



**HAL**  
open science

# Importance de la diffusion atomique et de ses conséquences hydrodynamiques sur la structure interne et les paramètres observationnels des étoiles

Morgan Deal

► **To cite this version:**

Morgan Deal. Importance de la diffusion atomique et de ses conséquences hydrodynamiques sur la structure interne et les paramètres observationnels des étoiles. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université Montpellier, 2016. Français. NNT : 2016MONTT318 . tel-01817592

**HAL Id: tel-01817592**

**<https://theses.hal.science/tel-01817592>**

Submitted on 18 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Pour obtenir le grade de  
Docteur

Délivré par l'Université de Montpellier

Préparée au sein de l'école doctorale **I2S**  
Et de l'unité de recherche **LUPM - UMR 5299**

Spécialité: **Astrophysique**

Présentée par **Morgan Deal**

**Importance de la diffusion  
atomique et de ses  
conséquences  
hydrodynamiques sur les  
paramètres observationnels  
des étoiles**

Soutenue le 20 septembre 2016 devant le jury composé de

Pr. Marc Antoine DUPRET	Université de Liège	Rapporteur
Dr. Marie-Jo GOUPIL	Observatoire de Paris	Rapporteuse
Dr. Alain HUI-BON-HOA	Université Toulouse III	Examinateur
Dr. Fabrice MARTINS	Université de Montpellier	Examinateur
Pr. Marc PINSONNEAULT	University of Ohio State	Examinateur
Dr. Olivier RICHARD	Université de Montpellier	Directeur de thèse
Pr. Hiromoto SHIBAHASHI	University of Tokyo	Examinateur
Pr. Sylvie VAUCLAIR	Université Toulouse III	Directrice de thèse





# Résumé

La diffusion atomique doit être prise en compte dans les modèles d'évolution stellaire car il s'agit d'une conséquence directe du fait que les étoiles sont des sphères auto-gravitantes composées d'un mélange de différents gaz (les éléments chimiques). L'équilibre des étoiles conduit à des gradients internes de pression, de densité et de température ainsi qu'à un transfert radiatif, l'ensemble produisant un effet sélectif sur les éléments (dans la plupart des cas dominé par la compétition entre le triage gravitationnel et les accélérations radiatives).

Les interactions entre la diffusion atomique et les processus hydrodynamiques tels que la convection dynamique et la perte de masse sont étudiées depuis longtemps. Un processus important a cependant été oublié dans les modèles. Il s'agit de la convection double diffusive (ou thermohaline) induite par un gradient de  $\mu$  instable, qui peut être produite par une accumulation locale d'éléments lourds à l'intérieur des étoiles due aux accélérations radiatives. Contrairement aux autres processus de mélange, il s'agit d'une conséquence directe de la diffusion atomique. Un effet similaire se produit à la base de la zone convective de surface en cas d'accrétion d'éléments lourds à la surface de l'étoile.

Nous avons étudié la convection thermohaline induite par l'accrétion dans le cas du système 16 Cygni et les propriétés de ces deux étoiles avec le code TGEC. Nous avons inclus la prescription de Brown et al. 2013 pour la convection thermohaline. Nous avons ensuite calculé les fréquences d'oscillations de ces modèles à l'aide du code PULSE pour les comparer aux fréquences observées par *Kepler*. A partir de ces modèles, nous avons pu montrer qu'en accrétant 2/3 de la masse terrestre au début de la séquence principale (sur le modèle 16 Cyg B), la convection thermohaline induite par l'accrétion mélangeait l'étoile suffisamment profondément pour atteindre la zone de destruction du lithium et ainsi obtenir des abondances de lithium cohérentes avec les observations de 16 Cyg A et B.

Nous avons étudié l'accumulation d'éléments lourds et l'effet de la convection thermohaline dans le cas des étoiles de type A. Dans ces étoiles, des abondances "particulières" (par rapport au soleil) ont été observées. Ceci est dû aux effets de la diffusion atomique qui sont très importants dans ces étoiles. Cependant, la diffusion atomique seule produit des variations d'abondances trop importantes et un moyen de reproduire les observations est de mélanger l'étoile assez profondément. Nous avons ensuite calculé des modèles incluant la diffusion atomique et la convection thermohaline en utilisant le code TGEC. Nous avons montré que ce processus pouvait modifier la structure interne de ces étoiles, et aussi les abondances de surface. Nous avons aussi inclus la

convection thermohaline et l'accrétion dans le code de Montréal/Montpellier. Nous avons modifié plusieurs parties de ce code afin de pouvoir faire des comparaisons avec le TGEC pour comparer les résultats. Les résultats obtenus sont très similaires.

Nous avons aussi déterminé les paramètres de l'étoile 94 Ceti à partir d'observations obtenues avec un instrument au sol. Cette étoile a une masse de  $1.44 M_{\odot}$  et est une bonne cible pour étudier l'effet des accélérations radiatives (qui ont un effet non négligeable pour des masses supérieures à  $1.2 M_{\odot}$ ). Nous avons aussi comparé des modèles incluant des atmosphères complètes afin d'en déterminer l'impact sur les fréquences.

Nous avons travaillé sur les étoiles du halo pauvres en métaux pour lesquelles est observée une dispersion inexpliquée des abondances de lithium pour les métallicités très faibles. Nous avons étudié la possibilité d'une accrétion sur ces étoiles qui pourrait produire de la convection thermohaline et détruire du lithium.

# Abstract

Atomic diffusion must be taken into account in the computations of stellar structure and evolution as it is a direct consequence of the fact that stars are self-gravitating spheres composed of a mixture of different gases (the chemical elements). The stellar equilibrium leads to internal gradients of pressure, density and temperature as well as an upward radiative transfer which produces a selective effect on the elements (in most cases dominated by the competition between gravitational settling and radiative acceleration).

The interactions between atomic diffusion and well-known hydrodynamical processes like dynamical convection and mass loss have been studied for a long time. An important process was however forgotten in these computations. This is the double-diffusive (or fingering or thermohaline) convection induced by unstable  $\mu$ -gradients, which can be produced by the local accumulation of heavy elements inside stars due to radiative acceleration. Contrary to the other hydrodynamical processes, fingering convection is not arbitrarily added in the computations. It is directly induced by atomic diffusion itself and cannot be avoided. It is thus very important to add this hydrodynamical process in stellar evolution modelling, which has never been done before our work. A similar effect occurs below the convective zone in case of accretion of heavy matter onto a star.

We studied the accretion-induced fingering convection in the case of the stellar system 16 Cygni. We studied the properties of these two stars by computing models with the Toulouse Geneva Evolution Code (TGECC). We included the Brown et al. 2013 prescription for the computations of fingering convection in the code. We computed oscillation frequencies of these models using the PULSE code to compare it with *Kepler* observations. We found that if 2/3 of Earth mass is accreted at the beginning of the main sequence (on 16 Cyg B model), the accretion-induced fingering convection mixes the star deep enough to destroy the lithium and obtain the observed difference between 16 Cyg A and B.

We studied the heavy element accumulation and the induced fingering convection in the case of Am stars. In these stars, peculiar surface abundances are observed (compared to the sun). This peculiarity is related to the effect of atomic diffusion, very important in these types of stars. However, atomic diffusion alone leads to abundance variations which are too large and one way to reproduce quantitatively the observed abundance is to assume mixing deep enough inside the star. We computed models including atomic diffusion (with radiative acceleration) and fingering convection using the TGECC code. We find that this process may change the internal structure of the stars, and also the surface abundances. We also included fingering convection and the accretion

process in the Montreal/Montpellier code. We modified some parts of this code (e.g. turbulence profiles) to compare the results obtained with the two codes. We computed some models and we found that the results are quite similar.

We determined the stellar parameters of the star 94 Ceti (by using similar seismic computations as for 16 Cyg A and B) using ground-based observations. This star has a mass of  $1.44 M_{\odot}$  and is a good target to study the effect of radiative accelerations (which have important consequences for masses larger than  $1.2-1.3 M_{\odot}$ ). We also compared results for models with full atmospheres and models without atmospheres to determine the impact on oscillation frequencies.

We worked on metal poor halo stars for which a dispersion of lithium surface abundances is observed for very small metallicities. We studied the possibility of an accretion of matter that can trigger fingering convection and destroy lithium.

# Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse ainsi qu'à l'écriture de ce manuscrit. Je ne me lancerai pas dans l'élaboration d'une liste de ces personnes de peur d'oublier quelqu'un, mais à la lecture ce message je suis sûr que les personnes concernées se reconnaîtront !



*« Le roseau plie, mais ne cède... qu'en cas de pépin »*

Le Roi Loth, Kaamelott



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Modélisation</b>	<b>5</b>
1.1	Codes d'évolution stellaire . . . . .	6
1.1.1	Paramètres physiques . . . . .	6
1.1.2	Traitement de l'équation de diffusion . . . . .	6
	TGEC . . . . .	7
	Code de Montréal/Montpellier . . . . .	8
1.1.3	Accélération radiatives . . . . .	9
	TGEC - Approximation Single Valued Parameter (SVP) . . . . .	9
	Code de Montréal/Montpellier . . . . .	12
1.1.4	Convection . . . . .	13
1.1.5	Processus de mélange additionnels . . . . .	15
1.1.6	Accrétion . . . . .	15
1.2	Convection thermohaline . . . . .	16
1.2.1	Contexte . . . . .	16
1.2.2	Formalisme . . . . .	16
1.2.3	Prescriptions 1D . . . . .	17
1.2.4	Etude de la convection thermohaline induite par une accumulation d'éléments à l'aide de simulations 3D . . . . .	19
1.3	Astérosismologie . . . . .	39
1.3.1	Équations de la structure interne . . . . .	39
1.3.2	Linéarisation des équations . . . . .	40
	Structure à l'équilibre . . . . .	40
	Analyse perturbative . . . . .	40
1.3.3	Pulsations adiabatiques . . . . .	41
1.3.4	Approximation de Cowling et théorie asymptotique . . . . .	42
1.3.5	Grandes et petites séparations . . . . .	43
1.3.6	Diagramme échelle . . . . .	43
1.3.7	Détermination du "meilleur" modèle . . . . .	44
1.3.8	Méthodes d'inversion . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Étude des processus de mélange induit par la diffusion atomique</b>	<b>47</b>
2.1	Impact des accumulations d'éléments chimiques sur la structure interne des étoiles	47
2.2	Impact de la convection thermohaline induite par l'accumulation d'éléments lourds	49
2.2.1	Modélisation et instabilités numériques . . . . .	49
2.2.2	Modèle de $1.7 M_{\odot}$ . . . . .	51

2.2.3	Évolution de la convection thermohaline pendant la séquence principale . . .	54
2.2.4	Effet de la masse de l'étoile . . . . .	56
2.2.5	Comparaison avec les abondances d'étoiles Am . . . . .	57
2.3	Impact des accélérations radiatives sur le déclenchement de la convection thermohaline . . . . .	60
2.4	Article Deal et al. 2016 A&A . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Astérosismologie des étoiles de séquence principale, influence de la diffusion atomique et de la convection thermohaline sur les fréquences</b>	<b>71</b>
3.1	Introduction . . . . .	71
3.2	Exemple de l'étoile 94 Ceti A . . . . .	75
3.2.1	Observations spectroscopiques . . . . .	75
3.2.2	Observations interférométriques . . . . .	76
3.2.3	Les données sur l'exoplanète . . . . .	76
3.2.4	Observations sismiques et déterminations des modes d'oscillation . . . . .	77
3.2.5	Modèles stellaires . . . . .	77
3.2.6	Détermination du meilleur modèle . . . . .	80
3.2.7	Discussion sur la rotation de 94 Ceti A . . . . .	81
3.3	Impact des accélérations radiatives et de la convection thermohaline sur la détermination de l'âge des étoiles . . . . .	82
3.3.1	Effets des accélérations radiatives . . . . .	82
3.3.2	Effets des accélérations radiatives couplées à la convection thermohaline . . . . .	83
3.4	Discussion . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Conséquences de la convection thermohaline induite par l'accrétion de matière planétaire sur les étoiles</b>	<b>89</b>
4.1	Etoiles à planètes . . . . .	89
4.2	Le système 16 Cygni . . . . .	91
4.2.1	Modélisation de 16 Cygni A et B . . . . .	91
4.2.2	Influence de la diffusion atomique sur les abondances de surface . . . . .	96
	Les métaux . . . . .	96
	Le lithium . . . . .	97
4.2.3	Processus de mélange à la base de la zone convective de surface . . . . .	97
4.2.4	Convection thermohaline induite par l'accrétion de matière planétaire . . . . .	99
4.2.5	Effet de la composition chimique initiale de l'étoile et de celle la matière accrétée . . . . .	100
4.2.6	Article Deal et al. 2015 A&A . . . . .	101
4.3	Le destin des systèmes planétaires . . . . .	110
4.3.1	Article Deal et al. 2013 A&A . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Impact de l'accrétion sur les étoiles pauvres en métaux</b>	<b>117</b>
5.1	Les étoiles pauvres en métaux du halo . . . . .	117
5.2	Les "Carbon Enhanced Metal Poor stars" . . . . .	119
5.3	Modélisation . . . . .	121
5.4	Accrétion provenant d'un compagnon de $1 M_{\odot}$ . . . . .	121

5.4.1	Évolution de l'étoile juste après l'accrétion . . . . .	122
5.4.2	Évolution de l'étoile au turn off . . . . .	124
5.5	Accrétion provenant d'un compagnon de $3 M_{\odot}$ . . . . .	125
5.6	Discussion sur le cas du lithium dans les étoiles pauvres en métaux . . . . .	127

<b>Bibliographie</b>		<b>135</b>
----------------------	--	------------

# Table des figures

1.1	Comparaison entre les accélérations radiatives calculées avec la méthode SVP (courbes en traits pleins) et celle calculées par Seaton (1997) (courbes en pointillés) pour différent élément. (Figure 2 de l'article LeBlanc and Alecian (2004)). . . . .	11
1.2	Spectre d'opacité du lithium et du fer ainsi que l'opacité totale en cgs à une profondeur où $\log T = 5.3$ et $\log \rho = -4.6$ . L'intervalle de fréquence adimensionnée $u$ couvre une gamme où la majorité du flux passe. . . . .	12
1.3	Comparaison entre les accélérations radiatives calculées dans le code de Montréal/Montpellier dans différents cas. (Figure 7 de l'article Richer et al. (1998)). . . . .	13
1.4	Représentation des états d'un système en fonction de $\nabla - \nabla_{ad}$ dans le cas d'un gradient de $\mu$ instable. Tant que $R_0 < 1$ le système est instable pour la convection dynamique (critère de Ledoux). Ensuite pour $1 < R_0 < 1/\tau$ le système est instable et subit la convection thermohaline. Pour $R_0 > 1/\tau$ le système est stable. (Cette figure est extraite de Garaud 2013). . . . .	17
1.5	Diagramme échelle d'une étoile de $1.06 M_\odot$ à 6.4 milliards d'années ayant pour composition chimique initiale $Y_i = 0.26$ et $Z_i = 0.024$ (panneau de gauche) et d'une étoile de $1.06 M_\odot$ 7.5 milliards d'années ayant pour composition chimique initiale $Y_i = 0.25$ et $Z_i = 0.024$ (panneau de droite). Les fréquences obtenues à partir des observations de l'étoile 16 Cygni B obtenues avec le satellite <i>Kepler</i> sont représentées par les croix et les fréquences calculées à partir des modèles sont représentées par les points bleus ( $l=0$ ), les triangles verts ( $l=1$ ), les carrés rouges ( $l=2$ ) et les losanges noirs ( $l=3$ ). La grande séparation vaut $117.17 \mu\text{Hz}$ . . . . .	44
2.1	Figure 8 de l'article Richard et al. (2001). Cette figure présente la modification des zones radiatives (blanches), convective (noires) et de semi-convection (grise) avec le temps pour 3 masses ( $a : 1.5 M_\odot$ , $b : 1.7 M_\odot$ , $c : 2.5 M_\odot$ ). Les zones $\gamma$ représentent les zones convectives induites par l'accumulation de fer. . . . .	48
2.2	Profils d'abondance du Fe lorsque que la convection thermohaline n'est pas prise en compte (courbes bleues) et lorsque qu'elle est prise en compte (courbes pointillés noires) en fonction de la température et pour différents âges. Figure 2 de l'article Théado et al. (2009). . . . .	50
2.3	Profils de quantités physiques importantes en fonction de $\log(\Delta M/M_*)$ dans deux modèles de $1.7 M_\odot$ à 100 million d'années sans convection thermohaline (panneaux de gauche) et avec convection thermohaline (panneaux de droite). . . . .	52
2.4	Profil de $\mu$ en fonction de $\log(\Delta M/M_*)$ du modèle de $1.7 M_\odot$ incluant la convection thermohaline à quatre âges différents. . . . .	53

2.5	Profils d'opacité en fonction de $\log(\Delta M/M_*)$ des modèles de $1.7 M_\odot$ incluant (panneau de droit) et n'incluant pas (panneau de gauche) la convection thermohaline à 100 millions d'année. . . . .	54
2.6	Profil du coefficient de diffusion turbulente effectif (courbes en tirets bleues), coefficient de diffusion de l'hélium (courbes en pointillés verts) et gradient de $\mu$ (courbes noires) en fonction de $\log(\Delta M/M_*)$ du modèle de $1.7 M_\odot$ incluant la convection thermohaline à quatre âges différents. . . . .	55
2.7	Profil du coefficient de diffusion turbulente effectif (courbes bleues) et coefficient de diffusion de l'hélium (courbes en tirets verts) en fonction de $\log(\Delta M/M_*)$ pour les modèles de $1.5$ (panneau du haut), $1.7$ (panneau central) et $1.9 M_\odot$ (panneau du bas) à 100 millions d'années incluant la convection thermohaline. Le code couleur des zones grisées est le même que dans la figure 2.6. . . . .	57
2.8	Abondances de surface des modèles incluant la convection thermohaline (croix) et abondances déterminées à partir d'observations d'étoile des Hyades et des Pléiades de $\log g$ , et $T_{\text{eff}}$ comparable à nos modèles (symboles) pour les modèles de $1.5$ (panneaux du haut), $1.7$ (panneaux centraux) et $1.9 M_\odot$ (panneaux du bas) à 100 (panneaux de gauche) et 650 millions d'années (panneaux de droite). . . . .	58
2.9	Même figure que la figure 2.8 dans le cas où la zone convective de surface est connectée à la zone de mélange la plus profonde. . . . .	59
2.10	Profils d'abondance (courbe en pointillés) et d'accélération radiative (courbe en trait plein) du fer, de gravité (courbe en tirets) en fonction de $\log(\Delta M/M_*)$ dans un modèle de $1.7 M_\odot$ . Le cadre montre le rapport $g_R/g$ . (Figure 3 de l'article Vauclair and Théado (2012)) . . . . .	61
2.11	Valeurs de $g_{e,\mu}$ et $g_{e,T}$ en fonction de $\log(\Delta M/M_*)$ à 350 millions d'années (traits pleins) et 450 millions d'années (pointillets) . . . . .	63
3.1	Différence d'âge au turn off (TO) entre des modèles incluant la diffusion atomique (sans accélérations radiatives) et des modèles ne l'incluant pas (gauche). Différence d'âge au turn off (TO) lorsque l'opacité est augmenté de 10% (droite) (Figure 26 et 18 de l'article Lebreton et al. 2014a). . . . .	73
3.2	Isochrones des amas NGC188 (haut) et M92 (bas) obtenus à partir des modèles calculés avec le code de Montréal/Montpellier en n'incluant pas la diffusion atomique (panneaux de gauche) et en l'incluant (panneaux de droite) (respectivement figures 15 et 8 des articles Michaud et al. 2004 et VandenBerg et al. 2002). . . . .	74
3.3	Transformée de Fourier des données pour 94 Ceti A. . . . .	75
3.4	Diagramme HR représentant les traces évolutives de modèles allant de $1.36$ à $1.50 M_\odot$ avec un hélium "solaire". Les boites d'erreurs spectroscopiques proviennent de Edvardsson et al. (1993) (croix), Smith et al. (2001) (plus), Santos et al. (2004) (CORALIE, triangles pointant vers la droite ; FEROS, triangles ; UVES, points ; UES, carrés), Valenti and Fischer (2005) (étoiles) et Maldonado et al. (2012) (triangles pointant vers la gauche). Les traits épais noirs sont les segments de la trace évolutive où le rayon des modèles correspond au rayon interférométrique déterminé par van Belle and von Braun (2009). Les carrés bleus correspondent aux modèles ayant une grande séparation égale à celle déterminée à partir des observations. . . . .	78
3.5	Même légende que la figure 3.4 avec un hélium "galactique". . . . .	79

3.6	Diagramme échelle du modèle $1.44 M_{\odot}$ avec $Y_i = Y_G$ et $Z_i = 0.0305$ à 2.4 Ga. Les fréquences obtenues à partir des observations sont représentées par les croix et les fréquences modélisées sont représentées par les points bleus ( $l=0$ ), les triangles verts ( $l=1$ ), les carrés rouges ( $l=2$ ) et les losanges noirs ( $l=3$ ). . . . .	80
3.7	Accélération radiatives du calcium (tirets verts) et du fer (courbe bleue) du modèle de $1.44 M_{\odot}$ à 2.43 milliards d'années avec $Y_i = 0.297$ et $Z_i = 0.0305$ . La région en gris foncé représente la zone convective de surface. . . . .	83
3.8	profils d'abondance du calcium (tirets verts) et du fer (courbe bleue) du modèle de $1.44 M_{\odot}$ à 2.43 milliards d'années avec $Y_i = 0.297$ et $Z_i = 0.0305$ . Le panneau du haut représente un modèle prenant en compte la diffusion atomique sans les accélérations radiatives et le panneau du bas représente un modèle incluant en plus les accélérations radiatives. La région en gris foncé représente la zone convective de surface. . . . .	84
3.9	Profil d'opacité du modèle de $1.44 M_{\odot}$ à 2.43 milliards d'années avec $Y_i = 0.297$ et $Z_i = 0.0305$ . La courbe en trait plein bleu représente un modèle prenant en compte la diffusion atomique sans les accélérations radiatives et la courbe en tirets verts représente un modèle incluant en plus les accélérations radiatives. La région en gris foncé représente la zone convective de surface du modèle incluant les accélérations radiatives. La région en gris clair représente la zone convective du surface du modèle incluant la diffusion atomique sans les accélérations radiatives. . . . .	85
3.10	Profil de $\mu$ du modèle de $1.44 M_{\odot}$ à trois âges différents lorsque les accélérations radiatives ne sont pas prises en compte (panneau du haut) et lorsqu'elles le sont (panneau du bas). . . . .	86
3.11	profils d'abondance du calcium (tirets verts) et du fer (courbe bleue) pour le modèle de $1.44 M_{\odot}$ à 2.43 milliards d'années avec $Y_i = 0.297$ et $Z_i = 0.0305$ incluant les effets des accélérations radiatives et de la convection thermohaline. La région en gris foncé représente la zone convective de surface. . . . .	87
4.1	Abondances de lithium déterminées par Israelian et al. (2009). Les points rouges représentent les étoiles à planètes et les points blancs les étoiles sans planète, le Soleil est représenté par le point noir. La limite à $\log(N(Li)) = 1.5$ correspond à l'enveloppe supérieure de la limite inférieure d'un S/N=200 dans un jumeau solaire classique (Figure 1 de l'article Israelian et al. 2009). . . . .	90
4.2	Diagramme échelle des meilleurs modèles pour 16 Cygni A (panneau de gauche) et B (panneau de droite). Les fréquences obtenues à partir des observations sont représentées par les croix et les fréquences calculées à partir des modèles sont représentées par les points bleus ( $l=0$ ), les triangles verts ( $l=1$ ), les carrés rouges ( $l=2$ ) et les losanges noirs ( $l=3$ ). . . . .	93

4.3	Diagramme HR représentant les traces évolutives des modèles allant de $1.05$ à $1.14 M_{\odot}$ pour deux compositions chimiques initiales différentes. Les boîtes d'erreur spectroscopiques proviennent de Ramírez et al. (2009) (tirets rouges), Ramírez et al. (2011) (tirets-pointillés verts), Schuler et al. (2011) (pointillés bleus) et Tucci Maia et al. (2014) (pointillés noirs). Les traits épais noirs sont les segments de la trace évolutive où le rayon du modèle correspond au rayon interférométrique déterminé par White et al. (2013). Les symboles bleus correspondent aux modèles ayant une grande séparation égale à celle déterminée à partir des observations et les carrés bleus correspondent aux meilleurs modèles. . . . .	94
4.4	Accélération radiatives subies par le C, Mg et Fe en fonction de $\log(\Delta M/M_*)$ dans le modèle 16 Cygni A. . . . .	95
4.5	Profils d'abondance de C, Mg et Fe en fonction de $\log(\Delta M/M_*)$ dans les modèles de 16 Cygni A (traits pleins) et B (traits en tirets). . . . .	96
4.6	Évolution des abondances de C, Mg et Fe dans les modèles de 16 Cygni A (traits pleins) et B (traits en tirets). Le trait vertical indique l'âge des meilleurs modèles (6.4 Ga). . . . .	97
4.7	<b>Gauche</b> : Profils d'abondances en lithium en fonction de $T$ dans les modèles 16 Cygni A (traits pleins) et B (traits en tirets). <b>Droite</b> : Évolution de l'abondance en lithium dans les modèles 16 Cygni A (courbe verte) et B (courbe bleue). . . . .	98
4.8	Évolution de l'abondance de lithium (panneau de gauche), de béryllium (panneau du bas) et de métaux (panneau de droite) dans les modèles 16 Cygni A et B incluant un mélange à la base de la zone convective de surface. Les symboles noirs représentent les abondances observées par King et al. (1997) pour le lithium et Deliyannis et al. (2000) pour le béryllium. . . . .	99
4.9	Profils d'abondances de lithium (panneau de gauche) et de béryllium (panneau de droite) après l'accrétion de différente masse au début de la séquence principale. . . . .	100
4.10	Même figure que la figure 4.8 (panneau de gauche) incluant en plus l'évolution de l'abondance de lithium après l'accrétion de $0.66 M_{\oplus}$ sur 16 Cygni B au début de la séquence principale. . . . .	101
5.1	Abondance de lithium en fonction de $[Fe/H]$ pour différents échantillons d'étoiles. Les points noirs proviennent de Bonifacio et al. (2012), les cercles noirs de Sbordone et al. (2010), les triangles verts de Aoki et al. (2009), les triangles rouges de Hosford et al. (2009), les étoiles magentas de González Hernández et al. (2008), les carrés bleus de Asplund et al. (2006) et les gros points noir et blanc de Sbordone et al. (2012) (Figure 4 de l'article Sbordone et al. 2012). . . . .	118
5.2	Abondance de lithium en fonction de la température (gauche) et de $[Fe/H]$ (droite) provenant de Frebel et al. (2008) (étoiles rouges, HE1327-2326), Caffau et al. (2011) (étoiles rouges, SDSS), Meléndez et al. (2010) (cercles noirs) et Ryan et al. (2001) (points rouges). La ligne horizontale correspond à la détermination de WMAP Cyburt et al. (2008) (Figure 12 de l'article Frebel and Norris 2013). . . . .	119
5.3	Profils de $\mu$ en fonction de $\log(\Delta M/M_*)$ pour un modèle de $0.8 M_{\odot}$ et $Z_i = 10^{-4}$ à 1 (trait plein) et 6 milliards d'années (trait en pointillés). . . . .	120

5.4	Diagramme HR pour un modèle de $0.8 M_{\odot}$ sans accréation (trait pointillé noir) et avec accréation à 6.1 Ma de trois masses différentes. Le point noir représente le moment où l'accréation à lieu sur la trace évolutive. . . . .	122
5.5	Évolution au cours du temps de [Fe/H]. La légende est la même que Fig. 5.4. . . . .	123
5.6	Évolution au cours du temps de A(Li) (panneau du haut) et [C/Fe] (panneau du bas). La légende est la même que Fig. 5.4. . . . .	124
5.7	Profil de $\mu$ à 6.1 milliards d'années sans accréation (trait pointillé noir), au moment de l'accréation de $0.38 M_{Jup}$ (trait plein bleu) et après le mélange par convection thermique (trait plein vert). . . . .	125
5.8	Diagramme HR pour un modèle de $0.8 M_{\odot}$ sans accréation (trait pointillé noir) et avec accréation à 270 millions d'années de trois masses différentes. Le point noir représente le moment où l'accréation à lieu sur la trace évolutive. . . . .	126
5.9	Évolution au cours du temps de [Fe/H]. La légende est la même que Fig. 5.4. . . . .	127
5.10	Évolution au cours du temps de A(Li) (panneau du haut) et [C/Fe] (panneau du bas). La légende est la même que Fig. 5.4. . . . .	128
5.11	Profil de $\mu$ à 270 millions d'années sans accréation (trait pointillé noir), au moment de l'accréation de $0.38 M_{Jup}$ (trait plein bleu) et après le mélange par convection thermique (trait plein vert). . . . .	129

# Liste des tableaux

3.1	Résumé des précédentes études spectroscopiques de 94 Ceti A. . . . .	76
3.2	Résumé des propriétés de HD 19994b (Mayor et al., 2004). . . . .	76
3.3	Fréquences des modes p identifiés (en $\mu\text{Hz}$ ) pour 94 Ceti A. . . . .	77
3.4	Propriétés de 94 Ceti A déterminées par notre étude. . . . .	81
4.1	Propriétés du système 16 Cygni dans la littérature. . . . .	92
4.2	Propriétés de 16 Cygni A and B obtenues dans cette étude. Les valeurs de $Z_{surf}$ et $Y_{surf}$ sont les valeurs de surface à l'âge des meilleurs modèles. . . . .	95
5.1	Résumé des paramètres des modèles. . . . .	122

# Introduction

La diffusion atomique dans les étoiles est un processus étudié depuis longtemps (Chapman, 1917; Eddington, 1926), mais elle n'a été introduite que très récemment dans les modèles d'évolution stellaire. Ce processus a été évoqué pour expliquer les étoiles chimiquement particulières dans les années 70 (Praderie, 1967; Michaud, 1970a; Watson, 1970, 1971). Par la suite, de nombreuses études ont montré son importance pour la compréhension des étoiles en général, et en particulier pour le Soleil (Bahcall and Pinsonneault, 1992; Bahcall et al., 1995; Christensen-Dalsgaard et al., 1996; Richard et al., 1996; Ciacio et al., 1997; Gabriel, 1997; Morel et al., 1997; Brun et al., 1998; Elliott, 1998; Turcotte et al., 1998b). La mise en évidence des effets de la diffusion atomique dans ces étoiles a été possible grâce à l'héliosismologie et l'astérosismologie qui permettent de sonder les étoiles avec une très grande précision. Il n'est plus possible dans ces conditions de négliger ce processus dans les modèles stellaires.

Les étoiles sont des sphères de gaz auto-gravitantes composées d'un mélange de tous les éléments chimiques. L'équilibre de la structure stellaire conduit à des gradients internes de pression, de densité et de température ainsi qu'à un transfert radiatif, l'ensemble produisant un déplacement des éléments chimiques les uns par rapport aux autres. L'effet principal est dû à la compétition entre la gravité, qui entraîne les éléments vers le centre de l'étoile, et les accélérations radiatives, qui les pousse vers la surface. Pour les étoiles de masses supérieures à  $1.3 M_{\odot}$ , l'effet des accélérations radiatives peut être plus important que celui de la gravité pour certains éléments. Cela se produit aux endroits où les atomes absorbent les photons le plus efficacement et donc là où l'élément est le principal contributeur à l'opacité. Les photons transfèrent une partie de leur quantité de mouvement aux atomes concernés, ce qui les conduit à se déplacer globalement vers les régions superficielles de l'étoile. Le transport sélectif des éléments modifie ainsi les profils d'abondance à l'intérieur des étoiles ainsi que les profils d'opacité moyenne, ce qui conduit à des modifications de leur structure interne. L'introduction de la diffusion atomique dans les modèles permet en général un meilleur accord entre les observations et les résultats théoriques, même s'il persiste certains écarts. Dans la réalité, des processus de transports macroscopiques viennent s'ajouter aux effets de la diffusion atomique et doivent aussi être pris en considération dans les modèles.

De nombreuses études ont été menées sur les processus de transport macroscopiques pouvant avoir lieu dans les étoiles, comme le mélange induit par la rotation, les ondes de gravité ou

les effets d'une perte de masse. Cependant ces études n'incluaient pas les processus de transport macroscopique induits par la diffusion atomique elle-même. La diffusion atomique peut en effet provoquer une accumulation de certains éléments chimiques dans certaines régions de l'étoile et produire ainsi une augmentation locale de l'opacité. Dans certains cas, cette augmentation peut provoquer de la convection dynamique. Par ailleurs, un autre processus de transport macroscopique important, la convection thermohaline, n'avait pas été pris en considération jusqu'à présent. Il s'agit d'un processus physique bien connu, qui se produit dans les océans terrestres au niveau des pôles. L'instabilité est provoquée par un gradient de poids moléculaire inverse induit par une modification locale de la composition chimique. Le meilleur moyen d'étudier ce processus dans les étoiles repose sur des simulations numériques 3D. Ces simulations permettent de déterminer des prescriptions 1D utilisables pour une bonne description du phénomène dans les codes d'évolution stellaire.

Les satellites *CoRoT* et *Kepler*, en plus de l'étude détaillée des étoiles, ont permis la détection de nombreuses exoplanètes. L'étude de l'interaction entre planètes et étoiles hôtes est devenue primordiale pour comprendre l'évolution de ces étoiles. En particulier, la matière du disque ou les corps du système planétaire peuvent être accrétés par l'étoile centrale. Cela produit un gradient instable de poids moléculaire moyen à la base de la zone convective de surface. L'accrétion de matière planétaire peut ainsi produire de la convection thermohaline. La matière accrétée ne reste donc pas dans la zone convective de surface mais est diluée dans l'étoile. Le mélange induit par cet effet peut, si la masse accrétée est assez importante, conduire à une destruction des éléments légers en surface.

Cette thèse est consacrée à la modélisation d'étoiles de séquence principale incluant l'ensemble de ces processus. Afin de tester chacun d'entre eux le plus précisément possible, nous utilisons des données astérosismologiques provenant des satellites *CoRoT*, *Kepler* ou d'instruments au sol comme HARPS. Grâce à cela, nous calculons des modèles avec la structure interne la plus proche de celle de l'étoile observée, avec une meilleure précision que celle qui serait obtenue en utilisant uniquement les données spectroscopiques.

La première partie du travail de thèse a consisté à se familiariser avec deux codes différents d'évolution stellaire, le "Toulouse Geneva Evolution Code" et le code de Montréal/Montpellier, puis à y développer de nouvelles routines de calcul. Ces deux codes utilisent des méthodes différentes pour la microphysique en général, et la diffusion atomique en particulier. Il est donc très intéressant de comparer les résultats obtenus avec chacun des deux codes pour la même étoile, afin de s'assurer de la robustesse des résultats. Nous avons inclus dans ces deux codes le traitement de la convection thermohaline induite par la diffusion atomique, ainsi que le traitement de l'accrétion de matière et la convection thermohaline associée.

Dans le premier chapitre de ce manuscrit, nous détaillons la physique et les processus que nous avons utilisés dans les deux codes d'évolution stellaire. Nous expliquons aussi les bases de la théorie des oscillations stellaires.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les résultats obtenus lorsque l'on prend en compte la diffusion atomique incluant les accélérations radiatives et la convection thermohaline dans des modèles d'étoiles de type A. Nous montrons que ces processus modifient la structure interne des modèles mais aussi les profils d'abondance. Nous montrons aussi que sous certaines hypothèses il est possible de reproduire très correctement les abondances de surface des étoiles Am.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une étude détaillée de l'étoile 94 Ceti, dont les oscillations ont été observées avec HARPS. Nous montrons l'impact des accélérations radiatives

et de la convection thermohaline sur la détermination des paramètres de cette étoile à l'aide de la comparaison avec les données sismologiques.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons les conséquences de la convection thermohaline produite par l'accrétion de matière planétaire sur des étoiles de séquence principale. Nous étudions particulièrement le cas du très intéressant système 16 Cygni, situé dans le champ *Kepler*, qui comprend deux étoiles jumelles du Soleil, dont l'une seulement possède une planète. Cette dernière présente une déficience notable de lithium comparée à sa compagne, pour laquelle nous donnons une explication cohérente. Nous présentons aussi, dans le même chapitre, des résultats obtenus pour le cas des naines blanches.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous étudions l'effet de l'accrétion de matière et de la convection thermohaline associée sur les étoiles de faible métallicité. Les étoiles CEMP-*s* se forment par l'accrétion de vent provenant d'un compagnon AGB lors de son évolution. Le but de cette étude est de tester l'effet de la composition chimique du vent et de l'âge auquel se produit l'accrétion sur la formation d'une étoile CEMP, mais aussi de déterminer si la convection thermohaline couplée à de l'accrétion de matière permet d'expliquer les abondances en lithium présentes dans certaines étoiles pauvres en métaux.



# Chapitre 1

## Modélisation

### Sommaire

---

1.1	Codes d'évolution stellaire . . . . .	<b>6</b>
1.1.1	Paramètres physiques . . . . .	6
1.1.2	Traitement de l'équation de diffusion . . . . .	6
1.1.3	Accélération radiatives . . . . .	9
1.1.4	Convection . . . . .	13
1.1.5	Processus de mélange additionnels . . . . .	15
1.1.6	Accrétion . . . . .	15
1.2	Convection thermohaline . . . . .	<b>16</b>
1.2.1	Contexte . . . . .	16
1.2.2	Formalisme . . . . .	16
1.2.3	Prescriptions 1D . . . . .	17
1.2.4	Etude de la convection thermohaline induite par une accumulation d'éléments à l'aide de simulations 3D . . . . .	19
1.3	Astérosismologie . . . . .	<b>39</b>
1.3.1	Équations de la structure interne . . . . .	39
1.3.2	Linéarisation des équations . . . . .	40
1.3.3	Pulsations adiabatiques . . . . .	41
1.3.4	Approximation de Cowling et théorie asymptotique . . . . .	42
1.3.5	Grandes et petites séparations . . . . .	43
1.3.6	Diagramme échelle . . . . .	43
1.3.7	Détermination du "meilleur" modèle . . . . .	44
1.3.8	Méthodes d'inversion . . . . .	45

---

Ce chapitre présente les deux codes d'évolution stellaire utilisés pendant la thèse. Ces deux codes utilisent des méthodes numériques (traitement de la diffusion atomique) et une physique

différente (tables d'opacités, équation d'état, ...) ce qui rend la comparaison intéressante. Nous détaillons ici la physique utilisée et le traitement de la diffusion atomique. La théorie de la convection thermohaline est présentée ainsi que les prescriptions 1D existantes. Pour finir nous décrivons la théorie des oscillations stellaires et expliquons les méthodes utilisées pour déterminer les paramètres stellaires à partir des données sismiques.

## 1.1 Codes d'évolution stellaire

Cette section présente la physique que nous avons utilisée dans le code "Toulouse Geneva Evolution Code" (TGEC) et dans celui de Montréal/Montpellier ainsi que la façon dont sont implémentés les calculs de diffusion atomique et certains processus de mélange. Une description publiée dans la littérature a été effectuée pour le code TGEC par Hui-Bon-Hoa (2008) et Théado et al. (2012) et pour le code de Montréal/Montpellier par Turcotte et al. (1998b). Une comparaison des deux codes a aussi été faite par Théado et al. (2012).

### 1.1.1 Paramètres physiques

L'équation d'état utilisée dans le code TGEC est OPAL2001 (Rogers and Nayfonov, 2002) et celle utilisée dans le code de Montréal/Montpellier est CEFF (Christensen-Dalsgaard and Daepfen, 1992).

Les taux de réactions nucléaires utilisés dans le code TGEC proviennent de la formule analytique de la compilation NACRE (Angulo, 1999). Le code de Montréal/Montpellier utilise la routine de génération d'énergie nucléaire de Bahcall and Pinsonneault (1992).

Les opacités sont déterminées en utilisant le code et les données OPCODE v3.3 (Seaton, 2005) pour le TGEC lorsque l'on calcule les accélérations radiatives. Dans les autres cas nous avons utilisé les tables d'opacité OPAL 2001. Le code de Montréal/Montpellier utilise les tables monochromatiques OPAL. Dans les deux cas, cela permet un calcul de manière cohérente de l'opacité de Rosseland à chaque pas de temps et à chaque couche du modèle tout en tenant compte des variations locales des abondances. Une différence entre ces deux tables est le nombre d'éléments chimiques disponibles. Les tables OP contiennent les opacités pour H, He, Li, Be, B, C, N, O, Ne, Mg, Ca et Fe (ainsi que S et Al qui ne sont pas utilisées dans le TGEC) alors que les tables OPAL contiennent les opacités pour H, He, C, N, O, Na, Ne, Mg, Al, Si, P, S, Cl, Ar, K, Ca, Ti, Cr, Mn, Fe et Ni.

### 1.1.2 Traitement de l'équation de diffusion

L'évolution de la concentration  $c$  d'un élément chimique  $i$  répond à l'équation de diffusion :

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_{Hi} \rho c_i) - \lambda_n \rho c_i \quad (1.1)$$

où  $\rho$  est la densité,  $r$  le rayon par rapport au centre de l'étoile,  $V_{Hi}$  la vitesse de diffusion de l'élément  $i$  par rapport à l'hydrogène et  $\lambda_n$  le taux de réactions nucléaires.

Les calculs des vitesses de diffusion ( $V_{Hi}$ ) sont basés sur l'équation de Boltzmann pour les plasmas dilués dominés par les collisions. La solution de l'équation à l'équilibre est une fonction

de distribution Maxwellienne. En partant de petites variations à la distribution Maxwellienne, il est possible de déterminer les caractéristiques du transport des éléments dans les étoiles. Deux méthodes de calcul se basant sur ce principe ont ainsi été développées.

## TGEC

La première méthode, utilisé dans le code TGEC, repose sur la théorie de Chapman-Enskog (Chapman and Cowling, 1970) qui considère que la fonction de distribution totale d'un élément donné peut être écrite comme une série convergente dont les différents termes représentent des approximations successives de la fonction de distribution. Ce calcul est fait pour un élément test par rapport au milieu environnant, généralement l'hydrogène dans le cas stellaire, en tenant compte de la diffusion des électrons et de l'effet du champ électrique. On obtient ainsi une "vitesse de diffusion" par rapport à l'hydrogène.

En se basant sur le formalisme de Chapman and Cowling (1970) la vitesse de diffusion entre l'hydrogène et un élément trace  $i$  (élément ayant une faible abondance) s'écrit :

$$V_{Hi} = D_{Hi} \left[ -\nabla \ln c_i + k_p \nabla \ln p + \kappa_T \nabla \ln T - \frac{f_i}{k_B T} \right] \quad (1.2)$$

où  $D_{Hi}$  est le coefficient de diffusion de l'élément  $i$  par rapport à l'hydrogène et  $\kappa_T$  est la diffusivité thermique. Ces deux coefficients sont calculés avec le formalisme de Paquette et al. (1986).  $c_i$  est la concentration de l'élément  $i$  et  $f_i$  est l'ensemble des forces extérieures appliquées à l'élément  $i$  (par exemple les forces radiatives).  $p$  est la pression,  $T$  est la température. En tenant compte du champ électrique créée par la séparation des ions et des électrons, le second terme de l'équation prenant en compte l'effet de triage gravitationnel s'écrit :

$$k_p \nabla \ln p = \left( A_i - \frac{Z_i}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{m_p G m_r}{k_B T r^2} \quad (1.3)$$

où  $A_i$  et  $Z_i$  sont respectivement le nombre de masse et la charge de l'élément  $i$ ,  $m_p$  est la masse d'un proton,  $G$  est la constante de gravité,  $m_r$  est la masse en dessous du rayon  $r$ .

En ne considérant que les forces radiatives comme forces extérieures (voir Section 1.1.3) appliquées à l'élément  $i$ , la vitesse de diffusion s'écrit alors

$$V_{Hi} = D_{Hi} \left[ -\nabla \ln c_i + \left( A_i - \frac{Z_i}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{m_p}{k_B T} g + \kappa_T \nabla \ln T - \frac{A_i m_p}{k_B T} g_{rad,i} \right] \quad (1.4)$$

L'abondance d'hélium n'étant pas négligeable, l'approximation de diffusion d'un élément trace n'est plus valide pour cet élément et des corrections sont ajoutées, basées sur les travaux de Montmerle and Michaud (1976) :

$$V_{He} = \langle D_{He} \rangle \left( (1 + \gamma) \left[ -\nabla \ln c_{He} + \bar{\Phi}_{He} + \frac{(A_{He} - 1) + K(A_{He} - \bar{Z})}{\lambda(1 + A_{He}\gamma)} \nabla \ln p + \kappa_T \nabla \ln T \right] - \frac{\langle f_{He} \rangle}{k_B T} \right) \quad (1.5)$$

où  $D_{He}$  est le coefficient de diffusion moyen de tout les états d'ionisation de He,  $\gamma$  est le rapport (en nombre) entre l'hélium et l'hydrogène,  $c_{He}$  est la concentration en hélium,  $\bar{\Phi}_{He}$  est la contribution moyenne de l'ionisation de l'hélium sur tous les états d'ionisation,  $K$  est un coefficient égal

à un la plupart du temps,  $A_{He}$  est le nombre de masse de l'hélium,  $\bar{Z}$  est la charge moyenne de l'hélium (en prenant en compte tous les états d'ionisation).  $\langle f_{He} \rangle$  est la force radiative moyenne appliqué à l'hélium.  $\lambda$  est un terme correctif semi-empirique de la forme  $\lambda = 1 + \gamma(\bar{Z} - 1)(\gamma - 1)$ .

### Code de Montréal/Montpellier

La seconde méthode est basée sur les équations de Burgers (1969) et utilise le terme de collision de Fokker-Planck dans l'équation de Boltzmann. Ainsi les équations de flux et de chaleur sont résolues simultanément pour tous les éléments ce qui permet un traitement plus adapté que la méthode de Chapman and Cowling (1970) pour un gaz contenant beaucoup d'éléments.

Le formalisme de Burgers consiste à résoudre une équation de transfert d'impulsion pour chaque élément chimique  $i$ ,

$$\frac{dP_i}{dr} + m_i n_i g_{eff,i} + n_i Z_i (eE) = \sum_j K_{ij} (\omega_i - \omega_j) + \sum_j K_{ij} z_{ij} \frac{m_j r_i - m_i r_j}{m_i + m_j}, \quad (1.6)$$

une équation de transfert de chaleur pour chaque élément chimique  $i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} n_i k \frac{dT}{dr} = & - \frac{2}{5} K_{ii} z''_i r_i - \frac{5}{2} \sum_{j \neq i} K_{ij} z_{ij} \frac{m_j}{m_i + m_j} (\omega_j - \omega_i) \\ & - \sum_{j \neq i} \frac{K_{ij}}{(m_i + m_j)^2} (3m_i^2 + m_j^2 z'_{ij} + 0.8 m_i m_j z''_{ij}) r_i \\ & + \sum_{j \neq i} \frac{K_{ij} m_i m_j}{(m_i + m_j)^2} (3 + z'_{ij} - 0.8 z''_{ij}) r_j, \end{aligned} \quad (1.7)$$

une équation de la conservation de la masse,

$$\sum_i A_i m_i \omega_i = 0, \quad (1.8)$$

et une équation de conservation de la charge

$$\sum_i Z_i m_i \omega_i = 0, \quad (1.9)$$

où  $r$  est le rayon,  $m_i$  est la masse de l'élément  $i$ ,  $A_i$  sa masse atomique,  $Z_i$  sa charge,  $P_i$  sa pression partielle,  $n_i$  sa densité (en nombre),  $g_{eff,i} = g - g_{rad,i}$  est la gravité effective,  $\omega_i$  est sa vitesse nette par rapport au centre de masse.  $K_{ij}$  et  $z_{ij}$ ,  $z'_{ij}$  et  $z''_{ij}$  sont respectivement le coefficient relié aux résistances mutuelles et les paramètres reliés aux interactions entre les éléments  $i$  et  $j$ . Ces équations sont aussi résolues pour les électrons.

La résolution des équations de Burgers permet de calculer une vitesse de diffusion pour tous les éléments qui est ensuite incluse dans l'équation de continuité.

### 1.1.3 Accélérations radiatives

Les accélérations radiatives proviennent d'un transfert de quantité de mouvement entre les photons et la matière. Cet effet peut être pris en compte dans les étoiles par l'intermédiaire du terme  $f_i$  de l'expression de la vitesse de diffusion (cf. equation 1.2). L'accélération résultante est la somme de deux contributions. La première provient des transitions liées-liées et l'accélération induite par l'ensemble des transitions  $l$  s'écrit :

$$g_{i,\text{line}} = \frac{1}{A_i m_p c N_i} \sum_l N_{i,k} \int_0^\infty \sigma_{i,l} \phi_\nu d\nu \quad (1.10)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière,  $N_{i,k}$  est la densité (en nombre) de l'ion  $E^{+i}$  étant dans un état énergétique  $k$  avant absorption d'un photon provenant de la transition  $l$ ,  $\phi_\nu$  est le flux d'énergie de photon,  $\sigma_{i,l}$  est la section efficace de l'absorption de la transition  $l$  à la fréquence  $\nu$ . La seconde contribution aux forces radiatives provient de l'absorption liée-libre et s'écrit :

$$g_{i,\text{cont}} = \frac{1}{A_i m_p c N_i} \sum_j N_{i-1,j} \int_{\frac{\chi_{i-1,j}}{h}}^\infty f_{i-1,j}(\nu) \sigma_{i-1,j} \phi_\nu d\nu \quad (1.11)$$

Le terme  $f_{i-1,j}$  prend en compte le fait que seulement une partie de la quantité de mouvement est transférée à l'ion  $E^{+i}$  et que l'autre partie s'échappe avec l'électron.  $\chi_{i-1,j}$  est le potentiel d'ionisation de l'élément  $E$  depuis le niveau  $j$  et  $h$  est la constante de Planck.

L'accélération radiative totale sur l'élément  $E$  peut ainsi s'écrire :

$$g_{\text{rad},E} = \frac{\sum_i N_i (g_{i,\text{line}} + g_{i,\text{cont}})}{\sum_i N_i} \quad (1.12)$$

où  $N_i$  est la densité en nombre de l'ion  $E^{+i}$ .

#### TGEC - Approximation Single Valued Parameter (SVP)

La méthode SVP permet un calcul relativement rapide des accélérations radiatives pour les éléments disponibles dans les tables d'opacités OP (Seaton, 2005). Le principe est de séparer les termes dépendants de l'abondance de l'ion  $E^{+i}$  des termes dépendants des données atomiques. Il est ainsi possible d'écrire la contribution des transitions liés-liés sous la forme suivante en utilisant l'approximation SVP (LeBlanc and Alecian, 2004) :

$$g_{i,\text{line}} = q \varphi_i^* (1 + \xi_i^* c_i) \left( 1 + \frac{c_i}{b \psi_i^{*2}} \right)_i^\alpha, \quad (1.13)$$

où

$$q = 5.575 \times 10^{-5} \frac{T_{\text{eff}}^4}{T} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{A_E}, \quad (1.14)$$

et

$$b = 9.83 \times 10^{-23} \frac{N_e T^{-1/2}}{X_H}. \quad (1.15)$$

$T_{\text{eff}}$  and  $R$  sont la température effective et le rayon de l'étoile,  $T$  et  $r$  sont la température et le rayon local,  $N_e$  est la densité électronique,  $X_H$  est la fraction de masse d'hydrogène,  $A_E$  est le nombre de masse en unité atomique de l'espèce chimique considérée et  $c_i$  est la concentration (en nombre) de l'ion par rapport à l'hydrogène. Les paramètres  $\varphi_i^*$ ,  $\xi_i^*$  et  $\psi_i^*$  sont les valeurs de  $\varphi_i$ ,  $\xi_i$  et  $\psi_i$  calculées là où la population de l'ion  $E^{+i}$  est proche de son maximum. Il est possible d'écrire  $g_{i,\text{line}}$  sous cette forme car les paramètres  $\varphi_i$ ,  $\xi_i$  et  $\psi_i$  varient très peu autour des couches où l'ion  $E^{+i}$  donne sa plus importante contribution à l'accélération radiative totale de l'élément  $E$ . Cependant il y a de faibles variations en fonction des étoiles que l'on souhaite modéliser.

Ces paramètres sont calculés à l'aide des expressions suivantes (Alecian and LeBlanc, 2002) :

$$\begin{cases} \varphi_i = \bar{\kappa}_{\text{med}} \sum_l \frac{\eta_{il} P_l}{\kappa_{\text{med}}}, \\ \psi_i = \frac{\sum_l \left( \frac{\eta_{il} \gamma_{il}}{\kappa_{\text{med}}} \right)^{1/2} P_l}{\sum_l \frac{\eta_{il}}{\kappa_{\text{med}}} P_l}, \\ \xi_i = \frac{N_E}{N_i} \frac{\sum_l (\bar{\delta}_E - \delta_{il}) \left( \frac{\eta_{il} \gamma_{il}}{\kappa_{\text{med}}} \right)^{1/2} P_l}{\sum_l \left( \frac{\eta_{il} \gamma_{il}}{\kappa_{\text{med}}} \right)^{1/2} P_l}, \end{cases} \quad (1.16)$$

où

$$\begin{cases} \eta_{il} = \frac{N_{il}}{N_i} f_i \\ P_l = u_l^4 \frac{e^{u_l}}{(e^{u_l} - 1)^2} \text{ avec } u_l = \frac{h\nu_l}{kT} \\ \delta_{il} = \frac{1}{c_E} \frac{\kappa_E - \kappa_{il}}{\kappa_{\text{med}}} \text{ et } \bar{\delta}_E = \frac{1}{c_E} \frac{\bar{\kappa}_E}{\kappa_{\text{med}}} \end{cases} \quad (1.17)$$

Le symbole  $\bar{\cdot}$  correspond aux valeurs moyennées sur toutes les fréquences,  $\nu_l$  correspond à la fréquence du centre de la raie,  $\kappa_{\text{med}}$  est l'opacité du milieu environnant (provenant des autres sources que l'élément considéré),  $\kappa_E$  est l'opacité liée à l'élément  $E$ ,  $\kappa_{il}$  est l'opacité liée à la transition  $l$  de l'ion  $E^{+i}$  (à la fréquence du centre de la raie).  $N_{il}$  est la densité (en nombre) de l'ion  $E^{+i}$  dans un niveau initial correspondant à la transition  $l$ ,  $N_i$  est la densité (en nombre) de l'ion  $E^{+i}$ ,  $c_E = N_E/N_H$ ,  $f_i$  est la force d'oscillateur (oscillator strenght). Le code TGEC utilise des tables des paramètres  $\varphi_i^*$ ,  $\xi_i^*$  et  $\psi_i^*$  pour différentes masses afin de calculer le terme  $g_{i,\text{line}}$ .

