

Tel que, à l'itération k , le vecteur solution et la matrice tangente sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$[X_t^k] = \begin{bmatrix} [A_1(t)^k] \\ [A_2(t)^k] \\ [\Delta V(t)^k] \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$\mathcal{J}^{-1}([X^k(t)]) = \begin{pmatrix} [S_{11NL}(A_1(t)^k)] & [S_{12}] & 0 \\ [S_{12}]^t & [S_{22}] + [T]/\Delta t & [D] \\ 0 & [D]^t & \Delta t[G] \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Où :

$$[S_{11NL}(A_1(t)^k)] = \frac{\partial([S_{11}([A_1(t)])][A_1(t)])}{\partial[A_1(t)]} \Big|_{[A_1(t)]=[A_1(t)^k]} \quad (5.21)$$

5.5.2 Application de la POD-DEIM au sous domaine non-linéaire

On applique maintenant la réduction du sous domaine non linéaire (RSNL). C'est une technique de réduction partielle de l'ordre du modèle qui permet au moyen de la méthode combinée de la POD-DEIM de réduire uniquement les inconnues sur le sous domaine non-linéaire. Le sous vecteur $[A_1(t)]$ du vecteur solution est le seul projeté sur la base réduite selon l'équation :

$$[A_1(t)] = [\Psi][A_{n_r}(t)] \quad (5.22)$$

On obtient par conséquent le nouveau système différentiel réduit à résoudre :

$$[X_{n_r}(t)^{k+1}] = [X_{n_r}(t)^k] - [\mathcal{J}_{n_r}^{-1}([X_{n_r}(t)^k])][R_{n_r}([X_{n_r}(t)^k])] \quad (5.23)$$

Le vecteur solution, le résidu et la matrice tangente du modèle partiellement réduit au moyen de la technique RSNL sont donnés respectivement par les expressions suivantes:

$$[X_{n_r}(t)] = \begin{bmatrix} [A_{n_r}(t)] \\ [A_2(t)] \\ [\Delta V(t)] \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$[R_{n_r}([X_{n_r}^k(t)])] = \begin{bmatrix} [\Psi]^t R_1([X_{n_r}^k(t)]) \\ R_2([X_{n_r}^k(t)]) \\ R_3([X_{n_r}^k(t)]) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$[\mathcal{J}_{n_r}([X_{n_r}^k(t)])] = \begin{pmatrix} [\Psi]^t [S_{11NL}([A_1(t)])][\Psi] & [\Psi]^t [S_{12}] & 0 \\ [S_{12}]^t [\Psi] & [S_{22}] + [T]/\Delta t & [D] \\ 0 & [D]^t & \Delta t[G] \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

5.5.3 Comparaison entre la réduction totale et la réduction par sous domaine (RSNL)

La technique de réduction partielle RSNL, en modélisant totalement les matériaux linéaires et plus spécialement les matériaux conducteurs, devrait assurer un calcul plus précis des effets des courants de Foucault. En post-traitement les pertes « cuivre » incluant les pertes additionnelles par courants de Foucault sont calculées.

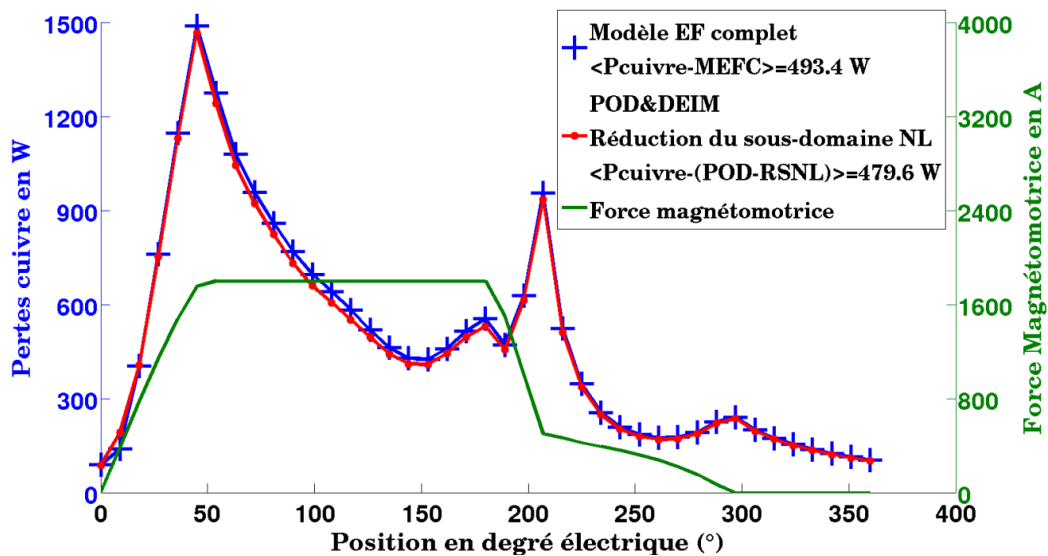


Figure 5.6 Les pertes « cuivre » totales instantanées dissipées dans le bobinage à spires verticales au cours de la troisième période électrique calculées par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL.

La figure 5.6 montre que les courbes de pertes « cuivre » calculées par le modèle par éléments finis complet et le modèle partiellement réduit par la RSNL présentent un bon accord. La valeur quadratique de l'erreur est maintenant faible et égale à 3.1% par comparaison à l'erreur de 14% dans le cas de la réduction totale du domaine entier de la machine.

Pour 40 inconnues dans la base réduite ou en d'autres termes 40 solutions « Snapshots » comme base de donnée pour le modèle réduit, le temps de calcul de la RSNL sur trois périodes de simulation est 22 minutes et 30 secondes.

Ce temps de calcul inclus le temps nécessaire pour calculer la solution transitoire de la première période électrique par le modèle complet, pour 40 pas de temps, ce temps est de 21 minutes. Par comparaison au modèle par éléments finis complet, il s'agit d'une accélération qui vaut 3 en temps de calcul. Le temps de calcul dans le cas de la réduction totale étant de 25 minutes, on peut conclure que la RSNL ne donne pas seulement une meilleure précision mais une résolution plus rapide du problème. Ceci est dû à la réduction de la dimension des matrices de projection et d'interpolation de la DEIM qui sont utilisées répétitivement dans chaque itération de Newton-Raphson. En plus, on a remarqué que la convergence en Newton-Raphson est plus rapide dans le cas du problème partiellement

réduit par la RSNL par rapport au problème totalement réduit. Cette influence sur le temps de calcul devient importante dans le cas d'un maillage fin et surtout dans les matériaux conducteurs où le maillage fin est parfois impératif en fonction de la section des conducteurs et de la fréquence d'alimentation pour une meilleure précision dans le calcul des effets des courants induits. Ce maillage fin, en augmentant le nombre des inconnues et ainsi la dimension des matrices de projections et d'interpolation, conduit à augmenter le temps de calcul dans le cas d'une réduction totale du domaine d'étude par la POD-DEIM.

Cependant, dans le cas de l'intégration de la technique RSNL, le maillage fin augmente le nombre des inconnues dans le domaine linéaire qui est complètement modélisé et accroît alors le temps de calcul nécessaire à la résolution du problème mais dans une moindre mesure. En effet, la résolution du problème linéaire est peu coûteuse par rapport au temps nécessaire pour le traitement des non-linéarités.

5.5.4 Résultats de la réduction efficace par la RSNL

Dans les deux problèmes à réduction, totale et partielle on a choisi les mêmes points DEIM, leur nombre est 7, ils sont localisés normalement dans les régions les plus saturées. Sur la figure 5.7 on montre tous les éléments triangulaires du maillage qui sont connectés aux 7 points DEIM, c'est en fait sur ces éléments uniquement où la matrice non linéaire a été calculée en appliquant la méthode de la DEIM. Pour des raisons de simplifications, on a déjà mentionné que la machine à réductance variable étudiée est équipée par une seule phase. La saturation est alors maximale dans la dent du stator associée et la dent du rotor située à sa proximité, où sont localisés alors les nœuds DEIM. Puisque les nœuds DEIM sont à localisation fixe le long de la simulation, pour garantir alors que la dent du rotor où on a fixé les nœuds DEIM soit toujours à la proximité de la dent du stator associée à la phase alimentée, on fait tourner le rotor à sa position initiale après chaque période électrique de simulation.

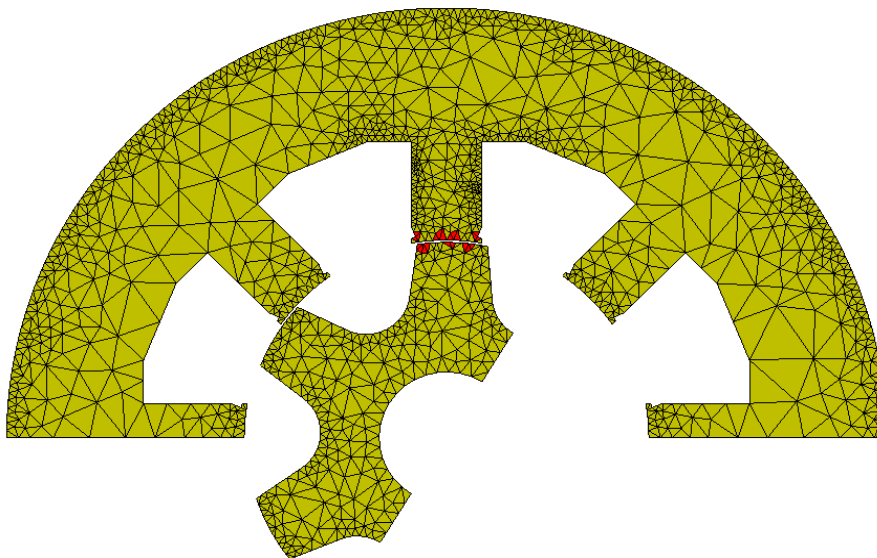


Figure 5.7 La localisation des 7 points DEIM sur le maillage du domaine non linéaire.

