



# Application de Riemann-Hilbert-Birkhoff

Thibault Paolantoni

## ► To cite this version:

Thibault Paolantoni. Application de Riemann-Hilbert-Birkhoff. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Paris-Saclay, 2017. Français. NNT : 2017SACLS410 . tel-01718053

**HAL Id: tel-01718053**

**<https://theses.hal.science/tel-01718053>**

Submitted on 27 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de

## L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

*Établissement d'inscription* : Université Paris-Sud

*Laboratoire d'accueil* : Laboratoire de mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS

*Spécialité de doctorat* : Mathématiques fondamentales

**Thibault PAOLANTONI**

Application de Riemann-Hilbert-Birkhoff

*Date de soutenance* : 20 décembre 2017

*Après avis des rapporteurs* : EMMANUEL PAUL (Université de Toulouse)  
DAVID SAUZIN (IMCCE)

*Jury de soutenance* :

|                    |                                            |                    |
|--------------------|--------------------------------------------|--------------------|
| ANDREA D'AGNOLO    | (Università degli Studi di Padova)         | Examineur          |
| PHILIP BOALCH      | (Université Paris-Saclay)                  | Directeur de thèse |
| STÉPHANE FISCHLER  | (Université Paris-Saclay)                  | Examineur          |
| EMMANUEL LETELLIER | (Université Paris 7)                       | Examineur          |
| EMMANUEL PAUL      | (Université de Toulouse)                   | Rapporteur         |
| CLAUDE SABBAH      | (Centre de Mathématiques Laurent Schwartz) | Président du jury  |



# Application de Riemann-Hilbert-Birkoff

Thibault Paolantoni



À René mon grand-père adoré,  
à Thierry mon ami de toujours



## Remerciements

“Vis comme si tu devais mourir demain.  
Apprends comme si tu devais vivre toujours.”

— Mahatma Gandhi

Tout d’abord je tiens à remercier mon directeur Philip Boalch de m’avoir donné un sujet de thèse aussi passionnant puis de m’y avoir accompagné. Sans s’être perdu dans une microgestion de ma thèse, il a su me montrer une autre manière de pratiquer les mathématiques.

Je souhaite aussi remercier Emmanuel Paul et David Sauzin de m’avoir fait l’honneur d’être les rapporteurs de cette thèse. Je souhaite aussi remercier Andrea D’Agnolo, Stéphane Fischler, Emmanuel Letellier et Claude Sabbah de me faire l’honneur de faire parti de mon jury aujourd’hui.

Toute thèse est avant tout une aventure humaine où les moments de doutes sont nombreux et où la lumière de quelques uns est d’autant plus précieuse. En particulier, je tiens à remercier les chercheurs qui ont eu la gentillesse de répondre à mes questions ; en particulier, P. Shapira, O. Schiffmann, L. Schneps. Tout particulièrement, j’aimerais remercier Claude Sabbah pour l’attention qu’il m’a apportée et d’avoir toujours su trouver un peu de temps pour répondre à mes questions. J’aimerais aussi remercier Jean Écalte d’avoir accepté de me consacrer beaucoup de son temps pour m’orienter dans sa littérature foisonnante mais ô combien passionnante. Mon seul regret est d’être allé le rencontrer trop tard.

Je remercie aussi l’école doctorale et tout particulièrement Frédéric Paulin pour son investissement qui va bien au delà du professionnalisme. Il a contribué pour beaucoup au bon dénouement de cette thèse.

Ensuite une thèse se fait souvent dans la solitude. Souvent le soutien de mes frères de thèse a été salvateur. Merci à Robert et Gabriele pour ces bons moments passés ensemble. Merci aussi à mes amis thésards d’Orsay, tout particulièrement Antoine, Cagri, Diego, Élodie, Émilien, Jeanne, Joseph, Lionel, Lucile, Maxime, Rita, Thomas, Tiago, Valérie, Wei. Mais aussi à mes amis de master ou d’avant : Arindam, Davide, Guillaume, Jean-Baptiste, Kevin, Louis, Martin, Xiaohua. Vous avez rendu le chemin tellement plus beau...

Je tiens aussi à remercier mes amis maintenant de longue date. Merci à Antoine, Bilbo, Bost, Braaach, Capelle, Damien et Sarah, Grégi, Juliette, Max, Mehdi, Naëma, Patrick et Betty, Patou et sa Florence, Quentin, Simon et Claire, Théophile, Thomas, Vincent et Hélène, Christophe mon partner mais aussi Mathieu, Patrick et leurs chères Ka(the)rines. Merci pour tous pour ces bons moments passés ensemble. À vos cotés, le temps passe beaucoup trop vite.

Je remercie aussi Marc, Sébastien L et Sébastien K de m’avoir donné la chance d’être là où je suis actuellement. Merci aussi à mes collègues/amis de boulot de faire que chaque jour, ce soit un plaisir d’aller travailler avec eux.

Merci à Riemann qui avec son poil doux et soyeux a réchauffé mes jambes pendant la difficile période de la rédaction.



Tous ceux qui sont passés par un doctorat savent à quel point il faut de l'abnégation pour obtenir des résultats en mathématiques et de la résilience pour en faire une rédaction juste et compréhensible. En particulier cela n'aurait pas été possible sans le soutien indéfectible de ma famille. Merci infiniment à mes frères et soeurs Delphine, Ophélie, Lancelot et Quentin, mes parents adorés, ma grand-mère Tounette bien sûr mais aussi à ma belle famille, tout particulièrement Stéphane, Vénétia, Marie-France et Renaud et enfin à la famille de ma marraine Monique. J'espère qu'ils ressentent tout l'amour que j'ai pour eux.

Pour finir, je tiens à remercier Sandrine l'amour de ma vie. Toujours présente, douce et forte, elle remplit avec toute son intelligence et sa joie de vivre ma vie d'un bonheur incommensurable. J'embrasse enfin mon petit ange Martin, arrivé avec deux jours d'avance pour mon plus grand bonheur.

## Table des matières

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Remerciements                                                                                          | 7   |
| Introduction                                                                                           | 11  |
| Chapitre 1. Généralités                                                                                | 17  |
| 1.1. Réseau de racines d'un groupe algébrique et algèbre enveloppante                                  | 17  |
| 1.2. Représentations de graphe                                                                         | 21  |
| 1.3. Système gradué et système local de Stokes                                                         | 25  |
| 1.4. Application de Riemann-Hilbert-Birkhoff                                                           | 37  |
| 1.5. Groupe de Poisson-Lie dual et application exponentielle duale                                     | 41  |
| Chapitre 2. Transformée de Fourier-Laplace                                                             | 45  |
| 2.1. Présentation de modules holonomes et dimensions                                                   | 45  |
| 2.2. Restriction de modules sur l'algèbre de Weyl et connexion correspondante                          | 48  |
| 2.3. Transformée de Fourier-Laplace et connexion associée                                              | 49  |
| Chapitre 3. Matrices de Stokes et matrices de connexion                                                | 51  |
| 3.1. Système gradué et connexion régulière                                                             | 52  |
| 3.2. Transformée de Laplace                                                                            | 58  |
| 3.3. Données de Stokes comme fonction de la connexion fuchsienne                                       | 64  |
| Chapitre 4. Données de Stokes du cas biparti                                                           | 73  |
| 4.1. Notations et résumé                                                                               | 73  |
| 4.2. Représentation inversible de graphe et présentation de modules                                    | 78  |
| 4.3. Transformée de Laplace multiplicative et isomorphisme de représentations<br>inversibles de graphe | 80  |
| 4.4. Systèmes gradués et représentations inversibles de graphe                                         | 83  |
| 4.5. Données de Stokes                                                                                 | 85  |
| 4.6. Associateur de Drinfel'd                                                                          | 86  |
| Chapitre 5. Développement moulien des matrices de connexion                                            | 89  |
| 5.1. Introduction                                                                                      | 89  |
| 5.2. Lien entre le cadre formel et vectoriel                                                           | 92  |
| 5.3. Cas formel                                                                                        | 94  |
| 5.4. Développements moliens                                                                            | 98  |
| 5.5. Structure du moule $J^\bullet$                                                                    | 104 |
| 5.6. Cas vectoriel                                                                                     | 108 |
| Chapitre 6. Développement moulien de l'application exponentielle duale                                 | 111 |
| 6.1. Application exponentielle duale                                                                   | 111 |
| 6.2. Cadre formel et extension intrinsèque                                                             | 113 |
| 6.3. Cas particulier de la monodromie formelle triviale                                                | 117 |
| Chapitre 7. Cas particulier d'un fibré de rang 2                                                       | 119 |
| 7.1. Calcul explicite des matrices de Stokes                                                           | 119 |
| 7.2. Calcul explicite des matrices de connexion                                                        | 120 |

|           |                                                                           |     |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.3.      | Démonstration du calcul pour les matrices de connexion                    | 121 |
| 7.4.      | Développement moulien                                                     | 125 |
| Annexe A. | Hyperfonctions et transformée de Laplace multiplicative                   | 127 |
| A.1.      | Hyperfonctions                                                            | 127 |
| A.2.      | Transformée de Laplace des hyperfonctions                                 | 129 |
| A.3.      | Microfonctions et microfonctions généralisées                             | 131 |
| A.4.      | Transformée de Laplace de solutions                                       | 134 |
| A.5.      | Situations locales et situation semi-locale                               | 136 |
| A.6.      | Lemmes algébriques                                                        | 140 |
| A.7.      | Démonstrations de la section sur la transformée de Laplace multiplicative | 143 |
| Annexe B. | Calcul moulien et quelques exemples                                       | 149 |
| B.1.      | Quelques rappels de calcul moulien                                        | 149 |
| B.2.      | Petit formulaire pour le moule $J^\bullet$                                | 154 |
| B.3.      | Petit formulaire pour le comoule $G_{\bullet}^{i,j}$                      | 155 |
| B.4.      | Un programme pour le calcul du moule $J_{i,j}^\bullet(0,0)$               | 156 |
| Annexe.   | Bibliographie                                                             | 161 |

## Introduction

Soit  $\nabla$  une connexion fuchsienne de la forme

$$(0.0.a) \quad \nabla = d - \sum_{i \in I} \frac{R_i}{\zeta - a_i} d\zeta$$

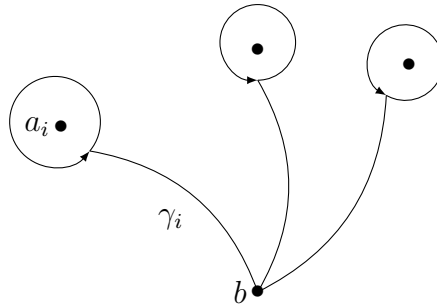
sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  de fibre  $V$  sur la sphère de Riemann  $\mathbf{P}^1$ , où  $R_i \in \text{End}(V)$  pour tout  $i \in I$  et les  $a_i \in \mathbf{C}$  sont des nombres complexes deux à deux distincts. La donnée de la connexion  $\nabla$  est équivalente à la donnée d'un système différentiel linéaire de rang  $\dim(V)$

$$Y'(\zeta) = \left( \sum_{i \in I} \frac{R_i}{\zeta - a_i} \right) Y(\zeta)$$

d'inconnue une fonction holomorphe  $Y$  à valeurs dans  $\mathbf{C}^{\dim(V)}$ , modulo le choix d'une base de  $V$ .<sup>1</sup> On notera  $G := \text{GL}(V)$ ,  $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G) = \text{End}(V)$ ,  $\hat{I} := I \cup \{\infty\}$ ,  $a_\infty := \infty \in \mathbf{P}^1$  pour avoir une cohérence des notations et enfin  $S := \{a_i : i \in \hat{I}\}$  l'ensemble des pôles de la connexion  $\nabla$ . La connexion  $\nabla$  admet des solutions globales qui sont des fonctions multivaluées sur  $\mathbf{P}^1 - S$ , c'est-à-dire des fonctions holomorphes à valeurs dans  $V$  sur un revêtement universel de  $\mathbf{P}^1 - S$ . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz holomorphe, ces solutions forment un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\text{Sol}_\nabla$  de dimension  $\dim(V)$  sur lequel le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbf{P}^1 - S, b)$  agit pour un certain point de base  $b \in \mathbf{P}^1 - S$ . La représentation correspondante

$$\rho : \pi_1(\mathbf{P}^1 - S, b) \longrightarrow \text{Aut}(\text{Sol}_\nabla)$$

est appelée *représentation de monodromie*. Le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbf{P}^1 - S, b)$  est engendré par les classes des lacets  $(\gamma_i)_{i \in \hat{I}}$  tournant autour de  $a_i$ , soumise à la relation  $\prod_{i \in \hat{I}} \gamma_i = 1$  pour un ordre bien choisi sur l'ensemble  $\hat{I}$ .



La représentation  $\rho$  est donc déterminée par les matrices de monodromie  $M_i \in G$  pour tout  $i \in \hat{I}$  tels que le prolongement d'une base  $\Psi(\zeta)$  quelconque de  $\text{Sol}_\nabla$  le long de  $\gamma_i$  est donnée par  $\Psi(\zeta)M_i$ . On a donc  $\prod_{i \in \hat{I}} M_i = \text{id}$  pour le même ordre sur  $\hat{I}$ .

Au début du vingtième siècle, I. Lappo-Danilevski donna dans [LD53] une formule explicite des matrices de monodromies à partir d'hyperlogarithmes. Notons  $I^*$  l'ensemble des mots dans l'alphabet  $I$ ,  $R_{\mathbf{i}} := R_{i_r} \cdots R_{i_1}$  pour tout mot  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \in I^*$

---

1. Dans l'équation précédente,  $R_i$  désigne abusivement la matrice de  $R_i$  dans le choix d'une telle base de  $V$ .

et

$$I_\gamma^{\mathbf{i}} := \int_{0 < t_1 \leq \dots \leq t_r < 1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - a_{i_1}} \dots \frac{d\zeta_r}{\zeta_r - a_{i_r}}$$

où  $\zeta_k = \gamma(t_k)$  pour tout  $1 \leq k \leq r$  et  $\gamma$  un chemin à valeurs dans  $\mathbf{P}^1 - S$ . Précisément, I. Lappo-Danilevski montra l'égalité

$$M_k = \sum_{\mathbf{i} \in I^*} I_{\gamma_k}^{\mathbf{i}} \cdot R_{\mathbf{i}}.$$

Remarquez que l'on a  $I_{\gamma_k}^{(j)} = 0$  si  $j \neq k$  et  $I_{\gamma_k}^{(k)} = 2i\pi$ . On a donc

$$M_k = \text{id} + 2i\pi R_k + \sum_{l(\mathbf{i}) \geq 2} I_{\gamma_k}^{\mathbf{i}} \cdot R_{\mathbf{i}}$$

où  $l(\mathbf{i}) := r$  désigne le longueur du mot  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r)$ . On en déduit que l'application  $(R_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I} \mapsto (M_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$  est analytique et est un isomorphisme local au voisinage de 0. Voir par exemple l'article d'A. Beauville dans [Bea93] pour un complément de la présentation ci-dessus.

D'un point de vue plus géométrique, ce résultat donne une formule explicite pour l'application de Riemann-Hilbert

$$\mathcal{M}_{dR}^* \hookrightarrow \mathcal{M}_{dR} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_B$$

où

- (1)  $\mathcal{M}_{dR}^*$  désigne l'espace de modules correspondant aux classes d'isomorphisme des systèmes fuchsien à pôles dans  $S$  de rang  $\dim(V)$ , c'est-à-dire des connexions logarithmiques à pôles dans  $S$  sur un fibré trivial sur  $\mathbf{P}^1$  de rang  $\dim(V)$ ,
- (2)  $\mathcal{M}_{dR}$  désigne l'espace de modules, dit de De Rham, correspondant aux classes d'isomorphisme des connexions logarithmiques à pôles dans  $S$  sur un fibré quelconque de  $\mathbf{P}^1$  de rang  $\dim(V)$ ,
- (3)  $\mathcal{M}_B = \text{Hom}(\pi_1(\mathbf{P}^1 - S), G)/G$ , dit espace de module de Betti, correspondant aussi aux classes d'isomorphisme des systèmes locaux de rang  $\dim(V)$  sur  $\mathbf{P}^1 - S$ .

L'application de Riemann-Hilbert est une application holomorphe entre deux variétés algébriques.

Signalons qu'un certain nombre d'aspects transcendants ont déjà été étudiés par C. Simpson dans [Sim90]. Voir aussi l'article de P. Deligne [Del89] qui étudie en détail le cas des fibrés à connexion sur la courbe  $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ , motivé par l'apparition de la valeur  $\zeta(3)$  de la fonction zêta de Riemann.

Considérons un instant le cas particulier étudié dans [Del89] où  $S = \{0, 1, \infty\}$  et notons

$$(0.0.b) \quad \nabla_{KZ} := d - \left( \frac{X}{\zeta} + \frac{Y}{\zeta - 1} \right) d\zeta$$

sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ . Cette connexion est parfois appelée connexion de Knizhnik-Zamolodchikov, car le premier cas d'une connexion de Knizhnik-Zamolodchikov est un cas particulier d'un tel système fuchsien  $\nabla_{KZ}$ . De même que l'on peut considérer les données de monodromie le long de lacets, on peut considérer les *matrices de connexion* le long de chemin, reliant deux bases préférées en des pôles de la connexion. On peut faire un choix canonique de ces bases préférées lorsque l'on suppose que les résidus  $X$  et  $Y$  de  $\nabla_{KZ}$  en 0 et 1 sont non résonants, c'est-à-dire que la différence de deux quelconques de leurs valeurs propres est toujours un élément de  $\mathbf{C} - \mathbf{Z}^*$ . Un exemple célèbre de cela est la construction d'un assocateur de Drinfel'd dans [Dri90]

utilisant la définition de la matrice de connexion de  $\nabla_{KZ}$  entre les pôles 0 et 1 le long du segment  $[0; 1]$

Ces applications ont un fort intérêt. Par exemple, il a été montré dans [AT12] que certaines applications pour résoudre la conjecture de Kashiwara-Vergne sont en fait des associateurs de Drinfel'd. Pour les théoriciens des nombres, les matrices de connexion de la connexion  $\nabla_{KZ}$  sont aussi très intéressantes car elles admettent un développement en série formelle très proche de celui des matrices de monodromie (ces développements en sont en quelque sorte des normalisations) dont les coefficients sont des polyzêtas (voir [LM96] théorème A.9). Or les polyzêtas ont été grandement étudiés par exemple dans le cadre de la théorie des périodes (voir [And04] chapitre III mais aussi [Eca03]). Plus généralement, les matrices de connexion entre pôles d'une connexion fuchsienne admettent un développement en série formelle dont les coefficients sont des hyperlogarithmes. Les hyperlogarithmes sont définis par des intégrales itérées avec uniquement des pôles simples du type

$$\int_{0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r < 1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - v_1} \dots \frac{d\zeta_r}{\zeta_r - v_r}$$

où  $\zeta_k = \gamma(t_k)$  pour tout  $1 \leq k \leq r$  et  $\gamma$  est un chemin (pas nécessairement un lacet) à valeurs dans  $\mathbf{C}$  privé<sup>2</sup> des pôles  $v_1, \dots, v_r \in \mathbf{C}$  (voir par exemple [Eca02] §4.3). En particulier, les nombres polyzêtas

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_r^{k_r}}$$

où les  $k_i \in \mathbf{N}^*$  sont des entiers strictement positifs et  $k_1 > 1$ , sont des cas particuliers d'hyperlogarithmes car on a l'égalité

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) = \int_{1 > t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_k > 0} \omega_1(t_1) \omega_2(t_2) \dots \omega_k(t_k)$$

où  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_r$  et  $\omega_i(t) = dt/(1-t)$  si  $i \in \{k_1, k_1 + k_2, \dots, k_1 + k_1 + \dots + k_r\}$  et  $\omega_i(t) = dt/t$  sinon.

Lorsque l'on supprime la condition sur les pôles d'être au plus simples, on parle de connexion irrégulière et la situation est plus compliquée. L'espace de module des fibrés à connexion algébrique sur  $\mathbf{P}^1 - S$  est alors plus gros, et pour toujours avoir un isomorphisme holomorphe avec un espace de Betti, on doit enrichir l'espace de module des représentations de monodromie d'une donnée supplémentaire, les *données de Stokes*, nécessaire à la classification des connexions irrégulières. L'origine de cette approche remonte au moins à G. D. Birkhoff. La correspondance de *Riemann-Hilbert-Birkhoff* a alors admis de nombreux développements et la formulation des données de Stokes plusieurs variantes comme celle d'un certain espace de cohomologie non abélienne suivant Malgrange-Sibuya [BV89], de "structures de Stokes" suivant Deligne-Malgrange-Ramis [DMR07], ou celle d'un certain groupe unipotent suivant Martinet-Ramis [MR91a]. Le point de vue que nous utiliserons sera une variante du point de vue de J. Martinet et J.-P. Ramis, exposé par M. Loday-Richaud dans [LR94] et ensuite généralisé par P. Boalch dans [Boa02] à tout groupe complexe réductif.

Le premier cas de connexion irrégulière à considérer est la connexion de la forme

$$(0.0.c) \quad \nabla = d - \left( \frac{A}{z^2} + \frac{R}{z} \right) dz,$$

---

2. On inclut aussi parfois le cas où le chemin  $\gamma$  est issu d'un des  $v_i$  et finit en un autre  $v_j$ , mais cette intégrale n'est pas toujours convergente.

où  $A, R \in \mathfrak{g}$ . En premier lieu, on suppose  $A$  régulière semi-simple, c'est-à-dire diagonalisable à valeurs propres deux à deux distinctes.

On aimerait traiter le cas (0.0.c) de manière analogue au cas fuchsien (0.0.a). Les matrices de Stokes pour ce cas sont définies par exemple dans [BJL79], et peuvent être vues de manière analogue aux matrices de connexion du cas (0.0.b) : plutôt que d'avoir une unique base préférée en chaque pôle, on a plusieurs bases préférées en chaque pôle irrégulier et les données de Stokes encodent les matrices de connexion entre ces bases de solutions le long de chaque chemin possible.

Dans ce cas, l'intérêt d'un point de vue des groupes de Lie de la correspondance de Riemann-Hilbert-Birkhoff a été établi par P. Boalch dans [Boa01] : supposons que l'on fixe  $A$  de telle manière que les données de Stokes dépendent de  $R \in \mathfrak{g}$ . Dans ce cas, l'espace des données de Stokes (muni d'un repère) est isomorphe à l'espace  $U_+ \times U_- \times T$  où  $T$  est le tore maximal des matrices diagonales et  $U_{\pm} \subseteq G$  sont les sous-groupes unipotents des matrices triangulaires supérieures et inférieures. En fait, on peut montrer que l'espace  $U_+ \times U_- \times T$  est isomorphe à  $G^*$ , le groupe de Poisson Lie dual de  $G$ , défini par V. G. Drinfel'd dans [Dd87]. Ce dernier groupe admet une structure de Poisson non linéaire naturelle qui se quantifie en le groupe quantique de Drinfel'd-Jimbo (voir [DCP93] §12). En particulier, cela implique que la théorie de Drinfel'd-Jimbo des groupes quantiques est un cas particulier de la quantification des espaces de données de Stokes.<sup>3</sup>

Finalement, l'application de Riemann-Hilbert-Birkhoff de (0.0.c) donne l'*application exponentielle duale*

$$\nu_A : \mathfrak{g}^* \longrightarrow G^*$$

qui associe à un élément  $R \in \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$  les données de Stokes de la connexion (0.0.c). Lorsque l'on munit  $\mathfrak{g}^*$  de sa structure de Poisson linéaire standard et  $G^*$  de sa structure de Poisson non linéaire usuelle (divisée par un facteur  $2i\pi$ ), les variétés de Poisson  $\mathfrak{g}^*$  et  $G^*$  sont de même dimension  $\dim(G)$  et P. Boalch a montré dans [Boa01] que les applications  $\nu_A$  ( $A \in \mathfrak{t}$ ) forme une famille naturelle d'isomorphismes locaux holomorphes de Poisson entre  $\mathfrak{g}^*$  et  $G^*$ .

Le premier objectif de cette thèse est de donner une formule analogue à celle des matrices de monodromie pour l'application exponentielle duale.

**THÉORÈME.** *Pour tout choix permettant de définir l'application exponentielle duale*

$$\nu_A : \mathfrak{g}^* \longrightarrow G^*,$$

*il existe des coefficients universels  $L_{\pm}(i_1, \dots, i_r) \in \mathbf{C}$  tels que l'application exponentielle duale soit de la forme  $\nu_A(R) = (u_+, u_-, h)$  avec*

$$(0.0.d) \quad u_{\pm} = 1 + \sum_{r \geq 1} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n} L_{\pm}(i_1, \dots, i_r) \cdot R_{i_1, i_2} \cdots R_{i_{r-1}, i_r} \quad \text{et} \quad h = e^{2i\pi\delta(R)},$$

*où  $R_{i,j}$  est égal à la matrice  $R$  pour le coefficient d'indice  $(i, j)$  et nulle partout ailleurs et  $\delta(R)$  est la partie diagonale de  $R$ .*

*De plus, les coefficients  $L_{\pm}(i_1, \dots, i_r)$  s'expriment explicitement comme combinaison linéaire d'hyperlogarithmes et la somme du membre de droite est absolument convergente pour tout  $R \in \mathfrak{g}^*$ .*

Pour montrer le théorème précédent, on procédera en deux étapes. Tout d'abord, comme démontré par Balser, Jurkat et Lutz dans [BJL81], les données de Stokes

---

3. Même s'il n'est pas question de groupes quantiques dans cette thèse, ces derniers ont toujours été sous-jacents et l'auteur a autant que possible essayé de rédiger les résultats sur l'application de Riemann-Hilbert-Birkhoff de telle manière qu'il serait relativement aisé de les traduire au cas quantique.

de la connexion (0.0.c) sont reliées aux matrices de connexion de sa transformée de Fourier-Laplace

$$\hat{\nabla} = d - \left( \sum_{i \in I} \frac{R_i}{\zeta - a_i} \right) d\zeta,$$

sur le même fibré vectoriel  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  où les  $a_i$  sont les valeurs propres (deux à deux distinctes) de la matrice diagonale  $A$  et  $R_i \in \mathfrak{g}$  est la matrice égale à  $R$  sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne et nulle partout ailleurs.

La seconde étape consistera à généraliser le développement en série formelle de la matrice de connexion de la connexion fuchsienne  $\nabla_{KZ}$  pour toute matrice de connexion d'une connexion fuchsienne comme  $\hat{\nabla}$  pour obtenir des variantes algébriques des périodes/coefficients universels  $L(i_1, \dots, i_r) \in \mathbf{C}$ .

On généralisera ensuite ce résultat au cas où  $A$  est semi-simple quelconque, que l'on appellera le cas par blocs. Dans ce cas, notons  $V = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} V_i$  la graduation induite par les espaces propres de  $A$  sur  $V$ . On peut alors définir pour certains choix un analogue de l'application exponentielle duale

$$(0.0.e) \quad \mathfrak{g}^o \longrightarrow U_+ \times U_- \times K$$

où  $\mathfrak{g}^o$  désigne un voisinage de  $0 \in \mathfrak{g}$  explicite et où cette fois-ci  $U_{\pm} \subseteq G$  seront les sous-groupes unipotents par blocs des matrices triangulaires supérieures par blocs et inférieures par blocs de  $G$  et  $K$  l'ensemble des matrices diagonales par blocs inversibles. Dans le cas où  $A$  n'a que deux valeurs propres, c'est-à-dire  $V = V_1 \oplus V_2$ , on a donc

$$U_+ = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & * \\ 0 & \text{id}_{V_2} \end{pmatrix}, \quad U_- = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & 0 \\ * & \text{id}_{V_2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{k} = \text{Lie}(K) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

**THÉORÈME.** *L'application (0.0.e) admet une formule analogue à la formule (0.0.d) dans le voisinage  $\mathfrak{g}^o$  de  $0 \in \mathfrak{g}$  avec les mêmes coefficients universels  $L_{\pm}(i_1, \dots, i_r) \in \mathbf{C}$  mais où  $R_{i,j}$  signifie cette fois la matrice égal au bloc  $(i, j)$  de la matrice  $R$  et nulle partout ailleurs.*

En particulier, la formule pour le bloc  $(i, j)$  des données de Stokes est donnée par une série formelle *non commutative* cette fois contrairement au cas où  $A$  est supposé semi-simple régulier.

Ce résultat est une généralisation du résultat précédent et avait déjà été obtenu dans le cas particulier où  $R$  est à diagonale par blocs nulle par T. Bridgeland et V. T. Laredo dans [BTL13]. Notre cas général permet de déduire le corollaire suivant :

**COROLLAIRE.** *Génériquement, la matrice de connexion de  $\nabla_{KZ}$ , c'est-à-dire la matrice de connexion permettant de définir un associateur de Drinfel'd, s'exprime algébriquement à partir des données de Stokes de la connexion*

$$d - \left( \frac{\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}}{\xi^2} + \frac{\begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}}{\xi} \right) d\xi,$$

sur  $V \oplus V$ .

Pour montrer le théorème plus général, on utilisera la théorie de B. Malgrange dans [Mal91] chapitre XII, qui généralise<sup>4</sup> les résultats de [BJL81]. Cela a l'avantage de simplifier la présentation et de se généraliser plus facilement au cas des connexions à pôles du type  $2 + 1 + \dots + 1$ .

4. Les auteurs de [BJL81] avaient déjà généralisé partiellement leurs résultats dans [BJL83].



Enfin le calcul des coefficients  $L_{\pm}(i_1, \dots, i_r)$ , qui est l'un des points clefs, a été formulé avec le langage des moules introduit par J. Écalle. Cela permet de mieux mettre en valeur les transformations algébriques à opérer sur les invariants coté Stokes et du coté de sa transformée de Fourier-Laplace. De plus, cela est particulièrement adapté pour généraliser aux autres types de pôles irréguliers et conjecturalement pour trouver une formule pour un morphisme d'algèbre entre les quantifications des groupes de Poisson-Lie  $\mathfrak{g}^*$  et  $G^*$ .

À titre d'exemple, donnons la formule que l'on obtient dans le cas où  $A$  admet deux valeurs propres distinctes  $a_1, a_2 \in \mathbf{C}$ . Remarquez que les données de Stokes ont déjà été calculées dans ce cas dans [JLP76] et permet de faire la première étape du travail esquissé ci-dessus. Notons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & R_{1,2} \\ R_{2,1} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}$$

On choisit un angle admissible  $\eta \in \mathbf{R}$  pour la famille  $(a_i)_{i \in I}$ , c'est-à-dire ici tel que  $\arg(a_1 - a_2) \not\equiv \eta \pmod{\pi}$ . On définit alors la surface  $\mathcal{U}(\eta)$  égale à  $\mathbf{C}$  privé des demi-droites issues des  $a_i$  de direction d'angle  $\eta$  et on choisit la branche du logarithme  $\log$  d'angles  $]\eta - 2\pi; \eta[$ . Avec ces choix, on peut bien définir l'application exponentielle duale  $\nu_A : \mathfrak{g}^* \rightarrow G^*$  et on notera  $(u_+, u_-, \Lambda) \in U_+ \times U_- \times \mathfrak{k} \simeq G^*$  l'image de la matrice  $R$ . On aura toujours  $h = e^{2i\pi\Lambda}$ . On définit les nombres complexes suivants, dérivées des intégrales itérées,

$$I_{i,j}(i_1, \dots, i_r) := \int_{0 < t_1 \leq \dots \leq t_r < 1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{i_1}} \dots \frac{dz_r}{z_r - a_{i_r}} \in \mathbf{C},$$

pour tout  $i, j, i_1, \dots, i_r \in \{1, 2\}$ , où l'intégrale est prise sur un chemin  $\gamma : ]0; 1[ \rightarrow \mathcal{U}(\eta)$  reliant  $a_j$  à  $a_i$  et où l'on a noté  $z_k = \gamma(t_k)$  pour tout  $1 \leq k \leq r$ . Les nombres complexes  $I_{i,j}(i_1, \dots, i_r) \in \mathbf{C}$  sont des valeurs de fonctions hyperlogarithmes mais ne sont définis que lorsque  $i_1 \neq j$  et  $i_r \neq i$ , car sinon l'intégrale diverge.

Donnons avant toute chose quelques notations. On note  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$  des vecteurs d'entiers naturels comme  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_l)$  et on note  $l(\mathbf{p}) = l$  sa longueur,  $|\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^l p_i$  son poids. On note  $\mathbf{p} \geq \mathbf{r}$  pour deux vecteurs de même longueur si  $p_i \geq r_i$  pour tout  $i$ ,  $\mathbf{p} \geq 0$  si  $p_i \geq 0$  pour tout  $i$  et  $\mathbf{p} > 0$  si  $p_i > 0$  pour tout  $i$ .

Alors on montre que le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $hu_+ - u_-$  est donné explicitement par

$$(0.0.f) \quad \frac{e^{-\log(a_j - a_i)\Lambda_i}}{e^{i\pi\Lambda_i} \Gamma(1 - \Lambda_i)} \cdot M_{i,j} \cdot \frac{e^{\log(a_i - a_j)\Lambda_j} (e^{3i\pi\Lambda_j} - e^{i\pi\Lambda_j}) \Gamma(1 - \Lambda_j)}{\Lambda_j},$$

avec

$$M_{i,j} = R_{i,j} + \delta_{i,j} \sum_{l \geq 1} \sum_{\substack{\mathbf{p} > 0, \mathbf{q} > 0 \\ l(\mathbf{p}) = l(\mathbf{q}) = l}} \sum_{\substack{l(\mathbf{r}) = l(\mathbf{s}) = l \\ 0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{p} \\ 0 \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{q}}} (-1)^{|\mathbf{r}| + |\mathbf{s}|} \left( \prod_{k=2}^l \binom{p_k}{r_k} \binom{q_i}{s_i} \right) \\ \times I_{i,j}(i^{q_1} j^{p_1} \dots i^{q_r} j^{p_r}) \cdot \Lambda_i^{|\mathbf{s}|} R_{i,j} \Lambda_j^{p_l - r_l} R_{j,i} \Lambda_i^{q_l - r_l} R_{i,j} \dots \Lambda_j^{p_1 - r_1} R_{j,i} \Lambda_i^{q_1 - s_1} R_{i,j} \Lambda_j^{|\mathbf{r}|}.$$

où  $\Gamma$  désigne la fonction Gamma d'Euler, où  $\delta_{i,j}$  le symbole de Kronecker et où  $R_{i,i} := \Lambda_i$ . En particulier, lorsque  $i = j$ , on a bien  $M_{i,i} = R_{i,i} = \Lambda_i$  et on retrouve  $h = e^{2i\pi\Lambda}$ .

On montrera aussi que cette formule reste valable au voisinage de 0 lorsque l'on remplacera les coefficients  $R_{i,j}, \Lambda_i$  par des blocs de la matrice  $R$  lorsque  $A$  aura aussi deux valeurs propres mais cette fois-ci de multiplicité  $\geq 1$ .

## Chapitre 1

### Généralités

Dans ce chapitre, on rappelle quelques généralités.

Dans la section 1.1, on rappellera succinctement la définition de l'ensemble des racines d'un groupe algébrique complexe qui, comme l'a remarqué P. Boalch dans [Boa02] a un rôle essentiel dans le phénomène de Stokes pour un groupe algébrique complexe.

Ensuite, on rappellera dans la section 1.3 la définition des systèmes locaux de Stokes et on donnera une version équivalente, les systèmes gradués, dans notre cas particulier où l'on classe uniquement un pôle d'ordre deux.

On rappelle dans la section 1.4 la définition de la correspondance de Riemann-Hilbert-Birkhoff dans ce cadre grâce à la théorie de la multi-sommation dans une formulation proche de [LR94]. Remarquez que comme on considère ici uniquement le cas d'un pôle d'ordre deux non ramifié, la multi-sommation correspond à la sommation de Borel-Laplace, ce qui évite d'utiliser les différentes théories générales de multi-sommation résumées dans [LR16].

Enfin dans la section 1.5, on donne quelques rappels sur le groupe de Poisson-Lie dual et son lien, découvert par P. Boalch dans [Boa01], avec le phénomène de Stokes. Cela nous permettra de définir précisément l'application exponentielle duale

$$\nu_A : \mathfrak{g}^* \rightarrow G^*$$

qui est une application Poisson de l'algèbre de Lie dual  $\mathfrak{g}^*$  de  $\mathfrak{g}$  et le groupe de Poisson-Lie dual  $G^*$  de  $G$  et est un des objets centraux de cette thèse.

#### 1.1. Réseau de racines d'un groupe algébrique et algèbre enveloppante

Soit  $G$  un groupe algébrique complexe (de type fini, lisse). L'exemple typique est  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  pour un certain entier naturel  $n$ . Soit  $T$  un tore maximal de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{t}$ . On fixe un élément  $A \in \mathfrak{t}$ . On notera alors  $K \subseteq G$  le stabilisateur de  $A \in \mathfrak{t}$  sous l'action adjointe, c'est-à-dire

$$K = \{g \in G : \mathrm{Ad}_g(A) = A\},$$

et  $H$  le tore minimal de  $K$  inclus dans  $T$ . On a donc les inclusions  $H \subseteq T \subseteq K \subseteq G$  induisant les inclusions d'algèbres de Lie  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ .

**1.1.1. Réseau de racines.** Construisons l'ensemble des racines de  $\mathfrak{g}$  associé au tore  $H$ .

Le cadre standard des définitions ci-dessous est lorsque  $H$  est un tore maximal, c'est-à-dire quand  $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Voir le livre de B.C. Hall [Hal03] §6 pour ce cadre. On donnera les définitions et les propriétés communes dans les deux cas où  $H$  est un tore maximal ou non. En particulier, on parlera de l'ensemble  $\mathcal{R}$  ci-dessous comme de l'ensemble des racines même si ce dernier ne forme véritablement un système de racines au sens classique que lorsque  $H$  est un tore maximal.

Notons  $\mathbb{X}(H) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(H, \mathbf{C}^*)$  le groupe des caractères  $\mathbf{C}$ -linéaires de  $H$ . Il est en bijection avec l'ensemble des représentations algébriques de dimensions 1 de  $H$ .

Notons aussi  $\mathfrak{h}^*$  le dual vectoriel de  $\mathfrak{h}$ . Alors on pose  $\overline{\mathcal{W}} \subseteq \mathfrak{h}^*$  le réseau engendré par la différentielle d'éléments de  $\mathbb{X}(H)$ . On a un isomorphisme  $\overline{\mathcal{W}} \simeq \mathbb{X}(H)$  déduit du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ H & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \end{array}$$

ou autrement dit du foncteur entre la catégorie des algèbres de Lie et celle des groupes de Lie.

On rappelle que l'on a la représentation adjointe  $\mathfrak{h} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  donné par  $h \mapsto \text{ad}_h$  avec  $\text{ad}_h(X) = [h, X]$  pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ . L'ensemble des racines  $\mathcal{R}$  de  $\mathfrak{g}$  associé au tore  $H$  est le sous-ensemble fini de  $\overline{\mathcal{W}} - \{0\}$  tel que

$$(1.1.a) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathfrak{g}_\alpha \right),$$

où

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall h \in \mathfrak{h}, \text{ad}_h(X) = \alpha(h) \cdot X\}.$$

En particulier, on a  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^{\mathfrak{h}}$  le centralisateur de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$  et  $\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathfrak{g}_\alpha = [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$ . On a donc  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{R} \cup \{0\}} \mathfrak{g}_\gamma$ .

Comme  $\text{Ad} \circ \exp = \exp \circ \text{ad}$  où  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$  est la représentation adjointe du groupe  $G$ , le groupe abélien  $H$  agit donc sur  $\mathfrak{g}_\alpha$  par le caractère  $\exp(\alpha)$ . En particulier on retrouve l'inclusion  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$ .

On peut montrer que l'ensemble des racines ne dépend pas du tore maximal choisi. On définit alors le sous-ensemble  $\mathcal{W} \subseteq \overline{\mathcal{W}}$ , que l'on utilisera dans le chapitre 6 comme un alphabet dans le cadre des matrices de Stokes, comme étant le semi-groupe engendré par  $\mathcal{R}$ . On appelle parfois l'ensemble  $\mathcal{W}$  le *réseau des racines*. Comme l'ensemble des racines est symétriques, c'est-à-dire que si  $\alpha \in \mathcal{R}$  alors  $-\alpha \in \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{W}$  est aussi égal au réseau engendré par  $\mathcal{R}$ . On a donc l'égalité fondamentale

$$(1.1.b) \quad \mathcal{W} = \mathbf{Z}[\mathcal{R}] = \mathbf{N}[\mathcal{R}].$$

En particulier, l'alphabet  $\mathcal{W}$  est naturellement filtré  $(F_i \mathcal{W})_{i \geq 0}$  par la filtration induite par la filtration naturelle de  $\mathbf{N}$  donnée par  $\mathbf{N} = \bigcup_{i \geq 0} \llbracket 0; i \rrbracket$  (ou celle de  $\mathbf{Z}$ ) :

$$F_0 \mathcal{W} = \{0\} \subseteq F_1 \mathcal{W} = \mathcal{R} \cup \{0\} \subseteq \cdots \subseteq \bigcup_{i \geq 0} F_i \mathcal{W} = \mathcal{W}.$$

REMARQUE 1.1.1. On peut donc partir abstraitement d'un semi-groupe filtré par des ensembles finis  $\mathcal{W}$  et reconstruire l'ensemble fini  $\mathcal{R}$  par  $\mathcal{R} = F_1 \mathcal{W} - F_0 \mathcal{W}$ , ou partir d'un ensemble fini  $\mathcal{R}$  et construire le semi-groupe  $\mathcal{W} = \mathbf{N}[\mathcal{R}]$ .

REMARQUE 1.1.2. Les sous-ensembles  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{R}$  sont indépendant du choix du tore lorsque  $H = T$  est un tore maximal. Dans ce cas, on a même  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$ . Cependant, ce n'est pas le cas pour un tore quelconque.

REMARQUE 1.1.3. Remarquez que comme ici l'ensemble des racines est symétrique, c'est-à-dire que si  $\alpha \in \mathcal{R}$  alors  $-\alpha \in \mathcal{R}$ , on peut considérer l'une quelconque des filtrations induites par  $\mathbf{N}$  ou  $\mathbf{Z}$  et cela est équivalent. Cependant, lorsque l'on est dans le cas d'un groupe algébrique général, et que l'on n'a plus cette propriété de symétrie, il est plus adapté de considérer la filtration induite par  $\mathbf{N}$ .

REMARQUE 1.1.4. On peut même effectuer la construction précédente pour un groupe algébrique complexe affine  $G$  général avec le choix d'un tore  $H$ . Dans ce cas, les ensembles construits ont les mêmes propriétés mis à part la symétrie de l'ensemble des racines.

Donnons maintenant une description plus concrète du cas  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  pour le choix d'un tore maximal  $T$ . On choisit la base canonique de  $\mathbf{C}^n$  et on note  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la base correspondante de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ . Alors  $\mathcal{R}$  est en bijection avec les couples  $(i, j)$  d'éléments distincts de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . Cette bijection est donnée par  $(i, j) \mapsto \alpha_{i,j}$  avec  $\alpha_{i,j}(t) = t_i - t_j \in \mathbf{C}$  si  $t = \sum_{i \in I} t_i E_{i,i} \in \mathfrak{t}$ . Dans ce cas, la décomposition (1.1.a) est donnée par

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left( \bigoplus_{(i,j): i \neq j} \mathbf{C} E_{i,j} \right),$$

c'est-à-dire  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$  et  $\mathfrak{g}_{\alpha_{i,j}} = \mathbf{C} E_{i,j}$  (qui est donc de dimension 1).

Enfin,  $\mathcal{W}$  est engendré par  $\mathcal{R}$  comme semi-groupe. On peut identifier l'application nulle  $t \mapsto 0 \in \mathcal{W}$  aux couples  $(i, i) = (j, j)$  etc d'éléments de  $I^2$  non distincts. Donnons maintenant un exemple d'élément de  $F_2 \mathcal{W}$ . On a  $\rho = \alpha_{1,2} + \alpha_{3,4} \in F_2 \mathcal{W}$ , c'est-à-dire que  $\rho(t) = (t_1 - t_2) + (t_3 - t_4)$ . Remarquez que l'écriture n'est pas unique car  $\rho = \alpha_{1,2} + \alpha_{3,4} = \alpha_{1,4} + \alpha_{3,2}$ , mais aussi que l'on peut diminuer le poids par exemple avec  $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,3} = \alpha_{1,3}$  et  $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,4} = \alpha_{1,4} = \alpha_{1,3} + \alpha_{3,2} + \alpha_{2,4}$  etc.

**1.1.2. Algèbre enveloppante.** Notons  $U\mathfrak{g}$  l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

PROPOSITION 1.1.5. *On a une décomposition naturelle*

$$U\mathfrak{g} = \bigoplus_{\rho \in \mathcal{W}} U\mathfrak{g}_\rho$$

graduée par le réseau  $\mathcal{W}$ , compatible avec la graduation de  $\mathfrak{g}$  via l'inclusion  $\mathfrak{g} \hookrightarrow U\mathfrak{g}$ , c'est-à-dire que l'on a  $\mathfrak{g}_\alpha = (U\mathfrak{g})_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{R} \cup \{0\}$ .

On notera abusivement  $\mathfrak{g}_\rho = (U\mathfrak{g})_\rho$  pour tout  $\rho \in \mathcal{W}$ .

DÉMONSTRATION. On part de la décomposition (1.1.a) de  $\mathfrak{g}$  et on considère  $(x_1, \dots, x_r)$  une base graduée de  $\mathfrak{g}$ . On fixe un ordre arbitraire sur cette base. On dira qu'un monôme  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$  est canonique si  $x_{i_1} \leq \dots \leq x_{i_k}$ . Si  $\iota : \mathfrak{g} \rightarrow U\mathfrak{g}$  désigne l'application canonique, alors on étend  $\iota$  aux monômes canoniques par  $\iota((x_{i_1}, \dots, x_{i_k})) = \iota(x_{i_1}) \cdots \iota(x_{i_k})$ . Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt nous donne alors que l'application  $\iota$  est injective sur l'ensemble des monômes canoniques et que son image est une base de  $U\mathfrak{g}$ .

Alors on déduit le résultat du lemme suivant que l'on montre par récurrence :

LEMME 1.1.6. *Si  $x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} \subseteq U\mathfrak{g}$  pour un certain  $\alpha_i \in \mathcal{R} \cup \{0\}$ , alors*

$$\mathrm{ad}_t(x_1 \cdots x_k) = (\alpha_1(t) + \cdots + \alpha_k(t))(x_1 \cdots x_k), \quad \forall t \in \mathfrak{t},$$

c'est-à-dire  $x_1 \cdots x_k \in U\mathfrak{g}_\rho$  avec  $\rho = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ .

□

**1.1.3. Complétion de l'algèbre enveloppante.** Notons  $F_{\mathfrak{g}}$  le foncteur oubli de la catégorie  $\mathrm{Rep}_f(\mathfrak{g})$  des représentations de dimension finie de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  vers la catégorie des  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie. De même, notons  $F_G$  le foncteur oubli de la catégorie  $\mathrm{Rep}_f(G)$  des représentations de dimension finie du groupe algébrique  $G$  vers la catégorie des  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

On note alors  $\widehat{U\mathfrak{g}} = \mathrm{End}(F_{\mathfrak{g}})$  l'algèbre des endomorphismes du foncteur d'oubli  $F_{\mathfrak{g}}$  et  $\overline{U\mathfrak{g}} = \mathrm{End}(F_G)$  l'algèbre des endomorphismes du foncteur d'oubli  $F_G$ . Concrètement, un élément de  $\widehat{U\mathfrak{g}}$  est donc une collection  $(\Theta_\rho)_{\rho \in \mathrm{Rep}_f(\mathfrak{g})}$  de morphismes  $\Theta_\rho \in \mathrm{End}(V_\rho)$  pour toute représentation  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{End}(V_\rho)$  compatibles dans le sens où

si  $\rho'$  est une autre représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$  et si  $T \in \text{Hom}(V_\rho, V_{\rho'})$  est un morphisme de représentation<sup>1</sup>, alors on a

$$\Theta_{\rho'} \circ T = T \circ \Theta_\rho.$$

Des considérations de théorie des catégories nous donne alors la

PROPOSITION 1.1.7. *L'algèbre  $\widehat{\mathbf{U}\mathfrak{g}} = \text{End}(F_{\mathfrak{g}})$  est canoniquement isomorphe à la complétion profinie de l'algèbre enveloppante  $\mathbf{U}\mathfrak{g}$ .*

On rappelle que la complétion profinie d'une algèbre  $A$  est la limite cofiltrante sur toutes les algèbres quotient  $A/I$  de dimension finie.

DÉMONSTRATION. On utilise le fait que le foncteur  $F_{\mathfrak{g}}$  est pro-représentable par la collection des algèbres quotient de dimension finie  $\mathbf{U}\mathfrak{g}/I$ , dans le sens où

$$F_{\mathfrak{g}}(M) = \varprojlim_I \text{Hom}(\mathbf{U}\mathfrak{g}/I, M).$$

On en déduit alors immédiatement les bijections naturelles

$$\text{Hom}(F_{\mathfrak{g}}, F_{\mathfrak{g}}) \simeq \varinjlim_I \text{Hom}(\mathbf{U}\mathfrak{g}/I, F_{\mathfrak{g}}) \simeq \varinjlim_I \mathbf{U}\mathfrak{g}/I,$$

où la seconde bijection est due au lemme de Yoneda. □

Notons maintenant  $\tilde{G}$  un revêtement universel de  $G$ . On a donc  $G \simeq \tilde{G}/D$  pour un certain sous-groupe  $D$  de  $\tilde{G}$  discret et central.

PROPOSITION 1.1.8. *On a une équivalence de catégorie  $\text{Rep}_f(\mathfrak{g}) \simeq \text{Rep}_f(\tilde{G})$ . De plus,  $\text{Rep}_f(G)$  est la sous-catégorie (pleine) de  $\text{Rep}_f(\tilde{G})$  sur laquelle  $D \subseteq \tilde{G}$  agit trivialement.*

PROPOSITION 1.1.9. *Il existe trois applications naturelles injectives  $\mathbf{U}\mathfrak{g} \hookrightarrow \widehat{\mathbf{U}\mathfrak{g}}$ ,  $\tilde{G} \hookrightarrow \widehat{\mathbf{U}\mathfrak{g}}^\times$  et  $G \hookrightarrow \overline{\mathbf{U}\mathfrak{g}}^\times$  où  $\widehat{\mathbf{U}\mathfrak{g}}^\times$ , resp.  $\overline{\mathbf{U}\mathfrak{g}}^\times$ , désigne l'ensemble des éléments inversibles de  $\widehat{\mathbf{U}\mathfrak{g}}$ , resp.  $\overline{\mathbf{U}\mathfrak{g}}$ . De plus, on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \hookrightarrow & \widehat{\mathbf{U}\mathfrak{g}}^\times \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{U}\mathfrak{g}}^\times \end{array}$$

où les applications verticales sont le passage au quotient par l'action naturelle de  $D \subseteq \tilde{G}$ .

DÉMONSTRATION. La définition des applications est classique. Pour le caractère injectif, on pourra se référer au lemme 4.1 de [BTL13] p.10 par exemple. □

REMARQUE 1.1.10. La version de  $\widehat{\mathbf{U}\mathfrak{g}}$  dans [BTL13] est donc notre version  $\overline{\mathbf{U}\mathfrak{g}}$ . On a introduit l'algèbre  $\text{End}(F_{\mathfrak{g}})$  pour être plus cohérent avec la notation standard de la complétion profinie de l'algèbre  $\mathbf{U}\mathfrak{g}$  (voir proposition 1.1.7).

Notons

$$\widehat{\mathbf{U}\mathfrak{g}}_\rho = \{x \in \widehat{\mathbf{U}\mathfrak{g}} : \forall t \in \mathfrak{t}, \text{ad}_t(x) = \rho(t) \cdot x\}$$

et

$$\overline{\mathbf{U}\mathfrak{g}}_\rho = \{x \in \overline{\mathbf{U}\mathfrak{g}} : \forall t \in \mathfrak{t}, \text{ad}_t(x) = \rho(t) \cdot x\}.$$

---

1. On a donc  $\rho'_X \circ T = T \circ \rho_X$  pour tout  $X \in \mathfrak{g}$  par définition d'un morphisme de représentations.

Alors on en déduit immédiatement deux applications

$$\prod_{\rho \in \mathcal{W}} \widehat{U}_{\mathfrak{g}_\rho} \hookrightarrow \widehat{U}_{\mathfrak{g}} \quad \text{et} \quad \prod_{\rho \in \mathcal{W}} \overline{U}_{\mathfrak{g}_\rho} \hookrightarrow \overline{U}_{\mathfrak{g}}.$$

**1.1.4. Structure d'algèbre de Hopf topologique.** L'algèbre enveloppante  $U_{\mathfrak{g}}$  est munie d'une structure d'algèbre de Hopf induite par la structure de Hopf de l'algèbre tensorielle. De plus, ses éléments primitifs sont les éléments de  $\mathfrak{g}$ . Voir par exemple [CP94] exemple 4.1.8. On peut étendre cette structure en une structure d'algèbre de Hopf topologique sur  $\widehat{U}_{\mathfrak{g}}$  et  $\overline{U}_{\mathfrak{g}}$  telle que  $\mathfrak{g}$  soit aussi l'ensemble des éléments primitifs de  $\widehat{U}_{\mathfrak{g}}$ . De même, on a une inclusion canonique  $\tilde{G} \hookrightarrow \widehat{U}_{\mathfrak{g}}$  et l'ensemble des éléments de type groupe de  $\widehat{U}_{\mathfrak{g}}$  est bien égal à  $\tilde{G}$ . De manière analogue, l'ensemble des éléments de type groupe de  $\overline{U}_{\mathfrak{g}}$  est égal à  $G$ .

L'ensemble  $\mathcal{W}$  est muni d'une application naturelle d'évaluation dans  $\mathbf{C}$  pour l'élément  $A \in \mathfrak{h}$  :

$$\mathcal{W} \xrightarrow{\text{ev}_A} \mathbf{C}.$$

Elle est donnée par l'évaluation partielle à droite en  $A \in \mathfrak{h}$  de l'accouplement

$$\mathcal{W} \otimes \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{h}^* \otimes \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbf{C}.$$

Cette application  $\text{ev}_A$  a un rôle essentiel dans le phénomène de Stokes comme remarqué par P. Boalch dans [Boa02].

**REMARQUE 1.1.11.** L'image du réseau  $\mathcal{W}$  par l'application  $\text{ev}_A$  précédente dans  $\mathbf{C}$  est le  $\mathbf{Z}$ -module engendré par les valeurs propres de  $\text{ad}_A \in \text{End}(\mathfrak{g})$ . On rappelle que si  $A \in \mathfrak{h}$  diagonalisable de valeurs propres les  $a_i$  ( $i \in I$ ), alors  $\text{ad}_A$  est diagonalisable de valeurs propres les  $a_i - a_j$  pour tout  $i, j \in I$ . En particulier, le noyau  $\ker(\text{ad}_A)$  est de dimension au moins  $\#I$  car  $\mathfrak{h} \subseteq \ker(\text{ad}_A)$ . Dans le cas générique, les morphismes  $\mathcal{W} \hookrightarrow \overline{\mathcal{W}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$  sont injectifs et bijectifs.

## 1.2. Représentations de graphe

**1.2.1. Représentations de carquois.** Soit  $\Xi$  un carquois, aussi appelé un graphe orienté. On rappelle que cela est équivalent à la donnée d'un ensemble de sommets  $\mathcal{I}$ , d'un ensemble d'arrêtes  $\mathcal{A}$  et de deux applications, dite d'origine  $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}$  et d'extrémité  $t : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}$  dans les sommets origine et extrémité de chaque arrête. Remarquez qu'à priori l'application produit  $h \times t : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I} \times \mathcal{I}$  n'a pas de raison d'être injective. Si c'est cependant le cas, alors on dit que le carquois  $\Xi$  ne contient pas d'arrête double. Si  $\Xi = (\mathcal{I}, \mathcal{A}, h, t)$ ,  $\Xi' = (\mathcal{I}', \mathcal{A}', h', t')$  sont deux carquois, un morphisme de carquois  $\Xi \rightarrow \Xi'$  est la donnée de deux applications  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$  et  $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  tels que les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{h} & \mathcal{I} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{A}' & \xrightarrow{h'} & \mathcal{I}' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{t} & \mathcal{I} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{A}' & \xrightarrow{t'} & \mathcal{I}' \end{array}$$

Une représentation complexe  $\rho$  (de dimension finie) du carquois  $\Xi$  est la donnée d'un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel (de dimension finie)  $V = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} V_i$ , gradué par l'ensemble des sommets  $\mathcal{I}$  et d'un ensemble d'applications linéaires  $\rho = (\rho_a)_{a \in \mathcal{A}} \in \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \text{Hom}(V_{h(a)}, V_{t(a)})$  pour toute arrête  $a \in \mathcal{A}$ . On peut bien sûr définir des morphismes de représentation d'un carquois  $\Xi$ . Si  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux tels représentations, alors un morphisme  $f : \rho \rightarrow \rho'$  est une collection de morphismes  $f_i : V_i \rightarrow V'_i$  pour

tout sommet  $i \in \mathcal{I}$  de  $\Xi$  tels que les diagrammes suivants commutent pour toute arrête  $a \in \mathcal{A}$  :

$$\begin{array}{ccc} V_{h(a)} & \xrightarrow{f_{h(a)}} & V'_{h(a)} \\ \rho_a \downarrow & & \downarrow \rho'_a \\ V_{t(a)} & \xrightarrow{f_{t(a)}} & V'_{t(a)} \end{array}$$

REMARQUE 1.2.1. On peut voir aussi un carquois comme une catégorie où les objets sont les sommets  $\mathcal{I}$  et les arrêtes sont les morphismes où l'on ajoute les morphismes identités en chaque sommet. Dans cette formulation, une représentation de carquois est donc un foncteur covariant de la catégorie des carquois vers la catégorie des  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels (de dimension finie). Un morphisme de représentations est alors une transformation naturelle entre les foncteurs covariants. Cette formulation d'un carquois comme une catégorie permet de définir l'algèbre des chemins, comme nous le verrons plus tard.

Une *sous-représentation*  $V'$  d'une représentation  $V$  du carquois  $\Xi$  est la donnée d'un sous-espace vectoriel  $V'$   $\mathcal{I}$ -gradué préservé par les applications linéaires, c'est-à-dire tel que  $\rho_a(V'_{h(a)}) \subseteq V'_{t(a)}$  pour toute arrête  $a \in \mathcal{A}$ . Une représentation est *irréductible* si elle n'admet pas de sous-représentation propre non triviale.

Donnons nous maintenant un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{I}$ -gradué  $V$ . Alors on peut considérer l'ensemble  $\text{Rep}(\Xi, V)$  des représentations du carquois  $\Xi$  sur  $V$ , c'est-à-dire

$$\text{Rep}(\Xi, V) = \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \text{Hom}(V_{h(a)}, V_{t(a)}).$$

**1.2.2. Quelques représentations particulières.** On considère les deux carquois de la figure 1.

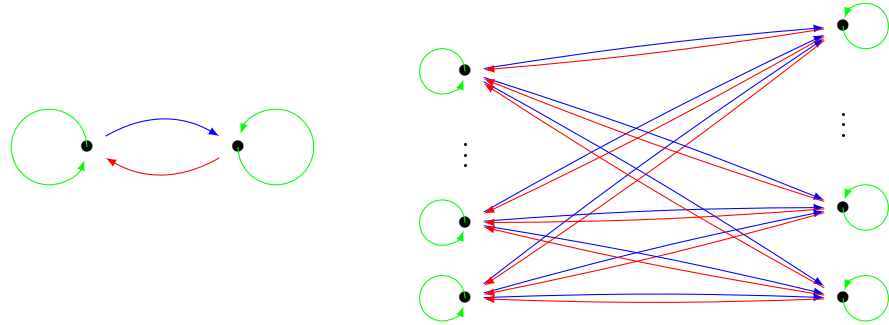


FIGURE 1. Carquois  $\Xi(1,1)$  et  $\Xi(m,n)$

où en vert sont dessinés les boucles, en bleu les arrêtes allant d'un sommet de la partie gauche vers la partie droite et inversement pour les arrêtes rouges. On notera  $\Xi_{1,1}$  le carquois de gauche et  $\Xi_{m,n}$  le carquois de droite où  $m$  désigne le nombre de sommets de la partie gauche et  $n$  celui de la partie droite.

On considérera souvent dans la suite des représentations du carquois  $\Xi_{1,1}$  de la forme suivante :  $V = V_g \oplus V_d$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie bigradué et quatre applications linéaires

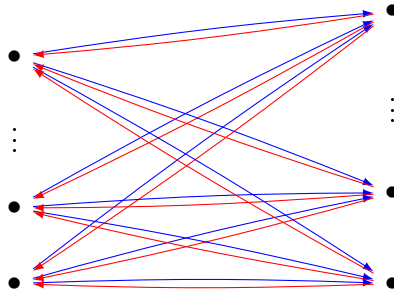
$$A \in \text{End}(V_g), \quad B \in \text{End}(V_d), \quad C \in \text{Hom}(V_g, V_d), \quad D \in \text{Hom}(V_d, V_g).$$

On choisit deux tores maximaux  $T_g$  et  $T_d$  de  $GL(V_g)$  et  $GL(V_d)$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{t}_g$  et  $\mathfrak{t}_d$  respectivement. On considérera souvent des représentations spéciales de ce carquois vérifiant  $A \in \mathfrak{t}_g$  et  $B \in \mathfrak{t}_d$ .

Notons alors  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  les valeurs propres de  $A$  et  $B$  respectivement et notons  $m$  et  $n$  leur nombre respectif. On a donc  $m = \#I$  et  $n = \#J$ . Notons aussi  $V_g = \bigoplus_{i \in I} V_i$  et  $V_d = \bigoplus_{j \in J} V_j$  les décompositions en espaces propres induites par  $A$  et  $B$ . Alors il est clair que la représentation précédente du carquois  $\Xi_{1,1}$  est équivalente à une représentation du carquois  $\Xi_{m,n}$  avec les applications linéaires pour les boucles les  $a_i \in \text{End}(V_i)$  et  $b_j \in \text{End}(V_j)$  pour tout  $i \in I$  et  $j \in J$ . Cette formulation est un peu plus intrinsèque car l'on a pas besoin de choisir deux tores maximaux. En effet, il suffit de considérer le sous-ensemble des représentations de  $\Xi_{m,n}$  sur  $\bigoplus_{i \in I} V_i \oplus \bigoplus_{j \in J} V_j$  tels que l'application linéaire correspondant à la boucle du sommet  $k$  soit dans le *centre* du groupe  $\text{End}(V_k)$  pour tout sommet  $k \in \mathcal{J}$ .

Une telle représentation du carquois  $\Xi_{m,n}$  est équivalente à une représentation du carquois ci-dessous (le carquois  $\Xi_{m,n}$  sans les boucles vertes) plus deux familles de nombres complexes  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  de nombres deux à deux distincts dans chaque famille, c'est-à-dire

$a_i \neq a_k$  pour tout  $i \neq k$  éléments de  $I$  et  $b_j \neq b_l$  pour tout  $j \neq l$  éléments de  $J$ .



Dans la suite, on verra que les représentations qui apparaissent sont souvent des représentations des carquois  $\Xi_{1,1}$  et  $\Xi_{m,n}$  du type spécial considéré ci-dessus mais les éléments  $A$  et  $B$  auront le rôle de données et donc seront fixés.

**1.2.3. Représentations et représentations inversibles de graphe.** On suit maintenant la présentation de [Boa13] §3 et §5.2.

Soit un graphe  $\Gamma$ . Lorsque l'on parlera de graphe, il sera toujours sous-entendu que le graphe est non orienté. S'il est orienté, on parle de carquois. À partir du graphe  $\Gamma$ , on lui associe son double  $\bar{\Gamma}$  qui est un carquois possédant le même ensemble de sommet que  $\Gamma$  et tel que pour toute arrêtes  $(i, j)$  de  $\Gamma$ , le carquois  $\bar{\Gamma}$  admette exactement deux arrêtes orientés  $i \rightarrow j$  et  $j \rightarrow i$ .

**DÉFINITION 1.2.2.** On appellera *représentation du graphe*  $\Gamma$  tout représentation de son double  $\bar{\Gamma}$ .

Lorsque l'on parlera de représentation du graphe  $\Gamma$ , on parlera toujours de la représentation ci-dessus, c'est-à-dire une représentation de son double, et ce même si le graphe admet une structure de carquois sous-jacente.

Considérons maintenant un graphe complet  $k$ -parti  $\Gamma$ . Son ensemble de sommets  $\mathcal{J}$  est donc une union disjointe  $\mathcal{J} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{J}_j$  et il contient une arrête entre deux sommets si et seulement s'ils appartiennent à deux parties distinctes.

On sera particulièrement intéressé par le cas  $k = 2$  (graphe biparti) qui correspondra à une connexion de type  $2 + 1 + \dots + 1$ .

**DÉFINITION 1.2.3.** Un *ordre* sur un graphe complet  $k$ -parti  $\Gamma$  de sommets  $\mathcal{J}$  est la donnée :



- (1) d'un ordre total de ses parties (que nous noterons alors  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_k$ ),
- (2) d'un ordre total des sommets au sein de chaque partie  $\mathcal{I}_j$ .

On parlera d'un *graphe ordonné* pour tout graphe complet  $k$ -parti muni d'un ordre.

En prenant l'ordre lexicographique, un ordre sur  $\Gamma$  induit un ordre total sur les sommets du graphe  $\Gamma$ . De plus, on peut définir une orientation de  $\Gamma$  à partir de l'ordre sur les parties en posant  $i \rightarrow j$  si  $i > j$  par exemple.

Dans le cas particulier d'un graphe biparti, un ordre sur  $\Gamma$  est donc équivalent à un ordre sur chacune de ses parties et au choix d'une des deux parties (par exemple celle que l'on considère comme la plus petite).

Donnons nous maintenant un graphe complet  $k$ -parti  $\Gamma$  muni d'un ordre et un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{I}$ -gradué  $V$ . On peut définir l'ensemble des *représentations inversibles*  $\text{Rep}^*(\Gamma, V)$  du graphe ordonné  $\Gamma$  sur  $V$  comme un sous-ensemble des représentations  $\text{Rep}(\Gamma, V)$  du graphe  $\Gamma$  sur  $V$  de la manière suivante : on note  $K = \prod_{i \in \mathcal{I}} \text{GL}(V_i)$ ,  $G = \text{GL}(V)$  et les deux Borel par blocs

$$B_+ = K \times \prod_{\substack{i,j \in \mathcal{I} \\ i < j}} \text{Hom}(V_j, V_i) \quad B_- = K \times \prod_{\substack{i,j \in \mathcal{I} \\ i > j}} \text{Hom}(V_j, V_i),$$

ainsi que leur variante unipotente

$$U_+ = \{1\} \times \prod_{\substack{i,j \in \mathcal{I} \\ i < j}} \text{Hom}(V_j, V_i) \quad U_- = \{1\} \times \prod_{\substack{i,j \in \mathcal{I} \\ i > j}} \text{Hom}(V_j, V_i),$$

qui sont tous les quatre des sous-groupes de  $G$ . Soit  $(v_{i,j}) \in \text{Rep}(\Gamma, V)$  une représentation du graphe  $\Gamma$ . On pose les deux éléments

$$v_+ = 1 + \sum_{i < j} v_{i,j} \in U_+ \quad \text{et} \quad v_- = 1 + \sum_{i > j} v_{i,j} \in U_-,$$

de  $\text{GL}(V)$  où  $v_{i,j} \in \text{Hom}(V_j, V_i)$  est non nul si  $i$  et  $j$  sont dans la même partie de  $\mathcal{I}$ . Alors on pose  $\text{Rep}^*(\Gamma, V)$  l'ensemble des représentations telles que  $v_- v_+$  appartiennent à la grosse cellule  $B_+ B_- = U_+ H U_-$  de  $G$ , c'est-à-dire

$$\text{Rep}^*(\Gamma, V) := \{(v_{i,j}) : v_- v_+ \in B_+ B_-\}.$$

Comme expliqué dans la démonstration de la proposition 5.3 p.20 dans [Boa13], cela correspond à la non annulation de tous les mineurs  $\Delta_i$  de  $v_- v_+$  correspondant au sous-espace vectoriel  $\bigoplus_{j \geq i} V_j$  de  $V$ .

La proposition 5.3 p.20 de [Boa13] montre que les représentations inversibles du graphe  $\Gamma$  correspondent à certains espaces de données de Stokes. L'ensemble  $\text{Rep}^*(\Gamma, V)$  est un ouvert dense du  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $\text{Rep}(\Gamma, V)$ . De plus, le groupe  $K$  agit naturellement sur  $\text{Rep}^*(\Gamma, V)$ .

Considérons le cas particulier où  $k = 2$  c'est-à-dire où le graphe  $\Gamma$  est un graphe complet biparti de sommets  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_1$ . Alors pour tout  $i \in \mathcal{I}_0$  et tout  $j \in \mathcal{I}_1$ , on notera  $u_i^j := v_{j,i} \in \text{Hom}(V_i, V_j)$  et  $v_j^i := v_{i,j} \in \text{Hom}(V_j, V_i)$ . La représentation  $(u_i^j, v_j^i)_{(i,j) \in \mathcal{I}_0 \times \mathcal{I}_1}$  est donc inversible si et seulement si

- a) pour tout  $l \in \mathcal{I}_0$ , l'application

$$\left( \delta_{i,j} + \sum_{k \in \mathcal{I}_1} v_k^j u_i^k \right)_{\substack{i,j \in \mathcal{I}_0 : i \leq l \text{ et } j \leq l}} \in \text{End} \left( \bigoplus_{\substack{m \in \mathcal{I}_0 : m \leq l}} V_m \right)$$

est inversible,

b) pour tout  $l \in \mathcal{I}_1$ , l'application

$$\left( \delta_{i,j} + \sum_{k \in \mathcal{I}_0} u_k^i v_j^k \right)_{\{i,j \in \mathcal{I}_1 : i \leq l \text{ et } j \leq l\}} \in \text{End} \left( \bigoplus_{\{m \in \mathcal{I}_1 : m \leq l\}} V_m \right)$$

est inversible.

REMARQUE 1.2.4. Pour chaque ordre sur les ensembles de nœuds  $\mathcal{I}_0$  et  $\mathcal{I}_1$ , on obtient à priori un ouvert différent de  $\text{Rep}(\Gamma, V)$ . On peut cependant montrer que pour deux choix différents, on obtient toujours un ouvert isomorphe. On pourra consulter [Boa13] théorème 5.10 p.23.

### 1.3. Système gradué et système local de Stokes

On peut résumer la section qui va suivre par la figure 2 suivante.

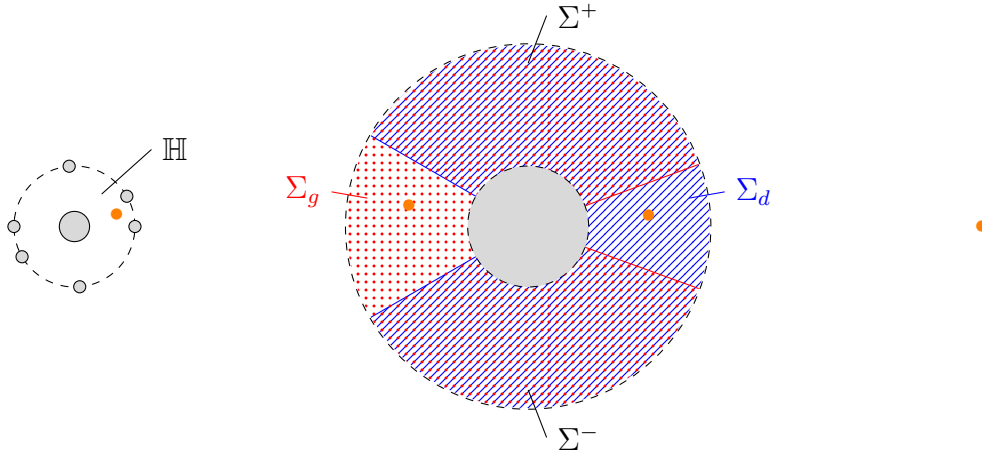
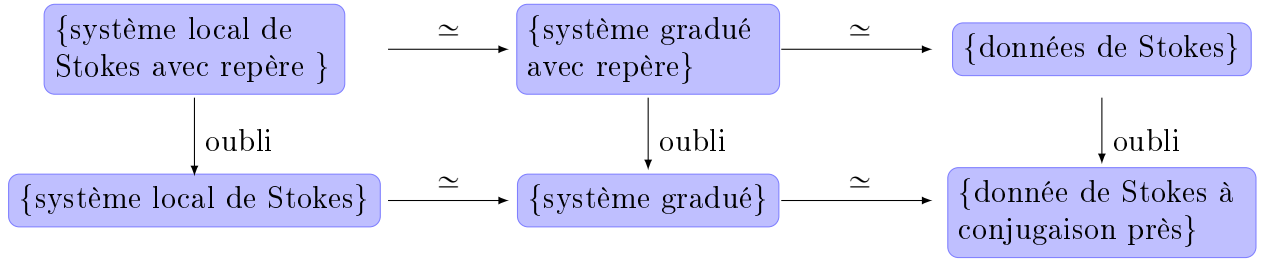


FIGURE 2. Résumé des équivalences de catégories de la section 1.3

Les blocs en bleu clair correspondent à des catégories. Le symbole équivalent  $\simeq$  signifie que l'on a une équivalence de catégorie. Les trois dessins sur la dernière ligne représentent la base (complémentaire des parties grises) sur laquelle habitent les éléments des catégories au-dessus. Ces éléments sont en général des *systèmes locaux* sur cette base avec des conditions de compatibilités. Dans le cas le plus à gauche, on trouve comme base le plan  $\mathbf{C}$  privé de divers points. Pour le cas du milieu, on trouve un anneau et pour le cas le plus à droite, on trouve tout le plan complexe  $\mathbf{C}$  (ou uniquement le point orange si l'on préfère, mais cela est équivalent). Le point en orange donne la position que doivent avoir les points de base où sont définis les repères.

**1.3.1. Système gradué.** On introduit ici la notion de système gradué. Cette donnée géométrique permet d'encoder assez naturellement le comportement des micro-solutions d'une connexion fuchsienne (voir proposition 3.1.2). Lorsque la connexion fuchsienne vérifie des conditions génériques, les micro-solutions correspondent à des solutions spéciales, de type solution de co-Floquet, de cette connexion. Elle permet aussi d'encoder le comportement d'une connexion méromorphe avec des pôles du type  $2(0) + 1(\infty)$  sur la sphère de Riemann  $\mathbf{P}^1$  (voir les propositions 1.4.1 et 1.3.11).

On considère les données suivantes :

- (1) un anneau  $\Sigma$ ,
- (2) un ensemble d'indice  $I$  de cardinal fini  $n$  muni d'un ordre total  $\leq$ ,
- (3) un ensemble d'entiers non nuls  $(\mu_i)_{i \in I} \in (\mathbf{N}^*)^I$  indicé par  $I$ ,
- (4) une paire (non ordonnée) de deux ouverts  $\Sigma_g$  et  $\Sigma_d$  de  $\Sigma$ , connexes, simplement connexes tels qu'on a un recouvrement  $\Sigma_g \cup \Sigma_d = \Sigma$  et tels que l'intersection  $\Sigma_g \cap \Sigma_d$  admet deux composantes connexes  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$ . On a donc  $\Sigma_g \cap \Sigma_d = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ .

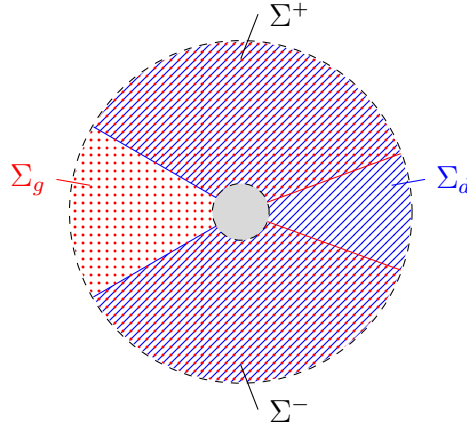


FIGURE 3. Représentation de l'anneau  $\Sigma$  avec  $\Sigma_g$  en rouge et  $\Sigma_d$  en bleu.

DÉFINITION 1.3.1. Pour les données précédentes, on définit un *système gradué* comme

- (1) un système local  $\mathcal{L}$  de rang  $\sum_{i \in I} \mu_i$  sur  $\Sigma$ ,
- (2) deux graduations ordonnées

$$\mathcal{L}|_{\Sigma_g} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(g) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}|_{\Sigma_d} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(d),$$

par des sous-systèmes locaux  $\mathcal{L}_i(g)$ ,  $\mathcal{L}_i(d)$  de rang  $\mu_i$  pour tout  $i \in I$  tels que sur  $\Sigma^+$ , on a

$$\mathcal{L}_i(g)|_{\Sigma^+} \subseteq \bigoplus_{k \leq i} \mathcal{L}_k(d)|_{\Sigma^+}$$

et sur  $\Sigma^-$ , on a

$$\mathcal{L}_i(g)|_{\Sigma^-} \subseteq \bigoplus_{i \leq k} \mathcal{L}_k(d)|_{\Sigma^-}.$$

On peut reformuler la condition sur les graduations comme le fait que les applications

$$\mathcal{L}_i(g)|_{\Sigma^\pm} \hookrightarrow \bigoplus_{j \in I} \mathcal{L}_j(d)|_{\Sigma^\pm} \twoheadrightarrow \mathcal{L}_k(d)|_{\Sigma^\pm}$$

sont nulles sur  $\Sigma^+$  pour  $i > k$  et sur  $\Sigma^-$  pour  $i < k$ .

REMARQUE 1.3.2. Un cas particulier intéressant est lorsque l'on choisit les entiers  $\mu_i$  tous égaux à 1. Dans ce cas, le système local  $\mathcal{L}$  est de rang exactement  $n$  alors qu'en général on a  $\text{rang}(\mathcal{L}) > n$  pour les autres choix de  $(\mu_i)_{i \in I}$ . Nous verrons plus tard que le cas des  $\mu_i$  tous égaux à 1 correspond à une connexion irrégulière

$$d - \left( \frac{A}{\xi^2} + \frac{R}{\xi} \right) d\xi$$

sur un fibré trivial sur  $\mathbf{P}^1$  avec un type irrégulier  $A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$  à valeurs propres  $a_1, \dots, a_n$  deux à deux distinctes. L'ensemble  $I$  correspond toujours à l'ensemble des valeurs propres de  $A$  et les  $\mu_i$  correspondent à la multiplicité d'une des valeurs propres de  $A$  dans le cas général.

REMARQUE 1.3.3. On définira au §1.3.4 une version avec repère de cette définition. Ici le rôle des parties gauche et droite est symétrique c'est-à-dire que  $\Sigma$  s'écrit comme une union *non ordonnée*  $\Sigma_g \cup \Sigma_d$ . Ce ne sera plus le cas pour la version avec repère où l'on rompt la symétrie (la partie  $\Sigma^-$  jouera un rôle différent de la partie  $\Sigma^+$ ).

