



HAL
open science

Analyse spectrale et surveillance des réseaux maillés de retour de courant pour l'aéronautique

Étienne Goddet

► **To cite this version:**

Étienne Goddet. Analyse spectrale et surveillance des réseaux maillés de retour de courant pour l'aéronautique. Energie électrique. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAT099 . tel-01801141

HAL Id: tel-01801141

<https://theses.hal.science/tel-01801141>

Submitted on 28 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Génie Electrique**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Étienne GODDET

Thèse dirigée par **Nicolas RETIERE** et
codirigée par **Jean-Michel GUICHON**
Anca DIEUDONNE

préparée au sein du **Laboratoire de Génie Électrique de
Grenoble (G2Elab)**,
dans l'**École Doctorale d'Electronique, Electrotechnique,
Automatique et Traitement de Signal (EEATS)**

Analyse spectrale et surveillance des réseaux maillés de retour de courant pour l'aéronautique

Thèse soutenue publiquement le **14 Décembre 2017**,
devant le jury composé de :

M. Demba DIALLO

Professeur des Universités, CentraleSupélec, Président

M. Jean-Guy CAPUTO

Maître de Conférences, INSA Rouen, Rapporteur

M. Hubert PIQUET

Professeur des Universités, INP-ENSEEIH, Rapporteur

M. Nicolas RETIERE

Professeur des Universités, UGA, Directeur de Thèse

M. Jean-Michel GUICHON

Maître de conférences, UGA, Co-encadrant de Thèse

Mme. Anca DIEUDONNE

Ingénieur, Safran Electrical & Power, Co-encadrant de Thèse

M. Jean-Philippe PARMANTIER

Expert-CEM, ONERA, Invité



"Les premiers seront derniers", cette phrase est la première
Pourtant, c'est la dernière que j'ai écrite.

Sérigne M'Baye Gueye alias Disiz la Peste

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier l'ensemble des membres du jury qui, par leurs nombreux commentaires et questions, m'ont apporté la preuve de la qualité de mes recherches et donnent de la valeur à ma thèse. J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur Jean-Guy Caputo et Monsieur Hubert Piquet d'avoir accepté le rôle de rapporteur de thèse, à Monsieur Demba Diallo d'avoir présidé ma soutenance de thèse et à Monsieur Jean-Philippe Parmantier d'avoir montré un réel intérêt pour mes travaux.

Ma thèse n'aurait pas pu se dérouler sans l'implication, les conseils et les encouragements de mes encadrants. Je tiens donc à dire un grand merci à Nicolas Retiere de m'avoir fait découvrir son domaine de recherche qui a su me passionner durant plus de 5 ans. C'est grâce à sa rigueur, sa motivation et surtout ses idées que la thèse a pu exister.

Je voudrais aussi remercier Anca Dieudonné pour son soutien et sa disponibilité sans faille. Sa capacité à tirer les idées et les personnes vers le haut a été indispensable.

Et je souhaite remercier Jean-Michel Guichon, que ce soit lors de mon premier stage ou à la fin de ma thèse, que ce soit sur l'inversion des matrices ou sur le chauffage corporel, que ce soit pour me plaindre ou pour recevoir des encouragements, il a toujours pris le temps de m'aider. Il a indéniablement contribué à faire de moi ce que je suis maintenant.

Je tiens également à remercier l'ensemble des collègues du laboratoire que j'ai pu côtoyer lors de ces cinq années et l'ensemble des collègues de Safran Electrical & Power pour leur gentillesse et leur convivialité, ils ont permis à cette thèse de se dérouler dans les meilleurs conditions possibles.

Les soutiens n'ont pas été que professionnels, je voudrais dire un grand merci à tous ceux qui ont été là en dehors du laboratoire : tout d'abord, les Romains grenoblois qui ont dû me supporter toutes les semaines lors de nos nombreux repas (plus ou moins légers...) à domicile, à l'Amorosa et au Shannon. Merci à Romain Gi pour l'accueil toujours parfait, et à Romain Gi pour ses apports éclairés sur les tactiques lors des matchs de ligue des champions. Ce n'est pas parce que je ne viens plus toutes les semaines que je vais vous laisser tranquilles.

A Lyon aussi on s'est bien occupé de moi, merci à Lucas et à Marie pour les célèbres jeudis œnologies (et les autres jours aussi...), pour les sorties en ville ou à la campagne, pour les footings et pour tout le reste. J'espère que vous êtes prêt à boire du vin et à m'entendre me plaindre encore un bout de temps.

Je ne peux pas finir cette page sans remercier ma famille qui m'a fourni depuis ma plus tendre enfance le cadre et le soutien nécessaires à la construction de mon avenir donc merci à mes parents, mes grands-parents, mes sœurs, mes oncles et tantes, mes cousins... Un merci tout particulier à Nicolas, Virginie, Lou et Zoé pour m'avoir accueilli lorsque j'étais loin de chez moi.

Et pour finir, merci à Sonia de son écoute, sa patience, son aide,... tous ces bons moments. On a commencé cette aventure ensemble, on l'a fini ensemble et on va en vivre tellement d'autres, ensemble pour mon plus grand bonheur. A notre futur...

Table des matières

Remerciements.....	- 5 -
Table des matières	- 9 -
Introduction générale.....	- 13 -
Chapitre I. Contexte général et enjeux	- 17 -
I.1. Les avions plus composites	- 19 -
I.2. Problématiques industrielles	- 21 -
I.2.1 Les principales difficultés rencontrées	- 22 -
<i>I.2.1.1. Retour de courant ou Grounding</i>	<i>- 22 -</i>
<i>I.2.1.2. Métallisation ou Bounding</i>	<i>- 22 -</i>
<i>I.2.1.3. Protection au choc de foudre</i>	<i>- 22 -</i>
<i>I.2.1.4. Protection aux champs rayonnés</i>	<i>- 24 -</i>
I.2.2 Les solutions existantes	- 24 -
I.2.3 Le projet DEPACE	- 25 -
I.3. Les problématiques de la thèse	- 25 -
I.3.1 Pré-dimensionnement topologique d'un réseau de retour de courant	- 25 -
I.3.2 Surveillance du réseau	- 27 -
I.3.3 Hypothèses de travail et approches privilégiées	- 28 -
Chapitre II. Besoin d'une nouvelle analyse	- 31 -
II.1. Théorie des graphes et applications aux réseaux électriques	- 33 -
II.1.1 Réseaux électriques illustratifs.....	- 33 -
<i>II.1.1.1. Réseau électrique maillé.....</i>	<i>- 33 -</i>
<i>II.1.1.2. Réseau électrique quasi-radial.....</i>	<i>- 33 -</i>
II.1.2 Modélisation mathématique des réseaux électriques	- 34 -
<i>II.1.2.1. Théorie des graphes</i>	<i>- 34 -</i>
<i>II.1.2.2. Graphe d'un réseau électrique résistif.....</i>	<i>- 38 -</i>
<i>II.1.2.3. Exemples.....</i>	<i>- 39 -</i>
II.1.3 Eléments d'analyse.....	- 42 -
<i>II.1.3.1. Résolutions des équations de circuit</i>	<i>- 42 -</i>
<i>II.1.3.2. Analyses topologiques</i>	<i>- 44 -</i>
<i>II.1.3.3. Problèmes de circulation de flux.....</i>	<i>- 51 -</i>
II.2. Une première approche des liens entre topologie et robustesse	- 52 -
II.3. Conclusions	- 55 -

Chapitre III. Analyse spectrale des réseaux électriques.....	- 57 -
III.1. Théorie spectrale des graphes.....	- 59 -
III.1.1 Valeurs propres, vecteurs propres et modes	- 59 -
III.1.2 Lecture multi-échelle	- 63 -
III.1.3 Connectivité algébrique	- 64 -
III.2. Analyse spectrale.....	- 67 -
III.2.1 Décomposition modale	- 67 -
<i>III.2.1.1. Décomposition modale de la résistance électrique d'un chemin.....</i>	<i>- 67 -</i>
<i>III.2.1.2. Décomposition modale de la masse du réseau</i>	<i>- 73 -</i>
III.2.2 Mise en évidence des échelles caractéristiques	- 73 -
III.2.3 Vecteurs propres	- 78 -
<i>III.2.3.1. Domaine nodaux et frontières.....</i>	<i>- 78 -</i>
<i>III.2.3.2. Mesures de centralité des nœuds.....</i>	<i>- 81 -</i>
III.2.4 Analyse perturbative du spectre du graphe.....	- 83 -
<i>III.2.4.1. Principe de l'analyse perturbative.....</i>	<i>- 83 -</i>
<i>III.2.4.2. Application au réseau de retour de courant</i>	<i>- 85 -</i>
<i>III.2.4.3. Conséquences pour les chutes de tension</i>	<i>- 88 -</i>
III.3. Conclusions.....	- 91 -
Chapitre IV. Applications aéronautiques	- 93 -
IV.1. Maquette représentative d'un réseau de retour de courant : DEMLAB.....	- 95 -
IV.1.1 Maquette réelle	- 95 -
IV.1.2 Hypothèses pour la modélisation.....	- 98 -
<i>IV.1.2.1. Modélisation des contacts électriques.....</i>	<i>- 98 -</i>
<i>IV.1.2.2. Modélisation du fuselage.....</i>	<i>- 99 -</i>
IV.1.3 Graphe de la maquette	- 100 -
IV.2. Pré-dimensionnement du réseau de retour de courant	- 101 -
IV.2.1 Placement modal des charges	- 102 -
IV.2.2 Design par optimisation.....	- 104 -
<i>IV.2.2.1. Première formulation de l'optimisation.....</i>	<i>- 104 -</i>
<i>IV.2.2.2. Formulation LMI de l'optimisation.....</i>	<i>- 107 -</i>
<i>IV.2.2.3. Application à DEMLAB.....</i>	<i>- 108 -</i>
<i>IV.2.2.4. Vérification du critère de tension.....</i>	<i>- 109 -</i>
IV.2.3 Ajout ciblé de matière.....	- 113 -
IV.3. Méthodes de surveillance et de caractérisation des réseaux de retour de courant.....	- 116 -
IV.3.1 Estimation paramétrique.....	- 117 -
IV.3.2 Méthodologie de surveillance.....	- 119 -
<i>IV.3.2.1. Description du fonctionnement de DEMLAB.....</i>	<i>- 119 -</i>

<i>IV.3.2.2. Principe de la méthodologie.....</i>	<i>- 121 -</i>
<i>IV.3.2.3. Application à la maquette DEMLAB.....</i>	<i>- 123 -</i>
<i>IV.3.2.4. Surveillance de la maquette DEMLAB.....</i>	<i>- 129 -</i>
<i>IV.3.2.5. Résultats et perspectives.....</i>	<i>- 130 -</i>
IV.3.3 Méthode de caractérisation du réseau.....	- 130 -
<i>IV.3.3.1. Description du réseau test.....</i>	<i>- 131 -</i>
<i>IV.3.3.2. Principe de la caractérisation.....</i>	<i>- 133 -</i>
<i>IV.3.3.3. Avec des mesures obtenues par simulation.....</i>	<i>- 133 -</i>
<i>IV.3.3.4. Etude de sensibilité.....</i>	<i>- 136 -</i>
<i>IV.3.3.5. Avec des mesures physiques.....</i>	<i>- 137 -</i>
IV.4. Conclusions.....	- 138 -
Conclusions générales et perspectives.....	- 141 -
Bibliographie.....	- 147 -
Annexes.....	- 156 -

Introduction générale

Depuis plusieurs années, l'aéronautique est confrontée à une mutation majeure due au passage à l'avion plus composite. Ce changement est justifié par les excellentes propriétés mécaniques des matériaux composites et le gain de masse important qu'ils fournissent. Récemment, sur les modèles d'Airbus A350 et de Boeing 787, le fuselage et la structure métallique ont été remplacés en grande partie par des matériaux composites. Cependant, l'apparition de ces matériaux implique une complexification des réseaux électriques embarqués. Dans un avion conventionnel, la structure et le fuselage métallique réalise intrinsèquement, en plus de leurs fonctions « mécaniques », pas moins de 6 fonctions électriques : assurer le retour de courants monophasés et continus des charges vers les sources, assurer la métallisation/protection des équipements en cas de défaut électrique, assurer la protection des personnes, protéger contre les effets indirects de la foudre et des champs rayonnés de forte intensité et garantir une référence de potentiel pour les équipements le nécessitant. Malheureusement, ces avantages disparaissent avec les matériaux composites à cause de leur faible conductivité électrique et de l'évolution de leur comportement mécanique lorsque leur température augmente. Il est donc nécessaire de trouver des solutions innovantes pour satisfaire les fonctions électriques actuellement réalisées par le fuselage et la structure métallique. De manière générique, dans le cadre de cette étude, ces nouvelles solutions sont appelés « réseaux de retour de courant ».

Pour atteindre les objectifs aéronautiques de réduction de consommation, la masse embarquée supplémentaire de ces solutions ne doit pas annuler les gains de poids fournis par l'utilisation des matériaux composites. Les ingénieurs aéronautiques font alors face à deux nouvelles problématiques : le pré-dimensionnement de réseaux de retour de courant légers et fonctionnels mais aussi robustes, qui ne sont pas vulnérables à la perte d'un ou de plusieurs de leurs éléments ; et la surveillance de ces réseaux pour garantir le respect des contraintes fonctionnelles au cours du temps et diagnostiquer des dégradations d'éléments. Ce mémoire se concentre sur l'étude de ces deux problématiques.

Le Chapitre I détaille le contexte dans lequel s'inscrivent les travaux de thèse. Les problématiques industrielles et scientifiques associées à l'insertion des matériaux composites dans les structures des avions sont présentées.

A l'issue de cette partie introductive, le Chapitre II est consacré à la modélisation des réseaux de retour de courant par des graphes. Les principes de base de la théorie des graphes sont détaillés. Enfin, une première approche des liens entre la topologie d'un réseau et ses performances électriques illustre l'intérêt d'étudier les graphes dans le domaine spectral.

Le Chapitre III expose le principal intérêt de la théorie spectrale : la lecture multi-échelle des réseaux. Grâce au passage dans le domaine spectral, on est en mesure d'associer chaque mode du graphe à une échelle d'observation et de révéler ainsi des liens

entre la topologie du réseau et ses performances électriques. Une analyse perturbative du spectre du graphe est aussi réalisée afin de définir l'impact des modifications de la topologie sur les chutes de tension du réseau. Cette analyse fournit, entre autres, un outil efficace d'identification des éléments critiques d'un réseau de retour de courant.

Le Chapitre IV propose un ensemble d'applications de l'analyse spectrale sur une maquette de réseau de retour de courant. Trois approches de pré-dimensionnement sont présentées, pouvant faciliter le travail des ingénieurs aéronautiques pour concevoir des réseaux légers, fonctionnels et robustes. Dans un second temps, une méthodologie de surveillance basée sur l'estimation paramétrique est proposée, permettant de s'assurer de la fonctionnalité des réseaux lors de dégradations ou de pannes. La méthodologie pourrait permettre de réduire le temps d'immobilisation de l'appareil nécessaire lors des maintenances. Pour finir, une méthodologie de caractérisation découlant de l'estimation paramétrique est aussi proposée.

Enfin, ce mémoire se conclut en dressant un bilan des travaux effectués et en donnant les principales perspectives.

Chapitre I. Contexte général et enjeux

SOMMAIRE

I.1. Les avions plus composites	- 19 -
I.2. Problématiques industrielles	- 21 -
I.2.1 Les principales difficultés rencontrées	- 22 -
I.2.1.1. <i>Retour de courant ou Grounding</i>	- 22 -
I.2.1.2. <i>Métallisation ou Bounding</i>	- 22 -
I.2.1.3. <i>Protection au choc de foudre</i>	- 22 -
I.2.1.4. <i>Protection aux champs rayonnés</i>	- 24 -
I.2.2 Les solutions existantes	- 24 -
I.2.3 Le projet DEPACE	- 25 -
I.3. Les problématiques de la thèse	- 25 -
I.3.1 Pré-dimensionnement topologique d'un réseau de retour de courant	- 25 -
I.3.2 Surveillance du réseau	- 27 -
I.3.3 Hypothèses de travail et approches privilégiées	- 28 -

I.1. Les avions plus composites

La réussite de la fabrication d'un aéronef réside dans sa capacité à s'envoler tout en assurant un très faible taux de défaillances afin d'assurer la sécurité des personnes. Pour cela, les matériaux utilisés dans sa construction nécessitent d'allier résistance et grande légèreté. Au début de l'aviation, au XIX^{ème} siècle, le choix s'est porté vers le bois et la toile. L'utilisation des avions se développant dans le transport civil et militaire, les ingénieurs se concentrèrent sur la réduction des masses des composants mais aussi sur l'amélioration de leurs propriétés mécaniques. A partir des années 1920, l'aluminium a fait son apparition. Malgré une masse volumique supérieure à celle du bois, les ingénieurs ont réussi à réduire le poids des aéronefs grâce à la meilleure résistance mécanique de l'aluminium. Le premier avion tout en aluminium a été le Junker F13 [1]. De nos jours, la poursuite de cet effort vers l'utilisation de matériaux légers et résistants est d'autant plus importante qu'un nouvel aspect environnemental est apparu avec la nécessité de limiter la pollution engendrée par les moyens de transport et en particulier les émissions de CO₂.

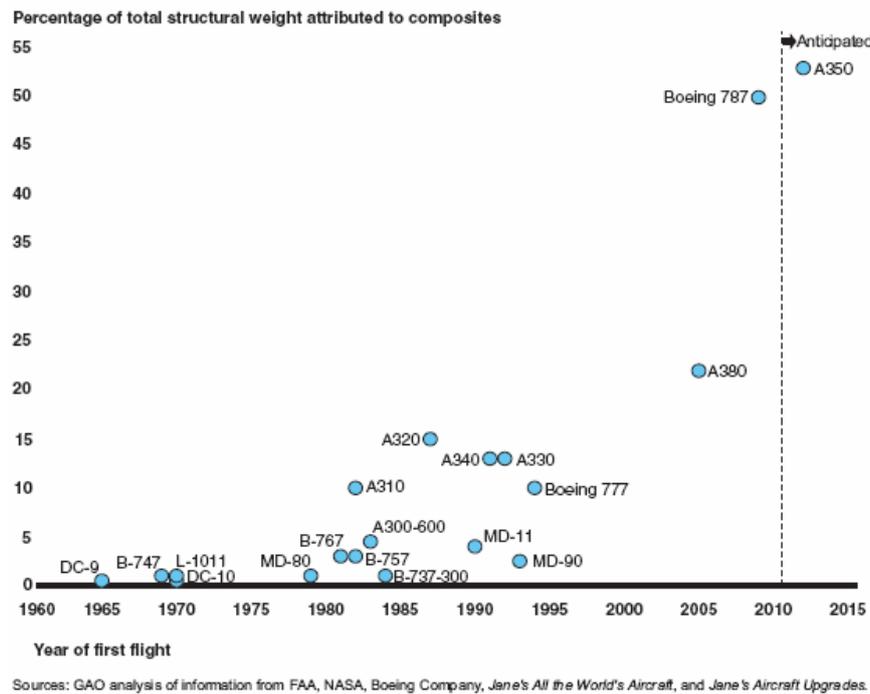


Figure I-1. Utilisation des matériaux composites dans les avions civils.

Dans les années 1970, avec le développement des matériaux en fibre de bore et en graphite, l'aéronautique voit apparaître les matériaux composites dans la composition des structures. Ils ont été rapidement incorporés aux avions militaires et aux hélicoptères afin de réaliser des économies de masse. Par exemple, en 1981, les ailes de l'AV-8B Harrier de McDonnell Douglas étaient entièrement réalisées en matériaux composites [2]. Dans l'aviation civile, à cause de leurs performances mécaniques limitées par rapport aux

alliages en aluminium, les constructeurs utilisaient les matériaux composites de manière marginale dans des parties secondaires de la structure de l'avion (ex : bords des ailes, queue de l'avion). Plus récemment, l'apparition à l'échelle industrielle de nouveaux matériaux composites à base de graphite et de kevlar marque le réel début des aéronefs fortement composites. Puisque leurs performances mécaniques sont identiques voire supérieures aux alliages métalliques traditionnels et qu'ils pèsent moins lourds, plus aucune raison n'empêche leur utilisation massive. Les constructeurs ont donc étendu l'usage des composites à l'ensemble des ailes et du fuselage jusqu'à obtenir plus de 50 % du poids de la structure de l'Airbus A350 et du Boeing 787 fait de matériaux composites (voir Figure I-1). Pour la conception d'un petit aéronef, il est même possible de dépasser cette valeur. Par exemple, le SR22-G3 de Cirrus est entièrement constitué de matériaux composites à l'exception du moteur et de certaines fixations [3].

Les matériaux sont créés à partir de la superposition d'au moins deux matériaux permettant d'optimiser leurs propriétés mécaniques. Ils sont constitués d'un renfort qui assure la tenue mécanique et d'une matrice qui assure la cohésion, généralement en matière plastique (voir Figure I-2). Ce procédé de fabrication permet la création de matériaux légers. Cependant leurs avantages ne se limitent pas au poids de l'appareil [4]. Leur résistance à la fatigue est fortement augmentée par rapport à la structure métallique d'un avion traditionnel, ils sont alors capables de résister plus longtemps aux contraintes mécaniques. Les matériaux composites ont aussi une bonne résistance à la corrosion, ce qui permet de limiter considérablement les réparations nécessaires sur les aéronefs évoluant en milieu salin. De plus, le fait que le composite puisse être anisotrope, c'est-à-dire d'avoir des propriétés différentes selon les directions, fournit un énorme avantage afin de construire des parties de l'avion rigides dans une direction mais plus souples dans une autre. Un dernier avantage des matériaux composites est qu'ils proposent une meilleure atténuation des vibrations que leurs équivalents métalliques, cela leur confère des propriétés d'isolant phonique particulièrement intéressantes.

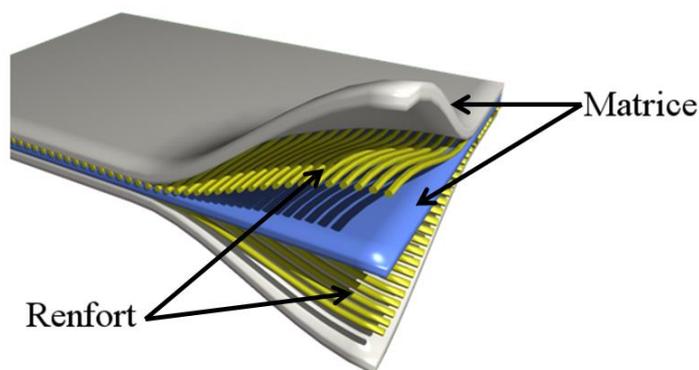


Figure I-2. Exemple de matériau composite.

Par contre, les matériaux composites sont très sensibles aux échauffements. Leur tenue à la température est généralement de l'ordre de 100°C même si elle peut monter jusqu'à 250°C grâce à des résines spéciales. Au-delà de ces températures, le matériau passe d'un état solide à un état caoutchouteux et risque de subir des dégradations irréversibles qui peuvent être dangereuses pour la structure de l'avion [5].

La fabrication de structures à base de matériaux composites requiert des techniques élaborées qui entraînent des coûts plus importants que pour les matériaux métalliques. Pour l'ensemble des avions commerciaux, les compagnies aériennes sont dans l'obligation de réaliser un certain nombre de tests réguliers, qui se font à des intervalles précis, variant entre un mois (ou 500 heures de vol) et 4-5 ans (pour les opérations de maintenance détaillées). Dû à la meilleure résistance à la fatigue et à la corrosion des matériaux composites, le délai entre les maintenances détaillées devrait passer à 11 ans. Ces opérations de maintenance nécessitent une immobilisation complète durant plusieurs semaines (voir plusieurs mois) des appareils dans les entrepôts impliquant une perte importante de revenu. Bien que les matériaux composites offrent une résistance mécanique plus importante, les avions nécessitent tout de même un contrôle non destructif régulier et coûteux.

I.2. Problématiques industrielles

Pour le bon fonctionnement d'un avion, les fonctions électriques auparavant intrinsèquement assurées par le fuselage et la structure métalliques sont essentielles. Ces fonctions, détaillées ci-dessous point par point, ne sont par contre plus garanties dans les avions composites à cause des mauvaises propriétés thermiques et électriques des matériaux composites. Pour répondre à cette nouvelle contrainte, des nouvelles solutions de réseaux conducteurs ont déjà été implémentées dans les derniers avions composites du marché : le réseau ESN (Electrical Structural Network) dans l'A350 d'Airbus et le réseau CRN (Current Return Network) dans le B787 de Boeing. Dès lors que les structures de sous-systèmes sont réalisées en matériaux composites et qu'au moins une des fonctions électriques ci-dessous doivent être respectées, les mêmes problématiques des avions composites se déclinent au niveau de leur sous-systèmes tels que les nouvelles nacelles composites ou les nouveaux meubles électriques composites. Dans le cadre de cette étude, l'ensemble des éléments conducteurs assurant le respect des dites fonctions électriques sera appelé génériquement « réseau de retour de courant ».

Les différentes fonctions électriques et les difficultés rencontrées sont détaillées par la suite.

I.2.1 Les principales difficultés rencontrées

I.2.1.1. Retour de courant ou Grounding

La fonction de retour de courant, ou *grounding* en anglais, définit le raccordement électrique à la masse afin d'assurer le retour des courants électriques monophasés et continus entre les systèmes et les sources. Actuellement, l'alimentation des systèmes dans un avion est réalisée par un seul câble « aller » [6]. En régime normal de fonctionnement, l'alimentation « aller » fournit des courants de très basses fréquences : des courants continus et des courants alternatifs entre 360 à 800 Hz. Ces circulations de courants provoquent principalement des chutes de tensions et des échauffements des câbles. Le retour de courants des charges, fonctionnant en courant continu et en courant alternatif monophasé, vers les sources correspondantes doit être assuré en fonctionnement normal.

Dans les avions traditionnels, le retour de courants se fait par la structure primaire (fuselage principalement, éventuellement dans quelques éléments de la structure mécanique). Par contre, la conductivité des matériaux composites utilisés pour le fuselage est environ 1000 fois plus faible que celle de l'aluminium utilisé traditionnellement. La circulation de courants implique donc une forte augmentation de la température lors du passage de courants qui risque de dégrader le fuselage et la structure. Pour ces raisons, mais surtout par précaution et certificabilité, les fuselages composites ne peuvent pas servir comme retour de courant dans l'aéronef.

I.2.1.2. Métallisation ou Bounding

La fonction de métallisation permet de garantir la liaison à une masse de tous les éléments conducteurs non parcourus par un courant lors d'un fonctionnement normal. Dans le cas d'un choc électrique ou de courants de défauts, la métallisation garantit un potentiel électrique proche dans toutes les parties conductrices. De ce fait, les personnes ne risquent pas de toucher deux éléments conducteurs avec des potentiels très différents, le courant éventuel traversant le corps est donc faible. Dans un avion traditionnel, le fuselage et la structure métallique assure une liaison électrique entre tous les éléments conducteurs. A cause de ces mauvaises propriétés électriques et thermiques, la structure composite ne permet pas de respecter les contraintes fixées par les normes pour cette métallisation. De plus, la circulation des courants dans le composite est à éviter. Il est donc nécessaire de trouver une nouvelle solution applicable aux avions composites capable d'assurer la quasi-équipotentialité des parties conductrices.

I.2.1.3. Protection au choc de foudre

Statistiquement, un avion commercial est frappé par la foudre toutes les 1500 heures de vols [7]. Les pilotes essaient, dans la mesure du possible, d'éviter les nuages orageux

mais ils sont parfois contraints de les traverser ou de les approcher. Dans ce cas-là, l'appareil vole dans une atmosphère électriquement chargée. Lorsque qu'un avion est situé à moins d'une vingtaine de kilomètres d'un nuage orageux, ses parties pointues (avant, extrémités des ailes, etc.) amplifient le champ électrostatique local et déclenchent une décharge de foudre. Cet effet de pointe est le principe de base d'un paratonnerre utilisé couramment au sol. Pour voler, tous les avions doivent être certifiés 'résistants à la foudre'. Pour cela, il faut vérifier que l'appareil encaisse les effets directs et indirects du foudroiement.

Le fuselage métallique de l'avion traditionnel fait office de cage de Faraday, tout comme la voiture, protégeant ainsi tous les systèmes et les personnes qui sont à l'intérieur. Un fuselage en matériaux composites est toujours une cage de Faraday mais il est moins protecteur qu'un fuselage métallique traditionnel. Les effets directs et indirects risquent donc de dégrader le fonctionnement de l'appareil.

Les principaux effets directs sont d'ordres thermomécaniques causés par l'arc de l'éclair. Ces effets sont liés aux quantités de courants à écouler lors du coup de foudre pouvant élever la température locale des matériaux au-delà de leur température de fusion. Pour les avions traditionnels avec un fuselage métallique, l'arc de l'éclair peut entraîner des dégâts mineurs (trous de quelques millimètres, destruction des capteurs) qui peuvent néanmoins s'amplifier ensuite. Le point le plus sensible reste la réserve de carburant, une simple étincelle ou l'apparition d'un « hot-spot » (point chaud) risquent d'enflammer l'ensemble du carburant [7]. Les effets directs de la foudre sont encore plus importants sur un fuselage composite. L'élévation locale de la température peut entraîner une délamination des parois composites, des fissures peuvent donc se créer dans le matériau et dégrader l'ensemble de la structure. De plus, le fuselage ne faisant plus office de cage de Faraday parfaite, la partie basse fréquence de la foudre pénètre à l'intérieur de l'appareil provoquant une élévation rapide des potentiels. Une des solutions employées pour contrer ses effets directs est d'améliorer la conductivité en surface du matériau composite utilisé pour le fuselage.

La foudre entraîne aussi des effets indirects causés par les champs électromagnétiques engendrés par les courants importants circulant dans la structure de l'appareil. Ces champs peuvent se coupler avec les systèmes électriques de l'avion et provoquer des perturbations transitoires dans les avions métalliques. Par contre dans les avions composites, les champs électromagnétiques causés par un choc de foudre peuvent engendrer des pannes catastrophiques, par exemple une augmentation importante des niveaux de tensions vus par les commandes de vol. Les circuits doivent donc être conçus pour éviter que les surtensions liées au champ magnétique du choc de foudre ne les détruisent, des parafoudres sont notamment envisageables [8].

I.2.1.4. Protection aux champs rayonnés

L'environnement électromagnétique HIRF (High Intensity Radiated Field) résulte de la transmission de l'énergie électromagnétique provenant des radars, des antennes radio et télévision et d'autres transmetteurs d'ondes radio situés au sol ou embarqués. Avant les années 1970, les avions n'étaient pas sensibles à ces perturbations. Par contre, de nos jours, avec l'apparition d'appareils électroniques (de contrôle, de commande ou de mesures) et l'introduction de systèmes d'électronique de puissance, les avions sont menacés par les champs rayonnés de forte intensité. De plus, le fuselage composite fournit une protection réduite face aux agressions électromagnétiques. C'est pour ces raisons que la FAA (Federal Aviation Association) et l'EASA (European Aviation Safety Agency) ont mis en place de nouvelles réglementations obligeant les avionneurs à prendre en compte l'influence des champs rayonnés lors de la conception d'avions composites.

I.2.2 Les solutions existantes

Avec la mise en service de nouveaux avions composés principalement de composites tels que l'A350 chez Airbus et le 787 pour Boeing, les avionneurs ont dû proposer certaines solutions électriques pour remplacer le fuselage et la structure métallique. Deux solutions principales existent :

- l'ESN (Electrical Structure Network) : c'est la solution privilégiée par Airbus. L'ESN de l'A350 est présenté sur la Figure I-3. Cette structure utilise les composants métalliques toujours existants dans l'avion. Elle est constituée de certains cadres, d'un sol de cabine et d'un sol cargo construits grâce à l'assemblage de traverses et d'éléments longitudinaux (rails de sièges, rails à rouleaux...), de chemins de câbles et d'un cockpit métallique [9].

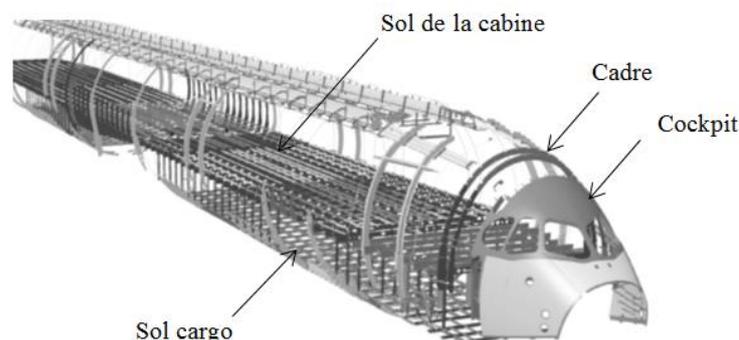


Figure I-3. Structure de l'ESN (Electrical Structure Network) d'un A350 (image issue de [9]).

- Le CRN (Current Return Network) : la solution Boeing. Contrairement à l'ESN, le CRN utilise un ensemble de barres profilés et de câbles additionnels disposés dans la longueur de l'avion. Ces câbles longitudinaux sont connectés aux parties métalliques de l'avion pour assurer l'équipotentialité du système (voir la Figure I-4).

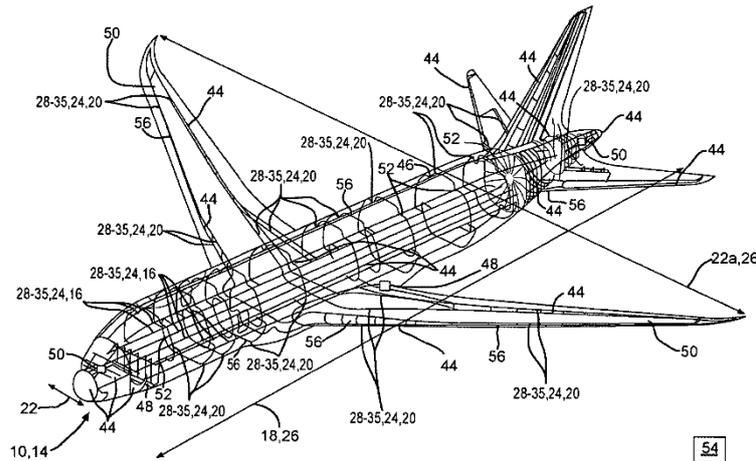


Figure I-4. Schéma de la structure du CRN (Current Return Network) d'un Boeing (image issue de [10]).

I.2.3 Le projet DEPACE

Le cockpit d'un avion contient toutes les commandes et les instruments nécessaires au pilotage de l'appareil. C'est donc une partie sensible de l'appareil nécessitant une fiabilité accrue. C'est pour ces raisons qu'il est actuellement toujours réalisé en métal. Les travaux de thèse s'inscrivent dans le cadre du projet de recherche DEPACE (Définition d'Éléments Communs de Pointe Avant de fuselage CompositE 2nde génération), un projet collaboratif dans le cadre de CORAC2 (CONseil pour la Recherche Aéronautique Civile) [11], piloté par Airbus. Safran Electrical and Power est un des partenaires de ce projet ayant pour objectif de fournir des solutions techniques et technologiques pour la réalisation en composite de la pointe avant (cockpit et les 1^{ers} cadres). Le Lot 2.2 piloté par Safran Electrical and Power concerne en particulier la spécification et l'analyse du réseau maillé ESN nouvelle génération permettant d'assurer les fonctions de retour de courants dans un avion composé d'une pointe avant composite, ainsi que la mise en place des méthodes de surveillance pour ces réseaux.

I.3. Les problématiques de la thèse

I.3.1 Pré-dimensionnement topologique d'un réseau de retour de courant

Afin d'atteindre les objectifs de réduction de consommation, le poids du réseau de retour de courant doit être suffisamment faible pour ne pas annuler les gains fournis par l'utilisation des matériaux composites. Puisque nos travaux concernent uniquement l'aspect électrique du dimensionnement, nous parlerons de problématique de pré-dimensionnement. De plus, au cours de sa vie, la structure d'un avion est soumise à des

sollicitations mécaniques, vibratoires et chimiques risquant de dégrader la connectivité électriques du réseau. Le (pré)-dimensionnement doit donc garantir le bon fonctionnement du réseau de retour de courant malgré des éventuelles dégradations ou pertes des éléments le constituant. Pour diminuer les chutes de tension et augmenter la robustesse, les solutions les plus simples sont de surdimensionner le réseau ou alors de redonder les éléments critiques. Dans les deux cas, la masse de l'appareil est fortement augmentée. Le défi est donc de trouver un bon compromis entre la réduction de masse, la fonctionnalité et la robustesse.

L'idée n'est pas de fournir la meilleure solution possible mais plutôt de comprendre comment la connectivité entre les charges et les sources d'un réseau émerge de la topologie du graphe sous-jacent au réseau et de la localisation des sources et charges sur ce réseau. Pour cela, le réseau de retour de courant est vu comme un graphe complexe à travers lequel de nombreux composants élémentaires interagissent. Du fait de la complexité, notamment due au maillage, il est quasiment impossible d'appréhender les propriétés du réseau complet en faisant la somme des interactions des composants élémentaires. Il est donc nécessaire d'utiliser des approches alternatives qui relient l'émergence du comportement global à l'organisation des composants élémentaires au sein du système. Pour cela, on peut s'appuyer sur la fractalité, la théorie spectrale des graphes, la percolation [12] ou d'autres approches statistiques issues des domaines de la physique, de la biologie, de la sociologie notamment [13].

La théorie des graphes fournit des grandeurs topologiques telles que la centralité des nœuds. Elle fournit aussi un modèle mathématique intégrant dans le même formalisme la topologie d'un réseau et ses interactions électriques. Nous verrons qu'une lecture trans-échelle de l'organisation d'un réseau peut être obtenue par la théorie spectrale. La percolation offre un regard statistique sur ce que pourraient être les propriétés au voisinage de la topologie optimale. En effet, un réseau bien construit peut être assimilable à un amas percolant au voisinage du point de percolation (en effet, tout comme un amas percolant, le réseau doit être suffisamment connexe pour raccorder les charges et les sources mais pas trop connexe car dans ce cas trop coûteux [14][15]). Il est à noter que la géométrie de l'amas percolant est fractale. La multifractalité est d'ailleurs un outil intéressant pour comprendre comment les propriétés d'un système complexe s'organisent à travers les échelles [16][17]. Parmi les autres approches statistiques, on peut citer la marche aléatoire qui offrira une manière particulière et originale de visiter l'état du réseau. La marche aléatoire pourrait faire le lien entre les grandeurs identifiées par la percolation et la théorie des graphes d'une part et des grandeurs plus électriques comme la réponse fréquentielle de l'impédance du réseau d'autre part [18][19].

I.3.2 Surveillance du réseau

Actuellement, les éléments des structures des réseaux de retour de courant dans les avions composites sont principalement dimensionnés pour satisfaire leurs fonctions mécaniques primaires. Ils sont bien caractérisés et leurs évolutions au cours du temps sont connues. Mais les technologies d'interconnexion utilisées actuellement ne sont pas adaptées à la réalisation des contacts électriques viables. Les traitements de surface pour créer les contacts électriques sont insuffisants et/ou mal maîtrisés. De plus, la vérification de chaque contact du point de vue électrique est impossible. En conséquence les résistances de contact ne sont pas maîtrisées, dépendant de nombreux paramètres tels que la force de serrage, l'état des surfaces, les types de boulons, etc. De plus, au cours de la vie d'un avion, toutes les résistances de contact évoluent et se dégradent, les boulons pouvant se desserrer ou les surfaces s'oxyder. Une augmentation des résistances de contacts impacte forcément la connectivité des sources et des charges et le critère de bon fonctionnement des systèmes (chute de tension maximale admissible) risque d'être violé. Afin de garantir le contact électrique et d'obtenir les certifications requises, la solution prônée par Airbus est d'ajouter des tresses entre les éléments en parallèle des contacts. Elles sont parfaitement connues et peuvent être vérifiées à partir d'une inspection visuelle ou de mesures lors de l'injection de courants. Cependant, ces tresses, dont l'utilité électrique n'est pas avérée, entraînent une augmentation de la masse de l'avion. Pour envisager leur retrait, il est nécessaire d'avoir une méthode capable de caractériser initialement les contacts du réseau et de surveiller l'évolution de son état (les réparations de la structure composite pourront être anticipées avant toute défaillance). Pour mettre en place cette méthode, les ingénieurs aéronautiques ont la possibilité d'effectuer des mesures de chutes de tension ou de courants lors de l'assemblage de l'avion et des périodes de maintenance. Dans ce dernier cas, afin de limiter le temps d'immobilisation, la surveillance doit être le plus rapide possible.

La méthode de surveillance doit donc permettre d'identifier les éléments les plus critiques, c'est-à-dire les éléments dont la dégradation ou la perte modifient grandement la connectivité entre les charges et les sources. Et, après avoir identifié les éléments critiques, il faudra mettre en place la stratégie de surveillance proprement dite. La solution la plus simple sera certainement d'instrumenter l'ensemble des éléments critiques pour vérifier leur état. Une solution plus ambitieuse sera de reconstruire l'état du réseau. La résolution d'un problème inverse à partir de mesures réalisées sur le réseau peut être envisagée [20]. Une bonne formulation du problème est alors nécessaire. D'autres approches de diagnostic pourront aussi être envisagées [21]. Dans tous les cas, un modèle du réseau surveillé sera nécessaire.

I.3.3 Hypothèses de travail et approches privilégiées

Les travaux présentés dans ce mémoire se concentrent sur la fonction primaire du réseau de retour de courant, soit le retour des courants monophasés et continus en fonctionnement normal entre les charges et les sources. Les réglementations en vigueur peuvent se traduire par des contraintes sur le retour de courants, dans notre projet une chute de tension maximale de 0,5 V est imposée entre les charges et les sources lors du fonctionnement normal du réseau. Cette contrainte est supposée garantir la sécurité des personnes et du matériel. Dans la suite du mémoire, cette limite définira la fonctionnalité du réseau de retour de courant.

Par soucis de simplification, nous avons choisi de nous concentrer uniquement sur le retour des courants continus. Toutes nos études seront donc réalisées sur des réseaux maillés résistifs.

Les approches privilégiées seront toutes issues de la théorie des graphes, que cela soit pour le pré-dimensionnement ou la surveillance. Nous verrons qu'elles permettent d'une part de mieux démêler la complexité d'un réseau maillé et d'autre part d'envisager des solutions potentiellement viables pour l'industrie aéronautique.

Chapitre II. Besoin d'une nouvelle analyse

SOMMAIRE

II.1. Théorie des graphes et applications aux réseaux électriques	33 -
II.1.1 Réseaux électriques illustratifs.....	33 -
II.1.1.1. Réseau électrique maillé	33 -
II.1.1.2. Réseau électrique quasi-radial.....	33 -
II.1.2 Modélisation mathématique des réseaux électriques	34 -
II.1.2.1. Théorie des graphes	34 -
II.1.2.2. Graphe d'un réseau électrique résistif.....	38 -
II.1.2.3. Exemples.....	39 -
II.1.3 Eléments d'analyse.....	42 -
II.1.3.1. Résolutions des équations de circuit	42 -
II.1.3.2. Analyses topologiques	44 -
II.1.3.3. Problèmes de circulation de flux.....	51 -
II.2. Une première approche des liens entre topologie et robustesse	52 -
II.3. Conclusions	55 -

Les réseaux électriques ont une structure complexe qui n'est pas évidente à modéliser ni à analyser. Afin de répondre à nos problématiques scientifiques de pré-dimensionnement et de surveillance des réseaux de retour de courant, nous allons voir que les graphes représentent parfaitement la topologie et le comportement électrique de ces réseaux. Ce chapitre détaille les notions de base et les outils de la théorie des graphes nécessaires à la modélisation des réseaux électriques et à la compréhension des travaux de thèse.

II.1. Théorie des graphes et applications aux réseaux électriques

II.1.1 Réseaux électriques illustratifs

Pour illustrer l'ensemble des théories et propriétés présentées dans la partie II.1, deux réseaux électriques différents ont été créés. Les deux réseaux sont composés d'une source de courant et d'une charge. Sauf indication contraire, tous les éléments des réseaux électriques sont identiques. Leur section est de 1 cm^2 , leur résistivité vaut $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, leur masse volumique est 8920 kg/m^3 et leur longueur est de 1 m .

II.1.1.1. Réseau électrique maillé

Le premier réseau illustratif est présenté Figure II-1. Le réseau électrique est composé de 35 résistances identiques qui forment un réseau fortement maillé difficile à appréhender dans son comportement du fait des multiples agencements série-parallèle.

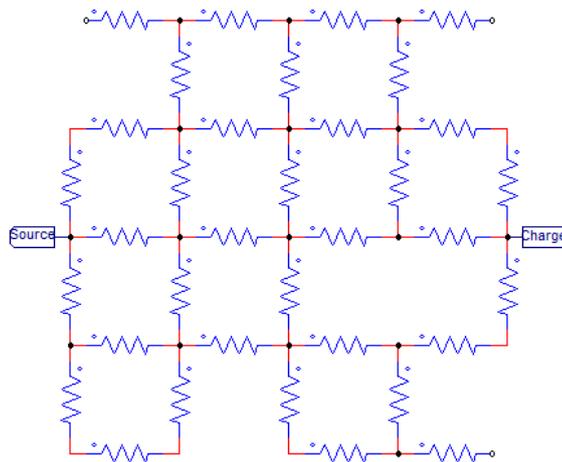


Figure II-1 Réseau électrique maillé.

II.1.1.2. Réseau électrique quasi-radial

Le réseau de la Figure II-2 est composé de 7 résistances séparées en 2 groupes et reliées par une 8^{ème} résistance de valeur 10 fois supérieure (section de l'élément $0,1 \text{ cm}^2$). Cette résistance permet de créer un réseau quasi-radial avec une circulation de courant difficile entre les 2 groupes.

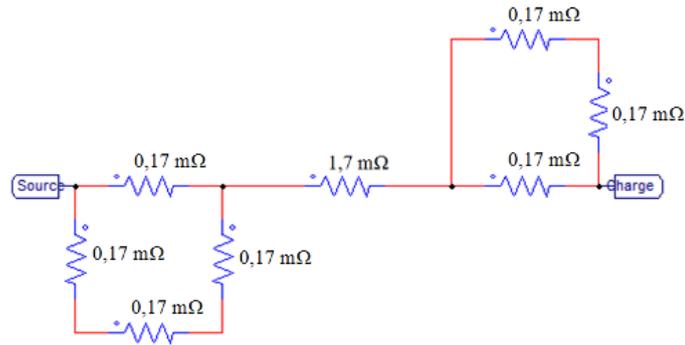


Figure II-2. Réseau électrique quasi-radial.

L'ensemble des notions développées dans la partie suivante seront illustrées par au moins un des deux réseaux présentés ci-dessus.

II.1.2 Modélisation mathématique des réseaux électriques

Avant toute tentative d'analyse d'un réseau électrique, il est nécessaire de le modéliser mathématiquement. Cette représentation doit correctement décrire les caractéristiques des éléments du réseau ainsi que leurs interconnexions. Tout réseau, qu'il représente des interactions électriques, de protéines, sociales ou autres, peut être représenté par un graphe [22][23][24]. Un réseau électrique peut être modélisé grâce à deux matrices élémentaires : la matrice primitive des admittances qui est constituée des admittances propres du réseau électrique et la matrice d'incidence nœuds/branches qui décrit les interconnexions entre elles. A partir de ces deux matrices il est possible de construire un graphe unique décrivant la physique d'un réseau électrique. Elles sont souvent combinées pour créer de nouvelles matrices mieux adaptées à leur analyse. Par exemple, les ingénieurs électriciens utilisent couramment la matrice admittance pour représenter le comportement électrique des variables des réseaux maillés. Dans le domaine des graphes, cette matrice est la matrice Laplacienne du graphe qui sera détaillée dans la partie II.1.2.1.c.

Nous verrons par la suite que la représentation des réseaux électriques par des graphes permet de rassembler dans la matrice Laplacienne à la fois l'information topologique du réseau et les interactions électriques au travers des lois de Kirchhoff.

II.1.2.1. Théorie des graphes

II.1.2.1.a. Origines de la théorie

L'origine de la théorie des graphes est généralement associée à la résolution du problème des sept ponts de la cité prussienne de Königsberg (voir Figure II-3) présenté par un mathématicien suisse, Leonhard Euler, dans un article publié en 1741 [25]. La configuration particulière de la ville et de ses ponts a amené une question : peut-on trouver une balade empruntant l'ensemble des 7 ponts sans jamais en traverser un 2 fois ? Pour

résoudre ce problème, Euler commence par nommer par les lettres A, B, C et D les terres séparées par une rivière et ensuite il trace un lien entre les terres reliées par un pont (cf. Figure II-3). Il a donc créé un graphe composé de nœuds (les terres A, B, C et D) et de liens (les 7 ponts). Par la suite, Euler constata que cette balade ne peut exister s'il y a plus de 2 nœuds avec un nombre impair de ponts, donc aucun chemin ne permet de traverser les 7 ponts sans jamais en traverser un 2 fois. La preuve de ce théorème sera apportée seulement en 1873 par Carl Hierholzer [26]. Cependant Euler est reconnu comme le précurseur de la théorie des graphes car il fut le premier à proposer un formalisme utilisant la notion de graphe.

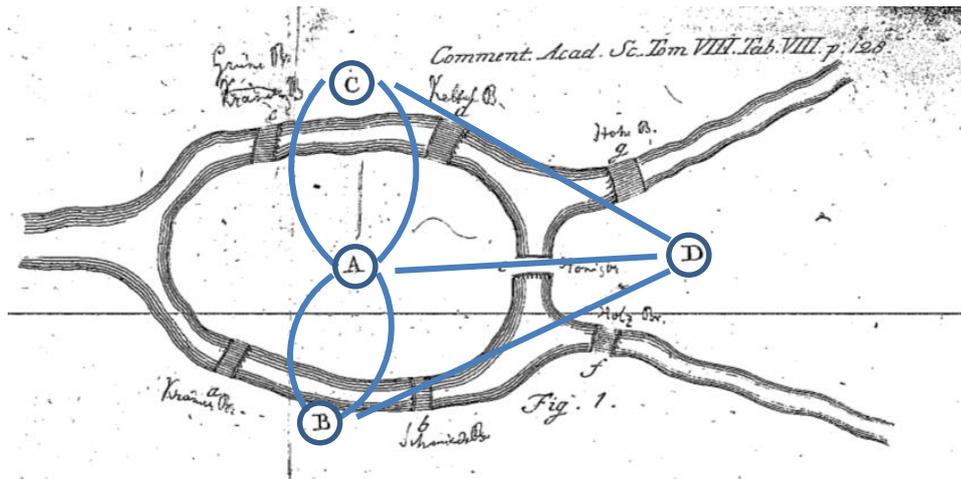


Figure II-3. Problème des sept ponts de Königsberg (source [27]).

