



HAL
open science

Influence des conditions d'interfaces d'un milieu poreux saturé sur la propagation des ondes ultrasonores : analyses acoustique et diélectrique

Fatma Graja

► **To cite this version:**

Fatma Graja. Influence des conditions d'interfaces d'un milieu poreux saturé sur la propagation des ondes ultrasonores : analyses acoustique et diélectrique. Acoustique [physics.class-ph]. Le Mans Université; Université de Sfax. Faculté des sciences, 2017. Français. NNT : 2017LEMA1032 . tel-01794595

HAL Id: tel-01794595

<https://theses.hal.science/tel-01794595>

Submitted on 17 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Fatma GRAJA

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de Le Mans Université
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire
grade de Docteur de l'université de Sfax*

École doctorale : Sciences pour l'ingénieur & Physique

Discipline : Acoustique et vibration

Spécialité : Acoustique et mécanique des matériaux

Unité de recherche : LAUM et LaSCOM

Soutenue le 16 Octobre 2017

Thèse N° : 2017LEMA1032

Influence des conditions d'interfaces d'un milieu poreux saturé sur la propagation des ondes ultrasonores

Analyses acoustique et diélectrique

JURY

Rapporteurs : **Hervé FRANKLIN**, Professeur, Université du Havre
Mounir BENALI, Professeur, Institut supérieur des études technologiques de Sousse

Examineurs : **Wissem KOUBAA CHEIKH-ROUHOU**, MCF, Centre de recherche numérique de Sfax
Eric OGAM, Docteur en acoustique, Université Aix-Marseille

Directeur de Thèse : **Claude DEPOLLIER**, Professeur, Le Mans Université
Mohamad GARGOURI, Professeur, Université de Sfax

Co-directeur de Thèse : **Asma TRIKI**, MCF, Université de Sfax
Aroune DUCLOS, MCF, Le Mans Université

Á maman, Ton amour sans faille, tes pensées à moi, ta confiance et tes sacrifices pour que j'arrive à décrocher mon doctorat, sans cela je n'aurai pas achevé ce chemin avec succès.

Á mes frères et soeur, vos encouragements, votre présence et votre bienveillance, étaient sans doute le moteur de ma réussite, je vous remercie et je suis fière que vous êtes là.

Á la mémoire de mon père ..

Remerciements

Ce travail de thèse n'aurait pas vu le jour sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité et la bonne humeur manifestées à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser.

En premier lieu, je remercie vivement mon directeur de thèse, monsieur Claude DE-POLLIER, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour sa disponibilité à diriger cette recherche. Je suis extrêmement reconnaissante pour ses encouragements sans faille et son respect des délais serrés de relecture des documents que je lui ai adressés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Je remercie également monsieur Mohamad GARGOURI pour avoir accepté de diriger cette thèse et pour ses conseils et ses encouragements tout au long de ces années de travail. Je le remercie également pour son accueil chaleureux à chaque fois que j'ai sollicité son aide.

Mes remerciements vont également à monsieur Aroune DUCLOS pour son encadrement du travail, son attention sur mes travaux, son perfectionnisme, ainsi que pour ses multiples conseils lors des communications aux congrès. Je le remercie aussi pour ses encouragements et sa bonne humeur.

Je remercie madame Asma TRIKI pour l'encadrement de ce travail, sa disposition et ses réponses sur mes multiples questions.

Messieurs, Hervé FRANKLIN et Mounir BENALI ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse, je les remercie pour leur lecture critique et éclairante sur mon travail.

Madame Wissem CHEIKH-ROUHOU KOUBAA a, vivement, accepté de présider le jury. qu'elle soit remercié par ces lignes.

Monsieur Éric OGAM, examinateur de ce travail, je le remercie infiniment pour sa lecture et ses conseils apportés à l'égard de ce sujet. Nos échanges lors des manifestations scientifiques étaient sans doute intéressants. Je n'oublie pas son hospitalité lors de ma visite à Marseille pour les journées des milieux poreux en 2012.

Je tiens à remercier monsieur Zine Abidine FELLAH pour sa contribution à ce travail et ses conseils.

Je remercie également monsieur Mohammed TABELLOUT pour m'avoir mis à disposition l'équipement de son laboratoire pour effectuer mes mesures diélectriques.

Elisabeth DUBOIS, je lui adresse un chaleureux remerciement pour sa présence, sa

gentillesse et son écoute, des qualités qui m'ont sensiblement touchées.

Que tous , qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce travail, soient aussi remercier : Jean Philippe GROBY, Bruno BROUARD, Charfeddine MECHRI... et tout le personnel du laboratoire de l'acoustique de le Mans Université.

Par ces lignes je tiens à remercier : Najat, Zyad, Mariama et Soumaya, pour leur accueil, leur hospitalité, leur sympathie, pour la convivialité et les bons moments partagés, j'en suis extrêmement reconnaissante.

Mes amis et toute personne que j'ai eu la chance de faire connaissance pendant mon séjours au Mans, Ghislaine, Didier, Emmanuel, Blandine, Sahar, Zeyneb, Bouchra .. qu'ils soient remercier par ces lignes.

Avant de finir, j'adresse un merci distingué à monsieur Ibrahim HAMDI : j'espère que j'ai été à la hauteur de tes attentes, merci pour tout !

Enfin, j'adresse un remerciement aux membres de ma famille large, en particulier Majid tant présent par son affection, son attention et ses encouragements.

Et que ceux que j'ai oublié me pardonnent.

”Le savoir est la seule richesse que l’on puisse entièrement dépenser sans en rien la diminuer.”

A. Hampaté Bâ

Communications

Liste des conférences :

1. Congrès français d'acoustique (CFA2016), Le Mans, France (communication orale)
2. International Conference on Acoustics and Vibration (ICAV2016) Hammamet, Tunisie (communication orale)
3. Congrès français d'acoustique (CFA2014), Poitiers, France (présentation orale)
4. International Symposium on Nondestructive Characterization of Materials (NDCM 2013), Le Mans, France (présentation orale)
5. Acoustics 2013 , New-Delhi, Inde (co-auteur)
6. European Symposium on Ultrasonic Characterization of Bone (ESUCB 2013), Grenade,
7. Journée d'étude des milieux poreux (JEMP 2012), Marseille, France (présentation orale)

Liste des publications :

1. F. Graja , A. Duclos, Z. E. A. Fellah, A. Triki, M. Gargouri, C. Depollier “ Tortuosity induced by defects in porous media” Vol 2 (2017) **MAYFEB Journal of Mechanical Engineering**.
2. F. Graja , A. Triki, M. Tabellout, M. Gargouri, C. Depollier “ *Dielectric Relaxations of Confined Water in Porous Silica Ceramics* ”, **Bulletin of Materials Science**
3. F. Graja , A. Duclos, C. Depollier “*Biot waves in porous ceramic plates : influence of boundary conditions* ”, Issue Vol.19 No.4 April 2014, **NDT.net**

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Table des figures | 10 |
| Notations | 14 |
| INTRODUCTION | 16 |
| 1 Généralités sur les milieux poreux | 20 |
| 1.1 Définitions | 20 |
| 1.1.1 Porosité | 20 |
| 1.1.2 Résistivité au passage du fluide et perméabilité | 21 |
| 1.1.3 Tortuosité | 24 |
| 1.2 Cas particulier d'un milieu poreux : l'os trabéculaire | 29 |
| 1.2.1 Définition | 29 |
| 1.2.2 La densité minérale osseuse | 31 |
| 1.2.3 L'ostéoporose | 31 |
| 2 Théorie de Biot | 33 |
| 2.1 Introduction | 33 |
| 2.2 Formulation générale | 34 |
| 2.2.1 Équations de Biot | 34 |
| 2.2.2 Expressions des contraintes | 36 |
| 2.2.3 Solutions des équations de Biot | 36 |
| 2.2.4 Expressions des nombres d'ondes et des vitesses de phase | 37 |
| 2.2.5 Représentation des ondes de compression | 37 |
| 2.2.6 Expressions des vitesses de phase en fonction des potentiels | 37 |
| 2.3 Défaut de surface | 38 |
| 2.3.1 Expressions des conditions aux limites | 38 |
| 2.3.2 Matrice de diffusion | 40 |
| 2.3.3 Modèle Maine3A | 40 |
| 2.4 Défaut de volume 1D | 41 |
| 2.5 Conclusion | 42 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3 | Étude numérique et validation expérimentale | 43 |
| 3.1 | Étude numérique de défauts de surface | 43 |
| 3.1.1 | Résultats des simulations numériques | 43 |
| 3.1.2 | Étude de la forme des champs à l'intérieur de la plaque poreuse . . | 50 |
| 3.1.3 | Représentation temporelle | 55 |
| 3.2 | Validation expérimentale | 57 |
| 3.2.1 | Protocole et dispositif expérimental | 57 |
| 3.2.2 | Mesures de références (étalonnage) | 58 |
| 3.2.3 | Mesures en pores ouverts | 59 |
| 3.2.4 | Mesures en pores fermés | 61 |
| 3.3 | Étude numérique d'un défaut de volume 1D | 62 |
| 3.3.1 | Description de la problématique | 62 |
| 3.3.2 | Influence de la position du défaut | 64 |
| 3.3.3 | Influence de la taille du défaut | 64 |
| 3.4 | Validation expérimentale | 66 |
| 3.5 | Conclusion | 71 |
| 4 | Tortuosité induite par la présence de défauts | 72 |
| 4.1 | Introduction | 72 |
| 4.2 | Modèle de défaut | 73 |
| 4.2.1 | Formulation mathématique | 74 |
| 4.2.2 | Cas du défaut homogène | 75 |
| 4.2.3 | Cas de défaut inhomogène | 82 |
| 4.2.4 | Modèle de défaut anisotrope | 90 |
| 4.2.5 | Polarisabilité hydraulique | 98 |
| 4.3 | Tortuosité induite par les défauts | 100 |
| 4.3.1 | Généralités (homogénéisation) | 100 |
| 4.3.2 | Mobilité effective | 102 |
| 4.3.3 | Tortuosité acoustique | 108 |
| 4.3.4 | Résultats des simulations numériques | 109 |
| 4.4 | Conclusion | 109 |
| 5 | Analyse diélectrique de la céramique poreuse de silice saturée | 111 |
| 5.1 | Introduction | 111 |
| 5.2 | Phénomènes de la conduction électrique et de la polarisation diélectrique dans un milieu diélectrique | 112 |
| 5.2.1 | Paramètres diélectriques | 112 |
| 5.2.2 | Conduction électrique et polarisation diélectrique-Description des phénomènes physiques | 113 |
| 5.3 | Propriétés diélectriques d'un milieu poreux saturé | 116 |
| 5.4 | Modèles empiriques-Analyses des relaxations diélectriques | 116 |
| 5.4.1 | Modèle de Debye | 117 |
| 5.4.2 | Distribution des temps de relaxation-relation de Havriliak et Négami | 117 |

| | | |
|----------------------|--|-------------|
| 5.5 | Modèle fractal de la permittivité diélectrique-Détermination du taux de porosité | 118 |
| 5.6 | Modèle de la relaxation cinétique non-linéaire de l'eau confinée | 119 |
| 5.7 | Protocole technique et expérimental | 119 |
| 5.7.1 | Préparation des échantillons | 119 |
| 5.7.2 | Technique de caractérisation diélectrique | 120 |
| 5.8 | Analyses diélectriques | 121 |
| 5.8.1 | Analyse à l'ambiante | 121 |
| 5.8.2 | Analyses dans la gamme de température $[-100^{\circ} C, 200^{\circ} C]$ | 122 |
| 5.9 | Analyse corrélative entre les propriétés diélectriques et acoustiques | 132 |
| 5.10 | Conclusion | 132 |
| CONCLUSION | | 134 |
| ANNEXE | | |
| A | Calcul des matrices de diffusion | i |
| A.1 | Cas des pores ouverts | i |
| A.2 | Cas des pores fermés | v |
| B | Coordonnées sphériques | vii |
| B.1 | Matrice de passage entre coordonnées cartésiennes et sphériques | viii |
| B.2 | Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques | viii |
| B.3 | Expression de l'opérateur ∇ | ix |
| B.4 | Expression de la perméabilité en coordonnées sphériques | ix |
| C | Tenseur des contraintes pour un fluide en mouvement | xi |
| D | Coordonnées ellipsoïdales | xii |
| E | Facteurs de dépolarisation | xiii |
| F | Tenseur inverse | xiv |
| F.1 | Orientation de l'espace | xiv |
| F.2 | Quelques identités | xiv |
| Bibliographie | | xvi |

Table des figures

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Schéma des différentes porosités | 20 |
| 1.2 | Définition de la tortuosité | 25 |
| 1.3 | Illustration des distances euclidienne L_{eu} (pointillé noir) et géométriques L_g (bleu) entre les points A et B. | 26 |
| 1.4 | Milieu poreux soumis à un gradient de pression | 27 |
| 1.5 | Illustration d'une section d'un pore saturé par un fluide visqueux, représentation des lignes de vitesses. | 28 |
| 1.6 | Profils de champ de déplacement hydraulique (a), et du champ de déplacement électrique (b) dans un milieu poreux de porosité $\phi = 0.7$ [[29]] | 28 |
| 1.7 | Classification de l'os : (1) os court, (2) os plat, (3) os irrégulier, (4) os long [8]. | 30 |
| 1.8 | Anatomie du tissu osseux. | 30 |
| 1.9 | Ostéoporose | 31 |
| 2.1 | | 34 |
| 2.2 | Plaque poreuse immergée dans un milieu fluide : A_1 et B_1 sont les ondes incidente et réfléchie dans le milieu fluide $i = 1$. A_2 et B_2 sont les ondes transmise et réfléchie dans le milieu fluide $i = 2$ | 38 |
| 2.3 | Schéma d'une plaque avec un défaut de volume 1D, d désigne la taille du défaut. | 41 |
| 3.1 | plaque poreuse avec pores ouverts et fermés. | 45 |
| 3.2 | Coefficients de transmission et de réflexion pour une plaque à pores fermés d'épaisseur $e = 38mm$ et d'épaisseur de couche imperméable $d = 5.10^{-4}m$ | 46 |
| 3.3 | Coefficients de transmission et de réflexion pour une plaque à pores fermés d'épaisseur $e = 38mm$ et d'épaisseur de couche imperméable $d = 5.10^{-6}m$ | 46 |
| 3.4 | Coefficients de transmission en pores fermés : (d) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (e) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (f) plaque d'épaisseur $e = 30mm$ | 47 |
| 3.5 | Coefficient de réflexion en pores fermés : (d) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (e) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (f) plaque d'épaisseur $e = 30mm$ | 47 |
| 3.6 | Coefficient de transmission en pores ouverts : (a) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (b) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (c) plaque d'épaisseur $e = 30mm$ | 49 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.7 | Coefficient de réflexion en pores ouverts : (d) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (e) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (f) plaque d'épaisseur $e = 30mm$ | 49 |
| 3.8 | Potentiel de l'onde rapide en pores fermés (a) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (b) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (c) plaque d'épaisseur $e = 30mm$ pour les fréquences $f = 0.3$ MHz (---) et $f = 1$ MHz (-) | 52 |
| 3.9 | Potentiel de l'onde lente en pores fermés (d) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (e) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (f) plaque d'épaisseur $e = 30mm$ pour les fréquences $f = 0.3$ MHz (---) et $f = 1$ MHz (-) | 52 |
| 3.10 | Potentiel de l'onde rapide en pores ouverts : (a) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (b) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (c) plaque d'épaisseur $e = 30mm$ pour les fréquences $f = 0.3$ MHz (--) et $f = 1$ MHz(-s) | 54 |
| 3.11 | Potentiel de l'onde lente en pores ouverts (a) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (b) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (c) plaque d'épaisseur $e = 30mm$ pour les fréquences $f = 0.3$ MHz ((- - -)) et $f = 1$ MHz(-) . . | 54 |
| 3.12 | Signal temporel réfléchi (a) et transmis (b) en pores fermés. | 55 |
| 3.13 | Signal temporel réfléchi (a) et transmis (b) en pores ouverts. | 56 |
| 3.14 | Schéma du protocole expérimental et la plaque poreuse QF-20 | 58 |
| 3.15 | Schéma de la plaque poreuse avec interface ouverte et fermée | 58 |
| 3.16 | Schéma de la mesure de référence en transmission et le signal enregistré . | 59 |
| 3.17 | Schéma de la mesure de référence en réflexion et le signal enregistré . . . | 59 |
| 3.18 | Comparaison entre signal transmis expérimental (a) et théorique (b) en pores ouverts. | 60 |
| 3.19 | Comparaison coefficient de transmission théorique (---) et expérimental (-). | 60 |
| 3.20 | Comparaison entre signal réfléchi expérimental (a) et théorique (b) en pores ouverts. | 61 |
| 3.21 | Comparaison entre signal transmis expérimental (a) et théorique (b) en pores fermés. | 61 |
| 3.22 | Comparaison entre coefficient de transmission expérimental et théorique en pores fermés. | 62 |
| 3.23 | Échantillon d'une plaque poreuse avec un défaut décalé (a) et un défaut centré (b) | 63 |
| 3.24 | Illustration des trois configurations étudiées. | 63 |
| 3.25 | Coefficients de transmission (a) et de réflexion (b) en fonction de la position du défaut et de la fréquence. | 65 |
| 3.26 | Schéma illustrant la variation de la taille du défaut. | 65 |
| 3.27 | Coefficients de transmission (a) et de réflexion (b) en fonction de la taille du défaut et de la fréquence. | 66 |
| 3.28 | Montage expérimental en transmission des configurations 2 et 3. | 67 |
| 3.29 | Signaux transmis expérimentaux des configurations 2 (a) et 3 (b). | 68 |
| 3.30 | Signaux transmis simulés : (- - -) configuration 1, (-) configuration 2, (o) configuration 3 | 69 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.31 | Signaux réfléchis expérimentaux des configurations 2 (- - -) et 3 (—) et le signal transmis dans l'eau (· - · - ·) | 70 |
| 3.32 | Signaux réfléchis simulés : (- - -) configuration 1, (-) configuration 2, (o) configuration 3 | 70 |
| 4.1 | Inclusion orientée dans un milieu poreux. $\mathbf{n}^{(o)}$ est le vecteur unitaire sortant. | 74 |
| 4.2 | Lignes de champs de vitesse dans un milieu poreux de perméabilité $\kappa^{(o)}$ contenant une inclusion sphérique de perméabilité $\kappa^{(i)}$: (a) $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} > 1$, (b) $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} < 1$ | 78 |
| 4.3 | Niveaux de vitesse dans un milieu poreux de perméabilité $\kappa^{(o)}$ contenant une inclusion sphérique de perméabilité $\kappa^{(i)}$: (a) $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} > 1$, (b) $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} < 1$ | 78 |
| 4.4 | Tracé de la densité de charges surfaciques de polarisation hydraulique σ_{pol} pour une inclusion sphérique et une inclusion ellipsoïdale avec différentes orientations par rapport au flux incident.) | 81 |
| 4.5 | Polarisabilité hydraulique $\alpha/3V$ d'une inclusion ellipsoïdale en fonction de $\log(\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)})$ pour différentes valeurs des facteurs de dépolarisation (N_x, N_y, N_z) (-●- : $N_x = 0.1, N_y = 0.1, N_z = 0.8$); (-◇- : $N_x = 0.2, N_y = 0.2, N_z = 0.6$); (-◀- : $N_x = 0.4, N_y = 0.4, N_z = 0.2$); (-■- : $N_x = 0.45, N_y = 0.45, N_z = 0.1$); (- - - : $N_x = 1/3, N_y = 1/3, N_z = 1/3$) | 82 |
| 4.6 | Inclusion sphérique stratifiée dans un milieu poreux homogène. | 83 |
| 4.7 | Milieu poreux avec plusieurs inclusions ellipsoïdales : a) inclusions alignées ; b) inclusions orientées aléatoirement. | 105 |
| 4.8 | (a) Évolution de la tortuosité en fonction du domaine $\Omega(x/a)$ pour différentes valeurs de $\kappa = \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}}$, (b) schéma des domaines carrés centrés $\Omega(x/a)$ | 110 |
| 5.1 | Schéma explicatif des différents types de polarisation | 114 |
| 5.2 | Variations fréquentielles de la permittivité diélectrique suivant les différents types de polarisation [28] | 115 |
| 5.3 | Polarisation des liaisons OH de l'eau (H_2O) | 116 |
| 5.4 | Photographie illustrant quelques échantillons de la céramique poreuse analysée en diélectriques. | 120 |
| 5.5 | Variation isotherme et à l'ambiante de la permittivité diélectrique en fonction de la fréquence pour la céramique poreuse de silice. En encart est donné l'ajustement obtenu de la tendance décroissante de la permittivité diélectrique en fonction de la fréquence selon l'équation (5.23). | 121 |
| 5.6 | Variations isothermes de la permittivité diélectrique en fonction de la fréquence pour les céramiques poreuses à pores ouverts (a) et à pores fermés (b) | 123 |
| 5.7 | Variations isothermes de facteur de pertes en fonction de la fréquence pour les céramiques poreuses à pores ouverts (a) et à pores fermés (b). | 124 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.8 | Variations isothermes de la partie imaginaire du Module électrique M'' en fonction de la fréquence pour les céramiques poreuses à pores ouverts (a) et à pores fermés (b). | 125 |
| 5.9 | Variations du temps de relaxation en fonction de l'inverse de la température pour les céramiques poreuses PO et PF. | 126 |
| 5.10 | Diagrammes d'Argand expérimental et théorique de la relaxation diélectrique (1) en module électrique à la température $-70^\circ C$ pour les céramiques poreuses PO (a) et PF (b). | 129 |
| 5.11 | Variations de l'intensité de la relaxation diélectrique (1) en fonction de la température. | 130 |
| 5.12 | Variations du temps de relaxation de l'eau confinée, $ln(\tau)$, en fonction de $(1000/T)$ pour les céramiques poreuses PO et PF. La courbe rouge représente le meilleur ajustement obtenu en utilisant l'équation (5.24). | 131 |

Notations

| | |
|----------------|---|
| c_0 | vitesse acoustique |
| d | épaisseur de la couche limite imperméable |
| e | épaisseur de la plaque poreuse |
| φ | porosité |
| k_1, k_2 | nombres d'ondes |
| k_b | module de compressibilité du squelette |
| k_f | module de compressibilité du fluide |
| k_s | module de compressibilité du solide |
| p^i | pressions dans le milieu i |
| \mathbf{u}^s | déplacement solide |
| \mathbf{u}^f | déplacement fluide |
| v^i | vitesse des ondes dans le milieu i |
| k_0 | perméabilité |
| N | module de cisaillement du solide |
| P | paramètre de Biot |
| Q | paramètre de Biot |
| R | paramètre de Biot |
| V_f | volume fluide |
| V | volume totale du matériau |
| \mathbf{V}^s | vitesse de l'onde dans le solide |
| \mathbf{V}^f | vitesse de l'onde dans le fluide |
| \mathbf{V}_1 | vitesse de l'onde rapide |
| \mathbf{V}_2 | vitesse de l'onde lente |
| $\tau(\omega)$ | tortuosité dynamique |
| τ_∞ | tortuosité statique |
| η | viscosité de l'eau |
| μ_1, μ_2 | rapport d'amplitudes fluide-solide pour les ondes rapide et lente |
| ρ_s | densité solide |
| ρ_0 | densité fluide |
| ρ_{11} | densité complexe fluide |

| | |
|---------------------|---|
| ρ_{12} | densité effective |
| ρ_{22} | densité complexe solide |
| σ | résistivité au passage du fluide |
| τ_{ij}^f | contrainte fluide |
| τ_{ij}^s | contrainte solide |
| ω | pulsation |
| Λ | longueur caractéristique visqueuse |
| Σ_z | masses surfaciques de la couche limite imperméable en z |
| Φ_i' | onde aller dans le matériau poreux |
| Φ_i'' | onde retour dans le matériau poreux |
| $\overline{\Phi}^s$ | amplitude du potentiel de la vitesse de l'onde dans le solide |
| $\overline{\Phi}^f$ | amplitude du potentiel de la vitesse de l'onde dans le fluide |
| $\overline{\Phi}_1$ | amplitude du potentiel de la vitesse rapide |
| $\overline{\Phi}_2$ | amplitude du potentiel de la vitesse lente |
| $\hat{\phi}_i$ | onde totale dans le matériau poreux |
| $\hat{\phi}^{inc}$ | onde incidente |
| $\hat{\phi}^{ref}$ | onde réfléchie dans le milieu 1 |
| $\hat{\phi}^{tr}$ | onde transmise dans le milieu 3 |
| a | rayon de l'inclusion sphérique |
| $\kappa^{(i)}$ | conductivité hydraulique à l'intérieur de l'inclusion |
| $\kappa^{(e)}$ | conductivité hydraulique à l'extérieur de l'inclusion |
| κ | rapport des conductivités hydrauliques |
| $v^{(i)}$ | vitesse à l'intérieur de l'inclusion |
| $v^{(e)}$ | vitesse à l'extérieur de l'inclusion |
| $p^{(i)}$ | pression à l'intérieur de l'inclusion |
| $p^{(e)}$ | pression à l'extérieur de l'inclusion |
| α_p | polarisabilité |
| U_∞ | vitesse de filtration initiale |
| p | moment dipolaire |
| \mathbf{P} | polarisation |
| χ | susceptibilité |

Introduction

L'acoustique offre une description de nombreux phénomènes qui affectent la vie de chacun d'entre nous. Outre les processus comme la communication entre les êtres vivants, comme la parole ou la musique, elle permet l'acquisition d'informations qui sans elle serait inconcevable. Les ondes sismiques qui donnent accès à une représentation de la structure du sous-sol tant au niveau local qu'à l'échelle des continents en sont un exemple évident. Ceci est dû en partie au large spectre des ondes acoustiques.

Au cours de leur propagation, ces ondes sont perturbées par les inhomogénéités ou les défauts du milieu dans lequel elles évoluent. Ces perturbations sont liées à la taille des défauts, typiquement c'est le rapport a/λ de la dimension caractéristique du défaut (a) à la longueur de l'onde (λ) qui gouverne l'importance de cette perturbation. On comprend alors que les basses fréquences des ondes sismiques de 5×10^{-4} à 20 Hz permettent la propagation sur de grande distance (~ 10.000 km). Au contraire, la recherche de défauts en CND ou l'échographie dans le cas des tissus vivants nécessite des ondes à plus haute fréquence pour "voir" et caractériser les anomalies de petite taille (quelques MHz). Outre la large palette d'applications que permet l'étendue de leur spectre, les ondes acoustiques sont particulièrement sensibles aux propriétés physiques du milieu de propagation : ondes de compression dans les fluides, atténuation dans les fluides visqueux, ondes de compression et de cisaillement dans les solides, ondes dispersives dans les milieux visco élastiques... Depuis quelques années les chercheurs développent de nouveaux matériaux artificiels au sens où leurs propriétés ne se trouvent pas à l'état naturel. Ces méta matériaux aux caractéristiques révolutionnaires pour la propagation des ondes laissent entrevoir la possibilité d'une quasi infinité de nouvelles applications : filtrage des ondes, cloaking, furtivité...

Le problème qui nous intéresse ici est l'étude de la propagation dans les milieux poreux. Ces milieux sont omniprésents i) dans la nature où ils constituent les roches, les sols, ..., ii) dans l'industrie où les laines de roches ou métalliques, les mousses plastiques (polyuréthane), ... sont utilisées comme isolants acoustiques ou thermiques, iii) dans les tissus vivants (muscles, os, ...). La théorie de Biot est le modèle de propagation acoustique dans ces milieux qui rend le mieux compte des résultats expérimentaux. Elle prédit trois modes de propagation : deux ondes de compression que sont les ondes dites lente et rapide et une onde de cisaillement. Les déplacements mesurés expérimentalement du solide et du fluide sont des combinaisons linéaires de ces ondes. Leur proportion dans les deux phases du milieu poreux sont fonctions des paramètres caractéristiques de ses

phases (élasticité du solide, compressibilité et viscosité du fluide, porosité du milieu, ...). Ainsi, à partir de l'analyse des signaux qui se propagent dans le poreux, il est possible d'obtenir des informations sur chacune de ses phases. C'est cette propriété du modèle de Biot qui a fait sa popularité. Un autre caractère de la théorie de Biot, conséquence de la présence des trois ondes de propagation, est sa sensibilité aux interfaces. On sait qu'aux discontinuités du milieu de propagation c'est à dire, là où les valeurs des paramètres physiques changent, les ondes ne peuvent se propager que si les déplacements du fluide et de la structure solide ainsi que les contraintes qui s'exercent sur eux sont conservés. Cette exigence impose en général que chaque mode incident à une discontinuité génère les trois modes à la réflexion et/ou à la transmission. La variation des amplitudes des modes propagatifs dans le poreux est donc un indicateur de la présence d'une discontinuité ou de la variation d'un ou de plusieurs des paramètres du milieu. Cette propriété générale de la propagation dans un milieu limité ou contenant des défauts (les variations des valeurs de paramètres pouvant être vus comme des défauts) prend un caractère particulier dans les milieux poreux. En effet les trois modes de propagation ont des comportements très différents vis à vis de l'atténuation. La théorie de Biot montre que l'onde lente est le plus atténué des trois modes. Ce résultat s'explique par le fait que l'onde lente est due aux mouvements en opposition de phase du solide et du fluide et donc que leur vitesse relative étant maximale, l'effet de la viscosité du fluide est lui aussi maximal. Par ailleurs, l'amplitude des modes générés dépend de la géométrie de l'interface, en particulier de son orientation par rapport à la direction de propagation de l'onde incidente. Le phénomène de conversion de modes n'est pas symétrique au sens où, toutes choses égales par ailleurs, l'onde lente et l'onde rapide (ou l'onde de cisaillement) ayant parcouru la même distance ne transfèrent pas la même énergie lors de leur conversion à une discontinuité. La conséquence immédiate de cette remarque est que, dans un milieu de taille finie et/ou contenant des discontinuités, les ondes rapide et de cisaillement voient leur énergie décroître essentiellement lors des conversions de modes. De ce fait la variation de l'amplitude de l'onde rapide et la vitesse de cette variation sont elles aussi un indicateur de la présence d'interfaces.

Un autre paramètre des milieux poreux sensible à la présence de défauts est la *tortuosité*. Il existe plusieurs définitions de ce paramètre suivant les domaines d'application. La définition la plus intuitive est la définition géométrique : la tortuosité est le rapport entre la distance effective entre deux points du milieu à la distance euclidienne de ces points. C'est la manière de calculer la "distance effective" qui conduit à différentes expressions de ce rapport. En effet, l'évaluation de la distance effective dépend non seulement de la géométrie de la micro structure du poreux mais aussi du phénomène étudié qui s'y développe. Dans les applications acoustiques, la tortuosité est définie par $\tau = \langle \mathbf{v}^2 \rangle / \langle \mathbf{v} \rangle^2$, où \mathbf{v} est la vitesse microscopique du fluide dans les pores et $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne statistique. La vitesse d'écoulement du fluide ou sa vitesse de filtration est donc essentielle pour évaluer la tortuosité. Or la présence de défauts dans un milieu poreux homogène en modifiant localement l'écoulement des fluides et donc des lignes de champ des vitesses modifie la valeur de la tortuosité. Ainsi, avoir des informations sur la tortuosité renseigne sur la forme des défauts du milieu poreux. Là

encore, la théorie de Biot offre la possibilité de mesurer ce paramètre qui dans certaines situations agit comme un indice de réfraction pour l'onde lente.

Le travail présenté ici répond en partie au difficile problème : Comment détecter et caractériser un défaut dans un milieu poreux à l'aide d'ondes acoustiques ? Le document est organisé comme suit.

Le chapitre 1 rappelle des généralités sur les poreux, les définitions des principaux paramètres ainsi que sur l'os trabéculaire.

Dans le chapitre 2, sont rappelés dans un premier temps les principaux résultats de la théorie de Biot. Par la suite, ils sont utilisés pour modéliser la propagation dans des tranches de poreux dont les pores sont ouverts ou fermés. Le formalisme de la matrice S (de diffusion) a été développé pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission. Dans le même contexte, l'étude est étendue au cas de la présence d'une discontinuité dans le milieu poreux. La discontinuité de phase est considérée comme défaut de volume à une dimension. La propagation des ondes acoustique dans un tel milieu est décrite en utilisant la matrice de diffusion et la théorie de Biot.

Dans le chapitre 3, on met en évidence les différences essentielles entre un milieu poreux fini où les pores à l'interface sont fermés et celui où les pores sont ouverts. On montre en particulier que l'amplitude de l'onde lente dans le cas des pores fermés est de plusieurs ordres de grandeur inférieure à celle correspondant aux pores ouverts. Les simulations numériques confirment que l'on peut souvent négliger l'onde lente dans les milieux poreux à pores fermés. Toujours par simulations numériques, on montre la mise en évidence des défauts, leur position dans une tranche de poreux ainsi que leur taille. on expose les validations expérimentales des simulations numériques décrites..

Le chapitre 4 présente un modèle de tortuosité induite par des défauts. Ce modèle est développé à partir de la loi de Darcy pour un fluide en écoulement stationnaire (vitesse constante), et de ce fait conduit à la tortuosité statique du milieu. Des défauts qui sont des inclusions poreuses de différentes formes (sphérique et ellipsoïdale) homogènes ou non ont été envisagés. On montre que les défauts sphériques induisent des champs de pression et de vitesse dipolaires alors que dans le cas des inclusions ellipsoïdales les champs induits sont multipolaires. Dans le cas général d'une forme quelconque, on ne peut pas donner la forme analytique de ces champs. Dans le cas de plusieurs défauts, le modèle développé suppose qu'ils sont suffisamment éloignés les uns des autres c'est-à-dire sans interaction. Des expressions de la mobilité effective sont données pour les défauts sphériques et ellipsoïdaux alignés ou non. Compte tenu de la loi de Darcy, ces expressions permettent de calculer les "valeurs locales" de la tortuosité

Dans le chapitre 5 on expose une méthode basée sur les propriétés diélectriques d'une céramique saturée d'eau pour l'estimation de la porosité. Le chapitre commence par l'introduction des paramètres susceptibles d'être obtenus par mesures diélectriques On donne ensuite les propriétés dielectriques d'un milieu poreux saturé, en insistant en particulier sur les propriétés de l'eau dans les pores. Des modèles empiriques permettant l'analyse des relaxations diélectriques sont présentés

Le document se termine par quelques annexes où sont donnés des calculs qui n'apparaissent pas dans le texte pour en alléger la lecture et des résultats dont certains sont

connus mais peu utilisés.

Chapitre 1

Généralités sur les milieux poreux

1.1 Définitions

Un milieu poreux est un ensemble constitué d'une matrice solide (phase solide) et des pores (phase fluide), ces deux phases sont interconnectées. Ce milieu est dit biphasique.

Un milieu poreux est défini par un certain nombre de paramètres macroscopiques qui sont la porosité, la perméabilité, la tortuosité. Dans la suite on définit ces paramètres.

L'intérêt des matériaux poreux se manifeste dans différentes applications telles que la géophysique, les applications pétrolières, l'industrie de l'automobile et la médecine, plus précisément la propagation des ultrasons dans le tissu vivant.

Le déplacement du fluide existant dans les pores engendre des interactions mécaniques qui mettent en jeu l'élasticité du milieu poreux.

1.1.1 Porosité

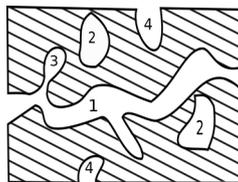


FIGURE 1.1 – Schéma des différentes porosités

La porosité est définie par le rapport du volume des pores V_p (espace vide) au volume total du milieu V_t :

$$\varphi = \frac{V_p}{V_t},$$

On définit trois types de porosité :

* porosité connectée : les vides présents dans le milieu sont reliés entre eux et débouchent à l'extérieur du milieu, représentée sur le schéma par le numéro (1).

* porosité occluse : les pores sont des inclusions fermées telles que des bulles fermées, représentée sur le schéma par le numéro (2).

* porosité piégée : les vides dont l'accessibilité aux liquides est conditionnée par la viscosité et la pression de ces derniers, représentée sur le schéma par le numéro (3).

* porosité ouverte : les vides forment un réseau et communiquent entre eux, représentée sur le schéma par le numéro (4).

Dans la suite de la thèse, on s'intéresse aux matériaux poreux présentant une porosité connectée type (1).

1.1.2 Résistivité au passage du fluide et perméabilité

La résistivité au passage du fluide $\sigma[N.m^{-4}.s]$ traduit l'aptitude du matériau à laisser passer le fluide à travers sa structure, elle est définie par :

$$\sigma = \frac{\Delta p}{D_s \cdot e}, \quad (1.1)$$

avec $e[m]$ l'épaisseur du milieu poreux, et $D_s[m^2.s^{-1}]$ le débit surfacique de l'écoulement quand le milieu d'épaisseur e est soumis à un gradient de pression Δp . Cette relation conduit à la définition de la perméabilité statique $k_0[m^2]$ à travers la loi de Darcy. [17].

Loi de Darcy

La loi de Darcy est utilisée pour la description de l'écoulement lent d'un fluide visqueux à travers des milieux poreux. Elle s'énonce selon l'expression :

$$v_i = -\frac{k_0}{\eta} \partial_i p \quad (1.2)$$

où v_i est la vitesse du fluide dans la direction i , $\partial_i p$ est le gradient de p dans la direction i et η la viscosité cinématique.

Cette loi est en bon accord avec les résultats d'expériences lorsque le flux du fluide causé par une faible différence de pression change lentement dans l'espace considéré.

Des déviations importantes sont observées par rapport à cette loi sous certaines conditions. C'est le cas lorsque la pression est élevée ou lorsque le fluide circule à travers de fines membranes où la résistance intervient.

D'autres problèmes apparaissent avec l'applicabilité de la loi de Darcy à l'interface entre milieu poreux et fluide libre. En effet la loi de Darcy ne contient pas de dérivées de la vitesse par rapport aux variables d'espace, alors que l'équation de Navier-Stokes (1.3) qui gouverne les mouvements du fluide libre est une équation du second ordre.

$$\overrightarrow{grad} p = \mu \Delta \overrightarrow{v} \quad (1.3)$$

De ce fait il est difficile, voire impossible d'écrire une condition à une interface poreux/fluide compatible avec, d'un côté la loi de Darcy et de l'autre l'équation de Navier-Stokes. Cette situation a amené plusieurs auteurs à proposer des lois de Darcy modifiées compatibles avec Navier-Stokes [58], [17].

Afin d'augmenter le domaine d'applicabilité de la loi de Darcy, on peut utiliser une loi dans laquelle la réponse du poreux à un gradient de pression est modifiée comme suit :

$$\partial_i p = -\frac{\eta}{k} u_i h\left(\frac{u \rho d}{\eta}, \phi\right), \quad (1.4)$$

avec k la perméabilité statique du poreux. On introduit la fonction h pour prendre en compte le nombre de Reynolds ($d \sim \sqrt{k}$) et éventuellement d'autres paramètres liés au poreux et/ou au fluide. Le développement le plus simple de la fonction h pour de faibles vitesses conduit à :

$$\partial_i p = -\frac{\eta}{k} u_i + a \rho |u| u_i. \quad (1.5)$$

Si on pose $a = C/\sqrt{k}$, on retrouve l'équation de Forcheimer [61]. Dans cette relation le coefficient C est fortement dépendant du régime du fluide. Ainsi, pour les faibles vitesses $C \rightarrow 0$ et on retrouve la loi de Darcy. Brinkman [58] a proposé une loi qui porte son nom du même type que celle de Darcy et qui prend en compte les effets de cisaillement dans le fluide lorsque ceux ci ne peuvent plus être négligés :

$$\partial_i p = -\frac{\eta'}{k} u_i + \eta' u_{i,l}, \quad (1.6)$$

où η' est la viscosité modifiée. Cette équation peut se comprendre comme suit : lorsque la perméabilité est grande, le matériau poreux tend à se comporter comme un fluide décrit par l'équation de Stokes (1.3). Si on néglige les effets inertiels, alors, elle devient :

$$\partial_i p = \eta u_{i,l}. \quad (1.7)$$

L'équation de Brinkman (1.6) revient alors à y ajouter une force de frottement proportionnelle à la vitesse de filtration, d'où la relation (1.5). On remarque que pour les faibles valeurs de la perméabilité, on retrouve la loi de Darcy, alors que lorsque k est grand, on retrouve l'équation de Stokes.

Les conditions aux limites à l'interface poreux-fluide libre sont alors : i) continuité du débit (vitesse normale à l'interface), ii) continuité de la composante tangentielle de la vitesse et iii) continuité des composantes de la contrainte sur le fluide :

$$[n_i u_i] = 0, \quad [t_i u_i] = 0, \quad [\sigma_{ij} t_i n_j] = 0, \quad [\sigma_{ij} n_i n_j] = 0, \quad (1.8)$$

où \mathbf{t} et \mathbf{n} sont les vecteurs normal et tangentiel à l'interface.

Loi de Darcy temporelle

Pour prendre en compte les fluctuations temporelles de la pression, la loi de Darcy doit être adaptée.

Si la pression est maintenant une fonction de l'espace et du temps $p(x, t)$, une généralisation de la loi de Darcy s'écrit :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{k}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-t') \nabla p(\mathbf{x}, t') dt'. \quad (1.9)$$

$$= -\frac{k}{\eta} (K * \nabla p)(\mathbf{x}, t) \quad (1.10)$$

Dans cette relation $K(t)$ est la réponse impulsionnelle du milieu poreux lorsqu'il est sollicité par un gradient de pression dont la forme est une impulsion de Dirac. La dimension de $K(t)$ est l'inverse d'un temps : $[K(t)] = s^{-1}$. selon les équations (1.2) et (1.9).

Propriétés de K

1. l'opérateur $K(t)$ est une opérateur linéaire réel ;
2. d'après le principe de causalité on a :

$$K(t) \begin{cases} = 0 & \text{si } t < 0 \\ \neq 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.11)$$

3. si les variations temporelles de $\nabla p(\mathbf{x}, t)$ sont lentes par rapport à celles de $K(t)$, alors

$$\int_0^{\infty} K(t) dt = 1. \quad (1.12)$$

Les propriétés 1) et 2) impliquent que les parties réelle et imaginaire de sa transformée de Fourier sont liées par les relations de Kramers Kronig [71].

Expression de K Pour donner une expression de $K(t)$, on utilise la transformation de Fourier. La transformée de Fourier de l'équation (1.9) s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{k}{\eta} \tilde{K}(\omega) \nabla \tilde{p}(\mathbf{x}, \omega), \quad (1.13)$$

où $\tilde{f}(\omega)$ est la transformée de Fourier de $f(t)$:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t) dt. \quad (1.14)$$

L'équation (1.12) conduit alors à :

$$\tilde{K}(0) = 1. \quad (1.15)$$

Quant à la réalité de $K(t)$, elle impose la relation :

$$(\tilde{K})^*(\omega) = \tilde{K}(-\omega), \quad (1.16)$$

où $(z)^*$ est le complexe conjugué de z .

Ainsi, l'expression la plus simple de $\tilde{K}(\omega)$ compatible avec (1.15) et (1.16) est :

$$\tilde{K}(\omega) = 1 + i\tau\omega, \quad (1.17)$$

τ étant une quantité homogène à un temps.

La transformée de Fourier inverse de (1.17) conduit à l'expression temporelle de $K(t)$ sous la forme :

$$K(t) = \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right). \quad (1.18)$$

Ainsi, l'équation (1.9) prend la forme :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{k}{\eta} \left[\left(\delta + \tau D \right) * \nabla p \right] (\mathbf{x}, t), \quad (1.19)$$

où $D = \partial/\partial t$ et $*$ désigne un produit de convolution.

Cette dernière équation montre que la vitesse de filtration est la somme de deux termes :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{k}{\eta} \left(\nabla p(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial \nabla p}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (1.20)$$

l'un étant le potentiel de la pression et l'autre étant proportionnel à sa variation temporelle. En posant $\mathbf{E} = -\nabla p$ et $\kappa = k/\eta$, on obtient plus simplement :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \kappa \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right). \quad (1.21)$$

1.1.3 Tortuosité

La tortuosité joue un rôle principal dans la modélisation mathématique des phénomènes de transport dans les milieux poreux. Ceci tient au fait que la porosité ϕ n'est pas suffisante pour décrire leur microstructure. La tortuosité τ est définie par le rapport :

$$\tau = \frac{\langle l_{eff} \rangle}{l}, \quad (1.22)$$

où l_{eff} est la longueur du chemin effectif joignant deux points A et B d'un poreux pour le transport considéré, alors que l est la distance euclidienne (distance minimale) et $\langle \rangle$ désigne la moyenne. Alors que la notion de la distance minimale est parfaitement définie, celle de la longueur du chemin effectif est ambiguë puisqu'elle change d'un type de transport à l'autre.

La tortuosité est un paramètre dont les propriétés sont données ci-dessous :

1. $\lim_{\phi \rightarrow 1} \tau = 1$
physiquement, on comprend que lorsque la matrice du poreux offre une résistance négligeable, au transport, la longueur du chemin effectif approche de la longueur euclidienne l ;
2. τ est définie pour $\phi \in [0, 1]$ et on a $\tau \geq 1$; τ n'est pas bornée lorsque $\phi \rightarrow 0$;
3. τ tend vers une constante lorsque ϕ tend vers ϕ_{min} (seuil de percolation¹) ; .
4. τ ne dépend que de la géométrie du poreux.

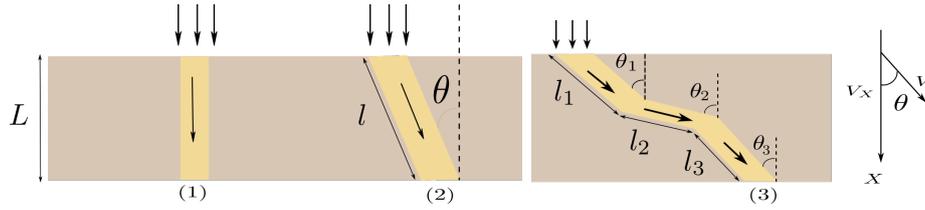


FIGURE 1.2 – Définition de la tortuosité

Si le pore est formé d'un seul segment faisant un angle θ avec la verticale (exemple figure 1.2-(2)), alors :

$$\tau = \frac{1}{\cos \theta} \quad (1.23)$$

Dans le cas d'une succession de segments (exemple figure 1.2-(3)) on a :

$$\tau = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{L} = \frac{\sum_i l_i}{\sum_i l_i \cos \theta_i}. \quad (1.24)$$

avec

$$L = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3,$$

Lorsque l'on parle de tortuosité du milieu poreux, on comprend bien que ce terme fait référence au chemin parcouru par le fluide saturant lorsqu'il s'écoule entre deux points ou par une onde acoustique se propageant entre ces deux points. Ce paramètre est souvent utilisé pour renormaliser la vitesse de ces ondes et pour caractériser les interactions fluide structure qui se développent dans les pores sous l'effet d'un gradient de pression alternatif.

Pourtant il n'existe pas **une** définition de la tortuosité, mais on a bien des expressions de la tortuosité adaptées aux différents domaines dans lesquels ce paramètre intervient.

Types de tortuosités

Tortuosité géométrique Dans la littérature, la tortuosité est souvent présentée comme un paramètre géométrique. Si on note τ_g la tortuosité géométrique, elle est définie par le rapport :

$$\tau_g = \frac{\langle L_g \rangle}{L_{eu}}, \quad (1.25)$$

L_g désignant les chemins suivis par le fluide à travers le poreux pour passer du point A au point B et L_{eu} la distance euclidienne entre ces deux points $L_{eu} = d(A, B)$. Adler [36] en donne une expression moins générale en proposant comme définition le rapport du chemin L_g de longueur minimale et L_{eu} la distance entre A et B . Dans tous les cas on a $\tau_g \geq 1$.

1. Le seuil de percolation est la valeur minimale ϕ_{min} de ϕ pour que les pores débouchent à l'extérieur du poreux

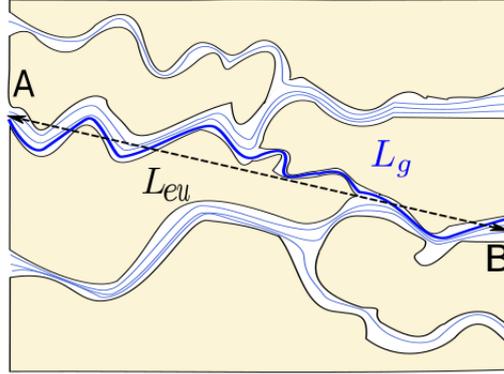


FIGURE 1.3 – Illustration des distances euclidienne L_{eu} (pointillé noir) et géométriques L_g (bleu) entre les points A et B.

Si on opte pour la définition (1.25) se pose alors la question : Comment calculer la moyenne ? En effet plusieurs possibilités sont offertes :

1. calculer la moyenne sur toutes les lignes de champ, quelque soit le déplacement du fluide ;
2. calculer la moyenne sur les lignes de flux traversant une surface donnée de poreux ;
3. calculer la moyenne compte tenu de la répartition de la taille des pores.

Tortuosité diffusive Sa définition est :

$$\tau_d = \frac{\langle L_d^2 \rangle}{L_s^2}. \quad (1.26)$$

où $\langle L_d \rangle$ est la longueur moyenne des chemins de diffusion. τ_d est parfois définie par le rapport :

$$\tau_d = \frac{\langle d_f \rangle}{d_p}, \quad (1.27)$$

où d_p et d_f sont les coefficients de diffusion dans le fluide libre et dans le fluide inclus dans le poreux. Cette définition prend en compte de fait la perméabilité du milieu. En se basant sur la relation d'Einstein $\sigma \propto d$ où σ est la conductivité électrique, plusieurs auteurs [[11], [53]...] ont montré que $\langle L_e \rangle = \langle L_d \rangle$, ce qui implique l'égalité de τ_e et τ_d .

Tortuosité électrique Cette tortuosité est celle que l'on mesure en appliquant une différence de potentiel constante à l'échantillon du poreux où seul le fluide est supposé conducteur [13]. Les mesures des résistance de l'échantillon et du fluide conduisent à τ_e . Sa valeur est supposée ne dépendre que de la géométrie des pores. On peut montrer que

la tortuosité géométrique des lignes de champ prenant en compte la sinuosité et les zones convergentes-divergentes des pores est inférieure à τ_e , elle est définie par :

$$\tau_e = \frac{\langle L_e^2 \rangle}{L_{eu}^2}. \quad (1.28)$$

Tortuosité hydraulique On mesure la tortuosité hydraulique à partir de champ de vitesses qui traversent le milieu poreux. Le gradient de pression $\frac{\Delta p}{L_{eu}}$ établi entre les faces de l'échantillon met en mouvement le fluide saturant. En mesurant le débit, on

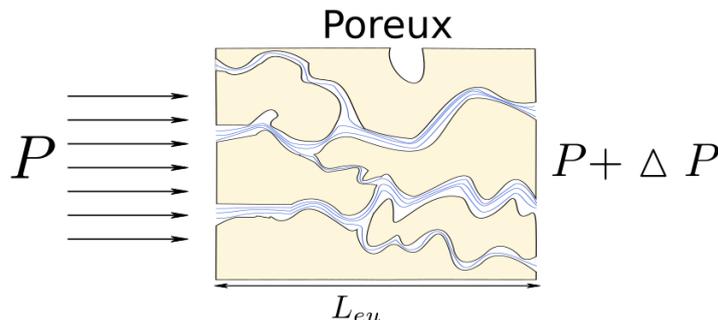


FIGURE 1.4 – Milieu poreux soumis à un gradient de pression

obtient la résistance R au passage du fluide à partir de la relation :

$$V\phi S = R \frac{\Delta p}{L_{eu}} \phi S \quad (1.29)$$

où V est la vitesse du fluide saturant, ϕ est la porosité du milieu, S l'aire de la section droite et R la résistance. En ce sens, la tortuosité hydraulique obéit à la même équation (mathématique) que la tortuosité électrique (1.28). Dans ce cas, la tortuosité n'est pas seulement un rapport de longueurs, mais elle implique aussi la projection du potentiel sur la direction macroscopique du gradient du potentiel. C'est l'origine de la puissance 2 du rapport, définie par ;

$$\tau_h = \frac{\langle L_h^2 \rangle}{L_s^2}. \quad (1.30)$$

La différence essentielle entre ces grandeurs tient au fait que l'établissement de la relation (1.29) suppose que la vitesse v est la même en tout point du fluide dans une section droite du poreux. Ceci revient à négliger la viscosité du fluide saturant. Cette hypothèse est vraie pour un fluide idéal non visqueux. Pour un fluide visqueux, dans la section d'un pore, la vitesse n'est pas uniforme : en effet la viscosité du fluide limite ses déplacements : certains pores dont les rayons sont petits agissent comme des bouchons, obligeant le fluide à prendre un autre chemin 1.5.

