



HAL
open science

Stabilité et perturbations optimales globales d'écoulements compressibles pariétaux

Benjamin Bugeat

► **To cite this version:**

Benjamin Bugeat. Stabilité et perturbations optimales globales d'écoulements compressibles pariétaux. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2017. Français. NNT : 2017PA066504 . tel-01814275

HAL Id: tel-01814275

<https://theses.hal.science/tel-01814275>

Submitted on 13 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité : Mécanique des fluides

École doctorale : SMAER ED391

réalisée à

Institut Jean le Rond ∂ 'Alembert

présentée par

Benjamin BUGEAT

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

**Stabilité et perturbations optimales globales d'écoulements
compressibles pariétaux**

soutenue le 12 décembre 2017

devant le jury composé de :

M.	Frédéric ALIZARD	Examineur
M.	Jean-Camille CHASSAING	Directeur de thèse
M.	Uwe EHRENSTEIN	Rapporteur
M.	José-Maria FULLANA	Examineur
M.	Lutz LESSHAFFT	Examineur
M.	Jean-Christophe ROBINET	Co-directeur de thèse
M.	Pierre SAGAUT	Co-directeur de thèse
M.	Denis SIPP	Rapporteur

Table des matières

Notations	1
I Stabilité des écoulements ouverts	5
I.1 Définitions et exemples	5
I.1.1 Stabilité	5
I.1.2 Écoulements oscillateurs et amplificateurs sélectifs de bruit	7
I.2 Instabilités modales par approche locale	8
I.3 Instabilités non-modales	11
I.4 Approche globale	13
I.4.1 Formulation	13
I.4.2 Sources de non-normalité	15
I.4.3 Analyse des écoulements amplificateurs sélectifs de bruit	16
I.5 Instabilités en écoulements compressibles	18
I.6 Présentation du manuscrit	19
II Approche numérique	21
II.1 Calcul de l'écoulement de base	21
II.1.1 Résolution des équations de Navier-Stokes compressible 2D	21
II.1.2 Schéma numérique	23
II.1.3 Méthode de continuation	23
II.2 Calcul des perturbations linéaires	24
II.2.1 Linéarisation : calcul de la matrice jacobienne	24
II.2.2 Résolution des problèmes aux valeurs propres	25
II.2.3 Conditions aux limites	27
II.3 Extension de la méthode aux perturbations 3D : calcul de la matrice jacobienne	28
II.3.1 Approche globale	28
II.3.2 Code de stabilité local à partir d'un code global	31
II.4 Remarques sur le coût numérique	32
III Validation de la méthode numérique	35
III.1 Instabilité globale du cylindre à section carrée	36
III.1.1 Présentation	36
III.1.2 Validation de l'écoulement de base	37
III.1.3 Instabilité globale : allée de von Karman	39

III.2	Couche limite de Blasius 2D	40
III.2.1	Analyse de stabilité locale	40
III.2.2	Réponse optimale locale par approche globale	42
III.2.3	Réponse optimale globale	44
III.2.4	Ressources numériques	45
III.3	Réceptivité globale 3D	46
III.3.1	Couche limite de Blasius	46
III.3.2	Couche limite compressible	48
IV	Instabilités convectives et résolvant global	51
IV.1	Relation entre forçage optimal global et analyse de stabilité locale	52
IV.1.1	Couche limite de Blasius	52
IV.1.2	Couche limite compressible à $M=2.20$	54
IV.2	Analyse par bilan d'énergie cinétique	61
IV.2.1	Formulation	61
IV.2.2	Application à la couche limite compressible à $M=2.2$	62
V	Réceptivité globale 2D de la SWBLI	69
V.1	Présentation	69
V.2	Écoulement de base	72
V.2.1	Validation	72
V.2.2	Écoulement de base pour différents nombres de Mach	74
V.3	Réceptivité à haute fréquence	75
V.3.1	Gain optimal : deux pics de réceptivité	75
V.3.2	Réponses et forçages optimaux	77
V.3.3	Forçage localisé	80
V.3.4	Discussion	82
V.4	Réceptivité à basse fréquence	84
VI	Réceptivité globale 3D compressible	89
VI.1	Couche limite à $M=4.5$	89
VI.1.1	Instabilités en couche limite compressible	89
VI.1.2	Écoulement de base	93
VI.1.3	Résultats	95
VI.2	Réceptivité basse fréquence 3D de la SWBLI	106
VI.2.1	Calcul de gain optimal	106
VI.2.2	Réceptivité aux faibles nombres d'onde	107
VI.2.3	Réceptivité à plus grand nombre d'onde	108
	Conclusion	111
A	Norme de Chu en variables conservatives	115
B	Détails de l'approche 3D	117
B.1	Décomposition des flux	117
B.2	Calcul de $\mathcal{J}'_{\nu z}$: modifications des flux $\hat{\mathbf{F}}_{\nu z}$, $\hat{\mathbf{G}}_{\nu z}$ et $\hat{\mathbf{H}}_{\nu z}$	119

Bibliographie

Notations

Acronymes

KH	Kelvin-Helmholtz
TS	Tollmien-Schlichting
CFD	Mécanique des fluides numérique (de l'anglais <i>Computational fluid dynamics</i>)
SWBLI	Interaction choc-couche limite (de l'anglais <i>Shock wave boundary layer interaction</i>)

Variables Numériques

N	Dimension du système d'équation discrétisé
N_x	Nombre de point de maillage dans la direction x
N_y	Nombre de point de maillage dans la direction y
$N_{stencil}$	Nombre de point du stencil

Variables Physiques

M	Nombre de Mach
Pr	Nombre de Prandtl
Re	Nombre de Reynolds
St	Nombre de Strouhal
x	Direction de l'écoulement
y	Direction normale à la paroi
z	Direction transverse à l'écoulement de base, homogène dans le cadre de ce manuscrit
\mathcal{R}	Divergence des flux des équations de Navier-Stokes
\mathbf{F}	Flux des équations de Navier-Stokes selon la direction x
\mathbf{G}	Flux des équations de Navier-Stokes selon la direction y
\mathbf{H}	Flux des équations de Navier-Stokes selon la direction z
\mathbf{q}	Vecteur des variables conservatives $(\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$

u	Composante de la vitesse dans la direction x
v	Composante de la vitesse dans la direction y
w	Composante de la vitesse dans la direction z
ρ	Masse volumique
E	Énergie totale
e	Énergie interne
p	Pression
T	Température
κ	Conductivité thermique
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
α	Nombre d'onde des perturbations dans la direction x
β	Nombre d'onde des perturbations dans la direction z
ω	Fréquence angulaire des perturbations
$\tilde{\mathbf{f}}$	Vecteur du forçage optimal
$\tilde{\mathbf{q}}$	Vecteur des perturbations (en particulier de la réponse optimale)
\mathcal{R}	Matrice résolvante
f_x	Composante dans la direction x du forçage optimal
f_y	Composante dans la direction y du forçage optimal
f_z	Composante dans la direction z du forçage optimal
δ^*	Épaisseur de déplacement de couche limite
L_{sep}	Longueur de bulle de recirculation
St_{δ^*}	Nombre de Strouhal basé sur δ^*
$St_{L_{\text{sep}}}$	Nombre de Strouhal basé sur L_{sep}

"Stability," insisted the Controller, "stability. The primal and the ultimate need. Stability. Hence all this."

Aldous Huxley, Brave new world

Chapitre I

Stabilité des écoulements ouverts

Table des matières

I.1	Définitions et exemples	5
I.1.1	Stabilité	5
I.1.2	Écoulements oscillateurs et amplificateurs sélectifs de bruit	7
I.2	Instabilités modales par approche locale	8
I.3	Instabilités non-modales	11
I.4	Approche globale	13
I.4.1	Formulation	13
I.4.2	Sources de non-normalité	15
I.4.3	Analyse des écoulements amplificateurs sélectifs de bruit	16
I.5	Instabilités en écoulements compressibles	18
I.6	Présentation du manuscrit	19

Les écoulements ouverts¹, dans lesquels les particules fluides quittent le domaine d'observation par advection selon une direction privilégiée, offrent une richesse de phénomènes physiques liés à leur stabilité. Ce chapitre introduit progressivement plusieurs concepts et méthodes d'analyse relatifs à ces systèmes. Certaines propriétés spécifiques au régime compressible seront évoquées pour alors mettre en perspective les objectifs de ce manuscrit, dont le plan sera présenté en fin de chapitre.

I.1 Définitions et exemples

I.1.1 Stabilité

Une étude de stabilité consiste à décrire l'évolution d'un système physique perturbé autour d'un état d'équilibre. L'état d'équilibre sera alors qualifié de stable si le système retourne vers cet état au cours du temps, et instable dans le cas contraire (cette première définition, comme on le verra, est incomplète). L'un des enjeux est alors de déterminer la valeur d'un paramètre de contrôle, typiquement le nombre de Reynolds

¹. Par opposition, un écoulement fermé serait par exemple la convection thermique d'un fluide dans une boîte

Re dans le cas des systèmes hydrodynamiques, à partir de laquelle apparaît l'instabilité. Le cas de l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre en est une illustration fondamentale. Pour les nombres de Reynolds inférieurs à $Re = 47$ [1], l'écoulement demeure stationnaire et symétrique selon le plan passant par le centre du cylindre et parallèle à la direction de l'écoulement. Au delà de cette valeur, cet état devient instable : le système évolue vers un nouvel état instationnaire, composé d'un lâcher tourbillonnaire périodique et alterné en aval du cylindre (fig.I.1). On peut noter que l'instabilité s'accompagne ainsi de brisures de symétries temporelle et spatiale.

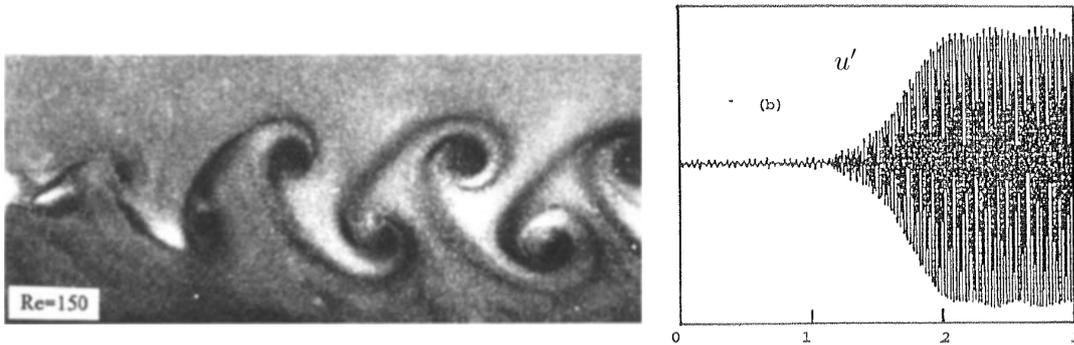


Fig. I.1 Gauche : Visualisation du lâché tourbillonnaire dans le sillage d'un cylindre. L'écoulement est dirigé de gauche à droite. Figure issue de Williamson [2]. Droite : Signal temporel des fluctuations de vitesse dans le sillage d'un cylindre après avoir brutalement élevé la valeur du nombre de Reynolds de 43 à 49 à $t \simeq 1$. Figure issue de Sreenivasan et al. [3].

Cette première définition dissimule cependant plusieurs comportements physiques qu'il est possible de décrire par une analyse de stabilité. Selon l'amplitude des perturbations considérées, différents types de stabilité pourront être appréhendés. En se restreignant au cas de perturbations infinitésimales², la stabilité linéaire du système sera étudiée. Cette approche est suffisante lorsque les effets non-linéaires ne sont pas déstabilisants : dans ce cas, l'instabilité est associée à une bifurcation supercritique pour lesquels les seuils d'instabilité sont alors bien identifiés. L'écoulement autour du cylindre précédemment évoqué appartient à cette catégorie [3]. Par ailleurs, il est possible de distinguer différentes dynamiques de perturbations au sein des écoulements linéairement stables. Un état sera asymptotiquement stable si l'énergie des perturbations tendent vers zéro pour des temps infinis. Il est toutefois possible que des mécanismes linéaires puissent transitoirement accroître l'énergie des perturbations avant qu'elle ne diminue finalement aux temps longs [5]. Ce comportement, particulièrement observé dans les écoulements cisailés, est lié à la non-normalité des équations de Navier-Stokes [6] et sera discuté dans la section I.3. Ainsi, le caractère linéairement stable d'un écoulement au sens asymptotique n'est pas nécessairement associé à une décroissance monotone de l'amplitude des perturbations.

L'étude de certains écoulements nécessitent d'aller au delà d'une analyse linéaire. Par exemple, il n'existe pas de nombre de Reynolds critique pour lequel l'écoulement de Hagen-Poiseuille devient linéairement instable [7]. On sait pourtant depuis les travaux fondateurs de Reynolds [8] que cet écoulement se déstabilise pour un nombre de

². En pratique, cette hypothèse permet d'étudier des perturbations de l'ordre du pourcent des grandeurs caractéristiques de l'écoulement de base [4]

Reynolds initialement mesuré autour de 2000. L'écoulement de Poiseuille plan présente quant à lui un seuil d'instabilité linéaire à $Re = 5772$ [9]. L'expérience montre cependant qu'une instabilité peut survenir plus tôt lorsque que l'écoulement est perturbé au delà d'une certaine amplitude [10]. Dans les deux exemples évoqués, il semble donc que des mécanismes d'instabilité non-linéaires soient à l'œuvre et il devient nécessaire de prendre en compte des perturbations d'amplitude finies afin d'étudier la nature sous-critique de ce problème. De telles considérations sortent du cadre de ce manuscrit, limité à l'étude de la dynamique linéaire de perturbations.

I.1.2 Écoulements oscillateurs et amplificateurs sélectifs de bruit

Les écoulements ouverts peuvent être divisés en deux catégories selon la dynamique des perturbations observée en leur sein (Huerre et Monkewitz [11]). Tout d'abord, les écoulements *oscillateurs* sont associés à une dynamique intrinsèque : le développement d'une instabilité est observé à une fréquence donnée par les paramètres propres au système. La nature des perturbations entrantes a alors peu d'influence sur la dynamique observée. L'écoulement autour d'un cylindre est un exemple d'oscillateur, pour lequel l'instabilité survient à un nombre de Strouhal (basé sur le diamètre du cylindre) proche de $St = 0.12$ [2]. L'instabilité sera de plus qualifiée de globale dans la mesure où le développement des perturbations envahit la totalité du domaine d'observation [11]. À l'inverse, les écoulements *amplificateurs sélectifs de bruit* sont sensibles aux perturbations extérieures qui sont alors filtrées et amplifiées spatialement dans la direction de l'écoulement. La figure (fig. I.2) permet d'observer la croissance spatiale de perturbations depuis l'amont d'un écoulement de couche limite au dessus d'une plaque plane. La croissance est produite par l'action de mécanismes linéaires dans la première partie de l'écoulement, sous la forme d'ondes bidimensionnelles de Tollmien-Schlichting (TS) [12]. On pourra par ailleurs remarquer que, plus en aval, ces ondes se déstabilisent à leur tour vers une structure tridimensionnelle sous l'influence d'effets non-linéaires et d'instabilités secondaires. Ainsi, l'écoulement de couche limite est un exemple d'amplificateur sélectif de bruit.

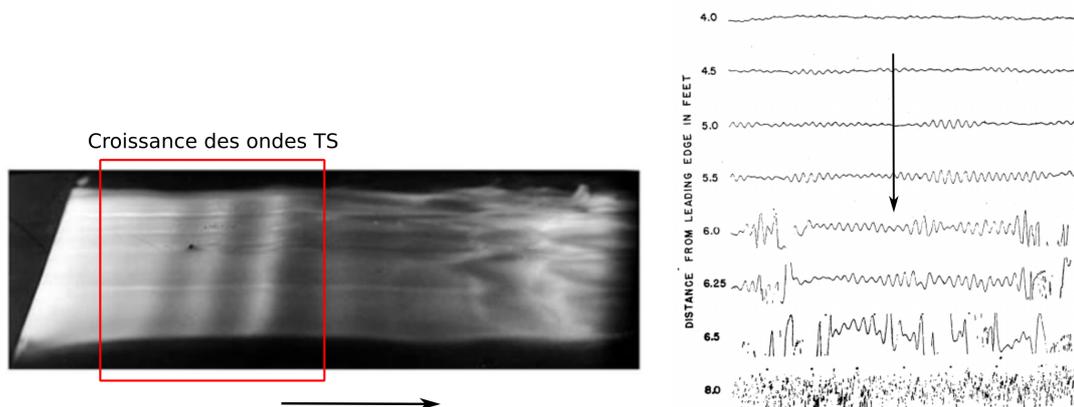


Fig. I.2 Gauche : Visualisation d'une onde de Tollmien-Schlichting (TS) en croissance dans une couche limite. Figure issue de Werlé [13]. Droite : Mesures temporelles du signal de vitesse dans une couche limite en différentes abscisses de plaque. Figure issue de Schubauer et Skramstad [14]. Les flèches noires indiquent le sens de l'écoulement.

La distinction faite entre ces types d'écoulements se retrouve dans les approches expérimentales adoptées pour analyser la stabilité de ces systèmes. Dans le cas des oscillateurs, dès lors que le paramètre de contrôle est fixé à une valeur supérieure au seuil d'instabilité, l'amplitude d'une perturbation va croître exponentiellement dans le domaine d'observation via des mécanismes linéaires avant d'être saturée par effets non-linéaires. Cette dynamique peut être observée sur la figure (fig. I.1) où le signal des perturbations mesuré dans le sillage d'un cylindre croît exponentiellement à partir de l'instant où le nombre de Reynolds est fixé au dessus de sa valeur critique. Notons que l'accès à l'amplitude des perturbations est ici réalisé par filtrage des basses fréquences du signal mesuré afin de soustraire l'amplitude liée à l'écoulement de base. Ainsi, le seuil d'instabilité peut être capté par la détection d'un taux d'amplification temporelle positif [3]. De façon équivalente, le seuil d'instabilité d'un écoulement oscillateur peut également être vu comme la valeur du paramètre de contrôle à laquelle le temps de saturation de l'instabilité diverge [15].

L'étude expérimentale des écoulements amplificateurs sélectifs de bruit requiert d'adopter un point de vue différent, l'enjeu étant ici de mesurer l'amplification spatiale de perturbations. Dans le cas d'une couche limite incompressible, la mise en évidence de la croissance d'ondes TS a historiquement été réalisée par Schubauer et Skramstad [14] par la mesure temporelle d'un signal de vitesse en différentes abscisses de plaque (fig. I.2). L'augmentation de ce signal dans la direction de l'écoulement témoigne de l'instabilité existante. De plus, afin de mettre en évidence l'amplification sélective de fréquences, l'écoulement peut être excité à une fréquence donnée par l'action, par exemple, d'un ruban magnétique vibrant [14] ou d'une injection périodique d'air à la paroi [16]. En mesurant en différentes abscisses l'amplitude de la perturbation ainsi créée, il est possible de détecter la localisation d'un minimum et d'un maximum d'amplitude entre lesquels l'écoulement est instable. Ces mesures permettent alors de construire la courbe neutre d'un écoulement amplificateur sélectif de bruit, dont le tracé délimite le domaine d'instabilité dans le plan "paramètre de contrôle-fréquence des perturbations".

La distinction entre les écoulements oscillateurs et amplificateurs sélectifs de bruit a été considérée dans un cadre théorique par Huerre et Monkewitz [11] à travers les notions d'instabilités absolues et convectives. Ces concepts seront abordés dans la prochaine section dans le cadre de l'analyse de stabilité locale. Par ailleurs, il sera montré que cette catégorisation des écoulements conduit, pour des perturbations globales (§ I.4), à adapter les approches théoriques et numériques utilisées pour leur étude.

I.2 Instabilités modales par approche locale

On considère un écoulement de base $\bar{\mathbf{q}}$ de direction privilégiée x , typiquement cisailé dans la direction y , et homogène dans la direction z . Une approche de stabilité locale consiste à appréhender la stabilité de cet écoulement par l'étude d'un profil $\bar{\mathbf{q}}(y)$, supposé parallèle, auquel est superposée une perturbation \mathbf{q}' [17]. L'écoulement de base est alors considéré comme homogène dans la direction x , hypothèse valable tant que la longueur d'onde des perturbations étudiées est faible devant l'échelle de longueur caractéristique de l'évolution de cet écoulement dans cette direction [4]. Dans un cadre

linéaire, les perturbations \mathbf{q}' peuvent ainsi être décomposées sous la forme de modes suivante

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(y)e^{(\alpha x + \beta z - i\omega t)} + c.c. \quad (\text{I.2.1})$$

$\beta \in \mathbb{R}$ est le nombre d'onde transverse tandis que ω et α peuvent être choisis complexes, les parties réelles ω_r et α_r correspondant respectivement à la fréquence et au nombre d'onde longitudinal. Les modes temporels sont définis par $\omega \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ et les modes spatiaux par $\omega \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ [11]. Une instabilité temporelle sera alors détectée si la partie imaginaire de ω est telle que $\omega_i > 0$, correspondant alors à une instabilité asymptotique (§ I.1.1). Dans le cas spatial, la condition porte sur $\alpha_i < 0$ (respectivement $\alpha_i > 0$) pour une onde se propageant vers les $x > 0$ (respectivement $x < 0$). Quelque soit l'approche adoptée, ces quantités sont déterminées à travers le calcul de la relation de dispersion obtenue par injection de la formulation (I.2.1) dans les équations linéarisées. Ce calcul se réduit alors à la résolution d'un problème aux valeurs propres émergeant pour différentes valeurs de α et β (modes temporels) ou ω et β (modes spatiaux) fixées.

La linéarisation des équations d'Euler conduit à la formulation de l'équation de Rayleigh gouvernant la dynamique de perturbations non-visqueuses. Cette équation a historiquement été résolue en considérant des écoulements de base linéaires par morceaux [18] avant que le développement du calcul numérique ne permette d'aborder des écoulements continus plus réalistes [19]. De plus, l'analyse mathématique de cette équation permet de montrer que la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse de l'écoulement de base est une condition nécessaire à l'existence d'une instabilité non-visqueuse [12]. Cette condition, connue comme le critère de Rayleigh, a pu être améliorée par Fjørtoft [20] en une condition nécessaire et suffisante d'instabilité en ajoutant que ce point d'inflexion doit en plus correspondre à un maximum de vorticité. Ce résultat est un outil puissant pour l'étude d'instabilité en écoulements ouverts dont beaucoup admettent effectivement un point d'inflexion (couche de mélange, jet, sillage).

Cependant, l'approche non-visqueuse de l'équation de Rayleigh et ses théorèmes ne permettent pas de capter certaines instabilités. En effet, alors que les effets visqueux sont intuitivement associés à la stabilisation d'un système physique, leur action s'avère être à l'origine de l'instabilité de Tollmien-Schlichting rencontrée en écoulements pariétaux [12]. Cette instabilité survient ainsi à des nombres de Reynolds finis et ne requiert pas la présence d'un point d'inflexion. Son étude doit alors être entreprise à partir de l'équation d'Orr-Sommerfeld provenant de la linéarisation des équations de Navier-Stokes dans le cadre des hypothèses de stabilité locale. La résolution numérique de cette équation a par exemple permis de mettre en évidence l'instabilité TS dans un écoulement de Poiseuille plan [21] et de couche limite [22]. Un résultat de grande utilité pratique est par ailleurs associé à l'équation d'Orr-Sommerfeld. En effet, dans une forme condensée, le théorème de Squire [23] affirme que pour tout mode oblique instable à un nombre de Reynolds donné, il existe un mode bidimensionnel de taux de croissance supérieur à un nombre de Reynolds inférieur. Dès lors, le nombre de Reynolds critique est nécessairement associé à une perturbation bidimensionnelle. Si ce résultat permet en pratique de ne rechercher un seuil d'instabilité que par un calcul

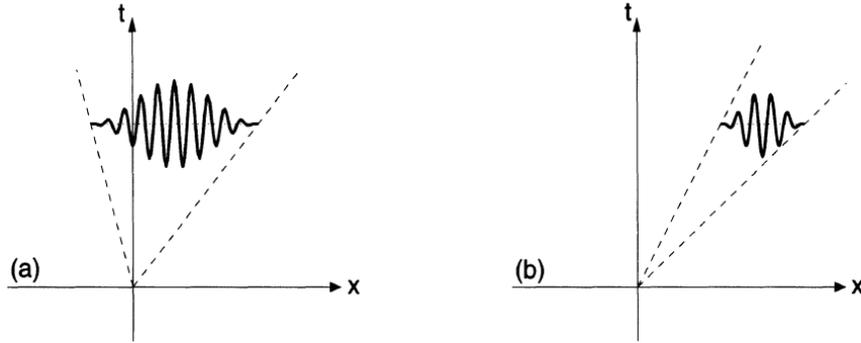


Fig. I.3 Représentation de l'évolution spatio-temporelle d'une instabilité absolue (gauche) et convective (droite). Figure issue de Schmid et Henningson [12].

de stabilité 2D, il doit cependant être souligné qu'à un nombre de Reynolds supercritique donné, une perturbation 3D peut potentiellement admettre un taux de croissance supérieur à celui d'une perturbation 2D [4].

Un lien décisif entre l'approche de stabilité locale et le caractère oscillateur ou amplificateur de bruit d'un écoulement a été établi par Huerre et Monkewitz [11]. En considérant la réponse $G(x, t)$ des perturbations linéaires à une impulsion localisée en temps et en espace, les auteurs ont alors défini différentes natures de stabilité selon le comportement des perturbations le long d'un rayon $x/t = cte$. La présence d'une instabilité peut tout d'abord être formalisée par les définitions suivantes :

- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0$ le long de tout rayon $x/t = cte$, alors l'écoulement est stable.
- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = +\infty$ le long d'au moins un rayon $x/t = cte$, alors l'écoulement est instable.

Dans le cas instable, il est alors possible d'opérer une distinction plus fine selon le comportement de la réponse impulsionnelle le long du rayon particulier $x/t = 0$:

- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0$ le long du rayon $x/t = 0$, alors l'écoulement est *convectivement* instable.
- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = +\infty$ le long du rayon $x/t = 0$, alors l'écoulement est *absolument* instable.

Ces deux dernières définitions sont traduites schématiquement sur la figure I.3. Dans le cas absolument instable, la perturbation envahit l'intégralité du domaine spatial au cours du temps et peut ainsi être liée aux écoulements oscillateurs. Dans le cas convectivement instable, la perturbation croît au cours du temps mais est convectée loin de sa source initiale : ce comportement correspond à un écoulement amplificateur de bruit. La distinction entre ces deux types d'instabilité peut alors être déterminée par l'examen du taux de croissance absolue $\omega_{i,0} = \omega_i(\alpha_0)$ où $\partial\omega/\partial\alpha(\alpha_0) = 0$. Cette quantité permet d'apprécier la dynamique d'un paquet d'onde de vitesse de groupe nulle et permet ainsi de conclure à une instabilité absolue en cas de croissance $\omega_{i,0} > 0$.

Cette approche³ a par exemple permis à Huerre et Monkewitz [25] de déterminer le paramètre critique d'une couche mélange pour lequel l'écoulement devient absolument instable. Notons enfin que si cette analyse permet de caractériser plus finement la dynamique d'un écoulement, le "simple" calcul des modes temporels offre déjà une condition nécessaire et suffisante d'instabilité (définie au sens de la réponse impulsionnelle) [4].

I.3 Instabilités non-modales

L'approche précédemment exposée permet d'appréhender la stabilité asymptotique d'un écoulement par la décomposition modale des perturbations. Cette analyse peut néanmoins s'avérer insuffisante lorsque les vecteurs propres ainsi calculés sont non-orthogonaux. En effet, considérons un jeu de vecteurs dont la norme de chacun, que l'on peut choisir telle qu'elle corresponde à l'énergie des perturbations [5], décroît asymptotiquement au cours du temps. Si la norme de la somme de ces vecteurs tendra effectivement vers zéro aux temps longs, il n'est en revanche pas nécessaire que cette norme décroisse de façon monotone. Aussi, une croissance transitoire de l'énergie de ce système peut potentiellement être observée. L'analyse modale, par le calcul d'un spectre de valeurs propres, échouera alors à capter ce comportement. D'autres méthodes, dites non-modales, devront alors compléter l'analyse de stabilité d'un tel système. Notons que la croissance transitoire mérite d'être prise en compte y compris en présence de modes instables puisqu'elle pourra s'ajouter de façon potentiellement significative à la croissance modale [26].

La non-orthogonalité de modes propres est observée lorsque l'opérateur régissant la dynamique des perturbations est non-normal [6]. L'opérateur lié aux équations de Navier-Stokes linéarisées appartient à cette catégorie. L'analyse de la croissance non-modale dans les écoulements cisailés s'est initiée avec les travaux de Farrell [27], Butler et Farrell [28] et Reddy et Henningson [29] et ces études ont alors été accompagnées de considérations relatives aux routes de transition à la turbulence [30]. En effet, les instabilités modales puis leurs instabilités secondaires représentent un chemin vers la transition lorsque les niveaux de perturbations ambiantes sont faibles [31]. Des routes parallèles sont observées lorsque ces niveaux augmentent, pouvant impliquer une croissance transitoire couplée à des instabilités modales voire uniquement reposer sur la croissance non-modale des perturbations (*bypass transition*) [32]. L'analyse de la croissance non-modale de perturbations 3D a par exemple permis à Andersson et al. [33] d'établir un modèle de transition à la turbulence en couche limite en accord raisonnable avec l'expérience.

L'étude de la croissance non-modale peut être entreprise par un calcul de croissance optimale. Cette approche consiste à résoudre un problème d'optimisation dans lequel une perturbation initiale optimale maximisant l'énergie des perturbations à un temps T est recherchée [5]. La croissance optimale G est alors définie par la valeur de cette énergie normalisée par celle de la perturbation optimale. Un résultat de Corbett et Bottaro [26] est représenté sur la figure I.4 pour un écoulement de couche limite convectivement instable. La croissance purement modale (et par conséquent ex-

3. En pratique, du fait la présence de singularités dans la relation de dispersion, le critère d'instabilité présenté doit être adapté [24]

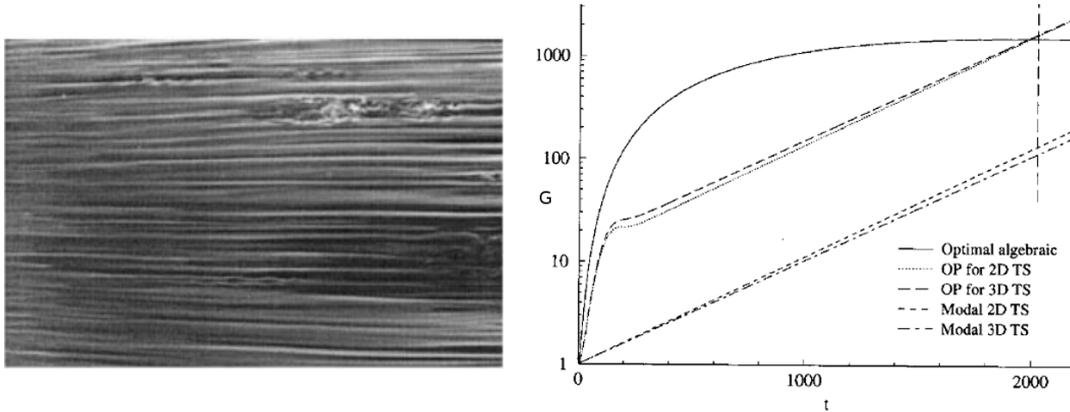


Fig. I.4 Gauche : Visualisation de *streaks* en développement dans une couche limite. Vue de dessus de l'écoulement allant de gauche à droite. Figure issue de Matsubara et Alfredsson [34]. Droite : Croissance optimale de *streaks* (noté *algebraic growth*) et d'ondes TS 2D et 3D (notées OP) dans une couche limite. La croissance purement modale d'ondes TS est également représentée. Figure issue de Corbett et Bottaro [26].

ponentielle) d'ondes TS est représentée et permet, par comparaison, d'apprécier les effets non-modaux révélés par le calcul de croissance optimale. En effet, la croissance des perturbations optimales aux temps courts apparaît plus élevée que la croissance modale. Les perturbations tirent ici profit du mécanisme d'Orr [35], non-modal, caractérisé par une perturbation optimale initialement inclinée contre l'écoulement cisailé qui croît et se redresse au cours du temps en extrayant de l'énergie à l'écoulement de base. Ce mécanisme n'agit plus à partir d'un certain temps et la croissance modale prend alors le relais : la croissance optimale est désormais exponentielle. Sa pente apparaît ainsi parallèle à celle associée à la croissance purement modale qui, n'ayant pas bénéficié des effets non-modaux aux temps courts, affiche une valeur de G inférieure. Enfin, la croissance optimale de *streaks* est également représentée. Ces structures 3D sont associées au mécanisme non-modal du *lift-up* dont l'action repose sur le transport dans la direction normale de la quantité de mouvement longitudinale de l'écoulement de base par les perturbations [36]. Cet effet conduit à la formation de structures étendues dans la direction de l'écoulement et périodiques dans la direction transverse (fig. I.4).

La prise en compte des effets de non-normalité peut également être abordée par l'étude de la réponse de perturbations soumises à un forçage harmonique. Une telle analyse possède un intérêt physique certain dans la mesure où les instabilités développées dans un écoulement réel sont continuellement forcées par des perturbations extérieures telles que la turbulence ambiante, l'acoustique ou la rugosité d'une paroi. Ce type d'étude possède plus généralement l'appellation de *réceptivité*. Similairement à la croissance optimale exposée précédemment, l'approche présentée ici utilise un cadre d'optimisation dans lequel est calculé le forçage optimal capable de générer la réponse maximale. Un gain optimal μ est défini par le ratio d'une norme énergétique de la réponse et d'une norme associée à un forçage. Le choix de telles normes ainsi que le formalisme détaillé de cette méthode dans un cadre d'analyse globale seront discutés dans les sections I.4.3 et II.2.2.2, mais quelques éléments sont donnés ici afin de per-

cevoir le lien entre cette approche et les effets non-modaux. En effet, Schmid [5] a mis en évidence que le gain optimal variait comme

$$\mu \sim \|\mathcal{V}(i\omega\mathcal{I} - \mathcal{D})^{-1}\mathcal{V}^{-1}\| \quad (\text{I.3.1})$$

où ω est la fréquence de forçage, \mathcal{D} la matrice diagonale contenant les valeurs propres de la matrice jacobienne gouvernant la dynamique des perturbations, \mathcal{V} la matrice contenant les vecteurs propres associés et \mathcal{I} la matrice identité. En l'absence d'effets non-normaux, la matrice \mathcal{V} est unitaire. Le gain optimal ne réagira alors qu'à travers l'élément $(i\omega\mathcal{I} - \mathcal{D})^{-1}$ associé à la résonance de modes propres. Dans ce cas, le gain optimal dépendra de la distance d dans le plan complexe entre la fréquence de forçage réelle et la valeur propre la plus proche comme $\mu \sim 1/d$. La prise en compte des effets non-normaux peut alors exacerber cette réponse voire même autoriser le gain optimal à croître pour des fréquences de forçage possiblement éloignées des valeurs propres du système. Ce comportement non-modal est connu sous l'appellation de *pseudo-résonance* [37]. Les résultats d'un calcul de gain optimal pour un écoulement de Poiseuille plan sont montrés en figure I.5. La comparaison avec un calcul ne prenant en compte que les effets modaux permet de mettre en évidence l'action de la pseudo-résonance à la fois au niveau de fréquences résonantes et non-résonantes.

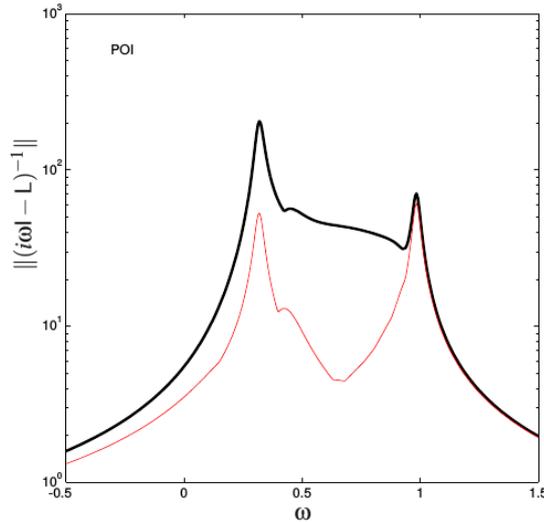


Fig. I.5 Calcul de la norme du gain optimal pour l'écoulement de Poiseuille plan (courbe noire). La courbe rouge indique la résonance purement modale de l'écoulement. Figure issue de Schmid et Brandt [38].

I.4 Approche globale

I.4.1 Formulation

L'approche globale consiste à résoudre la structure spatiale de perturbations dans la direction de l'écoulement en complément de la direction normale (voire transverse).

Aussi, aucune hypothèse de parallélisme et d'homogénéité dans la direction de l'écoulement n'est nécessaire, contrairement à l'approche locale qui s'appuie sur une transformée de Fourier dans cette direction. L'approche globale permet dès lors d'étudier des écoulements plus complexes et de capter une physique plus vaste, le prix à payer résidant dans la résolution de systèmes de plus grandes dimensions. L'augmentation de la puissance de calcul a conduit à son utilisation intensive particulièrement depuis le début des années 2000, et cette démocratisation s'est accompagnée de la mise au point de méthodes numériques efficaces.

On considère un système d'équations non-linéaires écrit sous la forme du système dynamique suivant

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathcal{R}(\mathbf{q}), \quad (\text{I.4.1})$$

où \mathcal{R} représente ici l'opérateur différentiel associé aux équations de Navier-Stokes. Par définition, un écoulement de base $\bar{\mathbf{q}}$ est solution de (I.4.1). Dans la suite du manuscrit, seules des solutions 2D stationnaires $\bar{\mathbf{q}}(x, y)$ seront considérées, l'analyse de stabilité associée étant alors parfois qualifiée de *biGlobale* [39]. En recherchant une solution de l'équation (I.4.1) sous forme d'une perturbation \mathbf{q}' superposée à $\bar{\mathbf{q}}$, et en supposant l'amplitude des perturbations faible devant celle de l'écoulement de base, le système linéarisé peut être écrit comme

$$\partial \mathbf{q}' / \partial t = \mathcal{J} \mathbf{q}' \quad (\text{I.4.2})$$

où $\mathcal{J} = \left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\bar{\mathbf{q}}}$ est la matrice jacobienne. Les perturbations sont alors développées sous la forme

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} + c.c. \quad (\text{I.4.3})$$

où le nombre d'onde transversal β est réel et ω est la fréquence angulaire complexe. Le système (I.4.2) peut alors être reformulé comme un problème aux valeurs propres

$$-i\omega \tilde{\mathbf{q}} = \mathcal{J} \tilde{\mathbf{q}} \quad (\text{I.4.4})$$

La partie imaginaire ω_i correspond au taux d'amplification du mode global $\tilde{\mathbf{q}}(x, y)$ si bien qu'une instabilité globale sera détectée lorsque $\omega_i > 0$. La partie réelle ω_r renseigne alors sur la fréquence du mode instable. Cette fréquence sera non-nulle dans le cas d'une bifurcation instationnaire (bifurcation de Hopf) telle que celle rencontrée dans l'écoulement autour d'un cylindre [40], et l'analyse de stabilité globale permet alors de caractériser la dynamique cet écoulement oscillateur. En effet, proche du seuil d'instabilité, la valeur calculée de ω_r permet d'estimer convenablement la fréquence du cycle limite émergeant à la suite de la déstabilisation de l'état stationnaire. Loin du seuil, Barkley [41] a par ailleurs remarqué que cette fréquence peut être prédite en procédant à la linéarisation des équations autour de l'écoulement moyen plutôt que de l'écoulement de base stationnaire. Enfin, dans le cas des bifurcations stationnaires, la fréquence ω_r apparaît égale à zéro. Le mode stationnaire instable associé peut typiquement apparaître tridimensionnel comme dans le cas d'un écoulement de marche descendante [42] ou de cavité [43].

I.4.2 Sources de non-normalité

La non-normalité de l'opérateur des équations de Navier-Stokes linéarisées autorise des mécanismes de croissance linéaires pouvant s'ajouter à la croissance modale issue de l'analyse spectrale des perturbations (§ I.3). Les sources de non-normalité peuvent être entrevues à travers l'analyse des modes adjoints globaux définis comme les vecteurs propres associés à l'opérateur \mathcal{J}^* adjoint de \mathcal{J} [44]. En conséquence de la relation de bi-orthogonalité entre les bases de modes directs et de modes adjoints [38], un mode direct et son adjoint seront égaux si l'opérateur \mathcal{J} est normal (les vecteurs propres associés étant orthogonaux entre eux). En revanche, si l'opérateur est non-normal, cette condition n'est plus vérifiée et le degré d'orthogonalité entre un mode direct et son adjoint caractérise alors le degré de non-orthogonalité de ce mode direct avec les autres modes directs [44]. Marquet et al. [45] proposent alors de mettre en évidence les sources d'orthogonalité entre modes directs et adjoints par l'observation des équations de quantités de mouvement régissant la dynamique de ces modes, formulées pour un écoulement incompressible comme

$$-i\omega\tilde{\mathbf{u}} + \underbrace{+\nabla\tilde{\mathbf{u}}\cdot\bar{\mathbf{u}}}_{(1)} + \underbrace{\nabla\bar{\mathbf{u}}\cdot\tilde{\mathbf{u}}}_{(2)} = -\nabla\tilde{p} + \frac{1}{Re}\Delta\tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{I.4.5})$$

$$-i\omega\hat{\mathbf{u}} - \underbrace{\nabla\hat{\mathbf{u}}\cdot\bar{\mathbf{u}}}_{(1)} + \underbrace{(\nabla\bar{\mathbf{u}})^*\cdot\hat{\mathbf{u}}}_{(2)} = +\nabla\hat{p} + \frac{1}{Re}\Delta\hat{\mathbf{u}} \quad (\text{I.4.6})$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ et \tilde{p} (respectivement $\hat{\mathbf{u}}$ et \hat{p}) représentent le champ de vitesse et de pression du mode direct (respectivement du mode adjoint).

Les termes notés (1) représentent l'advection des perturbations par l'écoulement de base. Le signe $-$ apparaissant dans l'équation signale que l'advection du mode adjoint a lieu en sens opposé à celle du mode direct. Cette propriété provoque une séparation spatiale du mode adjoint et du mode direct, le premier se localisant plus en amont de l'écoulement que le second. Ce comportement a par exemple été observé par Nichols et Lele [46] dans un écoulement de jet. La non-normalité associée est alors appelée *streamwise* [47] (ou *convective-type* [44]). Pour Chomaz [48], cette non-normalité est la traduction dans un cadre global du caractère convectivement instable d'un écoulement amplificateur sélectif de bruit. Ce point sera plus amplement développé dans la prochaine section.

Les termes notés (2) témoignent du transport de l'écoulement de base par les perturbations. La présence de l'opérateur transconjugué de l'équation (I.4.6) implique que les composantes de vitesses dominantes du mode direct puissent être différentes de celles du mode adjoint. Dans ce cas, l'orthogonalité des modes adjoints et directs étant favorisée par une distinction entre leurs composantes (et non par une séparation spatiale de leur structure), la non-normalité associée est nommée *component-type* [45]. Cette non-normalité est responsable de la croissance non-modale de *streaks* dont le transport de l'écoulement de base par les perturbations dans la direction y génère des perturbations de vitesse élevées dans la direction x . Le mécanisme d'Orr est également associé à cette non-normalité [49].

I.4.3 Analyse des écoulements amplificateurs sélectifs de bruit

Un écoulement convectivement instable est globalement stable dans la mesure où les perturbations développées sont constamment advectées en aval de l'écoulement [47]. Aussi, le calcul des modes globaux présenté dans la section I.4 n'apporte à ce stade que peu d'informations sur la dynamique de ce type d'écoulement, ces modes étant alors tous stables. Comme le souligne Chomaz [48], du fait de la forte non-normalité *streamwise* de ces écoulements, leur caractère convectivement instable s'exprime par la croissance collective, non-modale, d'une superposition de modes globaux. Ces considérations suggèrent ainsi d'adopter des approches capables d'inclure ces effets non-modaux, telles que le calcul de la croissance optimale ou du gain optimal (§ I.3).

La croissance optimale a initialement été étudiée par une approche globale par Ehrenstein et Gallaire [50] dans un écoulement de couche limite incompressible (voir également [51]). Dans cette étude, un calcul préalable des modes globaux a été réalisé pour alors projeter la perturbation optimale recherchée sur une partie de ces modes. Par la suite, une approche basée sur l'utilisation des équations adjointes, ne requérant pas le calcul de modes globaux, a été majoritairement adoptée et appliquée par exemple aux écoulements de couche limite [52], de marches descendantes ([53], [54]) ou de jet [55]. Ces travaux ont ainsi permis de mettre en évidence le caractère convectivement instable de ces écoulements dans lesquels un paquet d'onde, initié par la perturbation optimale, développe sa croissance vers l'aval de l'écoulement.

Les études de réceptivité globale basées sur le calcul du gain optimal se sont développées parallèlement aux travaux précités. Cette méthode permet d'appréhender le développement de la réponse globale d'un écoulement soumis à un forçage harmonique global. Comme dans le cas de la croissance optimale, les premiers travaux du genre ([51], [56]) ont adopté une approche basée sur la décomposition de la réponse sur une base de modes globaux. En étudiant l'influence du choix de cette base, Åkervik et al. [56] ont alors pu mettre en évidence l'action des mécanismes non-modaux sur le développement de la réponse dans le cas d'un écoulement de couche limite incompressible. La figure I.6 présente le résultat du calcul de gain optimal en fonction de ce choix, en comparant de plus ces résultats avec le calcul d'un gain n'incluant que les effets de résonance modale (§ I.3). Ce calcul a tout d'abord révélé la forte croissance non-modale des ondes TS liée à la non-normalité *streamwise* de l'écoulement. En effet, lorsque la réponse est uniquement projetée sur une base de modes de TS, les effets de pseudo-résonance conduisent à une augmentation du gain optimal d'un facteur proche de 5 relativement au cas de la résonance purement modale. De plus, en incluant dans cette base les modes d'Orr, ce facteur devient proche de 25, permettant ainsi d'apprécier l'effet non-modal du mécanisme d'Orr dans le développement de la réponse optimale. La structure spatiale du forçage optimal ainsi calculé, inclinée vers l'amont de l'écoulement, témoigne par ailleurs de l'action de ce mécanisme.

Une méthode de calcul de gain optimal différente peut être envisagée à travers le calcul direct de la valeur singulière de la matrice résolvante globale, sans nécessiter le calcul des modes globaux ([57, 58]). Cette approche constituant le cœur du manuscrit, le formalisme associé est ici introduit. Dans ce cadre, les perturbations sont soumises à un forçage harmonique $\tilde{\mathbf{f}}e^{i\omega t}$ de fréquence $\omega \in \mathbb{R}$ que l'on inclut dans les équations linéarisées (I.4.2). On obtient alors

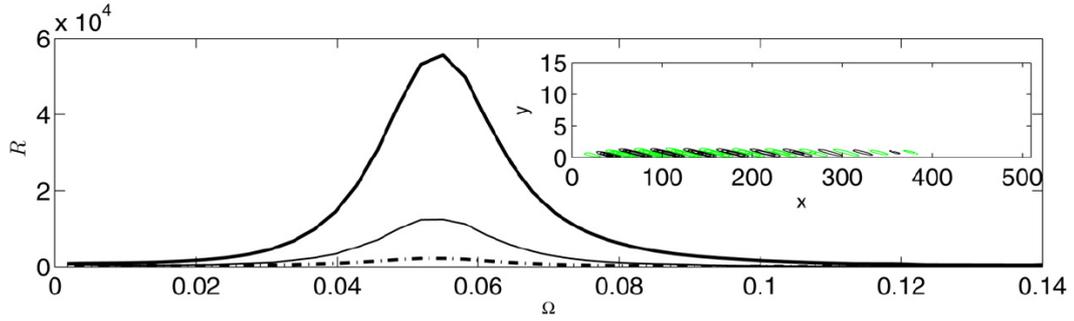


Fig. I.6 Gain optimal d'une couche limite compressible en fonction de la fréquence de forçage. La méthode de calcul est basée sur la projection de la réponse optimale sur un ensemble de modes globaux comprenant des modes d'Orr et TS (courbe noire épaisse) ou uniquement des modes TS (courbe noire fine). La courbe tiret-point indique la résonance purement modale. Les contours de la composante x du champ de forçage optimal sont représentés dans l'encadré. Figure issue de Åkervik et al. [56].

$$\partial \mathbf{q}' / \partial t = \mathcal{J} \mathbf{q}' + \tilde{\mathbf{f}} e^{i\omega t} \quad (\text{I.4.7})$$

En ne considérant dans le cadre du calcul de forçage optimal que des écoulements globalement stables, la solution homogène de l'équation (I.4.7) sera nulle aux temps longs. Aussi, par linéarité, la réponse \mathbf{q}' au forçage peut être recherchée sous la forme $\mathbf{q}' = \tilde{\mathbf{q}} e^{i\omega t}$ ($\omega \in \mathbb{R}$) de sorte que

$$\tilde{\mathbf{q}} = (i\omega \mathcal{I} - \mathcal{J})^{-1} \tilde{\mathbf{f}} \quad (\text{I.4.8})$$

La relation entre les champs de forçage et de réponse est ainsi établie par l'opérateur $\mathcal{R} = (i\omega \mathcal{I} - \mathcal{J})^{-1}$ appelé *résolvant global*. Le gain optimal peut être défini comme le ratio maximal entre l'énergie de la réponse et du forçage qu'il est possible d'atteindre via un forçage alors qualifié d'optimal. En choisissant un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associé à l'énergie considérée, la définition du gain optimal s'écrit

$$\mu^2 = \sup_{\tilde{\mathbf{f}}} \frac{\langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}} \rangle} \quad (\text{I.4.9})$$

Des produits scalaires distincts seront en fait associés aux champs de réponse et de forçage (§ II.2.2.2), mais le principe général de la méthode reste identique. Dans le cadre des équations discrétisées, un produit scalaire canonique peut être défini pour tout vecteur \mathbf{x} et \mathbf{y} comme $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* \mathbf{y}$ où $*$ représente l'opérateur transconjugué. La matrice résolvante peut être introduite dans l'équation (I.4.9) qui s'écrit alors comme

$$\mu^2 = \sup_{\tilde{\mathbf{f}}} \frac{\tilde{\mathbf{f}}^* \mathcal{R}^* \mathcal{R} \tilde{\mathbf{f}}}{\tilde{\mathbf{f}}^* \tilde{\mathbf{f}}} \quad (\text{I.4.10})$$

où \mathcal{R}^* est la matrice adjointe de \mathcal{R} associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que pour tout vecteur \mathbf{x} et \mathbf{y} , $\langle \mathcal{R} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathcal{R}^* \mathbf{y} \rangle$. La matrice $\mathcal{R}^* \mathcal{R}$ étant hermitienne, l'équation (I.4.10) fait ainsi apparaître un quotient de Rayleigh [59], si bien que le gain optimal μ^2 peut être déterminé à partir du problème aux valeurs propres suivant

$$\mathcal{R}^* \mathcal{R} \tilde{\mathbf{f}} = \mu^2 \tilde{\mathbf{f}} \quad (\text{I.4.11})$$

La plus grande valeur propre de $\mathcal{R}^* \mathcal{R}$ correspond alors à la valeur de μ^2 définie par l'équation (I.4.9). Le vecteur propre associé $\tilde{\mathbf{f}}$ est le forçage optimal à partir duquel l'équation (I.4.8) permet finalement d'obtenir la réponse optimale $\tilde{\mathbf{q}}$.

Sipp et Marquet [57] font remarquer que les vecteurs propres de l'équation (I.4.11), que l'on peut indiquer par $\tilde{\mathbf{f}}_i$, correspondent par ailleurs aux vecteurs singuliers à droite de la matrice résolvante \mathcal{R} , de valeurs singulières μ_i . Les vecteurs unitaires $\tilde{\mathbf{q}}_i = \mu_i^{-1} \mathcal{R} \tilde{\mathbf{f}}_i$ sont alors les vecteurs singuliers à gauche. La matrice $\mathcal{R}^* \mathcal{R}$ étant hermitienne, les familles de vecteurs $\tilde{\mathbf{f}}_i$ et $\tilde{\mathbf{q}}_i$ forment chacune une base orthonormale. Aussi, l'étude de la dynamique d'un écoulement soumis à un forçage dont la structure spatiale serait connue peut être réalisée par la projection de ce forçage sur la base de vecteurs $\tilde{\mathbf{f}}_i$, permettant alors d'obtenir la réponse de l'écoulement dans la base $\tilde{\mathbf{q}}_i$ par la relation $\tilde{\mathbf{q}}_i = \mu_i^{-1} \mathcal{R} \tilde{\mathbf{f}}_i$ [57].