Désormais, la théorie des graphes est une discipline bien connue et immensément riche, elle offre tout d'abord une représentation visuelle mais aussi une multitude de propriétés et d'outils dans des domaines très divers (biologie [28], sociologie [29], chimie [30],...). Nous allons maintenant présenter de manière non exhaustive la théorie des graphes ainsi que des notions qui méritent d'être connues pour des travaux en relation avec les réseaux électriques [31][32][33].

II.1.2.1.b. Notions de base

Un graphe est un ensemble de nœuds interconnectés grâce à un ensemble de branches (ou liens). Le nombre de nœuds noté n représente la taille du graphe et les nœuds sont habituellement numérotés. Le nombre de branches est noté e .

Chaque branche relie un couple de nœuds (u,v) et ces nœuds sont appelés communément extrémités de la branche. On parle de nœuds adjacents (ou voisins) pour 2 nœuds reliés par une branche. Les branches du graphe peuvent être orientées (dirigées) ou non-orientées. Par exemple, pour la représentation de l'information transitant dans les motoneurones, c'est-à-dire les cellules nerveuses qui commandent la contraction d'un muscle, les branches doivent être orientées. A l'inverse pour les réseaux de transports routier ou pour les réseaux de collaborations scientifiques, les interactions sont

bidirectionnelles et donc les branches sont non-orientées. Il en découle qu'un graphe composé uniquement de branches non-orientées sera appelé graphe non-orienté et réciproquement pour un graphe orienté. Fréquemment on considère que les graphes ne comportent pas de boucles, c'est-à-dire une branche reliant un nœud à lui-même.

Dans de nombreuses applications, les interactions entre éléments ne sont pas homogènes. C'est par exemple le cas du nombre de passagers transitant entre deux aéroports ou de la résistance d'un câble électrique. Un poids est alors affecté aux branches du graphe, il est généralement noté w_{uv} pour la branche entre les nœuds (u,v) . Seuls les graphes avec des poids positifs sont étudiés dans cette thèse, les autres graphes nécessitent un traitement particulier.

La dernière notion est celle de la connexité. Un graphe est dit connexe si et seulement s'il existe un chemin reliant chaque paire de nœuds, autrement dit, si tous les nœuds du graphe sont connectés entre eux. Lorsqu'un graphe n'est pas connexe, les sous graphes connexes sont définis. Le sous graphe comptant le plus de nœuds est appelé composante ou cluster géant.

II.1.2.1.c. Matrices du graphe

Pour des besoins mathématiques, les graphes sont souvent représentés grâce à des matrices. Certaines ont déjà été évoquées au début du chapitre.

Tout d'abord, dans la théorie des graphes, la matrice primitive des admittances est la matrice des poids, elle décrit les caractéristiques des branches du graphe lorsqu'elles sont déconnectées du réseau. Elle est généralement diagonale et ses éléments sont les poids des branches. A noter que dans le cas particulier où certaines branches impactent les autres branches du réseau, tel que cela peut être le cas pour des impédances mutuelles dans le domaine électrique, des éléments non diagonaux existent. La matrice des poids W est composée de e lignes et de e colonnes et se construit ainsi :

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_e \end{pmatrix} \text{ avec } w_t = w_{uv} \text{ pour la branche } t \text{ liant les noeuds } u \text{ et } v.$$

Ensuite, la matrice d'incidence décrit les interconnexions des branches. Elle traduit la topologie du réseau. C'est une matrice nœuds/branches de n lignes et e colonnes :

$$M_{inc} = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{ne} \end{pmatrix} \text{ avec } m_{ut} = \begin{cases} 1 & \text{si le noeud } u \text{ est l'extrémité initiale de la branche } t \\ -1 & \text{si le noeud } u \text{ est l'extrémité terminale de la branche } t \\ 0 & \text{si le noeud } u \text{ n'est pas une extrémité de la branche } t \end{cases}$$

En combinant la topologie et les caractéristiques des éléments on obtient la matrice Laplacienne du graphe L . Elle est définie uniquement pour des graphes non-orientés. Elle est fréquemment utilisée dans la théorie des graphes et sera celle que l'on utilisera principalement pour modéliser un réseau électrique. Cette matrice est construite à partir de la matrice des poids et de la matrice d'incidence par :

$$L = M_{inc} * W * M_{inc}^T \quad \text{II-1}$$

La matrice Laplacienne obtenue a n lignes et n colonnes et est définie par :

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{avec } L_{uv} = \begin{cases} -w_{uv} & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont adjacents;} \\ \sum_{p \in \text{vois}(u)} w_{up} & \text{si } u = v; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice Laplacienne a plusieurs propriétés importantes. Par construction, les sommes de ses colonnes et de ses lignes sont toutes égales à 0. Ceci implique que le déterminant de la matrice Laplacienne est toujours nul [34]. C'est donc une matrice singulière. De plus, elle est toujours symétrique car elle représente seulement des graphes non-orientés.

La trace de la matrice Laplacienne peut être calculée grâce aux poids des branches :

$$\text{trace}(L) = \sum_u \sum_{p \in \text{vois}(u)} w_{up} = 2 * \text{trace}(W) \quad \text{II-2}$$

La matrice d'adjacence est la matrice la plus couramment utilisée pour le calcul des paramètres des graphes grâce à sa simplicité. Elle permet de surcroit de décrire l'ensemble des interconnexions et des caractéristiques des éléments du réseau. La matrice d'adjacence A simple du graphe ne prend pas en compte les poids des branches. C'est une matrice de n colonnes et n lignes. Elle est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un lien du noeud } u \text{ vers le noeud } v; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque les graphes considérés ne comportent pas de boucles, la diagonale de la matrice est composée uniquement de 0. Dans le cas d'un graphe non-orienté la matrice d'adjacence est symétrique. La matrice d'adjacence pondérée A^w intègre en plus le poids de chaque branche :

$$A^w = \begin{pmatrix} a_{11}^w & \cdots & a_{1n}^w \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^w & \cdots & a_{nn}^w \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_{uv}^w = \begin{cases} w_{uv} & \text{s'il existe un lien du noeud } u \text{ vers le noeud } v; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme pour la matrice d'adjacence simple, la matrice d'adjacence pondérée est symétrique pour un graphe non-orienté.

II.1.2.2. Graphe d'un réseau électrique résistif

Dans le domaine électrique, une résistance est représentée par une branche et donc chaque connexion entre résistances est un nœud du graphe. Le poids w_{uv} de la branche entre les nœuds (u,v) est égal à son admittance $y_{uv} (=1/R_{uv})$. Par conséquent, une branche avec un poids important aura une résistance faible, et inversement. Les branches sont logiquement non-orientées car la circulation du courant dans une résistance n'a pas de sens imposé.

De plus, chaque nœud u a une tension (ou potentiel) nodale notée V_u et dans chaque branche transite un courant i_{uv} ce qui entraîne une chute de tension entre les bornes de la branche dV_{uv} . Il est important aussi de définir la notion de courant nodal I_u : il est égal à la quantité de courant injecté/extrait du réseau au nœud u . Donc une source pour laquelle un courant est injecté dans le réseau a un courant nodal I_s strictement positif. A l'inverse, une charge c qui absorbe du courant implique I_c strictement négatif. Tous les nœuds n'étant ni une source ni une charge ont un courant nodal nul. Dans nos travaux, seuls les réseaux électriques entièrement connectés (donc modélisés par des graphes connexes) sont étudiés puisque dans le cas contraire chaque sous réseau pourra être analysé indépendamment.

Pour un réseau électrique, la matrice Laplacienne du graphe est équivalente à la matrice admittance (voir annexe A). Elle permet donc de représenter le comportement électrique d'un circuit et relie le vecteur des tensions nodales V au vecteur des courants nodaux I grâce à l'équation :

$$LV = I \quad \text{II-3}$$

On rappelle que la matrice Laplacienne a la particularité d'être non inversible. Cela se traduit par le fait qu'il est impossible d'obtenir un unique vecteur des tensions des nœuds V à partir des courants nodaux. Pour mieux comprendre cela, il suffit de reconstruire la matrice Laplacienne à partir des lois de Kirchhoff sur un réseau simple à 3 nœuds (Figure II-4).

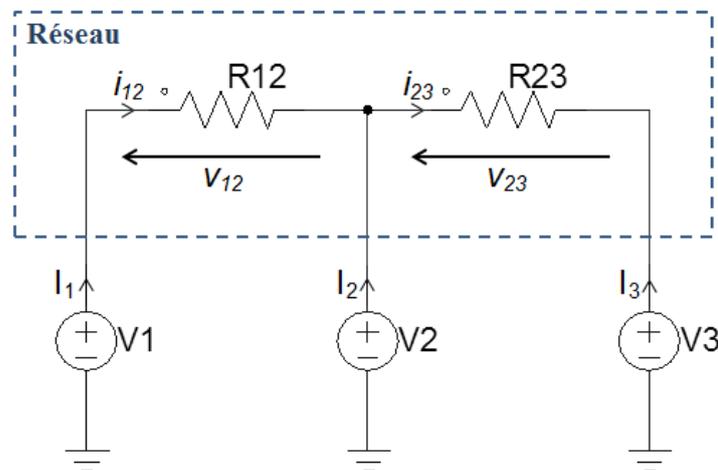


Figure II-4. Réseau simple de 3 nœuds.

Il est possible d'écrire 3 équations à partir de la loi des mailles mais elles sont seulement indépendantes deux à deux. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} i_{12} \\ i_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{23}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{23} \end{pmatrix} \quad \text{II-4}$$

Pour créer la matrice Laplacienne du graphe, ces équations sont transformées dans la base nodale, ici de 3 nœuds :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{12}} & -\frac{1}{R_{12}} & 0 \\ -\frac{1}{R_{12}} & \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{23}} & -\frac{1}{R_{23}} \\ 0 & -\frac{1}{R_{23}} & \frac{1}{R_{23}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad \text{II-5}$$

La matrice Laplacienne obtenue est une matrice (3x3) cependant elle reste de rang 2 car malgré le changement de base il n'y a toujours que 2 équations indépendantes. Malgré la non inversibilité, il est tout de même possible de retrouver un vecteur des tensions nodales à partir des courants nodaux [35]:

$$V = L^\diamond I \quad \text{II-6}$$

On note L^\diamond le pseudo-inverse de Moore-Penrose [36] de la matrice Laplacienne. Son usage pour le calcul des tensions nodales revient à imposer une relation entre les potentiels du réseau $\sum_t V_t = 0$ (cf. annexe B).

II.1.2.3. Exemples

Les graphes des réseaux illustratifs de la partie II.1.1 vont être décrits. Puisque le réseau électrique maillé est composé de 35 résistances, son graphe associé, représenté sur la Figure II-5, comporte 35 branches de poids identiques w_{uv} égaux à $5882,4 \Omega^{-1}$. Ces branches sont reliées grâce à 25 nœuds numérotés. La source et la charge sont représentées par respectivement une extraction et une injection de courant dans le réseau. A noter que tous les graphes représentés dans ce mémoire sont tracés grâce au logiciel Gephi spécialisé dans la visualisation et l'analyse des graphes [37] ou à l'aide du logiciel Matlab.

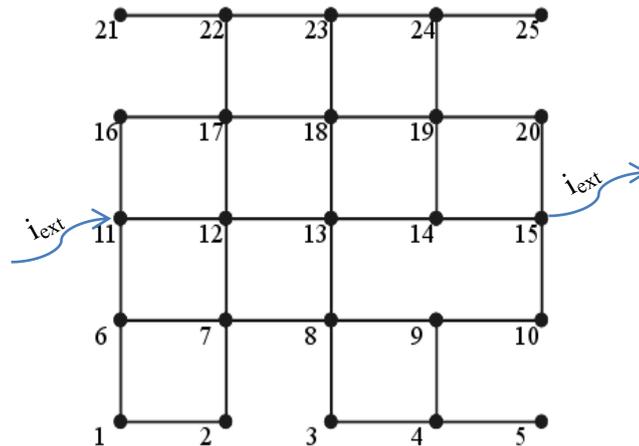


Figure II-5. Graphe modèle du réseau maillé présenté Figure II-1.

Cette représentation visuelle du graphe n'est pas unique, en effet la formulation d'un graphe n'impose aucune visualisation mais seulement une topologie du réseau. Afin de simplifier la compréhension d'un graphe électrique il est généralement intéressant de conserver la localisation géométrique des éléments du réseau.

La Figure II-6 montre la représentation visuelle du graphe modèle du réseau électrique quasi-radial. Le graphe est composé de 8 branches et de 7 nœuds. Le poids de la branche entre les nœuds 4 et 5 est 10 fois inférieur à ceux des autres branches ($w_{45} = 588,24 \Omega^{-1}$) puisque sa résistance est 10 fois supérieure. Couramment, dans la représentation visuelle d'un graphe, l'épaisseur d'une branche donne une indication sur son poids, plus la branche est épaisse et plus son poids est important.

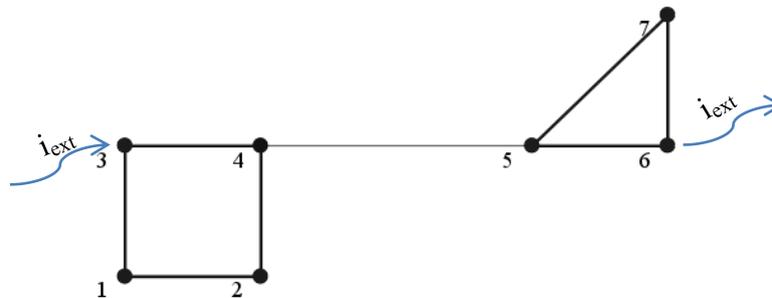


Figure II-6. Graphe modèle du réseau quasi-radial présenté Figure II-2.

Les graphes peuvent aussi être définis par les matrices présentées dans la partie II.1.2.1.c. Pour éviter l'écriture de matrices indigestes, seules celles du réseau quasi-radial sont données ici. Les matrices d'adjacences simple A et pondérée A^w du réseau quasi-radial sont définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^w = \begin{pmatrix} 0 & 5,88.10^3 & 5,88.10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5,88.10^3 & 0 & 0 & 5,88.10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 5,88.10^3 & 0 & 0 & 5,88.10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,88.10^3 & 5,88.10^3 & 0 & 0,588.10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,588.10^3 & 0 & 5,88.10^3 & 5,88.10^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,88.10^3 & 0 & 5,88.10^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,88.10^3 & 5,88.10^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Le graphe est composé de 7 nœuds et 8 branches donc la matrice d'incidence est de la taille (7x8) :

$$M_{inc} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Et la matrice Laplacienne du graphe est :

$$L = \begin{pmatrix} 11,77.10^3 & -5,88.10^3 & -5,88.10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5,88.10^3 & 11,77.10^3 & 0 & -5,88.10^3 & 0 & 0 & 0 \\ -5,88.10^3 & 0 & 11,77.10^3 & -5,88.10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,88.10^3 & -5,88.10^3 & 12,35.10^3 & -0,588.10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,588.10^3 & 12,35.10^3 & -5,88.10^3 & -5,88.10^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5,88.10^3 & 11,77.10^3 & -5,88.10^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5,88.10^3 & -5,88.10^3 & 11,77.10^3 \end{pmatrix}$$

II.1.3 Eléments d'analyse

La formulation des réseaux électriques sous forme d'un graphe donne accès à une multitude d'approches permettant de mettre en évidence les propriétés électriques et topologiques du réseau.

II.1.3.1. Résolutions des équations de circuit

Une approche évidente revient à résoudre les équations de circuit qui décrivent le réseau électrique et qui sont, pour nous, portées par les matrices descriptives du graphe. Dans un réseau soumis à un courant continu, cette résolution peut être faite à partir de la matrice Laplacienne du graphe qui relie les tensions nodales aux courants nodaux (équation II-3).

Imaginons que l'on étudie la chute de tension entre une source s injectant un courant I_0 égal à 250 A et une charge c . Le réseau considéré est le réseau quasi-radial présenté sur la Figure II-2. La source est placée au nœud 3 et la charge au nœud 6. Le vecteur des courants nodaux est donc défini par :

$$I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 250 \\ 0 \\ 0 \\ -250 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{II-7}$$

Les tensions nodales sont calculées, grâce à l'équation II-6 rappelée ci-dessous.

$$V = L^\diamond I \quad \text{II-8}$$

Les courants dans les branches s'en déduisent.

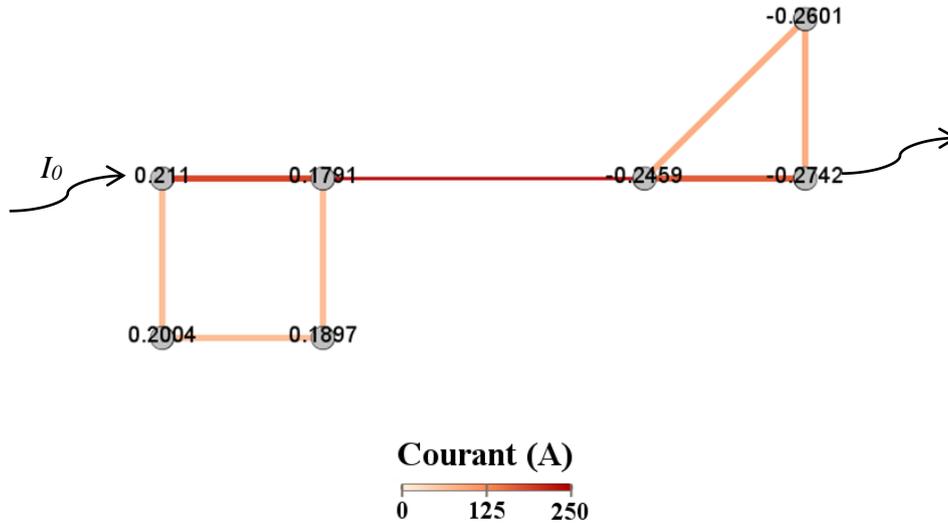


Figure II-7. Tensions nodales (V) et courants pour un courant $I_0 = 250$ A.

Dans cette configuration, la chute de tension entre la source et la charge est égale à:

$$dV_{36} = V_3 - V_6 = 0,4852 V \quad \text{II-9}$$

Les mêmes calculs peuvent être réalisés sur le réseau maillé présenté sur la Figure II-1. Le réseau est toujours composé d'une source et d'une charge entre lesquelles un courant de 250 A circule. Les tensions nodales et les courants de branches calculés dans cette configuration sont tracés sur la Figure II-8. Ce réseau offre une meilleure connexion entre la source et la charge puisque la chute de tension est largement inférieure ($dV_{36} = 0,067$ V). On remarque de plus que la circulation de courant se fait principalement sur les branches horizontales, de la gauche vers la droite.

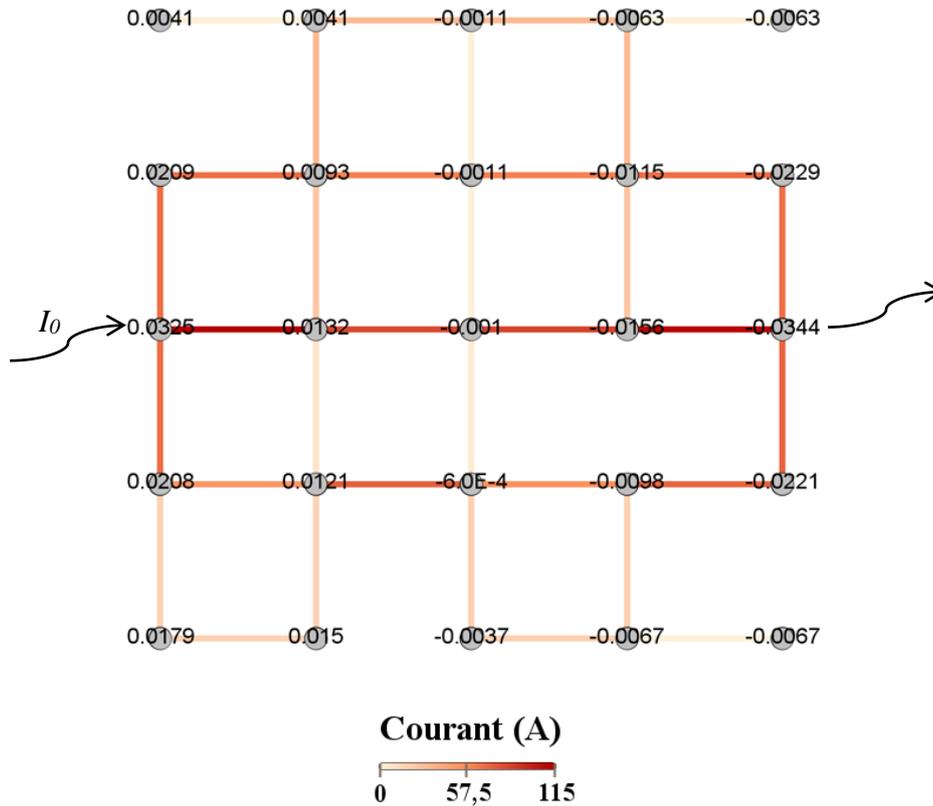


Figure II-8. Tensions nodales (V) et courants pour un courant $I_0 = 250$ A.

II.1.3.2. Analyses topologiques

II.1.3.2.a. Les degrés des nœuds

Plutôt que de résoudre les équations de circuit, il est possible d'étudier seulement les propriétés topologiques du graphe qui sous-tend le réseau. Une des propriétés usuelles d'un nœud u dans la théorie des graphes est son degré noté k_u . Il est défini comme étant le nombre de voisins du nœud u , c'est-à-dire le nombre de branches connectées au nœud. On le calcule à partir de la matrice d'adjacence simple :

$$k_u = \sum_{v=1}^n a_{uv} \quad \text{II-10}$$

Dans les graphes orientés, le degré entrant k_u^{in} et sortant k_u^{out} sont respectivement le nombre de branches dirigées vers le nœud u et celui partant de u . Le degré d'un nœud devient alors $k_u = k_u^{in} + k_u^{out}$. Le degré pondéré est logiquement défini comme la somme des poids des branches connectées à un nœud, le degré pondéré d'un nœud u est donc égal à l' $u^{\text{ième}}$ élément diagonal de la matrice Laplacienne :

$$k_u^w = \sum_{v=1}^n w_{uv} \quad \text{II-11}$$

Par exemple, les degrés simple et pondéré du graphe du réseau quasi-radial sont :

$$k = (2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2)$$

et :

$$k^w = (11,77.10^3 \ 11,77.10^3 \ 11,77.10^3 \ 12,35.10^3 \ 12,35.10^3 \ 11,77.10^3 \ 11,77.10^3)$$

Les degrés pondérés des nœuds des réseaux quasi-radial et maillé sont tracés sur la Figure II-9.

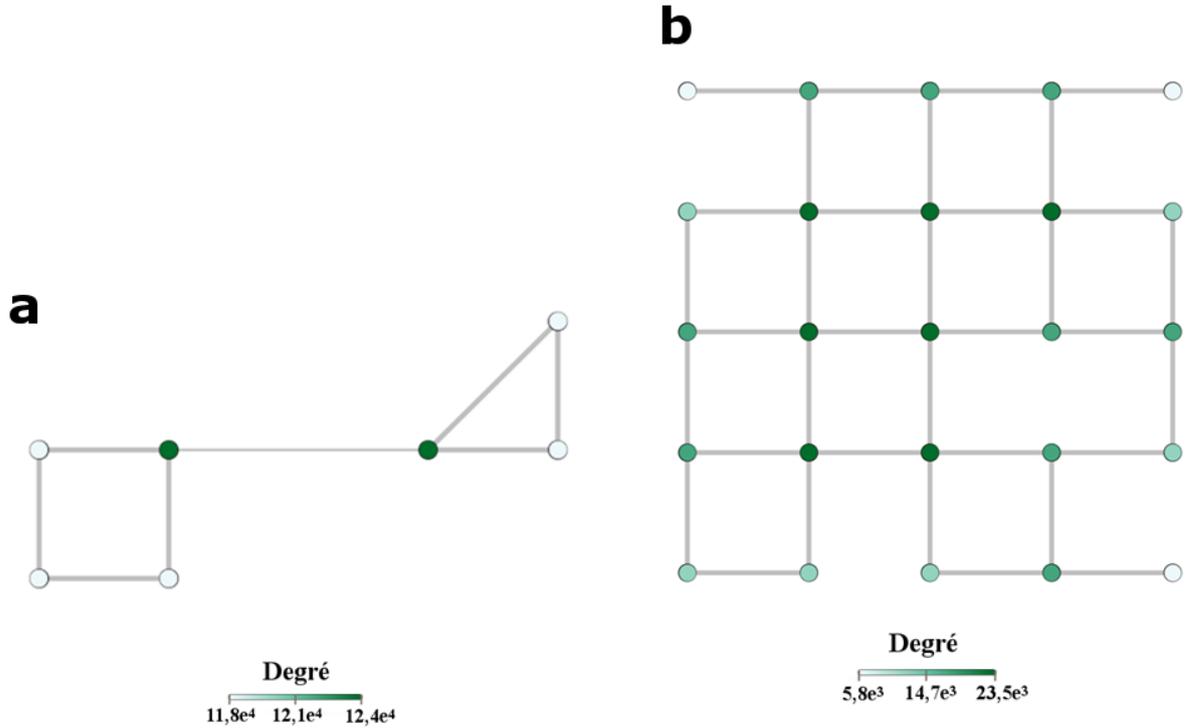


Figure II-9. Degrés pondérés des nœuds pour (a) le réseau quasi-radial et (b) le réseau maillé.

Si l'on compare ce paramètre topologique avec la circulation des courants issue de la résolution des équations de circuit, il n'apparaît pas de conclusion évidente même s'il semble que les nœuds traversés par un courant important sont principalement des nœuds à fort degré. Cependant, cette observation n'est pas généralisable à tous les réseaux.

Lorsqu'un graphe devient complexe, une manière simple de caractériser ses degrés est d'utiliser le degré moyen $\langle k \rangle$ et la distribution des degrés $P(k)$. Le degré moyen est égal à :

$$\langle k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n k_u = 2 * \frac{e}{n} \quad \text{II-12}$$

Avec n le nombre de nœuds et e le nombre de branches.

La distribution des degrés $P(k)$ est par définition :

$$P(k) = \frac{N_k}{n} \quad \text{II-13}$$

avec N_k le nombre de nœuds de degré k . Cette distribution a joué un rôle primordial dans l'étude des graphes et en particulier dans la découverte des réseaux invariants d'échelles

(dits *scale-free* en anglais), c'est-à-dire des réseaux dont la distribution des degrés suivent une loi de puissance [23][38].

II.1.3.2.b. La notion de clustering

Le coefficient de clustering est souvent utilisé pour l'étude des interactions sociales. C'est une mesure de connectivité d'un nœud et de son voisinage. Dans le domaine social, il donne la probabilité que deux personnes amies d'une même 3^{ème} personne soit aussi amies entre elles. En termes de graphes, le coefficient de clustering du nœud u est défini comme étant le rapport du nombre de branches effectives entre ses voisins j et k sur le nombre de branches possibles entre eux, sa valeur est donc comprise entre 0 et 1 et se calcule par [39] :

$$c_u = \frac{\sum a_{uj}a_{jk}a_{uk}}{k_u(k_u - 1)} \quad \text{II-14}$$

Les coefficients de clustering de chaque nœud du réseau quasi-radial sont :

$$\underline{c} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad 1)$$

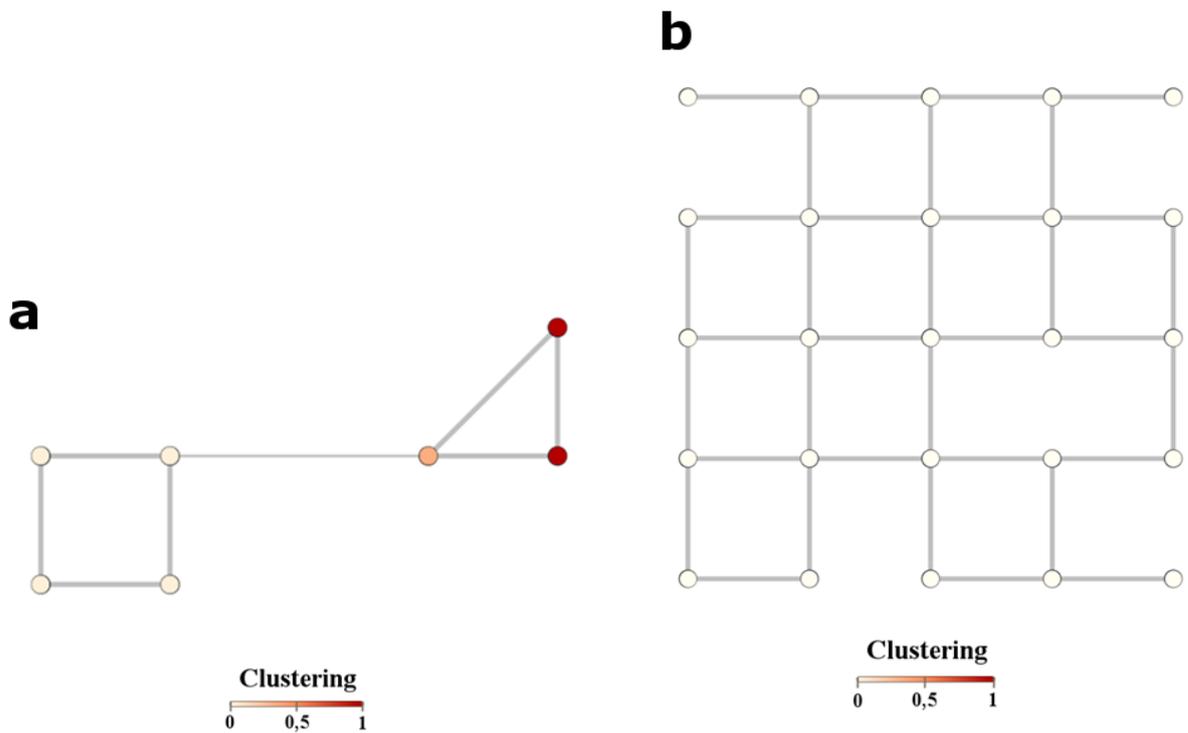


Figure II-10. Coefficients de clustering pour (a) le réseau quasi-radial et (b) le réseau maillé.

De par sa topologie, les coefficients de clustering du réseau maillé sont tous nuls. Dans nos exemples, il n'y a alors pas de lien visible entre les coefficients et la circulation du courant.

II.1.3.2.c. Distances et résistances

Pour de nombreux réseaux tels que les réseaux de transport routier, la distance géométrique à vol d'oiseau entre 2 nœuds est évidente. Cependant le réseau ne permet pas forcément une liaison directe entre les 2 nœuds et nécessite parfois un détour important. La distance géométrique n'est donc pas forcément pertinente. C'est notamment le cas pour les réseaux électriques, mais surtout pour les réseaux d'interactions sociales, dans lesquelles la distance géométrique n'existe pas. Il est donc nécessaire de définir une notion de distance dans la théorie des graphes afin de caractériser « l'éloignement » entre les nœuds. Pour cela on introduit la notion de chemin, ensemble de branches permettant de relier 2 nœuds. Sa longueur est égale au nombre de branches le composant pour un graphe sans poids. Avec des branches pondérées la longueur d'un chemin est la somme de l'inverse du poids de chaque branche du chemin. Il existe une multitude de chemins entre 2 nœuds mais il est intéressant d'obtenir le chemin les reliant le plus facilement, c'est-à-dire le chemin avec la longueur la plus faible possible, il est appelé le plus court chemin. Dans la théorie des graphes la distance d_{uv} entre u et v est égale à la longueur du plus court chemin entre ces nœuds. Pour un réseau électrique la distance est une somme d'inverses d'admittance, elle est donc assimilée à une résistance et s'exprime en Ohm. Pour un petit réseau, la recherche du plus court chemin peut être faite visuellement mais pour un réseau de taille plus importante, l'utilisation d'un algorithme de parcours [40] BFS (Breadth First Search) pour un graphe non pondéré ou de Dijkstra [41] pour un graphe pondéré est requise. Pour mieux comprendre, les tracés de plusieurs plus courts chemins sont montrés Figure II-11.

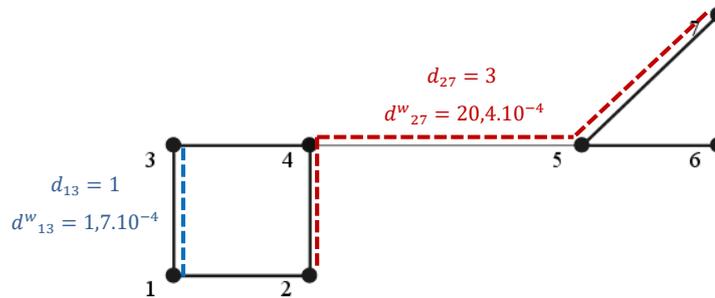


Figure II-11. Distance des plus courts chemins simple d et pondérés d^w pour le graphe du réseau quasi-radial.

Pour analyser des graphes, il est fréquemment utile de comparer leur distance moyenne des plus courts chemins $\langle d \rangle$ que l'on appelle fréquemment distance moyenne. Elle est définie comme la moyenne des plus courts chemins entre chaque paire de nœuds du graphe :

$$\langle d \rangle = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{u,v \in n; u \neq v} d_{uv} \quad \text{II-15}$$

Il est possible de calculer la distance moyenne simple ou pondérée.

La distance moyenne simple permet de quantifier la connectivité d'un graphe sans tenir compte des poids des branches. Par exemple, pour le réseau maillé la distance

moyenne simple est égale à 3,53 contre 2,05 pour le réseau quasi-radial ce qui signifie que les nœuds du réseau maillé sont plus éloignés et moins bien connectés entre eux. Par contre, lorsque l'on regarde les distances moyennes pondérées (tenant compte des résistances des branches), celle du réseau quasi-radial devient supérieure à celle du réseau maillé ($12,22.10^{-4} \Omega > 6,00.10^{-4} \Omega$) car la résistance de la branche entre les nœuds 4 et 5 dégrade fortement la connectivité entre les groupes de nœuds (1, 2, 3, 4) et (5, 6, 7).

Il est possible d'obtenir les résistances électriques équivalentes entre les nœuds du réseau grâce à la matrice résistance-distance. Cette matrice a été introduite par Klein et Randić en 1993 pour le domaine de la chimie [42]. La matrice résistance-distance M_{Ω} peut se calculer à partir du pseudo-inverse de Moore-Penrose [36] de la matrice Laplacienne du graphe :

$$M_{\Omega}(i, j) = L_{ii}^{\diamond} - 2L_{ij}^{\diamond} + L_{jj}^{\diamond} \quad \text{II-16}$$

D'après sa définition, la matrice M_{Ω} a n lignes et n colonnes et elle est symétrique. Pour le réseau quasi-radial, la matrice M_{Ω} est égale à :

$$M_{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0,13.10^{-3} & 0,13.10^{-3} & 0,17.10^{-3} & 1,87.10^{-3} & 1,98.10^{-3} & 1,98.10^{-3} \\ 0,13.10^{-3} & 0 & 0,17.10^{-3} & 0,13.10^{-3} & 1,83.10^{-3} & 1,94.10^{-3} & 1,94.10^{-3} \\ 0,13.10^{-3} & 0,17.10^{-3} & 0 & 0,13.10^{-3} & 1,83.10^{-3} & 1,94.10^{-3} & 1,94.10^{-3} \\ 0,17.10^{-3} & 0,13.10^{-3} & 0,13.10^{-3} & 0 & 1,70.10^{-3} & 1,81.10^{-3} & 1,81.10^{-3} \\ 1,87.10^{-3} & 1,83.10^{-3} & 1,83.10^{-3} & 1,70.10^{-3} & 0 & 0,11.10^{-3} & 0,11.10^{-3} \\ 1,98.10^{-3} & 1,94.10^{-3} & 1,94.10^{-3} & 1,81.10^{-3} & 0,11.10^{-3} & 0 & 0,11.10^{-3} \\ 1,98.10^{-3} & 1,94.10^{-3} & 1,94.10^{-3} & 1,81.10^{-3} & 0,11.10^{-3} & 0,11.10^{-3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{II-17}$$

Cette matrice permet de calculer la résistance moyenne entre deux nœuds d'un réseau. Les résistances moyennes du réseau quasi-radial et du réseau maillé sont respectivement égales à 11,3 m Ω et 0,28 m Ω . Les nœuds du réseau quasi-radial sont donc moins bien connectés entre eux que ceux du réseau maillé. C'est un résultat qui conforte l'analyse précédente sur les distances moyennes.

II.1.3.2.d. Notion de centralité (betweenness)

La longueur des plus courts chemins dans le graphe est intéressante mais son cheminement l'est aussi pour caractériser la centralité d'un nœud. En effet un nœud utilisé dans de nombreux plus courts chemins sera sûrement plus important qu'un nœud traversé par aucun. Par exemple, dans un réseau de transport, une ville traversée par beaucoup de plus courts chemins risque d'être aussi une ville fréquemment traversée par les automobilistes et les routiers puisque les transports privilégient les chemins les plus courts. Le coefficient de betweenness b_u d'un nœud est un indicateur de cette importance [43][44]. Il calcule le nombre d'apparitions d'un nœud sur l'ensemble des plus courts chemins du graphe :

$$b_u = \sum_{l,m} \frac{\sigma_{lm}(u)}{\sigma_{lm}} \quad \text{II-18}$$

avec σ_{lm} le nombre de plus courts chemins entre les nœuds l et m et $\sigma_{lm}(u)$ le nombre de plus courts chemins entre les nœuds l et m passant par le nœud u . Dans le réseau quasi-radial, les nœuds les plus importants selon le calcul du betweenness sont logiquement les nœuds 4 et 5 alors qu'aucun plus court chemin ne passe par les nœuds 6 et 7 (voir Figure II-12). Les nœuds avec le betweenness le plus important sont les nœuds au travers desquels transite le plus de courant comme on peut le voir sur la Figure II-7. La perte d'un de ces 2 nœuds dégraderait fortement le réseau et empêcherait la circulation du courant entre la source et la charge.

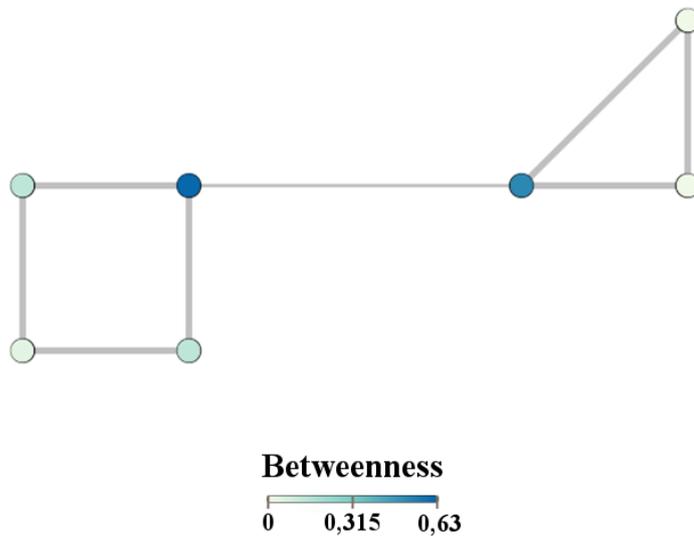


Figure II-12. Valeurs de betweenness des nœuds pour le réseau quasi-radial.

Les valeurs de betweenness des nœuds du réseau maillé sont tracées sur la Figure II-13. Les nœuds les plus importants sont encore les nœuds centraux ce qui est facilement compréhensible à partir de la représentation visuelle du graphe mais dans le cas de graphes plus complexes qui ne permettent pas une représentation 2D, il serait autrement plus difficile de définir ces nœuds importants. Tout comme pour le réseau quasi-radial, les nœuds à forte valeur de betweenness sont aussi les nœuds traversés par un courant important et donc les nœuds à surveiller dans le réseau pour éviter d'augmenter les chutes de tensions.

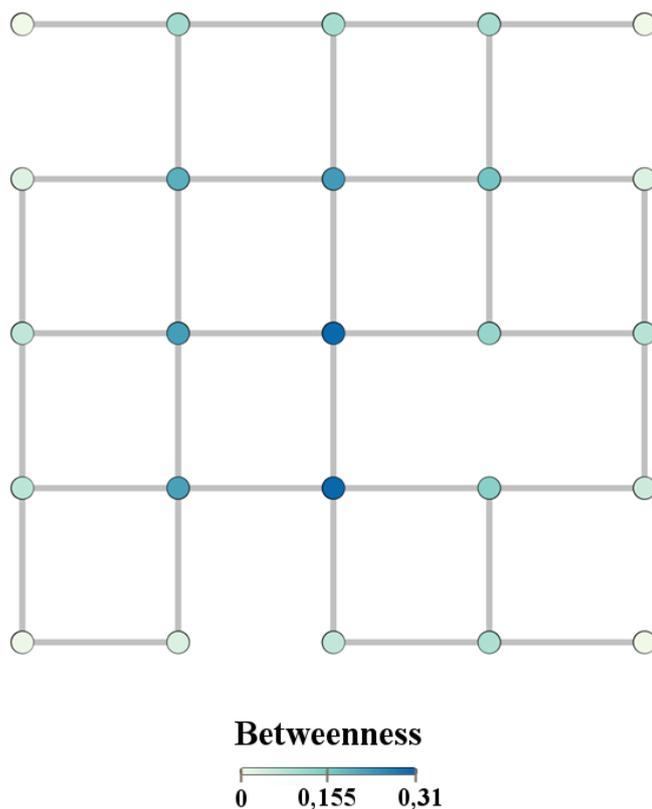


Figure II-13. Valeurs de betweenness des nœuds du réseau maillé

Plusieurs autres déclinaisons de la mesure de betweenness existent, comme par exemple, le coefficient de betweenness des marches aléatoires. Introduite par Newman [43], cette mesure de centralité s'intéresse, comme son nom l'indique, à la fréquence d'apparition d'un nœud sur des chemins aléatoires. Cette mesure se situe donc aux antipodes de celle basée sur les plus courts chemins. En réalité pour un grand nombre de marches, la probabilité de passage d'un marcheur sur une branche s'apparente à la répartition du courant dans un réseau électrique [43][45]. Cette centralité caractérise donc la topologie du réseau mais aussi la circulation du courant. Une forte valeur de ce betweenness d'un nœud implique donc qu'un courant important le traverse. La notion de betweenness peut aussi être étendue aux branches du graphe. Elle est appelée edge-betweenness et est définie comme le nombre d'apparitions d'une branche sur l'ensemble des plus courts chemins du graphe [24]. Dans le domaine électrique, cette mesure de centralité est utilisée pour identifier les lignes critiques d'un réseau de transport d'électricité [24].

II.1.3.2.e. Redistribution d'un courant

Une dernière notion intéressante a été développée récemment par Schaub [46] autour de la notion d'edge embedness. Ces recherches se sont concentrées sur la redistribution d'un courant électrique lors de la défaillance d'une ligne d'un réseau. En effet il est important de connaître la quantité de courant supplémentaire que devra supporter l'ensemble des lignes lorsqu'une ligne vient à être coupée. A partir de l'équation II-3 qui relie les tensions

nodales aux courants nodaux, Schaub calcule la matrice de redistribution de flux qui décrit la sensibilité des branches à la défaillance d'une seule branche, cette matrice est indépendante de la valeur et de la localisation de l'injection de courant. Elle est de plus la formulation en termes de théorie des graphes du facteur de distribution d'une panne de ligne (*line-outage distribution factor* en anglais). Ces recherches ont permis d'introduire la mesure d'edge embeddedness d'une branche d'un graphe. Cette mesure permet de quantifier la capacité d'une branche à être redondée par l'ensemble du réseau et donc à définir une valeur de criticité des éléments d'un réseau électrique. Les valeurs d'edge embeddedness des réseaux quasi-radial et maillé sont données sur la Figure II-14. Pour le réseau quasi-radial la branche centrale, qui conduit le plus de courant, a une valeur nulle, c'est-à-dire qu'en cas de perte de la branche aucun chemin ne permettra la circulation du courant. Sur le réseau maillé, on remarque que les branches centrales sont les branches les mieux redondées alors que les branches « cul-de-sac » ont une valeur nulle. Le réseau maillé semble donc être plus robuste aux défaillances de branches puisque les branches les plus utilisées par la circulation du courant sont bien redondées alors que le réseau quasi-radial est vulnérable, la perte d'une seule branche déconnecte le réseau.

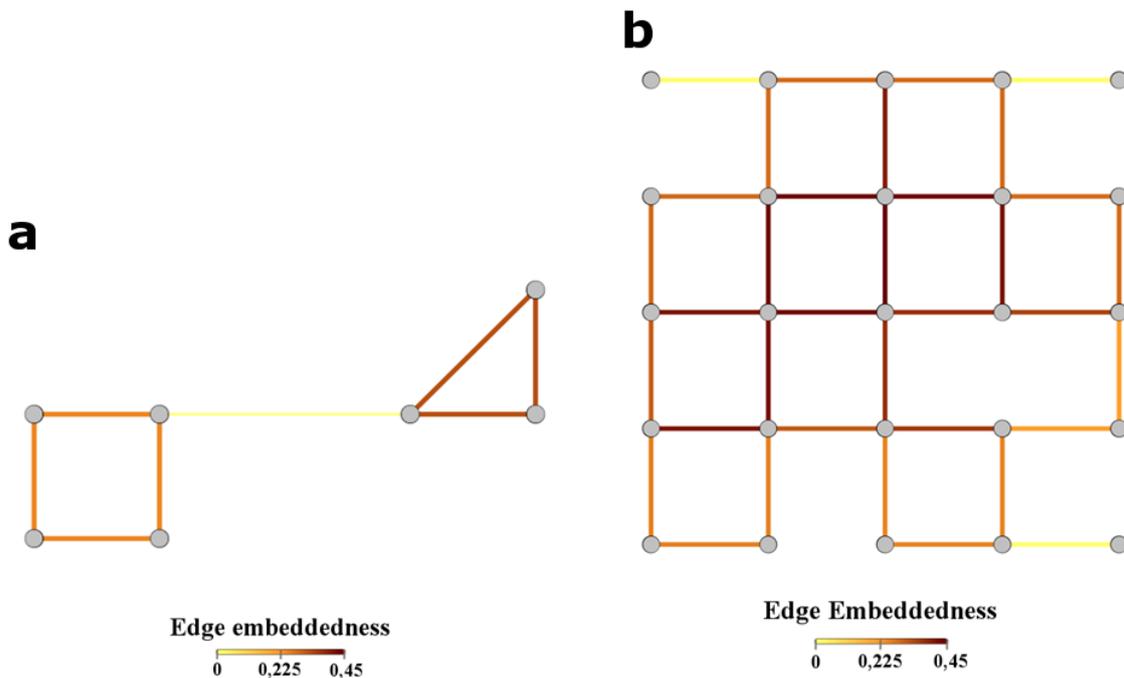


Figure II-14. Edge embeddedness des branches (a) du réseau quasi-radial et (b) du réseau maillé.

II.1.3.3. Problèmes de circulation de flux

En théorie des graphes, une attention est aussi portée sur les réseaux de transport (en anglais : *flow network*), c'est-à-dire un graphe qui a la particularité de s'intéresser à la circulation de flux dans des branches ayant chacune une capacité [47]. Ils sont soumis à

deux règles : la quantité de flux transitant dans une branche ne peut dépasser sa capacité et la quantité de flux entrante dans un nœud doit être égale à la quantité de flux sortante, excepté pour les nœuds sources (qui n'ont pas de flux entrant) et les nœuds puits (qui n'ont pas de flux sortant). Cette notion de flux est particulièrement adaptée à la modélisation de la circulation de fluide dans des tuyaux limitée par leur section ou alors de la circulation de courant dans une résistance limitée par une contrainte thermique. Le problème le plus fréquemment cité utilisant la notion de flux est la recherche de la quantité de flux maximum pouvant transiter entre 2 nœuds d'un réseau. Un algorithme permettant de le résoudre a été inventé par les scientifiques Ford et Fulkerson en 1955 [48]. Ce problème est directement relié au problème de coupe minimale d'un graphe (*minimum-cut* en anglais), c'est-à-dire le nombre minimal de branches à retirer dans le graphe afin de le séparer en deux sous graphes indépendants [49]. Le flux maximum pouvant transiter entre les 2 nœuds de séparation est identique à la capacité de la coupe minimale qui les sépare. Donc une information sur la robustesse d'un réseau, dans le sens de la capacité à continuer à fonctionner malgré des défaillances, est obtenue au travers de ces problèmes.

II.2. Une première approche des liens entre topologie et robustesse

Afin de confronter la topologie d'un réseau à ses performances électriques, notre première idée a été de classer les différents réseaux selon leur robustesse, leur capacité à continuer de réaliser leur fonction de retour de courant malgré des défaillances de leurs éléments. Nous avons créé pour cela l'indicateur de robustesse $IR_{10\%}$ qui correspond au pourcentage de branches minimum moyen à retirer dans le réseau pour avoir 10% des charges non fonctionnelles, c'est-à-dire déconnectées ou avec une chute de tension à leur borne supérieure à notre critère de tension de 0,5 V.

Pour se rapprocher de la problématique d'un réseau de retour de courant, nous avons de plus décidé d'étudier des réseaux 3D à mailles carrées de 5^3 nœuds qui seront creusés de manière aléatoire afin de faire varier leurs propriétés et de tenter d'arriver à des comportements statistiquement intéressants pour les liens entre topologie et robustesse. Le graphe à mailles carrés complet ainsi qu'un exemple de graphe dont 1/3 des branches ont été retirées aléatoirement sont représentés sur la Figure II-15.

