



Modèles de croissance aléatoire et théorèmes de forme asymptotique: les processus de contact

Aurelia Deshayes

► To cite this version:

Aurelia Deshayes. Modèles de croissance aléatoire et théorèmes de forme asymptotique: les processus de contact. Probabilités [math.PR]. Université de Lorraine, 2014. Français. NNT : 2014LORR0168 . tel-01751061v2

HAL Id: tel-01751061

<https://theses.hal.science/tel-01751061v2>

Submitted on 5 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MODÈLES DE CROISSANCE ALÉATOIRE ET THÉORÈMES DE FORME ASYMPTOTIQUE : LES PROCESSUS DE CONTACT

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 10 décembre 2014
pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine
(mention Mathématiques)

par

Aurelia DESHAYES

Après avis des rapporteurs :

Christophe GARBAN	<i>Professeur de l'Université de Lyon Claude Bernard</i>
Ellen SAADA	<i>Directrice de Recherche CNRS à l'Université Paris Descartes</i>
Rinaldo SCHINAZI	<i>Professeur de l'Université du Colorado</i>

Devant le jury composé de :

Jean BÉRARD	<i>Professeur de l'Université de Strasbourg</i>
Olivier GARET	<i>Professeur de l'Université de Lorraine (Directeur)</i>
Jean-Baptiste GOUÉRÉ	<i>Maître de Conférences de l'Université d'Orléans</i>
Arnaud LE NY	<i>Professeur de l'Université de Paris Créteil</i>
Régine MARCHAND	<i>Maître de Conférences de l'Université de Lorraine (Directrice)</i>
Ellen SAADA	<i>Directrice de Recherche CNRS à l'Université Paris Descartes</i>
Marie THÉRET	<i>Maître de Conférences de l'Université de Paris Diderot</i>
Béatrice DE TILIÈRE	<i>Maître de Conférences de l'Université de Paris Pierre et Marie Curie</i>

Contact processes constitute one of the two or three major classes of interacting particle systems. They play somewhat the same role in this area that Brownian motion plays in the theory of stochastic processes in Euclidean space : they are simple to describe, they have many of the useful properties that other systems in the field may or may not have—in this case, self-duality, attractiveness and additivity—and they lead to challenging mathematical problems.

T.M. LIGETT, *T. E. Harris' contributions to interacting particle systems and percolation* [Lig11].

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Olivier GARET et Régine MARCHAND : un jour de février 2010, ils m'ont accueillie souriants et chaleureux à Nancy et m'ont proposé de m'évader de la vie parisienne en me faisant croire qu'il ne faisait pas froid ici, et surtout (heureusement) en me présentant de belles mathématiques de recherche. Malgré l'arrivée répétée du froid dans cette ville, ils ont réussi à maintenir enthousiasme et chaleur dans notre espace de travail. Ils ont toujours été très présents et encourageants malgré mes doutes.

Je suis très honorée que Christophe GARBAN, Ellen SAADA et Rinaldo SCHINAZI aient accepté de rapporter cette thèse. Merci en particulier à Ellen pour ses nombreux commentaires qui ont amélioré mon manuscrit. Merci à Jean BÉRARD, Jean-Baptiste GOUÉRÉ, Arnaud LE NY, Ellen SAADA, Marie THÉRET et Béatrice DE TILIÈRE d'avoir accepté de faire partie du jury et d'être venus aujourd'hui.

Je tiens à remercier certains de ceux qui ont encouragé mes premiers pas dans les mathématiques, de très près ou de très loin, et qui m'ont mené jusqu'ici : tout d'abord Edouard PAPIERSKI sans qui cette aventure n'aurait jamais commencé, M. MINARD et M. BÉZIAUD pour leur confiance, Mme de ZAMAROCZY pour un solide bagage de formalisme, M. TAIEB qui m'a appris (en autres) à découper les ε en 3, M. WIRTH et Mme LERAYS qui m'ont orienté vers Orsay et ensuite, tous les enseignants de l'Université d'Orsay qui m'ont redonné tout d'abord confiance, en particulier Patrick GÉRARD et Dominique HULIN, puis peu à peu le goût des probabilités : merci à Raphaël CERF, Yan PAUTRAT, Gregory MIERMONT, Jean-François LE GALL, Mylène MAÏDA pour leurs excellents enseignements et en particulier à Raphaël ROSSIGNOL et Wendelin WERNER pour leurs initiations à la recherche et la présentation si agréable des objets qui font aujourd'hui mon quotidien.

Merci à tous les probabilistes côtoyés en cours ou en conférence, en particulier Vincent (fils) pour toujours me pousser à dessiner des chemins et me redonner confiance et motivation dans mon travail, Vincent (père) pour m'avoir encouragé à faire mes simulations, Sébastien pour sa présence à mes exposés (sauf aujourd'hui mais il a une bonne excuse), les talentueuses mécastatisticiennes (Loren, Marielle, Oriane). Un grand merci à Jean-Baptiste BARDET, et aux autres organisateurs des Jeunes Probabilistes et Statisticiens, pour cette semaine riche en exposés, rencontres, fous rires, chansons et balades.

Merci à tous les membres de l'Institut Elie Cartan qui contribuent à faire de ce bâtiment (mal chauffé) un espace de travail chaleureux. Merci à Bernard, Élodie, Estelle, Laurence, Stéphanie et tous les autres pour leur efficacité à résoudre mes petits et gros soucis. Une pensée particulière pour Karine JACQUOT dont l'efficacité est sans égal face à tous les tracassés administratifs. Merci à Aline, Anne(s), Bruno, Céline, Karim, Kolehe, Ivan, Pierre-Emmanuel, Rémi, Renaud, Samy, Vladimir... et tous les autres pour toutes les discussions autour d'un café (et des gâteaux). Et merci aux doctorants qui répondent plus ou moins présents à la dynamique qu'il est important de préserver. J'en profite pour remercier Julie de m'avoir si vite accueillie, montré le meilleur bar de Nancy, présenter les plus sympas doctorants (et le plus beau!).

Merci à Bruno et Murielle pour leur accueil toujours bienveillant dans le cercle familial, et une pensée toute particulière pour la tendresse de Marion (ne la perds pas en grandissant!).

Merci à Olivier et Régine pour tous leurs précieux conseils vis à vis des mathématiques, des enseignements, des relations humaines...

Merci à mes camarades plus ou moins matheux pour toutes les aventures partagées : la plus belle des mariées, ma co-demoiselle d'honneur qui répond toujours présent, la loi des 5 (ses fous rires, ses voyages, ses pleurs), les lanceurs de clémentine, une magnifique amitié politico-dansante grâce à un très bon plan de table, les roux brasseurs (et en particulier une percoleuse toujours prête à lire ma thèse), les fabricants de vin de noix, mes co-bureaux, et en particulier 2 : celui dont l'écoute est sans faille malgré mes humeurs et celle dont les conseils ne sont jamais ceux qu'on voudrait entendre mais toujours très précieux pour avancer. Et mon co-aventurier quotidien de thèse, déjeuners, festivals, jeux, soirées folles, longues discussions...

Merci à ceux dont l'engagement reste fort et qui nous font croire en un monde meilleur, merci aux futurs habitants de notre immeuble partagé...

Merci aux danseurs pour leur sourire et leur gentillesse qui ont rendu ce début d'année moins difficile (Nini, Georges et Sabine, Maryvonne, Sylvie) ainsi qu'à ceux qui guident mes pas (et tout le reste) Wilfried et Marie-Geo (sur la piste), Pierrick (sur le mur) : j'espère être une enseignante aussi passionnée et motivante que vous !

Merci à mon cuisinier préféré pour tous ses talents, à mon partenaire pour ses encouragements permanents dans mon travail aussi bien que dans ma danse (même s'il ne les comprend pas toujours), et à mon compagnon de route pour tous ces bonheurs partagés.

Merci à ma petite famille (Maya qui me manque par la distance, Nicole et Mamie). Merci à ma nièce de coeur pour son amitié inégalable ; j'espère que les surprises futures de ta vie seront aussi belles que fut pour moi ta rencontre. Merci à mes parents et à mon plus beau cadeau d'anniversaire, tous trois sources de réflexions et tendresse infinies. Je suis heureuse de présenter ce travail devant vous et je vous aime.

Table des matières

Introduction	1
I Les modèles	5
1 Systèmes de particules en interaction	7
1.1 Processus de Markov	8
1.2 Système en interaction à plus proches voisins	10
1.3 Additivité et Représentation graphique	16
1.4 Inégalités de corrélation	17
2 Le processus de contact de Harris	23
2.1 Modèle initial	24
2.2 Représentation graphique	29
2.3 Le processus sur $\mathbb{Z}$	34
2.4 Le processus sur $\mathbb{Z}^d$	39
3 Des variantes du processus de contact	43
3.1 Environnement aléatoire ou inhomogène	44
3.2 Environnement dynamique	51
3.3 Processus à mémoire	57
II Le Processus de contact avec vieillissement	67
4 Le modèle	69
4.1 Modèle	69
4.2 La survie du PCV	76
5 Couplage avec une percolation	81
5.1 La survie implique une condition spatio-temporelle finie	82
5.2 La bonne condition spatio-temporelle finie	92
5.3 Le couplage	99
6 Les contrôles de croissance	103
6.1 Croissance au plus linéaire	103
6.2 Croissance au moins linéaire	105

III	Théorèmes de forme asymptotique	111
7	Le temps d'atteinte essentiel	115
7.1	Définition	115
7.2	Sur les transformations $\tilde{\theta}_x$	119
7.3	Contrôle de $\sigma(x)$	121
7.4	Contrôle du défaut de sous-additivité	129
8	Théorèmes de forme asymptotique	135
8.1	Énoncé	135
8.2	Démonstration	136
8.3	Applications	141
A	Quelques outils de probabilistes	145
A.1	Théorie ergodique et sous-additivité	145
	Notations	149
	Bibliographie	151

Introduction

À la fin des années 60, une nouvelle branche des mathématiques, et plus particulièrement des probabilités, a vu le jour : l'étude des systèmes de particules en interaction. Cette branche est devenue une forêt à elle toute seule de part la complexité des problèmes qu'elle pose aux probabilistes, la beauté des résultats qu'elle leur fait démontrer et les interactions qu'elle établit avec d'autres domaines scientifiques. Les systèmes de particules en interaction ravissent en effet les avides d'abstraction par leurs liens avec la théorie des processus de Markov (pour répondre, par exemple, à des questions d'existence des objets que l'on considère), ou encore avec l'analyse complexe (via la percolation par exemple), mais aussi ceux dont l'âme est plus à la modélisation de phénomènes physiques, biologiques ou sociologiques comme la propagation de fluide dans un matériau poreux, la croissance d'un cristal, le développement d'un feu de forêt, la propagation d'une épidémie ou encore les résultats de votes électoraux.

Plus précisément, il s'agit d'étudier des systèmes infinis de particules qui interagissent entre elles en changeant d'état au cours du temps ; elles sont donc liées par des propriétés microscopiques (interaction entre particules proches) et macroscopiques (caractéristiques du système à grande échelle). Pour construire des modèles mathématiques à partir de phénomènes physiques ou biologiques, il faut bien sûr faire des hypothèses de simplification sur le système observé : on modélisera ici nos objets d'études par le réseau $\mathbb{Z}^d$ et on attribuera à chaque site du réseau un état à valeurs dans un ensemble S fini ou dénombrable. On traduira ensuite les interactions entre particules par des taux de changement d'état des sites dépendant des sites eux-mêmes et de la configuration qui les entoure. L'indéterminisme des phénomènes à décrire nous mène à une modélisation probabiliste.

Dans cette thèse, je me focaliserai sur des modèles de croissance, qui, comme leur nom l'indique, représentent une quantité qui grandit (au sens des sites qu'elle atteint) au cours du temps et se propage au sein du réseau $\mathbb{Z}^d$. Ce type de processus apparaît naturellement quand on essaie par exemple de modéliser la croissance d'un cristal ou encore la propagation d'une épidémie. Je m'intéresse aux évolutions de ces modèles au cours du temps et en particulier à leurs comportements asymptotiques quand le temps tend vers l'infini. J'étudierai plus particulièrement les processus de contact qui s'avéreront présenter des résultats de forme asymptotique déterministe intéressants.

Le processus de contact a été introduit par Harris en 1974 ; il modélise par exemple le développement d'une infection paramétrisé par un taux de contamination λ . C'est un des plus simples systèmes de particules en interaction présentant une transition de phase : il existe un paramètre critique λ_c tel que si $\lambda < \lambda_c$ (phase sous-critique), le processus s'éteint et si $\lambda > \lambda_c$ (phase surcritique), le processus survit avec probabilité strictement positive. Les principales questions que l'on se pose sont : comment se comporte le processus pour $\lambda > \lambda_c$ (convergence en loi du processus, croissance de la zone des points contaminés) ? À quelle vitesse s'éteint-il pour $\lambda < \lambda_c$? Combien vaut λ_c ? Que se passe-t-il à $\lambda = \lambda_c$ (phase critique) ? L'étude entamée par Harris est

poursuivie principalement par Durrett et Griffeath en dimension 1, notamment grâce à des outils de percolation. Soulignons que l'outil qui a conclu l'étude en dimension $d \geq 2$ est la construction d'un couplage entre le processus de contact et la percolation orientée effectuée par Bezuidenhout et Grimmett, en 1991, et permettant de montrer l'extinction au point critique ainsi que la croissance au moins linéaire du processus. Cette construction reviendra régulièrement lors de l'étude d'extensions du processus de contact, mais elle apparaîtra aussi dans d'autres modèles de systèmes de particules en interaction tels que les marches aléatoires branchantes. Cette construction permet à Durrett, reprenant des idées de Bramson, Durrett et Griffeath, de conclure à un théorème de forme asymptotique pour le processus de contact. Une démonstration alternative est apportée par Garet et Marchand pour le processus de contact en environnement aléatoire sur-critique : les difficultés consistent à bien mener les techniques de redémarrage pour montrer la croissance au moins linéaire et à trouver une quantité ayant de bonnes propriétés (croissance, sous-additivité, stationnarité, intégrabilité) pour démontrer la convergence finale grâce à des méthodes sous-additives.

Dans une première partie, je présenterai les modèles qui nous intéressent dans cette thèse en tâchant de mettre en avant l'historique de leurs développements et les idées clefs de l'étude de leurs évolutions. Pour décrire un système de particules en interaction, nous avons envie de donner les dynamiques locales qui s'opèrent entre les particules du réseau. Je donnerai dans le chapitre 1 un cadre théorique à ces modèles pour justifier leur existence : celui des processus de Markov. Nous verrons que travailler avec des interactions à plus proches voisins nous fait manipuler un générateur plus simple et nous permet de définir facilement les processus associés aux dynamiques locales que nous souhaitons attribuer à nos particules. Je définirai dans ce premier chapitre les notions fondamentales des systèmes de particules en interaction : attractivité, dualité, survie, couplage, corrélations. J'exposerai l'idée de la représentation graphique de Harris qui nous permet de quitter le cadre abstrait des processus de Markov pour manipuler des familles de processus de Poisson. Cette représentation s'utilise notamment pour le processus de contact dont je présenterai, au chapitre 2, l'étude historique qui a mené aux résultats que l'on connaît aujourd'hui. J'exposerai ensuite au chapitre 3 quelques extensions du processus de contact telles que le processus de contact en environnement aléatoire, en environnement dynamique, ou encore des processus de contact présentant des phénomènes de mémoire tels qu'une sensibilisation, immunisation ou maturation. Je m'intéresserai à l'obtention des théorèmes de forme asymptotique qui sont conjecturés pour la plupart de ces modèles.

Ces diverses extensions m'ont conduite à introduire un nouveau modèle : le processus de contact avec vieillissement où les états des particules représentent leur âge et influencent leur capacité à donner naissance à leurs voisines. Ce modèle fera l'objet de la deuxième partie du manuscrit. Je construirai ce processus au chapitre 4 à l'aide de la représentation graphique. Je discuterai de sa paramétrisation et donnerai des premières propriétés relatives à sa survie. Au chapitre 5, j'effectuerai un couplage avec une percolation orientée inspirée de la construction historique de Bezuidenhout et Grimmett : cet outil de renormalisation nous permet tout d'abord de prendre du recul sur les évolutions locales du processus tout en montrant que nous pouvons prédire le comportement asymptotique du processus en regardant ce qu'il se passe dans une boîte spatio-temporelle finie. Cette construction me permettra d'établir, au chapitre 6, grâce à des techniques de redémarrage, que la croissance du processus de contact avec vieillissement est d'ordre linéaire. Cela nous donne ensuite envie de prouver, pour le modèle du processus de contact avec vieillissement, un analogue du théorème de forme asymptotique qui existe pour le processus de contact standard et qui reste en suspens pour beaucoup de ses extensions.

Dans ce but, je m'intéresse, dans la dernière partie de ce travail, à la démonstration d'un théorème de forme asymptotique pour des modèles généraux de croissance aléatoire. Sous de bonnes hypothèses telles que la croissance d'ordre linéaire (souvent obtenue grâce à des méthodes de renormalisation comme celle que j'ai utilisée dans la partie II), je montre au chapitre 7 qu'il est possible de construire une quantité (le temps essentiel de Garet et Marchand) capturant les caractéristiques de croissance des modèles et présentant, malgré les difficultés posées par l'extinction possible de certains modèles, de bonnes propriétés de sous-additivité, intégrabilité et stationnarité sous la probabilité conditionnée à survivre. Ces propriétés me permettent, grâce au théorème ergodique presque sous-additif de Kesten et Hammersley, d'obtenir au chapitre 8 un théorème de forme asymptotique général qui peut s'appliquer à de nombreux modèles de croissance aléatoire différents. J'en conclus en particulier que le processus de contact avec vieillissement, le processus de contact en environnement dynamique, la percolation orientée avec immigration hostile, et le processus de contact avec sensibilisation vérifient des résultats de forme asymptotique.

I

LES MODÈLES

Systèmes de particules en interaction

La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. — Poincaré.

Les systèmes de particules en interaction sont une branche de la théorie des probabilités qui est apparue à la fin des années 60 à partir des travaux fondateurs de F. Spitzer [Spi70, Spi71] aux États-Unis et R.L. Dobrushin [Dob71] en Union Soviétique. Dans les cinquante dernières années, ce domaine s'est amplement développé en interagissant notamment avec d'autres champs scientifiques, en plus de son parent la mécanique statistique, tels que la biologie.

Qu'est-ce qu'un système de particules en interaction ? On se donne un nombre fini ou dénombrable de particules qui, en l'absence d'interaction, évolueraient au cours du temps selon des chaînes de Markov indépendantes (en nombre fini ou dénombrable). À cela, on ajoute un phénomène d'interaction entre les particules. Le taux de changement d'état (ou *flip*) d'une particule dépendra maintenant des états des autres particules du système. L'évolution d'une particule individuelle n'est alors plus markovienne. Le système complet, lui, reste markovien mais il s'agit d'un système grand et complexe (différant en plein d'aspects du mouvement brownien qui a motivé le développement de la théorie des processus de Markov).

Le comportement d'un système de particules en interaction dépend bien sûr sensiblement de la nature des interactions mises entre les particules. La plupart des recherches faites dans ce domaine traite d'un certain type de modèles avec une interaction prédéfinie. L'unité du sujet ne vient pas de la généralité des théorèmes qui sont prouvés mais plutôt de la nature des processus qui sont étudiés, des questions qui sont posées et des techniques qui sont utilisées pour y répondre.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à des interactions à portée finie et, plus précisément, à plus proches voisins : le *flip* d'une particule dépendra de son état et de celui de ses voisins. Pour décrire ce type de systèmes, on a donc envie de se donner des dynamiques locales. Donnons tout de suite quelques exemples pour mieux voir de quoi l'on parle.

Le modèle des votes a été introduit indépendamment par Clifford et Sudbury [CS73] et Holley et Liggett [HL75]. Le processus est à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ et la dynamique est décrite par le fait qu'une particule x passe de l'état $\eta(x)$ à l'état $1 - \eta(x)$ à taux

$$\frac{1}{2d} \sum_{y: \|y-x\|_1=1} \mathbb{1}_{\eta(y) \neq \eta(x)}.$$

Dans l'interprétation de Holley et Liggett, les particules représentent des votants qui doivent choisir entre deux candidats et qui adoptent un avis proportionnel à celui de leurs voisins.

Le processus de contact a été introduit par Harris [Har74]. Il est lui aussi à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ et la dynamique est décrite par le fait qu'une particule x passe de l'état 1 à l'état 0 à

taux 1 indépendamment de la configuration avoisinante, et de l'état 0 à l'état 1 à taux

$$\lambda \sum_{y: \|y-x\|_1=1} \eta(y).$$

Une particule peut être interprétée comme infectée dans l'état 1 et saine dans l'état 0. Nous nous concentrerons sur l'étude de ce modèle et de ses extensions dans les chapitres suivants.

Le processus d'exclusion a été introduit par Spitzer [Spi70] puis Clifford et Sudbury [CS73]. Il est à valeurs dans $\{0, 1\}^G$, où G est un ensemble dénombrable, et il représente le déplacement de particules dans G (on peut prendre $G = \mathbb{Z}^d$ comme précédemment mais la structure de graphe n'est ici pas nécessaire). L'ensemble $\{x \in G : \eta(x) = 1\}$ est l'ensemble des sites occupés. Les particules se déplacent selon les règles suivantes : une particule $x \in G$ attend un temps exponentiel puis choisit une autre particule $y \in G$ avec probabilité $p(x, y)$; si y est vide, elle va en y tandis que si y est occupé, elle reste en x .

La première question qu'il faut se poser est de savoir s'il existe bien un unique processus de Markov qui correspond à cette description par dynamiques locales. Nous avons intuitivement envie de construire un générateur global comme somme sur les particules de générateurs des dynamiques locales. Dans les deux premiers exemples, une seule coordonnée à la fois change d'état. Dans le dernier, deux coordonnées peuvent changer à la fois. Dans le cas général, une infinité de coordonnées peuvent changer dans tout intervalle de temps et la propagation des interactions peut parfois être difficile à comprendre. Nous allons voir que, sous de bonnes hypothèses, le choix intuitif nous fournit bien l'objet désiré. Si, dans un premier temps, nous répondrons à ces questions à l'aide de notions théoriques sur les processus de Markov, nous quitterons rapidement cette approche et nous utiliserons de nouveaux outils caractéristiques des systèmes de particules en interaction (couplages, corrélations) ainsi qu'une nouvelle vision via des représentations graphiques pour les processus qui seront dit *additifs*. Nous nous focaliserons sur un cas encore plus particulier : les processus de contact, processus sans apparition spontanée de particules. La notion de représentation graphique, introduite à la fin des années 70, sera très utilisée à partir des années 90 pour ces processus de contact et permettra d'établir de nombreuses extensions du modèle.

1.1 Processus de Markov

Cette partie s'appuie grandement sur le premier chapitre de [Lig05].

Soit X un espace compact métrique mesurable muni de sa tribu borélienne. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions càdlàg de $\mathbb{R}_+$ dans X , représentant les trajectoires du processus, muni de la plus petite tribu rendant les projections mesurables, notée $\mathcal{F}$ (et $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ une filtration associée).

Définition 1.1.1. *Un processus de Markov sur X est une famille $\{\mathbb{P}^\eta, \eta \in X\}$ de mesures de probabilité sur $\mathcal{D}$ vérifiant, pour tout $\eta \in X$, tout $s \geq 0$ et tout $A \in \mathcal{F}$*

1. $\mathbb{P}^\eta((\xi_t) \in \mathcal{D} : \xi_0 = \eta) = 1$;
2. l'application de X dans $[0, 1]$, $\eta \mapsto \mathbb{P}^\eta(A)$, est mesurable ;
3. $\mathbb{P}^\eta(\xi_{s+} \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^{\xi_s}(A)$, $\mathbb{P}^\eta$ -presque sûrement.

Remarque. *La définition ci-dessus est celle de processus de Markov homogène ; nous ne travaillerons qu'avec ceux-ci.*

Par abus de notation, nous utiliserons souvent une trajectoire aléatoire (ξ_t) pour désigner un processus de Markov. L'espérance sous $\mathbb{P}^\eta$ est notée $\mathbb{E}^\eta$.

Soit $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach car X est compact. Pour $t \geq 0$, on note

$$S(t) : \mathcal{C}(X) \mapsto \mathcal{C}(X) \\ f \mapsto \{\eta \mapsto \mathbb{E}^\eta f(\eta_t)\}.$$

Définition 1.1.2. *Un processus de Markov est un processus de Feller si, pour tous $t \geq 0$ et $f \in \mathcal{C}(X)$, $S(t)f \in \mathcal{C}(X)$.*

Proposition 1.1.3. *Si le processus est de Feller, la collection d'opérateurs linéaires sur $\mathcal{C}(X)$ $\{S(t), t \geq 0\}$ est un semi-groupe de Markov, i.e.*

1. $S(0) = Id_{\mathcal{C}(X)}$; pour tout $t \geq 0$, $S(t)1 = 1$;
2. pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{C}(X)$, $t \mapsto S(t)f$ est continue à droite ;
3. pour tous $t, s \geq 0$, $S(t+s) = S(t)S(s)$;
4. pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$ positive, $S(t)f$ positive.

Théorème 1.1.4. *Il y a une correspondance unique entre semi-groupe de Markov et processus de Markov.*

Nous avons dit dans l'introduction que nous voulions travailler avec des phénomènes qui se produisent à un certain taux. Pour cela, nous allons introduire le générateur infinitésimal du processus sur lequel nous travaillons.

Définition 1.1.5. *Le générateur d'un processus de Markov de semi-groupe $S(t)$ est un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{C}(X)$, de domaine $\text{dom}(\mathcal{A})$, tel que pour tout $f \in \text{dom}(\mathcal{A})$:*

$$\mathcal{A}f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t}.$$

L'existence de cet objet est donnée par le théorème de Hille-Yosida. On pourra se reporter à [Lig05] pour plus de détails sur cette théorie.

Dans la définition précédente d'un processus de Markov, l'état initial est un ensemble déterministe de X . On peut aussi se donner pour configuration initiale une mesure de probabilité μ sur X .

Définition 1.1.6. *Soit $\{S(t), t \geq 0\}$ un semi-groupe de Markov sur $\mathcal{C}(X)$ et μ une mesure de probabilité sur X . On définit alors la mesure $\mu S(t)$ par la relation*

$$\forall f \in \mathcal{C}(X), \int_X f d[\mu S(t)] = \int_X S(t)f d\mu.$$

Cette mesure de probabilité est interprétée comme la distribution au temps t du processus dont l'état initial est la distribution μ .

Par analogie avec la notation précédente, nous noterons $\delta_\xi S(t)$ dans le cas d'une configuration initiale déterministe ξ .

L'ensemble des mesures de probabilité sur X est muni de la convergence faible : $\mu_n \rightarrow \mu$ si et seulement si $\forall f \in \mathcal{C}(X), \int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$. Nous serons amenés dans la suite à prouver des théorèmes limites pour la quantité $\mu S(t)$. Cherchons donc quelles sont les limites possibles.

Définition 1.1.7. *La mesure de probabilité μ sur X est invariante pour le processus de Markov si, pour tout $t \geq 0$, $\mu S(t) = \mu$. L'ensemble des mesures invariantes sera noté $\mathcal{I}$.*

Proposition 1.1.8. 1. L'ensemble $\mathcal{I}$ est un convexe compact.

2. Soit $\mathcal{I}_e$ l'ensemble des points extrémaux. Alors $\mathcal{I}$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{I}_e$.

3. Pour toute mesure de probabilité μ sur X , $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t)$, si elle existe, est dans $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}$ non vide.

Remarque. La preuve de la proposition précédente s'appuie sur le fait que X est compact et que, par conséquent, l'ensemble de mesures de probabilités sur X l'est aussi.

Définition 1.1.9. Le processus de Markov de semi-groupe $\{S(t), t \geq 0\}$ est dit ergodique si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. l'ensemble $\mathcal{I} = \{\nu\}$ est un singleton,

2. pour toute mesure de probabilité μ sur X , $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \nu$ (si la limite existe).

Remarque. La notion d'ergodicité signifie qu'on perd l'information de la condition initiale à la limite.

1.2 Système en interaction à plus proches voisins

1.2.1 Définition

Nous nous plaçons sur le graphe $\mathbb{Z}^d$ où un site est représenté par ses coordonnées $x = (x^1, \dots, x^d)$, $x^i \in \mathbb{Z}$. Nous dirons que :

- deux sites x et y sont voisins, et nous noterons $x \sim y$, si $\sum_i |x^i - y^i| = 1$,
- un site x est voisin d'une partie $E \subset \mathbb{Z}^d$, et nous noterons $x \sim E$, si, pour un certain $y \in E$, $x \notin E$ mais $x \sim y$,
- N_x est l'ensemble des $2d$ voisins de x ,
- T_x est la translation spatiale de vecteur $x \in \mathbb{Z}^d$.

On note $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ les parties de $\mathbb{Z}^d$ et $\mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)$ ses parties finies. Toute partie ξ de $\mathbb{Z}^d$ peut être vue comme une fonction de $\mathbb{Z}^d$ dans $\{0, 1\}$, et inversement, par la correspondance suivante :

$$\xi \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d) \Leftrightarrow \begin{cases} \xi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \{0, 1\} \\ x \rightarrow \xi(x) = \mathbb{1}_{x \in \xi}. \end{cases}$$

Nous utiliserons indifféremment les notations $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.

De façon analogue, on peut remplacer $\{0, 1\}$ par un ensemble S fini totalement ordonné : nous noterons $S^{\mathbb{Z}^d}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}^d$ dans S ou bien l'ensemble des partitions de $\mathbb{Z}^d$ en $|S|$ sous-parties :

$$\xi \in S^{\mathbb{Z}^d} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi : \mathbb{Z}^d \rightarrow S \\ x \rightarrow \xi(x); \end{cases}$$

et nous noterons $S_f^{\mathbb{Z}^d}$, le sous-ensemble des fonctions n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées non nulles. Dans la suite du chapitre, nous tentons d'étendre, quand cela est possible, les définitions de la littérature pour des processus à valeurs dans $S^{\mathbb{Z}^d}$.

Définition 1.2.1. L'ensemble S sera considéré comme les types possibles des particules. Nous appellerons $\xi \in S^{\mathbb{Z}^d}$ une configuration du système. La quantité $\xi(x)$ est donc le type de $x \in \mathbb{Z}^d$ dans la configuration ξ .

Remarque. Liggett travaille dans le cadre plus général de S compact. Tout ce qui sera écrit reste valable mais nos exemples de modèles ne sont que dans le cas où S est fini.

Soit $\mathcal{C}(S^{\mathbb{Z}^d})$ l'ensemble des fonctions continues de $S^{\mathbb{Z}^d}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_0(S^{\mathbb{Z}^d})$ le sous-ensemble des fonctions de $\mathcal{C}(S^{\mathbb{Z}^d})$ ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées d'une configuration.

Définition 1.2.2. Dans cette thèse, un système de particules en interaction à plus proches voisins (NNI pour nearest neighbor interaction) est un processus de Markov (ξ_t) à valeurs dans $X = S^{\mathbb{Z}^d}$ dont le générateur vérifie, pour toute $f \in \mathcal{C}_0(S^{\mathbb{Z}^d})$ et toute configuration $\xi \in S^{\mathbb{Z}^d}$,

$$\mathcal{A}(f)(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{s \in S} c(x, \xi, s) (f(\xi_{(x,s)}) - f(\xi))$$

où, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et toute configuration ξ , $\xi_{(x,s)}$ est la configuration ξ où on a remplacé $\xi(x)$ par s et $c(x, \xi, s) \geq 0$ est l'intensité du saut de ξ à $\xi_{(x,s)}$ et ne dépend de ξ qu'à travers $\{\xi(y), y \sim x\}$ et $\xi(x)$.

Remarque. La définition précédente a été introduite par Harris [Har74]. Un système de particules en interaction est en fait un objet plus général dont on trouvera une définition dans le chapitre I de [Lig05]. Nous allons voir que notre définition impose le fait qu'une seule particule change d'état à la fois. Cette définition se rapproche de celle des systèmes de spins de Liggett (chapitre III de [Lig05]) mais nos états possibles sont dans S au lieu de $\{0, 1\}$ et les interactions se font à plus proche voisins.

Remarque. 1. Pour simplifier, on prend $c(x, \xi, s) = 0$ si $s = \xi(x)$, c'est-à-dire qu'on ne prend pas en considération les sauts qui ne changent rien à la configuration.

2. La notion d'**interaction** apparaît dans le fait que le taux $c(x, \xi, s)$ de changement d'état de la particule x dépend de la configuration ξ et pas seulement, a priori, de la valeur $\xi(x)$.

Définition 1.2.3. On dit de plus que le système est invariant par translation si pour tous $x \in \mathbb{Z}^d$, $\xi \in S^{\mathbb{Z}^d}$ et $s \in S$, $c(x, \xi, s) = c(0, \xi \circ T_x, s)$.

Si l'inverse n'est pas précisé, nous travaillons dans le cas invariant par translation.

Théorème 1.2.4. Le processus de la définition 1.2.2 existe.

Référence de preuve. Pour la preuve de ce résultat, on se reportera au chapitre 1 de [Lig05]. $\square$

Dès qu'il a introduit les systèmes de particules en interaction, Spitzer [Spi70] s'est posé la question de l'existence des processus dans le cas d'un nombre infini de particules. Dans [Hol70], Holley s'est d'abord attaqué au problème dans le cas unidimensionnel avec un contrôle sur les taux de transition ; il donne plusieurs exemples de systèmes et travaille avec des méthodes propres aux processus de Markov. Harris généralise ensuite le résultat aux dimensions supérieures pour le cas des interactions à plus proches voisins [Har72] ; il introduit alors l'utilisation de la percolation dans l'étude des systèmes de particules en interaction. D'autres généralisations se trouvent dans [Dob71], [Hol72] et [Lig72] ; dans [Lig72] en particulier, Liggett travaille dans le cadre d'interactions à portée infinie tandis que Holley fournit dans [Hol72] une preuve beaucoup plus élémentaire que Liggett et Harris mais moins générale. Le cadre le plus général (avec des conditions sur les intensités) se retrouve finalement dans le livre de Liggett [Lig05]. Pour démontrer ses résultats, Liggett utilise le cadre théorique des processus de Markov. Revenons sur le cas particulier des interactions à plus proches voisins qui nous intéresse et notamment à la démonstration de Harris dans [Har72] : la difficulté est d'établir le fait que ce qu'il se passe dans un intervalle de temps court dans un voisinage donné n'est pas influencé par une chaîne d'interactions venant d'infiniment loin. Dans ce but, Harris utilise un résultat de percolation pour partitionner $\mathbb{Z}^d$ en ensembles aléatoires finis (îles) qui n'ont pas d'interaction entre eux. Il construit sur chaque île le processus à l'aide de processus de Poisson, faisant ainsi entrevoir les prémisses de la construction graphique.

Remarque. Dans le cas où $S = \{0, 1\}$, on peut réécrire le générateur sous la forme simplifiée suivante :

$$\mathcal{A}(f)(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} c(x, \xi) (f(\xi_{(x)}) - f(\xi)),$$

où, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et toute configuration ξ , $\xi_{(x)}$ est la configuration ξ où on a remplacé $\xi(x)$ par $1 - \xi(x)$ et $c(x, \xi)$ est l'intensité du saut de ξ à $\xi_{(x)}$.

Le générateur de la définition 1.2.2 nous donne bien les dynamiques que l'on souhaitait ; en effet, en l'appliquant à une bonne fonction, on obtient, pour t tendant vers 0,

$$\mathbb{P}^\xi[\xi_t(x) \neq \xi(x)] = \sum_{s \in S} c(x, \xi, s)t + o(t).$$

En plus d'avoir supprimé les dépendances à longue portée, la forme particulière du générateur de la définition 1.2.2 a la conséquence que nous espérons (comme l'exprime la proposition suivante) : une seule coordonnée change à chaque transition.

Proposition 1.2.5. Pour toute configuration ξ , pour toutes particules $x, y \in \mathbb{Z}^d$ distinctes, on a, lorsque t tend vers 0 :

$$\mathbb{P}^\xi[\xi_t(x) \neq \xi(x), \xi_t(y) \neq \xi(y)] = o(t).$$

Référence de preuve. On trouvera la preuve de ce résultat dans [Har74] ou dans le chapitre 3 de [Lig05]. Bien que Liggett s'intéresse dans ce chapitre à des systèmes de spins à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, la preuve reste valable pour des systèmes ayant un ensemble d'états plus général. Par contre, les interactions auxquelles s'intéresse Liggett sont plus générales car elles ne se limitent pas aux plus proches voisins (mais sont quand même limitées par des hypothèses sur les taux). $\square$

Il est temps de donner quelques exemples.

▷ **Exemple.** 1. Les interactions naissance-mort ont été introduites par Spitzer [Spi71]. Soit $S = \{0, 1\}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_{2d}, \mu_0, \dots, \mu_{2d}$ des réels positifs. Pour $x \in \mathbb{Z}^d$, $\xi \in S^{\mathbb{Z}^d}$ et $k \in \mathbb{N}$, si $|\xi \cap N_x| = k$, on pose :

$$c(x, \xi) = \begin{cases} \lambda_k & \text{si } \xi(x) = 0, \\ \mu_k & \text{si } \xi(x) = 1. \end{cases}$$

La quantité λ_k correspond au taux de naissance d'une particule quand elle est morte avec k voisins vivants et la quantité μ_k correspond à son taux de mort quand elle est vivante avec k voisins vivants.

2. Les interactions de contact (ou processus de contact) ont été introduites par Harris [Har74]. C'est un cas particulier des interactions précédentes où $\lambda_0 = 0$, i.e. une particule ne peut pas naître spontanément sans voisin vivant (d'où le terme de contact) et où, pour tout k , $\mu_k = \mu$, i.e. la mort d'une particule ne dépend pas de ses voisins. Le générateur prend alors, pour toute configuration ξ et toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(S^{\mathbb{Z}^d})$, la forme particulière suivante :

$$\mathcal{A}(f)(\xi) = \mu \sum_{x \in \xi} (f(\xi \setminus x) - f(\xi)) + \sum_{x \sim \xi} \lambda_{|\xi \cap N_x|} (f(\xi \cup x) - f(\xi)).$$

▷ **Contre-exemple.** Le processus d'exclusion cité dans l'introduction du chapitre n'est pas un système de particules en interaction à plus proches voisins au sens de la définition 1.2.2 car en plus d'avoir des interactions à longue portée (qu'on peut éventuellement supprimer dans l'étude

de cas particuliers), deux particules peuvent changer d'état au même instant. Son générateur n'a donc pas la forme indiquée précédemment :

$$\mathcal{A}'(f)(\xi) = \sum_{\substack{\xi(x)=1 \\ \xi(y)=0}} p(x, y) (f(\xi_{(x,y)}) - f(\xi)),$$

où $\xi_{(x,y)}$ est la configuration ξ où on a échangé les valeurs en x et en y .

La plupart des définitions qui vont suivre sont bien connues dans la littérature pour les processus à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ (binaires ou de spins) ; nous les étendons au cas des processus à valeurs dans $S^{\mathbb{Z}^d}$.

1.2.2 Attractivité

Nous choisissons d'étendre la définition d'attractivité donnée pour les systèmes de spins par Liggett (au chapitre III de [Lig05]) de la façon suivante :

Définition 1.2.6. *Un système de particules en interaction est dit attractif si pour toutes configurations $\xi, \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$ telles que $\xi \leq \eta$, tous $s, s' \in S$ et tout $x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\eta(x) = \xi(x) = s'$, on a*

$$\begin{aligned} c(x, \xi, s) &\leq c(x, \eta, s) \text{ si } s' < s, \\ c(x, \xi, s) &\geq c(x, \eta, s) \text{ si } s' > s. \end{aligned}$$

La relation d'ordre entre configurations est la relation d'ordre partielle coordonnée par coordonnée ; celle-ci est détaillée à la section 1.4.

Remarque. 1. Être attractif implique que, plus la configuration initiale est grande, plus les configurations sont grandes en tout instant. Nous verrons cette idée à la section suivante quand nous serons en mesure de coupler des processus issus de configurations initiales différentes.

2. La définition précédente d'attractivité est éventuellement restrictive mais elle nous donne cette dernière propriété et elle sera vérifiée par tous les modèles présentés.

3. Cette définition d'attractivité est spécifique aux systèmes de particules en interaction ; elle correspond à la notion de monotonie des processus de Markov associés. Nous garderons le vocabulaire de monotonie pour la dépendance du système par rapport à ses paramètres.

Théorème 1.2.7 (Harris, 1974). *Soit (ξ_t) un processus de contact. Si $(\lambda_k)_k$ est croissante en k , (ξ_t) est attractif.*

Référence de preuve. On trouvera la preuve de ce résultat dans [Har74] grâce à des méthodes de couplages (notion détaillée à la section 1.4). $\square$

Le caractère attractif d'un processus permet d'obtenir de meilleurs critères sur les comportements limites.

Notons respectivement $\delta_{\min}$ et $\delta_{\max}$ les configurations minimale et maximale non triviales du processus, c'est-à-dire les ensembles $\mathbb{I}_{x=0}$ et $(\max S)^{\mathbb{Z}^d}$.

Proposition 1.2.8. *Soit (ξ_t) un processus attractif. Alors les mesures $\underline{\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{\min} S(t)$ et $\bar{\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{\max} S(t)$ existent et sont dans $\mathcal{I}_e$.*

Corollaire 1.2.9. *On a alors les trois équivalences suivantes :*

1. *le processus est ergodique,*
2. *l'ensemble $\mathcal{I}$ est un singleton,*
3. *l'égalité $\underline{\nu} = \overline{\nu}$ est vérifiée.*

Si, de plus, le système est invariant par translation alors il est ergodique si et seulement si $\mathcal{I}$ contient exactement une mesure invariante par translation.

1.2.3 Modèle de croissance et survie

Nous avons maintenant les outils pour donner une définition de modèle de croissance pour les processus binaires :

Définition 1.2.10. *Un processus de Markov (ξ_t) est un modèle de croissance si*

- *le processus est un système de particules en interaction à plus proches voisins invariant par translation à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$,*
- *le processus est attractif,*
- *l'état $\xi \equiv 0$ est absorbant.*

Durrett et Griffeath ont introduit une définition plus générale sans imposer des interactions à plus proches voisins mais nous n'avons défini que celles-ci. Nous généraliserons cette notion pour les systèmes à valeurs dans $S^{\mathbb{Z}^d}$ dans la partie III.

Définition 1.2.11. *Pour ces modèles, il y a plusieurs notions d'extinction du processus :*

1. $\delta_\xi S(t)$ *converge faiblement vers $\delta_\emptyset$ si $|\xi| < \infty$,*
2. $\delta_\xi S(t)$ *converge faiblement vers $\delta_\emptyset$ si $|\xi| \leq \infty$,*
3. $\mathbb{P}^\xi(\exists s > 0 : \xi_s = \emptyset) = 1$ *si $|\xi| < \infty$.*

À ces notions d'extinction, sont associées des notions inverses de survie du processus.

Remarque. *La notion 3 d'extinction est associée à un événement presque sûr. La notion (inverse) de survie sera donc associée à un événement de probabilité strictement positive (et non pas presque sûr).*

Il est clair que 3 implique 1 mais les relations entre les différentes notions ne sont pas évidentes en toute généralité. Griffeath a suggéré un exemple, que l'on trouve dans [Har76], où 1 est vérifiée mais ni 2 ni 3. Nous allons voir que la dualité apporte des informations sur les liens entre ces différentes notions d'extinction.

Associée à la notion 3 d'extinction, nous introduisons la définition suivante :

Définition 1.2.12. *Le temps d'extinction (ou temps de vie) d'un modèle de croissance à partir d'une condition initiale $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ est la quantité :*

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : \xi_t = \emptyset\}.$$

Nous serons alors amenés à travailler avec le processus conditionné à survivre, dans le sens d'une durée de vie infinie, c'est-à-dire à travailler sous la probabilité

$$\overline{\mathbb{P}}^\xi = \mathbb{P}^\xi(\cdot | \tau = +\infty).$$

Il existe aussi une notion plus forte que la survie :

Définition 1.2.13. *Un processus (ξ_t) est permanent si, pour tout $\xi \neq \emptyset$ et tout $x \in \mathbb{Z}^d$,*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}^\xi(\xi_t(x) = 1) > 0.$$

Remarque. *Un processus permanent survit mais la réciproque n'est pas vraie en toute généralité. On peut trouver un contre-exemple dans [Har76].*

1.2.4 Dualité

Harris [Har76] introduit ensuite la notion de dualité pour les processus à valeurs $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, notion qui émergeait parallèlement dans les travaux de Broadbent et Hammersley [BH57], puis dans ceux de Holley et Liggett [HL75], ainsi que dans ceux de mathématiciens russes (Vasil'ev, Toom...). Spitzer [Spi70] avait vérifié la propriété pour le processus d'exclusion.

Dans la suite, (ξ_t) est un processus à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.

Définition 1.2.14. *Le processus (ξ_t^*) est un processus dual (associate) de (ξ_t) si pour tout ξ, η finis :*

$$\mathbb{P}^\xi(\xi_t \cap \eta \neq \emptyset) = \mathbb{P}^{\eta^*}(\xi_t^* \cap \xi \neq \emptyset).$$

Si, par ailleurs, (ξ_t^*) a la même loi que (ξ_t) , on dit que (ξ_t) est auto-dual.

Remarque. Si (ξ_t) possède un processus dual, alors il n'y a pas de création à partir de rien, i.e. $\mathbb{P}^\emptyset(\xi_t = \emptyset) = 1$ (en prenant $\eta = \mathbb{Z}^d$ et $\xi = \emptyset$ dans la définition ci-dessus).

Remarque. 1. Liggett introduit une définition plus générale de dualité dans le chapitre II de [Lig05] mais il utilise la conséquence précédente dans la plupart de ses exemples.
2. Nous verrons, dans le cas de certaines extensions du processus de contact, une généralisation de la notion de dualité pour des processus à valeurs dans $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^d}$ introduite par Krone [Kro99] (cf. section 3.3.2). On pourra aussi se reporter aux travaux récents de Foxall [Fox14a].

Harris [Har76] montre une condition nécessaire et suffisante sur les taux d'un processus de contact quelconque pour qu'il possède un processus dual :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \sum_{r=0}^k (-1)^{1+r} \binom{k}{r} \lambda_{n-k+r} \geq 0.$$

Ces conditions sont vérifiées par le processus de contact tel que, pour tout k , $\lambda_k = k\lambda$; dans ce cas particulier, le dual a même loi que le processus initial. Il introduit ensuite une bonne classe de processus :

Définition 1.2.15. Soit $\mathcal{K}$ la classe des processus de Feller dont le générateur s'écrit $\mathcal{A} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{A}_x$ où

$$\mathcal{A}_x f(\xi) = \mathcal{A}_0 f_x(\xi - x), \text{ avec } f_x(\xi) = f(\xi + x),$$

et $\mathcal{A}_0$ possède un dual et vérifie qu'il existe V_0 ensemble fini tel que $f \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_{V_0^c}$ implique $\mathcal{A}_0 f = 0$ et $\mathcal{A}_0(\mathcal{C}_{V_0}) \subset \mathcal{C}_{V_0}$.

Harris montre que tout processus de la classe $\mathcal{K}$ possède un processus dual. Il montre ensuite que cette classe permet d'établir un théorème de convergence complète.

Théorème 1.2.16 (Harris, 1976). Si (ξ_t) est un processus de la classe $\mathcal{K}$ vérifiant :

1. pour tous $t > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{\xi: |\xi|=n} \mathbb{P}^{\mathbb{Z}^d}(\xi_t \cap \xi \neq \emptyset) < 1$,
2. pour tous $t > 0$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $\xi \neq \emptyset$, $\mathbb{P}^{\mathbb{Z}^d}(x \in \xi_t) > 0$.

Alors

1. $\delta_{\max} S(t)$ converge vers une mesure ν ,
2. si $\nu = \delta_\emptyset$ alors, pour tout μ , $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \delta_\emptyset$,

3. si $\nu \neq \delta_\emptyset$ alors $\nu(\emptyset) = 0$ et si μ est une mesure invariante par translation alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \mu(\emptyset)\delta_\emptyset + (1 - \mu(\emptyset))\nu.$$

Ainsi, toute mesure invariante est de la forme $c\delta_\emptyset + (1 - c)\nu$.

Remarque. La première hypothèse nécessite que $\mathbb{Z}^d$ ne soit pas un état absorbant. Le modèle des votes ne satisfait donc pas l'hypothèse. L'hypothèse 2 peut être affaiblie en dimension 1 comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.2.17 (Harris, 1976). Supposons que $d = 1$ et que la condition 1 du théorème précédent est vérifiée. Par ailleurs, supposons que pour tout $t > 0$ et tout $\xi \neq \emptyset$, il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $z \leq y \Rightarrow \mathbb{P}_{\xi+z}(\xi_t(0) = 1) > 0$. Alors les conclusions du théorème précédent sont valables.

La dualité nous donne par ailleurs des informations sur les liens entre les notions de survie introduites précédemment :

Théorème 1.2.18 (Harris, 1976). Supposons que (ξ_t) soit un processus de Feller admettant un processus dual. Alors on a les équivalences

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}^\xi(\xi_t = \emptyset) = 1$, pour tout $|\xi| < \infty$,
2. (ξ_t^*) n'a pas d'autre mesure invariante que $\delta_\emptyset$,
3. $\delta_\xi S^*(t)$ converge faiblement vers $\delta_\emptyset$, $|\xi| \leq \infty$.

En particulier, les différentes notions d'extinction sont équivalentes pour le processus de contact standard qui est auto-dual. Par contre, nous n'avons pas d'information sur la permanence du processus en cas de survie.

1.3 Additivité et Représentation graphique

Dès l'apparition des systèmes de particules en interaction, des représentations graphiques y ont été associées (pour des processus à temps discret dans [Too68, Vas69], pour des processus liés à ceux de l'exclusion et du vote [CS73], ou des processus de proximité [GG77]). Ce sont ces représentations graphiques qui ont inspiré la définition de processus additifs à Harris dans [Har78] pour les processus à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Nous l'étendons pour les processus à valeurs dans $S^{\mathbb{Z}^d}$.

Définition 1.3.1. Le processus (ξ_t) est additif s'il existe une famille $\{\xi_t^A, t \geq 0, A \in S^{\mathbb{Z}^d}\}$ de variables aléatoires markoviennes de même fonction de transition et définies sur le même espace telle que $\xi_0^A = A$ et pour tout $A, B \in S^{\mathbb{Z}^d}$, tout $t \geq 0$ on a $\xi_t^{A \vee B} = \xi_t^A \vee \xi_t^B$.

Remarque. 1. Un processus additif est en particulier attractif et la propriété d'attractivité peut alors s'exprimer de la façon suivante : il existe une famille $\{\xi_t^A, t \geq 0, A \in S^{\mathbb{Z}^d}\}$ de variables aléatoires markoviennes de même fonction de transition et définies sur le même espace telle que $\xi_0^A = A$ et pour tout $A, B \in S^{\mathbb{Z}^d}$, tout $t \geq 0$ on a $A \leq B \Rightarrow \xi_t^A \leq \xi_t^B$.

2. La condition d'additivité signifie que si on part de l'union de deux configurations initiales, on n'obtient pas plus que l'union des deux processus résultants. Il n'y a, en quelque sorte, pas d'interaction entre les configurations initiales.

L'existence d'une telle famille n'est pas évidente à prouver. En 1978, Harris introduit une représentation graphique, pour une classe générale de processus binaires, qui permet de construire cette famille. On peut se reporter à [Har78] pour la construction générale ou bien au chapitre 2 pour le cas particulier du processus de contact. Nous utiliserons alors cette construction pour définir de nouveaux systèmes de particules en interaction (en particulier des extensions du processus de contact standard). Harris déduit donc en particulier le théorème suivant.

Théorème 1.3.2 (Harris, 1974). Soit (ξ_t) un processus de contact. Si $\left(\frac{\lambda_k}{k}\right)_k$ est décroissante en k , (ξ_t) est additif.

▷ **Exemple.** Les hypothèses des théorèmes 1.3.2 et 1.2.7 sont vérifiées dans les cas les plus classiques de processus de contact qui sont les suivants :

- pour tout k , $\lambda_k = k\lambda_1$,
- pour tout k , $\lambda_k = \lambda_1$.

Référence de preuve. On pourra se reporter à [Har74] pour la preuve du théorème 1.3.2 ou bien au chapitre 2 pour celle du cas $\lambda_k = k\lambda_1$. $\square$

Remarque. Nous verrons par la suite que le premier processus s'appelle processus de contact standard et que le deuxième s'appelle processus de contact avec seuil $\theta = 1$.

Il existe en fait un résultat bien plus général : pour les processus binaires, les notions de dualité et d'additivité sont équivalentes. De plus, la représentation graphique est un outil très efficace pour construire le processus dual. Grâce à la représentation graphique, Harris [Har78] montre aussi l'équivalence de la survie et de la permanence pour le processus de contact sur $\mathbb{Z}$.

1.4 Inégalités de corrélation

1.4.1 Couplage

Définition 1.4.1. Soient μ et ν des mesures sur Ω . On appelle couplage de μ et ν la construction d'un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P})$ et de deux variables aléatoires η et ξ , définies sur cet espace, de lois respectives μ et ν .

Remarque. Il existe toujours un couplage en prenant $\Omega' = \Omega^2$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ et $\mathbb{P} = \mu \otimes \nu$. Mais on cherche souvent des couplages vérifiant des conditions particulières (par exemple $\eta \leq \xi$ presque sûrement).

Les systèmes de particules font apparaître une nouvelle utilisation des couplages nous permettant d'obtenir des informations sur les corrélations entre événements ou fonctions du modèle.

1.4.2 Ordre sur les configurations, croissance des fonctions

Nous avons supposé que l'ensemble des états S était muni d'un ordre total $\leq_S$. Nous nous donnons alors un ordre partiel sur les configurations : soient $\eta, \xi \in X = S^{\mathbb{Z}^d}$, nous dirons

$$\eta \leq \xi \text{ si } \forall x \in \mathbb{Z}^d, \eta(x) \leq_S \xi(x).$$

Remarque. Nous travaillerons éventuellement avec un ordre partiel sur S mais sous réserve du fait que l'évolution du processus n'augmente pas les configurations incomparables ; autrement dit, si deux configurations initiales sont comparables, elles le restent au cours du temps (en cohérence avec l'utilisation de cet ordre partiel que nous allons faire ci-dessous).

Définition 1.4.2. Une fonction $f : S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante si pour toutes configurations $\eta, \xi \in S^{\mathbb{Z}^d}$ telles que $\eta \leq \xi$, on a $f(\eta) \leq f(\xi)$. Un événement est dit croissant si son indicatrice est croissante.

Remarque. Les fonctions croissantes s'interprètent comme les fonctions (ou événements) favorisées par des grandes configurations au sens de l'ordre donné.

Les définitions précédentes sont parfaitement adaptées au cadre de la percolation où l'on travaille avec $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ muni de la tribu cylindrique et avec la mesure de probabilité $\mathbb{P} = \text{Ber}(p)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$. Ces définitions nous permettent aussi de comparer des configurations, fonctions et événements à temps fixé pour nos systèmes de particules en interaction. Or, nous aimerions aussi comparer, par exemple, ce qu'il se passe dans des boîtes spatio-temporelles.

Pour nos systèmes de particules en interaction à plus proches voisins additifs, la représentation graphique de Harris nous permet de travailler avec des espaces du type :

$$\begin{aligned}\Omega &= \prod_i M_i^{\mathbb{Z}^d}, \\ \mathcal{F} &= \bigotimes_i \mathcal{M}_i^{\otimes \mathbb{Z}^d}, \\ \mathbb{P} &= \bigotimes_i \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\otimes \mathbb{Z}^d},\end{aligned}$$

où M est l'ensemble des mesures localement finies sur $\mathbb{R}_+$ ($m = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{t_i}, (t_i)_i \in \mathbb{R}^+$) muni de la tribu $\mathcal{M}$ engendrée par les applications $\{m \rightarrow m(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\}$; et $\mathcal{P}_\lambda$ est la loi d'un processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité λ . L'obtention de cet espace sera détaillé au chapitre 2 pour le processus de contact.

Les processus ponctuels intervenant seront dits positifs s'ils tendent à faire augmenter la configuration (*i.e.* s'ils correspondent à des taux $c(x, \xi, s)$ où $s \geq \xi(x)$); sinon ils seront dits négatifs. Nous considérons alors l'ordre suivant sur M :

- si $m = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{t_i}$ et $m' = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{t'_i}$ sont deux processus ponctuels positifs,

$$m \leq m' \text{ si } \{t_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \{t'_i, i \in \mathbb{N}\};$$

- si $m = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{t_i}$ et $m' = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{t'_i}$ sont deux processus ponctuels négatifs,

$$m \leq m' \text{ si } \{t'_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \{t_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

On en déduit un ordre sur Ω (coordonnée par coordonnée) puis une notion de fonction croissante. Cet ordre sur Ω correspond bien à l'ordre intuitif que nous voulions mettre sur les processus : si $\omega \leq \omega'$ et $\eta_0 \leq \xi_0$, alors

$$\forall (x, t) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^+, \eta_t(x) \leq_S \xi_t(x).$$

On dira que f est une fonction croissante sur les configurations sur $[-L, L]^d \times [0, T]$ si elle ne dépend que des processus ponctuels dans cette boîte spatio-temporelle.

1.4.3 Domination stochastique

Définition 1.4.3. Soient μ et ν définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On dit que μ est stochastiquement dominée par ν , noté $\mu \ll_{sto} \nu$, si pour toute fonction croissante mesurable bornée, on a

$$\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} f d\nu.$$

Remarque. Les grandes configurations au sens de l'ordre donné sont plus favorisées par la mesure ν que par la mesure μ .

Proposition 1.4.4. Soient μ et ν des mesures sur $\mathbb{R}$. La relation $\mu \ll_{sto} \nu$ est équivalente à

$$\forall t \in \mathbb{R}, Q_{\mu}(t) \leq Q_{\nu}(t) \text{ où } Q_{\mu}(t) = \mu([t, +\infty]).$$

Théorème 1.4.5 (Strassen, 1965). Soient μ et ν des mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$ séparable complet tel que $\{(x, y) \in \Omega^2, x \leq y\}$ est fermé pour la topologie produit. Alors $\mu \ll_{sto} \nu$ est équivalent à l'existence d'un couplage (η, ξ) tel que η et ξ suivent respectivement les lois μ et ν sous $\mathbb{P}$ et $\eta \leq \xi$ presque sûrement.

Le résultat initial se trouve dans [Str65]. On trouvera aussi les grandes lignes de la preuve dans [Lig05]. Liggett montre de plus le résultat suivant :

Théorème 1.4.6. Un processus attractif de semi-groupe $S(t)$ vérifie les deux équivalences suivantes :

- Si f est une fonction croissante alors, pour tout t , $S(t)f$ est croissante.
- Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures telles que $\mu_1 \ll_{sto} \mu_2$ alors, pour tout t , $\mu_1 S(t) \ll_{sto} \mu_2 S(t)$.

En pratique, la définition et les théorèmes précédents nous permettent rarement de vérifier une domination stochastique. Holley [Hol74] introduit un critère à cette fin.

Théorème 1.4.7 (Critère de Holley, 1974). Soit $X = \{0, 1\}^G$ où G est un ensemble fini. Si μ et ν chargent toutes les configurations de X et si pour toutes configurations $\eta, \xi \in X$

$$\mu(\sup(\xi, \eta))\nu(\inf(\xi, \eta)) \geq \nu(\eta)\mu(\xi),$$

alors $\mu \ll_{sto} \nu$.

1.4.4 Mesure à corrélations positives

Définition 1.4.8. Une mesure μ a des corrélations positives (ou est positivement corrélée) si pour toutes fonctions f, g croissantes dans $\mathbb{L}_2(\mu)$ (ou tous événements A, B croissants) :

$$\begin{aligned} \mu(fg) &\geq \mu(f)\mu(g) \\ \text{ou } \mu(A \cap B) &\geq \mu(A)\mu(B). \end{aligned}$$

Remarque. Si μ a des corrélations positives, deux événements favorisés par de grandes configurations sont positivement corrélés.

Pour vérifier la corrélation positive, nous avons à nouveau un critère (qui s'appuie sur théorème 1.4.7).

Théorème 1.4.9 (Holley). Soit $X = \{0, 1\}^G$ où G est un ensemble fini et μ une mesure sur X telle que pour toute configuration $\xi \in X$, $\mu(\xi) > 0$. Si

$$\mu(\eta \vee \xi)\mu(\eta \wedge \xi) \geq \mu(\eta)\mu(\xi)$$

alors μ est positivement corrélée.

Attention, le critère précédent est suffisant mais n'est pas nécessaire. Les deux critères utilisent l'hypothèse G fini mais peuvent être étendus à G dénombrable.

Théorème 1.4.10 (Harris, 1977). Soit (η_t) un système de spins attractif. Si μ a des corrélations positives alors, pour tout $t \geq 0$, $\mu S(t)$ aussi.

1.4.5 Inégalités FKG

Dans les années 70, Fortuin, Kasteleyn et Ginibre ont travaillé sur les mesures à corrélations positives. La notion d'*inégalité FKG* dans un modèle est la preuve de la corrélation positive de la mesure définissant le modèle.

Théorème 1.4.11 (Inégalité FKG Bernoulli). *Une mesure μ sur $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ définie comme produit de variables aléatoires de Bernoulli i.i.d. est une mesure à corrélations positives.*

Remarque. *On trouvera parfois abusivement dans la littérature la phrase « les variables aléatoires de Bernoulli i.i.d. sont positivement corrélées » pour signifier en réalité que la mesure μ produit de variables aléatoires de Bernoulli i.i.d est une mesure à corrélations positives.*

Idée de preuve. Donnons les éléments clefs de la démonstration issue du livre de Werner [Wer09]. Nous voulons démontrer que, pour toutes fonctions f, g dans $\mathbb{L}_2(\mu)$ croissantes, la relation $\mu(fg) \leq \mu(f)\mu(g)$ est vérifiée. On commence par numéroté $\mathbb{Z}^d$ de la façon suivante : $\mathbb{Z}^d = \{a_i, i \geq 1\}$ et on note ω_i la variable aléatoire (de Bernoulli) sur le site a_i . Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les n premières variables $\omega_1, \dots, \omega_n$. Nous posons $f_n = \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n]$ et $g_n = \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_n]$. Par la théorie des martingales, $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}_2} f$, $g_n \xrightarrow{\mathbb{L}_2} g$ donc $f_n g_n \xrightarrow{\mathbb{L}_1} fg$. De plus, par indépendance des $(\omega_i)_{i \geq 1}$:

$$f_n = \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n] = \int_{\omega' \in \sigma(\omega_{n+1}, \dots)} f(\omega_1, \dots, \omega_n, \omega') d\mu^{(n+1)}(\omega')$$

où $\mu^{(n+1)}$ est la mesure produit sur l'état des arêtes pour $i \geq n+1$. Donc, f_n et g_n restent bien des fonctions croissantes. Il reste donc à montrer que, pour f_n et g_n croissantes ne dépendant que de $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, l'inégalité $\mu(f_n g_n) \leq \mu(f_n)\mu(g_n)$ est vérifiée. On montre cela par récurrence sur n . $\square$

On trouve des résultats similaires pour des mesures produits de variables aléatoires i.i.d. de loi quelconque et pour des mesures monotones.