Enfin, Sipp et al. [44] soulignent que du fait de la nature hermitienne de $\mathcal{R}^* \mathcal{R}$, le problème aux valeurs propres (I.4.11) est numériquement bien posé, demeurant peu sensible aux erreurs numériques. Les auteurs encouragent ainsi à l'utilisation de cette approche plutôt qu'à une méthode de projection sur les modes globaux, lesquels, compte-tenu de la forte non-normalité de la matrice jacobienne pour des écoulements amplificateurs de bruit, peuvent s'avérer difficiles à calculer numériquement.

1.5 Instabilités en écoulements compressibles

Quelques considérations générales sur l'étude d'instabilités en régime compressible sont introduites dans cette section. Des présentations détaillées de la dynamique des écoulements d'interaction choc/couche limite et de couche limite compressible seront exposées respectivement dans les sections V.1 et VI.1.1. La stabilité des écoulements compressibles partage des caractéristiques communes avec celles des écoulements incompressibles, mais se distingue néanmoins sur plusieurs points. Les équations de Rayleigh et d'Orr-Sommerfeld évoquées dans la section I.2 ne sont en effet plus valables en régime compressible, si bien que les théorèmes associés deviennent caduques. Ainsi, le théorème du point d'inflexion évoluera vers une condition portant sur le point d'inflexion généralisé [60], permettant d'appréhender les instabilités non-visqueuses d'écoulements compressibles. De même, le théorème de Squire n'est plus vérifié et ne possède du reste pas d'équivalent compressible : l'étude du développement de perturbations tridimensionnelles devient alors essentielle. L'une des conséquences majeures de ces nouvelles considérations est l'existence d'instabilités non-visqueuses en couche limite compressible, pour lesquelles les ondes obliques possèdent les plus forts taux d'amplification [61]. Cette instabilité porte le nom de *premier mode*. Par ailleurs, la formulation d'un critère d'instabilité [62] lié à la vitesse de phase des perturbations (formulé par un nombre de Mach relatif) a accompagné la mise en évidence expérimentale [63] et numérique [64] d'un mode instable spécifique aux écoulements compressibles. Ce mode est généralement appelé *second mode*, en opposition au premier mode précédemment évoqué, et intervient à des fréquences plus élevées. L'appellation *mode de Mack* est également largement répandue pour le désigner.

La stabilité de l'écoulement de couche limite compressible a été intensivement étudiée par approche locale depuis la fin des années 1940 [64–67]. Plus récemment, l'étude des mécanismes de croissance non-modale en couche limite compressible a été réalisée par Hanifi et al. [68] au moyen d'un calcul local de croissance transitoire, mettant notamment en évidence le développement de *streaks*. La stabilité globale d'écoulements compressibles a par la suite été abordée dans diverses configurations. On peut citer la découverte d'une bifurcation 3D stationnaire dans une interaction choc/couche limite par Robinet [69], la mise en évidence d'un mode global instable instationnaire lié au *buffet* transsonique par Crouch et al. [70] dans un écoulement turbulent autour d'un profil d'aile ou encore l'observation de modes instationnaires transverses dans un écoulement tridimensionnel autour d'un corps parabolique (Mack et al. [71]). L'analyse de la dynamique d'écoulements amplificateurs de bruit dans un cadre global et compressible a été abordée par Nichols et Lele [46] au moyen d'une approche de croissance optimale par Mettot [59] et Sartor et al. [72] en régime turbulent par le calcul du résolvant global. Enfin, il semble qu'il n'y ait à ce jour pas de travaux traitant de la croissance non-modale de perturbations tridimensionnelles dans les écoulements compressibles.

I.6 Présentation du manuscrit

Le présent travail est principalement concentré sur l'étude de la réceptivité globale d'écoulements compressibles laminaires. La méthode employée repose sur le calcul du gain optimal lié au résolvant global (§ I.4.3) et s'appuie sur le cadre numérique développé par Mettot [59]. Dans cette approche, la matrice jacobienne des équations de Navier-Stokes compressibles linéarisées est calculée par une méthode de "discrétisation puis linéarisation" plutôt que "linéarisation puis discrétisation". L'utilisation de routines issues d'un code de résolution des équations non-linéaires de Navier-Stokes permet alors d'explicitier efficacement la matrice jacobienne par une approximation de type différences finies. L'un des objectifs méthodologiques de ce manuscrit est d'étendre le calcul de cette matrice aux perturbations tridimensionnelles développées dans des écoulements de base bidimensionnels. Basée sur la décomposition en modes de Fourier dans la direction transverse à l'écoulement, l'extension de la méthode numérique n'est pas immédiate et requiert d'être adaptée. De façon originale, il sera noté que cette méthode peut également être appliquée dans la direction de l'écoulement afin de réaliser un calcul de stabilité locale temporelle. Ces approches seront présentées dans le chapitre II. La méthode numérique sera dans un premier temps validée dans le cadre des écoulements incompressibles pour des perturbations 2D puis 3D, puis en régime compressible pour des perturbations 3D (chapitre III).

Motivé par le récent travail de Sipp et Marquet [57] en couche limite incompressible, le lien entre le calcul de réponse optimale globale et la courbe neutre obtenue expérimentalement par Laufer et Vrebalovich [16] pour une couche limite compressible à $M = 2.2$ sera étudié dans le chapitre IV. En régime incompressible, il a en effet été montré que les maximums de densités d'énergie de forçage et de réponse permettaient de retrouver respectivement les branches inférieures et supérieures de la courbe neutre d'un écoulement convectivement instable [57]. Cet accord n'a pas été retrouvé en ré-

gime compressible. Ces résultats seront discutés à travers le calcul de réponse optimale soumis à un forçage localisé, puis par un bilan d'énergie cinétique des perturbations compressibles.

Le chapitre V sera dédié à l'analyse de la dynamique linéaire 2D de l'écoulement d'interaction choc/couche limite laminaire. Une étude paramétrique en nombre de Mach d'un calcul de réponse optimale sera réalisée afin, dans un premier temps, de mettre en évidence le développement des instabilités convectives de couche de mélange et de couche limite. Une tentative de mise en relation entre les propriétés associées aux réponses optimales et les échelles caractéristiques de l'écoulement de base (longueur de recirculation, épaisseur de couche limite) sera proposée. Enfin, la réceptivité aux basses fréquences sera abordée. La présence d'une instationnarité basse fréquence [73] est une propriété connue de l'interaction choc/couche limite en régime turbulent mais dont l'origine n'est pas entièrement comprise [74]. Les résultats présentés dans ce manuscrit, obtenu en régime laminaire, apporteront un éclairage sur la réceptivité linéaire de cet écoulement dont le comportement peut être relié à la résonance d'un mode globalement stable.

Enfin, la méthode de calcul de réceptivité par perturbations 3D sera présentée dans le cadre d'un écoulement de couche limite compressible à $M = 4.5$ (chapitre VI). Cette approche permettra d'appréhender les trois types d'instabilités convectives en développement dans cet écoulement (*streaks*, premier mode, second mode), en incluant les effets de croissance non-modale. Les fréquences, les nombres d'onde transverses et les régions de l'écoulement particulièrement réceptives pour chacune de ces instabilités pourront alors être identifiés. Les propriétés des réponses optimales seront analysées et l'accent sera porté sur l'observation des mécanismes de production d'énergie cinétique du second mode. Finalement, et en complément du chapitre V, la réceptivité aux basses fréquences de l'interaction choc/couche limite laminaire sera étudiée pour des perturbations 3D.

Chapitre II

Approche numérique

Table des matières

II.1	Calcul de l'écoulement de base	21
II.1.1	Résolution des équations de Navier-Stokes compressible 2D	21
II.1.2	Schéma numérique	23
II.1.3	Méthode de continuation	23
II.2	Calcul des perturbations linéaires	24
II.2.1	Linéarisation : calcul de la matrice jacobienne	24
II.2.2	Résolution des problèmes aux valeurs propres	25
II.2.3	Conditions aux limites	27
II.3	Extension de la méthode aux perturbations 3D : calcul de la matrice jacobienne	28
II.3.1	Approche globale	28
II.3.2	Code de stabilité local à partir d'un code global	31
II.4	Remarques sur le coût numérique	32

Les méthodes numériques employées dans la suite du manuscrit sont présentées dans ce chapitre. Le calcul de l'écoulement de base par résolution des équations non-linéaires de Navier-Stokes compressibles est décrit dans la section II.1. Puis la méthode de calcul de la matrice jacobienne, intervenant dans la linéarisation de ces équations, est développée ainsi que la résolution des problèmes aux valeurs propres pour les études de stabilité et de réceptivité (§ II.2). Une extension de ces méthodes aux perturbations 3D est ensuite proposée (§ II.3). Enfin, une procédure d'adaptation de l'approche numérique globale en une approche de stabilité locale temporelle est présentée (§ II.3.2).

II.1 Calcul de l'écoulement de base

II.1.1 Résolution des équations de Navier-Stokes compressible 2D

Les équations de Navier-Stokes compressibles 2D sont écrites avec les choix d'adimensionnement suivant :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}, \tilde{t} = \frac{t}{L/u_\infty}, \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u_\infty} \quad (\text{II.1.1})$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{T_\infty}, \quad \tilde{E} = \frac{E}{u_\infty^2}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_\infty}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa_\infty} \quad (\text{II.1.2})$$

Dans la suite du manuscrit, le symbole \sim utilisé pour les variables sans dimension sera abandonné pour ne pas alourdir les notations. Les variables indicées par le symbole ∞ désignent les grandeurs physiques en champ lointain. Les quantités E , μ et κ désignent respectivement l'énergie totale, la viscosité dynamique et le coefficient de conductivité thermique du fluide. La longueur caractéristique L sera choisie selon le cas physique considéré. Elle pourra typiquement désigner l'épaisseur de couche limite ou une abscisse de plaque. On introduit classiquement deux nombres sans dimension contrôlant l'écoulement : le nombre de Reynolds Re et le nombre de Mach M . Un troisième paramètre, géométrique, interviendra dans le cas de l'interaction choc-couche limite. Il représentera l'angle du choc incident par rapport à la plaque sur laquelle se développe la couche limite et sera noté ϕ ¹.

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors

$$Re = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu_\infty}, \quad M = \frac{u_\infty}{c_\infty} \quad (\text{II.1.3})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{II.1.4a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I} - \frac{1}{Re} \boldsymbol{\tau} \right] = 0, \quad (\text{II.1.4b})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot \left[(\rho E + p) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \boldsymbol{\tau} \odot \mathbf{u} - \frac{\kappa}{Pr Re (\gamma - 1) M^2} \nabla T \right] = 0 \quad (\text{II.1.4c})$$

En supposant le fluide comme un gaz thermiquement et calorifiquement parfait diatomique ($\gamma = 1.4$), les équations d'état s'expriment par

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \rho T, \quad E = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{II.1.5})$$

Le tenseur des contraintes visqueuses, pour un fluide newtonien, est donné par

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left[\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right] \quad (\text{II.1.6})$$

La viscosité dynamique est une fonction de la température décrite par la loi de Sutherland

$$\mu(T) = T^{3/2} \frac{1 + T_s/T_\infty}{T + T_s/T_\infty}, \quad (\text{II.1.7})$$

où $T_s = 110.4\text{K}$. La conductivité thermique du fluide dépend également de la température. D'après Toro [75], $\kappa(T) \sim \mu(T)$ si bien que l'on pourra écrire $\kappa = \mu$ en variables adimensionnées. Le nombre de Prandtl est fixé à 0.72 dans le cas de l'air.

¹. Cet angle est généralement appelé β dans la littérature, mais cette notation sera réservée pour le nombre de d'onde transverse des perturbations dans la suite du manuscrit.

Dans la suite, le système d'équation (II.1.4) sera réécrit sous la forme générale du système dynamique suivant

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathcal{R}(\mathbf{q}), \quad (\text{II.1.8})$$

avec $\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$ le vecteur des variables conservatives.

II.1.2 Schéma numérique

Les équations de Navier-Stokes compressibles 2D sont discrétisées en espace selon la méthode des volumes finis. On réécrit (II.1.8) pour faire apparaître les flux physiques \mathbf{F} et \mathbf{G} respectivement selon la direction x et y :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \quad (\text{II.1.9})$$

Ces équations, écrites sous forme conservative, sont appliquées sur chaque volume d'un maillage cartésien. Un schéma numérique fournit alors une méthode de calcul des flux aux interfaces des volumes. Deux schémas abondamment présents dans la littérature de la simulation d'écoulements compressibles [75] seront considérés dans ce manuscrit : le schéma à décomposition de flux AUSM+ [76] et le schéma de Roe [77]. L'implémentation de ces méthodes requiert l'interpolation des variables physiques aux interfaces. La méthode MUSCL [78] est ici employée, fixant par là même la précision de la méthode - jusqu'à l'ordre 5 [79]. Les flux visqueux sont obtenus par interpolation centrée des variables aux interfaces des cellules. L'avancée en temps des équations est réalisée selon une méthode implicite [80]. L'implémentation générale de la méthode et son application au cas de l'interaction choc/couche limite est développée par Boin et al. [79].

Les conditions aux limites utilisées sont de type Dirichlet-Neumann. Pour un écoulement supersonique, les grandeurs physiques sont prescrites en entrée de domaine et extrapolées en sortie ($\frac{\partial}{\partial n} = 0$). Le traitement des cas subsoniques est légèrement différent puisqu'on fixe la pression en sortie de domaine tandis qu'on l'extrapole en entrée. Enfin, aux parois, une condition de non-glissement est appliquée sur la vitesse (condition de Dirichlet). Une condition d'adiabaticité, se traduisant par une conditions de Neumann sur la pression et la masse volumique, complète les équations.

II.1.3 Méthode de continuation

La méthode de résolution décrite dans la section II.1.2 converge vers une solution globalement stable des équations de Navier-Stokes. Or, lors de l'examen de la stabilité d'un écoulement, il est souhaitable d'accéder aux états d'équilibre instables stationnaires, également solutions des équations non-linéaires. Ce sera le cas lors de l'étude de l'écoulement autour d'un cylindre à section carrée (sec. III.1) qui subit une bifurcation de Hopf supercritique pour laquelle, au delà du seuil de bifurcation, coexistent une solution stable instationnaire et une solution instable stationnaire. L'analyse de stabilité globale utilisera ainsi la solution stationnaire à partir de laquelle le seuil de bifurcation, la fréquence et la structure spatiale du mode linéairement instable seront calculés.

À partir d'une solution d'équilibre obtenue pour un jeu de paramètres donné, il est possible d'obtenir une nouvelle solution pour un jeu de paramètres proche par linéarisation. La méthode présentée dans la suite et utilisée dans le cas incompressible par Kelkar et Patankar [81] est en ce sens une méthode de continuation. Elle reste cependant très élémentaire puisqu'elle ne permet pas le suivi de branches autre que la branche initiale, contrairement à une approche plus sophistiquée telle que la méthode pseudo arc-length [82].

Pour introduire la méthode, supposons que l'on fixe le nombre de Mach et que l'on s'intéresse à l'évolution d'une solution en fonction du Reynolds. On notera \mathbf{q}_0 la solution initiale des équations non-linéaires pour le paramètre Re_0 . À partir de cette solution, on cherche $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}$, solution au paramètre $Re_0 + \Delta Re$ où ΔRe sera choisi suffisamment petit. Avec \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_1 stationnaires, on peut écrire, d'après II.1.8,

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}_0, Re_0) = 0 \quad , \quad \mathcal{R}(\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}, Re_0 + \Delta Re) = 0 \quad (\text{II.1.10})$$

et par un développement limité, en introduisant la matrice jacobienne $\mathcal{J} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{q}}$,

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}, Re_0 + \Delta Re) = \mathcal{R}(\mathbf{q}_0, Re_0) + \mathcal{J}(\mathbf{q}_0, Re_0)\Delta\mathbf{q} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial Re}(\mathbf{q}_0, Re_0)\Delta Re \quad (\text{II.1.11})$$

Il suit

$$\mathcal{J}(\mathbf{q}_0, Re_0)\Delta\mathbf{q} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial Re}(\mathbf{q}_0, Re_0)\Delta Re \quad (\text{II.1.12})$$

Ainsi, calculer $\Delta\mathbf{q}$ revient à résoudre le système linéaire (II.1.12) impliquant \mathcal{J} et $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial Re}$. Ce dernier terme s'obtient aisément par dérivation des équations (II.1.4). La méthode de calcul de la matrice jacobienne \mathcal{J} sera développée dans la prochaine section. Enfin, la solution du système linéaire s'obtient par une méthode directe LU fournie par la librairie d'algèbre linéaire MUMPS [83] interfacée par la librairie PETSc [84].

II.2 Calcul des perturbations linéaires

II.2.1 Linéarisation : calcul de la matrice jacobienne

La matrice jacobienne des équations de Navier-Stokes 2D compressibles intervient dans les calculs de stabilité et de réceptivité globaux linéaires puisqu'elle est directement liée à la linéarisation des équations. En pratique, d'un point de vue numérique, on cherche à calculer la matrice jacobienne discrétisée en espace \mathcal{J} . Plusieurs stratégies sont envisageables. Il est courant de linéariser les équations continues pour ensuite discrétiser ces équations linéarisées à l'aide d'un schéma numérique (par exemple par méthodes pseudo-spectrales [21] ou par différences finies [85]). À l'inverse, il peut être intéressant de linéariser les équations préalablement discrétisées [59]. C'est cette dernière méthode qui sera adoptée et développée dans la suite. En effet, dans le cadre des écoulements compressibles, elle possède l'avantage d'épargner le travail fastidieux de linéarisation des équations continues ainsi que de leur discrétisation, éliminant du même coup les risques d'erreur liés à ce travail. Elle nécessite de disposer des routines d'un code CFD (non-linéaire) qui fournissent directement les équations discrétisées. En pratique, on importera les routines utilisées pour le calcul de l'écoulement de base

(section II.1.2). Le calcul de la matrice jacobienne repose alors sur le développement limité à l'ordre 1 suivant

$$\mathcal{J}_{\mathbf{v}} = \frac{\mathcal{R}(\bar{\mathbf{q}} + \varepsilon \mathbf{v}) - \mathcal{R}(\bar{\mathbf{q}})}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (\text{II.2.1})$$

où, en notant N la dimension du système discrétisé, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^N$ représente le résidu discrétisé des équations de Navier-Stokes (II.1.8), $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur des variables conservatives associées à l'écoulement de base, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ un vecteur *a priori* quelconque et ε est un paramètre numérique. Le vecteur \mathbf{v} doit être choisi de manière à pouvoir récupérer aisément les coefficients de \mathcal{J} . Pour cela, l'approche la plus simple consisterait à utiliser un vecteur où la composante $k \in [1, N]$ vaut 1 et où toutes les autres sont nulles. L'équation (II.2.1) fournirait alors les coefficients de la colonne k de la matrice \mathcal{J} . En répétant l'opération N fois, l'intégralité des coefficients seraient retrouvée. Cependant, en remarquant que la matrice jacobienne présente une structure diagonale par bloc, une stratégie plus efficace - mais requérant un plus grand effort de développement - est d'ajouter d'autres composantes égales à 1 dans le vecteur \mathbf{v} . Les détails de l'implémentation de cette optimisation sont décrits par Mettot [59]. Le nombre d'appels à l'équation (II.2.1) est désormais de l'ordre de $N/100$. Ce gain d'efficacité dépend de la largeur des blocs de la matrice, eux-mêmes dépendant de l'ordre du schéma et du ratio N_y/N (où N_y est le nombre de point de discrétisation dans la direction y). À titre d'exemple, le calcul d'une matrice jacobienne de taille $N = 600000$ pour un maillage avec $N_y = 100$ associé à une discrétisation à l'ordre 3 est de 5 minutes (processeur *Intel Xeon(R) CPU E5-2630 v2 @ 2.60GHz*). Enfin, la valeur du paramètre ε doit être prise très inférieure à l'ordre de grandeur des variables physiques en jeu afin que les termes d'ordre ε^2 soient négligeables. Néanmoins, cette valeur doit également être suffisamment élevée afin d'éviter les erreurs d'arrondi numériques. Dans le cas où le vecteur \mathbf{v} ne contient qu'un élément non-nul à la ligne i , la formule $\varepsilon = b(1 + |\bar{q}_i|)$ est proposée par Knoll et Keyes [86], où b est choisi comme la racine carrée de la précision machine (soit $b \simeq 10^{-8}$ en double précision) [87]. Si \mathbf{v} contient plusieurs éléments non-nuls, la moyenne de l'expression précédente peut être utilisée. En pratique, il a par ailleurs été observé que l'utilisation de variables adimensionnées, dont les valeurs sont alors de l'ordre de l'unité, permet d'employer directement une valeur ε de 10^{-6} à 10^{-8} sans effet sensible sur le résultat final.

II.2.2 Résolution des problèmes aux valeurs propres

II.2.2.1 Stabilité globale

Comme il l'a été indiqué dans la section I.4, les perturbations sont décomposées en modes globaux tels que $\mathbf{q}'(x, y, t) = \tilde{\mathbf{q}}(x, y)e^{-i\omega t}$ où ω est complexe. En introduisant la matrice diagonale \mathbf{B} permettant l'implémentation des conditions aux limites (section II.2.3), cela conduit à réécrire les équations linéarisées sous la forme du problème aux valeurs propres généralisé suivant

$$-i\omega \mathbf{B}\tilde{\mathbf{q}} = \mathcal{J}\tilde{\mathbf{q}} \quad (\text{II.2.2})$$

La stabilité linéaire globale du système est déterminée par le calcul du spectre de

valeur propre de la matrice jacobienne \mathcal{J} selon qu'il existe ou non une valeur de ω de partie imaginaire supérieure à zéro. La bibliothèque d'algèbre linéaire SLEPc [88] est utilisée pour la résolution numérique du problème aux valeurs propres. L'algorithme de Krylov-Schur, basé sur la construction d'un espace de Krylov, est employé afin de calculer efficacement un nombre réduit de valeurs propres [89]. La région du plan complexe dans laquelle sont recherchées les valeurs propres, typiquement proche de l'axe des réels, est prescrite par une méthode de *shift and invert*. La validation de cette méthode sera proposée pour l'écoulement autour d'un cylindre carré dans la section III.1.

II.2.2.2 Forçage et réponse optimaux

Le calcul des champs de forçage $\tilde{\mathbf{f}}(x, y)$ et réponse $\tilde{\mathbf{q}}(x, y)$ optimaux fait intervenir la matrice résolvante $\mathcal{R} = (i\omega\mathbf{B} - \mathcal{J})^{-1}$ qui requiert au préalable le calcul de la matrice jacobienne (§ I.4.3). Comme on le verra, la connaissance explicite de \mathcal{R} n'est pas nécessaire et n'est de toute façon pas envisageable en termes de ressources numériques. La méthode développée dans cette section repose sur les travaux de Mettot [59] et Sipp et Marquet [57].

L'enjeu est ici de résoudre un problème d'optimisation sur la fonction gain optimal $\mu(\tilde{\mathbf{f}})$ définie comme le ratio des norme énergétique de $\tilde{\mathbf{q}}$ et de $\tilde{\mathbf{f}}$ associées à un produit scalaire (voir section I.4.3). Ces normes peuvent être formulées par l'intermédiaire de matrices normes telles que $\|\tilde{\mathbf{q}}\|_E^2 = \langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle_E = \tilde{\mathbf{q}}^* \mathbf{Q}_E \tilde{\mathbf{q}}$ et $\|\tilde{\mathbf{f}}\|^2 = \langle \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}} \rangle = \tilde{\mathbf{f}}^* \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{f}}$ où $*$ est l'opération transconjuguée. Le choix de la matrice \mathbf{Q}_E correspond à la définition énergétique des perturbations que l'on souhaite optimiser. En régime incompressible, il est courant et naturel d'utiliser l'énergie cinétique [27]. Pour les écoulements compressibles, le choix de cette norme est moins évident. Les études globales tendent à utiliser l'énergie cinétique [72] quand les analyses locales considèrent généralement la norme de Chu (aussi appelée norme de Mack) [90]. Dans ce manuscrit, la norme de Chu sera utilisée pour l'étude des écoulements compressibles. Les détails de son implémentation à partir de variables conservatives sont disponibles en annexe A. La matrice \mathbf{Q} est défini à partir d'un produit scalaire canonique, de sorte que $\|\tilde{\mathbf{f}}\|^2 = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{f}}^* \tilde{\mathbf{f}} d\Omega$, avec Ω l'espace physique optimisé. On remarquera que \mathbf{Q} est définie positive. Toutefois, cette définition implique que cette norme n'est pas homogène à une énergie. Le gain optimal n'est donc pas sans dimension et sa valeur absolue n'a pas signification physique, comme le souligne Sipp et Marquet [57]. Son utilisation permet cependant de détecter les plages de fréquences sur lesquelles l'amplification de perturbation est susceptible de se développer par résonance et pseudo-résonance, en prenant en compte les comportements non-modaux liés à un forçage harmonique. En cela, le gain optimal demeure un outil pertinent d'analyse de la dynamique linéaire d'un écoulement amplificateur sélectif de bruit.

Par ailleurs, il est possible de restreindre le champ de forçage à des composantes spécifiques et à une portion de domaine localisée. Dans ce manuscrit, seules les composantes de quantités de mouvement seront calculées. Pour cela, on introduit une matrice $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{f}}_s$ où $\tilde{\mathbf{f}}_s \in \mathbb{C}^m$ est le vecteur de forçage restreint, et $m < n$. La relation entre forçage et réponse est alors donnée par

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathcal{R}\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{f}}_s \quad (\text{II.2.3})$$

Compte tenu de la définition des produits scalaires $\langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle_E$ et $\langle \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}} \rangle$, le gain optimal (I.4.9) peut finalement s'écrire sous la forme suivante

$$\mu^2 = \sup_{\tilde{\mathbf{f}}_s} \frac{(\mathcal{R}\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{f}}_s)^* \mathbf{Q}_E (\mathcal{R}\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{f}}_s)}{(\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{f}}_s)^* \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{f}}_s)} = \sup_{\tilde{\mathbf{f}}_s} \frac{(\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{f}}_s)^* \mathcal{R}^* \mathbf{Q}_E \mathcal{R} (\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{f}}_s)}{(\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{f}}_s)^* \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{f}}_s)} \quad (\text{II.2.4})$$

On reconnaît dans (II.2.4) l'expression d'un quotient de Rayleigh. Le problème d'optimisation se réduit alors à la résolution du problème aux valeurs propres généralisé

$$(\mathcal{R}^* \mathbf{Q}_E \mathcal{R} \tilde{\mathbf{P}}) \tilde{\mathbf{f}}_s = \mu^2 (\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{f}}_s) \quad (\text{II.2.5})$$

En remarquant² que $\mathbf{P}^* \mathbf{P} = \mathbf{I}$ et compte tenu du fait que la matrice \mathbf{Q} est inversible, l'équation (II.2.5) peut finalement être reformulée comme

$$\underbrace{(\mathbf{P}^* \mathbf{Q}^{-1} \mathcal{R}^* \mathbf{Q}_E \mathcal{R} \mathbf{P})}_{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{f}}_s = \mu^2 \tilde{\mathbf{f}}_s \quad (\text{II.2.6})$$

Le gain optimal s'identifie ainsi à la plus grande valeur propre de la matrice \mathbf{A} tandis que le forçage optimal est le vecteur propre associé. La réponse optimale est retrouvée dans un deuxième temps par résolution du système linéaire (II.2.3). La matrice \mathbf{A} n'est pas calculée explicitement car elle fait intervenir la matrice résolvante \mathcal{R} dont on ne connaît que l'inverse $\mathcal{R}^{-1} = (i\omega \mathbf{B} - \mathcal{J})$. Le problème aux valeurs propres (II.2.6) est résolu par un algorithme de Krylov-Schur en construisant l'espace de Krylov composé des vecteurs $(\mathbf{v}_0, \mathbf{A}\mathbf{v}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{v}_0, \dots)$. Un vecteur de Krylov $\mathbf{v}_i = \mathbf{A}^i \mathbf{v}_0$ peut en effet être calculé à partir du précédent vecteur \mathbf{v}_{i-1} en résolvant l'équation $\mathbf{v}_i = \mathbf{A} \mathbf{v}_{i-1}$ qui implique la résolution de deux systèmes linéaires associés aux matrices \mathcal{R}^{-1} et \mathcal{R}^{-*} . L'algorithme du calcul est donné ci-dessous. Les systèmes linéaires sont résolus par méthode directe LU par appel à la bibliothèque MUMPS via PETSc.

Algorithme 1 Calcul du vecteur de Krylov \mathbf{v}_i associé à la matrice \mathbf{A} à partir de \mathbf{v}_{i-1}

1. $\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{v}_{i-1}$
 2. Résolution du système linéaire $\mathcal{R}^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{u}$
 3. $\mathbf{x} = \mathbf{Q}_E \mathbf{w}$
 4. Résolution du système linéaire $\mathcal{R}^{-*}\mathbf{z} = \mathbf{x}$
 5. $\mathbf{v}_i = \mathbf{P}^* \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{z}$
-

II.2.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur les perturbations linéaires peuvent être implémentées selon au moins deux approches. Selon la méthode, la matrice \mathbf{B} introduite dans les équations (II.2.2) et (II.2.6) prendra des formes différentes.

². Cette propriété est liée à la structure diagonale par bloc de la matrice \mathbf{P}

La première approche consiste à utiliser les conditions aux limites dites des caractéristiques [91]. Le calcul de la matrice jacobienne par l'équation (II.2.1) permet de traduire directement ces conditions aux limites sur les perturbations aux lignes de la matrice correspondant aux points frontières. Dans ce cas, la matrice \mathbf{B} est simplement égale à la matrice identité.

La seconde méthode emploie des conditions de Dirichlet et Neumann sur les perturbations. Des perturbations nulles en entrée de domaine et des dérivées normales nulles en sortie sont imposées. Au niveau de la paroi, les conditions de non-glissement et d'adiabaticité sont utilisées. Cette approche nécessite de formuler la matrice \mathbf{B} diagonale avec des coefficients égaux à 1 excepté aux lignes correspondant aux points frontières où ils sont alors fixés à zéro. Les coefficients de ces lignes dans la matrice jacobienne sont introduits de manière à retranscrire les conditions de Dirichlet et Neumann sur les variables conservatives.

II.3 Extension de la méthode aux perturbations 3D : calcul de la matrice jacobienne

II.3.1 Approche globale

Dans les sections précédentes, les perturbations surimposées à un écoulement de base 2D ont été considérées comme bidimensionnelles. L'étude des perturbations tridimensionnelles en régime compressible a été abordée dans le cadre de l'analyse de stabilité locale [64] et globale [69] et de l'analyse non-modale par approche locale [68, 92]. Ces travaux ont notamment mis en évidence que les perturbations les plus instables sont généralement 3D, marquant une différence fondamentale avec les écoulements incompressibles régis par le théorème de Squire. Il semble cependant ne pas exister d'étude dans laquelle serait pris en compte le caractère non-modal des instabilités compressibles 3D dans un cadre global. La construction d'une telle méthode est l'objet de cette section. Pour cela, on propose d'étendre le cadre numérique présenté dans la section II.2 afin de calculer le gain optimal pour des perturbations globales 3D. L'hypothèse d'un écoulement de base 2D est conservée : la direction z transverse à l'écoulement étant homogène, il est ainsi possible d'y opérer une transformée de Fourier et d'écrire les perturbations sous la forme

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(x, y)e^{i(\beta z - \omega t)} \quad (\text{II.3.1})$$

Le vecteur des variables conservatives possède désormais 5 composantes : $\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T$. Les hypothèses sur l'écoulement de base $\bar{\mathbf{q}}(x, y)$ se traduisent par

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial z} = 0 \text{ et } \bar{w} = 0 \quad (\text{II.3.2})$$

L'approche utilisée reste donc globale puisque la direction x de l'écoulement est résolue. La méthode de calcul de la matrice jacobienne demeure en partie basée sur l'approximation (II.2.1), laquelle requiert désormais l'utilisation du résidu des équations de Navier-Stokes compressibles 3D lié aux flux \mathbf{F} , \mathbf{G} et \mathbf{H} par

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathcal{R}(\mathbf{q}) = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \quad (\text{II.3.3})$$

Cependant, la direction z est une direction de Fourier et un traitement spéciale doit lui être appliquée. En effet, les dérivées transverses sur les perturbations doivent faire apparaître le nombre d'onde β , ce que ne permet pas d'accomplir en l'état la procédure présentée dans la section II.2. Il est par conséquent nécessaire d'adapter cette approche. Pour cela, les termes des flux dans lesquels apparaît une dérivée transverse $\frac{\partial}{\partial z}$ sont séparés des autres. On remarque, d'après les équations (II.1.4), que ces termes sont nécessairement visqueux et on pourra noter

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' - \mathbf{F}_{\nu z} \quad (\text{II.3.4})$$

où $\mathbf{F}_{\nu z}$ ne contient que des termes en $\frac{\partial}{\partial z}$. Les mêmes notations seront employées pour \mathbf{G} et \mathbf{H} . Les expressions détaillées de cette décomposition des flux sont données en annexe B.1. Ainsi, la matrice jacobienne est elle-même vue comme la somme des trois matrices suivantes

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}'_{F,G} + \mathcal{J}'_H + \mathcal{J}_{\nu z} \quad (\text{II.3.5})$$

avec

$$\mathcal{J}'_{F,G} = \left. \frac{\partial(-\partial \mathbf{F}'/\partial x - \partial \mathbf{G}'/\partial y)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\bar{\mathbf{q}}} \quad (\text{II.3.6})$$

$$\mathcal{J}'_H = \left. \frac{\partial(-\partial \mathbf{H}'/\partial z)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\bar{\mathbf{q}}} \quad (\text{II.3.7})$$

$$\mathcal{J}_{\nu z} = \left. \frac{\partial(\partial \mathbf{F}_{\nu z}/\partial x + \partial \mathbf{G}_{\nu z}/\partial y + \partial \mathbf{H}_{\nu z}/\partial z)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\bar{\mathbf{q}}} \quad (\text{II.3.8})$$

Chacune de ces matrices jacobiennes est calculée numériquement par une approche spécifique. Le détail de ces différentes approches est donné dans la suite.

II.3.1.1 Calcul de $\mathcal{J}'_{F,G}$

On procède de façon similaire à la méthode développée dans la section II.2.1. Les routines des équations de Navier-Stokes 3D, après suppression des termes en $\frac{\partial}{\partial z}$, fournissent le résidu $\mathcal{R}'_{F,G} = -\partial \mathbf{F}'/\partial x - \partial \mathbf{G}'/\partial y$. Il reste alors à appliquer l'approximation (II.2.1) pour obtenir la matrice $\mathcal{J}'_{F,G}$

$$\mathcal{J}'_{F,G} \mathbf{v} = \frac{\mathcal{R}'_{F,G}(\bar{\mathbf{q}} + \varepsilon \mathbf{v}) - \mathcal{R}'_{F,G}(\bar{\mathbf{q}})}{\varepsilon} \quad (\text{II.3.9})$$

II.3.1.2 Calcul de \mathcal{J}'_H

Pour ce calcul, il convient d'abord de remarquer que l'expression de \mathcal{J}'_H peut être réécrite en reconsidérant la linéarisation des équations suivantes

$$\mathcal{J}'_H \mathbf{q}' = -\frac{\partial \mathbf{H}'(\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}')}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}'(\bar{\mathbf{q}})}{\partial z} \quad (\text{II.3.10})$$

Le premier terme de droite est reformulé à l'aide d'un développement limité sur $\mathbf{H}'(\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}')$

$$\mathcal{J}'_H \mathbf{q}' = -\frac{\partial(\mathbf{H}'(\bar{\mathbf{q}}) + \partial \mathbf{H}' / \partial \mathbf{q} |_{\bar{\mathbf{q}}} \mathbf{q}')}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}'(\bar{\mathbf{q}})}{\partial z} \quad (\text{II.3.11})$$

Il reste

$$\mathcal{J}'_H \mathbf{q}' = -\frac{\partial(\partial \mathbf{H}' / \partial \mathbf{q} |_{\bar{\mathbf{q}}} \mathbf{q}')}{\partial z} \quad (\text{II.3.12})$$

Or, d'après (II.3.2), $\partial \mathbf{H}' / \partial \mathbf{q} |_{\bar{\mathbf{q}}}$ ne dépend pas de la variable z et d'après (II.3.1), on a $\partial \mathbf{q}' / \partial z = i\beta \mathbf{q}'$. Finalement, l'équation (II.3.12) s'écrit

$$\mathcal{J}'_H \mathbf{q}' = -i\beta \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\bar{\mathbf{q}}} \mathbf{q}' \quad (\text{II.3.13})$$

de sorte que l'expression de la matrice jacobienne est

$$\mathcal{J}'_H = -i\beta \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\bar{\mathbf{q}}} \quad (\text{II.3.14})$$

Le calcul numérique de $\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\bar{\mathbf{q}}}$ est alors basé sur l'approximation II.2.1. La différence avec la méthode précédente réside dans l'utilisation directe du flux \mathbf{H}' et non plus de la divergence des flux. On écrit donc

$$\mathcal{J}'_H = -i\beta \frac{\mathbf{H}'(\bar{\mathbf{q}} + \varepsilon \mathbf{v}) - \mathbf{H}'(\bar{\mathbf{q}})}{\varepsilon} \quad (\text{II.3.15})$$

II.3.1.3 Calcul de $\mathcal{J}'_{\nu z}$

Le calcul de cette dernière matrice requiert des précautions supplémentaires car tous les termes de flux contiennent des dérivées dans la direction transverse z . Or, il n'est pas possible de simplement remplacer ces dérivées par $i\beta$ dans les flux $\mathbf{F}_{\nu z}$, $\mathbf{G}_{\nu z}$ et $\mathbf{H}_{\nu z}$ sous peine de faire apparaître des termes de dérivé en z de l'écoulement de base non nuls dans le calcul de la matrice jacobienne. L'hypothèse d'écoulement de base 2D (II.3.2) serait alors contredite.

Pour éviter cet écueil, il faut remarquer que les perturbations $\tilde{\mathbf{q}}$ n'apparaîtront finalement dans les équations linéarisées que sous forme de dérivés en z (en conséquence de l'hypothèse (II.3.2)). Par exemple, la linéarisation (représentée ci-dessous par l'opérateur \mathcal{L}) de la 4ème composante du vecteur $\mathbf{F}_{\nu z}$ s'écrit :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mu}{Re} \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\bar{\mu}}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = i\beta \frac{\bar{\mu}}{Re} \tilde{u} \quad (\text{II.3.16})$$

L'idée est ainsi de modifier les flux $\mathbf{F}_{\nu z}$, $\mathbf{G}_{\nu z}$ et $\mathbf{H}_{\nu z}$ en $\hat{\mathbf{F}}_{\nu z}$, $\hat{\mathbf{G}}_{\nu z}$ et $\hat{\mathbf{H}}_{\nu z}$ dans lesquels on remplace les termes en facteur des dérivées $\partial / \partial z$ directement par les termes du champ de base. De plus, les dérivées $\partial / \partial z$ sont elle-mêmes remplacées par $i\beta$ qui

apparaîtra en facteur de l'expression finale de la matrice jacobienne. Illustrons cela par l'exemple du flux $\mathbf{F}_{\nu z}$ transformé en $\hat{\mathbf{F}}_{\nu z}$ (les autres flux sont donnés en annexe B.2) :

$$\mathbf{F}_{\nu z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\mu}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\mu}{Re} \left[-u \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{F}}_{\nu z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \frac{\bar{\mu}}{Re} w \\ 0 \\ \frac{\bar{\mu}}{Re} u \\ \frac{\bar{\mu}}{Re} \left[-\bar{u} \frac{2}{3} w + \bar{w} u \right] \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.17})$$

Pour finir, la matrice jacobienne $\mathcal{J}'_{\nu z}$ est finalement obtenue par les approches développées en sous-section (II.3.1.2) pour $\hat{\mathbf{F}}_{\nu z}$ et $\hat{\mathbf{G}}_{\nu z}$ et (II.3.1.1) pour $\hat{\mathbf{H}}_{\nu z}$. En notant

$$\hat{\mathcal{R}}_{\nu z} = -\partial \hat{\mathbf{F}}_{\nu z} / \partial x - \partial \hat{\mathbf{G}}_{\nu z} / \partial y \quad (\text{II.3.18})$$

on obtient ainsi l'expression finale pour $\mathcal{J}'_{\nu z}$

$$\mathcal{J}'_{\nu z} = -i\beta \frac{\hat{\mathcal{R}}_{\nu z}(\bar{\mathbf{q}} + \varepsilon \mathbf{v}) - \hat{\mathcal{R}}_{\nu z}(\bar{\mathbf{q}})}{\varepsilon} + \beta^2 \frac{\hat{\mathbf{H}}_{\nu z}(\bar{\mathbf{q}} + \varepsilon \mathbf{v}) - \hat{\mathbf{H}}_{\nu z}(\bar{\mathbf{q}})}{\varepsilon} \quad (\text{II.3.19})$$

II.3.1.4 Conclusion sur l'extension 3D

Cette approche 3D conserve donc les avantages de la méthode de calcul de la jacobienne 2D dans la mesure où les routines d'un code CFD 3D peuvent être utilisées moyennant une légère modification de leur expression. La linéarisation fastidieuse des équations continues est une nouvelle fois contournée puisque ce sont les équations discrétisées que l'on linéarise. Enfin, l'extension du code de gain optimal 2D est directe car il n'est pas requis de modifier la routines de récupération des coefficients de la jacobienne (section II.2.1) qui constituait l'effort d'implémentation principal.

II.3.2 Code de stabilité local à partir d'un code global

Il est intéressant de remarquer qu'un code d'analyse locale 3D temporelle peut être obtenu à partir du code d'analyse globale 3D en poursuivant le raisonnement de la section précédente dans la direction x . En effet, dans une analyse locale, la direction x de l'écoulement de base est considérée homogène et les perturbations sont décomposées en modes de nombre d'onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Or c'est de cette façon qu'a été traitée la direction z dans l'extension 3D proposée précédemment. L'application de la méthode de calcul de la jacobienne de la section II.3 à la direction x fournira donc la matrice jacobienne liée à une analyse locale. Le calcul du spectre de valeurs propres $\omega \in \mathbb{C}$ associé à cette matrice, que l'on peut déterminer au moyen des méthodes décrites dans la section II.2.2.1, correspond bien à une analyse de stabilité locale temporelle 3D.

Ainsi, il suffit de séparer les termes en $\frac{\partial}{\partial x}$ au sein des flux comme cela avait été fait pour $\frac{\partial}{\partial z}$. En reprenant la logique des notations introduites dans la section précédente, le calcul de la matrice jacobienne est décomposé comme

$$\mathcal{J}_{local} = \mathcal{J}'_F + \mathcal{J}'_{\nu x} + \mathcal{J}'_G + \mathcal{J}'_H + \mathcal{J}'_{\nu z} \quad (\text{II.3.20})$$

où \mathcal{J}'_F et $\mathcal{J}'_{\nu x}$ sont calculés de façon analogue respectivement à \mathcal{J}'_H et $\mathcal{J}'_{\nu z}$.

II.4 Remarques sur le coût numérique

Les ordres de grandeur de la mémoire RAM requise dans les calculs de stabilité et de réceptivité globales sont estimés dans cette section. L'augmentation du coût de calcul liée à l'extension 3D avec direction homogène et la perspective d'une méthode pleinement 3D seront discutées.

Cas 2D et 3D avec direction z homogène

Notons N_x et N_y le nombre de points de maillage respectivement dans la direction x et y . On note N_s le nombre de points du stencil lié à l'ordre de discrétisation. À l'ordre 3, on a par exemple $N_s = 13$. Le nombre de variables conservatives est N_v . Ainsi, la matrice jacobienne est de taille $N = N_v \times N_x \times N_y$. Chaque ligne possède un nombre d'éléments non nuls égal, au maximum, à $N_{nnl} = N_v \times N_s$. Par suite, le nombre $N_e^{(J)}$ d'éléments non nuls dans la matrice jacobienne est au maximum $N \times N_{nnl}$ soit

$$N_e^{(J)} = N_v^2 \times N_s \times N_y \times N_x \quad (\text{II.4.1})$$

La matrice jacobienne possède une structure bande diagonale. La largeur ΔL de cette bande est déterminante lors du calcul de système linéaire par méthode directe LU. La matrice LU (somme de L et U) possède en effet la même largeur de bande. En revanche, bien que la bande de la matrice jacobienne comporte de nombreux éléments non nuls, la matrice LU ne conserve pas nécessairement cette propriété et aura tendance à se remplir : le coût de stockage augmente alors drastiquement. En supposant que la bande ne contienne que des éléments non nuls, on peut estimer le nombre total $N_e^{(LU)}$ d'éléments non nuls contenus dans la matrice LU comme

$$N_e^{(LU)} = N \times \Delta L \quad (\text{II.4.2})$$

Déterminons maintenant la largeur de bande. Lors de la discrétisation d'un système d'équation relatif à des champs 2D, un indice global k est introduit afin de repérer la composante d'un vecteur d'état correspondant au point (i, j) du maillage et à la variable conservative $l \in [1, N_v]$. Ici³, $k = N_c N_y (i - 1) + N_c (j - 1) + l$. Le système discrétisé (de dimension N) peut être vu comme composé de N_x blocs de côté $N_v N_y$.

³. Cette formulation est pertinente dans le cas où $N_y < N_x$. C'est généralement le cas des écoulements ouvert et de direction x .

La taille de ces blocs est liée à ΔL . En introduisant le nombre $N_{s,y}$ de points du stencil dans la direction x ⁴, on estime

$$\Delta L = N_{s,x} \times N_v \times N_y \quad (\text{II.4.3})$$

et finalement,

$$N_e^{(LU)} = N_v^2 \times N_{s,x} \times N_y^2 \times N_x \quad (\text{II.4.4})$$

Cas pleinement 3D

En se basant sur un raisonnement similaire, on peut estimer les ressources requises pour un cas pleinement 3D. Dans un tel cas, où l'écoulement de base est tridimensionnel, la direction transverse n'est plus homogène ce qui interdit la décomposition des perturbations en modes de Fourier. La direction z est de fait discrétisée avec un nombre de points N_z . En suivant le raisonnement établi précédemment, il vient

$$N_e^{(J_{3D})} = N_v^2 \times N_s^{3D} \times N_z \times N_y \times N_x \quad (\text{II.4.5})$$

$$N_e^{(LU_{3D})} = N_v^2 \times N_{s,x} \times N_z^2 \times N_y^2 \times N_x \quad (\text{II.4.6})$$

où N_s^{3D} est la taille du stencil qui, à schéma et ordre constant, est plus élevée que dans le cas 2D.

Exemple

Afin d'observer les ordres de grandeurs produits par les relations précédentes, considérons à titre d'exemple le cas d'un maillage $N_x = 500$, $N_y = 150$, $N_z = 50$ associé à un schéma de discrétisation spatiale précis à l'ordre 3 ($N_{s,x} = 5$, $N_s = 13$ en 2D et $N_s^{3D} = 21$ en 3D). En utilisant des nombres complexes en double précision (16 Bytes), on peut estimer la quantité de mémoire requise pour stocker la matrice jacobienne et pour résoudre un système linéaire par méthode LU (tableau II.1). Ces données sont à prendre comme des ordres de grandeur (plus précisément, ce sont des bornes supérieures). On observe en pratique des valeurs inférieures du fait de la présence d'éléments nuls liés aux caractéristiques physiques du champ de base.

Approche	Stockage matrice jacobienne (GB)	Résolution LU (GB)
2D	0.25	15
3D (z homogène)	0.39	22
3D	31	5600

Table II.1 Comparaison du coût de stockage (RAM) des différentes approches pour un maillage $N_x = 500$, $N_y = 150$, $N_z = 50$ à l'ordre 3

⁴. Par exemple, on a $N_{s,x} = 5$ pour un schéma d'ordre 3. De plus, cette valeur ne dépend en général pas de la direction x ou y , les différentes directions étant discrétisées au même ordre et avec les mêmes schémas.

Le passage de la méthode des perturbations 2D aux 3D avec direction homogène génère nécessairement une hausse du coût de calcul. L'introduction d'une cinquième variable conservative augmente instantanément la taille du système de 25%. La largeur des blocs diagonaux de la matrice jacobienne subit la même augmentation. Cependant, la direction transverse reste non-discrétisée : il n'y a donc pas d'autres facteurs multipliant la taille du système et des blocs. Le coût de stockage de la matrice jacobienne et la résolution des systèmes linéaires par méthode directe LU restent par conséquent abordables. En revanche, le calcul de perturbations pleinement 3D n'est aujourd'hui pas envisageable avec ces méthodes, la mémoire requise pour résoudre un système linéaire par méthode directe étant trop importante. L'utilisation d'une méthode itérative telle que GMRES résoudrait le problème de stockage mais le temps de calcul lié à la convergence de la méthode pourrait s'avérer prohibitif. Enfin, le stockage de la matrice jacobienne 3D pour une analyse de stabilité paraît concevable avec l'utilisation de machines actuelles. Cependant, les temps de calculs liés à l'explicitation d'une telle matrice (remplissage des coefficients, algorithmes de recherche de valeurs propres) pourrait rendre le calcul impraticable.

Chapitre III

Validation de la méthode numérique

Table des matières

III.1 Instabilité globale du cylindre à section carrée	36
III.1.1 Présentation	36
III.1.2 Validation de l'écoulement de base	37
III.1.3 Instabilité globale : allée de von Karman	39
III.2 Couche limite de Blasius 2D	40
III.2.1 Analyse de stabilité locale	40
III.2.2 Réponse optimale locale par approche globale	42
III.2.3 Réponse optimale globale	44
III.2.4 Ressources numériques	45
III.3 Réceptivité globale 3D	46
III.3.1 Couche limite de Blasius	46
III.3.2 Couche limite compressible	48

Dans un premier temps, l'écoulement 2D autour d'un cylindre à section carré est étudié afin de valider différents aspects des méthodes développées dans le chapitre précédent. La résolution des équations non-linéaires sous le seuil d'instabilité permettra d'obtenir une première solution de l'écoulement de base en dessous du seuil de bifurcation à $Re = 40$. Puis la méthode de continuation sera employée afin d'atteindre les solutions stationnaires au delà du seuil d'instabilité. Enfin, le seuil d'instabilité et la structure spatiale du mode linéairement instable à l'origine de l'allée de von Karman seront calculés par analyse de stabilité globale. Dans un second temps, les méthodes d'analyse de stabilité locale et de forçage optimal 2D et 3D seront validées par l'étude de la couche limite de Blasius. Finalement, la méthode de réceptivité pour des perturbations globales 3D en régime compressible, pour laquelle aucun résultat n'existe actuellement dans la littérature, sera confrontée à un résultat d'analyse locale. Afin d'autoriser la comparaison avec ces résultats, l'approche globale sera utilisée en restreignant les régions d'optimisation de la réponse et de forçage.

III.1 Instabilité globale du cylindre à section carrée

III.1.1 Présentation

On considère un carré de côté a autour duquel se développe un écoulement supposé parallèle et uniforme en amont. La longueur a sera utilisée comme échelle de référence dans la construction du nombre de Reynolds. Comme dans le cas d'un cylindre, l'écoulement de base va subir différentes bifurcations à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Un régime visqueux (*creeping flow*) domine à très bas Reynolds. Les travaux numériques menés par Sen et al. [93] permettent d'estimer que ce régime persiste jusqu'à $Re = 1.2$. Au delà de cette valeur, l'écoulement reste stationnaire mais une zone de recirculation apparaît en aval du carré. On caractérise l'évolution de cette zone par sa longueur L_r dans le sens de l'écoulement. Cette grandeur globale rend compte de l'organisation générale de l'écoulement, en particulier du sillage. La validation de l'écoulement de base calculé par CFD directe et continuation sera ainsi réalisée par rapport aux résultats de la littérature obtenue sur cette longueur. Les travaux utilisés dans la suite en référence considèrent les frontières parallèles à l'écoulement comme des parois avec glissement ($v = 0$ et $\partial u / \partial y = 0$). Un paramètre de blocage B est introduit comme le ratio du côté du carré et de la distance entre les parois. Pour $B = 0.05$ et $Re = 40$, les travaux de Dhiman et al. [94] et Sen et al. [93] indiquent respectivement $L_r = 2.822$ et $L_r = 2.807$. Par ailleurs, L_r varie linéairement avec le nombre de Reynolds jusqu'à au moins $Re = 40$ [93].