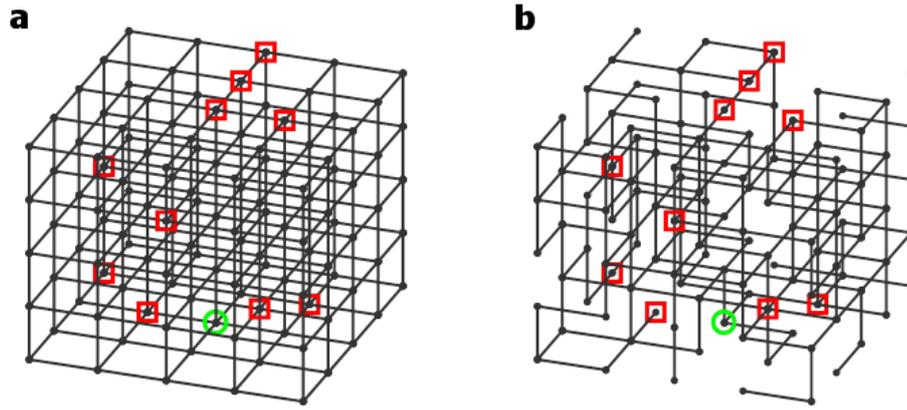


Figure II-15. Graphe complexe 3D de réseau à mailles carrées de 5^3 nœuds : (a) réseau complet de 300 branches ; (b) réseau creusé avec 200 branches choisies aléatoirement

La longueur, la résistivité et la masse volumique sont identiques pour toutes les branches et valent respectivement 1 m, $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ et 8920 kg/m^3 . Les sections des branches valent initialement 1 cm^2 mais peuvent être modifiées. 10 charges fixes injectent chacune 600 A (carré rouge sur la Figure II-15) et une source absorbe 6000 A (cercle vert). Seuls les réseaux permettant le bon fonctionnement de l'ensemble des charges avant défaillances seront étudiés.

Un premier travail a consisté à étudier l'influence du degré moyen $\langle k \rangle$ sur la robustesse du réseau. Puisque le degré moyen est directement relié aux nombres de branches d'un réseau (cf. équation II-12), on compare des réseaux creusés de différentes manières. Pour pouvoir être comparés en termes topologie/robustesse, tous les réseaux sont de masse identique égale à 267,6 kg. Trois topologies de réseaux sont étudiés : des réseaux creusés aléatoirement de 250 branches ($\langle k \rangle = 4,0$), de 200 branches ($\langle k \rangle = 3,2$) et de 150 branches ($\langle k \rangle = 2,4$) et pour garder une masse constante, les sections de branches sont respectivement de 1,2, 1,5 et 2 cm^2 . Les indicateurs de robustesse $IR_{10\%}$ ont été calculés pour 500 réseaux différents et sont tracés Figure II-16.

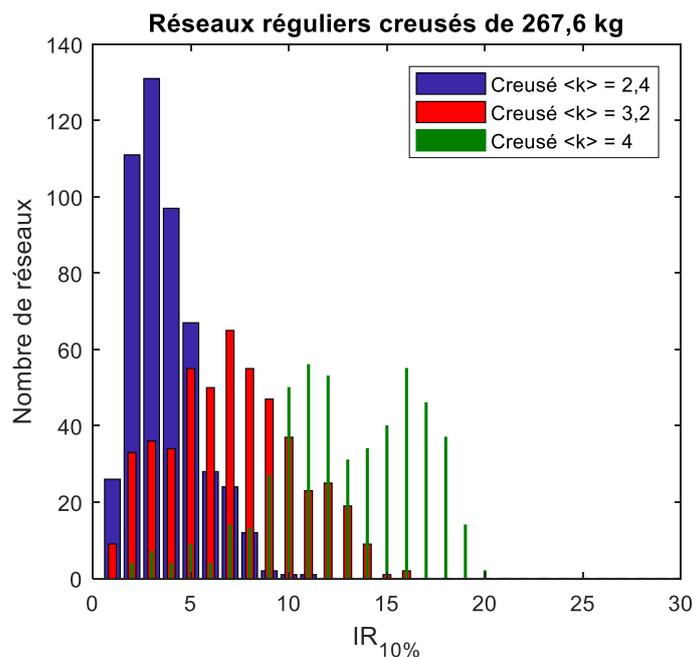


Figure II-16. Distribution des indicateurs de robustesse $IR_{10\%}$ pour des réseaux de différents degrés

Logiquement plus le degré moyen est élevé et plus le réseau semble robuste, capable d'assurer sa fonction de retour de courant malgré des défaillances de branches. Par exemple, pour un réseau creusé $\langle k \rangle = 2,4$, lorsque le réseau a perdu plus de 10 % de ses branches, il n'y a quasiment aucune chance d'avoir l'ensemble des charges fonctionnelles alors que pour un réseau de degré supérieur il faut retirer plus de 20 % des branches pour être sûr qu'une charge ne soit plus fonctionnelle. Le degré moyen semble donc être une propriété influente du compromis masse / robustesse d'un réseau électrique.

Cependant lorsque le nombre de branches du réseau diffère, les autres propriétés issues de la théorie des graphes telles que la distance moyenne ou le coefficient de clustering moyen diffèrent aussi comme on peut le voir dans le Tableau II-1. Il est donc nécessaire d'étudier en même temps l'impact de l'ensemble des propriétés topologiques sur la robustesse. Notre problème est donc multi-variable et difficile à appréhender.

	Degré pondéré moyen $\langle k^w \rangle$	Distance moyenne $\langle d \rangle$	Betweenness moyen $\langle b \rangle$
Creusé $\langle k \rangle = 4$	$2,82 \cdot 10^4$	$7,10 \cdot 10^{-4}$	0,0326
Creusé $\langle k \rangle = 3,2$	$2,82 \cdot 10^4$	$6,33 \cdot 10^{-4}$	0,0362
Creusé $\langle k \rangle = 2,4$	$2,82 \cdot 10^4$	$5,69 \cdot 10^{-4}$	0,0397

Tableau II-1. Paramètres en moyenne des réseaux creusés.

Les méthodes de partitionnement des données (*clustering data* en anglais) sont une des solutions pour traiter les problèmes multi-variable et mettre en évidence leurs propriétés

[50]. Mais ces méthodes nécessitent un échantillon excessivement important de réseaux afin d'obtenir des résultats intéressants. Pour donner un ordre d'idée, pour retirer 100 branches d'un réseau de 300 branches il y a $\binom{300}{200} = 4,16.10^{81}$ combinaisons possibles. Le temps de génération de 500 réseaux creusés et du calcul de leurs indicateurs de robustesse est d'environ 2 heures et 20 minutes. Il n'est donc pas envisageable de réaliser les millions de simulations nécessaires. .

Face à ce défi, il convient de trouver une approche alternative qui permette de mieux saisir les liens entre topologie et robustesse sans être trop coûteux en temps de calcul. C'est l'objet du chapitre suivant.

II.3. Conclusions

Les équations de circuit sont souvent présentées comme la simplification des équations de Maxwell qui constituent les postulats de base de l'électromagnétisme. Mais elles peuvent aussi être vues comme la déclinaison de la théorie des graphes appliquée à des objets bien particuliers satisfaisants aux lois de Kirchhoff. C'est bien sûr le cas des réseaux électriques. Pour un graphe modélisant un réseau électrique, les lois de Kirchhoff sont respectées au travers de la matrice Laplacienne du graphe qui porte l'information topologique. La modélisation des réseaux électriques sous forme de graphe offre une multitude d'approches permettant de mettre en évidence les propriétés électriques et topologiques du réseau. Cependant, l'étude de ces réseaux dans le domaine habituel de la représentation nodale classique d'un graphe est limitée pour la compréhension de certains liens entre leur topologie et leur robustesse. On a pu l'observer à travers la première approche réalisée dans la partie II.2, l'impact de la topologie du réseau sur ses performances électriques est un problème multi-variable et multi-échelle, difficile à appréhender. On propose donc de changer d'espace d'étude en travaillant dans le domaine spectral. Dans le Chapitre III suivant nous proposons une méthode basée sur la théorie spectrale des graphes qui est capable de relier la topologie d'un réseau à ses performances électriques.

*Chapitre III. Analyse spectrale des réseaux
électriques*

SOMMAIRE

III.1. Théorie spectrale des graphes.....	59 -
III.1.1 Valeurs propres, vecteurs propres et modes	59 -
III.1.2 Lecture multi-échelle	63 -
III.1.3 Connectivité algébrique	64 -
III.2. Analyse spectrale.....	67 -
III.2.1 Décomposition modale	67 -
<i>III.2.1.1. Décomposition modale de la résistance électrique d'un chemin.....</i>	<i>67 -</i>
<i>III.2.1.2. Décomposition modale de la masse du réseau</i>	<i>73 -</i>
III.2.2 Mise en évidence des échelles caractéristiques	73 -
III.2.3 Vecteurs propres	78 -
<i>III.2.3.1. Domaine nodaux et frontières.....</i>	<i>78 -</i>
<i>III.2.3.2. Mesures de centralité des nœuds</i>	<i>81 -</i>
III.2.4 Analyse perturbative du spectre du graphe.....	83 -
<i>III.2.4.1. Principe de l'analyse perturbative.....</i>	<i>83 -</i>
<i>III.2.4.2. Application au réseau de retour de courant</i>	<i>85 -</i>
<i>III.2.4.3. Conséquences pour les chutes de tension</i>	<i>88 -</i>
III.3. Conclusions.....	91 -

L'impact de la topologie sur la robustesse d'un réseau électrique est un problème complexe, multi-variable et multi-échelle. En d'autres mots, la complexité d'un réseau de retour de courant est telle qu'elle rend difficile pour le cerveau humain l'identification des propriétés pilotant sa robustesse. Pour faciliter la compréhension des liens entre topologie et robustesse, les spectres des matrices caractéristiques du graphe sont intéressants. On entend par spectre d'une matrice, l'ensemble de ses valeurs propres. Nous nous focaliserons plus particulièrement sur le spectre de la matrice Laplacienne du graphe. Nous verrons qu'il a l'énorme avantage de proposer une lecture multi-échelle des propriétés du réseau qui ne peut pas être réalisée à partir d'une simple inspection visuelle. De plus, il lie les propriétés électriques et structurelles d'un réseau aux valeurs et vecteurs propres de la matrice de son graphe. Un lien entre les propriétés du réseau et sa topologie en découle.

Ce chapitre a deux objectifs : introduire les notions de base de la théorie spectrale des graphes et présenter des outils d'analyse, basés sur cette même théorie, applicables aux réseaux de retour de courant continus.

III.1. Théorie spectrale des graphes

La théorie spectrale des graphes a des applications dans de multiples disciplines [51]. Elle est déjà couramment utilisée pour l'étude des systèmes dynamiques car elle offre une lecture alternative multi-échelle [52], en chimie sur les isomères des alcanes [30] ou en biologie pour comprendre les fonctions et les évolutions de la structure des protéines [28]. Plusieurs articles et livres proposent une présentation exhaustive de la théorie spectrale des graphes [53][54][55][56][57].

III.1.1 Valeurs propres, vecteurs propres et modes

La théorie spectrale des graphes correspond à la formalisation des propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice associée à un graphe. Cette matrice peut être n'importe quelle matrice représentative du graphe mais généralement le spectre étudié est celui de la matrice Laplacienne présentée dans la partie II.1.2.1. Communément, on appelle spectre du graphe le spectre de la matrice Laplacienne.

Les valeurs propres θ de la matrice Laplacienne L d'un graphe de n nœuds sont les solutions non triviales du polynôme caractéristique :

$$\det(L - \theta * M_n^{\text{identité}}) = 0 \quad \text{III-1}$$

avec $M_n^{\text{identité}}$ la matrice identité d'ordre n . Pour un graphe de n nœuds, la résolution de l'équation fournit n valeurs propres. L'ordre de multiplicité algébrique d'une valeur propre est égal à la multiplicité de la solution associée. Cependant, pour faciliter la

compréhension, toutes les solutions, même multiples, seront notées et donc un graphe de n nœuds aura toujours n valeurs propres. Par construction, la matrice Laplacienne est symétrique avec des coefficients réels donc toutes ses valeurs propres sont réelles. De plus, elle est semi-définie positive : les valeurs propres sont donc positives ou nulles (démonstration en annexe C). La matrice Laplacienne de n'importe quel graphe admet au moins une valeur propre égale à 0 (cf. annexe D). La multiplicité algébrique de cette valeur propre nulle est identique au nombre de composantes connexes d'un graphe. Un graphe connexe n'admet qu'une seule valeur propre nulle. Par convention les valeurs propres sont rangées par ordre ascendant : $\theta_1 = 0 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n$. Pour un réseau connexe, la seconde valeur propre θ_2 est appelé connectivité algébrique et la plus grande θ_n , rayon du spectre. Les valeurs propres peuvent être regroupées dans une matrice diagonale des valeurs propres Δ de n lignes et n colonnes :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \theta_n \end{pmatrix} \quad \text{III-2}$$

A noter que la trace de la matrice Laplacienne et de la matrice des valeurs propres sont identiques :

$$\text{trace}(L) = \text{trace}(\Delta) = \sum_i \theta_i \quad \text{III-3}$$

À chaque valeur propre θ_i est associé un vecteur propre ψ_i . Il est défini par :

$$L\psi_i = \theta_i\psi_i \quad \text{III-4}$$

Les vecteurs propres sont des vecteurs colonnes de n lignes $\psi_i = \begin{pmatrix} (\psi_i)_1 \\ (\psi_i)_2 \\ \vdots \\ (\psi_i)_n \end{pmatrix}$.

Vu que la matrice Laplacienne est symétrique, les vecteurs propres associés à deux valeurs propres différentes sont orthogonaux, c'est-à-dire que $\psi_i^t \cdot \psi_j = 0$ si $i \neq j$. De plus les vecteurs propres ne sont pas uniques, ils sont définis à un facteur près. Généralement, ils sont normalisés de la sorte que $\psi_i^t \cdot \psi_i = 1$. Le vecteur propre ψ_1 associé à la valeur propre nulle θ_1 est proportionnel au vecteur unitaire et la normalisation impose que :

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{III-5}$$

Les vecteurs propres peuvent être regroupés dans une matrice des vecteurs propres de n lignes et n colonnes :

$$\Psi = (\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_n) \quad \text{III-6}$$

Des propriétés d'orthogonalités précédentes, il en découle que $\Psi\Psi^T = \Psi^T\Psi = M_n^{\text{identité}}$ où $M_n^{\text{identité}}$ est la matrice identité d'ordre n . Autrement dit, $\Psi^{-1} = \Psi^T$.

Pour finir, chaque valeur propre θ_i ainsi que son vecteur propre associé ψ_i forment le mode i du réseau. Le réseau aura donc n modes.

Dans le chapitre précédent, le réseau est décrit à partir de la combinaison d'une matrice des poids portant une information dans la base des branches et d'une matrice d'incidence représentative de la topologie du réseau (cf. II.1.2.1.c). Le réseau et son comportement électrique sont alors représentés dans la base nodale grâce à la matrice Laplacienne. On retrouve la même information dans la combinaison des valeurs et vecteurs propres comme schématisé sur la Figure III-1. En effet, la matrice Laplacienne peut être reconstruite par :

$$L = \Psi\Delta\Psi^T \quad \text{III-7}$$

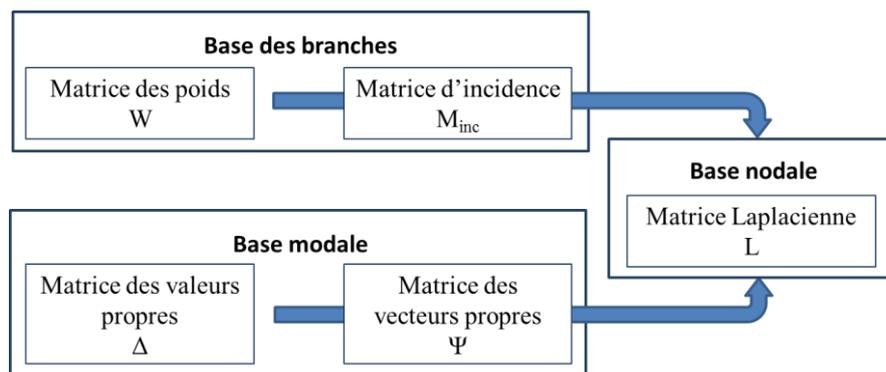


Figure III-1. Construction de la matrice Laplacienne à partir de deux bases différentes.

A titre d'exemple le spectre de la matrice Laplacienne du réseau quasi-radial, présenté dans la partie II.1.1, est calculé. Puisque le graphe a 7 nœuds, le spectre est composé de 7 valeurs propres :

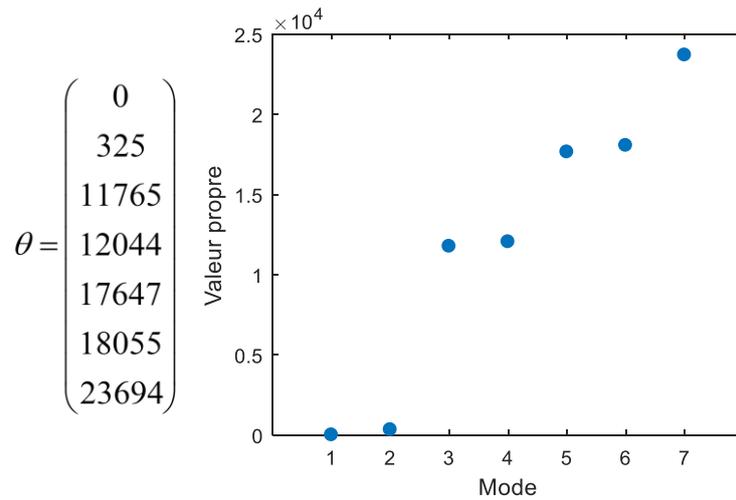


Figure III-2. Valeurs propres de la matrice Laplacienne du réseau quasi-radial.

Pour illustration, les vecteurs propres rangés dans une matrice Ψ sont :

$$\Psi = \left(\begin{array}{ccccccc} 0,3780 & -0,3412 & 0 & -0,7060 & 0 & -0,0555 & -0,4891 \\ 0,3780 & -0,3317 & 0,7071 & 0,0167 & 0 & 0,0297 & 0,4959 \\ 0,3780 & -0,3317 & -0,7071 & 0,0167 & 0 & 0,0297 & 0,4959 \\ 0,3780 & -0,3039 & 0 & 0,7052 & 0 & 0,0238 & -0,5166 \\ 0,3780 & 0,4198 & 0 & 0,0359 & 0 & -0,8234 & 0,0408 \\ 0,3780 & 0,4444 & 0 & -0,0343 & -0,7071 & 0,3979 & -0,0135 \\ 0,3780 & 0,4444 & 0 & -0,0343 & 0,7071 & 0,3979 & -0,0135 \end{array} \right)$$

Les 25 valeurs propres du réseau maillé de 25 nœuds, décrit dans la partie II.1.1, sont tracées sur la Figure III-3.

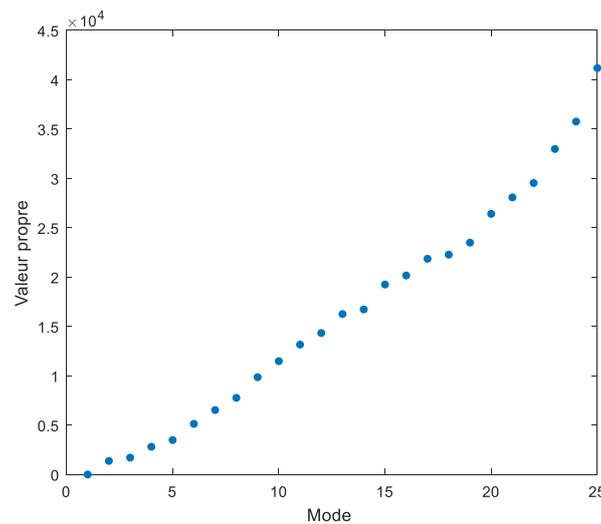


Figure III-3. Valeurs propres de la matrice Laplacienne du réseau maillé de 25 nœuds.

III.1.2 Lecture multi-échelle

Pour nous, l'intérêt principal de la théorie spectrale des graphes va résider dans la lecture multi-échelle qu'elle propose. En effet, à chaque mode du réseau va être associé une échelle d'observation. L'analogie avec l'étude des systèmes dynamiques permet de comprendre plus facilement cette notion. Dans le cas dynamique, la valeur propre est considérée comme une fréquence caractéristique du système. Dans le cas des graphes, les valeurs propres sont associées à des longueurs d'onde caractéristiques. Une faible valeur propre est associée à une grande longueur d'onde et donne des informations sur la connectivité à grande échelle du réseau. À l'inverse, une grande valeur propre est associée à une petite longueur d'onde et est reliée aux connectivités locales des nœuds.

Afin de mieux s'imprégner de cette notion essentielle, on va étudier les variations des valeurs propres sur le réseau quasi-radial de 7 nœuds. La connectivité algébrique θ_2 , la plus petite valeur propre non nulle, et le rayon de spectre θ_7 , la plus grande valeur propre, vont être recalculés après modification du poids des branches. Si la section d'une des branches des deux groupes de nœuds (cas rouge et bleu sur la Figure III-4) est doublée, la connectivité locale des nœuds est améliorée et, comme attendu, la plus grande valeur propre θ_7 est légèrement augmentée alors que la connectivité algébrique θ_2 n'est pas modifiée. En revanche, quand la section de la branche centrale est doublée (cas vert sur la Figure III-4) le rayon du spectre n'est pas modifié alors que la valeur propre θ_2 est quasiment doublée (de 325 à 617) ce qui signifie que la connectivité longue distance entre les deux groupes de nœuds est meilleure. On retrouve que le mode de plus faible valeur propre donne des informations sur la connectivité globale du réseau alors que le mode associé au rayon du spectre est relié seulement aux connectivités locales du réseau.

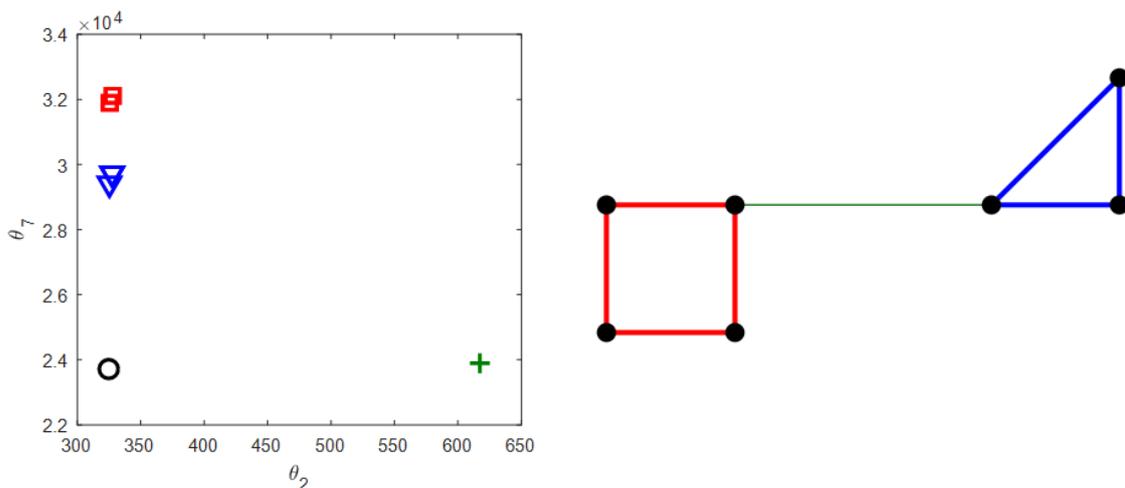


Figure III-4. Variations des valeurs propres θ_2 et θ_7 lors de la modification du poids des branches. Les valeurs sont celles : initiales (rond noir), lorsque les branches rouges sont modifiées (carré rouge), les branches bleues (triangle bleu) et la branche verte (croix verte).

III.1.3 Connectivité algébrique

La seconde valeur propre θ_2 , appelée connectivité algébrique du graphe par Fiedler [58], mérite une attention toute particulière. Dans la bibliographie, cette valeur propre est considérée comme étant l'information la plus importante du spectre du graphe puisqu'elle fournit une mesure de sa connectivité. Par exemple, dans le cas d'un graphe non connexe, donc composé de plusieurs groupes de nœuds non connectés entre eux, la connectivité algébrique est forcément nulle. De nombreuses études ont été réalisées sur cette valeur propre et sont en partie regroupées dans [59].

Le lien entre la connectivité algébrique et la connectivité d'un réseau électrique peut aussi être démontré grâce aux inégalités de Cheeger expliquées ci-dessous et illustrées par la Figure III-5.

Tout d'abord, on définit la frontière (*edge boundary*) ∂S d'un sous graphe S d'un graphe connexe comme étant l'ensemble de branches reliant le sous graphe à son complément \bar{S} , c'est-à-dire au reste du graphe [60]. Pour un sous graphe S donné, on définit la variable $h_G(S)$ égale à la somme des poids des branches de sa frontière divisée par le nombre de nœuds du sous graphe (ou du nombre de nœuds de son complément dans le cas où il est plus petit) :

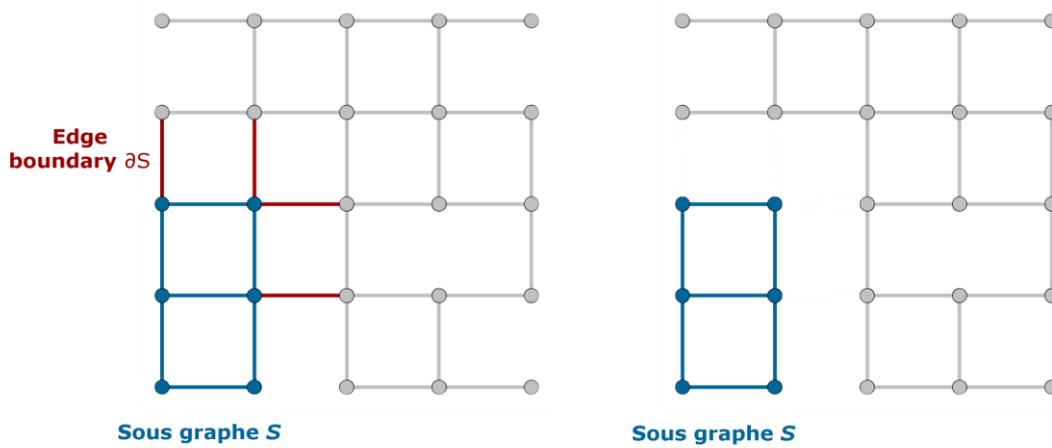
$$h_G(S) = \frac{|\partial S|}{\min(\text{vol}(S), \text{vol}(\bar{S}))} \quad \text{III-8}$$

\bar{S} est le complément de S , $\text{vol}(S)$ et $\text{vol}(\bar{S})$ sont respectivement égaux au nombre de nœuds du sous graphe S et du sous graphe \bar{S} et $|\partial S|$ est la somme des poids des branches de ∂S .

La constante de Cheeger h_G est égale à la valeur minimale sur l'ensemble des sous graphes possibles [60]:

$$h_G = \min_S h_G(S) \quad \text{III-9}$$

Plus sa valeur est grande, plus le nombre de branches nécessaire pour déconnecter une partie du graphe est important. On remarque logiquement qu'une constante de Cheeger nulle implique que la frontière ∂S est vide. Donc aucune branche ne relie le sous graphe S au reste du graphe qui est alors déjà non connexe.


 Figure III-5. Calcul de la variable $h_G(S)$ sur le réseau maillé.

Par exemple sur la Figure III-5 la variable $h_G(S)$ est égale à :

$$\begin{aligned}
 h_G(S) &= \frac{|\partial S|}{\min_S(\text{vol}(S), \text{vol}(\bar{S}))} \\
 &= \frac{2,35 \cdot 10^4}{6} \\
 &= 3,92 \cdot 10^3
 \end{aligned}
 \tag{III-10}$$

Il est possible de faire le lien entre la constante de Cheeger et la connectivité algébrique θ_2 . Pour cela on introduit le quotient de Rayleigh [61] relatif à la matrice Laplacienne du graphe L :

$$R(L, x) = \frac{x^T L x}{x^T x}
 \tag{III-11}$$

avec x un vecteur colonne de n lignes.

Le quotient peut être réécrit [62] :

$$R(L, x) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{u \sim v} ((x)_u - (x)_v)^2 w_{uv}}{\sum_u (x)_u^2}
 \tag{III-12}$$

avec $u \sim v$ signifiant u voisin de v et w_{uv} le poids de la branche entre u et v .

D'autre part, la connectivité algébrique θ_2 peut être définie par [63] :

$$\theta_2 = \min_{x \perp \psi_1} \frac{x^T L x}{x^T x} = \min_{x \perp \psi_1} \frac{1}{2} \frac{\sum_{u \sim v} ((x)_u - (x)_v)^2 w_{uv}}{\sum_u (x)_u^2}
 \tag{III-13}$$

Nous avons désormais tous les outils nécessaires pour relier θ_2 à la connectivité du réseau. Pour cela nous allons appliquer le quotient de Rayleigh avec un vecteur f basé sur une ligne de coupure C séparant le graphe en deux sous graphes indépendants A et B :

$$(f)_u = \begin{cases} \frac{1}{\text{vol}(A)} & \text{si } u \in A \\ -\frac{1}{\text{vol}(B)} & \text{si } u \in B \end{cases} \quad \text{III-14}$$

Le vecteur f est perpendiculaire à ψ_1 car la somme de ses composantes est égale à 0. En intégrant ce vecteur dans l'équation III-13, on obtient :

$$\theta_2 \leq \frac{1}{2} \frac{\sum_{u \sim v} ((f)_u - (f)_v)^2 w_{uv}}{\sum_u (f)_u^2} \quad \text{III-15}$$

Pour des nœuds u et v appartenant au même sous graphe indépendant, le numérateur de l'équation III-15 est nul :

$$\theta_2 \leq \frac{1}{2} \frac{\sum_{(u,v) \in C} ((f)_u - (f)_v)^2 w_{uv}}{\sum_{u \in A} (f)_u^2 + \sum_{u \in B} (f)_u^2} \quad \text{III-16}$$

En factorisant le numérateur, on retrouve la somme des poids de la frontière C :

$$\theta_2 \leq \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{\text{vol}(A)} + \frac{1}{\text{vol}(B)} \right)^2 \sum_{(u,v) \in C} w_{uv}}{\sum_{u \in A} (f)_u^2 + \sum_{u \in B} (f)_u^2} \quad \text{III-17}$$

$$\theta_2 \leq \frac{|C| \left(\frac{1}{\text{vol}(A)} + \frac{1}{\text{vol}(B)} \right)^2}{\frac{\text{vol}(A)}{\text{vol}(A)^2} + \frac{\text{vol}(B)}{\text{vol}(B)^2}}$$

Par simplification, on obtient :

$$\theta_2 \leq |C| \left(\frac{1}{\text{vol}(A)} + \frac{1}{\text{vol}(B)} \right) \quad \text{III-18}$$

$$\theta_2 \leq \frac{2|C|}{\min_{(A,B)} (\text{vol}(A), \text{vol}(B))}$$

On reconnait la définition de la constante de Cheeger et on en déduit que :

$$\theta_2 \leq 2h_G \quad \text{III-19}$$

L'inégalité de Cheeger montre donc que θ_2 porte une information sur la connectivité du graphe. En effet, plus θ_2 est grande et plus la constante de Cheeger est élevée. Donc, la

connectivité algébrique pour une taille de sous graphe fixée donne la borne inférieure du nombre de branches à retirer pour le déconnecter. La connectivité algébrique est donc influente sur la robustesse d'un réseau.

III.2. Analyse spectrale

Maintenant que les bases de la théorie spectrale des graphes ont été posées, cette seconde partie s'intéresse à son application à nos problématiques de robustesse de réseau de retour de courant. Pour rappel, l'objectif de nos travaux est de relier la topologie d'un réseau à ses propriétés électriques, particulièrement à sa robustesse.

III.2.1 Décomposition modale

On a vu précédemment que le spectre du graphe contient l'ensemble des informations de la matrice Laplacienne du graphe qui elle-même porte la topologie et le comportement électrique du réseau électrique, il est donc logique que l'ensemble des propriétés électriques puissent être réécrites à partir des seuls valeurs et vecteurs propres.

III.2.1.1. Décomposition modale de la résistance électrique d'un chemin

Pour obtenir une décomposition des résistances des branches considérons qu'un courant I_0 non nul transite entre une source s et une charge c de notre réseau, la résistance équivalente entre les deux nœuds est :

$$R_{sc} = \frac{V_s - V_c}{I_0} \quad \text{III-20}$$

D'autre part, les tensions nodales sont reliées aux courants nodaux grâce à la relation :

$$LV = I \quad \text{III-21}$$

D'où :

$$I = \Psi \Delta \Psi^T V \quad \text{III-22}$$

Le courant nodal du nœud i peut donc être écrit :

$$I_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \Psi_{ik} \Psi_{jk} \theta_k \right) V_j \quad \text{III-23}$$

Avec Ψ_{ik} et Ψ_{jk} les coefficients de la matrice des vecteurs propres Ψ .

De la même manière un vecteur des tensions nodales peut s'écrire à partir des matrices des valeurs propres et vecteurs propres et du vecteur des courants nodaux à partir de l'équation III-22 :

$$\begin{aligned}
 \Delta \Psi^T V &= \Psi^T I \\
 \Psi^T V &= \Delta^\diamond \Psi^T I \\
 V &= \Psi \Delta^\diamond \Psi^T I
 \end{aligned}
 \tag{III-24}$$

Au même titre que la matrice Laplacienne, la matrice des valeurs propres n'est pas inversible puisqu'elle a une valeur propre nulle, donc pour obtenir le vecteur des tensions nodales on utilise le pseudo-inverse de Δ de Moore-Penrose [36]. La matrice Δ^\diamond est une matrice diagonale dont les éléments sont obtenus en inversant les éléments non nuls de Δ :

$$\Delta^\diamond = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\theta_n \end{pmatrix}
 \tag{III-25}$$

De la même manière que l'équation III-23, la tension nodale d'un nœud i est alors une somme des participations de chaque courant nodal :

$$V_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^n \frac{\Psi_{ik} \Psi_{jk}}{\theta_k} \right) I_j
 \tag{III-26}$$

En injectant l'équation III-26 dans III-20, on obtient :

$$R_{sc} = \frac{1}{I_0} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^n \frac{\Psi_{sk} \Psi_{jk}}{\theta_k} \right) I_j - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^n \frac{\Psi_{ck} \Psi_{jk}}{\theta_k} \right) I_j \right)
 \tag{III-27}$$

Tous les courants nodaux sont nuls exceptés ceux du nœud s et du nœud c égaux respectivement à I_0 et $-I_0$. L'équation précédente peut alors être simplifiée :

$$\begin{aligned}
 R_{sc} &= \frac{1}{I_0} \left(\sum_{k=2}^n \frac{\Psi_{sk} \Psi_{sk}}{\theta_k} I_0 - \sum_{k=2}^n \frac{\Psi_{sk} \Psi_{ck}}{\theta_k} I_0 - \sum_{k=2}^n \frac{\Psi_{ck} \Psi_{sk}}{\theta_k} I_0 + \sum_{k=2}^n \frac{\Psi_{ck} \Psi_{ck}}{\theta_k} I_0 \right) \\
 &= \frac{I_0}{I_0} \left(\sum_{k=2}^n \frac{\Psi_{sk}^2 - 2\Psi_{sk} \Psi_{ck} + \Psi_{ck}^2}{\theta_k} \right) \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{(\Psi_{sk} - \Psi_{ck})^2}{\theta_k}
 \end{aligned}
 \tag{III-28}$$

La participation de chaque valeur propre à la résistance d'un chemin est proportionnelle au carré de la différence des composantes du vecteur propre associé.

Pour illustrer l'intérêt de la décomposition modale, les spectres de plusieurs résistances du réseau quasi-radial sont tracés ci-dessous. La topologie du réseau est aussi rappelée.

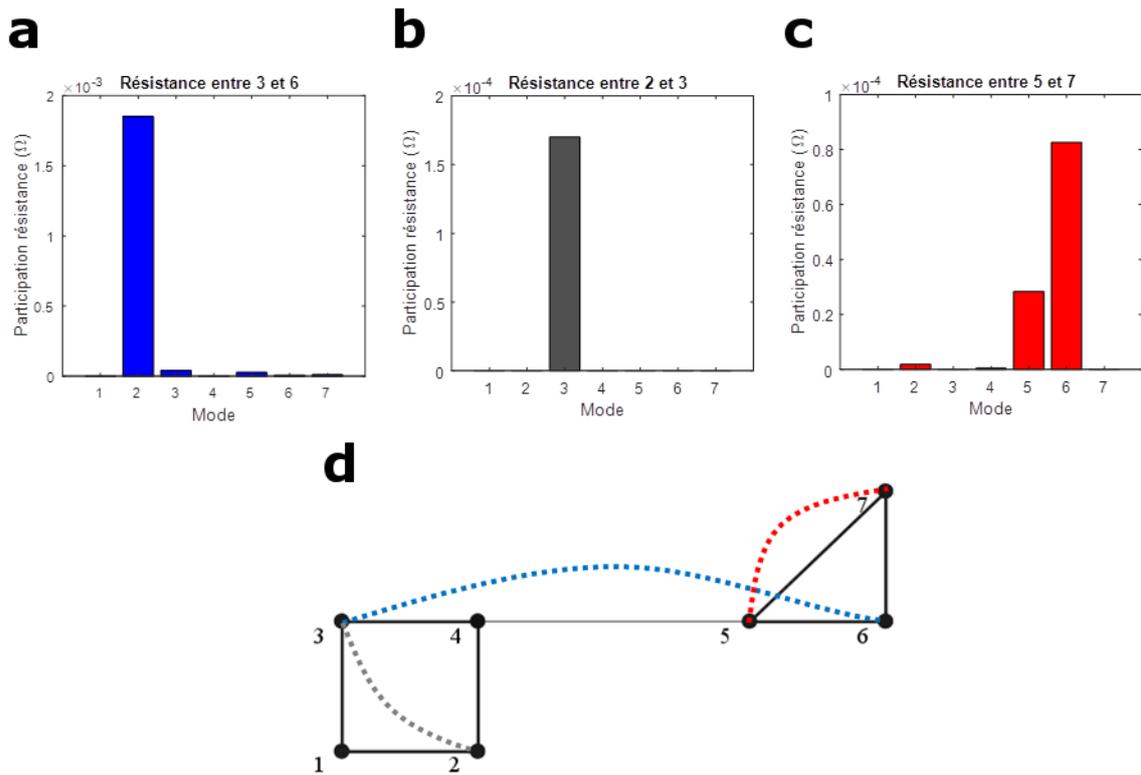


Figure III-6. Décomposition modale des résistances du réseau quasi-radial : a) entre les nœuds 3 et 6 ; b) entre les nœuds 2 et 3 et c) entre les nœuds 5 et 7. d) Rappel de la topologie du réseau quasi-radial et chemins des résistances décomposées.

Les décompositions des résistances électriques sont parfaitement adaptées à l'illustration de la lecture multi-échelle qu'offre la théorie spectrale. On remarque sur la Figure III-6 qu'en fonction du chemin choisi les spectres des résistances sont très différents. La résistance entre deux nœuds éloignés (nœuds 3 et 6) est largement dominée par le mode 2 associé à θ_2 ; les participations des autres modes sont négligeables voire nulles. Par contre, la résistance entre deux nœuds non adjacents d'un même sous-groupe (nœuds 2 et 3) est uniquement impactée par le mode intermédiaire 3. Alors que pour deux nœuds adjacents (5 et 7) les modes associés aux grandes valeurs propres sont prédominants et les participations des modes associés aux faibles valeurs propres (2, 3 et 4) sont négligeables. Ces résultats concordent parfaitement avec la lecture multi-échelle offerte par l'analyse spectrale, les modes associés aux faibles valeurs propres fournissent une information globale sur les interactions longues distances du réseau. Au contraire les connectivités locales entre des nœuds voisins sont reliées aux modes de fortes valeurs propres.

Une analyse identique a été réalisée sur des chemins du réseau maillé. Tout comme pour le réseau quasi-radial, les participations des modes ne sont pas identiques sur l'ensemble des résistances du réseau. Pour la résistance entre les nœuds 5 et 21 seuls les modes inférieurs à 10 (donc de valeur propre inférieure à θ_{10}) contribuent alors que, pour

la résistance entre les nœuds adjacents 12 et 13, les modes correspondant à des petites et grandes valeurs propres contribuent. Cela met une fois de plus en évidence la lecture multi-échelle. Dans le premier cas, les deux nœuds sont éloignés et ont donc une « composante » locale négligeable alors que les deux nœuds proches (12 et 13) ont une composante locale en plus d'une partie globale non négligeable qui correspond à la participation du reste du réseau. La résistance entre les nœuds 11 et 15 est un exemple de spectre intermédiaire. Visuellement, il est évident qu'en termes électriques ces nœuds sont éloignés tout en étant mieux connectés que les nœuds 5 et 21. Cette information se retrouve sur le spectre (Figure III-7.b). Les modes les plus impactant sont principalement des modes de faibles valeurs propres relatifs aux interactions longue distance cependant le mode 2 contribue peu.

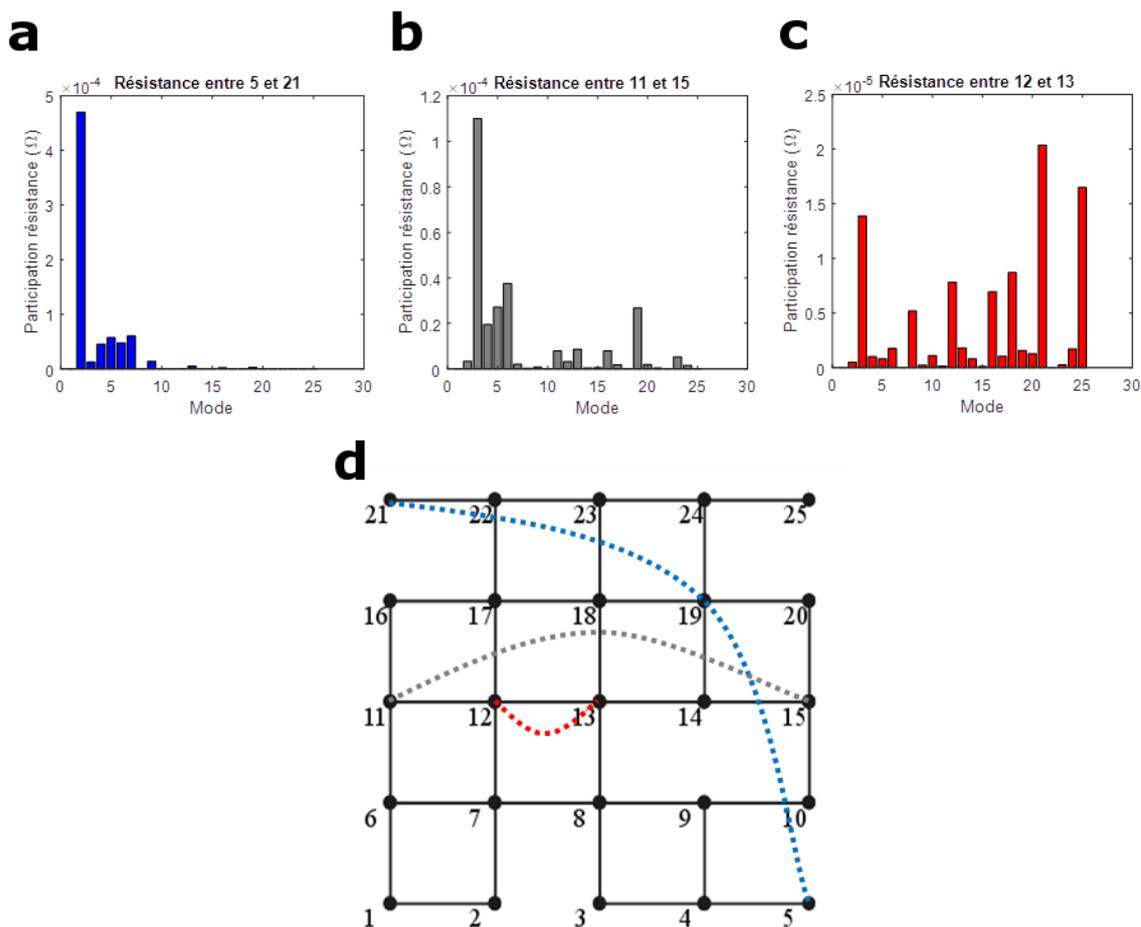


Figure III-7. Décomposition modale des résistances du réseau maillé : a) entre les nœuds 5 et 21 ; b) entre les nœuds 11 et 15 et c) entre les nœuds 12 et 13. d) Rappel de la topologie du réseau maillé et chemins des résistances décomposées.

L'information fournie par la décomposition modale de la résistance électrique peut être visualisée d'un autre point de vue. Pour un mode k , sa participation sur la résistance entre deux nœuds du réseau est calculée par :

$$R_{sc}^k = \frac{1}{R_{sc}} \frac{(\Psi_{sk} - \Psi_{ck})^2}{\theta_k} \quad \text{III-29}$$

Des exemples de valeurs sont donnés pour le réseau quasi-radial (Figure III-8) et pour le réseau maillé (Figure III-9). Plus une valeur est élevée, plus le chemin considéré est impacté par le mode considéré. Pour le réseau quasi-radial, on remarque que le mode 2 ne participe qu'à la connectivité globale entre les deux sous-groupes de nœuds, les composantes pour les autres résistances sont nulles. A l'inverse, les modes 6 et 7 contribuent seulement aux connexions locales dans un sous-groupe, respectivement pour le sous-groupe de gauche (nœuds 1, 2, 3 et 4) et pour le sous-groupe de droite (5, 6 et 7).

Sur la Figure III-9, on retrouve des résultats identiques. Les chemins reliant des nœuds éloignés sont fortement impactés par le mode 2. Par contre seuls les chemins entre nœuds adjacents centraux du graphe ont des composantes dans le mode 25. Ce mode ne donne donc qu'une information locale.

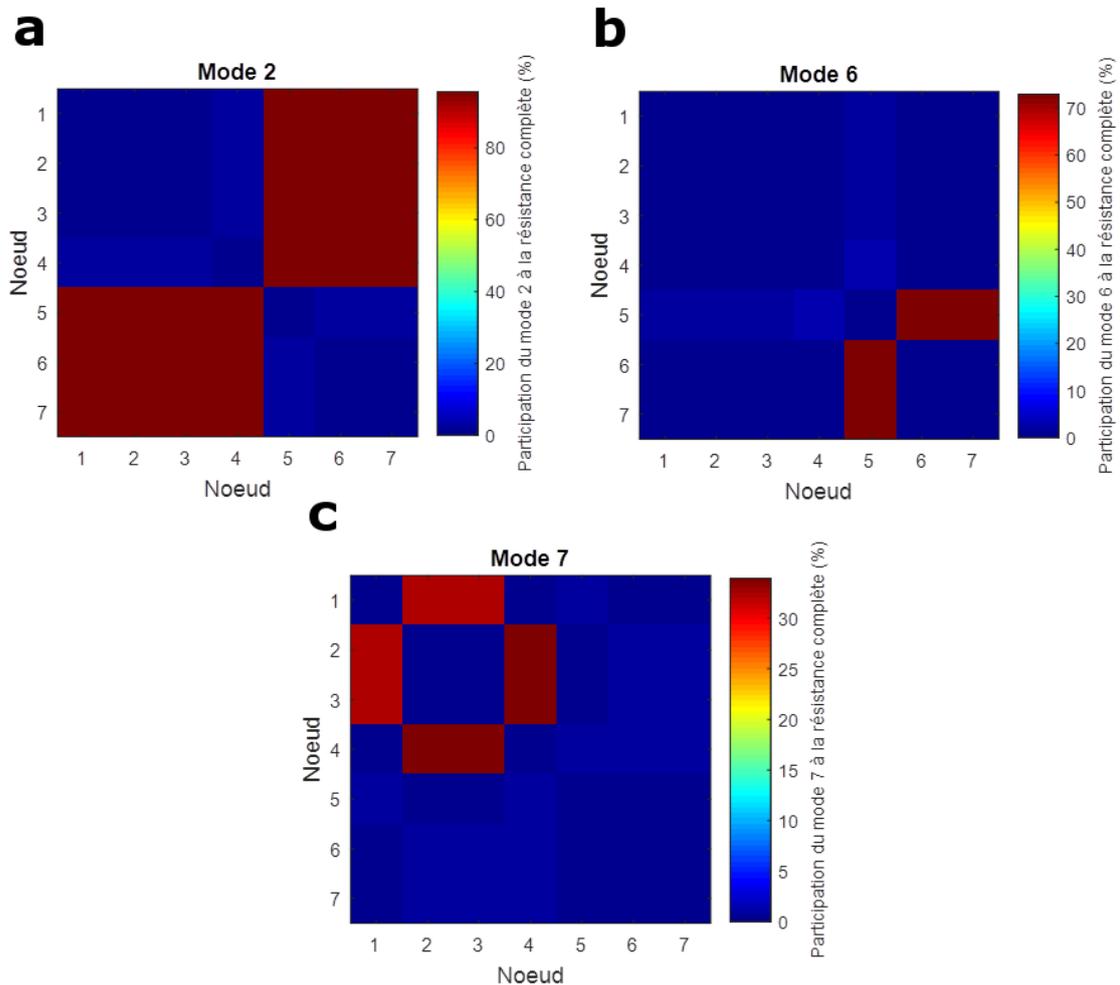


Figure III-8. Participations d'un mode dans la résistance d'un chemin entre deux nœuds du réseau quasi-radial : (a) pour le mode 2 ; (b) pour le mode 6 et (c) pour le mode 7.

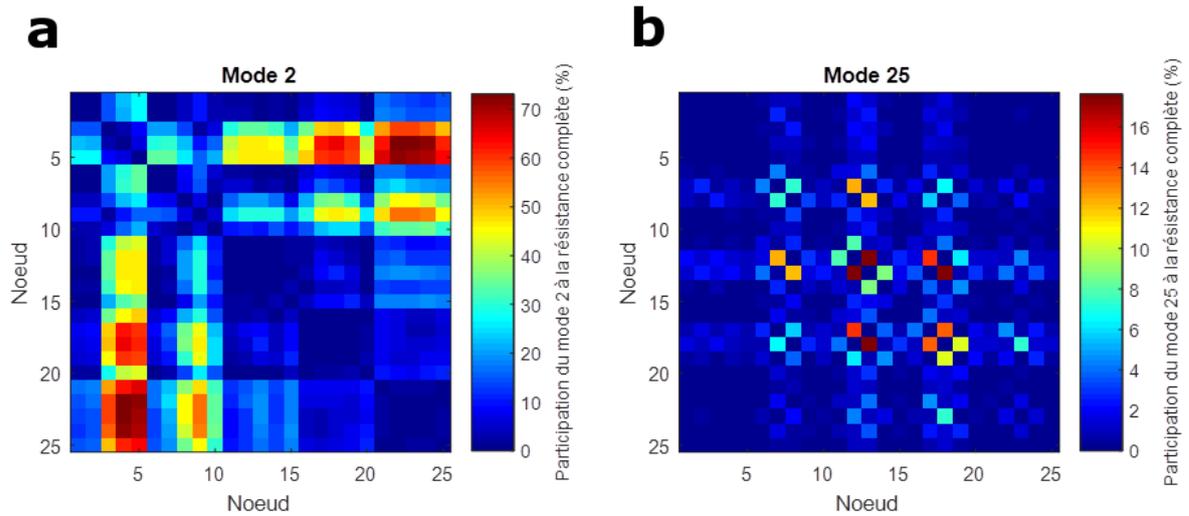


Figure III-9. Participations d'un mode dans la résistance d'un chemin entre deux nœuds du réseau maillé : (a) pour le mode 2 et (b) pour le mode 25.