Pour les systèmes de particules en interaction, le théorème 1.4.10 nous donne une inégalité FKG à temps fixé. Nous aimerions aussi avoir ce type d'inégalité en travaillant sur les événements sur des boîtes spatio-temporelles. La représentation graphique nous permet d'étudier nos systèmes de particules en interaction à partir de processus de Poisson. Nous démontrons donc une inégalité FKG pour une mesure définie à partir de ces processus. Rappelons que M est l'ensemble des mesures localement finies sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 1.4.12 (Inégalité FKG pour des processus de Poisson). *Une mesure μ sur $M^{\mathbb{Z}^d}$ définie comme produit de processus de Poisson indépendants a des corrélations spatio-temporelles positives au sens suivant : pour tous $L \geq 0, T \geq 0$ et toutes fonctions croissantes f et g sur les configurations sur $[-L, L]^d \times [0, T]$ on a*

$$\mu(fg) \geq \mu(f)\mu(g).$$

Démonstration. Nous donnons une démonstration inspirée de celle de Meester et Roy [MR96] dans le cas de la percolation booléenne. Dans le cas de la mesure produit de variables aléatoires de Bernoulli, nous avons utilisé un conditionnement pour se ramener au cas plus simple d'un nombre fini de variables. Ici, c'est le fait de travailler avec des mesures ponctuelles de Poisson qui est difficile donc nous utiliserons un conditionnement pour nous ramener à des variables aléatoires i.i.d. suivant une loi de Poisson. Comme dans le cas de la percolation, le point important est la conservation de la croissance après conditionnement des fonctions que l'on considère.

Soient $L \geq 0$ et $T \geq 0$; nous travaillons coordonnée par coordonnée, *i.e.* nous nous fixons $x \in [-L, L]^d$ et nous travaillons sur $\{x\} \times [0, T]$. Soient f, g des fonctions croissantes sur des configurations dans $\{x\} \times [0, T]$.

Conservation de la croissance par conditionnement : Montrons que la fonction croissante f que nous regardons sur $\{x\} \times [0, T]$ le reste après conditionnement par le nombre d'impacts dans $[0, T]$. Nous supposons pour commencer qu'il n'y a qu'un processus de Poisson (de paramètre λ) y intervenant et que ce processus est positif. Soient $m_0 \leq m'_0$ deux mesures ponctuelles et $k_0 \leq k'_0$ leur nombre d'impacts respectifs. On peut les considérer comme les réalisations de deux processus couplés de la façon suivante : soient $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, T]$. Soient N_0 et N'_0 des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λT . Posons

$$M_0 = \sum_{n=1}^{N_0} \delta_{X_n} \text{ et } M'_0 = \sum_{n=1}^{N'_0} \delta_{X_n}.$$

Les mesures M_0 et M'_0 sont des processus de Poisson d'intensité λ . Posons $\mathcal{F}_0 = \sigma(N_0, N'_0)$. Il existe une fonction h telle que $\mathbb{E}[f(M_0)|\mathcal{F}_0] = h(N_0)$. Comme $(f(M_0), N_0)$ a même loi que $(f(M'_0), N'_0)$, on a encore $\mathbb{E}[f(M'_0)|\mathcal{F}_0] = h(N'_0)$. Nous voulons montrer que h est croissante. Par définition de la croissance, comme $M_0 \leq M'_0$,

$$0 \leq \mathbb{1}_{\{N'_0=k'_0, N_0=k_0\}} (f(M'_0) - f(M_0)).$$

Prenons l'espérance conditionnelle :

$$0 \leq \mathbb{1}_{\{N'_0=k'_0, N_0=k_0\}} \mathbb{E} [f(M'_0) - f(M_0) | \mathcal{F}_0],$$

puis l'espérance :

$$0 \leq \mathbb{P}(N'_0 = k'_0, N_0 = k_0) (h(k'_0) - h(k_0)).$$

Comme $\mathbb{P}(N'_0 = k'_0, N_0 = k_0) > 0$, on a bien $h(k'_0) \geq h(k_0)$.

Si le processus est négatif, le même raisonnement peut être mené avec $m_0 \leq m'_0$ et $k_0 \geq k'_0$. Si nous travaillons maintenant avec K processus de Poisson indépendants vivants dans $\{x\} \times \mathbb{R}_+$, le conditionnement se fait par rapport à tous les nombres d'impacts et nous montrons que f est croissante par rapport à chacun de ses arguments.

Inégalité : Il s'agit maintenant de trouver une succession de conditionnement du type précédent qui tendent vers notre fonction f . Notons $(\omega_x^k)_{k \in \{1, \dots, K\}}$ les processus de Poisson indépendants associés au site x . Nous découpons maintenant la ligne temporelle $\{x\} \times [0, T]$, pour $n \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$\{x\} \times \bigcup_{i=0}^{2^n-1} \left[\frac{iT}{2^n}, \frac{(i+1)T}{2^n} \right].$$

Pour $i \in \{0, 2^n - 1\}$, notons $C_i^{2^n-1}$ la cellule $\left[\frac{iT}{2^n}, \frac{(i+1)T}{2^n} \right]$ et $N^k(C_i^{2^n-1})$ le nombre de points du processus de Poisson numéro k dans $C_i^{2^n-1}$. Comme il s'agit d'intervalles disjoints, les variables $(N^k(C_i^{2^n-1}))_{i \in \{0, 2^n-1\}}$ sont indépendantes. Posons $\mathcal{F}_n = \sigma((N^k(C_i^{2^n-1}))_{i,k})$ puis $f_n = \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n]$ et $g_n = \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_n]$. Les quantités f_n et g_n sont des fonctions croissantes (par ce qui précède) des variables aléatoires indépendantes $(N^k(C_i^{2^n-1}))_{i,k}$. Donc, nous pouvons leur appliquer l'inégalité FKG pour des variables aléatoires indépendantes et nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f_n g_n] &\geq \mathbb{E}[f_n] \mathbb{E}[g_n] \\ &\geq \mathbb{E}[f] \mathbb{E}[g] \\ \mathbb{E}[fg] &\geq \mathbb{E}[f] \mathbb{E}[g]. \end{aligned}$$

La dernière inégalité s'effectue par passage à la limite.

Pour étendre le résultat à toutes les configurations de $[-L, L]^d \times [0, T]$, nous effectuons le même raisonnement sur les $(2L + 1)^d$ sites en conditionnant par la tribu $\mathcal{F}_n$ de tous les nombres d'impacts (pour $x \in [-L, L]^d$, $k \in \{1, \dots, K\}$ et $i \in \{0, \dots, 2^{n-1}\}$). $\square$

Nous verrons des exemples de manipulation de ces concepts (domination stochastique et mesure positivement corrélée) dans l'étude du processus de contact (*cf.* chapitre 2) et de ses variantes (*cf.* chapitre 3). La notion de corrélations positives est notamment fondamentale dans la construction d'un couplage entre un processus de contact avec vieillissement et une percolation orientée que nous effectuerons au chapitre 5.

Le processus de contact de Harris

*Lorsque les membres d'une société en expansion
débarquent au sein d'une société inoffensive, ce
simple contact est empli de danger potentiel.*
— Asimov.

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent comme exemple particulier de système de particules en interaction, le processus de contact a été introduit en 1974 par Harris dans [Har74]. Griffeath [Gri81] dit de ce modèle que c'est sûrement le plus simple système de particules en interaction qui fait apparaître un phénomène de transition de phase. La plupart des outils classiques de l'étude des systèmes de particules en interaction s'y appliquent (additivité, dualité, couplage...) et ce modèle permet très vite d'approfondir l'étude d'autres modèles de croissance, comme par exemple celle du bord de la forme asymptotique du modèle de Richardson [DL81].

Dans son article d'introduction [Har74], Harris utilise d'abord un point de vue analytique puisqu'il introduit le processus de contact comme cas particulier d'un processus d'interactions à plus proches voisins en donnant son générateur infinitésimal ; ce point de vue est aussi celui utilisé par Holley et Liggett [HL78]. Puis, Harris donne peu à peu un point de vue *constructif discret* en introduisant la notion de chaîne de contact. Pour nous familiariser avec ses méthodes, nous citerons quelques uns de ses résultats dans la section 2.1. Comme nous l'avons dit dans le chapitre précédent, c'est en 1978 qu'Harris introduit la notion fondamentale de représentation graphique des processus additifs à l'aide de processus de Poisson ; celle-ci donnera un tout nouveau ton aux problématiques sur les systèmes de particules en interaction. Cette construction fera l'objet de la section 2.2. Cette vision a permis, notamment grâce aux travaux de Durrett et Griffeath [DG83], de faire le lien entre le processus de contact et la percolation orientée qui était elle aussi un objet d'étude émergeant dans ces années-là.

Dans les années 80, la plupart des résultats sont obtenus sur $\mathbb{Z}$, c'est l'objet de la section 2.3, mais ils ne se généralisent malheureusement pas aux dimensions supérieures. En 1990, Bezuidenhout et Grimmett [BG90] publient une série de travaux novateurs qui s'appuient sur un couplage entre le processus de contact sur $\mathbb{Z}^d$ et la percolation orientée. Les résultats seront simplement cités à la section 2.4 mais on pourra trouver une construction similaire à la leur pour le processus de contact avec vieillissement dans le chapitre 4. Grâce à ces résultats, le comportement du processus de contact est bien connu et de nouvelles portes s'ouvrent sur des extensions. Certains s'interrogent sur des processus de contact définis sur d'autres graphes que $\mathbb{Z}^d$ [Pem92, SS97], tandis que d'autres introduisent des généralisations en restant sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^d$: taux de transition inhomogènes et aléatoires [Lig91, Lig92, BDS91], environnement évoluant aléatoirement [Bro07, Rem08, SW08], phénomène de mémoire [DS00, Kro99]. Nous présenterons

ces derniers au chapitre 3. Dans le chapitre 4, nous introduirons un nouveau modèle : le processus de contact avec vieillissement [Des14].

2.1 Modèle initial

Nous nous plaçons sur le réseau $\mathbb{Z}^d$. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\xi \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$; notons N_x les voisins de x et $x \sim \xi$ pour signifier que x est dans le voisinage de ξ mais $x \notin \xi$.

2.1.1 Définition

Rappelons qu'un système de particules en interaction à plus proches voisins à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ est un processus de Markov dont le générateur $\mathcal{A}$ satisfait, pour toute configuration $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ et toute fonction f de $\mathcal{C}_0$:

$$\mathcal{A}(f)(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} c(x, \xi) (f(\xi_{(x)}) - f(\xi)),$$

On pourra se reporter au chapitre précédent pour les notations précises.

Dans [Har74], Harris introduit un cas particulier d'interactions naissance/mort, les processus de contact, avec l'interprétation suivante :

- si $\xi_t(x) = 0$, on dit que la particule x est *morte* ou saine,
- si $\xi_t(x) = 1$, on dit que la particule x est *vivante* ou infectée.

Ce processus modélise, par exemple, l'évolution d'une infection qui se propage de proche en proche au sein d'une population. On peut aussi interpréter le processus en terme de dynamique des populations. On dit alors qu'un site $x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\xi_t(x) = 0$ est vide tandis qu'un site $x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\xi_t(x) = 1$ est occupé.

L'évolution du système est à la suivante :

- un site vivant meurt à taux indépendant de ce qu'il se passe autour de lui,
- un site mort naît avec un taux dépendant de son nombre de voisins infectés,
- un site reste mort si aucun de ses voisins n'est infecté.

Cette évolution se traduit de la manière suivante sur les taux du générateur du système : on se donne δ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{2d}$ des réels positifs et, pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $k \in \{1, \dots, 2d\}$ tel que $|\xi \cap N_x| = k$, on pose

$$c(x, \xi) = \begin{cases} \lambda_k & \text{si } \xi(x) = 0, \\ \delta & \text{si } \xi(x) = 1. \end{cases}$$

La quantité λ_k correspond au taux de naissance d'une particule quand elle est morte avec k voisins vivants et la quantité δ correspond à son taux de mort quand elle est vivante. La particularité du processus de contact par rapport aux autres interactions réside dans le fait qu'une particule ne peut pas naître spontanément sans voisin vivant (d'où le terme de *contact*) et que sa mort au contraire ne dépend pas de ses voisins. Cela se traduit sur les taux, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et toute configuration ξ telle que $\xi(x) = 0$, par :

$$N_x \cap \xi = \emptyset \Rightarrow c(x, \xi) = 0.$$

Le générateur prend alors, pour toute configuration ξ et toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(S^{\mathbb{Z}^d})$, la forme particulière suivante :

$$\mathcal{A}(f)(\xi) = \delta \sum_{x \in \xi} (f(\xi \setminus x) - f(\xi)) + \sum_{x \sim \xi} \lambda_{|\xi \cap N_x|} (f(\xi \cup x) - f(\xi)).$$

Remarque. Les sommes de l'expression précédente se font sur ξ et son voisinage et non plus sur $\mathbb{Z}^d$.

Définition 2.1.1. Si $\delta = 1$ et, pour tout $k \in \{1, \dots, 2d\}$, $\lambda_k = k\lambda$, (ξ_t) est appelé le processus de contact standard.

2.1.2 Premières propriétés

Nous présentons ici les premiers résultats donnés par Harris sur le processus de contact afin de donner une idée des outils qui interviennent dans son étude. Dans la suite, (ξ_t) est un processus de contact de paramètres $\delta, \lambda_1, \dots, \lambda_{2d}$ gouverné par les mesures de probabilité $\{\mathbb{P}^\xi, \xi \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)\}$; on note $\mathbb{E}^\xi$ l'espérance associée à $\mathbb{P}^\xi$.

§ 1. Chaînes de contact.

Définition 2.1.2. On appelle temps d'atteinte de $x \in \mathbb{Z}^d$ la quantité

$$t(x) = \inf\{s \geq 0 : \xi_s(x) = 1\}.$$

La quantité $t(x)$ est un temps d'arrêt. Grâce à la proposition 1.2.5, Harris montre les deux propriétés suivantes :

Proposition 2.1.3. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\xi(x) = 0$, alors

1. $\mathbb{P}^\xi(\exists \varepsilon > 0 : \forall s \in]t(x) - \varepsilon, t(x) + \varepsilon[, |\xi_s \cap N_x| > 0 \mid t(x) < \infty) = 1$;
2. pour $u \geq 0$, $\mathbb{P}^\xi(t(x) \leq u) \leq 1 - \exp(-u \max \lambda_i)$.

Définition 2.1.4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}^d$. On appelle chaîne de contact pour x une suite $(x_1, \dots, x_n)$ de sites de $\mathbb{Z}^d$ distincts tels que :

- $x_1 = x$,
- pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $x_i \sim x_{i+1}$,
- $0 = t(x_n) < t(x_{n-1}) < \dots < t(x_1) < \infty$.

La suite $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ est une chaîne de contact infinie pour x_1 si $\infty > t(x_1) > t(x_2) > \dots$.

Remarque. Il est possible que x_i ne soit pas le parent de x_{i-1} (et même $\xi_{t(x_{i-1})}(x_i) = 0$) mais on pensera néanmoins, par analogie, à une chaîne d'infection.

On obtient que, pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\xi \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, $\mathbb{P}_\xi(\text{une chaîne infinie atteint } x \text{ avant } t) = 0$.

§ 2. Processus de sauts induit. Les résultats précédents nous permettent d'obtenir que, pour tout $\xi \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)$ et $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\xi(\forall t > 0, \xi_t \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)) &= 1, \\ \mathbb{P}^\xi((\xi_s) \text{ a une infinité de sauts pour } 0 \leq s \leq t) &= 0, \end{aligned}$$

où un saut est un instant u tel que $\xi_t \neq \xi_{u-}$. On peut alors considérer le processus (ξ_t) restreint à $\mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)$ (dénombrable) comme une chaîne de Markov à temps continu, dont tous les états sont accessibles et avec $\{\xi = \emptyset\}$ un état absorbant. Le temps d'occupation d'un état ξ est une exponentielle de moyenne

$$\frac{1}{\delta|\xi| + \sum_{x \sim \xi} \lambda_{|\xi \cap N_x|}},$$

et l'intensité $q_{\xi,\eta}$ d'un saut entre deux configurations disjointes ξ et η est

$$q_{\xi,\eta} = \begin{cases} \delta & \text{si } \eta = \xi \setminus x \text{ pour un } x \in \xi \\ \lambda_{|\xi \cap N_x|} & \text{si } \eta = \xi \cup x \text{ pour un } x \sim \xi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce point de vue permet notamment d'obtenir des bornes du type suivant : pour $\xi \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)$ et $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}^\xi [|\xi_t|] \leq |\xi| e^{(2d \max \lambda_i - \delta)t}.$$

§ 3. Dépendance par rapport aux paramètres et conditions initiales.

Définition 2.1.5. Soit $t \geq 0$ et $\xi \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$. On pose $p_t(\xi) = \mathbb{P}^\xi(\xi_t \neq \emptyset)$ et $p_\infty(\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_t(\xi)$.

Remarque. La quantité $p_\infty(\xi)$ existe car $p_t(\xi)$ est décroissant en t . Si $|\xi| = \infty$, alors $p_\infty(\xi) = 1$.

Théorème 2.1.6. Soient ξ et η dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$.

1. Si $(\lambda_k)_k$ est croissante en k , alors $p_t(\xi) \leq p_t(\xi \cup \eta)$.
2. Si, de plus, $\left(\frac{\lambda_k}{k}\right)_k$ est décroissante, alors $p_t(\xi \cup \eta) \leq p_t(\xi) + p_t(\eta)$.
3. Si, de plus, $(\lambda_{k+1} - \lambda_k)_k$ est décroissante, alors $p_t(\xi \cup \eta) + p_t(\xi \cap \eta) \leq p_t(\xi) + p_t(\eta)$.

Pour montrer ces résultats, Harris démontre quelque chose de plus fort puisqu'il construit sur un même espace plusieurs processus de contact de conditions initiales différentes. Il dit exploiter des méthodes employées par Vasershtein et Dobrushin et construit en fait des couplages sans utiliser le terme. Une fois que nous aurons construit des processus de contact sur un même espace, nous appellerons ces propriétés générales sur les processus (et non seulement sur les probabilités de survie) attractivité et additivité.

Grâce au processus de saut induit, il montre même des inégalités strictes :

Lemme 2.1.7. Soient $\xi \subsetneq \xi'$ avec $|\xi| < \infty$. Si (λ_k) est croissante, alors, pour tout $t > 0$, $p_t(\xi) < p_t(\xi')$. De plus, si $p_\infty(\{0\}) > 0$, alors $p_\infty(\xi) < p_\infty(\xi')$.

Avec un couplage entre deux processus de paramètres différents, il montre :

Lemme 2.1.8. Si (ξ_t) et (ξ'_t) sont deux processus de paramètres respectifs $\delta, \lambda_1, \dots, \lambda_{2d}$ et $\delta, \lambda'_1, \dots, \lambda'_{2d}$ tels que, pour tout $k \in \{1, \dots, 2d\}$, $\lambda_k \leq \min_{j \geq k} \lambda'_j$ alors, pour tous ξ et t , $p_t(\xi) \leq p'_t(\xi)$.

Ce lemme nous permet de nous ramener, dans beaucoup de démonstrations au cas du processus de contact standard. Ce dernier vérifie toutes les hypothèses du théorème 2.1.6.

2.1.3 Premiers résultats sur le comportement asymptotique

Sauf mention contraire, les résultats annoncés sont dus à Harris [Har74].

Définition 2.1.9. Si $p_\infty(\{0\}) = 0$, on dira que le processus (ξ_t) s'éteint, tandis que si $p_\infty(\{0\}) > 0$, on dira que le processus survit.

Remarque. Il faut faire attention au vocabulaire : le processus survit avec probabilité strictement positive (et non pas presque sûrement). Quand le contexte est clair, nous utiliserons simplement le terme « survie » ; par contre, quand nous travaillerons avec l'événement de survie réelle du processus, nous serons plus prudents et nous préciserons « avec probabilité positive ».

Remarque. Si les conditions 1 et 2 du théorème 2.1.6 sont vérifiées alors pour ξ fini il y a équivalence entre $p_\infty(\{0\}) = 0$ et $p_\infty(\xi) = 0$. Cela correspond au point 3 de la définition 1.2.11.

Grâce au point de vue des chaînes de Markov, Harris déduit des résultats sur le comportement asymptotique. Soit $(\xi_{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ le processus de sauts induit d'un processus de contact vérifiant les propriétés 1 et 2 du théorème 2.1.6 ; alors, en notant Q la matrice de transition du processus de sauts, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} p_\infty(\{0\}) &\leq \sum_{\eta \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)} Q^{(n)}(0, \eta) p_\infty(\eta) \\ &\leq \sum_{\eta \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)} Q^{(n)}(0, \eta) |\eta| p_\infty(\{0\}) \\ &\leq \mathbb{E}^{\{0\}}[|\xi_{(n)}|] p_\infty(\{0\}); \end{aligned}$$

donc si $\mathbb{E}^{\{0\}}[|\xi_{(n)}|] < 1$ pour un certain n , alors il y a extinction.

Théorème 2.1.10. Soit (ξ_t) un processus de contact avec, pour tout k , $(2d-1)\lambda_k < k\delta$. Alors, pour tout $\xi \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)$, $p_\infty(\xi) = 0$.

Démonstration. Nous présentons la démonstration effectuée par [Har74] car elle donne les idées utilisées dans les premières estimations des paramètres critiques. Quitte à faire un changement d'échelle temporelle, on peut supposer $\delta = 1$. Traitons d'abord le cas $\lambda'_k = k\lambda$ avec $(2d-1)\lambda < 1$. Notons $\pi_1 = p_\infty(\{0\})$ et $\pi_2 = p_\infty(\{0, 1\})$ (où $\{0, 1\}$ est une paire de voisins). À partir des taux de transition du processus de sauts induit, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{2d\lambda}{1 + 2d\lambda} \pi_2, \\ \pi_2 &= \frac{2}{2 + (4d-2)\lambda} \pi_1 + \sum_{x \sim \{0, 1\}} Q(\{0, 1\}, \{0, 1\} \cup x) p_\infty(\{0, 1\} \cup x), \\ &= \frac{\pi_1}{1 + (2d-1)\lambda} + \sum_{x \sim \{0, 1\}} Q(\{0, 1\}, \{0, 1\} \cup x) (p_\infty(\{0, 1\} \cup x) - \pi_2) + \pi_2 \frac{(2d-1)\lambda}{1 + (2d-1)\lambda}, \end{aligned}$$

où Q est la matrice de transition de processus de sauts induit. En utilisant le point 3 du théorème 2.1.6, on a $p_\infty(\{0, 1\} \cup x) - \pi_2 \leq \pi_2 - \pi_1$. On obtient finalement

$$\pi_2 - \pi_1 \leq (\pi_2 - \pi_1)(2d-1)\lambda.$$

Si $\pi_1 > 0$, alors, par la première égalité, $\pi_2 > \pi_1$; on peut donc bien diviser par $\pi_2 - \pi_1$ et on obtient le résultat souhaité.

Pour en conclure le cas général où $(2d-1)\lambda_k < k$, on pose $\lambda = \max\left(\frac{\lambda_k}{k}\right)$. Nous avons montré qu'il y a extinction pour le processus de paramètres $(\lambda'_k = k\lambda)_k$ et les deux jeux de paramètres vérifient le lemme 2.1.8 donc il y a extinction du processus de paramètres $(\lambda_k)_k$. $\square$

La démonstration précédente s'appuie sur la matrice de transition du processus de sauts induit ; nous verrons plus loin une autre démonstration du résultat grâce à la représentation graphique.

Sous ces mêmes conditions, il est aussi possible de montrer que, en plus de savoir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}^\xi[|\xi_t|] = 0$, on a :

Théorème 2.1.11. Soit (ξ_t) un processus de contact avec, pour tout k , $(2d-1)\lambda_k < k\delta$. Alors, pour tout $\xi \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)$, $\int_0^\infty \mathbb{E}^\xi[|\xi_t|] dt < \infty$.

On rappelle la définition de processus permanent introduite au chapitre 1.

Définition 2.1.12. *Le processus de contact (ξ_t) est permanent si, pour tout $\xi \neq \emptyset$ et tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}^\xi(\xi_t(x) = 1) > 0$.*

Théorème 2.1.13. *Le processus de contact (ξ_t) est permanent si les paramètres $(\lambda_k)_k$ sont suffisamment grands. En particulier, le processus survit.*

Outil de preuve. Harris établit ce résultat à l'aide d'un diagramme spatio-temporel discret pouvant être vu comme une percolation orientée. $\square$

2.1.4 Paramètre critique et transition de phase

Les conditions du théorème 2.1.6 sont vérifiées par le processus tel que, pour tout k , $\lambda_k = k\lambda$; le lemme 2.1.8 nous permet de nous y ramener dans la plupart des démonstrations (c'est d'ailleurs ce qu'on fait pour montrer les trois résultats précédents). Quitte à effectuer un changement d'échelle temporelle, nous pouvons aussi supposer $\delta = 1$. À partir de maintenant, nous travaillerons donc avec le processus de contact standard.

Définition 2.1.14. *Pour le processus de contact standard, on définit le paramètre critique :*

$$\lambda_c = \inf \left\{ \lambda > 0 : \mathbb{P}^{\{0\}}(\forall t > 0, \xi_t \neq \emptyset) > 0 \right\}.$$

Remarque. *Nous avons vu que la survie ne dépend pas de la condition initiale finie ; c'est pour cela qu'on choisit arbitrairement $\{0\}$ comme condition initiale dans la définition.*

Pour le processus de contact standard, les résultats précédents se résument par le phénomène de transition de phase suivant :

Théorème 2.1.15 (Harris, 1974). *Pour le processus de contact standard, on a une transition de phase c'est-à-dire qu'il existe une valeur critique $\lambda_c \in (0, \infty)$ telle que :*

- si $\lambda < \lambda_c$, $\mathbb{P}^{\{0\}}(\forall t > 0, \xi_t \neq \emptyset) = 0$, on parle d'extinction du processus ;
- si $\lambda > \lambda_c$, $\mathbb{P}^{\{0\}}(\forall t > 0, \xi_t \neq \emptyset) > 0$, on parle de survie du processus.

On sait de plus que

$$\lambda_c > \frac{1}{2d-1},$$

et, en dimension 1, $\lambda_c > 1.18$.

Nous nous posons alors tout de suite les questions suivantes :

- Peut-on déterminer, caractériser ou borner finement la valeur critique λ_c ?
- Le processus survit-il à la valeur critique $\lambda = \lambda_c$?
- Lorsque le processus survit, est-il permanent ?
- Lorsque le processus survit pour $\lambda > \lambda_c$, que peut-on dire de son comportement (convergence en loi, croissance...) ?
- Lorsque le processus s'éteint pour $\lambda < \lambda_c$, à quelle vitesse cela se produit-il ?

En introduisant la notion de dualité (cf. définition 1.2.14), Harris [Har76] montre le résultat suivant :

Théorème 2.1.16. *Le processus de contact standard est auto-dual, i.e. pour tous ξ, η finis :*

$$\mathbb{P}^\xi(\xi_t \cap \eta \neq \emptyset) = \mathbb{P}^\eta(\xi_t \cap \xi \neq \emptyset).$$

Grâce au théorème 1.2.18 par exemple, le caractère auto-dual du processus de contact nous donne l'équivalence des notions d'extinction de la définition 1.2.11. De plus, l'attractivité nous donne l'existence de la mesure invariante supérieure (cf. chapitre 1) :

$$\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{\mathbb{Z}^d} S(t),$$

où $S(t)$ est le semi-groupe associé au processus. La dualité nous permet donc d'enrichir notre compréhension du phénomène de transition de phase du point de vue de la convergence des distributions :

Théorème 2.1.17 (Harris, 1974-76). *La transition de phase se caractérise aussi par :*

- si $\lambda < \lambda_c$, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, $\delta_A S(t)$ converge en loi vers $\delta_\emptyset$; on est en régime sous-critique ;
- si $\lambda > \lambda_c$, $\delta_{\mathbb{Z}^d} S(t)$ converge en loi vers $\nu \neq \delta_\emptyset$; on est en régime surcritique.

Nous nous posons alors la question : en régime surcritique, quelle forme a la mesure limite ν ?

Définition 2.1.18. *On pose :*

$$\rho(\lambda) = \nu_\lambda(0 \in \cdot) = \mathbb{P}_{\{0\}}(\tau = \infty) = \mathbb{P}_{\{0\}}((\xi_t) \text{ survit}).$$

On a donc :

$$\lambda_c = \sup\{\lambda > 0 : \rho(\lambda) = 0\}.$$

Nous n'avons pour l'instant aucune information sur la permanence du processus quand il survit.

En 1978, Holley et Liggett [HL78] donnent une borne inférieure pour le paramètre critique (qu'on savait uniquement fini jusqu'alors) en travaillant sur l'existence d'une mesure invariante non triviale. Ils attribuent la performance de leur résultat aux méthodes analytiques ne passant pas par l'intermédiaire du discret (percolation).

Théorème 2.1.19 (Holley-Liggett, 1978). *Si $\lambda > \frac{2}{d}$, il existe une mesure invariante non triviale et on a la minoration suivante :*

$$\mathbb{P}_{\{0\}}(\tau = \infty) \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2d\lambda}}.$$

où τ est le temps d'extinction du processus. Par conséquent,

$$\lambda_c < \frac{2}{d}.$$

On pourra se reporter à leur article [HL78] ou bien au *survey* de Griffeath [Gri81] pour une preuve de ce résultat. D'autres résultats autour du paramètre critique seront énoncés dans la section 2.4.

2.2 Représentation graphique

Nous rappelons que nous travaillons avec le processus de contact standard (où les particules meurent à taux 1 et naissent à taux proportionnel à leur nombre de voisins vivants). Ce processus vérifie en particulier les théorèmes 2.1.6, 2.1.7, 2.1.15, 2.1.16 et 2.1.17. Nous allons d'abord étudier la construction graphique de ce processus puis en déduire un nouvel espace de probabilité de travail.

2.2.1 Construction graphique

Harris introduit en 1978 un nouveau point de vue sur le processus de contact (et plus généralement sur les processus additifs) en les représentant graphiquement à l'aide de processus de Poisson indépendants. Pour cela, on commence par le diagramme spatio-temporel $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^+$ puis on l'augmente pour donner un *diagramme de percolation* comme suit.

- Pour chaque $x \in \mathbb{Z}^d$ on se donne $(N_t^x)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre 1 pour les instants (éventuels) de mort au site x . On note $(T_n^x)_{n \geq 1}$ les temps d'arrivée correspondants et on place une croix à chaque point spatio-temporel (x, T_n^x) .
- Pour chaque arête $e = \{x, y\}$, on se donne $(N_t^{\{x,y\}})_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ pour les instants (éventuels) de naissance à travers l'arête e . On note à nouveau $(T_n^{\{x,y\}})_{n \geq 1}$ les temps d'arrivée correspondants et on place une flèche entre les points $(x, T_n^{\{x,y\}})$ et $(y, T_n^{\{x,y\}})$ qui indique que si x est vivant et y mort alors il y a une naissance en y et réciproquement.

Ces processus sont représentés sur la figure 2.1 dans le cas du processus de contact sur $\mathbb{Z}$.

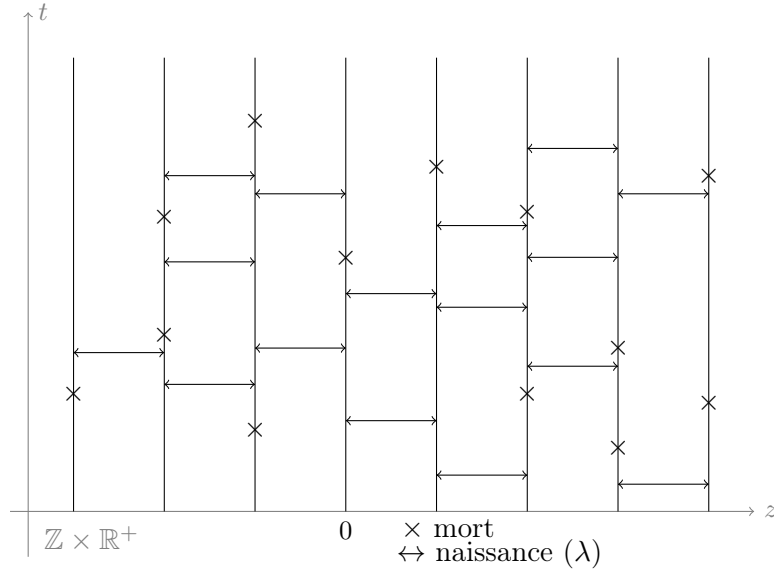


FIGURE 2.1 – Les processus de Poisson de la représentation graphique sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$ et $s < t$, on dit qu'il y a un chemin ouvert de (x, s) à (y, t) dans le diagramme s'il existe une suite de temps $s = s_0 < s_1 < \dots < s_{n+1} = t$ et une suite de points correspondants $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ tels que :

- Pour $j = 1, \dots, n$, il y a une flèche de x_{j-1} vers x_j au temps s_j .
- Pour $j = 0, \dots, n$, le segment vertical $\{x_j\} \times (s_j, s_{j+1})$ ne contient pas de croix $\times$.

On peut voir un exemple de chemin ouvert à la figure 2.2.

Nous définissons maintenant, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$:

$$\xi_t^A = \{x \in \mathbb{Z}^d : \exists y \in A \text{ tel qu'il existe un chemin ouvert de } (y, 0) \text{ à } (x, t)\}.$$

Dans certains cas, nous utiliserons des notations simplifiées :

- pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, on note ξ_t^A le processus dont l'état initial est A ,
- lorsque nous voudrions mettre en avant le rôle du paramètre λ , on écrira $\xi_t^A(\lambda)$,
- on note $\xi_t^x = \xi_t^{\{x\}}$,

– lorsque rien n’est spécifié (comme dans ξ_t) cela signifie que nous travaillons avec $\xi_t^{\{0\}}$.

À la figure 2.3, nous obtenons une représentation de l’évolution jusqu’à un instant T du processus de contact (ξ_t) associé au tirage des processus de Poisson de la figure 2.1.

Remarque. *Si on part d’un nombre fini de points vivants, la vision percolation discrète est justifiée car il y a un nombre fini de sauts dans un intervalle de temps fini. Si on part d’un nombre infini de points vivants, on peut choisir un intervalle de temps suffisamment petit pendant lequel les interactions se font au sein d’îlots finis. Le processus de contact est le pendant continu de la percolation orientée. Certains résultats s’adaptent facilement d’un modèle à l’autre et d’autres nécessitent des constructions plus complexes comme nous le verrons par la suite.*

Nous obtenons ainsi une construction du processus de contact. Il est important de noter que, de cette manière, tous les $\{(\xi_t^A)_{t \geq 0}, A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)\}$ sont définis simultanément sur le même espace de probabilité, au moins à λ fixé. Nous explicitons cet espace dans la section suivante.

2.2.2 Espace de probabilité associé

Nous rappelons que les boréliens de $\mathbb{R}^+$ sont notés $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ et $\mathbb{E}^d$ sont les arêtes de $\mathbb{Z}^d$. Soit M l’ensemble des mesures localement finies sur $\mathbb{R}^+$ ($m = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{t_i}, (t_i)_i \in \mathbb{R}^+$ avec $m(K) < \infty$ pour tout compact K). Nous munissons M de la tribu $\mathcal{M}$ engendrée par les applications $\{m \rightarrow m(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\}$. Posons

$$\Omega = M^{\mathbb{E}^d} \times M^{\mathbb{Z}^d}$$

$$\text{et } \mathcal{F} = \mathcal{M}^{\otimes \mathbb{E}^d} \otimes \mathcal{M}^{\otimes \mathbb{Z}^d}.$$

Sur cet espace, nous considérons la famille des mesures de probabilité définies comme suit :

$$\mathbb{P}_\lambda = \mathcal{P}_\lambda^{\otimes \mathbb{E}^d} \otimes \mathcal{P}_1^{\otimes \mathbb{Z}^d}$$

où $\mathcal{P}_\lambda$ est la loi d’un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^+$ d’intensité λ .

Une réalisation $\omega = (\omega_e^\lambda, \omega_x^1)_{e,x} \in \Omega$ est la donnée de tous ces processus de Poisson. Pour chaque sommet $x \in \mathbb{Z}^d$, nous obtenons un processus de Poisson de paramètre 1 dont les temps d’arrivée sont $(T_n^x)_{n \geq 1}$ et, pour chaque arête $e = \{x, y\} \in \mathbb{E}^d$, un processus de Poisson de paramètre λ dont les temps d’arrivée sont $(T_n^{\{x,y\}})_{n \geq 1}$. Il s’agit donc bien de l’espace utilisé précédemment pour la construction graphique.

À partir de maintenant, nous travaillerons avec cet espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\lambda)$. La configuration initiale n’apparaît plus dans la probabilité puisque cet espace nous permet de coupler les processus issus de différentes conditions initiales.

Nous pouvons aussi augmenter cette structure de percolation pour définir sur le même espace, des processus de contact de taux de naissance λ différents. La structure est donc un outil très puissant pour *coupler* les évolutions de différents processus de contact. Cela nous permet de retrouver et reformuler les propriétés d’additivité, attractivité, croissance et dualité sur notre nouvel espace de probabilité.

Théorème 2.2.1. *Soit (ξ_t) un processus de contact standard. Alors*

1. (ξ_t) est additif : pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, $t \geq 0$,

$$\xi_t^{A \cup B} = \xi_t^A \cup \xi_t^B;$$

2. (ξ_t) est attractif : pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ tels que $A \subset B$, $t \geq 0$,

$$\xi_t^A \leq \xi_t^B;$$

3. (ξ_t) est croissant : pour tous $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, $\lambda < \lambda'$, $t \geq 0$,

$$\xi_t^A(\lambda) \leq \xi_t^A(\lambda');$$

4. (ξ_t) est auto-dual, i.e. pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\xi_t^A \cap B \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\xi_t^B \cap A \neq \emptyset).$$

Démonstration. L'additivité et l'attractivité se voient directement dans la définition du processus via la représentation graphique. Pour le point 3, on considère $\lambda < \lambda'$. On considère la représentation graphique de $(\xi_t(\lambda'))$ et pour chaque flèche, on tire une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{\lambda'}$. En s'appuyant sur la représentation graphique de $(\xi_t(\lambda'))$, on construit $(\xi_t(\lambda))$ grâce aux croix et aux flèches dont le résultat de la Bernoulli est 1. Ce processus suit bien la loi souhaitée et l'inégalité est vérifiée. Nous ne détaillons pas l'auto-dualité. $\square$

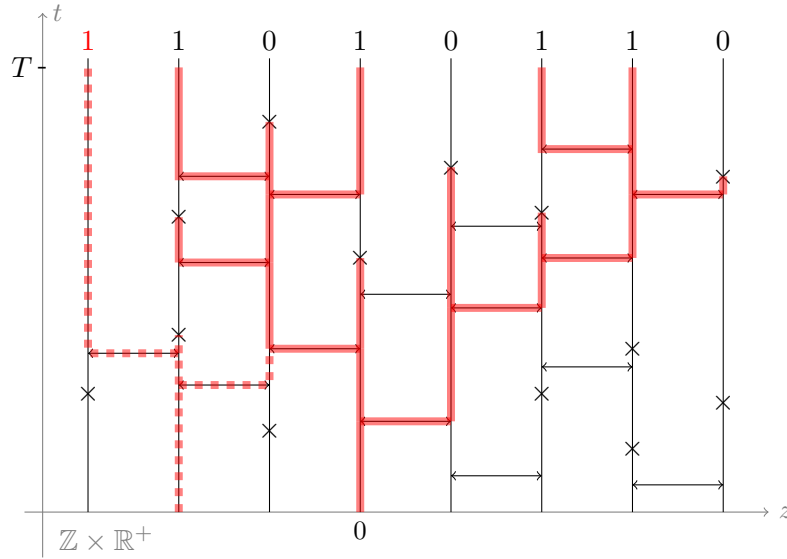


FIGURE 2.4 – Illustration de l'attractivité (et de l'additivité).

Les trois premières propriétés sont illustrées par les figures 2.4 et 2.5.

Nous déduisons de la dualité, pour tout $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)$ et tout $t \geq 0$,

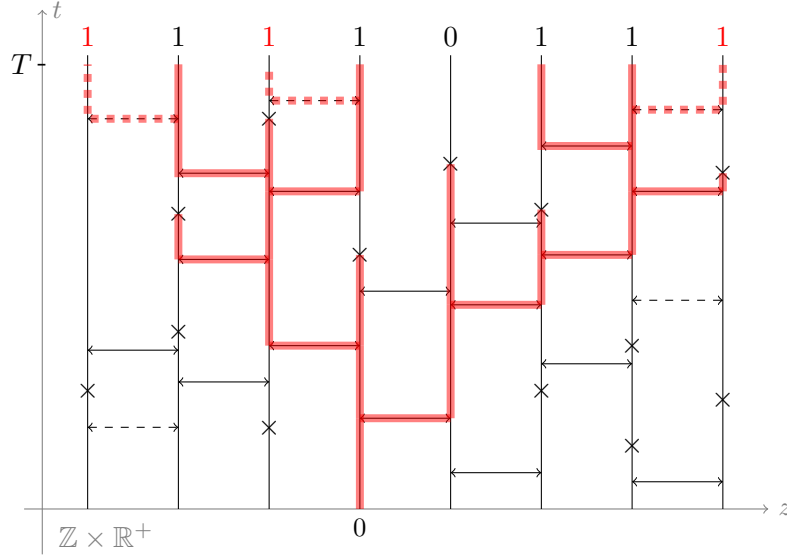
$$\mathbb{P}(\xi_t^A = \emptyset) = \mathbb{P}(\xi_t^{\mathbb{Z}^d} \cap A = \emptyset).$$

Nous reformulons le théorème 1.4.12 dans notre cadre :

Théorème 2.2.2. *Pour tout $\lambda > 0$, la mesure $\mathbb{P}_\lambda$ a des corrélations spatio-temporelles positives et satisfait l'inégalité FKG : pour tous $L \geq 0, T \geq 0$ et toutes fonctions croissantes f et g sur les configurations sur $[-L, L]^d \times [0, T]$ on a*

$$\mathbb{E}_\lambda [fg] \geq \mathbb{E}_\lambda [f] \mathbb{E}_\lambda [g]$$

où $\mathbb{E}_\lambda$ est l'espérance sous $\mathbb{P}_\lambda$. Quand nous regarderons les configurations à un instant fixé, nous parlerons de corrélations spatiales positives.


 FIGURE 2.5 – Illustration de la croissance par rapport à λ .

2.2.3 Exemple

Donnons un premier exemple d'utilisation de l'analogie entre le processus de contact et la percolation via la représentation graphique.

La survie du processus à partir de la configuration initiale 0 est équivalente à la présence d'un chemin infini issu de 0 dans la percolation sous-jacente. Cela permet de retrouver la borne inférieure $\frac{1}{2d-1}$ pour le paramètre critique (*cf.* théorème 2.1.10).

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\text{survie}) &= \mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}, \text{ il existe un chemin de longueur } n \text{ dans la percolation sous-jacente}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{ il existe un chemin de longueur } n) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\mathcal{C} \text{ chemin de} \\ \text{longueur } n}} \mathbb{P}(\mathcal{C} \text{ chemin ouvert}) \\
 &\leq \sum_{\substack{\mathcal{C} \text{ chemin de} \\ \text{longueur } n}} \mathbb{P}(\text{sur } \mathcal{C} \text{ il y a toujours une naissance avant la mort}) \\
 &\leq (2d)^n \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^n.
 \end{aligned}$$

Le dernier contrôle est obtenu en utilisant les résultats sur les variables exponentielles. Donc, si $\frac{2d\lambda}{\lambda+1} < 1$, *i.e.* $\lambda < \frac{1}{2d-1}$, alors il y a extinction presque sûre ; donc $\lambda_c \geq \frac{1}{2d-1}$.

2.3 Le processus sur $\mathbb{Z}$

Dans cette section, (ξ_t) est un processus de contact standard sur $\mathbb{Z}$, de taux de naissance λ et de taux de mort 1.

2.3.1 Le régime surcritique

Nous nous plaçons tout d'abord en régime surcritique, c'est-à-dire $\lambda > \lambda_c$ (cf. définition 2.1.14).

§ 1. Un nombre infini de particules. Nous avons vu que si $|\xi_0| < \infty$, il y a une probabilité strictement positive de survivre infiniment et nous voulons maintenant savoir ce qu'il se passe dans ce cas. Il est d'abord facile de voir que

Lemme 2.3.1. *$\mathbb{P}$ -presque sûrement, $|\xi_t|$ tend vers 0 ou $|\xi_t|$ tend vers l'infini quand t tend vers l'infini.*

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{R}^+$ et $\xi \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$; nous pouvons écrire

$$\mathbb{P}\left(\exists t, \xi_t^\xi = \emptyset \mid \mathcal{F}_s\right) \geq \mathbb{P}\left(\forall x \in \xi_s^\xi, x \text{ n'engendre pas de particules vivantes} \mid \mathcal{F}_s\right). \quad (*)$$

Notons :

- Y_1^x le temps d'attente de la prochaine mort potentielle (croix dans la représentation graphique) en x ,
- $Y_\lambda^{x,i}$ le temps d'attente de la prochaine naissance potentielle de x vers son i^e voisin.

Ces variables aléatoires suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs 1 et λ . Nous pouvons minorer la quantité (*) par le cas où x meurt avant toute flèche de naissance :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\exists t, \xi_t^\xi = \emptyset \mid \mathcal{F}_s\right) &\geq \prod_{x \in \xi_s^\xi} \mathbb{P}\left(Y_1^x \leq \min(Y_\lambda^{x,1}, \dots, Y_\lambda^{x,2d})\right) \\ &\geq \prod_{x \in \xi_s^\xi} \frac{1}{1 + 2d\lambda} \\ &\geq \left(\frac{1}{1 + 2d\lambda}\right)^{|\xi_s^\xi|}. \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence des martingales, $\mathbb{P}(\exists t > 0 : \xi_t^\xi = \emptyset \mid \mathcal{F}_s)$ tend presque sûrement vers $\mathbb{1}_{\{\exists t > 0 : \xi_t^\xi = \emptyset\}}$. Donc, on a

$$\left(\forall s \geq 0, \xi_s^\xi \neq \emptyset\right) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} |\xi_s^\xi| = \infty.$$

Par conséquent, si le processus survit, le nombre de particules vivantes tend vers l'infini. $\square$

Grâce à sa représentation graphique, Harris utilise des résultats sur la percolation pour montrer une croissance au moins linéaire du processus [Har78] :

Théorème 2.3.2 (Harris, 1978). *Pour λ assez grand et pour toute configuration initiale $\xi_0 \neq \emptyset$,*

$$\mathbb{P}\left(\inf_{t>0} \frac{|\xi_t|}{t} > 0 \mid |\xi_t| \nrightarrow 0\right) = 1.$$

Par ailleurs, en couplant le processus avec un modèle sans mort de Richardson [Ric73], nous pouvons voir que la croissance est au plus linéaire. Il est donc naturel de penser que la croissance soit exactement linéaire.

Harris [Har76] montre aussi que, si le processus de contact sur $\mathbb{Z}$ survit, alors il est permanent.

§ 2. Le bord droit du processus de contact. Durrett [Dur80] montre le théorème suivant :

Théorème 2.3.3 (Durrett, 1980). *Il existe $\gamma > 0$ tel que*

$$\frac{|\xi_t|}{t} \rightarrow \gamma \mathbb{1}_{\{\forall t, |\xi_t^0| > 0\}},$$

la convergence ayant lieu dans $\mathbb{L}_1$.

Idée de preuve. On pourra se reporter à l'article [Dur80] et au *survey* [Gri81] pour plus de détails. Dans son article, Durrett s'appuie sur les travaux de Griffeath [Gri78] et [Gri79].

Durrett travaille d'abord sur un modèle de croissance (*cf.* définition 1.2.10) avec des interactions à portée finie ; il note $\bar{r}_t$ la particule la plus à droite à l'instant t quand l'état initial est $\mathbb{Z}^-$. Il montre alors qu'il existe α tel que $\frac{\bar{r}_t}{t} \rightarrow \alpha$, presque sûrement et que, si $\alpha > -\infty$, la convergence a aussi lieu dans $\mathbb{L}_1$. L'idée clef est le fait que le processus $(\bar{r}_t)$, bien que n'ayant pas des accroissements stationnaires, est très proche des processus sous-additifs de Hammersley et Kingman. La preuve se fait donc en adaptant celle du théorème ergodique sous-additif de Kingman [Kin68].

Il ajoute ensuite à l'hypothèse de modèle de croissance celle d'interactions à plus proches voisins. Cette hypothèse permet de réaliser un couplage entre le processus dont l'état initial est $\mathbb{Z}^-$ et le processus dont l'état initial est 0 en s'assurant que la particule la plus à droite soit la même dans les deux processus. La convergence précédente est alors vérifiée pour r_t , particule la plus à droite du processus dont l'état initial est réduit à 0 (en s'assurant que les quantités aient un sens). Le même résultat est obtenu pour la particule la plus à gauche ($\frac{l_t}{t} \rightarrow \beta$) et il conclut que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\xi_t^0|}{t} = \gamma \mathbb{1}_{\{\forall t, |\xi_t^0| > 0\}},$$

où la convergence a lieu dans $\mathbb{L}_1$ et où $\gamma = \mathbb{P}(\xi_\infty^{\mathbb{Z}}(0) = 1) (\alpha - \beta)$. Le travail de cette partie-là est de montrer la convergence en loi de $\xi_t^{\mathbb{Z}}$ et le caractère ergodique stationnaire de la limite. Il est important de souligner qu'on aboutit seulement à une convergence dans $\mathbb{L}_1$.

En ajoutant l'hypothèse d'additivité du processus, Durrett obtient la positivité de $\alpha - \beta$. Pour conclure à la positivité de γ , il faut utiliser le fait que le processus de contact standard est permanent. $\square$

Au delà du résultat de croissance linéaire du processus de contact en dimension 1, la démonstration de Durrett est déterminante car elle inspire à Liggett [Lig85] une généralisation du théorème sous-additif de Kingman qui pourra s'appliquer aux quantités caractéristiques de plein d'autres modèles ; on pourra se reporter à l'annexe A pour ces résultats.

Ce qu'il est aussi important de retenir c'est la démarche générale pour montrer une croissance linéaire, que nous appellerons résultat de forme asymptotique en dimension supérieure :

- montrer une croissance au plus linéaire en couplant avec un processus sans mort comme celui du modèle de Richardson ;
- montrer une croissance au moins linéaire en couplant avec un processus de percolation, cette étape peut s'avérer difficile ;
- montrer une croissance exactement linéaire en utilisant des techniques sous-additives, cette étape nécessite de trouver des quantités caractéristiques de la croissance du modèle ayant de bonnes propriétés de sous-additivité.

Nous retrouverons ce schéma de preuve pour montrer la croissance linéaire du processus de contact avec vieillissement (théorèmes 6.1.4, 6.2.7 et 8.3.1). La troisième étape du schéma, qui permet de conclure à un théorème de forme asymptotique fera l'objet de la partie III dans un cas plus général de modèle de croissance. L'idée de la preuve de Durrett ci-dessus fait bien apparaître le rôle des différentes hypothèses que nous faisons sur nos modèles.

Durrett n'obtient pour l'instant qu'une convergence $\mathbb{L}_1$. Il faudra attendre l'apparition de nouvelles techniques pour pouvoir conclure à une convergence presque sûre.

Dans la preuve précédente, l'existence des quantités importantes suivantes a été montrée :

Définition 2.3.4. Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $\alpha_t = \mathbb{E}[\bar{r}_t]$ et

$$\alpha = \inf_{t \geq 0} \frac{\alpha_t}{t} = \lim_{t \geq 0} \frac{\alpha_t}{t}.$$

La quantité $\bar{r}_t$ est un bon outil pour analyser la survie : grossièrement parlant, si la quantité $\bar{r}_t$ dérive vers la gauche alors il y a extinction, si elle dérive vers la droite, il y a survie. La quantité α est la vitesse asymptotique du bord droit ; elle peut valoir l'infini.

On a, pour tout $\lambda, \delta \geq 0$, $\alpha(\lambda + \delta) \geq \alpha(\lambda) + \delta$, donc la vitesse est strictement croissante par rapport au paramètre de naissance tant que $\alpha(\lambda) > -\infty$.

La valeur critique λ_c est donc bien la valeur pour laquelle la vitesse asymptotique du bord droit passe de négative à positive :

Théorème 2.3.5. $\lambda_c = \sup\{\lambda : \alpha(\lambda) < 0\} = \sup\{\lambda : \alpha(\lambda) \leq 0\}$.

Finalement, Griffeath [Gri79] et Durrett [Dur80] concluent à un *théorème de convergence complète*. Rappelons que l'on note ν_λ la plus grande mesure invariante.

Théorème 2.3.6 (Durrett-Griffeath, 1980). *Supposons $\lambda > \lambda_c$ et μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$. Alors*

$$\xi_t^\mu \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathbb{P}(\tau^\mu < \infty) \delta_0 + \mathbb{P}(\tau^\mu = \infty) \nu_\lambda.$$

Ainsi, toute mesure invariante est de la forme $c\delta_0 + (1 - c)\nu_\lambda$.

Le théorème 1.2.16 nous donnait déjà le résultat pour μ invariante par translation. Ce résultat est plus général et ses auteurs le montrent grâce au bord droit du processus de contact.

§ 3. La construction de Durrett et Griffeath. Dans [DG83], Durrett et Griffeath construisent un couplage entre le processus de contact et la percolation orientée faisant ainsi apparaître le rôle fondamental de la représentation graphique. Grâce à cette construction, ils obtiennent des résultats de type grandes déviations sur la quantité r_t et des contrôles sur le temps d'extinction du processus.

Théorème 2.3.7. Pour $\lambda > \lambda_c$ et $a < \alpha(\lambda)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}(r_t < at) < 0.$$

Théorème 2.3.8. Pour $\lambda > \lambda_c$, il existe C_1 et C_2 telles que, pour tout $t \geq 0$ et tout A fini,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(t < \tau^A < \infty) &\leq C_1 |A| e^{-C_2 t}, \\ \mathbb{P}(\tau^A < \infty) &\leq C_1 e^{-C_2 |A|}. \end{aligned}$$

Les estimées exponentielles permettent aussi d'obtenir la loi forte des grands nombres que l'on attendait :

Théorème 2.3.9. Pour $\lambda > \lambda_c$, presque-sûrement sur $\{\tau^0 = \infty\}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\xi_t^0|}{t} = 2\alpha(\lambda)\rho(\lambda),$$

où $\rho(\lambda) = \nu_\lambda(\xi(x) = 1)$.

§ 4. Un théorème central limite. Maintenant que nous avons un résultat de loi des grands nombres sur la quantité $|\xi_t^0|$, nous pouvons nous poser la question des fluctuations. En 1987, Galves et Presutti [GP87] travaillent avec le processus vu depuis le bord droit et montrent un théorème central limite fonctionnel qui s'appuie sur des résultats pour des variables aléatoires dépendantes ([Ibr75]). Deux ans plus tard, Kuczek [Kuc89] construit, dans le cas discret de la percolation orientée, des variables aléatoires, qu'il appelle *points de coupure*, qui découpent le processus en morceaux indépendants identiquement distribués. Le théorème central limite sur lequel il s'appuie est ainsi plus simple et il suggère que ses variables peuvent aussi être utilisées pour montrer des résultats de grandes déviations. Sa démonstration peut être adaptée dans le cas continu du processus de contact pour obtenir le résultat :

Théorème 2.3.10. *Il existe $\mu, \alpha, \sigma, \beta$ strictement positifs tels que, sur l'événement de survie :*

$$\frac{r_t - \frac{\mu}{\alpha}t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha\sigma^2 - \beta^2\mu}{\alpha^{3/2}}\right).$$

Mountford et Sweet [MS00] étendent le résultat pour un processus de contact à portée finie (ils utilisent pour cela les travaux de Bezuidenhout et Grimmett [BG90], décrit à la section 2.4.2).

2.3.2 Le régime sous-critique

En régime sous-critique, nous savons que, pour tout $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_t^A \neq \emptyset) = 0,$$

et, pour toute mesure de probabilité μ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \delta_\emptyset.$$

Nous nous intéressons maintenant aux vitesses de ces convergences.

Théorème 2.3.11 (Griffeath, 1981). *Si $\lambda < \lambda_c$, il existe des constantes C_1 et C_2 telles que, pour tout $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)$, on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_t^A \neq \emptyset) &\leq C_1 |A| e^{-C_2 t}, \\ \mathbb{P}(r_t^0 > -e^{C_2 t}) &\leq C_1 e^{-C_2 t}. \end{aligned}$$

En particulier, $\alpha(\lambda) = -\infty$. Par ailleurs, pour tout $\eta \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\mathbb{P}(\xi_t^\eta(x) = 0 \text{ pour tout } t \text{ assez grand}) = 1.$$

Pour la preuve de ces résultats, on pourra se reporter à [Gri81] ou bien au chapitre VI de [Lig05].

2.3.3 Au point critique

L'étude au point critique est celle qui a résisté le plus longtemps. Liggett et Durrett ont d'abord établi que si le processus s'éteignait, cela ne pouvait se faire rapidement, marquant ainsi une différence avec le régime sous-critique.

Théorème 2.3.12. *Si $\lambda = \lambda_c$ alors, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \times \mathbb{P}\left(\xi_t^{\mathbb{Z}}(x) = 1\right) = \infty;$$

et, en outre, $\mathbb{P}\left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \xi_t^{\mathbb{Z}}(x) = 0\right) = 1$.

La question de savoir ce qu'il se passe au point critique peut se poser en terme de la continuité de la quantité $\rho(\lambda)$. On rappelle que $\rho(\lambda) = \nu(0 \in \cdot) = \mathbb{P}(\tau^0 = \infty) = \mathbb{P}((\xi_t) \text{ survit})$. On a tout d'abord le résultat suivant :

Théorème 2.3.13. $\rho(\lambda)$ est continue sur $[\lambda_c, \infty)$.

Pour l'étude du régime critique en dimension 1, la construction de Durrett et Griffeath [DG83] joue à nouveau un rôle fondamental et permet d'établir :

Théorème 2.3.14. $\rho(\lambda_c) = \alpha(\lambda_c) = 0$.

2.4 Le processus sur $\mathbb{Z}^d$

2.4.1 L'état de l'art des années 80

Les résultats présentés précédemment en dimension 1 se retrouvent dans le livre *Interacting Particle Systems* de Liggett [Lig05], ou bien dans le *survey* de Griffeath [Gri81] et son article avec Durrett [DG83].

En dimension $d > 1$, un théorème de convergence complète est toujours valable si on part d'une mesure invariante par translation (en appliquant le théorème 1.2.16). Griffeath [Gri78] observe que la preuve de Harris peut s'adapter à des mesures qui chargent des configurations denses pour lesquelles on aura $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \nu_\lambda$.

Pour λ grand, le résultat 2.3.2 de Harris est toujours vérifié. Nous pensons donc toujours à une croissance linéaire mais nous ne pouvons plus utiliser la notion de bord du processus de contact. Toujours pour λ grand, Durrett et Griffeath [DG82] montrent un théorème de forme asymptotique grâce aux estimées exponentielles obtenues en dimension 1. Cela permet de conclure un théorème de convergence complète et une loi des grands nombres (analogues des résultats 2.3.6 et 2.3.7) pour de grandes valeurs de λ . Mais malheureusement, ces résultats ne se généralisent pas à toutes les valeurs de $\lambda > \lambda_c$.

2.4.2 La construction de Bezuidenhout et Grimmett

Donnons les grandes lignes de la construction de Bezuidenhout et Grimmett [BG90] :

1. Si le processus est surcritique, alors on peut rendre la probabilité de survie très proche de 1 en augmentant la configuration initiale.
2. La probabilité de survie peut être vue comme la limite de la probabilité d'avoir suffisamment de points vivants dans une boîte spatio-temporelle finie $\mathcal{B}$ (en s'appuyant sur le fait que si le processus survit, le nombre de particules tend vers l'infini).
3. En contrôlant le rapport entre le nombre de points vivants sur un coin de la face supérieure de $\mathcal{B}$ par rapport au nombre total sur la face supérieure (puis en faisant la même chose sur un coin spatio-temporel de la boîte), on obtient le fait que la survie peut être vue comme le fait d'avoir assez de points vivants dans ces coins.
4. On prouve finalement que si le processus est surcritique, on peut augmenter la configuration initiale pour avoir, avec grande probabilité, des zones bien déterminées où toutes les particules sont vivantes.
5. On couple alors avec un processus de percolation orientée pour obtenir la propriété réciproque : si on sait qu'on a beaucoup de points vivants bien placés dans une boîte spatio-temporelle finie, alors le processus est surcritique.

Cette construction produit un observable spatio-temporel fini qui traduit la survie. Cet observable est continu par rapport au paramètre λ . Cela permet donc de conclure sur le comportement au point critique :

Théorème 2.4.1 (Bezuidenhout-Grimmett, 1990). *Le processus de contact s'éteint au point critique.*

Pour plus de détails sur cette construction on pourra se reporter à [Lig99]. Au chapitre 5, nous effectuons une construction similaire pour le cas du processus de contact avec vieillissement, dont le processus de contact standard est un cas particulier.

