



**HAL**  
open science

# Reconstruction de la déformée d'une aiguille instrumentée

Pierre-Loup Schaefer

► **To cite this version:**

Pierre-Loup Schaefer. Reconstruction de la déformée d'une aiguille instrumentée. Mathématiques générales [math.GM]. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT: 2017GREAS025. tel-01692611

**HAL Id: tel-01692611**

**<https://theses.hal.science/tel-01692611>**

Submitted on 25 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **EDISCE**

Arrêté ministériel : du 7 août 2006

Présentée par

**Pierre-Loup SCHAEFER**

Thèse dirigée par **Alexandre MOREAU-GAUDRY**  
et codirigée par **Grégory CHAGNON, Philippe CINQUIN**

préparée au sein du laboratoire **Techniques de l'Ingénierie Médicale et de la Complexité - Informatique, Mathématiques et Applications de Grenoble (TIMC-IMAG)**  
et de l'école doctorale **d'Ingénierie pour la Santé, la Cognition et l'Environnement (EDISCE)**

## Reconstruction de la déformée d'une aiguille instrumentée

Thèse soutenue publiquement le **28 Mars 2017**,  
devant le jury composé de :

**M. Frédéric BOYER**

Professeur, IRRCCyN, Nantes, Rapporteur

**M. Christophe RABUT**

Professeur émérite, INSA Toulouse, Rapporteur

**M. Pascal HAIGRON**

PU, Université de Rennes 1, Examineur

**M. Adrian KASTLER**

PH, Centre Universitaire Hospitalier de Grenoble Alpes, Examineur

**M. Alexandre MOREAU-GAUDRY**

PUPH, TIMC-IMAG, UJF-CNRS, Grenoble, Directeur de thèse

**M. Grégory CHAGNON**

MDC, TIMC-IMAG, UJF-CNRS, Grenoble, Co-Directeur de thèse

**M. Philippe CINQUIN**

PUPH, TIMC-IMAG, UJF-CNRS, Grenoble, Co-Directeur de thèse





## TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xv</b>
<b>I Présentation du sujet</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte</b>	<b>3</b>
<b>1.1 Gestes Médico-Chirurgicaux Assistés par Ordinateur</b> . . . . .	<b>3</b>
1.1.1 Définition . . . . .	3
<b>1.2 Radiologie interventionnelle</b> . . . . .	<b>3</b>
1.2.1 Présentation . . . . .	3
1.2.2 Techniques d'imageries . . . . .	4
1.2.3 Synthèse . . . . .	7
1.2.4 Environnement de navigation en radiologie interventionnelle . . . . .	8
<b>1.3 Conclusion</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1.4 Contexte de la thèse dans les GMCAO</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2 Introduction</b>	<b>13</b>
2.1 Approche . . . . .	13
2.2 Organisation du manuscrit . . . . .	13
<b>II Boîte à outils</b>	<b>15</b>
<b>3 Introduction</b>	<b>17</b>
<b>4 Repère mobile</b>	<b>19</b>
4.1 Repère mobile . . . . .	19

4.2	Repère de Frenet . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Théorie des poutres</b>	<b>23</b>
5.1	Introduction . . . . .	23
5.2	Notions . . . . .	24
5.2.1	Définitions principales . . . . .	24
5.2.2	Hypothèses fondamentales . . . . .	24
5.2.3	Variables de la poutre . . . . .	25
5.3	Théorie des poutres en deux et trois dimensions . . . . .	25
5.3.1	Etat de l'art . . . . .	25
5.4	Théorie de Reissner . . . . .	27
5.4.1	Paramétrisation de la poutre . . . . .	27
5.4.2	Variables . . . . .	28
5.4.3	Equations . . . . .	29
5.4.4	Interprétation physique des grandeurs $\gamma$ et $\varkappa$ . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Algèbre et groupes de Lie</b>	<b>33</b>
6.1	Groupes de Lie . . . . .	33
6.2	Espace tangent . . . . .	33
6.3	Algèbres de Lie . . . . .	34
6.4	Application exponentielle . . . . .	34
<b>7</b>	<b>Splines</b>	<b>37</b>
7.1	Spline . . . . .	37
7.2	B-Spline . . . . .	37
7.2.1	Définition . . . . .	37
7.2.2	Propriétés . . . . .	38
7.2.3	Exemples . . . . .	38
<b>8</b>	<b>Méthodes descriptives d'analyse statistique de données multivariées</b>	<b>43</b>
8.1	Analyse en composantes principales . . . . .	43
8.2	Analyse en composantes principales fonctionnelles . . . . .	44
8.3	Analyse en composantes principales fonctionnelles multidimensionnelles . . . . .	45
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>47</b>
<b>III</b>	<b>Reconstruction à partir de capteurs de déformation</b>	<b>49</b>
<b>10</b>	<b>Capteurs de déformation</b>	<b>51</b>
10.1	Introduction . . . . .	51
10.2	Etat de l'art . . . . .	51
10.3	Bilan . . . . .	55

<b>11 Reconstruction simple</b>	<b>57</b>
<b>11.1 Etat de l'art</b>	57
11.1.1 Méthodes 2D	58
11.1.2 Méthodes 3D	60
11.1.3 Bilan méthodes de reconstruction	61
<b>11.2 Hypothèses et système physique</b>	61
11.2.1 Informations apportées par les triplets de capteurs	61
11.2.2 Modélisation de la poutre non déformée	62
11.2.3 Déformation de poutre et système différentiel associé	62
11.2.4 Synthèse	67
<b>11.3 Résolution du système physique</b>	67
<b>11.4 Reconstruction de la déformée</b>	70
<b>12 Capteurs de déformation avancés</b>	<b>73</b>
<b>12.1 Introduction</b>	73
<b>12.2 Déformation d'un capteur</b>	73
12.2.1 Capteur parallèle à la fibre neutre	74
12.2.2 Capteur sécant à la fibre neutre	79
<b>12.3 Bilan des grandeurs de déformation issus de la déformation des capteurs</b>	89
<b>12.4 Bilan des grandeurs de déformation issus de la déformation des capteurs</b>	89
<b>13 Reconstruction avancée</b>	<b>91</b>
<b>13.1 Reconstruction à partir de la flexion et de la torsion</b>	91
<b>13.2 Cas de charges</b>	92
<b>IV Optimisation de la qualité de reconstruction par l'étude de déformations existantes</b>	<b>95</b>
<b>14 Etude d'une population d'aiguilles</b>	<b>97</b>
<b>14.1 Introduction</b>	97
<b>14.2 Caractérisation des déformations</b>	97
<b>14.3 Etat de l'art</b>	98
14.3.1 Avant-propos	99
14.3.2 Approximation des dérivées de fonctions	99
14.3.3 Sélection du paramètre de lissage	101
14.3.4 Bilan	103
<b>14.4 Matériel</b>	103
14.4.1 Données expérimentales	103
14.4.2 Données cliniques	104
<b>14.5 Méthodes</b>	104
14.5.1 Segmentation	104
14.5.2 Ordonnancement	108

14.5.3	Lissage par B-Spline 3D . . . . .	112
14.5.4	Validation croisée . . . . .	114
14.5.5	Fonctions courbures et angles d'orientation . . . . .	115
<b>14.6</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>122</b>
14.6.1	Approximation de formes . . . . .	122
14.6.2	Approximations de la courbure et de l'angle d'orientation . . . . .	127
<b>14.7</b>	<b>Discussion . . . . .</b>	<b>129</b>
<b>14.8</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>130</b>
<b>15</b>	<b>Optimisation des positions des capteurs . . . . .</b>	<b>133</b>
<b>15.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>133</b>
<b>15.2</b>	<b>Etat de l'art . . . . .</b>	<b>133</b>
<b>15.3</b>	<b>Méthodes . . . . .</b>	<b>135</b>
<b>15.4</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>143</b>
15.4.1	Positions optimales des triplets de capteurs pour les aiguilles de porcs . . . . .	143
15.4.2	Reconstruction des aiguilles de porcs avec les positions optimales . . . . .	146
15.4.3	Reconstruction des aiguilles patients avec les positions optimales . . . . .	152
<b>15.5</b>	<b>Discussion . . . . .</b>	<b>156</b>
15.5.1	Positions optimales des capteurs . . . . .	157
15.5.2	Reconstruction avec les positions optimales . . . . .	159
<b>15.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>161</b>
<b>16</b>	<b>Reconstruction avec les modes . . . . .</b>	<b>163</b>
<b>16.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>163</b>
<b>16.2</b>	<b>Modes de déformations . . . . .</b>	<b>164</b>
16.2.1	Fondements . . . . .	164
16.2.2	Modes de déformations à partir des points de contrôles . . . . .	164
16.2.3	Modes de déformations des fonctions courbures et angle d'orientation . . . . .	169
<b>16.3</b>	<b>Reconstruction à partir des modes . . . . .</b>	<b>174</b>
16.3.1	Principes . . . . .	174
16.3.2	Combinaison linéaire de modes de déformations . . . . .	174
16.3.3	Choix du paramètre $\eta$ . . . . .	177
<b>16.4</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>178</b>
16.4.1	Paramètres optimaux de la méthode de reconstruction avec modes . . . . .	178
16.4.2	Validation de la reconstruction avec modes . . . . .	181
16.4.3	Reconstruction des fonctions courbures et angles de déformations . . . . .	185
<b>16.5</b>	<b>Discussion . . . . .</b>	<b>186</b>
16.5.1	Nombres de modes et paramètre $\eta$ . . . . .	186
16.5.2	Reconstruction avec modes . . . . .	187
<b>16.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>188</b>

---

<b>17</b>	<b>Hypothèses de déformations</b>	<b>189</b>
17.1	Introduction . . . . .	189
17.2	Cas de charges expérimentaux . . . . .	189
17.3	Impact sur la reconstruction des grandeurs de déformations . . . . .	190
17.3.1	Cisaillement . . . . .	191
17.3.2	Traction-compression . . . . .	191
17.3.3	Flexion . . . . .	193
17.3.4	Torsion . . . . .	195
17.4	Conclusion . . . . .	199
<b>V</b>	<b>Conclusion</b>	<b>201</b>
<b>18</b>	<b>Conclusion</b>	<b>203</b>
18.1	Contributions . . . . .	203
18.2	Perspectives . . . . .	204
<b>VI</b>	<b>Annexes</b>	<b>207</b>
<b>19</b>	<b>Annexes</b>	<b>209</b>
19.1	Paramètres des aiguilles utilisées . . . . .	209
19.2	Définition du tenseur $\Omega$ . . . . .	210
19.3	Antisymétrie de $\Omega$ . . . . .	210
19.4	Reconstruction . . . . .	212
19.4.1	Reconstruction : Aiguille de porcs . . . . .	212
19.4.2	Reconstruction : Aiguilles patients . . . . .	215
19.5	Modes de déformation . . . . .	215



## TABLE DES FIGURES

1.1	Image échographique d'un coeur. . . . .	5
1.2	Image scanner d'un coeur. . . . .	6
1.3	Image IRM d'un coeur. . . . .	7
1.4	Schéma des éléments opératoires. . . . .	9
1.5	Station IMACTIS. . . . .	11
4.1	Exemple de repère mobile. . . . .	20
4.2	Repère de Frenet d'une hélice. . . . .	21
5.1	Exemple de poutre circulaire. . . . .	23
5.2	Morceau infinitésimal de poutre à l'état initial et déformé. . . . .	24
5.3	Paramétrage de la poutre par repère mobile. . . . .	28
5.4	Schéma de déformation de poutre par cisaillement. . . . .	31
5.5	Schema de déformation de poutre par torsion. . . . .	31
6.1	Espace tangent d'un groupe de Lie. . . . .	34
7.1	Schéma de la récursivité du calcul des bases B-Splines. . . . .	39
7.2	Fonctions de base $B_{i,0}$ . . . . .	40
7.3	Fonctions de base $B_{i,1}$ . . . . .	40
7.4	Fonctions de base $B_{i,2}$ . . . . .	41
7.5	Fonctions de base $B_{i,3}$ . . . . .	41
7.6	B-Spline 3D . . . . .	42
10.1	Section d'aiguille instrumentée. . . . .	52
10.2	Morceau infinitésimal de poutre déformée. . . . .	52
10.3	Plan de la section de poutre contenant les triplets de capteurs. . . . .	53
10.4	Plan osculateur de la déformée d'une poutre. . . . .	54

11.1	Poutre et son repère mobile ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) avant déformation. . . . .	62
11.2	Poutre et son repère mobile ( $\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ ) après déformation. . . . .	63
12.1	Vue 2D de la déformation d'une poutre avec capteurs parallèles. . . . .	74
12.2	Vue 3D de la déformation d'une poutre avec capteurs parallèles. . . . .	75
12.3	Section d'une poutre avec capteur de déformation. . . . .	75
12.4	Vue 2D de la déformation d'une poutre avec des capteurs sécants. . . . .	80
12.5	Section d'une poutre avec capteur de déformation. . . . .	80
12.6	Vue 3D de la déformation d'une poutre avec des capteurs sécants. . . . .	81
14.1	Chronologie des principaux travaux sur la régularisation adaptée au problème d'estimation d'une fonction et de ses dérivées. . . . .	101
14.2	Algorithme par croissance de régions : schéma 1 . . . . .	105
14.3	Algorithme par croissance de régions : schéma 2 . . . . .	105
14.4	Algorithme par croissance de régions : schéma 3 . . . . .	106
14.5	Logiciel CamiTK. . . . .	107
14.6	Résultat de segmentation. . . . .	108
14.7	Algorithme polyline : schéma 1 . . . . .	109
14.8	Algorithme polyline : schéma 2 . . . . .	109
14.9	Algorithme polyline : schéma 3 . . . . .	109
14.10	Algorithme polyline : schéma 4 . . . . .	110
14.11	Algorithme polyline : schéma 5 . . . . .	110
14.12	Représentation de la polyline associée aux voxels issus de la segmentation d'une aiguille. . . . .	111
14.13	Polyline associée aux voxels de l'aiguille . . . . .	112
14.14	Courbure de l'aiguille reconstruite $n^\circ 8$ . . . . .	116
14.15	Torsion de l'aiguille reconstruite $n^\circ 8$ . . . . .	116
14.16	Exemple d'instabilité du repère de Frenet d'une courbe presque droite. . . . .	117
14.17	Repère de rotation minimale d'une hélice . . . . .	118
14.18	Déformée d'une aiguille lors d'une insertion dans des tissus. . . . .	120
14.19	Principe de l'algorithme de calcul du repère de rotation minimale par double réflexion. . . . .	121
14.20	Repère de rotation minimale d'une courbe presque droite calculée par la méthode de double réflexion. . . . .	122
14.21	Partie externe et interne de l'aiguille. . . . .	123
14.22	Histogramme des longueurs des aiguilles de porcs (en <i>mm</i> ). . . . .	123
14.23	Flèche d'une aiguille déformée . . . . .	124
14.24	Reconstruction des aiguilles de porcs . . . . .	125
14.25	Histogramme des flèches des aiguilles de porcs (en <i>mm</i> ). . . . .	126
14.26	Reconstruction des aiguilles patients . . . . .	126
14.27	Histogramme des flèches des aiguilles de patients (en <i>mm</i> ). . . . .	127
14.28	Fonctions courbure et angle d'orientation de l'aiguille de porc $n^\circ 4$ . . . . .	127
14.29	Fonctions courbure et angle d'orientation de l'aiguille de porc $n^\circ 6$ . . . . .	128

14.30 Fonctions courbure et angle d'orientation de l'aiguille patient n°3. . . . .	128
14.31 Fonctions courbure et angle d'orientation de l'aiguille patient n°5. . . . .	129
14.32 Erreurs et étapes de reconstructions. . . . .	129
15.1 Cas de charges théorique d'une aiguille. . . . .	134
15.2 Erreur de reconstruction 2D pour une position donnée de capteurs à partir de cas de charges. . . . .	135
15.3 Erreur de reconstruction pour une position donnée de capteurs à partir de données réelles d'aiguilles. . . . .	137
15.4 Position optimales des triplets de capteurs. . . . .	144
15.5 Fonction coût 1D du problème d'optimisation. . . . .	145
15.6 Fonction coût 2D du problème d'optimisation. . . . .	146
15.7 Distance entre les positions optimales des triplets de capteurs. . . . .	147
15.8 Comparaison des résultats des positions optimales de triplets de capteurs . . . .	148
15.10 Effet du positionnement des capteurs sur la reconstruction des aiguilles de porcs pour 6 à 10 triplets de capteurs. . . . .	148
15.9 Effet du positionnement des capteurs sur la reconstruction des aiguilles de porcs pour 1 à 5 triplets de capteurs. . . . .	149
15.11 Nombres de triplets de capteurs nécessaires à la reconstruction des aiguilles de porcs en fonction de l'erreur de reconstruction maximale souhaitée. . . . .	150
15.12 Erreur moyenne de reconstruction des aiguilles de porcs en fonction du positionnement des triplets de capteurs. . . . .	151
15.13 Gain relatif de précision avec les positions optimales de capteurs par rapport aux positions équidistantes. . . . .	151
15.14 Effet du positionnement des capteurs sur la reconstruction des aiguilles patients pour 1 à 5 triplets de capteurs. . . . .	152
15.15 Effet du positionnement des capteurs sur la reconstruction des aiguilles patients pour 6 à 10 triplets de capteurs. . . . .	153
15.16 Nombres de triplets de capteurs nécessaires à la reconstruction des aiguilles patients en fonction de l'erreur de reconstruction maximale souhaitée. . . . .	154
15.17 Erreur moyenne de reconstruction des aiguilles patients en fonction du positionnement des capteurs. . . . .	155
15.18 Gain relatif de précision avec les positions optimales de capteurs par rapport aux positions équidistantes. . . . .	156
16.1 Aiguille moyenne des aiguilles de porcs. . . . .	167
16.2 Mode de déformation 1 des aiguilles de porcs. . . . .	168
16.3 Mode de déformation 2 des aiguilles de porcs. . . . .	168
16.4 Mode de déformation 3 des aiguilles de porcs. . . . .	169
16.5 Mode de déformation 1 de la courbure et de l'angle d'orientation. . . . .	172
16.6 Mode de déformation 2 de la courbure et de l'angle d'orientation. . . . .	173

16.7	Erreur de reconstruction moyenne en millimètre avec les modes pour 1 triplet de capteurs de l'ensemble des aiguilles de porcs en fonction du nombre de modes et du paramètre $\eta$ . . . . .	179
16.8	Erreur de reconstruction moyenne en millimètre avec les modes pour 2 triplets de capteurs de l'ensemble des aiguilles de porcs en fonction du nombre de modes et du paramètre $\eta$ . . . . .	179
16.9	Erreur de reconstruction moyenne en millimètres avec les modes pour 3 triplets de capteurs de l'ensemble des aiguilles de porcs en fonction du nombre de modes et du paramètre $\eta$ . . . . .	180
16.10	Diagramme en boites de l'erreur de reconstruction des aiguilles de porcs selon le nombre de triplets de capteurs. . . . .	182
16.11	Gain relatif de précision pour l'ensemble des aiguilles de porcs obtenue avec la reconstruction avec les modes par rapport à la reconstruction classique. . . . .	183
16.12	Diagramme en boites de l'erreur de reconstruction des aiguilles patients selon le nombre de triplets de capteurs. . . . .	184
16.13	Gain relatif de précision pour l'ensemble des aiguilles patients obtenue avec la reconstruction avec les modes par rapport à la reconstruction classique. . . . .	185
16.14	Reconstruction de la courbure à partir des modes. . . . .	185
16.15	Reconstruction de l'angle d'orientation à partir des modes. . . . .	186
17.1	Effort axial appliqué sur l'extrémité d'une poutre droite. . . . .	190
17.2	Effort axial appliqué sur l'extrémité d'une poutre droite. . . . .	191
17.3	Schema de déformation de poutre par flambage. . . . .	191
17.4	Courbe contrainte-déformation de l'acier inoxydable à différentes température. . . . .	194
17.5	Déformation d'une aiguille avec et sans courbure. . . . .	195
17.6	Déformation d'une aiguille avec et sans torsion. . . . .	197
17.7	Ratio entre les extrémités distales des deux aiguilles déformées avec et sans torsion en fonction de la valeur constante de la courbure et du moment de torsion à la base de l'aiguille. . . . .	198
19.1	Reconstruction des aiguilles de porcs (1/3) . . . . .	212
19.2	Reconstruction des aiguilles de porcs (2/3) . . . . .	213
19.3	Reconstruction des aiguilles de porcs (3/3) . . . . .	214
19.4	Reconstruction des aiguilles patients . . . . .	215
19.5	Modes de la courbure. . . . .	216
19.6	Modes de la courbure. . . . .	217

## LISTE DES TABLEAUX

1.1	Comparaison des différentes techniques d'imagerie. . . . .	8
1.2	Positionnement relatif des éléments d'un système de navigation . . . . .	10
1.3	Erreur du système de navigation . . . . .	10
1.4	Avantages et limitations de la station de travail IMACTIS. . . . .	11
5.1	Constantes liées à la poutre. . . . .	25
12.1	Bilan des informations obtenus à partir des capteurs selon leurs types et la méthode utilisée. . . . .	89
14.1	Données statistiques des flèches des aiguilles porcs reconstruites. . . . .	125
14.2	Données statistiques des flèches des aiguilles patients reconstruites. . . . .	126
15.1	Modèle de forces des aiguilles de références. . . . .	134
15.2	Nombres de positions entières de triplets de capteurs différentes en fonction du nombre de triplets de capteurs pour une aiguille de 200 mm. . . . .	141
15.3	Positions optimales (mm) des triplets de capteurs sur l'ensembles des aiguilles de porcs en fonction du nombre de triplet et des algorithmes d'optimisations. . . . .	143
15.4	Erreur de reconstruction moyenne pour des positions équidistantes et optimales de triplets de capteurs. . . . .	150
15.5	Erreur de reconstruction moyenne pour des positions équidistantes et optimales de triplets de capteurs. . . . .	154
15.6	Erreur de reconstruction moyenne des aiguilles patients en fonction du nombre de triplets et de leurs positions. . . . .	155
16.1	Différents facteurs lors d'insertions d'aiguilles . . . . .	164
16.2	Valeurs du nombre de mode $m$ et du paramètre $\eta$ qui minimisent l'erreur moyenne de reconstruction par modes de l'ensemble des aiguilles de porcs selon le nombre de triplets de capteurs. . . . .	181

---

16.3	Erreur moyenne de reconstruction de l'ensemble des aiguilles de porcs dans le cas de reconstructions avec ou sans modes pour des positions optimales de capteurs.	182
16.4	Erreur moyenne de reconstruction de l'ensemble des aiguilles patients dans le cas de reconstructions avec ou sans modes pour des positions optimales de capteurs.	184
17.1	Forces et moments axiaux maximaux. . . . .	190
17.2	Erreurs de précisions maximales expérimentales et théoriques selon le type de déformations. . . . .	199
19.1	Valeurs des paramètres d'une aiguille en acier inoxydable de 20 gauges de longueur 200 mm. . . . .	209

**Première partie**

**Présentation du sujet**



# CHAPITRE 1

CONTEXTE

## 1.1 Gestes Médico-Chirurgicaux Assistés par Ordinateur

### 1.1.1 Définition

Les Gestes Médico-Chirurgicaux Assistés par Ordinateur (GMCAO) désignent l'ensemble des méthodes pratiques et technologiques destinées à assister le praticien hospitalier lors d'une intervention médicale ou chirurgicale.

L'objectif des GMCAO est d'aider le médecin ou le chirurgien à effectuer la planification et la réalisation d'interventions et de gestes médicaux de différents types (diagnostiques, thérapeutiques) de la façon la plus précise et la moins invasive possible en utilisant les informations et les capacités offertes par les technologies de l'imagerie, l'informatique et la robotique.

Les conséquences positives de l'utilisation des GMCAO tel que le rapprochement du résultat de l'intervention de l'objectif prévu, la diminution du temps de l'intervention ou la réduction de l'invasivité se traduisent par une augmentation de la qualité de l'intervention qui bénéficie directement au patient.

Cette assistance se caractérise par le rassemblement de plusieurs domaines de compétences de pointes tel que la médecine, les mathématiques, l'informatique ou la robotique.

Un domaine particulièrement bien adapté à l'utilisation des GMCAO est le domaine de la radiologie interventionnelle.

## 1.2 Radiologie interventionnelle

### 1.2.1 Présentation

La radiologie interventionnelle est un sous-domaine de la radiologie. Son principal objectif est l'accès, le traitement, le prélèvement de tissus sur un organe du corps à l'aide d'une

procédure de minimalement invasive assistée par une imagerie. La radiologie interventionnelle est un domaine qui prend de plus en plus d'importance. Cet intérêt croissant est dû au fait que de nombreuses opérations nécessitant auparavant des interventions chirurgicales classiques peuvent être aujourd'hui traitées par radiologie interventionnelle. Les avantages que procurent l'utilisation de la radiologie interventionnelle par rapport à la chirurgie interventionnelle classique sont nombreux et non négligeables. Ainsi la minimisation des lésions et traumatismes physiques permet de diminuer le risque de l'intervention pour le patient, de faciliter et d'accélérer sa récupération.

La radiologie interventionnelle subit les défauts inhérents aux méthodes minimalement invasives, qui se traduisent par la réduction des capacités gestuelles et visuelles du praticien. Ce dernier a besoin d'outils spécialement adaptés pour la bonne réalisation de l'intervention. Les GMCAO font partie des outils qui permettent d'assister le radiologue dans la réalisation de son geste.

## 1.2.2 Techniques d'imageries

Cette partie présente les principales techniques d'imagerie susceptibles d'être utilisées pour assister à la réalisation d'une intervention.

### 1.2.2.1 Echographie

L'échographie est une méthode d'imagerie datant du début des années 1950 dont le fonctionnement consiste à envoyer des ondes ultrasonores dans les tissus avec une sonde échographique et à mesurer leurs échos à partir de récepteurs contenus dans cette même sonde. Un traitement informatique permet alors de reconstruire une image 2D ou 3D en niveaux de gris à partir de ces informations.

Cette technique d'imagerie permet d'observer aussi bien les tissus "durs" que les tissus "mous" comme le montre la figure 1.1.

Un des avantages de l'échographie est de permettre la visualisation en temps réel sans employer de rayonnements ionisants, contrairement à d'autres méthodes de visualisation. La portabilité du dispositif en fait également un outil très facile à déployer et peu coûteux. Néanmoins les images obtenues peuvent parfois présenter des difficultés à être exploitées de par leur qualité insuffisante. En effet celle-ci dépend de plusieurs variables telles que la résolution, le bruit présent sur l'image (le *speckle*<sup>1</sup>), l'*échogénicité*<sup>2</sup> des tissus ainsi que l'habileté du praticien à positionner la sonde de manière appropriée.

Parmi les travaux traitant de l'utilisation de l'échographie dans le cadre de la radiologie interventionnelle on peut citer les travaux de Hungr et Troccaz, concernant la conception d'un robot de curietherapie de la prostate. Cette procédure est généralement réalisée sous contrôle échographique per-opératoire par sonde endorectale. Le robot de curietherapie

---

1. Bruit dû aux interférences entre les ondes lors de leurs réflexions sur les impuretés du milieu de propagation.

2. Capacité des tissus à réfléchir les ondes ultrasonores.

permet ainsi le placement dans la prostate des aiguilles par rapport à un planning dosimétrique en utilisant les images de la sonde échographique [HBLT12, LHB<sup>+</sup>12].

On peut également citer les travaux de Mignon relatif au guidage d'aiguille [MPT15]. A l'aide d'un robot d'insertion et d'une imagerie échographique il est possible de planifier et de contrôler les mouvements de l'aiguille pour réaliser des trajectoires d'insertions complexes.

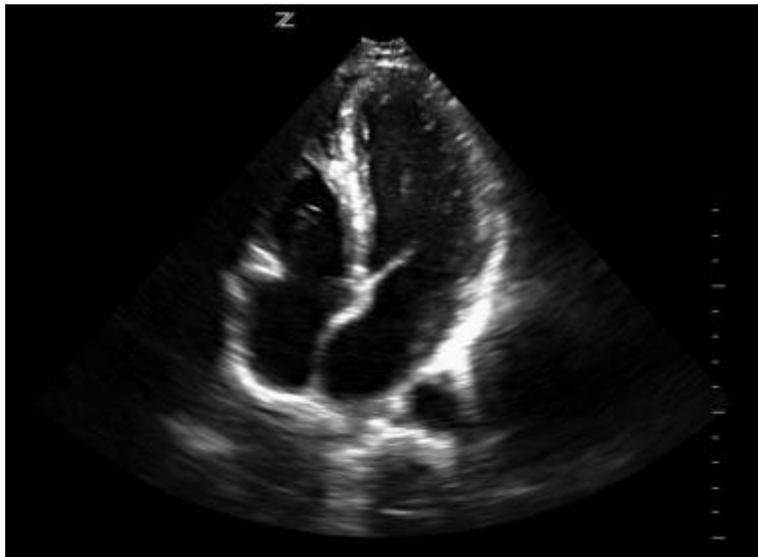


FIGURE 1.1. – Image échographique d'un coeur.

### 1.2.2.2 Scanner

Le scanner est une méthode d'imagerie utilisée depuis les années 1970 qui fonctionne par mesure d'absorption des rayons X par les tissus. Les données obtenues sont traitées pour reconstruire une image 2D ou 3D.

Le scanner permet d'obtenir en quelques secondes/minutes des portions complètes de l'organisme affichant un niveau de contraste supérieur à celui de l'échographie. Néanmoins c'est une technique d'imagerie dont l'utilisation entraîne l'exposition du patient à des rayons ionisants. La répétition et l'intensité de ces expositions peuvent être nocives pour l'organisme.

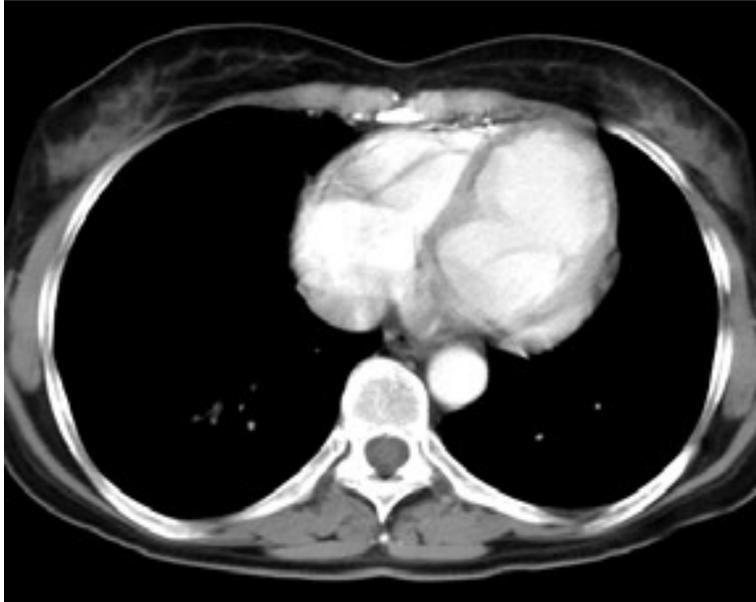


FIGURE 1.2. – Image scanner d'un coeur.

### 1.2.2.3 IRM

L'imagerie par résonance magnétique (IRM) est une technique d'imagerie utilisée depuis le début des années 1980 reposant sur le principe de la résonance magnétique nucléaire (RMN). L'application de champs magnétiques ayant des intensités, des valeurs et des propriétés spatiales différentes permet par la mesure d'aimantation des atomes de reconstruire avec précision une image 2D ou 3D de la composition moléculaire des tissus.

Cette technique permet d'obtenir un contraste plus élevé que le scanner dans le cas de tissus mous. A l'inverse les tissus durs, tel que les os, trop pauvres en hydrogène (les mesure d'aimantation s'effectuant sur les atomes d'hydrogène), ne permettent pas d'obtenir un contraste satisfaisant comme illustré dans la figure 1.3.

L'IRM est une technique d'imagerie non irradiante contrairement aux scanners et qui donne des images de qualité. Elle présente pour désavantages d'avoir une durée d'acquisition relativement longue et certains patients peuvent présenter des contre-indications à cause de la présence dans leur corps de métaux ou d'implants médicaux.

Parmi les travaux traitant de l'utilisation de l'IRM dans le cadre de la radiologie interventionnelle, on peut citer les travaux de Fouard et Cinquin concernant le développement du LPR (Light Puncture Robot), robot compatible IRM spécialement développé pour assister le clinicien dans la réalisation de ponctions du thorax ou de l'abdomen [ZBF<sup>+</sup>08, BZJ<sup>+</sup>08].

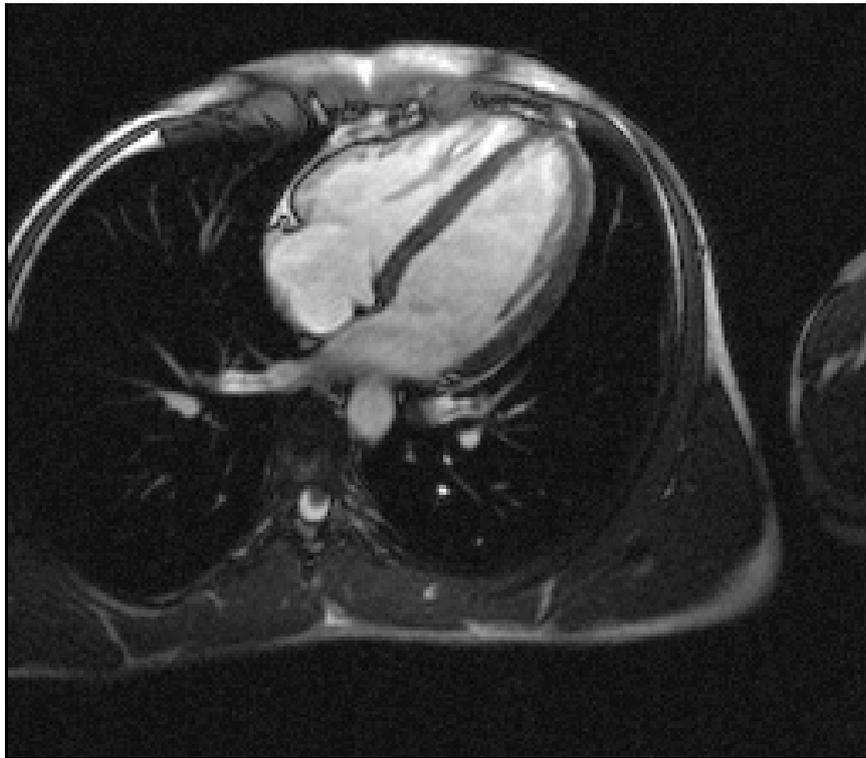


FIGURE 1.3. – Image IRM d'un coeur.

### 1.2.3 Synthèse

En se basant sur la partie précédente, on peut dégager trois critères permettant de juger de la pertinence de l'utilisation d'une méthode d'imagerie dans le cadre de la radiologie interventionnelle :

- la qualité : le résultat renvoyé par la méthode d'imagerie est un critère déterminant quant à son emploi. La qualité des images se juge sur plusieurs paramètres tels que la précision, la résolution, le bruit ou bien le format de l'image (2D/3D). Les besoins diffèrent selon le type d'intervention et dépendent de nombreux facteurs tels que l'instrumentation utilisée ou les tissus concernés. Il est néanmoins évident que plus les images seront de bonne qualité, plus l'intervention s'en trouvera facilitée et aura de meilleures chances de succès.
- les rayons ionisants : leur utilisation répétée peut faire courir un risque au patient et nécessite alors une juste évaluation du rapport bénéfices/risques avant l'imagerie.
- le temps réel : une méthode fonctionnant en temps réel permet d'avoir une imagerie en direct de l'intervention en cours, offrant ainsi au praticien non seulement un moyen de visualisation mais aussi un moyen de guidage dynamique. Les interruptions de l'intervention, nécessaires lorsque l'imagerie utilisée n'est pas temps réel, nuisent à la qualité de celle-ci et contribuent à la rendre plus longue.

TABLE 1.1. – Comparaison des différentes techniques d'imagerie.

	Qualité	Non ionisants	Temps réel
Echographie	-	+	+
Scanner	+	-	-
IRM	+	+	-

A la lueur des comparaisons des techniques d'imagerie présentées dans le tableau 1.1, il apparaît qu'aucune des techniques d'imagerie utilisées n'est exempte de défauts.

## 1.2.4 Environnement de navigation en radiologie interventionnelle

### 1.2.4.1 Définition

Pour pallier les différents défauts des techniques d'imagerie, une nouvelle approche a été développée dans laquelle l'imagerie est couplée à un système aidant le chirurgien à visualiser la cible et naviguer dans un environnement virtuel représentatif de la réalité : ce sont les *environnements de navigation*. On se focalise par la suite sur les environnements dédiés à la navigation d'aiguilles.

### 1.2.4.2 Principes de la radiologie interventionnelle naviguée

Avant l'intervention, on crée un modèle précis de la zone à opérer du patient. Cette opération consiste le plus souvent en une acquisition par imagerie.

Lors de l'intervention, le praticien utilise des ancillaires spéciaux, ici des aiguilles dont la position est contrôlée en continu par le système de navigation. La position de l'aiguille est affichée en temps réel sur les images du patient acquises précédemment et actualisées au fur et à mesure que le praticien effectue son intervention, s'aidant ainsi du dispositif pour naviguer dans les tissus.

### 1.2.4.3 Avantages

Les éléments d'information sur la position de l'aiguille sont particulièrement utiles pour le praticien, celui-ci n'ayant pas de vision directe de celle-ci. L'utilisation d'un environnement de navigation permet de s'affranchir de la nécessité d'effectuer des imageries pendant l'intervention, celles-ci étant pré-opératoires. On évite ainsi les interruptions de l'intervention, réduisant son temps et améliorant sa qualité.

### 1.2.4.4 Défauts

Une des faiblesses des environnements de navigation concerne la précision de la localisation des instruments dans le corps du patient. En effet la tâche des environnements de localisation consiste à positionner les instruments à l'intérieur du corps à partir des informations de localisation des instruments à l'extérieur de celui-ci. La figure 1.4 présente la

position des éléments les uns par rapport aux autres.

Ainsi le positionnement de l'extrémité distale de l'aiguille par rapport à la cible dans les tissus (1 → 4) est rendu possible par la connaissance des positionnements relatifs suivants :

- 1 → 2 positionnement relatif du capteur patient par rapport à la cible dans les tissus
- 2 → 3 positionnement relatif de l'extrémité proximale de l'aiguille par rapport au capteur patient
- 3 → 4 positionnement relatif de l'extrémité distale de l'aiguille par rapport à l'extrémité proximale de l'aiguille

Le tableau 1.2 détaille les technologies et les limitations permettant le positionnement relatif des éléments entre eux.

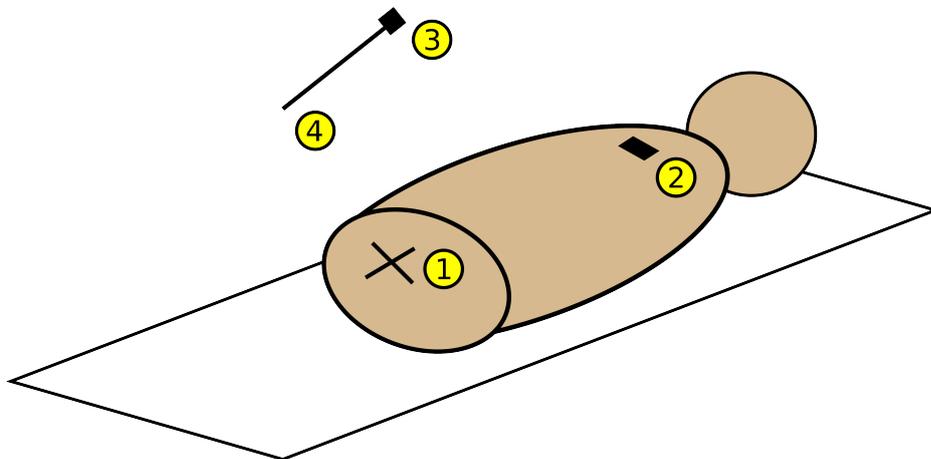


FIGURE 1.4. – Schéma des éléments opératoires.

- 1) Tissu cible. 2) Capteur électromagnétique fixé sur le patient. 3) Capteur électromagnétique fixé sur l'extrémité proximale de l'aiguille. 4) Extrémité distale de l'aiguille

L'erreur de localisation de l'aiguille par rapport à la zone cible dans le corps du patient se décompose alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{erreur}_{\text{localisation}} &= \text{erreur}_{\text{déformations tissus}} \\ &+ \text{erreur}_{\text{recalage}} \\ &+ \text{erreur}_{\text{déformations aiguilles}} \end{aligned}$$

Le tableau 1.3 rassemble les ordres de grandeur de ces trois erreurs. On remarque ainsi que dans le cadre d'une intervention utilisant des aiguilles percutanées la **déformation de l'aiguille dans les tissus** est l'une des principales causes d'imprécision de la localisation de l'aiguille.

TABLE 1.2. – Positionnement relatif des éléments d'un système de navigation

Position relative	Technique	Limitation
1 → 2	Imagerie	Déformations des tissus du patient
2 → 3	Recalage	Précision de la technologie utilisée
3 → 4	Modélisation	Déformation de l'aiguille

TABLE 1.3. – Erreur du système de navigation

Erreur	Ordre de grandeur
déformations des tissus	1 cm
recalage	1 mm
déformations de l'aiguille	1 cm

#### 1.2.4.5 Environnement IMACTIS

L'environnement de navigation de la société IMACTIS est constitué d'une station informatique, d'un repère patient et d'un porte-aiguille. Un scanner préopératoire du patient est effectué et fourni à la station de travail. Le système détecte la position et l'orientation du porte-aiguille et affiche en temps réel la trajectoire anticipée de l'aiguille comme le montre la figure 1.5. Cette trajectoire est affichée dans deux coupes 2D reconstruites extraites du volume scanner. Le praticien déplace le porte-aiguille sur la peau du patient et l'utilise comme un viseur pour explorer l'anatomie et planifier son geste (Fig.1.5). Une fois le trajet optimal choisi, le porte-aiguille permet de guider l'aiguille tout en offrant un contrôle dynamique de l'orientation.



FIGURE 1.5. – Station IMACTIS.

Image haut : Utilisation d'une station IMACTIS lors d'une intervention.

Image bas : Capture d'écran de la station IMACTIS

TABLE 1.4. – Avantages et limitations de la station de travail IMACTIS.

Avantages	Limitations
Diminution du nombre de contrôle par imagerie	Déformations de l'aiguille non prise en compte
Temps réel	
Mouvements externes du patient compensés	

### 1.3 Conclusion

Les interventions médicales minimalement-invasives sont de plus en plus utilisées de nos jours, par exemple dans le domaine de la radiologie interventionnelle. A ce titre, l'utilisation d'aiguilles percutanées lors de biopsies ou de ponctions n'est pas dénuée de contraintes pour le praticien. La principale problématique que soulève l'utilisation de ce type d'outils

concerne la position de l'aiguille dans les tissus. Le succès et la qualité de la réalisation de l'acte chirurgical découle directement de la capacité du praticien à connaître précisément la trajectoire et la position de l'aiguille dans les tissus. Différents facteurs tels que la limitation des moyens d'imagerie (contraintes, précisions,...) compliquent cette tâche de localisation. De plus, la perception du praticien se trouve altérée par les phénomènes de déformation des tissus et de l'aiguille lors de l'insertion. Le développement et l'utilisation de système de navigation se sont avérés comme une solution crédible pour pallier ces problèmes. Ces systèmes sont conçus pour aider à la planification du geste et au contrôle de la trajectoire de l'aiguille. Pour de tels systèmes, l'intégration de modèles d'aiguille avancés prenant en compte notamment la déformation dans les tissus est devenu une condition *sine qua non* à l'obtention de résultats de qualité. Néanmoins la plupart des environnements actuels de navigation de gestes interventionnels avec aiguille font l'hypothèse de son indéformabilité lors de son insertion dans les tissus, hypothèse non vérifiée en pratique clinique dont les conséquences peuvent être nocives pour le patient. Cette déformation de l'aiguille et des tissus lors de la réalisation du geste chirurgical induit une perte de précision de la localisation de l'aiguille dans le corps du patient altérant les résultats du système de navigation (positionnement incorrect dans les tissus, trajectoire erronée...)

#### 1.4 Contexte de la thèse dans les GMCAO

La prise en compte de la déformation de l'aiguille lors de l'insertion de celle-ci dans les tissus apporterait un gain de précision non négligeable sur la modélisation du trajet de l'aiguille et de sa position dans les tissus, entraînant la mise à disposition pour le praticien d'une représentation plus réaliste de l'environnement chirurgical lors de l'intervention. Pour rendre compte des déformations, nous allons considérer l'utilisation d'une aiguille instrumentée, c'est à dire ici une aiguille munie de capteurs de déformation situés en surface de l'aiguille fournissant des informations locales de déformation. La problématique qui apparait et à laquelle nous allons tâcher de répondre dans ce manuscrit est la suivante :

**Comment reconstruire le plus précisément possible en 3D et en temps réel la déformée d'une aiguille instrumentée à partir de données fournies par ses capteurs ?**

## 2.1 Approche

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre du programme de recherche GAME-D (Guidage d'une Aiguille Médicale instrumentée Déformable), d'une durée de 45 mois, et financé par une allocation nationale de recherche (ANR-12-TECS-0019). Ce travail consiste à poursuivre celui initié par Adeline Robert. Il s'agit d'explorer, d'élaborer et d'évaluer de nouveaux outils permettant, d'une part, de localiser, en 3D et en temps réel, la déformée d'une aiguille instrumentée et d'autre part, d'optimiser l'instrumentation de cette aiguille. Les problématiques sont les suivantes :

- Comment reconstruire la forme globale d'une aiguille à partir des informations locales fournies par les capteurs ?
- Où placer les capteurs de déformations sur l'aiguille pour avoir la reconstruction la plus précise possible ?

## 2.2 Organisation du manuscrit

La partie préliminaire II intitulée "Boite à outils" sera consacrée à la présentation des outils mathématiques et physiques utilisés dans cette thèse. Cette présentation se voudra volontairement succincte, le but étant moins de définir précisément les objets, qui sont relativement standards, que de circonscrire le périmètre des connaissances qui seront ensuite employées par la suite. La suite du manuscrit s'articule autour de deux thématiques principales :

- *la reconstruction de déformées d'aiguille* : l'aiguille étant supposée instrumentée à l'aide de capteurs disposés sur sa longueur, on s'intéresse à la meilleure manière de reconstruire la forme de l'aiguille à partir des informations des capteurs. Un état de l'art des connaissances en la matière permet d'obtenir une première méthode de reconstruction. Une réflexion plus approfondie sur les capteurs de déformation est ensuite menée au cours de laquelle on montrera comment obtenir des informations

supplémentaires sur la déformation de l'aiguille. On explicitera comment utiliser ce surplus d'informations pour améliorer la méthode de reconstruction obtenue précédemment. Enfin dans la dernière partie, on présentera une méthode de reconstruction qui s'appuie sur des données expérimentales de déformations.

- *l'optimisation de la position des capteurs sur l'aiguille* : On étudiera, à partir de données expérimentales d'insertions d'aiguilles, les propriétés physiques des déformations d'aiguilles en appliquant un modèle d'aiguille spécialement développé. En faisant appel à des scanners expérimentaux et cliniques d'insertions aiguilles, un travail sera effectué pour extraire les caractéristiques géométriques des aiguilles et les traiter de façon à pouvoir constituer un ensemble de données statistiques de déformation. Le problème de disposition des capteurs permettant d'atteindre la reconstruction d'aiguille la plus précise possible prendra alors la forme d'un problème de minimisation utilisant ces données expérimentales.

**Deuxième partie**

**Boite à outils**



## CHAPITRE 3

### INTRODUCTION

On présente dans cette partie les différents outils mathématiques et physiques qui seront utilisés dans la suite du manuscrit. On se restreint uniquement aux définitions et à quelques exemples simples, le but étant pour le lecteur de se familiariser avec les concepts et les notations. Les questions plus avancées concernant leurs utilisations et les liens avec la thématique de recherche seront abordées dans l'état de l'art au début des chapitres concernés. Comme indiqué précédemment, le chapitre 11 sera consacrée à la reconstruction de la forme de l'aiguille à partir des données des capteurs. Dans cette partie, le modèle d'aiguille mis au point pour situer les capteurs et caractériser sa déformation, sera paramétré par des **repère mobiles**. Ce type de paramétrisation nous permettra de bâtir le système différentiel reliant la géométrie de l'aiguille aux données de déformations des capteurs grâce à l'utilisation de la **théorie des poutres** de Reissner. La résolution de ce système se fera alors à l'aide d'une méthode reposant sur les **groupes et algèbres de Lie**.

Le chapitre 15 concerne l'optimisation des positions des capteurs sur l'aiguille. Notre approche repose sur l'utilisation de scanners de piqués d'aiguilles. Pour pouvoir décrire les formes de ces aiguilles dans l'espace, nous utiliserons un modèle à base de **B-Splines**. La caractérisation des déformations de ces aiguilles se fera à l'aide d'un outil statistique approprié : l'**analyse en composante principales**.

Ces principaux outils sont présentés dans la suite de ce chapitre.



# CHAPITRE 4

## REPÈRE MOBILE

### 4.1 Repère mobile

Un repère mobile est un repère qui se déplace sur une courbe.

Définition : un arc paramétré régulier de classe  $C^n$  est un couple  $(I, \mathbf{f})$  tel que :

- $I$  est un intervalle inclus dans  $\mathbb{R}$
- $\mathbf{f}$  est définie sur  $I$  à valeur dans un espace euclidien. (Dans la suite, cet espace sera  $\mathbb{R}^3$ .)
- $\mathbf{f}$  est de classe  $C^n$  sur  $I$
- $\mathbf{f}'$  ne s'annule pas sur  $I$

On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire euclidien usuel. On définit le repère mobile tangent à l'arc  $(I, \mathbf{f})$  comme le triplet de fonctions vectorielles  $(\mathbf{f}_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  tel que :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \mathbf{f}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|}$$

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \rangle = 0$$

Dans le cas où  $(\mathbf{f}_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  est un ensemble de fonctions orthonormées, on a alors :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (4.1)$$

On dit alors que le repère mobile  $(\mathbf{f}_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  est orthonormé. La figure 4.1 présente un exemple de repère mobile.

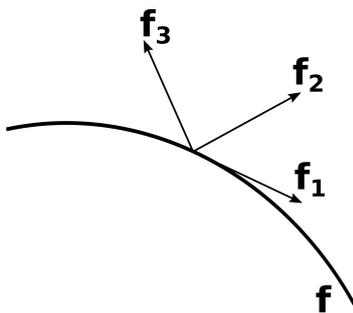


FIGURE 4.1. – Exemple de repère mobile.  
Illustration du repère mobile  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$  pour la courbe  $\mathbf{f}$ .

## 4.2 Repère de Frenet

Le repère de Frenet est un repère mobile  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$  défini par les trois fonctions vectorielles  $\mathbf{T}$  (le vecteur *tangent*),  $\mathbf{N}$  (le vecteur *normal*) et  $\mathbf{B}$  (le vecteur *binormal*).

Soit  $(I, \mathbf{f})$  un arc paramétré de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $t_0$  un élément de  $I$ , on définit  $s$  comme l'abscisse curviligne d'origine  $t_0$  :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}'(x)\| dx \quad (4.2)$$

L'application  $s$  est strictement croissante de  $I$  dans  $J = s(I)$ . De plus en posant

$$\mathbf{g} : J \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4.3)$$

$$t \mapsto \mathbf{f}(s^{-1}(t)) \quad (4.4)$$

alors  $(J, \mathbf{g})$  est un reparamétrage de l'arc paramétré  $(I, \mathbf{f})$  par l'abscisse curviligne : c'est un paramétrage normal, c'est à dire que l'on a la propriété suivante :

$$\forall t \in J, \|\mathbf{g}'(t)\| = 1 \quad (4.5)$$

On définit alors le repère de Frenet de la façon suivante :

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{g}}{dt} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\|} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \quad (4.8)$$

Le repère  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$  est un repère orthonormé et a les propriétés géométriques suivantes :

- $\mathbf{T}(t)$  est le vecteur tangent à la courbe en  $\mathbf{g}(t)$
- $\mathbf{N}(t)$  est le vecteur normal, il est dirigé vers le centre du cercle osculateur en  $\mathbf{g}(t)$

- $\mathbf{B}(t)$  est le vecteur binormal, c'est le produit vectoriel de  $\mathbf{T}(t)$  et de  $\mathbf{N}(t)$

Ces vecteurs vérifient les formules de dérivations suivantes :

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \kappa\mathbf{N} \quad (4.9)$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \quad (4.10)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\tau\mathbf{N} \quad (4.11)$$

où  $\kappa$  et  $\tau$  sont respectivement la courbure et la torsion mathématique, les fonctions scalaires associées au repère de Frenet. Elles sont définies de la manière suivante :

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{g}'(t) \wedge \mathbf{g}''(t)\|}{\|\mathbf{g}'(t)\|^3} \quad (4.12)$$

$$\tau(t) = \frac{\langle (\mathbf{g}'(t) \wedge \mathbf{g}''(t)) \cdot \mathbf{g}'''(t) \rangle}{\|\mathbf{g}'(t) \wedge \mathbf{g}''(t)\|^2} \quad (4.13)$$

A titre d'illustration, les figures 4.2a et 4.2b représentent le repère de Frenet d'une hélice.

Le repère de Frenet a pour principal avantage sa simplicité de calcul. Néanmoins le fait qu'il présente des singularités aux points d'inflexion fait qu'il n'est pas calculable pour toutes les courbes.

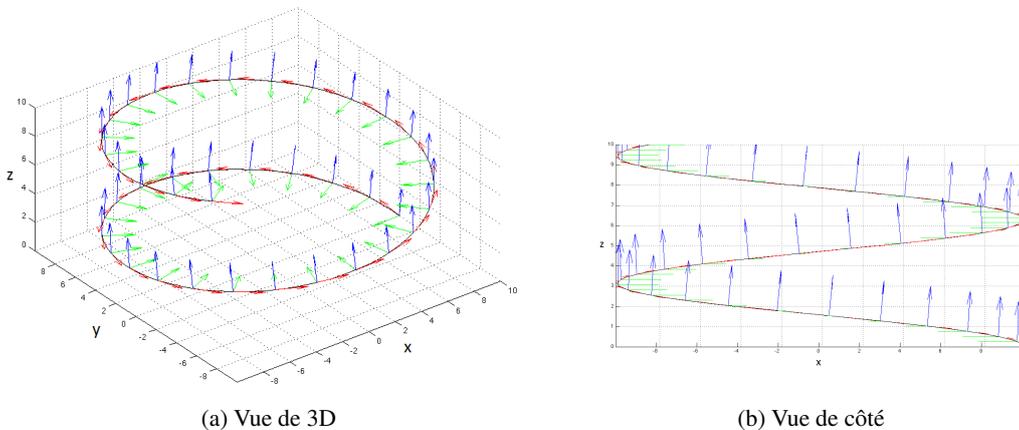


FIGURE 4.2. – Repère de Frenet d'une hélice.

Représentation des vecteurs de Frenet  $\mathbf{T}$  (vecteur rouge),  $\mathbf{N}$  (vecteur vert),  $\mathbf{B}$  (vecteur bleu) d'une courbe en forme d'hélice.



## 5.1 Introduction

La résistance des matériaux est un domaine de la mécanique des milieux continus qui traite de la déformation des solides. Par la formulation d'hypothèses et l'utilisation de modèles, on peut étudier et prévoir différentes caractéristiques d'un solide lors de sa déformation. Selon les caractéristiques géométriques de ce solide, différents modèles peuvent être élaborés. La théorie des poutres rassemble l'ensemble des modèles applicables à un solide dont l'une des dimensions est beaucoup plus grande que ses deux autres (figure 5.1).

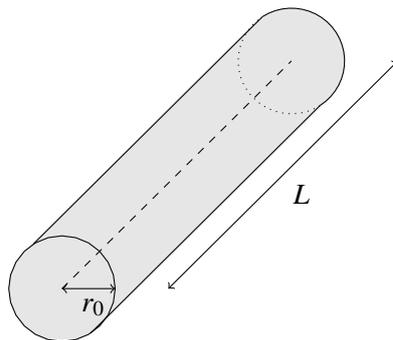


FIGURE 5.1. – Exemple de poutre circulaire.  
Le rayon de la poutre est noté  $r_0$  et sa longueur est notée  $L$ .

## 5.2 Notions

### 5.2.1 Définitions principales

*Fibre neutre* : La fibre neutre est une courbe définie comme l'ensemble des centres de gravités des sections droites de la poutre. On s'appuie alors sur la fibre neutre pour modéliser la poutre.

*Déformation* : Soient deux points d'une poutre définissant un segment. On note  $l_0$  la longueur de ce segment à l'état initial et  $l$  la longueur à l'état déformé (FIGURE 5.2).

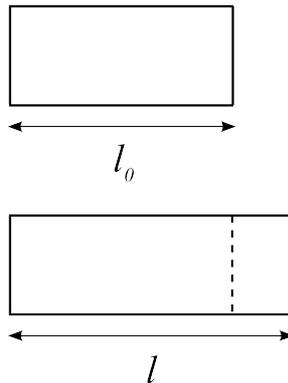


FIGURE 5.2. – Morceau infinitésimal de poutre à l'état initial et déformé. La longueur à l'état initial est noté  $l_0$  et la longueur à l'état déformée est notée  $l$ .

On définit alors la déformation  $\varepsilon$  par la formule suivante :

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta L}{l_0}$$

La déformation  $\varepsilon$  est sans unité.

### 5.2.2 Hypothèses fondamentales

Sont présentées ici les hypothèses fondamentales sur lesquelles reposent la théorie des poutres. Leurs validités sont des conditions *sine qua non* à la validité des résultats de la théorie des poutres.

#### 5.2.2.1 Géométrie du solide

Les solides considérés en théorie des poutres sont des solides ayant une dimension d'ordre supérieure aux deux autres. Il n'existe pas dans la littérature de valeur minimale concernant le rapport entre la dimension la plus grande et les dimensions les plus petites. Néanmoins, les modèles considérés ont souvent un rapport minimal de l'ordre de 10 bien qu'il soit parfois suggéré qu'un facteur 3 puisse suffire dans certains cas.

### 5.2.2.2 Régularité du matériau

Les propriétés caractéristiques du milieu considéré varient de façons cohérentes. Elles peuvent être représentées par des fonctions ayant certaines propriétés de continuité et de dérivabilité.

### 5.2.2.3 Principe de Saint-Venant

Il s'agit d'un principe qui stipule que l'état mécanique pour des points situés à une distance suffisante des points d'application des charges extérieures ne dépend que du torseur résultant des forces extérieures. Ce principe implique que les résultats de la théorie des poutres ne sont valides qu'en des points suffisamment éloignés des points d'applications des efforts extérieurs.

## 5.2.3 Variables de la poutre

Les constantes liées aux propriétés physiques et géométriques de la poutre sont définies dans le tableau 5.1.

Variable	Description
$E$	Module de Young du matériau de la poutre
$G$	Module de cisaillement du matériau de la poutre
$I$	Moment quadratique de la poutre en flexion
$J$	Moment quadratique de la poutre en torsion
$A$	Aire de la section de la poutre
$K$	Facteur de cisaillement

TABLE 5.1. – Constantes liées à la poutre.

## 5.3 Théorie des poutres en deux et trois dimensions

### 5.3.1 Etat de l'art

- La théorie des poutres 2D considère uniquement les déformations planes des poutres. Deux théories existent : la théorie d'Euler-Bernoulli [BC09] qui néglige l'effet du cisaillement et la théorie de Timoshenko [TG09] qui tient compte de l'effet du cisaillement. Dans les deux cas, bien que ces théories constituent un point d'entrée et un outil d'étude intéressant, elles ne correspondent pas à nos besoins. En effet au delà de l'aspect dimensionnelle et du fait que nous souhaitons mener une étude en 3D et non en 2D, les hypothèses qui sous-tendent ces théories (hypothèses de petites déformations, de petits déplacements) sont trop restrictives. Nous allons donc nous tourner pour la suite de notre étude vers la théorie des poutres 3D.

- La théorie des poutres non-linéaire 3D n'est pas une simple extension de la théorie 2D. La difficulté supplémentaire réside dans le fait que la formulation 3D des rotations ne sont pas des quantités vectorielles, contrairement à la formulation 2D, mais des objets appartenant à la variété différentielle  $SO(3)$ . Ainsi la paramétrisation de la poutre, qui permet d'exprimer les rotations de chaque section de poutre au cours de la déformation, est une étape essentielle de chaque méthode et influence le traitement et l'approche mise en place ensuite. Cet état de l'art n'a pas pour but d'être exhaustif mais plutôt de proposer aux lecteurs une brève description des différentes approches existantes de théorie des poutres 3D.

**Tameroglu S.** *Finite Theory of Thin Elastic Rods* (1969) [Tam71] : L'approche de Tameroglu repose sur l'utilisation des repères mobiles matériels et de Frenet pour les états déformés et non déformés. Une fois les matrices de transfert et les conditions de compatibilité posées, une approche physique permet d'obtenir les équations d'équilibre d'une poutre dans le cas de petites déformations. Comme indiqué dans la partie sur les repères mobiles, le repère de Frenet n'est pas défini pour les courbes présentant des points d'inflexion et des segments droits, ce qui peut poser des problèmes avec les modèles étudiés, *a fortiori* les poutres droites. De plus la formulation des matrices de transferts entre les deux repères mobiles distincts conduit à des expressions excessivement complexes et donc difficilement exploitables.

**Reissner E.** *On One-Dimensional Large-Displacement Finite-Strain Beam Theory* (1973) [Rei73] : la théorie de Reissner traite de la déformation statique des poutres en grands déplacements, en grandes déformations et en rotations finies. La paramétrisation utilisée par Reissner s'appuie, comme Tameroglu, sur les repères mobiles mais à l'inverse de ce dernier, il n'utilise pas le repère de Frenet. L'approche se base sur les équations d'équilibre des forces et des moments. L'application du principe des travaux virtuels, principe communément utilisé en physique, permet d'obtenir un système reliant les efforts et les déformations unidimensionnels mais permettant néanmoins de rendre compte de l'aspect tridimensionnel de la modélisation. Le modèle utilisé est *géométriquement exact*, c'est à dire qu'il est capable de fournir les mesures des déformations d'une manière exacte tout en n'imposant aucune restriction sur l'amplitude des déplacements ou des rotations. Le qualificatif *géométriquement exacte* caractérise une approche dont le traitement de la géométrie des modèles et des équations est réalisé de manière exacte et pour laquelle les seules approximations faites le sont dans le cadre de la résolution.

Un des avantages de la théorie de Reissner est la prise en compte intrinsèque dans celle-ci des phénomènes de traction-compression et de cisaillement, à l'inverse des autres théories utilisant les hypothèses d'inextensibilité comme celle d'Euler-Bernoulli.

**Simo J.C.** *A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I* (1985) [Sim85] : les travaux de Simo constitue une référence dans le domaine de la théorie des poutres non-linéaires 3D. Ils sont une généralisation au cas dynamique des

travaux de Reissner. La paramétrisation utilisée par Simo se base sur  $\mathfrak{so}(3)$ , l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie des rotations  $SO(3)$ . Simo a développé une expression claire et compacte de la déformation d'une poutre, basée sur un tenseur qui définit la rotation de la section de poutre. Cela permet l'expression des contraintes résultantes et l'obtention des déformations par application d'un bilan de puissance-énergie. Ce travail est une référence dans le domaine de la théorie des poutres 3D qui a donné naissance à de nombreuses autres théories ou de méthodes d'éléments finis.