Finalement on observe que les tortuosités électrique et hydraulique d'un même échantillon de poreux sont très différentes. Sur la figure 1.6, ont été tracées les lignes de champs de vitesses (a) et courants (b) obtenues par simulations numériques. Dans ces deux exemples,

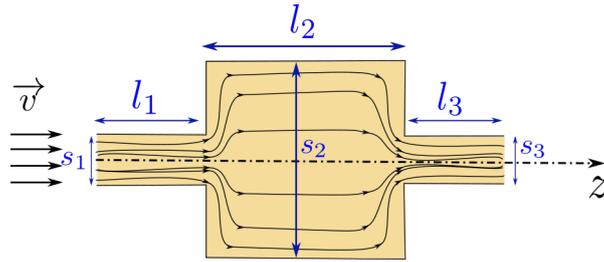


FIGURE 1.5 – Illustration d’une section d’un pore saturé par un fluide visqueux, représentation des lignes de vitesses.

la structure solide du poreux (plan) est un ensemble d’obstacles circulaires solides et isolants. On constate que la densité des lignes de courant est relativement homogène par rapport à celle des lignes de vitesses du fluide, alors que la tortuosité électrique est proche de l’unité, la tortuosité hydraulique est nettement différente de 1.

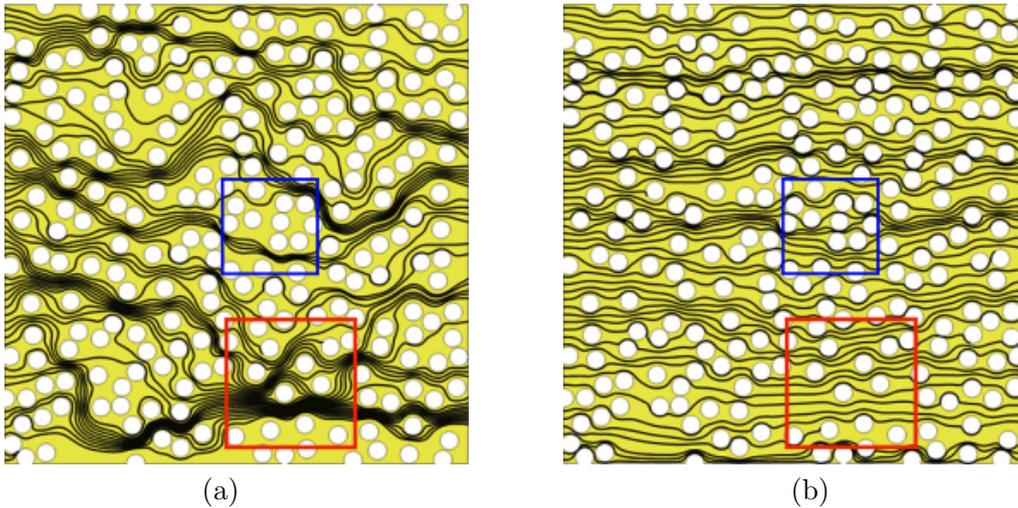


FIGURE 1.6 – Profils de champ de déplacement hydraulique (a), et du champ de déplacement électrique (b) dans un milieu poreux de porosité $\phi = 0.7$ [[29]]

Finalement ces différentes définitions permettent d'établir la relation d'ordre :

$$\tau_g < \tau_e < \tau_d \quad (1.31)$$

Pour un milieu poreux saturé par un fluide non visqueux, on utilise souvent la définition de la tortuosité :

$$\tau = \frac{\langle \mathbf{v}^2 \rangle}{\langle \mathbf{v} \rangle^2}, \quad (1.32)$$

où \mathbf{v} est la vitesse microscopique du fluide et $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne statistique. Cette définition est plus générale que celle donnée dans l'équation (1.1.3) et prend en compte les variations du rayon des pores du milieu.

1.2 Cas particulier d'un milieu poreux : l'os trabéculaire

1.2.1 Définition

L'os est un élément du squelette. Ce dernier constitue la charpente du corps et la protection de certains organes (cerveau, poumons..), les os sont classés de deux manières : la première est basée sur leur emplacement anatomique (axial ou appendiculaire), la seconde est basée sur leur forme : long, court, plat ou irrégulier. Ces formes dépendent de leur fonction et de leur disposition dans le corps humain Figure-1.7 . On distingue :

1. Les os longs tels que le radius, l'humérus, et le fémur, où l'on trouve l'os spongieux dit trabéculaire.
2. Les os courts tels que les os du carpe, les os du tarse, les phalanges de la main et du pied, et le calcaneum, plus petits et comportant de nombreuses surfaces articulaires.
3. Les os plats tels que l'omoplate, le sternum, et les os du crâne, qui ont une faible épaisseur.
4. Les os irréguliers tels que les vertèbres qui n'appartiennent pas aux groupes précédents. D'autres types d'os ne pouvant pas être classés comme précédemment, c'est le cas des os pneumatiques (les os du crâne contenant de l'air), des os sésamoïdes (les os de la main ou la rotule qui sont des petits os situés dans l'épaisseur de tendons).

On distingue deux types de tissus osseux :

1. **Tissu osseux compact (os cortical)** : qui est la partie externe du tissu osseux. Au début du développement du sujet, elle est appelée *Tissu osseux réticulaire*, de faible résistance mécanique, contient de nombreuses cellules disposées aléatoirement et contient des faisceaux de fibres de collagène à disposition aléatoire. À la fin de son développement, elle est remplacée par *le tissu osseux lamellaire ou compact* beaucoup plus abondant : il forme 90% du tissu osseux de l'organisme. La matrice osseuse occupe 95% du volume de ce tissu. Il est mécaniquement résistant, caractérisé par une matrice minéralisée disposée en lamelles parallèles et concentriques.



FIGURE 1.7 – Classification de l’os : (1) os court, (2) os plat, (3) os irrégulier, (4) os long [8].

2. **Tissu osseux spongieux (os trabéculaire)** : Représente 10% du squelette chez l’adulte, la matrice osseuse forme 20% du volume de ce tissu. On le trouve essentiellement dans les os courts et les os plats (sternum) ainsi que dans les extrémités des os longs (métaphyses et épiphyses) (Figure-1.8). Il est constitué de tissus osseux lamellaires (trabécules) et de cavités ayant des formes et des tailles irrégulières et qui sont communicantes entre elles et sont occupées par la moelle osseuse et les vaisseaux.

Cette structure de l’os trabéculaire, fait qu’il est beaucoup moins rigide en compression que l’os cortical, il supporte de fortes déformations et par conséquent il joue le rôle d’un amortisseur de chocs, alors que l’os cortical assure la rigidité en flexion des os longs [63].

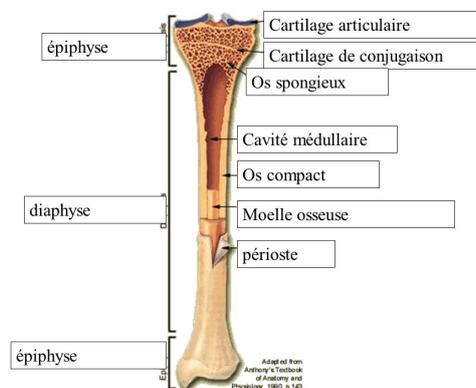


FIGURE 1.8 – Anatomie du tissu osseux.

1.2.2 La densité minérale osseuse

La densité minérale osseuse augmente avec la croissance jusqu'à 20-25 ans, puis reste constante jusqu'à 35-40 ans environ, pour diminuer ensuite progressivement. En effet, la mesure de la densité osseuse est un moyen d'apprécier l'état du squelette osseux. La perte osseuse résulte d'une disparition du couplage entre formation et résorption osseuse, cela est dû à différentes causes : affections rhumatismales, déficience des hormones sexuelles (notamment chez les femmes), maladie chronique du foie, diabète etc. Ces différentes causes provoquent d'une manière ou d'une autre la dégradation de la densité osseuse et l'augmentation des risques de fractures lors d'une chute..

Deux zones sont privilégiées pour la mesure de la densité osseuse : la colonne lombaire et le col du fémur.

1.2.3 L'ostéoporose

La perte de la densité osseuse évolue progressivement en ostéoporose. Cette maladie dont l'apparition des symptômes est lente est qualifiée de "maladie silencieuse" : le patient ne s'en rend compte que lors d'une fracture, alors que si elle n'est diagnostiquée qu'au moment de la fracture, c'est que la maladie est déjà à un stade avancé. L'ostéoporose se caractérise par une densité minérale osseuse faible et par une détérioration progressive de la micro-architecture du tissu osseux, ce qui accroît le risque de fracture. En Europe, chaque 30 secondes, un homme ou une femme est victime d'une fracture due à l'ostéoporose (d'après des statistiques de HUG *hôpitaux universitaires de Genève*).

La figure 1.9 montre une comparaison entre une partie d'os trabéculaire normal et

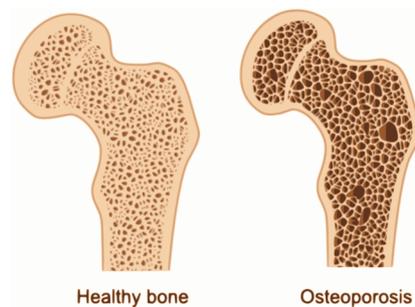


FIGURE 1.9 – Ostéoporose

une partie malade, la diminution de la densité osseuse est traduite pas la fragilisation des trabécules et par la suite l'augmentation du volume des pores entre ces trabécules. Cette modification du volume des pores produit une modification possible de porosité, de perméabilité ou de tortuosité.

Pour mesurer la densité minérale osseuse et suivre son évolution, les spécialistes de la santé utilisent la densitométrie osseuse (ostéodensitométrie) qui est un examen radiologique pratiqué avec des rayons X de très faible intensité, appelé aussi DEXA (Dual Energy X-Ray Absorptiometry). Il s'agit de mesurer le contenu minéral de l'os par unité de surface (g/cm^2). Cette technique n'est pas basée sur une mesure précise, elle donne la mesure de la densité osseuse surfacique mais pas en volume (plutôt plus intéressante pour savoir la solidité de l'os), les professionnels de la santé appuient généralement leur diagnostic sur une estimation. Il existe d'autres techniques de mesure de la densité osseuse plus ou moins utilisées, dont la radiogrammétrie, la tomodynamométrie quantitative (QCT), l'imagerie à résonance magnétique (IRM) et la technique Dual/Single photon Absorptiometry (DPA/SPA). La précision du diagnostic de ces techniques reste faible et varie de 3% jusqu'à 20%. La dose de rayonnement ionisant est élevée, cela prouve que ces techniques sont dangereuses pour la santé du patient à long terme et en plus, elles n'aboutissent pas à un diagnostic précis et efficace [22].

Récemment, de nombreuses études s'intéressent à la possibilité d'utiliser des ultrasons acoustiques dans le dépistage de l'ostéoporose. Les ultrasons permettent d'évaluer la qualité de l'os en déterminant l'atténuation de l'intensité ou de la vitesse de la propagation de l'onde ultrasonore à travers l'os trabéculaire. La propagation d'une onde ultrasonore dans le tissu osseux spongieux, produit des interactions entre la structure solide (les trabécules) et le fluide (la moëlle occupant les cavités), ces interactions sont décrites par la théorie de Biot [5], qui tient compte du déplacement de l'onde dans le solide \mathbf{u}^s et dans le fluide \mathbf{u}^f .

Chapitre 2

Théorie de Biot

2.1 Introduction

La propagation des ondes dans l'os trabéculaire a fait l'objet, depuis quelques années, de plusieurs études utilisant différentes théories des ondes dans les milieux poreux. La théorie de Biot [5] établie pour décrire la propagation dans les roches saturées d'eau est considérée comme assez générale pour être appliquée dans le cas de l'os trabéculaire. Ceci tient au fait qu'elle prend en compte l'aspect élastique du milieu et les interactions entre la structure solide et le fluide présent dans les pores, des considérations qui n'ont pas été prises en compte dans des études antérieures [73]. La première application de la théorie de Biot sur le tissu osseux a été dédiée à l'os cortical [23]. Quelques années plus tard, elle a été utilisée dans le contexte de l'os trabéculaire [51]. L'intérêt de cette théorie, est qu'elle prédit deux ondes longitudinales sous l'hypothèse d'une incidence normale. La modélisation ainsi obtenue conduit à des prédictions en meilleurs accord que celles obtenues par Wood [73], qui ne considérait qu'une seule onde. Cet intérêt lui a été accordé lors de la validation expérimentale qui a conduit à la première observation de la deuxième onde [57]. Dans le cadre de l'étude de la propagation ultrasonore dans le tissu osseux, des mesures acoustiques ont été effectuées sur des tranches de plaques poreuses obéissant à la théorie de Biot. Deux cas sont distingués : i) cas des pores ouverts : les pores aux interfaces de la plaque sont ouverts et le fluide saturant débouche sur le fluide ambiant. ii) Cas des pores fermés : les pores aux interfaces de la plaque sont fermés par une membrane rigide et le fluide saturant n'est plus connecté au fluide ambiant, ce cas nous rapproche de la structure in vivo du tissu osseux (où l'os trabéculaire est entouré par l'os cortical). Ces expériences montrent que la deuxième onde prédite par la théorie de Biot est présente dans le premier cas et elle ne l'est pratiquement pas dans le deuxième cas. L'existence ou non de la deuxième onde a fait l'objet de plusieurs études. Dans une étude antérieure, Rasolofosaon [60] a effectué des mesures expérimentales sur des plaques à pores fermés et ouverts. Il a ainsi introduit deux conditions aux limites permettant de décrire l'interface ouverte et l'interface fermée. Les résultats obtenus montrent que dans le cas d'une plaque à pores ouverts, on observe l'onde rapide ainsi que l'onde lente. Par contre dans le cas d'une plaque à pores fermés, l'onde lente disparaît. Par ailleurs,

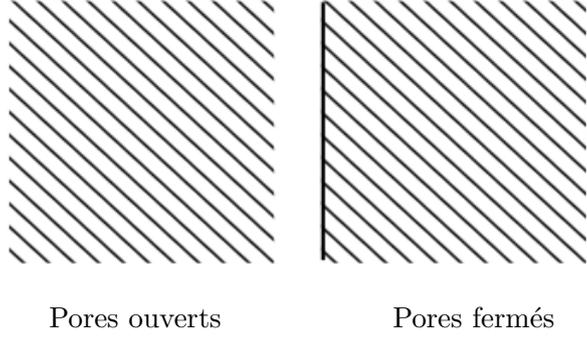


FIGURE 2.1

Johnson et al [42] ont étudié théoriquement et expérimentalement la propagation des ondes acoustiques dans les milieux poreux où ils se sont intéressés à des plaques dont les pores sont ouverts d'un côté et fermés de l'autre. Dans ce cas, ils ont montré que l'onde lente existe toujours.

Dans notre étude, on s'intéresse plus particulièrement au cas de plaques à pores ouverts ou fermés aux deux interfaces. On utilise la théorie de Biot pour décrire les mécanismes expliquant l'existence ou non des ondes lentes en fonction des conditions limites. La première partie de ce chapitre décrit brièvement le modèle de Biot dans le cas générale. La deuxième partie étudie les défauts de surfaces en introduisant les conditions aux limites pour les deux cas mentionnés précédemment. La troisième partie est une application de la théorie de Biot dans le cas d'une plaque poreuse présentant un défaut de volume plan.

2.2 Formulation générale

2.2.1 Équations de Biot

Le milieu poreux considéré à structure souple, dont les phases solide et fluide sont continues et connectées. On considère qu'il s'agit d'un milieu homogène où la longueur d'onde est grande devant la taille des pores. Sous ces hypothèses, les équations de Biot, déduites du formalisme du Lagrangien [24, 43] compte tenu de l'atténuation due à la viscosité du fluide et des pertes dans le solide, sont données sous la forme de deux équations différentielles couplées dans lesquelles le couplage se manifeste par les paramètres $\tilde{\rho}_{12}$, et Q . Leur expression sont données par :

$$\tilde{\rho}_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^s}{\partial t^2} + \tilde{\rho}_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^f}{\partial t^2} = P \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^s) + Q \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^f) - N \nabla (\nabla \wedge \mathbf{u}^s), \quad (2.1)$$

$$\tilde{\rho}_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^f}{\partial t^2} + \tilde{\rho}_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^s}{\partial t^2} = R \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^f) + Q \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^s), \quad (2.2)$$

où \mathbf{u}^s et \mathbf{u}^f sont les déplacements respectifs du solide et du fluide, et où les modules d'élasticité P , Q et R sont donnés par les expressions

$$P = \frac{(1 - \phi)(1 - \phi - \frac{k_b}{k_s})k_s + \phi \frac{k_s}{k_f} k_b}{1 - \phi - \frac{k_b}{k_s} + \phi \frac{k_s}{k_f}} + \frac{4}{3}N, \quad (2.3)$$

$$Q = \frac{(1 - \phi - \frac{k_b}{k_s})\phi k_s}{1 - \phi - \frac{k_b}{k_s} + \phi \frac{k_s}{k_f}}, \quad (2.4)$$

$$R = \frac{\phi^2 k_s}{1 - \phi - \frac{k_b}{k_s} + \phi \frac{k_s}{k_f}}, \quad (2.5)$$

avec :

k_f : module de compressibilité de l'eau,

k_b : module de compressibilité du squelette,

k_s : module de compressibilité du solide poreux,

N : module de cisaillement du solide.

Quant aux termes de masse, ils ont pour expressions [54] :

$$\tilde{\rho}_{11} = (1 - \phi)\rho_s - \tilde{\rho}_{12}, \quad (2.6)$$

$$\tilde{\rho}_{12} = -\phi\rho_0(\alpha(\omega) - 1), \quad (2.7)$$

$$\tilde{\rho}_{22} = h\rho_0 - \tilde{\rho}_{12}, \quad (2.8)$$

où ρ_0 et ρ_s sont respectivement les masses volumiques des phases fluide et solide et $\alpha(\omega)$ la tortuosité dynamique qui traduit le couplage massique entre les parties solide et fluide :

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty \left(1 + \frac{\phi\sigma}{j\omega\alpha_\infty\rho_f} \sqrt{1 + j\frac{4\alpha_\infty^2\eta\rho_f\omega}{\sigma^2\Lambda^2h^2}} \right). \quad (2.9)$$

avec α_∞ la tortuosité statique, Λ la longueur caractéristique visqueuse et ρ_f la densité fluide. D'après le théorème de Helmholtz les déplacements s'écrivent sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}^s = \nabla\Phi^s + \nabla\wedge\mathbf{V}^s, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{u}^f = \nabla\Phi^f + \nabla\wedge\mathbf{V}^f, \quad (2.11)$$

où les couples (Φ^s, Φ^f) et $(\mathbf{V}^s, \mathbf{V}^f)$ sont les potentiels scalaires et les potentiels vecteurs solide et fluide.

Dans la suite, on se restreint au cas d'une incidence normale sur la plaque. Par conséquent on ne s'intéresse qu'aux ondes de compression :

$$\mathbf{u}^s = \nabla\Phi^s, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{u}^f = \nabla\Phi^f. \quad (2.13)$$

2.2.2 Expressions des contraintes

Les contraintes qui s'exercent sur le solide et le fluide sont elles aussi déduites du formalisme du Lagrangien. Pour un poreux saturé, on obtient les expressions comme suit :

$$\tau_{ij}^s = [(P - 2N)\nabla \cdot \mathbf{u}^s + Q\nabla \cdot \mathbf{u}^f] \delta_{ij} + N[u_{i,j} + u_{j,i}], \quad (2.14)$$

$$\tau_{ij}^f = [R\nabla \cdot \mathbf{u}^f + Q\nabla \cdot \mathbf{u}^s] \delta_{ij}, \quad (2.15)$$

Où $\tau_{ij}^{s,f}$ sont les contraintes exercées en un point du solide et du fluide respectivement. Dans l'expression de la contrainte du solide, le paramètre $N[u_{i,j} + u_{j,i}]$ n'intervient pas dans la suite des calculs puisqu'on ne tient compte que des ondes de compression.

2.2.3 Solutions des équations de Biot

Pour trouver les solutions des équations de Biot en régime harmonique, on reporte les expressions des déplacements (2.12) et (2.13) dans les équations (2.1) et (2.2). On a alors :

$$-\omega^2 \tilde{\rho}_{11} \bar{\Phi}^s - \omega^2 \tilde{\rho}_{12} \bar{\Phi}^f = P \nabla^2 \bar{\Phi}^s + Q \nabla^2 \bar{\Phi}^f, \quad (2.16)$$

$$-\omega^2 \tilde{\rho}_{22} \bar{\Phi}^f - \omega^2 \tilde{\rho}_{12} \bar{\Phi}^s = R \nabla^2 \bar{\Phi}^f + Q \nabla^2 \bar{\Phi}^s, \quad (2.17)$$

qui s'écrivent sous la forme matricielle :

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{11} & \tilde{\rho}_{12} \\ \tilde{\rho}_{12} & \tilde{\rho}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^s \\ \bar{\Phi}^f \end{pmatrix} = \nabla^2 \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^s \\ \bar{\Phi}^f \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Les déplacements solide et fluide sont reliés aux déplacements des ondes rapide et lente par l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}^s \\ \bar{\Phi}^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_R \\ \bar{\Phi}_L \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

où

$$\mu_i = \frac{P k_i^2 - \omega^2 \tilde{\rho}_{11}}{\omega^2 \tilde{\rho}_{12} - Q k_i^2}, \quad (2.20)$$

est le rapport des amplitudes des contributions des ondes rapide et lente au déplacement du fluide. Les colonnes de la matrice sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres k_R^2 et k_L^2 de l'équation (A.40).

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_R \\ \bar{\Phi}_L \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_R^2 & 0 \\ 0 & k_L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_R \\ \bar{\Phi}_L \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

Dans cette formulation les ondes de Biot sont découplées.

2.2.4 Expressions des nombres d'ondes et des vitesses de phase

Dans l'équation précédente, les valeurs propres k_R^2 et k_L^2 sont données par :

$$k_R^2 = \frac{\omega^2}{2(PR - Q^2)}(P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} - \sqrt{\Delta}), \quad (2.22)$$

$$k_L^2 = \frac{\omega^2}{2(PR - Q^2)}(P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} + \sqrt{\Delta}), \quad (2.23)$$

avec :

$$\Delta = (P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12})^2 - 4(PR - Q^2)(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2). \quad (2.24)$$

Les vitesses associées aux ondes rapide et lente sont alors :

$$V_R^2 = \frac{P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} + \sqrt{\Delta}}{2(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2)}, \quad (2.25)$$

$$V_L^2 = \frac{P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} - \sqrt{\Delta}}{2(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2)}. \quad (2.26)$$

2.2.5 Représentation des ondes de compression

Les deux ondes de compression aller Φ'_i et retour Φ''_i qui se propagent dans le matériau le long de l'axe (Oz) sont données par les potentiels scalaires des vitesses définies à partir de la relation (2.19) :

$$\Phi'_i(z, t) = \bar{\Phi}'_i e^{-jk_i z} e^{j\omega t}, \quad (2.27)$$

$$\Phi''_i(z, t) = \bar{\Phi}''_i e^{jk_i z} e^{j\omega t} \quad i=R,L. \quad (2.28)$$

Le potentiel total de l'onde i est :

$$\hat{\Phi}_i(z, t) = \Phi'_i(z, t) + \Phi''_i(z, t), \quad (2.29)$$

2.2.6 Expressions des vitesses de phase en fonction des potentiels

Dans le milieu poreux les vitesses particulières solide V^s et fluide V^f sont données en fonction des potentiels des ondes rapide et lente par :

$$V^s = \frac{\partial(\hat{\Phi}_R + \hat{\Phi}_L)}{\partial z}, \quad (2.30)$$

$$V^f = \frac{\partial(\mu_1 \hat{\Phi}_R + \mu_2 \hat{\Phi}_L)}{\partial z}. \quad (2.31)$$

qui peuvent s'écrire en fonction des amplitudes ($\bar{\Phi}'_i, \bar{\Phi}''_i$) :

$$V^s = [-k_1 \sin k_{1z}(\bar{\Phi}'_R + \bar{\Phi}''_R) - jk_1 \cos k_{1z}(\bar{\Phi}'_R - \bar{\Phi}''_R) - k_2 \sin k_{2z}(\bar{\Phi}'_L + \bar{\Phi}''_L) - jk_2 \cos k_{2z}(\bar{\Phi}'_L - \bar{\Phi}''_L)] e^{j\omega t}, \quad (2.32)$$

$$V^f = [-\mu_1 k_1 \sin k_{1z} (\bar{\Phi}'_R + \bar{\Phi}''_R) - j\mu_1 k_1 \cos k_{1z} (\bar{\Phi}'_R - \bar{\Phi}''_R) - \mu_2 k_2 \sin k_{2z} (\bar{\Phi}'_L + \bar{\Phi}''_L) - j\mu_2 k_2 \cos k_{2z} (\bar{\Phi}'_L - \bar{\Phi}''_L)] e^{j\omega t}. \quad (2.33)$$

Après avoir écrit les vitesses et les contraintes solide et fluide en fonction des potentiels des ondes rapide et lente, on introduit par la suite les conditions aux limites dans les cas des pores ouverts et fermés pour obtenir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion correspondant.

2.3 Défaut de surface

2.3.1 Expressions des conditions aux limites

L'onde rapide (R) et l'onde lente (L) constituent donc deux modes de propagation dans les poreux. Á une interface (discontinuité du milieu de propagation) la conservation de l'énergie et des contraintes imposent que le mode (i=R,L) génère à la réflexion où à la transmission les modes (i) et (j).

Formulation générale :

On considère une plaque poreuse saturée d'épaisseur L immergée dans un milieu fluide, Fig-2.2. On désigne par A_1 et B_1 les ondes incidente et réfléchie dans le milieu fluide, $i = 1$ et par A_2 et B_2 les ondes transmises et réfléchie dans le milieu fluide $i = 2$.

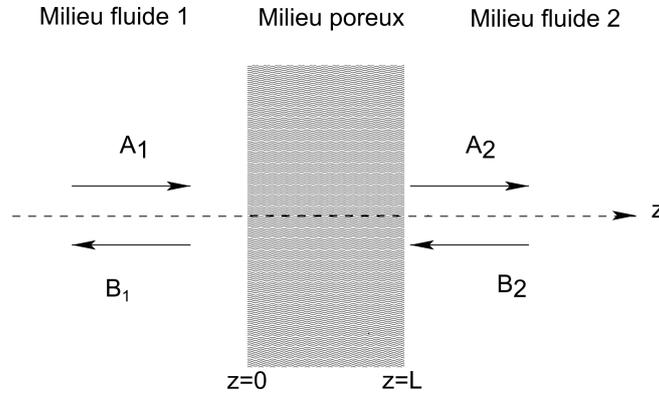


FIGURE 2.2 – Plaque poreuse immergée dans un milieu fluide : A_1 et B_1 sont les ondes incidente et réfléchie dans le milieu fluide $i = 1$. A_2 et B_2 sont les ondes transmises et réfléchie dans le milieu fluide $i = 2$.

Les potentiels des ondes dans le milieu fluide $i = 1, 2$ s'écrivent :

$$\hat{\Phi}_i^+ = A_i e^{-jk_i z} e^{j\omega t}, \quad (2.34)$$

$$\hat{\Phi}_i^- = B_i e^{jk_i z} e^{j\omega t}, \quad (2.35)$$

$$(2.36)$$

Dans le milieu fluide $i = 1$ on a l'onde incidente $\hat{\Phi}_{inc}^+$ et l'onde réfléchie $\hat{\Phi}_{ref}^-$, dans le milieu fluide $i = 2$ on a l'onde transmise $\hat{\Phi}_{tr}^+$. Les expressions de la vitesse et de la pression dans le milieu fluide (1) en $z = 0$ s'écrivent :

$$v^{(1)}(0, \omega) = -jk_1(A_1 - B_1)e^{j\omega t}, \quad (2.37)$$

$$p^{(1)}(0, \omega) = -\rho_1 j\omega(A_1 + B_1)e^{j\omega t}, \quad (2.38)$$

de même dans le milieu fluide (2) en $z = L$:

$$v^{(2)}(L, \omega) = -jk_2(A_2 - B_2)e^{j\omega t}, \quad (2.39)$$

$$p^{(2)}(L, \omega) = -\rho_2 j\omega(A_2 + B_2)e^{j\omega t}, \quad (2.40)$$

Dans la suite, on ne considère que l'onde transmise dans le milieu fluide 2 d'où $B_2 = 0$.

Cas d'un matériau à pores ouverts :

Le matériau poreux est dit à pores ouverts si les pores de ce matériau sont connectés directement aux milieux ambiants. On ne considère, dans le milieu fluide 2, que l'onde transmise, d'où $B_2 = 0$. Dans ce cas les mouvements de la phase solide et de la phase fluide sont liés par les conditions aux limites suivantes :

en $z = 0$:

$$\begin{cases} v^{(1)}(0, \omega) = \phi V^f(0, \omega) + (1 - \phi)V^s(0, \omega), \\ \tau_{zz}^s(0, \omega) = -(1 - \phi)p^{(1)}(0, \omega), \\ \tau_{zz}^f(0, \omega) = -\phi p^{(1)}(0, \omega), \end{cases} \quad (2.41)$$

où $v^{(1)}$ et $p^{(1)}$ sont la vitesse et la pression dans le fluide occupant la zone 1 ($z \leq 0$);
en $z = L$:

$$\begin{cases} v^{(2)}(L, \omega) = \phi V^f(L, \omega) + (1 - \phi)V^s(L, \omega), \\ \tau_{zz}^s(L, \omega) = -(1 - \phi)p^{(2)}(L, \omega), \\ \tau_{zz}^f(L, \omega) = -\phi p^{(2)}(L, \omega), \end{cases} \quad (2.42)$$

où $v^{(2)}$ et $p^{(2)}$ sont la vitesse et la pression dans le fluide occupant la zone 2 ($z \geq L$)

Cas d'un matériau à pores fermés :

On parle d'un matériau à pores fermés quand la porosité de sa surface est nulle ou lorsque la couche imperméable recouvrant les surfaces est souple : lorsque une onde ultrasonore arrive sur la surface de la couche imperméable, cela produit un mouvement accordé du squelette et du fluide. Les mouvements des phases solide et fluide sont alors couplés, les conditions aux limites sont :

en $z = 0$:

$$\begin{cases} \tau^s(0, \omega) + \tau^f(0, \omega) + p^{(1)}(0, \omega) = j\omega\Sigma_0 v^{(1)}(0, \omega), \\ v^{(1)}(0, \omega) = V^s(0, \omega), \\ v^{(1)}(0, \omega) = V^f(0, \omega), \end{cases} \quad (2.43)$$

en $z = L$:

$$\begin{cases} \tau^s(L, \omega) + \tau^f(L, \omega) + p^{(2)}(L, \omega) = -j\omega\Sigma_L v^{(2)}(L, \omega), \\ v^{(2)}(L, \omega) = V^s(L, \omega), \\ v^{(2)}(L, \omega) = V^f(L, \omega), \end{cases} \quad (2.44)$$

avec Σ_z la masse surfacique de la couche limite imperméable en $z = 0$ et $z = L$.

2.3.2 Matrice de diffusion

La résolution des équations conduit à la matrice de diffusion où les ondes sortantes A_2 et B_1 sont exprimées en fonction des ondes entrantes A_1 et B_2 suivante :

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Lorsque le terme $B_2 = 0$ (cas considéré dans notre étude), le coefficient de transmission est donné par A_2 et le coefficient de réflexion par B_1 . Les éléments de la matrice sont donnés en annexe (A.1- A.2).

Pour valider le modèle introduit dans ce chapitre, on compare les résultats obtenus à ceux issus du logiciel *Maine3A*.

2.3.3 Modèle *Maine3A*

Maine3A est un logiciel dédié au calcul des performances acoustiques des matériaux multicouches (absorption, transmission, indicateurs uniques en champ diffusion ...). Il utilise la méthode des matrices de transfert (2.46) et intègre la plupart des modèles standards décrivant les matériaux poroélastiques et viscoélastiques (fluide équivalent,

Biot, Limp...). Il est distribué par le Centre de Transfert des Technologies du Mans CTTM [?].

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Le modèle utilise les matrices de transfert pour décrire la propagation des ondes dans un milieu poreux.

2.4 Défaut de volume 1D

Le problème considéré est schématisé sur la figure 2.3, deux plaques poreuses d'épaisseurs L_1 et L_2 sont immergées dans un milieu fluide et séparées par une tranche de fluide d'épaisseur d .

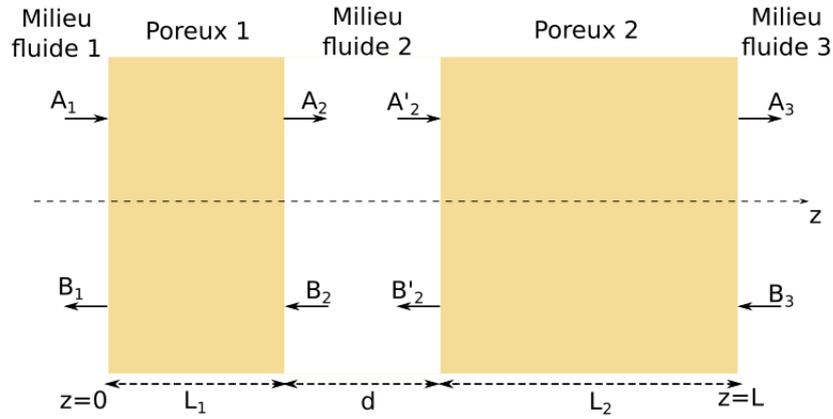


FIGURE 2.3 – Schéma d'une plaque avec un défaut de volume 1D, d désigne la taille du défaut.

Les équations de Biot et les relations de continuités en pores ouverts permettent de déterminer la matrice de diffusion pour chaque milieu poreux. Notons par A_i les ondes aller et B_i les ondes retour dans le milieu fluide i , la formulation matricielle obtenue à travers le milieu poreux 1 est :

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^I & m_{12}^I \\ m_{21}^I & m_{22}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

à travers le milieu poreux 2 :

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^{II} & m_{12}^{II} \\ m_{21}^{II} & m_{22}^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

la matrice de passage dans la tranche de fluide d'épaisseur d est donnée par :

$$\begin{pmatrix} A'_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-jk_2d} & 0 \\ 0 & e^{-jk_2d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B'_2 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

Pour obtenir la matrice de diffusion globale, on fait le produit des trois matrices de diffusion (2.47), (2.49) et (2.48) en utilisant le produit de Redheffer [72, 48], l'expression de la matrice S est alors :

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

où :

$$\begin{aligned} S_{11} &= m_{11}^{II} (1 - m_{12}^I e^{-jk_2d} m_{21}^{II})^{-1} m_{11}^I e^{-jk_2d} \\ S_{12} &= m_{12}^{II} + m_{11}^{II} m_{12}^I e^{-jk_2d} (1 - m_{12}^I e^{-jk_2d} m_{21}^{II})^{-1} m_{22}^{II} \\ S_{21} &= m_{21}^I + m_{22}^I e^{-jk_2d} m_{21}^{II} (1 - m_{12}^I e^{-jk_2d} m_{21}^{II})^{-1} m_{11}^I e^{-jk_2d} \\ S_{22} &= m_{22}^I e^{-jk_2d} (1 - m_{12}^I e^{-jk_2d} m_{21}^{II})^{-1} m_{22}^{II} \end{aligned}$$

Lorsque $A_1 = 1$ et $B_3 = 0$ les coefficients de transmission et de réflexion de l'ensemble sont respectivement $T = S_{11}$ et $R = S_{21}$.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a modélisé, dans un premier temps, l'os (trabéculaire et cortical) par une plaque de céramique poreuse de structure similaire et dont les pores situés aux les surfaces sont ouverts ou fermés. La théorie de Biot permet une meilleure description des interactions structure/fluide dans un milieu poreux saturé pour une raison majeure : l'existence de deux ondes longitudinales découplées dans le poreux en incidence normale. Les déplacements de ces deux ondes de compressions ($\bar{\Phi}^s$, $\bar{\Phi}^f$) ont été exprimés en fonction des ondes rapide et lente ($\bar{\Phi}^R$, $\bar{\Phi}^L$) prédites par la théorie de Biot, cela a permis de découpler les ondes se propageant dans le matériau poreux et étudier leurs déplacements. Dans un second temps, on a modélisé un défaut de volume plan par une tranche de fluide entre deux plaques poreuses identiques dont les surfaces sont maintenues ouvertes (fissure présente dans l'os trabéculaire). On a utilisé les matrices de diffusion pour écrire les coefficients de transmission et de réflexion issus de chaque milieu et ceux issus du système total (poreux-fluide-poreux).

Le chapitre suivant présentera une étude numérique et une validation expérimentale du modèle proposé

Chapitre 3

Étude numérique et validation expérimentale

Ce chapitre présente une étude numérique de la théorie de Biot et une validation expérimentale des résultats des simulations numériques.

La première partie de ce chapitre a pour objectif d'étudier numériquement les coefficients de transmission et de réflexion et les champs des potentiels des ondes rapide et lente, tenant compte des conditions d'interface. Cela permet de conclure sur la présence ou non de l'onde lente dans le milieu poreux à pores ouverts et à pores fermés. La deuxième partie traite le cas d'un défaut de volume 1D et présente une étude numérique de l'influence de la position et de la taille du défaut sur les coefficients de transmission et de réflexion.

Les résultats des simulations numériques seront validés par des mesures expérimentales.

3.1 Étude numérique de défauts de surface

3.1.1 Résultats des simulations numériques

Pour cette étude on utilise des plaques poreuses de silice QF-20 (produites par Filtros®, Ferro Corporation) saturées d'eau. Le tableau (5.1) présente les paramètres nécessaires à la modélisation pour le solide et le fluide saturant [4] :

Afin de comparer les deux modèles, on se met dans des situations différentes en variant l'épaisseur de la plaque poreuse et pour différentes fréquences et on compare les coefficients de réflexion et de transmission en pores ouverts et pores fermés. Les résultats du modèle *Maine3A* sont représentés par des ronds (o) sur les figures (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7) et ceux de notre modèle sont représentés par un trait continu.

| paramètres | notations | valeurs |
|--|--------------------------------------|----------------------------|
| module de compressibilité du solide | $k_s(\text{Pa})$ | $36.6 \cdot 10^9$ |
| coefficient de cisaillement du solide | $N(\text{Pa})$ | $(7.63 + 0.1i) \cdot 10^9$ |
| module de compressibilité du squelette | $k_b(\text{Pa})$ | $(9.47 + 0.3i) \cdot 10^9$ |
| masse volumique du solide | $\rho_s(\text{kgm}^{-3})$ | 2760 |
| porosité * | ϕ | 0.595 |
| tortuosité | τ_∞ | 1.844 |
| perméabilité | $K(\text{m}^2)$ | $1.68 \cdot 10^{-11}$ |
| rayon des pores | $a(\text{m})$ | $3.26 \cdot 10^{-5}$ |
| module de compressibilité de l'eau * | $k_f(\text{Pa})$ | $2.22 \cdot 10^9$ |
| masse volumique de l'eau | $\rho_f(\text{kgm}^{-3})$ | 1000 |
| vitesse acoustique | $c_0(\text{ms}^{-1})$ | 1450 |
| viscosité de l'eau | $\eta(\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1})$ | $1.14 \cdot 10^{-3}$ |

TABLE 3.1 – Valeurs des paramètres physiques du poreux utilisées pour la modélisation. Les valeurs des paramètres signalés par (*) ont été ajustées afin de faire coïncider les résultats numériques et expérimentaux.

Coefficients de réflexion et de transmission en fonction de l'épaisseur de la plaque poreuse en pores fermés

Discussion des conditions aux limites On présente ici les coefficients de transmission et de réflexion obtenus par les deux modèles en pores fermés et pores fermés pour différentes épaisseurs. Le cas des pores fermés représente l'os sain (os trabéculaire recouvert de l'os cortical), sa comparaison avec le cas des pores ouverts permet de voir l'influence de l'apparition des défauts à l'interface du tissu osseux.

Conformément aux conditions aux limites (2.43) et (2.44) un paramètre faisant intervenir des couches imperméables doit être considéré. Dans le cas du logiciel Maine3A, la plaque poreuse est recouverte par deux plaques imperméables ayant une raideur de flexion $D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$. Dans notre modèle, la plaque poreuse est recouverte par des couches imperméables caractérisées seulement par leurs masses surfaciques Σ_i (fig.3.1). Pour se mettre dans les mêmes conditions que Maine 3A on fixe l'épaisseur de la plaque poreuse et on change l'épaisseur d de ces couches limites imperméables dans le modèle de Maine3A, ce qui revient à négliger l'effet de la raideur D et à changer les masses surfaciques Σ_0 et Σ_l de ces couches. Les résultats sont présentés pour deux épaisseurs de couche sur les figures 3.2 et 3.3 :

La figure 3.2 montre un décalage entre les courbes de notre modèle et du calcul de Maine 3A pour les coefficients de transmission et de réflexion dû à la raideur qui génère un phénomène d'oscillations visible. Par contre, pour une couche imperméable suffisamment fine ($d = 5 \cdot 10^{-6} \text{m}$) les résultats des deux modèles présentés sur la figure 3.3 sont en accord.

C'est pour cette raison que pour une épaisseur suffisamment fine, l'effet de la raideur

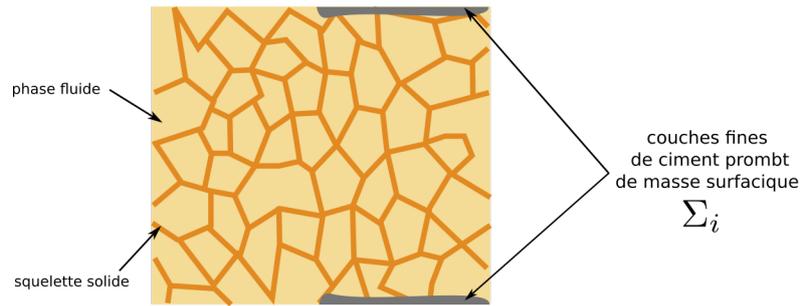


FIGURE 3.1 – plaque poreuse avec pores ouverts et fermés.

disparaît dans la bande de fréquence considérée. Dans la suite, les simulations seront réalisées pour une couche imperméable $d = 5.10^{-6}m$.

Coefficients de réflexion et de transmission Tenant compte des résultats vérifiés pour les conditions limites, on fixe les deux modèles à $d = 5.10^{-6}m$ et on fait varier l'épaisseur de la plaque poreuse, les résultats sont donnés sur les figures (3.4) et (3.5) :

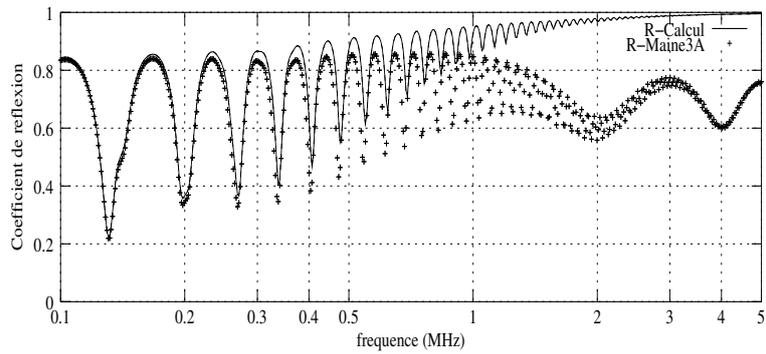
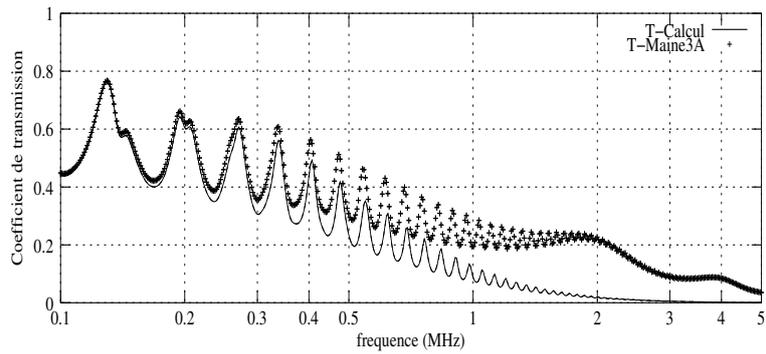


FIGURE 3.2 – Coefficients de transmission et de réflexion pour une plaque à pores fermés d'épaisseur $e = 38mm$ et d'épaisseur de couche imperméable $d = 5.10^{-4}m$.

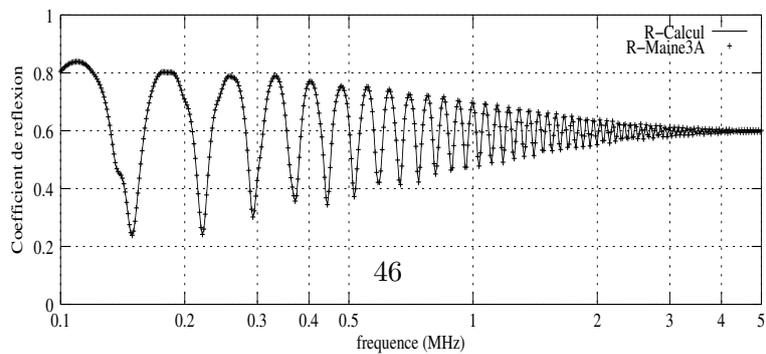
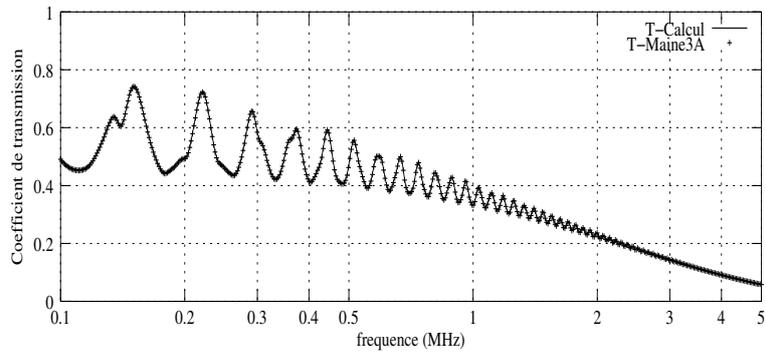


FIGURE 3.3 – Coefficients de transmission et de réflexion pour une plaque à pores fermés d'épaisseur $e = 38mm$ et d'épaisseur de couche imperméable $d = 5.10^{-6}m$.

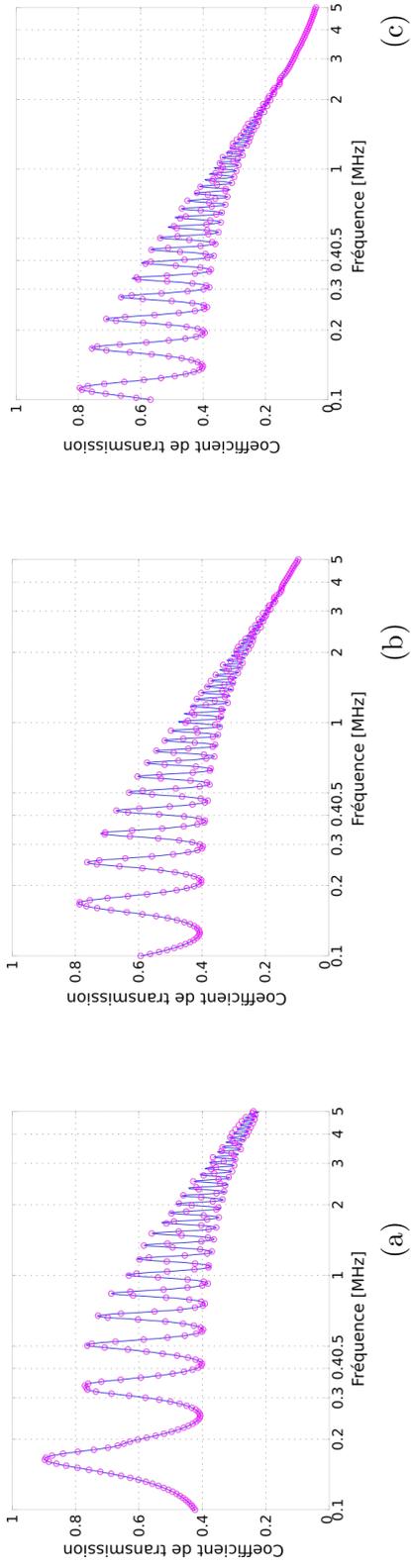


FIGURE 3.4 – Coefficients de transmission en pores fermés : (d) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (e) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (f) plaque d'épaisseur $e = 30mm$.

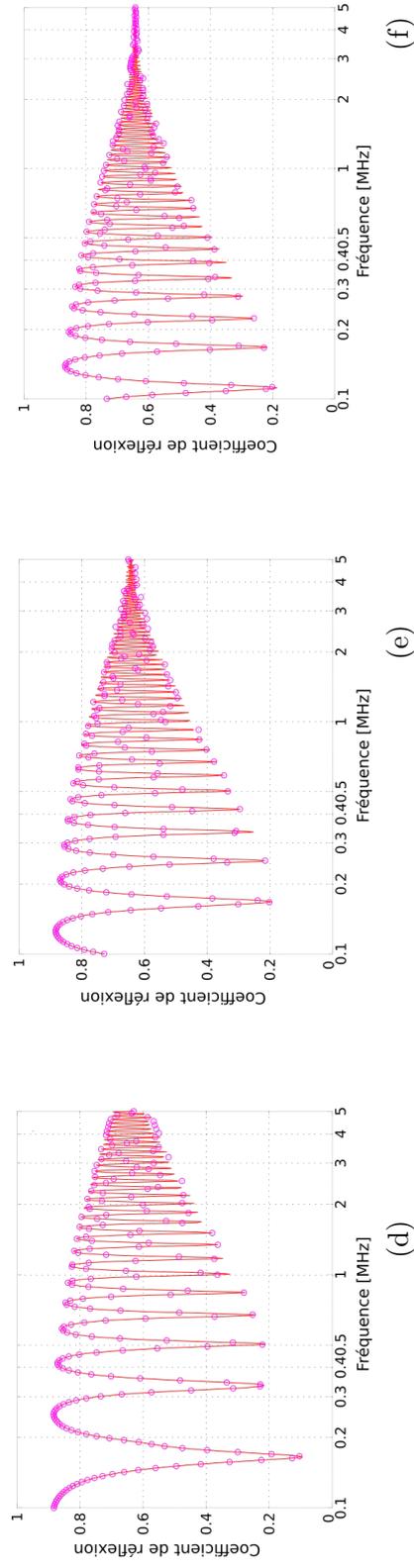


FIGURE 3.5 – Coefficient de réflexion en pores fermés : (d) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (e) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (f) plaque d'épaisseur $e = 30mm$.