Autour de $Re_c = 50$, une bifurcation de Hopf est observée. L'écoulement stationnaire devient instable et une nouvelle solution instationnaire (périodique) apparaît. Du point de vue d'une analyse de stabilité linéaire, cela correspond à une instabilité globale dont on peut détecter le seuil par le calcul du spectre de valeur de la matrice jacobienne \mathcal{J} . La bifurcation étant instationnaire, on cherchera une valeur propre de partie réelle ω_r non nulle et dont la partie imaginaire s'annule pour un nombre de Reynolds critique Re_c . La partie réelle permettra de retrouver la fréquence du cycle limite proche du seuil d'instabilité. On définit une fréquence adimensionnée, connue comme le nombre de Strouhal, par

$$St = \frac{fa}{u_\infty} = \frac{\omega_r a}{2\pi u_\infty} \quad (\text{III.1.1})$$

Une première analyse de stabilité menée sur cette configuration par Kelkar et Patankar [81] révèle que $Re_c = 53$ pour un facteur de blocage $B = 0.14$. Pour $B = 0.05$, les travaux ultérieurs de Zaki et al. [95] puis Sohankar et al. [96] font état de seuils légèrement inférieurs, respectivement calculés à $Re_c = 50$ et $Re_c = 51.2$. Comme dans le cas du cylindre [97], on pourra noter que le cycle limite se déstabilise à plus haut Reynolds selon un mode tridimensionnel. L'analyse de Floquet conduite par Robichaux et al. [98] aboutit à un Reynolds critique $Re_{c_2} = 161$. Une telle analyse sort cependant du cadre de ce manuscrit.

III.1.2 Validation de l'écoulement de base

III.1.2.1 Résolution de Navier-Stokes non-linéaire

Une solution stationnaire est calculée à partir du code Navier-Stokes compressible décrit en section II.1.2. Dans cette section, sauf mention contraire, le nombre de Mach sera fixé à 0.3 de manière à tendre vers un écoulement incompressible. Un écoulement uniforme et parallèle est imposé en entrée. En régime subsonique, la pression est imposée en sortie¹ de domaine et extrapolée en entrée. Les autres variables sont extrapolées en sortie. Les parois du carré sont supposées adiabatiques avec une condition de non glissement. Pour se placer dans une configuration semblable à la littérature, les frontières parallèles à l'écoulement (haut et bas) sont considérées comme des parois adiabatiques avec glissement. Le facteur de blocage est fixé à $B = 0.05$. Les dimensions du domaine en amont et en aval sont choisies telles que la longueur de la zone de recirculation ne dépende pas de leur valeur. En pratique, des longueurs de $20a$ en amont et $60a$ en aval sont suffisantes. Le schéma de Roe à l'ordre 3 est utilisé pour la discrétisation des flux. Enfin, un maillage non-uniforme avec progression géométrique de raison $q = 1.12$ est construit depuis les parois du carré.

À $Re = 40$, on obtient une solution stationnaire dont le champ de vitesse est donné en figure III.1. On peut observer le développement du sillage en aval du carré ainsi que la zone de recirculation attendue pour ce régime d'écoulement. La convergence en maillage est atteinte avec le maillage 297×97 pour lequel le calcul de la zone de recirculation est identique à celle obtenue à partir du maillage 585×153 (tableau III.1). Les résultats obtenus sont supérieurs aux données de référence de quelques pourcents. Les effets de compressibilité semblent expliquer la surévaluation de L_r à $M = 0.3$ puisqu'en abaissant le nombre de Mach, la longueur de recirculation tend à s'accorder avec les valeurs de la littérature.

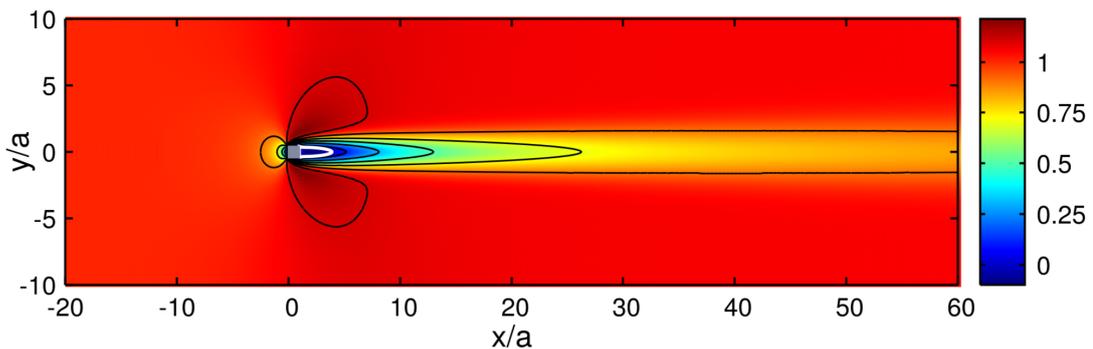


Fig. III.1 Champ de vitesse longitudinale à $Re = 40$ et $B = 0.05$. Les lignes noires sont des contours de vitesse. La ligne blanche délimite la zone de recirculation.

¹. Du fait de l'adimensionnement présenté dans la section II.1.1, la valeur imposée sur la pression est $1/\gamma M^2$

Référence	L_r	Écart
Dhiman et al. [94], étude numérique	2.822	-
Sen et al. [93], étude numérique	2.807	-0.53%
CFD, $M = 0.30$	2.894	+2.55%
CFD, $M = 0.30$, Maillage raffiné	2.893	+2.52%
CFD, $M = 0.25$	2.837	+0.53%
CFD, $M = 0.20$	2.819	-0.11%
Continuation, $M = 0.30$, $Re_0 = 30$, $\Delta Re = 2$	2.956	+4.75%
Continuation, $M = 0.30$, $Re_0 = 30$, $\Delta Re = 1$	2.951	+4.57%

Table III.1 Valeurs de la longueur de la zone de recirculation L_r obtenues à $Re = 40$ et $B = 0.05$. Le maillage de référence est 297x97 et le maillage raffiné 585x153.

III.1.2.2 Résolution par continuation

La résolution de l'écoulement de base par continuation requiert une solution initiale à un nombre de Reynolds Re_0 que l'on calcule par CFD dans les conditions de la section précédente. Le calcul de continuation peut alors être entrepris par résolutions successives du système linéaire (II.1.12). Le schéma de Roe à l'ordre 2 est utilisé pour le calcul de la matrice jacobienne. Il est à noter que l'ordre 3 conduit à une divergence du calcul alors que son utilisation dans le code CFD direct (section précédente) produit des résultats convergés et exacts. Le changement de nature des équations résolues - d'instationnaire à stationnaire dans le cas de la continuation - pourrait être à l'origine de ce comportement.

Partant de $Re_0 = 30$ et cherchant les solutions de proche en proche selon un intervalle $\Delta Re = 2$, on se propose de comparer le résultat issu du calcul de continuation à $Re = 40$ avec le calcul par résolution direct des équations de Navier-Stokes. Comme illustré sur le tableau III.1, l'accord sur L_r est acceptable, la continuation surestimant sa valeur de l'ordre de 2%. L'indépendance vis à vis du pas de continuation est vérifiée par comparaison avec un calcul à $\Delta Re = 1$ pour lequel la longueur de recirculation est similaire. Le calcul de continuation est ensuite prolongé jusqu'à $Re = 56$, incluant ainsi une gamme de Reynolds pour laquelle les solutions calculées sont instables comme le montrera l'analyse de stabilité linéaire. Un calcul à partir du code Navier-Stokes direct ne permettrait pas d'atteindre ces solutions instables. La longueur de recirculation varie linéairement avec le Reynolds (fig. III.2) comme observé par Sen et al. [93].

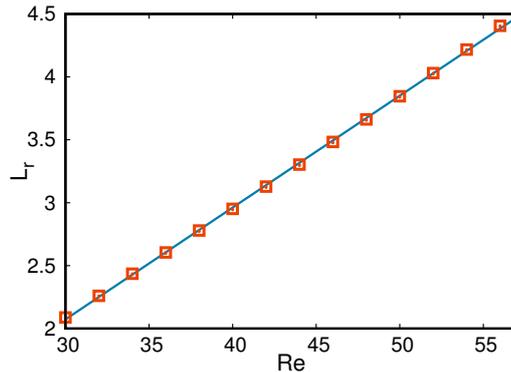


Fig. III.2 Longueur de la bulle de recirculation en fonction du nombre de Reynolds, obtenu par continuation. La droite bleue est la régression linéaire : $L_r = 0.0889Re - 0.594$ (Coefficient de corrélation : $r^2 > 0.99$)

III.1.3 Instabilité globale : allée de von Karman

À partir des solutions stationnaires obtenues par continuation, on entreprend une analyse de stabilité linéaire globale par résolution du système aux valeurs propres (II.2.2). Le schéma de Roe à l'ordre 2 est utilisé pour le calcul de la matrice jacobienne. Les conditions aux limites sur les perturbations sont les mêmes que pour l'écoulement de base au niveau des parois du carré et des frontières haute et basse. En amont, une condition de Dirichlet est imposée sur toutes les variables tandis qu'une condition de Neumann est utilisée en sortie. Une zone tampon est mise en place en sortie de domaine afin d'atténuer les modes acoustiques. L'implémentation de cette zone est basée sur un coefficient d'amortissement χ placé en facteur du résidu \mathcal{R} lors du calcul de la matrice jacobienne (II.2.1). Ce coefficient varie linéairement de 1 à 0 dans la zone tampon et vaut 1 en tout autre point du domaine (fig. III.3).

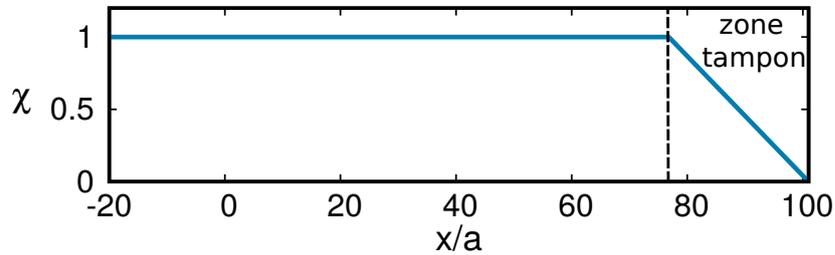


Fig. III.3 Profil du coefficient d'amortissement

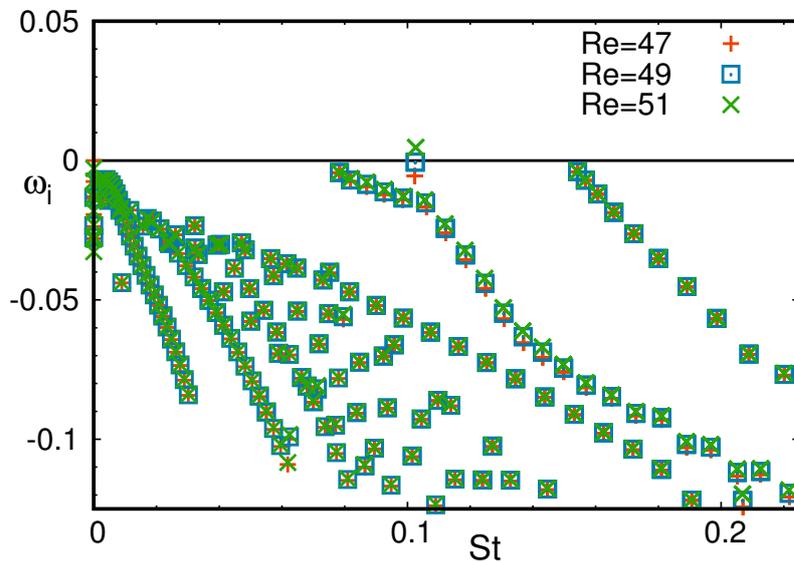


Fig. III.4 Spectre de valeurs propres pour différents Reynolds pour l'écoulement autour d'un carré. Le demi-plan supérieur contient les taux de croissance positifs, indiquant une instabilité globale

Les spectres de valeurs propres pour différents Reynolds sont présentés en figure III.4. La valeur propre associée à l'instabilité de l'allée de von Karman est aisément identifiable par sa dépendance marquée avec le nombre de Reynolds. Le taux de croissance

de ce mode s'annule pour $Re_c = 49$ et devient positif au delà. Cette valeur s'accorde favorablement avec les données de la littérature pour cette configuration géométrique. Le nombre de Strouhal du mode neutre est calculé à $St = 0.103$. La comparaison est excellente avec les travaux de Zaki et al. [95], qui fournissent une valeur de $St = 0.106$. La structure spatiale de ce mode est tracée en figure III.5. Un champ de vorticité se développe en aval du carré dans le sillage de l'écoulement de base. La présence de la zone tampon altère et atténuée progressivement la structure du mode en sortie de domaine. Les autres modes du spectre sont très peu dépendants du Reynolds et demeurent tous stables.

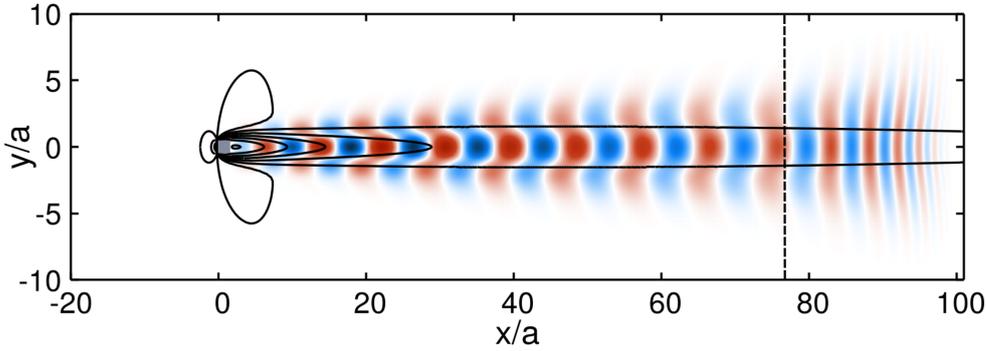


Fig. III.5 Partie réelle du champ de la vorticité du mode neutre à $Re = 49$. Valeurs négatives en bleu et positives en rouge. Les contours de vitesse du champ de base apparaissent en lignes noires. La ligne en pointillé indique l'abscisse de début de la zone tampon.

III.2 Couche limite de Blasius 2D

III.2.1 Analyse de stabilité locale

Dans le but de valider l'approche locale de stabilité développée à partir du code global (section II.3.2), on se propose d'étudier la cas de la couche limite de Blasius. Une couche limite en développement au dessus une plaque plane devient convectivement instable à partir d'un certain nombre de Reynolds (i.e. une certaine distance au bord d'attaque). Numériquement, une analyse de stabilité linéaire locale permet de montrer que le Reynolds critique basé sur l'épaisseur de déplacement est $Re_{\delta^*} = 519.4$ [12]. Le mode instable associé est une onde de Tollmien-Schlichting (TS), localisée en proche paroi et pour laquelle le maximum de $|v'|$ est localisée au point d'annulation de $|u'|$.

L'écoulement de base est obtenu par résolution de l'équation de Blasius [99] qui admet une solution autosimilaire selon la variable $\eta = y\sqrt{u_\infty/\nu x}$. Il s'agit ainsi de résoudre une équation différentielle ordinaire avec conditions aux bords. Une méthode de Runge-Kutta alliée à une méthode de tir (*shooting method*) est utilisée avec un maillage de 350 points à progression géométrique en proche paroi. L'analyse de stabilité temporelle est menée en fixant le nombre de Mach à 0.3 afin de tendre vers l'hypothèse incompressible. On fixe également $\beta = 0$ puisque le nombre de Reynolds critique est nécessairement associé à une perturbation 2D en vertu du théorème de Squire. On

impose aux perturbations de tendre vers 0 en $y_{max} = 20\delta^*$ et de respecter les conditions de plaque adiabatique en $y = 0$. Une plage de nombre de Reynolds [520,528] est balayée afin de mettre en évidence le seuil critique auquel le taux de croissance s'annule (fig. III.7). Les résultats associés au mode neutre (tableau III.2) font état d'un écart de l'ordre du pourcent avec ceux de l'analyse locale incompressible présentée par Schmid et Henningson [12], ce qui paraît encore une fois acceptable compte tenu de l'approche compressible utilisée. On distingue sur le spectre de valeurs propres (fig. III.6) un ensemble de mode appartenant au spectre discret, de vitesse de phase inférieure à 1. Le mode neutre, observable à $Re = 524$, repose sur l'axe des réels. Le profil des variables primitives associées est caractéristique d'une onde TS (fig.III.7). Les perturbations de masse volumique, dont le calcul est inhérent à l'approche compressible utilisée, sont proches de zéro. L'onde ainsi calculée correspond donc effectivement celle d'une analyse incompressible. Le reste du spectre est composée d'une branche de modes verticale de vitesse de phase c_φ égale à l'écoulement libre, connue sous le nom de spectre continu. Les taux de croissance de cette branche, tous négatifs, tendent vers 0 mais ne franchissent jamais cette valeur.

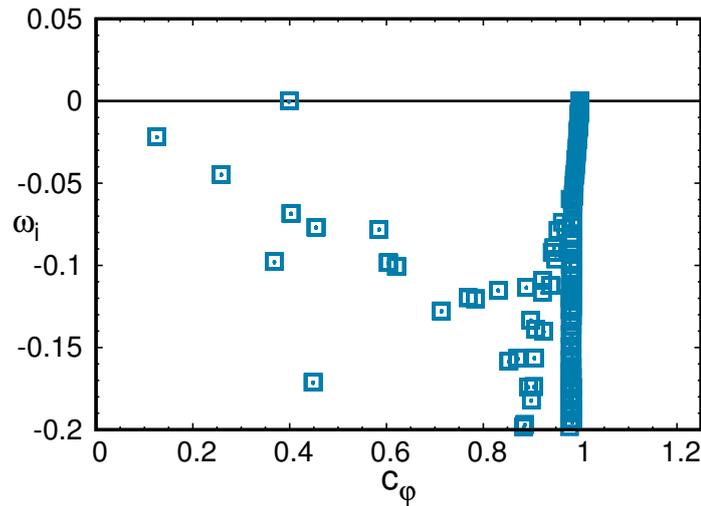


Fig. III.6 Spectre de valeurs propres de la couche limite de Blasius à $Re = 524$

	Résultats	Schmid et Henningson [12]
Re_{δ^*}	524.2	519.4
α	0.300	0.303
c_φ	0.3987	0.3965

Table III.2 Propriétés du mode neutre. Comparaison des résultats de stabilité locale à $M = 0.3$ avec le calcul incompressible de Schmid et Henningson [12]

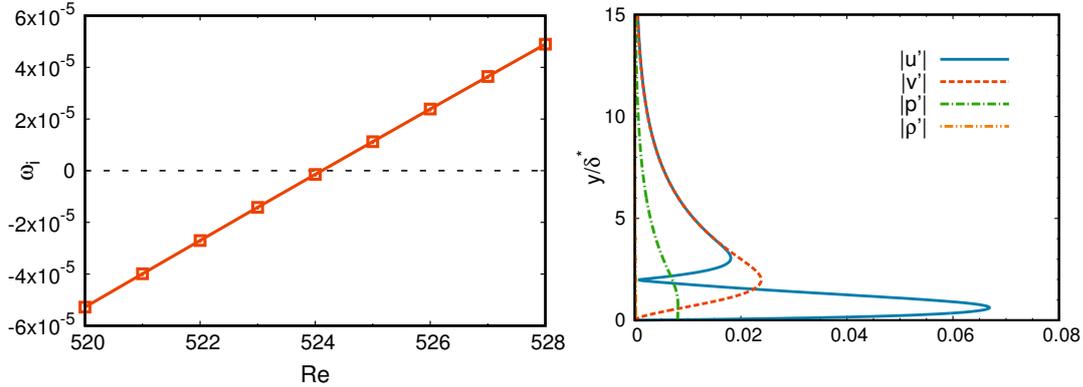


Fig. III.7 Gauche : Taux de croissance du mode TS en fonction du Reynolds. Droite : Profil normal du mode TS neutre

III.2.2 Réponse optimale locale par approche globale

On propose ici une méthode de validation préliminaire de la méthode de réponse optimale *globale* par comparaison avec des résultats *locaux*. L'avantage de cette approche réside principalement dans le faible coût de calcul nécessaire. Elle permet également de s'affranchir de l'influence des conditions aux limites amont et aval. Cela représente ainsi un moyen efficace de tester un code en voie de validation et d'étudier l'influence de divers paramètres numériques. Le principe repose sur la transposition des hypothèses de l'approche locale dans l'approche globale. On considère ainsi un écoulement de base parallèle et homogène dans la direction x . Comme l'approche globale requiert un écoulement de base 2D, la même solution de l'équation de Blasius $\bar{q}(y)$ est copiée en chaque abscisse x du maillage. La dimension L_x du domaine en x est fixée selon le nombre d'onde α que l'on souhaite imposer : $L_x = 2\pi/\alpha$. Enfin, dans ces conditions, les perturbations satisfont des conditions aux limites périodiques en aval et en amont.

Le calcul de réceptivité locale de la couche limite de Blasius présenté par Monokrousos et al. [58] est pris en référence. Dans ce travail, le gain optimal local est obtenu par le calcul de la plus grande valeur singulière de la matrice résolvante de l'équation d'Orr-Sommerfeld. Ce résultat correspond à la valeur μ du gain optimal, plutôt que μ^2 . Les paramètres physiques sont fixés à $Re_{\delta^*} = 1000$ et $\alpha = 0.1$. La norme associée à la réponse optimale est l'énergie cinétique² dont le choix est naturel dans le cas d'un écoulement incompressible. Le calcul par approche globale permet de parfaitement retrouver ces résultats (fig. III.8). Le profil de la réponse associée à la fréquence la plus amplifiée révèle une nouvelle fois une onde TS (fig. III.8) similaire au calcul de l'analyse locale précédemment exposé.

La convergence en maillage est atteinte dès 200×75 pour un schéma de Roe à l'ordre 3 (fig. III.9) ce qui confirme la faible demande en ressources numériques pour ce type de calcul. L'utilisation d'un maillage non-convergé conduit à un décalage de la fréquence

2. L'expression du gain optimal dans les travaux de Monokrousos ne fait cependant pas apparaître le facteur 1/2 de l'énergie cinétique. Cela n'est pas un problème dans la mesure où la valeur absolue du gain n'a pas de signification physique. Cependant, les calculs réalisés dans ce manuscrit prennent en compte ce facteur si bien que tous les résultats issus de Monokrousos et al. [58] ont été renormalisés pour rendre possible les comparaisons.

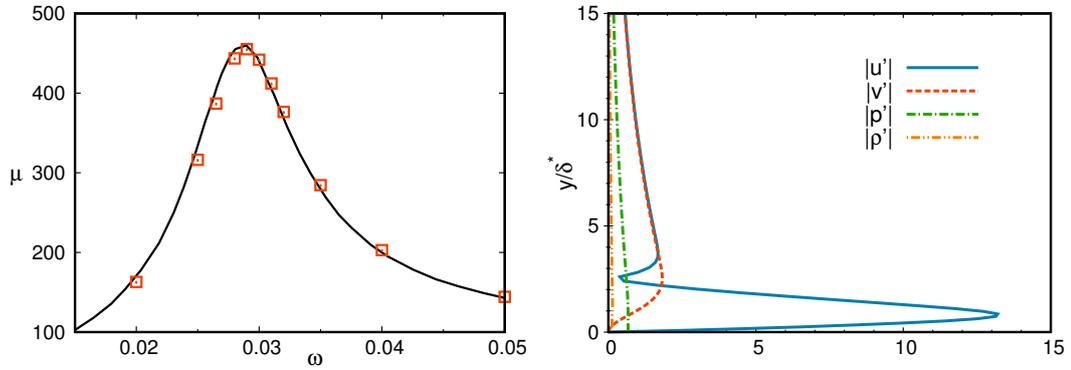


Fig. III.8 Gauche : Gain optimal calculé pour la couche limite de Blasius homogène en x à $Re_{\delta^*} = 1000$. Comparaison avec le résultat de Monokrousos et al. [58] (courbe noire). Droite : Profil normal de la réponse optimal à $\omega = 2.9 \times 10^{-2}$

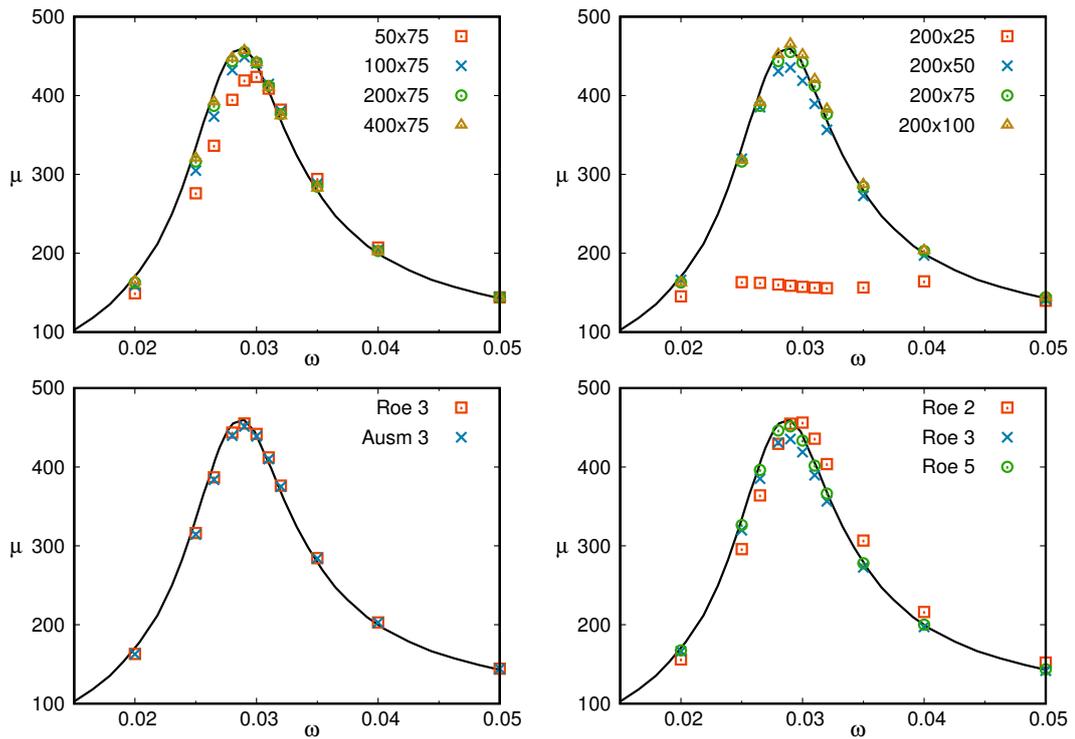


Fig. III.9 Influence des paramètres numériques sur le calcul du gain optimal de la couche limite de Blasius homogène dans la direction x à $Re_{\delta^*} = 1000$. Haut : Convergence en maillage en x (gauche) et y (droite). Bas gauche : Schéma numérique. Bas droite : Ordre du schéma. Courbe noire : résultats de Monokrousos et al. [58] normalisés par $\sqrt{2}$

d'amplification maximale ainsi qu'à une sous-estimation du gain optimal. Il apparaît que l'influence du schéma numérique (Roe ou Ausrm+) est négligeable. On soulignera que la méthode de calcul de la matrice jacobienne (II.2.1) rend aisé l'utilisation de différents schémas lorsque ceux-ci sont issus d'un code CFD pré-existant. L'ordre du schéma, testé sur un maillage non-convergé, joue un rôle attendu pour les ordres 3 et 5. En effet, l'ordre 5 permet d'atteindre un meilleur résultat sur ce maillage au prix d'un coût numérique plus élevé. L'utilisation de l'ordre 2 s'analyse différemment. Contrairement aux ordres 3 et 5, la valeur maximale du gain optimal convergé est atteinte. On peut envisager, sans preuve formelle, de comprendre ce comportement à travers l'éventuelle réminiscence de la propriété de non-dissipation des schémas d'ordre pair connue en simulation numérique. Cependant, l'ordre 2 induit un décalage de la fréquence maximale que ne connaissent pas les ordres 3 et 5. L'utilisation de l'ordre 2 sera ainsi abandonnée dans la suite des travaux car la précision de la prédiction en fréquence demeure le résultat essentiel d'un calcul de gain optimal.

III.2.3 Réponse optimale globale

On se place désormais dans une approche purement globale. L'écoulement de base est une couche limite en développement au dessus d'une plaque plane dont le nombre de Reynolds en entrée de domaine est $Re_{\delta_0^*} = 1000$. Dans la suite, l'échelle de longueur de référence sera l'épaisseur de couche limite en entrée de domaine δ_0^* . Les dimensions du domaine sont $[0, 800] \times [0, 30]$. Ces paramètres permettront de comparer nos résultats avec le calcul de réponse optimale globale incompressible de Monokrousos et al. [58]. Dans ces travaux, une approche de marche en temps (*time-stepping*) des équations linéarisées combinée à une optimisation basée sur l'utilisation d'un opérateur adjoint est adoptée. Cette méthode a permis le calcul à la fois de la condition initiale optimale et du forçage optimal pour des perturbations globales 3D. Nous chercherons ici à retrouver les résultats de forçage optimal pour des perturbations 2D (onde TS) tandis que les résultats 3D à basse fréquence (*streaks*) seront abordés dans la section suivante. La fréquence produisant le plus grand gain optimal est en très bon accord avec les travaux de référence (fig. III.10). L'allure de la courbe est également retrouvée. Cependant, les valeurs obtenues par Monokrousos ont dû être normalisées par un facteur 1/2 contrairement au facteur $1/\sqrt{2}$ attendu et utilisé dans la section précédente. La nécessité de cet ajustement reste inexplicé. Les travaux de Åkervik et al. [56], dans lesquels le calcul du gain optimal est basé sur la projection de la réponse sur une base de mode globaux, offrent un autre moyen de comparaison (le domaine physique étant identique à celui considéré dans cette section). Bien que l'ordre de grandeur reste le même, la valeur de leur gain maximal est différente à la fois de Monokrousos et des travaux de ce manuscrit. En revanche, la fréquence générant le gain maximal est identique. Or comme la valeur absolue du gain n'est de toute façon pas significative, on pourra se satisfaire du consensus sur cette fréquence.

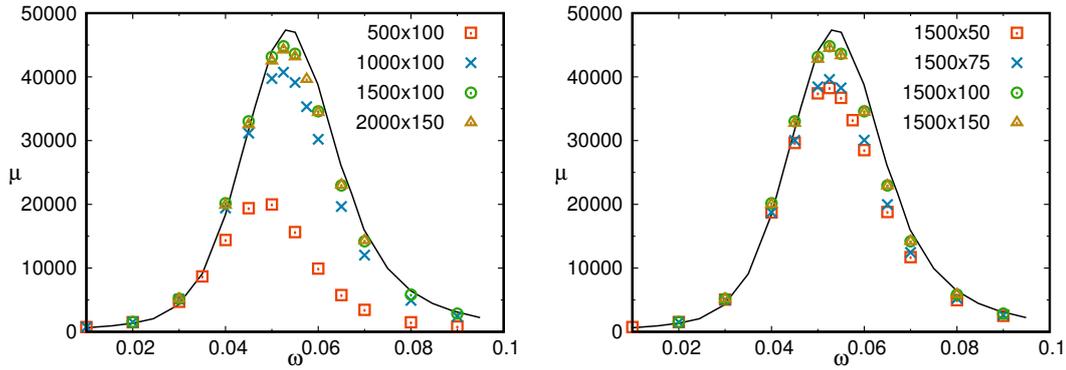


Fig. III.10 Convergence en maillage du gain optimal de la couche limite de Blasius en développement (cas global). Courbe noire : résultats de Monokrousos et al. [58] normalisés par un facteur 2.

III.2.4 Ressources numériques

L'évolution des ressources numériques en fonction du maillage est discutée pour le calcul de réponse optimale de l'écoulement de Blasius homogène. De toutes les étapes de l'algorithme, la résolution des systèmes linéaires intervenant dans la construction de l'espace de Krylov pour la résolution du problème de Rayleigh (II.2.6) est de loin la plus coûteuse. Ainsi, on s'intéressera à la quantité de mémoire (RAM) maximale requise et au temps CPU nécessaire à la résolution d'un de ces systèmes linéaires (fig.III.11). Les données sont tracées en log-log et sont complétées par une régressions linéaire. Deux bibliothèques d'algèbre linéaire sont comparées : MUMPS (interfacée par PETSc) et le solver interne de PETSc. Les résultats présentés ont été menés sur une seule unité de calcul (calcul non-parallèle).

En fixant tour à tour le nombre de points N_x et N_y , on étudie l'influence du maillage dans chacune des deux directions. Comme il l'a été souligné dans la section II.4, ces deux directions ne sont pas équivalentes d'un point de vue algorithmique et dépendent de la formulation choisie pour l'indice globale k . Ainsi, on vérifie bien que la quantité de mémoire varie linéairement avec N_x puisque ce paramètre, en agissant seulement sur la taille du système discrétisé, ne fait qu'augmenter linéairement le nombre d'éléments non-nuls $N_e^{(LU)}$. Pour N_y , les observations diffèrent de l'analyse précédemment développée dans laquelle une variation en N_y^2 était prédite. Toutefois, cette analyse rudimentaire prédisait seulement une borne supérieure dans la mesure où elle supposait la largeur ΔL de la matrice LU comme intégralement remplie d'éléments non-nuls. Or cela n'est pas nécessaire et il n'est possible de connaître le taux de remplissage *a priori*. On peut ainsi seulement prédire une variation de la mémoire en $(N_y)^a$ où $1 \leq a \leq 2$. Le cas limite $a = 1$ correspond à une situation où la factorisation LU ne ferait pas apparaître de nouveaux éléments non-nuls, tandis que $a = 2$ est le cas dans lequel la bande ΔL est composée uniquement d'éléments non-nuls.

Les données récoltées sur les temps de calcul, notamment la non-linéarité en N_x , sont plus difficiles à analyser car elles dépendent de l'implémentation des méthodes au sein des bibliothèques de calcul scientifique. On peut néanmoins remarquer que la variation en N_y possède un exposant plus élevé que celui de N_x , augmentant drastiquement le coût de raffinement d'un maillage dans la direction normale. Enfin, une

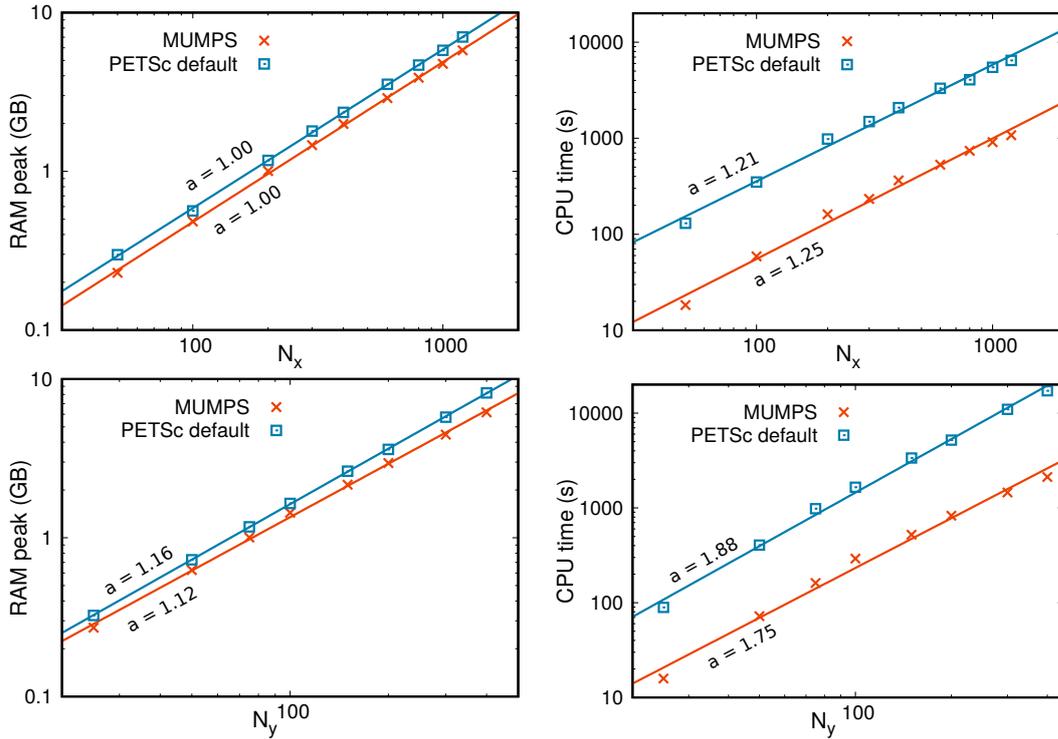


Fig. III.11 Évolution des ressources numériques en fonction du maillage pour la couche limite de Blasius homogène en x

différence réelle de performance semble exister entre les deux bibliothèques puisque l'appel à MUMPS (version 5.0.0) permet de réduire le temps de calcul d'un facteur entre 5 et 10 par rapport au solveur de PETSC (version 3.6.4).

Afin de mettre en perspective ces données, il convient finalement d'énoncer une remarque sur le nombre total de systèmes linéaires résolus pour un calcul de gain optimal à une fréquence donnée. La résolution de deux systèmes linéaires est nécessaire pour construire un vecteur de Krylov. Cependant, le nombre de vecteurs de Krylov requis pour résoudre le système aux valeurs propres (II.2.6) n'est pas connu initialement. En pratique, on observe que 3 à 6 vecteurs de Krylov suffisent en général. Ce nombre tend à augmenter pour des maillages trop grossiers vis à vis de la fréquence de forçage imposée, les hautes fréquences exigeant une meilleure résolution spatiale.

III.3 Réceptivité globale 3D

III.3.1 Couche limite de Blasius

On cherche finalement à valider la méthode proposée dans la section II.3 pour le calcul des réponses et forçages optimaux 3D. Dans un premier temps, on reprend l'écoulement de base homogène en x de la section III.2.2 afin d'imiter l'analyse locale de gain optimal de Monokrousos et al. [58] pour laquelle un résultat 3D est disponible. La fréquence de forçage est désormais fixée à $\omega = 0.05$ et le gain optimal est calculé en fonction du nombre d'onde transverse β . Les résultats sont en très bon accord avec

l'analyse locale (fig. III.12).

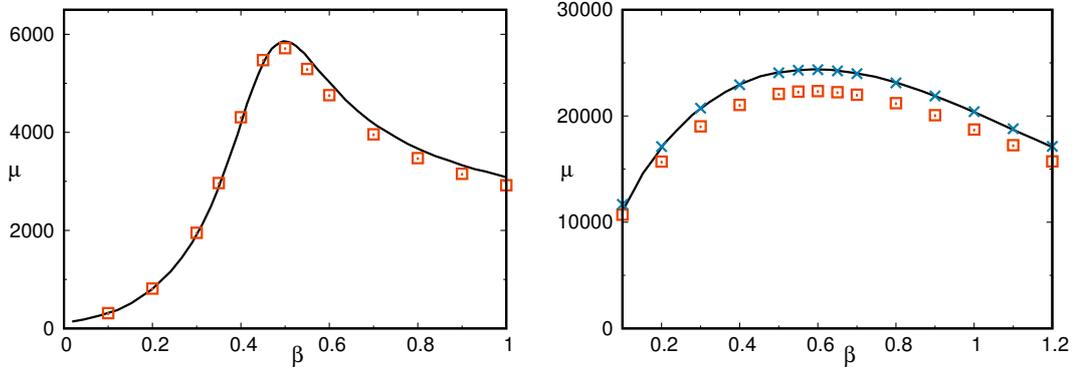


Fig. III.12 Gain optimal en fonction du nombre d'onde transverse β . Gauche : Couche limite de Blasius homogène en x à $Re_{\delta^*} = 1000$, $\omega = 0.05$. Droite : Couche limite de Blasius en développement, $\omega = 0$. Courbe noire : résultats de Monokrousos et al. [58] normalisés par $\sqrt{2}$. Carrés rouge : Résultats actuels. Croix bleue : normalisation des résultats avec gain maximum de Monokrousos et al. [58]

La méthode 3D est maintenant confrontée au cas purement global de la couche limite de Blasius en développement. L'étude de Monokrousos et al. [58], dans lesquels figurent un calcul du gain optimal à basse fréquence, sont de nouveau pris en référence. On sait depuis les travaux de Ellingsen et Palm [36] qu'un écoulement cisailé en proche paroi peut-être le siège d'une instabilité non-modale, tridimensionnelle et de basse fréquence. La présence de perturbations 3D de vorticité axiale non nulle peut en effet générer par mécanisme de *lift-up*. des structures élancées dans la direction axiale au sein desquelles la vitesse longitudinale est grande par rapport aux autres composantes. Ces structures sont communément appelées *streaks* et une plus ample revue de la littérature à leur sujet sera donnée en section VI.1.1.

Le domaine physique de l'écoulement de base est inchangé par rapport à la section III.2.3. La fréquence de forçage est fixée à $\omega = 0$ et le gain optimal est calculé en fonction de β . Le nombre d'onde optimal $\beta = 0.6$ obtenu par Monokrousos et al. [58] est retrouvé (fig.III.12). On constate néanmoins qu'un écart inférieur à 10% subsiste sur la valeur du gain malgré la convergence en maillage par ailleurs atteinte pour une grille de calcul de 200×100^3 . Cependant, en renormalisant les résultats à l'aide de la valeur maximum du gain optimal de Monokrousos et al. [58], la comparaison devient excellente. Encore une fois, la différence entre les résultats n'apparaît ainsi qu'à un facteur près du gain, dont la valeur absolue n'est de toute façon pas significative. Le forçage optimal est composé de vortex axiaux contra-rotatifs à l'origine de l'effet *lift-up* (fig.III.13). La composante f'_x est inférieure d'un ordre de grandeur par rapport autres composantes. La réponse associée possède l'allure typique de *streaks* avec un pic de vitesse longitudinale pour y/δ^* de l'ordre de l'unité. Les composantes normale et transverse de la vitesse sont négligeables devant elle. La visualisation 3D III.14 permet d'observer la croissance des *streaks* dans la direction de l'écoulement en rappelant la périodicité transversale de ces structures. Le forçage optimal tend à se situer plus en amont, en accord avec les observations de Monokrousos et al. [58].

3. Le faible nombre de points requis en x ne doit pas surprendre car, pour des *streaks*, l'échelle de longueur en jeu dans la direction x est grande par rapports à l'échelle de la couche limite

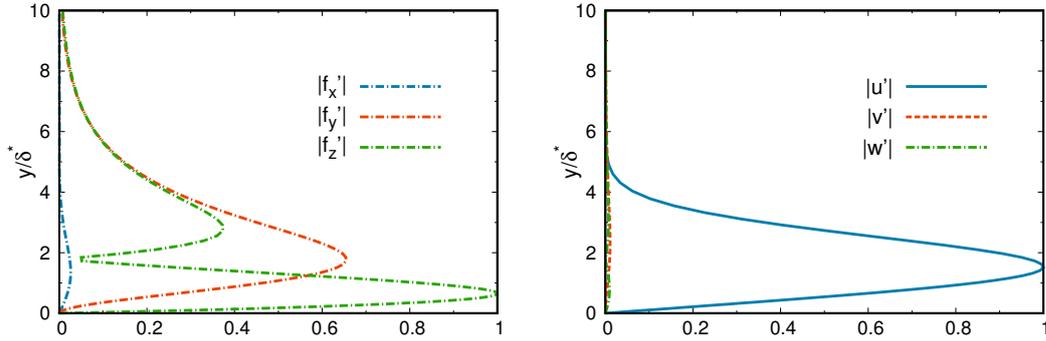


Fig. III.13 Profils en $x = 400$ des forçage (gauche) et réponse (droite) optimaux pour la couche limite de Blasius à $\omega = 0$ et $\beta = 0.6$

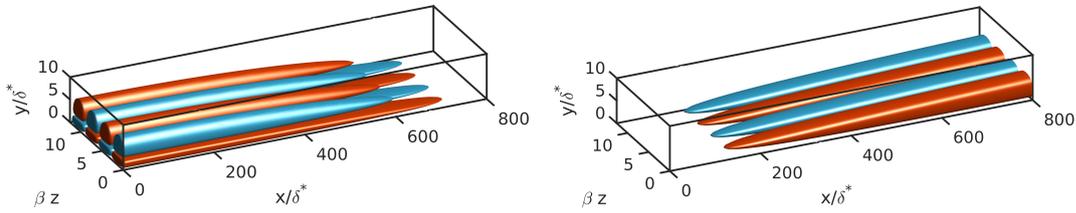


Fig. III.14 Champ 3D de la composante f'_z du forçage optimal (gauche) et de la composante u' de la réponse optimale (droite) pour la couche limite de Blasius à $\omega = 0$ et $\beta = 0.6$

III.3.2 Couche limite compressible

La dernière étape de validation 3D est réalisée sur une couche limite compressible. Une partie entière du chapitre VI sera dédiée à l'analyse physique de cette configuration. On propose ici un moyen de validation avec la littérature existante dans laquelle il n'existe actuellement pas de travaux traitant de perturbations optimales globales 3D en écoulement compressible. Une approche non-globale de perturbations optimales 3D a néanmoins été proposée par Tumin et Reshotko [92]. La méthode repose sur l'optimisation du rapport énergétique entre deux perturbations localisées à deux abscisses différentes et est en somme la version spatiale d'un calcul de conditions initiales optimales. La norme de Chu est utilisée à cette fin. La résolution est basée sur les équations de couche limite parabolisées en pré-supposant les échelles de vitesses attendues ($u \sim O(1)$ et $v, w \sim O(\varepsilon)$). Afin de comparer ces résultats avec le cadre global adopté dans ce manuscrit, on propose de réaliser un calcul de gain optimal en restreignant le champ de forçage optimal dans une zone autour d'une abscisse x_f (fig. III.15) en dehors de laquelle ce champ sera nul. Numériquement, la matrice \mathbf{P} permet d'introduire cette contrainte (sec. II.2.2.2). Par cette approche, le forçage jouera ainsi le rôle de la condition optimale⁴ au sens de Tumin et Reshotko [92]. Une précaution supplémentaire doit

4. Il faut cependant souligner que ces deux objets sont différents, puisque le forçage est ici une force volumique. Aussi, le forçage est associé à la norme L_2 d'une force volumique tandis que la norme des perturbations de Tumin et Reshotko [92] représente rigoureusement une énergie. La définition du gain optimal est ainsi différente dans les deux approches considérées

être prise afin de se placer dans le cadre de l'étude de référence. Par l'intermédiaire de la matrice \mathbf{Q}_E (sec. II.2.2.2), il s'agit de restreindre le domaine d'optimisation associée à la réponse optimale globale dans une région autour de l'abscisse x_{opt} . L'énergie de Chu ainsi calculée représentera alors la quantité au numérateur de la définition gain employée par Tumin et Reshotko [92].

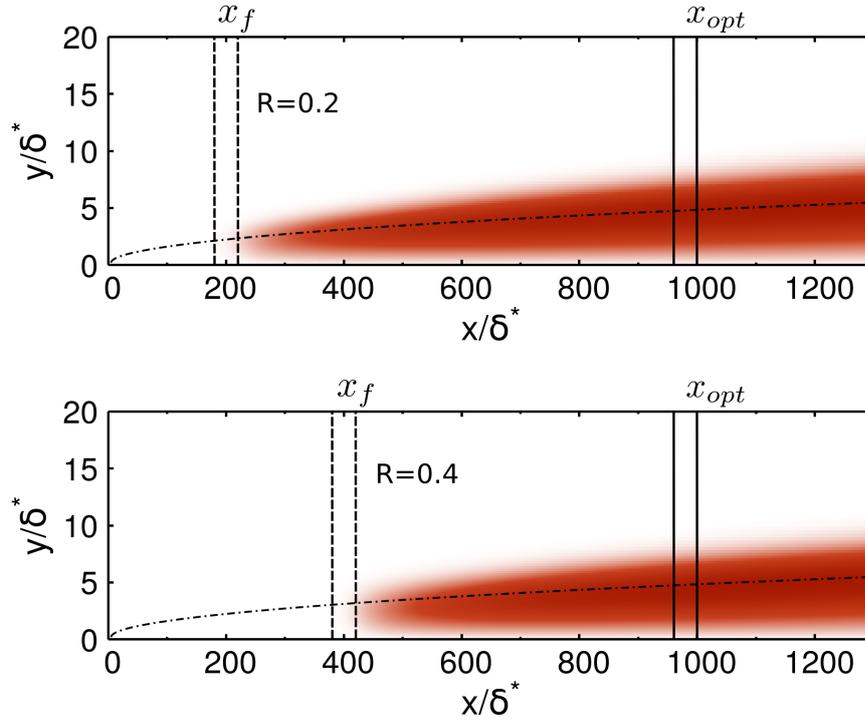


Fig. III.15 Partie réelle de la vitesse u de la réponse optimale 3D calculée pour les ratio $R = 0.2$ (haut) et $R = 0.4$ (bas). Le forçage optimal est contraint à être localisé entre les lignes verticales pointillées. L'énergie de Chu de la réponse n'est intégrée qu'entre les lignes continues.

L'écoulement de base est calculé par résolution directe des équations de Navier-Stokes compressibles (sec. II.1.2) pour $M = 3.0$ et pour un nombre Reynolds de plaque $Re_L = 1.3 \times 10^6$ en sortie de domaine. Tumin et Reshotko [92] considèrent l'échelle de Blasius $\ell = \sqrt{\nu x / u_\infty}$ comme grandeur de référence que l'on utilisera également à titre de comparaison. Le domaine de calcul s'étend sur $x/\ell \in [0, 1300]$ et $y/\ell \in [0, 100]$. L'énergie de la réponse optimale n'est intégrée que dans une région de largeur $\Delta x_{opt} = 40$ localisée à $Re_\ell = \sqrt{Re_L} = 10^3$ (à l'abscisse x_{opt}). Le calcul du forçage est consigné dans une zone de même largeur en une abscisse amont x_f et le ratio $R = \frac{x_f}{x_{opt}} \in [0, 1]$ peut être défini afin de rendre compte de cette position. Compte tenu de la définition différente du gain utilisée dans le travail de Tumin et Reshotko [92], les résultats de la présente étude sont exprimés selon μ^2 normalisé à l'aide du maximum de gain obtenu dans le travail de référence (fig. III.16). Pour deux valeurs du ratio R , le nombre d'onde β produisant le gain optimal global maximal est en bon accord avec l'analyse Tumin et Reshotko [92]. De plus, malgré la différence entre les deux approches, le comportement des courbes est similaire. Le développement de la réponse optimale globale sous forme de *streaks* est montré en figure III.15. L'influence

de la localisation de la région de forçage est visible, la croissance des *streaks* débutant à partir de cette zone. Le caractère convectivement instable de ces structures apparaît également dans la mesure où cette croissance se poursuit en aval de la zone de forçage et jusqu'en sortie de domaine.