La première étape à accomplir lors d'une étude avec les théories des poutres est la paramétrisation. L'analyse précédente de la littérature nous a permis d'identifier différentes approches (angles d'Euler, paramétrage par vecteurs). Notre choix s'est porté sur la paramétrisation par repère mobile comme présenté dans la théorie de Reissner. Ce type de paramétrisation s'avère très pratique dans notre cas, notamment pour définir les positions des capteurs sur l'aiguille et faire le lien avec leurs données. On dispose ainsi d'une théorie puissante s'appuyant sur un minimum d'hypothèses restrictives dont les principes sont exposés dans la section qui suit.

## 5.4 Théorie de Reissner

### 5.4.1 Paramétrisation de la poutre

A l'état non-déformé, selon les hypothèses précédentes, la poutre droite de section circulaire constante est droite. On note son rayon  $r_0$  et sa longueur  $L$ . On définit une paramétrisation normale de sa fibre neutre  $\mathbf{r}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : [0, L] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \forall s \in [0, L], \quad \|\mathbf{r}'(s)\| &= 1 \end{aligned}$$

On note  $\mathbf{t}$  le vecteur dérivée de  $\mathbf{r}$  :

$$\begin{aligned} \forall s \in [0, L], \quad \mathbf{t}(s) &= \mathbf{r}'(s) \\ \forall s \in [0, L], \quad \|\mathbf{t}(s)\| &= \|\mathbf{r}'(s)\| = 1 \end{aligned}$$

Donc  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent à la fibre neutre  $\mathbf{r}$ .

On peut définir  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  deux fonctions vectorielles telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 : [0, L] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{n}_2 : [0, L] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \forall s \in [0, L], \quad \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}_i(s) \rangle &= \langle \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s) \rangle = 0 \\ \forall s \in [0, L], \quad \|\mathbf{n}_1(s)\| &= \|\mathbf{n}_2(s)\| = 1 \\ \forall s \in [0, L], \quad \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}_1(s) &= \mathbf{n}_2(s) \end{aligned}$$

Donc  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  est un repère mobile orthonormé orienté. La section de poutre en  $\mathbf{r}(s)$  est le plan ayant pour vecteur normal  $\mathbf{t}(s)$ . La fibre neutre est noté  $\mathbf{r}$  à l'état non déformé et  $\mathbf{R}$  à

l'état déformé. De même la notation  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  correspond au repère à l'état non déformé, celui-ci est noté  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  à l'état déformé. La section de poutre en  $\mathbf{R}(s)$  est le plan ayant pour vecteur normal  $\mathbf{T}(s)$ .

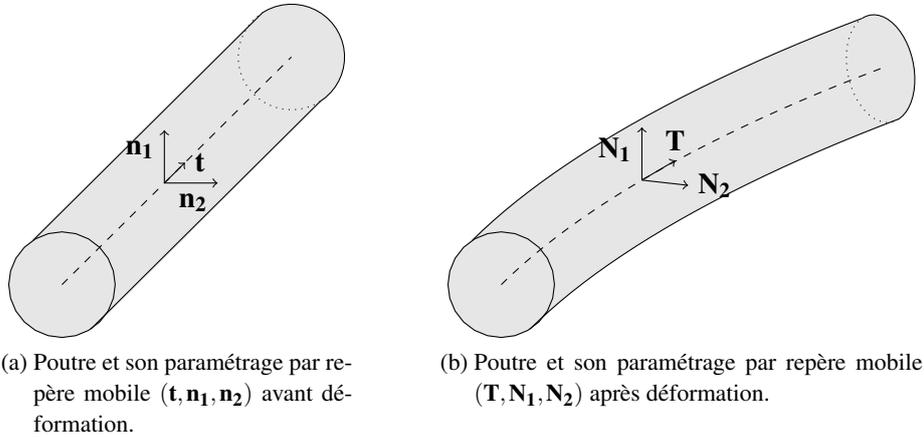


FIGURE 5.3. – Paramétrage de la poutre par repère mobile.

## 5.4.2 Variables

Cette section présente les variables utilisées dans la théorie des poutres de Reissner.

### 5.4.2.1 Cas de charges

Dans son article, Reissner introduit les forces et moments linéiques externes appliqués à la poutre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{m}$  ainsi que les forces et moments internes à la poutre  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$ . Leurs décompositions dans la base  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= p_t \mathbf{T} + p_1 \mathbf{N}_1 + p_2 \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{m} &= m_t \mathbf{T} - m_2 \mathbf{N}_1 + m_1 \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{P} &= P_t \mathbf{T} + P_1 \mathbf{N}_1 + P_2 \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{M} &= M_t \mathbf{T} - M_2 \mathbf{N}_1 + M_1 \mathbf{N}_2\end{aligned}$$

### 5.4.2.2 Grandeurs de déformations

Dans sa théorie, Reissner introduit les variables  $\gamma$  et  $\varkappa$  qu'il nomme *virtual force and moment strains* et qu'on pourrait traduire par *forces et moments de déformations virtuels linéiques*. Les décompositions de ces variables dans la base  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_t \mathbf{T} + \gamma_1 \mathbf{N}_1 + \gamma_2 \mathbf{N}_2 \\ \varkappa &= \varkappa_t \mathbf{T} - \varkappa_2 \mathbf{N}_1 + \varkappa_1 \mathbf{N}_2\end{aligned}$$

La variable  $\gamma$ , composante de la force de déformation virtuelle portée par  $\mathbf{T}$ , est reliée à la traction-compression. De même  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , composantes de la force de déformation virtuelle portées par  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$ , sont reliées au cisaillement.

La variable  $\varkappa$ , composante du moment de déformation virtuel portée par  $\mathbf{T}$ , est reliée à la torsion. De même  $\varkappa_1$  et  $\varkappa_2$ , composantes du moment de déformation virtuel portées par  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$ , sont reliées à la flexion.

Ces notions sont développées plus précisément dans la suite de ce chapitre.

### 5.4.3 Equations

Cette section présente les équations utilisées dans la théorie des poutres de Reissner.

#### 5.4.3.1 Lois de déformation

Dans le cas d'une poutre **droite à l'état initial**, l'évolution du repère matériel est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ -\varkappa_1 & 0 & \varkappa_t \\ -\varkappa_2 & -\varkappa_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

L'expression de la dérivée de la déformée de la poutre est la suivante :

$$\mathbf{R}' = (1 + \gamma)\mathbf{T} + \gamma_1\mathbf{N}_1 + \gamma_2\mathbf{N}_2 \quad (5.2)$$

#### 5.4.3.2 Lois de comportement

Dans le cas de déformations **élastiques** et **linéaires**, on a les lois de comportement suivantes :

$$\begin{aligned} P_t &= EA\gamma_t & P_1 &= GK\gamma_1 & P_2 &= GK\gamma_2 \\ M_t &= GJ\varkappa_t & M_1 &= EI\varkappa_1 & M_2 &= EI\varkappa_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

où  $E$ ,  $G$ ,  $I$ ,  $J$ ,  $A$  et  $K$  sont les constantes liés aux propriétés physiques et géométriques de la poutre définies dans le paragraphe 5.2.3.

#### 5.4.3.3 Equations intrinsèques de la poutre

Les équations reliant les grandeurs physiques sur une section de poutre sont les suivantes :

$$\mathbf{P}' + \mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{P} + \mathbf{m} = 0 \quad (5.4)$$

Dans le cas d'une poutre initialement droite leurs décompositions dans la base  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  est la suivante :

$$\begin{aligned}
 P_t' - \varkappa_1 P_1 - \varkappa_2 P_2 + p_t &= 0 \\
 P_1' + \varkappa_1 P_t - \varkappa_1 P_2 + p_1 &= 0 \\
 P_2' + \varkappa_2 P_t + \varkappa_1 P_1 + p_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
 M_t' + \varkappa_1 M_2 - \varkappa_2 M_1 + \gamma_1 P_2 - \gamma_2 P_1 + m_t &= 0 \\
 M_1' + \varkappa_2 M_t - \varkappa_1 M_2 + (1 + \gamma_t) P_1 - \gamma_1 P_t + m_1 &= 0 \\
 M_2' - \varkappa_1 M_t + \varkappa_1 M_1 + (1 + \gamma_t) P_2 - \gamma_2 P_t + m_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

#### 5.4.4 Interprétation physique des grandeurs $\gamma$ et $\varkappa$

##### 5.4.4.1 Lien entre traction-compression et $\gamma_t$

Soit une poutre encastrée de section constante d'aire  $A$  et de longueur  $l_0$  au repos. On applique à son autre extrémité une force  $P_t$  uniformément répartie, normale à sa section, résultant en une contrainte  $\sigma$ . La longueur de la poutre ainsi déformée est alors notée  $l$ .

La déformation en traction-compression  $\varepsilon_T$  est alors la suivante :

$$\varepsilon_T = \frac{l - l_0}{l_0}$$

D'après la loi de Hooke on a alors :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E \varepsilon_T \\
 \Rightarrow \frac{P_t}{A} &= E \varepsilon_T
 \end{aligned}$$

Or d'après la loi de comportement (équation 5.3) on a  $P_t = EA\gamma_t$ . On a alors :

$$\varepsilon_T = \gamma_t$$

Par conséquent  $\gamma_t$  est la **déformation en traction-compression** de la poutre.

##### 5.4.4.2 Lien entre cisaillement et $\gamma_1, \gamma_2$

Soit une poutre soumise uniquement aux phénomènes de cisaillement dans le plan ( $\mathbf{TRN}_i$ ) comme illustrée dans la figure 5.4. On note  $\varphi$  l'angle de cisaillement de la poutre, c'est à dire l'angle entre le vecteur  $\mathbf{T}$  du repère mobile ( $\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ ) et la normale  $\mathbf{R}'$  à une section.

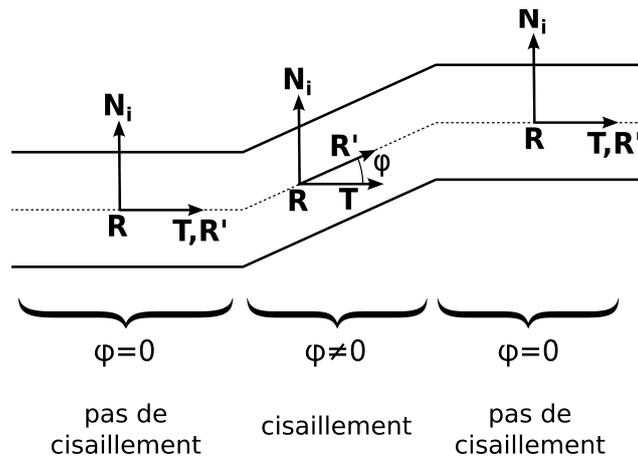


FIGURE 5.4. – Schéma de déformation de poutre par cisaillement.

D'après l'équation 5.2, l'expression de la dérivée de la déformée de la poutre donne alors :

$$\mathbf{R}' = \mathbf{T} + \gamma_i \mathbf{N}_1$$

On a alors la relation suivante :

$$\tan(\varphi) = \gamma_i$$

La variable  $\gamma_i$  est appelé **déformation en cisaillement**.

#### 5.4.4.3 Lien entre torsion mécanique et $\varkappa_t$

Soit une poutre encastree de section circulaire constante de longueur  $l$  ayant pour moment quadratique  $J$  et module de cisaillement  $G$ . On applique à son autre extrémité un moment de torsion  $M_t$ . On note  $\varphi$  l'angle de torsion de la poutre.

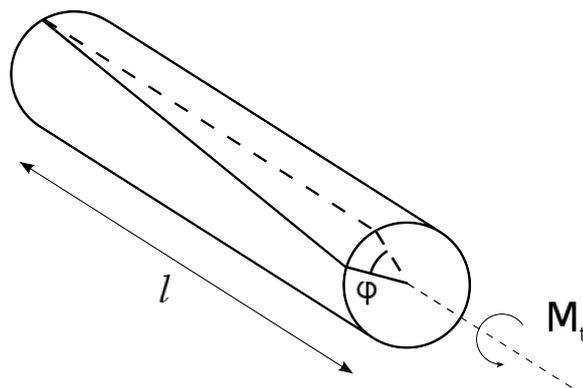


FIGURE 5.5. – Schéma de déformation de poutre par torsion.

On a la relation :

$$\varphi = \frac{M_t l}{GJ}$$

Or d'après la loi de comportement (équation 5.3) on a  $M_t = GJ\alpha_t$ . On a alors :

$$\alpha_t = \frac{\varphi}{l}$$

Par conséquent  $\alpha_t$  est l'**angle unitaire de torsion mécanique** de la poutre.

#### 5.4.4.4 Lien entre flexion et $\alpha_1, \alpha_2$

Soit une poutre soumise uniquement aux phénomènes de flexion. La courbe de la fibre neutre de la poutre déformée est notée  $\mathbf{R}$ . La courbure est alors donnée par la formule suivante :

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{R}' \wedge \mathbf{R}''\|}{\|\mathbf{R}'\|^3}$$

et on a :

$$\mathbf{R}' = \mathbf{T}, \quad \mathbf{R}'' = \alpha_1 \mathbf{N}_1 + \alpha_2 \mathbf{N}_2$$

On a alors :

$$\kappa = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

Par conséquent la norme du vecteur  $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$  est la **courbure** de la poutre.

# CHAPITRE 6

## ALGÈBRE ET GROUPES DE LIE

La théorie des algèbres et groupes de Lie a été développée par Sophus Lie au cours des années 1890 [Lie80].

### 6.1 Groupes de Lie

Un groupe de Lie est un groupe ayant une structure de variété différentielle et dont l'addition et la multiplication sont différentiables.

Exemple : Les groupes  $O(3)$  et  $SO(3)$  sont des groupes de Lie matricielles.

$$\begin{aligned} O(3) &= \{ \mathbf{M} \in \mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R}), \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M}^T = I_3 \} \\ SO(3) &= \{ \mathbf{M} \in \mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R}), \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M}^T = I_3, \det(M) = 1 \} \end{aligned}$$

Le groupe  $O(3)$  est le groupe des matrices orthogonales en dimension 3. Le groupe  $SO(3)$  est le groupe des matrices de rotation en dimension 3.

### 6.2 Espace tangent

L'espace tangent d'une variété différentielle est un espace vectoriel défini en un point dérivé de cette variété. Soit  $x$  un élément d'un groupe de Lie  $G$ . On définit l'espace tangent  $T_x G$  comme l'espace vectoriel dont les éléments sont les vecteurs tangents à  $x$  :

$$T_x G = \{ (dM)_x, M \in G \}$$

Exemple : On note  $T_I SO(3)$  l'espace tangent au groupe de Lie  $SO(3)$  à l'identité.

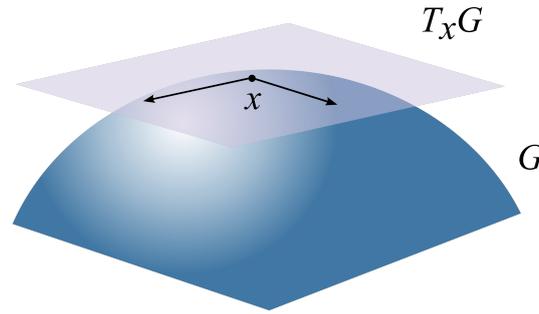


FIGURE 6.1. – Espace tangent d'un groupe de Lie.  
Représentation de l'espace tangent  $T_x G$  à la variété  $G$  en  $x$

### 6.3 Algèbres de Lie

Une algèbre de Lie sur un corps  $K$  est un espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  muni d'une loi de composition interne  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- **bilinéarité** :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [ax + by, z] &= a[x, z] + b[y, z] \\ [z, ax + by] &= a[z, x] + b[z, y] \end{aligned}$$

- **alternée** :  $\forall x \in \mathfrak{g}, [x, x] = 0$
- **anticommutativité** :  $\forall x, y \in \mathfrak{g}, [x, y] = -[y, x]$
- **identité de Jacobi** :  $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$

Propriété : Soit  $G$  un groupe de Lie d'élément neutre  $e$  alors l'espace tangent  $T_e G$  est une algèbre de Lie.

Exemple : L'algèbre de Lie associée à  $SO(3)$  est  $T_e SO(3)$  notée  $\mathfrak{so}(3)$ . On peut montrer que  $\mathfrak{so}(3)$  est le groupe des matrices antisymétriques :

$$\mathfrak{so}(3) = \{ \mathbf{M} \in \mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R}), \mathbf{M}^T = -\mathbf{M} \}$$

### 6.4 Application exponentielle

Soit  $G$  un groupe de Lie et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie associé. Dans la théorie de Lie, l'exponentielle est une application définie sur  $\mathfrak{g}$  à valeur dans  $G$  :

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \tag{6.1}$$

L'utilisation de l'exponentielle permet de paramétrer un groupe de Lie à partir de son algèbre de Lie. L'exponentielle telle qu'elle est couramment utilisée sur le corps des nombres réels est un cas particulier.

Exemple : Dans le cas des groupes de Lie matriciels, on a la définition suivante :

$$\exp(\mathbf{M}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!} \tag{6.2}$$

On a ainsi :

$$SO(3) = \{\exp(\mathbf{M}), \mathbf{M} \in \mathfrak{so}(3)\} \quad (6.3)$$



# CHAPITRE 7

## SPLINES

### 7.1 Spline

Au début du  $XX^{me}$  siècle, le mot spline est un mot anglais désignant la pièce de métal ou de bois utilisé par les ingénieurs de l'industrie navale ou spatiale pour tracer des courbes. La première incursion de ce mot dans le langage mathématique date de 1946 et se trouve dans un papier de Schoenberg [Sch88]. Le terme désigne alors des courbes par partie dont chaque morceau est un polynôme de degré  $k - 1$  et qui sont de classe  $C^{k-2}$  autour des points de raccordement. Schoenberg a ainsi donné à ce type de courbe le nom de l'outil qui sert alors à l'époque à les tracer. Aujourd'hui une spline désigne plus généralement une fonction polynomiale définie par morceaux ayant certaines propriétés de continuité et de dérivabilité aux points de raccordements.

Plusieurs auteurs ont contribué de façon concomitante au développement et à l'extension des splines. Ainsi les travaux de Paul de Casteljaou [Casng] et Pierre Bézier [Béz66] sur les *courbes de Bézier* et leurs implémentations algorithmiques et ceux de de Boor [dB78] sur les B-Splines ont marqué le début de l'utilisation des splines dans le domaine de la Conception Assistée par Ordinateur (CAO), domaine qui leur vaut aujourd'hui d'être reconnues en tant qu'outil de modélisation de premier plan.

### 7.2 B-Spline

#### 7.2.1 Définition

On définit les fonctions B-splines de base comme les fonctions  $B_{i,k}$  :

$$B_{i,k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

définies récursivement par les formules suivantes :

$$\forall i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket, \quad B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 0, n_c + n - 1 - k \rrbracket, \\ B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \quad (7.2)$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$  est le *degré* de la B-spline et  $(t_i)_{i=1,\dots,m} \in \mathbb{R}^m$  sont les *noeuds* de la B-spline. Ainsi les fonctions  $B_{i,k}$  sont des **fonctions polynomiales** de degré  $n$ . (On utilisera par la suite des noeuds strictement croissant  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ ).

On définit les courbes B-splines 3D comme les fonctions **S** :

$$\mathbf{S} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \mathbf{S}(t) = \sum_{i=1}^{n_c} B_{i,n}(t) \mathbf{P}_i$$

où  $(\mathbf{P}_i)_{i=1,\dots,n_c} \in (\mathbb{R}^3)^{n_c}$  sont les *points de contrôle* de la B-spline. Ainsi la B-spline **S** est définie par la combinaison linéaire des fonctions  $B_{i,k}$ , c'est donc une **fonction polynomiale définie par morceaux**. La relation entre le nombre de noeuds  $m$  et le nombre de points de contrôle  $n_c$  est :

$$m = n_c + n + 1$$

## 7.2.2 Propriétés

1. Les fonctions B-splines de base  $B_{i,n}$  définissant la courbe B-spline **S** sont toutes de degré  $n$ .
2. Pour une B-spline de degré  $n$  ayant  $m$  noeuds :
  - Si  $t_0 = t_1 = \dots = t_n < t_{n+1}$  la spline passe par le point  $P_0$ .
  - Si  $t_{m-n-1} < t_{m-n} = \dots = t_m$  la spline passe par le point  $P_{m-n-1}$ .
 On dit alors que les noeuds sont *vissés* aux extrémités.
3. Une courbe B-spline est contenue dans l'enveloppe convexe définie par ses points de contrôle.
4. Une B-spline de degré  $n$  est de classe  $C^{n-k}$  sur un noeud de multiplicité  $k$ . Ainsi dans le cas où on a des noeuds strictement croissant une B-Spline de degré  $n$  est de classe  $C^{n-1}$ .

## 7.2.3 Exemples

### 7.2.3.1 Fonctions B-Spline de base

On détaille un exemple de calcul de base B-Spline de degré  $n = 3$ . On choisit des noeuds équidistants  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_7 < t_8 = 1$ . On note  $h$  le pas entre les noeuds :  $\forall i \in \llbracket 0, 7 \rrbracket, t_{i+1} - t_i = h$

Les fonctions de base  $B_{i,k}$  sont calculées récursivement grâce aux équations 7.1 et 7.2. La figure 7.1 illustre les dépendances entre les fonctions de base.

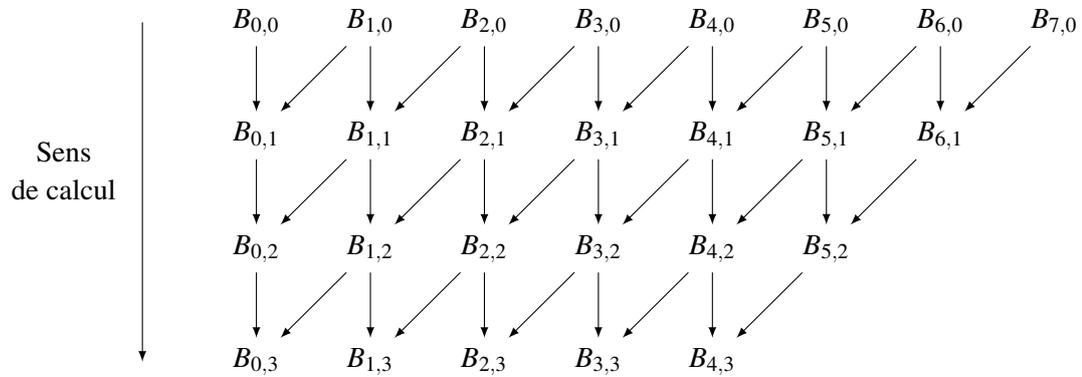


FIGURE 7.1. – Schéma de la récursivité du calcul des bases B-Splines.

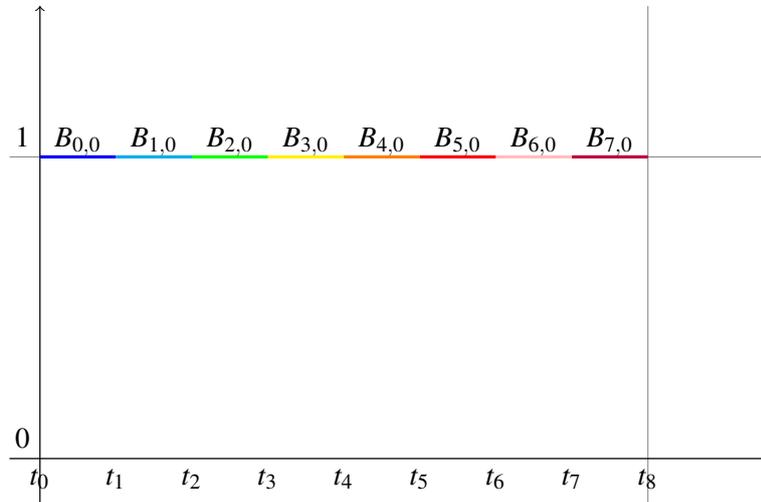
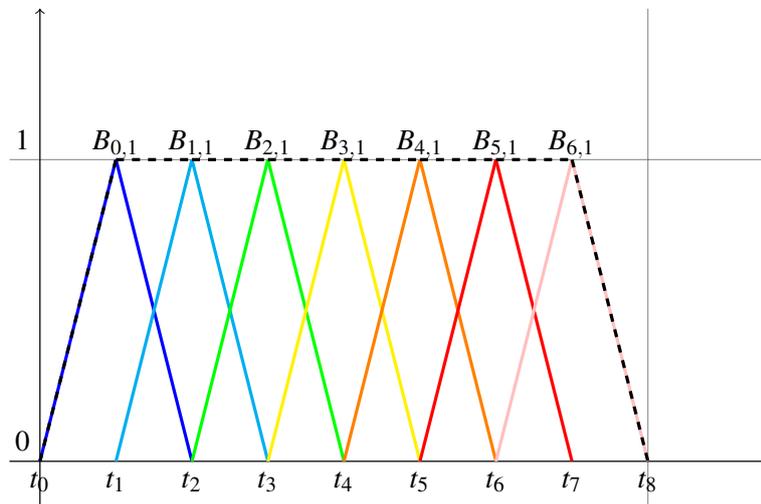
Les fonctions  $B_{i,k}$  sont représentées dans les figures 7.2, 7.3, 7.4 et 7.5. La somme des fonctions  $B_{i,k}$  est affichée en pointillés.

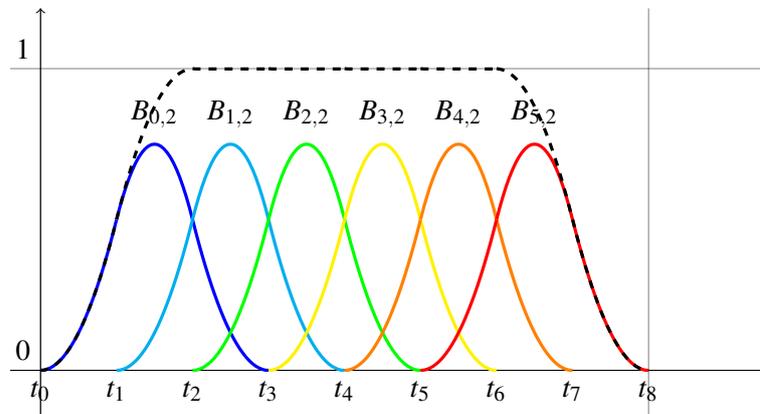
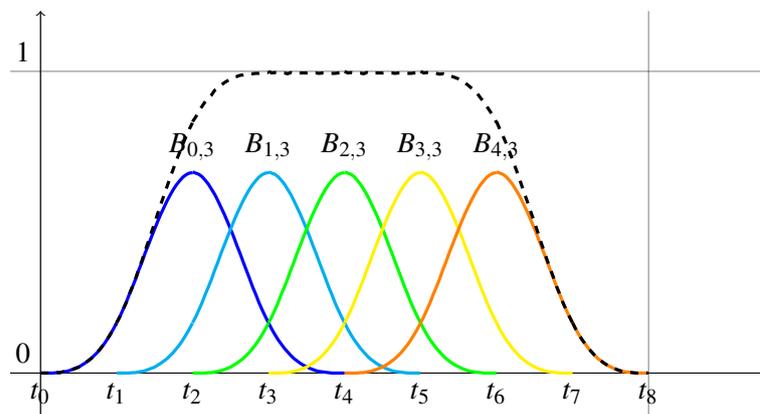
Propriétés des fonctions de base  $B_{i,k}$  :

1.  $B_{i,k}$  est un polynôme de degré  $k$  sur  $[t_i, t_{i+k+1}[$
2.  $B_{i,k}(t) = 0$  si  $t \notin [t_i, t_{i+k+1}[$
3.  $0 < B_{i,k}(t) \leq 1$  si  $t \in [t_i, t_{i+k+1}[$
4.  $\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k}(t) = 1$  pour  $t_k \leq t < t_{m-k}$

### 7.2.3.2 B-Spline 3D

On montre dans cette partie un exemple de B-Spline 3D (FIGURE 7.6). La B-Spline est vissé à ses extrémités car les extrémités de sa courbe passe par ses points de contrôle.

FIGURE 7.2. – Fonctions de base  $B_{i,0}$ .FIGURE 7.3. – Fonctions de base  $B_{i,1}$ .

FIGURE 7.4. – Fonctions de base  $B_{i,2}$ .FIGURE 7.5. – Fonctions de base  $B_{i,3}$ .

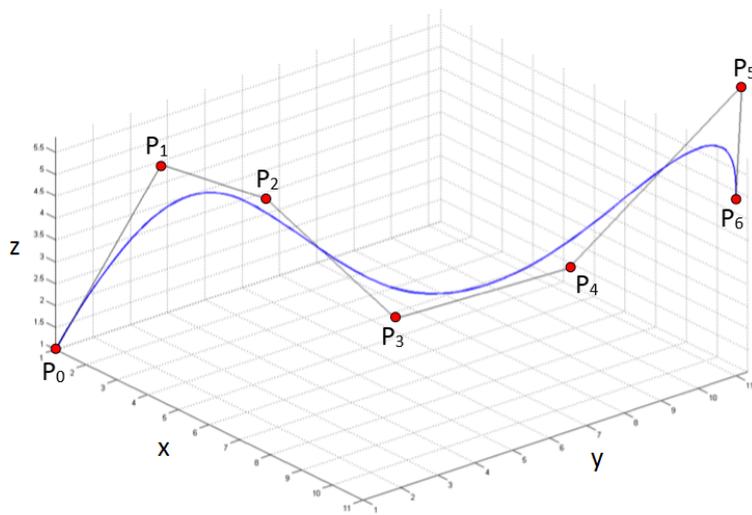


FIGURE 7.6. – B-Spline 3D

Représentation d'une B-Spline 3D (courbe bleue) possédant sept points de contrôle (points rouges). Le polygone dont les sommets sont les points de contrôle de la B-Spline est appelé *polygone de contrôle* (segments noirs).

## CHAPITRE 8

# MÉTHODES DESCRIPTIVES D'ANALYSE STATISTIQUE DE DONNÉES MULTIVARIÉES

### 8.1 Analyse en composantes principales

L'analyse en composantes principales (ACP) est une technique d'analyse statistique multivariée inventée par Pearson [Pea01] et développée plus tard par Hotelling [Hot33]. Elle permet de décorrélérer un ensemble de variables. Les nouvelles variables sont appelées composantes principales et peuvent être classées par leur variance de telle sorte que les premières composantes principales sont les plus importantes en termes de variance.

Soit  $X$  un échantillon de  $N$  réalisations de  $p$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_p$ . On note  $x_{i,j}$  la  $i^{\text{me}}$  réalisation de  $X_j$ .

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N,1} & \cdots & x_{N,p} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Soit le vecteur poids  $\xi$  :

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

La combinaison linéaire  $\xi \cdot x_i = \sum_{j=1}^p \xi_j x_{i,j}$  est le produit scalaire entre le vecteur poids  $\xi$  et le vecteur ligne de la  $i^{\text{me}}$  réalisation de  $X_1, X_2, \dots, X_p$ . Le vecteur poids  $\xi$  permet donc d'affecter un poids à chaque variable aléatoire. Le principe de l'ACP consiste à choisir le vecteur poids de manière à faire ressortir les variations qui sont présentes dans les données. On note  $x_i$  la  $i^{\text{me}}$  ligne de  $X$ .

## 44 Chapitre 8. Méthodes descriptives d'analyse statistique de données multivariées

**Algorithm 1** Input Ensemble des  $N$  réalisations des  $p$  variables aléatoires :  $(x_i)_{i=1,\dots,N}$ .

Output Composantes principales :  $(\xi_k)_{k=1,\dots,p}$ .

---

```

for  $k \leftarrow 1, p$  do
    Trouver le  $\xi_k \in \mathbb{R}^p$  qui maximise  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\xi_k \cdot x_i)^2$ 
    Contraintes :  $\|\xi_k\| = 1$  et  $\xi_i \cdot \xi_k = 0$  pour  $i < k$ 
end for

```

---

*Algorithme de l'ACP :*

*Explications :*

- On maximise la somme au carré pour trouver la combinaison linéaire des modes qui a la variation la plus importante.
- La contrainte  $\|\xi_i\| = 1$  permet d'avoir un problème bien défini.
- On a  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\xi_k \cdot x_i)^2 = \frac{1}{N} \xi_k^T X^T X \xi_k$   
 Donc on cherche  $\max \frac{1}{N} \xi_k^T X^T X \xi_k$  avec  $\xi_k^T \xi_k = 1$   
 On pose  $V = \frac{1}{N} X^T X$  matrice de **variance-covariance**.  
 On doit donc résoudre  $\max \frac{1}{N} \xi_k^T V \xi_k$  avec  $\xi_k^T \xi_k = 1$   
 La matrice  $V$  est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable en base ortho-normée. Par changement de base, on résout le problème de maximisation en trouvant le vecteur propre associé à la valeur propre la plus élevée de l'équation suivante :  $V \xi_k = \lambda \xi_k$ .
- La valeur  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\xi_i \cdot x_j)^2$  correspond à l'importance du  $i^{me}$  mode.

**Faire une ACP sur des variables revient à trouver les vecteurs et valeurs propres associés à la matrice de variance-covariance de ces variables.**

## 8.2 Analyse en composantes principales fonctionnelles

L'analyse en composantes principales fonctionnelles (ACPF) est une extension de l'ACP aux fonctions [RS05]. Soit  $X$  un échantillon de  $N$  réalisations du processus stochastique  $x(s)$ . On note  $x_i(s)$  la  $i^{me}$  réalisation de  $x(s)$ .

$$X = \begin{bmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_N(s) \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

L'approche est similaire à l'ACPF à la différence que  $\xi$  n'est plus un vecteur mais une fonction. On définit le produit scalaire de  $\xi$  et  $x_i$  par :

$$\langle \xi | x_i \rangle = \int_I \xi(s) x_i(s) ds \quad (8.4)$$

*Algorithme de l'ACPF :*

*Explications :*

---

**Algorithm 2** Input Ensemble des  $N$  réalisations du processus stochastique :  $(x_i)_{i=1,\dots,p}$ .

Output Composantes principales :  $(\xi_k)_{k=1,\dots,p}$ .

---

**for**  $k \leftarrow 1, p$  **do**

Trouver le  $\xi_k$  qui maximise  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\int_I \xi_k(s) x_i(s) ds)^2$

Contraintes :  $\int_I \xi_k(s)^2 ds = 1$  et  $\int_I \xi_i(s)^T \xi_k(s) ds = 0$  pour  $i < k$

**end for**

---

- Même principe que pour l'ACP mais on remplace la matrice  $V$  par la fonction de covariance  $v : v(s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(s) x_i(t)$
- On se ramène également à un problème de diagonalisation  $V\xi = \lambda\xi$

**Dans le cas de l'ACP, le nombre de composantes principales est égal au nombre de dimensions des variables aléatoires. A l'inverse, dans le cas de l'ACPF, le nombre de composantes principales est infini.**

L'ACP et l'ACPF reposent sur les mêmes principes. Dans le cas de l'ACP, les modes sont une famille de vecteurs orthonormaux de  $\mathbb{R}^n$  (espace de dimension finie) et dans le cas de l'ACPF les modes sont une famille de fonctions orthonormales (espace de dimension infinie) [RS05]. Il est possible d'utiliser l'ACP avec des données multidimensionnelles. On souhaite pouvoir faire la même chose avec l'ACPF.

### 8.3 Analyse en composantes principales fonctionnelles multidimensionnelles

L'analyse en composantes principales fonctionnelles multidimensionnelles est une extension de l'ACPF aux fonctions multidimensionnelles.

Attention à la différence entre l'anglais et le français !

- **multidimensional** data : données dépendant de plusieurs **variables**
- **multivariate** data : données dans un espace de plusieurs **dimensions**

On choisit comme hypothèse une fonction à valeurs dans un espace de dimension  $n$ . On choisit dans notre exemple  $n = 2$ . Soit  $X$  un échantillon de  $N$  réalisations des processus stochastiques  $(x(s), y(s))$ . On note  $(x_i(s), y_i(s))$  la  $i^{me}$  réalisation de  $(x(s), y(s))$ .

$$X = \begin{bmatrix} x_1(s) & y_1(s) \\ \vdots & \vdots \\ x_N(s) & y_N(s) \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

Pour appliquer l'ACPF à ce type de données, il est nécessaire de procéder à une réduction de dimensions des données. Parmi les méthodes existantes, on trouve :

- la concaténation [RS05]
- la réorganisation [BJS11]

On présente ici la méthode de concaténation qui sera utilisée dans la suite de ce manuscrit.

On pose  $\xi = \begin{bmatrix} \xi^x \\ \xi^y \end{bmatrix}$  avec  $\xi^x$  et  $\xi^y$  deux fonctions. On définit le produit scalaire suivant :

$$\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle = \langle \xi_1^x | \xi_1^y \rangle + \langle \xi_2^x | \xi_2^y \rangle \quad (8.6)$$

On assemble les fonctions  $x_i$  et  $y_i$  dans le vecteur  $f_i$  (**stringing**).

$$f_i(s) = \begin{bmatrix} x_i(s) \\ y_i(s) \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

On a donc :

$$\langle \xi(s) | f_i(s) \rangle = \langle \xi^x(s) | x_i(s) \rangle + \langle \xi^y(s) | y_i(s) \rangle = \int_I \xi^x(s)x_i(s)ds + \int_I \xi^y(s)y_i(s)ds$$

On procède ensuite de la même façon que pour une ACPF normale.

En pratique, pour les calculs, on remplace les fonctions  $x_i$  et  $y_i$  par leurs discrétisations qui sont ensuite concaténées dans un vecteur  $z_i$ .

$$z_i(s) = \begin{bmatrix} x_i(s_1) \\ \vdots \\ x_i(s_n) \\ y_i(s_1) \\ \vdots \\ y_i(s_n) \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

La matrice de variance-covariance de  $z_i$  est alors une version discrétisée de l'opérateur intégral  $V$ . On effectue ensuite une ACP sur les vecteurs  $z_i$  et on sépare les vecteurs composantes principales.

*Remarque* : il est préférable que les familles de fonctions  $x_i$  et  $y_i$  soient de même ordre de grandeur sinon les composantes principales ne seront pas équilibrées entre les deux familles [RS05]. On effectuera donc un pré-traitement (**scaling**) sur les données de telle sorte que leurs moyennes soient les mêmes.

## CHAPITRE 9

## CONCLUSION

On dispose maintenant de tous les outils nécessaires qui seront utilisés dans la suite de ce manuscrit.

On a choisi la théorie des poutres de Reissner car la paramétrisation utilisée est une paramétrisation locale. Cette dernière est particulièrement pratique, notamment pour définir les positions des capteurs sur l'aiguille et faire le lien avec leurs données. Cette paramétrisation locale se base sur les repères mobiles, d'où la place importante qu'ils occupent dans la suite ce manuscrit. On les retrouve notamment comme solution du système différentiel régissant la déformée de l'aiguille. La recherche d'une solution conservant les propriétés des repères mobiles nécessite alors l'utilisation d'une méthode de résolution adaptée, comme celle utilisée par la suite et qui repose sur la théorie de Lie.

Le lissage par B-Spline apparaît comme une des méthodes d'approximation de forme permettant d'obtenir les propriétés géométriques des aiguilles le plus précisément possible. L'obtention des caractéristiques majeures des déformations de l'aiguille à partir de ces données se fera alors par une méthode de décorrélation, ici sur l'analyse en composantes principales fonctionnelles multidimensionnelles.



## **Troisième partie**

# **Reconstruction à partir de capteurs de déformation**



# CHAPITRE 10

## CAPTEURS DE DÉFORMATION

### 10.1 Introduction

Un capteur de déformation est un capteur physique permettant de mesurer localement la déformation du matériau sur lequel il est fixé. Il est possible d'incorporer ce type de capteurs sur des aiguilles utilisées dans le domaine de la radiologie interventionnelle (thématique Working Package 2 du projet ANR GAME-D). On parle alors d'aiguille instrumentées. Parmi les différents types de capteurs de déformation existants, on peut citer les jauges de déformations et les réseaux de fibres de Bragg. Dans le cas des réseaux de fibres de Bragg (FBG), la déformation du matériau est déduite de la variation de la longueur d'onde de la lumière dans la fibre optique. Dans le cas des jauges de déformation résistive, c'est la variation de résistance qui permet d'obtenir la déformation. Ainsi, dans les deux cas, c'est la variation d'une quantité (résistance ou longueur d'onde) entre la position dite de repos et une position déformée qui permet de mesurer la déformation et uniquement cela.

L'aspect technique concernant ces capteurs ne nous concernent pas. Dans la suite du document, on utilisera le terme *capteur de déformation* pour tout capteur qui nous permet de remonter à une déformation géométrique locale.

### 10.2 Etat de l'art

De nombreux articles sont consacrés à des dispositifs, aiguilles, endoscopes, fibres, tous assimilables à des poutres et possédant des capteurs de déformations fixés sur leur surface et permettant de reconstruire leurs déformées [AKM13, HGDD12, MR12, RKvdDM14, RJM13, RD14]. Ces derniers sont le plus souvent organisés en deux parties :

- la première partie concerne l'exploitation des données locales de déformations fournies par les capteurs pour obtenir des indications géométriques globales de la poutre.

- la seconde partie concerne la reconstruction de la déformée de la poutre à partir des informations géométriques obtenues dans la partie précédente.

Ce chapitre se focalise sur le premier point : la conversion des données de déformation des capteurs en informations géométriques. Le dispositif considéré est celui présenté dans la plupart des articles traitant du sujet [AKM13, HGDD12, MR12, RKvdDM14, RJM13, RD14] : on considère ainsi une aiguille instrumentée ayant sur certaines de ses sections trois capteurs de déformation disposés de façon équirépartie autour de cette section comme le montre la figure 10.1. Le raisonnement qui va suivre s'appliquerait de façon similaire à un nombre différent de capteurs et à une autre disposition.

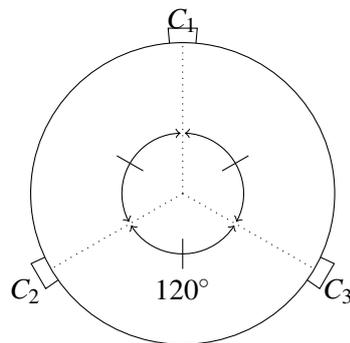


FIGURE 10.1. – Section d'aiguille instrumentée.  
Les trois capteurs de déformations sont notés  $C_1, C_2, C_3$ .

Le nombre de triplets de capteurs réparti le long de l'aiguille est noté  $n$ . La figure 10.2 représente une portion infinitésimale de poutre sur laquelle est situé le  $i^{\text{me}}$  triplet de capteurs  $(C_{k,i})_{k \in \{1,2,3\}}$ . Le plan  $\mathcal{P}_i$  est défini comme le *plan osculateur* qui contient le centre  $O_i$  du cercle osculateur  $O_i$ . Le plan  $\pi_i$  contient la section sur laquelle le triplet de capteurs est situé.

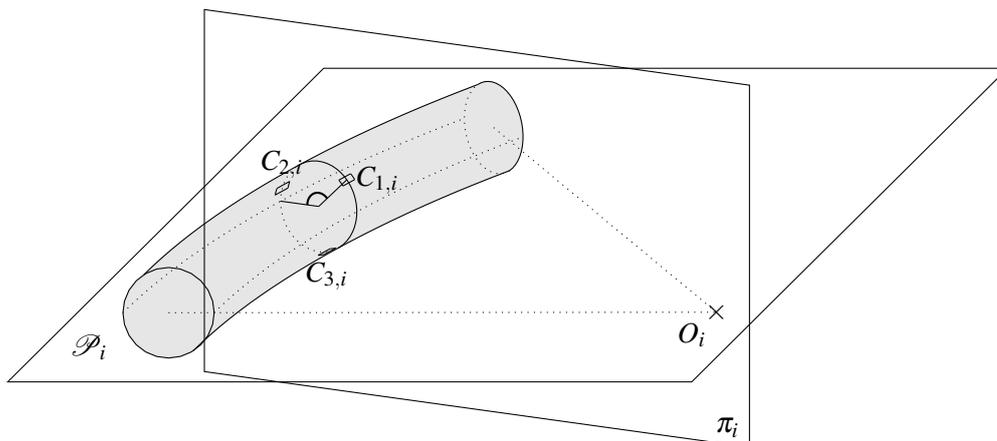


FIGURE 10.2. – Morceau infinitésimal de poutre déformée.

La déformation locale du  $k^{me}$  capteur du  $i^{me}$  triplet est noté  $\varepsilon_{k,i}$ . La déformation maximale de la section de la poutre définie par  $\pi_i$  est noté  $\varepsilon_i$ . L'angle  $\theta_i$  est appelé *l'angle d'orientation* et est défini comme l'angle entre le capteur  $C_{1,i}$  et la trace  $\mathcal{D}_i$  du plan osculateur  $\mathcal{P}_i$  et du plan  $\pi_i$ , comme le montre la figure 10.3.

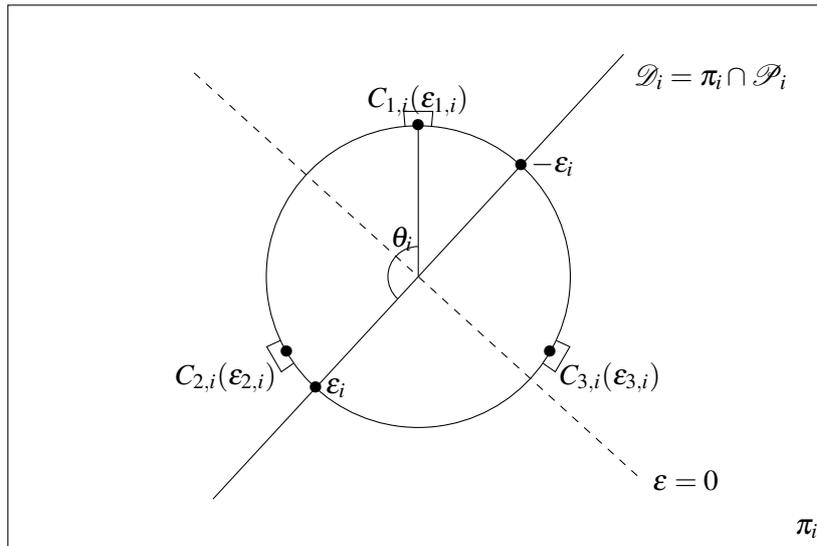


FIGURE 10.3. – Plan de la section de poutre contenant les triplets de capteurs. Vue du plan de section  $\pi_i$  de la poutre contenant le  $i^{me}$  triplet de capteurs ( $C_{1,i}, C_{2,i}, C_{3,i}$ ). Les déformations locales mesurées par les capteurs sont notées  $\varepsilon_{1,i}, \varepsilon_{2,i}, \varepsilon_{3,i}$ . L'angle d'orientation  $\theta_i$  est l'angle entre le capteur  $C_{1,i}$  et  $\mathcal{D}_i$ .

On note  $r_0$  le rayon de l'aiguille. L'intersection entre la partie infinitésimale contenant le  $i^{me}$  triplet et le plan osculateur  $\mathcal{P}_i$  est représentée dans la figure 10.4. La fibre neutre de la poutre est représentée par une ligne en pointillée, sa déformation est toujours nulle. On note  $L$  sa longueur pour la partie infinitésimale de la poutre représentée. La variation de la longueur du rayon extérieur et intérieur de la poutre est notée  $\Delta L$  et les déformations associées sont  $\varepsilon_i$  et  $-\varepsilon_i$ .

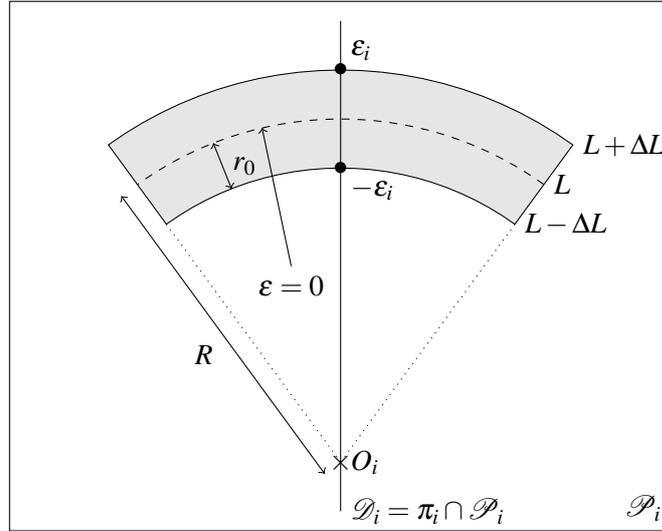


FIGURE 10.4. – Plan osculateur de la déformée d'une poutre.

Vue du plan osculateur  $\mathcal{P}_i$  de la section de poutre de rayon de courbure  $R$  et dont le centre du cercle osculateur est  $O_i$ .

En reprenant les notations utilisées dans la figure 10.4, la définition de la déformation donne l'équation suivante :

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta L}{L} = r_0 \kappa_i \quad (10.1)$$

où  $\kappa_i$  est la *courbure* locale de la partie infinitésimale de la poutre.

L'hypothèse d'élasticité linéaire combinée avec l'équation 10.1 donne le système suivant [AKM13, HDvdD<sup>+</sup>14, RD14, RKvdDM14] :

$$\begin{cases} \varepsilon_{1,i} = r_0 \kappa_i \cos(\theta_i) + \delta_i \\ \varepsilon_{2,i} = r_0 \kappa_i \cos(\theta_i - \frac{2\pi}{3}) + \delta_i \\ \varepsilon_{3,i} = r_0 \kappa_i \cos(\theta_i - \frac{4\pi}{3}) + \delta_i \end{cases} \quad (10.2)$$

où  $\delta_i$  est le biais due aux déformations autre que la flexion [HDvdD<sup>+</sup>14, RD14, RKvdDM14].

Le système 10.2 est un système de trois équations à trois inconnues : la courbure locale  $\kappa_i$ , l'angle d'orientation local  $\theta_i$  et le biais local  $\delta_i$ .

La résolution du système 10.2 donne les valeurs suivantes [MJK<sup>+</sup>14] :

$$\begin{aligned}\kappa_i &= \frac{1}{3r_0} \sqrt{2 \left( (\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{2,i})^2 + (\varepsilon_{2,i} - \varepsilon_{3,i})^2 + (\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{3,i})^2 \right)} \\ \cos(\theta_i) &= \frac{2\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{2,i} - \varepsilon_{3,i}}{\sqrt{2 \left( (\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{2,i})^2 + (\varepsilon_{2,i} - \varepsilon_{3,i})^2 + (\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{3,i})^2 \right)}} \\ \sin(\theta_i) &= \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_{3,i} - \varepsilon_{2,i})}{\sqrt{2 \left( (\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{2,i})^2 + (\varepsilon_{2,i} - \varepsilon_{3,i})^2 + (\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{3,i})^2 \right)}} \\ \delta_i &= \frac{\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i} + \varepsilon_{3,i}}{3}\end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque section  $\pi_i$ , les informations locales de déformation renvoyées par le triplet de capteurs permettent d'obtenir les informations locales de courbure  $\kappa_i$  et d'angle d'orientation  $\theta_i$ .

### 10.3 Bilan

Localement les trois capteurs de déformation permettent d'obtenir la courbure, l'angle de d'orientation ainsi qu'une valeur de biais induit par la déformation. On a constaté que la seule hypothèse physique utilisée était celle de la déformation linéaire. Le raisonnement mené ne permet pas d'explicitier le biais  $\delta_0$ , ni de relier les déformations des capteurs aux types de déformations que subit la poutre.

Dans la suite de ce manuscrit, grâce à la théorie des poutres, une étude de la déformation d'une section sera menée pour obtenir une expression plus complète du système, et ainsi identifier comment extraire des informations supplémentaires pour améliorer la reconstruction.



# CHAPITRE 11

## RECONSTRUCTION SIMPLE

Ce chapitre traite de la reconstruction globale de la déformée de l'aiguille à partir des informations locales données par les triplets de capteurs. Au repos, en dehors de tout tissu, l'aiguille a une forme droite et peut être représentée par un segment. Au cours de l'intervention médicale, lorsque celle-ci est insérée dans des tissus, elle est susceptible de se déformer, en particulier du fait des interactions (biseau) avec les tissus. On aborde ici la manière dont on peut reconstruire la forme 3D de cette aiguille déformée à partir des données locales recueillies grâce aux capteurs de déformations embarquées dans l'aiguille et introduits précédemment. On se fixe comme objectif d'utiliser les informations des capteurs de façon à obtenir une reconstruction la plus précise possible. Cette partie présente une méthode de reconstruction 3D de la forme de l'aiguille à partir des informations des capteurs de déformation situés sur celle-ci. Dans la première partie de ce chapitre les hypothèses physiques utilisées pour l'établissement du système différentiel nécessaire à la reconstruction 3D de la déformée de l'aiguille sont présentées. La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la résolution de ce système.

### 11.1 Etat de l'art

On s'intéresse ici au problème de reconstruction de la déformée d'une structure tel qu'une aiguille, un endoscope, un bras robotique... (toute structure assimilable à une poutre) à partir des données des capteurs de déformation embarqués. Ce problème est un problème de plus en plus abordé au fur et à mesure que les technologies tel que les réseaux de Bragg se développent. On a donc une littérature particulièrement abondante ces dernières années. Les nombreux articles qui seront référencés dans cette partie présentent les similarités suivantes :

- La disposition des capteurs de déformations sur la structure est identique, à savoir trois capteurs par section avec un angle de 120 degrés entre eux.
- Les données de tous les capteurs d'une section sont utilisées pour obtenir la courbure

et l'angle de flexion du dispositif au niveau de la section, l'ensemble de ces éléments ont été décrits préalablement dans le chapitre 10.

La méthode de reconstruction présentée dans chaque article traite donc du passage de ces couples (courbure+angle de déformation), un par section où les capteurs sont présents, à la déformée globale du dispositif.

Les méthodes de reconstruction peuvent être classées selon différents critères, le principal étant la dimension de reconstruction à savoir 2D ou 3D. En reconstruction 2D, on suppose que la déformée peut être contenue dans un plan. Dans ce cas, la reconstruction fait appel à des calculs plus simples et moins nombreux. Néanmoins, des hypothèses peuvent s'avérer restrictives dans certains cas. En reconstruction 3D, on suppose directement que la déformée est une courbe gauche. La reconstruction s'avère alors plus ardue mais la déformée est alors plus précise qu'en 2D. Le choix de la dimension de la reconstruction dépend des hypothèses de déformations utilisées et de la précision à atteindre. En ce qui nous concerne, pour être le plus complet et précis possible, nous investiguerons dans la suite de ce manuscrit la reconstruction de déformées en 3D. En attendant, les différentes méthodes de reconstruction 2D et 3D rapportées dans la littérature sont décrites. Une fois le choix de dimension fait, différentes méthodes de reconstruction sont alors possibles dans chacun des cas.

### 11.1.1 Méthodes 2D

#### 11.1.1.1 Théorie de Euler-Bernoulli 2D

Certaines méthodes de reconstruction 2D utilisent sur théorie des poutres 2D d'Euler-Bernoulli [AKM13, HGDD12, PED<sup>+</sup>10] qui est construite sur les deux hypothèses suivantes :

- petites déformations : on fait l'hypothèse que les déformations de l'aiguille peuvent être considérées comme petites sur toute la longueur de la poutre
- petits déplacements : on considère que le déplacement de l'extrémité de la poutre est petit par rapport à la longueur total de celle-ci (environ moins de 10 %).

On note  $(x(s), y(s))$  les coordonnées de la poutre en paramétrage normal avec  $s \in [O, L]$ ,  $L$  étant la longueur de la poutre. L'hypothèse des petits déplacements conduit à l'approximation suivante de l'abscisse de la poutre :

$$x(s) = s$$

L'hypothèse des petites déformations conduit à l'approximation suivante sur la courbure de la poutre :

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \approx y''$$

La courbure  $\kappa$  est ainsi assimilée à la dérivée seconde  $y''$ . On obtient alors la fonction abscisse  $y$  par intégration double de la courbure  $\kappa$ .

$$y(s) = \int_0^s y''(t)dt \approx \int_0^s \kappa(t)dt$$

La forme de la poutre  $(x(s), y(s))$  est donc connu pour  $s \in [O, L]$ . On peut alors effectuer une rotation de ce plan dans l'espace pour orienter la déformée de façon appropriée.

On rencontre parfois des méthodes 2x2D [SGA<sup>+</sup>13] dans laquelle la résolution précédente est faite pour deux plans orthogonaux à partir des données de courbure  $\kappa_{xy}$  et  $\kappa_{xz}$ , les courbures dans le plan  $(xOy)$  et  $(xOz)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} y(s) &= \int_0^s y''(t)dt \approx \int_0^s \kappa_{xy}(t)dt \\ z(s) &= \int_0^s z''(t)dt \approx \int_0^s \kappa_{xz}(t)dt \end{aligned}$$

On obtient alors la forme de la déformée  $(x(s), y(s), z(s))$  pour  $s \in [O, L]$ .

### 11.1.1.2 Repère de Frenet 2D

Certaines méthodes de reconstruction 2D se basent sur le repère de Frenet 2D [RJM13, LFP<sup>+</sup>15, FMG<sup>+</sup>16]. Le repère de Frenet est un repère mobile associé à une courbe constitué des vecteurs tangent  $\mathbf{T}$  et normal  $\mathbf{N}$  à la courbe. On suppose que ces vecteurs sont paramétrés normalement, les formules de dérivations de  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{N}$  font alors intervenir la fonction courbure  $\kappa$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

On peut alors résoudre le système 11.1 de façon exacte. On obtient alors l'expression de  $\mathbf{T}$  suivante :

$$\mathbf{T}(s) = \int_0^s \kappa(u)du + \mathbf{T}(s)_0$$

où  $\mathbf{T}(s)_0$  est la tangente initiale.

L'intégration du vecteur tangent permet alors d'obtenir la déformée de la poutre.

### 11.1.1.3 Bilan méthodes 2D

On constate que la méthode 2D basé sur le repère de Frenet utilise moins d'hypothèses restrictives que la méthode basée sur la théorie d'Euler-Bernoulli et est donc potentiellement plus précise. Néanmoins, dans le cas de déformations d'aiguilles, les déformations et déplacements étant très faibles, elles donnent des résultats équivalents. De plus, on s'aperçoit que la méthode basée sur la théorie d'Euler-Bernoulli est souvent préférée car elle établit un lien avec la physique et permet d'autres traitements de la poutre, tel que l'application de

cas de charges etc... En terme physique, le choix de considérer une déformée contenue dans un plan est lié à l'hypothèse de négliger la torsion mécanique. Les méthodes de reconstruction 2D ne tiennent donc compte uniquement que du phénomène de flexion. Cette hypothèse peut-être prise en défaut dans certains cas, de nombreux articles traitant du phénomène de torsion des aiguilles lors d'insertions (Voir la partie Hypothèses de déformations).

### 11.1.2 Méthodes 3D

#### 11.1.2.1 Repère de Frenet 3D

Certaines méthodes de reconstruction 3D se basent sur le repère de Frenet 3D [MR12, LPWW13, MJK<sup>+</sup>15, MJK<sup>+</sup>14, WZC<sup>+</sup>16, YQS<sup>+</sup>07]. Ce repère mobile est composé des vecteurs  $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$  dont les formules de dérivation font intervenir la courbure  $\kappa$  et la torsion mathématique  $\tau$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

La courbure est obtenue directement à partir des données des jauges, la torsion quant à elle est obtenue par dérivation de la fonction angle d'orientation :

$$\tau = \theta'$$

On peut alors résoudre le système 11.2 pour obtenir les vecteurs  $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$  et obtenir la déformée par intégration du vecteur tangent.

Certains articles ne proposent pas ou ne décrivent pas la méthode de résolution employée pour résoudre le système 11.2 [MR12, LPWW13, MJK<sup>+</sup>15, MJK<sup>+</sup>14]. Le système 11.2 est un système matriciel de la forme :

$$X(s)' = A(s)X(s)$$

La résolution exacte d'un tel système est complexe et sa solution exacte fait intervenir une série infinie de termes appelée *Série de Magnus*. Certains articles proposent alors une méthode de résolution approchée par pas du système 11.2 [WZC<sup>+</sup>16, YQS<sup>+</sup>07]. Le principe de cette méthode consiste, pour chaque pas, à effectuer une double rotation du repère de Frenet. On constate néanmoins que les rotations effectuées à chaque pas diffèrent entre les articles de Wang [WZC<sup>+</sup>16] et de Yi [YQS<sup>+</sup>07].

#### 11.1.2.2 Repère matériel

Certaines méthodes de reconstruction 3D permettent d'obtenir la déformée de la poutre en reconstruisant directement son repère matériel, sans passer par le repère de Frenet, purement géométrique et lié uniquement à la fibre neutre et qui n'a aucune signification

physique. Ces méthodes de reconstruction cherchent alors à reconstruire un repère mobile matériellement lié à la poutre. Le but est, le repère matériel une fois obtenu, d'obtenir la déformée par intégration du vecteur tangent. Le repère matériel est reconstruit de façon itérative. Ainsi le repère matériel à l'étape  $n + 1$  noté  $\mathbf{M}_{n+1}$  est reconstruit par rotation de  $\mathbf{M}_n$  le repère matériel à l'étape  $n$ . Le nombre de rotations diffère selon les méthodes : il peut être de un [RKvdDM14], deux [TSD13] ou trois [RM16].

### 11.1.2.3 Bilan méthodes 3D

Les méthodes 3D font l'hypothèse que la torsion mécanique de l'aiguille durant la déformation est négligeable par rapport à la flexion et donc qu'on peut la supposer nulle. Malgré les conséquences importantes de cette hypothèse, cette dernière est souvent faite implicitement, car nécessaire pour obtenir la valeur d'angle d'orientation à partir des capteurs. La principale différence entre les méthodes décrites précédemment concerne le type de repère sur lequel on travaille, à savoir mathématique dans le cas du repère de Frenet, ou physique dans le cas du repère matériel.

- Dans les méthodes utilisant le repère de Frenet, la torsion mathématique est obtenue par dérivation de l'angle d'orientation. Sachant que l'angle d'orientation est reconstruit par interpolation, sa dérivation peut entraîner des erreurs d'approximation importante.
- Dans le cas du repère matériel, on peut regretter le manque d'approche mathématique qui fait que différentes méthodes coexistent et que les hypothèses physiques faites le soient implicitement.

### 11.1.3 Bilan méthodes de reconstruction

Ainsi aucune méthode, que ce soit 2D ou 3D, ne semble faire consensus. Nous allons donc dans la suite de chapitre développer notre propre méthode de reconstruction en 3D, le but étant :

- de définir clairement les hypothèses physiques utilisées,
- de pouvoir réaliser l'interprétation physique de notre méthode : on conduira pour cela l'analyse de la déformation avec la théorie des poutres,
- de définir la précision de résolution de notre méthode.

## 11.2 Hypothèses et système physique

### 11.2.1 Informations apportées par les triplets de capteurs

On suppose que la déformée de l'aiguille est paramétrée par l'abscisse curviligne,  $s \in [0, L]$  où  $L$  est la longueur de l'aiguille. Soit  $n$  le nombre de triplets de capteurs sur l'aiguille. Soit  $(s_i)_{i=1, \dots, n}$  l'ensemble des positions des triplets de capteurs de l'aiguille tel que le  $i^{\text{me}}$  triplet soit situé en  $s_i$ . Ainsi, les ensembles des courbures locales  $(\kappa_i)_{i=1, \dots, n}$  et des angles d'orientations locaux  $(\theta_i)_{i=1, \dots, n}$  obtenus par les capteurs de déformations constituent des

discrétisations des fonctions globales de courbure  $\kappa$  et d'angle d'orientation  $\theta$  définies sur  $[0, L]$ . Les fonctions globales de courbure et d'angle d'orientation sont ainsi estimées par interpolation à partir des données  $(\kappa_i)_{i=1, \dots, n}$  et  $(\theta_i)_{i=1, \dots, n}$ . On note  $\kappa_{est}$  et  $\theta_{est}$  les fonctions résultant de l'interpolation et définies comme suit :

$$\begin{aligned} \kappa_{est} : [0, L] &\rightarrow \mathbb{R}^+ & \theta_{est} : [0, L] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \kappa_{est}(s_i) &= \kappa_i & \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \theta_{est}(s_i) &= \theta_i \end{aligned}$$

### 11.2.2 Modélisation de la poutre non déformée

On considère l'aiguille comme une poutre cylindrique à l'état initial de section constante de rayon  $r_0$  et de longueur  $L$ . On note  $\mathbf{r}$  la fonction paramétrée normalement sur  $[0, L]$  de telle sorte que, pour chaque  $s \in [0, L]$ ,  $\mathbf{r}(s)$  est la position de la fibre neutre à la longueur  $s$ . On définit le repère mobile  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  comme une base orthonormée directe avec  $\mathbf{t}$  tangent à la fibre neutre et les deux vecteurs  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  matériellement liés à la poutre, tel que  $\{\mathbf{r}(s) + r_0 \mathbf{n}_i(s), s \in [0, L]\}_{i=1,2}$  est une génératrice de la poutre (figure 11.1). Ainsi  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  est un repère **matériel** de la poutre à l'état non déformé. Ainsi dans le cadre d'une poutre droite à l'état initial on a :

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_3$$

La position du  $i^{me}$  triplet de capteur est  $s_i \in [0, L]$  et les capteurs sont placés sur la section de telle sorte que le vecteur  $\mathbf{e}_2(s_i)$  soit dirigé vers le capteur  $C_{1,i}$  comme illustré sur la figure 11.1.