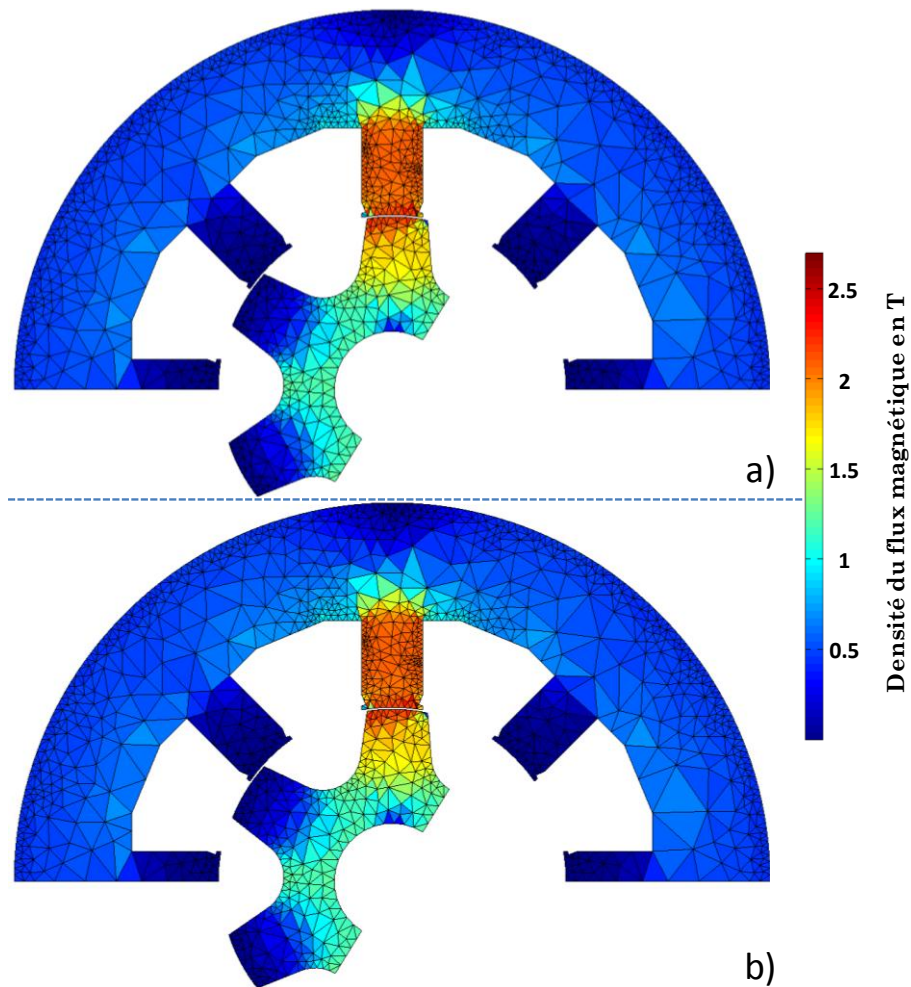


Figure 5.8 Cartes de distribution de la densité du flux magnétique à la position du rotor qui représente le plus de saturation ($\theta_e = 171^\circ$ électriques). a) Modèle par éléments finis complet, b) modèle réduit au moyen de la RSNL.

Pour tester plus en avant la précision du modèle réduit par la RSNL, on a calculé et comparé la distribution à travers le circuit magnétique de la densité du flux magnétique calculée par le modèle complet et le modèle réduit. Sur la figure 5.8, on voit les deux cartes de distribution de la densité du flux magnétique au courant maximal à la position du rotor qui représente le plus de saturation ($\theta_e = 171^\circ$ électriques), en haut pour le modèle complet de référence et en bas pour le modèle réduit. La différence entre la distribution de la densité du flux magnétique entre le modèle complet et le modèle réduit est très faible, voir difficile à détecter. En plus, au niveau des pertes « cuivre » et des effets des courants additionnels de Foucault, la précision du modèle réduit est justifiée pas seulement au niveau du calcul des grandeurs globales telles que les pertes « cuivre » totales dans le bobinage mais aussi au niveau des pertes locales dans chaque conducteur du bobinage individuellement et au niveau des grandeurs locales telles que la distribution de la densité du courant électrique à travers la section des conducteurs d'aller et du retour du même bobinage. Sur les figures 5.9 et 5.10, les courbes de pertes « cuivre » locales dans les conducteurs d'aller et de retour calculées par le modèle réduit présentent un large accord avec celles calculées par le modèle

complet. La valeur efficace de l'erreur considérant les valeurs instantanées des pertes « cuivre » locales entre le modèle réduit par la RSNL et le modèle complet ne dépasse pas les 3% alors que dans le cas de la réduction totale par la POD-DEIM, il peut atteindre les 22%. La figure 5.11 représente la répartition de la densité du courant électrique à travers la section des conducteur d'aller et de retour à la position ($\theta_e = 207^\circ$ électriques) qui désigne la position du rotor correspondante au pic des pertes dans la phase de démagnétisation. Cette distribution montre clairement la grande coïncidence des solutions calculées par le modèle complet et le modèle réduit par la RSNL. La réduction du modèle par la RSNL nous permet ainsi de calculer les effets des courants de Foucault et de réduire le temps de calcul tout en maintenant une bonne précision.

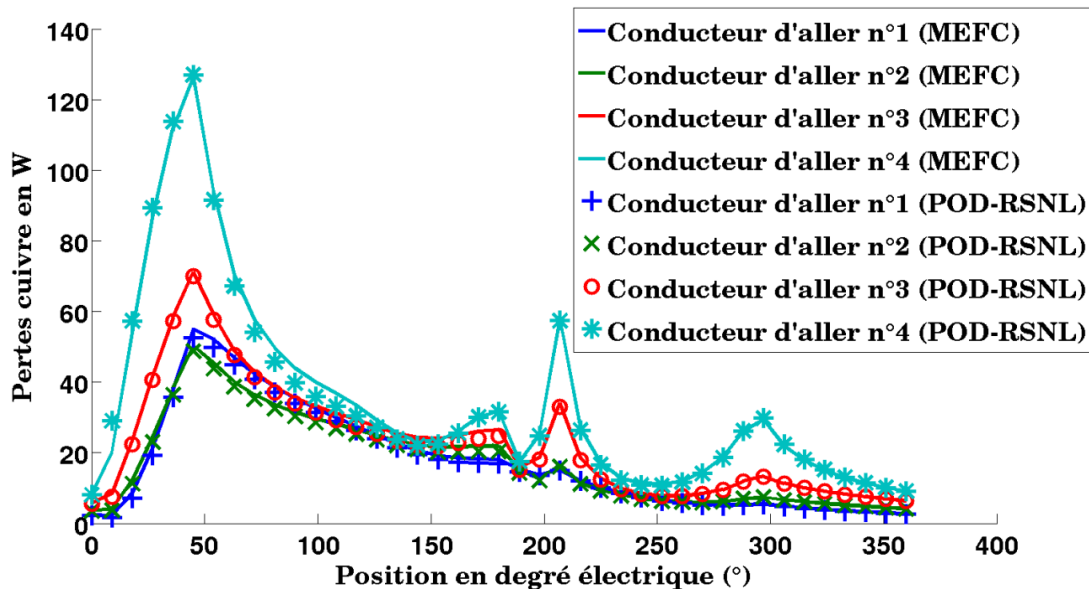


Figure 5.9 Les pertes « cuivre » locales instantanées calculées dans les conducteurs d'aller par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL.

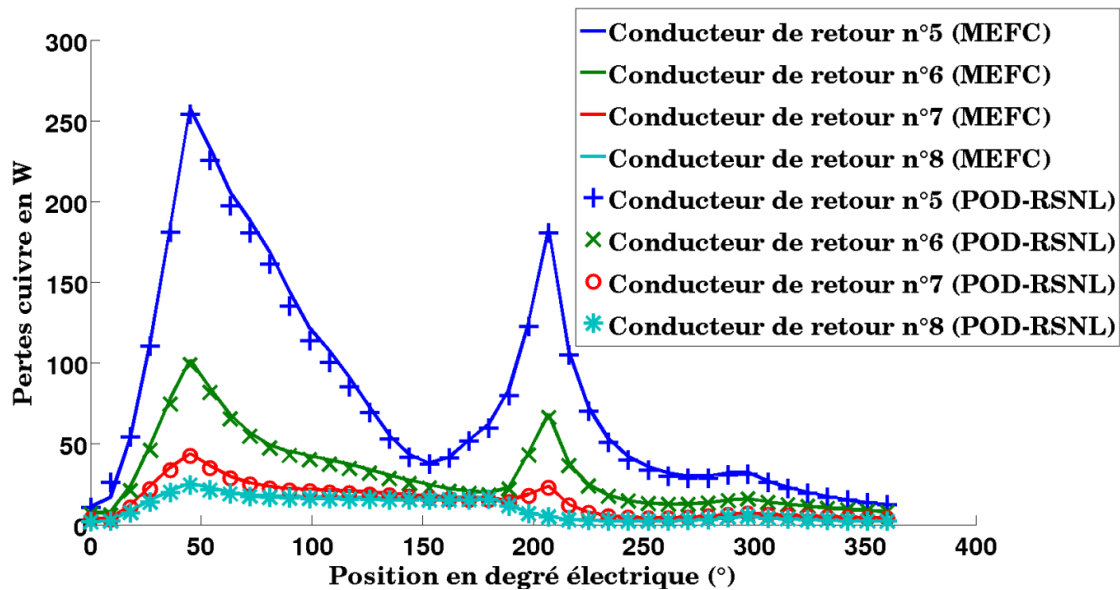


Figure 5.10 Les pertes « cuivre » locales instantanées calculées dans les conducteurs de retour par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL.

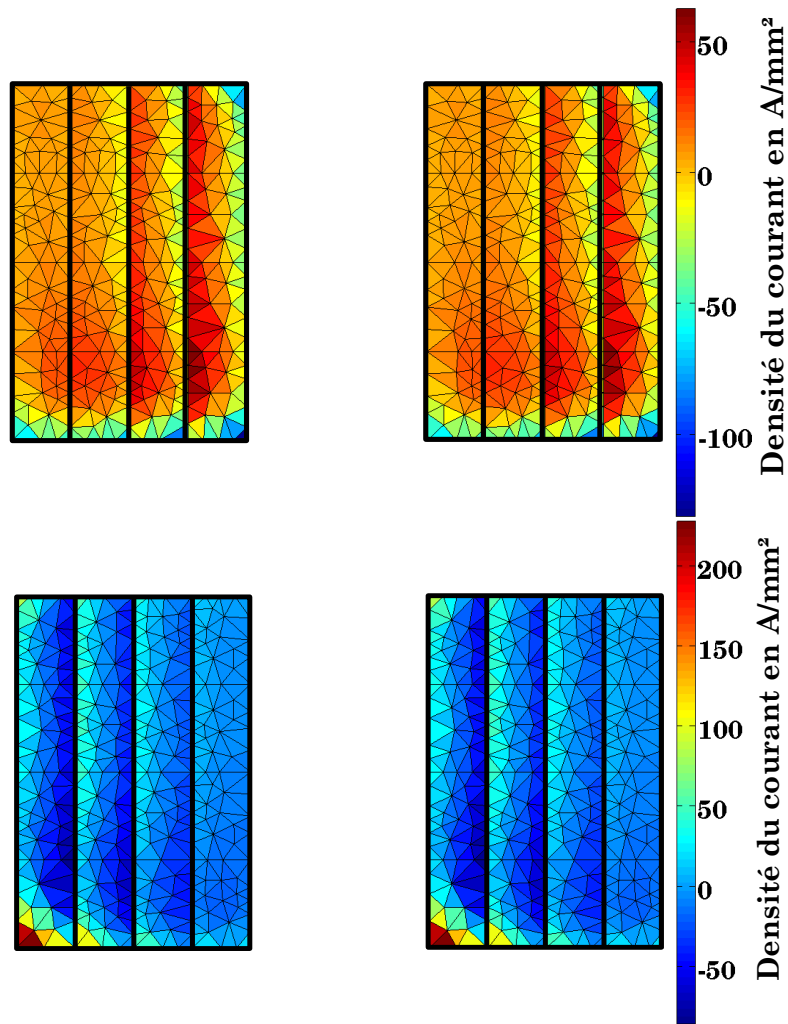


Figure 5.11 La densité du courant électrique à travers la section des conducteurs calculées par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL ($\theta_e = 207^\circ$ électriques). Haut: conducteurs d'aller. Bas: conducteurs de retour.