Pour finir, il est aussi possible de s'intéresser à la résistance moyenne du réseau. Elle doit être intimement liée à la connectivité du réseau et donc à la robustesse du réseau de retour de courant, car plus sa valeur est faible, plus les nœuds sont bien connectés en moyenne. La résistance moyenne R_{moy} est calculée en sommant l'équation III-28 pour l'ensemble des paires de nœuds du réseau :

$$\begin{aligned}
 R_{moy} &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^n \frac{(\Psi_{ik} - \Psi_{jk})^2}{\theta_k} \\
 &= \frac{2}{n-1} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\theta_k}
 \end{aligned}
 \tag{III-30}$$

Puisque les valeurs propres sont rangées par ordre croissant, la résistance moyenne d'un réseau peut être bornée par :

$$R_{moy} \leq \frac{2}{\theta_2}
 \tag{III-31}$$

L'équation III-31 peut être vérifiée sur les deux réseaux illustratifs. Pour le réseau quasi-radial :

$$R_{moy} = 1,13 \cdot 10^{-3} < 6,15 \cdot 10^{-3} = \frac{2}{\theta_2}
 \tag{III-32}$$

Et sur le réseau maillé :

$$R_{moy} = 2,76 \cdot 10^{-4} < 14,5 \cdot 10^{-4} = \frac{2}{\theta_2}
 \tag{III-33}$$

L'inégalité est donc bien correcte pour les deux réseaux.

Bornant la résistance moyenne, on retrouve bien le fait que la connectivité algébrique est une indication de la robustesse du réseau.

III.2.1.2. Décomposition modale de la masse du réseau

Dans certains cas, des propriétés structurelles du graphe telles que la masse totale du réseau peuvent aussi être reliées à la matrice Laplacienne du graphe. Par exemple, lorsque toutes les branches sont identiques, le poids w_b d'une branche b est :

$$w_b = \frac{1}{R_b} = \frac{S}{\rho * l} = \frac{\mu S^2}{\rho m_b} \quad \text{III-34}$$

avec R_b : résistance de la branche b , m_b : masse de la branche b , l : longueur des branches, S : section des branches, ρ : résistivité des branches et μ : masse volumique du conducteur.

La masse totale du réseau M_{tot} est alors égale à la somme des masses de ses e branches :

$$\begin{aligned} M_{tot} &= e * m_b \\ &= e * \frac{\mu S^2}{\rho w_b} \\ &= \frac{e^2 S^2 \mu}{\rho} \frac{1}{e * w_b} \\ &= \frac{2 * e^2 S^2 \mu}{\rho} \frac{1}{\text{trace}(L)} \\ &= \frac{2 * e^2 S^2 \mu}{\rho} \frac{1}{\sum_{k=1}^n \theta_k} \end{aligned} \quad \text{III-35}$$

La masse totale du réseau peut donc elle aussi être décomposée modalement. D'après l'équation III-35, elle est inversement proportionnelle à la somme des valeurs propres. La masse associée aux connexions locales est donc plus faible que celle relative aux longues distances.

III.2.2 Mise en évidence des échelles caractéristiques

L'analyse spectrale va maintenant être confrontée à une approche basée sur la méthode de croissance d'une boule de façon à mettre en évidence les échelles caractéristiques. La méthode de croissance d'une boule (*cluster growing method*) est bien connue pour réaliser le calcul de la dimension fractale d'un réseau [64]. De nombreuses études ont d'ailleurs été réalisées avec cette approche afin de comparer les propriétés d'échelle des graphes [64][65][66].

La procédure de la méthode de croissance d'une boule est décrite ci-dessous et illustrée sur la Figure III-10 :

- a. Un nœud racine est choisi et la plus courte distance électrique l_{min} entre lui et un voisin est calculée. Pour rappel, dans un réseau électrique les distances sont analogues à des résistances et sont données en Ohm.
 - i. Le rayon du sous graphe r est choisi égal à la plus courte distance électrique l_{min} .
 - ii. Tous les nœuds à une distance inférieure ou égale au rayon du sous graphe r du nœud racine sont regroupés, comme cela est montré dans l'étape 1 de la Figure III-10.
 - iii. Les propriétés électriques et structurelles du sous graphe sont mesurées, par exemple la résistance électrique moyenne et la masse totale du sous graphe.
 - iv. Ensuite le rayon du sous graphe est augmenté d'un pas constant : $r = r + l_{min}$ et les étapes ii et iii sont répétées jusqu'à ce que tout le graphe soit dans le sous graphe (voir les étapes 2 à 4 sur la Figure III-10).
- b. Les étapes i à iv sont répétées en changeant de nœud racine.
- c. Quand tous les nœuds ont été choisis comme nœud racine les résultats sont moyennés et utilisés pour tracer la variation des propriétés selon le rayon du sous graphe.

A noter que le choix d'un pas constant n'est pas optimal car il amène à considérer des boules inutiles, lorsque leurs rayons donnent une valeur entre deux nœuds voisins. La valeur mesurée n'a alors pas de sens et devrait être éliminée. Par contre, ce choix simplifie le calcul de la moyenne faite sur tous les nœuds racines car la progression des boules est identique quel que soit le nœud racine considéré.

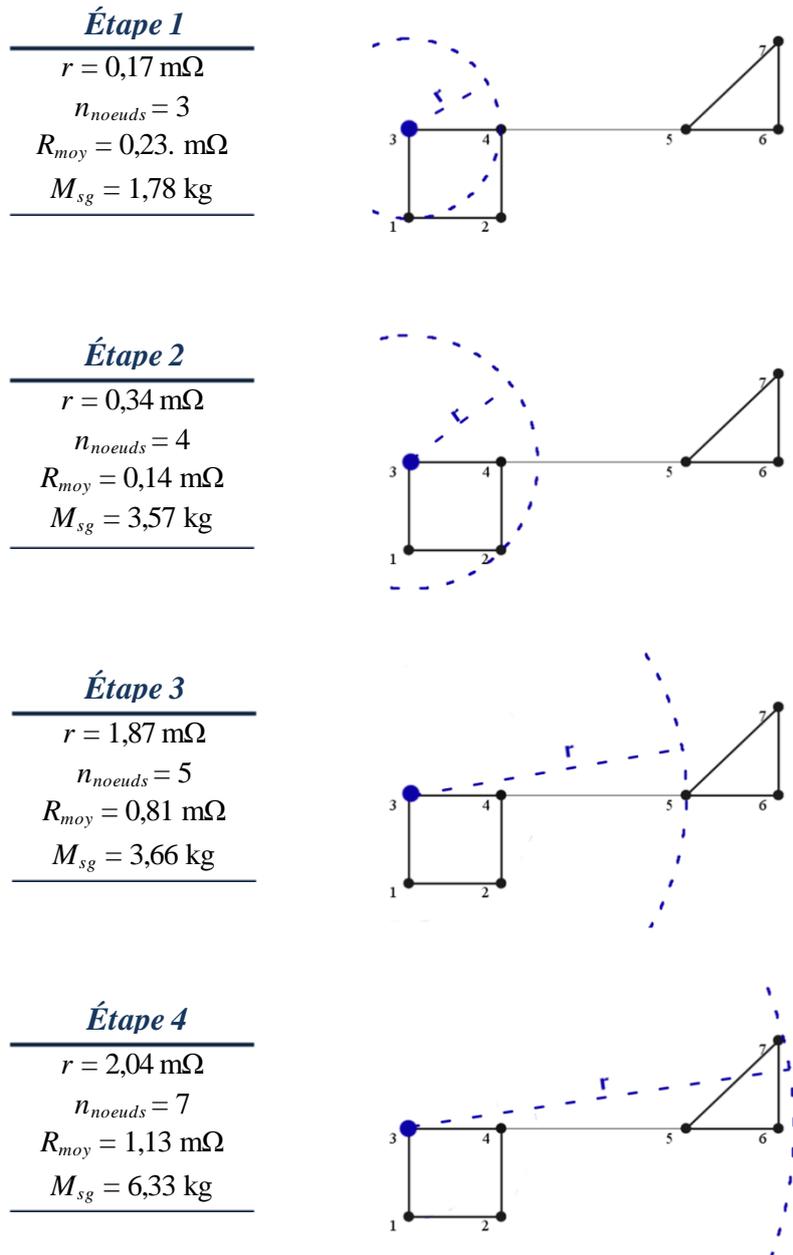


Figure III-10. Exemple de la croissance d'une boule durant les étapes i à iv pour le nœud racine 3.

Pour le réseau quasi-radial, la résistance moyenne pour l'ensemble des nœuds racines en fonction du rayon du sous graphe est tracée sur la Figure III-11. La topologie du réseau permet de distinguer deux échelles caractéristiques. A une échelle locale, la résistance moyenne augmente proportionnellement au rayon du sous graphe. Cette évolution correspond à l'accroissement du sous graphe aux extrémités du réseau comme on peut l'observer, par exemple, dans les étapes 1 et 2 de la croissance d'une boule de nœud racine 3. Le premier changement d'échelle se fait à partir d'un rayon caractéristique (indiqué sur la Figure III-11) proche de la taille moyenne des deux groupes des nœuds (1, 2, 3, 4) et (5, 6, 7), soit environ 0,20 mΩ. Après cette première transition, la résistance moyenne reste

constante puisqu'aucun nœud supplémentaire n'est intégré au sous graphe de rayon r . On peut remarquer que cette valeur constante est environ égale à un dixième de la résistance moyenne du réseau complet. A partir du moment où le sous graphe atteint le groupe opposé et donc absorbe la branche centrale la résistance moyenne augmente rapidement jusqu'à atteindre sa valeur maximale égale à 1,13 mΩ. Pour l'exemple de la croissance à partir du nœud racine 3 visible sur la Figure III-10, cette variation correspond aux étapes 3 et 4. Cette analyse conforte l'idée que la branche centrale est reliée aux interactions longues distances du réseau et impacte fortement la résistance moyenne.

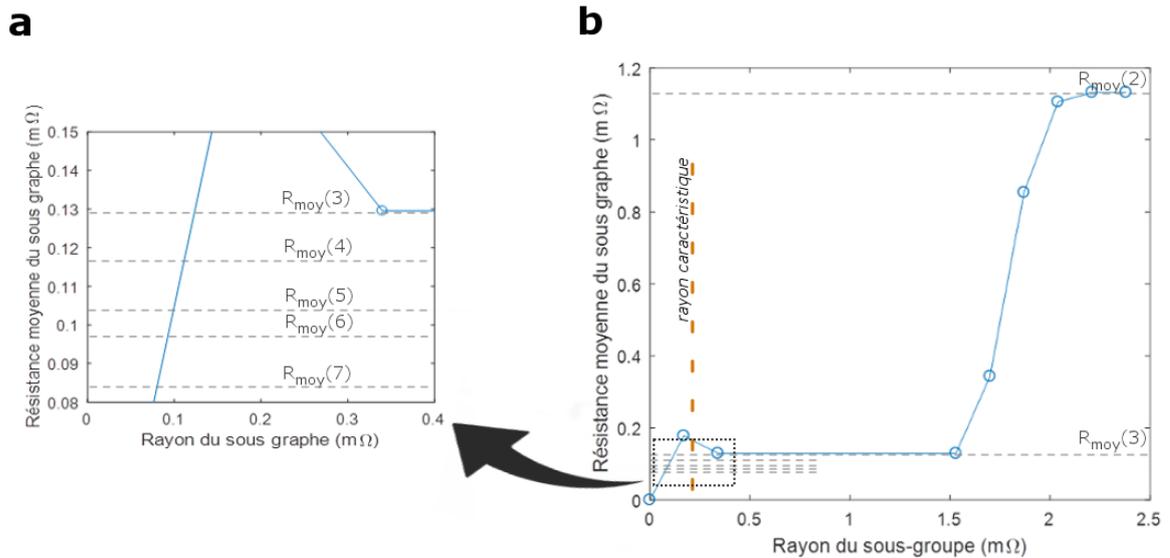


Figure III-11. (b) Variation de la résistance d'un sous graphe moyenné sur tous les nœuds racines en fonction du rayon pour le réseau quasi-radial. (a) Agrandissement pour un rayon inférieur à 0,4 mΩ.

La décomposition spectrale de la résistance moyenne est rappelée ci-dessous.

$$R_{moy} = \frac{2}{n-1} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\theta_k} \quad \text{III-36}$$

Le Tableau III-1 reprend cette résistance moyenne en ne considérant que certaines combinaisons de modes. Les valeurs correspondantes sont reportées sur la Figure III-11. On voit très nettement qu'à grande échelle, la résistance moyenne tient compte de l'intégralité des modes, même si elle est surtout dominée par le mode 2. Plus l'échelle décroît, plus le nombre de modes à considérer pour calculer la résistance moyenne est faible.

Valeur de la résistance moyenne	Modes considérés
$R_{\text{moy}}(2) = \frac{2}{6} \sum_{k=2}^7 \frac{1}{\theta_k} = 1,132 \text{ m}\Omega$	2 à 7
$R_{\text{moy}}(3) = \frac{2}{5} \sum_{k=3}^7 \frac{1}{\theta_k} = 0,129 \text{ m}\Omega$	3 à 7
$R_{\text{moy}}(4) = \frac{2}{4} \sum_{k=4}^7 \frac{1}{\theta_k} = 0,118 \text{ m}\Omega$	4 à 7
$R_{\text{moy}}(5) = \frac{2}{3} \sum_{k=5}^7 \frac{1}{\theta_k} = 0,103 \text{ m}\Omega$	5 à 7
$R_{\text{moy}}(6) = \frac{2}{2} \sum_{k=6}^7 \frac{1}{\theta_k} = 0,098 \text{ m}\Omega$	6 à 7
$R_{\text{moy}}(7) = \frac{2}{1} \sum_{k=7}^7 \frac{1}{\theta_k} = 0,084 \text{ m}\Omega$	7

Tableau III-1. Valeur de la résistance moyenne pour plusieurs combinaisons de modes.

Dans le cas du réseau maillé, l'évolution de la résistance moyenne résultant de la méthode de croissance d'une boule est tracée sur la Figure III-12. Contrairement au réseau quasi-radial, l'analyse réalisée ne permet pas de mettre en évidence le lien entre les propriétés, les modes et les échelles caractéristiques du réseau. En effet dès le premier rayon, la totalité des modes participe à la résistance moyenne. Autrement dit, il n'est pas possible de distinguer différentes échelles et du point de vue multi-échelle, cela signifie que le réseau est plutôt homogène.

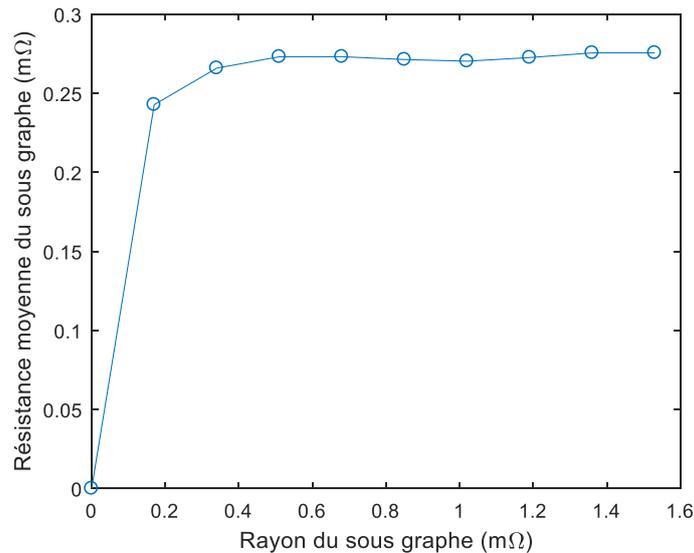


Figure III-12. Variation de la résistance d'un sous graphe en fonction du rayon du sous graphe pour le réseau maillé.

III.2.3 Vecteurs propres

L'analyse spectrale présentée précédemment s'intéresse principalement au rôle des valeurs propres. Et pourtant les vecteurs propres de la matrice Laplacienne portent aussi des informations sur la topologie et le comportement électrique du réseau. Par exemple, la composante de la résistance électrique entre deux nœuds dans un mode donné dépend uniquement de la différence des composantes d'un vecteur propre. L'analyse des vecteurs propres en fonction de la topologie du graphe est difficile et très peu de travaux de recherche [67] portent sur ce sujet. Dans ce contexte, cette section a seulement pour but d'introduire quelques éléments d'interprétation et possibilités d'application des vecteurs propres.

III.2.3.1. Domaine nodaux et frontières

Les vecteurs propres sont très utiles pour le partitionnement d'un graphe en plusieurs sous-graphes [53]. Même si les systèmes que nous traitons ne sont pas continus, le rôle des vecteurs peut-être précisé par analogie avec l'étude des différents modes vibratoires d'une corde. Le mouvement d'une corde est une combinaison linéaire de plusieurs modes de fréquences différentes. Les oscillations de la corde associées au trois premiers modes sont tracées sur la Figure III-13. On remarque que dans le mode 2, la corde présente deux domaines distincts, notés + et -. Trois domaines sont présents dans le mode 3. Sur les domaines associés à un mode, les fonctions propres qui sont solutions du problème aux valeurs propres gardent le même signe en tout point du domaine. Elles s'annulent sur la frontière du domaine et les points de cette frontière ne bougent pas lorsque la corde vibre selon le mode associé. On appelle ces domaines des domaines nodaux, correspondant aux nœuds des modes de vibration de la corde.

Par analogie avec le problème de la corde, un graphe va présenter des domaines nodaux. Chaque domaine rassemble les composantes de même signe du vecteur propre (chaque composante étant associée à un nœud du graphe). Un théorème général nous dit que le nombre de domaines nodaux dans un mode k est au maximum égal à k [68]. Par exemple, dans le mode 2 seront présents deux domaines nodaux. De même, les domaines nodaux du réseau maillé associés aux modes 4, 7 et 25 sont montrés Figure III-15. Dans le mode 4, le réseau est découpé en trois domaines nodaux, pour le mode 7 en six domaines nodaux. Le mode maximum 25 propose un découpage particulier où chaque nœud est un domaine nodal.

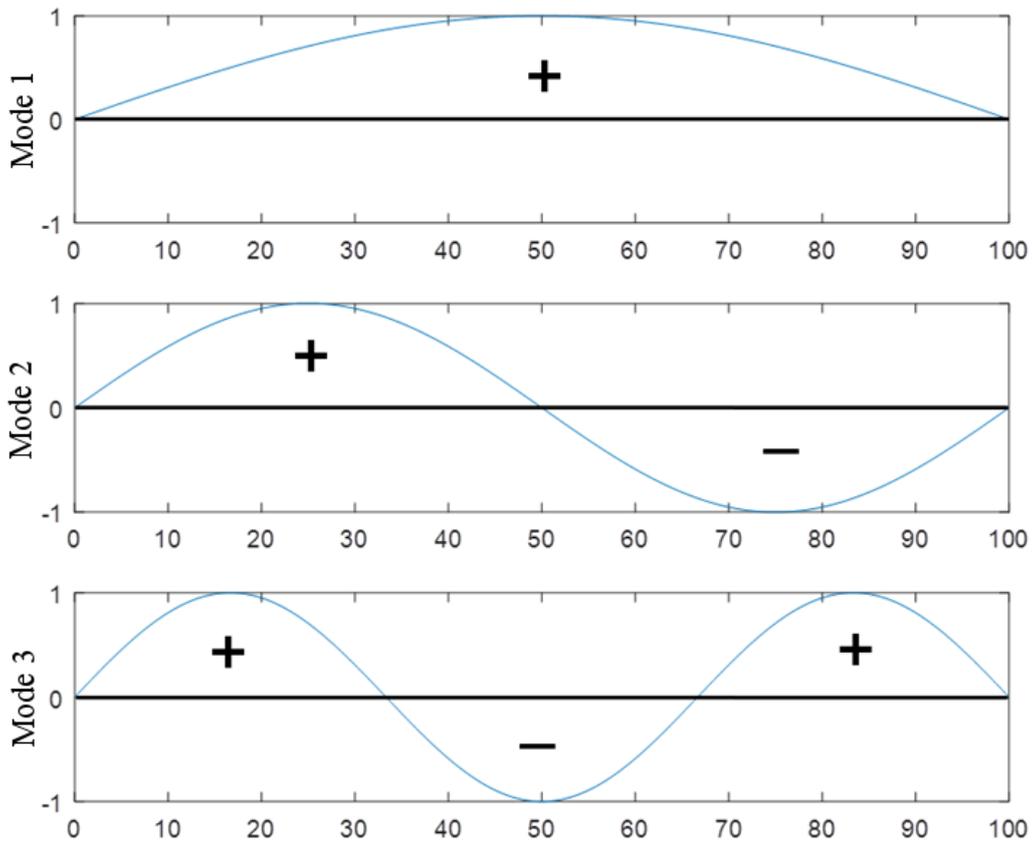


Figure III-13. Modes de vibration d'une corde

Pour couper un graphe en deux sous graphes de taille similaire, on va donc s'aider du vecteur propre associé à la connectivité algébrique θ_2 [69]. Par exemple, dans le réseau quasi-radial, les composantes du vecteur propre du mode 2 sont données sur la Figure III-14. En retirant les branches où le vecteur propre change de signe, ici la branche centrale, le réseau est séparé en deux sous-graphes de tailles proches. A l'intérieur des deux domaines nodaux, les interactions entre les nœuds sont principalement impactées par l'ensemble des modes de valeur propre supérieure à θ_2 .

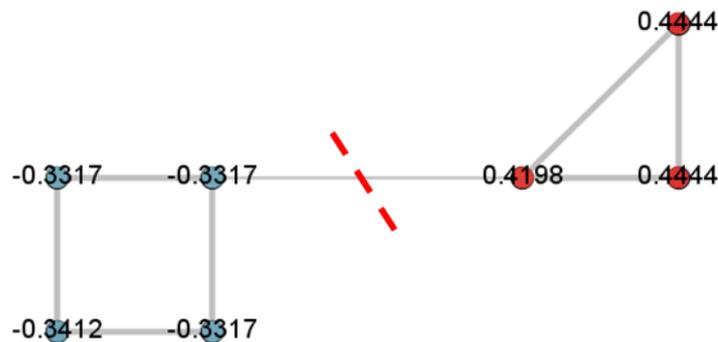


Figure III-14. Vecteur propre ψ_2 et frontière des domaines pour le réseau quasi-radial.

Le vecteur propre ψ_2 permet aussi de séparer le réseau maillé en deux sous réseaux comme on peut le voir sur la Figure III-15.a. La frontière des domaines correspond à l'ensemble minimum de branches capable de scinder le réseau. Ces branches sont donc particulièrement importantes pour les interactions longues distances et leur perte serait catastrophique pour le bon fonctionnement du réseau.

Considérons un mode du graphe. Il est possible d'alimenter le graphe en prenant comme vecteur des tensions nodales un vecteur colinéaire au vecteur propre associé au mode considéré. Les signes des composantes de ce vecteur tension sont données par le domaine nodal. Le courant nodal est donné par :

$$LV = I \quad \text{III-37}$$

D'où :

$$I = L\alpha\psi_i = \alpha\theta_i\psi_i \quad \text{III-38}$$

Lorsque l'on alimente le réseau en tension suivant un vecteur propre de la matrice Laplacienne, on récupère un vecteur des courants nodaux colinéaires au vecteur des tensions. Le vecteur des courants résultant est affecté d'un facteur égal à la valeur propre du mode considéré.

Il en résulte que les signes des composantes du vecteur courant respectent aussi les domaines nodaux. Dans les domaines positifs, les nœuds ont un comportement source (courant positif) et dans les domaines négatifs, les nœuds se comportent comme des charges. Les circulations des courants se font donc surtout à travers les branches inter-domaines, c'est-à-dire aux frontières des domaines. Dans le cas d'une alimentation suivant le mode 2, le courant traversera le réseau dans sa globalité alors que pour une alimentation selon un mode de forte valeur propre les circulations des courants resteront locales entre nœuds adjacents. C'est ce qui est montré sur la Figure III-15, les nœuds sources étant coloriés en bleu et les nœuds charges en rouge.

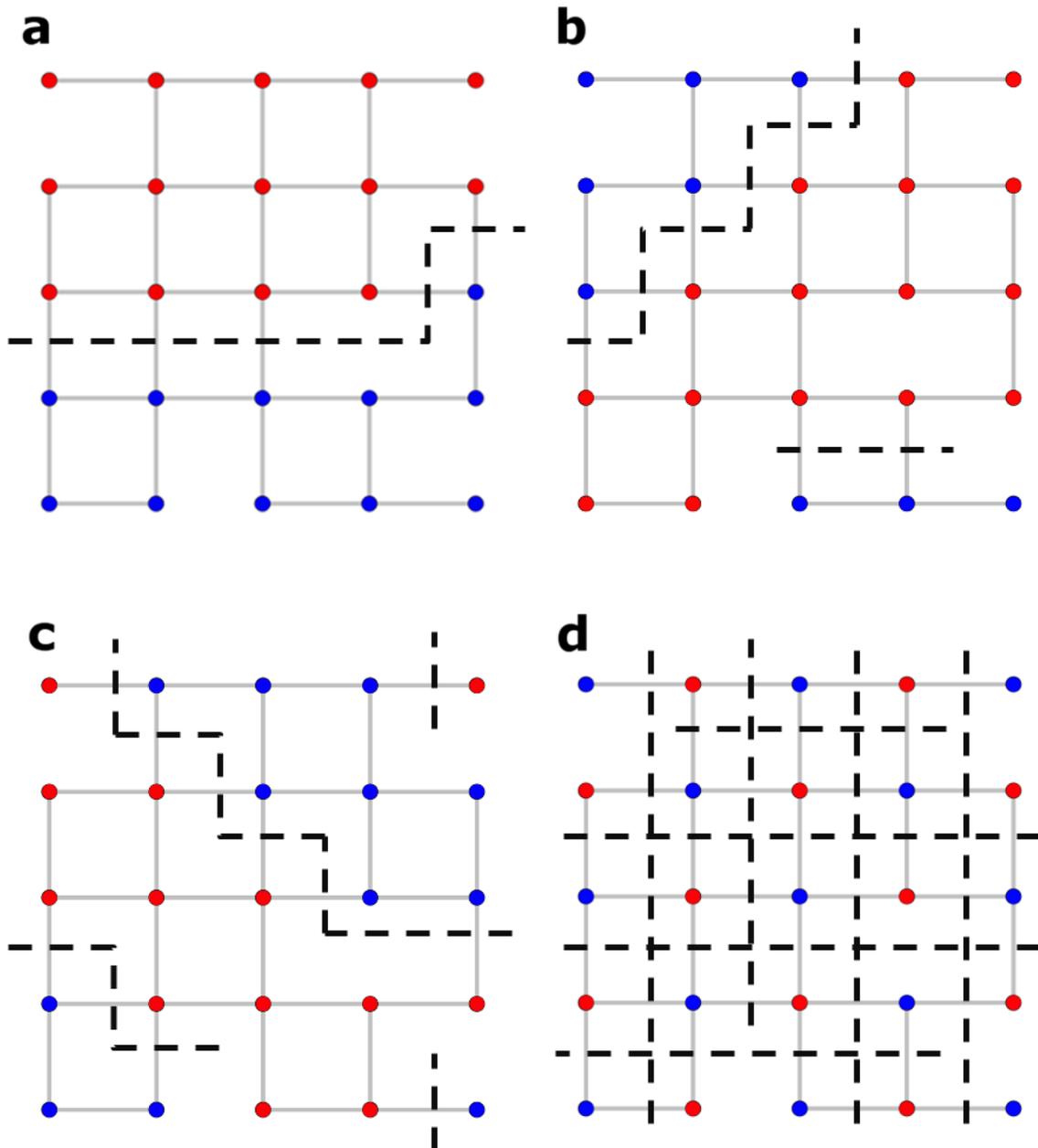


Figure III-15. Domaines nodaux et frontières du réseau maillé pour : (a) le mode 2 ; (b) le mode 4 ; (c) le mode 7 et (d) le mode 25. En bleu les nœuds des domaines positifs et en rouge les nœuds des domaines négatifs.

III.2.3.2. Mesures de centralité des nœuds

La mesure de centralité d'un nœud la plus simple est sûrement son degré (voir partie II.1.3.2). Cependant, cette mesure n'est pas toujours suffisante. Par exemple, afin de classer les pages web dans son moteur de recherche, Google définit une centralité, appelée *Page Rank* [70][71], basée sur trois principes :

- Les pages recevant le plus d'hyperliens, c'est-à-dire de liens la référençant, sont importantes ;

- Un hyperlien provenant d'une page importante a plus de poids qu'un lien provenant d'une page peu importante ;
- Si une page contient beaucoup d'hyperliens, chaque hyperlien a moins de valeur.

Les deux premiers principes peuvent être regroupés au sein d'une centralité dans laquelle l'importance d'un nœud est définie comme proportionnelle à la somme des centralités de ses voisins. En 1972, Phillip Bonacich [72] introduit l'utilisation des vecteurs propres de la matrice d'adjacence simple pour caractériser cette mesure de centralité d'un nœud dans un graphe non-orienté (en anglais *eigenvector centrality*).

Pour comprendre cela, partons de la définition d'un vecteur propre v_i de la matrice d'adjacence simple associé à la valeur propre μ_i non nulle :

$$Av_i = \mu_i v_i \quad \text{III-39}$$

Pour la ligne t de l'équation :

$$\sum_{u=1}^n a_{ut} (v_i)_u = \mu_i (v_i)_t \Leftrightarrow (v_i)_t = \frac{1}{\mu_i} \sum_{u \in \text{voi}(t)} (v_i)_u \quad \text{III-40}$$

avec $(v_i)_u$ la $u^{\text{ième}}$ composante du vecteur propre v_i .

Chaque vecteur propre de la matrice d'adjacence, associé à une valeur propre non nulle, fournit donc une mesure de centralité où l'importance d'un nœud est proportionnelle à la somme des importances de ses voisins. Habituellement, on utilise le vecteur associé v_n à la plus grande valeur propre μ_n de la matrice d'adjacence simple du graphe. Les composantes du vecteur propre v_n sont toutes du même signe et la valeur propre est toujours positive donc les centralités des nœuds sont toutes de même signe ce qui facilite leur comparaison [57]. Par exemple, les centralités du réseau quasi-radial et du réseau maillé sont respectivement tracées sur la Figure III-16 et la Figure III-17. Les figures mettent en évidence le rôle important des nœuds centraux dans nos deux réseaux.

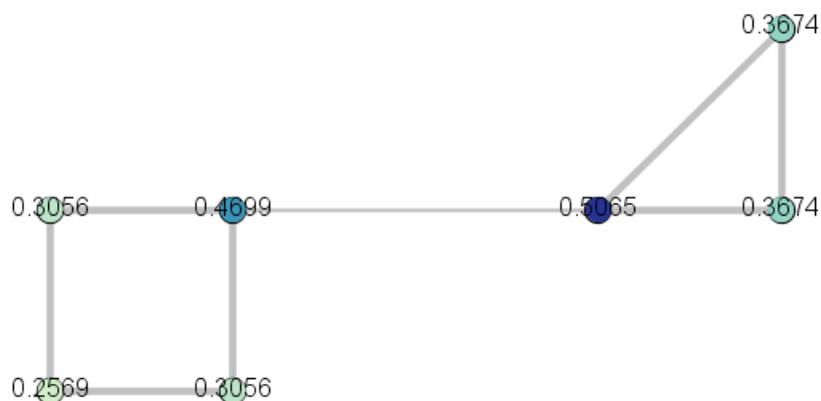


Figure III-16. Centralité du réseau quasi-radial.

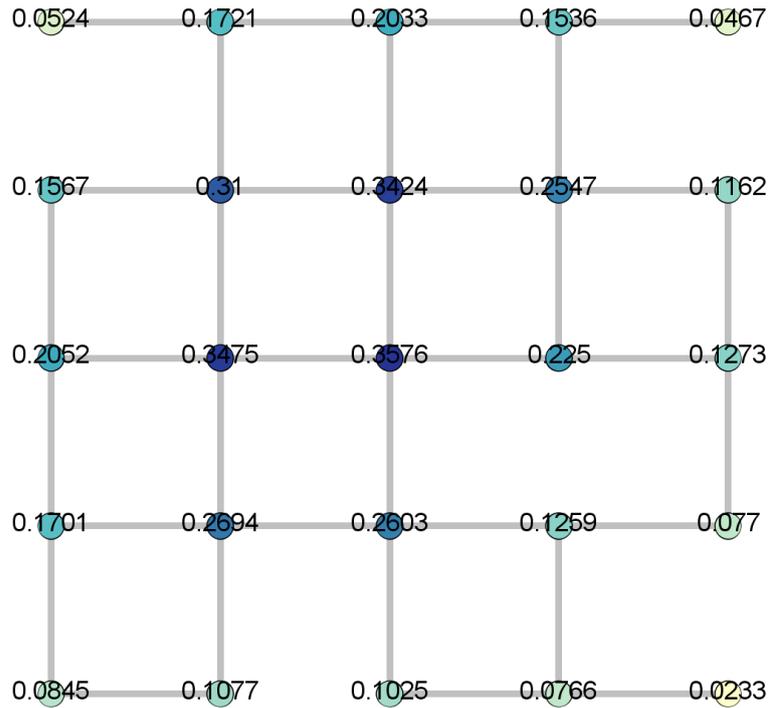


Figure III-17. Centralité du réseau maillé.

III.2.4 Analyse perturbative du spectre du graphe

Jusqu'à maintenant, les propriétés électriques et structurelles d'un réseau ont été reliées au spectre de la matrice Laplacienne du graphe. Cependant, en dehors de la connectivité algébrique, aucun lien n'a été établi à travers le spectre entre l'organisation topologique d'un réseau de retour de courant et sa robustesse, c'est-à-dire sa capacité à continuer de réaliser sa fonction de retour de courant malgré des défaillances de ses éléments. En effet, les vecteurs propres d'un graphe étant fortement modifiés dès qu'un lien est supprimé, il est difficile d'obtenir des indications sur ce lien. Par contre, si les perturbations sont suffisamment petites, il est possible de tracer leur impact sur le spectre [73][74]. On espère ainsi avoir quelques tendances.

III.2.4.1. Principe de l'analyse perturbative

Tout d'abord, considérons un réseau fonctionnel dont la matrice Laplacienne est notée L_0 . L'équation reliant ses $i^{\text{ème}}$ valeur propre θ_{0i} et vecteur propre ψ_{0i} est :

$$L_0 \psi_{0i} = \theta_{0i} \psi_{0i} \quad \text{III-41}$$

Lorsque le réseau est perturbé (par exemple si la résistance d'une branche est augmentée à cause de la détérioration de la connexion entre deux nœuds), la matrice Laplacienne et son spectre sont modifiés. Le problème aux valeurs propres de la matrice Laplacienne perturbée L s'écrit :

$$L\psi_i = \theta_i\psi_i \quad \text{III-42}$$

Soit ΔL la variation de L_0 lorsque le réseau est perturbé, la matrice Laplacienne L du réseau perturbé s'écrit :

$$L = L_0 + \Delta L \quad \text{III-43}$$

Dans ce développement, nous considérons que la perturbation est faible. Il est alors possible de négliger les variations d'ordre élevé des valeurs et vecteurs propres du réseau perturbé. Les valeurs et vecteurs propres peuvent donc être approchés par un développement d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \psi_i &\approx \psi_{0i} + \Delta\psi_i \\ \theta_i &\approx \theta_{0i} + \Delta\theta_i \end{aligned} \quad \text{III-44}$$

$\Delta\psi_i$ et $\Delta\theta_i$ sont les variations respectives de ψ_{0i} et θ_{0i} lorsque le réseau est perturbé. En injectant les équations III-43 et III-44 dans l'équation III-42 on peut écrire :

$$\begin{aligned} L_0\psi_{0i} + \Delta L\psi_{0i} + L_0\Delta\psi_i + \Delta L\Delta\psi_i &= \theta_{0i}\psi_{0i} + \Delta\theta_i\psi_{0i} + \theta_{0i}\Delta\psi_i + \Delta\theta_i\Delta\psi_i \\ \Delta L\psi_{0i} + L_0\Delta\psi_i + \Delta L\Delta\psi_i &= \Delta\theta_i\psi_{0i} + \theta_{0i}\Delta\psi_i + \Delta\theta_i\Delta\psi_i \end{aligned} \quad \text{III-45}$$

On néglige les termes du 2nd ordre compte tenu de l'hypothèse des petites perturbations et l'expression devient :

$$\Delta L\psi_{0i} + L_0\Delta\psi_i = \Delta\theta_i\psi_{0i} + \theta_{0i}\Delta\psi_i \quad \text{III-46}$$

On décompose dans la base propre de la matrice Laplacienne du graphe la perturbation d'un vecteur propre:

$$\Delta\psi_i = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}\psi_{0j} \quad \text{III-47}$$

où les coefficients ε_{ij} sont des constantes à déterminer par la suite.

Désormais, on intègre III-47 dans III-46,

$$\Delta L\psi_{0i} + L_0 \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}\psi_{0j} = \theta_{0i} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}\psi_{0j} + \Delta\theta_i\psi_{0i} \quad \text{III-48}$$

Et en prenant en compte l'équation III-41 :

$$\Delta L\psi_{0i} + \sum_{j=1}^n \theta_{0j}\varepsilon_{ij}\psi_{0j} = \theta_{0i} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}\psi_{0j} + \Delta\theta_i\psi_{0i} \quad \text{III-49}$$

Cette expression est multipliée par la gauche par ψ_{0i}^T et à cause de l'orthogonalité des vecteurs propres :

$$\psi_{0i}^T \Delta L\psi_{0i} = \psi_{0i}^T \Delta\theta_i\psi_{0i} \quad \text{III-50}$$

De plus, les vecteurs propres sont normalisés, donc $\psi_{0i}^T \psi_{0i} = 1$.

Finalement, les valeurs propres du réseau perturbé peuvent être calculées à partir du spectre du réseau original :

$$\theta_i = \theta_{i0} + \psi_{0i}^T \Delta L \psi_{0i} \quad \text{III-51}$$

Cela donne la perturbation de la valeur propre en fonction du spectre initial et de la perturbation de la matrice Laplacienne, et donc de la topologie du graphe.

Il reste à identifier les coefficients ε_{ij} de l'équation III-47. Pour cela, on multiplie l'équation III-49 par ψ_{0k}^T (avec $k \neq i$ et $\theta_{0i} \neq \theta_{0k}$) :

$$\begin{aligned} \psi_{0k}^T \Delta L \psi_{0i} + \psi_{0k}^T \theta_{0k} \varepsilon_{ik} \psi_{0k} &= \psi_{0k}^T \theta_{0i} \varepsilon_{ik} \psi_{0k} \\ \psi_{0k}^T \Delta L \psi_{0i} + \theta_{0k} \varepsilon_{ik} &= \theta_{0i} \varepsilon_{ik} \\ \varepsilon_{ik} &= \frac{\psi_{0k}^T \Delta L \psi_{0i}}{\theta_{0i} - \theta_{0k}} \end{aligned} \quad \text{III-52}$$

L'équation précédente n'est valide que pour les termes non diagonaux. Pour les coefficients diagonaux ε_{ii} , on utilise la normalisation des vecteurs propres exprimée par :

$$\psi_i^T \psi_i = 1 \quad \text{III-53}$$

On introduit les développements de Taylor III-44 dans l'équation III-53 :

$$\psi_{0i}^T \Delta \psi_i + \Delta \psi_i^T \psi_{0i} + \Delta \psi_i^T \Delta \psi_i = 0 \quad \text{III-54}$$

Les termes du second ordre sont négligeables, et on peut décomposer $\Delta \psi_i$ utilisant l'équation III-47 :

$$\begin{aligned} \psi_{0i}^T \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \psi_{0j} + \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \psi_{0j}^T \right) \psi_{0i} &= 0 \\ \psi_{0i}^T \varepsilon_{ii} \psi_{0i} + \varepsilon_{ii} \psi_{0i}^T \psi_{0i} &= 0 \\ \varepsilon_{ii} &= 0 \end{aligned} \quad \text{III-55}$$

Donc aucun vecteur propre ne contribue à sa propre perturbation.

Pour finir, on injecte les formules des coefficients ε_{ij} (équations III-52 et III-55) dans l'équation III-47 et on obtient l'expression finale du $i^{\text{ème}}$ vecteur propre du réseau perturbé en fonction du spectre original et de la perturbation du graphe :

$$\psi_i = \psi_{0i} + \sum_{k \neq i}^n \frac{\psi_{0k}^T \Delta L \psi_{0i}}{\theta_{0i} - \theta_{0k}} \psi_{0k} \quad \text{III-56}$$

III.2.4.2. Application au réseau de retour de courant

Nous voulons utiliser cette méthode perturbative pour évaluer la sensibilité des chutes de tension à la variation d'admittance des branches du réseau. Pour cela, dans un premier

temps, nous allons calculer les sensibilités du spectre du graphe de la matrice Laplacienne à la variation de l'admittance d'une branche du réseau.

Lorsqu'une admittance Δy_{uv} est ajoutée à la branche entre les nœuds u et v , la variation de la matrice Laplacienne ΔL s'écrit :

$$\Delta L = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \Delta y_{uv} & \vdots & -\Delta y_{uv} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -\Delta y_{uv} & \vdots & \Delta y_{uv} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{III-57}$$

A partir de l'équation III-51, il est possible de déterminer les nouvelles valeurs propres par :

$$\theta_i = \theta_{0i} + \left(\Delta y_{uv} \left((\psi_{0i})_u - (\psi_{0i})_v \right)^2 \right) \quad \text{III-58}$$

Et donc, la sensibilité des valeurs propres à la variation de l'admittance entre les nœuds u et v est donnée par :

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial y_{uv}} = \left((\psi_{0i})_u - (\psi_{0i})_v \right)^2 \quad \text{III-59}$$

De la même manière, l'équation III-56 permet de définir les vecteurs propres du réseau perturbé :

$$\psi_i = \psi_{0i} + \Delta y_{uv} \sum_{k \neq i}^n \left[\left(\frac{(\psi_{0i})_u \left((\psi_{0k})_u - (\psi_{0k})_v \right) + (\psi_{0i})_v \left((\psi_{0k})_v - (\psi_{0k})_u \right)}{\theta_{0i} - \theta_{0k}} \right) \psi_{0k} \right] \quad \text{III-60}$$

Et la sensibilité d'un vecteur propre à la variation d'admittance est donnée par :

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y_{uv}} = \sum_{k \neq i}^n \left[\left(\frac{(\psi_{0i})_u \left((\psi_{0k})_u - (\psi_{0k})_v \right) + (\psi_{0i})_v \left((\psi_{0k})_v - (\psi_{0k})_u \right)}{\theta_{0i} - \theta_{0k}} \right) \psi_{0k} \right] \quad \text{III-61}$$

Grâce à ces sensibilités, nous sommes capables, entre autres, de trouver quelles admittances ne doivent pas se dégrader afin de ne pas diminuer la connectivité algébrique θ_2 et par conséquent la robustesse globale du réseau. Ou alors à l'inverse, cette étude permet de trouver les branches à améliorer afin d'augmenter la connectivité algébrique.

Par exemple, les sensibilités de θ_2 à la variation des admittances des branches pour le réseau quasi-radial et pour le réseau maillé sont montrées respectivement sur les Figure III-18 et Figure III-19.

Pour le réseau quasi-radial, la Figure III-18 met en évidence une information déjà découverte auparavant dans la partie III.2.1.1. Seule la branche centrale entre les nœuds 4 et 5 influe sur la connectivité algébrique car c'est la seule à contribuer à la connectivité longue distance du réseau. Une augmentation de l'admittance, et donc une diminution de la

résistance, entraîne une augmentation de θ_2 dans le même ordre de grandeur. Par conséquent, afin d'augmenter la connectivité globale du réseau, la seule solution est d'augmenter l'admittance de la branche centrale.

Par contre, une information nouvelle est apportée par la sensibilité de θ_2 du réseau maillé sur la Figure III-19. On remarque que la branche la plus influente sur la connectivité algébrique est une branche verticale centrale. A l'inverse, les admittances des branches en bas à gauche du réseau maillé peuvent être diminuées sans impacter la seconde valeur propre car elles contribuent seulement à des connectivités locales. Afin de s'assurer du bien-fondé de l'estimation des valeurs propres par l'analyse perturbative, dans l'annexe E, les sensibilités estimées sont comparées à celles exactes obtenues par simulation numérique sur les réseaux dégradés.

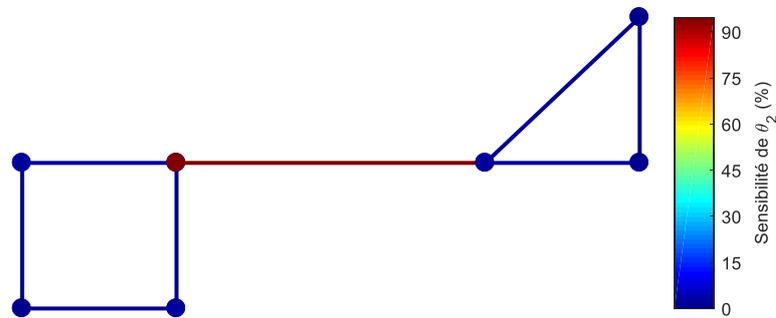


Figure III-18. Sensibilité de la connectivité algébrique θ_2 à la variation de l'admittance de chaque branche du réseau quasi-radial.

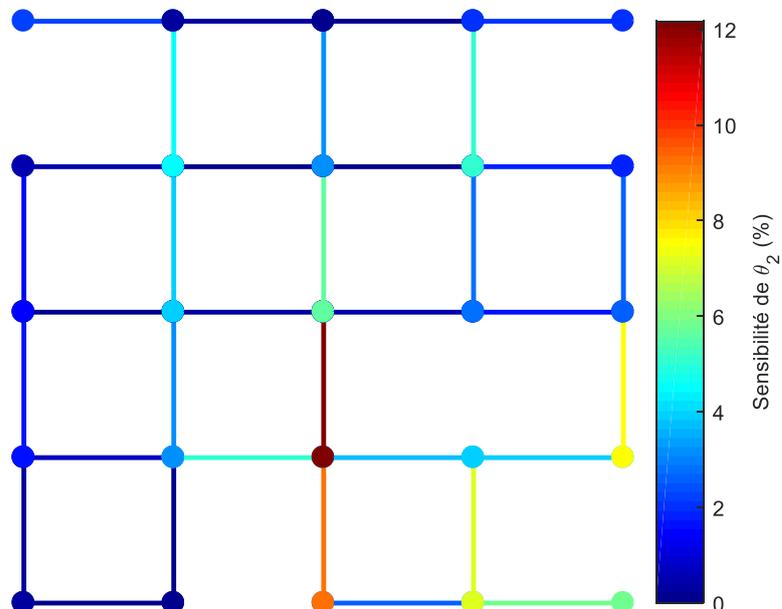


Figure III-19. Sensibilité de la connectivité algébrique θ_2 à la variation de l'admittance de chaque branche du réseau maillé.

III.2.4.3. Conséquences pour les chutes de tension

Le critère retenu pour évaluer la robustesse d'un réseau de retour de courant se traduit par des chutes de tension entre une source et une charge inférieures à 0,5 V quelles que soient les conditions de fonctionnement. Les réseaux nominaux doivent respecter cette contrainte mais, en plus, les chutes de tension ne doivent pas augmenter au-delà de cette valeur lorsque des défaillances surviennent dans le réseau. Par conséquent, il est très intéressant de calculer la sensibilité d'une chute de tension à la variation de l'admittance des branches.

Puisque les tensions nodales peuvent être exprimées en fonction du spectre de la matrice Laplacienne (équation III-26), les sensibilités des chutes de tension lors de perturbations peuvent être obtenues à partir des modifications des valeurs et vecteurs propres. Avant perturbation, la $i^{\text{ème}}$ tension nodale peut être exprimée par :

$$V_{0i} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^n \frac{(\psi_{0k})_i (\psi_{0k})_j}{\theta_{0k}} \right) I_j \quad \text{III-62}$$

Après une petite variation de la matrice Laplacienne elle s'écrit :

$$V_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^n \frac{(\psi_k)_i (\psi_k)_j}{\theta_k} \right) I_j \quad \text{III-63}$$

avec $V_i = V_{0i} + \Delta V_i$, $\psi_i = \psi_{i0} + \Delta \psi_i$ et $\theta_i = \theta_{i0} + \Delta \theta_i$.

La perturbation de la tension nodale du nœud i est alors :

$$\Delta V_i = \sum_{j=1}^n I_j \left[\sum_{k=2}^n \left(\frac{((\psi_{0k})_i + (\Delta \psi_k)_i) ((\psi_{0k})_j + (\Delta \psi_k)_j)}{\theta_{0k} + \Delta \theta_k} - \frac{(\psi_{0k})_i (\psi_{0k})_j}{\theta_{0k}} \right) \right] \quad \text{III-64}$$

En développant et négligeant le terme du second ordre, l'équation devient :

$$\Delta V_i = \sum_{j=1}^n I_j \left[\sum_{k=2}^n \left(\frac{((\Delta \psi_k)_i (\psi_{0k})_j + (\Delta \psi_k)_j (\psi_{0k})_i)}{(\theta_{0k} + \Delta \theta_k)} - \frac{\Delta \theta_k (\psi_{0k})_i (\psi_{0k})_j}{\theta_{0k} (\theta_{0k} + \Delta \theta_k)} \right) \right] \quad \text{III-65}$$

Maintenant en prenant en compte l'expression des valeurs (III-58) et vecteurs propres (III-60), la sensibilité de la tension nodale à la variation d'admittance d'une branche du réseau devient :

$$\frac{\partial V_i}{\partial y_{uv}} = \sum_{j=1}^n I_j \left[\sum_{k=2}^n \left(\frac{\theta_{0k} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y_{uv}} \right)_i (\psi_{0k})_j + \theta_{0k} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y_{uv}} \right)_j (\psi_{0k})_i - \frac{\partial \theta_k}{\partial y_{uv}} (\psi_{0k})_i (\psi_{0k})_j}{\left(\theta_{0k} + \Delta y_{uv} \frac{\partial \theta_k}{\partial y_{uv}} \right)^2} \right) \right] \quad \text{III-66}$$

A partir de cette équation la sensibilité d'une chute de tension entre une source s et une charge c à la variation d'admittance d'une branche peut facilement s'écrire :

$$\frac{\partial V_{sc}}{\partial y_{uv}} = \frac{\partial V_s}{\partial y_{uv}} - \frac{\partial V_c}{\partial y_{uv}} \quad \text{III-67}$$

Pour illustrer ceci, les sensibilités des chutes de tension entre une source et une charge sont calculées pour le réseau quasi-radial et pour le réseau maillé. Sur la Figure III-20, la sensibilité de la chute de tension entre la source et la charge ressemble à la sensibilité de la connectivité algébrique θ_2 , elle est largement impactée par la branche centrale et la modification des autres branches du réseau n'influe quasiment pas sur la chute de tension. Donc pour diminuer la chute de tension entre la source et la charge, la meilleure solution est d'augmenter l'admittance de la branche centrale. Ce résultat pouvait être attendu au vu du spectre du chemin entre les nœuds 3 et 6 de la Figure III-6.a. Le chemin est principalement impacté par le mode 2 donc la sensibilité de la chute de tension est proche de la sensibilité de la 2nde valeur propre.