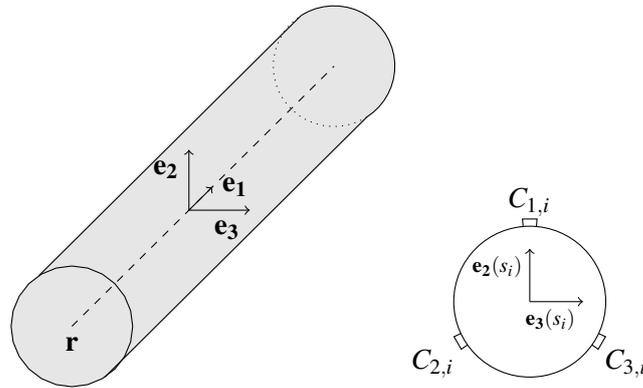
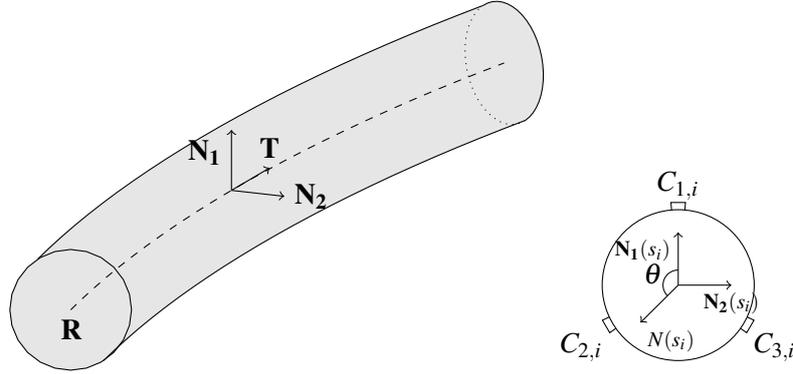


FIGURE 11.1. – Poutre et son repère mobile  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  avant déformation.

### 11.2.3 Déformation de poutre et système différentiel associé

Quand la poutre se déforme, la notation de la fibre neutre  $\mathbf{r}(s)$  change en  $\mathbf{R}(s)$ . De la même façon le repère mobile  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  change en  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  comme illustré dans la figure 11.2.

FIGURE 11.2. – Poutre et son repère mobile  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  après déformation.

Soit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  la base canonique orthonormé de  $\mathbb{R}^3$ . Le repère  $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}_1(s), \mathbf{N}_2(s))$  est un repère orthonormal orienté pour tout  $s \in [0, L]$ . Il existe donc une transformation orthogonale  $\mathbf{Q}(s) \in SO(3)$  défini sur  $[0, L]$  tel que :

$$\forall s \in [0, L], \quad \mathbf{Q}(s) \in SO(3) \quad (11.3)$$

$$\forall s \in [0, L], \quad \mathbf{T}(s) = \mathbf{Q}(s)\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{N}_1(s) = \mathbf{Q}(s)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{N}_2(s) = \mathbf{Q}(s)\mathbf{e}_3 \quad (11.4)$$

avec  $SO(3)$  le groupe des rotations en dimension 3 :

$$SO(3) = \{ \mathbf{M} \in \mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R}) / \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M}^T = \mathbf{I}_3, \quad \det(\mathbf{M}) = 1 \} \quad (11.5)$$

Par différentiation, on obtient les relations suivantes (voir 19.2) :

$$\forall s \in [0, L], \quad \mathbf{T}'(s) = \Omega(s)\mathbf{T}(s) \quad (11.6)$$

$$\mathbf{N}_1'(s) = \Omega(s)\mathbf{N}_1(s) \quad (11.7)$$

$$\mathbf{N}_2'(s) = \Omega(s)\mathbf{N}_2(s) \quad (11.8)$$

avec  $\forall s \in [0, L], \quad \Omega(s) = \mathbf{Q}(s)\mathbf{Q}^T(s)$

On a donc le système différentiel sur  $[0, L]$  suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}' = \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

Le tenseur  $\Omega$  est anti-symétrique (voir 19.3). Il existe donc  $\omega_t, \omega_1$  et  $\omega_2$ , composantes de  $\Omega$  dans la base  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$ , tels que :

$$\omega_t : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega_2 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \quad (11.10)$$

$$\forall s \in [0, L], \quad \Omega(s) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1(s) & \omega_2(s) \\ -\omega_1(s) & 0 & \omega_t(s) \\ -\omega_2(s) & -\omega_t(s) & 0 \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

Ce qui donne le système :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_t \\ -\omega_2 & -\omega_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

D'après la théorie des poutres 3D de Reissner, dans le cas d'une poutre droite à l'état non-déformé, on a une relation entre les composantes de  $\Omega$  et le moment de déformation linéique interne virtuelle  $\varkappa$  :

$$\omega_t = \varkappa_t \quad (11.13)$$

$$\omega_1 = \varkappa_1 \quad (11.14)$$

$$\omega_2 = \varkappa_2 \quad (11.15)$$

On a donc :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ -\varkappa_1 & 0 & \varkappa_t \\ -\varkappa_2 & -\varkappa_t & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne le système différentiel suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ -\varkappa_1 & 0 & \varkappa_t \\ -\varkappa_2 & -\varkappa_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

La résolution du système 11.16 permettra de reconstruire la déformée de la poutre. La résolution de ce système est conditionnée à la connaissance de  $\varkappa_t$ ,  $\varkappa_1$  et  $\varkappa_2$ . On va obtenir ces expressions en exprimant le repère mobile  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  à partir du repère de Frenet  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ .

On fait l'hypothèse que la fonction  $\mathbf{R}''$  ne s'annule pas sur  $[0, L]$ . Les résultats qui suivent s'étendent au cas où cette hypothèse n'est pas satisfaite. Néanmoins on utilise cette hypothèse dans le cadre de l'étude car elle est permet de s'assurer de l'existence du repère de Frenet. Dans le cas où elle n'est pas satisfaite on peut prolonger le repère de Frenet sur les parties où  $\mathbf{R}''$  s'annule. On a donc le repère  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$  défini sur  $[0, L]$ . Les fonctions géométriques courbure et torsion  $\kappa$  et  $\tau$  sont également définis sur  $[0, L]$  et sont présentes dans le système différentiel régissant l'évolution du repère de Frenet :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (11.17)$$

Le repère mobile  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  et le repère de Frenet  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$  ont en commun le vecteur  $\mathbf{T}$ . On déduit de ceci qu'on peut passer de l'un à l'autre par rotation autour de l'axe  $\mathbf{T}$ . Ainsi

la rotation qui permet de passer de l'un à l'autre est la rotation d'axe  $\mathbf{T}$  et dont l'angle de rotation est l'angle par lequel la rotation transforme le vecteur  $\mathbf{N}$  en  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{B}$  en  $\mathbf{N}_2$ . Comme  $\mathbf{N}$  est inclus dans le plan osculateur et  $\mathbf{N}_1$  est dirigé vers le capteur 1 (voir figure 11.2), l'angle de rotation entre les deux repères n'est autre que l'angle d'orientation  $\theta$ . On a donc la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} = Rot_T(-\theta) \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (11.18)$$

On va différencier cette relation :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}' &= \left( Rot_T(-\theta) \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \right)' \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \right)' \\ &= \theta' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}' \\ &= \left( \theta' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}' \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa \cos(\theta) & -(\theta' + \tau) \sin(\theta) & (\theta' + \tau) \cos(\theta) \\ \kappa \sin(\theta) & -(\theta' + \tau) \cos(\theta) & (\theta' + \tau) \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}' \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \kappa \cos(\theta) & -\kappa \sin(\theta) \\ -\kappa \cos(\theta) & 0 & (\theta' + \tau) \\ \kappa \sin(\theta) & -(\theta' + \tau) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}' \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \cos(\theta) & -\kappa \sin(\theta) \\ -\kappa \cos(\theta) & 0 & (\theta' + \tau) \\ \kappa \sin(\theta) & -(\theta' + \tau) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \quad (11.19)$$

Par identification des paramètres des systèmes 11.16 et 11.19 on a alors :

$$\varkappa_t = \theta' + \tau \quad (11.20)$$

$$\varkappa_1 = \kappa \cos \theta \quad (11.21)$$

$$\varkappa_2 = -\kappa \sin \theta \quad (11.22)$$

La courbure  $\kappa$  et l'angle d'orientation  $\theta$  sont connus par leur approximation  $\kappa_{est}$  et  $\theta_{est}$ , donc par les équations 11.21 et 11.22  $\varkappa_1$  et  $\varkappa_2$  sont des fonctions connues de  $s$ . L'équation 11.20 fait apparaître le lien entre la torsion mécanique  $\varkappa_t$  et la torsion mathématique  $\tau$ . Ces deux fonctions restent inconnues.

On a ainsi l'expression de  $\Omega$  suivante :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \cos(\theta) & -\kappa \sin(\theta) \\ -\kappa \cos(\theta) & 0 & \varkappa_t \\ \kappa \sin(\theta) & -\varkappa_t & 0 \end{bmatrix} \quad (11.23)$$

On ne peut pas déterminer complètement le tenseur  $\Omega$  car les composantes  $\Omega_{2,3}$  et  $\Omega_{3,2}$  de  $\Omega$  sont inconnues.

On a les relations suivantes :

$$\Omega_{2,3} = \mathbf{N}_1' \cdot \mathbf{N}_2$$

$$\Omega_{3,2} = \mathbf{N}_2' \cdot \mathbf{N}_1$$

Il y a donc une incertitude sur les composantes des dérivées d'un vecteurs orthogonal au vecteur tangent sur l'autre vecteur orthogonal, c'est à dire la façon dont tourne le repère  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  autour de son axe tangent. On va donc avoir besoin d'une hypothèse simplificatrice.

Lors de l'insertion l'aiguille se déforme à cause de l'interaction entre l'aiguille et les tissus. Il en découle certains types de déformation physique parmi lesquelles la flexion et la torsion, dont les grandeurs de déformations régissent le système différentiel 11.16. On a vu dans le chapitre préliminaires concernant les types de déformation que l'ordre des grandeurs de déformations liés à la flexion était bien supérieur à celui correspondant à la torsion. On peut donc supposer que le phénomène de torsion est négligeable par rapport au phénomène de flexion. On va donc faire l'hypothèse simplificatrice suivante :

**Hypothèse 1.** *La torsion mécanique de l'aiguille est nulle.*

Par conséquent la grandeur de déformation lié au phénomène de torsion est nulle :

$$\varkappa_t = 0$$

On obtient donc l'expression simplifiée du tenseur  $\Omega$  suivante :

$$\Omega = \kappa \begin{bmatrix} 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\cos(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

Finalement on obtient l'estimation de  $\Omega$  notée  $\Omega_{est}$  avec les estimations de fonctions  $\kappa_{est}$  et  $\theta_{est}$  :

$$\Omega_{est} = \kappa_{est} \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta_{est} & -\sin \theta_{est} \\ -\cos \theta_{est} & 0 & 0 \\ \sin \theta_{est} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.25)$$

Ce qui donne le système différentiel suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}' = \kappa_{est} \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta_{est} & -\sin \theta_{est} \\ -\cos \theta_{est} & 0 & 0 \\ \sin \theta_{est} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \quad (11.26)$$

### 11.2.4 Synthèse

- Par une approche combinant référentiel de Frenet et référentiel mobile de paramétrisation de l'aiguille et sous l'hypothèse simplificatrice d'une torsion mécanique nulle de l'aiguille, nous avons défini l'équation différentielle qui régit le déplacement de ce repère mobile le long de la déformée de l'aiguille.
- Au cours de cette démonstration, nous avons également explicité le lien entre les torsions mathématique et mécanique de la poutre.

## 11.3 Résolution du système physique

Cette partie présente la reconstruction de la courbe 3D de la fibre neutre à partir des estimations de courbure et d'angle  $\kappa_{est}$  et  $\theta_{est}$ .

Premièrement on définit les coordonnées de la base  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  dans  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  (notée avec la convention d'Einstein) :

$$\mathbf{T} = T_i \mathbf{e}_i \quad (11.27)$$

$$\mathbf{N}_1 = N_{1i} \mathbf{e}_i \quad (11.28)$$

$$\mathbf{N}_2 = N_{2i} \mathbf{e}_i \quad (11.29)$$

De cette manière, le système 11.26 peut-être réécrit sous la forme d'un système différentiel matricielle :

$$\mathbf{Y}'(s) = \Omega(s) \mathbf{Y}(s) \quad (11.30)$$

$$\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0$$

avec  $\mathbf{Y}$  la matrice contenant les coordonnées de  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  :

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) & T_3(s) \\ N_{11}(s) & N_{12}(s) & N_{13}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) & N_{23}(s) \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

La condition initiale  $\mathbf{Y}_0$  contient les coordonnées de  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  pour un point de référence de la poutre, ici l'une de ces extrémités.

La résolution du système se fera à l'aide de la théorie des groupes et des algèbres de Lie. On utilisera pour cela les groupes de Lie matriciels, qui sont des sous-groupes de  $GL$ . Les groupes  $O(3)$  et  $SO(3)$  sont des exemples de groupes de Lie matriciels.

Soit  $X$  un élément du groupe de Lie  $G$ . On définit l'espace tangent  $T_e G$  comme l'espace vectoriel dont les éléments sont les vecteurs tangent à  $e$  :

$$T_e G = \{(dX)_e, X \in G\}$$

Soit un groupe de Lie donné, son algèbre de Lie est l'espace tangent à l'identité, ainsi l'algèbre de Lie de  $SO(3)$  est  $T_I SO(3)$ , noté  $\mathfrak{so}(3)$ . On peut montrer que  $\mathfrak{so}(3)$  est le groupe de des matrices anti-symétriques  $\mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R})$  [Hal15] :

$$\mathfrak{so}(3) = \{\mathbf{M} \in \mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R}), \mathbf{M}^T = -\mathbf{M}\}$$

Le tenseur  $\Omega$  étant anti-symétrique,  $\Omega(s) \in \mathfrak{so}(3)$  pour tout  $s \in [0, L]$ .

**Propriété.** Soit un groupe de Lie matricielle  $G$  et son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  alors l'espace tangent de  $G$  à  $Y \in G$  est l'ensemble :

$$T_Y G = \{AY, A \in \mathfrak{g}\}$$

Soit  $Y$  un élément du groupe de Lie matricielle  $SO(3)$ , comme  $\Omega$  est un élément de son algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  on a alors  $\Omega Y \in T_Y G$ .

**Définition.** Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété. Un champ vectoriel sur  $M$  est une application  $C^1$   $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  tel que  $f(y) \in T_y M$  pour tout  $y \in M$ . Alors  $y' = f(y)$  est une équation différentielle sur la sous-variété  $M$ .

Ainsi eq.11.30 est une équation différentielle sur le groupe de Lie  $SO(3)$ .

**Théorème.** Soit une équation différentielle  $y' = f(y)$  sur la sous-variété  $M \subset \mathbb{R}^n$  avec un champ de vecteur  $C^1$   $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ainsi pour tout  $y_0 \in M$  il existe un interval ouvert maximal  $I = I(y_0)$  et une fonction  $C^2$   $y : I \rightarrow M$  tel que  $y(t)$  est l'unique solution de  $y' = f(y)$  sur  $I$  avec la condition initiale  $y(0) = y_0$ .

Ainsi l'existence et l'unicité de  $\mathbf{Y}$ , solution de eq.11.30 sur un interval  $I$ , est assurée.

**Théorème.** Soit  $G$  un groupe de Lie matricielle et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Si  $A(Y) \in \mathfrak{g}$  pour tout  $Y \in G$  et si  $Y_0 \in G$ , alors la solution de  $Y' = A(Y)$  satisfait  $Y(t) \in G$  pour tout  $t$ .

Ainsi  $\mathbf{Y}(s) \in SO(3)$  pour tout  $s \in I$ .

La résolution d'une équation différentielle sur une variété peut être effectuée de façon classique, sans considérer ses propriétés algébriques, en utilisant une méthode de résolution

des équations différentielles standard. Néanmoins, la solution approchée résultante n'appartiendra nécessairement pas à la variété de cette équation. Cela peut perturber l'interprétation physique de la solution et son traitement ultérieur.

Concernant l'équation (11.30), les conséquences seraient une perte d'orthogonalité de  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  entraînant une reconstruction incorrecte de l'aiguille.

Les principales méthodes de résolution qui conservent les propriétés d'appartenance de la solution à une variété peuvent être classées dans deux catégories :

- Les méthodes qui utilisent la projection pour s'assurer de l'appartenance de la solution à la variété. Chaque étape de résolution de ces méthodes est composée d'une intégration sur un certain pas et dont la solution approchée est ensuite projetée sur la variété.
- Les méthodes dont les étapes de résolution donne directement une solution appartenant à la variété.

On utilise dans la suite de cette partie une méthode appelée *Approche à Coordonnées Locales* [HWL06], qui appartient à la deuxième catégorie de méthodes, et qu'on applique sur le groupe de Lie  $SO(3)$ . On note  $[s_n, s_{n+1}]$  l'intervalle de résolution avec  $s_{n+1} = s_n + h$ ,  $h$  étant le pas de la méthode. Les approximations de  $\mathbf{Y}(s_n)$  et  $\mathbf{Y}(s_{n+1})$  sont notées  $\mathbf{Y}_n$  et  $\mathbf{Y}_{n+1}$ . Cette méthode se base sur la solution analytique de l'équation 11.30 développé par Magnus [Mag54] :

$$\mathbf{Y}(s) = \exp(\Theta(s))\mathbf{Y}_0 \quad (11.32)$$

la fonction  $\Theta$  s'appelle *série de Magnus* et est définie par :

$$\begin{aligned} \Theta(s) = & \int_0^s \Omega(s_1) ds_1 \\ & + \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^{s_1} [\Omega(s_1), \Omega(s_2)] ds_1 ds_2 \\ & + \frac{1}{6} \int_0^s \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} [\Omega(s_1), [\Omega(s_2), \Omega(s_3)]] + \\ & [\Omega(s_3), [\Omega(s_2), \Omega(s_1)]] ds_1 ds_2 ds_3 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (11.33)$$

L'itération qui permet d'obtenir  $\mathbf{Y}_{n+1}$  à partir de  $\mathbf{Y}_n$  se fait par la formule suivante :

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \exp(\Theta_{t_n, h})\mathbf{Y}_n \quad (11.34)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\Theta_{t_n, h} &= \int_{t_n}^{t_n+h} \Omega(s_1) ds_1 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_n+h} \int_{t_n}^{s_1} [\Omega(s_1), \Omega(s_2)] ds_1 ds_2 \\
&+ \frac{1}{6} \int_{t_n}^{t_n+h} \int_{t_n}^{s_1} \int_{t_n}^{s_2} [\Omega(s_1), [\Omega(s_2), \Omega(s_3)]] + \\
&[\Omega(s_3), [\Omega(s_2), \Omega(s_1)]] ds_1 ds_2 ds_3 \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{11.35}$$

La troncature et l'approximation de la série par la méthode de quadrature de Gauss-Legendre donne l'approximation suivante d'ordre 4 :

$$\Theta_{t_n, h} = \frac{h}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) - \frac{\sqrt{3}h^2}{12} [\Omega_1, \Omega_2] \tag{11.36}$$

avec :

$$\Omega_1 = \Omega\left(t_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right), \quad \Omega_2 = \Omega\left(t_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \tag{11.37}$$

Comme  $\Omega(s) \in \mathfrak{so}(3)$  pour tout  $s \in [0, L]$  alors  $\Theta_{t_n, h}$  appartient aussi à  $\mathfrak{so}(3)$ , ainsi par composition avec l'exponentiel et par produit la solution,  $\mathbf{Y}_{n+1}$  appartient à  $SO(3)$  comme souhaité. Ainsi la résolution de 11.30 sur la discrétisation  $(s_i)_{i=1, \dots, n}$  donne  $(\mathbf{Y}_i)_{i=1, \dots, n}$  qui contient les coordonnées de  $\mathbf{T}_i$  l'approximation de  $\mathbf{T}(s_i)$ . On a donc l'ensemble des approximations de la tangente  $(\mathbf{T}_i)_{i=1, \dots, n}$ .

## 11.4 Reconstruction de la déformée

On rappelle la formule exprimant la dérivée de la déformée de la poutre  $\mathbf{R}'$  à partir du repère mobile  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  et de la déformation de la force linéique  $\gamma$  :

$$\mathbf{R}' = (1 + \gamma_t)\mathbf{T} + \gamma_1\mathbf{N}_1 + \gamma_2\mathbf{N}_2 \tag{11.38}$$

On suppose que pendant l'insertion de l'aiguille, les phénomènes de cisaillement et de traction-compression sont assez faibles pour être négligés.

**Hypothèse 2.** *Le cisaillement et la traction-compression de l'aiguille sont nuls.*

On a ainsi :

$$\gamma_t = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

Donc l'équation 11.38 se simplifie en :

$$\mathbf{R}' = \mathbf{T} \quad (11.39)$$

On définit  $\mathbf{R}_i$  comme l'approximation de  $\mathbf{R}(s_i)$  par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \mathbf{R}(0) \\ \mathbf{R}_{i+1} &= \mathbf{R}_i + h\mathbf{T}_i \end{aligned} \quad (11.40)$$

Finalement l'ensemble  $(\mathbf{R}_i)_{i=1,\dots,n}$  est la reconstruction tridimensionnelle de la forme de l'aiguille déformée.



# CHAPITRE 12

## CAPTEURS DE DÉFORMATION AVANCÉS

### 12.1 Introduction

La partie concernant les capteurs présente un état de l'art sur l'utilisation des données des capteurs pour obtenir des informations géométriques locales de l'aiguille : la courbure et l'angle d'orientation liés au phénomène de flexion. En plus de ces deux informations, un paramètre supplémentaire, notée  $\delta_0$ , dit de biais est accessible. Peu d'informations sont présentes dans la littérature concernant ce paramètre et son interprétation. Il est seulement suggéré que cette valeur serait liée aux phénomènes de déformations autre que la flexion.

Cette partie investigate la question suivante : "Que contient la valeur  $\delta_0$  ?"

Cette question est loin d'être désintéressée. En effet, en établissant le lien entre  $\delta_0$  et les différents phénomènes de déformation, on pourrait potentiellement être en mesure d'exploiter sa valeur dans le processus de reconstruction. L'utilisation de cette information supplémentaire pourrait ainsi contribuer à améliorer la précision de façon non négligeable. De plus, le nombre de capteurs sur l'aiguille étant fortement restreint à cause des contraintes techniques, toute information permettant potentiellement d'améliorer le processus de reconstruction est à considérer avec attention.

### 12.2 Déformation d'un capteur

Nous allons donc étudier dans cette partie la déformation physique d'un capteur en la reliant aux phénomènes de déformation de l'aiguille grâce à la théorie des poutres de Reissner introduite précédemment. On introduira soigneusement les différentes hypothèses physiques qui seront utilisées lors de l'étude, le but étant d'obtenir la caractérisation la plus précise possible.

Dans la suite, nous considérons un capteur de longueur infinitésimal  $ds$ . On note  $m$  la position du capteur à l'état initial et  $M$  à l'état déformé. A l'état initial, le capteur est donc

représenté par un segment  $\overrightarrow{m(s_1)m(s_2)}$  (figure 12.1a) et à l'état déformé par un segment  $\overrightarrow{M(s_1)M(s_2)}$  (figure 12.1b).

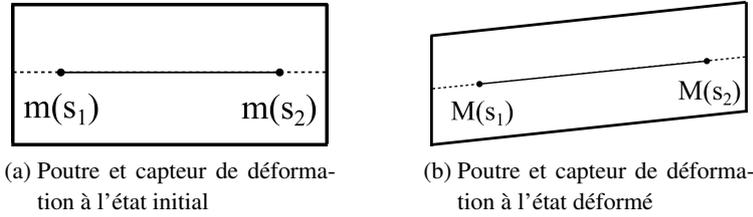


FIGURE 12.1. – Vue 2D de la déformation d'une poutre avec capteurs parallèles.

Les coordonnées de  $\mathbf{m}(s_1)$ ,  $\mathbf{m}(s_2)$ ,  $\mathbf{M}(s_1)$  et  $\mathbf{M}(s_2)$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{m}(s_1) &: \mathbf{r}(s_1) + \overrightarrow{r(s_1)m(s_1)} \\ \mathbf{m}(s_2) &: \mathbf{r}(s_2) + \overrightarrow{r(s_2)m(s_2)} \\ \mathbf{M}(s_1) &: \mathbf{R}(s_1) + \overrightarrow{R(s_1)M(s_1)} \\ \mathbf{M}(s_2) &: \mathbf{R}(s_2) + \overrightarrow{R(s_2)M(s_2)}\end{aligned}$$

On note  $\varepsilon(s_1)$  la déformation du capteur à l'état déformé en  $s_1$ , qui selon la définition est :

$$\varepsilon(s_1) = \frac{\|\overrightarrow{M(s_1)M(s_2)}\| - \|\overrightarrow{m(s_1)m(s_2)}\|}{\|\overrightarrow{m(s_1)m(s_2)}\|} \quad (12.1)$$

Et on peut exprimer les segments des capteurs avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{m(s_1)m(s_2)}\| &= \|\mathbf{r}(s_2) - \mathbf{r}(s_1) + \overrightarrow{r(s_2)m(s_2)} - \overrightarrow{r(s_1)m(s_1)}\| \\ \|\overrightarrow{M(s_1)M(s_2)}\| &= \|\mathbf{R}(s_2) - \mathbf{R}(s_1) + \overrightarrow{R(s_2)M(s_2)} - \overrightarrow{R(s_1)M(s_1)}\|\end{aligned}$$

Dans la suite de ce chapitre on va calculer la déformation  $\varepsilon$  pour différents positionnements des capteurs de déformation d'une section de poutre.

## 12.2.1 Capteur parallèle à la fibre neutre

### 12.2.1.1 Disposition des capteurs

On dispose les capteurs de déformation dans le sens de la poutre, parallèlement à la fibre neutre. Cette disposition est celle qui figure dans la littérature et qui a été traitée dans

la partie précédente relative aux capteurs. On assimile le capteur à un segment de longueur  $ds$  parallèle à la poutre. A l'état initial le capteur est donc représenté par un segment  $\overrightarrow{m(s)m(s+ds)}$  (figure 12.2a et ??) et à l'état déformé par un segment  $\overrightarrow{M(s)M(s+ds)}$  (figure 12.2b).

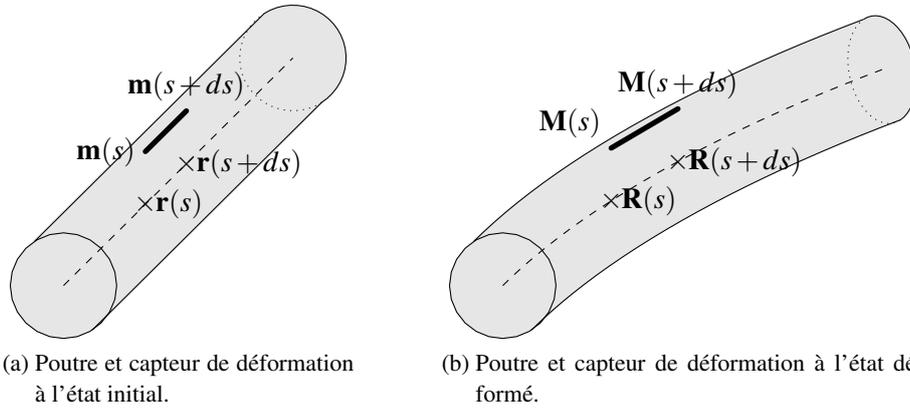


FIGURE 12.2. – Vue 3D de la déformation d'une poutre avec capteurs parallèles.

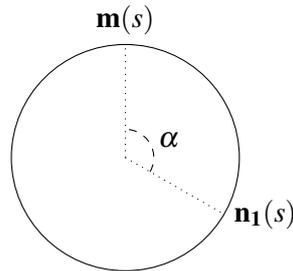


FIGURE 12.3. – Section d'une poutre avec capteur de déformation.

### 12.2.1.2 Système

Nous allons calculer la déformation du capteur situé à la position  $s$  donnée par la formule :

$$\varepsilon(s) = \frac{\left\| \overrightarrow{M(s)M(s+ds)} \right\| - \left\| \overrightarrow{m(s)m(s+ds)} \right\|}{\left\| \overrightarrow{m(s)m(s+ds)} \right\|} \quad (12.2)$$

La longueur du capteur au repos étant  $ds$  on a :

$$\left\| \overrightarrow{m(s)m(s+ds)} \right\| = ds$$

On exprime les positions  $\mathbf{M}(s)$  et  $\mathbf{M}(s+ds)$  liées au capteur à l'état déformé à partir des repères mobiles de la théorie des poutres de Reissner  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  et  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R(s)M(s)} &= r_0 \text{rot}_{\mathbf{T}(s), \alpha}(\mathbf{N}_1(s)) \\ \overrightarrow{R(s+ds)M(s+ds)} &= r_0 \text{rot}_{\mathbf{T}(s+ds), \alpha}(\mathbf{N}_1(s+ds))\end{aligned}$$

Pour pouvoir calculer les expressions du capteurs à l'état déformé, on va utiliser la formule de Rodrigues :

*Formule de rotation de Rodrigues* : Soit  $\mathbf{v}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{k}$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  décrivant un axe de rotation autour duquel  $\mathbf{v}$  subit une rotation d'angle  $\phi$ . Le vecteur résultant de la rotation  $\mathbf{v}_{\text{rot}}$  est alors :

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \mathbf{v} \cos(\phi) + (\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}) \sin(\phi) + \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos(\phi))$$

Par la formule de Rodrigues on obtient alors :

$$\begin{aligned}\text{rot}_{\mathbf{T}(s), \alpha}(\mathbf{N}_1(s)) &= \cos(\alpha)\mathbf{N}_1(s) + \sin(\alpha)\mathbf{N}_2(s) \\ \text{rot}_{\mathbf{T}(s+ds), \alpha}(\mathbf{N}_1(s+ds)) &= \cos(\alpha)\mathbf{N}_1(s+ds) + \sin(\alpha)\mathbf{N}_2(s+ds)\end{aligned}$$

Ainsi la longueur du capteur  $\overrightarrow{M(s)M(s+ds)}$  à l'état déformé est :

$$\begin{aligned}& \left\| \overrightarrow{M(s)M(s+ds)} \right\| \\ &= \left\| \mathbf{R}'(s)ds + r_0 \text{rot}_{\mathbf{T}(s+ds), \alpha}(\mathbf{N}_1(s+ds)) - r_0 \text{rot}_{\mathbf{T}(s), \alpha}(\mathbf{N}_1(s)) \right\| \\ &= \left\| \mathbf{R}'(s)ds + r_0(\cos(\alpha)\mathbf{N}_1(s+ds) + \sin(\alpha)\mathbf{N}_2(s+ds)) - r_0(\cos(\alpha)\mathbf{N}_1(s) + \sin(\alpha)\mathbf{N}_2(s)) \right\| \\ &= \left\| \mathbf{R}'(s) + r_0 \cos(\alpha)\mathbf{N}_1'(s) + r_0 \sin(\alpha)\mathbf{N}_2'(s) \right\| ds\end{aligned}$$

D'après la théorie de Reissner, l'expression de la dérivée de la déformée de la poutre est :

$$\mathbf{R}'(s) = (1 + \gamma(s))\mathbf{T}(s) + \gamma_1(s)\mathbf{N}_1(s) + \gamma_2(s)\mathbf{N}_2(s)$$

On remplace l'expression de la dérivée de la déformée de la poutre dans la longueur du capteur après déformation

$$\begin{aligned}& \left\| \overrightarrow{M(s)M(s+ds)} \right\| \\ &= \left\| (1 + \gamma(s))\mathbf{T}(s) + \gamma_1(s)\mathbf{N}_1(s) + \gamma_2(s)\mathbf{N}_2(s) \right. \\ & \quad \left. + r_0 \cos(\alpha)(-\varkappa_1(s)\mathbf{T}(s) + \varkappa_t(s)\mathbf{N}_2(s)) + r_0 \sin(\alpha)(-\varkappa_2(s)\mathbf{T}(s) - \varkappa_t(s)\mathbf{N}_1(s)) \right\| ds \\ &= \left\| (1 + \gamma(s) - r_0(\cos(\alpha)\varkappa_1(s) + \sin(\alpha)\varkappa_2(s)))\mathbf{T}(s) \right. \\ & \quad \left. + (\gamma_1(s) - r_0 \sin(\alpha)\varkappa_t(s))\mathbf{N}_1(s) + (\gamma_2(s) + r_0 \cos(\alpha)\varkappa_t(s))\mathbf{N}_2(s) \right\| ds\end{aligned}$$

D'après l'équation 12.2, on a alors l'expression de la déformation suivante :

$$\begin{aligned}\varepsilon(s, \alpha) &= \|(1 + \gamma_t(s) - r_0(\cos(\alpha)\varkappa_1(s) + \sin(\alpha)\varkappa_2(s)))\mathbf{T}(s) \\ &\quad + (\gamma_1(s) - r_0 \sin(\alpha)\varkappa_t(s))\mathbf{N}_1(s) + (\gamma_2(s) + r_0 \cos(\alpha)\varkappa_t(s))\mathbf{N}_2(s)\| - 1 \\ &= \sqrt{(1 + \gamma_t(s) - r_0(\cos(\alpha)\varkappa_1(s) + \sin(\alpha)\varkappa_2(s)))^2} \\ &\quad + (\gamma_1(s) - r_0 \sin(\alpha)\varkappa_t(s))^2 + (\gamma_2(s) + r_0 \cos(\alpha)\varkappa_t(s))^2 - 1}\end{aligned}\quad (12.3)$$

L'équation 12.3 présente l'expression de la déformation du capteur en fonction des grandeurs de déformations  $\varkappa$  et  $\gamma$ . On remarque que les grandeurs de déformations sont couplées deux à deux :

- la partie  $1 + \gamma_t(s) - r_0(\cos(\alpha)\varkappa_1(s) + \sin(\alpha)\varkappa_2(s))$  exprime le couplage entre les phénomènes de traction-compression et de flexion
- les parties  $\gamma_1(s) - r_0 \sin(\alpha)\varkappa_t(s)$  et  $\gamma_2(s) + r_0 \cos(\alpha)\varkappa_t(s)$  expriment le couplage des phénomènes de cisaillement et de torsion

On rappelle que les informations renvoyées par un capteur permettent de connaître sa déformation  $\varepsilon$ . Ainsi, trois capteurs d'une même section située à la longueur  $s$  et positionnés aux angles  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  renvoient les informations  $\varepsilon(s, \alpha_1)$ ,  $\varepsilon(s, \alpha_2)$  et  $\varepsilon(s, \alpha_3)$ . Les inconnues sont alors les grandeurs de déformation  $\gamma_t(s)$ ,  $\gamma_1(s)$ ,  $\gamma_2(s)$ ,  $\varkappa_t(s)$ ,  $\varkappa_1(s)$  et  $\varkappa_2(s)$ . Il y a donc 6 inconnues pour 3 données.

On observe que si  $(\gamma_t(s), \gamma_1(s), \gamma_2(s), \varkappa_t(s), \varkappa_1(s), \varkappa_2(s))$  est solution de l'équation 12.3, alors  $(\gamma_t(s), -\gamma_1(s), -\gamma_2(s), -\varkappa_t(s), \varkappa_1(s), \varkappa_2(s))$  l'est aussi : on a une symétrie des solutions. On en conclut qu'on ne peut donc pas déterminer les valeurs de  $\varkappa_t(s)$ ,  $\gamma_1(s)$  et  $\gamma_2(s)$  à partir de l'équation 12.3. L'interprétation physique qui en découle est que les valeurs de torsion et de cisaillement d'une poutre déformée ne peuvent pas s'obtenir à partir de capteurs de déformations parallèles à la fibre neutre (quelque soit leurs nombres..).

Nous allons faire l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.** *Le cisaillement et la traction-compression de l'aiguille sont nuls.*

Sous cet hypothèse on a alors :

$$\gamma_t = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

L'équation 12.3 se simplifie alors :

$$\varepsilon(s, \alpha) = \sqrt{(1 - r_0(\cos(\alpha)\varkappa_1(s) + \sin(\alpha)\varkappa_2(s)))^2 + (r_0\varkappa_t(s))^2} - 1 \quad (12.4)$$

Dans la partie précédente, les grandeurs de déformations  $\varkappa_1$  et  $\varkappa_2$  peuvent s'exprimer en fonction de la courbure  $\kappa$  et de l'angle d'orientation  $\theta$  :

$$\varkappa_1(s) = \kappa(s) \cos(\theta(s)), \quad \varkappa_2(s) = -\kappa(s) \sin(\theta(s))$$

En utilisant ces expressions dans l'équation 12.3 on obtient alors :

$$\varepsilon(s, \alpha) = \sqrt{(1 - r_0 \kappa(s) \cos(\alpha + \theta(s)))^2 + (r_0 \varkappa_t(s))^2} - 1 \quad (12.5)$$

Et finalement on obtient :

$$\sqrt{(1 + \varepsilon(s, \alpha))^2 - (r_0 \varkappa_t(s))^2} = 1 - r_0 \kappa(s) \cos(\alpha + \theta(s))$$

Cette équation relie l'angle de positionnement  $\alpha$  et la déformation  $\varepsilon(s, \alpha)$  de chaque capteur à la courbure  $\kappa(s)$ , l'angle d'orientation  $\theta(s)$  et la torsion de la poutre  $\varkappa_t(s)$ .

On se place dans le cas étudié dans la littérature et présenté dans le chapitre 10, à savoir trois capteurs positionnés sur une même section. On note  $(\alpha_i)_{i=1,2,3}$  leur angle de positionnement avec  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = -\frac{2\pi}{3}$ ,  $\alpha_3 = -\frac{4\pi}{3}$  et  $(\varepsilon_i)_{i=1,2,3}$  leurs déformations. L'équation 12.2.1.2 permet alors de bâtir le système concernant le triplet de capteurs :

$$\begin{cases} \sqrt{(1 + \varepsilon_1)^2 - (r_0 \varkappa_t(s))^2} = 1 - r_0 \kappa(s) \cos(\alpha_1 + \theta(s)) \\ \sqrt{(1 + \varepsilon_2)^2 - (r_0 \varkappa_t(s))^2} = 1 - r_0 \kappa(s) \cos(\alpha_2 + \theta(s)) \\ \sqrt{(1 + \varepsilon_3)^2 - (r_0 \varkappa_t(s))^2} = 1 - r_0 \kappa(s) \cos(\alpha_3 + \theta(s)) \end{cases} \quad (12.6)$$

On est donc en présence d'un système non-linéaire de trois équations à trois inconnues ( $\kappa(s)$ ,  $\theta(s)$  et  $\varkappa_t(s)$ ).

### 12.2.1.3 Résolution

La recherche de solutions du système 12.6 passe par la résolution d'une équation du quatrième degré. Il en résulte des solutions analytiques particulièrement compliquées. Cette complexité s'explique en partie par la présence de racines carrées dans les membres gauches des équations du système. Afin de simplifier ces expressions nous allons effectuer une linéarisation à l'aide de développement limités.

$$\begin{aligned} \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - (r_0 \varkappa_t(s))^2} &= \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 \left(1 - \left(\frac{r_0 \varkappa_t(s)}{1 + \varepsilon}\right)^2\right)} \\ &= (1 + \varepsilon) \sqrt{1 - \left(\frac{r_0 \varkappa_t(s)}{1 + \varepsilon}\right)^2} \\ &= (1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_0 \varkappa_t(s)}{1 + \varepsilon}\right)^2 + o(\varkappa_t(s)^2)\right) \\ &= 1 + \varepsilon - \frac{(r_0 \varkappa_t(s))^2}{2(1 + \varepsilon)} + o(\varkappa_t(s)^2) \\ &= 1 + \varepsilon - \frac{(r_0 \varkappa_t(s))^2}{2} \times (1 + o(1)) + o(\varkappa_t(s)^2) \\ &= 1 + \varepsilon - \frac{(r_0 \varkappa_t(s))^2}{2} + o(\varkappa_t(s)^2) \end{aligned}$$

L'utilisation de cette expression dans le système 12.6 permet d'obtenir un nouveau système simplifié :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -r_0 \kappa(s) \cos(\alpha_1 + \theta(s)) + \frac{(r_0 \varkappa_t(s))^2}{2} + o(\varkappa_t(s)^2) \\ \varepsilon_2 = -r_0 \kappa(s) \cos(\alpha_2 + \theta(s)) + \frac{(r_0 \varkappa_t(s))^2}{2} + o(\varkappa_t(s)^2) \\ \varepsilon_3 = -r_0 \kappa(s) \cos(\alpha_3 + \theta(s)) + \frac{(r_0 \varkappa_t(s))^2}{2} + o(\varkappa_t(s)^2) \end{cases} \quad (12.7)$$

En comparant le système 12.7 avec le système 10.2 du chapitre 10 on peut alors en déduire le terme de biais  $\delta_0$  :

$$\delta_0 = \frac{(r_0 \varkappa_t(s))^2}{2} + o(\varkappa_t(s)^2)$$

C'est à dire :

$$\delta_0 \sim \frac{(r_0 \varkappa_t(s))^2}{2}$$

Ainsi on en conclut sous l'hypothèse de traction-compression et cisaillement nul le terme de biais  $\delta_0$  introduit dans la littérature peut s'exprimer en fonction de la grandeur de déformation relative à la torsion  $\varkappa_t$ .

En utilisant l'expression de  $\delta_0$  calculé dans le chapitre 10, on obtient alors un équivalent de la norme de l'angle unitaire de torsion  $|\varkappa_t|$  :

$$|\varkappa_t(s)| \sim \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{3}}$$

#### 12.2.1.4 Conclusion

Le dispositif expérimental considéré est le même que celui abordé dans la littérature (même nombre de capteurs et même disposition). Ainsi en gardant le même dispositif et en introduisant une hypothèse supplémentaire nous avons réussi à obtenir une information supplémentaire sur la déformation de l'aiguille : la valeur absolue de l'angle unitaire de torsion. Cette valeur reflète l'amplitude de la torsion, c'est à dire s'il y a "beaucoup" de torsion ou pas. Mais ne connaissant pas le signe, il n'est pas possible de savoir dans quel sens elle s'applique, c'est à dire dans quel "sens" se tord l'aiguille.

Cette valeur dépend de la racine des déformations des capteurs, les erreurs de mesures sur les déformations sont donc amplifiées. Il est donc nécessaire de connaître la précision des mesures des capteurs pour pouvoir juger de la précision de l'amplitude de la torsion ainsi mesurée.

#### 12.2.2 Capteur sécant à la fibre neutre

On a montré dans la section précédente que le dispositif permettait d'obtenir la valeur absolue de l'angle unitaire de torsion mais pas son signe (à cause de la symétrie des solutions). Nous allons donc envisager un autre dispositif pour essayer d'obtenir cette fois la valeur signée.

### 12.2.2.1 Disposition des capteurs

On change la disposition des capteurs de manière à ce qu'ils soient toujours placés dans le sens de la poutre mais plus strictement parallèles à la fibre neutre, de façon à faire un angle avec celle-ci (figure 12.4 et 12.5) (de manière à casser la symétrie des solutions présente dans la configuration précédente). On note  $\beta$  l'angle entre le capteur et la fibre neutre. On assimile le capteur a un segment de longueur  $ds$  parallèle à la poutre.

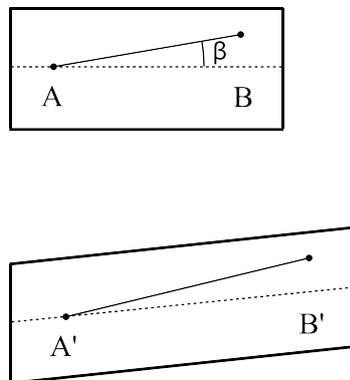


FIGURE 12.4. – Vue 2D de la déformation d'une poutre avec des capteurs sécants. Les capteurs de déformations sont placés de façon à faire un angle  $\beta$  avec la fibre neutre de la poutre.

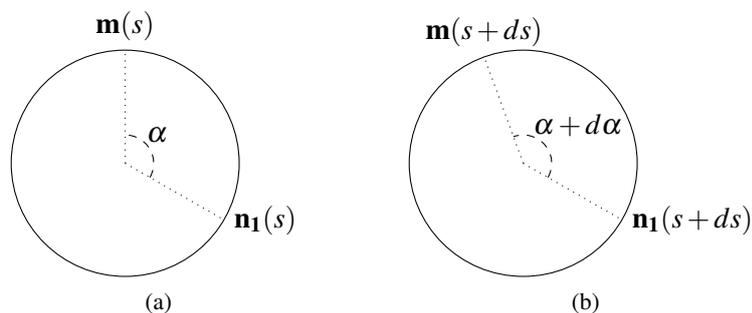


FIGURE 12.5. – Section d'une poutre avec capteur de déformation.

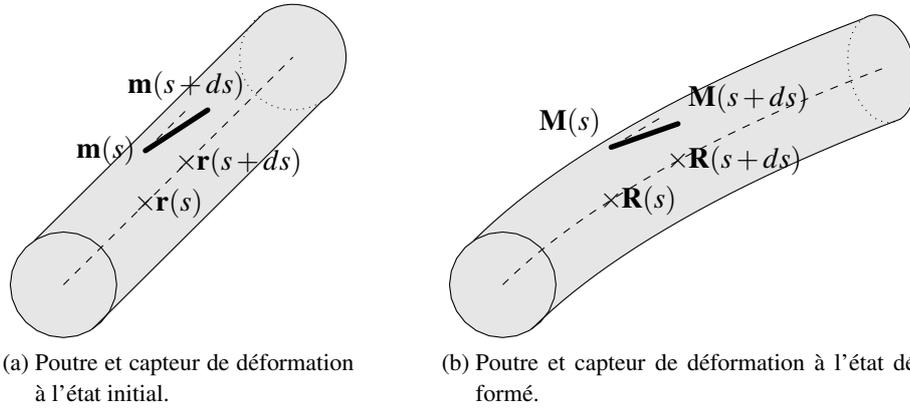


FIGURE 12.6. – Vue 3D de la déformation d'une poutre avec des capteurs sécants.

On calcule le lien entre  $d\alpha$  et  $\beta$  :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{m(s)m(s+ds)} \cdot \mathbf{t}(s) &= \left\| \overrightarrow{m(s)m(s+ds)} \right\| \cos(\beta) \\
 &= \sqrt{ds^2 + (-r_0 \sin(\alpha)d\alpha)^2 + (r_0 \cos(\alpha)d\alpha)^2} \cos(\beta) \\
 &= \sqrt{ds^2 + r_0^2 \sin^2(\alpha)d\alpha^2 + r_0^2 \cos^2(\alpha)d\alpha^2} \cos(\beta) \\
 &= \sqrt{ds^2 + r_0^2 d\alpha^2} \cos(\beta) \\
 &= \sqrt{ds^2 \left( 1 + r_0^2 \frac{d\alpha^2}{ds^2} \right)} \cos(\beta) \\
 &= ds \sqrt{1 + r_0^2 \left( \frac{d\alpha}{ds} \right)^2} \cos(\beta)
 \end{aligned}$$

et la longueur du capteur étant  $ds$  on a :

$$\overrightarrow{m(s)m(s+ds)} \cdot \mathbf{t}(s) = ds$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 + r_0^2 \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2} \cos(\beta) = 1 \\
\Rightarrow & \sqrt{1 + r_0^2 \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2} = \frac{1}{\cos(\beta)} \\
\Rightarrow & 1 + r_0^2 \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(\beta)} \\
\Rightarrow & r_0^2 \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \tan^2(\beta) \\
\Rightarrow & \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \left(\frac{\tan(\beta)}{r_0}\right)^2 \\
\Rightarrow & \frac{d\alpha}{ds} = \pm \frac{\tan(\beta)}{r_0} \\
\Rightarrow & d\alpha = \pm \frac{\tan(\beta)}{r_0} ds
\end{aligned}$$

Ainsi on vient d'exprimer la variation de l'angle de positionnement de l'extrémité du capteur  $d\alpha$  en fonction de l'angle d'incidence entre le capteur et la fibre neutre  $\beta$ . Le signe dépend de la convention choisie pour mesurer l'angle  $\beta$ . On choisira dans la suite de manuscrit :

$$d\alpha = \frac{\sin(\beta)}{r_0} ds$$

### 12.2.2.2 Système

Nous allons calculer la déformation du capteur situé à la position  $s$  donnée par la formule :

$$\varepsilon(s) = \frac{\left\| \overrightarrow{M(s)M(s + \cos(\beta)ds)} \right\| - \left\| \overrightarrow{m(s)m(s + \cos(\beta)ds)} \right\|}{\left\| \overrightarrow{m(s)m(s + \cos(\beta)ds)} \right\|} \quad (12.8)$$

La longueur du capteur au repos étant  $ds$  on a :

$$\left\| \overrightarrow{m(s)m(s + \cos(\beta)ds)} \right\| = ds$$

On exprime les positions  $\mathbf{M}(s)$  et  $\mathbf{M}(s + \cos(\beta))$  lié au capteur à l'état déformé à partir des repères mobiles de la théorie des poutres de Reissner  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  et  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R(s)M(s)} &= r_0 \text{rot}_{\mathbf{T}(s), \alpha}(\mathbf{N}_1(s)) \\
\overrightarrow{R(s + \cos(\beta)ds)M(s + \cos(\beta)ds)} &= r_0 \text{rot}_{\mathbf{T}(s + \cos(\beta)ds), \alpha + d\alpha}(\mathbf{N}_1(s + \cos(\beta)ds))
\end{aligned}$$

Par la formule de Rodrigues on a :

$$\begin{aligned} rot_{\mathbf{T}(s),\alpha}(\mathbf{N}_1(s)) &= \cos(\alpha)\mathbf{N}_1(s) + \sin(\alpha)\mathbf{N}_2(s) \\ rot_{\mathbf{T}(s+\cos(\beta)ds),\alpha+d\alpha}(\mathbf{N}_1(s+\cos(\beta)ds)) &= \cos(\alpha+d\alpha)\mathbf{N}_1(s+\cos(\beta)ds) + \sin(\alpha+d\alpha)\mathbf{N}_2(s+\cos(\beta)ds) \end{aligned}$$

La longueur du capteur  $\overrightarrow{M(s)M(s+\cos(\beta)ds)}$  à l'état déformé est :

$$\begin{aligned} & \left\| \overrightarrow{M(s)M(s+\cos(\beta)ds)} \right\| \\ &= \left\| \mathbf{R}(s+\cos(\beta)ds) - \mathbf{R}(s) + r_0 rot_{\mathbf{T}(s+\cos(\beta)ds),\alpha+d\alpha}(\mathbf{N}_1(s+\cos(\beta)ds)) - r_0 rot_{\mathbf{T}(s),\alpha}(\mathbf{N}_1(s)) \right\| \\ &= \left\| \mathbf{R}(s+\cos(\beta)ds) - \mathbf{R}(s) + r_0(\cos(\alpha+d\alpha)\mathbf{N}_1(s+\cos(\beta)ds) + \sin(\alpha+d\alpha)\mathbf{N}_2(s+\cos(\beta)ds)) \right. \\ & \quad \left. - r_0(\cos(\alpha)\mathbf{N}_1(s) + \sin(\alpha)\mathbf{N}_2(s)) \right\| \end{aligned}$$

On utilise les formules trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+d\alpha) &= \cos(\alpha)\cos(d\alpha) - \sin(\alpha)\sin(d\alpha) \\ &= \cos(\alpha) - \sin(\alpha)d\alpha \\ &= \cos(\alpha) - \sin(\alpha)\frac{\sin(\beta)}{r_0}ds \\ \sin(\alpha+d\alpha) &= \sin(\alpha)\cos(d\alpha) + \cos(\alpha)\sin(d\alpha) \\ &= \sin(\alpha) + \cos(\alpha)d\alpha \\ &= \sin(\alpha) + \cos(\alpha)\frac{\sin(\beta)}{r_0}ds \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
& \left\| \overrightarrow{M(s)M(s + \cos(\beta)ds)} \right\| \\
&= \left\| \mathbf{R}(s + \cos(\beta)ds) - \mathbf{R}(s) + r_0(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\frac{\sin(\beta)}{r_0})ds\mathbf{N}_1(s + \cos(\beta)ds) \right. \\
&\quad \left. + r_0(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\frac{\sin(\beta)}{r_0})ds\mathbf{N}_2(s + \cos(\beta)ds) \right. \\
&\quad \left. - r_0(\cos(\alpha)\mathbf{N}_1(s) + \sin(\alpha)\mathbf{N}_2(s)) \right\| \\
&= \left\| \mathbf{R}'(s)\cos(\beta)ds + (r_0\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\beta)ds)(\mathbf{N}_1'(s)\cos(\beta)ds + \mathbf{N}_1(s)) \right. \\
&\quad \left. + (r_0\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\beta)ds)(\mathbf{N}_2'(s)\cos(\beta)ds + \mathbf{N}_2(s)) \right. \\
&\quad \left. - r_0\cos(\alpha)\mathbf{N}_1(s) - r_0\sin(\alpha)\mathbf{N}_2(s) \right\| \\
&= \left\| \mathbf{R}'(s)\cos(\beta) + (r_0\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)ds)\mathbf{N}_1'(s)\cos(\beta) + (r_0\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)ds)\mathbf{N}_2'(s)\cos(\beta) \right. \\
&\quad \left. - \sin(\beta)\sin(\alpha)\mathbf{N}_1(s) + \sin(\beta)\cos(\alpha)\mathbf{N}_2(s) \right\| ds \\
&= \left\| (1 + \gamma_i(s))\cos(\beta)\mathbf{T}(s) + \gamma_1(s)\cos(\beta)\mathbf{N}_1(s) + \gamma_2(s)\cos(\beta)\mathbf{N}_2(s) \right. \\
&\quad \left. + (r_0\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)ds)(-\varkappa_1(s)\mathbf{T}(s) + \varkappa_t(s)\mathbf{N}_2(s))\cos(\beta) \right. \\
&\quad \left. + (r_0\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)ds)(-\varkappa_2(s)\mathbf{T}(s) - \varkappa_t(s)\mathbf{N}_1(s))\cos(\beta) \right. \\
&\quad \left. - \sin(\beta)\sin(\alpha)\mathbf{N}_1(s) + \sin(\beta)\cos(\alpha)\mathbf{N}_2(s) \right\| ds \\
&= \left\| (1 + \gamma_i(s) - (r_0\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)ds)\varkappa_1(s) - (r_0\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)ds)\varkappa_2(s))\cos(\beta)\mathbf{T}(s) \right. \\
&\quad \left. + (\cos(\beta)\gamma_1(s) - \cos(\beta)(r_0\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)ds)\varkappa_t(s) - \sin(\beta)\sin(\alpha))\mathbf{N}_1(s) \right. \\
&\quad \left. + (\cos(\beta)\gamma_2(s) + \cos(\beta)(r_0\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)ds)\varkappa_t(s) + \sin(\beta)\cos(\alpha))\mathbf{N}_2(s) \right\| ds
\end{aligned}$$

D'après l'équation 12.8 on a alors l'expression de la déformation suivante :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(s, \alpha) &= \left\| (1 + \gamma_i(s) - (r_0\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)ds)\varkappa_1(s) - (r_0\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)ds)\varkappa_2(s))\cos(\beta)\mathbf{T}(s) \right. \\
&\quad \left. + (\cos(\beta)\gamma_1(s) - \cos(\beta)(r_0\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)ds)\varkappa_t(s) - \sin(\beta)\sin(\alpha))\mathbf{N}_1(s) \right. \\
&\quad \left. + (\cos(\beta)\gamma_2(s) + \cos(\beta)(r_0\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)ds)\varkappa_t(s) + \sin(\beta)\cos(\alpha))\mathbf{N}_2(s) \right\| - 1 \\
&= \sqrt{\frac{(1 + \gamma_i(s) - (r_0\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)ds)\varkappa_1(s) - (r_0\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)ds)\varkappa_2(s))^2 \cos^2(\beta) + (\cos(\beta)\gamma_1(s) - \cos(\beta)(r_0\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)ds)\varkappa_t(s) - \sin(\beta)\sin(\alpha))^2 + (\cos(\beta)\gamma_2(s) + \cos(\beta)(r_0\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)ds)\varkappa_t(s) + \sin(\beta)\cos(\alpha))^2}{(1 + \gamma_i(s) - (r_0\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)ds)\varkappa_1(s) - (r_0\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)ds)\varkappa_2(s))^2 \cos^2(\beta) + (\cos(\beta)\gamma_1(s) - \cos(\beta)(r_0\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)ds)\varkappa_t(s) - \sin(\beta)\sin(\alpha))^2 + (\cos(\beta)\gamma_2(s) + \cos(\beta)(r_0\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha)ds)\varkappa_t(s) + \sin(\beta)\cos(\alpha))^2} - 1} \\
&\hspace{15em} (12.9)
\end{aligned}$$

Comme dans la partie précédente on utilise l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 4.** *Le cisaillement et la traction-compression de l'aiguille sont nuls.*

Ce qui implique donc :

$$\gamma_i = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

L'équation 12.9 se simplifie alors :

$$\begin{aligned}\varepsilon(s, \alpha) &= \sqrt{\frac{(1 - (r_0 \cos(\alpha) - \sin(\beta) \sin(\alpha) ds) \varkappa_1(s) - (r_0 \sin(\alpha) + \sin(\beta) \cos(\alpha) ds) \varkappa_2(s))^2 \cos^2(\beta)}{+(\cos(\beta)(r_0 \sin(\alpha) + \sin(\beta) \cos(\alpha) ds) \varkappa_1(s) + \sin(\beta) \sin(\alpha))^2} \\ &\quad + (\cos(\beta)(r_0 \cos(\alpha) - \sin(\beta) \sin(\alpha) ds) \varkappa_1(s) + \sin(\beta) \cos(\alpha))^2 - 1} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - (r_0 \cos(\alpha) - \sin(\beta) \sin(\alpha) ds) \varkappa_1(s) - (r_0 \sin(\alpha) + \sin(\beta) \cos(\alpha) ds) \varkappa_2(s))^2 \cos^2(\beta)}{+\cos^2(\beta)(r_0^2 + \sin^2(\beta) ds^2) \varkappa_1(s)^2 + 2 \cos(\beta) \sin(\beta) r_0 \varkappa_1(s) + \sin^2(\beta) - 1}}\end{aligned}$$

On exprime les grandeurs de déformations  $\varkappa_1$  et  $\varkappa_2$  en fonction de la courbure  $\kappa$  et de l'angle d'orientation  $\theta$  :

$$\varkappa_1(s) = \kappa(s) \cos(\theta(s)), \quad \varkappa_2(s) = -\kappa(s) \sin(\theta(s))$$

On obtient alors :

$$\varepsilon(s, \alpha) + 1 = \sqrt{\frac{(1 - r_0 \kappa(s) \cos(\alpha + \theta(s)) + \sin(\beta) \kappa(s) ds \sin(\alpha + \theta(s)))^2 \cos^2(\beta)}{+\cos^2(\beta)(r_0^2 + \sin^2(\beta) ds^2) \varkappa_1(s)^2 + 2 \cos(\beta) \sin(\beta) r_0 \varkappa_1(s) + \sin^2(\beta)}}$$

$$\begin{aligned}(\varepsilon(s, \alpha) + 1)^2 &= (1 - r_0 \kappa(s) \cos(\alpha + \theta(s)) + \sin(\beta) \kappa(s) ds \sin(\alpha + \theta(s)))^2 \cos^2(\beta) \\ &\quad + \cos^2(\beta)(r_0^2 + \sin^2(\beta) ds^2) \varkappa_1(s)^2 + 2 \cos(\beta) \sin(\beta) r_0 \varkappa_1(s) + \sin^2(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (\varepsilon(s, \alpha) + 1)^2 - \cos^2(\beta)(r_0^2 + \sin^2(\beta) ds^2) \varkappa_1(s)^2 - 2 \cos(\beta) \sin(\beta) r_0 \varkappa_1(s) - \sin^2(\beta) \\ = (1 - r_0 \kappa(s) \cos(\alpha + \theta(s)) + \sin(\beta) \kappa(s) ds \sin(\alpha + \theta(s)))^2 \cos^2(\beta)\end{aligned}$$

Par condition initiale on a alors :

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sqrt{(\varepsilon(s, \alpha) + 1)^2 - \cos^2(\beta)(r_0^2 + \sin^2(\beta) ds^2) \varkappa_1(s)^2 - 2 \cos(\beta) \sin(\beta) r_0 \varkappa_1(s) - \sin^2(\beta)} \\ = (1 - r_0 \kappa(s) \cos(\alpha + \theta(s)) + \sin(\beta) \kappa(s) ds \sin(\alpha + \theta(s))) \cos(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sqrt{\cos^2(\beta) + \varepsilon(s, \alpha)(2 + \varepsilon(s, \alpha)) - \cos^2(\beta)(r_0^2 + \sin^2(\beta) ds^2) \varkappa_1(s)^2 - 2 \cos(\beta) \sin(\beta) r_0 \varkappa_1(s)} \\ = (1 - r_0 \kappa(s) \cos(\alpha + \theta(s)) + \sin(\beta) \kappa(s) ds \sin(\alpha + \theta(s))) \cos(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{\varepsilon(s, \alpha)(2 + \varepsilon(s, \alpha))}{\cos^2(\beta)} - (r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)\varkappa_t(s)^2 - 2 \tan(\beta)r_0\varkappa_t(s)} \\ &= 1 - r_0\kappa(s) \cos(\alpha + \theta(s)) + \sin(\beta)\kappa(s)ds \sin(\alpha + \theta(s)) \end{aligned}$$

On fait un développement limité :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon(s, \alpha)(2 + \varepsilon(s, \alpha))}{\cos^2(\beta)} - (r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)\varkappa_t(s)^2 - 2 \tan(\beta)r_0\varkappa_t(s) \right) + o(\varepsilon(s, \alpha)^2 + \varkappa_t(s)^2) \\ &= 1 - r_0\kappa(s) \cos(\alpha + \theta(s)) + \sin(\beta)\kappa(s)ds \sin(\alpha + \theta(s)) \end{aligned}$$

ce qui donne à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\varepsilon(s, \alpha)}{\cos^2(\beta)} - \frac{(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)\varkappa_t(s)^2}{2} - \tan(\beta)r_0\varkappa_t(s) + o(\varepsilon(s, \alpha) + \varkappa_t(s)^2) \\ &= -r_0\kappa(s) \cos(\alpha + \theta(s)) + \sin(\beta)\kappa(s)ds \sin(\alpha + \theta(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \varepsilon(s, \alpha)(1 + \tan^2(\beta)) - \frac{(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)\varkappa_t(s)^2}{2} - \tan(\beta)r_0\varkappa_t(s) + o(\varepsilon(s, \alpha) + \varkappa_t(s)^2) \\ &= -r_0\kappa(s) \cos(\alpha + \theta(s)) + \sin(\beta)\kappa(s)ds \sin(\alpha + \theta(s)) \end{aligned}$$

On obtient alors le système suivant dans le cas de trois jauges placés de manière sécantes à la fibre neutre :

$$\begin{cases} \varepsilon_1(1 + \tan^2(\beta)) - \frac{(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)\varkappa_t(s)^2}{2} - (r_0 \tan(\beta))\varkappa_t(s) = -r_0\kappa \cos(\alpha_1 + \theta) + \sin(\beta)\kappa ds \sin(\alpha_1 + \theta) \\ \varepsilon_2(1 + \tan^2(\beta)) - \frac{(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)\varkappa_t(s)^2}{2} - (r_0 \tan(\beta))\varkappa_t(s) = -r_0\kappa \cos(\alpha_2 + \theta) + \sin(\beta)\kappa ds \sin(\alpha_2 + \theta) \\ \varepsilon_3(1 + \tan^2(\beta)) - \frac{(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)\varkappa_t(s)^2}{2} - (r_0 \tan(\beta))\varkappa_t(s) = -r_0\kappa \cos(\alpha_3 + \theta) + \sin(\beta)\kappa ds \sin(\alpha_3 + \theta) \end{cases} \quad (12.10)$$

On remarque que quand  $\beta = 0$ , c'est à dire quand les jauges sont positionnées de façon parallèles à la fibre neutre, le système des jauges sécantes 12.10 correspond bien au système des jauges parallèles 12.7.