La contribution liée aux transitions liées-libres est différente de la contribution des raies car le moment acquis durant la photoionisation est transféré à l'ion créé. Une formule approchée pour les transitions liées-libres peut être déterminée dans le cas où l'on suppose que la section efficace de photoionisation suit une loi de puissance proche du cas hydrogénoïde et que la quantité de mouvement prélevée par l'électron est négligeable. Il est ainsi possible d'écrire la contribution aux accélérations radiatives dues aux transitions liées-libres sous la forme (Alecian and LeBlanc, 2002) :

$$g_{i,\text{cont}} \approx 7.16 \times 10^{-26} \frac{N_e T_{\text{eff}}^4}{T^{3/2}} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{A_E^2} \Theta_i, \quad (1.18)$$

où

$$\Theta_i \approx a_i \frac{N_{i-1,0} p_{i-1}}{N_{i-1} p_i g_0} \sum_k n_k g_k Q_k \quad (1.19)$$

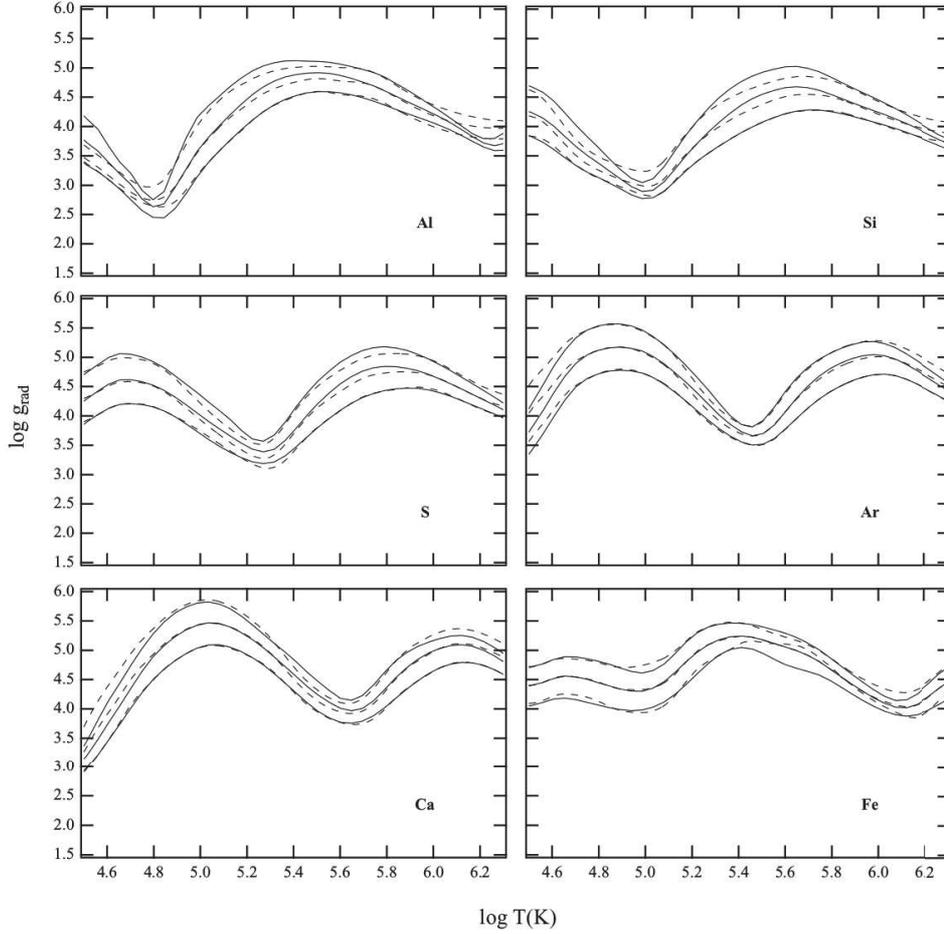


FIGURE 1.1: Comparaison entre les accélérations radiatives calculées avec la méthode SVP (courbes en traits pleins) et celle calculées par Seaton (1997) (courbes en pointillés) pour différent élément. (Figure 2 de l'article LeBlanc and Alecian (2004)).

et

$$Q_k \approx u_k^3 \left[ \frac{u_k}{1 - e^{-u_k}} - e^{u_k} \ln(1 - e^{-u_k}) \right] \quad (1.20)$$

$N_{i-1,0}$  est la densité (en nombre) du niveau fondamental de l'ion  $E^{+(i-1)}$  et  $N_{i-1}$  est la densité (en nombre) de cet ion,  $p_i$  est la fonction de partition de  $E^{+i}$ ,  $n_k$  et  $g_k$  sont respectivement le nombre quantique principal et le poids statistique en énergie du niveau  $k$  et,  $u_k = hv_k/k_B T$  et  $\kappa_{\text{med},k}$  sont respectivement évalué à la fréquence seuil d'ionisation depuis le niveau  $k$ . Le terme  $\Theta_i$  écrit sous cette forme suppose que  $\kappa_{\text{med}}/\kappa_{\text{med},k} = 1$  comme défini par l'approximation SVP. Cette approximation rend l'équation plus facilement utilisable car il n'est pas nécessaire d'utiliser les opacités monochromatiques pour calculer  $\Theta_i$ .

La contribution totale aux accélérations radiatives peut ensuite s'écrire comme l'équation 1.12. Cette méthode permet ainsi de calculer d'une façon relativement rapide les accélérations radiatives dans le code TGEC pour H, He, Li, Be, B, C, N, O, Ne, Mg, Ca et Fe. Les tables des paramètres  $\varphi_i^*$ ,

$\xi_i^*$  et  $\psi_i^*$  sont disponibles pour des masses allant de 1 à 5  $M_\odot$  et permettent de calculer des modèles prenant en compte les accélérations radiatives à chaque pas de temps compte tenu de la variation de la structure et des abondances locales de l'étoile.

La figure 1.1 montre la comparaison entre les accélérations radiatives calculées à partir de l'approximation SVP et celles calculées par Seaton (1997). La méthode de Seaton (1997) consiste à calculer les accélérations radiatives en utilisant l'approximation de diffusion (profondeur optique importante dans les intérieurs stellaires) à partir du flux radiatif, de l'opacité de Rosseland et d'une quantité adimensionnée  $\gamma$ . On voit que l'accord est très bon et que la méthode SVP peut être utilisée sans problème dans les codes d'évolution stellaire.

### Code de Montréal/Montpellier

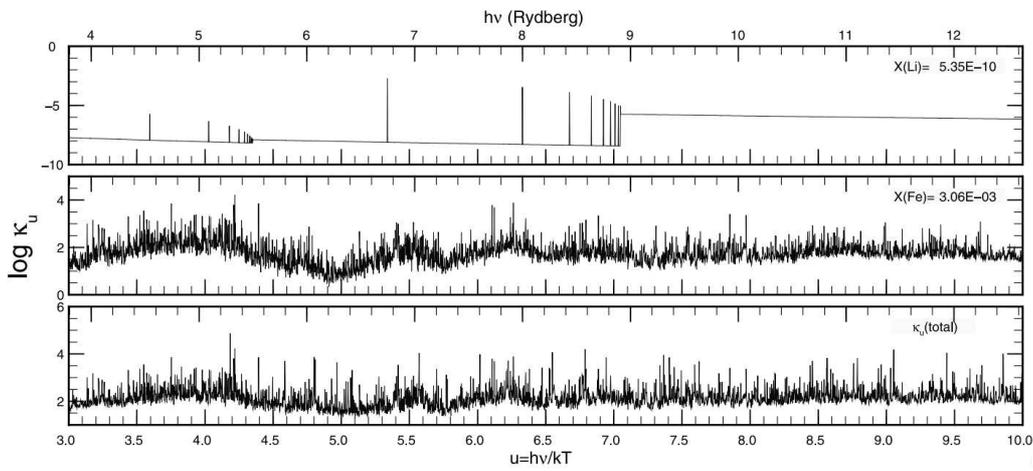


FIGURE 1.2: Spectre d'opacité du lithium et du fer ainsi que l'opacité totale en cgs à une profondeur où  $\log T = 5.3$  et  $\log \rho = -4.6$ . L'intervalle de fréquence adimensionnée  $u$  couvre une gamme où la majorité du flux passe.

Dans les intérieurs stellaires où la profondeur optique est importante, les accélérations radiatives sur l'élément  $E$  peuvent s'écrire (Richer et al., 1998) :

$$g_{rad,E} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{L_r^{rad}}{c} \frac{\bar{\kappa}_R}{X_E} \int_0^\infty \frac{\kappa_\nu(E)}{\kappa_\nu(\text{total})} \mathcal{P}(u) du, \quad (1.21)$$

où

$$\mathcal{P}(u) \equiv \frac{15}{4\pi^4} \frac{u^4 e^u}{(e^u - 1)^2}. \quad (1.22)$$

Le calcul de l'intégrale de l'équation 1.21 nécessite de connaître la contribution à l'opacité à chaque fréquence (opacité monochromatique) de l'élément  $E$  ainsi que l'opacité de tous les éléments à chaque fréquence. Les tables d'opacités monochromatiques OPAL sont incluses dans le code de Montréal/Montpellier. La figure 1.2 montre les spectres d'opacités du lithium et du fer qui sont ensuite intégrés pour calculer les accélérations radiatives.

La figure 1.3 montre une comparaison des accélérations radiatives calculées dans le code de Montréal/Montpellier dans le cas où est incluse la redistribution du moment cinétique entre les

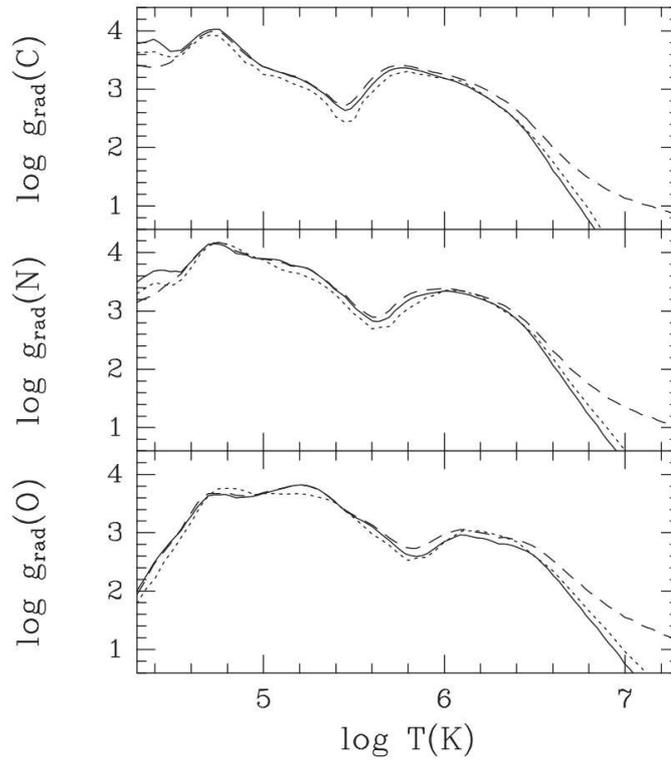


FIGURE 1.3: Comparaison entre les accélérations radiatives calculées dans le code de Montréal/Montpellier dans différents cas. (Figure 7 de l'article Richer et al. (1998)).

élections et les ions ainsi qu'une moyenne du moment cinétique retransmis sur tous les ions d'une même espèce. La courbe en tirets montre les accélérations radiatives calculées avec OPAL sans utiliser les corrections précédentes et les courbes en pointillés montre les accélérations radiatives calculées avec la méthode GLAM (Gonzalez et al., 1995). La méthode GLAM calcule les accélérations radiatives en incluant des processus physiques (grâce aux tables d'opacités monochromatiques OP) non pris en compte dans les études précédentes. Elle inclut la prise en compte d'un nouveau mécanisme d'élargissement des raies, la prise en compte de l'excitation, l'ionisation, la diffusion et la photoionisation électronique pour la redistribution du moment à tous les états d'ionisations à l'aide d'un modèle basé sur des comparaisons avec des taux de collisions. Cette méthode prend aussi en compte les sections efficaces de photoionisation incluses dans les tables OP ainsi qu'une forme plus complexe du spectre du continuum. On remarque un très bon accord entre les calculs du 1er et du second cas ce qui indique que la méthode de calcul, utilisant les tables monochromatiques OPAL, donne de bons résultats.

#### 1.1.4 Convection

Les codes d'évolution stellaire permettent de calculer la structure interne et les profils d'abondances au cours du temps. La séparation entre la(les) zone(s) radiative(s) et convective(s) est déterminée par le critère de Schwarzschild ou le critère de Ledoux qui prend en compte l'effet de la composition chimique. Une région est stable si :

$$\begin{cases} \nabla_{ad} - \nabla > 0 & \text{Schwarzschild} \\ \nabla_{ad} - \nabla + \nabla_{\mu} > 0 & \text{Ledoux} \end{cases} \quad (1.23)$$

où  $\nabla_{ad}$  et  $\nabla$  sont les gradients de température adiabatique et local usuels en  $\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$ ,  $\nabla_{\mu} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln P}$  est le gradient de composition chimique. Le critère de Ledoux prend en compte l'effet stabilisateur d'un gradient de concentration sur le déclenchement de la convection dynamique. A l'intérieur des zones convectives, les gradients de température ainsi que le transport d'énergie sont définis par la théorie de la longueur de mélange dans les deux codes d'évolution. Cette théorie initialement développée par Prandtl (1925), permet de calculer le transfert de chaleur s'il se fait à la fois par convection ou radiation. Le flux total d'énergie s'écrit :

$$F_{tot} = F_{rad} + F_{conv} = \frac{4acGT^4m}{3\kappa_R pr^2} \nabla_{rad} \quad (1.24)$$

où  $F_{rad}$  et  $F_{conv}$  sont les flux radiatif et convectif locaux,  $p$  est la pression,  $\kappa_R$  est l'opacité de Rosseland,  $m$  la masse d'un proton,  $a$  la constante de radiation et  $c$  la vitesse de la lumière.  $\nabla_{rad}$  est le gradient thermique lorsque le transfert de chaleur se fait uniquement par radiation et s'exprime :

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa L_r p}{mT^4} \quad (1.25)$$

où  $L_r$  la luminosité au rayon  $r$ . Le flux radiatif local s'écrit :

$$F_{rad} = \frac{4acGT^4m}{3\kappa_R pr^2} \nabla \quad (1.26)$$

où  $\nabla$  est le gradient de température local.

Il est possible d'utiliser la longueur de mélange pour exprimer  $v$  et  $\Delta T$  et en se donnant  $A/V$ , où  $A$  est l'aire de l'élément convectif et  $V$  son volume, on peut calculer le flux convectif puis le gradient de température local. Le flux convectif d'une particule fluide ayant une température supérieur au milieu environnant de  $\Delta T$ , se déplaçant avec une vitesse "verticale"  $v$  et dont la pression  $p$  reste en équilibre avec le milieu s'écrit :

$$F_{conv} = \rho v c_p \Delta T \quad (1.27)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $c_p$  est la capacité calorifique à pression constante.

Dans les modèles on utilise le paramètre  $\alpha = l/H_p$  ( $H_p$  étant l'échelle de hauteur de pression et  $l$  la longueur de mélange). Ce paramètre  $\alpha$  est calibré à partir des modèles solaires.

Ces effets de la convection sur la composition chimique peuvent être traités de deux façons différentes. On peut considérer que le temps de retournement de la zone convective est très inférieur au temps des autres processus de mélange et simplement homogénéiser la composition chimique dans toutes les zones convectives. On peut aussi considérer le mélange convectif comme très turbulent et ajouter un coefficient de diffusion turbulente très important (dans le code de de Montréal/Montpellier  $D_{turb,conv} = 5 \times 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ) ce qui revient à homogénéiser la composition chimique.

### 1.1.5 Processus de mélange additionnels

Certains processus de mélange additionnels peuvent être traités de manière diffusive à travers un coefficient de diffusion qui est ajouté à la vitesse de diffusion (cf equation 1.4) d'un élément chimique. La vitesse de diffusion s'écrit alors de la manière suivante :

$$V_{Hi} = D_{Turb} [-\nabla \ln c_i] + D_{Hi} \left[ -\nabla \ln c_i + \left( A_i - \frac{Z_i}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{m_p}{k_B T} g + \kappa_T \nabla \ln T - \frac{A_i m_p}{k_B T} g_{rad,i} \right] \quad (1.28)$$

où  $D_{Turb}$  est le coefficient de diffusion turbulente. Il est donc nécessaire de pouvoir écrire une prescription 1D de ce coefficient pour tous les processus diffusifs que l'on souhaite étudier. Cela peut être fait de façon analytique en dérivant les équations fluides sous certaines hypothèses ou à partir de simulation 2D/3D. Ceci permet de tenir compte de processus comme la rotation (Zahn, 1992; Talon and Charbonnel, 2005; Alecian et al., 2013, et références associées), la semi-convection (Langer et al., 1983; Moore and Garaud, 2016, et références associées) et la convection thermohaline (Denissenkov, 2010; Traxler et al., 2011; Brown et al., 2013; Zemsanova et al., 2014).

On peut remarquer d'après l'équation 1.28 que les effets de la diffusion atomique ont toujours lieu quelque soit le type d'étoiles étudié mais que ses effets peuvent être atténués localement si le coefficient  $D_{Turb}$  est important. De plus il faut faire très attention lorsque deux processus de mélange additionnels sont pris en compte car la simple somme des coefficients de diffusion turbulente néglige les effets de couplage qui peuvent faire qu'un processus est inhibé ou favorisé.

### 1.1.6 Accrétion

Afin de traiter le cas d'accrétion d'un système planétaire, d'un disque protoplanétaire ou de débris, ou d'un transfert de masse d'un compagnon, j'ai modifié dans le code TGEC le processus d'accrétion associé et je l'ai inclus dans le code de Montréal/Montpellier. La composition chimique de la matière accrétée peut être modifiée en fonction des cas afin de pouvoir à la fois traiter l'accrétion de matière planétaire ou par exemple de matière du milieu interstellaire. Les critères que nous utilisons pour appliquer ce processus sont les suivants :

- la masse accrétée ne doit pas dépasser  $1/100^{\text{ème}}$  de la masse de l'étoile.
- la matière accrétée est homogénéisée dans la zone convective de surface pendant un pas de temps évolutif.

La première hypothèse assure qu'il n'est pas nécessaire de changer la masse de l'étoile dans le calcul de la structure lorsqu'il y a de l'accrétion. La seconde hypothèse repose sur le fait que le temps de retournement de la zone convective est très inférieur au pas de temps évolutif ( $t_{r,\odot} \approx 100s$  alors qu'un pas de temps évolutif est plutôt de l'ordre de  $10^5 - 10^6$  ans). On considère ainsi que la matière accrétée à l'équateur ou aux pôles est uniformément répartie sur toute l'étoile compte tenu du fait que les modèles sont 1D. Cette hypothèse peut être remise en question mais il est actuellement impossible de procéder d'une manière différente dans les codes d'évolution stellaire. La composition chimique de la zone convective après accrétion est renormalisée de sorte à ce que  $X + Y + Z = 1$  ( $X$ ,  $Y$  et  $Z$  étant respectivement la fraction de masse d'hydrogène, d'hélium et de métaux). Il est donc possible de réaliser une accrétion ponctuelle d'un objet ou une accrétion continue en fixant une masse accrétée par pas de temps évolutif.

## 1.2 Convection thermohaline

### 1.2.1 Contexte

La convection thermohaline (ou double-diffusive ou *fingering convection*) est un processus bien connu en océanographie. Cette instabilité a lieu en particulier au niveau des pôles terrestres à l'endroit où l'eau se transforme en glace à la base des glaciers. La glace n'incluant pas le sel, l'eau restante se retrouve avec une très forte salinité qui déclenche l'instabilité qui prend la forme de doigts appelés "doigts de sel". Ces bulles de fluide contiennent une quantité de sel plus importante que le milieu dans lequel ils tombent. La diffusivité thermique étant plus importante que la diffusivité des particules dans l'eau les bulles de fluide continuent de tomber. Tout ceci jusqu'à ce que la diffusivité thermique devienne du même ordre que la diffusivité des particules ou jusqu'à ce que la sur-salinité soit gommée. En plus de cet effet, ce processus est à l'origine de grands courants marins sur Terre (circulation thermohaline) tels que le *Golf Stream*.

Dans les étoiles, un processus similaire a lieu lorsque de la matière lourde se retrouve au-dessus de matière plus légère en présence d'un gradient de température stable. Ce genre de situation apparaît dans le cas d'une accumulation d'éléments lourds provoquée par la diffusion atomique (par exemple par l'effet des accélérations radiatives) à l'intérieur des étoiles (Théado et al., 2009), dans le cas d'accrétion de matière planétaire (Vauclair, 2004; Deal et al., 2013) ou dans le cas d'accrétion de matière provenant d'une étoile compagne dans un système binaire (Stancliffe and Glebbeek, 2008; Thompson et al., 2008). Ce processus a été évoqué comme responsable du mélange dans le cas d'une diminution de  $\mu$  produite par des réactions nucléaires dans les géantes rouges (Charbonnel and Zahn, 2007), mais les valeurs du coefficient de mélange utilisés dans cette étude étaient surestimées.

### 1.2.2 Formalisme

L'instabilité thermohaline apparaît lorsque :

$$\begin{cases} N^2 = N_t^2 + N_\mu^2 > 0 \\ N_t^2 = \frac{g}{H_p} \delta (\nabla_{ad} - \nabla) > 0 \\ N_\mu^2 = \frac{g}{H_p} \phi \nabla_\mu < 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

où  $N^2$  est la fréquence de Brunt-väisälä,  $N_t^2$  est la fréquence thermique et  $N_\mu^2$  est la fréquence caractéristique liée à la composition chimique et  $H_p$  est l'échelle de hauteur de pression.  $\nabla_{ad}$  et  $\nabla$  sont les gradients adiabatique et local usuels en  $\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$ ,  $\nabla_\mu = \frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln P}$  est le gradient de composition chimique,  $\delta = \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_{P, \mu}$  et  $\phi = \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \right)_{P, T}$ .

Ce processus peut être caractérisé par le rapport de densité  $R_0$ , rapport entre le gradient stabilisateur d'entropie et le gradient déstabilisateur de composition chimique (Ulrich, 1972) :

$$R_0 = \frac{\nabla_{ad} - \nabla}{\left| \frac{\phi}{\delta} \nabla_\mu \right|} \quad (1.30)$$

Si  $R_0 < 1$ , le gradient déstabilisateur de composition chimique domine, le système est instable par le critère de Ledoux et le milieu est alors mélangé par convection dynamique. Si  $R_0 \gg 1$ , le gradient d'entropie domine et la région est stable. La convection thermohaline a lieu lorsque le

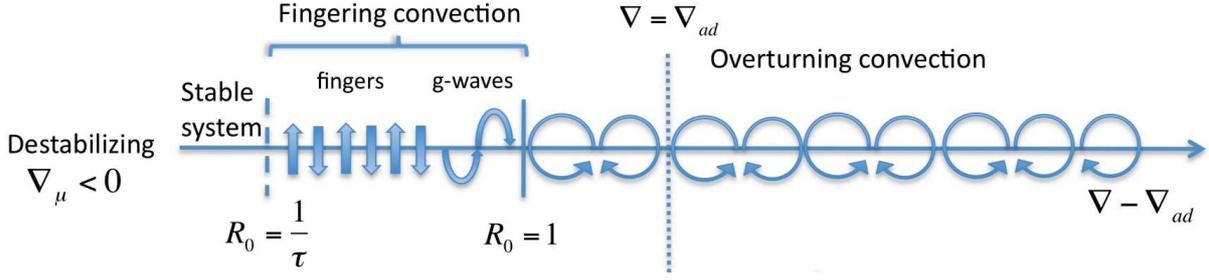


FIGURE 1.4: Représentation des états d'un système en fonction de  $\nabla - \nabla_{ad}$  dans le cas d'un gradient de  $\mu$  instable. Tant que  $R_0 < 1$  le système est instable pour la convection dynamique (critère de Ledoux). Ensuite pour  $1 < R_0 < 1/\tau$  le système est instable et subit la convection thermohaline. Pour  $R_0 > 1/\tau$  le système est stable. (Cette figure est extraite de Garaud 2013).

milieu est stable pour le critère de Ledoux et lorsque la diffusivité thermique est dominante devant la diffusivité des particules (Fig. 1.4) ce qui se traduit par :

$$1 < R_0 < \frac{1}{\tau} \quad (1.31)$$

où  $\tau = \frac{\kappa_\mu}{\kappa_T}$  est le nombre de Lewis inverse, rapport de la diffusivité atomique  $\kappa_\mu$  et de la diffusivité thermique  $\kappa_T = \frac{4acT^3}{3\kappa_R c_P \rho^2}$ .

### 1.2.3 Prescriptions 1D

Afin de prendre en compte ce processus de mélange dans les codes d'évolution stellaire il a fallu déterminer des prescriptions à une dimension sous la forme d'un coefficient de diffusion turbulente inclus dans la vitesse de diffusion comme indiqué eq. 1.28.

Les premiers travaux sur le sujet étaient purement analytiques (Ulrich, 1972; Kippenhahn et al., 1980). En utilisant des approches différentes ils ont déterminé une prescription similaire, se différenciant principalement sur le rapport d'aspect des "doigts". Le coefficient déterminé est de la forme :

$$D_{fing} = C_t \frac{4acT^3}{3\kappa_R c_P \rho^2} \frac{H_p}{\nabla_{ad} - \nabla} \left| \frac{d \ln \mu}{dr} \right| \quad (1.32)$$

ce qui peut être simplifié sous la forme :

$$D_{fing} = C_t \kappa_T R_0^{-1} \quad (1.33)$$

Le coefficient  $C_t$  est relié au rapport d'aspect des doigts. Ulrich (1972) a obtenu une valeur de  $C_t = 658$  alors que Kippenhahn et al. (1980) a obtenu une valeur de  $C_t = 12$ .

Trente ans plus tard, les premières simulations 2D ont permis la modélisation du processus et la calibration du rapport d'aspect des doigts de mélange. Denissenkov (2010) a ainsi proposé une nouvelle prescription de la forme :

$$D_{fing} = C_t \kappa_T (R_0 - 1)^{-1} (1 - R_0 \tau) \quad (1.34)$$

ce qui revient au coefficient de Kippenhahn et al. (1980) à la différence près que le coefficient  $D_{fing}$  tend vers l'infini quand  $R_0$  tend vers 1. C'est-à-dire que le mélange devient très efficace lorsqu'on se rapproche du critère de Ledoux et donc de la convection dynamique. L'année suivante, Traxler et al. (2011) déterminaient une prescription sur des simulations 3D avec différents jeux de paramètres physiques. Ils en ont ainsi déduit que le rapport des flux turbulent et diffusif était le même quelque soit les paramètres. Ce résultat a permis la détermination d'un coefficient de diffusion turbulente empirique de la forme :

$$D_{fing} = 101 \sqrt{\kappa_T \nu} \exp(-3.6r)(1-r)^{1.1} \quad (1.35)$$

où  $r = (R_0 - 1)\tau$  dans les condition stellaire ( $\tau \ll 1$ ) et  $\nu$  est la viscosité.

En comparant les prescriptions de Denissenkov et Traxler, la valeur de  $C_t$  permettant la meilleure adéquation est proche de celle de Kippenhahn et al. (1980) hormis pour des valeurs de  $R_0$  proches de 1 (régime proche de la convection dynamique).

Plus récemment, Brown et al. (2013) ont amélioré l'étude pour les valeurs de  $R_0$  proches de 1 toujours à l'aide de simulation 3D. Ils obtiennent l'expression suivante pour le coefficient de diffusion turbulente :

$$D_{fing} = Nu_\mu \kappa_\mu \quad (1.36)$$

où  $Nu_\mu$  est le nombre de Nusselt lié à la composition chimique. Cette quantité peut être exprimée, en négligeant les effets de diffusion atomique sur la dynamique de l'instabilité, de la façon suivante :

$$Nu_\mu = 1 + C^2 \frac{\lambda^2}{\tau l^2 (\lambda + \tau l^2)} \quad (1.37)$$

où  $\lambda$  et  $l$  sont respectivement le taux d'accroissement et le nombre d'onde du mode se développant le plus vite.  $C$  est un paramètre indiquant la résistance du "doigt" initial face à l'instabilité de cisaillement. Plus ce coefficient est important et plus le "doigt" résiste au cisaillement. Brown et al. (2013) ont déterminé d'après leur simulations que  $C \approx 7$ .  $\lambda$  et  $l$  sont obtenus en résolvant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 &= 0 \\ \text{où} \\ a_2 &= l^2(1 + \text{Pr} + \tau) \\ a_1 &= l^4(\tau \text{Pr} + \text{Pr} + \tau) + \text{Pr} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \\ a_0 &= l^6 \tau \text{Pr} + l^2 \text{Pr} \left(\tau - \frac{1}{R_0}\right) \end{aligned} \quad (1.38)$$

et

$$\begin{aligned}
a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 &= 0 \\
\text{où} \\
a_2 &= 1 + \text{Pr} + \tau \\
a_1 &= 2l^2(\tau\text{Pr} + \text{Pr} + \tau) \\
a_0 &= 3l^4\tau\text{Pr} + l^2\text{Pr}\left(\tau - \frac{1}{R_0}\right)
\end{aligned} \tag{1.39}$$

où  $\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa_T}$  est le nombre de Prandtl, rapport de la viscosité  $\nu$  et de la diffusivité thermique  $\kappa_T$ . Dans le cas où  $\text{Pr}$  et  $\tau \ll 1$  on peut montrer que :

$$\lambda \approx \begin{cases} \sqrt{\text{Pr}} & \text{si } r \ll \text{Pr} \ll 1 \\ \sqrt{\tau\text{Pr}/r} & \text{si } \text{Pr} \ll r \ll 1 \end{cases} \tag{1.40}$$

et

$$l^2 \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \tau/\text{Pr}}} \tag{1.41}$$

Tous les travaux sur la convection thermohaline présentés dans la suite de ce manuscrit ont été réalisés en utilisant la prescription de Brown et al. (2013).

## 1.2.4 Etude de la convection thermohaline induite par une accumulation d'éléments à l'aide de simulations 3D

Cette section présente le travail publié en 3<sup>ème</sup> auteur en collaboration avec Pascale Garaud et Barbara Zemsanova (Université de Santa Cruz, Californie) afin de tester l'apparition d'un état stationnaire lorsque de la convection thermohaline se déclenche en présence de l'accumulation d'éléments lourds. Ces simulations ont été réalisées en résolvant les équations fluides avec l'approximation de Boussinesq. En ajoutant un terme de "pinch rate"  $s$  (correspond au taux d'accumulation de l'élément considéré) dans l'équation régissant l'évolution de la concentration de l'élément considéré et en partant d'un profil d'abondance initial gaussien, une accumulation de fer se forme (cf accumulations de fer due aux accélérations radiatives dans les étoiles F et A, Richard et al. 2001). Les calibrations du terme  $s$  (pinch rate) et du terme  $M_0$  (masse d'élément disponible pour l'accumulation) sont obtenues respectivement à l'aide des vitesses de diffusion incluant les accélérations radiatives et des modèles calculés avec le code TGEC. Nous avons ainsi pu montrer dans ce cas et pour un certain régime de paramètres ( $\text{Pr}$  et  $r$ ) que la prescription de Brown et al. (2013) permettait de reproduire les résultats obtenus par ces simulations 3D. Ces simulations sont limitées par plusieurs points pour la comparaison au cas stellaire. Les quantités  $\text{Pr}$  et  $r$  ont des valeurs éloignées des valeurs stellaires de plusieurs ordres de grandeur. Ceci est imposé par le fait qu'il est très coûteux numériquement de faire des simulations 3D avec des nombres de Prandtl et des valeurs de  $r$  proche des paramètres stellaires ( $\text{Pr}_{\text{stellaire}} \approx 10^{-10}$  et  $r \approx 10^{-9}$ ). Cependant, certaines approximations dans le cas des petits nombres de Peclet permettent de se rapprocher des conditions stellaires (Prat et al., 2015).

Dans ces simulations, la vitesse d'accumulation de l'élément est constante, ce qui n'est pas le cas dans une étoile.

Il n'est pas non plus possible de prendre en compte l'apparition de zone convective induite par l'augmentation de l'opacité produite par l'accumulation d'éléments (cf. Chapitre 2) dans ces simulations 3D. Ceci peut aussi modifier les résultats.

La diffusion des autres éléments qui peuvent conduire à un gradient de  $\mu$  stabilisateur pouvant empêcher le développement de la convection thermohaline n'est pas non plus prise en compte dans ces simulations.

Malgré les limitations des processus physiques pris en compte dans ces simulations 3D ce travail est la première étape pour valider les prescriptions 1D de convection thermohaline utilisées dans les codes d'évolution stellaire pour traiter les accumulations d'éléments lourds. Il a pu être montré dans cet article que la prescription Brown et al. (2013) est tout à fait adaptée pour traiter ce genre de problème compte tenu des comparaisons qui peuvent être réalisées actuellement.

## FINGERING CONVECTION INDUCED BY ATOMIC DIFFUSION IN STARS: 3D NUMERICAL COMPUTATIONS AND APPLICATIONS TO STELLAR MODELS

VARVARA ZEMSKOVA<sup>1</sup>, PASCALE GARAUD<sup>2</sup>, MORGAN DEAL<sup>3,4</sup>, AND SYLVIE VAUCLAIR<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Department of Marine Sciences, University of North Carolina at Chapel Hill, 3202 Venable Hall, CB 3300, Chapel Hill, NC 27599-3300, USA

<sup>2</sup> Department of Applied Mathematics and Statistics, Baskin School of Engineering, University of California at Santa Cruz, 1156 High Street, Santa Cruz, CA 95064, USA

<sup>3</sup> Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie, 14 avenue Edouard Belin, Université de Toulouse, F-31400-Toulouse, France

<sup>4</sup> Laboratoire Univers et Particules de Montpellier, Université de Montpellier II, Place Eugène Bataillon, F-34095 Montpellier Cédex 05, France

Received 2014 June 26; accepted 2014 August 20; published 2014 October 21

### ABSTRACT

Iron-rich layers are known to form in the stellar subsurface through a combination of gravitational settling and radiative levitation. Their presence, nature, and detailed structure can affect the excitation process of various stellar pulsation modes and must therefore be modeled carefully in order to better interpret *Kepler* asteroseismic data. In this paper, we study the interplay between atomic diffusion and fingering convection in A-type stars, as well as its role in the establishment and evolution of iron accumulation layers. To do so, we use a combination of three-dimensional idealized numerical simulations of fingering convection (which neglect radiative transfer and complex opacity effects) and one-dimensional realistic stellar models. Using the three-dimensional simulations, we first validate the mixing prescription for fingering convection recently proposed by Brown et al. (within the scope of the aforementioned approximation) and identify what system parameters (total mass of iron, iron diffusivity, thermal diffusivity, etc.) play a role in the overall evolution of the layer. We then implement the Brown et al. prescription in the Toulouse–Geneva Evolution Code to study the evolution of the iron abundance profile beneath the stellar surface. We find, as first discussed by Théado et al., that when the concurrent settling of helium is ignored, this accumulation rapidly causes an inversion in the mean molecular weight profile, which then drives fingering convection. The latter mixes iron with the surrounding material very efficiently, and the resulting iron layer is very weak. However, taking helium settling into account partially stabilizes the iron profile against fingering convection, and a large iron overabundance can accumulate. The opacity also increases significantly as a result, and in some cases it ultimately triggers dynamical convection. The direct effects of radiative acceleration on the dynamics of fingering convection (especially in the nonlinear regime) remain to be added in the future to improve the quantitative predictions of the model.

*Key words:* atomic processes – diffusion – hydrodynamics – instabilities – stars: oscillations

*Online-only material:* color figures

## 1. INTRODUCTION

### 1.1. The Stellar Context

Atomic diffusion, a microscopic process that leads to the gradual spatial segregation of various chemical species, was recognized by the pioneers of stellar physics (Chapman 1917, 1922; Eddington 1926) as one of the fundamental processes working in stellar interiors and is a straightforward consequence of the fact that stars are self-gravitating, pressure-supported gaseous spheres.

Indeed, as a first approximation, stars are in hydrostatic equilibrium, which means that the average weight of a fluid particle is balanced by the local pressure gradient. Meanwhile energy is transferred from the stellar core to the outer layers by radiation, except in convective zones where advection by fluid motions is more efficient and therefore preferred. Radiative regions are assumed to reach a state of radiative equilibrium, in which the energy transfer is governed by the local average opacity, which represents the absorption coefficient of radiation by the matter. As a consequence of this process, the local medium is also subject to an outward radiative pressure due to the fact that the momentum transfer from the photons to the ions is slightly anisotropic. These physical considerations lead to the derivation of the fundamental stellar equations, which are then solved to compute so-called standard stellar models.

However, as recognized since the 1920s, this standard treatment does not adequately take into account the fact that stars are made of *multicomponent* gases. In reality, these various components can behave quite differently in the presence of structural gradients. This manifests itself in several ways. The two most important effects are related to the different atomic weights of the various species and to their different behavior in the process of radiative transfer. On the one hand, elements that have an atomic weight larger than the average are not entirely supported by the pressure gradient and are therefore not in hydrostatic equilibrium when taken individually. They gradually fall down toward the stellar center, while hydrogen (the lightest element) slowly migrates upward to take their place. This process is generally referred to as gravitational settling. On the other hand, it is clear that the “average opacities” used in the computations of radiative transfer are also an approximation: in reality, each ion absorbs photons according to its own atomic structure and is consequently pushed up in a selective way. This process, referred to as “radiative levitation,” is thus inherently element-specific as well.

Depending on the relative amplitude of the gravitational and radiative effects, with some added processes related to the thermal and concentration gradients, different atomic species move up or down during a collision time, the combination of these processes being collectively known as atomic diffusion. This net differential motion leads to the gradual spatial segregation

of important chemical elements and often produces macroscopically observable effects.

Stellar physicists at the beginning of the twentieth century recognized and analyzed this situation. In his book *The Internal Constitution of the Stars*, Eddington (1926) predicted that, owing to radiative acceleration, heavy elements should accumulate at the surface of massive stars, which was not observed at that time. It was then assumed that macroscopic motions, such as rotational mixing, were strong enough to prevent element segregation. Later on, when the first abundance anomalies were observed in A-type stars, they were initially attributed to nuclear effects (Fowler et al. 1965), although quantitative computations failed to account for the observations (Michaud 1970b; Vauclair & Reeves 1972; Cowley & Aikman 1975). This failure led Michaud (1970a) to propose atomic diffusion as a better explanation.

From then on, atomic diffusion in stars was studied in depth (Michaud et al. 1976; Vauclair et al. 1978; Michaud & Richer 2013, and references therein). It occurs indeed in all kinds of stars, in more or less important ways. First approximate computations of radiative accelerations were done by Michaud et al. (1976), who found that they are smaller than gravity inside the Sun and become of the same order for stars of about  $1.2 M_{\odot}$ . For larger masses they are preponderant and become really important in A-type stars. The resulting abundance variations depend essentially on the competition between radiative levitation and gravitational settling and on their interaction with macroscopic motions.

When a surface convective zone is present, atomic diffusion can nevertheless occur in the radiative zone below, which then communicates to the surface any resulting modification of the chemical composition near the radiative–convective interface. In cool stars like the Sun, the convective zone is deep enough for the atomic diffusion timescale below the radiative–convective interface to be significantly larger than the stellar age. However, atomic diffusion can still cause variations of chemical composition of the order of 10% compared with models without diffusion (Aller & Chapman 1960; Turcotte et al. 1998). A revolution in this respect occurred with the advent of helioseismology, which proved that the settling of helium and heavier elements *must* be taken into account in the Sun in order to properly account for observations (Bahcall et al. 1995; Gough et al. 1996; Richard et al. 1996).

Renewed attention was recently given to the fact that atomic diffusion can induce significant element accumulation in some layers inside the stars. Although not visible at the surface, such accumulation regions can nevertheless modify the stellar structure (Richard et al. 2001). They are caused by the fact that the ionization state of each element varies with temperature and density, and hence depth. This effect induces large variations in the contribution of each element to the average opacity and modifies the radiative acceleration on this element, which is sometimes larger than gravity, sometimes smaller. For example, when an element is in the noble gas configuration, its contribution to the opacity is small and it undergoes only a small radiative acceleration. The opposite is true when it is in the hydrogenic state.

The most important element in this respect is iron, which may become the *main* contributor to the overall opacity when it is in an ionization state with a very large number of absorption lines. When this is the case, iron ions become subject to a large radiative acceleration that overcomes gravity and pushes them upward. Above those layers the ionization state changes and

the radiative acceleration drops sharply again. The net result is that iron accumulates at the precise location where its intrinsic opacity is the highest. The increase in iron content then further increases the local opacity of the gas. Richard et al. (2001) have shown that the induced opacity increase may be large enough to create an extra convective zone, which modifies the mixing of the chemical elements inside the star and may have important consequences for its chemical composition. Such iron accumulation can also induce in some cases an extra  $\kappa$ -mechanism that may trigger stellar oscillations (Charpinet et al. 1997), as described in Section 1.3. The accumulation of other elements, such as nickel, could also play an important role in that respect (Richard et al. 2001).

### 1.2. Theory versus Observations: The Necessary Interplay between Atomic Diffusion and Fingering Convection

Generally speaking, classical computations of atomic diffusion in A- and F-type stars show that, when no extra mixing is taken into account, most heavy elements accumulate near the stellar surface, except some elements like calcium and scandium, which may become depleted. However, the computed abundance variations are typically much larger than observed, and models can only be reconciled with observations provided that extra macroscopic motions are added to mitigate the effects of element segregation. Many studies have investigated atomic diffusion coupled with rotational mixing, micro turbulence, mass loss, or other parameterized macroscopic motions to try to account for observations (e.g., Vick et al. 2008).

In these computations, however, the basic instabilities directly induced by the element accumulations themselves were ignored. They should nevertheless be included, since they are expected to occur in any case. The fact that the observed overabundances are not as large as expected from previous computations may simply be related to the self-regulating process that occurs when elements that move up by atomic diffusion are mixed backward by the induced instabilities. Taking all relevant processes into account will likely change our current understanding of element accumulation in stars.

Indeed, the local abundance increase of important elements like iron can lead to inversions of the mean molecular weight gradient ( $\mu$ -gradient hereafter), inducing a double-diffusive instability traditionally called “thermohaline convection” as in the ocean, now preferentially referred to as “fingering convection” after Traxler et al. (2011a). Fingering (thermohaline) convection is now recognized as a major mixing process in stellar interiors and has already been studied in several other contexts, including the accretion of heavy elements onto a star, which may be due to planetary material (Vauclair 2004; Garaud 2011; Théado & Vauclair 2012) or to an evolved companion in a binary system (Stancliffe et al. 2007; Thompson et al. 2008).

Théado et al. (2009) were the first to discuss and study the effect of fingering convection on the accumulation of heavy elements induced by atomic diffusion, focusing in particular on the case of iron. They found that the gradual accumulation process was attenuated by fingering instabilities, but not completely suppressed. Crucially, they also discovered that helium settling, which occurs simultaneously with the heavy-element accumulation, can stabilize the global  $\mu$ -gradient and thus preserve some of the iron accumulation. They also found that the extra convective zone discussed in Richard et al. (2001) still persists in some cases and may have important implications for the element abundances and seismic behavior of several types of stars.

In these computations, however, the original prescription given by Kippenhahn et al. (1980) for the mixing coefficient associated with fingering convection was used. Since then, much progress has been made to better quantify mixing by this specific instability, using two-dimensional (2D) numerical simulations (Denissenkov 2010) and three-dimensional (3D) numerical simulations (Traxler et al. 2011a). The most recent work on the subject is that of Brown et al. (2013), who used 3D numerical simulations combined with theoretical stability analyses to propose and test a new prescription for mixing by fingering convection that corrects previous inconsistencies of the models of Denissenkov (2010) and Traxler et al. (2011a) and contains no remaining free parameters.

When applying these results to the case of element accumulation induced by selective radiative acceleration, the question arises of the influence of the radiative acceleration on the fingering process itself—which is neglected in the Brown et al. (2013) prescription. Intuitively, one may think that radiative acceleration, directed upward, could slow down or even prevent the mixing (Michaud et al. 2011). The situation is more complicated, however, because it depends on the differential radiative effect between falling and rising fluid parcels and on their environment. Vauclair & Théado (2012) discussed this process in the framework of linear studies. Nonlinear effects should be checked in future numerical simulations. We will come back to this subject in Section 9.

In what follows, given the remaining uncertainties regarding the effect of radiative accelerations on the fingering motions (especially in the nonlinear regime), we shall use the simplified Brown et al. (2013) prescription to model the combined effects of atomic diffusion and mixing by fingering convection on the accumulation of iron in stellar interiors, using both 3D simulations and one-dimensional (1D) stellar evolution calculations. Before describing our theoretical approach in more detail, however, we first take a step back and discuss in which way a better understanding of these combined processes will help us understand observations, focusing in particular on the case of stellar pulsations in the era of *Kepler* asteroseismology.

### 1.3. Importance for Chemical Abundances and Stellar Pulsations

A better understanding of atomic diffusion is crucial to improving our understanding of pulsating stars. Indeed, several types of stellar pulsators are clearly affected by atomic diffusion and its macroscopic consequences, so that quantitative predictions and comparisons with observations will be different when including the effect of fingering convection. Let us review here a few examples (see Théado et al. 2009, for a more detailed discussion).

The SPB (slowly pulsating B stars) and  $\beta$  Cephei stars are main-sequence B-type pulsators. The SPB stars show high-order  $g$ -modes, with periods of order 0.5–5 days. The  $\beta$  Cephei stars show low-order  $p$ - and/or  $g$ -modes with periods of 2–8 hr. These oscillations are generally thought to be caused by the  $\kappa$ -mechanism taking place in the metal opacity bump region (Cox et al. 1992; Kiriakidis et al. 1992; Moskalik & Dziembowski 1992), but the mode excitation remains difficult to explain in some cases. An increase in the iron abundance in this region may help resolve this difficulty (Pamyatnykh et al. 2004; Miglio et al. 2007). It is thus important to compute improved metal abundance profiles in these stars that properly take into account the effects of fingering instabilities.

The  $\gamma$  Doradus stars are A–F main-sequence pulsators. They show high-order  $g$ -modes with periods of 0.35–3 days, thought to be driven by a flux-blocking mechanism at the base of their convective envelope (Guzik et al. 2000; Dupret et al. 2005). However, this process may work only if the convection zone is deeper than given in standard models. Here again, including atomic diffusion and fingering convection could have important consequences on the stellar structure and could potentially reconcile models with observations.

Finally, the subdwarf B stars (sdB stars) are evolved, compact objects that lie on the extended horizontal branch. The hottest ones present rapid oscillations due to low-order, low-degree  $p$ -modes, with periods of 80–600s. The coolest ones oscillate with periods of 2000–9000s, owing to high-order, low-degree  $g$ -modes. Both types of pulsators are thought to be driven by the  $\kappa$ -mechanism acting in the iron-peak element opacity bump (Charpinet et al. 2009). A better understanding of iron accumulation may help interpret the observations more precisely.

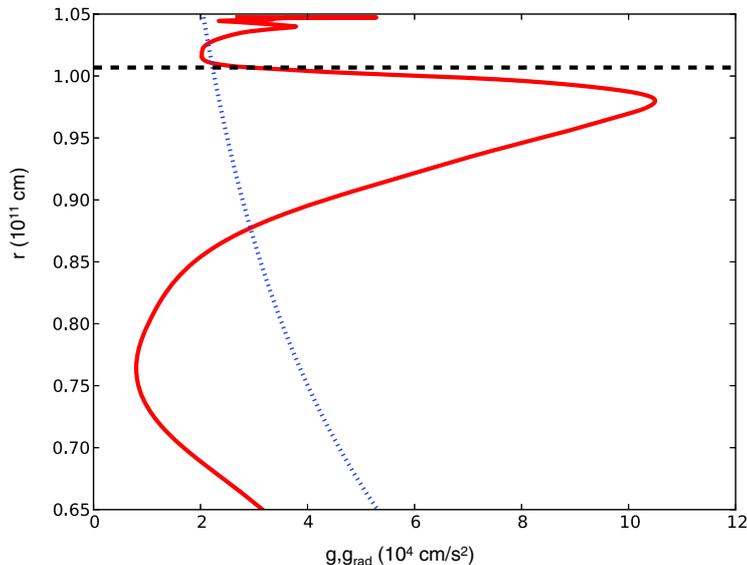
In short, the new detailed seismic observations of the *Kepler* satellite (and in the future the Plato experiment, see Rauer et al. 2014) reveal a great need for improved models of atomic diffusion that include the macroscopic transport induced by fingering instabilities. Our goal is to study the fingering convection induced by local element accumulation inside stars and to deduce the possible regimes that may arise when considering both atomic diffusion and fingering-induced mixing simultaneously.

### 1.4. Our Theoretical Approach to Studying the Interplay between Atomic Diffusion and Fingering Convection

In what follows, we consider for simplicity the accumulation of iron only. In the future, the influence of nickel and other element accumulations will have to be added for precise comparisons with the asteroseismic results of the *Kepler* mission, but inasmuch as we are only trying to understand the basic processes at this point, iron suffices.

We first motivate our study by presenting in Section 2 the example of a  $1.7 M_{\odot}$  stellar model where iron accumulates owing to the combined effect of gravitational and radiative diffusion, without taking fingering instabilities into account. We show that in this case a strong peak in the iron abundance profile appears, whose shape is close to being Gaussian.

In order to study the effects of fingering instabilities on the development of this iron layer, we cannot a priori use the model developed by Brown et al. (2013) directly. Indeed, the latter was derived and proposed in the much simpler context where atomic diffusion is ignored altogether, and where the local abundance scale height is much greater than the typical vertical scale of the fingering instability. Since the developing iron layer can in principle be fairly thin, it is not clear whether this assumption remains correct or not. Furthermore, the effect of the iron levitation and settling velocity on the fingering instability itself remains to be determined. In order to study the validity of the Brown et al. (2013) prescription, we first present in Sections 3–6 the first 3D hydrodynamic simulations of the heavy-element accumulation process, which naturally lead to the emergence of the fingering instability. Given the limitations of present-day simulations, the effects of atomic diffusion are necessarily simplified. We first lay out the model equations and associated approximations in Section 3 and then discuss the various parameter regimes observed in these simulations, according to the input parameters, in Sections 4–6. By comparing the results of our 3D simulations with those of a 1D model that uses the



**Figure 1.** Radiative acceleration (solid red line) on iron ions in a  $1.7 M_{\odot}$  star at 35 Myr without fingering convection, compared with gravity (dotted blue line) as a function of radius near the iron layer. The black dotted line represents the position of the iron peak. (A color version of this figure is available in the online journal.)

prescription of Brown et al. (2013), we find in Section 7 that the latter is a remarkably good model for fingering convection, even in this more complex context. We then implement it, in Section 8, in the Toulouse-Geneva Evolution Code and study the result of iron accumulation and fingering convection for the model star introduced in Section 2. We find that fingering convection alone mostly erases the iron peak, but the latter can be preserved when helium settling is also taken into account, as originally found by Théado et al. (2009). Finally, we also find that convection zones can indeed spontaneously emerge from the accumulation of iron, as suggested by Richard et al. (2001), and are triggered by the strong increase in the opacity in the iron layer. Implications of our findings and remaining model uncertainties are discussed in Section 9.

## 2. BACKGROUND STELLAR MODEL

In this section we begin with a simple example and present the results of a 1D stellar model obtained for a  $1.7 M_{\odot}$  star at various ages, to show the formation of the iron peak, when atomic diffusion, including radiative levitation and gravitational settling, is taken into account, but without introducing fingering convection.

The model evolution was computed using the Toulouse-Geneva Evolution Code (TGEC), which includes atomic diffusion with radiative accelerations calculated in a precise way for 21 species, namely, 12 elements and their main isotopes: H,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^6\text{Li}$ ,  $^7\text{Li}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{10}\text{B}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$ ,  $^{15}\text{N}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$ ,  $^{18}\text{O}$ ,  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{22}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{25}\text{Mg}$ ,  $^{26}\text{Mg}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ , and  $^{56}\text{Fe}$  (Théado et al. 2012). The diffusion computations are based on the Boltzmann equation for a dilute collision-dominated plasma. When the medium is isotropic, the solution of the Boltzmann equation is a Maxwellian distribution function. In stars, however, structural gradients (temperature, pressure, density, etc.) lead to small deviations from the Maxwellian distribution, which are specific to each species. Solutions of the Boltzmann equation are then obtained in terms of convergent series represent-

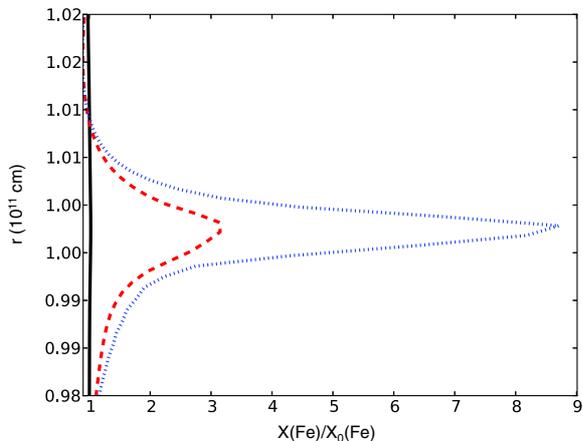
ing successive approximations to the true distribution function (Chapman & Cowling 1970). The computations lead to a statistical “diffusion” or “drift” velocity  $w_d$  of the element with respect to the main component of the plasma. The abundance variations of all the elements are computed simultaneously, with the use of the mass conservation equation. The gravitational and thermal diffusion coefficients used in the code are those derived by Paquette et al. (1986).