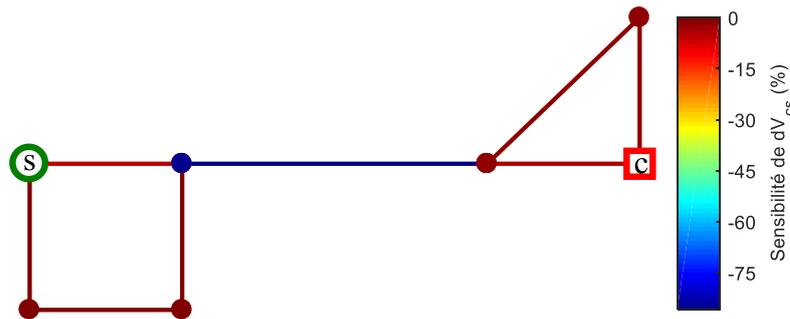


Figure III-20. Sensibilité de la chute de tension entre la charge c et la source s à la variation de l'admittance de chaque branche du réseau quasi-radial.

Contrairement à l'exemple précédent, le chemin entre la source et la charge du réseau maillé est impacté par plusieurs valeurs propres (cf. Figure III-7.b) donc les sensibilités de la chute de tension et de la connectivité algébrique à la variation des admittances du réseau diffèrent. Celle de la chute de tension est tracée sur la Figure III-21. A cause de la localisation de la charge et de la source, plusieurs branches ne sont traversées par aucun courant et la sensibilité de la chute de tension à leur variation est proche de 0. Les branches avec la plus grande valeur sont les branches du plus court chemin entre c et s . Il est logique que l'amélioration de leur admittance entraîne une baisse de la chute de tension. Donc, afin de s'assurer que la chute de tension reste inférieure à 0,5 V, il est important de surveiller ces branches qui risquent de dégrader fortement le réseau. Naturellement, aucune branche n'a de valeur positive car dans l'étude d'une chute de tension entre une source et une charge, l'augmentation de l'admittance d'une branche implique forcément une diminution de cette chute de tension. Il faut noter tout de même que quelques branches ont une valeur

positive très faible à cause des inexactitudes des calculs (de l'ordre de 10^{-4} %). Afin de valider l'estimation des modifications des chutes de tension par l'analyse perturbative, les sensibilités estimées sont comparées à celles exactes obtenues par simulation numérique sur les réseaux dégradés dans l'annexe F.

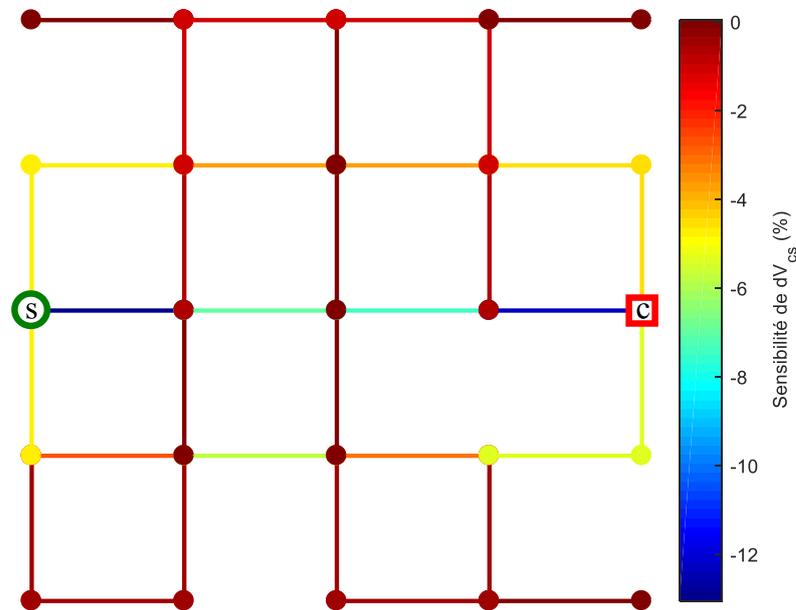


Figure III-21. Sensibilité de la chute de tension entre la charge c et la source s à la variation de l'admittance de chaque branche du réseau maillé.

L'analyse perturbative du spectre du graphe permet de relier une propriété électrique telle que la chute de tension à la variation de la topologie du réseau. De plus sa force réside dans le fait qu'elle donne une bonne approximation des modifications des chutes de tension lors de petites variations des admittances du réseau sans réaliser de lourdes simulations numériques. En effet, le seul calcul numérique nécessaire est la détermination du spectre de la matrice Laplacienne du réseau nominal au contraire d'une étude classique nécessitant une nouvelle simulation du réseau après chaque modification de la structure. Elle fournit de surcroît une aide précieuse au dimensionnement d'un réseau électrique en permettant de déterminer rapidement les éléments à améliorer pour réduire une chute de tension. Mais aussi, dans l'optique d'une stratégie de surveillance d'un réseau de retour de courant soumis à des dégradations, cette approche offre un moyen d'identification des branches critiques à surveiller pour s'assurer que les chutes de tension n'augmentent pas.

III.3. Conclusions

Les réseaux électriques sont habituellement étudiés et dimensionnés grâce à de nombreuses simulations numériques. Ces simulations sont chronophages, ont des problèmes de convergence et fournissent des résultats bruts qui peuvent être difficiles à comprendre dans des réseaux complexes, en particulier pour répondre à notre problématique scientifique et relier la topologie du réseau à ses performances électriques. Pour ces raisons, le Chapitre III propose une nouvelle méthode d'analyse pour les réseaux électriques : une analyse spectrale.

Le principal intérêt réside dans la lecture multi-échelle que l'analyse offre. Chaque mode correspond à une échelle d'observation et plus la valeur propre du mode est élevée plus l'information est locale. La connaissance de l'organisation multi-échelle permet donc une meilleure compréhension de la topologie des réseaux. Par exemple, elle fournit les branches influentes sur la connectivité globale du réseau. Un intérêt tout particulier est porté sur la connectivité algébrique θ_2 qui borne la robustesse d'un réseau mais aussi la résistance moyenne entre les nœuds du réseau. C'est le premier lien entre la topologie du réseau, sa robustesse et les chutes de tension. Un réseau avec une forte connectivité algébrique semble impliquer un réseau robuste avec de faibles chutes de tension.

Lors de petites perturbations d'un réseau, un lien direct entre sa topologie et ses chutes de tension est obtenu grâce à l'analyse perturbative du spectre du graphe. Les chutes de tension du réseau perturbé sont bien approximées sans nécessiter d'importantes simulations numériques.

Chapitre IV. Applications aéronautiques

SOMMAIRE

IV.1. Maquette représentative d'un réseau de retour de courant : DEMLAB.....	95 -
IV.1.1 Maquette réelle	95 -
IV.1.2 Hypothèses pour la modélisation.....	98 -
IV.1.2.1. Modélisation des contacts électriques.....	98 -
IV.1.2.2. Modélisation du fuselage	99 -
IV.1.3 Graphe de la maquette	100 -
IV.2. Pré-dimensionnement du réseau de retour de courant	101 -
IV.2.1 Placement modal des charges	102 -
IV.2.2 Design par optimisation.....	104 -
IV.2.2.1. Première formulation de l'optimisation.....	104 -
IV.2.2.2. Formulation LMI de l'optimisation.....	107 -
IV.2.2.3. Application à DEMLAB	108 -
IV.2.2.4. Vérification du critère de tension.....	109 -
IV.2.3 Ajout ciblé de matière.....	113 -
IV.3. Méthodes de surveillance et de caractérisation des réseaux de retour de courant.....	116 -
IV.3.1 Estimation paramétrique.....	117 -
IV.3.2 Méthodologie de surveillance.....	119 -
IV.3.2.1. Description du fonctionnement de DEMLAB.....	119 -
IV.3.2.2. Principe de la méthodologie	121 -
IV.3.2.3. Application à la maquette DEMLAB.....	123 -
IV.3.2.4. Surveillance de la maquette DEMLAB.....	129 -
IV.3.2.5. Résultats et perspectives.....	130 -
IV.3.3 Méthode de caractérisation du réseau.....	130 -
IV.3.3.1. Description du réseau test.....	131 -
IV.3.3.2. Principe de la caractérisation.....	133 -
IV.3.3.3. Avec des mesures obtenues par simulation	133 -
IV.3.3.4. Etude de sensibilité.....	136 -
IV.3.3.5. Avec des mesures physiques	137 -
IV.4. Conclusions	138 -

Plusieurs applications des approches spectrales aux réseaux de retour de courant continu sont présentées dans ce chapitre. Des approches de pré-dimensionnement sont proposées dans une première partie afin d'aider les ingénieurs à la conception d'un réseau robuste et léger. Dans un second temps, une méthodologie offrant une solution à la surveillance des chutes de tension et à la caractérisation des admittances de contact au sein des réseaux de retour de courant est présentée. Toutes les applications de ce Chapitre IV sont réalisées sur une maquette réduite d'un réseau de retour de courant DEMLAB.

IV.1. Maquette représentative d'un réseau de retour de courant : DEMLAB

IV.1.1 Maquette réelle

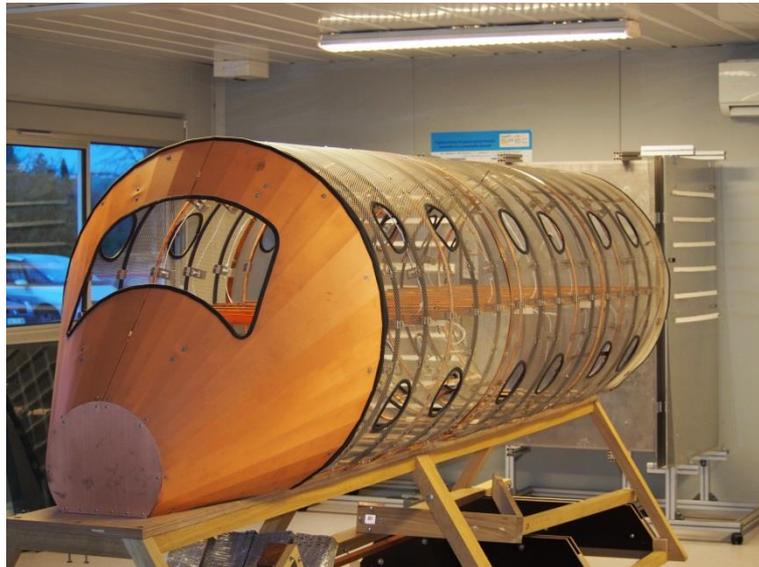


Figure IV-1. Maquette DEMLAB réelle.

Afin de pouvoir réaliser des tests réels, Safran Electrical & Power a décidé de créer une maquette représentative de la complexité d'un réseau de retour de courant d'un avion composite, à taille réduite. La maquette prend en compte seulement la structure située dans les zones pressurisées de l'appareil donc les ailes et la queue n'en font pas partie. Les ingénieurs de Safran Electrical & Power ont décidé d'appeler ce réseau, présenté sur la Figure IV-1, DEMLAB. Cette maquette a, par exemple, servi à la validation de solveurs et des outils associés pour le calcul des impédances entre une 2 points de connexion sur le réseau de retour de courant [75]. Ces outils sont basés sur une méthode de type sPEEC (surface Partial Equivalent Electrical Circuit) permettant de modéliser et de simuler des réseaux de grande taille dans le domaine des basses-moyennes fréquences. La maquette a également servi à la validation des premiers outils développés par Safran Electrical &

Power couplant la réflectométrie et la réalité augmentée pour la détection et la localisation des pannes sur les câblages.

La maquette est constituée d'un réseau de câblage type EWIS (Electrical Wiring Interconnection System) composé de 4 harnais de câbles, assimilé au circuit de puissance « aller » d'un aéronef, et d'un réseau de retour de courant créé par l'ensemble des éléments conducteurs de la structure connectés entre eux. La structure mesure environ 3,6 m de long et a un diamètre d'un mètre. Les conducteurs principaux sont présentés sur la Figure IV-2. La maquette, d'une masse conductrice de 28,82 kg, est constituée :

- de 15 cadres réalisés à partir de tubes de cuivre pliés dont 10 sont recouverts d'une gaine isolante afin de modéliser la structure composite ;
- de chemins de câble formés par des éléments en forme de U : un chemin de câble en cuivre situé au sommet de la structure et 4 chemins de câbles, 2 en cuivre et 2 en PVC, sont positionnés sous les traverses. Ils sont utilisés pour guider les harnais ;
- de 15 traverses sous forme de barres de cuivre. Associés aux deux chemins de câbles en cuivre situés sous elles, elles composent le sol de la cabine ;
- de 16 bandes de cuivre additionnelles pour représenter les différentes connexions possibles entre les cadres d'un aéronef ;
- d'un fuselage créé à partir de plaques d'acier déployé amagnétique (treillis métallique) ;
- d'un nez de l'avion en cuivre qui n'est pas connecté électriquement au reste de la structure dans notre étude.
- de 30 termini, qui sont des contacts électriques situés sur des éléments métalliques de la structure et représentant des points de raccordement des éventuelles charges électriques au réseau de retour de courant. Puisqu'il n'y pas de charges électriques installées actuellement dans la maquette, les différents câbles sont connectés directement aux termini pour former des boucles d'alimentation ;
- de 2 points d'injection de courant dans les câbles des harnais situés aux deux extrémités du sol de la cabine.

Les différentes caractéristiques des éléments ont été mesurées et sont données dans l'annexe G.

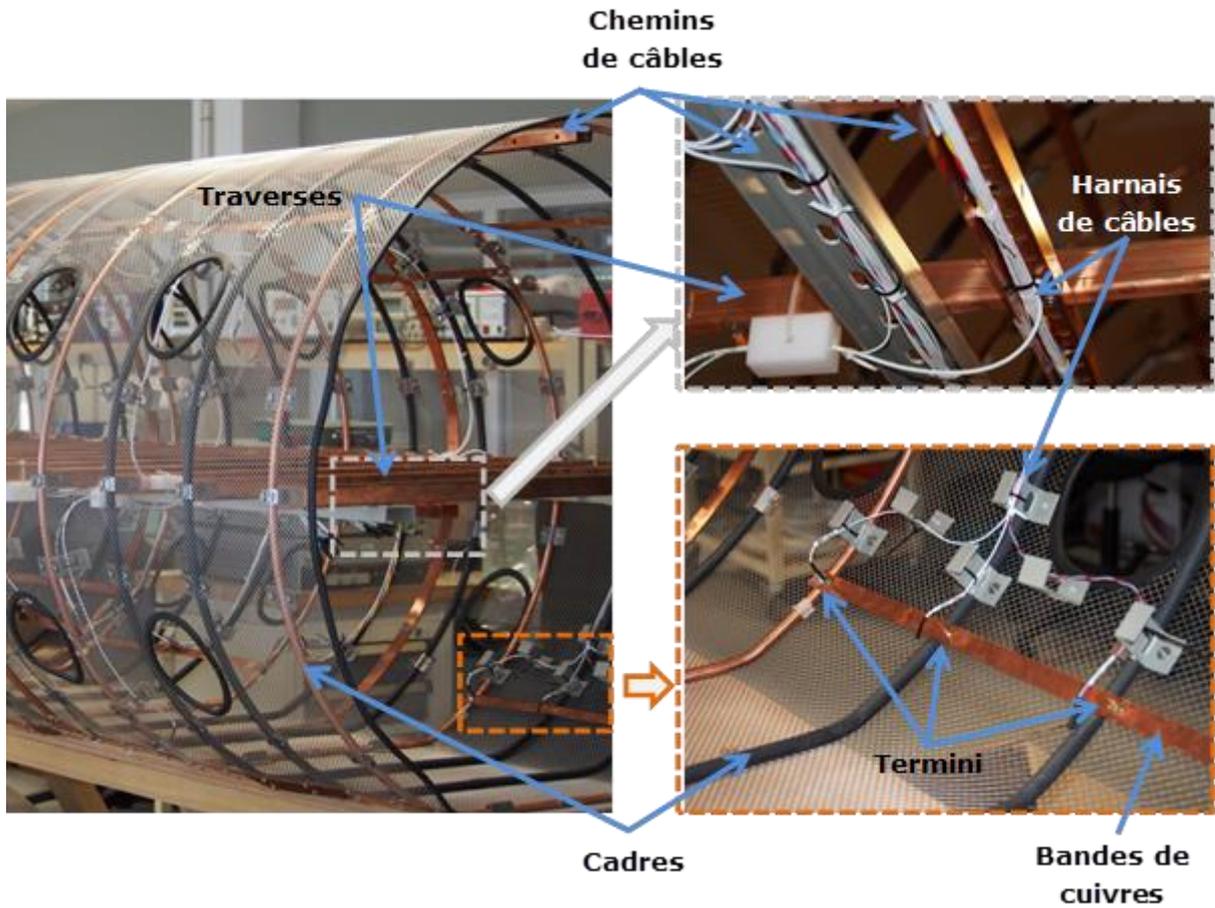


Figure IV-2. Conducteurs principaux de la maquette DEMLAB.

Tous ces éléments sont connectés en 107 points de connexions grâce à des éléments de fixations en acier que l'on peut voir sur la Figure IV-3. Les résistances induites par ces contacts électriques ne sont pas négligeables et impactent les circulations de courant dans la maquette DEMLAB.

La maquette réduite DEMLAB réussit à rendre compte d'une grande partie des comportements d'un réseau de retour de courant installé dans un aéro-nef.

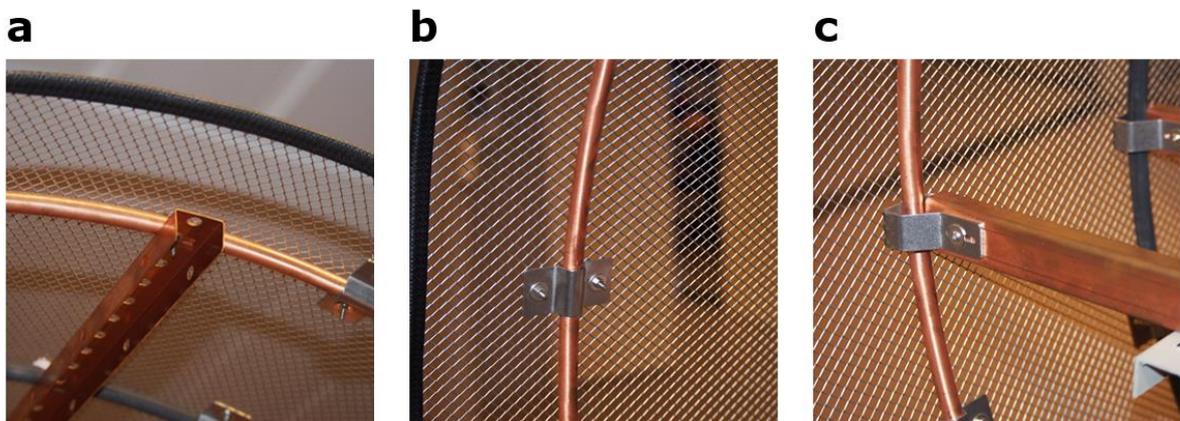


Figure IV-3. Contacts entre les différents éléments de la structure : (a) entre un cadre et un chemin de câble ; (b) entre un cadre et le fuselage et (c) entre un cadre et une traverse.

IV.1.2 Hypothèses pour la modélisation

Afin d'appliquer les outils d'analyse spectrale, la maquette DEMLAB doit impérativement être modélisée par un graphe représentant sa topologie et son comportement électrique en régime permanent continu. Pour ce faire, les différents éléments sont divisés en segments délimités par les différents points de connexion. Chaque segment est donc une branche dont la longueur, la section et la résistivité ont été mesurées (voir annexe G). Les poids des branches dans le graphe seront égaux à l'admittance des segments. Puisque les résistivités des cadres isolés et des chemins de câbles en PVC sont considérées comme nulles, ils ne seront pas pris en compte dans le graphe de la maquette DEMLAB. De même, vu que le nez de la maquette n'est pas connecté électriquement au reste de la structure, il n'est pas modélisé.

IV.1.2.1. Modélisation des contacts électriques

Les différents éléments de la structure sont connectés entre eux soit grâce à un boulon soit par un élément de fixation. Dans les deux cas, il en résulte l'apparition d'une résistance de contact influant sur la circulation du courant entre les deux éléments connectés. Cette résistance de contact est très difficile à mesurer et sa valeur n'est pas encore totalement connue à l'heure actuelle. On s'accorde à dire qu'elle dépend de nombreux paramètres tels que la géométrie, la rugosité et la force de serrage [76][77][78]. En effet, il est établi que la surface des éléments n'est pas régulière et comporte de nombreuses aspérités. La surface de contact est donc une somme de surfaces élémentaires en contact et varie selon la géométrie des éléments et la force de pression. Le nombre de ces surfaces élémentaires de contact augmente lorsque la force de pression augmente. Dans le cas d'un contact statique et d'une circulation de courant en continu, la formulation de Holm simplifiée [76] donne une approximation de la résistance de contact :

$$R_c = \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{4na} + \frac{\sigma}{\pi na^2} \quad \text{IV-1}$$

avec ρ_1 et ρ_2 : la résistivité des éléments en contact ; n : le nombre de surfaces élémentaires ; a : le rayon de la surface de contact élémentaire et σ : la résistivité superficielle des matériaux. La principale difficulté pour calculer une résistance de contact est donc de définir les surfaces élémentaires de contact.

Puisque nous n'avons pas la capacité de les obtenir, il a été nécessaire de caractériser expérimentalement chaque type de contact (contact cadre/traverse, traverse/chemin de câble, etc.) à partir de 3 échantillons. En régime continu, la résistance d'un type de contact est prise égale à la moyenne des mesures sur les 3 échantillons correspondants. Les valeurs correspondantes sont données dans l'annexe G. Elles sont comprises entre 0,037 et 1,55 m Ω alors que les résistances des autres éléments conducteurs du réseau sont entre 0,0087

et 0,40 mΩ. La circulation du courant dans le réseau est donc impactée par les résistances de contact et il est impératif de les modéliser.

Du point de vue du graphe, chaque contact est modélisé par une branche reliant les deux éléments conducteurs, pondérée par l'inverse de la valeur de la résistance estimée.

IV.1.2.2. Modélisation du fuselage

Dans la maquette réduite DEMLAB, le fuselage composite des avions est représenté par plusieurs plaques d'acier déployé. Ces plaques sont connectées au reste de la structure métallique à l'aide d'éléments de fixation en acier (voir Figure IV-3.b.), elles font donc partie intégrante de la structure du réseau de retour de courant. Cependant, comme pour un fuselage en matériaux composites, la résistivité des plaques d'acier est largement supérieure à celle des éléments de structure en cuivre. Les plaques en métal déployé sont aussi anisotropes. Des mesures réalisées à partir d'échantillons des plaques ont permis d'estimer la résistance d'une plaque de 1m sur 1m. Dans le sens longitudinal, la résistance est environ égale à 150 mΩ et dans le sens transversal, elle vaut 200 mΩ. Afin d'étudier l'influence de ce fuselage sur la fonction de retour de courant de la maquette DEMLAB, nous l'avons modélisé par un maillage régulier à petites mailles carrées que l'on a connecté au graphe principal de la maquette DEMLAB. Puisque le fuselage est anisotrope, les résistances longitudinales et transversales sont différentes. Le poids de chaque branche du maillage est calculé afin d'obtenir les résistances définies par les mesures. Une représentation de la maquette DEMLAB et de son fuselage est donnée sur la Figure IV-5.

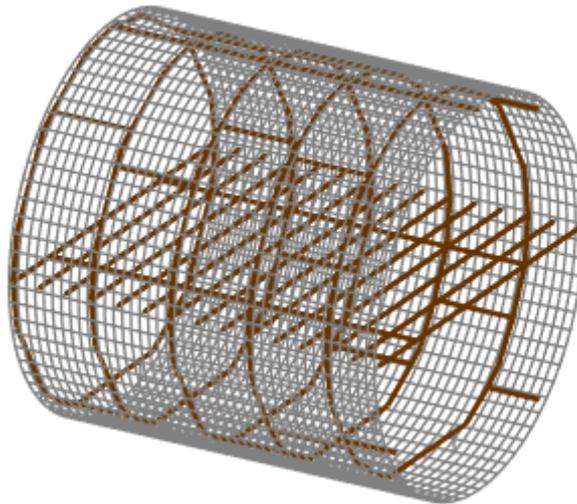


Figure IV-4. Graphe de la maquette DEMLAB avec le fuselage en métal déployé.

La résistance moyenne entre les nœuds du graphe principal de DEMLAB est très légèrement diminuée avec l'ajout du fuselage en acier déployé, de l'ordre de -0,46 % (de 1,0796 à 1,0746 mΩ). De plus, la résistance des chemins entre les termini varie peu, par

exemple entre un terminus situé sur un chemin de câbles et un autre situé sur une bande de cuivre à l'opposé de la maquette la résistance passe de 1,802 mΩ à 1,793 mΩ.

La résistance du fuselage, combinée aux résistances de contact entre les plaques de métal déployé et la structure principale, rend sa modélisation inutile pour étudier la fonction de retour de courant qui nous intéresse. Donc, pour la suite de l'étude, le fuselage en métal déployé de la maquette DEMLAB sera négligé.

IV.1.3 Graphe de la maquette

On rappelle que l'ensemble des connexions et terminis de la maquette DEMLAB sont représentés par des nœuds. Et chaque segment d'éléments est modélisé par une branche pondérée par son admittance. L'ensemble des nœuds et des branches forme donc un graphe représenté sur la Figure IV-5. La représentation choisie est géométrique où chaque nœud est placé suivant ses coordonnées réelles sur la maquette DEMLAB. Ensuite, les branches sont tracées par une droite entre les 2 nœuds. Cette représentation permet de retrouver visuellement la structure de DEMLAB composée de 5 cadres en cuivre conducteurs, d'un sol de la cabine composé de chemins de câbles et de traverses et des bandes de cuivres additionnelles. Sous un grand nombre de nœuds géométriques se cachent deux nœuds du graphe reliés par une branche modélisant la résistance de contact, ces branches ne sont pas visibles car elles relient deux nœuds avec les mêmes coordonnées. Une autre représentation non géométrique est proposée dans l'annexe H.

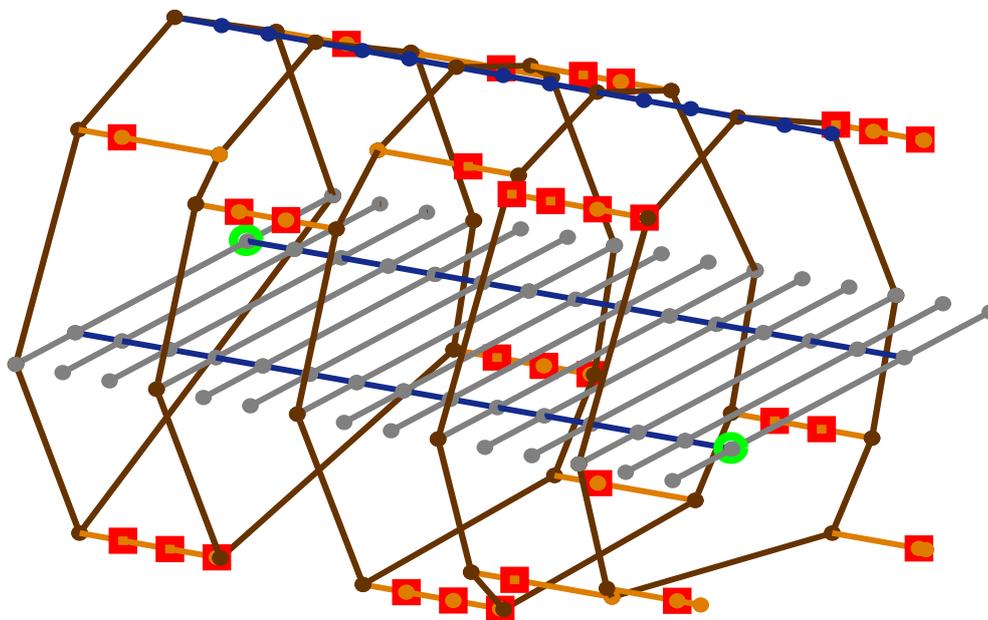


Figure IV-5. Représentation géométrique de la maquette DEMLAB : en marron les cadres, en bleu les chemins de câbles, en gris les traverses et en orange les bandes de cuivres. Les carrés rouges sont les terminis du réseau et les 2 cercles verts sont les points d'injection de courant dans les harnais du réseau « aller » EWIS.

Le graphe créé à partir de la maquette DEMLAB est composé de 244 nœuds reliés par 284 branches dont 107 résistances de contact. Les poids des branches sont les admittances des éléments et sont compris entre 645 et $1,147 \cdot 10^5 \Omega^{-1}$. Les deux emplacements possibles des sources sont les nœuds 4 et 212 et les 30 terminis situés aux nœuds 108 à 137. Les propriétés issues de la théorie des graphes peuvent être calculées grâce à la matrice d'adjacence. Par exemple, le degré moyen simple est 2,33 et la distance moyenne pondérée est égale à 2,6 m Ω . La résistance moyenne est dans le même ordre de grandeur : 1,08 m Ω .

Le spectre de la matrice Laplacienne du graphe est aussi calculé. Les valeurs propres non nulles sont comprises entre 71,7 et $2,34 \cdot 10^5$ et sont tracées sur la Figure IV-6. L'écart entre la connectivité algébrique θ_2 et le rayon du spectre θ_{244} est important ce qui signifie que le graphe n'est pas uniforme et présente une organisation spatiale complexe qui influe sur les propriétés structurelles et électriques du réseau. De plus, on remarque une « cassure » dans le tracé des valeurs propres qui peut présager d'un caractère multi-échelle important de la maquette DEMLAB.

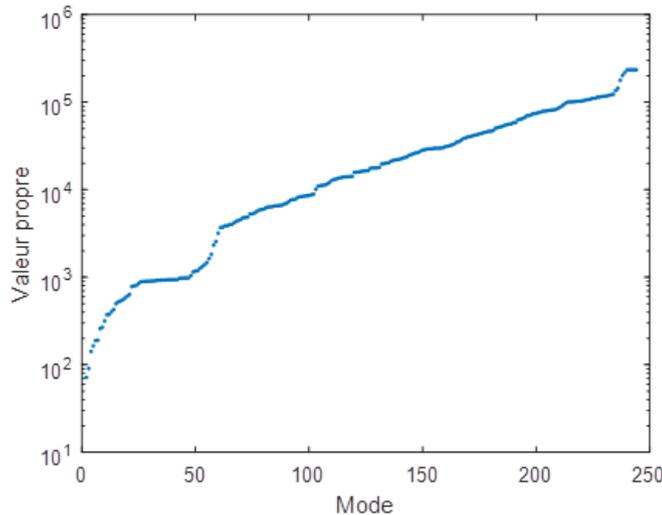


Figure IV-6. Valeurs propres de la matrice Laplacienne de la maquette DEMLAB avec ordonnée logarithmique.

IV.2. Pré-dimensionnement du réseau de retour de courant

Le pré-dimensionnement d'un réseau de retour de courant est un processus complexe qui dépend d'un grand nombre de paramètres (nombre d'éléments, type d'éléments...). Afin de fournir une aide au pré-dimensionnement, nous avons choisi d'étudier les réseaux à morphologie donnée. A partir d'une configuration initiale, l'objectif de ces études est de guider les ingénieurs aéronautiques vers la conception d'un réseau de retour de courant le plus léger possible garantissant son bon fonctionnement. Nous rappelons que ce dernier doit se traduire par des chutes de tension entre les sources et les charges inférieures à 0,5 V. Le nombre de degrés de liberté du pré-dimensionnement est réduit puisque la

morphologie du réseau est fixée. De plus, nous avons choisi de conserver les matériaux initiaux. Donc, pour le pré-dimensionnement, les seuls degrés de liberté sont les sections des éléments et l'emplacement des sources et des charges. Cette partie propose trois approches différentes de pré-dimensionnement afin d'aider à améliorer la connectivité d'un réseau de retour de courant sans augmenter sa masse.

IV.2.1 Placement modal des charges

L'organisation multi-échelle du réseau DEMLAB est mise en évidence par la méthode de croissance d'une boule expliquée dans la partie III.2.2. On obtient les résultats tracés sur la Figure IV-7. L'évolution de la résistance moyenne montre 3 échelles caractéristiques. Aux échelles locales, la résistance moyenne augmente rapidement jusqu'à atteindre un palier à 0,18 mΩ. A ces échelles, les sous graphes sont en effet principalement composés d'éléments du sol de la cabine (traverses et chemins de câbles). Après ce palier, la résistance moyenne augmente rapidement puisque les sous graphes absorbent des éléments des cadres. La résistance moyenne atteint ensuite une valeur transitoire supérieure à la résistance moyenne du graphe complet. En effet, pour ces échelles, plusieurs éléments des cadres sont intégrés aux sous graphes mais ne sont pas rebouclés. Au niveau du second rayon caractéristique, tous les cadres ont été rebouclés et la résistance moyenne diminue. Elle augmente ensuite doucement jusqu'à atteindre sa valeur pour le graphe complet lorsque les éléments les plus éloignés ont été absorbés.

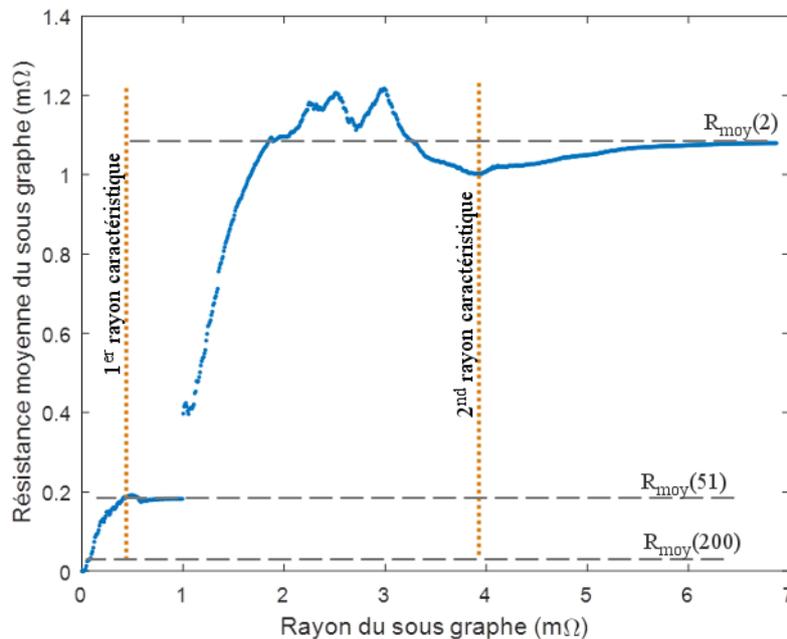


Figure IV-7. Variation de la résistance d'un sous graphe en fonction du rayon du sous-graphe pour la maquette DEMLAB.

Comme cela a été réalisé pour le réseau quasi-radial dans la partie III.2.2, on peut relier l'évolution de la résistance moyenne aux modes du réseau à partir de :

$$R_{moy} = \frac{2}{n-1} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\theta_k} \quad \text{IV-2}$$

La résistance moyenne est calculée pour trois combinaisons de valeurs propres décrites dans le Tableau IV-1. Elles sont reportées sur la Figure IV-7. Aux grandes échelles, au-delà du second rayon caractéristique, la résistance moyenne est impactée par la totalité des modes. En particulier par les modes de faibles valeurs propres, les modes 2 à 10 contribuent à plus de 45 % de la résistance moyenne du réseau complet. Puis, plus on s'approche des échelles locales, plus la valeur de la résistance diminue et est impactée par les modes locaux de grande valeur propre. Plus précisément, aux très faibles échelles, la résistance est dominée par les modes 200 à 244 tandis qu'aux échelles intermédiaires par les modes 51 à 200.

Valeur de la résistance moyenne	Modes considérés
$R_{moy}(2) = \frac{2}{243} \sum_{k=2}^{244} \frac{1}{\theta_k} = 1,080 \text{ m}\Omega$	2 à 244
$R_{moy}(51) = \frac{2}{194} \sum_{k=51}^{244} \frac{1}{\theta_k} = 0,192 \text{ m}\Omega$	51 à 244
$R_{moy}(200) = \frac{2}{45} \sum_{k=200}^{244} \frac{1}{\theta_k} = 0,018 \text{ m}\Omega$	200 à 244

Tableau IV-1. Valeur de la résistance moyenne pour plusieurs combinaisons de mode.

Dans le but de garantir un bon retour de courant, c'est-à-dire une résistance faible, les chemins entre les sources et les charges doivent principalement être impactés par les modes locaux, c'est-à-dire supérieurs au mode 51. Dans le cas où les sources sont fixées, on en déduit que les meilleurs emplacements des charges sont situés à l'extrémité des chemins les moins impactés par les échelles globales et intermédiaires associées aux modes 2 à 50. On rappelle que les charges peuvent être connectées au niveau des 30 termini de la maquette indiqués sur la Figure IV-5. Pour chaque emplacement, la participation des valeurs propres θ_2 à θ_{50} à la résistance du chemin est calculée (voir Figure IV-8). Il apparaît clairement qu'il est préférable de placer les nœuds aux termini 5, 7, 13 et 20 et non pas aux termini 11, 18, 28, 29 et 30. Par exemple, considérons que l'on place une source au nœud 212 et trois charges de 200A chacune. Si les charges sont placées aux termini 28, 29 et 30, la contrainte opérationnelle n'est pas respectée car les chutes de tension entre la source et les charges sont supérieures à 0,5 V, respectivement 1,03 V, 1,06 V et 1,09 V. Alors

qu'avec les charges connectées aux terminis 5, 13 et 20, les chutes de tension sont respectivement 0,44 V, 0,44 V et 0,29 V ; le critère de tension est respecté.

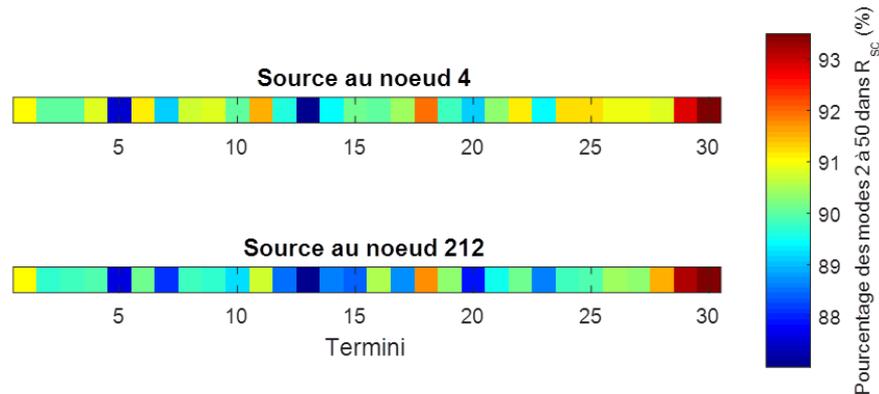


Figure IV-8. Participations des modes non-locaux 2 à 50 à la résistance entre les sources et les terminis

A partir de la décomposition modale de la résistance des chemins il est donc possible de fournir une indication sur les meilleurs emplacements des charges dans le but de minimiser les chutes de tension pour une masse du réseau donnée.

IV.2.2 Design par optimisation

Comme on l'a vu précédemment dans le Chapitre III, la connectivité algébrique θ_2 semble être un indicateur de la robustesse d'un réseau. En effet, elle borne la constante de Cheeger mais aussi la résistance moyenne du réseau. Une forte valeur de connectivité algébrique entraîne une constante de Cheeger importante, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de retirer de nombreuses branches du réseau pour le séparer en deux amas distincts. Une forte valeur implique aussi une résistance moyenne entre les nœuds faible et donc des chutes de tension faibles. Naturellement, on peut alors supposer que pour concevoir un réseau bien connecté et robuste pour une masse donnée il suffit d'optimiser la plus petite valeur propre non nulle de la matrice Laplacienne de son graphe. Nous allons donc proposer une méthode d'optimisation capable d'augmenter la connectivité algébrique θ_2 d'un réseau électrique en modifiant sa topologie et sans augmenter sa masse. Pour cela, deux formulations sont proposées et comparées grâce à leur application sur DEMLAB. Par la suite, nous vérifierons que notre méthode a réussi à améliorer les chutes de tension entre les sources et les charges dans le but de respecter le critère de tension.

IV.2.2.1. Première formulation de l'optimisation

Une optimisation a pour but de maximiser ou de minimiser une fonction objectif tout en respectant des contraintes d'égalité ou d'inégalité sur les paramètres d'optimisation. En règle générale un problème d'optimisation peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & f(x) \text{ avec } x = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \in \mathfrak{R} \\ \text{en respectant} \quad & G_e(x) = 0 \text{ avec } e = 1, \dots, m_e \\ & G_j(x) \leq 0 \text{ avec } j = 1, \dots, m_j \\ & b_i \leq x_i \leq h_i \end{aligned}$$

Où :

- $f(x)$ est la fonction à minimiser, appelé aussi fonction objectif ;
- x est le vecteur des paramètres d'optimisation du problème, il est composé de p variables ;
- les fonctions $G_e(x)$ et $G_i(x)$ représentent les contraintes, respectivement d'égalité et d'inégalité ;
- et les valeurs b_i et h_i désignent les bornes inférieures et supérieures de chaque paramètre d'optimisation.

Dans notre cas, l'optimisation doit permettre de maximiser la connectivité algébrique en modifiant la topologie du réseau sans augmenter la masse. Puisque nous étudions les réseaux à morphologie donnée, l'emplacement, la longueur et le nombre de branches sont imposés. De plus, afin de conserver une structure réaliste de réseau de retour de courant leurs matériaux sont inchangés. Nous avons donc choisi les sections de chaque branche comme paramètres d'optimisation. Cela revient bien à une modification de la topologie du réseau car la section intervient dans le poids w des branches :

$$w_{uv} = y_{uv} = \frac{S_b}{\rho_b * l_b} \quad \text{IV-3}$$

où y_{uv} est l'admittance de la branche, S_b sa section, ρ_b sa résistivité et l_b sa longueur.

Lors de la conception d'un réseau, les résistances de contact ne sont pas maîtrisées ; elles sont donc considérées comme invariables et leurs « sections » sont fixées à leur valeur initiale.

Les paramètres d'optimisation sont finalement les sections des branches des éléments conducteurs du graphe (les branches représentant les résistances de contact en sont exclues) :

$$S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{e'} \end{pmatrix} \quad \text{IV-4}$$

e' est le nombre d'éléments conducteurs du graphe.

Pour espérer concevoir un réseau bien connecté, nous souhaitons maximiser la plus petite valeur propre non nulle θ_2 de la matrice Laplacienne du graphe. Puisque les solveurs

des problèmes d'optimisation sont souvent basés sur la minimisation, notre fonction objectif sera simplement l'inverse de θ_2 . Elle s'écrit donc :

$$f(S) = \frac{1}{\theta_2(S)} \quad \text{IV-5}$$

Désormais nous allons nous pencher sur les contraintes de notre problème. La physique d'un réseau électrique impose que toutes les sections sont positives. Donc, les paramètres d'optimisations S seront contraints par :

$$b \leq S \leq h \text{ avec } b \geq 0 \quad \text{IV-6}$$

La contrainte basse garantit que le réseau respectera le comportement électrique de notre réseau de retour de courant. Du point de vue du comportement électrique, la limite h peut être infinie mais, pour assurer la faisabilité physique du réseau, les sections doivent être limitées.

Ensuite, notre optimisation doit maximiser θ_2 sans pour autant augmenter la masse du réseau. La masse du réseau électrique M_{tot} est définie comme étant la somme des masses m_b des branches :

$$M_{tot}(S) = \sum_{b=1}^{e'} m_b = \sum_{b=1}^{e'} (\mu_b * l_b * S_b) \quad \text{IV-7}$$

Avec μ_b la masse volumique de la branche b .

Nous avons décidé de garder constante la masse totale du réseau à sa valeur initiale avant optimisation M_0 :

$$M_{tot}(S) - M_0 = 0 \quad \text{IV-8}$$

Finalement une première formulation de notre problème d'optimisation peut être écrite :

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{\theta_2(S)} \\ \text{en respectant} & M_{tot}(S) - M_0 = 0 \\ & b \leq S \leq h \end{array} \quad \text{IV-9}$$

Dans la formulation IV-9, la connectivité algébrique θ_2 est maximisée en minimisant son inverse $1/\theta_2$ tout en garantissant que le réseau a une réalité physique puisque les sections sont contraintes. De plus, il n'y a pas d'ajout de masse supplémentaire. Cette formulation présente deux problèmes importants. D'une part, le calcul numérique des valeurs propres est lourd. Or, le calcul de la connectivité algébrique doit être réalisé à chaque itération. Le processus d'optimisation risque donc d'être long pour de grands réseaux. D'autre part, on n'a pas la garantie que l'optimisation soit convexe et donc que les solutions soient des optimum globaux.

IV.2.2.2. Formulation LMI de l'optimisation

Pour éviter le calcul des valeurs propres, de nombreux problèmes d'optimisation spectrale peuvent être transformés en problèmes d'inégalité matricielle linéaire (LMI : *Linear Matrix Inequality*) basés sur les propriétés des matrices semi-définies et positives. Il faut au moins mentionner les problèmes de valeur propre et de valeur propre généralisé (en anglais *Eigenvalue Problems* et *Generalised Eigenvalue Problems*) qui consistent à minimiser la valeur propre maximale d'une matrice [79]. De plus, les problèmes LMI peuvent être résolus numériquement très efficacement grâce aux méthodes de point intérieur [80]; ce qui explique leurs nombreux domaines d'utilisation. Une inégalité matricielle linéaire s'écrit sous la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succeq 0 \quad \text{IV-10}$$

Le symbole \succeq implique que F est une matrice semi-définie positive. D'après Boyd [79], cette inégalité exprime une contrainte convexe sur le vecteur x .

Nous allons donc convertir notre formulation d'optimisation en un problème d'inégalité matricielle linéaire. Une matrice Q composée des $n-1$ vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles est définie :

$$Q = (\psi_2 \quad \psi_3 \quad \cdots \quad \psi_n) \quad \text{IV-11}$$

Une borne inférieure à l'ensemble des valeurs propres non nulles de la matrice Laplacienne du graphe est imposée par l'inégalité matricielle suivante :

$$Q^T (L + \lambda M_n^{\text{identité}}) Q \succeq 0 \quad \text{IV-12}$$

A noter que l'utilisation de Q permet de restreindre le problème aux seules valeurs propres non nulles.

L'équation IV-12 n'est pas une inégalité classique, elle impose que la matrice à gauche du symbole \succeq ait toutes ses valeurs propres positives ou nulles. Donc, l'inégalité impose que toutes les valeurs propres, excepté θ_1 , soient plus grandes que la valeur $-\lambda$ [81][82]. Si la valeur λ est choisie négative alors sa minimisation conduit à la maximisation de la connectivité algébrique θ_2 . La formulation linéaire de notre problème d'optimisation peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{en respectant} \quad & Q^T (M_{inc} W(S) M_{inc}^T + \lambda M_n^{\text{identité}}) Q \succeq 0 \\ & M_{tot}(S) - M_0 = 0 \\ & b \leq S \leq h \end{aligned} \quad \text{IV-13}$$

Où la matrice Laplacienne du graphe est décomposée pour faciliter la compréhension grâce à la matrice d'incidence M_{inc} et à la matrice diagonale des poids W (voir partie II.1.2.1.c).

La contrainte LMI est convexe. De plus, les deux autres contraintes sur la masse totale et sur les sections sont convexes. La formulation IV-13 est donc un problème convexe et l'optimalité des solutions est garantie.

Cette formulation réussit à régler les deux principaux problèmes de la première formulation : un optimum global est garanti et elle ne nécessite pas le calcul des valeurs propres à chaque itération mais seulement un calcul des vecteurs propres avant l'optimisation.

IV.2.2.3. Application à DEMLAB

Nous allons désormais appliquer les deux formulations afin d'optimiser la connectivité algébrique du graphe de la maquette DEMLAB. Les deux formulations ont été implémentées dans le logiciel Matlab. La première formulation est résolue grâce au solveur IPOpt [83] disponible dans la toolbox OPTimization Interface (OPTI) [84]. La seconde formulation est résolue avec la méthode *Dual-Scaling Semidefinite Programming* (DSDP) [85] proposée dans la même toolbox. Les deux solveurs utilisent une méthode du point intérieur avec le calcul des gradients par approximation par différences finies. Le solveur DSDP exploite, de surcroît, les propriétés des matrices semi-définies positives des LMI afin d'améliorer l'optimisation.

Les données d'optimisations de DEMLAB sont les mêmes pour les deux formulations. Les sections des branches des éléments peuvent varier entre 2 et 200 mm². La masse totale du réseau est constante et fixée à sa valeur initiale de 28,8 kg. On rappelle que la connectivité algébrique est égale initialement à 71,7.

Après optimisation, les deux formulations fournissent une valeur de connectivité algébrique θ_2 quasiment identique et égale à 78,7, c'est-à-dire que la valeur initiale a été augmentée de 9,8 %. On voit sur la Figure IV-9 que cette augmentation est due à la modification de la topologie du réseau par les modifications de la section des branches. Pour les deux optimisations, les sections des traverses et des chemins de câbles du sol de la cabine ont été réduites afin d'augmenter, à masse constante, les sections du chemin de câbles situé au sommet de la maquette et de certains éléments du cadre. On peut donc supposer que le sol de la cabine, qui est dominé principalement par les échelles locales du réseau, est surdimensionné par rapport aux cadres de la maquette.