**1.3.2. Système local de Stokes.** On fait ici quelques rappels de la théorie des matrices de Stokes. Voir [BJL79] pour la présentation originelle du cas du groupe linéaire ou [Boa02] §2 qui traite le cas d'un groupe complexe réductif général. Les matrices de Stokes en un pôle  $b$  sont les invariants qui caractérisent localement les connexions irrégulières à transformation de jauge méromorphe près. On peut donner une version géométrique de ces invariants comme dans [MR91b] ou [LR94]. Nous suivrons la présentation de [Boa14] §7 et §8, qui donne une version géométrique analogue à celle de M. Loday-Richaud et globale de ces invariants.

On fixe le groupe algébrique  $G = \text{GL}_n(\mathbf{C})$  et soit  $T$  un tore maximal de  $G$ . On notera  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{t}$  les algèbres de Lie respectives de  $G$  et  $T$ . Une *courbe irrégulière* est un triplet  $(\Sigma, (b_1, \dots, b_k), (Q_1, \dots, Q_k))$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) où  $\Sigma$  est une courbe algébrique compacte,  $\{b_1, \dots, b_k\}$  est un ensemble de points marqués  $b_j$  de  $\Sigma$  et  $Q_j$  est un *type irrégulier* en chaque point marqué  $b_j$ . La donnée d'un type irrégulier (non ramifié)  $Q_j$  en  $b_j$  est un germe méromorphe en  $b_j$  de la forme

$$Q_j = \frac{A_r}{x^r} + \dots + \frac{A_1}{x}$$

avec  $A_j \in \mathfrak{t}$ ,  $r \geq 0$  et  $x$  est une coordonnée locale de  $\Sigma$  s'annulant en  $b_j$ .

On considère une courbe irrégulière donnée par la courbe algébrique  $\Sigma = \mathbf{P}^1$ , les points marqués  $(0, \infty)$  et les types irréguliers  $(Q_0, Q_\infty)$  avec  $Q_0 = -A/\xi$  et  $Q_\infty = 0$ , où  $\xi : \mathbf{P}^1 - \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C}$  désigne la coordonnée usuelle de  $\mathbf{P}^1$  à distance finie. On pose  $K \subseteq G$  le stabilisateur de  $A \in \mathfrak{t}$  sous l'action adjointe, c'est-à-dire

$$K = \{g \in G : \text{Ad}_g(A) = A\},$$

et  $H$  le tore minimal de  $K$  inclus dans  $T$ . On a donc les inclusions  $H \subseteq T \subseteq K$ . Notons  $\mathfrak{h}$  l'algèbre de Lie de  $H$ . On peut montrer que l'on a  $A \in \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{t}$ .

REMARQUE 1.3.4. On peut montrer que le tore  $H$  correspond au tore exponentiel de Ramis défini par exemple dans [LR94] définition III.3.3 p.893. Voir sinon [MR91b] p.380 pour la définition originelle et p.384 pour les conditions de Stokes.

On peut alors en déduire un certain nombre d'éléments. Pour une présentation géométrique de la théorie générale, voir [Boa14] §7-8. Notre situation étant substantiellement plus simple (on a un pôle simple à l'infini), on pourra procéder comme suit.

On pose :

- $\widehat{\Sigma} \rightarrow \mathbf{P}^1 - \{\infty\}$  l'éclaté réel orienté de  $\mathbf{P}^1 - \{\infty\}$  en 0, c'est-à-dire que la fibre spéciale  $\partial_0$  (isomorphe à un cercle) en 0 paramétrise les demi-droites réelles orientées sur le plan complexe issues de 0,
- $\mathbb{A} \subseteq \partial_0$  l'ensemble des directions singulières<sup>2</sup>, c'est-à-dire l'ensemble des directions d'angle  $\arg(a_i - a_j)$  pour tout  $i \neq j$ ,
- $\mathbb{H} \subseteq \widehat{\Sigma}$  un petit<sup>3</sup> voisinage de la fibre spéciale  $\partial_0 \in \widehat{\Sigma}$  en 0,
- $I = \{a_1, \dots, a_n\}$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$ ,
- $\mu_i$  la multiplicité de la valeur propre  $a_i$  de  $A$  pour tout  $i \in I$ .

Ensuite, on pose  $\widetilde{\Sigma}$  la surface  $\widehat{\Sigma}$  privé des points  $e(d)$  pour tout  $d \in \mathbb{A}$ , où  $e(d)$  est un point de  $\mathbb{H}$  intérieur à  $\widehat{\Sigma}$  dans la direction  $d$ .

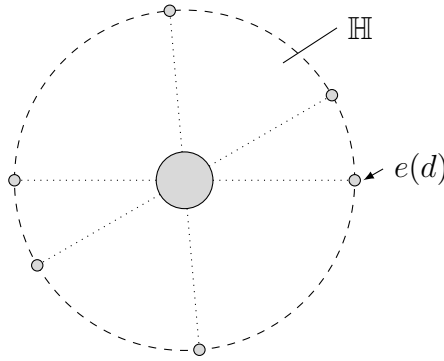


FIGURE 4. Représentation du domaine  $\widetilde{\Sigma}$

Enfin, on pose  $Sto_d$  ( $d \in \mathbb{A}$ ) le groupe de Stokes déterminé par le type irrégulier  $Q_0 = -A/\xi$  dans la direction  $d$ . Il est défini de la manière suivante. On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des racines de  $\mathfrak{g}$  associé au tore  $T$  (voir les rappels de sa définition section 1.1 chapitre 1). On note  $\mathcal{R}(d)$  le sous-ensemble des racines  $\alpha$  supportées par la direction  $d$ , c'est-à-dire telles que  $\alpha(A) \in \mathbf{C}^*$  appartient à la demi-droite issue de 0 de direction  $d$ . Alors on note

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^t \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

la décomposition canonique associée, où  $\mathfrak{g}^t$  est le centralisateur de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}_\alpha$  est l'espace de racine associé à la racine  $\alpha$ . Pour toute racine  $\alpha$ , on note alors  $U_\alpha = \exp(\mathfrak{g}_\alpha)$  le sous-groupe unipotent associé à  $\mathfrak{g}_\alpha$ . Alors on pose le sous-groupe de Stokes dans la direction  $d$

$$Sto_d := U_{\alpha_1} \cdot U_{\alpha_2} \cdots U_{\alpha_k} \subseteq G,$$

où  $\mathcal{R}(d) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  pour un ordre quelconque sur  $\mathcal{R}(d)$ . Le sous-groupe unipotent ainsi défini ne dépend pas de l'ordre (voir [Boa02] définition 2.3 et lemme 2.4 p.1134).

REMARQUE 1.3.5. L'importance du rôle de l'ensemble des racines dans le phénomène de Stokes a été découvert par P. Boalch dans [Boa02].

REMARQUE 1.3.6. On aurait pu considérer l'ensemble des racines  $\mathcal{R}_H$  de  $\mathfrak{g}$  associé au tore  $H$  et de même le sous-ensemble  $\mathcal{R}_H(d)$  des racines supportées par la direction

2. On appelle aussi  $\mathbb{A}$  l'ensemble des directions anti-Stokes dans la terminologie de [LR94].

3. Précisément, on prend  $\mathbb{H}$  suffisamment petit pour que le complémentaire de  $\mathbb{H}$  dans  $\widehat{\Sigma}$  contienne toujours un voisinage de l'infini.

$d$ . Dans ce cas, on aurait eu  $\mathcal{R}_H(d)$  de cardinal 1 exactement et l'espace de racines associé à  $\alpha \in \mathcal{R}_H(d)$  non nul de dimension  $\geq 1$ , alors que dans le cas du tore  $T$ , on a que le cardinal de  $\mathcal{R}(d)$  est  $\geq 1$  en général mais  $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$ .

REMARQUE 1.3.7. Comme conséquence de la définition, les groupes de Stokes  $\mathcal{S}to_d$  sont normalisés par le groupe  $K$ , car tous les groupes  $U_\alpha$  sont normalisés par  $K$ .

DÉFINITION 1.3.8. Pour la donnée de la courbe irrégulière précédente, on définit un *système local de Stokes* comme

- (1) un système local  $\mathcal{L}$  de rang  $\sum_{i \in I} \mu_i$  sur  $\tilde{\Sigma}$ ,
- (2) une graduation de  $\mathcal{L}$  sur  $\mathbb{H}$ ,

$$\mathcal{L}|_{\mathbb{H}} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i$$

par des sous-systèmes locaux  $\mathcal{L}_i$  de rang  $\mu_i$ ,

tels que pour tout point  $p \in \mathbb{H}$ , la monodromie locale  $m_{p,d} \in \text{Aut}(\mathcal{L}_p)$  autour de  $e(d)$  ( $d \in \mathbb{A}$ ) s'identifie à un élément de  $\mathcal{S}to_d \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{C})$  pour un repère  $\mathcal{L}_p \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}^{\mu_i}$  quelconque de la fibre de  $\mathcal{L}$  en  $p$ .

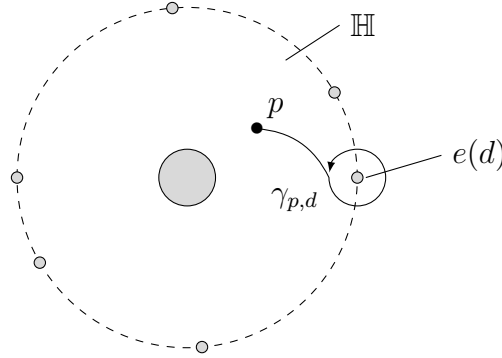


FIGURE 5. Monodromie locale dans la direction  $d$

REMARQUE 1.3.9. Comme  $\mathcal{L}$  est un système local, la monodromie le long de  $\gamma_{p,d}$  ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémité fixe de  $\gamma_{p,d}$ .

REMARQUE 1.3.10. La condition  $\text{Mat}_\varphi(m_{p,d}) \in \mathcal{S}to_d$  ne dépend pas du repère  $\varphi : \mathcal{L}_p \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}^{\mu_i}$  choisi. En effet, si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux repères de  $\mathcal{L}_p$ , c'est-à-dire deux isomorphismes gradués  $\varphi_k : \mathcal{L}_p \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}^{\mu_i}$ , on note  $\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  qui est un élément de  $K$ . Alors on a

$$\psi^{-1} \cdot \text{Mat}_{\varphi_1}(m_{p,d}) \cdot \psi = \text{Mat}_{\varphi_2}(m_{p,d}).$$

Comme  $K$  normalise  $\mathcal{S}to_d$ , on a  $\text{Mat}_{\varphi_1}(m_{p,d}) \in \mathcal{S}to_d$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\varphi_2}(m_{p,d}) \in \mathcal{S}to_d$ .

**1.3.3. Système gradué associé à un système local de Stokes.** On a une équivalence algébrique entre les systèmes locaux de Stokes et les systèmes gradués (voir la proposition 1.3.13). C'est une variante géométrique de l'équivalence entre facteurs de Stokes et multiplicateurs de Stokes dans ce cadre. Le point central est le lemme 2 p.74-75 de [BJL79] lemme 2 p.74-75 qui est un cas particulier d'un résultat de É. Borel (sections 14-5 à 14-8 de [Bor91]). Le cas d'un groupe complexe réductif général a été ensuite développé par P. Boalch dans [Boa02].

On dira qu'une direction  $d$  d'angle  $\eta$  est *admissible* si elle est non singulière, c'est-à-dire si pour tout  $i \neq j$ , on a  $\arg(a_i - a_j) \neq \eta \pmod{2\pi}$ . De même, on parlera d'*angle admissible* pour tout angle  $\eta \in \mathbb{R}$  d'une direction admissible.

PROPOSITION 1.3.11. *Pour tout choix d'une direction admissible, on peut associer à tout système local de Stokes un système gradué.*

DÉMONSTRATION. Prenons un système local de Stokes  $\mathcal{L}$  défini sur la courbe irrégulière  $(\Sigma := \mathbf{P}^1, (0, \infty), (Q_0 := -A/\xi, Q_\infty = 0))$ . Alors on pose  $\Sigma' = \tilde{\Sigma} - \overline{\mathbb{H}}$ , où  $\overline{\mathbb{H}}$  désigne l'adhérence de  $\mathbb{H}$ . On choisit une *direction admissible*  $d$  pour la famille  $(a_i)_{i \in I}$ . On pose  $I = \{a_1, \dots, a_n\}$  muni de l'ordre donné par

$$(1.3.a) \quad a_i \leq_d a_j \text{ si } e^{-(a_i - a_j)/\xi} \text{ tend vers } 0 \text{ quand } \xi \rightarrow 0 \text{ dans la direction } \eta + \pi/2.$$

Cela correspond à  $\Im(a_i e^{-i\eta}) \geq \Im(a_j e^{-i\eta})$  où  $\eta$  désigne un angle de la direction  $d$ . On note  $C_d$  la demi-droite issue de 0 et de direction  $d$  (angle  $\eta$ ), que l'on identifie à un sous-ensemble de  $\Sigma'$ . De même, on note  $C_{-d}$  la demi-droite issue de 0 et de direction  $-d$  (angle  $\eta + \pi$ ), que l'on identifie à un sous-ensemble de  $\Sigma'$ . On pose  $\Sigma'_g := \Sigma' - C_d$  et  $\Sigma'_d := \Sigma' - C_{-d}$ .

Alors le système gradué  $\mathcal{L}'$  défini pour les données  $\Sigma', I, (\mu_i)_{i \in I}, \Sigma'_g, \Sigma'_d$  est égal à  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}|_{\Sigma'}$ . La graduation de  $\mathcal{L}'|_{\Sigma'_g}$  est donnée par le prolongement de la graduation de  $\mathcal{L}|_{\mathbb{H}}$  le long de  $C_{-d}$  et celle de  $\mathcal{L}'|_{\Sigma'_d}$  est donnée par le prolongement de la graduation de  $\mathcal{L}|_{\mathbb{H}}$  le long de  $C_d$ .

Le système local  $\mathcal{L}'$  est bien un système gradué. En effet, on a le

LEMME 1.3.12 ([BJL79] équation (4.14) et lemme 2 p.74-75 ou [Boa02] lemme 2.4 p.1134). *Notons  $\mathbb{A}_{+,d}$  l'intersection de  $\mathbb{A}$  avec le segment ouvert  $] \eta, \eta + \pi[$  et  $\mathbb{A}_{-,d}$  l'intersection de  $\mathbb{A}$  avec le segment ouvert  $] \eta - \pi, \eta[$ . Notons  $U_\pm$  les sous-groupes unipotents supérieurs et inférieurs par blocs de  $GL(\bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i})$  donné par l'ordre  $\geq_d$  sur  $I$ .*

Alors on a

$$\prod_{d' \in \mathbb{A}_{+,d}} \text{Sto}_{d'} = U_+ \quad \text{et} \quad \prod_{d' \in \mathbb{A}_{-,d}} \text{Sto}_{d'} = U_-$$

où le produit est pris dans un ordre quelconque.

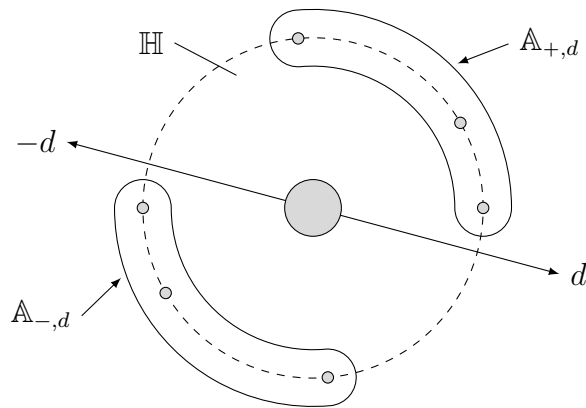


FIGURE 6. Ensembles  $\mathbb{A}_{+,d}$  et  $\mathbb{A}_{-,d}$

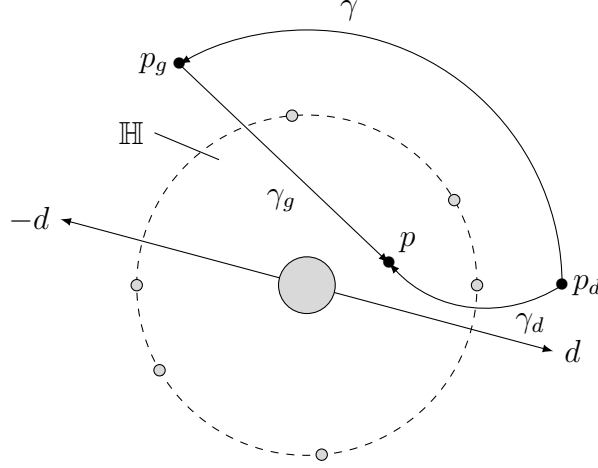
Alors l'application

$$\mathcal{L}'_i(d) \hookrightarrow \bigoplus_{k \in I} \mathcal{L}'_k(g) \rightarrow \mathcal{L}'_j(g)$$

est bien l'application nulle sur  $\Sigma^+$  pour  $a_i >_d a_j$ , car elle correspond à

$$\mathcal{L}'_i(d) \xrightarrow{\text{prol}_{\gamma_d}} \mathcal{L}_i \xrightarrow{\text{prol}_{\gamma_g \cdot \gamma \cdot \gamma_d^{-1}}} \bigoplus_{k \in I} \mathcal{L}_k \xrightarrow{\quad} \mathcal{L}_j \xrightarrow{\text{prol}_{\gamma_g}} \mathcal{L}'_j(g).$$

$= 0$

FIGURE 7. Chemins  $\gamma_d$  et  $\gamma_g$ 

□

Réciproquement, on peut associer à tout système gradué, un système local de Stokes. En effet, si  $\mathcal{L}'$  est un système gradué défini sur les données  $\Sigma', I, (\mu_i)_{i \in I}, \Sigma_g, \Sigma_d$ , on choisit une matrice  $A$  diagonale à valeurs propres  $(a_i)_{i \in I}$  de multiplicité  $(\mu_i)_{i \in I}$ . Alors on peut considérer la données d'une courbe irrégulière  $(\Sigma := \mathbf{P}^1, (0, \infty), (Q_0 := -A/\xi, Q_\infty = 0))$ . La courbe  $\hat{\Sigma}$  construite à partir de la courbe irrégulière précédente est isomorphe topologiquement à  $\Sigma'$ . Quitte à changer d'isomorphisme  $\Sigma' \simeq \hat{\Sigma}$ , on peut supposer qu'aucun des points  $a_i - a_j$  n'appartiennent à  $\Sigma_d \Delta \Sigma_g := (\Sigma_d - \Sigma_g) \cup (\Sigma_g - \Sigma_d)$  via cet isomorphisme. Dans la suite, on identifiera  $\Sigma'$  à  $\hat{\Sigma}$  avec ce choix d'isomorphisme. Alors il existe une direction admissible  $d$  telle que  $d \in \Sigma_d - \Sigma_g$  et  $-d \in \Sigma_g - \Sigma_d$ .

On construit alors le système local de Stokes  $\mathcal{L}$  associé à  $\mathcal{L}'$  de la manière suivante. On pose  $\mathcal{L}|_{\tilde{\Sigma} - \mathbb{H}} = \mathcal{L}'|_{\Sigma' - \mathbb{H}}$ . On construit le système gradué  $\mathcal{L}|_{\mathbb{H}} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i$  égal à  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}'_i(d)$  sur  $\mathbb{H} \cap \Sigma_d$  et à  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}'_i(g)$  sur  $\mathbb{H} \cap \Sigma_g$ . Sur  $\mathbb{H} \cap \Sigma^+$ , on identifie  $\mathcal{L}'_i(d)$  à  $\mathcal{L}'_i(g)$  via l'application

$$\mathcal{L}'_i(d) \xrightarrow{\text{prol}_{\gamma^+}} \bigoplus_{j \in I} \mathcal{L}'_j(g) \longrightarrow \mathcal{L}'_i(g)$$

où  $\gamma^+$  désigne un chemin issu de  $\Sigma_d$  finissant dans  $\Sigma_g$  et à valeurs dans  $\Sigma' - \Sigma^-$ . De même, sur  $\mathbb{H} \cap \Sigma^-$ , on identifie  $\mathcal{L}'_i(g)$  à  $\mathcal{L}'_i(d)$  via l'application

$$\mathcal{L}'_i(g) \xrightarrow{\text{prol}_{\gamma^-}} \bigoplus_{j \in I} \mathcal{L}'_j(d) \longrightarrow \mathcal{L}'_i(d)$$

où  $\gamma^-$  désigne un chemin issu de  $\Sigma_g$  finissant dans  $\Sigma_d$  et à valeurs dans  $\Sigma' - \Sigma^+$ .

Reste à recoller  $\mathcal{L}|_{\tilde{\Sigma} - \mathbb{H}}$  et  $\mathcal{L}|_{\mathbb{H}}$  sur le bord intérieur de  $\mathbb{H}$ . Notons  $\partial_{int}$  le bord intérieur de  $\mathbb{H}$ , c'est-à-dire la composante du bord de  $\mathbb{H}$  contenue dans l'intérieur de  $\tilde{\Sigma}$ . Sur la composante connexe de  $\partial_{int}$  contenant  $(\Sigma_d - \Sigma_g) \cap \partial_{int}$ , on identifie  $\mathcal{L}_i$  à  $\mathcal{L}'_i(d)$  et sur la composante connexe de  $\partial_{int}$  contenant  $(\Sigma_g - \Sigma_d) \cap \partial_{int}$ , on identifie  $\mathcal{L}_i$



à  $\mathcal{L}'_i(g)$ . Ces deux identifications sont compatibles (sur  $\Sigma^\pm \cap \mathbb{H}$ ) avec la définition de  $\mathcal{L}_i$ .

Pour les autres composantes connexes de  $\partial_{int}$ , on utilise le lemme 1.3.12 ci-dessus. Les détails sont laissés au lecteur.

La fin du paragraphe étend l'association précédente en une équivalence de catégorie. Elle peut être passée en première lecture.

On peut étendre l'association de la proposition 1.3.11 précédente en un foncteur. Pour cela, on choisit une courbe irrégulière comme en 1.3.2. On définit la catégorie des systèmes locaux de Stokes pour cette donnée de la manière suivante :

- (1) les objets sont les systèmes locaux de Stokes sur la courbe irrégulière choisie.
- (2) un *morphisme de systèmes locaux de Stokes* est un morphisme de systèmes locaux  $f : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{L}^2$  tel que la restriction de  $f$  à  $\mathbb{H}$  est un morphisme de systèmes locaux gradués par  $I$ , c'est-à-dire que l'on a  $f|_{\mathbb{H}}(\mathcal{L}^1_i) \subseteq \mathcal{L}^2_i$  pour tout  $i \in I$ .

De même, on choisit des données  $(\Sigma, I, (\mu_i)_{i \in I}, \Sigma_g, \Sigma_d)$  vérifiant les conditions de la section 1.3.1. On définit la catégorie des systèmes gradués pour ces données de la manière suivante :

- (1) les objets sont les systèmes gradués sur  $(\Sigma, I, (\mu_i)_{i \in I}, \Sigma_g, \Sigma_d)$ ,
- (2) un *morphisme de systèmes gradués* est un morphisme de systèmes locaux  $f : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{L}^2$  tel que les restrictions de  $f$  à  $\Sigma_d$  et  $\Sigma_g$  sont des morphismes de systèmes locaux gradués par  $I$ , c'est-à-dire que l'on a

$$f|_{\Sigma_d}(\mathcal{L}^1_i(d)) \subseteq \mathcal{L}^2_i(d) \quad \text{et} \quad f|_{\Sigma_g}(\mathcal{L}^1_i(g)) \subseteq \mathcal{L}^2_i(g) \quad \text{pour tout } i \in I.$$

On a vu dans la démonstration de la proposition 1.3.11 comment associer pour tout choix d'une direction admissible  $d$  des données  $(\Sigma', I, (\mu_i)_{i \in I}, \Sigma_g, \Sigma_d)$  vérifiant les conditions de la section 1.3.1 à toute courbe irrégulière  $\Sigma$  comme en 1.3.2.

**PROPOSITION 1.3.13.** *L'association de la proposition 1.3.11 est une équivalence de catégorie entre*

- (1) *la catégorie des systèmes locaux de Stokes définis sur la courbe irrégulière  $\Sigma$ ,*
- (2) *la catégorie des systèmes gradués définis sur les données  $(\Sigma', I, (\mu_i)_{i \in I}, \Sigma_g, \Sigma_d)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Il est immédiat que l'association de proposition 1.3.11 est un foncteur. On a esquissé dans le paragraphe précédent comment construire un quasi-inverse. Il faut adapter un peu la construction pour les données pour obtenir le quasi-inverse. Le fait que l'on ait une équivalence de catégorie est laissé au lecteur. □

**1.3.4. Systèmes locaux de Stokes et systèmes gradués avec repère.** On donne ici les versions avec repères des systèmes locaux de Stokes et des systèmes gradués. On montrera leur équivalence (proposition 1.3.20) étendant ainsi l'équivalence sans repère (proposition 1.3.13).

Introduire la notion de repère est essentiel pour la suite. En effet, on verra qu'un système gradué avec repère est équivalent à isomorphisme près à un triplet de matrices, dit données de Stokes (proposition 1.3.24) alors que la version sans repère est seulement équivalente à des triplets de matrices à conjugaison par le groupe  $K$  près (voir remarque 1.3.25). Cela permettra in fine d'exprimer les données de Stokes d'une connexion irrégulière et pas seulement ses données de Stokes à conjugaison près.

Soit  $\Sigma$  une courbe irrégulière comme en 1.3.2 et soit  $\mathcal{L}$  un système gradué pour cette donnée.

**DÉFINITION 1.3.14.** Un *repère* de  $\mathcal{L}$  en un point  $p \in \mathbb{H}$  est la donnée d'un isomorphisme gradué

$$\varphi : \left( \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i \right)_p \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i}.$$

On peut maintenant définir la *catégorie des systèmes locaux de Stokes avec repère*. Les données sont une courbe irrégulière  $\Sigma$  du type de celle de la section 1.3.2 et un point  $p \in \mathbb{H}$  dans le halo. Les objets sont les systèmes locaux de Stokes définis sur cette courbe irrégulière  $\Sigma$  muni d'un repère en  $p$ . Un *morphisme de systèmes locaux de Stokes avec repère* est un morphisme de systèmes locaux de Stokes  $f : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{L}^2$  qui est compatible avec les repères, c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i^1)_p & \xrightarrow{f} & (\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i^2)_p \\ & \searrow \varphi^1 & \downarrow \varphi^2 \\ & & \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i} \end{array}$$

commute.

REMARQUE 1.3.15. On peut définir la catégorie des systèmes locaux de Stokes avec repère pour les données de la même courbe irrégulière et d'un autre point  $p' \in \mathbb{H}$ . Alors, de manière analogue à l'influence du choix d'un point base pour la définition du groupe fondamental, tout choix d'un chemin reliant  $p$  à  $p'$  définit un isomorphisme canonique entre la catégorie des systèmes locaux de Stokes avec repère pour les données  $(\Sigma, p)$  et celle pour les données  $(\Sigma, p')$ .

Soient maintenant  $(\Sigma', I, (\mu_i)_{i \in I}, \Sigma_g, \Sigma_d)$  des données comme en 1.3.1 et soit  $\mathcal{L}'$  un système gradué pour ces données. On *choisit un ordre* sur la paire  $\{\Sigma_g, \Sigma_d\}$ . Cela est équivalent à choisir un des deux sous-ensembles  $\Sigma^+$  ou  $\Sigma^-$ . Dans la suite, on choisira  $\Sigma^+$ . Dans le cas avec repère,  $(\Sigma_g, \Sigma_d)$  est toujours considéré comme une paire ordonnée.

DÉFINITION 1.3.16. Un *repère* de  $\mathcal{L}'$  est la donnée de deux isomorphismes gradués

$$\varphi_d : (\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}'_i(d))_p \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i} \quad \text{et} \quad \varphi_g : (\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}'_i(g))_{p'} \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i}$$

pour  $p \in \Sigma_d - \Sigma_g$  et  $p' \in \Sigma_g - \Sigma_d$  compatibles dans le sens suivant. Notons  $\Sigma_g \Delta \Sigma_g := (\Sigma_d - \Sigma_g) \cup (\Sigma_g - \Sigma_d)$  l'union disjointe de  $\Sigma_d$  et  $\Sigma_g$ , et notons  $\gamma^\pm$  les chemins reliant  $p$  à  $p'$  à valeurs dans  $\Sigma^\pm \cup (\Sigma_g \Delta \Sigma_g)$ .

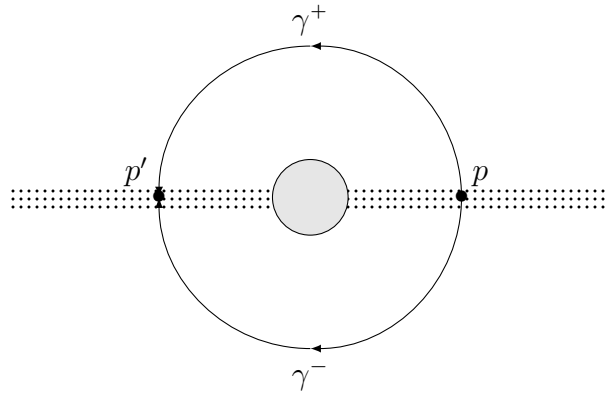


FIGURE 8. Chemins  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$

Alors la condition de compatibilité est que le diagramme avec  $\gamma^-$

$$(1.3.a) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}'_i(d)_p & \xrightarrow{\text{prol } \gamma^-} & (\oplus_{k \in I} \mathcal{L}'_k(g))_{p'} \longrightarrow \mathcal{L}'_i(g)_{p'} \\ \varphi_d \downarrow \sim & & \varphi_g \downarrow \sim \\ \mathbf{C}^{\mu_i} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbf{C}^{\mu_i} \end{array}$$

commute.

REMARQUE 1.3.17. La notion de repère casse la symétrie intrinsèque entre les parties droite et gauche dans la définition d'un système gradué. C'est dû au fait que l'on choisit une partie à droite et une partie à gauche, et plus seulement une décomposition de  $\Sigma = \Sigma_g \cup \Sigma_d$  non ordonnée. Voir la remarque 1.3.3.

On peut alors définir la *catégorie des systèmes gradués avec repère*. Les données sont des données  $(\Sigma', I, (\mu_i)_{i \in I}, \Sigma_g, \Sigma_d)$  comme dans la section 1.3.1 et deux points  $p \in \Sigma_d - \Sigma_g$  et  $p' \in \Sigma_g - \Sigma_d$ . Les objets sont les systèmes gradués pour les données  $(\Sigma', I, (\mu_i)_{i \in I}, \Sigma_g, \Sigma_d)$ , muni d'un repère en  $(p, p')$ . Les *morphismes de systèmes gradués avec repère* sont les morphismes de systèmes gradués  $f : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{L}^2$  compatibles avec les repères  $\varphi^1, \varphi^2$  respectifs de  $\mathcal{L}^1$  et  $\mathcal{L}^2$ , c'est-à-dire que les diagrammes suivants :

$$(1.3.b) \quad \begin{array}{ccc} (\oplus_{i \in I} \mathcal{L}^1_i(d))_p & \xrightarrow{f|_{\Sigma_d}} & (\oplus_{i \in I} \mathcal{L}^2_i(d))_p \\ & \searrow \varphi_d^1 \sim & \downarrow \varphi_d^2 \sim \\ & & \oplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (\oplus_{i \in I} \mathcal{L}^1_i(g))_{p'} & \xrightarrow{f|_{\Sigma_g}} & (\oplus_{i \in I} \mathcal{L}^2_i(g))_{p'} \\ & \searrow \varphi_g^1 \sim & \downarrow \varphi_g^2 \sim \\ & & \oplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i} \end{array}$$

commutent.

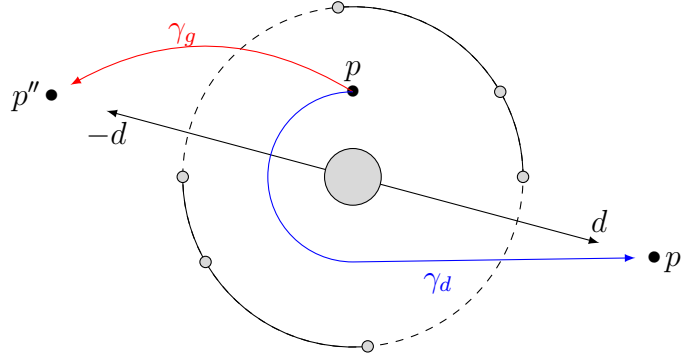
REMARQUE 1.3.18. On a un isomorphisme canonique entre la catégorie des systèmes gradués sur  $(\Sigma', I, (\mu_i)_{i \in I}, \Sigma_g, \Sigma_d)$  avec repère en  $(p, p')$  et celle avec repère en  $(q, q')$  pour deux points  $q \in \Sigma_d - \Sigma_g$  et  $q' \in \Sigma_g - \Sigma_d$ . En effet, comme dans la remarque 1.3.15, tout choix de deux chemins reliant  $p$  à  $q$  et  $p'$  à  $q'$  définit un tel isomorphisme. Cependant, comme ici les espaces  $\Sigma_d - \Sigma_g$  et  $\Sigma_g - \Sigma_d$  sont connexes et simplement connexes, tous les choix de chemins reliant  $p$  à  $q$  (ou  $p'$  à  $q'$ ) sont homotopes à extrémités fixes et définissent donc le même isomorphisme.

**1.3.5. Équivalence dans le cas repéré.** L'équivalence de la proposition 1.3.11 est aussi vrai dans le cadre enrichi avec repère. On fait le choix d'une direction admissible  $d$  et on pose  $p' \in C_d$  et  $p'' \in C_{-d}$ . On fait le choix de deux chemins  $\gamma_g$  et  $\gamma_d$  à valeurs dans  $\mathbb{H} \cup (\Sigma_g \Delta \Sigma_d)$  reliant  $p$  à  $p'$  et  $p$  à  $p''$  respectivement, tels que le chemin  $\gamma_g \cdot \gamma_d^{-1}$  soit homotope dans  $\mathbb{H} \cup (\Sigma_g \Delta \Sigma_d)$  au chemin reliant  $C_d$  à  $C_{-d}$  dans  $\mathbb{H}$  en passant par dessous le trou central (voir la figure 9).

PROPOSITION 1.3.19. *Pour les choix précédents d'une direction admissible  $d$  et des chemins  $\gamma_g$  et  $\gamma_d$  précédents, on peut associer à tout système local de Stokes avec repère un système gradué avec repère.*

DÉMONSTRATION. Pour l'extension de la proposition 1.3.11 entre un système local de Stokes  $\mathcal{L}$  et un système gradué  $\mathcal{L}'$ , on prend pour repère de  $(\oplus_{i \in I} \mathcal{L}'_i(d))_{p'}$  ( $p' \in \Sigma_d - \Sigma_g$ ) et de  $(\oplus_{i \in I} \mathcal{L}'_i(g))_{p''}$  ( $p'' \in \Sigma_g - \Sigma_d$ ) les prolongements du repère de  $\mathcal{L}_p$  ( $p \in \mathbb{H}$ ) le long des chemins  $\gamma_d$  et  $\gamma_g$ .

On vérifie que l'on a bien la compatibilité des repères (diagramme 1.3.a) coté système gradué grâce à la propriété de la classe d'homotopie du chemin  $\gamma_g \cdot \gamma_d^{-1}$  dans  $\mathbb{H} \cup (\Sigma_g \Delta \Sigma_d)$  supposée.  $\square$

FIGURE 9. Chemins  $\gamma_g$  et  $\gamma_d$  pour la compatibilité avec  $\gamma^-$  dans (1.3.a)

Même la proposition 1.3.13 s'étend aux versions avec repère.

PROPOSITION 1.3.20. *L'association de la proposition 1.3.19 est une équivalence de catégorie entre*

- (1) *la catégorie des systèmes locaux de Stokes avec repère définis sur la courbe irrégulière  $\Sigma$  et le point de base  $p$ ,*
- (2) *la catégorie des systèmes gradués avec repère définis sur les données  $(\Sigma', I, (\mu_i)_{i \in I}, \Sigma_g, \Sigma_d, p', p'')$ .*

DÉMONSTRATION. Il est clair que l'association de la proposition 1.3.19 précédente est un foncteur. Pour construire le quasi-inverse, on procède comme pour la proposition 1.3.13 en faisant attention de bien prolonger le repère. On peut par exemple choisir le repère de droite du système gradué  $\mathcal{L}'$  en  $p'$  et le prolonger en  $p \in \mathbb{H}$ . On vérifie alors que ce repère vérifie bien les différentes compatibilités. Les détails sont laissés aux lecteurs.  $\square$

**1.3.6. Matrices de Stokes et systèmes gradués avec repère.** Dans ce paragraphe, nous allons considérer le cas particulier où  $H = T$  est le tore maximal. On a alors  $T = K$  et  $\mu_i = 1$  pour tout  $i \in I$ . On peut facilement revenir au cas général en remplaçant la mention de  $T$  par  $K$  et en remplaçant les sous-groupes unipotents  $U_{\pm}$ , de Borel  $B_{\pm}$  etc par leur version par blocs (donnée par l'action adjointe de  $H$ ).

Considérons ici un système gradué  $\mathcal{L}$  muni d'un repère. Alors on peut définir deux matrices  $u_- \in U_-$ ,  $b_+ \in B_+$  par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_p & \xrightarrow{\text{prol}_{\gamma^-}} & \mathcal{L}_{p'} \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C} & \xrightarrow{u_-} & \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C} \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_p & \xrightarrow{\text{prol}_{\gamma^+}} & \mathcal{L}_{p'} \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C} & \xrightarrow{b_+} & \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C} \end{array}$$

Comme le sous-groupe de Borel  $B_+$  est égal au produit  $TU_+$ , la donnée de la matrice  $b_+$  est équivalente à la donnée de deux matrices  $(h, u_+) \in T \times U_+$  telles que  $b_+ = hu_+$ .

DÉFINITION 1.3.21. On appelle l'espace  $U_- \times U_+ \times T$  l'espace *des données de Stokes*. Pour un élément  $(u_-, u_+, h)$  dans l'espace des données de Stokes, on appellera les matrices  $(u_-, u_+)$  les *matrices de Stokes* et  $h \in T$  la *monodromie formelle*.

Nous venons de montrer le fait élémentaire suivant :

PROPOSITION 1.3.22. *On peut associer à tout système gradué avec repère des données de Stokes  $(u_-, u_+, h) \in U_- \times U_+ \times T$ .*

REMARQUE 1.3.23. La terminologie de *matrices de Stokes* n'est pas anodine. En effet, on verra dans la section 1.4.1 théorème 1.4.1 qu'à une connexion irrégulière on peut associer un système local de Stokes. Puis, en associant à ce système local de Stokes un système gradué (proposition 1.3.11) puis des données de Stokes (à conjugaison près), on retrouve l'association classique qui à une connexion irrégulière associe ses matrices de Stokes et sa monodromie formelle. Voir [BJL79] théorème 1 p.55 mais aussi [Boa02] définition 2.6 p.1135 (multiplicateurs de Stokes pour le cas d'un groupe complexe réductif), ou [MR91b] théorème 5 p.356 (pour la définition des matrices de Stokes grâce à la multisommation), ou [LR94] définition I.4.14 p.861 (en lien avec les filtrations de Stokes).

PROPOSITION 1.3.24. *On a une bijection entre les classes d'isomorphisme de systèmes gradués muni d'un repère et les données de Stokes.*

DÉMONSTRATION. La proposition est assez claire. Si deux systèmes gradués avec repères sont isomorphes, alors de la propriété de commutation (1.3.b), on déduit immédiatement qu'ils définissent les mêmes matrices de Stokes. Réciproquement, si deux systèmes gradués définissent les mêmes matrices de Stokes, alors les morphismes  $(\varphi_d^2)^{-1} \circ \varphi_d^1$  et  $(\varphi_g^2)^{-1} \circ \varphi_g^1$  s'étendent en deux isomorphismes sur  $\Sigma_d$  et  $\Sigma_g$  compatibles sur l'intersection  $\Sigma_d \cap \Sigma_g$  (grâce à la compatibilité (1.3.a)). Ils se recollent donc en un isomorphisme sur  $\Sigma$ . □

REMARQUE 1.3.25. On peut considérer l'action qui vient du changement de repère donnée par la conjugaison de  $T$  sur l'espace des données de Stokes par  $t \cdot (u_-, u_+, h) = (tu_-t^{-1}, tu_+t^{-1}, h)$  pour tout  $t \in T$  et tout  $(u_-, u_+, h) \in U_- \times U_+ \times T$  (car ici comme  $h$  est diagonale, on a  $tht^{-1} = h$ ). On peut aussi montrer la bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes gradués (sans choix de repère) et le quotient (ensembliste)  $(U_- \times U_+ \times T)/T$  de l'espace des données de Stokes par l'action par conjugaison.

REMARQUE 1.3.26. On aurait pu définir une autre version avec repère pour les systèmes gradués. Cette version serait *un seul* isomorphisme gradué (à droite par exemple)  $(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(d))_p \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}$  pour un point  $p \in \Sigma_d$ . On peut comparer cette version avec celle que nous avons considérée dans la définition 1.3.16. Le lecteur se convaincra sans mal que les classes d'isomorphismes de systèmes gradués avec cette version de repère est en bijection avec la donnée de deux matrices  $(b_-, b_+) \in B_+ \times B_-$  modulo l'action du tore  $T$  donnée par  $t \cdot (b_-, b_+) = (t^{-1}b_-, tb_+)$ . En effet, une version avec deux repères en  $p$  et  $p'$  sans la condition de compatibilité (1.3.a) correspond à l'ensemble  $B_- \times B_+$  et l'oubli du repère à gauche correspond bien à l'action du tore donnée.

Au niveau des classes d'isomorphismes, ces deux versions (version avec un repère et la version de la définition 1.3.16) sont donc équivalentes. En effet, on peut définir un morphisme

$$B_- \times B_+ \rightarrow U_- \times U_+ \times T$$

en associant à  $(b_-, b_+)$  le triplet  $(\delta(b_-)^{-1}b_-, \delta(b_+)b_+, \delta(b_-)^{-1}\delta(b_+))$ , qui est clairement surjectif, mais non injectif. C'est en fait un fibré principal de groupe  $T$  pour l'action du tore  $T$  précédente donc elle donne une bijection entre les classes d'isomorphismes pour les deux versions. On peut même définir une équivalence de catégorie entre les deux versions. Les détails sont laissés au lecteur.

Nous avons choisi la version de la définition 1.3.16 car on verra dans la section 3.2 que cette version sera plus pratique pour définir l'action induite par la transformée de Laplace sur les systèmes gradués.

#### 1.4. Application de Riemann-Hilbert-Birkhoff

Soit  $V$  un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $G = \mathrm{GL}(V)$  et  $T \subseteq G$  un tore maximal de  $G$ . Notons aussi  $\mathfrak{t}, \mathfrak{g}$  les algèbres de Lie associées à  $T$  et  $G$  respectivement.

Dans cette section, on rappelle comment est définie l'application de Riemann-Hilbert-Birkhoff. Cette dernière associe à une connexion irrégulière un système local de Stokes. Dans cette thèse, on s'intéressera uniquement au cas particulier où la connexion irrégulière est une connexion méromorphe de la forme

$$\nabla = d - \left( \frac{A}{\xi^2} + \frac{R}{\xi} \right) d\xi,$$

sur un fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  avec  $A \in \mathfrak{t}$  et  $R \in \mathfrak{g}$  avec  $R$  vérifiant une condition de genericité (non résonance). Le système local de Stokes sera alors défini sur la courbe irrégulière  $(\mathbf{P}^1, (0, \infty), (-A/z, 0))$ .

En utilisant les résultats de la section 1.3.3 précédente, cela nous permettra d'associer à la connexion  $\nabla$  ci-dessus un système gradué pour tout choix d'une direction admissible.

Dans la partie 1.4.2, on donnera aussi la version avec repère de l'application précédente.

**1.4.1. Système local de Stokes associé à une connexion irrégulière.** On fixe pour toute la suite le choix du  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $V$ .

Pour simplifier la terminologie, on dira qu'une connexion  $\nabla$  est *irrégulière* si elle est méromorphe de la forme

$$\nabla = d - \left( \frac{A}{\xi^2} + \frac{R}{\xi} \right) d\xi,$$

sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  avec  $A \in \mathfrak{t}$  et  $R \in \mathfrak{g}$ . Notons  $K$  la centralisateur de  $A$  pour l'action adjointe, c'est-à-dire

$$K = \{g \in G : \mathrm{Ad}_g(A) = A\},$$

$\mathfrak{k}$  son algèbre de Lie et  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{k}$  l'application donnant la partie diagonale par blocs. De plus, on dira que la connexion irrégulière  $\nabla$  est *non résonante* si l'endomorphisme  $\delta(R) \in \mathfrak{k}$  est non résonant, c'est-à-dire si l'endomorphisme  $\mathrm{ad}_{\delta(R)} \in \mathrm{End}(\mathfrak{k})$  n'admet pas de valeur propre entière non nulle. L'ensemble des connexions irrégulières non résonante forme une sous-catégorie pleine de la catégorie des fibrés holomorphes à connexions méromorphes avec pôle dans  $\{0, \infty\}$  sur la courbe  $\mathbf{P}^1$ .

Notons  $\Sigma$  la courbe irrégulière donnée par la surface de Riemann  $\mathbf{P}^1$ , les points marqués 0 et  $\infty$  et les types irréguliers associés  $Q_0 = -A/\xi$  et  $Q_\infty = 0$ .

**THÉORÈME 1.4.1.** *Il existe une application naturelle qui à une connexion irrégulière non résonante associe un système local de Stokes sur  $\Sigma$ .*

On appellera cette application l'*application de Riemann-Hilbert-Birkhoff*.

REMARQUE 1.4.2. Lorsque le type irrégulier  $A$  est à valeurs propres deux à deux distinctes, c'est-à-dire  $A \in \mathfrak{t}_{reg}$  le sous-ensemble régulier de la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ , on a  $T = K$  et la condition de résonance est vide.

DÉMONSTRATION. Prenons une connexion irrégulière  $\nabla = d - \left(\frac{A}{\xi^2} + \frac{R}{\xi}\right) d\xi$  pour les données précédentes. Il est clair que ces données déterminent uniquement la courbe irrégulière  $\Sigma$ . Pour définir le système local de Stokes  $\mathcal{L}$  sur  $\Sigma$ , on procède comme suit : on note  $\tilde{\Sigma}$  la courbe réelle associée à la courbe irrégulière  $\Sigma$  comme dans la section 1.3.2. La restriction  $\mathcal{L}|_{\tilde{\Sigma}-\mathbb{H}}$  est égal au système local des solutions de  $\nabla$  sur  $\tilde{\Sigma} - \mathbb{H}$ . On fait ensuite le choix d'un représentant  $\tilde{\nabla}$  de la classe d'isomorphisme méromorphe formel de  $\nabla$  en 0 sans phénomène de Stokes et d'un isomorphisme formel  $\tilde{F} \in G(\mathbb{C}[[\xi]][\xi^{-1}])$  méromorphe en 0. Dans notre cas particulier, il existe un choix *canonique* donné par

$$\tilde{\nabla} = d - \left(\frac{A}{\xi^2} + \frac{\Lambda}{\xi}\right) d\xi$$

où  $\Lambda = \delta(R) \in \mathfrak{k}$  désigne la partie diagonale par blocs de  $R$  et  $\tilde{F} \in G(\mathbb{C}[[\xi]])$  la transformation de jauge formelle envoyant  $\tilde{\nabla}$  sur  $\nabla$  et vérifiant  $\tilde{F}(0) = 1 \in G$ . Alors on définit la restriction  $\mathcal{L}|_{\mathbb{H}}$  comme le système local des solutions de  $\tilde{\nabla}$  sur  $\mathbb{H}$  naturellement gradué par les valeurs propres de  $A$ , noté  $I$ . C'est donc un  $K$ -système local.

Soit  $s$  un secteur ouvert délimité par deux directions singulières consécutives et  $\tilde{s}$  le secteur étendu de  $s$  (voir figure 10). Précisément, si l'on a  $s = \{\xi \in \mathbb{C}^*, \alpha < \arg(\xi) < \beta\}$ , alors on pose  $\tilde{s} := \{\xi \in \mathbb{C}^*, \alpha - \pi/2 < \arg(\xi) < \beta + \pi/2\}$ .

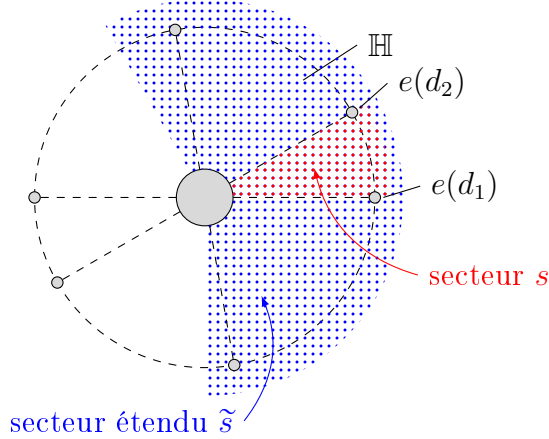


FIGURE 10. Secteur délimité par deux directions singulières successives

Dans notre cas particulier d'un pôle d'ordre 2 non ramifié, le théorème de multi-sommation 5 p.356 de [MR91b] s'énonce comme

THÉORÈME 1.4.3. *La transformée de jauge formelle  $\tilde{F}$  est Borel-sommable sur le secteur  $s$ , c'est-à-dire que la transformée de Borel-Laplace  $F_s$  de  $\tilde{F}$  existe et définit une fonction analytique sur le secteur étendu  $\tilde{s}$ .*

Le fait que  $\tilde{F}$  soit Borel-sommable sur le secteur  $s$  signifie concrètement les faits suivants :

- (1) La transformée de Borel  $\hat{F}(z) := \sum_{k>0} F_k \frac{z^{k-1}}{k!}$  de la série  $\tilde{F} - F(0) = \sum_{k>0} F_k \xi^k$  est convergente.

- (2) La somme  $\Phi(z)$  de la série de Borel  $\widehat{F}(z)$  se prolonge analytiquement sur le secteur  $s$  et y est à croissance exponentielle au plus d'ordre 1 à l'infini, c'est-à-dire qu'elle vérifie sur le secteur  $s$  une inégalité du type  $|\Phi(z)| \leq C e^{A|z|}$  pour deux constantes  $A$  et  $C$  indépendantes de  $z \in s$ .
- (3) La *somme de Borel-Laplace* de  $\widetilde{F}$  dans une direction d'angle  $\theta$  appartenant au secteur  $s$  est donnée par l'intégrale de Laplace

$$F_\theta := \xi \mapsto F(0) + \int_0^{e^{i\theta}\infty} \Phi(z) e^{-z/\xi} dz,$$

et définie une fonction analytique sur le disque de Borel tangent en 0 donné par  $A < \Re(e^{i\theta}/\xi)$  (équation du disque ouvert de diamètre le segment  $[0, e^{i\theta}/A]$ ). Pour les différents  $\theta$  possibles, les fonctions  $F_\theta$  se recollent en une fonction analytique  $F_s$  définie sur le secteur étendu  $\widetilde{s}$  au voisinage de zéro.

Ici, comme la connexion  $\nabla$  n'a pas d'autre pôle que 0 à distance finie, on peut même montrer que l'on peut prendre  $A > 0$  arbitrairement proche de 0 et donc que la transformée de Borel-Laplace est définie sur tout le secteur étendu  $\widetilde{s}$ .

La transformée de Borel-Laplace permet donc de définir canoniquement pour tout secteur  $s$  comme précédemment une fonction analytique  $F_s \in G(\mathcal{O}(\widetilde{s}))$  à partir de la transformation de jauge formelle  $\widehat{F}$ . On définit alors le système local  $\mathcal{L}$  comme le recollement de  $\mathcal{L}|_{\widetilde{s}-\mathbb{H}}$  et  $\mathcal{L}|_{\mathbb{H}}$  par les isomorphismes  $F_s \in G(\mathcal{O}(\widetilde{s}))$  sur le secteur  $s$  délimité par deux directions singulières consécutives.  $\square$

REMARQUE 1.4.4. La transformée de Borel est intimement liée à la transformée de Fourier-Laplace. En effet, on rappelle que la transformée de Borel formelle est un isomorphisme de l'algèbre différentielle  $(\mathbf{C}[[\xi]], +, \bullet, \xi^2 \frac{d}{d\xi})$  vers l'algèbre différentielle  $(\delta \oplus \mathbf{C}[[z]], +, \star, z\bullet)$  où  $\star$  désigne le produit de convolution. Elle envoie aussi la multiplication par  $1/\xi$  vers la dérivation  $\partial_z := \frac{d}{dz}$ . En particulier, on peut étendre la définition de la transformée de Borel formelle de l'algèbre différentielle  $\mathbf{C}[[\xi]][\xi^{-1}]$  vers  $\mathbf{C}[\delta^{(k)}, k \in \mathbf{N}] \oplus \mathbf{C}[[z]]$ . De plus, si l'on a  $\zeta = \xi^{-1}$ , la transformée de Borel formelle envoie bien  $\zeta$  sur  $\partial_z$  et  $\partial_\zeta = -\xi^2 \partial_\xi$  sur  $-z\bullet$ , ce qui est exactement la définition de la transformée de Fourier-Laplace sur l'algèbre de Weyl  $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}\langle \zeta, \partial_\zeta \rangle / (\partial_\zeta \zeta - \zeta \partial_\zeta - 1)$ .

REMARQUE 1.4.5. La transformée de Borel-Laplace  $F_s$  de  $\widetilde{F}$  admet la caractérisation suivante :  $F_s$  est l'unique<sup>4</sup> fonction holomorphe sur le secteur étendu  $\widetilde{s}$  à valeurs dans  $G$  telle que  $F_s$  soit asymptotique à  $\widetilde{F}$  en 0 pour tout  $\xi \in \widetilde{s}$ . On retrouve alors la définition des matrices de Stokes définies à partir de solutions avec asymptotique donnée (voir théorème 1 p.55 de [BJL79]).

**1.4.2. Connexions irrégulières avec repère et systèmes locaux de Stokes avec repère.** On donne ici la version avec repère de la proposition 1.4.1 associant à une connexion irrégulière non résonante un système local de Stokes.

Notons  $(a_i)_{i \in I}$  les valeurs propres de  $A$  et  $(\mu_i)_{i \in I}$  leur multiplicité respective.

DÉFINITION 1.4.6. Un *repère* d'une connexion irrégulière  $\nabla$  est la donnée d'un isomorphisme

$$\varphi : V \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i},$$

4. C'est une conséquence de la proposition 1.2.2.2 p.172 et du théorème 1.2.3.2 p.174 de [Mal95]. Voir aussi [LR16] chapitre 1 §1.2 pour une référence plus complète.



tel que la matrice  $A' = \text{Mat}_\varphi(A) \in \text{End}(\bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i})$  définie par le diagramme

$$(1.4.a) \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i} \\ A \downarrow & & \downarrow A' \\ V & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i} \end{array}$$

soit de la forme  $\sum_{i \in I} a_i \text{id}_i$ , où  $\text{id}_i : \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i} \twoheadrightarrow \mathbf{C}^{\mu_i} \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i}$  est le  $i^{\text{ème}}$  idempotent associé à la graduation  $\bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i}$ .

On peut étendre le théorème 1.4.1 aux versions avec repère. On se donne en plus des données de la section 3.1.1 un point  $p \in \mathbb{H}$  pour définir un point de base du repère pour les systèmes locaux de Stokes.

PROPOSITION 1.4.7. *Pour tout choix :*

- (1) d'une branche du logarithme  $\log$  définie en  $p \in \mathbb{H}$ ,
- (2) d'un élément  $t \in K$ ,

on peut associer à toute connexion irrégulière non résonante munie d'un repère un système local de Stokes avec repère.

Fixons un choix d'une branche du logarithme en  $p \in \mathbb{H}$  et notons  $\mathcal{L}_t$  le système local de Stokes avec repère obtenu pour le choix supplémentaire de l'élément  $t \in K$ . Comme  $K$  est un groupe, il admet un élément canonique  $\text{id} \in K$  et on peut donc associer de manière canonique (après le choix de la branche du logarithme) un système local de Stokes avec repère  $\mathcal{L}_{\text{id}}$ . Introduire ce choix de  $t \in K$  semble assez trivial et n'est en fait qu'un choix d'une normalisation par  $t$  pour le système  $K$ -local des solutions de la connexion formelle

$$\tilde{\nabla} = d - \left( \frac{A}{\xi^2} + \frac{\delta(R)}{\xi} \right) d\xi$$

associée à  $\nabla$ . Précisément, on choisit la base de solution  $t e^{-A/\xi} \xi^{\delta(R)}$  en  $p \in \mathbb{H}$  plutôt que la base canonique usuelle  $e^{-A/\xi} \xi^{\delta(R)}$ . Nous verrons que lorsque l'on considérera le cas régulier, on devra effectuer une normalisation par un  $t \neq \text{id}$  pour obtenir la normalisation  $\text{id}$  coté irrégulier après transformation de Fourier-Laplace. Une autre justification d'introduire un tel choix de  $t \in K$  est que l'on peut retrouver les dérivations étrangères de J. Écalte qui caractérisent la classe d'isomorphie de la connexion irrégulière. On pourra consulter la discussion du chapitre 2 section 2.1 p.109-112 de [Êca85] mais aussi [LRR11] §4.4.3-5 p.46-49 où M. Loday-Richaud et P. Remy utilisent l'action du tore, dit *tore exponentiel*  $T$ , pour déterminer la graduation des matrices de Stokes. En particulier, ils n'ont pas besoin de tous les choix des  $t \in K$  pour déterminer la graduation de Stokes mais seulement les  $t \in T$  et même les  $t \in H \subseteq T$  où  $H$  est le tore minimal de  $K$  inclus dans  $T$ .

DÉMONSTRATION. On a déjà construit dans la démonstration du théorème 1.4.1 un système local de Stokes  $\mathcal{L}$  associé à la connexion  $\nabla$ . On pose  $\varphi : V \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i}$  un repère de  $\nabla$ .

D'après la définition du système local de Stokes  $\mathcal{L}$  associé à  $\nabla$ , un repère en  $p \in \mathbb{H}$  de  $\mathcal{L}$  correspond à un isomorphisme gradué de l'espace des solutions de  $\tilde{\nabla}$  en  $p$  vers  $\bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i}$ . D'après le théorème de Cauchy holomorphe, on a un isomorphisme  $\mathcal{L}_p \simeq V$  pour tout choix d'une base de solution de  $\tilde{\nabla}$  en  $p$ . Comme

$$\tilde{\nabla} = d - \left( \frac{A}{\xi^2} + \frac{\delta(R)}{\xi} \right) d\xi,$$

une telle base de solution est nécessairement de la forme  $t \cdot e^{-A/\xi} \xi^{\delta(R)}$  pour un certain choix

- (1) d'une branche du logarithme  $\log$  pour définir  $\xi^{\delta(R)} = e^{\delta(R) \log(\xi)}$  défini en  $p \in \mathbb{H}$ ,
- (2) d'un  $t \in K$ .

On définit alors le repère de  $\mathcal{L}$  en  $p$  comme la composition  $\mathcal{L}_p \simeq V \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i}$ . Grâce à la condition de compatibilité (1.4.a), on en déduit que le morphisme  $\mathcal{L}_p \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}^{\mu_i}$  précédent est bien un morphisme gradué.  $\square$

En combinant la proposition précédente avec la proposition 1.3.19 permettant d'associer (pour certains choix) un système gradué à un système local de Stokes, on obtient

**PROPOSITION 1.4.8.** *Pour tout choix :*

- (1) d'un angle admissible  $\eta \in \mathbf{R}$ ,
- (2) d'un  $t \in K$ ,

*on peut associer à toute connexion irrégulière non résonante munie d'un repère un système gradué avec repère.*

Le choix de l'angle admissible  $\eta \in \mathbf{R}$  est équivalent aux choix de la direction admissible d'angle  $\eta$  et d'une branche du logarithme en  $p' \in C_d = \Sigma_d - \Sigma_g$  donnée par l'argument égal à  $\eta$ .

**DÉMONSTRATION.** Il faut vérifier que tous les choix des propositions 1.4.7 et 1.3.19 sont encodés par les trois choix de la proposition 1.4.8 à montrer. Soient  $d$  une direction admissible,  $\log$  une branche du logarithme en  $p' \in C_d$  et  $t \in K$ . Soit aussi un point  $p \in \mathbb{H}$  sur la demi-droite issue de 0 de direction  $d$ . On pose alors  $\gamma_d$  le chemin reliant  $p$  à  $p'$  à valeurs dans la demi-droite issue de 0 de direction  $d$ . On pose  $\gamma_g$  l'unique chemin à homotopie près reliant  $p$  à  $p''$  tel que  $\gamma_g \cdot \gamma_d^{-1}$  vérifie la condition d'homotopie de la proposition 1.3.19. Alors on considère le prolongement de  $\log$  en  $p$  le long de  $\gamma_d^{-1}$ . Cela détermine tous les choix nécessaires pour définir les applications des propositions 1.4.7 et 1.3.19.  $\square$

## 1.5. Groupe de Poisson-Lie dual et application exponentielle duale

**1.5.1. Algèbre de Lie et variété de Poisson.** Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ . Alors la structure d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  induit une structure de variété de Poisson linéaire sur le dual vectoriel  $\mathfrak{g}^*$  de  $\mathfrak{g}$ . Explicitement, la structure de Poisson linéaire sur  $\mathfrak{g}^*$  est donnée par

$$\{F, G\} : x \mapsto \langle x, [dF_x, dG_x] \rangle$$

pour tout  $F, G \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ , où l'on a identifié  $dF_x \in (\mathfrak{g}^*)^*$  avec l'élément de  $\mathfrak{g}$  correspondant.

On rappelle que la représentation adjointe  $\text{Ad}$  de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$  est définie par

$$\text{Ad}_g : X \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g e^{tX} g^{-1}), \quad \text{pour tout } g \in G,$$

et la représentation coadjointe  $\text{Ad}^*$  de  $G$  sur  $\mathfrak{g}^*$  par

$$\langle \text{Ad}_g^*(\xi), X \rangle = \langle \xi, \text{Ad}_{g^{-1}}(X) \rangle, \quad \text{pour tout } g \in G, \xi \in \mathfrak{g}^* \text{ et } X \in \mathfrak{g}.$$

**PROPOSITION 1.5.1** ([CP94] exemple 1.1.3 p.19-20). *Les feuilles symplectiques de la variété de Poisson  $\mathfrak{g}^*$  sont les orbites de l'action coadjointe de  $G$ .*

De plus, si  $\mathcal{O}_\xi$  est l'orbite de  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  pour l'action coadjointe, alors une application moment pour l'action coadjointe de  $G$  sur la variété symplectique  $\mathcal{O}_\xi$  est donnée par l'inclusion canonique  $\mathcal{O}_\xi \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ .

**1.5.2. Groupe de Poisson-Lie.** Un *groupe de Poisson-Lie* est un groupe de Lie muni d'une structure de Poisson telle que la multiplication  $G \times G \rightarrow G$  soit Poisson. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe  $G$  admet alors une structure supplémentaire, un cocommutateur  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}$  vérifiant l'identité de coJacobi et une condition de cocycle, que l'on synthétise en disant que  $\mathfrak{g}$  est une *bialgèbre de Lie*. L'espace vectoriel dual  $\mathfrak{g}^*$  de  $\mathfrak{g}$  admet aussi une structure de bialgèbre de Lie, le crochet de Lie étant en particulier donné par le bivecteur  $\delta$  et réciproquement.

L'équivalence de catégorie entre groupe de Lie connexe, simplement connexe et algèbre de Lie s'étend en une équivalence de catégorie entre les groupes de Poisson-Lie connexes, simplement connexes et les bialgèbres de Lie (voir [CP94] théorème 1.3.2 p.26). On définit alors le *groupe de Poisson-Lie dual*  $G^*$  d'un groupe de Poisson-Lie  $G$  comme le groupe de Poisson-Lie connexe, simplement connexe de bialgèbre de Lie  $\mathfrak{g}^* = \text{Lie}(G)^*$ .

Le groupe algébrique  $G = \text{GL}_n(\mathbf{C})$  peut être muni d'une structure de groupe de Poisson-Lie. En particulier, l'algèbre  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$  est une bialgèbre de Lie. Cela induit une structure de bialgèbre de Lie donc de variété de Poisson sur le dual vectoriel  $\mathfrak{g}^*$  qui coïncide avec la structure de Poisson explicite donnée dans le paragraphe 1.5.1 précédent.

On rappelle une construction explicite du groupe de Poisson-Lie dual dans le cas de  $G = \text{GL}_n(\mathbf{C})$ . On notera  $B_+$  et  $B_-$  les sous-groupes de Borel de  $G$  des matrices triangulaires supérieures et inférieures. On notera  $T = B_+ \cap B_-$  le tore maximal correspondant,  $\mathfrak{b}_\pm, \mathfrak{t}$  les différentes algèbres de Lie associées et enfin  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{t}$  l'application qui prend la partie diagonale.

Le groupe  $G^*$  admet la description explicite suivante :

$$G^* := \{(b_+, b_-, \Lambda) \in B_+ \times B_- \times \mathfrak{t} : \delta(b_+)\delta(b_-) = 1 \text{ et } \delta(b_+) = \exp(i\pi\Lambda)\}.$$

REMARQUE 1.5.2. Souvent dans la littérature, on considère plutôt le groupe de Poisson-Lie défini par

$$G_{alg}^* := \{(b_+, b_-) \in B_+ \times B_- : \delta(b_+)\delta(b_-) = 1\},$$

qui n'est plus simplement connexe mais, contrairement au précédent, est un groupe algébrique. On a cependant une projection naturelle  $G^* \rightarrow G_{alg}^*$  qui est l'oubli de  $\Lambda \in \mathfrak{t}$ . Cette dernière est même un revêtement. Donc  $G^*$  est un revêtement universel de  $G_{alg}^*$  (car  $G^*$  est simplement connexe). De plus, l'application  $G^* \rightarrow G_{alg}^*$  est Poisson et on peut définir l'application exponentielle duale (définition 1.5.5) vers une quelconque des deux versions du groupe de Poisson-Lie dual précédentes.

Notons  $G^0 = B_- B_+ \subseteq G$  la grosse cellule de  $G$  et  $\pi : G^* \rightarrow G^0$  l'application donnée par  $(b_+, b_-, \Lambda) \mapsto b_-^{-1} b_+$ . L'application  $\pi$  se factorise immédiatement par  $G_{alg}^*$  et on a donc deux revêtements  $G^* \rightarrow G_{alg}^* \rightarrow G^0$ .

On a un isomorphisme

$$(1.5.a) \quad U_+ \times U_- \times \mathfrak{t} \rightarrow G^*$$

donné par  $(u_+, u_-, \Lambda) \mapsto (b_+, b_-, \Lambda') := (e^{i\pi\Lambda} u_+, u_- e^{i\pi\Lambda}, \Lambda)$  vérifiant l'égalité  $b_-^{-1} b_+ = u_-^{-1} e^{2i\pi\Lambda} u_+$ . De même, on peut construire deux isomorphismes  $G_{alg}^* \simeq U_+ \times U_- \times T \simeq G^0$  tels que les revêtements naturels  $G^* \rightarrow G_{alg}^* \rightarrow G^0$  correspondent à l'identité sur

les facteurs  $U_{\pm}$  et agissent sur la troisième composante comme

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{t} & \longrightarrow & T & \longrightarrow & T \\ \Lambda & \longmapsto & e^{i\pi\Lambda} & \longmapsto & e^{2i\pi\Lambda}. \end{array}$$

La structure de Poisson multiplicative de  $G^*$  est bien connue. Voir par exemple [LR91] [DCKP92] [AM94] ou [Boa01] §2.

PROPOSITION 1.5.3. *Les feuilles symplectiques de  $G^*$  sont données par les  $\pi^{-1}(\mathcal{C})$  où  $\mathcal{C} \subseteq G$  est une classe de conjugaison de  $G$ .*

Voir [AM94] ou sinon [Boa01] lemme 4 p.484 pour une démonstration.

P. Boalch a construit des structures quasi-Hamiltoniennes sur les espaces de module de données de Stokes (voir [Boa07] et [Boa13] par exemple). En particulier, il retrouve dans un cas particulier la structure de Poisson du groupe de Poisson-Lie dual  $G^*$ .

THÉOREME 1.5.4 ([Boa07] théorème 1 p.371). *L'espace  $\mathcal{A} := G \times U_+ \times U_- \times \mathfrak{t}$  est un espace  $G \times T$ -quasi-Hamiltonien où  $G \times T$  agit par*

$$(g, k) \cdot (c, u_+, u_-, t) := (kcg^{-1}, ku_+k^{-1}, ku_-k^{-1}, ktk^{-1}), \quad \text{pour tout } (g, k) \in G \times T.$$

*L'application  $\mu = (\mu_G, \mu_T) : \mathcal{A} \rightarrow G \times T$  donnée par*

$$\begin{array}{ccc} \mu_G : & \mathcal{A} & \longrightarrow G \\ & (c, u_+, u_-, t) & \longmapsto c^{-1}u_-^{-1}e^{2i\pi t}u_+c, \\ \\ \mu_T : & \mathcal{A} & \longrightarrow T \\ & (c, u_+, u_-, t) & \longmapsto e^{-2i\pi t}. \end{array}$$

*est une application moment pour la structure quasi-Hamiltonienne de  $\mathcal{A}$ .*

*De plus, l'isomorphisme (1.5.a) est un isomorphisme Poisson du quotient  $\mathcal{A}/G$  vers  $G^*$ .*

Du théorème 3 p.376 de [Boa07], on retrouve la proposition 1.5.3 donnant les feuilles symplectiques de  $\mathcal{A}/G \simeq G^*$  comme les  $\mu_G^{-1}(\mathcal{C})/G$  où  $\mathcal{C} \subseteq G$  est une classe de conjugaison dans  $G$ .

**1.5.3. Application exponentielle duale.** Soit  $A \in \mathfrak{g}$  une matrice diagonale à valeurs propres *distinctes*. On notera  $\mathfrak{t}_{reg}$  l'ensemble de telles matrices. On a alors la composition suivante

$$(1.5.a) \quad \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{dR}^* \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{dR} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}_B \xrightarrow{\sim} U_+ \times U_- \times \mathfrak{t} \xrightarrow{\sim} G^*,$$

où

- (1)  $\widetilde{\mathcal{M}}_{dR}^*$  désigne l'espace de module des fibrés triviaux de rang  $n$  sur  $\mathbf{P}^1$  à connexion méromorphe de type  $2(0) + 1(\infty)$  de type irrégulier  $A/\xi^2$  en 0,
- (2)  $\widetilde{\mathcal{M}}_{dR}$  désigne l'espace de module des fibrés de rang  $n$  sur le disque unité à connexion méromorphe avec un pôle double en 0 de type irrégulier  $A/\xi^2$ ,
- (3)  $\widetilde{\mathcal{M}}_B$  désigne l'espace des données de Stokes associé à l'espace de module  $\widetilde{\mathcal{M}}_{dR}$ .

Les tildes sur les notations des espaces de modules signifient que l'on considère une version de l'espace de module avec un repère. Les applications sont définies comme suit. L'application  $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$  est donnée par le choix de la forme bilinéaire non dégénérée  $\text{Tr} : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{C}$ . L'application  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{M}_{dR}^*$  est donnée par  $R \in \mathfrak{g}$  associe la connexion

$$\nabla = d - \left( \frac{A}{\xi^2} + \frac{R}{\xi} \right) d\xi$$

sur le fibré trivial de rang  $n$  sur  $\mathbf{P}^1$ . L'application  $\widetilde{\mathcal{M}}_{dR}^* \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{dR}$  associe au fibré à connexion précédent sa restriction au disque unité. L'application  $\widetilde{\mathcal{M}}_{dR} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}_B$  est l'isomorphisme dit de Riemann-Hilbert-Birkhoff, qui à une connexion associe ses données de Stokes en 0 pour le choix de l'élément semi-simple  $A$  ci-dessus. L'application  $\widetilde{\mathcal{M}}_B \xrightarrow{\sim} U_+ \times U_- \times \mathfrak{t}$  est donnée par le choix d'une solution formelle spéciale (i-e d'une branche du logarithme et d'une version analytique de l'exponentielle formelle) et d'une présentation spéciale du groupoïde fondamental (i-e ici une orientation et un secteur initial). Enfin l'application  $U_+ \times U_- \times \mathfrak{t} \xrightarrow{\sim} G^*$  est l'isomorphisme Poisson (1.5.a).

DÉFINITION 1.5.5. On définit *l'application exponentielle duale* comme l'application

$$\nu_A : \mathfrak{g}^* \longrightarrow G^*,$$

donnée par la composition (1.5.a).

La seule partie non algébrique et non triviale de la composition (1.5.a) est l'application holomorphe de Riemann-Hilbert-Birkhoff

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{dR} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}_B.$$

On munie  $\mathfrak{g}^*$  de sa structure de Poisson standard et  $G^*$  de sa structure canonique de groupe de Poisson-Lie mais divisé par un facteur  $2\mathbf{i}\pi$ . On a alors le

THÉORÈME 1.5.6 ([Boa01] Théorème 1). *L'application exponentielle duale  $\nu_A$  est Poisson pour tout choix d'un type irrégulier  $A \in \mathfrak{t}_{reg}$ .*

Ce théorème est notre motivation principale pour trouver une formule pour les données de Stokes, au moins au voisinage de  $0 \in \mathfrak{g}$ .

## Transformée de Fourier-Laplace

Dans ce chapitre, on étudie les présentations de modules sur l'algèbre de Weyl du type

$$\mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^* \xrightarrow{\cdot M^0} \mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^* \longrightarrow \mathcal{M}^0 \longrightarrow 0.$$

avec

$$M^0 = \begin{pmatrix} \partial_z - B & C \\ D & z - A \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \text{End}(W \oplus V),$$

où  $\mathcal{A}_1$  désigne l'algèbre de Weyl,  $V$  et  $W$  sont des  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie et où  $A \in \text{End}(V)$  est diagonale,  $B \in \text{End}(W)$  est diagonale et  $C \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $D \in \text{Hom}(W, V)$  sont quelconques.

Dans la section 2.2, on montrera que le  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^0$  correspond à la connexion

$$\nabla^0 = d - (B + C(z - A)^{-1} D) dz,$$

sur le fibré trivial sur  $\mathbf{C} - \{a_i : i \in I\}$  de fibre  $W$ , où  $(a_i)_{i \in I}$  désignent les valeurs propres de  $A$ .

On rappellera ensuite la définition de la transformée de Fourier-Laplace sur les  $\mathcal{A}_1$ -modules dans la section 2.3 qui formellement correspond à remplacer les symboles  $z$  et  $\partial_z$  par  $-\partial_\zeta$  et  $\zeta$  respectivement. On montrera ensuite que la restriction de la transformée de Fourier-Laplace de  $\mathcal{M}^0$  est égale à la connexion

$$\nabla^1 = d + (A + D(\zeta - B)^{-1} C) d\zeta.$$

sur le fibré trivial sur  $\mathbf{C} - \{b_j : j \in J\}$  de fibre  $V$ , où  $(b_j)_{j \in J}$  désignent les valeurs propres de  $B$ .

Enfin, on signalera un cas particulier dans la remarque 2.3.3 qui nous intéressera dans la suite.

### 2.1. Présentation de modules holonomes et dimensions

Notons  $\mathcal{A}_1 := \mathbf{C}\langle z, \partial_z \rangle / (\partial_z z - z \partial_z - 1)$  l'algèbre de Weyl et soient  $V$  et  $W$  des  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On considère alors la présentation de  $\mathcal{A}_1$ -modules

$$\mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^* \xrightarrow{\cdot M} \mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^* \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} \partial_z - B & C \\ D & z - A \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \text{End}(W \oplus V),$$

où  $A \in \text{End}(V)$  diagonale,  $B \in \text{End}(W)$  diagonale,  $C \in \text{Hom}(V, W)$  et  $D \in \text{Hom}(W, V)$ .

Plus succinctement, cela signifie que l'on a  $\mathcal{M} = \text{Coker}(\cdot M)$  pour le  $M$  précédent. On notera  $a_i$  ( $i \in I$ ) les valeurs propres de  $A$  de multiplicité respective  $\mu_j$ . De même on notera  $b_j$  ( $j \in J$ ) les valeurs propres de  $B$  et  $m_i$  leur multiplicité.

REMARQUE 2.1.1. On remarquera que l'élément  $M \in \mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \text{End}(W \oplus V)$  définissant le  $\mathcal{A}_1$ -module à gauche  $\mathcal{M}$  est défini à multiplication par un élément inversible

de  $\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \text{End}(W \oplus V)$  à gauche près. En effet, notons  $\varphi$  un tel élément. Alors il est clair que le diagramme suivant est à carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^* & \xrightarrow{\cdot M} & \mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^* & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & 0 \\ \cdot \varphi^{-1} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \\ \mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^* & \xrightarrow{\cdot \varphi M} & \mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^* & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On rappelle qu'un  $\mathcal{A}_1$ -module à gauche  $\mathcal{M}$  est *holonome* s'il est de torsion<sup>1,2</sup>. Explicitement, cela signifie que pour tout  $m \in \mathcal{M}$ , il existe un opérateur  $g \in \mathcal{A}_1$  (dépendant à priori de  $m$ ) tel que  $g \cdot m = 0$ .

LEMME 2.1.2. *Le  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}$  est holonome de type fini.*

Rappelons d'abord quelques définitions suivant [Sab02] chapitre V §1.b. Tout élément  $P$  de  $\mathcal{A}_1$  s'écrit de manière unique sous la forme  $P = \sum_{k=0}^n p_k(z) \partial^k$  où  $p_k \in \mathbf{C}[z]$  est un polynôme en  $z$  et  $p_n \neq 0$ . On appelle alors  $n$  le *degré* de  $P$ . Pour tout  $\delta \in \mathbf{Z}^n$ , on définit le  $\delta$ -*degré* sur  $\mathcal{A}_1^n$  d'un élément  $(P_1, \dots, P_n)$  comme l'entier  $\max_{1 \leq i \leq n} (\deg(P_i) - \delta_i)$ . Une filtration de  $\mathcal{M}$  sera une *bonne filtration* si elle est obtenue comme image par  $\mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^* \rightarrow \mathcal{M}$  d'une filtration par le  $\delta$ -degré.

Le gradué de l'algèbre  $\mathcal{A}_1$  pour la filtration naturelle par le degré (mais aussi pour n'importe quelle  $\delta$ -filtration) est l'algèbre des polynômes en deux variables commutatives  $\mathbf{C}[z, \zeta]$  (où  $\zeta$  est la classe de  $\partial_z$  dans le gradué). Le gradué  $\text{Gr}(\mathcal{M})$  de  $\mathcal{M}$  par rapport à une bonne filtration est donc un  $\mathbf{C}[z, \zeta]$ -module de type fini.