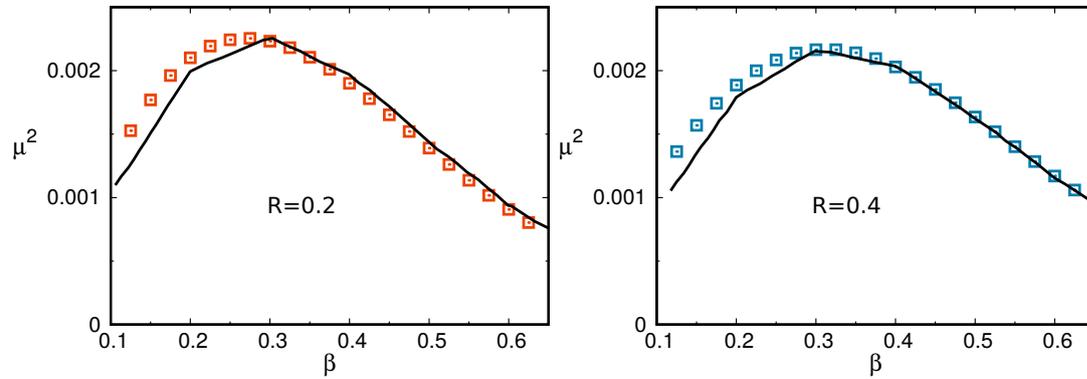


Fig. III.16 Gain optimal de la couche limite à $M = 3$ avec forçage et réponse localisés en deux abscisses distinctes (ratio des abscisses : $R = 0.2$ (gauche) et $R = 0.4$ (droite)). Courbe noire : résultats de Tumin et Reshotko [92]. À titre de comparaison, l'échelle de longueur de référence est $\ell = \sqrt{\nu x / u_\infty}$.

Chapitre IV

Lien entre instabilités convectives et résolvant global

Table des matières

IV.1 Relation entre forçage optimal global et analyse de stabilité locale	52
IV.1.1 Couche limite de Blasius	52
IV.1.2 Couche limite compressible à $M=2.20$	54
IV.2 Analyse par bilan d'énergie cinétique	61
IV.2.1 Formulation	61
IV.2.2 Application à la couche limite compressible à $M=2.2$	62

Le calcul des forçage et réponse optimaux dans un cadre global est un outil d'étude pertinent des instabilités convectives, le calcul du gain optimal associé permettant de mettre en évidence les plages de fréquences réceptives de ces écoulements amplificateurs sélectifs de bruit [44]. Les travaux de Sipp et Marquet [57] ont par ailleurs permis de mettre en lumière la signification physique des structures spatiales des forçage et réponse optimaux globaux en lien avec une analyse de stabilité locale. En définissant la densité de forçage par $d_f(x) = \int_0^{y_{int}} (f_x^2 + f_y^2) dy$ et la densité d'énergie cinétique $d_k(x) = \int_0^{y_{int}} (u^2 + v^2) dy$, les auteurs ont montré que les abscisses correspondant au maximum de ces deux quantités permettent de retrouver respectivement les branches inférieures et supérieures de la courbe neutre calculée par analyse locale. D'excellents résultats ont été obtenus pour une couche limite incompressible. Dans cette section, on retrouvera dans un premier temps ces résultats pour une couche limite de Blasius en incluant une considération supplémentaire sur les vitesses de phase des perturbations. Une couche limite compressible à $M = 2.2$ sera ensuite étudiée, pour laquelle des comportements moins évidents seront observés. Par la suite, un bilan d'énergie cinétique des perturbations compressibles sera construit afin de mettre en évidence les termes physiques impliqués dans le développement des réponses optimales. Cette approche a été utilisée par Sipp et Marquet [57] en régime incompressible pour notamment discriminer les sources intrinsèques (mécanisme TS et Orr) des sources extrinsèques (travail extérieur injecté par forçage) responsables de la croissance des instabilités convectives de couche limite. Par ces considérations, les auteurs ont alors proposé la définition

d'un paramètre d'amplification permettant de rendre compte de l'importance relative de ces deux sources énergétiques. Cette approche sera étendue en régime compressible pour l'analyse de l'instabilité convective 2D de couche limite à $M = 2.2$ préalablement calculée par réponse optimale globale.

IV.1 Relation entre forçage optimal global et analyse de stabilité locale

IV.1.1 Couche limite de Blasius

Un calcul de gain optimal est tout d'abord réalisé pour une couche limite incompressible. L'écoulement de base, calculé par résolution de l'équation de Blasius (§ III.2.1), est défini sur un domaine s'étendant sur $Re_{\delta^*} \in [250, 1500]$. La hauteur du domaine est telle que $y_{max} = 30\delta^*$ au niveau de la frontière aval. La région d'optimisation, sur laquelle l'énergie cinétique est intégrée dans le calcul du gain optimal (§ II.2.2.2), est définie pour $Re_{\delta^*} < 1333$ et correspond au cas considéré par Sipp et Marquet [57]. Dans cette section, le calcul du gain optimal sera présenté en fonction de la fréquence¹ $F = \omega\nu/u_\infty^2$. Le maximum de gain optimal est détecté autour de $F = 0.8 \times 10^{-4}$ et la convergence en maillage est assurée à partir d'une grille de calcul de 2000×100 (fig. IV.1). Pour chaque forçage et réponse optimal calculé, les maximums des densités de forçage et d'énergie cinétique sont repérés à l'intérieur de la région d'optimisation (fig. IV.2). La comparaison avec la courbe neutre calculée par Gaster [100] est très bonne, excepté pour au niveau de la branche supérieure pour les hautes fréquences et de la branche inférieure pour les basses fréquences. Ce comportement avait également été relevé par Sipp et Marquet [57]. Les auteurs avaient alors suspecté l'action dominante des effets non-modaux du mécanisme d'Orr dans ces régions où l'amplification des ondes TS est faible ou absente.

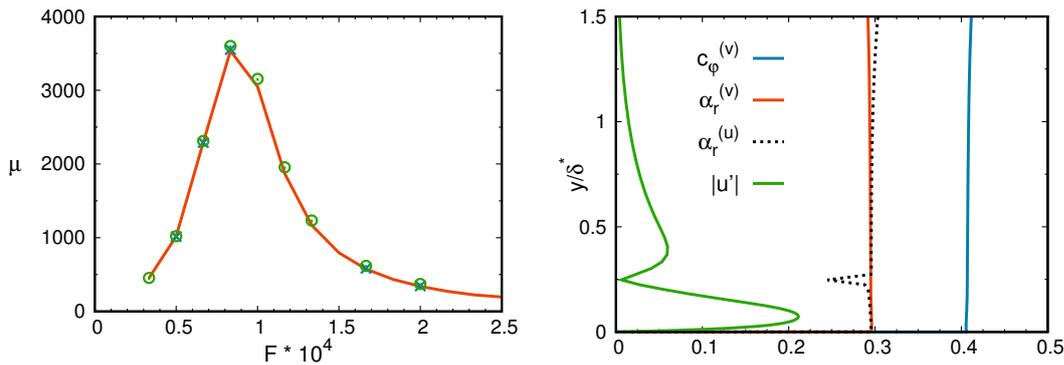


Fig. IV.1 Gauche : Gain optimal en fonction de la fréquence de forçage de la couche limite de Blasius pour différents maillages : 2000×100 (courbe rouge), 3000×100 (ronds verts) et 2000×150 (croix bleues). Droite : Profils de la réponse optimale à $F = 2.3 \times 10^{-4}$ pris à l'abscisse de forçage maximale $x/\delta_0^* = 60$. Le profil de vitesse $|u'|$ est représenté sur une échelle arbitraire.

1. Notons que dans cette expression, ω n'est pas une grandeur adimensionnée. Avec les variables adimensionnées utilisées dans ce manuscrit, et en considérant une échelle de longueur de référence δ_0^* , il vient simplement $F = \omega/Re_{\delta_0^*}$

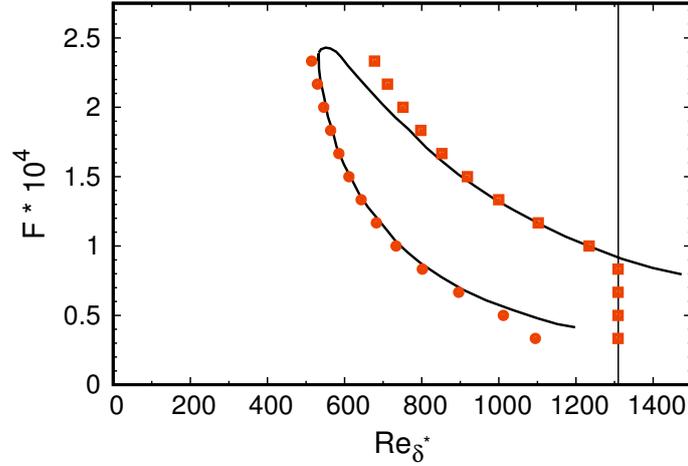


Fig. IV.2 Couche limite de Blasius : comparaison entre les résultats obtenus par forçage optimal global (symboles rouge) et la courbe neutre obtenue par Gaster [100] par analyse de stabilité locale (courbe noire). Les symboles ronds et carrés représentent respectivement la localisation dans le domaine d'optimisation du maximum du forçage optimal et du maximum de densité d'énergie cinétique de la réponse optimale pour différentes fréquences. La ligne verticale noire indique la fin du domaine d'optimisation.

Par ailleurs, il est possible d'extraire le nombre d'onde associé aux réponses optimales en approximant leur structure comme $\tilde{\mathbf{q}}(x, y) = \hat{\mathbf{q}}(y)e^{-i\alpha x} = \hat{\mathbf{q}}(y)e^{-i\alpha_r x}e^{\alpha_i x}$. Notons que cette expression est la formulation classique d'une approche de stabilité locale, et on retrouve ainsi le nombre d'onde α_r et le taux d'amplification spatiale α_i de la perturbation considérée. En remarquant que $\partial\tilde{\mathbf{q}}/\partial dx = -i\alpha\tilde{\mathbf{q}}$, le nombre d'onde de la réponse optimale peut ainsi être estimé par la relation

$$\alpha_r = \text{Im} \left(-\frac{1}{\tilde{\mathbf{q}}} \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} \right) \quad (\text{IV.1.1})$$

En pratique, il convient de choisir une composante de $\tilde{\mathbf{q}}$ utilisée dans le calcul de α_r . Ce choix sera discuté. De plus, il doit être remarqué que α_r est ici un champ 2D, capable d'évoluer spatialement. On propose de comparer le nombre d'onde ainsi calculé à celui obtenu pour le mode neutre par l'analyse de stabilité locale au Reynolds critique (tableau III.2). Pour cela, la réponse optimale à $F = 2.3 \times 10^{-4}$ est considérée, le maximum de sa densité de forçage étant proche du nombre de Reynolds critique de la courbe neutre. Le profil des nombres d'onde $\alpha_r^{(u)}$ et $\alpha_r^{(v)}$, basés respectivement sur l'utilisation des variables u' et v' dans l'équation (IV.1.1), est tracé à cette abscisse maximum (fig. IV.1). La valeur des nombres d'onde est relativement constante selon y à l'exception d'un sursaut localisé de $\alpha_r^{(u)}$ au niveau du point d'annulation de $|u'|$, le calcul de α_r par l'équation (IV.1.1) n'étant en fait pas défini lorsque la variable complexe s'annule. En dehors de ce point, le choix de la variable utilisée a peu d'influence et on observe que $\alpha_r \simeq 0.3$, en bon accord avec le résultat $\alpha_r = 0.303$ de l'analyse de stabilité locale [12]. La vitesse de phase de la perturbation peut finalement être obtenue comme $c_\varphi = \omega/\alpha_r$. Une valeur $c_\varphi \simeq 0.4$ est calculée, proche là aussi des résultats de l'analyse locale ($c_\varphi = 0.3965$).

IV.1.2 Couche limite compressible à $M=2.20$

IV.1.2.1 Écoulement de base

On considère maintenant une couche limite compressible à $M = 2.20$ en développement au dessus d'une plaque plane adiabatique. Cet écoulement est notamment le siège d'une instabilité convective, nommée généralement premier mode, et similaire aux ondes TS développées en couche limite incompressible [64]. Une description détaillée de la dynamique linéaire en couche limite compressible sera exposée en section VI.1.1. L'objectif de cette section est de comparer les résultats issus du calcul de forçage optimal global 2D avec les courbes neutres du premier mode obtenues expérimentalement par Laufer et Vrebalovich [16] et numériquement par Mack [101].

L'écoulement de base est obtenu par résolution des équations de Navier-Stokes compressibles (§ II.1.2) en utilisant le schéma AUSM+ à l'ordre 5. Le nombre de Reynolds, basé sur l'épaisseur de déplacement compressible δ^* , est fixé en sortie domaine à $Re_{\delta^*} = 2500$. La région d'optimisation du calcul de gain optimal sera par la suite définie jusqu'à $Re_{\delta_0^*} = 2250$ et l'épaisseur de déplacement δ_0^* en ce point sera utilisée comme échelle de longueur de référence dans l'adimensionnement des grandeurs physiques. La hauteur du domaine de calcul est fixée à $L_y = 98\delta_0^*$. La validation de la résolution de l'écoulement de base est proposée à un nombre de Mach proche, $M = 2.4$, afin de confronter ces résultats aux données de Schlichting et al. [99] obtenues par résolution des équations de couche limite (fig. IV.3). Le caractère auto-similaire de cet écoulement est par ailleurs mis en évidence par la superposition des profils de vitesse en différentes abscisses de plaque pour lesquels la hauteur y est normalisée par l'épaisseur de quantité de mouvement locale $\theta^*(x)$. L'accord avec les données de référence est par ailleurs excellent.

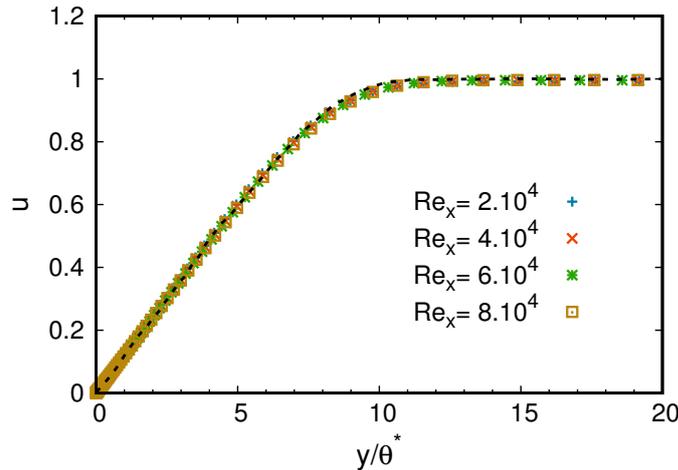


Fig. IV.3 Profils de vitesse \bar{u} en différentes abscisses de la couche limite compressible à $M = 2.4$, obtenus par résolution des équations non-linéaires de Navier-Stokes par le schéma AUSM+ à l'ordre 5. La hauteur y est normalisée par l'épaisseur de quantité de mouvement locale $\theta^*(x)$. La ligne pointillée noire est issue de Schlichting et al. [99].

IV.1.2.2 Forçage et réponse optimaux sans restriction de forçage

Un calcul de gain optimal est tout d'abord réalisé en utilisant la norme associée à l'énergie de Chu (matrice \mathbf{Q}_E , §II.2.2.2). La convergence en maillage est atteinte pour une grille de calcul de 584×181 , et un pic de gain est détecté autour de $F = 10^{-4}$ (fig. IV.4). Un second calcul est mené avec la norme associée à l'énergie cinétique. La valeur absolue du gain optimal ainsi calculé est moins élevée car l'énergie de Chu est nécessairement supérieure à l'énergie cinétique (§ A). La fréquence produisant le gain maximal est légèrement inférieure, autour de $F = 0.9 \times 10^{-4}$. Cependant, il est intéressant de noter que les forçage et réponse obtenus par l'utilisation des deux normes précitées sont en fait identiques (fig. IV.4). Ce profil partage par ailleurs une structure similaire avec les ondes TS incompressibles (fig. III.7), le maximum de $|v'|$ coïncidant avec le minimum de $|u'|$, mais se distingue néanmoins par la présence d'un pic de masse volumique. Ces observations rejoignent le fait que le premier mode instable de couche limite compressible peut être considéré comme l'extension compressible des ondes TS. Le champ de vitesse u' permet d'observer la croissance de la réponse dans la direction de l'écoulement (fig. IV.5) tandis que le champ de forçage tend à se localiser plus en amont. Les contours de valeurs de f_x apparaissent inclinés vers l'amont de l'écoulement indiquant l'action du mécanisme d'Orr.

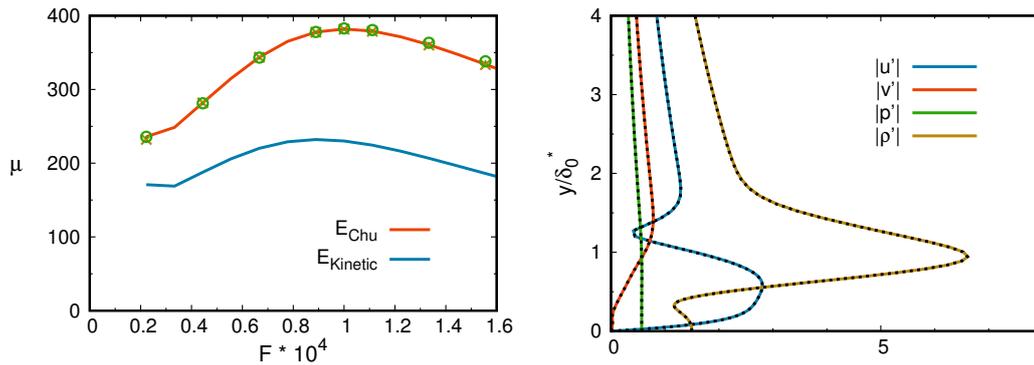


Fig. IV.4 Gauche : Gain optimal défini via les normes associées à l'énergie de Chu et à l'énergie cinétique, calculé en fonction de la fréquence de forçage pour la couche limite à $M = 2.2$ (sans restriction de forçage). Maillages utilisés : 584×181 (lignes continues), 834×181 (ronds verts) et 584×252 (croix jaunes). Droite : Profils de la réponse optimale à $F = 0.9 \times 10^{-4}$ à l'abscisse $x/\delta_0^* = 111$ (i.e. $\sqrt{Re_x} = 500$), obtenus pour le calcul de gain optimal défini via l'énergie de Chu (lignes en couleurs) et de l'énergie cinétique (lignes pointillées noires).

Les densités d'énergie de Chu et d'énergie cinétique des réponses globales compressibles peuvent être définies respectivement par $d_{chu} = \int_0^{y_{int}} E_{chu} dy$ et $d_k = \int_0^{y_{int}} \bar{\rho}(u^2 + v^2) dy$. L'intégration de ces quantités est réalisée jusqu'à $y_{int} = y_{max}$ (fig. IV.6). La localisation des maximums de densité de forçage et d'énergie peuvent alors être confrontés aux résultats expérimentaux et numériques de Laufer et Vrebalovich [16] et Mack [101] (fig. IV.7). Notons que ces deux résultats de la littérature ne s'accordent sur la localisation de la branche supérieure de la courbe neutre. Les résultats sont présentés à l'aide de la racine carrée du nombre de Reynolds de plaque $\sqrt{Re_x}$. Contrairement à l'étude incompressible (§ IV.1.1), les résultats obtenus ne permettent pas de retrouver les données de la littérature. Les maximums de forçage et d'énergie apparaissent res-

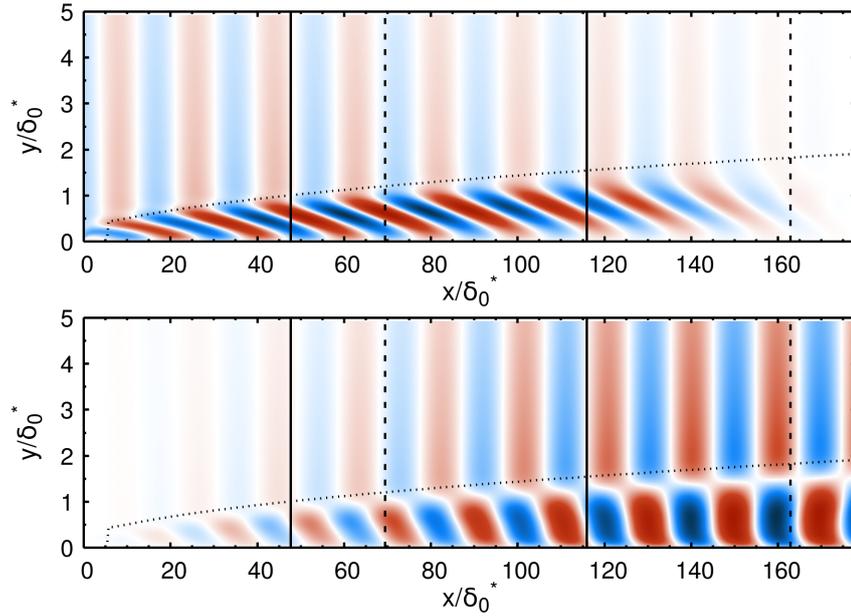


Fig. IV.5 Partie réelle de f_x du forçage optimal et de u de la réponse optimale de la couche limite compressible à $M = 2.2$ pour $F = 0.9 \times 10^{-4}$ (calcul sans restriction de forçage). Les lignes pointillées verticales indiquent les maximums de densité de forçage et d'énergie cinétique. Les lignes continues verticales indiquent les minimum et maximum d'énergie cinétique pour le calcul de gain optimal avec restriction de forçage (calculé en section IV.1.2.3). Le profil d'épaisseur de couche limite δ_{99} est représenté en pointillés noirs.

pectivement en aval de la branche inférieure et de la branche supérieure, et la pente des branches n'est absolument pas retrouvée. La seule consistence par rapport aux résultats expérimentaux apparaît à travers l'accord de la fréquence $F \simeq 0.75$ à partir de laquelle les maximums de densité d'énergie se localisent en amont de la frontière aval du domaine d'optimisation, conformément au fait que cette frontière ne soit plus incluse dans la courbe neutre à ces fréquences.

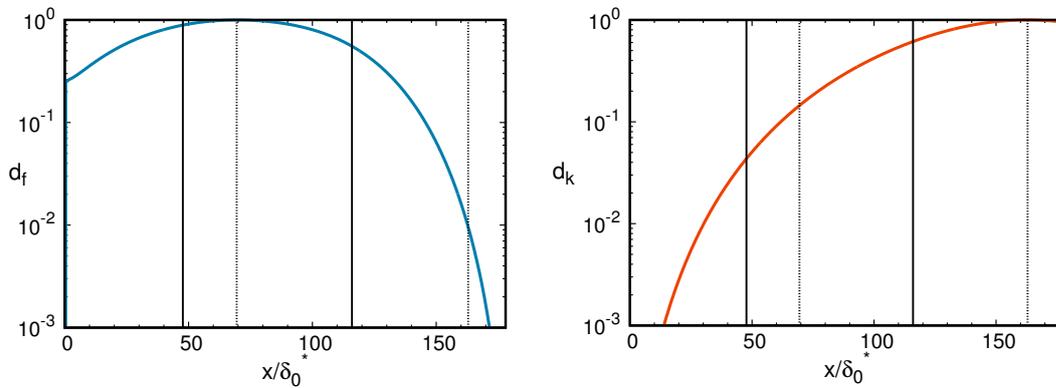


Fig. IV.6 Profil des densités de forçage (gauche) et d'énergie cinétique (droite) de la couche limite compressible à $M = 2.2$ pour $F = 0.9 \times 10^{-4}$. Voir également la légende en figure IV.5

Les causes d'un tel désaccord pourrait être liées aux faibles taux d'amplification de l'instabilité du premier mode 2D, pour lesquels les effets non-modaux du mécanisme d'Orr seraient ainsi dominants. Cette explication est proposée par Sipp et Marquet [57] pour justifier les désaccords apparaissant au niveau des hautes fréquence de la branche supérieure de la couche limite incompressible. Cet effet semble néanmoins apparaître dans des proportions plus élevées dans la présente étude puisqu'il ne concerne pas seulement l'extrémité de la courbe neutre. Des éléments de compréhension supplémentaires seront apportés dans la section IV.2 par l'analyse des termes physiques issus d'un bilan d'énergie cinétique. À ce stade, il convient de remarquer que ces résultats ne sont pas nécessairement en contradiction avec l'expérience. En effet, l'étude expérimentale de Laufer et Vrebalovich [16] consiste à forcer l'écoulement en amont de la branche inférieure. L'évolution spatiale de cette perturbations est alors suivie en aval, où la localisation des minimum et maximum d'énergie permettent successivement de détecter les branches inférieure et supérieure de la courbe neutre. Or, dans la présente étude de forçage optimal global, le champ de forçage n'est pas localisé dans une région spécifique de l'espace et peut ainsi localement soutenir la croissance des perturbations au delà de la branche supérieure. Il est en effet observé que la densité de forçage présente des valeurs d'un ordre de grandeur comparable à la valeur maximum sur une large portion du domaine (fig. IV.6).

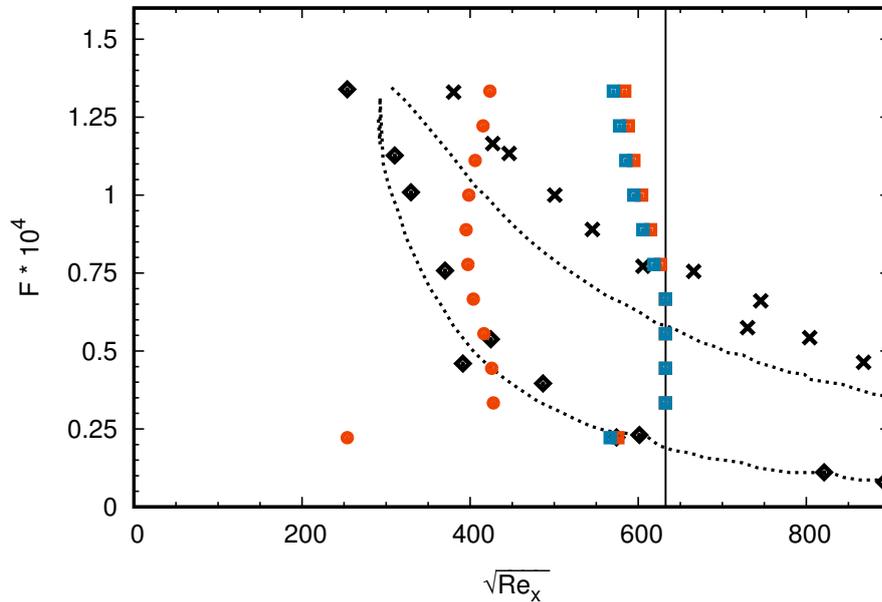


Fig. IV.7 Localisation dans la région d'optimisation des maximums de forçage (ronds rouges), d'énergie de Chu (carrés bleus) et d'énergie cinétique (carrés bleus) pour $F = 0.9 \times 10^{-4}$ (sans restriction de forçage). La ligne noire verticale indique la frontière aval du domaine d'optimisation. Losanges noirs et croix noires : respectivement branches inférieure et supérieure obtenues expérimentalement par Laufer et Vrebalovich [16]. Ligne noire : courbe neutre calculée par Mack [101].

IV.1.2.3 Forçage et réponse optimaux avec restriction de forçage

Dans cette section, le calcul de gain optimal est mené en restreignant le champ de forçage $\tilde{\mathbf{f}}(x, y)$ dans une région proche de la paroi en amont de la branche inférieure. Cette région de l'espace est définie par $15 < x/\delta_0^* < 29$ et $y/\delta_0^* < 0.2$ et est implémentée numériquement via la matrice \mathbf{P} (§ II.2.2.2). En dehors de cette zone, le champ de forçage est ainsi contraint à être nul. Les autres paramètres de calcul sont similaires à ceux présentés dans la section précédente. Cette configuration est ainsi proche du problème expérimental présenté par Laufer et Vrebalovich [16]. Cette analyse rejoint également, dans un cadre global, le *signaling problem* proposé par Huerre et Monkewitz [11] dans le cadre local.

La réponse optimale obtenue par ce calcul est présentée en figure IV.8, où le développement du premier mode est retrouvé dans la couche limite. Cependant, la localisation du forçage a également pour effet de créer une onde de Mach d'angle $\theta = \sin^{-1}(1/M_\infty)$. Ce phénomène n'était pas observé dans le cas du forçage non-restreint. L'apparition brutale de la zone de forçage dans l'écoulement semble ici provoquer l'émission de perturbations dans l'écoulement libre qui, compte-tenu de l'approche linéarisée du calcul de réponse optimale, apparaît comme une onde de Mach au sein d'un écoulement supersonique (cas limite d'un choc faible). La présence de ces perturbations dans l'écoulement libre conduit à modifier le calcul des densités de forçage et d'énergie afin d'appréhender uniquement le développement des perturbations par les mécanismes de couche limite. Ainsi, on fixera $y_{int}/\delta_0^* = 2.5$ de manière à exclure le contenu énergétique des perturbations se propageant dans l'écoulement libre. Cette approche reste finalement consistante avec le cas expérimental de Laufer et Vrebalovich [16] où les mesures sont réalisées proche de la paroi. Le choix de la valeur de y_{int} sera discuté dans la suite.

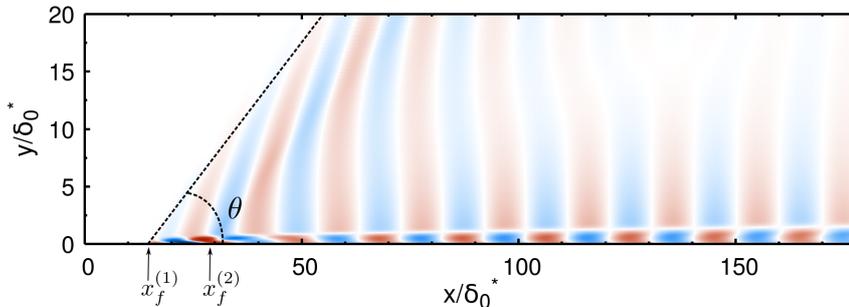


Fig. IV.8 Partie réelle de u de la réponse optimale de la couche limite compressible à $M = 2.2$ à $F = 0.9 \times 10^{-4}$ calculée avec restriction du forçage optimal dans la région $x_f^{(1)} < x < x_f^{(2)}$ et $y/\delta_0^* < 0.2$. La ligne pointillée, tracée à partir de $x_f^{(1)}$, fait un angle $\theta = \sin^{-1}(1/M_\infty)$ avec la plaque.

Les densités de forçage et d'énergie ainsi calculées sont présentées dans la figure IV.9. Le forçage apparaît effectivement nul en dehors de la zone de restriction. La réponse associée croît tout d'abord dans la zone de forçage puis décroît immédiatement en aval. Ce comportement est attendu car l'écoulement est ici convectivement stable et la réponse n'est localement supportée par aucun apport d'énergie extérieur. Plus en aval, un minimum de densité d'énergie est détecté : l'écoulement devient convectivement instable. L'abscisse correspondant à ce minimum d'énergie révèle ainsi la

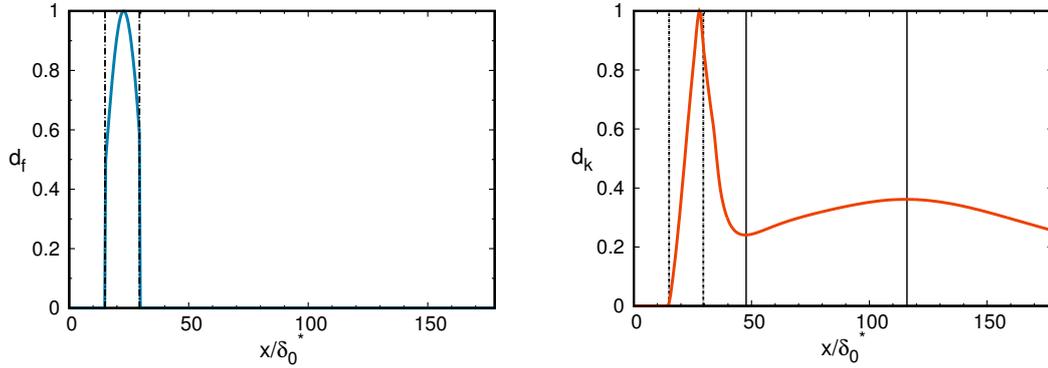


Fig. IV.9 Profil des densités de forçage (gauche) et d'énergie cinétique (droite) de la couche limite compressible à $M = 2.2$ pour $F = 0.9 \times 10^{-4}$, calculées avec restriction du forçage optimal dans la région délimitée par les lignes en tirets verticales. La hauteur d'intégration de la densité d'énergie est $y_{int} = 2.5$. Les lignes noires verticales indiquent le minimum et le maximum d'énergie cinétique en aval du forçage.

localisation de la branche inférieure de la courbe neutre. De façon similaire, la croissance de la perturbation atteint plus loin un maximum correspondant à la branche supérieure. La localisation de chacun de ces minimums et maximums est renseignée sur la figure IV.10, en comparaison avec les données de la littérature précédemment utilisées. L'accord avec la branche supérieure obtenue expérimentalement est très bon. L'utilisation de la densité d'énergie de Chu fournit par ailleurs un meilleur accord que la densité d'énergie cinétique. Cette observation est cohérente car les perturbations thermodynamiques sont effectivement captées expérimentalement en plus des perturbations de vitesse [16]. La branche inférieure est retrouvée proche de l'analyse de stabilité locale mais apparaît sous-estimée aux basses fréquences par rapport aux résultats expérimentaux.

L'influence du paramètre y_{int}/δ_0^* utilisé dans le calcul des densités d'énergie est considéré sur la figure IV.11. Les résultats sont similaires lorsqu'une hauteur d'intégration inférieure de moitié est adoptée. La distance $y_{int}/\delta_0^* = 2.5$ apparaît donc suffisante pour capter le développement énergétique des perturbations liées à l'instabilité du premier mode tout en écartant l'influence des perturbations en champ libre. Notons que le calcul de la densité de forçage n'est pas modifié par le choix de ces valeurs y_{int} car le champ de forçage est nul pour $y/\delta_0^* > 0.2$.

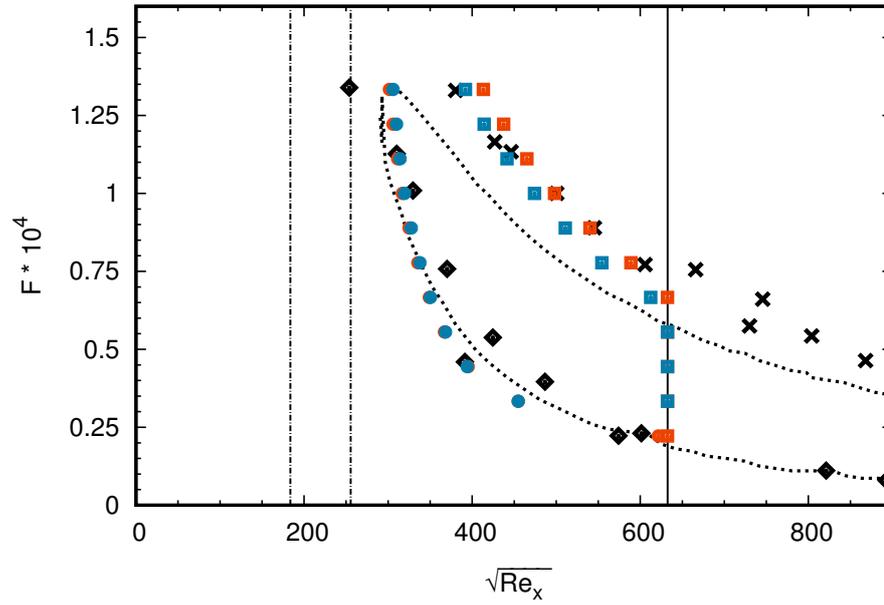


Fig. IV.10 Localisation dans la région d'optimisation des minimums (ronds) et maximums (carrés) d'énergie de Chu (rouge) et d'énergie cinétique (bleu) des réponses optimales calculés pour la couche limite compressible à $M = 2.2$ avec restriction de la région de forçage (délimitée par les lignes verticales pointillées). L'intégration des énergies selon y est réalisée jusqu'à $y_{int}/\delta_0^* = 2.5$. Voir également la légende de la figure IV.7.

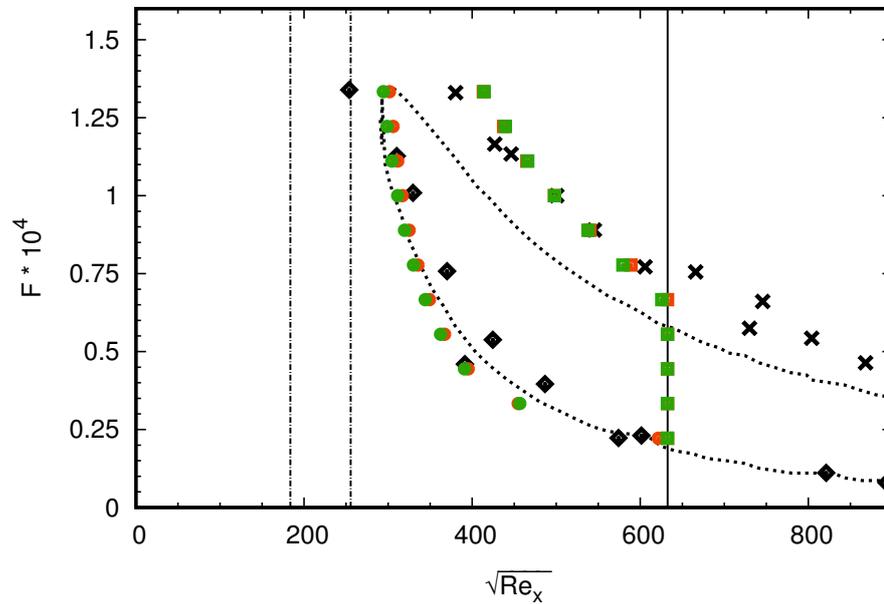


Fig. IV.11 Voir légende IV.10. Les symboles verts sont calculés avec $y_{int}/\delta_0^* = 1.25$ et détectent les minimums (ronds) et maximums (carrés) de densité d'énergie de Chu

IV.2 Analyse par bilan d'énergie cinétique

IV.2.1 Formulation

Une analyse des termes physiques impliqués dans la croissance d'une perturbation sous l'effet d'un forçage peut être réalisée à partir d'un bilan d'énergie cinétique. Cette approche permet notamment de distinguer l'énergie injectée via le travail du forçage externe (source extrinsèque) des mécanismes associés à l'extraction d'énergie de l'écoulement de base vers les perturbations (source intrinsèque) [57]. La linéarisation de l'équation de quantité de mouvement des équations de Navier-Stokes compressibles (II.1.4b) avec forçage s'écrit, après soustraction de l'équation de conservation de la masse, comme

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{\rho} u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} u'_j + \rho' \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + f'_i \quad (\text{IV.2.1})$$

avec

$$\tau'_{ij} = \bar{\mu} \xi'_{ij} + \mu' \bar{\xi}_{ij} \quad (\text{IV.2.2})$$

où on a posé

$$\xi_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (\text{IV.2.3})$$

Le terme μ' peut être calculé à partir de la linéarisation de la loi de Sutherland. Le bilan d'énergie cinétique $\frac{1}{2} \bar{\rho} u_i'^2$ peut alors être construit en prenant le produit scalaire de l'équation (IV.2.1) avec \mathbf{u}' que l'on intègre sur un volume de contrôle \mathcal{V} . En considérant la moyenne temporelle de ce bilan, le terme en $\partial/\partial t$ disparaît et il reste

$$\mathcal{K}_{in} + \mathcal{K}_{out} = \mathcal{P}_{inc} + \mathcal{P}_{comp} + \Pi_1 + \Pi_2 - \mathcal{D}_{inc} - \mathcal{D}_{comp} + \mathcal{W} \quad (\text{IV.2.4})$$

En notant \mathbf{n} le vecteur normal à la surface de contrôle, l'expression des différents termes est donnée ci-dessous :

- $\mathcal{K} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\partial \mathcal{V}} \left(\frac{1}{2} \bar{\rho} u_i'^2 \bar{u}_j - \tau'_{ij} u'_i \right) n_j ds$
- $\mathcal{P}_{inc} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathcal{V}} \left(-\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} u'_i u'_j \right) d\Omega$
- $\mathcal{P}_{comp} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathcal{V}} \left(-\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \rho' u'_j \right) d\Omega$
- $\Pi_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathcal{V}} \left(p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right) d\Omega$
- $\Pi_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathcal{V}} \left(-\frac{\partial (p' u'_i)}{\partial x_i} \right) d\Omega$
- $\mathcal{D}_{inc} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{Re} \bar{\mu} \xi'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) d\Omega$
- $\mathcal{D}_{comp} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{Re} \mu' \bar{\xi}_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) d\Omega$

$$\bullet \mathcal{W} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathcal{V}} (f'_i u'_i) d\Omega$$

Le terme \mathcal{K} est le flux d'énergie cinétique aux frontières du volume de contrôle, le terme $-\tau'_{ij} u'_i$ étant en pratique inférieur de plusieurs ordres de grandeur. Cette observation est commune au cas incompressible [57]. L'extraction d'énergie de l'écoulement de base vers les perturbations par un mécanisme purement hydrodynamique, lié au cisaillement de l'écoulement de base, apparaît dans le terme de production \mathcal{P}_{inc} . Le terme \mathcal{P}_{comp} émerge compte-tenu de la nature compressible des perturbations. C'est un terme de production également dépendant du cisaillement de l'écoulement de base et couplé au développement des perturbations thermodynamiques. Le terme Π_1 , lié aux perturbations de pression, contient les effets de dilation des perturbations et est en cela un terme purement compressible. Le terme Π_2 représente la diffusion par pression p' et apparaît également dans le cas d'un bilan incompressible. S'il semble pouvoir être négligé dans le cas incompressible [57], il intervient en régime compressible à des ordres de grandeur similaires à ceux des autres termes. On retrouve le terme de dissipation visqueuse issu du bilan incompressible \mathcal{D}_{inc} , supérieur ou égal à zéro, avec toutefois l'ajout des termes compressibles apparaissant dans le tenseur des contraintes visqueuses ($\partial u_i / \partial x_i \neq 0$). Dans une certaine mesure, l'équivalent compressible de ce terme est \mathcal{D}_{comp} bien qu'il faille noter que celui-ci n'est pas nécessairement négatif. Enfin, \mathcal{W} représente le travail du forçage harmonique. Il permet donc d'évaluer la quantité d'énergie injectée dans le système par une action extérieure.

IV.2.2 Application à la couche limite compressible à $M=2.2$

Les champs scalaires associés aux termes du bilan d'énergie cinétique (IV.2.4) sont présentés dans les figures (fig. IV.12) et (fig. IV.13) pour la réponse optimale calculée sans restriction de forçage à $F = 0.9 \times 10^{-4}$ (fig. IV.5). Les profils de ces quantités intégrées dans la direction y permettent par ailleurs de rendre compte de leur influence locale (fig. IV.14). Le terme de production \mathcal{P}_{inc} est prédominant et intervient principalement à une hauteur autour de δ_0^* . Il admet des valeurs négatives à partir de l'abscisse correspondant à la décroissance de l'énergie cinétique. Le travail injecté \mathcal{W} intervient un ordre de grandeur en dessous de \mathcal{P}_{inc} , et peut localement prendre des valeurs négatives. Intégré dans la direction y , ce terme est cependant positif en chaque abscisse, témoignant ainsi d'un apport énergétique global. Le terme de dissipation \mathcal{D}_{inc} est localisé en proche paroi où le gradient $\partial u' / \partial y$ est élevé et son maximum est observé à une abscisse proche du maximum de densité d'énergie cinétique (fig. IV.14). Un argument d'échelle permet d'appréhender ce comportement : en estimant que $\mathcal{D}_{inc} \sim u'(x) / \delta^*(x)$, il apparaît alors que la valeur du terme de dissipation augmente dans la direction de l'écoulement tant que u' croît plus rapidement que δ^* , c'est-à-dire plus rapidement que \sqrt{x} . Sa valeur décroît nécessairement lorsque la vitesse des perturbations s'atténue (sous l'effet, notamment, de la décroissance du terme de production qui devient alors contre-balançé par la dissipation). Les quantités \mathcal{P}_{comp} et \mathcal{D}_{comp} , purement compressibles, apparaissent négligeables. Le terme de pression Π_1 s'oppose à la génération d'énergie cinétique. Le second terme de pression Π_2 apparaît positif lorsqu'il est intégré sur la hauteur du domaine, mais ce résultat dissimule les fortes valeurs négatives à l'intérieur de la couche limite, en particulier au niveau de la zone de production \mathcal{P}_{inc}

(fig. IV.13). Les quantités Π_1 et Π_2 sont en fait globalement proches de zéro ou négatives dans la couche limite mais décroissent plus lentement que les autres termes dans l'écoulement libre, où elles prennent des valeurs respectivement négatives et positives. Elles semblent en fait témoigner de la présence d'un champ acoustique à l'extérieur de la couche limite, dont on peut envisager l'origine par l'observation d'une structure d'onde plane du champ de forçage optimal dans l'écoulement libre (fig. IV.5).

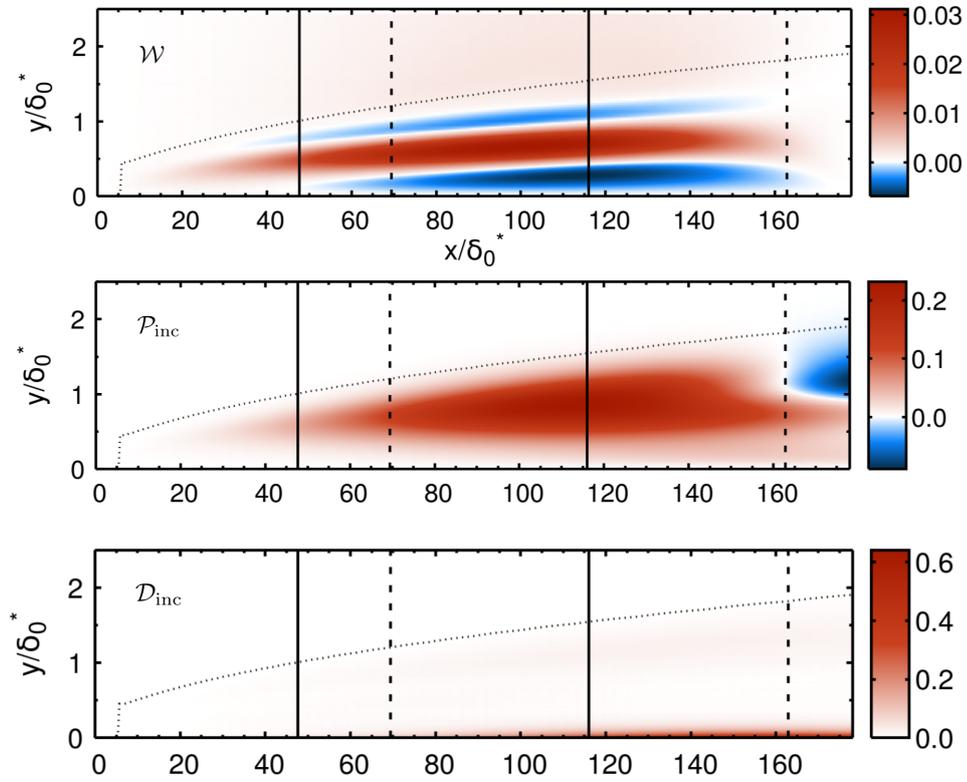


Fig. IV.12 Termes issus du bilan d'énergie cinétique (IV.2.4) pour la réponse optimale de la couche limite compressible à $M = 2.2$ pour $F = 0.9 \times 10^{-4}$ (sans restriction de forçage). Les lignes pointillées verticales indiquent les maximums de forçage et réponse obtenus sans restriction de forçage (fig. IV.6). Les lignes continues verticales indiquent les minimum et maximum d'énergie cinétique obtenus avec restriction de forçage (visibles sur la figure IV.9). Le profil d'épaisseur de couche limite δ_{99} est représenté en pointillés noirs.

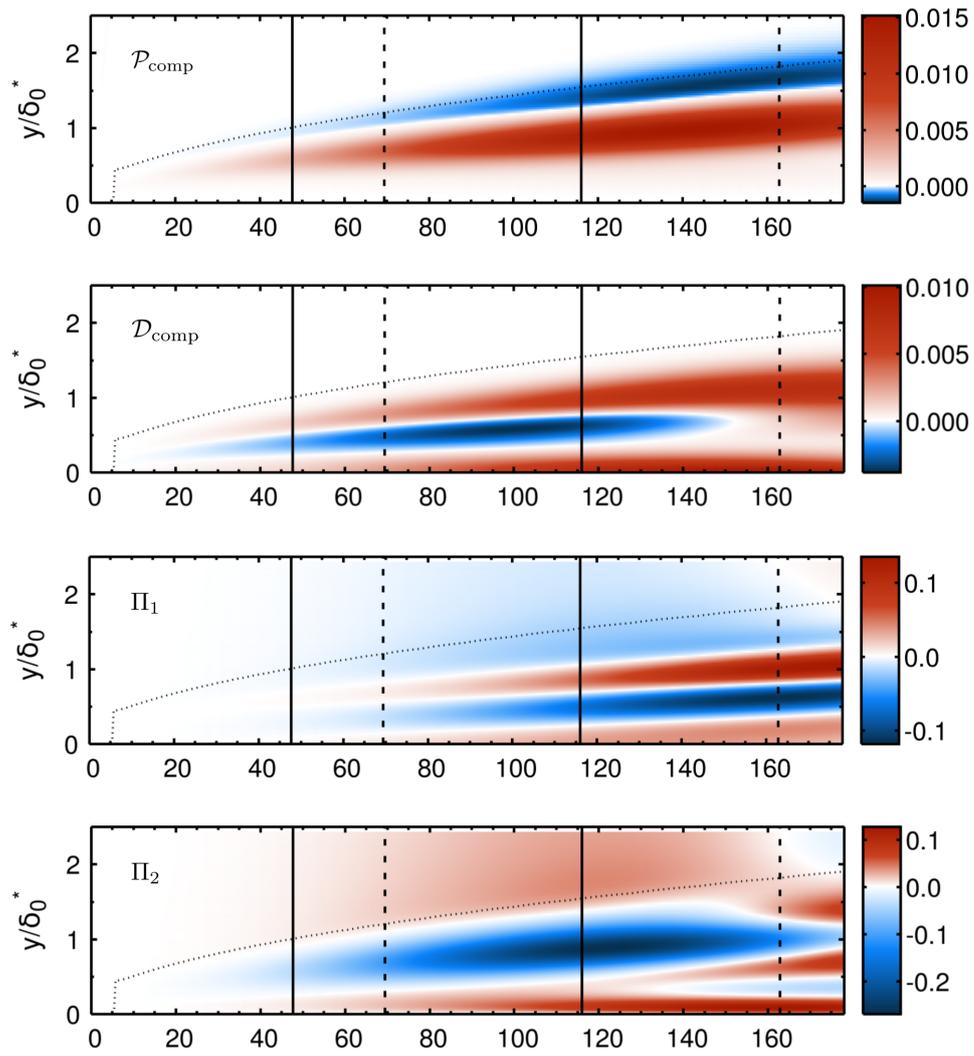


Fig. IV.13 Voir le légende de la figure IV.12

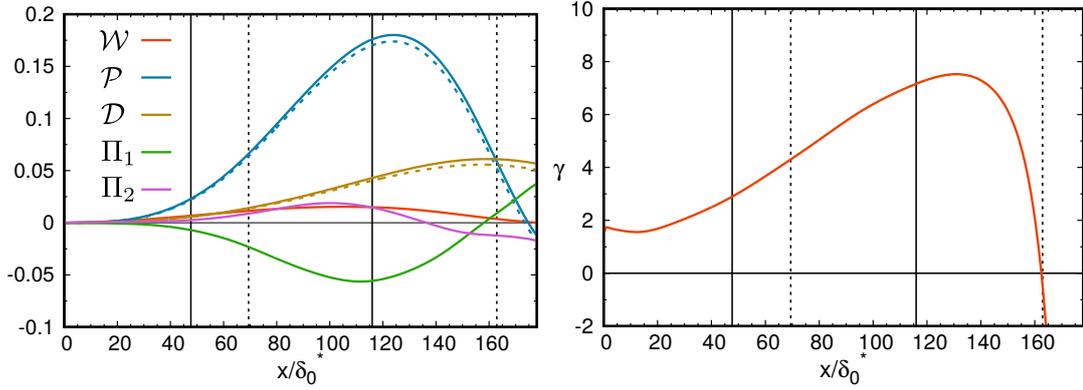


Fig. IV.14 Gauche : Profil des termes issus du bilan d'énergie cinétique (IV.2.4) intégrés dans la direction y jusqu'à y_{max} . Les lignes pointillées représentent les termes incompressibles dans la production et la dissipation totale respectivement définies par $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{inc} + \mathcal{P}_{comp}$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{inc} + \mathcal{D}_{comp}$. Droite : Profil du paramètre d'amplification locale γ . Les lignes verticales sont décrites dans la légende de la figure IV.12

Dans le cadre des écoulements incompressibles, un paramètre d'amplification locale, noté γ , a été proposé par Sipp et Marquet [57] afin d'évaluer localement les parts de responsabilité des sources d'énergie extrinsèque γ_{ext} et intrinsèque γ_{int} mises en jeu dans la croissance des perturbations. Le paramètre γ est défini² comme la variation d'énergie cinétique locale normalisée par la source extrinsèque locale, et s'écrit ainsi

$$\gamma(x) = \frac{1}{\gamma_{ext}} \frac{d\mathcal{K}}{dx} \quad (\text{IV.2.5})$$

La quantité γ_{ext} est associée au travail injecté par le forçage extérieur et peut être formulée localement comme

$$\gamma_{ext}(x) = \int_0^{y_{max}} \mathcal{W} dy \quad (\text{IV.2.6})$$

Les sources intrinsèques γ_{int} représentent les mécanismes d'instabilité TS et Orr capable d'extraire de l'énergie à l'écoulement de base. Ces sources sont composées des termes non-liés au forçage extérieur apparaissant dans le membre de droite du bilan d'énergie cinétique (IV.2.4). On peut écrire, en régime compressible,

$$\gamma_{int}(x) = \int_0^{y_{max}} (\mathcal{P}_{inc} + \mathcal{P}_{comp} + \Pi_1 + \Pi_2 - \mathcal{D}_{inc} - \mathcal{D}_{comp}) dy \quad (\text{IV.2.7})$$

En suivant Sipp et Marquet [57], le paramètre d'amplification locale peut finalement être formulé comme

$$\gamma(x) = 1 + \frac{\gamma_{int}}{\gamma_{ext}} \quad (\text{IV.2.8})$$

Si $\gamma > 1$, alors des mécanismes de croissance intrinsèque sont en jeu ($\gamma_{int} > 0$). Par ailleurs, plus la valeur de γ est élevée et plus la croissance des perturbations soumises à un forçage externe est imputable aux sources intrinsèques. Notons que $\gamma < 0$ correspond

². Sipp et Marquet [57] construisent plus rigoureusement cette grandeur en considérant d'abord un paramètre d'amplification global, puis en prenant sa limite.