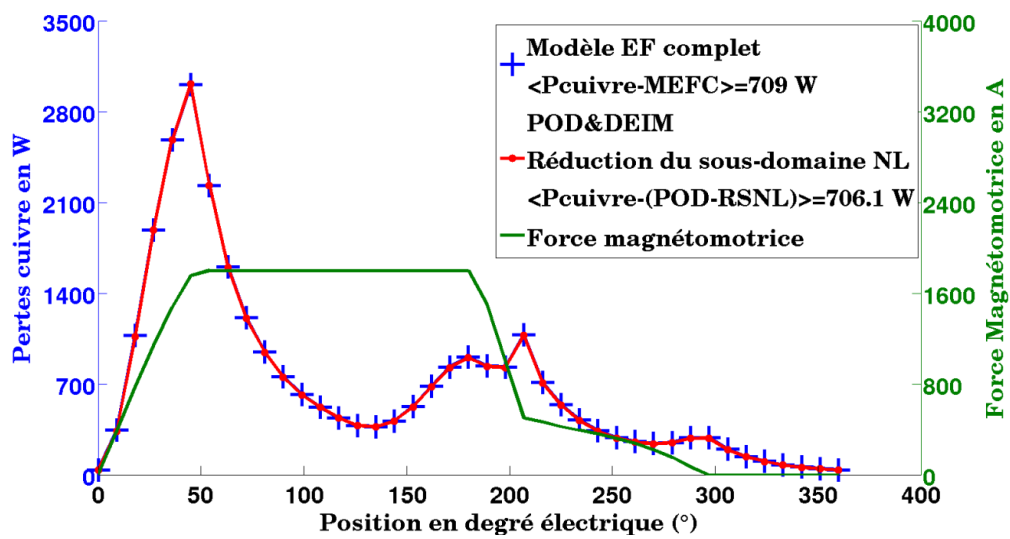


Figure 5.12 Les pertes « cuivre » totales instantanées dans le bobinage à spires horizontales au cours de la troisième période électrique calculées par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL.

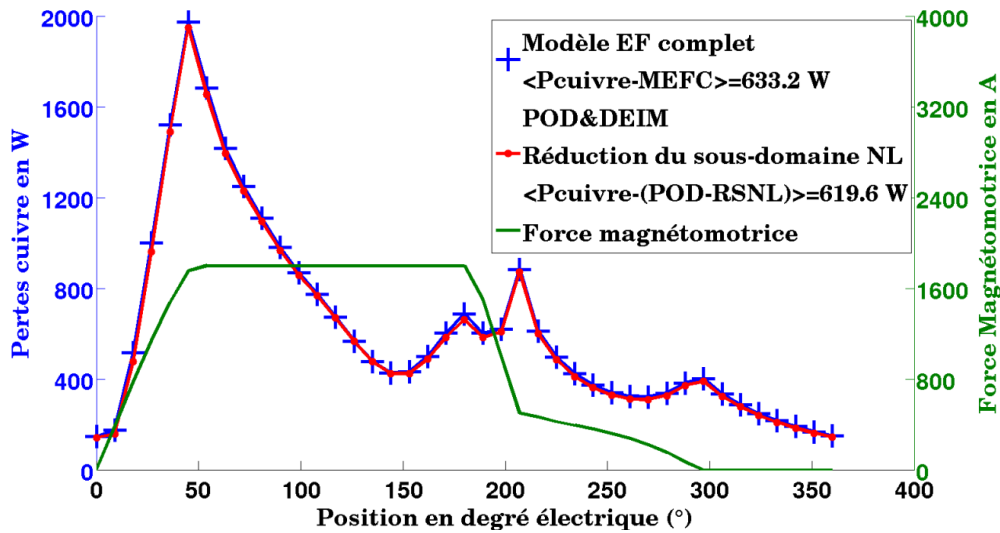


Figure 5.13 Les pertes « cuivre » totales instantanées dans le bobinage à spires mixtes au cours de la troisième période électrique calculées par le modèle complet et le modèle partiellement réduit au moyen de la RSNL.

L'efficacité de la réduction du modèle par la technique de la POD-DEIM appliquée pour réduire seulement le sous-domaine non linéaire est étudiée également dans le cas des deux autres configurations d'enroulement. La première configuration est la disposition en spires horizontales et la deuxième configuration est celle de la disposition en spires mixtes (2 × 2). La configuration (2 × 2) signifie qu'on a deux couches horizontales de spires à deux spires verticales chacune. La réduction du modèle par la RSNL prouve d'une part son efficacité dans le cas des deux configurations pour calculer les pertes « cuivre » totales (Figures 5.12 et 5.13) et montre d'une autre part son avantage par rapport à la réduction totale par la POD-DEIM en assurant une meilleure précision (Tableau 5.1) sous un temps de calcul réduit.

Tableau 5.1 Comparaison des valeurs quadratiques de l'erreur de calcul des pertes « cuivre » par les deux méthodes de réduction du modèle (POD totale et POD partielle) dans le cas des trois différentes configurations d'enroulement.

Configurations de l'enroulement	Valeur quadratique de l'erreur (%)	
	POD totale	POD partielle (RSNL)
4 spires verticales	14	3.1
4 spires horizontales	9.9	0.43
4 spires mixtes	10.6	2.13

5.5 Conclusion

Le calcul des pertes « cuivre » dans les machines à réluctance variable à double saillance est un problème électromagnétique dépendant du temps. Lorsque la solution à l'origine du temps est choisie arbitrairement et fixée le plus souvent comme solution nulle, la solution du problème par éléments finis est généralement mélangée avec des oscillations

et des composantes transitoires. Se contenter d'une seule période de simulation pour le calcul des pertes « cuivre » amène, dans le cas des excitations à fréquence relativement élevée, à des valeurs de pertes incompatibles à celles déterminées en régime permanent.

Pour éviter une modélisation complète répétitive de la machine sur plusieurs périodes de simulation indispensables pour converger vers la solution en régime permanent, la réduction du modèle est adaptée. Dans ce chapitre, on a utilisé la réduction de l'ordre du modèle par la technique de la POD combinée à la DEIM. Pour cela, la projection vers une base réduite se fait par une décomposition aux valeurs singulières de la matrice des « Snapshots » obtenue à partir des solutions transitoires du modèle complet durant la première période de simulation. Dans le cas des excitations à fréquences relativement élevées, on a constaté que lorsque la réduction totale du domaine par la POD-DEIM conduit à calculer la solution avec une faible précision, la technique alternative de la RSNL qui permet de réduire uniquement le domaine non-linéaire est parvenue à calculer la solution du problème et ainsi les effets importants des courants induits avec une précision plus élevée et un temps de calcul réduit.

Conclusions et Perspectives

Conclusions

Les travaux présentés dans ce mémoire traitent de techniques de réduction de modèle et de leurs applications dans les analyses par éléments finis. Ces techniques permettent de calculer la solution dans des problèmes électromagnétiques avec une précision acceptable et un temps de calcul réduit. Elles peuvent être utilisées par conséquent dans des processus de calcul répétitif tels que par exemple ceux présents lors de la conception et l'optimisation du bobinage des machines électriques visant à minimiser les pertes « cuivre ».

Les pertes « cuivre » sont la somme des pertes Ohm classiques DC et des pertes additionnelles par courants de Foucault. Lorsqu'un matériau conducteur est traversé par des lignes de champ magnétique variable en fonction du temps, des boucles de courants induits dites de Foucault y circulent pour s'opposer à cette variation. La circulation des courants induits favorise la non-homogénéisation de la densité du courant à travers la section des conducteurs et conduit ainsi à un accroissement des valeurs des pertes « cuivre ». Simultanément, une non-homogénéisation au niveau de la distribution spatiale de la densité du courant à travers la section des conducteurs conduit à son tour à une déviation des lignes du champ magnétique: les courants de Foucault et les pertes associées sont alors le résultat d'un couplage fort électrique-magnétique entre la densité du courant et la variation en fonction du temps du champ magnétique. En se basant sur un modèle de Maxwell, ce couplage peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle du second ordre aux dérivées partielles.

Dans les deux premiers chapitres de ce manuscrit, on traite deux approches pour la résolution de cette équation, l'une analytique et l'autre numérique. L'approche analytique est développée pour étudier les courants de Foucault dans le cas des conducteurs logés dans l'encoche d'un circuit magnétique. Son utilisation est limitée à l'étude de géométries d'encoches symétriques simplifiées où on suppose un champ magnétique unidimensionnel et une perméabilité infinie du circuit magnétique. Les encoches de la machine à réluctance variable, étant à dents non parallèles, une transformation géométrique est alors appliquée pour y adapter le modèle analytique. Les notions des pertes par effet de peau et des pertes par effet de proximité sont mises en évidence. Le modèle numérique, quant à lui, est basé sur la méthode de discrétisation par les éléments finis. Il permet une modélisation adéquate bidimensionnelle (2D) du champ magnétique à travers les encoches et prend en considération le mouvement du rotor et la non-linéarité du circuit magnétique. Outre les pertes « cuivre » résultant de l'effet de peau et de proximité, le modèle numérique tient compte des pertes par effet d'influence du circuit magnétique, elles sont liées à la déviation des lignes du champ magnétique due au mouvement du rotor et au champ magnétique de

fuite. Les pertes par effet d'influence peuvent être importantes dans le cas de la machine à réluctance variable qui présente un rotor à forte saillance et opère sous une forte saturation magnétique. Ceci met en défaut l'utilisation du modèle analytique pour un calcul précis des pertes « cuivre » dans le bobinage des machines à réluctance variable. En effet, lorsqu'il néglige les pertes par effet d'influence, le calcul analytique conduit à des erreurs de calcul importantes qui dépassent les 40% par rapport aux résultats du calcul numérique utilisant la méthode des éléments finis.

Dans le troisième chapitre, on propose une analyse par éléments finis en 2D des conducteurs multi filamentaires complexes en fils torsadés et en fils de Litz. En effet, des équations de type circuit, qui prennent en considération l'effet de la permutation des filaments au sein du conducteur sur la répartition du courant, permettent de s'affranchir d'une modélisation complexe en 3D. Cette analyse par éléments finis, qui permet de comparer les pertes présentes dans un conducteur massif ou dans des conducteurs multi filamentaires en fils torsadés et en fils de Litz, montre l'avantage de la subdivision sur la réduction des pertes additionnelles par courants de Foucault. Elle permet de souligner, en outre, l'influence importante du nombre de filaments, de leur distribution à travers la section du conducteur et de la technique de torsadage ou de permutation utilisée sur la réduction de ces pertes. Par ailleurs on a mis en évidence, l'influence cruciale de la position des conducteurs dans l'encoche sur les pertes par courants de Foucault, ces pertes sont maximales à la proximité de la zone de l'entrefer juste à côté de la dent du stator. Par ailleurs, dans le cas de la machine à réluctance variable qui représente une double saillance au niveau du stator et du rotor, les conducteurs du même bobinage situés de part et d'autre de la dent du stator ne développent pas les mêmes pertes par courant de Foucault. Ces pertes sont maximales dans les conducteurs qui voient la dent du rotor à leur proximité lors de la magnétisation de la phase. Pour choisir un enroulement optimal en pertes « cuivre », sous un nombre de spires et un point de fonctionnement donnés, il faut porter une attention toute particulière sur la configuration géométrique de l'enroulement et sur le type du conducteur utilisé s'il s'agit d'un conducteur massif ou multi filamentaire, en fils torsadés ou en fils de Litz. Une modélisation 3D est évitée dans le cas des conducteurs multi filamentaires, et pourtant le modèle par éléments finis en 2D, intégrant la technique de la bande de mouvement et les itérations de Newton-Raphson pour la non-linéarité, peut entraver tout processus itératif de conception ou d'optimisation. Pour surmonter ce problème, des techniques de réduction du modèle, en vue de l'optimisation, sont appliquées aux analyses par éléments finis pour assurer simultanément une bonne précision et une réduction efficace du temps de calcul.