Les figures 3.4 et 3.5 présentent les coefficients de transmission et de réflexion en fonction de la fréquence (en échelle semi logarithmique) et pour différentes épaisseurs de la plaque poreuse. Les résultats issus du modèle Maine3A sont représentés en rond (\circ) et ceux issus de notre modèle sont représentés en trait continu (-). Comme le montre les figures, les deux modèles sont en accord validant ainsi notre modèle en pores fermés.

Les figures représentant le coefficient de transmission à différentes épaisseurs montrent que celui-ci décroît avec la fréquence et tend vers zéro à haute fréquence. Les oscillations sont périodiques pour les trois épaisseurs, cette périodicité provient de la taille finie du matériau. Cependant, la période diminue lorsque l'épaisseur augmente.

En comparaison, le coefficient de réflexion décroît moins vite et tend vers une valeur constante notamment pour l'épaisseur $30mm$. On note la présence de la périodicité et la diminution de la période avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque poreuse. Les amplitudes des deux coefficients sont importantes, ce qui est attendu dans le cas des pores fermés.

Coefficients de réflexion et de transmission en fonction de l'épaisseur de la plaque poreuse en pores ouverts

Pour valider nos résultats dans le cas des pores ouverts, on fait aussi la comparaison avec les résultats issus du modèle Maine3A. Les résultats sont données sur les figures 3.6 et 3.7 :

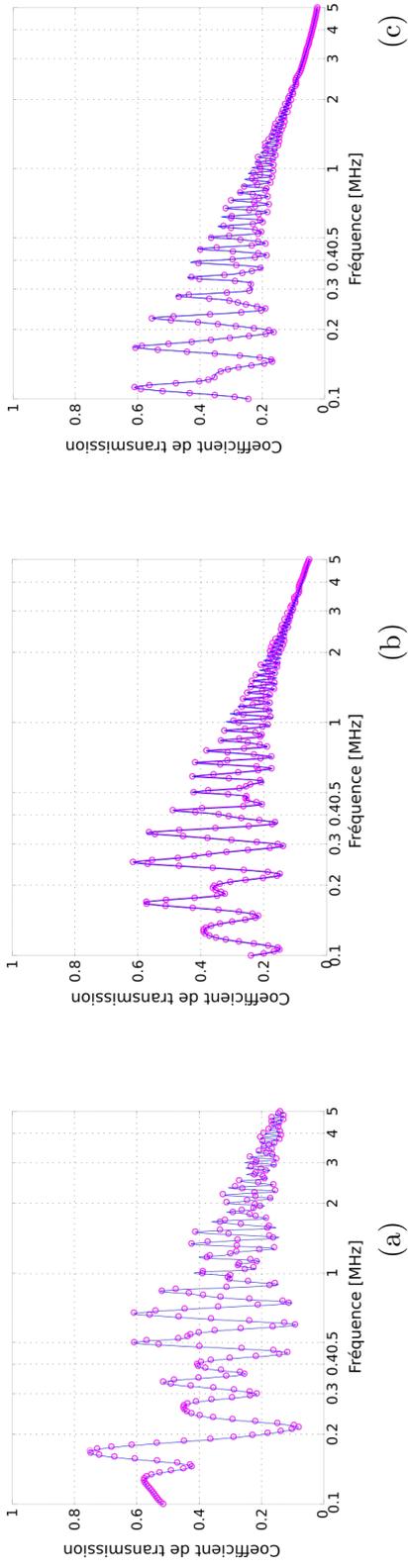


FIGURE 3.6 – Coefficient de transmission en pores ouverts : (a) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (b) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (c) plaque d'épaisseur $e = 30mm$

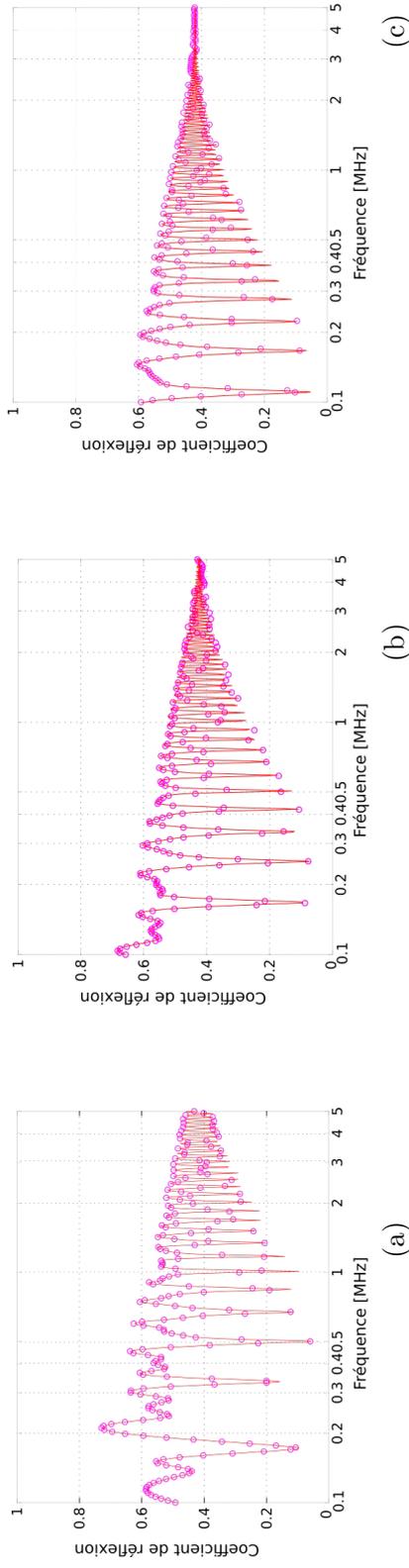


FIGURE 3.7 – Coefficient de réflexion en pores ouverts : (d) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (e) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (f) plaque d'épaisseur $e = 30mm$

Ces figures montrent que les résultats sont en accord pour les coefficients de transmission et de réflexion ce qui valide notre modèle en pores ouverts. Les mêmes tendances qu'en pores fermés sont observées concernant les variations des coefficients de transmission et de réflexion en fonction de la fréquence. Cependant dans ce cas les amplitudes des coefficients de transmission et de réflexion sont moins élevées. On constate l'apparition des fluctuations sur les coefficients. Cela est dû au fait que les déplacements solide et fluide ne sont plus accordés, contrairement au cas des pores fermés où le mouvement de la phase fluide est imposé par celui de la phase solide. Ces fluctuations sont dues à la présence de l'onde lente qui est absente dans le cas des pores fermés.

La présentation des coefficients de transmission et de réflexion permet d'étudier leur influence par les conditions aux limites imposées et valider notre modèle. Mais n'est pas suffisant pour conclure sur la présence ou non de l'onde lente dans le matériau à pores ouverts ou fermés. Pour cela une étude de la forme des champs des ondes rapide et lente à l'intérieur de la plaque poreuse dans le cas des pores ouverts et fermés est proposée dans la section suivante.

3.1.2 Étude de la forme des champs à l'intérieur de la plaque poreuse

Le formalisme développé précédemment permet d'obtenir les potentiels des vitesses lente et rapide en tout point à l'intérieur de la plaque poreuse. L'objet de ce paragraphe est d'étudier la forme de ces potentiels pour différentes fréquences dans le cas des pores ouverts et fermés. Ainsi on met en évidence l'influence des conditions aux limites sur la propagation des ondes lentes et rapide dans le poreux.

On simule la propagation des ondes rapide et lente à partir des relations de (2.32) à (2.40) en utilisant les expressions des conditions aux limites correspondante (2.41) et (2.42) pour le cas des pores ouverts et (2.43) et (2.44) pour le cas des pores fermés. On représente sur les figures (3.8), (3.9), (3.10) et (3.11), les amplitudes de ces ondes pour différentes épaisseurs de la plaque poreuse et pour différentes fréquences.

Pores fermés

Ondes rapides

La figure (3.8) représente les potentiels des ondes rapides obtenus dans le cas de pores fermés pour trois épaisseurs, ($10mm$, $20mm$ et $30mm$) et pour deux fréquences ($0.3MHz$ et $1MHz$). Comme attendu, on voit que l'atténuation de cette onde augmente avec la fréquence mais que son amplitude reste notable.

Ondes lentes

La figure (3.9) représente les potentiels des ondes lentes obtenus dans le cas de pores fermés pour des épaisseurs de plaques et des fréquences identiques au cas précédent. On note que les amplitudes de l'onde lente sont 6 fois plus faibles. Pour les épaisseurs $e = 20 mm$ et $e = 30 mm$, à basses fréquences, les amplitudes au voisinage des deux interfaces sont du même ordre. En effet lorsqu'une onde se propage en incidence normale et arrive à une interface elle génère deux ondes longitudinales rapide et lente dont les directions de propagation sont elles-mêmes normales à l'interface : on parle de la conver-

sion de mode. De ce fait l'amplitude de l'onde lente générée s'ajoute à celle existant dans le poreux. Cette augmentation est d'autant plus importante que l'amplitude de l'onde rapide est grande (0.3 et 1 MHz). Ainsi, dans un poreux limité par deux interfaces, Le phénomène de conversion de modes est plus important dans le cas des pores fermés que dans le cas des pores ouverts. Ainsi, dans le cas des pores fermés, le minimum d'amplitude de l'onde lente est situé environ au centre de la plaque ($e/2$).

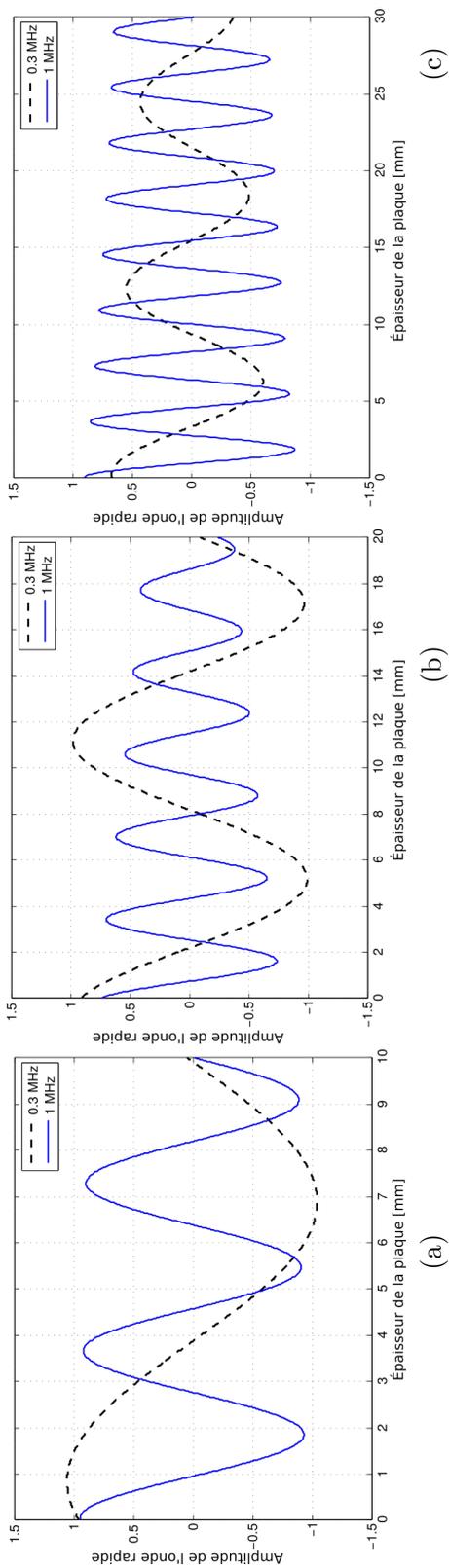


FIGURE 3.8 – Potentiel de l'onde rapide en pores fermés (a) plaque d'épaisseur $e = 10\text{ mm}$, (b) plaque d'épaisseur $e = 10\text{ mm}$, (c) plaque d'épaisseur $e = 10\text{ mm}$ pour les fréquences $f = 0.3\text{ MHz}$ (---) et $f = 1\text{ MHz}$ (—)

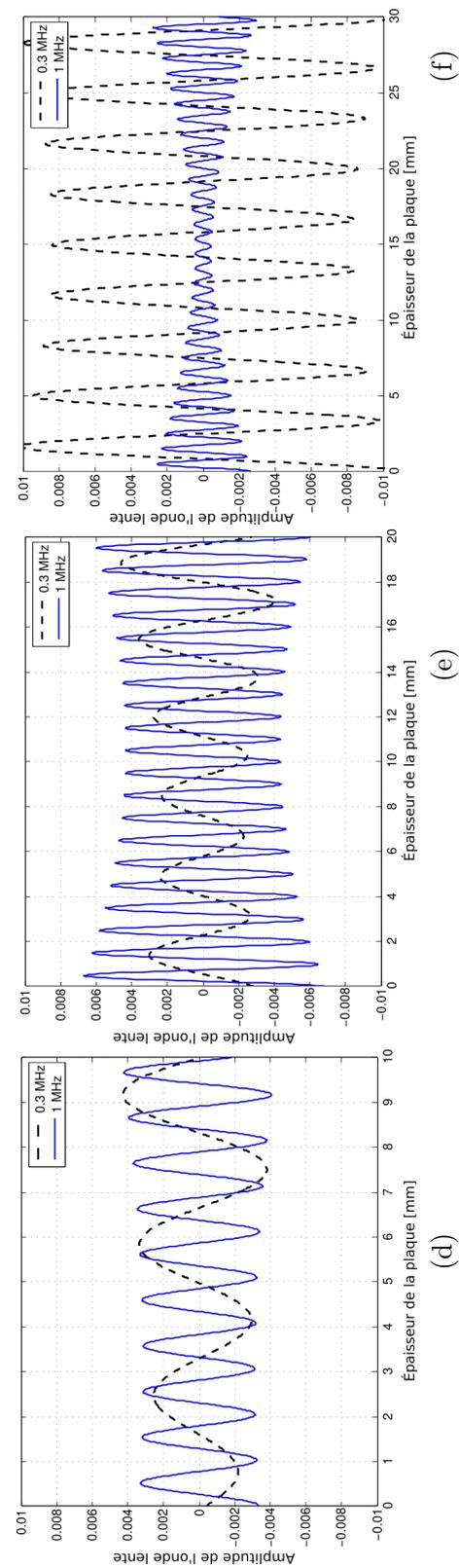


FIGURE 3.9 – Potentiel de l'onde lente en pores fermés (d) plaque d'épaisseur $e = 10\text{ mm}$, (e) plaque d'épaisseur $e = 20\text{ mm}$ et (f) plaque d'épaisseur $e = 30\text{ mm}$ pour les fréquences $f = 0.3\text{ MHz}$ (---) et $f = 1\text{ MHz}$ (—)

Pores ouverts

Ondes rapides

La figure (3.10) montre les potentiels des vitesses de l'onde rapide pour des épaisseurs de plaques et des fréquences identiques au cas précédent. Le comportement est globalement le même que celui observé pour le cas des pores fermés. Cependant on observe que l'amplitude est légèrement inférieure. Cela est dû à l'absence des couches imperméables présentes dans le cas des pores fermés.

Ondes lentes

Sur la figure (3.11), on montre les résultats obtenus avec les conditions identiques (épaisseur et fréquence) pour l'onde lente. Globalement on remarque que l'amplitude de l'onde lente est 26 fois plus faible que celle de l'onde rapide. On voit aussi que l'onde lente est beaucoup plus atténuée que l'onde rapide le long de son parcours dans la plaque. À proximité de la deuxième interface, l'amplitude de cette onde augmente du fait de la conversion de modes. L'atténuation des ondes est modifiée par rapport à celle qu'on mesure en milieu infini. La variation de l'énergie est due à deux processus différents :

1. : l'atténuation dynamique qu'on observe en milieu infini
2. : La variation de l'énergie résultant des conversions de modes aux interfaces.

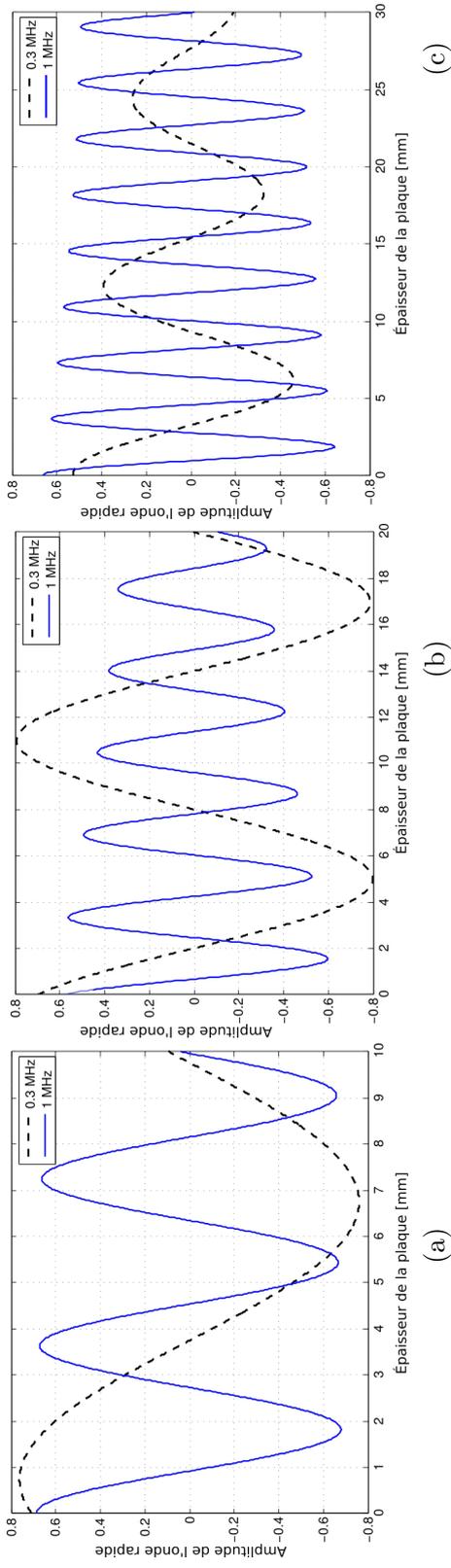


FIGURE 3.10 – Potentiel de l'onde rapide en pores ouverts : (a) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (b) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (c) plaque d'épaisseur $e = 30mm$ pour les fréquences $f = 0.3MHz$ (---) et $f = 1 MHz$ (-)

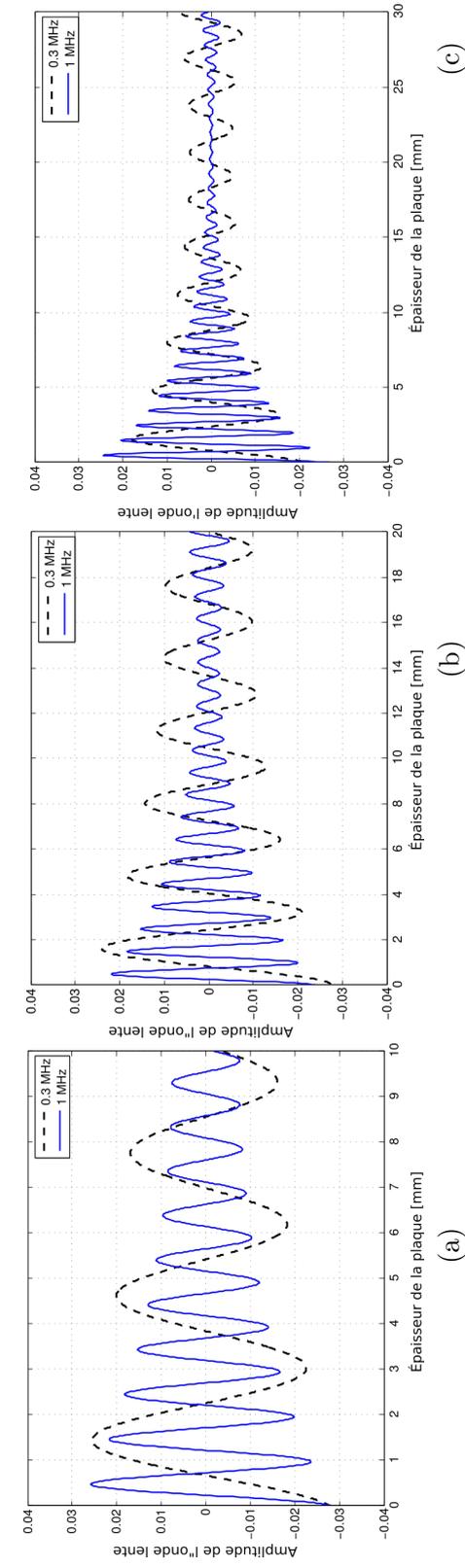


FIGURE 3.11 – Potentiel de l'onde lente en pores ouverts (a) plaque d'épaisseur $e = 10mm$, (b) plaque d'épaisseur $e = 20mm$ et (c) plaque d'épaisseur $e = 30mm$ pour les fréquences $f = 0.3 MHz$ (---) et $f = 1 MHz$ (-)

La représentation des champs de potentiels des ondes rapide et lente en pores ouverts et fermés montre que l'onde lente à l'intérieur du matériau existe mais qu'elle est très faible. Ces représentations nous permettent aussi de mettre en évidence les mécanismes de conversion de modes entre l'onde rapide et l'onde lente. On peut prédire que l'onde lente existe dans tous les cas mais que du fait de sa faible amplitude tout se passe comme si seule l'onde rapide se propageait. Par contre, il est essentiel de prendre en compte l'onde lente lorsqu'on calcule l'atténuation de l'onde rapide à cause des conversion des modes.

3.1.3 Représentation temporelle

Dans ce qui précède on a représenté les coefficients de réflexion et de transmission et la forme des champs de potentiels des ondes rapide et lente dans le domaine fréquentiel. Expérimentalement on a accès aux données temporelles issues des transducteurs. Il est donc essentiel de comparer les signaux temporels calculés à partir de notre modèle dans les deux cas (pores fermés et pores ouverts) aux signaux expérimentaux. Dans ce paragraphe on trace les signaux temporels en utilisant les transformées de Fourier inverse des résultats fréquentiels précédents. On se place dans le domaine des basses fréquences $[200kHz - 430kHz]$, ce choix est dû au fait que les capteurs utilisés pour les mesures sont centrés à $330kHz$, la bande passante est alors $[200kHz - 430kHz]$.

Pores fermés

La reconstruction des signaux temporels transmis et réfléchi à partir de leurs spectres fréquentiels est représentée sur les figures (3.12) :

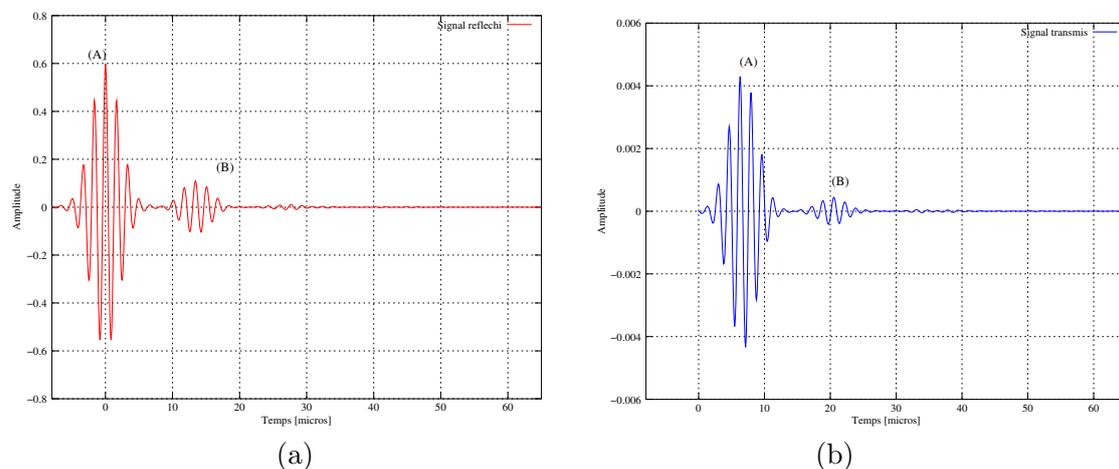


FIGURE 3.12 – Signal temporel réfléchi (a) et transmis (b) en pores fermés.

Pour le signal réfléchi, l'origine de l'axe temporel est prise à l'instant d'arrivée du maximal de la première onde réfléchie. Connaissant les vitesses des ondes rapide et lente (2.25) et (2.26) on peut identifier les échos contenus dans les signaux. Les temps d'arrivée des ondes sont reportés dans les deux tableaux suivants :

| onde n | signal réfléchi(μs) | type d'onde |
|----------|----------------------------|---------------------------|
| A | $t_0 = 0$ | onde réfléchie en $z = 0$ |
| B | $t_1 = 13.48$ | onde rapide |

| onde n | signal transmis (μs) | type d'onde |
|----------|-----------------------------|---------------------|
| A | $t_3 = 6.24$ | onde rapide directe |
| B | $t_4 = 20.55$ | écho d'onde rapide |

Le signal réfléchi contient l'onde réfléchie à l'interface (A) suivie d'un écho d'onde rapide (B). Pour le signal transmis, on observe l'onde rapide directe (A) et son écho (B). La présence d'un seul type d'onde (onde rapide) est en accord avec ce que l'on a trouvé dans la représentation des champs de potentiel de vitesses. L'amplitude du champ de potentiel de l'onde lente étant très faible l'onde lente n'apparaît pas sur les signaux réfléchi et transmis.

Pores ouverts

Les signaux temporels transmis et réfléchi dans le cas des pores ouverts sont représentés sur la figure (3.13).

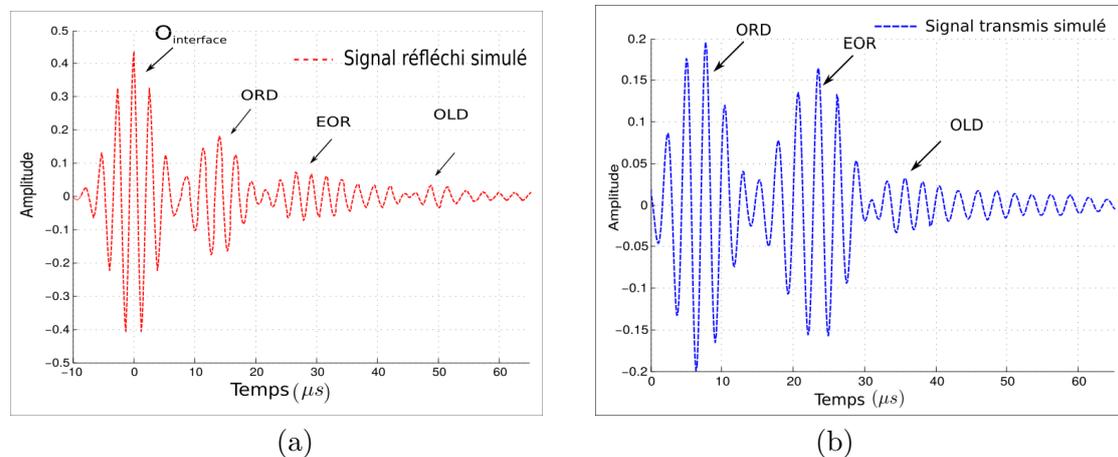


FIGURE 3.13 – Signal temporel réfléchi (a) et transmis (b) en pores ouverts.

| onde n | signal réfléchi(μs) | type d'onde |
|-----------------|----------------------------|--------------------------------------|
| $O_{interface}$ | $t_0 = 0$ | onde réfléchie à l'interface $z = 0$ |
| ORD | $t_1 = 14.07$ | onde rapide directe |
| EOR | $t_2 = 29.17$ | écho de l'onde rapide |
| OLD | $t_3 = 48.86$ | onde lente directe |

| onde n | signal transmis (μs) | type d'onde |
|----------|-----------------------------|----------------------------|
| ORD | $t_4 = 7.7$ | onde rapide directe |
| EOR | $t_5 = 23.54$ | premier écho d'onde rapide |
| OLD | $t_6 = 38.05$ | onde lente directe |

Pour le signal réfléchi, on ne voit que des ondes rapides. La première onde $O_{interface}$ possédant l'amplitude la plus élevée correspond à l'onde réfléchie à l'interface $z = 0$ suivie d'une onde rapide (ORD) d'amplitude moins importante et qui a parcouru deux fois l'épaisseur de la plaque et arrive à $t_1 = 14.07\mu s$, un deuxième écho de l'onde rapide EOR arrive à $t_2 = 29.17$ suivi de l'onde lente à $t_3 = 48.86$.

Pour le signal transmis, on voit une onde rapide directe ORD , puis son premier écho EOR qui a parcouru trois fois l'épaisseur de la plaque arrivant à $t_5 \simeq 3t_4 = 23.54 \mu s$, ensuite une onde lente directe OLD arrivant à $t_6 = 25.26 \mu s$ qui n'apparaît pas dans le cas des pores fermés. Malgré que l'amplitude du potentiel de l'onde lente est très faible à l'intérieur du matériau poreux à pores ouverts, elle apparaît sur les signaux transmis et réfléchi à faible amplitude également. Dans le chapitre suivant, ces résultats seront comparés aux résultats expérimentaux.

3.2 Validation expérimentale

3.2.1 Protocole et dispositif expérimental

Les mesures acoustiques sont réalisées en incidence normale en transmission avec une plaque poreuse placée entre deux transducteurs, et en réflexion où la plaque poreuse est placée en face du transducteur émetteur/récepteur. Lors de ces deux mesures la distance entre la plaque et l'émetteur est $d_{(plaque/emetteur)}$. Tout d'abord on fait des mesures de références, on enregistre le signal transmis dans l'eau et celui réfléchi à l'interface eau/air. Ensuite, on réalise les mesures à pores ouverts et à pores fermés.

Les expériences ont été réalisées dans le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM). Le dispositif expérimental, schématisé sur la figure 3.14, comporte : une grande cuve d'eau, un générateur d'impulsion branché au transducteur émetteur et un oscilloscope branché au transducteur récepteur pour visualiser le signal reçu. Les deux capteurs sont identiques, ils sont fabriqués par PANAMETRICS de référence (V392-10/15-120MM PTF-300152) et de fréquence centrale $330kHz$. Les transducteurs sont reliés à un système de translation et rotation automatique. La plaque utilisée est une céramique poreuse commercialisée sous le nom de QF-20.

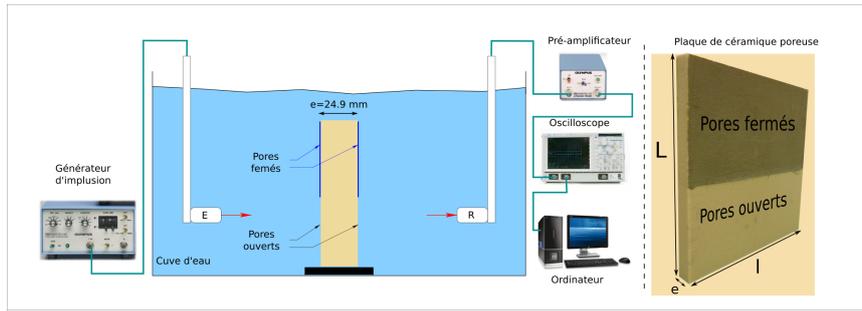


FIGURE 3.14 – Schéma du protocole expérimental et la plaque poreuse QF-20

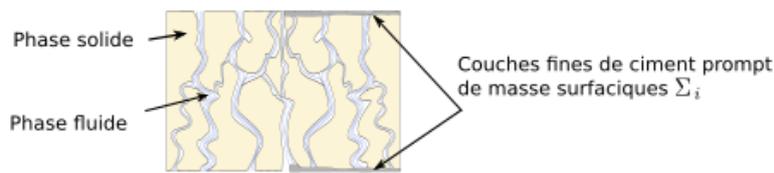


FIGURE 3.15 – Schéma de la plaque poreuse avec interface ouverte et fermée

Description de la plaque poreuse La plaque est une céramique poreuse QF-20 dont les paramètres sont donnés par le fabricant (tableau.5.1), et ont été vérifiés et ajustés expérimentalement par la méthode inverse [50]. La plaque mesure $l = 29.5 \text{ cm}$ de largeur, $L = 29.5 \text{ cm}$ de hauteur et 24.9 mm d'épaisseur. On utilise la même plaque pour les expériences en pores ouverts et en pores fermés. Pour cette dernière on applique une couche de ciment sur la moitié des deux interfaces et on l'étale de manière à ce que la couche soit très fine et ne rajoute pas d'épaisseur (3.15).

3.2.2 Mesures de références (étalonnage)

Dans un premier temps on effectue des mesures de référence sans plaque poreuse en transmission et en réflexion. En transmission, les transducteurs sont distants de 312 mm . On obtient le signal représenté sur la figure (3.16). En réflexion, on place une plaque réfléchissante (réflecteur parfait) à une distance égale à 106.5 mm et on enregistre le signal réfléchi donné sur la figure (3.17) :

Le signal incident transmis arrive à $t_{0_{tr}} = 215.4 \mu\text{s}$. Le signal incident réfléchi arrive à $t_{0_{ref}} = 213.9 \mu\text{s}$. Cette mesure permet de calculer les vitesses des ondes transmises se propageant dans la plaque à partir de la relation suivante :

$$v = \frac{ne}{t_1 - t_{0_{tr}} + \frac{e}{c_0}},$$

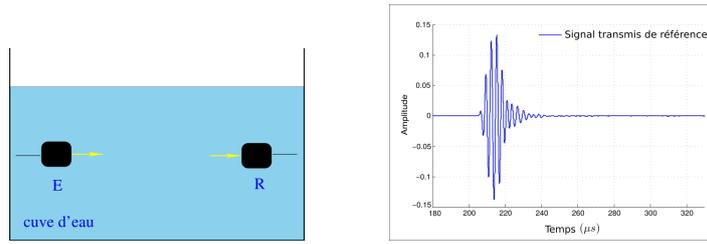


FIGURE 3.16 – Schéma de la mesure de référence en transmission et le signal enregistré

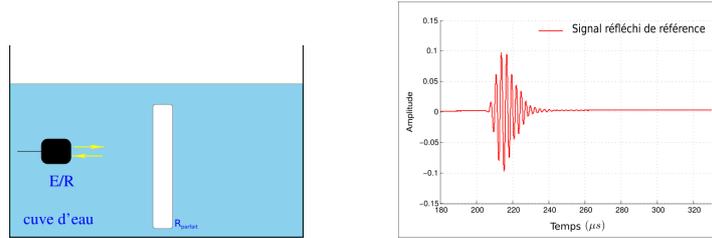


FIGURE 3.17 – Schéma de la mesure de référence en réflexion et le signal enregistré

et les ondes réfléchies à partir de la relation :

$$v = \frac{ne}{t_1 - t_{0_{ref}}},$$

avec t_1 le temps d'arrivée de l'onde transmise ou réfléchie à travers la plaque et n est le nombre de fois que l'onde a parcouru l'épaisseur de la plaque. Connaissant les valeurs des vitesses on peut déduire la nature de l'onde.

3.2.3 Mesures en pores ouverts

Mesures en transmission

On place la plaque poreuse à pores ouverts dans la cuve à eau entre les deux transducteurs. On obtient le signal donné par la figure (3.18.a).

Les ondes qui apparaissent sur le signal, sont identifiées comme suit :

L'onde rapide directe ORD arrivée à $t = 205.1\mu s$. L'écho d'onde rapide EOR arrivée avec un décalage égal à $t = 21.1\mu s$, cet écart est comparable avec celui trouvé entre les ondes ORD et son premier écho EOR (3.18.b) de la simulation numérique $15.8\mu s$. L'onde lente directe OLD arrivée avec le décalage $15.3\mu s$ après la première onde rapide ce qui est proche de l'écart trouvé entre les ondes EOR et OLD dans la simulation numérique qui est égale à $12.14\mu s$. Ce résultat expérimental confirme la validité de notre modèle.

A partir du signal expérimental on retrouve le coefficient de transmission dans le domaine fréquentiel. Sur la figure (3.19) on représente le coefficient de transmission théorique (---) et expérimental (—) en fonction de la fréquence :

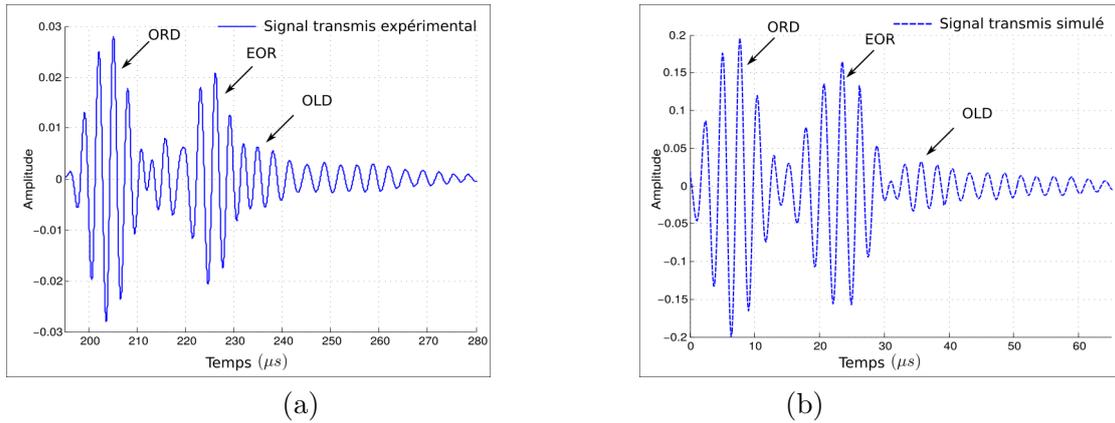


FIGURE 3.18 – Comparaison entre signal transmis expérimental (a) et théorique (b) en pores ouverts.

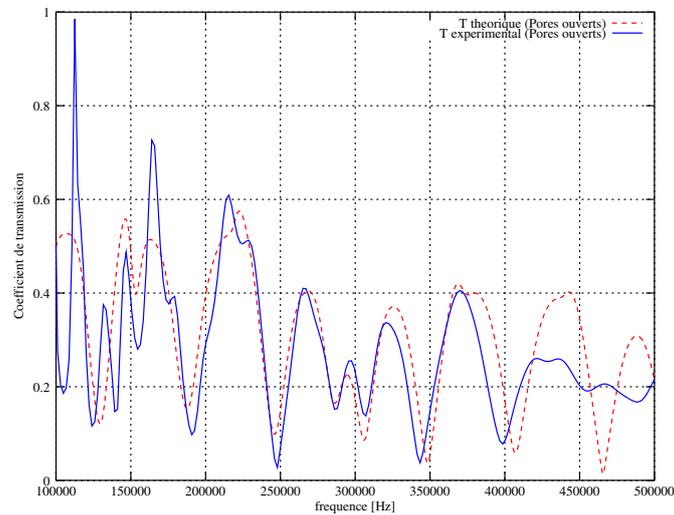


FIGURE 3.19 – Comparaison coefficient de transmission théorique (---) et expérimental (-).

On remarque que le coefficient de transmission retrouvé d'après le signal temporel expérimental et celui calculé d'après le modèle sont cohérents.

Mesures en réflexion

On place la plaque poreuse à pores ouverts à la même position que celle du réflecteur parfait. On obtient le signal donné par la figure (3.20-a). On identifie l'onde réfléchie à l'interface arrivée à $t = 215.4 \mu s$, l'onde rapide directe ORD arrive à $t = 230.5 \mu s$ avec une vitesse $v = 3311 m s^{-1}$, suivie du premier écho de l'onde rapide avec un décalage de $10.7 \mu s$, L'onde lente directe arrive à $t = 264 \mu s$ à la vitesse $v = 1028 m s^{-1}$. Ces ondes

sont identifiées sur le signal transmis simulé.

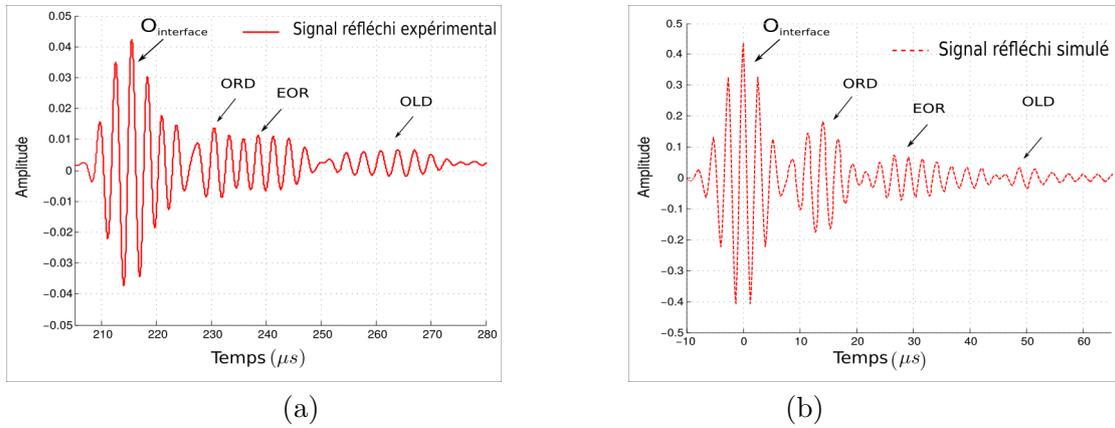


FIGURE 3.20 – Comparaison entre signal réfléchi expérimental (a) et théorique (b) en pores ouverts.

3.2.4 Mesures en pores fermés

On recouvre les surfaces de la plaque poreuse par une fine couche de ciment prompt et on la place dans la cuve. Le signal récupéré est présenté sur la figure (3.21.a) :

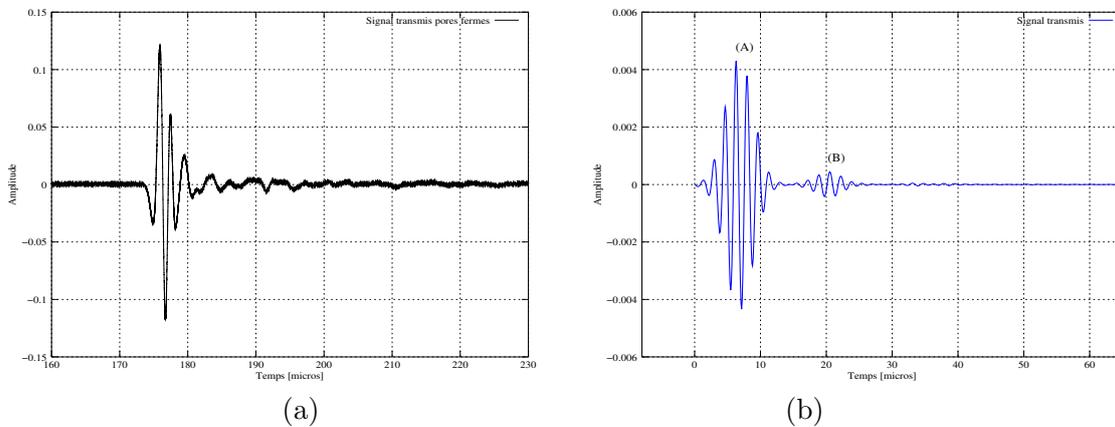


FIGURE 3.21 – Comparaison entre signal transmis expérimental (a) et théorique (b) en pores fermés.

Sur le signal expérimental, on voit une onde rapide directe arrivant à $t = 175.928\mu s$ et son écho d'amplitude très faible arrivant à $t = 191.569\mu s$; l'écart entre ces deux ondes est

proche de celui trouvé entre les deux ondes correspondantes (A) et (B) de la simulation numérique. Comme on l'a fait en pores ouverts, on retrouve le coefficient de transmission dans le domaine fréquentiel, à partir du signal temporel.

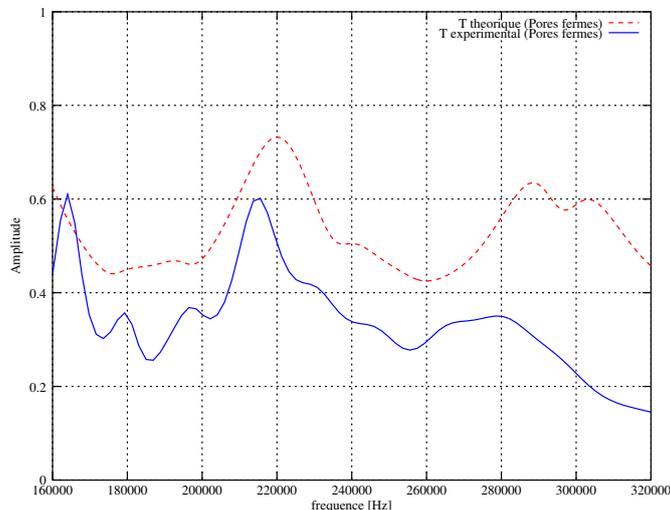


FIGURE 3.22 – Comparaison entre coefficient de transmission expérimental et théorique en pores fermés.

La figure (3.22) représente les coefficients de transmission théorique (---) et expérimental (—) ; on constate que les deux courbes ont la même allure. Le décalage entre elles semble provenir entre autre de la valeur de k_b utilisée dans les simulations numériques.

Conclusion Dans cette partie expérimentale on a confirmé les résultats des simulations numériques du chapitre précédents. Pour une plaque à pores fermés, l'onde lente disparaît.

3.3 Étude numérique d'un défaut de volume 1D

3.3.1 Description de la problématique

Les inhomogénéités localisées présentes à l'intérieur d'une plaque poreuse sont considérées ici comme des défauts de volume à une dimension. En première approximation, de tels défauts sont modélisés par une tranche de fluide limitée par deux plaques poreuses identiques. Les interfaces des plaques sont maintenues ouvertes (i.e. connectées au fluide ambiant) et obéissent aux conditions aux limites (Eq.2.41) et (Eq.2.42). La modélisation du comportement acoustique d'un matériau présentant un défaut est réalisée en résolvant les équations du mouvement tout en tenant compte des différentes interfaces présentes. L'étude est réalisée dans le cas d'une incidence normale où seules les ondes de compression entrent en jeu.

Les expériences sont réalisées en suivant le même protocole de mesure décrit dans la section précédente. On dispose de deux échantillons de plaques ayant la même épaisseur que la plaque utilisée lors des première expériences $e = 24.9\text{mm}$: une première plaque comporte un défaut usiné au centre de la plaque et une deuxième plaque où le défaut est décalé du centre, cette dernière permet de réaliser deux mesures pour deux configurations symétriques (Fig.3.23).

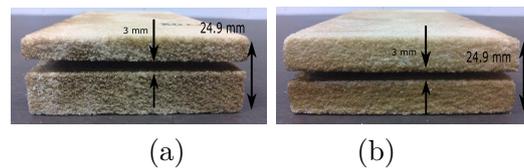


FIGURE 3.23 – Échantillon d’une plaque poreuse avec un défaut décalé (a) et un défaut centré (b)

Les trois configurations que nous étudions sont les suivantes :

| Configuration | Poreux | Fluide | Poreux |
|-----------------|--------|--------|--------|
| Configuration 1 | 11 mm | 3 mm | 11 mm |
| Configuration 2 | 14 mm | 3 mm | 8 mm |
| Configuration 3 | 8 mm | 3 mm | 14 mm |

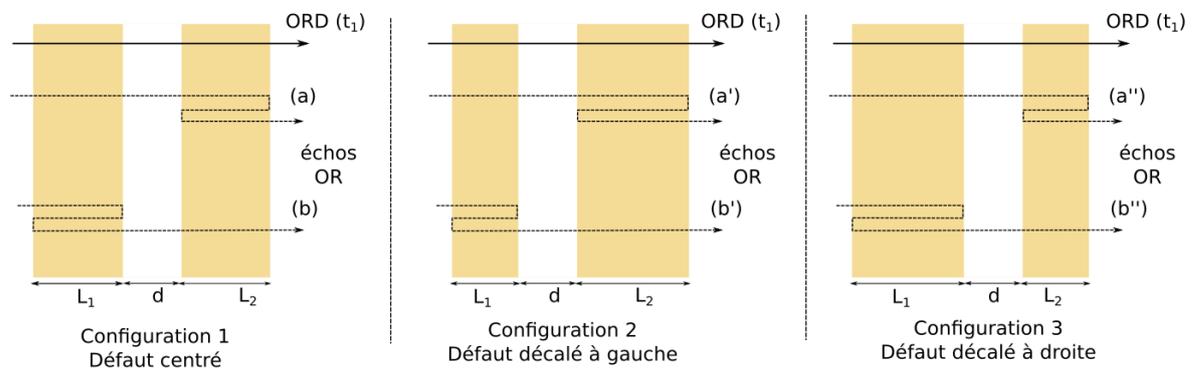


FIGURE 3.24 – Illustration des trois configurations étudiées.

Tout d’abord on étudie l’influence de la position du défaut sur les signaux transmis et réfléchis.

La partie expérimentale permet d’étudier l’influence de la position du défaut dans la plaque lorsque la taille du défaut est fixée. La deuxième partie présente des simulations numériques des différentes configurations étudiées afin de caractériser le défaut de volume, c’est à dire déterminer sa taille et sa position. L’analyse des coefficients de réflexion et de transmission dans le domaine fréquentiel permet d’étudier ces paramètres. Dans un

premier temps, l'influence de la position du défaut de dimension fixe est étudiée. Dans un second temps on s'intéresse à l'influence de la taille d'un défaut positionné au centre de la plaque.

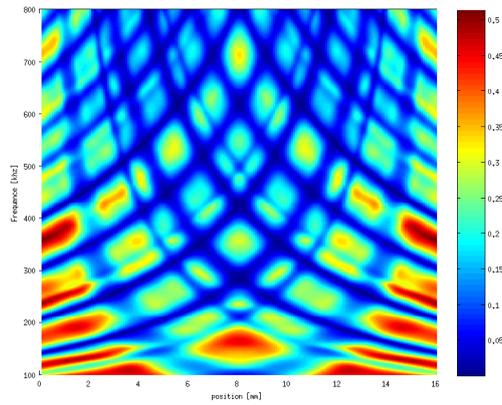
3.3.2 Influence de la position du défaut

On considère un défaut de taille $d = 4 \text{ mm}$ dont la position est repérée par la distance entre sa première interface et celle du poreux $z = 0$ (Fig. 2.3). Les figures (3.25-a) et (3.25-b) représentent respectivement les coefficients de transmission T et de réflexion R en fonction de la fréquence dans le domaine qui s'étend de 100 kHz à 800 kHz et de la position du défaut dans la plaque. L'amplitude du coefficient de transmission est importante lorsque le défaut est au voisinage de l'une des interfaces de la plaque et lorsque son centre coïncide avec le centre de la plaque, c'est à dire quand $L_1 = L_2$, le centre de la plaque ($L_1 = L_2 = 8 \text{ mm}$) constitue un axe de symétrie en raison de la réciprocité du système. L'amplitude du coefficient R varie en fonction de la fréquence et de la position du défaut, elle est maximale lorsque la longueur d'onde est égale à la distance entre la première interface de la plaque et la première interface du défaut : par exemple pour la fréquence $f = 470 \text{ kHz}$, la longueur d'onde est $\lambda = 1.6 \text{ mm}$, l'amplitude du coefficient de réflexion est maximale lorsque le défaut est à la position $z = 1.6 \text{ mm}$. Cette analyse permet de déterminer la position du défaut dans la plaque mais ne renseigne pas sur la distance parcourue par l'onde.