On admettra le

LEMME 2.1.3 ([Sab02] Proposition 1.4 (1)). *Un module est holonome si et seulement si son gradué par rapport à une bonne filtration a un annulateur non trivial.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.1.2. Le fait que  $\mathcal{M}$  soit de type fini est immédiat, car  $\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} (W \oplus V)^*$  est de type fini et qu'on a une application  $\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} (W \oplus V)^* \rightarrow \mathcal{M}$  surjective. Pour le caractère holonome, on considère la  $\delta$ -filtration de  $\mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^*$  donnée par  $\delta = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  avec  $\dim(W)$  uns et  $\dim(V)$  zéros. La filtration induite sur  $\mathcal{M}$  est une bonne filtration. Le gradué de  $\mathcal{M}$  par rapport à cette filtration est l'algèbre  $\mathbf{C}[z, \zeta] \otimes_{\mathbf{C}} (W \oplus V)^*$  quotientée par la multiplication à droite par le symbole de  $M$ , c'est-à-dire la matrice

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \zeta - B & 0 \\ D & z - A \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de  $\sigma(M)$  est égal à

$$\det(\sigma(M)) = \prod_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (\zeta - b_j)^{m_i} (z - a_i)^{\mu_j},$$

en particulier il est non nul. Or  $\det(\sigma(M))$  est toujours dans l'annulateur de  $\text{Gr}(\mathcal{M})$  grâce à la formule bien connue avec la transposée de la comatrice. Donc  $\text{Gr}(\mathcal{M})$  a un annulateur non trivial, donc  $\mathcal{M}$  est holonome.  $\square$

1. On impose aussi qu'il soit de type fini suivant les définitions. Nous allons voir de toute façon que les  $\mathcal{A}_1$ -modules holonomes qui suivront seront toujours de type fini.

2. La terminologie holonome n'est vraiment utile qu'en dimension supérieure. En effet, être holonome en dimension  $> 1$  est différent du fait d'être de torsion. C'est une condition plus géométrique (formulée avec la variété caractéristique) ou plutôt très algébrique (avec une condition sur le degré d'un polynôme de Hilbert). Voir par exemple [Mal91] chapitre I §1 pour des rappels sur la dimension strictement plus grande que 1.

Notons  $\mathbf{C}\{z\}[z^{-1}]$  le corps des séries de Laurent et  $\mathbf{C}(z - a_i)$  le corps des fractions rationnelles en  $a_i \in \mathbf{C}$ . Alors les espaces

$$\mathbf{C}\{z\}[z^{-1}] \bigotimes_{\mathbf{C}[z]} \mathrm{Gr}(\mathcal{M}) \quad \text{et} \quad \mathbf{C}\{z - a_i\}(\zeta) \bigotimes_{\mathbf{C}[z - a_i, \zeta]} \mathrm{Gr}(\mathcal{M})$$

sont des  $\mathbf{C}\{z\}[z^{-1}]$ , respectivement  $\mathbf{C}\{z - a_i\}(\zeta)$ -espaces vectoriels de dimension finie. La première dimension est appelée la *dimension holonome* de  $\mathcal{M}$  et la seconde la *multiplicité en  $a_i$*  de  $\mathcal{M}$ .

**PROPOSITION 2.1.4.** *La dimension holonome de  $\mathcal{M}$  est égale à  $\dim(W)$  et sa multiplicité en  $a_i$  est égale à la multiplicité  $\mu_j$  de la valeur propre  $a_i$  de  $A$ .*

**DÉMONSTRATION.** On considère la  $\delta$ -filtration de la preuve du lemme 2.1.2. Elle est donnée par  $\delta = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  avec  $\dim(W)$  uns et  $\dim(V)$  zéros. C'est une bonne filtration de  $\mathcal{M}$ . De plus, on a une suite exacte entre les gradués

$$(2.1.a) \quad \mathrm{Gr}(\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} (W \oplus V)^*) \xrightarrow{\cdot \sigma(M)} \mathrm{Gr}(\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} (W \oplus V)^*) \longrightarrow \mathrm{Gr}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0,$$

lorsque l'on munit le premier espace  $\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} (W \oplus V)^*$  de la filtration canonique  $F_{\bullet}^c$  ( $\delta$ -filtration pour  $\delta = (0, \dots, 0)$ ) et le second de la  $\delta$ -filtration  $F_{\bullet}^{\delta}$  précédente. En effet, l'application  $\cdot M$  envoie  $F_m^c$  sur  $F_m^{\delta}$  pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ . On en déduit la suite exacte (2.1.a) où la première application est la multiplication à droite par le symbole principal

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \zeta - B & 0 \\ D & z - A \end{pmatrix} \in \mathbf{C}[z, \zeta] \otimes_{\mathbf{C}} \mathrm{End}(W \oplus V).$$

On peut montrer en utilisant un lemme classique de Serre (§23 proposition 28 p.40 de [Ser56]) que les modules  $\mathbf{C}\{z\}[z^{-1}]$  et  $\mathbf{C}\{z - a_i\}(\zeta)$  sont plats sur  $\mathbf{C}[z]$  et  $\mathbf{C}[z - a_i, \zeta]$  respectivement. On est déduit que les deux suites tensorisées sont encore exactes. Il suffit donc de calculer la dimension du conoyau  $\mathrm{Coker}(\cdot \sigma(M))$  vu comme application entre  $\mathbf{C}\{z\}[z^{-1}, \zeta]$  et entre  $\mathbf{C}\{z - a_i\}(\zeta)$ -modules de type fini.

Dans  $\mathbf{C}\{z\}[z^{-1}, \zeta]$ , les  $z - a_i$  sont inversibles mais pas les  $\zeta - b_j$ . Par combinaison linéaire des colonnes, on se ramène au cas où  $D = 0$  donc au calcul du rang d'une matrice diagonale. D'où le rang est égal à  $\dim(V)$  et la dimension du conoyau, c'est-à-dire la dimension holonome de  $\mathcal{M}$ , égale à  $\dim(W \oplus V) - \dim(V) = \dim(W)$ .

Dans  $\mathbf{C}\{z - a_i\}(\zeta)$ , les  $\zeta - b_j$  sont inversibles, les  $z - a_k$  pour  $k \neq j$  aussi mais pas  $z - a_i$ . De même, par combinaison des lignes, on se ramène au cas de  $D = 0$  et on en conclut que la multiplicité de  $\mathcal{M}$  est bien égale à la multiplicité de la valeur propre  $a_i$ . □

**REMARQUE 2.1.5.** On aurait pu considérer la dimension du  $\mathbf{C}\{z - z_0\}[(z - z_0)^{-1}]$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}\{(z - z_0)\}[(z - z_0)^{-1}] \bigotimes_{\mathbf{C}\{z - z_0\}} \mathrm{Gr}(\mathcal{M})$  pour tout  $z_0 \in \mathbf{C}$ , qui correspond à la dimension de la fibre en  $z_0$  du  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}}^{an}(*z_0)$ -module associé à  $\mathcal{M}$ . En suivant la démonstration de la proposition précédente, on montre qu'elle est en fait indépendante de  $z_0$ . Il n'est pas vrai cependant que la dimension de la fibre en  $z_0$  du  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}}^{an}$ -module associé soit constante. Cela s'explique par le fait que comme on a inversé formellement  $z_0$ , on ne perd pas de dimension pour  $z_0$  un pôle de  $\mathcal{M}$ .

On rappelle qu'une fonction  $f$  est à *croissance exponentielle dans la direction  $d$*  s'il existe un secteur  $S$  contenant la direction  $d$ , un voisinage de l'infini  $\mathcal{U}$  et deux constantes  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}_{>0}$  tels que  $f$  est définie sur  $S \cap \mathcal{U}$  et y vérifie l'inégalité  $|f(z)| \leq c_1 e^{c_2|z|}$ . Un  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}$  est de *type exponentiel* si toute solution est à croissance exponentielle pour toute direction  $d$ .

**PROPOSITION 2.1.6.** *Le  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}$  est de type exponentiel.*



DÉMONSTRATION. C'est une conséquence du fait que le  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}$  admet au plus un pôle d'ordre  $\leq 2$  en l'infini et le lien entre le polygone de Newton de  $\mathcal{M}$  et la croissance des solutions.  $\square$

## 2.2. Restriction de modules sur l'algèbre de Weyl et connexion correspondante

On note  $\mathcal{D}_X^{alg}$ ,  $\mathcal{D}_X^{an}$  le faisceau des opérateurs différentiels sur une variété algébrique, respectivement complexe  $X$ . On a donc localement au voisinage de  $(x_1, \dots, x_n) \in X$ , que  $\mathcal{D}_X^{alg}$ ,  $\mathcal{D}_X^{an}$  est engendré par les  $\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 0, d \rrbracket^n} f_i(x_1, \dots, x_n) \partial_1^{i_1} \dots \partial_n^{i_n}$  pour certaines fonctions algébriques, respectivement holomorphes  $f_i$  des coordonnées  $x_1, \dots, x_n$ , où  $\partial_i$  désigne le champ de vecteur canonique associée à la coordonnée  $x_i$ . En particulier, pour  $X = \mathbf{P}^1$ , on a que la fibre de  $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}^{an}$  en 0 est isomorphe à  $\mathbf{C}\{z\}\langle \partial \rangle / (\partial z - z\partial - 1)$  qui contient comme sous-algèbre l'algèbre de Weyl  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{D}_{\mathbf{P}^1, 0}^{alg}$ .

On rappelle que la donnée du  $\mathcal{A}_1$ -module holonome  $\mathcal{M}$  est équivalente à la donnée d'un  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}}^{alg}$ -module holonome  $\check{\mathcal{M}}$  qui est équivalente à la donnée d'un  $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}^{alg}$ -module holonome  $\hat{\mathcal{M}}$  tel que  $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}(*\infty) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}} \hat{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}$ . On a les correspondances

$$\mathcal{M} = \Gamma(\mathbf{C}, \check{\mathcal{M}}) \quad \text{et} \quad \check{\mathcal{M}} = \mathcal{D}_{\mathbf{A}^1} \otimes_{\mathcal{A}_1} \mathcal{M},$$

et

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}(*\infty) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbf{A}^1}} \check{\mathcal{M}} \quad \text{et} \quad \check{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{M}}|_{\mathbf{A}^1}.$$

Une généralisation du théorème GAGA de J-P Serre due à M. Kashiwara nous donne aussi une équivalence de catégorie entre  $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}^{alg}$ -module holonome  $\hat{\mathcal{M}}$  tel que  $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}^{alg}(*\infty) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}^{alg}} \hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{M}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}^{an}$ -module holonome  $\hat{\mathcal{M}}^{an}$  tel que  $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}^{an}(*\infty) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}^{an}} \hat{\mathcal{M}}^{an} = \hat{\mathcal{M}}^{an}$ .

LEMME 2.2.1. *La restriction du  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}$  à l'ouvert  $\mathcal{U} = \mathbf{C} - \{a_i : i \in I\}$  est isomorphe au fibré trivial de fibre  $W$  sur  $\mathcal{U}$  muni de la connexion holomorphe*

$$d - (B + C(z - A)^{-1}D) dz.$$

On rappelle que la restriction de  $\mathcal{M}$  à l'ouvert  $\mathcal{U}$  est égale au  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{an}$ -module  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{an} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbf{C}}} \mathcal{M}$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $(v_1, v_2)$  un élément de  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^*}^{an} \otimes_{\mathcal{A}_1} \mathcal{M}$ . Alors on a

$$(v_1, v_2) \begin{pmatrix} \partial_z - B & C \\ D & z - A \end{pmatrix} = (0, 0),$$

c'est-à-dire  $v_1(\partial_z - B) + v_2 D = 0$  et  $v_1 C + v_2(z - A) = 0$ . Comme  $z$  est une coordonnée de  $\mathcal{U}$ , la multiplication par  $z - A$  est inversible. D'où  $v_2 = -v_1 C(z - A)^{-1}$  est déterminé par  $v_1$  et l'on a

$$v_1 (\partial_z - B - C(z - A)^{-1}D) = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a un isomorphisme de  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^*}^{an}$ -modules à gauche

$$\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{an} \otimes_{\mathcal{A}_1} \mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{an} \otimes_{\mathbf{C}} W^* / (\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{an} \otimes_{\mathbf{C}} W^* \cdot \nabla_{\frac{d}{dz}})$$

avec

$$\nabla_{\frac{d}{dz}} = \partial_z - (B + C(z - A)^{-1}D),$$

qui est bien un fibré trivial<sup>3</sup> sur  $\mathcal{U}$  muni de la connexion  $d - (B + C(z - A)^{-1}D) dz$ .  $\square$

3. Pour le lien entre  $\mathcal{D}$ -modules et fibrés à connexion, on pourra consulter [Sab11] proposition 1.1.4 qui fait référence aux exercices E.1.5 à 7.

### 2.3. Transformée de Fourier-Laplace et connexion associée

Il existe un isomorphisme de  $\mathbf{C}$ -algèbres

$$\mathcal{A}_1 \simeq \mathbf{C}\langle z, \partial_z \rangle / (\partial_z z - z \partial_z - 1) \longrightarrow \mathbf{C}\langle \zeta, \partial_\zeta \rangle / (\partial_\zeta \zeta - \zeta \partial_\zeta - 1) \simeq \mathcal{A}_1$$

envoyant  $z$  sur  $-\partial_\zeta$  et  $\partial_z$  sur  $\zeta$ . On définit la *transformée de Fourier-Laplace* d'un  $\mathbf{C}\langle z, \partial_z \rangle / (\partial_z z - z \partial_z - 1)$ -module  $\mathcal{M}^0$  comme le  $\mathbf{C}\langle \zeta, \partial_\zeta \rangle / (\partial_\zeta \zeta - \zeta \partial_\zeta - 1)$ -module induit par l'isomorphisme précédent, et la *transformée de Fourier-Laplace inverse* comme l'application inverse de la précédente.

LEMME 2.3.1. *La transformée de Fourier-Laplace  $\mathcal{M}^1$  de  $\mathcal{M}^0$  admet la présentation explicite*

$$\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} (V \oplus W)^* \xrightarrow{\cdot M^1} \mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} (V \oplus W)^* \longrightarrow \mathcal{M}^1 \longrightarrow 0$$

où

$$M^1 = \begin{pmatrix} \partial_\zeta + A & -D \\ C & \zeta - B \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \text{End}(V \oplus W).$$

DÉMONSTRATION. En effet, on applique l'isomorphisme de Fourier-Laplace à la présentation de  $\mathcal{M}^0$  pour obtenir  $\mathcal{M}^1$  comme conoyau de

$$\begin{pmatrix} \zeta - B & C \\ D & -\partial_\zeta - A \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \text{End}(W \oplus V).$$

En multipliant à gauche par  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , on obtient  $\mathcal{M}^1$  comme le conoyau de

$$\begin{pmatrix} \zeta - B & C \\ -D & \partial_\zeta + A \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \text{End}(W \oplus V).$$

En inversant le rôle de  $V$  et  $W$ , c'est-à-dire en conjuguant par l'inversion  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on obtient bien le résultat.  $\square$

On rappelle que l'on note  $(b_j)_{j \in J}$  l'ensemble des valeurs propres de  $B$ .

LEMME 2.3.2. *Notons  $\mathcal{U}$  l'ouvert  $\mathbf{C} - \{b_j : j \in J\}$ . Alors le  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{an}$ -module  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{an} \otimes_{\mathcal{A}_1} \mathcal{M}^1$  est isomorphe au fibré trivial de fibre  $V$  sur  $\mathcal{U}$  muni de la connexion holomorphe*

$$\nabla^1 := d + (A + D(\zeta - B)^{-1}C) d\zeta.$$

DÉMONSTRATION. C'est un cas particulier du lemme 2.2.1.  $\square$

REMARQUE 2.3.3. Un cas qui nous intéresse tout particulièrement est le cas où  $B = 0$ . On a alors

$$\hat{\nabla} := \nabla^0 = d - C(z - A)^{-1}D dz$$

qui s'étend en une connexion fuchsienne sur le fibré trivial sur  $\mathbf{P}^1$  de fibre  $W$  et

$$\nabla := \nabla^1 = d + \left( A + \frac{DC}{\zeta} \right) d\zeta,$$

qui admet un pôle double en l'infini et un pôle simple en 0 sur le fibré trivial sur  $\mathbf{P}^1$  de fibre  $V$ .

En particulier, dans la suite on pose  $R := DC \in \text{End}(V)$ , qui est égal au résidu de la connexion  $\nabla^1$  en 0. De même, si  $\text{id}_i \in \text{End}(V)$  désigne le  $i$ ème idempotent associé à la graduation  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ , alors on note  $R_i := C \text{id}_i D$  le résidu de la connexion fuchsienne  $\nabla^0$  en  $a_i$ .



## Matrices de Stokes et matrices de connexion

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord définir dans la section 3.1 un système gradué associé à certaines connexions fuchsienues

$$\hat{\nabla} = d - \sum_{i \in I} \frac{R_i}{z - a_i} dz,$$

vérifiant des conditions génériques.

Ces connexions correspondent aux connexions que l'on obtient par transformée de Fourier-Laplace des connexions irrégulières

$$\nabla = d - \left( \frac{A}{\xi^2} + \frac{R}{\xi} \right) d\xi$$

lorsque  $A \in \mathfrak{t}_{reg}$ , c'est-à-dire quand  $A$  est à valeurs propres deux à deux distinctes. En particulier, on aura  $H = T = K$  dans ce cas suivant les notations du chapitre 1 section 1.4. Le cas général, substantiellement plus difficile dans les détails, sera traité dans le chapitre 4.

Ensuite, on calculera dans la section 3.2 l'isomorphisme transformée de Laplace complétant le diagramme de la figure 1, qui est un isomorphisme entre les systèmes gradués avec repère associés à  $\nabla$  et  $\hat{\nabla}$ .

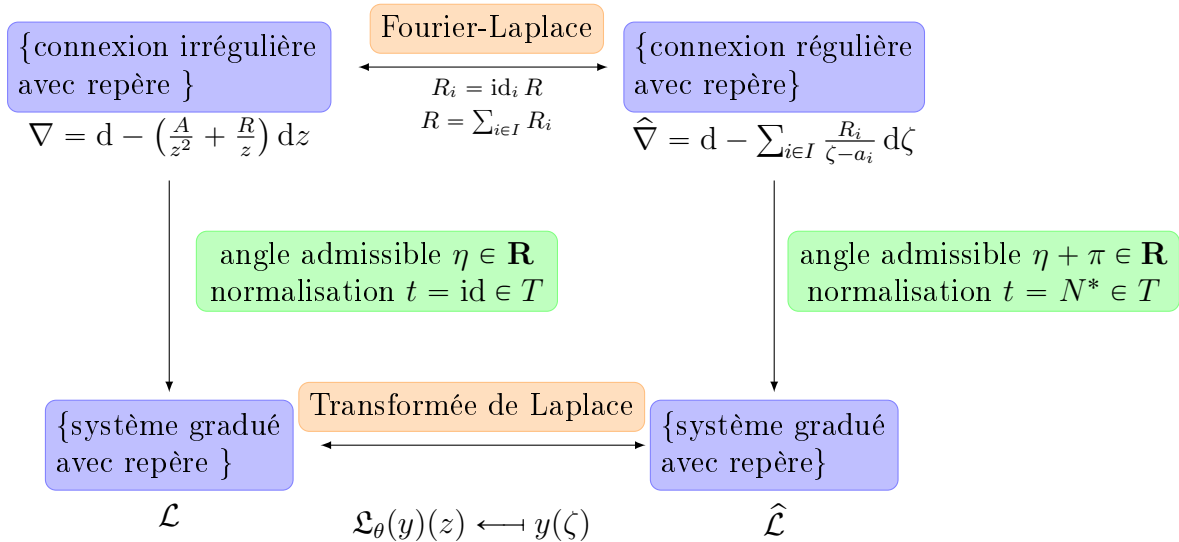


FIGURE 1. Transformée de Laplace multiplicative

En bleu, on désigne les catégories (ou juste les ensembles) en présence. En orange, on donne le nom de l'application ou de la correspondance. En vert, on donne le choix et les conditions spéciales pour lesquels l'application est bien définie.

Cela nous permettra de déduire dans la section 3.3 une expression explicite de l'application de Riemann-Hilbert-Birkhoff de la connexion irrégulière  $\nabla$  en fonction des matrices de connexions de la connexion fuchsienne  $\hat{\nabla}$ .

### 3.1. Système gradué et connexion régulière

**3.1.1. Notation.** On considérera dans cette section les données suivantes :

- (1) deux coordonnées  $\xi : \mathbf{P}^1 - \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $z : \mathbf{P}^1 - \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C}$  que l'on considérera en dualité réelle,
- (2)  $V$  un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . On notera  $G := \mathrm{GL}(V)$  et  $T \subseteq G$  un tore maximal de  $G$ . On notera aussi  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{t}$  les algèbres de Lie de  $G$  et  $T$  respectivement.
- (3) un élément  $A \in \mathfrak{t}_{reg} \subseteq \mathfrak{t}$ , c'est-à-dire que  $A$  est à valeurs propres deux à deux *distincts*. On notera  $\{a_i : i \in I\}$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$  (donc  $I$  de cardinal  $n$ ),  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  la graduation de  $V$  associée par des sous-espaces vectoriel  $V_i$  de dimension 1 et enfin  $\mathrm{id}_i : V \twoheadrightarrow V_i \hookrightarrow V$  le  $i^{\text{ième}}$  idempotent associé à la graduation de  $\bigoplus_{i \in I} V_i$ .

Le point de départ est la connexion irrégulière (nécessairement non résonante)

$$\nabla = d - \left( \frac{A}{\xi^2} + \frac{R}{\xi} \right) d\xi,$$

sur le fibré trivial sur  $\mathbf{P}^1$  de fibre  $V$ , pour un certain élément  $R$  vérifiant les conditions génériques suivantes :

- (1) la partie diagonale  $\Lambda := \delta(R) \in \mathfrak{t}$  de  $R$  est à valeurs propres non entières,
- (2) l'endomorphisme  $R \in \mathfrak{g}$  est à valeurs propres non entières.

La transformée de Fourier-Laplace inverse de la connexion  $\nabla$  est la connexion fuchsienne

$$\hat{\nabla} = d - \sum_{i \in I} \frac{R_i}{z - a_i} dz,$$

sur le fibré trivial sur  $\mathbf{P}^1$  de fibre  $V$  avec  $R_i := \mathrm{id}_i R$  pour tout  $i \in I$ . On a donc  $R = \sum_{i \in I} R_i$ . Les conditions génériques équivalentes vérifiées par  $\hat{\nabla}$  sont donc :

- (1) les endomorphismes  $R_i$  sont diagonalisables de rang 1 à valeurs propres toutes différentes d'un entier non nul,
- (2) l'endomorphisme  $\sum_{i \in I} R_i \in \mathfrak{g}$  est à valeurs propres non entières.

Il est clair que l'ensemble des connexions fuchiennes de la forme de  $\hat{\nabla}$  vérifiant les conditions génériques ci-dessus forme une catégorie.

**3.1.2. Système gradué associé à une connexion régulière.** On explique ici comment associer un système gradué à la connexion fuchsienne  $\hat{\nabla}$  de manière fonctorielle.

Les notions de connexion régulière, connexion fuchsienne et de connexion à singularités régulières sont assez générales. Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des connexions fuchiennes avec des résidus vérifiant des conditions génériques particulières. Pour simplifier la terminologie dans ce qui suit, nous poserons donc la définition non standard suivante :

**DÉFINITION 3.1.1.** Une *connexion régulière* est une connexion  $\hat{\nabla}$  sur le fibré trivial de fibre  $V$  sur  $\mathbf{P}^1$  telle que

$$\hat{\nabla} = d - \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{z - a_i} dz,$$

pour certains  $R_i \in \mathfrak{g}$  vérifiant les conditions :

- (1) les endomorphismes  $R_i$  sont diagonalisables de rang 1 à valeurs propres toutes différentes d'un entier non nul,

(2)  $R := \sum_{i=1}^n R_i$  n'a pas de valeur propre entière.

On remarquera que sous ces conditions, l'endomorphisme  $R$  n'a en particulier pas la valeur propre 0 donc est inversible.

On dira pour ce cadre qu'une direction d'angle  $\theta$  est *admissible* si on a  $\arg(a_i - a_j) \neq \theta \pmod{2\pi}$  pour tout  $i \neq j$ , ce qui est compatible avec la définition d'une direction admissible pour un type irrégulier  $-A/\xi$  avec  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ .

**PROPOSITION 3.1.2.** *Pour tout choix d'une direction admissible, on peut associé à toute connexion régulière un système gradué.*

**DÉMONSTRATION.** Choisissons une direction admissible  $d$  d'angle  $\theta$  et un disque ouvert  $D \subseteq \mathbf{C}$  de centre  $c$  tel que  $a_i \in D$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . On pose  $I := \{a_1, \dots, a_n\}$  muni de l'ordre  $\geq_d$ . On pose l'ordre  $a_i \geq_d a_j$  si  $\Im(a_i e^{-i\theta}) \geq \Im(a_j e^{-i\theta})$ . C'est l'ordre *inverse* de l'ordre posé sur  $I$  pour le choix de la direction admissible  $d$  dans le cas irrégulier (voir (1.3.a)).

Quitte à réordonner les indices, on supposera pour simplifier la suite de l'exposition que l'on a  $a_n >_d a_{n-1} >_d \dots >_d a_1$ . On pose alors  $\Sigma := \mathbf{C} - \overline{D}$ ,  $C_d$  la bande

$$\{z \in \Sigma : \Im(a_1 e^{-i\theta}) < \Im(z e^{-i\theta}) < \Im(a_n e^{-i\theta}) \text{ et } \Re(z e^{-i\theta}) > \Re(c \cdot e^{-i\theta})\},$$

$C_{-d}$  la bande

$$\{z \in \Sigma : \Im(a_1 e^{-i\theta}) < \Im(z e^{-i\theta}) < \Im(a_n e^{-i\theta}) \text{ et } \Re(z e^{-i\theta}) < \Re(c \cdot e^{-i\theta})\},$$

et enfin  $\Sigma_g := \Sigma - C_d$  et  $\Sigma_d := \Sigma - C_{-d}$ .

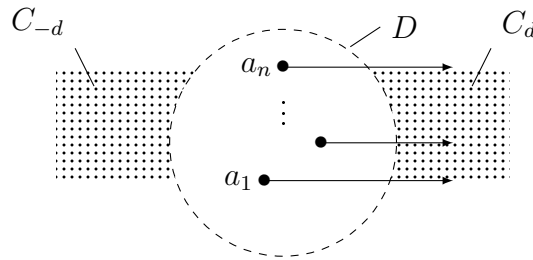


FIGURE 2. Bandes  $C_d$  et  $C_{-d}$ , et parties  $\Sigma_g := \Sigma - C_d$  et  $\Sigma_d := \Sigma - C_{-d}$ .

Pour ces données, on peut définir un système gradué  $\mathcal{L}$ . On pose  $\mathcal{L}$  égal au système local des solutions de  $\widehat{\nabla}$  sur  $\Sigma$ . Les deux graduations de  $\mathcal{L}$  sur  $\Sigma_g$  et  $\Sigma_d$  respectivement

$$\mathcal{L}|_{\Sigma_g} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(g) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}|_{\Sigma_d} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(d).$$

sont définies de la manière suivante :  $\mathcal{L}_i(g)$  (resp.  $\mathcal{L}_i(d)$ ) est égal au sous-système local des solutions  $y$  de  $\widehat{\nabla}$  sur  $\Sigma_g$  (resp.  $\Sigma_d$ ) tel que  $y$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ a_i e^{i\theta}$  (resp.  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_- a_i e^{i\theta}$ ).

Considérons le cas de la graduation à gauche (le cas à droite étant analogue). Cette définition définit bien une graduation de  $\mathcal{L}|_{\Sigma_g}$  par des sous-systèmes locaux de rang 1 car on a les

**LEMME 3.1.3.** *L'espace  $\mathcal{L}_i(g)$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension 1.*

**LEMME 3.1.4.** *On a l'égalité  $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{L}_i(g) = \mathcal{L}|_{\Sigma_g}$ .*

Supposons ces deux lemmes et leur analogue pour  $\mathcal{L}_i(d)$ . Il nous reste à voir que sur  $\Sigma^+$ , on a bien  $\mathcal{L}_i(d) \subseteq \bigoplus_{a_k \leq_d a_i} \mathcal{L}_k(g)$  (le cas de  $\Sigma^-$  se traitant de manière analogue).

En effet, si l'on considère  $y_{i,d}$  une base de  $\mathcal{L}_i(d)$  alors comme  $y_{i,d}$  est holomorphe sur  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_{-a_i} e^{i\theta}$  avant d'avoir traversé la coupure, on a bien que l'application

$$\mathcal{L}_i(d) \rightarrow \bigoplus_{j \in I} \mathcal{L}_i(g) \rightarrow \mathcal{L}_k(g)$$

sur  $\Sigma^+$  est bien nulle pour  $a_k >_d a_i$ . □

Donnons la preuve des lemmes 3.1.3 et 3.1.4.

**DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1.3.** Sur l'ouvert connexe, simplement connexe  $\mathcal{U} := \mathbf{C} - \bigcup_{i \in I} \mathbf{R}_{+a_i} e^{i\theta}$ , l'espace des solutions de  $\widehat{\nabla}$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Notons  $H_j$  le sous-espace des solutions de  $\widehat{\nabla}$  sur  $\mathcal{U}$  holomorphes en  $a_j$ . Comme  $R_j$  est de rang 1 à valeurs propres dans  $\mathbf{C} - \mathbf{Z}^*$ , on a  $\dim(H_j) = n - 1$ . D'où  $\dim(\bigcap_{j \neq i} H_j) \geq 1$ .

Comme  $R_i$  est non résonant, une solution de  $\widehat{\nabla}$  au voisinage de  $a_i$  est de la forme  $\lambda y_i$  ( $\lambda \in \mathbf{C}$ ) plus une fonction holomorphe en  $a_i$ , où  $y_i$  désigne une solution non holomorphe de  $\widehat{\nabla}$  (en particulier non nulle) au voisinage de  $a_i$ .

Par l'absurde, supposons que  $\dim(\bigcap_{j \neq i} H_j) > 1$ . Alors en considérant une combinaison linéaire de deux solutions indépendantes, on montre qu'il existe une solution  $s$  non nulle holomorphe en  $a_k$  pour tout  $k \in I$ . La fonction  $s$  est donc une fonction entière, c'est-à-dire que la monodromie de  $s$  autour du pôle à l'infini est triviale. Or le résidu de  $\widehat{\nabla}$  en l'infini est égal à  $-R = -\sum_{i \in I} R_i$  et n'a donc pas de valeur propre entière d'après la condition générique (2) de 3.1.1. Comme la monodromie locale autour de l'infini a le même polynôme caractéristique<sup>1</sup> que  $e^{-2i\pi R}$  (voir [Del70] corollaire 1.17.2 p.54 et remarque qui suit), on en déduit que la monodromie locale est de noyau trivial, donc  $s = 0$ , ce qui est absurde.

Donc  $\bigcap_{j \neq i} H_j$  est de dimension 1, engendré par une solution non holomorphe en  $a_i$  et on a bien par définition  $\bigcap_{j \neq i} H_j = \mathcal{L}_i(g)$ . □

**DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1.4.** Notons  $s_i$  une base de  $\mathcal{L}_i(g)$ . Alors on montre que  $(s_1, \dots, s_n)$  est une base de  $\mathcal{L}_{|\Sigma_g}$  car c'est une famille libre à  $n$  éléments. En effet, si  $\sum_{k \in I} c_k s_k(z) = 0$  pour certains  $c_k \in \mathbf{C}$ , alors pour  $z$  au voisinage de  $a_i$ , on a  $c_i s_i(z) + (\text{holomorphe en } a_i) = 0$ , donc  $c_i = 0$ . □

**REMARQUE 3.1.5.** On peut affiner la condition générique (2) en "la matrice  $R = \sum_{i \in I} R_i$  n'admet pas de valeur propre dans  $\mathbf{N}$ ". C'est la condition (ii) de [BJL81] p.694 alors que la condition (2) correspond à la condition (ii'). Bien que tous les résultats que nous énonceront ci-dessous seront presque tous vrais dans le cas raffiné, nous avons préféré exposer sous la condition plus forte (2) car elle simplifie techniquement un certain nombre de preuve (principalement à cause de la proposition 2 p.697 de [BJL81]).

**3.1.3. Connexions régulières avec repère et systèmes gradués avec repère.** On donne ici la version avec repère de la proposition 3.1.2 associant à une connexion régulière un système gradué pour certains choix.

---

1. Ici, comme on ne suppose pas  $R$  non résonant, à priori la monodromie locale n'est pas conjuguée à  $e^{-2i\pi R}$  comme dans [Del70] corollaire 5.6 p.96.

3.1.3.1. *Repère pour les connexions régulières.* Soit  $\hat{\nabla}$  une connexion régulière pour les données du type de celles de 3.1.2.

DÉFINITION 3.1.6. Un *repère* d'une connexion régulière  $\hat{\nabla}$  est la donnée d'un isomorphisme

$$\varphi : V \rightarrow \mathbf{C}^n,$$

tel que les matrices  $R'_i = \text{Mat}_\varphi(R_i) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  définies par les diagrammes

$$(3.1.a) \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{C}^n \\ R_i \downarrow & & \downarrow R'_i \\ V & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{C}^n \end{array}$$

soient de la forme  $R'_i = \alpha_i \otimes e_i$  pour des formes linéaires  $\alpha_i \in \text{Hom}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base *canonique* de  $\mathbf{C}^n$ .

LEMME 3.1.7. *Une connexion régulière peut toujours être munie d'un repère.*

DÉMONSTRATION. En effet, si  $\varphi : V \simeq \mathbf{C}^n$  désigne un isomorphisme quelconque de  $V$  avec  $\mathbf{C}^n$ , alors les matrices  $R'_i$  sont de rang 1 donc s'écrivent comme le produit d'un vecteur colonne puis d'un vecteur ligne, c'est-à-dire que l'on a  $R'_i = \alpha_i \otimes e_i$  avec  $e_i \in \mathbf{C}^n$  et  $\alpha_i \in \text{Hom}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ .

LEMME 3.1.8. *Les  $e_i$  précédents forment une base de  $\mathbf{C}^n$ .*

On en déduit donc qu'on peut changer l'isomorphisme  $\varphi$  pour que  $(e_1, \dots, e_n)$  soit la base canonique de  $\mathbf{C}^n$  et définissent bien un repère de  $\hat{\nabla}$ .  $\square$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1.8. Par l'absurde, supposons que les  $e_i$  ne forment pas une base de  $\mathbf{C}^n$ . On considère alors une sous-famille libre maximale de  $(e_1, \dots, e_n)$  qui, quitte à réordonner les indices, est de la forme  $(e_1, \dots, e_k)$  avec  $k < n$ . On complète cette famille en une base  $\mathcal{B} := (f_1, \dots, f_n)$  de  $\mathbf{C}^n$  (avec  $f_i := e_i$  pour  $i \leq k$ ). Si l'on note  $(f^1, \dots, f^n)$  la base duale de  $\mathcal{B}$ , alors on a

$$f^n R' = f^n \sum_{i \in I} R'_i = \sum_{i \in I} f^n e_i \cdot \alpha_i = 0,$$

car  $e_i$  appartient à l'espace engendré par les  $f_i$  avec  $i \leq k$  et  $f^n f_i = 0 \in \mathbf{C}$  pour  $i \neq n$ . Donc 0 est valeur propre de  ${}^t R'$ . Donc 0 est valeur propre de  $R'$  (grâce à la relation classique reliant les polynômes caractéristiques de  $R'$  et de  ${}^t R'$ ). Cela est absurde à cause de la condition (2) de 3.1.1.  $\square$

3.1.3.2. *Système gradué associé.* On peut étendre la proposition 3.1.2 associant à toute connexion régulière un système gradué aux versions avec repère.

PROPOSITION 3.1.9. *Pour tout choix :*

- (1) d'un angle admissible  $\theta$ ,
- (2) d'un  $t \in T$ ,

on peut associer à toute connexion régulière munie d'un repère un système gradué avec repère.

Le choix de l'angle admissible est équivalent aux choix de la direction admissible d'angle  $\theta$  et de la branche du logarithme sur  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_- e^{i\theta}$  donnée par l'argument compris dans  $]\theta - \pi; \theta + \pi[$ . La branche du logarithme que l'on prend sur  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\theta}$  est le prolongement de la précédente le long de  $\gamma^-$ , c'est-à-dire celle donnée par l'argument compris dans  $]\theta - 2\pi; \theta[$ . Notons  $\mathcal{U}(a, \nu)$  la tanche  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ a e^{i\nu}$  d'un revêtement



universel de  $\mathbf{C} - \{a\}$  entre les feuilletts d'angle  $\nu - 2\pi$  et  $\nu$ . Autrement dit, on prend  $\mathcal{U}(a, \nu) := \mathbf{C} - \mathbf{R}_+ a e^{i\nu}$  plus le choix de la branche du logarithme d'angles dans  $] \nu - 2\pi ; \nu[$ . Avec ces notations, on a donc  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\theta} = \mathcal{U}(0, \theta)$  et  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_- e^{i\theta} = \mathcal{U}(0, \theta + \pi)$ .

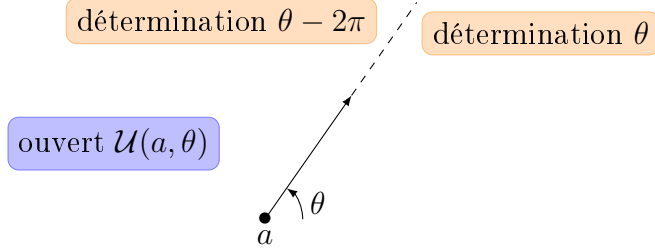


FIGURE 3. Branche du logarithme sur l'ouvert  $\mathcal{U}(a, \theta)$

DÉMONSTRATION. On a déjà défini dans la démonstration de la proposition 3.1.2 un système gradué  $\mathcal{L}$  associé à la connexion régulière  $\widehat{\nabla}$  grâce au choix d'une direction admissible. On pose  $\varphi : V \simeq \mathbf{C}^n$  un repère de  $\widehat{\nabla}$ .

D'après la définition de  $\mathcal{L}$  comme système local des solutions de  $\widehat{\nabla}$ , se donner un repère en  $(p, p') \in C_d \times C_{-d}$  de  $\mathcal{L}$  correspond d'après le théorème de Cauchy holomorphe, à se donner deux bases préférées  $\widehat{Y}_g$  et  $\widehat{Y}_d$  de  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(g)$  et  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(d)$  respectivement vérifiant une condition de compatibilité correspondant à la commutativité du diagramme (1.3.a).

On va définir ci-dessous des bases locales canoniques en les  $a_i$

$$\Psi_{g,i} : \mathcal{U}(a_i, \theta) \rightarrow G \quad \text{et} \quad \Psi_{d,i} : \mathcal{U}(a_i, \theta + \pi) \rightarrow G$$

pour tout  $i \in I$  puis les utiliser pour définir deux bases graduées préférées  $Y_g^*$  et  $Y_d^*$  sur  $\Sigma_g$  et  $\Sigma_d$  respectivement. Les  $Y^*$  seront définis grâce à une condition de normalisation exprimée à partir des  $\Psi_i$ . Enfin, on pourra exprimer toute base graduée à gauche  $\widehat{Y}_g$  ou à droite  $\widehat{Y}_g$  par

$$\widehat{Y}_g = Y_g^* \cdot t_g \quad \widehat{Y}_d = Y_d^* \cdot t_d$$

avec  $t_g, t_d \in T$ . On montrera enfin que  $t_g = t_d$  nécessairement.

Notons  $\bigoplus_{i \in I} V_i$  la graduation de  $V$  induite par la graduation  $\bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}$  via  $\varphi^{-1}$ . De la condition (1) p.52, on déduit que les résidus  $R_i$  sont non résonants, c'est-à-dire que les valeurs propres de  $R_i$  ne diffèrent pas qu'un entier non nul. D'où, en utilisant un résultat classique (voir par exemple [Sab02] chapitre II proposition 2.11 et 2.13 p.93-94), il existe des uniques bases de solution

$$\Psi_{g,i} : \mathcal{U}(a_i, \theta) \rightarrow G \quad \text{et} \quad \Psi_{d,i} : \mathcal{U}(a_i, \theta + \pi) \rightarrow G \quad \text{pour } i \in I$$

de  $\widehat{\nabla}$  asymptotiques à  $(z - a_i)^{R_i}$  en  $z \rightarrow a_i$ .

Notons  $K_i$  le noyau de  $R_i$ . Alors grâce à la condition générique (1) p.52, on a  $V = V_i \oplus K_i$ , car  $V_i$  est égal à l'espace propre de  $R_i$  pour la valeur propre  $\lambda_i$ . La fonction  $\Psi_{g/d,i}(k)$  est holomorphe en  $a_i$  pour tout  $k \in K_i$  alors que la fonction  $\Psi_{g/d,i}(v_i)$  non holomorphe en  $a_i$  pour tout  $v_i \in V_i$ , asymptotique à  $(z - a_i)^{\lambda_i} \cdot v_i$ .

Les bases  $\Psi_{g,i}$  ( $i \in I$ ) permettent de définir une base canonique de  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(g)$  pour le seul choix de l'angle admissible  $\theta$  (et de même pour le coté droit). En effet, on pose  $Y_g^* : \Sigma_g \rightarrow G$  la section de  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(g)$  telle que pour tout  $v_i \in V_i$ , la fonction  $Y_g^*(v_i) - \Psi_{g,i}(v_i)$  se prolonge en une fonction holomorphe en  $a_i$ . Concrètement, cela signifie que pour tout  $v_i \in V_i$ , la fonction  $Y_g^*(v_i) : \Sigma_g \rightarrow \mathbf{C}^n$  est une solution de  $\widehat{\nabla}$  holomorphe sur  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ a_i e^{i\theta}$ . De plus, elle est asymptotique à  $(z - a_i)^{\lambda_i} \cdot v_i$  en

$z \rightarrow a_i$  modulo les fonctions holomorphes en  $a_i$ , c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions holomorphes  $F$  et  $H$  en  $a_i$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  telles que

$$Y_g^*(v_i)(z) = F(z) \cdot (z - a_i)^{\lambda_i} \cdot v_i + H(z) \cdot v_i \quad \text{avec } F(a_i) = \text{id} \in G,$$

pour tout  $z \in \Sigma_g$  au voisinage de  $a_i$ . De même, on définit  $Y_d^* : \Sigma_d \rightarrow G$  comme la section de  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(d)$  telle que pour tout  $v_i \in V_i$ , la fonction  $Y_d^*(v_i) - \Psi_{d,i}(v_i)$  se prolonge en une fonction holomorphe en  $a_i$ .

Une base graduée à gauche  $\hat{Y}_g$  de  $\hat{\mathcal{L}}$  est alors nécessairement de la forme  $Y_g^* \cdot t_g$  pour un certain  $t_g \in T$ . Cela correspond donc au choix :

- (1) d'un  $t_g \in T$ ,
- (2) de la branche du logarithme sur  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\theta}$  donnée par les angles  $]\theta - 2\pi ; \theta[$ .

De même à droite, une base graduée  $\hat{Y}_d$  est nécessairement de la forme  $Y_d^* \cdot t_d$  pour un certain  $t_d \in T$ . Cela correspond donc au choix :

- (1) d'un  $t_g \in T$ ,
- (2) de la branche du logarithme sur  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_- e^{i\theta}$  donnée par les angles  $]\theta - \pi ; \theta + \pi[$ .

Remarquez que les deux branches du logarithmes sont le prolongement l'une de l'autre via le chemin  $\gamma^-$ .

LEMME 3.1.10. *Les bases précédentes sont compatibles via le diagramme (1.3.a) si et seulement si  $t_g = t_d \in T$ .*

On en déduit alors immédiatement que le choix d'un repère pour un système gradué associé à la connexion  $\hat{\nabla}$  correspond au choix

- (1) d'un  $t = t_g = t_d \in T$ ,
- (2) de l'angle admissible  $\theta$  permettant de définir les deux branches du logarithme précédentes.

□

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1.10. Partons de la base de solutions  $Y_g^*$  sur  $\Sigma_g$ . Alors son prolongement le long de  $\gamma^-$  est de la forme  $Y_g^* = Y_d^* \cdot C^-$ . Les coefficients  $c_{i,j}$  de la matrice  $C^- \in G$  peuvent être calculé en regardant l'asymptotique du prolongement de  $Y_g^*$  en les  $a_j$  sur  $\Sigma_d$ . On a immédiatement  $c_{i,j} = 0$  si  $a_i <_d a_j$  car  $Y_g^*(v_i)$  est holomorphe en  $a_j$  pour tout  $a_j >_d a_i$ . On a aussi  $c_{i,i} = 1$  car  $Y_g^*(v_i)$  et  $Y_d^*(v_i)$  ont même asymptotique en  $a_i$  (grâce à la compatibilité du choix des branches du logarithme). Donc  $C^- \in U_-$  et les bases  $Y_g^*$  et  $Y_d^*$  sont compatibles via le chemin  $\gamma^-$ . Si l'on a  $\hat{Y}_g = Y_g^* \cdot t_g$  et  $\hat{Y}_d = Y_d^* \cdot t_d$  avec  $t_g, t_d \in T$  alors  $\hat{Y}_g = \hat{Y}_d \cdot t_d C^- t_g^{-1}$ . Donc comme  $C^- \in U_-$ , on a bien que les repères sont compatibles, c'est-à-dire  $t_d C^- t_g^{-1} \in U_-$  si et seulement si  $t_g = t_d$ . □

REMARQUE 3.1.11. Notons

$$N^* = - \sum_{i \in I} e^{-i\pi\lambda_i} \Gamma(-\lambda_i) \text{id}_i,$$

qui est un élément de  $T$  car  $\lambda_i \notin \mathbf{Z}$ , où  $\lambda_i$  désigne l'unique valeur propre non entière de  $R_i$ . On verra à la section 3.2 théorème 3.2.4 qu'il faut prendre cette normalisation  $t = N^*$  coté régulier pour que la base du système gradué avec repère associée à la connexion régulière  $\hat{\nabla}$  corresponde à celle du système gradué avec repère coté Stokes (pour le choix de  $t = 1 \in T$ ) par la transformée de Laplace.

### 3.2. Transformée de Laplace

On reprend les notations de la section 3.1.1.

Comme expliqué dans l'introduction de ce chapitre, le but de ce chapitre est de définir la transformée de Laplace  $(\mathfrak{L}_\theta)_{\theta \in \mathbf{R}}$  qui est une famille continue d'applications. Cette famille induira un isomorphisme entre les systèmes gradués  $\mathcal{L}$  et  $\hat{\mathcal{L}}$  respectivement associés aux connexions irrégulière  $\nabla$  et régulière  $\hat{\nabla}$  suivant les propositions 1.4.8 du chapitre 1 et 3.1.9 du chapitre 3 respectivement. Pour le coté irrégulier, on fait le choix d'un angle admissible  $\eta \in \mathbf{R}$  et de la normalisation canonique  $t = \text{id} \in T$ . (On rappelle qu'ici, on a  $H = T = K$  car on suppose  $A \in \mathfrak{t}_{\text{reg}}$ ). Pour le coté régulier, on fait le choix de l'angle admissible  $\eta + \pi \in \mathbf{R}$  et de la normalisation  $t = N^* \in T$ , où

$$N^* = - \sum_{i \in I} e^{-i\pi\lambda_i} \Gamma(-\lambda_i) \in T,$$

avec  $\lambda_i \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}$  l'unique valeur propre non nulle de  $R_i$ .

REMARQUE 3.2.1. On aurait pu choisi n'importe quel autre angle admissible de la forme  $\eta + k\pi$  avec  $k$  un entier impair. Dans ce cas, il faut changer la normalisation  $t = N^*$  en

$$- \sum_{i \in I} e^{-i\pi k \lambda_i} \Gamma(-\lambda_i).$$

La transformée de Laplace d'angle  $\theta \in \mathbf{R}$  d'une fonction  $\zeta \mapsto y(\zeta)$  est définie par

$$\mathfrak{L}_\theta(y) : z \mapsto \frac{1}{2i\pi z} \int_{\gamma_\theta^+} y(\zeta) e^{-\zeta/z} d\zeta,$$

où  $\gamma_\theta^+$  est le chemin à valeurs dans  $\widetilde{\mathbf{C} - \overline{D}}$  issu de l'infini dans la direction  $\theta - 2\pi$  allant au voisinage du disque  $D$  puis parcourant un cercle dans le sens direct, et repartant à l'infini dans la direction  $\theta$ , où  $D$  est un grand disque contenant tous les pôles  $a_i$  ( $i \in I$ ) à distance finie de la connexion fuchsienne  $\hat{\nabla}$ .

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

THÉORÈME (Théorème 3.2.4). *La transformée de Laplace induit un isomorphisme de systèmes gradués avec repère  $\mathcal{L} \simeq \hat{\mathcal{L}}$  associés à  $\nabla$  et à  $\hat{\nabla}$  respectivement lorsque*

- (1) *l'on choisit l'angle admissible  $\eta \in \mathbf{R}$  pour  $\mathcal{L}$  et l'angle admissible  $\eta + \pi \in \mathbf{R}$  pour  $\hat{\mathcal{L}}$ .*
- (2) *l'on fait le choix de  $t = \text{id} \in T$  pour  $\mathcal{L}$  et  $t = N^* \in T$  pour  $\hat{\mathcal{L}}$ .*

#### 3.2.1. Théorème de correspondance entre les bases par Fourier-Laplace.

On considère les données de la section 3.1.1. Soit  $\nabla$  une connexion irrégulière avec repère

$$\nabla = d - \left( \frac{A}{z^2} + \frac{R}{z} \right) dz, \quad \varphi : V \simeq \bigoplus_{i \in I} V_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} \mathbf{C}$$

sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ , avec  $A = \sum_{i \in I} a_i \text{id}_i$  et  $R \in \mathfrak{g}$  vérifiant les conditions génériques suivantes :

- (1) la partie diagonale  $\Lambda = \delta(R) \in \mathfrak{t}$  de  $R$  est à valeurs propres non entières,
- (2) l'endomorphisme  $R \in \mathfrak{g}$  est à valeurs propres non entières.

On note  $\lambda_i$  ( $i \in I$ ) les valeurs propres de  $\delta(R)$ , que l'on appelle souvent les *exposants de la monodromie formelle*. On a donc  $\delta(R) = \sum_{i \in I} \lambda_i \text{id}_i$ .

Soit  $\hat{\nabla}$  la connexion régulière avec repère

$$\hat{\nabla} = d - \sum_{i \in I} \frac{R_i}{z - a_i} dz, \quad \varphi : V \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^n$$

sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ , où  $R_i = \text{id}_i R \in \mathfrak{g}$ . Les conditions génériques sur  $R$  sont équivalentes aux conditions

- (1) les endomorphismes  $R_i$  sont diagonalisables de rang 1 à valeurs propres 0 de multiplicité  $n - 1$  et  $\lambda_i$  non entière de multiplicité 1,
- (2) l'endomorphisme  $\sum_{i \in I} R_i \in \mathfrak{g}$  est à valeurs propres non entières.

REMARQUE 3.2.2. La motivation de considérer la connexion  $\widehat{\nabla}$  vient de la remarque 1.4.4. En effet, si l'on note  $w = z^{-1}$  la coordonnée au voisinage de l'infini, on a

$$\nabla_{\frac{d}{dw}} = \frac{d}{dw} + \left( A + \frac{R}{w} \right).$$

En multipliant à gauche par  $w$ , on trouve l'opérateur matriciel  $w\partial_w + wA + R$ . Sa transformée de Borel formelle est alors l'opérateur

$$\partial_\zeta(-\zeta \cdot) + \partial_\zeta A + R = (\partial_\zeta - R(\zeta - A)^{-1})(A - \zeta) = \widehat{\nabla}_{\frac{d}{d\zeta}} \cdot (A - \zeta).$$

La multiplication à droite par le terme  $A - \zeta$  peut paraître un peu mystérieuse. Cependant, lorsque l'on se place dans le cadre plus général des  $\mathcal{A}_1$ -modules (comme dans le chapitre XII de [Mal91]), alors une solution de  $\nabla$  correspond à une microsolution de  $\widehat{\nabla}$ . La multiplication à gauche d'une microsolution<sup>2</sup> de  $\widehat{\nabla}$  par  $A - \zeta$  donne une solution de  $\widehat{\nabla}$ .

On pose  $D$  un disque ouvert contenant tous les pôles  $a_i$  à distance finie de  $\widehat{\nabla}$ . Soit  $y$  une solution de  $\widehat{\nabla}$  définie sur un revêtement universel de  $\mathbf{C} - \overline{D}$ . Pour toute direction admissible  $d$  pour la famille  $(a_i)_{i \in I}$  d'angle  $\theta$ , on définit la *transformée de Laplace d'angle  $\theta$*  comme la fonction

$$\mathfrak{L}_\theta(y) : z \mapsto \frac{1}{2i\pi z} \int_{\gamma_\theta^+} y(\xi) e^{-\xi/z} d\xi,$$

où  $\gamma_\theta^+$  est le chemin à valeurs dans  $\widetilde{\mathbf{C} - \overline{D}}$  issu de l'infini dans la direction  $\theta - 2\pi$  allant au voisinage du disque  $D$  puis parcourant un cercle dans le sens direct, et repartant à l'infini dans la direction  $\theta$ . L'intégrale est convergente pour tout  $z$  tel que  $\Re(z e^{-i\theta}) > 0$  car les solutions  $y$  de  $\widehat{\nabla}$  sont à croissance sous-exponentielle à l'infini.

On remarque que pour des angles  $\theta$  et  $\theta'$  voisins, les fonctions  $\mathfrak{L}_\theta(y)$  et  $\mathfrak{L}_{\theta'}(y)$  coïncident sur leur domaine de définition (il suffit de déformer le contour de l'intégrale et d'utiliser le fait que  $y$  est à croissance exponentielle à l'infini). Donc la famille  $(\mathfrak{L}_\theta(y))_{\theta \in \mathbf{R}}$  définit une fonction sur un revêtement universel de  $\mathbf{C}^*$ . On appellera abusivement la *transformée de Laplace* de  $y$  cette fonction.

THÉORÈME 3.2.3. *La transformée de Laplace induit un isomorphisme de systèmes gradués  $\mathcal{L} \simeq \widehat{\mathcal{L}}$  associés à  $\nabla$  et à  $\widehat{\nabla}$  respectivement, où l'on a choisit une direction admissible  $d$  pour définir  $\mathcal{L}$  et la direction opposée  $-d$  pour définir  $\widehat{\mathcal{L}}$ .*

Ce résultat est un cas particulier des théorèmes 2.9, 1.2 et 2.1 de [Mal91] chapitre XII. Voir aussi [BJL81] §5.2 théorème 2 p.714.

Notons  $N^* \in T$  l'endomorphisme défini par

$$N^* = - \sum_{i \in I} e^{-i\pi\lambda_i} \Gamma(-\lambda_i) \text{id}_i \in T.$$

2. Pour être précis, on parle plutôt d'une microsolution d'un  $\mathcal{A}_1$ -module et pas d'un fibré à connexion. Voir [Mal91] chapitre II §3 p.30. Pour étendre la terminologie aux fibrés à connexion, on peut par exemple composer à droite le foncteur "microsolutions" avec le foncteur "extension minimale" qui à un fibré à connexion associe un  $\mathcal{D}$ -module.

Cet endomorphisme est bien dans  $T$  car  $\lambda_i \notin \mathbf{Z}$  donc  $\Gamma(-\lambda_i) \neq 0$ . Nous allons montrer le résultat plus précis suivant.

**THÉORÈME 3.2.4.** *La transformée de Laplace induit un isomorphisme de systèmes gradués avec repère  $\mathcal{L} \simeq \hat{\mathcal{L}}$  associés à  $\nabla$  et à  $\hat{\nabla}$  respectivement lorsque*

- (1) *l'on choisit l'angle admissible  $\eta \in \mathbf{R}$  pour  $\mathcal{L}$  et l'angle admissible  $\eta + \pi \in \mathbf{R}$  pour  $\hat{\mathcal{L}}$ .*
- (2) *l'on fait le choix de  $t = \text{id} \in T$  pour  $\mathcal{L}$  et  $t = N^* \in T$  pour  $\hat{\mathcal{L}}$ .*

Ce théorème traduit donc le problème de calculer les matrices de Stokes (voir section 1.3.6 du chapitre 1) de la connexion irrégulière  $\nabla$  en un problème équivalent de calculer des matrices de connexions de la connexion régulière  $\hat{\nabla}$ . On donnera la correspondance algébrique explicite entre les matrices de Stokes de  $\nabla$  et les coefficients de connexion de  $\hat{\nabla}$  dans le théorème 3.3.4.

### 3.2.2. Démonstration du théorème de correspondance par Fourier-Laplace.

Dans cette section, nous allons montrer le théorème 3.2.4.

3.2.2.1. *Démonstration du théorème 3.2.4.* Tout d'abord, on montre que la transformée de Laplace envoie bien les solutions de  $\hat{\nabla}$  sur les solutions de  $\nabla$ , donc définit bien un morphisme de systèmes locaux

$$(\mathfrak{L}_\theta)_{\theta \in \mathbf{R}} : \hat{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{L}.$$

**LEMME 3.2.5.** *La transformée de Laplace  $\mathfrak{L}_\theta(y)$  d'une solution  $y$  de  $\hat{\nabla}$  est une solution de  $\nabla$  définie sur l'ouvert  $\Re(z e^{-i\theta}) > 0$ .*

Maintenant, on doit montrer que la transformée de Laplace est bien un morphisme de systèmes gradués avec repère, c'est-à-dire envoie  $\hat{\mathcal{L}}_i(g)$  (resp.  $\hat{\mathcal{L}}_i(d)$ ) sur  $\mathcal{L}_i(g)$  (resp.  $\mathcal{L}_i(d)$ ) et est compatible avec les repères. En revenant à la définition de  $\hat{\mathcal{L}}$  et de  $\mathcal{L}$  comme systèmes gradués à partir des connexions  $\hat{\nabla}$  et  $\nabla$ , cela correspond à montrer que la transformée de Laplace des bases de solutions préférées  $\hat{Y}_g$  et  $\hat{Y}_d$  de  $\hat{\nabla}$  sont les bases de solutions préférées  $\Phi_g$  et  $\Phi_d$  de  $\nabla$ . Avec nos choix de  $t = N^* \in T$  et d'angle admissible  $\eta + \pi \in \mathbf{R}$ , on a

$$\hat{Y}_g = Y_g^* \cdot N^* \quad \text{et} \quad \hat{Y}_d = Y_d^* \cdot N^*$$

avec pour tout  $v_i \in V_i$ , la fonction

$$Y_g^*(v_i) : \mathcal{U}(a_i, \eta + \pi) \rightarrow \mathbf{C}^n \quad (\text{resp. } Y_d^*(v_i) : \mathcal{U}(a_i, \eta + 2\pi) \rightarrow \mathbf{C}^n)$$

est holomorphe sur  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_- a_i e^{i\eta}$  (resp. sur  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ a_i e^{i\eta}$ ) et est asymptotique à  $(\zeta - a_i)^{\lambda_i} \cdot v_i$  en  $\zeta \rightarrow a_i$  modulo les fonctions holomorphes en  $a_i$ .

Pour les choix de  $t = \text{id} \in T$  et de l'angle admissible  $\eta \in \mathbf{R}$ , on a coté irrégulier

$$\Phi_g : \mathcal{U}(0, \eta) \rightarrow G \quad (\text{resp. } \Phi_d : \mathcal{U}(0, \eta + \pi) \rightarrow G)$$

holomorphe sur  $\Sigma_g := \mathbf{C} - \mathbf{R}_- e^{i\eta}$  (resp.  $\Sigma_d := \mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\eta}$ ) et donnée par sommation de Borel-Laplace, c'est-à-dire grâce à la remarque 1.4.5 que  $\Phi_g(z)$  (resp.  $\Phi_d(z)$ ) est asymptotique à  $z^{\delta(R)} e^{-A/z}$  en  $z \rightarrow 0$  sur  $\Sigma_g$  (resp.  $\Sigma_d$ ) avec la branche du logarithme donnée par les angles  $]\eta - 2\pi; \eta[$  (resp.  $]\eta - \pi; \eta + \pi[$ ).

**PROPOSITION 3.2.6.** *On a  $\mathfrak{L}_{\eta+\pi}(\hat{Y}_g) = \Phi_g$  et  $\mathfrak{L}_{\eta+2\pi}(\hat{Y}_d) = \Phi_d$ .*

Notons  $\hat{\mathcal{U}}(\theta) := \mathbf{C} - \bigcup_{i \in I} \mathbf{R}_+ a_i e^{i\theta}$  où l'on sous-entend le choix de la branche du logarithme d'angles  $]\theta - 2\pi; \theta[$ , que l'on voit comme un ouvert du plan de coordonnée  $\zeta$ . Comme précédemment, notons  $\mathcal{U}(\theta) := \mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\theta}$  où l'on sous-entend le choix de la branche du logarithme d'angles  $]\theta - 2\pi; \theta[$ , que l'on voit comme un ouvert du plan

de coordonnée  $z$ . On peut se représenter l'action de la transformée de Laplace sur les solutions par la figure 4.

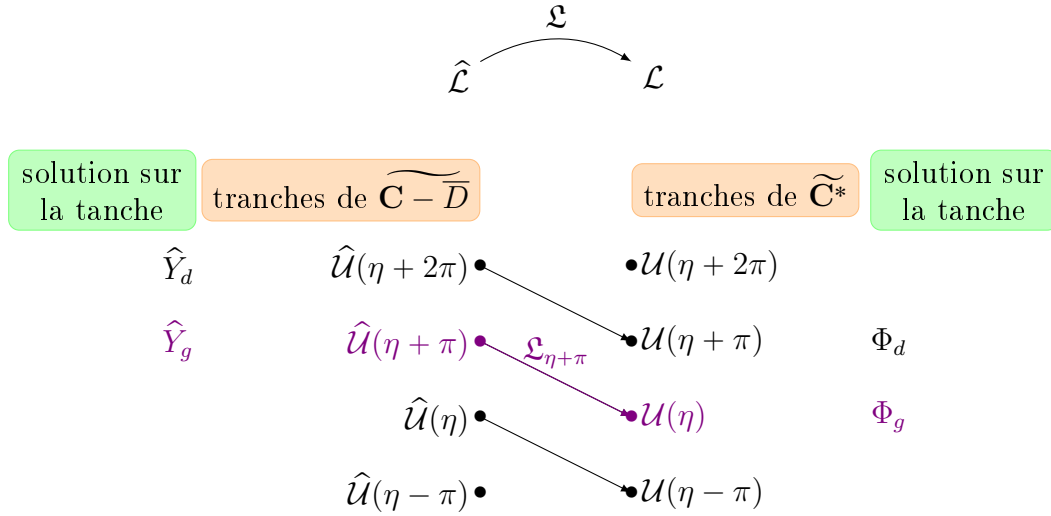


FIGURE 4. Transformée de Laplace et correspondance entre les bases

De cette dernière proposition, on en déduit bien que la transformée de Laplace induit un isomorphisme de systèmes gradués avec repère  $\hat{\mathcal{L}} \simeq \mathcal{L}$ .

3.2.2.2. *Démonstration du lemme 3.2.5.* Notons  $\Phi := \mathfrak{L}_\theta(y)$ . On calcule la dérivée  $\Phi'$  de  $\Phi$  par rapport à  $z$ . En inversant intégrale et dérivation, on obtient

$$\Phi'(z) = \frac{-1}{z} \Phi(z) + \frac{1}{2i\pi z} \int_{\gamma_\theta} \frac{\xi}{z^2} y(\xi) e^{-\xi/z} d\xi.$$

En effectuant une intégration par parties sur la second membre (en dérivant  $\xi y(\xi)$ ), on a

$$\Phi'(z) = \frac{-1}{z} \Phi(z) + \frac{-1}{2i\pi z^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\xi y(\xi) e^{-\xi/z}]_{\gamma_\theta(\varepsilon)}^{\gamma_\theta(1-\varepsilon)} + \frac{1}{2i\pi z^2} \int_{\gamma_\theta} (\xi y(\xi))' e^{-\xi/z} d\xi.$$

Le terme entre crochet est nul car  $y$  est à croissance sous-exponentielle à l'infini, donc  $|\xi y(\xi) e^{-\xi/z}| \rightarrow 0$  quand  $\xi$  tend vers l'infini dans la direction  $\theta - 2\pi$  et  $\theta$  (pour tout  $\Re(z e^{-i\theta}) > 0$ ). En développant la dérivée  $(\xi y(\xi))'$ , un des termes s'annule avec  $\frac{-1}{z} \Phi(z)$ , donc on a

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2i\pi z^2} \int_{\gamma_\theta} \xi y'(\xi) e^{-\xi/z} d\xi.$$

On utilise alors que  $y$  est solution de  $\hat{\nabla}$  pour obtenir, en inversant somme et intégrale

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2i\pi z^2} \sum_{i \in I} R_i \int_{\gamma_\theta} \frac{\xi}{\xi - a_i} y(\xi) e^{-\xi/z} d\xi.$$

Puis en écrivant la fraction  $\frac{\xi}{\xi - a_i} = 1 + \frac{a_i}{\xi - a_i}$ , on obtient en utilisant  $\sum_{i \in I} R_i = R$

$$\Phi'(z) = \frac{R}{z} \Phi(z) + \frac{1}{2i\pi z^2} \sum_{i \in I} R_i a_i \int_{\gamma_\theta} \frac{y(\xi)}{\xi - a_i} e^{-\xi/z} d\xi.$$

Reste à montrer que le dernier terme est égal à  $\frac{A}{z^2} \Phi(z)$ . Partons de la définition de  $\Phi(z)$ . En intégrant par parties (on dérive  $y(\xi)$ ), on obtient

$$\Phi(z) = \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [y(\xi) e^{-\xi/z}]_{\gamma_\theta(\varepsilon)}^{\gamma_\theta(1-\varepsilon)} + \frac{1}{2i\pi} \sum_{i \in I} R_i \int_{\gamma_\theta} \frac{y(\xi)}{\xi - a_i} e^{-\xi/z} d\xi.$$

Le terme entre crochet est nul par le même argument de croissance sous-exponentielle de  $y$ . On remarque aussi que l'on a  $AR_i = AE_{i,i}R = a_i R_i$ . Donc

$$\Phi'(z) = \frac{A}{z^2}\Phi(z) + \frac{R}{z}\Phi(z).$$

3.2.2.3. *Démonstration de la proposition 3.2.6.* Pour démontrer cette proposition, on procède en plusieurs étapes.

Tout d'abord on montre le calcul explicite suivant :

LEMME 3.2.7. *Considérons la fonction puissance  $\zeta \mapsto (\zeta - a_i)^\alpha$  sur l'ouvert  $\mathcal{U}(a_i, \theta)$  pour un certain  $\alpha \notin \mathbf{Z}$ . Alors la transformée de Laplace  $\mathfrak{L}_\theta((\zeta - a_i)^\alpha)$  est une fonction holomorphe sur le demi-plan  $\Re(z e^{-i\theta}) > 0$  identifié à un sous-espace de  $\mathcal{U}(0, \theta - \pi)$  et est égale à*

$$z \mapsto K_\alpha z^\alpha \cdot e^{-a_i/z} \quad \text{avec } K_\alpha := \frac{-e^{i\pi\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.2.7. Notons  $H_{a_i, \theta}^+$  le contour de Hankel faisant le tour dans le sens direct de la demi-droite issue de  $a$  d'angle  $\theta$  en partant de l'angle  $\theta - 2\pi$  et finissant à l'angle  $\theta$ . On a par déformation de contour que  $I := \mathfrak{L}_\theta((\zeta - a_i)^\alpha)(z)$  est égal à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi z} \int_{H_{a_i, \theta}^+} (\xi - a_i)^\alpha e^{-\xi/z} d\xi &= \frac{e^{-a_i/z}}{2i\pi} \int_{H_{0, \theta}^+} u^\alpha e^{-u/z} \frac{du}{z} \quad \text{pour } u = \xi - a_i \\ &= \frac{e^{-a_i/z}}{2i\pi} \int_{H_{0, \theta - \arg(z)}^+} (xz)^\alpha e^{-x} dx \quad \text{pour } x = u/z. \end{aligned}$$

D'où, comme  $\theta - \arg(z) \in ]3\pi/2; 5\pi/2[$ , on peut déformer le contour pour obtenir

$$I = \frac{e^{-a_i/z}}{2i\pi} \int_{-\varepsilon + i\infty}^{-\varepsilon - i\infty} (xz)^\alpha e^{-x} dx \quad \text{pour } \varepsilon > 0.$$

En effet, on utilise un argument classique utilisant le théorème de Cauchy en remarquant que sur un arc de cercle de rayon  $R$  (compris dans le domaine de définition), l'intégrande est majorée par  $cste \cdot R^\alpha e^{-R}$  qui tend vers 0 quand  $R \rightarrow +\infty$ . On a  $\arg(u) \in ]\theta - 2\pi; \theta[$ , donc on prend les déterminations du logarithme pour avoir  $\arg(x) \in ]\pi/2; 3\pi/2[$  et  $\arg(z) \in ]\theta - 5\pi/2; \theta - 3\pi/2[$ . On a alors bien  $u^\alpha = (xz)^\alpha = x^\alpha z^\alpha$ . On en déduit

$$I = \frac{z^\alpha \cdot e^{-a_i/z}}{2i\pi} \int_{-\varepsilon + i\infty}^{-\varepsilon - i\infty} x^\alpha e^{-x} dx.$$

Reste donc à calculer la constante  $K_\alpha := \frac{1}{2i\pi} \int_{-\varepsilon + i\infty}^{-\varepsilon - i\infty} x^\alpha e^{-x} dx$  pour  $\arg(x) \in ]\pi/2; 3\pi/2[$ . On effectue le changement de variable  $y = e^{-i\pi} x$  de manière à avoir  $\arg(y) \in ]-\pi/2; \pi/2[$  qui est la détermination principale de l'argument sur  $\Re(y) > 0$ . On obtient

$$K_\alpha = \frac{-e^{i\pi\alpha}}{2i\pi} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} y^\alpha e^y dy \quad \text{pour } \varepsilon > 0.$$

Or, on peut montrer en utilisant la transformée de Laplace que l'on a

$$(3.2.a) \quad \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} y^\alpha e^y dy,$$

d'où

$$K_\alpha = \frac{-e^{i\pi\alpha}}{\Gamma(-\alpha)},$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Esquissons tout de même comment on peut obtenir la formule (3.2.a) pour la fonction Gamma réciproque. On a pour  $\beta \notin \mathbf{Z}$

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt.$$

En effectuant le changement de variable  $u = t/s$ , on obtient

$$\frac{\Gamma(\beta)}{s^\beta} = \int_0^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-su} du.$$

qui peut donc être vu comme la transformée de Laplace de la fonction  $u \mapsto u^{\beta-1}$ . En utilisant l'expression de la transformée de Laplace inverse, on obtient donc

$$u^{\beta-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{\Gamma(\beta)}{s^\beta} e^{su} ds,$$

d'où en faisant le changement de variable  $t = us$ ,

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} t^{-\beta} e^t dt.$$

En appliquant cette formule pour  $\beta = -\alpha$ , on retrouve bien l'équation (3.2.a) □

On utilise ensuite une variante du lemme de Watson :

LEMME 3.2.8. *Soit  $y : \mathcal{U}(a, \theta) \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction de la forme  $y(\zeta) = f(\zeta) \cdot (\zeta - a)^\alpha$  avec*

$$f(\zeta) = \sum_{k \geq 0} f_k (\zeta - a)^k, \quad f_k \in \mathbf{C}$$

*une fonction analytique au voisinage de  $a$  et  $\alpha \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}$ . Alors la transformée de Laplace  $\mathfrak{L}_\theta(y)$  d'angle  $\theta$  admet le développement asymptotique<sup>3</sup>*

$$\mathfrak{L}_\theta(y)(z) \sim \sum_{k \geq 0} \frac{-e^{i\pi\alpha}}{\Gamma(-\alpha - k)} f_k z^{\alpha+k} e^{-a/z},$$

*quand  $z \rightarrow 0$  dans le demi-plan  $\Re(z e^{-i\theta}) > 0$  vu comme sous-ensemble de  $\mathcal{U}(0, \theta - \pi)$ .*

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.2.8. L'asymptotique de  $\mathfrak{L}_\theta(y)$  est bien obtenue par intégration terme à terme de l'asymptotique de  $y$ , grâce au lemme 3.2.7 précédent.

Soit  $K \in \mathbf{N}$ . On considère le terme d'erreur

$$y(\zeta) - \sum_{k=0}^K f_k (\zeta - a)^{\alpha+k} = g(\zeta) (\zeta - a)^{\alpha+K+1}$$

avec  $g$  holomorphe en 0. Sa transformée de Laplace est donnée par

$$\frac{1}{2i\pi z} \int_{\gamma_\theta^+} g(\zeta) (\zeta - a)^{\alpha+K+1} e^{-\zeta/z} d\zeta = \frac{z^{\alpha+K+1} e^{-a/z}}{2i\pi} \int_{H_{0, \theta - \arg(z)}^+} g(a + zx) x^\alpha e^{-x} dx,$$

après le changement de variable  $x = (\zeta - a)/z$  et une déformation de contour car la fonction  $g$  est à croissance sous-exponentielle à l'infini. En utilisant de nouveau le fait que la fonction  $g$  est à croissance sous-exponentielle à l'infini, on montre que l'on peut la dominer par une fonction intégrable. En utilisant le théorème de convergence

3. Voir [LR16] définition 1.1.1 p.2 pour une définition précise de développement asymptotique.



dominé, on en déduit que la fonction  $z \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{H_{0,\theta-\arg(z)}^+} g(a+zx)x^\alpha e^{-x} dx$  est holomorphe sur le demi-plan  $\Re(z e^{-i\theta}) > 0$  et on peut bien la majorer par une fonction constante sur tout sous-secteur propre de  $\Re(z e^{-i\theta}) > 0$ .  $\square$

Soit  $v_i \in V_i$ . Tout d'abord, comme  $Y_g^*(v_i) : \mathcal{U}(a_i, \eta + \pi) \rightarrow \mathbf{C}^n$  est holomorphe en  $a_j$  pour tout  $j \neq i$ , on a

$$\mathfrak{L}_{\eta+\pi}(Y_g^*(v_i)) = \frac{1}{2i\pi z} \int_{H_{a_i, \eta+\pi}^+} Y_g^*(v_i)(\zeta) e^{-\zeta/z} d\zeta,$$

où  $H_{a,\theta}^+$  désigne un contour de Hankel faisant le tour dans le sens direct de la demi-droite issue de  $a$  de direction  $\theta$  en partant de la détermination de l'argument  $\theta - 2\pi$  et finissant en  $\theta$ . La différence  $Y_g^*(v_i) - \Psi_{g,i}(v_i)$  est une fonction holomorphe en  $a_i$  et elle se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de la demi-droite issue de  $a_i$  d'angle  $\eta + \pi$  (car c'est une solution de  $\hat{\nabla}$  et que la demi-droite ne passe par aucun autre pôle de  $\hat{\nabla}$ ). On en déduit que

$$\mathfrak{L}_{\eta+\pi}(Y_g^*(v_i)) = \frac{1}{2i\pi z} \int_{H_{a_i, \eta+\pi}^+} \Psi_{g,i}(v_i)(\zeta) e^{-\zeta/z} d\zeta,$$

car l'intégrale de la fonction holomorphe est nulle par le théorème de Cauchy. Notons  $N_i \in \mathbf{C}^*$  tel que  $N^* = \sum_{i \in I} N_i \text{id}_i$ . Grâce au lemme de Watson 3.2.8, on en déduit que  $\mathfrak{L}_{\eta+\pi}(Y_g^*(v_i))$  est une fonction holomorphe sur  $\Sigma_g$  asymptotique à  $N_i^{-1} \cdot z^{\delta(R)} e^{-A/z} \cdot v_i$  pour le bon choix de la branche du logarithme, donc que  $\mathfrak{L}_{\eta+\pi}(Y_g^*)$  égal à  $\Phi_g \cdot N^{*, -1}$  grâce à la remarque 1.4.5. Par le même raisonnement, on montre que  $\mathfrak{L}_{\eta+2\pi}(Y_d^*)$  est égale à  $\Phi_d \cdot N^{*, -1}$ . On en déduit le résultat de la proposition 3.2.6 par la linéarité de la transformée de Laplace.

### 3.3. Données de Stokes comme fonction de la connexion fuchsienne

Cette section joue principalement entre les différentes bases de solutions de  $\hat{\nabla}$  qui sont reliées par des relations algébriques. Notons  $\hat{\mathcal{U}}(\theta) := \mathbf{C} - \bigcup_{i \in I} \mathbf{R}_+ a_i e^{i\theta}$  avec sous-entendu le choix de branche du logarithme donné par les angles  $] \theta - 2\pi ; \theta [$ . On choisit un angle admissible  $\eta + \pi \in \mathbf{R}$ . Cela détermine une partie droite  $\hat{\mathcal{U}}(\eta + 2\pi)$  et une partie gauche  $\hat{\mathcal{U}}(\eta + \pi)$ . On aura affaire dans la suite à quatre familles de bases, chacune ayant sa version à gauche et sa version à droite :

- (1) les bases standards  $(\Psi_i)_{i \in I}$  asymptotique à  $(\zeta - a_i)^{R_i}$  en  $\zeta \rightarrow a_i$  pour tout  $i \in I$ ,
- (2) la base “de Floquet”  $Y$  telle que  $Y(v_k)$  est asymptotique à  $(\zeta - a_k)^{\lambda_k} v_k$  pour tout  $v_k \in V_k$ ,
- (3) la base “de co-Floquet”  $Y^*$  telle que  $Y^*(v_k)$  est asymptotique à  $(\zeta - a_k)^{\lambda_k} v_k$  modulo une fonction holomorphe en  $a_k$  pour tout  $v_k \in V_k$  et holomorphe en  $a_j$  pour tout  $j \neq k$ ,
- (4) la base normalisée  $\hat{Y}$  qui est la base donnée par le repère de  $\hat{\mathcal{L}}$  pour le choix de la normalisation  $N^*$ .

Donnons un petit formulaire. On pose

$$\begin{aligned} N^* &= \Lambda^{-1} e^{-i\pi\Lambda} \Pi(-\Lambda) \in T \\ M^* &= \Lambda^{-1} \sum_{i,j \in I} R_i C_{i,j} \text{id}_j \in G \\ N &= \Lambda N^* = e^{-i\pi\Lambda} \Pi(-\Lambda) \in T \\ M &= \Lambda M^* = \sum_{i,j \in I} R_i C_{i,j} \text{id}_j \in G \\ \chi(z) &= \frac{e^{2i\pi z} - 1}{z} = \sum_{k \geq 0} \frac{(2i\pi)^{k+1}}{(k+1)!} z^k \in \mathcal{O}(\mathbf{C}), \end{aligned}$$

où  $\Pi$  désigne la fonction  $\Pi$  de Gauss reliée à la fonction Gamma d'Euler par  $\Pi(z) = \Gamma(1+z)$  sur  $\mathbf{C} - \mathbf{Z}_{<0}$ . À priori,  $M^*$  est seulement un élément de  $\mathfrak{g}$  mais sous les conditions génériques vérifiées par  $\widehat{\nabla}$ , on montre que c'est bien un élément inversible.

On peut alors résumer la section qui suit par la figure 5.