On a toujours les trois capteurs placés à 120 degrés avec les angles suivants :

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{2\pi}{3}, \quad \alpha_3 = -\frac{4\pi}{3}$$

Par sommation on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left( \varepsilon_i (1 + \tan^2(\beta)) - \frac{(r_0^2 + \sin(\beta)^2 ds^2) \varkappa_t(s)^2}{2} - (r_0 \tan(\beta)) \varkappa_t(s) \right) &= 0 \\ \Rightarrow 3(r_0^2 + \sin(\beta)^2 ds^2) \varkappa_t(s)^2 + 6(r_0 \tan(\beta)) \varkappa_t(s) - 2(1 + \tan^2(\beta)) \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i &= 0 \quad (12.11) \end{aligned}$$

L'équation 12.11 est une équation du second degré en  $\varkappa_t$  dont le déterminant est :

$$\Delta = 36r_0^2 \tan^2(\beta) + 24(r_0^2 + \sin^2(\beta) ds^2)(1 + \tan^2(\beta)) \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i$$

L'ensemble des solutions de l'équation 12.11 est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-6r_0 \tan(\beta) - \sqrt{\Delta}}{6(r_0^2 + \sin^2(\beta) ds^2)}, \frac{-6r_0 \tan(\beta) + \sqrt{\Delta}}{6(r_0^2 + \sin^2(\beta) ds^2)} \right\}$$

Dans le cas où l'aiguille est au repos, on a  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  et on doit avoir  $\varkappa_t = 0$ . La seule solution possible est alors :

$$\varkappa_t(s) = \frac{-6r_0 \tan(\beta) + \sqrt{36r_0^2 \tan^2(\beta) + 24(r_0^2 + \sin^2(\beta) ds^2)(1 + \tan^2(\beta)) \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i}}{6(r_0^2 + \sin^2(\beta) ds^2)}$$

Dans le cas où  $\beta = 0$ , on retrouve le résultat de la partie précédente avec les jauges parallèles. On fait l'hypothèse dans la suite du calcul que  $\beta \neq 0$ .

Nous allons simplifier l'expression de l'angle unitaire de torsion  $\varkappa_t$  en faisant un développement limité :

$$\begin{aligned}
\kappa_t(s) &= \frac{-6r_0 \tan(\beta) + \sqrt{\Delta}}{6(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)} \\
&= \frac{-6r_0 \tan(\beta) + \sqrt{36r_0^2 \tan^2(\beta) + 24(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)(1 + \tan^2(\beta)) \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i}}{6(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)} \\
&= \frac{-6r_0 \tan(\beta) + \sqrt{36r_0^2 \tan^2(\beta) \left(1 + \frac{24(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)(1 + \tan^2(\beta)) \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i}{36r_0^2 \tan^2(\beta)}\right)}}{6(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)} \\
&= \frac{-6r_0 \tan(\beta) + 6r_0 \tan(\beta) \left(1 + \frac{(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)(1 + \tan^2(\beta)) \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i}{3r_0^2 \tan^2(\beta)} + o(\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i)\right)}{6(r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)} \\
&= \frac{6r_0 \tan(\beta) (r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2) (1 + \tan^2(\beta)) \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i + o(\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i)}{18r_0^2 \tan^2(\beta) (r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)} \\
&= \frac{(1 + \tan^2(\beta))}{3r_0 \tan(\beta)} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i + o(\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i) \\
&= \frac{2}{3r_0 \sin(2\beta)} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i + o(\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i)
\end{aligned}$$

On a donc la valeur de l'angle unitaire de torsion :

$$\kappa_t(s) = \frac{2}{3r_0 \sin(2\beta)} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i + o(\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i)$$

Finalement on obtient les équivalents suivants de l'angle unitaire de torsion, de la courbure et de l'angle de déformation :

$$\begin{aligned}
\kappa_t(s) &\sim \frac{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{3r_0 \sin(2\beta)} \\
\kappa(s) &\sim \frac{1 + \tan^2(\beta)}{3} \sqrt{\frac{2((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2)}{r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2}} \\
\cos(\theta(s)) &\sim \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_1)r_0 + \sqrt{3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \sin(\beta)ds}{\sqrt{2((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2) (r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)}} \\
\sin(\theta(s)) &\sim \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)r_0 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_1) \sin(\beta)ds}{\sqrt{2((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2) (r_0^2 + \sin^2(\beta)ds^2)}}
\end{aligned}$$

Ainsi en modifiant la disposition des capteurs de déformation, on peut obtenir la valeur signée de l'angle unitaire de torsion. C'est une information importante dont on peut se servir pour la reconstruction de la déformée.

## 12.3 Bilan des grandeurs de déformation issus de la déformation des capteurs

Cette partie synthétise les résultats de notre étude des déformations des capteurs. Nous avons vu que l'amélioration principale par rapport à la littérature existante se situe au niveau des informations concernant la torsion. Jusque là, les principaux travaux présents dans la littérature ne fournissait aucune indication sur la torsion. Ces informations supplémentaires ont été obtenues grâce à l'introduction d'une hypothèse physique, à savoir négliger les phénomènes de traction-compression et de cisaillement. La question de la pertinence de cette hypothèse sera abordée dans l'étude sur les types de déformations, menée dans le chapitre 17. Il apparait dans cette étude que lors d'une insertion d'aiguille, les variables représentant les phénomènes de traction-compression et de cisaillement ont des ordres de grandeurs bien moindre que celles représentant la flexion et la torsion. De plus on soulignera que, dans les articles traitant des capteurs de déformation, les phénomènes de traction-compression et de cisaillement sont systématiquement négligés lors de l'étape de reconstruction de la déformée. Ces deux arguments peuvent étayer la validité de notre hypothèse et par conséquent de nos résultats.

Ainsi, quand les capteurs de déformations sont positionnés de manière parallèle à la fibre neutre, il est possible d'obtenir une information sur la torsion : sa norme. Dans le cas où les capteurs de déformations seraient positionnés de manière sécantes par rapport à la fibre neutre de la poutre, on peut obtenir la valeur signée de la torsion, sa norme et son signe.

Les résultats explicités ci-dessus sont synthétisés dans le tableau 12.1.

Types de capteurs	Références	Hypothèses		Résultats		
		Elasticité linéaire	Pas de traction -compression ni cisaillement	Flexion	Torsion	
					Norme	Signe
Parallèles	Littérature	✓	✗	✓	✗	✗
	Notre méthode	✓	✓	✓	✓	✗
Sécants	Notre méthode	✓	✓	✓	✓	✓

TABLE 12.1. – Bilan des informations obtenus à partir des capteurs selon leurs types et la méthode utilisée.

## 12.4 Bilan des grandeurs de déformation issus de la déformation des capteurs

Les informations obtenues dans cette partie apportent une réelle connaissance supplémentaire concernant la déformation de l'aiguille. La torsion est un phénomène de déformation non-négligeable, présents lors des piqués d'aiguilles et en partie responsable du fait que l'aiguille se déforme en 3D et non en 2D. Nous allons voir dans la suite de ce manuscrit

comment exploiter ces données physiques supplémentaires dans le processus de reconstruction.

On détaille dans ce chapitre comment utiliser les informations de torsion obtenues précédemment à partir des capteurs de déformations placés de façon sécantes.

### 13.1 Reconstruction à partir de la flexion et de la torsion

La disposition des capteurs de manière à faire un angle avec la fibre neutre permet d'obtenir les valeurs des angles unitaires de torsion en plus des valeurs habituelles de flexion et d'angle d'orientation.

Ainsi les données d'un triplet de capteurs situé sur la section de poutre à la position  $s_i$  permettent d'obtenir les valeurs des angles unitaires de torsion  $\varkappa_{t_i} = \varkappa_t(s_i)$ .

Par conséquent les données de l'ensemble des triplets de capteurs de l'aiguille permettent d'obtenir la discrétisation de fonction  $(\varkappa_t(s_i))_{i=1,\dots,n}$ .

On définit alors  $\varkappa_{t_{est}}$  comme la fonction construite par interpolation sur  $[0, L]$  à partir de la discrétisation de la fonction angle unitaire de déformation :

$$\begin{aligned} \varkappa_{t_{est}} : [0, L] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \varkappa_{t_{est}}(s_i) &= \varkappa_{t_i} \end{aligned}$$

Dans la partie précédente traitant de la reconstruction, l'hypothèse de torsion nulle était rendu nécessaire par le fait que la disposition des capteurs ne permettait pas de la calculer. Ce n'est plus le cas ici. On dispose de la valeur de l'angle unitaire de la torsion  $\varkappa_t$  et on peut donc directement l'utiliser dans le tenseur  $\Omega$  :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{est} \cos(\theta_{est}) & -\kappa_{est} \sin(\theta_{est}) \\ -\kappa_{est} \cos(\theta_{est}) & 0 & \varkappa_{t_{est}} \\ \kappa_{est} \sin(\theta_{est}) & -\varkappa_{t_{est}} & 0 \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

Ainsi l'étape de reconstruction ne se trouve pas modifié par le fait qu'on prenne en compte ou non le phénomène de torsion, seul change la valeur du tenseur  $\Omega$  qui décrit la variation du repère mobile  $\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  (système 11.16).

Finalement, l'utilisation de la valeur  $\varkappa_{est}$  dans le tenseur  $\Omega$  permet donc de reconstruire la déformée de l'aiguille en tenant compte de sa torsion mécanique.

## 13.2 Cas de charges

Nous allons préciser dans cette partie comment l'obtention de l'angle unitaire de torsion associé avec la courbure et l'angle de déformation permet de reconstruire le cas de charge de l'aiguille.

En gardant les hypothèses de traction-compression et de cisaillement nuls on a les équations locales liant les moments interne et externe linéiques de la poutre :

$$\begin{cases} M_t' + \varkappa_1 M_2 - \varkappa_2 M_1 + m_t = 0 \\ M_1' + \varkappa_2 M_t - \varkappa_1 M_2 + m_1 = 0 \\ M_2' - \varkappa_1 M_t + \varkappa_2 M_1 + m_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit alors les coordonnées du moment linéique externe appliquée sur la poutre  $\mathbf{m}$  dans le repère  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  :

$$\begin{cases} m_t = -GJ\varkappa_t' \\ m_1 = -EI(\varkappa \cos(\theta))' + (GJ - EI)\varkappa_t \varkappa \sin(\theta) \\ m_2 = EI(\varkappa \sin(\theta))' + (GJ - EI)\varkappa_t \varkappa \cos(\theta) \end{cases}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= m_t \mathbf{T} - m_2 \mathbf{N}_1 + m_1 \mathbf{N}_2 \\ &= \begin{bmatrix} m_t \\ -m_2 \\ m_1 \end{bmatrix}_{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2} \\ &= \begin{bmatrix} -GJ\varkappa_t' \\ -EI(\varkappa \sin(\theta))' - (GJ - EI)\varkappa_t \varkappa \cos(\theta) \\ -EI(\varkappa \cos(\theta))' + (GJ - EI)\varkappa_t \varkappa \sin(\theta) \end{bmatrix}_{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2} \end{aligned}$$

On a donc les coordonnées de  $\mathbf{m}$  qui dépendent des fonctions  $\varkappa_t, \varkappa, \theta$ . On reprend les notations introduites dans la partie précédente sur la reconstruction.

Soit  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  une base canonique de l'espace. Les coordonnées de  $\mathbf{m}$  dans cette base sont les suivantes :

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z}$$

Et on a  $\mathbf{Y}$  la matrice définie dans la partie précédente sur la reconstruction contenant les coordonnées des vecteurs  $\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \\ N_{1x} & N_{1y} & N_{1z} \\ N_{2x} & N_{2y} & N_{2z} \end{bmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{Y}^T$  est donc la matrice de passage de la base  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  vers la base  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$ . On a donc :

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z} = \mathbf{Y}^T \begin{bmatrix} m_t \\ -m_2 \\ m_1 \end{bmatrix}_{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2}$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} m_x(s) \\ m_y(s) \\ m_z(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^T(s) \begin{bmatrix} -GJ\mathcal{z}'_t(s) \\ -EI(\kappa(s) \sin(\theta(s)))' - (GJ - EI)\mathcal{z}_t(s)\kappa(s) \cos(\theta(s)) \\ -EI(\kappa(s) \cos(\theta(s)))' + (GJ - EI)\mathcal{z}_t(s)\kappa(s) \sin(\theta(s)) \end{bmatrix}$$

Soit les fonctions  $\kappa_{est}$ ,  $\theta_{est}$  et  $\mathcal{z}_{t_{est}}$  les fonctions courbures, angle de déformations et angle unitaire de torsion reconstruite à partir des données des jauges. Soit  $\mathbf{Y}_n$  l'approximation de  $\mathbf{Y}(s_n)$  issue de la partie reconstruction précédente.

On peut alors calculer les coordonnées de  $\mathbf{m}$  dans la base  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  :

$$\begin{bmatrix} m_x(s_n) \\ m_y(s_n) \\ m_z(s_n) \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_n^T \begin{bmatrix} -GJ\mathcal{z}'_{t_{est}}(s_n) \\ -EI(\kappa_{est}(s_n) \sin(\theta_{est}(s_n)))' - (GJ - EI)\mathcal{z}_{t_{est}}(s_n)\kappa_{est}(s_n) \cos(\theta_{est}(s_n)) \\ -EI(\kappa_{est}(s_n) \cos(\theta_{est}(s_n)))' + (GJ - EI)\mathcal{z}_{t_{est}}(s_n)\kappa_{est}(s_n) \sin(\theta_{est}(s_n)) \end{bmatrix}$$

Ainsi les capteurs de déformations placés de manière sécantes sur l'aiguille permettent, par l'obtention de la valeur de l'angle unitaire de torsion, de remonter jusqu'au cas de chargement de l'aiguille.



## **Quatrième partie**

# **Optimisation de la qualité de reconstruction par l'étude de déformations existantes**



# CHAPITRE 14

## ETUDE D'UNE POPULATION D'AIGUILLES

### 14.1 Introduction

Pour répondre aux problèmes de l'optimisation des positions des capteurs ainsi que celui d'une reconstruction avancée de la déformée d'une aiguille, nous souhaitons mieux caractériser les déformations de l'aiguille lors d'une insertion dans les tissus. La méthodologie de caractérisation mise en place repose sur l'exploitation de scanners expérimentaux ou cliniques de piqués d'aiguille par un traitement algorithmique et mathématique permettant l'obtention de données caractérisant les déformations des aiguilles. Ces données caractéristiques seront ensuite utilisées dans les parties suivantes.

### 14.2 Caractérisation des déformations

Les parties précédentes ont mis en avant le rôle centrale tenu par les deux fonctions que sont la courbure et l'angle d'orientation. En effet dans le chapitre 10 nous avons montré que les informations de déformations d'un triplet de capteurs permettaient d'obtenir les valeurs locales de courbure et d'angle d'orientation de la position de la section sur laquelle est situé le triplet. De plus le chapitre 11 a permis de montrer qu'une courbe 3D est entièrement définie par ses fonctions courbures et angle d'orientation (avec en plus des conditions initiales). Pour ces raisons nous considérons ces deux fonctions comme les données caractéristiques à extraire de chaque piqué d'aiguille présent dans les scanners expérimentaux.

Soit un arc  $\mathbf{g}$  paramétré normalement. On rappelle la définition de la courbure  $\kappa$  :

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{g}'(t) \wedge \mathbf{g}''(t)\|}{\|\mathbf{g}'(t)\|^3} \quad (14.1)$$

On rappelle également l'équation 11.20 obtenue dans le chapitre 11 sur la reconstruction :

$$\varkappa_t = \theta' + \tau$$

C'est à dire :

$$\theta' = \varkappa_t - \tau$$

L'angle unitaire de torsion  $\varkappa_t$ , qui est un critère physique relié au repère matériel de l'aiguille, ne peut-être déterminé à partir des scanners patients contrairement à la torsion mathématique  $\tau$  qui est un critère purement géométrique. Dans la suite de cette étude, nous allons donc reprendre l'hypothèse formulée dans la partie reconstruction : la torsion mécanique est nulle. On a alors la relation :

$$\theta' = -\tau$$

On obtient alors l'expression de l'angle d'orientation  $\theta$  suivante :

$$\theta(t) = - \int_{t_0}^t \tau(u) \|\mathbf{g}'(u)\| du \quad (14.2)$$

$$\text{avec } \tau(u) = \frac{[\mathbf{g}'(u), \mathbf{g}''(u), \mathbf{g}'''(u)]}{\|\mathbf{g}'(u) \wedge \mathbf{g}''(u)\|^2}$$

où le crochet  $[\ ]$  désigne le produit mixte.

On en conclut donc que les fonctions  $\kappa$  et  $\theta$  se calculent à partir des dérivées premières, secondes et troisièmes de la courbe  $\mathbf{g}$ . Les approximations des formes des aiguilles obtenues à partir des scanners de piqué d'aiguilles vont donc être utilisées pour calculer les fonctions de courbure et d'angle d'orientation. Ainsi, de la qualité des approximations de ces dérivées va dépendre la précision de l'estimation de ces deux fonctions. Par conséquent le problème d'estimation des dérivées de la forme de l'aiguille est un point crucial de notre étude.

### 14.3 Etat de l'art

L'estimation des dérivées d'une fonction à partir de mesures bruitées est un problème récurrent dans les domaines du traitement du signal et de la biomécanique. Parmi ses domaines d'applications on trouve la tomodensitométrie, l'électrocardiologie, la météorologie ou la sismologie [Wol85]. La question à laquelle nous allons nous intéresser est donc la suivante :

**Comment obtenir les dérivées d'une fonction à partir de sa discrétisation ?**

### 14.3.1 Avant-propos

Tout d'abord est présenté un bref avant-propos qui permettra de comprendre l'état de l'art qui suit.

Le terme *bien posé* a été introduit pour la première fois par Hadamard [Had02] et sert à caractériser les problèmes mathématiques. Il a introduit ce terme pour caractériser les modèles mathématiques reposant sur des phénomènes physiques. Un problème de ce type est dit bien posé s'il possède les trois caractéristiques suivantes :

- Existence d'une solution
- Unicité de la solution
- La solution varie continument selon les conditions initiales

Un problème qui ne satisfait pas ces trois conditions est dit alors *mal posé*.

Le problème de l'estimation des dérivées est *mal posé*, de par le fait que les estimations sont hautement sensibles aux erreurs de mesures [Ahl84]. C'est un phénomène intrinsèque à ce type de problème, à l'inverse par exemple du *conditionnement*. Un moyen possible pour résoudre ce type de problème est d'introduire des contraintes supplémentaires : cela s'appelle la *régularisation*.

Une des contraintes possibles est de supposer que les données sont suffisamment lisses. Cette contrainte est pertinente car (la plupart du temps) les données dont on essaie d'extraire les dérivées proviennent de données reflétant des phénomènes physiques réels et ayant donc une certaine régularité, ne possédant pas de composantes hautes fréquences. Par exemple, dans le cas où les données sont des trajectoires, des variations brusques feraient intervenir des forces très importantes. Cette hypothèse peut-être mis de côté, à priori, si on a connaissance du contexte des données expérimentales [Wol85]. De la même façon, dans notre cas, la forme d'une aiguille ne peut subir des déformations intenses et rapides que si les intensités des forces qui lui sont appliquées sont très grandes et varient rapidement. Ceci est vraisemblablement peu probable lorsque celle-ci est simplement insérée dans des tissus biologiques. L'hypothèse du caractère "lisse" des données et des dérivées semble donc être pertinente dans le problème d'évaluation des dérivées de la forme de l'aiguille.

Cette hypothèse est mise en place mathématiquement par un *lissage*, c'est à dire un système comportant un terme de pénalité lié à une expression reflétant la régularité des données.

Le lissage permet alors de s'affranchir des hautes-fréquences des données par utilisation du *paramètre de lissage*. Nous allons voir dans la suite l'application de ce principe sur les splines. Une spline obtenue par un lissage s'appelle *spline de lissage*.

### 14.3.2 Approximation des dérivées de fonctions

L'idée d'approximer des fonctions par des splines de lissage a été proposée par Whittaker [Whi22], Schoenberg [Sch64] et Reinsch [Rei67]. Cette technique est une application de la régularisation Tikhonov [TA77] aux splines. Le but est alors d'approximer de manière efficace une fonction à partir de sa discrétisation, le problème de calcul des dérivées n'est pas abordé, pas plus que les éventuels bruits présents sur la discrétisation ou la manière de

fixer le paramètre de régularisation.

Le système se présente de la manière suivante :

Soit  $(y_i)_{i=1,\dots,n}$  la discrétisation d'une fonction inconnue aux points  $(t_i)_{i=1,\dots,n}$ . On cherche à approximer la fonction inconnue par la spline  $S$ . On note  $\lambda$  le paramètre de lissage et  $m$  l'ordre de la dérivée dans le terme de lissage. La spline de lissage est la spline qui minimise le système :

$$\min_S \sum_{i=1}^n \|S(t_i) - y_i\|^2 + \lambda \int_0^t \|S^{(m)}(u)\|^2 du$$

L'impact de la régularisation dans le problème d'estimation de dérivée a été étudié pour la première fois par Cullum [Cu179] au travers de la régularisation Tikhonov, Cullum sort ainsi du cadre des splines. Il expose l'importance du choix du paramètre de régularisation et son influence sur les dérivées. Il ne présente pas de méthode permettant d'avoir une valeur appropriée.

L'article d'Andersen et Bloomfield [AB74] aborde le problème d'estimation des dérivées sur des données non exactes. Les auteurs posent le principe qu'une méthode d'estimation des dérivées de données bruitées donnant des résultats satisfaisants se doit de prendre en compte la structure et la nature de l'origine des données. Par un argument physique ils justifient l'utilisation de la régularisation et font le lien avec l'analyse spectrale. Leurs résultats indiquent que cette dernière peut-être utilisée lorsque les données proviennent de variables aléatoires stationnaires tandis que la régularisation est utilisée dans les autres cas. Ils développent dans leur article une méthode d'estimation de dérivées basée sur la régularisation et la transformation de Fourier rapide en montrant que la procédure de régularisation introduite par Cullum peut-être reprise dans le cas de l'analyse spectrale. Leur méthode permet également de déterminer une valeur adaptée du paramètre de régularisation.

Dans un article fondateur, Craven et Wahba [CW78] développent une méthode d'approximation de fonctions basée sur le lissage par splines. Ils y exposent leur méthode appelée validation croisée généralisée qui permet d'approximer la valeur optimale du paramètre de régularisation dans le cas où le bruit présent sur les données discrétisées est un bruit blanc, c'est à dire sous les hypothèses suivantes :

Soit  $(y_i)_{i=1,\dots,n} = (y(t_i))_{i=1,\dots,n}$  la discrétisation de la fonction inconnue  $g$  aux points  $(t_i)_{i=1,\dots,n}$  dont le bruit est  $\varepsilon$ . On a :

$$y_i = g(t_i) + \varepsilon(t_i)$$

et  $\varepsilon$  est un bruit blanc, c'est à dire qu'on a les propriétés suivantes ( $\mathbb{E}$  désigne l'espérance mathématique) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\varepsilon(t) &= 0 \\ \mathbb{E}\varepsilon(s)\varepsilon(t) &= \sigma^2 \quad \text{si } s = t \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Les premières techniques d'estimation des dérivées à partir du lissage par spline sont abordées par Wood [Woo82] et Vaughan [Vau82]. L'approche repose sur les travaux de Craven

et Wahba et consiste à obtenir une estimation de la fonction par spline de lissage et à ensuite dériver cette spline pour obtenir une estimée de la dérivée originale.

Ainsi, différentes méthodes permettant l'estimation de dérivée utilisant la régularisation ont été développées. Parmi les principales, on peut donc citer l'approche utilisant la FFT développée par Anderson et Bloomfield et l'approche employant le lissage par spline basée sur les travaux de Craven et Wahba.

Plusieurs comparaisons des méthodes d'approximation des dérivées ont été effectuées, que ce soit Wood et Vaughan dans leurs articles introduisant l'approximation de dérivées par spline, ou plus tard par Woltring [Wol85]. Les méthodes concernées sont le filtrage numérique, l'analyse de Fourier, le lissage par spline cubique et le lissage par spline quintique. Il ressort de ces études que si les méthodes donnent des résultats similaires pour l'estimation de la dérivée première, l'estimation des dérivées d'ordre supérieure fait quant à elle apparaître une grande disparité dans les résultats. La meilleure estimation est réalisée grâce aux splines de lissage quintique (c'est à dire de degré cinq) qui donnent des résultats plus précis que ceux données par le filtrage numérique et dont le champ d'action est supérieur à celui de l'analyse de Fourier. Le lissage par spline cubique montre des résultats très mauvais ce qui souligne l'importance du degré de la spline utilisée en fonction de l'ordre des dérivées à approximer. Woltring [Wol85] précise dans son article que la méthode de lissage par spline quintique peut encore être améliorée en utilisant non plus des splines mais des B-splines.

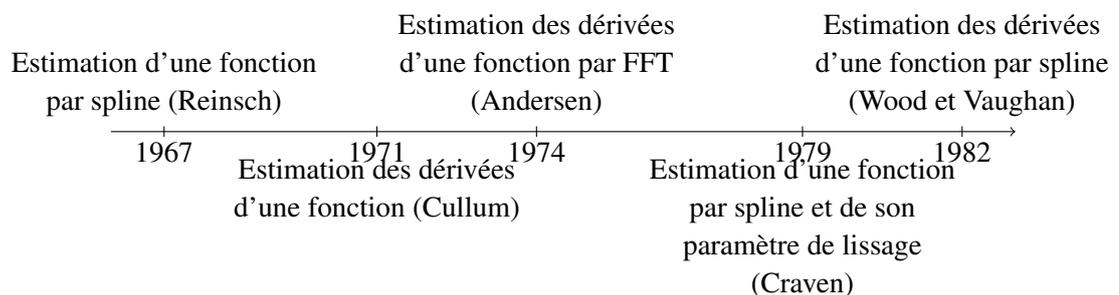


FIGURE 14.1. – Chronologie des principaux travaux sur la régularisation adaptée au problème d'estimation d'une fonction et de ses dérivées.

Les principaux articles concernant l'estimation des dérivées de données discrétisées cités dans cette partie sont placés sur la frise chronologique présentée dans la figure 14.1.

### 14.3.3 Sélection du paramètre de lissage

Dans son article Cullum [Cul79] démontre l'influence du paramètre de lissage sur l'obtention des dérivées et donc l'importance du choix de sa valeur. Un des critères les plus souvent utilisés pour juger de la pertinence de la valeur du paramètre de lissage est l'erreur quadratique moyenne [CW78] :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|S(t_i) - g(t_i)\|^2$$

En se basant sur ce critère on peut alors définir la valeur optimale du paramètre de lissage comme celle qui minimise l'erreur quadratique moyenne. Néanmoins la fonction originelle  $g$  étant inconnue, la valeur de l'erreur quadratique moyenne ne peut se calculer directement. Les méthodes présentées ci-dessous sont des méthodes d'approximation de la valeur optimale du paramètre de lissage par rapport au critère de l'erreur quadratique moyenne.

Une méthode permettant de sélectionner une valeur pour le paramètre de lissage s'appelle la *validation croisée* [WW75a, WW75b]. L'étape préliminaire consiste à diviser notre échantillon de départ de taille  $n$  en deux sous-échantillons : un échantillon d'apprentissage de taille  $n_a$  et un échantillon de test de taille  $n_t$ . On a donc  $n_a + n_t = n$ . La manière dont sont constitués les différents échantillons définit le type de validation croisée. On présente ici le cas d'une validation croisée de type *leave-one-out*, cas pour lequel  $n_a = n - 1$  et  $n_t = 1$ . Le principe est alors le suivant :

- On attribue une valeur au paramètre de lissage.
- L'échantillon de départ est divisé entre l'échantillon d'apprentissage ( $n - 1$  éléments) et l'échantillon de test (1 élément).
- On calcule la spline de lissage à partir de l'échantillon d'apprentissage.
- On calcule l'erreur de prédiction entre la valeur présente dans l'échantillon test et la valeur prédite par la spline de lissage.
- On répète cette opération  $n$  fois de tel sorte que l'échantillon de test contienne tour à tour toutes les valeurs de l'échantillon de départ.
- Les  $n$  erreurs de prédiction permettent de calculer l'erreur quadratique moyenne de prédiction associée à une valeur du paramètre de lissage.

On peut donc associer à n'importe quelle valeur du paramètre de lissage une erreur de prédiction associée. On définit alors comme valeur optimale du paramètre de lissage la valeur qui minimise cette erreur de prédiction.

Le principal avantage de la validation croisée est qu'elle peut évaluer la pertinence de la valeur du paramètre de lissage à partir des données existantes sans avoir besoin de la fonction originelle ou de nouveaux jeux de données.

Le principal désavantage de la validation croisée est le nombre d'opération nécessaire à réaliser pour calculer la valeur optimale. Celui-ci devient très vite trop important lorsque l'échantillon devient conséquent. En réponse à ce problème, d'autres méthodes ont été développées pour obtenir une valeur de paramètre satisfaisante à moindre coût.

La *validation croisée généralisée* [CW78] figure parmi les méthodes de sélection de paramètre les plus utilisées. Sa popularité est due à sa précision qui repose sur des hypothèses statistiques concernant la fonction à approximer ainsi qu'à un faible coût en calcul. Nous détaillerons son utilisation par la suite. Une version encore plus optimisée et moins gourmande en calcul a ensuite été proposée par Utreras [Utr12].

Il existe d'autres méthodes pour choisir le paramètre de régularisation comme le  $c_p$  de Mallows [Mal73] ou le critère d'information d'Akaike (AIC) [Aka98]. Les résultats donnés par ces méthodes sont équivalents à ceux de la validation croisée généralisée.

#### 14.3.4 Bilan

La régularisation figure parmi les outils d'approximation les plus puissants. Dans cet état de l'art nous avons volontairement mis en avant les méthodes utilisant les splines. Ces dernières constituent en effet un outil tout indiqué pour notre problème de reconstruction des formes des aiguilles pour deux raisons. Premièrement, leurs paramétrages par les points de contrôle se prêtent particulièrement bien à la reconstruction de forme dans des espaces de plusieurs dimensions. Deuxièmement, il existe certains types de spline tel que les B-Splines qui, de par leur définition, bénéficient de certaines hypothèses de continuité intéressantes (voir chapitre 7). Comme expliqué au début de ce chapitre, les fonctions que nous cherchons à approximer, courbure et angle d'orientation dépendent des dérivées premières, secondes et troisièmes. L'état de l'art précise que les méthodes de lissage de spline quintique permettent d'obtenir de bons résultats. Par conséquent, dans la suite de ce manuscrit la méthode de lissage utilisée sera le lissage par **B-spline quintique** employé avec la **validation croisée généralisée**.

## 14.4 Matériel

Cette section présente les informations des jeux de données scanners dont sont issues les aiguilles étudiées.

### 14.4.1 Données expérimentales

Une expérimentation d'insertions d'aiguilles percutannées a été réalisée par Adeline Robert [RCB<sup>+</sup>13]. Les insertions ont été pratiquées sur une épaule de porc de dimensions (300 mm × 200 mm × 100 mm) préparées sur un plateau en plastique. Le choix du porc est dû aux similarités des propriétés mécaniques entre les tissus du porc et les tissus humains [HHM11]. Le choix de l'épaule est dû quant à lui, à la complexité des tissus (muscles, ligaments et tendons) ce qui permet de réaliser des insertions dans un environnement complexe. Les aiguilles utilisées pendant les insertions sont des aiguilles de 20 gauges, de longueur 200 mm, en acier inoxydable, avec un module de Young estimé de 200 GPa. Ces aiguilles sont communément utilisées en radiologie interventionnelle. L'expérimentation consiste en 54 insertions différentes de l'aiguille dans une épaule de porc. Chaque insertion diffère des autres par ses caractéristiques (rotations, efforts, etc...) résultant en différentes possibilités d'insertions d'aiguilles. Une image scanner de l'ensemble de l'épaule de porc est réalisée après chaque insertion. L'ensemble des données est composé de 54 scanners d'insertions d'aiguilles dans une épaule de porc. Ceci constitue l'ensemble des images de références

qui sera utilisé pour la mise en oeuvre de la méthode d'optimisation de positions des capteurs.

### 14.4.2 Données cliniques

Une étude clinique consistant en des procédures de radiologie interventionnelles a été effectuée à l'hôpital universitaire de Grenoble. Cet essai clinique a reçu l'autorisation de l'ANSM, l'Agence Nationale de Sécurité du Médicament et des produits de santé (anciennement l'AFSSAPS), et par le Comité de Protection des Personnes Sud Est V, l'autorité régionale sur les protocoles de recherches cliniques (ClinicalTrials.gov Identifier : NCT00828893). Sur tous les scanners, une sélection a été réalisée pour ne conserver que ceux avec une aiguille complète de longueur 200 mm. Les données résultantes consistent ainsi en un ensemble de 9 CT scans cliniques d'insertions d'aiguilles dans différentes parties du corps. Cet ensemble est utilisé en tant qu'ensemble de validation pour la méthode d'optimisation de positions des capteurs.

## 14.5 Méthodes

Cette section contient les descriptions de l'ensemble des méthodes permettant à partir d'un scanner d'un piqué d'aiguille d'obtenir les fonctions géométriques de courbure et d'angle d'orientation de cette aiguille.

### 14.5.1 Segmentation

La première étape a consisté à isoler les voxels du scanner correspondant à l'aiguille des autres voxels (correspondant aux tissus, aux os, etc...). Pour réaliser cela, on va utiliser une opération de traitement d'images appelé la *segmentation* qui va effectuer une partition de l'image, ici notre volume 3D de voxels de l'aiguille. Dans notre cas la segmentation donne un résultat binaire sur l'ensemble des voxels, à savoir l'appartenance ou non du voxel à l'aiguille dans l'image d'origine. La méthode de segmentation utilisée ici se base sur la *croissance de région*.

#### 14.5.1.1 Algorithme

Le principe de la segmentation par croissance de régions consiste à partir d'un ensemble de voxels initiaux (appelé les *graines*) et de faire croître cet ensemble par agrégation des voxels à proximité répondant à un critère d'appartenance. Les voxels agrégés deviennent à leurs tours des graines et l'ensemble croît ainsi jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait. Le résultat de la segmentation est alors l'ensemble de tous les voxels agrégés. Les différentes étapes constituant une itération de l'algorithme seront illustrées ci-dessous par un exemple en deux dimensions :

0 Définition du critère d'appartenance de chaque voxel à la région. Dans notre cas le critère d'appartenance repose sur la valeur du voxel. En effet, l'aiguille étant constituée de métal, elle apparaît au scanner sous forme de voxels avec des valeurs beaucoup plus élevées que pour les tissus. Un seuil est défini à partir duquel le voxel est considéré appartenir à l'aiguille. Pour notre exemple la valeur de seuil retenue est de 150 et une graine de départ est également définie.

1. Les graines constituent un sous-ensemble des voxels à segmenter (figure 14.2).

100	98	104	86	110	107	92	180	190	185
95	101	93	87	86	194	203	200	199	198
91	101	88	93	181	187	194	217	220	104
93	89	101	184	178	199	183	178	81	98
100	96	102	GRAINE	200	208	84	77	83	94
93	110	99	81	214	102	98	92	90	105
98	109	87	99	92	81	91	98	199	216
81	104	80	93	81	103	82	188	174	213

FIGURE 14.2. – Algorithme par croissance de régions : schéma 1

2. Récupération des voxels voisins des graines. Dans notre exemple, en 2D, il y a 4 voisins directs par voxel (figure 14.3).

100	98	104	86	110	107	92	180	190	185
95	101	93	87	86	194	203	200	199	198
91	101	88	93	181	187	194	217	220	104
93	89	101	VOISIN	178	199	183	178	81	98
100	96	VOISIN	GRAINE	VOISIN	208	84	77	83	94
93	110	99	VOISIN	214	102	98	92	90	105
98	109	87	99	92	81	91	98	199	216
81	104	80	93	81	103	82	188	174	213

FIGURE 14.3. – Algorithme par croissance de régions : schéma 2

3. La graine est enregistrée comme faisant partie des voxels de l'aiguille et le critère d'appartenance est testé sur chacun des voisins. Les voisins satisfaisant le critère

d'appartenance deviennent alors des graines (figure 14.4).

100	98	104	86	110	107	92	180	190	185
95	101	93	87	86	194	203	200	199	198
91	101	88	93	181	187	194	217	220	104
93	89	101	GRAINE	178	199	183	178	81	98
100	96	OUT	IN	GRAINE	208	84	77	83	94
93	110	99	OUT	214	102	98	92	90	105
98	109	87	99	92	81	91	98	199	216
81	104	80	93	81	103	82	188	174	213

FIGURE 14.4. – Algorithme par croissance de régions : schéma 3

4. L'algorithme est réitéré à partir de l'étape 1 sur le nouvel ensemble de graines jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait, c'est à dire que plus aucun voxel ne satisfasse le critère d'appartenance.

Remarque : Les os donnent des voxels dont les valeurs sont similaires aux valeurs des voxels correspondant aux aiguilles. L'utilisation de la segmentation par croissance de régions permet de ne pas inclure les os qui ne sont pas en contact avec l'aiguille. A l'inverse, si un os touche l'aiguille alors celui ci sera inclus entièrement dans le résultat de la segmentation. Il est donc nécessaire de choisir des scanners où l'aiguille est éloignée des os. Cela est de toute façon nécessaire puisqu'on souhaite travailler sur des aiguilles dont les formes sont représentatives des insertions, donc non soumises à des contacts avec les os.

#### 14.5.1.2 Plug-in

L'algorithme de croissance de régions a été implanté sous forme de plug-in au sein du logiciel de visualisations d'images CamiTK [FDKP12]. Le plug-in est écrit en C++ et fait appel aux bibliothèques ITK [JM13] et VTK [SML06]. Le plug-in intègre une interface graphique permettant à l'utilisateur de sélectionner deux voxels correspondant à l'extrémité distale et proximale. Ces deux voxels seront utilisés en tant que graines de départ dans l'algorithme de croissance de régions. L'utilisateur peut également saisir la valeur de seuil utilisé comme critère d'appartenance (figure 14.5).

#### 14.5.1.3 Résultats

Une fois la segmentation effectuée, un nouveau volume de taille identique à celle du volume original est créé. Ce nouveau volume contient l'ensemble des voxels associés à l'aiguille.

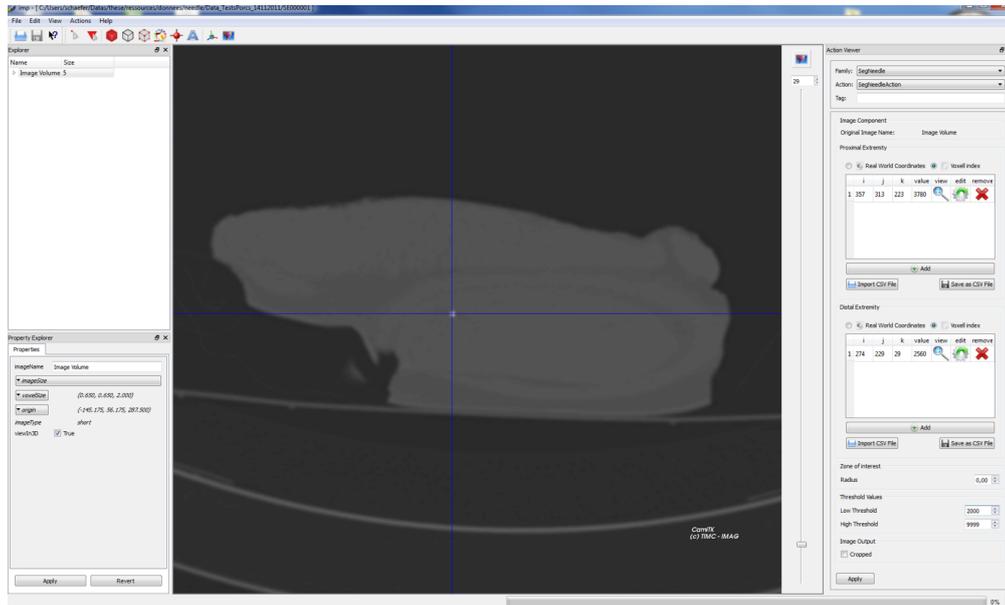


FIGURE 14.5. – Logiciel CamiTK.

Visualisation dans le logiciel CamiTK d'une des images scanners de piqués d'aiguilles dans l'épaule de porc. L'interface du plug-in de segmentation apparaît dans le panneau latéral droit.

Les autres voxels n'appartenant pas à l'aiguille ont une valeur nulle. La figure 14.6 montre le résultat après segmentation : il ne reste dans l'image que les voxels liés à l'aiguille.

### 14.5.2 Ordonnancement

L'étude de la population d'aiguille passe par l'approximation de cet ensemble de voxels par une spline de lissage 3D. On a vu précédemment que le lissage prenait la forme d'un problème de minimisation de la forme :

$$\min_S \sum_{i=1}^n \|S(t_i) - y_i\|^2 + \lambda \int_0^t \|S^{(m)}(u)\|^2 du$$

Dans la partie somme des moindres carrés de la minimisation, à chaque évaluation de la spline en  $t_i$ , le  $i^{\text{me}}$  terme de la discrétisation  $S(t_i)$  est associé à  $y_i$  le  $i^{\text{me}}$  voxel. Il faut donc trier les voxels de la partie proximale à la partie distale pour pouvoir mettre en oeuvre les techniques de lissage.

La méthode de tri choisie a été proposée par Furferi [RF11] : elle permet d'organiser un ensemble de points de l'espace représentant une courbe. La première étape consiste à créer un polygone reprenant la forme grossière de l'ensemble des voxels : la *polyline*. La création de ce polygone se déroule de la manière suivante :

1. Choix du voxel  $V$  de départ de façon aléatoire et un rayon de cluster  $r$ .

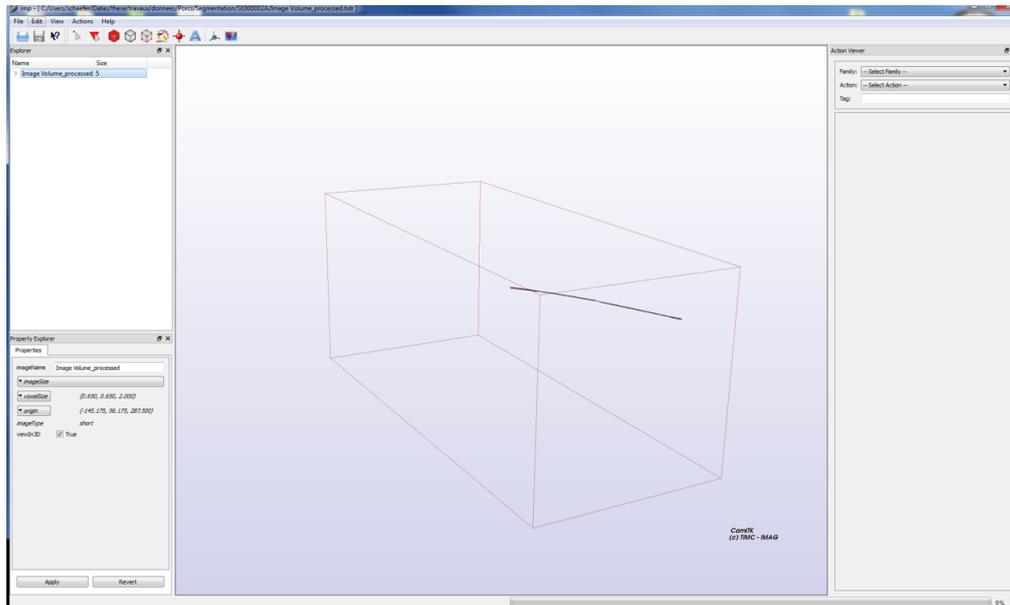


FIGURE 14.6. – Résultat de segmentation.

Voxels issus de la segmentation de l'aiguille d'une des images scanners de piqué d'épaule de porc.

2. Définition du cluster  $\mathcal{C}_i$  comme l'ensemble des voxels situés à une distance inférieure à  $r$  (figure 14.7).

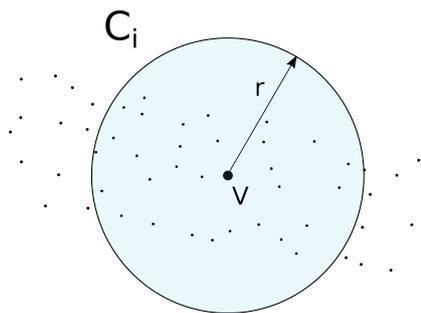


FIGURE 14.7. – Algorithme polyline : schéma 1

3. Définition du centroïde  $\chi_i$  du cluster  $\mathcal{C}_i$  comme le barycentre des voxels de  $\mathcal{C}_i$  pondérés par leur poids, ici la valeur du voxel (figure 14.8).

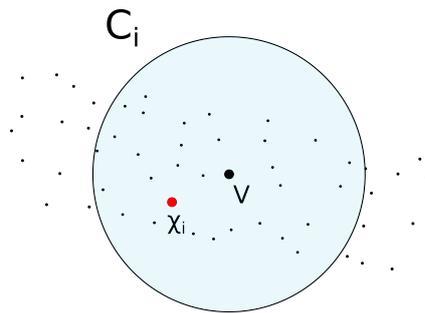


FIGURE 14.8. – Algorithme polyline : schéma 2

4. Réalisation d'une *Analyse en Composantes Principales* (ACP) pour trouver les composantes de la direction principale des voxels contenus dans le centroïde. Si le ratio entre la plus petite valeur propre et la plus grande valeur propre est supérieur à une certaine valeur fixée alors on considère que le cluster n'a pas de direction "préférée". On augmente alors le rayon  $r$  et on recommence de l'étape 2. Dans le cas contraire le rayon du cluster est considéré comme correct et le résultat de l'ACP définit alors la *Direction Locale Principale* (DLP) du cluster (figure 14.9).

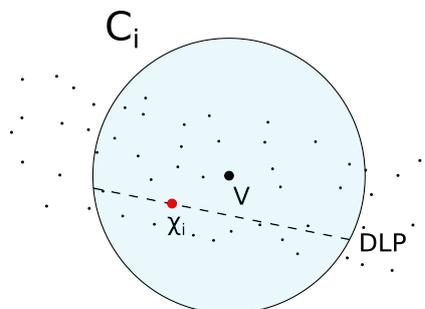


FIGURE 14.9. – Algorithme polyline : schéma 3

5. Les intersections entre la droite passant par le centroïde  $\chi_i$  du cluster et de vecteur directeur DLP et le cercle de centre  $V$  et de rayon  $r$  définissent les centres des deux nouveaux cluster  $\mathcal{C}_{i-1}$  et  $\mathcal{C}_{i+1}$  (figure 14.10).

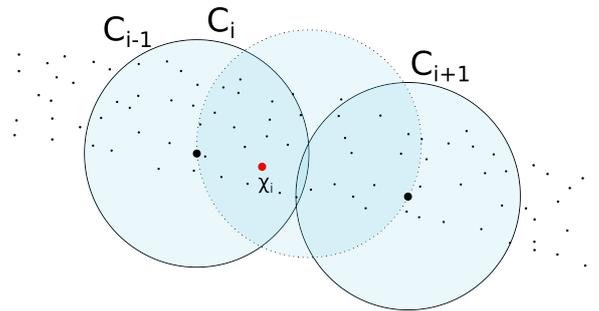


FIGURE 14.10. – Algorithme polyline : schéma 4

6. Réitération des processus à partir de l'étape 3, en calculant les centroïdes  $\chi_{i-1}$  et  $\chi_{i+1}$  (figure 14.11).

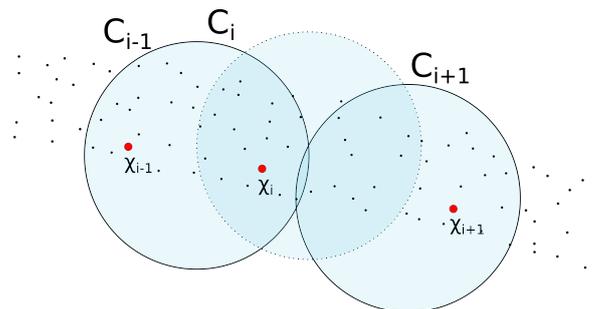
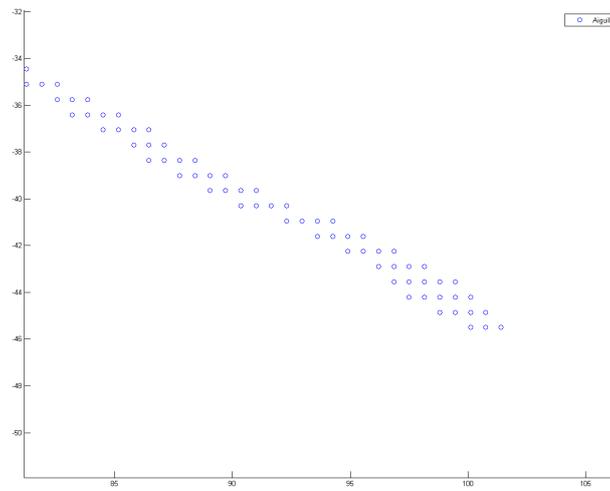
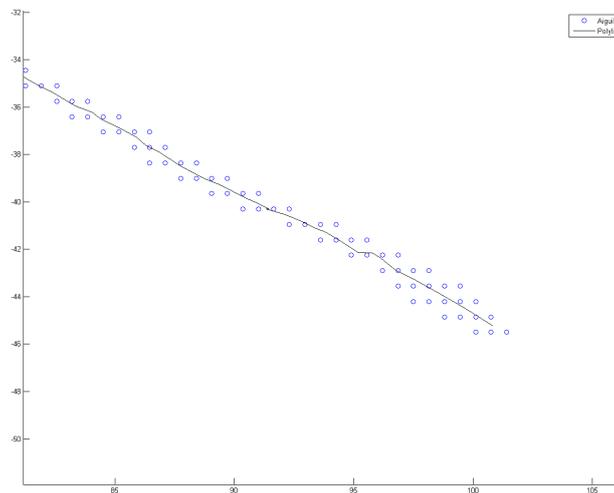


FIGURE 14.11. – Algorithme polyline : schéma 5

Cette procédure se répète jusqu'à ce qu'on finisse par avoir un cluster dont tous les points sont déjà contenus dans le cluster précédent. Lorsque que cette condition est vérifiée cela signifie que le cluster est situé à l'une des extrémités du nuage de points, dans notre cas cela correspond à l'une des extrémités de l'aiguille. Ainsi lorsque cette condition a été rencontrée deux fois cela signifie que le nuages de voxels a été parcouru jusqu'au deux extrémités. Les voxels de l'aiguille ont alors été parcourus entièrement. La polyline est alors le polygone ayant pour sommets les centroïdes des clusters ( $\chi_i$ ). Les figures 14.12 et 14.13 présentent un exemple de calcul de polyline sur des voxels d'une aiguille.



(a) Voxels de l'aiguille (vue de coupe)



(b) Voxels de l'aiguille et la polyline associée (vue de coupe)

FIGURE 14.12. – Représentation de la polyline associée aux voxels issus de la segmentation d'une aiguille.

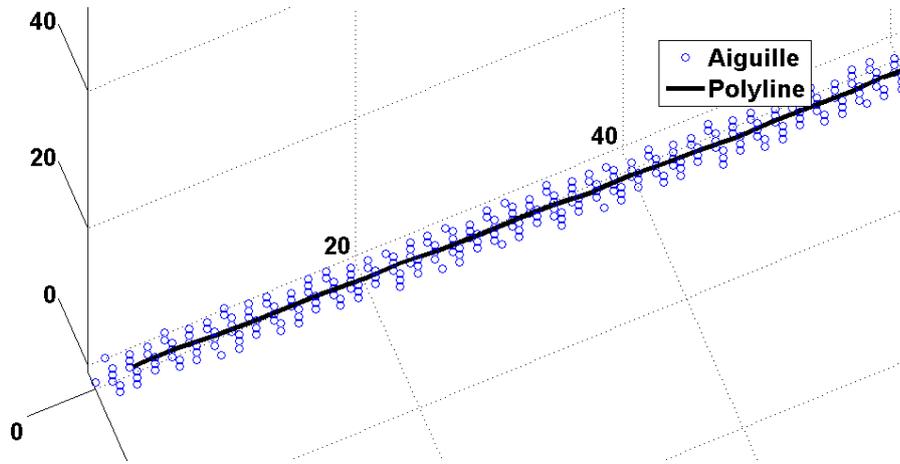


FIGURE 14.13. – Polyline associée aux voxels de l'aiguille

Une fois la polyline créée, on interpole ses sommets par une spline. Cette spline d'interpolation est une approximation grossière de l'aiguille, elle va néanmoins nous permettre d'ordonner les voxels. Pour chaque voxel appartenant à l'aiguille on va chercher le point sur la spline qui minimise la distance à ce voxel. Ainsi à partir de l'ensemble des voxels de l'aiguille, on obtient un ensemble de points sur la spline. En triant ces points d'une extrémité à l'autre selon leur l'abscisse curviligne, on peut alors trier les voxels de l'aiguille.

### 14.5.3 Lissage par B-Spline 3D

Cette partie détaille le lissage par spline des voxels de l'aiguille obtenue précédemment. En assimilant l'aiguille à une poutre, on va chercher à approximer la forme de la fibre neutre par une spline.

Comme expliqué dans l'état de l'art, notre choix s'est porté sur les B-Splines 3D quintique, donc de degré  $n = 5$ . Le nombre des points de contrôles de la spline est noté  $n_c$ . Le nombre de noeuds de la spline est noté  $m$ . En vertu des propriétés des B-Splines, on a la relation suivante :

$$m = n_c + n + 1$$

La spline  $\mathbf{S}$  étant une spline 3D, tous les points de contrôles sont également 3D :  $\forall i = 1, \dots, n_c, \mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$ . Les noeuds sont l'ensemble  $(t_i)_{i=1, \dots, m}$  définies de manière équidistantes sur  $[0, 1]$  avec les relations :

$$t_0 = \dots = t_n \quad \text{et} \quad t_{m-n} = \dots = t_m$$

La B-Spline est alors clampée, c'est à dire que ses extrémités sont son premier et dernier points de contrôles, on a :

$$\mathbf{S}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{S}(1) = \mathbf{P}_{n_c}$$

La B-Spline  $\mathbf{S}(t)$  est définie par la formule :

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{i=1}^{n_c} B_{i,n}(t) \mathbf{P}_i \quad (14.3)$$

Soit l'ensemble  $(\mathbf{X}_i)_{i=1,\dots,n_d}$  contenant les coordonnées des voxels de l'aiguille et  $(w_i)_{i=1,\dots,n_d}$  leurs valeurs associées. Soit  $(\bar{t}_i)_{i=1,\dots,n_d}$  la paramétrisation associée avec l'ensemble de ces voxels, on a alors  $t_i$  paramètre du voxel  $\mathbf{X}_i$  avec  $\bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_{n_d}$ . Comme vu dans l'état de l'art, le système de lissage prend alors la forme suivante :

$$\sum_{l=1}^{n_d} w_l \|\mathbf{S}(\bar{t}_l) - \mathbf{X}_l\|^2 + \lambda \int_0^1 \|\mathbf{S}''(t)\|^2 dt \quad (14.4)$$

La B-Spline de lissage se définit alors comme la fonction B-Spline minimisant le système (14.4) sur les points de contrôles  $(\mathbf{P}_i)_{i \in \llbracket 1, n_c \rrbracket}$ . On note  $(\mathbf{P}_{sol_i})_{i \in \llbracket 1, n_c \rrbracket}$  les points de contrôles minimisant le système (14.4) :

$$(\mathbf{P}_{sol_i})_{i \in \llbracket 1, n_c \rrbracket} = \min_{(\mathbf{P}_i)_{i \in \llbracket 1, n_c \rrbracket}} \left( \sum_{l=1}^{n_d} w_l \|\mathbf{S}(\bar{t}_l) - \mathbf{X}_l\|^2 + \lambda \int_0^1 \|\mathbf{S}''(t)\|^2 dt \right) \quad (14.5)$$

On note  $\mathbf{X}$  le vecteur contenant les coordonnées des voxels  $(\mathbf{X}_l)_{l \in \llbracket 1, n_d \rrbracket}$  et  $\mathbf{P}$  le vecteur contenant les coordonnées des points de contrôles de la spline  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1_x} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n_{d_x}} \\ \mathbf{X}_{1_y} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n_{d_y}} \\ \mathbf{X}_{1_z} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n_{d_z}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1_x} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n_{c_x}} \\ \mathbf{P}_{1_y} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n_{c_y}} \\ \mathbf{P}_{1_z} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n_{c_z}} \end{bmatrix}$$

On note  $\mathbf{W}$  la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs des voxels  $(\mathbf{X}_l)_{l \in \llbracket 1, n_d \rrbracket}$  :

$$\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{D}, \mathbf{D}, \mathbf{D}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{D} = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_{n_d})$$

On note  $\mathbf{B}$  la matrice composée des fonctions B-Splines de base évaluées sur la paramétrisation  $(\bar{t}_i)_{i=1,\dots,n_d}$  :

$$\mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{B}^*, \mathbf{B}^*, \mathbf{B}^*) \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} B_{1,n}(\bar{t}_1) & \cdots & B_{n_c,n}(\bar{t}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{1,n}(\bar{t}_{n_d}) & \cdots & B_{n_c,n}(\bar{t}_{n_d}) \end{bmatrix}$$

On note  $\Psi$  la *matrice de pénalité* :

$$\Psi = \text{diag}(\Psi^*, \Psi^*, \Psi^*) \quad \text{avec} \quad \Psi^* = \begin{bmatrix} \int_0^1 B_1^{(2)}(t)B_1^{(2)}(t)dt & \cdots & \int_0^1 B_1^{(2)}(t)B_{n_c}^{(2)}(t)dt \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 B_{n_c}^{(2)}(t)B_1^{(2)}(t)dt & \cdots & \int_0^1 B_{n_c}^{(2)}(t)B_{n_c}^{(2)}(t)dt \end{bmatrix}$$

L'écriture matricielle du système (14.4) est alors :

$$(\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{P})^T \mathbf{W} (\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{P}) + \lambda \mathbf{P}^T \Psi \mathbf{P} \quad (14.6)$$

Le système de minimisation (14.5) s'écrit alors matriciellement :

$$\mathbf{P}_{sol} = \min_{\mathbf{P} \in \mathbf{R}} \left( (\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{P})^T \mathbf{W} (\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{P}) + \lambda \mathbf{P}^T \Psi \mathbf{P} \right) \quad (14.7)$$

La solution du système de minimisation (14.5) est :

$$\mathbf{P}_{sol} = (\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} + \lambda \Psi)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{X} \quad (14.8)$$

Par conséquent la B-Spline de lissage  $\mathbf{S}_{est}$  est :

$$\mathbf{S}_{est}(t) = \sum_{i=1}^{n_c} B_{i,n}(t) \mathbf{P}_{sol,i} \quad (14.9)$$

#### 14.5.4 Validation croisée

Le choix du paramètre de lissage est crucial à cause de son impact sur l'estimation de la spline  $\mathbf{S}_{est}$ . Ainsi quand  $\lambda \rightarrow 0$  la somme au carré du système (14.4) devient prédominante sur l'intégrale, faisant tendre  $\mathbf{S}_{est}$  vers une spline d'interpolation. Le lissage est alors similaire à une approximation au sens des moindres carrés. Au contraire quand  $\lambda \rightarrow \infty$ , l'intégrale du système 14.4 devient prédominante, faisant tendre  $\mathbf{S}_{est}$  vers un polynôme de degré un. Le lissage est alors similaire à une régression linéaire.

Nous avons fait l'inventaire dans l'état de l'art des différentes méthodes permettant de donner une valeur appropriée au paramètre de lissage. Nous allons utiliser la validation croisée généralisée, une des méthodes les plus répandues. Cette méthode s'appuie sur les hypothèses statistiques présentées dans l'état de l'art qui stipule que le bruit de la discrétisation des données est un bruit blanc. Sous ces hypothèses l'approximation  $\lambda_{gcv}$  de la valeur optimale du paramètre de lissage  $\lambda$  est [CW78] :

$$\lambda_{gcv} = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n} \|(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\lambda)) \mathbf{Y}\|^2}{\left[ \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\lambda)) \right]^2} \quad (14.10)$$

avec  $\mathbf{A}$  la *matrice chapeau* du système (14.6) :

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} + \lambda \Omega)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \quad (14.11)$$

### 14.5.5 Fonctions courbures et angles d'orientation

On calcule maintenant les fonctions courbures et angles d'orientation pour chaque aiguille en utilisant les équations (14.1) et (14.2) présentées au début de ce chapitre dans lesquelles ces deux fonctions géométriques sont exprimées en fonction des dérivées premières, secondes et troisièmes de la courbe. Les expressions de ces fonctions à partir des dérivées de  $\mathbf{S}$  sont :

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{S}'(t) \wedge \mathbf{S}''(t)\|}{\|\mathbf{S}'(t)\|^3} \quad (14.12)$$

$$\theta(t) = - \int_{t_0}^t \tau(u) \|\mathbf{S}'(u)\| du \quad (14.13)$$

$$\text{avec } \tau(u) = \frac{[\mathbf{S}'(u), \mathbf{S}''(u), \mathbf{S}'''(u)]}{\|\mathbf{S}'(u) \wedge \mathbf{S}''(u)\|^2}$$

L'angle d'orientation  $\theta$  dépend de la torsion mathématique  $\tau$ . Or cette dernière n'est pas définie aux points d'inflexion de la courbe car la courbure s'annule et le dénominateur de  $\tau$  devient nul. C'est la raison pour laquelle le repère de Frenet n'est pas défini aux points d'inflexion.

Néanmoins, en pratique, l'approximation de ces points d'inflexion par la B-Spline de lissage donne des valeurs de courbure non-nulles. La figure 14.14 illustre ce cas en représentant la courbure d'une des aiguilles reconstruites, on constate que vers  $s=13$  mm la courbure devient très petite ( $\kappa(s) \sim 10^{-6}$ ) comparé au reste de l'aiguille où la courbure a un ordre de grandeur de  $10^{-3}$ .