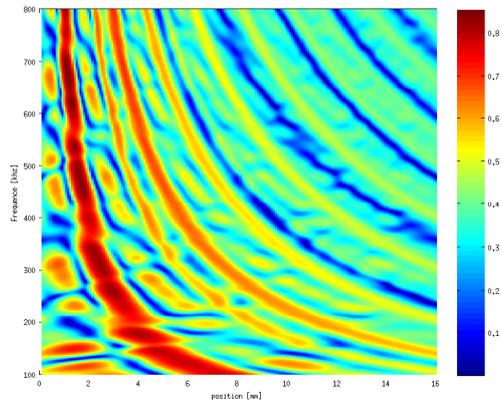
La représentation dans le domaine fréquentiel a permis de comprendre l'influence de la position d'un défaut de volume dans une plaque poreuse. Afin de mieux comprendre l'influence de la position du défaut, une représentation dans le domaine temporel est établie pour trois configurations : la configuration 1 présente un défaut situé au centre de la plaque et les configurations 2 et 3 présentent deux positions symétriques où le défaut est situé de part et d'autre du centre de la plaque, elles sont schématisées sur la figure (3.24). Les signaux simulés transmis et réfléchis issus de ces configurations sont représentés sur les figures (3.30) (signaux transmis) et (3.32) (signaux réfléchis) par un trait discontinu (- - -) pour la configuration 1, un trait continu (-) pour la configuration 2 et des cercles (o) pour la configuration 3.

3.3.3 Influence de la taille du défaut

Considérons un défaut positionné au centre de la plaque, la première interface du défaut étant fixée à $z = L_1$, la taille du défaut évolue vers la deuxième interface de la plaque comme le montre le schéma de la figure 3.26. Le coefficient de transmission présenté sur la figure (3.27-a), montre que l'amplitude de T augmente avec la taille du défaut augmente. Le coefficient de réflexion donné sur la figure (3.27-b), montre des maxima d'amplitudes équidistants, ces maxima sont reliés à la distance entre l'interface de la plaque et celle du défaut qui est fixe (L_1), les petites variations entre deux maxima d'amplitude successifs sont reliés à la taille du défaut. Les résultats analytiques montrent que les coefficients de réflexion et de transmission sont décalés vers les hautes fréquences



(a)



(b)

FIGURE 3.25 – Coefficients de transmission (a) et de réflexion (b) en fonction de la position du défaut et de la fréquence.

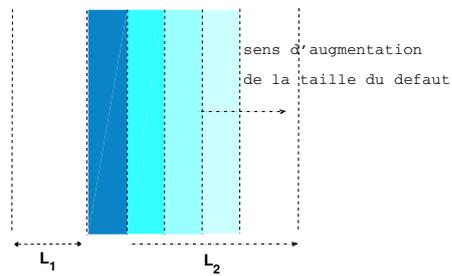
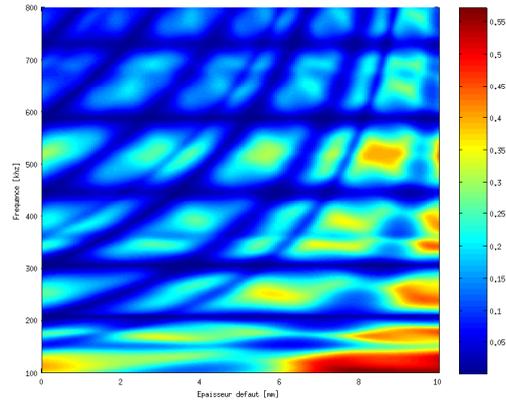
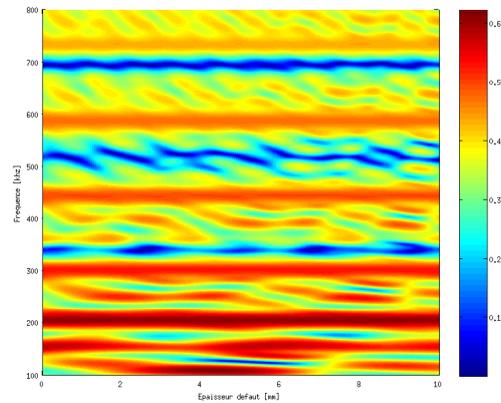


FIGURE 3.26 – Schéma illustrant la variation de la taille du défaut.



(a)



(b)

FIGURE 3.27 – Coefficients de transmission (a) et de réflexion (b) en fonction de la taille du défaut et de la fréquence.

quand l'épaisseur du défaut augmente. Ces deux résultats théoriques sont validés par des résultats expérimentaux obtenus dans le domaine des ultrasons.

3.4 Validation expérimentale

Dans la partie expérimentale, on valide les résultats numériques concernant l'influence de la position d'un défaut, à taille fixe, sur les coefficients de transmission et de réflexion. La seconde analyse concernant l'influence de la taille de défaut n'a pas pu être validée expérimentalement faute de manque d'échantillons ayant la même épaisseur totale et différentes taille de défauts de volume.

La plaque de céramique présente un défaut de taille $d = 3 \text{ mm}$ positionné à $L_1 = 8 \text{ mm}$

de la première interface de la plaque poreuse et à 14 mm de sa deuxième interface. Cette plaque est immergée dans une cuve à eau équipée d'un émetteur et d'un récepteur distants de 225 mm. L'objectif est d'étudier les configurations 2 et 3 : la configuration 2 est obtenue en plaçant la plaque de manière à ce que le défaut soit du côté de l'émetteur et la configuration 3 est obtenue en retournant la plaque. Le montage expérimental est représenté sur la figure (3.28.)

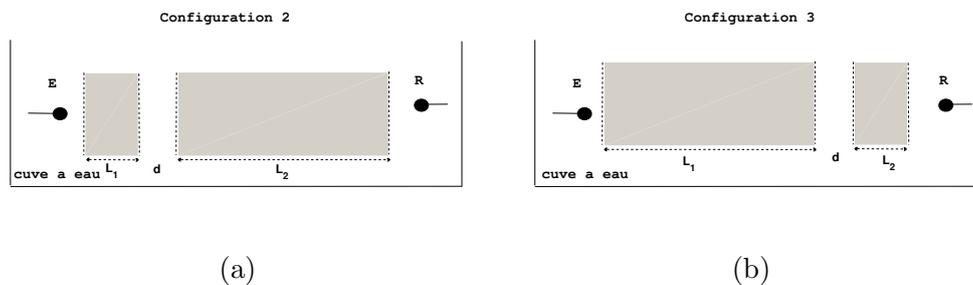
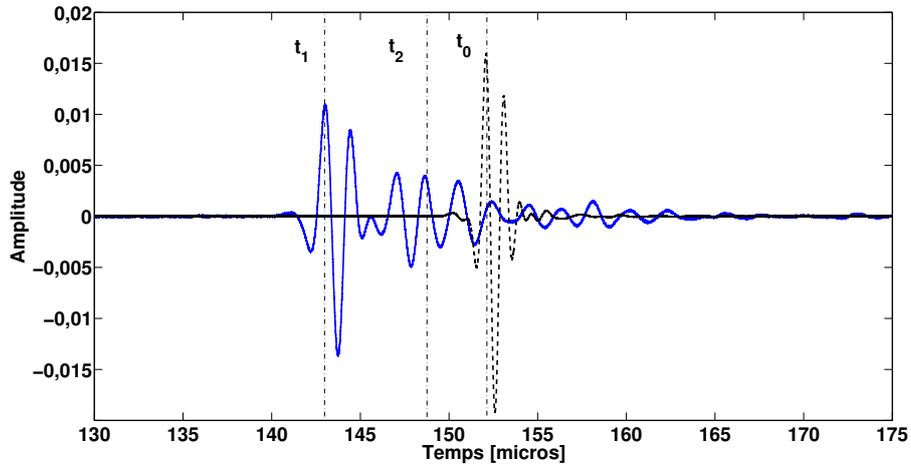


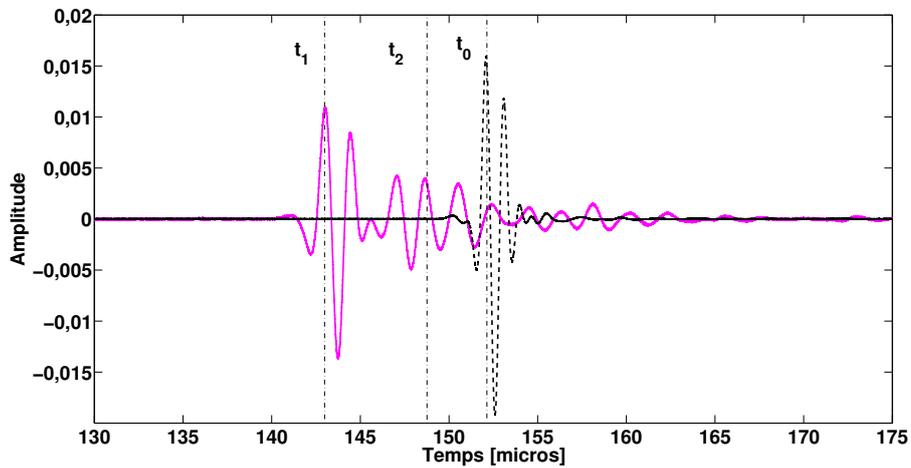
FIGURE 3.28 – Montage expérimental en transmission des configurations 2 et 3.

La première mesure est une mesure de référence permettant d'identifier les ondes visualisées sur les signaux transmis à travers la plaque. Le signal de référence arrive à $t_0 = 152 \mu s$. Les signaux transmis à travers les plaques sont identiques ce qui confirme le résultat théorique : lorsqu'un défaut est placé dans deux positions symétriques dans la plaque poreuse, le signal transmis est le même. Sur les signaux transmis on observe une onde à $t_1 = 143.03 \mu s$ identifiée comme onde rapide directe qui a parcouru la plaque une fois à la vitesse $v_{rapide} \simeq 3629 m s^{-1}$, suivie d'un écho d'onde rapide arrivant à $t_2 = 148.6 \mu s$ qui correspond à l'onde (a') de la configuration 2 et l'onde (b'') de la configuration 3. Sa vitesse de propagation calculée est égale à $v_{rapide} \simeq 3261 m s^{-1}$.

Sur la figure (3.30) on observe que les signaux transmis simulés issus des configurations 2 et 3 sont parfaitement confondus ce qui montre que la transmission n'est pas sensible aux positions symétriques du défaut dans la plaque. On identifie les ondes et les distances parcourues par leurs vitesses de propagation dans le milieu poreux v_1 (eq. 2.25) et dans l'eau $c_0 = 1480 m s^{-1}$: la première onde arrive à $t_1 = 6.502 \mu s$ est une onde rapide directe (ORD) qui a parcouru une seule fois la plaque entière à la vitesse $v_1 \simeq 4211 m s^{-1}$, cette onde arrive au même instant pour les trois configurations puisqu'il s'agit de la même distance parcourue. Ensuite, un écho d'onde rapide arrive avec un retard Δt , ce retard dépend de la position du défaut : pour la configuration 1, où le défaut est situé au centre de la plaque, les ondes (a) et (b), (Fig-3.24), parcourent les distances respectives : $L_1 + d + 3L_2$ et $3L_1 + d + L_2$ et arrivent avec le même retard $\Delta t = 5.528 \mu s$, on ne peut pas les distinguer sur le signal transmis, une seule onde est observée ; concernant les configurations 2 et 3, qui sont des configurations "symétriques", les distances parcourues par les différentes ondes sont schématisées sur la figure (3.24) et résumées dans le tableau 3.2. La figure et le tableau montrent que les ondes (b') et (a'') arrivent avec le même retard $\Delta t = 2.8480 \mu s$ et sont identifiées comme premiers échos



(a)



(b)

FIGURE 3.29 – Signaux transmis expérimentaux des configurations 2 (a) et 3 (b).

de l'onde rapide et les ondes (a') et (b'') arrivent avec un retard $\Delta t = 7.1680 \mu s$ et sont identifiées comme deuxième échos de l'onde rapide. De la même manière, on identifie sur le signal réfléchi les ondes et les distances parcourues (fig.3.32) : la première onde arrivant au même instant pour les trois configurations, est l'onde réfléchie à l'interface, l'onde rapide qui a parcouru la distance $2L_1$ arrive respectivement aux configurations 1, 2 et 3 à $t_1 = 4.19 \mu s$, $t_2 = 2.098 \mu s$ et $t_3 = 6.29 \mu s$. Plus le défaut s'éloigne de l'interface de la plaque, plus le temps d'arrivée de l'onde augmente. Il en est de même pour l'onde qui parcourt la distance $4L_1$. Donc, le temps d'arrivée de l'onde dépend de la position du défaut dans la plaque. L'onde qui arrive à $t_4 = 13.51 \mu s$ est une onde qui a parcouru

TABLE 3.2

| | Onde | distance parcourue |
|-----------------|------|--------------------|
| configuration 2 | a' | $L_1 + d + 3L_2$ |
| | b' | $3L_1 + d + L_2$ |
| configuration 3 | a'' | $L_1 + d + 3L_2$ |
| | b'' | $3L_1 + d + L_2$ |

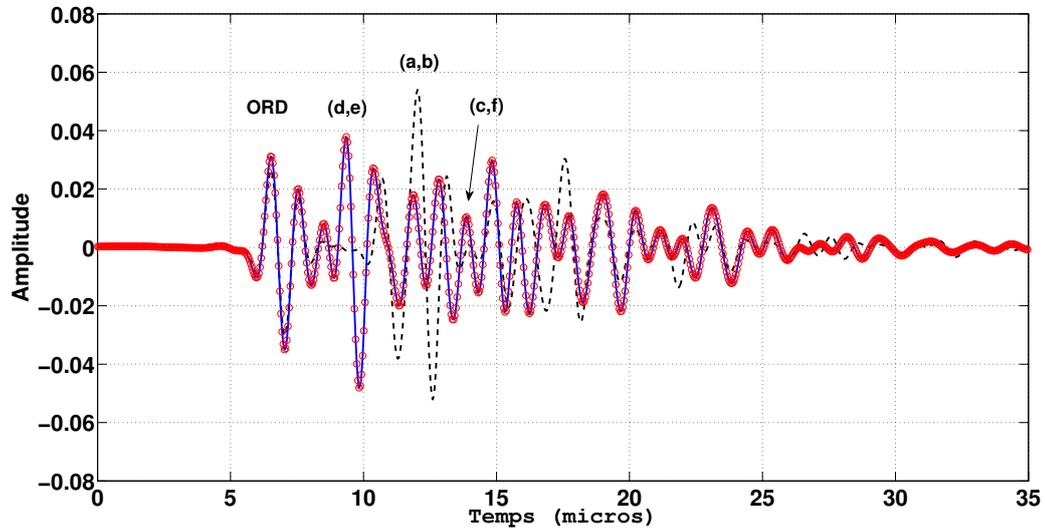


FIGURE 3.30 – Signaux transmis simulés : (- - -) configuration 1, (-) configuration 2, (o) configuration 3

toute la plaque, elle arrive au même instant pour les trois configurations.

Les mesures en réflexion sont menées en pulse écho avec un seul transducteur. La mesure de référence est réalisée en plaçant un réflecteur parfait à une distance de 104 mm du transducteur, on procède de la même manière pour les mesures avec plaque en satisfaisant les configurations 2 et 3. Les signaux expérimentaux réfléchis sont présentés sur la figure (3.31) où le signal réfléchi dans l'eau est affiché en trait discontinu pointillé (· - - ·), le signal réfléchi de la configuration 2 en trait discontinu (- - -) et celui de la configuration 3 en trait plein. L'onde réfléchie à l'interface arrive à $t_0 = 140.8 \mu\text{s}$, le signal réfléchi de la configuration 2 montre une onde à $t_1 = 145.8 \mu\text{s}$ et celui de la configuration 3 montre une onde à $t_2 = 150.3 \mu\text{s}$, ces deux ondes sont réfléchies à l'interface

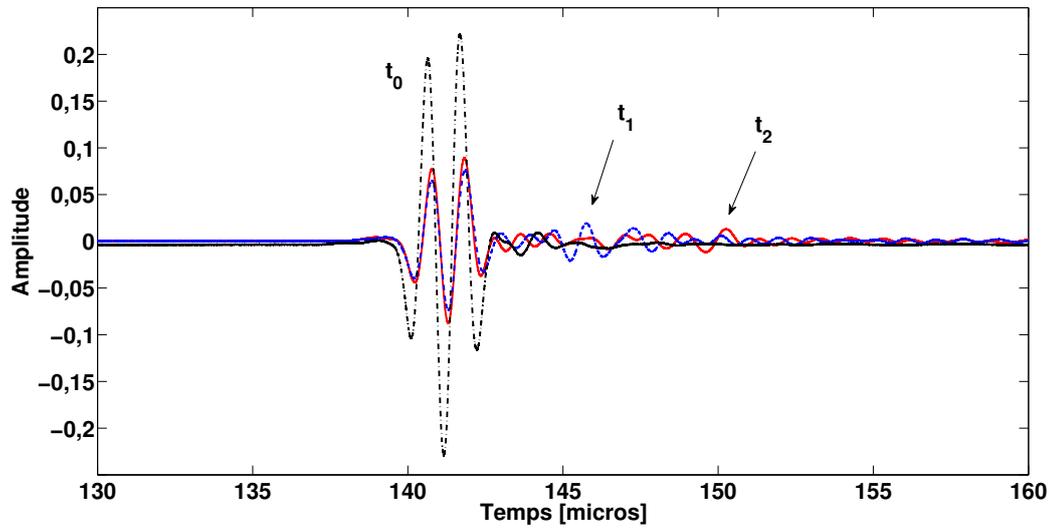


FIGURE 3.31 – Signaux réfléchis expérimentaux des configurations 2 (- - -) et 3 (—) et le signal transmis dans l'eau (· - · - ·)

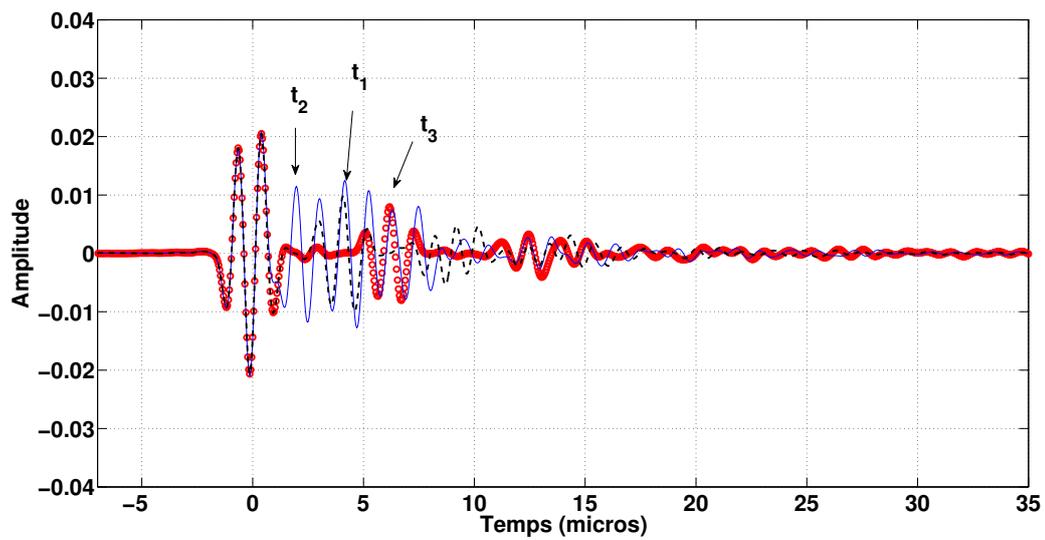


FIGURE 3.32 – Signaux réfléchis simulés : (- - -) configuration 1, (—) configuration 2, (○) configuration 3

du défaut cela explique le temps de retard.

3.5 Conclusion

Les résultats des simulations numériques ont permis d'étudier les mécanismes expliquant l'existence ou non des ondes lentes en fonction des conditions limites (pores ouverts et fermés). On a montré que lorsque les pores sont fermés en surface, l'amplitude de l'onde lente est faible et que l'on peut négliger les déplacements dus à cette onde dans la plaque : lorsque l'onde ultrasonore arrive à la surface de la plaque poreuse, le déplacement dans le fluide est imposé majoritairement par le déplacement de la phase solide ce qui favorise la propagation de l'onde rapide. Ceci a été confirmé par la représentation des signaux temporels transmis et réfléchis à travers la plaque à pores fermés où on ne voit pas l'onde lente contrairement au cas des pores ouverts où l'onde lente apparaît clairement.

Même si l'amplitude de l'onde lente est pratiquement nulle dans le poreux, elle participe de manière importante à l'atténuation de l'onde rapide à cause du phénomène de conversion de modes.

En se basant sur cela, on a choisi dans notre étude de présenter les coefficients de transmission et de réflexion en fonctions des champ de déplacement de ces deux ondes par la matrice de diffusion, ce qui est un atout vu le petit nombre de paramètres à introduire.

L'analyse des coefficients de réflexion et de transmission à travers un milieu poreux qui présente un défaut de volume, a permis de faire le point sur l'interaction des ondes de Biot avec la position et la taille du défaut. L'influence de la position du défaut dans la plaque est importante sur les coefficients de réflexion et de transmission, plus le défaut est proche de l'une des interfaces, plus l'amplitude est importante, on notera que la transmission n'est pas sensible aux positions symétriques du défaut par rapport au centre de la plaque. La variation de la taille du défaut se traduit par une variation dans le même sens de l'amplitude du coefficient de transmission et par un décalage d'amplitude sur le coefficient de réflexion. Cette étude spectrale est validée par une étude temporelle où les signaux transmis et réfléchis simulés reflètent rigoureusement la position et la taille du défaut. Les résultats expérimentaux valident les résultats numériques.

Chapitre 4

Tortuosité induite par la présence de défauts

4.1 Introduction

La tortuosité est un des paramètres physiques permettant de décrire la microstructure des milieux poreux, voir par exemple B. Ghanbarian et coll. [3].

La tortuosité a été introduite pour corriger le modèle de perméabilité de Kozeny [9] des milieux poreux. Ceux-ci sont définis par la loi de Darcy qui relie des caractéristiques du fluide et de la structure interne du milieu poreux [17] :

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\eta}\nabla p, \quad (4.1)$$

\mathbf{v} étant la vitesse de filtration du fluide, ∇p le gradient de pression, k la perméabilité et η le coefficient de viscosité du fluide. Le modèle de Kozeny a été développé dans le cas où les lignes de champ de vitesse du fluide sont droites et parallèles dans les milieux poreux. Carman [9] l'a généralisé pour des lignes de champ de vitesse qui ne sont ni droites ni parallèles en introduisant la tortuosité hydraulique τ :

$$\tau = \frac{\langle \lambda \rangle}{L}. \quad (4.2)$$

Lorsqu'un fluide coule à travers un milieu poreux d'un point A à un point B distants de L (distance euclidienne), il suit différents chemins dont la longueur moyenne est $\langle \lambda \rangle$. L'allongement des lignes de champ dans les milieux poreux ne se produit pas uniquement dans les flux, mais aussi dans de nombreux processus tels que les phénomènes de transport, la diffusion des particules, la conductivité électrique ou la propagation des ondes dans des milieux poreux saturés. Cela a donné lieu à de nombreux travaux théoriques pour définir la tortuosité. Cependant, ces définitions diffèrent l'une de l'autre, en général sans relation entre elles. Dans ce contexte, on peut se référer au document de Saomoto et Katgiri [29] qui compare les tortuosités hydrauliques et électriques à l'aide de simulations numériques. Leurs simulations montrent que si la tortuosité électrique reste proche

de l'unité quelle que soit la porosité et la forme des grains, les lignes de champ d'un flux hydraulique sont beaucoup plus concentrées, entraînant une tortuosité beaucoup plus grande.

Cet exemple montre que si le concept de tortuosité semble simple, en pratique, il n'est pas consistant et son traitement est souvent trompeur. En fait, il semble que la tortuosité est moins un paramètre intrinsèque du milieu qu'une propriété déduite du processus qui s'y développe. Cela explique en partie les nombreuses définitions des tortuosités et leurs différentes interprétations. En acoustique des milieux poreux, la tortuosité est utilisée pour renormaliser la densité ρ_f du fluide afin de tenir compte de son interaction en fonction de la fréquence avec les parois des pores [41]. Lafarge et coll. [16] ont montré que, lorsque l'épaisseur de la peau visqueuse est beaucoup plus grande que la dimension caractéristique, la densité du fluide est $\rho_f \tau_0$, où τ_0 est la tortuosité statique ($\Omega = 0$) définie par :

$$\tau_0 = \frac{\langle \mathbf{v}^2 \rangle}{\langle \mathbf{v} \rangle^2}, \quad (4.3)$$

où $\langle a \rangle$ représente la valeur moyenne de a . Cette définition de la tortuosité sera adoptée dans la suite. Comme on le sait maintenant, de nombreux facteurs peuvent affecter le flux dans les milieux poreux, dont la forme des pores, la distribution du rayon des pores, le nombre de Reynolds, pour n'en citer que quelques-uns. Il s'ensuit que la présence de défauts dans un milieu initialement homogène (par exemple un changement local de la porosité) peut entraver de manière significative le mouvement du fluide, ce qui entraîne une modification de la forme des lignes de champ de vitesse.

Ce chapitre décrit un modèle mathématique de défaut et donne la solution du flux de fluide en présence de défauts homogènes et stratifiés sphériques et ellipsoïdaux. Les résultats sont généralisés au cas anisotrope, puis la polarisabilité hydraulique est introduite. La deuxième partie porte sur la tortuosité. L'expression d'une mobilité efficace est donnée pour certains défauts particuliers. La tortuosité induite est déduite des résultats précédents et ses effets sur la propagation de l'onde sont donnés.

4.2 Modèle de défaut

Ici, un défaut est considéré comme un changement local de la perméabilité k . Un tel changement est dû aux variations de porosité ou à des changements de la microstructure du milieu poreux.

Les défauts que l'on considère sont des inclusions poreuses caractérisées par leur forme et leur perméabilité dans un milieu hôte poreux. De ce fait, on utilisera indifféremment les termes de défaut ou d'inclusion. Les paramètres physiques du défaut et du milieu hôte extérieur sont distingués par un indice supérieur (i) (in) et (o) (out). Ainsi, la loi de Darcy dans l'inclusion et dans le milieu hôte s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{v}^{(i)} = -\frac{k^{(i)}}{\eta} \nabla p^{(i)} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^{(o)} = -\frac{k^{(o)}}{\eta} \nabla p^{(o)}. \quad (4.4)$$

La perméabilité intrinsèque k est exprimée en Darcy ($1D = 0.9710^{-12}m^2$). Les milieux poreux qui nous intéressent possèdent des perméabilités de l'ordre de $10D$ (cf. tableau 5.1).

4.2.1 Formulation mathématique

Lorsque le mouvement d'un fluide s'écoulant dans un milieu poreux est perturbé par la présence d'un défaut occupant le domaine Ω dans la microstructure moyenne, la vitesse du fluide est une solution à l'équation suivante :

$$\mathbf{v}^{(m)}(x) = \frac{k^{(m)}(x)}{\eta} \nabla p^{(m)}(x), \quad (4.5)$$

où $m = i$ (in) si $x \in \Omega$ et $m = o$ (out) si x est dans le milieu hôte. Ces équations sont soumises à des conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega$:

– Continuité du débit :

$$\phi^{(o)} \mathbf{v}^{(o)} \cdot \mathbf{n}^{(o)} = \phi^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)}, \quad (4.6)$$

– Continuité de la composante normale de la contrainte :

$$\tau_{ij}^{(o)} n_j^{(o)} = \tau_{ij}^{(i)} n_j^{(i)}. \quad (4.7)$$

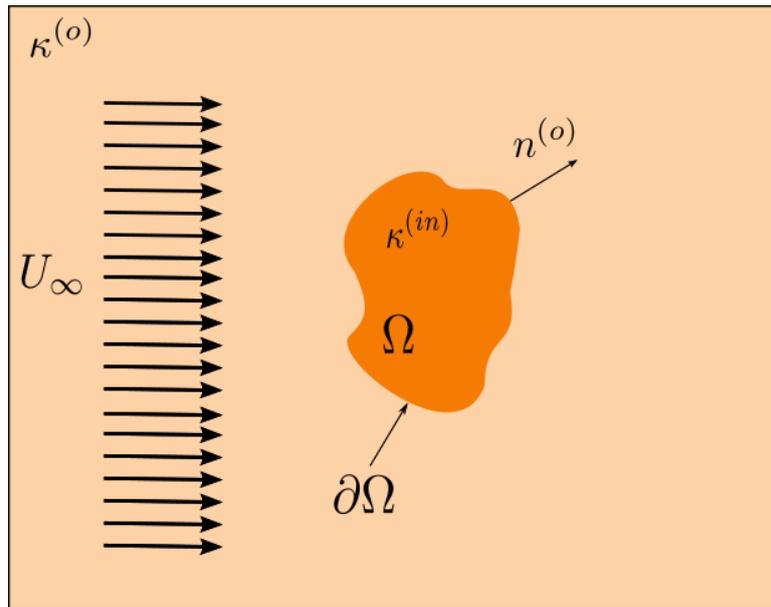


FIGURE 4.1 – Inclusion orientée dans un milieu poreux. $\mathbf{n}^{(o)}$ est le vecteur unitaire sortant.

On considère un milieu poreux d'extension infinie, dans lequel un fluide visqueux s'écoule à une vitesse uniforme constante U_∞ sous l'action d'une différence de pression $p^{(o)}$, le

gradient de pression étant le long de l'axe (Oz), voir la figure (4.1). Nous cherchons à déterminer comment la vitesse du fluide est modifiée en présence d'un défaut dans le milieu. Dans ce qui suit, nous donnons les solutions des équations (4.5) - (4.7) pour certains défauts particuliers dans une telle situation. Des solutions analytiques sont possibles pour des inclusions sphériques et ellipsoïdales homogènes. Lorsque la perméabilité interne n'est pas constante (défaut en couches), nous fournissons une méthode basée sur la matrice de transfert pour obtenir l'effet dipolaire de telles inclusions. Par la suite, nous établissons une formule adaptée à la solution numérique dans le cas d'une inclusion avec une forme arbitraire.

4.2.2 Cas du défaut homogène

Le défaut le plus simple qui soit est l'inclusion homogène. On suppose que le gradient de pression est orienté suivant l'axe (Oz). Loin de l'inclusion, la vitesse de filtration est dirigée elle aussi suivant cet axe. On note U_∞ sa valeur.

Inclusion sphérique

L'inclusion est une sphère de rayon a , centrée à l'origine des coordonnées. Le système poreux + inclusion partage l'espace en deux parties où l'on souhaite déterminer les lignes de leurs champs de vitesse. Dans chacune des zones, la vitesse de filtration et la pression obéissent au système d'équations,

$$\begin{cases} v^{(o)} = -\kappa^{(o)} \nabla p^{(o)}, & r > a, \\ v^{(i)} = -\kappa^{(i)} \nabla p^{(i)}, & r < a, \end{cases} \quad (4.8)$$

auquel on associe les conditions en $r = a$ suivantes :

1. Conservation du débit :

$$\phi^{(i)} v_r^{(i)}(r = a) = \phi^{(o)} v_r^{(o)}, \quad (r = a), \quad (4.9)$$

où $\phi^{(i),(o)}$ sont les porosités de l'inclusion et du milieu hôte,

2. Égalité des contraintes normales :

$$\tau_{rr}^{(i)}|_{r=a} = \tau_{rr}^{(o)}|_{r=a}, \quad \forall \theta, \quad (4.10)$$

$$\tau_{rr} = \phi \left(-p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) |_{r=a}. \quad (4.11)$$

La géométrie impose que la résolution du problème (4.8) à (4.11) se fasse en coordonnées sphériques.

Dans le cas d'un fluide incompressible, la divergence de sa vitesse est nulle en absence de source : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, et les relations (4.8) deviennent des équations de Laplace gouvernant la pression :

$$\Delta p^{(i)} = 0, \quad (4.12)$$

$$\Delta p^{(o)} = 0. \quad (4.13)$$

Dans le système des coordonnées sphériques l'opérateur laplacien s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (4.14)$$

Puisque le système a une symétrie de révolution autour de l'axe Oz , les variables \mathbf{v} et p sont indépendantes de la coordonnée φ . Les équations (4.12)-(4.13) sont alors du type :

$$\Delta p = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (4.15)$$

Solutions du système (4.8) L'expression de la pression à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion est alors

$$p^{(i),(o)}(r, \theta) = \sum_l (A_l^{(i),(o)} r^l + B_l^{(i),(o)} r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (4.16)$$

où P_l est le polynôme de Legendre de degré l . Les coefficients $A_l^{(i),(o)}$ et $B_l^{(i),(o)}$ sont reliés par les conditions aux limites (4.9) et (4.10). À l'intérieur de l'inclusion, la solution doit être finie à l'origine $r = 0$. Ceci impose que $B_l^{(i)} = 0$ pour tout l . Ainsi, l'expression de $p^{(i)}$ est :

$$p^{(i)}(r, \theta) = \sum_l A_l^{(i)} r^l P_l(\cos \theta). \quad (4.17)$$

À l'extérieur de l'inclusion, à grande distance de celle-ci, la pression est,

$$p^{(o)} \sim -\frac{1}{\kappa^{(o)}} U_\infty r \cos \theta. \quad (4.18)$$

L'égalité

$$p^{(o)}(r = a, \theta) = p^{(i)}(r = a, \theta), \quad \forall \theta, \quad (4.19)$$

impose que seul l'indice $l = 1$ subsiste dans les sommes. On a alors :

$$A^{(o)} = -\frac{1}{\kappa^{(o)}} U_\infty, \quad (4.20)$$

d'où les expressions de la pression à l'extérieur :

$$p^{(o)} = -\frac{U_\infty}{\kappa^{(o)}} r \cos \theta + B^{(o)} r^{-2} \cos \theta, \quad (4.21)$$

et à l'intérieur de l'inclusion :

$$p^{(i)} = A^{(i)} r \cos \theta \quad (4.22)$$

La détermination des constantes $A^{(i)}$ et $B^{(o)}$ se fait à partir des conditions en $r = a$ (4.9) et (4.10).

Tout calculs faits, on trouve les expressions des pressions intérieure et extérieure à l'inclusion :

$$p^{(i)}(r, \theta) = -\frac{\phi^{(o)}}{\phi^{(i)}} \frac{U_\infty}{\kappa^{(o)}} \left(\frac{3 + 12 \frac{k^{(o)}}{a^2}}{2 + \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}} + 12 \frac{k^{(i)}}{a^2}} \right) r \cos \theta, \quad r < a \quad (4.23)$$

$$p^{(o)}(r, \theta) = -\frac{U_\infty}{\kappa^{(o)}} r \cos \theta + \frac{U_\infty}{\kappa^{(o)}} \frac{a^3}{r^2} \left(\frac{\frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}} - 1}{2 + \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}} + 12 \frac{k^{(i)}}{a^2}} \right) \cos \theta, \quad r > a \quad (4.24)$$

On voit que la pression extérieure $p^{(o)}(r, \theta)$ est la somme de la pression initiale et d'une perturbation due à l'inclusion sphérique dont on verra l'interprétation plus loin. Par ailleurs, les quantités $12 \frac{k^{(i)}}{a^2}$ et $12 \frac{k^{(o)}}{a^2}$ présentes dans $p^{(o)}(r, \theta)$ et $p^{(i)}(r, \theta)$ sont très petites devant l'unité ($\simeq 10^{-4}, 10^{-5}$) et peuvent de ce fait être négligées par la suite.

Calcul des vitesses de filtration Les vitesses de filtration s'obtiennent à partir de la loi de Darcy dès qu'on connaît l'expression de la pression.

1. Dans le cas où les porosités sont sensiblement égales c'est à dire lorsque $\phi^{(e)}/\phi^{(i)} \simeq 1$, le champ de la vitesse de filtration à l'intérieur de l'inclusion, est uniforme de valeur,

$$v^{(i)} = U_\infty \frac{3}{1 + 2 \frac{\kappa^{(o)}}{\kappa^{(i)}}}. \quad (4.25)$$

L'équation (4.25) peut être écrite sous la forme :

$$v^{(i)} = U_\infty \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)} + \frac{1}{3}(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})}, \quad (4.26)$$

2. La vitesse de filtration extérieure au défaut a pour composantes :

$$v_r^{(o)} = -U_\infty \cos \theta \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \left(\frac{\frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}} - 1}{2 + \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}}} \right) \right), \quad (4.27)$$

$$v_\theta^{(o)} = U_\infty \sin \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \left(\frac{\frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}} - 1}{2 + \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}}} \right) \right). \quad (4.28)$$

Lorsque les mobilités sont telles que $\kappa^{(i)} > \kappa^{(o)}$, alors $v^{(i)} > U_\infty$. Dans ce cas le fluide passe préférentiellement dans l'inclusion et les lignes de champ de la vitesse extérieure sont courbées vers l'inclusion (fig.4.2-a). On a la conclusion inverse lorsque $\frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}} < 1$ où les lignes de champ de la vitesse extérieure passent dans le milieu hôte (fig.4.2-b). On retrouve bien que $v^{(i)} = U_\infty$ lorsque $\kappa^{(i)} = \kappa^{(o)}$. Les figures (4.3-a) et (4.3-b) confirment ces tendances en montrant les niveaux de la vitesse au voisinage de l'inclusion lorsque le rapport des perméabilités est supérieur et inférieur à 1 respectivement.

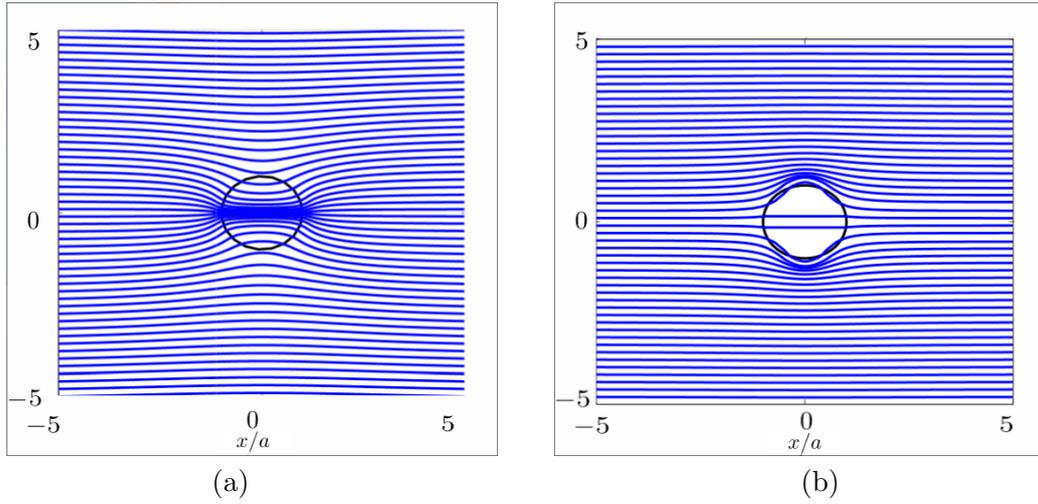


FIGURE 4.2 – Lignes de champs de vitesse dans un milieu poreux de perméabilité $\kappa^{(o)}$ contenant une inclusion sphérique de perméabilité $\kappa^{(i)}$: (a) $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} > 1$, (b) $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} < 1$.

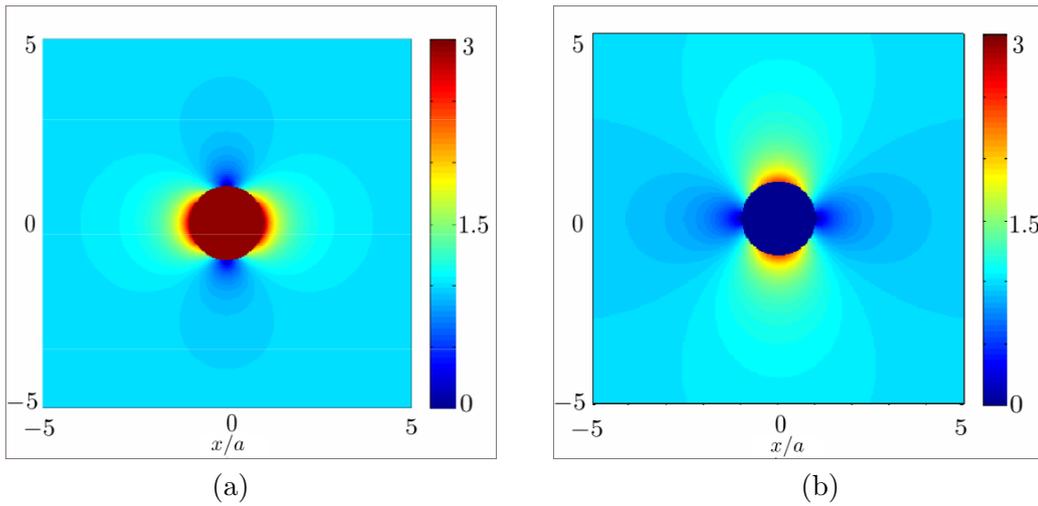


FIGURE 4.3 – Niveaux de vitesse dans un milieu poreux de perméabilité $\kappa^{(o)}$ contenant une inclusion sphérique de perméabilité $\kappa^{(i)}$: (a) $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} > 1$, (b) $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} < 1$.

Par la suite, on posera : $\mathbf{E}^{(o)} = -\nabla p^{(o)}$ et $\mathbf{E}^{(i)} = -\nabla p^{(i)}$. La pression externe se mettra sous la forme :

$$p^{(o)}(r, \theta) = -\frac{U_\infty}{\kappa^{(o)}} r \cos \theta + \frac{p_z \cos \theta}{4\pi r^2} \quad (4.29)$$

où p_z est le moment dipolaire de l'inclusion donné par :

$$p_z = 4\pi a^3 \frac{U_\infty}{\kappa^{(o)}} \left(\frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}} - 1 \right) \left(2 + \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}} \right). \quad (4.30)$$

Inclusion ellipsoïdale

Dans les milieux poreux naturels, la forme des défauts (et donc celle des inclusions) n'est évidemment pas exclusivement sphérique. Si le calcul de la polarisabilité des inclusions est possible quelque soit leur forme, il est souvent compliqué et requiert la plupart du temps une évaluation numérique. Mise à part la forme sphérique, les seules autres formes pour lesquelles une solution analytique est possible sont les inclusions ellipsoïdales dont l'inclusion en forme de disque et celle de forme oblongue (en aiguille) sont des cas particuliers.

Soit alors une inclusion ellipsoïdale de demi axes a , b et c le long des axes des coordonnées cartésiennes. L'équation de sa surface correspond à $\xi = 0$ et s'écrit (D) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.31)$$

L'équation de Laplace en coordonnées ellipsoïdales est donnée en annexe (D). Ici, nous donnons l'expression de sa solution générale dans le cas physique où l'inclusion poreuse ellipsoïdale est soumise à un gradient statique de pression dirigé suivant l'axe (Ox).

Dans un milieu homogène, la pression imposée (initiale) s'écrit :

$$p(\mathbf{r}) = p_0(x) = -Ex = -E \sqrt{\frac{(a^2 + \xi)(b^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}}. \quad (4.32)$$

En présence de l'inclusion, on montre alors [?, ?] que la pression "diffusée" $p_d(\mathbf{r})$ s'écrit

$$p_d(\mathbf{r}) = p_0(x)F(\xi). \quad (4.33)$$

En reportant cette expression dans l'équation de Laplace et compte tenu de l'équation (4.32), on montre que la fonction $F(\xi)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\ln [R(\xi)(\xi + a^2)] \right) = 0, \quad (4.34)$$

où $R(\sigma) = (a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)(c^2 + \sigma)$. La solution $F(\xi)$ de cette équation est la somme d'une constante $F_1(\xi) = A$ et d'une fonction de ξ :

$$F_2(\xi) = \int_\xi^\infty \frac{d\sigma}{(\sigma + a^2)R(\sigma)}. \quad (4.35)$$

La pression dans une région homogène est alors :

$$p(\mathbf{r}) = p_0(x) \left[A - \frac{B}{2} \int_\xi^\infty \frac{d\sigma}{(\sigma + a^2)R(\sigma)} \right]. \quad (4.36)$$

Les conditions aux limites, c'est à dire à la surface de l'inclusion ($\xi = 0$), sont la conservation du débit de fluide et la continuité de la composante $\tau_{\xi\xi}$ appliquée sur le fluide en mouvement. Ces deux conditions s'écrivent :

1. Conservation du débit en $\xi = 0$:

$$\phi^{(o)} \kappa^{(o)} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial p^{(o)}}{\partial \xi} = \phi^{(i)} \kappa^{(i)} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial \xi}. \quad (4.37)$$

2. Conservation de la contrainte $\tau_{\xi\xi}$ en $\xi = 0$:

$$\phi^{(o)} \left(-p^{(o)} + 2\eta \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v_\xi^{(o)}}{\partial \xi} \right) = \phi^{(i)} \left(-p^{(i)} + 2\eta \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v_\xi^{(i)}}{\partial \xi} \right), \quad (4.38)$$

où v_ξ est la composante de la vitesse de filtration perpendiculaire à la surface $\xi = 0$ donnée par la loi de Darcy

$$v_{\lambda_i} = -\kappa \frac{1}{h_{\lambda_i}} \partial_{\lambda_i} p, \quad \lambda_i = \xi, \eta, \zeta. \quad (4.39)$$

Dans ces relations, les coefficients h_{λ_i} sont les facteurs d'échelle des coordonnées ellipsoïdales donnés en annexe (D.6)-(D.8) :

On en déduit alors les valeurs de la pression :

1. à l'intérieur de l'inclusion :

$$p^{(i)}(x) = \frac{\kappa^{(o)}}{\kappa^{(o)} + (\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})N_x} p_0(x), \quad (4.40)$$

2. à l'extérieur de l'inclusion :

$$p^{(o)}(x) = p_0(x) + p_d(x) = p_0(x) - \frac{abc(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})}{(\kappa^{(o)} + N_x(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)}))} p_0(x) F_2(\xi). \quad (4.41)$$

À grande distance du centre de l'inclusion, $\xi \approx r^2$, le champ de pression diffusée prend la forme :

$$\begin{aligned} p_d(x) &\approx \frac{abc(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})}{(\kappa^{(o)} + N_x(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)}))} p_0(x) \int_{r^2} \frac{dr}{r^{5/2}} \\ &= \frac{abc(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})}{(\kappa^{(o)} + N_x(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)}))} \frac{x}{3r^3} E. \end{aligned} \quad (4.42)$$

C'est l'expression de la pression donnée par un dipôle de moment dipolaire

$$p_z = -\frac{4\pi abc}{3} \frac{(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})}{\kappa^{(o)} + N_x(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})} \frac{U_\infty}{\kappa^{(o)}} \quad (4.43)$$

$$= -3V \frac{U_\infty}{\kappa^{(o)}} \frac{(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})}{\kappa^{(o)} + N_x(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})}. \quad (4.44)$$

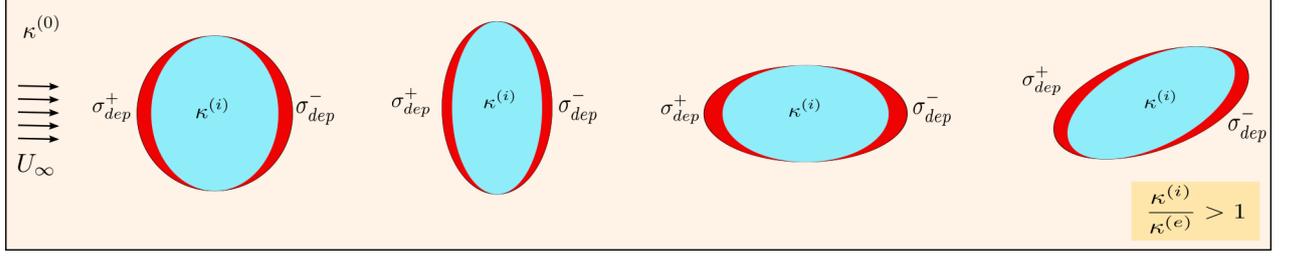


FIGURE 4.4 – Tracé de la densité de charges surfaciques de polarisation hydraulique σ_{pol} pour une inclusion sphérique et une inclusion ellipsoïdale avec différentes orientations par rapport au flux incident.)

où V est le volume de l'inclusion et N_x le facteur dépolarisant donné par :

$$N_x = \frac{abc}{3} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{(\sigma + a^2)\sqrt{(\sigma + a^2)(\sigma + b^2)(\sigma + c^2)}}, \quad (4.45)$$

Il décrit la variation de la polarisabilité d'une inclusion en fonction de sa forme et de son orientation par rapport au champ excitateur. Les facteurs géométriques N_x , N_y et N_z , donnés en annexe (E), sont apparus pour la première fois en hydrodynamique [64] pour décrire la perturbation apportée par un solide immergé dans un fluide infini en mouvement uniforme. Leurs valeurs ont été calculées par Stoner [67] et Osborn [55]. Leur nom "facteurs de dépolarisation" provient de l'électromagnétisme (voir par exemple Landau [49]). La figure 4.4 est un tracé de la polarisation hydraulique pour une inclusion sphérique et pour une inclusion ellipsoïdale avec des orientations différentes par rapport au flux incident. Les zones sombres représentent la densité de charges surfaciques de polarisation hydraulique σ_{pol} donnée par :

$$\sigma_{pol} = -\frac{(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})}{\kappa^{(o)} + N_x(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})} U_\infty \cos \theta. \quad (4.46)$$

La pression à l'extérieur de l'inclusion est alors :

$$p^{(o)}(r, \theta) = -\frac{U_\infty}{\kappa^{(o)}} r \cos \theta + \frac{p_d \cos \theta}{4\pi r^2}. \quad (4.47)$$

Cette relation est similaire à la relation (4.29), la seule différence étant l'expression du moment dipolaire.

D'après l'équation E.2 de l'annexe, il est possible de trouver les valeurs des facteurs de dépolarisation des inclusions particulières.

- inclusion sphérique $N_x = N_y = N_z = 1/3$;
- inclusion en forme de disque (axe Oz) $N_x = N_y = 0, N_z = 1$;
- inclusion oblongue $N_x = N_y = 1/2, N_z = 0$.

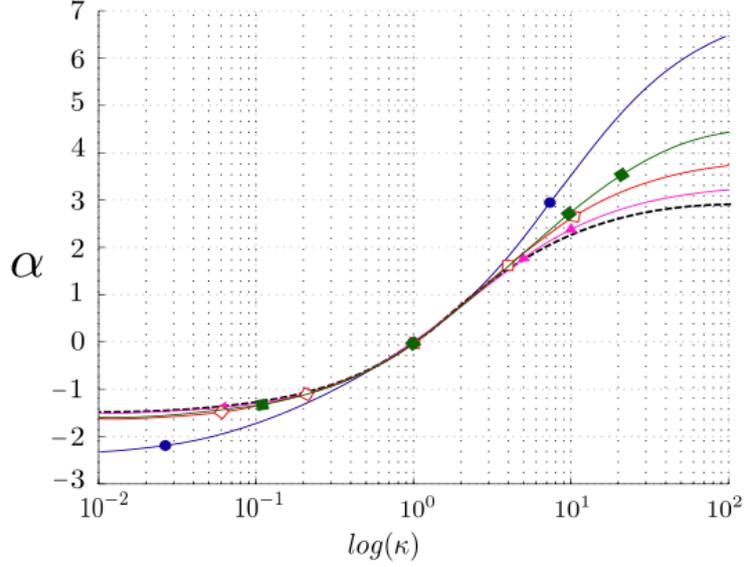


FIGURE 4.5 – Polarisabilité hydraulique $\alpha/3V$ d’une inclusion ellipsoïdale en fonction de $\log(\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)})$ pour différentes valeurs des facteurs de dépolarisation (N_x, N_y, N_z)
 (—●— : $N_x = 0.1, N_y = 0.1, N_z = 0.8$); (—◇— : $N_x = 0.2, N_y = 0.2, N_z = 0.6$);
 (—◀— : $N_x = 0.4, N_y = 0.4, N_z = 0.2$); (—■— : $N_x = 0.45, N_y = 0.45, N_z = 0.1$);
 (— — — : $N_x = 1/3, N_y = 1/3, N_z = 1/3$)

Dans la figure (4.5), nous représentons les variations de la susceptibilité α_x en fonction du rapport $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)}$ pour différents ensembles de facteurs de dépolarisation.