à une décroissance de l'énergie cinétique. Le calcul de γ pour la réponse optimale à $F = 0.9 \times 10^{-4}$ de la couche limite compressible sans restriction de forçage est présenté sur la figure IV.14. Comme dans le cas incompressible [57], on observe que $\gamma > 1$ en amont de la branche inférieure de la courbe neutre où la source intrinsèque active ne peut être produite que par des effets non-modaux. En régime incompressible, une croissance rapide de γ est ensuite observée à l'intérieur de la courbe neutre, atteignant des valeurs supérieures à 600 [57]. Ce comportement n'est pas retrouvé dans le cas compressible, où γ poursuit une croissance lente : la croissance du premier mode est faible. Le coefficient γ atteint un maximum en aval de la branche supérieure³ où sa valeur reste supérieure à 1 jusqu'à une abscisse proche de son annulation. Une nouvelle fois, seuls des effets non-modaux peuvent être impliqués dans cette région. On vérifie enfin, de façon consistante avec la définition du paramètre d'amplification locale, que $\gamma = 0$ à l'abscisse correspondant au maximum de densité d'énergie cinétique.

Le calcul de γ n'est pas possible (et n'a pas de sens) dans le cas où le forçage est contraint à être localisé en amont (§ IV.1.2.3) puisque $\gamma_{ext} = 0$ dans la région d'amplification. Il peut néanmoins être intéressant de comparer le terme de production \mathcal{P}_{inc} obtenu précédemment - et moteur principal de la génération d'énergie cinétique des perturbations - avec celui calculé pour une réponse optimale dans le cadre de la restriction de forçage (fig. IV.8). La structure spatiale de \mathcal{P}_{inc} se présente désormais différemment (fig. IV.15), la région des valeurs positives se localisant à une hauteur inférieure et plus en amont que dans le cas précédent. L'observation essentielle est l'apparition d'une région de valeur négative à partir de la branche supérieure, dans la zone même où le terme \mathcal{P}_{inc} était maximal dans le cas du forçage non-restreint.

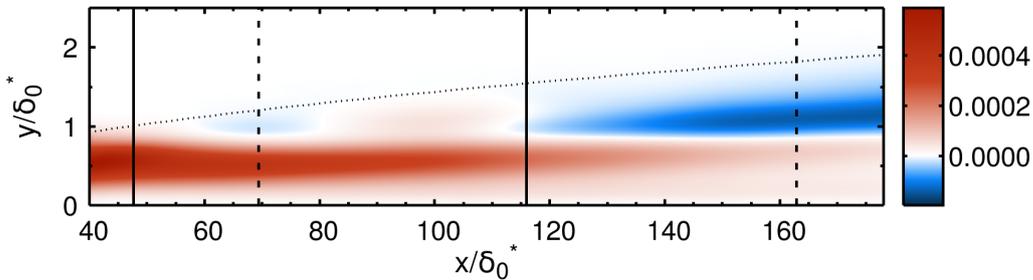


Fig. IV.15 Terme de production \mathcal{P}_{inc} calculé pour la réponse optimale à $F = 0.9 \times 10^{-4}$ avec restriction de forçage en amont de la branche neutre. Le domaine affiché exclut la région de forçage localisé afin de faciliter la visualisation. Voir également la légende de la figure IV.12

Ainsi, il apparaît que le terme de production \mathcal{P}_{inc} observé dans le calcul *sans* restriction de forçage (fig. IV.12) ne soit activé en aval de la branche supérieure que par le soutien local du champ de forçage, sous des effets nécessairement non-modaux. La structure inclinée du champ de forçage dans cette région (fig. IV.5) témoigne effectivement de l'action du mécanisme d'Orr et la valeur du paramètre d'amplification locale $\gamma > 1$ (fig. IV.14) confirme par ailleurs que la source de croissance est bien intrinsèque. Ces résultats permettent d'éclairer les désaccords observés entre les maximums

3. définie par rapport à l'énergie cinétique, et non à l'énergie de Chu

de densité de forçage et d'énergie et la courbe neutre expérimentale (fig. IV.7). Ainsi, il semble que du fait de la faible amplification du premier mode, le champ de forçage optimal tend à s'établir de façon plus étendue dans l'écoulement (fig. IV.9) afin de stimuler localement la croissance des perturbations au delà même de la courbe neutre à travers l'action d'effets non-modaux.

Chapitre V

Réceptivité globale 2D de l'interaction choc/couche limite

Table des matières

V.1	Présentation	69
V.2	Écoulement de base	72
V.2.1	Validation	72
V.2.2	Écoulement de base pour différents nombres de Mach	74
V.3	Réceptivité à haute fréquence	75
V.3.1	Gain optimal : deux pics de réceptivité	75
V.3.2	Réponses et forçages optimaux	77
V.3.3	Forçage localisé	80
V.3.4	Discussion	82
V.4	Réceptivité à basse fréquence	84

V.1 Présentation

Ce chapitre est consacré à l'analyse de réceptivité de l'interaction choc/couche limite (SWBLI¹). Ce type d'écoulement est typiquement rencontré dans le secteur aéronautique au niveau des prises d'air et des surfaces de contrôle de vol. La compréhension des instationnarités développées peut alors représenter un enjeu industriel vis à vis des efforts et des transferts thermiques subis par les structures. La présente étude se concentrera sur le cas de l'impact d'un choc oblique sur une couche limite supersonique en développement au dessus d'une plaque plane. D'autres configurations de SWBLI, comme le cas d'un écoulement supersonique rencontrant une rampe de compression, partagent les mêmes propriétés et les résultats obtenus sur une configuration sont donc *a priori* généralisables [102]. Sous l'effet d'un choc incident, un gradient de pression adverse apparaît dans la couche limite et, pour un choc suffisamment fort, une zone de recirculation peut être formée. La longueur de la bulle de recirculation sera notée L_{sep} . Les caractéristiques principales de l'écoulement sont schématisées sur la figure

1. On conservera l'acronyme anglais pour *Shock wave/boundary layer interaction*

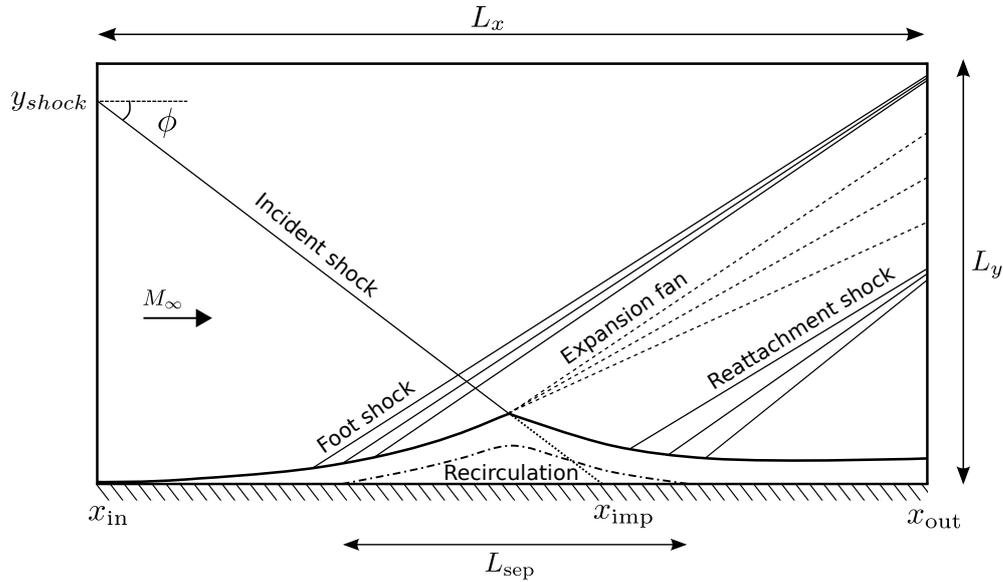


Fig. V.1 Schéma de l'interaction choc/couche limite avec choc incident

V.1. Un choc de séparation (ou choc de pied) est observé du fait de la déflexion de l'écoulement au niveau du point de séparation. Un premier saut de pression pariétale est alors observé dans cette région. Du fait des effets visqueux, ce saut est continu dans la couche limite. Un plateau de pression s'établit dans la bulle de recirculation [103]. La réflexion du choc incident en une onde de détente permet par ailleurs de retrouver ce plateau en amont et en aval du point d'impact. Dans la région de rattachement de la couche limite, un nouveau choc se forme sous l'effet d'une nouvelle déflexion de l'écoulement dont la vitesse redevient parallèle à la plaque en aval de la bulle. La pression pariétale subit alors un nouveau saut continu.

La SWBLI présente une dynamique riche sur une vaste plage de fréquences. Le cas des basses fréquences a notamment été identifié par Dolling [104] comme un sujet d'étude d'importance majeure encore mal compris. Une instationnarité est observée expérimentalement en régime turbulent pour des valeurs de nombre de Strouhal autour de $St_{L_{sep}} = 0.02 - 0.05$ (fig. V.2). Ces valeurs sont remarquablement communes à différentes configurations de SWBLI et à différents nombres de Mach. Cette dynamique est associée à une oscillation du choc de séparation avec une amplitude de l'ordre de la dizaine de pourcents de L_{sep} . Plusieurs travaux numériques [105, 106] ont également mis en évidence ce phénomène par calcul LES. Il semble néanmoins qu'aucun consensus sur l'origine physique de cette dynamique n'ait encore émergé [74]. Selon Ganapathisubramani et al. [107], la source de cette instationnarité pourrait provenir du forçage du choc par de larges structures convectées en amont de la région d'interaction. Cette analyse repose sur l'existence de corrélations entre le mouvement du choc et la couche limite amont [108]. Néanmoins, de nombreux travaux rejettent cette théorie, lui préférant une explication basée sur la dynamique associée à la bulle de recirculation [109]. Les simulations LES de Toubert et Sandham [110] montrent que la dynamique basse fréquence du choc de séparation est retrouvée même en l'absence de larges structures en amont de la bulle, supportant ainsi l'idée que ces structures ne

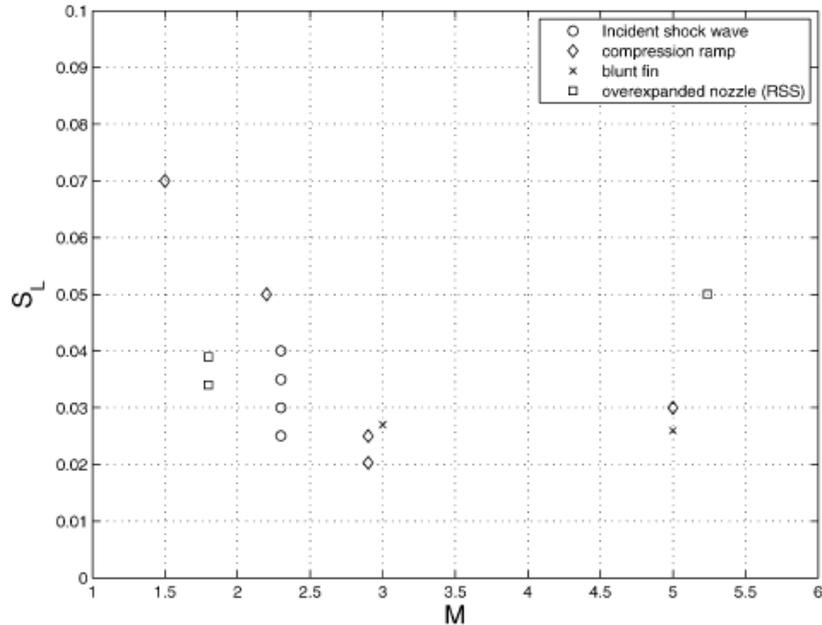


Fig. V.2 Gauche : Nombre de Strouhal, basé sur la longueur de séparation, auquel est observée l'instationnarité basse fréquence. Les résultats sont donnés en fonction du nombre de Mach et pour différentes configurations SWBLI. Figures issues de Dussauge et al. [73].

sont pas à l'œuvre dans ce mécanisme. Les auteurs émettent également l'hypothèse qu'un mode global 2D instable, calculé à partir du champ moyen LES, pourrait être à l'origine de l'instationnarité. Ce résultat est par ailleurs à distinguer de la bifurcation 3D d'une SWBLI en régime laminaire mise en évidence par Robinet [69]. Cependant, l'idée d'une instabilité globale comme source d'instationnarité basse fréquence semble être réfutée par un travail ultérieur des mêmes auteurs (Touber et Sandham [111]). Dans cette étude, le déplacement du choc de séparation est modélisé par une équation différentielle ordinaire linéaire avec forçage stochastique, ce qui écarterait l'hypothèse d'une instabilité globale caractérisée par une dynamique intrinsèque. La résolution de cette équation pour un bruit blanc a montré un excellent accord avec les résultats expérimentaux et numériques. Les auteurs concluent que le système choc-bulle agit comme un filtre passe-bas et que, par conséquent, la dynamique basse fréquence observée est nécessairement générée par un forçage basse fréquence. Cette approche ne permet cependant pas de distinguer si la source de forçage est en pratique issue de la couche limite amont ou de la région de recirculation.

Les travaux décrits jusqu'à présent étaient concentrés sur la SWBLI en régime turbulent. Le forçage stochastique introduit dans la modélisation de Touber et Sandham [111] est notamment lié à la statistique turbulente de l'écoulement. L'étude numérique de la SWBLI en régime laminaire par Sansica et al. [112] suggère qu'il existe également une dynamique basse fréquence comparable au régime turbulent. Les auteurs ont mis en évidence par calcul DNS que le forçage par bruit blanc de la zone de recirculation générerait une réponse basse fréquence dans le choc de séparation. Cette réponse croît de manière quadratique avec l'amplitude de forçage et émanerait donc d'un mécanisme non-linéaire. Le forçage d'une SWBLI transitionnelle par un mode

oblique instable semble également générer une dynamique basse fréquence [113]. Les auteurs soutiennent que la région turbulente apparaissant en aval de la zone de recirculation fournirait les échelles basses fréquences conduisant au forçage du choc de séparation, où l'écoulement est laminaire. Des ondes acoustiques se propageant en amont de l'écoulement via la région subsonique de la couche limite assureraient la remontée de l'information.

Il existe par ailleurs une dynamique liée à des échelles de fréquence plus élevées que celles considérées jusqu'ici. En effet, l'existence d'une bulle de recirculation induit un profil de couche de mélange par lequel peut naître une instabilité convective de type Kelvin-Helmholtz (KH). Expérimentalement, les travaux de Dussauge et al. [73] font état d'un pic de pression pariétale autour de $St_{L_{sep}} = 0.5$ dans la région d'interaction. Le calcul numérique du gain optimal global 2D en régime turbulent transsonique sur une bosse de Détery [72], mené conjointement avec une étude expérimentale, permet de retrouver ces échelles de fréquence. Il est de plus montré que la réponse optimale associée possède une structure spatiale de mode KH. En régime laminaire, l'étude du forçage de la SWBLI de Sansica et al. [112] a mis en évidence le même type de réponse mais à des échelles supérieures, autour de $St_L = 4$. Dans une approche différente, les modes globaux de la SWBLI ont été calculés en régime laminaire par Guiho et al. [114] pour une configuration globalement stable. Il est montré que des modes de couche de mélange supersoniques peuvent générer des ondes acoustiques [115] dans l'écoulement libre en aval du choc de rattachement. Des modes globaux liés au développement d'ondes TS sont également identifiés à des échelles similaires. L'analyse de stabilité locale réalisée par Pagella et al. [116] avait précédemment révélé que la présence d'un choc incident rendait ces modes plus instables du fait de l'épaississement de la couche limite. Cette étude conduite à $M = 4.8$ suggère également que le développement du second mode de Mack est favorisée par la présence du choc incident.

Dans cette section, les instabilités convectives à hautes fréquences (KH et TS) développées dans une SWBLI laminaire seront étudiées par calcul de réponse optimale globale 2D. Une étude paramétrique en fonction du nombre de Mach, duquel la longueur de séparation est dépendante, devra permettre de mettre en évidence les échelles de longueur et de temps associées au développement des réponses optimales. L'analyse de réceptivité des basse fréquences sera également abordée et mise en perspective avec une analyse de stabilité globale. À partir de ces résultats, la participation des effets linéaires dans l'instationnarité basse fréquence présentée précédemment sera discutée.

V.2 Écoulement de base

V.2.1 Validation

Tout d'abord, les résultats obtenus par résolution des équations non-linéaires de Navier-Stokes compressibles (sec. II.1.2) sont comparés aux données expérimentales de Degrez et al. [117] établies pour une SWBLI laminaire. Dans cette expérience, un choc incident d'angle $\phi = 30.8^\circ$ interagit avec une couche limite en développement au dessus d'une plaque plane à $M = 2.15$. Le choc atteint la couche limite à l'abscisse associée à un nombre de Reynolds de plaque $Re_L = 10^5$. Les calculs sont menés sur un domaine de calcul de dimension $x/L \in [0, 2]$ et $y/L \in [0, 1]$ et un maillage à progression

géométrique est défini depuis la paroi. Le schéma AUSM+ est utilisé à l'ordre 5. Un choc entrant d'angle ϕ est imposé sur la frontière amont du domaine à une hauteur y_{choc} (schéma V.1). Pour $y < y_{choc}$, les conditions d'écoulement amont sont prescrites. Pour $y > y_{choc}$, les variables en aval du choc sont imposées via les relations de saut de chocs obliques calculées à partir de l'angle ϕ et du nombre de Mach [118]. Ces relations de saut sont également imposées sur la frontière supérieure du domaine. Une condition de Neumann est fixée en sortie de domaine et des conditions de non-glissement et d'adiabaticité sont utilisées à la paroi.

Le champ de Mach local ainsi calculé est présenté dans la figure V.3. Une bulle de recirculation est observée dans la zone d'impact du choc, dont les abscisses de séparation et de rattachement sont repérables à partir du profil du coefficient de friction local C_f lorsque $C_f = 0$ (fig. V.4). Des valeurs proches des données expérimentales sont retrouvées. Le profil de pression à la paroi, où est observé le double saut caractéristique d'une SWBLI, est également en très bon accord avec l'expérience (fig. V.4). La convergence en maillage est atteinte pour une grille de calcul de 600×250 , le raffinement du maillage dans chacune des deux directions de l'espace produisant des profils de pression et de C_f identiques.

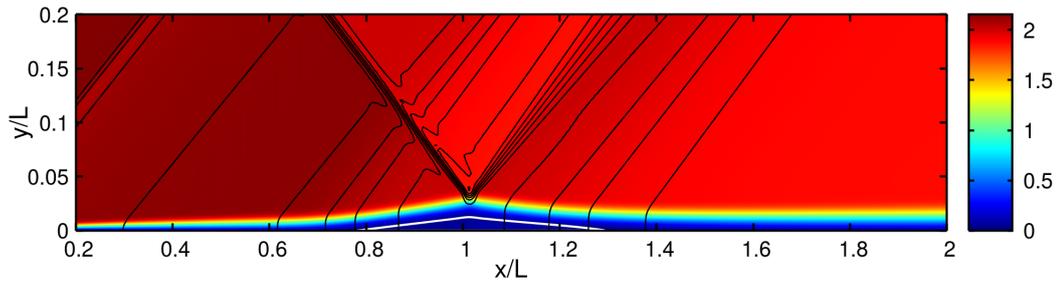


Fig. V.3 Champ de Mach local à $M = 2.15$, $Re_L = 10^5$, $\phi = 30.8^\circ$ calculé avec le schéma AUSM+ à l'ordre 5 sur un maillage 600×250 . Les lignes noires sont les contours de pression et la ligne blanche repère la bulle de recirculation ($u = 0$).

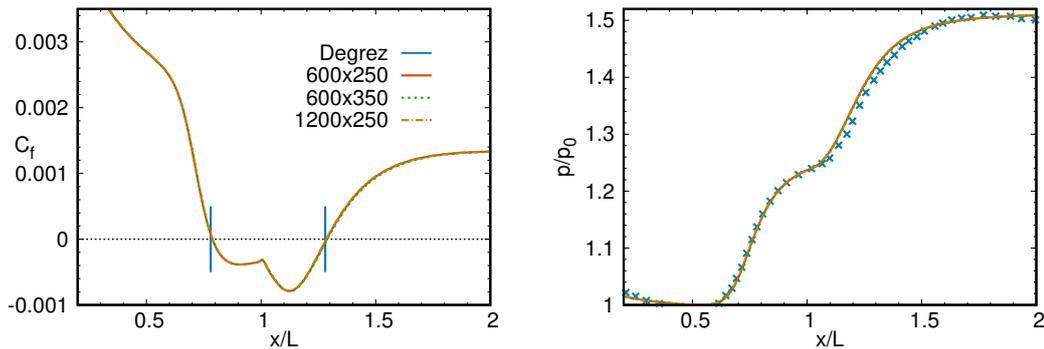


Fig. V.4 Comparaison des résultats numériques avec les données expérimentales de Degrez et al. [117] à $M = 2.15$, $Re_L = 10^5$, $\phi = 30.8^\circ$. Gauche : Profil de coefficient de friction local. Les barres bleues verticales indiquent les abscisses expérimentales de séparation et rattachement de la bulle de recirculation. Droite : Profil de pression à la paroi normalisé par le minimum de pression en amont du choc.

V.2.2 Écoulement de base pour différents nombres de Mach

Afin d'entreprendre une étude paramétrique de réceptivité de la SWBLI, plusieurs écoulements de base sont calculés à différents nombres de Mach. Une configuration proche du cas Degrez et al. [117] précédemment validé est conservée. L'angle du choc est fixé $\phi = 30.8^\circ$. De plus, on souhaite garder les caractéristiques de la couche limite au niveau de l'impact du choc similaires pour tout nombre de Mach. Pour cela, la valeur du nombre de Reynolds à laquelle le choc non-visqueux atteint la plaque est fixée à $Re_{\delta^*}^{\text{imp}} = 1100$, où δ^* est l'épaisseur de déplacement compressible de la couche limite en l'absence de choc. Ainsi, pour chaque nombre de Mach, un calcul de couche limite sans choc est préalablement réalisé afin de repérer l'abscisse x_{imp} à laquelle $Re_{\delta^*} = 1100$. Cette abscisse est alors utilisée dans le calcul de SWBLI comme point d'impact du choc non visqueux (schéma V.1). Ainsi, $Re_{\delta^*}^{\text{imp}}$ n'est pas le nombre de Reynolds effectivement observé dans les résultats du calcul SWBLI puisque la présence du choc incident aura pour effet d'épaissir le profil de couche limite initialement calculé sans choc.

Pour tout nombre de Mach, on choisit de placer la frontière aval en fixant une distance de $70\delta^*$ à partir de l'impact du choc. Comme l'abscisse d'impact du choc est différente pour chaque nombre de Mach (de manière à conserver un nombre de Reynolds constant), la longueur totale du domaine depuis l'abscisse 0 du bord d'attaque différera également et sera comprise entre $150\delta^*$ et $174\delta^*$. Enfin, la frontière haute est ajustée de façon à laisser sortir le choc de séparation au niveau de la frontière aval et dépend du nombre de Mach, typiquement de l'ordre de $60\delta^*$. Pour chaque nombre de Mach, la longueur de la bulle de recirculation est calculée (fig. V.5). Cette échelle de longueur interviendra dans la renormalisation de résultats de réceptivité afin de mettre en évidence le rôle de la zone de recirculation sur le développement d'instabilités convectives. En dessous de $M = 2.05$, aucun décollement de couche limite n'est observé. Au dessus de cette valeur, la longueur L_{sep} de la bulle croît avec le nombre de Mach jusqu'à des valeurs proches de l'ordre de $100\delta^*$.

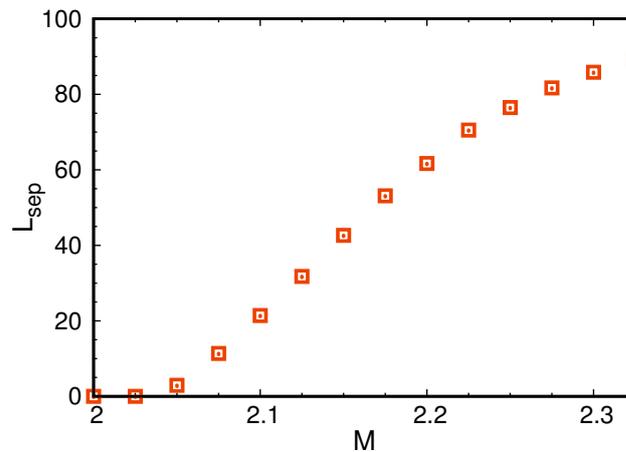


Fig. V.5 Longueur de la bulle de recirculation en fonction du nombre de Mach

V.3 Réceptivité à haute fréquence

V.3.1 Gain optimal : deux pics de réceptivité

Le gain optimal μ est calculé (§ II.2.2.2) pour différents nombres de Mach de l'intervalle $[2, 2.325]$ afin d'observer le rôle de la croissance de la bulle de recirculation. L'énergie de Chu (§ A) est utilisée comme norme de la réponse optimale. Le domaine d'optimisation sur lequel cette énergie est intégrée est défini jusqu'à une abscisse $x_{opt} = x_{max} - 10\delta^*$, dont l'indépendance vis-à-vis des résultats sera vérifiée. La plage de fréquence étudiée est définie à partir d'un nombre de Strouhal basé sur l'échelle de couche limite δ^* commune aux différents écoulements de base. Les résultats sont présentés pour les fréquences de forçage $St_{\delta^*} \in [0.005, 0.2]$ (fig. V.6). Cette plage exclut les basses fréquences associées à l'instationnarité à $St_{L_{sep}} = 0.03$ (définie pour des longueurs de recirculation suffisantes, de l'ordre de la dizaine de δ^*) dont les résultats seront discutés en section V.4.

À chaque nombre de Mach considéré, un pic de gain optimal, que l'on désignera par pic A, apparaît autour de $St_{\delta^*} \simeq 0.02 - 0.03$ (fig. V.6). Cette fréquence s'établit autour de $St_{\delta^*} \simeq 0.03$ pour les écoulements à longueurs de recirculation faibles ou nulles mais décroît ensuite à mesure que le décollement grandit, où une échelle de temps basée sur la longueur de recirculation telle que $St_{L_{sep}} \simeq 2$ semble émerger (fig. V.7). L'analyse de la réponse optimale associée montrera que cette région de réceptivité est en partie liée au développement d'ondes TS dans la couche limite en aval de la bulle de recirculation.

À des fréquences plus élevées, un autre pic de gain, que l'on notera pic B, est détecté pour des nombres de Mach supérieurs à 2.15. La valeur maximum du gain augmente avec M tandis que la fréquence St_{δ^*} liée à ce maximum décroît nettement. Il apparaît en fait plus pertinent d'associer ce pic à la fréquence $St_{L_{sep}}$ basée sur la longueur de recirculation (fig. V.5). Ces fréquences tendent alors à se regrouper autour de $St_{L_{sep}} \simeq 8$ (fig. V.7). L'apparition de L_{sep} comme échelle pertinente laisse ainsi entrevoir que le mécanisme de croissance de la réponse associée au pic B est lié à la bulle de recirculation.

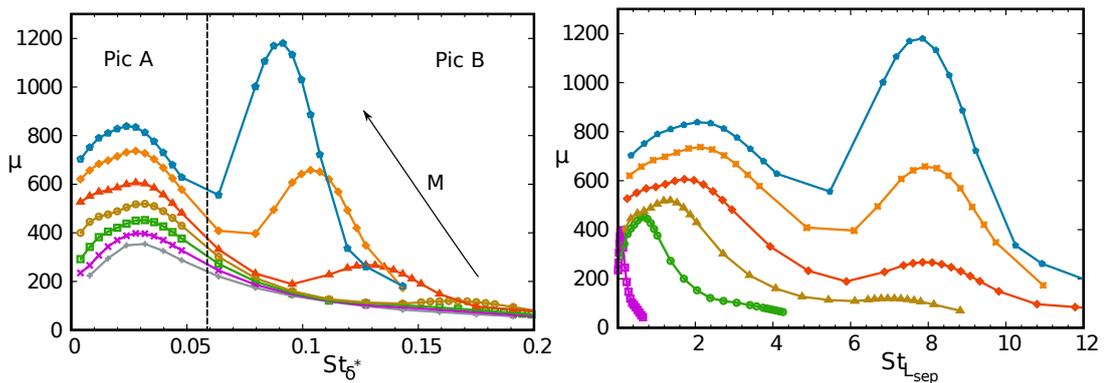


Fig. V.6 Gain optimal μ en fonction de la fréquence de forçage exprimée par un nombre de Strouhal basé sur δ^* (gauche) et L_{sep} (droite). Chaque courbe est associée à un nombre de Mach allant de 2 à 2.30 avec un pas de 0.05.

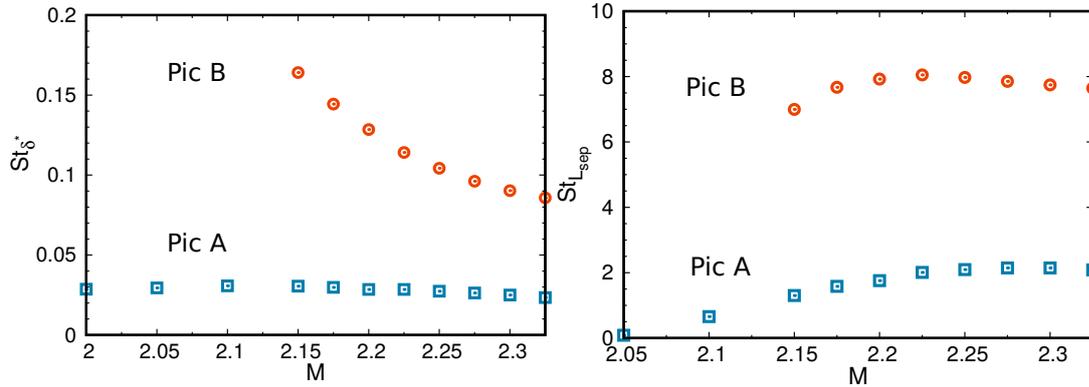


Fig. V.7 Nombre de Strouhal de forçage produisant le gain optimal maximum en fonction du nombre de Mach. Les échelles de longueur de référence sont δ^* (gauche) et L_{sep} (droite). Le pic B n'est détecté que pour les nombres de Mach supérieurs à 2.15.

L'indépendance de la position de la frontière aval du domaine numérique sur le calcul du gain optimal est vérifiée en fixant x_{opt} et en éloignant x_{max} . Une distance $x_{max} - x_{opt} = 10$ apparaît suffisante par comparaison avec une distance trois fois plus grande (V.8, domaine 4). Si la distance $x_{max} - x_{opt}$ est un paramètre purement numérique dont l'indépendance sur les résultats doit être vérifiée, l'étude de l'influence de x_{opt} révèle d'importantes propriétés physiques de l'écoulement. Le pic A est dépendant de cette abscisse (V.8), la valeur du gain augmentant à mesure que le domaine d'optimisation s'étend et la forme du maximum devenant plus piquée. La croissance de la réponse associée au pic A semble donc tirer son énergie de l'écoulement de base jusqu'à la frontière aval, où l'écoulement possède un profil de couche limite. Par conséquent, avant même l'observation des champs de réponse, il est possible d'affirmer que le pic A est en partie lié à une instabilité de couche limite en plus d'une éventuelle action de la bulle de recirculation. Par opposition, le pic B est indépendant de la localisation de x_{opt} dans la couche limite aval. La couche limite ne semble donc pas jouer de rôle dans la croissance de la réponse optimale associée et l'analyse des champs 2D (section V.3.2) montrera que la croissance de la réponse est effectivement localisée dans la zone de recirculation. Enfin, la sensibilité au maillage du calcul de gain optimal présentée en figure V.9 montrent que les deux pics sont retrouvés à des fréquences et des valeurs de maximum similaires lorsque le nombre de points de la grille de calcul est augmenté dans chacune des deux directions de l'espace.

Domaine	x_{opt}	$x_{max} - x_{opt}$
Court	137	10
Ref	147	10
Long	167	10
Ref II	147	30

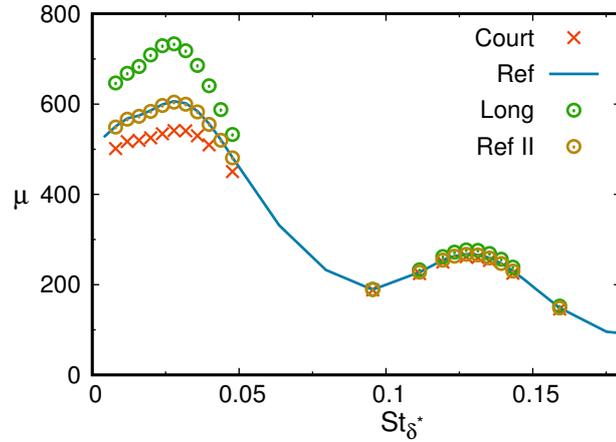


Fig. V.8 Influence de la position x_{opt} de la frontière aval du domaine d'optimisation et de la distance $x_{max} - x_{opt}$ sur le calcul du gain optimal à $M = 2.20$

Maillage	$N_x \times N_y$
Ref	492×190
A	492×263
B	818×190

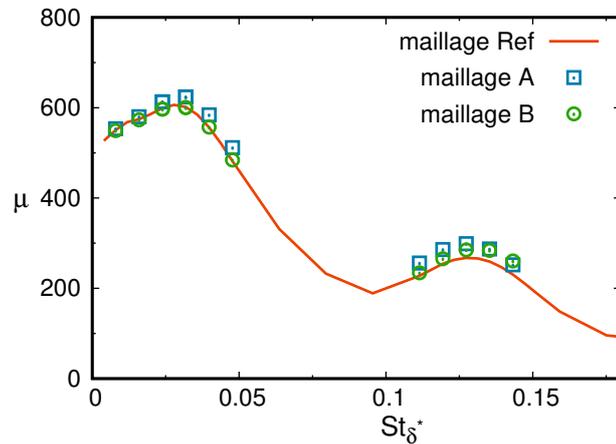


Fig. V.9 Convergence en maillage du gain optimal à $M = 2.20$

V.3.2 Réponses et forçages optimaux

Les structures spatiales des réponses optimales associées aux pics A et B sont similaires dans la région située au dessus de la zone de recirculation, dans laquelle le profil de l'écoulement de base possède les propriétés d'une couche de mélange (fig. V.10 et V.11). Ce profil permet le développement d'une instabilité KH dont la structure tourbillonnaire suit de façon remarquable le profil du point d'inflexion généralisé. Pour le pic B, généré à plus haute fréquence que le pic A, la réponse est constituée d'un plus grand nombre de vortex. Les forçages optimaux s'établissent également le long du point d'inflexion généralisé. Leur structure tend à se localiser en amont du développement des réponses optimales et leur inclinaison vers l'amont de l'écoulement suggère l'action du mécanisme d'Orr.

Le comportement des réponses des deux pics diffère cependant dans la couche limite en aval de la bulle de recirculation. Le champ de vorticité est notamment composé d'une unique allée de tourbillon pour le pic A tandis que le pic B conserve la double allée

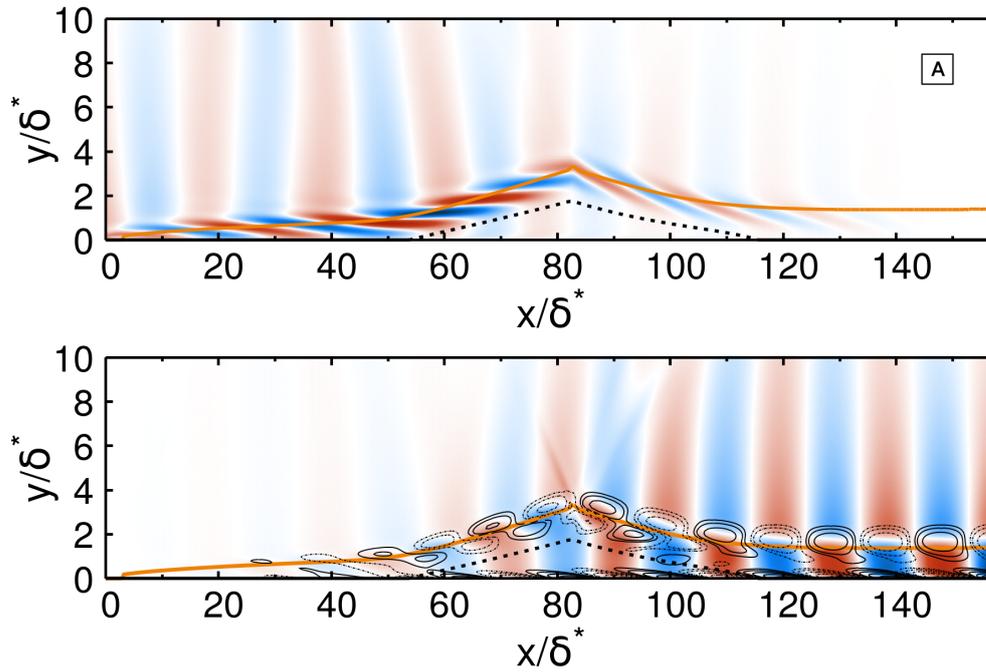


Fig. V.10 Champ 2D des parties réelles de f_x du forçage optimal (haut) et de u de la réponse optimale (bas) associés au pic A à $M = 2.20$ et $St_{\delta^*} = 2.8 \times 10^{-2}$ (valeurs positives en rouge et négatives en bleu). La limite de la bulle de recirculation ($\bar{u} = 0$) apparaît en trait pointillé épais. La ligne orange représente le point d'inflexion généralisé de l'écoulement de base. Les iso-contours de vorticité de la réponse, espacés selon une échelle logarithmique, sont tracés en trait noir fin continu (valeurs positives) et pointillé (négatives).

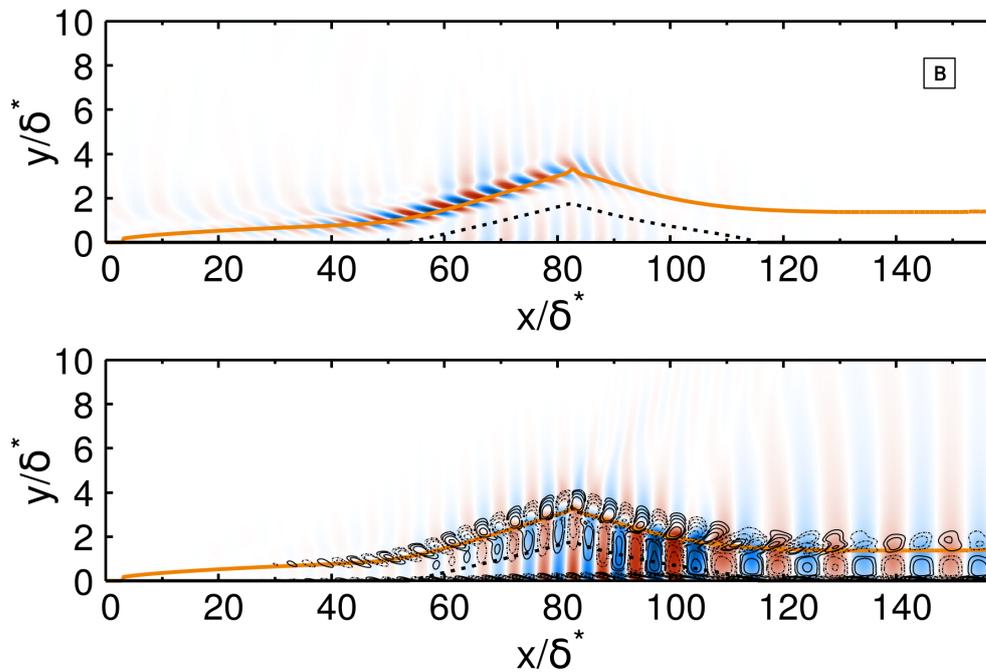


Fig. V.11 Champ 2D associés au pic B à $M = 2.20$ et $St_{\delta^*} = 1.3 \times 10^{-1}$. Légende en figure V.10.

générée dans la couche de mélange (fig. V.10 et V.11). L'analyse des profils des réponses dans la couche limite (fig. V.12) confirme que le pic A est composé d'un unique vortex transversal, similaire à l'onde TS calculée par analyse locale pour une couche limite de Blasius (section III.2.1). Le profil associé au pic B est de nature différente, les maxima des profils de vitesses u et v étant notamment localisés à des hauteurs similaires. Cette organisation semble plutôt associée à une onde de nature acoustique. Le champ de vorticité détecté précédemment dans cette région (fig. V.11) ne serait ainsi que résiduel. Ce point sera discuté dans la section V.3.4. Enfin, les profils longitudinaux (fig. V.13) montrent que la réponse du pic A poursuit son développement en aval de la bulle, comme le laissait supposer l'influence de x_{opt} sur le gain optimal. Ce profil fait également apparaître que la croissance de l'onde est peu perturbée par la présence de la zone de recirculation.    l'inverse, la réponse du pic B se développe jusqu'à une abscisse localisée à l'intérieur de la bulle de recirculation. En aval, la réponse décroît, en accord avec l'indépendance du gain optimal vis à vis de la frontière aval. Par ailleurs, il doit être noté que la longueur d'onde de la réponse - et par conséquent sa vitesse de phase - est plus grande dans la couche limite aval.

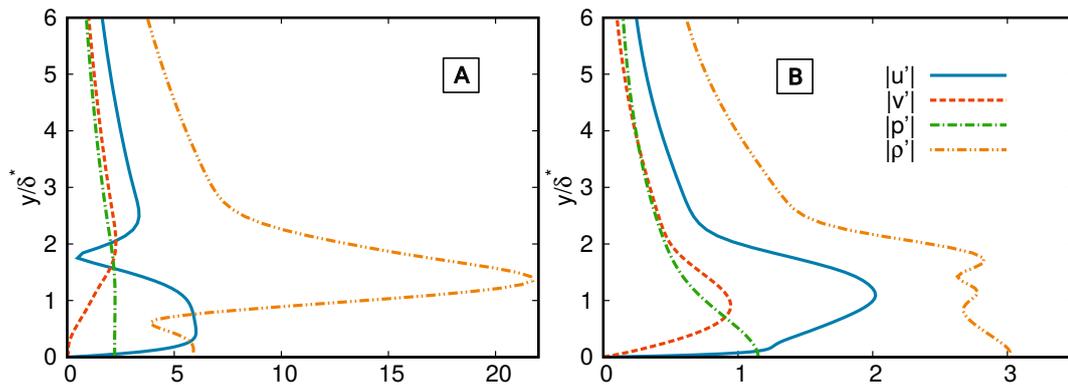


Fig. V.12 Profils des grandeurs fluctuantes dans la couche limite en aval de la bulle ($x/\delta^* = 145$) des réponses associées aux pics A (gauche) et B (droite)

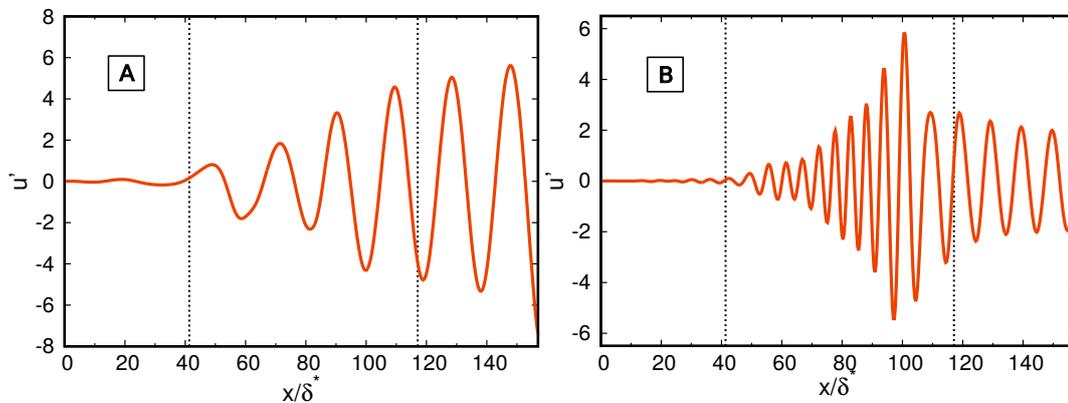


Fig. V.13 Profils longitudinaux en $y/\delta^* = 1$ des réponses associées aux pics A (gauche) et B (droite)    $M = 2.20$. Les abscisses de séparation et de rattachement apparaissent en trait pointillé.

En procédant au calcul du pic B sur un domaine plus étendu vers l'aval, il est possible de visualiser l'émission d'ondes acoustiques dans l'écoulement libre en aval du choc de rattachement de l'écoulement de base (fig. V.14). Cette observation rejoint les résultats de Guiho et al. [114] qui, par calcul des modes globaux dans une SWBLI laminaire, ont mis en évidence l'existence de modes acoustiques liés aux développements de modes KH supersoniques dans la région de séparation. Ce rayonnement acoustique issu de la dynamique d'une couche de mélange supersonique et prédit par Tam et Hu [119] a également été retrouvé par Nichols et Lele [46] via l'analyse des modes globaux d'un jet froid. Ainsi, il semble que la croissance de la réponse optimale dans la région de séparation (fig. V.13) soit à l'origine de l'émission acoustique observée dans l'écoulement libre.

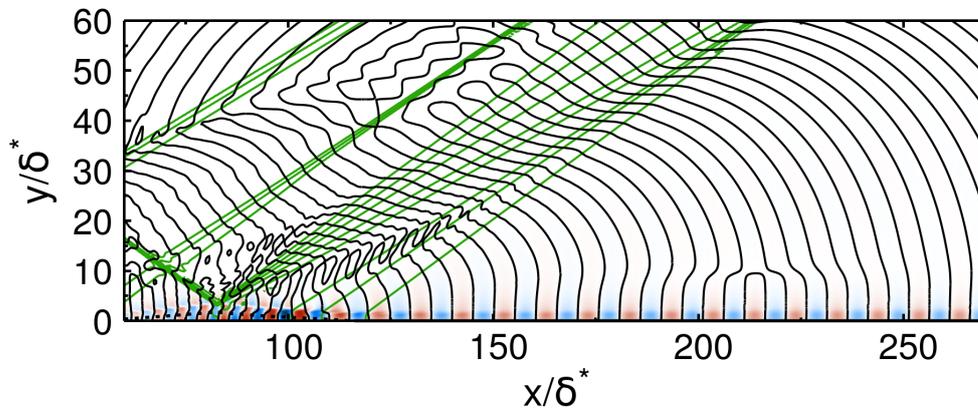


Fig. V.14 Partie réelle de la vitesse u (bleu et rouge) de la réponse associée au pic B à $M = 2.20$, calculé sur un domaine étendu à $x_{opt} = 296$. Les ondes acoustiques émises dans l'écoulement libre sont visualisées par les contours $p = 0$ des perturbations (lignes noires). Les lignes vertes indiquent les contours de pression de l'écoulement de base.

V.3.3 Forçage localisé

Afin de mettre en évidence que les ondes TS et KH observées dans les calculs de réponses optimales précédents sont effectivement convectivement instables au sens de l'analyse de stabilité locale (section IV.1), un nouveau calcul de gain optimal est réalisé en restreignant le domaine de forçage. Par l'intermédiaire de la matrice \mathbf{P} (section II.2.2.2), le champ de forçage optimal est contraint à être nul en tout point du domaine de calcul à l'exception d'une zone de dimensions $\Delta x/\delta^* \times \Delta y/\delta^* = 6 \times 2$ localisée au niveau du point de séparation (fig. V.15). Le gain optimal ainsi calculé admet de nouveau deux maximums locaux (pic A et B) pour des fréquences similaires à celles du calcul sans restriction de forçage (fig. V.16). La valeur absolue du gain est inférieure au calcul précédent puisque qu'une solution nécessairement sous-optimale est ici recherchée (section IV.1). Les structures spatiales des réponses obtenues sont similaires au cas non-restreint (fig. V.15).

La densité d'énergie de Chu $d_{Chu}(x) = \int_0^{y_{int}} E_{Chu}(x, y) dy$ est calculée pour y_{int} relativement proche de la paroi afin d'évaluer la croissance énergétique des perturbations

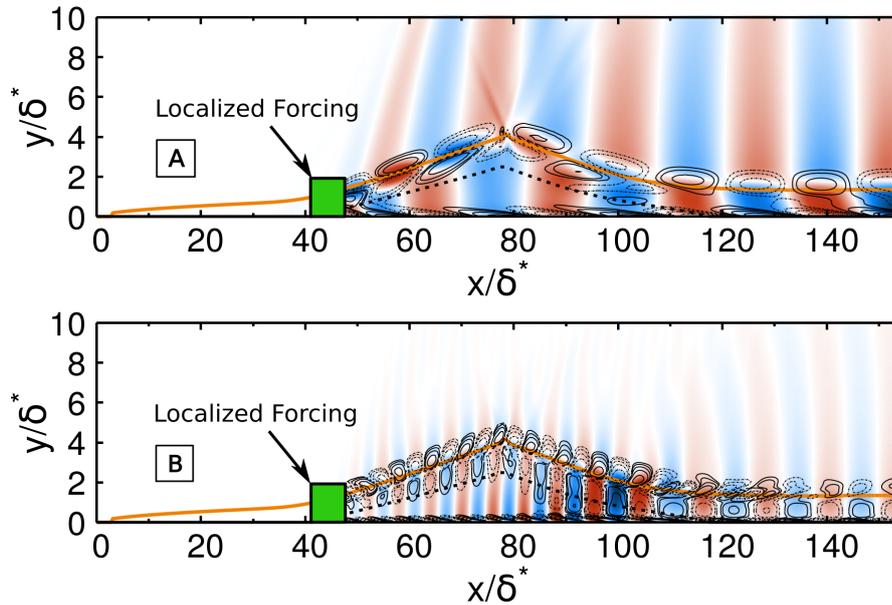


Fig. V.15 Réponses optimales associées au pic A et B à $M = 2.25$ dans le cas d'un forçage localisé dans la zone verte. Légende en figure V.10.

causée par les mécanismes d'instabilité de couche de mélange et de couche limite. Les valeurs $y_{int} = 5$ et $y_{int} = 10$ seront considérées et discutées. On observe tout d'abord que la croissance des réponses optimales s'initie dans la zone forcée sous l'effet du travail injecté par les forces externes (fig. V.17). En aval, la réponse du pic B poursuit son développement sans autre support que l'extraction d'énergie à l'écoulement de base, les termes de forçage étant ici rigoureusement nuls. Cette croissance se poursuit jusqu'à une abscisse située $3/4$ la bulle de recirculation, pour ensuite décroître jusqu'en sortie de domaine. Ainsi, la couche de mélange est convectivement instable à la fréquence associée au pic B tandis que la couche limite en aval est convectivement stable. Ces résultats sont indépendants des valeurs de y_{int} utilisées.