Dans le quatrième chapitre, on étudie la réduction du modèle par la technique de la perturbation. Une modélisation complète de la machine, à chaque changement de configuration géométrique de l'enroulement, est évitée. Néanmoins, une unique simulation complète à maillage grossier, bobinage simplifié et densité du courant uniforme est nécessaire. Une fois ce modèle résolu, on récupère l'information sur la frontière de

l'encoche. Cette information est imposée sous forme de conditions aux limites de Neumann ou de Dirichlet au domaine réduit de l'encoche où on intègre maintenant la configuration géométrique réelle de l'enroulement. Une condition aux limites de Dirichlet convient très bien dans le cas des conducteurs en fils de Litz, elle permet la prise en compte de la présence du circuit magnétique et du mouvement du rotor. Par contre, dans le cas des conducteurs massifs, la condition aux limites de Neumann est nécessaire pour corriger la composante normale du champ magnétique et ainsi prendre en compte les déviations conséquentes des lignes du champ magnétique. Par comparaison à une modélisation complète de référence, la technique de la perturbation conduit à des résultats en bon accord, une erreur quadratique très faible ne dépassant pas les quelques pourcents et une accélération très importante du temps de calcul (facteur de 15).

Pour terminer, dans le cinquième chapitre, on traite d'une méthode de réduction de l'ordre du modèle par la technique de la POD-DEIM. En fait, la modélisation des machines électriques dans le but de calculer les pertes « cuivre » incluant les pertes additionnelles par courant de Foucault, conduit à traiter un problème électromagnétique dépendant du temps. Lorsque la méthode des éléments finis associée à un schéma d'Euler pour la discrétisation en temps est utilisée pour la résolution du problème, la solution transitoire est fortement liée aux conditions initiales parmi lesquelles la plus importante est la solution à l'origine du temps. Etant donné que cette solution est le plus souvent choisie comme une solution arbitraire, plusieurs périodes électriques de simulation fastidieuses doivent être mises en œuvre pour atteindre finalement la solution au régime permanent. De plus, l'intégration des boucles de Newton-Raphson pour résoudre la non-linéarité des matériaux ferromagnétiques contribue à l'expansion du temps de calcul. Pour réduire le temps de calcul, des méthodes de réduction de modèle sont souvent utilisées. Ce chapitre propose une réduction de l'ordre du modèle qui profite de la solution par éléments finis du modèle complet de la machine sur la première période électrique de simulation pour calculer les solutions du modèle réduit dans les périodes suivantes de simulations. Cette technique de réduction de l'ordre du modèle par éléments finis est basée sur la décomposition orthogonale aux valeurs propres combinée à la méthode de l'interpolation empirique discrète. Cependant, dans le cas d'une excitation à fréquences relativement élevées, la méthode de réduction conduit à une imprécision significative dans le calcul des pertes « cuivre » (erreur quadratique de 14%). La qualité de la solution est grandement améliorée en appliquant la réduction uniquement au sous-domaine non-linéaire, elle permet une précision élevée (erreur quadratique de 3%) et en parallèle une réduction significative du temps du calcul (facteur de 3).

Perspectives et futur travail

Comme déjà évoqué, le modèle analytique conduit à un calcul très rapide des pertes « cuivre », il permet d'exprimer ces pertes comme fonction des paramètres géométriques de l'encoche et de différentes composantes harmoniques du courant d'alimentation. Par contre, il conduit le plus souvent à une erreur de calcul significative puisqu'il se contente d'un champ magnétique unidimensionnel négligeant par conséquent l'effet du mouvement du rotor et des champs de fuite au niveau du circuit magnétique. En revanche, la méthode des éléments finis permet une modélisation bidimensionnelle du champ magnétique à travers le domaine de l'encoche. Lorsqu'elle prend en compte le mouvement du rotor et la non-linéarité du circuit magnétique, elle assure un calcul précis des courants induits et des pertes « cuivre » additionnelles conséquentes. Des techniques de réduction de modèle ont été appliquées aux analyses par éléments finis pour réduire la dimension du problème et diminuer le temps de calcul, leur intégration dans des processus d'optimisation reste toujours difficile. Pour cela, le modèle par éléments finis réduit, en tant que modèle fin, pourra être associé au modèle grossier analytique afin de déclencher une démarche d'optimisation efficace par la technique "output space mapping".

Les pertes « cuivre » dans le bobinage des machines électriques ne dépendent pas seulement de la configuration géométrique de l'enroulement. Elles sont fonction, comme on a déjà souligné, de la position des conducteurs dans l'encoche par rapport à la zone de l'entrefer et de la culasse du circuit magnétique et ainsi plus particulièrement de leur position vis-à-vis aux dents du stator. Des outils d'optimisation efficaces tels que la méthode "On/Off" peut être utilisée alors pour déterminer, sous certaines contraintes industrielles et géométriques, la distribution optimale des conducteurs dans la surface d'encoche assurant des pertes minimales par courants de Foucault.

Outre la géométrie de l'enroulement et la répartition spatiale des spires dans l'encoche, d'autres facteurs importants peuvent influencer les pertes additionnelles par courants induits. On cite à titres d'exemples, les paramètres de contrôle du courant d'alimentation tels que la tension d'alimentation de la phase, les gradients du courant, les angles d'amorçage et de conduction et certainement les amplitudes des composantes à hautes fréquences de la décomposition en série de Fourier de la forme d'onde du courant d'alimentation. Ces paramètres doivent être pris en compte dans les processus d'optimisation pour aller plus loin dans la réduction des pertes « cuivre » tout en respectant un cahier des charges et de performances donné.

De manière à compléter notre étude, d'autres techniques de réduction du modèle pourront être appliquées, en vue de l'optimisation du bobinage des machines électriques, telles que par exemples la méthode de la décomposition propre généralisée (dite en anglais "Proper Generalized decomposition" ou la "PGD") et la méthode de réduction par sous domaines de Krylov. L'efficacité et les performances des différentes méthodes pourront être étudiées et un estimateur d'erreur de calcul pourra être envisagé.

Les techniques de réduction du modèle traitées dans ce manuscrit ont justifié, chacune par sa spécificité, leurs efficacités dans la réduction de la dimension du problème éléments finis. Pour cumuler les avantages, ces techniques de réduction du modèle peuvent être couplées entre elles afin d'abaisser davantage le temps de calcul nécessaire à la résolution du problème. Par exemple, la technique de la perturbation qui limite la résolution du problème au domaine linéaire des encoches peut conduire, dans certains cas pour des raisons de précision, à un maillage très dense à travers le bobinage et ainsi un nombre d'inconnus conséquent. Une simple POD peut donc être associée pour réduire efficacement le nombre des inconnues et accélérer par la suite la résolution du problème.

Annexe A

Imposition de la composante normale du vecteur induction magnétique par une condition aux limites de Dirichlet

Pour imposer la composante normale du vecteur induction magnétique \vec{B} , à une valeur qu'on note B_0 , sur une section élémentaire de la frontière du domaine d'un système électromagnétique en 2D (Figure A.1), on pose:

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = B_0 \quad (\text{A.1})$$

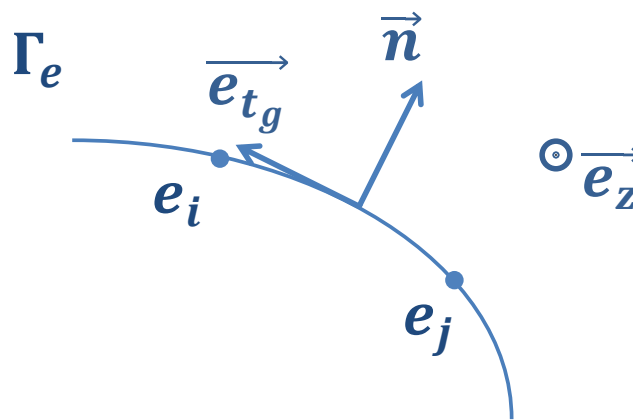


Figure A.1 Section élémentaire de la frontière du domaine reliant les deux nœuds e_i et e_j .

La section élémentaire est notée Γ_e , elle est limitée sur ses extrémités par les deux nœuds e_i et e_j . \vec{n} et \vec{e}_z sont, respectivement, le vecteur normal unitaire à cette section et le vecteur porté par l'axe des z . En utilisant les équations (1.6) et (1.14) du chapitre 1, on peut réécrire l'équation (A.1) sous les formes équivalentes suivantes :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_t}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_t}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = B_0 \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_t}{\partial x} \\ \frac{\partial A_t}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = B_0 \quad (\text{A.3})$$

$$\overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} \vec{n} = B_0 \quad (\text{A.4})$$

$$\overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{e}_{tg} = B_0 \quad (\text{A.5})$$

Le vecteur \vec{e}_{t_g} se déduit du vecteur normal unitaire \vec{n} par une rotation plane, de centre l'origine des axes et d'angle $\pi/2$. \vec{e}_{t_g} est ainsi le vecteur unitaire tangent à la section élémentaire $[e_i; e_j]$. L'équation (A.5) s'avère alors :

$$\frac{\partial A_t}{\partial t_g} = B_0 \quad (\text{A.6})$$

On peut conclure alors de l'équation (A.6) que le fait d'imposer la valeur normale de l'induction magnétique sur la frontière, revient à imposer la dérivée tangentielle du potentiel vecteur magnétique.

En effet, une condition aux limites de type Dirichlet consiste à imposer la valeur du potentiel vecteur magnétique sur la frontière. Vu que les valeurs nodales du potentiel vecteur magnétique sont imposées, elle permet ainsi de prédéfinir, implicitement, la dérivée tangentielle du potentiel vecteur magnétique à travers cette frontière. Par équivalence, la condition aux limites de Dirichlet conduit à imposer la composante normale du vecteur induction magnétique.

Imposition de la composante tangentielle du vecteur champ magnétique par une condition aux limites de Neumann

De même pour imposer la composante tangentielle du champ magnétique \vec{H} à une valeur qu'on note H_0 , sur la section élémentaire $[e_i; e_j]$ de la figure A.1, on pose:

$$\vec{H} \cdot \vec{e}_{t_g} = H_0 \quad (\text{A.7})$$

\vec{e}_{t_g} étant le vecteur tangent unitaire à cette section, on peut l'écrire sous la forme du produit vectoriel suivant:

$$\vec{e}_{t_g} = \vec{n} \wedge \vec{e}_z \quad (\text{A.8})$$

En utilisant maintenant les équations (1.4), (1.6) et (1.14) du chapitre 1 et l'équation (A.8), l'équation (A.7) peut se donner sous les écritures équivalentes suivantes:

$$v \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \cdot (\vec{n} \wedge \vec{e}_z) = H_0 \quad (\text{A.9})$$

$$(\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{rot}(\vec{A})) \cdot \vec{n} = \frac{H_0}{v} \quad (\text{A.10})$$

$$\overrightarrow{grad}(A_t) \cdot \vec{n} = \frac{H_0}{v} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial A_t}{\partial n} = \frac{H_0}{v} \quad (\text{A.12})$$

De l'équation (A.12), on conclut que lorsque la composante tangentielle du champ magnétique est imposée, ceci revient à imposer la dérivée du potentiel vecteur magnétique par rapport à la direction normale.

En effet, une condition aux limites de type Neumann consiste à imposer la valeur de la dérivée normale du potentiel vecteur magnétique sur la frontière. Elle permet ainsi, par équivalence, d'imposer la composante tangentielle du vecteur champ magnétique.