OPCD v3.3 codes and data (Seaton 2005) are used to compute self-consistent Rosseland opacities at each time step to take the variations of the abundances of each element into account. Using these consistent opacities, the code computes radiative accelerations on C, N, O, Ne, Mg, Ca, and Fe using the improved semi-analytical prescription proposed by Alecian & Leblanc (2004). The computations of the total radiative accelerations on all these elements require computing the relative populations of each ion of each element. This is included in the numerical routines of TGEC.

The equation of state used in the code is the OPAL2001 equation (Rogers & Nayfonov 2002). The nuclear reaction rates are from the NACRE compilation (Angulo 1999). The mixing length formalism is used for the convective zones with a mixing length parameter of 1.8, as needed to reproduce solar models.

The results are presented for three ages at the beginning of the main-sequence evolution of the star, at 23, 28, and 35 Myr. In Figure 1 we show the variation with radius of the radiative acceleration on iron and of gravity at 35 Myr. We can see that the radiative acceleration strongly varies with depth, as a result of the changes in the iron ionization state. The layer where it is the largest, around  $0.97 \times 10^{11}$  cm, corresponds to the so-called “opacity bump” where iron is the main contributor to the average opacity. Above that layer, the radiative acceleration drops dramatically, thereby causing a local iron accumulation around  $r_0 = 10^{11}$  cm. Note that below around  $0.90 \times 10^{11}$  cm, the contrary happens, leading to a local iron depletion.

In Figure 2 we present the formation and evolution of the iron peak for the three ages. The peak forms rapidly, and the iron



**Figure 2.** Iron abundance profiles in a  $1.7 M_{\odot}$  star at 23 Myr (black solid line), 28 Myr (red dashed line), and 35 Myr (blue dotted line) without fingering convection.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

overabundance grows to be quite large. In spite of the original asymmetries due to the density, pressure, and temperature stratification inside the star, the peak rapidly acquires a nearly Gaussian shape. Table 1 gives the values of the physical parameters inside the star at the region of the iron peak.

These results have been obtained in stellar models computed with pure atomic diffusion, without any additional mixing in the iron layer. We know, however, that such an iron accumulation is not stable, owing to the induced inversion of the  $\mu$ -gradient. The latter causes fingering convection, which has to be added into the computations. As discussed above, the most recent model of fingering convection is that of Brown et al. (2013), but the latter cannot a priori be applied when atomic diffusion and strongly varying background compositional gradients are present. In what follows, we therefore run and study 3D simulations of the iron layer formation and consequent evolution and test the validity of the Brown et al. (2013) model against these simulations, before returning to the problem of stellar evolution in Section 8.

### 3. A SIMPLIFIED MODEL OF THE IRON LAYER

In order to study the fingering dynamics of the iron layer, we must move away from standard stellar evolution codes (which assume hydrostatic equilibrium) and use the complete Navier-Stokes equations to describe the problem. However, following the evolution of a fully resolved 3D fingering field while at the same time modeling radiative transfer processes in detail is numerically impossible at the present time. For this reason, we first propose a simplified model of the iron layer that nevertheless still captures most of the basic physics of the problem.

Since the expected size of fingering structures is much smaller than the star (Schmitt 1983), we cannot model them in a whole-star simulation. Instead, we consider a small Cartesian domain in the vicinity of  $r_0$  that is tall enough to include the modeled iron layer and whose horizontal extent is sufficiently large to include a representative number of expected fingering structures. The  $z$ -direction is aligned with gravity (with  $z = r - r_0$ ), the  $x$ -direction with the azimuth, and the  $y$ -direction with latitude. We shall, however, ignore any effect of rotation, so that the local

**Table 1**  
Physical Parameters in the Iron-peak Region of  
a  $1.7 M_{\odot}$  Model at 35 Myr

Quantity	Value (cgs)
$p$	$1.21 \times 10^8$
$T$	$1.62 \times 10^5$
$\rho$	$5.34 \times 10^{-6}$
$\nabla_{\text{ad}}$	0.397
$\nabla_{\text{rad}}$	0.277
$H_p$	$1.01 \times 10^9$
$\log(g)$	4.348
$\kappa$	41
$\nu$	3370
$\kappa_C$	27
$\kappa_T$	$2.4 \times 10^{12}$

**Notes.** The table features the local pressure, temperature, density, adiabatic and radiative gradients, pressure scale height, gravity, opacity, kinematic viscosity (sum of the molecular and radiative viscosities), molecular diffusivity of iron, and thermal diffusivity. All units are in cgs.

gravity is the only source of anisotropy in the system. We also ignore the effects of magnetic fields for simplicity.

Since the layer itself does not span much more than a typical pressure scale height, we use the Boussinesq approximation (Spiegel & Veronis 1960) to model its dynamics.<sup>5</sup> This approximation assumes that the total density and temperature fields can be written as

$$\begin{aligned} \rho_{\text{tot}}(x, y, z, t) &= \rho_0 + z\bar{\rho}_z + \rho(x, y, z, t), \\ T_{\text{tot}}(x, y, z, t) &= T_0 + z\bar{T}_z + T(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (1)$$

where  $\rho_0$  and  $T_0$  are the typical mean density and temperature near  $r_0$  prior to the accumulation of iron, and where perturbations around these mean values are small and expressed as a linear function of  $z$  only plus a space- and time-dependent function. The latter,  $\rho$  and  $T$ , are of course related to one another via the equation of state, but they also depend on the local density of iron, called  $C$  hereafter:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = -\alpha T + \beta C, \quad (2)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are determined by linearizing the full equation of state around  $\rho_0$ . This yields

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p=\text{constant}, C=0} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{1}{\rho_0}. \quad (3)$$

Dimensionally,  $C$  has units of  $\text{g cm}^{-3}$ .

The local background temperature gradient  $\bar{T}_z$  and adiabatic temperature gradient  $\bar{T}_z^{\text{ad}}$  are assumed to be both constant within the modeled domain, and so is gravity. In what follows, we also need to introduce the standard microscopic diffusivities (viscosity  $\nu$ , thermal diffusivity  $\kappa_T$ , and iron diffusivity  $\kappa_C$ ). The latter is the down-gradient component of the atomic diffusion process discussed in the introduction. Parameters  $\nu$ ,  $\kappa_T$ , and  $\kappa_C$  are assumed to be constant, which is the

<sup>5</sup> In fact, the Boussinesq approximation turns out to be a good approximation to the problem as long as the fingering structures themselves are much smaller than a pressure scale height, which is always the case (see Table 2, for instance).

weakest component of this simplified model. It prohibits any nonlinear diffusion effects (i.e., the increase or reduction of atomic diffusion by changes in composition) and furthermore prevents any possibility of triggering convection by changes in the local opacity. However, this assumption is necessary for numerical computations since the latter are much more difficult to implement and run efficiently when the diffusivities are nonlinear functions of temperature and composition.

Within these assumptions, the governing equations for the system are (Spiegel & Veronis 1960)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho_0}(\nabla p - \rho \mathbf{g}) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T + w(\bar{T}_z - \bar{T}_z^{\text{ad}}) &= \kappa_T \nabla^2 T, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C + \frac{\partial}{\partial z}(w_d(z)C) &= \kappa_C \nabla^2 C, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

where  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  is the velocity field,  $p$  is the pressure perturbation away from hydrostatic equilibrium, and  $w_d(z)$  is the iron drift velocity caused by the combination of gravitational settling and radiative levitation (see below).

These equations are similar to the ones used to describe fingering convection by Brown et al. (2013), except for the use of  $C$  instead of the mean molecular weight  $\mu$ , as well as the treatment of the  $C$ -equation itself. Indeed, in Brown et al. (2013) fingering convection is driven by an assumed constant background  $\mu$ -gradient. In our particular problem, on the other hand, the initial iron density is constant (assuming that the star is well mixed on the zero-age main sequence) but changes with time first through the competing effects of gravitational settling and radiative levitation and later from fingering convection. As a result, it is preferable to assume that there is no background iron density gradient to begin with and merely follow the evolution of the total iron density profile  $C$ .

However, we must now add the effects of settling and levitation. This is done through the added ‘‘drift’’ velocity term  $w_d$ , which is a function of the vertical position  $z$ . For simplicity, instead of using a drift velocity profile self-consistently computed as in Section 2, we use a simple analytical function to model  $w_d(z)$ . Since iron is settling from above and levitating from below, we model  $w_d$  as a monotonically decreasing function of  $z$  that vanishes exactly at  $z = 0$ . Except when specifically mentioned, we shall take  $w_d(z)$  to be a linear function of  $z$ , an approximation that can simply be viewed as a Taylor expansion of the true function  $w_d(z)$  near  $z = 0$ . As long as the element accumulation layer is quite thin compared with the typical length scale over which  $w_d(z)$  naturally varies, this is quite a good approximation. Furthermore, note that  $w_d(z)$  should in principle be a function of the local iron density  $C$ . This nonlinear effect, which could directly influence the stability and nonlinear saturation of fingering convection, is also ignored in our 3D simulations, where  $w_d(z)$  is assumed to be fixed. This assumption is discussed in Section 9. The correct dependence of  $w_d(z)$  on the iron density and on the position within the star will, however, be taken into account in our 1D stellar evolution calculations (see Section 8).

These equations are then non-dimensionalized with the following length scales and timescales, as described in Traxler

et al. (2011a), for instance:

$$\begin{aligned} d &= [l] = \left( \frac{\kappa_T \nu}{g \alpha (\bar{T}_z - \bar{T}_z^{\text{ad}})} \right)^{1/4}, \\ [t] &= \frac{d^2}{\kappa_T}, \quad [u] = \frac{\kappa_T}{d}, \\ [T] &= (\bar{T}_z - \bar{T}_z^{\text{ad}})d, \quad [C] = \frac{\alpha}{\beta} (\bar{T}_z - \bar{T}_z^{\text{ad}})d. \end{aligned} \quad (5)$$

with

$$\frac{\alpha}{\beta} (\bar{T}_z - \bar{T}_z^{\text{ad}}) = -\frac{\rho_0 \delta}{H_p} (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) \text{ where } \delta = -\left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_{C,p}. \quad (6)$$

In this non-dimensionalization, the unit length scale  $d$  is related to the typical horizontal length scale of a finger (to be specific, a finger in this parameter regime is typically of the order of  $10d$ ), and the unit timescale is the thermal diffusion timescale across  $d$ . The governing equations can then be rewritten as follows:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + (T - C) \hat{\mathbf{e}}_k + \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T + w &= \nabla^2 T, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C - s \frac{\partial}{\partial z}(zC) &= \tau \nabla^2 C, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

where all quantities are now non-dimensional. This set of equations contains three non-dimensional parameters:  $\text{Pr}$ ,  $\tau$ , and  $s$ .  $\text{Pr} = \nu/\kappa_T$  is the usually defined Prandtl number, and  $\tau = \kappa_C/\kappa_T$  is the so-called diffusivity ratio. Finally, the non-dimensional drift velocity is expressed as  $w_d(z)d/\kappa_T = -sz$ , where  $s$  can be interpreted as a ‘‘pinching rate,’’ and, if expressed dimensionally, would indeed have the dimensions of one over time.

An additional non-dimensional parameter arises from the choice of initial conditions. Assuming that the total mass of iron in the accumulation layer does not vary much with time (i.e., the density profile merely changes shape while conserving the total iron content), we can define  $\Sigma_0$  as the mean surface density of iron between the bottom ( $z_b$ ) and the top ( $z_t$ ) of the layer. This quantity is constant and constrains the evolution of  $C$  via

$$\Sigma_0 = \frac{1}{L_x L_y} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{z=z_b}^{z_t} C dx dy dz. \quad (8)$$

Going back to dimensional, stellar quantities, the non-dimensional surface density  $\Sigma_0$  is related to the dimensional quantity  $M_0$ , the total mass of iron in the layer, via

$$M_0 \simeq \frac{\alpha}{\beta} (\bar{T}_z - \bar{T}_z^{\text{ad}}) d^2 4\pi r_0^2 \Sigma_0. \quad (9)$$

This is only an approximation, whose quality depends on the geometrical ratio of the thickness of the iron layer to  $r_0$ . However, since  $M_0$  can easily be estimated from a stellar evolution code, this equation provides a fairly simple way of estimating plausible values of  $\Sigma_0$  in actual stellar conditions.

From the stellar model presented in the previous section, we can deduce typical values of the various dimensional and non-dimensional quantities of importance for fingering convection. The latter are presented in Table 2.

**Table 2**  
Physical Parameters in the Iron Peak Region of  
a  $1.7 M_{\odot}$  Model at 35 Myr

Quantity	Value
$[l] = d$	$\sim 3 \times 10^5$ cm
$[t]$	$4 \times 10^{-2}$ s
$[T]$	6 K
$[C]$	$2 \times 10^{-10}$ g cm $^{-3}$
$M_0$	$\sim 4 \times 10^{26}$ g
Pr	$\sim 1.5 \times 10^{-9}$
$\tau$	$\sim 10^{-11}$
$s$	$\sim 6 \times 10^{-17}$
$\Sigma_0$	$\sim 10^8$

**Notes.** The first few entries are the unit length, the unit time, unit temperature, unit iron density, and total mass of iron in the accumulation layer,  $M_0$ , all expressed in cgs units. The next entries are all non-dimensional.

#### 4. EVOLUTION OF THE BACKGROUND PROFILES PRIOR TO THE ONSET OF INSTABILITY

We begin our investigation by considering the evolution of the iron density  $C$  assuming that there is no fluid motion, that is, prior to the onset of any form of instability. Thus, we seek solutions of the 1D advection-diffusion equation for the laminar profile  $C_l(z, t)$ :

$$\frac{\partial C_l}{\partial t} - s \frac{\partial}{\partial z}(z C_l) = \tau \frac{\partial^2 C_l}{\partial z^2}. \quad (10)$$

It is easy to show that a possible analytical solution of this equation<sup>6</sup> is a time-dependent Gaussian of the form

$$C_l(z, t) = \frac{\Sigma_0}{\sqrt{2\pi}\Delta(t)} e^{-\frac{z^2}{2\Delta^2(t)}}, \quad (11)$$

where  $\Delta(t)$  is the width of the Gaussian at time  $t$ . Plugging Equation (11) into Equation (10), we can solve for  $\Delta(t)$ :

$$\Delta^2(t) = \frac{\tau + b e^{-2st}}{s}, \quad (12)$$

where  $b$  depends on the initial conditions applied to  $C_l$ . Note that  $\Delta(t) \rightarrow \sqrt{\tau/s}$  as  $t \rightarrow +\infty$ . Therefore, in absence of instabilities the ultimate laminar steady state density profile is

$$C_{\infty}(z) = \frac{\Sigma_0}{\sqrt{2\pi}\Delta_{\infty}} e^{-\frac{z^2}{2\Delta_{\infty}^2}} \quad \text{where } \Delta_{\infty} = \sqrt{\frac{\tau}{s}}. \quad (13)$$

The dependence of  $\Delta_{\infty}$  on  $s$  and  $\tau$  is not surprising:  $\Delta_{\infty}$  is smaller if (1) the ‘‘pinching rate’’  $s$  is larger or (2) the iron diffusivity, represented by  $\tau$  in a non-dimensional sense, is smaller. The timescale with which the element layer contracts to the laminar steady-state solution is  $s^{-1}$ , which in dimensional terms corresponds to about 20 Myr.

For the typical stellar values of  $\tau$  and  $s$  given in Table 2, we find that  $\Delta_{\infty} \sim 400$ , which in dimensional terms becomes  $\Delta_{\infty} = 400d \sim 1.2 \times 10^8$  cm. Note that this is significantly larger than the vertical scale of basic fingering structures, which are typically of the order of  $10d$ .

<sup>6</sup> To be specific, this solution is only strictly valid when the initial condition for  $C$  is also a Gaussian. However, it can be verified numerically that this time-dependent Gaussian is an *attracting* solution of the true profile, that is, exact solutions to the problem for arbitrary initial conditions rapidly converge to a Gaussian (see, e.g., Figure 5).

#### 5. THE ONSET OF FINGERING INSTABILITY

As iron accumulates near  $z = 0$ , an inverse  $\mu$ -gradient is created and gradually gains in amplitude. As first discussed by Théado et al. (2009) and reviewed in the introduction, this can trigger fingering instabilities. To determine at which point in time the onset of fingering will occur, one should perform a formal stability analysis of the evolving  $C_l(z, t)$  profile. However, studying the stability of a time-dependent system is never particularly easy. A commonly used approximation to simplify the problem is the so-called frozen-in limit, where one studies instead the stability of successive profiles that are each assumed to be in a steady state. This usually yields a satisfactory estimate of the properties of the onset of instability, a statement we further verify in the next section.

Henceforth, we consider the stability of the laminar iron density profile  $C_l(z, t_0)$  (given by Equation (11)) around a selected time  $t_0$ . The most unstable point of this density profile is the one for which  $dC_l/dz$  is the largest (i.e., the point where the inverse  $\mu$ -gradient is the strongest). This happens at the lower inflection point of the Gaussian,  $z_i = -\Delta_l(t_0)$ . At this point,

$$\frac{dC_l}{dz} = \frac{\Sigma_0}{\sqrt{2\pi}e\Delta_l^2(t_0)}. \quad (14)$$

Baines & Gill (1969) showed that the stability of a system with *constant* background temperature and compositional gradients, and in the absence of settling/levitation, is uniquely determined by Pr and  $\tau$ , as well as the value of the density ratio  $R_0$ , defined as

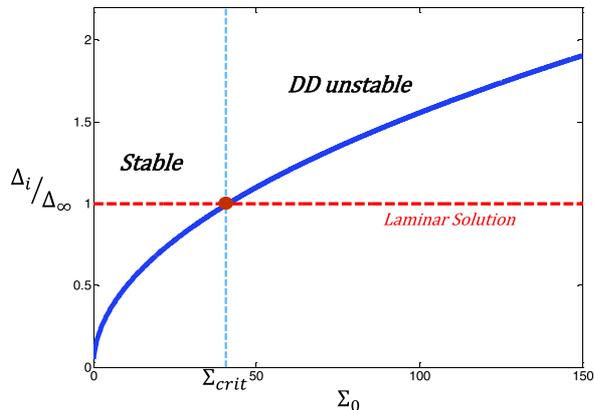
$$R_0 = \frac{\alpha(\bar{T}_z - T_z^{\text{ad}})}{\beta\bar{C}_z} = \frac{1}{dC_l/dz}, \quad (15)$$

where all quantities in the first right-hand side of that expression are dimensional and all quantities in the second right-hand side of that expression are non-dimensional. Baines & Gill (1969) also found that the system is stable to fingering convection, unless  $1 < R_0 < \tau^{-1}$ . While our particular problem does have a constant background temperature gradient, the compositional gradient clearly varies with  $z$ , so their result cannot formally be applied here. Furthermore, the presence of a non-zero drift velocity  $w_d(z)$  could a priori affect the linear stability of the problem, and its further dependence on the iron density  $C$  could affect the nonlinear stability and/or saturation of the fingering instability.

However,  $w_d = -sz$  is so small (see Table 2) that it is unlikely to have a significant influence on the onset of fingering instability and on the characteristics of the most unstable modes. This, again, is verified in the following section. Furthermore, if we assume that the instability first develops in the vicinity of the most unstable point only, and that the typical mode length scale near onset is much smaller than the scale height of the iron density profile (which was verified in the previous section), then we can get an estimate for the stability of the system simply by considering the value of the *local* density ratio near that point:

$$R(t_0) \equiv R(z_i(t_0), t_0) = \frac{1}{dC_l/dz} \Big|_{(z_i(t_0), t_0)} = \frac{\sqrt{2\pi}e\Delta_l^2(t_0)}{\Sigma_0}, \quad (16)$$

where all quantities are now expressed in their non-dimensional form. At early times, the Gaussian is presumably very thick ( $\Delta_l(t_0)$  is very large) and so  $R(t_0)$  is usually much larger than  $1/\tau$ . However, as iron accumulates near  $z = 0$ ,  $\Delta_l(t_0)$  gradually decreases (as expressed in Equation (12)), and so does  $R(t_0)$ .



**Figure 3.** Diagram of stable regions and double-diffusively unstable regions with respect to input mass  $\Sigma_0$ . The system is stable if  $\Delta_i/\Delta_\infty \leq 1$  ( $\Sigma_0 < \Sigma_{\text{crit}}$ ) and unstable if  $\Delta_i/\Delta_\infty \geq 1$  ( $\Sigma_0 > \Sigma_{\text{crit}}$ ). In this figure, we used  $\text{Pr} = \tau = 0.1$  and  $s = 0.001$ , in which case  $\Sigma_{\text{crit}} \simeq 41$  (see Equation (18)).

(A color version of this figure is available in the online journal.)

Eventually,  $R(t_0)$  becomes equal to  $1/\tau$ , which then triggers the onset of the fingering instability. This happens when

$$\Delta(t_0)^2 = \frac{\Sigma_0}{\tau \sqrt{2\pi e}} \equiv \Delta_i^2, \quad (17)$$

which defines the thickness of the layer at onset,  $\Delta_i$ .

We then see that whether the iron layer ever becomes unstable or not depends on whether  $\Delta_i > \Delta_\infty$  or  $\Delta_i < \Delta_\infty$ . Indeed, if  $\Delta_\infty > \Delta_i$ , the evolving density profile would settle to a laminar steady state *before* reaching the width at which fingering instabilities appear. In the opposite scenario, fingering convection is expected to set in as soon as the layer thickness drops below  $\Delta_i$ . Interestingly, we find that whether a system belongs to the first or the second category depends only on  $\Sigma_0$ ,  $\tau$ , and  $s$ . To see this, note that we can define a critical surface density  $\Sigma_{\text{crit}}$  above which fingering convection is expected to occur (i.e., by setting  $\Delta_\infty = \Delta_i$  and solving for  $\Sigma$ ). We get

$$\Sigma_{\text{crit}} = \frac{\tau^2 \sqrt{2\pi e}}{s}. \quad (18)$$

If  $\Sigma_0 < \Sigma_{\text{crit}}$ , the system ultimately settles into a laminar steady state, while fingering convection prevents this from happening if  $\Sigma_0 > \Sigma_{\text{crit}}$ .

The various regimes, for a particular case with  $\text{Pr} = \tau = 0.1$  and  $s = 0.001$  (a set of parameters that will be used in the numerical simulations presented in Section 6), are shown in Figure 3. For the stellar parameters given in Table 2, on the other hand,  $\Sigma_{\text{crit}} \ll 1$  while  $\Sigma_0 \gg 1$ . Hence, fingering convection is *always* expected to play a role in the dynamics of accumulating iron layers. The subsequent evolution of the iron density profiles for systems where  $\Sigma_0 > \Sigma_{\text{crit}}$  is analyzed in the next section.

## 6. NUMERICAL SIMULATIONS OF THE LAYER EVOLUTION DURING AND PAST THE ONSET OF INSTABILITY

In order to study the effects of the fingering instability (and other instabilities) past onset, it is best to use 3D numerical simulations. To do so, we use a code very similar to the one first presented and used by Traxler et al. (2011b), modified as described below for our current purpose.

### 6.1. Setup of the 3D Code

As in Traxler et al. (2011a) (see also Traxler et al. 2011b; Brown et al. 2013), our code solves the set of Equation (7) in a triply periodic domain. This may seem at first like an odd choice, since the  $C$ -profile is not expected to be triply periodic in this particular problem. However, by choosing the vertical extent of the domain to be large enough and by placing the accumulation layer far from the boundaries, we can ensure that (1) the regions far above and far below the iron layer are at rest (i.e., without any fluid motion), and (2) the iron density is vanishingly small near the top and bottom boundaries. This guarantees that boundary conditions have as little influence as possible on the dynamics near the accumulation layer.

An additional modification to the code is the new drift velocity term in the iron density equation. While this modification is numerically trivial, note that we also have to choose  $w_d(z)$  to be periodic in the vertical direction. Specific choices of  $w_d(z)$  are discussed below. The implementation of the new term was satisfactorily tested against analytical and semi-analytical solutions of the problem (see below for some examples).

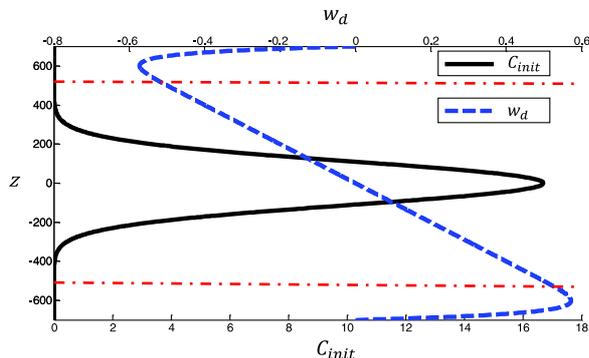
In all simulations presented in the following sections, the temperature perturbations were initialized with random low-amplitude noise. The initial iron density profile was taken to be a Gaussian of the form

$$C(x, y, z, 0) = \frac{\Sigma_0}{\sqrt{2\pi} \Delta_{\text{init}}} e^{-z^2/2\Delta_{\text{init}}^2} + \text{noise}, \quad (19)$$

where  $\Delta_{\text{init}}$  was chosen to be strictly greater than  $\Delta_i(\Sigma_0)$  (see Equation (17)), so that the iron layer is initially stable. By doing this, we can study the onset of instability and determine whether it occurs as predicted. To save computational time, however,  $\Delta_{\text{init}}$  was typically taken to be fairly close to  $\Delta_i(\Sigma_0)$ , usually between  $1.1\Delta_i(\Sigma_0)$  and  $2\Delta_i(\Sigma_0)$ . Note that  $\Delta_i(\Sigma_0)$  does depend on the input surface density, so that  $\Delta_{\text{init}}$  must be proportionally larger for larger  $\Sigma_0$ .

The computational domain size selected was, for each simulation, a tradeoff between computational feasibility and desired result. The typical width of a double-diffusive finger pair (one going up and one going down) at this parameter regime being  $7d-10d$ , the width of the domain (in the  $x$ -direction) was chosen in all simulations to be  $L_x = 100d$  to allow at least 20 fingers to develop in the system. As shown by P. Garaud & N. Brummell (in preparation), the dynamics of fingering convection in 2D numerical simulations at low Prandtl number show pathological behavior through the spurious development of shear layers that are not seen in 3D simulations at the same parameter regime. To avoid them, we have to run 3D simulations. However, Garaud & Brummell also showed that a computational domain does not have to be very thick to properly account for the full 3D dynamics of fingering convection, at least in parameter regimes where no further instabilities are expected. Following their results, we choose the thickness of our domain to be  $L_y = 15d$ , unless otherwise mentioned.

The height of the domain (in the  $z$  direction) was varied according to the constraints placed on the problem by the selection of the other input parameters of the simulation (notably,  $\Sigma_0$ ). This selection is constrained by two factors. First, since  $\Delta_{\text{init}}$  must be larger for larger  $\Sigma_0$ , and since we require that  $C(x, y, z, 0)$  must become numerically small near the top and the bottom of the domain, we have to increase  $L_z$  in proportion to any increase in  $\Delta_{\text{init}}$ . Secondly, as noted earlier,  $w_d(z)$  must be periodic in  $z$ , but it must also vanish near the top and bottom boundaries to avoid any mass flux through the latter. Third,



**Figure 4.** Initial condition (solid black line) and drift velocity profile  $w_d(z)$  (blue dashed line) for the following parameters:  $\tau = \text{Pr} = 0.1$ ,  $s = 0.001$ , and  $\Sigma_0 = 100\Sigma_{\text{crit}}$ . Since  $\Delta_i = 100$  at these parameters, we used  $\Delta_{\text{init}} = 110$ . The horizontal red dashed lines indicate the region where the function  $w_d(z)$  is reasonably close to being linear.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

$w_d(z)$  should also be reasonably smooth and have a reasonably large region near  $z = 0$  where it is well approximated by  $w_d(z) \sim -sz$ . Finally, the bulk of the initial Gaussian profile selected must be able to fit within the region of the domain where  $w_d(z)$  is linear, so that the simulations can be compared more directly with the results of Sections 4 and 5. Based on these statements, we chose to use  $w_d(z) = -sz(m^{20} - z^{20})/m^{20}$ , where  $m = L_z/2$ . This formulation ensures that the region where this function is close to linear encompasses a large fraction of the computational domain, as shown in Figure 4.

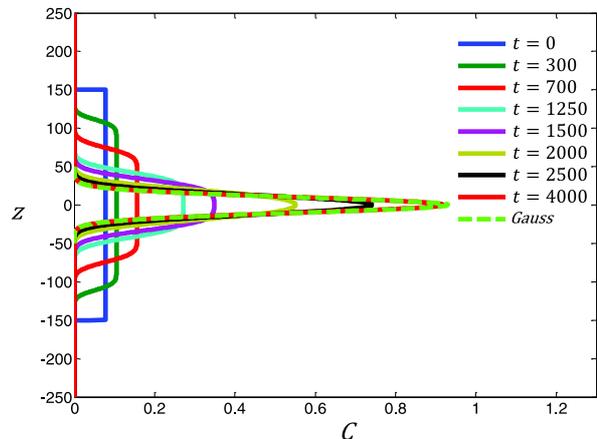
Finally, note that it is not computationally feasible to run simulations at stellar values of the parameters  $s$ ,  $\text{Pr}$ , and  $\tau$ . Also, given the very large domain size considered and constraints on the required resolution for very low  $\text{Pr}$  and  $\tau$  runs, we cannot reach parameter values as low as Brown et al. (2013) did. For consistency throughout this work we shall use  $\text{Pr} = \tau = 0.1$  in all 3D numerical simulations. We also (arbitrarily) set the value of  $\Delta_\infty = 10$ , so that  $s = 10^{-3}$  in all 3D simulations. We then vary the total input mass of iron present via  $\Sigma_0$  and study the various parameter regimes that naturally emerge. The role of simulations at non-stellar parameters is thus twofold: (1) to identify interesting behavior, and (2) to validate the compositional mixing parameterization of Brown et al. (2013). This validation will then enable us to apply these simple mixing models to actual stellar evolution codes that use realistic stellar parameters.

### 6.2. Low Input Mass Regime ( $\Sigma_0 \sim \Sigma_{\text{crit}}$ )

While we have found earlier that the typical values of  $\Sigma_0$  expected in real stellar interiors are usually much larger than  $\Sigma_{\text{crit}}$ , it is worth exploring the parameter regime where  $\Sigma_0$  is close to  $\Sigma_{\text{crit}}$ , for completeness, and also as a test of the validity of the code.

For  $\tau = 0.1$  and  $s = 0.001$ , Equation (18) shows that  $\Sigma_{\text{crit}} = 41$ . We thus examined systems with  $\Sigma_0 = 0.5\Sigma_{\text{crit}}$  and  $\Sigma_0 = 2\Sigma_{\text{crit}}$  to determine whether (1) the laminar solution indeed behaves as predicted in Section 4 and (2) the onset of fingering convection occurs as predicted in Section 5.

In the case where  $\Sigma_0 = 0.5\Sigma_{\text{crit}}$ , we find that the layer does indeed remain laminar. Furthermore, the iron density profile eventually converges to the steady-state laminar solution



**Figure 5.** Evolution of the iron density profile in the simulation with  $\Sigma_0 = 0.5\Sigma_{\text{crit}}$  described in the main text (solid lines), as well as the corresponding analytical prediction for the steady-state Gaussian solution from Equation (13) for the same parameters. Note how the iron density profile tends to a Gaussian profile even though the initial condition (for this simulation only) is not Gaussian.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

given in Equation (13) even when the initial conditions are not Gaussian (see Figure 5).

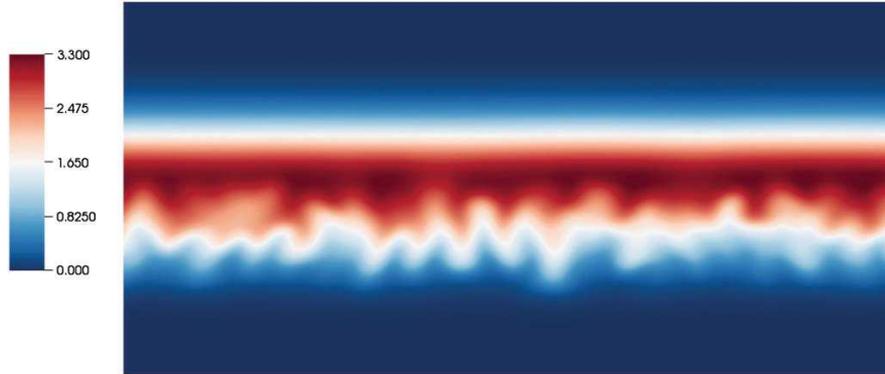
In the case where  $\Sigma_0 = 2\Sigma_{\text{crit}}$ , by contrast, we find that fingering convection eventually takes place. Figure 6 shows a snapshot of the iron density once fingering has fully developed. We see that the fingering structures are about as tall as the iron layer height itself and are not very turbulent. This is not surprising since the system remains relatively close to the onset of instability at this value of  $\Sigma_0$ .

In both cases (i.e., for  $\Sigma_0 = 0.5\Sigma_{\text{crit}}$  and for  $\Sigma_0 = 2\Sigma_{\text{crit}}$ ), the system eventually settles into a quasi-steady state in which the horizontally averaged iron density profile is independent of time. These are shown in Figure 7. In the laminar case, this steady state is given by Equation (13) and takes the form of a Gaussian of width  $\Delta_\infty$ . In the fingering case, the steady-state profile is no longer Gaussian but is notably skewed downward. The upper part of the domain (above  $z = 0$ ) is in balance between the upward down-gradient diffused flux and the downward gravitational settling flux. The lower part of the domain is in balance between the upward levitated flux and the downward fingering flux. In Section 7 we propose a simple model to explain the shape of this steady-state profile. The model predictions (also shown in Figure 7) fit the results of our simulations remarkably well.

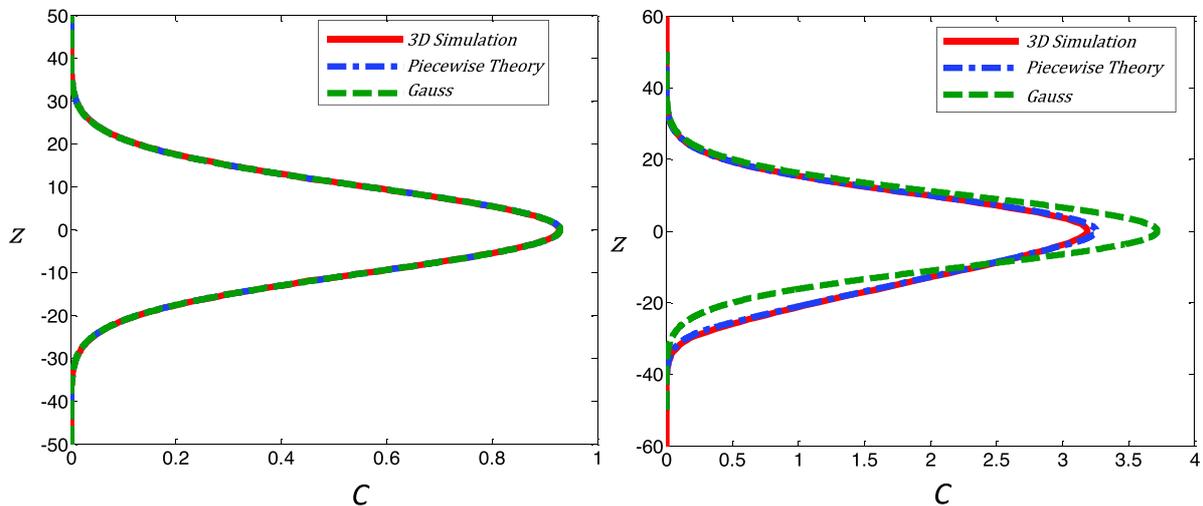
### 6.3. Intermediate-Mass Regime

For larger values of  $\Sigma_0$ , we expect that the layer becomes unstable enough to have an extended turbulent fingering region. This is verified in Figure 8, which shows a snapshot of a simulation with  $\Sigma_0 = 100\Sigma_{\text{crit}}$ , while all other parameters remain the same as in the previous section. The fingers are now clearly much more turbulent than before, and the layer extends over several finger scale heights (the latter being of the same order as the finger width).

Figure 9 shows the temporal evolution of the horizontally averaged iron density profile, as well as its ultimate steady state. We find that the layer is now significantly asymmetric and extends down to about  $z = -150$ . This is much larger



**Figure 6.** Snapshot of the iron density in the simulation with  $\Sigma_0 = 2\Sigma_{\text{crit}}$  taken in the quasi-steady state reached after the onset of fingering convection. Fingering structures are clearly visible and span most of the layer height. The layer asymmetry described in the main text, above and below  $z = 0$ , is also clearly visible. (A color version of this figure is available in the online journal.)



**Figure 7.** Steady-state iron density profiles as a function of  $z$ . Left: case with  $\Sigma_0 = 0.5\Sigma_{\text{crit}}$ . Right: case with  $\Sigma_0 = 2\Sigma_{\text{crit}}$ . The solid red lines show the horizontally averaged iron density profile from our 3D simulations, the dot-dashed blue line indicates the iron density profile from the piecewise analytical theory (see Section 7.3), and the dashed green line is the Gaussian laminar solution  $C_\infty(z)$ . While the latter is only a good fit to the true profile when the system remains laminar, the piecewise analytical theory fits extremely well in both cases.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

than the laminar equilibrium thickness ( $\Delta_\infty = 10$ ) but is comparable with the thickness at which the laminar Gaussian profile is expected to become turbulent (for these parameters,  $\Delta_i = (\Sigma_0/\Sigma_{\text{crit}})\Delta_\infty = 100$ ).

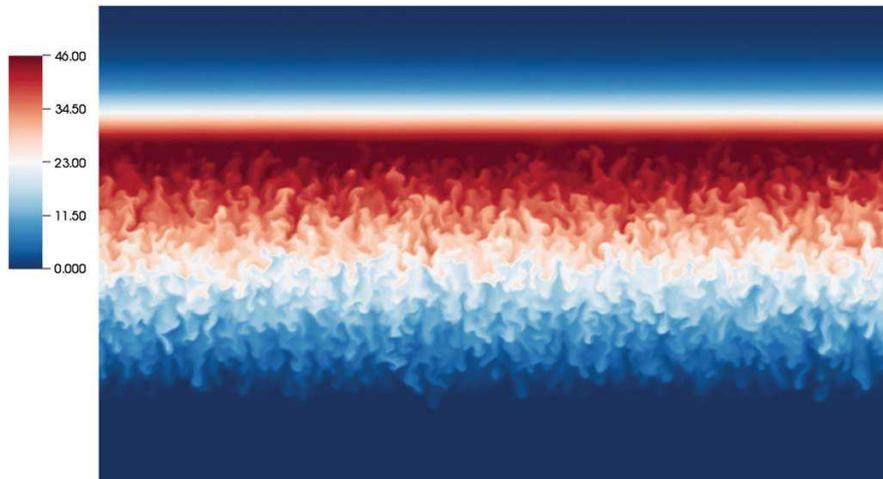
#### 6.4. Fully Convective Regime

For even larger values of  $\Sigma_0$ , finally, we find that the compositional gradient that develops in the iron layer is so unstable that it becomes fully convective. By contrast with standard convective regions in stars, this kind of convection is (at least in the simulation) purely driven by the unstable iron density gradient, instead of being thermally driven. Figure 10 shows snapshots of the iron density for a simulation with  $\Sigma_0 = 1000\Sigma_{\text{crit}}$  and for  $\text{Pr} = \tau = 0.1$  and  $s = 0.001$  as in previous cases. Note that with such a large value of  $\Sigma_0$ ,  $\Delta_i$  (and therefore  $\Delta_{\text{mit}}$ ) is also quite large—in this case,  $\Delta_i = 100\sqrt{10}$ . For this reason, we had to use a very tall computational domain, with  $z$  in the interval  $[-1000, 1000]$ , to capture the entire initial

Gaussian profile. The snapshots presented, however, zoom in on the region immediately around the convective layer.<sup>7</sup>

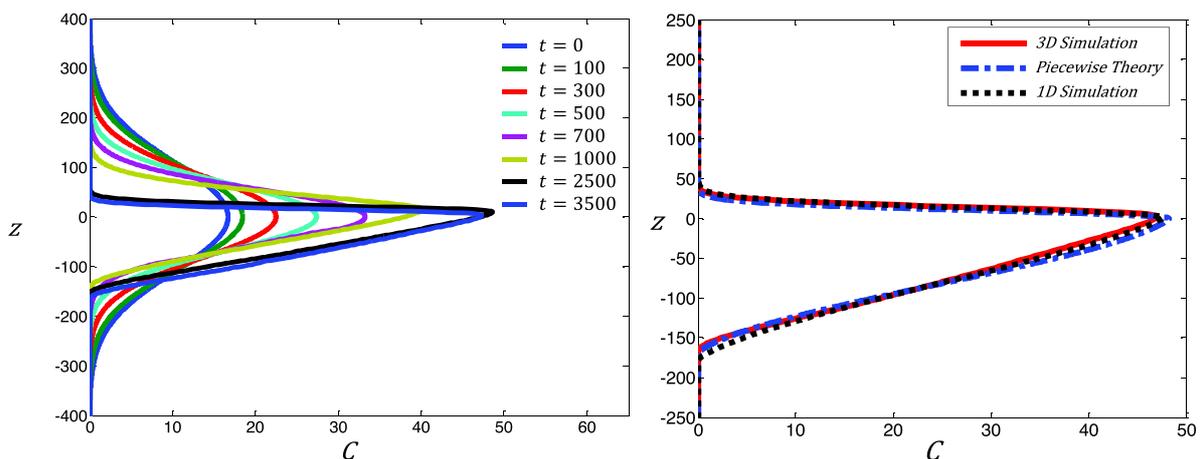
It is quite clear from Figure 10 that the bulk of the iron layer now hosts large-scale eddies instead of individual fingers, in a manner that is strongly reminiscent of standard overturning convection. To prove that the layer is indeed fully convective, we show in Figure 11 the vertical profiles of the temperature perturbation away from the mean temperature  $T_0$ , of the iron density, and of the density perturbation away from background density  $\rho_0$ , once the simulation has reached a stationary state.

<sup>7</sup> We actually ran two simulations: one in a thin domain (as in all the cases presented so far) of thickness  $L_y = 15d$ , and one in a thicker domain, of thickness  $L_y = 64d$ , to check whether the thin domain assumption may unnecessarily constrain the dynamics of the fully convective layer. While we were not able to run the thick-domain model for as long as we have been able to run the thin-domain case, both models appear so far to yield similar results in terms of compositional transport. We therefore focus our discussion on the thin-domain case, for which we have a much longer data set.



**Figure 8.** Snapshot of the iron density in the simulation with  $\Sigma_0 = 100\Sigma_{\text{crit}}$  taken in the quasi-steady state reached after the onset of fingering convection. The fingering region is now more extended, asymmetric, and turbulent than in the case where  $\Sigma_0 = 2\Sigma_{\text{crit}}$ .

(A color version of this figure is available in the online journal.)



**Figure 9.** Left: horizontally averaged density profiles as a function of  $z$  and time for systems with  $\Sigma_0 = 100\Sigma_{\text{crit}}$ . The concentration profile is initially stable but becomes double diffusively unstable after contraction and is no longer of Gaussian form at steady state. Right: steady state eventually achieved and comparison with our 1D models (see Section 7). The result of our piecewise semi-analytical model is shown as the blue dot-dashed line, while the steady-state profile achieved by evolving the 1D Equation (20) together with the Brown et al. (2013) parameterization of mixing by fingering convection is shown by the black dotted line.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

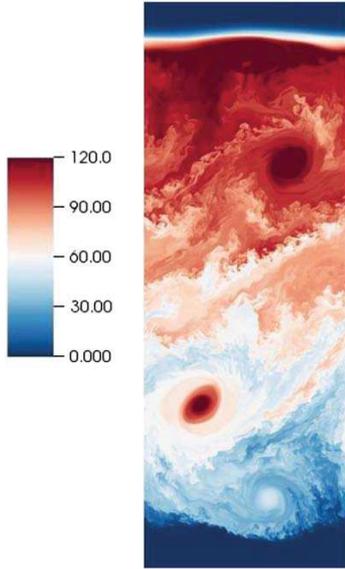
Both density and temperature profiles are clearly well mixed in the layer, which roughly spans the interval  $z \in [-600, 0]$  once the system has reached a stationary state. The total density increases very mildly with height, as expected from a fully convective region. It is interesting to note that the concentration profile is not very well mixed by convection. This is not entirely surprising, in fact, since a fairly unstable compositional gradient is necessary to maintain an unstable density gradient against the stabilizing temperature stratification in this fairly peculiar kind of convection zone.

In reality, however, this kind of compositionally driven convection zone cannot exist at stellar parameter regimes in more realistic models (see below). Instead, as discussed by Richard et al. (2001), convection zones are created by the increase in the local opacity as iron accumulates in the layer, an effect that is not modeled here.

## 7. SIMPLIFIED MODELS FOR THE LONG-TERM EVOLUTION OF THE SYSTEM

### 7.1. A Simple 1D Model

The numerical simulations presented in Section 6 provide us with exact solutions to the set of idealized Equation (7) and have revealed at least three distinct parameter regimes: the laminar regime (small surface density of iron  $\Sigma_0$ ), the fingering regime (intermediate  $\Sigma_0$ ), and the convective regime (large  $\Sigma_0$ ). In each case, we were able to follow the evolution of the iron density profile from initial conditions to steady state and estimate the final layer width, turbulence level, and maximum iron density achieved. However, such simulations not only are computationally intensive but can only be run for short periods of time compared with the stellar evolution timescale, in very small domains compared with the whole star, and at parameter



**Figure 10.** Snapshot of the iron density profile in the fully convective layer case, around  $t = 4500$  (which is already in the quasi-steady state regime). The presence of strong iron concentrations in the convective eddies is partly an artifact of the aspect ratio of the computational domain used, which is quite thin.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

values that are still very far from stellar. Furthermore, the governing equations are necessarily idealized, as discussed in the introduction, and neglect a number of phenomena, such as the concurrent settling of helium, the feedback on the opacity caused by the accumulation of iron, and so forth. As a result, they should only be viewed as illustrative of the types of expected dynamics near the iron layer.

However, as we now demonstrate, it is possible to create a simple 1D semi-analytical model of the evolution of the iron layer that describes the results of the numerical simulations very accurately, can easily be extended to stellar parameter values, can straightforwardly be included in a stellar evolution

code, and can thus be generalized to include the aforementioned missing physics such as helium settling or a temperature- and composition-dependent opacity. To do so, we make use of the recent work of Brown et al. (2013), who proposed a model for turbulent transport by fingering convection in the stellar parameter regime.

The evolution of layers that become fingering unstable is controlled by the sum of the down-gradient diffused element flux, the levitated flux (from below), the settling flux (from above), and finally the fingering or convective flux (in the turbulent layer below  $z = 0$ ). The first three are purely laminar processes, already taken into account in Equation (10), for instance. To model the effect of the last one, we now consider a slightly modified 1D advection-diffusion equation that includes the turbulent flux  $F_C$ :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}(s z C) + \frac{\partial F_C}{\partial z} = \tau \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \quad (20)$$

Limiting our analysis to the case of fingering convection only, we use the results of Brown et al. (2013), who showed that  $F_C$  can be expressed in terms of a Nusselt number,  $\text{Nu}_C$ , defined as

$$F_C = -\tau(\text{Nu}_C - 1) \frac{\partial C}{\partial z}, \quad (21)$$

where  $\text{Nu}_C$  depends on the local values of  $\text{Pr}$ ,  $\tau$ , and

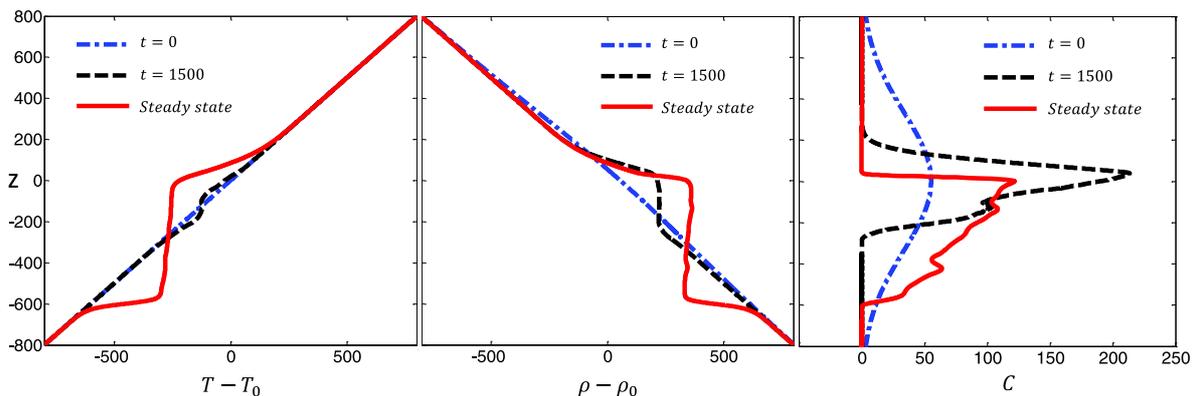
$$R(z, t) = \left( \frac{\partial C}{\partial z} \right)^{-1}, \quad (22)$$

the local density ratio at the position considered. Combining Equation (21) with Equation (20), we then get

$$\frac{\partial C}{\partial t} - s \frac{\partial}{\partial z}(z C) = \tau \frac{\partial}{\partial z} \left( \text{Nu}_C(z, t) \frac{\partial C}{\partial z} \right). \quad (23)$$

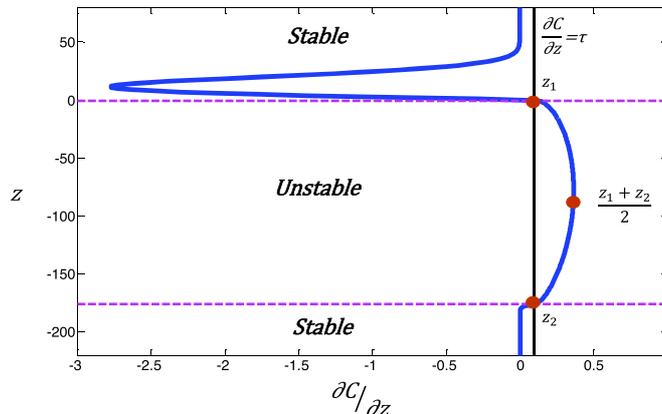
Ignoring the effect of atomic diffusion on the dynamics of fingering convection, Brown et al. (2013) showed that the compositional Nusselt number takes the form

$$\text{Nu}_C(z, t) = 1 + 49 \frac{\lambda^2}{\tau l^2 (\lambda + \tau l^2)}, \quad (24)$$



**Figure 11.** Vertical profiles of the temperature and density deviations from their constant background values, as well as that of the iron density, for a simulation with  $\Sigma_0 = 1000\Sigma_{\text{crit}}$ , and for  $\text{Pr} = \tau = 0.1$  and  $s = 0.001$  as in the previous cases. Shown are profiles at times  $t = 0$  and  $t = 1500$ , as well as a short time-averaged profile once the system has reached a steady state. The density increases very mildly with height within the layer as a result of the strong compositional anomaly, thereby maintaining a convective state. At steady state, the temperature profile is nearly uniform within the same region, but the iron density profile is not, decreasing more or less smoothly from a peak around  $z = 0$  to zero near the bottom of the convective layer.

(A color version of this figure is available in the online journal.)



**Figure 12.** Blue solid line shows the vertical derivative of the steady-state iron density profile ( $\partial C/\partial z$ ), for the parameters  $\text{Pr} = \tau = 0.1$ ,  $s = 0.001$ , and  $\Sigma_0 = 100\Sigma_{\text{crit}}$ . The black vertical line lies at the constant value  $\tau$ . This profile illustrates various regions of interest: regions where  $(\partial C/\partial z) < \tau$  (for  $z > z_1$  and  $z < z_2$ ) are stable to fingering convection, while the region with  $(\partial C/\partial z) > \tau$  (for  $z \in [z_2, z_1]$ ) is fingering unstable. Note that the  $(\partial C/\partial z)$  profile is close to parabolic in that region.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

where  $\lambda$  and  $l$  are the growth rate and the wavenumber of the fastest growing mode of the fingering instability at the parameters  $\text{Pr}$ ,  $\tau$ , and  $R(z, t)$ . As such, they both depend on  $z$  and  $t$  as well and are found from a standard linear stability analysis described in Appendix A of Brown et al. (2013). Note that if the layer is stable to fingering convection, then we set  $\text{Nu}_C = 1$ , so  $F_C = 0$  and Equation (20) recovers the original advection-diffusion Equation (10).

### 7.2. Comparison with 3D Simulations

To check the validity of this simple 1D model, we compare its evolution to that of the full 3D simulations presented in Section 6. We compare, for instance, the temporal evolution of the iron density profile for the case with  $\Sigma_0 = 100\Sigma_{\text{crit}}$ , using exactly the same initial conditions for the two runs. We have checked that the profiles match throughout the course of the system's evolution and show in Figure 9(b) a comparison between the ultimate steady states of the 1D and 3D models. The match between the two solutions is of course not perfect but is nevertheless incredibly good given the highly simplified nature of the 1D model compared with the 3D model. Indeed, recall that the Brown et al. (2013) model ignores any effect of settling or levitation on the iron ions, whereas the latter are *partially* taken into account in the full 3D simulations via  $w_d(z)$ . Also note that the 1D model contains no free parameters. This result confirms that the Brown et al. (2013) model can be used in models of stellar evolution with atomic diffusion to represent the effects of fingering on compositional transport, at least until an even better prescription that fully takes into account the influence of atomic diffusion on the fingering dynamics becomes available.