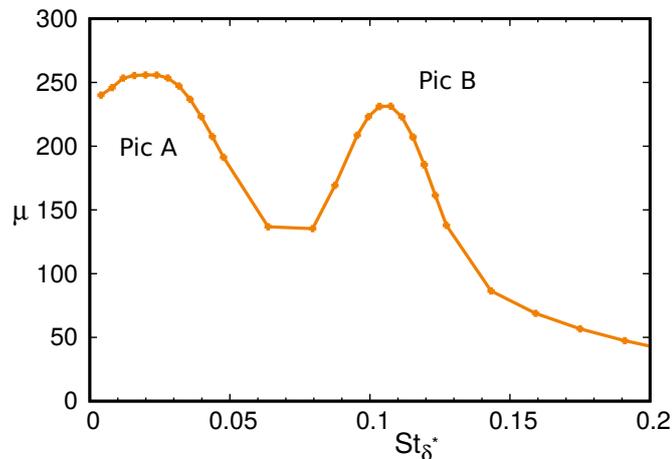


Fig. V.16 Gauche : Gain optimal à $M = 2.25$ calculé avec restriction de forçage

La densité d'énergie de Chu associée au pic A s'avère dépendante du choix de la valeur de y_{int} au sein de la région de recirculation (fig. V.17). En effet, des perturbations d'amplitude similaire à celle observée dans la couche de mélange sont également présentes au dessus de la région d'interaction (fig. V.15). Ainsi, en augmentant la valeur de y_{int} , l'énergie de ces perturbations devient prise en compte dans le calcul de la densité d'énergie et rend difficile l'appréciation de la croissance énergétique imputable uniquement à un mécanisme de couche de mélange. Une pente nulle de densité d'énergie est notamment observée autour de $55 < x/\delta_0^* < 70$ pour $y_{int} = 5$ tandis que cette région possède une pente positive avec $y_{int} = 10$. Par conséquent, il est ici difficile de conclure sur le caractère convectivement instable de la couche de mélange à cette fréquence. En revanche, la croissance énergétique de la réponse jusqu'en sortie de domaine est observée pour les deux valeurs y_{int} , la croissance étant par ailleurs plus marquée avec l'intégration plus proche de la paroi $y_{int} = 5$. La couche limite aval semble donc bien convectivement instable à la fréquence du pic A.

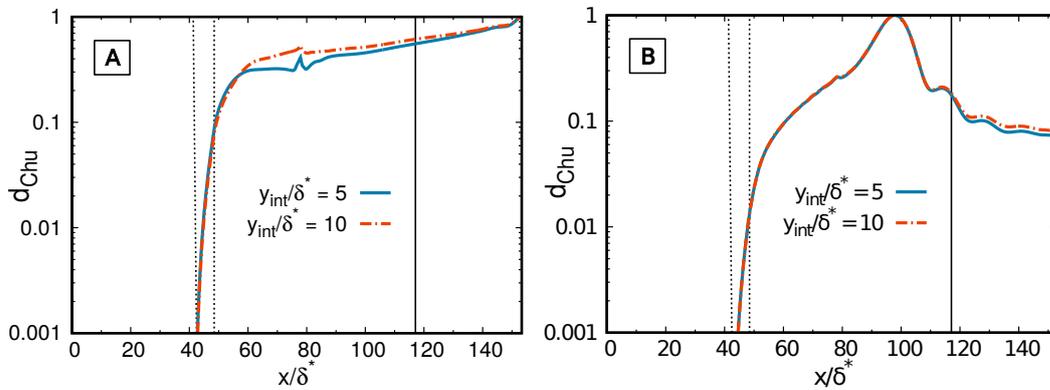


Fig. V.17 Profil longitudinal de la densité d'énergie de Chu des réponses optimales associées au pic A (gauche) et B (droite) calculées avec restriction du champ de forçage dans la région comprise entre les lignes pointillées verticales. La ligne continue verticale indique le point de rattachement de la bulle de recirculation.

V.3.4 Discussion

D'après les résultats obtenus précédemment, il apparaît que le pic A est en partie lié au développement d'ondes TS convectivement instables. La dépendance de la valeur du gain optimal vis à vis de la frontière aval d'optimisation a montré que la réponse poursuivait sa croissance jusque dans la couche limite aval où les profils normaux ont par ailleurs révélé une structure d'onde TS. La localisation du forçage optimal dans une zone restreinte au niveau du point de séparation a assuré la nature convectivement instable de ces ondes, capables de croître même lorsque l'excitation est produite uniquement en amont de la couche limite. De plus, le pic A est observé sur la totalité de la plage de nombre de Mach considérée, incluant des écoulements de base pour lesquels le choc incident n'est pas suffisant fort pour générer une zone de recirculation ($M < 2.05$, cf. fig. V.5). Or, pour ces écoulements sans couche de mélange, l'existence d'un pic de réceptivité n'est pas imputable à un mécanisme KH mais bien uniquement à une instabilité TS. Cependant, pour les écoulements à plus haut Mach comprenant une zone

de recirculation consécutive ($M \gtrsim 2.15$), il est effectivement observé qu'une structure tourbillonnaire convectivement instable se développe le long du point d'inflexion généralisé en addition des ondes TS générées dans la couche limite aval. Pour ces nombres de Mach, l'influence de la croissance de L_{sep} semble apparaître dans la fréquence maximale de réceptivité qui semble dès lors se comporter comme $f \sim u_{\infty}/L_{\text{sep}}$ (fig. V.13). Il convient néanmoins de rester prudent dans l'interprétation de cette fréquence car le gain optimal associé aux ondes TS est dépendant de l'épaisseur de couche limite en sortie de domaine d'optimisation ainsi que de la distance sur laquelle s'établit la couche limite jusqu'à cette sortie. Or, compte-tenu de la définition du domaine numérique utilisée, ces longueurs ne sont pas constantes d'un nombre de Mach à l'autre, la proportion du domaine de calcul occupée par la bulle de recirculation augmentant avec le nombre de Mach.

Émergeant pour des longueurs de recirculation suffisamment élevées, le pic B est uniquement associé à un mécanisme de couche de mélange. Pour une couche de mélange incompressible en écoulement libre d'épaisseur de quantité de mouvement θ , la fréquence à laquelle se développe l'instabilité de plus fort taux d'amplification varie avec $1/\theta$ [120], où $\theta \sim \sqrt{x}$ [121]. Le profil d'une couche de mélange généré dans une SWBLI est néanmoins plus complexe : il apparaît proche de la paroi et dépend de la longueur de recirculation, de l'amplitude de l'écoulement renversé généré par le choc incident ainsi que de l'épaisseur locale de couche limite. De plus, calculer robustement l'évolution de θ en fonction du nombre de Mach pour alors la relier à la fréquence de réceptivité maximale n'est pas aisé. Il semble néanmoins, dans une certaine mesure, que l'échelle de longueur L_{sep} permette de caractériser cette fréquence dont l'évolution d'un nombre de Mach à l'autre tend à être observée selon $f \sim u_{\infty}/L_{\text{sep}}$ (fig. V.7). Le cadre de la présente étude, dans lequel est fixé $Re_{\delta_*}^{\text{imp}} = cte$, permet d'écarter l'influence de l'épaisseur de la couche limite sur le développement de la couche de mélange. On peut émettre l'hypothèse qu'un terme lié au nombre de Reynolds d'impact devrait apparaître dans l'expression $f \sim u_{\infty}/L_{\text{sep}}$. En cela, la valeur de la fréquence de réceptivité maximale $St_{L_{\text{sep}}} \simeq 8$ semblant émerger (fig. V.7) ne doit pas être considérée comme universelle, mais spécifique à la valeur $Re_{\delta_*}^{\text{imp}} = 1100$ fixée.

D'autre part, la valeur maximale du gain varie comme $\mu_{\text{max}} \sim e^{L_{\text{sep}}}$ pour $L_{\text{sep}} > 60$ (fig. V.18). L'interprétation de cette observation peut s'envisager en considérant que la distance sur laquelle la couche de mélange instable se développe varie de la même façon que la longueur de recirculation (cette distance étant en fait inférieure à L_{sep} d'après la figure V.16). Ainsi, en considérant la croissance énergétique d'un mode convectivement instable comme $E \sim e^{\alpha_i x}$, l'intégration de cette quantité sur une distance proportionnelle à L_{sep} permettrait de retrouver la variation du gain en $e^{L_{\text{sep}}}$. Notons qu'il a plusieurs fois été souligné dans ce manuscrit que la valeur *absolue* du gain n'avait pas de signification physique (sec. IV). Cependant, une comparaison *relative* au sein d'un même mécanisme d'instabilité est envisageable dans la mesure où la normalisation du gain par la norme 2 du forçage peut être considérée comme équivalente d'un nombre de Mach à l'autre, les champs de forçage étant similaires.

L'amplitude de la réponse associée au pic B décroît dans la couche limite en aval de la bulle et sa longueur d'onde est différente de celle observée au niveau de la zone de recirculation (fig. V.13). La vitesse de phase dans la couche limite aval peut être calculée selon la méthode exposée dans la section IV.1 en considérant que l'onde est plane

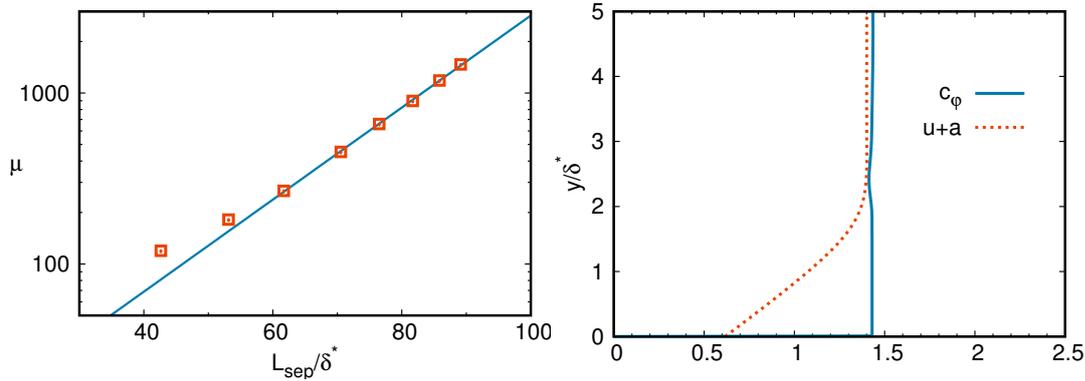


Fig. V.18 Gauche : Gain optimal maximum du pic B en fonction de L_{sep} . La droite bleue est la régression linéaire des points associés à $L_{sep} > 60$. Droite : Profil normal dans la couche limite aval ($x/\delta^* = 200$) de la vitesse de phase c_ϕ de la réponse optimale du pic B. $\bar{u}(y) + \bar{a}(y)$ est associé à l'écoulement de base et M_r est le nombre de Mach relatif.

et se propage selon x . Le profil de la figure V.18 révèle que cette vitesse est constante à l'intérieur de la couche limite et que sa valeur est proche de la vitesse $\bar{u}_\infty + \bar{a}_\infty$ d'une onde acoustique en écoulement libre. Ainsi, la longueur d'onde des perturbations dans la couche limite aval ne semble pas fixée par un mécanisme hydrodynamique mais paraît plutôt asservie à l'émission acoustique observée dans le champ libre (fig. V.14). Cependant, si le lâché tourbillonnaire issu de la zone de recirculation (fig. V.11) ne pilote pas la longueur d'onde dans la couche limite en aval, sa contribution reste observable dans l'amplitude des perturbations. En effet, alors que les perturbations acoustiques sont très faibles dans l'écoulement libre, elles demeurent dans la couche limite à un ordre comparable aux perturbations développées dans la couche de mélange. Cette amplitude subit néanmoins une atténuation à mesure que l'onde progresse dans la couche limite, cette portion de l'écoulement étant convectivement stable à ces fréquences (fig. V.16).

V.4 Réceptivité à basse fréquence

Les sections précédentes se sont concentrées sur la réceptivité haute fréquence associée aux ondes TS et KH. Le cas des basses fréquences ($St_{L_{sep}} \ll 1$) est maintenant étudié. Le calcul du gain optimal montre qu'un plateau s'établit lorsque la fréquence de forçage tend vers zéro (fig. V.19). La hauteur de ce plateau croît avec le nombre de Mach, ou de façon équivalente, avec la longueur de la zone de recirculation. Les structures des forçage et réponse associés sont localisées dans la région de la bulle de recirculation et semblent par ailleurs suivre la ligne sonique de l'écoulement de base $\bar{M} = 1$ (fig. V.20). De plus, des perturbations de pression se concentrent dans le choc de séparation en anti-phase avec les perturbations de vitesse u de la zone d'interaction (fig. V.21). La valeur du gain optimal chute ensuite pour des fréquences $St_{L_{sep}}$ de l'ordre de 10^{-3} . Un résultat similaire a été obtenu par Sartor et al. [72] dans le cas d'une SWBLI transsonique turbulente. La définition du gain optimal étant équivalente à celle d'une fonction de transfert, cette observation rejoint l'idée que le système choc-

couche limite se comporte qualitativement comme un filtre passe-bas lorsqu'il est forcé par des perturbations extérieures [111].

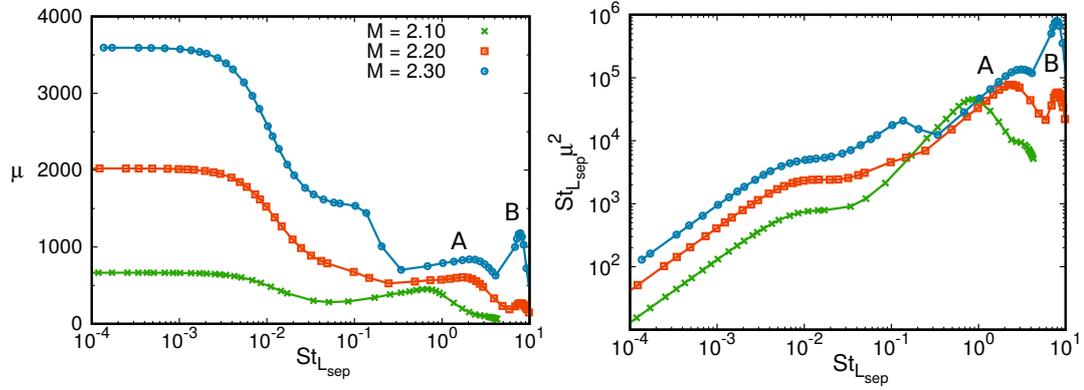


Fig. V.19 Gauche : Gain optimal. Droite : Valeur de $St_{L_{sep}} \mu^2$ calculée *a posteriori*. L'axe des abscisses, qui inclut les basses fréquences, est en échelle logarithmique

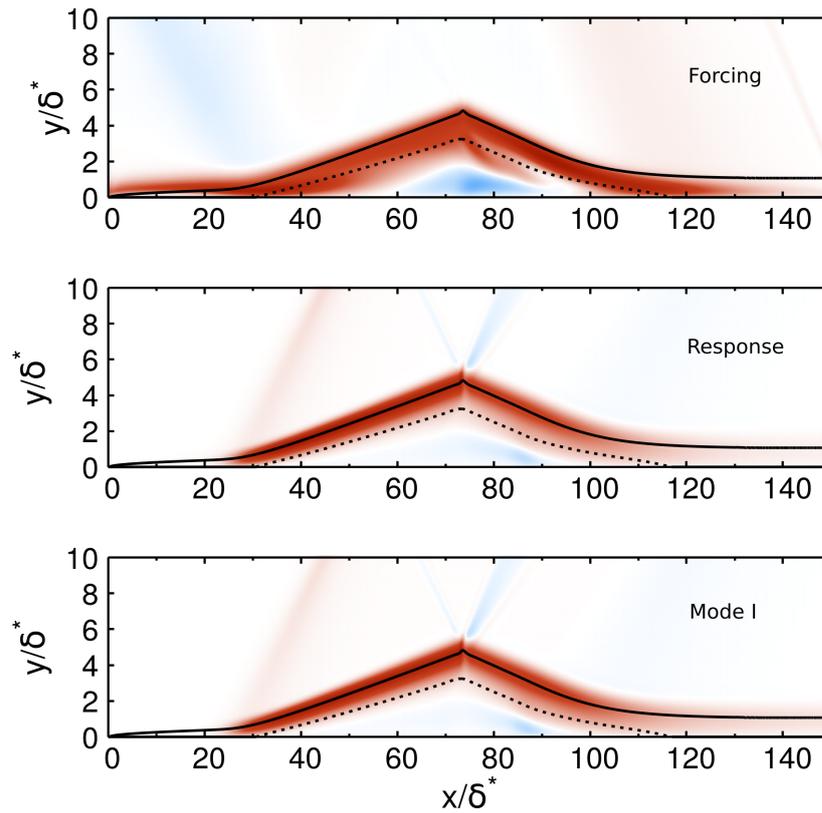


Fig. V.20 Champ 2D des parties réelles de f_x du forçage optimal (haut) et de u de la réponse optimale (milieu) associés aux basses fréquences à $M = 2.20$ et $St_{L_{sep}} = 1.4 \times 10^{-4}$. Bas : Partie réelle de la vitesse u du mode global I de fréquence nulle. La ligne sonique $\bar{M} = 1$ et la bulle de recirculation de l'écoulement base sont représentées respectivement en trait noir continu et pointillé.

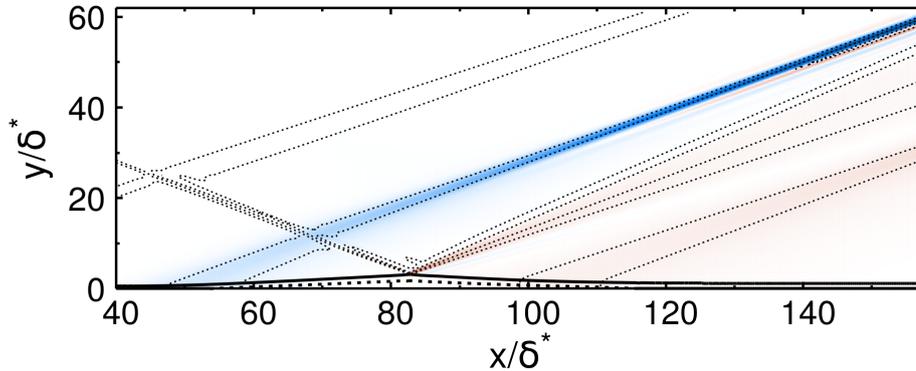


Fig. V.21 Partie réelle de p de la réponse optimale à $St_{L_{sep}} = 1.4 \times 10^{-4}$ à $M = 2.30$. Les traits pointillés fins indiquent les contours de pression de l'écoulement de base.

Une analyse de stabilité globale permet ici d'éclairer les résultats obtenus par calcul de gain optimal. Les écoulements considérés dans ce chapitre étant globalement stables, le spectre de valeurs propres de la matrice jacobienne est inclus dans le demi-plan $\omega_i < 0$ (fig. V.22). Le mode le moins stable (mode I), de taux d'amplification $\omega_i^I < 0$ et de fréquence nulle² $St_{L_{sep}} = 0$, possède une structure identique à la réponse optimale calculée pour $St_{L_{sep}} \rightarrow 0$ (fig. V.20). Pour ces fréquences, la réceptivité linéaire peut être comprise comme la simple résonance de ce mode globalement stable excité par un forçage de fréquence proche. En effet, si les effets de résonance sont dominants devant les effets non-modaux (pseudo-résonance), alors le gain optimal évoluera comme $\mu \sim 1/d$, où $d = |\omega_{forçage} - \omega|$ représente la distance dans le plan complexe entre la fréquence réelle de forçage $\omega_{forçage}$ et la valeur propre complexe ω associée au mode global résonant [5]. Ainsi, à mesure que la fréquence de forçage tend vers zéro, la distance d sera équivalente à la valeur du taux d'amortissement du mode I de fréquence nulle. Ne dépendant plus de la fréquence de forçage dans cette limite, un plateau de gain optimal est observé (fig. V.19). De plus, en suivant les notations employées dans cette section, où la fréquence de forçage est exprimée par le nombre de Strouhal $St_{L_{sep}} = \omega L_{sep}/2\pi u_\infty$, et en prenant soin de normaliser le taux d'amplification ω_i^I du mode I par L_{sep} , l'action de la résonance du mode I sur le gain optimal peut s'exprimer comme

$$\mu = \frac{\mu_{max}}{\sqrt{1 + \left(\frac{St_{L_{sep}}}{\omega_i^I/2\pi}\right)^2}} \quad (\text{V.4.1})$$

où la valeur du gain optimal μ_{max} pour $St_{L_{sep}} \rightarrow 0$ permet de normaliser ce modèle. Cette équation correspond à un filtre passe-bas d'ordre 1 dont la fréquence de coupure est reliée au taux d'amortissement du mode I globalement stable. L'analyse de stabilité globale permet donc de calculer la fréquence de coupure à $\omega_i^I/2\pi = 8.82 \times 10^{-3}$ à $M = 2.30$. La correspondance entre l'équation (V.4.1) et le calcul du gain optimal est très bonne jusqu'à $St_{L_{sep}} \simeq 10^{-2}$ (fig. V.22). La fréquence à partir de laquelle

2. à la précision machine

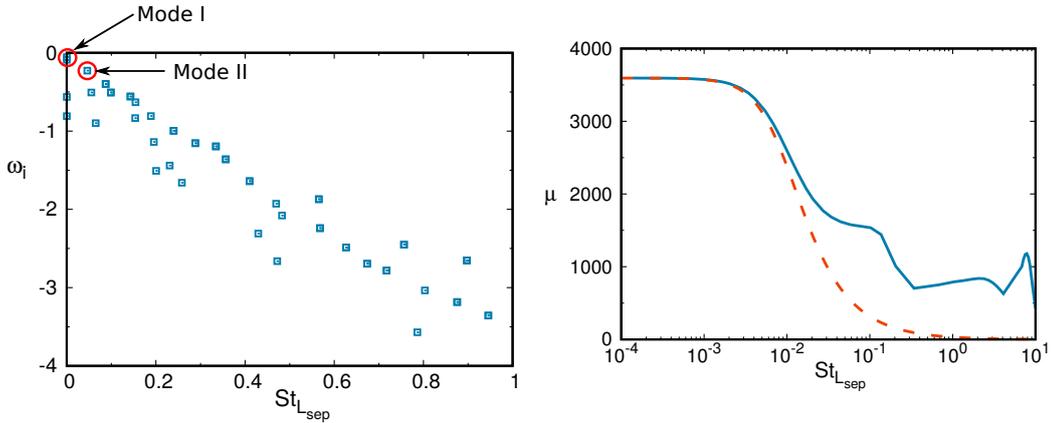


Fig. V.22 Gauche : Spectre de valeurs propres de la matrice jacobienne à $M = 2.30$ (écoulement globalement stable). Les parties réelle et imaginaire, exprimées respectivement selon un nombre de Strouhal et un taux d'amplification, sont basées sur la longueur L_{sep} . Droite : Gain optimal à $M = 2.30$ (bleu). La courbe rouge d'équation (V.4.1) indique l'influence de la résonance du mode I.

le gain optimal chute est notamment très bien détectée et correspond à la croissance du terme $\left(\frac{St_{L_{sep}}}{\omega_i^I/2\pi}\right)^2$ dont la valeur ne devient plus négligeable pour des fréquences de l'ordre de $\omega_i^I/2\pi$. Ainsi, le caractère passe-bas du gain optimal peut être compris par l'unique action de la résonance du mode I, laquelle s'atténue lorsque la fréquence de forçage s'éloigne de la fréquence du mode global (ici, la fréquence nulle). Au delà de $St_{L_{sep}} \simeq 10^{-2}$, la réceptivité de l'écoulement est réalisée par l'excitation de modes globaux supplémentaires. La présence d'un léger pic de la valeur $St_{L_{sep}}\mu^2$ observée à $M = 2.30$ pour $St_{L_{sep}} \simeq 0.14$ semble en partie liée au mode instationnaire le moins stable (mode II, fig. V.22), dont la structure spatiale est voisine de celle de la réponse optimale calculée à cette fréquence (fig. V.23). Cette structure est composée de deux zones de vitesse en opposition de phase le long de la ligne sonique tandis que le forçage optimal associé est localisé au niveau du point de séparation. Dans le cas de la résonance du mode I, le forçage était étendu sur une région similaire à celle occupée par la réponse (fig. V.20).

Il convient cependant d'être prudent dans l'interprétation de ce résultat par rapport au problème de l'instationnarité basse fréquence évoqué dans la section V.1. Expérimentalement, la détection d'un pic autour de $St_{L_{sep}} = 0.03$ [73] est réalisée par PSD pondéré. Dans leur modèle théorique, Toubert et Sandham [111] montrent que ce pic équivaut effectivement à un filtre passe-bas en PSD, dont la fréquence de coupure est $St_{L_{sep}} = 0.03$. Les résultats obtenus dans cette section permettent de retrouver un ordre de grandeur proche mais ne s'accordent pas quantitativement avec cette valeur de référence, la fréquence de coupure étant sous-estimée d'un facteur 4. De plus, un filtre passe-bas calculé par PSD n'implique pas nécessairement la présence d'un pic par PSD pondéré. Afin de comparer les résultats issus d'un calcul de gain optimal à leurs données expérimentales traitées par PSD pondéré, Sartor et al. [72] ont calculé *a posteriori* la grandeur $\omega\mu^2$, c'est-à-dire la valeur du gain optimal multipliée par la fréquence de forçage. Cette approche permet aux auteurs de faire émerger un pic proche de la fréquence de coupure calculée dans cette section, mais sous-estime ainsi le pic

expérimental obtenu à $St_{L_{\text{sep}}} = 0.03$. Dans la présente étude, la présentation du calcul de gain optimal sous la forme $St_{L_{\text{sep}}}\mu^2$ ne montre pas de maximum au niveau de la fréquence de coupure $\omega_i^I/2\pi$ (fig. V.19). Ce pic pourrait néanmoins être dissimulé par le caractère global du calcul de gain optimal, dans lequel l'énergie des perturbations est calculée sur la totalité du domaine numérique, tandis que le pic détecté expérimentalement est obtenu par une mesure locale de la pression au niveau du choc de séparation.

En conclusion, l'approche de réceptivité linéaire présentée permet de retrouver le caractère passe-bas d'une SWBLI laminaire mais ne conduit pas à distinctement mettre en évidence l'instationnarité basse fréquence du choc de séparation à $St_{L_{\text{sep}}} = 0.03$. Ces observations n'excluent donc pas (mais ne prouvent pas) que les effets linéaires puissent jouer un rôle dans ce phénomène à travers la résonance d'un unique mode global. Cependant, comme tend à le montrer l'étude de réceptivité de Sansica et al. [112], l'ingrédient déterminant est probablement d'origine non-linéaire. Le fait que le déplacement du choc de séparation soit d'amplitude finie - jusqu'à $0.6L_{\text{sep}}$ d'après les données expérimentales de Dussauge et al. [73] - semble par ailleurs exclure l'action d'effets purement linéaires.

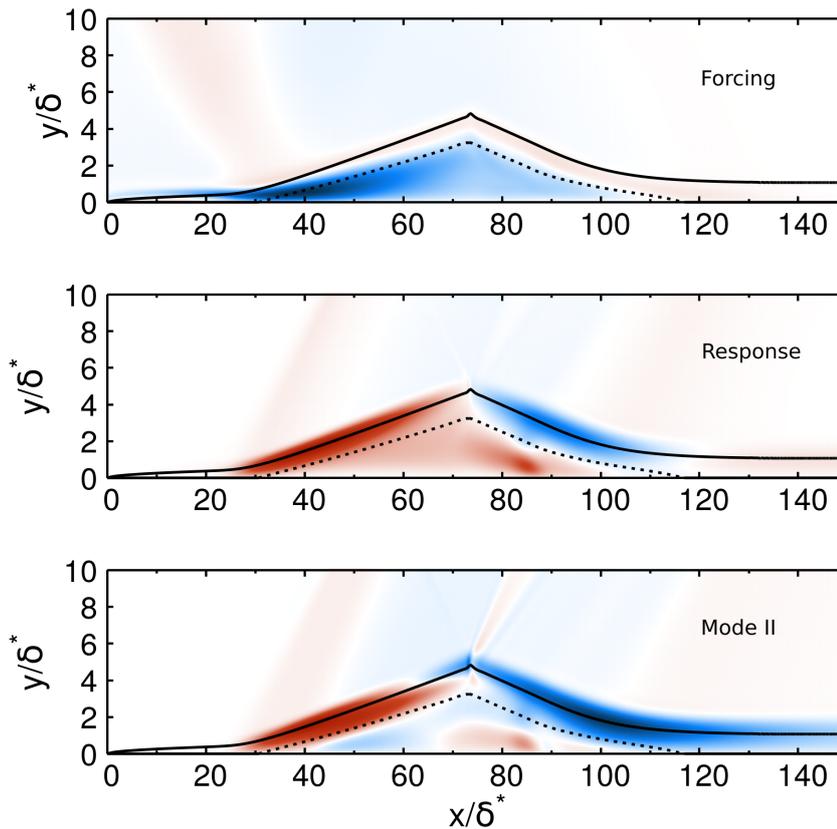


Fig. V.23 Forçage (haut) et réponse (milieu) optimaux à $St_{L_{\text{sep}}} = 1.4 \times 10^{-1}$ et mode global II (bas) de fréquence $St_{L_{\text{sep}}} = 4.6 \times 10^{-2}$ à $M = 2.30$. Voir la légende en figure V.20.

Chapitre VI

Réceptivité globale 3D compressible

Table des matières

VI.1 Couche limite à $M=4.5$	89
VI.1.1 Instabilités en couche limite compressible	89
VI.1.2 Écoulement de base	93
VI.1.3 Résultats	95
VI.2 Réceptivité basse fréquence 3D de la SWBLI	106
VI.2.1 Calcul de gain optimal	106
VI.2.2 Réceptivité aux faibles nombres d'onde	107
VI.2.3 Réceptivité à plus grand nombre d'onde	108

Dans ce chapitre, la méthode de calcul des forçages et réponses optimaux 3D développée dans la section II.3.1 est successivement appliquée aux écoulements de couche limite compressible et de SWBLI. Dans un premier temps, la littérature relative aux trois types d'instabilités développées en couche limite compressible est exposée. Un calcul de gain optimal permettra alors d'identifier trois régions du plan fréquence-nombre d'onde associées à ces instabilités. Les réponses optimales liées à ces régions seront discutées. Dans un second temps, et afin de compléter l'étude 2D réalisée dans la section V.4, la réceptivité aux basses fréquences de la SWBLI sera étudiée. Deux mécanismes distincts seront alors mis en évidence. Le premier est lié à la région de recirculation et semble pouvoir être associé à la résonance d'un mode 3D globalement stable de façon similaire à l'étude 2D. Le second est associé au développement de *streaks* en aval de la région d'interaction.

VI.1 Couche limite à $M=4.5$

VI.1.1 Instabilités en couche limite compressible

Le développement d'une couche limite compressible présente une dynamique variée dont la compréhension est un enjeu essentiel de la transition à la turbulence. Il est possible de distinguer trois classes d'instabilités. D'après la nomenclature de Leslie Mack, contributeur majeur de la théorie de la stabilité compressible depuis les années 1960, une analyse de stabilité locale permet de révéler l'existence de deux modes instables :

le premier mode (considéré comme le pendant compressible des ondes TS) et, à plus haute fréquence, le second mode (largement connu comme le mode de Mack). De plus, la croissance non-modale de *streaks* (ou mode de Klebanoff) peut être observée à très basse fréquence. On donne dans cette section un aperçu des développements théoriques et numériques ainsi que des preuves expérimentales au sujet de ces instabilités.

Les travaux de Lees et Lin [60] ont d'abord apporté plusieurs bases théoriques avec notamment la formulation d'un critère d'instabilité non-visqueuse en régime compressible. Pour une perturbation linéaire dont la vitesse de phase c_φ est subsonique par rapport à l'écoulement libre, c'est-à-dire $1 - 1/M_\infty < c_\varphi < 1 + 1/M_\infty$, une condition suffisante d'instabilité porte sur la coordonnée y_s du point d'inflexion généralisé de l'écoulement de base défini par

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]_{y_s} = 0 \quad (\text{VI.1.1})$$

Si $y_s > y_0$, où y_0 est le point tel que $\bar{u} = 1 - 1/M_\infty$, alors une perturbation subsonique est instable. Or dans le cas d'une plaque adiabatique en particulier, cette condition est observée pour des nombres de Mach de l'ordre ou supérieur à l'unité [122]. Ainsi la couche limite compressible, contrairement au régime incompressible, admet généralement des instabilités non-visqueuses. L'analyse de stabilité menée par Lees [65] jusqu'à $M = 1.3$ fait ainsi apparaître un mode instable, que l'on désigne aujourd'hui par "premier mode" par opposition au "second mode" découvert quelques vingtaines d'années plus tard, et dont les propriétés seront exposées dans le prochain paragraphe. Les courbes neutres calculées par Lees [65] révèlent la présence d'une branche supérieure témoignant de l'action d'un mécanisme visqueux aux nombres de Reynolds finis. En cela, le premier mode est considéré comme l'équivalent compressible des ondes TS. Cependant, le comportement vers les hauts nombres de Reynolds diffère du cas incompressible : la courbe neutre ne se referme pas du fait de l'instabilité non-visqueuse prédite par la condition sur le point d'inflexion généralisé. Par la suite, les travaux de Dunn et Lin [61], dans lesquels une approche 3D est employée, ont découvert que le taux d'amplification du premier mode est maximum pour une perturbation 3D. L'angle que fait le vecteur d'onde de cette perturbation par rapport à la direction de l'écoulement est calculé autour de 50° à $M = 1.6$. Cette valeur évolue en fonction du nombre de Mach et atteint par exemple 60° à $M = 4.5$. Ainsi, le théorème de Squire démontré pour des écoulements incompressibles n'est pas généralisable au régime compressible. Par ailleurs, il est intéressant de noter que le refroidissement de la paroi a un effet stabilisateur sur le premier mode : le nombre de Reynolds critique est repoussé en aval de la plaque [66]. Expérimentalement, le premier mode a été mis en évidence par Laufer et Vrebalovich [16] dans le cas d'une couche limite supersonique à $M = 1.6$ et $M = 2.2$, où le caractère amplificateur sélectif de bruit de l'écoulement a pu être observé.

Plus tard, un mode instable supplémentaire non-visqueux a été découvert par Mack [62]. Son origine peut être comprise en introduisant le nombre de Mach relatif local \widehat{M} qui, pour une perturbation 2D¹, peut s'écrire comme

1. Pour une perturbation 3D, il suffit de considérer la projection de la vitesse du champ de base sur la droite portée par le vecteur d'onde de la perturbation

$$\widehat{M} = \frac{\bar{u} - c_\varphi}{\bar{c}} \quad (\text{VI.1.2})$$

En reformulant les équations compressibles non-visqueuses linéarisées, Mack a alors montré que \widehat{M} jouait un rôle déterminant dans l'analyse de stabilité [64]. En effet, lorsqu'il existe une portion de l'écoulement où $\widehat{M}^2 > 1$, la nature de ces équations est modifiée de telle sorte qu'il existe une infinité de modes instables supplémentaires. Contrairement au premier mode, ces modes supplémentaires n'ont pas d'équivalent en régime incompressible. Le premier de ces nouveaux modes, que l'on nomme alors généralement second mode, est le plus instable. Il devient prédominant par rapport au premier mode lorsque le nombre de Mach augmente [67] et atteint son maximum d'amplification à $M = 4.5$. Plusieurs différences qualitatives séparent le premier du second mode. La plage de fréquences instables du second mode est plus haute que celle du premier. De plus, le second mode est plus instable pour des perturbations 2D quand le premier favorise les ondes obliques. Tandis que le premier mode possède une nature tourbillonnaire, le second mode est de nature acoustique [123]. Enfin, à l'inverse du premier mode, on pourra noter que le second mode tend à se stabiliser par réchauffement de la paroi. En effet, l'augmentation de la température induit une augmentation de la vitesse du son de l'écoulement de base, défavorisant alors l'apparition d'une région de nombre de Mach relatif supersonique. Expérimentalement, cette instabilité a par exemple été observée dans les travaux de Kendall [63] et Stetson et Kimmel [124] en très bon accord avec la plage de fréquence théorique prédite et la prévalence attendue du second mode sur le premier.

Le calcul des courbes neutres des deux modes instables par Özgen et Kırçalı [125] pour différents nombres de Mach et pour des perturbations 2D révèle l'évolution qualitative des mécanismes d'instabilité en jeu (fig. VI.1). À $M = 2$, seule une courbe neutre associée au premier mode est présente. Comme pour la couche limite de Blasius, une branche supérieure tendant à refermer la courbe neutre témoigne de l'action d'un mécanisme visqueux. Puis à $M = 3$, la courbe neutre se déforme au niveau des hautes fréquences et pour des nombres de Reynolds supérieurs au seuil d'instabilité. Cette déformation révèle l'expression grandissante du mécanisme inflexionnel, non-visqueux, favorisée par l'éloignement du point d'inflexion généralisé par rapport à la paroi conséquemment à la montée en nombre de Mach [122]. Une branche supérieure reste néanmoins observable aux faibles nombres de Reynolds et il existe toujours un maximum local du taux d'amplification à un nombre de Reynolds fini. En somme, il y a compétition entre les mécanismes visqueux et non-visqueux. Finalement, à $M = 4$, la courbe neutre liée au second mode instable apparaît pour des nombres d'onde approximativement 7 fois supérieurs à ceux du premier mode (de façon similaire, une analyse de stabilité spatiale conduirait à une séparation des plages de fréquences instables [64]). À présent, aucune des deux courbes neutres ne se referme et le taux d'amplification temporelle croît de manière monotone avec le nombre de Reynolds : les mécanismes non-visqueux apparaissent dominants pour ce nombre de Mach.

La troisième classe d'instabilité en jeu dans une couche limite supersonique est associée à la croissance non-modale de *streaks*. Initialement, cette instabilité a été découverte en régime incompressible par Ellingsen et Palm [36]. Pour des perturbations 3D de nombre d'onde longitudinale α tendant vers zéro, leur travail a montré

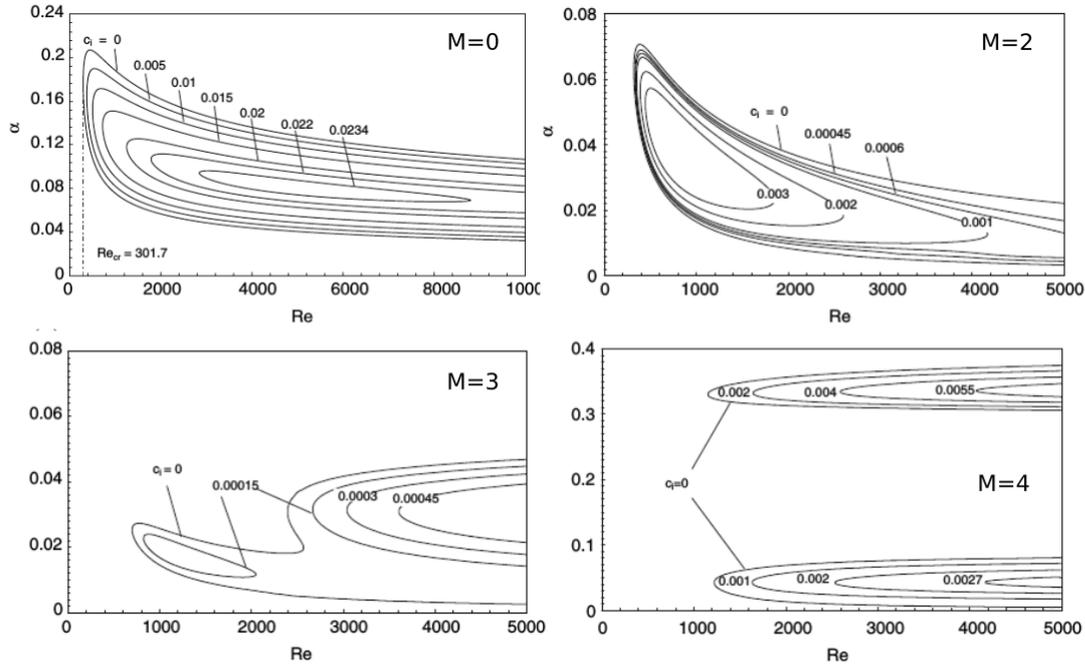


Fig. VI.1 Courbes neutres de la couche limite compressible à différents nombres de Mach. Résultats de Özgen et Kircalı [125] obtenus par analyse de stabilité locale temporelle.

l'existence d'une solution possédant une croissance algébrique. Le mécanisme physique sous-jacent sera par la suite nommé *lift-up*. Il consiste en un transport de la quantité de mouvement longitudinale de l'écoulement de base par les perturbations dans la direction normale. Cet effet conduit à la formation de *streaks*, régions de l'espace étendues dans la direction l'écoulement et périodiques dans la direction transverse et dans lesquelles la vitesse longitudinale des perturbations est grande devant les autres composantes. Leur observation expérimentale avait été réalisée par Klebanoff [126] avant leur théorisation, si bien qu'ils portent également l'appellation de modes de Klebanoff. Les travaux expérimentaux de Matsubara et Alfredsson [34] proposent une visualisation de ces structures par injection de fumée dans l'écoulement. Numériquement, l'analyse de cette instabilité ne peut pas être envisagée par voie modale. La formalisation d'un cadre d'étude basé sur l'optimisation de l'énergie des perturbations a alors permis à Butler et Farrell [28] de mettre en évidence la croissance non-modale de ces *streaks*. Par cette méthode, la perturbation initiale optimale a été révélée comme étant composée de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs, en accord avec la physique du mécanisme *lift-up*. Plus tard, l'exploration de la croissance transitoire temporelle d'une couche limite compressible [68] a permis d'observer que ce mécanisme s'étendait de la même façon aux écoulements compressibles, un pic de masse volumique apparaissant également au dessus du pic de vitesse. Toujours pour une couche limite compressible, la croissance transitoire dans un cadre spatial a été étudiée pour un écoulement parallèle par Tumin et Reshotko [90]. L'optimisation porte alors sur le ratio d'énergie d'une perturbation à une abscisse donnée, que l'on peut considérer comme la condition initiale optimale en espace, et l'énergie de cette perturbation à une position en aval (§ III.3.2). Une formu-

lation non-parallèle a été proposée par Zuccher et al. [127]. Néanmoins, cette approche repose sur les équations de couche limite et requiert de présupposer les échelles caractéristiques des *streaks*. Ce n'est donc pas une méthode universelle dans le sens où elle ne peut *a priori* pas être employée pour d'autres écoulements de base ou d'autres types d'instabilité. Récemment, Paredes et al. [128] a introduit la méthode PSE, déjà utilisée en analyse de stabilité modale [129], dans le cadre spatial de croissance optimale de Tumin et Reshotko [90]. Cette approche permet ainsi d'appréhender les écoulements faiblement non-parallèles de façon plus générale.

Il n'existe actuellement pas d'approche globale permettant le calcul de perturbations optimales 3D pour les écoulements compressibles dans la littérature. La méthode de forçage optimale 3D développée dans la section II.3 offre ainsi un cadre d'analyse nouveau pour l'étude d'instabilités convectives en écoulement supersonique sans nécessiter d'hypothèses restrictives sur le parallélisme de l'écoulement de base. La nature globale de la méthode assure en outre la prise en compte des effets de non-normalité *streamwise*. Cette section est dédiée à l'application de cette méthode sur une couche limite supersonique pour laquelle on cherchera à mettre en évidence les trois classes d'instabilités convectives présentées précédemment.

VI.1.2 Écoulement de base

Dans un premier temps, on se propose de valider les résultats de la résolution directe des équations de Navier-Stokes (§ II.1.1) pour une couche limite à $M = 4$, paramètre pour lequel on pourra mettre en regard la solution obtenue avec des données issues de la littérature. Dans un second temps, l'écoulement de base considéré dans le calcul du gain optimal, à un nombre Mach voisin ($M = 4.5$), sera présenté.

La validation de la couche limite supersonique adiabatique peut être montrée en retrouvant le caractère auto-similaire de cet écoulement. Les équations de Navier-Stokes compressibles (II.1.4) sont résolues à $M = 4$ et jusqu'à un nombre de Reynolds de plaque $Re_x = 2 \times 10^6$. À partir de la solution 2D obtenue, les profils de vitesse et de température sont tracés pour différentes abscisses de plaque en fonction de la variable $\eta = y\sqrt{u_\infty/\nu x}$ (fig. VI.2). L'auto-similarité est effectivement retrouvée, les solutions coïncidant en un même profil. Par ailleurs, ce profil est en excellent accord avec le résultat de Özgen et Kırcalı [125] obtenu par résolution des équations de couche limite auto-similaires.

Dans la suite, on considérera le développement d'une couche limite à $M = 4.5$ au dessus d'une plaque adiabatique. Cette configuration est classiquement étudiée lors d'analyses de stabilité et de réceptivité car c'est à ce nombre de Mach que le second mode atteint son taux de croissance maximal. Les paramètres physiques et numériques sont regroupés dans le tableau VI.1. Le nombre de Reynolds de plaque Re_x est fixé à 2.10^6 en sortie de domaine. Dans les travaux d'analyse locale de stabilité compressible, il est courant d'utiliser le nombre de Reynolds Re_ℓ basé sur la longueur de Blasius $\ell = \sqrt{\nu x/u_\infty}$. Ce nombre est en fait la racine carré du nombre de Reynolds de plaque : $Re_\ell = \sqrt{Re_x}$. Le choix de travailler avec Re_ℓ est naturel lorsque le calcul du champ de base est basé sur la résolution des équations de couche limite auto-similaires. Dans la suite, on considérera plutôt le nombre de Reynolds Re_{δ^*} basé sur l'épaisseur de déplacement compressible $\delta^*(x)$. Cette échelle de longueur fait émerger des longueurs

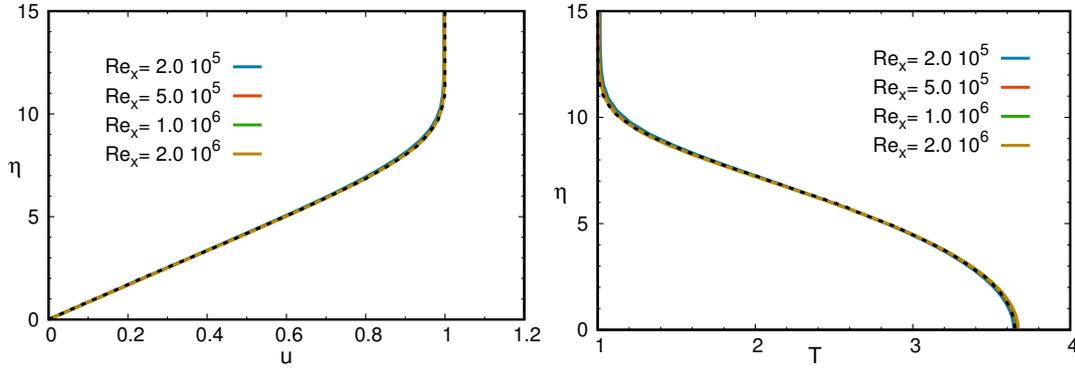


Fig. VI.2 Profils de vitesse (gauche) et de température (droite) en fonction de la variable auto-similaire η pour différents nombres Reynolds de plaque issus d'un unique calcul CFD 2D. La courbe noire pointillée est issue de Özgen et Kircah [125]

$$M = 4.5$$

$$Re_x^{(out)} = 2 \times 10^6 \iff Re_\ell^{(out)} = 1414 \iff Re_{\delta^*}^{(out)} = 11770$$

$$Re_x^{(opt)} = 1.75 \times 10^6 \iff Re_\ell^{(opt)} = 1323 \iff Re_{\delta^*}^{opt} = Re_{\delta_0^*} = 11000$$

$$x/\delta_0^* \in [0, 182] \text{ et } x_{opt}/\delta_0^* = 159$$

$$y/\delta_0^* \in [0, 45] \text{ (CFD)}$$

$$y/\delta_0^* \in [0, 9] \text{ (champ de base)}$$

Plaque Adiabatique

Table VI.1 Paramètres physiques et numériques de l'écoulement de base de couche limite supersonique

adimensionnées pertinentes de l'ordre de l'unité. La figure VI.4 établit la correspondance entre Re_ℓ et Re_{δ^*} , la linéarité de cette relation témoignant une nouvelle fois de l'auto-similarité de l'écoulement. La convergence en maillage est atteinte pour une grille de calcul de 1600×180 , pour laquelle le champ de Mach local est présenté sur la figure VI.3.

Formulons deux remarques sur le champ de base utilisé lors du calcul du gain optimal. Le domaine sur lequel est intégrée l'énergie des réponses optimales dans le calcul du gain (II.2.4) est restreint afin d'assurer l'indépendance des champs de forçage et de réponse avec la frontière aval du domaine. L'optimisation de la réponse sera ainsi réalisée pour $x < x_{opt}$ où x_{opt} est l'abscisse correspondante à $Re_{\delta^*} = 11000$. Par ailleurs, l'épaisseur de déplacement de couche limite δ^* à cette abscisse sera l'échelle de longueur de référence apparaissant notamment dans l'adimensionnement du nombre d'onde β et de la fréquence de forçage ω . On la notera δ_0^* . Enfin, le domaine numérique du champ de base est réduit à $Ly = 9\delta_0^*$, dont la valeur est inférieure au domaine de calcul CFD et vis-à-vis de laquelle l'indépendance des résultats sera vérifiée dans la section VI.1.3.5.

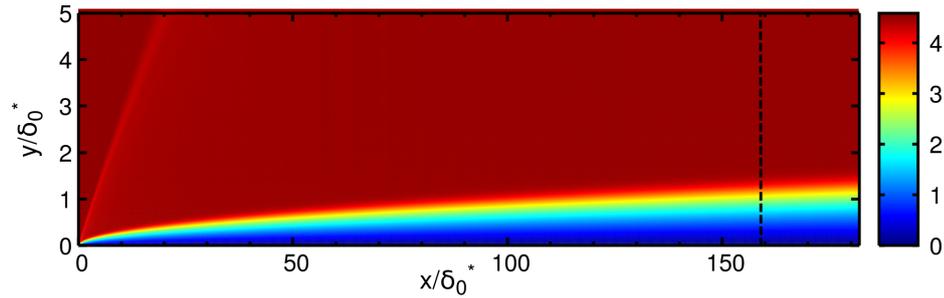


Fig. VI.3 Solution CFD du champ de Mach local pour un Mach amont $M = 4.5$. La ligne pointillée repère la fin du domaine sur lequel est intégrée l'énergie de la réponse optimale. Le domaine est tronqué en hauteur afin de faciliter la visualisation.

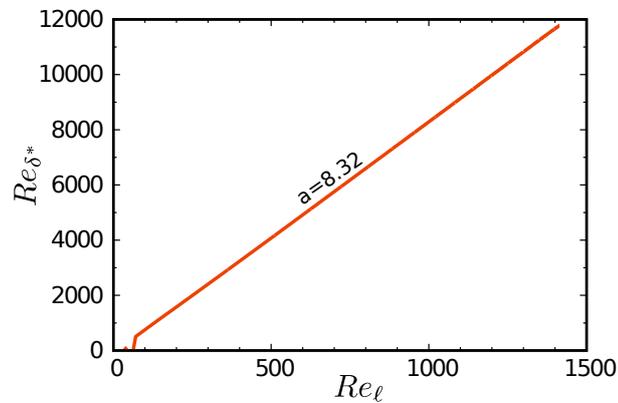


Fig. VI.4 Correspondance entre les nombres de Reynolds construits à partir de la longueur de Blasius $Re_\ell = \sqrt{Re_x}$ et de l'épaisseur de déplacement compressible Re_{δ^*} . La pente a de la droite correspond à la valeur de l'épaisseur de déplacement adimensionnée par la longueur de Blasius.