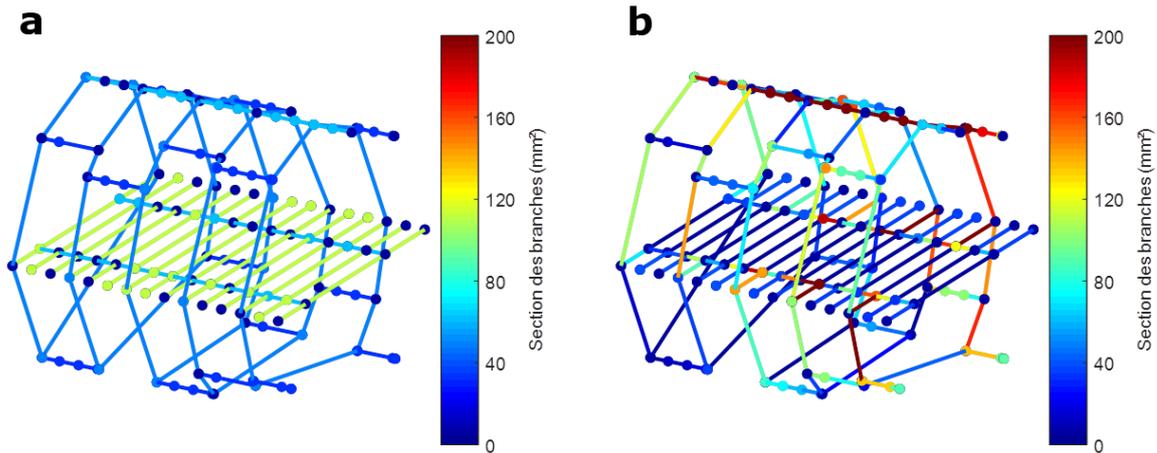


Figure IV-9. Sections des branches de la maquette DEMLAB : (a) avant optimisation ; (b) après optimisation.

Les performances des deux formulations sont comparées dans le Tableau IV-2.

	1 ^{ère} Formulation	2 ^{nde} Formulation (LMI)
θ_2 finale	78,67	78,69
Nombre d'itérations	139	68
Temps de pre-processing (s)	5,41	25,75
Temps de résolution (s)	732,57	145,87
Temps total (s)	737,98	171,62

Tableau IV-2. Comparaison entre les performances des deux formulations.

Comme on peut l'observer, la résolution de la seconde formulation basée sur une contrainte LMI est quasiment 3 fois plus rapide que la première. Le temps de résolution de la 1^{ère} formulation est impacté par une durée d'itération 2,5 fois supérieure à l'autre formulation car nécessitant le calcul de la seconde valeur propre θ_2 à chaque itération. Cependant, le temps de pre-processing de l'optimisation basée sur les LMI est plus long car il est nécessaire de calculer les vecteurs propres initiaux et de créer les matrices des contraintes LMI suivant la relation IV-10.

IV.2.2.4. Vérification du critère de tension

Comme nous l'avons déjà mentionné, la contrainte principale que doit respecter notre réseau de retour de courant est de garantir une chute de tension aux bornes de tous les équipements inférieure à 0,5 V. Puisque la méthode d'optimisation ne prend pas en compte cette contrainte, nous devons la vérifier à posteriori.

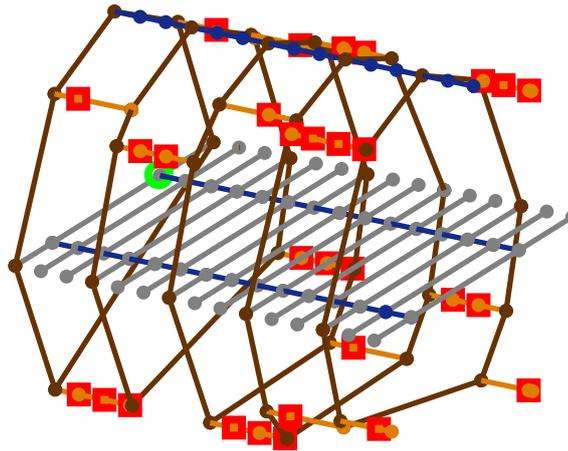


Figure IV-10. Graphe de la maquette DEMLAB avec les terminis (carré rouge) et une sortie au nœud 212.

A cette fin, une simulation numérique basée sur la résolution des équations de circuit est réalisée sur DEMLAB (voir II.1.2.2). Une charge de 300 A est connectée à un des terminis. La source est connectée au nœud 212 (voir la Figure IV-10). Pour chaque terminus, la chute de tension entre la charge et la source est calculée avant et après l'optimisation de la connectivité algébrique, les résultats sont tracés sur la Figure IV-11.

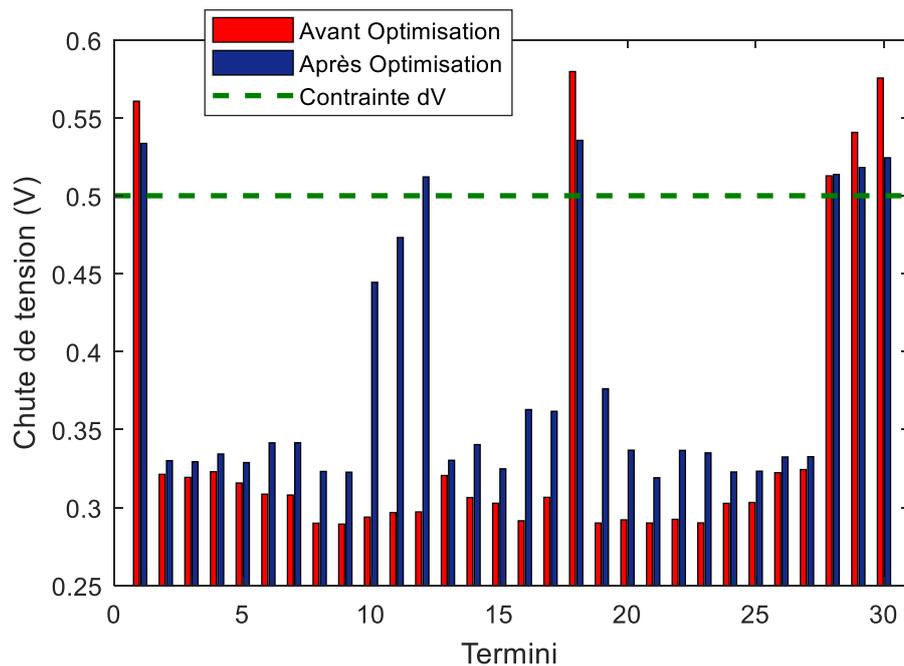


Figure IV-11. Chute de tension entre une charge et une source selon l'emplacement de la charge avant et après l'optimisation de θ_2 .

Bien que l'optimisation soit réussie et que la connectivité algébrique θ_2 ait augmenté, la connectivité des charges a été dégradée. En effet, en moyenne la chute de tension entre une charge et la source a été augmentée de 12 % et jusqu'à 72 % pour le terminus 12. Avant l'optimisation, 4 charges ne respectaient pas le critère de tension. Cinq charges ne le respectent pas après l'optimisation. On notera tout de même que les chutes de tension les

plus importantes ont été légèrement améliorées par l'optimisation de θ_2 . Afin de comprendre les raisons de ce résultat inattendu, une analyse plus poussée du spectre des résistances est requise.

Premièrement, nous allons analyser le spectre d'une résistance qui a été améliorée au cours de l'optimisation. Par exemple, le spectre du chemin entre le terminus 18 et la source au nœud 212 est tracé sur la Figure IV-12. Seules les participations des 60 premiers modes sont montrées car l'influence des modes supérieurs est faible (voir annexe I). Pour ce spectre, on remarque que le mode 2 est le mode dominant. Puisque l'optimisation a pour but d'améliorer la connectivité algébrique associée au mode 2, la chute de tension aux bornes de ce chemin a été diminuée même si elle reste supérieure à 0,5 V comme on peut le voir sur la Figure IV-11. Pour cet emplacement de charge, l'optimisation réalise donc l'effet attendu, c'est-à-dire diminuer la chute de tension.

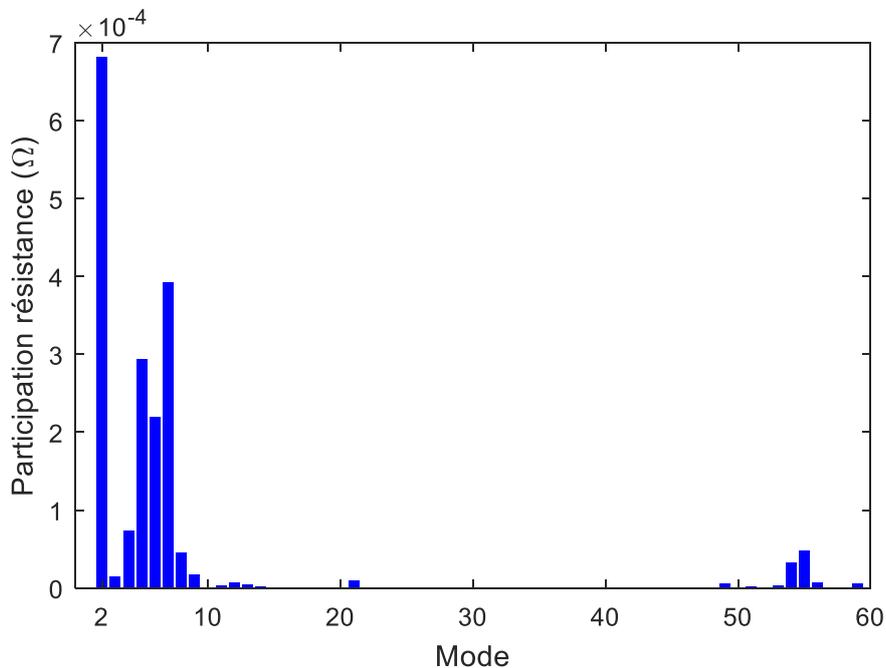


Figure IV-12. Spectre de la résistance du chemin entre le terminus 18 (nœud 125) et le nœud 212 pour les modes 1 à 60.

A l'inverse nous allons étudier le spectre d'une résistance qui a été augmentée par l'optimisation. Nous avons choisi le chemin le plus dégradé : le chemin entre le terminus 12 (nœud 119) et le nœud 212. Comme précédemment, les participations des 60 premiers modes seulement ont été tracées sur la Figure IV-13 ; le spectre complet est donné dans l'annexe I.

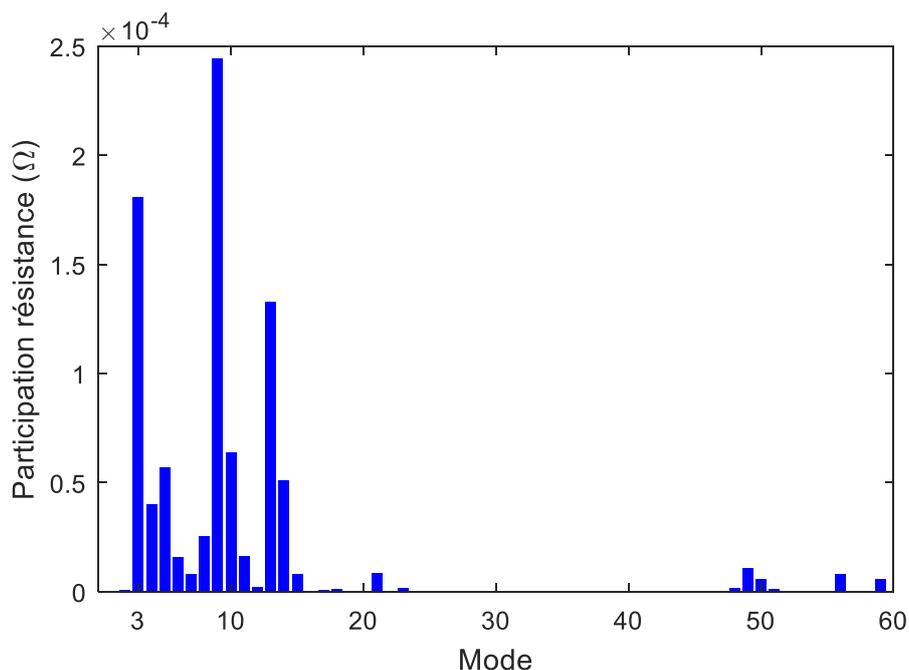
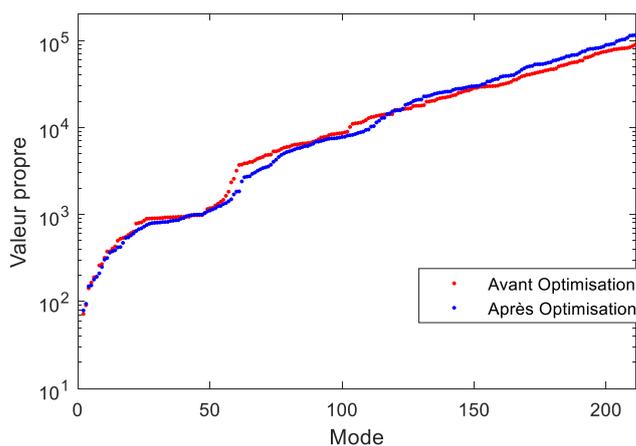


Figure IV-13. Spectre de la résistance du chemin entre le terminus 12 (nœud 119) et le nœud 212 pour les modes 1 à 60.

Contrairement au premier chemin, le mode 2 ne participe plus du tout au spectre et les principaux modes dominants sont les modes 3, 9 et 13. Non seulement, notre méthode d'optimisation va avoir un effet sur le mode 2 qui n'impacte pas le chemin mais, en outre, elle présente le risque de modifier de manière non maîtrisée d'autres modes qui eux sont importants pour la résistance du chemin considéré. La Figure IV-14 donne ainsi les valeurs propres avant et après optimisation. La dégradation de la chute de tension est expliquée par la diminution des valeurs propres θ_9 et θ_{13} .



Valeur propre	Evolution (%)
θ_2	9,77
θ_3	3,73
θ_9	-7,40
θ_{13}	-6,73

Figure IV-14. Evolution des valeurs propres avec l'optimisation de la connectivité algébrique.

Pour conclure, maximiser la connectivité algébrique θ_2 peut améliorer certains chemins de réseau. Afin d'améliorer notre pré-dimensionnement, il serait nécessaire d'optimiser l'ensemble des valeurs propres influentes sur le chemin entre les terminus et la source. Ce travail reste à faire à la suite de cette thèse.

IV.2.3 Ajout ciblé de matière

Une dernière approche d'aide au pré-dimensionnement d'un réseau de retour de courant découle de l'analyse perturbative du spectre de la matrice Laplacienne présentée dans la partie III.2.4. L'analyse permet d'identifier les branches à renforcer pour améliorer une chute de tension du réseau. Ce renforcement se fera par ajout de matière sur les branches.

A cette fin, nous allons calculer la sensibilité des chutes de tension non plus à la modification de l'admittance d'une branche mais à l'ajout de masse sur une branche. La sensibilité du potentiel du nœud i à l'ajout d'une masse Δm sur la branche entre les nœuds u et v est :

$$\frac{\partial V_i}{\partial m_{uv}} = \sum_{j=1}^n I_j \left[\sum_{k=2}^n \frac{\theta_{0k} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial m_{uv}} \right)_i (\psi_{0k})_j + \theta_{0k} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial m_{uv}} \right)_j (\psi_{0k})_i - \frac{\partial \theta_k}{\partial m_{uv}} (\psi_{0k})_i (\psi_{0k})_j}{\left(\theta_{0k} + \Delta m \frac{\partial \theta_k}{\partial m_{uv}} \right)^2} \right] \quad \text{IV-14}$$

Les détails du calcul sont donnés dans l'annexe J. Il est important de noter que cette équation n'est pas applicable aux branches modélisant les résistances de contact car elles n'ont pas de masse.

A partir de cette formule il est possible de mettre en place la méthode d'ajout ciblé de matière suivante :

- i. On choisit le chemin (u,v) ayant une chute de tension supérieure à 0,5 V que l'on souhaite améliorer.
- ii. On calcule la sensibilité de la chute de tension V_{uv} à la variation de masse de toutes les branches du réseau.
- iii. La branche b la plus influente sur la chute de tension V_{uv} est identifiée.
- iv. Une masse Δm est rajoutée sur la branche b en augmentant sa section.
- v. Tant que la nouvelle chute de tension V_{uv} est supérieure à 0,5 V, les étapes ii à iv sont répétées.

Pour une source au nœud 212 et une charge de 300 A placée à un terminus quelconque de DEMLAB, les chutes de tension ne respectent pas toutes le critère de tension comme on peut le voir sur la Figure IV-15. Il est donc nécessaire d'améliorer les chemins entre les termini 1, 18, 28, 29, 30 et la source.

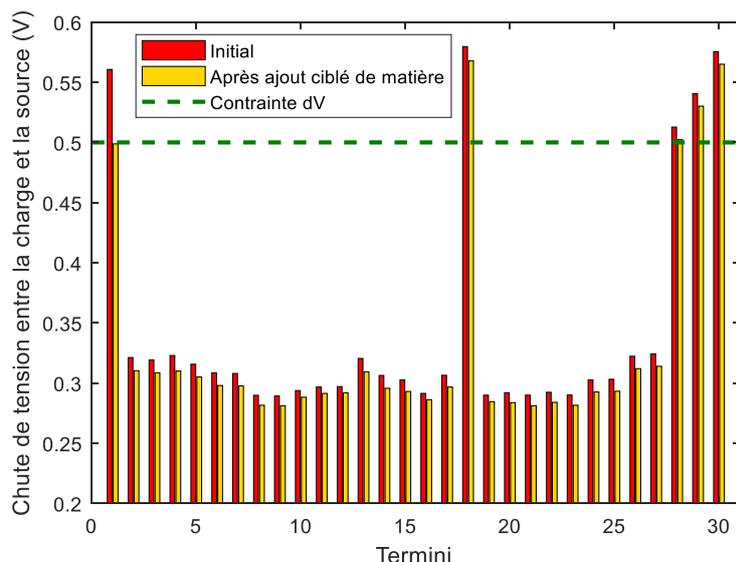


Figure IV-15. Chute de tension entre une charge et une source selon l'emplacement de la charge avant et après l'ajout de matière pour améliorer la chute de tension du terminus 1.

Dans un premier temps, nous allons essayer d'améliorer la chute de tension entre le terminus 1 et la source 212 initialement égale à 0,5606 V. Pour cela nous allons utiliser la méthode décrite ci-dessus avec un pas de masse ajoutée égal à 100 g. Afin d'obtenir une chute de tension égale 0,4988 V, il a été nécessaire d'ajouter 1,5 kg repartit sur différentes branches. De plus les autres chutes de tension ont été aussi légèrement diminuées (voir Figure IV-15). L'étude du spectre de la résistance du chemin entre le terminus 1 et le nœud 212 permet de mieux comprendre les mécanismes internes lors de l'ajout de masse dans le réseau. Comme on peut le voir sur la Figure IV-16, le spectre est dominé par les modes 2, 5 et 7. Lors de l'ajout de matière, les valeurs propres des modes 5 et 7 sont fortement augmentées ce qui implique une amélioration de la chute de tension. L'ajout de matière ciblé sur les branches peut donc s'assimiler à une amélioration des valeurs propres associées aux modes prédominants de la chute de tension.

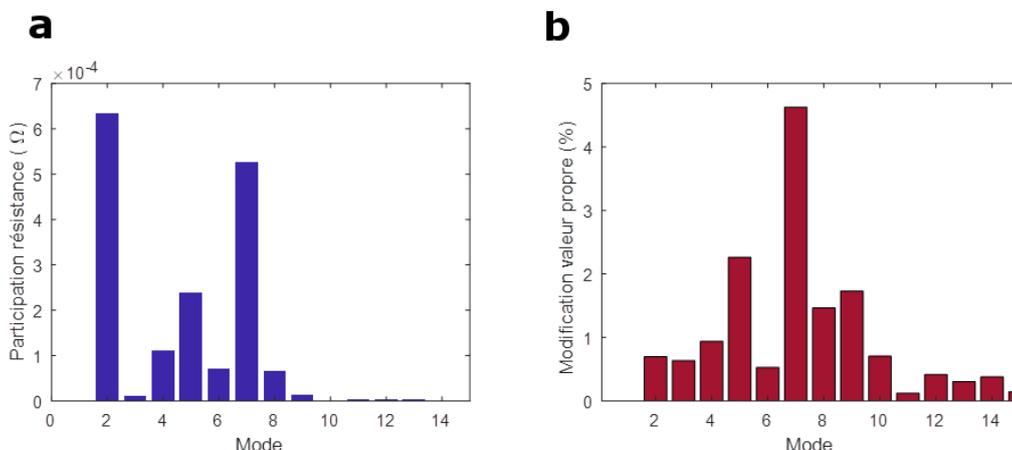


Figure IV-16. (a) Spectre de la résistance du chemin entre le terminus 1 (nœud 108) et le nœud 212 avant l'ajout de matière ; (b) Modification des valeurs propres 2 à 14 lors de l'ajout ciblé de 1,5 kg sur la maquette DEMLAB.

Pour le terminus 18, le premier ajout de masse pour régler les problèmes du terminus 1 ne permet pas de passer le critère de tension. On reprend donc la méthode pour ce chemin entre la source en 212 et le terminus 18. Grâce à l'ajout de 1,1 kg, la chute de tension respecte désormais le critère de tension. L'amélioration a de surcroît diminué la chute de tension entre le terminus 28 et la source qui devient inférieure à 0,5 V.

La méthode d'ajout ciblé de matière est répétée pour les deux derniers terminus 29 et 30, ne respectant pas le critère de tension. Finalement, l'ensemble des chutes de tension respecte la contrainte fonctionnelle grâce à un ajout total de 3,2 kg de matière. Cette masse supplémentaire n'est pas négligeable et alourdi de près de 11 % le réseau de la maquette DEMLAB. Cependant dans le cas où toutes les sections des branches auraient été augmentées identiquement jusqu'à ce que le critère soit respecté, les sections auraient été multipliées par 1,94 et le réseau pèserait 56,13 kg. Ce résultat, comparé au réseau de 32,02 kg obtenu avec notre méthode, met en évidence l'intérêt de l'ajout ciblé de masse. A noter que l'on peut envisager d'améliorer les réseaux grâce à un retrait ciblé de matière. Lorsque le critère de tension est respecté, il suffit de diminuer la section des branches n'influant pas sur les chutes de tension entre les charges et les sources.

IV.3. Méthodes de surveillance et de caractérisation des réseaux de retour de courant

Les éléments conducteurs des réseaux de retour de courant conçus pour les avions à fuselage composite sont principalement dimensionnés pour satisfaire leurs fonctions mécaniques primaires. Ils n'ont que peu de risque de se dégrader au cours du temps. Les technologies d'interconnexion utilisées actuellement ne sont pas adaptées à la réalisation des contacts électriques viables. Les traitements de surface pour créer les contacts électriques sont insuffisants et/ou mal maîtrisés. De plus, la vérification de chaque contact du point de vue électrique est impossible. En conséquence les résistances de contact ne sont pas maîtrisées, dépendant de nombreux paramètres tels que la force de serrage, l'état des surfaces, les types de boulons, etc. De plus, au cours de la vie d'un avion, toutes les résistances de contact évoluent et se dégradent, les boulons pouvant se desserrer ou les surfaces s'oxyder. Une augmentation des résistances de contacts impacte forcément la connectivité des sources et des charges et le critère de tension risque d'être violé.

Ces incertitudes ont obligé les avionneurs à chercher une solution acceptable pour la certificabilité des réseaux de retour de courant d'un point de vue électrique. Leur choix s'est porté sur l'ajout de tresses et/ou de câbles en parallèles de nombreux contacts (~950 pour l'A350 d'après les données Airbus). Ces éléments « observables » et « mesurables » assurent la bonne conductivité électrique du contact tout au long de la vie d'un avion. L'insertion de ces tresses implique cependant une masse embarquée supplémentaire, d'environ 150 kg, dont l'utilité autre que pour la certification n'est pas avérée.

Avant de pouvoir les retirer, il faut être en mesure de garantir le respect du critère de tension, c'est-à-dire que l'ensemble des chutes de tensions entre les charges et les sources soient inférieures à 0,5 V. Le critère doit d'abord être vérifié à la fin de l'assemblage de l'appareil pour garantir le fonctionnement du réseau sans tresses. D'autre part, le critère de tension doit aussi être contrôlé lors des maintenances de l'appareil afin de s'assurer que le vieillissement des contacts n'a pas rendu le réseau non fonctionnel. Pour ces opérations, l'avionneur a la possibilité de réaliser des mesures de chutes de tension lors d'injections contrôlés de courant dans le réseau de retour de courant. A partir de ces mesures, une méthode est donc nécessaire afin de garantir le fonctionnement du réseau et de détecter et de localiser les dégradations des contacts impliquant le non-respect du critère de tension. Cette méthodologie permettra de vérifier l'état du réseau à la fin de la conception et d'alerter, pendant les phases de maintenance, les ingénieurs aéronautiques lorsque les chutes de tension sont modifiées ou ne sont plus acceptables. A noter que la méthode proposée doit être la plus rapide possible pour ne pas immobiliser trop longtemps l'avion au sol lors des périodes de maintenance.

Grâce à une estimation paramétrique associée à l'analyse spectrale des réseaux, nous proposons une solution capable de surveiller la modification des chutes de tension lors de dégradations des contacts mais aussi une seconde méthodologie permettant de caractériser les admittances de contact.

IV.3.1 Estimation paramétrique

Afin de détecter et de localiser les défaillances du réseau nous avons besoin d'une méthode de diagnostic. Ces méthodes sont très variées. Elles se divisent en deux grandes familles [21][86]. La première concerne les méthodes dites externes qui sont basées sur des bases de connaissance comme, par exemple, les méthodes utilisant l'intelligence artificielle ou les approches probabilistes. La seconde comprend les méthodes basées sur les modèles de connaissances. Ces méthodes, plus adaptées à nos travaux, reposent sur l'utilisation d'un modèle du système à surveiller. Les sorties du modèle sont alors comparées aux données disponibles telles que des mesures. Parmi ces méthodes, nous retiendrons plus particulièrement l'estimation paramétrique [87][88][89].

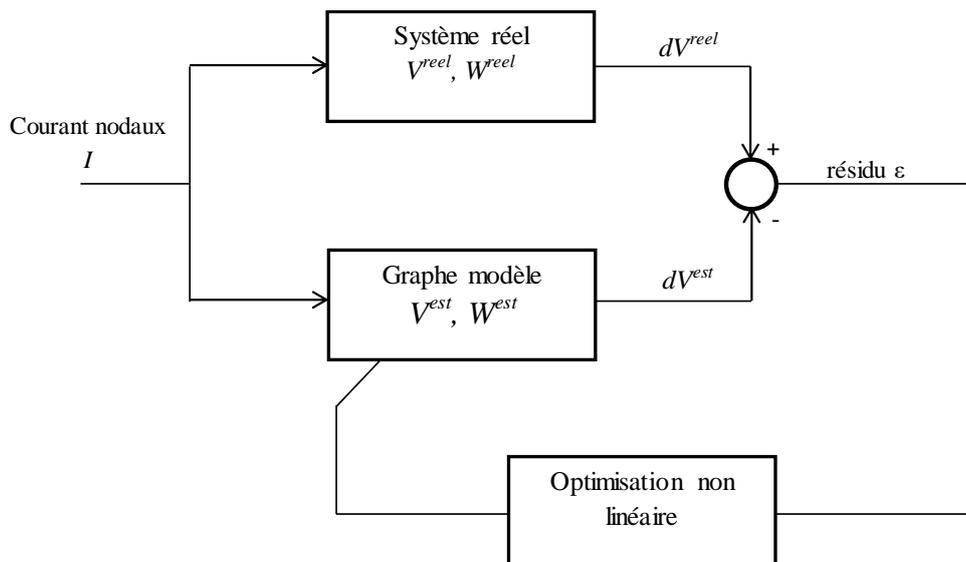


Figure IV-17. Schéma de principe de l'estimation paramétrique.

Pour estimer les admittances d'un réseau de retour de courant, et donc le poids des branches de son graphe, nous allons minimiser l'erreur entre des chutes de tension mesurées sur le réseau et celles estimées par un graphe modèle. Cette minimisation est réalisée grâce à une optimisation non linéaire (voir Figure IV-17). Le graphe modèle du réseau est décrit par :

$$\begin{cases} M_{inc} \cdot W \cdot M_{inc}^T \cdot V = I \\ dV = C_{mes} \cdot V \end{cases} \quad \text{IV-15}$$

Avec M_{inc} : la matrice d'incidence du graphe, W : la matrice des poids du graphe, V : le vecteur des tensions nodales, I : le vecteur des courants nodaux injectés pour la mesure, dV : le vecteur des K mesures de chutes de tension réalisées sur le réseau et C_{mes} : la matrice d'incidence des mesures de K lignes et n colonnes.

Le système peut donc être réécrit :

$$\begin{cases} 0 = f(V, W, I) \\ dV = g(V, W, I) \end{cases} \quad \text{IV-16}$$

avec f une fonction non linéaire représentative de la relation entre tensions nodales et courant nodaux et g une fonction linéaire.

On cherche à estimer du mieux possible les poids des branches W , du graphe modèle correspondant aux K mesures. Soit W^{est} une estimation. On peut calculer une estimation des chutes de tension dV^{est} par :

$$\begin{cases} 0 = f(V^{est}, W^{est}, I) \\ dV^{est} = g(V^{est}, W^{est}, I) \end{cases} \quad \text{IV-17}$$

Maintenant, on peut définir le résidu (l'erreur d'estimation) noté ε_k entre la $k^{\text{ième}}$ chute de tension mesurée $(dV^{reel})_k$ et la $k^{\text{ième}}$ sortie du modèle $(dV^{est})_k$:

$$\varepsilon_k = (dV^{reel})_k - (dV^{est}(V^{est}))_k \quad \text{IV-18}$$

La valeur optimale de W^{est} est obtenue en minimisant la norme L^2 associée au résidu :

$$\min_{W^{est}} \sum_k^K \varepsilon_k^2 = \min_{W^{est}} \sum_k^K \left((dV^{reel})_k - (dV^{est}(V^{est}))_k \right)^2 \quad \text{IV-19}$$

Finalement, l'estimation paramétrique revient à un problème d'optimisation dont la formulation est explicitée ci-dessous :

$$\begin{aligned} \min_{W^{est}} & \sum_k^K \left((dV^{reel})_k - (dV^{est}(V^{est}))_k \right)^2 \\ \text{en respectant} & M_{inc} \cdot W^{est} \cdot M_{inc}^T \cdot V^{est} = I \\ & w_i \geq 0 \end{aligned} \quad \text{IV-20}$$

Plusieurs possibilités sont envisageables pour résoudre ce problème d'optimisation. L'algorithme de Levenberg-Marquardt [90] le plus couramment utilisé n'est pas facilement applicable. Il nécessiterait le calcul du transfert entre I et dV à l'aide des équations (IV-15). C'est problématique car la matrice Laplacienne est non-inversible. Une autre solution pour résoudre ce problème d'optimisation est d'utiliser un solveur permettant de définir des contraintes, de surcroît, non-linéaires. Un algorithme de point intérieur peut convenir.

Nous avons décidé d'utiliser le solveur de résolution non linéaire IPOpt proposé dans la toolbox Matlab OPTimization Interface (OPTI) [83][84].

IV.3.2 Méthodologie de surveillance

La méthodologie de surveillance proposée s'appuie sur l'estimation paramétrique précédente. Nous allons détailler chacune de ses étapes et l'appliquer à la maquette DEMLAB présentée dans la partie IV.1.

IV.3.2.1. Description du fonctionnement de DEMLAB

IV.3.2.1.a. Fonctionnement normal de DEMLAB

Pendant les différentes phases de vol, toutes les charges de l'appareil ne fonctionnent pas en même temps. Par similarité, nous avons défini un fonctionnement « normal » de l'appareil dans lequel seules 7 charges sont actives. Elles sont arbitrairement réparties sur les terminis du graphe aux nœuds 108, 109, 112, 114, 119, 127 et 136 (voir la Figure IV-18). Elles injectent chacune un courant de 100 A. La source de puissance, située au nœud 212, absorbe les 700 A.

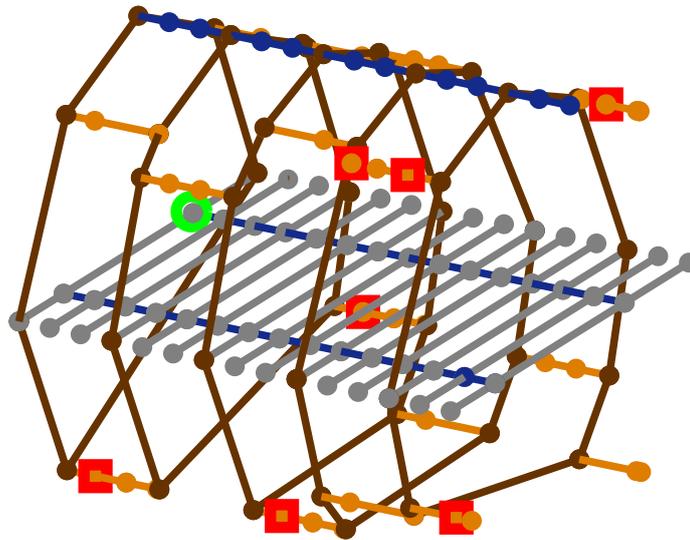


Figure IV-18. Emplacement de la source (212) et des 7 charges (carré rouge) dans la maquette DEMLAB.

Les chutes de tension entre les charges et la source lors du fonctionnement normal sont simulées numériquement à partir du modèle de la maquette DEMLAB. Leurs valeurs sont données dans le Tableau IV-3. On remarque que le réseau de retour de courant est bien dimensionné car le critère de tension est respecté pour toutes les charges en fonctionnement normal (chutes de tension entre la source et les charges inférieures à 0,5 V).

	Charge 1	Charge 2	Charge 3	Charge 4	Charge 5	Charge 6	Charge 7
Nœud	108	109	112	114	119	127	136
Chute de tension (V)	0,4014	0,3709	0,3657	0,2768	0,2092	0,2415	0,3955

Tableau IV-3. Chutes de tension entre la source (au nœud 212) et les charges lors du fonctionnement normal.

IV.3.2.1.b. Dégradations des contacts.

Afin d'appliquer notre méthodologie de surveillance, il est nécessaire de définir les dégradations des admittances de contact. Le vieillissement des contacts sous contrainte électrique n'est pas connu, il s'agit d'une problématique nouvelle imputée aux avions composites. Quelques essais de vieillissements chimiques ont cependant été réalisés par notre partenaire Airbus selon la norme DO 160. Après vieillissement, certaines admittances de contacts avaient diminué jusqu'à -40 % de leur valeur initiale (les données de notre partenaire sont confidentielles et ne peuvent donc pas être rapportées dans le détail). Les dégradations « mécaniques » dues aux vibrations sont pour l'instant inconnues. Afin de prendre en compte les deux composantes chimiques et mécaniques, nous avons considéré des dégradations maximales possibles de -70 % des admittances de contact. La distribution des dégradations n'est pas uniforme dans la réalité, de nombreux contacts vont se dégrader légèrement et quelques-uns fortement. Nous avons donc choisi que la densité de probabilité des admittances de contact électrique suivent une loi exponentielle. Elle est tracée sur la Figure IV-19. En pratique, un contact a quasiment 50 % de chances d'avoir une dégradation inférieure à -5% mais seulement 1,5 % de chances d'en avoir une supérieure à -65%.

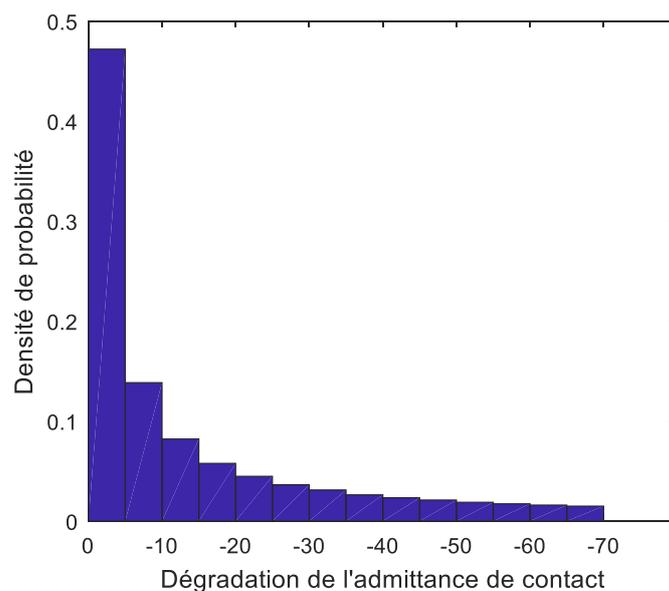


Figure IV-19. Densité de probabilité des dégradations des contacts.

IV.3.2.2. Principe de la méthodologie

La méthodologie de surveillance des réseaux de retour de courant se décompose en 5 étapes (voir la Figure IV-20) : les 3 premières se font lors de la phase de conception du réseau, les deux autres sont réalisés à chaque maintenance. L'objectif est de vérifier la connectivité des charges et le respect du critère de tension d'un système réel dont certains contacts peuvent avoir été dégradés. Afin de limiter le temps nécessaire à la surveillance, la méthode peut estimer seulement les contacts critiques, c'est-à-dire les contacts influents sur les chutes de tension entre les sources et les charges. Ceci n'est pas une limitation de la méthode, mais bien un choix paramétrable que nous faisons pour des raisons de rapidité de l'analyse. Notre méthodologie permet, en plus, d'estimer le modèle du réseau de retour de courant après dégradations. Elle suppose que les valeurs des admittances des éléments et des contacts du réseau nominal avant dégradation sont entièrement connues ce qui permet de créer un modèle nominal.

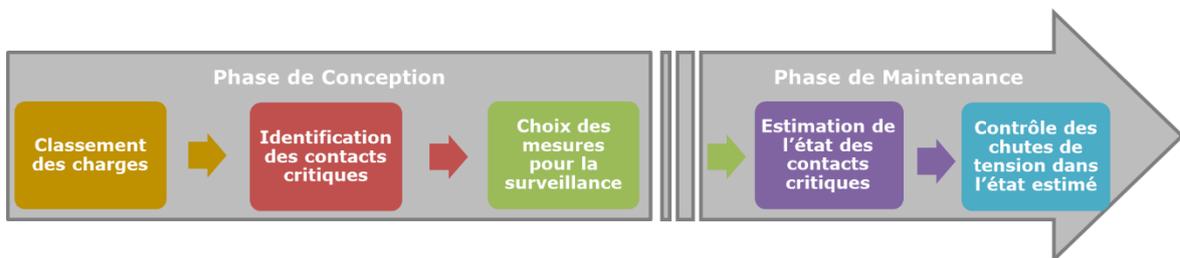


Figure IV-20. Principe de la méthodologie de surveillance.

IV.3.2.2.a. Classement des charges

La première étape consiste à classer les charges selon leur importance, l'idée étant de définir quelles charges sont essentielles au bon fonctionnement de l'avion. Ce classement est une donnée d'entrée en provenance du systémier ou de l'intégrateur aéronautique. Il permet de réduire le nombre de contacts critiques à estimer et donc le nombre de capteurs à mettre en place.

IV.3.2.2.b. Identification des contacts critiques

De nombreuses admittances de contact n'influencent pas les chutes de tension du réseau. Seules celles qui sont critiques, c'est-à-dire qui peuvent dégrader fortement la connectivité des charges, doivent être estimées. L'analyse spectrale des graphes offre un excellent outil capable d'identifier ces contacts critiques du réseau de retour de courant. La méthode d'identification est basée sur le calcul des matrices de sensibilité des chutes de tension à la modification des contacts du réseau. Ces matrices sont obtenues grâce à l'étude perturbative du spectre du graphe (voir partie III.2.4). Les calculs sont réalisés à partir du modèle du réseau. Tous les contacts pour lesquels la sensibilité de la chute de tension entre une charge essentielle et une source dépasse un seuil de criticité sont considérés comme

critiques. Dans la suite de la méthodologie, les autres contacts sont considérés comme fixes et égaux à leur valeur initiale même s'ils risquent d'être dégradés dans le système réel.

IV.3.2.2.c. Choix des mesures pour la surveillance

Avant de pouvoir réaliser l'estimation paramétrique, il est nécessaire de définir, lors de la phase de conception, les mesures qui seront effectuées lors des maintenances. Le choix des mesures réside dans l'idée que plus la chute de tension mesurée est influencée par un contact critique, plus l'information obtenue sera utile pour estimer ce même contact critique. Le nombre de capteurs placés dans le réseau de retour dépend de notre besoin : un faible nombre de mesures permet un gain de temps en maintenance du réseau mais à l'inverse un grand nombre de mesures améliore la précision de l'estimation des éléments critiques. Nous avons dans un premier temps décidé de réaliser le même nombre de mesures que de contacts critiques. Donc pour chaque contact critique à surveiller, une mesure de chute de tension est réalisée aux extrémités du chemin le plus influencé par ce même contact. Pour déterminer ce chemin, les matrices de sensibilité des chutes de tension à la modification des branches du réseau sont encore utilisées.

IV.3.2.2.d. Estimation de l'état des contacts critiques

Maintenant, nous passons aux étapes réalisées lors des maintenances. Dans un premier temps, il est nécessaire d'effectuer les mesures définies dans l'étape précédente sur le système réel. Les informations fournies par les capteurs permettent la mise en place d'une estimation paramétrique pour obtenir les admittances des contacts critiques. L'estimation paramétrique minimise le résidu entre les mesures de chutes de tension du système réel dV^{reel} et les sorties d'un modèle dV^{est} . Le problème d'optimisation s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \min_{W^{est}} \quad & \sum_k^K \left((dV^{reel})_k - (dV^{est}(V^{est}))_k \right)^2 \\ \text{en respectant} \quad & M_{inc} \cdot W^{est} \cdot M_{inc}^T \cdot V^{est} = I \\ & (w_{0cc})_i \geq (w_{cc})_i \geq 0 \\ & (w_{nc})_j = (w_{0nc})_j \end{aligned} \quad \text{IV-21}$$

La matrice des poids W^{est} est constituée des valeurs w_{nc} des admittances des éléments et des contacts non critiques égales à leurs valeurs initiales, ainsi que des admittances estimées des contacts critiques w_{cc} . Les admittances de contact critique sont bornées supérieurement par leurs valeurs nominales avant les dégradations car elles ne peuvent que se dégrader.

IV.3.2.2.e. Contrôle des chutes de tension dans l'état estimé

L'estimation des admittances des contacts critiques du réseau permet de définir un modèle estimé du système réel défini par une matrice Laplacienne L_{est} . A partir du modèle estimé et des courants injectés par les charges, les tensions nodales du réseau sont estimées grâce aux équations de circuit :

$$V_{est} = L_{est}^{\diamond} I_{fct}$$

avec V_{est} le vecteur des tensions nodales et I_{fct} le vecteur des courants nodaux injectés par les charges. Les chutes de tension entre les sources et les charges peuvent alors être reconstruites et le critère de tension peut être vérifié.

IV.3.2.3. Application à la maquette DEMLAB

Pour cette application, un jeu de valeurs de dégradation des admittances de contact est choisi aléatoirement selon la distribution exponentielle présentée précédemment. Il est donné ci-dessous :

	Modification y_c (%)		Modification y_c (%)		Modification y_c (%)
Contact 1	-33,9	Contact 37	-3,2	Contact 73	-0,7
Contact 2	-5,9	Contact 38	-1,1	Contact 74	-1,0
Contact 3	-21,1	Contact 39	-54,6	Contact 75	-7,3
Contact 4	-0,8	Contact 40	-18,7	Contact 76	-42,2
Contact 5	-3,3	Contact 41	-5,2	Contact 77	-63,0
Contact 6	-7,7	Contact 42	-0,6	Contact 78	-3,7
Contact 7	-1,4	Contact 43	-19,0	Contact 79	-34,2
Contact 8	-1,9	Contact 44	-7,8	Contact 80	-2,8
Contact 9	-0,6	Contact 45	-2,1	Contact 81	-46,1
Contact 10	-1,1	Contact 46	-51	Contact 82	-17,7
Contact 11	-0,7	Contact 47	-2,8	Contact 83	-1,0
Contact 12	-0,6	Contact 48	-66,0	Contact 84	-10,4
Contact 13	-51,1	Contact 49	-1,2	Contact 85	-9,8
Contact 14	-59,1	Contact 50	-5,2	Contact 86	-1,0
Contact 15	-29,1	Contact 51	-24,6	Contact 87	-3,9
Contact 16	-4,0	Contact 52	-10,8	Contact 88	-2,0
Contact 17	-17,9	Contact 53	-11,2	Contact 89	-38,3
Contact 18	-4,8	Contact 54	-28,3	Contact 90	-33,5
Contact 19	-3,3	Contact 55	-1,4	Contact 91	-10,2
Contact 20	-0,8	Contact 56	-21,2	Contact 92	-11,6
Contact 21	-1,0	Contact 57	-1,2	Contact 93	-25,2
Contact 22	-0,5	Contact 58	-0,9	Contact 94	-0,6
Contact 23	-66,8	Contact 59	-3,2	Contact 95	-0,7
Contact 24	-0,7	Contact 60	-8,9	Contact 96	-22,2
Contact 25	-2,4	Contact 61	-34,2	Contact 97	-0,6
Contact 26	-28,2	Contact 62	-18,8	Contact 98	-5,7
Contact 27	-29,8	Contact 63	-2,4	Contact 99	-0,8
Contact 28	-3,4	Contact 64	-7,4	Contact 100	-37,8
Contact 29	-38,9	Contact 65	-19,4	Contact 101	-11,0
Contact 30	-6,0	Contact 66	-14,1	Contact 102	-2,3
Contact 31	-0,6	Contact 67	-46,5	Contact 103	-40,6
Contact 32	-2,1	Contact 68	-2,9	Contact 104	-2,3

Contact 33	-31,5	Contact 69	-0,8	Contact 105	-7,1
Contact 34	-19	Contact 70	-10,1	Contact 106	-3,5
Contact 35	-3,9	Contact 71	-3,1	Contact 107	-20,7
Contact 36	-9,7	Contact 72	-16,5		

Tableau IV-4. Dégradations des admittances de contact pour la méthodologie de surveillance appliquée à la maquette DEMLAB.

Le réseau constitué par ce jeu d'admittance constituera le système réel. Les mesures seront obtenues par sa simulation numérique.

IV.3.2.3.a. Classement des charges

Supposons que seules les charges aux nœuds 112, 127 et 136 (respectivement les charges 3, 6 et 7) soient vitales pour le bon fonctionnement de l'avion. Elles sont considérées comme essentielles et seule leur chute de tension est à surveiller.

IV.3.2.3.b. Identification des contacts critiques

Grâce à la matrice de sensibilité de l'analyse spectrale, les sensibilités sont calculées pour toutes les admittances des contacts sur le réseau avant dégradations. Les résultats sont donnés sur la Figure IV-21 ci-dessous :

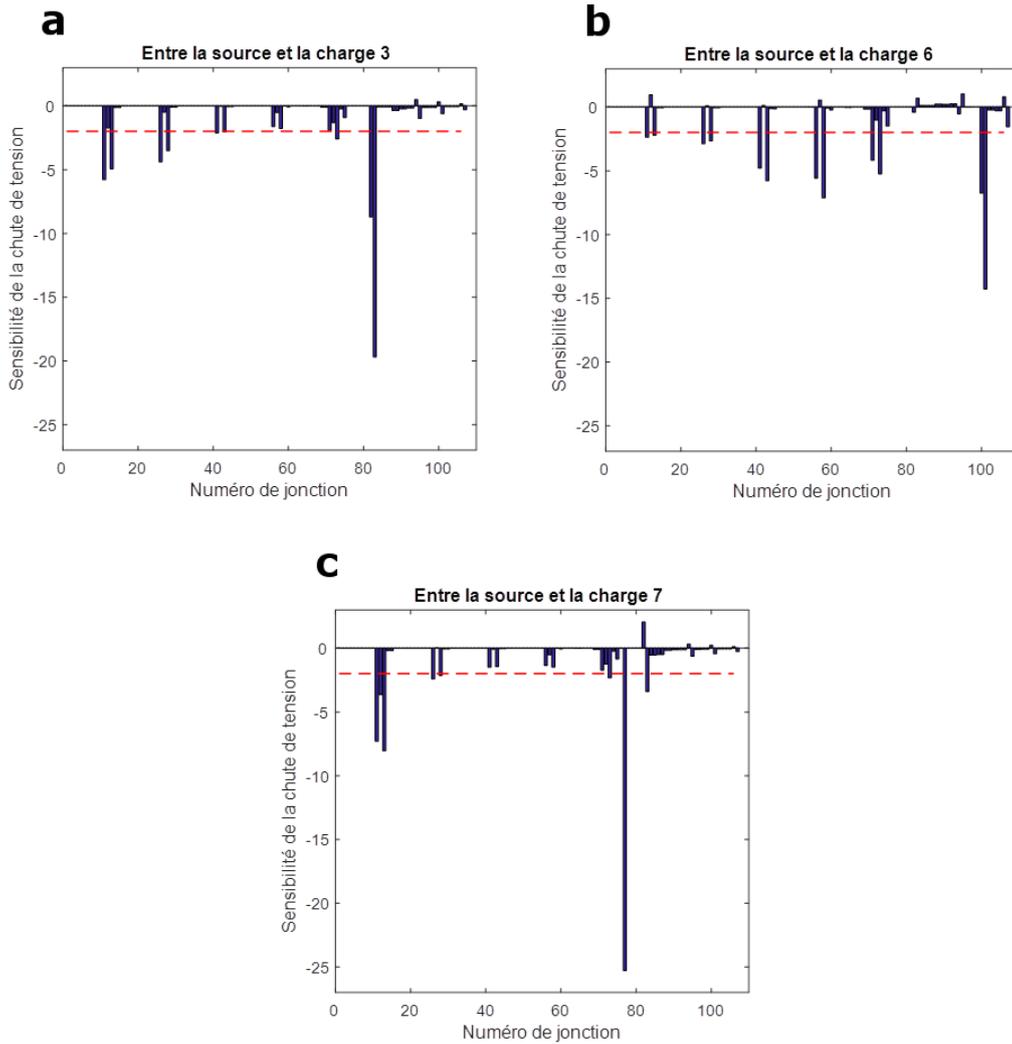


Figure IV-21. Sensibilités des chutes de tension entre la source et : (a) la charge 3 ; (b) la charge 6 ; (c) la charge 7 à la variation d’admittance des contacts.