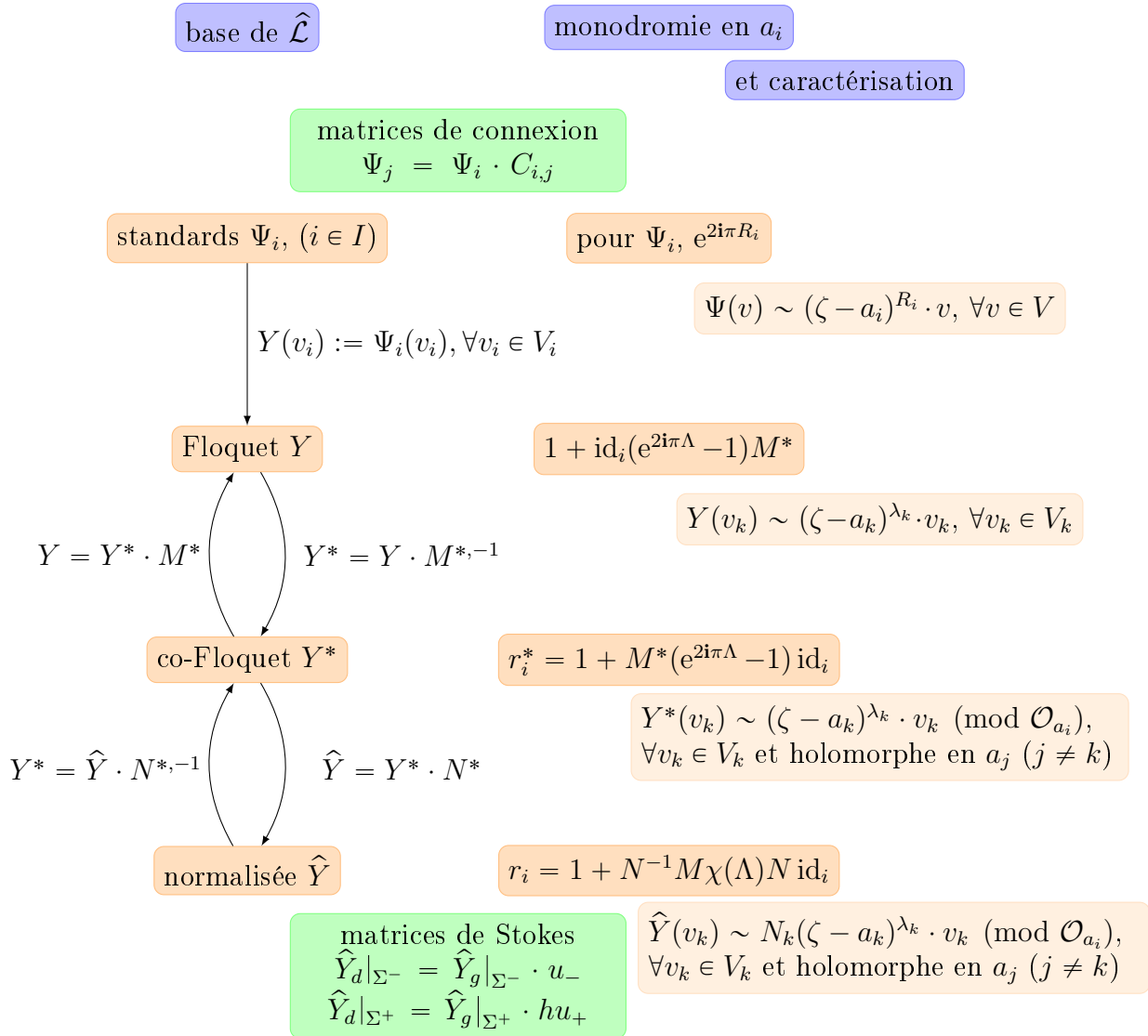


FIGURE 5. Différentes bases de  $\widehat{\mathcal{L}}$

On calcule d'abord la monodromie  $r_i^*$  de la solution de co-Floquet  $Y_g^*$  en utilisant une partie de la monodromie de la solution de Floquet  $Y_g$ . On en déduit la monodromie

$r_i$  de la solution normalisée  $\widehat{Y}_g$  à gauche. Enfin, en utilisant un ordre adéquat sur  $I$  (donné par l'angle admissible), on obtient la relation

$$r_n r_{n-1} \cdots r_1 = h u_+ u_-^{-1}.$$

Cela permettra d'obtenir le théorème 3.3.4 qui exprimera les données de Stokes  $(u_-, u_+, h)$  de la connexion  $\widehat{\nabla}$  en fonction de  $M$  via la formule

$$h u_+ - u_- = N^{-1} M \chi(\Lambda) N.$$

en utilisant une astuce algébrique.

On étend enfin cette formule dans la section 3.3.3 au cas générique un peu plus général suivant :

- (1) la partie diagonale  $\Lambda = \delta(R)$  de  $R$  n'a pas de valeurs propres un entier non nul,
- (2) le résidu  $R$  n'a pas de valeurs propres un entier non nul.

En particulier, ce cas générique contient un voisinage de  $0 \in \mathfrak{g}$ . On retrouve alors le cas particulier de l'article [BTL13] de T. Bridgeland et V. T. Laredo théorème 5.4 p.19 écrit sous la forme de la proposition 9.1 p.28, quand  $\Lambda = 0$ . En effet, dans ce cas, on trouve

$$h u_+ - u_- = u_+ - u_- = 2i\pi M = 2i\pi \sum_{i,j \in I} R_i C_{i,j} \text{id}_j.$$

car  $N = \text{id}$  et  $\chi(\Lambda) = \chi(0) = 2i\pi$ .

REMARQUE 3.3.1. Les résultats de cette partie peuvent être en grande partie extrait de [BJL81]. Une reformulation et simplification d'une partie de ces résultats avait déjà été faite par P. Boalch dans [Boa05]. Voir tout particulièrement le théorème 2 et 3 ainsi que l'appendice A où P. Boalch fait le lien entre la formule

$$r_n r_{n-1} \cdots r_1 = u_-'^{-1} h u_+'.$$

et la formule de Killing-Coxeter

$$h u_+' - u_-' = (\alpha_i(e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \quad r_i = 1 + e_i \otimes \alpha_i$$

dans une certaine base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  pour  $e_i \in V$  et  $\alpha_i \in V^*$ . Voir aussi le diagramme 1 de [Boa10] p.15 dans la version Arxiv qui résume notre cas où  $A \in \mathfrak{t}_{reg}$ .

**3.3.1. Solutions standards et solutions globales.** On considère les données de la section 3.1.1. Soit  $\widehat{\nabla}$  une connexion régulière avec repère

$$\widehat{\nabla} = d - \sum_{i \in I} \frac{R_i}{\zeta - a_i} d\zeta, \quad \varphi : V \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^n.$$

Notons  $\widehat{\mathcal{U}}(\theta) := \mathbf{C} - \bigcup_{i \in I} \mathbf{R}_+ a_i e^{i\theta}$  où l'on sous-entend le choix de la branche du logarithme d'angles  $]\theta - 2\pi; \theta[$ . Faisons le choix d'un angle admissible  $\eta + \pi \in \mathbf{R}$  et de la normalisation  $t = N^* \in T$  comme dans le théorème 3.2.4, c'est-à-dire que l'on prend

$$N^* = -e^{-i\pi\Lambda} \sum_{i \in I} \Gamma(-\lambda_i) \text{id}_i \in T.$$

et notons  $\widehat{\mathcal{L}}$  le système gradué avec repère associé à la connexion régulière avec repère  $\widehat{\nabla}$ . En particulier,  $\widehat{\mathcal{L}}$  correspond au système local des solutions.

REMARQUE 3.3.2. Notons  $\Pi$  la fonction  $\Pi$  de Gauss définie par  $\Pi(z) := \Gamma(1+z)$  pour tout  $\mathbf{C} - \mathbf{Z}_{<0}$ . On rappelle qu'elle vérifie l'identité des compléments

$$\Pi(z)\Pi(-z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{\operatorname{sinc}(\pi z)}.$$

On étend immédiatement la définition de  $\Pi$  au sous-ensemble des endomorphismes de  $\mathfrak{t}$  à valeurs propres différentes d'un entier non nul. En particulier, cela donne  $\Pi(-\Lambda) = \sum_{i \in I} \Pi(-\lambda_i) \operatorname{id}_i$ . Avec cette définition, on a immédiatement

$$N^* = e^{-i\pi\Lambda} \Lambda^{-1} \Pi(-\Lambda).$$

REMARQUE 3.3.3. Comme la fonction  $\Gamma$  est holomorphe en 1, la fonction  $\Pi$  est holomorphe en 0 et on peut donc utiliser le développement en série de  $\Pi$  au voisinage de 0 pour définir l'image d'une matrice  $R \in \mathfrak{g}$  proche de la matrice nulle par  $\Pi$ . Comme ici,  $\Lambda \in T \subseteq \mathfrak{t}$  est à valeurs propres différentes d'un entier non nul, écrire  $\Pi(-\Lambda)$  a toujours un sens en évaluant  $\Pi$  sur chaque composante de  $V_i$ . On aura cependant besoin d'utiliser cette remarque pour le sens de  $\Pi(-\Lambda)$  dans le cas par blocs.

On a construit dans la démonstration de la proposition 3.1.9 trois familles de bases fondamentales :

- (1) les bases standards  $\Psi_{g,i} : \widehat{\mathcal{U}}(\eta + \pi) \rightarrow G$  et  $\Psi_{d,i} : \widehat{\mathcal{U}}(\eta + 2\pi) \rightarrow G$  où  $i \in I$ ,
- (2) les bases graduées canoniques  $Y_g^* : \widehat{\mathcal{U}}(\eta + \pi) \rightarrow G$  et  $Y_d^* : \widehat{\mathcal{U}}(\eta + 2\pi) \rightarrow G$ ,
- (3) les bases graduées normalisées  $\widehat{Y}_g : \widehat{\mathcal{U}}(\eta + \pi) \rightarrow G$  et  $\widehat{Y}_d : \widehat{\mathcal{U}}(\eta + 2\pi) \rightarrow G$ .

Nous allons traiter le cas des bases à gauche. Pour le cas à droite, on remplacera les indice "gauche" par "droite" et  $\eta + \pi$  par  $\eta + 2\pi$ .

Les bases standards  $\Psi_{g/d,i}$  sont des bases qui reflète le comportement local des solutions de  $\widehat{\nabla}$  en  $a_i$ . On les définit comme suit. Notons  $\widehat{\nabla}_i = d - \frac{R_i}{\zeta - a_i} d\zeta$ . Comme par hypothèse le résidu  $R_i$  en  $a_i$  est non résonant, c'est-à-dire que deux de ses valeurs propres ne diffèrent jamais d'un entier non nul, on a ([Sab02] chapitre II proposition 2.11 et 2.13 p.93-94) qu'il existe une unique transformation de jauge  $H_{g,i}$  définie sur  $\widehat{\mathcal{U}}(\eta + \pi)$  holomorphe en  $a_i$  telle que  $H_{g,i}[\widehat{\nabla}_i] = \widehat{\nabla}$  et  $H_{g,i}(a_i) = \operatorname{id}$ . On pose alors

$$\Psi_{g,i} = H_{g,i}(\zeta)(\zeta - a_i)^{R_i}, \quad \text{pour tout } \zeta \in \widehat{\mathcal{U}}(\eta + \pi).$$

En particulier,  $\Psi_{g,i}$  est l'unique base de solutions de  $\widehat{\nabla}$  sur  $\widehat{\mathcal{U}}(\eta + \pi)$  asymptotique à  $(\zeta - a_i)^{R_i}$  en  $\zeta \rightarrow a_i$ .

On construit ensuite la base graduée canonique  $Y_g^*$  qui lie les comportements locaux des bases  $\Psi_{g,i}$  de la manière suivante. On pose  $Y_g^* : \widehat{\mathcal{U}}(\eta + \pi) \rightarrow G$  la base de solutions de  $\widehat{\nabla}$  sur  $\widehat{\mathcal{U}}(\eta + \pi)$  telle que pour tout  $v_i \in V_i$ , en notant  $y_i^* = Y_g^*(v_i) : \widehat{\mathcal{U}}(\eta + \pi) \rightarrow \mathbf{C}^n$ , on a

- (1)  $y_i^*$  est holomorphe en  $a_j$  pour tout  $j \in I - \{i\}$ ,
- (2) la fonction  $y_i^* - \Psi_{g,i}(v_i)$  est holomorphe en  $a_i$ .

Autrement dit,  $y_i^* = Y_g^*(v_i)$  est l'unique solution holomorphe en les  $a_j$  ( $j \neq i$ ) asymptotique à  $(\zeta - a_i)^{R_i}$  en  $\zeta \rightarrow a_i$  modulo les fonctions holomorphes en  $a_i$ .

Enfin, on définit la base graduée normalisée  $\widehat{Y}_g$  permettant de définir le repère à gauche de  $\widehat{\mathcal{L}}$  par

$$\widehat{Y}_g = Y_g^* \cdot N^*.$$

On définit ensuite les matrices de connexions  $C_{g/d,(i,j)} \in G$  reliant le pôle  $a_j$  de  $\widehat{\nabla}$  au pôle  $a_i$  par

$$\Psi_{g,j} = \Psi_{g,i} \cdot C_{g,(i,j)} \quad \text{et} \quad \Psi_{d,j} = \Psi_{d,i} \cdot C_{d,(i,j)}$$

Dans la suite, nous n'aurons besoin que des matrices de connexion pour les bases à gauche, que l'on notera  $C_{i,j} := C_{g,(i,j)}$ .

On rappelle que l'on définit les données de Stokes  $(u_-, u_+, h) \in U_- \times U_+ \times T$  associées au système gradué avec repère  $\hat{\mathcal{L}}$  par

$$\hat{Y}_d|_{\Sigma^-} = \hat{Y}_g|_{\Sigma^-} \cdot u_-, \quad \hat{Y}_d|_{\Sigma^+} = \hat{Y}_g|_{\Sigma^+} \cdot hu_+ \quad \text{et} \quad h = e^{2i\pi\Lambda},$$

où  $\Sigma^-$  (resp.  $\Sigma^+$ ) est la composante connexe de  $\hat{\mathcal{U}}(\eta + \pi) \cap \hat{\mathcal{U}}(\eta + 2\pi)$  contenant un voisinage de l'infini de la direction  $e^{i(\eta + \frac{3\pi}{2})}$  (resp.  $e^{i(\eta + \frac{\pi}{2})}$ ). Voir la figure 6. La monodromie globale de la solution  $\hat{Y}_g$  dans le sens direct est donnée par  $hu_+u_-^{-1}$ .

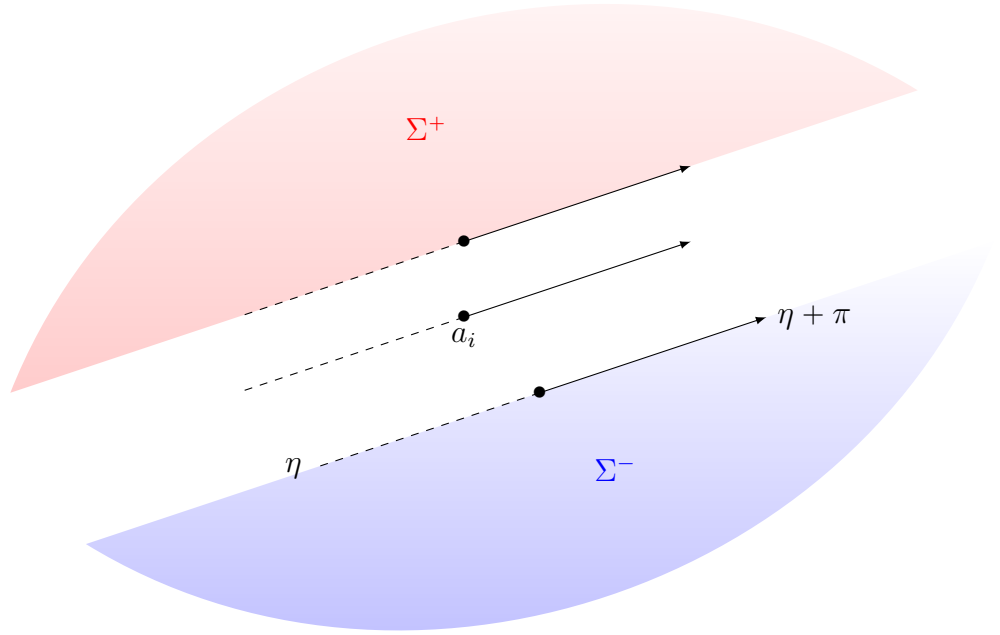


FIGURE 6. Domaines  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$

Notons

$$M^* = \Lambda^{-1} \sum_{i \in I} R_i C_{i,j} \text{id}_j \in \mathfrak{g}.$$

On remarquera que  $M^*$  est à diagonale égale à l'identité. On rappelle que la matrice de normalisation  $N^*$  est donnée par  $N^* = e^{-i\pi\Lambda} \Lambda^{-1} \Pi(-\Lambda) \in T$ . On posera aussi

$$(3.3.a) \quad M = \Lambda M^* = \sum_{i \in I} R_i C_{i,j} \text{id}_j \in \mathfrak{g}$$

$$(3.3.b) \quad N = \Lambda N^* = e^{-i\pi\Lambda} \Pi(-\Lambda) \in T$$

et

$$\chi : z \mapsto \frac{e^{2i\pi z} - 1}{z} = \sum_{k \geq 0} \frac{(2i\pi)^{k+1}}{(k+1)!} z^k$$

qui est une fonction entière, en particulier holomorphe au voisinage de 0.

THÉORÈME 3.3.4. *La matrice  $M$  définie grâce aux matrices de connexion détermine les matrices de Stokes via la formule*

$$(3.3.c) \quad hu_+ - u_- = N^{-1}M\chi(\Lambda)N.$$

On transforme le terme  $\chi(\Lambda)N$ . On obtient

$$\chi(\Lambda)N = (e^{2i\pi\Lambda} - 1)\Lambda^{-1}e^{-i\pi\Lambda}\Pi(-\Lambda) = 2i\pi\Pi(\Lambda)^{-1}$$

en utilisant la formule des compléments. D'où

$$(3.3.d) \quad hu_+ - u_- = 2i\pi e^{i\pi\Lambda}\Pi(-\Lambda)^{-1}M\Pi(\Lambda)^{-1} = \sum_{i,j \in I} \frac{2i\pi e^{i\pi\lambda_i}}{\Gamma(1-\lambda_i)\Gamma(1+\lambda_j)} m_{i,j}$$

où  $m_{i,j}$  désigne les coefficients de  $M$  et en utilisant l'écriture plus commune avec la fonction Gamma d'Euler.

### 3.3.2. Démonstrations de la section précédente.

3.3.2.1. *Démonstration du théorème 3.3.4.* Pour montrer le théorème, on procède en plusieurs étapes.

LEMME 3.3.5. *On a la relation  $Y_g = Y_g^* \cdot M^*$ .*

À partir de cette relation algébrique, on peut en déduire le calcul de la monodromie de  $Y_g^*$  autour d'un pôle de  $\widehat{\nabla}$ .

LEMME 3.3.6. *La monodromie de  $Y_g^*$  autour de  $a_i$  lorsque l'on traverse la coupure  $\mathbf{R}_+ a_i e^{i(\eta+\pi)}$  dans le sens direct est égale à*

$$r_i^* = 1 + M^*(e^{2i\pi\Lambda} - 1)\text{id}_i$$

COROLLAIRE 3.3.7. *La monodromie de  $\widehat{Y}_g$  autour de  $a_i$  dans le sens direct est égale à*

$$r_i = 1 + N^{-1}M\chi(\Lambda)N\text{id}_i.$$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 3.3.7. C'est immédiat car  $r_i = N^{*, -1}r_i^*N^*$  et car  $\text{id}_i \in \mathfrak{t}$  et  $N^* \in T$  commutent.  $\square$

REMARQUE 3.3.8. On peut aussi déduire du lemme 3.3.6 l'expression de la monodromie de  $Y_g$  autour de  $a_i$  dans le sens direct. Elle est donnée par  $1 + \text{id}_i(e^{2i\pi\Lambda} - 1)M^*$ . Cette expression ne sera pas utilisée dans la suite. Remarquez que cela est compatible avec le fait que la monodromie de  $Y_g(v_i)$  est donnée par  $e^{2i\pi\lambda_i} \in \mathbf{C}^*$  pour tout  $v_i \in V_i$  car on a  $\text{id}_i M^* \text{id}_i = \text{id}_i$ .

Posons  $\widetilde{M} := N^{-1}M\chi(\Lambda)N = N^{*, -1}M^*(e^{2i\pi\Lambda} - 1)N^* \in \mathfrak{g}$ . On a donc

$$r_i = 1 + \widetilde{M}\text{id}_i$$

pour tout  $i \in I$ .

On identifie alors  $I$  muni de l'ordre  $\geq_d$  donné par

$$a_j \geq_d a_i \quad \text{si} \quad \Im(a_j e^{-i(\eta+\pi)}) \geq \Im(a_i e^{-i(\eta+\pi)}) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Im(a_j e^{-i\eta}) \leq \Im(a_i e^{-i\eta})$$

à l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  muni de l'ordre usuel (voir la figure 7). Remarquons que l'ordre sur  $I$  est le même ordre que celui utilisé pour définir les sous-groupes unipotents  $U_{\pm} \subseteq G$  pour le coté irrégulier lorsque l'on fait le choix de l'angle admissible  $\eta \in \mathbf{R}$  coté irrégulier. En particulier, on a bien

$$\widehat{Y}_d|_{\Sigma^-} = \widehat{Y}_g|_{\Sigma^-} \cdot u_-, \quad \widehat{Y}_d|_{\Sigma^+} = \widehat{Y}_g|_{\Sigma^+} \cdot hu_+ \quad \text{et} \quad h = e^{2i\pi\Lambda},$$

avec  $u_{\pm} \in U_{\pm}$  pour les mêmes groupes unipotents que coté irrégulier.

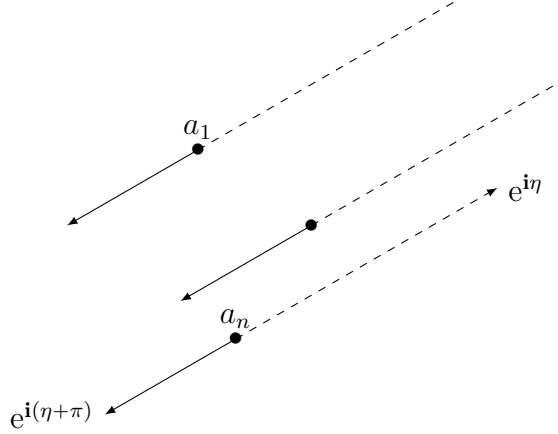


FIGURE 7. Ordre sur les pôles coté fuchsien

On en déduit immédiatement que la monodromie de la base  $\widehat{Y}_g$  autour d'un grand contour dans le sens direct est égal à  $r_n r_{n-1} \cdots r_1 \in G$ . On a donc l'égalité

$$(3.3.a) \quad r_n r_{n-1} \cdots r_1 = h u_+ u_-^{-1}.$$

À partir de cette équation, comme la décomposition de Gauss de  $r_n r_{n-1} \cdots r_1 \in B_+ U_-$  est unique, il suffit de vérifier que si les endomorphismes  $u_{\pm}$  sont définis par la relation  $h u_+ - u_- = \widetilde{M}$  alors on a bien l'équation (3.3.a). Cela donnera que les uniques endomorphismes vérifiant (3.3.a) sont bien définis par  $h u_+ - u_- = \widetilde{M}$ .

DÉMONSTRATION. Par un calcul direct, on vérifie que

$$(r_n r_{n-1} \cdots r_1 - 1) u_- = \widetilde{M},$$

lorsque l'on suppose que  $u_{\pm}$  sont définis par  $h u_+ - u_- = \widetilde{M}$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} r_n r_{n-1} \cdots r_1 &= (1 + \widetilde{M} \text{id}_n)(1 + \widetilde{M} \text{id}_{n-1}) \cdots (1 + \widetilde{M} \text{id}_1) \\ &= 1 + \widetilde{M} \sum_{k>0} \sum_{i_1 > i_2 > \cdots > i_k} M_{i_1, i_2} \cdots M_{i_{k-1}, i_k}, \end{aligned}$$

où  $M_{i,j} := \text{id}_i \widetilde{M} \text{id}_j$ , c'est-à-dire que l'on a  $\widetilde{M} = \sum_{i,j \in I} M_{i,j}$ . Or par définition  $u_- = \text{id} + \sum_{i>j} M_{i,j}$ . D'où

$$u_-^{-1} = \text{id} + \sum_{k>0} \sum_{i_1 > i_2 > \cdots > i_k} M_{i_1, i_2} \cdots M_{i_{k-1}, i_k}$$

c'est-à-dire que l'on a bien

$$(r_1 r_2 \cdots r_n - 1) u_- = \widetilde{M}.$$

□

REMARQUE 3.3.9. On en déduit immédiatement que

$$M^* = N^* u_- (u_-^{-1} h u_+ - 1) (h - 1)^{-1} N^{*, -1}.$$

Donc la matrice  $M^*$  est inversible car 1 n'est pas valeur propre de la monodromie  $u_-^{-1} h u_+$  de  $\nabla$ , ni de la monodromie formelle  $h$  grâce aux conditions 3.1.1. On peut aussi le montrer directement (voir [BJL81] §2 proposition 2 p.697)

REMARQUE 3.3.10. On aurait pu considérer les variantes des définitions de  $M$  et des  $r_i$  pour la partie droite. On aurait alors  $M' = \sum_{i,j \in I} R_i C_{d,(i,j)} \text{id}_j$  et  $r'_i = 1 + \widetilde{M}' \text{id}_i$  la monodromie de  $\widehat{Y}_d$  autour du pôle  $a_i$  dans le sens direct (avec  $\widetilde{M}'$  définie de manière

analogue à  $\widetilde{M}$  en remplaçant  $M$  par  $M'$ ). Alors la monodromie globale de  $\widehat{Y}_d$  dans le sens direct est

$$r'_1 r'_2 \cdots r'_n = (hu_-^{-1} h^{-1}) hu_+ = hu_-^{-1} u_+,$$

pour le même ordre sur  $I$ . On peut alors montrer que l'on a  $hu_-^{-1} - u_+^{-1} = \widetilde{M}'$ . Souvent on note dans ce cas  $v_+ := u_+^{-1}$  et  $v_- := hu_-^{-1} h^{-1}$  donc la monodromie globale est égale à  $v_- h v_+^{-1}$  et on a  $v_- h - v_+ = \widetilde{M}'$ .

### 3.3.2.2. Démonstration des lemmes 3.3.5, et 3.3.6.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.3.5. Comme  $Y_g^*$  est une base de solutions, il existe un élément inversible  $A \in G$  tel que  $Y_g = Y_g^* \cdot A$ . Montrons que  $A = M^*$ . Considérons  $(v_i)_{i \in I}$  une base graduée de  $\bigoplus_{i \in I} V_i$  et notons  $(A_{i,j})_{i,j \in I}$  la matrice de  $A$  dans cette base. Alors  $Y_g(v_i) = \sum_{k \in I} A_{i,k} Y_g^*(v_k)$ . On regarde l'asymptotique de  $Y_g(v_i)$  et des  $Y_g^*(v_k)$  en  $a_i$ . On a

$$Y_g(v_i) \sim (\zeta - a_i)^{\lambda_i} \cdot v_i$$

$$Y^*(v_i) \sim (\zeta - a_i)^{\lambda_i} \cdot v_i + \text{holomorphe en } a_i$$

$$Y^*(v_k) \sim \text{holomorphe en } a_i, \text{ pour tout } k \neq i.$$

D'où  $A_{i,i} = 1$ . On procède de même pour les asymptotiques en  $a_j$ ,  $j \neq i$ . En effet, on aura  $Y(v_i) \underset{\zeta \rightarrow a_j}{\sim} K_j (\zeta - a_j)^{\lambda_j} \cdot v_j + \text{holomorphe en } a_j$  et on en déduira que  $K_j = A_{i,j}$ .

Pour déterminer  $K_j$ , on écrit  $Y_g(v_i) = \Psi_{g,i}(v_i)$  et on remarque que l'on a  $\Psi_{g,i} = \Psi_{g,j} \cdot C_{j,i}$ . Or

$$\Psi_{g,j}(v_j) \underset{\zeta \rightarrow a_j}{\sim} (\zeta - a_j)^{\lambda_j} v_j$$

$$\Psi_{g,j}(k_j) \underset{\zeta \rightarrow a_j}{\sim} \text{holomorphe en } a_j, \text{ pour tout } k_j \in K_j := \ker(R_j).$$

On rappelle qu'avec les hypothèses de généricité sur  $\widehat{\nabla}$ , on a  $V = V_j \oplus K_j$  où  $K_j := \ker(R_j) = \ker(\text{id}_j R)$ . La projection naturelle  $V \rightarrow V_j$ , orthogonale à  $K_j$  est  $\Lambda^{-1} R_j$ . D'où

$$\Psi_{g,i}(v_i) \underset{\zeta \rightarrow a_j}{\sim} \Psi_{g,j} \cdot C_{j,i} v_i = \Psi_{g,j} \cdot \Lambda^{-1} R_j C_{j,i} v_i + \text{holomorphe en } a_j.$$

On a donc bien  $A = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \Lambda^{-1} R_j C_{j,i} \text{id}_i = M^*$ .  $\square$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.3.6. Notons  $A := r_i^*$  la monodromie de  $Y_g^*$  autour de  $a_i$  dans le sens direct. Comme  $Y_g^*(v_k)$  est holomorphe en  $a_i$  pour tout  $k \neq i$ , on a  $A_k = \text{id}_k$  pour  $k \neq i$  où  $A_k := A \text{id}_k$ . Remarquez qu'on retrouve  $A$  par  $A = \sum_{k \in I} A_k$ . Calculons maintenant  $A_i$  qui est la seule partie de  $A$  non triviale. Soit  $v_i \in V_i$ . On écrit  $Y_g(v_i) = Y_g^* \cdot M^* v_i = Y_g^*(v_i) + \sum_{k \neq i} Y_g^* \text{id}_k M^* v_i$  car les termes diagonaux de  $M^*$  sont égaux à 1, c'est-à-dire  $\text{id}_i M^* \text{id}_i = \text{id}_i$ . En prolongeant cette solution autour de  $a_i$  dans le sens direct, on trouve  $Y_g(v_i) \cdot e^{2i\pi\lambda_i}$  en utilisant le fait que la monodromie de  $\Psi_{g,i}$  est  $e^{2i\pi R_i}$  et que  $e^{2i\pi R_i} v_i = e^{2i\pi\lambda_i} v_i$ . Pour le membre de gauche, on trouve  $Y_g^* \cdot A M^* v_i = Y_g^* \cdot A_i(v_i) + \sum_{k \neq i} Y_g^* \text{id}_k M^* v_i$  car les  $A_k = \text{id}_k$  pour tout  $k \neq i$ . On en déduit

$$\begin{aligned} Y_g^* \cdot A_i(v_i) &= Y_g(v_i) \cdot (e^{2i\pi\lambda_i} - 1) + (Y_g(v_i) - \sum_{k \neq i} Y_g^* \text{id}_k M^* v_i) \\ &= Y_g^* \cdot M^* (e^{2i\pi\Lambda} - 1) v_i + Y_g^*(v_i), \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $A_i = \text{id}_i + M^* (e^{2i\pi\Lambda} - 1) \text{id}_i$ . Finalement,  $A = 1 + M^* (e^{2i\pi\Lambda} - 1) \text{id}_i$ , ce qui est le résultat annoncé.  $\square$



**3.3.3. Prolongement holomorphe du cas générique.** Les matrices de connexions  $C_{i,j}$  sont bien définies lorsque l'on considère la connexion  $\hat{\nabla}$  soumise aux conditions génériques 3.1.1. Cependant, on remarque qu'elles le sont aussi lorsque l'on prend les conditions plus faibles :

- (1) les résidus sont de rang  $\leq 1$  avec aucune valeur propre un entier non nul,
- (2) la matrice  $R = \sum_{i \in I} R_i$  n'admet pas de valeur propre entière non nulle.

En effet, les résidus  $R_i$  en  $a_i$  sont encore non résonants dans ce cas.

Les conditions génériques correspondantes pour la connexion  $\nabla$  sont les :

- (1) la partie diagonale  $\Lambda = \delta(R)$  de  $R$  n'a pas de valeurs propres un entier non nul,
- (2) le résidu  $R$  n'a pas de valeurs propres un entier non nul.

De plus, on remarque que les matrices de connexions  $C_{i,j}$  dépendent holomorphiquement de  $R$  pour une matrice  $R$  restant dans cet ensemble générique.

De même, on peut montrer la proposition suivante :

**PROPOSITION 3.3.11.** *On fixe le choix d'un angle admissible  $\theta \in \mathbf{R}$ . Alors l'application qui à une matrice  $R$  dans l'ensemble générique précédent associe ses données de Stokes  $(u_-, u_+, h) \in U_- \times U_+ \times T$  est une application holomorphe.*

On déduit immédiatement de cette proposition que la formule du théorème 3.3.4 s'étend aussi au cas générique précédent avec

- (1) la partie diagonale  $\Lambda = \delta(R)$  de  $R$  n'a pas de valeurs propres un entier non nul,
- (2) le résidu  $R$  n'a pas de valeurs propres un entier non nul.

**REMARQUE 3.3.12.** On retrouve en particulier la formule de T. Bridgeland et V. T. Laredo [BTL13] théorème 5.4 p.19 écrite sous la forme de la proposition 9.1 p.28. En effet, quand la partie diagonale  $\Lambda$  de  $R$  est nulle, on a immédiatement

$$hu_+ - u_- = 2i\pi M = 2i\pi \sum_{i,j \in I} R_i C_{i,j} \text{id}_j.$$

car  $N = \text{id}$  et  $\chi(\Lambda) = \chi(0) = 2i\pi$ . Remarquez aussi que la formule avec les "étoiles" n'a pas de sens à priori car  $\lim_{\Lambda \rightarrow 0} N^* = \infty$  dans ce cas. Cela est compensé par le zéro de  $e^{2i\pi\Lambda} - 1$ .

## Données de Stokes du cas biparti

### 4.1. Notations et résumé

Dans ce chapitre, nous allons traiter le cas général du chapitre 3. On rappelle que l'on note  $\mathcal{A}_1$  l'algèbre de Weyl. On choisit deux  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie  $V$  et  $W$ , on choisit un tore maximal  $T$  du groupe  $G := \mathrm{GL}(V) \oplus \mathrm{GL}(W)$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{t}$ . Enfin, on choisit un élément  $A \oplus B \in \mathfrak{t}$  et on notera  $K = K_V \oplus K_W \subseteq G$  le centralisateur de  $A \oplus B$  pour l'action adjointe. On considère la présentation de  $\mathcal{A}_1$ -modules

$$\mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^* \xrightarrow{\cdot M^0} \mathcal{A}_1 \otimes (W \oplus V)^* \longrightarrow \mathcal{M}^0 \longrightarrow 0.$$

avec

$$M^0 = \begin{pmatrix} \partial_z - B & C \\ D & z - A \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \mathrm{End}(W \oplus V),$$

où  $C \in \mathrm{Hom}(V, W)$  et  $D \in \mathrm{Hom}(W, V)$  sont quelconques. Remarquez que sa restriction à l'ouvert  $\mathbf{C} - \{a_i : i \in I\}$  est la connexion

$$\nabla^0 = d - (B + C(z - A)^{-1}D) dz,$$

qui est une connexion avec un pôle double en l'infini et des pôles simples en les  $a_i$  ( $i \in I$ ).

La donnée de cette présentation de  $\mathcal{A}_1$ -module est équivalente à la donnée d'une représentation du graphe biparti  $\Gamma(1, 1)$  sur l'espace vectoriel bigradué  $\mathbb{V} := V \oplus W$  avec la données de  $A \oplus B$  et le choix d'une des deux parties qui correspondra aux pôles à distance fini.

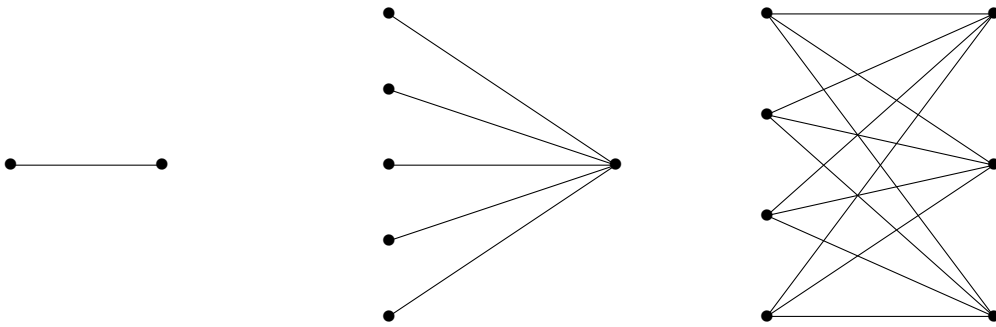


FIGURE 1. Graphes biparti  $\Gamma(1, 1)$ ,  $\Gamma(5, 1)$  et  $\Gamma(4, 3)$

Notons  $(a_i)_{i \in I}$  les valeurs propres de  $A \in \mathrm{End}(V)$  et  $(b_j)_{j \in J}$  celles de  $B \in \mathrm{End}(W)$ . On notera pour la suite  $\Gamma := \Gamma(I, J)$  le graphe biparti de sommets l'union disjointe  $I \cup J$  et  $\mathbb{V} = V \oplus W$  l'espace vectoriel bigradué, où  $V$ , resp.  $W$ , sont munis des graduations  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ , resp.  $W = \bigoplus_{j \in J} W_j$ , induites par  $A$ , resp.  $B$ . Comme expliqué dans la section 1.2.2 du chapitre 1, la représentation du graphe  $\Gamma(1, 1)$  correspond à une représentation du graphe  $\Gamma$  sur l'espace vectoriel  $I \cup J$ -gradué  $\mathbb{V}$ . On notera alors

$$C_i^j \in \mathrm{Hom}(V_i, W_j) \quad D_j^i \in \mathrm{Hom}(W_j, V_i) \quad \text{pour tout } (i, j) \in I \times J,$$

les applications induites par  $C$  et  $D$  respectivement par les graduations de  $V$  et  $W$ . Notre convention est de prendre des indices pour signifier que l'on prend la décomposition sur l'espace de départ et des exposants lorsque c'est pour l'espace d'arrivée.

De même, on notera

- $C_i := \sum_{j \in J} C_i^j \in \text{Hom}(V_i, W)$  pour tout  $i \in I$ ,
- $C^j := \sum_{i \in I} C_i^j \in \text{Hom}(V, W_j)$  pour tout  $j \in J$ ,
- $D_j := \sum_{i \in I} D_j^i \in \text{Hom}(W_j, V)$  pour tout  $j \in J$ ,
- $D^i := \sum_{j \in J} D_j^i \in \text{Hom}(W, V_i)$  pour tout  $i \in I$ .

La présentation de  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^0$  est donc équivalente à une représentation du graphe  $\Gamma$  sur  $\mathbb{V}$  avec en plus les choix suivants :

- (1) des nombres complexes  $a_i$  et  $b_j$  pour tout sommet  $i \in I$  et  $j \in J$  tels que pour une même partie, les nombres complexes sont deux à deux distincts,
- (2) une des deux parties correspondant aux pôles à distance finie, ici  $I$ .

On peut représenter le tout grâce à la figure 2.

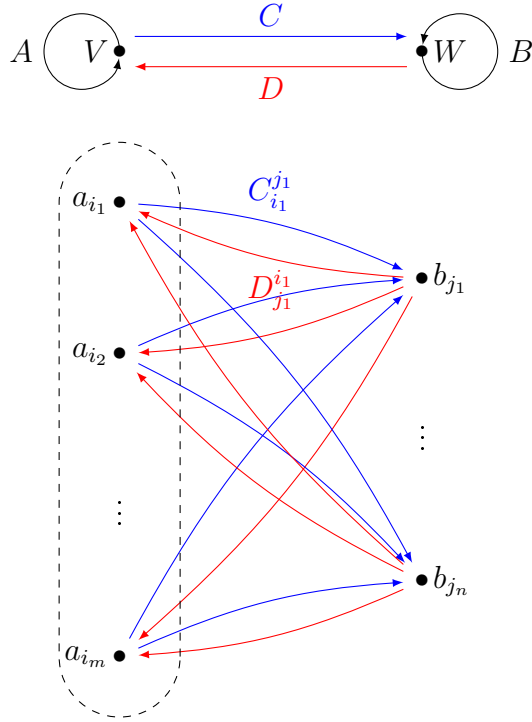
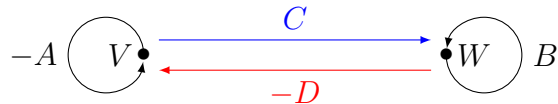


FIGURE 2. Représentation en haut du graphe  $\Gamma(1, 1)$ , en bas du graphe  $\Gamma$  avec ses choix correspondant au  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^0$

Notons  $\mathcal{M}^1$  la transformée de Fourier-Laplace de  $\mathcal{M}^0$ . Alors les données de cette présentation correspondent à la représentation de graphe



plus le choix de l'autre partie à distance finie (la partie de  $W$ ). Cela signifie que le type irrégulier de  $\mathcal{M}^1$  a pour valeurs propres les  $-a_i$  pour tout  $i \in I$  et que les pôles de  $\mathcal{M}^1$  sont les  $b_j$  pour tout  $j \in J$ .

On rappelle qu'un angle  $\theta$  est admissible pour une famille  $(\lambda_i)_{i \in L}$  si et seulement si on a  $\arg(\lambda_i - \lambda_j) \not\equiv \theta \pmod{2\pi}$  pour tout  $i \neq j$ . Une direction  $d$  est admissible pour cette famille si l'un quelconque de ses angles est admissible. On dira qu'un angle

$\theta \in \mathbf{R}$  est *co-admissible* si  $-\theta \in \mathbf{R}$  est un angle admissible. Dans la sphère de Riemann  $\mathbf{P}^1$ , une direction est donc admissible dans la carte à distance finie  $\mathbf{P}^1 - \{\infty\}$  si et seulement si elle est co-admissible dans la carte à l'infini  $\mathbf{P}^1 - \{0\}$ .

On rappelle que la donnée d'une direction admissible  $d$  d'angle  $\theta$  sur la famille  $(\lambda_i)_{i \in L}$  induit un ordre total sur l'ensemble  $L$  donné explicitement par

$$i \geq_d j \quad \text{si} \quad \text{Im}(\lambda_i e^{-i\theta}) \leq \text{Im}(\lambda_j e^{-i\theta}).$$

Si l'on se donne un angle co-admissible, on prendra l'ordre sur  $L$  donné par l'angle admissible correspondant.

En particulier, la donnée de deux directions admissibles pour les familles  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  respectivement et le choix d'une partie correspondant aux pôles à distance finie, ici  $I$ , (que l'on peut voir ici aussi comme un ordre entre les parties  $I$  et  $J$ , disons  $I < J$ ) induit un ordre sur le graphe biparti  $\Gamma$  suivant la définition 1.2.3 du chapitre 1.

On note  $\Lambda_V$  (resp.  $\Lambda_W$ ) la partie diagonale par blocs de l'endomorphisme  $DC$  (resp.  $CD$ ), c'est-à-dire le résidu du  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^1$  (resp.  $\mathcal{M}^0$ ) en l'infini. Dans toute la suite, on supposera que les endomorphismes  $C \in \text{Hom}(V, W)$  et  $D \in \text{Hom}(W, V)$  appartiennent à un voisinage de 0 suffisamment petit. Précisément, on suppose que les endomorphismes

- (1)  $C_i D^i$  pour tout  $i \in I$ ,
- (2)  $D_j C^j$  pour tout  $j \in J$ ,
- (3)  $C^j D_j$  pour tout  $j \in J$ ,
- (4)  $D^i C_i$  pour tout  $i \in I$ ,
- (5)  $\Lambda_W := \delta(CD) = \sum_{j \in J} C^j D_j$ ,
- (6)  $\Lambda_V := \delta(DC) = \sum_{i \in I} D^i C_i$ ,

sont tous à valeurs propres dans le disque ouvert  $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1/2\}$  centré en 0 de rayon 1/2. En particulier, tous ces endomorphismes sont non résonants à valeurs propres dans  $\mathbf{C} - \mathbf{Z}^*$ . Remarquez que les conditions pour (3) et (4) impliquent les conditions pour (5) et (6).

Ce chapitre peut être résumé par la figure 3 ci-dessous.

Les bons choix de normalisation  $t^0$  et  $t^1 \in K$  seront donnés ci-dessous.

Commençons par donner les théorèmes correspondant à la flèche verticale de gauche de la figure 3.

On a le théorème suivant, conséquence de la théorie développée dans [Mal91] et rappelée dans l'appendice A :

**THÉORÈME** (Théorème 4.2.1). *Pour tout choix :*

- (1) *de deux angles  $\eta_I, \eta_J \in \mathbf{R}$  admissibles pour les familles  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  respectivement,*
- (2) *d'un élément  $t \in K$ ,*
- (3) *d'une orientation du cercle à l'infini,*

*on peut associer naturellement à la présentation de  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^0$  ci-dessus une représentation inversible du graphe biparti  $\Gamma$  sur l'espace vectoriel bigradué  $\mathbb{V}$ .*

Ce théorème est une reformulation de la correspondance de Riemann-Hilbert-Birkhoff à ce cadre généralisé des  $\mathcal{A}_1$ -modules. Explicitement, on montrera que  $W = \bigoplus_{j \in J} W_j$  est naturellement isomorphe (grâce à nos choix) aux solutions de  $\mathcal{M}^0$  au voisinage de l'infini dans la direction d'angle  $-\eta_J$ ,  $J$ -gradué par la croissance des solutions au voisinage de l'infini au voisinage de l'angle  $-\eta_J$ . De même, on montrera

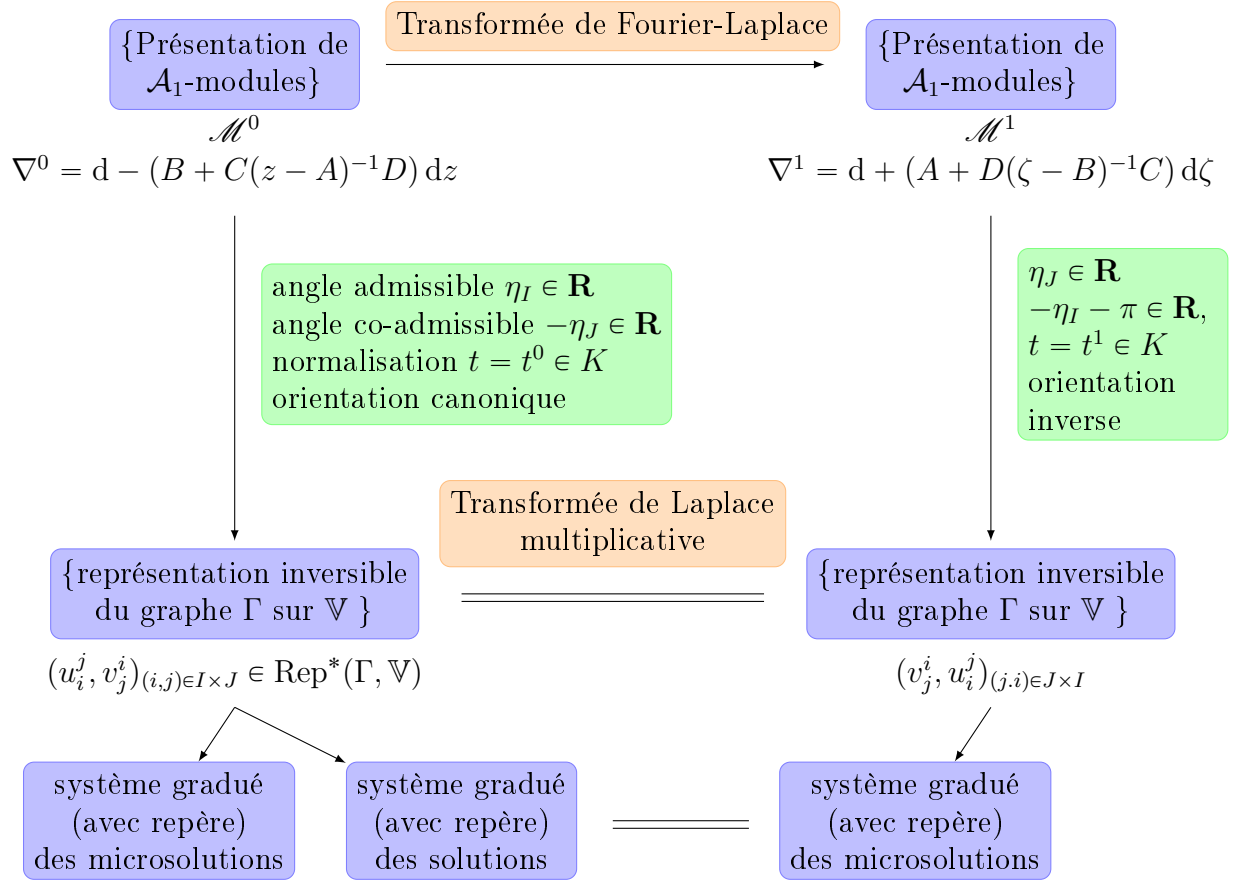


FIGURE 3. Correspondance de Riemann-Hilbert-Birkhoff pour la présentation de module  $\mathcal{M}^0$  et sa transformée de Laplace

que  $V_i$  est naturellement isomorphe (grâce à nos choix) aux micro-solutions de  $\mathcal{M}^0$  au voisinage du pôle  $a_i$  au voisinage de la direction d'angle  $\eta_I$ . L'espace  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  s'identifie alors à l'espace des micro-solutions généralisées à croissance exponentielle de  $\mathcal{M}^0$  et si l'on note  $u = \sum_{(i,j) \in I \times J} u_i^j$  et  $v = \sum_{(i,j) \in I \times J} v_j^i$ , les applications  $v : W \rightarrow V$  et  $u : V \rightarrow W$  s'identifieront à l'application canonique semi-locale et à l'application variation semi-locale respectivement.

Rappelons que l'on note  $\mathcal{M}^1$  la transformée de Fourier-Laplace de  $\mathcal{M}^0$ . Il est clair que le graphe associé à  $\mathcal{M}^1$  est égal à celui associé à  $\mathcal{M}^0$ , c'est-à-dire  $\Gamma$ . Faisons le choix de deux angles admissibles  $\eta_I$  et  $\eta_J$  pour les familles  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  respectivement. On peut résumer la situation sur les données par le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}^0 & & \mathcal{M}^1 \\
 (a_i)_{i \in I}, & \eta_I & \longrightarrow (-a_i)_{i \in I}, -\eta_I - \pi \\
 (b_j)_{j \in J}, & -\eta_J & \longrightarrow (b_j)_{j \in J}, \eta_J
 \end{array}$$

On a donc le même ordre sur  $I$  et  $J$  pour  $\mathcal{M}^0$  et  $\mathcal{M}^1$ . L'ordre entre les parties est opposé mais cela n'a pas d'importance pour la définition des représentations de graphe inversible d'un graphe biparti. On est donc en présence du même espace de représentations inversibles  $\text{Rep}^*(\Gamma, \mathbb{V})$ .

Le résultat fondamental reliant la représentation inversible du graphe  $\Gamma$  associées à  $\mathcal{M}^0$  et à  $\mathcal{M}^1$  est le

THÉORÈME (Théorème 4.3.1). *Les deux représentations inversibles du graphe  $\Gamma$  sur  $\mathbb{V}$  associées au  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^0$  et à sa transformée de Fourier-Laplace  $\mathcal{M}^1$  pour les mêmes choix d'angles admissibles, de normalisation  $t \in K$  et d'orientation sont naturellement isomorphes.*

On peut même préciser cet isomorphisme. On définit les éléments de normalisation suivant :

$$N_V^* := e^{i\pi\Lambda_V} \Pi(-\Lambda_V) \in K_V \quad \text{et} \quad N_W^* := \frac{\Pi(-\Lambda_W)}{2i\pi} \in K_W$$

où  $\Pi$  désigne la fonction Pi de Gauss reliée à la fonction Gamma d'Euler par  $\Pi(z) = \Gamma(1+z)$  pour tout  $z \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}_{<0}$ .

THÉORÈME (Théorème 4.3.2). *Les deux représentations inversibles du graphe  $\Gamma$  sur  $\mathbb{V}$  associées au  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^0$  et à sa transformée de Fourier-Laplace  $\mathcal{M}^1$  pour les choix :*

- (1) *l'orientation canonique, des angles admissible et co-admissible  $\eta_I, -\eta_J \in \mathbf{R}$  et de l'élément  $t = \text{id}_V \oplus N_W^* \in K = K_V \oplus K_W$  pour le module  $\mathcal{M}^0$ ,*
- (2) *l'orientation inverse, des angles co-admissible et admissible  $-\eta_I - \pi, \eta_J \in \mathbf{R}$  et de l'élément  $t = N_V^* \oplus \text{id}_W \in K = K_V \oplus K_W$  pour le module  $\mathcal{M}^1$ ,*

*sont égales.*

Ensuite, on généralisera la définition de l'application de Riemann-Hilbert-Birkhoff à ce cadre pour obtenir :

THÉORÈME. *Pour tout choix :*

- (1) *d'un angle co-admissible  $\eta_\infty \in \mathbf{R}$ ,*
- (2) *d'un élément  $t \in K_W$ ,*
- (3) *de l'orientation canonique,*

*on peut associer à toute connexion méromorphe de la forme*

$$d - (B + C(z - A)^{-1}D) dz$$

*sur le fibré trivial de fibre  $W$  sur  $\mathbf{P}^1$  un système gradué de fibre  $W$ , correspondant à ses données de Stokes en l'infini.*

On montrera ensuite qu'une représentation inversible du graphe  $\Gamma$  induit deux systèmes gradués, correspondant à chaque choix possible d'une des deux parties complètes.

PROPOSITION. *On peut associer naturellement à toute représentation inversible du graphe  $\Gamma$  sur l'espace vectoriel gradué  $V \oplus W$  deux systèmes gradués, le premier de fibre  $V$ , le second de fibre  $W$  avec pour vecteur entier  $(\dim(V_i))_{i \in I}$  et  $(\dim(W_j))_{j \in J}$  respectivement.*

Reste à vérifier la compatibilité avec l'application correspondante au niveau des connexions. Notons  $\nabla^0$  la connexion

$$\nabla^0 = d - (B + C(z - A)^{-1}D) dz$$

sur le fibré trivial de fibre  $W$ , égal à la restriction du  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^0$  sur  $\mathbf{C} - \{a_i : i \in I\}$ .

Notons aussi le connexion

$$\nabla^1 = d + (A + D(\zeta - B)^{-1}C) d\zeta$$

sur le fibré trivial de fibre  $V$ , égal à la restriction du transformée de Fourier-Laplace de  $\mathcal{M}^0$  sur  $\mathbf{C} - \{b_j : j \in J\}$ .

THÉORÈME.

- (1) *Le système gradué de fibre  $W$  associé à la représentation inversible du graphe  $\Gamma$  associé à  $\mathcal{M}^0$  est égal au système gradué associé à la connexion  $\nabla^0$ .*
- (2) *Si l'on suppose les conditions génériques de la section 3.1.1 du chapitre 3, en particulier  $B = 0$  et  $A$  à valeurs propres deux à deux distinctes, le système gradué de fibre  $V$  associé à la représentation inversible du graphe  $\Gamma$  associée à  $\mathcal{M}^0$  est égal au système gradué associé à la connexion fuchsienne  $\nabla^1$  par la proposition 3.1.9 du chapitre 3.*

À partir de ce résultat, on peut en déduire un calcul explicite des données de Stokes de la connexion  $\nabla^0$  en fonction de certaines données de la connexion  $\nabla^1$ .

On conclura enfin dans la section 4.6 que la matrice de connexion permettant de définir un assocateur de Drinfel'd dans [Dri89] est un cas particulier de coefficient de Stokes dans un cas générique.

## 4.2. Représentation inversible de graphe et présentation de modules

Nous allons montrer qu'à toute présentation de  $\mathcal{A}_1$ -module comme précédemment, on peut associer une représentation de graphe inversible du graphe  $\Gamma$ .

THÉORÈME 4.2.1. *Pour tout choix :*

- (1) *de deux angles admissible et co-admissible  $\eta_I, \eta_J \in \mathbf{R}$  pour les familles  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  respectivement,*
- (2) *d'un élément  $t \in K$ ,*
- (3) *d'une orientation du cercle à l'infini,*

*on peut associer naturellement à la présentation de  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^0$  ci-dessus une représentation inversible du graphe biparti  $\Gamma$  sur l'espace vectoriel bigradué  $\mathbb{V}$ .*

Rappelons quelques points. Posons  $\mathcal{M}^0$  la présentation de  $\mathcal{A}_1$ -modules comme ci-dessus. Notons  $\mathcal{L}$  le système local des solutions de  $\mathcal{M}^0$  sur  $\mathcal{U} := \mathbf{C} - \{a_i : i \in I\}$ . Alors pour tout point de base  $b$  proche de l'infini, dans la direction  $d$ , on peut considérer la fibre  $\mathcal{L}_b$  de  $\mathcal{L}$  en  $b$ . Si la direction  $d$  est non singulière, alors  $b$  appartient à un secteur de Stokes. Par la théorie formelle, la restriction de  $\mathcal{M}^0$  sur  $\mathcal{U}$ , qui est une connexion est formellement équivalente à la connexion

$$\tilde{\nabla}^0 := d - \left( B + \frac{\sum_{j \in J} C^j D_j}{z} \right) dz = d - \left( B + \frac{\Lambda_W}{z} \right) dz.$$

car d'après les conditions génériques,  $\Lambda_W := \sum_{j \in J} C^j D_j$  est non résonante. Grâce à la théorie de la multi-sommation, on en déduit un isomorphisme holomorphe  $F_b$  au voisinage de l'infini dans le secteur de Stokes donné par la direction non singulière  $d$  entre la connexion  $\tilde{\nabla}^0$  et  $\mathcal{M}^0$  (vu comme  $\mathcal{D}_{\mathcal{U} \cup \{\infty\}}$ -module) au voisinage de  $b$  tel que  $F(\infty) = 1$ .

En choisissant une branche du logarithme dans la direction  $d$  et un élément  $t_W \in K_W$ , on en déduit une base préférée du système local gradué des solutions de  $\tilde{\nabla}^0$ . Par l'isomorphisme holomorphe précédent, on en déduit une base graduée du système local des solutions de  $\mathcal{M}^0$  en  $b$ . La composante selon  $W$  est donnée explicitement par

$$F(z) \cdot e^{\Lambda_W \log(z) + Bz} \cdot t_W,$$

pour tout  $z$  au voisinage de l'infini dans la direction  $d$ . La graduation au niveau de la base de solution correspond immédiatement à la graduation de  $W$ . Directement au niveau du système local, celle-ci est donnée par  $\mathcal{L}_b = \bigoplus_{j \in J} \mathcal{L}_j$  avec  $\mathcal{L}_j$  l'ensemble des

solutions de  $\mathcal{M}^0$  sur  $\mathcal{U}$  telle que son prolongement vers l'infini le long d'une direction angle  $\theta$  avec  $|\theta - \arg(d)| < \pi/2$  est à croissance sous-exponentielle de type  $b_j$ .

Comme le choix d'une direction non singulière de  $\mathcal{M}^0$  en l'infini est équivalent au choix d'une direction co-admissible, ce qui précède peut ainsi être résumé dans le lemme suivant :

LEMME 4.2.2. *Soit  $\mathcal{M}^0$  une présentation de  $\mathcal{A}_1$ -modules comme ci-dessus. Alors pour tout choix d'un angle co-admissible  $\eta_J$  pour la famille  $(b_j)_{j \in J}$  et tout choix d'un élément  $t_W \in K_W$ , on peut définir un isomorphisme gradué naturel*

$$\bigoplus_{j \in J} W_j \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} \mathcal{L}_j$$

où  $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{L}_j$  est la fibre du système local des solutions de  $\mathcal{M}^0$  en un point à l'infini dans la direction d'angle  $\eta_J$ , muni de sa graduation naturelle par croissance des solutions.

On peut procéder de manière analogue pour les microsolutions. Notons  $\mathcal{C}_i$  l'espace des microfonctions en  $a_i$  et  $\mu\mathcal{L}_i := \text{Hom}_{\mathcal{D}_{a_i}}(\mathcal{M}_{a_i}^0, \mathcal{C}_i)$  l'espace des microsolutions de  $\mathcal{M}^0$  en  $a_i$ . La définition des microfonctions est rappelé dans la section A.3.1 de l'appendice A. Rappelons de plus que pour toute demi-droite  $d$  issue de  $a_i$ , on peut représenter toute microsolution  $\check{s} \in \mu\mathcal{L}_i$  par la classe d'un germe de fonction  $\check{s}$  en  $a_i$  sur  $\mathbf{C} - d$  modulo les germes de fonctions holomorphes en  $a_i$ .

LEMME 4.2.3. *Soit  $\mathcal{M}^0$  une présentation de  $\mathcal{A}_1$ -modules comme ci-dessus. Alors pour tout choix d'un angle admissible  $\eta_I$  pour la famille  $(a_i)_{i \in I}$  et tout choix d'un élément  $t_V \in K_V$ , on peut définir un isomorphisme gradué naturel*

$$\bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mu\mathcal{L}_i$$

où  $\mu\mathcal{L}_i$  est l'espace des microsolutions de  $\mathcal{M}^0$  en  $a_i$  sur la tanche d'angles  $]\eta_I - \pi ; \eta_I + \pi[$ .

Explicitement, la composante sur  $V_i$  de la base de microsolutions de  $\mu\mathcal{L}_i$  est de la forme

$$F_i(z) \cdot \frac{(z - a_i)^{C_i D^i}}{z - a_i} \cdot t_{V_i} \pmod{\mathcal{O}_{a_i}},$$

où  $F_i(z)$  est une fonction holomorphe en  $a_i$  telle que  $F(a_i) = 1$ .

REMARQUE 4.2.4. Dans les deux lemmes ci-dessus, on a utilisé de manière essentielle le fait que  $\mathcal{M}^0$  vérifie les conditions génériques. Pour l'isomorphisme avec les solutions, c'est la condition (5) (conséquence de (3)) que l'on a utilisé, alors que pour l'isomorphisme avec les microsolutions, c'est la condition (4).

On peut maintenant montrer le théorème 4.2.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.2.1. On a déjà montré que pour les choix précédents, on peut définir les isomorphismes entre l'espace des solutions de  $\mathcal{M}^0$  et  $W$  d'une part et l'espace des microsolutions généralisées de  $\mathcal{M}^0$  et  $V$  d'autre part. On pose alors  $\text{Can} : W \rightarrow V$  l'application induite par l'application canonique entre solutions et microsolutions généralisées et  $\text{Var} : V \rightarrow W$  l'application induite par la variation dans l'orientation choisie entre microsolutions généralisées et solutions.

On a donc  $1 - \text{Var Can}$  égal à la monodromie des solutions autour du pôle à l'infini dans l'orientation opposée à celle choisie et  $1 - \text{Can Var}$  égal à la monodromie des microsolutions généralisées autour des pôles à distance finie selon le même lacet.

Alors, on note  $\text{Can}_j^i \in \text{Hom}(W_j, V_i)$  et  $\text{Var}_i^j \in \text{Hom}(V_i, W_j)$  les applications induites par les graduations de  $V$  et  $W$ . Ces applications définissent bien une représentation



du graphe  $\Gamma$ . Le choix des angles admissible et co-admissibles  $\eta_I$  et  $\eta_J$  induisent bien des ordres sur les ensembles  $I$  et  $J$  respectivement, et en posant de plus  $I < J$ , on a bien un ordre sur le graphe  $\Gamma$ . Le corollaire A.5.6 de l'appendice A montre alors que les applications  $(\text{Can}_j^i, \text{Var}_i^j)_{(i,j) \in I \times J}$  définissent bien une représentation inversible du graphe  $\Gamma$ .  $\square$

REMARQUE 4.2.5. L'expression des composantes des applications canonique et variation semi-locales est donnée par les formules de la proposition A.6.4 de l'appendice A. Cela permet de relier les applications semi-locales aux applications canoniques et variations locales.

REMARQUE 4.2.6. Notons

$$u_i^j \in \text{Hom}(V_i, W_j) \quad \text{et} \quad v_j^i \in \text{Hom}(W_j, V_i) \quad \text{pour tout } (i, j) \in I \times J,$$

la représentation inversible de graphe associée au module  $\mathcal{M}^0$  pour le choix d'angles admissible et de l'élément  $\text{id} \in K$ . On vérifie immédiatement que si l'on prend le choix de l'élément  $t = t_V \oplus t_W \in K$ , alors la nouvelle représentation inversible de graphe sera donnée par

$$u_i^{j'} = t_{W_j}^{-1} \cdot u_i^j \cdot t_{V_i} \quad \text{et} \quad v_j^{i'} = t_{V_i}^{-1} \cdot v_j^i \cdot t_{W_j} \quad \text{pour tout } (i, j) \in I \times J.$$

En particulier, l'action sur la monodromie  $1 + uv$  est bien donné par  $1 + u'v' = t_W^{-1} \cdot (1 + uv) \cdot t_W$ .

### 4.3. Transformée de Laplace multiplicative et isomorphisme de représentations inversibles de graphe

Les représentations de graphe inversibles associées à  $\mathcal{M}^0$  et  $\mathcal{M}^1$  sont isomorphes :

THÉORÈME 4.3.1. *Les deux représentations inversibles du graphe  $\Gamma$  sur  $\mathbb{V}$  associées au  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^0$  et à sa transformée de Fourier-Laplace  $\mathcal{M}^1$  sont isomorphes.*

Dans l'appendice A, on définit la transformée de Laplace multiplicative sur les hyperfonctions. Les hyperfonctions solution sont un moyen commode d'encoder dans un même objet des solutions et des microsolutions (généralisées). Cela permet donc de définir la transformée de Laplace de solutions et de microsolutions.

On définit les éléments de normalisation suivant :

$$N_V^* := e^{i\pi\Lambda_V} \Pi(-\Lambda_V) \in K_V \quad \text{et} \quad N_W^* := \frac{\Pi(-\Lambda_W)}{2i\pi} \in K_W$$

où  $\Pi$  désigne la fonction Pi de Gauss reliée à la fonction Gamma d'Euler par  $\Pi(z) = \Gamma(1 + z)$  pour tout  $z \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}_{<0}$ . Ces deux éléments sont bien définis. En effet, on a supposé que  $\Lambda_V$  et  $\Lambda_W$  sont suffisamment proches de 0 et on peut prendre le développement holomorphe de la fonction  $z \mapsto \Pi(-z)$  en 0 qui sera bien une série entière de rayon de convergence  $> 1/2$  (même  $\geq 1$  en l'occurrence).

On peut alors en déduire le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3.2. *Les deux représentations inversibles du graphe  $\Gamma$  sur  $\mathbb{V}$  associées au  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^0$  et à sa transformée de Fourier-Laplace  $\mathcal{M}^1$  pour les choix :*

- (1) *de l'orientation canonique, des angles admissible et co-admissibles  $\eta_I, -\eta_J \in \mathbf{R}$  et de l'élément  $t = \text{id}_V \oplus N_V^* \in K = K_V \oplus K_W$  pour le module  $\mathcal{M}^0$ ,*
- (2) *de l'orientation inverse, des angles co-admissible et admissible  $-\eta_I - \pi, -\eta_J \in \mathbf{R}$  et de l'élément  $t = N_W^* \oplus \text{id}_W \in K = K_W \oplus K_V$  pour le module  $\mathcal{M}^1$ ,*

*sont égales.*

Remarquez que le théorème 4.3.1 est une conséquence du théorème 4.3.2. En effet, les changements de choix fournissent toujours un isomorphisme au niveau des représentations de graphe inversible.

REMARQUE 4.3.3. On peut considérer la suite de  $\mathcal{A}_1$ -modules  $\mathcal{M}^0, \mathcal{M}^1, \dots, \mathcal{M}^4$  tels que  $\mathcal{M}^{k+1}$  soit la transformée de Fourier-Laplace de  $\mathcal{M}^k$ . Alors on a  $\mathcal{M}^4 \simeq \mathcal{M}^0$ . Cependant, l'itération des choix précédents donne la même orientation, mais l'élément de normalisation  $t^4 = \frac{e^{-2i\pi\Lambda}}{(2i\pi)^2} t^0$  où  $\Lambda = \Lambda_V \oplus \Lambda_W$  et les angles (co)-admissibles  $\eta_I, -\eta_J \in \mathbf{R}$  pour  $\mathcal{M}^0$  mais les angles  $\eta_I + 2\pi, -\eta_J - 2\pi \in \mathbf{R}$  pour  $\mathcal{M}^4$ . Le facteur  $e^{-2i\pi\Lambda}$  de la normalisation est exactement compensé par la translation des angles  $\eta_I$  et  $\eta_J$  de  $\pm 2\pi$  respectivement. Donc les représentations de graphe inversibles associées à  $\mathcal{M}^0$  et  $\mathcal{M}^4$  pour ces choix sont isomorphes et l'isomorphisme correspond à la multiplication par un facteur  $1/(2i\pi)^2$ .

Rappelons tout d'abord les définitions de la transformée de Laplace multiplicative de l'appendice A.

Soit  $\check{\varphi}$  une microsolution de  $\mathcal{M}^0$  en  $a_i$ . On notera  $\check{\varphi}$  un quelconque de ses majeurs et  $\hat{\varphi}$  son mineur. Précisément, cela signifie que  $\check{\varphi}$  est un représentant quelconque de la classe  $\check{\varphi}$  et  $\hat{\varphi}$  est la fonction définie par  $\hat{\varphi}(z) = \check{\varphi}(z) - \check{\varphi}(e^{-2i\pi} z)$ . Comme  $\mathcal{M}^0$  est à croissance exponentielle et que le mineur  $\hat{\varphi}$  est une solution de  $\mathcal{M}^0$ , alors  $\hat{\varphi}$  est à croissance au plus exponentielle à l'infini et on peut considérer des intégrales de type Laplace de  $\hat{\varphi}$ . On a fait le choix de l'orientation canonique et de l'angle admissible  $\eta_I \in \mathbf{R}$ . On définit la transformée de Laplace multiplicative de la microsolution  $\check{\varphi}$  pour l'orientation canonique et l'angle admissible  $\eta_I$  comme la fonction

$$\mathfrak{L}(\check{\varphi})(\zeta) := \frac{1}{2i\pi} \int_{a_i + \varepsilon e^{i(\eta_I - \pi)}}^{a_i + \varepsilon e^{i(\eta_I + \pi)}} \check{\varphi}(z) e^{-z\zeta} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{a_i + \varepsilon e^{i(\eta_I \pm \pi)}}^{\infty e^{i(\eta_I \pm \pi)}} \hat{\varphi}(z) e^{-z\zeta} dz,$$

où  $\varepsilon$  désigne un réel strictement positif suffisamment petit pour que la première intégrale soit définie. On montre que cette somme d'intégrales ne dépend pas du choix du majeur et du  $\varepsilon$  choisi. La fonction  $\psi := \mathfrak{L}(\check{\varphi})$  définit une solution à l'infini de  $\mathcal{M}^1$  au voisinage de la direction  $-\eta_I - \pi$ . Réciproquement, si  $\psi$  est une solution quelconque de  $\mathcal{M}^1$  définie au voisinage de l'infini dans la direction  $-\eta_I - \pi$ , alors on pose

$$\mathfrak{L}^{-1}(\psi)(z) := \int_{Z + e^{i(-\eta_I - \pi)}}^{\infty e^{i(-\eta_I - \pi)}} \psi(\zeta) e^{z\zeta} d\zeta.$$

où  $Z$  est un point dans la direction  $-\eta_I - \pi$  au voisinage de l'infini. Cela définit alors bien une microsolution généralisée de  $\mathcal{M}^0$  au voisinage de la direction  $\eta_I$ .

Rappelons maintenant la définition de la transformée de Laplace coté  $\mathcal{M}^1$ . Si  $\varphi$  est une solution de  $\mathcal{M}^0$  définie au voisinage de l'infini dans la direction  $-\eta_J$ , alors on pose

$$\mathfrak{L}^{-1'}(\varphi)(\zeta) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\infty e^{-i\eta_J}}^{X + e^{-i\eta_J}} \varphi(z) e^{z\zeta} dz.$$

où  $X$  est un point dans la direction  $-\eta_J$  au voisinage de l'infini. Changer de point  $X$  à l'infini change le résultat par l'addition d'une fonction holomorphe sur un grand disque à distance fini (contenant tous les pôles de  $\mathcal{M}^1$ ). Donc, pour n'importe quel choix de  $X$ , cela définit une microsolution généralisée de  $\mathcal{M}^1$  au voisinage de la direction  $-\eta_J - \pi$ . Réciproquement, si on choisit une microsolution  $\check{\psi}$  de  $\mathcal{M}^1$  au voisinage d'un pôle  $b_j$  avec les choix de l'orientation inverse et de l'angle admissible  $\eta_J$ , on a la

définition suivante de la transformée de Laplace :

$$\mathfrak{L}'(\check{\psi})(z) := \int_{b_j + \varepsilon e^{i(\eta_J + \pi)}}^{b_j + \varepsilon e^{i(\eta_J - \pi)}} \check{\psi}(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta + \int_{b_j + \varepsilon e^{i(\eta_J \pm \pi)}}^{\infty e^{i(\eta_J \pm \pi)}} \hat{\psi}(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta.$$

L'influence du choix de l'orientation est que l'on prend l'intégrale autour du cercle de  $b_j$  dans le sens inverse et non dans le sens direct. Remarquez aussi que comme on prend la transformée coté  $\mathcal{M}^1$ , on ne met pas les facteurs  $1/(2i\pi)$  au même endroit.

On peut donc résumer ce qui précède par le diagramme 4 suivant :

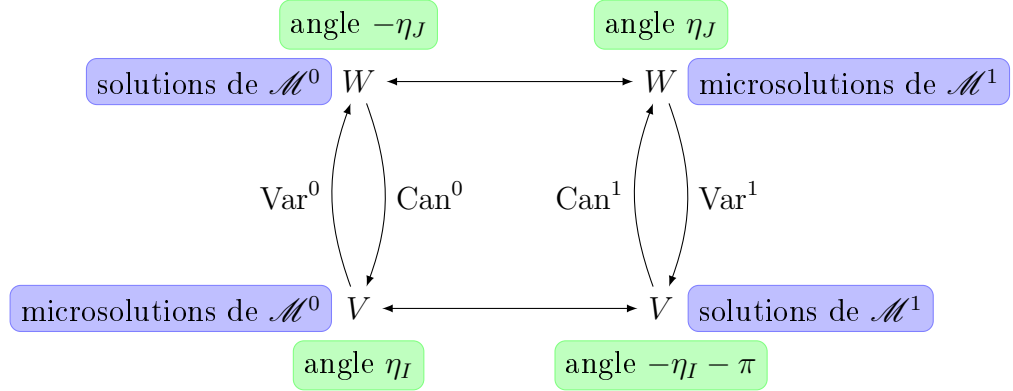


FIGURE 4. Transformée de Laplace multiplicative des solutions et microsolutions.

Le fait que l'on ait des isomorphismes de Laplace inverse l'un de l'autre est une conséquence de la théorie générale développée dans l'appendice A, théorème A.4.5.

Reste à voir la compatibilité des bases des deux cotés qui est le résultat du lemme suivant.

LEMME 4.3.4. Soit  $\check{\Phi}$  la base de microsolutions généralisées de  $\mathcal{M}^0$  dans la direction d'angle  $\eta_I$  donnée par son asymptotique avec le choix de la normalisation

$$N_V^* := e^{i\pi\Lambda_V} \Pi(-\Lambda_V) \in K_V.$$

Alors la base de solutions de  $\mathcal{M}^1$  à l'infini donnée par la transformée de Laplace de  $\check{\Phi}$  est la base des solutions de Stokes de  $\mathcal{M}^1$  donnée par le choix de l'angle admissible  $-\eta_I - \pi$  (et la normalisation  $\text{id} \in K_V$ ).

REMARQUE 4.3.5. De même, si  $\Phi$  est la base de solutions de Stokes de  $\mathcal{M}^0$  donnée par le choix de l'angle co-admissible  $-\eta_J$  (et de la normalisation  $\text{id} \in K_W$ ) alors sa transformée de Laplace est la base de microsolutions généralisées de  $\mathcal{M}^1$  donnée par le choix de l'angle admissible  $\eta_J$  et de la normalisation

$$N_W^* = \frac{\Pi(-\Lambda_W)}{2i\pi} \in K_W.$$

Ce résultat se montre comme le lemme 4.3.4 précédent, en changeant le choix de l'orientation choisie.

DÉMONSTRATION. Soit  $\check{\Phi}$  la base de microsolutions généralisées de  $\mathcal{M}^0$  de l'énoncé. On a donc que pour tout  $v_i \in V_i$ , la base de microsolutions est asymptotique à

$$\frac{(z - a_i)^{C_i D^i}}{z - a_i} \cdot N_V^* \cdot v_i \pmod{\mathcal{O}_{a_i}},$$

et holomorphe en  $a_i$  (c'est-à-dire est nulle) pour tout  $v_k \in V_k$  avec  $k \neq i$ . La composante selon  $W$  est entièrement déterminée par la composante selon  $V$ .

Le fait que la transformée de Laplace de cette base est bien la base de Stokes de  $\mathcal{M}^1$  donnée par le choix de l'angle admissible  $-\eta_J + \pi$  est une conséquence d'un lemme analogue 3.2.7 du chapitre 3. Précisément, le lemme est le

LEMME 4.3.6. *La transformée de Laplace de l'hyperfonction  $z \mapsto \frac{(z-a_i)^\alpha}{z-a_i}$  pour le choix d'arguments  $]\eta_I - \pi; \eta_I + \pi[$  est égale à*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{a_i, \eta_I + \pi}} \frac{(z-a_i)^\alpha}{z-a_i} e^{-z\zeta} dz = K_\alpha \cdot \frac{e^{-a_i\zeta}}{\zeta^\alpha},$$

*pour la détermination de  $\zeta^\alpha$  d'angles  $]-\eta_I - 2\pi; \eta_I[$ , avec  $K_\alpha = \frac{e^{-i\pi\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ ,*

□

#### 4.4. Systèmes gradués et représentations inversibles de graphe

Comme précédemment, on note  $\Gamma$  un graphe complet biparti de sommets l'union disjointe  $I \cup J$  muni d'un ordre. Soit  $\mathbb{V} = V \oplus W$  un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel bigradué tel que  $V$  est  $I$ -gradués et  $W$  est  $J$ -gradués. On notera  $\mu_i = \dim(V_i)$  pour tout  $i \in I$ . Nous allons montrer dans cette section que l'on peut associer à chaque représentation inversible du graphe  $\Gamma$  deux systèmes gradués.