VI.1.3 Résultats

VI.1.3.1 Gain optimal

Les résultats du calcul de gain optimal en fonction de la fréquence de forçage ω et du nombre d'onde transverse β sont présentés sur la figure VI.5. Il est possible de distinguer trois régions du plan ω - β dans lesquelles la valeur du gain admet un maximum local et où l'écoulement est ainsi particulièrement réceptif à un forçage externe. Les résultats des fréquences et nombres d'onde optimaux associés à ces trois régions sont consignés dans le tableau VI.2. On observe tout d'abord que la valeur du gain ne dépend plus de la fréquence de forçage lorsque celle-ci tend vers zéro : pour β fixé, un plateau de gain est observé. Pour ces basse fréquences, il existe un nombre d'onde β_{opt} associé à un pic de gain dont la réponse est liée au développement de *streaks* (§ VI.1.3.2). Aux fréquences moyennes, un pic de gain apparaît pour un nombre d'onde inférieur de moitié à celui des *streaks*. Cette région est liée au premier mode instable de couche limite compressible. Les perturbations les plus amplifiées sont donc 3D (onde oblique), en conformité avec les prédictions des analyses locales. Enfin, à plus haute fréquence, un maximum de gain est détecté pour des perturbations 2D, associé au second mode instable de couche limite. La valeur de ce maximum est inférieure à celle

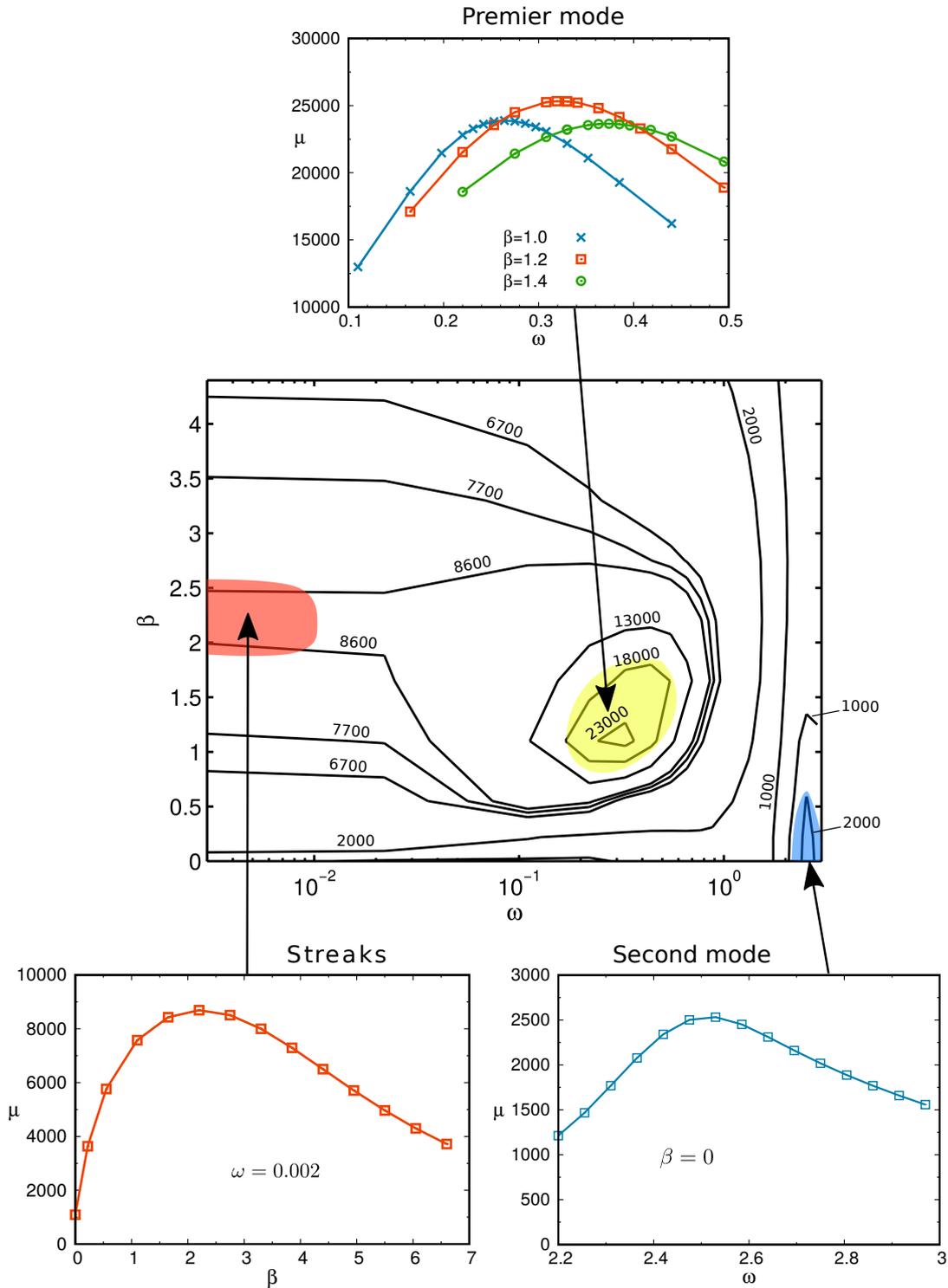


Fig. VI.5 Gain optimal en perturbations 3D pour la couche limite supersonique à $M = 4.5$. Au centre, contour du gain dans le plan ω - β . Trois régions réceptives sont détectées : elles correspondent aux instabilités linéaires compressibles connues.

Instabilité	ω_{opt}	β_{opt}
<i>Streaks</i>	$\rightarrow 0$	2.2
Premier mode	0.32	1.2
Second mode	2.5	0

Table VI.2 Fréquence de forçage et nombre d'onde transverse optimaux pour chaque instabilité

observée pour le premier mode, ce qu'il ne faudrait pas interpréter comme un résultat contraire à l'analyse de stabilité locale de [64] prédisant un coefficient d'amplification deux fois supérieur pour le second mode. En effet, la valeur du gain optimal ne rend pas nécessairement compte du taux d'amplification locale. C'est une quantité globale dans le sens où l'énergie de la réponse est intégrée en espace. Sa valeur est donc non seulement liée à la valeur du taux d'amplification mais également à la portion de domaine sur lequel cette amplification est effective (ce qui correspond à la largeur de la courbe neutre à une fréquence donnée). Or, pour les fréquences et les nombres de Reynolds considérés, la branche inférieure de la courbe neutre du second mode est rencontrée à une abscisse plus grande que celle du premier mode [130]. La localisation des maximums de forçage et d'énergie confirmera ce comportement (§ VI.1.3.3). Ainsi, le fait que le second mode croisse sur des distances inférieures peut expliquer que l'énergie contenue dans le domaine de calcul, et par conséquent la valeur du gain optimal, soit finalement inférieure à celle du premier mode.

VI.1.3.2 Champs de forçage et réponse optimaux

Les structures spatiales des forçage et réponse optimaux associés à chacune des trois régions réceptives sont étudiées dans cette section. À basse fréquence (fig. VI.6), le mécanisme de *lift-up* est retrouvé : le forçage optimal est composé de vortex contra-rotatifs longitudinaux initiant le transport vertical de quantité de mouvement de l'écoulement de base et générant ainsi une réponse formée de *streaks* de grande vitesse u' . Les autres composantes de vitesse sont négligeables devant celle-ci. Les structures de forçage et de réponse sont étendues dans la direction de l'écoulement en accord avec la théorie locale calculée à partir sur un nombre d'onde longitudinal nul [36]. Finalement, ces observations sont similaires à celles issues de l'étude globale des perturbations optimales en couche limite incompressible [58] : le mécanisme du *lift-up* se généralise très bien en écoulement compressible. Toutefois, les *streaks* compressibles se distinguent au niveau des variables thermodynamiques avec la présence d'un pic de masse volumique localisé au dessus du pic de vitesse.

À moyenne fréquence, le forçage et la réponse apparaissent comme des ondes obliques (fig. VI.7). En calculant le nombre d'onde α selon la méthode employée dans la section (§ IV), l'angle Ψ entre le vecteur d'onde et la direction de l'écoulement peut être déduit par

$$\Psi = \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \quad (\text{VI.1.3})$$

Un angle $\Psi = 72^\circ$ est ainsi observé pour la réponse associée au gain maximum.

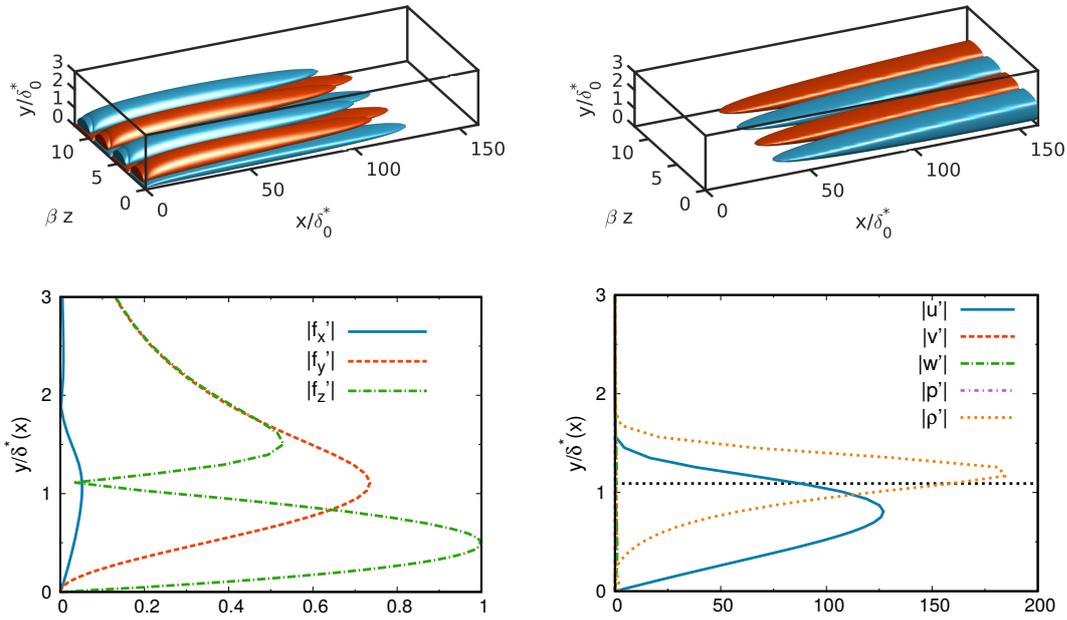


Fig. VI.6 Forçage et réponse optimaux à $\omega = 0.002$, $\beta = 2.2$. Haut : Iso-surfaces à 10% de la composante f_z du forçage optimal (gauche) et \tilde{u} de la réponse optimale (droite). Bas : Profils normaux des forçage (gauche) et réponse (droite) optimaux pris à l'abscisse correspondante respectivement au maximum de la norme du forçage et de la réponse intégré en y . Les composantes du forçage sont normalisées par le maximum de f_z . L'ordonnée y est mise à l'échelle par la valeur locale de l'épaisseur de déplacement $\delta^*(x)$. La ligne pointillée noire repère le point d'inflexion généralisé dans l'écoulement de base.

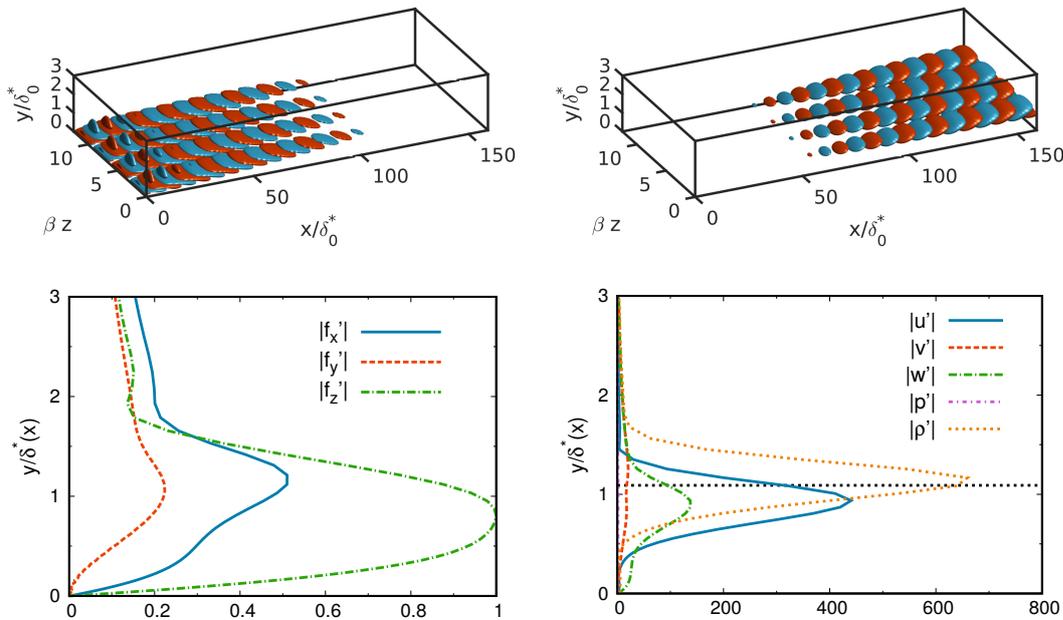


Fig. VI.7 Forçage et réponse optimaux à $\omega = 0.32$, $\beta = 1.2$. (Légende en figure VI.6)

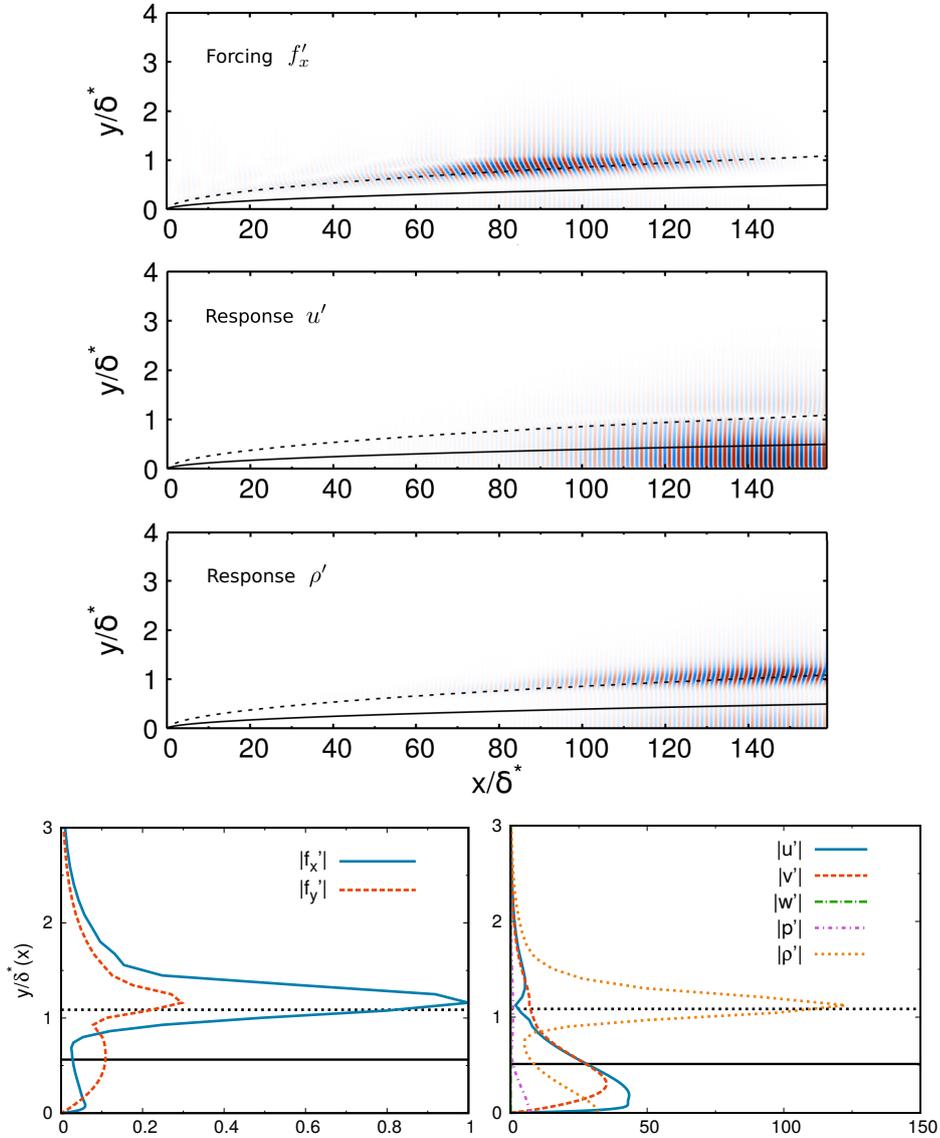


Fig. VI.8 Forçage et réponse optimaux à $\omega = 2.5$, $\beta = 0$. Contour de la composante \tilde{f}_x du forçage optimal (haut) et \tilde{u} de la réponse optimale (milieu). La ligne pointillée noire est l'épaisseur de déplacement de couche limite. Bas : Profils des forçage (gauche) et réponse (droite) optimaux pris à l'abscisse correspondante respectivement au maximum de la norme du forçage et de la réponse intégré en y . Les composantes du forçage sont normalisées par le maximum de \tilde{f}_x . La ligne pointillée noire repère le point d'inflexion généralisé dans l'écoulement de base. La ligne de nombre de Mach relatif supersonique $\tilde{M} = -1$ est indiquée en trait noir continu. La région supersonique est localisée entre cette ligne et la paroi.

Cette valeur peut être comparée à l'angle de 60° produisant le plus grand taux d'amplification par un calcul de stabilité locale [64]. Ces valeurs sont en accord raisonnable, sachant que le caractère global du gain optimal ne favorise pas uniquement les propriétés locales des instabilités. L'observation des champs 3D montre que le forçage tend à se localiser en amont tandis que la réponse se développe en aval. De plus, les iso-surfaces du forçage sont inclinées vers l'amont de l'écoulement tandis que celles de la réponse le sont vers l'aval, témoignant de l'action du mécanisme non-modal d'Orr. Les profils normaux montrent que la composante transverse du forçage est la plus efficace et génère essentiellement une vitesse longitudinale dans la réponse. En comparaison avec les ondes TS incompressibles, cette vitesse est localisée à une distance plus éloignée de la paroi, proche du point d'inflexion généralisé. Cela tend à montrer qu'un mécanisme non-visqueux est en action. Enfin, l'allure générale des profils obtenus est semblable à celle obtenue par Erlebacher et Hussaini [131].

Les forçage et réponse optimaux 2D à haute fréquence sont représentés en figure VI.8. Le nombre de Mach relatif \widehat{M} peut être calculé à partir de la vitesse de phase de la réponse optimale. Une région supersonique où $\widehat{M} < -1$ est détectée en proche paroi. Cette observation rejoint ainsi les considérations théoriques de Mack [64] prédisant l'existence de modes supplémentaires instables sous cette condition. L'analyse des profils révèle que toutes les quantités physiques associées à la réponse atteignent un maximum dans cette région supersonique. La vitesse décroît notamment rapidement à sa sortie. Le forçage optimal, composé essentiellement de sa composante longitudinale, agit peu dans la région supersonique. Il se localise plutôt proche du point d'inflexion généralisé où la réponse réagit également par un pic de masse volumique et l'annulation de la vitesse u' . En somme, deux mécanismes distincts semblent cohabiter. L'un est lié à la région supersonique de l'écoulement, où l'on peut observer une croissance des variables hydrodynamiques et thermodynamiques, et semble ainsi lié au mode de Mack. L'autre est lié au point d'inflexion généralisé et est uniquement associé aux variables thermodynamiques. Des pics similaires de masse volumique, localisés proche du point d'inflexion généralisé, sont également présents dans les profils de *streaks* (fig. VI.6) et de premier mode (fig. VI.7). Cette propriété, qui transparait ainsi dans chacune des perturbations compressibles étudiées, peut également être observée dans les travaux de Hanifi et al. [68] et de Erlebacher et Hussaini [131].

VI.1.3.3 Propriétés

Les profils de densité d'énergie de Chu des réponses optimales associées à chaque maximum local de gain optimal sont tracés en figure (fig. VI.9). La densité de la norme de forçage est également représentée. Le maximum de forçage associé aux ondes TS est localisé beaucoup plus amont que celui du mode de Mack. Pour les fréquences considérées, cette observation est qualitativement en accord avec la localisation des branches inférieures des courbes neutres obtenues par Malik et Balakumar [130] pour les premier et second modes. Par ailleurs, la croissance énergétique des réponses est effective jusqu'en sortie de domaine pour les ondes TS tandis que celle du second mode s'achève légèrement avant. Ainsi, ces résultats tendent à retrouver que la largeur de la courbe neutre associée aux ondes TS est plus grande que celle du second mode : les distances sur lesquelles ces ondes sont convectivement instables seraient donc différentes, ce qui

permet d'éclairer les différences de valeurs de gain optimal observées entre ces deux instabilités (§ VI.1.3.1). L'analyse de ces profils pour les *streaks* est nécessairement différente du fait du caractère purement non-modal de cette instabilité. On peut toutefois observer que le profil de forçage est spatialement plus étendu que pour les premier et second modes. Cette observation peut être reliée à la non-normalité *component-type* à l'origine du développement des *streaks* (§ I.3). Cette non-normalité n'est pas liée à une séparation spatiale des forçage et réponse comme dans le cas de la non-normalité *streamwise*, mais à une distinction entre leurs composantes. Il a en effet été montré que les composantes dominantes du forçage apparaissent dans les directions y et z quand celle de la réponse est dans la direction x (§ VI.6). Dès lors, il peut être plus efficace que le forçage soutienne localement le développement de la réponse. Cette observation peut être mise en parallèle avec la croissance non-modale du premier mode au delà de la courbe neutre dans la couche limite à $M = 2.2$ étudiée dans la section IV.2.2. Cette croissance avait été imputée au mécanisme d'Orr, lié lui aussi à la non-normalité *component-type* de l'écoulement.

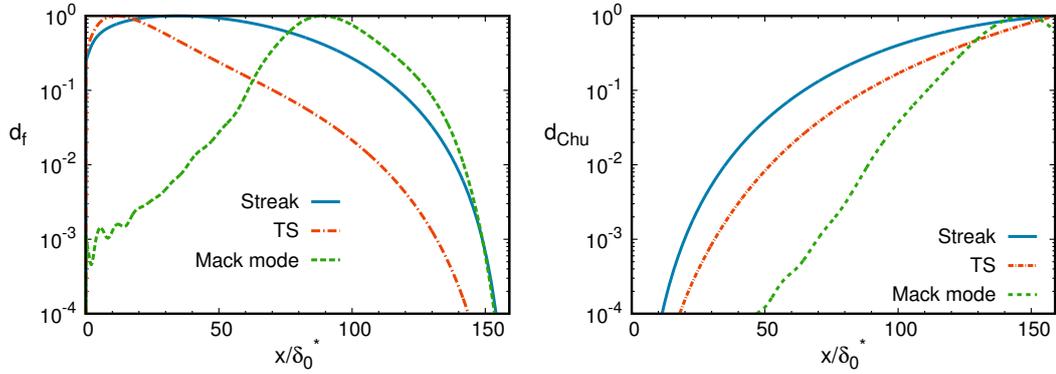


Fig. VI.9 Profil de la densité de forçage (gauche) et d'énergie de Chu (droite) des forçages et réponses optimaux associés aux maximums de gain optimal (tableau VI.2).

Afin de caractériser l'évolution spatiale des profils de réponses, on repère la hauteur $y_m^{Chu}(x)$ correspondant au maximum de densité d'énergie de Chu en chaque abscisse (fig. VI.10). Cette hauteur est normalisée par l'épaisseur déplacement locale $\delta^*(x)$ de l'écoulement de base dont la croissance suit $\delta^* \sim \sqrt{x}$ (§ VI.1.2). On observe ainsi que la croissance énergétique des réponses hérite de l'évolution spatiale de l'écoulement de base. De plus, $y_m^{Chu}(x)$ est localisé proche du point d'inflexion généralisé dont le profil varie également selon \sqrt{x} . Ces observations dissimulent cependant la croissance du second mode de Mack au sein de la région de nombre de Mach relatif supersonique. Dans cette zone, la densité d'énergie possède un second maximum local dont la valeur est inférieure à celle du maximum observé proche du point d'inflexion généralisé. Le tracé du profil $y_m^K(x)$ (fig. VI.10), lié au maximum de densité d'énergie cinétique, permet de rendre compte de la croissance énergétique dans cette région car la croissance des composantes de vitesse y est localisée (fig. VI.8). Si dans un premier temps la croissance de $y_m^K(x)$ est similaire à celle du point d'inflexion généralisé, son comportement est modifié à partir d'une abscisse que l'on notera x_1 et dont la valeur est proche de $x_1 \simeq 83\delta_0^*$. Pour $x > x_1$, $y_m^K(x)$ est alors localisé dans la région supersonique où sa variation ne suit plus \sqrt{x} et devient même légèrement décroissante. Par ailleurs, on peut observer

que x_1 est proche de l'abscisse associée au maximum de forçage (fig. VI.9), que l'on peut supposer proche de la branche inférieure de la courbe neutre (la forte croissance à partir de cette abscisse du paramètre d'amplification locale γ , calculé dans la section suivante, permet notamment d'envisager cette hypothèse). Aussi, le changement de comportement de $y_m^K(x)$ semble témoigner du seuil de l'instabilité convective du mode de Mack. Notons enfin que la valeur de $y_m^K(x)$ associée aux *streaks* et au premier mode (figure non présentée) suit le même comportement que $y_m^{Chu}(x) \sim \sqrt{x}$, mais à des valeurs inférieures dans la mesure où le pic de masse volumique observé proche du point d'inflexion n'est plus pris en compte.

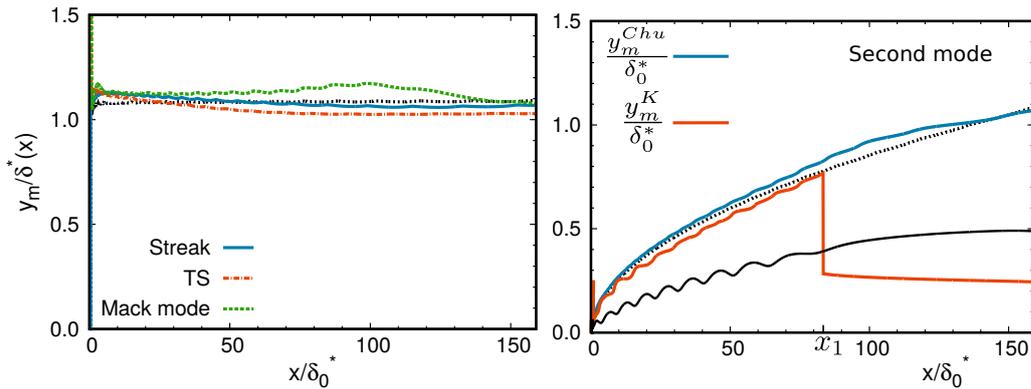


Fig. VI.10 Gauche : Profil de la hauteur y_m^{Chu} (voir texte) pour chaque classe de réponse optimale, normalisé par l'épaisseur de déplacement locale $\delta^*(x)$. Droite : Profil de la hauteur y_m^{Chu} et y_m^K associé au second mode, normalisé par l'épaisseur de déplacement δ_0^* en $x = x_{opt}$. Le profil du point d'inflexion généralisé et la ligne $\hat{M} = -1$ sont indiqués respectivement en ligne noire pointillée et continue

VI.1.3.4 Bilan d'énergie cinétique

L'analyse du second mode peut être approfondie avec l'observation des termes physiques issus d'un bilan d'énergie cinétique de la réponse optimale (§ IV.2). Une telle analyse permet seulement d'éclairer les mécanismes de croissance des composantes de vitesses des perturbations. Le développement du mode de Mack étant effectivement associé à une croissance d'énergie cinétique, cette approche demeure pertinente. La croissance des variables thermodynamiques n'est en revanche pas incluse dans cette analyse, qui ne pourra donc pas rendre compte de la présence du pic de masse volumique au niveau du point d'inflexion généralisé (fig. VI.8).

Le terme de production incompressible \mathcal{P}_{inc} est dominant devant les autres termes sources (fig. VI.11). Le champ associé est localisé dans la région d'amplification du mode de Mack, de la paroi jusqu'au point d'inflexion généralisé, et apparaît donc comme le mécanisme principal de la croissance des perturbations de vitesse (fig. VI.12). Ce terme est lié au tenseur de Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ ainsi qu'au cisaillement $\overline{\rho} \partial \overline{u}_i / \partial x_j$, et est à l'origine de l'extraction d'énergie de l'écoulement de base des instabilités hydrodynamiques [4]. Ainsi, bien que \mathcal{P}_{inc} inclue certains effets de compressibilité de l'écoulement de base à travers $\overline{\rho}$, son implication majeure dans le mécanisme d'instabilité du mode de Mack peut s'avérer surprenante dans la mesure où l'interprétation de celle-ci est généralement basée sur des considérations acoustiques [123]. L'action du terme de

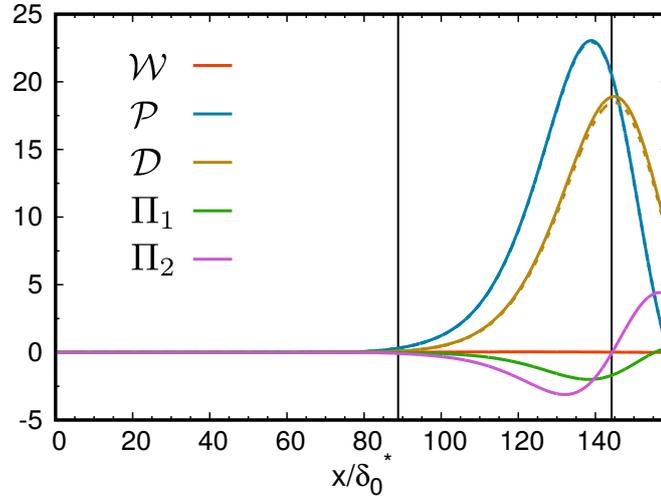


Fig. VI.11 Profil des termes issus du bilan d'énergie cinétique (IV.2.4) intégrés dans la direction y jusqu'à y_{max} . Les lignes pointillées représentent les termes incompressibles dans la production et la dissipation totale respectivement définies par $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{inc} + \mathcal{P}_{comp}$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{inc} + \mathcal{D}_{comp}$. Ces lignes pointillées sont presque confondues avec les courbes continues, indiquant la prédominance des termes incompressibles.

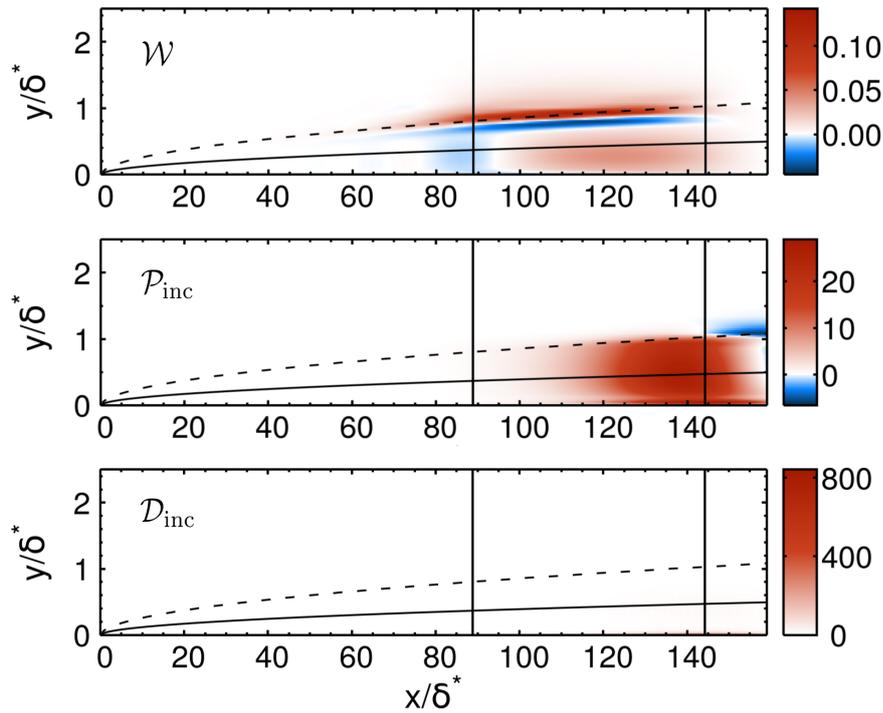


Fig. VI.12 Termes issus du bilan d'énergie cinétique (IV.2.4) tracés pour la réponse optimale 2D associée au second mode ($\omega = 2.5$). Les lignes verticales indiquent les maximums des densités de forçage et d'énergie cinétique. Le profil du point d'inflexion généralisé est tracé en ligne pointillée. Le champ \mathcal{D}_{inc} est concentré proche de la paroi.

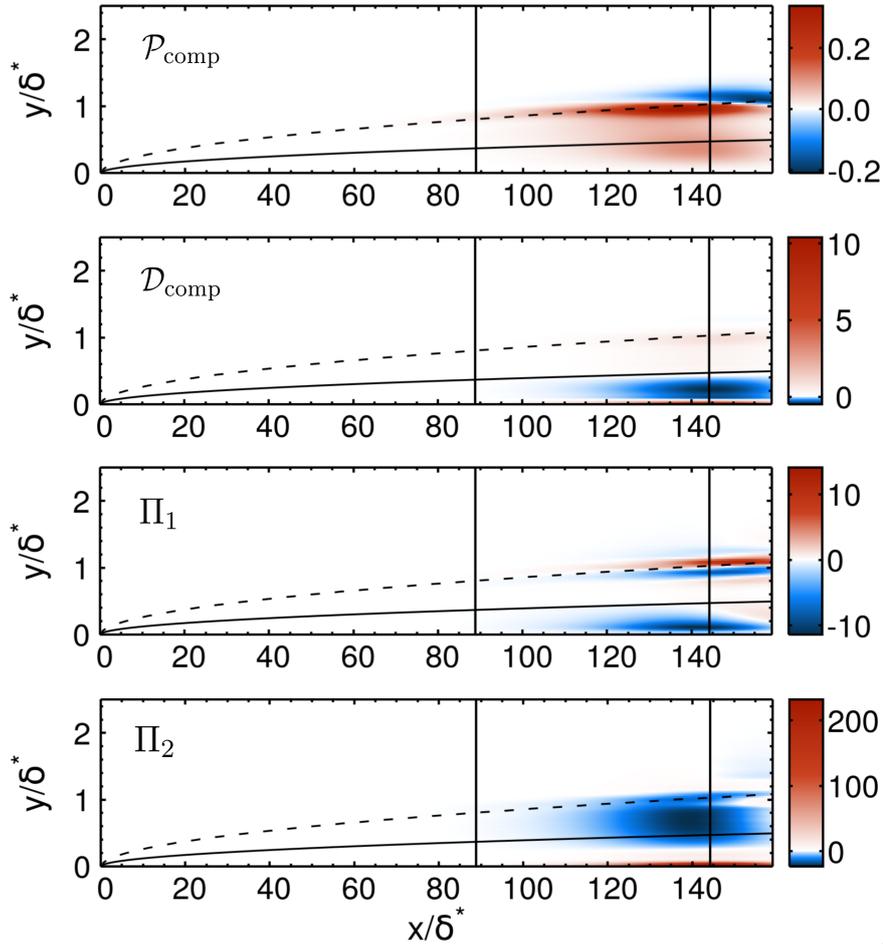


Fig. VI.13 Voir la légende de la figure VI.12

production compressible \mathcal{P}_{comp} , lié notamment à ρ' , aurait pu être attendue dans la croissance de cette instabilité. Or ce terme est négligeable devant \mathcal{P}_{inc} , et son effet apparaît principalement le long du point d'inflexion généralisé (fig. VI.13). Les termes de pression Π_1 et Π_2 ont un effet globalement stabilisant lorsque l'on considère ces quantités intégrées dans la direction y (fig. VI.12). Cependant, des valeurs élevées de Π_2 peuvent être atteintes localement proche de la paroi (fig. VI.13) semblant ainsi montrer son implication dans la croissance du second mode dans la région de nombre de Mach relatif supersonique. Le caractère compressible de l'instabilité pourrait ainsi s'exprimer à travers ce terme dans lequel figure un couplage entre les perturbations de pression et de vitesse. En effet, ce terme n'est pas directement un terme de production, au sens où il ne participe à l'extraction d'énergie de l'écoulement de base mais redistribue l'énergie au sein des perturbations. Or, en régime compressible, d'autres mécanismes de production que ceux apparaissant dans le bilan d'énergie cinétique peuvent apparaître en lien avec les variables thermodynamiques. Ainsi, Π_2 pourrait témoigner de la redistribution de cette production d'énergie en énergie cinétique. La formulation d'un bilan d'énergie de Chu permettrait d'éclairer ces résultats.

Les effets de dissipation \mathcal{D}_{inc} , localisés proche de la paroi, croissent avec le développement des perturbations jusqu'à contre-balancer les mécanismes de production (fig. VI.11). La quantité \mathcal{D}_{comp} est par ailleurs négligeable. Enfin, le travail des forces extérieures est principalement injecté au niveau du point d'inflexion généralisé mais demeure finalement très inférieur aux sources intrinsèques.

Le paramètre d'amplification locale γ (§ IV.2.2) croît nettement à partir d'une abscisse proche de celle correspondant au maximum de la densité de forçage, pour ensuite atteindre des valeurs de l'ordre de la centaine (fig. VI.11). Les mécanismes intrinsèques sont par conséquent prédominants dans la zone de croissance des perturbations. Par ailleurs, les sources extrinsèques admettent un maximum dans cette zone mais demeurent du même ordre de grandeur (fig. VI.14). Par conséquent, la croissance de γ est causée par l'augmentation des sources intrinsèques (plutôt que par une chute des sources extrinsèques), et semble ainsi signaler l'apparition de l'instabilité du mode de Mack (au sens de l'analyse locale modale).

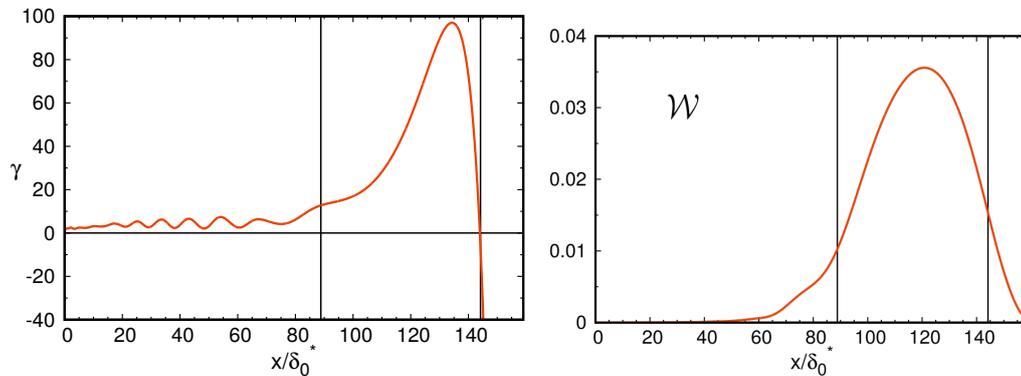


Fig. VI.14 Gauche : Paramètre d'amplification locale. Droite : Travail des forces extérieures (source extrinsèque) intégré dans la direction y jusqu'à y_{max} . Cette figure est une mise à l'échelle de la figure VI.11.

VI.1.3.5 Convergence en maillage

À basse fréquence, le calcul du gain optimal relatif au développement des *streaks* est convergé en maillage pour une grille de calcul de 1600×81 (maillage A) (fig. VI.15). L'indépendance du calcul vis-à-vis de la hauteur du domaine de calcul est également assurée pour $L_y = 9\delta_0^*$, où δ_0^* est l'épaisseur de déplacement de couche limite à l'abscisse x_{opt} . L'utilisation de ce maillage se révèle également suffisante pour le calcul du premier mode. Cependant, à plus hautes fréquences, le calcul du second mode requiert une résolution plus fine dans la direction x , les échelles de longueur impliquées dans cette direction étant plus petites. Ainsi, une grille de calcul de 2400×81 (maillage C) a été utilisée pour les fréquences $\omega > 0.9$, la continuité du calcul à cette fréquence étant par ailleurs vérifiée avec le maillage précédent. La hauteur de domaine numérique $L_y = 9\delta_0^*$ s'avère également suffisante pour le calcul du premier et second mode.

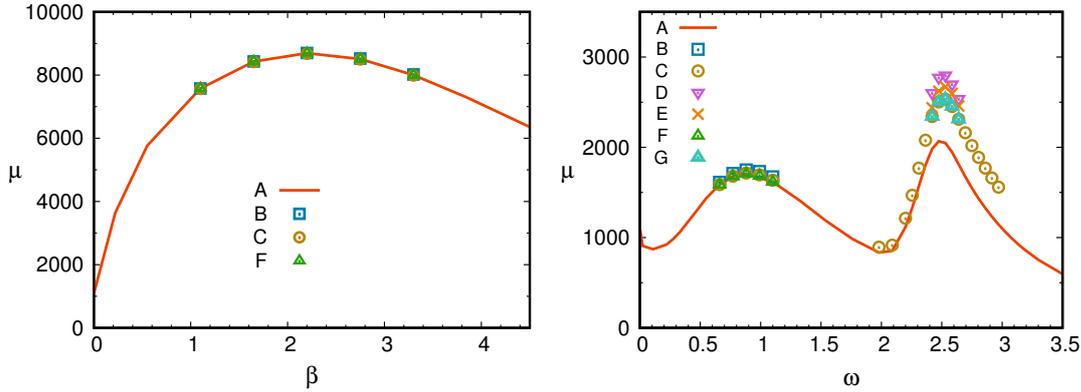


Fig. VI.15 Convergence en maillage du calcul de gain optimal. Gauche : Gain optimal en fonction de β à $\omega = 2 \times 10^{-4}$. Droite : Gain optimal en fonction de la fréquence de forçage à $\beta = 0$. Nomenclature des maillages : cf. tableau VI.3)

Maillage	N_x	N_y	L_y
A	1600	81	9
B	1600	108	9
C	2400	81	9
D	2400	108	9
E	3200	81	9
F	1600	106	18
G	2400	106	18

Table VI.3 Nomenclature des grilles de calcul

VI.2 Réceptivité basse fréquence 3D de la SWBLI

VI.2.1 Calcul de gain optimal

Cette section s'inscrit dans la continuité de l'étude de réceptivité présentée dans le chapitre V pour des perturbations 2D. En considérant l'écoulement de base de la SWBLI à $M = 2.20$ étudié précédemment, le calcul de forçage optimal est à présent mené pour des perturbations 3D. Seul le cas des basses fréquences ($St_{L_{sep}} < 1$) est ici abordé, pour lesquelles l'influence du nombre d'onde β des perturbations sera étudiée. Les instabilités convectives 3D liées à la couche de mélange et à la couche limite ne sont donc pas considérées dans ce travail.

La gain optimal est calculé pour des nombres d'onde $\beta \in [0, 3]$ adimensionnés par l'épaisseur de déplacement δ^* à l'abscisse à laquelle le choc non-visqueux atteint la plaque (§ V.2.2). Comme dans le cas des perturbations 2D, un plateau de gain est observé lorsque $St_{L_{sep}} \rightarrow 0$ (fig. VI.16). La valeur du gain associée à ce plateau dépend fortement du nombre d'onde et admet par ailleurs deux maximums pour $\beta_1 \simeq 0.2$ et $\beta_2 \simeq 2$. De plus, la fréquence à partir de laquelle le gain optimal chute est dépendante de β : pour les faibles nombres d'onde autour de β_1 , cette fréquence est observée pour $St_{L_{sep}}$ compris entre 10^{-3} et 10^{-2} (fig. VI.17) tandis qu'elle s'établit autour de $St_{L_{sep}} \simeq 10^{-1}$ pour les nombres d'onde de l'ordre de β_2 .

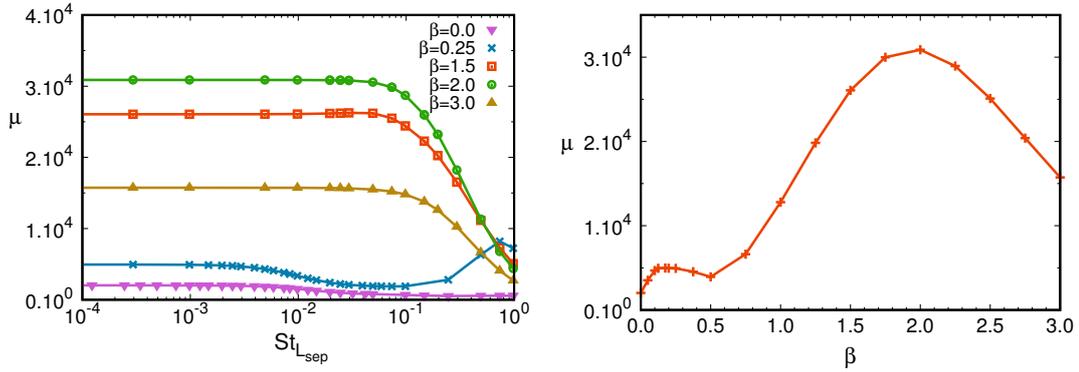


Fig. VI.16 Gauche : Gain optimal à $M = 2.20$ pour différents nombres d'onde β en fonction de la fréquence de forçage exprimé par un nombre de Strouhal basé sur la longueur de recirculation. Droite : Gain optimal à $M = 2.20$ en fonction du nombre d'onde β . La fréquence de forçage est fixée à $St_{L_{sep}} = 3 \times 10^{-4}$.

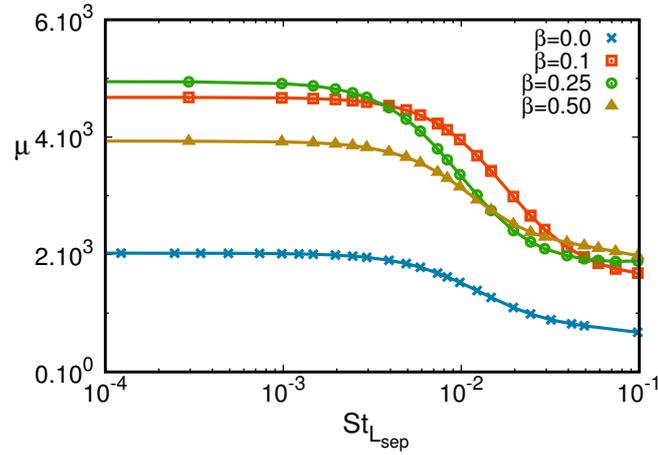


Fig. VI.17 Gain optimal à $M = 2.20$ pour différents nombres d'onde β en fonction de la fréquence de forçage exprimé par un nombre de Strouhal basé sur la longueur de recirculation.

VI.2.2 Réceptivité aux faibles nombres d'onde

La réceptivité aux nombres d'onde proches de $\beta_1 \simeq 0.2$, dont la longueur d'onde $\lambda_1 \simeq 2L_{sep}$ est de l'ordre de la longueur de recirculation, est discutée. Pour $St_{L_{sep}} \rightarrow 0$, la réponse optimale associée à β_1 est localisée dans la région de recirculation (fig. VI.18) et la composante de vitesse transverse w' est dominante devant les autres composantes. Par ailleurs, la structure de ce champ de vitesse est similaire à celle observée dans les modes globaux tridimensionnelles calculés par Robinet [69] pour une SWBLI laminaire. Cette observation, ajoutée à l'existence d'un plateau de gain pour $St_{L_{sep}} \rightarrow 0$, conduit à conjecturer que la réceptivité aux faibles nombres d'onde suit le même mécanisme d'excitation d'un mode global stationnaire que celui présenté pour des perturbations 2D (§ V.4), le cas 2D étant du reste un cas limite. Cette interprétation devra néanmoins être vérifiée par un calcul de stabilité globale 3D afin de relier la fréquence de coupure à la valeur propre du mode global excité (V.4.1). Ce volet d'étude n'a pour le moment pas été abordée dans le présent travail.

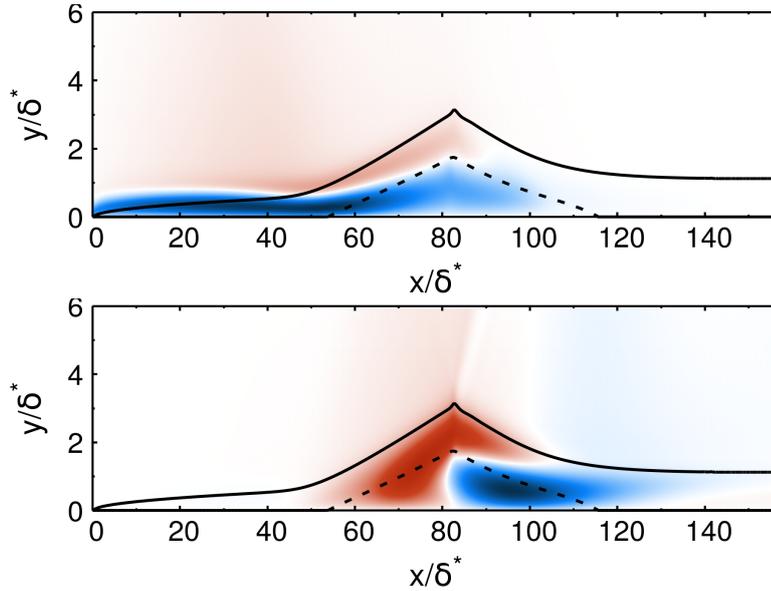


Fig. VI.18 Partie réelle de la composante f'_z du forçage optimal (haut) et de w' de la réponse optimale (bas) pour $\beta = 0.18$ et $St_{L_{sep}} = 3 \times 10^{-4}$. La ligne sonique de l'écoulement de base $\overline{M} = 1$ et la bulle de recirculation sont respectivement indiqués en ligne noire continue et pointillée

Le résultat du calcul de gain optimal permet toutefois d'envisager deux résultats de stabilité globale. Tout d'abord, il semble que l'écoulement de base considéré soit bien globalement stable vis-à-vis de perturbations 3D. En effet, s'il existait un nombre d'onde β associé à un mode globalement instable, alors la continuité du taux d'amplification vis à vis du nombre d'onde impliquerait l'existence de modes neutres. Or, dans un tel cas, le calcul du gain optimal ne serait plus défini du fait de la présence de termes $1/(\lambda - \omega)$ dans la matrice résolvante² [59]. Le calcul du gain optimal n'ayant pas révélé de comportement divergeant (fig. VI.17), les modes 3D semblent ainsi globalement stables.

De plus, en supposant que la réceptivité soit effectivement réalisée par l'excitation d'un mode global stable comme dans le cas de perturbations 2D, alors l'estimation de la fréquence de coupure associée à chaque nombre d'onde permet d'appréhender qualitativement le taux d'atténuation des modes globaux 3D. Le plateau de gain chutant à des fréquences inférieures pour $\beta = 0.25$ que pour $\beta = 0$ et $\beta = 0.5$ (fig. VI.17), la fréquence de coupure semble donc admettre un minimum entre $\beta = 0$ et $\beta = 0.5$. D'après l'équation (V.4.1), un tel minimum serait associé au mode global le moins stable qui, d'après ce raisonnement, serait donc tridimensionnel. Un tel résultat serait en accord avec les observations de Robinet [69].