Tout d’abord, il semble que seuls quelques contacts influent sur les chutes de tension entre la source et les charges. Lorsque l’on regarde de plus près, les sensibilités des chutes de tension aux contacts entre les traverses et les chemins de câbles sont presque toutes négligeables. Ce résultat est compréhensible puisque que ces résistances de contact sont près de 100 fois inférieures aux autres résistances de contact (voir annexe G). De plus, on remarque plusieurs contacts ayant une sensibilité légèrement positive, c’est-à-dire que leur dégradation améliore la chute de tension entre la source et la charge. Ces valeurs positives sont dues à la modification de la répartition des courants lorsqu’une valeur d’admittance est changée.

Pour déterminer la criticité, nous avons choisi dans cet exemple de fixer arbitrairement le seuil de criticité des contacts à -2 % de modification des chutes de tension. Pour la chute de tension entre la source et la charge 3, il y a 9 contacts critiques qui atteignent ce seuil. Pour la chute de tension entre la source et la charge 6, on trouve 12 contacts critiques et pour celle entre la source et la charge 7, il y en a 8. Cependant, certains contacts critiques

sont communs à plusieurs chutes de tension. En pratique, seuls 16 contacts critiques sont à surveiller (voir Figure IV-22 pour leur localisation). Ce sont les contacts : 11, 12, 13, 26, 28, 41, 43, 56, 58, 71, 73, 77, 82, 83, 100 et 101. Ce sont principalement des contacts entre les cadres et traverses de DEMLAB. Les autres contacts sont considérés comme fixes et égaux à leur valeur initiale.

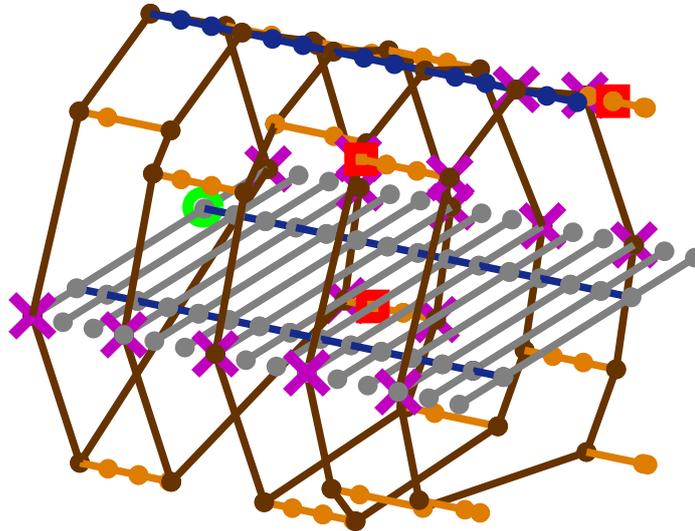


Figure IV-22. Emplacement de la source (cercle vert), des 3 charges essentielles (carré rouge) et des 16 contacts critiques (croix violette).

IV.3.2.3.c. Choix des mesures pour la surveillance

Les contacts critiques à surveiller sont désormais connus et la 3^{ème} étape concerne la recherche des mesures permettant de fournir les bonnes informations à l'estimation paramétrique. La Figure IV-23 montre la matrice de sensibilité des chemins du réseau à la variation de l'admittance du premier contact à surveiller : le contact 11. Les calculs sont réalisés à partir du modèle du réseau non dégradé. On remarque que le chemin entre les nœuds 11 et 148 est le chemin le plus influencé par le contact. Logiquement il correspond au chemin entre les bornes du contact 11 car la modification de l'admittance du contact modifie en premier temps la chute de tension de celui-ci.

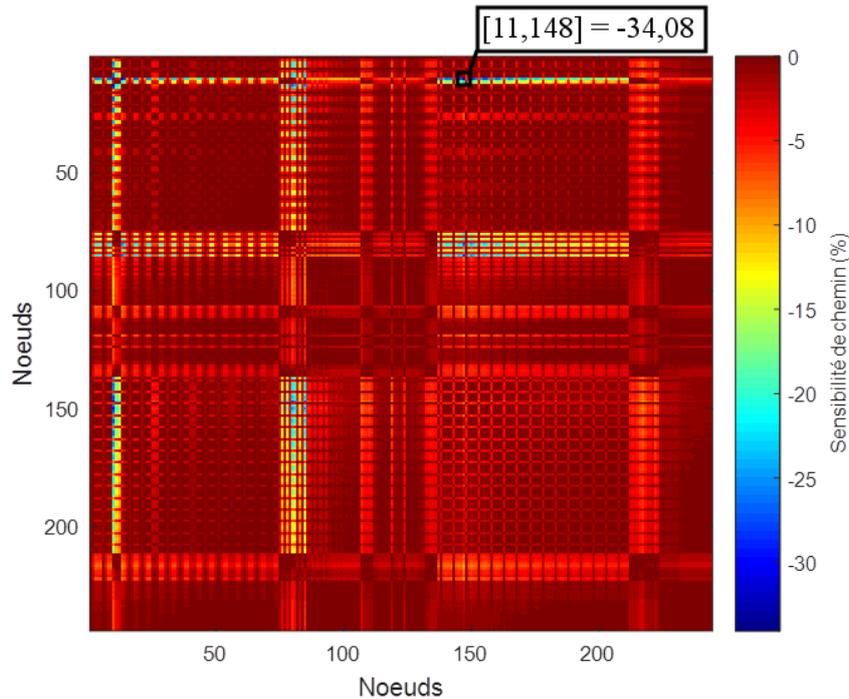


Figure IV-23. Sensibilités des chemins à la variation de l'admittance du contact 11.

Pour tous les autres contacts critiques, les chemins le plus influencés sont aussi les chemins entre les extrémités des contacts. Nous décidons donc, logiquement, de placer les capteurs aux bornes des contacts critiques afin de réaliser 16 mesures de chutes de tensions. A noter que dans le cas où les chutes de tension aux bornes des contacts ne sont pas accessibles, la mesure se fera aux bornes du chemin accessible le plus influencé par la variation de l'admittance du contact critique.

Enfin, pour s'assurer que les contacts critiques sont traversés par un courant lors des mesures, nous réalisons des injections de courant entre leurs bornes.

IV.3.2.3.d. Estimation de l'état des contacts critiques

Maintenant que nous avons choisi l'emplacement de nos capteurs nous sommes capables d'effectuer les 16 mesures de chutes de tension qui seront effectuées sur le système réel lors des maintenances. Dans notre exemple, elles sont réalisées à partir d'une simulation numérique. L'estimation paramétrique doit minimiser l'erreur quadratique entre les mesures sur le système réel et les sorties du modèle. Le problème d'optimisation est résolu grâce au solveur disponible dans la toolbox OPTI [83][84].

L'erreur quadratique obtenue entre les 16 chutes de tensions mesurées et les sorties du modèle pour notre solution optimale est de $3,08 \cdot 10^{-7}$. Cette solution est en moyenne obtenue après 95 itérations en 1 min et 15 secondes. Les estimations des admittances des contacts critiques ainsi que les erreurs avec les admittances du système réel sont données dans le Tableau IV-5 :

	Admittance estimée (Ω^{-1})	Admittance du système réel (Ω^{-1})	Erreur d'estimation (%)
Contact 11	645,2	640,9	0,66
Contact 12	922,6	983,7	-6,21
Contact 13	317,2	315,7	0,46
Contact 26	453,4	463,3	-2,15
Contact 28	614,9	623,3	-1,34
Contact 41	614,2	611,7	0,41
Contact 43	526,2	522,9	0,64
Contact 56	509,0	508,2	0,16
Contact 58	640,3	639,5	0,13
Contact 71	628,1	625,2	0,47
Contact 73	642,9	640,6	0,36
Contact 77	370,2	370,2	0,00
Contact 82	835,1	823,3	1,44
Contact 83	974,3	990,0	-1,58
Contact 100	621,6	622,1	-0,09
Contact 101	890,8	890,2	0,07

Tableau IV-5. Comparaison entre les admittances estimées et celles du système réel des 16 contacts critiques.

Le choix des mesures est bien défini puisqu'il permet d'obtenir une bonne estimation des admittances de contacts critiques du réseau. En effet, l'erreur moyenne d'estimation des admittances est de 0,66 %. Cependant l'estimation du contact 12 est légèrement moins bonne avec une erreur de -6,21 %. Les erreurs sont principalement induites par l'absence d'estimation des admittances des contacts non critiques, égales à leurs valeurs initiales lors de l'estimation paramétrique mais qui sont dégradées dans le système réel.

IV.3.2.3.e. Contrôle des chutes de tension dans l'état estimé

Pour vérifier le critère de chutes de tension entre la source et les charges essentielles, on construit le modèle estimé du système réel L_{est} à partir des admittances de contact critiques estimées dans la partie précédente. Les autres admittances du réseau sont égales à leur valeur initiale. Les chutes de tension sont données dans le Tableau IV-6.

	Chute de tension estimée (V)	Chute de tension du système réel (V)	Erreur d'estimation (%)
Charge 3	0,3957	0,4001	-1,1
Charge 6	0,2684	0,2704	-0,7
Charge 7	0,5931	0,5969	-0,6

Tableau IV-6. Comparaison entre les chutes de tension estimées et celles du système réel.

Les chutes de tension obtenues grâce à notre méthode montrent que la charge 7 ne respecte plus le critère de tension. En effet, sa chute de tension a dépassé 0,5 V. Les deux autres charges essentielles sont fonctionnelles d'un point de vue du retour de courant. Les

chutes de tension du système réel amènent à la même conclusion. Les erreurs d'estimation des chutes de tension sont faibles, de l'ordre de 1%.

IV.3.2.4. Surveillance de la maquette DEMLAB

Pour vérifier sa robustesse, la méthode de surveillance est appliquée à la maquette DEMLAB avec différents jeux aléatoires de dégradations des admittances de contacts. Elle est réalisée 500 fois. Les résultats des diagnostics des trois charges essentielles sont tracés dans la Figure IV-24.

Le retour de courant de la charge 6 est toujours assuré dans les 500 simulations. Par contre pour la charge 7, il y a 10% des simulations dans lesquelles la chute de tension ne respecte pas le critère de tension. Dans la plupart des cas, l'estimation permet de détecter la défaillance de la charge. Cependant, dans 4 simulations, la charge est faussement estimée comme fonctionnelle. Ces mauvais diagnostics sont induits par des chutes de tension très proches de la limite de 0,5 V (voir le Tableau IV-7). L'explication des réseaux faussement diagnostiqués comme fonctionnels est identique pour la charge 3. Pour l'ensemble des simulations, les erreurs d'estimations des chutes de tension restent faibles, en moyenne -0,94 % et elles sont comprises entre -4,11 % et 1,52 %.

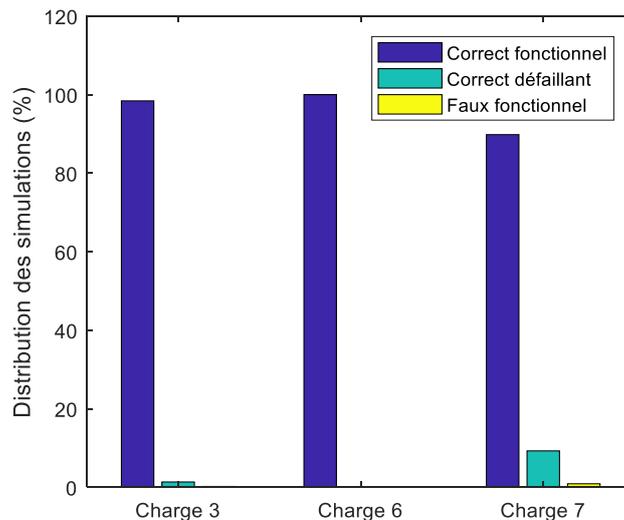


Figure IV-24. Efficacité de la méthode de surveillance lors de 500 simulations avec des dégradations aléatoires des contacts.

	$dV(s-ch7)$ estimée (V)	$dV(s-ch7)$ du système réel (V)	Erreur d'estimation (%)
Simulation 51	0,4994	0,5050	-1,11
Simulation 94	0,4979	0,5036	-1,13
Simulation 131	0,4986	0,5007	-0,42
Simulation 239	0,4980	0,5023	-0,86

Tableau IV-7. Chutes de tension estimées et du système réel entre la charge 7 et la source pour les 4 simulations mal diagnostiquées.

IV.3.2.5. Résultats et perspectives

L'application sur la maquette DEMLAB montre que notre méthodologie de surveillance permet de répondre à notre problématique : détecter et localiser les défaillances du retour de courant des charges lors de dégradations des contacts. Grâce à l'étude perturbative du spectre du graphe, nous sommes capables d'identifier les contacts critiques du réseau de retour de courant et donc de diminuer le nombre d'admittances à estimer lors des maintenances. L'analyse spectrale offre aussi une aide sur le choix des mesures.

Plusieurs études restent à approfondir pour envisager un outil fonctionnel de surveillance des réseaux de retour de courant. Tout d'abord, le classement des charges ainsi que le choix du seuil de criticité ont été faits arbitrairement. Ces choix impactent grandement le compromis entre la précision de l'estimation du réseau dégradé et le nombre de mesures à installer. En effet, augmenter le nombre de charges critiques, ou diminuer le seuil de criticité (en valeur absolue), implique une augmentation du nombre de contacts à estimer et donc une augmentation du nombre de mesures à réaliser. Il serait intéressant dans la suite des travaux de quantifier ce compromis afin de choisir les réglages en fonction de l'application et la précision finale voulue.

Ensuite, les travaux ont été uniquement réalisés avec de mesures obtenues par simulation numérique. Il serait donc nécessaire d'étudier l'influence des incertitudes liées à des mesures physiques sur avion sur l'estimation paramétrique des admittances de contact. L'étude concernant les meilleurs points d'injection afin d'exciter correctement le réseau n'a pas encore été faite. Pour l'instant, les points d'injections sont situés au niveau des mesures pour s'assurer que les chutes de tensions portent une information. Mais, il serait intéressant à l'avenir d'imposer une excitation du réseau à partir de moins de points d'injection.

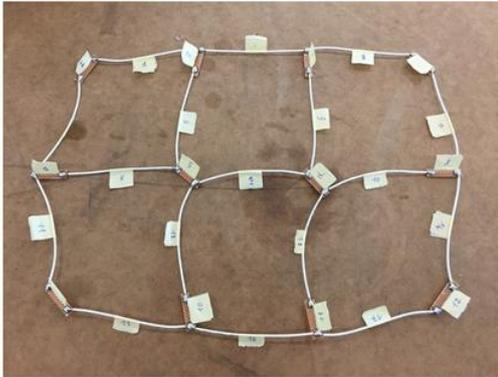
IV.3.3 Méthode de caractérisation du réseau

La méthodologie de surveillance nécessite la modélisation complète du réseau nominal, donc la connaissance de son état d'origine. Cette caractérisation initiale n'est pas possible par mesure directe. Nous allons proposer dans cette partie une méthode basée sur l'estimation paramétrique capable de caractériser les admittances de contact d'un réseau électrique à partir de mesures. Afin de vérifier le bon fonctionnement de notre méthode, elle sera appliquée à un petit réseau test. Dans un premier temps, les mesures seront constituées par des résultats de simulation numérique du réseau test. Cela permettra de déterminer les configurations de mesure les plus adaptées et d'effectuer une étude de sensibilité de la méthode. Puis, une validation à l'aide de mesures physiques sera montrée.

IV.3.3.1. Description du réseau test

Le réseau test est un réseau maillé composé de 17 câbles DR18 (diamètre moyen de 1,205 mm) numérotés 1 à 17 représentant les éléments conducteurs d'un réseau de retour de courant. Chaque câble fait environ 10 cm. Ils sont connectés entre eux avec 12 dipôles résistants modélisant des admittances de contact d'environ $50 \text{ m}\Omega^{-1}$ notées C_1 à C_{12} (voir Figure IV-25). Les admittances des câbles et des dipôles ont été mesurées avant la conception du réseau afin d'obtenir leurs valeurs réelles. Elles sont données dans le Tableau IV-8 et le Tableau IV-9. Les différents éléments du réseau test sont reliés par brasage entre eux, les résistances supplémentaires induites par la brasure ont été mesurées et sont négligeables.

a



b

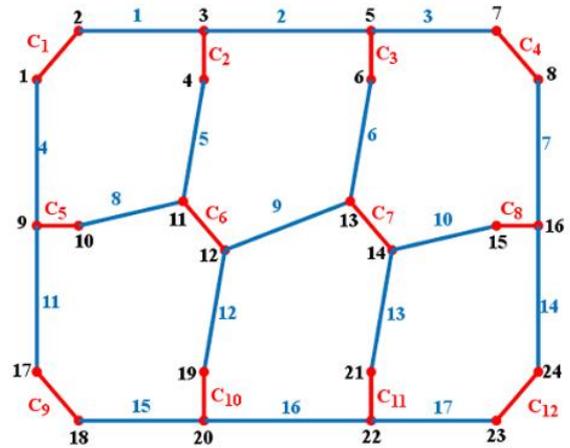


Figure IV-25. Réseau test (a) et son graphe (b). Les nœuds sont numérotés en noir.

	Admittance à 20°C (Ω^{-1})
Câble 1	642,7
Câble 2	639,0
Câble 3	627,0
Câble 4	646,8
Câble 5	627,0
Câble 6	639,0
Câble 7	651,0
Câble 8	623,1
Câble 9	627,0
Câble 10	630,9
Câble 11	642,7
Câble 12	634,9
Câble 13	630,9
Câble 14	642,7
Câble 15	630,9
Câble 16	623,1
Câble 17	639,0

Tableau IV-8. Valeurs des admittances des câbles dans le réseau test.

	Admittance à 20°C ($m\Omega^{-1}$)
Contact C ₁	50,090
Contact C ₂	50,035
Contact C ₃	50,327
Contact C ₄	50,186
Contact C ₅	50,292
Contact C ₆	50,188
Contact C ₇	50,287
Contact C ₈	50,100
Contact C ₉	50,010
Contact C ₁₀	49,925
Contact C ₁₁	50,100
Contact C ₁₂	50,030

Tableau IV-9. Valeurs des admittances de contact dans le réseau test.

IV.3.3.2. Principe de la caractérisation

Nous voulons caractériser les admittances C_1 à C_{12} qui sont considérées comme des admittances de contact. Pour cela, nous allons réaliser une estimation paramétrique à partir de mesures sur le réseau test. Nous considérons que les admittances des câbles sont connues et exactes. Nous avons choisi de réaliser des mesures de chutes de tension et de courants :

- Mesures des courants des 17 câbles ;
- Mesures de 12 chutes de tension définies dans l'annexe K.

Puisque nous avons des mesures de courants en plus de celles de chutes de tension, il est nécessaire de modifier légèrement l'estimation paramétrique. De plus, nous avons choisi de borner les valeurs d'admittances y_c des résistances de contacts entre 0,02 et 0,2 Ω^{-1} . La formulation du problème d'optimisation est alors :

$$\begin{aligned} \min_{W^{est}} & \sum_k^K \left((dV^{reel})_k - (dV^{est}(V^{est}))_k \right)^2 + \sum_p^P \left((i^{reel})_p - (i^{est}(V^{est}))_p \right)^2 \\ \text{en respectant} & M_{inc} \cdot W^{est} \cdot M_{inc}^T \cdot V^{est} = I \\ & 0,2 \geq y_{c_i} \geq 0,02 \end{aligned} \quad \text{IV-23}$$

Nous allons maintenant voir comment résoudre ce problème, soit à l'aide de mesures issues de simulation numérique, soit à l'aide de mesures physiques du réseau test.

IV.3.3.3. Avec des mesures obtenues par simulation

Pour que les mesures fournissent les informations nécessaires, il faut s'assurer que tous les contacts sont bien traversés par du courant. De par la structure du réseau, trouver une configuration d'injection de courant capable d'exciter correctement l'ensemble des contacts est difficile donc nous allons en utiliser deux. On considère que, pour être bien excité, un contact doit être traversé par au moins 10% du courant total injecté. Pour connaître la répartition des courants dans le réseau test, nous allons réaliser des simulations numériques à partir du modèle du réseau test dans lequel les admittances de contacts sont toutes égales à 50 $m\Omega^{-1}$. Dans la première configuration, un courant de 100 mA est injecté au nœud 9 du réseau et la sortie est au nœud 16. Les contacts sont, dans la majorité, bien excités mais les contacts C_3 et C_{10} sont traversés par moins de 10 % du courant total. Ils risquent d'être difficiles à estimer (voir Figure IV-26). Dans la configuration 2, le même courant de 100 mA est injecté au nœud 5 et il ressort au nœud 20, les contacts C_3 et C_{10} sont cette fois traversés par un courant suffisant, par contre C_5 et C_8 ne le sont plus. Des mesures à partir des deux configurations sont donc nécessaires pour s'assurer que les résistances de contact sont bien excitées.

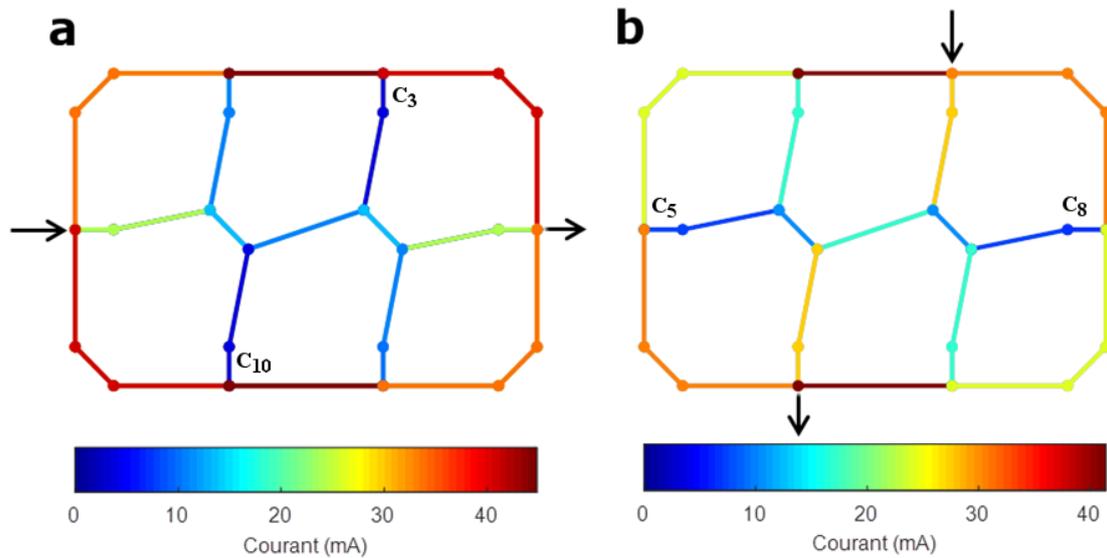


Figure IV-26. Injection d'un courant de 100 mA pour les mesures : (a) dans la configuration 1 entre les nœuds 9 et 16 et (b) dans la configuration 2 entre les nœuds 5 et 20.

Pour vérifier le bon fonctionnement de notre méthode et éviter les erreurs induites par les mesures, nous allons réaliser l'estimation paramétrique à partir des mesures obtenues lors d'une simulation numérique du réseau test nominal. Leurs valeurs sont données dans l'annexe K.

Nous commençons par estimer les admittances des contacts dans la première configuration d'injection de courant. Après environ 100 itérations, l'optimisation converge vers une solution optimale. La valeur de la fonction objectif est égale $2,8 \cdot 10^{-5}$, l'estimation a permis de trouver une combinaison d'admittances en accord avec les mesures obtenues par simulation. Les admittances estimées sont données dans le Tableau IV-10. Cependant, on remarque que dans cette configuration les courants traversant les contacts C_3 et C_{10} sont inférieurs à 10 % du courant total. Donc il est nécessaire de réaliser une seconde estimation pour la deuxième configuration d'injection de courant.

	Admittance estimée ($m\Omega^{-1}$)	Courant estimé traversant le contact (mA)
Contact 1	50,085	34,5
Contact 2	50,083	10,4
Contact 3	50,324	3,4
Contact 4	50,184	41,4
Contact 5	50,255	24,2
Contact 6	50,082	13,8
Contact 7	50,214	13,8
Contact 8	50,097	24,2
Contact 9	50,044	41,3
Contact 10	49,776	3,4
Contact 11	50,217	10,3
Contact 12	50,015	34,4

Tableau IV-10. Admittances et courants estimés traversant les contacts après l'estimation paramétrique dans la configuration 1 avec un courant d'injecté de 100 mA.

Dans la seconde configuration, les mesures simulées sont obtenues grâce à l'injection d'un courant de 100 mA entre les nœuds 5 et 20. Les admittances des contacts traversés par un courant suffisant sont fixées sur celles obtenues après la première estimation. Les résultats des admittances après les deux estimations paramétriques sont donnés dans le Tableau IV-11. On remarque tout d'abord que, dans la seconde configuration, les contacts C_3 et C_{10} sont traversés par un courant plus important, environ 27 % du courant total. Après les deux optimisations, les admittances estimées sont très proches des admittances du réseau test avec une erreur moyenne de 0,11 % et une erreur maximum de 0,26 %. Les erreurs peuvent être expliquées par les tolérances choisies pour les optimisations et les faibles incertitudes sur les valeurs des admittances des câbles.

	Admittance estimée ($m\Omega^{-1}$)	Admittance du réseau test ($m\Omega^{-1}$)	Erreur (%)	Courant estimé traversant la résistance (mA)
Contact 1	50,085	50,090	-0,01	24,1
Contact 2	50,083	50,035	0,10	17,2
Contact 3	50,196	50,327	-0,26	27,6
Contact 4	50,184	50,186	0,00	31,0
Contact 5	50,255	50,292	-0,07	6,9
Contact 6	50,082	50,188	-0,21	10,3
Contact 7	50,214	50,287	-0,14	10,4
Contact 8	50,097	50,100	-0,01	6,9
Contact 9	50,044	50,010	0,07	31,0
Contact 10	50,024	49,925	0,20	27,6
Contact 11	50,217	50,100	0,23	17,3
Contact 12	50,015	50,030	-0,03	24,1

Tableau IV-11. Admittances estimées des contacts après l'estimation paramétrique et courants estimés traversant les contacts dans la 2^{ème} configuration (avec un courant injecté de 100 mA).

IV.3.3.4. Etude de sensibilité

L'estimation paramétrique permet donc de caractériser les admittances de contact à partir de mesures exactes issues de simulations numériques. Avant de l'appliquer à des mesures physiques il est nécessaire de vérifier la sensibilité des estimations aux incertitudes de mesures. Nous allons commencer par analyser l'impact des erreurs de mesures de courants sur les admittances estimées.

Pour cela, nous avons considéré que les mesures de courants étaient aléatoirement comprises entre -5 et +5 % de leurs valeurs simulées. Les résultats obtenus pour 100 simulations sont donnés sur la Figure IV-27. On remarque tout d'abord que, même avec des erreurs maximums de 5 % sur les mesures de courant, les admittances estimées sont dans le même ordre de grandeur que les admittances du réseau test. Les erreurs d'estimation des admittances sont comprises à peu près entre -5 et 5 %. Quant aux résultats pour des erreurs de mesures inférieures à 1%, ils sont très proches des valeurs réelles avec des erreurs inférieures à 1,5 %.

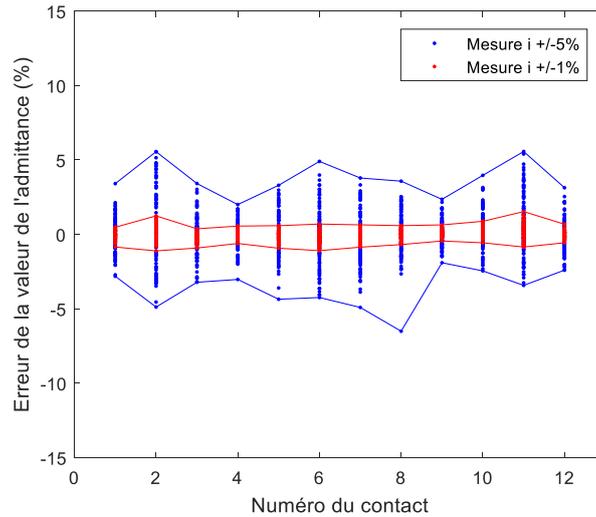


Figure IV-27. Erreurs d'estimations des admittances de contact lors de 100 simulations avec une incertitude de mesure de courant de +/- 1% et +/- 5%.

Deux analyses supplémentaires sont réalisées, l'une avec des erreurs de mesures des chutes de tension seulement et l'autre avec des erreurs sur les mesures de chutes de tension et des courants. Les résultats sont tracés sur la Figure IV-28. L'estimation des admittances semble plus sensible aux erreurs sur les chutes de tension que sur les courants. Malgré des erreurs de mesures sur les chutes de tension et les courants jusqu'à 5 %, les admittances estimées restent dans une plage d'erreur de +/- 10 %.

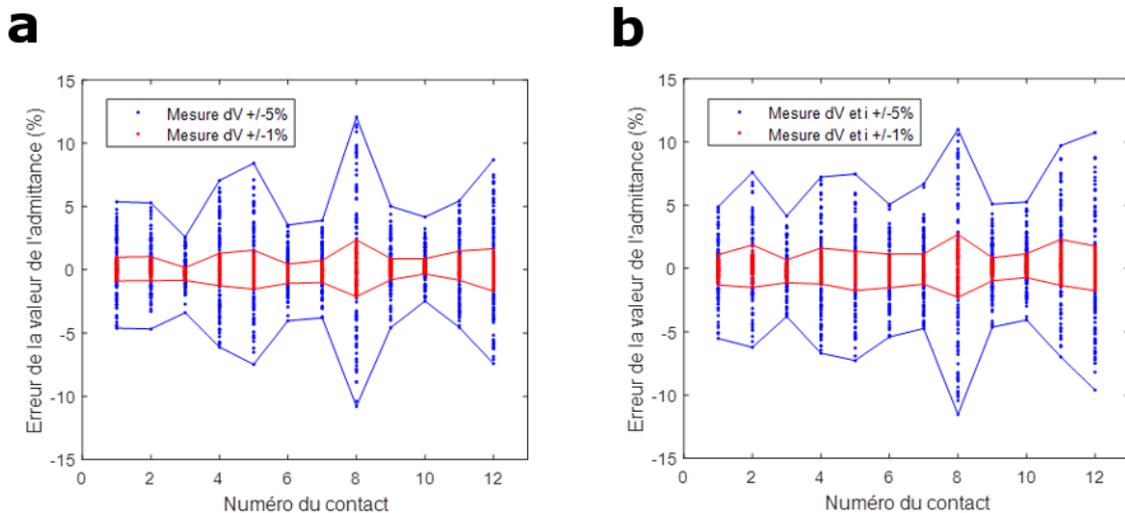


Figure IV-28. Erreurs d'estimations des admittances de contact lors de 100 simulations avec une incertitude (a) des mesures de chutes de tension et (b) des mesures de chutes de tension et de courant.

IV.3.3.5. Avec des mesures physiques

Les mesures ont été réalisées sur le réseau réel, elles sont données dans l'annexe K. Elles sont donc sujettes à des erreurs. Les valeurs des admittances après les deux estimations paramétriques sont données dans le Tableau IV-12. A partir des mesures physiques, l'erreur moyenne d'estimation est non négligeable mais faible de l'ordre de

2,87 %. Ces erreurs sont principalement induites par les mesures de courants des branches ayant pour certaines plus de 6 % d'erreur. En améliorant la précision des mesures ou en multipliant les mesures, nous serions en capacité de minimiser ces erreurs. Cependant nous pouvons conclure que l'estimation paramétrique permet de caractériser un réseau de retour de courant et en particulier les admittances de contacts.

	Admittance estimée ($m\Omega^{-1}$)	Admittance du réseau test ($m\Omega^{-1}$)	Erreur (%)
Contact 1	50,816	50,090	1,45
Contact 2	48,478	50,035	-3,11
Contact 3	52,278	50,327	3,88
Contact 4	51,027	50,186	1,68
Contact 5	49,125	50,292	-2,32
Contact 6	49,310	50,188	-1,75
Contact 7	47,223	50,287	-6,09
Contact 8	46,896	50,100	-6,40
Contact 9	50,065	50,010	0,11
Contact 10	47,950	49,925	-3,96
Contact 11	50,820	50,100	1,44
Contact 12	51,142	50,030	2,22

Tableau IV-12. Admittances estimées des contacts après l'estimation paramétrique à partir de mesures physiques.

IV.4. Conclusions

Le caractère multi-échelle d'un réseau réaliste de retour de courant révélé grâce à la méthode de croissance d'une boule, nous conforte dans l'utilisation de l'analyse spectrale pour relier la topologie d'un réseau de retour de courant à ses chutes de tension. La détermination des modes influant sur les interactions locales nous a permis de fournir une indication des meilleurs emplacements des charges dans un réseau. Même si l'optimisation de la connectivité algébrique n'est pas suffisante pour concevoir un meilleur réseau puisqu'elle ne garantit pas une diminution des chutes de tension, elle permet une meilleure compréhension de l'organisation spectrale d'un réseau de retour de courant. Un dimensionnement d'un réseau de retour de courant léger et bien connecté peut partiellement être réalisé grâce à l'analyse spectrale du spectre de la matrice Laplacienne du graphe. Ces pistes restent tout de même très prometteuses pour des futures études de pré-dimensionnement des réseaux de retour de courant.

La complexification des réseaux de retour de courant dans les avions composites a nécessité l'insertion de tresses afin de garantir la continuité électrique et la qualité des contacts électriques. Elles sont actuellement impératives car les systémiers ou intégrateurs aéronautiques ne peuvent ni vérifier ou garantir les résistances initiales des contacts ni surveiller leurs évolutions dans le temps. Ces incertitudes entraînent un risque de non-respect du critère fonctionnel de chute de tension maximale admissible, mettant ainsi en danger les systèmes et les personnes. Nos solutions offrent une bonne réponse à nos besoins. Une méthode de surveillance permet d'estimer l'évolution des chutes de tensions entre les sources et les charges à partir de mesures sur le réseau de retour de courant. Sans le recours à l'analyse perturbative du spectre du graphe, notre méthodologie aurait été chronophage et n'aurait pas pu être envisagée lors des maintenances au sol. De plus, l'estimation des admittances des contacts critiques fournit un outil capable de détecter et de localiser les dégradations des contacts impactant le critère de tension du réseau, une planification des réparations nécessaires peut donc être mise en place. En plus d'apporter une solution inexistante jusqu'à présent dans le domaine aéronautique, la méthodologie est paramétrable, offrant une flexibilité à travers le choix du type de mesures (tensions et/ou courant) et du nombre de branches à estimer (compromis précision/nombres de capteurs à installer), permettant ainsi l'adaptation de cet outil aux multiples besoins de surveillance. Additionné à notre méthode de caractérisation, nous avons tous les éléments en main pour être capable d'étudier l'utilité de chaque tresse ajoutée.

Conclusions générales et perspectives

Afin de limiter la consommation des avions et leurs impacts environnementaux, les constructeurs doivent sans cesse chercher de nouvelles solutions capables d'alléger les structures des aéronefs. Depuis quelques années, les matériaux composites ont montré leurs avantages en alliant légèreté et résistance mécanique. Cependant, leur introduction implique une complexification des systèmes électriques embarqués. Puisque les matériaux composites sont de mauvais conducteurs et sont très sensibles aux échauffements, le fuselage et la structure ne peuvent plus assurer, entre autres, la fonction électrique de retour de courant qui est pourtant essentielle. Par conséquent, les avions composites requièrent un réseau électrique additionnel, appelé génériquement « réseau de retour de courant ». Ce nouveau réseau, non nécessaire auparavant, pose deux nouvelles problématiques : premièrement, le dimensionnement de réseaux légers, fonctionnels et robustes et deuxièmement, la surveillance de ces réseaux.

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse ont porté essentiellement sur l'étude de ces deux problématiques. Leur résolution est passée par la compréhension de l'impact de la topologie d'un réseau de retour de courant sur ses performances électriques. Une nouvelle méthode d'analyse a été proposée pour la résolution de ces problématiques : l'analyse spectrale des graphes.

La première étape a été de modéliser les réseaux par un graphe portant leur topologie mais aussi, à travers la matrice Laplacienne, leur comportement électrique. A partir de cette modélisation, plusieurs approches topologiques issues de la théorie des graphes ont été utilisées pour la caractérisation des liens entre topologie et performances électriques. La compréhension des liens peut alors être facilitée par l'étude des réseaux dans leur domaine spectral.

Cette caractérisation a été facilitée par l'utilisation de la théorie spectrale des graphes qui permet de réduire le comportement du réseau à la somme d'un certain nombre de comportements élémentaires indépendants. Ces derniers sont déterminés par les modes de la matrice Laplacienne et sont associés à une échelle caractéristique du réseau. De ce fait, l'analyse spectrale offre aussi une lecture multi-échelle.

Un premier lien entre la topologie et les performances électriques a été obtenu grâce à la connectivité algébrique, la seconde valeur propre de la matrice Laplacienne du graphe. Elle est un indicateur de la robustesse d'un réseau et elle borne sa résistance moyenne. Une grande valeur de connectivité algébrique indique un réseau robuste et bien connecté. Un lien direct entre la topologie et les chutes de tension a aussi été réalisé avec l'analyse perturbative du spectre du graphe. Cela nous a fourni un outil très performant capable d'approximer les chutes de tension du réseau sans nécessité de nombreuses simulations chronophages comme cela est nécessaire habituellement.

Plusieurs applications aéronautiques de l'analyse spectrale ont ensuite été illustrées grâce à une maquette représentative d'un réseau de retour de courant. Après avoir modélisé

la maquette par un graphe, nous avons proposé 3 approches de pré-dimensionnement pour supporter la conception des réseaux de retour de courant, ainsi que deux méthodes de surveillance et de caractérisation.

La première approche de pré-dimensionnement a étudié l'emplacement des charges dans la maquette. Nous avons montré, qu'afin de limiter les chutes de tension entre les charges et les sources, il est nécessaire que leur chemin soit le moins impacté possible par les échelles globales du réseau, et donc par les modes associés aux faibles valeurs propres. Ensuite, nous avons réalisé une optimisation afin de maximiser la connectivité algébrique pour obtenir un réseau robuste avec une résistance moyenne faible. Cette optimisation a permis d'augmenter la connectivité algébrique du graphe mais pas d'améliorer l'ensemble des chutes de tension entre les charges et les sources. En effet, tous les modes globaux influent sur les chutes de tension donc il serait nécessaire de les optimiser tous. Malgré cela, l'optimisation de la connectivité algébrique reste un outil utile pour la compréhension des réseaux de retour de courant car il aide à déterminer les paramètres dimensionnants. Enfin, dans l'hypothèse d'un réseau préalablement dimensionné, par exemple suivant des contraintes mécaniques, nous avons proposé une méthode d'ajout ciblé de masse pour respecter le critère de chute de tension.

Dans un second temps, nous avons développé une méthodologie de surveillance des réseaux de retour de courant. Son objectif était de surveiller l'évolution des chutes de tension et de vérifier le respect du critère de chute de tension lors de dégradations des contacts. Pour réduire le temps nécessaire à la surveillance, seuls les contacts critiques sont surveillés. Ils sont identifiés par l'analyse perturbative du spectre de graphe. La méthode proposée fournit une bonne estimation des admittances des contacts dégradés et par conséquent des chutes de tension engendrées par ces nouvelles admittances. Pour finir, une méthode de caractérisation a été proposée. Elle est capable d'estimer correctement les admittances des contacts à partir de mesures de chutes de tension et de courants.

Ces travaux de thèse ouvrent aussi de nombreuses perspectives :

- D'un point de vue applicatif, il nous semblerait intéressant d'améliorer la méthode de surveillance des réseaux de retour de courant. Dans un premier temps, il serait nécessaire de proposer une méthode capable de définir l'emplacement des points d'injections de courants lors des mesures. Pour cela, on pourrait envisager d'utiliser l'analyse perturbative du spectre, l'idée étant d'alimenter le réseau sur des chemins influencés par plusieurs contacts critiques. L'impact du classement des charges et du choix du seuil de criticité permettrait d'adapter la méthode aux besoins industriels. Ces impacts pourraient être obtenus par une campagne de simulation. Il serait également intéressant de revenir sur la formulation du problème et sa résolution. Actuellement la solution choisie est fonctionnelle mais on peut imaginer que la convergence et le temps de résolution pourraient être améliorés. On pourrait

envisager de calculer le transfert entre les courants injectés et les mesures à l'aide du pseudo-inverse de la matrice Laplacienne et résoudre le problème avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt [90]. Ces travaux permettraient de consolider la méthodologie de surveillance en vue d'une utilisation industrielle.

- Grâce à l'illustration de nos approches sur la maquette DEMLAB, nous avons vu qu'elles sont applicables aux réseaux de retour de courant de type ESN (utilisés dans l'A350). Cependant, l'utilisation des enveloppes en matériaux composites dans les sous-systèmes de l'appareil, tel que les nacelles ou les meubles électriques, nécessite également des réseaux capables d'assurer les fonctions électriques de retour de courant. L'ensemble de nos approches basées sur l'analyse spectrale pour concevoir et surveiller les réseaux sont applicables à tous les réseaux de retour de courant.
- L'optimisation de la connectivité algébrique n'a pas permis l'amélioration des chutes de tension dans le réseau de retour de courant. Il faudrait mettre en place un problème d'optimisation capable de maximiser plusieurs valeurs propres influentes tout en limitant la masse du réseau. Dans ce cas, la modification de l'ensemble des vecteurs propres lors de variations de la topologie du réseau empêche une formulation de la contrainte identique à celle réalisée pour la maximisation de la connectivité algébrique. Il faudrait donc trouver une nouvelle formulation. On pourrait, pour cela, s'inspirer des travaux de minimisation de la résistance totale d'un réseau réalisé par Ghosh [91].
- L'investigation des propriétés des vecteurs propres de la matrice Laplacienne du graphe est un sujet de recherche à part entière. Peu de travaux existent à ce sujet [92]. Il faudrait notamment comprendre leurs évolutions lors de la modification de la topologie. Les applications de ces travaux pourraient concerner les problèmes d'observabilité et de commandabilité des nœuds [67][93].
- Pour l'instant, seuls des réseaux résistifs ont été étudiés. Il serait intéressant d'introduire les comportements capacitifs et inductifs. Une modification de la matrice Laplacienne en introduisant des paramètres complexes serait une solution envisageable. Par la suite, la lecture multi-échelle offerte par l'analyse spectrale devrait être revue en intégrant le nouveau modèle du réseau. En fonction des évolutions de l'analyse, il faudrait vérifier l'adaptabilité de nos approches de pré-dimensionnement et de surveillance.
- A la place de l'analyse spectrale que nous proposons dans ce manuscrit, d'autres méthodes multi-échelles pourraient être envisagées pour comprendre comment les propriétés d'un réseau émergent de sa topologie. La théorie de la percolation semble particulièrement intéressante puisqu'elle se concentre sur l'étude de la transition entre la connectivité et son absence, proche de la notion de robustesse [12][14]. L'analyse des propriétés des amas percolants au voisinage du seuil de

percolation, qui est à la limite de la connexité, pourrait aider à comprendre les topologies optimales du réseau. On pourrait tenter d'identifier les paramètres topologiques dimensionnants en commun à ces réseaux.

Bibliographie

- [1] P. S. J. N. H. J. Turner, *Junkers: An Aircraft Album No. 3*, First Edition edition. ARCO, 1971.
- [2] M. J. H. Taylor, *Encyclopedia of Modern Military Aircraft*. Smithmark Pub, 1988.
- [3] A. Clark, « Cirrus SR22: The Plane with the Parachute », *Discipl. Flight*, mai 2015.
- [4] B. Roucaries, « Contributions au contrôle non destructif des composites carbonés », Université de Toulouse, 2009.
- [5] G. Hug, « Analyse du comportement de stratifiés carbone/époxy sous sollicitation rapide. Elaboration par électrothermie diélectrique d'un même matériau pour comparaison », Arts et Métiers ParisTech, 2005.
- [6] A.-L. Goleanu, « Optimisation des réseaux quasiéquipotentiels dans un environnement aéronautique composite », Université de Grenoble, 2012.
- [7] « Un avion peut-il être frappé par la foudre ? », *Futura Sciences*.
- [8] C. Dumas, « Comment un avion peut-il être foudroyé ? », *Sciences et avenir*, juin-2009.
- [9] Airbus, « FAST: Flight Airworthiness Support Technology », n° 53, janv-2014.
- [10] S. M. Braden, M. J. Doherty, et S. M. Scott, « Current return network », US20100127564, oct-2011.
- [11] « CORAC Aéro Recherche – Aéronautique Civile ». [En ligne]. Disponible sur: <http://aerorecherchecorac.com/>.
- [12] D. Stauffer et A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*. Taylor & Francis, 1992.
- [13] A. Barrat et M. Weigt, « On the properties of small-world network models », *Eur. Phys. J. B-Condens. Matter Complex Syst.*, vol. 13, n° 3, p. 547–560, 2000.
- [14] R. Cohen, D. ben-Avraham, et S. Havlin, « Percolation critical exponents in scale-free networks », *Phys. Rev. E*, vol. 66, n° 3, p. 036113, sept. 2002.
- [15] M. Sahimi, B. D. Hughes, L. E. Scriven, et H. T. Davis, « Critical exponent of percolation conductivity by finite-size scaling », *J. Phys. C Solid State Phys.*, vol. 16, n° 16, juin 1983.

- [16] P. Abry, M. Clausel, S. Jaffard, S. Roux, et B. Vedel, « Hyperbolic wavelet transform: an efficient tool for multifractal analysis of anisotropic textures », 2012.
- [17] Bruno Lashermes, S. Jaffard, et Patrice Abry, « Wavelet Leader based Multifractal Analysis », *IEEE*, vol. 4, p. 161-164, 2005.
- [18] D. Movshovitz et S. Havlin, « Structural and dynamical properties of random walk clusters », *J. Phys. Math. Gen.*, vol. 21, n° 12, p. 2761, 1988.
- [19] J. D. Noh, « Random Walks on Complex Networks », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, n° 11, mars 2004.
- [20] O. Pinaud, « Caractérisation, modélisation et identification de sources de champ magnétique dans un véhicule électrique », Université de Grenoble, 2014.
- [21] G. Rostaing, « Diagnostic de défaut dans les entraînements électriques », Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.
- [22] X. F. Wang et G. Chen, « Complex networks: small-world, scale-free and beyond », *IEEE Circuits Syst. Mag.*, vol. 3, n° 1, p. 6-20, 2003.
- [23] E. Cotilla Sanchez, P. Hines, C. Barrows, et S. Blumsack, « Comparing the Topological and Electrical Structure of the North American Electric Power Infrastructure », *IEEE Syst. J.*, vol. 6, n° 4, déc. 2012.
- [24] A. Dwivedi, « Vulnerability analysis and fault location in power systems using complex network theory », RMIT University, 2011.
- [25] G. Alexanderson, « About the cover: Euler and Königsberg's Bridges: A historical view », *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 43, n° 4, p. 567–573, 2006.
- [26] C. Hierholzer et C. Wiener, « Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren », *Math. Ann.*, vol. 6, n° 1, p. 30-32, mars 1873.
- [27] L. Euler, « Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis », *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8, vol. 7, 1741.
- [28] S. Vishveshwara, K. V. Brinda, et N. Kannan, « Protein structure: insights from graph theory », *J. Theor. Comput. Chem.*, vol. 1, n° 01, p. 187–211, 2002.

- [29] S. P. Borgatti, A. Mehra, D. J. Brass, et G. Labianca, « Network Analysis in the Social Sciences », *Science*, vol. 323, n° 5916, p. 892-895, févr. 2009.
- [30] I. Gutman, D. Vidovic, et D. Stevanovic, « Chemical applications of the Laplacian spectrum. VI. On the largest Laplacian eigenvalue of alkanes », *J. Serbian Chem. Soc.*, vol. 67, n° 6, p. 407-413, 2002.
- [31] R. Cabane, *Théorie des graphes*. Ed. Techniques Ingénieur, 2000.
- [32] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, et D. Hwang, « Complex networks: Structure and dynamics », *Phys. Rep.*, vol. 424, n° 4-5, p. 175-308, févr. 2006.
- [33] J. A. Bondy et U. S. R. Murty, « Théorie des graphes ». 2008.
- [34] T. Biyikoğu, J. Leydold, et P. F. Stadler, *Laplacian Eigenvectors of Graphs*, vol. 1915. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [35] G. Dahlquist et Å. Björck, *Numerical Methods*. Courier Corporation, 2012.
- [36] R. Penrose, « A generalized inverse for matrices », in *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, 1955, vol. 51, p. 406–413.
- [37] « Gephi - The Open Graph Viz Platform ». [En ligne]. Disponible sur: <https://gephi.org/>.
- [38] R. Albert et A.-L. Barabási, « Statistical mechanics of complex networks », *Rev. Mod. Phys.*, vol. 74, n° 1, p. 47, 2002.
- [39] D. J. Watts et S. H. Strogatz, « Collective dynamics of ‘small-world’ networks », *Nature*, vol. 393, p. 440-442, juin 1998.
- [40] C. Y. Lee, « An algorithm for path connections and its applications », *IRE Trans. Electron. Comput.*, n° 3, p. 346–365, 1961.
- [41] E. W. Dijkstra, « A note on two problems in connexion with graphs », *Numer. Math.*, vol. 1, n° 1, p. 269–271, 1959.
- [42] D. J. Klein et M. Randić, « Resistance distance », *J. Math. Chem.*, vol. 12, n° 1, p. 81–95, 1993.
- [43] M. E. Newman, « A measure of betweenness centrality based on random walks », *Soc. Netw.*, vol. 27, n° 1, p. 39–54, 2005.