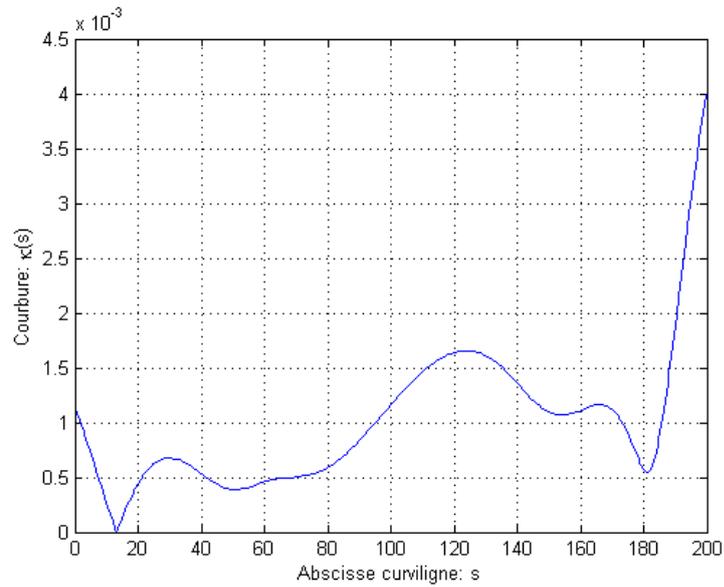


FIGURE 14.14. – Courbure de l'aiguille reconstruite n°8.

Le calcul de la torsion mathématique reste donc possible mais on constate que la torsion présente alors des variations très importantes dans cette région comme le montre la figure 14.15.

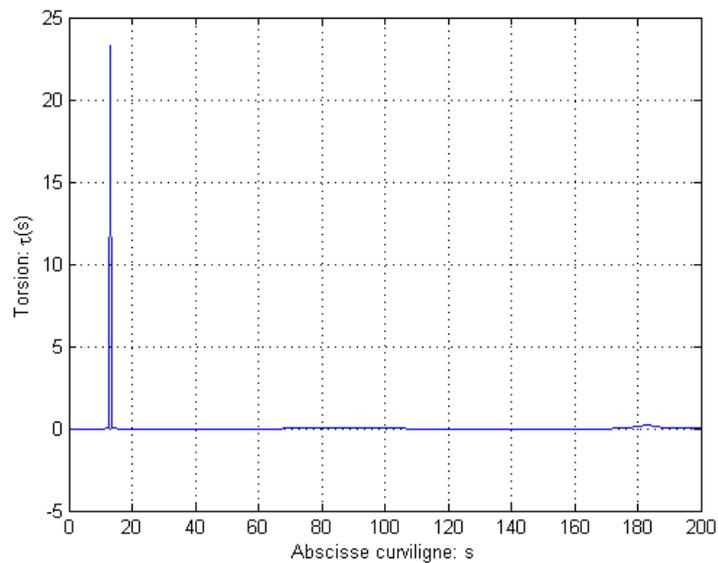


FIGURE 14.15. – Torsion de l'aiguille reconstruite n°8.

On observe un pic de torsion vers  $s = 13\text{mm}$ .

La figure 14.16 illustre l'instabilité du repère de Frenet causée par ce phénomène. Le repère de Frenet effectue des rotations très brusques autour de son axe tangent

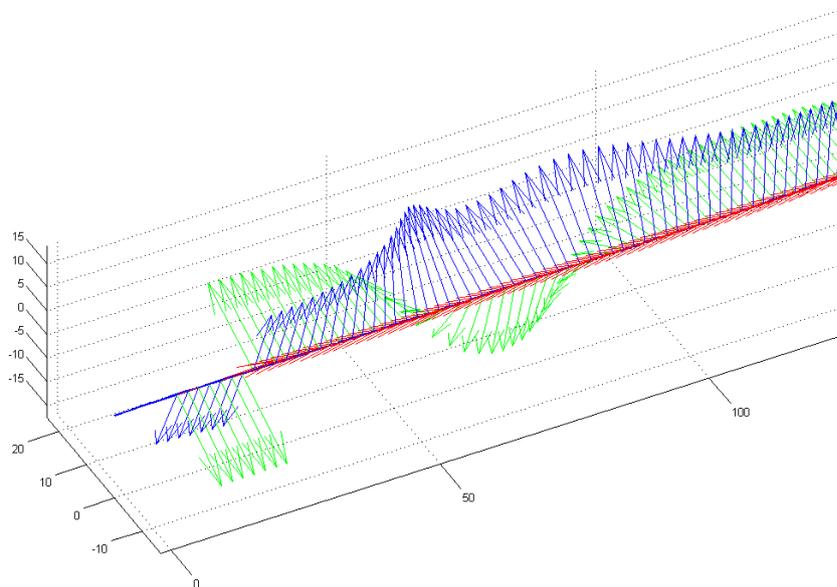


FIGURE 14.16. – Exemple d'instabilité du repère de Frenet d'une courbe presque droite. On remarque une discontinuité situé dans la zone d'abscisse curviligne 25.

On peut qualifier ce phénomène de "parasite" car il est hautement sensible aux bruits de la discrétisation de la fonction originale. On peut ainsi imaginer que deux scanners d'un même piqué conduisent à des approximations complètement différentes de la torsion mathématique de la forme de l'aiguille du piqué. On aurait alors également des valeurs d'angle d'orientation très différentes.

On précise que ce phénomène est **intrinsèque** à la géométrie de la courbe approximée et ne dépend donc pas de la qualité de l'approximation du lissage B-Spline. Il ne peut donc pas être solutionné par un changement de paramètres tel qu'une augmentation du nombre de points de contrôle de la spline ou une augmentation de son degré.

On rappelle que dans le cas d'une courbe droite, la courbure n'est pas définie et que le phénomène est alors susceptible d'apparaître : les aiguilles étant de forme droite à l'état initial, ce phénomène peut donc potentiellement toucher chaque forme d'aiguille ce qui constitue un problème.

Par conséquent le calcul de l'angle d'orientation  $\theta$  par intégration de la torsion à partir de l'équation (14.13) se révèle particulièrement instable et n'est donc pas utilisée en pratique.

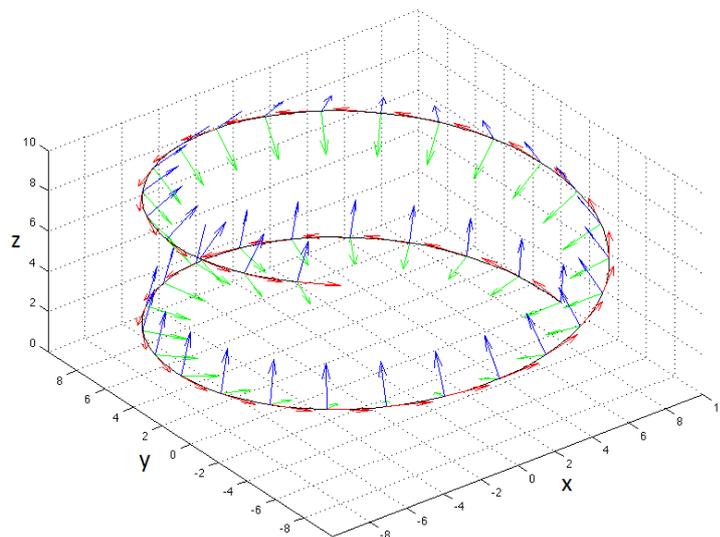
Pour calculer l'angle d'orientation  $\theta$  nous allons utiliser un autre type de repère mobile que le repère de Frenet : le *repère de rotation minimale*. On appelle repère de rotation minimale, un repère mobile qui ne subit pas de rotation autour de son axe tangent. Pour

tout arc régulier de classe  $C^1$  il existe un repère de rotation minimale associé [WJZL08]. Soit un repère de rotation minimale  $(\mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{V})$  associé à un arc régulier. Dire que  $(\mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{V})$  est un repère de rotation minimale signifie que l'on a alors les propriétés suivantes concernant les dérivées des vecteurs :

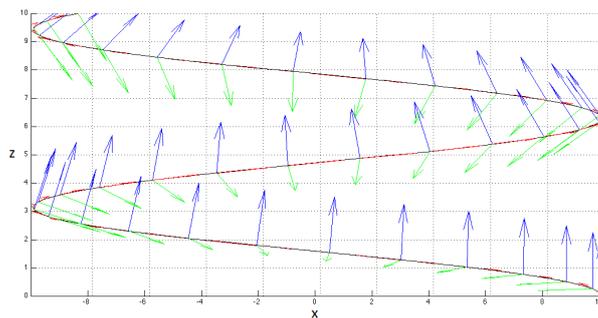
$$\mathbf{U}' \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\mathbf{V}' \cdot \mathbf{U} = 0$$

Les figures 14.17a et 14.17b représentent le repère de rotation minimale d'une hélice.



(a) Vue de 3D



(b) Vue de côté

FIGURE 14.17. – Repère de rotation minimale d'une hélice  
 $\mathbf{T}$  (vecteur rouge),  $\mathbf{U}$  (vecteur vert),  $\mathbf{V}$  (vecteur bleu).

La partie concernant la reconstruction a introduit la paramétrisation de la poutre par le repère mobile  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$ . Sous l'hypothèse de torsion mécanique nulle, on a l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}' = \kappa \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \quad (14.14)$$

On a donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1' \cdot \mathbf{N}_2 &= 0 \\ \mathbf{N}_2' \cdot \mathbf{N}_1 &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, sous l'hypothèse de torsion mécanique nulle, le repère mobile  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  de paramétrisation de la poutre utilisé par Reissner [Rei73] est un repère de rotation minimale.

De plus, à partir de l'équation 14.14, on peut exprimer les fonctions  $\kappa$  et  $\theta$  en fonction des vecteurs  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  et de leurs dérivées :

$$\kappa = \sqrt{(\mathbf{N}_1' \cdot \mathbf{T})^2 + (\mathbf{N}_2' \cdot \mathbf{T})^2} \quad (14.15)$$

$$\cos(\theta) = -\frac{\mathbf{N}_1' \cdot \mathbf{T}}{\sqrt{(\mathbf{N}_1' \cdot \mathbf{T})^2 + (\mathbf{N}_2' \cdot \mathbf{T})^2}} \quad (14.16)$$

$$\sin(\theta) = \frac{\mathbf{N}_2' \cdot \mathbf{T}}{\sqrt{(\mathbf{N}_1' \cdot \mathbf{T})^2 + (\mathbf{N}_2' \cdot \mathbf{T})^2}} \quad (14.17)$$

Le calcul des fonctions  $\kappa$  et  $\theta$  va donc s'opérer en deux temps :

1. on calcule le repère de rotation minimal  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  de la courbe  $\mathbf{S}$ .
2. on calcule  $\kappa$  et  $\theta$  à partir du repère  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$  avec les équations 14.15, 14.16 et 14.17.

Les repères de rotations minimales ont été étudiés dans de nombreux articles [Bis75, Klo86, Gug89]. Dans son article, Guggenheimer montre que le repère de rotation minimale peut se calculer à partir du repère de Frenet [Gug89]. Avec ce mode de calcul, le phénomène d'instabilité du repère de Frenet expliqué précédemment peut se répercuter sur le repère de rotation minimale comme illustré dans la figure 14.18.

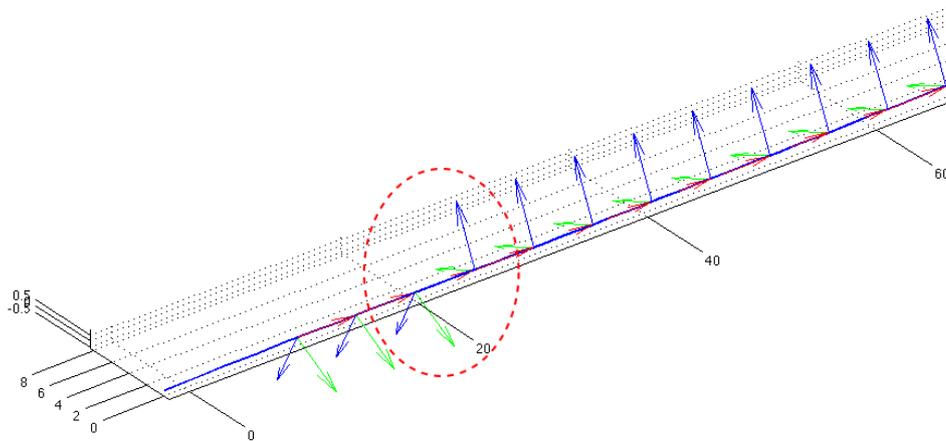


FIGURE 14.18. – Déformée d'une aiguille lors d'une insertion dans des tissus. L'aiguille est faiblement déformée, le calcul de son repère de rotation minimale par intégration numérique conduit à une instabilité matérialisée par la rotation brusque du repère autour de l'axe tangent à la courbe (entourée en rouge sur la figure).

Des méthodes de calcul beaucoup plus stables ont été développées pour calculer le repère de rotation minimale. La méthode utilisée dans la suite de ce manuscrit est celle développée par Wang *et al.* [WJZL08], appelé *Double reflection method*.

Cette méthode procède au calcul du repère de rotation minimale par des transformations géométriques plutôt que par des calculs numériques, ce qui lui confère une stabilité et une précision supérieure dans les cas critiques cités précédemment.

Hypothèses : Soit les points de la courbe  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{x}_1$  et leurs tangentes associées  $\mathbf{T}_0$  et  $\mathbf{T}_1$ . Le repère de rotation minimale au point  $\mathbf{x}_0$  est  $R_0 = (\mathbf{T}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0)$ .

Le calcul du repère de rotation minimale  $R_1 = (\mathbf{T}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1)$  au point  $\mathbf{x}_1$  se décompose en deux étapes :

1. Soit  $\mathcal{P}_1$  le plan bissecteur des points  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{x}_1$ . On définit le repère intermédiaire  $R_0^L = (\mathbf{T}_0^L, \mathbf{U}_0^L, \mathbf{V}_0^L)$  comme la réflexion du repère  $R_0$  par rapport au plan bissecteur  $\mathcal{P}_1$  (voir figure 14.19a).
2. Soit  $\mathcal{P}_2$  le plan bissecteur des points  $\mathbf{x}_1 + \mathbf{T}_0^L$  et  $\mathbf{x}_1 + \mathbf{T}_1$ . Le repère  $R_1$  est la réflexion du repère  $R_0^L$  par rapport au plan bissecteur  $\mathcal{P}_2$  (voir figure 14.19b).

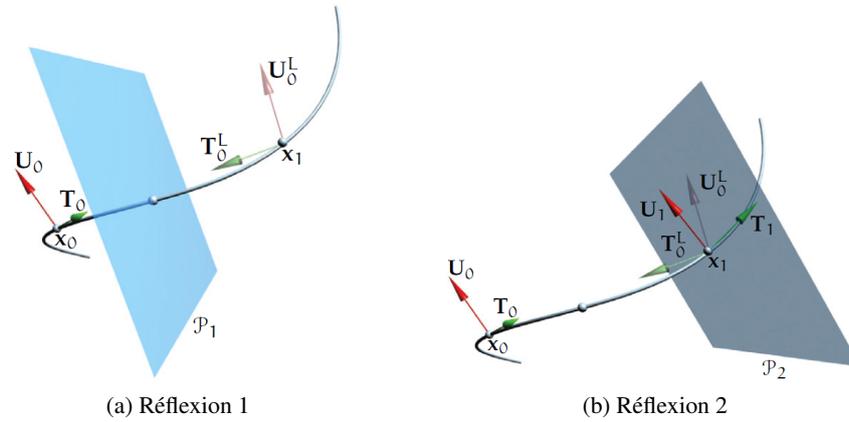


FIGURE 14.19. – Principe de l’algorithme de calcul du repère de rotation minimale par double réflexion.

Schéma des transformations géométriques utilisées par l’approche *Double reflection method* (extraits de l’article de Wang [WJZL08]).

L’implantation de cette méthode sous forme de pseudo-code, extraite de l’article de Wang *et al.*, est la suivante :

---

**Algorithm 3** Input : Points de la courbe  $\mathbf{x}_i$  et tangentes associées  $\mathbf{T}_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .  
 Repère de rotation minimale initial  $R_0 = (\mathbf{T}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0)$   
 Output : Approximation des repères de rotation minimales  $R_i = (\mathbf{T}_i, \mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

---

```

for  $i \leftarrow 0, n - 1$  do
   $\mathbf{w}_1 \leftarrow \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$ 
   $c_1 \leftarrow \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_1 \rangle$ 
   $\mathbf{U}_i^L \leftarrow \mathbf{U}_i - \frac{2}{c_1} \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{U}_i \rangle \mathbf{w}_1$ 
   $\mathbf{T}_i^L \leftarrow \mathbf{T}_i - \frac{2}{c_1} \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{T}_i \rangle \mathbf{w}_1$ 
   $\mathbf{w}_2 \leftarrow \mathbf{T}_{i+1} - \mathbf{T}_i^L$ 
   $c_2 \leftarrow \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_2 \rangle$ 
   $\mathbf{U}_{i+1} \leftarrow \mathbf{U}_i^L - \frac{2}{c_2} \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{U}_i^L \rangle \mathbf{w}_2$ 
   $\mathbf{V}_{i+1} \leftarrow \mathbf{T}_{i+1} \wedge \mathbf{U}_{i+1}$ 
   $R_{i+1} \leftarrow (\mathbf{T}_{i+1}, \mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+1})$ 
end for

```

---

La figure 14.20 montre comment cette méthode, appliquée sur la même courbe que celle de la figure 14.18, permet d’obtenir un calcul de repère de rotation minimale correct là où la méthode précédente échoue.

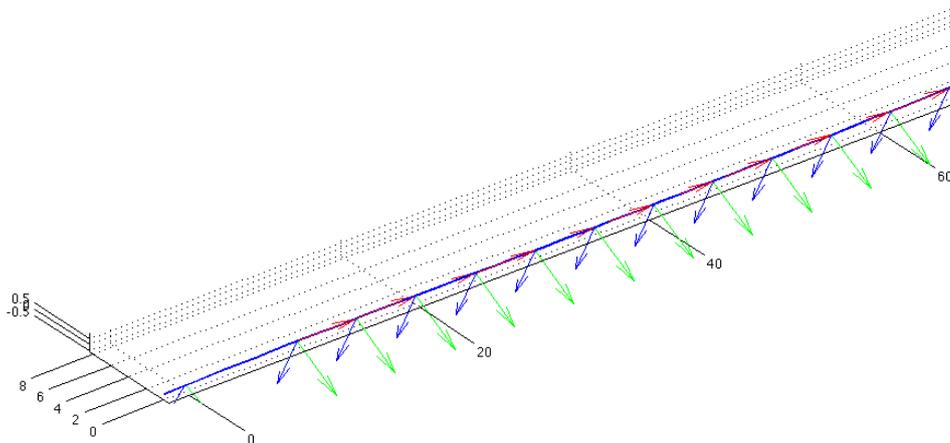


FIGURE 14.20. – Repère de rotation minimale d'une courbe presque droite calculée par la méthode de double réflexion.

On dispose donc d'une méthode de calcul du repère de rotation minimale efficace qui permet ainsi de calculer les fonctions courbures et angles d'orientations de chaque aiguille, en s'affranchissant des limitations intrinsèques à l'utilisation du repère de Frenet.

## 14.6 Résultats

### 14.6.1 Approximation de formes

Cette partie présente les résultats de reconstruction sous forme de B-spline des aiguilles des scanners de porcs et de patients.

Les aiguilles utilisées sont des aiguilles hypodermiques standards composées de deux parties : la partie interne et la partie externe comme on peut le voir dans la figure 14.21.

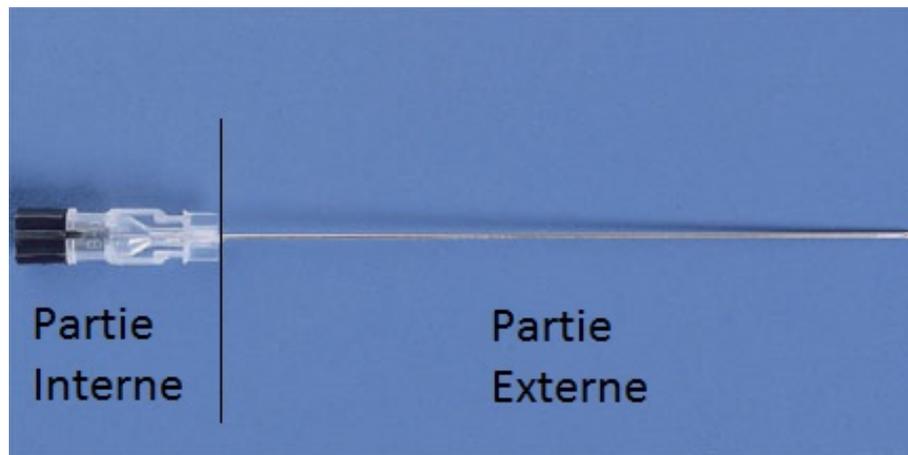


FIGURE 14.21. – Partie externe et interne de l'aiguille.

Source : [www.fishersci.com](http://www.fishersci.com)

Les aiguilles présentes dans les scanners de porcs et les scanners patients sont des aiguilles de longueur 200 mm, c'est la taille de leur partie externe. Les aiguilles sont reconstruites sous forme de B-Spline dont on peut mesurer la longueur grâce à l'abscisse curviligne. Les longueurs des aiguilles reconstruites de porcs sont présentées dans l'histogramme de la figure 14.22.

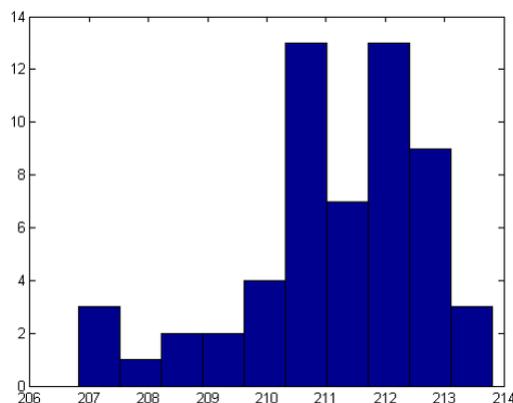


FIGURE 14.22. – Histogramme des longueurs des aiguilles de porcs (en mm).

On remarque que les longueurs des aiguilles reconstruites sont comprises entre 207 mm et 214 mm, soit beaucoup plus que la longueur réelle des aiguilles utilisées qui est de 200 mm. Ce surplus de longueur est dû au fait que lors de la segmentation de l'aiguille dans le scanner toute la partie métallique associée à l'aiguille est segmentée, pas seulement la partie externe mais aussi la partie interne présente dans l'embase (figure 14.21).

Or on s'intéresse uniquement à la partie externe de l'aiguille, celle susceptible de se défor-

mer. On effectue donc un recalage de chaque aiguille de façon à faire coïncider le début de l'aiguille avec le début de la partie externe. Ce recalage consiste à utiliser l'abscisse curviligne de la B-Spline pour mesurer la longueur de l'aiguille à partir de l'extrémité distale de la B-Spline et ainsi définir la nouvelle extrémité proximale de l'aiguille correspondant à l'interface entre les parties internes et externes.

On définit la *flèche* d'une aiguille déformée comme la distance entre l'extrémité distale et la droite passant par l'extrémité proximale et tangente à l'aiguille (figure 14.23).

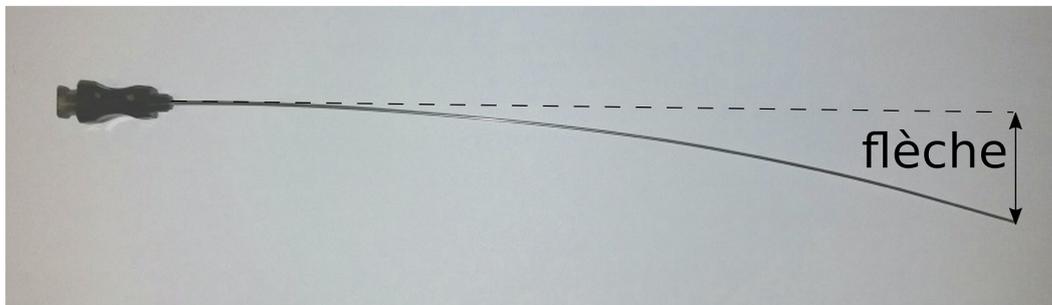


FIGURE 14.23. – Flèche d'une aiguille déformée

#### 14.6.1.1 Aiguilles de porcs

A titre d'exemple, quelques reconstructions de formes d'aiguille de porcs sont présentées dans la figure 14.24. L'ensemble des figures des reconstructions d'aiguilles de porcs est disponible dans l'annexe 19.4.1.

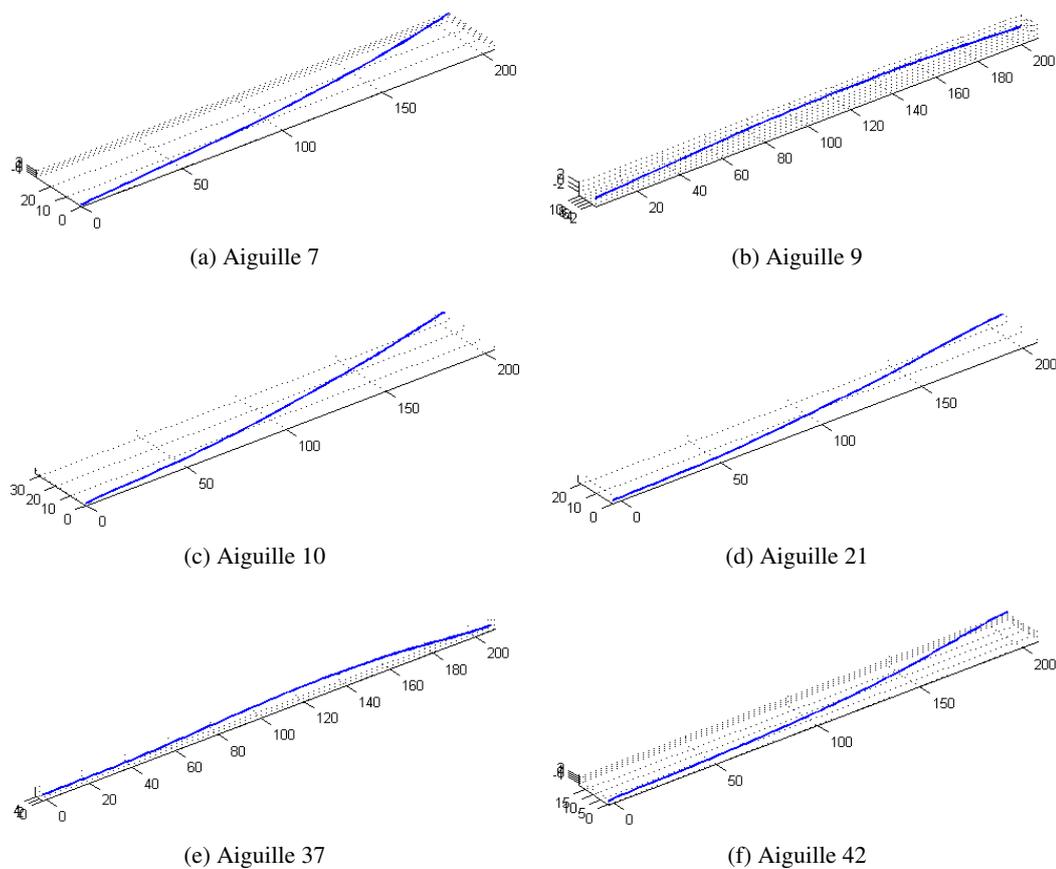
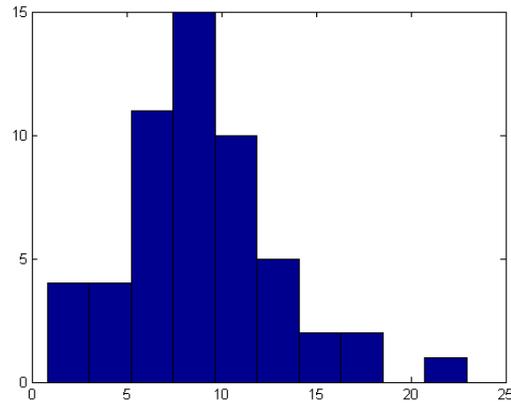


FIGURE 14.24. – Reconstruction des aiguilles de porcs

On présente maintenant quelques résultats préliminaires concernant les aiguilles de porcs reconstruites. Les statistiques concernant les flèches des aiguilles sont regroupées dans le tableau 14.1 tandis que son histogramme est présenté dans la figure 14.25.

Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart type
0.8 mm	22.9 mm	9.0 mm	4.0 mm

TABLE 14.1. – Données statistiques des flèches des aiguilles porcs reconstruites.

FIGURE 14.25. – Histogramme des flèches des aiguilles de porcs (en *mm*).

### 14.6.1.2 Aiguilles patients

La figure 14.26 présente quelques reconstructions de formes d'aiguille de patients. L'ensemble des figures des reconstructions d'aiguilles de patients est disponible dans l'annexe 19.4.2.

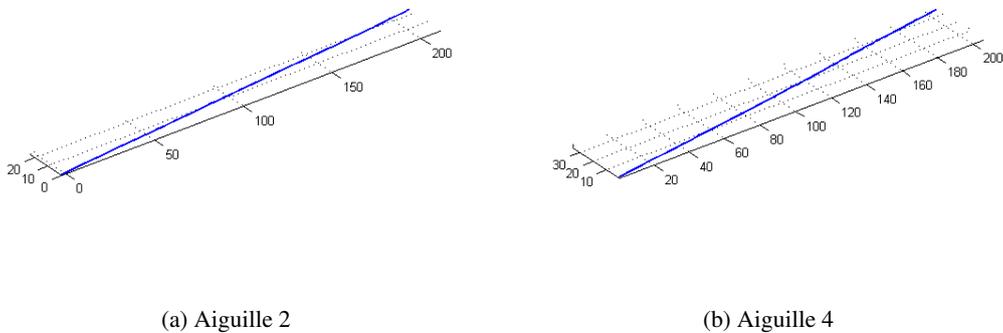


FIGURE 14.26. – Reconstruction des aiguilles patients

Les statistiques concernant les flèches des aiguilles sont regroupées dans le tableau 14.1 tandis que son histogramme est présenté dans la figure 14.25.

Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart type
1.9 mm	11.1 mm	5.3 mm	2.9 mm

TABLE 14.2. – Données statistiques des flèches des aiguilles patients reconstruites.

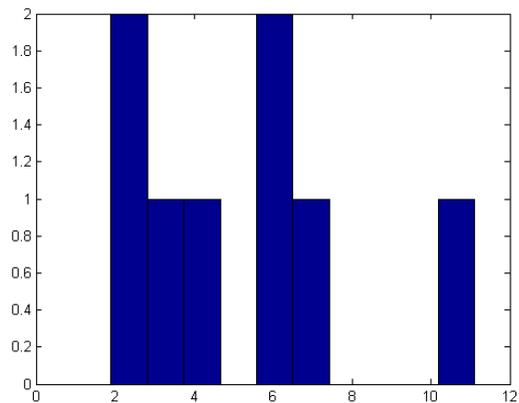


FIGURE 14.27. – Histogramme des flèches des aiguilles de patients (en *mm*).

## 14.6.2 Approximations de la courbure et de l'angle d'orientation

### 14.6.2.1 Aiguilles de porcs

Les figures 14.28 et 14.29 présentent les fonctions courbures et angles d'orientation pour deux aiguilles de porcs reconstruites.

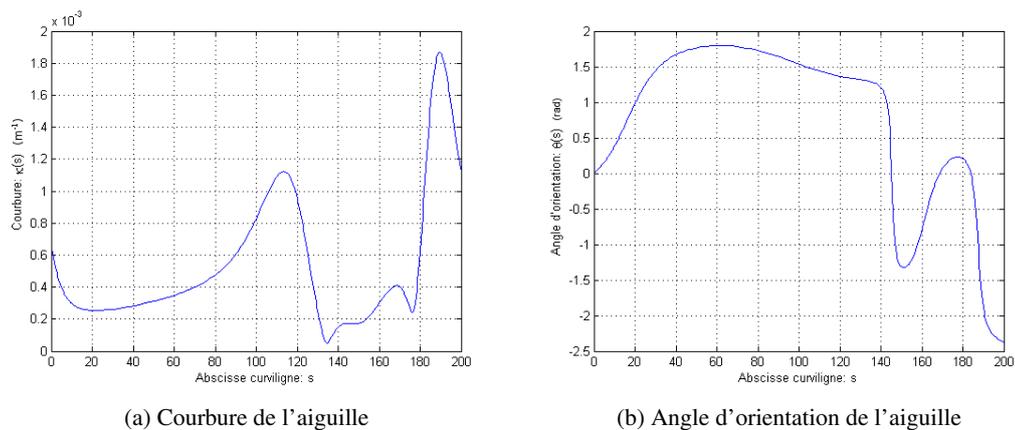


FIGURE 14.28. – Fonctions courbure et angle d'orientation de l'aiguille de porc n°4.

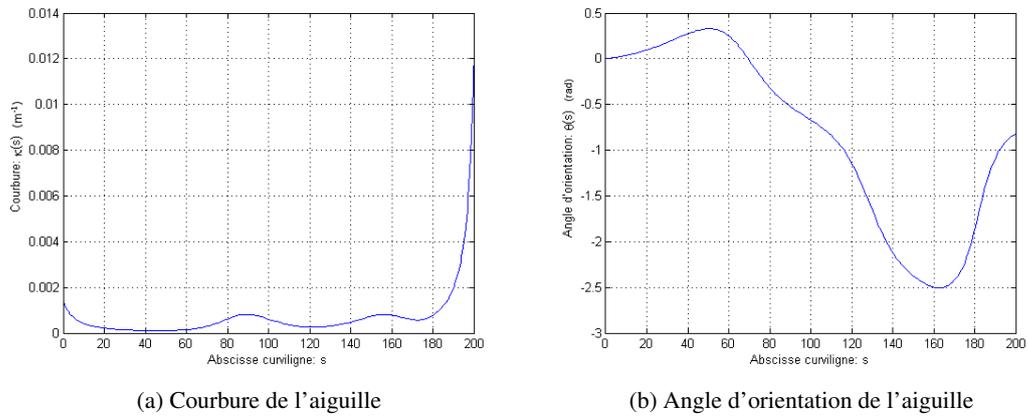


FIGURE 14.29. – Fonctions courbure et angle d'orientation de l'aiguille de porc n°6.

### 14.6.2.2 Aiguilles patients

Les figures 14.30 et 14.31 présentent les fonctions courbures et angles d'orientation pour deux aiguilles patients reconstruites.

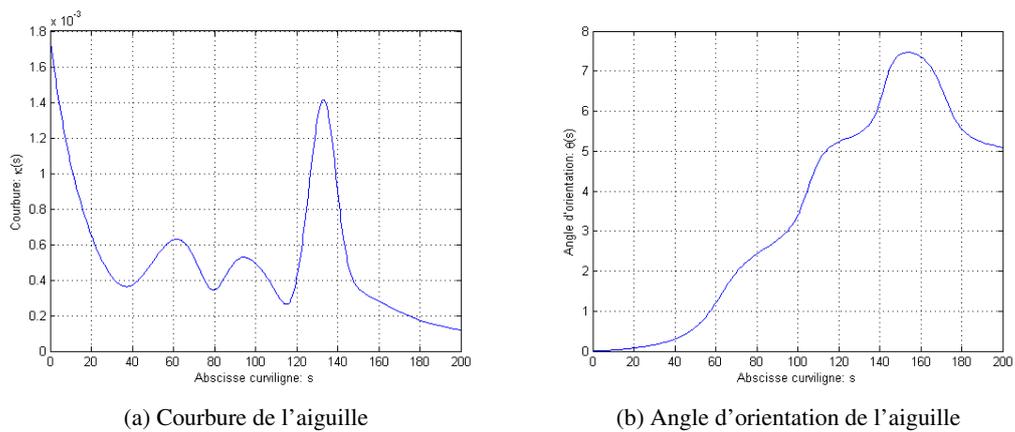


FIGURE 14.30. – Fonctions courbure et angle d'orientation de l'aiguille patient n°3.

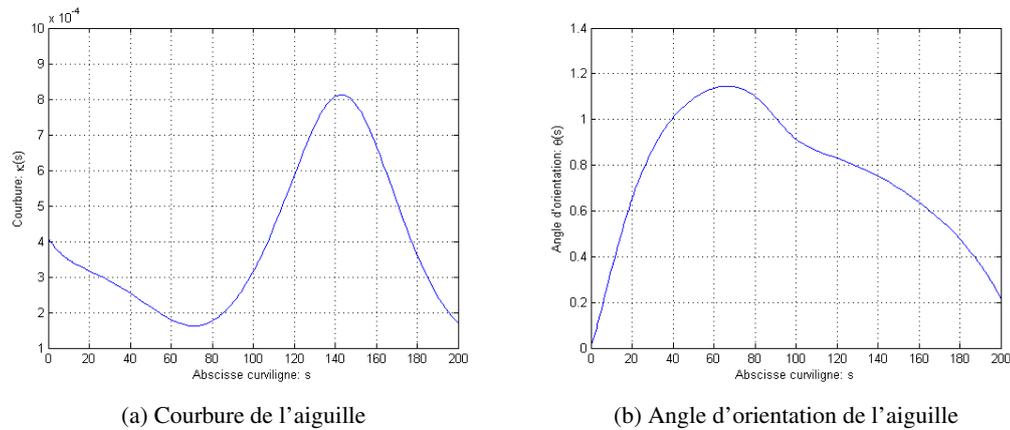


FIGURE 14.31. – Fonctions courbure et angle d'orientation de l'aiguille patient n°5.

## 14.7 Discussion

Les résultats précédents ont permis d'illustrer les fonctions courbures et angles d'orientation à partir des scanners de piqués d'aiguilles. Des travaux précédents, conduits par Adeline Robert [RCB<sup>+</sup>13], avaient déjà permis de caractériser un échantillon d'aiguille de données scanners par une base de force mais le traitement était alors réalisé en 2D [RCB<sup>+</sup>13]. A notre connaissance, il n'existe pas d'étude de données expérimentales réalisée en 3D portant sur les déformations des aiguilles.

La principale limite de notre étude concerne la précision avec laquelle ont été obtenues les fonctions courbures et angles d'orientation. La figure 14.32 récapitule les processus d'obtention de ces fonctions avec les différents erreurs d'approximation commise entre chaque étapes.

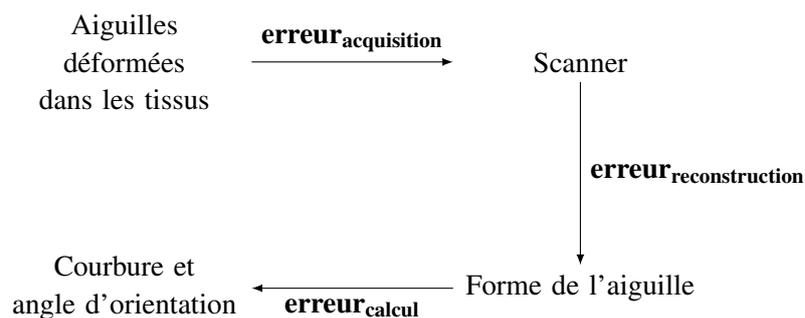


FIGURE 14.32. – Erreurs et étapes de reconstructions.

On représente les erreurs des différentes étapes du calcul de la courbure et de l'angle d'orientation d'une aiguille à partir d'un de ses scanners.

Par conséquent l'erreur totale d'approximation est la somme des erreurs d'approximation

commise à chaque étape :

$$\begin{aligned} \mathbf{erreur}_{\text{total}} &= \mathbf{erreur}_{\text{acquisition}} \\ &+ \mathbf{erreur}_{\text{reconstruction}} \\ &+ \mathbf{erreur}_{\text{calcul}} \end{aligned}$$

L'**erreur d'acquisition** est causée par la discrétisation de la forme continue de l'aiguille dans les voxels et est donc déjà présente dans les scanners sur lesquels nous travaillons. L'**erreur de reconstruction** est due au bruit présent sur le scanner et la méthode de reconstruction choisie, dans notre cas le lissage par B-Spline quintique utilisant la validation croisée généralisée. L'état de l'art réalisé en début de chapitre avait pour objectif d'être le plus complet possible pour balayer le spectre de l'ensemble des méthodes permettant d'estimer les dérivées et ainsi pouvoir choisir la plus précise possible. Dans notre cas l'utilisation conjointe du lissage par spline et de la validation croisée généralisée, deux méthodes ayant fait leur preuve comme méthodes d'approximation constitue un argument en faveur de la précision et de la performance de notre méthode d'approximation. Néanmoins cette dernière n'est pas exempte d'erreur d'approximation comme on peut le voir dans les figures 14.28 et 14.29. En effet, les approximations de la courbure au voisinage de l'abscisse  $s=200$  mm sont particulièrement mauvaises : la courbure de l'aiguille devrait être nulle à l'extrémité distale car aucun moment de flexion ne s'exerce sur celle-ci. Ce phénomène provient de la mauvaise approximation réalisée par le lissage aux extrémités de la spline [Rag83, GM79]. Il serait intéressant de pouvoir évaluer l'erreur commise par notre méthode de reconstruction de forme. Malheureusement cette tâche se révèle ardue car on ne connaît pas la forme précise de l'aiguille originale ce qui rend la comparaison impossible. L'erreur de calcul est due quant à elle aux approximations réalisées par les méthodes de calcul utilisées pour le calcul des fonctions courbure et angle d'orientation. Comme précisé dans ce chapitre, la méthode utilisée, basée sur le repère de rotation minimale calculé à partir de transformation géométrique, se révèle de loin beaucoup plus stable et précise que les méthodes de calcul les plus basiques utilisant les formules brutes de ces deux fonctions. On a donc, tout au long de ce chapitre, apporté un soin particulier à construire une méthode d'approximation des fonctions courbure et angle d'orientation qui soit la plus précise possible.

Les résultats obtenus grâce à cette approche, sur deux ensembles d'aiguilles différents, confèrent ainsi à notre étude des déformations d'aiguilles précision et exhaustivité.

## 14.8 Conclusion

On a donc fait l'approximation des formes des aiguilles de nos deux ensembles de références porcs et patients grâce aux B-Splines 3D. Une fois l'approximation réalisée, on a pu extraire les fonctions courbure et angle d'orientation par le calcul des repères de rotations

minimales. A chaque piqué d'aiguille on a ainsi associé les fonctions courbure et angle d'orientation de la forme d'aiguille. Ces couples de fonctions vont être utilisées dans la suite du manuscrit.



# CHAPITRE 15

## OPTIMISATION DES POSITIONS DES CAPTEURS

### 15.1 Introduction

Cette partie aborde le problème de positionnement des triplets de capteurs le long de l'aiguille. Pour un nombre de triplets de capteurs donné on souhaite trouver les positions de ces triplets qui vont permettre de reconstruire la forme de l'aiguille le plus précisément possible. On présente tout d'abord les méthodes existantes dans la littérature en soulignant leurs éventuels points faibles. Notre méthode reprendra la même structure de ces méthodes avec des améliorations visant à corriger ces points faibles.

### 15.2 Etat de l'art

Le problème d'optimisation de la position des capteurs sur l'aiguille est un sujet relativement récent et donc assez peu documenté [PED<sup>+</sup>10, SGA<sup>+</sup>13]. De plus, peu d'articles abordant le problème de reconstruction de la forme de l'aiguille à partir des capteurs traitent également du problème de leurs positions optimales. La problématique est de trouver la position des capteurs qui permet d'obtenir la reconstruction de l'aiguille la plus précise possible. La mesure de précision est faite à partir de l'erreur de reconstruction définie comme la distance entre les extrémités de l'aiguille reconstruite et de l'aiguille originale. Dans leurs articles Park *et al.* [PED<sup>+</sup>10] et Seifabadi *et al.* [SGA<sup>+</sup>13] proposent une méthode pour construire des ensembles d'aiguilles de référence à partir de forces théoriques 2D en utilisant la théorie des poutres. Le principe est le suivant : on commence par modéliser l'aiguille et son cas de charge lors d'une insertion dans les tissus par une aiguille droite sur laquelle on applique différentes forces ponctuelles et continues comme illustrées dans la figure 15.1.

Les amplitudes de ces forces sont fixées à partir de données expérimentales et présentées dans le tableau 15.1. Un cas de charges est alors déterminé de manière aléatoire et par application de la théorie des poutres 2D on détermine la déformée associée. Cette der-

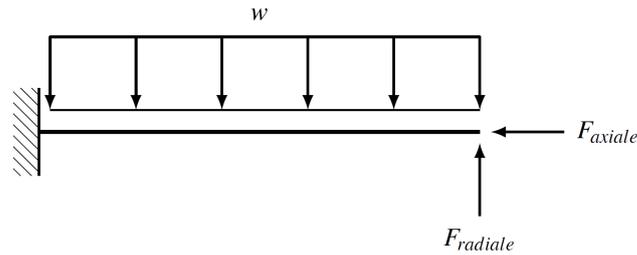


FIGURE 15.1. – Cas de charges théorique d’une aiguille.

Modèle de forces appliquées sur une aiguille modélisée par une poutre droite.  $F_{axiale}$  et  $F_{radiale}$  sont des forces ponctuelles tandis que  $w$  est une densité linéique de force.

nière constituera alors l’aiguille originale. L’ensemble des aiguilles ainsi créé constitue l’ensemble d’aiguilles de référence.

Auteurs	Charge distribuée $w (N.m^{-1})$	Force ponctuelle	
		Axiale $F_x (N)$	Radiale $F_y (N)$
Park <i>et al.</i>	[-5.13,5.13]	[0.0,0.1]	[-0.1,0.1]
Seifabadi <i>et al.</i>	[-5.0,5.0]	[0.0,0.15]	[-5.0,5.0]

TABLE 15.1. – Modèle de forces des aiguilles de références.

L’enjeu va maintenant être d’identifier les positions optimales des capteurs de cet ensemble d’aiguille de références qui sont définies comme les positions qui minimisent l’erreur quadratique moyenne de reconstruction. Pour cela, les valeurs de déformations renvoyées par les capteurs sont simulées à partir des aiguilles composant l’ensemble d’aiguille de référence. Ces valeurs de déformations sont ensuite utilisées avec la théorie des poutres 2D pour obtenir les formes des aiguilles reconstruites. L’erreur de reconstruction peut alors être calculée pour chaque aiguille et donc pour tout l’ensemble des aiguilles de référence. Les différentes étapes de cette méthode sont présentées dans la figure 15.2.

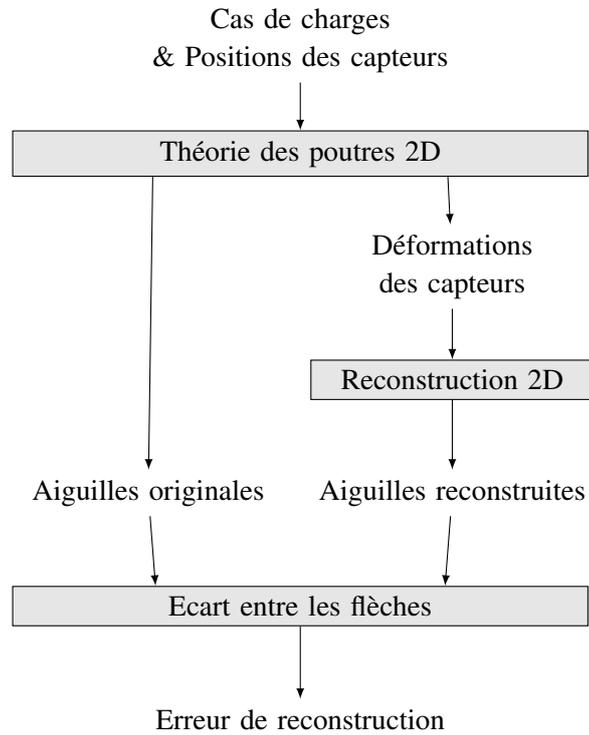


FIGURE 15.2. – Erreur de reconstruction 2D pour une position donnée de capteurs à partir de cas de charges.

La fiabilité des résultats dépend de l'exhaustivité de cet ensemble d'aiguille. On voit dans le tableau 15.1 que des les amplitudes des forces présentent des différences. Ainsi alors que les amplitudes des forces distribuée et axiale sont similaires, l'amplitude de la force radiale varie d'un facteur 50 selon les articles. Cela illustre la difficulté d'évaluer les forces appliquées à l'aiguille durant l'insertion. Cette importante différence d'amplitude entrainerait des disparités entre les formes des ensembles de références d'aiguilles qui sont pourtant censés être représentatifs (et donc exhaustifs) des façons dont se déforment les aiguilles. Ces exemples illustrent ici le problème inhérent de cette méthode qui est l'insuffisance de connaissance de la représentativité des cas de forces employés.

## 15.3 Méthodes

Nous allons dans cette section présenter notre propre méthode de positionnement des capteurs de déformations sur l'aiguille.

Notre objectif est double par rapport aux méthodes existantes :

- augmenter la précision : pour cela nous allons traiter le problème non pas en 2D mais directement en 3D. A notre connaissance il n'existe pas dans la littérature d'article traitant du positionnement des capteurs avec un traitement mathématique et physique complètement 3D.

- améliorer la représentativité : comme vu précédemment, un des principal défaut des méthodes existantes de positionnement des capteurs concerne la représentativité des cas de charges appliqués. Pour pallier ce problème les aiguilles de références seront générées, non pas à partir de données aléatoires, mais à partir de données réelles provenant de l'étude des populations d'aiguilles réalisée précédemment. L'ensemble des aiguilles de référence est ainsi constitué des B-Splines de lissage créé dans la partie précédente.

La partie suivante est consacrée à la présentation de la méthode pour trouver les positions optimales des triplets de capteurs qui sont les positions qui vont minimiser l'erreur de reconstruction quadratique moyenne des aiguilles de référence. Notre approche se divise en deux parties :

1. Une méthode est mise en place pour évaluer l'erreur de reconstruction d'une aiguille de référence pour une position de capteurs donnée. Pour cela on va simuler les données renvoyées par les capteurs pour cette position et utiliser ces données pour obtenir l'aiguille reconstruite. L'erreur de reconstruction est alors la distance entre les extrémités distales de l'aiguille de référence et de l'aiguille reconstruite. Ces étapes sont illustrées dans la figure 15.3.
2. Cette erreur de reconstruction va ensuite être minimisée sur l'ensemble des aiguilles de références. Les positions des capteurs qui minimisent cette erreur sont appelés *positions optimales* des capteurs.

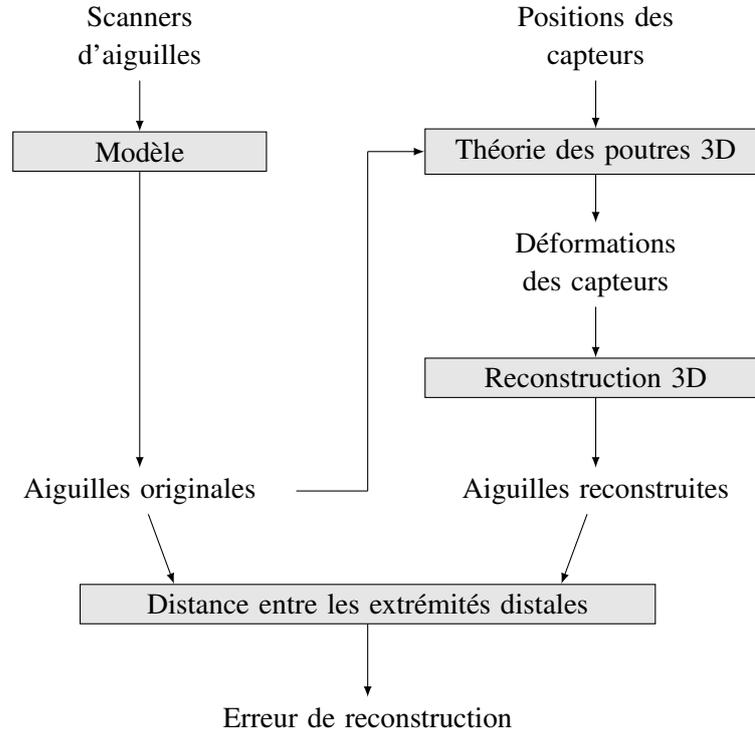


FIGURE 15.3. – Erreur de reconstruction pour une position donnée de capteurs à partir de données réelles d’aiguilles.

On va maintenant expliciter mathématiquement notre problème et notre méthode de résolution.

Soit  $L$  la longueur en mm du type d’aiguille considéré. Soit  $n_a$  le nombre d’aiguilles de notre ensemble d’aiguilles originales  $\mathcal{R}$  contenant les approximations B-Splines :

$$\mathcal{R} = (\mathbf{S}_i)_{i \in \llbracket 1, n_a \rrbracket}$$

On note  $n$  le nombre de triplets de capteurs situés sur l’aiguille. La position du  $i^{\text{me}}$  triplet de capteur est noté  $l_i$ . Les positions  $l_i$  des capteurs étant en millimètres on ne va considérer que les positions entières : on a donc  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, l_i \in \llbracket 1, L - 1 \rrbracket$ . On définit le vecteur  $\mathbf{L}$  comme contenant l’ensemble des positions des triplets de capteurs :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Les triplets de capteurs sont triés par ordre croissant de position c'est à dire :

$$0 < l_1 < \dots < l_n < L \Leftrightarrow \begin{cases} -l_1 & \leq -1 \\ l_1 - l_2 & \leq -1 \\ l_2 - l_3 & \leq -1 \\ \vdots & \vdots \\ l_{n-1} - l_n & \leq -1 \\ l_n & \leq L - 1 \end{cases}$$

Cette relation peut se traduire matriciellement par la relation :

$$\mathbf{A}\mathbf{L} \leq \mathbf{b}$$

avec les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ -1 \\ L-1 \end{bmatrix}$$

Soit  $\mathcal{E}_n$  l'ensemble qui pour  $n$  triplets de capteurs contient toutes les positions possibles de triplets :

$$\mathcal{E}_n = \{\mathbf{X} \in \mathbb{N}^n, \mathbf{A}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}\} \quad (15.1)$$

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des B-Splines 3D.

Soit  $\text{tip}$  la fonction donnant la déformée d'une aiguille à partir de son approximation B-Spline  $\mathbf{S}$  :

$$\begin{aligned} \text{tip} : \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{S} &\mapsto \text{tip}(\mathbf{S}) \end{aligned}$$

Soit  $\text{rec}$  la fonction de reconstruction qui renvoie la B-Spline  $\mathbf{S}$  de la forme l'aiguille reconstruite à partir de positions de triplets de capteurs  $\mathbf{L}$  et de données associées de courbure

et d'angle d'orientation  $\mathbf{D}$ . Cette fonction est construite à partir de la théorie développée dans la partie précédente sur la reconstruction :

$$\begin{aligned} \text{rec} : \mathcal{E}_n \times \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathcal{S} \\ (\mathbf{L}, \mathbf{D}) &\mapsto \text{rec}(\mathbf{L}, \mathbf{D}) \end{aligned}$$

Soit  $\text{sim}$  la fonction de simulation qui à une aiguille de forme  $\mathbf{S}$  et à des positions de triplets de capteurs  $\mathbf{L}$  simule les données de courbure et d'angle d'orientation  $\mathbf{D}$  que renverraient les triplets de capteurs. Cette fonction est basée sur la partie précédente concernant l'étude de population d'aiguille dans laquelle on a calculé les fonctions courbure et angles d'orientations associées à chaque forme d'aiguille expérimentale :

$$\begin{aligned} \text{sim} : \mathcal{S} \times \mathcal{E}_n &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (\mathbf{S}, \mathbf{L}) &\mapsto \text{sim}(\mathbf{S}, \mathbf{L}) \end{aligned}$$

On note  $g$  la fonction d'erreur de reconstruction d'une aiguille de forme  $\mathbf{S}$  pour des positions de triplets de capteurs  $\mathbf{L}$ . L'erreur de reconstruction est définie comme la distance entre l'extrémité de l'aiguille originale de forme  $\mathbf{S}$  et l'extrémité de l'aiguille reconstruite à partir des données simulées pour des triplets de capteurs situés aux positions  $\mathbf{L}$  :

$$\begin{aligned} g : \mathcal{S} \times \mathcal{E}_n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{S}, \mathbf{L}) &\mapsto g(\mathbf{S}, \mathbf{L}) = \|\text{tip}(\mathbf{S}) - \text{tip}(\text{rec}(\mathbf{L}, \text{sim}(\mathbf{S}, \mathbf{L})))\| \end{aligned}$$

On définit la fonction  $f_{\mathcal{R}}$  qui renvoie l'erreur quadratique de reconstruction de l'ensemble d'aiguilles originales  $\mathcal{R}$  pour les positions de triplets de capteurs  $\mathbf{L}$ .

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{R}} : \mathcal{E}_n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{L} &\mapsto f_{\mathcal{R}}(\mathbf{L}) = \sum_{\mathbf{S} \in \mathcal{R}} g(\mathbf{S}, \mathbf{L})^2 \end{aligned} \quad (15.2)$$

On définit alors le problème de positionnement des  $n$  triplets de capteurs le long de l'aiguille comme le *problème d'optimisation*<sup>1</sup> dont l'*ensemble admissible*<sup>2</sup> est  $\mathcal{E}_n$  et dont la *fonction-coût*<sup>3</sup> est  $f_{\mathcal{R}}$  :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & f_{\mathcal{R}}(\mathbf{L}) \\ \text{tel que} \quad & \mathbf{L} \in \mathcal{E}_n \end{aligned} \quad (15.3)$$

---

1. un problème d'optimisation consiste à trouver la meilleure solution parmi un ensemble de solutions potentielles.

2. l'ensemble admissible est l'ensemble qui contient toutes les solutions potentielles.

3. la fonction-coût est la fonction que l'on cherche à maximiser ou minimiser.

On définit les *positions optimales* de triplets de capteurs comme les solutions du problème 15.3. Comme tout problème d'optimisation ce problème admet deux types de solutions : les *solutions globales* et les *solutions locales*.

- Les solutions globales sont les éléments  $\mathbf{L}_{\text{glob}}$  de  $\mathcal{E}_n$  tel que  $f_{\mathcal{R}}(\mathbf{L}_{\text{glob}})$  est un extremum global de  $f_{\mathcal{R}}$ , c'est à dire :

$$\forall \mathbf{L} \in \mathcal{E}_n, \quad f_{\mathcal{R}}(\mathbf{L}_{\text{glob}}) \leq f_{\mathcal{R}}(\mathbf{L})$$

- Les solutions locales sont les éléments  $\mathbf{L}_{\text{loc}}$  de  $\mathcal{E}_n$  tel que  $f_{\mathcal{R}}(\mathbf{L}_{\text{loc}})$  est un extremum local de  $f_{\mathcal{R}}$ , c'est à dire qu'il existe un voisinage  $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}_n$  de  $\mathbf{L}_{\text{loc}}$  tel que :

$$\forall \mathbf{L} \in \mathcal{V}, \quad f_{\mathcal{R}}(\mathbf{L}_{\text{loc}}) \leq f_{\mathcal{R}}(\mathbf{L})$$

On a évidemment :

$$f_{\mathcal{R}}(\mathbf{L}_{\text{glob}}) \leq f_{\mathcal{R}}(\mathbf{L}_{\text{loc}}) \tag{15.4}$$

L'équation 15.4 traduit le fait que les solutions globales sont meilleures au sens de la minimisation de la fonction coût que les solutions locales. On cherchera donc en priorité les solutions globales du problème de minimisation 15.3.

La recherche des solutions des problèmes d'optimisation se fait à l'aide de *méthodes d'optimisation*, ces dernières étant pour la plupart spécialisées dans la résolution d'un problème de type précis. Le problème 15.3 est un problème d'optimisation qui fait partie de la classe des problèmes d'*optimisation non linéaire en nombres entiers* (en anglais : *Mixed Integer Nonlinear Programming* (MINLP)) qui regroupe les problèmes d'optimisation dont la fonction de coût est non-linéaire (ici l'erreur de reconstruction quadratique  $g$ ) et dont les solutions sont des valeurs entières (ici les positions des triplets de capteurs  $\mathbf{L}$  arrondies au millimètre). On emploiera donc une méthode d'optimisation spécialement conçue pour les problèmes de ce genre et selon le type de solution recherché cette méthode d'optimisation sera globale ou locale.

Les méthodes d'optimisation globales pour les problèmes de types MINLP font appel à des hypothèses supplémentaires : soit la convexité de la fonction coût pour les problèmes de type MINLP convexes (AOA [RB09], BONMIN [BBC<sup>+</sup>08]) soit l'expression de la fonction coût pour les problèmes de type MINLP non convexes (BARON [TS02], Couenne [BLL<sup>+</sup>09]). Dans le cas du problème 15.3 l'expression de la fonction-coût  $f$  dépend des fonctions *rec* et *sim* dont l'implantation algorithmique fait appel à des fonctions contenues dans des bibliothèques externes. La fonction  $f$  se comporte ainsi comme une boîte noire dont on ne peut connaître ni l'expression, ni la convexité. Par conséquent les solutions globales du problème 15.3 ne peuvent s'obtenir à l'aide de méthodes d'optimisation.

La seule méthode restante permettant de trouver les solutions globales reste alors l'évaluation exhaustive de toutes les solutions possibles. En effet le problème 15.3 de position des triplets de capteurs est un problème de minimisation dans l'espace  $\mathcal{E}_n$  de dimension  $n$ ,  $n$  étant le nombre de triplets. L'espace  $\mathcal{E}_n$  étant un espace de nombres entiers bornés son

cardinal  $\text{card}(\mathcal{E}_n)$  est fini ce qui signifie que le nombre de positions différentes des triplets de capteurs est fini. En évaluant la fonction coût pour toutes ces positions on peut alors déterminer celles qui minimisent l'erreur de reconstruction sur  $\mathcal{E}_n$  et qui sont donc les solutions globales du problème 15.3. On présente dans le tableau 15.2 le nombre de positions différentes de triplets de capteurs en fonction du nombre de capteurs dans le cas d'une aiguille de longueur  $L = 200$  mm ainsi que le temps de calcul estimé à l'évaluation de la fonction-coût  $f$  pour toutes ces positions. Le temps de calcul  $t$  mesuré d'une évaluation de la fonction  $f$  est d'environ  $t \simeq 10$  s.

Nombre de triplets de capteurs : $n$	Nombres de positions de triplets différentes : $\text{card}(\mathcal{E}_n)$	Temps de calcul de la fonction-coût pour toutes les positions
1	199	30 minutes
2	$1.9 \times 10^4$	2 jours
3	$1.3 \times 10^6$	150 jours
4	$6.3 \times 10^7$	20 ans
5	$2.5 \times 10^9$	700 ans
6	$8.0 \times 10^{10}$	25 000 ans
7	$2.2 \times 10^{12}$	700 000 ans
8	$5.3 \times 10^{13}$	17 000 000 ans
9	$1.1 \times 10^{15}$	360 000 000 ans

TABLE 15.2. – Nombres de positions entières de triplets de capteurs différentes en fonction du nombre de triplets de capteurs pour une aiguille de 200 mm.

On constate donc que le temps de calcul de l'erreur de reconstruction de l'ensemble des positions est prohibitif et on en conclut que le calcul des solutions globales du problème de minimisation 15.3 par énumération exhaustive n'est donc pas envisageable.

Par conséquent aucune des méthodes d'optimisations globales ne peut s'appliquer au problème 15.3 : on ne peut donc pas déterminer ses solutions globales.