2.4.3 Les conséquences

À partir de là, exhibons un théorème de convergence complète :

Théorème 2.4.2. *Supposons $\lambda > \lambda_c$ et μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$. Alors*

$$\xi_t^\mu \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathbb{P}(\tau^\mu < \infty) \delta_\emptyset + \mathbb{P}(\tau^\mu = \infty) \nu.$$

Puis, par des méthodes de redémarrage, Bezuidenhout et Grimmett obtiennent les estimées exponentielles suivantes [BG91] :

Théorème 2.4.3 (Bezuidenhout-Grimmett, 1991). *Pour $\lambda > \lambda_c$, il existe C_1 et C_2 telles que, pour tout $t \geq 0$, A fini*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(t < \tau^A < \infty) &\leq C_1 e^{-C_2 t}, \\ \mathbb{P}(\tau^A < \infty) &\leq C_1 e^{-C_2 |A|}. \end{aligned}$$

Au chapitre 6, nous montrons les mêmes contrôles pour le processus de contact avec vieillissement ; on peut s'y reporter pour voir comment fonctionnent les méthodes de redémarrage.

Ces contrôles permettent d'étendre le résultat de forme asymptotique, précédemment obtenu par Durrett et Griffeath pour de grands λ , à toute la zone surcritique.

Théorème 2.4.4 (Durrett-Griffeath). *Pour $\lambda > \lambda_c$, il existe un convexe D tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, presque sûrement sur l'événement de survie, pour tout t assez grand,*

$$(1 - \varepsilon)tD \subset \tilde{H}_t \subset (1 + \varepsilon)tD,$$

où $\tilde{H}_t = \bigcup_{s \leq t} \xi_s^0 + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$.

Garet et Marchand [GM12a] présentent une preuve alternative à celle de Durrett et Griffeath en introduisant un temps d'atteinte essentiel. Les difficultés rencontrées pour montrer ce type de théorème sont détaillées dans l'introduction de la partie III. Nous montrerons, au chapitre 8 des théorèmes de forme asymptotique pour des modèles généraux de croissance aléatoire, cadre dans lequel s'inscriront beaucoup d'extensions du processus de contact présentées au chapitre 3.

Grâce à leur temps d'atteinte essentiel et aux techniques de redémarrage mises en place dans [GM12b], Garet et Marchand [GM14] obtiennent ensuite des résultats de grandes déviations :

Théorème 2.4.5 (Garet-Marchand, 2012). *Soit μ la norme associée à la forme asymptotique. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$*

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(t(x) \geq (1 + \varepsilon)\mu(x)) &\leq C_1 \exp(-C_2 \|x\|), \\ \bar{\mathbb{P}}(t(x) \leq (1 - \varepsilon)\mu(x)) &\leq C_2 \exp(-C_2 \|x\|), \end{aligned}$$

où $\bar{\mathbb{P}}$ est la probabilité conditionnée à la survie.

2.4.4 Le paramètre critique

Nous donnons ici un petit aperçu des résultats autour du paramètre critique. Rappelons que nous définissons

$$\lambda_c(\mathbb{Z}^d) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \mathbb{P} \left(\forall t > 0, \xi_t^{\{0\}} \neq \emptyset \right) > 0 \right\}.$$

Lorsque que Harris [Har74] montre que $\lambda_c(\mathbb{Z})$ est fini en dimension 1, il obtient en particulier $\lambda_c(\mathbb{Z}) \leq 1328$. Une meilleure borne est très vite apportée par Holley et Liggett [HL78] :

$$\lambda_c(\mathbb{Z}^d) \leq \frac{2}{d}.$$

Numériquement, les résultats de Brower, Furman, Moshe [Bro78] d'une part, et Grassberger et de la Torre [GdlT79] d'autre part, sont

$$\begin{aligned} \lambda_c(\mathbb{Z}) &\approx 1,65 \text{ en dimension 1,} \\ \lambda_c(\mathbb{Z}^2) &\approx 0,41 \text{ en dimension 2.} \end{aligned}$$

Finalement, Holley et Liggett [HL81] montrent le résultat asymptotique suivant :

$$\lim_{d \rightarrow \infty} 2d\lambda_c(\mathbb{Z}^d) = 1.$$

Des variantes du processus de contact

Un destin dépend de tant de choses ! Brassage génétique, brassage des idées, brassage des expériences et des rencontres [...] Ni les gènes, ni l'environnement ne peuvent tout expliquer, et c'est bien ainsi. — Villani.

Une fois le processus de contact standard bien compris (cf. chapitre 2), les probabilistes se sont tournés vers l'étude de variantes de ce processus. Nous continuerons à appeler processus de contact tout processus où les particules ont un taux de mort indépendant de la configuration et un taux de naissance nul si son voisinage est mort.

Dans les années 90, les environnements aléatoires ou inhomogènes commencent à apparaître au sein de l'étude des systèmes de particules en interaction (Chen-Liggett [CL92], Ferreira [Fer90], Greven [Gre90]). Dans le modèle du processus de contact, on a jusqu'alors supposé que les taux régissant les naissances et les morts étaient les mêmes pour tous les sites. Les premières variantes ont donc consisté à faire varier ces taux selon les sites (on parle d'environnement inhomogène) et éventuellement à les choisir aléatoirement (on parle d'environnement aléatoire).

Dans le cas où l'environnement aléatoire est surcritique, il y a, bien sûr, survie du processus. Garet et Marchand [GM12a] ont montré, par des procédés de redémarrage, que les contrôles de la croissance sont conservés ; ils ont ensuite développé des méthodes sous-additives pour montrer un théorème de forme asymptotique pour le processus conditionné à survivre. On retrouve alors le comportement du processus de contact standard. Si on choisit certains paramètres de l'environnement surcritiques et certains sous-critiques, le comportement peut différer. Il faut d'abord montrer que la survie peut se produire et obtenir des bornes sur les paramètres, puis s'interroger sur le comportement du processus conditionné à survivre. Beaucoup de questions restent ouvertes sur ce thème.

Les questions sur les environnements aléatoires généraux pouvant bloquer le processus restant ouvertes, Broman [Bro07] a introduit un environnement aléatoire évoluant aléatoirement. Le fait de faire évoluer l'environnement au cours du temps va faire disparaître les obstacles rencontrés précédemment et Steif, Warfheimer [SW08] et Remenik [Rem08] retrouvent alors des comportements similaires au processus classique. Garet et Marchand [GM12b] introduisent un pendant discret à ce modèle en considérant une percolation orientée typée avec immigration.

Une autre direction pour étendre le modèle du processus de contact est celle de la mémoire de la particule. Durrett et Schinazi [DS00] d'une part, et Krone [Kro99] d'autre part, présentent des variantes qui permettent de considérer que la particule possède une sorte de mémoire, tout en conservant le caractère markovien du processus. Nous étendrons l'idée de Krone en construisant un processus de contact avec vieillissement dans le chapitre 4.

3.1 Environnement aléatoire ou inhomogène

3.1.1 Cadre

Nous avons vu que, pour décrire un processus de contact standard, les auteurs se donnent souvent, de façon équivalente, un unique paramètre :

- soit le taux de mort δ ; dans ce cas le taux de naissance est 1 (fois le nombre de voisins vivants) et le taux critique est noté δ_c (*i.e* il y a survie si $\delta < \delta_c$) ;
- soit le taux de naissance λ ; dans ce cas le taux de mort est 1 et le taux critique est noté λ_c (*i.e* il y a survie si $\lambda > \lambda_c$).

Pour travailler en environnement aléatoire (ou inhomogène), les différents auteurs placent donc l'aléa (ou l'inhomogénéité) sur les taux de naissance ou bien sur les taux de mort. Les modèles ne sont pas équivalents mais les problèmes posés et leurs réponses sont les mêmes (comme c'est par exemple le cas entre les percolations indépendantes par site et par arête).

Définition 3.1.1. Soit ν une loi d'environnement à valeurs dans $\mathcal{E}$. Soit $E \in \mathcal{E}$ un environnement. On note $\mathbb{P}_E$ la probabilité quenched (*gelée*) à environnement E fixé du processus d'intérêt, et on définit $\mathbb{P}$ la probabilité annealed (*moyennée*) :

$$\mathbb{P}(\cdot) = \int_{\mathcal{E}} \mathbb{P}_E(\cdot) d\nu(E).$$

Liggett ouvre le bal de cette étude en s'intéressant à un environnement très général sur $\mathbb{Z}$ et donne des conditions sur les paramètres pour qu'il y ait extinction du processus [Lig91]. Trouver des conditions exploitables pour la survie s'avère cependant plus difficile.

3.1.2 Un environnement aléatoire en dimension 1

Nous présentons ici l'environnement introduit par Bramson, Durrett et Schonmann [BDS91]. Les auteurs se placent sur $\mathbb{Z}$ et paramétrisent le système selon les taux de mort des particules. Chaque site de $\mathbb{Z}$ est alors indépendamment muni d'un *environnement* qui sera *favorable* avec probabilité p et *défavorable* avec probabilité $1 - p$. Dans cet environnement, on fait vivre un processus de contact selon les règles suivantes :

1. une particule morte naît à taux égal à son nombre de voisins vivants,
2. une particule vivante meurt à taux Δ si l'environnement du site est défavorable et à taux δ si l'environnement est favorable.

On choisit, en cohérence avec le vocabulaire,

$$\delta < \delta_c < \Delta \text{ et } p = \mathbb{P}(\delta_x = \Delta).$$

L'interprétation du modèle est la suivante : la reproduction des particules n'est pas affectée par l'environnement mais les particules meurent plus vite dans un environnement défavorable (*hostile*) que dans un environnement favorable (*amical*). L'hypothèse d'indépendance et distribution identique n'est pas forcément la plus réaliste mais son analyse présente déjà des phénomènes intéressants.

Pour cet environnement, le résultat de [Lig91] nous dit que pour $\delta^{1-\frac{1}{p}} < \Delta$, il y a extinction du processus.

Inspirés par les travaux de Ferreira [Fer90] pour le modèle de votes biaisés, Bramson, Durrett et Schonmann vont montrer que le modèle possède trois phases : une première où le processus s'éteint, une deuxième appelée *phase intermédiaire* où le processus survit mais croît plus lentement que la normale, et une troisième où le processus retrouve les caractéristiques du processus

standard en croissant linéairement. Ils travaillent d'abord avec un environnement particulier où les particules vivant sur des sites favorables ne meurent jamais ($\delta = 0$, les sites favorables sont très favorables) ; la survie est alors garantie. Puis, ils en déduisent le cas plus général où $\delta > 0$.

Nous utiliserons, pour ces deux environnements, les notations suivantes :

1. **(BDS1)** $\mathcal{E} = \{0, \Delta\}^{\mathbb{E}^1}$ avec $\Delta > \delta_c$ et $p < 1$,
2. **(BDS2)** $\mathcal{E} = \{\delta, \Delta\}^{\mathbb{E}^1}$ avec $0 < \delta < \delta_c, \Delta > \delta_c$ et $p < 1$.

Nous travaillons donc avec un processus (ξ_t) à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Comme précédemment, la configuration initiale sera notée en exposant du processus. Par rapport au formalisme du chapitre 1, les taux $c(x, \xi)$ sont maintenant aléatoires (mais l'aléa ne se situe que sur l'emplacement x). Nous notons, pour tous $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\Omega_\infty &= \{\forall t > 0, \xi_t^0 \neq \emptyset\}, \\ t_n &= \inf\{t : n \in \xi_t^0\}, \\ r_t &= \sup \xi_t^0, \\ \gamma(\delta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln \mathbb{P}(\sup_t r_t \geq n)}{n}.\end{aligned}$$

L'événement Ω_∞ est celui de survie du processus, t_n est le premier instant où la particule n est atteinte et r_t est le point le plus à droite à l'instant t . Pour l'existence de $\gamma(\delta)$, on pourra se reporter à [Dur84].

Théorème 3.1.2 (Bramson-Durrett-Schonmann, 1991). *Sous (BDS1), posons $\mu = \frac{\gamma(\Delta)}{\log(1/p)}$.*

1. *Si $\mu < 1$, il existe $c > 0$ tel que, $\mathbb{P}$ presque-sûrement sur Ω_∞ , $\frac{t_n}{n} \rightarrow c$.*
2. *Si $\mu \geq 1$, $\frac{\log t_n}{\log n} \rightarrow \mu$ en probabilité sous $\mathbb{P}$ sur Ω_∞ .*

Autrement dit, sur Ω_∞ , le comportement du bord droit est :

$$r_t = \sup \xi_t^0 \approx \begin{cases} t/c & \text{si } \mu < 1, \\ t^{1/\mu} & \text{si } \mu > 1. \end{cases}$$

La transition de phase s'exprime ci-dessus sur le paramètre μ . Nous pouvons aussi l'exprimer sur p à Δ fixé et inversement :

- à Δ fixé, si $p < \exp(\gamma(\Delta))$, *i.e.* la proportion de sites défavorables est petite, la croissance est linéaire ;
- à p fixé, si $\Delta < \gamma^{-1}(\log(\frac{1}{p}))$, *i.e.* les sites défavorables ne le sont pas trop, la croissance est linéaire (mais γ^{-1} n'est a priori pas explicitement connu).

Idée de preuve. On considère d'abord le cas d'un environnement déterministe où tous les sites sont défavorables ($\Delta > \delta_c$), sauf 0 qui ne meurt jamais. Même si le processus s'éteint a priori rapidement hors de 0, le fait que 0 vive indéfiniment fait que le processus redémarre jusqu'à toucher tout le monde, mais il le fait lentement. On obtient alors $\frac{\log t_n}{n} \rightarrow \gamma(\Delta)$ en probabilité sous $\mathbb{P}$ sur Ω_∞ .

Dans le cas général, si la proportion de sites favorables est grande, alors on atteint toujours des sites favorables rapidement et la croissance est linéaire. Si la proportion est petite, on sait que la plus grande bande de sites défavorables dans $[0, n]$ est de l'ordre de $\frac{\log n}{\log 1/p}$ et le temps de traversée de cette bande est environ n^μ par ce qui précède. Pour avoir une borne supérieure du temps d'atteinte de n , on utilise l'inégalité de Tchebychev. $\square$

3.1.3 Un Théorème Central Limite sous (BDS1)

Dans le cas d'une croissance linéaire sous (BDS1), nous établissons un résultat de type théorème central limite :

Théorème 3.1.4. *Sous (BDS1), si $\mu < 1$, pour presque tout environnement E , sous $\mathbb{P}_E$:*

$$\frac{t_n - nc_{E,n}}{\sqrt{\text{Var}(t_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{E,n} = \mathbb{E}(c_{E,n}) = c$.

Démonstration. Donnons d'abord les grandes lignes d'une démonstration du cas de la croissance linéaire ($\mu < 1$) du théorème 3.1.2. Nous supposons, sans perte de généralité, que 0 est un bon site. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $N(n)$ le nombre de bons sites entre 0 et n et notons $(0 = x_1, x_2, \dots, x_{N(n)})$ ces bons sites. La variable aléatoire $N(n)$ suit une loi $\mathcal{B}(n, q)$ sous $\mathbb{P}$ avec $q = (1 - p)$. Pour $i \leq n$, posons $U_{i,n}$ le temps de passage de x_i à x_{i+1} avec $U_{n,n}$ le temps de passage de $x_{N(n)}$ à x_n .

Dans leur démonstration, Bramson, Durrett et Schonmann établissent qu'il existe une constante b' telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le temps σ_k pour traverser une bande de mauvais sites de taille k depuis un bon site vérifie, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\sigma_k \geq k^2 i e^{b'k}) \leq e^{-i}.$$

Donc, il existe des constantes a et b positives telles que

$$\mathbb{E}[\sigma_k] = k^2 e^{b'k} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\frac{\sigma_k}{k^2 e^{b'k}} \geq i\right) \leq \frac{k^2 e^{b'k}}{1 + 1/e} \leq a e^{bk}.$$

Nous utilisons ce contrôle pour les $(U_{i,n})_{i \leq n}$. Les $(U_{i,n})_{i \leq n}$ sont i.i.d. (sous $\mathbb{P}$) et nous pouvons contrôler leurs moments. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \leq n$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_{i,n}] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[U_i \mathbf{1}_{x_{i+1} - (x_i + 1) = k}] + \mathbb{E}[U_i \mathbf{1}_{x_{i+1} = x_i + 1}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[U_i | x_{i+1} - (x_i + 1) = k] \mathbb{P}(x_{i+1} - (x_i + 1) = k) + (1 - p) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a e^{bk} (1 - p) p^k + (1 - p) = (1 - p) \left[\frac{a}{1 - p e^b} + 1 \right] < \infty. \end{aligned}$$

La quantité qui nous intéresse s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{t_n}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N(n)} U_{i,n} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{qn} U_{i,n} \right) + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=qn+1}^{N(n)} U_{i,n} \right) \mathbb{1}_{\{N(n) > qn\}} - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=N(n)+1}^{qn} U_{i,n} \right) \mathbb{1}_{\{N(n) < qn\}}. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers $q\mathbb{E}[U_1]$ par la loi des grands nombres. Par ailleurs, $\frac{N(n)}{n}$ converge $\mathbb{P}$ presque sûrement vers p et les deux derniers termes tendent donc presque sûrement vers 0. D'où, $\mathbb{P}$ -presque sûrement

$$\frac{t_n}{n} \rightarrow q\mathbb{E}[U_1] = \mathbb{E}\left[\frac{t_n}{n}\right].$$

Il est facile d'en déduire les fluctuations sous $\mathbb{P}$.

Plaçons-nous maintenant dans un environnement E fixé. Nous travaillons sous la probabilité *quenched* $\mathbb{P}_E$; en particulier, $N(n)$ n'est pas une variable aléatoire. Nous supposons à nouveau que 0 est un bon site.

Les $(U_{i,n})_{i \leq n}$ sont des variables aléatoires indépendantes mais non identiquement distribuées cette fois (car le temps de traversée d'une mauvaise bande située entre deux bons sites dépend par exemple de la longueur de cette bande donc de l'environnement dans lequel on se trouve).

Rappelons le théorème de Lindeberg avec les conditions de Lyapounov (cf. par exemple [GK11]) :

Théorème 3.1.5. *Soient $(X_{n,k})$ des variables aléatoires indépendantes centrées admettant un moment d'ordre 2 et $N(n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers tendant vers l'infini. Soit $\alpha > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{N(n)} X_{n,k}$. Si les variables admettent un moment d'ordre $2 + \alpha$ et satisfont*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Var } S_n)^{-(2+\alpha)} \sum_{k=1}^{N(n)} \mathbb{E}[|X_{n,k}|^{2+\alpha}] = 0,$$

alors $\frac{S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Utilisons ce théorème avec $X_{n,k} = U_{k,n} - \mathbb{E}_E[U_{k,n}]$ et $\alpha = 1$. On a $S_n = t_n - \sum_{k=1}^{N(n)} \mathbb{E}_E[U_{k,n}]$.

Pour vérifier la condition de Lyapounov, il faut s'intéresser aux moments d'ordre 2 et 3 des variables $U_{k,n}$.

Lemme 3.1.6. $\mathbb{E}_E[U_{i,n}^2] \leq a_2 e^{b_2 |x_{i+1} - x_i + 1|}$ et $\mathbb{E}_E[U_{i,n}^3] \leq a_3 e^{b_3 |x_{i+1} - x_i + 1|}$.

Démonstration. Nous réutilisons le contrôle de σ_k , le temps pour traverser une mauvaise bande de taille k en partant d'un bon site; on a, pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma_k \geq k^2 i e^{b'k}) &\leq e^{-i} \\ \mathbb{P}(\sigma_k^2 \geq k^4 i e^{2b'k}) &\leq e^{-\sqrt{i}}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}[\sigma_k^2] = k^4 e^{2b'k} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\frac{\sigma_k^2}{k^4 e^{2b'k}} \geq i\right) \leq a_2 e^{b_2 k},$$

car la série de terme général $e^{-\sqrt{i}}$ converge. Donc $\mathbb{E}_E[U_{i,n}^2] \leq a_2 e^{b_2 |x_{i+1} - x_i + 1|}$. De même pour $\mathbb{E}_E[U_{i,n}^3]$. $\square$

Lemme 3.1.7. *Nous avons les convergences $\mathbb{P}_E$ -presque sûres suivantes :*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N(n)} \mathbb{E}_E[X_{k,n}^2] \rightarrow c_2 \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N(n)} \mathbb{E}_E[X_{k,n}^3] \rightarrow c_3.$$

Démonstration. Dans l'espace de probabilité $(\mathcal{E}, \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathcal{F}})$ relatif à l'environnement, les variables aléatoires $V_i : E \rightarrow \mathbb{E}_E[X_{i,n}^2]$ sont i.i.d et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_i] &\leq \tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{E}_E[U_{i,n}^2]] \leq \tilde{\mathbb{E}}\left[a_2 e^{b_2 |x_{i+1} - (x_i + 1)|}\right] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} a_2 e^{b_2 k} \mathbb{P}(|x_{i+1} - (x_i + 1)| = k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} a_2 e^{b_2 k} (1-p)p^k < +\infty. \end{aligned}$$

Donc les variables aléatoires (V_i) vérifient une loi des grands nombres et pour presque tout environnement E :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_E[X_{i,n}^2] \rightarrow \mathbb{E}[V_1].$$

De même, nous considérons les variables aléatoires $W_i : E \rightarrow \mathbb{E}[X_{i,n}^3]$ qui sont i.i.d, telles que $\mathbb{E}[W_i] \leq \mathbb{E}[U_i^3 + cU_i] \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} a_4 e^{b_4 k} (1-p)p^k < +\infty$ et qui vérifient une loi des grands nombres. Donc, pour presque tout E :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_E[U_{i,n}^3] \rightarrow \mathbb{E}[W_1].$$

Par ailleurs, pour presque tout environnement, $\frac{N(n)}{n}$ converge vers $(1-p)$, et nous avons les convergences $\mathbb{P}_E$ -presque sûres suivantes :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N(n)} \mathbb{E}_E[X_{k,n}^2] \xrightarrow{ps} (1-p)\mathbb{E}[V_1] = c_2 \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N(n)} \mathbb{E}_E[X_{k,n}^3] \xrightarrow{ps} (1-p)\mathbb{E}[W_1] = c_3. \quad \square$$

Revenons à la quantité qui nous intéresse :

$$\text{Var}_E S_n = \text{Var}_E t_n = \text{Var}_E \left(\sum_{i=1}^{N(n)} X_{i,n} \right) = \sum_{i=1}^{N(n)} \text{Var}_E X_{i,n} = \sum_{i=1}^{N(n)} \mathbb{E}_E[X_{i,n}^2].$$

D'où :

$$(\text{Var } S_n)^{-3} \sum_{k=1}^{N(n)} \mathbb{E}[|X_{n,k}|^3] = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N(n)} \mathbb{E}_E[X_{i,n}^2] \right)^{-3} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N(n)} \mathbb{E}_E[X_{k,n}^3] \right) = \frac{c_2^{-3} c_3}{n^2} \rightarrow 0.$$

La condition de Lyapounov est vérifiée et on a bien, pour presque tout environnement E ,

$$\frac{t_n - \sum_{k=1}^{N(n)} \mathbb{E}_E[U_{k,n}]}{\sqrt{c_2 n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}(0, 1)$$

où la convergence a lieu en loi sous $\mathbb{P}_E$. □

Remarque. Cette construction n'est valable que dans le cas $\delta = 0$ car dès qu'on a atteint un bon site on n'a jamais besoin de revenir en arrière. Dans le cas des hypothèses (BDS2), nous aimerions savoir si une zone de croissance linéaire est conservée et quelles sont les fluctuations autour de cette convergence.

3.1.4 En dimension 2

Bramson, Durrett et Schonmann s'intéressent ensuite au cas où $\Delta = \infty$ en dimension 2, i.e. les sites défavorables sont des trous inaccessibles. Le développement du processus s'effectue alors sur un amas de percolation par sites. Dans ce cas, ils montrent

Théorème 3.1.8 (Bramson-Durrett-Schonmann, 1991). *Soient $d = 2$, $1 - p > p_c(\text{site})$, $\Delta = \infty$ et $\delta < \delta_c(\mathbb{Z})$. Alors, le processus croît linéairement dans le sens où il existe une constante $b > 0$ telle que sur Ω_∞ :*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{d(\xi_t)}{t} \geq b \text{ presque sûrement,}$$

où $d(\xi_t)$ est le diamètre de ξ_t , $p_c(\text{site})$ le paramètre critique de la percolation par sites sur $\mathbb{Z}^2$ et $\delta_c(\mathbb{Z})$ celui du processus de contact standard sur $\mathbb{Z}$.

À la suite de ce résultat, les auteurs conjecturent un théorème de forme asymptotique sur toute la zone critique. Il y a deux difficultés à cette conjecture :

1. la première est d'étendre le résultat de croissance linéaire à toute la zone surcritique ; pour cela il faut éventuellement établir des résultats de type Bezuidenhout-Grimmett en environnement aléatoire ;
2. la deuxième est de passer de la croissance d'ordre linéaire à un théorème de forme asymptotique ; pour cela il faut étendre les méthodes sous-additives de Kingman à des processus non permanents en environnement aléatoire ; on peut se reporter à [GM12a] pour de tels résultats.

3.1.5 Dimension $d > 1$

Bramson, Durrett et Schonmann conjecturent que le théorème 3.1.8 reste valable en dimension $d > 1$ quand $\Delta < \infty$ et $\delta < \delta_c$ (avec le paramètre δ_c à préciser), sans condition sur le paramètre p . L'intuition est qu'en dimension $d > 1$, le processus n'est pas obligé de traverser les grandes régions de sites défavorables et peut les contourner. Par contre, montrer la croissance d'ordre linéaire n'est de nouveau pas facile ; il faut éventuellement s'inspirer des méthodes de Bezuidenhout et Grimmett.

Andjel et Klein ont par ailleurs travaillé sur des conditions de survie et d'extinction en dimension quelconque. Nous énonçons une version simplifiée de leurs résultats dans le cas d'un environnement aléatoire sur les arêtes, indépendant et identiquement distribué suivant une variable aléatoire L :

- Andjel [And92] montre que, pour tous $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, il existe un processus qui survit et vérifie $\mathbb{E}[(\log(1 + L))^{d-\varepsilon}] < \delta$ grâce à des mécanismes de renormalisation ;
- Klein [Kle94] montre que tout processus tel que la quantité $\mathbb{E}[(\log(1 + L))^{f(d)}]$ est assez petite (avec $f(d) \approx 2d^2$) s'éteint grâce à des techniques analytiques ;
- cela laisse une zone d'ombre lorsque l'exposant caractéristique est entre d et $f(d)$.

3.1.6 Un environnement favorable à la survie

Nous avons vu que des conditions de survie ont été trouvées dans le cas d'environnements aléatoires assez généraux mais que l'existence d'une forme asymptotique s'avérait difficile. En 2012, Garet et Marchand [GM12a] contournent le problème en introduisant un “bon environnement aléatoire” où la survie est garantie (au sens où elle est de probabilité strictement positive) :

(GM) $\Lambda = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^{\mathbb{E}^d}$ avec $\lambda_{\min} > \lambda_c$, muni d'une loi ν stationnaire.

Les contrôles de croissance peuvent alors être obtenus par des processus de redémarrage sans avoir à effectuer une construction de type Bezuidenhout-Grimmett :

Théorème 3.1.9 (Garet-Marchand, 2012). *Il existe C_1, C_2, M, c, ρ tels que pour tout $\lambda \in \Lambda$, tout $y \in \mathbb{Z}^d$ et tout $t \geq 0$:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(\tau = +\infty) &\geq \rho, \\ \mathbb{P}_\lambda(H_t \not\subset B_{Mt}) &\leq C_1 \exp(-C_2 t), \\ \mathbb{P}_\lambda(t < \tau < +\infty) &\leq C_1 \exp(-C_2 t), \\ \mathbb{P}_\lambda\left(t(y) \geq \frac{\|y\|}{c} + t, \tau = +\infty\right) &\leq C_1 \exp(-C_2 t), \end{aligned}$$

où le processus est issu de 0, τ est son temps d'extinction, $t(y)$ est son temps d'atteinte du site y , $H_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t\}$ et B_{Mt} est la boule euclidienne de rayon Mt .

La difficulté suivante est de trouver une transformation ergodique pour la probabilité *annealed* conditionnée à survivre, d'identifier une quantité (qu'ils appelleront *temps d'atteinte essentiel*) vérifiant les bonnes propriétés de presque sous-additivité, puis d'établir un théorème ergodique presque sous-additif, inspiré par celui de Kingman (*cf.* théorème A.1.8), valable dans le cadre d'un environnement aléatoire. Ils obtiennent finalement le théorème de forme asymptotique suivant :

Théorème 3.1.10 (Garet-Marchand, 2012). *Il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\cdot | \tau^0 = \infty)$ presque sûrement, pour tout t suffisamment grand,*

$$(1 - \varepsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)B_\mu,$$

où $\tilde{H}_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t\} + [0, 1]^d$ et B_μ la boule unité de μ .

Nous ne détaillons pas ces techniques ici mais nous nous en inspirerons dans la partie III pour montrer un théorème de forme asymptotique général pour des modèles de croissance.

Garet et Marchand montrent aussi des résultats de grandes déviations pour le processus de contact en environnement aléatoire [GM14].

3.2 Environnement dynamique

Certaines questions restant ouvertes en environnement aléatoire général (à cause de la concurrence entre sites/arêtes favorables à la survie et sites/arêtes défavorables à la survie), les probabilistes introduisent la notion d'environnement *dynamique*, ou bien environnement évoluant aléatoirement. Le fait que l'environnement évolue aléatoirement au cours du temps va empêcher les blocages du processus dus à l'environnement et nous retrouverons les comportements du processus classique.

3.2.1 Un modèle en temps continu

En s'appuyant sur un modèle de processus de Poisson dont les taux suivent une chaîne de Markov cachée [FS82], Broman [Bro07] introduit le processus de contact en environnement évoluant aléatoirement en fonction du temps (CPREE pour *Contact Process in Randomly Evolving Environment*). Pour cela, il se donne :

- un processus *background* (B_t) qui sera l'environnement évoluant comme un produit indépendant de chaînes de Markov et que l'on interprétera de la façon suivante : pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $t \geq 0$, $B_t(x) = 0$ est un type défavorable à la survie tandis que $B_t(x) = 1$ est un type favorable à la survie ;
- un processus de contact (ξ_t) , défini conditionnellement à (B_t) , qui représente le fait que les particules sont vivantes ou mortes et qui choisit ses taux de mort selon (B_t) .

Nous travaillons donc avec un processus (B_t, ξ_t) à valeurs dans $(\{0, 1\} \times \{0, 1\})^{\mathbb{Z}^d}$. À un temps fixé, en un site fixé, la valeur du processus est un couple (type, état). Plus précisément, on se donne quatre paramètres $\delta_0, \delta_1, p, \gamma$ et on observe, pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, les dynamiques suivantes en x :

	transition en x	taux
naissances	$(0, 0) \rightarrow (0, 1)$	$\sum_{x \sim y} \xi_t(y)$
indépendantes du type	$(1, 0) \rightarrow (1, 1)$	$\sum_{x \sim y} \xi_t(y)$
morts	$(0, 1) \rightarrow (0, 0)$	δ_0
dépendants du type	$(1, 1) \rightarrow (1, 0)$	δ_1
évolution du type	$(0, 0) \rightarrow (1, 0)$	γp
	$(0, 1) \rightarrow (1, 1)$	γp
	$(1, 0) \rightarrow (0, 0)$	$\gamma(1 - p)$
	$(1, 1) \rightarrow (0, 1)$	$\gamma(1 - p)$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $(B_t(x))_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu à 2 états, indépendante du reste, de matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} -\gamma p & \gamma p \\ -\gamma(1-p) & \gamma(1-p) \end{pmatrix}.$$

Les rôles des paramètres sont donc les suivants :

- δ_0 est le taux de mort des sites défavorables,
- δ_1 est le taux de mort des sites favorables,
- p est la proportion de sites favorables initialement,
- γp le taux de passage de favorable à défavorable, et $\gamma(1-p)$ le taux de passage inverse.

On prend donc $\delta_1 < \delta_0$. Attention, les taux δ sont maintenant des taux de mort (contrairement aux notations de la section précédente).

Remarque. *Le type d'un site influe sur son taux de mort mais pas sur sa capacité à donner naissance. Lorsqu'un site naît, son type est déterminé aléatoirement et ne dépend pas de celui de son parent.*

Pour utiliser le formalisme du chapitre 1, nous considérons $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ et, pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\xi \in S^{\mathbb{Z}^d}$, les taux de transition sont

$$c(x, \xi, s) = \begin{cases} \delta_0 \mathbb{1}_{\{\xi(x)=(0,1)\}} + \gamma(1-p) \mathbb{1}_{\{\xi(x)=(1,0)\}} & \text{si } s = (0, 0), \\ \delta_1 \mathbb{1}_{\{\xi(x)=(1,1)\}} + \gamma p \mathbb{1}_{\{\xi(x)=(0,0)\}} & \text{si } s = (1, 0), \\ N(x, \xi) \mathbb{1}_{\{\xi(x)=(0,0)\}} + \gamma(1-p) \mathbb{1}_{\{\xi(x)=(1,1)\}} & \text{si } s = (0, 1), \\ N(x, \xi) \mathbb{1}_{\{\xi(x)=(1,0)\}} + \gamma p \mathbb{1}_{\{\xi(x)=(0,1)\}} & \text{si } s = (1, 1), \end{cases}$$

où $N(x, \xi)$ est le nombre de voisins de type $(0, 1)$ ou $(1, 1)$ de x dans ξ .

Soit $A \in \mathbb{Z}^d$. Pour les conditions initiales $\xi_0 = A$ et $B_0 \rightsquigarrow \pi_p$ (loi de Bernoulli de paramètre p), on note $\Phi(\delta_0, \delta_1, \gamma, p, A)$ la loi du processus (ξ_t) et $\Phi(\delta, \lambda, A)$ la loi du processus de contact standard de taux de mort δ , de taux de naissance λ et de condition initiale A . Broman commence par encadrer son processus par des processus de contact standards :

Proposition 3.2.1 (Broman, 2007). *Soit $A \in \mathbb{Z}^d$ fini.*

1. *Pour tout $\delta < \min(\delta_1, \delta_0 + \gamma)$, il existe $p = p(\delta, \delta_0, \delta_1, \gamma) \in (0, 1)$ assez grand tel que*

$$\Phi(\delta_0, \delta_1, \gamma, p, A) \ll_{sto} \Phi(\delta, 1, A).$$

De plus, pour tout $\delta > \min(\delta_1, \delta_0 + \gamma)$, il n'existe pas de $p \in (0, 1)$ tel que la domination soit vérifiée.

2. *Si $\gamma \geq 2^d$ et $B_0(A) \equiv 0$, alors, pour tous $\delta > \delta_0$ et $\lambda < 1$, il existe $p = p(\delta, \lambda, \delta_0, \delta_1, \gamma) \in (0, 1)$ assez petit tel que*

$$\Phi(\delta, \lambda, A) \ll_{sto} \Phi(\delta_0, \delta_1, \gamma, p, A).$$

Grâce au résultat précédent et à des couplages, Broman montre que si $\delta_1 < \delta_c < \delta_0$ et $\gamma > \max(2d, \delta_c - \delta_1)$ alors il existe $p_c \in (0, 1)$ tel que pour $p < p_c$ le processus meurt et pour $p > p_c$ le processus survit.

Remarque. Broman travaille en fait dans le cadre plus général de graphes quelconques où il n'y a pas forcément égalité des paramètres critiques de survie faible δ_{c1} et forte δ_{c2} (où le processus survit et est permanent cf. définition 2.1.12). Il établit alors plusieurs régimes (en fonction de la position de δ_0 et δ_1 par rapport à δ_{c1} et δ_{c2}) dans lesquels il y a extinction, survie faible ou survie forte.

Par contre, il laisse ouverte la question de la dépendance de p_c par rapport à la configuration initiale, c'est-à-dire la distribution initiale de (B_t) et l'ensemble initial de (ξ_t) .

En 2008, Steif et Warfheimer [SW08] et Remenik [Rem08] poursuivent indépendamment l'étude de ce modèle. On pourra se reporter à la construction graphique de Steif et Warfheimer [SW08]. La notation simplifiée $(\xi_t^{\mu, A})$ désigne le processus issu de $\xi_0 = A$ et B_0 suivant μ , et en particulier on note $\xi_t^{B, A}$ pour $B_0 = B$. De la construction graphique, ils déduisent l'attractivité du processus : soient μ, ν deux mesures sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ et A, B deux ensembles de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ alors

$$(\mu \ll_{sto} \nu \text{ et } A \subset B) \Rightarrow \forall t > 0, (\xi_t^{\mu, A}) \ll_{sto} (\xi_t^{\nu, B}). \quad (3.2.1)$$

Remarque. Les relations d'ordre utilisées ici sont celles introduites à la section 1.4. Elles ne sont que partielles mais l'évolution du processus est telle que deux configurations initiales comparables donnent lieu à des processus comparables à tout temps.

Ils montrent ensuite que le paramètre critique, défini pour $\gamma, \delta_0, \delta_1$ strictement positifs, $q \in [0, 1]$ et $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)$ comme la quantité suivante :

$$p_c(q, A) = \inf \left\{ p : \mathbb{P}_p \left(\forall t > 0, \xi_t^{\pi_q, A} \neq \emptyset \right) > 0 \right\},$$

ne dépend pas des conditions initiales, c'est-à-dire ni de q ni de A . Les auteurs travaillent ici avec deux paramètres éventuellement distincts p et q pour l'évolution et la condition initiale tandis que Broman prenait $p = q$ de façon à ce que la condition initiale soit réversible pour le processus de changement de type. Si $\mathbb{P}_p[\forall t > 0, \xi_t^{\pi_q, A} \neq \emptyset] > 0$, on dira que (ξ_t) survit à p , sinon on dira que le processus s'éteint.

Idée de preuve. Grâce aux propriétés d'invariance par translation, attractivité et additivité, une grande partie de la preuve est immédiate. Le travail se situe dans le fait de montrer que la distribution des types de départ n'influence pas la survie. Pour cela, ils introduisent, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ la quantité

$$\varphi_t(x) = \mathbb{1}_{\{B_t^\emptyset = B_t^x\}}.$$

On a $\mathbb{P}_p(\varphi_t(x) = 1) = 1 - \exp(-\gamma t)$ et, en introduisant $\tilde{C}_t$ le processus de Richardson associé à (ξ_t) , les auteurs montrent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(\forall t \geq n, \tilde{C}_t \subseteq \varphi_t) = 1.$$

Donc les types deviennent égaux plus rapidement que la croissance du processus. Ils obtiennent ensuite le résultat souhaité. $\square$

La même méthode montre que la survie forte ne dépend pas de la condition initiale des types, *i.e.*, pour $p \in (0, 1)$,

$$\mathbb{P}_p(0 \in \xi_t^{\emptyset, \{0\}} \text{ infiniment souvent}) > 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}_p(0 \in \xi_t^{\mathbb{Z}^d, \{0\}} \text{ infiniment souvent}) > 0.$$

Par ailleurs, l'attractivité du processus assure l'existence de la plus grande mesure invariante $\bar{\nu}_p$ puis, grâce à l'auto-dualité du CPREE lisible sur la représentation graphique, ils déduisent que la survie est équivalente à $\bar{\nu}_p \neq \pi_p \times \delta_\emptyset$.

Enfin, ils effectuent une construction similaire à celle de Bezuidenhout et Grimmett pour montrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.2 (Steif-Warfheimer, 2008). *Si (ξ_t) survit à $p > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que le processus survit à $p - \delta$. En particulier, si $p_c \in (0, 1]$, alors le processus de contact en environnement évoluant aléatoirement s'éteint au point critique.*

Au delà du résultat annoncé par ce théorème, c'est la construction sous-jacente fondamentale qui est importante. Nous effectuerons une construction similaire pour le processus de contact avec vieillissement dans le chapitre 5 et nous démontrerons ensuite des contrôles de sa croissance dans le chapitre 6. Le même argument de redémarrage que celui utilisé au chapitre 6 permet de démontrer les contrôles de croissance suivants pour le processus de contact en environnement évoluant aléatoirement (nous ne ferons pas la démonstration dans ce cas là) :

Théorème 3.2.3. *Si (ξ_t) survit à $p > 0$, alors il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{Z}^d$:*

$$\mathbb{P}_p(t < \tau < \infty) \leq A \exp(-Bt). \quad (3.2.2)$$

$$\mathbb{P}_p(t(x) \geq C\|x\| + t, \tau = \infty) \leq A \exp(-Bt), \quad (3.2.3)$$

où $\tau = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^{\emptyset, \{0\}} = \emptyset\}$ et $t(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in \xi_t^{\emptyset, \{0\}}\}$.

Il est possible de définir τ et $t(x)$ pour des conditions initiales plus générales et d'en déduire les contrôles associés. Ces contrôles nous permettront d'établir un théorème de forme asymptotique pour ce modèle au chapitre 8 (*cf.* théorème 8.3.2).

Steif et Warfheimer concluent leur article en conjecturant un théorème de convergence complète pour le modèle : pour tous $p \in [0, 1]$ et $A, B \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$

$$\xi_t^{B,A} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \alpha_p(A, B) \bar{\nu}_p + (1 - \alpha_p(A, B)) \pi_p \times \delta_\emptyset$$

avec $\alpha_p(A, B) = \mathbb{P}_p(\forall t > 0, \xi_t^{B,A} \neq \emptyset)$.

Parallèlement et indépendamment, Daniel Remenik [Rem08] étudie le cas particulier de ce modèle où $\delta_0 = \infty$ et où la paramétrisation du modèle est faite par β sur les taux de naissance. Il travaille avec l'espace d'états $\{-1, 0, 1\}$ où -1 est un état *bloquant* (dans lequel le processus de contact ne peut se développer). L'entrée et la sortie d'un état bloquant évoluent indépendamment du reste du processus. Nous pouvons donc réécrire l'évolution du processus selon la même modélisation que Steif et Warfheimer avec un processus (B_t) d'environnement représentant le fait qu'un site soit bloquant ou non, et un processus (ξ_t) qui, conditionnellement à (B_t) , se développe comme un processus de contact. On se donne des paramètres (β, α, δ) et les dynamiques sont les suivantes :

transition	taux
$(0, 0) \rightarrow (0, 1)$	0
$(1, 0) \rightarrow (1, 1)$	$\beta \sum_{x \sim y} \xi_t(y)$
$(0, 1) \rightarrow (0, 0)$	∞
$(1, 1) \rightarrow (1, 0)$	1
$(0, 0) \rightarrow (1, 0)$	$\alpha \delta$
$(0, 1) \rightarrow (1, 1)$	0
$(1, 0) \rightarrow (0, 0)$	α
$(1, 1) \rightarrow (0, 1)$	α

Les deux modèles ne sont pas équivalents ; pour pouvoir interpréter les résultats de modèle de Remenik par rapport au précédent modèle, nous pouvons néanmoins poser $\beta = \frac{1}{\delta_1}$, $\delta = \frac{p}{1-p}$ et $\alpha = \gamma(1-p)$.

Remenik utilise lui aussi la construction graphique du processus pour montrer son attractivité et son auto-dualité. Il conclut ainsi à l'équivalence des différentes notions de survie (convergence de mesure et processus jamais nul). Il établit des bornes sur les paramètres critiques puis fait à son tour une construction de blocs de type Bezuidenhout-Grimmett pour montrer un théorème de convergence complète. Il en déduit aussi le fait que le processus s'éteint aux points critiques (en δ_1 et en p). Ses résultats s'appuient fortement sur la dualité.

3.2.2 Un modèle en temps discret

Nous avons déjà évoqué le fait que le processus de contact avait son pendant discret : la percolation orientée. Garet et Marchand [GM12b] introduisent un modèle de croissance de population dans un environnement dynamique en temps discret qui peut aussi être vu comme une percolation orientée dépendante. Ils considèrent une population constituée de bactéries fertiles (de type 1), qui donne naissance de façon surcritique, avec laquelle ils font interagir une population de bactéries ralenties (de type 2) qui immigreront, se propagent de façon sous-critique, et empêchent le développement des bactéries fertiles. Le système sera décrit par une chaîne de Markov à temps discret et à valeurs dans $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^d}$. Les transitions entre les états se déroulent en deux étapes :

1. entre le temps n et le temps $n + \frac{1}{2}$, les particules colonisent leurs voisins avec probabilité p si elles sont de type 1 et q si elles sont de type 2 (la particule naissante est du même type que son parent) ;
2. entre $n + \frac{1}{2}$ et $n + 1$ il y a immigration de particules du type 2 avec probabilité α ;
3. c'est toujours la particule 2 qui l'emporte : si un même site reçoit deux naissances (de type différents) pendant la première phase, ou bien si une particule de type 2 immigrer pendant la deuxième phase sur un site où une particule de type 1 est déjà présente, c'est la particule de type 2 qui l'emporte dans les deux cas.

Remarque. Comme dans tous les modèles évoqués jusqu'à maintenant, il y a au plus une particule par site.

Nous avons dit que les particules de type 1 étaient fertiles tandis que les particules de type 2 étaient ralenties ; donc, les paramètres sont choisis de la façon suivante :

$$p > \vec{p}_c(d+1) > q,$$

où $\vec{p}_c(d+1)$ est le paramètre critique de la percolation orientée sur $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$. Le but est de savoir comment évolue le type 1 : survit-il malgré la gêne apportée par les particules de type 2 ? Si oui, comment croît-il ?

Pour $q = 0$ et $\alpha = 0$, on retrouve une percolation orientée indépendante et lorsqu'elle survit, sa croissance est linéaire (le résultat a été prouvé pour le processus de contact par Bezuidenhout-Grimmett [BG90] et Durrett [Dur91], comme nous l'avons évoqué au chapitre 2, et peut être facilement adapté à la percolation orientée indépendante surcritique).

Garet et Marchand codent ce processus grâce à l'ensemble $\tilde{\Omega} = \{0, 1\}^{\vec{\mathbb{E}}^d} \times \{0, 1\}^{\vec{\mathbb{E}}^d} \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. La première coordonnée code la naissance depuis une particule de type 1, la deuxième depuis une particule de type 2 et la troisième l'immigration d'une particule de type 2. L'espace des trajectoires est donc $\Omega = \tilde{\Omega}^{\mathbb{N}^*}$, muni de la topologie borélienne produit, sur lequel on considère la probabilité $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{p,q,\alpha} = \nu^{\otimes \mathbb{N}^*}$, où

$$\nu = \nu_{p,q,\alpha} = \mathcal{B}(p)^{\otimes \vec{\mathbb{E}}^d} \otimes \mathcal{B}(q)^{\otimes \vec{\mathbb{E}}^d} \otimes \mathcal{B}(\alpha)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$$

et où $\mathcal{B}(p)$ représente la loi de Bernoulli de paramètre p . Pour une configuration initiale $x \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^d}$, la chaîne de Markov $(\eta_n^x)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^d}$ est définie par

$$\eta_0^x = x \text{ et } \eta_{n+1}^x = f(\eta_n^x, \omega_{n+1})$$

avec $f : \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^d} \times \tilde{\Omega} \rightarrow \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}^d}$ définie comme suit :

$$f(x, (\omega_1^e)_{e \in \vec{\mathbb{E}}^d}, (\omega_2^e)_{e \in \vec{\mathbb{E}}^d}, (\omega_3^k)_{k \in \mathbb{Z}^d}) = \left(\max \left\{ \begin{array}{l} 2\omega_3^k \\ 2 \max(\omega_2^{(i,k)} : \|i - k\|_1 \leq 1, x_i = 2) \\ \max(\omega_1^{(i,k)} : \|i - k\|_1 \leq 1, x_i = 1) \end{array} \right\} \right)_{k \in \mathbb{Z}^d}.$$

Cette fonctionnelle f produit bien la dynamique souhaitée. L'évolution du type 2 n'est pas influencée par la présence du type 1, c'est pourquoi nous considérons ces particules comme un environnement ; son évolution markovienne lui vaut la qualification de dynamique.

Pour une configuration initiale plus générale contenant un ensemble E_1 de particules de type 1 et un ensemble E_2 de particules de type 2, le processus est noté $\eta_n^{E_1, E_2}$; l'ensemble des sites occupés par des particules de type 1 (respectivement 2) au temps n est noté $\eta_{1,n}^{E_1, E_2}$ (respectivement $\eta_{2,n}^{E_1, E_2}$). Nous nous intéressons plus particulièrement à l'évolution de $\eta_{1,n}^{\{0\}, \emptyset}$ et nous introduisons donc, pour tous $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ et tout $y \in \mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} \tau_1^{E_1, E_2} &= \inf\{n \geq 0 : \eta_{1,n}^{E_1, E_2} = \emptyset\}, \\ t_1^{E_1, E_2}(y) &= \inf\{n \geq 0 : y \in \eta_{1,n}^{E_1, E_2}\}. \end{aligned}$$

Comme l'ont fait Steif et Warfheimer pour le processus de contact en environnement dynamique, Garet et Marchand commencent par montrer que la transition de phase ne dépend pas de la configuration initiale. Plus précisément, ils montrent le résultat suivant :

Théorème 3.2.4 (Garet-Marchand, 2012). *Pour tout $p > \vec{p}_c^{alt}(d+1)$, tout $q < \vec{p}_c^{alt}(d+1)$ et tout $\alpha \in [0, 1]$,*

$$\mathbb{P}_{p,q,\alpha} \left(\tau_1^{0, \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} = +\infty \right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}_{p,q,\alpha} \left(\tau_1^{0, \emptyset} = +\infty \right) > 0.$$

Ce résultat permet alors de définir $\alpha_c(p, q) = \sup\{\alpha \geq 0 : \mathbb{P}_{p,q,\alpha}(\tau_1^{0, \emptyset} = +\infty) > 0\}$. Les auteurs montrent ensuite les contrôles suivants :

Théorème 3.2.5 (Garet-Marchand, 2012). *Pour tout $p > \vec{p}_c^{alt}(d+1)$ et tout $q < \vec{p}_c^{alt}(d+1)$, on a*

$$0 < \alpha_c(p, q) < 1.$$

De plus, pour tout $\alpha < \alpha_c(p, q)$, il existe des constantes positives A, B, C telles que pour tous $E \subset \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ et $t > 0$,

$$\mathbb{P}_{p,q,\alpha}(\tau_1^{0,E} = +\infty) > 0, \quad (3.2.4)$$

$$\mathbb{P}_{p,q,\alpha}(\tau_1^{0,E} = +\infty, t_1^{0,E}(x) \geq C\|x\|_1 + t) \leq A \exp(-Bt), \quad (3.2.5)$$

$$\mathbb{P}_{p,q,\alpha}(t < \tau_1^{0,E} < +\infty) \leq A \exp(-Bt). \quad (3.2.6)$$

Pour démontrer ce théorème, Garet et Marchand construisent un bon événement de bloc et couplent leur processus à une percolation dépendante. Ils obtiennent les résultats souhaités pour cette percolation grâce à des méthodes très générales de couplage avec une percolation indépendante et transfèrent les estimées sur leur processus par redémarrage.

Ils conjecturent un théorème de forme asymptotique pour ce modèle (illustré par la figure 3.2) que nous montrerons au chapitre 8 (*cf.* théorème 8.3.3).

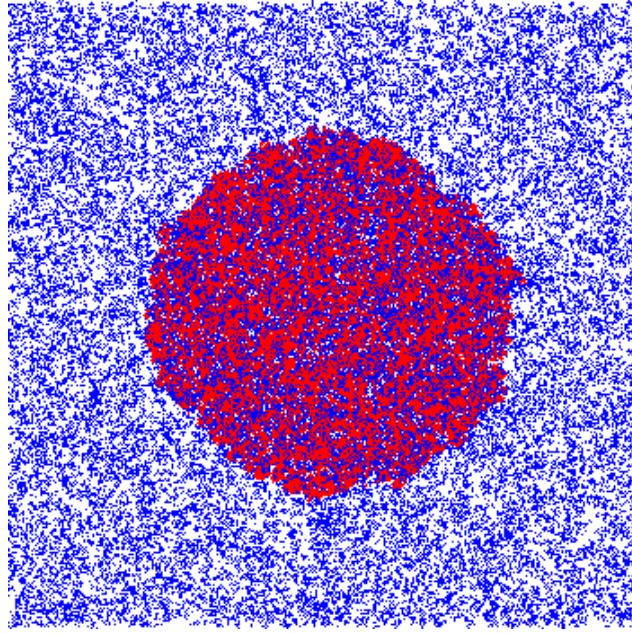


FIGURE 3.2 – Simulation d'une percolation orientée avec immigration hostile (O.Garet).

3.3 Processus à mémoire

Nous quittons l'univers des environnements aléatoires et nous cherchons maintenant à donner à la particule une certaine mémoire. Comme les processus de contact sont avant tout markoviens, l'état d'une particule ne peut en théorie pas dépendre de son passé à long terme, sauf si on arrive à coder la mémoire dans cet état. Dans cette idée, Grassberger, Chaté et Rousseau [GCR97] d'une part, et Durrett et Schinazi [DS00] d'autre part introduisent un modèle où la particule se souvient du fait qu'elle ait éventuellement déjà été vivante/infectée antérieurement (ce qui n'est pas le cas dans les modèles précédents). Krone [Kro99], lui, présente un modèle où la particule se souvient en quelque sorte de l'ancienneté de son infection : elle a un type *enfant* dans lequel elle ne peut pas donner naissance et un type *adulte* dans lequel elle a la capacité de donner naissance à ses particules voisines. Nous généraliserons cette idée de vieillissement des particules dans le chapitre 4.

3.3.1 Modèle d'immunisation ou sensibilisation

§ 1. En dimension 1. Dans [DS00], Durrett et Schinazi introduisent un processus de contact en dimension 1 où les particules extrémales (ou externes), *i.e.* la plus à droite et la plus à gauche, donnent naissance avec un taux λ_e tandis que les autres particules (internes) donnent naissance avec un taux λ_i . De par la géométrie de $\mathbb{Z}$, les particules externes n'ont jamais été infectées tandis que les particules internes l'ont toutes été. Les morts se produisent toujours à taux 1. Leur but est de comprendre le rôle du taux de naissance des particules externes. Ils appellent leur processus un processus de contact modifié aux bords (nous utiliserons l'abréviation BMCP *Boundary Modified Contact Process*).

Nous résumons les résultats de Durrett et Schinazi sur la transition de phase par le dessin de la figure 3.3. Les zones foncées sont celles dont on connaissait déjà le comportement par simple

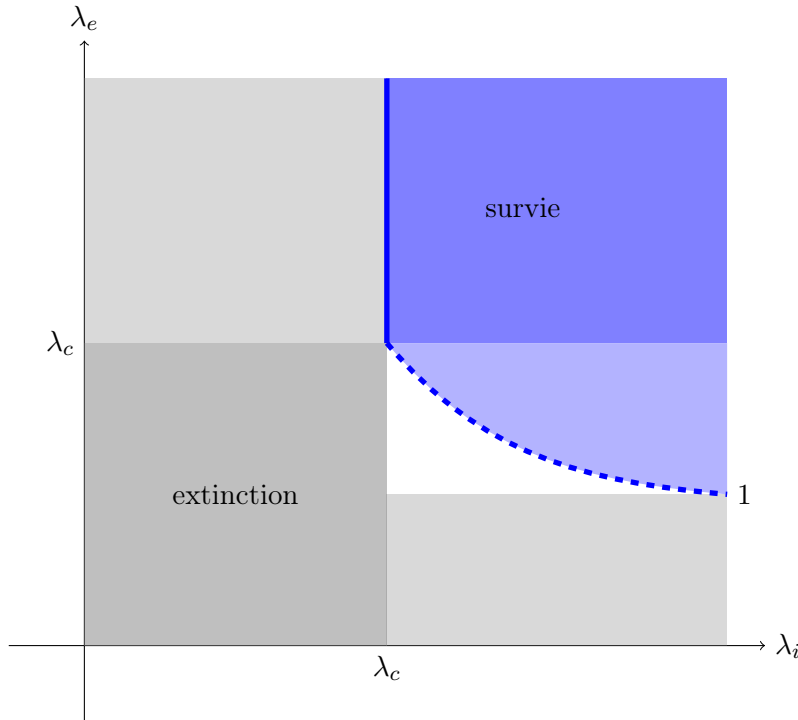


FIGURE 3.3 – Les phases du processus de contact aux bords modifiés en dimension 1.

comparaison au processus standard. Les zones claires sont les zones d'extinction (grise) et de survie (bleue) démontrée par les auteurs.

Il est important de voir que pour $\lambda_i < \lambda_c$, le processus de contact modifié aux bords meurt pour tout $\lambda_e > 0$; autrement dit, ce sont bien les taux internes les plus importants. Si ceux-ci sont suffisamment grands, on peut se permettre un peu de lest dans les taux externes.

D'autres résultats sur la croissance en dimension 1 ont été obtenus : étant donné qu'ils s'appuient sur des constructions faites en dimension supérieure nous les énoncerons plus loin.

§ 2. En dimension $d \geq 2$. Pour généraliser l'idée de la dimension 1 à la dimension d où il n'y a plus de notion de particule la plus à droite, Durrett et Schinazi introduisent un nouvel espace d'états $S = \{-1, 0, 1\}$ où l'état -1 correspond à une particule qui n'a encore jamais été vivante, l'état 0 correspond à une particule qui est morte mais qui a déjà été vivante et l'état 1 à une particule vivante. Le taux de naissance dépendra de son nombre de voisins vivants et

du fait qu'elle ait déjà été vivante ou non. Du point de vue d'une interprétation infectieuse, la première infection crée une sensibilisation ou au contraire une immunisation sur la particule qui influencera ses prochaines infections. On se donne deux paramètres de naissance λ_e et λ_i .

Nous noterons (η_t) le processus et nous utiliserons le formalisme du chapitre 1 pour décrire ses taux de transition. Pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$, les taux de transition sont les suivants :

$$c(x, \eta) = \begin{cases} \lambda_e N_1(x, \eta) & \text{si } \eta(x) = -1, \\ \lambda_i N_1(x, \eta) & \text{si } \eta(x) = 0, \\ 1 & \text{si } \eta(x) = 1, \end{cases}$$

où $N_1(x, \eta)$ est le nombre de voisins de type 1 de x dans η . Même si le processus possède 3 états, seuls deux sont accessibles ce qui nous permet d'utiliser les taux simplifiés $c(x, \eta)$. On pourra se reporter à l'article de Stacey [Sta03] pour une représentation graphique.

Nous cherchons maintenant à comprendre l'influence des taux de naissance des particules nouvellement infectées. Nous résumons à nouveau les résultats par la figure 3.4.

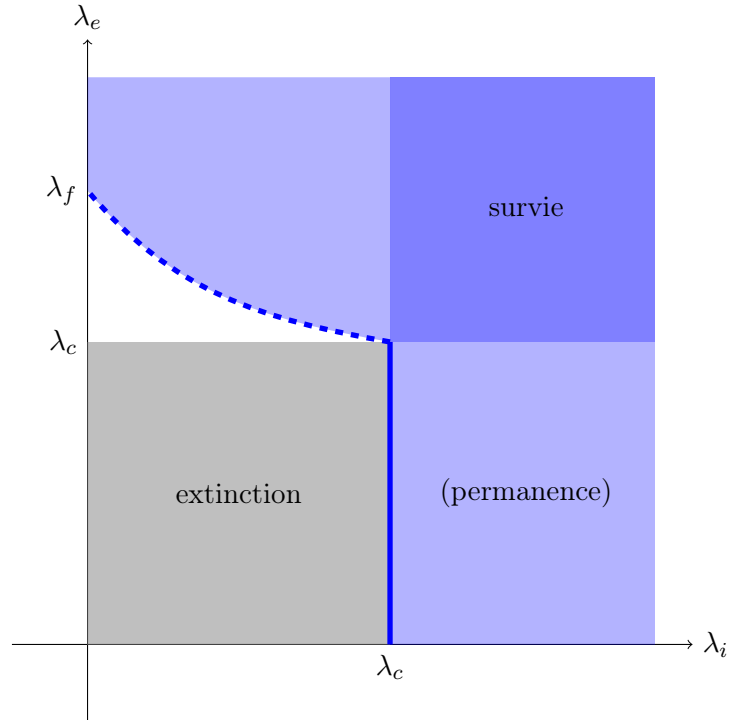


FIGURE 3.4 – Les phases du processus de contact à 3 états en dimension $d \geq 2$.

La principale difficulté se situe dans le cadran inférieur droit : Durrett et Schinazi montrent que, dans cette zone ($\lambda_i > \lambda_c$), le processus est permanent (donc en particulier il survit). Pour cela, ils introduisent la percolation orientée 1-dépendante à 3 états très surcritique, modèle analogue discret, et montrent le résultat selon les étapes suivantes :

- construction d'un bon événement de bloc pour la percolation orientée 1-dépendante à 3 états (se référant à [Dur95]),
- preuve du résultat pour la percolation orientée 1-dépendante à 3 états très surcritique par comparaison à une percolation orientée 1-dépendante classique en s'appuyant sur un théorème de [Dur95],

- preuve du résultat pour le processus de contact à 3 états en le comparant à la percolation orientée 1-dépendante à 3 états très surcritique en utilisant les résultats de Bezuidenhout et Grimmett [BG90], sous leur forme donnée dans [Dur91].

Stacey [Sta03] montre que dans le cadran supérieur gauche où il y a survie, le processus n'est pas permanent.

Remarque. *En dimension 1, le processus se comporte différemment : pour $\lambda_i < \lambda_c$, le processus de contact modifié aux bords meurt pour tout $\lambda_e > 0$.*

Nous pensons que le travail de renormalisation effectué par Durrett et Schinazi permet d'obtenir les mêmes estimées que pour le processus de contact grâce aux techniques de redémarrage (détaillées au chapitre 6 pour le processus de contact avec vieillissement). Plus précisément, nous pensons qu'il est possible d'obtenir les contrôles suivants : si $\lambda_i > \max(\lambda_c, \lambda_e)$ alors il existe $C_1, C_2, M_1, M_2 > 0$ tels que pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\exists x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t \text{ et } \|x\|_1 \geq M_1 t\right) &\leq C_1 \exp(-C_2 t), \\ \mathbb{P}(t < \tau < \infty) &\leq C_1 \exp(-C_2 t), \\ \mathbb{P}(t(x) \geq M_2 \|x\| + t, \tau = \infty) &\leq C_1 \exp(-C_2 t),\end{aligned}$$

où $\tau = \inf\{t > 0, \forall x \in \mathbb{Z}^d, \eta_t(x) \leq 0\}$ est le temps d'extinction du processus et $t(x) = \inf\{t > 0, \eta_t(x) = 1\}$ est le premier temps de seconde infection de la particule x .