### 7.3. Steady-state Models for Fingering Systems

Having established that the 1D Equation (23) is a good approximation to the true 3D behavior of the system, we can now use it to find what the ultimate quasi-steady state of the iron layer may be while undergoing active fingering convection for a wide range of input parameters. To do so, we must solve

$$-szC = \tau \text{Nu}_C(z) \frac{\partial C}{\partial z}. \quad (25)$$

Although this equation looks simple, it is in fact highly nonlinear since  $\text{Nu}_C$  is a rational function of both  $\lambda$  and  $l$ , each of which is a complicated function of  $(\partial C/\partial z)$  via  $R(z, t)$ .

There are two possible ways of solving Equation (25) directly (i.e., without proceeding through an expensive time-dependent evolution first, as we have in Section 7.2): either one can do so numerically using a two-point boundary value solver for nonlinear ordinary differential equations, or one can try to approximate Equation (25) so that it lends itself to a simpler analytical treatment. In what follows, we pursue the second option, in order to try to develop more intuition about the general behavior of the iron layer at different parameter regimes.

To do so, we first inspect the numerical solution obtained in Section 6.3 for the case where  $\Sigma_0 = 100\Sigma_{\text{crit}}$  in more detail. Figure 12 shows the horizontally averaged profile of  $(\partial C/\partial z)$  as a function of  $z$  for the ultimate steady-state profile achieved. The profile clearly has three distinct parts. Above  $z_1$  and below  $z_2$ ,  $\partial C/\partial z < \tau$ , so the system is stable to fingering convection. This means that  $\text{Nu}_C = 1$  and that the overall flux balance is between diffusion and settling (for  $z > z_1$ ) or diffusion and levitation (for  $z < z_2$ ). Between  $z_1$  and  $z_2$ , however,  $\tau < \partial C/\partial z < 1$ , so the layer is fingering unstable. There,  $\text{Nu}_C > 1$  and is given by Equation (24). Interestingly, we can see that the profile for  $\partial C/\partial z$  is close to being parabolic between  $z_1$  and  $z_2$ . These considerations suggest the following construction for an approximate steady-state solution.

Above  $z_1$  and below  $z_2$ , the steady-state solution satisfies Equation (10), which was already solved in Section 4 and found to be a Gaussian profile. The main difference is that the solutions in the two regions may now have different normalization constants, so that

$$\begin{aligned} C(z \geq z_1) &= \frac{\Sigma_1}{\sqrt{2\pi}\Delta_\infty} e^{-\frac{z^2}{2\Delta_\infty^2}}, \\ C(z \leq z_2) &= \frac{\Sigma_2}{\sqrt{2\pi}\Delta_\infty} e^{-\frac{z^2}{2\Delta_\infty^2}}, \end{aligned} \quad (26)$$

where  $\Delta_\infty$  was defined in Equation (13) and  $\Sigma_1$  and  $\Sigma_2$  are two constants to be determined from global mass conservation (see below).

Since  $z_1$  and  $z_2$  are by construction points of marginal stability for fingering convection, we have  $\partial C/\partial z = \tau$  and  $\text{Nu}_C = 1$  at these points. This then implies

$$\begin{aligned} -sz_1 C(z_1) &= \tau \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z_1} = \tau^2, \quad \text{and} \\ -sz_2 C(z_2) &= \tau \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z_2} = \tau^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Hence, we find that  $C(z_1) = -\tau^2/sz_1$  and  $C(z_2) = -\tau^2/sz_2$ , which then yields  $\Sigma_1$  and  $\Sigma_2$  provided that  $z_1$  and  $z_2$  are known:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= -\sqrt{2\pi} \frac{\Delta_\infty \tau^2}{sz_1} e^{\frac{z_1^2}{2\Delta_\infty}}, \\ \Sigma_2 &= -\sqrt{2\pi} \frac{\Delta_\infty \tau^2}{sz_2} e^{\frac{z_2^2}{2\Delta_\infty}}. \end{aligned} \quad (28)$$

So far, all of these solutions and algebraic equations relating the various variables are exact. However, they do not yet form a closed system, since we do not know a priori what  $z_1$  and  $z_2$  are. The dynamics of the intermediate fingering region, for  $z \in [z_1, z_2]$ , is of course crucial in closing the problem, but it is more difficult to solve exactly.

For this reason, we simply approximate  $\partial C/\partial z$  in that region using a parabola:  $\partial C/\partial z = \tau + k(z_1 - z)(z - z_2)$ . This introduces a new constant,  $k$ , so we now have three unknowns to solve for ( $k$ ,  $z_1$ , and  $z_2$ ). The latter are given by the solution of the following three equations:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 + \frac{\tau \Delta_\infty^3}{z_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{z_1^2}{2\Delta_\infty}} \left[ 1 - \text{erf} \left( \frac{z_1}{\sqrt{2\Delta_\infty}} \right) \right] \\ + \frac{\tau \Delta_\infty^3}{z_2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{z_2^2}{2\Delta_\infty}} \left[ 1 + \text{erf} \left( \frac{z_2}{\sqrt{2\Delta_\infty}} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

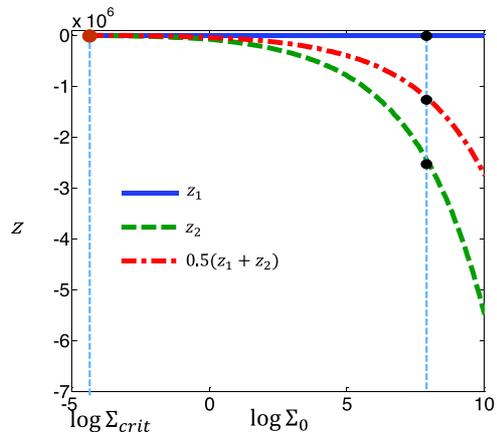
$$\tau = \frac{z_1 z_2}{\Delta_\infty^2} \left[ \tau + \frac{k}{6} (z_1 - z_2)^2 \right], \quad (30)$$

$$\frac{(\tau z_1 + z_2)^2}{4z_1 z_2} - \text{Nu}_C(C_z(\hat{z})) \left[ \tau + \frac{k(z_1 - z_2)^2}{4} \right] = 0, \quad (31)$$

where  $\hat{z} = (z_1 + z_2)/2$ . Equation (29) is obtained from mass conservation by integrating the approximate piecewise iron density profile from  $-\infty$  to  $z_2$ , then from  $z_2$  to  $z_1$ , and finally from  $z_1$  to  $+\infty$ . Equation (30) is found by matching the diffusive to the fingering solutions at  $z_1$  and  $z_2$ . Finally, Equation (31) is obtained from Equation (25) at  $\hat{z}$  and provides a constraint on  $k$ .

These three equations can be solved using Newton's method for a given set of input parameters:  $\tau$ ,  $\text{Pr}$ ,  $s$ , and  $\Sigma_0$ . Once these are known, the piecewise steady-state iron density profile  $C(z)$  is obtained from

$$\begin{aligned} C(z > z_1) &= -\frac{\Delta_\infty^2 \tau}{z_1} e^{-\frac{z^2 - z_1^2}{2\Delta_\infty}}, \\ C(z_2 \leq z \leq z_1) &= -\frac{\Delta_\infty^2 \tau}{z_2} \\ &\quad + \tau(z - z_2) + \frac{k}{2}(z_1 - z_2)(z - z_2)^2 - \frac{k}{3}(z - z_2)^3, \\ C(z < z_2) &= -\frac{\Delta_\infty^2 \tau}{z_2} e^{-\frac{z^2 - z_2^2}{2\Delta_\infty}}. \end{aligned} \quad (32)$$



**Figure 13.** Variation of the upper and lower extent of the iron layer,  $z_1$  and  $z_2$ , as functions of  $\Sigma_0$ , for a system with stellar input parameters (see Table 2), as calculated using our piecewise algebraic method (see Section 7.3). The vertical dashed line at  $\Sigma_0 \sim 10^8$  corresponds to the expected value of  $\Sigma_0$  in the stellar model described in Tables 1 and 2.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

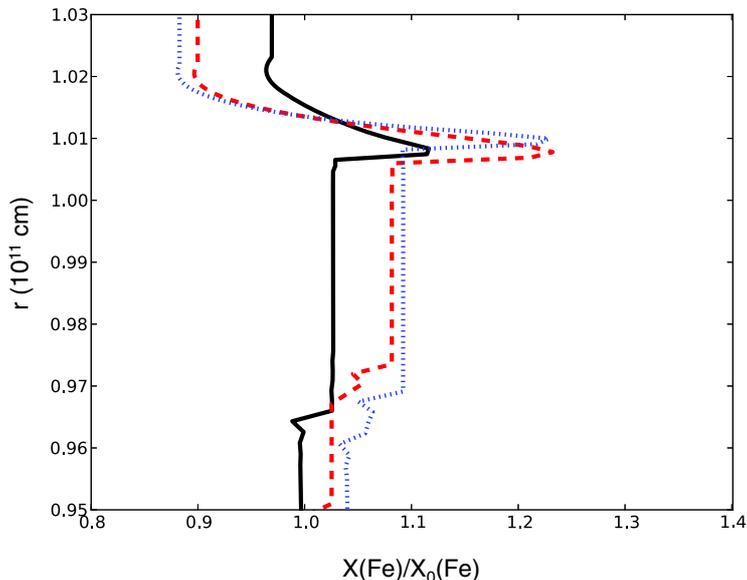
A comparison of the exact profiles from 3D simulations, of the 1D profile from the integration of the 1D model, and of the piecewise algebraic model is presented in Figure 9(b) for  $\text{Pr} = \tau = 0.1$ ,  $s = 0.001$ , and  $\Sigma_0 = 100\Sigma_{\text{crit}}$ . Another comparison for  $\Sigma_0 = 2\Sigma_{\text{crit}}$  is shown in Figure 7. In both cases, the fit is excellent.

The advantage of the piecewise algebraic method is that solutions can be obtained very rapidly for any value of the input parameters, including realistic stellar values. Applying it to the parameters given in Tables 1 and 2, we then get the results presented in Figure 13. This suggests that the typical steady-state iron layer width, for reasonable input values for the total mass of iron (corresponding to  $\Sigma_0 \sim 10^8$  in non-dimensional units; see Table 2), is about  $3 \times 10^6 d$ , which in dimensional terms corresponds to about  $10^{12}$  cm, or in other words, a width larger than the radius of the star itself!

Setting aside the fact that such an extended layer would invalidate the use of the Boussinesq approximation, these results, taken at face value, imply that mixing by fingering convection in the absence of all other processes (see below) is *so* efficient in this parameter regime that iron should eventually be redistributed throughout the entire star. Iron would not be able to accumulate in a thin layer or lead to the formation of an iron convection zone, at least in a steady-state situation. Of course, reaching a steady state could take a very long time, and temporarily thinner layers can in principle be found. One could study this using the time-dependent 1D approach presented in Section 7.2. However, as discussed by Théado et al. (2009) and Richard et al. (2001), other important processes that were neglected in our 3D calculation *must* be taken into account to properly model the evolution of the iron layer anyway. It is now time to go back to full stellar evolution models that take into account all relevant physics, albeit in one dimension only, to complete our study.

## 8. APPLICATION TO STELLAR EVOLUTION MODELS

Having established that the prescription for turbulent mixing by fingering convection proposed by Brown et al. (2013) correctly accounts for the 3D dynamical evolution of an



**Figure 14.** Iron abundance profiles in a  $1.7 M_{\odot}$  star at 23 Myr (black solid line), 28 Myr (red dashed line), and 35 Myr (blue dotted line) in models with fingering convection but without helium settling. This figure can be directly compared with Figure 2. Note how the overabundance of iron this time remains quite small. (A color version of this figure is available in the online journal.)

“idealized” (in which the full complexity of radiative transfer processes is neglected) iron layer, we now apply it to full stellar evolution calculations. We revisit the model  $1.7 M_{\odot}$  star discussed in Section 2 and add the computation of fingering convection to that of atomic diffusion in order to follow the evolution of the iron abundance profile with time.

At each time step and each radial position in the star, the stellar evolution calculation yields the actual realistic values of non-dimensional parameters such as  $Pr$ ,  $\tau$ , and the local density ratio  $R(r, t)$  (see Equation (15)), which are then used to determine whether the local inverse  $\mu$ -gradient is sufficiently strong to trigger fingering convection, and if so, to calculate the expected fingering flux according to Equation (21). The contribution of this turbulent flux is then added to the equation for the evolution of the local iron abundance, and the latter is updated accordingly at the next time step.

By contrast with the necessarily simplified model used in our 3D simulation, the stellar evolution computations include all relevant physics, and in particular that of helium settling, which can create a stabilizing  $\mu$ -gradient in competition with the destabilizing one induced by the iron accumulation (Théado et al. 2009). It also includes the dependence of the local opacity on the iron abundance, which could play an important role—according to Richard et al. (2001)—in triggering standard overturning convection. The only missing ingredient is the full nonlinear feedback of exact radiative transfer processes on the dynamics of fingering convection itself.

In order to gain a better understanding of the results of the simulations, we first computed toy models in which helium diffusion is artificially suppressed, and then computed more realistic models that include it.

### 8.1. Toy Stellar Model without Helium Settling

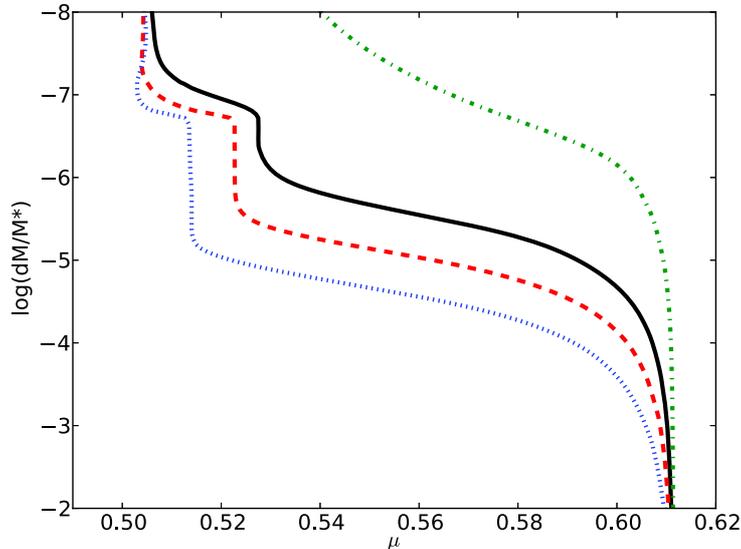
The iron abundance profiles in the toy model without helium settling are presented in Figure 14 for the same ages

(23 Myr, 28 Myr, and 35 Myr) as the model without fingering described in Section 2. The profile contains a peak around  $r_0 = 1.01 \times 10^{11}$  cm. Below the peak lies a very efficiently mixed fingering region where the iron abundance is homogeneous. The differences between these profiles and the ones presented in Figures 9 and 10 are striking but can easily be explained by the results of Section 7.3 and the fact that  $Pr$  and  $\tau$  are five or six orders of magnitude smaller in the real stellar case than the parameters used in the 3D simulations. At these realistic stellar parameters, the Brown et al. (2013) model predicts vastly increased turbulent fluxes compared with the ones found in the 3D simulations at higher  $Pr$  and  $\tau$ , and the larger turbulent iron diffusivity leads to a much wider and more efficiently mixed iron layer. Presumably, this layer will continue to thicken slowly with time as mixing by fingering convection proceeds.

Comparing Figures 2 and 14, we see that mixing by fingering convection strongly reduces the iron overabundance in the layer. The case with fingering convection (but without helium settling) has an overabundance of about 20% at most, while that without fingering altogether has eight times more iron in the layer than in the surrounding regions. As a further result, we also find that the iron density in fingering layers never becomes large enough for opacity effects to be important and trigger the onset of overturning convection.

### 8.2. Realistic Stellar Models with Helium Settling

We now present a more realistic evolution model of the same  $1.7 M_{\odot}$  star, including this time the diffusion of all the elements, and notably that of helium as well as iron, as described in Section 2. For reasons that will be clarified shortly, we evolve these more realistic models for much longer than the one presented in Section 2 and above, up to 500 Myr. The iron accumulation initially occurs at roughly the same radius in this new model as it did in the toy model, but it changes radius as a consequence of the global evolution of the star on these longer



**Figure 15.**  $\mu$ -profiles computed using the full realistic stellar evolution model for a  $1.7 M_{\odot}$  star at 35 Myr (green dot-dashed line), 123 Myr (black solid line), 243 Myr (red dashed line), and 490 Myr (blue dotted line), as a function of the fractional stellar mass below the photosphere. Note that the  $\mu$ -profile contains a barely visible inversion at the latest time only, where  $\log dM/M_{*} \simeq -5.5$ , which is unstable to fingering convection. At early times the  $\mu$ -gradient is strongly stabilizing against fingering convection.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

timescales. For this reason, we now show results in Lagrangian mass coordinates rather than radial coordinates. The iron layer remains roughly at the same mass coordinate with time, thus facilitating the analysis of its evolution. The characteristics of the stellar background in the iron layer region remain similar, albeit not identical of course, to those of Table 2.

Figure 15 shows the overall  $\mu$ -profile at various ages from 35 Myr to 500 Myr in the vicinity of the iron layer. We see that a strongly stabilizing  $\mu$ -gradient rapidly develops as a result of helium settling. This gradient is in fact sufficiently strong to completely stabilize the system against fingering convection, allowing a significant amount of iron to accumulate in the layer as shown in Figure 16. At 35 Myr (green curve), the profile is very close to being Gaussian and there is no mixing present. It is only much later (after 300 Myr) that the iron overabundance becomes sufficiently large to overwhelm the helium-induced  $\mu$ -gradient, to form a mild *inverse*  $\mu$ -gradient and drive fingering convection.

We clearly see that the iron abundance in the peak may become much larger than for the toy model without helium settling, showing that the latter *must* be taken into account to properly model the formation and evolution of iron layers in stars. In fact, the iron abundance in this case becomes sufficiently large as to increase the local opacity significantly and thus induce the formation of a thermally driven convection zone (by contrast with the compositionally driven convection zone discussed in Sections 6.4 and 7.4). This first happens around 100 Myr. The black and red curves, which are displayed for two ages, 128 and 243 Myr, both show the presence of a mixed region that corresponds to these convective zones.

We find that the iron layer in this simulation oscillates between convective and non-convective regimes during stellar evolution, as already shown by Théado et al. (2009) (see their Figure 8). When fingering convection finally begins (around 300 Myr), it first sets in directly below the convective region and

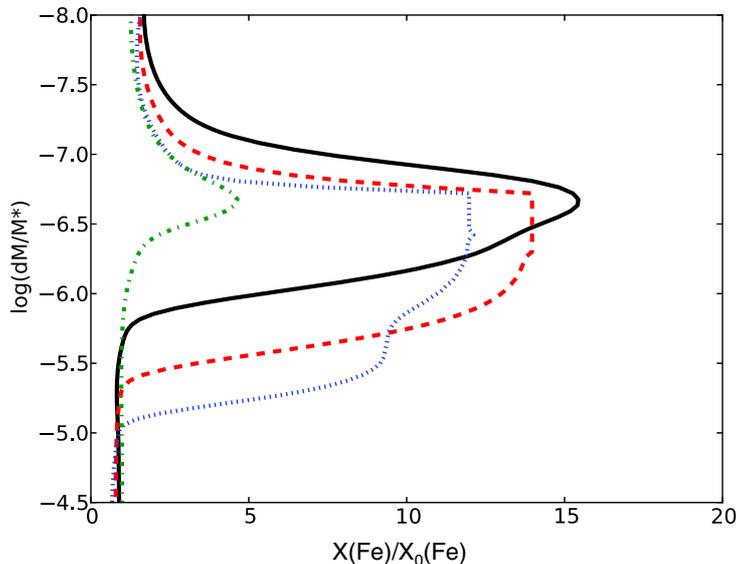
drains the excess iron from the radiative–convective interface downward. This modifies the profile’s shape further, extending the homogeneously mixed region significantly and gradually decreasing the maximum value of the iron peak with time (see profile around 490 Myr, dotted blue curve). In these models, we do not find that the iron profile reaches a steady state; instead, it continues to change with time throughout the main-sequence evolution of the star.

## 9. SUMMARY AND CONCLUSION

In this work, we presented an in-depth study of the dynamics of iron layers that commonly form in the interior of A-type stars, owing to atomic diffusion. The presence, nature, and structure of these layers can have important effects on the properties of stellar pulsations (Richard et al. 2001; Théado et al. 2009) and must therefore be better understood in order to utilize the asteroseismic results of the *Kepler* mission to their full potential.

As shown by Théado et al. (2009), iron layers are intrinsically prone to fingering instabilities that develop whenever an unstable  $\mu$ -gradient appears. This naturally regulates the amount of iron allowed to accumulate and is a process that must be modeled correctly to obtain quantitatively robust predictions for the layer structure. Using 3D idealized numerical simulations of such an iron layer, we first tested the recent prescription proposed by Brown et al. (2013) for mixing by fingering convection. This prescription contains no free parameters, and we found it to be an excellent model, able to reproduce the horizontally averaged iron density profile within the layer to within a few percent.

Note, however, that, as discussed in Section 1.2, neither 3D simulations nor the Brown et al. (2013) prescription take into account the possible effects of the selective radiative acceleration on iron atoms on the efficiency of the fingering mixing. In this sense, some work remains to be done to update the Brown et al. (2013) model to include them. Using the analytical approach of Théado & Vauclair (2012), we may



**Figure 16.** Iron profiles computed using the full realistic stellar evolution model for a  $1.7 M_{\odot}$  star at 35 Myr (green dot-dashed line), 123 Myr (black solid line), 243 Myr (red dashed line), and 490 Myr (blue dotted line), as a function of the fractional stellar mass below the photosphere. The effect of fingering convection only appears at 490 Myr. Before that age, it is prevented by the helium gradient. The different shapes at 123 and 243 Myr are due to the occurrence of opacity-induced dynamical convection.

(A color version of this figure is available in the online journal.)

estimate their importance in the present stellar model. We find that in the fingering zone, the partial derivative of the effective gravity  $g_e$  with respect to temperature,  $g_{e,T}$ , is never larger than about 0.01, while that with respect to the mean molecular weight  $g_{e,\mu}$  varies from values close to 0 up to values of order 1 or larger, which could significantly influence the fingering growth rates. This stresses the importance of introducing selective radiative acceleration in future numerical simulations.

Using the Brown et al. (2013) model in conjunction with the Toulouse-Geneva Evolution Code, we then compared different evolution scenarios for the iron layer in order to better understand what role each process plays. Taking into account the atomic diffusion of all elements but ignoring fingering convection leads to vastly overestimated predictions for the iron overabundance in the layer and underestimated predictions for its thickness. Conversely, taking into account the atomic diffusion of *iron only*, but with fingering convection, we find that the iron layer is strongly diluted downward by the fingering-induced mixing and only supports a very weak iron overabundance. Finally, taking all processes properly into account, we find that helium settling is a crucial component of the dynamics of the system, since it strongly stabilizes the layer against fingering instabilities. Iron is able to accumulate significantly for several hundred thousand years before fingering convection finally sets in. Even when it does, it is not as efficient as in the case without helium settling, and significant overabundances can be preserved. As a result, we also find that the increase in the local opacity caused by the increased iron content can trigger thermal convection, as discussed by Richard et al. (2001).

Our results show that studying iron-accumulation layers requires modeling the combination of a number of processes, both microscopic and macroscopic, accurately. The originality of the present paper lies in the combination of 3D numerical

simulations with 1D stellar models to address the problem. At the present time, the detailed physics included in 1D models cannot be completely taken into account in 3D simulations. Conversely, 3D simulations reveal nonlinear dynamical effects that are not yet taken into account in usual 1D prescriptions. This work illustrates how to make the best of both approaches to answer important questions in astrophysics.

This work originated from V.Z.'s summer project at the Woods Hole GFD Summer Program in 2013. We thank the NSF and the ONR for supporting this excellent program. We also thank Eckart Meiburg for many useful discussions during the early stages of V.Z.'s project. We thank Sylvie Théado, who implemented the computations of radiative accelerations in the Toulouse–Geneva Evolution Code. We thank Stephan Stellmach, the author of the 3D code used in this paper, for making the code available to us and for his continued support. Part of this work was funded by NSF-AST 1412951. This work was performed on the Hyades supercomputer, purchased by UCSC thanks to an NSF MRI grant.

## REFERENCES

- Alecian, G., & Leblanc, F. 2004, in IAU Symp. 224, The A-Star Puzzle, ed. J. Zverko, J. Ziznovsky, S. J. Adelman, & W. W. Weiss (Cambridge: Cambridge Univ. Press), 587
- Aller, L. H., & Chapman, S. 1960, *ApJ*, **132**, 461
- Angulo, C. 1999, in AIP Conf. Proc. 495, Experimental Nuclear Physics in Europe: Facing the Next Millennium (Melville, NY: AIP), 365
- Bahcall, J. N., Pinsonneault, M. H., & Wasserburg, G. J. 1995, *Reviews of Modern Physics*, **67**, 781
- Baines, P., & Gill, A. 1969, *JFM*, **37**, 289
- Brown, J. M., Garaud, P., & Stellmach, S. 2013, *ApJ*, **768**, 34
- Chapman, S. 1917, *MNRAS*, **77**, 540
- Chapman, S. 1922, *MNRAS*, **82**, 292

- Chapman, S., & Cowling, T. G. 1970, *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases. An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)
- Charpinet, S., Fontaine, G., & Brassard, P. 2009, *A&A*, **493**, 595
- Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., et al. 1997, *ApJL*, **483**, L123
- Cowley, C. R., & Aikman, G. C. L. 1975, *ApJ*, **196**, 521
- Cox, A. N., Morgan, S. M., Rogers, F. J., & Iglesias, C. A. 1992, *ApJ*, **393**, 272
- Denissenkov, P. A. 2010, *ApJ*, **723**, 563
- Dupret, M.-A., Grigahcène, A., Garrido, R., Gabriel, M., & Scuflaire, R. 2005, *A&A*, **435**, 927
- Eddington, A. S. 1926, *The Internal Constitution of the Stars* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)
- Fowler, W. A., Burbidge, E. M., Burbidge, G. R., & Hoyle, F. 1965, *ApJ*, **142**, 423
- Garaud, P. 2011, *ApJL*, **728**, L30
- Gough, D. O., Kosovichev, A. G., Toomre, J., et al. 1996, *Sci*, **272**, 1296
- Guzik, J. A., Kaye, A. B., Bradley, P. A., Cox, A. N., & Neuforge, C. 2000, *ApJL*, **542**, L57
- Kippenhahn, R., Ruschenplatt, G., & Thomas, H. 1980, *A&A*, **91**, 175
- Kiriakidis, M., El Eid, M. F., & Glatzel, W. 1992, *MNRAS*, **255**, 1P
- Michaud, G. 1970a, *ApJ*, **160**, 641
- Michaud, G. 1970b, PhD thesis, California Institute of Technology
- Michaud, G., Charland, Y., Vauclair, S., & Vauclair, G. 1976, *ApJ*, **210**, 447
- Michaud, G., & Richer, J. 2013, in *EAS Publications Series*, Vol. 63, New Advances in Stellar Physics: From Microscopic to Macroscopic Processes, ed. G. Alecian et al. (Les Ulis: EDP Sciences), 199
- Michaud, G., Richer, J., & Richard, O. 2011, *A&A*, **529**, A60
- Miglio, A., Montalbán, J., & Dupret, M.-A. 2007, *CoAst*, **151**, 48
- Moskalik, P., & Dziembowski, W. A. 1992, *A&A*, **256**, L5
- Pamyatnykh, A. A., Handler, G., & Dziembowski, W. A. 2004, *MNRAS*, **350**, 1022
- Paquette, C., Pelletier, C., Fontaine, G., & Michaud, G. 1986, *ApJS*, **61**, 177
- Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, *ExA*, **41**
- Richard, O., Michaud, G., & Richer, J. 2001, *ApJ*, **558**, 377
- Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C., & Dziembowski, W. A. 1996, *A&A*, **312**, 1000
- Rogers, F. J., & Nayfonov, A. 2002, *ApJ*, **576**, 1064
- Schmitt, R. 1983, *PhFl*, **26**, 2373
- Seaton, M. J. 2005, *MNRAS*, **362**, L1
- Spiegel, E. A., & Veronis, G. 1960, *ApJ*, **131**, 442
- Stancliffe, R. J., Glebbeek, E., Izzard, R. G., & Pols, O. R. 2007, *A&A*, **464**, L57
- Théado, S., Alecian, G., LeBlanc, F., & Vauclair, S. 2012, *A&A*, **546**, A100
- Théado, S., & Vauclair, S. 2012, *ApJ*, **744**, 123
- Théado, S., Vauclair, S., Alecian, G., & Le Blanc, F. 2009, *ApJ*, **704**, 1262
- Thompson, I. B., Ivans, I. I., Bisterzo, S., et al. 2008, *ApJ*, **677**, 556
- Traxler, A., Garaud, P., & Stellmach, S. 2011a, *ApJL*, **728**, L29
- Traxler, A., Stellmach, S., Garaud, P., Radko, T., & Brummell, N. 2011b, *JFM*, **677**, 530
- Turcotte, S., Richer, J., Michaud, G., Iglesias, C. A., & Rogers, F. J. 1998, *ApJ*, **504**, 539
- Vauclair, G., Vauclair, S., & Michaud, G. 1978, *ApJ*, **223**, 920
- Vauclair, S. 2004, *ApJ*, **605**, 874
- Vauclair, S., & Reeves, H. 1972, *A&A*, **18**, 215
- Vauclair, S., & Théado, S. 2012, *ApJ*, **753**, 49
- Vick, M., Michaud, G., & Richard, O. 2008, in *IAU Symp. 252, The Art of Modeling Stars in the 21st Century*, ed. L. Deng & K. L. Chan (Cambridge: Cambridge Univ. Press), 289

## 1.3 Astérosismologie

L'étude des oscillations des étoiles permet de sonder leurs structures internes. Les paramètres stellaires des étoiles peuvent être déduits des fréquences obtenues à partir des observations. Cette section traite de la théorie des oscillations stellaires en partant des équations de la structure interne. Les approximations utilisées ainsi que les hypothèses seront détaillées.

### 1.3.1 Équations de la structure interne

La théorie des oscillations est développée à partir d'une étude perturbative des équations de la structure interne qui sont :

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.42)$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \quad (1.43)$$

- Équation de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (1.44)$$

- Conservation de l'énergie

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (1.45)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse d'une particule fluide,  $\rho$  est la densité,  $p$  est la pression,  $\mathbf{f}$  représente les forces extérieures,  $\Phi$  est le potentiel gravitationnel,  $q$  est la quantité de chaleur et  $E$  est l'énergie. La résolution de l'équation de la conservation de l'énergie est complexe à cause du terme de chauffage. Négliger ce terme (cas adiabatique) ne détériore pas la précision dans les calculs. L'équation 1.45 peut alors s'écrire :

$$\frac{dq}{dt} = \Gamma_1 \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (1.46)$$

où  $\Gamma_1$  est l'exposant adiabatique défini par  $\Gamma_1 = \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_{ad}$ .

### 1.3.2 Linéarisation des équations

Les oscillations stellaires étant de faibles amplitudes il est possible de traiter le problème de manière perturbative.

#### Structure à l'équilibre

La structure à l'équilibre est supposée statique, donc les dérivées temporelles peuvent être négligées. L'équation de conservation de la quantité de mouvement (Eq. 1.43) devient alors :

$$\nabla p_0 = \rho_0 g_0 = -\rho_0 \nabla \Phi_0 \quad (1.47)$$

où les indices 0 indiquent les valeurs à l'équilibre. L'équation de Poisson est inchangée :

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0 \quad (1.48)$$

et une fois intégrée s'écrit :

$$\nabla \Phi_0 = -\frac{G}{r^2} \int_0^r 4\pi \rho_0 r'^2 dr' = -\frac{Gm_r}{r^2} = -g_0 \quad (1.49)$$

où  $m_r$  est la masse à l'intérieure du rayon  $r$ .

#### Analyse perturbative

On considère les petites perturbations autour de l'état d'équilibre qui s'écrivent sous la forme :

$$x(\mathbf{r}, t) = x_0(\mathbf{r}) + x'(\mathbf{r}, t) \quad (1.50)$$

où  $x'(\mathbf{r}, t)$  est la petite perturbation *Eulérienne* (la perturbation à un point donné). La perturbation *Lagrangienne* (suivis du mouvement du fluide entre  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$ ) s'écrit :

$$\delta x(\mathbf{r}) = x'(\mathbf{r}_0) + \delta\mathbf{r} \nabla x_0 \quad (1.51)$$

En injectant les expressions perturbatives dans les équations de base et en négligeant tous les termes de degré supérieur à  $\mathbf{v}$ ,  $\rho'$  et  $p'$  on obtient le système suivant :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \delta\mathbf{r}}{\partial t} \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (1.53)$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p' - \rho' \nabla g_0 - \rho_0 g' \quad (1.54)$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial \delta q}{\partial t} - \frac{\Gamma_1 p_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.56)$$

Il vient naturellement que  $\nabla\Phi' = -g'$ . L'équation 1.56 est exprimée sous sa forme *Lagrangienne*.

En séparant les composantes radiale et horizontale du petit déplacement  $\delta\mathbf{r}$  de la façon suivante :

$$\delta\mathbf{r} = \xi_r \mathbf{u}_r + \xi_h \mathbf{u}_h \quad (1.57)$$

et en supposant une symétrie sphérique il est possible de montrer que

$$\delta\mathbf{r} = \sqrt{4\pi}\mathfrak{R} \left\{ \left[ \tilde{\xi}_r(r) Y_l^m(\theta, \phi) \mathbf{u}_r + \tilde{\xi}_h(r) \left( \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi \right) \right] \exp(-i\omega t) \right\} \quad (1.58)$$

et

$$X'(\mathbf{r}, \theta, \phi, t) = \sqrt{4\pi}\mathfrak{R} \left[ \tilde{X}(\mathbf{r}) Y_l^m(\theta, \phi) \exp(-i\omega t) \right] \quad (1.59)$$

où  $\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{u}_\theta$  et  $\mathbf{u}_\phi$  sont les vecteurs unitaires dans les directions  $r$ ,  $\theta$  et  $\phi$ .  $Y_l^m(\theta, \phi)$  est l'harmonique sphérique de degré  $l$  et d'ordre  $m$ .  $\tilde{\xi}_r(r)$  et  $\tilde{\xi}_h(r)$  sont respectivement la composante radiale et horizontale du déplacement  $\delta\mathbf{r}$  et  $\omega$  est la pulsation du mode.

Le système d'équations (1.52-1.56) devient alors :

$$\omega^2 \left[ \tilde{\rho}' + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 \tilde{\xi}_r) \right] = \frac{l(l+1)}{r^2} (\tilde{p}' + \rho_0 \tilde{\Phi}'), \quad (1.60)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \tilde{\xi}_r = -\frac{d\tilde{p}'}{dr} - \tilde{\rho}' g_0 - \rho_0 \frac{d\tilde{\Phi}'}{dr}, \quad (1.61)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\tilde{\Phi}'}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \tilde{\Phi}' = 4\pi G \tilde{\rho}', \quad (1.62)$$

$$\left( \delta\tilde{p}' - \frac{\Gamma_1 p_0}{\rho_0} \delta\tilde{\rho}' \right) = \rho_0 (\Gamma_3 - 1) \delta\tilde{q}. \quad (1.63)$$

où  $\Gamma_3$  est l'exposant adiabatique défini par  $\Gamma_3 - 1 = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_{ad}$

### 1.3.3 Pulsations adiabatiques

Pour simplifier les notations, nous n'utiliserons plus le tilde pour les fonctions amplitudes ni l'indice 0 pour les quantités à l'équilibre. On considérera les pulsations comme adiabatiques ce qui conduit à  $\delta q = 0$  et ainsi l'équation 1.63 devient (sous sa forme *Eulérienne*) :

$$\rho' = \frac{\rho}{\Gamma_1 p} p' + \rho \xi_r \left( \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) \quad (1.64)$$

Cette expression peut être réinjectée dans les équations 1.60, 1.61 et 1.62 qui deviennent :

$$\frac{d\xi_r}{dr} = -\left( \frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1} H_p^{-1} \right) \xi_r + \frac{1}{\rho c^2} \left( \frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) p' - \frac{S_l^2 \Phi'}{\omega^2 c^2} \quad (1.65)$$

$$\frac{dp'}{dr} = \rho(\omega^2 - N^2)\xi_r - \frac{1}{\Gamma_1}H_p^{-1}p' + \rho\frac{d\Phi'}{dr} \quad (1.66)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi'}{dr}\right) = -4\pi G\left(\frac{p'}{c^2} + \frac{\rho\xi_r}{g}N^2\right) + \frac{S_l^2\Phi'}{c^2} \quad (1.67)$$

où  $S_l$  est la fréquence de Lamb définie par :

$$S_l = \frac{l(l+1)c^2}{r^2}, \quad (1.68)$$

$N^2$  est la fréquence de Brunt-Väisälä définie pas (ou fréquence de flottabilité) :

$$N^2 = g\left(\frac{1}{\Gamma_1 p}\frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr}\right) \quad (1.69)$$

et  $H_p$  est l'échelle de hauteur de pression, c'est à dire la distance sur laquelle la pression change d'un facteur  $e$  et est définie par :

$$H_p^{-1} = \frac{1}{p}\frac{dp}{dr} \quad (1.70)$$

Ces équations forment ainsi un système d'ordre 4 pour les variables  $\xi_r$ ,  $p'$ ,  $\Phi'$  et  $\frac{d\Phi'}{dr}$ .

### 1.3.4 Approximation de Cowling et théorie asymptotique

L'étude analytique de ce système du 4<sup>ème</sup> ordre peut être difficile. L'approximation de Cowling consiste à négliger la perturbation du potentiel gravitationnel  $\Phi'$ . Le nouveau système est du second ordre et est ainsi plus simple à traiter. Le système d'équations peut alors s'écrire :

$$\frac{d\xi_r}{dr} = -\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1}H_p^{-1}\right)\xi_r + \frac{1}{\rho c^2}\left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right)p' \quad (1.71)$$

$$\frac{dp'}{dr} = \rho(\omega^2 - N^2)\xi_r - \frac{1}{\Gamma_1}H_p^{-1}p' \quad (1.72)$$

A partir de ces deux équations il est possible de montrer, dans le cadre de la théorie asymptotique et de l'analyse JWKB (voir Bender and Orszag 1978), qu'une fréquence de degré  $l$  et d'ordre radial  $n$  pour un mode p peut s'écrire :

$$\nu_{n,l} = \frac{\omega_{n,l}}{2\pi} \approx \left(n + \frac{l}{2} + \frac{1}{4} + \alpha\right)\Delta\nu_0 \quad (1.73)$$

où

$$\Delta\nu_0 = \left(2 \int_0^{R_*} \frac{dr}{c}\right)^{-1} \quad (1.74)$$

est l'inverse du double du temps de parcours du son entre le centre et la surface. Cette équation prédit donc un espacement constant entre deux fréquences d'ordre  $n$  consécutifs et de même degré  $l$ . Cet espacement  $\Delta\nu_0$  est appelé *grande séparation moyenne* et vaut pour le soleil 135  $\mu\text{Hz}$  (Gelly et al., 1988). Cette relation asymptotique confirme que la fréquence des modes p augmente avec  $n$  et  $l$ .

### 1.3.5 Grandes et petites séparations

Selon la théorie asymptotique et l'équation 1.73, les fréquences de même degré  $l$  et d'ordre radiaux  $n$  successifs sont séparées de la valeur  $\Delta\nu_0$  (*grande séparation moyenne*). On peut définir la *grande séparation* par :

$$\Delta\nu_{n,l} = \nu_{n,l} - \nu_{n-1,l} \quad (1.75)$$

Des déviations à la théorie asymptotique impliquent des déviations de la grande séparation par rapport à  $\Delta\nu_0$ .

On remarque aussi que les modes avec la même valeur de  $n + l/2$  sont presque dégénérés :

$$\nu_{n,l} \approx \nu_{n-1,l+2} \quad (1.76)$$

La déviation par rapport à l'équation 1.73 peut être exprimée en considérant les termes d'ordre supérieur et prenant en compte les variations de la vitesse du son dans le cœur (Gough, 1986). Ceci mène à l'expression de la fréquence suivante :

$$\nu_{n,l} = \frac{\omega_{n,l}}{2\pi} \approx \left(n + \frac{l}{2} + \frac{1}{4} + \alpha\right)\Delta\nu_0 - (AL^2 - \delta)\frac{\Delta\nu_0^2}{\nu_{n,l}} \quad (1.77)$$

où

$$A = \frac{1}{4\pi^2\Delta\nu_0} \left( \frac{c(R_*)}{R_*} - \int_0^{R_*} \frac{dc}{dr} \frac{dr}{r} \right) \quad (1.78)$$

et

$$L^2 = l(l+1) \quad (1.79)$$

Les termes de l'équation 1.77 sont sensibles à différentes régions de l'étoile. En particulier les termes  $\alpha$  et  $\delta$  dépendent de l'état d'équilibre de l'étoile et sont sensibles aux régions superficielles. Le terme  $A$  est lui sensible au région centrale de l'étoile. A l'aide de cette expression on peut ainsi écrire la *petite séparation* sous la forme (en négligeant  $c(R)/R$  devant l'intégrale) :

$$\delta\nu_{l,l+2} = \nu_{n,l} - \nu_{n-1,l+2} \approx -(4l+6)\frac{\Delta\nu_0}{4\pi^2\nu_{n,l}} \int_0^R \frac{dc}{dr} \frac{dr}{r} \quad (1.80)$$

### 1.3.6 Diagramme échelle

Il est souvent utile de représenter les modes de pulsation en utilisant la grande séparation dans un *diagramme échelle*. Les fréquences d'oscillations sont regroupées en intervalles de largeur constante égale à la grande séparation moyenne et sont disposées verticalement dans le diagramme échelle. En abscisse sont représentées les fréquences corrigées de  $n$  fois  $\Delta\nu_0$  et en ordonnée les fréquences propres pour chaque ordre. La théorie asymptotique décrite par la relation 1.73 prévoit alors des lignes verticales correspondant à chaque degré  $l$ . Les diagrammes échelle d'étoiles réelles ne suivent pas exactement l'approximation asymptotique et on observe donc des différences par rapport à des lignes verticales. La figure 1.5 est un exemple de diagramme échelle représentant deux modèles de  $1.06 M_\odot$  à deux âges et deux compositions chimiques initiales différentes mais avec la même grande séparation. Il est assez facile de voir à l'œil nu que le modèle de gauche reproduit mieux les observations que le modèle de droite alors qu'en regardant les fréquences sans

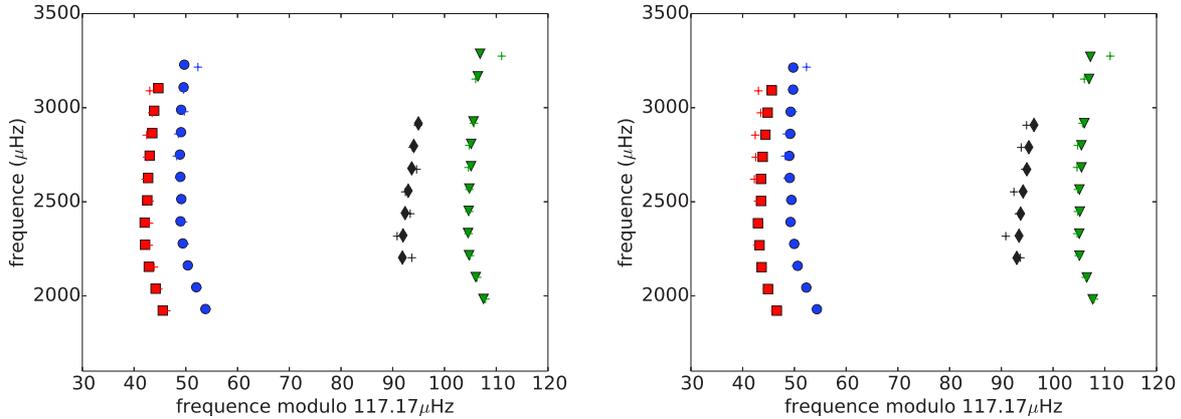


FIGURE 1.5: Diagramme échelle d'une étoile de  $1.06 M_{\odot}$  à 6.4 milliards d'années ayant pour composition chimique initiale  $Y_i = 0.26$  et  $Z_i = 0.024$  (panneau de gauche) et d'une étoile de  $1.06 M_{\odot}$  7.5 milliards d'années ayant pour composition chimique initiale  $Y_i = 0.25$  et  $Z_i = 0.024$  (panneau de droite). Les fréquences obtenues à partir des observations de l'étoile 16 Cygni B obtenues avec le satellite *Kepler* sont représentées par les croix et les fréquences calculées à partir des modèles sont représentées par les points bleus ( $l=0$ ), les triangles verts ( $l=1$ ), les carrés rouges ( $l=2$ ) et les losanges noirs ( $l=3$ ). La grande séparation vaut  $117.17 \mu\text{Hz}$ .

tracer un diagramme échelle cela peut être difficile. Les fréquences des différents ordres sont quasiment verticales et facilement distinguables. Les hautes fréquences sont principalement affectées par les effets de surface qui ne sont pas pris en compte dans la théorie asymptotique. Un moyen de les prendre en compte est d'utiliser la méthode de Kjeldsen et al. (2008).

### 1.3.7 Détermination du "meilleur" modèle

Lorsque l'on souhaite déterminer les caractéristiques d'une étoile en utilisant les fréquences d'oscillations obtenues à partir des observations sismiques ou des paramètres déterminés à l'aide de la spectroscopie, un moyen consiste à calculer une grille de modèles à l'aide d'un code d'évolution stellaire (dans notre cas le code TGEC ou le code de Montréal/Montpellier) couvrant une gamme de masses et compositions chimiques initiales. Il est important de bien définir la physique utilisée dans le code d'évolution afin de ne pas oublier des processus importants tels que la diffusion atomique (toujours présente quelque soit l'étoile étudiée) ou des processus de mélange en compétition avec la diffusion atomique nécessaires à la reproduction des abondances de certains éléments, en particulier les éléments légers tels que le lithium et le béryllium (voir chapitre 4). La structure des modèles est ensuite utilisée pour calculer les fréquences d'oscillation à l'aide du code PULSE (Brassard and Charpinet, 2008). Ainsi pour chaque trace évolutive il est possible de déterminer quel modèle possède une grande séparation égale à la grande séparation obtenue à partir des observations. Pour discriminer le "meilleur" modèle, nous avons encore d'autres outils à notre disposition. Le premier outil est l'utilisation des paramètres déterminés par la spectroscopie. Cela permet de réduire la taille de la grille à calculer. Même si les barres d'erreurs peuvent être importantes, les températures effectives et gravités de surface spectroscopiques sont très utiles pour

départager deux modèles de masse et composition chimique initiale différentes mais ayant passé les autres tests avec succès. Il en va de même pour le dernier outil qui est le rayon déterminé par interférométrie qui est disponible pour un nombre d'étoiles de plus en plus grand et qui donne une bonne contrainte pour les modèles. Le second diagnostic est le diagnostic sismique de la petite séparation  $\delta_{0,2}$  qui est calculée à partir des modes  $l = 0$  et  $l = 2$  car en général il est très difficile d'obtenir des modes  $l = 3$ . Le troisième outil est un calcul de minimisation du  $\chi^2$  sur les fréquences individuelles de la forme :

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\nu_{th}(i) - \nu_{obs}(i)}{\sigma(obs)} \right)^2 \quad (1.81)$$

En utilisant tous ces outils nous pouvons choisir quel est, d'après nos modèles et la physique utilisée, le "meilleur" modèle de notre grille. C'est cette méthode que nous avons utilisée à chaque fois que nous voulions déterminer les paramètres d'une étoile à partir des observations (cf. chapitres 3 et 4).

### 1.3.8 Méthodes d'inversion

Un autre moyen de déterminer les paramètres d'une étoile à partir des données sismiques est d'utiliser une méthode d'inversion. Cette approche consiste à inverser les relations existant entre les grandeurs observables et les quantités dont elles dépendent. D'après l'analyse directe, les fréquences d'un mode ne dépendent que d'un couple de paramètres : par exemple la densité et la vitesse du son ( $\rho(r)$ ,  $c(r)$ ).

De nombreuses inversions des fréquences obtenues à partir des observations ont été réalisées par différentes méthodes. Par exemple il y a la méthode d'inversion asymptotique directe (Christensen-Dalsgaard et al., 1985), la méthode d'inversion asymptotique linéarisée Christensen-Dalsgaard et al. (1989), la méthode non asymptotique (Dziembowski et al., 1990). Par exemple pour le Soleil (Dziembowski et al., 1990) ont montré qu'il était possible d'exprimer les variations de fréquence sous la forme :

$$\left( \frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_i = \int_0^1 \mathcal{K}_{u,i} \frac{\Delta u}{u} dx + \mathcal{J}_i \Delta Y_{cz} + \frac{F(\nu)}{I_i} \quad (1.82)$$

où  $i \equiv (l, n)$  identifie les modes,  $x = \frac{r}{R_\odot}$ ,  $u = \frac{p}{\rho}$ ,  $Y_{cz}$  représente la quantité d'hélium dans la zone convective de surface et  $\frac{F(\nu)}{I_i}$  représente les effets des couches les plus superficielles. Les  $\Delta$  représentent les variations entre les observations et le modèle de référence.

Dans certaines régions de l'étoile (zone d'ionisation de l'He II, base de la zone convective de surface) il y a de fortes variations de l'indice adiabatique  $\Gamma_1$  et donc de la vitesse du son ce qui implique que l'approximation JWKB n'est plus valide. Ces variations rapides de la vitesse du son induisent des réflexions partielles des ondes sonores sur les discontinuités ce qui a pour effet de moduler les fréquences du spectre stellaire. En étudiant ces variations il est possible de déterminer la position des zones d'ionisation de l'hélium ainsi que la base de la zone convective de surface (Gough, 1990; Verma et al., 2014, et références associées). Il faut cependant souligner que ces déterminations sont faussées par la non prise en compte de la diffusion atomique. En effet, la diffusion atomique diminue la quantité d'hélium en surface et produit un gradient d'hélium à la base de la zone convective. Ceci modifie la position de la signature de la discontinuité et donc la

détermination de la base de la zone convective (Théado et al., 2005; Castro and Vauclair, 2006). Il s'agit là aussi d'une inversion d'une quantité non observable directement.

## Chapitre 2

# Étude des processus de mélange induit par la diffusion atomique

### Sommaire

---

2.1	Impact des accumulations d'éléments chimiques sur la structure interne des étoiles	47
2.2	Impact de la convection thermohaline induite par l'accumulation d'éléments lourds	49
2.2.1	Modélisation et instabilités numériques	49
2.2.2	Modèle de $1.7 M_{\odot}$	51
2.2.3	Évolution de la convection thermohaline pendant la séquence principale	54
2.2.4	Effet de la masse de l'étoile	56
2.2.5	Comparaison avec les abondances d'étoiles Am	57
2.3	Impact des accélérations radiatives sur le déclenchement de la convection thermohaline	60
2.4	Article Deal et al. 2016 A&A	63

---

## 2.1 Impact des accumulations d'éléments chimiques sur la structure interne des étoiles

La diffusion atomique a longtemps été négligée dans le modèle standard. L'héliosismologie a permis de mettre en évidence les effets de la diffusion atomique dans le soleil (Bahcall et al., 1995; Christensen-Dalsgaard et al., 1996; Richard et al., 1996; Turcotte et al., 1998b) où cela a conduit à une diminution des abondances de surface de l'ordre de 10% (Aller and Chapman, 1960; Turcotte et al., 1998b). La diffusion atomique a lieu dans toutes les étoiles même si son efficacité peut être réduite par les processus de mélange additionnels.

Lorsque les premières anomalies d'abondances furent observées dans les étoiles de type A, elles furent dans un premier temps assimilées à des effets provenant des réactions nucléaires (Fowler et al., 1965). Cette hypothèse fut testée mais ne permet pas de reproduire les observations (Michaud, 1970c; Vauclair and Reeves, 1972; Cowley and Aikman, 1975). Par la suite Michaud

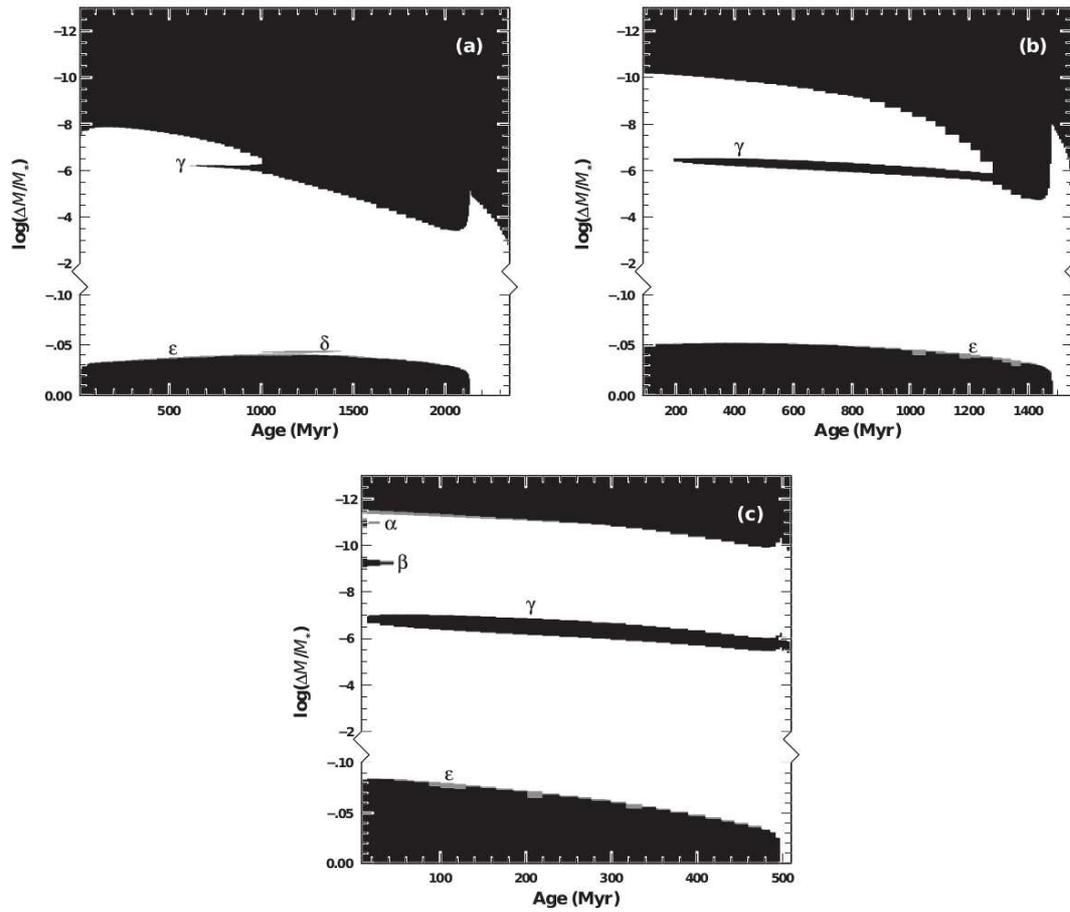


FIGURE 2.1: Figure 8 de l'article Richard et al. (2001). Cette figure présente la modification des zones radiatives (blanches), convective (noires) et de semi-convexion (grise) avec le temps pour 3 masses ( $a$  :  $1.5 M_{\odot}$ ,  $b$  :  $1.7 M_{\odot}$ ,  $c$  :  $2.5 M_{\odot}$ ). Les zones  $\gamma$  représentent les zones convectives induites par l'accumulation de fer.