On va donc restreindre notre recherche de solution aux solutions locales en utilisant des méthodes d'optimisation locales pour les problèmes de types MINLP. Ces méthodes sont basées sur des algorithmes de recherche qui déterminent la meilleure solution en se basant sur des critères d'arrêts, les plus simples étant par exemple le nombre d'évaluation de la fonction coût ou le temps depuis le début des calculs, les plus avancées faisant appels à des arguments heuristiques. Les méthodes d'optimisation locales sont conçues pour calculer des solutions presque optimales, c'est à dire qui s'approchent le plus possible des solutions globales. Néanmoins l'erreur d'approximation commise entre les solutions renvoyées et les solutions globales du problème ne peut-être calculée. Parmi les paramètres qui peuvent influencer sur la précision des solutions renvoyées figurent : l'algorithme de résolution, le nombre de dimension du problème, le nombre d'évaluation de la fonction coût et la

topologie de la fonction-coût. Les propriétés de convexité de cette dernière sont très importantes, en effet plus le nombre d'"aspérité" de la fonction coût est élevé, plus la recherche de solutions sera difficile. Les méthodes d'optimisation locales MINLP sélectionnés pour résoudre le problème 15.3 sont : NOMAD [LD11], KNITRO [BNW06] et Genetic Algorithm [MT]. Le fonctionnement des algorithmes de ces méthodes dépasse le cadre de cette thèse, on donnera donc juste une brève description des méthodes ci-dessous :

- *NOMAD* : Cette méthode se base sur l'algorithme *Mesh Adaptive Direct Search* [ADJ06] dédié à l'optimisation contraintes non-linéaires, qui concerne les fonctions dont on ne dispose pas de l'expression analytique et dont les dérivées ne sont pas connues.
- *KNITRO* : Cette méthode d'optimisation utilise conjointement plusieurs approches. Parmi les algorithmes disponibles pour résoudre les problèmes de type MINLP figurent une version de type *branch and bound* non-linéaire, un algorithme implémentant la méthode Quesada-Grossman pour les problèmes de type MINLP et enfin un algorithme implémentant une méthode *Mixed-Integer Sequential Quadratic Programming*<sup>4</sup>.
- *MATLAB Genetic Algorithm* : Cette méthode utilise le principe des algorithmes génétiques qui résoud les problèmes de minimisation contraints et non-contraints en imitant le processus de sélection naturelle biologique. Le schéma de résolution est basé sur la modification répétée d'une population de solutions. A chaque itération l'algorithme génétique sélectionne aléatoirement des individus de la population actuelle et s'en sert comme parents pour produire les enfants de la génération suivante. Ainsi, au fur à mesure des générations, la population évolue vers une solution optimale. Cette classe d'algorithme est particulièrement adaptée à la résolution de problème d'optimisation qui ne conviennent pas aux algorithmes d'optimisation standards comme les problèmes non-continus et non-linéaires. Ces raisons font que les algorithmes génétiques sont particulièrement adaptés aux problèmes de type MINLP.<sup>5</sup>

Ces trois méthodes seront ainsi utilisées conjointement pour résoudre le problème 15.3. Pour chaque nombre de triplets de capteurs on obtiendra alors trois ensembles de positions de triplets, chacun solution d'une des méthodes d'optimisation. On désigne par le terme *positions optimales* les position des triplets de capteurs parmi les trois résultats renvoyés par les algorithmes qui ont la plus petite erreur moyenne quadratique de reconstruction associée.

En conclusion, une approche permettant de résoudre le problème de positionnement des triplets de capteurs à partir de données réelles d'aiguilles a été énoncée. La modélisation mathématique de cette approche a donné naissance à un problème d'optimisation de type MINLP dont la résolution par l'utilisation de méthodes d'optimisation locale a été proposée.

---

4. [https://www.artelys.com/tools/knitro\\_doc/2\\_userGuide/minlp.html](https://www.artelys.com/tools/knitro_doc/2_userGuide/minlp.html)

5. <https://fr.mathworks.com/discovery/genetic-algorithm.html>

## 15.4 Résultats

Les résultats présentés dans cette section sont divisés en deux parties. Dans la première partie sont présentés les résultats des positions optimales de triplets calculées par minimisation à partir de l'ensemble des aiguilles de porcs. La seconde partie est consacrée aux résultats de validation de ces positions par comparaison des reconstructions avec et sans positions optimales.

### 15.4.1 Positions optimales des triplets de capteurs pour les aiguilles de porcs

La minimisation du problème 15.3 a été effectuée avec les méthodes d'optimisation NOMAD, KNITRO et MATLAB Genetic Algorithm pour un nombre de triplets de capteurs  $n$  allant de 1 à 10. Les résultats des positions de triplets de capteurs sont présentés dans le tableau 15.3, les positions optimales de triplets sont colorées en vert. La figure 15.4 illustre les aiguilles avec les capteurs situés aux positions optimales.

Algorithme	Nombre de triplets de capteurs $n$				
	1	2	3	4	5
NOMAD	81	28, 101	25, 78, 139	9, 40, 95, 144	10, 34, 77, 128, 171
KNITRO	81	55, 181	25, 77, 136	15, 55, 104, 147	11, 34, 77, 128, 171
MATLAB GA	81	28, 101	25, 77, 136	9, 40, 95, 144	11, 34, 73, 122, 170

Algorithme	Nombre de triplets de capteurs	
	6	7
NOMAD	11, 25, 52, 84, 129, 171	13, 22, 40, 70, 102, 130, 170
KNITRO	10, 33, 72, 108, 141, 171	10, 33, 71, 108, 142, 171, 190
MATLAB GA	10, 33, 72, 108, 141, 171	10, 33, 71, 108, 134, 141, 171

Algorithme	Nombre de triplets de capteurs	
	8	9
NOMAD	10, 33, 71, 107, 135, 137, 140, 169	13, 23, 41, 74, 105, 133, 154, 170, 176
KNITRO	13, 23, 42, 72, 105, 134, 171, 193	13, 22, 41, 70, 103, 128, 153, 181, 191
MATLAB GA	13, 22, 41, 69, 97, 100, 128, 171	10, 20, 33, 55, 97, 125, 146, 171, 179

Algorithme	Nombre de triplets de capteurs
	10
NOMAD	5, 20, 26, 36, 58, 82, 110, 130, 144, 171
KNITRO	10, 20, 33, 56, 90, 113, 133, 155, 180, 191
MATLAB GA	10, 20, 33, 55, 91, 114, 142, 158, 164, 177

TABLE 15.3. – Positions optimales (mm) des triplets de capteurs sur l'ensemble des aiguilles de porcs en fonction du nombre de triplet et des algorithmes d'optimisations.

Pour chaque nombre de triplets de capteurs on affiche en vert la position optimale.

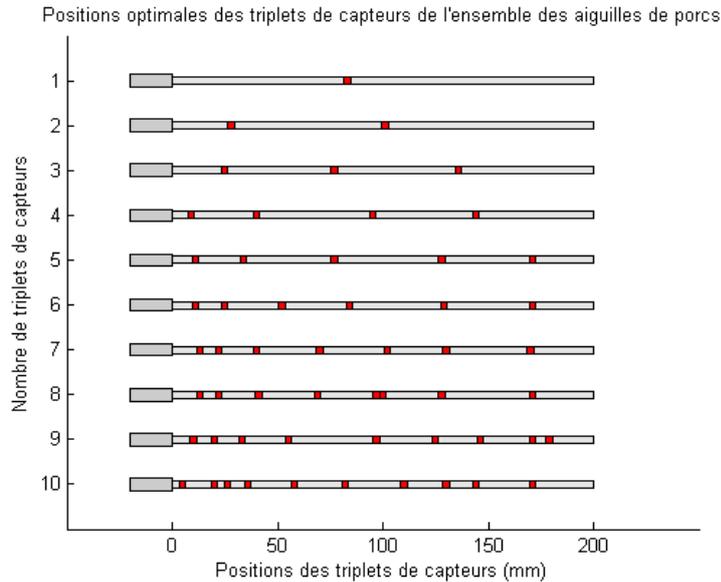


FIGURE 15.4. – Position optimales des triplets de capteurs.

Le tableau 15.3 permet de mettre en évidence l'influence du nombre de triplets de capteurs sur la proximité des solutions renvoyées par les différents algorithmes. En effet dans le cas d'un seul triplet de capteur, les positions optimales sont renvoyées par les trois algorithmes. Pour un nombre de triplet de capteur compris entre deux et quatre les positions optimales sont renvoyées par deux algorithmes sur trois seulement. Dans le cas d'un nombre de triplets de capteurs égal à cinq les positions optimales ont été trouvées par un seul algorithme. Néanmoins les deux autres positions données comme solutions ont des erreurs de reconstruction proches. Enfin pour un nombre de triplets de capteurs supérieur à six les positions optimales ont été trouvées par un seul algorithme à chaque fois. De plus les deux autres positions renvoyées comme solution ont des erreurs de reconstruction éloignées. On constate ainsi que plus le nombre de triplets  $n$  devient grand, moins les résultats des algorithmes de minimisation convergent vers la même solution.

Comme indiqué précédemment l'évaluation exhaustive de la fonction-coût pour toutes les positions n'est pas une méthode de minimisation envisageable pour un nombre de triplets élevé à cause de son temps de calcul prohibitif mais reste possible pour un nombre de triplets restreints. Dans ce cas, le calcul complet de la fonction-coût permet de trouver avec certitude les solutions globales des positions qu'il sera alors possible de comparer avec les positions optimales renvoyées par les algorithmes de minimisation (tableau 15.3). Le calcul complet de  $f$  dans le cas  $n = 1$ , dont on affiche la représentation graphique dans la figure 15.5, donne le minimum global de  $f$  en  $l_1 = 81$  ce qui est également la position optimale calculée par minimisation.

De la même façon le calcul complet de  $f$  dans le cas où  $n = 2$  est illustré dans la figure 15.6 permet de situer le minimum global de  $f$  en  $(l_1, l_2) = (28, 101)$  qui est également la

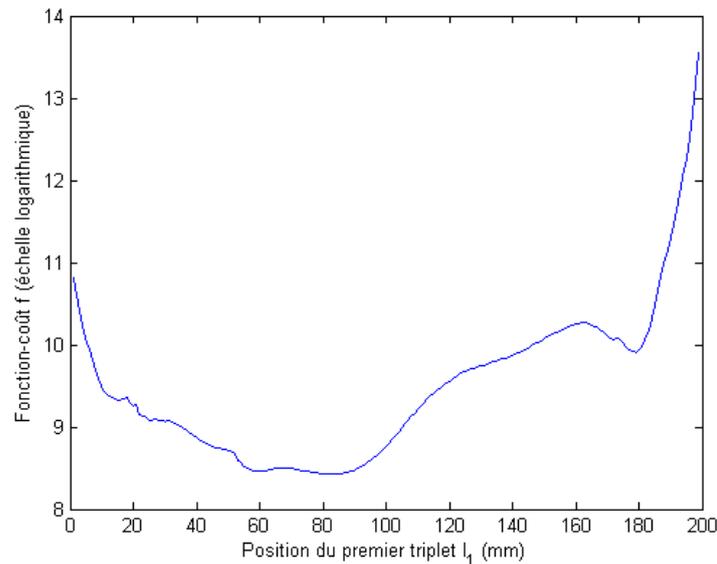


FIGURE 15.5. – Fonction coût 1D du problème d'optimisation.

Graphique avec échelle logarithmique de la fonction-coût  $f$  du problème d'optimisation 15.3 pour un nombre de triplet de capteur  $n = 1$ . Le logarithme de l'erreur de reconstruction quadratique de l'ensemble des aiguilles de porcs est représenté en ordonnée en fonction de la position du triplet 1 en abscisse.

position optimale calculée par minimisation.

Ces résultats confirment que dans le cas où le problème de minimisation est de faible dimension ( $n \leq 2$ ) les solutions renvoyées par les algorithmes d'optimisation sont les solutions globales.

L'analyse des positions optimales de capteurs présentées dans le tableau 15.3 laisse apparaître que les positions optimales des triplets de capteurs sont de plus en plus espacées au fur et à mesure qu'on se déplace de l'extrémité proximale vers l'extrémité distale comme le montre le figure 15.7. Ce phénomène est surtout visible pour un nombre de triplets inférieur à 6, au delà les positions des triplets semblent moins respecter cette condition. Cette observation se caractérise par la position du barycentre des triplets de capteurs, dont le calcul indique que celui-ci est compris entre 64 mm et 93 mm et est donc plus proche de l'extrémité proximale que de l'extrémité distale.

La littérature concernant le positionnement des capteurs de déformations sur une aiguille hypodermique est peu importante [PED<sup>+</sup>10, SGA<sup>+</sup>13], on a donc peu de données auxquelles comparer nos résultats. L'article de Park [PED<sup>+</sup>10] traite le cas des aiguilles de longueur 150 mm avec 2 triplets de capteurs. Les travaux Seifabadi [SGA<sup>+</sup>13] portent sur les aiguilles de 110 mm avec 3 triplets de capteurs. Nos travaux, quant à eux, abordent le cas des aiguilles de 200 mm. Pour pouvoir comparer ces résultats, les positions des tri-

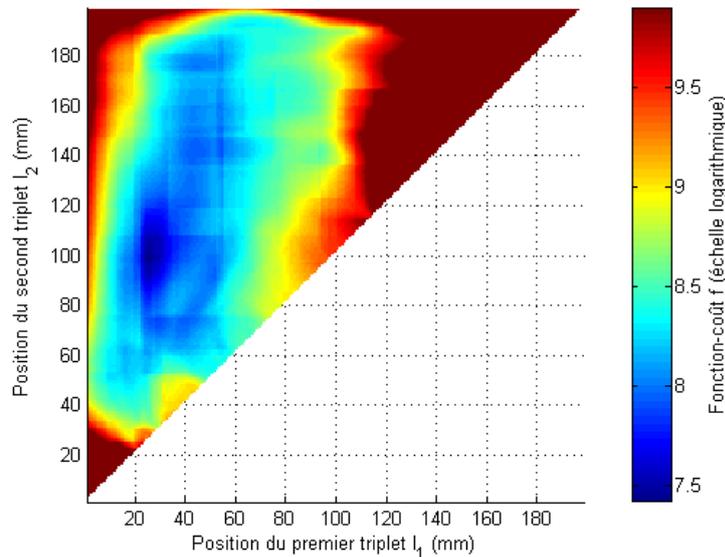


FIGURE 15.6. – Fonction coût 2D du problème d'optimisation.

Graphique avec échelle logarithmique de la fonction-coût  $f$  du problème d'optimisation 15.3 pour un nombre de triplet de capteur  $n = 2$ . Le logarithme de l'erreur de reconstruction quadratique de l'ensemble des aiguilles de porcs est représenté en fonction de la position du triplet 1 en abscisse et de la position du triplet 2 en ordonnée.

plets de capteurs seront exprimées en terme de pourcentage de longueur d'aiguille. Les différentes positions des triplets de capteurs sont alors représentées dans la figure 15.8.

On remarque à partir de la figure 15.8 que les conclusions de la confrontation de nos résultats avec ceux de la littérature diffèrent selon le nombre de triplets de capteurs. Dans le cas de deux triplets de capteurs les positions optimales trouvées sont très proches des résultats de Park (14% et 51% contre 15% et 57%). A l'inverse dans le cas de trois triplets de capteurs les positions optimales diffèrent totalement de celles trouvées par Seifabadi (13%, 39% et 68% contre 27%, 72% et 90%).

#### 15.4.2 Reconstruction des aiguilles de porcs avec les positions optimales

En ce qui concerne l'ensemble des aiguilles de porcs, les positions optimales de capteurs présentées dans la partie précédente permettent une reconstruction plus précise (au sens de l'erreur moyenne quadratique) qu'avec n'importe quelle autre position de capteurs. Nous allons caractériser ce gain de précision en comparant la reconstruction de cet ensemble avec des positions optimales et avec des positions "arbitraires". Le choix des positions arbitraires se porte sur les positions équidistantes, c'est à dire celles où le premier et le dernier capteur sont situés aux extrémités de l'aiguille et où l'espace entre chaque capteur est constant. Cette partie expose les résultats de comparaison de ces reconstructions.

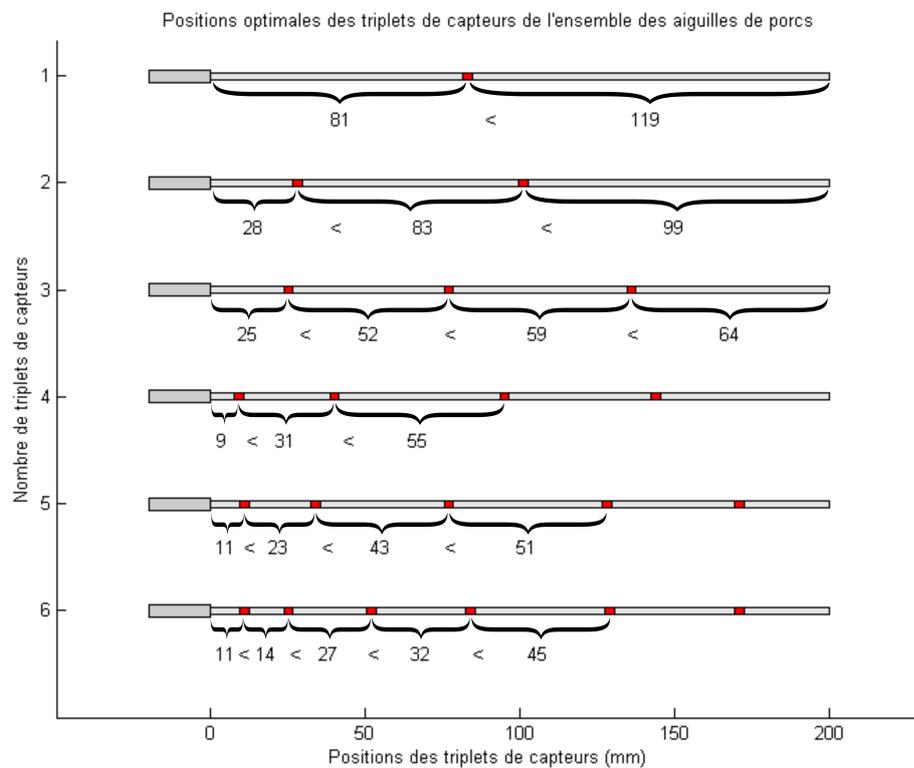


FIGURE 15.7. – Distance entre les positions optimales des triplets de capteurs. Positions des triplets de capteurs pour un nombre de triplets compris entre 1 et 6. Les distances entre les triplets et les extrémités de l'aiguille sont affichées en millimètre.

Les figures 15.9 et 15.10 présentent les résultats statistiques des erreurs de reconstructions des aiguilles de porcs selon le positionnement et le nombre de triplets de capteurs. Dans chaque cas les extrémités des segments représentent le minimum et le maximum tandis que les boîtes encadrent les données du premier au troisième quartile. La médiane est représentée par un segment rouge.

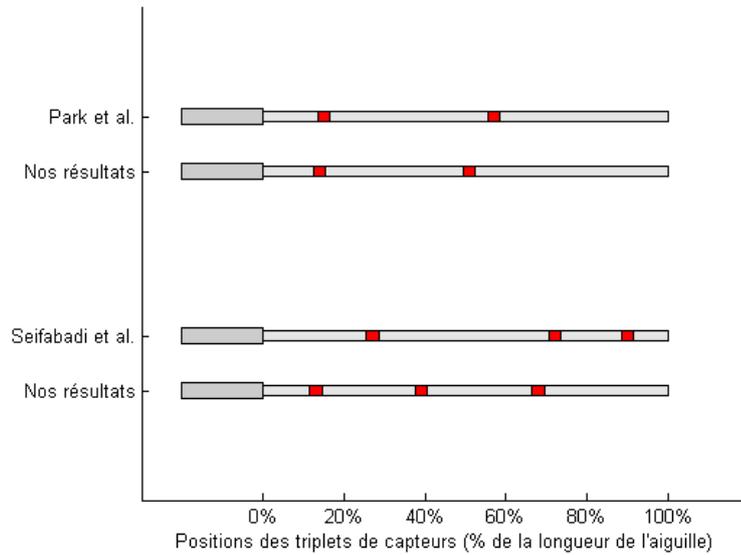


FIGURE 15.8. – Comparaison des résultats des positions optimales de triplets de capteurs

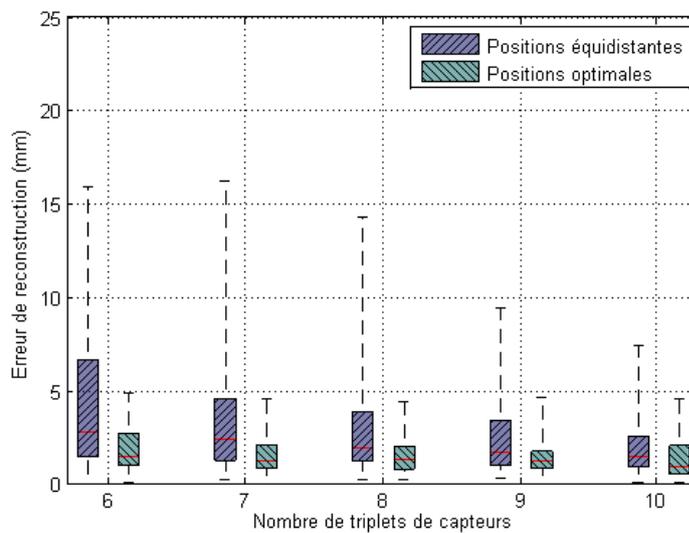


FIGURE 15.10. – Effet du positionnement des capteurs sur la reconstruction des aiguilles de porcs pour 6 à 10 triplets de capteurs.

Diagramme en boîtes de l'erreur de reconstruction des aiguilles de porcs selon les positions de triplets pour un nombre de triplets de capteurs allant de 6 à 10. Les segments aux extrémités désignent les minima et maxima, les boîtes encadrent les valeurs du premier au troisième quartile tandis que la médiane est tracée en rouge.

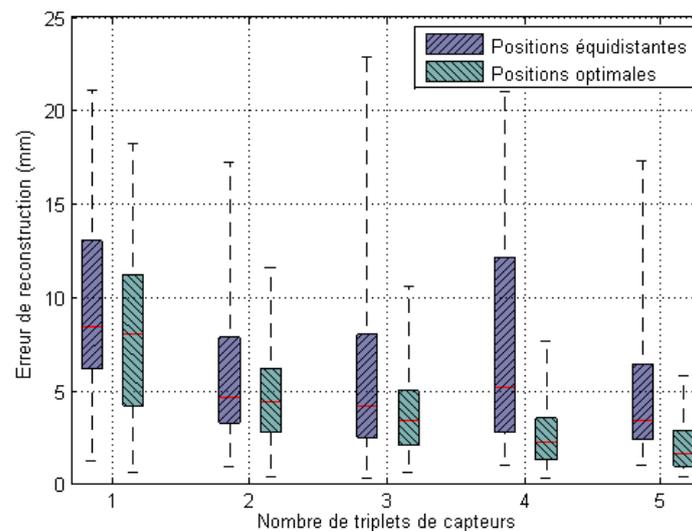


FIGURE 15.9. – Effet du positionnement des capteurs sur la reconstruction des aiguilles de porcs pour 1 à 5 triplets de capteurs.

Diagramme en boîtes de l'erreur de reconstruction des aiguilles de porcs selon les positions de triplets pour un nombre de triplets de capteurs allant de 1 à 5. Les segments aux extrémités désignent les minima et maxima, les boîtes encadrent les valeurs du premier au troisième quartile tandis que la médiane est tracée en rouge.

On remarque sur les figures 15.9 et 15.10 que pour un nombre de triplets de capteurs donné le premier quartile, la médiane, le troisième quartile et le maximum des erreurs de reconstruction sont plus faibles dans le cas de reconstructions à partir des positions optimales que dans le cas de reconstructions à partir de positions équidistantes.

De plus l'erreur maximale décroît avec le nombre de triplets de capteurs lorsque ceux-ci sont placés de façon optimale et se stabilise autour de 5 mm à partir de 6 triplets. À l'inverse dans le cas des positions équidistantes l'erreur maximale fluctue et décroît seulement à partir de 7 capteurs mais reste toujours supérieure à 5 mm. Pour n'importe quel nombre de triplets de capteurs l'erreur maximale avec positions équidistantes est supérieure à celle avec positions optimales.

La figure 15.11 présente le nombre de triplets de capteurs de déformations nécessaires en fonction de la précision souhaitée, c'est à dire l'erreur maximale de reconstruction, et selon le positionnement des capteurs.

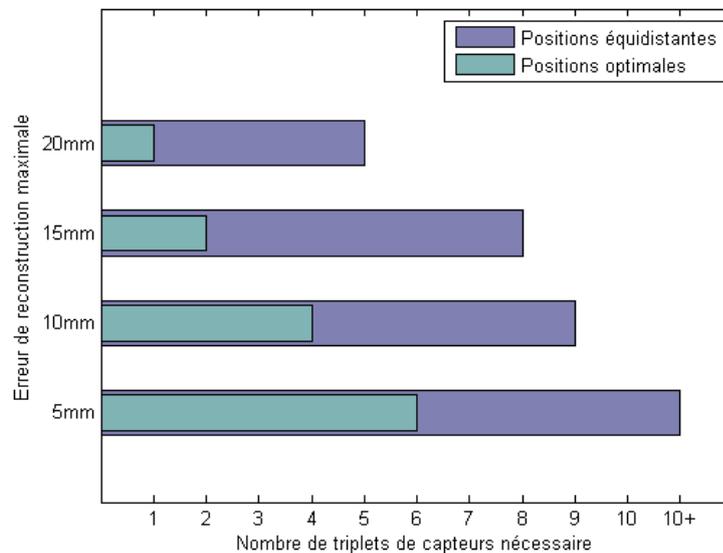


FIGURE 15.11. – Nombres de triplets de capteurs nécessaires à la reconstruction des aiguilles de porcs en fonction de l'erreur de reconstruction maximale souhaitée.

On observe à partir de la figure 15.11 que pour atteindre les 10 mm maximal de précision il faut 9 triplets de capteurs situés positions équidistantes contre seulement 4 situés aux positions optimales. Par conséquent pour atteindre une précision souhaitée, l'utilisation des positions optimales permet de réduire le nombre de triplets de capteurs nécessaires.

La moyenne des erreurs de reconstruction est présentée dans le tableau 15.4 et représentée graphiquement dans la figure 15.12.

Erreur de reconstruction moyenne de l'ensemble des aiguilles de porcs (mm)											
Nombre de triplets de capteurs		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Positions des triplets de capteurs	Equidistantes	9.7	5.6	5.9	7.4	4.8	4.1	3.7	3.3	2.5	2.2
	Optimales	8.0	4.6	3.8	2.7	2.1	1.9	1.6	1.5	1.5	1.3

TABLE 15.4. – Erreur de reconstruction moyenne pour des positions équidistantes et optimales de triplets de capteurs.

On observe à partir de la figure 15.12 que l'erreur moyenne décroît lorsque les capteurs sont placés aux positions optimales tandis qu'elle fluctue et décroît seulement à partir de 5 triplets lorsque ceux-ci sont placés aux positions équidistantes.

Le gain de précision est le gain relatif de l'erreur moyenne de reconstruction, il est présenté dans le diagramme 15.13.

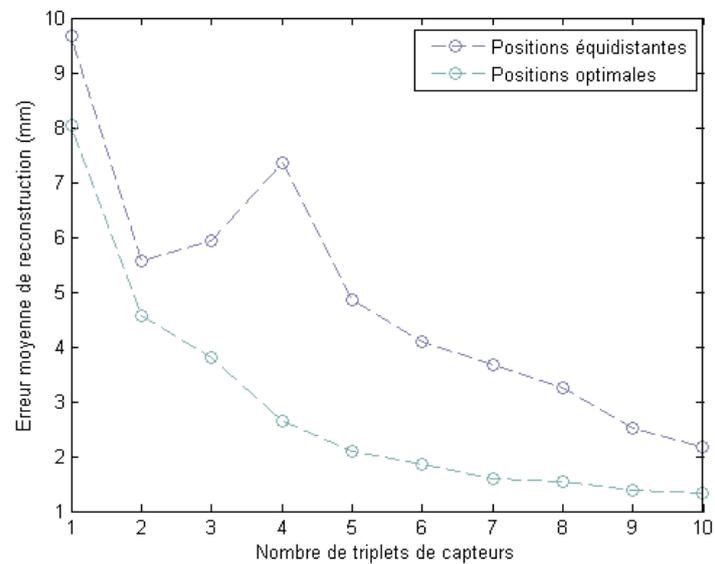


FIGURE 15.12. – Erreur moyenne de reconstruction des aiguilles de porcs en fonction du positionnement des triplets de capteurs.

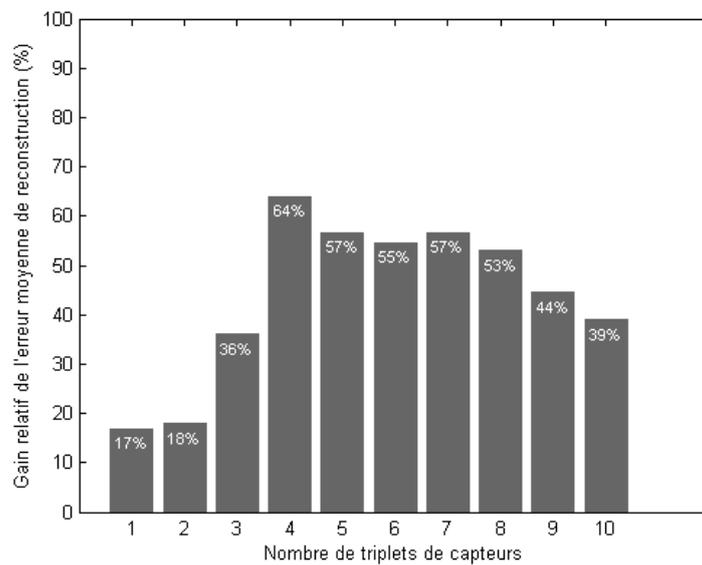


FIGURE 15.13. – Gain relatif de précision avec les positions optimales de capteurs par rapport aux positions équidistantes.

On observe ainsi à partir de la figure 15.13 que l'utilisation des positions de capteurs optimales par rapport à des positions de capteurs équidistantes permet un gain de précision de

17% à 64%.

### 15.4.3 Reconstruction des aiguilles patients avec les positions optimales

La partie résultat précédente a permis la caractérisation du gain de précision et de l'erreur de reconstruction maximale. Cette caractérisation s'est effectuée sur le même ensemble d'aiguilles que celui utilisé pour les positions optimales. Nous allons poursuivre la caractérisation dans cette partie en effectuant cette fois la reconstruction sur l'ensemble des aiguilles patients.

Les figures 15.14 et 15.15 présentent les résultats statistiques des erreurs de reconstructions des aiguilles patients selon le positionnement et le nombre de triplets de capteurs. Dans chaque cas les extrémités des segments représentent le minimum et le maximum tandis que les boîtes encadrent les données du premier au troisième quartile. La médiane est représentée par un segment rouge.

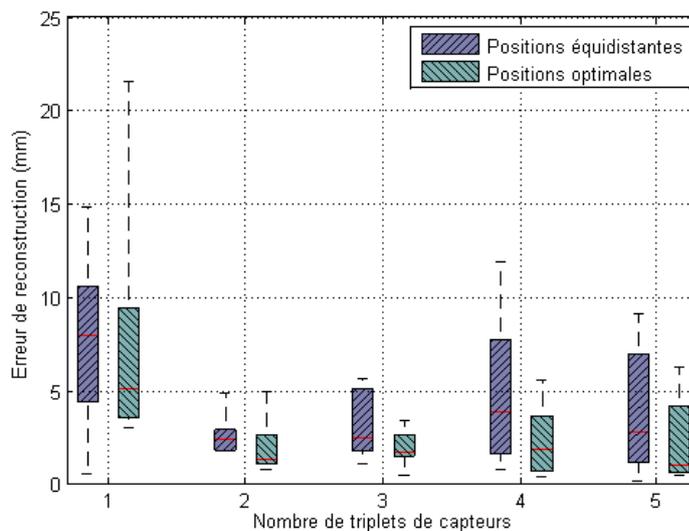


FIGURE 15.14. – Effet du positionnement des capteurs sur la reconstruction des aiguilles patients pour 1 à 5 triplets de capteurs.

Diagrammes en boîtes de l'erreur de flèche des reconstructions des aiguilles de porcs selon les positions de triplets pour un nombre de triplets de capteurs allant de 1 à 5. Les segments aux extrémités désignent les minima et maxima, les boîtes encadrent les valeurs du premier au troisième quartile tandis que la médiane est tracée en rouge.

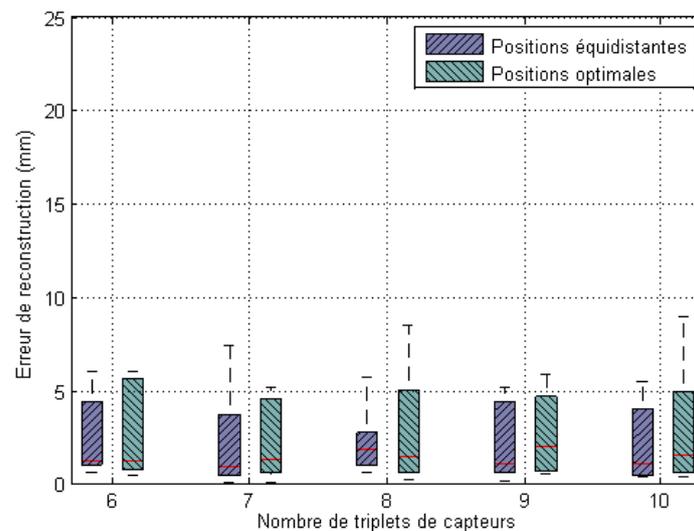


FIGURE 15.15. – Effet du positionnement des capteurs sur la reconstruction des aiguilles patients pour 6 à 10 triplets de capteurs.

Diagrammes en boîtes de l'erreur de flèche des reconstructions des aiguilles de porcs selon les positions de triplets pour un nombre de triplets de capteurs allant de 6 à 10. Les segments aux extrémités désignent les minima et maxima, les boîtes encadrent les valeurs du premier au troisième quartile tandis que la médiane est tracée en rouge.

On remarque sur les figures 15.14 et 15.15 que pour un nombre de triplets de capteurs compris entre 1 et 5, le premier quartile, la médiane, le troisième quartile et le maximum des erreurs de reconstruction sont plus faibles dans le cas de reconstructions à partir des positions optimales que dans le cas de reconstructions à partir de positions équidistantes. Par conséquent **la reconstruction d'aiguilles patients est plus précise avec les positions optimales déterminées à partir de l'ensemble d'aiguilles de porcs pour un nombre de triplets compris entre 1 et 5.**

A l'inverse à partir de 6 triplets de capteurs on observe que ce n'est plus le cas et que ces valeurs sont très proches. On observe également que l'erreur maximale varie assez chaotiquement et ne présente pas de monotonie particulière. La figure 15.16 présente le nombre de triplets de capteurs de déformations nécessaires en fonction de la précision souhaitée selon le positionnement des capteurs.

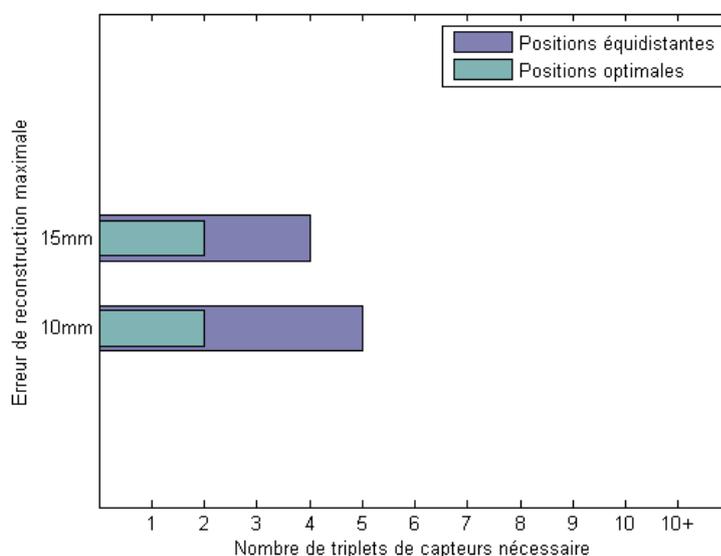


FIGURE 15.16. – Nombres de triplets de capteurs nécessaires à la reconstruction des aiguilles patients en fonction de l’erreur de reconstruction maximale souhaitée.

On observe à partir de la figure 15.16 que le nombre de triplets de capteurs nécessaire pour atteindre une précision de reconstruction souhaitée est beaucoup plus faible lorsque ces derniers sont positionnés de façon optimale plutôt que de façon équidistante. Ainsi pour atteindre une précision de reconstruction souhaitée de 15 mm, il en faut 2 positionnés de façon optimale contre 5 de façon équidistante, et 2 contre 6 pour une précision de 10 mm.

La moyenne des erreurs de reconstruction est présentée dans le tableau 15.5 et représentée graphiquement dans la figure 15.17.

Erreur de reconstruction moyenne de l’ensemble des aiguilles patients (mm)											
Nombre de triplets de capteurs		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Positions des triplets de capteurs	Equidistantes	7.7	2.6	3.3	5.0	3.8	2.5	2.3	2.2	2.3	2.2
	Optimales	7.6	2.0	2.0	2.3	2.4	2.9	2.4	3.0	2.6	3.1

TABLE 15.5. – Erreur de reconstruction moyenne pour des positions équidistantes et optimales de triplets de capteurs.

On remarque à partir de la figure 15.17 que pour un nombre de triplet de capteurs compris entre 1 et 5 l’erreur moyenne de reconstruction des aiguilles patients est inférieure avec les positions optimales par rapport aux positions équidistantes tandis que c’est l’inverse pour un nombre de triplets compris entre 6 et 10 comme le montre le gain de précision présenté dans la figure 15.18.

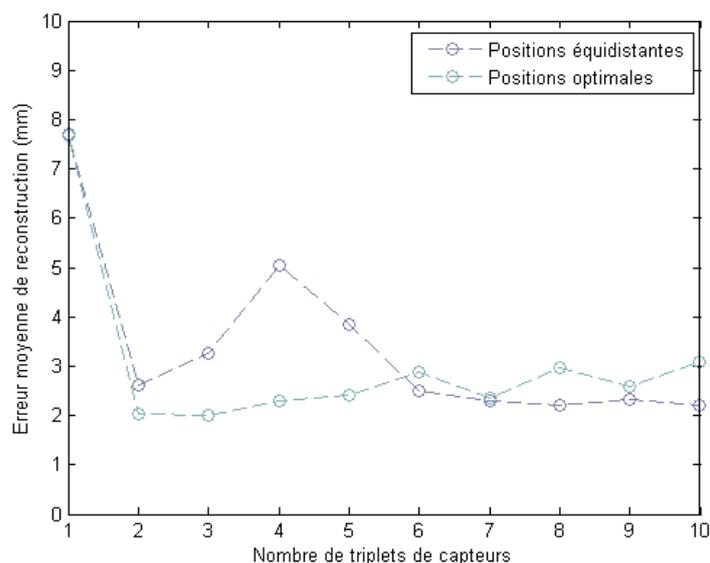


FIGURE 15.17. – Erreur moyenne de reconstruction des aiguilles patients en fonction du positionnement des capteurs.

Néanmoins dans le cas des positions optimales l'erreur moyenne devient inférieure à  $4\text{mm}$  à partir de 2 triplets alors qu'il faut 6 triplets dans le cas des positions équidistantes.

**Par conséquent l'utilisation des positions optimales de triplets capteurs de l'ensemble des aiguilles de porcs permet, pour un faible nombre de triplets, de diminuer les erreurs moyennes et maximales de reconstruction des aiguilles patients par rapport aux positions équidistantes.**

On reconstruit les aiguilles patients avec les positions optimales et avec les pourcentage des positions proposées par Park et Seifabadi présentées dans la figure 15.8. L'erreur moyenne est affichée dans le tableau 15.6.

Reconstruction des aiguilles patients				
Nombre de triplets	2		3	
	Park <i>et al.</i>	Positions optimales des aiguilles de porcs	Seifabadi <i>et al.</i>	Positions optimales des aiguilles de porcs
Erreur moyenne	2.5 mm	2.0 mm	3.1 mm	2.0 mm
Erreur maximale	6.2 mm	5.0 mm	6.3 mm	3.4 mm

TABLE 15.6. – Erreur de reconstruction moyenne des aiguilles patients en fonction du nombre de triplets et de leurs positions.

Par conséquent **l'utilisation des positions optimales de triplets de capteurs de l'en-**

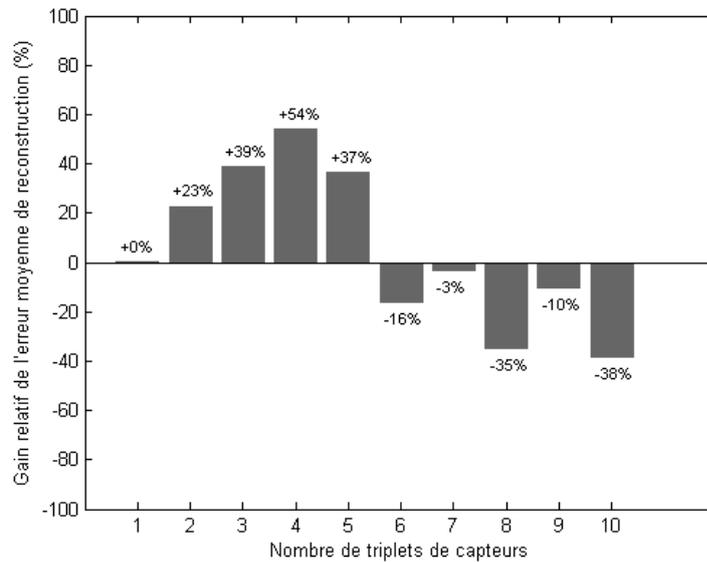


FIGURE 15.18. – Gain relatif de précision avec les positions optimales de capteurs par rapport aux positions équidistantes.

**semble des aiguilles de porcs permet de diminuer les erreurs moyennes et maximales de reconstruction des aiguilles patients par rapport aux positions adaptées par Park et Seifabadi.**

## 15.5 Discussion

La reconstruction de la forme de l'aiguille instrumentée ayant pour vocation, à terme, à être utilisée dans un cadre clinique, on souhaite déterminer les meilleures positions de triplets permettant d'atteindre une précision de reconstruction donnée pour une insertion dans des tissus humains. Le calcul de ces positions optimales ne s'est pas fait directement à partir de scanners de piqué dans des tissus humains mais à partir de scanners de piqué dans des tissus de porcs. En effet, le terme précision de reconstruction désigne l'erreur maximale possible de reconstruction possible, on doit donc s'assurer qu'avec les positions optimales que l'erreur de reconstruction est situé sous un certain seuil pour tout les cas de reconstruction. Cette condition implique donc de déterminer les positions à partir d'un ensemble exhaustif de données de piqué. Les données cliniques présentent des conditions d'insertions inconnues et sont en nombres insuffisantes, on ne peut donc pas assurer leur représentativité contrairement aux données issus de piqués de porcs qui remplissent ces deux conditions.

Cette méthodologie explique donc le traitement des résultats en deux parties : dans la première, on utilise les piqués de porcs pour calculer les positions optimales et dans la seconde on utilise les piqués patients pour les valider.

### 15.5.1 Positions optimales des capteurs

Cette partie traite de la description, de la validité et de la comparaison avec la littérature des positions minimales obtenues par minimisation de l'erreur de reconstruction des aiguilles de porcs.

Il existe plusieurs critères d'erreur pour mesurer l'erreur de reconstruction d'un ensemble parmi lesquels figurent l'erreur maximale et l'erreur moyenne. L'erreur maximale est un critère très utilisé en clinique car il permet de définir un seuil d'erreur qui ne peut pas être dépassé, on s'assure alors d'une certaine précision minimale. Néanmoins comme nos données résultent d'approximations d'aiguilles et il est donc possible que l'erreur maximale reflète alors l'aiguille la plus mal approximée plutôt que l'aiguille la plus mal reconstruite. L'erreur moyenne de reconstruction constitue alors un critère plus stable pour juger de la qualité de reconstruction d'un ensemble d'aiguille.

La figure 15.7 permet d'observer que dans le cadre des positions optimales les triplets sont plus proches de l'extrémité proximale que distale. Ce phénomène s'explique par la reconstruction de l'aiguille en elle-même, en effet celle-ci s'effectue par étape, de l'extrémité proximale vers l'extrémité distale, en utilisant les fonctions courbure et angle d'orientation. Par conséquent, par le phénomène du bras de levier, plus les erreurs d'approximations sur une de ces deux fonctions sont proches des extrémités proximales, plus l'erreur de reconstruction résultante sera élevée. Ainsi, les positions des triplets traduisent le fait qu'il est nécessaire de reconstruire plus précisément les fonctions courbure et angle d'orientation vers l'extrémité proximale que distale.

Les résultats des positions optimales des triplets de capteurs nous ont permis de constater que plus le nombre de triplets augmentait plus les solutions renvoyées par les algorithmes étaient divergentes.

Les causes de ce phénomène sont multiples. Tout d'abord le nombre de positions de triplets possibles augmente de façon exponentielle en fonction de  $n$  comme le montre le tableau 15.2. Or, à l'inverse du nombre de positions, le temps de calcul et donc le nombre de positions testées n'augmente pas exponentiellement, ce qui implique que le pourcentage de positions testées par l'algorithme diminue en fonction de  $n$ . De plus la fonction-coût est une fonction à  $n$  variables comme le montre l'équation 15.2 et il est alors fortement probable que sa topologie se complexifie lorsque  $n$  augmente. Pour ces deux raisons la difficulté du problème de minimisation s'accroît avec le nombre de capteurs ce qui explique l'éloignement entre les solutions renvoyées.

Une implication directe de ce phénomène est que la probabilité qu'il existe de meilleures positions de capteurs que celles renvoyées par les algorithmes augmente avec le nombre de triplets, ce qui soulève des interrogations sur le caractère "optimal" de ces positions.

Les résultats de l'évaluation exhaustive de la fonction coût permettent de valider les résultats de minimisation pour un nombre de triplets inférieur ou égal à 2. Pour un nombre de triplets compris entre 3 et 5, le fait que les solutions optimales soient renvoyées ou approchées par au moins deux des trois algorithmes est un argument qui plaide en faveur de leurs

exactitudes. A l'inverse, pour un nombre de capteurs supérieur, les solutions renvoyées sont différentes, ce qui induit un doute quant aux fait qu'elles constituent des solutions globales. Par conséquent, on peut raisonnablement supposer que pour un nombre de triplets inférieur à cinq les positions optimales de triplets calculées constituent les meilleures positions de triplets pour la reconstruction.

Nous avons montré à partir des aiguilles de porcs que, dans le cas d'une aiguille instrumentée de longueur 200 mm avec deux triplets de capteurs, les positions optimales étaient situées aux longueurs 28 mm et 101 mm. Ces positions correspondent à 14% et 51% de la longueur de l'aiguille : nos résultats sont ici soutenus par ceux de Park [PED<sup>+</sup>10], qui propose des positions à 15% et 57%. La position du premier triplet diffère donc de seulement 1% et celle du second triplet de 6%.

Cette observation est d'autant plus intéressante que les méthodes utilisées pour obtenir ces résultats ont des caractéristiques différentes. En effet, Park emploie une méthode 2D utilisant des déformations théoriques et nous employons une méthode 3D employant des déformations expérimentales. La similarité des résultats peut alors s'interpréter de façons différentes :

- Les caractéristiques (notamment les déformations) de nos méthodes ont une influence limitée sur le résultat (les positions optimales). Le positionnement optimal serait alors un facteur intrinsèque de la déformation d'où les similitudes.
- Les hypothèses ont une grande influence sur le résultat et dans ce cas des résultats similaires laissent à penser que nos hypothèses présentent des similitudes avec celles de Park, c'est à dire que les déformations obtenues à partir des aiguilles réelles présentent des ressemblances avec les déformations théoriques utilisées par Park.

Le fonctionnement des méthodes de positionnement laisse pencher pour la deuxième position (en effet les capteurs sont présents là où se situent les déformations). Cette interprétation mériterait d'être validée par des comparaisons supplémentaires entre nos résultats expérimentaux et des résultats théoriques supplémentaires. Néanmoins, l'obtention de résultats équivalents par la méthode de Park et la notre ne doit pas faire oublier pour autant que l'utilisation de déformations expérimentales apporte une légitimité et représentativité supplémentaire par rapport à l'utilisation de déformations calculées à partir de cas de charges théoriques.

A l'inverse, dans le cas d'une aiguille instrumentée avec trois triplets, la comparaison de nos résultats avec ceux de Seifabadi fait apparaître des disparités importantes. En effet, les positions optimales que nous avons obtenues correspondent à 13%, 39% et 68% de la longueur de l'aiguille quand les travaux de Seifabadi [SGA<sup>+</sup>13] font état de positions optimales correspondant à 27%, 72% et 90% de la longueur de l'aiguille.

Cette différence s'explique par une spécificité de la méthode employée par Seifabadi. En effet, contrairement à la méthode de Park ou à notre méthode, ce dernier ne prend pas en compte l'ensemble des capteurs pour la reconstruction mais uniquement les triplets de capteurs qui ont déjà été insérés dans les tissus. Cette approche est la conséquence de l'hypothèse utilisée selon laquelle les capteurs "activés", c'est à dire ceux qui fournissent des

information exploitables, sont ceux qui ont déjà été insérés dans les tissus. Une des conséquences de cette hypothèse est qu'on suppose que la partie de l'aiguille non insérée dans les tissus reste droite. Néanmoins la validité de cette hypothèse reste à démontrer et semble remise en cause par les résultats de l'étude de population d'aiguilles sur les aiguilles non insérées en totalité.

### 15.5.2 Reconstruction avec les positions optimales

Nous avons présenté dans les résultats les différentes erreurs de reconstruction des deux ensembles d'aiguilles selon le positionnement des triplets.

Les positions optimales des triplets ont été calculées par minimisation d'un critère (l'erreur moyenne) sur un type de données (aiguille de porcs). Ainsi, l'utilisation de ces positions à la place des positions équidistantes, permet la diminution de l'erreur de reconstruction moyenne des aiguilles de porcs de 17% au minimum, comme le montre le diagramme 15.13.

Les résultats présentés précédemment montrent que l'utilisation de ces positions permet également d'améliorer la reconstruction pour un critère d'erreur maximale comme on peut le constater dans les figures 15.9 et 15.10. Cette erreur maximale, qui est l'erreur de l'aiguille la moins bien reconstruite, définit la précision de reconstruction atteinte par la méthode. Par conséquent, pour une précision de reconstruction souhaitée, on constate que le nombre de capteurs nécessaires est inférieur lorsque ceux-ci sont positionnés de façon optimales plutôt que de façon équidistantes comme le présente la figure 15.11.

On en déduit alors que les positions optimales permettent d'améliorer la reconstruction selon plusieurs critères.

Le système de reconstruction de la forme de l'aiguille instrumentée ayant pour vocation à être utilisée dans un cadre clinique donc dans des tissus humains, les reconstructions ont également été effectuées sur l'ensemble des aiguilles patients pour validation. Les résultats concernant la reconstruction de l'ensemble des aiguilles patients sont plus nuancés et se divisent en deux cas.

Pour un nombre de triplets compris entre 2 et 5 on constate que l'utilisation des positions optimales permet de diminuer l'erreur maximale et l'erreur moyenne, cette dernière baissant de 23% minimum (figure 15.17).

Nos résultats de simulation pour une reconstruction à 4 triplets de capteurs donne une erreur moyenne de 2.3 mm. Dans leurs travaux, Abayazid [AKM13] et Roesthuis [RM16] ont obtenu expérimentalement pour une reconstruction à 4 triplets de capteurs des erreurs moyennes plus petites, avec respectivement 1.8 mm et 1.7 mm. Néanmoins ces résultats doivent être remis dans leurs contextes pour pouvoir être interprétés. En effet les aiguilles présentes dans les scanners de porcs ont une taille de 200 mm et une longueur d'insertion qui varie approximativement entre 120 mm et 160 mm. Les aiguilles utilisées par Abaya-

zid et Roesthuis sont plus petites (respectivement 185 mm et 172 mm) et ont longueur d'insertion de 120 mm. Ainsi nos aiguilles présentes une plus grande longueur dans les tissus : elles sont susceptibles de subir des déformations sur une plus grande partie de leur longueur. De plus, les insertions que nous avons traitées ont été effectuées dans des tissus vivants, contrairement aux insertions traitées par Abayazid et Roesthuis qui ont été effectuées sur des fantômes. La plus grande complexité matériel des tissus vivants procurent des déformations d'aiguilles plus diversifiées. On soulignera également que nos piqués d'aiguilles ont été effectués dans le but de bâtir un ensemble le plus exhaustif possible des différents cas d'insertions. Ceci explique la présence de flèche allant jusqu'à 22 mm comme en atteste le tableau 14.25. A l'inverse, les flèches des aiguilles des piqués expérimentaux utilisés par Abayazid et Roesthuis sont plus faibles, d'une dizaine de millimètres au maximum. Par conséquent, il est crédible d'affirmer que nos aiguilles ont subi des déformations plus complexes et en plus grands nombres que les aiguilles des piqués exploités par Abayazid et Roesthuis. Cette constatation est une des explications de la différence de précision dans les reconstructions. Une autre explication concerne les erreurs d'approximations des fonctions courbures et angles d'orientation, à l'origine directe de l'erreur de reconstruction. Pour les résultats expérimentaux, ces erreurs sont dues aux erreurs de mesures des capteurs tandis que pour nos résultats elles proviennent des erreurs d'approximations des formes des aiguilles des scanners. Les erreurs de mesures ou d'approximation de ce type sont difficilement quantifiables, ce qui rend complexe la comparaison des erreurs de reconstructions simulées et expérimentales. La comparaison des reconstructions avec les positions optimales des aiguilles de porcs et les positions issues des travaux de Park et Seifabadi semble plus pertinente, les erreurs de reconstructions sont présentées dans le tableau 15.6. Ces résultats viennent appuyer le bien-fondé de nos positions optimales et leurs validités puisqu'on remarque que la reconstruction est plus précise avec ces positions qu'avec les positions issues des travaux de Park et Seifabadi.

Pour un nombre de triplet compris entre 6 et 10, on constate que les erreurs maximales et moyennes sont assez proches. Même si dans ce cas l'utilisation des positions optimales ne constitue pas d'amélioration, on souligne néanmoins que les reconstructions restent relativement précises puisque les erreurs moyennes sont inférieures à 3mm dans les deux cas. Dans la pratique le nombre de triplets de capteurs est limité sur une aiguille : les résultats les plus pertinents sont donc ceux concernant un nombre de triplets compris entre 1 et 5. On peut ainsi utiliser les résultats de la figure 15.16 qui démontre que pour un seuil de précision souhaité, le nombre de triplets nécessaire à la reconstruction de l'aiguille dans les tissus patients est sensiblement inférieur lorsqu'on utilise des positions optimales plutôt que équidistantes. Une des conséquences de ce résultat est que **pour une aiguille instrumentée à usage clinique avec un nombre fixé de triplets de capteurs on peut augmenter la précision de reconstruction en utilisant les positions optimales.**

On en conclut donc que le gain de précision apporté par l'utilisation de ces positions est multi-critère et fonctionne donc également pour les aiguilles patients, c'est à dire avec des insertions d'aiguilles dans des tissus différents que ceux utilisés pour le calcul des positions.

L'observation des erreurs moyennes de reconstructions des aiguilles patients présentées dans la figure 15.17 montre que l'ajout d'un triplet de capteurs s'accompagne d'une légère augmentation de l'erreur de reconstruction, c'est à dire qu'en ajoutant un capteur on reconstruit moins bien. La cause principale de ce phénomène est la taille relativement faible de notre échantillon d'aiguilles patients qui le rend plus vulnérable aux aiguilles mal reconstruites faisant fausser les erreurs de reconstructions. On peut facilement surmonter ce problème en augmentant la taille de notre échantillon. La limite principale de notre méthode concerne l'approximation de la forme de l'aiguille à partir du scanner car la précision de cette approximation a un impact sur la qualité de la reconstruction. Cette limite existe quelque soit la méthode d'approximation utilisée. Une première étape intéressante serait de caractériser l'erreur d'approximation. Plusieurs articles traitent de la caractérisation de l'erreur d'approximation d'une spline de lissage [GM79, Rag83, RR81] et leur exploitation constitueraient peut-être une première étape de l'évaluation de la qualité de l'approximation de la forme d'aiguille.

## 15.6 Conclusion

Nos résultats, dans un premier temps, nous ont permis de démontrer le bien fondé de l'utilisation des positions optimales calculées à partir de notre ensemble d'aiguilles de porcs pour les reconstructions d'aiguilles lors de piqués dans des tissus humains. Dans un second temps, le gain de précision obtenu avec l'utilisation de ces positions optimales à pu être caractériser par comparaison avec des résultats de reconstruction utilisant d'autres positionnement de capteurs.



# CHAPITRE 16

## RECONSTRUCTION AVEC LES MODES

### 16.1 Introduction

Le chapitre 11 présente une méthode de reconstruction simple à partir des informations des capteurs. Dans cette méthode, les fonctions globales de courbures et d'angle d'orientation sont approximées à partir des informations locales des capteurs par "simple" interpolation. On entend par là qu'aucune hypothèse spécifique sur ces fonctions n'est faite en dehors des points d'interpolation. Or la qualité de la reconstruction des fonctions courbure et angle d'orientation influe directement sur la qualité de la reconstruction de la forme de l'aiguille. Ainsi plus les fonctions courbure et angle reconstruites sont fidèles aux fonctions courbure et angle d'orientation originales de l'aiguille, plus la forme de l'aiguille reconstruite est fidèle à la forme de l'aiguille réelle. On en déduit donc deux choses :

- Optimiser la reconstruction des fonctions de courbure et angle d'orientation globales à partir des informations de courbure et d'angle d'orientation locales est une étape cruciale de l'amélioration de la précision de reconstruction.
- L'utilisation d'hypothèses supplémentaires lors de l'étape d'interpolation permettrait de rendre la reconstruction actuelle plus précise.

Par "hypothèses supplémentaires", on entend des informations sur le comportement des fonctions courbure et angle d'orientation. Malheureusement, les seules informations dont on dispose lors d'un piqué sont les valeurs de ces fonctions (calculées à partir des données des capteurs) aux points d'interpolations (les positions des capteurs).

Pour obtenir ces informations supplémentaires, nous allons effectuer un travail préalable. Nous avons remarqué, lors de l'étude de population d'aiguille, que les déformées des aiguilles présentées des similitudes géométriques (même formes, mêmes déformations, etc...). Nous allons voir dans ce chapitre comment caractériser ces similitudes et comment en tirer partie pour améliorer la précision des reconstructions des formes d'aiguilles.

## 16.2 Modes de déformations

### 16.2.1 Fondements

Un piqué d'aiguille est le processus de réalisation de l'insertion d'aiguille dans un tissu par le geste du praticien. Le mot *geste* décrit les actions du praticien sur l'aiguille en elle-même et leurs évolutions temporelles. C'est un facteur cinématique du processus. Les mots *aiguille* et *tissus* se réfèrent aux deux composants de notre système. Ce sont les facteurs matériels du processus. L'aiguille est définie par ses caractéristiques (métal, longueur, gauge), c'est un facteur constant. A l'inverse, les tissus et le geste d'insertion varient pour chaque piqué, ces facteurs ne sont pas constants mais conservent néanmoins certaines similarités (propriétés bio-mécanique des tissus, force axiale du geste d'insertion, etc...). Cet état de fait est présenté dans le tableau 16.1.

Facteurs	Matériel	Cinématique
Constant (=)	Aiguille	
Similaire ( $\approx$ )	Tissus environnant	Geste

TABLE 16.1. – Différents facteurs lors d'insertions d'aiguilles

Lors d'un piqué, par un geste d'insertion, l'aiguille pénètre dans les tissus et se déforme à leurs contacts. Par le principe de causalité, mêmes causes mêmes effets, la similarité des facteurs aiguille, geste et tissus lors des différents piqués entraîne donc des déformations similaires. On va alors chercher à synthétiser cette proximité et cette répétition des déformations de deux manières :

- par la caractérisation géométrique : c'est à dire les **formes** que peuvent prendre les aiguilles.
- par la caractérisation statistique : c'est à dire les **fréquences** auxquelles les aiguilles prennent ces aspects.

Ces caractéristiques seront extraites des données grâce à la méthode d'analyse en composantes principales et seront regroupées dans ce qu'on appelle les *modes de déformations*. On présente dans la suite de ce chapitre deux types de modes de déformations.

### 16.2.2 Modes de déformations à partir des points de contrôles

Dans cette première partie on explore une première approche destinée à se familiariser avec les modes de déformations en considérant les formes géométriques des aiguilles. Pour ce faire, on va réaliser une analyse en composantes principales directement sur les coordonnées des points de contrôle des B-Splines des formes des aiguilles.

Soit un ensemble  $\mathcal{E}$  composé des formes B-spline de  $n$  d'aiguilles. On définit la B-Spline

$\mathbf{S}_k$  de la  $k^{\text{me}}$  forme d'aiguille de l'ensemble  $\mathcal{E}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_k(t) &= \sum_{i=1}^{n_c} B_{i,n}(t) \mathbf{P}_i^k \\ &= \sum_{i=1}^{n_c} B_{i,n}(t) \begin{bmatrix} P_{i_x}^k \\ P_{i_y}^k \\ P_{i_z}^k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

On définit comme l'aiguille moyenne de l'ensemble  $\mathcal{E}$  l'aiguille de forme B-spline  $\bar{\mathbf{S}}$  dont les points de contrôles sont les moyennes des points de contrôle des aiguilles de l'ensemble  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}(t) &= \sum_{i=1}^{n_c} B_{i,n}(t) \bar{\mathbf{P}}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n_c} B_{i,n}(t) \begin{bmatrix} \bar{P}_{i_x} \\ \bar{P}_{i_y} \\ \bar{P}_{i_z} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{avec } \forall i \in \llbracket 1, n_c \rrbracket, \bar{\mathbf{P}}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_i^j$$

$$\text{et } \forall i \in \llbracket 1, n_c \rrbracket, \bar{P}_{i_x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_{i_x}^j \quad \bar{P}_{i_y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_{i_y}^j \quad \bar{P}_{i_z} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_{i_z}^j$$

Soit un échantillon de  $n$  réalisations des  $3n_c$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_{3n_c}$  tel que  $x_{k,i}$  la  $k^{\text{me}}$  réalisation de la variable  $X_i$  soit une coordonnée d'un des points de contrôle de la  $k^{\text{me}}$  B-spline de l'ensemble  $\mathcal{E}$  selon la définition suivante :

$$x_{k,i} = \begin{cases} P_{i_x}^k & \text{pour } i \in \llbracket 1, n_c \rrbracket \\ P_{i-n_c}^k & \text{pour } i \in \llbracket n_c + 1, 2n_c \rrbracket \\ P_{i-2n_c}^k & \text{pour } i \in \llbracket 2n_c + 1, 3n_c \rrbracket \end{cases}$$

L'échantillon  $X$  s'écrit alors :

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,3n_c} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,3n_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1_x}^1 & \cdots & P_{n_{cx}}^1 & P_{1_y}^1 & \cdots & P_{n_{cy}}^1 & P_{1_z}^1 & \cdots & P_{n_{cz}}^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{1_x}^n & \cdots & P_{n_{cx}}^n & P_{1_y}^n & \cdots & P_{n_{cy}}^n & P_{1_z}^n & \cdots & P_{n_{cz}}^n \end{bmatrix}$$

La matrice  $M$  contient l'échantillon  $X$  centré sur sa moyenne :

$$M = \begin{bmatrix} P_{1_x}^1 - \bar{P}_{1_x} & \cdots & P_{n_{cx}}^1 - \bar{P}_{n_{cx}} & P_{1_y}^1 - \bar{P}_{1_y} & \cdots & P_{n_{cy}}^1 - \bar{P}_{n_{cy}} & P_{1_z}^1 - \bar{P}_{1_z} & \cdots & P_{n_{cz}}^1 - \bar{P}_{n_{cz}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{1_x}^n - \bar{P}_{1_x} & \cdots & P_{n_{cx}}^n - \bar{P}_{n_{cx}} & P_{1_y}^n - \bar{P}_{1_y} & \cdots & P_{n_{cy}}^n - \bar{P}_{n_{cy}} & P_{1_z}^n - \bar{P}_{1_z} & \cdots & P_{n_{cz}}^n - \bar{P}_{n_{cz}} \end{bmatrix}$$

On réalise l'analyse en composantes principales sur la matrice  $M$  et on obtient comme résultat  $m = 3n_c$  modes de déformations. On note le  $j^{me}$  mode de déformation  $(\delta_i^j \in \mathbb{R}^3)_{i \in \llbracket 1, n_c \rrbracket}$ . Les modes de déformations s'interprètent alors comme les variations des points de contrôle de la B-spline moyenne. On peut alors utiliser les modes de déformation par ajout de combinaison linéaire des modes aux points de contrôle de la B-Spline moyenne. Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{3n_c}) \in \mathbb{R}^{3n_c}$  le vecteur représentant cette combinaison linéaire, la valeur  $\lambda_i$  représentant le poids accordé au  $i^{me}$  mode de déformation. La B-Spline combinaison linéaire  $\lambda$  des modes de déformation est noté  $\mathbf{S}_\lambda$  et est définie par :

$$\mathbf{S}_\lambda(t) = \sum_{i=1}^{n_c} B_{i,n}(t) \left( \bar{\mathbf{P}}_i + \sum_{j=1}^{3n_c} \lambda_j \delta_i^j \right)$$

### 16.2.2.1 Résultats

On présente dans cette partie l'aiguille moyenne des aiguilles de porcs ainsi que les trois principaux modes de déformations obtenus par analyse en composantes principales à partir des points de contrôle pour les aiguilles de porcs. Ces trois principaux modes sont les plus

significatifs.