Annexe B

Calcul des forces magnétiques locales

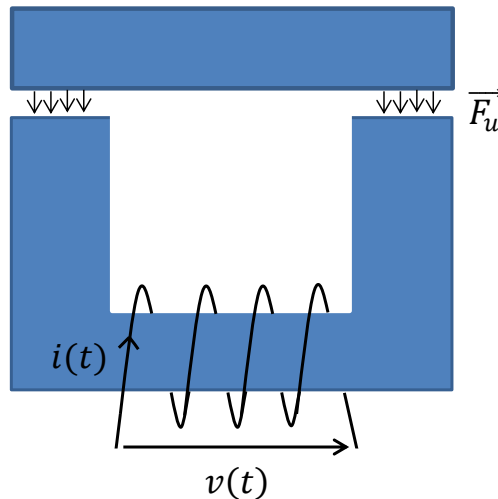


Figure B.1 Convertisseur électromécanique simple

De manière générale, un convertisseur électromécanique est un dispositif destiné à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique ou réciproquement. Il est formé d'un circuit magnétique comportant une partie fixe sur laquelle est placé un bobinage et une partie mobile en rotation ou en translation. La partie mobile est le siège de forces magnétiques \vec{F}_u qui permet son déplacement suivant la direction \vec{u} . Pour le bobinage, appelons respectivement r la résistance, $v(t)$ et $i(t)$ la tension et le courant en convention récepteur et Φ le flux totalisé avec une orientation en concordance avec le courant. Ces diverses grandeurs sont reliées entre elles par la relation suivante :

$$v(t) = ri(t) + \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{B.1})$$

En multipliant par $i(t)dt$, l'équation (1.94) devient :

$$v(t)i(t)dt = ri^2(t)dt + i(t)d\Phi \quad (\text{B.2})$$

En négligeant les pertes mécaniques et les différents types de pertes dans le circuit magnétique tels que les pertes par hystérésis et les pertes « fer », on peut établir le bilan énergétique associé au dispositif électromécanique :

$$dW_{elec} = dW_{th} + dW_{mag} + dW_{mec} \quad (\text{B.3})$$

Où, pendant la durée dt , $dW_{elec} = v(t)i(t)dt$ est l'énergie électrique fournie à la bobine, $dW_{th} = ri^2(t)dt$ est l'énergie perdue par effet joule, $dW_{mec} = F_u du$ est le travail mécanique produit par les forces magnétiques sur un déplacement élémentaire du et dW_{mag} est la variation de l'énergie magnétique du dispositif.

En prenant en compte les équations (1.95) et (1.96), on peut écrire :

$$dW_{mag} = i(t)d\Phi - F_u du \quad (\text{B.4})$$

En partant de l'hypothèse que l'énergie magnétique est une fonction qui dépend uniquement du flux magnétique Φ et du déplacement u , dW_{mag} étant une forme différentielle exacte, nous avons:

$$\frac{\partial i(t)}{\partial u} \Big|_{\Phi} = \frac{\partial F_u}{\partial \Phi} \Big|_u \quad (\text{B.5})$$

$$i(t) = \frac{\partial W_{mag}}{\partial \Phi} \Big|_u \quad (\text{B.6})$$

$$F_u = - \frac{\partial W_{mag}}{\partial u} \Big|_{\Phi} \quad (\text{B.7})$$

L'équation (B.7) formule le principe de la méthode des travaux virtuels [RR92] [Bos92]. Cette méthode est utilisée pour le calcul des forces magnétiques locales s'identifiant à la variation de l'énergie magnétostatique lors d'un déplacement virtuel ∂u suivant la direction \vec{u} tout en maintenant un flux magnétique constant; la force magnétique F_u résultante est la composante suivant la direction \vec{u} du vecteur force magnétique locale \vec{F} .

Dans le cas d'un domaine décomposé en un nombre finis des éléments triangulaires, on cherche à calculer les forces magnétiques nodales. On note W_{mag}^e l'énergie magnétique emmagasinée dans un volume élémentaire V_e correspondant à un élément triangulaire Ω_e de maillage de profondeur l suivant l'axe z .

La force magnétique au nœud e_i , de coordonnées (x_i, y_i) , relative à la contribution de l'élément Ω_e , possède deux composantes suivant x et y . Ces deux composantes au nœud e_i sont calculées en supposant deux déplacements virtuels dans les directions x et y du nœud e_i :

$$F^{\Omega_e}_x = - \frac{\partial W_{mag}}{\partial x_i} \Big|_{\Phi} \quad (\text{B.8})$$

$$F^{\Omega_e}_y = - \frac{\partial W_{mag}}{\partial y_i} \Big|_{\Phi} \quad (\text{B.9})$$

La force magnétique nodale totale au nœud e_i est la somme des contributions de l'ensemble des éléments triangulaires avoisinant le nœud e_i .

Explicitions maintenant le calcul de la composante suivant $u \in \{x, y\}$ de la force magnétique au nœud e_i due à la contribution de l'élément Ω_e . Supposons une variation élémentaire de la coordonnée $u_i \in \{x_i, y_i\}$ du nœud e_i , on peut alors écrire :

$$F^{\Omega_e}_u = - \frac{\partial W_{mag}}{\partial u_i} \Big|_{\Phi} \quad (\text{B.10})$$

Le volume V_e est le volume constitué d'une base qui est le domaine élémentaire Ω_e et d'une profondeur l . Le flux à travers le volume est considéré constant si les flux à travers ces trois facettes sont constants.

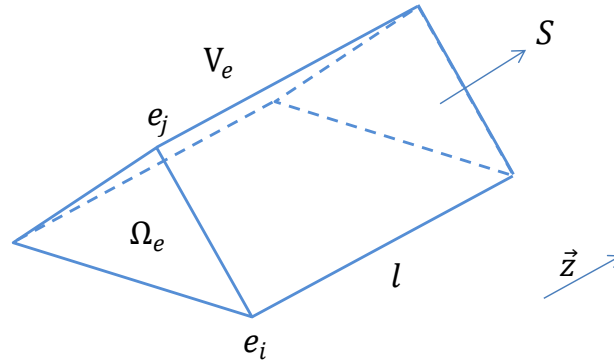


Figure B.2 Le volume élémentaire V_e associé au domaine Ω_e

Une facette S de ce volume est un rectangle de largeur la longueur d'une arête $[e_i, e_j]$ et de longueur l . Le flux sortant de \vec{B} à travers cette surface de frontière Γ est donné par :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{ds} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{dl} = l(A_i - A_j) \quad (\text{B.11})$$

Pour que Φ soit constant, il faut donc que la différence de potentiel vecteur magnétique entre les deux nœuds d'une arête soit constante. Cette condition est vérifiée implicitement si on maintient le potentiel vecteur magnétique constant aux nœuds du domaine d'étude Ω lors du calcul des forces magnétiques nodales.

Dans le volume élémentaire V_e associée au volume Ω_e , l'énergie magnétique s'exprime comme suit :

$$W_{mag} = \iiint_{V_e} \left(\int_0^B h db \right) dV_e = l \iint_{\Omega_e} \left(\int_0^B h db \right) d\Omega_e \quad (\text{B.12})$$

En utilisant la transformation T , cette énergie s'exprime dans l'élément de référence sous la forme suivante :

$$W_{mag} = l \iint_{\Omega_r} \left(\int_0^B h db \right) |\det([J])| d\Omega_r \quad (\text{B.13})$$

Où $\frac{dW_{mag}}{dV} = \int_0^B h db$ est la densité volumique de l'énergie magnétique.

L'expression de la force magnétique de l'équation (1.103) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F^{\Omega_e}_u &= -\frac{\partial W_{mag}}{\partial u_i} |_{\Phi} = -\frac{\partial}{\partial u_i} l \iint_{\Omega_r} \left(\int_0^B h db \right) |\det([J])| d\Omega_r = \\ &= -l \iint_{\Omega_r} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\int_0^B h db \right) |\det([J])| d\Omega_r - l \iint_{\Omega_r} \int_0^B h db \frac{\partial}{\partial u_i} (|\det([J])|) d\Omega_r \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

L'intégrale $\int_0^B hdb$ dans le deuxième terme de l'équation (B.14) est la densité volumique de l'énergie magnétique calculée comme montré sur la figure B.3.

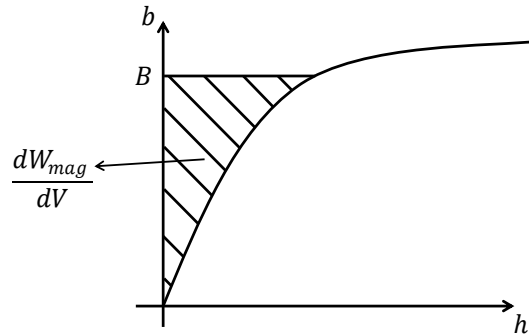


Figure B.3 Trace de la courbe d'aimantation $b(h)$ montrant la densité volumique de l'énergie magnétique.

Le calcul de $\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\int_0^B hdb \right)$ par contre dans le premier terme exige une approximation telle que :

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\int_0^B hdb \right) = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\int_0^B v b db \right) = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{v}{2} B^2 \right) = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{v}{2} \vec{B}^T \vec{B} \right) \quad (\text{B.15})$$

L'équation (1.81), du chapitre 1, montre que le vecteur \vec{B} dans l'élément Ω_e s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{B} = [J]^{-1} \overrightarrow{GRAD} [A_t^{\Omega_e}] \quad (\text{B.16})$$

Ou \overrightarrow{GRAD} est donné par la matrice suivante :

$$\overrightarrow{GRAD} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Prenons en compte les équations (B.16) et (B.17), l'expression (B.15) de la force magnétique s'écrit alors :

$$F^{\Omega_e}_u = -l \iint_{\Omega_r} \left(\frac{v}{2} [A_t^{\Omega_e}]^T \overrightarrow{GRAD}^T \frac{\partial}{\partial u_i} ([J]^{-T} [J]^{-1}) \overrightarrow{GRAD} [A_t^{\Omega_e}] \right) |dét([J])| d\Omega_r - l \iint_{\Omega_r} \int_0^B hdb \frac{\partial}{\partial u_i} (|dét([J])|) d\Omega_r \quad (\text{B.18})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i} ([J]^{-T} [J]^{-1}) &= \frac{\partial}{\partial u_i} [J]^{-T} [J]^{-1} + [J]^{-T} \frac{\partial}{\partial u_i} [J]^{-1} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_i} [J]^{-T} [J]^T [J]^{-T} [J]^{-1} + [J]^{-T} [J]^{-1} [J] \frac{\partial}{\partial u_i} [J]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

On démontre que :

$$\frac{\partial}{\partial u_i} ([J][J]^{-1}) = \frac{\partial}{\partial u_i} (I) = 0 = \frac{\partial}{\partial u_i} ([J])[J]^{-1} + [J] \frac{\partial}{\partial u_i} ([J]^{-1}) \quad (\text{B.20})$$

Où I est la matrice identique, donc :

$$\frac{\partial}{\partial u_i} ([J])[J]^{-1} = -[J] \frac{\partial}{\partial u_i} [J]^{-1} \quad (\text{B.21})$$

En partant de l'équation (1.113), l'équation (1.111) s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial u_i} ([J]^{-T}[J]^{-1}) = -[J]^{-T} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} [J]^T [J]^{-T} + [J]^{-1} \frac{\partial}{\partial u_i} [J] \right) [J]^{-1} \quad (\text{B.22})$$

Le calcul des forces magnétiques locales nous permet de calculer les efforts globaux tels que les forces radiales et le couple électromagnétique dans le cas d'un actionneur rotatif ou la force globale du mouvement s'il s'agit d'un actionneur linéaire.