(1970b) proposa la diffusion atomique pour expliquer ces anomalies. Cela a permis de montrer que les accélérations radiatives devenaient non négligeables (comparée à la gravité) pour les étoiles à partir de  $1.3 M_{\odot}$  (Michaud et al., 1976) et que les effets étaient très importants pour des masses plus grandes (étoiles F, A et B).

Les variations d'abondances à l'intérieur des étoiles sont principalement régies par la compétition entre le triage gravitationnel, les accélérations radiatives et l'importance des processus de mélange. Ces effets peuvent conduire à des accumulations d'éléments en surface mais aussi dans les couches internes des étoiles. Ceci a été mis en évidence pour le fer par Richer et al. (2000) et Richard et al. (2001) pour des étoiles entre  $1.3 M_{\odot}$  et  $4 M_{\odot}$ . Ces accumulations se produisent parce que l'état d'ionisation des éléments change avec la température et la densité ce qui conduit à des modifications des contributions de chaque élément à l'opacité globale et modifie aussi les accélérations radiatives sur chaque élément. Dans le cas où les accélérations radiatives deviennent plus importantes que la gravité, cela produit un gradient de vitesse de diffusion. Dans cette ré-

gion, l'élément tombe moins vite vers le centre de l'étoile ou monte vers la surface (en fonction de l'intensité des accélérations radiatives). L'élément s'accumule ainsi au dessus de cette région à l'endroit où est le principal contributeur à l'opacité. Il y a donc une augmentation de l'opacité dans ces régions qui ne se produit que si on tient compte de la diffusion atomique. Pour les étoiles F, A et B l'augmentation de l'opacité est suffisamment importante à l'endroit où s'accumule le fer ( $\log T \approx 5.2$ ) pour que cela déclenche de la convection dynamique (voir Fig. 2.1). Il s'agit du premier exemple d'un processus macroscopique induit par le processus microscopique de diffusion atomique. Même si cette zone convective ne modifie pas les abondances de surface cela change la structure interne de l'étoile et par conséquent les fréquences d'oscillations.

Un autre processus de mélange qui peut apparaître lorsque des éléments s'accumulent à la surface ou à l'intérieur d'une étoile est la convection thermohaline (cf. Section 1.2). Ce processus se déclenche à l'apparition d'un gradient de  $\mu$  instable dans l'étoile. Théado et al. (2009) ont étudié l'effet de ce processus sur l'accumulation de fer dans des modèles de 1.5, 1.7 et 1.9  $M_{\odot}$ . Ils ont pu montrer que la convection thermohaline se produisait à la base de la zone convective créée par l'accumulation de fer et réduisait considérablement la quantité de fer dans cette zone par rapport à des modèles ne prenant pas en compte ce processus (Fig. 2.2).

Ces deux exemples montrent qu'en plus d'être nécessaire pour bien modéliser les étoiles d'un point de vue astérosismologique, la diffusion atomique peut provoquer des mélanges macroscopiques à l'intérieur des étoiles tels que la convection dynamique ou thermohaline. Cela a pour conséquence des modifications de la structure interne des étoiles ainsi que des abondances de surface.

Afin d'expliquer les abondances des étoiles AmFm, des travaux précédents (Richer et al., 2000; Richard et al., 2001) ont montré qu'il était nécessaire que les zones convectives de surface et de fer soit connecté par un mélange. Plusieurs processus ont été testés comme par exemple le mélange induit par la rotation. Dans l'article Talon et al. (2006), les auteurs montrent que le mélange induit par la rotation (en prenant en compte les anisotropies de la turbulence en réduisant le transport vertical et/ou en prenant en compte l'effet stabilisateur du gradient de  $\mu$ ) permet de reproduire les abondances déterminées à partir des observations d'étoiles Am. La perte de masse permet aussi de reproduire les abondances de ces étoiles (Vick et al., 2010; Michaud et al., 2011). L'un des objectifs de cette thèse était de tester le processus de convection thermohaline qui ne fait intervenir aucun autre processus externe que la diffusion atomique et doit de toute manière être prise en compte dans les calculs.

## 2.2 Impact de la convection thermohaline induite par l'accumulation d'éléments lourds

Afin de mieux caractériser les effets de la convection thermohaline induite par l'accumulation d'éléments lourds dans les étoiles de type A, nous avons étudié trois modèles depuis la PMS jusqu'à la fin de la séquence principale ayant des masses de 1.5, 1.7 et 1.9  $M_{\odot}$ .

### 2.2.1 Modélisation et instabilités numériques

Les modèles ont été réalisés à l'aide du code TGEC. Nous avons calculé une série de modèles avec et sans convection thermohaline afin de bien comprendre l'effet de ce processus sur

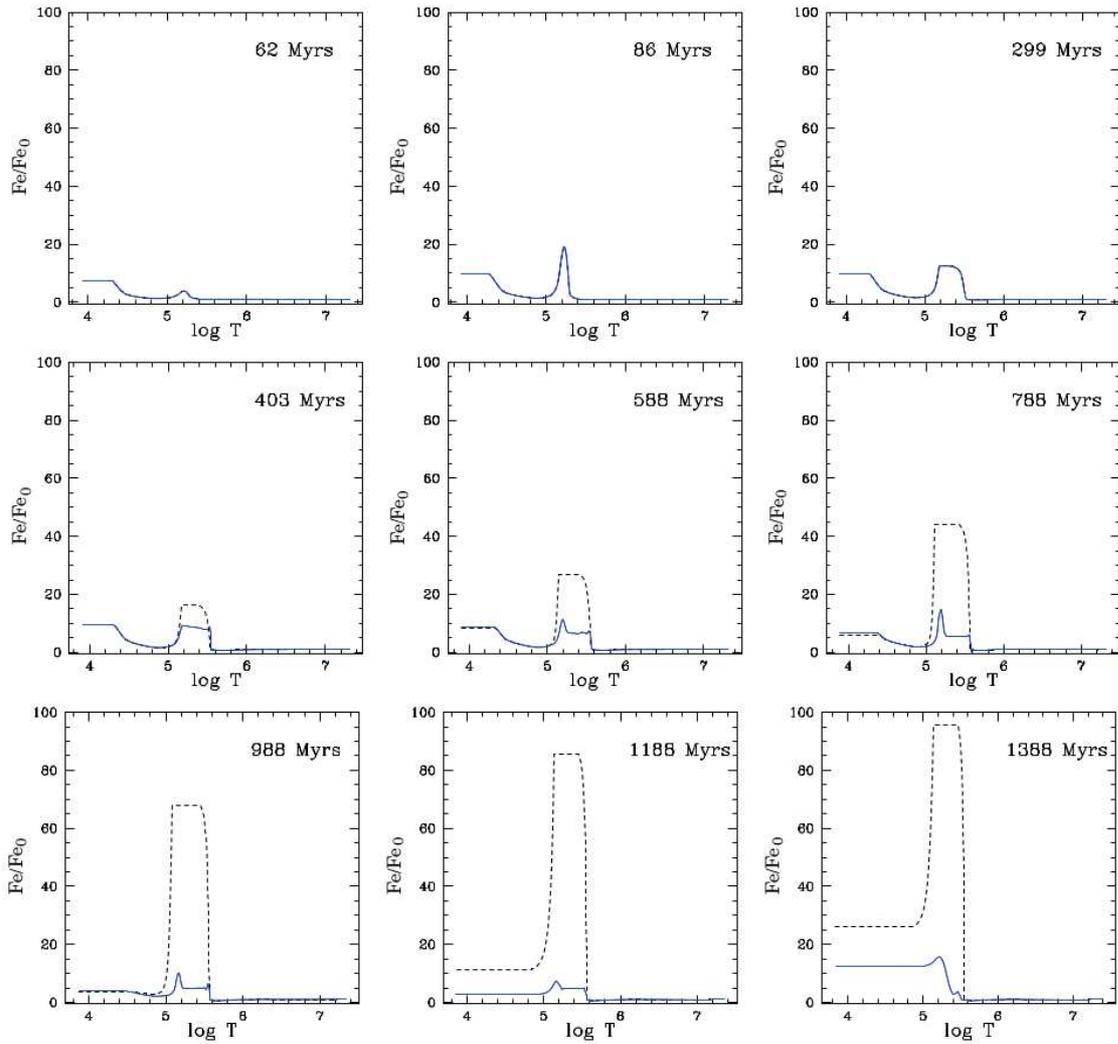


FIGURE 2.2: Profils d'abondance du Fe lorsque que la convection thermohaline n'est pas prise en compte (courbes bleues) et lorsque qu'elle est prise en compte (courbes pointillés noirs) en fonction de la température et pour différents âges. Figure 2 de l'article Théado et al. (2009).

la structure interne et les grandeurs observables. Les grandes variations de composition chimique ainsi que les forts gradients dans le coefficient de diffusion turbulente induit par l'apparition de la convection thermohaline nécessitent des pas de temps beaucoup plus courts que ceux des modèles "classiques". Les calculs, dans la version actuelle du code (séquentielle), ont pris beaucoup de temps. Une fois tous les paramètres ajustés il fallait environ 2 semaines de calcul pour faire évoluer un modèle d'étoile A sur toute la séquence principale. Nous avons grandement diminué ce temps de calcul en particulier avec l'aide de Alain Hui-Bon-Hoa. De plus, l'implémentation des accélérations radiatives induit de forts gradients dans les profils d'abondance et ceci particulièrement à la frontière entre zone radiative/zone de mélange. Pour atténuer ces gradients nous avons appliqué un profil de la forme (Théado et al., 2009) :

$$D_{mix} = D_{bcz} \exp\left(\frac{r - r_{bcz}}{\Delta} \ln 2\right) \quad (2.1)$$

où  $D_{bcz}$  et  $r_{bcz}$  sont respectivement la valeur de  $D_{mix}$  et la valeur du rayon à la base de la zone convective (dynamique ou thermohaline). La valeur de  $D_{bcz}$  est  $10^5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Celle de  $\Delta$  est 0.2 % du rayon de l'étoile à la base des zones convectives dynamiques et 0.05 % du rayon de l'étoile à la base des zones de convection thermohaline. Ce coefficient permet d'éviter le trop forts gradients dans les profils d'abondance et ainsi d'assurer la stabilité du modèle tout en ayant l'impact le plus faible possible sur les processus physiques étudiés. Dans ces conditions, ce profil de turbulence est la plupart du temps inférieur au coefficient de diffusion de l'hélium. Ce genre de mélange n'est nécessaire que pour les étoiles où les accélérations radiatives sont très importantes.

### 2.2.2 Modèle de $1.7 M_{\odot}$

Nous allons particulièrement nous intéresser au modèle de  $1.7 M_{\odot}$  afin de pouvoir dans un premier temps comparer nos résultats avec ceux obtenus par Théado et al. (2009) qui utilisaient la prescription 1D de convection thermohaline de Denissenkov (2010) alors que nous avons utilisé celle de Brown et al. (2013).

La figure 2.3 nous montre la comparaison entre le modèle sans convection thermohaline (panneaux de gauche) et avec convection thermohaline (panneaux de droite) à 100 millions d'années. Les zones de convection dynamiques sont représentées par les zones en gris foncé et les zones de convection thermohaline par les zones en gris clair. Les panneaux (a) et (b) représentent les profils d'abondance de fer (courbes bleues) et de calcium (courbes vertes). Les panneaux (c) et (d) représentent les accélérations radiatives pour le fer (courbes bleues) et pour le calcium (courbes vertes). Les panneaux (e) et (f) représentent le gradient de  $\mu$  et les panneaux (g) et (h) représentent le coefficient de diffusion turbulente (courbes bleues) et le coefficient de diffusion de l'hélium (courbes vertes).

Lorsque la convection thermohaline n'est pas prise en compte, le fer s'accumule en surface et pour  $\log(\Delta M/M_*)$  entre  $-7$  et  $-6$ , et augmente d'un facteur 10 par rapport à son abondance initiale (zone d'accumulation du fer produisant une zone convective cf. section 2.1). Le calcium s'accumule autour de  $\log(\Delta M/M_*) \approx -7.5$  avec une augmentation de plus d'un facteur 100 par rapport à son l'abondance initiale (a). Cela est dû aux accélérations radiatives (c) qui sont plus importantes que la gravité (entre 1 et 2 ordres de grandeur) à la base de ces zones. Le panneau (e) montre clairement que l'accumulation de fer (en surface) et de calcium induisent une inversion de

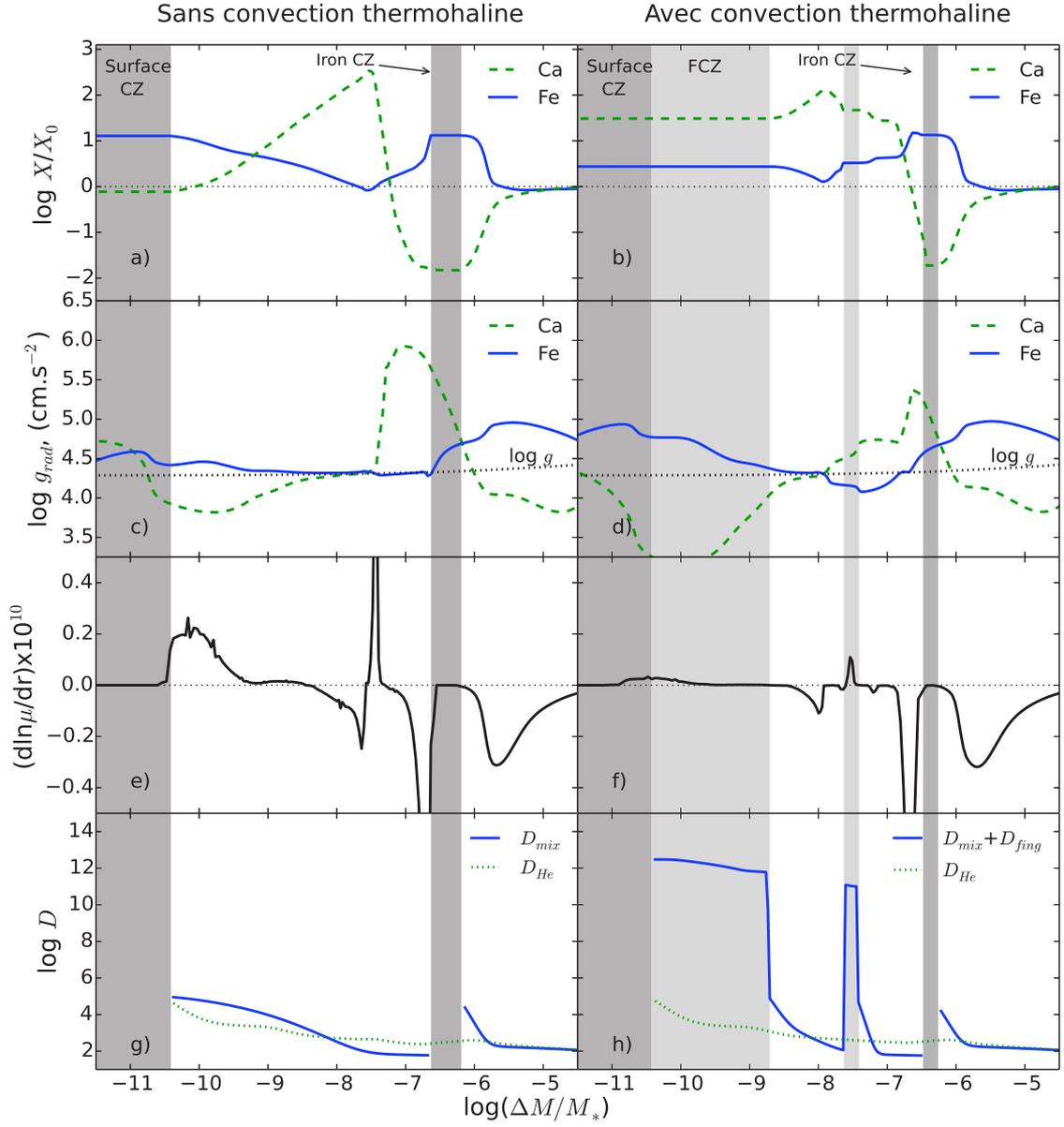


FIGURE 2.3: Profils de quantités physiques importantes en fonction de  $\log(\Delta M/M_*)$  dans deux modèles de  $1.7 M_\odot$  à 100 million d'années sans convection thermohaline (panneaux de gauche) et avec convection thermohaline (panneaux de droite).

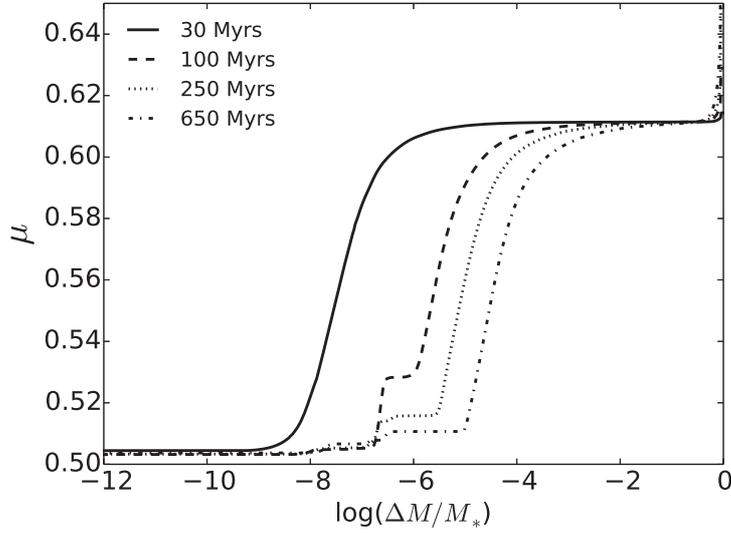


FIGURE 2.4: Profil de  $\mu$  en fonction de  $\log(\Delta M/M_*)$  du modèle de  $1.7 M_\odot$  incluant la convection thermohaline à quatre âges différents.

$\mu$ . Ce n'est pas le cas pour l'accumulation de la zone convective du fer car à cet âge (100 millions d'années) le gradient stabilisateur d'hélium dû à la diffusion est encore trop proche de la surface pour que cela produise une inversion du gradient de  $\mu$  (voir Fig. 2.4). La courbe bleue du panneau (g) représente le coefficient de diffusion turbulente décrit en Section 2.2.1.

Lorsque la convection thermohaline est prise en compte, les inversions de  $\mu$  déclenchent ce mélange à la base de la zone convective de surface mais aussi à la base de la zone d'accumulation de calcium (zones en gris clair). Cela modifie les abondances de surface ce qui se traduit par une diminution de l'abondance de surface du fer d'un facteur 3 par rapport au cas précédent et une augmentation de l'abondance de surface du calcium de plus d'un facteur 10. La convection thermohaline induite par l'accumulation de calcium modifie le profil d'abondance à l'intérieur de l'étoile (b). L'influence de ces zones de convection thermohaline modifie la quantité de fer qui s'accumule et produit une zone convective du fer plus petite. La modification des profils d'abondance a un impact direct sur les accélérations radiatives. En effet, plus l'élément est abondant plus la quantité de mouvement transmise par les photons à chaque ion est faible car celle-ci doit se répartir sur plus d'ions. Ceci explique les courbes présentées panneau (d). La convection thermohaline est très efficace dans ces régions (h). En effet, le coefficient de diffusion turbulente lié à la convection thermohaline est de l'ordre de  $10^{11} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$  ce qui correspond au coefficient utilisé pour reproduire la convectif dynamique. Ceci conduit à une homogénéisation de la composition chimique dans ces régions en un temps inférieur au pas de temps d'évolution.

Nous avons vu que la présence du gradient stabilisateur lié à la diffusion de l'hélium empêche la convection thermohaline de se déclencher à la base de la zone convective du fer à 100 millions d'année (Fig. 2.4). Ceci montre que la diffusion atomique a un effet différent sur chaque élément chimique du point de vue microscopique mais aussi que chaque élément a une influence sur les processus de mélange qui en résultent. Il est donc indispensable pour ce type de calculs de tenir

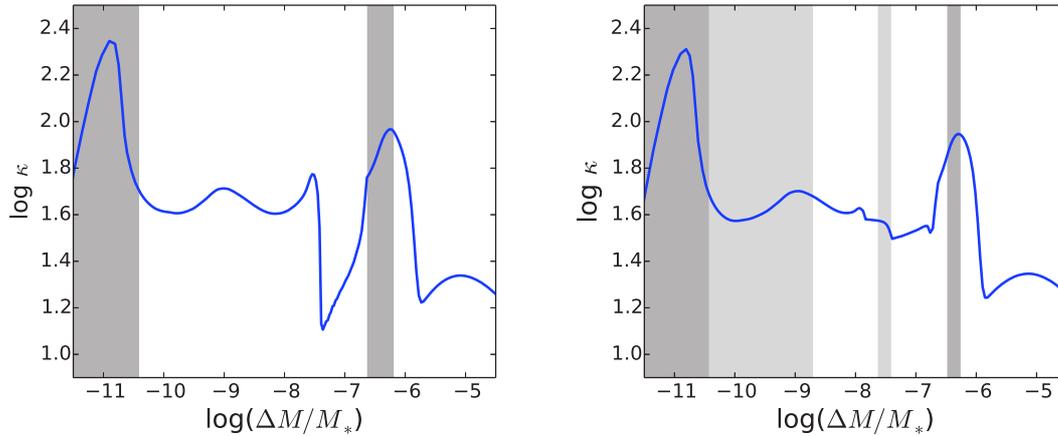


FIGURE 2.5: Profils d'opacité en fonction de  $\log(\Delta M/M_*)$  des modèles de  $1.7 M_\odot$  incluant (panneau de droit) et n'incluant pas (panneau de gauche) la convection thermohaline à 100 millions d'année.

compte de l'effet sélectif de la diffusion atomique.

La modification des profils d'abondances induit une modification de l'opacité. La figure 2.5 (panneau de gauche) nous montre le profil d'opacité lorsqu'on ne tient pas compte de la convection thermohaline. Les éléments s'accumulent à l'endroit où ils sont principaux contributeurs à l'opacité ce qui produit un "bump" autour de  $\log(\Delta M/M_*) \approx -7.5$  pour l'accumulation de calcium et autour de  $\log(\Delta M/M_*) \approx -6.5$  à l'endroit de la zone convective du fer. Lorsque la convection thermohaline est prise en compte, les zones où le mélange se produit réduit la quantité de l'élément qui s'accumule et ainsi réduit les "bumps" dans le profil d'opacité (panneau de gauche Fig. 2.5). La forte décroissance de l'opacité dans le cas où on ne tient pas compte de la convection thermohaline (entre les deux "bumps" d'opacité) est due à la forte accélération radiative imposée sur le calcium (2 ordres de grandeur supérieur à la gravité). Même si cela ne se traduit que par une variation de la pression radiative appliquée sur tout le milieu d'environ 1% cela est suffisant pour réduire la densité de cette région d'un facteur deux et ainsi provoquer une chute de l'opacité. Ce qui se traduit aussi par une augmentation du rayon de l'étoile de quelques pourcents. Nous n'avons pas pour l'instant investigué plus en détail cet aspect. Cependant ce phénomène ne se produit plus lorsque la convection thermohaline est prise en compte car l'effet des accélérations radiatives sur le calcium est réduit par le mélange.

### 2.2.3 Évolution de la convection thermohaline pendant la séquence principale

Les vitesses de diffusion varient au cours du temps ce qui implique que les accumulations d'éléments varient elles aussi. Les zones mélangées par la convection thermohaline changent donc au cours de l'évolution de l'étoile. Pour mieux comprendre l'évolution de la convection thermohaline la figure 2.6 représente l'évolution du gradient de  $\mu$  et du coefficient de diffusion turbulente effectif à 4 âges différents (30, 100, 250 et 650 millions d'années).

A 30 millions d'années, les effets de la diffusion atomique sur le calcium n'ont pas encore

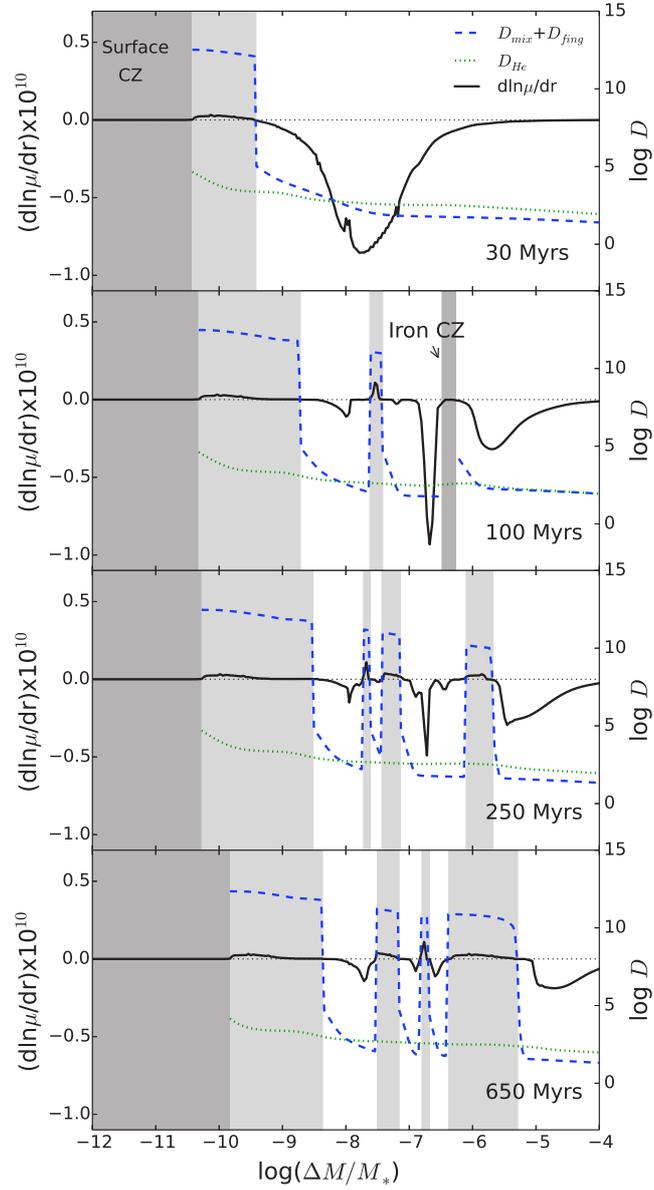


FIGURE 2.6: Profil du coefficient de diffusion turbulente effectif (courbes en tirets bleues), coefficient de diffusion de l'hélium (courbes en pointillés verts) et gradient de  $\mu$  (courbes noires) en fonction de  $\log(\Delta M/M_*)$  du modèle de  $1.7 M_\odot$  incluant la convection thermohaline à quatre âges différents.

permis une accumulation suffisante pour construire un gradient de  $\mu$  instable. De même pour le fer qui ne s'est pas assez accumulé pour déclencher une zone convective autour de  $\log(\Delta M/M_*) \approx -6.5$ . Cependant l'accumulation du fer en surface est suffisante à cet âge pour provoquer de la convection thermohaline (zone en gris clair).

A 100 millions d'années, on retrouve le cas présenté Section 2.2.2 avec une zone convective liée à l'accumulation de fer et deux zones de convection thermohaline.

A 250 millions d'années, le gradient lié à la diffusion de l'hélium est assez profond pour permettre à la convection thermohaline de se développer à la base de la zone convective du fer. Ce mélange supplémentaire réduit la quantité de fer dans cette région ce qui diminue l'opacité et empêche l'apparition de la zone convective de fer. La zone est alors toujours mélangée mais par un processus différent.

A 650 millions d'années la zone mélangée est de plus en plus profonde et ceci est toujours dû à l'hélium qui diffuse de plus en plus profondément. On remarque l'apparition de petites zones à différents endroits dont la position varie avec le temps à partir de 250 millions d'années. Ceci est dû au fait que les zones d'accumulation se déplacent légèrement au cours du temps ce qui implique que la convection thermohaline mélange des zones différentes. Cela fait apparaître ou disparaître des zones de mélange supplémentaires.

## 2.2.4 Effet de la masse de l'étoile

Après avoir étudié en détail le cas d'une étoile de  $1.7 M_\odot$ , nous avons regardé l'impact de la convection thermohaline pour des étoiles de  $1.5$  et  $1.9 M_\odot$ . La figure 2.7 montre que l'accumulation de fer en surface est suffisante quelle que soit la masse pour provoquer de la convection thermohaline. L'accumulation de calcium est aussi présente pour ces 3 masses. Les principales différences entre ces modèles sont la profondeur de la zone convective et la valeur des accélérations radiatives. En effet, la taille des zones convectives diminue et les accélérations radiatives sont plus importantes (car le flux de photon est plus grand) quand la masse de l'étoile augmente. Cela explique que le fer s'accumule plus rapidement et en plus grande quantité dans le modèle de  $1.9 M_\odot$  ce qui accélère l'apparition de la zone convective de fer. Les gradients de  $\mu$  ainsi formés induisent une valeur du coefficient  $D_{\text{fing}}$  plus grande.

Le principal résultat est que tant que les accélérations radiatives sont suffisantes pour accumuler des éléments tels que le fer ou le calcium, il y a une possibilité que la convection thermohaline apparaisse. Le déclenchement peut être retardé par la présence d'un gradient d'hélium stabilisateur mais la convection se produit plus tard lorsque l'hélium a diffusé plus profondément dans l'étoile. On s'attend donc à obtenir les mêmes phénomènes pour des étoiles plus massives. La zone convective de fer apparaît pour des modèles de masse supérieures à  $1.5 M_\odot$  dans les calculs de Richer et al. (2000) et Richard et al. (2001) avec le code de Montréal/Montpellier. Lorsque la masse de l'étoile augmente, une quantité plus faible de fer est suffisante pour déclencher une zone de convection dynamique. Une étude à faire dans l'avenir est d'étudier l'impact de la convection thermohaline dans le cas où il n'y a plus de zone convective de surface pour des étoiles de type B et O. Les deux méthodes utilisées pour calculer les accélérations radiatives dans les codes TGEC et de Montréal/Montpellier peuvent calculer des modèles d'étoiles B et O et cette problématique pourrait faire l'objet d'un futur développement.

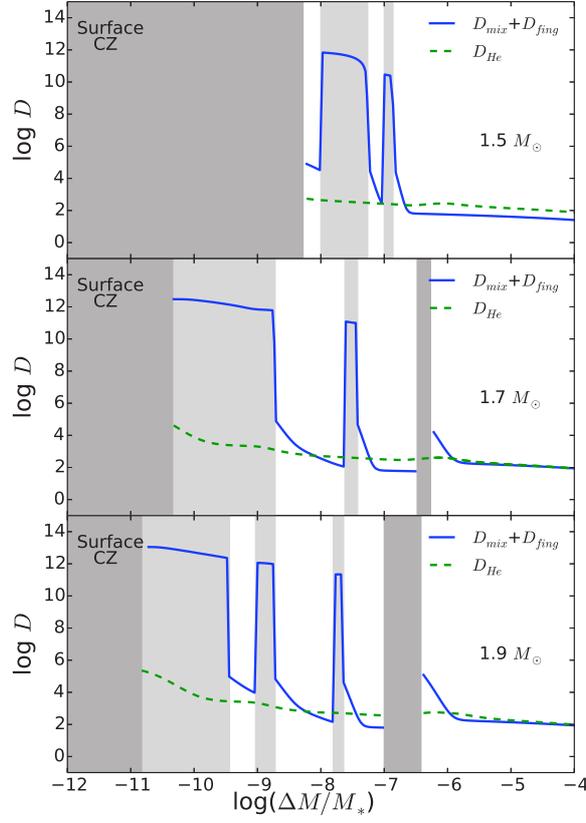


FIGURE 2.7: Profil du coefficient de diffusion turbulente effectif (courbes bleues) et coefficient de diffusion de l’hélium (courbes en tirets verts) en fonction de  $\log(\Delta M/M_*)$  pour les modèles de  $1.5$  (panneau du haut),  $1.7$  (panneau central) et  $1.9 M_\odot$  (panneau du bas) à 100 millions d’années incluant la convection thermohaline. Le code couleur des zones grisées est le même que dans la figure 2.6.

## 2.2.5 Comparaison avec les abondances d’étoiles Am

La convection thermohaline induite par l’accumulation d’éléments lourds modifie fortement la structure de l’étoile mais aussi les profils d’abondance (voir Fig. 2.3). Même si la convection thermohaline n’a pas toujours lieu à la base de la zone convective de surface, elle peut avoir des conséquences sur les abondances en surface. Afin de contraindre les résultats obtenus avec nos modèles, nous avons comparé les abondances de surface avec celles obtenues à partir d’observations d’étoiles Am. Nous avons sélectionné les étoiles ayant des températures effectives et gravités de surface en accord avec celles de nos modèles (en considérant les incertitudes sur les observations). Nous avons choisi d’utiliser des étoiles des Hyades et des Pléiades afin d’avoir une estimation de l’âge des étoiles. L’âge des Hyades étant environ 100 millions d’années et l’âge des Pléiades étant environ 650 millions d’années. Nous nous sommes basé sur les articles de Takeda and Sadakane (1997) et Hui-Bon-Hoa and Alecian (1998) afin d’avoir les abondances d’oxygène, magnésium, calcium et fer pour des étoiles des deux amas. Pour certains modèles, aucune étoile observée ne possède les bons paramètres de surface ( $\log g$ ,  $T_{\text{eff}}$ ).

La figure 2.8 présente une comparaison entre les abondances de surface (pour C, N, O, Ne, Mg, Ca et Fe) des modèles incluant la convection thermohaline à 100 et 650 millions d'années et les abondances déterminées à partir des observations d'étoiles. Il n'y a pas d'observations qui correspondent aux modèles  $1.5 M_{\odot}$  ni au modèle  $1.9 M_{\odot}$  à 100 millions d'années. Pour les modèles ayant une correspondance avec certaines étoiles observées, on remarque que les abondances déterminées à partir des observations sont très différentes des abondances obtenues dans les modèles excepté pour le fer. En particulier, les étoiles Am présente en général une sous abondance de calcium et/ou de scandium ce qui n'est pas reproduit par nos modèles. Ceci indique qu'il manque un autre processus dans les modèles.

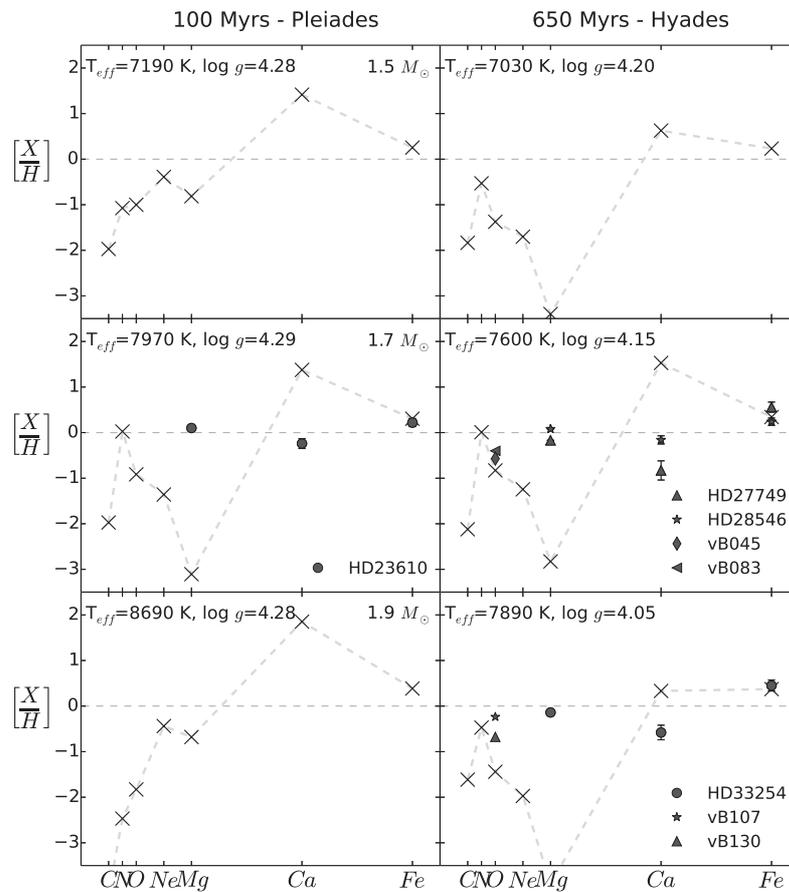


FIGURE 2.8: Abondances de surface des modèles incluant la convection thermohaline (croix) et abondances déterminées à partir d'observations d'étoile des Hyades et des Pléiades de  $\log g$ , et  $T_{eff}$  comparable à nos modèles (symboles) pour les modèles de  $1.5$  (panneaux du haut),  $1.7$  (panneaux centraux) et  $1.9 M_{\odot}$  (panneaux du bas) à 100 (panneaux de gauche) et 650 millions d'années (panneaux de droite).

Il faut rappeler que ces modèles ont été calculés en considérant seulement la diffusion atomique et la convection thermohaline, afin de pouvoir caractériser l'impact de ces processus seuls. Cependant les abondances de surface obtenues sont très loin de celles obtenues à partir des ob-

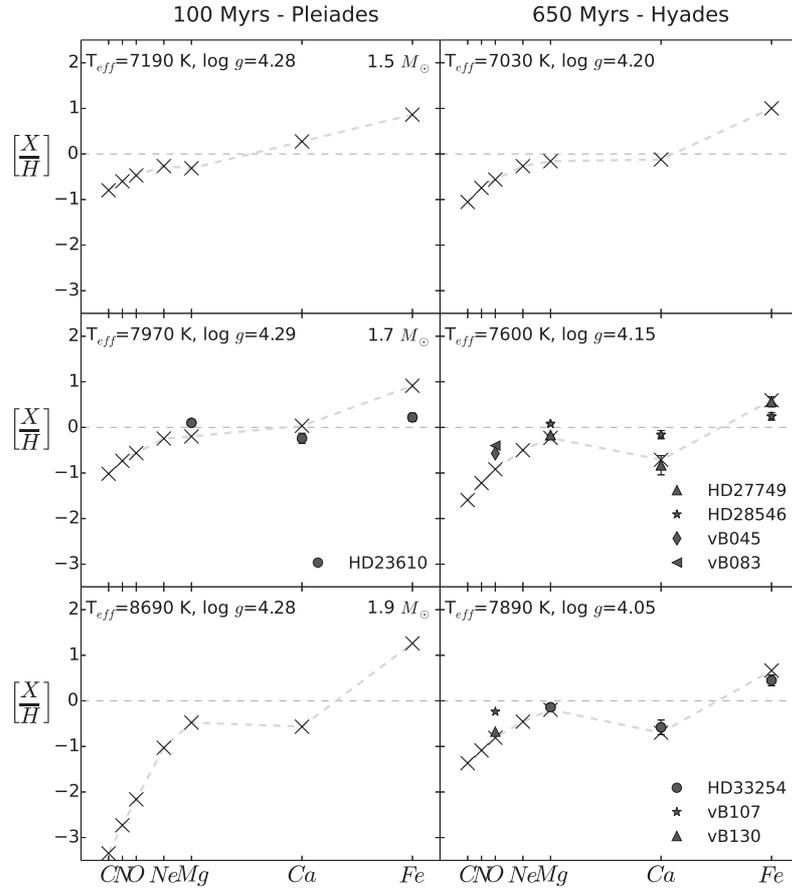


FIGURE 2.9: Môme figure que la figure 2.8 dans le cas où la zone convective de surface est connectée à la zone de mélange la plus profonde.

servations pour les étoiles Am. En regardant les profils de mélange obtenus dans les modèles, on se rend compte qu'à la base de la zone convective de surface il y a plusieurs zones de convection thermohaline plus ou moins proches et plus ou moins grandes. Ces zones migrent au cours du temps et nous n'avons considéré aucun mélange entre elles. Il semble cependant très peu probable qu'entre deux zones très turbulentes ( $D_{fing} = 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ) il n'y ait aucun mélange. Dans les modèles il existe des transitions brusques peu réaliste avec une variation de 10 ordres de grandeur du coefficient de diffusion turbulente. Nous avons donc essayé de connecter directement ces zones de mélanges et d'en étudier les conséquences. Cela revient à connecter la zone convective de surface à la zone de mélange (dynamique ou thermohaline) la plus profonde. Les abondances de surface obtenues sont présentées figure 2.9.

Dans le cas où les zones sont connectées on observe un très bon accord entre modèles et observations à 650 millions d'années pour les modèles 1.7 et 1.9  $M_{\odot}$ . Cela confirme les calculs de Richer et al. (2000) et Richard et al. (2001). Ce qui change ici est la variation de la profondeur de la zone mélangée au cours du temps (cf Section 2.2.3). Après discussion avec Pascale Garaud, nous avons conclu que les doigts de convection thermohaline n'avaient probablement pas assez d'inertie

pour provoquer de l'overshooting et ainsi étendre les zones de convection thermohaline au delà du critère sur le coefficient  $R_0$ . Ceci se fonde sur les simulations réalisées dans l'article Zemsanova et al. (2014). Il faut cependant remettre ces simulations dans le contexte astrophysique (cf. Section 1.2.4). Le nombre de Prandtl et le coefficient  $r$  de ces simulations étaient plusieurs ordres de grandeurs supérieurs aux paramètres stellaires et ceci peut avoir un fort impact sur l'inertie de ces doigts. Une autre possibilité serait le couplage avec un autre processus de mélange, par exemple le mélange induit par la rotation même si ces étoiles tournent lentement ( $\leq 50 \text{ km s}^{-1}$ ) ou l'effet d'une perte de masse. Cette question de la connexion des zones de mélange reste ouverte et nécessite une étude plus poussée afin de pouvoir en tirer des conclusions. Nous avons montré ici qu'il se produit un mélange spécifiquement induit par la diffusion atomique et que ce mélange ne peut pas être négligé dans les modèles.

## 2.3 Impact des accélérations radiatives sur le déclenchement de la convection thermohaline

Dans les sections précédentes, nous avons vu que la convection thermohaline peut se déclencher lorsqu'un élément s'accumule à un endroit dans l'étoile. Les accélérations radiatives sur un unique élément sont retransmises par collision à l'ensemble du milieu dans une moindre mesure. En supposant que  $\delta \ln \mu \approx \delta X_i$ , la contribution des accélérations radiatives sur l'élément  $i$  transmise au milieu environnant peut s'écrire de la façon suivante :

$$g_R = X_i g_{rad,i} \quad (2.2)$$

où  $X_i$  et  $g_{rad,i}$  sont respectivement la fraction de masse et l'accélération radiative de l'élément  $i$ . Cette quantité est très inférieure à la gravité. Cependant cela peut avoir un effet de quelques pourcents dans les zones d'accumulations. En particulier, Vauclair and Théado (2012) ont montré que dans la zone d'accumulation du fer, l'effet sur le milieu environnant représente 2-3% de la gravité (Fig. 2.10).

En repartant des équations fluides sous l'approximation de Boussinesq et en incluant l'effet des accélérations radiatives dans le terme de gravité sous la forme  $g_e = g - g_R$  où  $g_e$  est la gravité effective, il est possible de trouver une expression du coefficient de diffusion turbulente liée à la convection thermohaline comme cela avait été fait par Denissenkov (2010). Le coefficient  $D_{fing}$  est alors sous la forme (Vauclair and Théado, 2012) :

$$D_{fing} = C_i k_T \frac{(1 - R_0 \tau) + (g_{e,\mu} + R_0 \tau g_{e,T})}{(R_0 - 1) + (g_{e,\mu} + R_0 g_{e,T})}, \quad (2.3)$$

Ce coefficient dépend des deux paramètres  $g_{e,\mu}$  et  $g_{e,T}$  qui sont liés aux dérivées de  $g_e$  par rapport à  $\mu$  et à  $T$  :

$$g_{e,\mu} = \frac{\partial \ln g_e}{\partial \ln \mu} \approx -\frac{1}{g} \frac{\partial g_R}{\partial X_i} = -\frac{g_R}{g} - \frac{X_i}{g} \frac{\partial g_R}{\partial X_i}, \quad (2.4)$$

et

$$g_{e,T} = \frac{\partial \ln g_e}{\partial \ln T} = -\frac{T}{g} \frac{\partial g_R}{\partial T} = -\frac{X_i T}{g} \frac{\partial g_R}{\partial T}, \quad (2.5)$$

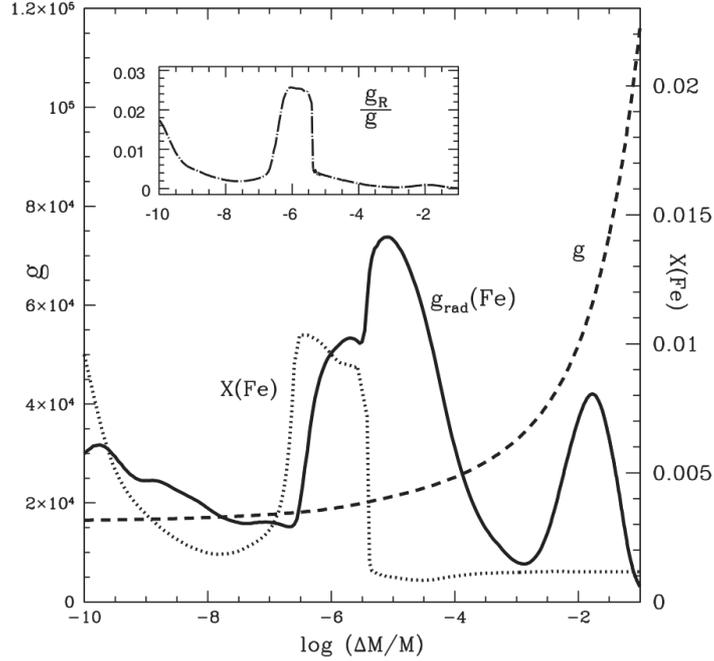


FIGURE 2.10: Profils d'abondance (courbe en pointillés) et d'accélération radiative (courbe en trait plein) du fer, de gravité (courbe en tirets) en fonction de  $\log(\Delta M/M_*)$  dans un modèle de  $1.7 M_\odot$ . Le cadre montre le rapport  $g_R/g$ . (Figure 3 de l'article Vauclair and Théado (2012))

$g_{e,\mu}$  et  $g_{e,T}$  dépendent fortement des variations de température et de composition chimique donc leur calcul doit être fait à chaque pas de temps pour tenir compte des variations rapides d'opacité et d'état d'ionisation. Il est aussi important de connaître l'élément chimique responsable du déclenchement de la convection thermohaline afin de calculer correctement les deux termes. Dans le cas des étoiles de type A cela peut être le fer ou le calcium en fonction des régions considérées.

Pour les étoiles de type A de masses comprises entre  $1.5$  et  $1.9 M_\odot$ , la valeur du coefficient  $D_{fing}$  obtenue à partir de la prescription de Brown et al. (2013) est toujours suffisante pour homogénéiser totalement la zone instable. Le coefficient déterminé dans l'équation 2.3 est différent de celui de Brown et al. (2013) mais les deux conduisent à une homogénéisation rapide de la zone. L'intérêt de la description analytique est de voir si le déclenchement de l'instabilité est modifié si on tient compte du coefficient  $g_R$ . A partir de leur analyse analytique, Vauclair and Théado (2012) ont pu déterminer que les critères de déclenchement basés sur le coefficient  $R_0$  étaient modifiés. En effet, L'instabilité se développe si  $(1+g_{e,\mu})/(1-g_{e,T}) < R_0 < (1+g_{e,\mu})/\tau(1-g_{e,T})$  et non plus si  $1 < R_0 < \frac{1}{\tau}$ . Même si les termes  $g_{e,\mu}$  et  $g_{e,T}$  peuvent sembler négligeables, cela n'est pas toujours le cas.

Afin de calculer les dérivées partielles des  $g_{rad}$  par rapport à la température et à la fraction de masse de l'élément considéré, nous avons utilisé les expressions analytiques de l'approximation SVP afin d'avoir les dérivées les plus précises possible. Les calculs ont montré que la contribution de la dérivée du terme  $g_{cont}$  est négligeable devant celle du terme  $g_{ine}$ . Donc :

$$\frac{\partial g_{rad,i}}{\partial T} \approx \frac{\partial g_{line,i}}{\partial T} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_{rad,i}}{\partial X_i} \approx \frac{\partial g_{line,i}}{\partial X_i} \quad (2.6)$$

En repartant de l'équation 1.13, les dérivées par rapport à la température et à la fraction de masse de l'élément  $i$  s'écrivent :

$$\frac{\partial g_{rad,i}}{\partial T} \approx \varphi_i^* u \left( q \frac{\partial s}{\partial T} + s \frac{\partial q}{\partial T} \right) \quad (2.7)$$

et

$$\frac{\partial g_{rad,i}}{\partial X_i} \approx \frac{\varphi_i^* q}{A_i X_i} \left( u \frac{\partial s}{\partial c_i} + s \frac{\partial u}{\partial c_i} \right) \quad (2.8)$$

où

$$\begin{cases} u = 1 + \xi_i^* c \\ s = \left( 1 + \frac{c}{b \psi_i^*} \right)^{\alpha_i} \end{cases} \quad (2.9)$$

L'expression de  $q$  est donnée équation 1.14. Le calcul de ces termes se fait à chaque pas de temps lors de l'évolution et permet d'avoir des valeurs cohérentes en utilisant directement une expression analytique.

Pour tester cet effet, nous avons choisi un modèle de  $1.7 M_\odot$  ne prenant pas en compte la convection thermohaline à deux âges différents (200 et 300 millions d'années). Pour ces deux âges nous avons calculé le coefficient  $D_{fing}$  à partir de l'équation 2.3 et en utilisant les critères de déclenchement modifiés. Si les coefficients  $g_{e,\mu}$  et  $g_{e,T}$  sont proches de 0 on remarque que les critères de déclenchement de l'instabilité sont ceux utilisés habituellement. La figure 2.11 nous montre les valeurs de ces coefficients en fonction de  $\log(\Delta M/M_*)$ .

Le terme  $g_{e,T}$  est principalement relié à la variation de l'accélération radiative sur l'élément qui s'accumule par rapport à la température. Il se trouve que l'effet le plus important est à l'endroit de l'accumulation de fer entre  $-7 < \log(\Delta M/M_*) < -6$ . C'est pourquoi ce terme est quasiment nul dans toute l'étoile sauf au niveau de la zone convective du fer où les variations de température sont les plus importantes en raison de la forte augmentation de l'opacité. En revanche, le terme  $g_{e,\mu}$  est non nul dans toute l'étoile. Il faut cependant faire attention à une valeur limite de ce terme qui est  $-1$ . En effet si  $g_{e,\mu} < -1$  les critères de déclenchement de la convection thermohaline ne sont plus valables et l'instabilité n'est donc pas définie. Lorsque l'on prend en compte ce nouveau critère, il n'y a aucune différence avec le précédent pour les zones de convection thermohaline à la base de la zone convective de surface et au niveau de la zone d'accumulation du calcium ( $\log(\Delta M/M_*) \approx -7.2$ ).