La différence fondamentale entre les inclusions sphériques et ellipsoïdales est que la pression diffusée par la sphère ne contient qu’un champ dipolaire, alors que l’ellipsoïde diffuse également des champs multipolaires d’ordres supérieurs. De cela, on peut en déduire que plus la forme de l’inclusion s’écarte de celle d’une sphère, plus la pression diffusée contient des termes multipolaires d’ordres élevés.

L’équation (4.42) ne montre pas ces termes multipolaires puisque le calcul de l’intégrale F_2 est un calcul approché lorsque ξ est important. Lorsque l’on s’éloigne de l’inclusion ellipsoïdale, l’amplitude des termes d’ordre multipolaire supérieur à 2 diminue très rapidement, ne laissant que la contribution de la pression incidente et le terme dipolaire de la pression diffusée.

4.2.3 Cas de défaut inhomogène

En fait, les défauts présentent rarement une structure homogène. Le paramètre caractérisant le défaut (dans notre cas, la perméabilité) varie selon une loi qui dépend de la manière dont le défaut se développe et évolue.

Pour le défaut sphérique, la situation la plus simple est la variation radiale. La

différence fondamentale entre des inclusions sphériques homogènes et inhomogènes est que, dans ces dernières, le champ $\mathbf{E}^{(i)}$ perd son caractère uniforme. La détermination du moment dipolaire n'est plus immédiate et nécessite une approche différente de celle développée précédemment. On considèrera deux cas : la "perméabilité stratifiée" et la variation continue.

Inclusion inhomogène sphérique stratifiée

Supposons que le défaut soit un ensemble de N couches sphériques concentriques. Dans ces couches la valeur de la perméabilité $k^{(n)}$ est constante. On désigne $\kappa^{(n)}$ le ratio $k^{(n)}/\eta$ dans la couche n délimitée par les sphères de rayon r_n et r_{n+1} avec $r_n > r_{n+1}$. L'indice de la sphère interne est $i = N$ fig. 4.6.

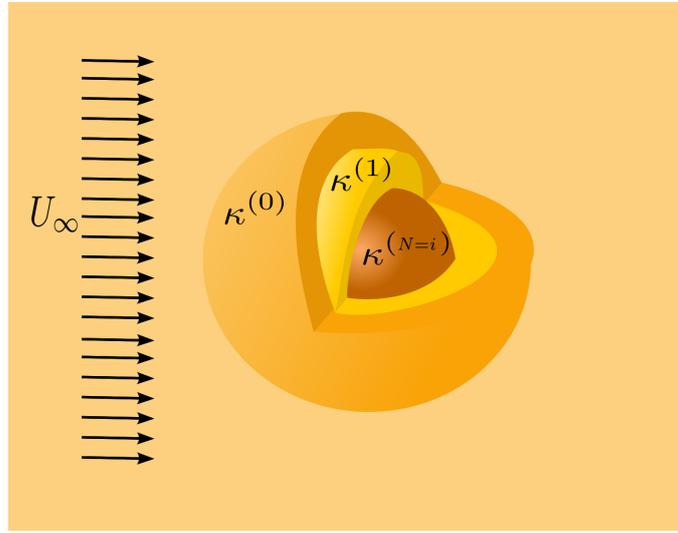


FIGURE 4.6 – Inclusion sphérique stratifiée dans un milieu poreux homogène.

La détermination de la pression et de la vitesse dans ce type d'inclusion consiste à résoudre l'équation de Laplace $\Delta p^{(n)} = 0$ dans chaque couche et à relier les solutions grâce aux conditions aux limites : continuité du débit de fluide et de la composante radiale de la contrainte. Dans la couche numéro n la pression est notée :

$$p^{(n)} = A^{(n)}r \cos \theta + B^{(n)}r^{-2} \cos \theta. \quad (4.48)$$

Les coefficients A et B de deux couches consécutives (n) et ($n + 1$) sont reliés par les conditions en $r = r_{n+1}$:

- Conservation du débit :

$$\phi^{(n)}v_r^{(n)}(r = r_{n+1}) = \phi^{(n+1)}v_r^{(n+1)}(r = r_{n+1}). \quad (4.49)$$

- Conservation de la composante radiale de la contrainte

$$\tau_{rr}^{(n)}(r = r_{n+1}) = \tau_{rr}^{(n+1)}(r = r_{n+1}). \quad (4.50)$$

Méthode de la matrice de transfert T : On montre alors que les couples de coefficients $(A^{(n)}, B^{(n)})$ et $(A^{(n+1)}, B^{(n+1)})$ sont reliés par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} A^{(n)} \\ B^{(n)} \end{pmatrix} = T_{n,n+1} \begin{pmatrix} A^{(n+1)} \\ B^{(n+1)} \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

où les éléments de la matrice $T_{n,n+1}$ sont :

$$T_{11} = \frac{\phi^{(n+1)}}{\phi^n} \left(\frac{\kappa^{(n+1)}}{\kappa^n} + 2 \frac{1 - \frac{\kappa^{(n+1)}}{\kappa^n}}{3 + 12k^n r_n^{-2}} \right), \quad (4.52)$$

$$T_{12} = 2 \frac{\phi^{(n+1)}}{\phi^n} r_n^{-3} \left(-\frac{\kappa^{n+1}}{\kappa^n} + \frac{1 + 2 \frac{\kappa^{(n+1)}}{\kappa^n} + 12k^{(n+1)} r_n^{-2}}{3 + 12k^n r_n^{-2}} \right), \quad (4.53)$$

$$T_{21} = \frac{\phi^{(n+1)}}{\phi^n} r_n^3 \left(\frac{1 - \frac{\kappa^{(n+1)}}{\kappa^n}}{3 + 12k^n r_n^{-2}} \right), \quad (4.54)$$

$$T_{22} = \frac{\phi^{(n+1)}}{\phi^n} \left(\frac{1 + 2 \frac{\kappa^{(n+1)}}{\kappa^n} + 12k^{(n+1)} r_n^{-2}}{3 + 12k^n r_n^{-2}} \right). \quad (4.55)$$

Ainsi, on peut, par multiplication des matrices T exprimer le champ de pression dès que l'on connaît la vitesse de filtration U_∞ . Il est évident que l'on peut définir des matrices $T'_{n+1,n}$ qui permettent de faire les calculs par déplacement dans l'autre sens (de n vers $n+1$) suivant :

$$\begin{pmatrix} A^{(n+1)} \\ B^{(n+1)} \end{pmatrix} = T'_{n+1,n} \begin{pmatrix} A^{(n)} \\ B^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

$T'_{n+1,n}$ étant la matrice inverse de $T_{n,n+1}$.

Méthode de la matrice de diffusion S : De la même manière on peut utiliser la matrice de diffusion ou matrice S . Classiquement, lorsqu'on étudie l'interaction d'un diffuseur avec des ondes propagatives, la matrice S relie les ondes sortantes du diffuseur en fonction des ondes entrantes. Dans notre cas, parler d'ondes entrantes et sortantes n'a pas de sens puisque le gradient de pression appliqué étant indépendant du temps est statique. Toutefois pour les champs de pression existants dans deux couches sphériques successives n et $n+1$, on peut considérer formellement que chacune des solutions de l'équation de Laplace correspond à de telles ondes. Ainsi pour les pressions :

$$p^{(n)} = (A^{(n)} r + B^{(n)} r^{-2}) \cos \theta, \quad (4.57)$$

$$p^{(n+1)} = (A^{(n+1)} r + B^{(n+1)} r^{-2}) \cos \theta, \quad (4.58)$$

la matrice $S_{n,n+1}$ est telle que :

$$\begin{pmatrix} B^{(n)} \\ A^{(n+1)} \end{pmatrix} = S_{n,n+1} \begin{pmatrix} A^{(n)} \\ B^{(n+1)} \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Les éléments de la matrice sont calculés à partir des conditions aux limites à l'interface $r = r_{n+1}$ entre les deux couches.

On en déduit ainsi :

$$S_{n,n+1} = \frac{1}{\kappa^{(n+1)} + 2\kappa^{(n)}} \begin{pmatrix} (\kappa^{(n+1)} - \kappa^{(n)})r_{n+1}^3 & 3\kappa^{(n+1)} \\ 3\kappa^{(n)} & 2(\kappa^{(n+1)} - \kappa^{(n)})r_{n+1}^{-3} \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

À partir de cette définition, on peut calculer la matrice diffusion d'un nombre quelconque de couches consécutives. Par exemple pour les trois couches n , $n+1$ et $n+2$, la matrice S reliant les amplitudes de la pression dans les couches n et $n+1$

$$\begin{pmatrix} B^{(n)} \\ A^{(n+2)} \end{pmatrix} = S_{n,n+2} \begin{pmatrix} A^{(n)} \\ B^{(n+2)} \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

s'obtient en appliquant le produit de Redheffer :

$$S_{n,n+2} = S_{n,n+1} * S_{n+1,n+2}. \quad (4.62)$$

Inclusion inhomogène sphérique continue

Champ intérieur à l'inclusion Le passage de la variation discontinue à la variation continue de la perméabilité s'obtient à partir des résultats précédents dans lesquels on pose :

$$A^{(n)} = A(r + dr), \quad A^{(n+1)} = A(r), \quad (4.63)$$

$$\kappa^{(n)} = \kappa(r + dr), \quad \kappa^{(n+1)} = \kappa(r). \quad (4.64)$$

L'équation (4.2.3) conduit alors aux deux équations différentielles couplées :

$$3\kappa(r)A'(r) = -A(r)\kappa'(r) - 2\kappa'(r)r^{-3}B(r), \quad (4.65)$$

$$3\kappa(r)B'(r) = -A(r)\kappa'(r)r^3 - 2\kappa'(r)B(r). \quad (4.66)$$

Ces deux équations conduisent à leur tour à :

$$B'(r) = r^3 A'(r). \quad (4.67)$$

En éliminant $B(r)$ dans (4.65), on trouve le système :

$$\left(\frac{r^3 \kappa^2 A'}{\kappa'} \right)' + r^2 \kappa A = 0, \quad (4.68)$$

$$\left(\frac{\kappa^2 B'}{r^3 \kappa'} \right)' - \frac{2\kappa}{r^4} B = 0. \quad (4.69)$$

Champ extérieur à l'inclusion Soit $-\nabla p^s$ le champ défini par le gradient de la pression diffusée par l'hétérogénéité, alors :

$$\nabla p^s = \mathbf{E} + \nabla p, \quad (4.70)$$

où \mathbf{E} et ∇p sont les champs dans le milieu, en absence et en présence de l'inclusion supposée sphérique. L'incompressibilité du fluide caractérisée par la condition :

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \nabla p) = 0, \quad (4.71)$$

conduit à l'équation :

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \nabla p^s) = (\nabla \boldsymbol{\kappa}) \mathbf{E} = E \kappa' \cos \theta. \quad (4.72)$$

L'amplitude $f_s(r)$ de la pression diffusée :

$$p^s(\mathbf{r}) = f_s(r) \cos \theta, \quad (4.73)$$

obéit à l'équation :

$$\left(\boldsymbol{\kappa}(r) r^2 f_s'(r) \right)' - 2 \boldsymbol{\kappa} f_s(r) = r^2 E \kappa'(r), \quad (4.74)$$

avec $\kappa'(r) = 0$ pour $r > a$.

À l'extérieur de la sphère $p^s(\mathbf{r}) = B^{(0)} r^{-2} \cos \theta$. La continuité de la pression en $r = a$ impose que :

$$B^{(0)} = a^2 f_s(a). \quad (4.75)$$

On obtient alors :

$$f_s(r) = (E - A(r))r + r^{-2} B(r). \quad (4.76)$$

Inclusion ellipsoïdale stratifiée

Les résultats développés dans le cas de l'inclusion sphérique inhomogène l'ont été dans le cadre d'une variation radiale de la perméabilité, c'est à dire le long d'une direction perpendiculaire à la surface latérale de l'inclusion. Pour généraliser ces résultats au cas de l'inclusion ellipsoïdale, on doit se restreindre à une inhomogénéité du même type. On s'intéresse donc à un ellipsoïde dont la perméabilité varie en fonction de la coordonnée ξ , c'est à dire perpendiculairement à sa surface $\xi = cste$. Cette condition impose qu'à l'intérieur de l'ellipsoïde les strates sont limitées par des surfaces ellipsoïdales ayant les mêmes foyers que la surface $\xi = \xi_1$.

Dans ce cas, les demi axes a_k , b_k et c_k de ces ellipsoïdes sont tels que

$$a^2 - a_k^2 = b^2 - b_k^2 = c^2 - c_k^2. \quad (4.77)$$

Considérons une inclusion poreuse de forme ellipsoïdale dont la perméabilité est stratifiée, c'est à dire constante par morceaux. Les couches de perméabilité constante sont limitées par des surfaces confocales $\xi = \xi_k$ dont les demi axes obéissent à (4.77). Elles sont numérotées de 1 jusqu'à N de l'extérieur vers l'intérieur. Ainsi les strates n et $n+1$ sont séparées par la surface $\xi = \xi_{n+1}$

Dans chacune de ces strates, la pression est solution de l'équation de Laplace :

$$p^{(j)}(\mathbf{r}) = p(x) \left[A^{(j)} - \frac{B^{(j)}}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\sigma}{((\sigma + a^2)R^{(j)}(\sigma))} \right], \quad (4.78)$$

où $R^{(j)}(\sigma)$ est :

$$R^{(j)}(\sigma) = (a_j^2 + \sigma)(b_j^2 + \sigma)(c_j^2 + \sigma). \quad (4.79)$$

Dans les couches $\#n$ et $\#n + 1$, les solutions des équations de Laplace sont alors :

$$p^{(n)}(\mathbf{r}) = p(x) \left[A^{(n)} - \frac{B^{(n)}}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\sigma}{((\sigma + a^2)R^{(n)}(\sigma))} \right], \quad (4.80)$$

$$p^{(n+1)}(\mathbf{r}) = p(x) \left[A^{(n+1)} - \frac{B^{(n+1)}}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\sigma}{((\sigma + a^2)R^{(n+1)}(\sigma))} \right]. \quad (4.81)$$

À la surface $\xi = \xi_{n+1}$ elles doivent vérifier les conditions aux limites qui sont la conservation du débit et la continuité de la composante $\tau_{\xi\xi}$ appliquée sur le fluide. Ces deux équations permettent d'écrire la relation matricielle qui lie les couples d'amplitudes $(A^{(n)}, B^{(n)})$ et $(A^{(n+1)}, B^{(n+1)})$.

1. conservation du débit en $\xi = \xi_{n+1}$:

$$\phi^{(n)} \frac{1}{h_{(n)}} \frac{\partial p^{(n)}}{\partial \xi} = \phi^{(n+1)} \frac{1}{h_{(n+1)}} \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial \xi}, \quad (4.82)$$

2. continuité de la composante $\tau_{\xi\xi}$ en $\xi = \xi_{n+1}$:

$$\phi^{(n)} \left(-p^{(n)} + 2\eta \frac{\partial v_{\xi}^{(n)}}{h_{\xi(n)} \partial \xi} \right) = \phi^{(n+1)} \left(-p^{(n+1)} + 2\eta \frac{\partial v_{\xi}^{(n+1)}}{h_{\xi(n+1)} \partial \xi} \right). \quad (4.83)$$

Comme on l'a vu pour l'inclusion sphérique, le terme $\partial v_{\xi} / \partial \xi$ est négligeable. Il n'apparaît donc pas dans nos calculs.

Ces deux dernières équations (4.82) et (4.83) s'écrivent encore :

$$\phi^{(n)} \kappa^{(n)} \frac{1}{h_{(n)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sqrt{\xi + a_n^2} \left(A^{(n)} - \frac{B^{(n)}}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\sigma}{(\sigma + a_n^2) R_n(\sigma)} \right) \right] \quad (4.84)$$

$$= \phi^{(n+1)} \kappa^{(n+1)} \frac{1}{h_{(n+1)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sqrt{\xi + a_{n+1}^2} \left(A^{(n+1)} - \frac{B^{(n+1)}}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\sigma}{(\sigma + a_{n+1}^2) R_{n+1}(\sigma)} \right) \right],$$

$$\phi^{(n)} \left(A^{(n)} - \frac{B^{(n)}}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\sigma}{((\sigma + a^2)R^{(n)}(\sigma))} \right) \quad (4.85)$$

$$= \phi^{(n+1)} \left(A^{(n+1)} - \frac{B^{(n+1)}}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\sigma}{((\sigma + a^2)R^{(n+1)}(\sigma))} \right).$$

Matrice de transfert On obtient alors la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} A^{(n)} \\ B^{(n)} \end{pmatrix} = T_{n,n+1} \begin{pmatrix} A^{(n+1)} \\ B^{(n+1)} \end{pmatrix}, \quad (4.86)$$

où $T_{n,n+1}$ est :

$$T_{n,n+1} = \frac{1}{\kappa^{(n)}} \begin{pmatrix} \kappa^{(n)} + N_{x,n+1}(\kappa^{(n+1)} - \kappa^{(n)}) & \frac{N_{x,n+1}(1-N_{x,n+1})}{a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1}}(\kappa^{(n+1)} - \kappa^{(n)}) \\ a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1}(\kappa^{(n+1)} - \kappa^{(n)}) & \kappa^{(n+1)} + N_{x,n+1}(\kappa^{(n)} - \kappa^{(n+1)}) \end{pmatrix}. \quad (4.87)$$

Matrice diffusion Comme pour l'inclusion sphérique stratifiée, on peut aussi relier les amplitudes des champs "entrants" et "sortants" à l'aide de la matrice diffusion :

$$\begin{pmatrix} B^{(n)} \\ A^{(n+1)} \end{pmatrix} = S_{n,n+1} \begin{pmatrix} A^{(n)} \\ B^{(n+1)} \end{pmatrix}, \quad (4.88)$$

avec :

$$S_{n,n+1} = \frac{1}{\kappa^{(n)} + N_{x,n+1}(\kappa^{(n+1)} - \kappa^{(n)})} \begin{pmatrix} (\kappa^{(n+1)} - \kappa^{(n)})a_{n+1} & \kappa^{(n+1)} \\ \kappa^{(n)} & N_{x,n+1}(1 - N_{x,n+1})(\kappa^{(n+1)} - \kappa^{(n)})a_{n+1}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

Moment dipolaire de l'inclusion Lorsqu'on est intéressé seulement par le champ "sortant", le diffuseur peut être remplacé par un dipôle équivalent anisotrope. Loin du diffuseur, la perturbation se comporte comme le champ d'un dipôle. Lorsque r est grand devant les axes de l'ellipsoïde, ($r \gg a, b, c$), ξ est de l'ordre de r^2 :

$$\xi \simeq r^2. \quad (4.90)$$

Le terme sortant est alors :

$$\frac{B_0}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\sigma}{(\sigma + a^2)R(\sigma)} \simeq \frac{B_0}{2} \int_{r^2}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{5/2}} = \frac{B_0}{3r^3}. \quad (4.91)$$

On en déduit que la composante p_x du moment dipolaire est alors :

$$p_x = \frac{4\pi\kappa^{(e)}B_0}{3}E. \quad (4.92)$$

Inclusion ellipsoïdale à perméabilité continuellement variable

Dans cette partie, on suppose que la perméabilité n'est fonction que de la variable ξ : $\kappa(\mathbf{r}) = \kappa(\xi)$. De ce fait, les domaines dans lesquels ce paramètre est supposé constant sont des ellipsoïdes confocaux.

Considérons une inclusion ellipsoïdale poreuse de perméabilité $\kappa = \kappa(\xi)$ soumise à un gradient de pression dirigé suivant l'axe Ox dit "champ incident". Le champ $\mathbf{E} - \nabla p$ dans lequel baigne cette inclusion est la somme du champ "incident" \mathbf{E} et du champ diffusé $-\nabla p_d$.

$$-\nabla p = \mathbf{E} - \nabla p_d. \quad (4.93)$$

L'incompressibilité du fluide saturant conduit à l'équation :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \left(-\kappa(\mathbf{r}) \nabla p(\mathbf{r}) \right) = 0, \quad (4.94)$$

soit encore :

$$\nabla \cdot \left(\kappa(\xi) \nabla p_d(\mathbf{r}) \right) = \nabla \kappa(\xi) \cdot \mathbf{E} \quad (4.95)$$

$$= E \mathbf{e}_x \cdot \nabla \kappa(\xi), \quad (4.96)$$

où \mathbf{e}_x est le vecteur unitaire de l'axe Ox .

Comme on l'a vu plus haut, la pression diffusée ne dépend que de ξ :

$$p_d(\mathbf{r}) = x f_d(\xi). \quad (4.97)$$

En reportant dans l'équation (4.96), on trouve l'équation différentielle satisfaite par la fonction $f(\xi)$.

Calcul du second membre de (4.96)

$$E \mathbf{e}_x \cdot \nabla \kappa(\xi) = \frac{1}{h_\xi} E \kappa'(\xi) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi. \quad (4.98)$$

Or le produit scalaire $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi$ vaut

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi = \frac{1}{h_\xi} \nabla x, \quad (4.99)$$

$$= \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (4.100)$$

$$= \frac{1}{h_\xi} \frac{x}{2(\xi + a^2)}, \quad (4.101)$$

D'où finalement :

$$E \mathbf{e}_x \cdot \nabla \kappa(\xi) = \frac{x}{h_\xi^2} \frac{E \kappa'(\xi)}{2(\xi + a^2)}. \quad (4.102)$$

Calcul du premier membre de (4.96)

$$\nabla \cdot \left(\kappa(\xi) \nabla p_d(\mathbf{r}) \right) = \nabla \kappa(\xi) \cdot \nabla p_d(\mathbf{r}) + \kappa(\xi) \nabla^2 p_d(\mathbf{r}). \quad (4.103)$$

Or, on a

$$\nabla\kappa(\xi) \cdot \nabla p_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{h_\xi^2} \kappa'(\xi) \frac{\partial(x f_d(\xi))}{\partial \xi}, \quad (4.104)$$

$$= \frac{1}{h_\xi^2} \kappa'(\xi) \left[f'(\xi) + \frac{f_d(\xi)}{2(\xi + a^2)} \right], \quad (4.105)$$

d'où finalement, compte tenu de (4.103), (4.105) et (4.102) :

$$\kappa(\xi) \nabla^2 p_d = \frac{\kappa(\xi)}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi} \frac{\partial p_d}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta} \frac{\partial p_d}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta} \frac{\partial p_d}{\partial \zeta} \right) \right]. \quad (4.106)$$

L'équation reliant la fonction $f(\xi)$ aux variations de la perméabilité est :

$$2(\xi + a^2) \kappa(\xi) f_d''(\xi) + \left[3 + \frac{\xi + a^2}{\xi + b^2} + \frac{\xi + a^2}{\xi + c^2} \right] \kappa(\xi) f'(\xi) + 2(\xi + a^2) \kappa'(\xi) f_d'(\xi) + \kappa'(\xi) f_d(\xi) = \kappa'(\xi) E. \quad (4.107)$$

ou encore :

$$[\kappa(\xi)(\xi + a^2) R(\xi) f_d'(\xi)]' + \kappa'(\xi) \frac{R(\xi)}{2} f_d(\xi) = \kappa'(\xi) \frac{R(\xi)}{2} E. \quad (4.108)$$

On remarque que pour $\kappa(\xi) = cte$, c'est-à-dire $\kappa'(\xi) = 0$, alors on retrouve le cas de l'inclusion homogène. De même lorsque $a = b = c$, on obtient les résultats de la sphère. Dès que l'on connaît la perméabilité $\kappa(\xi)$, on retrouve la fonction $f_d(\xi)$ sous la forme d'une série. Pour déterminer la constante arbitraire, on raccorde les solutions extérieure et intérieure à la frontière $\xi = 0$.

4.2.4 Modèle de défaut anisotrope

Souvent, les défauts présents dans des milieux poreux sont anisotropes, c'est-à-dire que leurs paramètres physiques ne sont pas des quantités scalaires mais des tenseurs. Ainsi, lorsque la perméabilité est anisotrope, la loi de Darcy est :

$$v_i = -\frac{k_{ij}}{\eta} \partial_j p \quad \text{où} \quad \partial_j p = \frac{\partial p}{\partial x_j}. \quad (4.109)$$

La perméabilité est donc définie par 9 composants k_{ij} , c'est-à-dire qu'elle a des valeurs différentes dans différentes directions de l'espace. Dans un espace 3-D, il existe trois valeurs de perméabilité (les perméabilités principales) dans des directions perpendiculaires qui sont les directions principales du tenseur symétrique k_{ij} . Dans le système de coordonnées défini par ces directions, le tenseur est diagonal :

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}. \quad (4.110)$$

Dans ce cas, les vecteurs de la vitesse du fluide et de gradient de pression ne sont plus colinéaires, sauf dans le cas particulier où le gradient est aligné avec l'une des directions propres. On comprend alors que de tels défauts perturbent considérablement la vitesse de filtration. L'étude des effets d'une inclusion anisotrope dans un milieu poreux explore trois configurations :

1. Le milieu hôte est isotrope et le défaut est anisotrope,
2. Le milieu hôte est anisotrope et le défaut est isotrope,
3. Le milieu hôte et le défaut sont anisotropes.

inclusion anisotrope dans un milieu isotrope

Dans ce cas, la pression externe vérifie l'équation de Laplace alors que la pression interne vérifie l'équation :

$$\kappa_1^{(i)} \frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial x^2} + \kappa_2^{(i)} \frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial y^2} + \kappa_3^{(i)} \frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial z^2} = 0, \quad (4.111)$$

qui peut être transformée en une équation de Laplace en utilisant la transformation :

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sqrt{\kappa_i^{(i)}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (4.112)$$

alors

$$\frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial^2 x'} + \frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial^2 y'} + \frac{\partial^2 p^{(i)}}{\partial^2 z'} = 0. \quad (4.113)$$

Les solutions $p^{(i)}$ et $p^{(o)}$ sont respectivement :

$$\begin{aligned} p^{(i)}(r', \theta', \varphi') &= \sum_{m,n} A_{m,n}^{(i)} r'^m P_n^m(\cos \theta') \cos(m\varphi') \\ &+ \sum_{m,n} B_{m,n}^{(i)} r'^m P_n^m(\cos \theta') \sin(m\varphi'), \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned} p^{(o)}(r', \theta', \varphi') &= \sum_{m,n} \left(A_{m,n}^{(o)} r'^m + \frac{B_{m,n}^{(o)}}{r'^{m+1}} \right) P_n^m(\cos \theta') \cos(m\varphi') \\ &+ \sum_{m,n} \left(C_{m,n}^{(o)} r'^m + \frac{D_{m,n}^{(o)}}{r'^{m+1}} \right) P_n^m(\cos \theta') \sin(m\varphi'). \end{aligned} \quad (4.115)$$

dans la relation (4.114) les termes finis en $r' = 0$ sont conservés. Ici, les coordonnées sphériques (r', θ', φ') sont associées aux coordonnées cartésiennes (x', y', z') . elles sont liées aux coordonnées (r, θ, φ) associées aux relations (x, y, z) données en annexe(B).

Les amplitudes $A_{m,n}^{(o)}$, $B_{m,n}^{(o)}$, $C_{m,n}^{(o)}$ et $D_{m,n}^{(o)}$, sont déterminées à partir des conditions aux limites $r = a$ et lorsque $r \rightarrow \infty$.

Lorsque $r \rightarrow \infty$ la pression extérieure est telle que :

$$p^{(o)} \rightarrow E_\infty r \cos \beta, \quad E_\infty = -\frac{U_\infty}{\kappa^{(o)}}, \quad (4.116)$$

où β est l'angle entre le vecteur \mathbf{E}_∞ et la direction d'observation $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$:

$$\cos \beta = \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta \cos \theta_0. \quad (4.117)$$

L'expression (4.116) montre que, dans le développement de (4.115), les seuls termes r^n sont ceux pour lesquels $n = 1$. Tenant compte des relations : $P_1^0(\cos \theta) = P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ et $P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$, on obtient :

$$p^{(o)}(r, \theta, \varphi) = A_{0,1}^{(o)} r \cos \theta + A_{1,1}^{(o)} r \sin \theta \cos \varphi + C_{1,1}^{(o)} r \sin \theta \sin \varphi \\ + \sum_{m,n} \frac{B_{m,n}^{(o)}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) + \sum_{m,n} \frac{D_{m,n}^{(o)}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi). \quad (4.118)$$

En identifiant ces résultats avec l'équation (4.116) et en considérant l'équation (4.117), on trouve :

$$A_{0,1}^{(o)} = E_\infty \cos \theta_0, \quad (4.119)$$

$$A_{0,0}^{(o)} = E_\infty \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \quad (4.120)$$

$$C_{1,1}^{(o)} = E_\infty \sin \theta_0 \sin \varphi_0. \quad (4.121)$$

Les conditions aux limites en $r = a$ (continuité de la composante radiale de la contrainte τ_{rr} et la conservation du flux de fluide à la surface du défaut), sont :

$$p^{(o)}|_{r=a} = p^{(i)}|_{r=a} \quad (4.122)$$

$$\kappa^{(o)} \frac{\partial p^{(o)}}{\partial r} |_{r=a} = \left(\kappa_{11}^{(i)} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial r} + \kappa_{12}^{(i)} \frac{\partial p^{(i)}}{r \partial \theta} + \kappa_{13}^{(i)} \frac{\partial p^{(i)}}{r \sin \theta \partial \varphi} \right) |_{r=a}. \quad (4.123)$$

Dans ces équations, les $\kappa_{nm}^{(i)}$ sont les composantes du tenseur $\kappa^{(i)}$ dans le système des coordonnées sphériques données dans l'annexe (B.31). Ces relations conduisent aux expressions de la pression :

$$p^{(i)}(r, \theta, \varphi) = \frac{3A}{2\kappa^{(o)} + \kappa_3^{(i)}} r \cos \theta + \frac{3B}{2\kappa^{(o)} + \kappa_1^{(i)}} r \sin \theta \cos \varphi \\ + \frac{3D}{2\kappa^{(o)} + \kappa_2^{(i)}} r \sin \theta \sin \varphi, \quad (4.124)$$

$$p^{(o)}(r, \theta, \varphi) = Ar \cos \theta + Br \sin \theta \cos \varphi + Dr \sin \theta \sin \varphi \\ + \frac{Aa^3}{r^2} \frac{\kappa^{(o)} - \kappa_3^{(i)}}{2\kappa^{(o)} + \kappa_3^{(i)}} \cos \theta + \frac{Ba^3}{r^2} \frac{\kappa^{(o)} - \kappa_1^{(i)}}{2\kappa^{(o)} + \kappa_1^{(i)}} \sin \theta \cos \varphi \\ + \frac{Da^3}{r^2} \frac{\kappa^{(o)} - \kappa_2^{(i)}}{2\kappa^{(o)} + \kappa_2^{(i)}} \sin \theta \sin \varphi, \quad (4.125)$$

avec

$$A = E_\infty \kappa^{(o)} \cos \theta_0, \quad B = E_\infty \kappa^{(o)} \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \quad D = E_\infty \kappa^{(o)} \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \quad (4.126)$$

La pression $p^{(o)}$ (Eq.4.125) est donc la superposition du champ de pression provenant du mouvement du fluide et des champs des trois dipôles orthogonaux alignés selon les directions principales de la sphère anisotrope.

Lorsque \mathbf{E}_∞ est orienté selon l'axe Oz et si $\varphi_0 = 0, \theta_0 = 0$ et $\kappa_1^{(i)} = \kappa_2^{(i)} = \kappa_3^{(i)} = \kappa^{(i)}$ on obtient les pressions extérieure et intérieure d'une inclusion sphérique isotrope (Eq.4.23) et (Eq.4.24).

De plus, d'après les relations (Eq.4.124) et (Eq.4.125) il est possible de trouver les directions de gradient de pression et des champs de vitesse à l'intérieur d'un défaut.

L'équation (4.124) montre que la pression interne est la somme de trois contributions résultantes des composantes du gradient de la pression incidente. En effet, si α et β sont les angles entre $\mathbf{E}_\infty = -\nabla p$ et Ox et Oy respectivement, on note :

$$p^{(i)}(r, \theta, \varphi) = \frac{3A}{2\kappa^{(e)} + \kappa_3} r \cos \theta + \frac{3B}{2\kappa^{(e)} + \kappa_1} r \cos \alpha + \frac{3D}{2\kappa^{(e)} + \kappa_2} r \cos \beta. \quad (4.127)$$

Cette expression est la contribution des trois dipôles induits par le gradient de pression le long des axes de l'inclusion ellipsoïdale. D'après ce résultat on montre que $\mathbf{E} = -\nabla p^{(i)}$ est un vecteur constant :

$$\mathbf{E} = -\frac{3B}{2\kappa^{(e)} + \kappa_1} \mathbf{i} - \frac{3D}{2\kappa^{(e)} + \kappa_2} \mathbf{j} - \frac{3A}{2\kappa^{(e)} + \kappa_3} \mathbf{k}. \quad (4.128)$$

Ceci est la généralisation au cas 3D de celui obtenu pour l'inclusion sphérique plongée dans un gradient de pression aligné avec l'axe (Eq.4.23).

D'après l'équation (4.128), Le produit intérieur de \mathbf{E} et le champ incident \mathbf{E}_∞ , donnent l'angle γ entre ces vecteurs :

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{E}_\infty \cdot \mathbf{E}}{\|\mathbf{E}_\infty\| \|\mathbf{E}\|}, \quad (4.129)$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0}{2\kappa^{(e)} + \kappa_2^{(i)}} + \frac{\sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0}{2\kappa^{(e)} + \kappa_1^{(i)}} + \frac{\cos^2 \theta_0}{2\kappa^{(e)} + \kappa_3^{(i)}}}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0}{(2\kappa^{(e)} + \kappa_2^{(i)})^2} + \frac{\sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0}{(2\kappa^{(e)} + \kappa_1^{(i)})^2} + \frac{\cos^2 \theta_0}{(2\kappa^{(e)} + \kappa_3^{(i)})^2}}}. \quad (4.130)$$

De la même manière, on obtient l'angle (δ) entre la vitesse $\mathbf{v}^{(i)}$ et \mathbf{E}_∞ :

$$\cos \delta = \frac{\mathbf{E}_\infty \cdot \mathbf{v}^{(i)}}{\|\mathbf{E}_\infty\| \|\mathbf{v}^{(i)}\|}, \quad (4.131)$$

$$\cos \delta = \frac{\frac{\sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 \kappa_1^{(i)}}{2\kappa^{(e)} + \kappa_2^{(i)}} + \frac{\sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 \kappa_2^{(i)}}{2\kappa^{(e)} + \kappa_1^{(i)}} + \frac{\cos^2 \theta_0 \kappa_3^{(i)}}{2\kappa^{(e)} + \kappa_2^{(i)}}}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 \kappa_1^{(i)}}{(2\kappa^{(e)} + \kappa_2^{(i)})^2} + \frac{\sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 \kappa_2^{(i)}}{(2\kappa^{(e)} + \kappa_1^{(i)})^2} + \frac{\cos^2 \theta_0 \kappa_3^{(i)}}{(2\kappa^{(e)} + \kappa_2^{(i)})^2}}}. \quad (4.132)$$

Défaut isotrope dans un milieu poreux anisotrope

Considérons une sphère de rayon r de mobilité $\kappa^{(i)}$ incluse dans un support hôte avec sa propre mobilité $\kappa_{ij}^{(o)}$. L'incompressibilité du fluide de saturation impose que la pression extérieure soit une solution à l'équation :

$$\partial_i(\kappa_{ij}^{(o)} \partial_j p) = 0. \quad (4.133)$$

Cette équation peut être transformée en une équation de Laplace par la transformation linéaire des coordonnées :

$$x = \sqrt{\kappa_x^{(o)}} x', \quad y = \sqrt{\kappa_y^{(o)}} y', \quad z = \sqrt{\kappa_z^{(o)}} z' \quad (4.134)$$

où les $\sqrt{\kappa_n^{(o)}}$ sont les valeurs principales du tenseur $\kappa^{(o)}$ le long des directions principales. Selon cette transformation, la sphère devient un ellipsoïde avec des demi-axes : $a = r/\sqrt{\kappa_x^{(o)}}$, $b = r/\sqrt{\kappa_y^{(o)}}$ et $c = r/\sqrt{\kappa_z^{(o)}}$ et sa mobilité devient un tenseur dont les valeurs le long de ses axes sont données par :

$$\kappa^{(i)'} = \begin{pmatrix} \kappa^{(i)}/\kappa_x^{(o)} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa^{(i)}/\kappa_y^{(o)} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^{(i)}/\kappa_z^{(o)} \end{pmatrix}. \quad (4.135)$$

Dans le nouveau système de coordonnées, on a :

$$\nabla'_i \nabla'_i p(\mathbf{r}') = 0. \quad (4.136)$$

Dans cette équation ∇'_i sont les composantes de l'opérateur gradient :

$$\nabla'_i = \sqrt{\kappa_i^{(o)}} \nabla_i. \quad (4.137)$$

Étant donné que les directions principales de la perméabilité intérieure $\kappa^{(i)'}$ coïncident avec les axes de l'ellipsoïde, lorsque la direction de l'excitation est (Ox) , le gradient de pression interne est alors :

$$\nabla p^{(i)} = \frac{\kappa_x^{(o)}}{\kappa_x^{(o)} + N_x(\kappa^{(i)} - \kappa_x^{(o)})} \nabla p^{(o)}. \quad (4.138)$$

Ce cas est réduit au précédent où le défaut anisotrope se trouve dans un milieu isotrope.

Défaut anisotrope dans un milieu anisotrope

Le milieu hôte et le défaut ont des microstructures anisotropes. Leurs mobilités sont les tenseurs $\kappa_{ij}^{(o)}$ et $\kappa_{ij}^{(i)}$. La vitesse du fluide circulant dans ce système est donnée par les équations

$$v_i^{(o)} = \kappa_{ij}^{(o)} E_j^{(o)}, \quad v_i^{(i)} = \kappa_{ij}^{(i)} E_j^{(i)} \quad (4.139)$$

où $\mathbf{E}^{(o)}$ (resp. $\mathbf{E}^{(i)}$) est le gradient de pression $\mathbf{E}^{(o)} = -\nabla p^{(o)}$ (resp. $\mathbf{E}^{(i)} = -\nabla p^{(i)}$). D'autre part, les valeurs propres du tenseur $\kappa_{ij}^{(o)}$ sont désignées par $\kappa_i^{(o)}$ $i = 1, 2, 3$. Sans restreindre la généralité du problème, (Eq. 4.139) peut être écrite comme suit :

$$v_i^{(o)} = -\kappa_i^{(o)} \frac{\partial p^{(o)}}{\partial x_i}, \quad (4.140)$$

où $v_i^{(o)}$ et $\frac{\partial p^{(o)}}{\partial x_i}$ sont les composantes de la vitesse et du gradient de pression le long des directions principales de $\boldsymbol{\kappa}^{(o)}$.

L'incompressibilité du fluide impose la condition :

$$\nabla_i v_i^{(o)} = 0, \quad (4.141)$$

ou

$$\kappa_1^{(o)} \frac{\partial^2 p^{(o)}}{\partial x_1^2} + \kappa_2^{(o)} \frac{\partial^2 p^{(o)}}{\partial x_2^2} + \kappa_3^{(o)} \frac{\partial^2 p^{(o)}}{\partial x_3^2} = 0. \quad (4.142)$$

Cette équation devient une équation de Laplace avec le changement de variables

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \sqrt{\kappa_i^{(o)}} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (4.143)$$

Cette équation transforme l'environnement externe en un milieu isotrope. La pression intérieure est une solution à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 p^{(o)}}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 p^{(o)}}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2 p^{(o)}}{\partial x_3'^2} = 0. \quad (4.144)$$

Dans le nouveau système de coordonnées, le gradient de pression est donné par :

$$E_i^{(o)'} = \sqrt{\kappa_i^{(o)}} E_i^{(o)}, \quad (4.145)$$

et les composantes du vecteur position \mathbf{r}' sont :

$$r_i' = \left(\kappa_i^{(o)}\right)^{-1/2} r_i. \quad (4.146)$$

En utilisant les relations (4.144) et (4.145), l'incompressibilité du fluide à l'intérieur de l'inclusion

$$\nabla_i \left(\kappa_{ij}^{(i)} E_j^{(i)} \right) = 0. \quad (4.147)$$

implique la nouvelle équation :

$$\nabla_i' \left[\left(\kappa_i^{(o)}\right)^{-1/2} \kappa_{ij}^{(i)} \left(\kappa_j^{(o)}\right)^{-1/2} E_j^{(i)'} \right] = 0. \quad (4.148)$$

La mobilité de l'inclusion définie par :

$$\nabla_i' \left(\kappa_{ij}^{(i)'} E_j^{(o)'} \right) = 0, \quad (4.149)$$

peut être écrite :

$$\kappa_{ij}^{(i)'} = \left(\kappa_i^{(o)} \right)^{-1/2} \kappa_{ij}^{(i)} \left(\kappa_j^{(o)} \right)^{-1/2}. \quad (4.150)$$

La transformation définie par (4.147), transforme la matrice diagonale A , dont les éléments sont les demi-axes (a_1, a_2, a_3) de l'ellipsoïde,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad (4.151)$$

en la matrice A' :

$$A' = \begin{pmatrix} a'_1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_2 & 0 \\ 0 & 0 & a'_3 \end{pmatrix}, \quad (4.152)$$

où

$$a'_i = \left(\kappa_i^{(e)} \right)^{-1/2} a_i \left(\kappa_i^{(e)} \right)^{-1/2}. \quad (4.153)$$

Ainsi, l'opération qui transforme le milieu hôte anisotrope en un milieu isotrope transforme l'inclusion ellipsoïdale de semi-axes (a_1, a_2, a_3) en une autre inclusion ellipsoïdale de demi-axes (a'_1, a'_2, a'_3) et la conductivité hydraulique, donnée par (4.150) et (4.153), respectivement.

Les facteurs dépolarisants de la nouvelle inclusion sont donnés par :

$$N'_i = \frac{\det A'}{2} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{(a'_i + \sigma) \sqrt{\det(A'^2 + \sigma I)}}. \quad (4.154)$$

Ici on obtient de nouveau le cas d'un défaut anisotrope dans un milieu isotrope.

Mobilité hydraulique du milieu hôte dans le nouveau repère Considérons le milieu hôte sans l'inclusion. Sa mobilité hydraulique dans le repère (x, y, z) est $\kappa^{(e)}$. Dans le repère (x', y', z') elle est notée $\kappa'^{(e)}$.

A partir des expressions des vitesses de filtration dans chacun des repères :

$$\mathbf{v} = \kappa^{(e)} \mathbf{E}, \quad \text{et} \quad \mathbf{v}' = \kappa'^{(e)} \mathbf{E}' \quad (4.155)$$

où \mathbf{v}' et \mathbf{E}' sont donnés par

$$\mathbf{v}' = A \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}' = A \mathbf{E} \quad (4.156)$$

où A est la matrice qui transforme le repère (x, y, z) en (x', y', z') . Des relations (4.155) et (4.156), on déduit :

$$\kappa'^{(e)} = A \kappa^{(e)} A^{-1}. \quad (4.157)$$

Défaut inhomogène de forme arbitraire

Lorsque le défaut a une forme quelconque, le problème de la perturbation créée sur la vitesse de filtration n'a pas de solution analytique exacte. Nous donnons ici une formulation générale du problème traité ci-dessus et qui constitue une bonne approximation dans le cas de défauts inhomogènes de forme quelconque.

Soit un milieu poreux d'extension infinie, de perméabilité $\mathbf{k}^{(o)}$ contenant un défaut Ω avec une perméabilité $\mathbf{k}^{(i)}$. Ici $\mathbf{k}^{(o)}$ et $\mathbf{k}^{(i)}$ sont des tenseurs de rang 2, sphériques ou non. Nous supposons que le même fluide sature le système poreux + défaut et on note η sa viscosité. Comme auparavant, les mobilités seront notées $\boldsymbol{\kappa}^{(o),(i)} = \mathbf{k}^{(o),(i)}/\eta$.

La mobilité du système est alors :

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\kappa}^{(o)} + (\boldsymbol{\kappa}^{(i)} - \boldsymbol{\kappa}^{(o)})I_{\Omega}(\mathbf{x}), \quad (4.158)$$

où $I_{\Omega}(\mathbf{x})$ est la fonction caractéristique de l'inclusion Ω :

$$I_{\Omega}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases} \quad (4.159)$$

L'incompressibilité du fluide qui s'écoule dans l'ensemble du système sous l'action du gradient de pression $\mathbf{E} = -\nabla p$ impose que celui-ci obéisse à l'équation :

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa}^{(o)} \mathbf{E}) + \nabla \cdot (I_{\Omega}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\kappa}^{(i)} - \boldsymbol{\kappa}^{(o)}) \mathbf{E}) = 0 \quad (4.160)$$

Soit $G(\mathbf{x})$ la solution (fonction de Green) de l'équation

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa}^{(o)}(\mathbf{x}) \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.161)$$

Par la suite, la solution de l'équation (4.160) est :

$$p(\mathbf{x}) = p_o(\mathbf{x}) + \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla \cdot (I_{\Omega}(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\kappa}^{(i)} - \boldsymbol{\kappa}^{(o)}) \nabla p(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' \quad (4.162)$$

ou alors

$$\nabla p(\mathbf{x}) = \nabla p_o(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (\boldsymbol{\kappa}^{(i)} - \boldsymbol{\kappa}^{(o)}) \nabla p(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (4.163)$$

où p_o est la pression appliquée et $\gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \nabla \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$.

Si $\mathbf{E}_{\infty} = -\nabla p_o$ est un vecteur constant, la solution de (4.160) peut être établie, à condition que le gradient de pression soit constant dans l'inclusion.

Pour un milieu isotrope, la fonction de Green est donnée par :

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\kappa^{(o)}\|\mathbf{x}\|}. \quad (4.164)$$

Ainsi, le gradient de pression est constant dans Ω si :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = - \frac{1}{\kappa^{(o)}} \nabla \nabla H_{\Omega}(\mathbf{x}). \quad (4.165)$$

Dans cette relation, la fonction $H_\Omega(\mathbf{x})$ est la solution à l'équation :

$$\Delta H_\Omega(\mathbf{x}) = I_\Omega(\mathbf{x}), \quad (4.166)$$

donnée par :

$$H_\Omega(\mathbf{x}) = \int_\Omega \frac{d\mathbf{x}'}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (4.167)$$

L'équation (4.163) a donc une solution simple si $H_\Omega(\mathbf{x})$ est une fonction quadratique sur Ω . Comme nous l'avons vu plus haut, c'est le cas pour les inclusions ellipsoïdales. Ainsi, si le gradient de pression est constant à l'infini, et si le milieu hôte est isotrope, alors le gradient de pression est constant dans toute inclusion isotrope ou anisotrope. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \nabla p(\mathbf{x}) = \langle \nabla p(\mathbf{x}) \rangle_\Omega &= \frac{1}{W} \int_\Omega \nabla p(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \mathbf{A}_\Omega(\boldsymbol{\kappa}^{(o)}, \boldsymbol{\kappa}^{(i)}) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (4.168)$$

où

$$\mathbf{A}_\Omega(\boldsymbol{\kappa}^{(e)}, \boldsymbol{\kappa}^{(i)}) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}^{(o)}, \boldsymbol{\kappa}^{(i)}) \right)^{-1}. \quad (4.169)$$

Dans le cas particulier où Ω est une sphère, H_Ω est la solution à l'équation :

$$\nabla \nabla H_\Omega(\mathbf{x}) = -\alpha \mathbf{I} \quad (4.170)$$

où $\alpha = 1/3$ et \mathbf{I} le tenseur unité. Il s'ensuit que $\mathbf{P} = \mathbf{I}/3\kappa^{(o)}$ et que

$$\mathbf{A}_\Omega(\boldsymbol{\kappa}^{(o)}, \boldsymbol{\kappa}^{(i)}) = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{3\kappa^{(o)}} (\boldsymbol{\kappa}^{(i)} - \kappa^{(o)} \mathbf{I}) \right)^{-1} \quad (4.171)$$

Si le milieu hôte et le défaut sont isotropes, alors :

$$\mathbf{A}_\Omega(\boldsymbol{\kappa}^{(o)}, \boldsymbol{\kappa}^{(i)}) = \frac{3\kappa^{(o)}}{\kappa^{(i)} + 2\kappa^{(o)}} \mathbf{I}. \quad (4.172)$$

Ce résultat est en accord avec celui donné par (4.25-Sec.1.2.2)

4.2.5 Polarisabilité hydraulique

Le calcul des champs de vitesse vu précédemment montre que lorsqu'une inclusion poreuse est soumise à un gradient de pression, elle induit un dipôle hydraulique P dont le moment dipolaire est défini par :

$$\mathbf{p} = \int_\Omega (\kappa^{(i)}(\mathbf{r}) - \kappa^{(o)}) \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}) dV. \quad (4.173)$$

Pour une sphère homogène ou un ellipsoïde, lorsque la vitesse de filtration est faible, le gradient de pression interne est constant et proportionnel au gradient de pression externe. Dans ce cas, le moment du dipôle est

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}^{(o)}, \quad (4.174)$$

où α est la susceptibilité qui mesure la capacité de l'inclusion à générer un dipôle sous l'action d'un gradient de pression. Par la suite, α est appelée polarisation hydraulique. Pour une sphère de volume V , nous avons

$$\mathbf{p} = \alpha \left(- \frac{\mathbf{U}_\infty}{\kappa^{(o)}} \right) \quad (4.175)$$

avec :

$$\alpha = 3V \left(\frac{\frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}} - 1}{2 + \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}}} \right). \quad (4.176)$$

Pour l'ellipsoïde, la polarisation hydraulique dépend de la direction du gradient de pression. C'est donc un tenseur dont les valeurs propres le long des directions principales de l'ellipsoïde x, y, z , sont

$$\alpha_i = V \frac{\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)}}{\kappa^{(o)} + N_i(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)})}, \quad i = x, y, z. \quad (4.177)$$

α est ainsi un tenseur diagonal dans le repère des directions propres :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z \end{pmatrix} \quad (4.178)$$

Pour une inclusion ellipsoïdale dont les demi axes sont a, b et c , la polarisabilité hydraulique α_x suivant l'axe Ox est :

$$\alpha_x = \frac{4\pi}{3} abc \kappa^{(e)} \frac{\kappa^{(i)} - \kappa^{(e)}}{\kappa^{(e)} + N_x(\kappa^{(i)} - \kappa^{(e)})}. \quad (4.179)$$

Les polarisabilités hydrauliques le long des axes Oy et Oz s'obtiennent en remplaçant l'indice x par respectivement y et z . Ainsi, le moment dipolaire de l'ellipsoïde s'écrit en coordonnées rectangulaires :

$$\mathbf{P} = - \left(\alpha_x \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \alpha_y \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \alpha_z \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right). \quad (4.180)$$

Les tenseurs α et κ tels qu'ils sont écrits sont définis en coordonnées cartésiennes (x, y, z) , avec par exemple le grand axe suivant l'axe Oz . Lorsqu'on considère un ensemble de défauts ellipsoïdaux dans un poreux, les grands axes sont en général orientés dans des directions différentes. Ceci signifie que pour chaque inclusion, on doit utiliser un système de coordonnées différent. On se retrouve alors avec un ensemble dont chaque inclusion a son grand axe dirigé suivant un axe Oz_i obtenu par rotation θ_i, φ_i du système initial (x, y, z) . Soit Oz la direction du gradient de pression imposée. Pour calculer la conductivité hydraulique et la polarisabilité de cet ensemble, on doit exprimer ces grandeurs dans le nouveau repère.