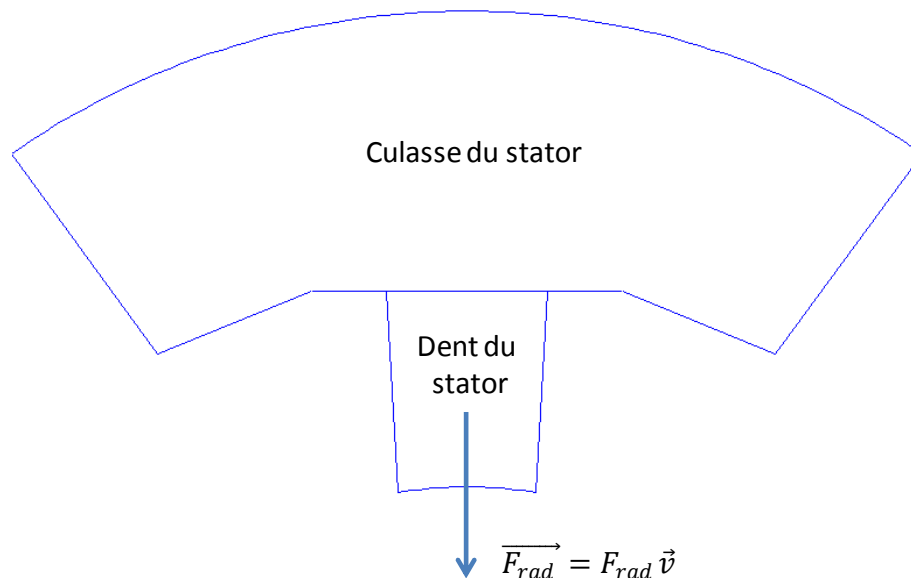


Figure B.4 La force radiale globale appliquée sur la dent du stator.

Les forces radiales sont des forces appliquées sur les dents statoriques et rotoriques, elles sont maximales pour un courant donné lorsque celles-ci sont en vis-à-vis. Ces forces sont à l'origine des vibrations mécaniques importantes dans la machine. Ces vibrations sont assez marquantes dans les machines à réluctance variable à double saillance. Pour calculer la force radiale F_{rad} appliquée sur une dent du stator par exemple, toutes les forces locales exercées sur cette dent sont projetées sur la direction radiale \vec{v} parallèle à l'axe du stator pour faire par la suite la sommation des composantes projetées.

$$F_{rad} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v} \quad (\text{B.23})$$

Où n est le nombre total des nœuds de la dent du stator considérée et \vec{F}_i la force appliquée au nœud i .

Dans un actionneur rotatif l'effort utile considéré est le couple électromagnétique. Pour le déterminer, on fait la somme sur les composantes tangentielles des forces magnétiques nodales. La composante tangentielle des forces magnétiques est dite motrice, c'est la composante responsable du mouvement. On en déduit le couple électromagnétique, soit :

$$C_{em} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{u}_t r_i \quad (\text{B.24})$$

Où n est le nombre des nœuds à la frontière entre le rotor et l'entrefer, \vec{F}_i la force appliquée au nœud i , r_i est la distance entre le centre O du rotor et le nœud i et \vec{u}_t est le vecteur unitaire tangent au cercle de centre O et de rayon r_i dirigée dans le sens du rotation du rotor.

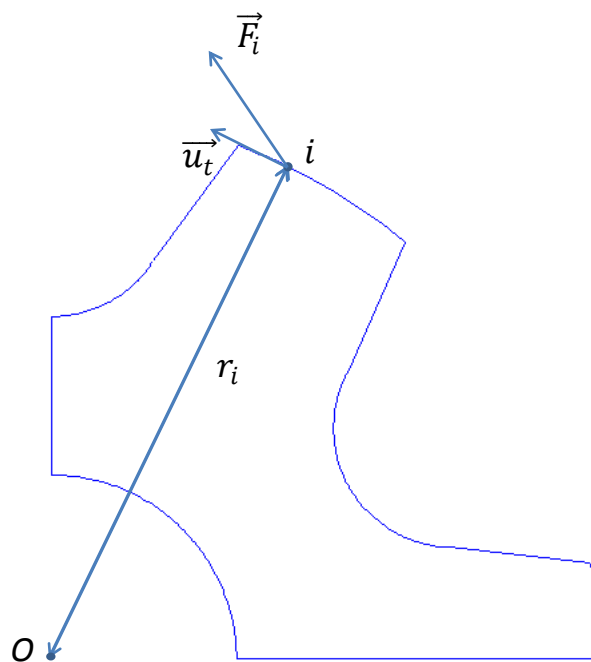


Figure B.5 Eléments de calcul du couple électromagnétique

Par contre, dans le cas d'un actionneur linéaire, le mouvement de la partie mobile est un mouvement de translation. L'effort électromécanique utile considéré n'est plus dans ce cas le couple mais la force globale motrice \vec{F}_m exercée sur la partie en mouvement.

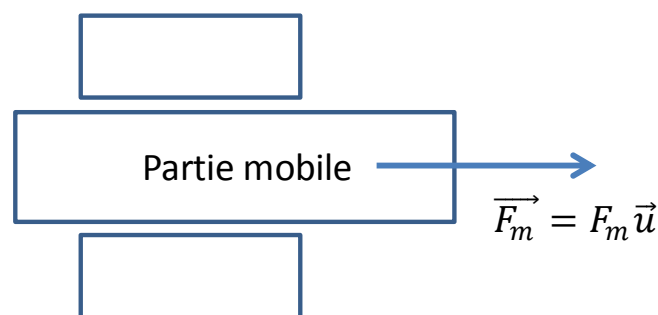


Figure B.6 La force globale exercée sur la partie mobile

Pour calculer cette force globale qui est suivant la direction portée par le vecteur \vec{u} , toutes les projections suivant la direction du mouvement des forces locales exercées sur la partie mobile sont sommées :

$$F_m = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{u} \quad (\text{B.25})$$

Où n est le nombre total des nœuds de la parti mobile et \vec{F}_i la force appliquée au nœud i .

Annexe C

Modèle pour le calcul des pertes « fer »

Le calcul des pertes « fer » dans les circuits magnétiques est souvent basé sur des formules empiriques qui ont pour origine l'équation proposée par Steinmetz [Ste84] : la densité volumique des pertes « fer » dans les circuits magnétiques est estimée par la formule suivante :

$$p_{fer} = kf^\alpha \hat{B}^\beta \quad (C.1)$$

Où \hat{B} est l'amplitude de l'induction magnétique dans le cas d'une excitation sinusoïdale de fréquence f . k , α et β , souvent appelées les paramètres de Steinmetz, sont des paramètres caractéristiques du matériau magnétique. Ils sont déduits de l'ajustement des courbes de pertes $p_{fer} = p_{fer}(\hat{B})$ avec l'équation $p_{fer} = kf^\alpha \hat{B}^\beta$. Les courbes de pertes sont données comme courbes caractéristiques déterminées expérimentalement pour plusieurs fréquences d'alimentation sinusoïdales données.

Vu que, les mesures expérimentales ont prouvé que la décomposition en série de Fourier n'est pas adéquate avec l'équation de Steinmetz [MK92], de nombreuses modifications empiriques [RD97] [LAS001] ont été proposées à l'équation de Steinmetz pour calculer les pertes « fer » dans le cas des systèmes à excitations non sinusoïdales périodiques telles que par exemple les machines à réluctance variable. En 2002, Venkatachalam et *al.* introduisent la méthode intitulée "the improved generalised Steinmetz equation" (iGSE) qui dépend de la variation en fonction du temps de l'induction magnétique et de l'écart entre les maximums et les minimums locaux successifs de l'induction magnétique [AN013] [VSA+002] :

$$p_{fer} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i T_i}{T} \quad (C.2)$$

$$p_i = \frac{k_i (\Delta B)^{\beta-\alpha}}{T_i} \int_{T_i} \left| \frac{dB(t)}{dt} \right|^\alpha dt \quad (C.3)$$

Où n est le nombre total des courbes intermédiaires (C_i), de la courbe de l'induction $B(t)$, qui relie les maximums locaux aux minimums locaux successifs et vice versa, T_i la période de la courbe intermédiaire (C_i), ΔB l'écart entre le minimum et le maximum de (C_i) et T la période de l'induction magnétique $B(t)$. Le coefficient k_i est donné par la formule suivante :

$$k_i = \frac{k}{(2\pi)^{\alpha-1} \int_0^{2\pi} |\cos(\theta)|^\alpha 2^{\beta-\alpha} d\theta} \quad (C.4)$$

Un exemple d'une courbe d'induction $B(t)$ est représenté sur la figure C.1, elle est séparée en 5 courbes intermédiaires sur lesquelles se fait le calcul de la densité volumique des pertes

« fer ». Décomposons la période T_i de la courbe (C_i) en n intervalles de temps, l'équation (C.3) peut être approchée par l'expression suivante :

$$p_i = \frac{k_i(\Delta B)^{\beta-\alpha}}{T_i} \sum_{m=1}^n \left| \frac{B_m - B_{m-1}}{t_m - t_{m-1}} \right|^\alpha (t_m - t_{m-1}) \quad (\text{C.5})$$

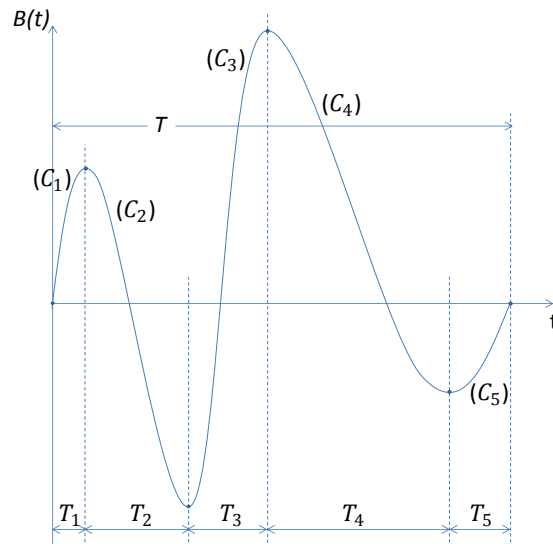


Figure C.1 Séparation des courbes intermédiaires (C_i) reliant les maximums locaux aux minimums locaux successives.

Les courbes de l'induction magnétique sont déterminées dans les parties essentielles du circuit magnétique au stator et au rotor. Ces parties sont la culasse au stator, la culasse au rotor, le pôle au stator et le pôle au rotor.