Il apparaît cependant une différence à la base de la zone convective du fer. A ces deux âges, le gradient d'hélium est assez profond pour permettre une inversion du gradient de  $\mu$  à la base de la zone convective du fer. Cependant, à 350 millions d'années, la valeur de  $g_{e,\mu}$  est inférieure à  $-1$  ce qui implique que l'instabilité n'est pas définie. En revanche, à 450 millions d'années,  $g_{e,\mu}$  devient supérieure à  $-1$  à la base de la zone convective du fer et permet le déclenchement de la convection thermohaline. En se basant sur ce développement analytique de l'impact des accélérations radiatives sur le critère de déclenchement de la convection thermohaline, il semble que la quantité de mouvement des ions de fer retransmise au milieu dans cette région est suffisante

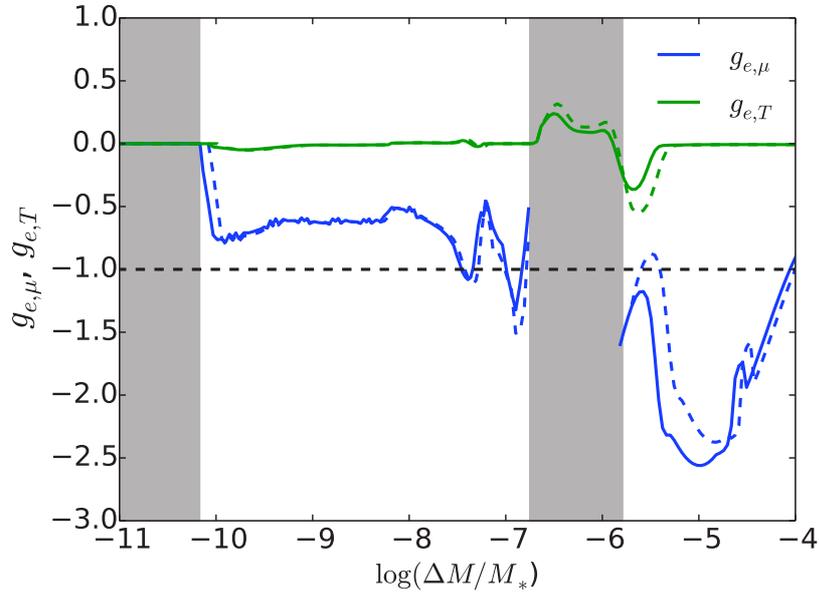


FIGURE 2.11: Valeurs de  $g_{e,\mu}$  et  $g_{e,T}$  en fonction de  $\log(\Delta M/M_*)$  à 350 millions d'années (traits pleins) et 450 millions d'années (pointillés)

pour retarder l'instabilité d'environ 100 millions d'années. Cela voudrait dire que les accélérations radiatives seraient assez importantes pour soutenir un fluide qui serait instable sans elles.

Ce résultat est intéressant mais n'est que préliminaire. Il faut un travail plus poussé sur le sujet pour pouvoir en tirer des conclusions. Il faudrait par exemple réaliser des simulations 3D incluant le transfert d'une partie des accélérations radiatives au milieu. Ceci revient à réduire de quelques pourcents la gravité dans les zones concernées. A partir de ce genre de simulations il serait possible de mieux quantifier ce genre d'effet et d'en tirer des conclusions plus robustes.

## 2.4 Article Deal et al. 2016 A&A

# Hydrodynamical instabilities induced by atomic diffusion in A stars and their consequences

Morgan Deal<sup>1,3</sup>, Olivier Richard<sup>1</sup>, and Sylvie Vauclair<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Univers et Particules de Montpellier (LUPM), UMR 5299, Université de Montpellier, CNRS, Place Eugène Bataillon 34095 Montpellier Cedex 5 FRANCE

<sup>2</sup> Université de Toulouse, UPS-OMP, IRAP, France

<sup>3</sup> CNRS, IRAP, 14 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France  
e-mail: morgan.deal@umontpellier.fr

## ABSTRACT

*Aims.* Atomic diffusion including the effect of radiative accelerations on individual elements leads to important variations of the chemical composition inside the stars. The accumulation in specific layers of the elements which are the main contributors of the local opacity leads to hydrodynamical instabilities which modify the internal stellar structure and the surface abundances. Our aim is to study these effects and compare the resulting surface abundances with spectroscopic observations.

*Methods.* We computed the detailed structure of A-type stars including these effects. We used the TGEC stellar evolution code, where radiative accelerations are computed using the SVP method, and we added double-diffusive convection with mixing coefficients deduced from 3D simulations.

*Results.* We show that the modification of the initial chemical composition has important effects on the internal stellar mixing and leads to different surface abundances of the elements. The results fit well the observed surface chemical composition if the layers which are individually mixed by double-diffusive convection are connected.

**Key words.**

## 1. Introduction

Atomic diffusion in stars is a fundamental process which was already discussed by the pioneers of stellar physics (Eddington 1926). In the classical computations of stellar internal structure, the basic equations are written as if the stars were composed of only one gas. An average atomic mass, namely the mean molecular weight  $\mu$ , is introduced in the equation of hydrostatic equilibrium. The equation of radiative transfer is also computed for a unique gas, with a unique absorption coefficient, the Rosseland mean opacity, representing the average effect of all the ions present in the stellar plasma.

Real stars are composed of many different gases, one for each chemical element. Each of them behaves its own way, according to its own molecular weight, to the electric charge, and to the way it absorbs photons. This behavior changes with depth, according to the ionisation stage of the element. Meanwhile, all the elements feel the same global pressure and temperature gradients which adjust according to the average parameters of the global gas.

Due to the selective effects acting on them, individual ions selectively move along a small distance, during a small timescale, before sharing the acquired momentum to their surroundings through collisions. Atomic diffusion corresponds to what happens during this short timescale. This is ignored in standard models which only take into account what happens after the momentum is collectively shared.

In the 70's, atomic diffusion was suggested to be responsible for a large variety of chemical peculiarities observed in stars (Michaud et al. 1976; Vauclair & Vauclair 1982; Michaud et al. 1983; Richer et al. 2000; Michaud et al. 2008). Later on, it was

realized that the importance of this process is not restricted to the so-called "peculiar stars" but that it occurs in all kinds of stars, although moderated by other competing transport processes. A spectacular confirmation of its importance inside the Sun was given by helioseismology (Bahcall et al. 1995; Richard et al. 1996; Gough et al. 1996). It was also proved to have a major impact on the pulsational properties of various types of stars (Charpinet et al. 1997; Turcotte et al. 2000; Alecian et al. 2009).

At the present time, most stellar evolution codes introduce helium gravitational settling in their computations. Some of them also take into account the atomic diffusion of heavy elements, without computing the effects of radiative accelerations. Very few include the computations of the selective atomic diffusion of many individual species in a complete way, taking into account all the competing effects like the gravitational, thermal, radiative ones and those due to the concentration gradients (Turcotte et al. 1998; Hui-Bon-Hoa 2008; Théado et al. 2012).

First of all, these accumulation and depletion processes strongly influence the local opacities. Local abundance increase of iron and nickel, which represent important contributors to the opacity in some stellar layers, may lead to extra convective zones (Richer et al. 2000; Richard et al. 2001) and can even, in some cases, trigger stellar pulsations through the iron-induced  $\kappa$ -mechanism (Charpinet et al. 1997; Pamyatnykh et al. 2004; Bourge et al. 2006; Alecian et al. 2009).

The iron and nickel radiatively-induced accumulations precisely occur at the place of the so-called "opacity bump", because the local variations of the radiative accelerations are directly related to the local opacity increase. As a consequence, the induced accumulation leads to a still larger local opacity and creates a cumulative effect.

The modifications of the abundances of individual elements due to selective atomic diffusion also lead to variations of the local mean molecular weight. As helium is never supported by the radiative flux in its original abundance, it always settles down, which introduces a stabilizing contribution to the local  $\mu$ -gradient. On the other hand, heavy element accumulation leads to inverse, destabilizing  $\mu$ -gradients. When the global mean molecular weight increases toward the surface, the local stellar gas is subject to thermohaline, or fingering convection (Vauclair 2004; Garaud 2011; Deal et al. 2013, and references therein).

The situation may be summarized as follows: the radiative accelerations acting on individual elements push them upwards so that they selectively travel during a short time scale before sharing the acquired momentum with the surroundings. The resulting radiative effect on the global gas is small. However the accumulation of heavy elements induced by the selective process leads to an increased mean molecular weight which can lead to macroscopic mixing through fingering convection.

Spectroscopic observations indicate that the efficiency of atomic diffusion is generally reduced in the envelope of stars by competing transport processes. Several macroscopic processes have been tested, including rotational instabilities of various kinds, internal gravity waves, mass loss, etc (Talon et al. 2006; Vick et al. 2010).

In all these studies, fingering convection was bypassed. This process should be the first one tested in the computations, as, contrary to the other processes, it is a direct consequence of the selective atomic diffusion.

In the present paper, we study, for three A star models of different masses, the consequences of introducing the effect of fingering convection and we compare the results to abundance determinations obtained from observations of few A stars.

## 2. Numerical computations

### 2.1. Stellar models

The stellar models were computed using the Toulouse-Geneva Evolution Code (TGEC), which includes atomic diffusion with radiative accelerations calculated for 21 species, namely 12 elements and their main isotopes: H,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^6\text{Li}$ ,  $^7\text{Li}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{10}\text{B}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$ ,  $^{15}\text{N}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$ ,  $^{18}\text{O}$ ,  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{22}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{25}\text{Mg}$ ,  $^{26}\text{Mg}$ ,  $^{40}\text{Ca}$  and  $^{56}\text{Fe}$  (Théado et al. 2012). The diffusion computations are based on the Boltzmann equation for a dilute collision-dominated plasma. When the medium is isotropic, the solution of the Boltzmann equation is a Maxwellian distribution function. In stars however, structural gradients (temperature, pressure, density, etc.) lead to small deviations from the Maxwellian distribution, which are specific to each species. Solutions of the Boltzmann equation are then obtained in terms of convergent series representing successive approximations to the true distribution function (Chapman & Cowling 1970). The computations lead to a statistical "diffusion" or "drift" velocity  $w_d$  of the element with respect to the main component of the plasma. The Montmerle & Michaud (1976) treatment is used for helium. The abundance variations of all the elements are computed simultaneously, with the use of the mass conservation equation. The gravitational and thermal diffusion coefficients used in the code are those derived by Paquette et al. (1986). The equation of state used in the code is the OPAL2001 equation (Rogers & Nayfonov 2002). The nuclear reaction rates are from the NACRE compilation (Angulo 1999).

### 2.1.1. Opacities and Radiative accelerations

OPCD v3.3 codes and data (Seaton 2005) are used to compute Rosseland opacity at each time step to take the variations of the abundances of each element into account. The opacity data are used to compute individual radiative accelerations on C, N, O, Ne, Mg, Ca, and Fe. This is done by using the improved semi-analytical prescription proposed by Alecian & Leblanc (2004). Radiative accelerations due to bound-bound (Alecian 1985; Alecian & Artru 1990) and bound-free (Alecian 1994) transitions are obtained using a parametric form of the radiative acceleration equation. The basic idea of this parametric method is to derive formula where the terms depending explicitly on atomic data (such as  $gf$  values for instance) are separated from those depending on the stellar plasma and the abundances of the considered ion (with the aim of accounting for the saturation effects). In this framework, the radiative accelerations may be approximated by calculating a single value for each parameter found in the related equations. This is the so-called single-valued parameter (or SVP) approximation (LeBlanc & Alecian 2004). The interface of the SVP method with the models consists of a set of six parameters per ion, which allows to estimate the radiative acceleration of each element through simple algebraic expressions (Alecian & Leblanc 2004), for each time step of the run of the evolution code. These parameters are determined at the beginning of the computation through interpolation as a function of the stellar mass, inside a pre-established grid. The computation of the total radiative acceleration for a given element with SVP also requires computing the ions' relative populations. This is included in the set of the SVP numerical routines added to TGEC.

### 2.1.2. Convection and mixing

In our models, dynamical convection zones are computed using the mixing length formalism with a mixing length parameter of 1.8. There are assumed instantaneously homogenised. HI and HeII convective zones are supposed to be connected by overshooting and mixed together (Latour et al. 1981). The iron convective zone appearing in some models is supposed to be disconnected of the surface convective zone.

The models were evolved from pre-main sequence up to hydrogen core exhaustion. Atomic diffusion was introduced at the beginning of the main sequence.

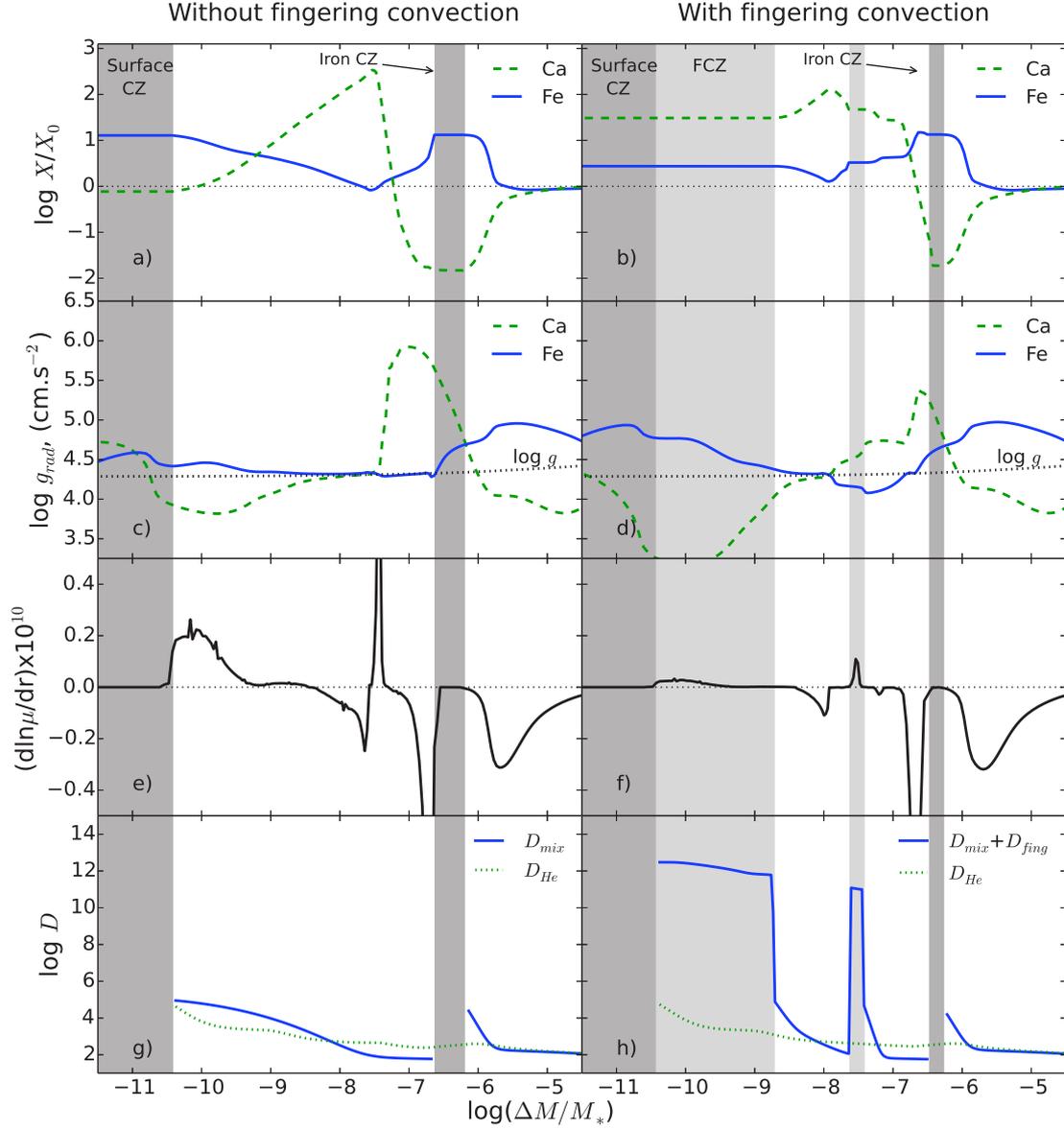
To avoid the appearance of steep and unrealistic abundance gradients at the transition between radiative and convective regions, we introduced mild mixing at the bottom of each convective zone. We used a mixing diffusion coefficient of the form :

$$D_{mix} = D_{bcz} \exp\left(\frac{r - r_{bcz}}{\Delta} \ln 2\right)$$

where  $D_{bcz}$  and  $r_{bcz}$  are respectively the value of  $D_{mix}$  and the value of the radius at the bottom of the convective zone. The value of  $D_{bcz}$  is taken as  $10^5 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . That of  $\Delta$  is taken as 0.2 % of the stellar radius below dynamical convective zones and to 0.05 % of the stellar radius below fingering convective zones. These values are chosen to avoid discontinuity in the effective turbulent diffusion coefficient.

### 2.2. Treatment of fingering convection

Fingering (thermohaline) convection is a well-known process in oceanography. This instability occurs when hot salted water comes upon cool less salty water. It is indeed at the origin of the



**Fig. 1.** Profiles of important physical quantities as function of  $\log(\Delta M/M_*)$  in two  $1.7 M_\odot$  models at 100 Myrs with (right panel) and without (left panels) computation of fingering convection. Dynamical(CZ) and fingering (FCZ) convective zones are respectively represented by dark and light grey regions. Panels *a* and *b* show the calcium (green dashed lines) and iron (blue solid lines) abundances compare to their initial value. Panels *c* and *d* show the calcium (green dashed lines) and iron (blue solid lines) radiative accelerations. The black dotted line represents the gravity. Panels *e* and *f* show the  $\ln \mu$ -gradient with radius (black solid lines), panels *g* and *h* show the helium diffusion coefficient (green dotted lines) and effective mixing coefficient (blue solid lines).

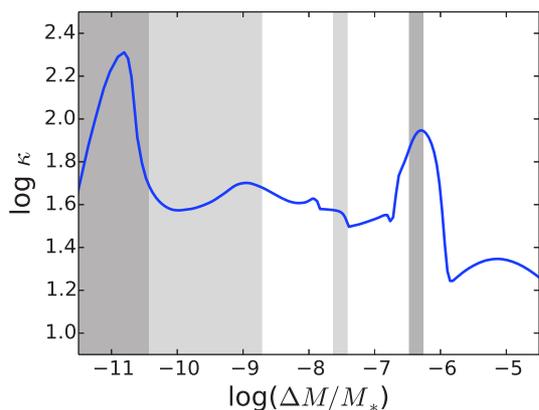
global circulation in the Earth Ocean, called "thermohaline circulation". In stars, a similar instability occurs every time heavy matter comes upon lighter one, in the presence of a stable temperature gradient. This may happen in the case of accretion of planetary matter (Vauclair 2004; Garaud 2011; Deal et al. 2013) or accretion of matter from a companion onto the star (Stancliffe & Glebbeek 2008; Thompson et al. 2008). It has also been invoked in the case of a local  $\mu$ -decrease due to nuclear reactions as in Red Giants (Charbonnel & Zahn 2007) although the effect is too small to account for the observations (e.g. Wachlin et al.

2014). Here we are interested in the case of a local heavy element accumulation due to radiative accelerations which lead to an increase of  $\mu$ .

Fingering convection is characterised by the so-called density ratio  $R_0$  which is the ratio between thermal and  $\mu$ -gradients:

$$R_0 = \frac{\nabla - \nabla_{ad}}{\nabla_\mu}$$

This instability can only develop if the thermal diffusivity is higher than the molecular one. That means the heavy blob of



**Fig. 2.** Rosseland opacity profile in a  $1.7 M_{\odot}$  model including the complete effects of selective atomic diffusion and fingering convection.

fluid fall in the star and keep falling because it thermalises faster than the heavy elements inside the blob diffuse. And the blob stop falling when the difference between thermal and molecular diffusivity is smaller. This leads to:

$$1 < R_0 < \frac{1}{\tau}$$

where  $\tau$  is the inverse Lewis number, ratio of molecular and thermal diffusivity. For values of  $R_0 < 1$  the region is dynamically convective (Ledoux criteria) and for values of  $R_0 > 1/\tau$  the region is stable.

The first treatments of fingering convection in stars were purely analytical (Ulrich 1972; Kippenhahn et al. 1980). Recently, 2D and 3D numerical simulations were performed, all converging on the result that the Ulrich (1972) value was strongly overestimated (Denissenkov 2010; Traxler et al. 2011).

The recent 3D simulations by Brown et al. (2013) (hereafter BGS), including the evolution of the fingers with time, give coefficients slightly larger than the previous ones. They deduce from their simulations a prescription for 1D models, with a effective fingering diffusion coefficient given by:

$$D_{fing} = Nu_{\mu} \kappa_{\mu}$$

$Nu_{\mu}$  is the Nusselt number and  $\kappa_{\mu}$  is the molecular diffusivity.

This work was done using the BGS prescription for the computation of fingering convection, which represents a real improvement compared to the previous treatments (see also Zemska et al. 2014).

### 3. Results

#### 3.1. Computations of fingering convection in $1.7 M_{\odot}$ models

The case of  $1.7 M_{\odot}$  models were studied by Théado et al. (2009) in a preliminary way. They showed that this instability could occur at the bottom of the iron convective zone induced by atomic diffusion, which appears at  $T \approx 200\,000\text{ K}$ . They discussed how fingering convection reduces the accumulation of iron in this region, without stopping it.

In this paper we compute fingering convection all over the star. We show how the accumulations of other elements than iron also play a role in the overall fingering mixing. As a first step, we

add no other extra-mixing processes such as rotation or internal wave, as the aim of these computations is to test the specific effect of fingering convection on the stellar structure.

Fig. 1 compares the results obtained in  $1.7 M_{\odot}$  models without and with fingering convection, after 100 Myrs. Panels *a* and *b* show the abundance profiles of Ca and Fe, panels *c* and *d* show the radiative accelerations on these elements, panels *e* and *f* show the local  $\mu$ -gradients and panels *g* and *h* show the various effective diffusion coefficients implied in the computations including the helium atomic diffusion coefficient.

Dynamical and fingering convective zones are respectively represented by dark and light grey regions. In both cases the opacity increase, induced by the iron accumulation, induces a dynamical convective zone at  $\log(\Delta M/M_*) \approx -6.3$ . This effect is due to the fact that iron accumulates at the place where it is the main contributor of the overall opacity (see Fig. 2). This convective zone appears with a smaller width when fingering convection is taken into account because of the reduced element accumulation.

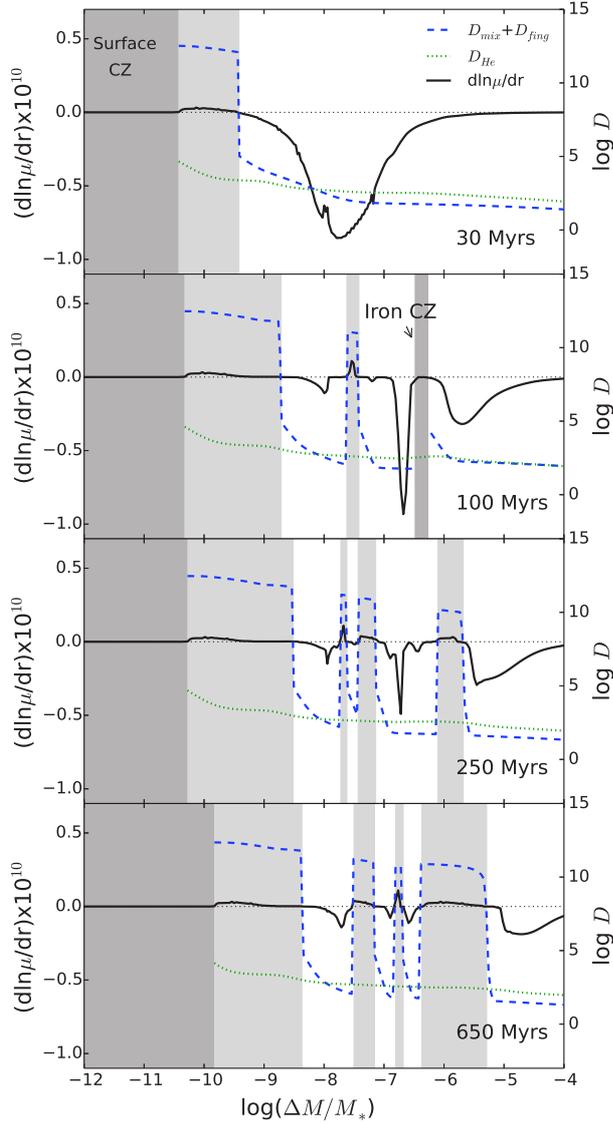
We can see on the right panels that two regions of fingering instabilities (hereafter called FCZ, for "fingering convective zones") appear between the surface dynamical convective zone and the iron one. These regions are unstable due to  $\mu$ -gradient inversions. The first one is due to the heavy elements accumulation inside the surface convective zone. The second one is induced by the local calcium accumulation which occurs around  $\log(\Delta M/M_*) \approx -7.5$ , as the result of the rapid upward decrease of the radiative acceleration on this element.

The first FCZ mixes the stellar gas down to  $\log(\Delta M/M_*) \approx -8.8$  and reduces the iron surface abundance by a factor 3. Meanwhile, the surface calcium abundance is increased by a factor 40 (respectively blue solid and green dashed lines of panel *b*), due to this mixing. An interesting point is that, while the fingering convection mixing reduces the iron concentration, it leads to an increase of  $g_{rad}(\text{Fe})$  (blue solid line of *d* panel) because radiative accelerations are smaller when the abundance increases. This maintains the existence of the iron accumulation and the induced fingering convection in this region.

The second FCZ was a surprise because we did not anticipate that the accumulation of another element than iron or nickel could produce an unstable  $\mu$ -gradient in this region. This narrow FCZ mixes the elements in a small region and moves with time inside the star (see section 3.2). This effect leads to an increase of the abundances of iron and calcium between  $-7.5 < \log(\Delta M/M_*) < -6.8$  (respectively blue solid and green dashed lines of panel *b*). Due to the increase of the calcium abundance in this region, the radiative acceleration decreases by a factor 4 (green dashed line of *d* panel).

#### 3.2. The evolution of the hydrodynamical instabilities with the stellar age

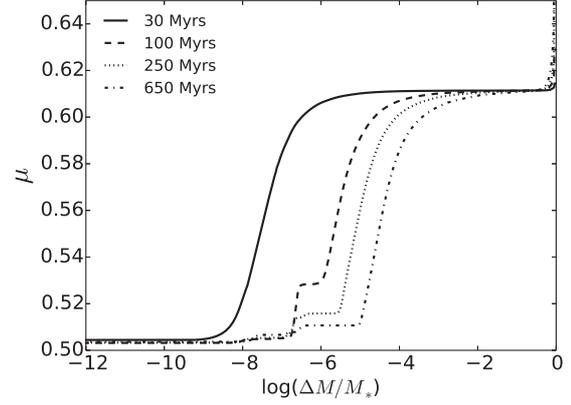
Fig.3 shows the profiles as function of  $\log(\Delta M/M_*)$  of the  $\mu$ -gradient (black solid lines), the helium diffusion coefficient (green dotted lines) and the global effective mixing coefficient  $D_{mix} + D_{fing}$  (blue dashed lines) in the  $1.7 M_{\odot}$  models including fingering convection at 30, 100, 250 and 650 Myrs (from top to bottom panel). The FCZ at the bottom of the surface convective zone is maintained during all the main sequence and mixes the star deeper as the star evolves. The FCZ triggered by the accumulation of calcium still appears after 100 Myrs but moves with time. This FCZ slightly varies in size and position as the star evolves and is also split at some times. This explains the behaviour of the global effective mixing diffusion



**Fig. 3.** Profiles of the  $\mu$ -gradient as a function of  $\log(\Delta M/M_*)$  (black solid lines), the helium diffusion coefficient (green dotted lines) and the effective mixing coefficient (blue dashed lines) at four ages. Dynamical and fingering convective zones are respectively represented by dark and light grey regions.

coefficient around  $\log(\Delta M/M_*) \approx -7.6$  at 250 Myrs and around  $\log(\Delta M/M_*) \approx -6.8$  at 650 Myrs and it occurs all over the main sequence.

The reason why there is no FCZ below the iron convective zone at 100 Myrs is due to the helium stable gradient that prevents this instability at this age. As showed in Fig.4, the downward helium diffusion builds up a stable  $\mu$ -gradient that sinks inside the star with time. The heavy elements accumulation can overcome this helium-induced  $\mu$ -gradient and lead to an unstable one later on. After roughly 250 Myrs fingering convection occurs and reduces the concentration of iron in this region. The opac-



**Fig. 4.**  $\mu$ -profiles of a  $1.7 M_\odot$  with fingering convection at four ages.

ity is reduced, the dynamical convective zone disappears, but the layers are still mixed by fingering convection. This mixed region then extends with time as the helium gradient moves downwards.

### 3.3. Influence of the stellar mass

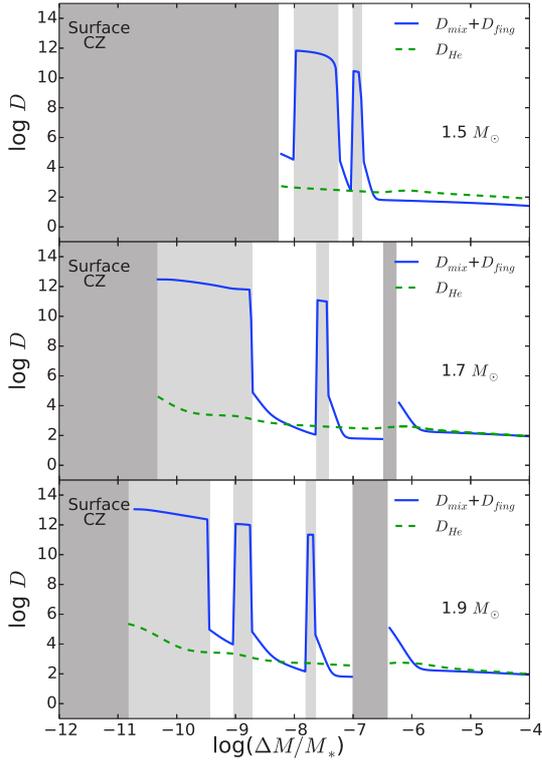
We computed 1.5 and 1.9  $M_\odot$  models in the same way as 1.7  $M_\odot$  models. The main differences between these three models are related to the depth of the surface convective zone which narrows for increasing stellar masses, and to the intensity of the radiative accelerations which increase with masses. For these reasons, the local accumulations of heavy elements are less important in a 1.5  $M_\odot$  star than in a 1.9  $M_\odot$ .

Fig. 5 shows the effective fingering diffusion coefficient of 1.5, 1.7 and 1.9  $M_\odot$  models at 100 Myrs. FCZs are present in all models. Accumulations of iron and calcium are more likely to happen in more massive stars due to stronger radiative accelerations. This produces stronger unstable  $\mu$ -gradients and triggers a more efficient fingering convection mixing.

So it is easy to imagine that this kind of mixing can appear in more massive stars if extra mixing process are not strong enough to prevent the accumulations of element such as iron or calcium by atomic diffusion. Further studies on more massive stars should be done to characterize the impact of fingering convection in these cases.

### 3.4. Results on the surface abundances

The accumulation of heavy elements inside the surface convective zone induces a FCZ that mixes the chemical elements deeper inside the star. This produces visible effects in the surface chemical composition that can be compared to the abundance determinations obtained from observations. Fig.6 displays the surface abundances predicted by 1.5  $M_\odot$  (upper panel), 1.7  $M_\odot$  (middle panel) and 1.9  $M_\odot$  (lower panel) models including fingering convection. There are compared to those observed in Hyades and Pleiades stars with similar effective temperature and surface gravity when available. Observations of HD 23610 (dots), HD 27749 (triangles) and HD 28546 (stars) from Hui-Bon-Hoa & Alecian (1998), vB 045 (rhombus) vB 083 (horizontal triangle) from Takeda & Sadakane (1997) are used for comparison with the 1.7  $M_\odot$  (middle panels). Observations of HD 33254 (dots)



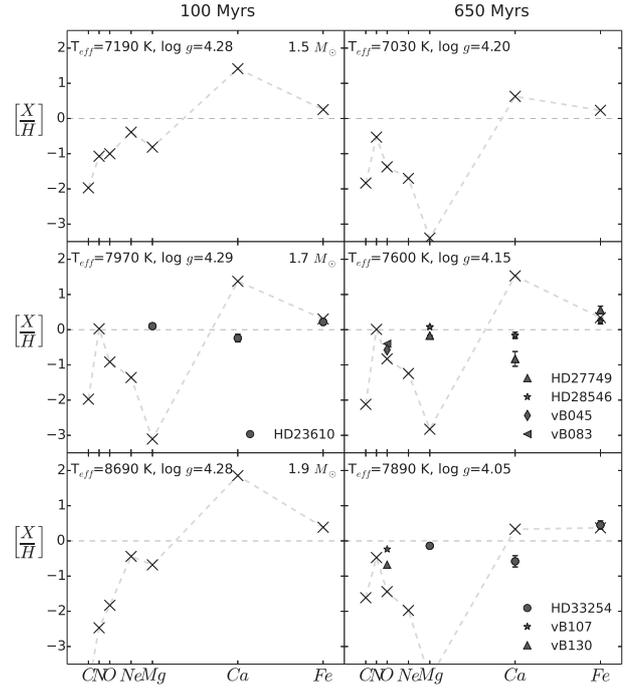
**Fig. 5.** Global effective mixing diffusion coefficient and helium diffusion coefficient profiles at 100 Myrs three masses with fingering convection.

from Hui-Bon-Hoa & Alecian (1998), vB 107 (star) and vB 130 (triangle) from Takeda & Sadakane (1997) are used for comparison with the  $1.9 M_{\odot}$  (lower panels). Even if we do not have enough observations at 100 and 650 Myrs we represent the results of the computations for  $1.5 M_{\odot}$  (upper panels) and  $1.9 M_{\odot}$  (lower left panel).

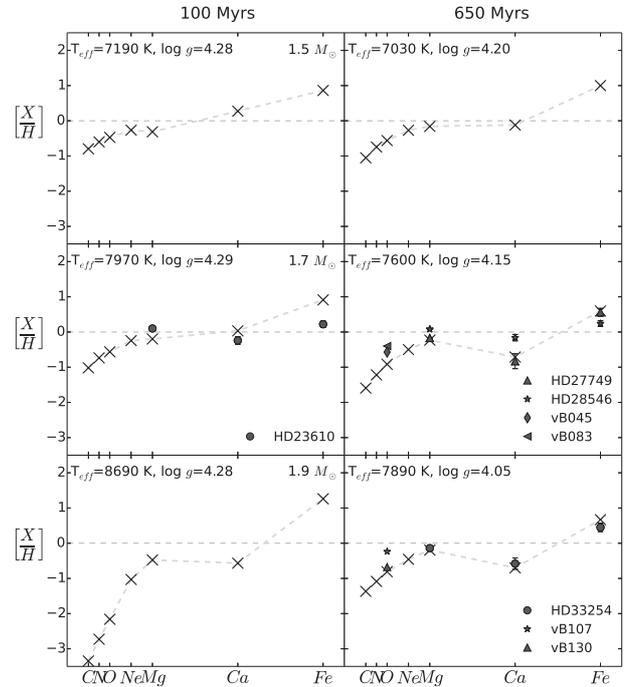
We can see that, in spite of the extra mixing induced by fingering convection, there is no concordance between the abundances determined from observations and those predicted by our models. In these models however, no overshooting has been introduced between the mixed zones induced by fingering convection. If we assume that these regions are connected by overshooting, the results are modified. We computed  $1.5$ ,  $1.7$  and  $1.9 M_{\odot}$  models in which we assumed connections between the surface dynamical convective zone and the deepest mixed zone (iron or fingering convective zone). In this case the surface abundances become strikingly similar to the one determined from observations (Fig. 7). This confirms the results of Richer et al. (2000) and Richard et al. (2001) showing that a mixing down to  $\log(\Delta M/M_*) \approx -6.5$  is needed to reproduce the abundances of Am stars.

#### 4. Discussion and conclusion

In this paper, we confirm that atomic diffusion, a microscopic process acting on individual atoms, have important macroscopic consequences on the stellar structure, on the hydrodynamical instabilities at work inside the stars and on the resulting surface abundances.



**Fig. 6.** Surface abundances at 100 Myrs (left panel) and 650 Myrs (right panel) predicted by  $1.5 M_{\odot}$  (upper panels),  $1.7 M_{\odot}$  (middle panels) and  $1.9 M_{\odot}$  (lower panels) models with fingering convection, represented by black crosses and lightgrey dashed lines. The abundances obtained from observations are represented by black symbols.



**Fig. 7.** Same as Fig. 6 with fingering convection and connections between FCZs and dynamical convective zones.

Fingering convection, which represents the only macroscopic process directly induced by the local accumulation of heavy elements in specific stellar layers, cannot be forgotten in the computations of the evolution of A-type stars. Contrary to other processes like rotation-induced mixing or mass loss, it is not arbitrarily added to explain the observations. It is an unavoidable consequence of the diffusion-induced inverse  $\mu$ -gradient.

We show that, if this process is the only hydrodynamical instability taken into account in the computations, the stellar gas below the outer convective zones is locally mixed in several layers, which move with time during stellar evolution. If we only take these mixed zones into account in the computations, we do not find surface abundances which fit correctly the observations of Am stars. The fit becomes much better if we assume that all these zones are connected by overshooting.

In real stars, rotational mixing is clearly important to account for the statistical observations. Chemically peculiar stars, like Am stars, are known to be slow rotators, whereas stars with normal abundances like  $\delta$ -Scuti stars are rotating more rapidly.

The effect of rotational-induced mixing is primarily to reduce and eventually suppress the abundance variations induced by selective atomic diffusion in rapidly rotating stars. In slow rotators, the influence of meridional circulation on the overall process should also be tested.

The next step will be to discuss the interaction between rotation-induced mixing and fingering convection to model these stars in a more complete and realistic way. This is not trivial as the external hydrodynamical instability may modify the formation of the fingers, which represent the convective cells of this type of double-diffusive convection. At the present time, we can only infer that in slow rotators the meridional circulation may help connecting the fingering zones, as needed to explain quantitatively the abundances derived from the observations.

*Acknowledgements.*

## References

- Alecian, G. 1985, *A&A*, 145, 275  
 Alecian, G. 1994, *A&A*, 289, 885  
 Alecian, G. & Artru, M.-C. 1990, *A&A*, 234, 323  
 Alecian, G., Gebran, M., Auvergne, M., et al. 2009, *A&A*, 506, 69  
 Alecian, G. & Leblanc, F. 2004, in *IAU Symposium*, Vol. 224, *The A-Star Puzzle*, ed. J. Zverko, J. Ziznovsky, S. J. Adelman, & W. W. Weiss, 587–589  
 Angulo, C. 1999, in *American Institute of Physics Conference Series*, Vol. 495, *American Institute of Physics Conference Series*, 365–366  
 Bahcall, J. N., Pinsonneault, M. H., & Wasserburg, G. J. 1995, *Reviews of Modern Physics*, 67, 781  
 Bourge, P.-O., Alecian, G., Thoul, A., Scuflaire, R., & Theado, S. 2006, *Communications in Asteroseismology*, 147, 105  
 Brown, J. M., Garaud, P., & Stellmach, S. 2013, *ApJ*, 768, 34  
 Chapman, S. & Cowling, T. G. 1970, *The mathematical theory of non-uniform gases. an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases*  
 Charbonnel, C. & Zahn, J.-P. 2007, *A&A*, 476, L29  
 Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., et al. 1997, *ApJ*, 483, L123  
 Deal, M., Deheuvels, S., Vauclair, G., Vauclair, S., & Wachlin, F. C. 2013, *A&A*, 557, L12  
 Denissenkov, P. A. 2010, *ApJ*, 723, 563  
 Eddington, A. S. 1926, *The Internal Constitution of the Stars*  
 Garaud, P. 2011, *ApJ*, 728, L30  
 Gough, D. O., Kosovichev, A. G., Toomre, J., et al. 1996, *Science*, 272, 1296  
 Hui-Bon-Hoa, A. 2008, *Ap&SS*, 316, 55  
 Hui-Bon-Hoa, A. & Alecian, G. 1998, *A&A*, 332, 224  
 Kippenhahn, R., Ruschenplatt, G., & Thomas, H.-C. 1980, *A&A*, 91, 175  
 Latour, J., Toomre, J., & Zahn, J.-P. 1981, *ApJ*, 248, 1081  
 LeBlanc, F. & Alecian, G. 2004, *MNRAS*, 352, 1329  
 Michaud, G., Charland, Y., Vauclair, S., & Vauclair, G. 1976, *ApJ*, 210, 447  
 Michaud, G., Richer, J., & Richard, O. 2008, *ApJ*, 675, 1223  
 Michaud, G., Tarasick, D., Charland, Y., & Pelletier, C. 1983, *ApJ*, 269, 239  
 Montmerle, T. & Michaud, G. 1976, *apjs*, 31, 489  
 Pamyatnykh, A. A., Handler, G., & Dziembowski, W. A. 2004, *MNRAS*, 350, 1022  
 Paquette, C., Pelletier, C., Fontaine, G., & Michaud, G. 1986, *ApJS*, 61, 177  
 Richard, O., Michaud, G., & Richer, J. 2001, *ApJ*, 558, 377  
 Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C., & Dziembowski, W. A. 1996, *A&A*, 312, 1000  
 Richer, J., Michaud, G., & Turcotte, S. 2000, *ApJ*, 529, 338  
 Rogers, F. J. & Nayfonov, A. 2002, *ApJ*, 576, 1064  
 Seaton, M. J. 2005, *MNRAS*, 362, L1  
 Stancliffe, R. J. & Glebbeek, E. 2008, *MNRAS*, 389, 1828  
 Takeda, Y. & Sadakane, K. 1997, *PASJ*, 49, 367  
 Talon, S., Richard, O., & Michaud, G. 2006, *ApJ*, 645, 634  
 Théado, S., Alecian, G., LeBlanc, F., & Vauclair, S. 2012, *A&A*, 546, A100  
 Théado, S., Vauclair, S., Alecian, G., & LeBlanc, F. 2009, *ApJ*, 704, 1262  
 Thompson, I. B., Ivans, I. I., Bisterzo, S., et al. 2008, *ApJ*, 677, 556  
 Traxler, A., Garaud, P., & Stellmach, S. 2011, *ApJ*, 728, L29  
 Turcotte, S., Richer, J., Michaud, G., & Christensen-Dalsgaard, J. 2000, *A&A*, 360, 603  
 Turcotte, S., Richer, J., Michaud, G., Iglesias, C. A., & Rogers, F. J. 1998, *ApJ*, 504, 539  
 Ulrich, R. K. 1972, *ApJ*, 172, 165  
 Vauclair, S. 2004, *ApJ*, 605, 874  
 Vauclair, S. & Vauclair, G. 1982, *ARA&A*, 20, 37  
 Vick, M., Michaud, G., Richer, J., & Richard, O. 2010, *A&A*, 521, A62  
 Wachlin, F. C., Vauclair, S., & Althaus, L. G. 2014, *A&A*, 570, A58  
 Zemska, V., Garaud, P., Deal, M., & Vauclair, S. 2014, *ApJ*, 795, 118

# Chapitre 3

## Astérosismologie des étoiles de séquence principale, influence de la diffusion atomique et de la convection thermohaline sur les fréquences

### Sommaire

---

3.1	Introduction . . . . .	71
3.2	Exemple de l'étoile 94 Ceti A . . . . .	75
3.2.1	Observations spectroscopiques . . . . .	75
3.2.2	Observations interférométriques . . . . .	76
3.2.3	Les données sur l'exoplanète . . . . .	76
3.2.4	Observations sismiques et déterminations des modes d'oscillation . . . . .	77
3.2.5	Modèles stellaires . . . . .	77
3.2.6	Détermination du meilleur modèle . . . . .	80
3.2.7	Discussion sur la rotation de 94 Ceti A . . . . .	81
3.3	Impact des accélérations radiatives et de la convection thermohaline sur la détermination de l'âge des étoiles . . . . .	82
3.3.1	Effets des accélérations radiatives . . . . .	82
3.3.2	Effets des accélérations radiatives couplées à la convection thermohaline . . . . .	83
3.4	Discussion . . . . .	87

---

### 3.1 Introduction

Dans le cadre des missions TESS et PLATO, la détermination de la masse, du rayon et de l'âge des étoiles (de types M à F) avec une grande précision sera nécessaire afin de caractériser au mieux les exoplanètes détectées. Pour cela il est important de modéliser le plus précisément possible

ces étoiles avec les codes d'évolution stellaire. L'enjeu est d'obtenir des âges sismiques avec une précision de 10%, des rayons sismiques avec une précision de 1 à 2% ainsi que des masses avec une précision inférieure à 10% pour les étoiles du même type que le Soleil (Rauer et al., 2014). Dans l'état actuel des choses, les incertitudes sur les âges sont de l'ordre de 50 à 200% en fonction de l'étoile. La principale cause de ces incertitudes sont les processus de transport (convection, core overshooting, diffusion atomique, mélange induit par la rotation, etc).

La prise en compte de la diffusion atomique induit une différence d'âge au turn off, par rapport à des modèles n'incluant pas ce processus, de l'ordre de quelques pourcents pour des étoiles individuelles (Fig. 3.1, haut). Cela induit aussi une différence dans la détermination de l'âge des amas qui peut aller jusqu'à une dizaine de pourcents (Fig. 3.2). De plus, les accélérations radiatives deviennent non négligeables pour des étoiles de masses  $1.2 M_{\odot}$  (étoiles de type F) et supérieures (Michaud et al., 1976; Turcotte et al., 1998a). Cela peut conduire à une augmentation des métaux dans la zone convective de surface et ainsi à une augmentation de l'opacité. Des variations de l'opacité de 10% induisent une incertitude sur l'âge jusqu'à 14% au turn off (Fig. 3.1, bas). Cette augmentation de métaux peut aussi engendrer de fausses déterminations de la métallicité initiale de l'étoile ce qui influe aussi sur la détermination de l'âge.

Il est donc nécessaire de prendre en compte la diffusion atomique de façon complète dans les modèles en incluant les accélérations radiatives.

Il est important de quantifier le plus précisément possible l'effet de tous les processus en jeu, afin de préparer au mieux le traitement des données à venir avec PLATO et TESS pour répondre aux exigences concernant les précisions sur les masses, âges et rayons.

L'utilisation des données astérosismologiques permet une modélisation plus fine des étoiles observées. Ces données donnent accès par exemple à une estimation précise de la densité moyenne de l'étoile et permet une détermination plus précise des paramètres globaux ( $T_{\text{eff}}$ ,  $\log g$ , ...) à l'aide de modèles d'évolution. La prise en compte de ces données permet aussi une amélioration considérable de la détermination de l'âge des étoiles. La précision passe de 90 à 10% lorsque les contraintes sismiques sont utilisées (Lebreton et al., 2014b). Il devient donc crucial de développer des diagnostics sismiques précis permettant de mieux contraindre les modèles mais aussi de mettre en évidence les défauts des modèles actuels. Cela permet aussi de tester la modélisation de nouveaux processus de transport ainsi qu'une modélisation plus sophistiquée.

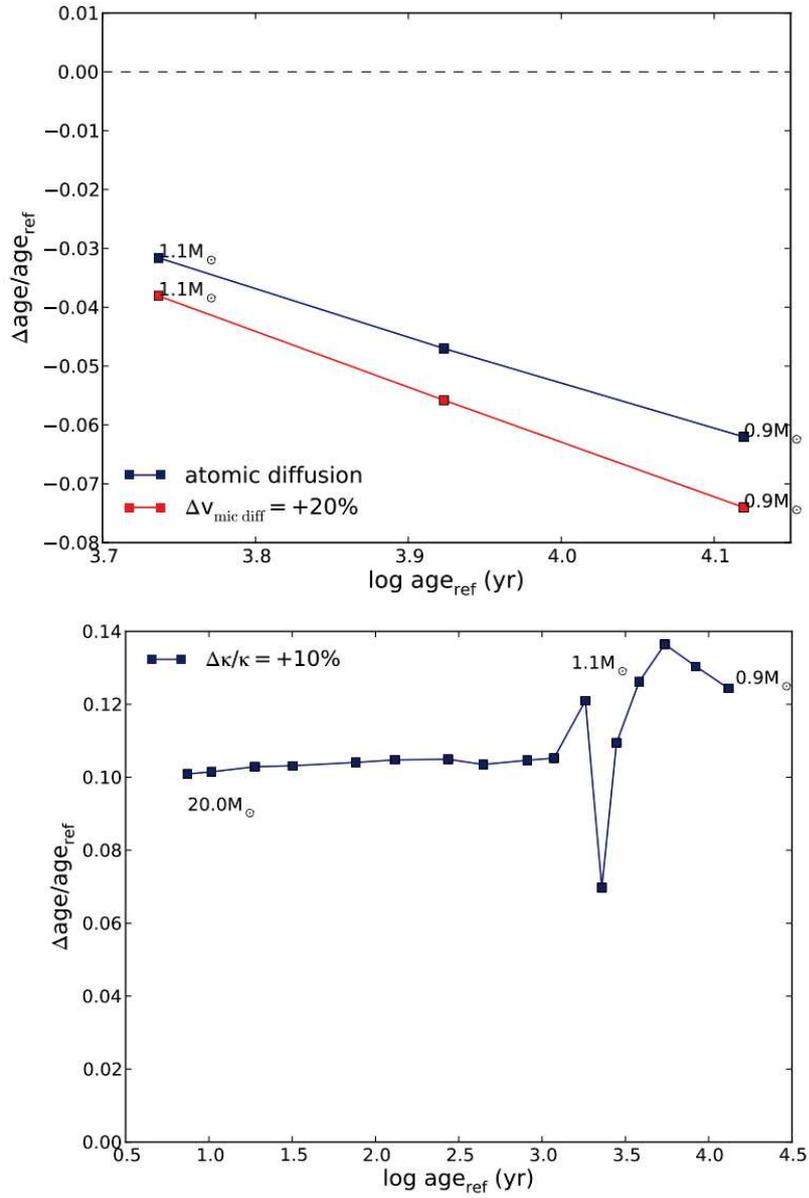


FIGURE 3.1: Différence d'âge au turn off (TO) entre des modèles incluant la diffusion atomique (sans accélérations radiatives) et des modèles ne l'incluant pas (gauche). Différence d'âge au turn off (TO) lorsque l'opacité est augmenté de 10% (droite) (Figure 26 et 18 de l'article Lebreton et al. 2014a).

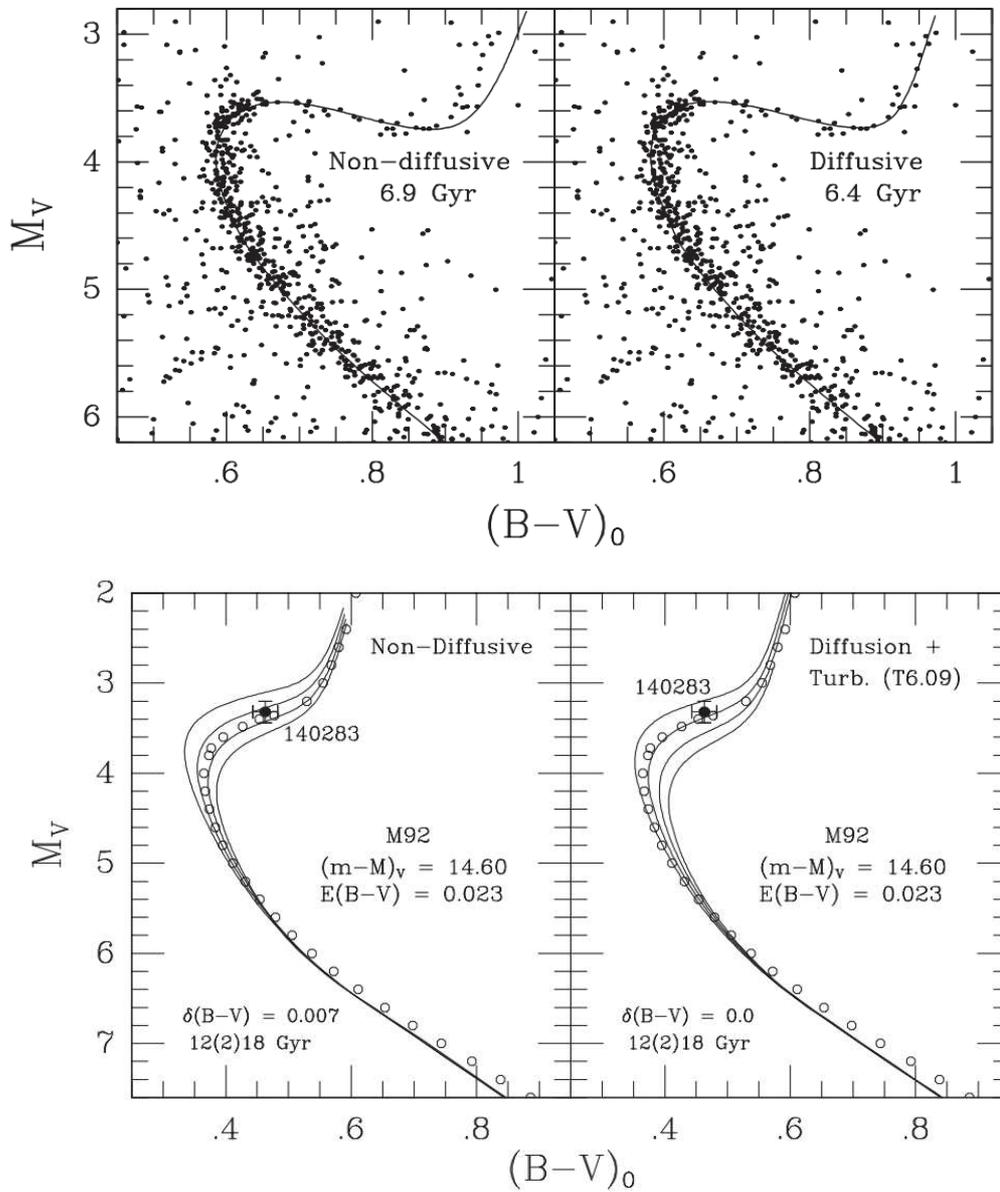


FIGURE 3.2: Isochrones des amas NGC188 (haut) et M92 (bas) obtenus à partir des modèles calculés avec le code de Montréal/Montpellier en n'incluant pas la diffusion atomique (panneaux de gauche) et en l'incluant (panneaux de droite) (respectivement figures 15 et 8 des articles Michaud et al. 2004 et VandenBerg et al. 2002).