4.3 Tortuosité induite par les défauts

4.3.1 Généralités (homogénéisation)

Soit \mathcal{V} un volume élémentaire représentatif (VER) dans un milieu poreux. On considère la vitesse de filtration du fluide saturant ce poreux due à un gradient de pression avec la condition

$$p(x)|_{\partial\mathcal{V}} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}. \quad (4.181)$$

Si le VER est homogène, alors $p(x) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}$, et donc $\overline{\nabla p} \equiv \mathbf{E}$.

Pour un VER inhomogène, la pression $p(x)$ fluctue à l'intérieur de son volume, cependant la condition (4.181) conduit à :

$$\overline{\nabla p} = -\mathbf{E}. \quad (4.182)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \overline{\nabla p} &= \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \nabla p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} p dS, \\ &= -\frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ &= -\frac{1}{V} \mathbf{E} \cdot \int_{\mathcal{V}} \nabla \mathbf{x} d\mathbf{x}, \\ &= -\mathbf{E} \quad \text{puisque} \quad \nabla \mathbf{x} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.183)$$

où \mathbf{I} est le tenseur unité de rang 2.

Considérons maintenant la condition d'incompressibilité du fluide saturant

$$\nabla \cdot (\kappa(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x})) = 0. \quad (4.184)$$

avec la condition :

$$p(x)|_{\partial\mathcal{V}} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}. \quad (4.185)$$

Puisque $\kappa(\mathbf{x}) > 0$, le problème (4.184)-(4.185) a une solution unique. La vitesse de filtration moyenne sur le VER est alors :

$$\bar{v} = \overline{\kappa(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x})} = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \kappa(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.186)$$

La linéarité du problème permet d'écrire :

$$\bar{v} = -\boldsymbol{\kappa}^* \mathbf{E} \quad (4.187)$$

où $\boldsymbol{\kappa}^*$ est un tenseur de rang 2 appelé *mobilité effective* dans le volume \mathcal{V} . Dans un milieu statistiquement isotrope, $\boldsymbol{\kappa}^*$ est un tenseur sphérique tel que :

$$\bar{v} = -\kappa^* \mathbf{I} \mathbf{E}, \quad (4.188)$$

où cette fois κ^* est un scalaire.

L'équation (4.187) signifie que l'on peut remplacer le volume \mathcal{V} micro- inhomogène par un milieu homogène de perméabilité κ^* qui, d'un point de vue microscopique réagit de la même manière. Ainsi, si on n'est pas intéressé par le détail des champs microscopiques, mais plutôt par des quantités macroscopiques, on peut homogénéiser \mathcal{V} et le traiter comme une entité homogène ayant la perméabilité κ^* . Le problème consiste alors à évaluer κ^* à partir des informations sur la microstructure de \mathcal{V} .

La perméabilité d'un milieu, qu'il soit anisotrope ou isotrope est affectée par la forme des inclusions qu'il contient. Les directions de la perméabilité sont fortement influencées par l'aspect des inclusions et leur alignement. La forme des défauts est un facteur important : plus la forme de l'inclusion s'éloigne de celle de la sphère, plus la perméabilité effective se rapproche de celle de l'inclusion.

De manière générale, la modélisation des propriétés effectives des matériaux hétérogènes requiert des informations sur les propriétés des constituants et sur leur arrangement géométrique. L'approche classique de l'homogénéisation est basée sur un modèle quasi statique, c'est à dire que les champs sont calculés à partir de l'équation de Laplace. Ceci signifie alors que la réponse individuelle des diffuseurs est instantanée (pas d'effet de retard). Si le modèle est basé sur l'hypothèse que la réaction d'une inclusion est analogue au cas statique et que sa taille est très inférieure à la longueur d'onde du champ exciteur, l'homogénéisation pour les faibles échelles ne pose pas de problème. La perméabilité effective est la valeur de la perméabilité homogène qui émerge dans un grand domaine. Elle résulte d'une opération d'homogénéisation vue comme une moyenne pondérée.

En science des matériaux, de nombreux modèles ont été développés pour prédire leurs caractères macroscopiques. Les principes sur lesquels sont construits ces modèles restent pour la plupart applicables dans bon nombre de domaines : mécanique, électromagnétisme... Cependant, le passage d'une échelle à l'autre ne se fait pas de manière triviale. En effet, les interactions entre les hétérogénéités ne sont pas invariantes par changement d'échelle, ces interactions étant fortement dépendantes de la surface de ces hétérogénéités. Or, la surface spécifique des inclusions change avec l'échelle à laquelle on la voit. De ce fait, les diffuseurs entre lesquels les interactions deviennent importantes nécessitent un traitement particulier.

L'approche de la modélisation des matériaux est basée sur la séparation de l'analyse en deux parties. Dans un premier temps, on voit le matériau comme un ensemble de diffuseurs pris séparément dont on doit calculer les réponses individuelles. Puis, les propriétés globales sont déduites à l'aide de "sommations" prenant en compte les interactions entre constituants.

Dans le modèle de perméabilité effective développé ici, la polarisabilité est une notion essentielle. Les inclusions diffusent des champs multipolaires d'ordre d'autant plus élevé que leurs formes s'éloignent de celle de la sphère. Toutefois, la portée de ces champs diminue avec l'ordre multipolaire, la portée la plus longue étant, mise à part celle du monopôle, celle du dipôle.

Il existe un grand nombre de lois d'homogénéisation qui présentent toutes un intérêt

qui dépend du problème traité. Par exemple les lois de Maxwell Garnett [27] ou de Bruggeman [6, 7] appliquées à une inclusion isolée dans un milieu poreux. On montre par la suite comment les relations obtenues peuvent être généralisées aux cas de plusieurs inclusions différentes. Puis nous donnerons des méthodes adaptées pour déterminer la conductivité hydraulique de milieux continûment inhomogènes.

Pour nous, le problème est d'évaluer la mobilité effective sur la base des données physiques (valeurs des paramètres) et géométriques (positions des composants).

La solution exacte de ce problème est irréaliste, sauf dans des cas particuliers, car cela dépend de tous les détails de la microstructure.

L'étude de la perméabilité effective d'un milieu inhomogène est d'une grande importance dans de nombreuses applications telles que l'hydrologie, le récupération du pétrole, l'industrie chimique, etc. En conséquence, de nombreux travaux sur ce problème ont été réalisés en utilisant les méthodes de théorie des champs, la théorie de la renormalisation, méthodes variationnelles, méthode matrice de transfert, approche non perturbatrice basée sur l'intégrale du chemin Feynman. Pour n'en citer que quelques-uns, nous pouvons nous référer à Prakash and Raja-Sekhar [58] King [45], [46], Drummond et Horgan [20], Dzhabrailov et Meilanov [21], Teodorovich [69], [70], Stepanyants et Teodorovich [66] et Hristopulos et Christakos [35].

4.3.2 Mobilité effective

La loi de Darcy est souvent considérée comme la définition de la mobilité d'un milieu poreux. Elle permet d'introduire d'une façon simple la mobilité effective κ_{eff} à partir de la relation :

$$\langle v \rangle = \kappa_{eff} \langle E \rangle, \quad (4.189)$$

où $E = -\nabla p$ et où $\langle \cdot \rangle$ est la valeur moyenne.

$$(4.190)$$

Les valeurs moyennes de la vitesse de filtration et du gradient de pression sont données par :

$$\langle v \rangle = f \langle \kappa^{(i)} E^{(i)} \rangle + (1-f) \langle \kappa^{(o)} E^{(o)} \rangle, \quad (4.191)$$

$$\langle E \rangle = f \langle E^{(i)} \rangle + (1-f) \langle E^{(o)} \rangle, \quad (4.192)$$

où f est la fraction volumique du défaut. En y introduisant $E^{(i)} = \mathcal{A}E^{(o)}$ on montre que :

$$\kappa_{eff} = \frac{f\mathcal{A}\kappa^{(i)} + (1-f)\kappa^{(o)}}{f\mathcal{A} + (1-f)}. \quad (4.193)$$

Pour un défaut sphérique, $\mathcal{A} = 3\kappa^{(o)}/(2\kappa^{(o)} + \kappa^{(i)})$ donc

$$\kappa_{eff} = \kappa^{(o)} \frac{f \frac{3\kappa^{(i)}}{2\kappa^{(o)} + \kappa^{(i)}} + (1-f)}{f \frac{3\kappa^{(o)}}{2\kappa^{(o)} + \kappa^{(i)}} + (1-f)}. \quad (4.194)$$

Lorsque $f \rightarrow 0$, par la suite $\kappa_{eff} \sim \kappa^{(o)}$, par contre lorsque $f \rightarrow 1$, par la suite $\kappa_{eff} \sim \kappa^{(i)}$. Finalement lorsque $f \ll 1$, on a :

$$\kappa_{eff} \sim \kappa^{(o)} + 3f\kappa^{(o)} \frac{\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)}}{\kappa^{(i)} + 2\kappa^{(o)}} \quad (4.195)$$

Lorsque l'inclusion sphérique est anisotrope, sa mobilité est un tenseur défini par la relation :

$$\langle v_i \rangle = \kappa_{eff,ij} \langle E_j \rangle. \quad (4.196)$$

Ainsi, dans chaque direction principale, on obtient :

$$\langle v_j \rangle = \kappa_{eff,j} \langle E_j \rangle, \quad j = x, y, z, \quad (4.197)$$

où $\kappa_{eff,j}$ sont les valeurs propres de κ_{eff} . En tenant en compte de $E_x^{(i)} = \mathcal{A}_x E_x^{(o)}$ dans l'équation 4.197, on montre que :

$$\kappa_{eff,j} = \frac{f\mathcal{A}_j\kappa^{(i)} + (1-f)\kappa^{(o)}}{f\mathcal{A}_j + (1-f)}, \quad (4.198)$$

avec :

$$\mathcal{A}_j = \frac{3\kappa^{(o)}}{2\kappa^{(o)} + \kappa_j^{(i)}}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.199)$$

Milieux poreux contenant plusieurs inclusions sphériques Lorsque le milieu poreux contient plusieurs inclusions sphériques identiques (même rayon et même perméabilité) il est assimilable à un milieu inhomogène discret. Sa perméabilité effective est donnée par la relation existant entre la vitesse de filtration moyenne du fluide et le champ moyen :

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \kappa_{eff} \langle \mathbf{E} \rangle = \kappa^{(o)} \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{P} \rangle \quad (4.200)$$

où $\langle \mathbf{P} \rangle$ est la densité moyenne de polarisation induite dans le milieu définie par :

$$\langle \mathbf{P} \rangle = n \mathbf{p}_{mix} \quad (4.201)$$

où \mathbf{p}_{mix} est le moment dipolaire de chaque inclusion dans le milieu inhomogène. En effet, en général lorsqu'on est en présence de plusieurs inclusions (n), le champ extérieur est la somme d'un champ $\mathbf{E}^{(o)}$ et des champs créés par les dipôles. Le champ "excitateur" est alors le champ local \mathbf{E}_L :

$$\mathbf{E}_L = \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{3\kappa^{(o)}} \langle \mathbf{P} \rangle \quad (4.202)$$

Ici le facteur 1/3 provient du champ dépolarisant de la sphère. On a alors :

$$\mathbf{p}_{mix} = \alpha \mathbf{E}_L \quad (4.203)$$

et la relation (4.202) devient :

$$\mathbf{E}_L = \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{3\kappa^{(o)}} n \langle \mathbf{P}_{mix} \rangle \quad (4.204)$$

$$= \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{n\alpha}{3\kappa^{(o)}} \mathbf{E}_L \quad (4.205)$$

On en déduit alors la valeur du champs local \mathbf{E}_L :

$$\mathbf{E}_L = \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{1 - \frac{n\alpha}{3\kappa^{(o)}}} \quad (4.206)$$

A partir de la relation de définition (4.202) on trouve :

$$\kappa_{eff} = \kappa^{(o)} + \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\kappa^{(o)}}} \quad (4.207)$$

ou encore

$$\frac{\kappa_{eff} - \kappa^{(o)}}{\kappa_{eff} + 2\kappa^{(o)}} = \frac{n\alpha}{3\kappa^{(o)}} \quad (4.208)$$

L'analogie de cette dernière relation établie dans le cadre des milieux diélectriques est appelée formule de Clausius-Mossotti [52]. On remarque que lorsque le nombre d'inclusions est faible, cette relation devient :

$$\kappa_{eff} \simeq \kappa^{(o)} + n\alpha. \quad (4.209)$$

Cette relation se généralise au cas où le milieu hôte contient N défauts modélisés par des inclusions sphériques de différentes perméabilités $\kappa^{(i,n)}$ et de rayons différents $a^{(i,n)}$. Elle s'écrit alors :

$$\frac{\kappa_{eff} - \kappa^{(o)}}{\kappa_{eff} + 2\kappa^{(o)}} = \sum_{n=1}^N f_n \frac{\kappa^{(i,n)} - \kappa^{(o)}}{\kappa^{(i,n)} + 2\kappa^{(o)}} \quad (4.210)$$

où f_n est la concentration d'inclusions de type n . Cette relation se met encore sous la forme :

$$\kappa_{eff} = \kappa^{(o)} + 3\kappa^{(o)} \frac{\sum_{n=1}^N f_n \frac{\kappa^{(i,n)} - \kappa^{(o)}}{\kappa^{(i,n)} + 2\kappa^{(o)}}}{1 - \sum_{n=1}^N f_n \frac{\kappa^{(i,n)} - \kappa^{(o)}}{\kappa^{(i,n)} + 2\kappa^{(o)}}} \quad (4.211)$$

Milieux poreux contenant plusieurs inclusions ellipsoïdales Soit un milieu de perméabilité $\kappa^{(e)}$ contenant n inclusions ellipsoïdales par unité de volume. On s'intéresse aux deux cas suivants : i) les inclusions sont alignées, ii) elles sont aléatoirement orientées 4.7.

1. Inclusions alignées : dans ce cas leurs axes sont parallèles. Ceci conduit à un milieu anisotrope. Sans restreindre la généralité du problème, on considère que le gradient de pression et que les moments dipolaires sont orientés dans la direction (Ox).

La perméabilité effective est, par définition :

$$\langle \mathbf{v}_x \rangle = \kappa_{eff} \langle \mathbf{E} \rangle = \kappa^{(o)} \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{P} \rangle \quad (4.212)$$

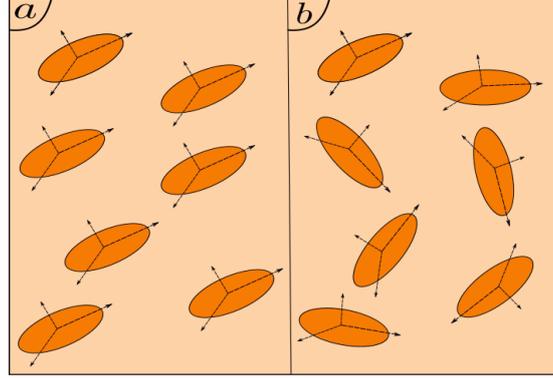


FIGURE 4.7 – Milieu poreux avec plusieurs inclusions ellipsoïdales : a) inclusions alignées ; b) inclusions orientées aléatoirement.

où la polarisation moyenne $\langle \mathbf{P} \rangle$ est la densité de moments dipolaires des dipôles contenus dans l'unité de volume :

$$\langle \mathbf{P} \rangle = n \langle \mathbf{p} \rangle . \quad (4.213)$$

Lorsque le poreux contient plusieurs inclusions, la pression en chacun de ses points n'est pas la pression initiale, c'est à dire celle imposée par les conditions aux limites. En effet chaque inclusion induit une pression "diffusée" qui s'ajoute à la pression initiale. Lorsque les inclusions sont réparties uniformément dans le poreux hôte, en chaque point du poreux le gradient de pression est une grandeur locale notée \mathbf{E}^o telle que le moment dipolaire de chaque inclusion est

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \alpha_x \mathbf{E}^o , \quad (4.214)$$

α_x étant la polarisabilité dans la direction x

$$\alpha_x = \frac{4\pi}{3} B_x^{(o)} , \quad (4.215)$$

et \mathbf{E}^o , le champ local

$$\mathbf{E}_x^o = \langle \mathbf{E} \rangle + N_x \frac{P}{\kappa^{(o)}} . \quad (4.216)$$

On en déduit alors la perméabilité effective dans la direction Ox :

$$\kappa_{eff}^x = \kappa^{(o)} + \frac{n\alpha_x}{1 - \frac{n\alpha_x}{\kappa^{(o)}} N_x} . \quad (4.217)$$

On a des expressions analogues pour les directions Oy et Oz .

2. Inclusions aléatoirement orientées : Si les ellipsoïdes sont orientés aléatoirement, il n'y a alors pas de direction privilégiée. La polarisation moyenne est calculée en moyennant les moments dipolaires dans les différentes directions, d'où finalement :

$$\kappa_{eff}^x = \kappa^{(o)} + \frac{\frac{1}{3} \sum_{i=x,y,z} n\alpha_i}{1 - \frac{1}{3} \sum_{i=x,y,z} N_i \frac{n\alpha_i}{\kappa^{(o)}}} . \quad (4.218)$$

Généralisation du problème d'une inclusion inhomogène Ce problème a déjà été traité dans la section 4.2.3 à partir des lois physiques. Il a permis d'établir que dans les inclusions sphériques et ellipsoïdales, le gradient de pression est constant, impliquant de ce fait que la vitesse de filtration y est elle aussi constante. Nous utilisons ces résultats pour donner une formule approchée pour les propriétés effectives d'un milieu contenant une inclusion de forme quelconque.

Soit un milieu poreux d'extension infinie, de perméabilité $\mathbf{k}^{(o)}$ contenant une hétérogénéité \mathcal{W} ayant la perméabilité $\mathbf{k}^{(i)}$. Ici, $\mathbf{k}^{(o)}$ et $\mathbf{k}^{(i)}$ sont des tenseurs de rang 2, sphériques ou non. On suppose d'autre part que le même fluide de viscosité η sature l'ensemble milieu poreux+ hétérogénéité. Comme précédemment on notera $\boldsymbol{\kappa}^{(e),(i)} = \mathbf{k}^{(e),(i)}/\eta$ la conductivité hydraulique. .

La conductivité de l'ensemble est alors :

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\kappa}^{(o)} + (\boldsymbol{\kappa}^{(i)} - \boldsymbol{\kappa}^{(o)})h_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}), \quad (4.219)$$

où $h_{\mathcal{W}}(\mathbf{x})$ est la fonction caractéristique de l'inclusion \mathcal{W}

$$h_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{W}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.220)$$

La condition d'incompressibilité du fluide qui circule dans l'ensemble sous l'action du gradient de pression $\mathbf{E} = -\nabla p$ impose que ce dernier obéisse à l'équation :

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa}^{(o)}(\mathbf{x})\mathbf{E}) + \nabla \cdot (h_{\mathcal{W}}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\kappa}^{(i)} - \boldsymbol{\kappa}^{(o)})\mathbf{E}) = 0. \quad (4.221)$$

Si l'on note $G(\mathbf{x})$ la fonction de Green de l'équation

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa}^{(o)}(\mathbf{x})\nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.222)$$

alors la pression, solution de l'équation (4.221) est :

$$p(\mathbf{x}) = p_{\infty}(\mathbf{x}) + \int_{\mathcal{W}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla \cdot (h_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\kappa}^{(i)} - \boldsymbol{\kappa}^{(o)})\nabla p(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}', \quad (4.223)$$

ou encore

$$\nabla p(\mathbf{x}) = \nabla p_{\infty}(\mathbf{x}) + \int_{\mathcal{W}} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}')(\boldsymbol{\kappa}^{(i)} - \boldsymbol{\kappa}^{(o)})\nabla p(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (4.224)$$

où $\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \nabla \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Si $\mathbf{E}_{\infty} = -\nabla p_{\infty}$ est un vecteur constant, la solution de l'équation (4.221) peut être établie, à condition que le gradient de pression soit constant dans l'inclusion.

Pour un milieu isotrope, la fonction de Green s'écrit :

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\kappa^{(o)}\|\mathbf{x}\|}. \quad (4.225)$$

Ainsi, le gradient de pression est constant si

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = - \int_{\mathcal{W}} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = -\frac{1}{\kappa^{(o)}} \nabla \nabla H_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}), \quad (4.226)$$

est constant dans \mathcal{W} .

Dans cette relation $H_{\mathcal{W}}(\mathbf{x})$ est la solution de l'équation :

$$\Delta H_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) = h_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}), \quad (4.227)$$

soit :

$$H_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{W}} \frac{d\mathbf{x}'}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (4.228)$$

L'équation (4.224) a donc une solution simple si $H_{\mathcal{W}}(\mathbf{x})$ est une fonction quadratique sur \mathcal{W} . Comme on l'a vu plus haut, c'est le cas pour les inclusions ellipsoïdales. Donc, si le gradient de pression est constant à l'infini, et si le milieu hôte est isotrope, alors le gradient de pression est constant dans toute inclusion ellipsoïdale isotrope ou anisotrope. On a alors :

$$\begin{aligned} \nabla p(\mathbf{x}) = \langle \nabla p(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{W}} &= \frac{1}{W} \int_{\mathcal{W}} \nabla p(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \mathbf{A}_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{\kappa}^{(o)}, \boldsymbol{\kappa}^{(i)}) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (4.229)$$

avec :

$$\mathbf{A}_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{\kappa}^{(o)}, \boldsymbol{\kappa}^{(i)}) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{P}(\boldsymbol{\kappa}^{(o)}, \boldsymbol{\kappa}^{(i)}) \right)^{-1}. \quad (4.230)$$

Cas particuliers

1. \mathcal{W} est une sphère. Dans ce cas le potentiel $H_{\mathcal{W}}(\mathbf{x})$ a la symétrie sphérique et vérifie l'équation :

$$\nabla \nabla H_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) = -\alpha \mathbf{I}, \quad (4.231)$$

avec $\alpha = 1/3$. Il en découle que $\mathbf{P} = \mathbf{I}/3\kappa^{(o)}$ et que :

$$\mathbf{A}_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{\kappa}^{(o)}, \boldsymbol{\kappa}^{(i)}) = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{3\kappa^{(o)}} (\boldsymbol{\kappa}^{(i)} - \kappa^{(o)} \mathbf{I}) \right)^{-1}. \quad (4.232)$$

Si le milieu hôte et l'inhomogénéité sont isotropes, alors :

$$\mathbf{A}_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{\kappa}^{(o)}, \boldsymbol{\kappa}^{(i)}) = \frac{3\kappa^{(o)}}{\kappa^{(i)} + 2\kappa^{(o)}} \mathbf{I}. \quad (4.233)$$

Ce résultat est conforme à celui établi (4.26).

2. \mathcal{W} est une fibre cylindrique d'axe Oz . Dans ce cas le potentiel $H_{\mathcal{W}}$ ne dépend que des coordonnées x et y , et on peut écrire

$$\nabla \nabla H_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{j} \otimes \mathbf{j}). \quad (4.234)$$

Cette équation est écrite sous forme tensorielle dans un espace de dimension 2 dont les axes sont Ox et Oy . Les termes de la forme $\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}$ sont les produits tensoriels des vecteurs de base de cet espace. On en déduit que :

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2\kappa^{(o)}} (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{j} \otimes \mathbf{j}), \quad (4.235)$$

d'où :

$$\mathbf{A}_{\mathcal{W}} = \frac{2\kappa^{(o)}}{\kappa^{(i)} + \kappa^{(o)}} (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}. \quad (4.236)$$

3. \mathcal{W} est une couche ($-h \leq z \leq h$) perpendiculaire à l'axe Oz . On a immédiatement

$$\nabla \nabla H_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \frac{1}{\kappa^{(o)}} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad (4.237)$$

ce qui conduit à :

$$\mathbf{A}_{\mathcal{W}} = \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} + \frac{\kappa^{(o)}}{\kappa^{(i)}} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}. \quad (4.238)$$

4. \mathcal{W} est un ellipsoïde de demi axes a, b, c le long de Ox, Oy et Oz . Alors, $\mathbf{A}_{\mathcal{W}}$ vérifie l'équation :

$$\nabla \nabla H_{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) = -N_x \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} - N_y \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} - N_z \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad (4.239)$$

où on retrouve les facteurs dépolarisants N_i ($i = x, y, z$) donnés par (4.45)

$$N_x = \frac{abc}{3} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{(\sigma + a^2) \sqrt{(\sigma + a^2)(\sigma + b^2)(\sigma + c^2)}}, \quad (4.240)$$

N_y et N_z étant obtenus par permutation circulaire de a, b , et c .

4.3.3 Tortuosité acoustique

La tortuosité induite par la présence des défauts τ_d est définie par :

$$\tau_d = \frac{\langle v^{(o)2} \rangle}{\langle v^{(o)} \rangle^2}, \quad (4.241)$$

où $v^{(o)}$ est la vitesse de filtration perturbée par les défauts. De plus, les expressions des vitesses de filtration à l'intérieur et à l'extérieur des inclusions en supposant que leur taille caractéristique a (longueur du rayon ou semi-axes) est faible ($k^{(i)} \ll a^2$). Il est légitime de négliger leur volume pour le calcul de $\langle v^{(o)2} \rangle$ alors qu'il est pris en compte pour celui de $\langle v^{(o)} \rangle$ déduite de $\langle v^{(o)} \rangle = \kappa_{eff} \langle E^{(o)} \rangle$.

Puisque le champ de pression diffusé par les inclusions est limité aux termes dipolaires, l'expression de $\langle v^{(o)2} \rangle$ est alors :

$$\langle v^{(o)2} \rangle = \langle v_r^{(o)2} \rangle + \langle v_\theta^{(o)2} \rangle, \quad (4.242)$$

où :

$$v_r^{(o)} = -\kappa^{(o)} \frac{\partial p^{(o)}}{\partial r}, \quad \text{and} \quad v_\theta^{(o)} = -\kappa^{(o)} \frac{\partial p^{(o)}}{r \partial \theta}, \quad (4.243)$$

où $p^{(o)}(r, \theta)$ est donnée par l'équation (4.24). Nous calculons la valeur moyenne sur le domaine Ω entre les deux sphères centrées sur l'inclusion du rayon R et a avec $R > a$, a étant la taille caractéristique de l'inclusion. Dans ce cas, on a :

$$\langle v^{(o)2} \rangle = U_\infty^2 + U_\infty^2 \left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right) \left(\frac{\frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}} - 1}{2 + \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}}}\right)^2, \quad (4.244)$$

$\langle v^{(o)} \rangle^2$ est évalué à partir de la définition de la mobilité effective :

$$\langle v \rangle = \kappa_{eff} \langle E \rangle, \quad (4.245)$$

où κ_{eff} et $\langle E \rangle$ sont donnés par (4.192) et (4.193). Puisque $f \ll 1$, nous avons

$$\kappa_{eff} \approx \kappa^{(o)} + f\mathcal{A}(\kappa^{(i)} - \kappa^{(o)}) \quad \text{and} \quad \langle E \rangle \approx \frac{U_\infty}{\kappa^{(o)}}(1 + f\mathcal{A}). \quad (4.246)$$

A partir de ces relations, on obtient la tortuosité induite par une inclusion sphérique :

$$\tau = \left[1 + \left(1 - \frac{a^3}{R^3} \right) \left(\frac{\frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}} - 1}{2 + \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}}} \right)^2 \right] \left[1 - 2f \frac{3\frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}}}{2 + \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}}} \right]. \quad (4.247)$$

4.3.4 Résultats des simulations numériques

Une simulation numérique dans le cas d'une inclusion homogène sphérique a été réalisée. Le résultat est présenté dans la figure 4.8-a pour le cas où $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} = 10$ et $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} = 100$. La valeur de la tortuosité a été calculée sur des domaines carrés centrés autour de l'inclusion, les côtés de chaque domaine étant un multiple de $X = x/a$ (fig.4.8-b). à l'intérieur de l'inclusion $x < a$ on obtient $\tau = 1$. Lorsque x augmente, la tortuosité augmente pour atteindre la valeur maximale pour $x = 1.7$ dans le cas de $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} = 10$ et $x = 1.6$ dans le cas $\kappa^{(i)}/\kappa^{(o)} = 100$. Pour des valeurs plus élevées de x , la tortuosité diminue et tend vers 1. Ce résultat confirme le comportement des lignes de champ de vitesse dans la fig. 4.2-b.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié l'effet de la présence de défauts sur la circulation du fluide saturant dans un milieu poreux. Il a été démontré que la modification de la forme des lignes de champs de vitesse de filtration entraîne une modification de la tortuosité et donc une modification des vitesses des ondes susceptibles de se propager dans ce milieu. La tortuosité induite est calculée à partir des champs de pression dipolaires dispersés par les inclusions. Cette modélisation a l'avantage d'être générale et de conduire à une simple expression de tortuosité.

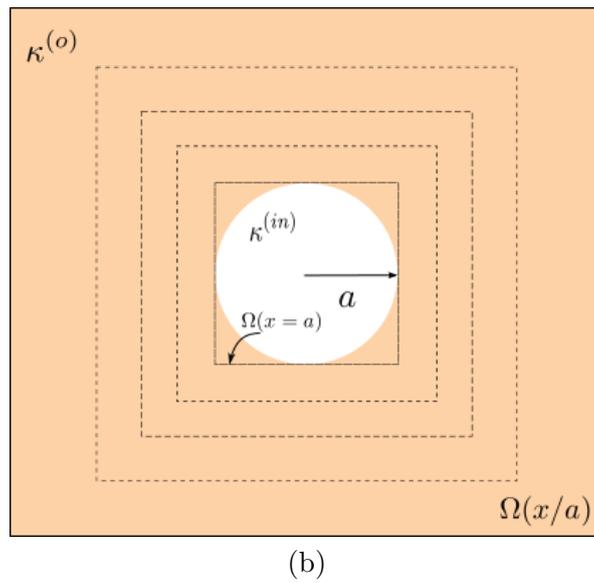
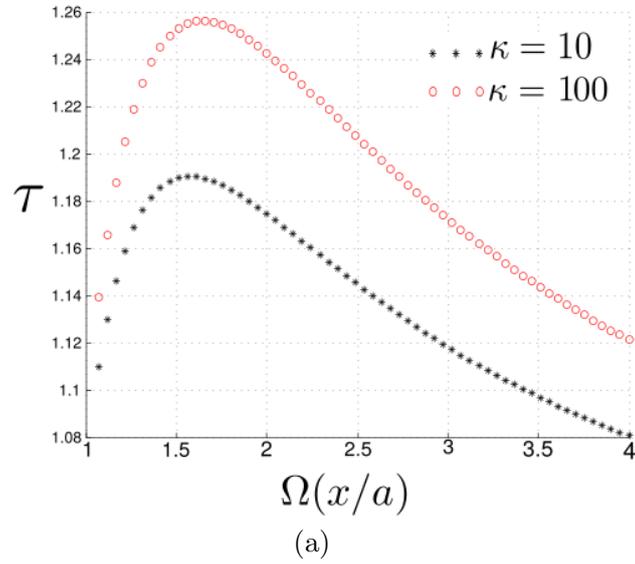


FIGURE 4.8 – (a) Évolution de la tortuosité en fonction du domaine $\Omega(x/a)$ pour différentes valeurs de $\kappa = \frac{\kappa^{(i)}}{\kappa^{(o)}}$, (b) schéma des domaines carrés centrés $\Omega(x/a)$

Chapitre 5

Analyse diélectrique de la céramique poreuse de silice saturée

5.1 Introduction

Des travaux de recherche antérieurs menés sur des verres poreux de silice saturés ont révélé que leurs propriétés diélectriques dépendent de leurs structures à savoir le taux de porosité et la taille des pores [25]. Ces propriétés ont été décrites par les variations isothermes des paramètres diélectriques (ε' , ε''). Ces derniers permettent d'analyser la dynamique des molécules d'eau saturant ce milieu poreux et son interaction avec sa structure interne en fonction de la température. En effet, des modèles empiriques ont été utilisés afin de mettre en évidence l'effet des traitements chimiques sur les interactions eau/surfaces de la structure interne du milieu poreux [25]. Dans le cadre de notre travail, nous nous sommes intéressés aux interactions eau/structure interne de la céramique poreuse de silice en tenant compte des mêmes conditions aux limites définies précédemment dans l'analyse acoustique ultrasonore.

Ce chapitre est entamé par une introduction des paramètres qui peuvent être obtenus par les mesures diélectriques et par une description des phénomènes de polarisation diélectrique et de la conduction électrique qui en découlent. Ensuite, un bref aperçu sur les propriétés diélectriques d'un milieu poreux saturé est présenté illustrant les propriétés de l'eau en présence d'une structure poreuse. Des modèles empiriques permettant d'analyser les relaxations diélectriques sont également présentés. Dans une seconde étape, le protocole expérimental réalisé dans cette étude diélectrique est présenté. L'étude diélectrique à la température ambiante a permis de déterminer le taux de porosité de la céramique poreuse analysée en utilisant le modèle fractal [38]. Également, l'étude diélectrique en fonction de la température a permis d'analyser la dynamique des molécules d'eau et son interaction avec la structure interne du milieu poreux et ceci en utilisant soit le modèle de Havriliak-Négami pour les basses températures, soit le modèle décrivant la cinétique non-linéaire des relaxations diélectriques dans les milieux poreux

[74] pour les températures intermédiaires. Ces analyses diélectriques ont été corrélées aux acoustiques dans le but de mettre en évidence l'effet des interactions eau/structures internes du milieu poreux sur la propagation des ondes ultrasonores dans ce milieu.

5.2 Phénomènes de la conduction électrique et de la polarisation diélectrique dans un milieu diélectrique

5.2.1 Paramètres diélectriques

Sous l'action d'un champ électrique extérieur le matériau se polarise et les dipôles diélectriques tendent à s'orienter selon le champ. Les matériaux diélectriques sont caractérisés en particulier par leur permittivité diélectrique. La permittivité totale ε_t se manifeste par l'augmentation de la capacité d'un condensateur que l'on constate lorsque l'espace inter-électrode, initialement vide, est rempli d'un isolant. Cette augmentation est liée à l'aptitude du matériau à se polariser dans un champ, à cause des déplacements en sens opposés des charges positives et négatives.

$$\varepsilon_i = \frac{C}{C_0} \varepsilon_0, \quad (5.1)$$

où (C) est la capacité du condensateur rempli d'un matériau diélectrique, C_0 la capacité géométrique (ou capacité du condensateur vide) et ε_0 la permittivité du vide. Du point de vue macroscopique, la polarisation d'un matériau linéaire et isotrope est reliée au champ électrique extérieur appliqué et au déplacement électrique, dans le cas de faibles champs, par les relations suivantes :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (5.3)$$

Où ε est la permittivité relative du matériau et χ la susceptibilité électrique ($\varepsilon = 1 + \chi$). Dans cette thèse, la permittivité relative ε_r est souvent notée ε .

Ces équations montrent que le déplacement électrique naît de la contribution du vide ($\varepsilon_0 \mathbf{E}$) et de la contribution de la polarisation du matériau \mathbf{P} . Le matériau diélectrique étant soumis à un champ électrique sinusoïdal, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$, la polarisation s'établit après un retard δ_0 , tel que $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$.

L'induction électrique est nécessairement sinusoïdale avec le même retard. On a alors :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0. \quad (5.4)$$

Pour un milieu linéaire, homogène et isotrope, la permittivité diélectrique est une grandeur complexe qui s'exprime par la relation suivante en fonction de la fréquence :

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (5.5)$$

La partie imaginaire de la permittivité complexe, c.à.d le facteur de perte, représente l'énergie nécessaire pour que les dipôles électriques s'alignent et que les ions se déplacent.

Elle est définie par la relation suivante :

$$\varepsilon'' = \frac{G_{echant}d}{\omega\varepsilon_0A} \quad (5.6)$$

où G_{echant} est la conductance de l'échantillon, d son épaisseur, ω la pulsation (en rad/s) et A l'aire de sa surface latérale. La conductivité électrique traduit l'aptitude du matériau à laisser passer des charges électriques. Elle est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma = \omega\varepsilon_0\varepsilon'' \quad (5.7)$$

5.2.2 Conduction électrique et polarisation diélectrique-Description des phénomènes physiques

Sous l'effet d'un champ électrique externe, deux types de phénomènes physiques peuvent avoir lieu dans le milieu diélectrique analysé : les phénomènes de transport et les phénomènes de polarisation. La description des ces phénomènes qui peuvent avoir lieu dans le cas des matériaux humides permet d'établir les lois phénoménologiques qui permettront par la suite de décrire le comportement fréquentiel macroscopique des paramètres diélectriques.

La conduction électrique : La conduction électrique est assurée par le déplacement de charges libres sous l'action du champ électrique appliqué. Ces charges peuvent être des électrons, des trous, des protons ou des ions. Dans le cas des matériaux poreux saturés, la conduction ionique présente le phénomène dominant où les ions de la phase liquide diffusent et migrent sous l'action du champ électrique [75]. Elle a pour expression dans le cas d'un fluide renfermant un seul type d'ions [37] :

$$\sigma_e = nq\mu \quad (5.8)$$

Où n est la concentration d'ions, q la charge par porteur et leur mobilité. La conductivité électrique dans les milieux poreux saturés a fait l'objet de plusieurs travaux proposant des modèles théoriques permettant de décrire la structure interne du milieu. Ces différents travaux sont récapitulés dans la publication [40].

La polarisation : Le processus de la polarisation résulte d'un déplacement des charges liées. Ces charges sont caractérisées par un moment dipolaire permanent ou induit. Différents mécanismes peuvent se produire à différentes gammes de fréquences contribuant ainsi à la polarisation totale du matériau. Ces mécanismes sont dus à des différents types de charges. Nous définissons ci-dessous les différents types de polarisations correspondantes :

- **La polarisation électronique :** elle est due à une déformation du nuage électronique par rapport au noyau sous l'effet du champ électrique appliquée. Le barycentre du nuage électronique et celui du noyau atomique ne sont plus confondus ce qui confère à l'atome

un moment dipolaire induit. Cette polarisation persiste jusqu'au des fréquences très élevées de l'ordre de 10^{15} Hz .

- **La polarisation ionique** : le processus est engendré par un déplacement relatif des atomes au sein d'une même molécule.

- **La polarisation dipolaire ou d'orientation** : elle provient d'une orientation des molécules polaires (l'eau par exemple) dans une direction privilégiée donnée par le champ électrique appliquée.

- **La polarisation inter-faciale ou de Maxwell-Wagner-Sillars** : elle apparaît dans des matériaux hétérogènes à la suite d'une accumulation de charges entre deux phases homogènes de conductivités et de permittivités différentes ou de conductivités différentes. Elle se produit vers les basses fréquences en dessous de 10^8 Hz .

À basses fréquences, tous les types de polarisation sont présents puisque les charges liées peuvent suivre les variations du champ électrique. La Figure 5.1 schématise les différents types de polarisation.

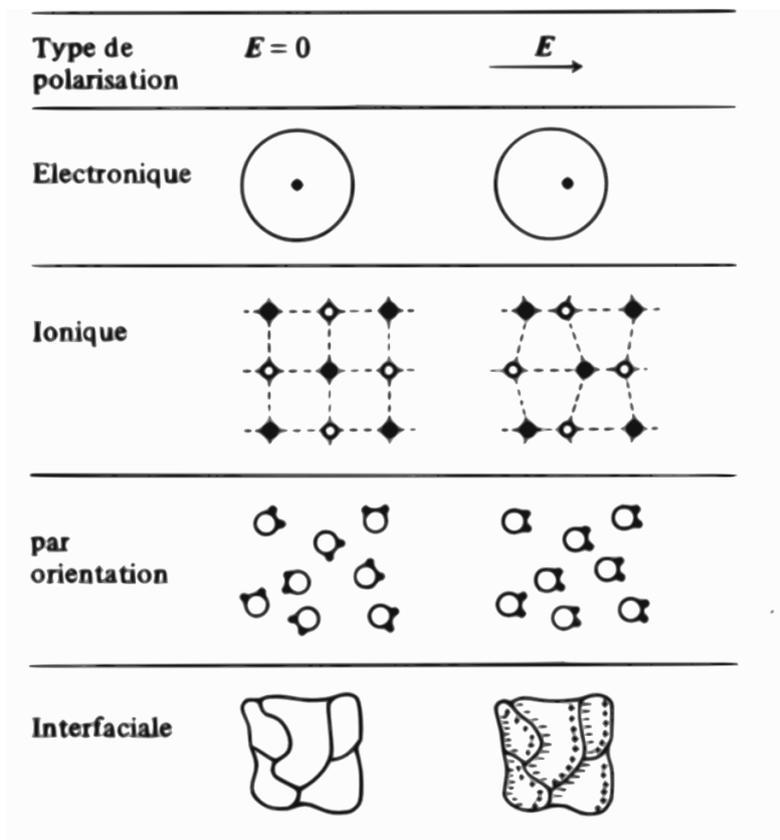


FIGURE 5.1 – Schéma explicatif des différents types de polarisation

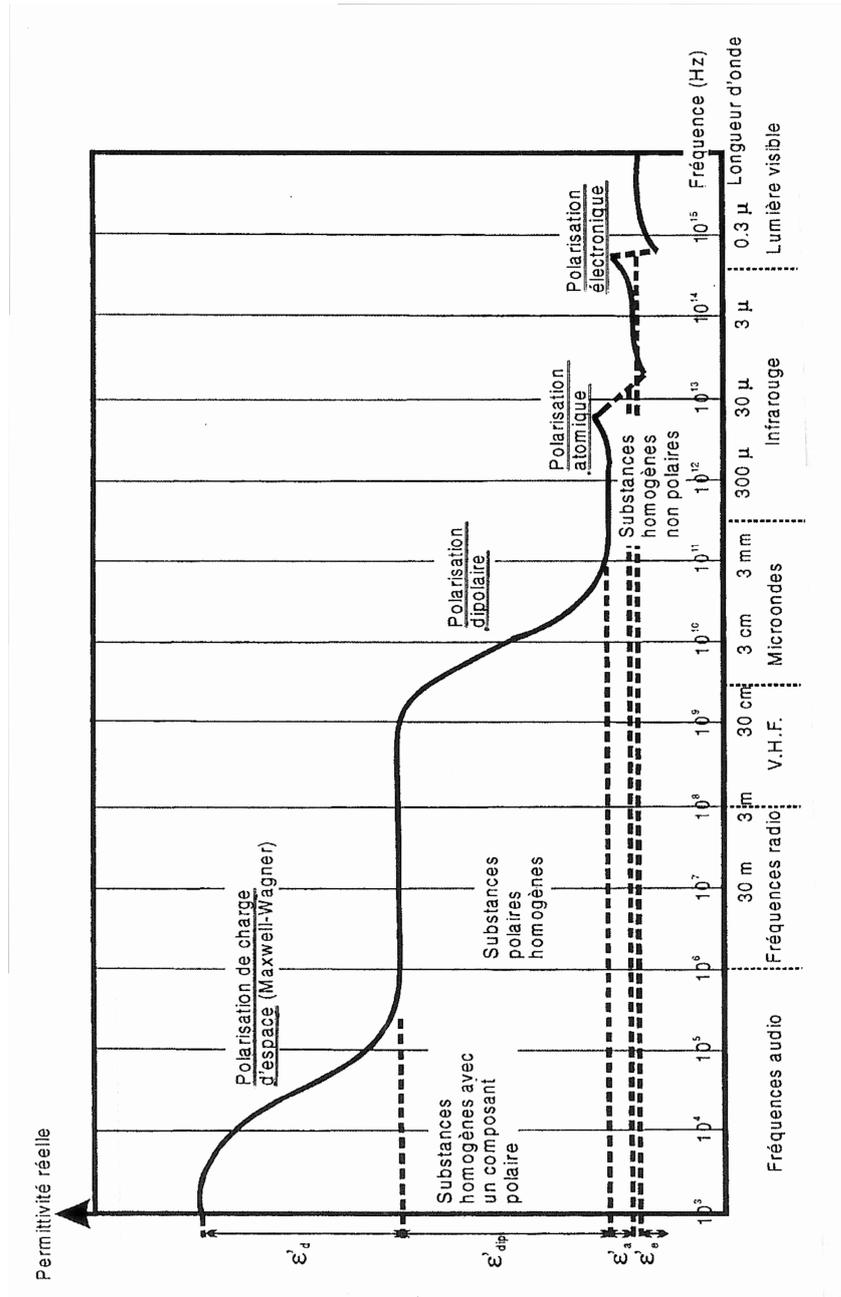


FIGURE 5.2 – Variations fréquentielles de la permittivité diélectrique suivant les différents types de polarisation [28]

5.3 Propriétés diélectriques d'un milieu poreux saturé

La caractérisation diélectrique des matériaux poreux saturés par l'eau nécessite la connaissance des propriétés diélectriques de l'eau en présence de structures poreuses de ces milieux analysés. En effet, des travaux menés sur des roches poreuses [14] ont révélé que la présence de l'eau dans les pores de tels milieux poreux peut agir d'une manière passive en favorisant la conductivité en courant continu (DC) (permettant le transport des ions, des réactions d'échanges de cations etc.), comme cela peut avoir une réaction active en favorisant les processus de relaxation diélectrique (la polarisation due à l'orientation des molécules d'eau dipolaires etc.). De même, ces études ont révélé que l'eau peut prendre trois états :

1. **État libre** : cet état concerne l'eau présente dans les pores qui se situent au delà de quelques dizaines de diamètres atomiques par rapport à la surface des grains.
2. **État lié** : cet état concerne l'eau présente à des distances inférieures à quelques dizaines de diamètres atomiques par rapport à la surface des grains.
3. **État cristallin** : dans cet état, la molécule d'eau fait partie du réseau cristallin. La dissociation des molécules d'eau du réseau cristallin n'est possible que vers les hautes températures.

L'eau dans les systèmes biologiques se présente sous deux formes : liée et libre [68]. L'eau liée est probablement associée au substrat biologique [47, 39] dans un mode ordonné induisant une structure comme celle de la glace avec des propriétés spécifiques. La permittivité diélectrique de l'eau est très élevée et ceci est du au caractère polaire de la molécule d'eau qui donne naissance à une forte polarisation d'orientation (voir figure 5.3). La permittivité de la molécule d'eau dépend de la température et de la pression [30].

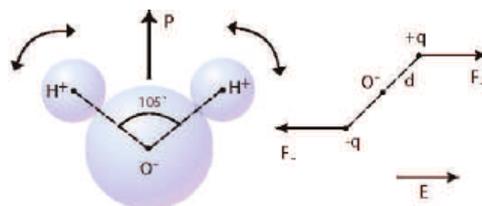


FIGURE 5.3 – Polarisation des liaisons OH de l'eau (H_2O)

5.4 Modèles empiriques-Analyses des relaxations diélectriques

Plusieurs modèles empiriques ont été développés afin d'analyser les relaxations diélectriques. Dans la littérature, nous distinguons les modèles de Debye [19], Cole-Cole [?], Cole-Davidson [18] et Havriliak-Negami [33].

5.4.1 Modèle de Debye

Au début du XXème siècle, en s'inspirant des diélectriques liquides, Debye a constaté que si tous les dipôles ont le même temps d'orientation et n'interagissent pas entre eux [19], la permittivité complexe ε^* en fonction de la fréquence suit la loi suivante :

$$\varepsilon^* = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\delta\varepsilon}{1 + j\omega\tau} \quad (5.9)$$

avec $\delta = \varepsilon_s - \varepsilon_\infty$. ε_s et ε_∞ sont l'intensité de la relaxation diélectrique, la permittivité statique et ε_∞ la permittivité à fréquence infinie, respectivement. τ est le temps caractéristique de relaxation. On a alors :

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad (5.10)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}. \quad (5.11)$$

Cette réponse est dite idéale, car tous les dipôles participant au phénomène de relaxation ont le même temps de relaxation. D'après ce modèle, ce temps de relaxation est défini par l'expression suivante :

$$\tau = \frac{4\pi\eta a^3}{kT}, \quad (5.12)$$

où η est la viscosité du fluide, T est la température en Kelvin, k la constante de Boltzman et a le rayon d'une molécule dipolaire sphérique.

Ce comportement a été principalement observé dans des diélectriques liquides tels que l'eau [44]. En pratique, il est assez rare d'observer une telle relaxation dans des diélectriques solides. En effet, généralement les interactions entre les dipôles ne peuvent pas être négligées dans ces matériaux, ce qui induit une dispersion du temps de relaxation. Par ailleurs, l'équation de la permittivité complexe peut être améliorée en tenant compte de la conductivité qui intervient sur les pertes dans les basses fréquences :

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}. \quad (5.13)$$

5.4.2 Distribution des temps de relaxation-relation de Havriliak et Négami

Dans le cas où tous les dipôles n'ont pas le même temps de relaxation, le pic de relaxation observé résulte alors d'une distribution des temps de relaxation. Il existe plusieurs modèles empiriques permettant de décrire correctement ces types de relaxation. Ces modèles sont tous dérivés de l'équation de Debye. Parmi ces modèles, nous citons le modèle de Havriliak et Négami dont l'équation est la suivante :

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{(1 + (i\omega\tau_0)^{1-\alpha})^\beta}, \quad (5.14)$$

avec $0 < \alpha \leq 1$ et $\beta \leq 1$.

Cette relation empirique permet d'avoir une réponse fréquentielle asymétrique, α et β sont des constantes permettant de régler les pentes en haute et basse fréquences. On peut remarquer que pour $\alpha = \beta = 1$ on retrouve une réponse du type Debye [32]. Pour $\beta = 1$ et $0 < \alpha \leq 1$, on obtient le modèle de Cole-Cole couramment utilisé dans des diélectriques solides amorphes [12]. Un tel modèle a permis de décrire la relaxation diélectrique de la glace massive [62]. Alors que pour $\alpha = 1$ et $0 < \beta \leq 1$, on obtient le modèle de Cole-Davidson souvent utilisé dans des diélectriques liquides [18].