Ces estimées permettraient alors d'obtenir un théorème de forme asymptotique pour ce modèle (cf. théorème 8.3.4).

Remarque. *Nous nous plaçons à $\lambda_i \geq \lambda_e$, et non pas sur toute la zone surcritique, pour avoir la propriété d'attractivité.*

D'autres travaux sur ce modèle ont été menés plus récemment par les physiciens allemands Dammer et Hinrichsen [DH03, DH04].

3.3.2 Processus de Krone

En 1999, Krone [Kro99] introduit une variante qu'il appelle *two-stage contact process* dans laquelle les particules vivantes peuvent être dans deux états : enfant ou adulte. Une particule enfant, contrairement à une particule adulte, n'a pas la capacité de donner naissance. Par ailleurs, le taux de mortalité infantile peut différer du taux de mortalité adulte. Une autre interprétation possible, celle qui a mené à considérer ce modèle, est celle d'un modèle spatial de dynamique de métapopulations qui tient compte de la démographie et des extinctions environnementales ; un site sera alors considéré comme vacant, partiellement occupé ou totalement occupé.

Le terme « processus à deux états » pouvant s'appliquer à beaucoup des variantes présentées ici, nous désignerons dans la suite ce processus par les termes *processus de Krone* ou bien *processus de contact enfant-adulte* et nous utiliserons éventuellement l'abréviation PC2.

Nous noterons (ξ_t) le processus et nous utiliserons le formalisme du chapitre 1 pour décrire ses taux de transition. L'espace des états est $S = \{0, 1, 2\}$ où 0 représente un site mort, 1 un site enfant et 2 un site adulte. On se donne $(\delta, \lambda, \gamma)$ un jeu de paramètres positifs. Soient $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\xi \in S^{\mathbb{Z}^d}$, on définit les taux de mort

$$c(x, \xi, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi(x) = 2, \\ 1 + \delta & \text{si } \xi(x) = 1, \end{cases}$$

puis les taux de naissance

$$c(x, \xi, 1) = \lambda N_2(x, \xi) \text{ si } \xi(x) = 0,$$

où $N_2(x, \xi)$ est le nombre de voisins adultes (dans l'état 2) de x dans ξ , et les taux de maturation

$$c(x, \xi, 2) = \gamma \text{ si } \xi(x) = 1.$$

Ces taux traduisent le fait que la mortalité infantile est éventuellement plus élevée que la mortalité adulte. Chaque particule naît à l'âge 1 et chaque particule passe de l'état 1 à l'état 2 à taux γ .

Pour $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, on notera

$$\xi_0^{A(1), B(2)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 2 & \text{si } x \in B, \\ 0 & \text{si } x \notin A \cup B. \end{cases}$$

Krone construit le processus grâce à la représentation graphique. On peut se reporter à [Kro99] pour les détails de cette représentation graphique ou bien la voir comme cas particulier de celle de notre processus de vieillissement (chapitre 4).

Théorème 3.3.1 (Krone, 1999). *Soit (ξ_t) un processus de contact enfant-adulte. Alors*

1. (ξ_t) est additif : pour tous $A, B, C, D \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, $t \geq 0$, on a

$$\xi_t^{(A \cup C)(1), (B \cup D)(2)} = \xi_t^{A(1), B(2)} \vee \xi_t^{C(1), D(2)};$$

2. (ξ_t) est attractif : pour tout $t \geq 0$, on a $\xi_0 \leq \xi'_0 \Rightarrow \xi_t \leq \xi'_t$;
3. (ξ_t) est monotone : pour tous $\lambda \leq \lambda'$, $\gamma \leq \gamma'$, $\delta \geq \delta'$ et $t \geq 0$, on a $\xi_t \leq \xi'_t$.

Sans détailler la construction, nous représentons néanmoins le processus et ses propriétés aux figures 3.5, 3.6, 3.7 et 3.8.

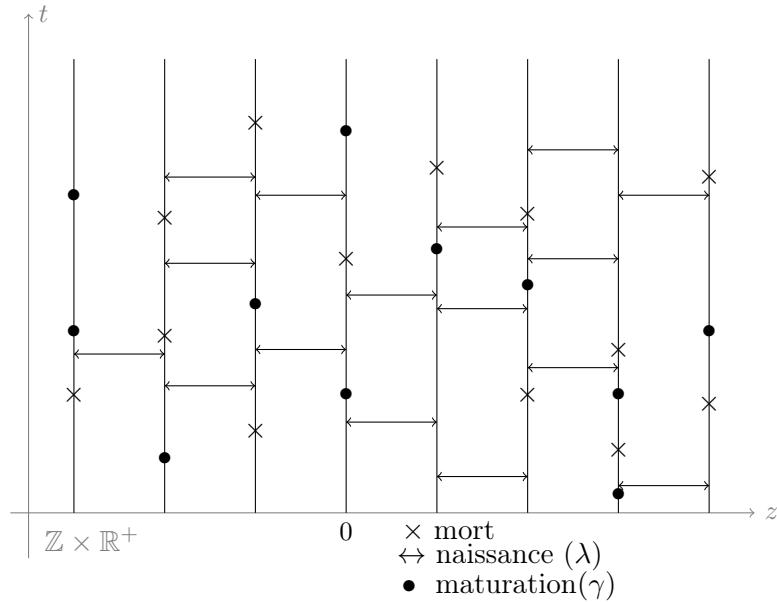


FIGURE 3.5 – Les processus de Poisson de la représentation graphique sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$.

Grâce à sa représentation graphique, Krone construit aussi un processus dual au sens suivant :

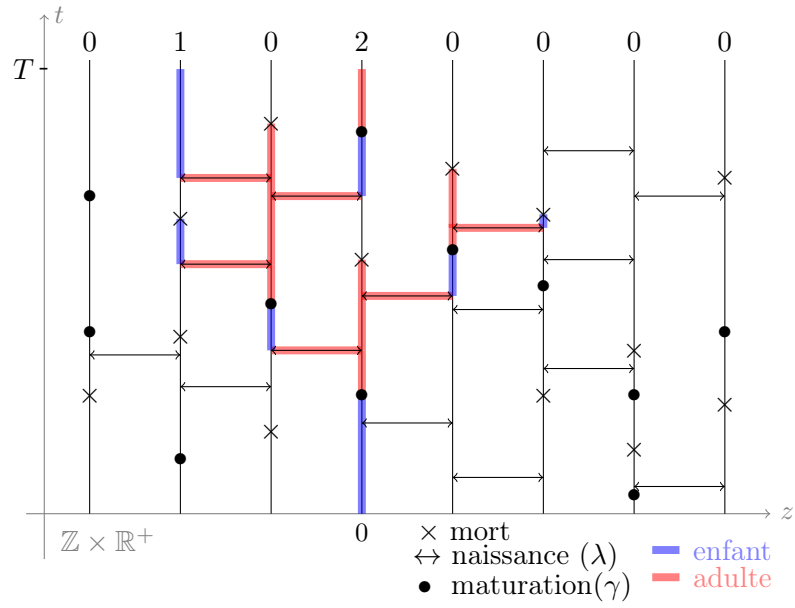


FIGURE 3.6 – La représentation de $(\xi_t^{0(1)})_{0 \leq t \leq T}$ et sa valeur à l'instant T .

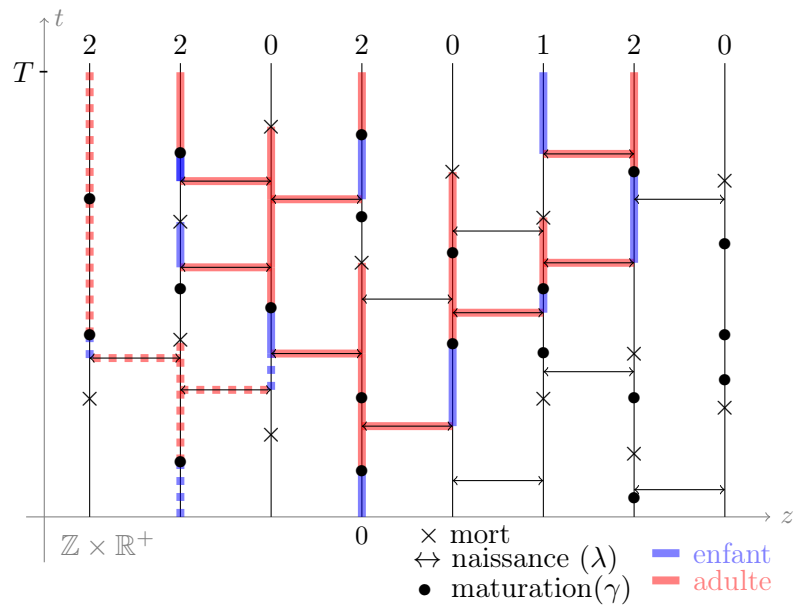
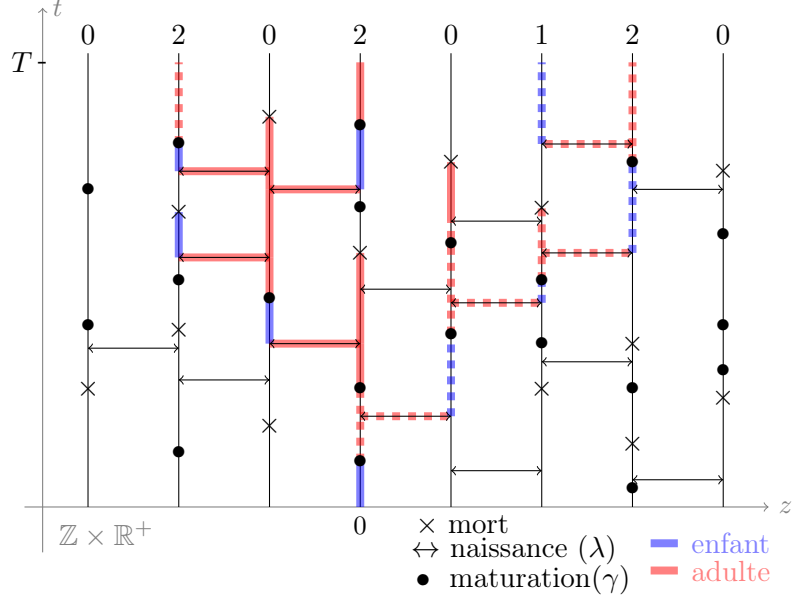


FIGURE 3.7 – Illustration de l'attractivité (et de l'additivité).


 FIGURE 3.8 – Illustration de la croissance par rapport à λ .

Théorème 3.3.2 (Krone, 1999). *Il existe un processus $(\hat{\xi}_t)$ tel que si $A, B, C, D \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ avec $A \cap B = C \cap D = \emptyset$ alors*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\left\{ \exists x \in C : \xi_t^{A(1), B(2)}(x) = 2 \right\} \cup \left\{ \exists y \in D : \xi_t^{A(1), B(2)}(y) \neq 0 \right\} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\tilde{\xi}_t^{C(1), D(2)} \sim A(1) \cup B(2) \right) \\ &= 2\mathbb{P} \left(\left\{ \exists x \in A : \tilde{\xi}_t^{C(1), D(2)}(x) = 2 \right\} \cup \left\{ \exists y \in B : \tilde{\xi}_t^{C(1), D(2)}(y) \neq 0 \right\} \right). \end{aligned}$$

Il montre en particulier que si $\delta = 0$, le processus est auto-dual au sens suivant :

Théorème 3.3.3 (Krone, 1999). *Il existe un processus dual $(\tilde{\xi}_t^{C(1), D(2)})$ de même loi que $(\xi_t^{C(1), D(2)})$. En particulier, la relation précédente devient :*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\left\{ \exists x \in C : \xi_t^{A(1), B(2)}(x) = 2 \right\} \cup \left\{ \exists y \in D : \xi_t^{A(1), B(2)}(y) \neq 0 \right\} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\left\{ \exists x \in A : \xi_t^{C(1), D(2)}(x) = 2 \right\} \cup \left\{ \exists y \in B : \xi_t^{C(1), D(2)}(y) \neq 0 \right\} \right). \end{aligned}$$

De façon analogue au processus de contact standard, Krone introduit le paramètre critique :

$$\lambda_c(\gamma, \delta) = \inf \left\{ \lambda, \mathbb{P}_{\lambda, \gamma, \delta} \left(\forall t > 0, \xi_t^{0(2)} \neq \emptyset \right) > 0 \right\}.$$

Lemme 3.3.4.

$$\mathbb{P}_{\lambda, \gamma, \delta} \left(\forall t > 0, \xi_t^{x(1)} \neq \emptyset \right) = \frac{\gamma}{\gamma + 1 + \delta} \mathbb{P} \left(\forall t > 0, \xi_t^{x(2)} \neq \emptyset \right).$$

Démonstration. Soit τ le temps de maturation du site x .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{\lambda,\gamma,\delta} \left(\forall t > 0, \xi_t^{x(1)} \neq \emptyset \right) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\forall t > 0, \xi_t^{x(1)} \neq \emptyset\}} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\forall t > 0, \xi_t^{x(1)} \neq \emptyset\}} | \mathcal{F}_\tau \right] \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\xi_t^{x(1)} \text{ survit sur } [0, \tau]\}} \mathbb{1}_{\{\xi_t^{x(1)} \text{ survit sur } [\tau, \infty)\}} | \mathcal{F}_\tau \right] \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\xi_t^{x(1)} \text{ survit sur } [0, \tau]\}} \mathbb{P} \left(\forall t > 0, \xi_t^{x(2)} \neq \emptyset \right) \right] \\
 &= \frac{\gamma}{\gamma + 1 + \delta} \mathbb{P} \left(\forall t > 0, \xi_t^{x(2)} \neq \emptyset \right). \quad \square
 \end{aligned}$$

Donc, la survie ne dépend pas de l'âge du site initial vivant.

Théorème 3.3.5 (Krone, 1999). *Soit δ fixé. Si γ et λ sont suffisamment grands, alors*

$$\mathbb{P}_{\lambda,\gamma,\delta} \left(\forall t > 0, \xi_t^{x(2)} \neq \emptyset \right) > 0.$$

On peut se reporter à [Kro99] pour la démonstration de ce résultat inspirée par [Har74] ou bien se reporter au chapitre 4 pour la démonstration dans le cadre plus général du processus avec vieillissement dont le processus de Krone est un cas particulier.

Définition 3.3.6. *On introduit les paramètres suivants :*

$$\begin{aligned}
 \gamma_*(\delta) &= \inf \left\{ \gamma > 0, \exists \lambda < \infty \text{ tel que } \mathbb{P}_{\lambda,\gamma,\delta} \left(\forall t > 0, \xi_t^{x(2)} \neq \emptyset \right) > 0 \right\}. \\
 \lambda_*(\delta) &= \inf \left\{ \lambda > 0, \exists \gamma < \infty \text{ tel que } \mathbb{P}_{\lambda,\gamma,\delta} \left(\forall t > 0, \xi_t^{x(2)} \neq \emptyset \right) > 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

Ces seuils ne sont pas triviaux :

Proposition 3.3.7. *Pour tout $\delta \geq 0$, $\lambda_*(\delta) = \lambda_c(\infty) < \infty$ (où $\lambda_c(\infty)$ correspond à un paramètre de maturation infini donc au processus de contact standard) et $\gamma_*(0) \leq \gamma_*(\delta) < \infty$. De plus, en dimension 1, $\gamma_*(\delta) \geq \frac{1}{4} \left(\sqrt{17 + 14\delta + \delta^2} - 3 - \delta \right) \forall \delta \geq 0$.*

Krone esquisse ensuite le diagramme de phase de la figure 3.9 mais la continuité de la courbe limite n'est pas prouvée.

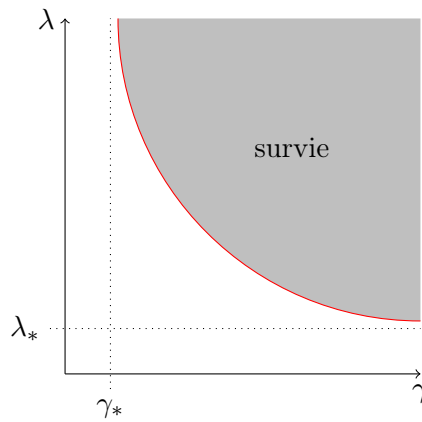


FIGURE 3.9 – Diagramme de phase du processus de Krone à δ fixé.

À la fin de son article, Krone laisse plusieurs questions ouvertes par rapport à ce que l'on connaît de processus standard comme celle de l'équivalence entre les survies à partir d'un ensemble fini ou infini, celle de la caractérisation du paramètre critique par rapport à la vitesse de croissance du bord droit en dimension 1, ou encore celle de la validité d'un théorème de convergence complète.

En 2014, Foxall [Fox14b] poursuit le travail de Krone et répond à certaines de ses questions ouvertes. Il montre que le taux critique de maturation γ_* est strictement positif en toute dimension. Il montre l'équivalence des notions de survie et un théorème de convergence complète. Pour ces deux résultats, il esquisse une extension de la construction de Bezuidenhout et Grimmett au processus de Krone sur laquelle il s'appuie. Nous faisons la construction complète pour le processus de contact avec vieillissement au chapitre 5.

II

LE PROCESSUS DE CONTACT AVEC VIEILLISSEMENT

Le modèle

Nous souhaitons maintenant introduire une extension du processus de contact comprenant un phénomène de vieillissement des particules. Nous nous inspirons pour cela du modèle de Krone (*cf.* section 3.3.2). Nous considérons donc un modèle où chaque particule vivante est munie d'un âge entier. L'état du processus au temps t sera donc décrite par un élément $\xi_t \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d}$ et ses dynamiques seront les suivantes :

- un site mort devient vivant proportionnellement à l'âge de ses voisins vivants fertiles,
- un site qui naît est d'âge 1,
- un site vivant meurt à taux 1,
- un site vivant vieillit à taux γ .

Nous utiliserons la représentation graphique pour construire notre modèle et nous travaillerons dans un espace de probabilité adapté pour en déduire des propriétés telles que l'attractivité, l'additivité, la croissance par rapport aux paramètres ou encore les corrélations positives des mesures.

Nous nous poserons ensuite des questions sur la survie du processus : quel paramètre critique définir ? La survie est-elle non triviale pour ce modèle ? Dépend-elle des conditions initiales du processus ?

Dans les chapitres suivants, nous effectuerons une construction de type Bezuidenhout-Grimmett qui nous permettra de conclure à la croissance d'ordre linéaire du processus. Nous nous poserons alors la question d'un résultat de forme asymptotique.

4.1 Modèle

4.1.1 Définition

§ 1. Paramètres de naissance. Dans notre modèle, le paramètre λ du processus de contact standard est remplacé par une suite $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de paramètres de naissance. Nous faisons les hypothèses suivantes :

1. $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}^+$ et $\lambda_0 = 0$,
2. $(\lambda_i)_i$ est croissante,
3. $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \lambda_\infty < \infty$.

La quantité λ_i est le taux auquel donne naissance une particule d'âge i . La condition 3 traduit le fait que les taux de naissance sont bornés avec l'âge ; la condition 2 traduit le fait que ceux-ci sont croissants avec l'âge. Ces deux conditions sont naturelles dans la modélisation et seront

utiles dans la suite. La condition 1 relate en particulier le fait qu'un site mort ne peut donner naissance à ses voisins ; il s'agit donc bien d'un processus de contact.

Parmi les suites de paramètres possibles, soulignons une classe particulière : les suites constantes à partir d'un certain rang. S'il existe M tel que, pour tout $i \geq M$, $\lambda_i = \lambda_\infty$, les particules d'âge supérieur à M donnent toutes naissance au même taux λ_∞ ; nous verrons ainsi que leur âge (supérieur à M) n'a plus d'influence spécifique sur l'évolution du processus.

§ 2. Processus de Markov. Le processus de contact avec vieillissement (PCV ou CPA pour *Contact Process with Aging*) est un processus de Markov à temps continu $(\xi_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{N}$.

- Si $\xi_t(z) = 0$, nous dirons comme précédemment que z est mort ;
- si $\xi_t(z) = i \geq 1$, nous dirons que z est vivant d'âge i .

Comme dans le chapitre 1, notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions càdlàg de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d}$ représentant les trajectoires de notre processus, muni de la plus petite tribu rendant les projections mesurables, notée $\mathcal{F}$ (et $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ une filtration associée).

§ 3. Évolution. Nous nous donnons $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de paramètres de naissance et $\gamma > 0$ un paramètre de maturation. L'évolution du processus est la suivante, pour $t \geq 0$, $z \in \mathbb{Z}^d$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

- un site vivant meurt à taux 1 indépendamment de son âge et de la configuration qui l'entoure,
- un site mort z naît à taux $\sum_{z' \sim z} \lambda_{\xi_t(z')}$ (avec $\lambda_0 = 0$),
- un nouveau né a l'âge 1,
- un site vivant z vieillit de l'âge n à l'âge $n + 1$ à taux γ (indépendamment de son âge).

Dans le formalisme du chapitre 1, $S = \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\xi \in S^{\mathbb{Z}^d}$ on a :

$$\begin{aligned} c(x, \xi, 0) &= 1 && \text{si } \xi(x) \neq 0, \\ c(x, \xi, 1) &= \sum_{i \geq 1} \lambda_i N_i(x, \xi) && \text{si } \xi(x) = 0, \\ c(x, \xi, k) &= \gamma && \text{si } \xi(x) = k - 1, \end{aligned}$$

où $k \geq 2$ et $N_i(x, \xi)$ est le nombre de voisins de x d'âge i dans ξ . La somme qui intervient dans le deuxième taux est toujours finie (car x possède au plus $2d$ voisins).

Remarque. Bien que l'ensemble S ne vérifie pas les hypothèses du chapitre 1 (car il n'est pas compact), nous pouvons effectuer la construction à temps fini et passer dans un second temps à la limite. Un site n'a qu'un nombre fini de possibilités (deux) lorsqu'il change d'état. Notre construction utilisera la représentation graphique et les objets seront donc bien définis via des processus de Poisson couplés.

Si la suite des paramètres de naissance est constante à partir d'un certain rang, *i.e.* s'il existe M tel que, pour tout $i \geq M$, $\lambda_i = \lambda_\infty$, nous pouvons considérer que l'ensemble des âges se restreint à $\{0, \dots, M\}$ car, après l'âge M , les particules donnent toutes naissance au même taux λ_∞ et leur âge n'a donc aucune influence sur le développement du processus. En effet, le taux de mortalité (qui vaut 1) ne dépend pas de l'âge. Dans ce cas, nous perdons l'information de l'évolution des âges mais celle de la croissance spatiale du processus est conservée et nous sommes ramenés à l'étude d'un processus éventuellement plus simple.

Le modèle de Krone présenté au chapitre 3 est bien un cas particulier de notre modèle : en effet, en posant $\lambda_1 = 0$ et pour tout $i \geq 1$, $\lambda_i = \lambda$, nous retrouvons le schéma d'infection de Krone de paramètres (λ, γ) (avec $\delta = 0$). Il s'agit à nouveau ici d'identifier toutes les particules d'âge supérieur à 2. Plus précisément, soit (ξ_t) un processus de contact avec vieillissement de

paramètres $\Lambda = (0, \lambda, \lambda, \dots)$ et γ , alors, le processus défini pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{Z}^d$ par $\zeta_t(x) = \xi_t(x)\mathbb{1}_{\{\xi_t(x) \leq 2\}} + 2\mathbb{1}_{\{\xi_t(x) > 2\}}$ est un processus de Krone de paramètres $(\lambda, \gamma, 0)$.

Remarque. Nous pourrions rajouter un paramètre de mortalité dépendant de l'âge pour traduire des phénomènes de mortalité infantile. Nous considérons que la paramétrisation de notre modèle est pour l'instant suffisamment riche pour notre étude.

Nous utilisons la représentation graphique de Harris pour construire notre processus de contact avec vieillissement sur un espace de probabilité approprié.

4.1.2 Espace de probabilité

Nous rappelons que les boréliens de $\mathbb{R}^+$ sont notés $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ et $\mathbb{E}^d$ sont les arêtes de $\mathbb{Z}^d$. Soit M l'ensemble des mesures localement finies sur $\mathbb{R}_+$ ($m = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{t_i}, (t_i)_i \in \mathbb{R}^+$ avec $m(K) < \infty$ pour tout compact K). Nous munissons M de la tribu $\mathcal{M}$ générée par les applications $\{m \rightarrow m(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$. Nous posons

$$\Omega = \left(M \times [0, 1]^{\mathbb{N}} \right)^{\mathbb{E}^d} \times (M^2)^{\mathbb{Z}^d}$$

$$\text{et } \mathcal{F} = \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}([0, 1])^{\otimes \mathbb{N}} \right)^{\otimes \mathbb{E}^d} \otimes (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{\otimes \mathbb{Z}^d}.$$

Sur cet espace, nous considérons la famille de mesures de probabilité définie comme suit

$$\mathbb{P}_{\Lambda, \gamma} = \left(\mathcal{P}_{\lambda_\infty} \otimes \mathcal{U}_{[0, 1]}^{\otimes \mathbb{N}} \right)^{\otimes \mathbb{E}^d} \otimes (\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_\gamma)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$$

où $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est notre suite de paramètres de naissance, $\mathcal{P}_\alpha$ est la loi d'un processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité α (pour $\alpha \in \{1, \gamma, \lambda_\infty\}$), et $\mathcal{U}_{[0, 1]}$ la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Un élément $\omega = (\omega_e^\infty, u_e, \omega_x^1, \omega_x^\gamma)_{e, x} \in \Omega$ est une réalisation de tous ces processus de Poisson. Pour tout sommet $x \in \mathbb{Z}^d$, nous obtenons deux processus de Poisson de paramètres respectifs 1 et γ et pour toute arête $e \in \mathbb{E}^d$, nous obtenons des processus de Poisson couplés de paramètres respectifs $(\lambda_i)_i$ décrits comme suit : si $T_e^\infty = (t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont les temps d'arrivée du processus ω_e^∞ de loi $\mathcal{P}_{\lambda_\infty}$ et $u_e = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des variables aléatoires de loi $\mathcal{U}_{[0, 1]}$, alors, les temps d'arrivée du processus de Poisson ω_e^i de paramètre λ_i sont

$$T_e^i = \left\{ t : \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ avec } t = t_k \text{ et } u_k \leq \frac{\lambda_i}{\lambda_\infty} \right\}.$$

À partir de maintenant, nous travaillerons avec l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma})$.

En appliquant le théorème 1.4.12, nous obtenons :

Théorème 4.1.1. *Pour toute suite Λ vérifiant les hypothèses de 4.1.1 §1 et tout $\gamma > 0$, la mesure $\mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}$ a des corrélations positives spatio-temporelles et satisfait l'inégalité FKG : pour tous $L \geq 0, T \geq 0$ et toutes fonctions croissantes f et g sur les configurations sur $[-L, L]^d \times [0, T]$ on a*

$$\mathbb{E}_{\Lambda, \gamma} [fg] \geq \mathbb{E}_{\Lambda, \gamma} [f] \mathbb{E}_{\Lambda, \gamma} [g]$$

où $\mathbb{E}_{\Lambda, \gamma}$ est l'espérance sous $\mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}$. Quand nous regarderons les configurations à un instant fixé, nous parlerons de corrélations spatiales positives.

4.1.3 Construction graphique

Tout comme dans le cas du processus de contact standard, le processus de contact avec vieillissement peut être construit avec la représentation graphique introduite pour les processus additifs (cf. chapitres 1 et 2). Pour cela, nous commençons par le diagramme spatio-temporel $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^+$. Celui-ci est ensuite augmenté pour donner un *diagramme de percolation* comme suit. Nous considérons d'abord les temps d'arrivée de processus de Poisson suivant la loi $\mathbb{P}_{\gamma, \lambda}$:

- Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on note $(U_n^x)_n$ les temps d'arrivée du processus de Poisson ω_x^1 d'intensité 1, encodant les morts potentielles en x . Pour tout point spatio-temporel (x, U_n^x) , on place une croix $\times$ pour indiquer qu'une mort se produit si x est vivant.
- Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on note $(W_n^x)_n$ les temps d'arrivée du processus de Poisson ω_x^γ d'intensité γ , encodant les potentielles maturations en x . Pour tout (x, W_n^x) , on place un rond $\bullet$ pour indiquer une potentielle maturation de x : si x a l'âge k avant un rond, il aura l'âge $k + 1$ après le rond.
- Pour tout $e = \{x, y\} \in \mathbb{E}^d$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que les $(T_{\{x, y\}}^k)_n$ sont les temps d'arrivée du processus de Poisson ω_e^k de paramètre λ_k , encodant les potentielles naissances à travers $\{x, y\}$. Entre les points $(x, T_{\{x, y\}}^k)$ et $(y, T_{\{x, y\}}^k)$ on dessine une flèche qui indique que, si x est vivant d'âge au moins k , alors il donnera naissance à y (avec l'âge 1 si celui-ci n'est pas déjà vivant).

Ces processus sont représentés sur la figure 4.1 dans le cas du processus de contact avec vieillissement sur $\mathbb{Z}$. Nous avons effectué une construction couplée de manière à ce qu'une flèche utilisable par une particule d'âge i le soit par une particule d'âge $i + 1$. Les flèches bleues sont utilisables par les particules d'âge supérieur à 1, les violettes par celles d'âge supérieur à 2 et les rouges par celles d'âge supérieur à 3. Sur le dessin, il n'y a pas plus de 3 maturations avant une croix de mort ; c'est la raison pour laquelle on ne voit que les âges 1, 2 et 3 intervenir.

Pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $s < t$ et $i, k \in \mathbb{N}^*$, nous dirons qu'il y a un *chemin ouvert* de (x, i, s) à (y, k, t) dans le diagramme s'il existe une suite de temps $s = s_0 < s_1 < \dots < s_{n+1} = t$ et une suite de points spatiaux correspondant $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ tels que :

- Pour $j = 1, \dots, n$, il y a une flèche de x_{j-1} vers x_j au temps s_j ; on peut donc poser $k_j = \min\{k \in \mathbb{N}^*, s_j \in T_{\{x_{j-1}, x_j\}}^k\}$.
- Pour $j = 0, \dots, n$, le segment vertical $\{x_j\} \times (s_j, s_{j+1})$ ne contient aucune croix $\times$.
- Pour $j = 0, \dots, n - 1$, le segment vertical $\{x_j\} \times (s_j, s_{j+1})$ contient au moins k_j ronds $\bullet$.
- Le segment vertical $\{x_0\} \times (s_0, s_1)$ contient au moins $k_1 - i$ ronds et le segment vertical $\{x_n\} \times (s_n, s_{n+1})$ contient exactement k ronds.

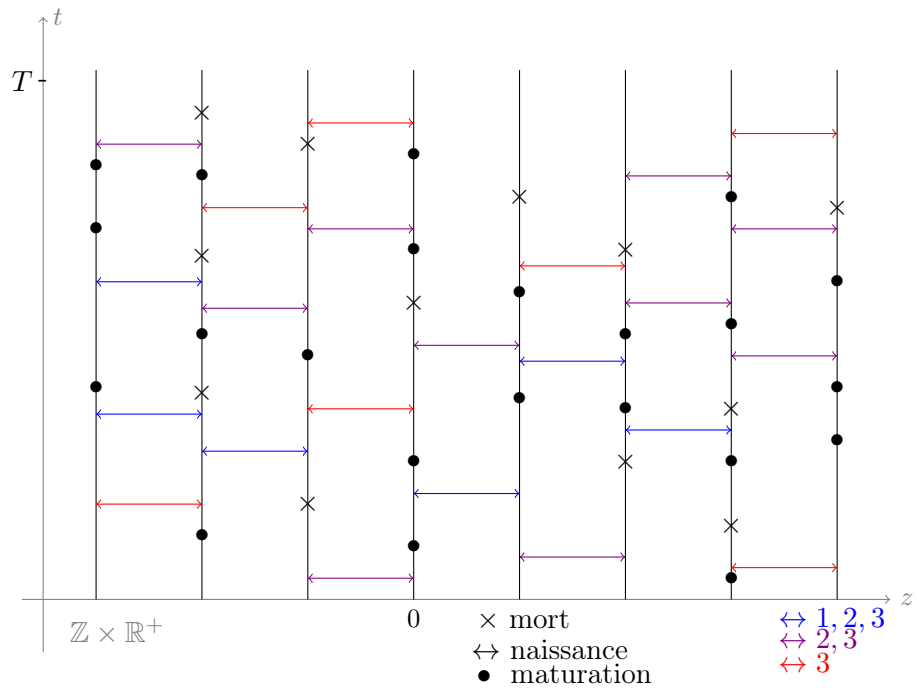
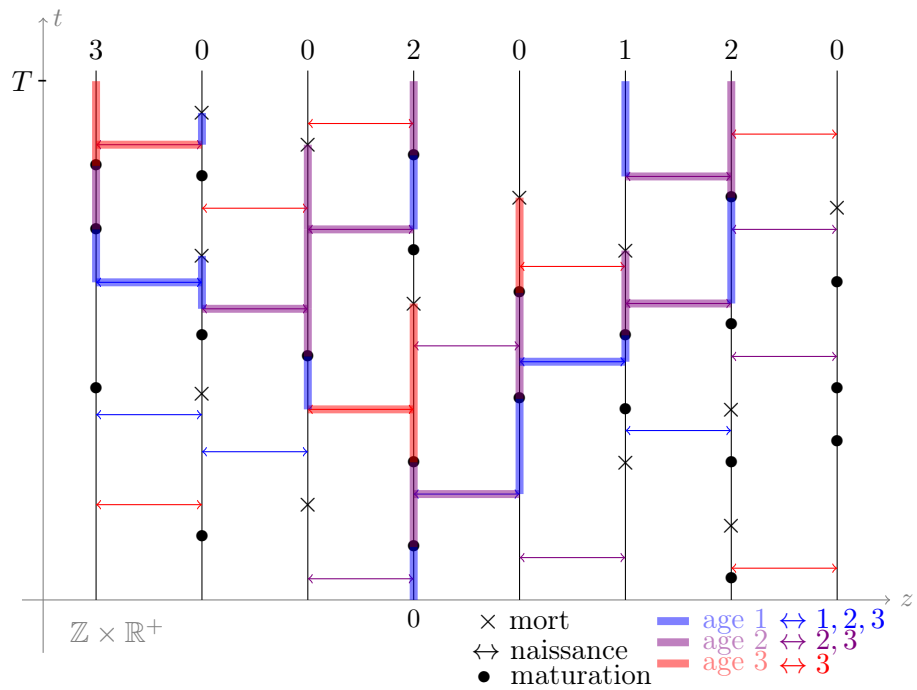
Définissons maintenant notre processus ξ . Pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $i, k \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$, nous posons $\xi_t^{i\delta_x}(y) = k$ s'il existe un chemin ouvert de $(x, i, 0)$ à (y, k, t) mais pas de $(x, i, 0)$ à $(y, k + 1, t)$. Nous étendons notre définition à toute fonction $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$:

$$\xi_t^f = \max_{x \in \text{supp } f} \xi_t^{f(x)\delta_x}.$$

À la figure 4.2, nous obtenons une représentation de l'évolution jusqu'à un instant T du processus de contact (ξ_t) associé au tirage des processus de Poisson de la figure 4.1 :

- lorsque la particule est d'âge 1, elle est de couleur bleue et n'a le droit d'emprunter que les flèches de couleur bleue ;
- lorsque la particule est d'âge 2, elle est de couleur violette et peut emprunter les flèches de couleur bleue ou violette *etc.* ;
- sur le dessin, seules des particules d'âge au plus 3 apparaissent car il y a au plus trois maturations consécutives (sans mort).

Nous utiliserons les notations suivantes :

FIGURE 4.1 – Les processus de Poisson de la représentation graphique sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$.FIGURE 4.2 – La représentation de $(\xi_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ et sa valeur à l'instant T .

- Si rien n'est spécifié (comme dans ξ_t), la configuration initiale est le point 0 avec l'âge 1.
- Si la configuration initiale est l'ensemble A , avec toutes les particules d'âge A , nous notons le processus correspondant ξ_t^A .
- Si la configuration initiale est un unique point $x \in \mathbb{Z}^d$ d'âge $k \in \mathbb{N}^*$, alors nous notons le processus correspondant $\xi_t^{k\delta_x}$. Si $k = 1$, nous notons juste ξ_t^x .

Nous définissons ensuite un ensemble caractéristique : soit A_t^x l'ensemble des points vivants au temps t , c'est-à-dire

$$A_t^x = \text{supp } \xi_t^x = \{y \in \mathbb{Z}^d : \xi_t^x(y) \neq 0\}.$$

Nous définissons A_t^f et A_t^A de la même manière.

Pour deux fonctions $f, g : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{N}$, nous notons, comme précédemment, $f \vee g$ la fonction définie de la façon suivante : pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $f \vee g(x) = \sup(f(x), g(x))$.

4.1.4 Premières propriétés

Nous déduisons de la représentation graphique les mêmes propriétés que pour le processus de contact standard :

Proposition 4.1.2. *Le processus de contact avec vieillissement (ξ_t) vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Additivité : pour toutes $f, g : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{N}$, $\xi_t^{f \vee g} = \xi_t^f \vee \xi_t^g$.*
2. *Attractivité : pour toutes $f, g : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{N}$, $f \leq g \implies \xi_t^f \leq \xi_t^g$.*

L'attractivité est représentée à la figure 4.3 : le chemin en pointillés représente les points vivants supplémentaires lorsqu'on a ajouté $\{4\}$ à la configuration initiale.

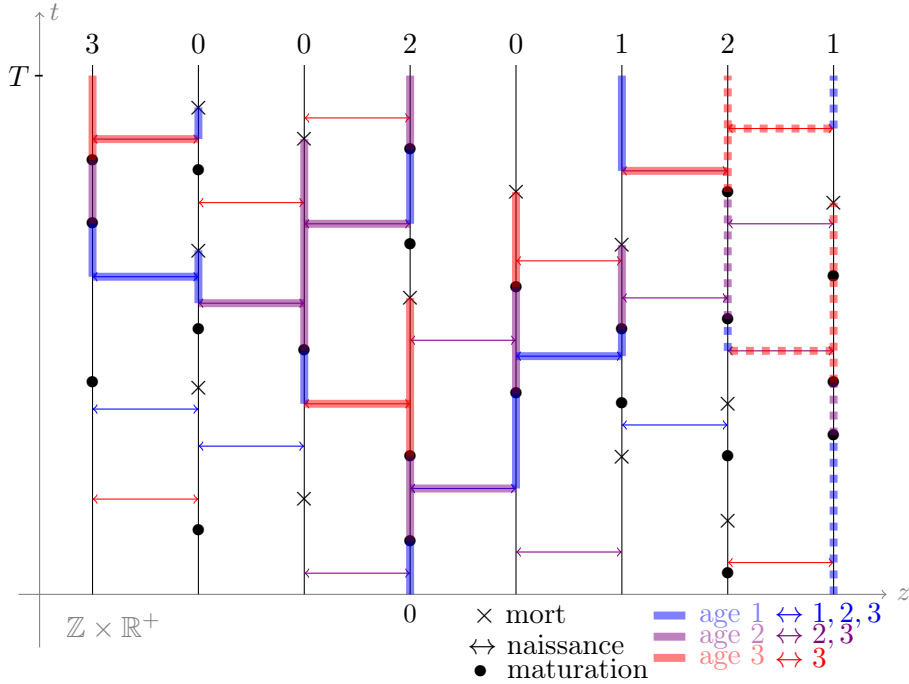


FIGURE 4.3 – Illustration de l'attractivité (et de l'additivité).

Remarque. *Le processus (A_t) vérifie aussi les propriétés d'additivité et attractivité.*

Par construction, le processus (ξ_t) vérifie le propriété de Markov forte que nous serons amenés à utiliser souvent par la suite ; ce n'est pas le cas pour le processus (A_t) .

Remarque. *La construction que nous avons faite, et les propriétés d'attractivité et d'additivité qui en découlent, fonctionnent car nous avons fait l'hypothèse d'une suite de paramètres $\Lambda = (\lambda_i)_{i \geq 0}$ croissante. Cela signifie que le vieillissement facilite l'expansion du processus. Donc, en particulier, partir d'une configuration initiale plus grande dans le sens plus étendue et/ou plus âgée nous donne une configuration plus grande en tout temps. L'espace de probabilité que nous avons construit couple bien les flèches de naissance de façon à ce qu'une flèche utilisable par une particule d'âge i le soit par une particule d'âge supérieur à i . En ce sens, l'hypothèse de croissance des paramètres nous paraît fondamentale pour poursuivre l'étude du processus.*

Nous cherchons maintenant à savoir si l'on peut encadrer notre processus de contact avec vieillissement par des processus de contact standards. Dans la proposition suivante, $\mathbb{P}_\lambda$ désigne la loi d'un processus de contact standard de paramètre de naissance λ (et de paramètre de mort 1).

Proposition 4.1.3. *Soit $\mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}$ la loi d'un processus de contact avec vieillissement de paramètres de naissance Λ et de maturation $\gamma > 0$.*

1. *Majoration stochastique : soit $\lambda_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i$. Nous avons la domination suivante :*

$$\mathbb{P}_{\Lambda, \gamma} \ll_{sto} \mathbb{P}_{\lambda_\infty},$$

mais nous n'avons pas mieux, i.e. il n'existe pas $\lambda < \lambda_\infty$ tel que $\mathbb{P}_{\Lambda, \gamma} \ll_{sto} \mathbb{P}_\lambda$.

2. *Minoration stochastique : soit $m = \inf\{i, \lambda_i \neq 0\}$.*

(a) Si $m = 1$, alors $\mathbb{P}_{\lambda_1} \ll_{sto} \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}$;

(b) si $m > 1$, alors il n'existe pas $\lambda > 0$ tel que $\mathbb{P}_\lambda \ll_{sto} \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}$.

Démonstration. 1. Toutes les particules donnent naissance à un taux λ_i inférieur à λ_∞ donc la première domination est évidente. Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda < \lambda_\infty$ tel que $\mathbb{P}_{\Lambda, \gamma} \ll_{sto} \mathbb{P}_\lambda$. Soit n tel que $\lambda_n \geq \lambda + \frac{\lambda_\infty - \lambda}{2}$ (n existe par définition de la limite λ_∞). Alors, en un site fixé, après n maturations (ce qui a lieu avec probabilité strictement positive), grâce au caractère markovien des processus, le temps d'attente de la prochaine naissance du PCV suit une loi $\mathcal{E}(\lambda_n)$ dominée stochastiquement par la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ du temps d'attente de la prochaine naissance dans le processus de contact standard. Nous aboutissons à une contradiction.

2. Si $\lambda_1 \neq 0$, toutes les particules donnent naissance à un taux supérieur à λ_1 donc on en déduit la première domination. Le véritable résultat se trouve dans la dernière domination qui nous dit que notre processus ne peut être minoré par aucun processus de contact standard si $\lambda_1 = 0$. Supposons $\lambda_2 \neq 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\mathbb{P}_\lambda \ll_{sto} \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}$. En particulier, en un site fixé, si nous comparons les temps d'attente de la première naissance, nous obtenons la domination :

$$\mathcal{E}(\gamma) + \mathcal{E}(\lambda_2) \ll_{sto} \mathcal{E}(\lambda).$$

Nous traduisons cette domination stochastique sur les fonctions de répartition et nous obtenons, pour tout $t > 0$:

$$1 - \exp(-\lambda t) \leq 1 - \frac{1}{\lambda_2 - \gamma} (\lambda_2 \exp(-\gamma t) - \gamma \exp(-\lambda_2 t)).$$

Ces deux fonctions valent 0 en $t = 0$ mais la dérivée de celle de gauche vaut $\lambda > 0$ en $t = 0$ et la dérivée de celle de droite vaut 0 en $t = 0$. Nous aboutissons à une contradiction. Si $\lambda_2 = 0$, nous obtenons la domination

$$\Gamma(m-1, \gamma) + \mathcal{E}(\lambda_m) \ll_{sto} \mathcal{E}(\lambda)$$

et nous aboutissons de même à une contradiction. $\square$

Notre modèle est donc une véritable extension du processus de contact standard.

Comme pour le processus de contact standard, nous pouvons considérer le processus (ξ_t) restreint à $S_f(\mathbb{Z}^d)$ (l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{N}$ prenant un nombre fini de valeurs non nulles, constituant un ensemble dénombrable) comme une chaîne de Markov à temps continu, dont tous les états sont accessibles et avec $\{\xi \equiv 0\}$ un état absorbant. Le temps d'occupation d'un état ξ (avec $A_\xi = \text{supp } \xi$) est une exponentielle de moyenne

$$\left((1 + \gamma)|\xi| + \sum_{x \sim A_\xi} \sum_{y \in A_\xi \cap N_x} \lambda_{\xi(y)} \right)^{-1},$$

et l'intensité $q_{\xi, \eta}$ d'un saut entre deux configurations disjointes ξ et η est

$$q_{\xi, \eta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta = \xi(1 - \delta_x) \text{ pour un } x \in \text{supp } \xi \\ \gamma & \text{si } \eta = \xi + \delta_x \text{ pour un } x \in \text{supp } \xi \\ \sum_{y \in \text{supp } \xi \cap N_x} \lambda_{\xi(y)} & \text{si } \eta = \xi + \delta_x \text{ pour un } x \sim \text{supp } \xi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.2 La survie du PCV

4.2.1 Définitions

Pour le processus de contact standard, Harris a défini la valeur critique (*cf.* chapitre 2) :

$$\lambda_c = \inf \left\{ \lambda \geq 0, \mathbb{P}_\lambda \left(\forall t > 0, \xi_t^{\{0\}} \neq \emptyset \right) > 0 \right\}$$

et a montré que $\lambda_c \in (0, +\infty)$. Krone a défini une quantité similaire pour son extension (*cf.* chapitre 3) :

$$\lambda_c(\gamma) = \inf \left\{ \lambda \geq 0, \mathbb{P}_{\lambda, \gamma} \left(\forall t > 0, \xi_t^{\{0(2)\}} \neq \emptyset \right) > 0 \right\}$$

où $0(2)$ correspond au site 0 dans l'état adulte. Il a montré que si γ et λ sont suffisamment grands, alors $\mathbb{P}_{\lambda, \gamma}(\forall t > 0, \xi_t^{\{0(2)\}} \neq \emptyset)$ est positive (*cf.* section 3.3.2). On peut trouver l'allure de la transition de phase à la figure 3.9.

Dans le cas du processus de contact avec vieillissement, nous commençons par définir une région surcritique :

$$S_\gamma = \left\{ \Lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ croissante } / \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}(\forall t > 0, \xi_t \not\equiv 0) > 0 \right\}.$$

Nous noterons $\rho(\Lambda, \gamma) = \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}(\forall t > 0, \xi_t^{\{0\}} \neq \emptyset)$; si Λ est dans la zone surcritique, alors pour toute $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ non nulle, on a, par monotonie :

$$\mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}(\forall t > 0, \xi_t^f \neq \emptyset) \geq \rho(\Lambda, \gamma) > 0. \quad (4.2.1)$$

Quand le contexte est clair (Λ, γ fixés), nous noterons juste $\rho = \rho(\Lambda, \gamma)$.

4.2.2 Premières propriétés

Nous rappelons que, si rien n'est précisé, la configuration initiale du processus est le site 0 seul vivant et d'âge 1. Faisons quelques remarques évidentes à propos de la région de survie : soit $\Lambda = (\lambda_i)_i$ et $\Lambda' = (\lambda'_i)_i$,

- si $\Lambda \in S_\gamma$ et pour tout i , $\lambda_i \leq \lambda'_i$ alors $\Lambda' \in S_\gamma$;
- si on prend, pour tout i , $\lambda_i > \lambda_c$, le processus est évidemment surcritique ; mais cette hypothèse est trop forte et nous aimerions dire quelque chose de plus pertinent.

Proposition 4.2.1. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, il existe λ_{m+1} et γ assez grands tels que $\rho(\Lambda, \gamma) > 0$ avec $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+1}, \dots)$.*

Démonstration. Nous démarrons notre processus avec le point 0 avec l'âge 1. Sans perte de généralité, nous supposons que $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Nous utilisons une comparaison entre notre modèle et une percolation par sites orientée 1-dépendante sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. La construction est inspirée de celle de Harris dans [Har74]. Soient $T > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Le site x est appelé « bon » au temps nT si

1. il n'y a pas de morts en x sur l'intervalle de temps $[nT, nT + \frac{3T}{2}]$,
2. il y a assez de maturations (plus que m) en x sur l'intervalle de temps $[nT + \frac{T}{2}, nT + T]$,
3. il y a des flèches de x vers chacun de ses voisins sur l'intervalle de temps $[nT + T, nT + \frac{3T}{2}]$.

Au temps $nT + T$, l'âge x est inconnu. En attendant m maturations, on s'assure qu'il est possible d'utiliser les flèches de naissance de taux λ_{m+1} pour engendrer les voisins de x .

Pour $\alpha \in \{1, \gamma, \lambda_{m+1}\}$, nous notons ici que P^α désigne un processus de Poisson de paramètre α . On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x \text{ est bon au temps } nT) &= \mathbb{P}(1, 2 \text{ et } 3 \text{ sont satisfaites}) \\ &= \mathbb{P}\left(P^1([nT, nT + \frac{3T}{2}]) = 0\right) \times \mathbb{P}\left(P^\gamma([nT + \frac{T}{2}, nT + T]) \geq m\right) \\ &\quad \times \mathbb{P}\left(P^{\lambda_{m+1}}([nT + T, nT + \frac{3T}{2}]) \neq 0\right)^{2d} \\ &\geq \exp(-\frac{3T}{2}) \mathbb{P}\left(P^\gamma([0, \frac{T}{2m}]) \neq 0\right)^m \left(1 - \exp(-\lambda_{m+1} \frac{T}{2})\right)^{2d} \\ &\geq \exp(-\frac{3T}{2}) \left(1 - \exp(-\gamma \frac{T}{2m})\right)^m \left(1 - \exp(-\lambda_{m+1} \frac{T}{2})\right)^{2d}. \end{aligned}$$

Nous choisissons T assez petit tel que $\exp(-\frac{3T}{2}) > 1 - \varepsilon$. Nous choisissons γ assez grand tel que $(1 - \exp(-\gamma \frac{T}{2m}))^m \geq 1 - \varepsilon$, et λ_{m+1} assez grand tel que $1 - \exp(-\lambda_{m+1} \frac{T}{2}) \geq 1 - \varepsilon$. Alors

$$\mathbb{P}(x \text{ est bon au temps } nT) \geq 1 - 3\varepsilon.$$

Soit $\mathcal{L} = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, m + n \text{ est pair}\}$ le réseau de la percolation orientée. Nous dirons que $(m, n) \in \mathcal{L}$ est ouvert si le site $(m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ est bon au temps nT . Si ε est suffisamment petit, la probabilité p que le site soit ouvert est suffisamment grande et il y a percolation dans le réseau $\mathcal{L}$ (cette percolation peut être prouvée par un argument de contour en se référant par exemple à [Dur84]). Cette construction implique que (ξ_t) survit avec probabilité strictement positive. $\square$

Nous prouvons maintenant que la survie ne dépend pas de la configuration initiale (tant que celle-ci est à support fini).

Proposition 4.2.2. Soient $f, f' : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ des fonctions aux supports finis non vide. On a l'équivalence suivante

$$\mathbb{P}_{\Lambda, \gamma} \left(\forall t > 0, \xi_t^f \neq 0 \right) > 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma} \left(\forall t > 0, \xi_t^{f'} \neq 0 \right) > 0.$$

Démonstration. Tout d'abord, si le processus démarre avec un seul point vivant, montrons que la survie ne dépend pas de son âge. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par construction,

$$\mathbb{P}(\forall t > 0, \xi_t^{n\delta_x} \neq 0) \leq \mathbb{P}(\forall t > 0, \xi_t^{(n+1)\delta_x} \neq 0).$$

Réciproquement, soit T le temps de la première maturation en x . On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}(\forall t > 0, \xi_t^{n\delta_x} \neq 0) &\geq \mathbb{P} \left(\left\{ \forall t \in [0, T], \xi_t^{n\delta_x}(x) \neq 0 \right\} \cap \left\{ \theta_T \left(\forall t > 0, \xi_t^{(n+1)\delta_x} \neq 0 \right) \neq 0 \right\} \right) \\ &\geq \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}(\exp(\gamma) \leq \exp(1)) \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma} \left(\theta_T \left(\forall t > 0, \xi_t^{(n+1)\delta_x} \neq 0 \right) \right) \\ &\geq \frac{\gamma}{1 + \gamma} \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma} \left(\forall t > 0, \xi_t^{(n+1)\delta_x} \neq 0 \right). \end{aligned}$$

Ensuite, montrons que la survie ne dépend pas du nombre fini de points vivants dans la configuration initiale. En effet, pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^d$ et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\forall t > 0, \xi_t^{\sum_{i=1}^n m_i \delta_{x_i}} \neq 0 \right) &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \left(\forall t > 0, \xi_t^{m_i \delta_{x_i}} \neq 0 \right) \text{ par additivité,} \\ &\leq n \mathbb{P} \left(\forall t > 0, \xi_t^{\max_i \{m_i\} \delta_{x_{\arg \max \{m_i\}}}} \neq 0 \right), \\ \text{et } \mathbb{P} \left(\forall t > 0, \xi_t^{\sum_{i=1}^n m_i \delta_{x_i}} \neq 0 \right) &\geq \mathbb{P} \left(\forall t > 0, \xi_t^{m_1 \delta_{x_1}} \neq 0 \right) \text{ par attractivité.} \quad \square \end{aligned}$$

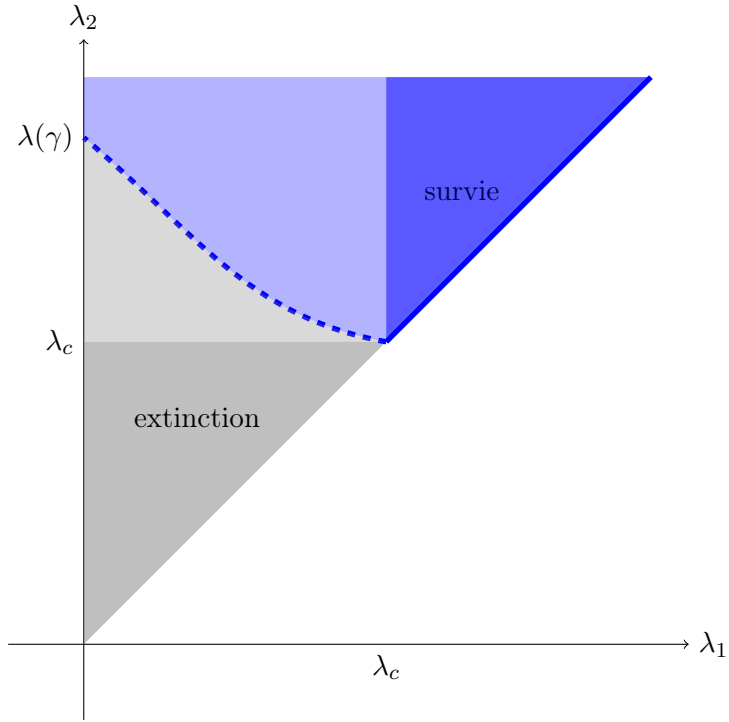
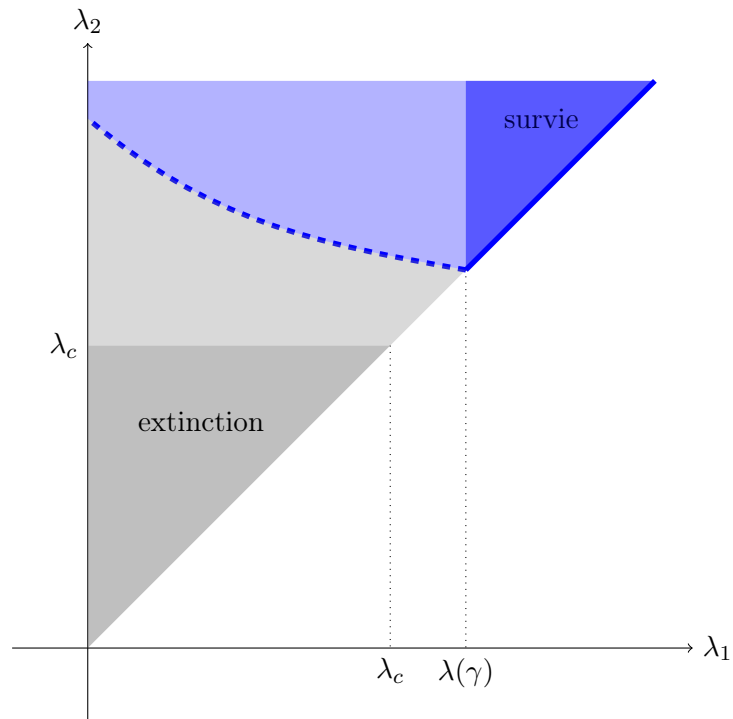
4.2.3 Quelques cas particuliers

Nous nous fixons $\gamma > 0$ le paramètre de maturation et nous regardons quelques cas particuliers selon les paramètres de naissance.

§ 1. Cas à 2 paramètres. Nous considérons un processus avec seulement deux paramètres λ_1 et λ_2 (cela revient à prendre Λ tel que pour tout $i \geq 2$, $\lambda_i = \lambda_2$). Si $\lambda_1 = 0$, nous sommes ramenés au modèle de Krone. Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, nous pouvons faire quelques remarques qualitatives sur la transition de phase : cf. figure 4.4.

§ 2. Cas à 3 paramètres dont 1 nul. Pour pouvoir à nouveau travailler dans un diagramme bidimensionnel des paramètres, nous considérons maintenant un processus avec trois paramètres dont un nul : $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Nous esquissons alors un diagramme de phase en fonction de λ_2 et λ_3 , à γ fixé, à la figure 4.5.

Nous allons dans les chapitres suivants nous intéresser à la croissance du processus de contact avec vieillissement.

FIGURE 4.4 – Transition de phase pour un PCV à 2 paramètres, γ fixé.FIGURE 4.5 – Transition de phase pour un PCV à 3 paramètres dont 1 nul, γ fixé.

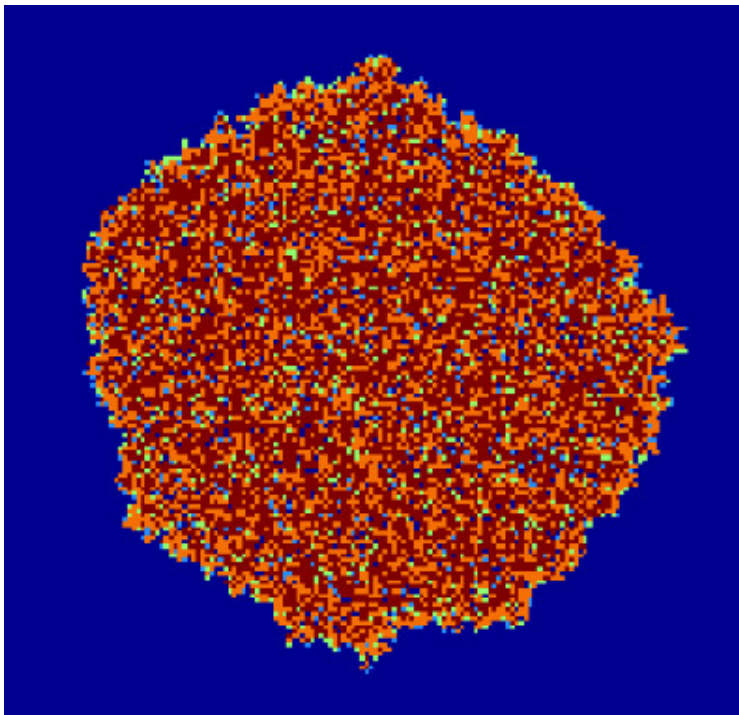


FIGURE 4.6 – Simulation du processus de contact avec vieillissement.

Couplage avec une percolation

Continue de dessiner des chemins et tout ira bien. — Tassion.

Dans ce chapitre, nous allons construire un couplage entre un processus de contact avec vieillissement et une percolation orientée. Pour cela, nous allons exhiber une condition sur le processus dans une boîte spatio-temporelle finie qui sera la brique élémentaire d'une renormalisation et qui s'avérera donc, grâce au couplage, déterminer le caractère surcritique du processus. Cette condition sur une boîte spatio-temporelle nous permettra d'avoir une certaine continuité de la probabilité de survie et d'obtenir des résultats sur ce qu'il se passe aux points critiques de certains processus de contact avec vieillissement. La construction faite nous servira par ailleurs au chapitre 6 pour établir des contrôles de la croissance du processus de contact avec vieillissement. Dans ce chapitre et le suivant, (ξ_t) désigne un processus de contact avec vieillissement.

La première renormalisation de ce type pour les processus de contact a été effectuée par Durrett et Griffeath [DG83] en dimension 1. En dimension supérieure, il n'y a plus la propriété de croisements de chemins et la percolation sous-jacente sera plus difficile à construire.

Notre renormalisation est inspirée de celle faite par Bezuidenhout et Grimmett [BG90] dans le cas du processus de contact classique. Comme nous l'avons évoqué au chapitre 2, cette construction est fondamentale dans l'étude du processus de contact et a permis de démontrer des résultats laissés pendant longtemps en suspens. Nous avons vu au chapitre 3 que leur idée a été réutilisée par Steif et Warfheimer dans le cas du processus de contact en environnement évoluant aléatoirement [SW08], ou encore par Remenik [Rem08], Durrett et Schinazi [DS00]. Tout au long de ce chapitre, nous ferons référence à la démonstration de Bezuidenhout et Grimmett, à celle reformulée par Liggett dans son livre [Lig99] et à celle de Steif et Warfheimer.

Ce chapitre est une version plus détaillée du contenu de la partie 4 de [Des14].