## 3.2 Exemple de l'étoile 94 Ceti A

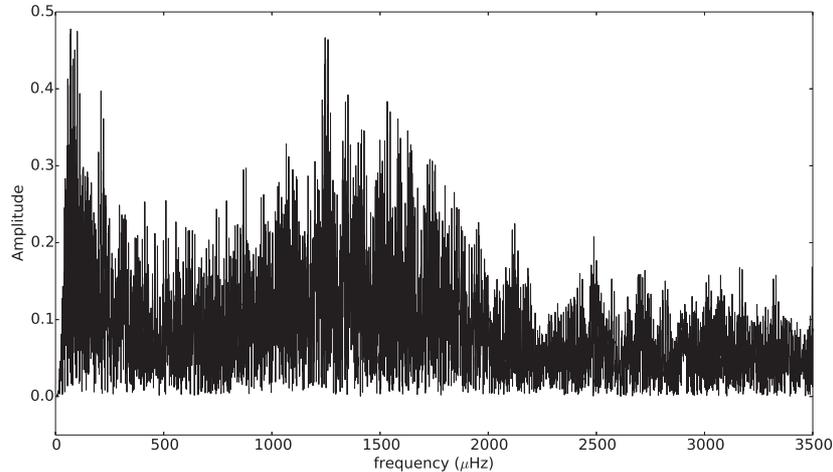


FIGURE 3.3: Transformée de Fourier des données pour 94 Ceti A.

Les études sismiques des étoiles à planètes sont importantes pour plusieurs raisons. Elles permettent une détermination plus précise des paramètres stellaires ce qui a pour conséquence une plus grande précision sur les paramètres des planètes. Elles donnent aussi des informations sur la structure interne des étoiles. De plus, la détection de planètes et l'acquisition des données sismiques sont faites avec les mêmes instruments. Nous présentons ici une étude de l'étoile 94 Ceti A dont les données ont été obtenues avec le spectrographe HARPS, à l'observatoire de La Silla, Chili. L'étoile 94 Ceti A (HD 19994, HR 962, HIP 14954, GJ 128) est classé comme F8V, avec une magnitude de 5.08. Sa parallaxe est de  $\pi = 44.29 \pm 0.28$  mas (*Hipparcos catalog*, van Leeuwen 2007) ce qui la place à une distance de 22.38 pc. Elle possède une exoplanète situé à 1.42 UA. Elle appartient à un système binaire dont la seconde composante est une naine M de magnitude 11.5 située à 100 UA de la composante principale (Hale, 1994).

### 3.2.1 Observations spectroscopiques

De nombreuses études spectroscopiques ont été réalisées sur cette étoile. Certaines d'entre elles suggèrent que la métallicité est quasi solaire. Edvardsson et al. (1993), dans leur étude de l'évolution chimique du disque galactique, donnent une métallicité ( $[Fe/H]$ ) de 0.09 dex. Huit ans plus tard, Smith et al. (2001), dans leur étude exclusivement consacrée à 94 Ceti A et à sa distribution d'abondance, trouvent une métallicité similaire. Cependant la plupart des autres études, principalement concentrées sur la planète, déterminent une métallicité plus importante, de l'ordre de 0.20 dex (e.g Santos et al. 2001, 2003, 2004)

Pour notre étude nous avons utilisé les métallicités de Santos et al. (2004), où ils font un résumé et une révision de leur précédents travaux, en donnant les valeurs de  $[Fe/H]$  obtenues avec différents instruments : CORALIE, FEROS, UVES and UES.

TABLE 3.1: Résumé des précédentes études spectroscopiques de 94 Ceti A.

[Fe/H]	$T_{\text{eff}}$ (K)	$\log g$	References
$0.09 \pm 0.10$	$6104 \pm 100$	$4.10 \pm 0.20$	Edvardsson et al. (1993)
$0.09 \pm 0.05$	$6030 \pm 20$	$3.95 \pm 0.05$	Smith et al. (2001)
$0.25 \pm 0.08$	$6217 \pm 67$	$4.29 \pm 0.08$	Santos et al. (2004) (CORALIE)
$0.32 \pm 0.07$	$6290 \pm 58$	$4.31 \pm 0.13$	Santos et al. (2004) (FEROS)
$0.19 \pm 0.05$	$6121 \pm 33$	$4.06 \pm 0.05$	Santos et al. (2004) (UVES)
$0.21 \pm 0.08$	$6132 \pm 67$	$4.11 \pm 0.23$	Santos et al. (2004) (UES)
$0.19 \pm 0.03$	$6188 \pm 44$	$4.24 \pm 0.06$	Valenti and Fischer (2005)
$0.19 \pm 0.03$	$6140 \pm 31$	$4.35 \pm 0.09$	Maldonado et al. (2012)

TABLE 3.2: Résumé des propriétés de HD 19994b (Mayor et al., 2004).

<b>HD 19994b</b>	
$M \sin i$	$1.68 M_J$
Période orbitale	$535.7 \pm 3.1$ jours
Demi grand axe	$1.42$ UA
Excentricité	$0.30 \pm 0.04$

Valenti and Fischer (2005) ont aussi inclus 94 Ceti A dans leur étude spectroscopique d'étoiles froides. Leurs résultats sont en accord avec ceux de Santos et al. (2004) en ce qui concerne la sur-métallicité de cette étoile. Ils donnent aussi une estimation de l'âge et du rayon de l'étoile. Maldonado et al. (2012) ont analysé par spectroscopie 94 Ceti dans le cadre de leur "survey" qui avait pour but d'étudier la métallicité d'étoiles de type solaire ayant un disque de débris ou une planète. Leurs résultats sont aussi en accord avec les précédentes études.

Un résumé des paramètres déterminés par ces études spectroscopiques est présenté Table 3.1.

### 3.2.2 Observations interférométriques

Une mesure directe du rayon de 94 Ceti A a été réalisé par interférométrie par van Belle and von Braun (2009). En utilisant le Palomar Testbed Interferometer (PTI) et CHARA, ils ont mesuré le rayon et la température effective de 12 étoiles ayant une planète connue. Pour 94 Ceti A, ils ont obtenu un rayon de  $1.898 \pm 0.070 R_{\odot}$ , ce qui donne une contrainte importante pour la modélisation de l'étoile. Ils ont aussi dérivé une température effective de  $6109 \pm 111$  K ce qui est en accord avec les précédentes déterminations.

### 3.2.3 Les données sur l'exoplanète

La présence d'une planète jovienne en orbite autour de 94 Ceti A (HD 19994b) a d'abord été annoncée par Queloz et al. (2000). Des données orbitales plus précises ont ensuite été déterminées par Mayor et al. (2004). Cette planète a été découverte par la technique des vitesses radiales. Elle a une masse minimum de  $1.68 M_J$  et orbite autour de son étoile hôte à une distance de  $1.42$  UA avec une période de  $535.7$  jours. Un résumé des propriétés de la planète est donné Table 3.2.

TABLE 3.3: Fréquences des modes p identifiés (en  $\mu\text{Hz}$ ) pour 94 Ceti A.

$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$
1224	1253	1218	1246
1288	1316	1283	-
1352	1381	1347	-
1415	1445	1411	1438
1479	1508	1475	1501
1545	1572	1538	-
1608	1637	-	1680
1673	1702	-	-

### 3.2.4 Observations sismiques et déterminations des modes d'oscillation

L'étoile 94 Ceti A a été observée avec le spectrographe HARPS installé sur le télescope de 3.6 m de l'ESO à l'observatoire de La Silla au Chili. Les observations ont été faites pendant 7 nuits consécutives en novembre 2007.

La transformée de Fourier a été analysée dans un premier temps avec le code Period 04 pour extraire les pics les plus importants. Cependant, à cause de l'aliasing il peut arriver que les pics dus aux cycles jour/nuit se combinent pour donner des effets plus importants que ceux des modes réels. Pour cette raison la détermination des modes a aussi été faite manuellement, étape par étape en utilisant la transformée de Fourier de la fenêtre d'observation pour permettre de sélectionner les pics réels. Nous avons ensuite utilisé des modèles stellaires afin d'identifier les modes correspondant aux fréquences obtenues à partir des observations. Cette méthode a permis la reconnaissance de 26 modes d'oscillation. Les fréquences de ces modes identifiés sont données Table 3.3 avec une incertitude évaluée à  $1 \mu\text{Hz}$ . Les grande et petite séparations moyennes sont  $\Delta\nu = 64.1 \mu\text{Hz}$  et  $\delta\nu_{0,2} = 4.0 \mu\text{Hz}$ .

### 3.2.5 Modèles stellaires

Nous avons utilisé le code TGEC (cf. Section 1.1) pour calculer des modèles qui reproduisent le mieux les observations sismiques de 94 Ceti A. Le but de cette étude, en plus de la détermination des paramètres de 94 Ceti A, était de tester l'impact de processus physiques sur ces paramètres. Pour cela nous avons choisi dans un premier temps de réaliser une grille de modèles incluant la diffusion atomique sans les accélérations radiatives pour des masses allant de  $1.36$  à  $1.50 M_{\odot}$ . Nous avons testé 4 compositions chimiques initiales différentes afin de couvrir au maximum l'espace des paramètres libres. A la suite de Escobar (2013, thèse de doctorat) nous avons choisi deux valeurs initiales pour l'hélium. Une valeur "solaire" ( $Y_i = 0.271$ , Grevesse and Noels 1993) et une valeur "galactique" ( $Y_i = Y_G$ ) calculée à partir de la loi d'évolution chimique des galaxies donnée par Izotov and Thuan (2010). La fraction de masse initiale en éléments lourds  $Z_i$  a été choisie pour reproduire les deux métallicités actuelles déterminées par spectroscopie ( $[\text{Fe}/\text{H}] \approx 0.09$  et  $[\text{Fe}/\text{H}] \approx 0.20$ ). Ici  $[\text{Fe}/\text{H}] = \log(\text{Fe}_{\text{surf}}/\text{H}_{\text{surf}}) - \log(\text{Fe}_{\text{surf}}/\text{H}_{\text{surf}})_{\odot}$ . Pour obtenir ces valeurs après diffusion des éléments à l'âge actuel de l'étoile il faut utiliser les valeurs initiales  $Z_i = 0.0245$  et  $Z_i = 0.0305$ . Les traces évolutives de ces modèles sont présentées Fig. 3.4 et 3.5.

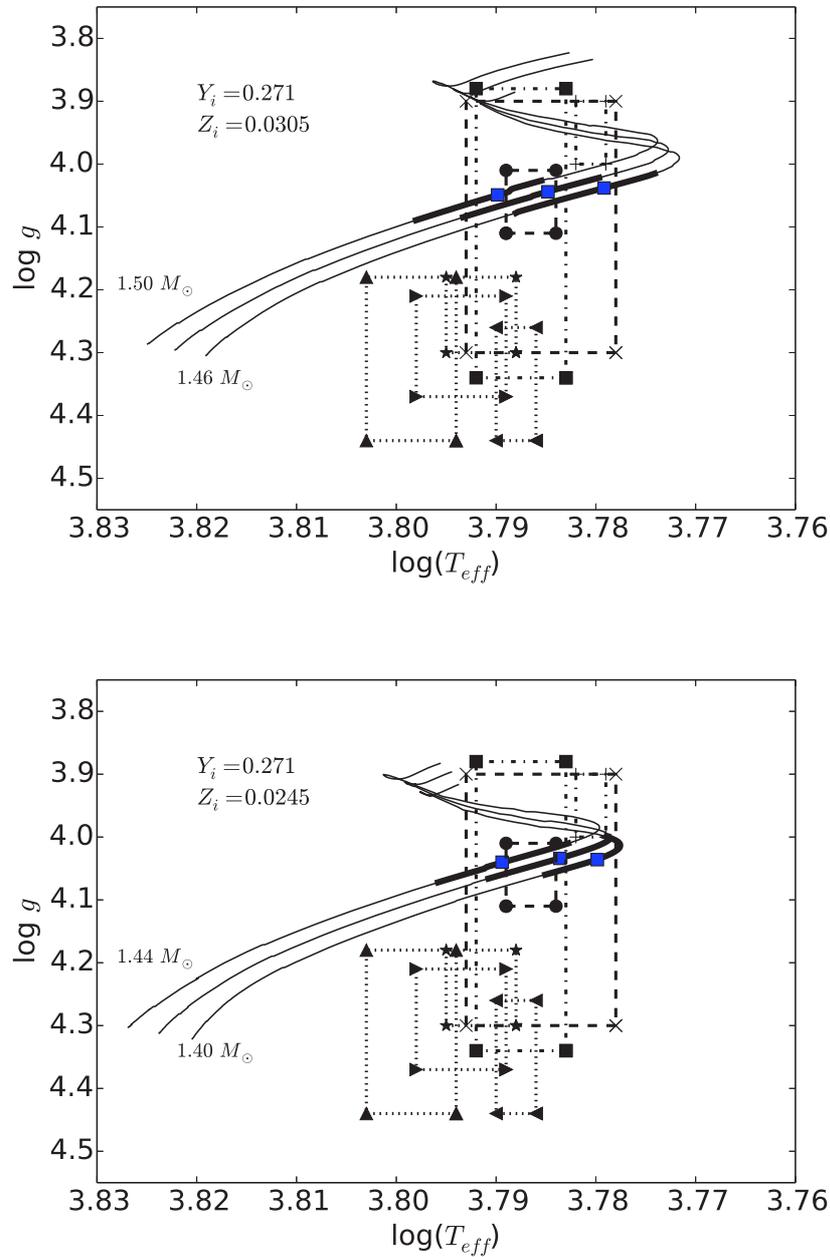


FIGURE 3.4: Diagramme HR représentant les traces évolutives de modèles allant de  $1.36$  à  $1.50 M_\odot$  avec un hélium "solaire". Les boîtes d'erreurs spectroscopiques proviennent de Edvardsson et al. (1993) (croix), Smith et al. (2001) (plus), Santos et al. (2004) (CORALIE, triangles pointant vers la droite; FEROS, triangles; UVES, points; UES, carrés), Valenti and Fischer (2005) (étoiles) et Maldonado et al. (2012) (triangles pointant vers la gauche). Les traits épais noirs sont les segments de la trace évolutive où le rayon des modèles correspond au rayon interférométrique déterminé par van Belle and von Braun (2009). Les carrés bleus correspondent aux modèles ayant une grande séparation égale à celle déterminée à partir des observations.

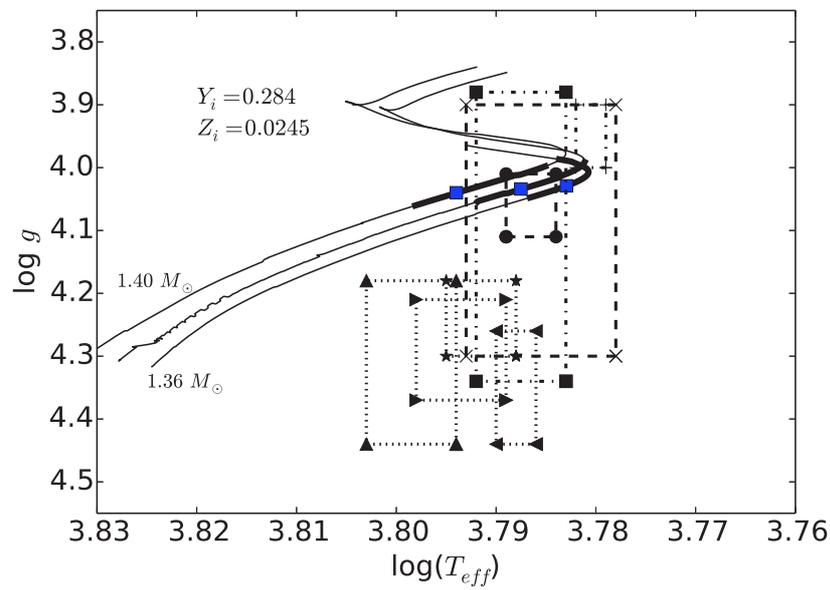
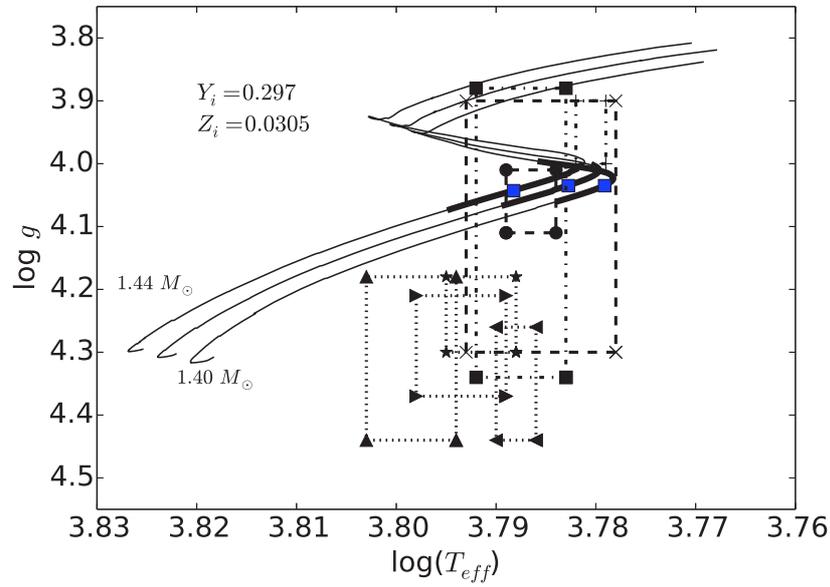


FIGURE 3.5: Môme légende que la figure 3.4 avec un hélium "galactique".

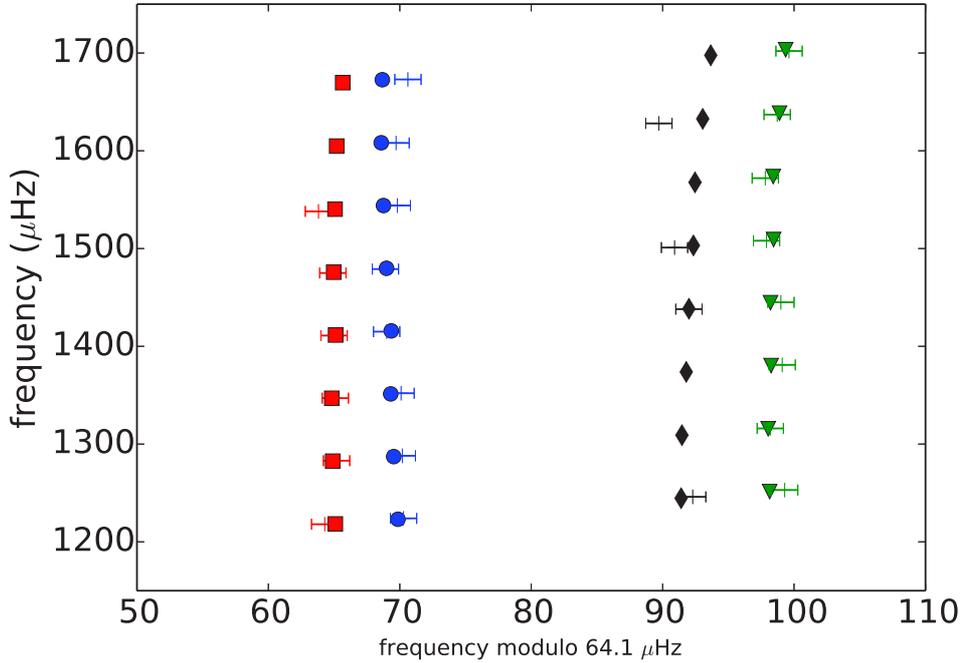


FIGURE 3.6: Diagramme échelle du modèle  $1.44 M_{\odot}$  avec  $Y_i = Y_G$  et  $Z_i = 0.0305$  à 2.4 Ga. Les fréquences obtenues à partir des observations sont représentées par les croix et les fréquences modélisées sont représentées par les points bleus ( $l=0$ ), les triangles verts ( $l=1$ ), les carrés rouges ( $l=2$ ) et les losanges noirs ( $l=3$ ).

### 3.2.6 Détermination du meilleur modèle

Les modes d'oscillation ont été dérivés pour chaque modèle en utilisant le code PULSE (Brassard and Charpinet, 2008). Nous avons déterminé pour chaque trace évolutive le modèle ayant une grande séparation moyenne égale à la grande séparation observée (ces modèles sont représentés par les carrés bleus sur les Fig. 3.4 et 3.5). Nous avons ensuite déterminé parmi ces modèles ceux dont le diagramme échelle était le plus proche des observations, en appliquant la méthode décrite Section 1.3.7 pour les diagnostics sismiques. Nous avons dans un premier temps fait ce choix d'une manière indépendante pour chaque composition chimique. Nous avons ainsi obtenu deux modèles : un modèle de  $1.40 M_{\odot}$  avec  $Y_i = Y_G$  et  $Z_i = 0.0245$  à 2.3 Ga et un modèle de  $1.44 M_{\odot}$  avec  $Y_i = Y_G$  et  $Z_i = 0.0305$  à 2.4 Ga.

En comparant les paramètres de ces modèles avec les observations spectroscopiques (Fig. 3.5), il apparaît clairement que le meilleur des deux modèles est celui de  $1.44 M_{\odot}$  car le modèle de  $1.40 M_{\odot}$  est en dehors des boîtes d'erreur spectroscopique. Le diagramme échelle correspondant à ce meilleur modèle est présenté Fig. 3.6. Ses paramètres sont donnés Table 3.4.

Un résultat intéressant de cette étude est la contrainte sur la gravité de surface. Pour toutes les compositions chimiques initiales,  $\log g$  a une valeur comprise entre 4 et 4.1. Cela montre que  $\log g$  est surestimé dans les articles de Santos et al. (2004) pour les instruments CORALIE et FEROS, et

TABLE 3.4: Propriétés de 94 Ceti A déterminées par notre étude.

	94 Ceti A
$T_{\text{eff}}(\text{K})$	6141
$\log g$	4.043
Masse ( $M_{\odot}$ )	1.44
Rayon ( $R_{\odot}$ )	1.89
Luminosité ( $L_{\odot}$ )	0.66
Age (Ga)	2.4
$Z_i$	0.0305
$Y_i$	0.297
$Z_{\text{surf}}$	0.0276
$Y_{\text{surf}}$	0.241
$[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{surf}}$	0.21

dans les articles de Valenti and Fischer (2005) et Maldonado et al. (2012).

### 3.2.7 Discussion sur la rotation de 94 Ceti A

A partir de la vitesse de rotation projetée  $v \sin i$ , de la période de rotation  $P_{\text{rot}}$ , du rayon  $R_*$ , il est possible de déterminer l'angle d'inclinaison  $i$  de l'axe de rotation sur la ligne de visée. Dans le cas de 94 Ceti A,  $P_{\text{rot}} = 12.2$  jours (Mayor et al. (2004), à partir de l'indicateur d'activité  $R_{\text{HK}}$ ) et  $R/R_{\odot} = 1.898 \pm 0.070$  (à partir des observations interférométriques de van Belle and von Braun (2009)). Nous obtenons  $\sin i \approx 1.02$  ce qui donne finalement un angle d'inclinaison de  $i = 90^\circ$ . Quand une étoile est vue par le pôle, Gizon and Solanki (2003) ont montré que pour les modes  $l = 1$ , la composante centrale  $m = 0$  n'est pas visible. Les seules composantes visibles sont  $m = \pm 1$ . Avec une période de rotation de  $P_{\text{rot}} = 12.2$  jours, le décalage en fréquence induit par la rotation est  $\approx 0.95 \mu\text{Hz}$ . Cela implique que dans le cas de 94 Ceti A, nous nous attendons à voir les composantes  $m = \pm 1$  des modes  $l = 1$  séparées par  $\approx 1.9 \mu\text{Hz}$ . Pour les modes  $l = 2$ , Gizon and Solanki (2003) prédisent la visibilité de trois composantes :  $m = 0$  et  $m = \pm 2$ . Le décalage en fréquence doit aussi être proche de  $1.9 \mu\text{Hz}$ . Les composantes  $m = 0$  sont de plus faibles amplitudes que les composantes  $m = \pm 2$ . Le cas des modes  $l = 3$  n'est pas discuté dans l'article Gizon and Solanki (2003). Les données que nous avons pour l'étoile 94 Ceti A ne sont pas assez précises pour tester ces effets de la rotation car les incertitudes sur les fréquences sont de l'ordre de un  $\mu\text{Hz}$ . C'est peut être la raison pour laquelle nous obtenons un léger écart de certaines fréquences observées avec les fréquences calculées (Fig. 3.6).

### 3.3 Impact des accélérations radiatives et de la convection thermohaline sur la détermination de l'âge des étoiles

Les accélérations radiatives ne sont plus négligeables comparées à la gravité pour des étoiles de masses supérieures à  $1.3 M_{\odot}$  à métallicité solaire (Michaud et al., 1976). Il a été montré que les accélérations radiatives ont des effets non négligeables pour des masses inférieures ( $0.7-0.9 M_{\odot}$ ) pour des métallicités plus faibles ( $[\text{Fe}/\text{H}] < -2.31$ ) (Richard et al., 2002b). Dans notre cas, le meilleur modèle pour l'étoile 94 Ceti A est un modèle de  $1.44 M_{\odot}$  avec une métallicité plus grande que le Soleil. La zone convective de surface est donc plus profonde qu'à métallicité solaire mais les accélérations radiatives ne sont cependant pas négligeables. Comme nous l'avons montré dans le chapitre 2, les accélérations radiatives peuvent conduire à des accumulations d'éléments lourds ce qui peut produire une inversion du poids moléculaire moyen ( $\mu$ ) et donc déclencher de la convection thermohaline. Le but de cette étude est de caractériser l'impact des accélérations radiatives et de la convection thermohaline qui peut en résulter sur les fréquences d'oscillation et plus particulièrement sur la détermination de l'âge de l'étoile.

#### 3.3.1 Effets des accélérations radiatives

Nous étudions dans cette partie les variations d'âge obtenues (pour une masse donnée) entre un modèle qui inclut les accélérations radiatives et un modèle qui ne l'inclut pas en utilisant la grande séparation sans prendre en compte la convection thermohaline. Nous utilisons exactement les mêmes paramètres initiaux que ceux du meilleur modèle déterminé précédemment (cf. Section 3.2.6).

Dans un premier temps, nous avons calculé un modèle de  $1.44 M_{\odot}$  incluant les effets des accélérations radiatives sans prendre en compte la convection thermohaline. Le modèle le plus proche des observations de 94 Ceti A dans ce cas a un âge de 2.43 milliards d'années. Cet âge est 2% plus grand que l'âge déterminé avec le modèle sans accélérations radiatives. Cette variation vient du fait que les accélérations radiatives modifient les profils d'abondance en surface et dans les régions où elles ne sont plus négligeables comparées à la gravité ce qui modifie l'évolution de l'étoile. Comme on peut le voir figure 3.7, l'accélération radiative sur le calcium est plus importante que la gravité à la base de la zone convective de surface. Cela produit une augmentation du calcium à la surface (Fig. 3.8, panneau du bas, courbe en tirets verts). Dans la zone radiative, l'accélération radiative sur le fer est toujours inférieure à la gravité (Fig. 3.7, courbe bleue) mais son effet n'est cependant pas négligeable. Entre  $-2 < \log(\Delta M/M_*) < -1$ , l'accélération radiative sur le fer n'est que deux fois inférieure à la gravité ce qui permet de diminuer la vitesse de diffusion et conduit à une modification non négligeable de son profil d'abondance. Cela conduit à une accumulation de fer dans cette région (Fig. 3.8, panneau du bas, courbe bleue).

Les profils d'abondance sont très différents lorsque les accélérations radiatives sont prises en compte. La zone convective du meilleur modèle est modifiée et passe de  $\log(\Delta M/M_*) = -2.56$  pour le meilleur modèle incluant la diffusion atomique sans les accélérations radiatives, à  $\log(\Delta M/M_*) = -2.47$  pour le modèle incluant les accélérations radiatives. Il s'agit d'une modification de l'ordre de 20% de la masse de la zone convective de surface ce qui induit une différence dans les fréquences d'oscillation et donc dans l'âge du meilleur modèle en fonction de la physique considérée. Un autre effet des accélérations radiatives est la modification des profils d'abondance et donc directement

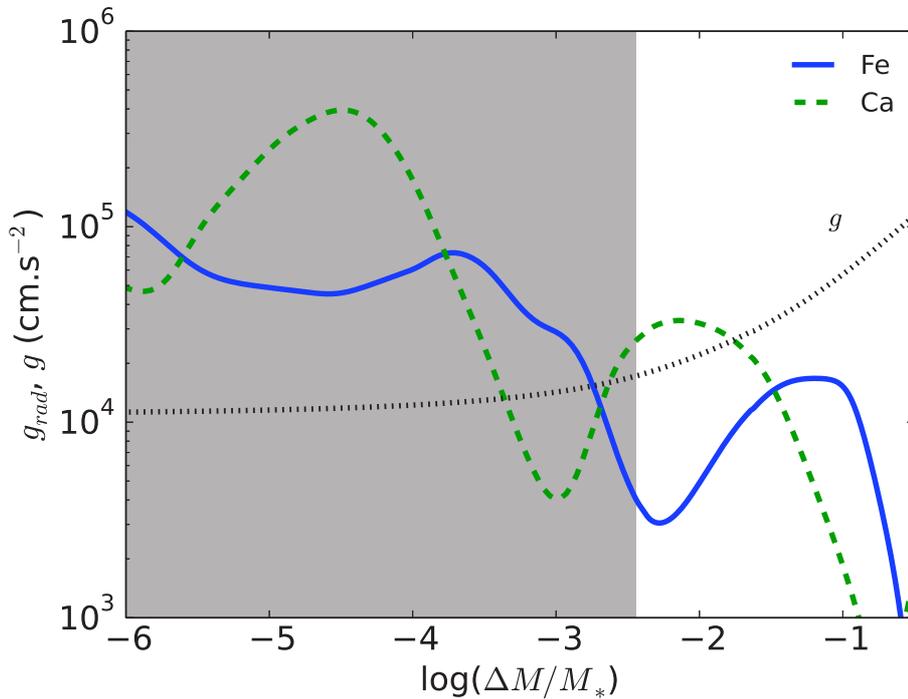


FIGURE 3.7: Accélérations radiatives du calcium (tirets verts) et du fer (courbe bleue) du modèle de  $1.44 M_{\odot}$  à 2.43 milliards d'années avec  $Y_i = 0.297$  et  $Z_i = 0.0305$ . La région en gris foncé représente la zone convective de surface.

du profil d'opacité. La figure 3.9 montre le profil d'opacité du meilleur modèle n'incluant que le triage gravitationnel (courbe bleue) et du modèle incluant les accélérations radiatives (courbe en tirets verts). La modification des profils d'abondance modifie l'opacité et ce particulièrement dans la zone convective de la surface et à sa base. Cette différence dans le profil d'opacité est de l'ordre de quelques pourcents mais cela a un impact sur l'évolution de l'étoile et donc sur la détermination de l'âge par astérosismologie.

### 3.3.2 Effets des accélérations radiatives couplées à la convection thermohaline

Nous avons montré (cf. chapitre 2) que l'accumulation d'éléments lourds produite par les accélérations radiatives dans les étoiles de type A pouvait conduire à des inversions du poids moléculaire moyen  $\mu$  et ainsi provoquer de la convection thermohaline. Dans cette section nous étudions l'impact des accélérations radiatives couplées à la convection thermohaline sur la détermination de l'âge de 94 Ceti A à partir des données sismiques.

Nous avons calculé un modèle de  $1.44 M_{\odot}$  avec les mêmes paramètres initiaux que précédemment (cf. Section 3.3.1) mais en incluant en plus les effets de la convection thermohaline. Le modèle le plus proche d'un point de vue astérosismique de 94 Ceti A a un âge de 2.47 milliards

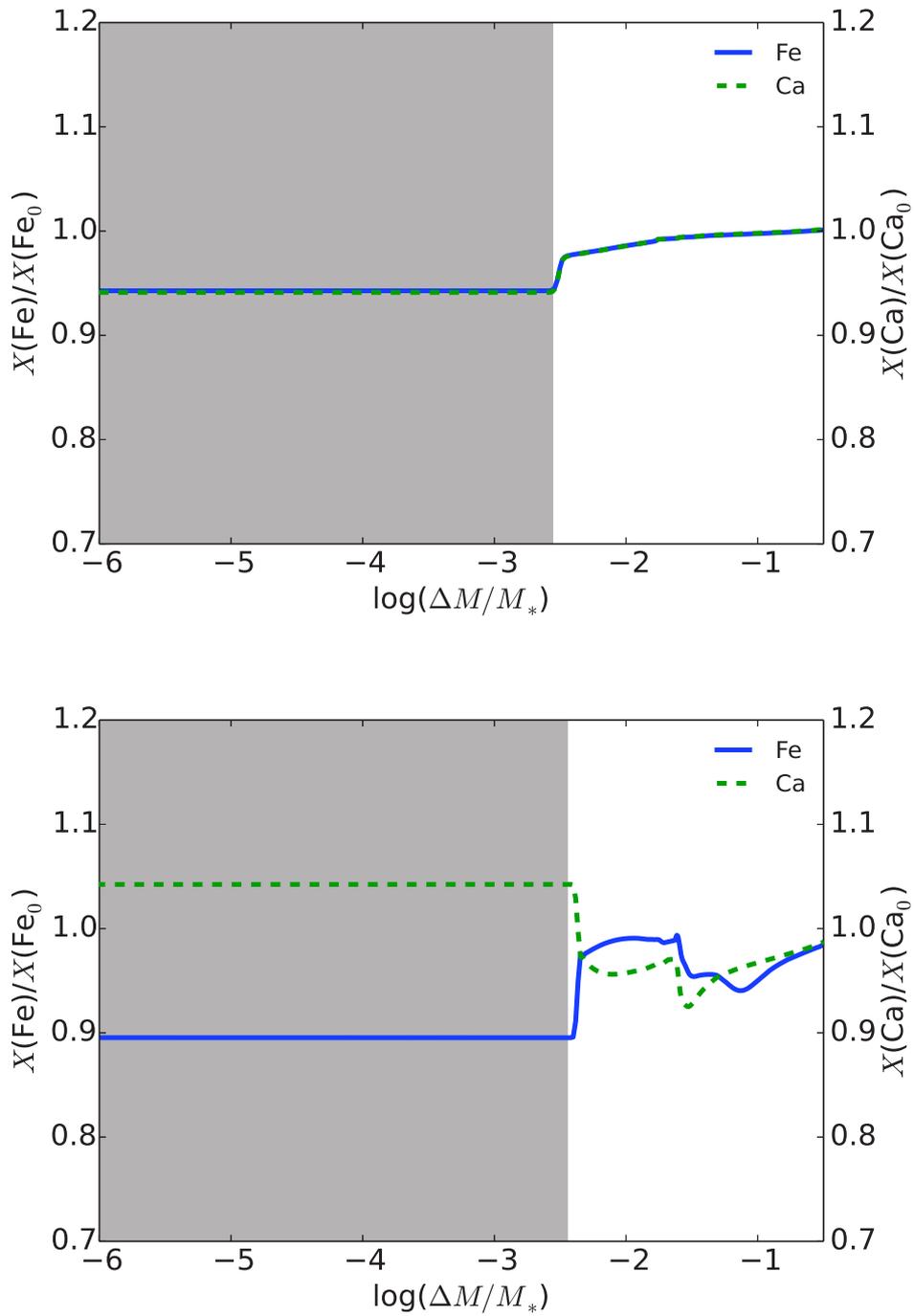


FIGURE 3.8: profils d'abondance du calcium (tirets verts) et du fer (courbe bleue) du modèle de  $1.44 M_{\odot}$  à 2.43 milliards d'années avec  $Y_i = 0.297$  et  $Z_i = 0.0305$ . Le panneau du haut représente un modèle prenant en compte la diffusion atomique sans les accélérations radiatives et le panneau du bas représente un modèle incluant en plus les accélérations radiatives. La région en gris foncé représente la zone convective de surface.

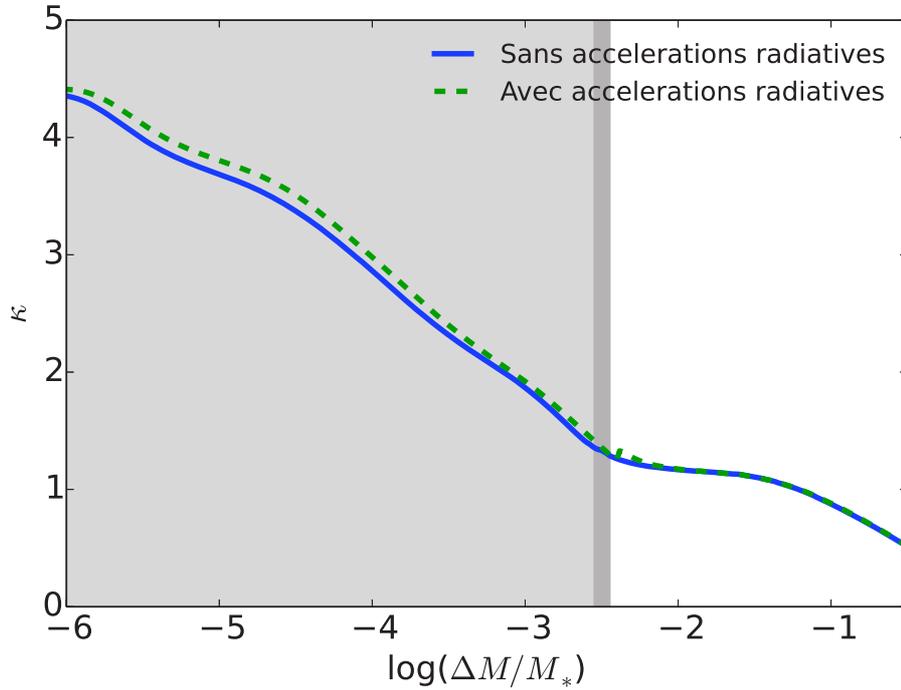


FIGURE 3.9: Profil d'opacité du modèle de  $1.44 M_{\odot}$  à 2.43 milliards d'années avec  $Y_i = 0.297$  et  $Z_i = 0.0305$ . La courbe en trait plein bleu représente un modèle prenant en compte la diffusion atomique sans les accélérations radiatives et la courbe en tirets verts représente un modèle incluant en plus les accélérations radiatives. La région en gris foncé représente la zone convective de surface du modèle incluant les accélérations radiatives. La région en gris clair représente la zone convective de surface du modèle incluant la diffusion atomique sans les accélérations radiatives.

d'années soit 4% plus âgé que le modèle ne prenant en compte que le triage gravitationnel (cf. Section 3.2.6). Cette variation d'âge est plus importante que dans le cas n'incluant pas la convection thermohaline (cf. Section 3.3.1).

En effet, nous avons pu voir que les accélérations radiatives conduisaient à une accumulation du calcium en surface et à une accumulation du fer entre  $-2 < \log(\Delta M/M_*) < -1$ . Cela produit une inversion du gradient de  $\mu$  à  $\log(\Delta M/M_*) = -1.7$  qui déclenche de la convection thermohaline (voir Fig. 3.10). Cette inversion du gradient de  $\mu$  apparaît vers 1.5 milliards d'années et conduit à un mélange dans cette région à partir de cet âge. Cela modifie les profils d'abondance dans cette région et modifie donc petit à petit l'évolution de l'étoile.

La convection thermohaline réduit ainsi la quantité d'éléments accumulés dans cette région et modifie les profils d'abondances (Fig. 3.11). Dans ce cas les abondances de surface ne sont pas modifiées car le mélange se produit trop profondément dans l'étoile. Cependant ce mélange modifie les fréquences d'oscillation du modèle et conduit à une détermination de l'âge différente.

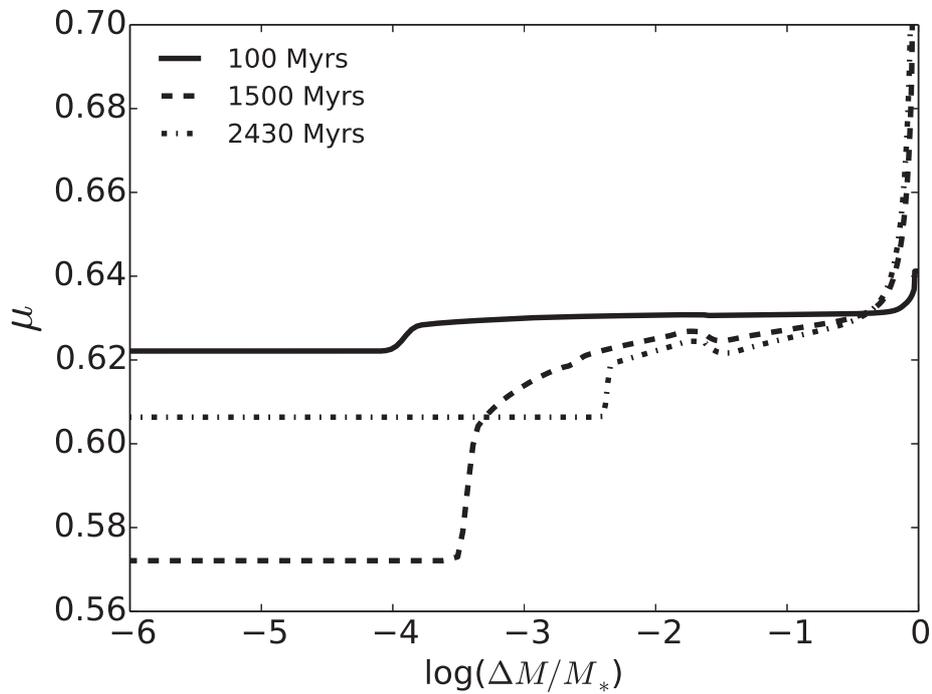
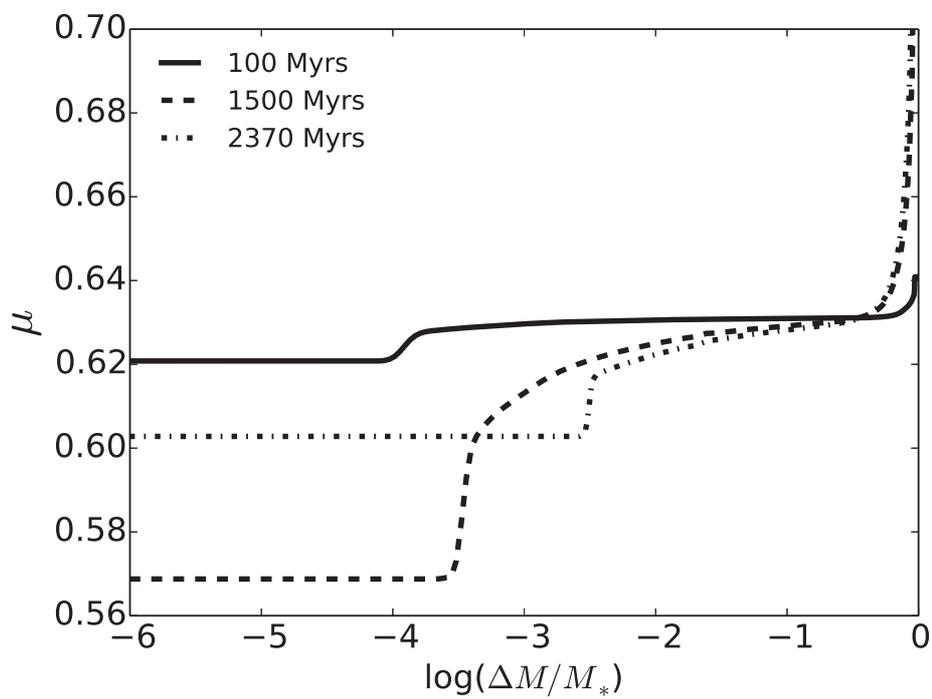


FIGURE 3.10: Profil de  $\mu$  du modèle de  $1.44 M_{\odot}$  à trois âges différents lorsque les accélérations radiatives ne sont pas prises en compte (panneau du haut) et lorsqu'elles le sont (panneau du bas).

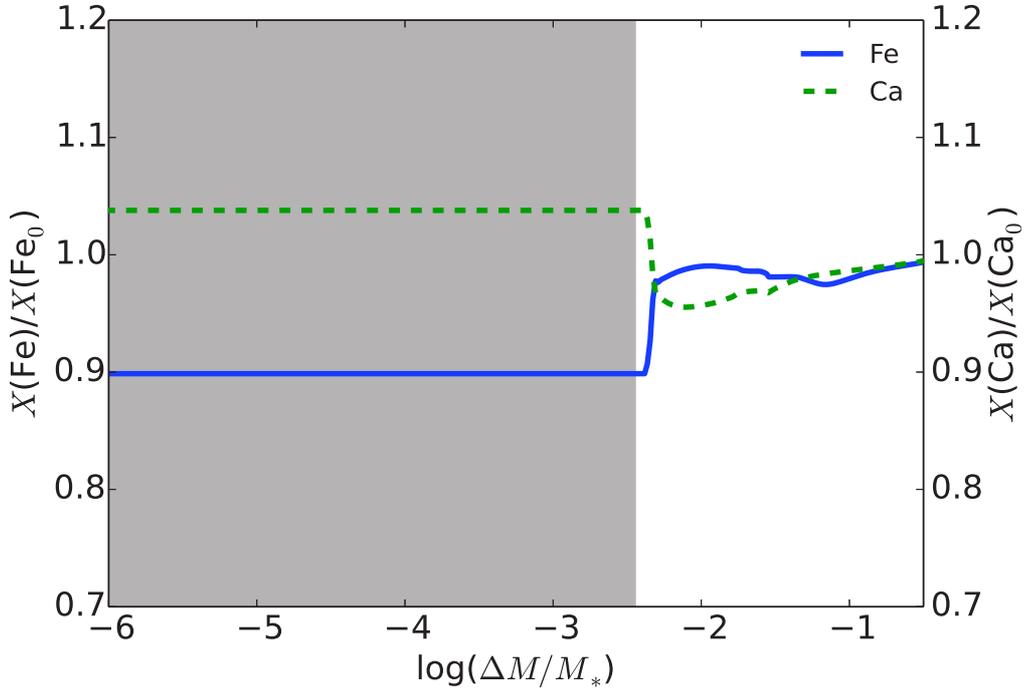


FIGURE 3.11: profils d'abondance du calcium (tirets verts) et du fer (courbe bleue) pour le modèle de  $1.44 M_{\odot}$  à 2.43 milliards d'années avec  $Y_i = 0.297$  et  $Z_i = 0.0305$  incluant les effets des accélérations radiatives et de la convection thermohaline. La région en gris foncé représente la zone convective de surface.

### 3.4 Discussion

Le cas de l'étoile 94 Ceti A nous montre que les modifications produites par les effets des accélérations radiatives et de la convection thermohaline sur les modèles induisent des déterminations d'âge qui peuvent varier jusqu'à 4%. Cela peut sembler négligeable mais les nouvelles missions spatiales de détection d'exoplanètes telles que PLATO ou TESS ont besoin d'une précision sur les âges des étoiles hôtes de 10%. Il n'est actuellement plus possible de négliger la diffusion atomique et les processus de mélange qu'elle induit au vu de la précision des mesures actuelles. L'étoile 94 Ceti A est une étoile où les effets des accélérations radiatives sont assez faibles comparée à des étoiles de même masse mais de métallicités plus faibles. Les effets peuvent donc être plus important dans d'autres étoiles. Ce travail n'est qu'un premier pas pour montrer l'importance de la diffusion atomique sur la détermination sismique des paramètres stellaires et doit être poursuivi afin d'atteindre les précisions souhaitées pour exploiter au mieux les futures missions spatiales.



# Chapitre 4

## Conséquences de la convection thermohaline induite par l'accrétion de matière planétaire sur les étoiles

### Sommaire

---

4.1	Etoiles à planètes . . . . .	<b>89</b>
4.2	Le système 16 Cygni . . . . .	<b>91</b>
4.2.1	Modélisation de 16 Cygni A et B . . . . .	91
4.2.2	Influence de la diffusion atomique sur les abondances de surface . . . . .	96
4.2.3	Processus de mélange à la base de la zone convective de surface . . . . .	97
4.2.4	Convection thermohaline induite par l'accrétion de matière planétaire . . . . .	99
4.2.5	Effet de la composition chimique initiale de l'étoile et de celle la matière accrétée . . . . .	100
4.2.6	Article Deal et al. 2015 A&A . . . . .	101
4.3	Le destin des systèmes planétaires . . . . .	<b>110</b>
4.3.1	Article Deal et al. 2013 A&A . . . . .	111

---

### 4.1 Etoiles à planètes

Les techniques d'observations actuelles permettent la détection d'exoplanètes de plus en plus petites et autour de plus en plus d'étoiles. Les instruments au sol (SOPHIE, HARPS, WASP, SuperWASP, MEarth, ...) et les instruments spatiaux (CoRoT, *Kepler*) ont beaucoup contribué à ces découvertes avec actuellement environ 2000 exoplanètes détectées. Ce nombre va encore augmenter avec l'arrivée des missions TESS et PLATO. Il devient donc important de mieux caractériser les étoiles hôtes pour déterminer plus précisément les paramètres des exoplanètes mais aussi les interactions étoile/planète. L'une de ces interactions est l'accrétion de matière riche en métaux à la surface de son étoile hôte. Cela peut être l'accrétion du disque protoplanétaire au encore l'accrétion d'un corps plus massif comme une planète ou un astéroïde. La matière accrétée produit un

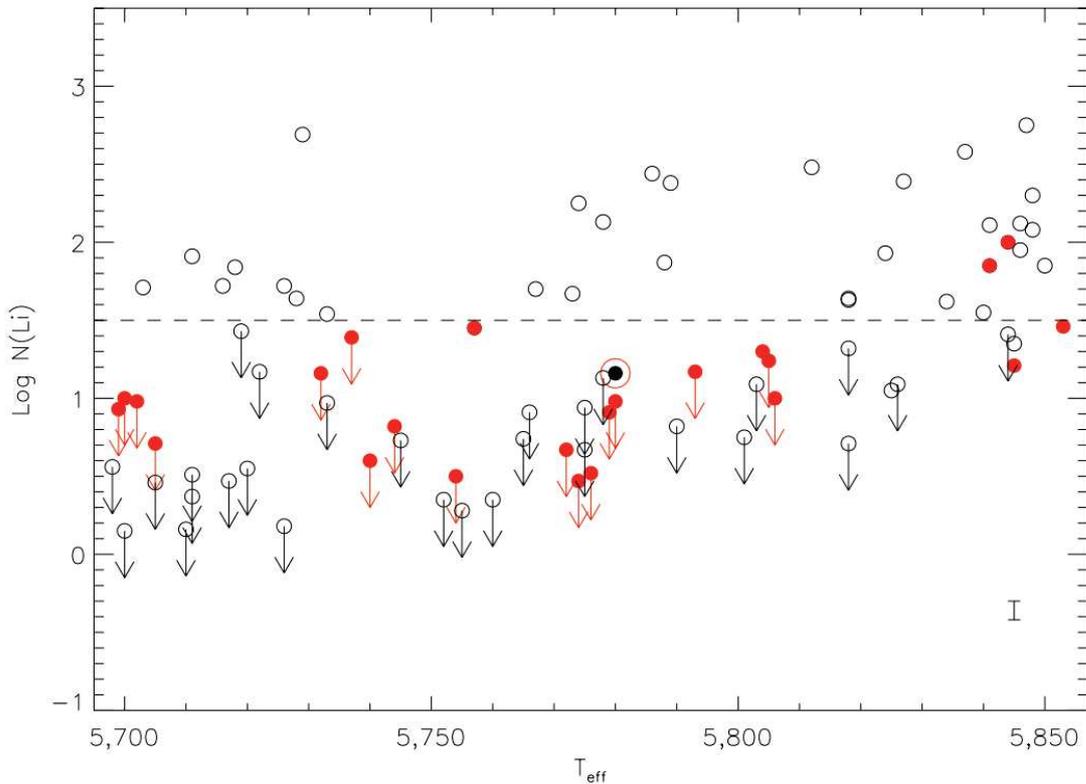


FIGURE 4.1: Abondances de lithium déterminées par Israelian et al. (2009). Les points rouges représentent les étoiles à planètes et les points blancs les étoiles sans planète, le Soleil est représenté par le point noir. La limite à  $\log(N(Li)) = 1.5$  correspond à l'enveloppe supérieure de la limite inférieure d'un S/N=200 dans un jumeau solaire classique (Figure 1 de l'article Israelian et al. 2009).

changement de la composition chimique de surface de l'étoile et peut conduire à de la convection thermohaline.

En effet il a été montré que lorsqu'une quantité suffisante de matière riche en métaux est accrétée à la surface d'une étoile, celle-ci provoque une inversion de poids moléculaire moyen et déclenche de la convection thermohaline (Vauclair, 2004; Garaud, 2011; Théado and Vauclair, 2012). Ce mélange se poursuit jusqu'à la disparition du gradient de  $\mu$  instable et ne laisse apparaître en surface aucune trace de sur-métallicité. Cependant, même s'il ne reste aucune trace de l'accrétion sur l'abondance des métaux, il peut y en avoir une sur les éléments légers. En effet, les éléments légers détruits à faible température par des réactions nucléaires comme le lithium à 2.5 millions de degrés et le béryllium à 3.5 millions de degrés peuvent être affectés si un mélange atteint ces températures. C'est ce qu'il se produit si la zone de convection thermohaline est assez profonde pour mélanger l'étoile depuis la base de la zone convective de surface jusqu'à la zone de destruction de ces éléments (Garaud, 2011; Théado and Vauclair, 2012).

Il existe un débat au sein de la communauté internationale pour savoir si les étoiles à planètes ont un déficit de lithium et autres éléments légers ou non par rapport aux étoiles sans planète

déTECTÉE (Fig. 4.1 et voir Israelian et al. 2009; Delgado Mena et al. 2014; Carlos et al. 2016).

Nous allons voir dans la section suivante qu'il existe au moins un cas clair d'un système où une étoile à planète présente une déficience en lithium comparé à son compagnon sans planète.

## 4.2 Le système 16 Cygni

Le système 16 Cygni est un système triple composé d'un système double principal, formé des étoiles 16 Cygni A et B, qui sont des jumeaux solaires très étudiés. Ce sont des étoiles brillantes parmi les cibles *Kepler*, ce qui fournit des données sismiques d'une très grande qualité. De nombreux articles donnent les paramètres de ces deux principales composantes à partir de données spectroscopiques (King et al., 1997; Deliyannis et al., 2000; Ramírez et al., 2009, 2011; Schuler et al., 2011; Tucci Maia et al., 2014, et références associées), interférométriques (White et al., 2013) et sismique (White et al., 2013; Metcalfe et al., 2012; Davies et al., 2015; Metcalfe et al., 2015; Buldgen et al., 2016, et références associées) (voir table 4.1). Une naine rouge (16 Cygni C) orbite autour de 16 Cygni A (Turner et al., 2001; Patience et al., 2002) alors qu'une planète jovienne avec une masse d'au moins  $1.5 M_J$  et une excentricité  $e = 0.63$  orbite autour de 16 Cygni B avec une période orbitale de 800 jours environ (Cochran et al., 1997). De plus, 16 Cygni A et B sont suffisamment éloignées pour être étudiées comme des étoiles isolées car elles ont une période orbitale d'environ 18000 ans (Hauser and Marcy, 1999).