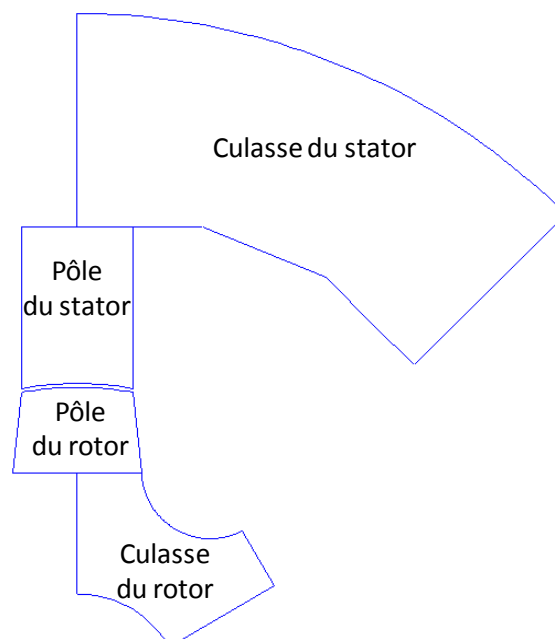


Figure C.2 Coupe transversale de la culasse du stator, la culasse du rotor, du pôle stator et du pôle du rotor d'une machine à réluctance variable

Pour calculer les pertes « fer » totales, les densités de perte dans toutes les parties essentielles du circuit magnétique au stator et au rotor sont déterminées séparément. Multipliant toutes les densités de perte par les volumes des parties magnétiques correspondantes, on obtient alors les pertes « fer » totales.

$$P_{fer} = V_{ps} * p_{fer,ps} + V_{pr} * p_{fer,pr} + V_{cs} * p_{fer,cs} + V_{cr} * p_{fer,cr} \quad (C.6)$$

Où $p_{fer,ps}$, $p_{fer,pr}$, $p_{fer,cs}$ et $p_{fer,cr}$ sont respectivement les densités de perte « fer » dans le pôle au stator, le pôle au rotor, la culasse du stator et la culasse du rotor.

La figure C.2 montre les sections transversales des différentes parties du circuit magnétique. Les volumes correspondants sont calculés en multipliant la surface des sections transversales par la longueur de la machine l et le nombre des pôles au stator et au rotor. Si S_{ps} , S_{pr} , S_{cs} et S_{cr} sont respectivement les surfaces des sections transversales du pôle au stator, pôle au rotor, culasse du stator et culasse du rotor, les volumes correspondantes s'écrivent :

$$V_{ps} = S_{ps} * l * N_s \quad (C.7)$$

$$V_{pr} = S_{pr} * l * N_s \quad (C.8)$$

$$V_{cs} = S_{cs} * l * N_r \quad (C.9)$$

$$V_{cr} = S_{cr} * l * N_r \quad (C.10)$$

Avec, N_s et N_r , respectivement, le nombre de pôles au stator et au rotor.

Annexe D

Calcul du rendement

Dans le cas d'une machine tournante telle que la machine à réductance variable, la différentielle de l'énergie magnétique donnée par l'équation (B.4), de l'annexe B peut se réécrire sous la forme suivante :

$$dW_{mag} = i(t)d\Phi - C_{em}d\theta \quad (D.1)$$

C_{em} est le couple électromagnétique de la machine calculée dans l'équation (B.24), de l'annexe B, à partir des forces électromagnétiques nodales et $d\theta$ le déplacement angulaire élémentaire de la machine. D'après l'équation précédente (D.1), le couple électromagnétique est donné à partir de l'énergie magnétique par la formule suivante :

$$C_{em} = -\frac{\partial W_{mag}}{\partial \theta} |_{\Phi} \quad (D.2)$$

Supposons T_e la période d'excitation électrique, la valeur moyenne du couple électromagnétique est donnée par l'équation suivante :

$$\langle C_{em} \rangle = \frac{1}{T_e} \int_{T_e} C_{em} dt \quad (D.3)$$

Si on multiplie l'équation (D.3) par la vitesse angulaire de la rotation du rotor $\gamma_r = \frac{d\theta}{dt}$ et on prend en compte l'équation (D.2), on obtient l'expression suivante de la puissance électromagnétique P_{em} :

$$\langle C_{em} \rangle \gamma_r = \frac{1}{T_e} \int_{T_e} C_{em} dt \gamma_r = \frac{1}{T_e} \int_{T_e} C_{em} d\theta = \frac{-\Delta W_{mag}}{T_e} = P_{em} \quad (D.4)$$

Où ΔW_{mag} est la variation de l'énergie magnétique pendant la période électrique.

En prenant en compte les différents types de pertes dans la machine telles que les pertes « fer » et les pertes Joule d'une part et en négligeant les pertes mécanique d'autre part, le rendement de la machine électrique sera donné alors par l'expression suivante :

$$\mu = \frac{P_{em} - P_{fer}}{P_{em} + P_J} \quad (D.5)$$

Bibliographie

- [ABM+015] M. Al Eit, F. Bouillault, C. Marchand, G. Krebs and L. Santandrea, "2D Modeling of Litz Wire. Reduced Model and its Application for Switched Reluctance Machine," in *20th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields (Compumag 2015)*, Montreal, Canada, June 2015.
- [ABM+016a] M. Al Eit, F. Bouillault, C. Marchand and G. Krebs, "The Study of the Correlation between Winding Geometry and Copper Losses by Means of Analytic and Finite Element Calculations," dans *la 2^{ème} édition du Symposium de Génie Electrique (SGE 2016)*, Grenoble, France, juin 2016.
- [ABM+016b] M. Al Eit, F. Bouillault, C. Marchand and G. Krebs, "2-D Reduced Model for Eddy Currents Calculation in Litz Wire and Its Application for Switched Reluctance Machine," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 52, no. 3, pp. 1-4, March 2016.
- [ABM+016c] M. Al Eit, F. Bouillault, C. Marchand and G. Krebs, "Model-Order Reduction of Electrical Machines by Means of the Proper Orthogonal Decomposition and Discrete Empirical Interpolation Methods for Copper Loss Calculation," in *10th International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF 2016)*, Lyon, France, April 2016.
- [ABS+016] M. Al Eit, F. Bouillault, L. Santandrea, C. Marchand and G. Krebs, "Calculation of Copper Losses in Case of Litz and Twisted Wires. 2D Modeling and Application for Switched Reluctance Machine," *European Journal of Electrical Engineering*, vol. 18, no. (3-4), 2016.
- [ABS+006] O. J. Antunes, J.P.A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santandrea, F. Bouillault, F. Rapetti, "Comparison between nonconforming movement methods," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, no. 4, pp. 599-602, April 2006.
- [ACF+82] A. Abdel-Razek, J. Coulomb, M. Feliachi and J. Sabonnadiere, "Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 18, no. 2, pp. 655-659, Mar 1982.
- [ADB+016a] M. Al Eit, P. Dular, F. Bouillault, C. Marchand and G. Krebs, "The Boundary Condition Effects on Reduced Finite Element Models for Eddy Currents Loss Calculation," in *10th International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF 2016)*, Lyon, France, April 2016.
- [ADB+016b] M. Al Eit, P. Dular, F. Bouillault, C. Marchand and Guillaume Krebs, "2D Finite Element Model Reduction for Copper Losses Calculation in Switched Reluctance Machines," in *17th biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC 2016)*, Miami, Florida, USA, November 2016.

- [ASF+015] M. Al Eit, L. Santandréa, F. Bouillault, C. Marchand et G. Krebs "Calcul des Pertes Cuivre dans les Conducteurs Multi- filamenteuses et Application aux Bobinages des Machines à Réductance Variable à Double Saillance", dans la 8^{ème} Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme (NUMELEC 2015), Saint-Nazaire, France, Juin 2015.
- [AN013] D. Aguglia and M. Neuhaus, "Laminated magnetic materials losses analysis under non-sinusoidal flux waveforms in power electronics systems," *Power Electronics and Applications (EPE), 2013 15th European Conference on*, Lille, 2013, pp. 1-8.
- [ARF008] M. N. Albunni, V. Rischmuller, T. Fritzsche and B. Lohmann, "Model-Order Reduction of Moving Nonlinear Electromagnetic Devices," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, no. 7, pp. 1822-1829, July 2008.
- [BEK011] B. Bilgin, A. Emadi and M. Krishnamurthy, "Comparative evaluation of 6/8 and 6/10 switched reluctance machines for traction application in Plug-in Hybrid Electric Vehicles," *2011 IEEE International Electric Machines & Drives Conference (IEMDC)*, Niagara Falls, ON, 2011, pp. 1300-1305.
- [BSD008] M. Boutaayamou, R. V. Sabariego and P. Dular, "An Iterative Finite Element Perturbation Method for Computing Electrostatic Field Distortions," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, no. 6, pp. 746-749, June 2008.
- [BM004] M. Besbes and B. Multon : MRVSim code : Logiciel de simulation et d'aide à la conception de machines à réductance variable à double saillance à alimentation électronique.
Deposit APP CNRS, n.IDDN.FR.001.430010.000.S.C.2004.000.30645.
- [BMN+004] M. Barrault, Y. Maday, N. Nguyen, and A. Patera, "An empirical interpolation method: Application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations," *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 339, no. 9, pp. 667–672, 2004.
- [BMP94] C. Bernardi, Y. Maday and A.T. Patera, "A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method, " *Collège de France Seminar XI, H. Brezis & J.-L. Lions eds., Pitman*, pp. 13–51, 1994.
- [BMP93] C. Bernardi, Y. Maday and A.T. Patera, "Domain decomposition by the mortar element method," in *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters, H.G. Kaper & M. Garbey eds., N.A.T.O. ASI Series C 384, Kluwer*, pp. 269-286, 1993.
- [BNR96] M. Bartoli, N. Noferi, A. Reatti and M. K. Kazimierzuk, "Modeling Litz-wire winding losses in high-frequency power inductors," *Power Electronics Specialists Conference, 1996. PESC '96 Record., 27th Annual IEEE*, Baveno, 1996, pp. 1690-1696 vol.2.
- [Bos92] A. Bossavit, "Edge-element computation of the force field in deformable bodies," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, no. 2, pp. 1263-1266, Mar 1992.
- [Car007] C. Carstensen, "Eddy Currents in Windings of Switched Reluctance Machines," *PhD Thesis in engineering and sciences*, RWTH Aachen University, Nov. 2007.

- [CCR95] M. Chiampi, D. Chiarabaglio and M. Repetto, "A Jiles-Atherton and fixed-point combined technique for time periodic magnetic field problems with hysteresis," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 31, no. 6, pp. 4306-4311, Nov 1995.
- [Cha74] M. V. K. Chari, "Finite-Element Solution of the Eddy-Current Problem in Magnetic Structures," in *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-93, no. 1, pp. 62-72, Jan. 1974.
- [Cha000] A. Chatterjee, "An introduction to the proper orthogonal decomposition," *Current Science*, vol.78, no. 7, pp. 808-817, 2000.
- [CF008] K. Carlberg and C. Farhat. "A Compact Proper Orthogonal Decomposition Basis for Optimization-Oriented Reduced-Order Models", *12th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Multidisciplinary Analysis Optimization Conferences*, 2008.
- [CLC011] F. Chinesta, P. Ladeveze and E. Cueto, "A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol.18, pp. 395-404, November 2011.
- [CS010] S. Chaturantabut and D. C. Sorensen, "Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation," *Society for Industrial and Applied Mathematics J. Sci. Comput.*, vol. 32(5), pp. 2737–2764, 2010.
- [DHL99] P. Dular, F. Henrotte and W. Legros, "A general and natural method to define circuit relations associated with magnetic vector potential formulations," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35, no. 3, pp. 1630-1633, May 1999.
- [Dow66] P. L. Dowell, "Effects of eddy currents in transformer windings," in *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, vol. 113, no. 8, pp. 1387-1394, August 1966.
- [DRL85] B. Davat, Z. Ren and M. Lajoie-Mazenc, "The movement in field modeling," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 21, no. 6, pp. 2296-2298, Nov 1985.
- [DSF+009] P. Dular, R. V. Sabariego, M. V. Ferreira da Luz, P. Kuo-Peng and L. Krahenbuhl, "Perturbation Finite Element Method for Magnetic Model Refinement of Air Gaps and Leakage Fluxes," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, no. 3, pp. 1400-1403, March 2009.
- [DSK008] P. Dular, R. V. Sabariego and L. Krahenbuhl, "Perturbation finite element method for magnetic circuits," *Computation in Electromagnetics, 2008. CEM 2008. 2008 IET 7th International Conference on*, Brighton, 2008, pp. 108-109.
- [DTL005] G. Dhatt, G. Touzot and E. Lefrançois, " Méthode des éléments finis," *Hermes*, 2005.
- [EPL+008] L. Encica, J. J. H. Paulides, E. A. Lomonova and A. J. A. Vandenput, "Aggressive Output Space-Mapping Optimization for Electromagnetic Actuators," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, no. 6, pp. 1106-1109, June 2008.
- [Fer94] J. A. Ferreira, "Improved analytical modeling of conductive losses in magnetic components," in *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 9, no. 1, pp. 127-131, Jan 1994.