Bien que ce soit la construction, plus que le résultat, qui nous servira dans la suite, nous pouvons résumer le travail de ce chapitre dans le théorème suivant :

Théorème 5.0.3. *Le caractère surcritique du processus (ξ_t) est équivalent à la condition spatio-temporelle finie suivante : si $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions acceptables qui converge vers $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ périodique non nulle, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n, L, T > 0$ tels que*

$$\mathbb{P} \left(\exists x \in [0, L]^d \text{ tel que } {}_{L+2n}\xi_{T+1}^{f_n} \geq T_x \circ f_n \right) > (1 - \varepsilon) \quad (\text{C1})$$

$$\mathbb{P} \left(\begin{array}{l} \exists x \in \{L + n\} \times [0, L]^{d-1} \text{ et } t \in [0, T) \\ \text{tels que } {}_{L+2n}\xi_{t+1}^{f_n} \geq T_x \circ f_n \end{array} \right) > (1 - \varepsilon). \quad (\text{C2})$$

La condition peut aussi s'exprimer de manière plus « visuelle » dans le cas où $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]^d}$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n, a, b > 0$ tels que si $(x, s) \in [-a, a]^d \times [0, b]$ alors

$$\mathbb{P} \left(\begin{array}{l} \exists (y, t) \in [a, 3a] \times [-a, a]^{d-1} \times [5b, 6b] \text{ et des chemins ouverts} \\ \text{dans } [-5a, 5a]^d \times [0, 6b] \text{ partant de } (x, s) + [-n, n]^d \times \{0\} \\ \text{touchant tous les points dans } (y, t) + [-n, n]^d \times \{0\} \end{array} \right) > 1 - \varepsilon. \quad (\text{B1})$$

La notion de fonction acceptable sera définie plus loin. La condition (B1) sera illustrée par la figure 5.8.

Nous montrerons ce théorème en plusieurs étapes. Dans la section 5.1, nous montrerons que le caractère surcritique implique les conditions (C1) et (C2) ; ceci est le contenu du théorème 5.1.8. Puis, dans la section 5.2, nous montrerons que (C1) et (C2) impliquent (B1). Enfin, dans la section 5.3, nous construirons le couplage qui montre que (B1) implique le caractère surcritique.

Dans toute cette partie, nous nous fixons les paramètres Λ et γ et nous les omettons dans la notation de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

5.1 La survie implique une condition spatio-temporelle finie

Dans cette section, nous supposons que le processus est surcritique et nous construisons une grande boîte spatio-temporelle avec beaucoup de points vivants, bien localisés sur sa frontière.

Première étape : Si (ξ_t) survit avec probabilité positive alors il est possible de rendre cette probabilité de survie très grande en augmentant la configuration de départ (*i.e* le nombre de particules vivantes au départ et leurs âges). Autrement dit, la survie est très probable si la configuration initiale est suffisamment grande.

♣ Outil : l'élément principal de la démonstration est l'ergodicité de T_x (nous utilisons aussi l'attractivité et l'indépendance de la survie par rapport à la condition initiale).

Lemme 5.1.1. *Supposons que (ξ_t) soit surcritique. Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{N}$ convergeant vers une fonction f de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{N}$ périodique non nulle. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\forall t > 0, \xi_t^{f_n} \neq 0 \right) = 1.$$

Démonstration. Dans le cas du processus de contact classique, Liggett [Lig99] utilise la dualité (que nous n'avons pas dans le cas du PCV). Nous utilisons un argument d'ergodicité des systèmes $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T_x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$.

Par la croissance de la suite (f_n) vers f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\forall t, \xi_t^{f_n} \neq 0 \right) = \mathbb{P} \left(\forall t, \xi_t^f \neq 0 \right),$$

et cette quantité est strictement positive car nous avons supposé que le processus était surcritique et f non nulle. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ une période de f ; comme le système $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T_x)$ est ergodique :

$$\mathbb{P} \left(\forall t, \xi_t^f \neq 0 \right) > 0 \Rightarrow \mathbb{P} \left(\forall t, \xi_t^f \neq 0 \right) = 1.$$

Nous remarquons que f doit seulement dominer une fonction périodique non nulle. □

Dans les étapes 2 à 5 (lemmes 5.1.3 à 5.1.7), nous voudrions contrôler la quantité de particules vivantes sans considération de leurs âges ; par conséquent, nous travaillerons souvent avec $A_t^f = \text{supp } \xi_t^f$. Nous rappelons que le processus (A_t) ressemble au processus de contact car il attribue à chaque site de $\mathbb{Z}^d$ la valeur 0 ou 1, mais par contre (A_t) n'est pas markovien. C'est bien

le caractère markovien de (ξ_t) qui fait marcher les preuves même si les résultats énoncés ne concernent parfois que (A_t) .

Nous voulons construire un événement ne dépendant que de ce qu'il se passe dans une boîte finie. Nous travaillons donc avec un processus tronqué qui n'utilise que les processus de Poisson dans la boîte $[-L, L]^d$.

Définition 5.1.2 (Processus tronqué). *Soit $L \geq 1$. Le processus tronqué $({}_L\xi_t)$ est défini comme suit via la représentation graphique : pour déterminer $({}_L\xi_t)$ on utilise seulement les chemins verticaux (contenant les maturations et les morts) au-dessus des sites de $(-L, L)^d$ et les segments horizontaux (arêtes de naissance) dont les origines sont dans $(-L, L)^d$. Le processus tronqué $({}_L\xi_t)$ est à valeurs dans $[-L, L]^d$ mais est mesurable par rapport aux processus de Poisson dans $(-L, L)^d \times [0, t]$.*

Nous avons bien sûr, pour tout t , ${}_L\xi_t \leq \xi_t$ et $\text{supp } {}_L\xi_t = {}_LA_t$. Nous définissons ensuite

$${}_LA = \bigcup_{t \geq 0} ({}_LA_t \times \{t\}) \subset \mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$$

l'ensemble des points (spatio-temporels) engendrés par le processus tronqué, sans considération de leurs âges.

Deuxième étape : La probabilité de survie peut se voir comme limite de la probabilité d'avoir assez de particules vivantes dans une boîte spatio-temporelle finie. Cela s'appuie sur le fait que si le processus survit, c'est avec une infinité de particules vivantes.

♣ Outil : nous utilisons ici la majoration des taux de naissance et le théorème de convergence des martingales.

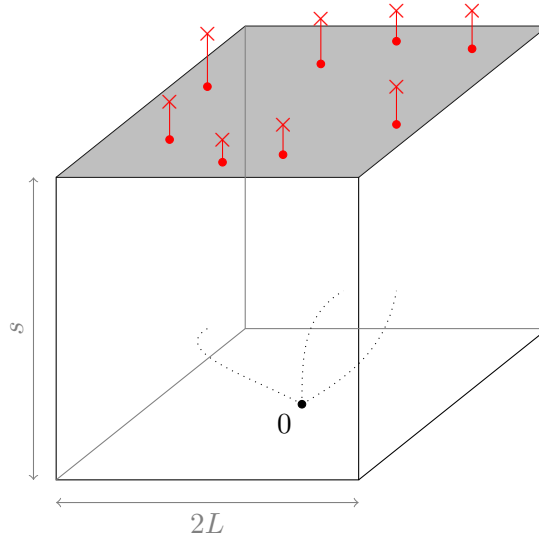


FIGURE 5.1 – (lemme 5.1.3)

Lemme 5.1.3. *Pour toute fonction $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ à support fini et pour tout $N \geq 1$:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|{}_LA_t^f| \geq N) = \mathbb{P}(\forall t > 0, \xi_t^f \neq 0).$$

Démonstration. Comme $A_t^f = \bigcup_{L \geq 1} L A_t^f$, nous en déduisons que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(|L A_t^f| \geq N \right) = \mathbb{P} \left(|A_t^f| \geq N \right).$$

Montrons maintenant que le terme de droite tend vers la probabilité de survie. Soit $s \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P} \left(\exists t, A_t^f = \emptyset \mid \mathcal{F}_s \right) \geq \mathbb{P} \left(\forall x \in A_s^f, x \text{ n'engendre pas de particules vivantes} \mid \mathcal{F}_s \right). \quad (*)$$

Notons :

- Y_1^x le temps d'attente de la prochaine mort potentielle (croix dans la représentation graphique) en x ,
- Y_γ^x le temps d'attente de la prochaine maturation potentielle (point dans la représentation graphique) en x ,
- $Y_\infty^{x,i}$ le temps d'attente de la prochaine naissance potentielle (flèche dans la représentation graphique) de x vers son i -ème voisin (sans considération de son âge),
- $Y_{\xi_s^f(x)}^{x,i}$ le temps d'attente de la prochaine naissance potentielle de x vers son i -ème voisin avec considération de son âge ($\xi_s^f(x)$ est l'âge de x au temps s).

Ces variables aléatoires suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs $1, \gamma, \lambda_\infty, \xi_s^f(x)$. Nous pouvons minorer la quantité (*) par le cas où x meurt avant toute flèche de naissance :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\exists t, A_t^f = \emptyset \mid \mathcal{F}_s \right) &\geq \prod_{x \in A_s^f} \mathbb{P} \left(Y_1^x \leq \min(Y_\gamma^x, Y_{\xi_s^f(x)}^{x,1}, \dots, Y_{\xi_s^f(x)}^{x,2d}) \right) \\ &\geq \prod_{x \in A_s^f} \frac{1}{1 + \gamma + 2d\lambda_\infty \xi_s^f(x)} \\ &\geq \left(\frac{1}{1 + \gamma + 2d\lambda_\infty} \right)^{|A_s^f|}. \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence des martingales, $\mathbb{P}(\exists t, A_t^f = \emptyset \mid \mathcal{F}_s)$ tend presque sûrement vers $\mathbb{1}_{\{\exists t > 0, A_t^f = \emptyset\}}$. Donc, on a

$$\forall s \geq 0, A_s^f \neq \emptyset \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} |A_s^f| = \infty.$$

Par conséquent, si le processus survit, le nombre de particules vivantes tend vers l'infini. Nous pouvons donc écrire

$$\mathbb{P} \left(|A_t^f| \geq N \right) = \mathbb{P} \left(\{|A_t^f| \geq N\} \cap \{\forall s, A_s^f \neq \emptyset\} \right) + \mathbb{P} \left(\{|A_t^f| \geq N\} \cap \{\exists s, A_s^f = \emptyset\} \right).$$

D'où,

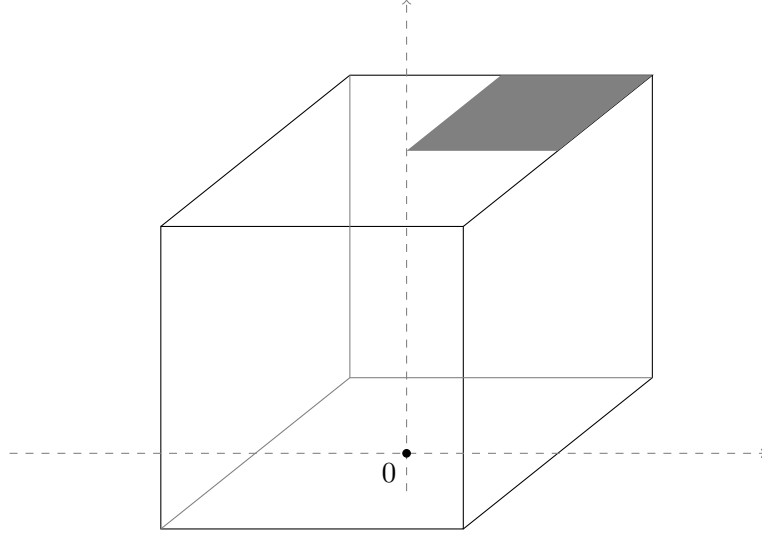
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(|A_t^f| \geq N \right) = \mathbb{P} \left(\forall s, A_s^f \neq \emptyset, \forall s \right).$$

En combinant les deux limites, nous obtenons le résultat souhaité. $\square$

Troisième étape : Nous voulons maintenant, à t fixé, contrôler le nombre de particules vivantes dans un coin (orthant) d'une boîte spatiale par rapport au nombre total de particules vivantes dans cette boîte spatiale.

♣ Outil : corrélations positives spatiales.

▷ **Exemple.** Un orthant est la généralisation d'un quadrant en dimension 2 (cf. figure 5.2).


 FIGURE 5.2 – Un orthant spatial de $[-L; L]^2$ (lemme 5.1.5).

À partir de maintenant, nous avons besoin de certaines symétries sur les configurations initiales :

Définition 5.1.4. Une configuration initiale $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ est dite acceptable si son support est fini et

$$\forall (x_1, \dots, x_d), \forall i \in \{1, \dots, d\}, f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d) = f(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_d).$$

▷ **Exemple.** La fonction $f = \mathbb{1}_{[-n, n]^d}$ est bien sûr acceptable. Pour d'autres exemples moins triviaux, il suffit de définir f sur une partie finie d'un des 2^d orthants de $\mathbb{Z}^d$ puis de la prolonger par symétries aux 2^{d-1} autres orthants.

Lemme 5.1.5. Pour tous $N, L \geq 0$, $t > 0$ et f acceptable telle que $\text{supp } f \subset (-L, L)^d$, on a

$$\mathbb{P} \left(|{}_L A_t^f \cap [0, L]^d| \leq N \right) \leq \mathbb{P} \left(|{}_L A_t^f| \leq 2^d N \right)^{2^{-d}}.$$

Démonstration. Soient $X_1, \dots, X_{2^d}$ représentant respectivement le nombre de particules vivantes dans les 2^d différents orthants de $(-L, L)^d$ au temps t (cf. figure 5.2). Par exemple, $X_1 = |{}_L A_t^f \cap [0, L]^d|$. On a

$$|{}_L A_t^f| \leq X_1 + \dots + X_{2^d},$$

d'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(|{}_L A_t^f| \leq 2^d N \right) &\geq \mathbb{P} \left(X_1 + \dots + X_{2^d} \leq 2^d N \right) \\ &\geq \mathbb{P} \left(\forall i \in \{1, \dots, 2^d\}, X_i \leq N \right). \end{aligned}$$

Les symétries de f nous permettent de dire que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{2^d}$ sont identiquement distribuées. Ce sont par ailleurs des fonctions croissantes des configurations sur $(-L, L)^d \times \{t\}$. Ainsi, grâce aux corrélations spatiales positives de la mesure $\mathbb{P}$ énoncées au théorème 4.1.1,

l'inégalité FKG s'applique et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|_L A_t^f| \leq 2^d N\right) &\geq \prod_{i \in \{1, \dots, 2^d\}} \mathbb{P}(X_i \leq N), \\ &\geq \left(\mathbb{P}(X_1 \leq N)\right)^{2^d}. \end{aligned}$$

Nous obtenons bien l'inégalité souhaitée. $\square$

Quatrième étape : La probabilité d'extinction peut être vue comme limite de la probabilité de ne pas avoir assez de particules vivantes sur le dessus d'une boîte spatio-temporelle.

Nous voulons un résultat similaire au lemme 5.1.6 mais nous ne voulons plus une limite en espace puis temps mais une limite sur une boîte spatio-temporelle.

Soit $B(L, T) = \{(x, s) \in \mathbb{Z}^d \times [0, T] : \|x\|_\infty = L\}$ le bord latéral de la boîte spatio-temporelle $[-L, L]^d \times [0, T]$, c'est-à-dire l'union des faces latérales (cf. figure 5.3), et $N^f(L, T)$ le nombre maximal de points dans $B(L, T) \cap |_L A^f$ vérifiant la propriété suivante : si (x, t) et (x, s) sont des points de même coordonnée spatiale alors $|t - s| \geq 1$.

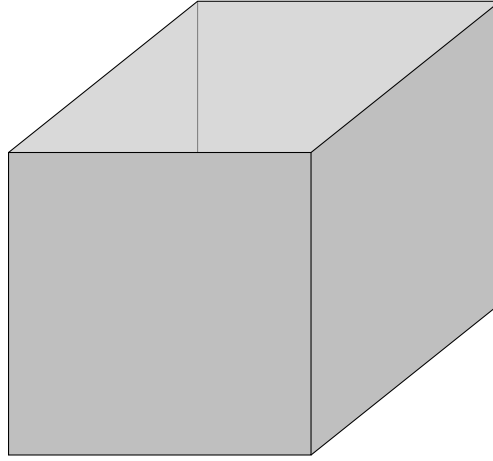


FIGURE 5.3 – $B(L, T)$ bords latéraux (lemme 5.1.6).

Lemme 5.1.6. Soient (L_j) et (T_j) deux suites croissantes vers l'infini. Pour tous $M, N > 0$ et $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ à support fini, on a

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(N^f(L_j, T_j) \leq M\right) \mathbb{P}\left(|_{L_j} A_{T_j}^f| \leq N\right) \leq \mathbb{P}\left(\exists s, \xi_s^f \equiv 0\right).$$

Nous procédons comme dans le lemme 5.1.3 mais cette fois nous le faisons sur la boîte spatio-temporelle en entier et non seulement sur le sommet ; nous devons donc aussi contrôler la sortie du processus par les côtés de la boîte.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}_{L, T}$ la tribu engendrée par les processus de Poisson sur la boîte $(-L, L)^d \times [0, T]$. Nous prouvons tout d'abord que, presque sûrement sur l'événement $\{N^f(L, T) + |_L A_T^f| \leq k\}$, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\exists s > T, A_s^f = \emptyset \mid \mathcal{F}_{L, T}\right) \geq \left(\frac{e^{-4\lambda_\infty d}}{1 + 2d\lambda_\infty}\right)^k.$$

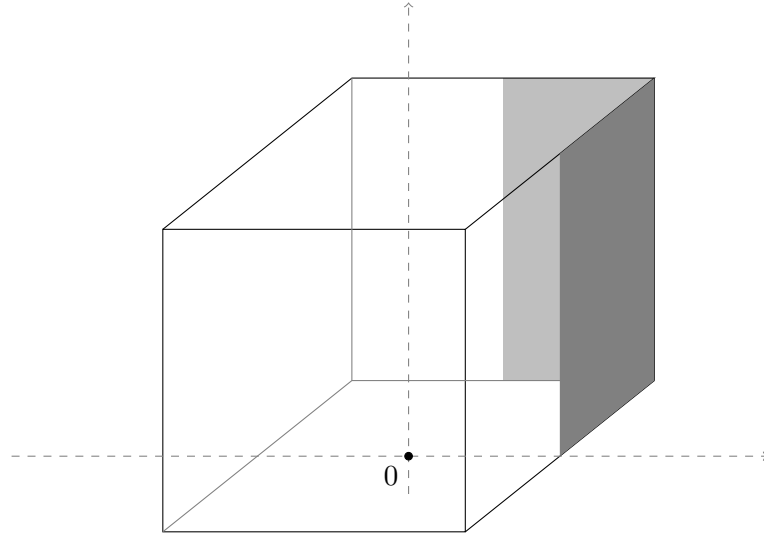


FIGURE 5.4 – Un orthant spatio-temporel $B^+(L, T)$ de $[-L; L]^2 \times [0, T]$ (lemme 5.1.7).

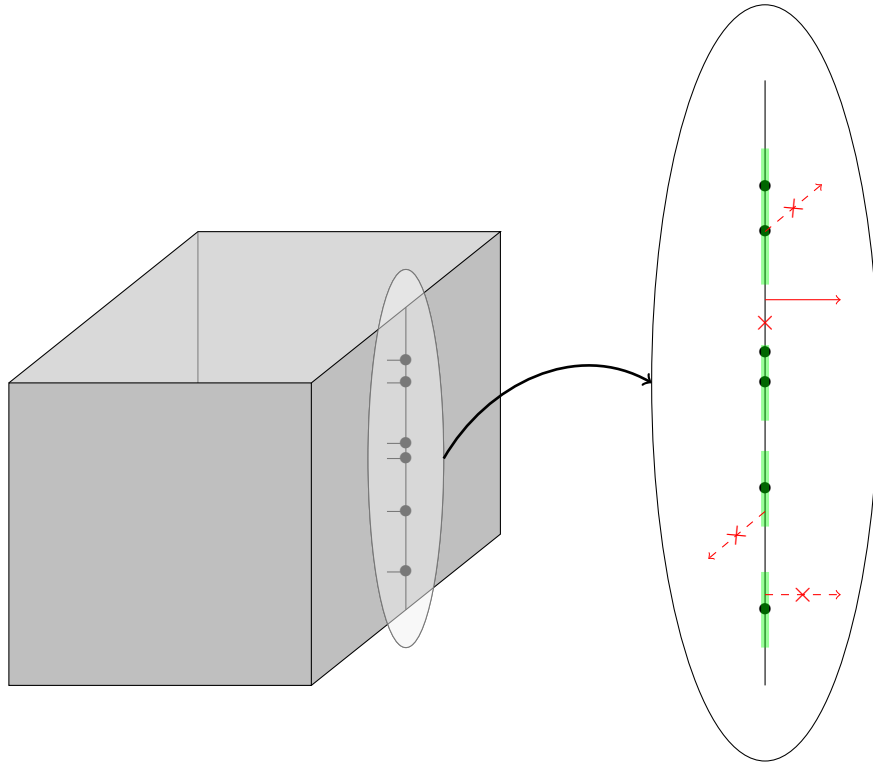


FIGURE 5.5 – Une ligne temporelle $\{x\} \times [0, L]$ (lemme 5.1.6).

Nous supposons que $N^f(L, T) + |{}_L A_T^f| \leq k$; par définition de ${}_L A^f$, cet événement est $\mathcal{F}_{L, T}$ -mesurable. Nous allons minorer la probabilité d'extinction du processus par celle de l'événement où aucun point de $B(L, T)$ ne contribue à la survie. Ceci est illustré par la figure 5.5.

Nous nous fixons $x \in {}_L A_T^f$; nous avons vu que la probabilité que x meure avant de donner naissance ou vieillir est minorée par

$$\frac{1}{1 + \gamma + 2d\lambda_\infty}.$$

Dans un bord latéral de la boîte, nous considérons une ligne temporelle $\{x\} \times [0, T]$ où $\|x\|_\infty = L$. On pourrait minorer la probabilité d'extinction du processus par celle de l'absence de flèches sortantes de la ligne temporelle mais cette quantité ($e^{2d\lambda_\infty T}$) tend vers 0 quand T tend vers l'infini ce qui ne nous fournit pas de minoration intéressante. Nous voulons donc être plus subtils et autoriser des flèches sortantes en des points (spatio-temporels) morts; pour cela, il faut assurer une mort avant une flèche après chaque particule vivante dans la ligne. La difficulté réside dans le fait que nous ne connaissons pas les instants effectifs de naissance des particules car nous travaillons conditionnellement à $\mathcal{F}_{L, T}$ qui ne contient pas les morts au site x ; nous allons donc délimiter deux zones :

- une première I autour des particules qui viennent de naître; nous y empêcherons les flèches sortantes,
- la deuxième I^c où les particules sont éventuellement vivantes mais où il n'y a pas de nouvelles naissances : nous y empêcherons les flèches sortantes avant les morts.

Soit j_x le cardinal d'un ensemble maximal de points sur cette ligne temporelle qui sont dans ${}_L A^f$ et vérifient la propriété que chaque paire est séparée par une distance de 1; et nous notons $\{(x, t_1), \dots, (x, t_{j_x})\}$ cet ensemble de points. Soit

$$I = \bigcup_{i=1}^{j_x} \{x\} \times (t_i - 1, t_i + 1).$$

L'ensemble I contient tous les points de la ligne temporelle qui sont dans ${}_L A^f$. Les quantités I , j_x , $(t_i)_{i=1, \dots, j_x}$ sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_{L, T}$ -mesurables.

La probabilité de l'événement $F_I = \{\text{il n'y a pas de flèche sortante de } I\}$ est minorée par $e^{-4d\lambda_\infty j_x}$ car la longueur de I est au plus $2j_x$.

Soient $I_1^c, \dots, I_{j_x}^c$ les intervalles, éventuellement vides, sur le complémentaire de I sur cette ligne temporelle. Pour $1 \leq l \leq j_x$, nous considérons

$$E_l = \{\text{il n'y a pas de flèche sortante de } I_l^c\} \\ \cup \{\text{il y a au moins une flèche sortante mais une mort avant } I_l^c\}.$$

Notons U la longueur de I^c ; nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_l \mid \mathcal{F}_{L, T}) &\geq \mathbb{P}\left(P^{\lambda_\infty}([0, U]) = 0\right)^{2d} + \mathbb{P}(Y_1^x \leq \min(Y_{2d\lambda_\infty}^x, u)) \\ &\quad \text{avec } Y_1 \rightsquigarrow \exp(1) \text{ et } Y_{2d\lambda_\infty} \rightsquigarrow \exp(2d\lambda_\infty) \text{ comme précédemment,} \\ &= e^{-2d\lambda_\infty U} + \int_0^U 2d\lambda_\infty e^{-2d\lambda_\infty s} (1 - e^{-s}) ds \\ &= 1 - \int_0^U 2d\lambda_\infty e^{-(1+2d\lambda_\infty)s} ds \geq \frac{1}{1 + 2d\lambda_\infty}. \end{aligned}$$

Les événements $(E_1, \dots, E_j, F_I)$ sont indépendants car ils concernent des parties disjointes de la représentation graphique. Par conséquent, la probabilité qu'aucun des points de la ligne tempo-

relle ne contribue à la survie du processus est au moins

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{pas de naissance depuis } \{x\} \times [0, L] | \mathcal{F}_{L,T}) &\geq \mathbb{P}(F_L | \mathcal{F}_{L,T}) \prod_{1 \leq l \leq j_x} \mathbb{P}(E_l | \mathcal{F}_{L,T}) \\ &\geq e^{-4d\lambda_\infty j_x} \left(\frac{1}{1 + 2d\lambda_\infty} \right)^{j_x}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists s > T, A_s^f = \emptyset | \mathcal{F}_{L,T}) &\geq \mathbb{P}(\forall x \in {}_L A_T^f, x \text{ meurt avant de donner naissance ou vieillir} | \mathcal{F}_{L,T}) \\ &\quad \times \mathbb{P}(\text{pas de naissance depuis les lignes temporelles latérales} | \mathcal{F}_{L,T}) \\ &\geq \left(\frac{1}{1 + \gamma + 2d\lambda_\infty} \right)^{|{}_L A_T^f|} \prod_{x: \|x\|_\infty = L} \left(\frac{e^{-4d\lambda_\infty}}{1 + 2d\lambda_\infty} \right)^{j_x} \\ &\geq \left(\frac{e^{-4d\lambda_\infty}}{1 + \gamma + 2d\lambda_\infty} \right)^k \text{ sur } \{N^f(L, T) + |{}_L A_T^f| \leq k\}, \end{aligned}$$

car $N^f(L, T) = \sum_{x \in B(L, T)} j_x$. Nous en déduisons comme précédemment que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N^f(L_j, T_j) + |{}_{L_j} A_{T_j}^f| \leq k) = \mathbb{P}(\exists s, \xi_s^f \equiv 0).$$

Les variables aléatoires $N^f(L_j, T_j)$ et $|{}_{L_j} A_{T_j}^f|$ sont des fonctions croissantes des configurations sur $[-L_j, L_j]^d \times [0, T_j]$. Donc, grâce aux corrélations spatio-temporelles positives de la mesure $\mathbb{P}$, nous pouvons appliquer l'inégalité FKG et nous obtenons, pour tous M, N ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N^f(L_j, T_j) + |{}_{L_j} A_{T_j}^f| \leq M + N) &\geq \mathbb{P}(N^f(L_j, T_j) \leq M \text{ et } |{}_{L_j} A_{T_j}^f| \leq N) \\ &\geq \mathbb{P}(N^f(L_j, T_j) \leq M) \mathbb{P}(|{}_{L_j} A_{T_j}^f| \leq N). \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi le résultat annoncé. $\square$

Cinquième étape : Nous contrôlons le nombre de particules vivantes dans un orthant des faces latérales d'une boîte spatio-temporelle par rapport au nombre total sur les faces latérales.

Soit $B_+(L, T) = \{(x, t) \in \mathbb{Z}^d \times [0, T] : x_1 = +L, x_i \geq 0 \text{ pour } 2 \leq i \leq d\}$; $B_+(L, T)$ est un des $2d2^{d-1}$ orthants du bord latéral de la boîte spatio-temporelle (cf. figure 5.4). Soit $N_+^f(L, T)$ le nombre maximal de points dans $B_+(L, T) \cap {}_L A^f$ vérifiant la propriété suivante : si (x, t) et (x, s) sont des points de même coordonnée spatiale alors $|t - s| \geq 1$.

Lemme 5.1.7. *Pour tous L, M, T et f acceptable avec $\text{supp } f \in (-L, L)^d$, on a*

$$\mathbb{P}(N_+^f(L, T) \leq M)^{d2^d} \leq \mathbb{P}(N^f(L, T) \leq Md2^d).$$

♣ Outil : corrélations spatio-temporelles positives.

Démonstration. Soient $X_1, \dots, X_{d2^d}$ les nombres respectifs de points de $B(L, T) \cap {}_L A^f$ dans les différents orthants de la boîte spatio-temporelle. Par exemple, $X_1 = N_+^f(L, T)$. Les symétries de f nous permettent de dire que ces variables sont identiquement distribuées et ce sont par ailleurs des fonctions croissantes des configurations sur $[-L, L]^d \times [0, t]$. Donc, grâce aux corrélations spatio-temporelles positives de la mesure $\mathbb{P}$, nous pouvons appliquer l'inégalité FKG de la même manière que dans le lemme 5.1.5. $\square$

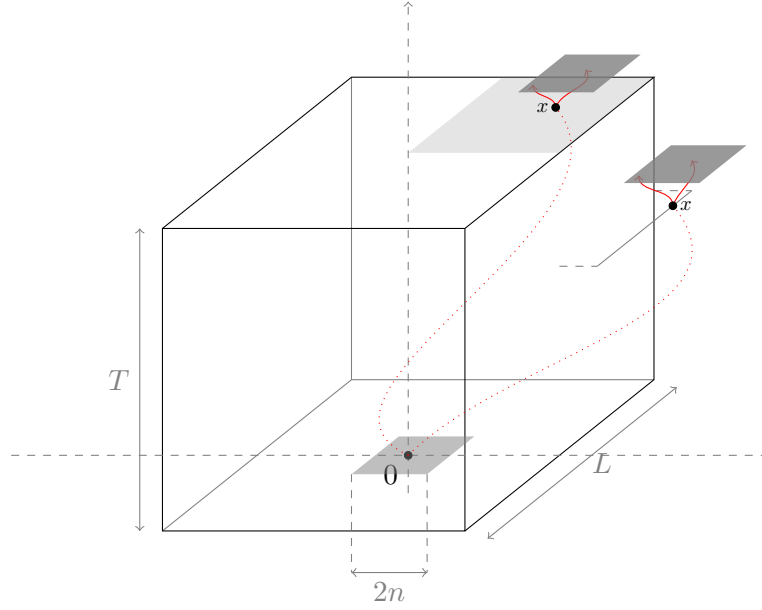


FIGURE 5.6 – Les conditions (C1) et (C2) (théorème 5.1.8).

Sixième étape : Nous sommes maintenant en mesure de construire de « bons événements », *i.e.* des événements traduisant la présence de beaucoup de particules vivantes bien placées, sur une boîte spatio-temporelle finie, sous l'hypothèse surcritique.

Théorème 5.1.8. *Supposons que (ξ_t) soit surcritique. Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions acceptables qui converge vers $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ périodique non nulle. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n, L, T > 0$ tels que*

$$\mathbb{P} \left(\exists x \in [0, L]^d \text{ tel que }_{L+2n} \xi_{T+1}^{f_n} \geq T_x \circ f_n \right) > (1 - \varepsilon) \quad (\text{C1})$$

et

$$\mathbb{P} \left(\begin{array}{l} \exists x \in \{L+n\} \times [0, L]^{d-1} \text{ et } t \in [0, T) \\ \text{tels que }_{L+2n} \xi_{t+1}^{f_n} \geq T_x \circ f_n \end{array} \right) > (1 - \varepsilon). \quad (\text{C2})$$

Sans perte de généralité, $\text{supp } f_n = [-n, n]^d$; pour simplifier les idées, on peut penser à $f_n = \mathbb{1}_{[-n, n]^d}$.

Le théorème 5.1.8 est illustré par la figure 5.6.

Démonstration. Nous allons combiner les propositions précédentes pour construire une grosse boîte spatio-temporelle telle que, avec grande probabilité, à partir d'une assez grande configuration initiale, nous obtenons assez de points vivants dans un coin du bord supérieur de la boîte à un certain moment. Puis, toujours avec grande probabilité, au moins un de ces points engendrera une grande configuration (en une unité de temps), ce qui nous permettra de redémarrer le processus. Ceci correspond aux points 1, 2, 3 et 4 de la démonstration ci-dessous. Nous allons ensuite faire la même chose sur un coin latéral de la boîte pour pouvoir redémarrer le processus mais spatialement décalé. Ceci correspond aux points 2bis, 3bis et 4 de la démonstration ci-dessous.

1. **Choix de n :** Nous cherchons tout d'abord une configuration initiale (f_n) permettant de survivre avec grande probabilité. Soit $\varepsilon > 0$; grâce au lemme 5.1.1, nous pouvons choisir n assez grand tel que

$$\mathbb{P}(\forall t, \xi_t^{f_n} \neq 0) > 1 - \varepsilon^2.$$

2. **Choix de N** : Nous voulons que le processus contienne assez de particules vivantes (N) dans un orthant du haut de la boîte spatio-temporelle pour qu'au moins l'une d'elles engendre f_n en une unité de temps. Soit une particule $x \in \mathbb{Z}^d$ d'âge k ; la probabilité que cette particule engendre f_n en une unité de temps est au moins $\mathbb{P}(T_x \circ (\xi_1^{k\delta_0} \geq f_n))$. Cette quantité est minorée par $\alpha > 0$, indépendamment de x et k . Nous choisissons alors N' suffisamment grand pour que l'événement « N' tentatives indépendantes de l'événement précédent génèrent au moins un succès » soit de probabilité au moins $1 - \varepsilon$, c'est-à-dire :

$$N' \text{ tel que } 1 - (1 - \alpha)^{N'} \geq \varepsilon.$$

Choisissons ensuite N assez grand pour assurer que tout ensemble de N points de $\mathbb{Z}^d$ contienne un sous-ensemble d'au moins N' points séparés deux à deux d'une distance supérieure à $2n + 1$. De cette manière, les tentatives d'engendrement seront indépendantes.

3. **Choix L_j, T_j** : Nous avons établi que nous souhaitions au moins N particules vivantes dans un orthant $\{T\} \times [0, L]^d$ du haut de la boîte ; nous voulons donc maintenant choisir L, T tels que

$$\mathbb{P}\left(|_L A_T^{f_n} \cap [0, L]^d| > N\right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Pour pouvoir utiliser le lemme 5.1.5, nous devons contrôler d'abord le nombre total de particules vivantes sur le haut de la boîte. Par le lemme 5.1.3 et le contrôle du point 1, nous obtenons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|_L A_t^{f_n}| > 2^d N\right) > 1 - \varepsilon^2 > 1 - \varepsilon.$$

Or, la quantité $\mathbb{P}\left(|_L A_t^{f_n}| > 2^d N\right)$ est continue par rapport à t et tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Donc, il existe des suites (L_j) et (T_j) croissantes vers l'infini telles que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(|_{L_j} A_{T_j}^{f_n}| > 2^d N\right) = 1 - \varepsilon.$$

- 2bis. **Choix de M** : Il s'agit d'un choix similaire au choix 2, mais dans le but de redémarrer spatialement décalé. Pour satisfaire (C2), nous voulons suffisamment de particules vivantes sur un orthant spatio-temporel de la boîte pour qu'au moins l'une d'entre elles engendre $T_{-ne_1} \circ f_n$ en une unité de temps. Comme précédemment, nous choisissons donc M assez grand pour que l'événement « M tentatives indépendantes de l'événement $\left\{T_y \circ \left(\xi_1^{k\delta_0} \geq T_{-ne_1} \circ f_n\right)\right\}$, dont la probabilité est minorée par $\beta > 0$ indépendamment de y et k , contiennent au moins un succès », ait une probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$, c'est-à-dire

$$M' \text{ tel que } 1 - (1 - \beta)^{M'} \geq \varepsilon,$$

où $_{n+1}\xi$ désigne ici le processus restreint à la boîte $[0, 2n] \times [-n, n]^d$. Nous choisissons ensuite M suffisamment grand pour que tout ensemble de M points de $\mathbb{Z}^d$ contienne un sous-ensemble d'au moins M' points séparés deux à deux d'une distance supérieure à $2n + 1$; de cette manière les tentatives d'engendrement seront indépendantes.

- 3bis. **Choix de L, T** : Nous avons établi que nous souhaitions au moins M particules vivantes dans un orthant ; nous voulons donc L, T tels que $\mathbb{P}\left(N_+^f(L, T) > M\right) \geq 1 - \varepsilon$. Pour pouvoir utiliser le lemme 5.1.7, nous voulons contrôler le nombre total de particules vivantes sur toute la frontière latérale de la boîte. En appliquant le lemme 5.1.6 et les contrôles des points 1 et 3, nous obtenons

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(N^{f_n}(L_j, T_j) \leq M d 2^d\right) \leq \varepsilon,$$

donc, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\mathbb{P}\left(N^{f_n}(L_{j_0}, T_{j_0}) > Md2^d\right) > 1 - \varepsilon.$$

Posons $L = L_{j_0}, T = T_{j_0}$; nous appliquons maintenant les lemmes 5.1.5 et 5.1.7 :

$$\mathbb{P}\left(|_L A_T^{f_n} \cap [0, L)^d| > N\right) \geq 1 - \varepsilon^{2^{-d}},$$

et

$$\mathbb{P}\left(N_+^{f_n}(L, T) > M\right) \geq 1 - \varepsilon^{2^{-d}/d}.$$

4. En utilisant l'indépendance des processus de Poisson sur des régions spatio-temporelles disjointes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\exists x \in [0, L)^d \text{ tel que } {}_{L+2n}\xi_{T+1}^{f_n} \supset T_x \circ f_n\right) \\ & \geq \mathbb{P}\left(|_L A_T^{f_n} \cap [0, L]^d| > N \text{ et l'un de ces points engendre } f_n\right) \\ & \geq (1 - \varepsilon^{2^{-d}})(1 - \varepsilon) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\exists x \in \{L + n\} \times [0, L)^{d-1} \text{ et } t \in [0, T) \text{ tels que } {}_{L+2n}\xi_{t+1}^{f_n} \supset T_x \circ f_n\right) \\ & \geq \mathbb{P}\left(N_+^{f_n}(L, T) > M \text{ et l'un de ces points engendre } f_n\right) \\ & \geq (1 - \varepsilon^{2^{-d}/d})(1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

En prenant initialement ε^{2^d} au lieu de ε , nous trouvons les résultats annoncés. $\square$

5.2 La bonne condition spatio-temporelle finie

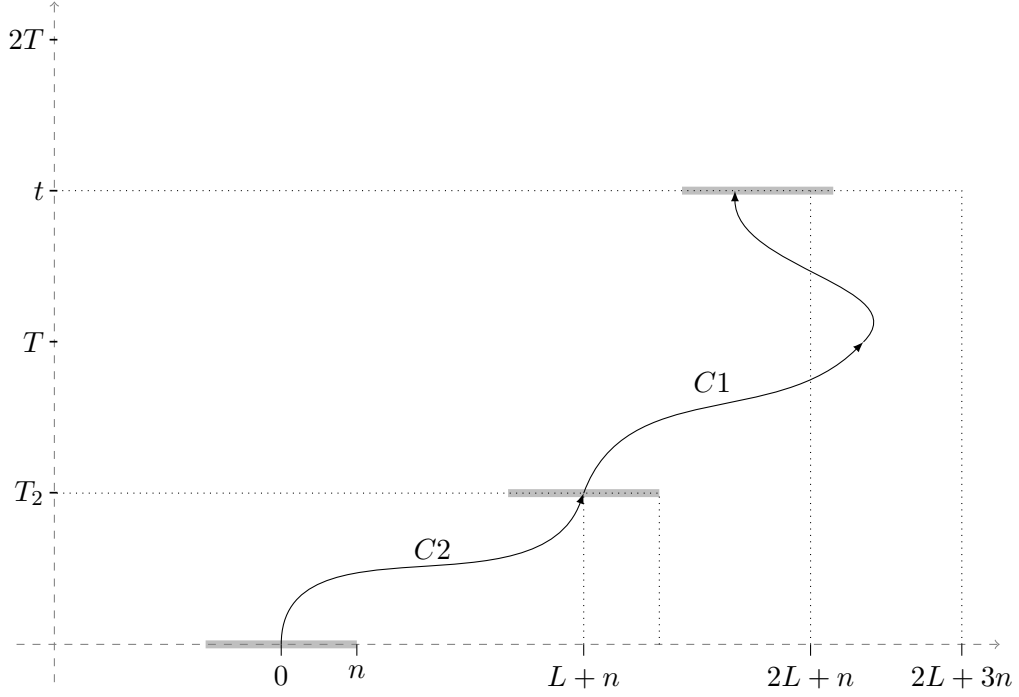
Dans la section précédente, nous avons fait l'hypothèse d'un processus surcritique et nous avons construit de bons événements (dépendant de ce qu'il se passe dans une boîte finie) réalisés avec grande probabilité. Si nous avons qualifié ces événements de « bons » c'est parce qu'ils satisfont la propriété inverse : s'ils sont réalisés avec grande probabilité, nous pouvons affirmer que le processus est surcritique. Ainsi, le caractère surcritique peut être déterminé en ne regardant que les processus de Poisson sur une boîte finie, sans avoir besoin de connaître le processus entier. Dans cette section, nous supposons que les conditions (C1) et (C2) sont vérifiées et nous prouvons que le processus survit avec probabilité strictement positive en construisant un couplage avec une percolation orientée surcritique.

Pour construire cette percolation orientée, il faut que nos événements construits « branchent ». Pour cela, nous les travaillons encore un peu pour obtenir des événements équivalents mieux dirigés.

Nous combinons d'abord les conditions (C1) et (C2) pour obtenir un événement de bloc garantissant l'existence d'un chemin bien orienté.

Lemme 5.2.1. *Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions acceptables de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{N}$ convergeant vers $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ périodique non nulle. Supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n, L, T \in \mathbb{N}^*$ tels que les conditions (C1) et (C2) sont satisfaites. Alors*

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{l} \exists x \in [L + n, 2L + n] \times [0, 2L)^{d-1} \text{ et } t \in [T, 2T) \\ \text{tels que } {}_{2L+3n}\xi_t^{f_n} \geq T_x \circ f_n \end{array}\right) > (1 - \varepsilon). \quad (\text{C})$$


 FIGURE 5.7 – (C1) et (C2) $\Rightarrow$ (C) (lemme 5.2.1).

Démonstration. L'idée est d'utiliser (C2) pour engendrer (avec grande probabilité) f_n translaté en espace mais pas nécessairement en temps, puis d'utiliser le condition (C1) avec la propriété de Markov sur le processus redémarré pour engendrer f_n translaté en temps mais pas nécessairement en espace.

Pour $n, L, T \in \mathbb{N}^*$, définissons $E_1^{n,L,T}$ et $E_2^{n,L,T}$ les événements apparaissant respectivement dans les conditions (C1) et (C2) :

$$E_1^{n,L,T} = \left\{ \exists x \in [0, L)^d \text{ tel que }_{L+2n} \xi_T^{f_n} \geq T_x \circ f_n \right\},$$

$$E_2^{n,L,T} = \left\{ \exists x \in \{L+n\} \times [0, L)^{d-1} \text{ et } t \in [0, T) \text{ tels que }_{L+2n} \xi_t^{f_n} \geq T_x \circ f_n \right\},$$

et posons X_2 et T_2 les variables aléatoires définies par l'événement $E_2^{n,L,T}$. Soit $\varepsilon > 0$ et n, L, T donnés par le théorème 5.1.8 tels que $\mathbb{P}(E_1^{n,L,T}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\mathbb{P}(E_2^{n,L,T}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Définissons $E^{n,L,T}$ l'événement apparaissant dans la condition (C) :

$$E^{n,L,T} = \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in [L+n, 2L+n] \times [0, 2L)^{d-1} \text{ et } t \in [T, 2T) \\ \text{tels que }_{2L+3n} \xi_t^{f_n} \geq T_x \circ f_n \end{array} \right\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E^{n,L,T}) &\geq \mathbb{P} \left(\left(\xi_s^{f_n} \right)_{s \geq 0} \in E_2^{n,L,T} \text{ et } \left(\xi_{T_2+s}^{f_n} \right)_{s \geq 0} \in E_1^{n,L,T} \right) \\ &\geq \mathbb{P} \left(\left(\xi_s^{f_n} \right)_{s \geq 0} \in E_2^{n,L,T} \right) \mathbb{P} \left(\left(\xi_s^{g_n} \right)_{s \geq 0} \in E_1^{n,L,T} \right) \\ &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^2. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Dans l'équation (5.2.1), g_n est l'état du PCV au temps d'arrêt T_2 où toutes les particules de la boîte $X_2 + [-n, n]^d$ sont vivantes (conditionnellement à E_2) ; l'inégalité vient de la propriété de Markov forte appliquée au temps d'arrêt T_2 ainsi que de la monotonie et de l'invariance spatiale du modèle. $\square$

Dans le lemme précédent, nous partons d'une configuration f_n à un temps 0 déterministe et nous obtenons au moins la même configuration à un temps $t \in [T, 2T[$. Pour pouvoir repartir de cette nouvelle configuration (dans l'idée d'empiler notre événement de bloc) il faut s'être permis de partir à un temps non déterministe (bien que dans un intervalle de temps fixé). Nous voulons donc nous permettre une « marge » sur l'instant de départ, tout en conservant une « bonne direction » et une « bonne avancée ». Nous exprimons à partir de maintenant les événements suivants en terme de chemin ouvert (orienté) dans la représentation graphique pour une meilleure visualisation.

Pour établir la suite du théorème 5.0.3, nous prenons maintenant pour tout $n \geq 0$, $f_n = \mathbb{1}_{[-n, n]^d}$.

Lemme 5.2.2. *Supposons que (C) est satisfaite. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n, a, b \in \mathbb{N}^*$ avec $n < a$ tels que si $(x, s) \in [-a, a]^d \times [0, b]$ alors*

$$\mathbb{P} \left(\begin{array}{l} \exists (y, t) \in [a, 3a] \times [5b, 6b] \text{ et des chemins ouverts} \\ \text{dans } [-5a, 5a]^d \times [0, 6b] \text{ partant de } (x, s) + [-n, n]^d \times \{0\} \\ \text{touchant tous les points dans } (y, t) + [-n, n]^d \times \{0\} \end{array} \right) > 1 - \varepsilon. \quad (\text{B1})$$

Démonstration. Nous référons le lecteur à la preuve de la proposition 2.22 de [Lig99] ou directement à la preuve initiale de [BG90]. L'idée principale est d'utiliser astucieusement de façon répétée le lemme précédent pour guider le chemin. Les arguments essentiels sont la propriété de Markov forte satisfaite par (ξ_t) et le fait que nous ayons forcé les chemins à rester dans des boîtes de façon à ce que les processus de Poisson intervenant vivent dans des intervalles disjoints. $\square$

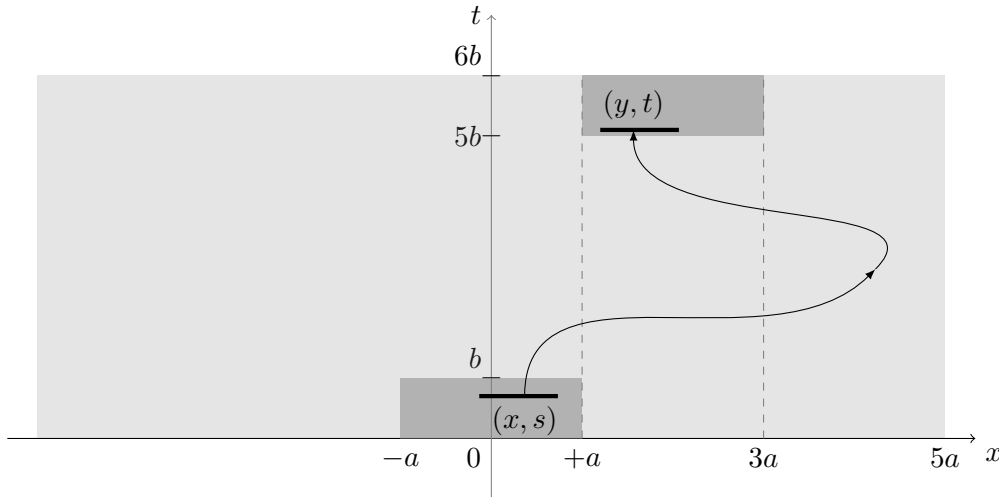


FIGURE 5.8 – L'événement de bloc du lemme 5.2.2 (condition (B1)).

En utilisant les lemmes 5.1.8, 5.2.1 et 5.2.2 nous obtenons le sens direct du théorème 5.0.3. Nous cherchons maintenant à montrer la réciproque.

L'événement bloc précédent est un bon candidat pour être la brique élémentaire de notre percolation orientée macroscopique. Il implique l'existence d'un chemin dans une bonne direction

branchante. Il possède la même marge au départ et à l'arrivée, ce qui permettra de redémarrer. Nous pouvons dès à présent remarquer que nous aurons affaire à une renormalisation dynamique : la présence d'un chemin dépendra du point qu'on a réussi à atteindre jusqu'alors.

Définition 5.2.3. *Soient*

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \text{ tel que } j + k \text{ pair}\} \\ \mathcal{E} &= \{(j, k) \rightarrow (j', k + 1) \text{ avec } |j - j'| = 1\}\end{aligned}$$

les ensembles de sites et d'arêtes du réseau macroscopique de la percolation orientée. La coordonnée j est interprétée comme spatiale et la coordonnée k comme temporelle.

Pour $(j, k) \in \mathcal{L}$, l'événement de bloc du lemme 5.2.2 nous mène à introduire :

$$\mathcal{S}_{j,k} = [a(2j - 1), a(2j + 1)] \times [-a, a]^{d-1} \times [b5k, b(5k + 1)],$$

les zones grisées correspondant aux départs et arrivées des chemins et

$$\mathcal{A}_{j,k} = [a(2j - 5), a(2j + 5)] \times [-a, a]^{d-1} \times [b5k, b5(k + 1)],$$

la zone dans laquelle nous cherchons un chemin de $\mathcal{S}_{j,k}$ vers $\mathcal{S}_{j+1,k+1}$.

Avec ces nouvelles notations, l'événement (B1) correspond bien à l'existence d'un chemin de $\mathcal{S}_{0,0}$ à $\mathcal{S}_{1,1}$ restant dans $\mathcal{A}_{0,0}$.

Nous voulons que l'existence d'un chemin entre $\mathcal{S}_{j,k}$ et $\mathcal{S}_{j+1,k+1}$ (restant dans $\mathcal{A}_{j,k}$) corresponde à l'ouverture de l'arête $(j, k) \rightarrow (j + 1, k + 1)$. Nous nous intéressons à la dépendance entre les arêtes de la percolation orientée que cette construction va créer.

À k fixé, les arêtes entre le niveau k et le niveau $k + 1$ sont spatialement dépendantes à distance 4 (car nous cherchons les chemins uniquement dans les zones $(\mathcal{A}_{j,k})_{j,k}$). Ce type de dépendance n'est pas difficile à gérer.

Supposons que toutes les arêtes jusqu'au niveau k sont construites et tentons de construire celles au niveau suivant. Supposons que l'on veuille construire les arêtes sortant du site $(j + 1, k + 1)$. Il faut d'abord savoir d'où l'on part pour chercher un nouveau chemin ; en effet, il peut y avoir plusieurs chemins, comme par exemple le bleu et le rouge dans la figure 5.9. Nous choisirons par convention le dernier atteint (en temps, puis en espace selon un ordre fixé s'il y a égalité en temps) : le chemin bleu dans la figure 5.9.

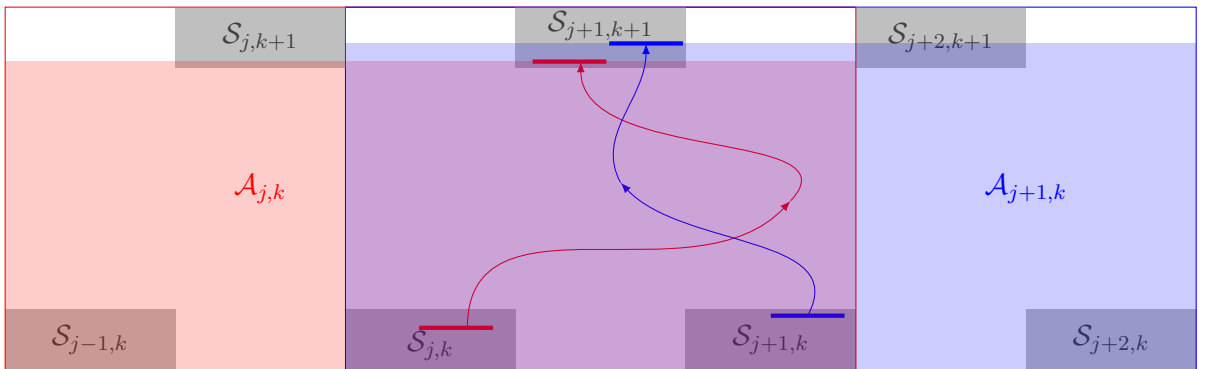


FIGURE 5.9 – Zones découvertes par la recherche d'un chemin.

Une fois que l'on connaît la configuration de laquelle on part pour chercher un chemin, il faut que l'existence de chemin soit toujours très probable (nous avons construit le bloc (B1) dans

ce but) ; pour cela, il faut que la zone dans laquelle on recherche le nouveau chemin n'ait pas encore été explorée par les constructions précédentes. Or, comme nous pouvons le voir dans la figure 5.10, la construction de nos blocs est pour l'instant telle que la zone de recherche d'un chemin au niveau k chevauche la zone de recherche d'un chemin au niveau $k+1$. Sur la figure par exemple, lorsqu'on recherche des arêtes sortantes du site vert, on regarde d'abord la zone en pointillés qui a déjà été explorée au niveau inférieur lors de la construction du chemin bleu. Nous ne pouvons donc pas assurer que les probabilités d'existence de nos futures arêtes soient très proches de 1. Nous pouvons voir que la zone de chevauchement est de largeur $8a$.

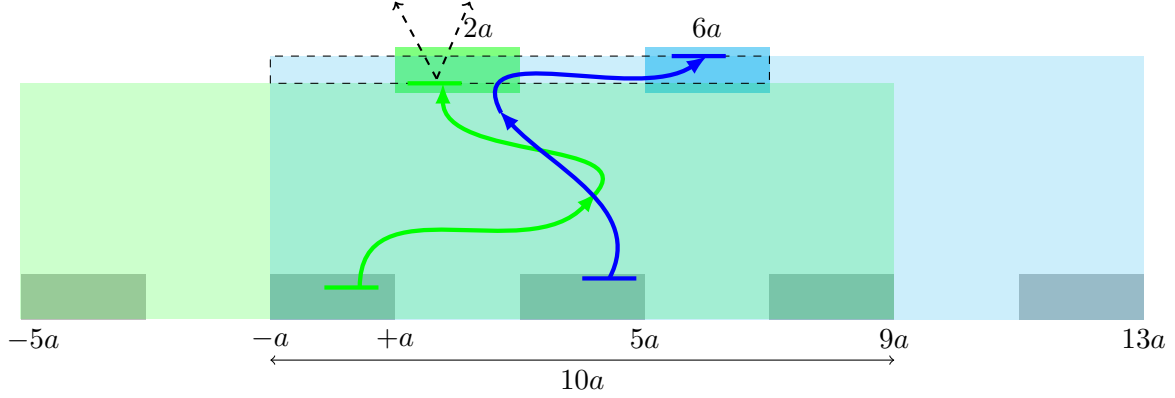


FIGURE 5.10 – Chevauchement des zones d'exploration entre deux niveaux différents.

Nous sommes donc amenés à construire de nouveaux événements de blocs comme empilements diagonaux de l'événement de bloc (B1). À partir d'un empilement de 4 blocs, nous remarquons que les zones d'exploration entre deux niveaux sont strictement disjointes.

Posons

$$\mathcal{S}_{j,k}^4 = \mathcal{S}_{4j,4k}, \quad \mathcal{A}_{j,k}^4 = \bigcup_{i=0}^3 \mathcal{A}_{4j+i,4k+i} \text{ et } \tilde{\mathcal{A}}_{j,k}^4 = \bigcup_{i=0}^3 \mathcal{A}_{4j-i,4k+i}.$$

Grâce à l'inégalité FKG, nous pouvons toujours rendre l'existence de chemins dans ces blocs diagonaux très probables :

Lemme 5.2.4. *Supposons que la condition (B1) est vérifiée. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n, a, b \in \mathbb{N}^*$ avec $n < a$ tels que, pour tous $(j, k) \in \mathcal{L}$, si $(x, s) \in \mathcal{S}_{j,k}^4$ alors*

$$\mathbb{P} \left(\begin{array}{c} \exists (y, t) \in \mathcal{S}_{j+1,k+1}^4 \text{ et des chemins dans } \mathcal{A}_{j,k}^4 \text{ et partant de} \\ (x, s) + [-n, n]^d \times \{0\} \text{ touchant tous les points dans } (y, t) + [-n, n]^d \times \{0\} \end{array} \right) > 1 - \varepsilon \quad (\text{B4})$$

et (événement dans l'autre direction)

$$\mathbb{P} \left(\begin{array}{c} \exists (y, t) \in \mathcal{S}_{j-1,k+1}^4 \text{ et des chemins dans } \tilde{\mathcal{A}}_{j,k}^4 \text{ partant de} \\ (x, s) + [-n, n]^d \times \{0\} \text{ touchant tous les points dans } (y, t) + [-n, n]^d \times \{0\} \end{array} \right) > 1 - \varepsilon. \quad (\text{B}\tilde{4})$$

Les événements du lemme 5.2.4 sont illustrés dans la figure 5.11.

Nous nous convainquons, grâce à la figure 5.12, qu'à un niveau k fixé, les arêtes seront dépendantes à distance 1, et qu'entre deux niveaux, les explorations sont indépendantes (les zones précédemment chevauchantes sont maintenant distantes de $c > 0$ sur la figure 5.12).

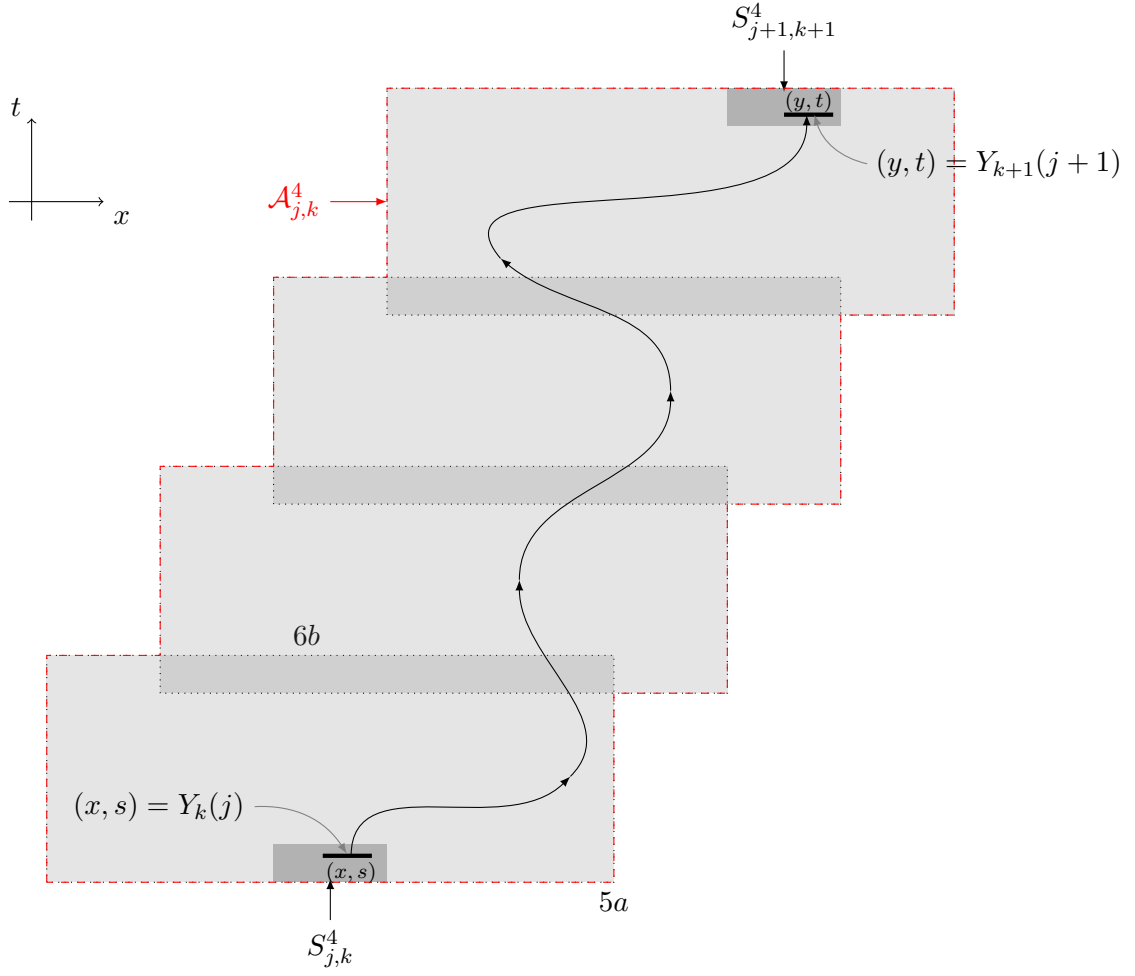


FIGURE 5.11 – L'événement de bloc du lemme 5.2.4 (condition (B4)).