- [44] U. Brandes et C. Pich, « Centrality estimation in large networks », *J. Bifurc. Chaos*, 2007.
- [45] P. G. Doyle et J. L. Snell, « Random walks and electric networks », vol. 3, 2000.
- [46] M. T. Schaub, J. Lehmann, S. N. Yaliraki, et M. Barahona, « Structure of complex networks: Quantifying edge-to-edge relations by failure-induced flow redistribution », *Netw. Sci.*, vol. 2, n° 01, p. 66–89, 2014.
- [47] T. L. Magnanti et J. B. Orlin, « Network Flows », *PHI Englewood Cliffs NJ*, 1993.
- [48] L. R. Ford et D. R. Fulkerson, *A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem*. 1955.
- [49] L. C. Freeman, S. P. Borgatti, et D. R. White, « Centrality in valued graphs: A measure of betweenness based on network flow », *Soc. Netw.*, vol. 13, p. 141-154, 1991.
- [50] A. K. Jain et R. C. Dubes, *Algorithms for clustering data*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1988.
- [51] D. M. Cvetkovic, « Applications of graph spectra: An introduction to the literature », *Appl. Graph Spectra*, vol. 13, n° 21, p. 7–31.
- [52] H. Liu, M. Cao, et C. W. Wu, « Coupling Strength Allocation for Synchronization in Complex Networks Using Spectral Graph Theory », *IEEE Trans. Circuits Syst. Regul. Pap.*, vol. 61, n° 5, p. 1520-1530, mai 2014.
- [53] A. E. Brouwer et W. H. Haemers, *Spectra of graphs*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [54] F. R. Chung, *Spectral graph theory*, vol. 92. American Mathematical Soc., 1997.
- [55] Y. Colin de Verdière, *Spectres de graphes*. Institut Fourier, 1991.
- [56] B. Mohar, Y. Alavi, G. Chartrand, et O. R. Oellermann, « The Laplacian spectrum of graphs », *Graph Theory Comb. Appl.*, vol. 2, p. 871–898, 1991.
- [57] D. A. Spielman, « Spectral Graph Theory ». Classes Applied Mathematics (Yale), 2012.
- [58] M. Fiedler, « Algebraic connectivity of graphs », *Czechoslov. Math. J.*, vol. 23, n° 2, p. 298-305, 1973.

- [59] N. M. M. de Abreu, « Old and new results on algebraic connectivity of graphs », *Linear Algebra Its Appl.*, vol. 423, n° 1, p. 53-73, mai 2007.
- [60] B. Mohar, « Isoperimetric numbers of graphs », *J. Comb. Theory Ser. B*, vol. 47, n° 3, p. 274–291, 1989.
- [61] S. John William et R. Baron, *The theory of Sound*, vol. 1. 1877.
- [62] U. Von Luxburg, « A tutorial on spectral clustering », *Stat. Comput.*, vol. 17, n° 4, p. 395–416, 2007.
- [63] F. R. Chung, « Laplacians of graphs and Cheeger's inequalities », *Comb. Paul Erdos Eighty*, vol. 2, n° 157-172, p. 13–2, 1996.
- [64] C. Song, S. Havlin, et H. A. Makse, « Self-similarity of complex networks », *Nature*, vol. 433, n° 7024, p. 392–395, 2005.
- [65] S. Havlin et D. ben-Avraham, « Diffusion and fracton dimensionality on fractals and on percolation clusters », *J. Phys. Math. Gen.*, vol. 16, n° 13, p. L483, 1983.
- [66] T.-T.-M. Le et N. Retiere, « Exploring the scale invariant structure of smart grids », août 2013.
- [67] J.-G. Caputo, A. Knippel, et E. Simo, « Oscillations of networks: the role of soft nodes », *J. Phys. Math. Theor.*, vol. 46, n° 3, janv. 2013.
- [68] R. Courant et D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics Volume 1*. Weinheim: Wiley-VCH, 2008.
- [69] B. Rozel, « La sécurisation des infrastructures critiques: recherche d'une méthodologie d'identification des vulnérabilités et modélisation des interdépendances », Institut National Polytechnique de Grenoble, 2009.
- [70] L. Page, S. Brin, R. Motwani, et T. Winograd, « The PageRank citation ranking: bringing order to the Web. », 1999.
- [71] K. Bryan et T. Leise, « The \$25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google », *SIAM Rev.*, vol. 48, n° 3, p. 569-581, janv. 2006.
- [72] P. Bonacich, « Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification », *J. Math. Sociol.*, vol. 2, p. 113-120, 1972.
- [73] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Laloë, *Mécanique quantique Tome 2*. Hermann, 1979.

- [74] L. M. Jones, « Introduction to mathematical methods of physics », janv. 1979.
- [75] M. Bandinelli *et al.*, « A Surface PEEC Formulation for High-Fidelity Analysis of the Current Return Networks in Composite Aircrafts », *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 57, n° 5, p. 1027-1036, oct. 2015.
- [76] R. Holm, *Electric contacts: theory and application*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [77] E. Morin, « Modélisation d'un réseau électrique de tramway: du composant au système », Université Joseph Fourier, 2005.
- [78] M. Braunovic, N. K. Myshkin, et V. V. Konchits, *Electrical Contacts: Fundamentals, Applications and Technology*. CRC Press, 2006.
- [79] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics. 1994.
- [80] P. Segalat, « Méthodes de Points Intérieurs et de quasi-Newton », Université de Limoges, 2002.
- [81] S. Y. Shafi, M. Arcak, et L. E. Ghaoui, « Designing node and edge weights of a graph to meet Laplacian eigenvalue constraints », in *Communication, Control, and Computing (Allerton), 2010 48th Annual Allerton Conference on*, 2010, p. 1016–1023.
- [82] S. Y. Shafi, M. Arcak, et L. El Ghaoui, « Graph Weight Allocation to Meet Laplacian Spectral Constraints », *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 57, n° 7, p. 1872-1877, juill. 2012.
- [83] A. Wächter et L. T. Biegler, « On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming », *Math. Program.*, vol. 106, n° 1, p. 25-57, mars 2006.
- [84] « OPTI Toolbox », *Inverse Problem Ltd.* [En ligne]. Disponible sur: <https://www.inverseproblem.co.nz/OPTI/>.
- [85] S. J. Benson et Y. Ye, « Algorithm 875: DSDP5—software for semidefinite programming », *ACM Trans. Math. Softw. TOMS*, vol. 34, n° 3, p. 16, 2008.
- [86] F. Kamoun Charfi, « Surveillance des systèmes électroniques de puissance embarqués dans le véhicule électrique », Université de SFAX, 2004.

- [87] S. Bachir, I. B. A. Bazine, T. Poinot, K. Jellassi, et J.-C. Trigeassou, « Estimation paramétrique pour le diagnostic des processus: Application à la bobine à noyau de fer », *J. Eur. Systèmes Autom.*, vol. 42, n° 5, p. 509–539, 2008.
- [88] S. Moreau, *Contribution à la modélisation et à l'estimation paramétrique des machines électriques à courant alternatif: application au diagnostic*. 1999.
- [89] J.-C. Trigeassou, *Diagnostic des machines électriques*. Lavoisier, 2011.
- [90] D. W. Marquardt, « An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters », *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 11, n° 2, p. 431-441, juin 1963.
- [91] A. Ghosh, S. Boyd, et A. Saberi, « Minimizing Effective Resistance of a Graph », in *Theory of Networks and Systems*, Kyoto, Japan, 2006.
- [92] R. Merris, « Laplacian graph eigenvectors », *Linear Algebra Its Appl.*, vol. 278, n° 1-3, p. 221-236, juill. 1998.
- [93] I. A. Hiskens et J. V. Milanovic, « Locating dynamic loads which significantly influence damping », *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 12, n° 1, p. 255-261, févr. 1997.
- [94] A. Ghosh, S. Boyd, et A. Saberi, « Minimizing Effective Resistance of a Graph », *SIAM Rev.*, vol. 50, n° 1, p. 37-66, janv. 2008.

Annexes

SOMMAIRE DES ANNEXES

A.	Equivalence entre la matrice Laplacienne et la matrice admittance	158 -
B.	Pseudo-inverse de la matrice Laplacienne	160 -
C.	Semi-positivité de la matrice Laplacienne	161 -
D.	Première valeur propre de la matrice Laplacienne nulle.....	162 -
E.	Validation des modifications de la connectivité algébrique θ_2 estimées par l'analyse perturbative	163 -
F.	Validation des modifications d'une chute de tension estimées par l'analyse perturbative.....	166 -
G.	Caractéristiques des éléments de la maquette DEMLAB	169 -
H.	Représentation du graphe de la maquette DEMLAB.....	170 -
I.	Spectres complets des résistances pour les chemins (terminus 18 – nœud 212) et (terminus 12 – nœud 212).....	171 -
J.	Sensibilité d'une chute de tension à la variation de masse d'une branche ...	172 -
K.	Mesures sur le réseau test.....	175 -
	K.1. Mesures pour la configuration 1	175 -
	K.2. Mesures dans la configuration 2	178 -

A. Equivalence entre la matrice Laplacienne et la matrice admittance

On considère le nœud i auquel est injectée une puissance $S_i = P_i + jQ_i$. Ce nœud est connecté à un autre nœud j via une ligne de transmission suivant une modélisation en Pi de paramètres série y_{ij}^S et parallèle y_{ij}^P . La Figure A-1 illustre le bilan de puissance au nœud i (convention générateur) :

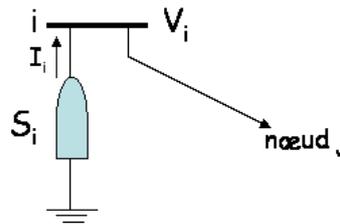


Figure A-1. Nœud i .

avec : $\bar{S} = \bar{V}\bar{I}^* = P + jQ = VIe^{j\varphi}$

Dans un réseau de n nœuds, le courant nodal I_i peut s'écrire sous la forme suivante en utilisant les notations précédemment définies :

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{S_i^*}{V_i^*} = V_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij}^P + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij}^S (V_i - V_j) \\ &= V_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (y_{ij}^P + y_{ij}^S) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij}^S V_j \end{aligned} \quad \text{A-1}$$

En introduisant les vecteurs courant I et tensions nodales V , on obtient la représentation matricielle suivante :

$$Y * V = I \quad \text{A-2}$$

Avec la matrice admittance Y égale à :

$$Y = \begin{pmatrix} \sum_{j=2}^n (y_{1j}^P + y_{1j}^S) & -y_{12}^S & \cdots & -y_{1n}^S \\ -y_{21}^S & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n (y_{2j}^P + y_{2j}^S) & \cdots & -y_{2n}^S \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{n1}^S & -y_{n2}^S & \cdots & \sum_{j=1}^{n-1} (y_{nj}^P + y_{nj}^S) \end{pmatrix} \quad \text{A-3}$$

Dans nos réseaux électriques les paramètres parallèles sont nuls y_{ij}^p et les paramètres séries uniquement résistifs, on retrouve donc bien la définition de la matrice Laplacienne d'un graphe avec les points w_{ij} égaux aux admittances des branches :

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{avec } L_{uv} = \begin{cases} -w_{uv} & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont adjacents;} \\ \sum_{p \in \text{vois}(u)} w_{up} & \text{si } u = v; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

B. Pseudo-inverse de la matrice Laplacienne

Il est facile de calculer les courants nodaux d'un réseau électrique à partir des tensions nodales avec la relation suivante :

$$LV = I \quad \text{B-1}$$

Pour obtenir les tensions des nœuds en fonction des courants nodaux, on doit inverser la matrice Laplacienne L mais elle n'est pas inversible. Cela correspond au fait que les potentiels des nœuds ont une référence arbitraire de tension qui doit être fixée pour résoudre les équations de circuit. Généralement, le problème est résolu en imposant un nœud u du réseau au potentiel zéro (il faut tout de même que le réseau soit connexe). Une inconnue est donc supprimée et les tensions sont obtenues en inversant la matrice Laplacienne dans laquelle on a retiré la $u^{\text{ième}}$ colonne et la $u^{\text{ième}}$ ligne.

Une seconde méthode permettant d'obtenir un unique vecteur des tensions est décrite par Moore et Penrose dans [36]. Le pseudo-inverse de Moore-Penrose L^\diamond est défini par :

$$L^\diamond = \left(L + \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T\right)^{-1} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \quad \text{B-2}$$

Avec $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ vecteur unitaire multiplié par sa transposé donc correspondant à une matrice remplie de 1.

Selon Ghosh et al. [94], on a aussi :

$$L^\diamond L = M_n^{\text{identité}} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \quad \text{B-3}$$

Alors, d'après l'équation B-1, il est possible d'écrire :

$$L^\diamond I = L^\diamond LV = \left(M_n^{\text{identité}} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T\right) V \quad \text{B-4}$$

D'où,

$$\begin{aligned} L^\diamond I &= V - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T V \\ &= V - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \end{aligned} \quad \text{B-5}$$

On peut désormais définir le vecteur des tensions nodales :

$$V = L^\diamond I + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \quad \text{B-6}$$

Le vecteur des tensions nodales est donc obtenu à une constante près grâce au pseudo-inverse de Moore-Penrose.

C. Semi-positivité de la matrice Laplacienne

La matrice Laplacienne du graphe est une matrice semi définie positive, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. Pour le démontrer, il est nécessaire de réécrire la relation entre la matrice Laplacienne L et les matrices d'incidence M_{inc} et de poids W :

$$L = M_{inc} * W * M_{inc}^T \quad \text{C-1}$$

Comme tous les poids sont positifs, on peut définir une matrice P :

$$P = (M_{inc} * W_{rac})^T \quad \text{C-2}$$

avec W_{rac} matrice diagonale composée de la racine carré des poids des branches. Et donc :

$$\begin{aligned} P^T P &= M_{inc} W_{rac} (M_{inc} W_{rac})^T \\ &= M_{inc} W_{rac} * W_{rac}^T M_{inc}^T \\ &= M_{inc} W M_{inc}^T \\ &= L \end{aligned} \quad \text{C-3}$$

Alors quel que soit le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x^T L x = (P x)^T (P x) = \|P x\|^2 \geq 0 \quad \text{C-4}$$

Prenons maintenant un vecteur propre normalisé ψ_i associé à une valeur propre θ_i . Ils sont reliés grâce à :

$$\begin{aligned} L \psi_i &= \theta_i \psi_i \\ \psi_i^T L \psi_i &= \theta_i \psi_i^T \psi_i \\ \psi_i^T L \psi_i &= \theta_i \end{aligned} \quad \text{C-5}$$

Donc, d'après l'équation C-4, les valeurs propres de la matrice Laplacienne sont positives ou nulles.

D. Première valeur propre de la matrice Laplacienne nulle

Pour démontrer que la plus petite valeur propre de la matrice Laplacienne du graphe est toujours nulle on doit introduire le quotient de Rayleigh [61] :

$$R(L, x) = \frac{x^T L x}{x^T x} \quad \text{D-1}$$

avec x un vecteur colonne de n lignes.

De par les propriétés de la matrice Laplacienne, le quotient peut être réécrit sous la forme [62] :

$$R(L, x) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{u \sim v} ((x)_u - (x)_v)^2 w_{uv}}{\sum_u (x)_u^2} \geq 0 \quad \text{D-2}$$

avec $u \sim v$: u voisin de v .

D'après le théorème de Courant-Fisher, on sait que le quotient de Rayleigh est borné par les valeurs propres de la matrice Laplacienne du graphe :

$$\begin{aligned} \min_{x \neq 0} R(L, x) &= \min(\theta) = \theta_1 \\ \max_{x \neq 0} R(L, x) &= \max(\theta) = \theta_n \end{aligned} \quad \text{D-3}$$

Considérons maintenant un vecteur unitaire g défini tel que pour tout u $g(u)=1$, l'équation D-2 devient donc :

$$R(L, x) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{u \sim v} ((g)_u - (g)_v)^2 w_{uv}}{\sum_u (g)_u^2} = 0 \quad \text{D-4}$$

Puisque pour tout vecteur x le quotient de Rayleigh est toujours positif, les équations D-3 et D-4 impliquent :

$$\theta_1 = 0 \quad \text{D-5}$$

E. Validation des modifications de la connectivité algébrique θ_2 estimées par l'analyse perturbative

Les modifications de la connectivité algébrique θ_2 estimées par l'analyse perturbative et simulées numériquement du réseau maillé sont données dans le Tableau E-1 pour une variation de 1 % de l'admittance de chaque branche. Les valeurs simulées sont obtenues à partir du calcul numérique de la connectivité algébrique sur les graphes des réseaux dégradés.

On remarque que les erreurs sont faibles et toutes inférieures à 1,4 % donc on peut conclure que notre méthode de calcul fonctionne parfaitement pour des faibles variations de la matrice Laplacienne du graphe. Pour des variations supérieures, par exemple 20%, le Tableau E-2 montre une erreur qui est en moyenne de 17,7 % et peut aller jusqu'à 28,4 %. Ces erreurs peuvent être facilement expliquées par la simplification des termes du second ordre réalisée dans l'équation III-46 alors qu'ils sont loin d'être négligeable pour de telles variations.

Branche	Entre les nœuds		$\Delta\theta_2$ estimé	$\Delta\theta_2$ simulé	Erreur (%)
1	1	2	0,009	0,009	0,82
2	3	4	0,340	0,337	0,87
3	4	5	0,802	0,792	1,20
4	1	6	0,025	0,025	0,94
5	2	7	0,000	0,000	1,15
6	6	7	0,069	0,069	0,75
7	3	8	1,282	1,271	0,83
8	7	8	0,703	0,694	1,39
9	4	9	0,996	0,988	0,82
10	8	9	0,514	0,510	0,86
11	9	10	0,537	0,532	0,96
12	6	11	0,200	0,198	0,89
13	7	12	0,427	0,424	0,72
14	11	12	0,003	0,003	0,76
15	8	13	1,676	1,667	0,55
16	12	13	0,039	0,039	0,93
17	13	14	0,042	0,041	0,91
18	10	15	1,026	1,018	0,82
19	14	15	0,221	0,220	0,75
20	11	16	0,181	0,179	0,83
21	12	17	0,531	0,527	0,67
22	16	17	0,061	0,060	0,98
23	13	18	0,764	0,760	0,56
24	17	18	0,003	0,003	0,83
25	14	19	0,369	0,366	0,61
26	18	19	0,004	0,004	0,79
27	15	20	0,343	0,341	0,76
28	19	20	0,242	0,240	0,84
29	17	22	0,625	0,619	0,96
30	21	22	0,303	0,299	1,30
31	18	23	0,438	0,435	0,66
32	22	23	0,033	0,032	0,97
33	19	24	0,684	0,678	0,85
34	23	24	0,010	0,010	1,01
35	24	25	0,277	0,273	1,35

Tableau E-1. Comparaison de la modification de θ_2 estimé et simulé pour une variation de 1% de l'admittance.

Branche	Entre les nœuds		$\Delta\theta_2$ estimé	$\Delta\theta_2$ simulé	Erreur (%)
1	1	2	0,181	0,155	16,42
2	3	4	6,798	5,792	17,37
3	4	5	16,031	12,916	24,12
4	1	6	0,500	0,420	18,87
5	2	7	0,002	0,002	23,03
6	6	7	1,383	1,203	14,97
7	3	8	25,633	21,930	16,89
8	7	8	14,065	10,954	28,40
9	4	9	19,917	17,094	16,51
10	8	9	10,288	8,765	17,38
11	9	10	10,735	9,004	19,23
12	6	11	3,997	3,392	17,82
13	7	12	8,537	7,461	14,43
14	11	12	0,064	0,056	15,25
15	8	13	33,524	30,212	10,96
16	12	13	0,778	0,657	18,53
17	13	14	0,832	0,704	18,25
18	10	15	20,522	17,638	16,35
19	14	15	4,423	3,845	15,03
20	11	16	3,613	3,098	16,62
21	12	17	10,613	9,358	13,41
22	16	17	1,218	1,018	19,63
23	13	18	15,284	13,745	11,20
24	17	18	0,053	0,046	16,55
25	14	19	7,375	6,568	12,29
26	18	19	0,079	0,068	15,83
27	15	20	6,863	5,959	15,17
28	19	20	4,836	4,142	16,75
29	17	22	12,504	10,485	19,25
30	21	22	6,051	4,799	26,09
31	18	23	8,756	7,734	13,21
32	22	23	0,652	0,546	19,42
33	19	24	13,671	11,679	17,05
34	23	24	0,209	0,174	20,13
35	24	25	5,535	4,353	27,13

Tableau E-2. Comparaison de la modification de θ_2 estimé et simulé pour une variation de 20% de l'admittance.

F. Validation des modifications d'une chute de tension estimées par l'analyse perturbative

Les modifications de la chute de tension entre la source et la charge estimée par l'analyse perturbative et simulée numériquement du réseau maillé sont données dans le Tableau F-1 pour une variation de 1 % de l'admittance de chaque branche. Les valeurs simulées sont obtenues à partir du calcul numérique par résolution des équations circuit de la chute de tension sur les graphes des réseaux dégradés.

On remarque que les erreurs sont faibles et quasiment toutes inférieures à 2 %. Pour des variations entraînant des petites modifications de la chute de tension les erreurs sont parfois plus importantes. On peut néanmoins conclure que notre méthode d'estimation est performante pour des faibles variations de la matrice Laplacienne du graphe. Pour des variations supérieures, par exemple 20%, le Tableau F-2 montre une erreur qui est en moyenne de 12,2 %. Ces erreurs peuvent être facilement expliquées par les simplifications des termes du second ordre réalisé dans les équations III-46 et III-65 alors qu'ils sont loin d'être négligeables pour de telles variations.

Branche	Entre les nœuds		ΔV_{sc} estimée (μV)	ΔV_{sc} simulée (μV)	Erreur (%)
1	1	2	-5,87	-5,53	6,21
2	3	4	-6,26	-6,17	1,39
3	4	5	0,16	0,00	
4	1	6	-5,52	-5,53	-0,11
5	2	7	-5,56	-5,53	0,63
6	6	7	-50,20	-49,85	0,69
7	3	8	-6,21	-6,17	0,64
8	7	8	-106,59	-105,88	0,67
9	4	9	-6,18	-6,17	0,11
10	8	9	-55,96	-55,63	0,60
11	9	10	-99,59	-98,74	0,87
12	6	11	-88,81	-88,53	0,32
13	7	12	-0,74	-0,78	-5,06
14	11	12	-244,52	-243,16	0,56
15	8	13	-0,15	-0,12	23,49
16	12	13	-133,46	-132,83	0,47
17	13	14	-140,53	-139,77	0,54
18	10	15	-99,50	-98,74	0,77
19	14	15	-231,69	-230,33	0,59
20	11	16	-88,34	-88,08	0,30
21	12	17	-10,21	-10,17	0,41
22	16	17	-88,63	-88,08	0,63
23	13	18	-0,02	0,00	
24	17	18	-70,64	-70,29	0,50
25	14	19	-11,33	-11,27	0,54
26	18	19	-71,29	-70,92	0,52
27	15	20	-86,32	-85,81	0,59
28	19	20	-86,41	-85,81	0,70
29	17	22	-17,67	-17,59	0,49
30	21	22	-0,17	0,00	
31	18	23	0,02	0,00	
32	22	23	-17,90	-17,59	1,79
33	19	24	-17,79	-17,66	0,72
34	23	24	-17,81	-17,66	0,83
35	24	25	0,32	0,00	

Tableau F-1. Comparaison de la modification de V_{sc} estimée et simulée pour une variation de 1% de l'admittance.

Branche	Entre les nœuds		ΔV_{sc} estimée (μV)	ΔV_{sc} simulée (μV)	Erreur (%)
1	1	2	-0,22	-0,10	130,85
2	3	4	-0,14	-0,11	29,37
3	4	5	0,06	0,00	
4	1	6	-0,09	-0,10	-3,99
5	2	7	-0,11	-0,10	12,24
6	6	7	-1,03	-0,90	14,03
7	3	8	-0,12	-0,11	12,68
8	7	8	-2,13	-1,88	13,46
9	4	9	-0,11	-0,11	0,74
10	8	9	-1,11	-0,99	11,91
11	9	10	-2,02	-1,72	17,47
12	6	11	-1,66	-1,57	5,63
13	7	12	0,00	-0,01	-110,42
14	11	12	-4,88	-4,39	11,16
15	8	13	-0,01	0,00	
16	12	13	-2,63	-2,41	9,29
17	13	14	-2,78	-2,51	10,73
18	10	15	-1,99	-1,72	15,44
19	14	15	-4,59	-4,11	11,69
20	11	16	-1,64	-1,56	5,15
21	12	17	-0,20	-0,18	7,92
22	16	17	-1,75	-1,56	12,52
23	13	18	-0,01	0,00	
24	17	18	-1,40	-1,27	9,90
25	14	19	-0,23	-0,20	10,65
26	18	19	-1,42	-1,28	10,42
27	15	20	-1,69	-1,52	11,56
28	19	20	-1,73	-1,52	13,98
29	17	22	-0,34	-0,31	9,40
30	21	22	-0,07	0,00	
31	18	23	0,01	0,00	
32	22	23	-0,43	-0,31	37,97
33	19	24	-0,36	-0,31	14,37
34	23	24	-0,36	-0,31	16,71
35	24	25	0,12	0,00	

Tableau F-2. Comparaison de la modification de V_{sc} estimée et simulée pour une variation de 20% de l'admittance.

G. Caractéristiques des éléments de la maquette DEMLAB

Cette annexe présente les principales caractéristiques des éléments de la maquette DEMLAB ainsi que les valeurs des résistances de contact.

Élément	Section (mm ²)	Résistivité (Ω.m)	Masse volumique (kg/m ³)
Cadre (Cu)	49,48	1,80.10 ⁻⁸	8920
Traverse	112,00	1,87.10 ⁻⁸	8920
Chemins de câbles (Cu)	60,80	1,59.10 ⁻⁸	8920
Bandes de cuivre	32,18	1,86.10 ⁻⁸	8920

Tableau G-1. Caractéristiques des éléments de structure de la maquette DEMLAB.

Contact	Résistance moyenne mesurée (mΩ)
Cadre - traverse	1,55
Cadre – chemin de câble	1,01
Traverse – chemin de câble	3,70.10 ⁻²
Cadre – fuselage	1,46
Chemin de câble supérieur – fuselage	4,71

Tableau G-2. Valeurs des résistances de contacts mesurées sur des échantillons dans la maquette DEMLAB

H. Représentation du graphe de la maquette DEMLAB

Une seconde représentation non géométrique du graphe de DEMLAB a été réalisée à partir du logiciel Gephi [37] grâce à la visualisation *Force Atlas*. On retrouve les différents éléments de la structure de la maquette : en marron les cadres, en bleu les chemins de câbles, en gris les traverses, en orange les bandes de cuivre. De plus dans cette représentation les résistances de contact (en rouge) sont visibles. Les éléments radiaux non maillés de la Figure H-1 sont les traverses et les chemins de câbles connectés à des cadres isolés de la maquette.

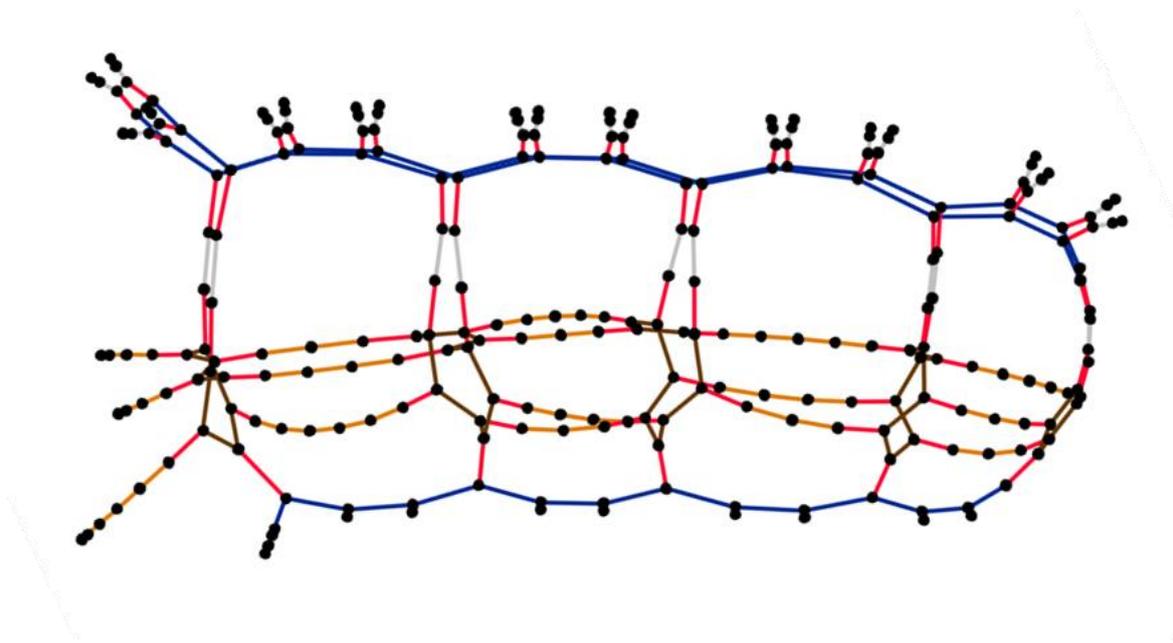


Figure H-1 Représentation du graphe de DEMLAB avec la visualisation *Force Atlas* du logiciel Gephi.

I. Spectres complets des résistances pour les chemins (terminus 18 – nœud 212) et (terminus 12 – nœud 212)

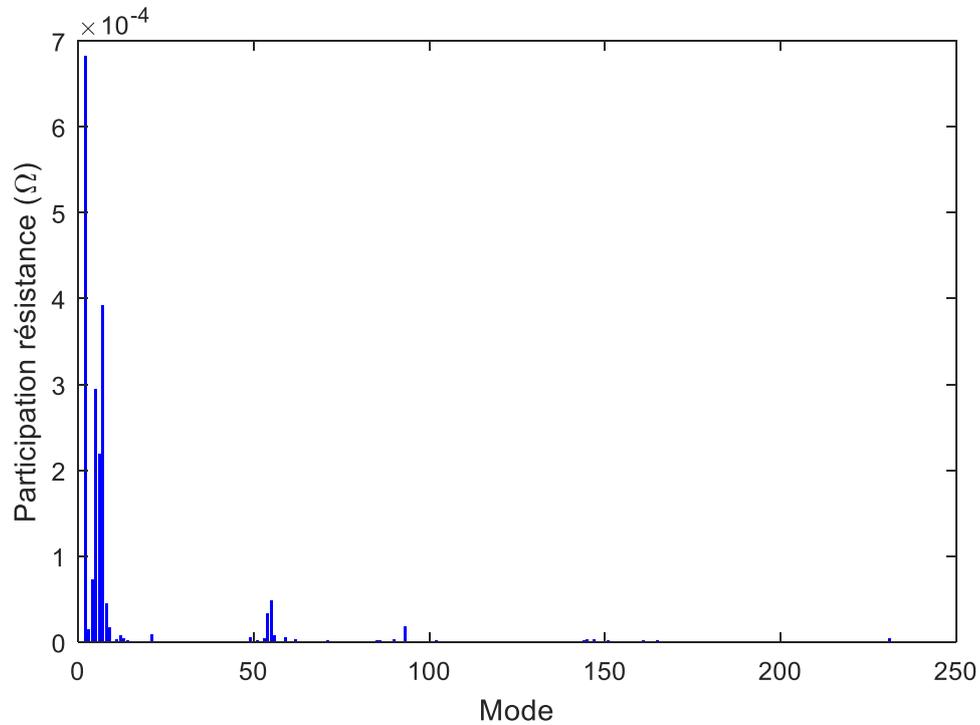


Figure I-1. Spectre de la résistance entre les nœuds 125 (terminus 18) et 212.

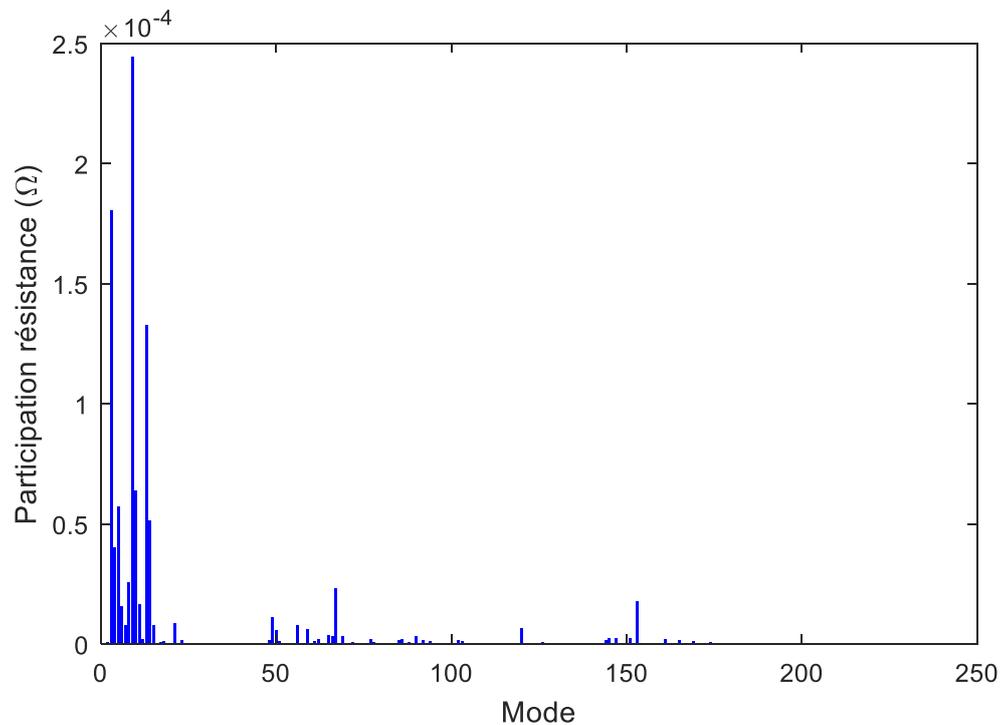


Figure I-2. Spectre de la résistance entre les nœuds 119 (terminus 12) et 212.

J. Sensibilité d'une chute de tension à la variation de masse d'une branche

Pour rappel, la partie III.2.4 démontre que les modifications des valeurs et vecteurs propres de la matrice Laplacienne lors de petites variations peuvent être obtenues à partir du spectre initial de la matrice. Les valeurs et vecteurs propres de la matrice Laplacienne après une petite variation ΔL se calcule grâce à :

$$\theta_i = \theta_{i0} + \psi_{0i}^T \Delta L \psi_{0i} \quad \text{J-1}$$

$$\psi_i = \psi_{0i} + \sum_{k \neq i}^n \frac{\psi_{0k}^T \Delta L \psi_{0i}}{\theta_{0i} - \theta_{0k}} \psi_{0k} \quad \text{J-2}$$

Nous voulons utiliser ces équations pour évaluer la sensibilité des chutes de tension à la variation de masse des branches du réseau. Pour cela, dans un premier temps, nous allons calculer les sensibilités du spectre du graphe de la matrice Laplacienne à la variation de la masse d'une branche du réseau.

Lorsqu'une masse Δm est ajoutée à la branche entre les nœuds u et v , la variation de la matrice Laplacienne ΔL s'écrit :

$$\Delta L = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \frac{\Delta m}{\mu \rho l_{uv}^2} & \vdots & -\frac{\Delta m}{\mu \rho l_{uv}^2} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -\frac{\Delta m}{\mu \rho l_{uv}^2} & \vdots & \frac{\Delta m}{\mu \rho l_{uv}^2} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{J-3}$$

où μ , ρ et l_{uv} sont respectivement la masse volumique, la résistivité et la longueur de la branche entre les nœuds u et v . A partir de l'équation J-1 il est possible de déterminer les nouvelles valeurs propres lors de la variation d'une branche :

$$\theta_i = \theta_{0i} + \left(\frac{\Delta m}{\mu \rho l_{uv}^2} \left((\psi_{0i})_u - (\psi_{0i})_v \right)^2 \right) \quad \text{J-4}$$

Et donc la sensibilité des valeurs propres à la variation de la masse entre les nœuds u et v est donnée par :

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial m_{uv}} = \frac{1}{\mu \rho l_{uv}^2} \left((\psi_{0i})_u - (\psi_{0i})_v \right)^2 \quad \text{J-5}$$

De la même manière l'équation J-2 permet de définir les vecteurs propres du réseau modifié :

$$\psi_i = \psi_{0i} + \frac{\Delta m}{\mu \rho l_{uv}^2} \sum_{k \neq i}^n \left[\left(\frac{(\psi_{0i})_u ((\psi_{0k})_u - (\psi_{0k})_v)}{\theta_{0i} - \theta_{0k}} + \frac{(\psi_{0i})_v ((\psi_{0k})_v - (\psi_{0k})_u)}{\theta_{0i} - \theta_{0k}} \right) \psi_{0k} \right] \quad \text{J-6}$$

Et la sensibilité d'un vecteur propre à la variation de la masse d'une est donnée par :

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial m_{uv}} = \frac{1}{\mu \rho l_{uv}^2} \sum_{k \neq i}^n \left[\left(\frac{(\psi_{0i})_u ((\psi_{0k})_u - (\psi_{0k})_v)}{\theta_{0i} - \theta_{0k}} + \frac{(\psi_{0i})_v ((\psi_{0k})_v - (\psi_{0k})_u)}{\theta_{0i} - \theta_{0k}} \right) \psi_{0k} \right] \quad \text{J-7}$$

Les tensions nodales peuvent être exprimées en fonction du spectre de la matrice Laplacienne (voir partie III.2.1.1) :

$$V_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^n \frac{(\psi_k)_i (\psi_k)_j}{\theta_k} \right) I_j \quad \text{J-8}$$

Alors les sensibilités des chutes de tension peuvent être obtenues à partir des modifications des valeurs et vecteurs propres. Avant les modifications, la $i^{\text{ème}}$ tension nodale peut être exprimée par :

$$V_{0i} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^n \frac{(\psi_{0k})_i (\psi_{0k})_j}{\theta_{0k}} \right) I_j \quad \text{J-9}$$

Après une petite variation de la matrice Laplacienne elle s'écrit :

$$V_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^n \frac{(\psi_k)_i (\psi_k)_j}{\theta_k} \right) I_j \quad \text{J-10}$$

avec $V_i = V_{0i} + \Delta V_i$, $\psi_i = \psi_{i0} + \Delta \psi_i$ et $\theta_i = \theta_{i0} + \Delta \theta_i$.

D'où la modification de la tension nodale du nœud i s'exprime :

$$\Delta V_i = \sum_{j=1}^n I_j \left[\sum_{k=2}^n \left(\frac{((\psi_{0k})_i + (\Delta \psi_k)_i)((\psi_{0k})_j + (\Delta \psi_k)_j)}{\theta_{0k} + \Delta \theta_k} - \frac{(\psi_{0k})_i (\psi_{0k})_j}{\theta_{0k}} \right) \right] \quad \text{J-11}$$

En développant et en négligeant les termes de second ordre, l'équation devient :

$$\Delta V_i = \sum_{j=1}^n I_j \left[\sum_{k=2}^n \left(\frac{((\Delta \psi_k)_i (\psi_{0k})_j + (\Delta \psi_k)_j (\psi_{0k})_i)}{(\theta_{0k} + \Delta \theta_k)} - \frac{\Delta \theta_k (\psi_{0k})_i (\psi_{0k})_j}{\theta_{0k} (\theta_{0k} + \Delta \theta_k)} \right) \right] \quad \text{J-12}$$

Tenant compte de (J-4) et (J-6), la sensibilité de la tension nodale à la variation de masse d'une branche entre les nœuds u et v est :

$$\frac{\partial V_i}{\partial m_{uv}} = \sum_{j=1}^n I_j \left[\sum_{k=2}^n \frac{\theta_{0k} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial m_{uv}} \right)_i (\psi_{0k})_j + \theta_{0k} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial m_{uv}} \right)_j (\psi_{0k})_i - \frac{\partial \theta_k}{\partial m_{uv}} (\psi_{0k})_i (\psi_{0k})_j}{\left(\theta_{0k} + \Delta m \frac{\partial \theta_k}{\partial m_{uv}} \right)^2} \right] \quad \text{J-13}$$

A partir de cette équation la sensibilité d'une chute de tension entre une charge c et une source s à la variation de masse d'une branche peut facilement s'écrire :

$$\frac{\partial V_{cs}}{\partial m_{uv}} = \frac{\partial V_c}{\partial m_{uv}} - \frac{\partial V_s}{\partial m_{uv}} \quad \text{J-14}$$

K. Mesures sur le réseau test

Cette annexe donne les mesures utilisées dans la partie IV.3.3 pour la caractérisation des admittances de contacts C_1 à C_{12} du petit réseau test. Pour 12 chutes de tension et 17 courants, les mesures obtenues par simulation numérique du réseau test et les mesures physiques sont données pour deux configurations d'injection de courant. Les mesures physiques ont été réalisées suivant le montage décrit sur la Figure K-1. Un milliohmètre injecte un courant de 100 mA entre deux points du réseau. Les mesures de courants et de chutes de tension sont ensuite faites grâce à une pince de courant et un multimètre.

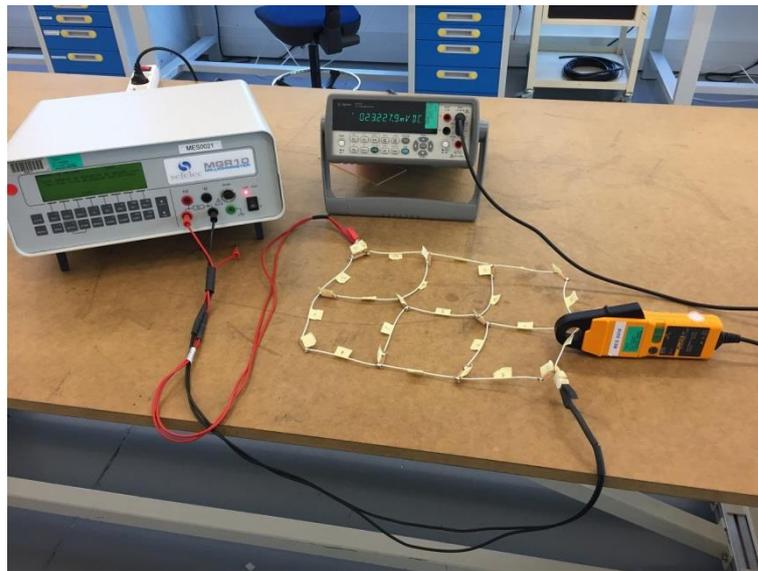


Figure K-1. Montage utilisé pour les mesures physiques.

K.1. Mesures pour la configuration 1

Dans cette configuration, un courant de 100 mA est injecté au nœud 9 et ressort au nœud 16.

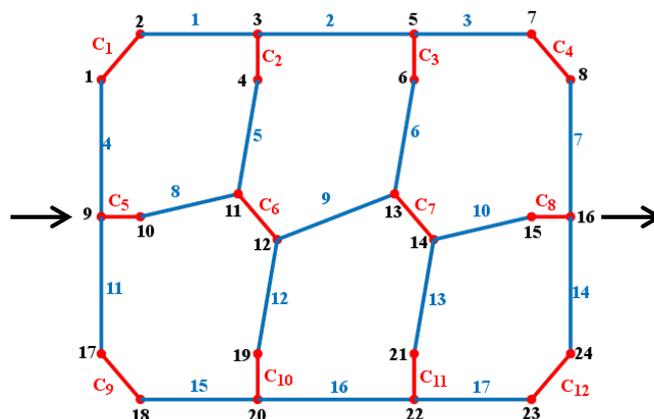


Figure K-2. Schéma de la configuration 1 - Injection entre les nœuds 9 et 16.

Mesures issues de simulations numériques

	Entre les nœuds		Chute de tension (mV)
dV_1	10	24	1032,9
dV_2	23	17	-826,1
dV_3	11	23	344,8
dV_4	18	11	-344,6
dV_5	2	12	68,4
dV_6	15	18	-206,2
dV_7	13	10	-275,7
dV_8	19	15	275,1
dV_9	4	7	207,4
dV_{10}	6	5	-68,3
dV_{11}	1	2	688,6
dV_{12}	13	14	275,1

Tableau K-1. Chutes de tension obtenues par simulation numérique pour la 1^{ère} configuration d'injection de courant.

	Courant traversant le câble (mA)
Câble 1	34,44
Câble 2	44,85
Câble 3	41,48
Câble 4	-34,5
Câble 5	-10,37
Câble 6	3,44
Câble 7	41,45
Câble 8	24,23
Câble 9	10,38
Câble 10	24,08
Câble 11	41,3
Câble 12	3,43
Câble 13	-10,37
Câble 14	-34,46
Câble 15	41,31
Câble 16	44,72
Câble 17	34,45

Tableau K-2. Courants obtenus par simulation numérique pour la 1^{ère} configuration d'injection de courant.

Mesures physiques sur le réseau test

	Entre les nœuds		Chute de tension (mV)
	dV_1	10	24
dV_2	23	17	-826,3
dV_3	11	23	344,9
dV_4	18	11	-344,6
dV_5	2	12	68,5
dV_6	15	18	-206,3
dV_7	13	10	-275,8
dV_8	19	15	275,2
dV_9	4	7	207,5
dV_{10}	6	5	-68,3
dV_{11}	1	2	688,7
dV_{12}	13	14	275,1

Tableau K-3. Mesures physiques des chutes de tension pour la 1^{ère} configuration d'injection de courant.

	Courant traversant le câble (mA)
Câble 1	33,89
Câble 2	45,16
Câble 3	41,12
Câble 4	-34,00
Câble 5	-9,90
Câble 6	2,88
Câble 7	41,02
Câble 8	23,49
Câble 9	9,74
Câble 10	23,15
Câble 11	40,96
Câble 12	3,50
Câble 13	-9,37
Câble 14	-33,90
Câble 15	40,79
Câble 16	44,17
Câble 17	34,09

Tableau K-4. Mesures physiques des courants pour la 1^{ère} configuration d'injection de courant.

K.2. Mesures dans la configuration 2

Dans cette configuration, un courant de 100 mA est injecté au nœud 5 et ressort au nœud 20.

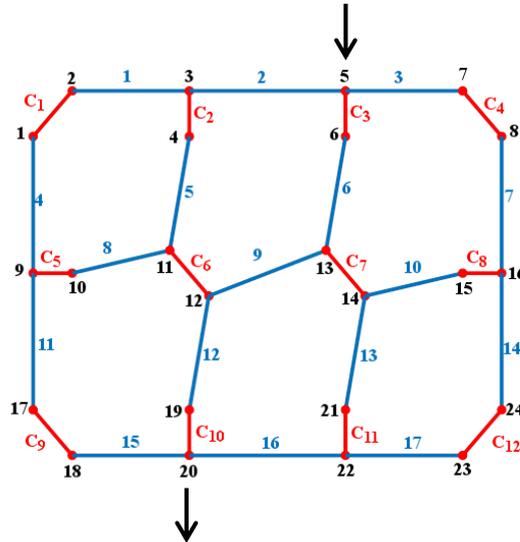


Figure K-3. Schéma de la configuration 2 – Injection entre les nœuds 5 et 20.

Mesures issues de simulations numériques

	Entre les nœuds		Chute de tension (mV)
dV_1	10	24	274,6
dV_2	23	17	-619,9
dV_3	11	23	757,3
dV_4	18	11	-757,4
dV_5	2	12	549,3
dV_6	15	18	345,2
dV_7	13	10	-205,4
dV_8	19	15	206,7
dV_9	4	7	-343,9
dV_{10}	6	5	-549,4
dV_{11}	1	2	-481,2
dV_{12}	13	14	206,8

Tableau K-5. Chutes de tension obtenues par simulation numérique pour la 2^{ème} configuration d'injection de courant.

	Courant traversant le câble (mA)
Câble 1	-24,2
Câble 2	-41,28
Câble 3	31,02
Câble 4	24,02
Câble 5	17,14
Câble 6	27,69
Câble 7	31,12
Câble 8	-6,93
Câble 9	-17,23
Câble 10	-7,04
Câble 11	30,94
Câble 12	27,54
Câble 13	17,12
Câble 14	24,16
Câble 15	30,97
Câble 16	-41,43
Câble 17	-24,17

Tableau K-6. Courants obtenus par simulation numérique pour la 2^{ème} configuration d'injection de courant.

Mesures physiques sur le réseau test

	Entre les nœuds		Chute de tension (mV)
dV_1	10	24	274,7
dV_2	23	17	-620,1
dV_3	11	23	757,5
dV_4	18	11	-757,5
dV_5	2	12	549,5
dV_6	15	18	345,3
dV_7	13	10	-205,3
dV_8	19	15	206,8
dV_9	4	7	-344,1
dV_{10}	6	5	-549,4
dV_{11}	1	2	-481,3
dV_{12}	13	14	482,7

Tableau K-7. Mesures physiques des chutes de tension pour la 2^{ème} configuration d'injection de courant.

	Courant traversant le câble (mA)
Câble 1	-23,49
Câble 2	-40,27
Câble 3	29,67
Câble 4	23,06
Câble 5	16,16
Câble 6	26,56
Câble 7	30,19
Câble 8	-6,02
Câble 9	-16,33
Câble 10	-6,07
Câble 11	30,06
Câble 12	26,67
Câble 13	15,99
Câble 14	23,45
Câble 15	30,4
Câble 16	-40,33
Câble 17	-23,09

Tableau K-8. Mesures physiques des courants pour la 2^{ème} configuration d'injection de courant.

Résumé

Depuis plusieurs années, l'aéronautique est confrontée à une mutation majeure due à l'émergence des matériaux composites. Ce changement, justifié par les excellentes propriétés mécaniques des matériaux composites et un gain de masse important, implique une complexification des systèmes électriques embarqués. En effet, la structure et le fuselage composites ne peuvent plus assurer les fonctions électriques essentielles de retour de courant. Par conséquent, les avions composites requièrent un réseau électrique additionnel, appelé « réseau de retour de courant ». Ce réseau pose deux nouvelles problématiques : le pré-dimensionnement de réseaux légers, fonctionnels et robustes et la surveillance de ces réseaux. Pour faciliter l'étude de ces problématiques, la thèse propose de lier au travers de l'analyse spectrale des graphes les performances des réseaux électriques avec leur topologie. Cette analyse permet de réduire le comportement d'un réseau à la somme de modes indépendants de la matrice Laplacienne. De ce fait, elle offre une lecture multi-échelle. Des liens entre la topologie du réseau et ses performances électriques ont été obtenus grâce à la connectivité algébrique du graphe et l'étude perturbative du spectre. Pour finir, plusieurs applications aéronautiques de cette nouvelle analyse sont proposées afin de résoudre nos deux problématiques de pré-dimensionnement et de surveillance.

Abstract

In recent years, there has been a major innovation in aeronautical industry, where the conventional metallic materials for aircrafts structure and fuselage have been replaced by new composite materials. This has been justified by their excellent mechanical properties (fatigue and corrosion resistance, and many others) and the reduction of aircraft weight they provide. The use of these materials for the aircraft structure has implied a complete revision of on-board electrical systems. As a result, aeronautical engineers have to design a complementary electrical network in composite aircrafts, called "current return path network". This network raises two new issues: the pre-dimensioning process of light, functional and robust networks and their monitoring. To facilitate these studies, this thesis proposes to link through the spectral graph analysis the performances of electrical networks with their topology. In this analysis, a network is studied like a sum of independent modes of the Laplacian matrix. So, the spectral analysis gives a multiscale reading. Moreover, the spectral analysis offers some links between network topology and its electrical performances thanks to the algebraic connectivity and the eigenvalue perturbation. Finally, several aeronautic applications of pre-dimensioning process and surveillance are proposed.