PROPOSITION 4.4.1. *On peut associer naturellement à toute représentation inversible du graphe  $\Gamma$  sur l'espace vectoriel gradué  $V \oplus W$  deux systèmes gradués, le premier de fibre  $V$ , le second de fibre  $W$  avec pour vecteur entier  $(\dim(V_i))_{i \in I}$  et  $(\dim(W_j))_{j \in J}$  respectivement.*

Commençons par remarquer le fait suivant :

LEMME 4.4.2. *Soit  $\Sigma$  un anneau,  $\tilde{\mu} = (\mu_i)_{i \in I}$  et une paire (non ordonnée) de deux ouverts  $\Sigma_g$  et  $\Sigma_d$  recouvrant  $\Sigma$  tels que leur intersection ait deux composantes connexes. On munit  $I$  d'un ordre total. Alors la catégorie des systèmes gradués pour les données  $(\Sigma, I, \tilde{\mu}, \Sigma_g, \Sigma_d)$  est équivalente à la catégorie suivante :*

- (1) *les objets sont les automorphismes linéaires  $f \in \text{GL}(V)$  appartenant à la grosse cellule  $B_- B_+ \subseteq G$  où les Borel par blocs sont définis grâce à la graduation ordonnée  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ ,*
- (2) *les flèches sont les automorphismes linéaires de  $V$  préservant la  $I$ -gradation de  $V$ , c'est-à-dire un élément de  $K = B_- \cap B_+$ .*

DÉMONSTRATION. L'application qui à un système gradué associe un objet de la catégorie ci-dessus est définie comme suit. On choisit un isomorphisme gradué de  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i(d)$  avec  $\bigoplus_{i \in I} V_i$ . L'application de monodromie dans le sens direct pour un point de base dans  $\Sigma_d$  définit immédiatement, via cet isomorphisme, un élément  $f$  de la grosse cellule  $B_- B_+$  par définition des systèmes gradués. Pour l'application réciproque, il suffit de remarquer que  $f$  admet toujours une décomposition de la forme  $f = b_- b_+$  avec  $b_- \in B_-$  et  $b_+ \in B_+$ , donc un système gradué en prenant  $\mathcal{L}_i(g) = \mathcal{L}_i(d) = V_i$  et les applications de recollement  $b_\pm$ . De plus, une autre décomposition est nécessairement de la forme  $f = (b_- t^{-1})(t b_+)$  pour un certain  $t \in K = B_- \cap B_+$ , donc définirait un système gradué isomorphe. □

Nous pouvons maintenant montrer la proposition 4.4.1.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.4.1. On rappelle que comme  $\Gamma$  est un graphe ordonné, il est muni d'un ordre sur les ensembles  $I$  et  $J$ . D'après le lemme 4.4.2, il suffit d'associer à une représentation inversible du graphe  $\Gamma$  sur le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel bigradué  $\mathbb{V}$  deux automorphismes linéaires  $f \in \text{GL}(V)$  et  $g \in \text{GL}(W)$  appartenant à

leur grosse cellule respective. En reprenant les notations de la section 1.2.3 du chapitre 1

$$u_i^j \in \text{Hom}(V_i, W_j) \quad \text{et} \quad v_j^i \in \text{Hom}(W_j, V_i) \quad \text{pour tout } (i, j) \in I \times J,$$

on pose alors

$$f = \left( \delta_{i,j} + \sum_{k \in J} v_k^j u_i^k \right)_{\{i,j \in I\}} \in \text{End}(V)$$

et

$$g = \left( \delta_{i,j} + \sum_{k \in I} u_k^i v_j^k \right)_{\{i,j \in J\}} \in \text{End}(W),$$

que l'on vérifie immédiatement être dans les grosses cellules respectives, par définition d'une représentation inversible.

□

On peut maintenant montrer la compatibilité des systèmes gradués induit. On reprend la présentation  $\mathcal{M}^0$  ci-dessus dont sa restriction à  $\mathbf{C} - \{a_i : i \in I\}$  est la connexion

$$\nabla^0 = d - (B + C(z - A)^{-1}D) dz.$$

On choisit une direction co-admissible  $d$  pour la famille  $(b_j)_{j \in J}$ . De la théorie générale développée dans [Boa14], on peut associer à la connexion  $\nabla^0$  un système local de Stokes un peu plus général que celui défini dans le chapitre 1. C'est un système local sur une courbe  $\tilde{\Sigma}$  où l'on a pris l'éclaté réel de  $\mathbf{P}^1 - \{a_i : i \in I\}$  en le point à l'infini et retiré des points au voisinage de l'infini dans les directions singulières tel que sa restriction dans le halo à l'infini soit un système  $K_W$ -local. On considère alors un grand disque de  $\tilde{\Sigma}$  contenant les pôles  $a_i$  mais aucuns autres trous (aucun des trous  $e(d)$  pour toute direction singulière  $d$ ) et on prend la restriction du système local de Stokes à  $\tilde{\Sigma} - D$ . Cette restriction définit un système local de Stokes dans le sens de la définition 1.3.8 du chapitre 1 et on peut donc grâce à la proposition 1.3.11 lui associer un système gradué pour le choix d'une direction co-admissible  $d$ . En prenant l'inversion de ce système local (par la transformation  $z \mapsto 1/z$ ), on obtient le système gradué désiré.

On a alors le

**THÉORÈME 4.4.3.** *Le système gradué de fibre  $W$  associé à la représentation inversible du graphe  $\Gamma$  associé à  $\mathcal{M}^0$  est égal au système gradué associé à la connexion  $\nabla^0$ .*

**DÉMONSTRATION.** La partie  $W$  de la représentation inversible du graphe  $\Gamma$  correspond bien au système des solutions de  $\nabla^0$  gradué par le phénomène de Stokes dans la direction co-admissible  $d$  à l'infini. L'application de monodromie donne bien le système gradué induit, qui est bien égal au système gradué obtenu directement en prenant le système local de Stokes associé à  $\nabla^0$  puis le système gradué correspondant (dans la direction  $d$ ). □

Considérons maintenant le cas particulier du chapitre 3. On prend  $B = 0$ ,  $A$  à valeurs propres deux à deux distinctes,  $C = \text{id}$  et on pose  $R := D$  pour être cohérent avec les notations des chapitres précédents. On a donc  $V = W$  dans ce cas. La connexion  $\nabla^0$  est alors égale à

$$\nabla^0 = d - \text{id}(z - A)^{-1}R dz = d - \sum_{i \in I} \frac{\text{id}_i R}{z - a_i} dz.$$

On suppose de plus que l'application  $R$  vérifie :

- (1) la partie diagonale  $\Lambda := \delta(R) \in \mathfrak{t}$  de  $R$  est à valeurs propres non entières,
- (2) l'endomorphisme  $R \in \mathfrak{g}$  est à valeurs propres non entières.

**THÉOREME 4.4.4.** *Sous les hypothèses précédentes, le système gradué de fibre  $V$  ( $= W$ ) associé à la représentation inversible du graphe  $\Gamma$  associé à  $\mathcal{M}^0$  est égal au système gradué associé à la connexion fuchsienne  $\nabla^1$  par la proposition 3.1.2 du chapitre 3.*

**DÉMONSTRATION.** La démonstration est un peu moins immédiate que pour le coté irrégulier. En effet, le système gradué donné par la restriction de la représentation inversible du graphe  $\Gamma$  est le système gradué donné par les microsolutions de la connexion  $\nabla^0$  au voisinage de ces pôles à distance finie. Il faut donc montrer que l'espace des microsolutions de  $\nabla^0$  en le pôle  $a_i$  disons est isomorphe à l'espace des solutions de  $\nabla^0$  holomorphe sur  $\mathbf{C}$  privé d'une demi-droite issue de  $a_i$  de direction admissible  $d$  et non holomorphe en  $a_i$ . On a une application naturelle entre les deux espaces, qui est l'application canonique qui à une solution au voisinage de  $a_i$  associe la microsolution correspondante. Dans ce cas, l'application canonique est un isomorphisme. En effet, les deux espaces sont de dimension 1 (voir le lemme 3.1.3 du chapitre 3 et la proposition 2.1.4 du chapitre 2). Comme l'application canonique est clairement non nulle, elle est bijective.  $\square$

#### 4.5. Données de Stokes

Pour calculer les données de Stokes de  $\mathcal{M}^1$ , on va utiliser les correspondances algébriques présentes dans l'appendice A section A.6.

Considérons la représentation inversible du graphe  $\Gamma$  associée au module  $\mathcal{M}^1$  donnée par les

$$u_i^j \in \text{Hom}(V_i, W_j) \quad \text{et} \quad v_j^i \in \text{Hom}(W_j, V_i) \quad \text{pour tout } (i, j) \in I \times J.$$

On rappelle que l'on note

$$u_i = \sum_{j \in J} u_i^j \quad \text{et} \quad v^i = \sum_{j \in J} v_j^i \quad \text{pour tout } i \in I.$$

La monodromie de la partie  $V$  est donnée par

$$M_V = \left( \delta_{i,j} + \sum_{k \in J} v_k^j u_i^k \right)_{\{i,j \in I\}} \in \text{End}(V).$$

On en déduit les matrices de Stokes de la connexion  $\nabla^1$  par la formule  $M_V = u_-^{-1} h u_+$ , qui est aussi équivalente à la formule

$$u_- - h u_+ = \sum_{i, i' \in I} v^i \Theta_{i-1}^{-1} u_{i'}.$$

où

$$\Theta_l := 1 + \sum_{i=1}^l \sum_{k \in J} u_i^k v_k^i \in \text{GL}(W).$$

Notons un instant avec des primes les applications de la représentation inversible de graphe associée au module  $\mathcal{M}^0$  avec le bon choix de normalisation donné par le théorème 4.3.2. On a donc  $u_i^{j'} = u_i^j$  et  $v_j^{i'} = v_j^i$  pour tout  $(i, j) \in I \times J$  d'après le résultat du théorème 4.3.2. On notera donc sans les primes les applications de la représentation de graphe inversible associé à  $\mathcal{M}^0$  et  $\mathcal{M}^1$ .

On suppose toujours que les résidus du  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}^0$  sont non résonants, ce qui permet de bien définir les matrices de connexion.

PROPOSITION 4.5.1. *Si  $C_{i,j}$  désigne la matrice de connexion entre les pôles  $a_j$  et  $a_i$  de la connexion  $\nabla^1$ , alors on a l'égalité*

$$v^i \Theta_{i-1}^{-1} u_{i'} = -C_{i,i'} \cdot \chi(-C_{i'} D^{i'}) \cdot C_{i'} \in \text{Hom}(V_{i'}, V_i), \quad \text{pour tout } i, i' \in I,$$

où  $C_{i,i'}$  désigne la matrice de connexion entre les pôles  $a_{i'}$  vers  $a_i$  pour le choix de la branche du logarithme donnée par l'angle  $\eta_I$ , le long du chemin ne traversant aucunes des coupures  $a_k + \mathbf{R}_+ e^{i(\eta_I \pm \pi)}$ .

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence du lemme 3.2 de [Mal91] chapitre II p.31.  $\square$

On en déduit immédiatement que les matrices de Stokes de la connexion  $\nabla^1$  sont déterminées dans le cas générique précédent par les matrices de connexion de la connexion  $\nabla^0$ .

#### 4.6. Associateur de Drinfel'd

Soient  $X, Y \in \mathfrak{g} = \text{End}(V)$ . On montre ici que la matrice de connexion permettant de définir un associateur de Drinfel'd dans [Dri90], c'est-à-dire la matrice de connexion le long du segment  $[0; 1]$  de la connexion fuchsienne

$$\nabla_{KZ} := d - \left( \frac{X}{z} + \frac{Y}{z-1} \right) dz$$

sur le fibré trivial sur  $\mathbf{P}^1$  de fibre  $V$ , est en fait un cas particulier de matrices de Stokes d'une connexion de type  $2 + 1$  dans un cas générique.

On considère la connexion irrégulière

$$\nabla := d - \left( \frac{\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}}{\xi^2} + \frac{\begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}}{\xi} \right) d\xi$$

sur le fibré trivial de fibre  $\mathbb{V} := V \oplus V$  sur  $\mathbf{P}^1$ . Le résidu en 0 est égal à  $DC$  avec  $D = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1_V & 1_V \end{pmatrix}$ . La connexion fuchsienne associée est bien la connexion  $\nabla_{KZ}$  ci-dessus utilisée pour définir un associateur de Drinfel'd sur  $\mathbf{C}$  (voir [Dri90]). On choisit la direction admissible  $d$  d'angle  $-\pi/2$ . Cela permet de définir l'ouvert  $\mathcal{U}(d)$  égal à  $\mathbf{C}$  privé des deux demi-droites issues de 0 et 1 de direction  $d$ . Notons  $C_{2,1}$  la matrice de connexion de  $\nabla_{KZ}$  reliant le pôle 0 au pôle 1 par un chemin de  $\mathcal{U}(d)$ . Notons aussi  $\Phi$  la matrice de connexion de  $\nabla_{KZ}$  le long du segment  $[0; 1]$  (parcouru de 0 vers 1), que nous appellerons ici matrice de connexion de Drinfel'd. Alors on a l'égalité

$$C_{2,1} = e^{i\pi Y} \Phi.$$

(Si on avait pris la direction admissible d'angle  $\pi/2$ , on aurait eu  $C_{2,1} = e^{-i\pi Y} \Phi$ ).

Maintenant, les matrices de Stokes de  $\nabla$  sont données par la formule

$$hu_+ - u_- = N^{-1} M \cdot \chi(\Lambda) N$$

avec  $N = e^{i\pi\Lambda} \Pi(-\Lambda)$  avec  $\Pi$  la fonction Pi de Gauss et  $M = \sum_{i,j \in I} R_i C_{i,j} \text{id}_j$ . Le coefficient d'indice  $(2, 1)$  de  $hu_+ - u_-$  c'est-à-dire l'opposé du coefficient  $(2, 1)$  de  $u_-$  est donné par

$$e^{-i\pi\lambda_2} \Pi(-\lambda_2)^{-1} \cdot Y C_{2,1} \cdot \chi(\lambda_1) e^{i\pi\lambda_1} \Pi(-\lambda_1).$$

En utilisant l'expression explicite des  $\lambda_i$ , on a donc

$$(u_-)_{2,1} = -\Pi(-Y)^{-1} Y \cdot \Phi \cdot \chi(X) e^{i\pi X} \Pi(-X).$$

En particulier, on peut retrouver la matrice de connexion de Drinfel'd  $\Phi$  à partir du coefficient  $(2, 1)$  de  $u_-$  lorsque l'on suppose des conditions génériques. Par exemple, supposons que la connexion  $\nabla$  soit suffisamment proche de la connexion triviale comme précédemment mais en plus que  $\lambda_2$  soit inversible. Alors  $Y$  est inversible (par hypothèse sur  $\lambda_2$ ) et les termes en  $\Pi(-Z)$  et  $\chi(Z)$  sont inversibles car  $Z = X$  ou  $Y$  est proche de 0. Dans ce cas, on peut donc écrire l'égalité

$$\Phi = -\Pi(-Y)Y^{-1} \cdot (u_-)_{2,1} \cdot \chi(X)^{-1} e^{-i\pi X} \Pi(-X)^{-1},$$

c'est-à-dire que la matrice de connexion de Drinfel'd est déterminée génériquement par les matrices de Stokes de  $\nabla$ . En particulier, le développement des matrices de Stokes de  $\nabla$  sous forme de série formelle nous redonne le développement en série formelle non commutative de la matrice de connexion de Drinfel'd donné dans [LM96] théorème A.9 p.63.





## Développement moulien des matrices de connexion

### 5.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de donner une formule sous la forme d'une série formelle (à variables non commutatives) pour les matrices de connexion  $C_{i,j}$  reliant le pôle  $a_j$  au pôle  $a_i$  avec  $i, j \in I$ , pour une connexion fuchsienne

$$\nabla := d - \sum_{i \in I} \frac{A_i}{z - a_i} dz$$

sur un fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  et d'utiliser ce résultat ensuite dans le chapitre 6 pour donner un développement en série des matrices de Stokes d'une connexion de type  $2+1$  (en utilisant les résultats du chapitre 3 qui nous ont permis de relier les matrices de Stokes aux matrices de connexions fuchiennes). En généralisant les résultats ci-dessous et tout particulièrement le corollaire 5.6.3 p.109 pour les matrices de connexion entre les pôles d'une connexion du type  $2+1+\dots+1$ , on peut fournir des résultats analogues à ceux du chapitre 6 en utilisant les développements effectués dans le chapitre 4 proposition 4.5.1.

Donnons ci-dessous la formule en question. Dans cette section, on considère les données suivantes :

- (1) une coordonnée  $z : \mathbf{P}^1 - \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C}$ .
- (2) un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie. On note  $G = \mathrm{GL}(V)$  et  $\mathfrak{g} = \mathrm{End}(V)$ .
- (3) les nombres complexes  $a_i$  ( $i \in I$ ) deux à deux distincts.
- (4) des éléments  $A_i \in \mathfrak{g}$  pour tout  $i \in I$ .

On considère alors la connexion méromorphe  $\nabla$  ci-dessus sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ . On notera  $S := \{a_i : i \in I\} \cup \{\infty\}$  l'ensemble des pôles de  $\nabla$ . On peut définir un certain nombre d'invariant pour la connexion  $\nabla$ . Par exemple, pour toute classe d'homotopie de lacet  $\gamma'$  à valeurs dans  $\mathbf{P}^1 - S$  reliant le point régulier  $p$  au point régulier  $q$ , on peut définir la monodromie  $M_{\gamma'}$  de la connexion  $\nabla$  par

$$M_{\gamma'} := \Psi^{-1}(p)\Psi(q) \in G,$$

où  $\Psi$  est une base de solution de  $\nabla$  au voisinage de  $p$  que l'on prolonge à  $q$  le long de  $\gamma'$ .

On suppose dans la suite que les résidus  $A_i$  ( $i \in I$ ) de  $\nabla$  en chaque pôle sont *non résonants*, c'est-à-dire que la différence de deux quelconque de leurs valeurs propres n'est jamais un entier non nul. On peut alors définir la matrice de connexion  $C_\gamma$  pour tout chemin  $\gamma$  reliant un pôle simple  $p$  à un pôle simple  $q$  modulo le choix d'une branche du logarithme  $\log_p(\cdot - p)$  en  $p$  et  $\log_q(\cdot - q)$  en  $q$ . Brièvement, pour ces choix il existe deux bases préférées  $\Psi_p$  et  $\Psi_q$  sur un voisinage sectoriel issu de  $p$  et  $q$  respectivement telles que  $\Psi_p(z)$  soit asymptotique à  $e^{\mathrm{Res}_p(\nabla) \cdot \log_p(z-p)}$  (et la formule analogue pour  $\Psi_q$ ). Alors on a par définition

$$C_\gamma := \Psi_q^{-1}(z)\Psi_p(z) \in G$$

et cette définition est indépendante du choix de  $z$  dans l'image du chemin  $\gamma$  par simple connexité. La matrice de connexion  $C_\gamma$  peut aussi s'écrire comme une limite normalisée des matrices de monodromie  $M_{\gamma_{u,v}}$  où  $\gamma_{u,v} : [u; v] \rightarrow \mathbf{P}^1 - S$  désigne la restriction de  $\gamma$  sur l'intervalle  $[u; v]$  pour  $0 < u < v < 1$  (voir la proposition 5.3.9).

On définit l'alphabet  $\Omega := \{A_i : i \in I\}$  en les résidus de  $\nabla$  et on notera  $\Omega^*$  l'ensemble des mots écrits dans l'alphabet  $\Omega$ . Remarquez que cet alphabet est en bijection avec  $I$ , et on notera abusivement  $a_\omega := a_i \in \mathbf{C}$  le pôle correspondant à une lettre  $\omega = A_i \in \Omega$ .

On rappelle qu'un moule scalaire est une application  $I^\bullet : \Omega^* \rightarrow \mathbf{C}$ . En suivant les conventions de J. Écalle, on note  $I^\omega := I^\bullet(\omega) \in \mathbf{C}$  l'image du mot  $\omega \in \Omega^*$  du moule  $I^\bullet$ . Au langage près (et à la structure algébrique de l'ensemble des moules rappelée en appendice B), un moule est simplement un ensemble de coefficients universels pour chaque mot écrit dans l'alphabet  $\Omega$ .

On définit le moule classique des hyperlogarithmes  $I_{\gamma'}$  pour tout chemin  $\gamma'$  à valeurs dans les points réguliers  $\text{Gr}^1 - S$  de  $\nabla$  par

$$I_{\gamma'}^\omega := \int_{0 < t_1 \leq \dots \leq t_r < 1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{\omega_1}} \cdots \frac{dz_r}{z_r - a_{\omega_r}},$$

pour tout mot  $\omega = \omega_1 \cdots \omega_r$ , où  $z_k := \gamma(t_k)$  pour tout  $1 \leq k \leq r$ .

Notons  $A_\bullet$  le comoule canonique à valeurs dans l'algèbre enveloppante  $\text{Ug}$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On rappelle que cela signifie que  $A_\bullet$  est l'application  $\Omega^* \rightarrow \text{Ug}$  définie par

$$A_\omega := A_\bullet(\omega) = A_{\omega_r} \cdots A_{\omega_1},$$

pour tout mot  $\omega = \omega_1 \cdots \omega_r$ . On fera attention à l'inversion des indices.

Le point de départ de la formule pour les matrices de connexion est la proposition suivante.

PROPOSITION (5.4.3). *On a l'égalité*

$$M_{\gamma'} = \sum_{\omega \in \Omega^*} I_{\gamma'}^\omega A_\omega$$

où  $M_{\gamma'}$  est la monodromie de  $\nabla$  le long du chemin  $\gamma'$  (à valeurs dans les points régulier) et où le membre de droite est une somme absolument convergente.

Cette formule est une conséquence de la résolution des équations différentielle avec la méthode de Picard et a été montrée dans le mémoire de J. A. Lappo-Danilevskij [LD53].

Pour obtenir une formule pour la matrice de connexion  $C_{i,j}$  reliant le pôle  $a_j$  au pôle  $a_i$  le long d'un chemin  $\gamma$ , on doit définir le bimoule d'extension symétrale

$$\text{ssa}_{i,j}^\bullet : (\Omega \times \Omega)^* \rightarrow \mathbf{C}.$$

Les indices  $i$  et  $j$  jouent ici un rôle spécial et le bimoule  $\text{ssa}_{i,j}^\bullet$  dépend de ces indices. La définition explicite intrinsèque du bimoule  $\text{ssa}^\bullet$  est donnée dans la section 5.5.2. En gros, les  $\text{ssa}_{i,j}^{(\omega')}$  s'expriment comme des sommes de produits de coefficients binomiaux dépendant des mots  $\omega, \omega' \in \Omega^*$ .

REMARQUE 5.1.1. Ce bimoule a beaucoup de termes nuls. En particulier, on peut montrer que  $\text{ssa}_{i,j}^{(\omega')} \neq 0$  implique que les mots  $\omega$  et  $\omega'$  sont de même longueur (même que leurs lettres sont en bijection). Un programme informatique a été donné en appendice B pour calculer les premiers termes de ce bimoule.

On peut alors donner un développement moulien de la matrice de connexion  $C_{i,j}$  reliant le pôle  $a_j$  au pôle  $a_i$ .

THÉORÈME. *On a l'égalité*

$$C_{i,j} = e^{-\log_i(a_j - a_i)A_i} \left( \sum_{\omega, \omega' \in \Omega^*} \text{ssa}_{i,j}^{(\omega')} I_{i,j}^{\omega'} A_{\omega} \right) e^{\log_j(a_i - a_j)A_j},$$

où  $I_{i,j}^{\omega}$  est égal à la limite des  $I_{\gamma u, v}^{\omega}$  pour  $(u, v) \rightarrow (0, 1)$  lorsque cette limite existe et 0 sinon. De plus, la somme de droite est absolument convergente.

Notons  $\Omega_{i,j}^* \subseteq \Omega^*$  l'ensemble des mots dans l'alphabet  $\Omega$  ne commençant pas par  $A_j$  et ne finissant pas par  $A_i$ . De la définition du bimoule  $\text{ssa}^\bullet$ , on montre immédiatement que pour tout  $\omega' \in \Omega_{i,j}^*$ , on a  $\text{ssa}_{i,j}^{(\omega')} = 1$  si  $\omega = \omega' \in \Omega_{i,j}^*$  et 0 dans tous les autres cas. On peut donc écrire le développement précédent sous la forme

$$C_{i,j} = e^{-\log_i(a_j - a_i)A_i} \left( \sum_{\omega' \in \Omega_{i,j}^*} I_{i,j}^{\omega'} A_{\omega'} + \sum_{\substack{\omega, \omega' \in \Omega^* \\ \omega \notin \Omega_{i,j}^*}} \text{ssa}_{i,j}^{(\omega')} I_{i,j}^{\omega'} A_{\omega} \right) e^{\log_j(a_i - a_j)A_j}.$$

Le terme de droite entre les parenthèses peut être vu comme un terme de régularisation. En développant les exponentielles, on obtient alors la forme simplifiée

$$C_{i,j} = \sum_{\omega' \in \Omega_{i,j}^*} I_{i,j}^{\omega'} A_{\omega'} + \text{termes de régularisation}.$$

De plus, remarquez que les coefficients  $I_{i,j}^{\omega'}$  sont tous convergents pour  $\omega' \in \Omega_{i,j}^*$ , c'est-à-dire que l'on a exactement

$$I_{i,j}^{\omega'} = \int_{0 < t_1 \leq \dots \leq t_r < 1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{\omega_1}} \dots \frac{dz_r}{z_r - a_{\omega_r}},$$

où  $z_k = \gamma(t_k)$  pour tout  $1 \leq k \leq r$  pour tout mot  $\omega' = \omega_1 \dots \omega_r \in \Omega_{i,j}^*$ . On a ainsi obtenu un développement moulien de la matrice de connexion  $C_{i,j}$  à partir d'intégrales itérées, qui sont ici des hyperlogarithmes (voir [Eca02] §4.3).

Cette section est organisée comme suit. Dans la partie 5.2, on commence par faire le lien entre la formulation vectoriel ci-dessus et une variante formelle. Ensuite dans la partie 5.3, on donne quelques pré-requis pour les développements mouliens à proprement dit en reliant les matrices de connexion aux matrices de monodromie. Les parties 5.4 et 5.5 sont les parties centrales de cette section où l'on montre les développements mouliens pour la monodromie et les matrices de connexions. Pour les matrices de connexion, on procède en trois étapes :

- (1) On montre une formule du type

$$C_{i,j} = \sum_{\omega \in \Omega^*} J_{i,j}^{\omega}(\alpha_j, \alpha_i) A_{\omega}$$

où  $J^\bullet : \Omega^* \rightarrow \mathbf{C}[x, y]$  est un moule à valeurs dans l'algèbre des polynômes en deux variables commutatives. Cette formule est une conséquence immédiate du fait que les matrices de connexions  $C_{i,j}$  sont de type groupe pour une certaine structure de cogèbre dans le cadre formel.

- (2) On montre une formule du type

$$C_{i,j} = e^{-\log_i(a_j - a_i)A_i} \left( \sum_{\omega \in \Omega^*} J_{i,j}^{\omega}(0, 0) A_{\omega} \right) e^{\log_j(a_i - a_j)A_j}$$

en utilisant au maximum la structure de moule  $J_{i,j}^\bullet$ .

- (3) Enfin, on obtient en dernier lieu la formule du théorème ci-dessus grâce à la formule

$$J_{i,j}^\omega(0,0) = \sum_{\omega' \in \Omega^*} \text{ssa}_{i,j}^{(\omega')} I_{i,j}^{\omega'}$$

qui exprime explicitement les coefficients  $J_{i,j}^\omega(0,0)$  comme combinaison linéaire d'hyperlogarithmes.

Enfin, on projette ces résultats du cadre formel au cadre vectoriel dans la partie 5.6.

## 5.2. Lien entre le cadre formel et vectoriel

Dans cette section, on considère les données suivantes :

- (1) une coordonnée  $z : \mathbf{P}^1 - \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C}$ .
- (2) un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie. On note  $G = \text{GL}(V)$  et  $\mathfrak{g} = \text{End}(V)$ .
- (3) les nombres complexes  $a_i$  ( $i \in I$ ) deux à deux distincts.
- (4) des éléments  $A_i \in \mathfrak{g}$  pour tout  $i \in I$ .

On considère alors la connexion

$$(5.2.a) \quad \nabla := d - \sum_{i \in I} \frac{A_i}{z - a_i} dz,$$

sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ . On rappelle que l'on note  $S = \{a_i : i \in I\} \cup \{\infty\}$  l'ensemble des pôles de  $\nabla$ .

Le but de cette section est de donner une formule sous la forme d'une série formelle non commutative pour les matrices de connexion  $C_{i,j}$  reliant le pôle  $a_j$  au pôle  $a_i$  avec  $i, j \in I$ .

Pour calculer cette matrice de connexion, on va mettre en parallèle deux formulations :

- (1) le cas formel où  $\mathcal{A} = \mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  est l'algèbre de séries formelles non commutatives en l'alphabet  $\Omega = \{\tilde{A}_i : i \in I\}$  et  $\tilde{F}$  est le fibré trivial sur  $\mathbf{P}^1 - S$  de fibre  $\mathcal{A}$ .
- (2) le cas vectoriel où  $V$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, où  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie de  $G := \text{GL}(V)$ , où les  $A_i \in \mathfrak{g}$  sont des endomorphismes de  $V$  pour tout  $i \in I$  et où  $F$  est le  $G$ -fibré principal sur  $\mathbf{P}^1 - S$ .<sup>1</sup>

Remarquez que l'expression (5.2.a) en remplaçant les  $A_i$  par les  $\tilde{A}_i$  définit une connexion sur le fibré  $\tilde{F}$  dans le cas formel aussi. La donnée de cette connexion est équivalente à la donnée d'une bijection entre les alphabets  $\Omega$  et  $I$ , que l'on identifiera de cette manière dans la suite par ailleurs.

On a donc une application naturelle

$$(5.2.b) \quad \Omega \rightarrow \mathfrak{g} = \text{End}(V),$$

donnée par  $\tilde{A}_i \mapsto A_i$  pour tout  $i \in I$ .

On a une application **com** :  $\mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle \rightarrow \mathbf{C}[[\Omega]]$  correspondant à l'ajout de la commutation des variables. On définit la sous-algèbre  $\mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\nu$  pour tout  $\nu \in \mathbf{R}_+^*$ , dites des séries non commutatives convergentes de rayon  $> \nu$ , de  $\mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  comme l'image

1. Par les correspondances usuelles entre fibrés vectoriels et fibrés principaux, on aurait pu considérer le cas où  $F$  aurait été un fibré vectoriel trivial sur  $\mathbf{P}^1 - S$  de fibre  $V$ . Pour ne pas induire une confusion avec la terminologie "base de solutions" et "solution" d'une équation différentielle dans le cas formel, nous avons préféré faire ce choix.

réciroque par **com** de l'algèbre  $\mathbf{C}\{\Omega\}^\nu$  des séries entières de rayon de convergence strictement plus grand que  $\nu$  qui est bien une sous-algèbre de  $\mathbf{C}[[\Omega]]$ . Explicitement, si  $S = \sum_{\omega \in \Omega^*} x^\omega \omega$  est un élément de  $\mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  alors  $S \in \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\nu$  si et seulement si

$$\sup \left\{ M \in \mathbf{R}_+ : \sum_{\omega \in \Omega^*} |x^\omega| M^{r(\omega)} < +\infty \right\} > \nu$$

où  $\Omega^*$  désigne l'ensemble des mots dans l'alphabet  $\Omega$  et  $r(\omega)$  désigne la longueur du mot  $\omega$ . On notera  $\mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty$  l'intersection des  $\mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\nu$  pour  $\nu \in \mathbf{R}_+^*$ . On a donc la suite d'inclusions

$$\mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty = \bigcap_{\nu \in \mathbf{R}_+^*} \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\nu \subseteq \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^{\nu_1} \subseteq \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^{\nu_2} \subseteq \bigcup_{\nu \in \mathbf{R}_+^*} \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\nu \subseteq \mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle,$$

pour tout  $\nu_1 \geq \nu_2$ .

REMARQUE 5.2.1. Après composition par **com**, on retrouve la filtration

$$\mathcal{O}(\mathbf{C}^\Omega) \subseteq \mathbf{C}\{\Omega\}^{\nu_1} \subseteq \mathbf{C}\{\Omega\} \subseteq \mathbf{C}[[\Omega]],$$

où on a envie d'étendre la notation en  $\mathbf{C}\{\Omega\}^\infty = \mathcal{O}(\mathbf{C}^\Omega)$  les fonctions entières sur  $\mathbf{C}^\Omega$  et  $\mathbf{C}\{\Omega\}^0 = \mathbf{C}\{\Omega\}$ .

Supposons que l'on ait choisit les  $A_i$  de norme plus petite que  $\nu \in \mathbf{R}_+^*$ . Alors l'application naturelle (5.2.b) s'étend en une représentation

$$\mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\nu \longrightarrow \text{End}(V).$$

Plus généralement, l'application naturelle (5.2.b) s'étend toujours en une représentation

$$(5.2.c) \quad \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty \longrightarrow \text{End}(V).$$

sans condition sur les endomorphismes  $A_i \in \text{End}(V)$ . Remarquez que l'image du mot vide  $\emptyset \in \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty$  est la matrice  $\text{id} \in \text{End}(V)$  par définition.

Coté formel, on notera aussi  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , resp.  $\tilde{G}$  l'ensemble des éléments primitifs, resp. de type groupe de  $\mathcal{A}$  pour la structure d'algèbre de Hopf topologique sur  $\mathcal{A}$ . On rappelle que le coproduit  $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$  de  $\mathcal{A}$  est donné par  $\Delta(\omega) = \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega$  pour tout  $\omega \in \Omega$  et étendu à tout mot grâce à la propriété usuelle de compatibilité avec la multiplication  $\Delta(\omega_1 \cdots \omega_r) = \Delta(\omega_1) \cdots \Delta(\omega_r)$ .

Notons  $\mathfrak{L}$ , resp.  $\mathfrak{G}$ , les sous-ensembles de  $\mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  des séries formelles de coefficient constant égal à 0, resp. 1. On peut définir la fonction exponentielle formelle  $\text{Exp} : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{G}$ , analogue de la fonction exponentielle usuelle, donnée par

$$\text{Exp} : \sum_{\omega \in \Omega^* - \{\emptyset\}} x^\omega \omega \longmapsto 1 \cdot \emptyset + \sum_{\omega \in \Omega^* - \{\emptyset\}} \left( \sum_{\substack{n \in \mathbf{N}^* \\ \omega^1, \dots, \omega^n \neq \emptyset \\ \omega^1 \dots \omega^n = \omega}} \frac{x^{\omega^1} \cdots x^{\omega^n}}{n!} \right) \omega$$

On montre que cette application est bijective (par exemple en construisant explicitement son inverse à partir du développement en série du logarithme en 1)

On vérifie immédiatement que l'on a  $\tilde{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{L}$  et  $\tilde{G} \subseteq \mathfrak{G}$  et que la fonction exponentielle formelle induit un isomorphisme  $\text{Exp} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{G}$ . De même, on vérifie que l'image de  $\mathfrak{L} \cap \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty$  est incluse<sup>2</sup> dans  $\mathfrak{G} \cap \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty$ . On a donc un diagramme commutatif

2. Son image n'est pas égale exactement à  $\mathfrak{G} \cap \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty$  en général. En effet, on peut par exemple montrer que  $\log(1 \cdot \emptyset + 1 \cdot \omega_i)$  appartient à  $\mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\nu$  pour tout  $\nu < 1$  mais pour aucun  $\nu \geq 1$ .

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{L} & \xleftarrow{\quad} & \mathfrak{L} \cap \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty \\
\sim \downarrow \text{Exp} & & \sim \downarrow \text{Exp} & & \downarrow \text{Exp} \\
\tilde{G} & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{G} & \xleftarrow{\quad} & \mathfrak{G} \cap \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty
\end{array}$$

On a la fonction exponentielle classique  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ . On peut aussi voir  $G$  comme un sous-ensemble de  $\mathfrak{g}$  lorsque  $G = \text{GL}(V)$ . Le lien entre la fonction exponentielle formelle et la fonction exponentielle classique est le suivant.

LEMME 5.2.2. *Le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty & \xrightarrow{(5.2.c)} & \mathfrak{g} \\
\text{Exp} \downarrow \sim & & \downarrow \exp \\
\tilde{G} \cap \text{Exp}(\mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty) & & G \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tilde{G} \cap \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty & \xrightarrow{(5.2.c)} & \mathfrak{g}
\end{array}$$

*est commutatif.*

REMARQUE 5.2.3. Lorsque  $\Omega$  est égal à un singleton  $\{x\}$ , les résultats précédents sont assez connus. En effet, dans ce cas,  $\mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle = \mathbf{C}[[x]]$ ,  $\mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty = \mathcal{O}(\mathbf{C})$  les fonctions entières sur  $\mathbf{C}$  et  $\mathfrak{g} = \mathbf{C}$ ,  $G = \mathbf{C}^*$ . L'application (5.2.c) correspond à l'évaluation en un certain  $a \in \mathbf{C}$ . Dans ce cas, on montre que  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{L} = \{\sum_{n \in \mathbf{N}} f_n x^n : f_0 = 0\}$  et  $\tilde{G} = \mathfrak{G} = \{\sum_{n \in \mathbf{N}} g_n x^n : g_0 = 1\}$ . Donc  $\text{Exp}$  est bien une application de  $\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathcal{O}(\mathbf{C})$  vers  $\tilde{G} \cap \mathcal{O}(\mathbf{C})$ , c'est-à-dire des fonctions entières  $f$  telles que  $f(0) = 0$  vers les fonctions entières  $g$  telles que  $g(0) = 1$ . Ce n'est pas un isomorphisme car typiquement  $f(x) = \log(1+x)$  (qui devrait être l'image réciproque de la fonction  $g(x) = 1+x$ ) est une fonction holomorphe sur  $|x| < 1$  mais pas une fonction entière.

### 5.3. Cas formel

Dans cette section, on omettra les tildes pour parler du cas formel afin d'alléger les notations.

Nous allons définir des matrices de connexion  $C_{i,j} \in G \cap \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}^\infty$  coté formel. On reprend l'exposition de [Boy06] §2. Tout d'abord remarquons que l'algèbre  $\mathcal{A} := \mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  est complète pour la topologie  $\mathcal{I}$ -adique où  $\mathcal{I}$  est l'idéal engendré par  $\Omega = \{A_i : i \in I\}$ . On a donc un isomorphisme

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{A}/\mathcal{I}^n.$$

De plus, les quotients  $\mathcal{A}/\mathcal{I}^n$  sont des  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . On peut donc munir  $\mathcal{A}$  d'une topologie analytique comme étant la topologie limite induite par la topologie analytique définie sur les  $\mathcal{A}/\mathcal{I}^n$ . Cette topologie est bien sûr plus fine que la topologie  $\mathcal{I}$ -adique. Le fait que  $\mathcal{A}$  soit complet pour la topologie  $\mathcal{I}$ -adique implique que c'est un espace séparé pour la topologie analytique. De plus, toute suite à valeurs dans  $\mathcal{A}$  converge pour la topologie analytique si et seulement si son image dans tous les quotients  $\mathcal{A}/\mathcal{I}^n$  converge pour la topologie analytique.

REMARQUE 5.3.1. Pour  $\mathcal{A} = \mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$ , on a la correspondance des notations  $\mathcal{I} = \mathcal{L}$  avec la section précédente.

On peut alors définir la notion de fonctions holomorphes  $f : U \rightarrow \mathcal{A}$ , pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}$  et ensuite le faisceau d'algèbres  $\mathcal{O}_X\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  des fonctions holomorphes sur la courbe<sup>3</sup> complexe  $X$  à valeurs dans l'algèbre  $\mathcal{A} = \mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$ . Ce dernier est en particulier un  $\mathcal{O}_X$ -module et on a

$$\mathcal{O}_X\langle\langle\Omega\rangle\rangle = \mathcal{O}_X \hat{\otimes} \mathcal{A} := \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{A}/\mathcal{I}^n.$$

De manière plus général, si  $D = \sum_{i \in I} n_i (D_i)$  est un diviseur effectif de  $X$  avec  $n_i \in \mathbf{N}$  et  $(D_i)$  un point fermé de  $X$  pour tout  $i$  dans un ensemble fini  $I$ , alors on peut définir le faisceau  $\mathcal{M}_{X,D} := \mathcal{O}_X(D)$  des fonctions méromorphes à pôles les  $(D_i)$  d'ordre au plus  $n_i$  (voir par exemple [Har77, GH94] ou sinon [Sab02] chapitre 1 §8). Donc on peut définir le faisceau d'algèbres  $\mathcal{M}_{X,D}\langle\langle\Omega\rangle\rangle := \mathcal{O}_X\langle\langle\Omega\rangle\rangle \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$ , qui est un faisceau de  $\mathcal{O}_X(D)$ -modules.

Comme précédemment, on considère la connexion méromorphe pour le diviseur  $D = 1(\infty) + \sum_{i \in I} 1 \cdot (a_i)$

$$(5.3.a) \quad \nabla := d - \sum_{i \in I} \frac{A_i}{z - a_i} dz,$$

sur le fibré trivial  $\mathcal{A} \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ . L'ensemble singulier de cette connexion est donc  $S := |D| = \{a_i : i \in I\} \cup \{\infty\}$ .

Notons  $\mathcal{A}^*$  l'ensemble des éléments inversibles (c'est-à-dire admettant un inverse à droite et à gauche) de  $\mathcal{A}$  pour la multiplication. On montre que  $\mathcal{A}^*$  est égal à l'ensemble des séries formelles de coefficient constant inversible dans  $\mathbf{C}$  (c'est-à-dire non nul). Soit  $\gamma$  un chemin à valeurs dans  $\mathbf{P}^1 - S$  reliant le point  $p$  au point  $q$ .

LEMME 5.3.2. *Il existe une unique section horizontale  $\Psi_p(z)$  de  $\nabla$  sur  $\mathbf{P}^1 - S$  telle que  $\Psi_p(p) = 1 \in \mathcal{A}^*$ .*

DÉMONSTRATION. On écrit une solution potentielle  $\Psi_p(z) = \sum_{\omega} f^{\omega}(z) \cdot \omega$  et on écrit l'équation correspondante à  $\nabla(\Psi_p) = 0$  coefficient par coefficient. On note  $\Psi'_p(z) = \sum_{\omega} (f^{\omega})'(z) \cdot \omega$  et  $\nabla = d - \sum_{\omega} h^{\omega} \omega dz$ . On a par définition

$$\begin{aligned} h^{\omega}(z) &:= \frac{1}{z - a_{\omega_1}} & \text{si } \omega = \omega_1, \\ h^{\omega}(z) &:= 0 & \text{si } \omega \text{ n'est pas un mot de longueur 1.} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$(f^{\omega})' = \sum_{\omega' \omega'' = \omega} h^{\omega'} f^{\omega''} = h^{\emptyset} f^{\omega} + \sum_{\substack{\omega' \omega'' = \omega \\ \omega' \neq \emptyset}} h^{\omega'} f^{\omega''},$$

c'est-à-dire avec la notation moulienne  $(f^{\bullet})' = h^{\bullet} \times f^{\bullet}$ . On procède par récurrence sur la longueur du mot  $\omega$ . On trouve donc une équation différentielle linéaire holomorphe sur  $\widetilde{\mathbf{P}^1 - S}$  un revêtement universel de  $\mathbf{P}^1 - S$ , avec second membre égal à  $\sum_{\omega' \omega'' = \omega} h^{\omega'} f^{\omega''}$  et condition initiale  $f^{\omega}(p) = 0$  si

$\omega \neq \emptyset$  et  $f^{\emptyset}(p) = 1$  sinon. On en déduit la valeur de  $f^{\omega}$  par le théorème de Cauchy holomorphe donc finalement  $\Psi_p$ .  $\square$

REMARQUE 5.3.3. En résolvant explicitement la récurrence de la démonstration précédente, on trouve

$$f^{\omega}(z) = \int_p^z \frac{1}{z_1 - a_{\omega_1}} f^{\omega_2 \dots \omega_r}(z_1) dz_1,$$

3. On ne considérera que le cas de la dimension un dans cette thèse.



pour tout mot  $\omega = \omega_1 \cdots \omega_r$  de longueur  $r \geq 1$ , c'est-à-dire

$$(5.3.b) \quad f^\omega(z) = \int_p^z dz_1 \int_p^{z_1} dz_2 \cdots \int_p^{z_{r-1}} dz_r \frac{1}{(z_1 - a_{\omega_1})(z_2 - a_{\omega_2}) \cdots (z_r - a_{\omega_r})}.$$

Soit  $\gamma$  un chemin reliant le point  $p$  au point  $q$ , à valeurs dans  $\mathbf{P}^1 - S$ . On définit alors la *monodromie*  $M_\gamma \in \mathcal{A}^*$  de  $\nabla$  le long du chemin  $\gamma$  par

$$M_\gamma := \Psi_q^{-1} \Psi_p(z) \quad \text{pour tout } z \in \text{Im}(\gamma).$$

En particulier, pour  $z = q$ , on a  $M_\gamma = \Psi_p(q)$ .

Un résultat classique montre que la monodromie  $M_\gamma$  ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémité fixe de  $\gamma$  (car ici la connexion  $\nabla$  est plate par un argument de dimension).

On étend la notion de point de base aux points de bases tangentiels, suivant une variante de la définition de P. Deligne [Del89] §15. On considère  $\widehat{\Sigma}$  l'éclatement réel orienté normalisé de  $\mathbf{P}^1 - S$ . Concrètement, on colle en chaque point de  $S$  le cercle des directions émanant des points de  $S$ . Le bord  $\partial \widehat{\Sigma}$  de  $\widehat{\Sigma}$  est donc égal à l'union disjointe  $\bigcup_{s \in S} \partial_s$  où  $\partial_s \simeq S^1$  est le cercle des directions issues de  $s$ . La partie connexe  $\partial_s$  du bord est donc isomorphe à l'ensemble des vecteurs tangents unitaires  $(T_s \mathbf{P}^1 - \{0\})/\mathbf{R}_+^*$  de  $\mathbf{P}^1$  en  $s$ . Un *point de base tangentiel* est un élément de  $\widehat{\Sigma}$ . Un *point de base tangentiel au bord* est un élément de  $\partial \widehat{\Sigma}$ .

Soit  $p$  un point de base tangentiel au bord tel que  $p \in \partial_{a_i}$  avec  $i \in I$ . On choisit une branche du logarithme  $\log$  au voisinage de la direction  $p$  donnée par le point de base tangentiel. Soit

$$U_i = \{z \in \mathbf{P}^1 - S : 0 < |z - a_i| < R \text{ et } |\arg(z - a_i) - p| < \pi\},$$

avec  $R \in \mathbf{R}_+^*$  suffisamment petit pour que  $R < \min\{|a_i - a_j| : i, j \in I\}$ . En particulier, on a  $U_i \subseteq \mathbf{P}^1 - S$ .

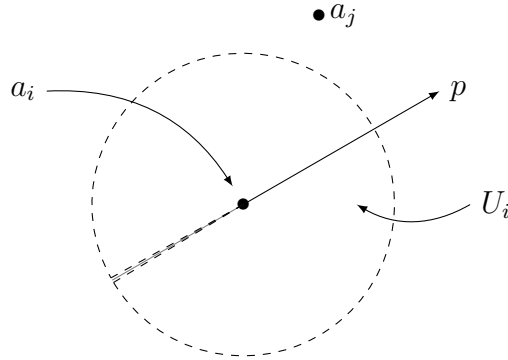


FIGURE 1. Ouvert  $U_i$

La fonction  $(z - a_i)^{A_i} := e^{\log(z - a_i)A_i}$  est bien une section globale de  $\mathcal{O}_{U_i} \langle\langle \Omega \rangle\rangle$ .

On rappelle ci-dessous quelques lemmes dont l'analogie dans le cadre vectoriel est classique. Leurs démonstrations sont des variantes des démonstrations du cadre vectoriel.

LEMME 5.3.4 ([Boy06] §2.3 lemme 2.2). *Pour le choix précédent d'une branche du logarithme, il existe une unique section horizontale  $\Psi_i(z)$  de  $\nabla$  sur  $U_i$  telle que  $\Psi_i(z)$  soit asymptotique à  $(z - a_i)^{A_i}$  en  $z \rightarrow a_i$ .*

On rappelle que  $\Psi_i(z)$  est asymptotique à  $(z - a_i)^{A_i}$  en  $z \rightarrow a_i$  si par définition il existe une fonction analytique  $\psi_i(z)$  en  $a_i$  vérifiant  $\psi_i(a_i) = 1$  et  $\Psi_i(z) = \psi_i(z) \cdot (z - a_i)^{A_i}$  pour tout  $z \in U_i$ .

LEMME 5.3.5 ([Boy06] §2.3 lemme 2.3). *On a les égalités*

$$\lim_{z \rightarrow a_i} \Psi_i(z) \cdot (z - a_i)^{-A_i} = 1 = \lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i)^{-A_i} \cdot \Psi_i(z),$$

*c'est-à-dire  $\Psi_i(z)$  asymptotique à  $(z - a_i)^{A_i}$  et  $\Psi_i^{-1}(z)$  asymptotique à  $(z - a_i)^{-A_i}$  en  $z \rightarrow a_i$  sur l'ouvert  $U_i$ .*

REMARQUE 5.3.6. On aurait pu considérer un point de base tangentiel au bord à l'infini  $p \in \partial_\infty$ . Dans ce cas, il aurait fallu considérer une solution asymptotique à  $z^R$  où  $R = \sum_{i \in I} A_i$ .

DÉMONSTRATION. La première égalité est par définition de  $\Psi_i$ . La seconde égalité est équivalente à

$$\lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i)^{-A_i} \cdot (\psi_i(z) - 1) \cdot (z - a_i)^{A_i}$$

où  $\Psi_i(z) = \psi_i(z) \cdot (z - a_i)^{A_i}$  et  $\psi_i$  est une fonction analytique en  $a_i$  telle que  $\psi_i(a_i) = 1$ . D'où

$$(z - a_i)^{-A_i} \cdot (\psi_i(z) - 1) \cdot (z - a_i)^{A_i} = \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{n_1 + n_2 = n} \frac{(-1)^{n_1}}{n_1! n_2!} A_i^{n_1} (\psi_i(z) - 1) \log^n(z - a_i) A_i^{n_2}.$$

Comme  $\psi_i(z) - 1 = O((z - a_i))$ , la limite de la parenthèse est bien 0 quand  $z \rightarrow a_i$ . □

Soit  $\gamma$  un chemin supposé pour simplifier<sup>4</sup> de classe  $\mathcal{C}^1$  reliant le point de base tangentiel  $p$  au point de base tangentiel  $q$ . Explicitement, cela signifie que  $\gamma(t)$  est un point intérieur de  $\hat{\Sigma}$  pour tout  $t \in ]0; 1[$  et

- (1) si  $p$  (resp.  $q$ ) est un point intérieur de  $\hat{\Sigma}$  alors  $\gamma(0) = p$  (resp.  $\gamma(1) = q$ ),
- (2) si  $p$  (resp.  $q$ ) est un point du bord de  $\hat{\Sigma}$  alors  $\arg(\gamma'(0)) = p$  (resp.  $\arg(\gamma'(1)) + \pi = q$ ).

On supposera dans la suite que  $p, q \in \partial \hat{\Sigma}$  sont des points de bases tangentiels au bord mais le lecteur vérifiera que ce qui est énoncé dans la suite est aussi valable pour des points de bases “classiques” dans  $\mathbf{P}^1 - S$ .

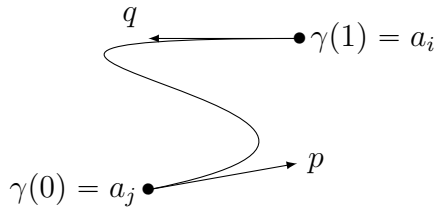


FIGURE 2. Chemin  $\gamma$  reliant le point tangentiel  $p$  à  $q$

On peut maintenant définir les matrices de connexion. Soient  $a_i$  et  $a_j$  deux pôles de  $\nabla$  pour  $i, j \in I$ . Soit  $p \in \partial_{a_j}$  et  $q \in \partial_{a_i}$  deux points tangentiels basés en  $a_j$  et  $a_i$  respectivement et soit  $\gamma$  un chemin reliant  $p$  à  $q$ . Pour chaque pôle  $a_j$  et  $a_i$ , on choisit une branche du logarithme  $\log_j$  et  $\log_i$  au voisinage de  $p$  et  $q$  respectivement.

4. Cette hypothèse n'est pas nécessaire et on peut montrer que l'on peut définir par limite les directions  $\arg(\gamma'(0))$  et  $\arg(\gamma'(1)) + \pi$  grâce à un argument de compacité.

DÉFINITION 5.3.7. La *matrice de connexion*  $C_{i,j} \in \mathcal{A}^*$  reliant le pôle  $a_j$  au pôle  $a_i$  le long de  $\gamma$  est définie par

$$C_{i,j} := \Psi_i^{-1} \Psi_j(z), \quad \text{pour tout } z \in \gamma([0; 1]),$$

où  $\Psi_i, \Psi_j$  sont les solutions de  $\nabla$  définies grâce aux choix des branches du logarithmes précédentes et au lemme 5.3.4.

REMARQUE 5.3.8. Comme on l'a défini, la matrice de connexion  $C_{i,j} \in \mathcal{A}^*$  n'est pas à proprement parlé une matrice. Cependant, lorsque l'on passera au cas vectoriel, l'élément correspondant sera un élément de  $G = \text{GL}(V)$ , donc au choix d'une base près, une matrice.

Notons  $\gamma_{u,v} : [u; v] \rightarrow \mathbf{P}^1 - S$  la restriction du chemin  $\gamma$  sur l'intervalle  $[u; v]$  pour  $0 < u < v < 1$ .

PROPOSITION 5.3.9. La *matrice de connexion*  $C_{i,j}$  s'exprime comme une limite normalisée des monodromies  $M_{\gamma_{u,v}}$ . Précisément, on a

$$(5.3.c) \quad C_{i,j} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 1}} e^{-\log_i(\gamma(v)-a_i)A_i} M_{\gamma_{u,v}} e^{\log_j(\gamma(u)-a_j)A_j}.$$

DÉMONSTRATION. Pour simplifier les notations, notons  $u' = \gamma(u)$  et  $v' = \gamma(v)$ . En reprenant les notations du lemme 5.3.4, on a  $C_{i,j} = \Psi_i^{-1} \Psi_j(z)$  pour tout  $z \in \gamma([0; 1])$  et  $M_{\gamma_{u,v}} = \Psi_i(v') \Psi_i(u')^{-1}$ . D'où

$$M_{\gamma_{u,v}} = \Psi_i(v') \Psi_i(u')^{-1} \Psi_j(u') \Psi_j(u')^{-1} = \Psi_i(v') \cdot C_{i,j} \cdot \Psi_j(u')^{-1}.$$

D'où, en sous-entendant les choix de branches du logarithme,

$$(v' - a_i)^{-A_i} M_{\gamma_{u,v}} (u' - a_j)^{A_j} = (v' - a_i)^{-A_i} \Psi_i(v') \cdot C_{i,j} \cdot \Psi_j(u')^{-1} (u' - a_j)^{A_j}.$$

En utilisant le lemme 5.3.5 donnant les égalités

$$\lim_{v \rightarrow 1} (v' - a_i)^{-A_i} \Psi_i(v') = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow 0} (u' - a_j)^{-A_j} \Psi_j(u') = 1$$

on en déduit bien l'égalité (5.3.c). □

## 5.4. Développements moulins

Dans cette section, on restera uniquement dans le cadre formel et on omettra les tildes pour alléger les notations.

On pourra consulter la section B.1 pour quelques rappels de calcul moulien, initialement introduit par J. Écalle. Pour des références, on pourra consulter les articles originaux de J. Écalle [Éca81, Éca92, Éca93] mais aussi un certain nombre d'article de D. Sauzin comme [Sau09] ou encore l'article de vulgarisation du calcul moulien de J. Cresson [Cre09].

L'algèbre  $\mathcal{A}$  est munie d'une structure d'algèbre de Hopf topologique. Notons  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$  la complétion du produit tensoriel  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  pour la topologie  $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{I} + \mathcal{I} \otimes \mathcal{A})$ -adique. On rappelle que la counité  $\varepsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{C}$  est définie par  $\varepsilon(A_i) = 0$ , l'antipode  $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  par  $S(A_i) = -A_i$  et le coproduit  $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$  par

$$\Delta(A_i) = A_i \otimes 1 + 1 \otimes A_i$$

pour tout  $i \in I$ . Le coproduit vérifie bien  $\Delta(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{I} + \mathcal{I} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ .

Le comoule canonique  $A_\bullet$  est défini par

$$A_{\omega_1 \dots \omega_r} := A_{\omega_r} \cdots A_{\omega_1},$$

On rappelle aussi que le comoule  $A_\bullet$  est cosyétral, c'est-à-dire que l'on a

$$\Delta(A_\omega) = \sum_{\omega', \omega'' \in \Omega^*} \text{sh} \begin{pmatrix} \omega' & \omega'' \\ \omega \end{pmatrix} A_{\omega'} \otimes A_{\omega''},$$

où  $\text{sh}(\omega', \omega'')$  désigne le nombre de façon d'obtenir le mot  $\omega$  par battage des mots  $\omega'$  et  $\omega''$ .

**5.4.1. Développement de la monodromie.** Pour tout chemin  $\gamma$  à valeurs dans  $\mathbf{P}^1 - S$ , on définit un moule scalaire symétral  $I_\gamma^\bullet$  grâce aux intégrales itérées par

$$I_\gamma^{\omega_1 \cdots \omega_r} := \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r \leq 1} f_1(t_1) \cdots f_r(t_r) dt_1 \cdots dt_r,$$

où les  $f_k$  sont définies par  $f_k(t) dt = \gamma^*(\frac{dz}{z - a_{\omega_k}})$  avec  $a_{\omega_k} \in S - \{\infty\}$  en identifiant  $\omega_k \in \Omega$  à l'élément de l'ensemble  $I$  correspondant.

REMARQUE 5.4.1. Les intégrales itérées ont initialement été introduites par K.T. Chen dans un cadre plus général. Voir par exemple [Che54, Che57, Che71, Che73, Che77] mais aussi les travaux de R. Hain comme [Hai87a, Hai87b].

REMARQUE 5.4.2. Il y a deux conventions possibles pour la définition des intégrales itérées comme remarqué par T. Bridgeland et V.T. Laredo dans [BTL13] §7.1. En fait, si l'on note  $\tau : \Omega^* \rightarrow \Omega^*$  l'inversion  $\tau(\omega_1 \cdots \omega_r) = \omega_r \cdots \omega_1$ , on peut considérer les deux moules  $I_\gamma^\bullet$  et  $I_\gamma^{\tau(\bullet)}$ . La définition  $I_\gamma^\bullet$  est celle utilisée lorsque l'on considère les polyzêtas<sup>5</sup>, et la définition  $I_\gamma^{\tau(\bullet)}$  lorsque l'on considère le transport parallèle pour avoir des sommes  $\sum_{\omega} I_\gamma^{\tau(\omega)} A_{\omega_1} \cdots A_{\omega_r}$ . Comme le comoule canonique  $A_\omega := A_{\omega_r} \cdots A_{\omega_1}$  possède déjà une inversion  $\tau$ , on prendra bien dans la suite la convention  $I_\gamma^\bullet$ . On pourra aussi remarquer que le prolongement analytique du moule  $f^\bullet$  de la remarque 5.3.3 est bien notre moule  $I_\gamma^{\tau(\bullet)}$  car dans la démonstration du lemme 5.3.2, on a utilisé  $\sum_{\omega} f^\omega \cdot \omega$  plutôt que  $\sum_{\omega} f^\omega \cdot \tau(\omega)$  pour le développement d'une solution.

PROPOSITION 5.4.3. *La monodromie  $M_\gamma$  le long de  $\gamma$  est égale à la contraction du moule  $I_\gamma^\bullet$  avec le comoule canonique, c'est-à-dire que l'on a*

$$M_\gamma = \sum_{\omega \in \Omega^*} I_\gamma^\omega A_\omega.$$

Voir [Che54] ou [Hai87a] Lemme 2.5 p.253 pour une démonstration. C'est aussi une conséquence rapide de la formule (5.3.b) de la remarque 5.3.3 (prendre le prolongement analytique de cette formule).

REMARQUE 5.4.4. Cette formule est une conséquence de l'application du procédé d'intégration de Picard pour résoudre l'équation différentielle. De plus, cette formule a été montrée dans le mémoire de J. A. Lappo-Danilevskij [LD53].

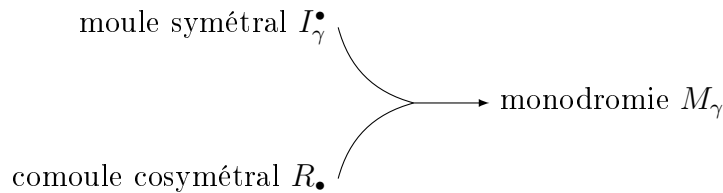


FIGURE 3. Monodromie  $M_\gamma$  comme contraction du moule  $I_\gamma^\bullet$

COROLLAIRE 5.4.5. *La définition du moule  $I_\gamma^\bullet$  ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémité fixe de  $\gamma$ .*

5. Les polyzêtas apparaissent dans le cas particulier des matrices de connexion d'un système fuchsien avec des pôles en 0, 1 et l'infini uniquement.

PROPOSITION 5.4.6. *On a les faits équivalents suivants :*

- (1) *La monodromie  $M_\gamma$  est de type groupe, c'est-à-dire  $\Delta(M_\gamma) = M_\gamma \otimes M_\gamma$ .*
- (2) *Le moule  $I_\gamma^\bullet$  est symétral.*

DÉMONSTRATION. On peut montrer directement (1) en remarquant que les  $A_i$  sont des éléments primitifs de  $\mathcal{A}$ . En effet, soit  $\Psi$  l'unique solution de  $\nabla$  telle que  $\Psi(p) = 1$ . Alors on a par définition  $M_\gamma = \Psi(q)$  (où l'on sous-entend que l'on étend  $\Psi$  le long du chemin  $\gamma$ ). Remarquons que la connexion  $\nabla$  est de la forme  $d - \Omega(z)dz$  avec  $\Omega(z) \in \mathcal{A}$  primitif. Considérons la connexion  $\nabla^2 = d - \Delta(\Omega(z))dz$  sur le fibré trivial de fibre  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ . Alors  $\Psi \otimes \Psi$  est l'unique solution de la connexion  $\nabla^2$  telle que  $\Psi \otimes \Psi(p) = 1 \otimes 1 \in \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ . D'où

$$\Delta(M_\gamma) = (\Psi \otimes \Psi)(q) = \Psi(q) \otimes \Psi(q) = M_\gamma \otimes M_\gamma.$$

Voir aussi [Boy06] §2.4 proposition 2.5.

Pour (2), on peut aussi le montrer directement en découpant le domaine d'intégration produit de deux simplexes en une somme de simplexes. Précisément, on a que le domaine

$$\{(t_1, \dots, t_{m+n}) \in [0; 1]^{m+n} : 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq 1 \text{ et } 0 \leq t_{m+1} \leq \dots \leq t_{m+n} \leq 1\}$$

est égal à l'union

$$\bigcup_{\sigma} \{(t_1, \dots, t_{m+n}) \in [0; 1]^{m+n} : 0 \leq t_{\sigma(1)} \leq \dots \leq t_{\sigma(m+n)} \leq 1\}$$

sur l'ensemble des battages, c'est-à-dire les permutations  $\sigma \in S_{m+n}$  telle que  $\sigma^{-1}(1) < \dots < \sigma^{-1}(m)$  et  $\sigma^{-1}(m+1) < \dots < \sigma^{-1}(m+n)$ . Voir aussi [Che54] ou [Hai87a] lemme 2.11 p.257, ou [Ree58] théorème 2.5 p.215.

Enfin, on peut aussi montrer que (1) est équivalent à (2) grâce au lemme B.1.10 de l'appendice B.  $\square$

Soient  $p \in \partial_{a_j}$  et  $q \in \partial_{a_i}$  des points de base tangentiels ( $i, j \in I$ ),  $\log_j, \log_i$  deux branches du logarithmes au voisinage des directions  $p$  et  $q$  respectivement et  $\gamma$  un chemin reliant les points tangentiels  $p$  à  $q$ . Pour ces choix, on peut définir la matrice de connexion  $C_{i,j}$  reliant le pôle  $a_j$  au pôle  $a_i$  le long de  $\gamma$  suivant la définition 5.3.7.

On rappelle la correspondance des notations pour la suite :

|                                  |                   |                   |
|----------------------------------|-------------------|-------------------|
| indice                           | $j$               | $i$               |
| point tangentiel                 | $p$               | $q$               |
| variable formelle                | $x$               | $y$               |
| chemin $\gamma$                  | $\gamma(0) = a_j$ | $\gamma(1) = a_i$ |
| pour $\omega \in \Omega_{i,j}^*$ | $\omega_1 \neq j$ | $\omega_r \neq i$ |
| indice                           | non commençant    | non finissant     |

FIGURE 4. Correspondance des notations

L'égalité de la proposition 5.3.9 reliant monodromie et matrice de connexion et la proposition 5.4.6 montrant que la monodromie est de type groupe implique le

COROLLAIRE 5.4.7. *La matrice de connexion  $C_{i,j}$  est de type groupe.*

Du lemme B.1.10 de l'appendice B, on en déduit qu'il doit exister un moule symétral tel que sa contraction avec le comoule canonique soit la matrice de connexion  $C_{i,j}$ . Nous allons définir dans la suite un tel moule.

**5.4.2. Extension symétral d'un moule.** Dans la suite, on identifie l'alphabet  $\Omega$  à l'ensemble  $I$ . Notons

$$\Omega_{i,j}^* := \{\omega = \omega_1 \cdots \omega_r : \omega_1 \neq j \text{ et } \omega_r \neq i\} \subseteq \Omega^*$$

l'ensemble des mots de  $\Omega^*$  ne commençant pas par  $j$  et ne finissant pas par  $i$ . Par définition, le mot vide  $\emptyset$  appartient à  $\Omega_{i,j}^*$ . On notera  $\Omega^{i,*}$  (resp.  $\Omega^{j,*}$ ) l'ensemble des

mots écrits uniquement avec le symbole  $i$  (resp.  $j$ ) et  $\Omega^{-,*}$  l'ensemble des mots écrit dans l'alphabet  $\Omega - \{i, j\}$ . Remarquez que l'ensemble  $\Omega^{-,*}$  dépend de  $i$  et  $j$ . Un indice n'a pas été ajouté pour plus de lisibilité. Les trois sous-ensembles de mots  $\Omega^{i,*}$ ,  $\Omega^{j,*}$  et  $\Omega^{-,*}$  ne s'intersectent deux à deux qu'en le mot vide. On les appellera *sous-ensembles de mots spéciaux* de  $\Omega^*$ .

LEMME 5.4.8. *Tout mot non vide admet une unique décomposition en produits de mots spéciaux maximaux.*

COROLLAIRE 5.4.9. *Tout mot non vide s'écrit de manière unique sous la forme*

$$j^{[m]} \cdot \tilde{\omega} \cdot i^{[n]}$$

où  $\tilde{\omega} \in \Omega_{i,j}^*$ ,  $i^{[n]}$  est l'unique mot de  $\Omega^{i,*}$  de longueur  $n \in \mathbf{N}$  et  $j^{[m]}$  est l'unique mot de  $\Omega^{j,*}$  de longueur  $m \in \mathbf{N}$ .

Comme précédemment, on a choisi un chemin  $\gamma$  reliant  $a_j$  à  $a_i$ .

On montre le lemme intermédiaire suivant :

PROPOSITION 5.4.10. *Notons  $u' := \gamma(u)$ . Pour tout  $\omega \in \Omega^*$ , il existe des fonctions holomorphes  $H_0, \dots, H_s$  en  $a_j$  avec  $H_s \neq 0$  telle que l'on ait l'égalité*

$$(5.4.a) \quad I_{\gamma_{u,v}}^{\omega} = \sum_{k=0}^s H_k(u') \log^k(u' - a_j),$$

pour tout  $u > 0$ . De plus,

- (1) l'entier  $s$  est égal au nombre de fois que la lettre  $j$  apparaît dans le mot  $\omega$ ,
- (2) si  $\omega_1 \neq j$  alors les fonctions  $H_k$  pour  $k > 0$  sont nulles en  $a_j$ , c'est-à-dire que  $I_{\gamma_{u,v}}^{\omega}$  admet une limite finie  $H_0(a_j)$  en  $u \rightarrow 0$ , c'est-à-dire  $u' \rightarrow a_j$ .

REMARQUE 5.4.11. En particulier, les fonctions  $u \mapsto I_{\gamma_{u,v}}^{\omega}$  sont des fonctions de classe de Nilsson (fonction de détermination finie à croissance modérée en 0), c'est-à-dire de la forme  $\sum_{k \in K} z^{\alpha_k} P_k(\log(z))$  où  $K$  est un ensemble fini,  $\alpha_k \in \mathbf{C}$  et  $P_k$  des polynômes à coefficients de  $\mathbf{C}\{u\}$ . Ici, on peut prendre  $K$  un singleton et  $\alpha_k = 0$ . Tout ceci est cohérent car les intégrales  $I_{\gamma_{u,v}}^{\omega}$  calculent ici la monodromie d'un système fuchsien, donc toute solution est à croissance modérée et de détermination finie en les pôles de la connexion. Voir [Del70] théorème 1.19 p.55.

REMARQUE 5.4.12. En mettant ensemble le comportement en  $a_j$  et en  $a_i$ , on peut montrer qu'il existe un nombre fini de fonctions holomorphes  $H_{k,l}^{\omega}$  en voisinage de  $(a_j, a_i)$  telles que

$$I_{\gamma_{u,v}}^{\omega} = \sum_{k,l} H_{k,l}^{\omega}(u', v') \log^k(u' - a_j) \log^l(v' - a_i),$$

où  $u' := \gamma(u)$  et  $v' := \gamma(v)$ .

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur la longueur du mot  $\omega$ . Le résultat est vrai pour le mot vide. Soit  $\omega = \omega_1 \cdots \omega_r$  un mot de longueur  $r > 0$ . Par hypothèse de récurrence, il existe des fonctions holomorphes  $H_k$  en  $a_j$  telle que  $I_{\gamma_{u,v}}^{\omega_2 \cdots \omega_r}$  soit égale à  $\sum_{k=0}^s H_k(u') \log^k(u' - a_j)$  pour  $u > 0$ . Dans la suite, pour simplifier les notations, on omettra les primes et on identifiera la fonction  $H_k$  à la fonction  $H_k \circ (\gamma + a_j \text{ id})$  etc. Cela revient à penser  $a_j = 0$  et  $\gamma = [0; 1]$  par exemple. On a donc

$$I_{\gamma_{u,v}}^{\omega} = \sum_{k=0}^s \int_u^v f(t) H_k(t) \log^k(t) dt$$

où  $\gamma^*\left(\frac{dz}{z - a_{\omega_1}}\right) = f(t) dt$ .

Considérons deux cas :

- (1) Si  $f$  est holomorphe en 0, c'est-à-dire  $\omega_1 \neq j$ , alors on peut intégrer par parties l'intégrale  $\int_u^v f(t)H_k(t) \log^k(t) dt$  en dérivant  $t \mapsto \log^k(t)$  et en prenant la primitive  $g$  de la fonction holomorphe  $t \mapsto f(t)H_k(t)$  qui s'annule en 0. On obtient

$$(5.4.b) \quad \int_u^v f(t)H_k(t) \log^k(t) dt = \left[ g(t) \log^k(t) \right]_u^v - \int_u^v k \frac{g(t)}{t} \log^{k-1}(t) dt.$$

Dans l'intégrale de droite, la fonction  $t \mapsto \frac{g(t)}{t}$  est bien holomorphe en 0 grâce à notre choix de primitive. Par une récurrence immédiate sur  $k$ , cela montre bien que la fonction  $u \mapsto \int_u^v f(t)H_k(t) \log^k(t) dt$  est égale à une somme de la forme  $\sum_{l=0}^k h_l(u) \log^l(u)$  où  $h_k(u) := -g(u)$  avec  $h_l$  holomorphe en 0 et les  $h_l(0) = 0$  pour tout  $l > 0$ .

- (2) Si maintenant  $f$  n'est pas holomorphe en 0, mais possède un pôle simple, alors l'intégrale  $\int_u^v f(t)H_k(t) \log^k(t) dt$  est de la forme  $\int_u^v g(t) \frac{\log^k(t)}{t} dt$  pour une certaine fonction holomorphe  $g$  en 0. On intègre par parties en dérivant la fonction  $g$  et en intégrant  $t \mapsto \frac{\log^k(t)}{t}$ . On obtient

$$(5.4.c) \quad \int_u^v g(t) \frac{\log^k(t)}{t} dt = \left[ g(t) \frac{\log^{k+1}(t)}{k+1} \right]_u^v - \int_u^v g'(t) \frac{\log^{k+1}(t)}{k+1} dt.$$

L'intégrale de droite est alors de la forme précédente (cas  $f$  holomorphe en 0) et on lui applique donc le point précédent. On aura alors  $\int_u^v g(t) \frac{\log^k(t)}{t} dt = \sum_{l=0}^{k+1} h_l(u) \log^l(u)$  avec  $h_{k+1}(u) = \frac{-g(u)}{k+1}$  qui est non nulle en 0.

Pour la valeur de  $s$ , c'est une conséquence immédiate des équations (5.4.b) et (5.4.c). □

Comme conséquence immédiatement du point (2) de la proposition 5.4.10 précédente, et d'un résultat analogue pour  $v \rightarrow 1$ , on a le

**COROLLAIRE 5.4.13.** *La limite des intégrales itérées  $I_{\gamma_{u,v}}^\omega$  pour  $(u, v) \rightarrow (0, 1)$  existe et est finie pour tout mot  $\omega \in \Omega_{i,j}^*$ . Par contre, elle diverge à priori pour les mots de  $\Omega^* - \Omega_{i,j}^*$ .*

On définit alors le moule scalaire  $I_{i,j}^\bullet$  sur l'alphabet  $\Omega$  par

$$(5.4.d) \quad I_{i,j}^\omega = \begin{cases} \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 1}} I_{\gamma_{u,v}}^\omega & \text{si } \omega \in \Omega_{i,j}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appellera les valeurs  $I_{i,j}^\omega \in \mathbf{C}$  pour  $\omega \in \Omega_{i,j}^*$  les *intégrales itérées convergentes*. Ce sont ici des hyperlogarithmes. Remarquez que ces valeurs dépendent du chemin  $\gamma$  choisi pour relier  $a_j$  à  $a_i$ .

Les mots de  $\Omega_{i,j}^*$  sont stables par battage. Précisément, si  $\omega', \omega'' \in \Omega_{i,j}^*$ , alors  $\text{sh}(\omega', \omega'') \neq 0$  implique que  $\omega \in \Omega_{i,j}^*$ . On peut donc dire que la restriction du moule  $I_{i,j}^\bullet$  à  $\Omega_{i,j}^*$  est symétral et que le moule  $I_{i,j}^\bullet$  est son extension par zéro aux mots de  $\Omega^*$ . Si  $f : \Omega_{i,j}^* \rightarrow \Omega^*$  désigne l'inclusion canonique, alors on a envie de noter  $f_! : \Omega^* \rightarrow \Omega_{i,j}^*$  la section canonique (nulle sur  $\Omega^* - \Omega_{i,j}^*$ ) et

$$f_! \left( \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 1}} I_{\gamma_{u,v}}^\bullet \right) = I_{i,j}^\bullet.$$

Dans la proposition suivante, on définit plutôt le moule correspondant à un  $f_\sqcup$ .

**PROPOSITION 5.4.14.** *Il existe un unique moule symétral  $J_\gamma^\bullet(x, y)$  à valeurs dans l'algèbre  $\mathbf{C}[x, y]$  tel que*

$$J_{i,j}^\omega(x, y) = \begin{cases} I_{i,j}^\omega & \text{si } \omega \in \Omega_{i,j}^*, \\ x & \text{si } \omega = \omega_j, \\ y & \text{si } \omega = \omega_i. \end{cases}$$

Le moule  $J_{i,j}^\bullet(x, y)$  est donc une famille à deux paramètres de moules symétraux à valeurs dans l'algèbre  $\mathbf{C}$  qui étendent la restriction du moule  $I_{i,j}^\bullet$  sur  $\Omega_{i,j}^*$ . La définition du moule  $J_{i,j}^\bullet(x, y)$  est bien cohérente car le moule  $I_{i,j}^\bullet$  vérifie bien la symétralité sur  $\Omega_{i,j}^*$ . Comme précédemment, on fera attention que le moule  $J_{i,j}^\bullet(x, y)$  dépend du chemin  $\gamma$  et pas seulement de  $a_i$  et  $a_j$ , contrairement à ce que la notation laisse penser.

REMARQUE 5.4.15. Avec les notations de la remarque 5.4.12, on peut montrer que l'on a

$$J_{i,j}^\omega(x, y) = \sum_{k,l} (-1)^l H_{k,l}^\omega(a_j, a_i) \cdot x^k y^l \quad \text{et} \quad J_{i,j}^\omega(0, 0) = H_{0,0}^\omega(a_j, a_i).$$

Cela ressemble beaucoup à la régularisation “shuffle” des polyzêtas. Voir par exemple [IKZ06].

Nous verrons à la remarque 5.5.13 que le moule  $J_{i,j}^\bullet(0, 0)$  correspond aux coefficients de l'associateur de Drinfel'd (voir [Dri90] §2) dans un cas particulier.

DÉMONSTRATION. On ne mentionnera pas les variables  $(x, y)$  ni les indices  $i, j$  dans la démonstration par un souci de lisibilité. On montre le résultat par récurrence sur la longueur du mot  $\omega$ . On a  $J^\emptyset = 1$  par hypothèse de symétralité et  $J^\omega$  déjà défini pour tout mot de longueur 1. Soit  $\omega$  un mot de longueur  $> 1$ . Alors il existe une unique décomposition  $\omega = j^{[m]} \cdot \tilde{\omega} \cdot i^{[n]}$  avec  $\tilde{\omega} \in \Omega_{i,j}^*$  d'après le corollaire 5.4.9. Si  $(m, n) = (0, 0)$ , alors  $\omega = \tilde{\omega} \in \Omega_{i,j}^*$  et  $J_\gamma^\omega$  est bien défini. Sinon, on a

$$J^\omega = J^{j^{[m]}} J^{\tilde{\omega}} J^{i^{[n]}} - \sum_{\omega' \neq \omega} \text{sh} \left( \begin{matrix} j^{[m]}, \tilde{\omega}, i^{[n]} \\ \omega' \end{matrix} \right) J^{\omega'},$$

où  $\text{sh}(\omega^1, \omega^2, \omega^3)$  désigne le nombre de façon d'obtenir le mot  $\omega$  par battage des mots  $\omega^1, \omega^2$  et  $\omega^3$ . Or tout mot  $\omega'$  tel que  $\text{sh}(\begin{smallmatrix} j^{[m]}, \tilde{\omega}, i^{[n]} \\ \omega' \end{smallmatrix})$  soit non nul, est de la forme  $\omega' = j^{[m']} \cdot \tilde{\omega}' \cdot i^{[n']}$  ( $\tilde{\omega}' \in \Omega_{i,j}^*$ ) avec  $n' + m' < n + m$ . Sur les mots de la longueur de  $\omega$ , on procède donc par une nouvelle récurrence sur l'entier  $n + m$  donné par la décomposition du corollaire 5.4.9 de  $\omega$ .  $\square$

**5.4.3. Développement de la matrice de connexion.** Comme précédemment, notons  $f : \Omega_{i,j}^* \rightarrow \Omega^*$  l'inclusion canonique et  $f_! : \Omega^* \rightarrow \Omega_{i,j}^*$  la section canonique donnée par  $f_!(\omega) = 0$  pour tout  $\omega \in \Omega^* - \Omega_{i,j}^*$ . L'application  $f_!$  s'étend en une unique application linéaire  $f_! : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  abusivement notée avec la même notation. En particulier, on a  $f_!(A_i \cdot A_\omega \cdot A_j) = 0$ . En appliquant  $f_!$  à l'équation (5.3.c), on en déduit par continuité de  $f_! : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$$(5.4.a) \quad f_!(C_{i,j}) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 1}} f_!(M_{\gamma_{u,v}}) = \sum_{\omega \in \Omega_{i,j}^*} I_{i,j}^\omega A_\omega.$$

On rappelle que pour définir la matrice de connexion  $C_{i,j}$ , on a choisi deux branches du logarithme  $\log_j$  et  $\log_i$  en  $p$  et  $q$  respectivement.