L'équation de Havriliak-Négami est définie aussi par la relation suivante en module électrique :

$$M^*(\omega) = M_\infty + \frac{M_s - M_\infty}{(1 + (j\omega\tau)^{1-\alpha})^\beta} \quad (5.15)$$

où les parties réelle et imaginaire ont pour expressions :

$$M' = M_\infty \frac{[M_s A^\beta + (M_\infty - M_s) \cos \beta\phi] A^\beta}{M_s^2 A^{2\beta} (M_\infty - M_s) M_s \cos \beta\phi + (M_\infty - M_s)^2}, \quad (5.16)$$

$$M'' = M_s M_\infty \frac{[M_\infty - M_s] \sin \beta\phi A^\beta}{M_s^2 A^{2\beta} (M_\infty - M_s) M_s \cos \beta\phi + (M_\infty - M_s)^2}, \quad (5.17)$$

avec :

$$A = [1 + 2(\omega\tau)^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + (\omega\tau)^{2(1-\alpha)}]^2, \quad (5.18)$$

$$\phi = \arctan \left[\frac{(\omega\tau)^{1-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{1 + (\omega\tau)^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \right]. \quad (5.19)$$

Dans ce travail, l'ajustement des courbes en diagramme d'Argand en module électrique $M''(M')$ a été réalisé en utilisant un programme en Excel où les paramètres d'ajustements sont : α , β , M_s , et M_∞ . Ces paramètres sont ajustés en utilisant la méthode des moindres carrés pour les équations suivantes :

$$\Gamma_{M'}^2 = \sum_i (M'_{th,i} - M'_{exp,i})^2, \quad (5.20)$$

$$\Gamma_{M''}^2 = \sum_i (M''_{th,i} - M''_{exp,i})^2. \quad (5.21)$$

5.5 Modèle fractal de la permittivité diélectrique-Détermination du taux de porosité

Des travaux de recherche réalisés sur les roches poreuses réservoirs [38] ont révélé que le modèle fractal de la permittivité diélectrique permet de déterminer la porosité totale de cette céramique poreuse. En effet, dans ce modèle le milieu poreux est décrit comme une structure fractale où la chute de la permittivité diélectrique liée au phénomène de relaxation s'exprime par la loi en puissance suivante :

$$\varepsilon' \approx f^b, \quad (5.22)$$

Avec b est l'exposant compris entre -1 et 0 . Ce composant s'exprime en fonction de la dimension fractale D_f par la relation suivante :

$$b = \frac{D_f - 2}{3}, \quad (5.23)$$

Dans cette approche, le matériau poreux montre une structure fractale. L'interface solide/pore peut être un fractal. En assumant que l'espace des pores peut être déterminé par la structure fractale, la relation entre la porosité et la dimension fractale du matériau est donnée par la formule suivante [59] :

$$\phi = \left(\frac{h}{H}\right)^{3-D_f} \quad (5.24)$$

Où h et H sont les limites inférieure et supérieure en fréquences entre les quelles le système se comporte comme un milieu fractal.

5.6 Modèle de la relaxation cinétique non-linéaire de l'eau confinée

La relaxation cinétique non-linéaire de l'eau adsorbée sur les surfaces internes des verres poreux a été décrite par un modèle développé par Y.E. Ryabov et al. [74]. Ce modèle a été appliqué dans notre travail afin de mettre en évidence l'effet des conditions aux limites sur l'interaction eau/surfaces internes de la céramique poreuse de silice.

D'après ce modèle, la dépendance thermique non-linéaire du temps de relaxation est donnée par la relation suivante :

$$\ln\left(\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{E_a}{kT} + C \exp\left(-\frac{E_b}{kT}\right)\right), \quad (5.25)$$

Ce comportement non-linéaire de la relaxation est relié à deux processus de natures différentes : un terme en Arrhenius relatif à l'activation du processus de la relaxation d'énergie et le second terme en exponentiel relatif à la diminution du volume libre par molécule d'eau relaxée en fonction de la température dont l'énergie est l'énergie exigée pour former un défaut (soit une particule inerte).

C est le facteur de confinement avec $C = \frac{n_0 v_0}{v}$ où v_0 le volume d'une molécule, v le volume total du système et n_0 la concentration de défaut maximale possible.

5.7 Protocole technique et expérimental

5.7.1 Préparation des échantillons

L'échantillon analysé est une silice poreuse coupée, avec une scie à diamant, de la même plaque utilisée dans les mesures acoustiques. L'épaisseur est d'environ $e = 2.78 \text{ mm} \pm 0.05 \text{ mm}$. Afin de s'assurer que les pores ne sont pas bouchés suite à la découpe, l'échantillon a été exposé à un nettoyage par ultrasons pendant 15 min dans

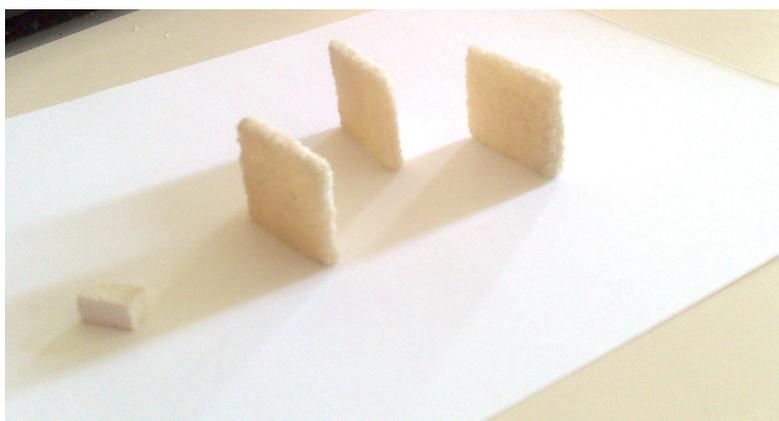


FIGURE 5.4 – Photographie illustrant quelques échantillons de la céramique poreuse analysée en diélectriques.

une solution d'eau-acétone, puis laissé sécher dans un four à $100^{\circ} C$ pendant 24 heures. Après ce traitement, l'échantillon a été conservé dans un dessiccateur¹ pendant 24 heures pour atteindre la température ambiante.

5.7.2 Technique de caractérisation diélectrique

La caractérisation diélectrique a été effectuée en utilisant un impédance-mètre de type "Novocontrol". Les mesures diélectriques ont été réalisées dans une gamme de fréquence allant de $0,1 Hz$ jusqu'à $10^6 Hz$. Ces mesures ont été réalisées en trois étapes. Dans une première étape, des mesures diélectriques ont été réalisées à l'ambiante afin de déterminer le taux de porosité de l'échantillon analysé. Pour cela ce dernier est sec avec des pores ouverts. Dans la seconde et la troisième étapes, les mesures diélectriques ont été réalisées en fonction de la température dans la gamme de température $-100^{\circ} C$ jusqu'à $200^{\circ} C$ avec un incrément de $10^{\circ} C$. Dans la seconde étape, la céramique à pores latérales ouverts a été immergée pendant 15 minutes dans l'eau douce pour qu'elle soit saturée en eau douce. Dans la troisième étape, les surfaces latérales de la céramique à pores fermés ont été peintes par la laque d'argent afin de réaliser les conditions des pores fermés des surfaces latérales. Ensuite, l'échantillon a été immergé dans l'eau pendant 14 heures pour se situer dans la même condition de saturation de l'échantillon à pores ouverts. Dans la seconde étape et la troisième étape, la teneur massique en eau (w) a été déterminée par rapport à l'échantillon sec en appliquant la relation suivante [1] :

$$w = \frac{m_{humid} - m_{sec}}{m_{sec}}, \quad (5.26)$$

Où m_{humid} est la masse de l'échantillon saturé et m_{sec} est la masse de l'échantillon sec. Les teneurs massiques obtenues pour la deuxième étape et la troisième étape sont : 8,7%

1. Un équipement servant à protéger des substances contre l'humidité.

et 7,5%, respectivement.

5.8 Analyses diélectriques

5.8.1 Analyse à l'ambiante

La figure 5.5 représente la variation de la permittivité diélectrique en fonction de la fréquence à l'ambiante pour la céramique poreuse de silice sèche. Cette figure illustre un comportement typique de la loi en puissance associé aux processus qui se produisent dans les structures fractales. En encart est donné l'ajustement de la décroissance de la permittivité diélectrique en fonction de la fréquence obtenu en utilisant l'équation (5.5). La distance fractale D_f est déduite à partir de cet ajustement en utilisant la relation

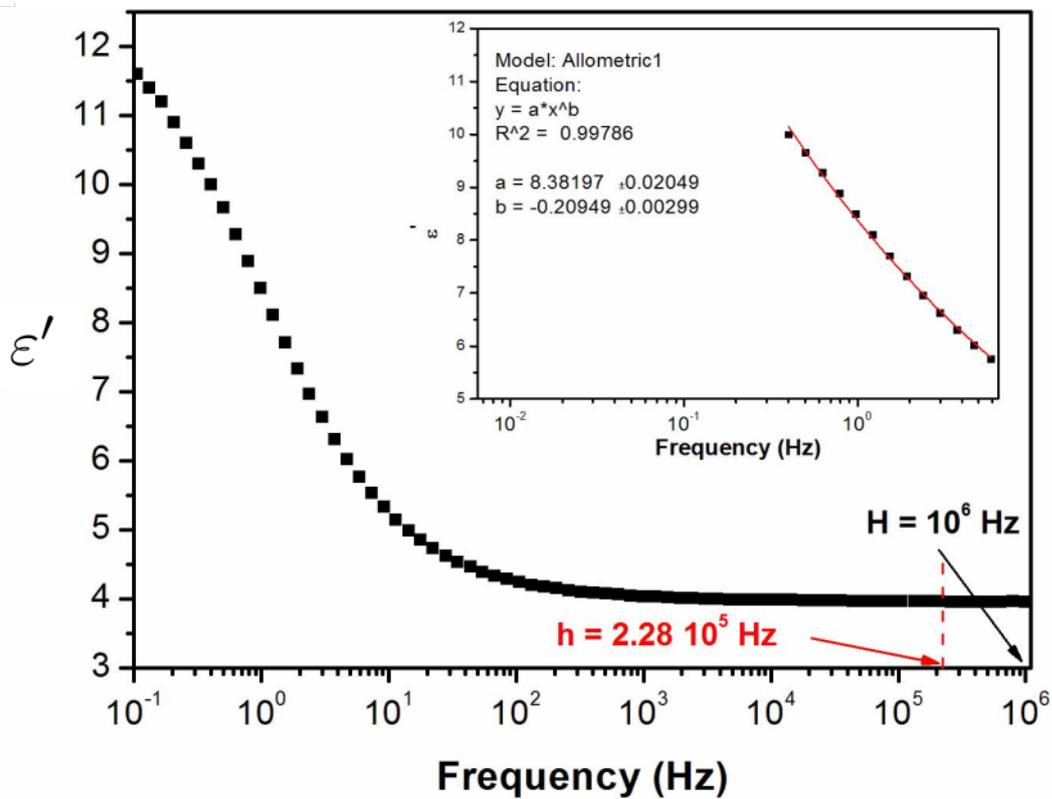


FIGURE 5.5 – Variation isotherme et à l'ambiante de la permittivité diélectrique en fonction de la fréquence pour la céramique poreuse de silice. En encart est donné l'ajustement obtenu de la tendance décroissante de la permittivité diélectrique en fonction de la fréquence selon l'équation (5.23).

(5.23). Sa valeur est de l'ordre de 2.6. Afin d'évaluer le taux de porosité de la céramique

analysé, la gamme de fréquences définissant le comportement fractal de ce système a été déterminée. Les limites inférieure, h , et supérieure, H , de cette gamme sont $2, 28.10^5 Hz$ et $10^6 Hz$, respectivement. Le taux de porosité, ainsi, déduite de la relation (5.23) donne une valeur de l'ordre de 53,9%. Cette valeur confirme le paramètre d'ajustement obtenu lors de l'analyse de la propagation des ondes acoustiques dans ce milieu poreux en utilisant le théorème de Biot.

5.8.2 Analyses dans la gamme de température $[-100^\circ C, 200^\circ C]$

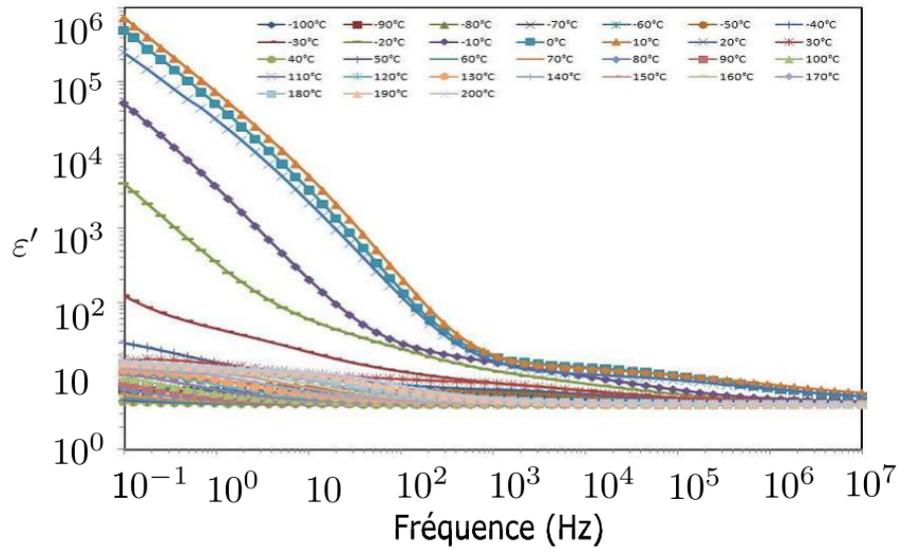
Les figures (5.6) et (5.7) montrent les variations isothermes de la permittivité, ε' , et du facteur de pertes, ε'' pour les céramiques à pores ouverts et à pores fermés. L'analyse des courbes de permittivité révèle une tendance décroissante en fonction de la fréquence et une augmentation de son intensité en fonction de la température vers les basses fréquences. Ce phénomène de dispersion basses fréquences est plus notable dans la gamme de température $[-30^\circ C, 20^\circ C]$. Par conséquent, les courbes de facteur de pertes présentent un effet de conductivité en courant continu (dc). Cette hausse en permittivité diélectrique peut être attribuée à la transition cinétique provenant de la réorientation des molécules d'eau au voisinage d'un défaut [62]. Un comportement similaire a été observé pour des céramiques roches poreuses. Ce comportement a été associé à l'eau lié dans ce système [38]. Des relaxations diélectriques n'ont pu être décelées sur les courbes de facteur de pertes que pour les basses températures. Ces relaxations diélectriques (1) proviennent de la réorientation des molécules d'eau dans la structure cluster de l'eau gelée.

À cet effet le formalisme du module électrique ou l'inverse de la permittivité complexe est introduit afin de minimiser l'effet de la conductivité dc. Ce formalisme permet de minimiser les grandes valeurs de la permittivité diélectrique ε' et le facteur de perte ε'' à basses fréquences, qui sont associés, la plupart du temps, à la polarisation d'électrodes, les phénomènes d'injection de charge d'espace et l'effet de la conduction des impuretés présentes dans l'échantillon [2, 34, 65]. L'équation du module électrique, M^* est la suivante [26] :

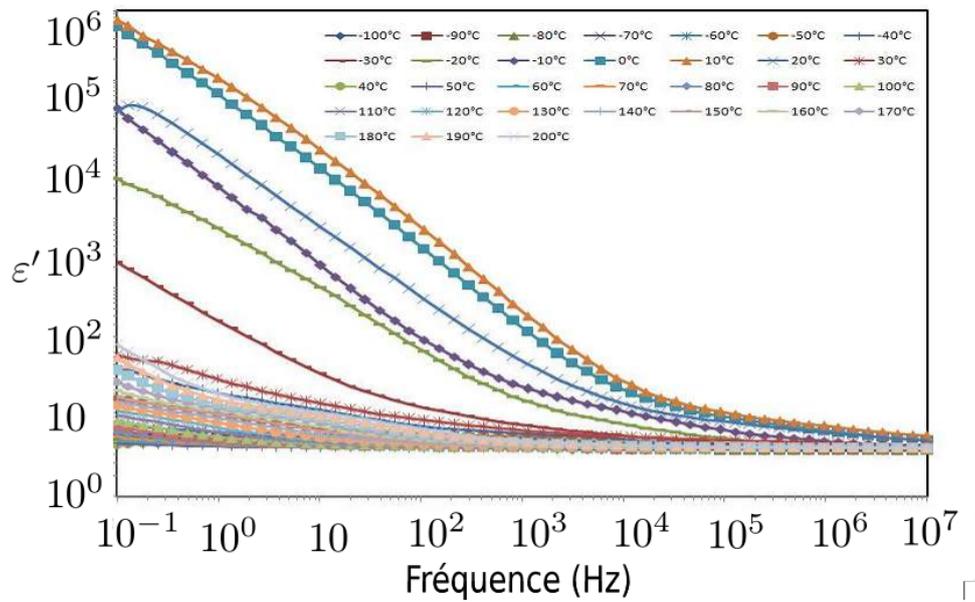
$$M^* = \frac{1}{\varepsilon^*} = \frac{1}{\varepsilon' - j\varepsilon''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} = M' + jM'' \quad (5.27)$$

Les figures (5.7-a) et (5.7-b) représentent les variations isothermes de la partie imaginaire du module électrique pour les céramiques poreuses en pores ouverts et en pores fermés respectivement. Ces variations montrent la présence de deux autres relaxations diélectriques (2, 3) en plus de celle mentionnée précédemment. La relaxation diélectrique (2) apparaissant dans les gammes de températures $[-40^\circ C, 30^\circ C]$ et $[-50^\circ C, 40^\circ C]$ pour les céramiques PO et PF, respectivement, est attribuée à la transition cinétique provenant de la réorientation des molécules d'eau au voisinage d'un défaut [62].

Le processus de relaxation diélectrique (3) qui apparaît pour des températures supérieures à $70^\circ C$ et $80^\circ C$ pour les céramiques en pores ouverts et pores fermés, est associé au processus de la polarisation de Maxwell-Wagner-Sillars résultant de piégeage de charges

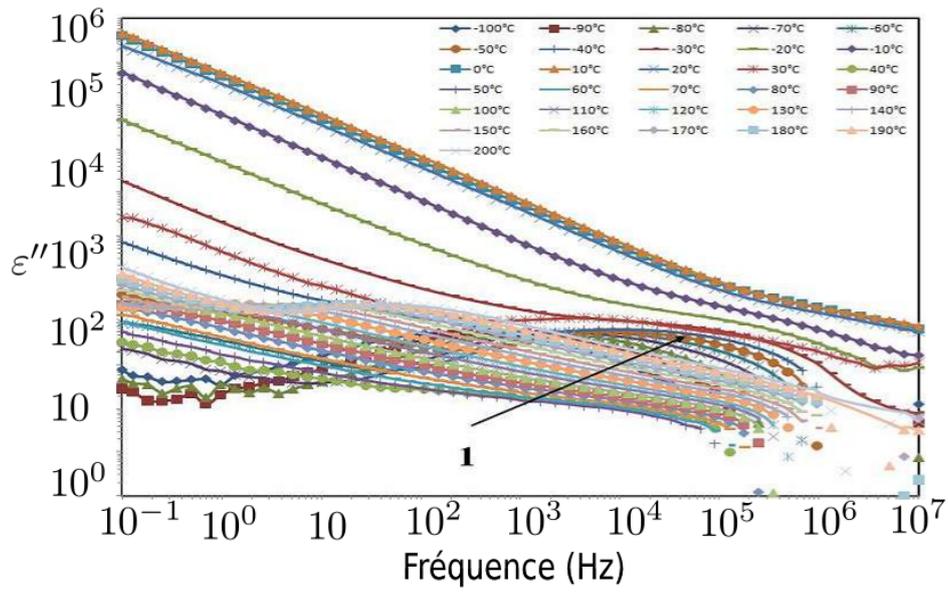


(a)

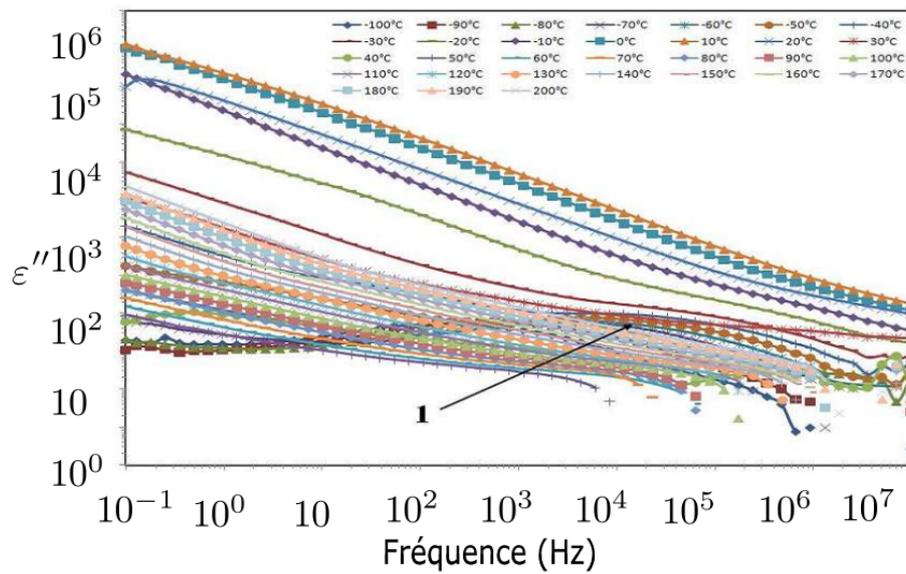


(b)

FIGURE 5.6 – Variations isothermes de la permittivité diélectrique en fonction de la fréquence pour les céramiques poreuses à pores ouverts (a) et à pores fermés (b)



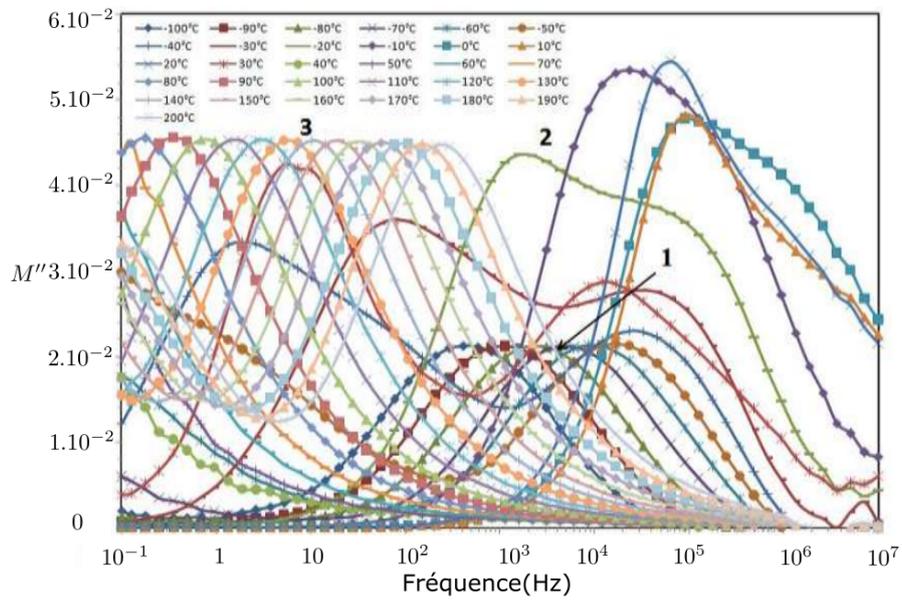
(a)



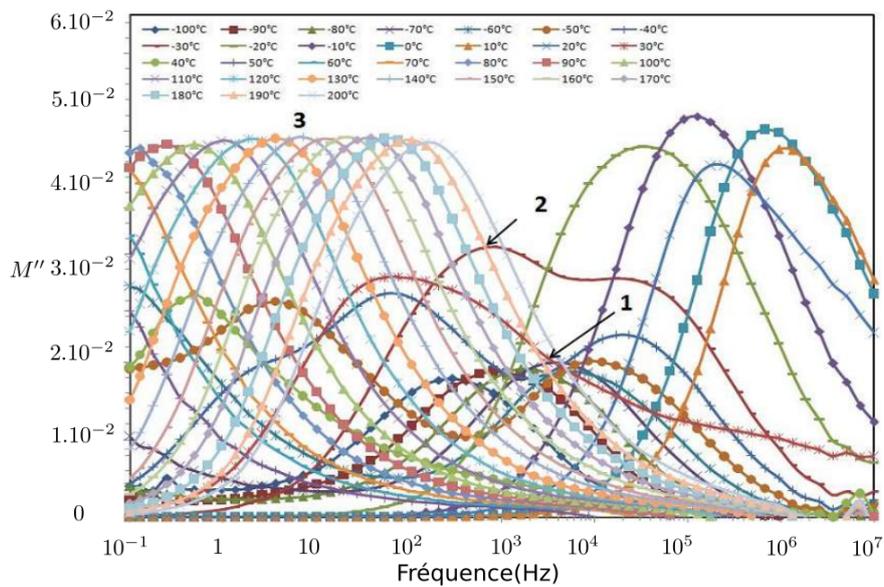
(b)

FIGURE 5.7 – Variations isothermes de facteur de pertes en fonction de la fréquence pour les céramiques poreuses à pores ouverts (a) et à pores fermés (b).

libres au niveau des interfaces internes du milieu poreux. Afin d'analyser l'effet des condi-



(a)



(b)

FIGURE 5.8 – Variations isothermes de la partie imaginaire du Module électrique M'' en fonction de la fréquence pour les céramiques poreuses à pores ouverts (a) et à pores fermés (b).

tions aux limites sur les interactions eau/surfaces internes du milieu poreux, nous nous sommes proposés d'analyser quantitativement les relaxations diélectriques (1) et (2). La figure (5.9) représente l'évolution des temps de relaxation en fonction de $1000/T$ de la relaxation diélectrique (1), pour les céramiques PO et PF, en échelle semi-logarithmique ainsi que leurs ajustements obtenus à partir de la loi d'Arrhenius suivante :

$$\tau = \tau_{01} e^{\frac{E_{a1}}{kT}} \quad (5.28)$$

où $\tau = \frac{1}{2\pi f_{max}}$ est le temps de relaxation associé à M'' pour une température donnée T , E_{a1} est l'énergie d'activation du processus de la relaxation diélectrique (1) et τ_{01} est le temps de la relaxation dans les hautes températures.

L'énergie d'activation E_{a1} est déterminée à partir de la pente de la droite d'ajustement et le temps de relaxation est déterminé par l'extrapolation de la droite d'ajustement et son intersection avec l'axe des ordonnées. Tous les résultats obtenus sont représentés dans le tableau 5.1 ci-dessous.

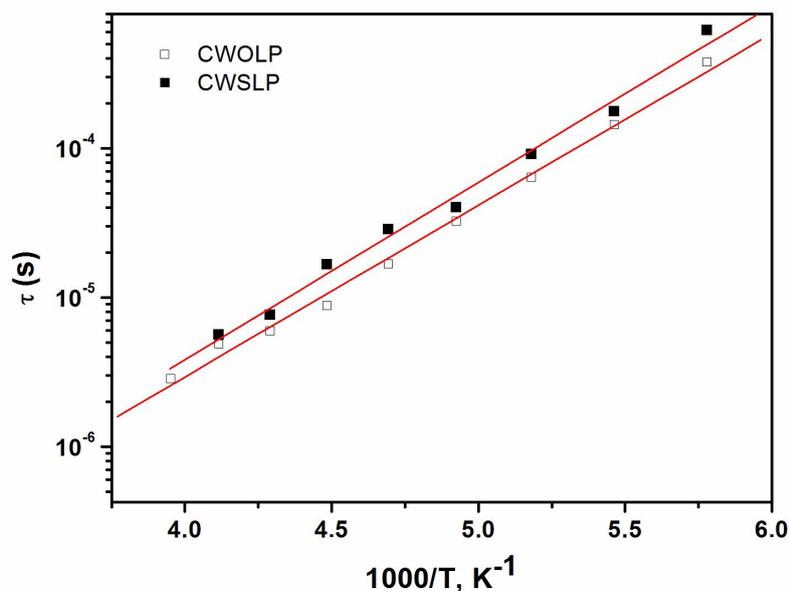


FIGURE 5.9 – Variations du temps de relaxation en fonction de l'inverse de la température pour les céramiques poreuses PO et PF.

Les valeurs des énergies d'activation E_{a1} obtenues sont similaires pour les deux céramiques PO et PF mais elles sont nettement inférieures à celle de la glace massive ($\sim 60 kJ/mol$) [10]. Cette décroissance des énergies d'activation est attribuée à une structure moins rigide de l'eau gelée en comparaison à la glace massive. Donc la structure

| Échantillon | Relaxation | E_{a1} (kJ/mol) | τ_{01} (s) |
|-------------|------------|-------------------|-----------------------|
| PO | 1 | 22 | $7.42 \cdot 10^{-11}$ |
| PF | 1 | 22.73 | $6.91 \cdot 10^{-11}$ |

TABLE 5.1 – Energies d’activation E_{a1} et les temps de relaxation τ_{01} pour le phénomène de relaxation diélectrique (1) dans les céramiques à pores ouverts et à pores fermés.

interne du milieu poreux facilite la réorientation des molécules d’eau dans la structure de l’eau gelée par la présence du défaut de structure [15]. Par conséquent, les temps de relaxation de la première relaxation (ref. tableau 5.1) sont plus faibles à celles que pour la glace massive ($\sim 10^{-5}$). En tenant compte des conditions aux limites, nous notons que ces conditions n’affectent pas la réorientation des molécules d’eau dans la structure de l’eau gelée. Ceci explique la similarité des valeurs des énergies d’activation, , pour les céramiques PO et PF. L’analyse de la nature de cette relaxation diélectrique a été effectuée en utilisant le modèle de Havriliak et Négami donné par la relation (5.14). La figure 5.9 illustre un ajustement qui a été réalisé à la température $T = -70^\circ C$ dans la représentation d’Argand en module électrique pour les céramiques PO (a) et PF (b). Cette figure montre que tous les points expérimentaux ont été ajustés en utilisant ce modèle. Ceci indique l’existence d’un seul phénomène de relaxation.

Les paramètres d’ajustement ainsi obtenus pour chaque relaxation et à chaque température de mesure sont présentés dans le tableau 5.2 ci-dessous.

Le tableau (5.2) montre la déviation du paramètre β de la valeur 1. Ceci est une indication de la déviation de ce phénomène du processus de Cole-Cole obtenu dans le cas des verres de silice poreux saturés [62]. Il en résulte alors que les défauts de structure pour les céramiques de silice poreuses affectent différemment cette relaxation diélectrique qu’est alors en accord au modèle de Havriliak-Négami. Cette analyse a permis également d’évaluer l’intensité de cette relaxation diélectrique à chaque température de mesure. Cette intensité est définie par la relation suivante :

$$\delta\varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_\infty = \frac{1}{M_s} - \frac{1}{M_\infty} \quad (5.29)$$

| Échantillon | $T^{\circ} C$ | Relaxation | α | β | M_s | M_s |
|-------------|---------------|------------|----------|---------|-------|-------|
| PO | -100 | 1 | 0.70 | 0.89 | 0.159 | 0.234 |
| | -90 | 1 | 0.69 | 0.89 | 0.159 | 0.235 |
| | -80 | 1 | 0.69 | 0.89 | 0.159 | 0.234 |
| | -70 | 1 | 0.69 | 0.89 | 0.159 | 0.234 |
| | -60 | 1 | 0.69 | 0.89 | 0.159 | 0.234 |
| | -50 | 1 | 0.68 | 0.89 | 0.155 | 0.232 |
| | -40 | 1 | 0.75 | 0.89 | 0.154 | 0.229 |
| | -30 | 1 | 0.80 | 0.87 | 0.141 | 0.224 |
| | -20 | 1 | 0.95 | 0.77 | 0.127 | 0.219 |
| PF | -100 | 1 | 0.70 | 0.85 | 0.154 | 0.217 |
| | -90 | 1 | 0.69 | 0.83 | 0.148 | 0.217 |
| | -80 | 1 | 0.69 | 0.83 | 0.144 | 0.215 |
| | -70 | 1 | 0.69 | 0.80 | 0.140 | 0.215 |
| | -60 | 1 | 0.69 | 0.82 | 0.136 | 0.207 |
| | -50 | 1 | 0.67 | 0.83 | 0.130 | 0.207 |
| | -40 | 1 | 0.73 | 0.84 | 0.126 | 0.205 |
| | -30 | 1 | 0.99 | 0.70 | 0.123 | 0.199 |

TABLE 5.2 – Valeurs des paramètres caractéristiques du modèle de Havriliak et Négami déterminées par la méthode de lissage numérique des diagrammes d’Argand expérimentaux pour les céramiques PO et PF.

La figure (5.11) représente la variation de l’intensité ainsi calculée en fonction de la température pour les deux céramiques poreuses PO et PF. Ces intensités sont proches de celle de la glace massive [31]. Ce résultat montre qu’il y en a suffisamment d’eau à l’intérieur des pores pour former la structure de l’eau gelée pour les deux céramiques. Néanmoins, la comparaison de l’évolution de cette intensité en fonction de la température révèle un changement de comportement pour les deux céramiques. En effet, une tendance croissante est obtenue pour la céramique PO alors que pour la céramique PF cette tendance est pratiquement constante au début suivie par une augmentation aiguë pour les températures extrêmes. Cette comparaison révèle aussi que l’intensité de cette relaxation diélectrique est légèrement supérieure pour la céramique PF. Nous en déduisons que l’état de surface latérale de la céramique analysée affecte aussi bien l’intensité de la relaxation diélectrique (1) que son évolution en fonction de la température.

Afin d’analyser l’adsorption de l’eau sur les surfaces internes de la céramique poreuse de silice, nous avons utilisé le modèle donné par l’équation (5.24) et qui décrit la relaxation cinétique de l’eau confinée. En effet, la variation non linéaire du temps de relaxation, associé à la relaxation diélectrique (2), en fonction de la température a pu être décrite par ce modèle. La figure (5.12) illustre un bon accord obtenu entre la courbe expérimentale et celle théorique de $\ln(\tau)$ en fonction de $1000/T$ pour les céramiques poreuses PO et PF. Les paramètres d’ajustement qui ont permis de réaliser ce bon ajustement sont

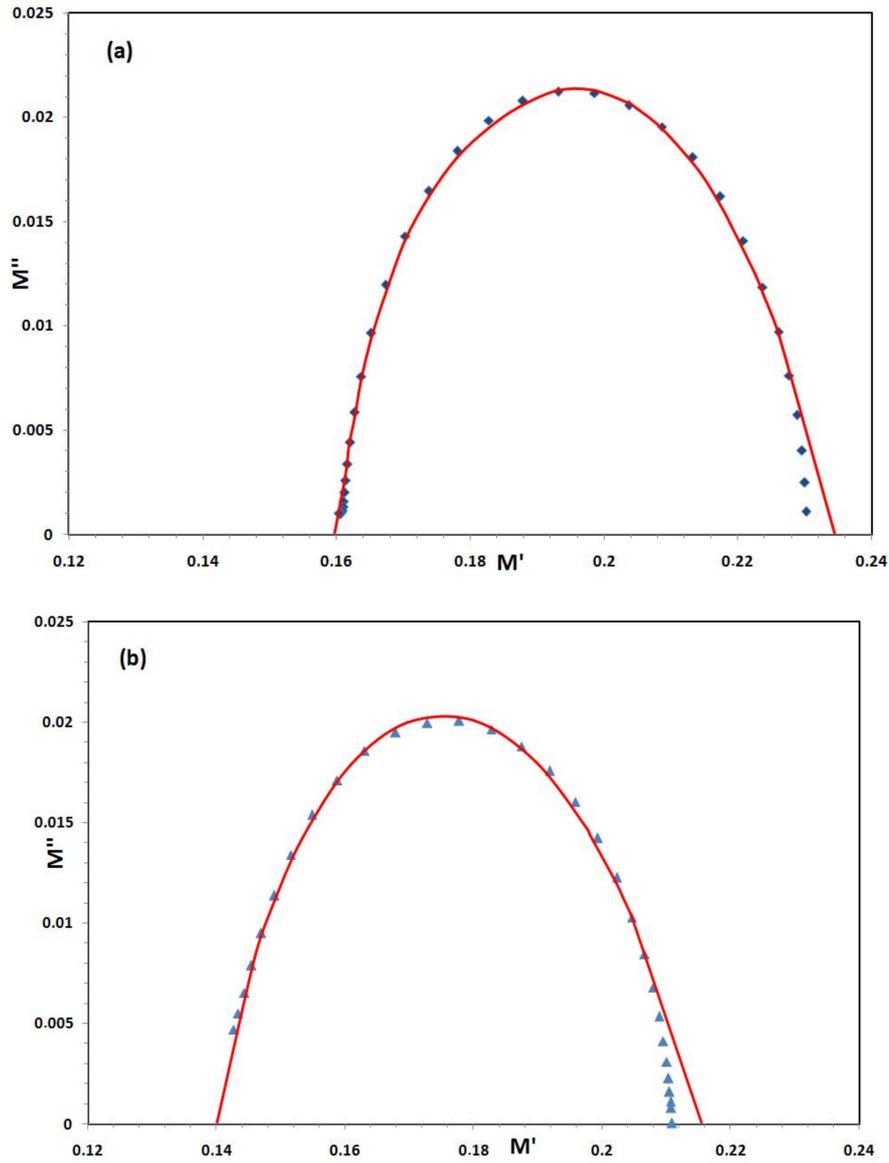


FIGURE 5.10 – Diagrammes d’Argand expérimental et théorique de la relaxation diélectrique (1) en module électrique à la température $-70^{\circ} C$ pour les céramiques poreuses PO (a) et PF (b).

présentés dans le tableau 5.3 ci-dessous. Les énergies d’activation du processus de relaxation E_{a2} obtenues pour les deux céramiques sont nettement supérieures à celle de la glace massive qu’est de l’ordre de $55,5 kJ/mol$ [15, 56]. Ce résultat peut être attribué à l’effet de la structure interne de la céramique poreuse sur le mouvement de réorientation des molécules d’eau. La comparaison de ces énergies obtenues pour les céramiques PO

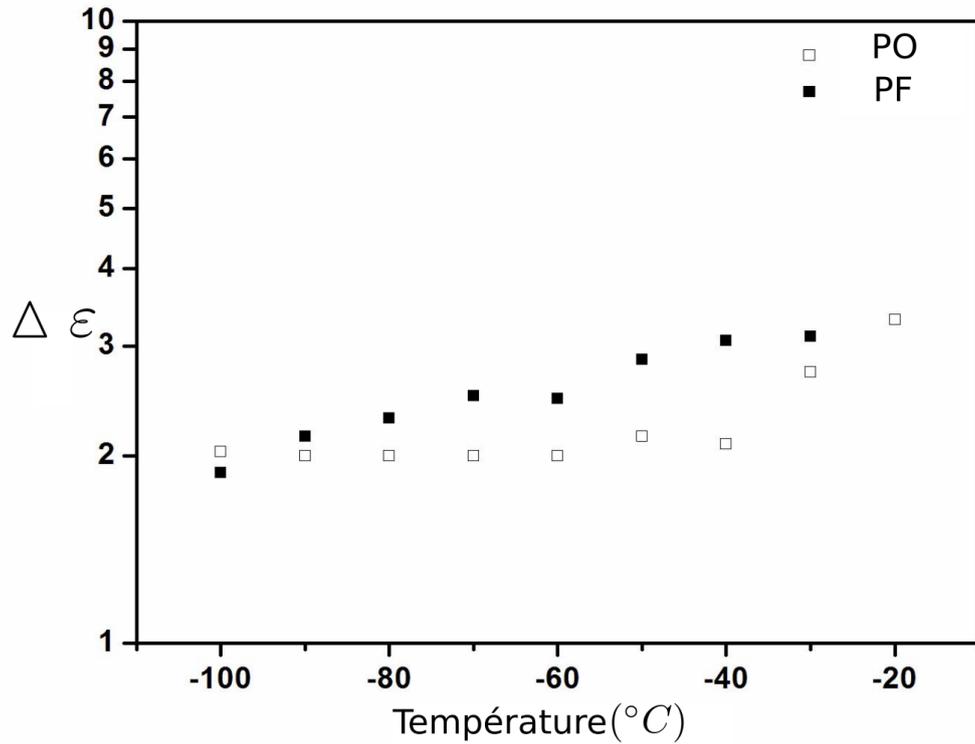


FIGURE 5.11 – Variations de l'intensité de la relaxation diélectrique (1) en fonction de la température.

et PF révèle que ce mouvement est plus difficile lorsque les pores latéraux sont fermés. En effet, l'énergie E_{a2} est supérieure pour la céramique PF. Cette analyse est d'avantage confirmée en comparant les énergies de formation de défaut E_b obtenues pour les deux céramiques poreuses analysées. En effet, la supériorité de sa valeur pour la céramique PO montre que la formation de défaut qui en général apparaît à la surface d'eau pénètre plus en profondeur. Ceci traduit une meilleure interaction eau/surfaces internes de la céramique PO. Un comportement similaire a été obtenu dans le cas des verres poreux de silice non-traités. Dans cette étude, un traitement chimique au KOH de ces verres a induit une baisse de 10% de l'énergie de formation de défaut E_b . Cette baisse a été associée à une élimination du gel de silice des surfaces internes de la structure poreuse ce qui a induit une baisse de l'interaction entre l'eau et ces surfaces poreuses internes et par conséquent une baisse de l'énergie E_b [25, 74].

En résumé, la fermeture des pores latéraux de la céramique poreuse atténue l'interaction eau/surfaces internes de la céramique poreuse de silice analysée et par suite ralentit le mouvement de réorientation des molécules d'eau.

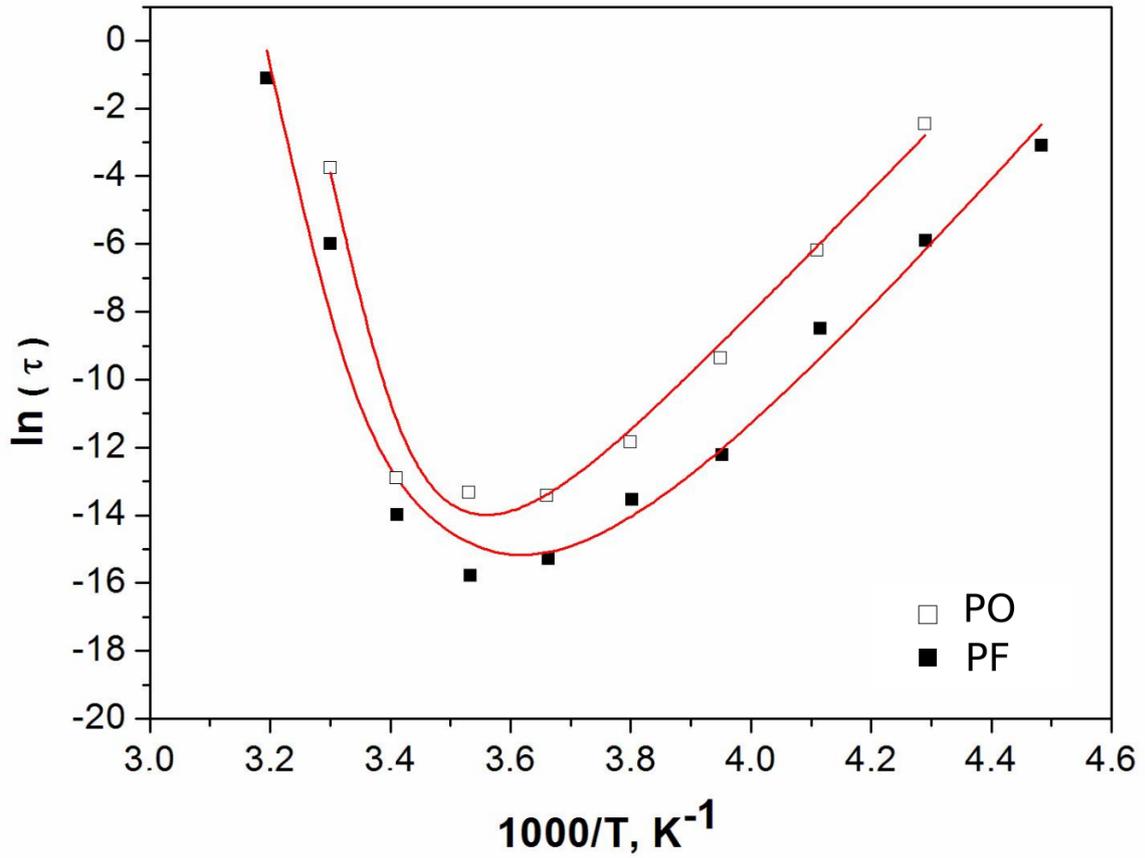


FIGURE 5.12 – Variations du temps de relaxation de l'eau confinée, $\ln(\tau)$, en fonction de $(1000/T)$ pour les céramiques poreuses PO et PF. La courbe rouge représente le meilleur ajustement obtenu en utilisant l'équation (5.24).

| Échantillon | Relaxation | $\ln\tau_{02}$ | E_{a2} (kJ/mol) | E_{b2} (kJ/mol) | C |
|-------------|------------|-----------------|-------------------|-------------------|---------------------------|
| PO | 2 | -81.2 ± 3.8 | 151.7 ± 8.2 | 70.60 ± 0.14 | $(2.64 \pm 0.45) 10^{13}$ |
| PF | 2 | -91.7 ± 6.9 | 164.9 ± 14.9 | 35.19 ± 0.20 | $(2.13 \pm 0.71) 10^7$ |

TABLE 5.3 – Valeurs des paramètres caractéristiques du modèle de l'eau confinée obtenues pour les céramiques PO et PF.

5.9 Analyse corrélative entre les propriétés diélectriques et acoustiques

Afin de corrélérer nos analyses diélectriques à l'étude acoustique, nous nous sommes intéressés à la théorie de Biot qui prédit l'existence de deux ondes longitudinales ultra sonores dans un milieu biphasique, à savoir l'onde rapide et l'onde lente. Dans nos travaux de recherche, le milieu biphasique étudié est une céramique de silice poreuse saturée par l'eau. D'après notre étude acoustique, nous avons mis en évidence l'effet des conditions aux limites (pores ouverts ou fermés) sur l'apparition ou non de l'onde lente. Nous avons démontré que lorsque les pores aux surfaces latérales sont fermés, le déplacement de la phase fluide (eau) est imposé majoritairement par le déplacement de la phase solide ce qui favorise la propagation de l'onde rapide. Dans ces conditions, l'onde lente est quasiment absente d'après la représentation des signaux temporels (transmis et réfléchis).

La corrélation de ces résultats à l'analyse de la relaxation cinétique de l'eau confinée permet d'expliquer l'absence de l'onde lente lorsque les pores latéraux sont fermés. En effet, cette analyse diélectrique a mis en évidence une atténuation de l'interaction eau/structures internes de la céramique analysée lorsque les pores latéraux sont fermés. Il en résulte alors une difficulté dans la réorientation des molécules d'eau en volume. Cette baisse d'interaction fluide/solide en volume est à l'origine de l'absence de l'onde lente. Ce résultat est en accord avec les résultats des simulations numériques en acoustique. Néanmoins, le phénomène de conversion des modes observé au niveau des faces latérales et dans les conditions des pores fermés peut être attribué au phénomène de réorientation des molécules d'eau qu'est plus facile au niveau des interfaces eau/structure interne. Ceci explique l'augmentation de l'amplitude de l'onde lente au niveau des surfaces latérales de la céramique poreuse.

5.10 Conclusion

Des mesures diélectriques effectuées à l'ambiante sur la céramique poreuse de silice ont permis de déterminer le taux de porosité et ceci en utilisant le modèle fractal. Ce résultat est en accord avec les caractéristiques de la plaque poreuse $QF - 20$. Les mesures diélectriques réalisées dans la gamme de température $[-100^\circ C, 200^\circ C]$ et sur les céramiques poreuses saturées PO et PF ont permis d'analyser l'interaction de l'eau/structure interne du milieu poreux en fonction des différents états de l'eau

confinée. En effet, pour les basses températures l'analyse de la relaxation diélectrique (1) associée à la réorientation des molécules d'eau dans la structure cluster de l'eau gelée a révélé son accord au modèle de Havriliak-Négami pour les céramiques PO et PF. Néanmoins, son intensité varie en tenant compte des conditions aux limites. Cette intensité est supérieure pour la céramique PF. Pour les températures intermédiaires, l'analyse de la relaxation diélectrique (2), associée à la transition cinétique provenant de la réorientation des molécules d'eau au voisinage d'un défaut, en utilisant le modèle de la relaxation cinétique non-linéaire de l'eau confinée a révélé une meilleure interaction eau/surfaces internes pour la céramique PO. La formation de défaut qui en général apparaît à la surface d'eau pénètre plus en profondeur pour la céramique PO. Un tel résultat a été corrélé aux propriétés acoustiques prédit par la loi de Biot ce qui a permis d'expliquer l'absence de l'onde lente pour la céramique PF. Également, le phénomène de conversion de modes qui se produit aux interfaces latérales pour la céramique PF a pu être attribué au phénomène de réorientation des molécules d'eau vue que la formation du défaut se forme moins en profondeur pour cette céramique.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le travail présenté dans ce document est une contribution à l'étude de la propagation dans les milieux poreux. Dans un premier temps, on y (dé)montre que la présence d'interfaces ouvertes ou fermées sur le milieu ambiant et de discontinuités comme des variations de paramètres perturbent considérablement la propagation des ondes acoustiques. La conversion de modes, par les transferts d'énergie qu'elle impose, réactive les modes les plus atténués en particulier l'onde lente et atténuée d'autant l'onde rapide. Ces effets qui sont évidemment pris en compte dans les divers logiciels sont souvent globalisés avec d'autres et n'apparaissent pas explicitement dans les prédictions des propriétés des poreux. Ils sont pourtant primordiaux pour la détection des défauts et leur caractérisation (position et taille) puisqu'ils peuvent être des données essentielles pour un estimateur optimisé.

Des codes de calcul ont été réalisés pour les simulations numériques. A cette fin un formalisme basé sur la matrice de diffusion (matrice S) a été développé. La matrice S relie les amplitudes des ondes sortantes aux amplitudes des ondes entrantes entre les faces d'une tranche de poreux et de ce fait elle offre plus de commodités pour les problèmes liés à la transmission et à la réflexion des ondes. Enfin, ses éléments possèdent des propriétés mathématiques fondamentales comme l'unitarité (dans le cas de la propagation sans perte) et l'analyticité.

Si les vérifications expérimentales des simulations numériques ne montrent pas des résultats spectaculaires, elles confirment qu'ils sont probants et que les idées sous-jacentes méritent d'être approfondies.

L'étude diélectrique d'échantillons de silice poreuse saturée, elle aussi laisse entrevoir des applications dignes d'intérêt pour l'analyse de l'espace poreux. Ainsi, cette technique est susceptible de donner des renseignements sur le comportement des fluides polaires au voisinage des parois des pores. Ces idées peuvent se révéler fécondes dans le domaine de l'étude des milieux poreux biologiques.

Enfin, le modèle de tortuosité induite par les défauts apporte un éclairage nouveau sur la détection de la présence de ces derniers. Si on considère que la tortuosité d'un milieu poreux est un paramètre important, et il ne fait nul doute qu'il en est un, alors la modification de la forme des lignes du champs de la vitesse de filtration apparaît comme un moyen possible de modifier certaines propriétés de ce milieu.

Les résultats présentés dans ce document montrent que les problématiques abordées exigent des approfondissements et ouvrent des perspectives intéressantes.

- réalisation d'échantillons comportant des défauts types dont les caractéristiques sont connues,
- développement de méthodes de traitement des signaux détectés (méthodes temps-fréquence, espace-nombre d'onde),
- développement d'estimateurs optimisant les caractéristiques des signaux réfléchis et/ou transmis par les hétérogénéités du milieu,
- approfondissement de la méthode diélectrique en vue d'applications dans le domaine des tissus biologiques.