VI.2.3 Réceptivité à plus grand nombre d'onde

Le maximum de gain optimal, calculé pour $\beta_2 \simeq 2$, est associé à un mécanisme de réceptivité distinct de l'excitation de mode global présenté précédemment. Le forçage optimal se présente sous forme de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs et génère

2. Avec λ et ω respectivement les valeurs propres des modes globaux et la fréquence de forçage

une réponse optimale composée *streaks* (fig. VI.19). Les profils sont similaires à ceux observés dans la couche limite à $M = 4.5$ (fig. VI.6), le pic de masse volumique étant toutefois plus modéré du fait de la valeur inférieure du nombre de Mach. C'est donc le mécanisme non-modal du *lift-up*, associé à la couche limite, qui favorise la réceptivité basse fréquence à ces nombres d'ondes. La longueur d'onde de ces perturbations est d'ailleurs de l'ordre de l'échelle de couche limite ($\lambda_2 \simeq 3\delta^*$), et le nombre d'onde optimal β_2 est très proche de celui observé pour la couche limite $M = 4.5$ (§ VI.1.3.1). Dans le cas de la SWBLI, les champs de forçage et de réponse sont distinctement séparés, respectivement dans la couche limite en amont et en aval de la région de recirculation (fig. VI.20). Pour ces nombres d'ondes, et contrairement aux faibles β , la bulle de recirculation ne réagit donc pas aux basses fréquences. À première vue, cela semble exclure une quelconque implication de ces perturbations dans l'instationnarité basse fréquence du système choc de séparation/bulle de recirculation, la fréquence de coupure associée à la chute du plateau de gain pouvant par ailleurs être estimée à $St_{L_{sep}} \simeq 0.1 > 0.03$. Néanmoins, l'analyse de la croissance de *streaks* peut s'avérer pertinente si l'on considère son rôle potentiel dans la transition à la turbulence du système dans la mesure où, d'après Sandham et al. [113], une transition turbulente en aval de la zone de recirculation est susceptible de fournir le forçage basse fréquence impliqué dans l'instationnarité à $St_{L_{sep}} = 0.03$.

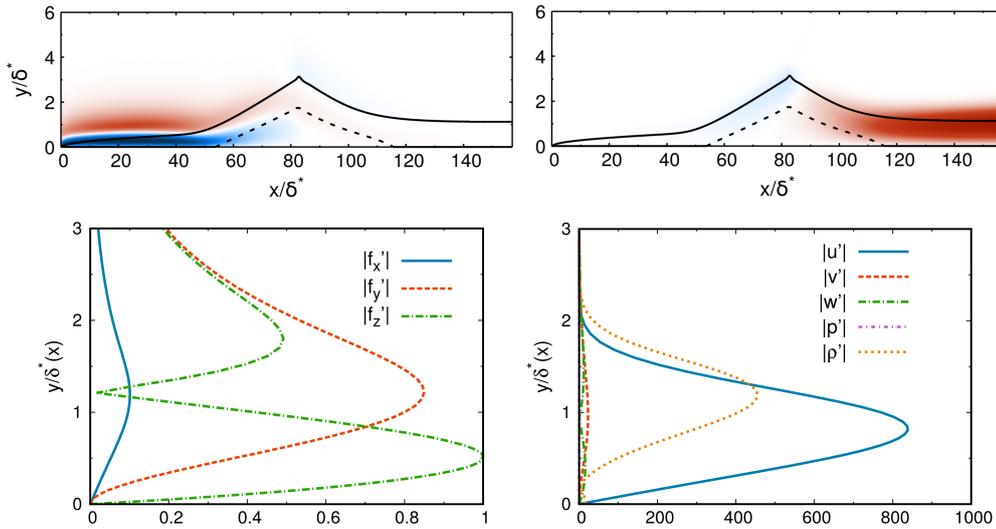


Fig. VI.19 Partie réelle de la composante f'_z du forçage optimal (haut) et de u' de la réponse optimale (bas) pour $\beta = 2$ et $St_{L_{sep}} = 3 \times 10^{-4}$.

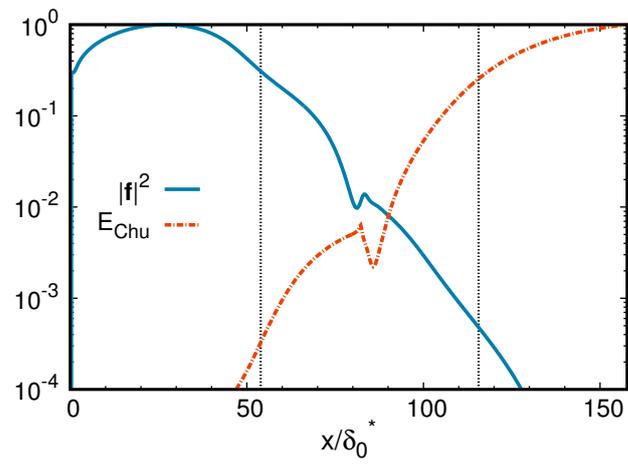


Fig. VI.20 Profil des densités de forçage et d'énergie de Chu à $\beta = 2$ et $St_{L_{sep}} = 3 \times 10^{-4}$. Les lignes verticales pointillées délimitent la bulle de recirculation.

Conclusion

La dynamique linéaire d'écoulements compressibles pariétaux a été étudiée par une approche de gain optimal, dont le calcul est associé à la matrice résolvante globale. Cette méthode permet d'appréhender la croissance non-modale de perturbations et est ainsi particulièrement adaptée à l'analyse d'écoulements amplificateurs sélectifs de bruit, dans lesquels de forts effets de non-normalité à la fois *streamwise* et *component-type* sont observés. Le calcul du gain optimal permet alors de mettre en évidence les plages de fréquences auxquelles les perturbations sont amplifiées. L'observation des champs de forçages optimaux associés indique par ailleurs les régions réceptives de l'écoulement tandis que la croissance spatiale des perturbations, advectées vers l'aval, est observée à travers les champs de réponses optimales.

Le calcul de la matrice résolvante globale requiert d'explicitier la matrice jacobienne des équations de Navier-Stokes compressibles. La méthode numérique développée par Mettot [59] pour le calcul de perturbations globales 2D, basée sur la "discrétisation-puis-linéarisation" des équations non-linéaires, a été adoptée. Afin d'autoriser l'analyse à la fois des instabilités 3D favorisées en régime compressible et de la croissance non-modale 3D de *streaks* en écoulements pariétaux, une extension de cette approche a été proposée pour le calcul de perturbations globales 3D dans les écoulements de base 2D. Cette méthode s'appuie sur la décomposition des perturbations en modes de Fourier dans la direction transverse à l'écoulement. L'adaptation de la méthode 2D initiale n'est alors pas immédiate car la direction de Fourier nécessite un traitement spécifique, si bien qu'une approche basée sur la décomposition de la matrice jacobienne a été développée. Son implémentation numérique à partir du code de calcul 2D apparaît finalement aisée et son utilisation demeure abordable en termes de ressources numériques. Il a par ailleurs été remarqué qu'un code de calcul de stabilité locale temporelle pouvait être développé à partir de la méthode de calcul globale en traitant la direction de l'écoulement comme homogène et en y appliquant le principe de décomposition de la matrice jacobienne. La validation des méthodes numériques a été réalisée sur la couche limite de Blasius puis sur une couche limite compressible.

Les résultats issus du calcul de résolvant global ont été mis en relation avec les courbes neutres d'écoulements amplificateurs de bruit. Comme observé par Sipp et Marquet [57], la localisation des maximums de densité de forçage et d'énergie cinétique associés aux forçages et réponses optimaux globaux permet, en couche limite incompressible, de retrouver les branches inférieures et supérieures de la courbe neutre de l'écoulement. Ce résultat n'a cependant pas été observé en couche limite compressible à $M = 2.2$. Dans ce cas, le forçage optimal se répartit de façon plus étendue dans l'écoulement et soutient localement la croissance de la réponse au delà même

de la branche supérieure. Afin de comprendre le rôle des mécanismes intrinsèques et extrinsèques liés au développement de ces perturbations, le paramètre d'amplification locale défini par Sipp et Marquet [57] a été étendu aux écoulements compressibles. Sa construction est basée sur la formulation préalable d'un bilan d'énergie cinétique permettant de distinguer les différentes sources impliquées dans la croissance des perturbations. Ainsi, il a été observé que le développement des perturbations au delà de la branche supérieure était lié à l'action d'un mécanisme intrinsèque, nécessairement non-modal, et activé par le soutien local du champ de forçage. En effet, en l'absence de forçage dans cette région, un calcul complémentaire a montré la décroissance spatiale des perturbations dans cette région. Ce calcul, mené en restreignant le champ de forçage en amont de l'écoulement, a par ailleurs révélé un excellent accord entre la localisation du maximum de densité d'énergie de Chu et la branche supérieure expérimentale de Laufer et Vrebalovich [16]. La localisation du minimum de cette densité d'énergie s'établit proche de la branche inférieure, mais un écart est observé.

Par la suite, la dynamique linéaire 2D d'un écoulement d'interaction choc/couche limite laminaire a été considérée par une étude paramétrique en nombre de Mach d'un calcul de réponse optimale. Différents écoulements de base ont ainsi été calculés entre $M = 2$ et $M = 2.3$. Sous l'effet du choc incident, une zone de recirculation apparaît à partir de $M = 2.05$, la longueur de séparation associée croissant alors avec le nombre de Mach. Pour chaque écoulement considéré, un pic de gain optimal est détecté autour de $St_{\delta^*} \simeq 0.2 - 0.3$ et correspond principalement au développement d'ondes de Tollmien-Schlichting dans la couche limite en aval de la région d'interaction. Pour les écoulements présentant une longueur de séparation suffisante ($L_{\text{sep}} \gtrsim 40\delta^*$), un second pic de gain optimal est observé proche de $St_{L_{\text{sep}}} \simeq 8$. Les réponses optimales associées se développent au dessus de la zone de recirculation, le long du point d'inflexion généralisé, et correspondent à une instabilité de couche de mélange de Kelvin-Helmholtz. La croissance de ces perturbations est par ailleurs responsable de l'émission d'ondes acoustiques dans l'écoulement libre en aval de l'onde de détente de l'écoulement de base, en accord avec Guiho et al. [114]. Enfin, un calcul de réceptivité aux basses fréquences a permis de mettre en évidence le caractère passe-bas de cet écoulement [111]. Ce comportement a pu être relié à la résonance du mode global le moins stable obtenu par un calcul de stabilité, dont le taux d'atténuation fixe la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas d'ordre 1 permettant de modéliser la courbe de gain optimal. La structure de ce mode est localisée autour de la zone de recirculation et est associée à une perturbation dans le choc de séparation. Ces résultats laissent entrevoir que les mécanismes de réceptivité linéaire pourrait favoriser l'instationnarité basse fréquence connue dans ce système [73], bien qu'ils ne soient certainement pas décisifs [112].

La méthode de calcul de perturbations globales 3D a été utilisée pour étudier la réceptivité d'une couche limite à $M = 4.5$. Le gain optimal ainsi calculé présente des maximums locaux dans trois régions de l'espace fréquence-nombre d'onde transverse. Aux basses fréquences, les réponses optimales sont associées au développement de *streaks*. La structure du forçage optimal, composée de rouleaux longitudinaux, indique l'action du mécanisme de *lift-up* résultant de la non-normalité *component-wise* de l'écoulement. À moyenne fréquence, le premier mode de couche limite apparaît comme une onde oblique, en accord avec Mack [64], et sa croissance semble tirer profit du mécanisme d'Orr. À haute fréquence, le mode de Mack bidimensionnel a été identifié et

mis en relation avec l'existence d'une région de nombre de Mach relatif supersonique en proche paroi, dans laquelle les perturbations hydrodynamiques se développent. L'observation des termes sources du bilan d'énergie cinétique associé à cette perturbation a révélé la prédominance du terme de production lié au tenseur de Reynolds, responsable du développement des instabilités incompressibles. Le terme de production purement compressible, lié à $\rho'u'_i$, apparaît négligeable devant lui. Enfin, le terme de diffusion par pression atteint des valeurs élevées en proche paroi mais son action globale semble stabilisante.

Finalement, l'étude de réceptivité aux basses fréquences de l'interaction choc/couche limite a été complétée par un calcul de perturbations 3D. Pour les perturbations dont la longueur d'onde transverse est au moins de l'ordre de la longueur de recirculation, la résonance d'un mode globalement stable similaire au cas 2D semble être observée. Cette conjecture doit cependant être vérifiée par une analyse de stabilité globale à partir de laquelle le taux d'atténuation du mode le moins stable permettra de comparer le modèle de filtre passe-bas avec les résultats de gain optimal. Lorsque la longueur d'onde transverse des perturbations est de l'ordre de l'échelle de couche limite, la réponse optimale est composée de streaks en croissance en aval de la région d'interaction. Aucun lien direct avec l'instationnarité basse fréquence observée expérimentalement [73] ne semble donc exister à ces échelles.

Perspectives

Dans ce manuscrit, les champs de forçage ont été restreints aux composantes de quantités de mouvement. Ce cadre permet de simplifier l'interprétation du forçage optimal obtenu et permet d'utiliser directement la norme L_2 du vecteur de forçage dans la définition du gain optimal, dans la mesure où celle-ci se présente comme une somme de grandeurs physiques de même dimension. Il serait néanmoins pertinent d'inclure les termes de forçage liés aux équations de continuité et d'énergie dans le calcul du gain optimal. La définition d'une norme de forçage homogène devra alors être formulée par l'intermédiaire d'une matrice définie positive. Ainsi, cette approche permettrait d'étudier des forçages de différentes natures. Il peut être noté que, dans le cas des écoulements compressibles, le forçage de l'équation de continuité ne s'apparente pas nécessairement à une injection de masse et pourra rendre compte d'un forçage acoustique. L'orthonormalité de la base des forçages optimaux (au sens des vecteurs singuliers à droite de la matrice résolvante globale [57]) permettrait d'étudier la réponse d'un écoulement soumis à un forçage imposé *a priori*. Un nombre limité de ces vecteurs, et de leur réponse associée, semble par ailleurs nécessaire pour décrire la dynamique linéaire d'un écoulement, constituant ainsi un modèle réduit du système (voir Dergham et al. [132] pour l'étude d'un forçage stochastique en régime incompressible). Dès lors, il serait possible de distinguer la dynamique linéaire des perturbations soumises à différents types de champs de forçage (acoustiques, fluctuations de vitesses ou de température présentes dans la turbulence ambiante) par projection de ces champs sur une base réduite de forçages optimaux. Dans une optique de compréhension fondamentale des mécanismes de réceptivité, une telle approche permettrait par exemple d'analyser l'influence de l'angle d'impact d'une onde acoustique sur le développement de perturbations ainsi forcées [130]. Par ailleurs, la distinction entre les rôles joués par

différents types de forçage sur la croissance des perturbations, pour lesquelles les mécanismes non-modaux et 3D seraient ici inclus, offrirait un outil pertinent dans l'étude des routes de transition à la turbulence. Enfin, l'approche de modèle réduit permettrait d'envisager des calculs de quantification des incertitudes d'écoulements réalistes. Les paramètres incertains en entrée du modèle pourraient alors porter sur la nature des champs de forçage et, dans une optique différente ou complémentaire, sur les propriétés de l'écoulement de base (nombre de Mach, angle d'attaque d'un profil d'aile, rugosité à la paroi).

Par ailleurs, le développement d'une méthode d'analyse de Floquet permettrait d'appréhender la stabilité d'écoulements périodiques résultant typiquement d'une première bifurcation de Hopf et constituant ainsi un outil d'étude des instabilités secondaires. Par exemple, le cycle limite apparaissant dans l'écoulement autour d'un cylindre suite à l'instabilité globale à $Re = 47$ se déstabilise à son tour à $Re = 188$ selon un mode oblique [97]. La méthode de calcul de la matrice jacobienne de perturbations 3D présentée dans ce manuscrit pourrait être étendue à l'analyse de ces instabilités. Néanmoins, il doit être noté que cette approche n'est probablement pas la plus efficace. En effet, l'analyse de Floquet requerrait une évaluation successive de la matrice jacobienne afin de construire l'application de Poincaré [97]. Or, la méthode de calcul de la matrice jacobienne par "discrétisation-puis-linéarisation" est plus coûteuse en temps de calcul que la méthode "linéarisation-puis-discrétisation". Cette différence de performance apparaît négligeable lorsqu'une unique évaluation de cette matrice est demandée (stabilité globale, calcul de résolvant) mais risque de devenir importante dans le cas d'une analyse de Floquet. Si elle n'est pas la plus efficace, cette approche demeure tout de même abordable dans la mesure où, par exemple, une trentaine d'itérations ont été nécessaires à Barkley et Henderson [97].

Enfin, le calcul de la matrice hessienne par différences finies proposé par Mettot [59] mériterait d'être étendue aux perturbations 3D. La méthode de décomposition des flux (§ II.3.1) semble pouvoir s'appliquer d'une manière similaire au calcul de la matrice jacobienne par différences finies présenté dans ce manuscrit. Ainsi, cette approche ouvrirait la voie au contrôle passif de perturbations 3D dans les écoulements oscillateurs ou amplificateurs de bruit compressibles. Cette approche paraît spécialement pertinente en régime compressible où les perturbations 3D peuvent être les plus dangereuses (premier mode de couche limite). Le contrôle relatif au développement de *streaks* compressibles pourrait également être étudié. Dans l'optique du contrôle des écoulements industriels, l'adaptation de la méthode aux maillages non-structurés, permettant d'aborder des géométries complexes, serait également à développer. Enfin, l'accès à la matrice hessienne rendrait possible une analyse faiblement non linéaire. Une telle approche pourrait s'avérer intéressante pour l'étude de l'instationnarité basse fréquence de l'interaction choc/couche limite où les effets linéaires seuls paraissent insuffisants pour décrire le phénomène. Dans ce cas, une approche faiblement non linéaire dans laquelle l'amplitude du forçage serait un petit paramètre [44] offrirait un cadre d'étude pertinent étant donné par ailleurs que ce système ne paraît pas gouverné par une dynamique intrinsèque d'écoulement oscillateur, mais semble plutôt réagir à l'action d'un forçage extérieur [111] et s'avérer sensible à son amplitude [112].

Annexe A

Norme de Chu en variables conservatives

Selon George et Sujith [133], l'énergie dite de Chu [134] est la norme énergétique la plus adaptée à l'étude des perturbations linéaires en écoulements compressibles. Elle a également été réintroduite dans d'autres travaux [68, 90, 128] afin d'aborder la croissance non-modale dans une couche limite compressible par analyse locale. Elle contient l'énergie cinétique des perturbations ainsi qu'une énergie liée aux variables thermodynamiques ρ' et T' . En cela, l'énergie de Chu est nécessairement supérieure ou égale à l'énergie cinétique. On donne dans cette annexe la formulation de la matrice norme Q_{Chu} en variables conservatives telle que $E_{Chu} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{q}'^* Q_{Chu} \mathbf{q}'$, dérivée à partir de l'expression

$$E_{Chu} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \left(\bar{\rho} |\mathbf{u}'|^2 + \frac{\bar{T}}{\bar{\rho} \gamma M^2} (\rho')^2 + \frac{\bar{\rho}}{(\gamma - 1) \gamma M^2 \bar{T}} (T')^2 \right) d\Omega \quad (\text{A.0.1})$$

On rappelle que l'adimensionnement utilisé est celui présenté dans la section II.1.1, duquel les perturbations héritent. Les variables primitives peuvent être traduites en variables conservatives selon les relations suivantes

$$u'_i = \frac{1}{\bar{\rho}} ((\rho u_i)' - \bar{u}_i \rho') \quad (\text{A.0.2})$$

$$T' = \frac{(\gamma - 1) \gamma M^2}{\bar{\rho}} \left(\left(\frac{1}{2} |\bar{\mathbf{u}}|^2 - \bar{e} \right) \rho' - \bar{u}_i (\rho u_i)' + (\rho E)' \right) \quad (\text{A.0.3})$$

On pose alors

$$a_1 = \frac{(\gamma - 1) \gamma M^2 \bar{\rho}}{\bar{T}} \quad (\text{A.0.4})$$

$$a_2 = \frac{\left(\frac{1}{2} |\bar{\mathbf{u}}|^2 - \bar{e} \right)}{\bar{\rho}} \quad (\text{A.0.5})$$

La matrice Q_{Chu} est ensuite recherchée sous forme symétrique. Après un calcul d'identification de coefficients, la matrice Q_{Chu} peut finalement être formulée comme

$$Q_{Chu} = \frac{1}{2} d\Omega \begin{pmatrix} \frac{|\bar{\mathbf{u}}|^2}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{T}}{\bar{\rho}\gamma M^2} + a_1 a_2^2 & -\frac{\bar{u}(1+a_1 a_2)}{\bar{\rho}} & -\frac{\bar{v}(1+a_1 a_2)}{\bar{\rho}} & 0 & \frac{a_1 a_2}{\bar{\rho}} \\ -\frac{\bar{u}(1+a_1 a_2)}{\bar{\rho}} & \frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{u}^2 a_1}{\bar{\rho}^2} & \frac{\bar{u}\bar{v} a_1}{\bar{\rho}^2} & 0 & -\frac{\bar{u} a_1}{\bar{\rho}^2} \\ -\frac{\bar{v}(1+a_1 a_2)}{\bar{\rho}} & \frac{\bar{u}\bar{v} a_1}{\bar{\rho}^2} & \frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{v}^2 a_1}{\bar{\rho}^2} & 0 & -\frac{\bar{v} a_1}{\bar{\rho}^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\ \frac{a_1 a_2}{\bar{\rho}} & -\frac{\bar{u} a_1}{\bar{\rho}^2} & -\frac{\bar{v} a_1}{\bar{\rho}^2} & 0 & \frac{a_1}{\bar{\rho}^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.6})$$

Numériquement, l'intégration de l'énergie sur le volume \mathcal{V} est ensuite réalisée à l'ordre 1. Cela revient à utiliser l'expression continue de la matrice Q_{Chu} comme bloc d'une matrice diagonale par bloc en prenant soin de calculer localement $d\Omega_{i,j}$ et les variables associées au champ de base pour chaque volume élémentaire.

Annexe B

Détails de l'approche 3D

B.1 Décomposition des flux

Comme exposé dans la section II.3.1, la matrice jacobienne des perturbations 3D peut être obtenue en décomposant les flux de Navier-Stokes selon qu'ils contiennent ou non des termes en $\frac{\partial}{\partial z}$. En conservant les notations mises en place dans cette même section, la formulation de ces flux est ici explicitée.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' - \mathbf{F}_{\nu z}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \frac{1}{Re} \tau_{xx} \\ \rho uv - \frac{1}{Re} \tau_{xy} \\ \rho uw - \frac{1}{Re} \tau_{xz} \\ u(\rho E + p) - \frac{1}{Re} [u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}] - \frac{\kappa}{Pr Re(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \frac{\mu}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \rho uv - \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \rho uw - \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial x} \\ u(\rho E + p) - \frac{\mu}{Re} \left[u \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \frac{\kappa}{Pr Re(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{\nu z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\mu}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\mu}{Re} \left[-u \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}' - \mathbf{G}_{\nu z}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - \frac{1}{Re} \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \frac{1}{Re} \tau_{yy} \\ \rho vw - \frac{1}{Re} \tau_{yz} \\ v(\rho E + p) - \frac{1}{Re} [u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}] - \frac{\kappa}{Pr Re(\gamma-1) M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \rho v^2 + p - \frac{\mu}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \rho vw - \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial y} \\ v(\rho E + p) - \frac{\mu}{Re} \left[u \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + w \frac{\partial w}{\partial y} \right] - \frac{\kappa}{Pr Re(\gamma-1) M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{\nu z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\mu}{Re} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\mu}{Re} \left[-\frac{2}{3} v \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' - \mathbf{H}_{\nu z}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w - \frac{1}{Re} \tau_{zx} \\ \rho v w - \frac{1}{Re} \tau_{zy} \\ \rho w^2 + p - \frac{1}{Re} \tau_{zz} \\ w(\rho E + p) - \frac{1}{Re} [u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz}] - \frac{\kappa}{PrRe(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w - \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \rho v w - \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \rho w^2 + p - \frac{\mu}{Re} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ w(\rho E + p) - \frac{\mu}{Re} \left[u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\nu z} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{Re} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\mu}{Re} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\mu}{Re} \frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\mu}{Re} \left[u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{4}{3} w \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\kappa}{PrRe(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

B.2 Calcul de $\mathcal{J}'_{\nu z}$: modifications des flux $\widehat{\mathbf{F}}_{\nu z}$, $\widehat{\mathbf{G}}_{\nu z}$ et $\widehat{\mathbf{H}}_{\nu z}$

$$\widehat{\mathbf{F}}_{\nu z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \frac{\bar{\mu}}{Re} w \\ 0 \\ \frac{\bar{\mu}}{Re} u \\ \frac{\bar{\mu}}{Re} \left[-\bar{u} \frac{2}{3} w + \bar{w} u \right] \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{\nu z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \frac{\bar{\mu}}{Re} w \\ \frac{\bar{\mu}}{Re} v \\ \frac{\bar{\mu}}{Re} \left[-\frac{2}{3} \bar{v} w + \bar{w} v \right] \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{\nu z} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\bar{\mu}}{Re} u \\ \frac{\bar{\mu}}{Re} v \\ \frac{\bar{\mu}}{Re} w \\ \frac{\bar{\mu}}{Re} \left[\bar{u} u + \bar{v} v + \frac{4}{3} \bar{w} w \right] + \frac{\bar{\kappa}}{Pr Re (\gamma - 1) M_\infty^2} T \end{pmatrix}$$

Bibliographie

- [1] C Mathis, M Provansal, and L Boyer. The Bénard-von Kármán instability : an experimental study near the threshold. *Journal de Physique Lettres*, 45(10) : 483–491, 1984. (page 6)
- [2] C. H. K. Williamson. Three-dimensional wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, 328 :345–407, 1996. (page 6, 7)
- [3] KR Sreenivasan, PJ Strykowski, and DJ Olinger. Hopf bifurcation, Landau equation, and vortex shedding behind circular cylinders. In *Forum on unsteady flow separation*, volume 1, pages 1–13, 1987. (page 6, 8)
- [4] François Charru. *Hydrodynamic instabilities*, volume 37. Cambridge University Press, 2011. (page 6, 8, 10, 11, 102)
- [5] Peter J Schmid. Nonmodal stability theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 39 :129–162, 2007. (page 6, 11, 13, 86)
- [6] Lloyd Nicholas Trefethen and Mark Embree. *Spectra and pseudospectra : the behavior of nonnormal matrices and operators*. Princeton University Press, 2005. (page 6, 11)
- [7] VK Garg and WT Rouleau. Linear spatial stability of pipe Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 54(1) :113–127, 1972. (page 6)
- [8] Osborne Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the Royal Society of London*, 35 (224-226) :84–99, 1883. (page 6)
- [9] Philip G Drazin and William Hill Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 2004. (page 7)
- [10] M Nishioka, Y Ichikawa, et al. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 72(04) :731–751, 1975. (page 7)
- [11] Patrick Huerre and Peter A Monkewitz. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual review of fluid mechanics*, 22(1) :473–537, 1990. (page 7, 8, 9, 10, 58)

- [12] Peter J Schmid and Dan S Henningson. *Stability and transition in shear flows*, volume 142. Springer Science & Business Media, 2012. (page 7, 9, 10, 40, 41, 53)
- [13] H Werlé. *Rech. Aérop.*, 5 :35–49, 1980. (page 7)
- [14] Galen Brandt Schubauer and Harold Kenneth Skramstad. Laminar-boundary-layer oscillations and transition on a flat plate. Technical report, NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION WASHINGTON DC, 1948. (page 7, 8)
- [15] Pierre Barthelet, François Charru, and Jean Fabre. Experimental study of interfacial long waves in a two-layer shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 303 : 23–53, 1995. (page 8)
- [16] John Laufer and Thomas Vrebalovich. Stability and transition of a supersonic laminar boundary layer on an insulated flat plate. *Journal of Fluid Mechanics*, 9(2) :257–299, 1960. (page 8, 19, 54, 55, 57, 58, 59, 90, 112)
- [17] PG Drazin and LN Howard. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid. *Advances in applied mechanics*, 9 :1–89, 1966. (page 8)
- [18] Lord Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1) :57–72, 1879. (page 9)
- [19] Alfons Michalke. On the inviscid instability of the hyperbolictangent velocity profile. *Journal of Fluid Mechanics*, 19(4) :543–556, 1964. (page 9)
- [20] Ragnar Fjørtoft. *Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex*. Grøndahl & søns boktr., I kommisjon hos Cammermeyers boghandel, 1950. (page 9)
- [21] Steven A Orszag. Accurate solution of the orr–sommerfeld stability equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 50(04) :689–703, 1971. (page 9, 24)
- [22] Leslie M Mack. A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the blasius boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 73(3) :497–520, 1976. (page 9)
- [23] Herbert Brian Squire. On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 142(847) :621–628, 1933. (page 9)
- [24] P Huerre and M Rossi. Hydrodynamic instabilities in open flows. *Collection alea saclay monographs and texts in statistical physics*, 1(3) :81–294, 1998. (page 11)
- [25] Patrick Huerre and Peter A Monkewitz. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 159 :151–168, 1985. (page 11)
- [26] Peter Corbett and Alessandro Bottaro. Optimal perturbations for boundary layers subject to stream-wise pressure gradient. *Physics of Fluids*, 12(1) :120–130, 2000. (page 11, 12)

- [27] Brian F Farrell. Optimal excitation of perturbations in viscous shear flow. *Physics of Fluids*, 31(8) :2093, 1988. (page 11, 26)
- [28] Kathryn M Butler and Brian F Farrell. Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 4(8) :1637–1650, 1992. (page 11, 92)
- [29] Satish C Reddy and Dan S Henningson. Energy growth in viscous channel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 252 :209–238, 1993. (page 11)
- [30] Dan S Henningson and Satish C Reddy. On the role of linear mechanisms in transition to turbulence. *Physics of Fluids*, 6(3) :1396–1398, 1994. (page 11)
- [31] William S Saric, Helen L Reed, and Edward J Kerschen. Boundary-layer receptivity to freestream disturbances. *Annual review of fluid mechanics*, 34(1) : 291–319, 2002. (page 11)
- [32] MV Morkovin, E Reshotko, and Th Herbert. Transition in open flow systems-a reassessment. *Bull. Am. Phys. Soc*, 39(9) :1882, 1994. (page 11)
- [33] Paul Andersson, Martin Berggren, and Dan S Henningson. Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers. *Physics of Fluids*, 11(1) :134–150, 1999. (page 11)
- [34] M Matsubara and P Henrik Alfredsson. Disturbance growth in boundary layers subjected to free-stream turbulence. *Journal of fluid mechanics*, 430 :149–168, 2001. (page 12, 92)
- [35] William M’F Orr. The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. part i : A perfect liquid. In *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A : Mathematical and Physical Sciences*, volume 27, pages 9–68. JSTOR, 1907. (page 12)
- [36] T Ellingsen and E Palm. Stability of linear flow. *The Physics of Fluids*, 18(4) : 487–488, 1975. (page 12, 47, 91, 97)
- [37] Lloyd Trefethen, Annee Trefethen, Satishc Reddy, Tobina Driscoll, et al. Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261(5121) :578–584, 1993. (page 13)
- [38] Peter J Schmid and Luca Brandt. Analysis of fluid systems : Stability, receptivity, sensitivity lecture notes from the flow-nordita summer school on advanced instability methods for complex flows, stockholm, sweden, 2013. *Applied Mechanics Reviews*, 66(2) :024803, 2014. (page 13, 15)
- [39] Vassilios Theofilis. Global linear instability. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43 :319–352, 2011. (page 14)
- [40] A Zebib. Stability of viscous flow past a circular cylinder. *Journal of Engineering Mathematics*, 21(2) :155–165, 1987. (page 14)

- [41] D Barkley. Linear analysis of the cylinder wake mean flow. *EPL (Europhysics Letters)*, 75(5) :750, 2006. (page 14)
- [42] Daniel Lanzerstorfer and Hendrik C Kuhlmann. Global stability of the two-dimensional flow over a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, 693 : 1–27, 2012. (page 14)
- [43] Guillaume A Bres and Tim Colonius. Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 599 :309–339, 2008. (page 14)
- [44] Denis Sipp, Olivier Marquet, Philippe Meliga, and Alexandre Barbagallo. Dynamics and control of global instabilities in open-flows : a linearized approach. *Applied Mechanics Reviews*, 63(3) :030801, 2010. (page 15, 18, 51, 114)
- [45] Olivier Marquet, Matteo Lombardi, Jean-Marc Chomaz, Denis Sipp, and Laurent Jacquin. Direct and adjoint global modes of a recirculation bubble : lift-up and convective non-normalities. *Journal of Fluid Mechanics*, 622 :1–21, 2009. (page 15)
- [46] Joseph W Nichols and Sanjiva K Lele. Global modes and transient response of a cold supersonic jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 669 :225–241, 2011. (page 15, 19, 80)
- [47] C Cossu and JM Chomaz. Global measures of local convective instabilities. *Physical review letters*, 78(23) :4387, 1997. (page 15, 16)
- [48] Jean-Marc Chomaz. Global instabilities in spatially developing flows : non-normality and nonlinearity. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37 :357–392, 2005. (page 15, 16)
- [49] Luca Brandt, Denis Sipp, Jan O Pralits, and Olivier Marquet. Effect of base-flow variation in noise amplifiers : the flat-plate boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 687 :503–528, 2011. (page 15)
- [50] Uwe Ehrenstein and Francois Gallaire. On two-dimensional temporal modes in spatially evolving open flows : the flat-plate boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 536 :209–218, 2005. (page 16)
- [51] Frédéric Alizard and Jean-Christophe Robinet. Spatially convective global modes in a boundary layer. *Physics of fluids*, 19(11) :114105, 2007. (page 16)
- [52] Shervin Bagheri, Espen Åkervik, Luca Brandt, and Dan S Henningson. Matrix-free methods for the stability and control of boundary layers. *AIAA J*, 47(5) : 1057–1068, 2009. (page 16)
- [53] HM Blackburn, Dwight Barkley, and Spencer J Sherwin. Convective instability and transient growth in flow over a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, 603 :271–304, 2008. (page 16)

- [54] Olivier Marquet, Denis Sipp, Jean-Marc Chomaz, and Laurent Jacquin. Amplifier and resonator dynamics of a low-reynolds-number recirculation bubble in a global framework. *Journal of Fluid Mechanics*, 605 :429–443, 2008. (page 16)
- [55] Xavier Garnaud, Lutz Lesshafft, PJ Schmid, and Patrick Huerre. Modal and transient dynamics of jet flows. *Physics of Fluids*, 25(4) :044103, 2013. (page 16)
- [56] Espen Åkervik, Uwe Ehrenstein, François Gallaire, and Dan S Henningson. Global two-dimensional stability measures of the flat plate boundary-layer flow. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 27(5) :501–513, 2008. (page 16, 17, 44)
- [57] Denis Sipp and Olivier Marquet. Characterization of noise amplifiers with global singular modes : the case of the leading-edge flat-plate boundary layer. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 27(5) :617–635, 2013. (page 16, 18, 19, 26, 51, 52, 57, 61, 62, 65, 66, 111, 112, 113)
- [58] Antonios Monokrousos, Espen Åkervik, Luca Brandt, and Dan S Henningson. Global three-dimensional optimal disturbances in the blasius boundary-layer flow using time-steppers. *Journal of Fluid Mechanics*, 650 :181–214, 2010. (page 16, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 97)
- [59] Clément Mettot. *Linear stability, sensitivity, and passive control of turbulent flows using finite differences*. PhD thesis, Palaiseau, Ecole polytechnique, 2013. (page 17, 19, 24, 25, 26, 108, 111, 114)
- [60] L Lees and C Lin. Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. Technical report, National Advisory Committee for Aeronautics , Washington, D. C, 1946. (page 18, 90)
- [61] Donald William Dunn and Chia-Chiao Lin. *On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1953. (page 18, 90)
- [62] Leslie M Mack. Linear stability theory and the problem of supersonic boundary-layer transition. *AIAA J*, 13(3) :278–289, 1975. (page 18, 90)
- [63] JM Kendall. Wind tunnel experiments relating to supersonic and hypersonic boundary-layer transition. *AIAA J*, 13(3) :290–299, 1975. (page 18, 91)
- [64] Leslie M Mack. Boundary-layer linear stability theory. Technical report, DTIC Document, 1984. (page 18, 19, 28, 54, 91, 97, 100, 112)
- [65] Lester Lees. The stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. 1947. (page 90)
- [66] ER Van Driest. Calculation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid on a flat plate with heat transfer. *Jour. Aero. Sci*, 19(12) : 801–812, 1952. (page 90)

- [67] Nabil M El-Hady. Nonparallel instability of supersonic and hypersonic boundary layers. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 3(9) :2164–2178, 1991. (page 19, 91)
- [68] Ardeshir Hanifi, Peter J Schmid, and Dan S Henningson. Transient growth in compressible boundary layer flow. *Physics of Fluids (1994-present)*, 8(3) :826–837, 1996. (page 19, 28, 92, 100, 115)
- [69] J-Ch Robinet. Bifurcations in shock-wave/laminar-boundary-layer interaction : global instability approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 579 :85–112, 2007. (page 19, 28, 71, 107, 108)
- [70] JD Crouch, A Garbaruk, and D Magidov. Predicting the onset of flow unsteadiness based on global instability. *Journal of Computational Physics*, 224(2) : 924–940, 2007. (page 19)
- [71] Christoph J Mack, Peter J Schmid, and Joern L Sesterhenn. Global stability of swept flow around a parabolic body : connecting attachment-line and crossflow modes. *Journal of Fluid Mechanics*, 611 :205–214, 2008. (page 19)
- [72] Fulvio Sartor, C Mettot, R Bur, and D Sipp. Unsteadiness in transonic shock-wave/boundary-layer interactions : experimental investigation and global stability analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 781 :550–577, 2015. (page 19, 26, 72, 84, 87)
- [73] Jean-Paul Dussauge, Pierre Dupont, and Jean-Francois Debiève. Unsteadiness in shock wave boundary layer interactions with separation. *Aerospace Science and Technology*, 10(2) :85–91, 2006. (page 20, 71, 72, 87, 88, 112, 113)
- [74] Noel T Clemens and Venkateswaran Narayanaswamy. Low-frequency unsteadiness of shock wave/turbulent boundary layer interactions. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 46 :469–492, 2014. (page 20, 70)
- [75] Eleuterio F Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. Springer Science & Business Media, 2013. (page 22, 23)
- [76] Meng-Sing Liou. A sequel to ausm : Ausm+. *Journal of computational Physics*, 129(2) :364–382, 1996. (page 23)
- [77] Philip L Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, 43(2) :357–372, 1981. (page 23)
- [78] TJ Chung. *Computational fluid dynamics*. Cambridge university press, 2010. (page 23)
- [79] J-Ph Boin, J Ch Robinet, Ch Corre, and H Deniau. 3d steady and unsteady bifurcations in a shock-wave/laminar boundary layer interaction : a numerical study. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 20(3) :163–180, 2006. (page 23)

- [80] Hong Luo, Joseph D Baum, and Rainald Löhner. A fast, matrix-free implicit method for compressible flows on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 146(2) :664–690, 1998. (page 23)
- [81] Kanchan M Kelkar and Suhas V Patankar. Numerical prediction of vortex shedding behind a square cylinder. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 14(3) :327–341, 1992. (page 24, 36)
- [82] Henk A Dijkstra, Fred W Wubs, Andrew K Cliffe, Eusebius Doedel, Ioana F Dragomirescu, Bruno Eckhardt, Alexander Yu Gelfgat, Andrew L Hazel, Valerio Lucarini, Andy G Salinger, et al. Numerical bifurcation methods and their application to fluid dynamics : analysis beyond simulation. *Communications in Computational Physics*, 15(1) :1–45, 2014. (page 24)
- [83] Patrick R Amestoy, Iain S Duff, Jean-Yves L'Excellent, and Jacko Koster. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(1) :15–41, 2001. (page 24)
- [84] Satish Balay, Shrirang Abhyankar, Mark F. Adams, Jed Brown, Peter Brune, Kris Buschelman, Lisandro Dalcin, Victor Eijkhout, William D. Gropp, Dinesh Kaushik, Matthew G. Knepley, Lois Curfman McInnes, Karl Rupp, Barry F. Smith, Stefano Zampini, Hong Zhang, and Hong Zhang. PETSc Web page. <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2016. URL <http://www.mcs.anl.gov/petsc>. (page 24)
- [85] Leandro F Bergamo, Elmer M Gennaro, Vassilis Theofilis, and Marcello AF Medeiros. Compressible modes in a square lid-driven cavity. *Aerospace Science And Technology*, 44 :125–134, 2015. (page 24)
- [86] Dana A Knoll and David E Keyes. Jacobian-free newton–krylov methods : a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*, 193(2) :357–397, 2004. (page 25)
- [87] Heng-Bin An, Ju Wen, and Tao Feng. On finite difference approximation of a matrix-vector product in the jacobian-free newton–krylov method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(6) :1399–1409, 2011. (page 25)
- [88] Vicente Hernandez, Jose E. Roman, and Vicente Vidal. SLEPc : A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems. *ACM Trans. Math. Software*, 31(3) :351–362, 2005. (page 26)
- [89] Vicente Hernández, Jose E Román, Andrés Tomás, and Vicente Vidal. Krylov-schur methods in slepc. *Universitat Politècnica de Valencia, Tech. Rep. STR-7*, 2007. (page 26)
- [90] A Tumin and E Reshotko. Spatial theory of optimal disturbances in boundary layers. *Physics of Fluids*, 13(7) :2097–2104, 2001. (page 26, 92, 93, 115)
- [91] T Poinso and SK Lelef. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of computational physics*, 101(1) :104–129, 1992. (page 28)

- [92] Anatoli Tumin and Eli Reshotko. Optimal disturbances in compressible boundary layers. *AIAA journal*, 41(12) :2357–2363, 2003. (page 28, 48, 49, 50)
- [93] Subhankar Sen, Sanjay Mittal, and Gautam Biswas. Flow past a square cylinder at low reynolds numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(9) :1160–1174, 2011. (page 36, 38)
- [94] AK Dhiman, RP Chhabra, A Sharma, and V Eswaran. Effects of reynolds and prandtl numbers on heat transfer across a square cylinder in the steady flow regime. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 49(7) :717–731, 2006. (page 36, 38)
- [95] TG Zaki, M Gad-El-Hak, et al. Numerical and experimental investigation of flow past a freely rotatable square cylinder. *Journal of Fluids and structures*, 8(7) : 555–582, 1994. (page 36, 40)
- [96] A Sohankar, C Norberg, and L Davidson. Low-reynolds-number flow around a square cylinder at incidence : study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition. *International journal for numerical methods in fluids*, 26(1) :39–56, 1998. (page 36)
- [97] Dwight Barkley and Ronald D Henderson. Three-dimensional floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 322 : 215–241, 1996. (page 36, 114)
- [98] J Robichaux, S Balachandar, and SP Vanka. Three-dimensional floquet instability of the wake of square cylinder. *Physics of Fluids*, 11(3) :560–578, 1999. (page 36)
- [99] Hermann Schlichting, Klaus Gersten, Egon Krause, and Herbert Oertel. *Boundary-layer theory*, volume 7. Springer, 1955. (page 40, 54)
- [100] M Gaster. On the effects of boundary-layer growth on flow stability. *Journal of Fluid Mechanics*, 66(3) :465–480, 1974. (page 52, 53)
- [101] Leslie M Mack. *Numerical Calculation of the Stability of the Compressible, Laminar Boundary Layer*. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, 1960. (page 54, 55, 57)
- [102] Daniel Arnal and Jean Détery. Laminar-turbulent transition and shock wave/boundary layer interaction. *OFFICE NATIONAL D ETUDES ET DE RECHERCHES AEROSPATIALES ONERA-PUBLICATIONS-TP*, (109), 2004. (page 69)
- [103] Holger Babinsky and John K Harvey. *Shock wave-boundary-layer interactions*, volume 32. Cambridge University Press, 2011. (page 70)
- [104] David S Dolling. Fifty years of shock-wave/boundary-layer interaction research : what next ? *AIAA journal*, 39(8) :1517–1531, 2001. (page 70)

- [105] Muzio Grilli, Peter J Schmid, Stefan Hickel, and Nikolaus A Adams. Analysis of unsteady behaviour in shockwave turbulent boundary layer interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 700 :16–28, 2012. (page 70)
- [106] Lionel Agostini, Lionel Larchevêque, Pierre Dupont, Jean-François Debiève, and Jean-Paul Dussauge. Zones of influence and shock motion in a shock/boundary-layer interaction. *AIAA journal*, 50(6) :1377–1387, 2012. (page 70)
- [107] Bharathram Ganapathisubramani, NT Clemens, and DS Dolling. Effects of upstream boundary layer on the unsteadiness of shock-induced separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 585 :369–394, 2007. (page 70)
- [108] O Uenalimis and D Dolling. Decay of wall pressure field and structure of a mach 5 adiabatic turbulent boundary layer. In *Fluid Dynamics Conference*, page 2363, 1994. (page 70)
- [109] Sébastien Piponnier, JP Dussauge, JF Debieve, and P Dupont. A simple model for low-frequency unsteadiness in shock-induced separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 629 :87–108, 2009. (page 70)
- [110] Emile Toubert and Neil D Sandham. Large-eddy simulation of low-frequency unsteadiness in a turbulent shock-induced separation bubble. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 23(2) :79–107, 2009. (page 70)
- [111] Emile Toubert and Neil D Sandham. Low-order stochastic modelling of low-frequency motions in reflected shock-wave/boundary-layer interactions. *Journal of Fluid Mechanics*, 671 :417–465, 2011. (page 71, 85, 87, 112, 114)
- [112] A Sansica, ND Sandham, and Z Hu. Forced response of a laminar shock-induced separation bubble. *Physics of Fluids (1994-present)*, 26(9) :093601, 2014. (page 71, 72, 88, 112, 114)
- [113] Neil Sandham, Andrea Sansica, and Zhiwei Hu. Instability and low-frequency unsteadiness in a shock-induced laminar separation bubble. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 1–22, 2016. (page 72, 109)
- [114] F Guiho, F Alizard, and J-Ch Robinet. Instabilities in oblique shock wave/laminar boundary-layer interactions. *Journal of Fluid Mechanics*, 789 : 1–35, 2016. (page 72, 80, 112)
- [115] Lawrence C Cheung and Sanjiva K Lele. Linear and nonlinear processes in two-dimensional mixing layer dynamics and sound radiation. *Journal of Fluid Mechanics*, 625 :321–351, 2009. (page 72)
- [116] Alessandro Pagella, Ulrich Rist, and Siegfried Wagner. Numerical investigations of small-amplitude disturbances in a boundary layer with impinging shock wave at $ma=4.8$. *Physics of Fluids*, 14(7) :2088–2101, 2002. (page 72)
- [117] Gérard Degrez, CH Boccadoro, and John F Wendt. The interaction of an oblique shock wave with a laminar boundary layer revisited. an experimental and numerical study. *Journal of fluid mechanics*, 177 :247–263, 1987. (page 72, 73, 74)

- [118] John David Anderson Jr. *Fundamentals of aerodynamics*. Tata McGraw-Hill Education, 2010. (page 73)
- [119] Christopher KW Tam and Fang Q Hu. On the three families of instability waves of high-speed jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 201 :447–483, 1989. (page 80)
- [120] Alfons Michalke. On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 23(3) :521–544, 1965. (page 83)
- [121] Chih-Ming Ho and Patrick Huerre. Perturbed free shear layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 16(1) :365–422, 1984. (page 83)
- [122] Leslie M Mack. Review of linear compressible stability theory. In *Stability of time dependent and spatially varying flows*, pages 164–187. Springer, 1987. (page 90, 91)
- [123] Leslie M Mack. On the inviscid acoustic-mode instability of supersonic shear flows. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2(2) :97–123, 1990. (page 91, 102)
- [124] Kenneth Stetson and Roger Kimmel. On hypersonic boundary-layer stability. In *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, page 737, 1992. (page 91)
- [125] Serkan Özgen and Senem Atalayer Kircali. Linear stability analysis in compressible, flat-plate boundary-layers. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 22(1) :1–20, 2008. (page 91, 92, 93, 94)
- [126] PS Klebanoff. Effect of free-stream turbulence on a laminar boundary layer. In *Bulletin of the American Physical Society*, volume 16, pages 1323–+. AMER INST PHYSICS 1305 WALT WHITMAN RD, STE 300, MELVILLE, NY 11747-4501 USA, 1971. (page 92)
- [127] Simone Zuccher, Anatoli Tumin, and Eli Reshotko. Parabolic approach to optimal perturbations in compressible boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 556 :189–216, 2006. (page 93)
- [128] Pedro Paredes, Meelan M Choudhari, Fei Li, and Chau-Lyan Chang. Transient growth analysis of compressible boundary layers with parabolized stability equations. *AIAA Paper*, 51 :2016, 2016. (page 93, 115)
- [129] Thorwald Herbert. Parabolized stability equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 29(1) :245–283, 1997. (page 93)
- [130] Mujeeb R Malik and Ponnampalam Balakumar. Acoustic receptivity of mach 4.5 boundary layer with leading-edge bluntness. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 21(5) :323–342, 2007. (page 97, 100, 113)
- [131] Gordon Erlebacher and MY Hussaini. Numerical experiments in supersonic boundary-layer stability. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 2(1) :94–104, 1990. (page 100)

- [132] G Dergham, D Sipp, and J-Ch Robinet. Stochastic dynamics and model reduction of amplifier flows : the backward facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 719 :406–430, 2013. (page 113)
- [133] K Joseph George and RI Sujith. On chu’s disturbance energy. *Journal of Sound and Vibration*, 330(22) :5280–5291, 2011. (page 115)
- [134] Boa-Teh Chu. On the energy transfer to small disturbances in fluid flow (part i). *Acta Mechanica*, 1(3) :215–234, 1965. (page 115)

Sujet : Stabilité et perturbations optimales globales d'écoulements compressibles pariétaux

Résumé : Une méthode de calcul de forçage optimal a été employée afin d'analyser le caractère amplificateur sélectif de bruit d'écoulements compressibles pariétaux. Une telle approche inclut la prise en compte de croissances non-modales induites par la non-normalité des équations de Navier-Stokes linéarisées. La méthode numérique repose sur le calcul de la matrice résolvante globale et la résolution d'un problème aux valeurs propres associé à un problème d'optimisation. Les densités d'énergie des forçages et réponses optimaux calculés pour une couche limite supersonique ont pu être reliés à la courbe neutre expérimentale obtenue par Laufer et Vrebalovich, à condition de contraindre la localisation du forçage en amont de la branche inférieure. Par la suite, une étude paramétrique en nombre de Mach de la réceptivité 2D d'une interaction choc/couche limite laminaire a permis de caractériser le développement d'instabilités convectives de Kelvin-Helmholtz et Tollmien-Schlichting (TS) à haute fréquence. La réceptivité basse fréquence de ce système a été mise en relation avec la résonance d'un mode global stable. Par ailleurs, une extension de la méthode numérique 2D a été proposée pour le calcul de perturbations 3D. Son application au calcul du forçage optimal d'une couche limite à $M=4.5$ a permis de mettre en évidence la croissance non-modale 3D de streaks ainsi que le développement d'ondes TS obliques dont la croissance, en régime compressible, est favorisée par rapport à celle des ondes 2D. Cette étude a également permis d'observer la croissance du mode de Mack à plus haute fréquence.

Mots clés : Stabilité, Résolvant global, Forçage optimal, Problème aux valeurs propres, Couche limite, Écoulements compressibles

Subject : Stability and global optimal perturbations of parietal compressible flows

Abstract : Parietal compressible flows have been studied by means of optimal forcing computations in order to characterize the noise amplifier nature of these flows. This approach is able to take into account the non-modal growth of linear perturbations induced by the non-normality of the linearized Navier-Stokes equations. The numerical strategy is based on the computation of the global resolvent matrix and an eigenvalue problem stemming from an optimization problem. Optimal forcing and response energy densities of a supersonic boundary layer have been linked to the experimental neutral curve obtained by Laufer et Vrebalovich, provided that the forcing localization is constrained upstream from the lower branch. Afterwards, a parametric study with respect to the Mach number of the 2D receptivity of the laminar shock wave/boundary layer interaction flow has allowed to analyze the growth of Kelvin-Helmholtz and Tollmien-Schlichting instabilities (TS) occurring at high frequencies. At low frequencies, the receptivity of the system has been linked to the resonance of a stable global mode. Furthermore, the 2D numerical method has been extended to allow the computation of 3D perturbations. This approach has been applied to a supersonic boundary layer flow at $M=4.5$ in which the 3D non-modal growth of streaks has been identified, as well as the development of oblique TS waves, whose growth is larger than the one associated to 2D waves in compressible regime. This study has also allowed to detect the growth of Mack mode at higher frequencies.

Keywords : Stability, Global resolvent, Optimal forcing, Eigenvalue problem, Boundary layer, Compressible flows