PROPOSITION 5.4.16. *En posant  $(\alpha_p, \alpha_q) = (\log_j(a_i - a_j), -\log_i(a_j - a_i)) \in \mathbf{C}^2$ , la matrice de connexion  $C_{i,j}$  est égale à la contraction du moule  $J_{i,j}^\bullet(\alpha_p, \alpha_q)$  par le comoule canonique, c'est-à-dire que l'on a*

$$(5.4.b) \quad C_{i,j} = \sum_{\omega \in \Omega^*} J_{i,j}^\omega(\alpha_p, \alpha_q) A_\omega.$$

DÉMONSTRATION. L'existence de  $(\alpha_p, \alpha_q)$  est une conséquence immédiate du calcul (5.4.a), de la proposition 5.4.14, du fait que  $C_\gamma$  soit de type groupe (corollaire 5.4.7) et du lemme B.1.10 de l'appendice B. Reste à déterminer la valeur de  $(\alpha_p, \alpha_q)$ . Il suffit de vérifier l'égalité des coefficients devant  $A_i$  et  $A_j$ . On remarque que l'on a

$$\sum_{\omega} J_{i,j}^\omega(\alpha_p, \alpha_q) A_\omega = 1 + \alpha_p A_j + \alpha_q A_i + \sum_{k \in I - \{i,j\}} J_{i,j}^{k[1]} A_k + (\text{mots de longueur } \geq 2).$$



On calcule le terme en  $A_j$  de  $C_{i,j}$ . En utilisant l'équation (5.3.c), on trouve que ce terme vaut

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,1)} (1 \cdot I_{\gamma_{u,v}}^{j[1]} \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot \log(\gamma(u) - a_j)).$$

Or  $I_{\gamma_{u,v}}^{j[1]} = \log_j \left( \frac{\gamma(v) - a_j}{\gamma(u) - a_j} \right)$  d'où

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,1)} (I_{\gamma_{u,v}}^{j[1]} + \log_j(\gamma(u) - a_j)) = \log_j(\gamma(1) - a_j) = \log_j(a_i - a_j) = \alpha_p.$$

On procède de même pour  $\alpha_q$ . □

### 5.5. Structure du moule $J^\bullet$

Dans cette partie, on va exprimer le moule  $J_{i,j}^\bullet$  en fonction d'intégrales itérées convergentes  $I_{i,j}^\omega$  pour  $\omega \in \Omega_{i,j}^*$ . On pourra consulter le petit formulaire B.2 pour vérifier sur des exemples les résultats généraux ci-dessous. On rappelle aussi la correspondance des notations  $j, p, x$  et  $i, q, y$  figure 4 p.100.

*Dans cette section, on omettra, sauf dans les énoncés des théorèmes, les indices  $i, j$  sur le moule  $J_{i,j}^\bullet$  pour alléger les notations.*

**5.5.1. Extension symétrale.** On montre que le moule  $J^\bullet(x, y)$  à valeurs dans l'algèbre  $\mathbf{C}[x, y]$  peut être exprimé à partir du moule scalaire  $J^\bullet(0, 0)$  à valeurs dans l'algèbre  $\mathbf{C}$ .

PROPOSITION 5.5.1. *On a l'égalité*

$$\sum_{\omega \in \Omega^*} J^\omega(x, y) A_\omega = e^{yA_i} \left( \sum_{\omega \in \Omega^*} J^\omega(0, 0) A_\omega \right) e^{xA_j}$$

pour tout mot  $\omega \in \Omega^*$ .

DÉMONSTRATION. En effet,

$$C := e^{-yA_i} \left( \sum_{\omega \in \Omega^*} J^\omega(\alpha_p, \alpha_q) A_\omega \right) e^{-xA_j}$$

est bien de type groupe comme produit d'éléments de type groupe et le moule symétral  $M^\bullet$  correspondant vérifie bien  $M^{i[1]} = 0$ ,  $M^{j[1]} = 0$  et  $M^\omega = J^\omega(0, 0)$  pour tout mot  $\omega \in \Omega_{i,j}^*$ . On a donc  $M^\bullet = J^\bullet(0, 0)$  donc  $C = \sum_{\omega \in \Omega^*} J^\omega(0, 0) A_\omega$ . □

REMARQUE 5.5.2. Le moule  $J^\bullet(0, 0)$  est symétral comme évaluation en  $(0, 0)$  d'un moule symétral. On peut aussi considérer le moule scalaire  $J_{[k,l]}^\bullet$  donné par le coefficient du terme  $x^k y^l$  du moule  $J^\bullet(x, y)$ . Cependant ce moule n'est pas symétral pour  $(k, l) \neq (0, 0)$ .

Au niveau des coefficients, la proposition précédente signifie que l'on a l'égalité

$$(5.5.a) \quad J^\omega(x, y) = \sum_{j^{[m]}. \omega'. i^{[n]} = \omega} J^{\omega'}(0, 0) \cdot \frac{x^m y^n}{m! n!}.$$

En particulier, on peut calculer le moule  $J^\bullet(x, y)$  à valeurs dans l'algèbre  $\mathbf{C}[x, y]$  à partir du moule scalaire  $J^\bullet(0, 0)$  à valeurs dans l'algèbre  $\mathbf{C}$ .

REMARQUE 5.5.3. On a  $J^{j^{[m]}}(x, y) = \frac{x^m}{m!}$  pour tout  $m \in \mathbf{N}$  et de manière analogue  $J^{i^{[n]}}(x, y) = \frac{y^n}{n!}$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . On peut par exemple le montrer grâce à la formule (5.5.a) précédente ou par récurrence.

REMARQUE 5.5.4. On peut aussi montrer par récurrence que  $J^\omega(x, y)$  pour un mot  $\omega = j^{[m]} \cdot \tilde{\omega} \cdot i^{[n]}$  avec  $\tilde{\omega} \in \Omega_{i,j}^*$  est un polynôme de degré  $m$  en  $x$  et de degré  $n$  en  $y$ , de coefficient dominant  $\frac{I\tilde{\omega}}{m!n!}$ . On a donc

$$J^\omega(x, y) = \frac{I\tilde{\omega}}{m!n!} x^m y^n + o(x^m y^n).$$

Le lecteur pourra consulter des calculs analogues (même si moins généraux) pour la régularisation des polyzêtas pour la relation shuffle dans [IKZ06] §2.

Comme conséquence de la proposition 5.5.1, on en déduit le

THÉOREME 5.5.5. *La matrice de connexion  $C_{i,j}$  est égale à la contraction du moule  $J_{i,j}^\bullet(0, 0)$  par le comoule canonique modulo une normalisation. Précisément, on a*

$$(5.5.b) \quad C_{i,j} = e^{-\log_i(a_j - a_i)A_i} \left( \sum_{\omega \in \Omega^*} J_{i,j}^\omega(0, 0) A_\omega \right) e^{\log_j(a_i - a_j)A_j}$$

REMARQUE 5.5.6. Avec la proposition 5.5.1, on voit maintenant bien que lorsque l'on change de choix de branche du logarithme pour définir  $C_{i,j}$ , on change aussi correctement le coefficient  $(\alpha_p, \alpha_q)$  pour garder les égalités (5.4.b) et (5.5.b).

Comme corollaire de la proposition 5.4.14 permettant de définir l'extension moulennne  $J^\bullet$  du moule  $I^\bullet$ , on a le

COROLLAIRE 5.5.7. *Il existe un unique moule<sup>6</sup>  $\text{ssa}^\bullet$  sur l'alphabet  $\Omega \times \Omega$  à valeurs dans  $\mathbf{Z}$  vérifiant*

$$J_{i,j}^\omega(0, 0) = \sum_{\omega' \in \Omega^*} \text{ssa}^{(\omega')} I_{i,j}^{\omega'}.$$

pour tous mots  $\omega, \omega' \in \Omega^*$  et vérifiant de plus que l'ensemble des  $\omega' \in \Omega^*$  tel que  $\text{ssa}^{(\omega')}$  soit non nul pour un mot  $\omega \in \Omega^*$  fixé est un ensemble fini inclus dans  $\Omega_{i,j}^*$ .

REMARQUE 5.5.8. On fera attention que le moule  $\text{ssa}^\bullet$  dépend des indices “gênants”  $i, j$  (et d'un ordre relatif entre les deux), même si la notation ne le fait pas apparaître.

REMARQUE 5.5.9. Les valeurs du bimoule  $\text{ssa}^{(\omega')}$  pour  $\omega' \in \Omega^* - \Omega_{i,j}^*$  et  $\omega \in \Omega^*$  sont en quelque sorte libres. On les a fixées toutes à zéro par convention. Cependant, il peut être intéressant de prendre une autre convention parfois et de donner des valeurs non nulles à certaines d'entre elles pour avoir une bonne propriété de symétrie pour le bimoule  $\text{ssa}^\bullet$ . On procédera ainsi pour le bimoule  $\text{sse}^\bullet$  coté irrégulier. Voir 6.2.

En particulier, la somme s'écrit aussi

$$J_{i,j}^\omega(0, 0) = \sum_{\omega' \in \Omega_{i,j}^*} \text{ssa}^{(\omega')} I_{i,j}^{\omega'},$$

et c'est une somme finie. On notera parfois  $\text{ssa}^{(\omega)} = \text{ssa}^{(\omega')}$  pour plus de lisibilité. La notation  $\text{ssa}$  est pour symétrique symétral. Le moule  $\text{ssa}^\bullet$  donne la conversion pour étendre un moule symétral  $I^\bullet$  en dehors d'indices gênants  $i, j$  en un moule symétral partout  $J^\bullet$ .

---

6. On dit aussi un bimoule sur l'alphabet  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbf{Z}$ .

**5.5.2. Calcul explicite du bimoule  $\text{ssa}^\bullet$ .** Tout d'abord, si l'on se donne un mot  $\omega' \in \Omega_{i,j}^*$  non vide, alors il existe une décomposition

$$\omega' = \omega^1 \omega^2 \cdots \omega^n$$

avec  $n \in \mathbf{N}$  et les  $\omega^i$  des mots écrits dans un seul symbole, maximaux pour leur longueur. Choisissons un vecteur  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n$  tel que  $0 \leq k_m \leq r(\omega^m)$  pour tout  $m$ . Alors, on définit le mot  $T_{\mathbf{k}}(\omega')$  comme étant la concaténation

$$T_{\mathbf{k}}(\omega') := \tilde{\omega}^1 \tilde{\omega}^2 \cdots \tilde{\omega}^n$$

où  $\tilde{\omega}^m$  est égal au mot  $\omega^m$  où l'on a retiré  $k_m$  de ses lettres.

Les mots  $\omega^m$  sont d'un des trois types spéciaux (uniquement écrit avec le symbole  $i$ , ou uniquement avec le symbole  $j$ , ou uniquement avec des autres symboles que  $i$  et  $j$ ). Donc il existe une partition  $(\mathbf{k}^i, \mathbf{k}^j, \mathbf{k}^a)$  de  $\mathbf{k}$  telle que  $k_m$  est une des composante de  $\mathbf{k}^\beta$  si et seulement si  $\omega^m$  est de type  $\beta$  (pour  $\beta = i$  ou  $j$  ou "autre"). Si  $\mathbf{x}$  est un vecteur, notons  $|\mathbf{x}| = \sum_m x_m$  son poids. On a donc  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}^i| + |\mathbf{k}^j| + |\mathbf{k}^a|$ . De même, si  $r(\omega^m)$  désigne la longueur du mot  $\omega^m$ , on note

$$\binom{\omega'}{\mathbf{k}} = \prod_{m=1}^n \binom{r(\omega^m)}{k_m}.$$

On dira dans la suite qu'un vecteur  $\mathbf{k}$  est  $(i, j)$ -adapté au mot  $\omega'$  si le vecteur  $\mathbf{k}^a$  pour le type "autre" est nul. Dans la suite, on parlera parfois abusivement de vecteurs adaptés dans le sens de  $(i, j)$ -adaptés, en sous-entendant le choix de  $i$  et  $j$ .

On peut en déduire la valeur du bimoule  $\text{ssa}^{(\omega')}$ . Tout d'abord, remarquons que l'on a  $\text{ssa}^{(\omega')} \neq 0$  seulement s'il existe un vecteur  $\mathbf{k}$  adapté à  $\omega'$  tel que  $\omega = j^{[|\mathbf{k}^j|]} \cdot T_{\mathbf{k}}(\omega') \cdot i^{[|\mathbf{k}^i|]}$ .

**PROPOSITION 5.5.10.** *Notons  $K$  l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{k}$  adaptés à  $\omega'$  tels que  $\omega = j^{[|\mathbf{k}^j|]} \cdot T_{\mathbf{k}}(\omega') \cdot i^{[|\mathbf{k}^i|]}$ . Alors on a*

$$\text{ssa}^{(\omega')} = \sum_{\mathbf{k} \in K} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\omega'}{\mathbf{k}}.$$

**REMARQUE 5.5.11.** Si  $\omega$  est le mot vide alors  $\text{ssa}^{(\omega')}$  est nul pour tous mots  $\omega'$  sauf pour le mot vide, et l'on a  $\text{ssa}^{(\emptyset)} = 1$ .

**DÉMONSTRATION.** Pour montrer l'égalité (5.5.a), on procède par récurrence. On calcule les produits  $J^{j^{[1]}} J^{j^{[m-1]}} \tilde{\omega} i^{[n]}$  ou  $J^{j^{[m]}} \tilde{\omega} i^{[n-1]} J^{i^{[1]}}$  suivant que  $m > 0$  ou  $n > 0$ , plutôt que le produit  $J^{j^{[m]}} J \tilde{\omega} J^{i^{[n]}}$  utilisé dans la démonstration de la proposition 5.4.14  $\square$

**5.5.3. Comoule de régularisation symétrale.** Définissons maintenant le comoule  $G_{\bullet}^{i,j}$ , dit de régularisation symétrale, sur l'alphabet  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathcal{A}$  par

$$(5.5.a) \quad G_{\omega'}^{i,j} = \sum_{\omega \in \Omega^*} \text{ssa}^{(\omega)} A_{\omega}.$$

Remarquez que l'on a  $G_{\omega'}^{i,j} = 0$  si  $\omega' \in \Omega^* - \Omega_{i,j}^*$  par définition du comoule  $\text{ssa}^\bullet$ .

On a donc explicitement, grâce à la proposition 5.5.10 précédente

$$G_{\omega'}^{i,j} = \sum_{\mathbf{k} \text{ (i,j)-adapté à } \omega'} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\omega'}{\mathbf{k}} A_{i^{[|\mathbf{k}^i|]}} A_{T_{\mathbf{k}}(\omega')} A_{j^{[|\mathbf{k}^j|]}},$$

qui peut être aussi écrit

$$(5.5.b) \quad G_{\omega'}^{i,j} = \sum_{\substack{\mathbf{k} \text{ (i,j)-adapté à } \omega' \\ \omega = j^{[|\mathbf{k}^j|]} \cdot T_{\mathbf{k}}(\omega') \cdot i^{[|\mathbf{k}^i|]}}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\omega'}{\mathbf{k}} A_{\omega},$$

avec la somme prise sur les vecteurs  $\mathbf{k}$  adaptés à  $\omega'$  et où  $\omega = j^{[|\mathbf{k}^j|]} \cdot T_{\mathbf{k}}(\omega') \cdot i^{[|\mathbf{k}^i|]}$  est la concaténation du mot avec l'unique symbole  $j$ ,  $|\mathbf{k}^j|$  fois, puis le mot  $T_{\mathbf{k}}(\omega')$  et enfin le mot avec l'unique symbole  $i$ ,  $|\mathbf{k}^i|$  fois.

#### 5.5.4. Développements mouliens pour la matrice de connexion.

COROLLAIRE 5.5.12. On a

$$\sum_{\omega \in \Omega^*} J_{i,j}^{\omega}(0,0) A_{\omega} = \sum_{\omega, \omega' \in \Omega^*} \text{ssa}^{(\omega')} I_{i,j}^{\omega'} A_{\omega} = \sum_{\omega' \in \Omega_{i,j}^*} I_{i,j}^{\omega'} G_{\omega'}^{i,j},$$

donc les égalités

$$(5.5.a) \quad C_{i,j} = e^{-\log_i(a_j - a_i)A_i} \left( \sum_{\omega, \omega' \in \Omega_{i,j}^*} \text{ssa}^{(\omega')} I_{i,j}^{\omega'} A_{\omega} \right) e^{\log_j(a_i - a_j)A_j},$$

$$(5.5.b) \quad C_{i,j} = e^{-\log_i(a_j - a_i)A_i} \left( \sum_{\omega \in \Omega_{i,j}^*} I_{i,j}^{\omega} G_{\omega}^{i,j} \right) e^{\log_j(a_i - a_j)A_j}.$$

En résumé, la matrice de connexion  $C_{i,j}$  est la contraction normalisée du moule donné par les intégrales itérées convergentes et le comoule de régularisation symétral  $G_{\bullet}^{i,j}$ .

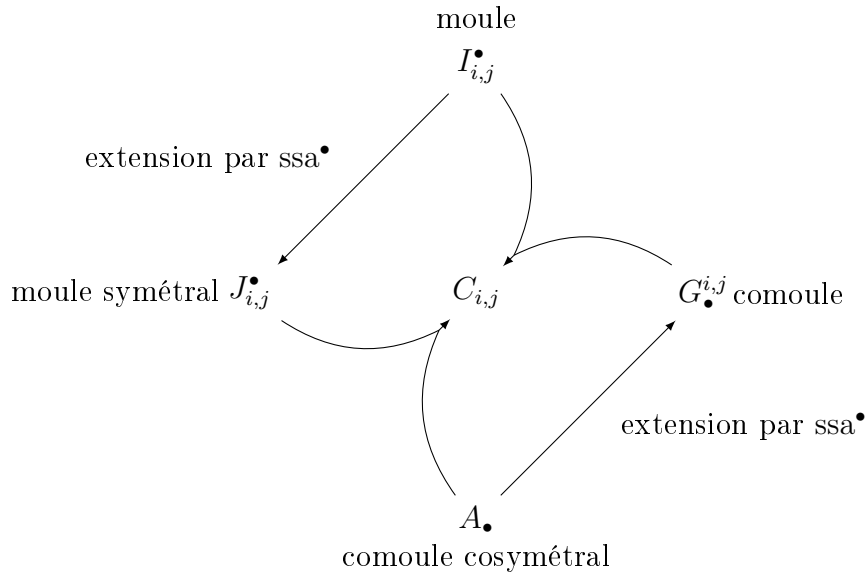


FIGURE 5. Matrice de connexion  $C_{i,j}$  et les deux méthodes de contractions

REMARQUE 5.5.13. la formule (5.5.b) généralise la formule sous forme de série formelle pour l'associateur de Drinfel'd (voir par exemple [LM96] théorème A.9 formule (A.17)). En effet, si l'on considère l'alphabet en deux symboles  $\Omega = \{A_0, A_1\}$  et la connexion

$$\nabla_{KZ} = d - \left( \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} \right) dz.$$

On peut alors définir la matrice de connexion de Drinfel'd  $\Phi(A_0, A_1)$  comme une série formelle non commutative, qui provient de la comparaison de deux bases préférées de  $\nabla_{KZ}$  en  $z = 0$  et  $z = 1$ . La connexion permet de définir la bijection entre les alphabets  $\Omega$  et  $\{\frac{dz}{z}, \frac{dz}{z-1}\}$  avec  $A_0 \leftrightarrow \frac{dz}{z}$  et  $A_1 \leftrightarrow \frac{dz}{z-1}$ . On pose  $\gamma$  le chemin reliant 0 à 1 par le segment  $[0; 1]$ . On choisit la branche principale du logarithme  $\log$  pour les deux pôles en 0 et en 1. On a par définition  $\Phi(A_0, A_1) = \Psi_1(z)^{-1} \Psi_0(z)$  pour tout  $z \in ]0; 1[$  où  $\Psi_0$  est la base de solution de  $\nabla_{KZ}$  asymptotique à  $z^A$  en  $z \rightarrow 0$  (pour  $\arg(z) = 0$ ) et  $\Psi_1$  est la base de solution de  $\nabla_{KZ}$  asymptotique à  $(1-z)^B$  en  $z \rightarrow 1$  (avec  $\arg(z) = \pm\pi$ ). À cause de la normalisation différente de la solution en  $z = 1$  pour la matrice de connexion de Drinfel'd par rapport aux matrices de connexion, on a la formule

$$\Phi(A_0, A_1) = \sum_{\omega \in \Omega^*} J_{1,0}^\omega(0, 0) A_\omega = \sum_{\omega \in \Omega_{i,j}^*} I_{1,0}^\omega G_\omega^{1,0}.$$

### 5.6. Cas vectoriel

Reprenons le cas vectoriel, c'est-à-dire que les  $A_i$  sont des éléments de  $\mathfrak{g} = \text{End}(V)$  pour un certain  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie et

$$\nabla = d - \sum_{i \in I} \frac{A_i}{z - a_i} dz,$$

est une connexion fuchsienne sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ .

On suppose les conditions génériques suivantes pour tout  $i \in I$  :

( $a_i$ ) l'élément  $A_i$  est non résonant.

On rappelle qu'un élément  $A_i \in \mathfrak{g}$  est non résonant si la différence de deux quelconques de ses valeurs propres n'est jamais un entier non nul. En particulier, cela est équivalent au fait de dire que  $\text{ad}_{A_i} = [A_i, \cdot] \in \text{End}(\mathfrak{g})$  est à valeurs propres dans  $\mathbf{C} - \mathbf{Z}^*$ . On considère aussi les conditions

( $\text{ad}_i$ ) l'endomorphisme adjoint  $\text{ad}_{A_i} = [A_i, \cdot] \in \text{End}(\mathfrak{g})$  a ses valeurs propres de partie réelle  $> -1$ ,

qui sont utiles pour obtenir le lemme de régularisation analogue à la proposition 5.3.9.

Remarquez que les conditions ( $a_i$ ) et ( $\text{ad}_i$ ) sont valables dans un voisinage de la connexion triviale  $d$ . Soient  $a_i$  et  $a_j$  deux pôles simples à distance finie de  $\nabla$ ,  $\gamma$  un lacet reliant  $a_i$  à  $a_j$  et définissons la matrice de connexion de  $\nabla$  le long de  $\gamma$ . On supposera que  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que  $\gamma([0; 1]) \subseteq \mathbf{C} - \{a_i : i \in I\}$ .

On choisit deux branches du logarithme  $\log_i$  et  $\log_j$  au voisinage de la direction  $-\gamma'(1) \in T_{a_i} \mathbf{P}^1 \simeq S^1$  et  $\gamma'(0) \in T_{a_j} \mathbf{P}^1 \simeq S^1$  respectivement. Avec ces choix, on a deux solutions canoniques  $\Psi_i$  et  $\Psi_j$  définies au voisinage de  $\gamma(1)$ , respectivement  $\gamma(0)$  et que l'on prolonge le long de  $\gamma$ . Les solutions  $\Psi_i$  et  $\Psi_j$  sont uniquement déterminées par leur asymptotique en  $a_i$  et  $a_j$  :

$$\begin{aligned} \Psi_i(z) &\underset{\substack{z \rightarrow a_i \\ |\arg(z) - \theta| < \pi}}{\sim} e^{\log_i(z - a_i) A_i}, \\ \Psi_j(z) &\underset{\substack{z \rightarrow a_j \\ |\arg(z) - \theta| < \pi}}{\sim} e^{\log_j(z - a_j) A_j}. \end{aligned}$$

Pour ces choix, on définit alors la matrice de connexion  $C_{i,j}$  reliant le pôle  $a_j$  au pôle  $a_i$  le long de  $\gamma$  par

$$C_{i,j} := \Psi_i^{-1} \Psi_j(z) \quad \text{pour tout } z \in \gamma([0; 1]).$$

Considérons maintenant la connexion formelle

$$\tilde{\nabla} = d - \sum_{i \in I} \frac{\tilde{A}_i}{z - a_i} dz$$

sur le fibré trivial de fibre  $\mathcal{A} = \mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  où  $\Omega$  est l'alphabet  $\{a_i : i \in I\}$ . Notons  $\tilde{C}_{i,j}$  la matrice de connexion de la connexion  $\tilde{\nabla}$  reliant le pôle  $a_j$  au pôle  $a_i$  pour les mêmes choix que précédemment. On a vu dans ce qui précède qu'il existe des moules  $I_{i,j}^\bullet$ ,  $J_{i,j}^\bullet$ , un bimoule  $\text{ssa}_{i,j}^\bullet$  et des comoules  $\tilde{A}_\bullet$  (le comoule canonique) et  $\tilde{G}_\bullet^{i,j}$  tels que

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{i,j} &= e^{-\tilde{A}_i \log_i(a_j - a_i)} \cdot \sum_{\omega, \omega' \in \Omega^*} \text{ssa}^{(\omega')}_{i,j} I_{i,j}^{\omega'} \tilde{A}_\omega \cdot e^{\tilde{A}_j \log_i(a_i - a_j)} \\ &= e^{-\tilde{A}_i \log_i(a_j - a_i)} \cdot \sum_{\omega \in \Omega^*} J_{i,j}^\omega(0, 0) \tilde{A}_\omega \cdot e^{\tilde{A}_j \log_i(a_i - a_j)} \\ &= e^{-\tilde{A}_i \log_i(a_j - a_i)} \cdot \sum_{\omega \in \Omega^*} I_{i,j}^\omega \tilde{G}_\omega^{i,j} \cdot e^{\tilde{A}_j \log_i(a_i - a_j)} \end{aligned}$$

On a une application

$$\rho : \Omega \rightarrow \mathfrak{g}$$

telle que  $\rho(\tilde{A}_i) = A_i$  pour tout  $i \in I$ . Comme dans la section 5.2, on étend cette application par linéarité et on notera  $A_\bullet$  et  $G_\bullet^{i,j}$  les comoules image de  $\tilde{A}_\bullet$  et  $\tilde{G}_\bullet^{i,j}$  respectivement.

PROPOSITION 5.6.1. *Dans les notations de la section 5.2, on a  $\tilde{C}_{i,j} \in \mathbf{C}\{\{\Omega\}\}$ . En particulier, les séries  $\sum_{\omega \in \Omega^*} J_{i,j}^\omega(0, 0) A_\omega$  et  $\sum_{\omega \in \Omega^*} I_{i,j}^\omega G_\omega$  sont absolument convergentes.*

PROPOSITION 5.6.2. *On a  $\rho(\tilde{C}_{i,j}) = C_{i,j}$ .*

On en déduit immédiatement des deux propositions précédentes le

COROLLAIRE 5.6.3. *On a le développement absolument convergent*

$$(5.6.a) \quad C_{i,j} = e^{-A_i \log_i(a_j - a_i)} \cdot \sum_{\omega, \omega' \in \Omega^*} \text{ssa}^{(\omega')}_{i,j} I_{i,j}^{\omega'} A_\omega \cdot e^{A_j \log_i(a_i - a_j)}$$

dont on déduit les développements absolument convergents

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= e^{-A_i \log_i(a_j - a_i)} \cdot \sum_{\omega \in \Omega^*} J_{i,j}^\omega(0, 0) A_\omega \cdot e^{A_j \log_i(a_i - a_j)} \\ &= e^{-A_i \log_i(a_j - a_i)} \cdot \sum_{\omega \in \Omega^*} I_{i,j}^\omega G_\omega^{i,j} \cdot e^{A_j \log_i(a_i - a_j)}. \end{aligned}$$



## Développement moulien de l'application exponentielle duale

### 6.1. Application exponentielle duale

Le but de ce chapitre est de donner une formule sous la forme d'une série formelle (à variables non commutatives) pour les coefficients de l'application exponentielle duale

$$\nu_A : \mathfrak{g}^* \rightarrow G^*,$$

et d'en donner une extension formelle intrinsèque dans la section 6.2. À des changements algébriques près, cela correspond à donner un développement formel des coefficients des données de Stokes  $(u_+, u_-, h)$  d'une connexion de la forme

$$\nabla = d - \left( \frac{A}{\xi^2} + \frac{R}{\xi} \right) d\xi,$$

en fonction des coefficients de  $R$ .

Pour cela, fixons un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie, une coordonnée  $\xi : \mathbf{P}^1 - \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C}$ . On note comme précédemment  $G = \mathrm{GL}(V)$ ,  $\mathfrak{g} = \mathrm{End}(V)$  son algèbre de Lie. On choisit un tore maximal  $T \subseteq G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ . On note  $\mathfrak{t}_{reg}$  l'ensemble des éléments réguliers de  $\mathfrak{t}$  et on choisit un élément  $A \in \mathfrak{t}_{reg}$ . On notera  $\{a_i : i \in I\}$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$  et  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  la décomposition de  $V$  induite par les espaces propres de  $A$ . Remarquez que comme on a  $A \in \mathfrak{t}_{reg}$ , on a  $\#(I) = \dim(V)$  et  $\dim(V_i) = 1$ . On note aussi  $\mathrm{id}_i : V \rightarrow V_i \hookrightarrow V$  le  $i^{\mathrm{ième}}$  idempotent associé à la graduation  $\bigoplus_{i \in I} V_i$  et  $\Lambda := \sum_{i \in I} \mathrm{id}_i R \mathrm{id}_i$  la partie diagonale de  $R$ .

REMARQUE 6.1.1. Quitte à choisir une base de  $V$ , on peut toujours prendre pour tore l'ensemble des matrices diagonales inversibles. Dans ce cas, la partie régulière  $\mathfrak{t}_{reg}$  correspond à l'ensemble des matrices diagonales à valeurs propres deux à deux distinctes.

On pose alors  $\nabla$  la connexion sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  exprimée par la formule ci-dessus où  $R \in \mathfrak{g}$ . Choisissons un angle admissible  $\eta \in \mathbf{R}$  pour le type irrégulier  $A$ , c'est-à-dire un angle tel que  $\arg(a_i - a_j) \not\equiv \eta \pmod{2\pi}$  pour tout  $i, j \in I$ . Ce choix détermine alors un ouvert  $\mathcal{U}(\eta)$  égal au plan  $\mathbf{C}$  privé des demi-droites issues des  $a_i$  ( $i \in I$ ) d'angle  $\eta$  et une branche du logarithme  $\log$  sur  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\eta}$  avec pour angles les  $]\eta - 2\pi; \eta[$ . Ces choix permettent de définir un ordre sur l'ensemble  $I$  (ou de manière équivalente sur l'ensemble des valeurs propres de  $A$ ), donné explicitement par

$$a_i >_\eta a_j \quad \text{si} \quad e^{-(a_i - a_j)/\xi} \text{ tend vers } 0 \text{ quand } \xi \rightarrow 0 \text{ dans la direction } \eta + \pi/2.$$

Cela correspond à  $\Im(a_i e^{-i\eta}) < \Im(a_j e^{-i\eta})$ . On peut alors définir les sous-groupes unipotents  $U_+$  et  $U_-$  des éléments de  $G$  unipotents triangulaires supérieurs, resp. inférieurs, pour la graduation ordonnée  $\bigoplus_{i \in I} V_i$  de  $V$ .

Les données de Stokes associées à la connexion  $\nabla$  sont alors de la forme

$$(u_+, u_-, h) \in U_+ \times U_- \times T.$$



Grâce aux résultats du chapitre 3, on sait que les matrices de Stokes de  $\nabla$  sont reliées aux matrices de connexion de la connexion

$$\hat{\nabla} = d - \sum_{i \in I} \frac{R_i}{z - a_i} dz,$$

sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  où  $z : \mathbf{P}^1 - \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C}$  est une coordonnée de  $\mathbf{P}^1 - \{\infty\}$  en dualité réelle avec la coordonnée  $\xi$  et où  $R_i = \text{id}_i R \in \mathfrak{g}$ . La formule est donnée explicitement par

$$hu_+ - u_- = N^{-1} M \chi(\Lambda) N,$$

où

- (1)  $M = \sum_{i,j \in I} R_i C_{i,j} \text{id}_j$  avec  $C_{i,j} \in G$  la matrice de connexion de  $\hat{\nabla}$  reliant le pôle  $a_j$  au pôle  $a_i$  le long d'un chemin à valeurs dans  $\mathcal{U}(\eta)$  avec le choix de la branche du logarithme log donnée par l'angle  $\eta$ ,
- (2)  $N = e^{i\pi\Lambda} \Pi(-\Lambda)$  avec  $\Pi$  la fonction Pi de Gauss ( $\Pi(z) = \Gamma(1+z)$ ),
- (3) et enfin  $\chi$  la fonction  $z \mapsto \frac{e^{2i\pi z} - 1}{z}$  qui est holomorphe en 0.

Grâce aux développements moulins du chapitre 5, on peut déduire un développement moulien des coefficients de Stokes. Pour cela, on utilise les formules

$$\text{id}_i R_j = \delta_{i,j} R_i \quad \text{et} \quad R_i \text{id}_j = R_{i,j} \quad \text{pour tout } i, j \in I,$$

où  $R_{i,j} = \text{id}_i R \text{id}_j \in \mathfrak{g}$  et  $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker.

Avant d'énoncer la formule, rappelons les notations du chapitre 5.

- (1)  $\Omega$  désigne l'alphabet  $\{a_i : i \in I\}$  qui est parfois identifié avec  $I$  et on note  $\Omega^*$  l'ensemble des mots écrits dans cet alphabet.<sup>1</sup> On notera aussi  $\Omega_{i,j}^* \subseteq \Omega^*$  l'ensemble des mots ne commençant pas par  $a_j$  et ne finissant pas par  $a_i$ .
- (2)  $\eta \in \mathbf{R}$  est l'angle admissible que l'on a choisi pour définir l'application exponentielle duale,  $\mathcal{U}(\eta)$  est le plan  $\mathbf{C}$  privé des demi-droites issues des  $a_i$  ( $i \in I$ ) d'angle  $\eta$  et log désigne une branche du logarithme sur  $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\eta}$  avec pour angles les  $]\eta - 2\pi; \eta[$ .
- (3) On note  $I_{i,j}^\bullet$  le moule scalaire défini sur l'alphabet  $\Omega$  donné par

$$I_{i,j}^\omega = \begin{cases} \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 1}} \int_{u < t_1 \leq \dots \leq t_r < v} \frac{dz_1}{z_1 - \omega_1} \dots \frac{dz_r}{z_r - \omega_r} & \text{si } \omega \in \Omega_{i,j}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $\omega = \omega_1 \dots \omega_r \in \Omega^*$ ,  $z_k = \gamma(t_k)$  pour tout  $1 \leq k \leq r$  avec  $\gamma$  un chemin quelconque reliant  $a_j$  à  $a_i$  à valeurs dans  $\mathcal{U}(\eta)$ .

- (4) On note  $\text{ssa}_{i,j}^\bullet$  le moule d'extension symétral défini dans la section 5.5.2 (la définition intrinsèque est donnée par la proposition 5.5.10).

Rappelons seulement les deux propriétés fondamentales du bimoule d'extension symétral :

- $\text{ssa}_{i,j}^{(\omega')}$  = 0 pour tout  $\omega' \in \Omega_{i,j}$  et tout  $\omega \in \Omega^*$  tel que  $\omega \neq \omega'$ ,
- $\text{ssa}_{i,j}^{(\omega')}$  = 1 pour tout  $\omega' \in \Omega_{i,j}^*$ .

Le théorème exprimant les données de Stokes de la connexion  $\nabla$  s'énonce alors comme suit.

1. En particulier,  $\Omega^*$  contient le mot vide.

THÉORÈME 6.1.2. *On a l'égalité*

$$\mathrm{id}_i(hu_+ - u_-)\mathrm{id}_j = e^{-\log(a_j - a_i)R_{i,i}} F_i \cdot M_{i,j} \cdot G_j e^{\log(a_i - a_j)R_{j,j}},$$

où

$$(6.1.a) \quad M_{i,j} := \sum_{r \in \mathbf{N}} \sum_{\substack{\omega = (i_1, \dots, i_r) \in \Omega^* \\ \omega' \in \Omega^*}} \mathrm{ssa}_{i,j}^{(\omega')} I_{i,j}^{\omega'} \cdot R_{i,i_r} R_{i_r, i_{r-1}} \cdots R_{i_1, j}$$

est la partie centrale de cette formule et

$$\begin{aligned} F_i &= e^{-i\pi R_{i,i}} \Pi^{-1}(-R_{i,i}) \\ G_j &= \frac{e^{2i\pi R_{j,j}} - 1}{R_{j,j}} e^{i\pi R_{j,j}} \Pi(-R_{j,j}), \end{aligned}$$

avec  $\Pi(z) = \Gamma(1+z)$  la fonction *Pi* de Gauss.

REMARQUE 6.1.3. Dans le cas particulier où  $A$  n'admet que deux valeurs propres  $a_1$  et  $a_2$ , on peut donner une formule relativement simple de la somme  $\sum_{\omega \in \Omega^*} \mathrm{ssa}_{i,j}^{(\omega')} R_{\omega}$ . Voir [LM96] appendice A, théorème A.9 ou la formule (0.0.f) donnée en introduction.

## 6.2. Cadre formel et extension intrinsèque

Dans le théorème 6.1.2, on a donné grâce à la formule (6.1.a) pour la matrice  $M_{i,j} \in \mathfrak{g}$  une expression pour les données de Stokes de la connexion  $\nabla$ .

L'expression obtenue pour la partie  $(i, j)$  des matrices de Stokes est de la forme

$$\sum_{r, m, n \in \mathbf{N}} \sum_{i_1, \dots, i_r \in I} \text{"somme d'hyperlogarithmes explicite"} \cdot R_{i,i}^m R_{i,i_r} R_{i_r, i_{r-1}} \cdots R_{i_1, j} R_{j,j}^n,$$

c'est-à-dire qu'au niveau formel, on obtient une série formelle dans l'algèbre des chemins du graphe complet  $\Gamma(I)$  de sommets  $I$ .

En particulier, le coefficient devant un terme du type  $\cdots R_{i,j} R_{k,l} \cdots$  avec  $j \neq k$  est nécessairement nul. De plus, si l'on voit plutôt les termes  $R_{i,j}$  comme des symboles formels de l'algèbre  $\mathbf{C}\langle\langle R_{i,j} : (i, j) \in I \rangle\rangle$ , la série formelle (à variables non commutatives) n'admet pas une bonne propriété de symétrie.

REMARQUE 6.2.1. La recherche d'une telle symétrie est motivée par la recherche d'une formule explicite pour un isomorphisme d'algèbre

$$U_h \mathfrak{g} \longrightarrow U \mathfrak{g}[[h]]$$

entre le groupe quantique de Drinfel'd-Jimbo  $U_h \mathfrak{g}$  et une extension<sup>2</sup> de l'algèbre enveloppante  $U \mathfrak{g}$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . En effet, on peut montrer qu'une version entière du groupe quantique de Drinfel'd-Jimbo  $U_h \mathfrak{g}$  est une déformation de l'algèbre de Poisson  $\mathcal{O}(G^*)$  des fonctions algébriques du groupe de Poisson-Lie dual  $G^*$  (voir [DCP93] chapitre 4 §12). De même, la filtration de l'algèbre enveloppante  $U \mathfrak{g}$  permet de définir une déformation formelle de l'algèbre de Poisson  $\mathcal{O}(\mathfrak{g}^*)$  des fonctions algébriques de la bialgèbre de Lie  $\mathfrak{g}^*$  (voir par exemple [ES02] §1.4.4). Stricto sensu, l'application exponentielle duale  $\nu_A : \mathfrak{g}^* \rightarrow G^*$  n'induit pas une application  $\mathcal{O}(G^*) \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{g}^*)$  mais entre les complétions de ces espaces (pour leur filtration naturelle). La motivation reste cependant inchangée.

Le cadre formel que nous utiliserons est le suivant. Suivant le chapitre 1 section 1.1, on notera  $\mathcal{R}$  l'espace des racines du groupe  $G$  pour le choix du tore (ici maximal)  $T$ . De plus, on note  $\mathcal{W} = \mathbf{N}[\mathcal{R}]$  le semi-groupe engendré par  $\mathcal{R}$ . On considère l'algèbre

2. Ici la notation  $A[[h]]$  pour une  $\mathbf{C}$ -algèbre  $A$  désigne la complétion (pour la topologie  $h$ -adique de  $A \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[[h]]$ ).

$\widehat{U\mathfrak{g}}$  qui est la complétion profinie de l'algèbre enveloppante  $U\mathfrak{g}$ . Alors l'élément  $R \in \mathfrak{g}$  peut être vu comme une somme

$$R = \sum_{\alpha \in \mathcal{R} \cup \{0\}} R_\alpha \in \mathfrak{g} \subseteq \widehat{U\mathfrak{g}}.$$

On rappelle que l'alphabet  $\Omega$  est en bijection avec  $I$  et que  $\Omega^*$  désigne l'ensemble des mots dans l'alphabet  $\Omega$ . La partie centrale du travail consiste à donner une formule intrinsèque pour la somme

$$\sum_{\omega, \omega' \in \Omega^*} \text{ssa}_{i,j}^{(\omega')} I_{i,j}^{\omega'} A_\omega$$

après la transformation donnée par l'application  $A \mapsto \sum_{i,j \in I} R_i A \text{id}_j$ .

Pour tout  $\omega = \omega_1 \cdots \omega_r$ , l'image de  $A_\omega = A_{\omega_r} \cdots A_{\omega_1}$  par cette application est égal à

$$\sum_{i,j \in I} R_{(i,\omega_r)} R_{(\omega_r, \omega_{r-1})} \cdots R_{(\omega_2, \omega_1)} R_{(\omega_1, j)}.$$

Pour tout choix d'un élément  $(i, j)$  de  $\mathcal{R}$ , on a donc une application  $\iota_{\mathcal{W}}^{i,j} : \Omega^* \rightarrow \mathcal{W}^*$  définie par

$$\begin{aligned} \omega = \emptyset & \longmapsto \mathbf{w} = (i, j) \\ \omega = \omega_1 \cdots \omega_r & \longmapsto \mathbf{w} = w_1 \cdots w_{r+1} \\ & \text{avec } w_1 = (\omega_1, j), w_2 = (\omega_2, \omega_1), \dots, w_r = (\omega_r, \omega_{r-1}), w_{r+1} = (i, \omega_r), \end{aligned}$$

avec la convention que  $(i, i) = (j, j) = (\omega, \omega) = 0 \in \mathcal{W}$  pour tout  $i, j, \omega \in \Omega$ . L'image des mots de l'alphabet  $\Omega$  de longueur  $r$  dans  $\mathcal{W}^*$  sont donc toujours des mots écrits dans l'alphabet  $\mathcal{R} \cup \{0\}$  de longueur  $r + 1$ .

On peut aussi introduire un alphabet auxiliaire  $\mathcal{V}$  en bijection avec l'alphabet  $\mathcal{W}$  tel que leurs mots respectifs sont reliés par la correspondance

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = w_1 \cdots w_s \in \mathcal{W}^* & \leftrightarrow \mathbf{v} = v_1 \cdots v_s \in \mathcal{V}^* \\ w_1 &= v_1 \\ w_2 = v_2 - v_1 & \text{ et } v_2 = w_1 + w_2 \\ & \vdots \\ w_s = v_s - v_{s-1} & \text{ et } v_s = w_1 + w_2 + \cdots + w_s. \end{aligned}$$

REMARQUE 6.2.2. Cette dualité entre les alphabets ci-dessus a déjà été utilisé par J. Écalé. Elle fait partie de sa théorie sur la dimorphie des nombres polyzêtas. Voir en particulier [Eca02] §4.

Alors de même, on peut définir une inclusion  $\iota_{\mathcal{V}}^{i,j} : \Omega^* \rightarrow \mathcal{V}^*$  pour tout  $(i, j)$  par

$$\begin{aligned} \omega = \emptyset & \longmapsto \mathbf{v} = (i, j) \\ \omega = \omega_1 \cdots \omega_r & \longmapsto \mathbf{v} = v_1 \cdots v_{r+1} \\ & \text{avec } v_1 = (\omega_1, j), v_2 = (\omega_2, j), \dots, v_r = (\omega_r, j), v_{r+1} = (i, j). \end{aligned}$$

L'application  $A \mapsto \sum_{i,j \in I} R_i A \text{id}_j$  correspond donc à

$$A_\omega \mapsto \sum_{i,j \in I} R_{\text{ev}_{\mathcal{W}}^{i,j}(\omega)}^{\mathbf{w}} = \sum_{i,j \in I} R_{\text{ev}_{\mathcal{V}}^{i,j}(\omega)}^{\mathbf{v}},$$

où  $R_{\bullet}^{\mathbf{w}} := R_{\bullet}$  désigne le comoule canonique dans l'alphabet  $\mathcal{W}$  et où  $R_{\bullet}^{\mathbf{v}}$  est le comoule défini par :

$$R_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} := R_{v_l - v_{l-1}} R_{v_{l-1} - v_{l-2}} \cdots R_{v_2 - v_1} R_{v_1},$$

pour tout mot  $\mathbf{v} = v_1 \cdots v_l$ . Pour le comoule, la formulation la plus simple est clairement celle dans l'encodage  $w$ . Cependant nous verrons que dans le cas du moule, c'est l'encodage  $v$  qui sera le plus simple.

Passons à la traduction du moule  $I_{i,j}^\bullet$  et du bimoule  $\text{ssa}_{i,j}^\bullet$  à l'alphabet  $\mathcal{W}$ . On a

$$I_{i,j}^\omega = \int_{\gamma_{i,j}} \frac{dz}{z - a_{\omega_1}} \cdots \frac{dz}{z - a_{\omega_r}} = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r \leq 1} \frac{\gamma'_{i,j}(t_1) dt_1}{\gamma_{i,j}(t_1) - a_{\omega_1}} \cdots \frac{\gamma'_{i,j}(t_r) dt_r}{\gamma_{i,j}(t_r) - a_{\omega_r}},$$

pour tout mot  $\omega \in \Omega^{i,j}$  où  $\gamma_{i,j}$  est un chemin reliant  $a_j$  à  $a_i$  dans l'ouvert de  $\mathcal{U}(\eta) = \mathbf{C} - \bigcup_{k \in I} \mathbf{R}_+ a_k e^{i\eta}$ . La condition  $\omega \in \Omega^{i,j}$  signifie que  $\omega_1 \neq j$  et  $\omega_r \neq i$ .

Si l'on fait un changement de variable linéaire, on peut écrire l'intégrale précédente en une intégrale sur un chemin issu de 0 et terminant en  $a_i - a_j$  dans l'ouvert  $\mathbf{C} - \bigcup_{k \in I} \mathbf{R}_+ (a_k - a_j) e^{i\eta}$ . En traduisant le mot  $\omega \in \Omega^*$  dans l'alphabet  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{V}$  via  $\iota_{\mathbf{w}}^{i,j}$  et  $\iota_{\mathbf{v}}^{i,j}$ , on a donc

$$\begin{aligned} I_{i,j}^\omega &= \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a_{w_1}} \frac{dz}{z - (a_{w_1} + a_{w_2})} \cdots \frac{dz}{z - (a_{w_1} + a_{w_2} + \cdots + a_{w_r})} \\ &= \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a_{v_1}} \frac{dz}{z - a_{v_2}} \cdots \frac{dz}{z - a_{v_r}}, \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est un chemin à valeurs dans  $\mathbf{C} - \bigcup_{k \in I} \mathbf{R}_+ (a_k - a_j) e^{i\eta}$  issu de 0 et finissant en  $\text{ev}(w_1 + \cdots + w_{r+1}) = \text{ev}(v_{r+1}) = a_i - a_j \in \mathbf{C}$ .

On définit alors le moule  $L_{\mathbf{w}}^\bullet$  dans l'alphabet  $\mathcal{W}$  par la propriété  $L_{\mathbf{w}}^\omega = I_{i,j}^\omega$  s'il existe  $i, j \in I$  et  $\omega \in \Omega^*$  tel que  $\mathbf{w} = \iota_{\mathbf{w}}^{i,j}(\omega)$  et  $L_{\mathbf{w}}^\omega = 0$  sinon. On définit le moule  $L_{\mathbf{v}}^\bullet$  dans l'alphabet  $\mathcal{V}$  de manière exactement analogue. Cette définition est bien posée car pour tout mot  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^*$ , il existe au plus un triplet  $(i, j, \omega)$  tel que  $\mathbf{w} = \iota_{\mathbf{w}}^{i,j}(\omega)$  (et de même pour  $\mathcal{V}^*$ ).

Reste à traduire le bimoule  $\text{ssa}_{i,j}^\bullet$ . L'alphabet  $\mathcal{V}$  est parfaitement adapté pour cela. Rappelons la définition du bimoule  $\text{ssa}_{i,j}^\bullet$ . Si  $\omega'$  est un mot dans l'alphabet  $\Omega^*$  non vide, alors il existe une unique décomposition en mots maximaux non vides  $\omega' = \omega^1 \cdots \omega^n$  où les  $\omega^i$  sont composés d'un unique symbole. On choisit un vecteur  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  tel que  $0 \leq k_i \leq r(\omega^i)$  et on dira que le vecteur  $\mathbf{k}$  est  $(i, j)$ -adapté si  $k_i = 0$  quand  $\omega^i$  est composé d'un autre symbole que  $i$  ou  $j$ . On pose alors  $T_{\mathbf{k}}(\omega')$  le mot construit à partir de la décomposition  $\omega^1 \cdots \omega^n$  en retirant  $k_i$  symboles du sous-mot  $\omega^i$ . Lorsque  $\mathbf{k}$  est  $(i, j)$ -adapté, cela signifie en particulier que  $T_{\mathbf{k}}(\omega')$  est construit à partir de  $\omega'$  en lui retirant des symboles  $i$  et  $j$  uniquement, et l'on notera ces nombres de symboles retirés  $|\mathbf{k}^i|$  et  $|\mathbf{k}^j|$  respectivement. De même, on notera  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}^i| + |\mathbf{k}^j| = k_1 + \cdots + k_n$  le poids du vecteur  $\mathbf{k}$ . On peut maintenant donner la définition du bimoule  $\text{ssa}_{i,j}^\bullet$ . Notons  $K$  l'ensemble des vecteurs  $(i, j)$ -adaptés au mot  $\omega'$ . Alors

$$\text{ssa}_{i,j}^{(\omega')} = \sum_{\mathbf{k} \in K} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\omega'}{\mathbf{k}},$$

si  $\omega = j^{[k^j]} T_{\mathbf{k}}(\omega') i^{[k^i]}$  et  $\binom{\omega'}{\mathbf{k}} := \prod_{m=1}^n \binom{r(\omega^m)}{k_m}$ . Pour le mot vide, on pose  $\text{ssa}_{i,j}^{(\emptyset)} = 1$  et  $\text{ssa}_{i,j}^{(\emptyset)} = 0$  pour tout  $\omega$  non vide.

On peut alors définir le bimoule  $\text{sse}^\bullet$  par

$$\text{sse}_{i,j}^{(\mathbf{v}')} := \text{ssa}_{i,j}^{(\omega')}$$

si  $\mathbf{v}' := \iota_{\mathbf{v}}^{i,j}(\omega')$  et  $\mathbf{v} := \iota_{\mathbf{v}}^{i,j}(\omega)$ . Cette définition est valide car pour tout mot  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^*$ , il existe au plus un mot  $\omega \in \Omega^*$  tel que  $\mathbf{v} = \iota_{\mathbf{v}}^{i,j}(\omega)$ . Reste seulement à donner la définition pour les mots de  $\mathcal{V}^*$  qui ne sont pas dans l'image de  $\iota_{\mathbf{v}}^{i,j}$  pour un certain  $(i, j)$ . On pourra fixer cette image à 0, en particulier  $\text{sse}_{i,j}^{(\emptyset)} = 0$ .

On peut cependant donner une définition alternative intrinsèque du bimoule  $\text{sse}^\bullet$ , qui correspondra à une *extension non triviale* en dehors des images des  $\iota_v^{i,j}$ . On procède exactement comme pour le bimoule  $\text{ssa}^\bullet$ . Pour tout mot  $\mathbf{v}' \in \mathcal{V}^*$  de longueur  $> 1$ , on considère l'unique décomposition en sous-mots maximaux de  $\mathbf{v}'$  privé de son dernier symbole  $v_l$  où les sous-mots sont composés d'un unique symbole :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}^1 \cdots \mathbf{v}^n \cdot v_l.$$

On rappelle que si  $\mathbf{v}' = \iota_v^{i,j}(\omega')$  alors on a nécessairement  $v_l = (i, j)$ . Soit alors  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  un vecteur tel que  $0 \leq k_i \leq r(\mathbf{v}^i)$ . On dira que le vecteur  $\mathbf{k}$  est adapté à  $\mathbf{v}'$  si  $k_i = 0$  lorsque  $\mathbf{v}^i$  n'est pas uniquement composé du symbole  $0^3$  ou  $v_l' = (i, j)$ . On supposera  $v_l' \neq 0$  pour simplifier dans la suite mais le cas  $v_l' = 0$  est analogue. Dans ce cas, on notera  $\mathbf{k} = \mathbf{k}^0 + \mathbf{k}^{v_l'}$  la décomposition induite sur le vecteur  $\mathbf{k}$ . On pose  $T_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}')$  le mot construit à partir de la décomposition  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}^1 \cdots \mathbf{v}^n \cdot v_l$  en retirant  $k^i$  termes des sous-mots  $\mathbf{v}^i$ . On notera toujours  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}^0| + |\mathbf{k}^{v_l'}| = k_1 + \cdots + k_m$  le poids du vecteur  $\mathbf{k}$ . Alors on pose

$$\text{sse}^{(\mathbf{v}')}_{\mathbf{v}} = \sum_{\mathbf{k} \in K} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\mathbf{v}'}{\mathbf{k}},$$

où  $K$  désigne l'ensemble des vecteurs adaptés à  $\mathbf{v}'$  tels que

$$\mathbf{v} = 0^{|\mathbf{k}^0|} \cdot T_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}') \cdot (v_l')^{|\mathbf{k}^{v_l'}|+1}.$$

Le  $+1$  à l'exposant vient du fait que l'on a déjà un terme  $v_l'$  à droite dans  $\mathbf{v}'$  avant de faire les transformations.

L'avantage de cette définition est qu'elle est intrinsèque, qu'elle prend en compte tous les cas pour  $v_l'$  (et pas seulement  $v_l' = (i, j) \in \mathcal{R}$ ) mais aussi qu'elle donne une extension naturelle aux mots de  $\mathcal{V}^*$  "mal formés", c'est-à-dire qui ne sont pas dans l'image d'une des applications  $\iota_{i,j}^v$ .

Notons pour la suite

$$\overline{M}_{i,j} := \sum_{\substack{\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathcal{V}^* \\ v_l' = (i,j)}} \text{sse}^{(\mathbf{v}')}_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}'} \cdot R_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}},$$

pour tout  $i, j \in I$  ainsi que

$$\widetilde{M} = \sum_{i,j \in I} \overline{M}_{i,j} = \sum_{\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathcal{V}^*} \text{sse}^{(\mathbf{v}')}_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}'} \cdot R_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}.$$

**PROPOSITION 6.2.3.** *L'élément  $\overline{M}_{i,j}$  est une extension non triviale de la série formelle  $M_{i,j}$  définie par l'équation (6.1.a) sur les mots mal formés. Autrement dit, la différence  $\overline{M}_{i,j} - M_{i,j}$  appartient à la sous-algèbre de  $\widehat{\mathbf{U}}_{\mathbf{g}}$  engendré par les  $R_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}$  pour tout  $\mathbf{v} = v_1 \cdots v_l$  tel que  $v_l \notin \mathcal{R} \cup \{0\}$ .*

On rappelle que l'on a choisi la même branche du logarithme pour tous les pôles, c'est-à-dire  $\log_i = \log_j$  pour tout  $i, j \in I$ .

**THÉORÈME 6.2.4.** *On a l'égalité*

$$(6.2.a) \quad \text{id}_i(hu_+ - u_-) \text{id}_j = e^{-\log(a_j - a_i)R_{i,i}} F_i \cdot \overline{M}_{i,j} \cdot G_j e^{\log(a_i - a_j)R_{j,j}}$$

où

$$\overline{M}_{i,j} = \sum_{\substack{\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathcal{V}^* \\ v_l' = (i,j)}} \text{sse}^{(\mathbf{v}')}_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}'} \cdot R_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}$$

---

3. On rappelle que  $(i, i) = (j, j) = (\alpha, \alpha) = 0$ .

est la partie centrale de cette formule et

$$\begin{aligned} F_i &= e^{-i\pi R_{i,i}} \Pi^{-1}(-R_{i,i}) \\ G_j &= \frac{e^{2i\pi R_{j,j}} - 1}{R_{j,j}} e^{i\pi R_{j,j}} \Pi(-R_{j,j}), \end{aligned}$$

avec  $\Pi(z) = \Gamma(1+z)$  la fonction  $\Gamma$  de Gauss.

On peut donner une variante de cette formule en posant les notations suivantes :

- (1)  $\widetilde{M} = \sum_{i,j \in I} \overline{M}_{i,j}$  comme ci-dessus,
- (2)  $N = e^{i\pi\Lambda} \Pi(-\Lambda)$  où  $\Pi$  désigne la fonction  $\Pi$  de Gauss,
- (3)  $\chi(z) = \frac{e^{2i\pi z} - 1}{z}$  est la fonction de Bernoulli, qui se prolonge holomorphiquement en 0,
- (4) l'application  $TLog : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  donnée par

$$U \mapsto \sum_{i,j \in I} e^{-\log(a_j - a_i) R_{i,i}} \cdot \text{id}_i U \text{id}_j \cdot e^{\log(a_i - a_j) R_{j,j}}$$

qui correspond à multiplier les blocs  $(i, j)$  de la matrice  $U$  par un coefficient à gauche et à droite dépendant de  $(i, j)$  et de la branche du logarithme choisie. Cette fonction encodera le choix de la branche du logarithme pour les données de Stokes.

Alors on déduit immédiatement de la formule (6.2.a) et de l'égalité  $hu_+ - u_- = \sum_{i,j \in I} \text{id}_i(hu_+ - u_-) \text{id}_j$

$$(6.2.b) \quad hu_+ - u_- = TLog \left( N^{-1} \widetilde{M} \chi(\Lambda) N \right).$$

REMARQUE 6.2.5. La formule est bien cohérente avec l'action de changement de choix d'une branche du logarithme. En effet, si l'on change pour la branche du logarithme égale à  $\log(z) + 2i\pi$  alors les données de Stokes sont modifiées en  $(u_+, u_-, h) \mapsto (h^{-1}u_+h, h^{-1}u_-h, h)$  donc le membre de gauche est modifié en  $h^{-1}(hu_+ - u_-)h$ . Pour le membre de droite, le seul terme qui change est la fonction  $TLog$  qui sera égale à  $h^{-1}TLog(\cdot)h$ .

On rappelle qu'un élément de  $G^*$  est un triplet  $(b_+, b_-, \Lambda') \in B_+ \times B_- \times \mathfrak{t}$  tel que  $\delta(b_-)\delta(b_+) = 1$  et  $\delta(b_+) = e^{i\pi\Lambda'}$ . L'isomorphisme  $U_+ \times U_- \times \mathfrak{t} \simeq G^*$  est donné explicitement par  $b_+ = e^{i\pi\Lambda} u_+ = e^{-i\pi\Lambda} hu_+$ ,  $b_- = e^{-i\pi\Lambda} u_-$  et  $\Lambda' = \Lambda$ . De ces transformations algébriques, on peut déduire les valeurs des coefficients des  $b_{\pm}$  grâce à la formule (6.2.a).

### 6.3. Cas particulier de la monodromie formelle triviale

On peut spécialiser l'équation (6.2.b) au cas particulier où la monodromie formelle  $h = e^{2i\pi\Lambda}$  sera triviale. Précisément, considérons le cas particulier où  $\Lambda = 0$ , impliquant donc que  $h = \text{id}$ .

L'application  $TLog$  est alors égale à l'identité,  $N = \text{id}$  et  $\chi(\Lambda) = 2i\pi \text{id}$ . Finalement, on en déduit

$$(6.3.a) \quad u_+ - u_- = 2i\pi \widetilde{M} = 2i\pi \sum_{v, v' \in \mathcal{V}^*} \text{sse}^{(v')} L_v^{v'} \cdot R_v^v.$$

Or par définition  $R_0 = \delta(R) = 0$ , donc  $\sum_{v \in \mathcal{V}^*} \text{sse}^{(v')} R_v^v = \text{sse}^{(v')} R_v^v = R_v^v$ . On a donc

$$(6.3.b) \quad u_+ - u_- = 2i\pi \sum_{v' \in \mathcal{V}^*} L_v^{v'} \cdot R_v^v = 2i\pi \sum_{w' \in \mathcal{W}^*} L_w^{w'} \cdot R_w^{w'} \in \mathfrak{g}.$$

Remarquez que les termes diagonaux pour la somme sont bien nuls car  $L^v = 0$  pour tout mot commençant par 0 et finissant par 0, ou si l'on préfère  $I_{i,i}^\omega = 0$ .

En revenant à la définition (dans le cadre de la formulation  $\mathcal{W}$ ) et en ne notant pas les termes contenant un  $R_{k,k}$  nul, on a donc le

COROLLAIRE 6.3.1. *Dans le cas où la partie diagonale de  $R$  est nulle, les données de Stokes s'expriment par*

$$u_+ - u_- = 2i\pi \sum_{i,j \in I} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \in I \\ i_1 \neq i, i_2 \neq i_1, \dots, i_r \neq j}} I_{i,j}^{(i_1 \dots i_r)} \cdot R_{i,i_r} R_{i_r, i_{r-1}} \cdots R_{i_1, j},$$

où l'on a

$$I_{i,j}^{(i_1 \dots i_r)} = \int_{0 < t_1 \leq \dots \leq t_r < 1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{i_1}} \cdots \frac{dz_r}{z_r - a_{i_r}}$$

avec  $z_k = \gamma_{i,j}(t_k)$  pour tout  $1 \leq k \leq r$  et  $\gamma_{i,j}$  un chemin reliant  $a_j$  à  $a_i$  à valeurs dans  $\mathcal{U}(\eta) = \mathbf{C} - \bigcup_{k \in I} \mathbf{R}_+ a_k e^{i\eta}$ .

Ce cas particulier est substantiellement plus simple. En effet :

- (1) on n'a pas besoin de spécifier une branche du logarithme,
- (2) on n'a pas besoin de construire le bimoule compliqué  $\text{sse}^\bullet$  et la formule s'exprime uniquement à partir du moule  $L_w^\bullet$  donné par des intégrales itérées convergentes.

## Cas particulier d'un fibré de rang 2

Nous allons vérifier la formule du théorème 3.3.4 écrite sous la forme équivalente (3.3.d) :

$$(7.0.a) \quad hu_+ - u_- = \begin{pmatrix} \frac{2i\pi e^{i\pi\lambda_1}}{\Gamma(1-\lambda_1)\Gamma(1+\lambda_1)}\lambda_1 & \frac{2i\pi e^{i\pi\lambda_1}}{\Gamma(1-\lambda_1)\Gamma(1+\lambda_2)}Q^1C_{2,1}E_2 \\ \frac{2i\pi e^{i\pi\lambda_2}}{\Gamma(1-\lambda_2)\Gamma(1+\lambda_1)}Q^2C_{1,2}E_1 & \frac{2i\pi e^{i\pi\lambda_2}}{\Gamma(1-\lambda_2)\Gamma(1+\lambda_2)}\lambda_2 \end{pmatrix}$$

dans le cas des connexions sur un fibré de rang  $n = 2$ , où  $Q^i$  désigne la  $i$ ème ligne de la matrice  $R$  et  $(E_1, E_2)$  la base canonique de  $\mathbf{C}^2$ . Côté Stokes, on trouvera une connexion hypergéométrique confluyente dont la série formelle qui caractérise l'irrégularité peut être exprimé par des fonctions de Kummer (voir [BJL79] proposition 8). Côté fuchsien, on trouvera une connexion hypergéométrique dont les solutions de Floquet en chaque pôle pourront être exprimée à partir de la série hypergéométrique de Gauss. En utilisant les identités de Gauss-Kummer, nous en déduiront les matrices de connexion dans ce cas.

Remarquons tout de suite que les coefficients d'indice  $(1, 1)$  et  $(2, 2)$  sont ceux attendus car on a bien

$$\frac{2i\pi e^{i\pi r_k}}{\Gamma(1-r_k)\Gamma(1+r_k)}r_k = e^{2i\pi r_k} - 1$$

grâce à la formule  $\Gamma(1+r_k) = r_k\Gamma(r_k)$  puis en utilisant la formule des compléments  $\Gamma(r_k)\Gamma(1-r_k) = \pi/\sin(\pi r_k)$ . Cela se voit aussi directement sur la formule donnée dans le théorème 3.3.4.

### 7.1. Calcul explicite des matrices de Stokes

On considère la connexion irrégulière

$$\nabla = d - \left( \frac{\begin{pmatrix} a_1 & \\ & a_2 \end{pmatrix}}{z^2} + \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} \\ r_{2,1} & \lambda_2 \end{pmatrix}}{z} \right) dz$$

sur le fibré trivial sur  $\mathbf{P}^1$  de rang 2. On a par hypothèse  $a_1 \neq a_2$ . De plus, on fait l'hypothèse que  $\nabla$  est une connexion irrégulière vérifiant les conditions génériques de la section précédente, c'est-à-dire que l'on a

- (1)  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ne sont pas des entiers,
- (2) le polynôme caractéristique  $X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + (\lambda_1\lambda_2 - r_{1,2}r_{2,1})$  n'a pas de solution entière.

Alors on fait le choix d'une direction admissible  $d$  appartenant à  $] \arg(a_2 - a_1) ; \arg(a_1 - a_2) [$ . Voir la figure 1 ci-dessous.

On choisit une branche du logarithme au voisinage de la direction  $d$ .

Notons

$$u_+ = \begin{pmatrix} 1 & c_2 \\ & 1 \end{pmatrix} \quad u_- = \begin{pmatrix} 1 & \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } h = \begin{pmatrix} h_1 & \\ & h_2 \end{pmatrix}$$



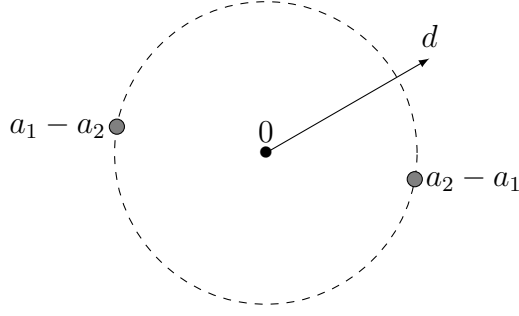


FIGURE 1. Choix d'une direction admissible

THÉORÈME 7.1.1 ([BJL79] proposition 8 p.84). On a les égalités  $h_1 = e^{2i\pi\lambda_1}$ ,  $h_2 = e^{2i\pi\lambda_2}$

$$c_1 = \frac{-2i\pi r_{2,1}(a_1 - a_2)^{\lambda_1 - \lambda_2} e^{i\pi(\lambda_2 - \lambda_1)}}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)}$$

et

$$c_2 = \frac{-2i\pi r_{1,2}(a_1 - a_2)^{\lambda_2 - \lambda_1}}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)}$$

où  $(\alpha, \beta)$  sont les racines (définies à ordre près) du polynôme  $X^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)X + r_{1,2}r_{2,1}$ .

En particulier, on obtient

$$hu_+ - u_- = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\lambda_1} - 1 & e^{2i\pi\lambda_1} c_2 \\ -c_1 & e^{2i\pi\lambda_2} - 1 \end{pmatrix}.$$

On modifie un peu l'expression des coefficients  $c_1$  et  $c_2$  pour obtenir

$$-c_1 = \frac{2i\pi r_{2,1} e^{i\pi\lambda_2} \cdot (a_2 - a_1)^{\lambda_1} \cdot (a_1 - a_2)^{-\lambda_2}}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)}$$

et

$$e^{2i\pi\lambda_1} c_2 = \frac{-2i\pi r_{1,2} e^{i\pi\lambda_1} \cdot (a_1 - a_2)^{\lambda_2} \cdot (a_2 - a_1)^{-\lambda_1}}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)}$$

en utilisant pour  $c_1$  la formule  $(a_1 - a_2)^{\lambda_1} = (a_2 - a_1)^{\lambda_1} e^{i\pi\lambda_1}$  et pour  $c_2$  la formule  $(a_1 - a_2)^{-\lambda_1} = (a_2 - a_1)^{-\lambda_1} e^{-i\pi\lambda_1}$  avec notre choix de branche du logarithme.

## 7.2. Calcul explicite des matrices de connexion

La connexion fuchsienne associée est la connexion  $\nabla$  est la connexion

$$\widehat{\nabla} = d - \left( \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z - a_1} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r_{2,1} & \lambda_2 \end{pmatrix}}{z - a_2} \right) dz.$$

On peut la relier à l'équation hypergéométrique et calculer ses matrices de connexion.

THÉORÈME 7.2.1. On a les relations

$$Q^2 C_{1,2} E_1 = (a_1 - a_2)^{-\lambda_2} \frac{\Gamma(1 + \lambda_1)\Gamma(1 - \lambda_2)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} r_{2,1} (a_2 - a_1)^{\lambda_1}$$

et

$$Q^1 C_{2,1} E_2 = -(a_2 - a_1)^{-\lambda_1} \frac{\Gamma(1 - \lambda_1)\Gamma(1 + \lambda_2)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)} r_{1,2} (a_1 - a_2)^{\lambda_2}.$$

On déduit alors du théorème 7.1.1 et du théorème 7.2.1 précédent que la formule (7.0.a) est bien vérifiée dans le cas d'un fibré de rang  $n = 2$ .

### 7.3. Démonstration du calcul pour les matrices de connexion

Dans cette section, on donne la démonstration du théorème 7.2.1. On traitera le cas du coefficient  $Q^2 C_{1,2} E_1$ , le cas de  $Q^1 C_{2,1} E_2$  étant analogue.

Quitte à faire un changement de variable  $(a_2 - a_1)x + a_1 = z$ , on supposera par la suite que  $a_1 = 0$  et  $a_2 = 1$ . On calcule une base de solution de  $\hat{\nabla}$  au voisinage de  $a_1 = 0$ .

Posons les notations suivantes :

- (1)  $\gamma = 1 + \lambda_1$  et  $\gamma' = 1 + \lambda_2$ ,
- (2)  $\alpha, \beta$  vérifient  $\alpha\beta = -r_{1,2}r_{2,1}$  et  $\alpha + \beta = \lambda_1 - \lambda_2 = \gamma - \gamma'$ ,
- (3)  $\alpha', \beta'$  sont donnés par  $\alpha' = \gamma - \alpha$  et  $\beta' = \gamma - \beta$ . En particulier, ils vérifient
$$\alpha'\beta' = \alpha\beta + \gamma\gamma' = -r_{1,2}r_{2,1} + (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)$$

et

$$\alpha' + \beta' = \gamma + \gamma' = 2 + \lambda_1 + \lambda_2.$$

On rappelle que  ${}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; z\right)$  désigne la série hypergéométrique

$${}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; z\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n$$

définie pour tout  $a, b \in \mathbf{Z}$  et  $c \notin \mathbf{Z}_{<0}$ , et où  $(a)_n$  désigne le symbole de Pochhammer

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1).$$

Cette série est convergente pour  $|z| < 1$ .

On peut exprimer la base de Floquet en 0 de  $\hat{\nabla}$  explicitement à partir de séries hypergéométriques. Précisément, on a la

PROPOSITION 7.3.1. *La fonction*

$$Fl_1 : z \mapsto \begin{pmatrix} z^{\lambda_1} {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}; z\right) & -\frac{r_{1,2}}{\gamma-1} \cdot {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} 1-\alpha', 1-\beta' \\ 2-\gamma \end{smallmatrix}; z\right) \\ -\frac{r_{2,1}}{\gamma} z^{\lambda_1+1} \cdot {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} 1+\alpha, 1+\beta \\ 1+\gamma \end{smallmatrix}; z\right) & {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} 1-\alpha', 1-\beta' \\ 1-\gamma \end{smallmatrix}; z\right) \end{pmatrix}$$

est une base de solutions de  $\hat{\nabla}$  au voisinage de 0. En particulier, la première colonne est asymptotique à  $z^{\lambda_1} \cdot E_1$  et la seconde est asymptotique à  $-r_{1,2}/\lambda_1 \cdot E_1 + E_2$ .

DÉMONSTRATION. Pour trouver la formule, on développe en série entière toutes les fonctions et on résout les équations de récurrence obtenues en prenant l'égalité des coefficients devant les puissances  $z^k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Pour vérifier la formule pour  $Fl_1(z)$ , il suffit de vérifier que  $\hat{\nabla}(Fl_1) = 0$ . Cela est une conséquence des formules de contiguïté et de dérivation

$$(7.3.a) \quad \frac{d}{dz} {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; z\right) = \frac{ab}{c} \cdot {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} 1+a, 1+b \\ 1+c \end{smallmatrix}; z\right),$$

$$(7.3.b) \quad \left[z \frac{d}{dz} + (c-1)\right] {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; z\right) = (c-1) \cdot {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c-1 \end{smallmatrix}; z\right),$$

$$(7.3.c) \quad \left[(1-z) \frac{d}{dz} + (c-a-b)\right] {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; z\right) = \frac{(c-a)(c-b)}{c} \cdot {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c+1 \end{smallmatrix}; z\right).$$

Voir théorème 2.1.3 p.45 et proposition 2.1.6 p.47 de [IKSY91]. L'idée est d'utiliser les relations (7.3.a) et (7.3.c) pour supprimer les termes en  $1-z$  et les relations (7.3.a) et (7.3.b) pour supprimer les termes en  $z$ .

Montrons comment on peut procéder pour la première colonne. On abrégera  ${}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{smallmatrix}; z\right)$  en  $\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix}$  dans la suite. On doit montrer les deux relations

$$\left[z \frac{d}{dz}\right] \left(z^{\lambda_1} \begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix}\right) = \lambda_1 z^{\lambda_1} \begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix} - \frac{r_{1,2}r_{2,1}}{\gamma} z^{\lambda_1+1} \cdot \begin{pmatrix}1+\alpha, 1+\beta\\ 1+\gamma\end{pmatrix}$$

et

$$\left[(1-z) \frac{d}{dz}\right] \left(-\frac{r_{2,1}}{\gamma} z^{\lambda_1+1} \cdot \begin{pmatrix}1+\alpha, 1+\beta\\ 1+\gamma\end{pmatrix}\right) = -r_{2,1} z^{\lambda_1} \begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix} + \frac{\lambda_2 r_{2,1}}{\gamma} z^{\lambda_1+1} \cdot \begin{pmatrix}1+\alpha, 1+\beta\\ 1+\gamma\end{pmatrix}.$$

Comme  $z \frac{d}{dz}$  est un opérateur différentiel, on développe la dérivation du produit du membre de gauche et on en déduit que la première relation est équivalente à

$$z^{\lambda_1} \left[z \frac{d}{dz}\right] \begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix} = -\frac{r_{1,2}r_{2,1}}{\gamma} z^{\lambda_1+1} \cdot \begin{pmatrix}1+\alpha, 1+\beta\\ 1+\gamma\end{pmatrix}$$

qui est bien vraie grâce à la relation (7.3.a), car  $-r_{1,2}r_{2,1} = \alpha\beta$ .

Pour la seconde relation, on peut procéder de la manière suivante. Le membre de gauche est égal à

$$-r_{2,1} z^{\lambda_1} (1-z) \begin{pmatrix}1+\alpha, 1+\beta\\ 1+\gamma\end{pmatrix} - \frac{r_{2,1}}{\gamma} z^{\lambda_1+1} \left[(1-z) \frac{d}{dz}\right] \begin{pmatrix}1+\alpha, 1+\beta\\ 1+\gamma\end{pmatrix}$$

donc en divisant tout par  $-\frac{r_{2,1}}{\gamma} z^{\lambda_1}$ , il suffit de montrer

$$(1-z) \left[\gamma \begin{pmatrix}1+\alpha, 1+\beta\\ 1+\gamma\end{pmatrix} + z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix}1+\alpha, 1+\beta\\ 1+\gamma\end{pmatrix}\right] = \gamma \begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix} - \lambda_2 z \begin{pmatrix}1+\alpha, 1+\beta\\ 1+\gamma\end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (7.3.b) pour le membre de gauche, on doit montrer

$$(7.3.d) \quad \gamma(1-z) \begin{pmatrix}1+\alpha, 1+\beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix} - \lambda_2 z \begin{pmatrix}1+\alpha, 1+\beta\\ 1+\gamma\end{pmatrix}.$$

En utilisant les relations (7.3.a) et (7.3.c), on en déduit que le membre de gauche de (7.3.d) est égal à

$$\frac{\gamma(\gamma-1)}{\alpha\beta} (1-z) \frac{d}{dz} \begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma-1\end{pmatrix} = \frac{\gamma(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\beta-1)}{\alpha\beta} \begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix} - \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\alpha\beta} \begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma-1\end{pmatrix}.$$

De même, en utilisant les relations (7.3.a) et (7.3.b), on en déduit que le second terme du membre de droite de (7.3.d) est égal à

$$-\lambda_2 \frac{\gamma}{\alpha\beta} z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \frac{-\lambda_2 \gamma(\gamma-1)}{\alpha\beta} \left[\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix}\right].$$

Alors, en constatant l'égalité des coefficients devant les termes en  $\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma-1\end{pmatrix}$  (en utilisant l'égalité  $\lambda_2 = \gamma - \alpha - \beta - 1$ ), on en déduit bien l'égalité (7.3.d).

On procède de même pour la seconde colonne. La relation pour la première ligne est évidente en utilisant (7.3.b). De même, la seconde est évidente en utilisant (7.3.c). □

On remarque que l'on a

$$z^{R_1} = \begin{pmatrix} z^{\lambda_1} & (z^{\lambda_1} - 1) \frac{r_{1,2}}{\lambda_1} \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons  $P = \begin{pmatrix} 1 & r_{1,2}/\lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Alors on a immédiatement que  $Fl_1(z) \cdot P =: \Psi_1(z)$  est la base de solution de  $\hat{\nabla}$  asymptotique à  $(z - a_1)^{R_1} = z^{R_1}$  en  $z \rightarrow a_1 = 0$ .

En inversant le rôle de  $a_1$  et  $a_2$ , on déduit immédiatement la

PROPOSITION 7.3.2. *La fonction*

$$Fl_2 : z \mapsto \begin{pmatrix} {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix}1-\alpha', 1-\beta'\\ 1-\gamma'\end{smallmatrix}; 1-z\right) & -\frac{r_{1,2}}{\gamma'} (1-z)^{\lambda_2+1} \cdot {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix}1-\alpha, 1-\beta\\ 1+\gamma'\end{smallmatrix}; 1-z\right) \\ -\frac{r_{2,1}}{\gamma'-1} {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix}1-\alpha', 1-\beta'\\ 2-\gamma'\end{smallmatrix}; 1-z\right) & (1-z)^{\lambda_2} \cdot {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{smallmatrix}-\alpha, -\beta\\ \gamma'\end{smallmatrix}; 1-z\right) \end{pmatrix}$$

est la base de Floquet de  $\hat{\nabla}$  au voisinage de 1. En particulier, la première colonne est asymptotique à  $E_1 - r_{2,1}/\lambda_2 \cdot E_2$  et la seconde est asymptotique à  $z^{\lambda_2} \cdot E_2$ .