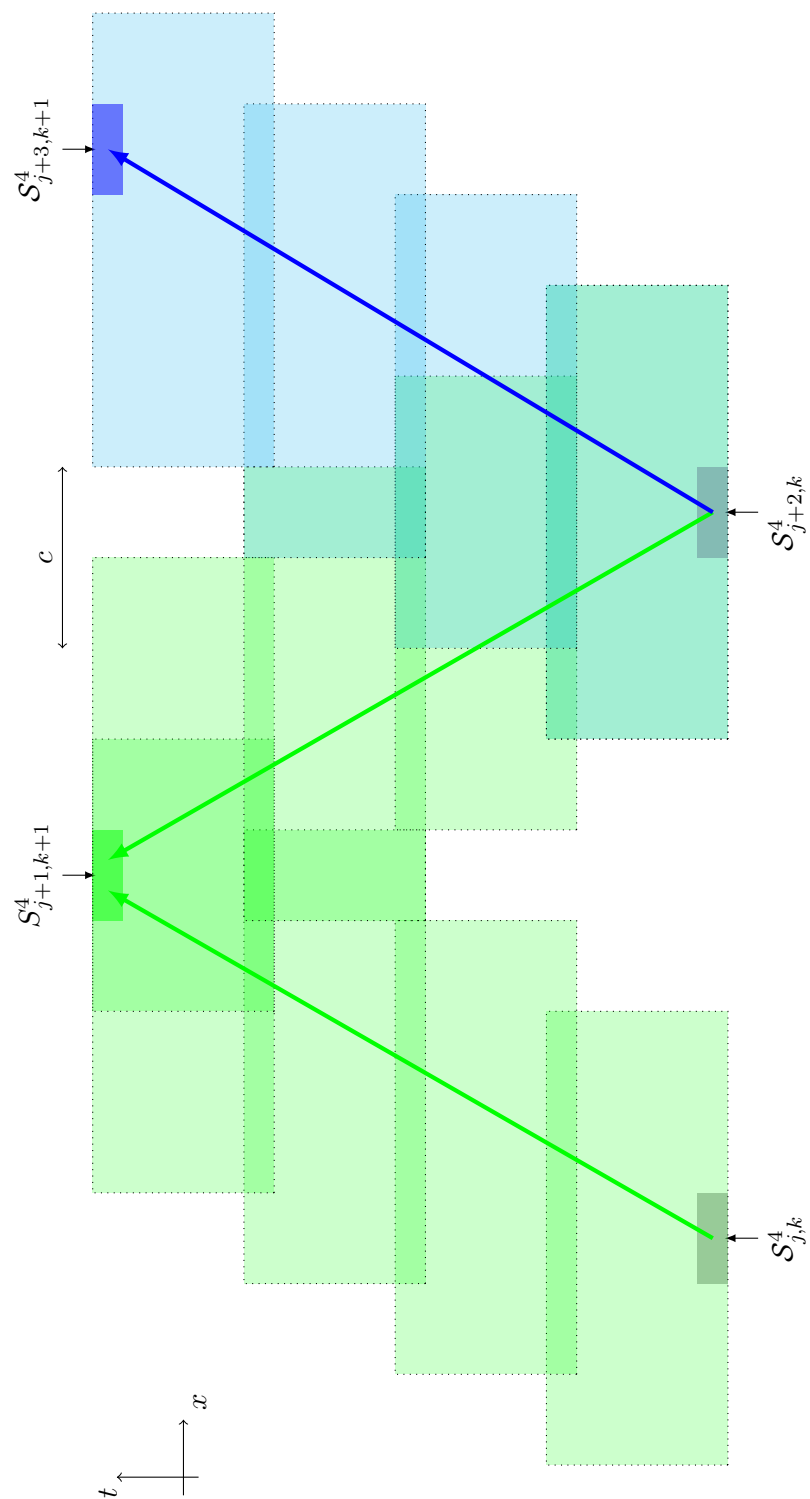


FIGURE 5.12 – Zones d'exploration des nouveaux blocs.

5.3 Le couplage

Rappelons l'idée de notre construction. Si l'événement de la figure 5.11 est réalisé, nous avons envie de dire qu'il y a une arête ouverte entre le cube grisé de départ et le cube grisé d'arrivée. Mais cet événement dépend du point initial (x, s) dans le premier cube, et la prochaine étape de la construction dépendra de la position du point d'arrivée (y, t) , qui sera le lieu du nouveau départ. Pour cette raison, nous devons faire une renormalisation dynamique : nous allons ainsi devoir définir une percolation orientée par induction.

Rappelons que le réseau macroscopique du processus de renormalisation est $(\mathcal{L}, \mathcal{E})$ où

$$\mathcal{L} = \{(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \text{ tel que } j + k \text{ pair}\}$$

sont les sites du réseau et

$$\mathcal{E} = \{(j, k) \rightarrow (j', k + 1) \text{ avec } |j - j'| = 1\}$$

sont les arêtes du réseau.

Comme la percolation macroscopique vit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, à un niveau k fixé, nous encoderons une arête e par son extrémité j et sa direction $+$ ou $-$.

Théorème 5.3.1. *Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que les conditions (B4) et (B4̃) sont satisfaites et notons n, a, b les paramètres donnés par le lemme 5.2.4. Alors, il existe un champ aléatoire $(W_{j,u}^k)_{k \geq 1, j \in \mathbb{Z}, u = \pm}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ et une filtration $(\mathcal{G}_k)_{k \geq 1}$ tels que :*

1. $\forall k \geq 1, \forall j \in \mathbb{Z} \quad W_{j,u}^k \in \mathcal{G}_k,$
2. $\forall k \geq 0, \forall j \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}[W_{j,u}^{k+1} = 1 | \mathcal{G}_k \vee \sigma(W_{j',u}^{k+1}, |j - j'| \geq 2)] \geq 1 - \varepsilon,$
3. *s'il existe un chemin ouvert de $(0, 0)$ vers (j, k) dans la percolation orientée W alors $\xi_{30bk}^{f_n} \neq 0$,*

où $\sigma(W_{j,u}^{k+1}, |j - j'| \geq 2)$ est la tribu engendrée par les variables aléatoires $W_{j,u}^{k+1}$, avec $|j - j'| \geq 2$; et $f_n = \mathbb{1}_{[-n, n]^d}$.

Démonstration. Nous considérons un processus de contact avec vieillissement (ξ_t) avec la configuration initiale $f_n = \mathbb{1}_{[-n, n]^d}$.

Une arête ouverte dans le réseau macroscopique sera associée à l'existence d'un bon chemin ouvert dans le réseau microscopique de manière à ce que la survie de la percolation orientée dans $(\mathcal{L}, \mathcal{E})$ entraîne la survie du PCV correspondant.

Nous voulons définir des variables aléatoires $(W_e^k)_{k \geq 1, j \in \mathbb{Z}, u = \pm}$ encodant les états (ouvert ou fermé) des arêtes orientées du réseau macroscopique. Pour cela, nous voulons enregistrer l'information des points $Y_{j,k} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^+$ du réseau microscopique atteints au niveau k ; autrement dit, s'il existe un chemin ouvert dans $(W_e^k)_{k \geq 1, j \in \mathbb{Z}, u = \pm}$ depuis l'origine jusqu'au site (j, k) , alors on a un chemin ouvert depuis l'origine microscopique jusqu'à $Y_{j,k}$ et on cherche depuis $Y_{j,k}$ un chemin infini.

Nous voulons définir $Z_k(j) = (W_{j,+}^k, W_{j+2,-}^k, Y_{j,k})$ pour $(j, k) \in \mathcal{L}$, avec $W_{j,u}^k$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ et $Y_{j,k}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^+ \cup \{\dagger\}$ où $\dagger$ représente un point cimetière. Nous aurons besoin de $(B_{j,u}^k)_{k \geq 1, j \in \mathbb{Z}, u = \pm}$ variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \varepsilon$ (et indépendantes du reste de la construction).

Nous définissons le processus par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ (la construction est illustrée par figure 5.13) :

- $k = 0$: soit $Y_{0,0} = (0, 0)$ et $Y_{i,0} = \dagger$ pour $i \neq 0$. Cela traduit le fait que toutes les particules de $[-n, n]^d$ sont vivantes au temps 0 (et seulement elles).

- $k \Rightarrow k+1$: supposons le processus $(Z_m(j))_{j,m}$ construit pour $j \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq m \leq k$, et définissons $(Z_{k+1}(j))_{j \in \mathbb{Z}}$. Soit $j \in \mathbb{Z}$.
- Si $Y_{j,k} = Y_{j+2,k} = \dagger$, cela signifie que, au niveau k , les sites j et $j+2$ n'ont pas été atteints. Aucun vrai chemin ne peut donc partir de ces points pour atteindre le site $j+1$ au niveau k ; nous posons donc $Y_{j+1,k+1} = \dagger$. Pour obtenir les propriétés souhaitées sur le champ W , nous tirons aléatoirement indépendamment du reste les valeurs des arêtes entrantes au site $(j+1, k+1)$; nous posons alors $W_{j,+}^{k+1} = B_{j,+}^{k+1}$ et $W_{j+2,-}^{k+1} = B_{j+2,-}^{k+1}$.
- Supposons $Y_{j,k} \neq \dagger$; cela signifie que le processus de contact avec vieillissement a atteint le point $Y_{j,k}$. Nous cherchons donc un chemin à partir de ce point. S'il existe $X \in \mathcal{S}_{j+1,k+1}^4$ tel qu'il existe des chemins de $Y_{j,k} + [-n, n]^d$ vers chaque point de $X + [-n, n]^d \times \{0\}$ restant dans $\mathcal{A}_{j,k}^4$ alors nous posons $W_{j,+}^{k+1} = 1$. X n'est pas nécessairement unique donc nous choisissons pour $X_{j+1,k+1}$ le premier (en temps puis selon un ordre fixé en espace en cas d'égalité). Sinon, nous fermons l'arête en question et nous retenons le fait que notre objectif n'est pas atteint en posant $W_{j,+}^{k+1} = 0$ et $X_{j+1,k+1} = 0^{d+1}$.
- Supposons $Y_{j+2,k} \neq \dagger$; cela signifie que le processus de contact avec vieillissement a atteint le point $Y_{j+2,k}$. Nous cherchons donc un chemin à partir de ce point. S'il existe $X \in \mathcal{S}_{j+1,k+1}^4$ tel qu'il existe des chemins de $Y_{j+2,k} + [-n, n]^d$ vers chaque point de $X + [-n, n]^d \times \{0\}$ restant dans $\tilde{\mathcal{A}}_{j+2,k}^4$ alors $W_{j+2,-}^{k+1} = 1$. X n'est pas nécessairement unique donc nous choisissons pour $\tilde{X}_{j+1,k+1}$ le premier (en temps puis selon un ordre fixé en espace en cas d'égalité). Sinon, nous fermons l'arête en question et nous retenons le fait que notre objectif n'est pas atteint en posant $W_{j+2,-}^{k+1} = 0$ et $\tilde{X}_{j+1,k+1} = 0^{d+1}$.
- Finalement, les arêtes entrant dans le site $(j+1, k+1)$ étant déterminées, il reste à enregistrer l'information nécessaire pour la suite dans $Y_{j+1,k+1}$ par

$$Y_{j+1,k+1} = \begin{cases} \dagger & \text{si } X_{j+1,k+1} = \tilde{X}_{j+1,k+1} = 0^{d+1} \\ \max\{X_{j+1,k+1}, \tilde{X}_{j+1,k+1}\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où le maximum est pris selon la coordonnée temporelle (et selon un ordre fixé en espace en cas d'égalité de la coordonnée temporelle). Le premier cas est celui où $W_{j,+}^{k+1} = W_{j+2,-}^{k+1} = 0$; cela traduit le fait qu'il n'y a pas de chemin ouvert depuis l'origine jusqu'à la zone $\mathcal{S}_{j+1,k+1}^4$. Le second cas est celui où au moins une des deux arêtes est ouverte; cela traduit le fait qu'il y a au moins un tel chemin et que nous choisissons le point atteint le plus loin comme départ dans la prochaine étape de la construction.

Comme prévu, s'il existe un chemin infini dans le diagramme de percolation défini par les variables $(W_e^k)_{k \geq 1, e \in \mathcal{E}}$ alors $(\xi_t^{f_n})$ survit dans $\mathbb{Z} \times [-5a, 5a]^d \times \mathbb{R}^+$; nous pouvons facilement voir que les $(B_e^k)_{k,e}$ n'ont pas d'impact. Nous montrons maintenant que cet événement a une probabilité positive.

Soit $\mathcal{G}_k = \sigma(Z_l(i), i \in \mathbb{Z}, 0 \leq l \leq k)$; $\mathcal{G}_k$ contient la zone découverte pour construire les k premières étapes de la percolation donc $\mathcal{F}_{30kb} \subset \mathcal{G}_k \subset \mathcal{F}_{(30k+1)b}$. Nous avons bien choisi nos événements de bloc de façon à ce que la recherche d'un chemin à l'étape $k+1$ soit indépendante de $\mathcal{G}_k$, excepté par rapport au point de départ de la recherche des chemins.

Pour $(j, k) \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_{j,+}^{k+1} = 1 | \mathcal{G}_k) &= \mathbb{1}_{\{Y_{j,k} = \dagger\}} \mathbb{P}(B_{j,+}^{k+1} = 1) \\ &+ \mathbb{1}_{\{Y_{j,k} \neq \dagger\}} \mathbb{P} \left(\begin{array}{c} \exists X \in \mathcal{S}_{j+1,k+1}^4 \text{ et des chemins restant dans } \mathcal{A}_{j,k}^4 \text{ allant de} \\ Y_{j,k} + [-n, n]^d \times \{0\} \text{ et touchant tous les points dans } X + [-n, n]^d \times \{0\} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le lemme 5.2.4, on a

$$\mathbb{P}(W_{j,+}^{k+1} = 1 | \mathcal{G}_k) > (1 - \varepsilon).$$

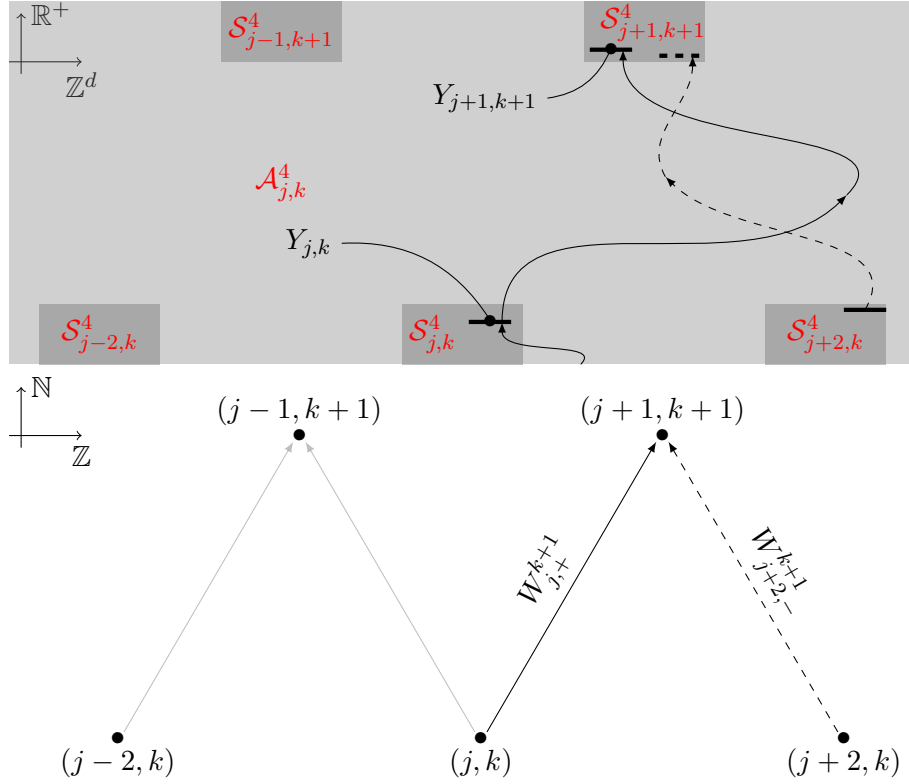


FIGURE 5.13 – Processus de percolation sous-jacent.

Conditionnellement à $\mathcal{G}_k$, les variables $\{W_e^k, k \geq 1, e \in \mathcal{E}\}$ sont localement dépendantes car les chemins construits restent dans $(\mathcal{A}_{k,i}^4)_{i \in \mathbb{Z}}$ ou $(\tilde{\mathcal{A}}_{k,i}^4)_{i \in \mathbb{Z}}$. Cela achève la preuve du théorème 5.3.1. $\square$

Le processus de percolation ainsi construit, nous concluons cette section par la démonstration du sens réciproque du théorème 5.0.3. Pour cela, donnons une définition et un résultat de Garet et Marchand [GM12b].

Définition 5.3.2. Soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $q \in (0, 1)$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, muni d'une filtration $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$. Soit $(W_e^n)_{e \in \mathcal{E}, n \geq 1}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$. On dit que la loi de $(W_e^n)_{e \in \mathbb{E}^d, n \geq 1}$ est dans $\mathcal{C}_d(M, q)$ si elle satisfait les conditions suivantes :

- $\forall n \geq 1, \forall e \in \mathcal{E} \quad W_e^n \in \mathcal{G}_n$;
- $\forall n \geq 0, \forall e \in \mathcal{E} \quad \mathbb{P}[W_e^{n+1} = 1 | \mathcal{G}_n \vee \sigma(W_f^{n+1}, d(e, f) \geq M)] \geq q,$

où $\sigma(W_f^{n+1}, d(e, f) \geq M)$ est la tribu engendrée par W_f^{n+1} , avec $d(e, f) \geq M$.

Lemme 5.3.3. Si $(W_e^n)_{e \in \mathcal{E}, n \geq 1}$ est dans $\mathcal{C}_d(M, q)$, alors pour tout n , le loi de $(W_e^{n+k})_{e \in \mathcal{E}, k \geq 1}$ conditionné à $\mathcal{G}_n$ domine stochastiquement $\mathcal{B}(g_M(q))^{\otimes \mathcal{E}}$, où la fonction $g_M : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ vérifie $\lim_{q \rightarrow 1} g_M(q) = 1$.

Revenons à notre processus.

Corollaire 5.3.4. Supposons la condition (B1) satisfaite. Alors le processus (ξ_t) est surcritique.

Démonstration. Si la condition (B1) est satisfaite, par le lemme 5.2.4 les conditions (B4) et ($\tilde{B}4$) et nous pouvons effectuer la construction précédente (théorème 5.3.1). Nous couplons donc (ξ_t)

avec un processus (W_e^k) . Le processus (W_e^k) appartient à la classe $\mathcal{C}_d(M, q)$ (avec $d = 1, M = 2, q = 1 - \varepsilon$) définie ci-dessus. Nous concluons donc en utilisant le lemme 5.3.3 pour coupler notre processus avec une percolation indépendante de paramètre $g(1 - \varepsilon)$ où g est une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ avec $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$: si nous choisissons $1 - \varepsilon$ assez grand, la percolation indépendante sous-jacente est surcritique, donc notre processus (ξ_t) aussi. $\square$

Remarque. *La construction implique que, si survie il y a, il y a en particulier survie dans une tranche de $\mathbb{Z}^d$.*

Une première conséquence de cette construction est l'extinction du modèle de Krone (cf. section 3.3.2) :

Théorème 5.3.5. *Le processus de contact de Krone [Kro99] s'éteint au point critique, i.e. pour γ fixé et $\delta = 0$,*

$$\mathbb{P}_{\lambda_c(\gamma)}(\forall t > 0, \xi_t^{0(1)} \neq 0) = 0.$$

Démonstration. D'après le théorème 5.0.3, le caractère surcritique est caractérisé par une condition spatio-temporelle finie qui dépend continûment de λ et γ . La région surcritique est donc un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ et le processus ne peut survivre au point critique $\lambda_c(\gamma)$ sinon il survivrait à une valeur inférieure (contredisant la définition de la valeur critique). $\square$

Les contrôles de croissance

Dans ce chapitre, nous comparons notre processus de contact avec vieillissement avec d'autres processus dont nous connaissons les évolutions pour obtenir des contrôles de sa croissance.

Pour montrer la croissance au plus linéaire, nous aurons classiquement recours à un couplage avec le modèle de Richardson [Ric73].

Nous souhaitons ensuite utiliser le couplage obtenu au chapitre précédent entre un processus de contact avec vieillissement et une percolation orientée pour montrer la croissance au moins linéaire. Les techniques de renormalisation sont très utilisées dans l'étude de systèmes de particules en interaction et sont très efficaces pour montrer par exemple qu'une survie a lieu avec probabilité strictement positive. Par contre, l'étude de l'évolution d'un processus conditionné à survivre peut être plus difficile car les procédures de renormalisation peuvent détruire les propriétés d'indépendance. Les idées de redémarrage, comme celle utilisée par Durrett [Dur84] pour la percolation orientée, sont assez intuitives mais leur mise en place peut s'avérer technique.

Précédemment, nous travaillions sur la survie du processus donc nous voulions uniquement savoir si la probabilité de l'événement était strictement positive ; pour cette raison, nous pouvions prendre une bonne configuration initiale (à support fini) à notre guise. Ici, nous nous intéressons à un contrôle précis de la probabilité des événements ; l'état initial intervient donc dans les calculs. Décrivons rapidement l'argument de redémarrage (*restart*) que nous allons mettre en place. Nous faisons démarrer notre processus avec une fonction $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ quelconque (à support fini). La première étape est de contrôler le temps auquel nous avons assez de points vivants pour démarrer un couplage avec une percolation orientée surcritique (en prenant en compte le fait que notre processus peut mourir avant) puis une fois que nous démarrons le couplage, nous utilisons l'inégalité de « décroissance exponentielle » connue pour la percolation orientée pour contrôler son temps M d'extinction. Une fois la percolation éteinte, si le processus de contact est lui même éteint, nous avons à notre disposition des contrôles sur son temps d'extinction, sinon, nous réitérons la procédure précédente. La quantité à contrôler sera donc la somme sur les différents redémarrages du temps d'atteinte pour avoir assez de points et démarrer le couplage, et du temps d'extinction de la percolation.

6.1 Croissance au plus linéaire

Nous montrons d'abord la croissance au plus linéaire en comparant notre processus de contact avec vieillissement à un processus de Richardson [Ric73] ; en effet, notre modèle, dans lequel les particules peuvent mourir et doivent attendre de mûrir suffisamment pour atteindre des bons taux de naissance, croît forcément moins vite qu'un modèle où les particules ne meurent pas et

ont des taux de naissance maximaux.

Définition 6.1.1. *Le modèle de Richardson est un processus de Markov $(\eta_t)_{t \geq 0}$ à temps continu à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, paramétré par $\lambda > 0$, et dont l'évolution est la suivante :*

- *un site $z \in \mathbb{Z}^d$ mort naît à taux $\lambda \sum_{\|z-z'\|_1=1} \eta_t(z')$,*
- *un site vivant ne meurt jamais.*

C'est un des systèmes les plus simples de particules en interaction. En utilisant le formalisme du chapitre 1, nous pouvons donner ses taux de transition : pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, on a

$$c(x, \eta) = \begin{cases} \lambda N(x, \eta) & \text{si } \eta(x) = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $N(x, \eta)$ le nombre de voisins de x vivants dans η .

Grâce à la représentation graphique, nous pouvons construire un couplage entre notre processus de contact avec vieillissement de paramètres (Λ, γ) et un modèle de Richardson de paramètre $\lambda_\infty = \sup \Lambda$ tel que, pour tout temps t , l'ensemble des points vivants du processus de contact avec vieillissement est inclus dans l'ensemble des points vivants du processus de Richardson. Pour cela, nous considérons l'espace de probabilité adapté construit à la section 4.1.2 :

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(M \times [0, 1]^{\mathbb{N}} \right)^{\mathbb{E}^d} \times (M^2)^{\mathbb{Z}^d} \\ \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma} &= \left(\mathcal{P}_{\lambda_\infty} \otimes \mathcal{U}_{[0, 1]}^{\otimes \mathbb{N}} \right)^{\otimes \mathbb{E}^d} \otimes (\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_\gamma)^{\otimes \mathbb{Z}^d}. \end{aligned}$$

Le processus de contact avec vieillissement est construit selon la description de la section 4.1.3. Le processus de Richardson, lui, ne considère ni les morts (croix) ni les maturations (ronds) et peut utiliser toutes les arêtes. Cela mène au résultat suivant.

Lemme 6.1.2. *Pour $t > 0$, notons $H_t^f = \cup_{s \leq t} A_s^f$, l'ensemble des points vivants dans le PCV avant l'instant t . Il existe un espace de probabilité tel que, pour tout $t > 0$, pour toute configuration initiale $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ on a*

$$H_t^f \subset \eta_t^{\text{supp } f}.$$

L'évolution du modèle de Richardson est décrite dans [Ric73]. Ce modèle vérifie en particulier le contrôle de croissance au plus linéaire suivant.

Lemme 6.1.3. *Il existe $C_1, C_2, M > 0$ tels que, pour tout $t > 0$, on a*

$$\mathbb{P}(\eta_t^{\{0\}} \not\subseteq B_{Mt}) \leq C_1 \exp(-C_2 t).$$

On pourra trouver une démonstration de ce lemme dans [GM12a].

Finalement, en combinant les deux lemmes, nous obtenons la croissance au plus linéaire souhaitée pour le processus de contact avec vieillissement.

Lemme 6.1.4. *pour toute configuration initiale $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$, il existe $C_1, C_2, M > 0$ tels que, pour tout $t > 0$, on a*

$$\mathbb{P}(H_t^f \not\subseteq B_{Mt}) \leq C_1 \exp(-C_2 t).$$

6.2 Croissance au moins linéaire

Pour la suite, nous nous fixons les paramètres Λ et γ tels que (ξ_t) survive avec probabilité strictement positive ; la condition de bloc (B1), introduite au chapitre 5, est donc satisfaite. Nous nous fixons aussi une configuration initiale $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ à support fini. Soit ε assez grand, et soient n, a, b les paramètres donnés par le théorème 5.0.3 ; notons W le processus de percolation (surcritique) construit au théorème 5.3.1 du chapitre 5. Nous introduisons de plus les quantités suivantes relatives au processus W : pour $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\eta_n^W &= \{y \in \mathbb{Z} : (0, 0) \rightarrow (y, n) \text{ dans } W\}; \\ \tau^W &= \inf\{n \in \mathbb{N} : \eta_n^W = \emptyset\}, \text{ le temps d'extinction de } W; \\ H_n^W &= \bigcup_{0 \leq k \leq n} \eta_k, \text{ l'ensemble de tous les points touchés avant } n; \\ \gamma'(\theta, x, y) &= \inf\{n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n \text{ Card}\{i \in \{0, \dots, k\}, (x, 0) \rightarrow (y, i)\} \geq \theta k\}.\end{aligned}$$

La percolation $(W_e^k)_{k \geq 1, e \in \mathcal{E}}$ que nous avons construite au théorème 5.3.1 est en fait un processus de la classe $\mathcal{C}_d(M, q)$ introduite par Garett et Marchand. Rappelons ses propriétés, dont les preuves peuvent être trouvées dans [GM12b] :

Corollaire 6.2.1. *Soit $\alpha > 0$. Il existe $\beta > 0$ tel que*

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau^W < +\infty\}} \exp(\beta \tau^W)] \leq \alpha.$$

Corollaire 6.2.2. *Il existe $A, B, C > 0$ tels que pour tous $L, n > 0$*

$$\mathbb{P}(\tau^W = +\infty, [-L, L] \not\subset H_{CL+n}^W) \leq Ae^{-Bn}.$$

Corollaire 6.2.3. *Il existe des constantes positives A, B, θ, β telles que*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 0 \quad \mathbb{P}(+\infty > \gamma'(\theta, x, y) > \beta|x - y| + n) \leq Ae^{-Bn}.$$

Dans la suite, nous désignerons souvent le processus W par « la percolation » et nous nous permettrons l'utilisation de l'abréviation PCV pour le processus de contact avec vieillissement dans la construction.

6.2.1 Argument de redémarrage

Le couplage obtenu n'est qu'une domination du processus de contact avec vieillissement sur une percolation. Le processus de contact avec vieillissement peut donc survivre sans qu'il en soit de même pour la percolation sous-jacente. Pour être en mesure d'adapter les contrôles exponentiels connus pour la percolation au processus de contact, nous allons utiliser un argument de redémarrage : à chaque fois que la percolation en dessous s'éteint, nous la redémarrons pour qu'elle survive aussi longtemps que le processus de contact avec vieillissement et que nous puissions ainsi comparer les quantités d'intérêt. Pour des constructions similaires, on pourra se référer au théorème 2.5 de [GM12b] dans lequel Garett et Marchand redémarrrent une percolation indépendante située en dessous de la percolation type $\mathcal{C}_d(M, q)$; cet argument leur permet d'obtenir les contrôles 6.2.1, 6.2.2 et 6.2.3 ci-dessus dont nous avons besoin. Nous nous appuyons aussi sur la construction que Liggett réalise dans le théorème 2.30 de [Lig99] pour le processus de contact classique.

Nous rappelons que pour tous $t \in \mathbb{R}^+$ et $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$, A_t^f est le support de ξ_t^f et τ^f le temps d'extinction du processus.

Lemme 6.2.4 (Argument de redémarrage). *Il existe des variables aléatoires σ, Y telles que*

- *la variable σ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et Y est à valeurs dans $\mathbb{Z}^d \cup \{\dagger\}$,*
- *sur l'événement $\{\tau^f < \infty\}$, on a $\sigma > \tau^f$ et $Y = \dagger$,*
- *sur l'événement $\{\tau^f = \infty\}$, Y vit dans la tranche $\mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1}$. De plus, $Y + [-n, n]^d \subset A_\sigma^f$ et il existe une percolation macroscopique $(W_e^n) \circ \theta_\sigma \circ T_Y$ qui démarre de $Y + [-n, n]^d$ au temps σ et qui survit presque sûrement.*

Construction de Y, σ : La première étape consiste à contrôler le temps où nous obtenons assez de points vivants pour pouvoir démarrer le couplage avec la percolation. En effet, nous initions ici le processus avec une configuration initiale f quelconque tandis que le couplage avec la percolation ne peut démarrer qu'à partir d'une configuration initiale assez grande pour empiler les événements de bloc. Ensuite, une fois le couplage démarré, la percolation peut s'éteindre. Si le PCV s'éteint en même temps, alors nous obtenons un lien entre les deux temps d'extinction et le fait de contrôler celui de la percolation nous permet de contrôler celui du PCV. Si le PCV ne s'éteint pas en même temps, nous redémarons la procédure (attente d'une configuration assez grande puis couplage). La quantité d'intérêt est la somme de ces deux temps (démarrage + extinction) sur chaque itération de la procédure.

Pour construire le temps de démarrage, nous utilisons une propriété simple : il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\exists x \in \mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1}, A_1^f \supset x + [-n, n]^d\right) \geq \mathbb{P}\left(\exists x \in \mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1}, A_1^{\delta_0} \supset x + [-n, n]^d\right) \geq \alpha.$$

Détaillons la procédure (illustrée par la figure 6.1). Nous cherchons d'abord le temps auquel le cube $[-n, n]^d$ est entièrement occupé par des particules vivantes. Posons

$$N_1 = \inf \left\{ m : A_{m+1}^f = \emptyset \text{ ou } \exists x \in \mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1} \text{ tel que } A_{m+1}^f \supset x + [-n, n]^d \right\}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_1 = m) &= \mathbb{P}\left(\left\{ \begin{array}{l} A_{m+1}^f = \emptyset \text{ ou } \exists x \in \mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1} \\ \text{tel que } A_{m+1}^f \supset x + [-n, n]^d \end{array} \right\} \cap \{N_1 \geq m\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\begin{array}{l} A_{m+1}^f = \emptyset \text{ ou } \exists x \in \mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1} \\ \text{tel que } A_{m+1}^f \supset x + [-n, n]^d \end{array} \middle| N_1 \geq m\right) \times \mathbb{P}(N_1 \geq m) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\exists x \in \mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1} \text{ tel que } A_1^{\delta_0} \supset x + [-n, n]^d\right) \mathbb{P}(N_1 \geq m) \\ &\geq \alpha \mathbb{P}(N_1 \geq m). \end{aligned}$$

Ainsi, N_1 est une variable aléatoire sous-géométrique telle que, au temps N_1 , on ait

$$\{A_{N_1+1}^f = \emptyset\} \text{ ou } \{\exists x \in \mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1} \text{ tel que } A_{N_1+1}^f \supset x + [-n, n]^d\}.$$

- Si $A_{N_1+1}^f = \emptyset$, cela signifie que le PCV s'éteint avant d'avoir réussi à engendrer une configuration suffisamment grande. Nous ne démarrerons donc jamais une percolation surcritique et nous posons $Y = \dagger$. Nous posons par ailleurs $M_1 = 0$. Ce cas est illustré par la branche supérieure du schéma 6.1.
- S'il existe $x \in \mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1}$ tel que $A_{N_1+1}^f \supset x + [-n, n]^d$, alors nous notons X_1 le premier tel x (selon un ordre en espace fixé). Nous couplons le processus démarrant au temps $N_1 + 1$ à partir de l'état initial $\xi_{N_1+1}^f$ avec une percolation démarrant de ce cube comme précédemment grâce à (B1). Si la percolation survit alors le PCV aussi et nous arrêtons la procédure en posant $M_1 = 0$ et $Y = X_1$ (branche rouge de la figure 6.1). Si la percolation

ne survit pas, nous posons M_1 son temps d'extinction. Nous regardons alors le PCV au temps $U_1 = N_1 + 1 + b30M_1$ qui est le temps dans le réseau microscopique correspondant à l'extinction du processus macroscopique. Au temps U_1 :

- si $A_{U_1}^f = \emptyset$, le PCV s'est lui aussi éteint et nous arrêtons la procédure et nous posons $Y = \dagger$ (branche verte de la figure 6.1),
- sinon, nous recommençons la procédure avec un PCV d'état initial $\xi_{U_1}^f$ au temps U_1 (branche bleue de la figure 6.1).

Nous obtenons donc les quantités suivantes :

- une suite (N_i) de variables aléatoires indépendantes de même loi que N_1 ,
- une suite (M_i) de variables aléatoires indépendantes de même loi que M_1 conditionné à être fini,
- une variable aléatoire géométrique L , indépendante de (N_i) et (M_i) , qui représente le nombre d'itérations de la procédure.

Nous posons alors

$$\sigma = \sum_{i=1}^L U_i \text{ avec } U_i = N_i + 1 + b30M_i.$$

Par construction, au temps σ , nous avons soit $A_\sigma^f = \emptyset$ soit $\tau^f = \infty$. Cela implique que

- sur l'événement $\{\tau^f < \infty\}$, $\sigma > \tau^f$ et $Y = \dagger$;
- sur l'événement $\{\tau^f = \infty\}$, Y vit dans la tranche $\mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1}$, $Y + [-n, n]^d \subset \xi_\sigma^f$ et il existe une percolation macroscopique $(W_\varepsilon^n) \circ \theta_\sigma$ qui survit presque sûrement démarrant de $Y + [-n, n]^d$ au temps σ . $\square$

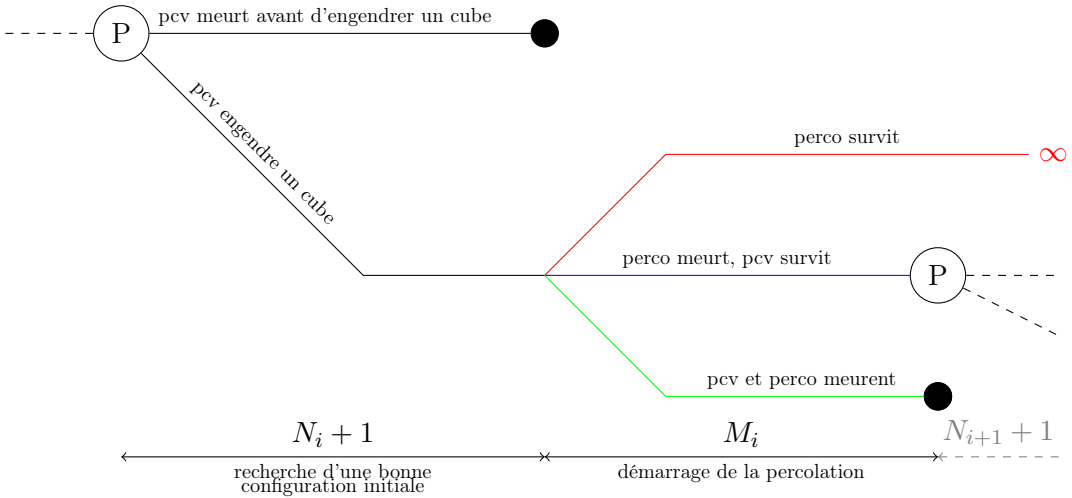


FIGURE 6.1 – Procédure récursive de redémarrage à l'étape i .

Corollaire 6.2.5. Soient σ et Y les variables aléatoires construites dans l'argument de redémarrage. Alors il existe des constantes positives A, B, A_2, B_2 telles que pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma > t) &\leq A \exp(-Bt), \\ \mathbb{P}(\|Y\| > t) &\leq A_2 \exp(-B_2t). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous démarrons le processus avec $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$. Nous utilisons la construction précédente pour étendre les contrôles exponentiels connus du temps d'extinction de la percolation à notre processus. Les queues des variables aléatoires L et (N_i) sont exponentiellement décroissantes. Le contrôle 6.2.1 nous donne le même résultat pour la variable aléatoire M_i . Donc, nous pouvons choisir $\beta_1 > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{\beta_1 L}] < \infty$, et ensuite $\beta_2 > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{\beta_2(N_1+1+30bM_1)}] \leq e^{\beta_1}$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\beta_2 \sigma}] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{\beta_2 \sigma} | L\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{\beta_2 \sum_{i=1}^L U_i} | L\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{\beta_2(N_1+1+30bM_1)}\right]^L\right] \leq \mathbb{E}[e^{\beta_1 L}] < \infty. \end{aligned}$$

Nous en concluons que σ a une queue de distribution exponentiellement décroissante, ce qui correspond à la première inégalité souhaitée. En utilisant la croissance au plus linéaire de (A_t^f) ainsi que le fait que $Y \in A_\sigma^f$, nous obtenons la seconde inégalité. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|Y\| > t) &\leq \mathbb{P}(\{\|Y\| > t\} \cap \{\sigma > ct\}) + \mathbb{P}(\{\|Y\| > t\} \cap \{\sigma \leq ct\}) \\ &\leq \mathbb{P}(\sigma > ct) + \mathbb{P}(\exists Y \in H_{ct} \text{ avec } \|Y\| > t) \\ &\leq 2Ae^{-\frac{B}{M}t}, \end{aligned}$$

en prenant $c = \frac{1}{M}$ où M est la constante apparaissant dans l'inégalité 6.1.4 (contrôle au plus linéaire). $\square$

Remarque. Les constantes dépendent de la condition initiale que nous avons fixée au début de la construction.

6.2.2 Contrôles

Nous déduisons du corollaire 6.2.5 le contrôle des amas finis :

Corollaire 6.2.6. *Il existe C_1, C_2 tels que, pour tout $t > 0$, on a*

$$\mathbb{P}(t < \tau^f < \infty) \leq C_1 \exp(-C_2 t).$$

Démonstration. Par construction, sur l'événement $\{\tau^f < \infty\}$, σ est strictement supérieur à τ^f . Donc,

$$\mathbb{P}(t < \tau^f < \infty) \leq \mathbb{P}(\sigma > t)$$

et le résultat souhaité en découle. $\square$

Nous traitons maintenant l'estimée de la croissance au moins linéaire.

Corollaire 6.2.7. *Il existe des constantes positives A, B, C telles que pour tous $x \in \mathbb{Z}^d$ et $t > 0$:*

$$\mathbb{P}(t^f(x) \geq C\|x\| + t, \tau^f = \infty) \leq A \exp(-Bt).$$

Démonstration. L'idée naturelle est d'utiliser le résultat correspondant sur la percolation et de l'adapter au processus de contact avec vieillissement comme nous l'avons fait dans la preuve précédente. Mais, dans le cas présent, le corollaire 6.2.2 n'est pas suffisant car lorsque nous atteignons un point macroscopique avec W , nous ne touchons pas toute la zone associée dans le réseau microscopique, mais seulement une partie. Pour s'assurer que nous atteignons bien chaque

point de cette zone, nous devons répéter l'opération plusieurs fois. C'est la raison pour laquelle nous aurons besoin du corollaire 6.2.3.

Pour pouvoir utiliser le corollaire 6.2.3, nous devons donc utiliser à nouveau le processus de percolation. Cependant, rappelons que notre construction a été faite dans la tranche $\mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1}$. Tout d'abord, nous expliquons comment gérer le cas où le site x est dans la tranche puis nous expliquerons ensuite le cas général.

L'argument de redémarrage nous donne l'existence de variables aléatoires $Y \in \mathbb{Z} \times [-a, a]^{d-1}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$, ainsi que celle d'une percolation macroscopique W survivant depuis $\bar{0}$ (qui correspond à $Y + \mathcal{S}_{0,0}^6$ au temps σ), et vivant dans le réseau macroscopique $\mathcal{L} \circ \theta_\sigma \circ T_Y$. La construction suivante est illustrée par la figure 6.2.

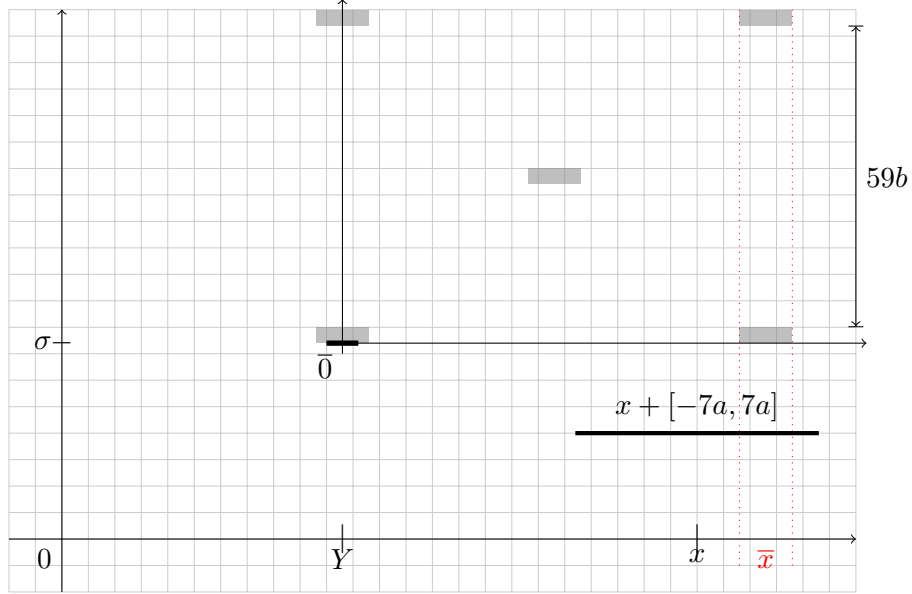


FIGURE 6.2 – Lien entre l'atteinte des points des réseaux macroscopique et microscopique.

Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ et x_1 sa première coordonnée. Alors, il existe un unique couple $(j, r) \in \mathbb{Z} \times [0, 2a[$ tel que $x_1 - Y_1 = (2j - 1)a + r$; posons $\bar{x} = j$ le site macroscopique le plus près de x .

Posons $\bar{R}_0^a(\bar{x}) = 0$ et, pour $i \geq 1$,

$$\bar{R}_i^a(\bar{x}) = \inf\{n > \bar{R}_{i-1}^a(\bar{x}) : \text{il existe un chemin de } 0 \text{ à } (\bar{x}, n) \text{ dans } W\}$$

le i^e temps auquel W atteint $\bar{x}$. De manière analogue, nous posons

$$R_0^a(x) = 0$$

$$R_{i+1}^a(x) = \inf\{t \geq R_i' : \exists y \in x + [-7a, 7a]^d \text{ avec } y \in A_t^f\} \text{ et } R_i' = R_i^a(x) + 59b.$$

Le temps $R_i^a(x)$ est le i -ème auquel la zone $x + [-7a, 7a]^d$ est atteinte, avec la contrainte que ces temps soient séparés d'au moins $59b$.

Par définition de γ , si nous choisissons $k \geq \theta\gamma$, alors, le nombre de fois où nous atteignons le point $\bar{x}$ depuis $\bar{0}$ avant le temps $\frac{k}{\theta}$ est au moins k . Donc,

$$\bar{R}_k^a(\bar{x}) \leq \frac{1}{\theta} \max(\gamma(\theta, \bar{0}, \bar{x}), k).$$

Nous remarquons que, si nous atteignons k fois le point $\bar{x}$ dans le réseau macroscopique alors nous atteignons au moins k fois la zone $x + [-7a, 7a]^d$ dans le réseau microscopique, et les instants

d'atteinte sont séparés d'au moins $59b$ (correspondant à la hauteur de deux arêtes) donc

$$R_k^a(x) \leq \sigma + \frac{31b}{\theta} \max(\gamma(\theta, \bar{0}, \bar{x}) \circ \theta_\sigma, k).$$

Ensuite, en utilisant le corollaire 6.2.3 sur les points $\bar{0}$ et $\bar{x}$ nous avons

$$\mathbb{P}(\gamma(\theta, \bar{0}, \bar{x}) \leq \beta|\bar{x}| + k) \geq 1 - Ae^{-Bk}. \quad (6.2.1)$$

Cela nous mène à

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(R_k^a(x) \leq k + \frac{31b}{\theta} \left(\frac{\beta}{2a}(\|x\| + k) + k\right)\right) &\geq \mathbb{P}\left(\{\gamma(\theta, \bar{0}, \bar{x}) \leq \frac{\beta}{2a}(\|x\| + k) + k\} \cap \{\sigma \leq k\}\right) \\ &\geq \mathbb{P}(\{\gamma(\theta, \bar{0}, \bar{x}) \leq \beta|\bar{x}| + k\} \cap \{|\bar{0}| \leq k\} \cap \{\sigma \leq k\}) \\ &\geq \mathbb{P}(\gamma(\theta, \bar{0}, \bar{x}) \leq \beta|\bar{x}| + k) \\ &\quad + \mathbb{P}(|\bar{0}| \leq k) + \mathbb{P}(\sigma \leq k) - 2 \\ &\geq 1 - 3Ae^{-Bk} \end{aligned} \quad (*)$$

en appliquant le corollaire 6.2.5 et l'équation (6.2.1). En posant $C_1 = \frac{31b\beta}{2a\theta}$ et $C_2 = \frac{31b\beta}{\theta} + 2$, nous obtenons le contrôle suivant :

$$\mathbb{P}(R_k^a(x) \geq C_1\|x\| + C_2k) \leq Ae^{-Bk}.$$

Maintenant que nous avons réussi à contrôler les temps d'atteinte de points qui ne sont pas loin de x , nous essayons d'atteindre x depuis ces points.

Considérons l'événement

$$B = \left\{ \forall y \in x + [-7a, 7a]^d, \exists t \leq 58b \text{ tel que } x \in A_t^{\delta_y} \right\}$$

et, pour $n \geq 1$, l'événement

$$A_n = \bigcap_{i=0}^n \left\{ R_i^a(x) < +\infty, \theta^{-R_i^a(x)}(B^c) \right\}.$$

Par construction, $\theta^{-R_i^a(x)}(B)$ est $\mathcal{F}_{R_{i+1}^a(x)}$ -mesurable, donc, en utilisant la propriété de Markov

$$\mathbb{P}(A_n | \mathcal{F}_{R_n^a(x)}) = \mathbb{1}_{A_{n-1} \cap \{R_n^a(x) < +\infty\}} \mathbb{P}(B^c).$$

Nous pouvons voir que $\mathbb{P}(B) \geq c > 0$ donc, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(A_n) \leq (1 - c)^n$. Finalement, en utilisant le l'inégalité (*), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\tau^f = +\infty, t(x) \geq C_1\|x\| + C_2n\right) &\leq \mathbb{P}\left(\tau^f = +\infty, R_n^a(x) \geq C_1\|x\| + C_2n\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\tau^f = +\infty, R_n^a(x) \leq C_1\|x\| + C_2n \leq t(x)\right) \\ &\leq Ae^{-Bn} + (1 - c)^n. \end{aligned}$$

Pour conclure, si x n'est pas dans la tranche, nous répétons la construction précédente le long du chemin $(x_1, 0, \dots, 0) \rightarrow (x_1, x_2, 0, \dots, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (x_1, \dots, x_d)$. Les temps d'atteinte entre deux points successifs satisfont l'inégalité ci-dessus donc le même résultat découle pour le temps d'atteinte total. $\square$

III

THÉORÈMES DE FORME ASYMPTOTIQUE

Dans la partie I, nous avons présenté le processus de contact ainsi que certaines de ses extensions en environnement aléatoire, en environnement dynamique ou bien présentant un phénomène de mémoire (immunisation, sensibilisation, infantilisation). Dans la partie II, nous avons introduit et développé un modèle de processus de contact avec vieillissement. Tous ces processus sont des modèles de croissance au sens où il est possible d'exhiber une quantité d'intérêt (B_t) à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, indexée par un temps discret ou continu et dont la croissance est d'ordre linéaire, c'est-à-dire qu'il existe des ensembles compacts non vides B_- et B_+ déterministes tels que, pour t assez grand,

$$tB_- \subset B_t \subset tB_+.$$

La première inclusion traduit la croissance au moins linéaire et la deuxième la croissance au plus linéaire. Ces modèles présentent de plus d'autres caractéristiques importantes comme des propriétés d'attractivité par rapport aux conditions initiales, de monotonie par rapport aux paramètres et des phénomènes de transition de phase (souvent indépendante de la condition initiale si celle-ci est de taille finie).

À partir de là, nous souhaitons démontrer des résultats de forme asymptotique c'est-à-dire l'existence d'un ensemble déterministe B tel que $\frac{B_t}{t}$ converge vers B , dans un sens à préciser, lorsque t tend vers l'infini. Plutôt que de travailler d'un point de vue géométrique avec la forme B_t , il est aussi possible d'utiliser un point de vue plus analytique en étudiant, de façon équivalente, les temps d'atteinte $t(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in B_t\}$. Nous avons vu que ce résultat de forme asymptotique est vérifié pour le processus de contact standard (cf. théorème 2.4.4) et dans un environnement aléatoire favorable à la survie (cf. théorème 3.1.10).

Pour comprendre les techniques utilisées pour montrer ce type de résultat, donnons un exemple simple ne rentrant pas dans le cadre de nos processus de contact : le *modèle de percolation de premier passage*. Ce modèle a été introduit par Hammersley et Welsh [HW65] pour modéliser la propagation d'un fluide dans un matériau poreux. On se donne une famille $(\nu_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées intégrables, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, représentant les temps de passage à travers les arêtes du réseau $\mathbb{Z}^d$. Nous choisissons ici le cadre des hypothèses les plus fortes sur les (ν_e) mais de nombreux travaux ont été menés en relaxant les hypothèses d'indépendance, d'intégrabilité [CD81, Boi90, VAW92, How04, GM04, Sch14]. Ces variables induisent une distance sur $\mathbb{Z}^d$ en posant, pour x et $y \in \mathbb{Z}^d$,

$$d(x, y) = \inf \left\{ \sum_{e \in \gamma} \nu_e : \gamma \text{ est un chemin de } x \text{ à } y \right\}.$$

Ce modèle est bien un modèle de croissance en considérant la quantité $B_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : d(0, x) \leq t\}$ représentant les points atteints par le fluide à l'instant t si celui-ci se propage depuis 0. En posant $X_{n,p} = d(nx, px)$ et en utilisant le théorème de Kingman A.1.8, on obtient les convergences directionnelles suivantes : pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ il existe une constante $\mu(x) \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(0, nx)}{n} \quad \text{dans } \mathbb{L}^1 \text{ et presque sûrement.}$$

Les trois hypothèses utilisées pour appliquer le théorème de Kingman sont la sous-additivité de la quantité $d(0, nx)$, sa stationnarité et son intégrabilité (elles sont bien vérifiées ici grâce aux hypothèses faites sur les variables (ν_e)). La quantité μ se prolonge en une norme et on voit apparaître, au cours de la démonstration, les convergences au moins et au plus linéaire. Pour obtenir un théorème de forme asymptotique, il faut avoir une uniformité de la convergence par rapport à la direction. On peut supposer grossièrement que ν a des moments exponentiels. On obtient alors que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout t assez grand,

$$(1 - \varepsilon)tB_\mu \subset B_t \subset (1 + \varepsilon)tB_\mu,$$

où B_μ est la boule associée à la norme μ , ou bien, sous sa forme analytique

$$\lim_{\|x\|_1 \rightarrow +\infty} \frac{d(0, x) - \mu(x)}{\|x\|_1} = 0.$$

Le modèle de percolation de premier passage nous donne une bonne idée de la démarche à suivre dans notre travail sur les modèles de croissance aléatoire : il faut trouver une bonne quantité qui possède les propriétés de sous-additivité (ou presque), de stationnarité et d'intégrabilité et qui vérifie, comme la quantité d'intérêt sur le modèle, une croissance d'ordre linéaire. Pour conclure à un théorème de forme asymptotique, il nous faudra en plus une uniforme continuité de cette quantité. La percolation de premier passage fait partie des modèles permanents : la forme occupée au temps t ne fait que croître et il n'y a pas d'extinction possible. Mais les processus de contact que nous étudions font partie des modèles non permanents où l'extinction est possible ; les temps d'atteinte peuvent être infinis et ne sont plus intégrables. Pour travailler avec une quantité qui ne s'éteint pas, nous serons amenés à conditionner le processus par sa survie mais cela induit la conséquence négative de perdre les propriétés d'indépendance, de stationnarité et même de sous-additivité. Pour pallier à la perte de sous-additivité, Bramson, Durrett et Griffeath s'appuient sur un théorème de presque sous-additivité de Kesten-Hammersley dans le cas du processus de contact standard ; pour le cas du processus de contact en environnement aléatoire favorable à la survie, Garet et Marchand sont amenés à montrer un nouveau théorème ergodique presque sous-additif pour travailler avec la probabilité moyennée sur l'environnement. Ces théorèmes requièrent néanmoins toujours l'intégrabilité et la stationnarité que nous avons perdues. Pour cela, Garet et Marchand introduisent une nouvelle quantité, le temps d'atteinte essentiel σ , qui représente un moment où un site est occupé par une particule dont la descendance est infinie. Cette quantité s'avère présenter les bonnes propriétés d'intégrabilité, de stationnarité et de presque sous-additivité recherchées ; par ailleurs, elle n'est pas très loin du temps d'atteinte qui nous intéresse. L'idée de ce temps d'atteinte essentiel se retrouve aussi dans les points de coupure que Kuczek [Kuc89] introduit pour montrer que le point le plus à droite d'une percolation orientée vérifie un théorème central limite.

Nous verrons au chapitre 7 que le temps d'atteinte essentiel introduit par Garet et Marchand peut être défini pour des modèles généraux de croissance aléatoire (sous certaines hypothèses) et qu'il vérifie toujours les bonnes propriétés. Nous utiliserons alors ces propriétés pour montrer, au chapitre 8, un théorème de forme asymptotique général pour les modèles dont on sait que la croissance est d'ordre linéaire et l'appliquer aux modèles qui nous intéressent : processus de contact avec vieillissement, processus de contact en environnement dynamique, percolation orientée avec immigration hostile, processus de contact avec sensibilisation.

Le temps d'atteinte essentiel

L'éternité c'est long... Surtout vers la fin. — Allen.

Comme nous venons de l'expliquer dans l'introduction de cette partie, il s'agit ici de construire une bonne quantité pour montrer des résultats de forme asymptotique pour des modèles de croissance aléatoire. Cette quantité doit avoir les bonnes propriétés pour appliquer des théorèmes presque sous-additifs (le presque signifiant la présence d'un terme d'erreur) : stationnarité, intégrabilité et presque sous-additivité. Nous allons dans un premier temps faire des hypothèses sur les modèles de croissance avec lesquels nous travaillons puis nous définirons le temps d'atteinte essentiel, introduit par Garet et Marchand [GM12a] dans le cadre du processus de contact en environnement aléatoire, pour ces modèles de croissance aléatoire. Nous montrerons ensuite que, grâce aux hypothèses que nous avons posées sur nos modèles et aux techniques de Garet et Marchand, cette quantité vérifie les bonnes propriétés recherchées et n'est pas trop loin des temps d'atteinte qui nous intéressent.

7.1 Définition

7.1.1 Hypothèses de travail

Nous cherchons à étendre la notion de modèle de croissance introduite à la définition 1.2.10. Soit (ξ_t) un système de particules en interaction à plus proches voisins à valeurs dans $S^{\mathbb{Z}^d}$ (au sens de la définition 1.2.2, indexé par le temps $\mathcal{T}$, discret ($\mathcal{T} = \mathbb{N}$) ou continu ($\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$). Soit (A_t) un processus non nécessairement markovien à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ (ou $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$), représentant une *propriété d'intérêt* vérifiée par les particules, tel que :

- pour tout t , A_t est déterminée par ξ_t , *i.e.* il existe $g : S \mapsto \{0, 1\}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $A_t(x) = g(\xi_t(x))$,
- (A_t) est additif au sens suivant : pour toutes $f, g \in S^{\mathbb{Z}^d}$, $A_t^{f \vee g} = A_t^f \vee A_t^g$,
- $\{A_t = \emptyset\}$ est absorbant.

Comme $\{A_t = \emptyset\}$ est absorbant, nous serons amenés à considérer des configurations initiales pour (ξ_t) contenant au moins une particule vérifiant A (sinon la propriété A ne sera jamais vérifiée). Souvent, nous partirons d'une configuration minimale $\delta_{\min}$ vérifiant la propriété A ; dans ce cas là nous omettrons la condition initiale en indice du processus (A_t) . Donnons tout de suite des exemples sur les modèles qui nous intéressent :

▷ **Exemple.** 1. Pour le processus de contact en environnement dynamique, ou modèle CPREE (cf. section 3.2.1), $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$, $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Nous rappelons qu'un élément

- de S est un couple (type, état) où le type est favorable (1) ou défavorable (0) et l'état est vivant (1) ou mort (0). Nous considérons g comme la projection selon la seconde coordonnée ; le processus (A_t) représente alors les points vivants au temps t sans considération de leur type (favorable ou défavorable). Cela correspond au processus (C_t) dans les notations de Steif et Warfheimer. Ici, $\delta_{\min}$ est la configuration où le site 0 est dans l'état (0, 1) et où tous les autres sites sont dans l'état (0, 0).
2. Pour le modèle de processus de contact avec vieillissement, ou modèle PCV (cf. chapitre 4), $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$, $S = \mathbb{N}$. Nous considérons g la fonction support ; le processus (A_t) , que nous avons déjà rencontré dans la partie II, représente les points vivants au temps t sans considération de leur âge. Ici, $\delta_{\min} = \delta_0$ où tous les sites sont morts sauf le site 0 qui est vivant d'âge 1.
 3. Pour le processus de contact standard, on peut lire les résultats qui suivront avec $A_t = \xi_t$.
 4. Pour le modèle de percolation orientée avec immigration hostile, ou modèle DOP (cf. section 3.2.2), $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, $S = \{0, 1, 2\}$. Nous considérons g la fonction ne conservant que les 1 (et envoyant les 2 et 0 sur 0) ; le processus (A_t) , noté $(\eta_{1,t})$ à la section 3.2.2, représente les particules fertiles (de type 1) vivantes au temps t . Ici, $\delta_{\min} = \delta_0$ où tous les sites sont morts sauf le site 0 qui est vivant et fertile de type 1 (cette condition initiale peut aussi être vue comme le couple $(\{0\}, \emptyset)$ selon les notations de la section 3.2.2 où le premier ensemble est celui des particules vivantes de type 1 et le deuxième celui des particules de type 2).
 5. Pour le modèle de sensibilisation, ou modèle BMPC (cf. section 3.3.1), $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$, $S = \{-1, 0, 1\}$. Nous considérons g la fonction ne conservant que les 1 (et envoyant les -1 et 0 sur 0) ; le processus (A_t) représente les particules vivantes au temps t . Ici, $\delta_{\min}$ est la configuration où tous les sites sont morts et non sensibilisés (i.e. valant -1) sauf le site 0 qui est vivant.

Introduisons quelques définitions. Pour $f \in S^{\mathbb{Z}^d}$ une configuration initiale, soit

$$\tau^f = \inf\{t \in \mathcal{T}, A_t^f = \emptyset\}$$

le premier instant où aucun point ne vérifie A . Étant donné que $\{A_t = \emptyset\}$ est absorbant, la propriété ne sera plus jamais vérifiée après cet instant ; c'est donc bien le temps d'extinction de la propriété A . Pour simplifier, nous noterons $\tau = \tau^{\delta_{\min}}$ et $\tau^x = \tau^{\delta_{\min} \circ T_x}$. Pour $f \in S^{\mathbb{Z}^d}$ une configuration initiale et $x \in \mathbb{Z}^d$, soit

$$t^f(x) = \inf\{t \in \mathcal{T}, x \in A_t^f\}$$

le temps d'atteinte de x par A , c'est-à-dire le premier instant où x vérifie la propriété A . Nous utiliserons les mêmes simplifications de notations.

Remarque. Nous pourrions indiquer les quantités τ et t par la lettre A pour bien signifier qu'il s'agit des temps d'atteinte et d'extinction de la propriété A . Nous choisissons de ne pas le faire pour alléger les notations en soulignant le fait que, dans ce chapitre et le suivant, ce sont les seuls temps d'atteinte et extinction qui interviennent.

▷ **Exemple.** Pour les processus de contact (avec vieillissement, sensibilisé, dynamique, Krone), $t^f(x)$ est le premier instant où la particule x est vivante, sans considération de son âge, de son état ou de sa mémoire. Pour DOP, $t^f(x)$ est le premier instant où la particule x est vivante de type 1.

Nous définissons aussi, pour $t > 0$,

$$H_t^f = \bigcup_{s \leq t} A_s^f = \{x \in \mathbb{Z}^d, t^f(x) \leq t\}$$

l'ensemble des points qui ont vérifié la propriété A avant le temps t (même s'ils ne la vérifient que pendant un certain temps).

Nous supposons que le processus (A_t) présente un phénomène de transition de phase ne dépendant pas de la condition initiale tant que celle-ci est finie, *i.e.* pour f à support fini,

$$\mathbb{P}(\tau = +\infty) > 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\tau^f = +\infty) > 0.$$

Par ailleurs, nous supposons que nous avons certains contrôles sur l'évolution de la propriété : si $\mathbb{P}(\tau = +\infty) > 0$, alors il existe $C_1, C_2, M_1, M_2 > 0$ tels que pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{P}(H_t \not\subseteq B_{M_1 t}) \leq C_1 \exp(-C_2 t), \quad (7.1.1)$$

$$\mathbb{P}(t < \tau < \infty) \leq C_1 \exp(-C_2 t), \quad (7.1.2)$$

$$\mathbb{P}(t(x) \geq M_2 \|x\| + t, \tau = \infty) \leq C_1 \exp(-C_2 t). \quad (7.1.3)$$

Dans la suite, nous nous placerons dans un cadre non trivial où $\mathbb{P}(\tau = +\infty) > 0$ et nous travaillerons avec la probabilité conditionnée à survivre :

$$\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\cdot | \tau = +\infty).$$

7.1.2 Définition du temps essentiel

Nous nous inspirons de la construction de Garet et Marchand [GM12a] pour construire un temps d'atteinte possédant des propriétés d'intégrabilité et stationnarité sous la probabilité $\bar{\mathbb{P}}$.