L'aiguille moyenne des aiguilles de porcs est représentée dans la figure 16.1. On observe que l'aiguille est plane et que sa flèche est d'environ 10 mm. Ces caractéristiques sont à relier avec le type de recalage utilisé. En effet, celui-ci consiste à placer les aiguilles de telle façon que la flèche soit positive selon l'axe (Oy) et que le plan (xOy) minimise la distance aux carrés par rapport aux points de l'aiguille. On peut ainsi penser que sans recalage l'extrémité distale de l'aiguille aurait eu une distribution uniforme autour de l'axe (Ox) et donc que l'aiguille moyenne aurait pris un aspect d'aiguille droite.

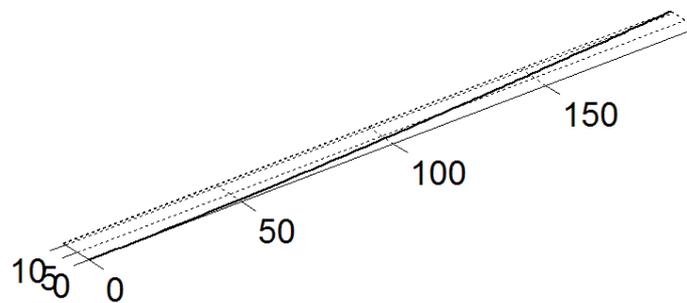


FIGURE 16.1. – Aiguille moyenne des aiguilles de porcs.  
Les échelles sont en millimètres.

On présente maintenant les modes de déformations. Leur numérotation provient de la valeur de la variance qui leur est associée. Ainsi les modes de déformations sont triés par ordre d'importance décroissante. Dans chaque cas, on présentera le mode de déformation indépendamment des autres. Ainsi pour le mode  $k$  on représentera  $\mathbf{S}_{\lambda_k}$  avec  $\lambda_k$  tel que :

$$\lambda_k = (\lambda_1, \dots, \lambda_{3n_c}) \in \mathbb{R}^{3n_c} \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

La figure 16.2 présente le premier mode de déformation des aiguilles de porcs. Ce mode reflète une flexion simple de l'aiguille telle qu'elle se produit quand on applique une force radiale sur l'extrémité distale de l'aiguille. Le mode de déformation 1 représente une déformation de l'aiguille presque plane sans point d'inflexion.

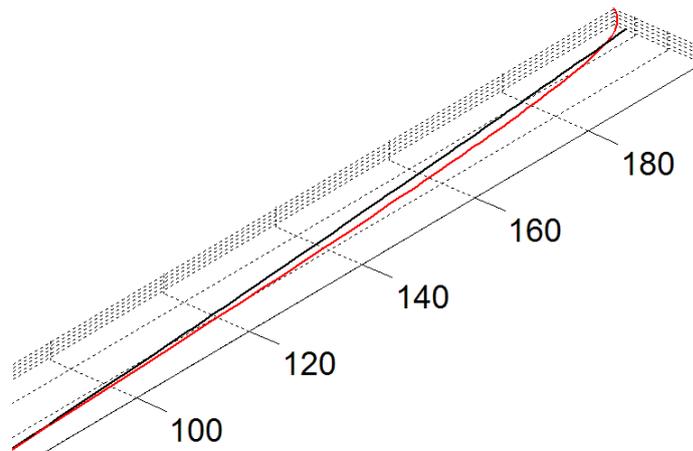


FIGURE 16.2. – Mode de déformation 1 des aiguilles de porcs.  
Le mode 1 est représentée par la courbe rouge. Les échelles sont en millimètres.

La figure 16.3 présente le deuxième mode de déformation des aiguilles de porcs. Le mode de déformation 2 représente une déformation de l'aiguille plane avec un point d'inflexion.

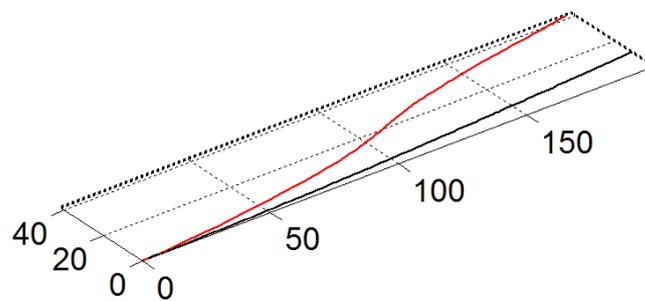


FIGURE 16.3. – Mode de déformation 2 des aiguilles de porcs.  
Le mode 2 est représentée par la courbe rouge. Les échelles sont en millimètres.

La figure 16.4 présente le troisième mode de déformation des aiguilles de porcs. Ce mode représente les déformations non planaires de l'aiguille. On voit que dans ce cas l'aiguille prend une forme en sorte spirale comme cela arrive parfois lorsqu'une insertion d'aiguille est combiné avec un mouvement de rotation.

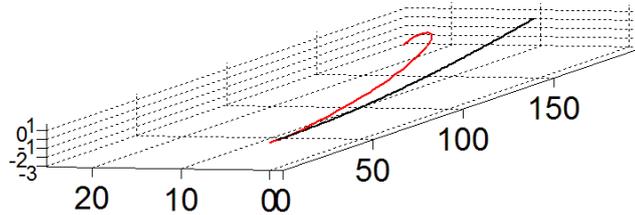


FIGURE 16.4. – Mode de déformation 3 des aiguilles de porcs.

Le mode 3 est représentée par la courbe rouge. Les échelles sont en millimètres.

L'impact du recalage fait apparaître les limites des modes de déformations des aiguilles à partir des points de contrôle des B-splines qui ne sont donc pas invariant par les transformations géométriques de translation et de rotation appliquées sur l'aiguille. Néanmoins ces modes de déformations permettent de mettre en valeurs les différents types de déformations. On constate ainsi que la complexité des déformations croît avec les modes de déformations. Les modes étant classés par ordre décroissant de variance on en conclut que les déformations les plus simples sont aussi les plus fréquentes de l'ensemble des aiguilles de porcs.

### 16.2.3 Modes de déformations des fonctions courbures et angle d'orientation

L'utilisation des modes de déformations répond aux besoins de constituer une base de connaissance préalable de déformations sur les aiguilles et ensuite d'utiliser cette base pour nous aider à reconstruire les fonctions courbure et angle d'orientation. En ce sens les modes de déformations concerneront cette fois-ci, non pas les formes géométriques des aiguilles, mais directement les fonctions courbures et angles d'orientations.

Ainsi les modes de déformations seront extraits des fonctions courbure et angle d'orientation par une analyse en composantes principales fonctionnelles multidimensionnelles (ACPFM).

#### 16.2.3.1 Mise à échelle des fonctions courbure et angle d'orientation

L'ACPFM sera effectuée sur les fonctions bidimensionnelles contenant les fonctions courbure et angle d'orientation. Au regard de la reconstruction des aiguilles de scanners on peut donner un encadrement approximatif de ces fonctions :

$$\forall s \in [0, L], \quad |\kappa(s)| \leq 5 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$$

$$|\theta(s)| \leq 10 \text{ rad}$$

On remarque alors que la courbure  $\kappa$  a un ordre de grandeur environ 1000 fois plus grand que l'ordre de grandeur de l'angle d'orientation  $\theta$ . Ceci aura comme conséquence que les

modes de déformations résultants de la ACPFM refléteront plus les variations de  $\theta$  que de  $\kappa$ . Ce phénomène se produit quand il y a un important déséquilibre entre les ordres de grandeurs des composantes d'une fonction multidimensionnelle dont on fait l'ACPFM [RS05].

Une des solutions pour limiter ce problème est de faire une mise à échelle des fonctions  $\kappa$  et  $\theta$  préalable à l'ACPFM. Pour cela nous allons ajuster les moyennes des fonctions en multipliant les discrétisations de ces fonctions par des termes multiplicatifs appropriés. Mais plutôt que de faire en sorte que les moyennes de ces deux ensembles de fonctions soient égales, nous allons introduire le paramètre  $\eta$  dans les termes multiplicatif de façon à pouvoir donner plus d'importance à l'un ou à l'autre de ces ensembles.

Soit un ensemble  $\mathcal{E}$  composé des formes B-spline de  $n$  d'aiguilles. On note  $f_i$  la fonction à valeur dans  $\mathbb{R}^2$  regroupant les fonctions courbure  $\kappa_i$  et angle d'orientation  $\theta_i$  de la  $i^{\text{me}}$  aiguille.

$$f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$s \mapsto \begin{bmatrix} \kappa_i(s) \\ \theta_i(s) \end{bmatrix}$$

L'ensemble  $(f_i)_{i=1,\dots,n}$  est un ensemble de  $n$  fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $\mu$  la fonction moyenne des fonctions courbure et angle de déformation :

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_\kappa \\ \mu_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa_i \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \kappa_i \\ \theta_i \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i$$

On note  $\tilde{\kappa}_i$  la fonction résultante de la mise à échelle de la fonction  $\kappa_i$  pour tout  $i \in [1, n]$ . De même on note  $\tilde{\theta}_i$  la fonction résultante de la mise à échelle de la fonction  $\theta_i$  pour tout  $i \in [1, n]$ . Ces fonctions sont définies de la façon suivante :

$$\tilde{\kappa}_i = \kappa_i \times 10^{\frac{K}{2}}$$

$$\tilde{\theta}_i = \theta_i \times 10^{-\frac{K}{2}}$$

avec

$$K = \log_{10}(\mu_\theta) - \log_{10}(\mu_\kappa) + \eta$$

Soit  $\mu_{\tilde{\kappa}}$  la fonction moyenne de  $(\tilde{\kappa}_i)_{i=1,\dots,n}$  et  $\mu_{\tilde{\theta}}$  la fonction moyenne de  $(\tilde{\theta}_i)_{i=1,\dots,n}$ . On a

alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_{\tilde{\kappa}}}{\mu_{\tilde{\theta}}} &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\kappa}_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_i} \\
&= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa_i \times 10^{\frac{\kappa}{2}}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i \times 10^{-\frac{\kappa}{2}}} \\
&= \frac{\mu_{\kappa}}{\mu_{\theta}} \times 10^K \\
&= \frac{\mu_{\kappa}}{\mu_{\theta}} \times 10^{\log_{10}(\mu_{\theta}) - \log_{10}(\mu_{\kappa}) + \eta} \\
&= \frac{\mu_{\kappa}}{\mu_{\theta}} \times 10^{\log_{10}\left(\frac{\mu_{\theta}}{\mu_{\kappa}}\right)} \times 10^{\eta}
\end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\boxed{\frac{\mu_{\tilde{\kappa}}}{\mu_{\tilde{\theta}}} = 10^{\eta}} \quad (16.1)$$

Ainsi le rapport des moyennes des fonctions courbure mise à échelle sur les fonctions angle d'orientation mise à échelle est de  $10^{\eta}$ . On remarque ainsi que le paramètre  $\eta$  a une influence logarithmique sur le rapport de ces fonctions. Ainsi si  $\eta = 0$ , la moyenne des fonctions courbures mise à échelle est égale la moyenne des fonctions angles d'orientation mise à échelle, solutionnant ainsi le problème des différences d'ordre de grandeurs lors de l'ACPFM.

### 16.2.3.2 Analyse en composantes principales fonctionnelles multidimensionnelles

On note  $\tilde{f}_i$  la fonction à valeur dans  $\mathbb{R}^2$  regroupant les fonctions mise à échelle de la courbure  $\tilde{\kappa}_i$  et angle d'orientation  $\tilde{\theta}_i$ .

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_i : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
s &\mapsto \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_i(s) \\ \tilde{\theta}_i(s) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On souhaite étudier les caractéristiques de la famille de fonctions  $(\tilde{f}_i)_{i=1, \dots, n}$  d'un point de vue statistique. On va pour cela utiliser l'*analyse en composantes principales fonctionnelles multidimensionnelles*, présentée dans la boîte à outils. On obtient alors en résultats

$m$  modes de la courbure et de l'angle de déformation notés  $(\delta^i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  :

$$\delta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$s \mapsto \begin{bmatrix} \delta_k^i(s) \\ \delta_\theta^i(s) \end{bmatrix}$$

### 16.2.3.3 Exemples

On présente dans cette partie, à titre d'exemple, les résultats de l'analyse en composantes principales fonctionnelles multidimensionnelles sur l'ensemble de fonctions  $(\tilde{f}_i)_{i=1, \dots, n}$  avec comme paramètre  $\eta = 0$ . Les deux premiers modes de déformations de la courbure et de l'angle d'orientation sont représentés dans les figures 16.5 et 16.6.

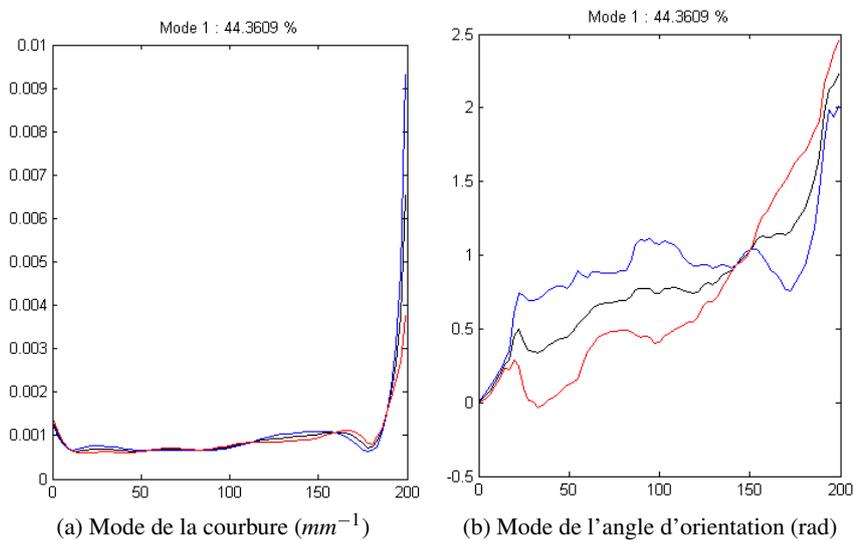


FIGURE 16.5. – Mode de déformation 1 de la courbure et de l'angle d'orientation. Pour ces deux en fonctions la courbe en noire représente la fonction moyenne sur l'ensemble des données tandis que la courbe bleue représente le mode ajouté à cette moyenne et la courbe rouge le mode soustrait à cette moyenne.

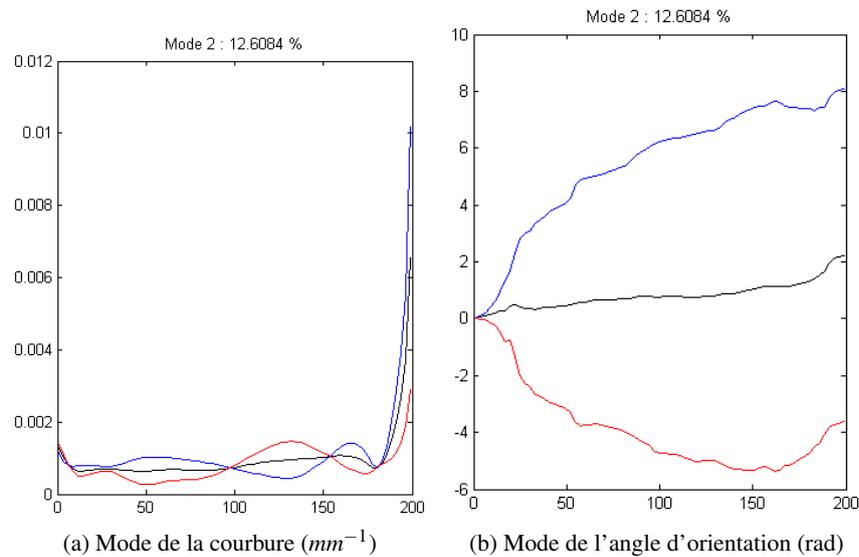


FIGURE 16.6. – Mode de déformation 2 de la courbure et de l'angle d'orientation. Pour ces deux en fonctions la courbe en noire représente la fonction moyenne sur l'ensemble des données tandis que la courbe bleue représente le mode ajouté à cette moyenne et la courbe rouge le mode soustrait à cette moyenne.

On observe dans les figures 16.5a et 16.6a que la moyenne de la courbure est très élevée au voisinage de  $s = 200$  mm. Or le moment appliqué sur l'extrémité distale est nulle, on devrait donc avoir une courbure nulle également. On en déduit que le pic de valeurs de la courbure moyenne au voisinage de  $s = 200$  mm constitue une donnée aberrante. Ce phénomène, traité dans plusieurs travaux [GM79, Rag83, RR81], est un phénomène de dégénérescence aux extrémités susceptible d'apparaître pour des fonctions reconstruites à partir de splines de lissage. C'est un phénomène intrinsèque à la méthode d'approximation en elle-même. Dans le cas de la courbure présentée ici il apparaît aux deux extrémités de l'aiguille mais n'est visible que pour l'extrémité distale car le recalage pour enlever la partie d'aiguille présente dans l'embout plastique a fait disparaître le phénomène pour l'extrémité proximale.

Dans notre cas ce phénomène n'a pas d'implications importantes, en effet plus les erreurs d'approximation de courbure et d'angle d'orientation sont situées vers l'extrémité distale moins l'erreur de reconstruction est élevée. De plus les positions des capteurs ne sont pas situées à l'extrémité distale et de ce fait les valeurs aberrante de courbure et d'angle d'orientation ne seront pas utilisées lors de l'étape de reconstruction à partir des modes.

## 16.3 Reconstruction à partir des modes

### 16.3.1 Principes

Comme expliqué dans la partie concernant la théorie de Reissner présentée dans le chapitre 5, la poutre se déforme sous l'action des cas de chargement externes  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{m}$ . L'équation suivante obtenue dans la partie 13 (valable en cas de non-cisaillement et de non-traction-compression) fait le lien entre le moment linéique externe  $\mathbf{m}$  et les fonctions de courbure et d'angle d'orientation  $\kappa$  et  $\theta$  :

$$\begin{cases} m_t &= -GJ\kappa'_t \\ m_1 &= -EI(\kappa \cos(\theta))' + (GJ - EI)\kappa_t \kappa \sin(\theta) \\ m_2 &= EI(\kappa \sin(\theta))' + (GJ - EI)\kappa_t \kappa \cos(\theta) \end{cases} \quad (16.2)$$

Les modes de déformation de la courbure et de l'angle d'orientation traduisant les variations de ces deux fonctions sur l'ensemble des aiguilles. Par conséquent, comme le montre l'équation 16.2, les modes de déformations de la courbure et de l'angle d'orientation sont liés aux variations des cas de chargements de l'aiguille.

Ce résultat fournit une interprétation physique à la méthode de reconstruction de la courbure et de l'angle d'orientation par combinaison linéaire des modes de déformations que nous allons présenter dans la suite de ce chapitre.

En effet, l'hypothèse :

*Les fonctions courbure et angle d'orientation entre deux positions de capteurs peuvent être approchées par des combinaisons linéaires des modes de courbure et angle.*

s'interprète alors physiquement comme :

*Les cas de charges présent sur l'aiguille entre deux positions de capteurs peuvent être approchés par des combinaison linéaires de fonctions reliées aux cas de charges principaux de notre ensemble d'aiguilles.*

### 16.3.2 Combinaison linéaire de modes de déformations

#### 16.3.2.1 Définition

On note  $\delta$  la matrice rassemblant les  $m$  modes de déformations de notre ensemble d'aiguilles :

$$\delta = [ \delta^1 \quad \dots \quad \delta^m ] = \begin{bmatrix} \delta_\kappa^1 & \dots & \delta_\kappa^m \\ \delta_\theta^1 & \dots & \delta_\theta^m \end{bmatrix} \quad (16.3)$$

Soit  $\mu$  la moyenne des fonctions sur laquelle a été réalisée l'ACPFM. On va alors dire qu'une fonction  $f$  est une combinaison linéaire des  $m$  modes lorsque cette fonction  $f$  centrée sur  $\mu$  est combinaison linéaire des  $m$  modes, c'est à dire :

$$f - \mu \in \text{Vect}(\delta^1, \dots, \delta^m)$$

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  la combinaison linéaire des  $m$  modes réunit dans la fonction d'approximation  $f$ , on a alors :

$$\begin{aligned} f - \mu &= \delta \cdot \lambda \\ \Rightarrow f &= \mu + \delta \cdot \lambda \\ \Rightarrow f &= \mu + [\delta^1 \quad \dots \quad \delta^m] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \\ \Rightarrow f &= \mu + \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta^i \\ \Rightarrow f &= \begin{bmatrix} \mu_\kappa \\ \mu_\theta \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \begin{bmatrix} \delta_\kappa^i \\ \delta_\theta^i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 16.3.2.2 Recherche du coefficient $\lambda$

Soit  $f$  la fonction originale que l'on souhaite approximer à partir de sa discrétisation  $(f(s_i))_{i=1, \dots, n}$ , on a :

$$f(s_i) = \begin{bmatrix} y_\kappa^i \\ y_\theta^i \end{bmatrix} \quad (16.4)$$

On souhaite approximer  $f$  avec  $f^*$  la fonction reconstruite par combinaison linéaire de modes, on pose :

$$f^* = \mu + \delta \lambda \quad (16.5)$$

Pour cela on va minimiser la somme des différences au carré :

$$\begin{aligned} S(s_i, \lambda) &= \sum_{i=1}^n \|f(s_i) - f^*(s_i)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \|f(s_i) - \mu(s_i) - \delta(s_i)\lambda\|^2 \end{aligned}$$

On tombe alors sur un système de minimisation de somme au moindre carrés linéaire classique. On calcule le gradient de  $S$  selon les coordonnées du paramètre  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda_j}(s_i, \lambda) &= 2 \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial S}{\partial \lambda_j}(f(s_i) - \mu(s_i) - \delta(s_i)\lambda) \mid f(s_i) - \mu(s_i) - \delta(s_i)\lambda \right\rangle \\ &= -2 \sum_{i=1}^n \langle \delta^j(s_i) \mid f(s_i) - \mu(s_i) - \delta(s_i)\lambda \rangle \end{aligned}$$

Le minimum de  $S$  est atteint lorsque ses gradients sont nuls. Le paramètre  $\lambda$  étant de dimension  $m$ , il y a donc  $m$  équations de gradient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial S}{\partial \lambda_j}(s_i, \lambda) = 0, \quad j = 1, \dots, m \\
& \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \langle f(s_i) - \mu(s_i) - \delta(s_i)\lambda \mid \delta^j(s_i) \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left\langle f(s_i) - \mu(s_i) - \sum_{k=1}^m \delta^k(s_i)\lambda_k \mid \delta^j(s_i) \right\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \langle f(s_i) - \mu(s_i) \mid \delta^j(s_i) \rangle - \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{k=1}^m \delta^k(s_i)\lambda_k \mid \delta^j(s_i) \right\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \langle f(s_i) - \mu(s_i) \mid \delta^j(s_i) \rangle - \sum_{k=1}^m \lambda_k \sum_{i=1}^n \langle \delta^k(s_i) \mid \delta^j(s_i) \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left\langle \begin{bmatrix} f_{\kappa}(s_i) - \mu_{\kappa}(s_i) \\ f_{\theta}(s_i) - \mu_{\theta}(s_i) \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^j(s_i) \\ \delta_{\theta}^j(s_i) \end{bmatrix} \right\rangle - \sum_{k=1}^m \lambda_k \sum_{i=1}^n \left\langle \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^k(s_i) \\ \delta_{\theta}^k(s_i) \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^j(s_i) \\ \delta_{\theta}^j(s_i) \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} f_{\kappa}(s_1) - \mu_{\kappa}(s_1) \\ f_{\theta}(s_1) - \mu_{\theta}(s_1) \\ \vdots \\ f_{\kappa}(s_n) - \mu_{\kappa}(s_n) \\ f_{\theta}(s_n) - \mu_{\theta}(s_n) \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^j(s_1) \\ \delta_{\theta}^j(s_1) \\ \vdots \\ \delta_{\kappa}^j(s_n) \\ \delta_{\theta}^j(s_n) \end{bmatrix} \right\rangle - \sum_{k=1}^m \lambda_k \left\langle \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^k(s_1) \\ \delta_{\theta}^k(s_1) \\ \vdots \\ \delta_{\kappa}^k(s_n) \\ \delta_{\theta}^k(s_n) \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^j(s_1) \\ \delta_{\theta}^j(s_1) \\ \vdots \\ \delta_{\kappa}^j(s_n) \\ \delta_{\theta}^j(s_n) \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} f_{\kappa}(s_1) - \mu_{\kappa}(s_1) \\ f_{\theta}(s_1) - \mu_{\theta}(s_1) \\ \vdots \\ f_{\kappa}(s_n) - \mu_{\kappa}(s_n) \\ f_{\theta}(s_n) - \mu_{\theta}(s_n) \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^m \lambda_k \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^k(s_1) \\ \delta_{\theta}^k(s_1) \\ \vdots \\ \delta_{\kappa}^k(s_n) \\ \delta_{\theta}^k(s_n) \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^j(s_1) \\ \delta_{\theta}^j(s_1) \\ \vdots \\ \delta_{\kappa}^j(s_n) \\ \delta_{\theta}^j(s_n) \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} f_{\kappa}(s_1) - \mu_{\kappa}(s_1) \\ f_{\theta}(s_1) - \mu_{\theta}(s_1) \\ \vdots \\ f_{\kappa}(s_n) - \mu_{\kappa}(s_n) \\ f_{\theta}(s_n) - \mu_{\theta}(s_n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^1(s_1) & \cdots & \delta_{\kappa}^m(s_1) \\ \delta_{\theta}^1(s_1) & & \delta_{\theta}^m(s_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{\kappa}^1(s_n) & \cdots & \delta_{\kappa}^m(s_n) \\ \delta_{\theta}^1(s_n) & \cdots & \delta_{\theta}^m(s_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^j(s_1) \\ \delta_{\theta}^j(s_1) \\ \vdots \\ \delta_{\kappa}^j(s_n) \\ \delta_{\theta}^j(s_n) \end{bmatrix} \right\rangle = 0
\end{aligned}$$

On pose :

$$Y = \begin{bmatrix} f_{\kappa}(s_1) - \mu_{\kappa}(s_1) \\ f_{\theta}(s_1) - \mu_{\theta}(s_1) \\ \vdots \\ f_{\kappa}(s_n) - \mu_{\kappa}(s_n) \\ f_{\theta}(s_n) - \mu_{\theta}(s_n) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^1(s_1) & \cdots & \delta_{\kappa}^m(s_1) \\ \delta_{\theta}^1(s_1) & & \delta_{\theta}^m(s_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{\kappa}^1(s_n) & & \delta_{\kappa}^m(s_n) \\ \delta_{\theta}^1(s_n) & \cdots & \delta_{\theta}^m(s_n) \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \quad (16.6)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda_j}(s_i, \lambda) &= 0, \quad j = 1, \dots, m \\ \Leftrightarrow \left\langle Y - X\lambda \mid \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^j(s_1) \\ \delta_{\theta}^j(s_1) \\ \vdots \\ \delta_{\kappa}^j(s_n) \\ \delta_{\theta}^j(s_n) \end{bmatrix} \right\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^j(s_1) & \delta_{\theta}^j(s_1) & \cdots & \delta_{\kappa}^j(s_n) & \delta_{\theta}^j(s_n) \end{bmatrix} (Y - X\lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \delta_{\kappa}^1(s_1) & \delta_{\theta}^1(s_1) & \cdots & \delta_{\kappa}^1(s_n) & \delta_{\theta}^1(s_n) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \delta_{\kappa}^m(s_1) & \delta_{\theta}^m(s_1) & \cdots & \delta_{\kappa}^m(s_n) & \delta_{\theta}^m(s_n) \end{bmatrix} (Y - X\lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow X^T (Y - X\lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow X^T Y - X^T X \lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow X^T X \lambda &= X^T Y \\ \Leftrightarrow \lambda &= (X^T X)^{-1} X^T Y \end{aligned}$$

$$\lambda = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

On a donc l'expression de  $\lambda$ , la combinaison linéaire des modes de déformation pour obtenir l'approximation de la fonction bidimensionnelle  $f$ .

### 16.3.3 Choix du paramètre $\eta$

Le paramètre  $\eta$  apparaît dans le ratio des moyennes des fonctions courbure et angle d'orientation mises à échelle. On rappelle ainsi l'équation 16.1 :

$$\frac{\mu_{\bar{\kappa}}}{\mu_{\bar{\theta}}} = 10^{\eta}$$

Le paramètre  $\eta$  permet alors de donner de l'importance soit à la courbure, soit à l'angle d'orientation. Par exemple si  $\eta = 1$  alors la moyenne des fonctions courbures des aiguilles est 10 fois supérieure à celle des fonctions angle de déformation. A l'inverse si  $\eta = -1$  alors c'est la moyenne des fonctions angle de déformation qui est 10 fois supérieure à celle des fonctions de courbure.

L'importance qu'une des deux fonctions a ainsi par rapport à l'autre se retrouve alors, une fois l'ACPFM réalisée, dans les modes de déformations.

En utilisant la méthode de reconstruction à partir des modes présentés dans la partie précédente, nous allons définir la valeur optimale de  $\eta$  de la façon suivante :

Soit un nombre de modes de reconstruction  $m$  fixé.

- on choisit une valeur de  $\eta$ .
- on obtient les  $m$  modes de déformation des aiguilles de porcs avec l'ACPFM.
- on calcule l'erreur moyenne de reconstruction de l'ensemble des aiguilles de porcs en reconstruisant chaque aiguille avec les  $m$  modes de déformation.

On minimise alors l'erreur moyenne de reconstruction sur la variable  $\eta$ .

Finalement on obtient alors la valeur optimale du paramètre  $\eta$  qui minimise l'erreur de reconstruction des aiguilles de porcs pour un nombre de modes  $m$  donné.

## 16.4 Résultats

Dans les résultats suivants on utilise l'hypothèse selon laquelle les triplets sont positionnés de façon optimale.

### 16.4.1 Paramètres optimaux de la méthode de reconstruction avec modes

Nous allons présenter dans cette partie les résultats de l'erreur moyenne de reconstruction avec les modes des aiguilles de porcs en fonction du nombre de modes utilisé et du paramètre  $\eta$  pour un nombre de triplets de capteurs.

Les figure 16.7a et 16.7b représentent cette erreur pour 1 triplet de capteurs. L'erreur moyenne de reconstruction est minimale pour  $m = 9$  et  $\eta = 0.5$ .

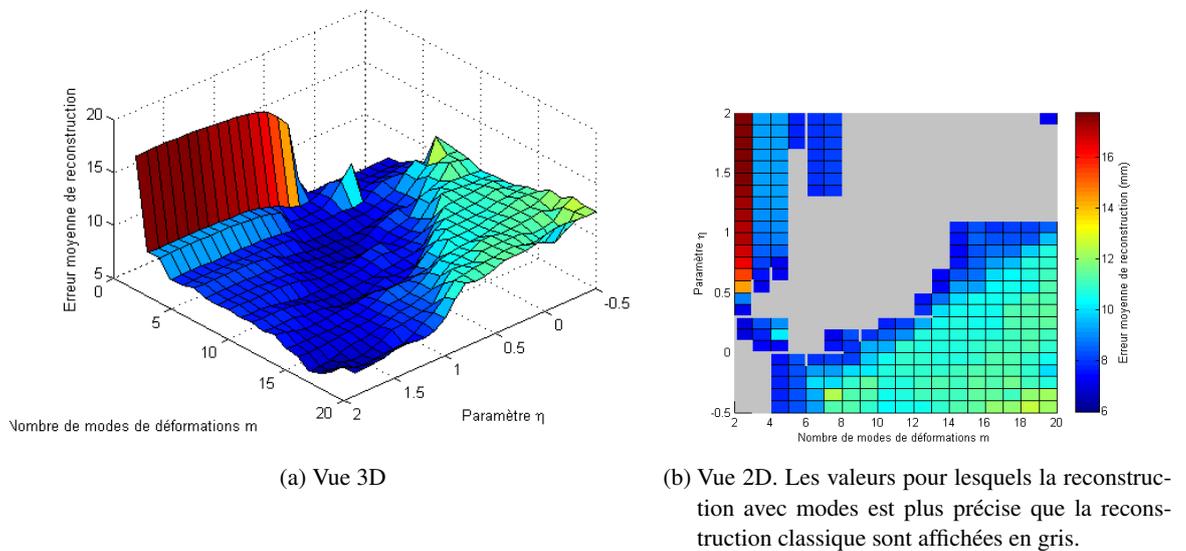


FIGURE 16.7. – Erreur de reconstruction moyenne en millimètre avec les modes pour 1 triplet de capteurs de l'ensemble des aiguilles de porcs en fonction du nombre de modes et du paramètre  $\eta$ .

Les figure 16.8a et 16.8b représentent l'erreur moyenne de reconstruction pour 2 triplet de capteurs. L'erreur moyenne de reconstruction est minimale pour  $m = 7$  et  $\eta = 0.1$ .

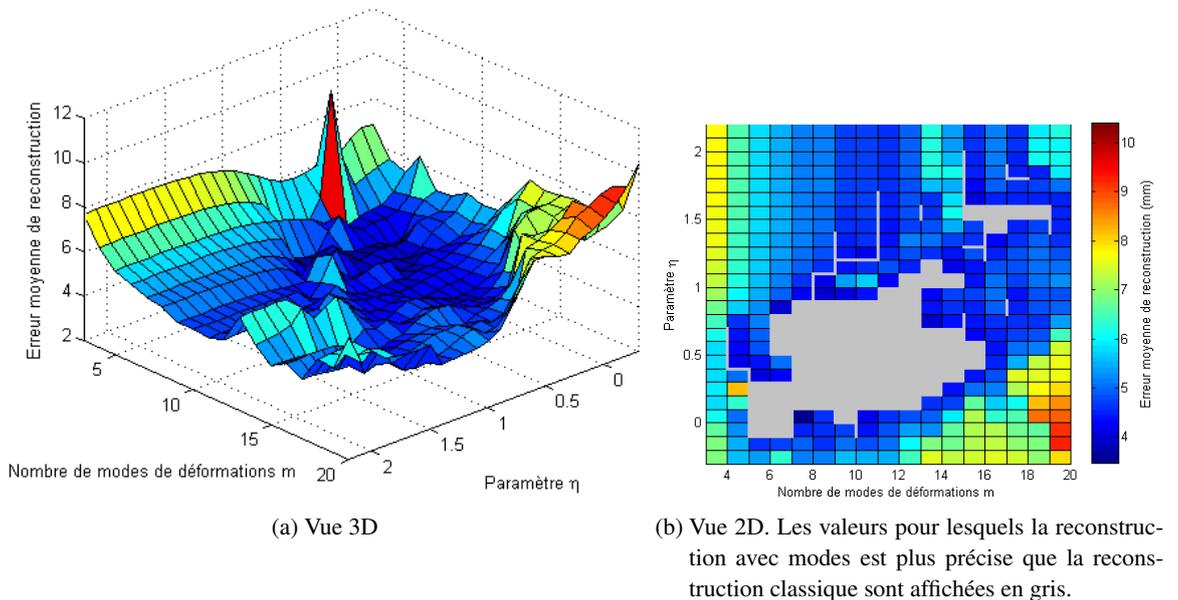


FIGURE 16.8. – Erreur de reconstruction moyenne en millimètre avec les modes pour 2 triplets de capteurs de l'ensemble des aiguilles de porcs en fonction du nombre de modes et du paramètre  $\eta$ .

Les figure 16.9a et 16.9b représentent l'erreur moyenne de reconstruction pour 3 triplet de capteurs. L'erreur moyenne de reconstruction est minimale pour  $m = 13$  et  $\eta = 0.3$ .

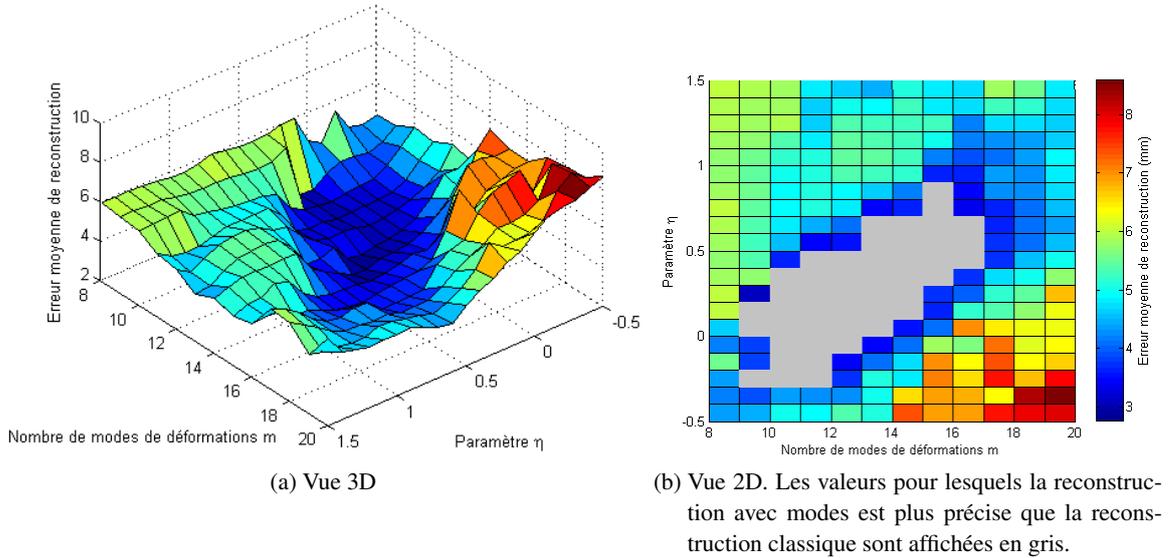


FIGURE 16.9. – Erreur de reconstruction moyenne en millimètres avec les modes pour 3 triplets de capteurs de l'ensemble des aiguilles de porcs en fonction du nombre de modes et du paramètre  $\eta$

Pour un nombre de triplet supérieur ou égal à 4, la reconstruction avec modes ne permet pas de reconstruire plus précisément que la reconstruction classique.

Les zones grises des figures 16.7, 16.8 et 16.9 symbolisent les valeurs des nombres de modes  $m$  et de paramètres  $\eta$  pour lesquelles la reconstruction avec les modes est plus précise en moyenne que la reconstruction classique. Ainsi pour un nombre de triplets de capteurs compris entre de 1 et 3, l'utilisation de la reconstruction avec les modes permettrait de gagner en précision, sous condition de choisir un nombre de modes  $m$  et un paramètre  $\eta$  approprié.

Par conséquent nous allons utiliser dans la suite de ce chapitre, selon le nombre de triplets de capteurs, les valeurs de  $m$  et de  $\eta$  qui minimisent l'erreur moyenne. Ces valeurs sont récapitulées dans le tableau 16.2 :

Nombre de triplets de capteurs	Nombre de modes $m$	Paramètre $\eta$
1	9	0.5
2	7	0.1
3	13	0.3

TABLE 16.2. – Valeurs du nombre de mode  $m$  et du paramètre  $\eta$  qui minimisent l'erreur moyenne de reconstruction par modes de l'ensemble des aiguilles de porcs selon le nombre de triplets de capteurs.

### 16.4.2 Validation de la reconstruction avec modes

Nous allons présenter dans cette partie les résultats de validation de la reconstruction avec modes. Ces résultats comprennent la reconstruction des ensembles d'aiguilles de porc et d'aiguilles patients à partir des modes.

#### 16.4.2.1 Reconstruction des aiguilles de porcs

Nous allons estimer la fiabilité de la reconstruction avec les modes sur l'ensemble des aiguilles de porcs. La méthode employée est la validation croisée de type *leave-one-out cross-validation*. Cette méthode consiste à diviser notre ensemble de scanners en deux échantillons, un d'apprentissage et un de test. Pratiquement, à partir de l'ensemble d'aiguilles de porcs de taille  $n$ , est constitué un échantillon d'apprentissage de taille  $n - 1$  à partir duquel sont calculé les modes de déformations. Ces modes de déformations sont ensuite utilisés pour reconstruire l'échantillon test de taille 1, constitué donc d'une seule aiguille. En répétant cette procédure  $n$  fois, on peut ainsi obtenir la reconstruction avec les modes de chaque aiguille tout en préservant le fait que les modes sont indépendants des aiguilles reconstruites.

La figure 16.10 présente les résultats statistiques des erreurs de reconstruction des aiguilles de porcs selon le type de reconstruction et le nombre de triplets de capteurs.

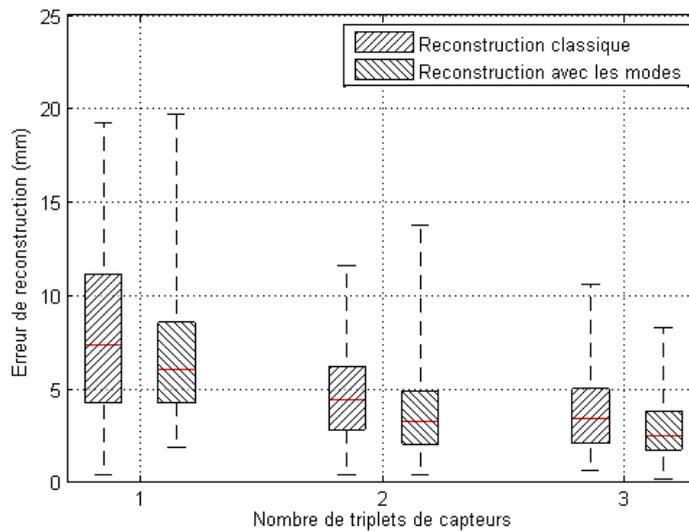


FIGURE 16.10. – Diagramme en boîtes de l'erreur de reconstruction des aiguilles de porcs selon le nombre de triplets de capteurs.

Les segments aux extrémités désignent les minima et maxima, les boîtes encadrent le premier et troisième quartile tandis que la médiane est tracée en rouge.

On remarque sur la figure 16.10 que le premier quartile, la médiane ainsi que le troisième quartile sont inférieurs dans le cas d'une reconstruction avec modes par rapport à une reconstruction classique. A l'inverse le maximum de l'erreur de reconstruction avec modes est plus élevé que celui de l'erreur de reconstruction classique pour un nombre de triplet de capteur égal à 1 ou 2.

La moyenne des erreurs de reconstruction est présentée dans le tableau 16.3.

Erreur de reconstruction moyenne de l'ensemble des aiguilles de porcs (mm)				
Nombre de triplets de capteurs		1	2	3
Reconstruction optimale	classique	8.0	4.6	3.8
	avec les modes	6.6	3.9	3.0

TABLE 16.3. – Erreur moyenne de reconstruction de l'ensemble des aiguilles de porcs dans le cas de reconstructions avec ou sans modes pour des positions optimales de capteurs.

L'utilisation de la reconstruction avec modes permet ainsi de gagner en moyenne 1.4 mm pour un triplet de capteurs, 0.7 mm pour deux triplet de capteurs et 0.8 mm pour trois triplets de capteurs.

Le gain de précision est le gain relatif de l'erreur moyenne de reconstruction, il est présenté

dans le diagramme 16.11.

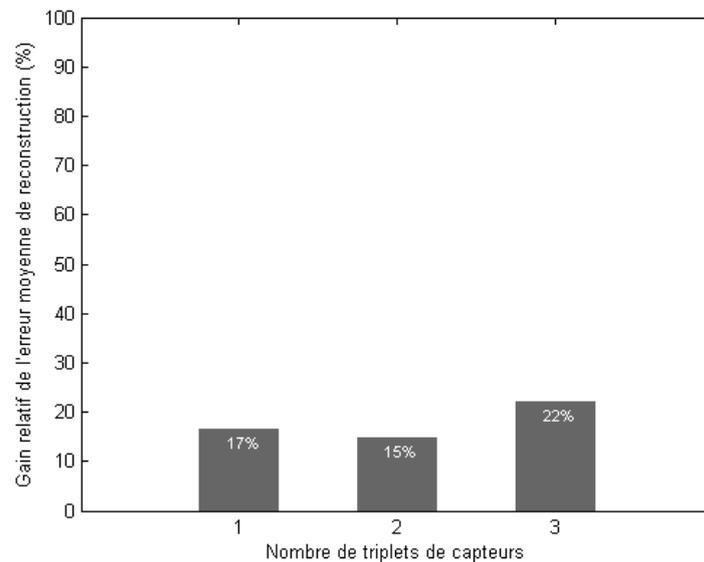


FIGURE 16.11. – Gain relatif de précision pour l'ensemble des aiguilles de porcs obtenue avec la reconstruction avec les modes par rapport à la reconstruction classique.

On observe ainsi à partir de la figure 16.11 que l'utilisation des modes pour la reconstruction des aiguilles de porcs permet un gain de précision entre 15% et 22% en moyenne.

#### 16.4.2.2 Reconstruction des aiguilles patients

On présente dans cette partie les résultats de la reconstruction avec les modes des aiguilles patients. On effectue cette reconstruction pour un nombre de triplets compris entre 1 et 3 en gardant les valeurs de  $m$  et de  $\eta$  spécifié dans le tableau 16.2.

La figure 16.12 présente les résultats statistiques des erreurs de reconstruction de l'ensemble des aiguilles patients selon le nombre de triplets de capteurs.

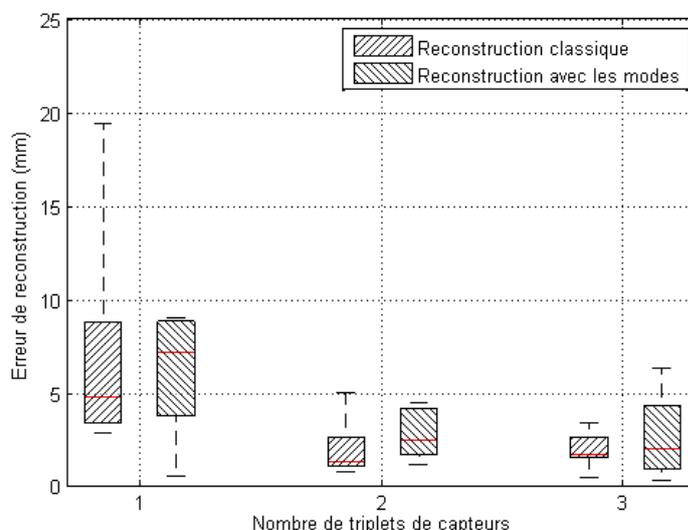


FIGURE 16.12. – Diagramme en boîtes de l'erreur de reconstruction des aiguilles patients selon le nombre de triplets de capteurs.

Les segments aux extrémités désignent les minima et maxima, les boîtes encadrent le premier et troisième quartile tandis que la médiane est tracée en rouge

On remarque sur la figure 16.12 que dans le cas d'un seul triplet de capteurs l'erreur maximale est supérieure dans le cas de la reconstruction classique tandis que la médiane est supérieure dans le cas de la reconstruction avec les modes. La moyenne des erreurs de reconstruction est présentée dans le tableau 16.4.

Erreur de reconstruction moyenne de l'ensemble des aiguilles patients (mm)				
Nombre de triplets de capteurs		1	2	3
Reconstruction optimale	classique	7.6	2.0	2.0
	avec les modes	6.0	2.9	2.6

TABLE 16.4. – Erreur moyenne de reconstruction de l'ensemble des aiguilles patients dans le cas de reconstructions avec ou sans modes pour des positions optimales de capteurs.

Par conséquent, au vu des résultats du tableau 16.4 on constate que la reconstruction avec les modes est plus précise que la reconstruction classique uniquement pour un seul triplet de capteur. Le gain relatif en pourcentage de la reconstruction avec les modes par rapport à la reconstruction classique est présenté dans lea figure 16.13.

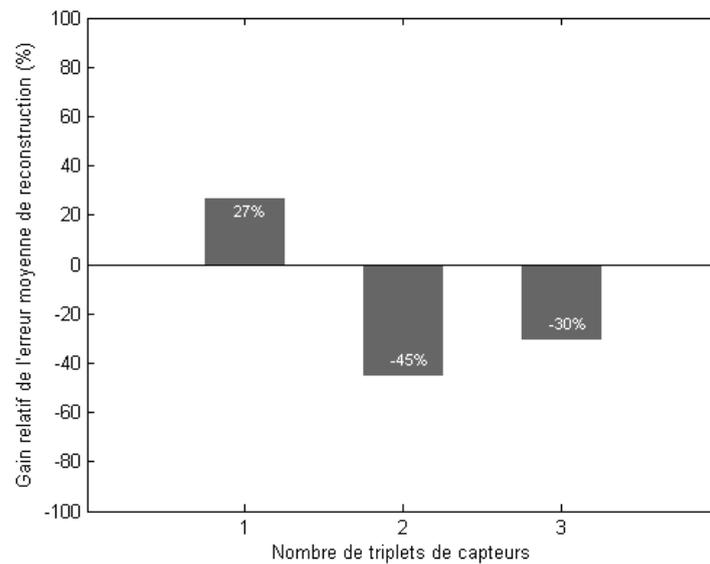


FIGURE 16.13. – Gain relatif de précision pour l'ensemble des aiguilles patients obtenue avec la reconstruction avec les modes par rapport à la reconstruction classique.

### 16.4.3 Reconstruction des fonctions courbures et angles de déformations

On présente ici un exemple de reconstructions des fonctions courbures et angle d'orientation lors de la reconstruction avec les modes.

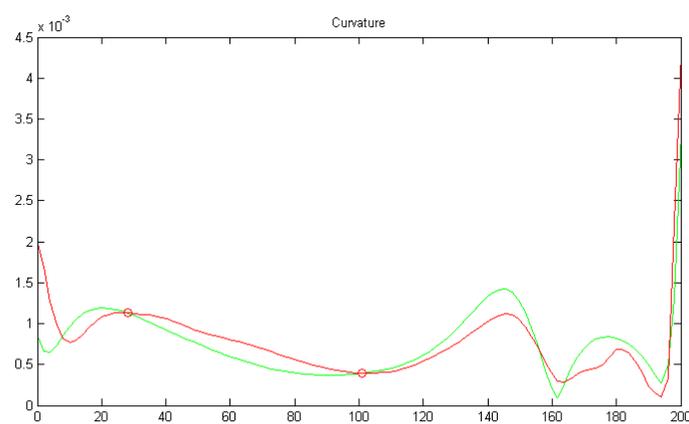


FIGURE 16.14. – Reconstruction de la courbure à partir des modes. La courbure originale est en verte et la courbure approximée est en rouge.

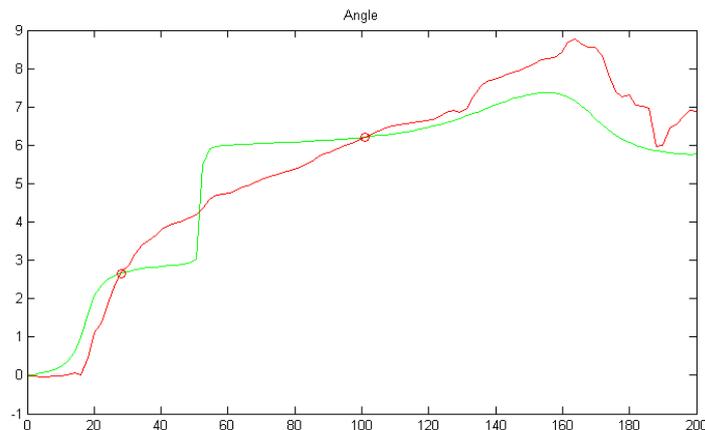


FIGURE 16.15. – Reconstruction de l'angle d'orientation à partir des modes. La fonction angle originale est en verte et la fonction angle originale reconstruite est en rouge.

## 16.5 Discussion

### 16.5.1 Nombres de modes et paramètre $\eta$

Dans la partie précédente ont été présentés les résultats de reconstruction avec les modes selon le nombre de triplets de capteurs de l'aiguille. Ainsi, pour un nombre de triplets compris entre 1 et 3, la reconstruction avec les modes est plus précise que la reconstruction classique comme le montre les figures 16.7, 16.8 et 16.9. A l'inverse pour un nombre de triplets supérieur ou égal à 4 la reconstruction avec les modes n'apporte pas de précision supplémentaire. Or la précision ou non de la reconstruction traduit directement la qualité de l'approximation des fonctions courbures et angles d'orientations.

Cela signifie que, dans le cas des aiguilles de porcs, 4 est le nombre minimum de données de discrétisation des fonctions courbures et angle d'orientation qui permet d'avoir en moyenne une interpolation suffisamment précise pour que l'utilisation des modes n'apporte rien de plus. A l'inverse pour un nombre de données de discrétisation inférieure ou égale à trois, les fonctions courbure et angle d'orientation obtenues par interpolation sont moins précises que celles obtenues à partir des modes. Les modes permettent en effet dans ce cas de "combler" le faible nombre d'informations fournies par les triplets de capteurs. On soulignera que le fait que les modes soient utiles jusqu'à trois triplets de capteurs est une information sur les complexités des fonctions courbures et angles d'orientation des aiguilles de porcs.

La reconstruction par modes possède deux paramètres : le nombre de mode  $m$  et la valeur  $\eta$ . Les valeurs de ces paramètres influent énormément sur l'erreur de reconstruction comme le montre les discrétisations de l'erreur moyenne en fonction de ces paramètres présentées

dans les figures 16.7, 16.8 et 16.9. Pour reconstruire au mieux nous allons choisir les valeurs qui minimisent cette erreur selon le nombre de triplets de capteurs. Ces valeurs sont affichées dans le tableau 16.2.

### 16.5.2 Reconstruction avec modes

La première étape de validation des modes concerne la reconstruction des aiguilles de porcs. La validation croisée permet de valider l'utilité de la reconstruction avec les modes en caractérisant le gain de précision obtenu.

Ainsi la reconstruction des aiguilles de porcs avec les modes procure un gain de précision d'environ 20%, comme le montre la figure 16.11. Les modes, calculés à partir de déformations d'aiguilles insérées dans une épaule de porcs, se révèlent donc efficace pour reconstruire des aiguilles déformées dans un tissu de même type.

La reconstruction par modes se révèle beaucoup moins efficace lors de la reconstruction des aiguilles patients comme le révèle la figure 16.13. En effet, dans le cas où les triplets sont aux nombres de deux ou trois, la reconstruction avec les modes s'avère moins précise. A l'inverse dans le cas où l'aiguille instrumentée possède un seul triplet la reconstruction avec les modes permet un gain de précision de plus de 20% comme le montre la figure 16.13.

On remarque donc que les résultats de reconstruction sont bien meilleurs lorsqu'on reconstruit des aiguilles déformées dans un tissu de même type que celui des déformées qui ont permis de créer les modes. Cette différence de milieux d'insertion explique en partie les différences de performance de la reconstruction avec les modes. Néanmoins, malgré la différence de milieu, la reconstruction avec les modes permet d'améliorer la précision dans le cas d'un seul triplet de capteur, lorsque l'erreur moyenne est élevée. Les aiguilles patients étant plus faiblement déformées, les erreurs moyennes de reconstructions sont plus faibles que celles des aiguilles de porcs et sont donc plus difficilement améliorable avec les modes.

Ces constatations permettent de dégager les principaux critères d'efficacité de la reconstruction avec les modes de déformation :

- **une faible quantité d'information sur la déformée** : plus la quantité d'informations fournies par les triplets de capteurs est faible, plus les modes seront capables de combler ce manque d'information.
- **une erreur de reconstruction élevée** : plus l'erreur de reconstruction est élevée plus les informations apportées par les modes sont susceptibles de d'améliorer la précision de reconstruction.
- **une forte corrélation entre les modes et les conditions d'insertion** : plus les modes proviennent de données présentant des caractéristiques commune avec l'aiguille à reconstruire, plus la reconstruction sera efficace.

Ainsi, dans le cas des aiguilles de porcs, la reconstruction avec les modes est efficace jusqu'à 3 triplets de capteurs car, au-delà, l'information présente est suffisamment riche et

les modes ne peuvent plus rien apporter.

Dans le cas des aiguilles patients, la reconstruction avec les modes est efficace pour un seul triplet de capteurs car au-delà l'erreur de reconstruction est trop faible et les modes présentent des limites car créés à partir de tissus de porcs.

Au regard des critères cités précédemment, on pourrait suggérer comme piste d'amélioration le calcul direct des modes de déformations à partir d'aiguilles patients. Une expérimentation avec une aiguille instrumentée permettrait de comparer les résultats théoriques et pratiques de reconstruction.

## 16.6 Conclusion

La reconstruction avec les modes de déformation constitue donc une approche innovante et utile qui permet d'améliorer la précision de la reconstruction de la déformée d'une aiguille lors de son insertion dans les tissus. Cette méthode est particulièrement indiquée dans le cas où le nombre de triplets de capteurs est limité : cette méthode constitue donc une réponse intéressante aux contraintes techniques d'instrumentation des aiguilles.

# CHAPITRE 17

## HYPOTHÈSES DE DÉFORMATIONS

### 17.1 Introduction

L'étude de la déformation des aiguilles hypodermiques lors de piqués médicaux est au coeur de ce manuscrit. En assimilant ces aiguilles à des structures telle que des poutres nous disposons alors d'outils permettant l'étude et la caractérisation de leurs déformations tels que la théorie des poutres de Reissner [Rei73].

Des hypothèses sur les déformations ont été formulées, il serait intéressant de mesurer leurs impacts sur la déformation d'une aiguille lors d'un piqué dans les tissus. On aurait ainsi une idée de l'importance des types de déformations lors d'un piqué d'aiguille et on pourrait juger de la validité des hypothèses utilisées.

Pour étudier, c'est à dire calculer la déformation d'une aiguille lors de son insertion dans un tissu il est nécessaire de connaître les caractéristiques de l'aiguille et les caractéristiques de ces cas de charges. En se basant sur des mesures de cas de charges expérimentaux issus de la littérature nous allons évaluer, grâce à la théorie des poutres, l'impact des différents types de déformations sur la forme de l'aiguille, et notamment la position de son extrémité distale.

### 17.2 Cas de charges expérimentaux

La littérature recèle de nombreux articles expérimentaux traitant de mesure de cas de charges lors d'insertions d'aiguilles. Ces mesures expérimentales sont la plupart du temps obtenues à l'aide de capteurs de force situés à l'extrémité proximale de l'aiguille : on peut alors notamment mesurer la force axiale et le moment axial lors de l'insertion (figure 17.1). Ce sont ces deux valeurs que nous allons utiliser par la suite en nous basant sur les valeurs fixées dans la littérature.

Les expérimentations ont été réalisées sur des prostate de patients [PCS<sup>+</sup>06], fantômes en

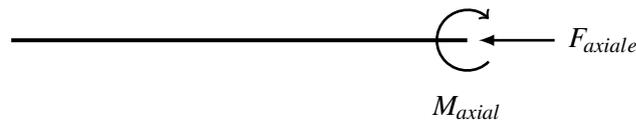


FIGURE 17.1. – Effort axial appliqué sur l'extrémité d'une poutre droite.

PVC [DS03, PCF<sup>+</sup>05, OEC<sup>+</sup>05], des fantômes en silicone [OSW<sup>+</sup>03], des tissus *ex-vivo* de foie de bovin [PSC<sup>+</sup>05, SO02, OSO04], de foie de porcs [BHT00] ou de prostate de chiens [KWAM01]. Les cas de charges expérimentaux et leurs spécificités relevées dans le cadre de cet état de l'art sont présentés dans le tableau 17.1.

Charge	Article	Milieu	Aiguille	Valeur maximale
Force axiale	Podder et al. [PCS <sup>+</sup> 06]	Périnée in vivo	17 G	19.11 N
			18 G	13.94 N
		Prostate in vivo	17 G	11.91 N
			18 G	10.14 N
	DiMaio et al. [DS03]	PVC	17 G	2.5 N
	Okazawa et al. [OEC <sup>+</sup> 05]	PVC	20 G	8.10 N
	Podder et al. [PCF <sup>+</sup> 05]	PVC	18 G	7.5 N
Brett et al. [BHT00]	Lombaire de Porcs	16 G	29 N	
Moment axial	Reed [Ree08]	Plastisol	∅ : 0.39 mm	0.24 N.mm
	Reed et al. [ROC09]	gel SimTest	∅ : 0.59 mm	1.0 N.mm
	Podder et al. [PCS <sup>+</sup> 06]	Prostate humaine	17 G	7 N.mm

TABLE 17.1. – Forces et moments axiaux maximaux.

A partir des données de la littérature on fixe les deux valeurs seuils suivantes :

$$\begin{aligned} F_{axiale_{max}} &= 50N \\ M_{axial_{max}} &= 10N.mm \end{aligned}$$

### 17.3 Impact sur la reconstruction des grandeurs de déformations

Nous allons évaluer dans cette partie l'impact des différents type de déformations sur l'extrémité distale de l'aiguille reconstruite.

### 17.3.1 Cisaillement

L'aiguille est assimilable à une poutre encastree. Lorsque celle-ci est soumise à une déformation en flexion il y a apparition de contrainte de cisaillement au sein de celle-ci. L'ordre de grandeur de cette contrainte dépend de la minceur de la poutre. Cette minceur peut-être caractérisée par le ratio entre sa longueur et son épaisseur. Concrètement si ce ratio est supérieur à 10 le déplacement transverse causé par le cisaillement peut-être négligé [Lep98]. A titre d'exemple, dans le cas d'une flexion simple d'une poutre droite avec un cas de charge à son extrémité si le ratio longueur sur épaisseur de cette poutre est égal à 10 alors le déplacement transverse causé par le cisaillement correspond à environ 1% du déplacement transverse causé par la flexion [Lep98].

Dans le cas des aiguilles utilisées dans les piqués de porcs (20 gauges 200mm) le rapport longueur sur épaisseur est supérieure à 200.

Pour cette raison le phénomène de cisaillement peut-être négligé dans le cas d'une insertion d'aiguille.

### 17.3.2 Traction-compression

Dans cette partie nous allons calculer  $\gamma_{max}$  la grandeur maximale liée à au phénomène de traction-compression.

Lors d'une insertion d'aiguille, le praticien applique une force sur l'extrémité proximale de l'aiguille. On fait l'hypothèse que la flexion est absente et qu'on se trouve uniquement en présence de traction-compression comme illustré dans la figure 17.2.

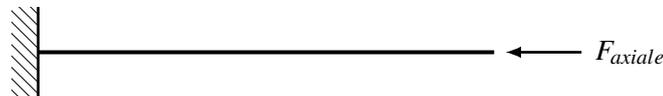


FIGURE 17.2. – Effort axial appliqué sur l'extrémité d'une poutre droite.

La traction-compression provoque alors de faibles déplacements mais un effort important peut générer du flambement comme le montre la figure 17.3.



FIGURE 17.3. – Schema de déformation de poutre par flambement.