DÉMONSTRATION. On effectue le changement de variable  $u = 1 - z$  puis on permute la base  $(E_1, E_2)$  en  $(E_2, E_1)$ . Cela revient à changer les notations en

$$R \leftrightarrow \begin{pmatrix} r_{2,2} & r_{2,1} \\ r_{1,2} & r_{1,1} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire à inverser le rôle des indices 1 et 2. On en déduit les permutations à effectuer :

$$\begin{aligned} r_{1,1} &\leftrightarrow r_{2,2} & r_{1,2} &\leftrightarrow r_{2,1} & \gamma &\leftrightarrow \gamma' \\ (\alpha', \beta') &\leftrightarrow (\alpha', \beta') & (\alpha, \beta) &\leftrightarrow (-\alpha, -\beta). \end{aligned}$$

□

On peut alors calculer les matrices de connexion. On choisit la direction admissible opposée  $d'$  à celle choisie dans la section 7.1 précédente. Cette direction a donc un argument appartenant à  $] \arg(a_1 - a_2); \arg(a_2 - a_1)[$ . Du coup, cela correspond après l'homothétie  $(a_2 - a_1)z + a_1$  à prendre par exemple une direction d'angle  $-\pi/2$ . Voir la figure 2 ci-dessous.

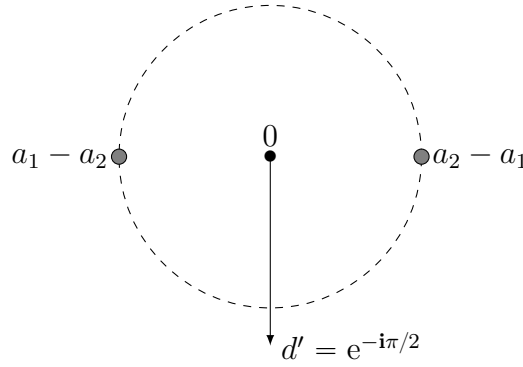


FIGURE 2. Choix de la direction admissible  $d'$  après une homothétie

On choisit une branche du logarithme au voisinage de cette direction admissible.

Si on note  $Q = (a_1 - a_2)^{\lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_{2,1}/\lambda_2 & 1 \end{pmatrix}$ , alors la solution  $Fl_2(z) \cdot Q =: \Psi_2(z)$  est la base de solution de  $\widehat{\nabla}$  asymptotique à  $(z - a_2)^{R_2}$  en  $z \rightarrow a_2 = 1$ .

On a par définition  $C_{1,2} = \Psi_2^{-1} \Psi_1(z)$ , c'est-à-dire

$$C_{1,2} = Q^{-1} Fl_2^{-1}(z) Fl_1(z) P.$$

PROPOSITION 7.3.3. *On a*

$$Fl_2^{-1}(z) Fl_1(z) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')} & B &= r_{1,2} \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \\ C &= -r_{2,1} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma')}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} & D &= \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-\gamma')}{\Gamma(1-\alpha')\Gamma(1-\beta')}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On applique le théorème 4.7.1 p.114 de [IKSY91].

Avec leurs notations, on a

$$f_0(x; 0) = {}_2\mathcal{F}_1(a, b; c; x), \quad f_0(x; \lambda) = x^\lambda {}_2\mathcal{F}_1(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; x),$$

et

$$f_1(x; 0) = {}_2\mathcal{F}_1(a, b; a+b-c+1; 1-x) \quad f_1(x; \mu) = (1-x)^\mu {}_2F_1(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-x),$$

qui vérifient

$$\begin{pmatrix} f_0(x; 0) & f_0(x; \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x; 0) & f_1(x; \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & B' &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \\ C' &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & D' &= \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}. \end{aligned}$$

On vérifie la relation  $FL_1(z) = Fl_2(z) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ . Pour la première ligne, on pose

$$a = 1 - \alpha' \quad b = 1 - \beta' \quad c = 2 - \gamma \quad \lambda = \gamma - 1 \quad \mu = \gamma'.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} Fl_1(z) &= \begin{pmatrix} f_0(z; \lambda) & \frac{-r_{1,2}}{\gamma-1} f_0(z; 0) \\ * & * \end{pmatrix} \\ Fl_2(z) &= \begin{pmatrix} f_1(z; 0) & \frac{-r_{1,2}}{\gamma'} f_1(z; \mu) \\ * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que l'on a

$${}^tE_1 Fl_1(z) = {}^tE_1 Fl_2(z) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} A &= B' = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')} & B &= \frac{r_{1,2}}{1-\gamma} A' = \frac{r_{1,2}}{1-\gamma} \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \\ C &= \frac{-\gamma'}{r_{1,2}} D' = \frac{-\gamma'}{r_{1,2}} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\gamma')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} & D &= \frac{-\gamma'}{1-\gamma} C' = \frac{-\gamma'}{1-\gamma} \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(-\gamma')}{\Gamma(1-\alpha')\Gamma(1-\beta')}. \end{aligned}$$

grâce au théorème 4.7.1 p.114 de [IKSY91].

Pour la seconde ligne, on pose

$$a = 1 - \alpha' \quad b = 1 - \beta' \quad c = 1 - \gamma \quad \lambda = \gamma \quad \mu = \gamma' - 1.$$

On a alors

$$\begin{aligned} Fl_1(z) &= \begin{pmatrix} -\frac{r_{2,1}}{\gamma} f_0(z, \lambda) & f_0(z; 0) \\ * & * \end{pmatrix} \\ Fl_2(z) &= \begin{pmatrix} -\frac{r_{2,1}}{\gamma'-1} f_1(z; 0) & f_1(z; \mu) \\ * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que l'on a

$${}^tE_2 Fl_1(z) = {}^tE_2 Fl_2(z) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{\gamma' - 1}{\gamma} B' = \frac{\gamma' - 1}{\gamma} \frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(\gamma' - 1)}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')} & B &= \frac{\gamma' - 1}{-r_{2,1}} A' = \frac{\gamma' - 1}{-r_{2,1}} \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma' - 1)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} \\ C &= \frac{-r_{2,1}}{\gamma} D' = \frac{-r_{2,1}}{\gamma} \frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(1-\gamma')}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} & D &= C' = \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-\gamma')}{\Gamma(1-\alpha')\Gamma(1-\beta')} \end{aligned}$$

grâce au théorème 4.7.1 p.114 de [IKSY91].

On vérifie alors immédiatement que les expressions trouvées dans les deux cas pour  $A, B, C$  et  $D$  sont les mêmes.

□

1. Notez l'erreur de signe dans le théorème 4.7.1 p.114 de [IKSY91] pour les termes  $C'$  et  $D'$ .

On en déduit alors la formule pour la matrice de connexion  $C_{1,2}$ . On a

$$C_{1,2} = (a_1 - a_2)^{-\lambda_2} \begin{pmatrix} A & \frac{r_{1,2}}{\lambda_1} A + B \\ -\frac{r_{2,1}}{\lambda_2} A + C & -\frac{r_{1,2}r_{2,1}}{\lambda_1\lambda_2} A - \frac{r_{2,1}}{\lambda_2} B + \frac{r_{1,2}}{\lambda_1} C + D \end{pmatrix}$$

D'où on en déduit  $(a_1 - a_2)^{\lambda_2} Q^2 C_{1,2} E_1 = r_{2,1} A - r_{2,1} A + \lambda_2 C = \lambda_2 C$ , c'est-à-dire

$$(7.3.e) \quad Q^2 C_{1,2} E_1 = (a_1 - a_2)^{-\lambda_2} \frac{\Gamma(1 + \lambda_1) \Gamma(1 - \lambda_2)}{\Gamma(1 + \alpha) \Gamma(1 + \beta)} r_{2,1},$$

ce qui est le résultat attendu. On procède de même pour  $Q^1 C_{2,1} E_2$ . Les calculs sont laissés au lecteur.

#### 7.4. Développement moulien

On peut essayer de retrouver notre développement moulien du chapitre 6 à partir du développement suivant de la fonction Gamma d'Euler :

$$(7.4.a) \quad \frac{1}{\Gamma(1+z)} = \exp \left( \gamma z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) z^k \right),$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler.

Typiquement, on peut essayer de retrouver le développement de la matrice de connexion  $C_{1,2}$  à partir de l'équation (7.3.e) donnant

$$Q^2 C_{1,2} E_1 = (a_1 - a_2)^{-\lambda_2} \frac{\Gamma(1 + \lambda_1) \Gamma(1 - \lambda_2)}{\Gamma(1 + \alpha) \Gamma(1 + \beta)} r_{2,1},$$

En utilisant la formule (7.4.a) pour la fonction Gamma, on obtient

$$\frac{\Gamma(1 + \lambda_1) \Gamma(1 - \lambda_2)}{\Gamma(1 + \alpha) \Gamma(1 + \beta)} = \exp \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) \cdot (\lambda_1^k - \lambda_2^k - (\alpha^k + \beta^k)) \right).$$

Remarquez que grâce aux identités de Newton, les termes  $\alpha^k + \beta^k$  s'expriment en fonction des polynômes symétriques de  $\alpha$  et  $\beta$ , c'est-à-dire en fonction de la différence  $\lambda_1 - \lambda_2$  et du produit  $\lambda_1 \lambda_2$  faisant intervenir des coefficients de binôme de Newton.

Plusieurs difficultés émergent alors :

- (1) les formules des identités de Newton se sont pas explicites et donnent seulement une formule récursive calculer les  $\alpha^k + \beta^k$  en fonction de  $\lambda_1 - \lambda_2$  et  $\lambda_1 \lambda_2$ .
- (2) Ensuite, les nombres apparaissant dans le développement moulien seront les nombres zêta *simples* et non des hyperlogarithmes comme dans le chapitre 6<sup>2</sup>.

Il est possible que le point (2) soit relié au théorème de la somme (voir la preuve de ce théorème par A. Granville [Gra97], aussi indépendamment trouvé par D. Zagier)

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = n \\ i_1 > 1}} \zeta(i_1, \dots, i_r) = \zeta(n).$$

Remarquez enfin que la somme que l'on obtient au chapitre 6 est une série formelle à variables non commutatives alors qu'une formule obtenue à partir du développement de la fonction Gamma précédent sera une série formelle à variable commutative.

---

2. Comme on a que deux pôles à distance finie, on peut se ramener au cas où les pôles sont en 0, 1 et l'infini et les hyperlogarithmes du développement moulien s'exprimeront à partir des polyzêtas.

\*\*

## Hyperfonctions et transformée de Laplace multiplicative

On rappelle ici une partie de la théorie développée par B. Malgrange dans [Mal91] en donnant quelques démonstrations. On y fait parfois quelques choix de présentation différents, qui nous ont apparu sur le coup plus pertinents. Pour plus de lisibilité, on rassemblera les démonstrations techniques dans la section A.7.

### A.1. Hyperfonctions

Le bon espace de fonctions à considérer pour travailler avec la transformée de Laplace au niveau des espaces de solutions est l'espace des *hyperfonctions*<sup>1</sup>. Les hyperfonctions solution permettront d'encoder dans un même objet les solutions et les micro-solutions.

Notons  $S^1$  le cercle unité. Soit  $d$  une direction d'angle  $\theta$  et  $\delta_{0,\theta}$  le rayon  $\mathbf{R}_{>0} e^{i\theta}$ . On définit l'espace  $\mathcal{A}_\theta$  comme la limite inductive pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  de l'ensemble des fonctions holomorphes  $f$  sur le secteur ramifié ouvert  $\{0 < |z| < \varepsilon \text{ et } -\varepsilon - 2\pi < \arg(z) - \theta < \varepsilon\}$ . Il est clair que l'ensemble des  $\mathcal{A}_\theta$  pour  $\theta \in \mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z})$  forme un faisceau  $\mathcal{A}$  sur  $S^1$ . On définit l'espace  $\mathcal{O}_\theta^{exp}$  comme la limite inductive pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  de l'ensemble des fonctions holomorphes  $\hat{\varphi}$  définies sur le secteur ouvert  $\{z \in \mathbf{C}^* : |\arg(z) - \theta| < \varepsilon\}$  à croissance exponentielle à l'infini. On rappelle que cela signifie qu'il existe un  $\varepsilon' < \varepsilon$  strictement positif et deux constantes  $A, C \in \mathbf{R}$  telles que  $|\hat{\varphi}(z)| \leq C e^{A|z|}$  pour  $z$  tel que  $|z| > 1/\varepsilon'$  et  $|\arg(z) - \theta| < \varepsilon'$ . De même, l'ensemble des  $\mathcal{O}_\theta^{exp}$  forme un faisceau  $\mathcal{O}^{exp}$  sur  $S^1$ , dit des fonctions à croissance exponentielle.

On choisit l'*orientation canonique*  $+$  de  $\mathbf{C}$ . On définit alors l'espace  $\mathcal{H}_{\delta_{0,\theta}}^+$  comme l'ensemble des couples  $([\check{\varphi}], [\hat{\varphi}]) \in \mathcal{A}_\theta \times \mathcal{O}_\theta^{exp}$  vérifiant

$$(A.1.a) \quad \check{\varphi}(z) - \check{\varphi}(ze^{-2i\pi}) = \hat{\varphi}(z)$$

au voisinage du rayon  $\delta_{0,\theta}$ . Plus précisément, on peut supposer que  $\check{\varphi}$  et  $\hat{\varphi}$  sont des représentants de  $[\check{\varphi}]$  et  $[\hat{\varphi}]$  définis sur les secteurs  $\{0 < |z| < \varepsilon \text{ et } -\varepsilon - 2\pi < \arg(z) - \theta < \varepsilon\}$  et  $\{z \in \mathbf{C}^* : |\arg(z) - \theta| < \varepsilon\}$  respectivement. Alors l'égalité (A.1.a) définissant le sous-espace  $\mathcal{H}_{\delta_{0,\theta}}^+$  est vraie pour tout  $z$  tels que  $0 < |z| < \varepsilon'$  et  $|\arg(z) - \theta| < \varepsilon'$  pour un certain  $\varepsilon' < \varepsilon$  strictement positif.

On définit la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{H}_{\delta_{0,\theta}}^+$  par  $(\check{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1)\mathcal{R}(\check{\varphi}_2, \hat{\varphi}_2)$  si  $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$  et  $\check{\varphi}_1 - \check{\varphi}_2 \in \mathcal{A}_\theta$  qui est alors la classe d'une fonction univaluée est (la classe d'une fonction) holomorphe en 0.

**DÉFINITION A.1.1.** On définit l'espace des hyperfonctions sur le rayon  $\delta_{0,\theta}$  dans l'orientation canonique noté  $\mathcal{H}_{\delta_{0,\theta}}^+$ , comme le quotient de  $\mathcal{H}_{\delta_{0,\theta}}^+$  par la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ .

---

1. Cet espace est une variante de l'espace des hyperfonctions de Laplace introduites par Komatsu. Cette variante est due à B. Malgrange. Voir la variante [Mal91] chapitre VI §3 iii) p.98 pour un cas sous-exponentiel et chapitre IX pour la croissance quelconque mais aussi [Mal89] §3 p.14.



REMARQUE A.1.2. B. Malgrange utilise une définition équivalente. Celui-ci préfère d'abord considérer les classes d'équivalence puis passer à la limite inductive. Plus précisément, il définit  $\mathcal{H}_\varepsilon^+$  comme l'ensemble des paires  $(\check{\varphi}, \hat{\varphi})$  telles que :

- (1)  $\hat{\varphi}$  est une fonction holomorphe définie sur le secteur ouvert

$$\{z \in \mathbf{C}^* : |\arg(z) - \theta| < \varepsilon\}$$

à croissance exponentielle à l'infini,

- (2)  $\check{\varphi}$  est une fonction holomorphe sur le secteur ramifié ouvert

$$\{0 < |z| < \varepsilon \text{ et } -\varepsilon - 2\pi < \arg(z) - \theta < \varepsilon\}$$

telle que  $\check{\varphi}(z) - \check{\varphi}(ze^{-2i\pi}) = \hat{\varphi}(z)$ , pour tout  $z$  tel que  $0 < |z| < \varepsilon$  et  $|\arg(z) - \theta| < \varepsilon$ .

puis il considère la relation d'équivalence  $\mathcal{R}_\varepsilon$  sur  $\mathcal{H}_\varepsilon^+$  donnée par  $(\check{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1) \mathcal{R}_\varepsilon (\check{\varphi}_2, \hat{\varphi}_2)$  si  $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$  et  $\check{\varphi}_1 - \check{\varphi}_2$  qui est alors univaluée est holomorphe en 0. Alors les hyperfonctions sont données comme la limite inductive pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  des quotients  $\mathcal{H}_\varepsilon^+ / \mathcal{R}_\varepsilon$ .

J'ai préféré la présentation ci-dessus plutôt que celle de B. Malgrange car on y voit mieux comment s'insèrent les applications  $\text{can}$  et  $\text{var}$  ci-dessous et comment apparaissent les microfonctions.

REMARQUE A.1.3. Si l'on choisit l'orientation inverse – de  $\mathbf{C}$ , on peut définir les hyperfonctions  $\mathcal{H}_{0,\theta}^-$ . Pour cela, on change la définition de  $\mathcal{H}_{\delta_{0,\theta}}^+$  en imposant la relation  $\check{\varphi}(z) - \check{\varphi}(e^{+2i\pi} z) = \hat{\varphi}(z)$  et on procède ensuite de la même manière.

On peut définir une application  $\text{var} : \mathcal{H}_{0,\theta}^+ \rightarrow \mathcal{O}_\theta^{\text{exp}}$  qui à la classe du couple  $(\check{\varphi}, \hat{\varphi})$  associe  $\hat{\varphi} \in \mathcal{O}_\theta^{\text{exp}}$ . Cette application est clairement bien définie car si l'on change de représentant, on ne modifie pas le second terme du couple. On aimerait considérer l'application correspondant à la première projection  $\mathcal{H}_{\delta_{0,\theta}}^+ \hookrightarrow \mathcal{A}_\theta \times \mathcal{O}_\theta^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{A}_\theta$ . Cependant les classes d'équivalence selon  $\mathcal{R}$  n'ont pas toute la même image comme dans le cas précédent avec la seconde projection. L'image est définie à une fonction holomorphe en 0 près. On a donc un diagramme commutatif

$$(A.1.b) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\delta_{0,\theta}}^+ & \hookrightarrow & \mathcal{A}_\theta \times \mathcal{O}_\theta^{\text{exp}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_{0,\theta}^+ & \xrightarrow{(\text{can}, \text{var})} & \mathcal{A}_\theta / \mathcal{O}_0 \times \mathcal{O}_\theta^{\text{exp}}. \end{array}$$

On appellera application canonique et application variation

$$\text{can} : \mathcal{H}_{0,\theta}^+ \longrightarrow \mathcal{A}_\theta / \mathcal{O}_0 \quad \text{var} : \mathcal{H}_{0,\theta}^+ \longrightarrow \mathcal{O}_\theta^{\text{exp}}$$

les applications précédentes.

LEMME A.1.4 ([Mal91] lemme 3.2 chapitre VI §3 p.98). *L'application  $\text{var} : \mathcal{H}_{0,\theta}^+ \longrightarrow \mathcal{O}_\theta^{\text{exp}}$  est surjective.*

DÉFINITION A.1.5. Soit  $a \in \mathbf{C}$ . On définit l'espace des hyperfonctions sur le rayon  $\delta_{a,\theta}$  dans l'orientation canonique noté  $\mathcal{H}_{a,\theta}^+$  comme le translaté de l'espace des hyperfonctions  $\mathcal{H}_{0,\theta}^+$  par  $a$ , c'est-à-dire qu'on a  $\Phi \in \mathcal{H}_{a,\theta}^+$  si et seulement si  $\Phi(a + \cdot) \in \mathcal{H}_{0,\theta}^+$ .

### A.2. Transformée de Laplace des hyperfonctions

On définit l'espace  $\mathcal{O}_\theta^{ss-exp}$  comme la limite inductive pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  des fonctions holomorphes définies sur les secteurs à l'infini  $\{z \in \mathbf{C} : |z| > 1/\varepsilon \text{ et } |\arg(z) - \theta| < \varepsilon\}$  à croissance sous-exponentielle. On rappelle qu'une fonction holomorphe  $\psi$  est à croissance sous-exponentielle dans la direction  $d$  si pour tout  $\varepsilon' > 0$ , il existe un voisinage de la direction  $d$  dans le domaine de définition de  $\psi$  et une constante  $C \in \mathbf{R}$  tels que  $|\psi(z)| \leq C e^{\varepsilon'|z|}$ . L'ensemble des  $\mathcal{O}_\theta^{ss-exp}$  pour  $\theta \in S^1$  forme un faisceau  $\mathcal{O}^{ss-exp}$  sur  $S^1$ , dit des *fonctions (définies) à l'infini à croissance sous-exponentielle*. On notera  $e^{a\bullet} \mathcal{O}^{ss-exp}$  le faisceau tel que  $\psi$  est une section de  $e^{a\bullet} \mathcal{O}^{ss-exp}$  si et seulement si  $e^{-a\zeta} \psi(\zeta)$  est une section de  $\mathcal{O}^{ss-exp}$ . On notera  $I_\theta := \{\tau \in S^1 : |\tau + \theta| \leq \pi/2\}$  qui est donc le demi-plan centré sur l'angle  $-\theta$ .

Pour être cohérent avec la suite du texte, on notera  $z$  la coordonnée du coté des hyperfonctions et  $\zeta$  la coordonnée du coté des fonctions à l'infini à croissance sous-exponentielle obtenue après transformée de Laplace des hyperfonctions. De même, on emploiera plutôt la lettre  $\Phi$  pour désigner une hyperfonction et la lettre  $\psi$  pour désigner une fonction à l'infini à croissance sous-exponentielle.

DÉFINITION A.2.1. On définit la *transformée de Laplace* d'une hyperfonction  $\Phi = [\check{\varphi}, \hat{\varphi}] \in \mathcal{H}_{a,\theta}^+$  par

$$(\mathfrak{L}_{a,\theta}\Phi)(\zeta) := \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,\varepsilon)^+} \check{\varphi}(z) \cdot e^{-\zeta z} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_{a+\varepsilon e^{i\theta},\theta}} \hat{\varphi}(z) \cdot e^{-\zeta z} dz,$$

où  $\varepsilon > 0$  est un réel suffisamment petit tel que la première intégrale soit bien définie lorsque prise sur le cercle  $C(a,\varepsilon)^+$  de centre  $a$  et de rayon  $\varepsilon$  orienté dans le sens direct, et où  $\delta_{a+\varepsilon e^{i\theta},\theta}$  désigne le rayon issu de  $a + \varepsilon e^{i\theta}$  et d'angle  $\theta$  (voir la figure 1).

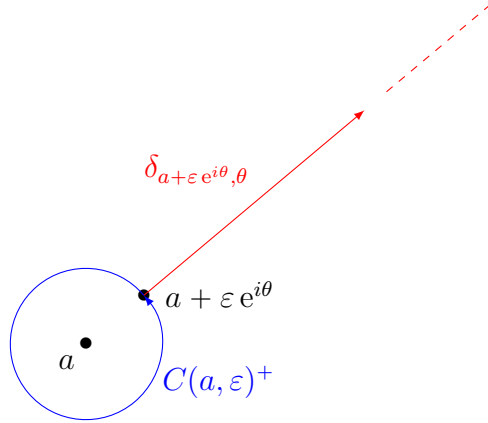


FIGURE 1. Chemin pour la transformée de Laplace multiplicative

La transformation de Laplace se comporte de la manière suivante vis à vis de la translation  $t_a : z \mapsto z + a$ . Si on a  $\Phi_a \in \mathcal{H}_{a,\theta}^+$  et  $\Phi_0 \in \mathcal{H}_{0,\theta}^+$  tels que  $\Phi_0 = \Phi_a \circ t_a$  alors en effectuant le changement de variable  $z \leftarrow z + a$ , on a

$$(A.2.a) \quad \mathfrak{L}_{a,\theta}\Phi_a(\zeta) = e^{-a\zeta} \mathfrak{L}_{0,\theta}\Phi_0(\zeta).$$

LEMME A.2.2. La définition précédente est bien posée et définit un élément de  $\Gamma(I_\theta, e^{-a\bullet} \mathcal{O}^{ss-exp})$ .

DÉFINITION A.2.3. On définit la *transformée de Laplace inverse*  $\mathfrak{L}_{a,\theta}^{-1}(\psi) = [\check{\varphi}, \hat{\varphi}] \in \mathcal{H}_{a,\theta}^+$  d'une section  $\psi \in \Gamma(I_\theta, e^{-a\bullet} \mathcal{O}^{ss-exp})$  de la manière suivante (voir la figure 2 pour les chemins) :

- (1) la fonction  $\check{\varphi}$  est définie par le recollement des fonctions  $z \mapsto \int_{\delta_{A,\tau}^-} \psi(\zeta) \cdot e^{\zeta z} d\zeta$  où  $A$  est un point quelconque du domaine de définition de  $\psi$ , pour les  $\tau$  tels que  $|\tau + \theta| < \pi/2 + \varepsilon$ . Cela définit bien une fonction sur un secteur ramifié  $\{0 < |z - a| \text{ et } -\varepsilon - 2\pi < \arg(z - a) - \theta < \varepsilon\}$ .
- (2) la fonction  $\hat{\varphi}$  est définie par  $z \mapsto \int_{\delta^-} \psi(\zeta) \cdot e^{\zeta z} d\zeta$  où  $\delta^-$  est la concaténation de la demi-droite  $\delta_{A,-\theta+\pi/2+\varepsilon}^-$  parcouru de l'infini vers  $A$  et de la demi-droite  $\delta_{A,-\theta-\pi/2-\varepsilon}$  parcouru de  $A$  vers l'infini.

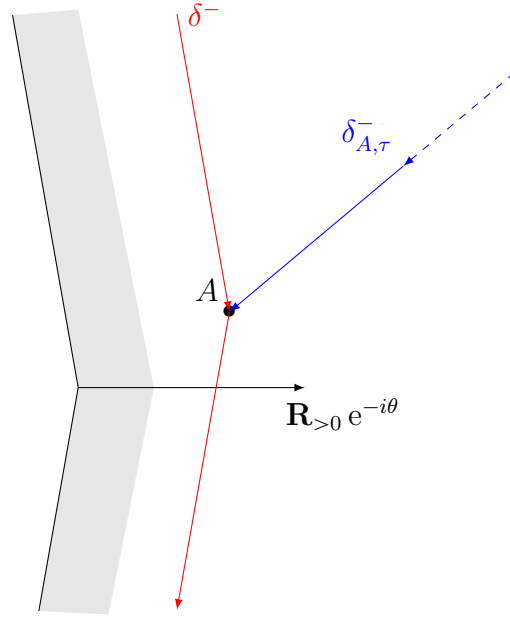


FIGURE 2. Chemin pour la transformée de Laplace inverse des hyperfonctions

LEMME A.2.4. *La définition précédente est bien posée et définit bien une hyperfonction  $[\check{\varphi}, \hat{\varphi}] \in \mathcal{H}_{a,\theta}^+$ .*

PROPOSITION A.2.5 ([Mal89] proposition 3.2 p.15). *La transformée de Laplace et la transformée de Laplace inverse définissent des isomorphismes réciproques l'un de l'autre entre l'espace des hyperfonctions  $\mathcal{H}_{a,\theta}^+$  et l'espace  $\Gamma(I_\theta, e^{-a\bullet} \mathcal{O}^{ss-exp})$ .*

REMARQUE A.2.6. Comme avec la transformation de Fourier, on peut mettre le facteur  $2i\pi$  sur l'une ou l'autre des transformations.

REMARQUE A.2.7. Au niveau des fonctions, la transformée de Laplace inverse  $\mathfrak{L}_{a,\theta}^{-1}(\psi) = [\check{\varphi}, \hat{\varphi}]$  donne un représentant  $(\check{\varphi}, \hat{\varphi})$  de  $[\check{\varphi}, \hat{\varphi}]$  avec  $\check{\varphi}$  définie sur un secteur ramifié  $\{0 < |z - a| \text{ et } -\varepsilon - 2\pi < \arg(z - a) - \theta < \varepsilon\}$ , c'est-à-dire pas seulement au voisinage de  $a$ . On déduit donc de la proposition A.2.5 que toute classe  $[\check{\varphi}, \hat{\varphi}] \in \mathcal{H}_{a,\theta}^+$  admet un représentant défini sur un secteur ramifié sur tout  $\mathbf{C} - \{a\}$  et pas seulement sur un voisinage épointé de  $a$ . On appellera un tel représentant, un *représentant spécial* de l'hyperfonction.

REMARQUE A.2.8. On peut aussi définir une transformée de Laplace et de Laplace inverse pour les hyperfonctions  $\mathcal{H}_{a,\theta}^-$  avec le choix de l'orientation inverse. On a alors deux isomorphismes

$$\mathfrak{L}_{a,\theta} : \mathcal{H}_{a,\theta}^- \rightleftarrows \Gamma(I_\theta, e^{-a\bullet} \mathcal{O}^{ss-exp}) : \mathfrak{L}_{a,\theta}^{-1},$$

avec pour différence dans la définition de  $\mathfrak{L}_{a,\theta}$  que l'on prend le cercle  $C(a, \varepsilon)^-$  parcouru dans le sens inverse (et non plus direct) et pour différence dans la définition de  $\mathfrak{L}_{a,\theta}^{-1}$  que l'on prend les intégrales sur les chemins  $\delta_{A,\tau}^+$  et  $\delta^+$ . Cela correspond aussi à inverser l'orientation dans les deux cas.

La dérivation usuelle induit une dérivation sur l'espace des hyperfonctions  $\mathcal{H}_{a,\theta}^+$ . Il est clair que la définition est indépendante du représentant de la classe choisi (car la dérivation d'une fonction holomorphe en  $a$  reste holomorphe en  $a$ ).

PROPOSITION A.2.9. *La transformée de Laplace envoie la multiplication par  $-z$  sur la dérivation  $\partial_\zeta$  de  $\Gamma(I_\theta, e^{a\bullet} \mathcal{O}^{ss-exp})$  et la dérivation  $\partial_z$  de  $\mathcal{H}_{a,\theta}^+$  sur la multiplication par  $\zeta$ .*

DÉMONSTRATION. On procède par intégration par parties. Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

### A.3. Microfonctions et microfonctions généralisées

**A.3.1. Définition des microfonctions.** Soit  $D$  le disque centré en 0 de rayon  $r$  et  $b \in D^* := D - \{0\}$  un point non nul. On note alors  $(\tilde{D}, \tilde{b})$  le revêtement universel de  $(D^*, b)$  et

- $\mathcal{O}$  le faisceau des fonctions holomorphes sur  $D$ ,
- $\tilde{\mathcal{O}}$  le faisceau des fonctions holomorphes sur  $\tilde{D}$ ,
- $\pi : \tilde{D} \rightarrow D^* \hookrightarrow D$  l'application composée de la projection canonique et de l'inclusion canonique.

On définit alors le faisceau  $\mathcal{C}$  comme le conoyau de la flèche canonique  $\mathcal{O} \rightarrow \pi_* \tilde{\mathcal{O}}$  de faisceaux sur  $D$ .

DÉFINITION A.3.1. On définit l'espace des *microfonctions en 0* noté  $\mathcal{C}_0$  comme la fibre en 0 du faisceau  $\mathcal{C}$  précédent. En particulier, on a une suite exacte

$$(A.3.a) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_0 \longrightarrow (\pi_* \tilde{\mathcal{O}})_0 \longrightarrow \mathcal{C}_0 \longrightarrow 0.$$

On définit l'espace des *microfonctions en  $a \in \mathbf{C}$*  comme le translaté de  $\mathcal{C}_0$  par  $a$ .

On peut vérifier que la définition de l'espace des microfonctions est indépendante du choix du disque  $D$  initial et du point  $b \in D^*$ . Dans la suite, on traitera uniquement le cas de  $a = 0$ , le cas des autres espaces de microfonctions se calquant immédiatement. On notera aussi par abus,  $\tilde{\mathcal{O}}_0 := (\pi_* \tilde{\mathcal{O}})_0$  la fibre en 0 du faisceau  $\pi_* \tilde{\mathcal{O}}$  défini sur le disque  $D$ .

La terminologie de *microfonctions* est due à B. Malgrange. Voir par exemple [Mal91] §II.3 p.30 ou [Mal89] §2 p.9. Cette terminologie est due à une analogie avec les microfonctions définies par Sato, Kawai et Kashiwara dans [SKK73]. La terminologie d'Écalle est d'appeler les microfonctions les *singularités* et souvent noté avec un nabla, comme  $\check{\varphi}$ , pour la microfonction associée à un germe de fonction  $\check{\varphi} \in \tilde{\mathcal{O}}_0$ . Un représentant de  $\check{\varphi}$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}_0$  est souvent noté  $\check{\varphi}$  et est appelé un *majeur* de  $\check{\varphi}$ .

Soit  $T$  l'action de la monodromie dans l'orientation directe sur  $\tilde{\mathcal{O}}_0$  et sur  $\mathcal{C}_0$ , c'est-à-dire qui transforme une branche du logarithme  $\log(z)$  en  $\log(z) + 2i\pi$ .

On pose alors  $\text{can} : \tilde{\mathcal{O}}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$  l'application canonique et on définit l'application variation  $\text{var} : \mathcal{C}_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_0$  par

$$\text{var} \circ \text{can} = \text{id} - T^{-1}.$$

L'application  $\text{var}$  est bien définie car la restriction de  $\text{id} - T^{-1}$  à  $\mathcal{O}_0$  est nulle et que l'on a la suite exacte (A.3.a). Explicitement, on a  $\text{var}(\check{\varphi})(z) = \check{\varphi}(z) - \check{\varphi}(e^{-2i\pi} z)$  où le résultat est indépendant du majeur choisi. Le germe  $\hat{\varphi} = \text{var}(\check{\varphi})$  est appelé un *mineur* de  $\check{\varphi}$ .

REMARQUE A.3.2. Certains auteurs comme B. Malgrange préfèrent définir la fonction variation par  $\text{var}(\check{\varphi})(z) = \check{\varphi}(e^{2i\pi} z) - \check{\varphi}(z)$ , c'est-à-dire  $\text{var} \circ \text{can} = T - \text{id}$ .

L'espace des microfonctions est un  $\mathcal{O}_0$ -module (c'est-à-dire un  $\mathbf{C}\{z\}$ -module), mais pas un  $\tilde{\mathcal{O}}_0$ -module car la structure d'algèbre donnée par la multiplication point par point de  $\tilde{\mathcal{O}}_0$  ne passe pas au quotient. Cependant, l'espace des microfonctions est une algèbre commutative et associative pour la convolution (définie par exemple dans [Sau12] §3.2 lemme 8 p.47 et définition 11 p.48) dont l'unité est la distribution de Dirac  $\delta := \text{can}\left(\frac{1}{2i\pi z}\right)$ . L'action de  $\partial_z$  est bijective sur  $\mathcal{C}_0$  (car deux primitives diffèrent d'une constante qui s'annule par passage au quotient). De plus, on a  $\partial_z(f \star g) = (\partial_z f) \star g = f \star (\partial_z g)$ . On en déduit que l'intégration est égale à la convolution par la primitive du Dirac  $\delta$ , que l'on note  $Y := \partial_z^{-1} \delta = \text{can}\left(\frac{\log(z)}{2i\pi}\right)$ .

**A.3.2. Transformée de Laplace de microfonctions.** Le diagramme (A.1.b) suggère un lien entre les hyperfonctions et les microfonctions. Considérons une microfonction  $\check{\varphi} = \text{can}(\check{\varphi})$  du type spécial suivant : son mineur  $\hat{\varphi} = \text{var}(\check{\varphi})$  s'étend analytiquement le long du rayon  $\mathbf{R}_{>0} \cdot e^{i\theta}$  et est à croissance au plus exponentielle à l'infini dans cette direction. Alors  $\check{\varphi}$  définit une hyperfonction  $[\check{\varphi}, \hat{\varphi}] \in \mathcal{H}_{0,\theta}^+$  et on peut définir sa *transformée de Laplace* par

$$(\mathfrak{L}_\theta \check{\varphi})(\zeta) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon e^{i(\theta-2\pi)}}^{\varepsilon e^{i\theta}} \check{\varphi}(z) \cdot e^{-\zeta z} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon e^{i\theta}}^{\infty e^{i\theta}} \hat{\varphi}(z) \cdot e^{-\zeta z} dz,$$

où  $\varepsilon > 0$  est un réel suffisamment petit tel que la première intégrale soit bien définie lorsque prise sur le cercle de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$ .

On rappelle que la définition précédente ne dépend pas du choix de  $\varepsilon$  ni du majeur  $\check{\varphi}$  choisi. La transformée de Laplace est une fonction holomorphe définie sur un demi-plan de la forme  $\Re(\zeta e^{i\theta}) > A$  où  $A$  est une constante majorante de la croissance exponentielle de  $\hat{\varphi}$ .

REMARQUE A.3.3. Nous allons définir ci-dessous (définition A.4.2) les microsolutions d'un  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}$ . Ce sont des microfonctions vérifiant "l'équation différentielle  $\mathcal{M}$ ". Nous verrons en particulier que son mineur s'étend toujours analytiquement le long d'un rayon générique dans notre cas particulier (un pôle double en l'infini). En particulier, on pourra toujours définir sa transformée de Laplace avec la méthode précédente pour un rayon générique.

**A.3.3. Microfonctions généralisées.** Soit  $\Sigma$  un ensemble fini de  $\mathbf{C}$  que l'on fixera pour la suite de cette section. On définit l'espace des *microfonctions généralisées*  $\mathcal{C}_\Sigma$  (resp. l'espace des *microfonctions généralisées à croissance exponentielle*  $\mathcal{C}_\Sigma^{\text{exp}}$ ) comme l'espace des fonctions holomorphes sur un revêtement universel  $\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}$  de  $\mathbf{C} - \Sigma$  (resp. à croissance exponentielle) quotienté par les fonctions entières (resp. entières à croissance exponentielle). On a donc

$$\mathcal{C}_\Sigma = \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}}(\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}) / \mathcal{O}(\mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_\Sigma^{\text{exp}} = \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}}^{\text{exp}}(\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}) / \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbf{C}).$$

Pour traiter les deux cas en parallèle, on notera  $\mathcal{C}_\Sigma^{(\text{exp})}$  l'un quelconque des deux espaces ci-dessus.

REMARQUE A.3.4. B. Malgrange considère un espace de microfonctions généralisées un peu différent dans [Mal91] chapitre XII §2 p.199. En effet, il considère un disque ouvert  $D$  contenant  $\Sigma$  et il pose  $\check{\mathcal{C}} := \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{C}-\overline{D}}}^{exp}(\widetilde{\mathbf{C}-\overline{D}})/\mathcal{O}(\mathbf{C})$  où  $\overline{D}$  désigne l'adhérence de  $D$ . Cet espace  $\check{\mathcal{C}}$  correspond à ce qu'on appellera la *situation semi-locale* ci-dessous.

REMARQUE A.3.5. On a une application injective  $\mathcal{C}_{\Sigma}^{exp} \hookrightarrow \check{\mathcal{C}}$  donnée par la restriction. Cependant, au niveau des solutions c'est-à-dire après application du foncteur  $\text{Hom}(\mathcal{M}', -)$ , cette application induira un isomorphisme (analogue du lemme A.3.6 et de la proposition A.4.1). Nous avons fait ce choix car il met mieux en lumière le choix de l'application  $\iota_{\theta}$  ci-dessous (qui n'est pas définie pour la version  $\check{\mathcal{C}}$  mais seulement après passage aux solutions dans ce cas). L'avantage du choix de B. Malgrange est que l'on peut définir les applications canonique Can et variation Var semi-locales au niveau des faisceaux  $\mathcal{O}_{\infty}^{exp}$  (défini au début de la section A.4) et  $\check{\mathcal{C}}$  et pas seulement au niveau des solutions.

**A.3.4. Lien entre microfonctions et microfonctions généralisées.** Dans la suite, on va faire le lien entre les situations locales et la situation semi-locale correspondant à  $\check{\mathcal{C}}$ . À ce propos, voir en particulier [Pha84], en particulier §1.4 mais aussi l'exemple p.79 qui est la méthode in fine que nous allons utiliser pour calculer les données de Stokes.

On choisit des points de bases  $\tilde{a}_i$  dans  $\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma}$  au voisinage des (points de ramification correspondant aux)  $a_i$  pour tout  $i \in I$ . On identifie alors  $\tilde{a}_i$  avec un point du revêtement du disque épointé au voisinage de  $a_i$ , ce qui nous donne une application

$$\text{restr}_i : \mathcal{O}^{(exp)}(\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma}) \longrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{D_i - a_i})$$

en associant à une fonction  $\varphi \in \mathcal{O}^{(exp)}(\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma})$  la fonction  $\varphi_i \in \mathcal{O}(\widetilde{D_i - a_i})$  telle que  $\varphi_i = \varphi$  au voisinage de  $a_i$ . Remarquons que cette application est injective (car  $\varphi$  est définie sur un ouvert connexe simplement connexe donc le prolongement analytique de  $\varphi_i$  à  $\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma}$  est unique et donc égal à  $\varphi$ ) mais non surjective (une fonction  $\varphi_i$  définie au voisinage de  $a_i$  n'admet pas nécessairement de prolongement analytique à  $\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma}$  tout entier). En prenant la somme directe, on obtient une application

$$\bigoplus_{i \in I} \text{restr}_i : \mathcal{O}^{(exp)}(\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma}) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(\widetilde{D_i - a_i}).$$

On en déduit alors une application (notée abusivement avec la même notation)

$$\bigoplus_{i \in I} \text{restr}_i : \mathcal{C}_{\Sigma}^{(exp)} \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_{a_i},$$

qui à un représentant  $\varphi \in \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma}}^{(exp)}$  associe les classes dans  $\mathcal{C}_{a_i}$  des  $\text{restr}_i(\varphi)$ . Cette application est bien définie car l'image d'une application holomorphe sur  $\mathbf{C}$  par  $\text{restr}_i$  est bien holomorphe en  $a_i$ .

Fixons un point de base  $b_{\infty}$  de  $\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma}$ , par exemple un point à l'infini. Cela permet de fixer une origine sur le revêtement  $\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma}$  et permet de le définir de manière unique (comme revêtement pointé). Soit  $d$  une direction admissible pour la famille  $\Sigma$  dont on choisit un représentant spécial de son angle  $\theta \in \mathbf{R}$ . On considère alors  $\mathcal{U}$  l'ouvert  $\mathbf{C}-\Sigma$  privé des demi-droites  $d_i$  issues des  $a_i$  et de direction  $d$ . L'espace  $\mathcal{U}$  est un ouvert connexe, simplement connexe car la direction  $d$  est admissible. On identifie l'ouvert  $\mathcal{U}$  à un sous-ensemble de  $\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma}$ , défini par les angles appartenant à  $] \theta - 2\pi ; \theta [$ . Pour ce choix d'angle  $\theta \in \mathbf{R}$ , on peut alors définir l'application

$$\iota_{\theta} := \bigoplus_{i \in I} \text{restr}_i : \mathcal{C}_{\Sigma}^{(exp)} \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_{a_i},$$

où les  $\tilde{a}_i$  sont des points quelconques de  $\mathcal{U} \subseteq \widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}$  au voisinage des  $a_i$ .

LEMME A.3.6. *L'application  $\iota_\theta$  est injective mais non surjective.*

#### A.4. Transformée de Laplace de solutions

Revenons à la situation du chapitre 4. On a donc deux  $\mathcal{A}_1$ -modules explicites  $\mathcal{M}^0$  et  $\mathcal{M}^1$  tels que  $\mathcal{M}^1$  est la transformée de Fourier-Laplace de  $\mathcal{M}^0$ . On rappelle que les connexions associées en dehors des pôles sont les connexions

$$\nabla^0 = d - (B + C(z - A)^{-1}D) dz, \quad \nabla^1 = d + (A + D(\zeta - B)^{-1}C) d\zeta.$$

La situation étant extrêmement symétrique, on simplifie l'exposition en notant  $\mathcal{M}' := \mathcal{M}^0$  et  $\mathcal{M} := \mathcal{M}^1$ . De même, lorsque l'on considérera une donnée associée à  $\mathcal{M}$ , on notera la donnée associée à  $\mathcal{M}'$  de manière analogue avec un prime.

Soit  $\Sigma := \{a_i : i \in I\}$  les valeurs propres du type irrégulier de  $\mathcal{M}$  en l'infini. Ce sont aussi les singularités à distance finie de  $\mathcal{M}'$ . De même, notons  $\Sigma' := \{b_j : j \in J\}$  les valeurs propres du type irrégulier de  $\mathcal{M}'$  en l'infini, qui sont aussi les singularités à distance finie de  $\mathcal{M}$ .

**A.4.1. Microsolutions et microsolutions généralisées.** On reprend l'application

$$\iota_\theta = \bigoplus_{i \in I} \text{restr}_i : \mathcal{C}_\Sigma^{(exp)} \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_{a_i},$$

de la section A.3.4 précédente.

En composant par le foncteur  $\text{Hom}(\mathcal{M}', -)$ , on en déduit une flèche injective

$$(A.4.a) \quad \text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_\Sigma^{(exp)}) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i}).$$

PROPOSITION A.4.1. *L'application (A.4.a) est un isomorphisme.*

DÉFINITION A.4.2. On appelle  $\text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i})$  l'espace des *microsolutions* de  $\mathcal{M}'$  en  $a_i$ . De même, on appelle  $\text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_\Sigma^{(exp)})$  l'espace des *microsolutions généralisées* (à croissance exponentielle) de  $\mathcal{M}'$ .

On peut calculer la dimension exacte de l'espace des microsolutions.

PROPOSITION A.4.3. *L'espace  $\text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i})$  des microsolutions en  $a_i$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mu_i$ , la multiplicité de la valeur propre  $a_i$  dans  $A$ .*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence du lemme 2.1.4 et du corollaire 4.2 chapitre IV §4 p.67 de [Mal91] du à M. Kashiwara.  $\square$

On en déduit immédiatement que la dimension de l'espace des microsolutions généralisées de  $\mathcal{M}'$  est égale à  $\sum_{i \in I} \mu_i = \dim(V)$ . Cela motive la section suivante qui explicite le lien entre les solutions de  $\mathcal{M}$  et les microsolutions généralisées de  $\mathcal{M}'$  car la dimension des solutions de  $\mathcal{M}$  est bien égale à  $\dim(V)$ .

**A.4.2. Transformation de Laplace dans la situation semi-locale.** On rappelle que l'on a choisi l'*orientation canonique* coté  $\mathcal{M}'$  et l'*orientation inverse* coté  $\mathcal{M}$ . On fixe aussi pour la suite le choix de deux angles admissibles  $\eta_I, \eta_J \in \mathbf{R}$  pour les familles  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  respectivement. Pour simplifier la suite de l'exposition, on posera  $\theta = \eta_I + \pi$ . On a donc  $-\theta = -\eta_I - \pi$ . On choisit quatre points base  $p'_I, p'_J, p_I, p_J$  à l'infini dans les angles  $\eta_I, -\eta_J, -\eta_I - \pi, \eta_J$ . Nous sommes en présence de quatre espaces. Pour simplifier les notations, on notera

- (1)  $\mathbf{E}'$  la fibre en  $p'_J$  de l'espace  $\text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{O}_\Sigma^{(exp)}(\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}))$  des solutions de  $\mathcal{M}'$ ,

- (2)  $\mathbf{F}'$  la fibre en  $p'_I$  de l'espace  $\text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_\Sigma^{\text{exp}})$  des microsolutions généralisées du  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}'$ ,
- (3)  $\mathbf{E}$  la fibre en  $p_I$  de l'espace  $\text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\Sigma'}^{\text{exp}}(\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma'}))$  des solutions de  $\mathcal{M}$ ,
- (4)  $\mathbf{F}$  la fibre en  $p_J$  de l'espace  $\text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Sigma'}^{\text{exp}})$  des microsolutions généralisées du  $\mathcal{A}_1$ -module  $\mathcal{M}$ .

Par la proposition A.4.1, l'espace des microsolutions généralisées  $\mathbf{F}'$  admet une graduation naturelle  $\mathbf{F}' = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{F}'_i$  où  $\mathbf{F}'_i := \text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i})$ . L'espace des solutions  $\mathbf{E}$  admet aussi une graduation naturelle  $\mathbf{E} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{E}_i$  où  $\mathbf{E}_i$  est l'ensemble des solutions de  $\mathcal{M}$  dans  $\Gamma(I_\theta, e^{-a_i \bullet} \mathcal{O}^{ss-\text{exp}})$ . Le fait que l'on ait bien une graduation est une conséquence du théorème de multisommation d'une solution formelle en l'infini dans la direction d'angle  $-\eta_I - \pi = -\theta$ .

De manière analogue, l'espace des microsolutions généralisées  $\mathbf{F}$  de  $\mathcal{M}$  admet une graduation selon  $J$  donnée par les microsolutions en les  $b_j$  pour le choix de l'angle admissible  $\eta_J \in \mathbf{R}$ .

On définit les applications canonique et variation semi-locales

$$\text{Can}' : \mathbf{E} \longleftarrow \mathbf{F} : \text{Var}'$$

$$\text{Can} : \mathbf{E}' \longleftarrow \mathbf{F}' : \text{Var}$$

(A.4.a)

de la manière suivante :

- (1) les applications canoniques sont définies par le prolongement d'une solution en le point base  $p'_J, p_I$  à  $\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}$  tout entier puis en prenant sa classe dans  $\mathcal{C}_\Sigma^{\text{exp}}$  (resp.  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^{\text{exp}}$ ) et en prenant sa valeur en le point de base  $p'_I, p_J$  respectivement.
- (2) les applications variations sont définies par l'égalité  $\text{Var} \circ \text{Can} = 1 - T^{-1}$  où  $T$  désigne l'action de la monodromie sur  $\mathcal{O}_\infty^{\text{exp}}(\widetilde{S^1})$  dans l'orientation choisie (canonique pour  $\mathcal{M}'$ , inverse pour  $\mathcal{M}$ ).

On rappelle les différentes définitions des transformées de Laplace. On a les isomorphismes réciproques l'un de l'autre deux à deux

$$\mathfrak{L}^{-1} : \mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{F}' : \mathfrak{L}$$

$$\mathfrak{L}^{-1'} : \mathbf{E}' \rightleftharpoons \mathbf{F} : \mathfrak{L}'$$

par les formules

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\check{\varphi})(\zeta) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_{R, \eta_I + \pi} \cdot C_R^+ \cdot \delta_{R, \eta_I - \pi}^-} \check{\varphi}(z) \cdot e^{-\zeta z} dz, & \text{pour tout } \check{\varphi} \in \mathbf{F}' \\ \mathfrak{L}^{-1}(\psi)(z) &= \left[ \int_{\delta_{A, -\eta_I - \pi}^-} \psi(\zeta) \cdot e^{\zeta z} d\zeta \right], & \text{pour tout } \psi \in \mathbf{E} \\ \mathfrak{L}'(\check{\varphi})(z) &= \int_{\delta_{R, \eta_J - \pi} \cdot C_R^- \cdot \delta_{R, \eta_J + \pi}^-} \check{\varphi}(\zeta) \cdot e^{\zeta z} d\zeta, & \text{pour tout } \check{\varphi} \in \mathbf{F} \\ \mathfrak{L}^{-1'}(\psi)(\zeta) &= \left[ \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_{A, -\eta_J}^+} \psi(z) \cdot e^{-\zeta z} dz \right], & \text{pour tout } \psi \in \mathbf{E}'. \end{aligned}$$

REMARQUE A.4.4. Remarquez que l'on a fait le choix différent de la normalisation par le facteur  $2i\pi$  pour le second cas.



On considère alors les deux diagrammes

$$(A.4.b) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{F}' & \xrightleftharpoons[\mathfrak{L}^{-1}]{\mathfrak{L}} & \mathbf{E} \\ \text{Var}' \downarrow & & \downarrow \text{Can} \\ \mathbf{E}' & \xrightleftharpoons[\mathfrak{L}']{[\mathfrak{L}^{-1}']} & \mathbf{F} \end{array}$$

$$(A.4.c) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{F}' & \xrightleftharpoons[\mathfrak{L}^{-1}]{\mathfrak{L}} & \mathbf{E} \\ \text{Can}' \uparrow & & \uparrow \text{Var} \\ \mathbf{E}' & \xrightleftharpoons[\mathfrak{L}']{[\mathfrak{L}^{-1}']} & \mathbf{F} \end{array}$$

Le théorème fondamental est alors le suivant :

**THÉORÈME A.4.5** ([Mal91] théorème 2.1 chapitre XII §2 p.199). *Les diagrammes (A.4.b) et (A.4.c) sont commutatifs.*

Concrètement, cela signifie que pour les bons choix de transformées de Laplace, ces isomorphismes inversent le rôle des microsolutions généralisées et des solutions mais aussi les applications canonique et variation semi-locales.

### A.5. Situations locales et situation semi-locale

Pour le calcul des données de Stokes de  $\mathcal{M}$ , on est intéressé par l'espace des solutions  $\mathbf{E}$  gradué par  $I$  muni de l'automorphisme de monodromie autour de l'infini dans le sens direct  $1 - \text{Var} \circ \text{Can} \in \text{GL}(\mathbf{E})$ . Cet automorphisme est donc équivalent à l'automorphisme de  $\mathbf{F}'$  donné par  $1 - \text{Can}' \circ \text{Var}' \in \text{GL}(\mathbf{F}')$ .

Dans la section A.5.1 suivante, on montre que  $\mathbf{F}'$  est aussi gradué par  $I$  et que cette graduation fait de la transformée de Laplace  $\mathfrak{L} : \mathbf{F}' \rightarrow \mathbf{E}$  un isomorphisme gradué. Ensuite dans la section A.5.2, on relie les applications canonique et variation semi-locales  $\text{Can}', \text{Var}'$  aux applications canoniques et variations locales et on calcule enfin l'automorphisme  $1 - \text{Can}' \circ \text{Var}' \in \text{GL}(\mathbf{F}')$  en fonction de ces dernières.

**A.5.1. Transformées de Laplace des microsolutions.** Soit  $\widetilde{S^1} \simeq \mathbf{R}$  un revêtement universel du cercle à l'infini  $S^1$  de  $\mathbf{C} - \Sigma$  (c'est-à-dire la droite à l'infini de  $\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}$ ). On définit le faisceau  $\mathcal{O}_\infty^{\text{exp}}$  sur  $\widetilde{S^1}$  tel que sa fibre en  $\theta \in \widetilde{S^1}$  soit la limite inductive pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  des fonctions holomorphes définies sur les secteurs à l'infini  $\{z \in \mathbf{C} : |z| > 1/\varepsilon \text{ et } |\arg(z) - \theta| < \varepsilon\}$  à croissance exponentielle. On appelle ce faisceau celui des *fonctions (définies) à l'infini à croissance exponentielle*. Il diffère du faisceau  $\mathcal{O}^{\text{exp}}$  du début de la section A.1 par le fait que les fonctions ne sont pas définies sur un secteur entier mais seulement sur un voisinage à l'infini d'un secteur. On définit aussi le faisceau  $\mathcal{O}_\Sigma^{\text{exp}}$  sur  $\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}$  des *fonctions holomorphes à croissance exponentielle*.

Les transformées de Laplace  $\mathfrak{L}_{a_i, \theta}$  induisent un morphisme

$$\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i}) \xrightarrow{\oplus_i \mathfrak{L}_{a_i, \theta}} \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_\infty^{\text{exp}}(\widetilde{S^1})),$$

où  $\mathcal{O}_\infty^{\text{exp}}(\widetilde{S^1})$  désigne l'espace des sections globales du faisceau  $\mathcal{O}_\infty^{\text{exp}}$  sur  $\widetilde{S^1}$ . D'après le théorème de Cauchy holomorphe, on a un isomorphisme, donné par la restriction,

$$\mathbf{E} = \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbf{C} - \Sigma)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_\infty^{\text{exp}}(\widetilde{S^1}))$$

d'où l'on déduit un morphisme

$$\bigoplus_{i \in I} \operatorname{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i}) \longrightarrow \mathbf{E}$$

que l'on appelle abusivement transformée de Laplace aussi et que l'on notera avec la même notation.

Dans la suite, comme on fait intervenir la transformée de Laplace, seules les micro-fonctions généralisées à croissance exponentielle seront pertinentes. On rappelle que l'application  $\mathfrak{L}_\theta : \operatorname{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_\Sigma^{\exp}) = \mathbf{F}' \rightarrow \mathbf{E}$  est définie en envoyant la classe d'une fonction  $\check{\varphi} \in \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma}}^{\exp}(\widetilde{\mathbf{C}-\Sigma})$  sur l'application

$$z \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_C \check{\varphi}(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta,$$

où  $C := \delta_{Re^{i\theta}, \theta} \cdot C_R^+ \cdot \delta_{Re^{i\theta}, \theta-2\pi}^-$  (voir figure 3) désigne le chemin issu de l'infini allant vers  $Re^{i\theta}$  le long de la demi-droite  $\delta_{Re^{i\theta}, \theta-2\pi}^-$  puis parcourant dans le sens direct un cercle de centre 0 et de rayon  $R$  suffisamment grand tel que les points de  $\Sigma$  soit dans son intérieur, puis repartant vers l'infini le long de la demi-droite  $\delta_{Re^{i\theta}, \theta}$ . L'intégrale précédente est indépendante du rayon  $R$  choisi.

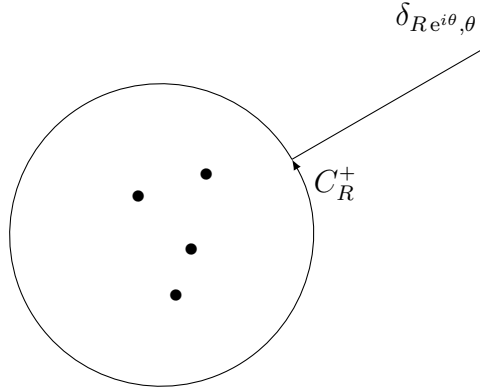


FIGURE 3. Chemin  $C$  d'intégration pour la transformée de Laplace

PROPOSITION A.5.1. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in I} \operatorname{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i}) & \xrightarrow{\oplus_i \mathfrak{L}_{a_i, \theta}} & \mathbf{E} \\ \uparrow \iota_\theta \sim & \nearrow \mathfrak{L}_\theta & \\ \mathbf{F}' & & \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que pour les représentants spéciaux  $\varphi_i^{sp}$  de la démonstration de la proposition A.4.1, on a

$$\mathfrak{L}_{a_i, \theta}(\varphi_i^{sp})(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \varphi_i^{sp}(z) e^{-z\zeta} dz$$

en déformant le contour. D'où par linéarité de l'intégrale,  $\oplus_{i \in I} \mathfrak{L}_{a_i, \theta} = \mathfrak{L}_\theta \circ \iota_\theta^{-1}$ .  $\square$

Notons  $\bigoplus_{i \in I} \mathbf{F}'_i$  la graduation de  $\mathbf{F}'$  par  $I$  induite par l'isomorphisme  $\iota_\theta$ . La transformée de Laplace induit donc un isomorphisme gradué  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}_i$  où  $\mathcal{L}_i := \mathfrak{L}_{a_i, \theta}$  de  $\mathbf{F}'$  sur  $\mathbf{E}$ . La graduation de  $\mathbf{E}$  sur  $I$  est définie explicitement par  $\mathbf{E} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{E}_i$  avec

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E} \cap \Gamma(I_\theta, e^{-a_i \bullet} \mathcal{O}^{ss-\exp}).$$

La graduation de  $\mathbf{E}$  est donc exactement la graduation des solutions de  $\mathcal{M}$  à l'infini donnée par la graduation de Stokes dans la direction  $-\theta = -\eta_I - \pi$ .

On en déduit donc le

**THÉORÈME A.5.2.** *La transformée de Laplace  $\mathfrak{L} : \mathbf{F}' \rightarrow \mathbf{E}$  induit un isomorphisme gradué sur  $I$*

$$\oplus_{i \in I} \mathcal{L}_i : \bigoplus_{i \in I} \mathbf{F}'_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbf{E}_i$$

entre les microsolutions  $\mathbf{F}'_i$  de  $\mathcal{M}'$  en  $a_i$  et les solutions  $\mathbf{E}_i$  de  $\mathcal{M}$  à l'infini à croissance exponentielle de type  $-a_i$  pour toute direction de  $\{\tau : |\tau + \theta| \leq \pi/2\}$ .

**A.5.2. Applications canonique et variation locales et semi-locales.** D'après la section précédente, on a donc une graduation naturelle de  $\mathbf{F}'$  sur  $I$ . Notons

$$\text{Can}^i : \mathbf{E}' \rightleftharpoons \mathbf{F}'_i : \text{Var}'_i, \quad \text{pour tout } i \in I$$

les applications induites par les applications canonique et variation

$$\text{Can}' : \mathbf{E}' \rightleftharpoons \mathbf{F}' : \text{Var}'.$$

Comme précédemment, on garde la convention des indices lorsque c'est l'espace de départ de l'on restreint et les exposants lorsque c'est l'espace d'arrivée.

On va relier ces applications aux applications canonique et variation locales. On a  $\mathbf{F}'_i = \text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i})$  l'espace des microsolutions de  $\mathcal{M}'$  en  $a_i$ . Les applications canonique et variation au niveau des espaces de fonctions (voir la section A.3.1)

$$\text{can} : \tilde{\mathcal{O}}_{a_i} \rightleftharpoons \mathcal{C}_{a_i} : \text{var}$$

induisent par fonctorialité deux applications

$$\text{can}^i : \mathbf{E}' \rightleftharpoons \mathbf{F}'_i : \text{var}'_i,$$

dites applications canonique et variation *locales*.

Notons  $T_i \in \text{GL}(\mathbf{E}')$  l'automorphisme de monodromie autour du pôle  $a_i$  dans le sens indirect. On a donc l'égalité  $\text{var}'_i \circ \text{can}^i = 1 - T_i$ . Remarquer que l'application  $\text{Can}^i$  correspond au prolongement le long du cercle à l'infini de l'angle  $-\eta_J$  vers l'angle  $\eta_I$  puis vers le pôle  $a_i$  le long de la demi-droite issue de  $a_i$  d'angle  $\eta_I$ , alors que l'application  $\text{can}^i$  correspond au prolongement le long du cercle à l'infini de l'angle  $-\eta_J$  vers l'angle  $\eta_I + \pi$  puis vers le pôle  $a_i$  le long de la demi-droite issue de  $a_i$  d'angle  $\eta_I + \pi$ .

Les applications canonique et variation locales et semi-locales sont reliées par la proposition suivante.

**PROPOSITION A.5.3.** *On a les égalités*

$$\text{Can}^i = \text{can}^i \cdot T_{i-1} \cdots T_1 \quad \text{et} \quad \text{Var}'_i = \text{var}'_i,$$

où  $T_k = 1 - \text{var}'_k \text{can}^k$  désigne l'action de monodromie autour de  $a_k$  dans l'orientation indirecte. En particulier, si l'on identifie  $I$  muni de son ordre naturel donné par l'angle  $\eta_I$  et l'ensemble  $\{1, 2, \dots, m\}$ , l'application

$$\Theta_i := 1 - \text{Var}'_1 \text{Can}^1 - \cdots - \text{Var}'_i \text{Can}^i = T_i \cdots T_1.$$

est inversible et on a inversement

$$\text{can}^i = \text{Can}^i \cdot \Theta_{i-1}^{-1} \quad \text{et} \quad \text{var}'_i = \text{Var}'_i.$$

**DÉMONSTRATION.** Pour les applications canoniques, le résultat est immédiat en comparant les prolongements analytiques (voir figure 4).

Pour les composantes de l'application variation, notons  $v_i : \mathbf{F}' \rightarrow \mathbf{E}'$  l'application qui à une microsolution généralisée  $\tilde{\varphi}$  associe la différence  $\varphi_i^+ - \varphi_i^-$  où  $\varphi_i^+$  (resp.  $\varphi_i^-$ )

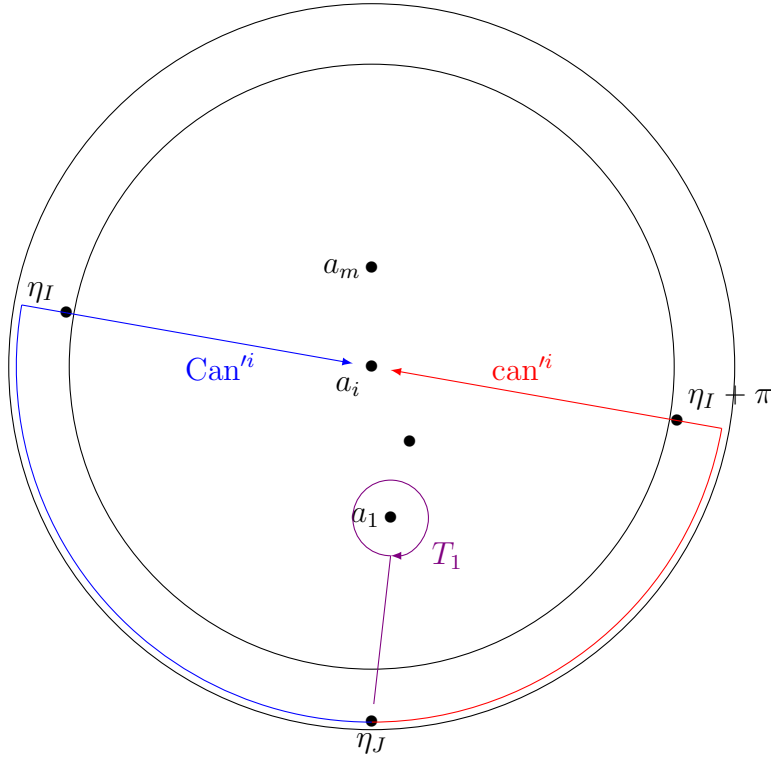


FIGURE 4. Applications canoniques locales et semi-locales

est le prolongement d'un représentant de  $\check{\varphi}$  de l'infini dans la direction  $\eta_I$  vers un voisinage de  $a_i$  selon la demi-droite  $\delta_{a_i, \eta_i}^-$  puis faisant un demi-tour autour de  $a_i$  dans le sens direct (resp. indirect) puis repartant à l'infini le long de la demi-droite  $\delta_{a_i, \eta_I + \pi}$  (resp.  $\delta_{a_i, \eta_I - 0\pi}$ ) puis allant à l'angle  $\eta_J$  à l'infini en suivant le cercle à l'infini. On a immédiatement  $\text{Var}' = \sum_{i \in I} v_i$ ,  $v_i(\mathbf{F}'_j) = 0$  pour tout  $j \neq i$  et  $v_i|_{\mathbf{F}'_i} = \text{var}'_i$ . On a donc bien  $\text{Var}'_i = v_i$  que l'on identifie avec  $\text{var}'_i$  par prolongement selon la direction  $\eta_I$  comme précédemment.  $\square$

REMARQUE A.5.4. Côté  $\mathcal{M}$ , les choix donnent lieu à des formules un peu différentes. Avec l'identification  $\iota_{-\theta}$ , les formules deviennent

$$\text{Can}^j = \text{can}^j \quad \text{et} \quad \text{Var}_j = T_1 \cdots T_{j-1} \text{var}_j$$

où  $T_k = 1 - \text{var}_k \text{can}^k$  désigne l'action de monodromie autour de  $b_k$  dans l'orientation directe.

Des calculs algébriques de la section A.6, on a donc que l'application  $\text{Can}' \circ \text{Var}'$  est égale à  $(\text{can}^i \Theta_{i-1} \text{var}'^j)_{i,j \in I}$ , c'est-à-dire que l'on peut calculer les applications semi-locales uniquement à partir des applications locales  $\text{can}^i$ ,  $\text{var}'_i$  et les monodromies  $T_i$ .

Revenons à la situation de  $\mathcal{M}$ . L'espace des solutions au voisinage de l'infini près de l'angle  $\eta_i$  admet une graduation ordonnée  $\mathbf{E} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{E}_i$ . Soit  $M$  la monodromie de  $\mathcal{M}$  autour de l'infini dans le sens indirect (donc direct dans la carte à distance finie  $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{P}^1 - \{\infty\}$ ). On a donc  $M = 1 - \text{Var} \circ \text{Can}$ , qui en identifiant les espaces coté  $\mathcal{M}'$  grâce au théorème A.4.5, est égal à  $1 - \text{Can}' \circ \text{Var}'$ .

PROPOSITION A.5.5. *La monodromie  $M = 1 - \text{Var} \circ \text{Can} = 1 - \text{Can}' \circ \text{Var}'$  se décompose de manière unique comme  $M = u_-^{-1} h u_+$  avec  $(u_+, u_-, h) \in U_+ \times U_- \times H$ .*

De plus, les applications  $(u_+, u_-, h)$  sont déterminées par l'équation

$$u_- - hu_+ = (\text{can}^i \text{var}'_j)_{i,j \in I}.$$

COROLLAIRE A.5.6. Les applications  $\text{Can}^i : \mathbf{E}' \rightleftarrows \mathbf{F}'_i : \text{Var}'_i$  pour tout  $i \in I$  définissent une représentation inversible du graphe  $\Gamma(1, \#(I))$  sur l'espace vectoriel  $\mathbf{E}' \oplus \bigoplus_{i \in I} \mathbf{F}'_i \simeq W \oplus \bigoplus_{i \in I} V_i$ .

DÉMONSTRATION. La décomposition de  $M$  sous la forme  $u_- hu_+$  est équivalente au fait que les déterminants des endomorphismes  $(M_{i,j})_{\substack{i \leq -\theta^l \\ j \leq -\theta^l}}$  soient inversibles, ce qui est exactement la condition d'inversibilité de la représentation de graphe.  $\square$

## A.6. Lemmes algébriques

On donne ici le lien entre les applications canonique et variation locales et globales, les monodromies locales et les données de Stokes. Tout est fait avec des symboles abstraits. Le lecteur pourra ainsi remplacer les symboles pour les applications  $\text{can}^i_j$ ,  $\text{can}^j_i$ ,  $\text{var}^j_i$ ,  $\text{var}^i_j$  suivant les cas.

On considère deux  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriel  $V$  et  $W$  de dimension finie,  $I$  et  $J$ -gradués respectivement.

LEMME A.6.1. Soient

$$a^j : V \rightarrow W_j \quad \text{et} \quad b_j : W_j \rightarrow V$$

des applications tels que les  $1 + b_j a^j$  soient inversibles. Alors l'application

$$T := (1 + b_n a^n)(1 + b_{n-1} a^{n-1}) \cdots (1 + b_1 a^1) \in \text{GL}(V)$$

admet une décomposition  $T = 1 + vu$  pour deux applications  $u \in \text{Hom}(V, W)$  et  $v \in \text{Hom}(W, V)$ .

DÉMONSTRATION. On pose par exemple

$$u^j := (u^j_1 \cdots u^j_m) = a^j \varphi_{j-1} \in \text{Hom}(V, W_j) \quad \text{et} \quad v_j := \begin{pmatrix} v^1_j \\ \vdots \\ v^m_j \end{pmatrix} = b_j \in \text{Hom}(W_j, V)$$

où  $\varphi_l := (1 + b_l a^l)(1 + b_{l-1} a^{l-1}) \cdots (1 + b_1 a^1) \in \text{GL}(V)$  pour tout  $1 \leq l \leq n$ , puis on en déduit  $u$  et  $v$ .  $\square$

De même, on a

LEMME A.6.2. Soient

$$a'^j : V \rightarrow W_j \quad \text{et} \quad b'_j : W_j \rightarrow V$$

des applications tels que les  $1 + b'_j a'^j$  soient inversibles. Alors l'application

$$T := (1 + b'_1 a'^1)(1 + b'_2 a'^2) \cdots (1 + b'_n a'^n) \in \text{GL}(V)$$

admet une décomposition  $T = 1 + vu$  pour deux applications  $u \in \text{Hom}(V, W)$  et  $v \in \text{Hom}(W, V)$ .

DÉMONSTRATION. On pose par exemple

$$u^j := (u^j_1 \cdots u^j_m) = a'^j \in \text{Hom}(V, W_j) \quad \text{et} \quad v_j := \begin{pmatrix} v^1_j \\ \vdots \\ v^m_j \end{pmatrix} = \varphi_{j-1} b'_j \in \text{Hom}(W_j, V)$$

où  $\varphi_l := (1 + b'_1 a'^1)(1 + b'_2 a'^2) \cdots (1 + b'_l a'^l) \in \text{GL}(V)$  pour tout  $1 \leq l \leq n$ , puis on en déduit  $u$  et  $v$ .  $\square$

Énonçons un lemme élémentaire bien connu :

LEMME A.6.3. *Soient*

$$e : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F} \quad \text{et} \quad f : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$$

*deux applications linéaires entre des  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie.*

*Alors  $1 + fe \in \text{End}(\mathbb{E})$  est inversible si et seulement si  $1 + ef \in \text{End}(\mathbb{F})$  est inversible.*

DÉMONSTRATION. On note  $m, n$  les dimensions respectives de  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  et  $\chi_{fe}, \chi_{ef} \in \mathbf{C}[X]$  les polynômes caractéristiques de  $fe$  et  $ef$ . Alors on a l'identité classique  $X^m \chi_{ef}(X) = X^n \chi_{fe}(X)$ . On déduit le lemme en évaluant en  $X = 1$ .  $\square$

On a alors la

PROPOSITION A.6.4. *Soient  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  et  $W = \bigoplus_{j \in J} W_j$  deux  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels muni d'une graduation ordonnée et soient  $u \in \text{Hom}(V, W)$  et  $v \in \text{Hom}(W, V)$  deux applications linéaires. On note*

$$u_i^j : V_i \rightarrow W_j \quad \text{et} \quad v_j^i : W_j \rightarrow V_i$$

*les composantes et  $u$  et  $v$  selon les graduations. De plus, on note*

$$u^j := (u_1^j \cdots u_m^j) \in \text{Hom}(V, W_j) \quad \text{et} \quad v^i := (v_1^i \cdots v_n^i) \in \text{Hom}(W, V_i)$$

*les composantes "ligne" et*

$$u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ \vdots \\ u_i^n \end{pmatrix} \in \text{Hom}(V_i, W) \quad \text{et} \quad v_j := \begin{pmatrix} v_j^1 \\ \vdots \\ v_j^m \end{pmatrix} \in \text{Hom}(W_j, V)$$

*les composantes "colonnes" de  $u$  et  $v$  (pour tout  $i \in I$  et tout  $j \in J$ ).*

*Alors*

*(1) les applications*

$$1 + \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^l \end{pmatrix} (v_1 \cdots v_l) = \left( \delta_{j,j'} + \sum_{k \in I} u_k^j v_{j'}^k \right)_{1 \leq j, j' \leq l} \in \text{End} \left( \bigoplus_{1 \leq a \leq l} W_a \right)$$

*sont inversibles pour tout  $l \in J$  si, et seulement si, pour tout  $l \in J$  les applications*

$$\varphi_l = 1 + (v_1 \cdots v_l) \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^l \end{pmatrix} = 1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k \in I} v_j^k u_k^j \in \text{End}(V)$$

*sont inversibles si, et seulement si, pour tout  $j \in J$  il existe des applications*

$$a^j : V \rightarrow W_j \quad \text{et} \quad b_j : W_j \rightarrow V$$

*tels que les  $1 + b_j a^j$  sont inversibles et*

$$1 + vu = (1 + b_n a^n)(1 + b_{n-1} a^{n-1}) \cdots (1 + b_1 a^1),$$

*si, et seulement si, pour tout  $j \in J$  il existe des applications*

$$a'^j : V \rightarrow W_j \quad \text{et} \quad b'_j : W_j \rightarrow V$$

*tels que les  $1 + b'_j a'^j$  sont inversibles et*

$$1 + vu = (1 + b'_1 a'^1)(1 + b'_2 a'^2) \cdots (1 + b'_n a'^n).$$

(2) les applications

$$1 + \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^l \end{pmatrix} (u_1 \cdots u_l) = \left( \delta_{i',i} + \sum_{k \in J} v_k^i u_{i'}^k \right)_{1 \leq i, i' \leq l} \in \text{End} \left( \bigoplus_{1 \leq a \leq l} V_a \right)$$

sont inversibles pour tout  $l \in I$  si, et seulement si, pour tout  $l \in J$  les applications

$$\psi_l = 1 + (u_1 \cdots u_l) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^l \end{pmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^l \sum_{k \in J} u_i^k v_k^i \in \text{End}(W)$$

sont inversibles si, et seulement si, il existe des applications  $u_+, h, u_- \in \text{End}(\bigoplus_{i \in I} V_i)$  tels que  $u_+$  est unipotente supérieure,  $u_-$  est unipotente inférieure,  $h$  est diagonale inversible et

$$1 + vu = u_-^{-1} h u_+,$$

si, et seulement si, il existe des applications  $v_+, h, v_- \in \text{End}(\bigoplus_{i \in I} V_i)$  tels que  $v_+$  est unipotente supérieure,  $v_-$  est unipotente inférieure,  $h$  est diagonale inversible et

$$1 + vu = v_- h v_+^{-1}.$$

De plus, il existe des formules explicites reliant les différentes applications dans les deux cas.

DÉMONSTRATION. Les deux premières conditions sont équivalentes grâce au lemme A.6.3 appliqué à  $\mathbb{E} := V$  et  $\mathbb{F} := \bigoplus_{1 \leq a \leq l} W_a$  pour tout  $l$ .

Ensuite, pour le premier point, le point clef est l'application  $\varphi_l$  (pour  $1 \leq l \leq n$ ) qui peut être défini des trois manières différentes suivantes suivant l'implication que l'on veut montrer :

$$\begin{aligned} \text{GL}(V) \ni \varphi_l &= 1 + (v_1 \cdots v_l) \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^l \end{pmatrix} = 1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k \in I} v_j^k u_k^j \\ &= (1 + b_l a^l)(1 + b_{l-1} a^{l-1}) \cdots (1 + b_1 a^1) \\ &= (1 + b'_1 a'^1)(1 + b'_2 a'^2) \cdots (1 + b'_l a'^l). \end{aligned}$$

Ensuite, on pose

$$u^j := (u_1^j \cdots u_m^j) = a^j \varphi_{j-1} \in \text{Hom}(V, W_j) \quad \text{et} \quad v_j := \begin{pmatrix} v_j^1 \\ \vdots \\ v_j^m \end{pmatrix} = b_j \in \text{Hom}(W_j, V)$$

et

$$u^j := (u_1^j \cdots u_m^j) = a'^j \in \text{Hom}(V, W_j) \quad \text{et} \quad v_j := \begin{pmatrix} v_j^1 \\ \vdots \\ v_j^m \end{pmatrix} = \varphi_{j-1} b'_j \in \text{Hom}(W_j, V).$$

En particulier, on a aussi  $a^j \varphi_{j-1} = a'^j$  et  $b_j = \varphi_{j-1} b'_j$ .