Nous nous fixons $x \in \mathbb{Z}^d$. Nous posons $u_0(x) = v_0(x) = 0$ et nous définissons, par récurrence, deux suites croissantes de temps d'arrêt $(u_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$ comme suit.

- Supposons que $v_k(x)$ est défini. Nous posons

$$u_{k+1}(x) = \inf\{t > v_k(x) : x \in A_t^{\delta_{\min}}\}.$$

Si $v_k(x)$ est fini, alors $u_{k+1}(x)$ est le premier temps $v_k(x)$ où le site x vérifie A ; sinon, $u_{k+1}(x) = +\infty$.

- Supposons que $u_k(x)$ est défini, avec $k \geq 1$. Posons $v_k(x) = u_k(x) + \tau^x \circ \theta_{u_k(x)}$. Si $u_k(x)$ est fini, alors le temps $\tau^x \circ \theta_{u_k(x)}$ est le temps d'extinction (éventuellement infini) du processus démarré au temps $u_k(x)$ de la configuration $\delta_{\min} \circ T_x$ (configuration minimale à partir du point x); sinon, $v_k(x) = +\infty$.

On a $u_0(x) = v_0(x) \leq u_1(x) \leq v_1(x) \leq \dots \leq u_i(x) \leq v_i(x) \dots$

Nous définissons alors $K(x)$ comme la première étape à laquelle $v_k(x)$ ou $u_{k+1}(x)$ devient infini :

$$K(x) = \min\{k \geq 0 : v_k(x) = +\infty \text{ ou } u_{k+1}(x) = +\infty\}.$$

Définition 7.1.1. *On appelle temps d'atteinte essentiel de x pour la propriété A (issu du processus ξ) la quantité $\sigma(x) = u_{K(x)}$.*

La quantité $\sigma(x)$ correspond à un certain temps où x vérifie A et a une descendance infinie de points vérifiant A mais ce n'est pas nécessairement le premier tel temps. La figure 7.1 illustre cette construction : D est le premier point (spatio-temporel) auquel x est atteint par la propriété A mais il n'est pas départ d'une descendance infinie. Le point rouge est le premier atteint par la propriété A et départ d'une descendance infinie, mais ce n'est pas celui obtenu par la construction. Le point B est le bon point obtenu par la construction. Les points C et E interviendront plus tard.

Dans la section suivante, nous montrons que $K(x)$ est presque sûrement fini et que, par conséquent, le temps d'atteinte essentiel $\sigma(x)$ est bien défini.

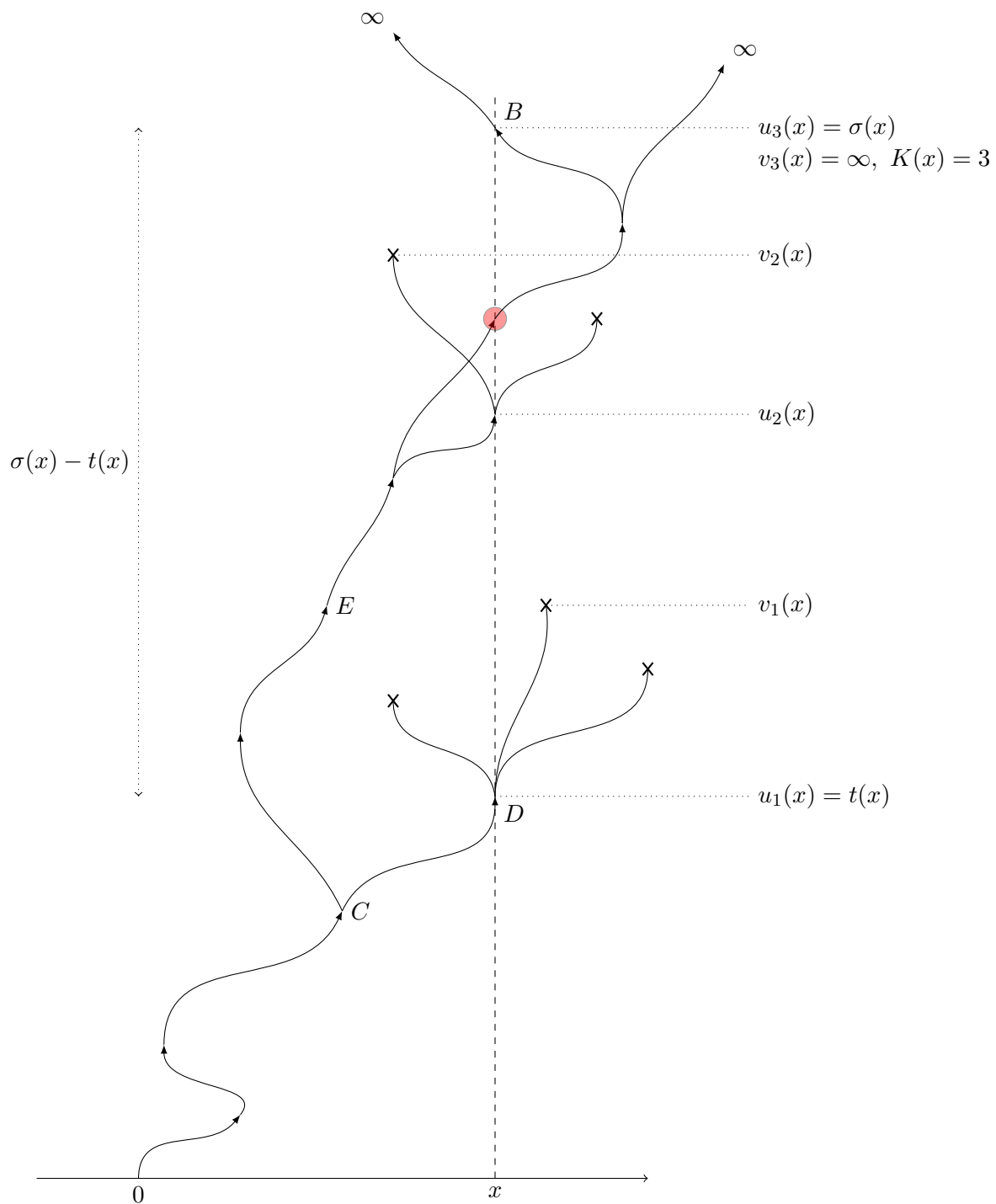


FIGURE 7.1 – Le temps d'atteinte essentiel.

Définissons un opérateur de translation spatio-temporelle aléatoire associé au temps d'atteinte essentiel :

$$\tilde{\theta}_x = \begin{cases} T_x \circ \theta_{\sigma(x)} & \text{si } \sigma(x) < +\infty, \\ T_x & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7.1.4)$$

Remarque. On vérifie facilement que les variables $u_k(x)$ et $u_k(-x)$ (respectivement $v_k(x)$ et $v_k(-x)$, $K(x)$ et $K(-x)$) sont identiquement distribuées. Ainsi, les variables $\sigma(x)$ et $\sigma(-x)$ sont identiquement distribuées.

7.2 Sur les transformations $\tilde{\theta}_x$

7.2.1 Premières propriétés

Nous commençons par vérifier que $K(x)$ est presque sûrement fini ; par conséquent, le temps d'atteinte essentiel $\sigma(x)$ est bien défini. Pour cela, nous montrons que, sous $\mathbb{P}$, la loi de $K(x)$ est sous-géométrique :

Lemme 7.2.1. *Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(K(x) > n) \leq (1 - \rho)^n$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la propriété de Markov forte pour ξ au temps $u_{n+1}(x)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K(x) > n + 1) &= \mathbb{P}(u_{n+2}(x) < +\infty) \\ &\leq \mathbb{P}(u_{n+1}(x) < +\infty, v_{n+1}(x) < +\infty) \\ &\leq \mathbb{P}(u_{n+1}(x) < +\infty, \tau^x \circ \theta_{u_{n+1}(x)} < +\infty) \\ &\leq \mathbb{P}(u_{n+1}(x) < +\infty) \mathbb{P}(\tau^x < +\infty) \\ &\leq \mathbb{P}(u_{n+1}(x) < +\infty) (1 - \rho) = \mathbb{P}(K(x) > n) (1 - \rho), \end{aligned}$$

en posant $\rho = \mathbb{P}(\tau = \infty)$; ceci prouve le lemme. $\square$

Lemme 7.2.2. *Presque sûrement, pour tout x dans $\mathbb{Z}^d$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$(K(x) = k \text{ et } \tau = +\infty) \iff (u_k(x) < +\infty \text{ et } v_k(x) = +\infty).$$

Démonstration. Le lemme 7.2.1 assure que $K(x)$ est $\mathbb{P}$ presque sûrement fini. Plaçons-nous sur l'événement $\{\tau = +\infty\}$. Soit $k \in \mathbb{N}$: en appliquant la propriété de Markov forte pour ξ au temps d'arrêt $v_k(x)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\tau = +\infty, v_k(x) < +\infty, u_{k+1}(x) = +\infty | \mathcal{F}_{v_k(x)}) \\ &= \mathbb{1}_{\{v_k(x) < +\infty\}} \mathbb{P}(\tau^* = +\infty, t^*(x) = +\infty) \circ \xi_{v_k(x)}^{\delta_{\min}} = 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est due à l'estimée de croissance au moins linéaire (7.1.3). Nous obtenons donc $\mathbb{P}(\tau = +\infty, v_k(x) < +\infty, u_{k+1}(x) = +\infty) = 0$, ce qui implique

$$(K(x) = k \text{ et } \tau = +\infty) \implies (u_k(x) < +\infty \text{ et } v_k(x) = +\infty).$$

Autrement dit, conditionnellement à la survie, le procédé de redémarrage s'arrête parce qu'on a trouvé un instant $u_{K(x)}$ où la descendance de x est infinie et non parce que x ne vérifie plus jamais la propriété A . La réciproque vient de la propriété trajectorielle. $\square$

Ces résultats seront par exemple utilisés pour contrôler σ ainsi que sa différence avec t .

Contrairement à la construction de Durrett et Griffeath qui a inspiré celle de Garet et Marchand, il ne suffit pas ici de trouver un point proche de x ayant une descendance infinie mais de vraiment atteindre le point x lui-même. Ainsi, dès lors que nous savons que le processus partant de x redémarre, nous pouvons décrire précisément la loi après redémarrage et mettre en évidence des transformations laissant $\mathbb{P}$ invariante.

7.2.2 Invariance et indépendance

En utilisant la propriété de Markov et le lemme précédent 7.2.2, nous montrons une propriété plus faible qu'une propriété de mélange mais qui nous permet néanmoins de déduire le fait que $\tilde{\theta}_x$ laisse $\bar{\mathbb{P}}$ invariante et que les $(\sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^j)$ sont indépendantes sous $\bar{\mathbb{P}}$.

Lemme 7.2.3. *Soit $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, A dans la tribu engendrée par $\sigma(x)$, et $B \in \mathcal{F}$. Alors*

$$\bar{\mathbb{P}}(A \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1}(B)) = \bar{\mathbb{P}}(A)\bar{\mathbb{P}}(B).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, A dans la tribu engendrée par $\sigma(x)$, et $B \in \mathcal{F}$. Il suffit de montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\bar{\mathbb{P}}(A \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1}(B) \cap \{K(x) = k\}) = \bar{\mathbb{P}}(A \cap \{K(x) = k\})\bar{\mathbb{P}}(B).$$

Comme A est dans la tribu engendrée par $\sigma(x)$, il existe un borélien A' de $\mathbb{R}$ tel que $A = \{\sigma(x) \in A'\}$. Le temps d'attente essentiel $\sigma(x)$ n'est pas un temps d'arrêt, mais les (u_k) et (v_k) le sont.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\tau = +\infty\} \cap A \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1}(B) \cap \{K(x) = k\}) \\ = \mathbb{P}(\tau = +\infty, \sigma(x) \in A', T_x \circ \theta_{\sigma(x)} \in B, u_k(x) < +\infty, v_k(x) = +\infty) \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

$$= \mathbb{P}(u_k(x) < +\infty, u_k(x) \in A', T_x \circ \theta_{u_k(x)} \in B, \tau^x \circ \theta_{u_k(x)} = +\infty) \quad (7.2.2)$$

$$= \mathbb{P}(u_k(x) \in A', u_k(x) < +\infty) \mathbb{P}(\tau^x = +\infty, T_x \in B) \quad (7.2.3)$$

$$= \mathbb{P}(u_k(x) \in A', u_k(x) < +\infty) \mathbb{P}(\{\tau = +\infty\} \cap B). \quad (7.2.4)$$

L'égalité (7.2.1) provient de l'équivalence du lemme 7.2.2 et l'égalité (7.2.2) découle de la définition de $v_k(x)$. L'égalité (7.2.3) résulte de la propriété de Markov forte appliquée au temps d'arrêt $u_k(x)$, tandis que (7.2.4) découle de l'invariance par translation spatiale. En divisant l'identité par $\mathbb{P}(\tau = +\infty)$, nous obtenons :

$$\bar{\mathbb{P}}(A \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1}(B) \cap \{K(x) = k\}) = \mathbb{P}(u_k(x) \in A', u_k(x) < +\infty) \bar{\mathbb{P}}(B),$$

puis, en l'appliquant à $B = \Omega$, nous obtenons $\bar{\mathbb{P}}(A \cap \{K(x) = k\}) = \mathbb{P}(u_k(x) \in A', u_k(x) < +\infty)$ puis l'égalité souhaitée. $\square$

Corollaire 7.2.4. *Soient x et y dans $\mathbb{Z}^d$ avec $x \neq 0$.*

- *La translation $\tilde{\theta}_x$ laisse $\bar{\mathbb{P}}$ invariante.*
- *Sous $\bar{\mathbb{P}}$, $\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$ est indépendant de $\sigma(x)$. De plus, la loi de $\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$ sous $\bar{\mathbb{P}}$ est la même que la loi de $\sigma(y)$ sous $\bar{\mathbb{P}}$.*
- *Les variables $(\sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^j)_{j \geq 0}$ sont indépendantes sous $\bar{\mathbb{P}}$.*

Démonstration. Pour montrer le premier point, il suffit d'appliquer le lemme précédent avec $A = \Omega$.

Pour le second point, nous considérons A', B' deux boréliens de $\mathbb{R}$. Nous observons d'abord l'invariance de la loi comme cas particulier du premier point (en l'appliquant à l'événement $B = \{\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x \in B'\}$) puis l'indépendance en utilisant à nouveau le lemme 7.2.3 avec $A = \{\sigma(x) \in A'\}$ et $B = \{\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x \in B'\}$.

Montrons enfin une indépendance plus forte. Soient $n \geq 1$ et $A_0, A_1, \dots, A_n$ des boréliens de $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) \in A_0, \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x \in A_1, \dots, \sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^n \in A_n) \\ = \bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) \in A_0, (\sigma(x), \dots, \sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^{n-1}) \circ \tilde{\theta}_x \in A_1 \times \dots \times A_n) \\ = \bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) \in A_0) \bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) \in A_1, \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x \in A_2, \dots, \sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^{n-1} \in A_n), \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du lemme 7.2.3 et de l'invariance de la loi. Par récurrence, nous obtenons

$$\bar{\mathbb{P}} \left(\bigcap_{0 \leq j \leq n} \{ \sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^j \in A_j \} \right) = \prod_{0 \leq j \leq n} \bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) \in A_j),$$

ce qui conclut la preuve du lemme. $\square$

Remarque. Dans [GM12a], Garet et Marchand montrent l'ergodicité des transformations $\tilde{\theta}_x$. Nous pourrions faire de même mais le théorème de Kesten-Hammersley que nous utiliserons dans le chapitre suivant avec ces transformations ne requiert que les propriétés de stationnarité ; l'ergodicité est néanmoins cachée derrière ces hypothèses.

7.3 Contrôle de $\sigma(x)$

Dans cette section, nous cherchons à connaître l'ordre de grandeur de $\sigma(x)$. Cette connaissance sera ensuite utilisée pour contrôler le défaut de sous-additivité de σ , c'est-à-dire les quantités du type $\sigma(x+y) - \sigma(x) - \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$ puis la différence entre $\sigma(x)$ et $t(x)$.

Étant donné la définition de $\sigma(x)$, nous devons contrôler des sommes de variables aléatoires de 2 types :

- des durées de vie de la descendance de x de la forme $v_i(x) - u_i(x)$; il s'agit du cas facile car ces quantités peuvent être contrôlées indépendamment de la configuration au temps $u_i(x)$ puisqu'on ne regarde qu'une descendance issue de la configuration minimale $\delta_{\min}$.
- des durées de régénération du point x de la forme $u_{i+1}(x) - v_i(x)$; ces quantités, elles, dépendent de la configuration au temps $v_i(x)$, que l'on peine à contrôler précisément et surtout uniformément en x .

Dans tout ce qui suit, les notions de descendance, touche, régénération, engendrement *etc.* sont relatives au processus (A_t) .

7.3.1 Cas facile : $v_i - u_i$

Lemme 7.3.1. *Il existe des constantes $A, B > 0$ telles que, pour tous $x \in \mathbb{Z}^d$ et $t > 0$*

$$\bar{\mathbb{P}}(\exists i < K(x) : v_i(x) - u_i(x) > t) \leq A \exp(-Bt).$$

Démonstration. En réutilisant la notation $\rho = \mathbb{P}(\tau = +\infty) > 0$ et la propriété de Markov vérifiée par (ξ_t) , nous écrivons

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(\exists i < K(x) : v_i(x) - u_i(x) > t) &\leq \frac{1}{\rho} \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \{v_i(x) - u_i(x) > t\} \cap \{i < K(x)\} \right) \\ &\leq \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{t < v_i(x) - u_i(x) < +\infty\} \cap \{u_i(x) < \infty\}) \\ &\leq \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\theta_{u_i(x)}^{-1}(\{t < \tau^x < \infty\}) \cap \{u_i(x) < \infty\}) \\ &\leq \frac{1}{\rho} \mathbb{P}(t < \tau^x < \infty) \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(i-1 < K(x)) \\ &\leq \frac{1}{\rho^2} \mathbb{P}(t < \tau^x < \infty). \end{aligned}$$

Nous concluons en utilisant l'inégalité des petits amas finis (7.1.2). $\square$

7.3.2 Boîte sans mauvais point de croissance

L'étape suivante consiste à contrôler $u_{i+1}(x) - v_i(x)$. Pour cela, nous allons introduire la notion de points de mauvaise croissance.

Heuristique : Pour traiter les temps de régénération de type $u_{i+1}(x) - v_i(x)$, l'idée est de chercher, proche du point $(x, u_i(x))$ en coordonnées spatio-temporelles (point D dans la figure 7.1), un point (y, t) , engendré par $(0, 0)$, de temps de vie infini (point C dans la figure 7.1) : nous pourrions alors, avec l'estimée de croissance au moins linéaire, montrer que x est engendré, pas trop longtemps après $v_i(x)$, à partir de ce nouveau point source (y, t) . Toute la difficulté consiste à bien contrôler la distance entre $(x, u_i(x))$ et un point source (y, t) . Si la configuration autour de $(x, u_i(x))$ est "raisonnable", ce point sera proche de $(x, u_i(x))$, ce qui donnera le contrôle souhaité entre $u_{i+1}(x)$ et $u_i(x)$.

Soient M (qu'on peut supposer supérieur ou égal à 1) et C les constantes données dans les estimées (7.1.1) et (7.1.3). Notons

$$\kappa = 3M(1 + C) > 3. \quad (7.3.1)$$

Définition 7.3.2. Pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $t > 0$, nous dirons que le point $y \in \mathbb{Z}^d$ a une mauvaise croissance (paramétrée par t) par rapport à la particule x si l'événement suivant est réalisé :

$$E^y(x, t) = \underbrace{\{H_t^y \not\subset y + B_{Mt}\}}_{\text{la descendance de } y \text{ croît trop vite}} \quad (7.3.2)$$

$$\cup \underbrace{\{t/2 < \tau^y < +\infty\}}_{y \text{ a une descendance finie trop longue}} \quad (7.3.3)$$

$$\cup \underbrace{\{\tau^y = +\infty, \inf\{s \geq 2t : x \in A_s^y\} > \kappa t\}}_{y \text{ a une descendance infinie mais retouche } x \text{ trop lentement}} \quad (7.3.4)$$

Remarque. 1. Il s'agit d'une condition uniquement sur les particules spatiales (avec un paramètre t caractérisant la croissance).

2. Si y n'est pas de mauvaise croissance alors y a une descendance qui ne croît pas trop vite (7.3.2) et il vérifie un des deux cas suivants :

- (a) sa descendance est finie et courte
- (b) sa descendance est infinie et retouche vite x .

3. Si y est trop loin de x et de bonne croissance, alors y vérifie forcément le premier cas (2a) (car il ne peut pas toucher x rapidement tout en ayant une descendance qui ne croît pas trop vite).

Nous cherchons maintenant à compter les points de mauvaise croissance dans une boîte spatio-temporelle autour de $(x, 0)$ (que nous translaterons temporellement ensuite à notre convenance grâce à θ_s).

Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ et $t > 0$ fixés comme précédemment pour caractériser la mauvaise croissance. Nous regardons dans une boîte spatiale d'ordre linéaire par rapport à t , autour de x , c'est-à-dire $x + B_{Mt+2}$. Dans l'heuristique, nous avons dit que si l'on se trouvait en un point $(x, u_i(x))$ de descendance finie, on voulait repartir en arrière pour trouver un point parent de descendance infinie. Nous cherchons donc à n'avoir que des points de bonne croissance pendant un certain temps. Nous allons par conséquent nous donner un paramètre temporel supplémentaire $L > 0$ et compter les points (spatio-temporels) tels que :

- $(y, s) \in (x + B_{Mt+2}) \times [0, L]$
- l'événement $E^y(x, t) \circ \theta_s$ est réalisé.

Pour les modèles discrets, il suffit de poser :

$$N_L(x, t) = \sum_{y \in x + B_{Mt+2}} \sum_{n \in \{s, \dots, s+L\}} \mathbb{1}_{E^y(x, t)} \circ \theta_n.$$

Dans le cas des modèles continus, la quantité précédente est infinie et nous devons trouver une autre façon de compter « discrètement » les points. Bien que le modèle soit continu, il se passe un nombre fini d'événements dans une boîte spatio-temporelle finie car notre modèle peut être construit à partir de processus de Poisson (en fait, cela vient de la représentation graphique des systèmes de particules en interaction additifs introduits au chapitre 1). Nous allons donc compter les points spatio-temporels où il se passe quelque chose grâce à une mesure de comptage ν_y de tous les événements en y (par rapport au processus de Poisson) dans l'intervalle de temps $[0, L]$:

$$N_L(x, t) = \sum_{y \in x + B_{Mt+2}} \int_0^L \mathbb{1}_{E^y(x, t)} \circ \theta_s d\nu_y(s).$$

Pour des raisons techniques, nous aurons besoin qu'il se passe suffisamment de choses dans la boîte ne contenant pas de points de mauvaise croissance que nous regarderons. Pour cela, nous comptons le temps 0 dans la mesure ν et nous modifions notre événement de mauvaise croissance par

$$\tilde{E}^y(x, t) = E^y(x, t) \cup \{\nu_y[0, t/2] = 0\} \quad (7.3.5)$$

i.e. il ne se passe rien en y dans un intervalle de temps $\frac{t}{2}$. Dans la suite, nous garderons simplement la notation E en n'oubliant pas que nous considérons $\tilde{E}$ si le modèle est à temps continu.

Remarque. Les modifications apportées à ν impliquent que si $x_0 \in B_{Mt+2}$ alors $(x_0, 0)$ est compté par la mesure ν . Si $N_L(x, t) = 0$ alors $\tilde{E}^{x_0}(x, t)$ n'est pas réalisé et $\nu_{x_0}([0, t/2]) \neq 0$ par (7.3.5). En itérant, tout intervalle de temps de longueur $t/2$ inclus dans $[0, L]$ au dessus de x_0 contient un événement éventuel (i.e. une arrivée d'un processus de Poisson).

▷ **Exemple.** – Dans le cas discret (DOP par exemple), ν est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.
– Pour le processus de contact avec vieillissement, nous considérons :

$$\nu_y = \omega_y^1 + \omega_y^\gamma + \sum_{e \in \mathbb{E}^d: y \in e} \omega_e^\infty + \delta_0$$

où ω_y^1 est la mesure de Poisson associée aux morts, ω_y^γ est celle associée aux maturations et ω_e^∞ est celle associée aux naissances.

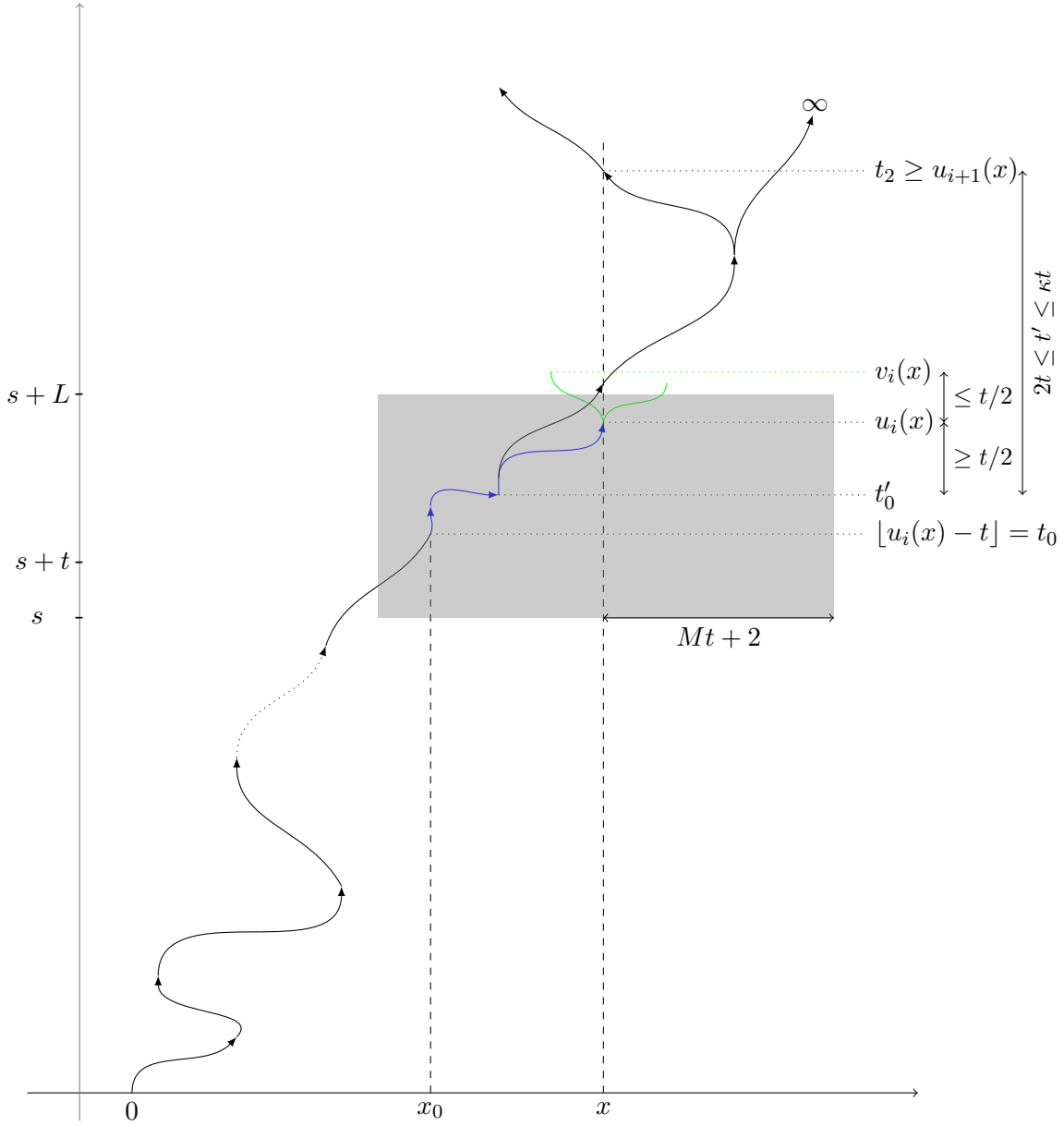
– Pour le CPREE, nous considérons :

$$\nu_y = \omega_y^0 + \omega_y^1 + \sum_{e \in \mathbb{E}^d: y \in e} \omega_e + \delta_0,$$

où ω_y^0 est la mesure de Poisson associée aux morts du type 0, ω_y^1 est celle associée aux morts de type 1 et ω_e est celle associée aux naissances.

Nous allons voir que si la boîte spatio-temporelle ne contient que des points de bonne croissance, et que $u_i(x)$ est dans la bonne fenêtre temporelle, alors nous contrôlons le délai avant la prochaine génération de la particule x au temps $u_{i+1}(x)$.

Lemme 7.3.3. Soient $x \in \mathbb{Z}^d$ et $t \geq 2$. Si L, s sont des entiers strictement positifs tels que $N_L(x, t) \circ \theta_s = 0$ et $u_i(x) \in [s + t, s + L]$, alors $v_i(x) = +\infty$ ou $u_{i+1}(x) - u_i(x) \leq \kappa t$.



■ boîte sans points de mauvaise croissance.

1. $v_i(x) - u_i(x) \leq t/2$ grâce à (7.3.3).
 2. x_0 dans la boîte grise grâce à (7.3.2).
 3. $t_0 \leq u_i(x) - t/2$ grâce à (7.3.5).
- Donc $u_i(x) - t_0 \geq t/2$ et (x_0, t_0) survit ∞ par (7.3.3).
4. x_0 retouche x (après $v_i(x)$ mais avant $u_i(x) + \kappa t$) grâce à (7.3.4).

FIGURE 7.2 – Boîte sans point de mauvaise croissance et contrôle de $u_{i+1}(x) - u_i(x)$ (illustration du lemme 7.3.3).

Le deuxième cas du lemme est illustré par la figure 7.2.

Démonstration. Par définition de $u_i(x)$, c'est un temps de naissance éventuelle de la particule x et $u_i(x) \in [s, s+L]$ donc $(x, u_i(x))$ est bien un point de la boîte spatio-temporelle compté $N_L(x, t) \circ \theta_s$. Revenons à la définition 7.3.2. Comme $N_L(x, t) \circ \theta_s = 0$, alors $E^x(x, t) \circ \theta_{u_i(x)}$ n'est pas réalisé et cela assure, par l'événement (7.3.3), que l'un des cas suivants se produit :

1. $\tau^x \circ \theta_{u_i(x)} = +\infty$ donc $v_i(x) = \infty$ est on est dans le premier cas annoncé par le lemme ;
2. $\tau^x \circ \theta_{u_i(x)} \leq t/2$.

Intéressons nous donc au deuxième cas en nous appuyant sur la figure 7.2. On remarque d'abord que $v_i(x) - u_i(x) \leq t/2$ (en vert sur la figure).

Par définition, il existe un chemin ouvert $\gamma_i : [0, u_i(x)] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ entre $(0, 0)$ et $(x, u_i(x))$, c'est-à-dire tel que $\gamma_i(0) = 0$ et $\gamma_i(u_i(x)) = x$. Considérons la portion du chemin γ_i comprise entre les instants de $\lfloor u_i(x) - t \rfloor$ et $u_i(x)$ (en bleu sur la figure). Notons $x_0 = \gamma_i(\lfloor u_i(x) - t \rfloor)$ et montrons que $x_0 \in x + B_{Mt+2}$. En effet, si $x_0 \notin x + B_{Mt+2}$, nous regardons le prochain instant t_1 où γ_i entre dans $x + B_{Mt+2}$ et nous notons x_1 ce point d'entrée. Comme x_1 est à la frontière intérieure de $x + B_{Mt+2}$, alors $\|x - x_1\|_\infty \geq Mt + 1$ et, par ailleurs, $t_1 > u_i(x) - t$. Le point (x_1, t_1) est compté par $N_L(x, t)$ donc la non-réalisation de $E^{x_1}(x, t) \circ \theta_{t_1}$ assure que x ne pourra être atteint avant un délai t depuis (x_1, t_1) par (7.3.2), ce qui entre en contradiction avec la définition du chemin γ_i .

Posons $t'_0 = \lfloor u_i(x) - t \rfloor$. Dans le cas discret, comme $x_0 \in x + B_{Mt+2}$ et $t'_0 \geq s$, le point (x_0, t'_0) est compté par $\nu_{x_0} \circ \theta_s$.

Dans le cas continu, par contre, nous ne savons pas s'il se passe quelque chose en (x_0, t'_0) . Comme $x_0 \in x + B_{Mt+2}$ et $N_L(x, t) \circ \theta_s = 0$, par la remarque précédant le lemme, tout intervalle de temps de longueur supérieure à $t/2$ inclus dans $[s, s+L]$ au dessus de x_0 contient un événement éventuel ; nous notons alors t_0 le premier instant où un événement a lieu. Le point (x_0, t_0) est par définition sur le chemin γ_i , compté par $\nu_{x_0} \circ \theta_s$, et t_0 vérifie :

$$t_0 \leq \lfloor u_i(x) - t \rfloor + t/2 \leq u_i(x) - t/2.$$

Il en est de même pour t'_0 . Ainsi, au moment où (x_0, t_0) (respectivement (x_0, t'_0)) engendre $(x, u_i(x))$, sa descendance a survécu un temps au moins $t/2$, et la non-réalisation de $E^{x_0}(x, t) \circ \theta_{t_0}$ (respectivement $E^{x_0}(x, t) \circ \theta_{t'_0}$) assure alors que celle-ci survit infiniment par (7.3.3) et que

$$\inf\{u \geq 2t : x \in \xi_u^{x_0}\} \circ \theta_{t_0} \leq \kappa t,$$

(respectivement $\circ \theta_{t'_0}$) par (7.3.4). Ainsi, il existe $t_2 \in [t_0 + 2t, t_0 + \kappa t]$ avec $x \in A_{t_2}$ dans le cas continu et il existe $t'_2 \in [t'_0 + 2t, t'_0 + \kappa t]$ avec $x \in A_{t'_2}$ dans le cas discret. Comme $v_i(x) - u_i(x) \leq t/2$, On a

$$\left. \begin{array}{l} t_2 \geq t_0 + 2t \\ t'_2 \geq t'_0 + 2t \end{array} \right\} \geq \lfloor u_i(x) - t \rfloor + 2t = u_i(x) + t - 1 \geq v_i(x).$$

Par ailleurs, $x \in A_{t_2}$ donc $u_{i+1}(x) \leq t_2$ et finalement, $u_{i+1}(x) - u_i(x) \leq t_2 - u_i(x) \leq t_0 - u_i(x) + \kappa t \leq \kappa t$ (et de même pour t'_2). $\square$

Nous cherchons maintenant la probabilité qu'une boîte spatio-temporelle du type précédent ne contienne pas de point de mauvaise croissance par rapport à x . Pour cela, nous rappelons que $\kappa = 3M(1+C)$, où M et C sont les constantes données respectivement par (7.1.1) et (7.1.3). Nous obtenons alors que pour tout choix de L , il est très probable qu'une boîte ne contienne aucun point de mauvaise croissance.

Lemme 7.3.4. *Il existe $A, B > 0$ tels que pour tous $L > 0$, $x \in \mathbb{Z}^d$ et $t > 0$ on a*

$$\mathbb{P}(N_L(x, t) \geq 1) \leq A(1 + L) \exp(-Bt).$$

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{Z}^d$, $t > 0$ et $y \in x + B_{Mt+2}$. Nous contrôlons d'abord la probabilité de l'événement $E^y(x, t)$. Grâce aux connaissances que nous avons du processus, nous contrôlons chaque condition de $E^y(x, t)$; il existe, en effet, A_1, B_1, A_2, B_2 tels que

- $\mathbb{P}(H_t^y \not\subset y + B_{Mt}) \leq A_1 \exp(-B_1 t)$ d'après (7.1.1),
- $\mathbb{P}(t < \tau^x < \infty) \leq A_2 \exp(-B_2 t)$ d'après (7.1.2),
- Si $\tau^y = +\infty$, il existe $z \in A_{2t}^y$ tel que $\tau^z \circ \theta_{2t} = +\infty$. Notre choix de κ implique alors que

$$\begin{aligned} & \{\tau^y = +\infty, \inf\{s \geq 2t : x \in A_s^y\} > \kappa t\} \\ & \subset \{A_{2t}^y \not\subset y + B_{2Mt}\} \cup \bigcup_{z \in y + B_{2Mt}} \{t^z(x) \circ \theta_{2t} > (\kappa - 2M)t\} \\ & \subset \{A_{2t}^y \not\subset y + B_{2Mt}\} \cup \bigcup_{z \in y + B_{2Mt}} \{t^z(x) \circ \theta_{2t} > C\|x - z\| + Mt - 3C\}. \end{aligned}$$

Ainsi, grâce aux contrôles (7.1.1) et (7.1.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tau^y = +\infty, \inf\{s \geq 2t : x \in A_s^y\} > \kappa t) \\ & \leq A \exp(-2B Mt) + (1 + 4Mt)^d A \exp(-B(Mt - 3C)). \end{aligned}$$

Dans le cas du modèle continu, nous devons aussi contrôler $\mathbb{P}(\nu_y([0, t/2]) = 0)$. ν est un processus de comptage qui s'écrit comme somme de processus de Poisson indépendants donc il existe $A_3 > 0$ (dépendant des paramètres du système) tel que

$$\mathbb{P}(\nu_y([0, t/2]) = 0) = \exp(-A_3 t/2).$$

Finalement, nous obtenons l'existence de A_4, B_4 tels que

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \forall t > 0, \forall y \in x + B_{Mt+2} \quad \mathbb{P}(E^y(x, t)) \leq A_4 \exp(-B_4 t).$$

Nous contrôlons maintenant $\mathbb{P}(N_L(x, t) \geq 1)$ à l'aide de cette dernière inégalité.

Pour $y \in x + B_{Mt+2}$, ν_y est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ dans le cas discret et, dans le cas continu, $\nu_y = \beta_y + \delta_0$ où β_y est un processus de Poisson d'intensité 1 fonction des paramètres du système. Dans les deux cas, notons $(T_n^y)_{n \geq 1}$ la suite croissante des instants d'arrivée de ν_y (avec $T_0^y = 0$).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_L(x, t) \geq 1) & \leq \mathbb{E}[N_L(x, t)] = \sum_{y \in x + B_{Mt+2}} \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{E^y(x, t)} \circ \theta_s d(\nu_y)(s) \right] \\ & = \sum_{y \in x + B_{Mt+2}} \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{T_n^y \leq L\}} \mathbb{1}_{E^y(x, t)} \circ \theta_{T_n^y} \right] \\ & = \sum_{y \in x + B_{Mt+2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{T_n^y \leq L\}} \right] \mathbb{P}(E^y(x, t)) \right) \\ & \leq \sum_{y \in x + B_{Mt+2}} (1 + \mathbb{E}[\nu_y([0, L])]) \mathbb{P}(E^y(x, t)) \\ & \leq (2Mt + 5)^d (1 + LI) \mathbb{P}(E^y(x, t)). \end{aligned}$$

Nous obtenons le contrôle souhaité avec des constantes A, B ne dépendant que des paramètres du système. $\square$

Le lemme 7.3.3 nous donne un contrôle de $u_{i+1}(x) - u_i(x)$ si on sait placer une boîte sans point de mauvaise croissance autour de $u_i(x)$. Pour cela, il faut savoir situer $u_i(x)$. Nous allons faire un contrôle de proche en proche et il est donc nécessaire d'initialiser le procédé. On pourrait initialiser par une hypothèse sur $u_1(x) = t(x)$. Nous choisissons une autre hypothèse initiale : l'existence d'un point (u, s) proche en espace de x , atteint depuis 0 et départ d'un chemin infini.

Lemme 7.3.5. *Pour tous $s \in \mathbb{N}^*$, $t > 0$, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on a l'inclusion suivante :*

$$\begin{aligned} & \{\tau = +\infty\} \\ & \cap \{\exists u \in x + B_{Mt+2}, \tau^u \circ \theta_s = +\infty, u \in A_s\} \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

$$\cap \{N_{K(x)\kappa t}(x, t) \circ \theta_s = 0\} \quad (7.3.7)$$

$$\begin{aligned} & \cap \bigcap_{1 \leq i < K(x)} \{v_i(x) - u_i(x) < t\} \\ & \subset \{\tau = +\infty\} \cap \{\sigma(x) \leq s + K(x)\kappa t\}. \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

Ce lemme est illustré par la figure 7.3. Nous l'interprétons de la façon suivante : s'il y a un point (u, s) , proche de x , avec descendance infinie et une boîte sans point de mauvaise croissance au dessus de (x, s) (de hauteur $K(x)\kappa t$), alors nous sommes en mesure de contrôler $\sigma(x)$ (en fonction de s et $K(x)\kappa t$).

Démonstration. Soient $s, t > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$. Supposons la première partie de l'inclusion.

Si tous les $u_i(x)$ finis sont inférieurs à $s + t$, alors $\sigma(x) \leq s + t \leq s + K(x)\kappa t$ et l'inclusion est vérifiée. Sinon posons

$$i_0 = \max\{i : u_i(x) \leq s + t\}.$$

On a $v_{i_0}(x) < +\infty$ donc l'événement (7.3.8) assure que $v_{i_0}(x) - u_{i_0}(x) < t$, et donc $v_{i_0}(x) \leq s + 2t$. Ensuite, comme $N_{K(x)\kappa t}(x, t) \circ \theta_s = 0$ par (7.3.7) et que le point (u, s) est compté, l'événement $E^u(x, t) \circ \theta_s$ n'est pas réalisé. Par ailleurs, l'événement (7.3.6) implique que $\tau^u \circ \theta_s = +\infty$, donc

$$\inf\{r \geq 2t : x \in A_r^u\} \circ \theta_s \leq \kappa t,$$

ce qui implique que $u_{i_0+1}(x) \leq s + \kappa t$. Par définition de i_0 , pour tout $j \geq 1$,

$$u_{i_0+j}(x) \geq s + t,$$

donc nous pouvons appliquer le lemme 7.3.3 de proche en proche pour $j \leq K(x) - i_0$ avec l'événement $\{N_{K(x)\kappa t}(x, t) \circ \theta_s = 0\}$; on obtient alors que

$$\forall j \in \{1, \dots, K(x) - i_0\} \quad u_{i_0+j} \leq s + j\kappa t;$$

d'où

$$\sigma(x) = u_{i_0+(K(x)-i_0)}(x) \leq s + (K(x) - i_0)\kappa t \leq s + K(x)\kappa t,$$

ce qui achève la démonstration de l'inclusion. $\square$

Le lemme nous donne donc, sous réserve de l'existence d'un point source (u, s) (proche en espace de x) et d'un contrôle d'une boîte de hauteur $K(x)\kappa t$, une domination de $\sigma(x)$ par $s + K(x)\kappa t$.

La difficulté réside donc dans :

- trouver un point source
- contrôler une boîte de hauteur $K(x)\kappa t$, translaté par θ_s .

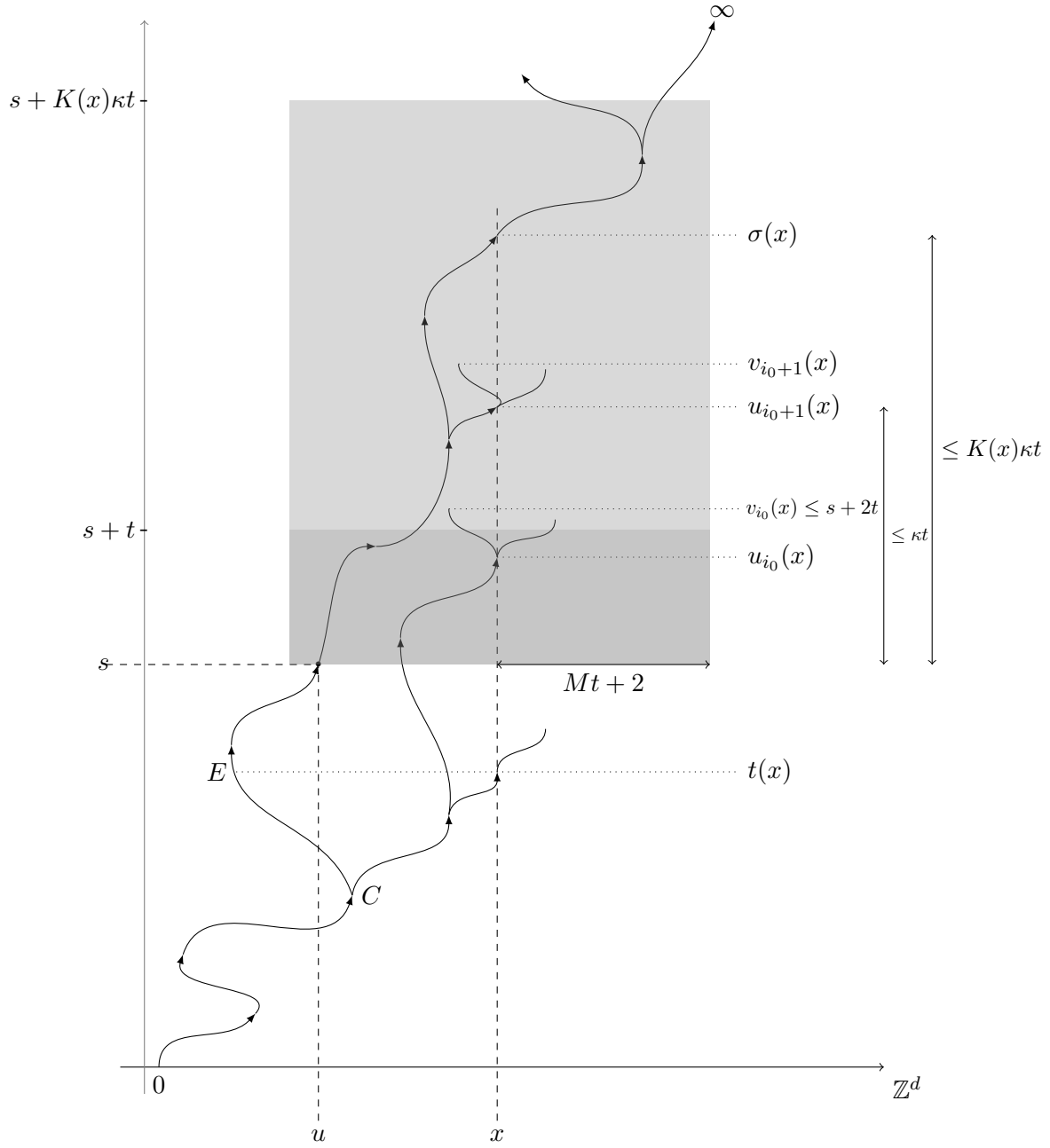


FIGURE 7.3 – Initialisation et contrôle de $\sigma(x)$ (illustration du lemme 7.3.5).

7.4 Contrôle du défaut de sous-additivité

Nous voulons contrôler $\sigma(x+y)$ par rapport à $\sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$. Nous essayons donc d'utiliser le lemme précédent avec $s = \sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$. Il s'avère justement que le point $(x+y, \sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x)$ est départ d'une descendance infinie. Nous allons donc montrer le résultat suivant :

Théorème 7.4.1. *Il existe $A, B > 0$ tels que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$,*

$$\forall t > 0 \quad \bar{\mathbb{P}} \left(\sigma(x+y) - (\sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x) \geq t \right) \leq A \exp \left(-B\sqrt{t} \right).$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ et $t > 0$. Nous posons donc $s = \sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$. On a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}} \left(\sigma(x+y) > \sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x + t \right) &\leq \bar{\mathbb{P}} \left(K(x+y) > \frac{\sqrt{t}}{\kappa} \right) \\ &+ \bar{\mathbb{P}} \left(K(x+y) \leq \frac{\sqrt{t}}{\kappa}, \sigma(x+y) \geq s + t \right). \end{aligned}$$

Grâce au lemme 7.2.1 et à (4.2.1), $\bar{\mathbb{P}} \left(K(x+y) > \frac{\sqrt{t}}{\kappa} \right) \leq \frac{1}{\rho} \exp \left(\frac{\sqrt{t}}{\kappa} \ln(1-\rho) \right)$. Pour le second terme, nous souhaitons appliquer le lemme 7.3.5. Remarquons que si $K(x+y) \leq \frac{\sqrt{t}}{\kappa}$, alors $t \geq K(x+y)\kappa\sqrt{t}$ et $\tau^0 = \infty$. Ainsi,

$$\left\{ N_{K(x+y)\kappa\sqrt{t}}(x+y, \sqrt{t}) \geq 1 \right\} \subset \left\{ N_t(x+y, \sqrt{t}) \geq 1 \right\}.$$

Nous utilisons donc le lemme 7.3.5 autour de $x+y$, à l'échelle $\sqrt{t}$, au temps initial s et avec comme point source $u = x+y$,

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbb{P}} \left(K(x+y) \leq \frac{\sqrt{t}}{\kappa}, \sigma(x+y) \geq s + K(x+y)\kappa\sqrt{t} \right) \\ &\leq \bar{\mathbb{P}} \left(N_t(x+y, \sqrt{t}) \circ \theta_s \geq 1 \right) + \bar{\mathbb{P}} \left(\exists i < K(x+y) : v_i(x+y) - u_i(x+y) > \sqrt{t} \right) \\ &\leq \bar{\mathbb{P}} \left(N_t(x+y, \sqrt{t}) \circ \theta_s \geq 1 \right) + A \exp(-Bt), \end{aligned}$$

le dernier contrôle provenant du lemme 7.3.1. Étant donné que $N_t(x+y, \sqrt{t}) \circ \theta_s = N_t(0, \sqrt{t}) \circ T_x \circ T_y \circ \theta_{\sigma(x)} \circ \theta_{\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x}$, on a

$$N_t(x+y, \sqrt{t}) \circ \theta_s = N_t(0, \sqrt{t}) \circ \tilde{\theta}_y \circ \tilde{\theta}_x.$$

Ainsi $\bar{\mathbb{P}}(N_t(x+y, \sqrt{t}) \circ \theta_s \geq 1) = \bar{\mathbb{P}}(N_t(0, \sqrt{t}) \geq 1)$, qui est contrôlé par le lemme 7.3.4. $\square$

Corollaire 7.4.2. *Pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$, posons $r(x, y) = (\sigma(x+y) - (\sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x))^+$. Pour tout $p \geq 1$, il existe $M_p > 0$ tel que*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbb{E}[r(x, y)^p] \leq M_p.$$

Démonstration. Nous écrivons $\bar{\mathbb{E}}[r(x, y)^p] = \int_0^{+\infty} pu^{p-1} \bar{\mathbb{P}}(r(x, y) > u) du$ et nous utilisons le théorème 7.4.1. $\square$

7.4.1 Différence entre σ et t

Nous voulons maintenant contrôler $\sigma(x)$ par rapport à $t(x)$. Contrairement au cas précédent, $(x, t(x))$ n'est a priori pas le départ d'un chemin infini (sinon $\sigma(x) = t(x)$) ; nous devons donc chercher un point source (u, s) pas trop loin. Revenons à la figure 7.3. Pour avoir $s = t(x)$ comme précédemment, on pourrait penser au point E mais celui-ci peut être très éloigné spatialement de x et ne pas vérifier la condition (7.3.6) du lemme 7.3.5. Pour cela, nous allons nous permettre un $s < t(x)$ et chercher un point source le long du chemin ouvert entre $(0, 0)$ et $(x, t(x))$. Le point C paraît être un bon candidat ; pour assurer qu'il soit proche spatialement, nous devons imposer que les points avant $t(x)$ aient une croissance d'ordre au plus linéaire. Ceci est une condition forte car la boîte à contrôler est d'une hauteur de l'ordre de $\|x\|$. Cela ne sera pas sans conséquence sur la qualité de notre estimée (perte de précision et d'uniformité en $\|x\|$).

Proposition 7.4.3. *Il existe $A, B, \alpha > 0$ tels que pour tout $z > 0$, et tout $x \in \mathbb{Z}^d$,*

$$\bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) \geq t(x) + K(x)(\alpha \log(1 + \|x\|) + z)) \leq A \exp(-Bz).$$

Démonstration. Nous introduisons le même type d'outil que précédemment (points de mauvaise croissance) mais la condition est ici moins contraignante. Pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$ et $t, L > 0$, notons

$$\begin{aligned} \tilde{E}^y(t) &= \{\tau_y < +\infty, H_{\tau_y}^y \not\subset B_{Mt}\}, \\ \tilde{N}_L(x, t) &= \sum_{y \in x + B_{Mt+1}} \int_0^L \mathbb{1}_{\tilde{E}^y(t)} \circ \theta_s \, d\nu_y(s). \end{aligned}$$

À l'aide des estimées (7.1.1) et (7.1.2), nous obtenons à nouveau qu'il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tous $x \in \mathbb{Z}^d$, $t > 0$, on a

$$\bar{\mathbb{P}}(\tilde{N}_L(x, t) \geq 1) \leq A(1 + L) \exp(-Bt). \quad (7.4.1)$$

Soit (u, s) un point sur le chemin d'infection entre $(0, 0)$ et $(x, t(x))$ tel que $\tau^u \circ \theta_s = +\infty$ et tel que s est le dernier instant satisfaisant ces propriétés (point C sur la figure 7.3). Sur l'événement $\{\tau^0 = +\infty\}$, le point (u, s) existe bien.

Montrons maintenant que si $\tilde{N}_{t(x)}(x, t) = 0$, alors $u \in x + B_{Mt+2}$. En effet, si $\|u - x\| > Mt + 2$, considérons le premier point (u', s') du chemin d'infection (après (u, s)) qui est dans $x + B_{Mt}$: par définition de s , la descendance de (u', s') est finie, mais de diamètre supérieur ou égal à Mt (car elle contient x) et est compté par ν_y . Cela implique $\tilde{N}_{t(x)}(x, t) \geq 1$ et donne l'implication souhaitée.

Sur l'événement $\{\tilde{N}_{t(x)}(x, t) = 0\}$, nous pourrions donc appliquer le lemme 7.3.3 autour du point x , avec une échelle

$$t = \frac{\alpha \log(1 + \|x\|) + z}{\kappa} \geq \frac{z}{\kappa},$$

le point (u, s) comme point-source et une fenêtre temporelle de hauteur $L = K(x)\kappa t$. Ici, $\alpha > 0$ est une constante suffisamment grande que nous choisirons par la suite. Comme $T \leq t(x)$,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) - t(x) \geq K(x)\kappa t) &\leq \bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) \geq s + K(x)\kappa t) \text{ car } s \leq t(x) \\ &\leq \bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) \geq s + K(x)\kappa t, \tilde{N}_{t(x)}(x, t) = 0) + \bar{\mathbb{P}}(\tilde{N}_{t(x)}(x, t) \geq 1) \\ &\leq \bar{\mathbb{P}}(N_{K(x)\kappa t}(x, t) \circ \theta_s \geq 1) + \bar{\mathbb{P}}(\exists i < K(x) : v_i(x) - u_i(x) > t) \\ &\quad + \bar{\mathbb{P}}(\tilde{N}_{t(x)}(x, t) \geq 1). \end{aligned}$$

Le second terme est majoré par le lemme 7.3.1. Contrôlons le dernier terme :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{P}}(\check{N}_{t(x)}(x, t) \geq 1) &\leq \bar{\mathbb{P}}(\check{N}_{C\|x\|+v}(x, t) \geq 1) + \bar{\mathbb{P}}(t(x) > C\|x\| + v), \\ &\leq A(1 + C\|x\| + v)\exp(-Bt) + A'\exp(-B'v)\end{aligned}$$

grâce au contrôle de la quantité $\check{N}$ obtenu en (7.4.1) et grâce à l'estimée de croissance au moins linéaire (7.1.2) (en choisissant α suffisamment grand).

Pour traiter le premier terme, nous remarquons que $N_{K(x)\kappa t}(x, t) \circ \theta_T \leq N_{t(x)+K(x)\kappa t}(x, t)$. Ainsi, on a

$$\bar{\mathbb{P}}(N_{K(x)\kappa t}(x, t) \circ \theta_T \geq 1) \leq \bar{\mathbb{P}}(N_{C\|x\|+z+K(x)\kappa t}(x, t) \geq 1) + \bar{\mathbb{P}}(t(x) \geq C\|x\| + z).$$

Comme précédemment, le second terme est contrôlé à l'aide de (7.1.2), tandis que, en découpant suivant les valeurs prises par $K(x)$, en utilisant (7.3.4), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{P}}(N_{C\|x\|+z+K(x)\kappa t}(x, t) \geq 1) &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\bar{\mathbb{P}}(K(x) = k)} \sqrt{\bar{\mathbb{P}}(N_{k\kappa t+C\|x\|+z}(x, t) \geq 1)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\bar{\mathbb{P}}(K(x) = k)} \sqrt{A(k\kappa t + C\|x\| + z)\exp(-Bt)} \\ &\leq \sqrt{A(1 + C\|x\|)(1 + z)(1 + \kappa t)} \exp\left(-\frac{B}{2}t\right) \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{(1 + k)\bar{\mathbb{P}}(K(x) = k)}.\end{aligned}$$

Nous avons montré que la queue de la distribution de $K(x)$ était sous-géométrique au lemme 7.2.1 ; la série est donc finie et, quitte à augmenter α , il existe A' et B' tels qu'on puisse majorer par $A'\exp(-B'z)$. $\square$

Nous avons maintenant tous les éléments pour prouver le théorème 7.4.4.

Corollaire 7.4.4. $\bar{\mathbb{P}}$ presque sûrement,

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{|\sigma(x) - t(x)|}{\|x\|} = 0.$$

Démonstration. Pour tout $p \geq 1$, nous allons contrôler $\bar{\mathbb{E}}(|\sigma(x) - t(x)|^p)$. La proposition 7.4.3 nous dit que la variable aléatoire $V_x = \frac{\sigma(x) - t(x)}{K(x)} - \alpha \log(1 + \|x\|)$ est stochastiquement dominée par une variable aléatoire W qui a des moments exponentiels. Grâce à l'inégalité de Minkovski, on a :

$$\begin{aligned}(\bar{\mathbb{E}}|\sigma(x) - t(x)|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\bar{\mathbb{E}}|K(x)(\alpha \log(1 + \|x\|) + V_x)|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \alpha \log(1 + \|x\|) (\bar{\mathbb{E}}K(x)^p)^{\frac{1}{p}} + (\bar{\mathbb{E}}[K(x)^p V_x^p])^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \alpha \log(1 + \|x\|) (\bar{\mathbb{E}}K(x)^p)^{\frac{1}{p}} + (\bar{\mathbb{E}}K(x)^{2p} \bar{\mathbb{E}}V_x^{2p})^{\frac{1}{2p}} \\ &\leq \alpha \log(1 + \|x\|) (\bar{\mathbb{E}}G^p)^{\frac{1}{p}} + (\bar{\mathbb{E}}G^{2p} \bar{\mathbb{E}}W^{2p})^{\frac{1}{2p}},\end{aligned}$$

où G est variable aléatoire géométrique qui domine stochastiquement $K(x)$ par le lemme 7.2.1. Donc, il existe $C(p) > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\bar{\mathbb{E}}(|\sigma(x) - t(x)|^p) \leq C(p) (\log(1 + \|x\|))^p.$$

Soit $p > d$. On a :

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} \frac{|\sigma(x) - t(x)|^p}{(1 + \|x\|)^p} \leq C(p) \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\log(1 + \|x\|))^p}{(1 + \|x\|)^p} < +\infty.$$

Finalement $\left(\frac{|\sigma(x) - t(x)|}{1 + \|x\|} \right)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ est presque sûrement dans $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ et tend donc vers 0. $\square$

Nous en déduisons trois propriétés fondamentales sur σ :

Corollaire 7.4.5. *Il existe $A, B, C > 0$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \forall t > 0, \quad \bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) \geq C\|x\| + t) \leq A \exp\left(-B\sqrt{t}\right).$$

Démonstration. Soit α donné par la proposition 7.4.3.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) > (C+1)\|x\| + t) &\leq \bar{\mathbb{P}}(t(x) \geq C\|x\| + t/2) + \bar{\mathbb{P}}\left(K(x) > \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\|x\| + t/2}\right) \\ &\quad + \bar{\mathbb{P}}\left(\begin{array}{l} \sigma(x) > (C+1)\|x\| + t \\ t(x) < C\|x\| + t/2 \\ K(x) \leq \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\|x\| + t/2} \end{array}\right). \end{aligned}$$

Le premier terme est contrôlé avec l'estimée (7.1.3), le second avec le lemme 7.2.1 et pour le dernier, nous remarquons que si $K(x) \leq \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\|x\| + t/2}$ alors

$$K(x)[\alpha \log(1 + \|x\|) + \alpha\sqrt{\|x\| + t/2}] \leq K(x)[\alpha\sqrt{\|x\|} + \alpha\sqrt{\|x\| + t/2}] \leq \|x\| + t/2;$$

donc le dernier terme est inférieur à

$$\bar{\mathbb{P}}\left(\sigma(x) > t(x) + K(x)\left(\alpha \log(1 + \|x\|) + \alpha\sqrt{\|x\| + t/2}\right)\right);$$

cette dernière quantité est contrôlée par la proposition 7.4.3. $\square$

Corollaire 7.4.6. *Pour tout $p \geq 1$, il existe $C(p) > 0$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbb{E}[\sigma(x)^p] \leq C(p)(1 + \|x\|)^p.$$

Démonstration. Grâce à l'inégalité de Minkovski, on a

$$(\mathbb{E}[\sigma(x)^p])^{1/p} \leq C\|x\| + \left(\mathbb{E}\left[\left((\sigma(x) - C\|x\|)^+\right)^p\right]\right)^{1/p}.$$

De plus, par le corollaire 7.4.5, $\mathbb{E}\left[\left((\sigma(x) - C\|x\|)^+\right)^p\right] = \int_0^{+\infty} pu^{p-1} \bar{\mathbb{P}}(\sigma(x) - C\|x\| > u) du < +\infty.$ $\square$

Dans le résultat suivant, nous en déduisons, à partir du contrôle de la queue de distribution de σ et de la presque sous-additivité, l'uniforme continuité de σ .