On peut calculer la valeur théorique de la force axiale entrainant l'apparition du phénomène de flambement pour une poutre encastree-rotulée en utilisant la formule d'Euler :

$$F_{flambement} = \frac{\pi EI}{(0.7L)^2} \quad (17.1)$$

Le phénomène de traction-compression est maximal pour une force axiale dont la valeur est donnée dans l'équation ???. On va utiliser la valeur de cette force maximale pour calculer  $\gamma_{max}$  à partir de la loi de Hooke :

$$\sigma = E \varepsilon_T$$

Par la théorie de Reissner on a alors :

$$\sigma = E \gamma_t$$

On définit alors la valeur maximal de  $\gamma_t$  par :

$$\begin{aligned} \gamma_{max} &= \frac{F_{flambage}}{E \times \pi(r_{ext}^2 - r_{int}^2)} \\ &= \frac{I}{(0.7L)^2(r_{ext}^2 - r_{int}^2)} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\gamma_{max} \approx 1.3 \times 10^{-6}$$

On va maintenant calculer l'écart maximale de flèche dû à la traction-compression  $\Delta_{tract-compr}$  qui est la distance maximale entre les extrémités distales d'aiguilles lors d'une déformation avec traction-compression dans un cas et sans traction-compression dans l'autre.

On note  $\mathbf{R}$  la déformée de l'aiguille avec traction-compression et  $\tilde{\mathbf{R}}$  la déformée sans traction-compression. D'après l'équation 5.2 issue de la théorie de Reissner on a :

$$\mathbf{R}' = (1 + \gamma_t)\mathbf{T} + \gamma_1\mathbf{N}_1 + \gamma_2\mathbf{N}_2$$

Et dans le cas de la déformée sans traction-compression on a donc :

$$\tilde{\mathbf{R}}' = \mathbf{T} + \gamma_1\mathbf{N}_1 + \gamma_2\mathbf{N}_2$$

Pour une aiguille de longueur  $L$  les extrémités distales sont les points  $\mathbf{R}(L)$  et  $\tilde{\mathbf{R}}(L)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(L) &= \int_0^L \mathbf{R}'(s) ds + \mathbf{R}_0 \\ \tilde{\mathbf{R}}(L) &= \int_0^L \tilde{\mathbf{R}}'(s) ds + \mathbf{R}_0 \end{aligned}$$

On a donc par définition :

$$\Delta_{tract-compr} = \max \|\mathbf{R}(L) - \tilde{\mathbf{R}}(L)\|$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}(L) - \tilde{\mathbf{R}}(L)\| &= \left\| \int_0^L \mathbf{R}'(s) ds - \int_0^L \tilde{\mathbf{R}}'(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^L \mathbf{R}'(s) - \tilde{\mathbf{R}}'(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^L \gamma_t(s) \mathbf{T}(s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^L \|\gamma_t(s) \mathbf{T}(s)\| ds \\ &\leq \int_0^L |\gamma_t(s)| ds \\ &\leq \gamma_{max} L \end{aligned}$$

L'inégalité devient une égalité par exemple dans le cas d'une compression simple appliquée à l'aiguille. On a par conséquent :

$$\Delta_{tract-compr} = \gamma_{max} L$$

Pour une aiguille de longueur  $L = 200$  mm on obtient alors :

$$\Delta_{tract-compr} \approx 3 \times 10^{-4} mm$$

L'impact de la déformation en traction-compression de l'aiguille sur la position de l'extrémité distale de celle-ci est donc extrêmement faible. Par conséquent le phénomène de traction-compression peut-être négligé dans le cas d'une insertion d'aiguille.

### 17.3.3 Flexion

Nous allons calculer la courbure maximale lors d'une insertion d'aiguille. On se place dans l'hypothèse d'élasticité linéaire. Lors des expérimentations nous avons utilisés des aiguilles en acier inoxydable. La courbe contrainte-déformation de l'acier inoxydable est présentée dans la figure 17.4.

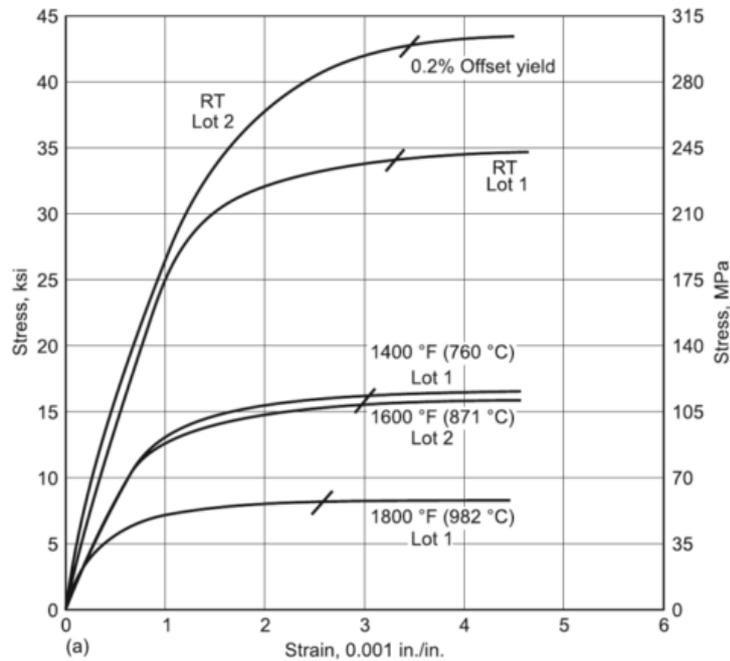


FIGURE 17.4. – Courbe contrainte-déformation de l'acier inoxydable à différentes températures.

L'acronyme RT (Room Temperature) désigne la température ambiante. Source : [https://icme.hpc.msstate.edu/mediawiki/index.php/316\\_Stainless\\_Steel](https://icme.hpc.msstate.edu/mediawiki/index.php/316_Stainless_Steel)

En utilisant la figure 17.4 on peut définir la déformation maximale  $\epsilon_{max}$  dans le cas de l'élasticité linéaire à température ambiante :

$$\epsilon_{max} \approx 1.5 \times 10^{-3}$$

On a le lien suivant entre la déformation  $\epsilon$ , le rayon  $r_0$  de l'aiguille et sa courbure  $\kappa$  :

$$\epsilon = r_0 \kappa$$

On note  $\kappa_{max}$  le courbure maximale :

$$\kappa_{max} = \frac{\epsilon_{max}}{r_0}$$

Cette valeur va être utilisée pour calculer l'écart maximal dû à la flexion. Pour cela nous allons mesurer la distance entre les extrémités de deux aiguilles :

- une aiguille avec de la flexion. On suppose que la courbure est maximale sur toute la longueur de l'aiguille. On suppose que la déformation est plane pour maximiser la flèche de l'aiguille. Les expressions de la courbure et de l'angle unitaire de torsion le long de cette aiguille sont alors :

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \kappa_{max} && \text{pour } 0 \leq s \leq L \\ \varkappa_t(s) &= 0 && \text{pour } 0 \leq s \leq L \end{aligned} \quad (17.2)$$

- la même aiguille mais sans flexion. On suppose que la courbure de l'aiguille est nulle sur toute sa longueur. L'aiguille ne subit alors pas de déformation et reste droite.

On reconstruit l'aiguille en appliquant notre méthode de reconstruction présentée dans le chapitre 11 sur les fonctions courbure et angle unitaire définis dans le système 17.2. Les aiguilles reconstruites sont présentées dans la figure 17.5.

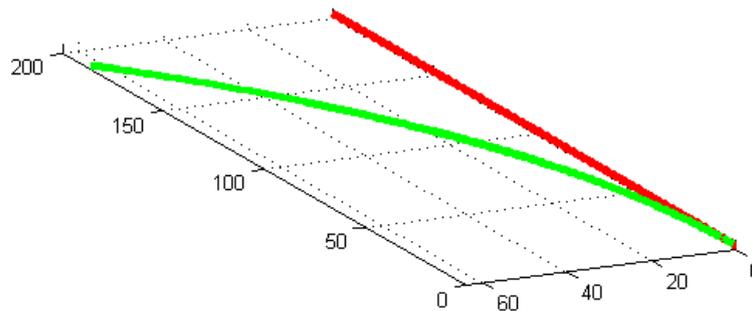


FIGURE 17.5. – Déformation d'une aiguille avec et sans courbure.

L'aiguille déformée sans courbure est représentée en rouge et celle avec courbure est représentée en verte.

Par mesure de la distance entre les deux extrémités distales on en déduit que l'écart maximal de flèche dû à la courbure  $\Delta_{courbure}$  est de 65.5 mm.

$$\Delta_{courbure} \approx 65.5\text{mm}$$

### 17.3.4 Torsion

On note  $M_t$  le moment de torsion, en élasticité linéaire on a :

$$M_t = GJ\varkappa_t \quad (17.3)$$

On note  $L$  la longueur de l'aiguille,  $M_{axial}$  son moment de torsion à sa base,  $l_{in}$  la distance entre la base de l'aiguille et le point d'entrée dans les tissus et  $d_i$  la distance entre le point

d'entrée et l'extrémité distale de l'aiguille. Le moment de torsion de l'aiguille en dehors des tissus est constant :

$$M_t(s) = M_{axial} \quad \text{pour } 0 \leq s < l_{in}$$

L'article de Reed [Ree08] présente un modèle pour exprimer la torsion d'une aiguille dans les tissus. L'expression du moment de torsion de l'aiguille dans les tissus s'exprime alors :

$$M_t(s) = M_{axial} \left( \frac{l_{in} + d_i - s}{d_i} \right) \quad \text{pour } l_{in} \leq s \leq L = l_{in} + d_i \quad (17.4)$$

Ainsi le moment de torsion de l'aiguille décroît linéairement dans les tissus. L'expression du moment de torsion de l'équation 17.4 dans l'équation 17.3 de l'angle unitaire de torsion donne :

$$\varkappa_t(s) = \frac{M_{axial}}{GJ} \left( \frac{l_{in} + d_i - s}{d_i} \right) \quad \text{pour } l_{in} \leq s \leq L = l_{in} + d_i$$

Ce modèle va être utilisé pour calculer l'écart maximal dû à la torsion. Pour cela nous allons mesurer la distance entre les extrémités de deux aiguilles :

- une aiguille avec de la torsion. Pour maximiser l'effet de la torsion on prend une longueur d'insertion  $l_{in} = L$  et une courbure maximale  $\kappa_{max}$ . On utilise le modèle de Reed pour l'angle unitaire de déformation en posant  $M_{axial} = M_{axial_{max}}$ , la valeur expérimentale présentée précédemment. Les expressions de la courbure et de l'angle unitaire de torsion le long de cette aiguille sont alors :

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \kappa_{max} & \text{pour } 0 \leq s \leq L & \quad (17.5) \\ \varkappa_t(s) &= \frac{M_{axial_{max}}}{GJ} \left( \frac{L - s}{L} \right) & \text{pour } 0 \leq s \leq L & \end{aligned}$$

- la même aiguille mais sans torsion. Les expressions de la courbure et de l'angle unitaire de torsion le long de cette aiguille sont alors :

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \kappa_{max} & \text{pour } 0 \leq s \leq L & \quad (17.6) \\ \varkappa_t(s) &= 0 & \text{pour } 0 \leq s \leq L & \end{aligned}$$

On reconstruit les aiguilles en appliquant notre méthode de reconstruction présentée dans le chapitre 11 sur les fonctions courbure et angle unitaire définis dans les systèmes 17.5 et 17.6. Les aiguilles reconstruites sont présentées dans la figure 17.6.

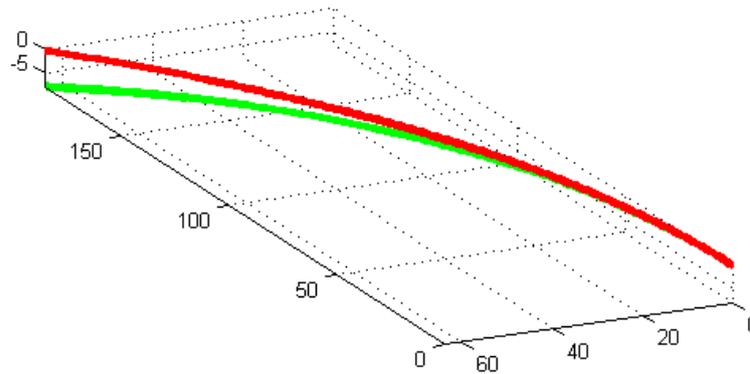


FIGURE 17.6. – Déformation d'une aiguille avec et sans torsion.

Par mesure de la distance entre les deux extrémités distales on en déduit que l'écart maximale de flèche du à la torsion  $\Delta_{torsion}$  est de 7.8 mm.

$$\Delta_{torsion} \approx 7.8\text{mm}$$

On calcule que dans ce cas la distance entre les extrémités des deux aiguilles représente environ 12% de la flèche de l'aiguille.

En supposant toujours que l'aiguille est insérée en entier dans les tissus (le cas où la torsion a le plus d'effet sur la déformée) on va calculer ce ratio en fonction de la valeur constante de la courbure le long de l'aiguille  $\kappa$  et du moment de torsion à la base  $M_{axial}$ . Les résultats sont affichés en pourcentage et sont présentés dans la figure 17.7.

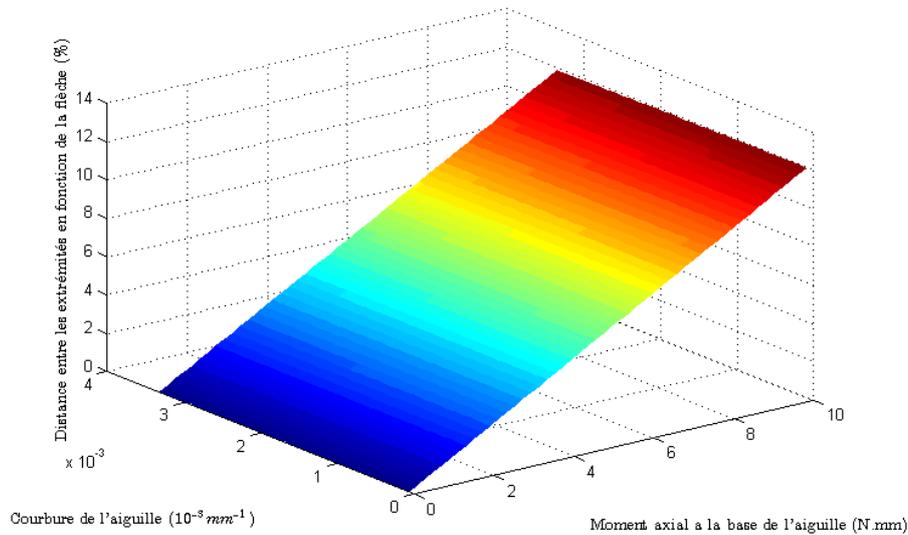


FIGURE 17.7. – Ratio entre les extrémités distales des deux aiguilles déformées avec et sans torsion en fonction de la valeur constante de la courbure et du moment de torsion à la base de l’aiguille.

On constate à partir des résultats de la figure 17.7 que dans le cas où la courbure est constante le pourcentage d’erreur de positionnement de l’extrémité de l’aiguille en fonction de la flèche dépend uniquement du moment de torsion à la base de l’aiguille et pas de la courbure.

Ainsi le pourcentage d’erreur en torsion en fonction de la flèche dépend de plusieurs facteurs :

- le moment de torsion à la base de l’aiguille  $M_{axial}$  : il est raisonnable de supposer que le comportement constaté dans la figure 17.7 est similaire pour d’autre profil de courbure et donc que plus le moment est grand plus le pourcentage d’erreur sera élevé.
- le module de cisaillement  $G$  et le moment quadratique de la poutre en torsion  $J$  : plus ceux-ci sont élevés plus l’effet du moment de torsion est atténué donc, par l’hypothèse précédente, le pourcentage d’erreur devrait être plus faible.
- la courbure  $\kappa$  : on peut conjecturer à partir des résultats de la figure 17.7 que le pourcentage d’erreur ne dépend pas de sa valeur mais de son profil (sa monotonie par exemple). Il serait intéressant d’étudier différent profil et essayer ensuite de trouver une borne au pourcentage d’erreur qui soit indépendante de la courbure.

Par conséquent l’erreur d’approximation commise lorsqu’on néglige la courbure est principalement dû au moment axial  $M_{axial}$ , c’est à dire au **geste d’insertion** effectué et aux moment de cisaillement  $G$  et quadratique  $J$ , c’est à dire au **type d’aiguille** utilisée.

## 17.4 Conclusion

Les erreurs de précisions maximales selon les types de déformations sont rassemblées dans le tableau 17.2.

Type de déformation	Erreur de précision maximale du à la déformation (mm)
Flexion	65.5
Torsion	7.8
Traction-compression	0.0003
Cisaillement	infime

TABLE 17.2. – Erreurs de précisions maximales expérimentales et théoriques selon le type de déformations.

A la vue des résultats du tableau 17.2 on en conclut donc que les déformations dues à la traction-compression et au cisaillement sont négligeables et que par conséquent l'utilisation d'hypothèses négligeant ces phénomènes semble légitime dans le cas d'une insertion d'aiguille.

On remarque également que bien que dans le cas général la flexion est la principale responsable du déplacement de l'extrémité de l'aiguille la torsion peut, dans certains cas limites, représenter jusqu'à une dizaine de pourcents de ce déplacement. Dans notre cas, les flèches maximales des aiguilles traitées dans la partie population d'aiguilles étant d'une vingtaine de millimètres, la torsion représente alors au environ deux millimètres.



**Cinquième partie**

**Conclusion**



### 18.1 Contributions

Mes travaux de recherche se sont focalisés sur la reconstruction de la déformée d'une aiguille instrumentée à partir des capteurs de déformations fixés à sa surface. L'impératif de précision nécessaire à une utilisation clinique du dispositif se heurte alors aux limitations techniques qui restreignent fortement le nombre de capteurs de déformation implantable sur une aiguille. Les méthodes développées pour résoudre cette problématique s'articulent autour de deux thématiques : l'obtention des données de capteurs et leurs exploitations.

Les principales contributions réalisées durant mon travail de thèse sont présentées ci-dessous :

- Une première approche de reconstruction de la déformée à partir des informations de flexion issues des capteurs a été développée. Elle se caractérise par une forte cohésion mathématique et physique, permettant ainsi de définir le contexte et les hypothèses du problème sur lesquelles s'appuient les autres méthodes.
- Le calcul des déformations des capteurs par la théorie des poutres a permis d'établir le lien entre orientation des capteurs et torsion. La méthode de reconstruction développée permet d'utiliser les informations de torsion obtenues et d'améliorer ainsi la précision de reconstruction. Une procédure de calcul des cas de charges s'appuyant sur cette méthode a été proposée.
- Le problème du positionnement de capteurs a été abordé de façon innovante par le biais d'une méthode d'optimisation des positions à partir de piqués d'aiguilles. Il n'existe pas à notre connaissance de méthodes similaires reposant sur des données expérimentales. L'utilisation des positions optimales calculées permet alors d'augmenter la significativité des données renvoyées par les capteurs.
- Un traitement statistique réalisé sur ces données expérimentales de piqués d'aiguille a permis d'extraire les caractéristiques représentatives des déformations des aiguilles

dans les tissus. L'utilisation de ces caractéristiques dans une méthode de reconstruction spécialement adaptée permet, dans une certaine mesure, de combler le manque d'informations dû au nombre limité de capteurs sur l'aiguille.

Ainsi les travaux réalisés portant sur la reconstruction de la déformée d'une aiguille instrumentée se sont matérialisés sous forme de différentes méthodes, chacune de ces méthodes permettant de faire un pas supplémentaire vers une précision optimale.

La diversité des domaines explorés par ces méthodes témoignent de la multiplicité des approches utilisées, aussi bien mathématiques que physiques, pour atteindre cet objectif. L'utilisation conjointe de techniques de différents domaines tels que la mécanique, la géométrie différentielle ou les statistiques, m'a permis de préserver la signification concrète de mes travaux par interprétation physique tout en réalisant des opérations complexes, plus abstraites. Grâce à cela j'ai pu développer des méthodes avancées qui font le lien avec le réel, tel que le calcul des cas de charges de l'aiguille à partir des informations de capteurs. L'utilisation de données expérimentales m'a également permis de développer des méthodes innovantes tel que l'optimisation des positions à partir de piqués d'aiguilles ou la reconstruction de la déformée à partir des modes de déformation des aiguilles.

## 18.2 Perspectives

Les travaux effectués dans le cadre de l'utilisation de données expérimentales constitue un cadre propice aux perspectives de ce travail.

Parmi les domaines d'améliorations possibles figure ainsi l'approximation des formes d'aiguilles à partir des piqués d'aiguilles. Un travail qualitatif permettrait de caractériser l'erreur de reconstruction commise et de définir une marge de confiance. Appliqué à notre travail cette marge permettrait de juger de la validité de nos résultats plus précisément.

Les formes d'aiguilles reconstruites font l'hypothèse d'une torsion nulle. La réalisation de piqués en utilisant une aiguille instrumentée munis de capteurs permettant d'obtenir la valeur de la torsion, comme celle que nous avons présentée, apporterait une information supplémentaire sur les déformations d'aiguilles. Ces informations de torsion pourrait alors être incluses dans les méthodes de positionnement des capteurs et de reconstruction avec les modes de déformations, les rendant plus complètes.

Une étude des déformations d'aiguilles avec comme base expérimentale des données patients ne pourrait impacter les résultats que positivement. Elle lèverait également le doute sur la compatibilité de nos résultats dans le cas de piqués d'aiguille patients, les aiguilles patients de l'échantillon utilisé au cours de mes travaux étant peu nombreuses.

Les différentes méthodes proposées dans cette thèse ont été développées en vue d'une intégration dans la plateforme de navigation IMACTIS destinée à une application clinique. Préalablement à cette utilisation des étapes de tests et de validation pour caractériser expérimentalement les erreurs de reconstructions commises sont à considérer.

Au delà de l'intégration dans un environnement de navigation envisagé dans ce manuscrit,

le développement de certaines méthodes présentées ici laisse entre-ouvert la porte d'une utilisation dans le domaine de la recherche. Ainsi, concernant les cas de charges d'une aiguille, notre méthode de calcul à partir des capteurs de déformation remplacerait avantageusement le calcul par capteurs de forces situé à l'extrémité proximale de l'aiguille, cette dernière méthode utilisant des hypothèses restrictives et se révélant moins précise.



**Sixième partie**

**Annexes**



# CHAPITRE 19

ANNEXES

## 19.1 Paramètres des aiguilles utilisées

Variable	Description	Valeur
L	Longueur	200 mm
E	Module de Young de l'acier inoxydable	$200 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}$
G	Module de cisaillement de l'acier inoxydable	$77.2 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}$
I	Moment quadratique de la poutre en flexion	$1.15 \times 10^{-14} \text{ m}^4$
J	Moment quadratique de la poutre en torsion	$5.37 \times 10^{-2} \text{ mm}^4$
$r_{int}$	Rayon interne d'une aiguille de 22 gauges	$0.603 \times 10^{-3} \text{ m}$
$r_{ext}$	Rayon externe d'une aiguille de 22 gauges	$0.9081 \times 10^{-3} \text{ m}$

TABLE 19.1. – Valeurs des paramètres d'une aiguille en acier inoxydable de 20 gauges de longueur 200 mm.

## 19.2 Définition du tenseur $\Omega$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(s) &= \mathbf{Q}(s)\mathbf{e}_1 \\
 \Rightarrow \mathbf{T}'(s) &= (\mathbf{Q}(s)\mathbf{e}_1)' \\
 &= \mathbf{Q}'(s)\mathbf{e}_1 \\
 &= \mathbf{Q}'(s)\mathbf{Q}^{-1}(s)\mathbf{T}(s) \\
 &= \mathbf{Q}'(s)\mathbf{Q}^T(s)\mathbf{T}(s) \\
 &= \Omega(s)\mathbf{T}(s)
 \end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_1'(s) &= \mathbf{Q}'(s)\mathbf{Q}^T(s)\mathbf{N}_1(s) \\
 \mathbf{N}_2'(s) &= \mathbf{Q}'(s)\mathbf{Q}^T(s)\mathbf{N}_2(s)
 \end{aligned}$$

On définit alors le tenseur  $\Omega$  :

$$\Omega(s) = \mathbf{Q}'(s)\mathbf{Q}^T(s)$$

## 19.3 Antisymétrie de $\Omega$

$$\begin{aligned}
 \Omega(s) + \Omega^T(s) &= \mathbf{Q}'(s)\mathbf{Q}^T(s) + \left(\mathbf{Q}'(s)\mathbf{Q}^T(s)\right)^T \\
 &= \mathbf{Q}'(s)\mathbf{Q}^T(s) + \mathbf{Q}(s)\left(\mathbf{Q}'(s)\right)^T \\
 &= \mathbf{Q}'(s)\mathbf{Q}^T(s) + \mathbf{Q}(s)\left(\mathbf{Q}^T(s)\right)' \\
 &= \left(\mathbf{Q}(s)\mathbf{Q}^T(s)\right)' \\
 &= \left(\mathbf{Q}(s)\mathbf{Q}^{-1}(s)\right)' \\
 &= \left(\mathbf{I}_3\right)' \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

D'où l'antisymétrie de  $\Omega$ .



## 19.4 Reconstruction

### 19.4.1 Reconstruction : Aiguille de porcs

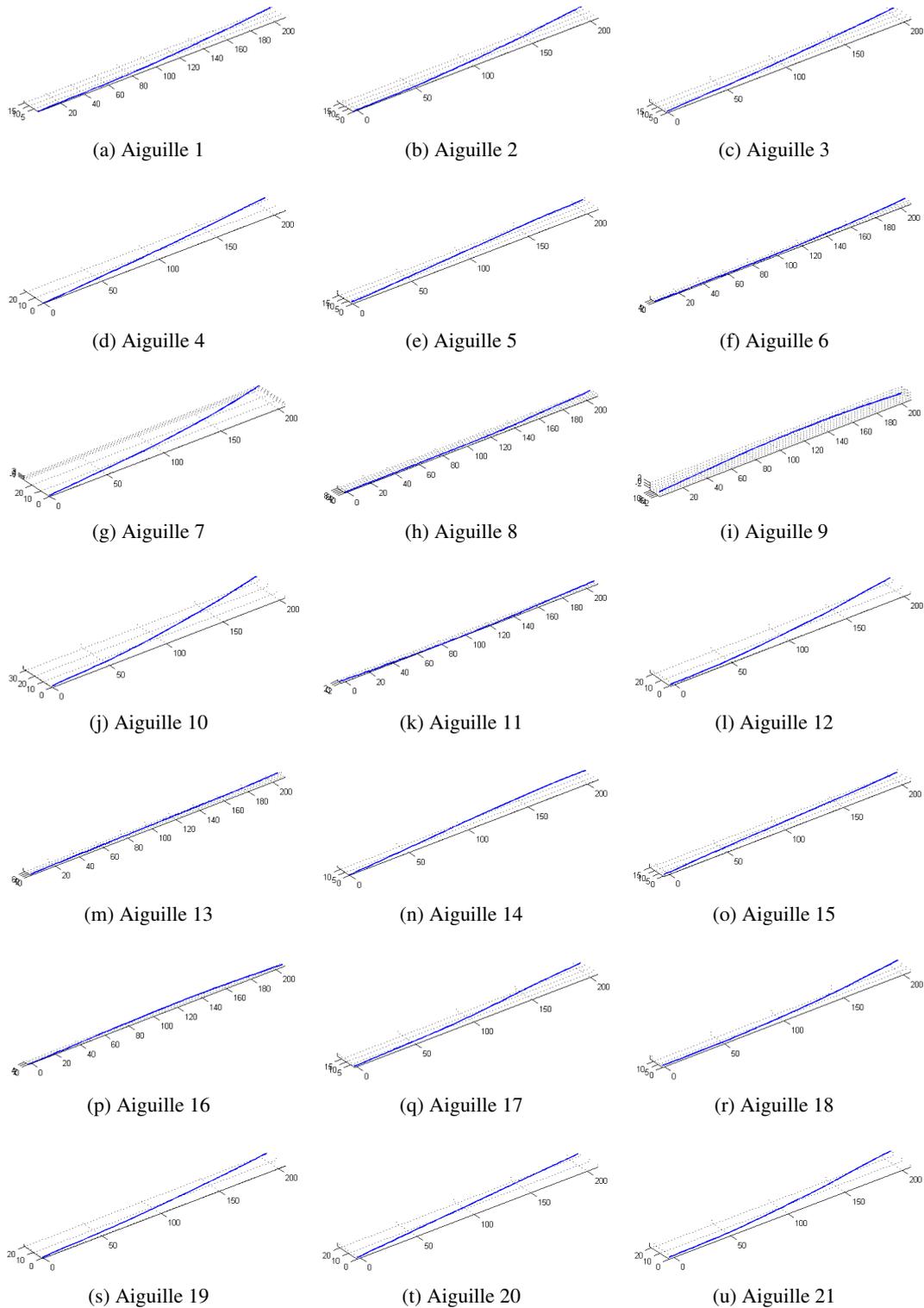


FIGURE 19.1. – Reconstruction des aiguilles de porcs (1/3)

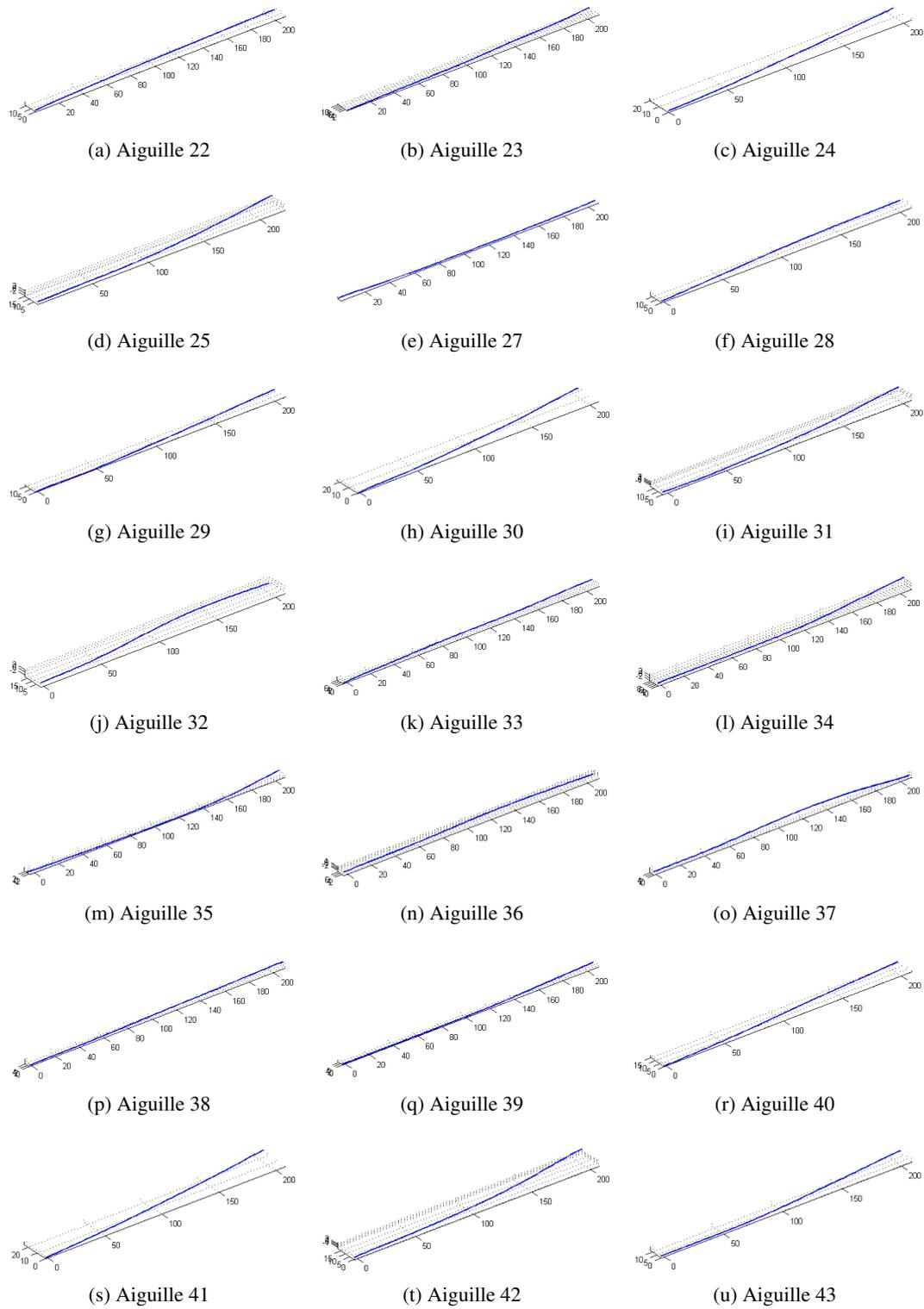


FIGURE 19.2. – Reconstruction des aiguilles de porcs (2/3)

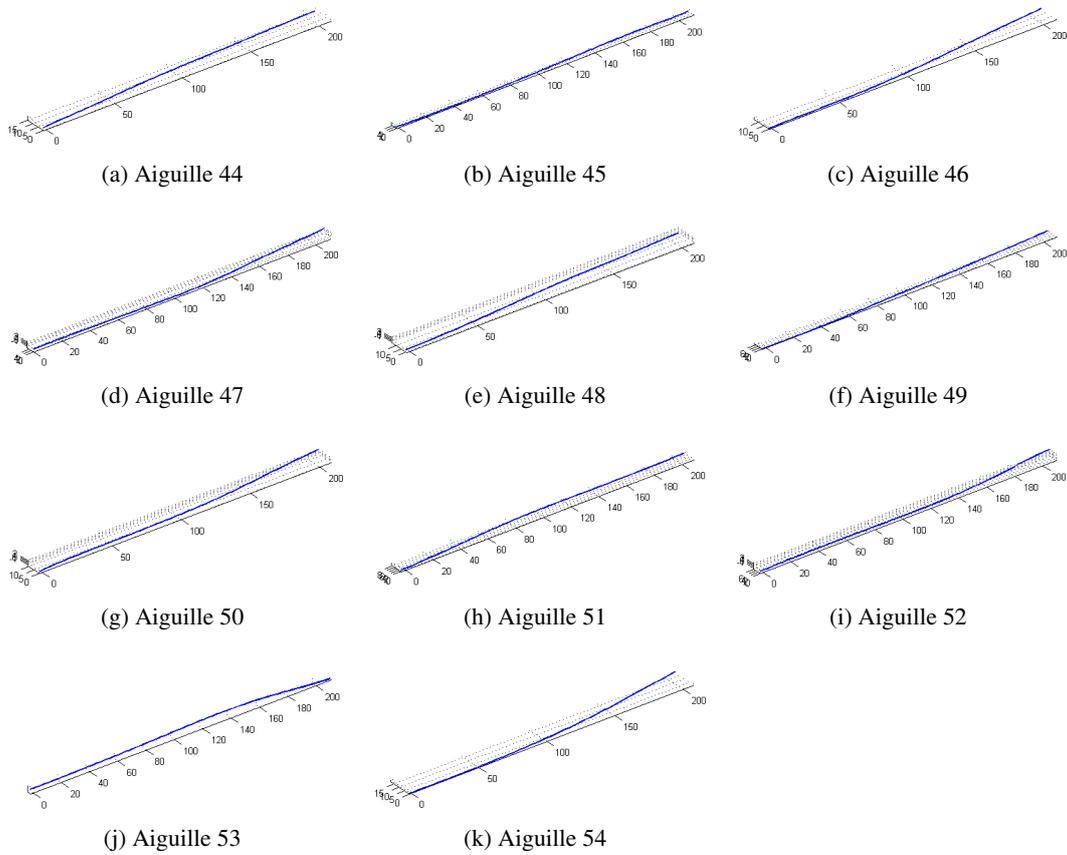


FIGURE 19.3. – Reconstruction des aiguilles de porcs (3/3)

## 19.4.2 Reconstruction : Aiguilles patients

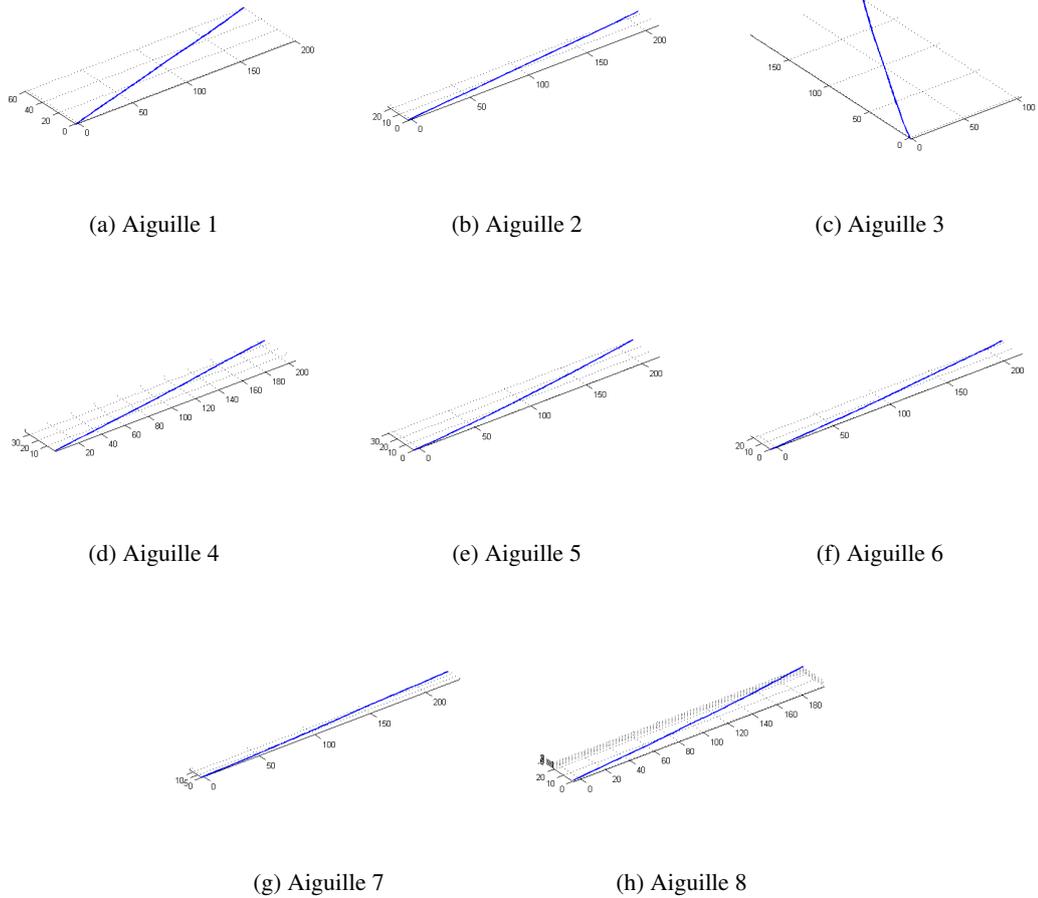


FIGURE 19.4. – Reconstruction des aiguilles patients

## 19.5 Modes de déformation

Les 8 principaux modes de déformations de la courbure pour les aiguilles de porcs sont présentés dans le figure 19.5.

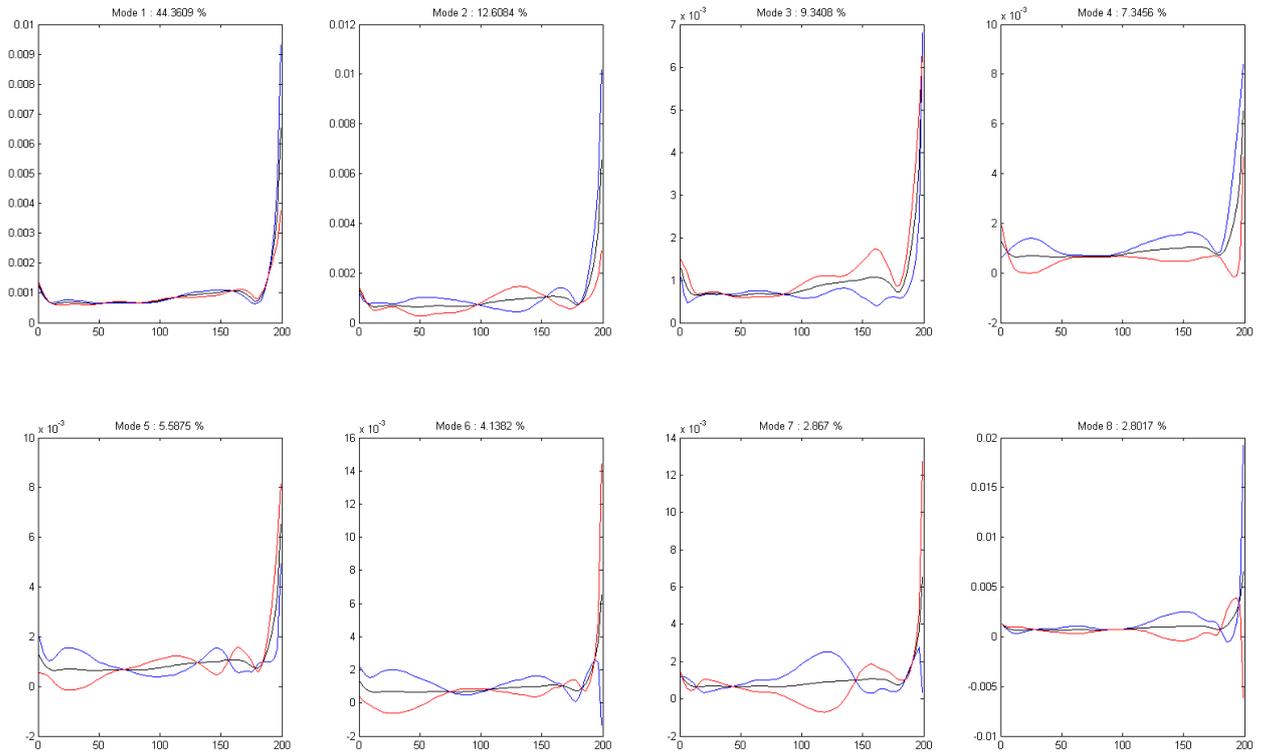


FIGURE 19.5. – Modes de la courbure.

Les 8 principaux modes de déformations de l'angle d'orientation pour les aiguilles de porcs sont présentés dans le figure 19.6.

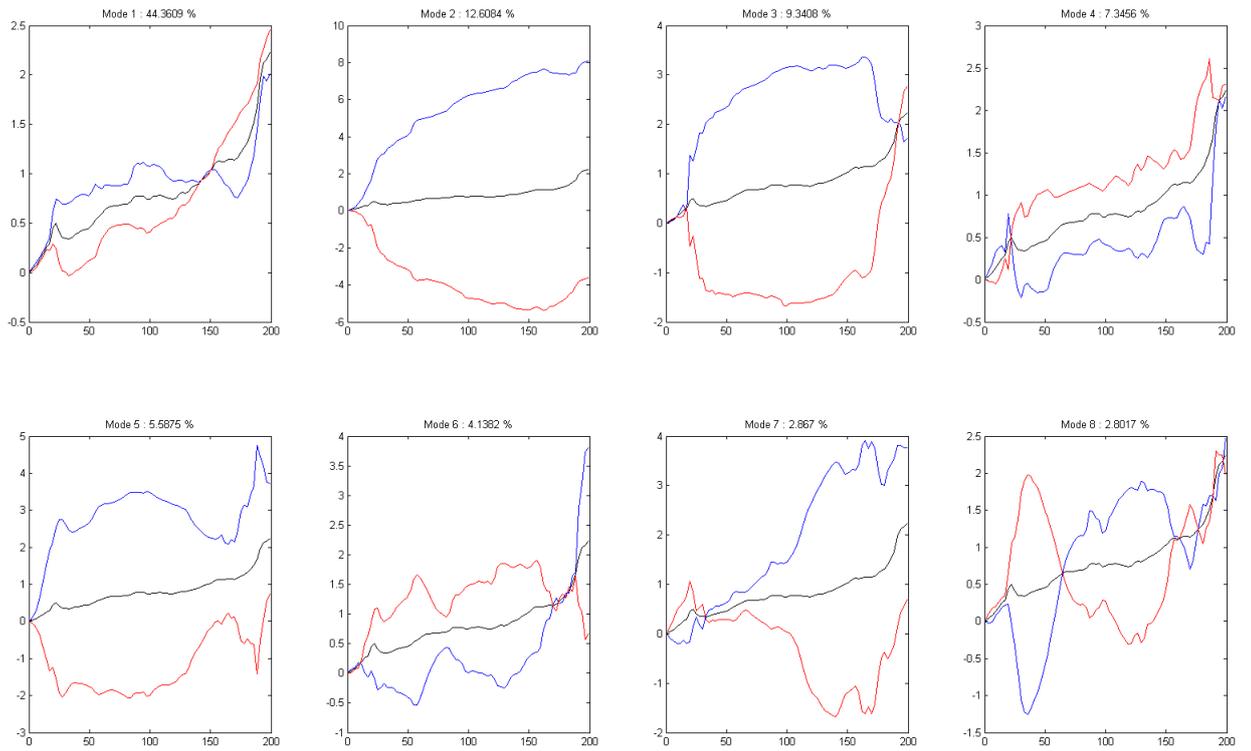


FIGURE 19.6. – Modes de la courbure.



## BIBLIOGRAPHIE

- [AB74] R. S. Anderssen and P. Bloomfield. Numerical differentiation procedures for non-exact data. Numerische Mathematik, 22(3) :157–182, 1974. 100
- [ADJ06] Charles Audet and John E Dennis Jr. Mesh adaptive direct search algorithms for constrained optimization. SIAM Journal on optimization, 17(1) :188–217, 2006. 142
- [Ahl84] Anders Ahlén. An input estimation approach to differentiation of noisy data. Rep. UPTEC 8450R, Dep. Technol., Uppsala Univ., Sweden, 1984. 99
- [Aka98] Hirotugu Akaike. Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle, pages 199–213. Springer New York, New York, NY, 1998. 103
- [AKM13] M. Abayazid, M. Kemp, and S. Misra. 3d flexible needle steering in soft-tissue phantoms using fiber bragg grating sensors. In Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 5843–5849, May 2013. 51, 52, 54, 58, 159
- [BBC<sup>+</sup>08] Pierre Bonami, Lorenz T Biegler, Andrew R Conn, Gérard Cornuéjols, Ignacio E Grossmann, Carl D Laird, Jon Lee, Andrea Lodi, François Margot, Nicolas Sawaya, et al. An algorithmic framework for convex mixed integer nonlinear programs. Discrete Optimization, 5(2) :186–204, 2008. 140
- [BC09] O. A. Bauchau and J. I. Craig. Euler-Bernoulli beam theory, pages 173–221. Springer Netherlands, Dordrecht, 2009. 25
- [Béz66] Pierre Bézier. Définition numérique des courbes et surfaces i. Automatisme, 11(12) :625–632, 1966. 37
- [BHT00] P. N. Brett, A. J. Harrison, and T. A. Thomas. Schemes for the identification of tissue types and boundaries at the tool point for surgical needles. IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, 4(1) :30–36, March 2000. 190
- [Bis75] Richard L. Bishop. There is more than one way to frame a curve. The American Mathematical Monthly, 82(3) :246–251, 1975. 119
- [BJS11] J.R. Berrendero, A. Justel, and M. Svarc. Principal components for multivariate functional data. Computational Statistics & Data Analysis, 55(9) :2619 – 2634, 2011. 46
- [BLL<sup>+</sup>09] Pietro Belotti, Jon Lee, Leo Liberti, François Margot, and Andreas Wächter. Branching and bounds tightening techniques for non-convex minlp. Optimization Methods & Software, 24(4-5) :597–634, 2009. 140
- [BNW06] Richard H Byrd, Jorge Nocedal, and Richard A Waltz. Knitro : An integrated package for nonlinear optimization. In Large-scale nonlinear optimization, pages 35–59. Springer, 2006. 142
- [BZJ<sup>+</sup>08] Ivan Bricault, Nabil Zemiti, Emilie Jouniaux, Céline Fouard, Elise Taillant, Frédéric Dorandeu, and Philippe Cinquin. Light puncture robot for ct and mri interventions. IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine, 27(3) :42–50, 2008. 6
- [Casng] P. De Casteljaou. Mathématiques et cao. volume 2 : Formes à pôles. Hermès, forthcoming. 37
- [Cul79] Jane Cullum. The effective choice of the smoothing norm in regularization. Mathematics of Computation, 33(145) :149–170, 1979. 100, 101
- [CW78] Peter Craven and Grace Wahba. Smoothing noisy data with spline functions. Numerische Mathematik, 31(4) :377–403, 1978. 100, 101, 102, 114

- [dB78] Carl de Boor. A Practical Guide to Splines. Springer-Verlag New York, 1978. 37
- [DS03] S. P. DiMaio and S. E. Salcudean. Needle insertion modeling and simulation. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 19(5) :864–875, Oct 2003. 190
- [FDKP12] C. Fouard, A. Deram, Y. Keraval, and E. Promayon. CamiTK : a modular framework integrating visualization, image processing and biomechanical modeling. In Y. Payan, editor, Soft Tissue Biomechanical Modeling for Computer Assisted Surgery, pages 323–354. 2012. 106
- [FMG<sup>+</sup>16] A. Farvardin, R. J. Murphy, R. B. Grupp, I. Iordachita, and M. Armand. Towards real-time shape sensing of continuum manipulators utilizing fiber bragg grating sensors. In 2016 6th IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob), pages 1180–1185, June 2016. 59
- [GM79] Theo Gasser and Hans-Georg Müller. Kernel estimation of regression functions, pages 23–68. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1979. 130, 161, 173
- [Gug89] H. Guggenheimer. Computing frames along a trajectory. Computer Aided Geometric Design, 6(1) :77 – 78, 1989. 119
- [Had02] Jacques Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Princeton university bulletin, 13(49-52) :28, 1902. 99
- [Hal15] Brian C Hall. Lie groups, Lie algebras, and representations : an elementary introduction, volume 222. Springer, 2015. 68
- [HBLT12] Nikolai Hungr, Michael Baumann, Jean-Alexandre Long, and Jocelyne Troccaz. A 3-d ultrasound robotic prostate brachytherapy system with prostate motion tracking. IEEE Transactions on Robotics, 28(6) :1382–1397, 2012. 5
- [HDvdD<sup>+</sup>14] K. R. Henken, J. Dankelman, J. J. van den Dobbelsteen, L. K. Cheng, and M. S. van der Heiden. Error analysis of fbg-based shape sensors for medical needle tracking. 19(5) :1523–1531, October 2014. 54
- [HGDD12] Kirsten Henken, Dennis Van Gerwen, Jenny Dankelman, and John Van Den Dobbelsteen. Accuracy of needle position measurements using fiber bragg gratings. Minimally Invasive Therapy & Allied Technologies, 21(6) :408–414, November 2012. 51, 52, 58
- [HHM11] Graham Hocking, Simon Hebard, and Christopher H Mitchell. A review of the benefits and pitfalls of phantoms in ultrasound-guided regional anesthesia. Regional anesthesia and pain medicine, 36(2) :162–170, 2011. 103
- [Hot33] Harold Hotelling. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. Journal of educational psychology, 24(6) :417, 1933. 43
- [HWL06] Ernst Hairer, Gerhard Wanner, and Christian Lubich. Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. 2 edition, 2006. 69
- [JMIC13] Hans J. Johnson, M. McCormick, L. Ibanez, and The Insight Software Consortium. The ITK Software Guide. Kitware, Inc., third edition, 2013. In press. 106
- [Klo86] Fopke Klok. Two moving coordinate frames for sweeping along a 3d trajectory. Computer Aided Geometric Design, 3(3) :217 – 229, 1986. 119
- [KWAM01] Hiroyuki Kataoka, Toshikatsu Washio, Michel Audette, and Kazuyuki Mizuhara. A Model for Relations Between Needle Deflection, Force, and Thickness on Needle Penetration, pages 966–974. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2001. 190
- [LD11] Sébastien Le Digabel. Algorithm 909 : Nomad : Nonlinear optimization with the mads algorithm. ACM Trans. Math. Softw., 37(4) :44 :1–44 :15, February 2011. 142
- [Lep98] Steven Lepi. Practical guide to finite elements : a solid mechanics approach, volume 115. CRC Press, 1998. 191
- [LFP<sup>+</sup>15] Hao Liu, A. Farvardin, S. A. Pedram, I. Iordachita, R. H. Taylor, and M. Armand. Large deflection shape sensing of a continuum manipulator for minimally-invasive surgery. In 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 201–206, May 2015. 59
- [LHB<sup>+</sup>12] Jean-Alexandre Long, Nikolai Hungr, Michael Baumann, Jean-Luc Descotes, Michel Bolla, Jean-Yves Giraud, Jean-Jacques Rambeaud, and Jocelyne Troccaz. Development of a novel robot for transperineal needle based interventions : focal therapy, brachytherapy and prostate biopsies. The Journal of urology, 188(4) :1369–1374, 2012. 5
- [Lie80] Sophus Lie. Theorie der transformationsgruppen i. Mathematische Annalen, 16(4) :441–528, 1880. 33
- [LPWW13] C. Ledermann, H. Pauer, O. Weede, and H. Woern. Simulation tool for 3d shape sensors based on fiber bragg gratings and optimization of measurement points. In Robotics, Automation and Mechatronics (RAM), 2013 6th IEEE Conference on, pages 195–200, Nov 2013. 60

- [Mag54] Wilhelm Magnus. On the exponential solution of differential equations for a linear operator. Communications on Pure and Applied Mathematics, 7(4) :649–673, 1954. 69
- [Mal73] Colin L Mallows. Some comments on c p. Technometrics, 15(4) :661–675, 1973. 103
- [MJK<sup>+</sup>14] Hyowon Moon, Jinwoo Jeong, Sungchul Kang, Keri Kim, Yong-Won Song, and Jinseok Kim. Fiber-bragg-grating-based ultrathin shape sensors displaying single-channel sweeping for minimally invasive surgery. Optics and Lasers in Engineering, 59 :50 – 55, 2014. 54, 60
- [MJK<sup>+</sup>15] H. Moon, J. Jeong, Ockchul Kim, K. Kim, Woosub Lee, S. Kang, and J. Kim. Fbg-based polymer-molded shape sensor integrated with minimally invasive surgical robots. In 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 1770–1775, May 2015. 60
- [MPT15] Paul Mignon, Philippe Poignet, and Jocelyne Troccaz. Using rotation for steerable needle detection in 3d color-doppler ultrasound images. In Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC), 2015 37th Annual International Conference of the IEEE, pages 1544–1547. IEEE, 2015. 5
- [MR12] Jason P. Moore and Matthew D. Rogge. Shape sensing using multi-core fiber optic cable and parametric curve solutions. Opt. Express, 20(3) :2967–2973, Jan 2012. 51, 52, 60
- [MT] MATLAB and Global Optimization Toolbox. Release R2014a. The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States. 142
- [OEC<sup>+</sup>05] S. Okazawa, R. Ebrahimi, J. Chuang, S. E. Salcudean, and R. Rohling. Hand-held steerable needle device. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 10(3) :285–296, June 2005. 190
- [OSO04] A. M. Okamura, C. Simone, and M. D. O’Leary. Force modeling for needle insertion into soft tissue. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 51(10) :1707–1716, Oct 2004. 190
- [OSW<sup>+</sup>03] M. D. O’Leary, C. Simone, T. Washio, K. Yoshinaka, and A. M. Okamura. Robotic needle insertion : effects of friction and needle geometry. In Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA ’03. IEEE International Conference on, volume 2, pages 1774–1780 vol.2, Sept 2003. 190
- [PCF<sup>+</sup>05] TK Podder, DP Clark, D Fuller, J Sherman, Wan Sing Ng, L Liao, DJ Rubens, JG Strang, EM Messing, YD Zhang, et al. Effects of velocity modulation during surgical needle insertion. In 27th Annual Conference of the Engineering in Medicine and Biology Society (IEEE-EMBS 2005), Shanghai, China, Sept, pages 1–4, 2005. 190
- [PCS<sup>+</sup>06] Tarun Podder, Douglas Clark, Jason Sherman, Dave Fuller, Edward Messing, Deborah Rubens, John Strang, Ralph Brasacchio, Lydia Liao, Wan-Sing Ng, and Yan Yu. In vivo motion and force measurement of surgical needle intervention during prostate brachytherapy. Medical Physics, 33(8) :2915–2922, 2006. 189, 190
- [Pea01] Karl Pearson. Liii. on lines and planes of closest fit to systems of points in space. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 2(11) :559–572, 1901. 43
- [PED<sup>+</sup>10] Yong-Lae Park, S. Elayaperumal, B. Daniel, Seok Chang Ryu, Mihye Shin, J. Savall, R.J. Black, B. Moslehi, and M.R. Cutkosky. Real-time estimation of 3-d needle shape and deflection for mri-guided interventions. 15(6) :906–915, December 2010. 58, 133, 145, 158
- [PSC<sup>+</sup>05] T. K. Podder, J. Sherman, D. P. Clark, E. M. Messing, D. J. Rubens, J. G. Strang, L. Liao, R. A. Brasacchio, Y. Zhang, W. S. Ng, and Y. Yu. Evaluation of robotic needle insertion in conjunction with in vivo manual insertion in the operating room. In ROMAN 2005. IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication, 2005., pages 66–72, Aug 2005. 190
- [Rag83] David L Ragozin. Error bounds for derivative estimates based on spline smoothing of exact or noisy data. Journal of Approximation Theory, 37(4) :335 – 355, 1983. 130, 161, 173
- [RB09] Marcel Roelofs and Johannes Bisschop. AIMMS 3. 9-Language Reference. Lulu. com, 2009. 140
- [RCB<sup>+</sup>13] Adeline L.G. Robert, Grégory Chagnon, Ivan Bricault, Philippe Cinquin, and Alexandre Moreau-Gaudry. A generic three-dimensional static force distribution basis for a medical needle inserted into soft tissue. Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, 28 :156 – 170, 2013. 103, 129
- [RD14] S. C. Ryu and P. E. Dupont. Fbg-based shape sensing tubes for continuum robots. In 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 3531–3537, May 2014. 51, 52, 54
- [Ree08] K. B. Reed. Compensating for torsion windup in steerable needles. In 2008 2nd IEEE RAS EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechanics, pages 936–941, Oct 2008. 190, 196
- [Rei67] Christian H. Reinsch. Smoothing by spline functions. Numerische Mathematik, 1967. 99
- [Rei73] Eric Reissner. On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory. Studies in Applied Mathematics, 52(2) :87–95, June 1973. 26, 119, 189
- [RF11] Matteo Palai Yary Volpe Rocco Furferi, Lapo Governi. From unordered point cloud to weighted b-spline - a

- novel pca-based method -. *Applications of Mathematics and Computer Engineering*, 2011. 108
- [RJM13] R. J. Roesthuis, S. Janssen, and S. Misra. On using an array of fiber bragg grating sensors for closed-loop control of flexible minimally invasive surgical instruments. In *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2545–2551, Nov 2013. 51, 52, 59
- [RKvdDM14] R.J. Roesthuis, M. Kemp, J.J. van den Dobbelsteen, and S. Misra. Three-dimensional needle shape reconstruction using an array of fiber bragg grating sensors. 19(4) :1115–1126, August 2014. 51, 52, 54, 61
- [RM16] R. J. Roesthuis and S. Misra. Steering of multisegment continuum manipulators using rigid-link modeling and fbg-based shape sensing. 32(2) :372–382, April 2016. 61, 159
- [ROC09] K. B. Reed, A. M. Okamura, and N. J. Cowan. Modeling and control of needles with torsional friction. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 56(12) :2905–2916, Dec 2009. 190
- [RR81] John Rice and Murray Rosenblatt. Integrated mean squared error of a smoothing spline. *Journal of Approximation Theory*, 33(4) :353 – 369, 1981. 161, 173
- [RS05] J. O. Ramsay and B. W. Silverman. *Functional Data Analysis*. 2005. 44, 45, 46, 170
- [Sch64] Isaac Jacob Schoenberg. Spline functions and the problem of graduation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 52(4) :947–950, 1964. 99
- [Sch88] I. J. Schoenberg. *Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions*, pages 3–57. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1988. 37
- [SGA<sup>+</sup>13] R. Seifabadi, E. E. Gomez, F. Aalamifar, G. Fichtinger, and I. Iordachita. Real-time tracking of a bevel-tip needle with varying insertion depth : Toward teleoperated mri-guided needle steering. In *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 469–476, November 2013. 59, 133, 145, 158
- [Sim85] J.C. Simo. A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part i. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(1) :55 – 70, 1985. 26
- [SML06] Will Schroeder, Ken Martin, and Bill Lorensen. The visualization toolkit an object-oriented approach to 3d graphics, kitware. *Inc. publishers*, 2006. 106
- [SO02] C. Simone and A. M. Okamura. Modeling of needle insertion forces for robot-assisted percutaneous therapy. In *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02. IEEE International Conference on*, volume 2, pages 2085–2091 vol.2, 2002. 190
- [TA77] Andrej Nikolaevich Tikhonov and Vasilii Yakovlevich Arsenin. Solutions of ill-posed problems. 1977. 99
- [Tam71] S. Tameroglu. Finite theory of thin elastic rods. *Acta Mechanica*, 11(3-4) :271–282, 1971. 26
- [TG09] Stephen P Timoshenko and James M Gere. *Theory of elastic stability*. Courier Corporation, 2009. 25
- [TS02] Mohit Tawarmalani and Nikolaos V Sahinidis. *Convexification and global optimization in continuous and mixed-integer nonlinear programming : theory, algorithms, software, and applications*, volume 65. Springer Science & Business Media, 2002. 140
- [TSD13] Michael D Todd, Christopher J Stull, and Michael Dickerson. A local material basis solution approach to reconstructing the three-dimensional displacement of rod-like structures from strain measurements. *Journal of Applied Mechanics*, 80(4), 2013. 61
- [Utr12] Florencio Utreras. Optimal smoothing of noisy data using spline functions. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 2012. 102
- [Vau82] C.L. Vaughan. Smoothing and differentiation of displacement-time data : An application of splines and digital filtering. *International Journal of Bio-Medical Computing*, 13(5) :375 – 386, 1982. 100
- [Whi22] Edmund T Whittaker. On a new method of graduation. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 41 :63–75, 1922. 99
- [WJZL08] Wenping Wang, Bert Jüttler, Dayue Zheng, and Yang Liu. Computation of rotation minimizing frames. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 27(1) :2, 2008. 118, 120, 121
- [Wol85] Herman J. Woltring. On optimal smoothing and derivative estimation from noisy displacement data in biomechanics. *Human Movement Science*, 4(3) :229 – 245, 1985. 98, 99, 101
- [Woo82] Graeme A Wood. Data smoothing and differentiation procedures in biomechanics. *Exercise and sport sciences reviews*, 10(1) :308–362, 1982. 100
- [WW75a] G. Wahba and S. Wold. A completely automatic french curve : fitting spline functions by cross validation. *Communications in Statistics*, 4(1) :1–17, 1975. 102
- [WW75b] G. Wahba and S. Wold. Periodic splines for spectral density estimation : the use of cross validation for determining the degree of smoothing. *Communications in Statistics*, 4(2) :125–141, 1975. 102

- 
- [WZC<sup>+</sup>16] H. Wang, R. Zhang, W. Chen, X. Liang, and R. Pfeifer. Shape detection algorithm for soft manipulator based on fiber bragg gratings. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 21(6) :2977–2982, Dec 2016. 60
- [YQS<sup>+</sup>07] Xinhua Yi, Jinwu Qian, Linyong Shen, Yanan Zhang, and Zhen Zhang. An innovative 3d colonoscope shape sensing sensor based on fbg sensor array. In Information Acquisition, 2007. ICIA '07. International Conference on, pages 227–232, July 2007. 60
- [ZBF<sup>+</sup>08] Nabil Zemiti, Ivan Bricault, Celine Fouard, Benedicte Sanchez, and Philippe Cinquin. Lpr : A ct and mr-compatible puncture robot to enhance accuracy and safety of image-guided interventions. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 13(3) :306–315, 2008. 6