- [FF95] P. Feldmann and R. W. Freund, "Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process," in *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 14, no. 5, pp. 639-649, May 1995.
- [Fle84] C. A. J. Fletcher, "Computational Galerkin methods," *Springer*, 1984.
- [Fou85] G. Fournet, "Electromagnétisme à partir des équations locales," *Masson*, Paris 1985.
- [FRM+015] M. Farzamfar, P. Rasilo, F. Martin and A. Belahcen, "Proper orthogonal decomposition for order reduction of permanent magnet machine model," *Electrical Machines and Systems (ICEMS), 2015 18th International Conference on*, Pattaya, 2015, pp. 1945-1949.
- [Ger009] D. Gerling, "Approximate analytical calculation of the skin effect in rectangular wires," *Electrical Machines and Systems, 2009. ICEMS 2009. International Conference on*, Tokyo, 2009, pp. 1-6.
- [GG81] G. Dhatt and G. Touzot, "Une Présentation de la méthode des éléments finis," *Maloine*, 1981.
- [Har89] W. Hart Hayt, "Engineering Electromagnetics," *McGraw-Hill*, 5th edition, 1989.
- [HC013] T. Henneron and S. Clénet, "Model order reduction of quasi-static problems based on POD and PGD approaches," *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, vol. 64, no. 2, Article number 24514, pp. 1-7, 2013.
- [HC014] T. Henneron and S. Clénet, "Model Order Reduction of Non-Linear Magnetostatic Problems Based on POD and DEI Methods," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 50, no. 2, pp. 33-36, Feb. 2014.
- [HC015] T. Henneron and S. Clénet, "Model-Order Reduction of Multiple-Input Non-Linear Systems Based on POD and DEI Methods," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 51, no. 3, pp. 1-4, March 2015.
- [HGB000] W. G. Hurley, E. Gath and J. G. Breslin, "Optimizing the AC resistance of multilayer transformer windings with arbitrary current waveforms," in *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 15, no. 2, pp. 369-376, Mar 2000.
- [HKL016] J. Hong, Y. Kim and C. Lee, "Investigation on a doubly salient machine for an electric vehicle application," *2016 IEEE Transportation Electrification Conference and Expo, Asia-Pacific (ITEC Asia-Pacific)*, Busan, 2016, pp. 950-953.
- [How17] G.W.O. Howe, "The High-Frequency Resistance of Multiply-Stranded Insulated Wire," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 93, pp. 468-492, 1917.
- [IB97] N. Ida, J. P. A. Bastos, "Electromagnetics and calculation of fields," *Springer*, 1997.
- [ICD002] R. B. Inderka, C. E. Carstensen and R. W. De Doncker, "Eddy currents in medium power switched reluctance machines," *Power Electronics Specialists Conference, 2002. pesc 02. 2002 IEEE 33rd Annual*, 2002, pp. 979-984 vol.2.

- [IUN013] H. Ishikawa, M. Uraji and H. Naitoh, "A new current control for eddy current loss reduction of switched reluctance motors," *Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL), 2013 IEEE 14th Workshop on*, Salt Lake City, UT, 2013, pp. 1-6.
- [KD003] M. Klauz and D. G. Dorrell, "Eddy Currents and Proximity Effect in a Coil of a Switched Reluctance Motor", *3rd International Conference on Advanced Engineering Design - AED 2003*, Prague, Czech Republic, 2003.
- [KD006a] M. Klauz and D. G. Dorrell, "Eddy Current Effects in a Switched Reluctance Motor," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, no. 10, pp. 3437-3439, Oct. 2006.
- [KD006b] M. Klauz and D. G. Dorrell, "Eddy Current Effects in a Switched Reluctance Motor," INTERMAG 2006 - IEEE International Magnetics Conference, San Diego, CA, 2006, pp. 770-770.
- [Kel003] C. T. Kelley, "Solving Nonlinear Equations with Newton's Method," *Fundamentals of Algorithms*, SIAM, 2003
- [Kri001] R. Krishnan, "Switched Reluctance Motor drives: Modeling, Simulation, Analysis, Design and Applications," CRC Press, 2001.
- [LAS001] Jieli Li, T. Abdallah and C. R. Sullivan, "Improved calculation of core loss with nonsinusoidal waveforms," *Industry Applications Conference, 2001. Thirty-Sixth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2001 IEEE*, Chicago, IL, USA, 2001, pp. 2203-2210 vol.4.
- [LL93] A. W. Lotfi and F. C. Lee, "A high frequency model for Litz wire for switch-mode magnetics," *Industry Applications Society Annual Meeting, 1993., Conference Record of the 1993 IEEE*, Toronto, Ont., 1993, pp. 1169-1175 vol.2.
- [LM93] P. Lombard and G. Meunier, "A general purpose method for electric and magnetic combined problems for 2D, axisymmetric and transient systems," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, no. 2, pp. 1737-1740, Mar 1993.
- [Lon90] W. Long, "Contribution à la modélisation de systèmes électromagnétiques à l'aide du couplage des équations des circuits magnétiques et électriques," *Thèse de doctorat*, Université Paris 6, France, oct. 1990.
- [Lum67] J. Lumley, "The structure of inhomogeneous turbulence flows," in *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, Nauka, Ed. by A. M. Yaglom and V. I. Tatarski, 1967.
- [Lyo21] W. V. Lyon, "Heat Losses in the Conductors of Alternating-Current Machines," in *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. XL, no. , pp. 1361-1409, Jan. 1921.
- [Meu002] G. Meunier, " Modèles et formulations en électromagnétisme : Electromagnétisme et éléments finis," *Hermès*, 2002.
- [MJH93] T. J. E. Miller, R. James and Jr. Hendershot, "Switched Reluctance Motors and Their Control," *Magna Physics Pub*, 1993.
- [MK92] P. N. Materu and R. Krishnan, "Estimation of switched reluctance motor losses," in *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 28, no. 3, pp. 668-679, May/June 1992.

- [NP80] A. K. Noor and J. M. Peters, "Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures," *AIAA Journal*, vol. 18, no. 1, pp. 455-462, 1980.
- [Pec90] M.A. PECCOLO, "Contribution à la modélisation des machines asynchrones par la résolution pas-à-pas de l'équation du champ," Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, 1990.
- [PR93] F. Piriou and A. Razek, "Finite element analysis in electromagnetic systems-accounting for electric circuits," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, no. 2, pp. 1669-1675, Mar 1993.
- [PRS88] T. W. Preston, A. B. J. Reece and P. S. Sangha, "Induction motor analysis by time-stepping techniques," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, no. 1, pp. 471-474, Jan 1988.
- [RD97] J. Reinert, R. Inderka and R. W. De Doncker, "A novel method for the prediction of losses in switched reluctance machines," *7th European Conference on Power Electronics and Applications, EPE'97*, 1997.
- [Ren85] Z. Ren, "Contribution à la modélisation des machines électriques par résolution simultanée des équations du champ et des équations du circuit d'alimentation," Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, 1985.
- [Rob002a] F. Robert, "A theoretical discussion about the layer copper factor used in winding losses calculation," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 38, no. 5, pp. 3177-3179, Sep 2002.
- [Rob002b] F. Robert, "Eddy current losses: A theoretical discussion of Dowell's layer copper factor", *EPE Journal*, vol. 12(3), pp. 9-15, 2002.
- [RR92] Z. Ren and A. Razek, "Local force computation in deformable bodies using edge elements," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, no. 2, pp. 1212-1215, Mar 1992.
- [Sai99] J. Saitz, "Newton-Raphson method and fixed-point technique in finite element computation of magnetic field problems in media with hysteresis," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35, no. 3, pp. 1398-1401, May 1999.
- [SC012] D. Schmidhausler and M. Clemens, "Low-Order Electroquasistatic Field Simulations Based on Proper Orthogonal Decomposition," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 48, no. 2, pp. 567-570, Feb. 2012.
- [SC80] P. Silvester and M. V. K. Chari, "Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems," *John Wiley & Sons Inc*, 1980.
- [SD007] R. V. Sabariego and P. Dular, "A Perturbation Approach for the Modeling of Eddy Current Nondestructive Testing Problems With Differential Probes," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 43, no. 4, pp. 1289-1292, April 2007.
- [Sir87] L. Sirovich, "Turbulence and the dynamics of coherent structures. I-Coherent structures," *Quart. Appl. Math.*, vol. 45, no. 3, pp. 561-590, 1987.
- [Smit84] G. D. Smith, "Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods," *Oxford University Press*, Oxford, third edition, 1986.
- [SOB93] S. J. Salon, L. Ovacik and J. F. Balley, "Finite element calculation of harmonic losses in AC machine windings," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, no. 2, pp. 1442-1445, Mar 1993.

- [SSC013] D. Schmidhäusler, S. Schöps and M. Clemens, "Reduction of Linear Subdomains for Non-Linear Electro-Quasistatic Field Simulations," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 49, no. 5, pp. 1669-1672, May 2013.
- [SSC014] D. Schmidhäusler, S. Schöps and M. Clemens, "Linear Subspace Reduction for Quasistatic Field Simulations to Accelerate Repeated Computations," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 50, no. 2, pp. 421-424, Feb. 2014.
- [Ste84] C. P. Steinmetz, "On the law of hysteresis," in *Proceedings of the IEEE*, vol. 72, no. 2, pp. 197-221, Feb. 1984.
- [Sto74] R. L. Stoll, "The Analysis of Eddy Currents," *Oxford, U.K.: Clarendon Press*, 1974.
- [Sul99] C. R. Sullivan, "Optimal choice for number of strands in a litz-wire transformer winding," in *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 14, no. 2, pp. 283-291, Mar 1999.
- [TS003] Xu Tang and C. R. Sullivan, "Stranded wire with uninsulated strands as a low-cost alternative to litz wire," *Power Electronics Specialist Conference, 2003. PESC '03. 2003 IEEE 34th Annual*, 2003, pp. 289-295 vol.1.
- [UHS+016] W. Uddin, T. Husain, Y. Sozer and I. Husain, "Design Methodology of a Switched Reluctance Machine for Off-Road Vehicle Applications," in *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 52, no. 3, pp. 2138-2147, May-June 2016.
- [Ven84] P.S. Venkatraman, "Winding Eddy Current Losses in Switch Mode Power Transformers Due to Rectangular Wave Currents," *Proceedings of Powercon II, Power Concepts Inc., Venturs, California*, 1984, Section A-I, pp. 1-11.
- [VSA+002] K. Venkatachalam, C. R. Sullivan, T. Abdallah and H. Tacca, "Accurate prediction of ferrite core loss with nonsinusoidal waveforms using only Steinmetz parameters," *Computers in Power Electronics, 2002. Proceedings. 2002 IEEE Workshop on*, 2002, pp. 36-41.