Pour le second point, on définit l'application  $(u_i, v^i) \mapsto (h, u_+, u_-, v_+, v_-)$  par

$$h = 1 + \sum_{i \in I} v^i \psi_{i-1} u_i \in \text{End}(V)$$

(dans les deux cas), puis

$$u_- = 1 - (v^i \psi_{i-1}^{-1} u_{i'})_{i > i'} \quad hu_+ = 1 + (v^i \psi_{i-1}^{-1} u_{i'})_{i \leq i'}$$

et

$$v_- h = 1 + (v^i \psi_{i'-1}^{-1} u_{i'})_{i \geq i'} \quad v_+ = 1 - (v^i \psi_{i'-1}^{-1} u_{i'})_{i < i'}.$$

Réciproquement, on a  $vu = u_-^{-1}(hu_+ - u_-)$  et on pose  $u_i : V_i \rightarrow W$  les composantes de  $u \in \text{Hom}(\bigoplus_{i \in I} V_i, W)$  et  $v^i : W \rightarrow V_i$  les projections de  $v \in \text{Hom}(W, \bigoplus_{i \in I} V_i)$ . Elles vont immédiatement vérifier que les blocs

$$1 + \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^l \end{pmatrix} (u_1 \cdots u_l) = \left( \delta_{i',i} + \sum_{k \in J} v_k^i u_{i'}^k \right)_{1 \leq i, i' \leq l} \in \text{GL} \left( \bigoplus_{1 \leq a \leq l} V_a \right)$$

sont inversibles.

Le lecteur pourra faire ces calculs où consulter les lemmes 7.2 et 7.3 de [Boa13] page 28 où ils sont esquissés.  $\square$

REMARQUE A.6.5. Dans la proposition précédente, la décomposition de  $1 + vu$  en  $u_-^{-1}hu_+$  est *unique* tandis que la décomposition en  $(1 + b_n a^n)(1 + b_{n-1} a^{n-1}) \cdots (1 + b_1 a^1)$  ne l'est pas. En effet, le groupe  $\prod_{j \in J} \text{GL}(W_j)$  agit librement sur les  $(a^j, b_j)_{j \in J}$  et préserve l'égalité  $1 + vu = (1 + b_n a^n)(1 + b_{n-1} a^{n-1}) \cdots (1 + b_1 a^1)$ .

### A.7. Démonstrations de la section sur la transformée de Laplace multiplicative

On donne ici les démonstration omises des sections précédentes de ce chapitre.

DÉMONSTRATION DU LEMME A.1.4. En effet, il est suffisant de montrer que si  $\hat{\varphi}$  est une fonction définie sur un secteur du type  $\Sigma := \{z \in \mathbf{C}^* : 0 < |z| < R \text{ et } \alpha < \arg(z) < \beta\}$  avec  $|\beta - \alpha| < 2\pi$  alors il existe une fonction  $\check{\varphi}$  définie sur un secteur ramifié  $\Sigma^{ram} := \{z \in \mathbf{C}^* : 0 < |z| < R \text{ et } \alpha < \arg(z) < \beta + 2\pi\}$  tel que  $\check{\varphi}(e^{2i\pi} z) - \check{\varphi}(z) = \hat{\varphi}(z)$ . C'est alors une conséquence immédiate de  $H^1(D_R^*, \mathcal{O}) = 0$  qui est un cas particulier du théorème de Mittag-Leffler, où  $D_R^*$  désigne le disque ouvert de rayon  $R$  épointé en 0. En effet, on prend un recouvrement du disque épointé  $D_R^*$  par deux secteurs  $S$  et  $S'$  tels que  $S \cap S' = \Sigma \cup \Sigma'$  avec  $\Sigma'$  un secteur disjoint de  $\Sigma$ . Alors on considère le cocycle de ce recouvrement égal à  $\hat{\varphi}$  sur  $\Sigma$  et à 0 sur  $\Sigma'$ . Comme  $H^1(D_R^*, \mathcal{O}) = 0$ , ce cocycle est un cobord  $(\check{\varphi}, \check{\varphi}')$  avec  $\check{\varphi}$  définie sur  $S$  et  $\check{\varphi}'$  défini sur  $S'$ . Comme  $\check{\varphi} = \check{\varphi}'$  sur  $\Sigma'$ , les fonctions se recollent en une fonction holomorphe sur le secteur ramifié  $\Sigma^{ram}$  et la différence des déterminations sur  $\Sigma$  est bien égale à  $\hat{\varphi}$ .  $\square$

Montrons que les définitions des transformées de Laplace et Laplace inverse sont bien définies.

Pour montrer le lemme A.2.2, nous utiliserons le lemme technique suivant :

LEMME A.7.1. Soit  $\varphi$  une fonction holomorphe définie sur un secteur  $\{|z| > 0 \text{ et } |\arg(z) - \theta| < \varepsilon\}$  d'ouverture  $\varepsilon < \pi/2$  et  $y$  vérifiant une inégalité du type  $|\varphi(z)| \leq C e^{A|z|}$  pour deux constantes  $A, C \in \mathbf{R}_+$ . Alors

- (1) l'intégrale  $I_{\theta'}(\zeta) := \int_{\delta_{0,\theta'}} \varphi(z) e^{-z\zeta} dz$  définit une fonction holomorphe sur  $\Re(e^{i\theta'} \zeta) > A$  pour tout  $|\theta' - \theta| < \varepsilon$ ,
- (2) la fonction  $\zeta \mapsto I_{\theta'}(\zeta)$  est une fonction bornée sur le domaine  $\Re(e^{i\theta} \zeta) \geq A' > A$ ,



(3) les fonctions  $I_\theta$  et  $I_{\theta'}$  sont égales sur l'intersection de leur domaine de définition.

DÉMONSTRATION. Soit  $\varphi$  une fonction vérifiant les hypothèses. Alors pour  $z \in \delta_{0,\theta'}$ , on a l'inégalité

$$|\varphi(z) e^{-z\zeta}| \leq C e^{(A - \Re(e^{i\theta'} \zeta))|z|}$$

donc la fonction  $z \mapsto \varphi(z) e^{-z\zeta}$  est bien intégrable sur  $\delta_{0,\theta'}$  pour tout  $\Re(e^{i\theta'} \zeta) > A$ . Par le théorème de convergence dominé holomorphe, on a bien que  $\zeta \mapsto I_{\theta'}(\zeta)$  est une fonction holomorphe sur  $\Re(e^{i\theta'} \zeta) > A$ .

Le point (2) est clair car on a l'inégalité

$$\left| \int_{\delta_{0,\theta'}} \varphi(z) e^{-z\zeta} dz \right| \leq \int_{\mathbf{R}_+} C e^{(A - \Re(e^{i\theta'} \zeta))|z|} dz \leq \frac{C}{\Re(e^{i\theta'} \zeta) - A}.$$

Supposons  $\theta' > \theta$  pour simplifier les idées. Par le théorème de Cauchy, la différence  $I_{\theta'}(\zeta) - I_\theta(\zeta)$  est égale à la limite pour  $R \rightarrow +\infty$  de l'intégrale

$$\int_{z=Re^{i\alpha}} \varphi(z) e^{-z\zeta} dz \quad \text{avec } \theta < \alpha < \theta'$$

Soit un réel  $\eta > 0$ . Considérons l'ensemble des  $\zeta$  tels que  $\Re(e^{i\alpha} \zeta) \geq A + \eta$  pour tout  $\theta \leq \alpha \leq \theta'$ . Cet ensemble est non vide car  $\varepsilon < \pi/2$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{z=Re^{i\alpha}} \varphi(z) e^{-z\zeta} dz \right| &\leq \int_{z=Re^{i\alpha}} C e^{(A - \Re(e^{i\alpha} \zeta))R} dz, \\ &\leq \int_{z=Re^{i\alpha}} C e^{-\eta R} dz, \\ &= C(\theta' - \theta)\pi R e^{-\eta R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

D'où  $I_{\theta'}(\zeta) = I_\theta(\zeta)$  sur le domaine pour  $\zeta$  précédent, donc sur l'intersection des domaines de définitions. □

DÉMONSTRATION DU LEMME A.2.2. On a fait plusieurs choix dans la définition. Le choix de  $\varepsilon$  n'a pas d'influence. En effet, pour deux choix, on fait la différence des deux sommes d'intégrales et on utilise le théorème de Cauchy et l'égalité  $\check{\varphi}(e^{2i\pi} z) - \check{\varphi}(z) = \hat{\varphi}(z)$  pour trouver zéro.

Le choix d'un représentant  $(\check{\varphi}, \hat{\varphi})$  de  $[\check{\varphi}, \hat{\varphi}]$  n'a pas non plus d'influence. En effet, un autre représentant de la classe  $[\check{\varphi}, \hat{\varphi}]$  est de la forme  $(\check{\varphi} + h, \hat{\varphi})$  où  $h$  est une fonction holomorphe en  $a$ . Quitte à supposer  $\varepsilon$  suffisamment petit, on trouve alors que la différence des deux définitions est égale à  $\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,\varepsilon)^+} h(z) e^{-z\zeta} dz$  qui est nul par le théorème de Cauchy.

Montrons maintenant que  $\mathfrak{L}_{a,\theta}([\check{\varphi}, \hat{\varphi}])$  définit une fonction au voisinage à l'infini de  $I_\theta$ . On choisit un représentant de  $[\check{\varphi}, \hat{\varphi}]$  tel que  $\check{\varphi}$  soit définie sur un secteur ramifié et  $\hat{\varphi}$  sur un secteur ouvert  $S_{a,\varepsilon} := \{z \in \mathbf{C} - \{a\} : |\arg(z - a) - \theta| < \varepsilon\}$ . Comme  $\hat{\varphi}$  est à croissance exponentielle à l'infini, quitte à diminuer la valeur de  $\varepsilon$ , on peut supposer qu'il existe deux constantes  $A, C \in \mathbf{R}_+$  tels que  $|\hat{\varphi}(z)| \leq C e^{A|z|}$  pour tout  $z \in S_{a,\varepsilon}$ . L'intégrale avec  $\check{\varphi}$  est clairement holomorphe sur tout  $\mathbf{C}$  tout comme la fonction  $\zeta \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_0^{a+\varepsilon e^{i\theta'}} \hat{\varphi}(z) e^{-z\zeta} dz$ . D'où en utilisant les points (1) et (3) du lemme A.7.1 pour la fonction  $\hat{\varphi}$ , on déduit que  $\mathfrak{L}_{a,\theta}([\check{\varphi}, \hat{\varphi}])$  est holomorphe sur les demi-plans  $\Re(e^{i\theta'} \zeta) > A$  pour tout  $\theta'$  tel que  $|\theta' - \theta| < \varepsilon'$ .

Montrons que  $\mathfrak{L}_{a,\theta}([\check{\varphi}, \hat{\varphi}]) \in \Gamma(I_\theta, e^{-a\bullet} \mathcal{O}^{ss-exp})$ . En faisant le changement de variable  $z \leftarrow z + a$ , en utilisant l'égalité (A.2.a), on peut supposer  $a = 0$  et il suffit de montrer que  $\mathfrak{L}_{0,\theta}([\check{\varphi}, \hat{\varphi}])$  est à croissance sous-exponentielle. Du point (2) du lemme A.7.1, on déduit que la seconde intégrale est une fonction bornée en  $\zeta$  uniformément en  $\varepsilon$  sur le domaine  $\Re(e^{i\theta}\zeta) \geq A' > A$ . Pour la première intégrale, il existe une constante  $D \in \mathbf{R}_+$  telle que l'on ait l'inégalité

$$(A.7.a) \quad \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,\varepsilon)^+} \check{\varphi}(z) e^{-z\zeta} dz \right| \leq \frac{e^{\varepsilon|\zeta|}}{2\pi} \int_{C(0,\varepsilon)^+} |\check{\varphi}(z)| dz \leq D \cdot e^{\varepsilon'|\zeta|}$$

pour tout  $\varepsilon' > \varepsilon$ . On déduit alors de (A.7.a) que  $\mathfrak{L}_{0,\theta}([\check{\varphi}, \hat{\varphi}])$  est à croissance exponentielle de type  $\leq \varepsilon'$  pour tout  $\varepsilon' > \varepsilon$  pour toute direction du demi-cercle ouvert  $I_\theta$ . Comme on peut prendre  $\varepsilon$  arbitrairement petit, on en déduit que  $\mathfrak{L}_{0,\theta}([\check{\varphi}, \hat{\varphi}])$  est bien à croissance sous-exponentielle.  $\square$

DÉMONSTRATION DU LEMME A.2.4. Tout d'abord, il est clair que le choix du point  $A$  n'a pas d'importance car la différence des fonctions  $\check{\varphi}$  pour deux choix différents est une fonction entière, en particulier holomorphe en 0.

Ensuite, en écrivant  $\psi(\zeta) = e^{-a\zeta} \tilde{\psi}(\zeta)$  et en effectuant le changement de variable  $z \leftarrow z + a$ , on peut supposer  $a = 0$  et on doit montrer que l'application

$$\mathfrak{L}_{0,\theta}^{-1} : \Gamma(I_\theta, \mathcal{O}^{ss-exp}) \rightarrow \mathcal{H}_{0,\theta}^+$$

est bien définie. Par un changement de variable  $\zeta \leftarrow -\zeta + A$ , on a  $\int_{\delta_{A,\tau}^-} \psi(\zeta) e^{\zeta z} d\zeta = -e^{Az} \int_{\delta_{0,\tau}} \psi(A + \zeta) e^{\zeta z} d\zeta$ , donc en utilisant le lemme A.7.1 points (1) et (3), on en déduit que les fonctions  $\varphi_\tau : z \mapsto \int_{\delta_{A,\tau}^-} \psi(\zeta) e^{\zeta z} d\zeta$  pour  $\tau$  vérifiant  $|\tau + \theta| < \pi/2 + \varepsilon$  définissent des fonctions holomorphes sur les demi-plans  $H_\tau := \{z \in \mathbf{C} : \Re(z e^{i\tau}) < 0\}$  et se recollent en une fonction  $\varphi$  holomorphe définie sur l'union des demi-plans  $H_\tau$ , c'est-à-dire sur le secteur ramifié  $\{|z| > 0 \text{ et } -\varepsilon/2 - 2\pi < \arg(z) - \theta < \varepsilon/2\}$ .

Il est clair que la fonction  $\hat{\varphi} : z \mapsto \int_{\delta^-} \psi(\zeta) e^{\zeta z} d\zeta$  est bien égale à la différence des déterminations de la fonction  $\varphi$  au voisinage de  $\theta$  et est bien définie au voisinage de la demi-droite  $\delta_{0,\theta}$ . De plus, elle est bien à croissance exponentielle en utilisant pour les fonctions  $e^{-Az} \varphi_{-\theta-\pi/2-\varepsilon/2}(z)$  et  $e^{-Az} \varphi_{-\theta+\pi/2+\varepsilon/2}(z)$  le point (2) du lemme A.7.1.  $\square$

Montrons que les transformées de Laplace et Laplace inverse sont bien inverses l'une de l'autre.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION A.2.5. Montrons que la composition  $\mathfrak{L}_{a,\theta}^{-1} \circ \mathfrak{L}_{a,\theta}$  est égale à l'identité de  $\mathcal{H}_{a,\theta}^+$ . On a  $\mathfrak{L}_{a,\theta}^{-1} \circ \mathfrak{L}_{a,\theta}([\check{\varphi}, \hat{\varphi}])(x) = [\check{\varphi}', \hat{\varphi}']$  avec  $\check{\varphi}'(x)$  définie par

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_{A,\tau}^-} \int_{C(a,\varepsilon)^+} \check{\varphi}(z) e^{-z\zeta} e^{\zeta x} dz d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_{A,\tau}^-} \int_{\delta_{a+\varepsilon e^{i\theta},\theta}} \hat{\varphi}(z) e^{-z\zeta} e^{\zeta x} dz d\zeta$$

pour un certain angle  $\tau$  qui dépend du  $x$  choisi. Les intégrandes sont des fonctions intégrables donc on peut inverser les domaines d'intégrations par le théorème de Fubini. Le premier terme est alors égal à  $\frac{-1}{2i\pi} \int_{C(a,\varepsilon)^+} \check{\varphi}(z) \frac{e^{A(x-z)}}{x-z} dz$ , qui est égal à  $\check{\varphi}(x)$  par le théorème des résidus. Le second terme est égal à

$$\frac{e^{Ax}}{2i\pi} \int_{\delta_{a+\varepsilon e^{i\theta},\theta}} \hat{\varphi}(z) \frac{e^{-Az}}{z-x} dz,$$

Montrons que c'est une fonction holomorphe en 0. Il est clair que l'intégrande est une fonction holomorphe pour tout  $|x| < \varepsilon/2$ . De plus, l'intégrande est une fonction

intégrable. En effet,  $\hat{\varphi}$  vérifie une inégalité de la forme  $|\hat{\varphi}(z)| \leq C e^{A'|z|}$  pour  $C, A' \in \mathbf{R}$  et on peut choisir  $A \in \mathbf{C}$  de module arbitrairement grand. En particulier, on peut prendre  $A$  tel que  $A \in e^{-i\theta} \mathbf{R}_+$  et  $|A| > A'$ . Alors si on prend  $|x| < \varepsilon/2$ , on a

$$\left| \hat{\varphi}(z) \frac{e^{-Az}}{z-x} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon - \varepsilon/2} e^{A'|z| - \Re(Az)} = \frac{2C}{\varepsilon} e^{(A' - |A|)|z|},$$

qui est bien intégrable sur  $\delta_{a+\varepsilon e^{i\theta}, \theta}$ . Donc la classe de  $\check{\varphi}'$  est égale à la classe de  $\check{\varphi}$ . Comme  $\hat{\varphi}$  est définie comme la différence des déterminations de  $\check{\varphi}$  et que  $\hat{\varphi}$  vérifie aussi cette propriété, on a bien  $\hat{\varphi} = \check{\varphi}$  d'où  $[\check{\varphi}', \hat{\varphi}] = [\check{\varphi}, \hat{\varphi}]$ .

Montrons que la composition  $\mathfrak{L}_{a,\theta} \circ \mathfrak{L}_{a,\theta}^{-1}$  est égale à l'identité de  $\Gamma(I_\theta, \mathcal{O}^{ss-exp})$ . On a  $\mathfrak{L}_{a,\theta} \circ \mathfrak{L}_{a,\theta}^{-1}(\psi)(x) = \Psi(x)$  avec

$$\Psi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,\varepsilon)^+} \int_{\delta_{A,\tau}^-} \psi(z) e^{z\zeta} e^{-\zeta x} dz d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_{a+\varepsilon e^{i\theta}, \theta}^-} \int_{\delta^-} \psi(z) e^{z\zeta} e^{-\zeta x} dz d\zeta.$$

Les intégrandes sont des fonctions intégrables donc on peut inverser les domaines d'intégrations par le théorème de Fubini. La première intégrale est égale à

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_{A,\tau}^-} \psi(z) \left( \int_{C(a,\varepsilon)^+} e^{(z-x)\zeta} d\zeta \right) dz.$$

D'après le théorème de Cauchy, l'intégrande est nulle, donc ce premier terme est nul. La seconde intégrale est égale à

$$(A.7.b) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta^-} \psi(z) \left( \int_{\delta_{a+\varepsilon e^{i\theta}, \theta}^-} e^{(z-x)\zeta} d\zeta \right) dz = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\delta} \psi(z) \frac{e^{(z-x)(a+\varepsilon e^{i\theta})}}{z-x} dz.$$

Alors  $z = x$  est l'unique pôle de l'intégrande, et comme  $\psi$  est à croissance sous-exponentielle, on peut écrire l'intégrale (A.7.b) comme la limite d'une intégrale sur un chemin de Cauchy entourant le pôle  $z = x$  dans le sens indirect. On trouve alors avec le théorème des résidus

$$\frac{-1}{2i\pi} \int_{\delta} \psi(z) \frac{e^{(z-x)(a+\varepsilon e^{i\theta})}}{z-x} dz = \psi(x).$$

Donc finalement  $\Psi(x) = \psi(x)$ . □

Montrons le résultat sur l'application  $\iota$ .

**DÉMONSTRATION DU LEMME A.3.6.** Cette application est injective. En effet, notons  $\gamma_i$  les générateurs du groupe fondamental  $\pi_1(\mathbf{C} - \Sigma, b_\infty)$  donnés par les chemins faisant un tour de  $a_i$  et aucun tour autour des  $a_j$  pour  $j \neq i$ . Soit  $f$  un représentant d'une classe de  $\mathcal{C}_\Sigma^{(exp)}$  dans le noyau de  $\iota_\theta$ . Comme  $\iota_\theta(f) = 0$ ,  $f$  est holomorphe en  $a_i$  sur le premier feuillet de  $\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}$  donc le prolongement de  $f$  le long de  $\gamma_i$  est égal à  $f$ . En prolongeant le long des compositions de  $\gamma_i$ , on en déduit que  $f$  est holomorphe sur  $\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}$  donc  $[f] = 0 \in \mathcal{C}_\Sigma^{(exp)}$ .

Pour la surjectivité, il existe des fonctions sur  $\tilde{\mathcal{O}}_{a_i}$  qui ne se prolongent pas à  $\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}$ . Par exemple, une solution d'une équation différentielle avec des pôles en dehors de  $\Sigma$ . De plus, la non surjectivité pour  $\mathcal{C}_\Sigma^{exp}$  est encore plus évidente car une fonction holomorphe sur  $\tilde{\mathcal{O}}_{a_i}$  n'a aucune raison d'être à croissance exponentielle (à fonction entière à croissance exponentielle près). □

Montrons l'isomorphisme entre micro-solutions généralisées et la somme des micro-solutions à distance finie.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION A.4.1. Par exactitude à gauche du foncteur  $\text{Hom}(\mathcal{M}', -)$ , on sait déjà que cette flèche est injective. Pour montrer la surjectivité, on construit la réciproque. Soit  $\check{\varphi}_i \in \text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i})$ . La variation de  $\check{\varphi}_i$  est un élément de  $\text{Hom}(\mathcal{M}', \tilde{\mathcal{O}}_{a_i})$ , en particulier par le théorème de Cauchy holomorphe, il s'étend sur le revêtement  $\widetilde{\mathbf{C} - \Sigma}$  et est à croissance exponentiel d'après le lemme 2.1.6. D'après la remarque A.2.7, en utilisant la composition  $\mathfrak{L}_{a,\theta}^{-1} \circ \mathfrak{L}_{a,\theta}$  au niveau des fonctions, on montre qu'il existe un représentant spécial  $\check{\varphi}_i^{sp}$  (non unique à priori) de la classe  $\check{\varphi}_i$  défini sur un revêtement universel de  $\mathbf{C} - \{a_i\}$ . On définit alors l'image de  $\check{\varphi}_i \in \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i})$  comme la classe de la fonction  $\sum_{i \in I} \check{\varphi}_i^{sp}$  dans  $\text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_\Sigma^{(exp)})$ . Cette classe est bien définie car si l'on change de représentant spécial, on ajoute une fonction holomorphe à croissance exponentielle.

Il est clair que la composition

$$\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_\Sigma^{(exp)}) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_{a_i})$$

est l'identité, car la seconde flèche correspond à la restriction d'un représentant. Cela démontre la surjectivité de (A.4.a).  $\square$

Montrons la propriété de commutation du diagramme du théorème A.4.5.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A.4.5. Quitte à changer de choix d'orientation, les deux cas sont symétriques. Montrons donc le résultat pour le diagramme (A.4.b). Soit  $\check{\varphi}$  un représentant d'une classe dans  $\text{Hom}(\mathcal{M}', \mathcal{C}_\Sigma^{(exp)})$ . Sa transformée de Laplace est égale à

$$\mathfrak{L}_\theta(\check{\varphi})(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R^+} \check{\varphi}(z) \cdot e^{-z\zeta} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_{Re^{i\theta}, \theta}} \text{Var}'(\check{\varphi})(z) \cdot e^{-z\zeta} dz.$$

Son image par Can passe juste au quotient par les fonctions entières, donc on peut toujours considérer le représentant ci-dessus. On remarque de plus que la première intégrale définit une fonction entière.

D'un autre coté, on a

$$\mathfrak{L}_{-\theta}^{-1'} \circ \text{Var}'(\check{\varphi})(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_{A,\theta}} \text{Var}'(\check{\varphi})(z) \cdot e^{-z\zeta} dz.$$

La différence

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_{Re^{i\theta}, \theta}} \text{Var}'(\check{\varphi})(z) \cdot e^{-z\zeta} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_{A,\theta}} \text{Var}'(\check{\varphi})(z) \cdot e^{-z\zeta} dz,$$

est égal à une intégrale sur un chemin reliant  $A$  à  $Re^{i\theta}$  car  $\text{Var}'(\check{\varphi})$  est à croissance exponentielle et en utilisant le théorème de Cauchy. C'est donc une fonction holomorphe à croissance exponentielle et les classes dans  $\text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Sigma'}^{(exp)})$  de  $\text{Can} \circ \mathfrak{L}_\theta(\check{\varphi})$  et  $\mathfrak{L}_{-\theta}^{-1'} \circ \text{Var}(\check{\varphi})$  sont donc égales.  $\square$



## Calcul moulien et quelques exemples

### B.1. Quelques rappels de calcul moulien

On pose  $\Omega$  un alphabet et on note  $\Omega^*$  l'ensemble des mots écrits en l'alphabet  $\Omega$  (contenant en particulier le mot vide  $\emptyset$ ), ou si l'on préfère le monoïde libre engendré par l'ensemble  $\Omega$ . On notera  $r(\omega) := r \in \mathbf{N}$  la *longueur* d'un mot  $\omega = \omega_1 \cdots \omega_r$ .

REMARQUE B.1.1. Dans ce qui aura trait aux matrices de connexion de  $\nabla$ , on prendra l'alphabet  $\Omega = \hat{I}$ . Lorsque nous aurons affaire aux matrices de Stokes, on prendra l'alphabet noté  $\mathcal{W}$  dans ce cas,  $\mathbf{N}[\alpha : \alpha \in \mathcal{R}^+]$  où  $\mathcal{R}$  sera l'espace de racines associé au type irrégulier  $A \in \mathfrak{h}$  et  $\mathcal{R}^+ \subseteq \mathcal{R}$  est l'ensemble des racines positives pour un certain choix d'une chambre de Weyl. En particulier, dans le cas des matrices de Stokes, l'alphabet  $\mathcal{W}$  est muni d'une structure de semi-groupe.

On reprend la présentation de [Éca93] lecture 1 et de la partie B de [Sau09]. On pourra aussi se référer à l'article de vulgarisation du calcul moulien [Cre09] ou les articles initiaux [Éca81] chapitre 4 et 7 et [Éca92] §6.

**B.1.1. Algèbre des moules.** Soit  $\mathbf{A}$  une  $\mathbf{C}$ -algèbre. On appellera *moule*  $M^\bullet$  une collection d'éléments  $M^\omega \in \mathbf{A}$  pour tout mot  $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n \in \Omega^*$ . Un moule est donc une application  $M^\bullet : \Omega^* \rightarrow \mathbf{A}$  et  $M^\omega$  désigne l'évaluation de  $M^\bullet$  en  $\omega \in \Omega^*$ . On notera  $\mathcal{M}^\bullet(\Omega, \mathbf{A})$  l'ensemble des moules dans l'alphabet  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbf{A}$ . On prendra souvent  $\mathbf{A} = \mathbf{C}$  et on parlera dans ce cas de *moule scalaire*. On notera les mots  $\omega$  en gras et les caractères  $\omega_i$  en caractère normal avec des indices en bas.

On peut définir une structure de  $\mathbf{A}$ -algèbre sur  $\mathcal{M}^\bullet(\Omega, \mathbf{A})$ . L'addition et la multiplication scalaire sont définies composantes par composantes (en particulier si  $N^\bullet = cM^\bullet$  alors  $N^\omega = cM^\omega$  pour tout  $\omega \in \Omega^*$ ). La structure d'anneau est donnée par

$$M^\bullet \times N^\bullet : \omega \mapsto \sum_{\omega^1 \omega^2 = \omega} M^{\omega^1} N^{\omega^2},$$

où la somme est prise sur les  $r(\omega) + 1$  décompositions de  $\omega$  en deux mots (en particulier, cela inclut les décompositions avec  $\omega^1 = \emptyset$  et  $\omega^2 = \omega$ ). Remarquez que la multiplication des moules est associative mais non commutative en général.

Lorsque  $\Omega$  admet une structure de semi-groupe, on peut même munir  $\mathcal{M}^\bullet(\Omega, \mathbf{A})$  d'une structure d'algèbre à composition (c'est-à-dire que la composition se distribue bien sur la multiplication etc). En effet, notons  $\|\omega\| := \omega_1 + \cdots + \omega_r \in \Omega$  le poids d'un mots  $\omega = \omega_1 \cdots \omega_r$ . Alors la composition est définie par

$$M^\bullet \circ N^\bullet : \omega \mapsto \begin{cases} \sum_{\substack{n \geq 1, \omega^1, \dots, \omega^n \neq \emptyset \\ \omega^1 \dots \omega^n = \omega}} M^{\|\omega^1\| \cdots \|\omega^n\|} N^{\omega^1} \cdots N^{\omega^n} & \text{si } \omega \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si } \omega = \emptyset. \end{cases}$$

où la somme est prise sur toutes les décompositions de  $\omega$  comme concaténations de mots non vides. Cette composition est associative mais non commutative.

REMARQUE B.1.2. Lorsque  $\Omega$  n'est pas muni d'une structure de semi-groupe, la composition  $M^\bullet \circ N^\bullet$  a toujours un sens si l'on prend un moule  $M^\bullet$  tel que la valeur

$M^\omega$  ne dépend que de la longueur  $r(\omega)$  du mot  $\omega$ . Ce sera en particulier le cas pour le moule exponentiel ou le moule logarithmique.

On peut aussi construire les *dérivations mouliennes*, c'est-à-dire des opérateurs  $\mathbf{C}$ -linéaires  $D$  sur  $\mathcal{M}^\bullet(\Omega, \mathbf{A})$  tels que  $D(M^\bullet \times N^\bullet) = D(M^\bullet) \times N^\bullet + M^\bullet \times D(N^\bullet)$ . Pour toute application  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{A}$ , on peut définir la dérivation  $D_\varphi$  par  $D_\varphi M^\omega := (\varphi(\omega_1) + \dots + \varphi(\omega_r))M^\omega$  si  $\omega = \omega_1 \dots \omega_r$  est non vide, et  $D_\varphi M^\emptyset := 0$  sinon. De même, toute dérivation  $d : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$  induit une dérivation moulienne  $D$  par  $DM^\omega := d(M^\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega^*$ . Les dérivations mouliennes seront particulièrement utiles pour montrer des propriétés de symétries de certains moules.

**B.1.2. Quelques symétries de moules.** Notons  $\text{sh}\left(\begin{smallmatrix} \omega' & \omega'' \\ \omega \end{smallmatrix}\right)$  le nombre de façon d'obtenir le mot  $\omega$  par battage des mots  $\omega'$  et  $\omega''$ . On rappelle que si  $\omega' = \omega_1 \dots \omega_r$  et  $\omega'' = \omega_{r+1} \dots \omega_{r+l}$  alors les battages des mots  $\omega'$  et  $\omega''$  sont les mots  $\omega_{\sigma(1)} \dots \omega_{\sigma(r+l)}$  avec  $\sigma$  une permutation vérifiant  $\sigma^{-1}(1) < \dots < \sigma^{-1}(r)$  et  $\sigma^{-1}(r+1) < \dots < \sigma^{-1}(r+l)$ .<sup>1</sup> On vérifie immédiatement que le nombre de telles permutations est égal à  $\binom{r+l}{r}$  c'est-à-dire

$$\sum_{\omega \in \Omega^*} \text{sh}\left(\begin{smallmatrix} \omega' & \omega'' \\ \omega \end{smallmatrix}\right) = \frac{(r(\omega') + r(\omega''))!}{r(\omega')! r(\omega'')!}.$$

De même lorsque  $\Omega$  aura une structure de semi-groupe, on notera  $\text{shct}\left(\begin{smallmatrix} \omega' & \omega'' \\ \omega \end{smallmatrix}\right)$  le nombre de façon d'obtenir le mot  $\omega$  par battage contractant des mots  $\omega'$  et  $\omega''$ , c'est-à-dire par battage  $(\omega', \omega'') \mapsto \omega^*$  suivi potentiellement d'une contraction  $(\omega'_i, \omega''_j) \mapsto \omega'_i + \omega''_j$  pour une certaine paire  $(\omega'_i, \omega''_j)$  d'éléments adjacents de  $\omega^*$  provenant respectivement de  $\omega'$  et de  $\omega''$ .

EXEMPLE B.1.3. En particulier, l'ensemble des shuffles contractants des mots  $\omega' = \omega_1 \omega_2$  et  $\omega'' = \omega_3$  sont les cinq mots

$$\omega_1 \omega_2 \omega_3 \quad \omega_1 \omega_3 \omega_2 \quad \omega_3 \omega_1 \omega_2 \quad \omega_1(\omega_2 + \omega_3) \quad (\omega_1 + \omega_3)\omega_2,$$

et celui des mots  $\omega' = \omega_1 \omega_2$  et  $\omega'' = \omega_3 \omega_4$  sont les six mots obtenus par battage simple

$$\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \quad \omega_1 \omega_3 \omega_2 \omega_4 \quad \omega_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \quad \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_2 \quad \omega_3 \omega_1 \omega_4 \omega_2 \quad \omega_3 \omega_4 \omega_1 \omega_2$$

plus les sept mots obtenus avec des contractions

$$\begin{aligned} &\omega_1(\omega_2 + \omega_3)\omega_4 \quad (\omega_1 + \omega_3)\omega_2\omega_4 \quad \omega_1\omega_3(\omega_2 + \omega_4) \quad (\omega_1 + \omega_3)(\omega_2 + \omega_4) \\ &\omega_3\omega_1(\omega_2 + \omega_4) \quad (\omega_1 + \omega_3)\omega_4\omega_2 \quad \omega_3(\omega_1 + \omega_4)\omega_2. \end{aligned}$$

Un moule  $S^\bullet$  est dit *symétral*, resp. *symétré* si  $S^\emptyset = 1$  et si pour tous mots  $\omega', \omega'' \in \Omega^*$ ,

$$\begin{aligned} S^{\omega'} S^{\omega''} &= \sum_{\omega \in \Omega^*} \text{sh}\left(\begin{smallmatrix} \omega' & \omega'' \\ \omega \end{smallmatrix}\right) S^\omega, \quad (\text{cas symétral}) \\ S^{\omega'} S^{\omega''} &= \sum_{\omega \in \Omega^*} \text{shct}\left(\begin{smallmatrix} \omega' & \omega'' \\ \omega \end{smallmatrix}\right) S^\omega. \quad (\text{cas symétré}) \end{aligned}$$

Par exemple, pour un moule symétral, on aura l'identité

$$S^{\omega_1 \omega_2} S^{\omega_3} = S^{\omega_1 \omega_2 \omega_3} + S^{\omega_1 \omega_3 \omega_2} + S^{\omega_3 \omega_1 \omega_2}.$$

1. L'exposant inverse est important. En particulier, il y a une erreur dans la définition §5.1 de [Sau09]. En effet, les battages du mot  $\omega' = \omega_1 \omega_2$  avec le mot  $\omega'' = \omega_3$  sont les mots  $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ ,  $\omega_1 \omega_3 \omega_2$  et  $\omega_3 \omega_1 \omega_2$  mais on n'obtient jamais le mot  $\omega_2 \omega_3 \omega_1$ .

De même, on dira qu'un moule  $A^\bullet$  est *alternel*, resp. *alternel* si  $A^\varnothing = 0$  et si pour tous mots  $\omega', \omega'' \in \Omega^*$ ,

$$0 = \sum_{\omega \in \Omega^*} \text{sh} \begin{pmatrix} \omega', \omega'' \\ \omega \end{pmatrix} A^\omega, \quad (\text{cas alternel})$$

$$0 = \sum_{\omega \in \Omega^*} \text{shct} \begin{pmatrix} \omega', \omega'' \\ \omega \end{pmatrix} A^\omega. \quad (\text{cas alternel})$$

REMARQUE B.1.4. Le lecteur vérifiera que la multiplication des moules préserve la symétralité et la symétrélicité tout comme la composition préserve l'alternalité et l'alternéité.

**B.1.3. Contraction de moules avec un comoule.** Posons  $\mathcal{H}$  une  $\mathbf{A}$ -algèbre de Hopf topologique (ou plus généralement une bialgèbre topologique) dont on note

$$\Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{H}$$

le coproduit. Un *comoule*  $R_\bullet$  (où l'indexation est notée avec des indices en bas) est une collection d'éléments  $R_\omega \in \mathcal{H}$  pour tout  $\omega \in \Omega^*$ . Un comoule est dit *cosymétral*, resp. *cosymétré* s'il vérifie la propriété duale de la symétralité, resp. symétrélicité, c'est-à-dire si

$$\Delta(R_\omega) = \sum_{\omega', \omega'' \in \Omega^*} \text{sh} \begin{pmatrix} \omega', \omega'' \\ \omega \end{pmatrix} R_{\omega'} \otimes R_{\omega''}, \quad (\text{cosymétral})$$

$$\Delta(R_\omega) = \sum_{\omega', \omega'' \in \Omega^*} \text{shct} \begin{pmatrix} \omega', \omega'' \\ \omega \end{pmatrix} R_{\omega'} \otimes R_{\omega''}, \quad (\text{cosymétré})$$

On peut alors considérer la *contraction* d'un moule  $M^\bullet$  avec un comoule  $R_\bullet$  comme la somme

$$C = \sum_{\omega \in \Omega^*} M^\omega R_\omega.$$

Cette somme a toujours un sens lorsque l'on considère une algèbre de Hopf topologique *complète* et que l'alphabet  $\Omega$  est dénombrable<sup>2</sup>. Dans le cas général, les contractions dont on aura affaire seront en général des séries normalement convergentes.

PROPOSITION B.1.5. *Soit  $M^\bullet$  un moule,  $R_\bullet$  un comoule et supposons que leur contraction  $C$  est bien définie. Alors :*

- *si  $M^\bullet$  est symétral (resp. symétré) et  $R_\bullet$  cosymétral (resp. cosymétré), alors  $C$  est un automorphisme formel, c'est-à-dire  $\Delta(C) = C \otimes C$ .*
- *si  $M^\bullet$  est alternel (resp. alternel) et  $R_\bullet$  cosymétral (resp. cosymétré), alors  $C$  est une dérivation formelle, c'est-à-dire  $\Delta(C) = C \otimes 1 + 1 \otimes C$ .*

DÉMONSTRATION. Montrons juste la première assertion dans le cas symétral, les autres étant laissées au lecteur. Soit  $S^\bullet$  un moule symétral et  $R_\bullet$  un comoule cosymétral et notons  $C$  leur contraction. On a alors  $\Delta(C) = \Delta(\sum_\omega S^\omega R_\omega) = \sum_\omega S^\omega \Delta(R_\omega)$ . En utilisant la cosymétralité, on trouve  $\sum_\omega S^\omega \sum_{\omega \in \text{Sh}(\omega', \omega'')} R_{\omega'} \otimes R_{\omega''}$ , d'où en inversant les sommes,  $\sum_{\omega', \omega''} \left( \sum_{\omega \in \text{Sh}(\omega', \omega'')} S^\omega \right) R_{\omega'} \otimes R_{\omega''}$ . En utilisant la symétralité de  $S^\bullet$  puis en séparant les termes dans le produit tensoriel, on trouve

$$\sum_{\omega', \omega''} S^{\omega'} R_{\omega'} \otimes S^{\omega''} R_{\omega''} = C \otimes C,$$

2. Nous ne considérerons dans la suite que des alphabets dénombrables. En général, il faut parler de famille formellement sommable. Voir [Sau09] partie A définition 3.2 p.7.



d'où  $C$  est bien un automorphisme formel.  $\square$

Le résultat précédent admet une réciproque partielle dans le cas de certaines algèbres de séries formelles en des variables non commutatives que nous allons maintenant introduire.

Considérons l'algèbre  $\mathbf{A}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  des séries formelles non commutatives à coefficients dans  $\mathbf{A}$  en les symboles les éléments de  $\Omega$ .

PROPOSITION B.1.6. *Les algèbres  $\mathcal{M}^\bullet(\Omega, \mathbf{A})$  et  $\mathbf{A}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  sont canoniquement isomorphes.*

DÉMONSTRATION. En effet, si  $x = \sum_{\omega \in \Omega^*} x^\omega \omega \in \mathbf{A}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  alors on lui associe le moule  $x^\bullet$  défini par  $\omega \mapsto x^\omega$ . Il est immédiat que cette bijection est bien un isomorphisme d'algèbre.  $\square$

On prendra dans la suite  $\mathbf{A} = \mathbf{C}$ , pour nous concentrer sur le cas des moules scalaires. Cependant les résultats énoncés sont vrais dans le cas général.

Considérons le cas d'un alphabet général  $\Omega$  et le cas d'un alphabet  $\mathcal{W}$  muni d'une structure de semi-groupe. Les algèbres  $\mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  et  $\mathbf{C}\langle\langle\mathcal{W}\rangle\rangle$  peuvent être munies d'une structure d'algèbre de Hopf topologique. Le coproduit  $\Delta$  sur  $\mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  est donné par

$$\Delta(\omega) = \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega$$

sur les générateurs  $\omega \in \Omega$ , alors que le coproduit  $\Delta_*$  sur  $\mathbf{C}\langle\langle\mathcal{W}\rangle\rangle$  est donné par

$$\Delta_*(w) = \sum_{\substack{w_1, w_2 \in \mathcal{W} \\ w_1 + w_2 = w}} w_1 \otimes w_2.$$

sur les générateurs  $w \in \mathcal{W}$ .

Grâce à la propriété de compatibilité du coproduit avec la multiplication, on a  $\Delta(\omega_1 \omega_2) = \omega_1 \omega_2 \otimes 1 + \omega_1 \otimes \omega_2 + 1 \otimes \omega_1 \omega_2$  etc, c'est-à-dire

$$\Delta(\omega) = \sum_{\omega', \omega'' \in \Omega^*} \text{sh} \begin{pmatrix} \omega' & \omega'' \\ \omega \end{pmatrix} \omega' \otimes \omega'',$$

et

$$\Delta_*(w) = \sum_{w', w'' \in \mathcal{W}^*} \text{shct} \begin{pmatrix} w' & w'' \\ w \end{pmatrix} w' \otimes w''.$$

On définit sur ces algèbres de Hopf<sup>3</sup> les comoules  $R_\bullet$  et  $R'_\bullet$  dit *comoules canoniques*, par

$$\begin{aligned} R_{\omega_1 \dots \omega_n} &:= \omega_n \dots \omega_1, & (\text{inversion des indices}) \\ R'_{w_1 \dots w_n} &:= w_n \dots w_1, & (\text{inversion des indices}) \end{aligned}$$

pour tous mots  $\omega_1 \dots \omega_m \in \Omega^*$  et  $w_1 \dots w_n \in \mathcal{W}^*$ .

REMARQUE B.1.7. Nous avons conservé la convention de J. Écalé d'inverser les indices car la formulation pour les matrices de connexion est plus simple avec cette convention. Cependant, il aurait été préférable de prendre l'autre convention lorsque l'on traite des matrices de Stokes.

LEMME B.1.8. *Le comoule  $R_\bullet$  à valeurs dans  $\mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  est cosymétral. Le comoule  $R'_\bullet$  à valeurs dans  $\mathbf{C}\langle\langle\mathcal{W}\rangle\rangle$  est cosymétral.*

---

3. On n'a défini que le coproduit mais on laisse le soin au lecteur de trouver dans la littérature la formule pour la counité et pour l'antipode. Pour la counité, voir par exemple [Cre09].

DÉMONSTRATION. En effet, notons  $\tau : \Omega^* \rightarrow \Omega^*$  l'inversion qui à un mot  $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$  associe le mot  $\omega_n \cdots \omega_1$ . Alors il est immédiat que le comoule  $R_{\tau(\bullet)}$  (resp.  $R'_{\tau(\bullet)}$ ) est cosymétral (resp. cosymétrél) par la définition du coproduit  $\Delta$ . Ensuite, il suffit de remarquer le lemme suivant :

LEMME B.1.9. *Soit  $M^\bullet$  un moule et  $CM_\bullet$  un comoule. Alors*

- *le moule  $M^\bullet$  est alternal (resp. alternel, resp. symétral, resp. symétrél) si et seulement si  $M^{\tau(\bullet)}$  est alternal (resp. alternel, resp. symétral, resp. symétrél),*
- *le comoule  $CM_\bullet$  est cosymétral si et seulement si  $CM_{\tau(\bullet)}$  est cosymétral.*

qui est une conséquence immédiate des égalités

$$\text{sh} \begin{pmatrix} \omega' & \omega'' \\ \omega \end{pmatrix} = \text{sh} \begin{pmatrix} \tau(\omega'') & \tau(\omega') \\ \tau(\omega) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{shct} \begin{pmatrix} \omega' & \omega'' \\ \omega \end{pmatrix} = \text{shct} \begin{pmatrix} \tau(\omega'') & \tau(\omega') \\ \tau(\omega) \end{pmatrix}$$

□

La proposition B.1.5 précédent admet une réciproque dans l'algèbre  $\mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$  des séries formelles non commutatives en l'alphabet  $\Omega$ .

LEMME B.1.10. *Soit  $C = \sum_{\omega \in \Omega^*} M^\omega R_\omega$  la contraction d'un moule  $M^\bullet$  avec le comoule canonique  $R_\bullet$  de  $\mathbf{C}\langle\langle\Omega\rangle\rangle$ . Alors :*

- *la contraction  $C$  est un automorphisme formel, c'est-à-dire de type groupe si et seulement si le moule  $M^\bullet$  est symétral.*
- *la contraction  $C$  est une dérivation formelle, c'est-à-dire un élément primitif si et seulement si le moule  $M^\bullet$  est alternal.*

De même, on a le

LEMME B.1.11. *Soit  $C = \sum_{\omega \in \mathcal{W}^*} M^\omega R'_\omega$  la contraction d'un moule  $M^\bullet$  avec le comoule canonique  $R'_\bullet$  de  $\mathbf{C}\langle\langle\mathcal{W}\rangle\rangle$ . Alors :*

- *la contraction  $C$  est un automorphisme formel, c'est-à-dire de type groupe si et seulement si le moule  $M^\bullet$  est symétrél.*
- *la contraction  $C$  est une dérivation formelle, c'est-à-dire un élément primitif si et seulement si le moule  $M^\bullet$  est alternel.*

DÉMONSTRATION DU LEMME B.1.10. Montrons le sens direct, la réciproque étant le résultat général de la proposition B.1.5. Soit  $C = \sum_{\omega} M^\omega R_\omega$ . On a donc

$$\begin{aligned} \Delta(C) &= \sum_{\omega \in \Omega^*} \sum_{\omega', \omega'' \in \Omega^*} \text{sh} \begin{pmatrix} \omega' & \omega'' \\ \omega \end{pmatrix} M^\omega R_{\omega'} \otimes R_{\omega''} \\ &= \sum_{\omega', \omega'' \in \Omega^*} \sum_{\omega \in \Omega^*} \text{sh} \begin{pmatrix} \omega' & \omega'' \\ \omega \end{pmatrix} M^\omega R_{\omega'} \otimes R_{\omega''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \otimes C &= \sum_{\omega', \omega'' \in \Omega^*} M^{\omega'} M^{\omega''} R_{\omega'} \otimes R_{\omega''} \\ C \otimes 1 + 1 \otimes C &= \sum_{\omega \in \Omega^*} M^\omega (R_\omega \otimes 1 + 1 \otimes R_\omega) \end{aligned}$$

D'où comme des séries formelles sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients, on en déduit que si  $C$  est de type groupe, le moule  $M^\bullet$  est symétral. Si  $C$  est un élément primitif, alors la relation d'alternativité de  $M^\bullet$  est vérifiée lorsque  $\omega'$  et  $\omega''$  sont non vides. Lorsque l'un des deux mots est vide, on remarque que  $\text{sh} \begin{pmatrix} \omega' & \emptyset \\ \omega \end{pmatrix} = \text{sh} \begin{pmatrix} \emptyset & \omega' \\ \omega \end{pmatrix}$  égal à 1 si  $\omega' = \omega$  et nul sinon. La relation d'alternativité est triviale dans ce cas. Donc le moule  $M^\bullet$  est bien alternal. □

REMARQUE B.1.12. Considérer l'algèbre des moules est donc équivalent à considérer l'algèbre des séries formelles en des variables non commutatives  $\mathbf{C}\langle\Omega\rangle$ . Donc travailler dans l'algèbre des moules ou dans l'algèbre  $\mathbf{C}\langle\Omega\rangle$  n'est pas fondamentalement différent pour nous ici. En effet, on n'aura pas besoin des procédés d'arborifications et de coarborifications (voir [Éca93] lecture 1 §1.7 ou [Éca92] §3) qui apparaissent lorsque l'on traite le cas des invariants méromorphes des équations différentielles non linéaires. Remarquez cependant que le comoule  $G_{\bullet}^{i,j}$  que l'on définira sur l'alphabet  $\Omega$  ressemble à un procédé de coarborification.

**B.1.4. Lien entre le coproduit et la structure de Lie.** Traitons de nouveau le cas des alphabets  $\Omega$  et  $\mathcal{W}$  ensemble. On rappelle que l'on peut munir l'algèbre non commutative  $\mathbf{C}\langle\Omega\rangle$  de sa structure d'algèbre de Lie canonique donnée par  $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$  pour tous  $x, y \in \mathbf{C}\langle\Omega\rangle$  où le point désigne la multiplication dans  $\mathbf{C}\langle\Omega\rangle$ . On rappelle que  $\mathbf{C}\langle\Omega\rangle$  est une algèbre complète pour la pseudoévaluation  $val : \mathbf{C}\langle\Omega\rangle \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$  définie par

$$val\left(\sum_{\omega \in \Omega^*} x^\omega \omega\right) := \max\{n \in \mathbf{N} : x^\omega = 0 \text{ pour tout } \omega \text{ vérifiant } r(\omega) < n\}.$$

Considérons la sous-algèbre  $\mathcal{L}$  de  $\mathbf{C}\langle\Omega\rangle$  engendrée par les  $[x, y]$  pour tous  $x, y \in \mathbf{C}\langle\Omega\rangle$  et  $\hat{\mathcal{L}}$  sa complétion dans  $\mathbf{C}\langle\Omega\rangle$ . Alors on appelle usuellement les éléments de  $\mathcal{L}$  les *polynômes de Lie* et ceux de  $\hat{\mathcal{L}}$  les *séries de Lie*.

La proposition B.1.5 précédente nous servira joint au lemme suivant :

LEMME B.1.13 ([Bou72] corollaire 2 du théorème 1 §3 du chapitre II). *Dans l'algèbre  $\mathbf{C}\langle\Omega\rangle$ , un élément est primitif si et seulement si c'est une série de Lie.*

On se doit aussi de donner quelques faits sur l'exponentielle moulienne. Notons  $\mathfrak{L}$  la sous-algèbre de  $\mathbf{C}\langle\Omega\rangle$  des séries formelles à terme constant nul et  $\mathfrak{G}$  celle des séries à terme constant égal à 1. On peut définir l'exponentielle de tout élément  $x$  de  $\mathfrak{L}$  par la composition

$$\exp(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Cette définition est bien posée car  $val(x) \geq 1$  et on a  $\exp(x) \in \mathfrak{G}$ .

PROPOSITION B.1.14. *L'application  $\exp : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{G}$  est une bijection et induit une bijection de la sous-algèbre de Lie des éléments primitifs  $\hat{\mathcal{L}} \subseteq \mathfrak{L}$  sur le sous-groupe des éléments de type groupe de  $\mathfrak{G}$ .*

COROLLAIRE B.1.15. *Un élément de l'algèbre  $\mathbf{C}\langle\Omega\rangle$  est de type groupe si et seulement s'il est égal à l'exponentielle d'une série de Lie.*

## B.2. Petit formulaire pour le moule $J^\bullet$

On donne ici le calcul des premiers termes du moule  $J_{i,j}^\bullet$  dans l'exemple de l'alphabet à deux éléments  $\Omega = \{0, 1\}$ . On considérera le cas où  $j = 0$  et  $i = 1$  et on notera  $x := x_0$  et  $y := x_1$ . En particulier, on a

$$\Omega_{i,j}^* = \{\emptyset, (10), (100), (110), (1000), (1010), (1100), (1110), \dots\}.$$

On omettra l'indice  $(i, j)$  pour le moule  $J_{i,j}^\bullet(x, y)$  et les intégrales itérées convergentes  $I_{i,j}^\omega$  ( $\omega \in \Omega_{i,j}^*$ ) pour simplifier les notations. Pour les mots de longueur 0 et 1, on a

$$J^\emptyset(x, y) = I^\emptyset = 1,$$

$$J^{(0)}(x, y) = x,$$

$$J^{(1)}(x, y) = y.$$

Pour les mots de longueurs 2, on a  $(10) \in \Omega_{i,j}^*$  donc comme  $J^\bullet$  est symétral,  $J^{(0)}(x, y) \cdot J^{(1)}(x, y) = J^{(01)}(x, y) + J^{(10)}(x, y)$ . Finalement, on obtient

$$J^{(10)}(x, y) = I^{(10)} \quad \text{et} \quad J^{(01)}(x, y) = xy - I^{(10)},$$

$$J^{(00)}(x, y) = \frac{x^2}{2!} \quad \text{et} \quad J^{(11)}(x, y) = \frac{y^2}{2!}.$$

Ensuite, pour les mots de longueur 3, on a deux mots dans  $\Omega_{i,j}^*$  et  $6 = 2^3 - 2$  dans  $\Omega^* - \Omega_{i,j}^*$ . Par un rapide calcul, on vérifie que l'on a

$$J^{(100)}(x, y) = I^{(100)} \quad \text{et} \quad J^{(110)}(x, y) = I^{(110)},$$

$$J^{(000)}(x, y) = \frac{x^3}{3!} \quad \text{et} \quad J^{(111)}(x, y) = \frac{y^3}{3!},$$

$$J^{(101)}(x, y) = I^{(10)}y - 2I^{(110)} \quad \text{et} \quad J^{(010)}(x, y) = I^{(10)}x - 2I^{(100)}$$

$$J^{(001)}(x, y) = \frac{x^2y}{2!} - I^{(10)}x + I^{(100)} \quad \text{et} \quad J^{(011)}(x, y) = \frac{xy^2}{2!} - I^{(10)}y + I^{(110)}.$$

Donnons aussi le calcul du moule  $J^\bullet(x, y)$  pour les mots de longueurs 4. On a  $2^2 = 4$  mots donnant des intégrales itérées convergentes, c'est-à-dire  $J^\omega(x, y) = I^\omega$  pour  $\omega \in \{(1000), (1010), (1100), (1110)\}$ . Reste  $2^4 - 2^2 = 12$  mots qui font apparaître des puissances de  $x$  et  $y$ . On a deux termes donnant des puissances de  $x$  et  $y$  uniquement :

$$J^{(0000)}(x, y) = \frac{x^4}{4!} \quad \text{et} \quad J^{(1111)}(x, y) = \frac{y^4}{4!}.$$

Reste dix termes mixtes qui vont par paire :

$$J^{(0100)}(x, y) = I^{(100)}x - 3I^{(1000)} \quad \text{et} \quad J^{(1101)}(x, y) = I^{(110)}y - 3I^{(1110)},$$

$$J^{(0010)}(x, y) = I^{(10)}\frac{x^2}{2!} - 2I^{(100)}x + 3I^{(1000)} \quad \text{et} \quad J^{(1011)}(x, y) = I^{(10)}\frac{y^2}{2!} - 2I^{(110)}y + 3I^{(1110)},$$

$$J^{(0110)}(x, y) = I^{(110)}x - 2I^{(1100)} - I^{(1010)} \quad \text{et} \quad J^{(1001)}(x, y) = I^{(100)}y - 2I^{(1100)} - I^{(1010)},$$

$$J^{(0001)}(x, y) = \frac{x^3y}{3!} - I^{(10)}\frac{x^2}{2!} + I^{(100)}x - I^{(1000)},$$

$$\text{et} \quad J^{(0111)}(x, y) = \frac{xy^3}{3!} - I^{(10)}\frac{y^2}{2!} + I^{(110)}y - I^{(1110)},$$

$$J^{(0011)}(x, y) = \frac{x^2y^2}{2!2!} - I^{(10)}xy + I^{(110)}x + I^{(100)}y - I^{(1100)},$$

$$J^{(0101)}(x, y) = I^{(10)}xy - 2I^{(110)}x - 2I^{(100)}y + 4I^{(1100)} + I^{(1010)}.$$

### B.3. Petit formulaire pour le comoule $G_{\bullet}^{i,j}$

On donne ici le calcul des premiers termes du comoule  $G_{\bullet}^{i,j}$  dans l'exemple de l'alphabet à deux éléments  $\Omega = \{0, 1\}$  dans le cas  $j = 0$  et  $i = 1$ . On omettra les exposants  $i, j$  pour plus de lisibilité. En particulier, on a

$$\Omega_{i,j}^* = \{\emptyset, (10), (100), (110), (1000), (1010), (1100), (1110), \dots\}.$$

Pour les mots de longueur 0 et 1, on a

$$G_{\emptyset} = 1,$$

$$G_{(1)} = 0,$$

$$G_{(2)} = 0.$$

Pour les mots de longueurs 2, on a  $(10) \in \Omega_{i,j}^*$  donc

$$G_{(10)} = A_{(10)} - A_{(01)} \quad \text{et} \quad G_{(00)} = G_{(11)} = G_{(01)} = 0.$$

Ensuite, pour les mots de longueur 3, on a deux mots dans  $\Omega_{i,j}^*$  et  $6 = 2^3 - 2$  dans  $\Omega^* - \Omega_{i,j}^*$ . Par un rapide calcul, on vérifie que l'on a

$$\begin{aligned} G_{(100)} &= A_{(100)} - 2A_{(010)} + A_{(001)} \\ G_{(110)} &= A_{(110)} - 2A_{(101)} + A_{(011)}, \end{aligned}$$

et les autres termes sont nuls.

Enfin, pour les mots de longueur 4, on a  $2^2 = 4$  mots donnant des intégrales itérées convergentes et  $2^4 - 2^2 = 12$  mots restant. On a donc

$$\begin{aligned} G_{(1000)} &= A_{(1000)} - 3A_{(0100)} + 3A_{(0010)} - A_{(0001)}, \\ G_{(1010)} &= A_{(1010)} - A_{(1001)} - A_{(0110)} + A_{(0101)}, \\ G_{(1100)} &= A_{(1100)} - 2A_{(0110)} - 2A_{(1001)} + 4A_{(0101)} - A_{(0011)}, \\ G_{(1110)} &= A_{(1110)} - 3A_{(1101)} + 3A_{(1011)} - A_{(0111)}. \end{aligned}$$

et  $G_\omega = 0$  pour les 12 autres mots de longueur 4.

#### B.4. Un programme pour le calcul du moule $J_{i,j}^\bullet(0,0)$

Voici un programme écrit en Sage permettant de calculer la somme  $J_{i,j}^\omega(0,0) =$

$$\sum_{\omega' \in \Omega_{i,j}^*} \text{ssa}(\omega') I_{i,j}^{\omega'}.$$

```
from copy import deepcopy
from sage.structure.coerce_dict import MonoDict

alphabet = range(42)
Omega = Words(alphabet, finite=True, infinite=False)

# indices spéciaux j interdit à gauche et i interdit à droite
j=0
i=1

### test si un mot est dans Omega_{i,j}^*
def mot_convergent(w) :
    return ( w.length() == 0 ) or (w.length() > 0 and ( w[0] != j and w[-1] != i ) )

### quelques fonctions auxiliaires
def partie_gauche(w) :
    if w.length() == 0 :
        return 0
    else :
        if w[0] == j :
            return 1 + partie_gauche(w[1:])
        else :
            return 0

def partie_droite(w) :
    if w.length() == 0 :
        return 0
    else :
        if w[-1] == i :
            return 1 + partie_droite(w[:-1])
        else :
            return 0

def egal(t1,t2) : #donne uniquement l'égalité du mot mais pas du coefficient
    ### t1 et t2 sont deux termes de la forme {'coeff' : entier? , 'mot' : mot_dans_Omega? }
    return t1['mot'] == t2['mot']
```

```

def different(t1,t2) :
    return not( egal(t1,t2) )

def ajout_terme_dans_liste(t, LL ) :
    L = deepcopy(LL)
    k = 0
    while k < len(L) and different(L[k] , t ) :
        k += 1
    if k < len(L) :
        L[k]['coeff'] += t['coeff']
        if L[k]['coeff'] == 0 :
            L = L[:k] + L[(k+1):]

    else :
        L += [t]
    return L

def concatene_deux_listes(LL1,LL2 ) :
    L = deepcopy(LL2)
    for t in LL1 :
        L = ajout_terme_dans_liste(t,L)
    return L

def multiplication_par_coefficient_dans_liste(c, LL) :
    L = deepcopy(LL)
    for l in L :
        l['coeff'] *= c
    return L

def affichage_moule(LL) :
    if len(LL) == 0 :
        print "0* I^vide"
    else :
        s = ""
        for l in LL :
            s += " + (" + str(l['coeff']) + ") * I^" + str( l['mot'] )
        s = s[2:]
        print s

#### fonction qui calcule le moule J en fonction des intégrales convergentes

memoire_pour_calcul_extension_symetral = MonoDict()

def extension_moule_symetral(w) :
    if w in memoire_pour_calcul_extension_symetral.iteritems() :
        return memoire_pour_calcul_extension_symetral(w)
    else :
        if mot_convergent(w) :
            memoire_pour_calcul_extension_symetral[w] = [ { 'coeff' : 1 , 'mot' : w } ]
            return [ { 'coeff' : 1 , 'mot' : w } ]
        else :
            if w[0] == j :
                m=partie_gauche(w)
                resultat = []
                for k in range(m+1, w.length() +1) :
                    w_aux = w[1:k] + Omega([ j ]) + w[k:]
                    somme_aux = extension_moule_symetral( w_aux )
                    resultat = concatene_deux_listes(somme_aux, resultat)
                resultat = multiplication_par_coefficient_dans_liste( -1 / m , resultat)
                return resultat

            else : #cas w[-1] == i :
                m=partie_droite(w)

```

```

        resultat = []
        for k in range(w.length() - m ) :
            w_aux = w[:k] + Omega([ i ]) + w[k:-1]
            somme_aux = extension_moule_symetral( w_aux )
            resultat = concatene_deux_listes(somme_aux, resultat)
        resultat = multiplication_par_coefficient_dans_liste( -1 / m , resultat)
        return resultat

def test_extension_symetral(m) :
    l = extension_moule_symetral(m)
    print "\n le mot "
    print m
    print "donne -----> "
    affichage_moule(l)

#####
## Exemples de tests :
## test_extension_symetral( Omega([0,1]) )
## test_extension_symetral( Omega([0,1,0,1]) )
## test_extension_symetral( Omega([0,0,1,2,3,1]) )
## test_extension_symetral( Omega([0,0,1,2,3,1]) )

```

En modifiant un peu le programme ci-dessus, on trouve les expressions pour le moule  $J_{i,j}^\bullet(x,y)$  données dans le paragraphe précédent.

De même, on peut compléter le programme précédent par ce qui suit pour calculer la valeur du comoule  $G_\bullet$  correspondant.

##### Fonctions auxiliaires pour le cas d'un comoule

```

def partie_gauche_pour_i(w) :
    if w.length() == 0 :
        return 0
    else :
        if w[0] == i :
            return 1 + partie_gauche_pour_i(w[1:])
        else :
            return 0

def partie_gauche_pour_autre(w) :
    if w.length() == 0 :
        return 0
    else :
        if w[0] != i and w[0] != j :
            return 1 + partie_gauche_pour_autre(w[1:])
        else :
            return 0

def concatene_deux_listes_de_listes(LL1,LL2) :
    L = []
    for l1 in LL1 :
        for l2 in LL2 :
            L.append( l1 + l2 )
    return L

def affichage_comoule(LL) :
    if len(LL) == 0 :
        print "0 * A_vide"
    else :
        s = ""
        for l in LL :
            s += " + (" + str(l['coeff']) + ") * A_" + str( l['mot'] )
        s = s[2:]
        print s

```

```

def decomposition_mots_speciaux_maximaux(w) :
    if w.length() == 0 :
        return []
    else :
        if w[0] == j :
            m = partie_gauche(w)
        elif w[0] == i :
            m = partie_gauche_pour_i(w)
        else :
            m = partie_gauche_pour_autre(w)
        decomp = decomposition_mots_speciaux_maximaux(w[m:])
        decomp.insert(0, w[:m] )
        return decomp

def calcul_coeff_et_mot_pour_k_adapte( decomp , liste_k ) :
    ### on suppose que les deux listes ont la même longueur et que la decomposition est non vide
    coeff_multiplicatif = 1
    mot = Omega([])
    ki = 0
    kj = 0
    for indice in range( len(decomp) ) :
        coeff_multiplicatif *= (-1)^(liste_k[indice]) * binomial( len(decomp[indice]) , liste_k[indice] )
        type_de_mot = decomp[indice][0]
        if type_de_mot != i and type_de_mot != j :
            mot = mot.concatenate( decomp[indice] )
        else :
            mot = mot.concatenate( Omega( [ type_de_mot ]*( len(decomp[indice]) - liste_k[indice] ) ) )
            if type_de_mot == i :
                ki += liste_k[indice]
            elif type_de_mot == j :
                kj += liste_k[indice]
            else :
                raise TypeError("Problème dans calcul_coeff_et_mot_pour_k_adapte ?")
    mot = Omega( [j]*(kj) ).concatenate( mot.concatenate( Omega( [i]*(ki) ) ) )
    return {'coeff' : coeff_multiplicatif , 'mot' : mot }

##### calcul du comoule G
##### cette fonction n'est pas optimisée en espace algorithmiquement
def comoule_G(w) :
    if not(mot_convergent(w)) :
        return []
    elif w.length() == 0 : #cas du mot vide
        return [{'coeff' : 1 , 'mot' : Omega([]) }]
    else :
        decomp = decomposition_mots_speciaux_maximaux(w)
        longueur = len(decomp)
        liste_k_max = [0]*(longueur)
        resultat = []
        for m in range(longueur) :
            if decomp[m][0] == i or decomp[m][0] == j :
                liste_k_max[m] = len(decomp[m])
        liste_des_liste_k = [[]]
        for m in range(longueur) :
            #variable inutile mais ici pour plus de lissibilité
            a_concat = [[k] for k in range( liste_k_max[m] + 1) ]
            liste_des_liste_k = concatene_deux_listes_de_listes( liste_des_liste_k , a_concat )
        for liste_k in liste_des_liste_k :
            #variable inutile mais ici pour plus de lissibilité
            terme_calculé = calcul_coeff_et_mot_pour_k_adapte(decomp, liste_k )
            resultat = ajout_terme_dans_liste( terme_calculé , resultat )

```



```

        return resultat

def test_comoule_G(m) :
    l = comoule_G(m)
    print "\n le mot "
    print m
    print "donne pour le comoule -----> "
    affichage_comoule(l)

```

```

#####
## Exemples de tests :
## test_comoule_G( Omega([0,1]) )
## test_comoule_G( Omega([1,0]) )
## test_comoule_G( Omega([1,2,1,3,1,0,0]) )
## test_comoule_G( Omega([1,1,1,0]) )

```

Pour calculer le bimoule  $\text{ssa}^\bullet$ , on a donc deux méthodes : la première en passant par le moule  $J^\bullet$ , la seconde en passant par le comoule  $G_\bullet$ . On peut vérifier sur quelques exemples que l'on trouve bien le même résultat.

```

### fonctions auxiliaires pour le bimoule ssa
def indice_d_un_terme_dans_somme(terme, somme) :
    k=0
    while k < len(somme) and not( terme == somme[k]['mot'] ):
        k +=1
    if k == len(somme) :
        return -1 #cas où l'on a pas trouvé terme dans somme
    else :
        return k

### deux méthodes de calcul de ssa
def ssa_methode_J(w1,w2) : #w1=omega' w2=omega
    if not(mot_convergent(w1)) :
        return 0
    else :
        somme = extension_moule_symetral(w2)
        indice = indice_d_un_terme_dans_somme(w1, somme)
        if indice < 0 :
            return 0
        else :
            return somme[indice]['coeff']

def ssa_methode_G(w1,w2) :
    if not(mot_convergent(w1)) :
        return 0
    else :
        somme = comoule_G(w1)
        indice = indice_d_un_terme_dans_somme(w2, somme)
        if indice < 0 :
            return 0
        else :
            return somme[indice]['coeff']

```

## Bibliographie

- [AM94] A. Yu. Alekseev and A. Z. Malkin. Symplectic structures associated to Lie-Poisson groups. *Comm. Math. Phys.*, 162(1) :147–173, 1994.
- [And04] Yves André. *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, volume 17 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2004.
- [AT12] Anton Alekseev and Charles Torossian. The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld’s associators. *Ann. of Math. (2)*, 175(2) :415–463, 2012.
- [Bea93] Arnaud Beauville. Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann (d’après A. Bolibruch). *Astérisque*, (216) :Exp. No. 765, 4, 103–119, 1993. Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93.
- [BJL79] W. Balser, W. B. Jurkat, and D. A. Lutz. Birkhoff invariants and Stokes’ multipliers for meromorphic linear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 71(1) :48–94, 1979.
- [BJL81] W. Balser, W. B. Jurkat, and D. A. Lutz. On the reduction of connection problems for differential equations with an irregular singular point to ones with only regular singularities. I. *SIAM J. Math. Anal.*, 12(5) :691–721, 1981.
- [BJL83] W. Balser, W. B. Jurkat, and D. A. Lutz. Transfer of connection problems for first level solutions of meromorphic differential equations, and associated Laplace transforms. *J. Reine Angew. Math.*, 344 :149–170, 1983.
- [Boa01] Philip Boalch. Stokes matrices, Poisson Lie groups and Frobenius manifolds. *Inventiones mathematicae*, 146 :479—506, 2001.
- [Boa02] Philip P. Boalch.  $G$ -bundles, isomonodromy, and quantum Weyl groups. *Int. Math. Res. Not.*, (22) :1129–1166, 2002.
- [Boa05] Philip Boalch. From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 90(1) :167–208, 2005.
- [Boa07] Philip Boalch. Quasi-Hamiltonian geometry of meromorphic connections. *Duke Math. J.*, 139(2) :369–405, 2007.
- [Boa10] Philip Boalch. Towards a non-linear Schwarz’s list. In *The many facets of geometry*, pages 210–236. Oxford Univ. Press, Oxford, 2010.
- [Boa13] Philip Boalch. Global Weyl groups and multiplicative quiver varieties. *Arxiv 1307.1033*, page 63, 2013.
- [Boa14] P. P. Boalch. Geometry and braiding of Stokes data ; fission and wild character varieties. *Ann. of Math. (2)*, 179(1) :301–365, 2014.
- [Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [Bou72] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXVII. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre II : Algèbres de Lie libres. Chapitre III : Groupes de Lie*. Hermann, Paris, 1972. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1349.
- [Boy06] M. Boyarchenko. Drinfeld associators and the campbell-hausdorff formula. page 12, 2006. <http://www.math.uchicago.edu/~mitya/associators-ch.pdf>, [En ligne; accès le 8 décembre 2017].
- [BTL13] Tom Bridgeland and Valerio Toledano Laredo. Stokes factors and multilogarithms. *J. Reine Angew. Math.*, 682 :89–128, 2013.
- [BV89] D. G. Babbitt and V. S. Varadarajan. Local moduli for meromorphic differential equations. *Astérisque*, (169-170) :217, 1989.

- [Che54] Kuo-Tsai Chen. Iterated integrals and exponential homomorphisms. *Proc. London Math. Soc.* (3), 4 :502–512, 1954.
- [Che57] Kuo-Tsai Chen. Integration of paths, geometric invariants and a generalized Baker-Hausdorff formula. *Ann. of Math.* (2), 65 :163–178, 1957.
- [Che71] Kuo-tsai Chen. Algebras of iterated path integrals and fundamental groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 156 :359–379, 1971.
- [Che73] Kuo-tsai Chen. Iterated integrals of differential forms and loop space homology. *Ann. of Math.* (2), 97 :217–246, 1973.
- [Che77] Kuo Tsai Chen. Iterated path integrals. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(5) :831–879, 1977.
- [CP94] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Cre09] Jacky Cresson. Calcul moulien. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), 18(2) :307–395, 2009.
- [DCKP92] C. De Concini, V. G. Kac, and C. Procesi. Quantum coadjoint action. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(1) :151–189, 1992.
- [DCP93] C. De Concini and C. Procesi. Quantum groups. In *D-modules, representation theory, and quantum groups (Venice, 1992)*, volume 1565 of *Lecture Notes in Math.*, pages 31–140. Springer, Berlin, 1993.
- [Dd87] V. G. Drinfel'd. Quantum groups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 798–820. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [Del70] Pierre Deligne. *Équations différentielles à points singuliers réguliers*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [Del89] P. Deligne. Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points. In *Galois groups over  $\mathbf{Q}$  (Berkeley, CA, 1987)*, volume 16 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 79–297. Springer, New York, 1989.
- [DMR07] Pierre Deligne, Bernard Malgrange, and Jean-Pierre Ramis. *Singularités irrégulières*. Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 5. Société Mathématique de France, Paris, 2007. Correspondance et documents. [Correspondence and documents].
- [Dri89] V. G. Drinfel'd. Quasi-Hopf algebras. *Algebra i Analiz*, 1(6) :114–148, 1989.
- [Dri90] V. G. Drinfel'd. On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ . *Algebra i Analiz*, 2(4) :149–181, 1990.
- [Éca81] Jean Écalle. *Les fonctions résurgentes. Tome I*, volume 5 of *Publications Mathématiques d'Orsay 81 [Mathematical Publications of Orsay 81]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1981. Les algèbres de fonctions résurgentes. [The algebras of resurgent functions], With an English foreword.
- [Éca85] Jean Écalle. *Les fonctions résurgentes. Tome III*, volume 85 of *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985. L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux. [The bridge equation and analytic classification of local objects].
- [Éca92] Jean Écalle. Singularités non abordables par la géométrie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42(1-2) :73–164, 1992.
- [Éca93] Jean Écalle. Six lectures on transseries, analysable functions and the constructive proof of Dulac's conjecture. In *Bifurcations and periodic orbits of vector fields (Montreal, PQ, 1992)*, volume 408 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 75–184. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [Eca02] Jean Ecalles. A tale of three structures : the arithmetics of multizetas, the analysis of singularities, the Lie algebra ARI. In *Differential equations and the Stokes phenomenon*, pages 89–146. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.
- [Eca03] Jean Ecalles. ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas : un premier bilan. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 15(2) :411–478, 2003.
- [ES02] Pavel Etingof and Olivier Schiffmann. *Lectures on quantum groups*. Lectures in Mathematical Physics. International Press, Somerville, MA, second edition, 2002.

- [GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [Gra97] Andrew Granville. A decomposition of Riemann’s zeta-function. In *Analytic number theory (Kyoto, 1996)*, volume 247 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 95–101. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [Hai87a] Richard M. Hain. The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group. In *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, volume 46 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 247–282. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [Hai87b] Richard M. Hain. Iterated integrals and mixed Hodge structures on homotopy groups. In *Hodge theory (Sant Cugat, 1985)*, volume 1246 of *Lecture Notes in Math.*, pages 75–83. Springer, Berlin, 1987.
- [Hal03] Brian C. Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations*, volume 222 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003. An elementary introduction.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [IKSY91] Katsunori Iwasaki, Hironobu Kimura, Shun Shimomura, and Masaaki Yoshida. *From Gauss to Painlevé*. Aspects of Mathematics, E16. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991. A modern theory of special functions.
- [IKZ06] Kentaro Ihara, Masanobu Kaneko, and Don Zagier. Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values. *Compos. Math.*, 142(2) :307–338, 2006.
- [JLP76] W. B. Jurkat, D. A. Lutz, and A. Peyerimhoff. Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 53(2) :438–470, 1976.
- [LD53] J. A. Lappo-Danilevsky. *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*. Chelsea Publishing Co., New York, N. Y., 1953.
- [LM96] Thang Tu Quoc Le and Jun Murakami. Kontsevich’s integral for the Kauffman polynomial. *Nagoya Math. J.*, 142 :39–65, 1996.
- [LR91] Jiang-Hua Lu and Tudor Ratiu. On the nonlinear convexity theorem of Kostant. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(2) :349–363, 1991.
- [LR94] Michèle Loday-Richaud. Stokes phenomenon, multisummability and differential Galois groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 44(3) :849–906, 1994.
- [LR16] Michèle Loday-Richaud. *Divergent series, summability and resurgence. II*, volume 2154 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, [Cham], 2016. Simple and multiple summability, With prefaces by Jean-Pierre Ramis, Éric Delabaere, Claude Mitschi and David Sauzin.
- [LRR11] Michèle Loday-Richaud and Pascal Remy. Resurgence, Stokes phenomenon and alien derivatives for level-one linear differential systems. *J. Differential Equations*, 250(3) :1591–1630, 2011.
- [Mal89] B. Malgrange. Equations différentielles linéaires et transformation de fourier. *Ensaïos Matemáticos*, 1 :39, 1989.
- [Mal91] B. Malgrange. *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, volume 96 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.
- [Mal95] Bernard Malgrange. Somme des séries divergentes. *Exposition. Math.*, 13(2-3) :163–222, 1995.
- [MR91a] Jean Martinet and Jean-Pierre Ramis. Elementary acceleration and multisummability. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 54(4) :331–401, 1991.
- [MR91b] Jean Martinet and Jean-Pierre Ramis. Elementary acceleration and multisummability. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 54(4) :331–401, 1991.
- [Pha84] F. Pham. Transformées de Laplace des microsolutions de systèmes holonomes. *Enseign. Math. (2)*, 30(1-2) :57–84, 1984.
- [Ree58] Rimhak Ree. Lie elements and an algebra associated with shuffles. *Ann. of Math. (2)*, 68 :210–220, 1958.
- [Sab02] Claude Sabbah. *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*. Savoirs Actuels (Les Ulis). EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2002. Mathématiques (Les Ulis).

- [Sab11] Claude Sabbah. Introduction to the theory of  $\mathcal{D}$ -modules. pages 1–58, 2011.
- [Sau09] David Sauzin. Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials. In *Renormalization and Galois theories*, volume 15 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 83–163. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [Sau12] David Sauzin. *Resurgent functions and splitting problems*, volume 1493, pages 48–117. RIMS Kôkyûroku, 2012. [ou Arxiv 0706.0137].
- [Ser56] Jean-Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 6 :1–42, 1955–1956.
- [Sim90] Carlos T. Simpson. Transcendental aspects of the Riemann-Hilbert correspondence. *Illinois J. Math.*, 34(2) :368–391, 1990.
- [SKK73] Mikio Sato, Takahiro Kawai, and Masaki Kashiwara. The theory of pseudodifferential equations in the theory of hyperfunctions. *Sûgaku*, 25 :213–238, 1973. Collection of articles on hyperfunctions.

**Titre :** Application de Riemann-Hilbert-Birkhoff

**Mots Clefs :** Riemann-Hilbert, matrices de Stokes, moules, transformée de Fourier-Laplace, algèbre de Weyl, représentation de graphe.

**Résumé :** On calcule ici les données de Stokes associées à une connexion avec un pôle double en 0 et un pôle simple en l'infini sur un fibré trivial sur la sphère de Riemann. Quelques généralisations possibles sont données.

**Title :** Riemann-Hilbert-Birkhoff map

**Keys words :** Riemann-Hilbert, Stokes matrices, moulds, Fourier-Laplace transform, Weyl algebra, graph representation.

**Abstract :** We compute Stokes data associated to a connection with a double pole at 0 and a simple pole at infinity on a trivial vector bundle on the Riemann sphere. Some generalisations are done.