Annexe

Annexe A

Calcul des matrices de diffusion

A.1 Cas des pores ouverts

D'après les conditions de limites pores ouverts (2.41) et (2.42) on obtient les équations suivantes :
en : $z = 0$

$$\begin{aligned}
 -jk(1 - \mathcal{R}) &= (1 - h)[-jk_1(\bar{\Phi}'_1 - \bar{\Phi}''_1) - jk_2(\bar{\Phi}'_2 - \bar{\Phi}''_2)] \\
 &\quad + h[-j\mu_1 k_1(\bar{\Phi}'_1 - \bar{\Phi}''_1) - j\mu_2 k_2(\bar{\Phi}'_2 - \bar{\Phi}''_2)], \\
 -jk(1 - \mathcal{R}) &= -jk_1(\bar{\Phi}'_1 - \bar{\Phi}''_1)(1 - h - h\mu_1) \\
 &\quad - jk_2(\bar{\Phi}'_2 - \bar{\Phi}''_2)(1 - h - h\mu_2), \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j\omega\rho(1 - h)(1 + \mathcal{R}) &= \frac{1}{j\omega}[-k_1^2(P + Q\mu_1)(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1) \\
 &\quad - k_2^2(P + Q\mu_2)(\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2)] \\
 \rightarrow \rho\omega^2(1 - h)(1 + \mathcal{R}) &= -k_1^2(P + Q\mu_1)(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1) \\
 &\quad - k_2^2(P + Q\mu_2)(\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2), \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j\omega\rho(1 - h)(1 + \mathcal{R}) &= \frac{1}{j\omega}[-k_1^2(Q + R\mu_1)(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1) \\
 &\quad - k_2^2(Q + R\mu_2)(\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2)] \\
 \rightarrow \rho\omega^2(1 - h)(1 + \mathcal{R}) &= -k_1^2(Q + R\mu_1)(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1) \\
 &\quad - k_2^2(Q + R\mu_2)(\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2); \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

en : $z = L$

$$\begin{aligned}
 -jk\mathcal{T}\varphi(\omega) &= h[-\mu_1 k_1(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1) \sin(k_1 l) - j\mu_1 k_1(\bar{\Phi}'_1 - \bar{\Phi}''_1) \cos(k_1 l) \\
 &\quad - \mu_2 k_2(\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2) \sin(k_2 l) - j\mu_2 k_2(\bar{\Phi}'_2 - \bar{\Phi}''_2) \cos(k_2 l)] \\
 &\quad + (1 - h)[-k_1(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1) \sin(k_1 l) - jk_1(\bar{\Phi}'_1 - \bar{\Phi}''_1) \cos(k_1 l) \\
 &\quad - k_2(\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2) \sin(k_2 l) - jk_2(\bar{\Phi}'_2 - \bar{\Phi}''_2) \cos(k_2 l)], \\
 \rightarrow -jk\mathcal{T}\varphi(\omega) &= -(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1)[(h\mu_1 + 1 - h)k_1 \sin(k_1 l) \\
 &\quad - (\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2)[(h\mu_2 + 1 - h)k_2 \sin(k_2 l) \\
 &\quad - j(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1)[(h\mu_1 + 1 - h)k_1 \cos(k_1 l) \\
 &\quad - j(\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2)[(h\mu_2 + 1 - h)k_2 \cos(k_2 l)], \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-h)\rho j\omega\mathcal{T}\varphi(\omega) &= -\frac{1}{j\omega}k_1^2(P-Q\mu_1)[(\bar{\Phi}'_1+\bar{\Phi}''_1)\cos(k_1l) \\
&\quad -j(\bar{\Phi}'_1-\bar{\Phi}''_1)\sin(k_1l)] \\
&\quad -\frac{1}{j\omega}k_2^2(P-Q\mu_2)[(\bar{\Phi}'_2+\bar{\Phi}''_2)\cos(k_2l) \\
&\quad -j(\bar{\Phi}'_2-\bar{\Phi}''_2)\sin(k_2l)],
\end{aligned} \tag{A.5}$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\rho\omega^2(1-h)\mathcal{T}\varphi(\omega) &= k_1^2Z_1[(\bar{\Phi}'_1+\bar{\Phi}''_1)\cos(k_1l)-j(\bar{\Phi}'_1-\bar{\Phi}''_1)\sin(k_1l)] \\
&\quad +k_2^2Z_2[(\bar{\Phi}'_2+\bar{\Phi}''_2)\cos(k_2l)-j(\bar{\Phi}'_2-\bar{\Phi}''_2)\sin(k_2l)],
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
\rho\omega^2h\mathcal{T}\varphi(\omega) &= k_1^2Z_3[(\bar{\Phi}'_1+\bar{\Phi}''_1)\cos(k_1l)-j(\bar{\Phi}'_1-\bar{\Phi}''_1)\sin(k_1l)] \\
&\quad +k_2^2Z_4[(\bar{\Phi}'_2+\bar{\Phi}''_2)\cos(k_2l)j(\bar{\Phi}'_2-\bar{\Phi}''_2)\sin(k_2l)],
\end{aligned}$$

avec :

$$P+Q\mu_1 = Z_1, \tag{A.7}$$

$$P+Q\mu_2 = Z_2, \tag{A.8}$$

$$Q+R\mu_1 = Z_3, \tag{A.9}$$

$$Q+R\mu_2 = Z_4. \tag{A.10}$$

D'après les équations (A.2) et (A.3) on tire les expressions des potentiels vitesses en fonctions des coefficients de transmission et de réflexion :

$$\bar{\Phi}'_1+\bar{\Phi}''_1 = \frac{(Z_4b-Z_2c)}{j(Z_4Z_1-Z_2Z_3)k_1^2}[1+\mathcal{R}], \tag{A.11}$$

$$\bar{\Phi}'_2+\bar{\Phi}''_2 = \frac{(Z_3b-Z_1c)}{j(Z_2Z_3-Z_1Z_4)k_2^2}[1+\mathcal{R}], \tag{A.12}$$

et d'après les équations (A.6) et (A.7) on obtient :

$$\bar{\Phi}'_1-\bar{\Phi}''_1 = \frac{(Z_4b-Z_2c)}{j(Z_4Z_1-Z_2Z_3)k_1^2\sin(k_1l)}[\mathcal{T}+\cos(k_1l)(1+\mathcal{R})], \tag{A.13}$$

$$\bar{\Phi}'_2-\bar{\Phi}''_2 = \frac{(Z_3b-Z_1c)}{j(Z_2Z_3-Z_1Z_4)k_2^2\sin(k_2l)}[\mathcal{T}+\cos(k_2l)(1+\mathcal{R})]. \tag{A.14}$$

Par suite les coefficients de réflexion et de transmission ont les expressions suivantes :

$$\mathcal{R} = \frac{(A_1+A_2)^2-(A_1C_1+A_2C_2)^2+a^2}{(A_1C_1+A_2C_2+a)^2-(A_1+A_2)^2}, \tag{A.15}$$

$$\mathcal{T} = \frac{(A_1C_1+A_2C_2-a)}{(A_1+A_2)} + \frac{(A_1C_1+A_2C_2+a)}{(A_1+A_2)}\mathcal{R}, \tag{A.16}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
a &= jk, \\
b &= (1-h)\rho\omega^2, \\
c &= h\rho\omega^2, \\
S_i &= \sin(k_il), \\
C_i &= \cos(k_il), \quad i=1,2.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{(Z_4b-Z_2c)}{(Z_4Z_1-Z_2Z_3)k_1S_1}(1-h+h\mu_1), \\
A_2 &= \frac{(Z_3b-Z_1c)}{(Z_2Z_3-Z_1Z_4)k_2S_2}(1-h+h\mu_2).
\end{aligned}$$

Matrice de diffusion

On obtient les relations :

$$\begin{aligned}
 jk_2(A_2e^{-jk_2L_1} - B_2e^{jk_2L_1}) = & k_{I1} \sin(k_{I1}L_1) \overline{\phi_{I1}^+} (h_I \mu_{I1} + (1 - h_I)) \\
 & - jk_{I1} \cos(k_{I1}L_1) \overline{\phi_{I1}^-} (h_I \mu_{I1} + (1 - h_I)) \\
 & - k_{I2} \sin(k_{I2}L_1) \overline{\phi_{I2}^+} (h_I \mu_{I2} + (1 - h_I)) \\
 & - jk_{I2} (\cos(k_{I2}L_1) \overline{\phi_{I2}^-} (h_I \mu_{I2} + (1 - h_I)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_2 \omega^2 (1 - h_I) (A_2 e^{-jk_2 L_1} + B_2 e^{jk_2 L_1}) = & + k_{I1}^2 Z_{I1} [\cos(k_{I1} L_1) \overline{\phi_{I1}^+} - j \sin(k_{I1} L_1) \overline{\phi_{I1}^-}] \\
 & + k_{I2}^2 Z_{I2} [\cos(k_{I2} L_1) \overline{\phi_{I2}^+} - j \sin(k_{I2} L_1) \overline{\phi_{I2}^-}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_2 \omega^2 h_I (A_2 e^{-jk_2 L_1} + B_2 e^{jk_2 L_1}) = & k_{I1}^2 Z'_{I1} [\cos(k_{I1} L_1) \overline{\phi_{I1}^+} - j \sin(k_{I1} L_1) \overline{\phi_{I1}^-}] \\
 & + k_{I2}^2 Z'_{I2} [\cos(k_{I2} L_1) \overline{\phi_{I2}^+} - j \sin(k_{I2} L_1) \overline{\phi_{I2}^-}]
 \end{aligned}$$

Les equations (A.17) et(A.17) permettent de déterminer les potentiels rapide et lent dans la plaque II :

$$(Z'_{I2}(1 - h_I) - Z_{I2}h_I)\rho_2\omega^2(A_2e^{-jk_2L_1} + B_2e^{jk_2L_1}) = k_{I1}^2(Z_{I1}Z'_{I2} - Z'_{I1}Z_{I2})(C_1\overline{\Phi_{I1}^+} - jS_1\overline{\Phi_{I1}^-}) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{(Z'_{I2}(1 - h_I) - Z_{I2}h_I)\rho_2\omega^2}{(Z_{I1}Z'_{I2} - Z'_{I1}Z_{I2})jS_1k_{I1}^2}(A_2e^{-jk_2L_1} + B_2e^{jk_2L_1}) + \frac{C_1}{jS_1}\overline{\Phi_{I1}^+} = \overline{\Phi_{I1}^-} \quad (\text{A.18})$$

$$\overline{\Phi_{I1}^-} = \frac{\zeta_1\omega^2}{jS_1k_{I1}^2}[-\rho_2(A_2e^{-jk_2L_1} + B_2e^{jk_2L_1}) + C_1\rho_1(A_1 + B_1)] \quad (\text{A.19})$$

Avec :

$$\zeta_1 = \frac{Z'_{I2}(1 - h_I) - Z_{I2}h_I}{Z_{I1}Z'_{I2} - Z'_{I1}Z_{I2}} \quad (\text{A.20})$$

de même on obtient :

$$\overline{\Phi_{I2}^-} = \frac{\zeta_2\omega^2}{jS_2k_{I2}^2}[-\rho_2(A_2e^{-jk_2L_1} + B_2e^{jk_2L_1}) + C_2\rho_1(A_1 + B_1)] \quad (\text{A.21})$$

Avec :

$$\zeta_2 = \frac{Z'_{I1}(1 - h_I) - Z_{I1}h_I}{Z_{I2}Z'_{I1} - Z'_{I2}Z_{I1}} \quad (\text{A.22})$$

On reporte ces expressions dans la relation de continuité de vitesse (A.1) :

$$k_1(A_1 - B_1) = \frac{H_1}{jS_1}[-\rho_2(A_2e^{-jk_2L_1} + B_2e^{jk_2L_1}) + C_1\rho_1(A_1 + B_1)] \quad (\text{A.23})$$

$$+ \frac{H_2}{jS_2}[-\rho_2(A_2e^{-jk_2L_1} + B_2e^{jk_2L_1}) + C_2\rho_1(A_1 + B_1)] \quad (\text{A.24})$$

$$k_1(A_1 - B_1) = -\rho_2\left(\frac{H_1}{jS_1} + \frac{H_2}{jS_2}\right)(A_2e^{-jk_2L_1} + B_2e^{jk_2L_1}) + \rho_1\left(\frac{H_1C_1}{jS_1} + \frac{H_2C_2}{jS_2}\right) \quad (\text{A.25})$$

de même la relation (A.4)

$$(A_2e^{-jk_2L_1} - B_2e^{jk_2L_1})k_2 = -j\rho_2(A_2e^{-jk_2L_1} + B_2e^{jk_2L_1})\left(\frac{H_1C_1}{S_1} + \frac{H_2C_2}{S_2}\right) - j\rho_1(A_1 + B_1)\left(\frac{H_1}{S_1} + \frac{H_2}{S_2}\right) \quad (\text{A.26})$$

On obtient :

$$A_2 \left[k_2 - j\rho_2 \left(\frac{H_1 C_1}{S_1} + \frac{H_2 C_2}{S_2} \right) \right] e^{-jk_2 L_1} - B_2 \left[k_2 + j\rho_2 \left(\frac{H_1 C_1}{S_1} + \frac{H_2 C_2}{S_2} \right) \right] e^{jk_2 L_1} = -j\rho_1 (A_1 + B_1) \left(\frac{H_1}{S_1} + \frac{H_2}{S_2} \right) \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} j\rho_2 \left(\frac{H_1}{S_1} + \frac{H_2}{S_2} \right) A_2 e^{-jk_2 L_1} + j\rho_2 \left(\frac{H_1}{S_1} + \frac{H_2}{S_2} \right) B_2 e^{jk_2 L_1} &= A_1 \left[k_1 + j\rho_1 \left(\frac{H_1 C_1}{S_1} + \frac{H_2 C_2}{S_2} \right) \right] \\ &\quad - B_1 \left[k_1 - j\rho_1 \left(\frac{H_1 C_1}{S_1} + \frac{H_2 C_2}{S_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Avec :

$$H_1 = [h_I \mu_{I1} + 1 - h_I] \frac{\zeta_1 \omega^2}{k_{I1}} \quad (\text{A.29})$$

$$H_2 = [h_I \mu_{I2} + 1 - h_I] \frac{\zeta_2 \omega^2}{k_{I2}} \quad (\text{A.30})$$

$$(\text{A.31})$$

On note :

$$V_{I1} = \left[k_1 + j\rho_1 \left(\frac{H_1 C_1}{S_1} + \frac{H_2 C_2}{S_2} \right) \right] \quad (\text{A.32})$$

$$V'_{I1} = \left[k_1 - j\rho_1 \left(\frac{H_1 C_1}{S_1} + \frac{H_2 C_2}{S_2} \right) \right] \quad (\text{A.33})$$

$$V_{I2} = \left[k_2 - j\rho_2 \left(\frac{H_1 C_1}{S_1} + \frac{H_2 C_2}{S_2} \right) \right] \quad (\text{A.34})$$

$$V'_{I2} = \left[k_2 + j\rho_2 \left(\frac{H_1 C_1}{S_1} + \frac{H_2 C_2}{S_2} \right) \right] \quad (\text{A.35})$$

$$a = \frac{H_1}{S_1} + \frac{H_2}{S_2} \quad (\text{A.36})$$

On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} A_2 V_{I2} e^{-jk_2 L_1} - B_2 V'_{I2} e^{jk_2 L_1} = -j\rho_1 a A_1 - j\rho_1 a B_1 \\ j\rho_2 a A_2 e^{-jk_2 L_1} + j\rho_2 a B_2 e^{jk_2 L_1} = A_1 V_{I1} - B_1 V'_{I1} \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{cases} B_1 = -A_1 - \frac{V_{I2}}{j\rho_1 a} A_2 e^{-jk_2 L_1} + \frac{V'_{I2}}{j\rho_1 a} B_2 e^{jk_2 L_1} \\ A_2 = A_1 \frac{V_{I1}}{j\rho_2 a} e^{jk_2 L_1} - B_2 e^{2jk_2 L_1} + \frac{V'_{I1}}{j\rho_2 a} A_1 e^{jk_2 L_1} - A_2 \frac{V'_{I1} V_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} + B_2 \frac{V'_{I1} V_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} e^{2jk_2 L_1} \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{cases} A_2 = A_1 \left(\frac{V_{I1} + V'_{I1}}{j\rho_2 a} \right) \left(1 + \frac{V'_{I1} V_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right)^{-1} e^{jk_2 L_1} - B_2 \left(1 - \frac{V'_{I1} V'_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right) \left(1 + \frac{V'_{I1} V_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right)^{-1} e^{2jk_2 L_1} \\ B_1 = -A_1 \left[1 - \frac{V_{I2} (V_{I1} + V'_{I1})}{\rho_1 \rho_2 a^2} \left(1 + \frac{V'_{I1} V_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right)^{-1} \right] + B_2 \left[\frac{V'_{I2}}{j\rho_1 a} + \left(\frac{V_{I2}}{j\rho_1 a} \right) \left(1 - \frac{V'_{I1} V'_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right) \left(1 + \frac{V'_{I1} V_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right)^{-1} \right] e^{jk_2 L_1} \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.40})$$

tel que :

$$t'_{11} = \left(\frac{V_{I1} + V'_{I1}}{j\rho_2 a} \right) \left(1 + \frac{V'_{I1} V_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right)^{-1} e^{jk_2 L_1} \quad (\text{A.41})$$

$$t'_{12} = - \left(1 - \frac{V'_{I1} V'_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right) \left(1 + \frac{V'_{I1} V_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right)^{-1} e^{2jk_2 L_1} \quad (\text{A.42})$$

$$t'_{21} = - \left[1 - \frac{V_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} (V_{I1} + V'_{I1}) \left(1 + \frac{V'_{I1} V_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right)^{-1} \right] \quad (\text{A.43})$$

$$t'_{22} = \left[\frac{V'_{I2}}{j\rho_1 a} + \frac{V_{I2}}{j\rho_1 a} \left(1 - \frac{V'_{I1} V'_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right) \left(1 + \frac{V'_{I1} V_{I2}}{\rho_1 \rho_2 a^2} \right)^{-1} \right] e^{-jk_2 L_1} \quad (\text{A.44})$$

A.2 Cas des pores fermés

Les conditions limites pores fermés donnent (2.43) et (2.44)
En $z = o$

$$\begin{aligned}\omega\Sigma_0k + \rho j\omega &= \frac{-k_1^2}{j\omega}(Z_1 + Z_3)(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1) \\ &\quad - \frac{k_2^2}{j\omega}(Z_2 + Z_4)(\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2) \\ &\quad + (\omega\Sigma_0k - \rho j\omega)\mathcal{R},\end{aligned}\tag{A.45}$$

$$-jk = -jk_1(\bar{\Phi}'_1 - \bar{\Phi}''_1) - jk_2(\bar{\Phi}'_2 - \bar{\Phi}''_2) - jk\mathcal{R},\tag{A.46}$$

$$-jk = -j\mu_1k_1(\bar{\Phi}'_1 - \bar{\Phi}''_1) - j\mu_2k_2(\bar{\Phi}'_2 - \bar{\Phi}''_2) - jk\mathcal{R};\tag{A.47}$$

en $z = l$

$$\begin{aligned}-(\omega\Sigma_lk - \rho j\omega)\mathcal{T} &= -\frac{k_1^2}{j\omega}(Z_1 + Z_3)C_1(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1) \\ &\quad + \frac{k_1^2}{\omega}(Z_1 + Z_3)S_1(\bar{\Phi}'_1 - \bar{\Phi}''_1) \\ &\quad - \frac{k_2^2}{j\omega}(Z_2 + Z_4)C_2(\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2) \\ &\quad + \frac{k_2^2}{\omega}(Z_2 + Z_4)S_2(\bar{\Phi}'_2 - \bar{\Phi}''_2),\end{aligned}\tag{A.48}$$

$$\begin{aligned}-jk\mathcal{T} &= -k_1S_1(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1) - jk_1C_1(\bar{\Phi}'_1 - \bar{\Phi}''_1) \\ &\quad - k_2S_2(\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2) - jk_2C_2(\bar{\Phi}'_2 - \bar{\Phi}''_2),\end{aligned}\tag{A.49}$$

$$\begin{aligned}-jk\mathcal{T} &= -\mu_1k_1S_1(\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1) - j\mu_1k_1C_1(\bar{\Phi}'_1 - \bar{\Phi}''_1) \\ &\quad - \mu_2k_2S_2(\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2) - j\mu_2k_2C_2(\bar{\Phi}'_2 - \bar{\Phi}''_2).\end{aligned}\tag{A.50}$$

On détermine, par suite, les expressions des potentiels des vitesses, les équations (A.46) et (A.47) donnent :

$$\bar{\Phi}'_1 - \bar{\Phi}''_1 = \frac{(\mu_2 - 1)k}{(\mu_2 - \mu_1)k_1}(1 - \mathcal{R})\tag{A.51}$$

$$\bar{\Phi}'_2 - \bar{\Phi}''_2 = \frac{(\mu_1 - 1)k}{(\mu_1 - \mu_2)k_2}(1 - \mathcal{R})\tag{A.52}$$

Les equations (A.49), (A.50), (A.51) et (A.52) donnent :

$$\bar{\Phi}'_1 + \bar{\Phi}''_1 = \frac{(\mu_2 - 1)k}{(\mu_2 - \mu_1)k_1S_1}[\mathcal{T} - (1 - \mathcal{R})C_1],\tag{A.53}$$

$$\bar{\Phi}'_2 + \bar{\Phi}''_2 = \frac{(\mu_1 - 1)k}{(\mu_1 - \mu_2)k_2S_2}[\mathcal{T} - (1 - \mathcal{R})C_2].\tag{A.54}$$

Par suite on trouve les expressions des coefficients de transmission et de réflexion :

$$\mathcal{T} = \frac{-(A_1C_1 + A_2C_2 + b)}{A_1 + A_2} - \frac{(A_1C_1 + A_2C_2 - a_0)}{A_1 + A_2}\mathcal{R},\tag{A.55}$$

$$\mathcal{R} = \frac{(A_1 + A_2)^2 - (A_1C_1 + A_2C_2 + b)(A_1C_1 + A_2C_2 - a_l)}{-(A_1 + A_2)^2 + (A_1C_1 + A_2C_2 + a_0)(A_1C_1 + A_2C_2 - a_l)},\tag{A.56}$$

avec :

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{(\mu_2 - 1)k_1}{(\mu_2 - \mu_1)jS_1c_0}(Z_1 + Z_3), \\A_2 &= \frac{(\mu_1 - 1)k_2}{(\mu_1 - \mu_2)jS_2c_0}(Z_2 + Z_4), \\a_0 &= \Sigma_0k\omega - \rho j\omega, \\a_l &= \Sigma_lk\omega - \rho j\omega, \\b &= \Sigma_0k\omega + \rho j\omega.\end{aligned}$$

Annexe B

Coordonnées sphériques

Dans cette annexe, nous donnons les relations entre des grandeurs définies dans coordonnées sphériques relatives aux repères R et R' .

A partir de la relation (4.112), on exprime les coordonnées (r', θ', φ') en fonction de (r, θ, φ)

$$x' = r' \sin \theta' \cos \varphi' \quad x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (\text{B.1})$$

$$y' = r' \sin \theta' \sin \varphi' \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (\text{B.2})$$

$$z' = r' \cos \theta' \cos \varphi' \quad z = r \sin \theta \cos \varphi \quad (\text{B.3})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ &= \frac{x^2}{\kappa_1} + \frac{y^2}{\kappa_2} + \frac{z^2}{\kappa_3} \\ &= r^2 \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\kappa_1} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\kappa_2} + \frac{\cos^2 \theta}{\kappa_3} \right) \end{aligned}$$

Soit encore :

$$r' = r \Delta \quad \text{où} \quad \Delta = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\kappa_1} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\kappa_2} + \frac{\cos^2 \theta}{\kappa_3}} \quad (\text{B.4})$$

A partir de (B.1) et (B.2), on peut écrire :

$$\begin{aligned} x' = \frac{x}{\kappa_1} \implies r' \sin \theta' \cos \varphi' &= \frac{r}{\kappa_1} \sin \theta \cos \varphi \\ y' = \frac{y}{\kappa_2} \implies r' \sin \theta' \sin \varphi' &= \frac{r}{\kappa_2} \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

En éliminant φ , on trouve

$$\sin \theta' = \sin \theta \frac{\delta}{\Delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\kappa_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\kappa_2}}. \quad (\text{B.5})$$

De la même façon, à partir de (B.3), on peut établir

$$\cos \theta' = \frac{1}{\Delta} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\kappa_3}}. \quad (\text{B.6})$$

On déduit des relations analogues entre les angles φ et φ' à l'aide des relations (B.1) et (B.2) :

$$\sin \varphi' = \frac{1}{\delta} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\kappa_2}}, \quad (\text{B.7})$$

$$\cos \varphi' = \frac{1}{\delta} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\kappa_1}}. \quad (\text{B.8})$$

B.1 Matrice de passage entre coordonnées cartésiennes et sphériques

Soient $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ les deux bases orthonormées associées aux coordonnées cartésiennes (rectangulaires) et sphériques. Par définition on a :

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \quad (\text{B.11})$$

Soit P la matrice de passage entre les composantes rectangulaires et sphériques du vecteur \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}_s = P\mathbf{F}_r, \quad (\text{B.12})$$

où P est :

$$P = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

P est une matrice orthogonale et donc son inverse est égal à sa transposée : $P^{-1} = P^t$.

B.2 Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques

$$\Delta p = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} \quad (\text{B.14})$$

Par séparation des variables on écrit la pression sous la forme :

$$p(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (\text{B.15})$$

$$\Delta p = \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \Theta \Phi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) R \Phi + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} R \Theta = 0 \quad (\text{B.16})$$

Après multiplication par $\left(\frac{1}{R\Theta\Phi} \right)$, on trouve :

$$\Delta p = \underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right)}_{R(r)} + \underbrace{\frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}_{F(\theta, \varphi)} = 0 \quad (\text{B.17})$$

L'équation comprend deux parties : la première qui ne dépend que du rayon r , et la seconde qui dépend uniquement des angles θ et φ .

Déterminons les solutions en termes de $\Theta(\theta)$ et $\Phi(\varphi)$, on pose

$$\frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \alpha \quad (\text{B.18})$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\underbrace{\frac{1}{\Theta} \sin \theta \left(\frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \alpha \sin^2 \theta}_{\Theta(\theta)} + \underbrace{\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}_{\Phi(\varphi)} = 0. \quad (\text{B.19})$$

On a de nouveau la possibilité de séparer les variables angulaires. Dans un premier temps on cherche la solution de $\Phi(\varphi)$. Pour ça, on introduit la constante de séparation $-m^2$ qui conduit alors à l'équation

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi \quad (\text{B.20})$$

dont la solution est :

$$\Phi(\varphi) = Ce^{im\varphi}. \quad (\text{B.21})$$

Ici, où m doit être un entier ($m = 0, 1, 2, \dots$) pour que la périodicité (2π) soit respectée. En reportant l'équation (B.21) dans l'équation (B.19) on détermine la solution du terme en $\Theta(\theta)$:

$$\sin \theta \left(\frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \alpha \sin^2 \theta \Theta - m^2 \Theta = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} - \alpha \Theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta = 0 \quad (\text{B.23})$$

Lorsque $\alpha = l(l+1)$ les solutions de cette équation sont les fonctions de Legendre ($P_l^m \cos \theta$), qui n'existent que pour des valeurs entières et positives de l .

Finalement on cherche la solution du terme $R(r)$ à partir des équations (B.17) et (B.18) :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \alpha R = 0 \quad (\text{B.24})$$

sous la forme

$$R(r) = r^n \quad (\text{B.25})$$

Reportant les solutions en R , Θ et Φ dans l'équation (B.15) on trouve

$$p(r, \theta, \varphi) = \Sigma_l (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (\text{B.26})$$

B.3 Expression de l'opérateur ∇

Les opérateurs différentiels sont

$$\sqrt{\kappa_1} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \sqrt{\kappa_2} \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \sqrt{\kappa_3} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{B.27})$$

ou, encore sous forme matricielle :

$$\nabla' = T \nabla \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\kappa_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\kappa_3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

B.4 Expression de la perméabilité en coordonnées sphériques

La perméabilité d'un matériau poreux est un tenseur de rang 2. Lorsqu'on passe d'un système de coordonnées à un autre il est alors nécessaire de faire le changement de ses composantes conformément à la relation de changement de bases.

Pour un milieu poreux anisotrope, la loi de Darcy s'écrit

$$v_i = \kappa_{ij} E_j \quad (\text{B.29})$$

où $\mathbf{E} = -\nabla p$. Pour établir les formules de changement de base des composantes du tenseur κ on procède comme suit. On exprime la loi de Darcy dans les deux systèmes de coordonnées, à savoir ici, les coordonnées rectangulaires et sphériques :

$$V_r = \kappa_r E_r \quad V_s = \kappa_s E_s \quad (\text{B.30})$$

A l'aide de la relation (B.12), on montre que $\kappa_s = P \kappa_r P^{-1}$. En utilisant le fait que l'on peut toujours choisir les axes des coordonnées rectangulaires de manière à ce que κ_r soit le tenseur diagonal :

$$\kappa_r = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

les composantes de la conductivité dans les coordonnées sphériques ont pour expressions :

$$\kappa_{11} = \kappa_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \kappa_3 \cos^2 \theta, \quad (\text{B.32})$$

$$\kappa_{12} = \kappa_1 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \kappa_2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi - \kappa_3 \cos \theta \sin \theta, \quad (\text{B.33})$$

$$\kappa_{13} = (\kappa_2 - \kappa_1) \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi, \quad (\text{B.34})$$

$$\kappa_{22} = \kappa_1 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \kappa_2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \kappa_3 \sin^2 \theta, \quad (\text{B.35})$$

$$\kappa_{23} = (\kappa_2 - \kappa_1) \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi, \quad (\text{B.36})$$

$$\kappa_{33} = \kappa_1 \sin^2 \varphi + \kappa_2 \cos^2 \varphi, \quad (\text{B.37})$$

$$\kappa_{21} = \kappa_{12}, \quad (\text{B.38})$$

$$\kappa_{31} = \kappa_{13}, \quad (\text{B.39})$$

$$\kappa_{32} = \kappa_{23}. \quad (\text{B.40})$$

ou encore sous sous la forme matricielle :

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_1 \mathbf{I} + (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{A} + (\kappa_3 - \kappa_1) \mathbf{B}, \quad (\text{B.41})$$

où \mathbf{I} est la matrice unité 3×3 et \mathbf{A} et \mathbf{B} sont :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi & \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi & \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi & \cos^2 \theta \sin^2 \varphi & \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.42})$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.43})$$

Annexe C

Tenseur des contraintes pour un fluide en mouvement

On sépare la partie statique de la partie visqueuse qui est essentiellement dynamique

$$T_i = \underbrace{-pn_j\delta_{ij}}_{\text{partie statique}} + \underbrace{\sigma_{ij}n_j}_{\text{partie visqueuse}} \quad (\text{C.1})$$

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (\text{C.2})$$

La partie visqueuse s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (\text{C.3})$$

où η est la viscosité du cisaillement, et le terme ζ représente la viscosité de compression. Pour $i = j$ le tenseur de contrainte est égal à :

$$\sigma_{ii} = 2\eta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \delta_{ii} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (\text{C.4})$$

Pour un fluide incompressible, on a $\partial v_k / \partial x_k = 0$ d'où finalement :

$$\tau_{ii} = -p\delta_{ii} + 2\eta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (\text{C.5})$$

C'est cette expression de la contrainte qu'on doit prendre en compte pour un fluide visqueux en mouvement.

Annexe D

Coordonnées ellipsoïdales

Les coordonnées ellipsoïdales (ξ, η, ζ) sont solutions de l'équation cubique :

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1 \quad (\text{D.1})$$

Ils sont reliés au système des coordonnées cartésiennes (x, y, z) par les relations

$$x^2 = \frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}, \quad (\text{D.2})$$

$$y^2 = \frac{(b^2 + \xi)(b^2 + \eta)(b^2 + \zeta)}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)}, \quad (\text{D.3})$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}, \quad (\text{D.4})$$

à condition que l'on ait $-\xi < c^2 < -\eta < b^2 < -\zeta < a^2$.
Les facteurs d'échelle sont les normes vectorielles :

$$h_{q_i} = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right\| \quad \text{où} \quad q_i = \xi, \eta, \zeta. \quad (\text{D.5})$$

Leurs valeurs sont :

$$h_\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\eta - \xi)(\zeta - \xi)}{(a^2 - \xi)(b^2 - \xi)(c^2 - \xi)}}, \quad (\text{D.6})$$

$$h_\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\xi - \eta)(\zeta - \eta)}{(a^2 - \eta)(b^2 - \eta)(c^2 - \eta)}}, \quad (\text{D.7})$$

$$h_\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\eta - \zeta)(\xi - \zeta)}{(a^2 - \zeta)(b^2 - \zeta)(c^2 - \zeta)}}. \quad (\text{D.8})$$

L'équation de Laplace en coordonnées ellipsoïdales s'écrit :

$$\Delta^2 p = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta} \right) \right] \quad (\text{D.9})$$

Annexe E

Facteurs de dépolarisation

Les facteurs de dépolarisation sont des quantités importantes pour l'expression des solutions de l'équation de Laplace. Ils tiennent compte de la forme du domaine dans lequel cette solution est recherchée et de son orientation par rapport au champ d'excitation. Leurs expressions sont données par :

$$N_k = \frac{abc}{3} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{(\sigma + q^2)\sqrt{(\sigma + a^2)(\sigma + b^2)(\sigma + c^2)}} \quad (\text{E.1})$$

où $k = x$ (resp. y, z) et $q = a$, (resp. b, c) et satisfont la relation :

$$N_x + N_y + N_z = 1. \quad (\text{E.2})$$

Annexe F

Tenseur inverse

F.1 Orientation de l'espace

Soit $\{\mathbf{e}_i\}$ une base de l'espace \mathbb{R}^3 . On considère le produit mixte

$$\epsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \quad (\text{F.1})$$

alors

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j, k \text{ est une permutation paire de } 1,2,3; \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ est une permutation impaire de } 1,2,3; \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux.} \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

F.2 Quelques identités

Par définition :

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i & \delta_r^i \\ \delta_p^j & \delta_q^j & \delta_r^j \\ \delta_p^k & \delta_q^k & \delta_r^k \end{vmatrix} \quad (\text{F.3})$$

On en déduit alors que :

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{iqr} = (\delta_p^j \delta_q^k - \delta_q^j \delta_p^k), \quad (\text{F.4})$$

et que

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{ijq} = 2\delta_q^k. \quad (\text{F.5})$$

et enfin

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{ijk} = 62\delta_q^k. \quad (\text{F.6})$$

Soient $\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_q$ et \mathbf{V}_r trois vecteurs dont les composantes sont les colonnes d'une matrice A . Alors

$$\epsilon_{pqr} \det A = (\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_q, \mathbf{V}_r) \quad (\text{F.7})$$

$$= a_p^i a_q^j a_r^k (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) \quad (\text{F.8})$$

$$= \epsilon_{ijk} a_p^i a_q^j a_r^k. \quad (\text{F.9})$$

A partir de l'égalité :

$$\epsilon^{pqr} \epsilon_{pqr} \det A = \epsilon^{pqr} \epsilon_{ijk} a_p^i a_q^j a_r^k, \quad (\text{F.10})$$

et compte tenu de (F.6), on obtient :

$$\det A = \frac{1}{6} \epsilon^{pqr} \epsilon_{ijk} a_p^i a_q^j a_r^k. \quad (\text{F.11})$$

Tenseur inverse Soit A un tenseur de rang 2 tel que $\det A \neq 0$. On cherche le tenseur B tel que $AB = BA = I$ où I est le tenseur identité. B est le tenseur inverse de A .

On a alors

$$b_j^i a_j^k = \delta_j^k \quad (\text{F.12})$$

ou encore

$$2b_j^i a_j^k = 2\delta_j^k = \epsilon^{pqr} \epsilon_{pqj} \frac{\det A}{\det A}. \quad (\text{F.13})$$

Compte tenu de (F.9)

$$\epsilon^{pqr} \det A = \epsilon^{ijk} a_p^i a_q^j a_r^k. \quad (\text{F.14})$$

L'équation (F.13) devient alors :

$$2b_j^i a_j^k = \epsilon^{mnl} \epsilon_{pqj} \frac{a_m^p a_n^q a_l^k}{\det A}, \quad (\text{F.15})$$

d'où finalement :

$$b_j^l = \epsilon^{mnl} \epsilon_{pqj} \frac{a_m^p a_n^q}{\det A}. \quad (\text{F.16})$$

Bibliographie

- [1] *Electromagnetic wave interaction with water and moist substances*, 2001.
- [2] Bakr A.A.A.M. *North. Eur. Polym. Sci*, 1977.
- [3] R.E. Ewing B. Ghanbarian, A. G. Hunt and M. Sahimi. Tortuosity in porous media : A critical review. *Soil Science Society of America Journal*, pages 1461–1477, 2013.
- [4] F. Belhocine, S. Derible, and H. Franklin. Transition term method for the analysis of the reflected and the transmitted acoustic signals from water-saturated porous plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 122(3) :1518–1526, 2007.
- [5] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2) :168–178, 1956.
- [6] D. A. G. Bruggeman. Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen substanzen. i. dielektrizitätskonstanten und leitfähigkeiten der mischkörper aus isotropen substanzen. *Annalen der Physik*, 416(7) :636–664, 1935.
- [7] D. A. G. Bruggeman. Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen substanzen. i. dielektrizitätskonstanten und leitfähigkeiten der mischkörper aus isotropen substanzen. *Annalen der Physik*, 416(7) :665, 1935.
- [8] M.A. Cantin. Ingénierie des systèmes humains, tp1, 2016. [http://slideplayer.fr/slide/7553257/24/images/18/Terminologies+Classification+des+os+Os+longs+\(1\)+Os+courts+\(2\).jpg](http://slideplayer.fr/slide/7553257/24/images/18/Terminologies+Classification+des+os+Os+longs+(1)+Os+courts+(2).jpg)
- [9] P.C. Carman. Fluid flow through granular beds. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers.*, pages 150–166, 1937.
- [10] R. K. Chan, D. W. Davidson, and E. Whalley. Effect of pressure on the dielectric properties of ice i. *The Journal of Chemical Physics*, 43(7) :2376–2383, 1965.
- [11] M. Ben CLennel. Tortuosity : a guide through the maze. *Developments in Petrophysic*, 122 :299–344, January 1997.
- [12] Kenneth S. Cole and Robert H. Cole. Dispersion and absorption in dielectrics i. alternating current characteristics. *The Journal of Chemical Physics*, 9(4) :341–351, 1941.
- [13] S. W. Coleman and J. C. Vassilicos. Transport properties of saturated and unsaturated porous fractal materials. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :035504, Jan 2008.

- [14] Laetitia Comparon. *Étude expérimentale des propriétés électriques et diélectriques des matériaux argileux consolidés*. PhD thesis, Institut de physique du Globe de Paris, 2005.
- [15] W. Kauzmann D. Eisenberg. *The Structure and Properties of Water*. Clarendon Press, Oxford Press ed, 1969.
- [16] B. Brouard C. Verhaegen D. Lafarge, J. F. Allard and W. Lauriks. Characteristic dimensions and prediction at high frequencies of the surface impedance of porous layers. *J. Acoust. Soc. Am.*, pages 2474–2478, 1993.
- [17] H. P. G. Darcy. Les fontaines publiques de la ville de dijon. *Dalmont.*, pages 150–166, Paris, 1856.
- [18] D. W. Davidson and R. H. Cole. Dielectric Relaxation in Glycerol, Propylene Glycol, and n-Propanol. *jcp*, 19 :1484–1490, December 1951.
- [19] Ph.D.P. Debye. Polar molecules. *Journal of the Society of Chemical Industry*, 48(43) :1036–1037, 1929.
- [20] I.T. Drummond and R. R. Horgan. The effective permeability of a random medium. *J. Phys. A : Math. Gen.*, pages 4661–4672, 1987.
- [21] V.V. Dzhabrailov and R.P. Meilanov. Filtration in a porous medium with a fluctuating permeability. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, pages 188–192, 1996.
- [22] Fatima.Belaziz et al. Imagerie moderne de la qualité osseuse dans l’ostéoporose. *Revue Marocaine de Rhumatologie*, 40 :16–23, 2017.
- [23] R. Lakes et al. Slow compressional wave propagation in wet human and bovine cortical bone. *Science*, 34(9A) :513–515, 1983.
- [24] L. Landau et E. Lifchitz. *Théorie de l’élasticité*. édition Mir, 1967.
- [25] Yuri Feldman, Alexander Puzenko, and Yaroslav Ryabov. *Dielectric Relaxation Phenomena in Complex Materials*. John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [26] A. Patsidis G. Ioannou and G.C. Psarras. *Compos. A : Appl. Sci. Manuf*, 2011.
- [27] J. C. Maxwell Garnett. Colours in metal glasses and in metallic films. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 203(359-371) :385–420, 1904.
- [28] Y. Gueguen and V. Palciauskas. *Introduction à la physique des roches*. Hermann, 1992.
- [29] J. Katagiri H. Saomotoa. Direct comparison of hydraulic tortuosity and electric tortuosity based on finite element analysis. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, pages 177–180, 2015.
- [30] J. B. Hasted. Aqueous dielectrics (serie : Studies in chemical physics). vii, 302 s., 113 abb., 31 tab., london 1973 : Chapman and hall. 5.75. *Zeitschrift für allgemeine Mikrobiologie*, 16(7) :567–567, 1976.
- [31] J.B. Hasted. *Aqueous Dielectric*. Christopher C. Barton, Paul R. La Pointe ed, 1973.

- [32] S. Havriliak and S. Negami. A complex plane analysis of α -dispersions in some polymer systems. *Journal of Polymer Science Part C : Polymer Symposia*, 14(1) :99–117, 1966.
- [33] S. Havriliak and S. Negami. A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers. *Polymer*, 8(Supplement C) :161 – 210, 1967.
- [34] I.M. Hodge and A. Eisenberg. Conductivity relaxation in an amorphous-iron-containing organic polymer. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 27(3) :441 – 443, 1978.
- [35] D. T. Hristopulos and G. Christakos. Variational calculation of the effective fluid permeability of heterogeneous media. *Phys. Rev. E*, pages 7288–7289, 1997.
- [36] J.-F. Thovert I. I. Bogdanov, V. V. Mourzenko and P. M. Adler. Effective permeability of fractured porous media with power-law distribution of fracture sizes. *Phys. Rev. E*, 76 :036309, Sep 2007.
- [37] Aubic J. and Bottreau A.M. Utilisation de la réflectométrie en domaine temporel pour l'étude des transferts d'humidité en milieu poreux perméable. *Journal of Hydrology*, 57(3) :337 – 357, 1982.
- [38] C. Lavelle-F.G. Sánchez J. Lira-Olivares, D Marcano. Determination of porosity by dielectric permittivity measurements in porous ceramics. *Revista Latinoamericana de Metalurgia y Materiales*, 2000.
- [39] J. Jacobson. Hydration structure of deoxyribonucleic acid and its physicochemical properties. *nature*, 1953.
- [40] Xiangyun Hu David A. Wood Jianchao Cai, Wei Wei. Electrical conductivity models in saturated porous media. *A review, Earth-Science Reviews*, pages 419–433, August 2017.
- [41] D. L. Johnson. Frontiers in physical acoustics, proceedings of the enrico fermi summer school. *Course XCII, Elsevier*, 1984.
- [42] D. L. Johnson, D. L. Hemmick, and H. Kojima. Probing porous media with first and second sound. i. dynamic permeability. *Journal of Applied Physics*, 76(1) :104–114, 1994.
- [43] D.L. Johnson. Frontiers of physical acoustics. *Proc. Enrico Fermi Summer School, Varenna, Italy*, pages 255–290, 1986.
- [44] A.K. Jonscher. Dielectric relaxation in solids. *Chelsea Dielectrics Press*, 1983.
- [45] P. R. King. The use of field theoretic methods for the study of flow in a heterogeneous porous medium. *J. Phys. A : Math. Gen.*, pages 3935–3947, 1987.
- [46] P. R. King. The use of renormalization for calculating effective permeability. *Transport in porous media*, pages 37–58, 1989.
- [47] I. Klotz and H Curxae. •. *J. Amer. Chem. Soc*, 1948.

- [48] V. Kostrykin and R. Schrader. The generalized star product and the factorization of scattering matrices on graphs. *Journal of Mathematical Physics*, 42(4) :1563–1598, 2001.
- [49] L. Landau and E. Lifchitz. *Electrodynamique des milieux continus*. Mir Moscou, 1969.
- [50] T. Lähivaara O. Dazel J.-P. Groby et T. Huttunen M. Niskanen, A. Duclos. "characterization of a porous plate saturated by water.". 2016.
- [51] M. L. McKelvie and S. B. Palmer. The interaction of ultrasound with cancellous bone. *Physics in Medicine & Biology*, 36(10) :1331, 1991.
- [52] O.F. Mossotti. *Memorie di matematica e di fisica della societa italiana delle scienze*. PhD thesis, residente in MODENA, 1850.
- [53] M.Sahimi. *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock : From Classical Methods to Modern Approaches*. WILEY-VCH, 2nd edition, 2011.
- [54] M. Naas. *Contribution à l'étude de la propagation des ondes acoustiques dans les milieux poreux inhomogènes*. PhD thesis, Université du Maine, 2010.
- [55] J. A. Osborn. Demagnetizing factors of the general ellipsoid. *The Physical Review*, pages 351–357, 1945.
- [56] Robert W.W Petrenko V.F. *Physics of Ice*. Oxford University Press, 2002.
- [57] T.J. Plona. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. *Applied Physics Letters*, 36(4) :259–261, 1980.
- [58] J. Prakash and G.P. Raja Sekhar. Arbitrary oscillatory stokes flow past a porous sphere using brinkman model. *Meccanica*, pages 1079–1095, 2012.
- [59] Alexander Puzenko, Nick Kozlovich, Anna Gutina, and Yuri Feldman. Determination of pore fractal dimensions and porosity of silica glasses from the dielectric response at percolation. *Phys. Rev. B*, 60 :14348–14359, Nov 1999.
- [60] P. N. J. Rasolofosaon. Importance of interface hydraulic condition on the generation of second bulk compressional wave in porous media. *Applied Physics Letters*, 52(10) :780–782, 1988.
- [61] D.A.S. Rees. The effect of inertia on the onset of mixed convection in a porous layer heated from below. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 24(2), Mar 1997.
- [62] Ya. Ryabov, A. Gutina, V. Arkhipov, and Yu. Feldman. Dielectric relaxation of water absorbed in porous glass. *The Journal of Physical Chemistry B*, 105(9) :1845–1850, 2001.
- [63] S. Cowin. Bone mechanics handbook. *CRC Press, Boca Raton,*, 2001.
- [64] M. Schiffer and G. Szegö. Virtual mass and polarization. *Transactions of the AMS - American Mathematical Society*, pages 130–205, 1949.
- [65] Howard W. Srankweather and Peter Avakian. Conductivity and the electric modulus in polymers. *Journal of Polymer Science Part B : Polymer Physics*, 30(6) :637–641, 1992.

- [66] Y. A. Stepanyants and E.V. Teodorovich. Effective hydraulic conductivity of a randomly heterogeneous porous medium. *Water Resources Research*, pages SHB 12–1, SHB 12–9, 2003.
- [67] E. C. Stoner. The demagnetizing factors for ellipsoids. *Philosophical Magazine*, pages 803–821, 1945.
- [68] A. Szent. *Bioenergetics*. New York, Academic Press, 1957.
- [69] E. V. Teodorovich. Calculation of the effective permeability of a randomly inhomogeneous porous medium. *JETP*, pages 173–178, 1997.
- [70] E. V. Teodorovich. The effective "conductivity of a randomly inhomogeneous medium. *J Appl. Maths Mechs*, pages 951–957, 2000.
- [71] N.G. Van Kampen and François Lurç at. Causalité et relations de Kramers-Kronig. *J. Phys. Radium*, 22(3) :179–191, 1961.
- [72] A.P. Wang. Scattering theory and linear state-space estimation. *Journal of mathematical analysis and applications*, 120 :397–415, 1986.
- [73] A. B. Wood. *A Textbook of Sound*. Bell, 1930.
- [74] Alexander Puzenko Yaroslav E. Ryabov and Yuri Feldman. Nonmonotonic relaxation kinetics of confined systems. *Phys. Rev*, 2004.
- [75] Tarik Zakri. *Contribution à l'étude des propriétés diélectriques de matériaux poreux en vue de l'estimation de leur teneur en eau : modèles de mélange et résultats expérimentaux*. PhD thesis, Institut National polytechnique de Grenoble, 1997.

Thèse de Doctorat

Fatma GRAJA

Influence des conditions d'interfaces d'un milieu poreux saturé sur la propagation des ondes ultrasonores : Analyses acoustique et diélectrique

Influence of the interface conditions of a saturated porous medium on the propagation of ultrasonic waves: acoustic and dielectric analysis.

Résumé

Ce travail de thèse rentre dans le cadre d'une collaboration entre l'université de Sfax et l'université du Maine. La thèse intitulée "Influence des conditions d'interfaces d'un milieu poreux saturé sur la propagation des ondes ultrasonores : analyse acoustique et diélectrique". Le travail présenté dans ce mémoire de thèse étudie les mécanismes pouvant se reproduire dans un milieu poreux saturé par un fluide incompressible, lorsqu'il est soumis à un gradient de pression pour l'étude acoustique, et un gradient de champs électromagnétique pour l'analyse diélectrique. De ce fait le présent mémoire s'intéresse à présenter deux techniques de caractérisation :

i) La caractérisation acoustique où la théorie de Biot a été adoptée pour comprendre les mécanismes de la propagation des ondes ultrasonores dans les matériaux poreux saturés et étudier l'influence de changement des conditions d'interfaces sur les coefficients de réflexion et de transmission. Le cas de présence d'un défaut plan dans le volume du matériau a été traité. Dans le même objectif, l'étude de l'influence de la présence de plusieurs inclusions sphériques sur la modification des lignes de champs de vitesses a été présentée en proposant un modèle de tortuosité adapté selon la nature de l'inclusion et le milieu poreux hôte (homogénéité et l'anisotropie).

ii) L'analyse diélectrique qui permet de décrire la structure interne et l'interaction entre le solide et le fluide saturant. Des mesures diélectriques ont été effectuées sur des céramiques de silice poreuse identiques à celle utilisée lors de la caractérisation ultrasonore, afin d'étudier l'influence de l'état des surfaces latérales de l'échantillon sur l'interaction entre le fluide saturant et les surfaces intérieures de la structure poreuse. Les résultats permettent de mettre en évidence une analogie entre les comportements de l'inclusion dans le champ de vitesse du fluide et celui d'une sphère diélectrique dans un champs électrique uniforme. Des expériences acoustiques et des mesures diélectriques (spectroscopie) ont été réalisées et comparées aux simulations numériques et aux modèles théoriques dans les deux parties d'étude.

Mots clés

Milieus poreux, ultrasons, tortuosité, contrôle non destructif, spectroscopie diélectrique

Abstract

This work is part of a collaboration between the University of Sfax and the University of Maine. The thesis entitled "Influence of the interface conditions of a saturated porous medium on the propagation of ultrasonic waves: acoustic and dielectric analysis". The work presented in this dissertation examines the mechanisms that can be reproduced in a porous medium saturated by an incompressible fluid when subjected to a pressure gradient for the acoustic study and an electromagnetic field gradient for the dielectric study. Consequently, the present paper is interested in presenting two techniques of characterization:

i) Acoustic characterization where Biot's theory was adopted to understand the mechanisms of propagation of ultrasonic waves in saturated porous materials and to study the influence of changing interface conditions on reflection and transmission coefficients. The presence of a flat defect in the volume of the material has been treated. The study of the influence of the presence of several spherical inclusions on the modification of the lines of velocity fields was presented by proposing a model of tortuosity adapted according to the nature of the inclusion and the porous medium host (homogeneity and anisotropy).

ii) The dielectric analysis which allows to describe the internal structure and the interaction between the solid and the saturating fluid. Dielectric measurements were carried out on porous silica ceramics identical to those used in ultrasonic characterization in order to study the influence of the state of the lateral surfaces of the sample on the interaction between the saturating fluid and the surfaces of the porous structure.

The results make it possible to demonstrate an analogy between the behavior of the inclusion in the velocity field of the fluid and that of a dielectric sphere in a uniform electric field. Acoustic experiments and dielectric measurements (spectroscopy) were carried out and compared with numerical simulations and theoretical models in both parts of the study.

Key Words

Porous medium, ultrasons, tortuosity, Non destructif control, Dielectric spectroscopy