Corollaire 7.4.7. *Pour tout $\varepsilon > 0$, $\bar{\mathbb{P}}$ -p.s., il existe $R > 0$ tel que*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, (\|x\| \geq R \text{ et } \|x - y\| \leq \varepsilon\|x\|) \implies (|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C\varepsilon\|x\|).$$

Démonstration. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, on définit l'événement

$$A_m(\varepsilon) = \{\exists x, y \in \mathbb{Z}^d : \|x\| = m, \|x - y\| \leq \varepsilon m \text{ et } |\sigma(x) - \sigma(y)| > C\varepsilon m\}.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} A_m(\varepsilon) &\subset \bigcup_{\substack{(1-\varepsilon)m \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)m \\ \|x-y\| \leq \varepsilon m}} \{\sigma(y-x) \circ \tilde{\theta}_x + r(x, y-x) > C\varepsilon m\}, \\ \text{donc on a } \quad \bar{\mathbb{P}}(A_m(\varepsilon)) &\leq \sum_{\substack{(1-\varepsilon)m \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)m \\ \|z\| \leq \varepsilon m}} \bar{\mathbb{P}}\left(\sigma(z) \circ \tilde{\theta}_x + r(x, z) > C\varepsilon m\right) \\ &\leq \sum_{\substack{(1-\varepsilon)m \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)m \\ \|z\| \leq \varepsilon m}} \bar{\mathbb{P}}(\sigma(z) > 2C\varepsilon m/3) + \bar{\mathbb{P}}(r(x, y-x) > C\varepsilon m/3); \end{aligned}$$

et, en utilisant les contrôles des corollaires 7.4.5 et 7.4.1,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(A_m(\varepsilon)) &\leq (1 + 2\varepsilon m)^d (1 + 2(1 + \varepsilon)m)^d A \exp\left(-B\sqrt{C\varepsilon m/3}\right) \\ &\quad + A' \exp\left(-B'\sqrt{C'\varepsilon m/3}\right) \end{aligned}$$

Nous concluons la preuve en utilisant le lemme de Borel-Cantelli. □

Théorèmes de forme asymptotique

Les champignons poussent dans les endroits humides. C'est pourquoi ils ont la forme d'un parapluie. — Allais.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction de cette partie, les théorèmes de forme asymptotique se prouvent grâce à la théorie des processus sous-additifs initiée par Hammersey et Welsh, notamment pour le modèle de la percolation de premier passage, et, en particulier, grâce au théorème ergodique de Kingman [Kin73] et à ses extensions. Les processus non permanents auxquels appartiennent les processus de contact présentent une difficulté liée à leur extinction éventuelle. Bramson et Griffeath [BG81, BG80] puis Durrett et Griffeath [DG82] s'appuient sur le théorème de Kesten et Hammersley pour montrer le théorème de forme asymptotique du processus de contact standard. Nous nous appuyerons sur le même théorème presque sous-additif mais nous travaillerons avec le temps d'atteinte essentiel, présenté au chapitre précédent, comme bonne quantité pour capturer les propriétés de croissance, stationnarité, intégrabilité et sous-additivité de nos modèles de croissance aléatoire.

8.1 Énoncé

Dans ce chapitre, nous cherchons à établir le théorème suivant de forme asymptotique pour un modèle de croissance assez général :

Théorème 8.1.1. *Soit $(\xi_t)_{t \in \mathcal{T}}$ un système de particules en interaction à plus proches voisins à valeurs dans $S^{\mathbb{Z}^d}$ et (A_t) une propriété d'intérêt à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ vérifiée par les particules telle que :*

- pour tout t , A_t est déterminée par ξ_t ,
- (A_t) est additif au sens suivant : pour toutes $f, g \in S^{\mathbb{Z}^d}$, $A_t^{f \vee g} = A_t^f \vee A_t^g$,
- $\{A_t = \emptyset\}$ est absorbant.

Notons, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned}\tau &= \inf\{t > 0, A_t^{\delta_{\min}} = \emptyset\}, \\ t(x) &= \inf\{t > 0, x \in A_t^{\delta_{\min}}\}.\end{aligned}$$

Nous supposons de plus que $\mathbb{P}(\tau = +\infty) > 0$ et qu'il existe $C_1, C_2, M_1, M_2 > 0$ tels que pour tous

$t > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{P} \left(\exists x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t \text{ et } \|x\|_1 \geq M_1 t \right) \leq C_1 \exp(-C_2 t), \quad (7.1.1)$$

$$\mathbb{P}(t < \tau < \infty) \leq C_1 \exp(-C_2 t), \quad (7.1.2)$$

$$\mathbb{P}(t(x) \geq M_2 \|x\| + t, \tau = \infty) \leq C_1 \exp(-C_2 t). \quad (7.1.3)$$

Alors, il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\cdot | \tau = +\infty)$ presque sûrement, pour t assez grand,

$$(1 - \varepsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{G}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)B_\mu,$$

avec $\tilde{G}_t = \{x \in \mathbb{Z}^d, t(x) \leq t\} + [0, 1]^d$ et B_μ la boule unité de μ .

À partir de maintenant, nous désignerons par *modèle de croissance* un processus ξ vérifiant les hypothèses du théorème. Les détails de ces hypothèses se trouvent à la section 7.1.1. Nous rappelons notamment que $\delta_{\min}$ représente une configuration minimale vérifiant la propriété A .

8.2 Démonstration

Nous voulons démontrer le théorème de forme asymptotique précédent pour les modèles de croissance aléatoire. Nous énonçons tout d'abord le théorème de presque sous-additivité de Kesten et Hammersley [Kes73, Ham74], puis nous montrons un théorème de forme asymptotique pour une famille de variables aléatoires $(\sigma(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ vérifiant certaines hypothèses. Enfin, nous concluons en appliquant ce dernier à la famille des temps d'atteinte essentiels d'un modèle de croissance aléatoire et nous déduisons du contrôle entre le temps d'atteinte essentiel et le temps de première atteinte, un théorème de forme asymptotique pour les temps de première atteinte de la propriété A qui nous intéressait.

Théorème 8.2.1 (Kesten-Hammersley, 1974). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On y considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 1}$ de moments d'ordre 2 finis et deux suites de variables aléatoires réelles $(Y_{n,p})_{n,p \geq 1}$ et $(X'_{n,p})_{n,p \geq 1}$ telles que*

$$\forall n, p \geq 1 \quad X_{n+p} \leq X_n + X'_{n,p} + Y_{n,p}.$$

Supposons que nous avons les contrôles suivants :

- Pour tous n, p , $X'_{n,p}$ et X_p suivent la même loi ;
- $\sup_{n,p} \text{Corr}(X_n, X'_{n,p}) < 1$;
- il existe une suite réelle décroissante $(A_p)_{p \geq 1}$ vérifiant

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{A_p}{p^2} < +\infty$$

et une constante $\beta > 0$ telles que :

- pour tout n , $\mathbb{E}[(X_n + n\beta)^-]^2 \leq A_n^2$,
- pour tous n, p , $\mathbb{E}[Y_{n,p}^2] \leq A_{n+p}^2$.

Alors $\frac{X_n}{n}$ converge dans $\mathbb{L}_2(\mathbb{P})$ vers une constante μ ; de plus, pour tout $m \geq 1$, la suite $n_k = m2^k$ satisfait la propriété de convergence complète :

$$\forall \varepsilon > 0, \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_{n_k}| > \varepsilon) < +\infty.$$

Si nous supposons de plus qu'il existe une constante C telle que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{p: |n-p| \leq \varepsilon n} \frac{|X_n - X_p|}{n} \leq C\varepsilon;$$

alors $\frac{X_n}{n}$ converge presque sûrement vers μ .

En utilisant ce théorème, nous pouvons formuler un théorème de forme asymptotique pour une famille assez générale de variables $(\sigma(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$.

Théorème 8.2.2 (Forme asymptotique abstraite). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(\sigma(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ une collection de variables aléatoires réelles avec des moments d'ordre 2 finis et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\sigma(x)$ et $\sigma(-x)$ suivent la même loi ainsi que deux collections de variables aléatoires $(s(y))_{y \in \mathbb{Z}^d}$ et $(r(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$. Nous faisons les hypothèses suivantes :*

Hyp. 1 : $\forall x, y \in \mathbb{Z}^d$, $\sigma(x + y) \leq \sigma(x) + s(y) + r(x, y)$ où $s(y)$ a la même loi que $\sigma(y)$ et est indépendante de $\sigma(x)$,

Hyp. 2 : $\forall x, y \in \mathbb{Z}^d$, $\exists C_{x,y}$ et $\alpha_{x,y} < 2$ tels que $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[r(nx, py)^2] \leq C_{x,y}(n + p)^{\alpha_{x,y}}$,

Hyp. 3 : $\exists C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sigma(nx) > Cn\|x\|) \rightarrow 0$,

Hyp. 4 : $\exists K > 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}$ -presque sûrement, $\exists M$ tel que $(\|x\| \geq M \text{ et } \|x - y\| \leq K\|x\|) \Rightarrow \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq \varepsilon\|x\|$

Hyp. 5 : $\exists c > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sigma(nx) < cn\|x\|) \rightarrow 0$.

Alors, il existe $\mu : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que, $\mathbb{P}$ -presque sûrement,

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x) - \mu(x)}{\|x\|} = 0.$$

De plus, μ s'étend en une norme sur $\mathbb{R}^d$ et nous avons un résultat de forme asymptotique : pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}$ -presque sûrement, pour tout t assez grand,

$$(1 - \varepsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{G}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)B_\mu,$$

où $\tilde{G}_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : \sigma(x) \leq t\} + [0, 1]^d$ et B_μ la boule unité associée à μ .

Remarque. Les hypothèses faites sur σ sont celles évoquées tout au long de ce travail. Les hypothèses 1 et 2 traduisent une presque sous-additivité, l'hypothèse 3 traduit une croissance au plus linéaire et l'hypothèse 5 une croissance au moins linéaire. L'hypothèse 4, elle, nous donne une uniforme continuité de la quantité σ . Nous retrouvons bien les cinq hypothèses évoquées dans l'introduction de la partie III permettant de montrer un résultat de forme asymptotique.

Remarque. Dans [GM12a], Garet et Marchand montrent ce théorème pour le temps essentiel du processus de contact en environnement aléatoire favorable en s'appuyant sur un nouveau théorème presque sous-additif. Nous n'avons pas besoin ici de leur théorème presque sous-additif car nous sommes en environnement déterministe et nous avons les propriétés de stationnarité requises par le théorème de Kesten et Hammersley, ce qui n'est pas le cas en environnement aléatoire. Nous pouvons remarquer que ces hypothèses de stationnarité nous permettent de ne pas exiger l'ergodicité des transformations (qui est néanmoins cachée en dessous).

Démonstration. Nous effectuons la démonstration dans un ordre différent de celui suggéré par l'énoncé. Nous montrons d'abord qu'il existe $\mu : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(nx)}{n}$ puis le fait que μ s'étend en une norme. Nous montrons ensuite la convergence uniforme annoncée par le théorème et son équivalence géométrique.

Étape 1 : Convergence directionnelle

La première étape consiste à prouver l'existence des limites directionnelles : nous nous fixons $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ et nous regardons d'abord la limite de $\frac{\sigma(nx)}{n}$. En passant à l'espérance dans l'hypothèse 1, nous obtenons

$$\mathbb{E}(\sigma((n+p)x)) \leq \mathbb{E}(\sigma(nx)) + \mathbb{E}(\sigma(px)) + \mathbb{E}(r(nx, px)) \leq \mathbb{E}(\sigma(nx)) + \mathbb{E}(\sigma(px)) + \sqrt{C_{x,x}(n+p)^{\alpha_{x,x}}},$$

la dernière domination s'obtenant grâce à l'hypothèse 2. En utilisant le lemme de Fekete et le fait que $\alpha_{x,x} < 2$, nous voyons que $\frac{1}{n}\mathbb{E}[\sigma(nx)]$ admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini et la quantité

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(\sigma(nx))}{n}$$

est un bon candidat pour être la limite de $\frac{\sigma(nx)}{n}$. Pour montrer la convergence souhaitée, nous utilisons le théorème 8.2.1 en posant les variables suivantes : pour $n, p \geq 1$

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma(nx) \\ X'_{n,p} &= s(px) \\ Y_{n,p} &= r(nx, px) \\ A_n &= C_{x,x}n^{\alpha_x}. \end{aligned}$$

Les hypothèses 1, 2 et 4 nous permettent d'utiliser le théorème 8.2.1 et nous obtenons que, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, il existe $\mu(x)$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma(nx)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}\sigma(nx)}{n} = \mu(x),$$

la convergence ayant lieu dans $\mathbb{L}_2(\mathbb{P})$ et $\mathbb{P}$ -presque sûrement.

Step 2 : Extension de μ une semi-norme sur $\mathbb{R}^d$

La quantité μ est pour l'instant définie pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$; nous cherchons à l'étendre en une semi-norme sur l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier.

- Homogénéité : $\sigma(nx)$ et $\sigma(-nx)$ ont même loi donc $\mu(x)$ et $\mu(-x)$ aussi. Nous extrayons des sous-suites et nous obtenons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mu(kx) = |k|\mu(x)$.
- Inégalité triangulaire : nous passons à nouveau à l'espérance dans l'hypothèse 1 et en utilisant le contrôle du reste de l'hypothèse 2, nous obtenons :

$$\mathbb{E}[\sigma(nx + ny)] \leq \mathbb{E}[\sigma(nx)] + \mathbb{E}[\sigma(ny)] + \mathbb{E}(r(nx, ny)) \leq \mathbb{E}(\sigma(nx)) + \mathbb{E}(\sigma(ny)) + \sqrt{C_{x,y}(2n)^{\alpha_{x,y}}}$$

puis nous utilisons la convergence dans $\mathbb{L}_2(\mathbb{P})$ (donc dans $\mathbb{L}_1(\mathbb{P})$) et nous obtenons pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$:

$$\mu(x + y) \leq \mu(x) + \mu(y).$$

- Extension à $\mathbb{R}^d$: nous étendons d'abord μ à $\mathbb{Q}^d$ par homogénéité : pour $x \in \mathbb{Q}^d$, il existe une unique représentation irréductible avec $p \in \mathbb{Z}^d$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{p}{q}$; nous posons alors $\mu(x) = \frac{1}{q}\mu(p)$. L'inégalité triangulaire reste vérifiée. Nous utilisons ensuite l'hypothèse 3 et nous extrayons une sous-suite $(n_k)_k$ telle que $\mathbb{P}(\sigma(n_k x) > Cn_k x) \leq \exp(-n_k)$ et, en appliquant le lemme de Borel-Cantelli, nous obtenons :

$$\mathbb{P}(\mu(x) > C\|x\|) = \mathbb{P}\left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sigma(n_k x)}{n} > C\|x\| \right\}\right) = 0;$$

d'où $\mu(x) \leq C\|x\|$. Par cette inégalité, nous déduisons le caractère lipschitzien de μ et nous pouvons étendre par continuité μ à tout $x \in \mathbb{R}^d$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire restent bien sûr vérifiées.

Step 3 : μ est une norme

Pour montrer que μ est une véritable norme, il nous reste la propriété de définie-positivité (ou séparation). Grâce à l'hypothèse 5 et en utilisant comme précédemment le théorème de Borel-Cantelli sur une extraction convergeant suffisamment rapidement, nous avons $\mu(x) \geq c\|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. Par extension, cette propriété reste vraie pour $x \in \mathbb{R}^d$. Nous obtenons que μ est bien définie positive (ou sépare les points).

Step 4 : Grâce à l'hypothèse 4 d'uniforme continuité de σ , nous allons obtenir, en raisonnant par l'absurde, l'uniforme convergence suivante :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x) - \mu(x)}{\|x\|} = 0.$$

Nous raisonnons par l'absurde et nous supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'événement « il existe une suite aléatoire $(y_n)_{n \geq 0}$ de sommets de $\mathbb{Z}^d$ telle que $\|y_n\|_1 \rightarrow +\infty$ et, pour tout n , $|\sigma(y_n) - \mu(y_n)| \geq \varepsilon\|y_n\|_1$ » ait une probabilité strictement positive. Pour pouvoir utiliser la convergence directionnelle obtenue précédemment, nous devons extraire une sous-suite s'accumulant dans direction fixe entière. Comme la suite $\left(\frac{y_n}{\|y_n\|_1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, nous pouvons en extraire une sous-suite convergente et il existe $z \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\frac{y_n}{\|y_n\|_1} \rightarrow z$$

Par ailleurs, nous pouvons construire $z' \in \mathbb{Z}^d$ tel que :

$$\left\| \frac{z'}{\|z'\|_1} - z \right\|_1 \leq \varepsilon.$$

En projetant sur la direction z' , nous pouvons trouver, pour chaque y_n , un point entier sur la ligne $\mathbb{R}z'$ qui est suffisamment près de y_n : soit h_n la partie entière de $\frac{\|y_n\|_1}{\|z'\|_1}$. On a

$$\begin{aligned} \|y_n - h_n \cdot z'\|_1 &\leq \left\| y_n - \frac{\|y_n\|_1}{\|z'\|_1} z' \right\|_1 + \left| \frac{\|y_n\|_1}{\|z'\|_1} - h_n \right| \|z'\|_1 \\ &\leq \|y_n\|_1 \left\| \frac{y_n}{\|y_n\|_1} - \frac{z'}{\|z'\|_1} \right\|_1 + \|z'\|_1 \end{aligned}$$

Soit $N > 0$ tel que $(n \geq N) \Rightarrow \left(\left\| \frac{y_n}{\|y_n\|_1} - z \right\|_1 \leq \varepsilon_1 \right)$. Par construction, pour $n \geq N$, on a

$$\left(\left\| \frac{y_n}{\|y_n\|_1} - \frac{z'}{\|z'\|_1} \right\|_1 \leq 2\varepsilon \right),$$

et par conséquent, $\|y_n - h_n \cdot z'\|_1 \leq 2\varepsilon\|y_n\|_1 + \|z'\|_1$. Ainsi, comme $\|y_n\|_1 \rightarrow \infty$, quitte à augmenter N , nous obtenons, pour tout $n \geq N$,

$$\|y_n - h_n \cdot z'\|_1 \leq 3\varepsilon_1\|y_n\|_1.$$

Cependant, si on prend N suffisamment grand, l'hypothèse 4 implique alors que l'on a, pour tout $n \geq N$

$$|\sigma(y_n) - \sigma(h_n \cdot z')| \leq 3C\varepsilon_1\|y_n\|_1.$$

Finalement, pour tout n assez grand, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\sigma(y_n) - \mu(y_n)| &\leq |\sigma(y_n) - \sigma(h_n.z')| + |\sigma(h_n.z') - \mu(h_n.z')| + |\mu(h_n.z') - \mu(y_n)| \\ &\leq 3C\varepsilon\|y_n\|_1 + h_n \left| \frac{\sigma(h_n.z')}{h_n} - \mu(z') \right| + C'\|h_n.z' - y_n\|_1, \end{aligned}$$

en utilisant l'homogénéité de μ et l'équivalence des normes ; puis,

$$|\sigma(y_n) - \mu(y_n)| \leq 3C\varepsilon\|y_n\|_1 + (1 + \varepsilon) \frac{\|y_n\|_1}{\|z'\|_1} \left| \frac{\sigma(h_n.z')}{h_n} - \mu(z') \right| + 3\varepsilon C'\|y_n\|_1.$$

La convergence presque sûre dans la direction entière donnée par z' assure que pour n assez grand

$$\left| \frac{\sigma(h_n.z')}{h_n} - \mu(z') \right| \leq \varepsilon_1.$$

En prenant ε assez petit, nous obtenons que pour n assez grand $|\sigma(y_n) - \mu(y_n)| < \varepsilon\|y_n\|_1$, ce qui mène à une contradiction.

Step 5 : Passage de la version analytique à la version géométrique par l'absurde.

Nous voulons déduire de la précédente convergence uniforme la forme asymptotique pour la version grossie de $G_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : \sigma(x) \leq t\}$. Remarquons d'abord que, d'après l'équivalence des normes en dimension finie, la convergence uniforme précédente implique que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x)}{\mu(x)} = 1.$$

Montrons par l'absurde que pour t assez grand, on a bien $\frac{G_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)B_\mu$. Supposons donc qu'il existe une suite $(t_n)_{n \geq 1}$, avec $t_n \rightarrow +\infty$ et $\frac{G_{t_n}}{t_n} \not\subset (1 + \varepsilon)B_\mu$: pour tout n , il existe donc $x_n \in \mathbb{Z}^d$ avec $\sigma(x_n) \leq t_n$ et $\mu(x_n)/t_n > 1 + \varepsilon$. La dernière inégalité implique notamment que la suite $(\|x_n\|)_{n \geq 1}$ tend vers l'infini. Ainsi, $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite tendant vers l'infini et telle que $\mu(x_n)/\sigma(x_n) > 1 + \varepsilon$, ce qui contredit la convergence uniforme.

Passons à l'inclusion inverse. En raisonnant toujours par l'absurde, il existe une suite $(t_n)_{n \geq 1}$, avec $t_n \rightarrow +\infty$ et $(1 - \varepsilon)B_\mu \not\subset \frac{G_{t_n}}{t_n}$, donc il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{Z}^d$ telle que, pour tout n , $\mu(x_n) \leq (1 - \varepsilon)t_n$, mais $\sigma(x_n) > t_n$. La dernière inégalité implique que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ ne peut pas être bornée car sinon, étant à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, elle prendrait un nombre fini de valeurs, or (t_n) tend vers l'infini. Nous pouvons donc extraire de (x_n) une suite (y_n) tendant vers l'infini (au sens de la norme $\|\cdot\|_1$) et telle que $\frac{\mu(y_n)}{\sigma(y_n)} < 1 - \varepsilon$, ce qui contredit encore une fois la convergence uniforme. $\square$

Montrons maintenant que les hypothèses faites sur les modèles de croissance que nous considérons permettent d'appliquer le théorème précédent aux temps d'atteinte essentiels $(\sigma(x))$ et ainsi conclure à un théorème de forme asymptotique pour les temps d'atteinte $(t(x))$:

Théorème 8.2.3. $\overline{\mathbb{P}}$ -presque sûrement, nous avons

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{t(x) - \mu(x)}{\|x\|} = 0,$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, $\overline{\mathbb{P}}$ -presque sûrement, pour tout t assez grand,

$$(1 - \varepsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)B_\mu$$

où $\tilde{H}_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t\} + [0, 1]^d$ et B_μ la boule unité associée à la norme μ .

Démonstration du théorème 8.1.1. Soit (ξ_t) un modèle de croissance vérifiant les hypothèses du théorème. Ces hypothèses nous permettent d'introduire les temps d'atteinte essentiels $(\sigma(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ définis au chapitre 7. Montrons que les résultats obtenus sur ces temps d'atteinte essentiels permettent de vérifier chaque hypothèse du théorème 8.2.2 pour la famille de variables $(\sigma(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$. Nous travaillons avec la probabilité $\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\cdot | \tau = +\infty)$.

- Contexte : pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\sigma(x)$ admet bien un moment d'ordre 2 d'après le corollaire 7.4.6.
- En posant $s(y) = \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$, $s(y)$ a la même loi que $\sigma(y)$ et est indépendante de $\sigma(x)$ grâce au corollaire 7.2.4. L'hypothèse 1 est donc vérifiée.
- L'hypothèse 2 est vérifiée par le corollaire 7.4.2.
- L'hypothèse 3 est une version faible de la croissance au moins linéaire démontrée au corollaire 7.4.5.
- L'hypothèse 4 est l'uniforme continuité de σ montrée au corollaire 7.4.7.
- L'hypothèse 5 est la croissance au plus linéaire pour σ qui est immédiate grâce à la croissance au plus linéaire que l'on suppose pour t dans l'hypothèse 7.1.1 du théorème :

$$\bar{\mathbb{P}}(\sigma(nx) < Cn\|x\|) \leq \bar{\mathbb{P}}(t(nx) < Cn\|x\|) \leq \frac{A}{\rho} \exp(-BCn\|x\|).$$

Remarque. Nous pouvons remarquer que σ a des moments de tout ordre et grâce à l'inégalité satisfaite par σ en 7.4.6 la convergence de $\frac{\sigma(nx)}{n}$ a aussi lieu dans tous les $\mathbb{L}(\bar{\mathbb{P}})$.

Nous pouvons donc utiliser le théorème 8.2.2 et nous en déduisons qu'il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que, $\mathbb{P}$ -presque sûrement,

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x) - \mu(x)}{\|x\|} = 0.$$

Nous en déduisons ensuite immédiatement le résultat pour la famille $(t(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ grâce contrôle de la différence entre ces deux quantités établi au corollaire 7.4.3. $\square$

Remarque. L'hypothèse 3 peut être remplacée par une hypothèse plus précise (uniforme) sur les moments de σ du type « il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, $\bar{\mathbb{E}}[\sigma(x)] \leq C(1 + \|x\|)$ ».

Remarque. Les modèles de percolation de premier passage, processus de contact standard, Richardson, pour lesquels nous connaissons déjà un résultat de forme asymptotique, rentrent dans le cadre de notre théorème (pour les modèles permanents, les hypothèses contenant le temps d'extinction sont triviales).

8.3 Applications

Nous énonçons ici divers cas auxquels s'appliquent notre résultat (on pourra se reporter aux sections consacrées à chaque modèle pour retrouver le fait qu'ils vérifient bien les hypothèses de notre théorème). Dans chaque énoncé, nous noterons B_μ la boule unité associée à μ et $\bar{\mathbb{P}}$ la probabilité conditionnée à la survie du processus à partir de sa configuration $\delta_{\min}$.

Nous commençons bien sûr par le résultat le plus conséquent : celui du processus de contact avec vieillissement. Nous avons, en effet, introduit ce nouveau modèle dans cette thèse et montrer des résultats relatifs à son évolution.

Théorème 8.3.1 (Forme asymptotique du PCV). *Soit (ξ_t) un processus de contact avec vieillissement. Si (ξ_t) est surcritique, alors il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\bar{\mathbb{P}}$ presque sûrement, pour tout t assez grand*

$$(1 - \varepsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)B_\mu,$$

où $\tilde{H}_t = H_t + [0, 1]^d$ avec H_t les points nés avant l'instant t , sans considération de leur âge.

Démonstration. Nous posons $\delta_{\min} = \delta_0$ et

$$A_t = \text{supp } \xi_t = \{y \in \mathbb{Z}^d : \xi_t(y) \neq 0\}.$$

L'additivité de (A_t) se déduit de celle de (ξ_t) énoncée à la proposition 4.1.2. L'événement $\{A_t = \emptyset\} = \{\xi_t \equiv 0\}$; il est bien absorbant. La croissance au moins linéaire 7.1.3 a été établie au corollaire 6.2.7; le contrôle des gros amas finis 7.1.2 a été établi au corollaire 6.2.6 et la croissance au plus linéaire 7.1.1 vient du couplage avec le modèle de Richardson obtenu au lemme 6.1.4. Nous en déduisons bien le résultat souhaité. $\square$

Une conséquence immédiate est un théorème de forme asymptotique pour le modèle de Krone qui est un cas particulier du processus de contact avec vieillissement.

Nous annonçons ensuite les résultats pour les processus de contact en environnement dynamique discret et continu présentés à la section 3.2.

Théorème 8.3.2 (Forme asymptotique du CPREE). *Soit (ξ_t) un processus de contact en environnement dynamique. Si $p > p_c$, alors il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\cdot | \tau^{\emptyset, \{0\}} = +\infty)$ presque sûrement, pour tout t assez grand*

$$(1 - \varepsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)B_\mu,$$

où $\tilde{H}_t = H_t + [0, 1]^d$ avec H_t les points nés avant l'instant t , sans considération de leur type.

Démonstration. Vérifions les hypothèses du théorème 8.1.1 pour le modèle CPREE (cf. section 3.2.1). Nous avons $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$, $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ et $\delta_{\min}$ est la configuration où le site 0 est dans l'état $(0, 1)$ et où tous les autres sites sont dans l'état $(0, 0)$. Posons $A_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : g(\xi_t) = 1\}$ avec g la projection selon la seconde coordonnée; le processus (A_t) représente alors les points vivants au temps t sans considération de leur type (favorable ou défavorable). Cela correspond au processus (C_t) dans les notations de Steif et Warfheimer. L'attractivité de (A_t) est donné par l'équation (3.2.1) et $\{A_t = \emptyset\}$ est absorbant. Les hypothèses 7.1.2 et 7.1.3 correspondent aux contrôles 3.2.2 et 3.2.3 du théorème 3.2.3. Nous en concluons donc la forme asymptotique. $\square$

Théorème 8.3.3 (Forme asymptotique du DOP). *Soit (η_t) une percolation orientée avec immigration hostile. Si $p > \vec{p}_c^{\text{alt}}(d+1)$, $q < \vec{p}_c^{\text{alt}}(d+1)$ et $\alpha \in (0, \alpha_c(p, q))$, alors il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\cdot | \tau_1^{0, \emptyset} = +\infty)$ presque sûrement, pour tout t assez grand*

$$(1 - \varepsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)B_\mu,$$

où $\tilde{H}_t = H_t + [0, 1]^d$ avec H_t l'ensemble des sites où des particules de type 1 nés avant l'instant t .

Démonstration. Vérifions les hypothèses du théorème 8.1.1 pour le modèle DOP (cf. section 3.2.2). Nous avons $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, $S = \{0, 1, 2\}$ et $\delta_{\min} = \delta_0$. Posons $A_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : \eta_t(x) = 1\}$, noté $(\eta_{1,t})$ à la section 3.2.2. Par construction (A_t) est bien additif, $\{A_t = \emptyset\}$ est absorbant. Le théorème 3.2.5 de Garet-Marchand nous donne les contrôles souhaités. Nous en concluons donc la forme asymptotique. $\square$

Théorème 8.3.4 (Forme asymptotique du BMCP). *Soit (η_t) un processus de contact sensibilisé (cf. section 3.3.1). Si $\lambda_i > \max(\lambda_c, \lambda_e)$ et sous réserve qu'il existe bien $C_1, C_2, M_1, M_2 > 0$ tels que pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$*

$$\mathbb{P} \left(\exists x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t \text{ et } \|x\|_1 \geq M_1 t \right) \leq C_1 \exp(-C_2 t),$$

$$\mathbb{P}(t < \tau < \infty) \leq C_1 \exp(-C_2 t),$$

$$\mathbb{P}(t(x) \geq M_2 \|x\| + t, \tau = \infty) \leq C_1 \exp(-C_2 t),$$

où $\tau = \inf\{t > 0, \forall x \in \mathbb{Z}^d, \eta_t(x) \leq 0\}$ et $t(x) = \inf\{t > 0, \eta_t(x) = 1\}$, alors il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\cdot | \tau = +\infty)$ presque sûrement, pour tout t assez grand

$$(1 - \varepsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)B_\mu,$$

où $\tilde{H}_t = H_t + [0, 1]^d$ avec H_t les particules de type 1 nés avant l'instant t .

Comme nous l'avons évoqué à la fin de la section 3.3.1, nous pensons que le travail de renormalisation effectué par Durrett et Schinazi [DS00] permet d'obtenir les contrôles nécessaires grâce aux techniques de redémarrage employées au chapitre 6. Le théorème 8.3.4 se démontrera alors en utilisant $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$, $S = \{-1, 0, 1\}$, $A_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : \eta_t(x) = 1\}$ et $\delta_{\min} = \delta_0 - 1$.

Nous aimerions, de façon encore plus générale, mettre en place un théorème de forme asymptotique pour une classe de modèles de croissance sans supposer au préalable leur croissance d'ordre linéaire : la preuve inclurait donc la démonstration d'une croissance au plus linéaire (nous avons vu que cette partie était simple et s'appuyait la plupart du temps sur un couplage avec un processus de Richardson) et celle d'une croissance au moins linéaire (et le contrôle de la taille des amas finis) faisant éventuellement appel à une construction de type Bezuidenhout et Grimmett. La difficulté se situe donc dans la généralisation de cette construction, notamment en environnement aléatoire.

*Nous piétinerons éternellement aux frontières
de l'Inconnu, cherchant à comprendre ce qui
restera toujours incompréhensible. Et c'est
précisément cela qui fait de nous des
hommes. — Asimov.*

Quelques outils de probabilistes

A.1 Théorie ergodique et sous-additivité

A.1.1 Définitions

- Définition A.1.1.** – On appelle système dynamique un quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et θ une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ qui préserve la mesure $\mathbb{P}$, c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(\theta^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$.
- On dira aussi que la mesure $\mathbb{P}$ est invariante par θ .
 - Si X est une variable aléatoire, $X_n = X(\theta^n(\omega))$ est stationnaire, i.e. pour tout k, m , $(X_0, \dots, X_m)$ a même loi que $(X_k, \dots, X_{k+m})$.
 - Un événement A est invariant par le système si $\mathbb{P}(A \triangle \theta^{-1}(A)) = 0$ (ou bien $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ \theta$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement) ; on note $\mathcal{I}$ la tribu des invariants.
 - Le système $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ est ergodique si $\mathcal{I}$ est triviale.
 - Le système $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ est mélangeant si, pour tout $A, B \in \mathcal{F}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A \cap \theta^{-n}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

- Le système $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ est faiblement mélangeant si, pour tout $A, B \in \mathcal{F}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbb{P}(A \cap \theta^{-k}(B)) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = 0.$$

Théorème A.1.2. Un système dynamique mélangeant (ou faiblement mélangeant) est ergodique.

Idée de preuve. Un système est ergodique si les invariants sont de probabilité 0 ou 1 ; un système est mélangeant si on peut rendre deux événements indépendants en les éloignant par translation. Un système mélangeant est donc ergodique car en particulier on peut rendre un événement (invariant) indépendant de lui-même en le translatant donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$. $\square$

Théorème A.1.3. Étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pour qu'une transformation θ conservant $\mathbb{P}$ soit mélangeante, il suffit qu'il existe une algèbre $\mathcal{F}_0$ de parties de Ω engendrant la tribu $\mathcal{F}$ telle que, pour tout $A, B \in \mathcal{F}_0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A \cap \theta^{-n}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Idée de preuve. On approxime nos événements de $\mathcal{F}$ par des événements de $\mathcal{F}_0$ (A_ϵ tels que $\mathbb{P}(A \triangle A_\epsilon) \leq \epsilon$) et on découpe en ϵ . $\square$

▷ **Exemple.** *Opérateur shift pour suite i.i.d.* Soit $\Omega = (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{Z}^d}$. Pour $i \in \mathbb{Z}^d$, θ_i est l'opérateur de décalage : $(\theta_i(\omega))_j = \omega_{i+j}$. Soit ν une mesure quelconque. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, le système $(\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)^{\otimes \mathbb{Z}^d}, \nu^{\otimes \mathbb{Z}^d}, \theta_x)$ est ergodique.

Idée de preuve. On considère la tribu engendrée par les projections sur des parties finies de $\mathbb{Z}^d$ et on rend A et $\theta^{-n}(B)$ indépendants pour n assez grand. $\square$

Remarque. *C'est le cas de la percolation classique.* Dans [Wer09], Werner montre la même chose sans utiliser le vocabulaire invariant, ergodique. Il s'intéresse à l'événement $A = \{\text{avoir une composante connexe infinie}\}$ (qui est invariant) et il montre qu'il est indépendant de tout événement dans une boîte finie, donc de la tribu engendrée, donc de lui-même. Les éléments clefs sont le fait qu'un événement invariant n'est pas influencé par ce qu'il se passe dans une boîte finie et le fait que les variables aléatoires définissant le modèle sont indépendantes.

Remarque. *Pour montrer que la translation est ergodique, on peut aussi montrer que, pour tout $A \in \mathcal{F}$,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A(\theta^k) \xrightarrow{\mathbb{L}^2} \mathbb{P}(A).$$

Définition A.1.4. *On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive pour le système $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ si, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,*

$$f_{n+p} \leq f_p + f_n \circ \theta^p.$$

Cette notion a été introduite en toute généralité en 1962 par Hammersley et Welsh ; ils l'utilisent notamment dans le cadre de la percolation de premier passage [HW65].

▷ **Exemple.** *La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \theta^k$ est exactement additive.*

Lemme A.1.5 (Fekete). *Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous-additive réelle (i.e. telle que pour tous n, p , $u_{n+p} \leq u_p + u_n$) est telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}.$$

A.1.2 Théorèmes

§ 1. Les classiques. Le premier théorème ergodique est le théorème additif de Birkhoff :

Théorème A.1.6 (Birkhoff, Von Neumann). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ un système dynamique et f intégrable. Alors*

$$\frac{1}{n} \sum f \circ \theta^k \rightarrow \mathbb{E}[f|\mathcal{I}] \text{ presque sûrement et dans } \mathbb{L}_1.$$

Le premier résultat sous-additif est le suivant :

Théorème A.1.7 (Kingman, [Kin68]). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ un système dynamique et (g_n) une suite de variables intégrables sous-additive. Alors,*

1. *il existe g $\mathcal{I}$ -mesurable telle que, presque sûrement*

$$g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g_n}{n};$$

2. *s'il existe C telle que, pour tout n , $\mathbb{E}g_n \geq -Cn$ alors la convergence a aussi lieu dans $\mathbb{L}_1$ et*

$$\mathbb{E}g = \inf_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}g_n}{n};$$

3. si le système est ergodique, $\mathcal{I}$ est triviale et g est constante.

Quelques années plus tard, Kingman [Kin73] généralise son théorème sous la forme suivante :

Théorème A.1.8 (Kingman, 1973). *Soit $(X_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ une famille de variables à valeurs dans R vérifiant :*

1. pour tous $n > m > p$, $X_{n,p} \leq X_{n,m} + X_{m,p}$,
2. $(X_{n+1,m+1})_{n,m}$ a même loi que $(X_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$,
3. il existe C tel que, pour tout n , $-Cn \leq \mathbb{E}X_{0,n}$ et $\mathbb{E}|X_{0,n}| < \infty$.

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}X_{0,n}}{n} \text{ existe et vaut } \gamma = \inf_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}X_{0,n}}{n}.$$

Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n}$ existe presque sûrement et est dans $\mathbb{L}_1$ avec $\mathbb{E}X = \gamma$.

Dans [Dur80], Durrett utilise des techniques sous-additives pour montrer la croissance linéaire du bord droit du processus de contact (cf. section 2.3.1 § 2) ; sa démarche inspire une nouvelle généralisation à Liggett [Lig85] qui allège l'hypothèse d'identique distribution :

Théorème A.1.9 (Liggett, 1985). *Soit $(X_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ une famille de variables à valeurs dans R vérifiant :*

1. pour tous $n > m > 0$, $X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$,
2. la loi jointe de $(X_{m,m+k})_k$ ne dépend pas de m ,
3. pour tout $k \geq 1$, $(X_{nk,(n+1)k})_n$ est stationnaire,
4. il existe C tel que, pour tout n , $-Cn \leq \mathbb{E}X_{0,n}$ et $\mathbb{E}|X_{0,n}| < \infty$.

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}X_{0,n}}{n} \text{ existe et vaut } \gamma = \inf_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}X_{0,n}}{n}.$$

Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n}$ existe presque sûrement et est dans $\mathbb{L}_1$ avec $\mathbb{E}X = \gamma$.

On trouve beaucoup de variantes de ces théorèmes dans la littérature. Nous nous intéressons plus particulièrement à celles où l'hypothèse de sous-additivité accepte un terme d'erreur. Énonçons le théorème de Kesten et Hammersley [Ham74, Kes73] :

Théorème A.1.10 (Kesten-Hammersley, 1974). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On y considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 1}$ de moments d'ordre 2 finis et deux suites de variables aléatoires réelles $(Y_{n,p})_{n,p \geq 1}$ et $(X'_{n,p})_{n,p \geq 1}$ telles que*

$$\forall n, p \geq 1 \quad X_{n+p} \leq X_n + X'_{n,p} + Y_{n,p}.$$

Supposons que nous avons les contrôles suivants :

- Pour tout n, p , $X'_{n,p}$ et X_p suivent la même loi ;
- $\sup_{n,p} \text{Corr}(X_n, X'_{n,p}) < 1$;
- il existe une suite réelle décroissante $(A_p)_{p \geq 1}$ vérifiant

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{A_p}{p^2} < +\infty$$

et une constante $\beta > 0$ telles que :

- pour tout n , $\mathbb{E}[(X_n + n\beta)^-]^2 \leq A_n^2$,

– pour tout n, p , $\mathbb{E}[Y_{n,p}^2] \leq A_{n+p}^2$.

Alors $\frac{X_n}{n}$ converge dans $L^2(\mathbb{P})$ vers une constante μ ; de plus, pour tout $m \geq 1$, la suite $n_k = m2^k$ satisfait la propriété de convergence complète :

$$\forall \varepsilon > 0, \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_{n_k}| > \varepsilon) < +\infty.$$

Si nous supposons de plus qu'il existe une constante C telle que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{p: |n-p| \leq \varepsilon n} \frac{|X_n - X_p|}{n} \leq C\varepsilon;$$

alors X_n/n converge presque sûrement vers μ .

Ce théorème est utilisé par Bramson et Griffeath [BG81, BG80] dans l'étude du modèle de vote biaisé et par Durrett et Griffeath [DG82] dans celle du processus de contact. Nous l'utilisons au chapitre 8 pour montrer un théorème de forme asymptotique pour une famille assez générale de modèle de croissance aléatoire.

Garet et Marchand ont étudié le processus de contact en environnement aléatoire [GM12a] ; à cause de l'environnement aléatoire, ils n'ont pas d'indépendance sous la probabilité moyennée conditionnée à survivre. Ils établissent donc le théorème presque sous-additif suivant

Théorème A.1.11 (Garet-Marchand). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\theta_n)_{n \geq 1}$ une famille de transformations laissant $\mathbb{P}$ invariante. Sur cet espace sont définies une famille $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions intégrables, une famille $(g_n)_{n \geq 1}$ de fonctions positives ou nulles, et une famille $(r_{n,p})_{n,p \geq 1}$ telles que*

$$\forall n, p \geq 1 \quad f_{n+p} \leq f_n + f_p \circ \theta_n + g_p \circ \theta_n + r_{n,p}. \quad (\text{A.1.1})$$

On fait les hypothèses suivantes :

- $c = \inf_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}f_n}{n} > -\infty$,
- g_1 est intégrable, g_n/n converge presque sûrement et dans L^1 vers 0,
- il existe $\alpha > 1$ et une suite $(C_p)_{p \geq 1}$ telles que $\mathbb{E}[(r_{n,p}^+)^{\alpha}] \leq C_p$ pour tous n, p et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{C_p}{p^{\alpha}} < +\infty.$$

Alors, la suite de terme général $\frac{1}{n}\mathbb{E}f_n$ converge ; si on note μ sa limite, on a

$$\mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{n}] \geq \mu.$$

Si l'on pose $\underline{f} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{n}$, alors $\underline{f}$ est invariante par tous les θ_n .

Théorème A.1.12 (Garet-Marchand). *On se place sous les hypothèses du théorème A.1.11. On suppose en plus que pour tout k ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f_{nk} - \sum_{i=0}^{n-1} f_k \circ (\theta_k)^i \right)^+ = 0 \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

Alors f_n/n converge presque sûrement vers $\underline{f}$.

La preuve de ces résultats, inspirée de celle de Liggett [Lig85], est donnée dans une annexe de [GM12a] et accompagnée de nombreux commentaires.

Notations et abréviations

Abréviations

FKG Fortuin Kasteleyn Ginibre

BDS Bramson Durrett Schonmann

CPREE Processus de contact en environnement évoluant aléatoirement

DOP Percolation orientée avec immigration hostile (*dependent oriented percolation*)

BMCP Processus de contact modifié aux bords

PC2 Processus de contact enfant-adulte

CPA ou PCV Processus de contact avec vieillissement

Notations

Pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $f, g : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$:

– $f \vee g(x) = \sup(f(x), g(x))$

– $\delta_x(y) = \mathbb{1}_{\{x=y\}}$

Chapitre 1

X espace métrique compact

$\mathcal{D}$ trajectoires de X , muni de la tribu $\mathcal{F}$

$C(X)$ fonctions continues sur X

$S(t)$ semi-groupe, $\mathcal{A}$ générateur d'un processus de Markov

$\mathcal{I}$ ensemble des mesures invariantes

$x \sim y$: x voisin de y . N_x les voisins de x

$x \sim E$: x voisin de la partie E (mais $x \notin E$)

S états ou types des particules, ξ, η configurations d'un système de particules

$\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ les parties de $\mathbb{Z}^d$, $\mathcal{P}_f(\mathbb{Z}^d)$ ses parties finies

$S^{\mathbb{Z}^d}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}^d$ dans S

$\mathcal{C}_S$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ dans $\mathbb{R}$

$\mathcal{C}_{S,0}$ fonctions de $\mathcal{C}_S$ ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées

$c(x, \xi, s)$ taux de transition en x vers l'état s dans une configuration ξ

τ temps de vie du processus

Chapitre 2

δ paramètre de mort ; $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paramètres de naissance

$t(x)$ temps d'atteinte de x

$p_\infty(\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\xi(\xi_t \neq \emptyset)$

λ_c paramètre critique, ν mesure limite en regime surcritique

τ^A temps d'extinction du processus de condition initiale A

$\rho(\lambda) = \nu(0 \in \cdot) = \mathbb{P}(\tau^0 = \infty)$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ les boréliens de $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{E}^d$ les arêtes de $\mathbb{Z}^d$

M l'ensemble des mesures localement finies sur $\mathbb{R}_+$, muni de $\mathcal{M}$ générée par les projections
 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\lambda)$ espace de probabilité à partir des processus de Poisson
 $\mathcal{P}_\alpha$ loi d'un processus de Poisson de paramètre α
 r_t point le plus à droite du processus de contact au temps t
 $\alpha(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(r_t/t)$

Chapitre 3

$E \in \mathcal{E}$ un environnement, $\mathbb{P}_E$ quenched, $\mathbb{P}$ annealed
(BDS1) $\mathcal{E} = \{0, \Delta\}^{\mathbb{E}^1}$ avec $\Delta > \delta_c$ et $p < 1$.
(BDS2) $\mathcal{E} = \{\delta, \Delta\}^{\mathbb{E}^1}$ avec $0 < \delta < \delta_c, \Delta > \delta_c$ et $p < 1$.
 $\delta < \delta_c < \Delta$ et $p = \mathbb{P}(\delta_x = \Delta)$
 $\Omega_\infty = \{\forall t > 0, \xi_t^0 \neq \emptyset\}$
 $t_n = \inf\{t : n \in \xi_t^0\}, r_t = \sup \xi_t^0$
 $\gamma(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln \mathbb{P}(\sup_t r_t \geq n)}{n}$
 $\mu = \frac{\gamma(\Delta)}{\log(1/p)}$
(GM) $\Lambda = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^{\mathbb{E}^d}$ avec $\lambda_{\min} > \lambda_c$, muni d'une loi ν stationnaire
 $H_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t\}$ et B_{Mt} est la boule euclidienne de rayon Mt
 $\tilde{H}_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t\} + [0, 1]^d$ et B_μ la boule unité de μ
 (B_t) processus background des types dans le CPREE

Chapitre 4

$\Lambda = (\lambda_i)$ suite des paramètres de naissance (croissante et limitée par λ_∞)
 γ paramètre de maturation
 (ξ_t) processus de contact avec vieillissement de loi $\mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}$
 $A_t = \text{supp } \xi_t$, support de la fonction de $\xi_t : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$
 (T_e^i) les temps d'arrivée du processus de Poisson de paramètre λ_i sur l'arête e
 $\mathcal{E}(\lambda)$ loi exponentielle de paramètre λ
 $\Gamma(n, \gamma)$ loi gamma de paramètres (n, γ)
 $\rho(\Lambda, \gamma) = \mathbb{P}_{\Lambda, \gamma}(\forall t > 0, \xi_t^{\{0\}} \neq \emptyset)$

Bibliographie

- [And92] Enrique D. Andjel. Survival of multidimensional contact process in random environments. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 23(1-2):109–119, 1992.
- [BDS91] Maury Bramson, Rick Durrett, and Roberto H. Schonmann. The contact process in a random environment. *Ann. Probab.*, 19(3):960–983, 1991.
- [BG80] Maury Bramson and David Griffeath. On the Williams-Bjerknes tumour growth model. II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 88(2):339–357, 1980.
- [BG81] Maury Bramson and David Griffeath. On the Williams-Bjerknes tumour growth model. I. *Ann. Probab.*, 9(2):173–185, 1981.
- [BG90] Carol Bezuidenhout and Geoffrey Grimmett. The critical contact process dies out. *Ann. Probab.*, 18(4):1462–1482, 1990.
- [BG91] Carol Bezuidenhout and Geoffrey Grimmett. Exponential decay for subcritical contact and percolation processes. *Ann. Probab.*, 19(3):984–1009, 1991.
- [BH57] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53:629–641, 1957.
- [Boi90] Daniel Boivin. First passage percolation: the stationary case. *Probab. Theory Related Fields*, 86(4):491–499, 1990.
- [Bro78] Furman M.A. Moshe M. Brower, R.C. Critical exponents for the reggeon quantum spin model. *Physics Letters*, 76B:213–219, 1978.
- [Bro07] Erik I. Broman. Stochastic domination for a hidden Markov chain with applications to the contact process in a randomly evolving environment. *Ann. Probab.*, 35(6):2263–2293, 2007.
- [CD81] J. Theodore Cox and Richard Durrett. Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions. *Ann. Probab.*, 9(4):583–603, 1981.
- [CL92] Da Yue Chen and Thomas M. Liggett. Finite reversible nearest particle systems in inhomogeneous and random environments. *Ann. Probab.*, 20(1):152–173, 1992.
- [CS73] Peter Clifford and Aidan Sudbury. A model for spatial conflict. *Biometrika*, 60:581–588, 1973.
- [Des14] A. Deshayes. The contact process with aging. *ArXiv e-prints*, May 2014.
- [DG82] Richard Durrett and David Griffeath. Contact processes in several dimensions. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 59(4):535–552, 1982.
- [DG83] Richard Durrett and David Griffeath. Supercritical contact processes on $\mathbf{Z}$. *Ann. Probab.*, 11(1):1–15, 1983.
- [DH03] Stephan M. Dammer and Haye Hinrichsen. Epidemic spreading with immunization and mutations. *Phys. Rev. E (3)*, 68(1):016114, 8, 2003.
- [DH04] S. M. Dammer and H. Hinrichsen. Spreading with immunization in high dimensions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 7:11, July 2004.

- [DL81] Richard Durrett and Thomas M. Liggett. The shape of the limit set in Richardson's growth model. *Ann. Probab.*, 9(2):186–193, 1981.
- [Dob71] R. L. Dobrušin. Markov processes with a large number of locally interacting components: Existence of a limit process and its ergodicity. *Problemy Peredači Informacii*, 7(2):70–87, 1971.
- [DS00] Rick Durrett and Rinaldo B. Schinazi. Boundary modified contact processes. *J. Theoret. Probab.*, 13(2):575–594, 2000.
- [Dur80] Richard Durrett. On the growth of one-dimensional contact processes. *Ann. Probab.*, 8(5):890–907, 1980.
- [Dur84] Richard Durrett. Oriented percolation in two dimensions. *Ann. Probab.*, 12(4):999–1040, 1984.
- [Dur91] Rick Durrett. The contact process, 1974–1989. In *Mathematics of random media (Blacksburg, VA, 1989)*, volume 27 of *Lectures in Appl. Math.*, pages 1–18. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [Dur95] Rick Durrett. Ten lectures on particle systems. In *Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1993)*, volume 1608 of *Lecture Notes in Math.*, pages 97–201. Springer, Berlin, 1995.
- [Fer90] Irene Ferreira. The probability of survival for the biased voter model in a random environment. *Stochastic Process. Appl.*, 34(1):25–38, 1990.
- [Fox14a] E. Foxall. Duality and Complete Convergence for Multi-type Additive Growth Models. *ArXiv e-prints*, October 2014.
- [Fox14b] E. Foxall. New results for the two-stage contact process. *ArXiv e-prints*, January 2014.
- [FS82] D. S. Freed and L. A. Shepp. A Poisson process whose rate is a hidden Markov process. *Adv. in Appl. Probab.*, 14(1):21–36, 1982.
- [GCR97] Peter Grassberger, Hugues Chaté, and Guillaume Rousseau. Spreading in media with long-time memory. *Phys. Rev. E*, 55:2488–2495, Mar 1997.
- [GdlT79] P. Grassberger and A. de la Torre. Reggeon field theory (schlögl's first model) on a lattice: Monte carlo calculations of critical behaviour. *Annals of Physics*, 122(2):373–396, 1979.
- [GG77] Lawrence Gray and David Griffeath. On the uniqueness and nonuniqueness of proximity processes. *Ann. Probability*, 5(5):678–692, 1977.
- [GK11] Olivier Garet and Aline Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités*. Références sciences. Ellipses Marketing, 2011.
- [GM04] Olivier Garet and Régine Marchand. Asymptotic shape for the chemical distance and first-passage percolation on the infinite Bernoulli cluster. *ESAIM Probab. Stat.*, 8:169–199 (electronic), 2004.
- [GM12a] Olivier Garet and Régine Marchand. Asymptotic shape for the contact process in random environment. *The Annals of Applied Probability*, 22(4):1362–1410, 2012.
- [GM12b] Olivier Garet and Régine Marchand. Growth of a population in a dynamical hostile environment. 2012.
- [GM14] Olivier Garet and Régine Marchand. Large deviations for the contact process in random environment. *Ann. Probab.*, 42(4):1438–1479, 2014.
- [GP87] Antonio Galves and Errico Presutti. Edge fluctuations for the one-dimensional supercritical contact process. *Ann. Probab.*, 15(3):1131–1145, 1987.

- [Gre90] Andreas Greven. Symmetric exclusion on random sets and a related problem for random walks in random environment. *Probab. Theory Related Fields*, 85(3):307–364, 1990.
- [Gri78] David Griffeath. Limit theorems for nonergodic set-valued Markov processes. *Ann. Probability*, 6(3):379–387, 1978.
- [Gri79] David Griffeath. *Additive and cancellative interacting particle systems*, volume 724 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [Gri81] David Griffeath. The basic contact processes. *Stochastic Process. Appl.*, 11(2):151–185, 1981.
- [Ham74] J. M. Hammersley. Postulates for subadditive processes. *Ann. Probability*, 2:652–680, 1974.
- [Har72] T. E. Harris. Nearest-neighbor Markov interaction processes on multidimensional lattices. *Advances in Math.*, 9:66–89, 1972.
- [Har74] T. E. Harris. Contact interactions on a lattice. *Ann. Probability*, 2:969–988, 1974.
- [Har76] T. E. Harris. On a class of set-valued Markov processes. *Ann. Probability*, 4(2):175–194, 1976.
- [Har78] T. E. Harris. Additive set-valued Markov processes and graphical methods. *Ann. Probability*, 6(3):355–378, 1978.
- [HL75] Richard A. Holley and Thomas M. Liggett. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. *Ann. Probability*, 3(4):643–663, 1975.
- [HL78] R. Holley and T. M. Liggett. The survival of contact processes. *Ann. Probability*, 6(2):198–206, 1978.
- [HL81] Richard Holley and Thomas M. Liggett. Generalized potlatch and smoothing processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 55(2):165–195, 1981.
- [Hol70] Richard Holley. A class of interactions in an infinite particle system. *Advances in Math.*, 5:291–309 (1970), 1970.
- [Hol72] Richard Holley. Markovian interaction processes with finite range interactions. *Ann. Math. Statist.*, 43:1961–1967, 1972.
- [Hol74] Richard Holley. Remarks on the FKG inequalities. *Comm. Math. Phys.*, 36:227–231, 1974.
- [How04] C. Douglas Howard. Models of first-passage percolation. In *Probability on discrete structures*, volume 110 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 125–173. Springer, Berlin, 2004.
- [HW65] J. M. Hammersley and D. J. A. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California, Berkeley, Calif*, pages 61–110. Springer-Verlag, New York, 1965.
- [Ibr75] I. A. Ibragimov. A remark on the central limit theorem for dependent random variables. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 20:134–140, 1975.
- [Kes73] H. Kesten. Discussion on professor kingman’s paper. *Ann. Probab.*, 1:903, 1973.
- [Kin68] J. F. C. Kingman. The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 30:499–510, 1968.
- [Kin73] J. F. C. Kingman. Subadditive ergodic theory. *Ann. Probability*, 1:883–909, 1973. With discussion by D. L. Burkholder, Daryl Daley, H. Kesten, P. Ney, Frank Spitzer and J. M. Hammersley, and a reply by the author.

- [Kle94] Abel Klein. Extinction of contact and percolation processes in a random environment. *Ann. Probab.*, 22(3):1227–1251, 1994.
- [Kro99] Stephen M. Krone. The two-stage contact process. *Ann. Appl. Probab.*, 9(2):331–351, 1999.
- [Kuc89] Thomas Kuczek. The central limit theorem for the right edge of supercritical oriented percolation. *Ann. Probab.*, 17(4):1322–1332, 1989.
- [Lig72] Thomas M. Liggett. Existence theorems for infinite particle systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165:471–481, 1972.
- [Lig85] Thomas M. Liggett. An improved subadditive ergodic theorem. *Ann. Probab.*, 13(4):1279–1285, 1985.
- [Lig91] Thomas M. Liggett. Spatially inhomogeneous contact processes. In *Spatial stochastic processes*, volume 19 of *Progr. Probab.*, pages 105–140. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.
- [Lig92] Thomas M. Liggett. The survival of one-dimensional contact processes in random environments. *Ann. Probab.*, 20(2):696–723, 1992.
- [Lig99] Thomas M. Liggett. *Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes*, volume 324 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Lig05] Thomas M. Liggett. *Interacting particle systems*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Reprint of the 1985 original.
- [Lig11] T. M. Liggett. T. E. Harris’ contributions to interacting particle systems and percolation. *ArXiv e-prints*, March 2011.
- [MR96] Ronald Meester and Rahul Roy. *Continuum percolation*, volume 119 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [MS00] Thomas S. Mountford and Ted D. Sweet. An extension of Kuczek’s argument to non-nearest neighbor contact processes. *J. Theoret. Probab.*, 13(4):1061–1081, 2000.
- [NV96] Charles M. Newman and Sergio B. Volchan. Persistent survival of one-dimensional contact processes in random environments. *Ann. Probab.*, 24(1):411–421, 1996.
- [Pem92] Robin Pemantle. The contact process on trees. *Ann. Probab.*, 20(4):2089–2116, 1992.
- [Rem08] Daniel Remenik. The contact process in a dynamic random environment. *Ann. Appl. Probab.*, 18(6):2392–2420, 2008.
- [Ric73] Daniel Richardson. Random growth in a tessellation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 74:515–528, 1973.
- [Sch14] Julie Scholler. On the time constant in a dependent first passage percolation model. *ESAIM Probab. Stat.*, 18:171–184, 2014.
- [Spi70] Frank Spitzer. Interaction of Markov processes. *Advances in Math.*, 5:246–290 (1970), 1970.
- [Spi71] F. Spitzer. *Random fields and interacting particle systems*. Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1971. Notes on lectures given at the 1971 MAA Summer Seminar, Williams College, Williamstown, Mass.
- [SS97] Marcia Salzano and Roberto H. Schonmann. The second lowest extremal invariant measure of the contact process. *Ann. Probab.*, 25(4):1846–1871, 1997.
- [Sta03] Alan Stacey. Partial immunization processes. *Ann. Appl. Probab.*, 13(2):669–690, 2003.
- [Str65] V. Strassen. The existence of probability measures with given marginals. *Ann. Math. Statist.*, 36:423–439, 1965.

- [SW08] Jeffrey E. Steif and Marcus Warfheimer. The critical contact process in a randomly evolving environment dies out. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 4:337–357, 2008.
- [Too68] A. L. Toom. A certain family of homogeneous nets of formal neurons. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 183:49–52, 1968.
- [Vas69] N. B. Vasil’ev. The limiting behavior of a certain random medium. *Problemy Peredači Informacii*, 5(4):68–74, 1969.
- [VAW92] Mohammad Q. Vahidi-Asl and John C. Wierman. A shape result for first-passage percolation on the Voronoï tessellation and Delaunay triangulation. In *Random graphs, Vol. 2 (Poznań, 1989)*, Wiley-Intersci. Publ., pages 247–262. Wiley, New York, 1992.
- [Wer09] Wendelin Werner. *Percolation et modèle d’Ising*, volume 16 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2009.

Résumé : Cette thèse s'inscrit dans l'étude des systèmes de particules en interaction et plus précisément dans celle des modèles de croissance aléatoire qui représentent une quantité qui grandit au cours du temps et s'étend sur le réseau $\mathbb{Z}^d$. Ce type de processus apparaît naturellement quand on regarde la croissance d'un cristal ou bien la propagation d'une épidémie. Cette dernière est bien modélisée par le processus de contact introduit en 1974 par Harris. Le processus de contact est un des plus simples systèmes de particules en interaction présentant une transition de phase et l'on connaît maintenant bien son comportement sur toutes ses phases. De nombreuses questions ouvertes sur ses extensions, notamment celles de formes asymptotiques, ont motivé ce travail. Après la présentation de ce processus et de certaines de ses extensions, nous introduisons et étudions une nouvelle variante : le processus de contact avec vieillissement où les particules ont un âge qui influence leur capacité à donner naissance à leurs voisines. Nous effectuerons pour ce modèle un couplage avec une percolation orientée inspiré de celui de Bezuidenhout-Grimmett et nous montrerons la croissance d'ordre linéaire de ce processus. Dans la dernière partie de la thèse, nous nous intéressons à la preuve d'un théorème de forme asymptotique pour des modèles généraux de croissance aléatoire grâce à des techniques sous-additives, parfois complexes à mettre en place à cause de la non 'survie presque sûre' de nos modèles. Nous en concluons en particulier que le processus de contact avec vieillissement, le processus de contact en environnement dynamique, la percolation orientée avec immigration hostile, et le processus de contact avec sensibilisation vérifient des résultats de forme asymptotique.

Abstract: This thesis is a contribution to the mathematical study of interacting particles systems which include random growth models representing a spreading shape over time in the cubic lattice. These processes are used to model the crystal growth or the spread of an infection. In particular, Harris introduced in 1974 the contact process to represent such a spread. It is one of the simplest interacting particles systems which exhibits a critical phenomenon and today, its behaviour is well-known on each phase. Many questions about its extensions remain open and motivated our work, especially the one on the asymptotic shape. After the presentation of the contact process and its extensions, we introduce a new one: the contact process with aging where each particle has an age age that influences its ability to give birth to its neighbours. We build a coupling between our process and a supercritical oriented percolation adapted from Bezuidenhout-Grimmett's construction and we establish the 'at most linear' growth of our process. In the last part of this work, we prove an asymptotic shape theorem for general random growth models thanks to subadditive techniques, which can be complicated in the case of non-permanent models conditioned to survive. We conclude that the process with aging, the contact process in randomly evolving environment, the oriented percolation with hostile immigration and the bounded modified contact process satisfy asymptotic shape results.