Les abondances en métaux des deux étoiles principales du système sont relativement similaires (Schuler et al., 2011), même si certains auteurs affirment qu'il y a une différence (Ramírez et al., 2011; Tucci Maia et al., 2014). Ce point sera discuté par la suite. En ce qui concerne les abondances de lithium, 16 Cygni B a au moins 4.7 fois moins de lithium que 16 Cygni A en surface (King et al., 1997). En revanche l'abondance de béryllium est équivalente dans les deux étoiles (Deliyannis et al., 2000).

L'intérêt de ce système est que les étoiles ont le même lieu de naissance et le même âge ainsi qu'une masse très proche. Leur évolution passée est donc très semblable. La principale différence provient de la présence d'une planète autour de B. Cela permet donc d'étudier l'impact d'une planète sur son étoile hôte.

### 4.2.1 Modélisation de 16 Cygni A et B

Afin de modéliser 16 Cygni A et B nous avons calculé une grille de modèles pour une gamme de masse de  $1.05$  à  $1.14 M_\odot$  ( $\Delta M = 0.01 M_\odot$ ), une gamme de composition chimique initiale allant de  $0.023$  à  $0.025$  pour  $Z_i$  ( $\Delta Z = 0.005$ ) et de  $0.245$  à  $0.26$  pour  $Y_i$  ( $\Delta Y = 0.005$ ). Les modèles ont été calculés avec le code TGEC en incluant la diffusion atomique. Nous avons calculé les fréquences d'oscillation des modèles à l'aide du code PULSE (Brassard and Charpinet, 2008) et nous les avons comparées aux fréquences disponibles dans l'article Metcalfe et al. (2012) (46 fréquences pour 16 Cygni A et 41 fréquences pour B). Nous avons ensuite procédé à la sélection du meilleur modèle comme décrit Section 1.3.7. Les grandes séparations moyennes calculées en utilisant les fréquences obtenues à partir des observations sont  $\Delta \nu_{A,obs} = 103.56 \mu\text{Hz}$  et  $\Delta \nu_{B,obs} = 117.17 \mu\text{Hz}$ . L'incertitude sur les fréquences est en moyenne de  $0.1 \mu\text{Hz}$ . Nous avons calculé les petites séparations à partir des modes  $l = 0$  et  $l = 2$  car les incertitudes sur les modes  $l = 3$  sont beaucoup plus grandes que sur les autres modes. Celles-ci valent  $\delta \nu_{0,2,A,obs} = 5.62 \mu\text{Hz}$  et  $\delta \nu_{0,2,B,obs} = 6.60 \mu\text{Hz}$ . Pour les comparaisons

	16 Cygni A	16 Cygni B	Références
$T_{\text{eff}}(\text{K})$	$5825 \pm 50$	$5750 \pm 50$	Ramírez et al. (2009)
	$5813 \pm 18$	$5749 \pm 17$	Ramírez et al. (2011)
	$5796 \pm 34$	$5753 \pm 30$	Schuler et al. (2011)
	$5839 \pm 42$	$5809 \pm 39$	White et al. (2013)
	$5830 \pm 7$	$5751 \pm 6$	Tucci Maia et al. (2014)
$\log g$	$4.33 \pm 0.07$	$4.34 \pm 0.07$	Ramírez et al. (2009)
	$4.282 \pm 0.017$	$4.328 \pm 0.017$	Ramírez et al. (2011)
	$4.38 \pm 0.12$	$4.40 \pm 0.12$	Schuler et al. (2011)
	$4.30 \pm 0.02$	$4.35 \pm 0.02$	Tucci Maia et al. (2014)
[Fe/H]	$0.096 \pm 0.026$	$0.052 \pm 0.021$	Ramírez et al. (2009)
	$0.104 \pm 0.012$	$0.061 \pm 0.011$	Ramírez et al. (2011)
	$0.07 \pm 0.05$	$0.05 \pm 0.05$	Schuler et al. (2011)
	$0.101 \pm 0.008$	$0.054 \pm 0.008$	Tucci Maia et al. (2014)
A(Li)	$1.27 \pm 0.05$	$\leq 0.6$	King et al. (1997)
A(Be)	$0.99 \pm 0.08$	$1.06 \pm 0.08$	Deliyannis et al. (2000)
Masse ( $M_{\odot}$ )	$1.05 \pm 0.02$	$1.00 \pm 0.01$	Ramírez et al. (2011)
	$1.07 \pm 0.05$	$1.05 \pm 0.04$	White et al. (2013)
	$1.11 \pm 0.02$	$1.07 \pm 0.02$	Metcalfe et al. (2012)
	$0.98 \pm 0.02$	$0.945 \pm 0.015$	Buldgen et al. (2016) (inversion)
Rayon ( $R_{\odot}$ )	$1.218 \pm 0.012$	$1.098 \pm 0.010$	White et al. (2013) (sismologie)
	$1.22 \pm 0.02$	$1.12 \pm 0.02$	White et al. (2013) (interférométrie)
	$1.243 \pm 0.008$	$1.127 \pm 0.007$	Metcalfe et al. (2012)
	$1.194 \pm 0.006$	$1.09 \pm 0.01$	Buldgen et al. (2016) (inversion)
Luminosité ( $L_{\odot}$ )	$1.56 \pm 0.05$	$1.27 \pm 0.04$	Metcalfe et al. (2012)
Age (Ga)	$7.15^{+0.04}_{-1.03}$	$7.26^{+0.69}_{-0.33}$	Ramírez et al. (2011)
	$6.9 \pm 0.3$	$6.7 \pm 0.4$	Metcalfe et al. (2012)
	$7.2 \pm 0.2$	$7.2 \pm 0.2$	Metcalfe et al. (2012)
$Z_i$	$0.024 \pm 0.002$	$0.023 \pm 0.002$	Metcalfe et al. (2012)
	$0.01965 \pm 0.00025$	$0.01685 \pm 0.00175$	Buldgen et al. (2016) (inversion)
$Y_i$	$0.25 \pm 0.01$	$0.25 \pm 0.01$	Metcalfe et al. (2012)
	$0.305 \pm 0.005$	$0.305 \pm 0.005$	Buldgen et al. (2016) (inversion)
$v \sin i$ ( $\text{km.s}^{-1}$ )	$2.23 \pm 0.07$	$1.27 \pm 0.04$	Davies et al. (2015)
$P_{\text{rot}}$ (jours)	$23.8^{+1.5}_{-1.8}$	$23.2^{+11.5}_{-3.2}$	Davies et al. (2015)
Planète détectée	non	oui <sup>k</sup>	Cochran et al. (1997)

TABLE 4.1: Propriétés du système 16 Cygni dans la littérature.

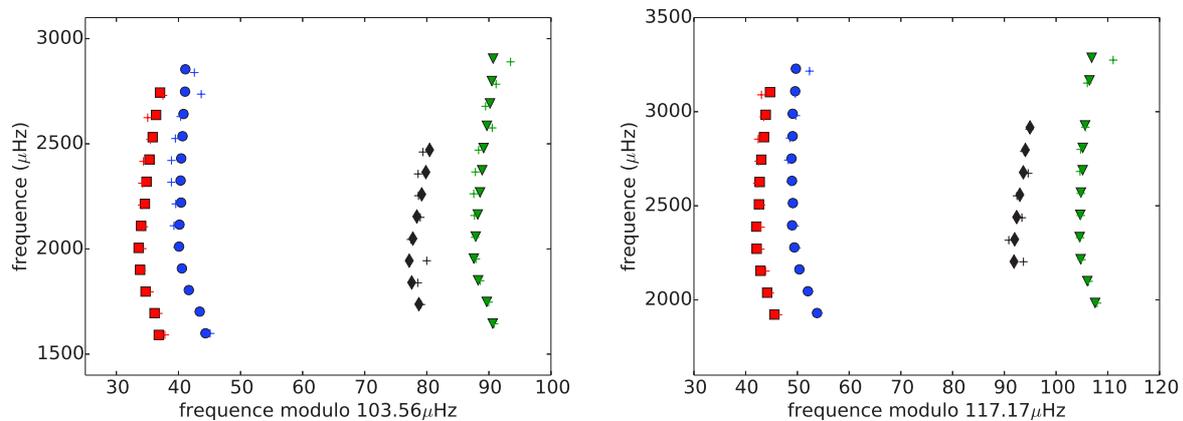


FIGURE 4.2: Diagramme échelle des meilleurs modèles pour 16 Cygni A (panneau de gauche) et B (panneau de droite). Les fréquences obtenues à partir des observations sont représentées par les croix et les fréquences calculées à partir des modèles sont représentées par les points bleus ( $l=0$ ), les triangles verts ( $l=1$ ), les carrés rouges ( $l=2$ ) et les losanges noirs ( $l=3$ ).

avec les données spectroscopiques nous avons utilisé les  $T_{\text{eff}}$  et  $\log g$  déterminés par Ramírez et al. (2009, 2011), Schuler et al. (2011) et Tucci Maia et al. (2014). Le rayon interférométrique est celui de White et al. (2013).

La figure 4.2 présente les diagrammes échelles des meilleurs modèles pour 16 Cygni A et B. On remarque un très bon accord entre les observations et la modélisation excepté quelques petits écarts pour les hautes fréquences qui sont probablement dus aux effets de surface bien que nous ayons utilisé la méthode de Kjeldsen et al. (2008) pour corriger ces effets.

La figure 4.3 montre le diagramme HR pour deux séries de modèles avec des compositions chimiques initiales différentes. Les carrés bleus représentent les meilleurs modèles pour chaque composition chimique pour 16 Cygni A et B. Le choix final entre les deux a été fait à partir des boîtes d'erreurs spectroscopiques. En effet, dans le cas où  $Y_i = 0.25$  on remarque que le meilleur modèle pour 16 Cygni B sort des boîtes d'erreur de Schuler et al. (2011) alors que ce n'est pas le cas pour  $Y_i = 0.26$ . C'est pourquoi nous avons utilisé cette composition chimique initiale dans le meilleur modèle.

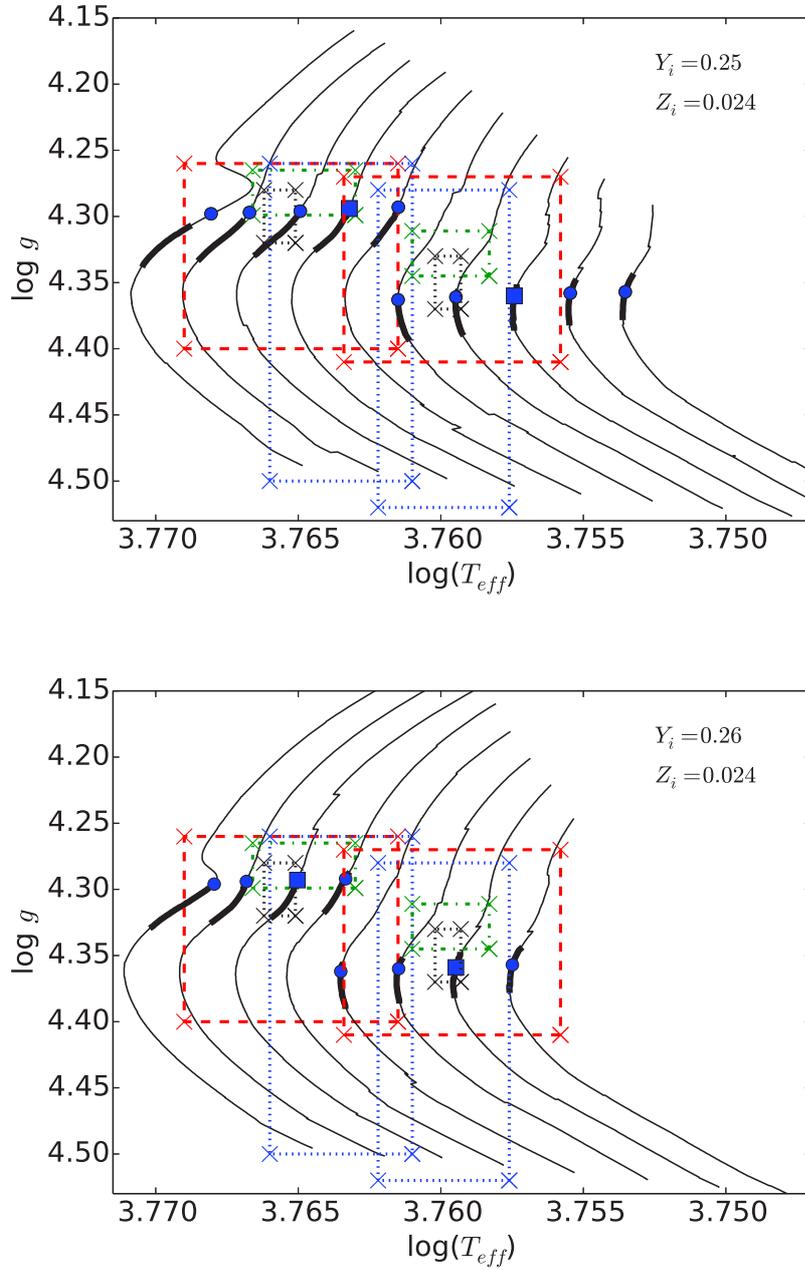


FIGURE 4.3: Diagramme HR représentant les traces évolutives des modèles allant de  $1.05$  à  $1.14 M_{\odot}$  pour deux compositions chimiques initiales différentes. Les boîtes d'erreur spectroscopiques proviennent de Ramírez et al. (2009) (tirets rouges), Ramírez et al. (2011) (tirets-pointillés verts), Schuler et al. (2011) (pointillés bleus) et Tucci Maia et al. (2014) (pointillés noirs). Les traits épais noirs sont les segments de la trace évolutive où le rayon du modèle correspond au rayon interférométrique déterminé par White et al. (2013). Les symboles bleus correspondent aux modèles ayant une grande séparation égale à celle déterminée à partir des observations et les carrés bleus correspondent aux meilleurs modèles.

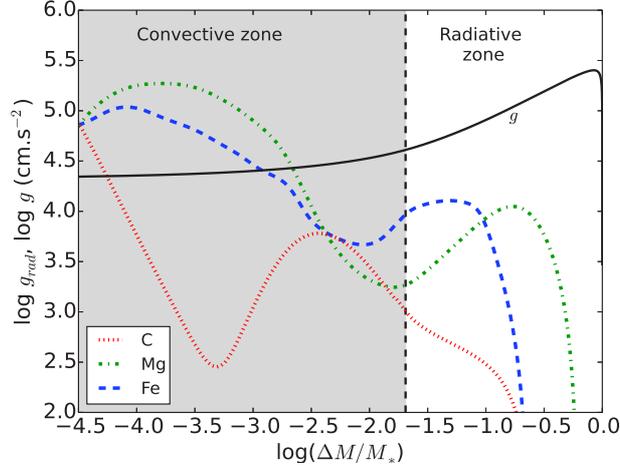


FIGURE 4.4: Accélérations radiatives subies par le C, Mg et Fe en fonction de  $\log(\Delta M/M_*)$  dans le modèle 16 Cygni A.

	16 Cygni A	16 Cygni B
$T_{\text{eff}}(\text{K})$	$5821 \pm 25$	$5747 \pm 25$
$\log g$	$4.29 \pm 0.01$	$4.36 \pm 0.01$
Masse ( $M_{\odot}$ )	$1.10 \pm 0.01$	$1.06 \pm 0.01$
Rayon ( $R_{\odot}$ )	$1.24 \pm 0.01$	$1.13 \pm 0.01$
Luminosité ( $L_{\odot}$ )	$1.58 \pm 0.03$	$1.25 \pm 0.03$
Age (Ga)	$6.4 \pm 0.4$	$6.4 \pm 0.4$
$Z_i$	0.024	0.024
$Y_i$	0.26	0.26
$Z_{\text{surf}}$	0.0221	0.0223
$Y_{\text{surf}}$	0.2226	0.2265

TABLE 4.2: Propriétés de 16 Cygni A and B obtenues dans cette étude. Les valeurs de  $Z_{\text{surf}}$  et  $Y_{\text{surf}}$  sont les valeurs de surface à l'âge des meilleurs modèles.

Les paramètres pour ces deux étoiles sont résumés dans la table 4.2. Ces résultats sont cohérents avec ceux trouvés par Metcalfe et al. (2012), mais sont assez différents de ceux trouvés par Buldgen et al. (2016). Cette différence sera discutée plus tard dans ce chapitre. En partant de ces modèles nous allons pouvoir étudier la différence de composition chimique entre les deux étoiles ainsi que la destruction de lithium provoquée par l'accrétion.

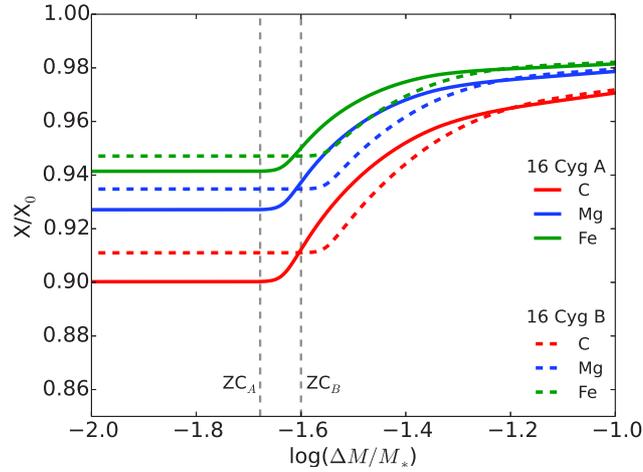


FIGURE 4.5: Profils d'abondance de C, Mg et Fe en fonction de  $\log(\Delta M/M_*)$  dans les modèles de 16 Cygni A (traits pleins) et B (traits en tirets).

## 4.2.2 Influence de la diffusion atomique sur les abondances de surface

### Les métaux

L'abondance des métaux dans le système 16 Cygni fait l'objet d'un débat dans la littérature. Ramírez et al. (2011) et Tucci Maia et al. (2014) ont déterminé que 16 Cygni A est plus métallique que 16 Cygni B alors que pour Schuler et al. (2011) les deux étoiles ont des abondances similaires. Nous avons calculé la différence sur les abondances des éléments obtenue en tenant compte des accélérations radiatives. La figure 4.4 montre les accélérations radiatives du modèle 16 Cygni A pour 3 éléments dont le fer. On voit clairement qu'à la base de la zone convective les accélérations radiatives sont au moins 3 fois inférieures à la gravité ce qui implique que ces éléments ne sont pas soutenus et ne peuvent donc pas s'accumuler en surface.

Cependant, même si les accélérations radiatives ne sont pas importantes dans ces étoiles, la diffusion atomique a quand même un effet. La figure 4.5 présente les abondances de C, Mg et Fe pour les modèles de 16 Cygni A et B. On remarque est que la zone convective de 16 Cygni A est moins profonde que la zone convective de 16 Cygni B ce qui est normal car 16 Cygni A est plus massive que B. Les abondances de surface calculées de C, Mg et Fe sont légèrement plus importantes dans 16 Cygni B que dans 16 Cygni A. De plus si on regarde l'évolution de ces abondances de surface au cours du temps, on remarque que sur toute la séquence principale, le même comportement est conservé (voir Fig. 4.6).

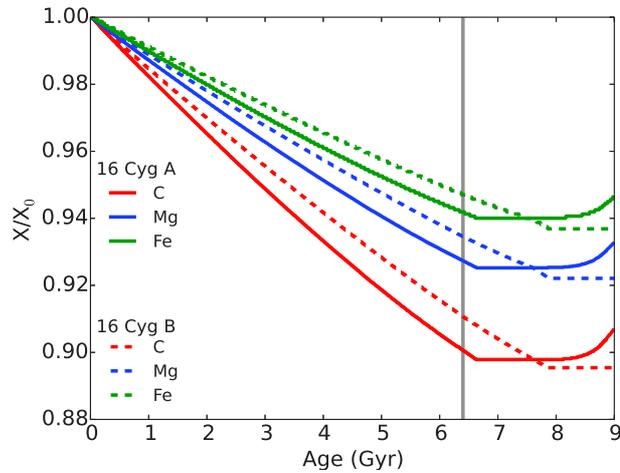


FIGURE 4.6: Évolution des abondances de C, Mg et Fe dans les modèles de 16 Cygni A (traits pleins) et B (traits en tirets). Le trait vertical indique l'âge des meilleurs modèles (6.4 Ga).

## Le lithium

Le lithium est un élément léger détruit par réactions nucléaires à basse température (à partir de 2.5 millions de degrés). La zone de destruction est souvent proche de la base de la zone convective pour les étoiles de type solaire mais un mélange additionnel est nécessaire pour expliquer les observations. Dans le système 16 Cygni on observe une différence en lithium d'au moins un facteur 4.7 (King et al., 1997) entre l'étoile avec une planète et celle qui n'en a pas. Nous avons d'abord calculé la variation du lithium dans nos modèles de 16 Cygni A et B en tenant compte uniquement de la diffusion atomique. La figure 4.7 (panneau de gauche) montre les profils d'abondance obtenus en fonction de la température. La zone convective de 16 Cygni B est plus profonde et donc plus proche de la zone de destruction du lithium que celle de 16 Cygni A. Cela implique que le lithium est plus facilement détruit dans 16 Cygni B que dans 16 Cygni A. L'écart entre les deux étoiles n'est que de  $\approx 1.4$  ce qui n'est pas suffisant pour reproduire les observations.

Si l'on regarde l'évolution du lithium au cours du temps dans ces deux étoiles on voit effectivement que le lithium est toujours inférieur en surface dans 16 Cygni B pendant la séquence principale (voir panneau de droite de la Fig. 4.7). La diminution de lithium dans ces modèles n'est que d'un facteur  $\approx 2$  par rapport à la valeur initiale ce qui est très loin de la diminution observée qui est environ d'un facteur 100 (comme dans le Soleil).

### 4.2.3 Processus de mélange à la base de la zone convective de surface

Les processus de mélange responsables de la destruction du lithium sont étudiés depuis longtemps pour expliquer les abondances d'étoiles de type solaire. Le processus le plus commun est le mélange induit par la rotation (Vauclair, 1988; Pinsonneault et al., 1990; Charbonnel et al., 1992, 1994; Castro et al., 2009, et références associées). Les périodes de rotation de 16 Cygni A et B sont très similaires (voir table 4.1) ce qui indique que le mélange induit par la rotation dans ces

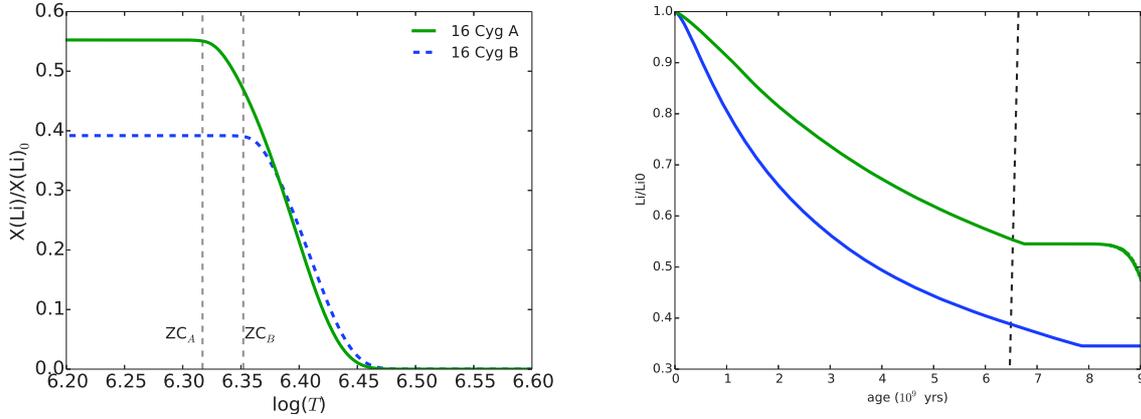


FIGURE 4.7: **Gauche** : Profils d'abondances en lithium en fonction de  $T$  dans les modèles 16 Cygni A (traits pleins) et B (traits en tirets). **Droite** : Évolution de l'abondance en lithium dans les modèles 16 Cygni A (courbe verte) et B (courbe bleue).

étoiles doit également être semblable. Nous avons choisi de reproduire ce mélange à la base de la zone convective de surface sous la forme suivante (Richer et al., 2000) :

$$D_T = \omega D(\text{He}) \frac{\rho_0^n}{\rho} \quad (4.1)$$

où  $n = 1.15$ ,  $\omega = 600$ ,  $D(\text{He})$  est le coefficient de diffusion de l'hélium,  $\rho_0$  est la densité à la base de la zone convective de surface et  $\rho$  est la densité locale. Nous avons choisi cette forme de mélange afin d'avoir une expression simplifiée facilement ajustable. Comme l'origine la plus probable du processus est la rotation nous avons choisi d'appliquer le même mélange dans les deux étoiles. Nous avons utilisé 16 Cygni A pour calibrer ce mélange car c'est l'étoile avec une abondance de lithium la plus proche de celle du Soleil.

La figure 4.8 (panneau de gauche) montre l'évolution de l'abondance de lithium lorsque que l'on inclut le mélange présenté précédemment à la base de la zone convective de surface. On remarque qu'il est possible d'expliquer l'abondance de surface pour 16 Cygni A mais pas pour B. La différence en lithium entre les deux étoiles ne peut donc pas être expliquée par ce mélange. L'écart calculé entre les deux n'est que d'un facteur  $\approx 3$  dans ce cas alors que celui observé est d'au moins 4.7. Cela signifie qu'il manque un processus pour reproduire l'abondance en lithium de 16 Cygni B. En revanche, les abondances de béryllium sont bien reproduites par le mélange choisi ce qui donne une contrainte sur la profondeur du mélange à ajouter pour reproduire le lithium (panneau du bas de la Fig. 4.8).

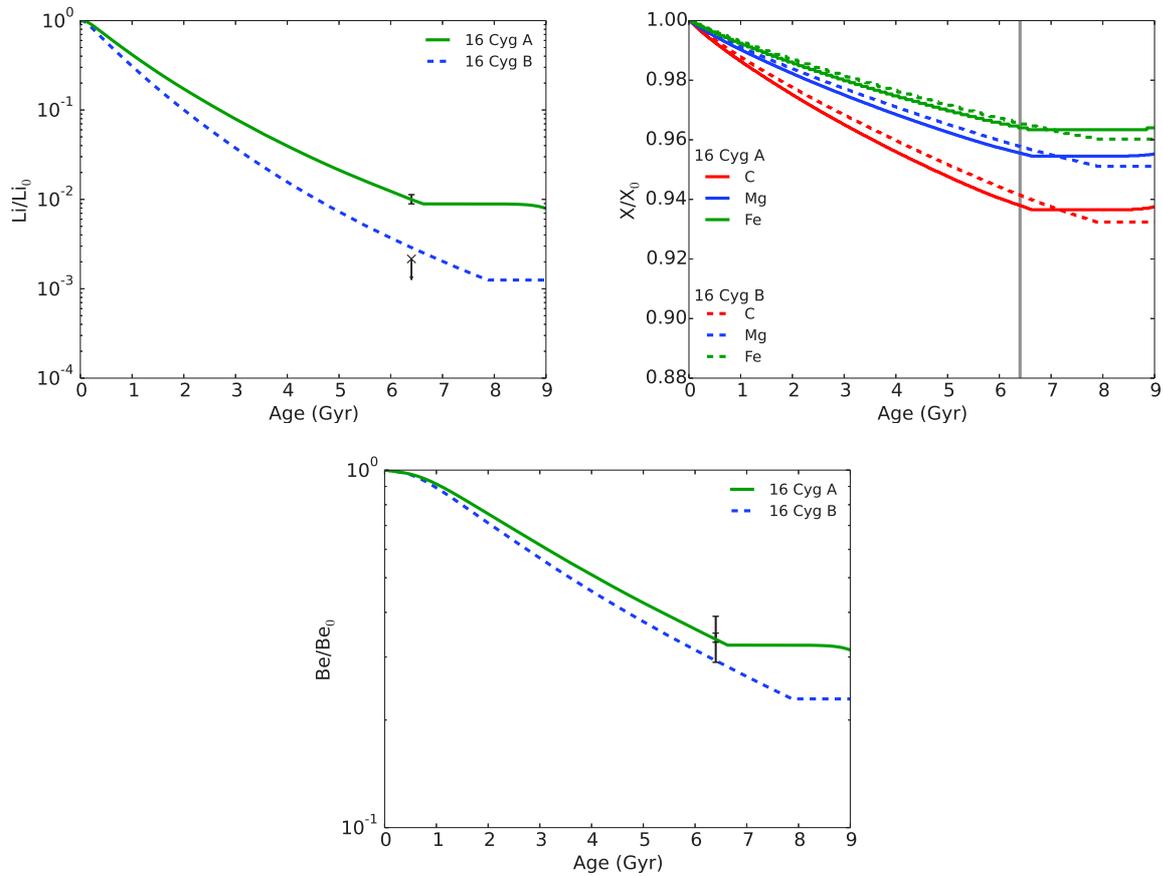


FIGURE 4.8: Évolution de l’abondance de lithium (panneau de gauche), de béryllium (panneau du bas) et de métaux (panneau de droite) dans les modèles 16 Cygni A et B incluant un mélange à la base de la zone convective de surface. Les symboles noirs représentent les abondances observées par King et al. (1997) pour le lithium et Deliyannis et al. (2000) pour le béryllium.

Ce mélange a aussi un impact sur les abondances en métaux car il réduit l’effet de la diffusion atomique. Cependant les abondances sont toujours supérieures dans 16 Cygni B que dans 16 Cygni A (panneau de droite de la Fig. 4.8).

#### 4.2.4 Convection thermohaline induite par l’accrétion de matière planétaire

La principale différence entre 16 Cygni A et B est la présence d’une planète autour de 16 Cygni B (Cochran et al., 1997). Cela implique que l’étoile possédait un disque protoplanétaire au début de son existence. En revanche, aucune planète n’est détectée autour de 16 Cygni A mais une naine rouge (16 Cygni C) orbite autour d’elle (Turner et al., 2001; Patience et al., 2002). On peut donc supposer que la présence de cette naine a pu perturber la formation de planètes. Si on suppose une accrétion en début de séquence principale sur 16 Cygni B (au moment où il peut rester un disque autour de l’étoile et où certaines planètes sont déjà formées) cela peut produire un gradient de  $\mu$

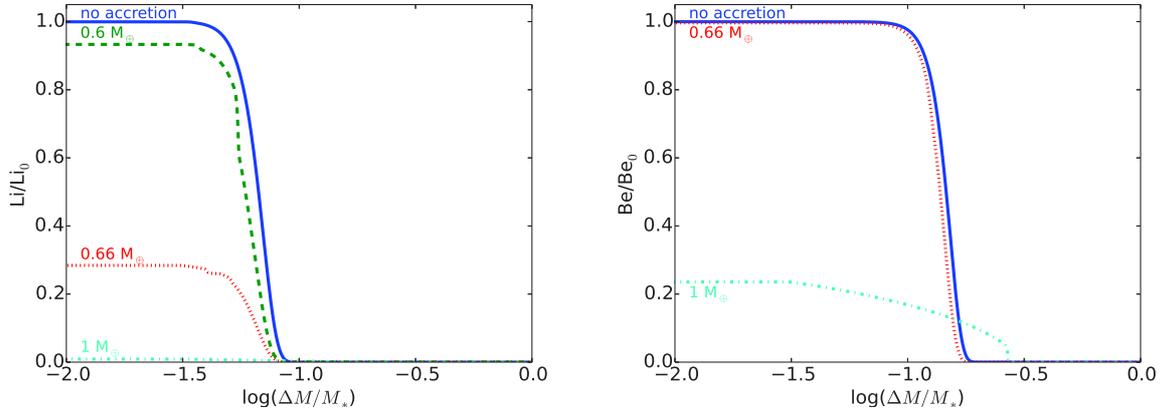


FIGURE 4.9: Profils d’abondances de lithium (panneau de gauche) et de béryllium (panneau de droite) après l’accrétion de différente masse au début de la séquence principale.

instable à la base de la zone convective de surface et ainsi déclencher de la convection thermohaline (cf. Section 1.2). En fonction de la quantité de matière accrétée et de la composition cela peut produire un mélange assez profond pour détruire du lithium. Nous avons testé cette hypothèse sur notre modèle de 16 Cygni B où nous avons accru plusieurs masses pour voir l’effet sur le lithium et le béryllium. Nous avons choisi une composition chimique terrestre (Allègre et al., 1995). L’effet de la variation de la composition chimique sera discuté par la suite.

La figure 4.9 montre les abondances de lithium (panneau de gauche) et de béryllium (panneau de droite) après l’accrétion de 0.6, 0.66 et 1  $M_{\oplus}$ . On remarque que plus la masse accrétée est importante, plus Li et Be sont détruits, ce qui est normal car la convection thermohaline doit mélanger l’étoile plus profondément. On remarque aussi qu’il y a une gamme de masse accrétée où l’on détruit du lithium de manière significative alors qu’on ne détruit pas de béryllium, ce qui est le cas de 16 Cygni B. Ce calcul nous donne donc une masse minimum d’accrétion de 0.66  $M_{\oplus}$  donnée par la contrainte sur l’abondance de lithium et une masse maximum de 1  $M_{\oplus}$  donnée par la contrainte sur l’abondance de béryllium. Si l’on regarde maintenant l’évolution de l’abondance de surface en lithium au cours de l’évolution, on peut voir que pour une accrétion de 0.66  $M_{\oplus}$  on reproduit l’abondance de lithium de 16 Cygni B. La convection thermohaline induite par l’accrétion permet donc d’expliquer la différence observée dans ce système (voir Fig. 4.10).

#### 4.2.5 Effet de la composition chimique initiale de l’étoile et de celle la matière accrétée

La composition chimique accrétée, pour une masse donnée, impose le gradient de  $\mu$  instable à la base de la zone convective de l’étoile. Changer cette composition modifie la profondeur de la zone de convection thermohaline et donc la destruction potentielle des éléments légers. Afin de tester cet effet, nous avons modifié les fractions de masse de Fe et O (éléments les plus abondants sur Terre) pour estimer la masse accrétée nécessaire à la reproduction de l’abondance de lithium observée dans 16 Cygni B. En doublant la fraction de masse de fer (qui représente environ 30% de la masse de la Terre et en compensant cette augmentation par une diminution d’oxygène) nous

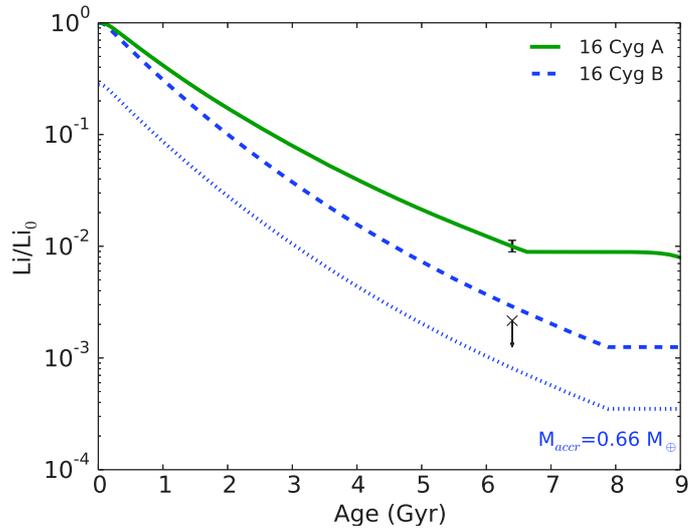


FIGURE 4.10: Môme figure que la figure 4.8 (panneau de gauche) incluant en plus l'évolution de l'abondance de lithium après l'accrétion de  $0.66 M_{\oplus}$  sur 16 Cygni B au début de la séquence principale.

avons obtenu une variation de la masse accrétée de l'ordre de 10%. Si l'objet accrété est une géante gazeuse on peut supposer que l'enveloppe gazeuse sera soufflée avant que la planète ne tombe sur l'étoile et donc la matière accrétée sera celle du cœur rocheux ce qui nous ramène au cas précédent.

La composition chimique initiale de l'étoile a aussi une conséquence dans cette étude car le gradient de  $\mu$  à la base de la zone convective après accrétion est d'autant plus grand si la quantité d'hélium ou de métaux est faible à l'intérieur de l'étoile. En utilisant des modèles avec un hélium de 0.25 au lieu de 0.26 les variations de la masse accrétée nécessaire pour expliquer le lithium sont de quelques pourcents.

La composition chimique du/des corps accrétés ainsi que celle de l'étoile sont importantes pour une détermination précise de la masse accrétée mais les variations ne dépasse pas une dizaine de pourcents.

#### 4.2.6 Article Deal et al. 2015 A&A

# Accretion of planetary matter and the lithium problem in the 16 Cygni stellar system

Morgan Deal<sup>1,3</sup>, Olivier Richard<sup>1</sup>, and Sylvie Vauclair<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Univers et Particules de Montpellier (LUPM), UMR 5299, Université de Montpellier, CNRS, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France  
e-mail: morgan.deal@umontpellier.fr

<sup>2</sup> Université de Toulouse, UPS-OMP, IRAP, 31028 Toulouse Cedex 4, France

<sup>3</sup> CNRS, IRAP, 14 avenue douard Belin, 31400 Toulouse, France

Received 8 July 2015 / Accepted 23 September 2015

## ABSTRACT

**Context.** The 16 Cygni system is composed of two solar analogues with similar masses and ages. A red dwarf is in orbit around 16 Cygni A, and 16 Cygni B hosts a giant planet. The abundances of heavy elements are similar in the two stars, but lithium is much more depleted in 16 Cygni B than in 16 Cygni A, by a factor of at least 4.7.

**Aims.** The interest of studying the 16 Cygni system is that the two stars have the same age and the same initial composition. The differences currently observed must be due to their different evolution, related to the fact that one of them hosts a planet while the other does not.

**Methods.** We computed models of the two stars that precisely fit the observed seismic frequencies. We used the Toulouse Geneva Evolution Code (TGECC), which includes complete atomic diffusion (including radiative accelerations). We compared the predicted surface abundances with the spectroscopic observations and confirm that another mixing process is needed. We then included the effect of accretion-induced fingering convection.

**Results.** The accretion of planetary matter does not change the metal abundances but leads to lithium destruction, which depends upon the accreted mass. A fraction of the Earth's mass is enough to explain the lithium surface abundances of 16 Cygni B. We also checked the beryllium abundances.

**Conclusions.** In the case of accretion of heavy matter onto stellar surfaces, the accreted heavy elements do not remain in the outer convective zones, but are mixed downwards by fingering convection induced by the unstable  $\mu$ -gradient. Depending on the accreted mass, this mixing process may transport lithium down to its nuclear destruction layers and lead to an extra lithium depletion at the surface. A fraction of the Earth's mass is enough to explain a lithium ratio of 4.7 in the 16 Cygni system. In this case beryllium is not destroyed. Such a process may be frequent in planet-hosting stars and should be studied in other cases in the future.

**Key words.** stars: abundances – stars: individual: 16 Cygni – stars: solar-type – planetary systems – accretion, accretion disks – convection

## 1. Introduction

The bright solar analogues 16 Cygni A (HD 186408, HR 7503) and 16 Cygni B (HD 186427, HR 7504) for many reasons represent a very interesting stellar system. While a red dwarf, 16 Cygni C, is in orbit around the first component 16 Cygni A (Turner et al. 2001; Patience et al. 2002), the second component, 16 Cygni B, hosts a giant Jovian planet with minimum mass of  $1.5 M_{\text{Jup}}$  located on an eccentric orbit ( $e = 0.63$ ), with an orbital period of 800.8 days (Cochran et al. 1997). The two main stars are separated widely enough, with an orbital period longer than 18 000 yr (Hauser & Marcy 1999), to be studied in the same way as two isolated stars, with no common dynamical effects.

This situation allows for precise differential studies between a planet-hosting star and a non-planet-hosting star with similar birth conditions. The red dwarf around 16 Cygni A may be the reason why no accretion disk has developed around it, whereas a planetary disk remained around 16 Cygni B, including the observed giant planet, and probably smaller as yet unobserved bodies.

The two main stars of the 16 Cygni system have been studied in many ways, using spectroscopy, interferometry, and asteroseismology. The abundances of the heavy elements in

these two stars are very similar. Although a very small difference has been claimed by Ram rez et al. (2011) and Tucci Maia et al. (2014), Schuler et al. (2011) found them to be indistinguishable. On the other hand, the surface lithium abundance of 16 Cygni B is lower than that of 16 Cygni A by at least a factor 4.7 (King et al. 1997). These observations lead to several open questions, which remain to be answered for a better understanding of these stars.

The interest of this study is that these stars have the same birth site and the same age, with masses of the same order, so that their past evolution is similar for most aspects. The observed differences between them must basically be due to the planetary disk around B. For this reason, the detailed study of this stellar system helps understanding the differences between stars with and without planetary disks.

The present paper is motivated by two considerations. The first one is that none of the previous modelling of these two stars considered atomic diffusion including the radiative acceleration on each element. Most stellar evolution codes currently include the atomic diffusion of helium (without radiative accelerations), some of them also include it for heavy elements, but very few consider the radiative accelerations.

The second consideration refers to the consequences of the accretion of heavy matter onto stars, which may occur when the star has a planetary disk. Many studies and past publications assumed that the accreted matter remains inside the outer stellar convective zone, so that accretion can lead to an increase of the heavy element abundances, as well as to an increase of the lithium abundance. This assumption is not valid, as shown in detail by Vauclair (2004), Garaud (2011), Thado et al. (2012), and Deal et al. (2013). When heavy matter falls onto the star, it creates an inverse gradient of molecular weight, which leads to a double-diffusive instability now called fingering (or thermohaline) convection. The heavy elements are mixed downwards until the mean molecular weight gradient becomes nearly flat. In most cases, no signature of the accreted heavy elements remains at the surface. Meanwhile, as computed in detail by Thado & Vauclair (2012), the induced mixing may lead to an extra lithium depletion in the star. As a consequence, the accretion of heavy matter cannot lead to any increase of lithium at the surface of a star, but may conversely lead to a decrease of its observed abundance.

The observational results on the two main stars 16 Cygni A and B are presented in Sect. 2 together with a discussion of the still-unsolved questions. In Sect. 3 we present models of 16 Cygni A and B that fit the observed seismic frequencies. We compare the parameters of these models with previously published ones. The surface abundances of heavy elements and lithium that are obtained after diffusion in these models are discussed in Sect. 4. Finally, in Sect. 5 we show that the accretion of metal rich planetary matter at the beginning of the main sequence on 16 Cygni B may explain the lithium difference between the two stars. A summary and discussion of all these results are given in Sect. 6.

## 2. Observational constraints

The position in the sky of the 16 Cygni system allowed seismic observations with the *Kepler* satellite. More than 40 modes of degree  $l = 0, 1, 2$ , and 3 could be detected. Analyses with the Asteroseismic Modelling Portal (AMP) and comparisons with other seismic studies led to precise values of the masses, radii, and ages of the two stars (Metcalf et al. 2012). Moreover, the seismic observations allowed measurements of their stellar rotation periods (Davies et al. 2015).

The effective temperatures and gravities of the two stars were derived from spectroscopic observations (e.g. Ram rez et al. 2011; Schuler et al. 2011; Tucci Maia et al. 2014). We must insist, however, that asteroseismology leads to a  $\log g$  value with a much better precision than spectroscopy. As we show in Sect. 3, all the models that closely fit the observed seismic frequencies, even if they have different masses, radii, helium abundances, ages, and luminosities, have the same  $\log g$  value with a precision of 0.01. The determinations of the bolometric magnitudes (Torres 2010) and HIPPARCOS parallaxes (van Leeuwen 2007) lead to precise values of the luminosities of the two stars. They are also bright enough for their radii to be determined by interferometric techniques (White et al. 2013). The results are given in Table 1.

Detailed determinations of their element abundances have been given by several authors. From spectroscopy with high signal-to-noise ratio of the 10 m Keck 1 telescope and HIRES echelle spectrograph, Schuler et al. (2011) determined the abundance of 15 heavy elements in both stars and found them indistinguishable. On the other hand, Ram rez et al. (2011) and Tucci Maia et al. (2014) claimed that 16 Cygni A is slightly more metal rich than 16 Cygni B based on spectra with high resolution

**Table 1.** Properties of 16 Cygni A and B from the literature.

	16 Cygni A	16 Cygni B
$T_{\text{eff}}$ (K)	$5825 \pm 50^a$	$5750 \pm 50^a$
	$5813 \pm 18^b$	$5749 \pm 17^b$
	$5796 \pm 34^c$	$5753 \pm 30^c$
	$5839 \pm 42^d$	$5809 \pm 39^d$
	$5830 \pm 7^f$	$5751 \pm 6^f$
$\log g$	$4.33 \pm 0.07^a$	$4.34 \pm 0.07^a$
	$4.282 \pm 0.017^b$	$4.328 \pm 0.017^b$
	$4.38 \pm 0.12^c$	$4.40 \pm 0.12^c$
	$4.30 \pm 0.02^f$	$4.35 \pm 0.02^f$
[Fe/H]	$0.096 \pm 0.026^a$	$0.052 \pm 0.021^a$
	$0.104 \pm 0.012^b$	$0.061 \pm 0.011^b$
	$0.07 \pm 0.05^c$	$0.05 \pm 0.05^c$
	$0.101 \pm 0.008^f$	$0.054 \pm 0.008^f$
$A(\text{Li})$	$1.27 \pm 0.05^i$	$\leq 0.6^j$
$A(\text{Be})$	$0.99 \pm 0.08^j$	$1.06 \pm 0.08^j$
Mass ( $M_{\odot}$ )	$1.05 \pm 0.02^b$	$1.00 \pm 0.01^b$
	$1.07 \pm 0.05^d$	$1.05 \pm 0.04^d$
	$1.11 \pm 0.02^g$	$1.07 \pm 0.02^g$
Radius ( $R_{\odot}$ )	$1.218 \pm 0.012^d$	$1.098 \pm 0.010^d$
	$1.22 \pm 0.02^e$	$1.12 \pm 0.02^e$
	$1.243 \pm 0.008^g$	$1.127 \pm 0.007^g$
Luminosity ( $L_{\odot}$ )	$1.56 \pm 0.05^g$	$1.27 \pm 0.04^g$
Age (Gyr)	$7.15^{+0.04b}_{-1.03}$	$7.26^{+0.69b}_{-0.33}$
	$6.9 \pm 0.3^g$	$6.7 \pm 0.4^g$
$Z_i$	$0.024 \pm 0.002^g$	$0.023 \pm 0.002^g$
$Y_i$	$0.25 \pm 0.01^g$	$0.25 \pm 0.01^g$
$v \sin i$ (km s $^{-1}$ )	$2.23 \pm 0.07^h$	$1.27 \pm 0.04^h$
$P_{\text{rot}}$ (days)	$23.8^{+1.5h}_{-1.8}$	$23.2^{+1.5h}_{-3.2}$
Planet detected	no	yes $^k$

**References.** <sup>(a)</sup> Ram rez et al. (2009); <sup>(b)</sup> Ram rez et al. (2011); <sup>(c)</sup> Schuler et al. (2011); <sup>(d)</sup> White et al. (2013), seismic determination; <sup>(e)</sup> White et al. (2013), interferometric determination; <sup>(f)</sup> Tucci Maia et al. (2014); <sup>(g)</sup> Metcalfe et al. (2012); <sup>(h)</sup> Davies et al. (2015); <sup>(i)</sup> King et al. (1997); <sup>(j)</sup> Deliyannis et al. (2000); <sup>(k)</sup> Cochran et al. (1997).

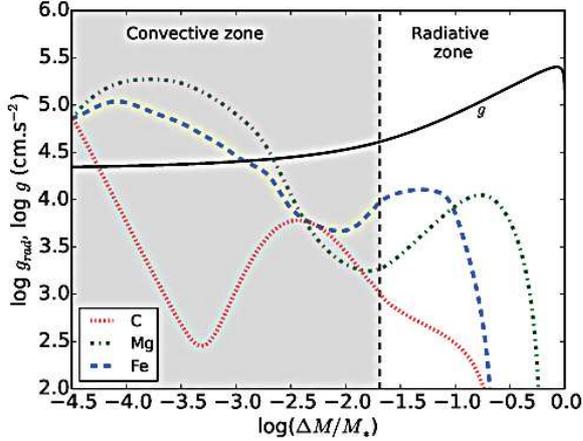
and high signal-to-noise ratio that were obtained with the R.G. Hull coude spectrograph on the 2.7 m Harlan Smith telescope at McDonald Observatory.

A more striking difference between the two stars, confirmed by all spectroscopic observations, is that the star hosting a planet, 16 Cygni B, has an abundance of lithium at least four times lower than the star without a planet (Friel et al. 1993; King et al. 1997). While both stars are lithium depleted compared to F stars and to the meteoritic value, detailed measurements show that 16 Cygni A is slightly less depleted than the Sun ( $\log N(\text{Li}) = 1.27$  compared to 1.05 for the Sun), whereas 16 Cygni B is more depleted ( $\log N(\text{Li}) < 0.60$ ). On the other hand, Deliyannis et al. (2000) found that the Be and B abundances are the same in the two stars within the limits of the uncertainties.

## 3. Asteroseismic studies and stellar models including radiative accelerations

### 3.1. Stellar models

We used the Toulouse Geneva Evolution Code (TGEC) to compute stellar models that fit the seismic observations of



**Fig. 1.** Profiles of the radiative accelerations of three elements Fe, Mg, and C as a function of the mass fraction in 16 Cygni A.

16 Cygni A and B. This code performs complete computations of atomic diffusion, including radiative accelerations, for 21 species, namely 12 elements and their main isotopes: H,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^6\text{Li}$ ,  $^7\text{Li}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{10}\text{B}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$ ,  $^{15}\text{N}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$ ,  $^{18}\text{O}$ ,  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{22}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{25}\text{Mg}$ ,  $^{26}\text{Mg}$ ,  $^{40}\text{Ca}$  and  $^{56}\text{Fe}$  (Thado et al. 2012). The diffusion coefficients used in the code are those derived by Paquette et al. (1986).

The Rosseland opacities are recalculated inside the model, at each time step and at every mesh point, using OPCODE v3.3 and data from Seaton (2005), to take into account the local chemical composition. In this way, the stellar structure is consistently computed all along the evolutionary tracks, as well as the individual radiative accelerations of C, N, O, Ne, Mg, Ca, and Fe. This is done by using the improved semi-analytical prescription proposed by Alecian & Leblanc (2004). A more detailed discussion of these computations is given in Deal et al. (in prep.).

The equation of state used in the code is the OPAL2001 equation (Rogers & Nayfonov 2002). The nuclear reaction rates are from the NACRE compilation (Angulo 1999). The mixing length formalism is used for the convective zones with a mixing length parameter of 1.8, as needed to reproduce solar models.

As an example, Fig. 1 displays the  $g_{\text{rad}}$  profiles for C, Mg, and Fe compared to gravity for one of the computed models of 16 Cygni A. This model best fits the asteroseismic observations, as we discuss in Sect. 3.2. The dashed vertical line represents the position of the surface convective zone. Below the convective zone  $g_{\text{rad}}$  is at least 1/3 smaller than  $g$ , so that the effect of the radiative accelerations is small and generally negligible inside these stars.

### 3.2. Best models from asteroseismic fits

The stellar oscillation modes were derived for each model using the PULSE code (Brassard & Charpinet 2008). The frequencies were corrected for surface effects in the way proposed by Kjeldsen et al. (2008).

We computed models with masses ranging from 1.05 to 1.14  $M_{\odot}$ . The initial helium mass fraction  $Y_i$  was varied from 0.245 to 0.26 and the heavy element mass fraction  $Z_i$  from 0.023 to 0.025 (initial mass fraction of all elements heavier than helium).

Evolutionary tracks computed for two different initial compositions  $Y_i = 0.25$ ;  $Z_i = 0.024$  and  $Y_i = 0.26$ ;  $Z_i = 0.024$  are presented in Fig. 2.

The observational uncertainties on the oscillation frequencies for  $l = 0$  to  $l = 2$  modes lie between 0.1 to 1.45  $\mu\text{Hz}$  (Metcalf et al. 2012). The derived large separations  $\Delta\nu$  for 16 Cygni A and for 16 Cygni B are  $\Delta\nu_{\text{obs}} = 103.56 \pm 0.10 \mu\text{Hz}$  and  $\Delta\nu_{\text{obs}} = 117.17 \pm 0.10 \mu\text{Hz}$ , respectively. The models with large separations that fit these values are represented by blue dots in Fig. 2. They include the corrections for surface effects as proposed by Kjeldsen et al. (2008). Neglecting this effect would lead to models slightly above the blue dots, with a small difference in age of 150 million years on average. We note that all the models presented in Fig. 2 lie on horizontal lines, which means that they all have about the same surface gravity. This is a well-known result of asteroseismology. The asymptotic treatment of the oscillations (e.g. Tassoul 1980) shows that the large separation  $\Delta\nu$  directly gives the average stellar density. In the range of our possible models, the variations in radii are small so that  $\log g$  is also nearly constant. In other words, if any parameter of the model is modified, for instance, the initial  $Y$  value, the other parameters such as age adjust to obtain a model with the same large separation, and thus the same gravity. Spectroscopy is only used in our description to constrain the effective temperatures.

The uncertainty on the  $\log g$  values derived from the observed seismic frequencies for each track is about  $10^{-2}$ . This is the uncertainty on the position of the models represented by blue dots in Fig. 2. The corresponding error bars would lie inside the printed symbols. We note that the seismic  $\log g$  values lie outside the ranges given by Ramirez et al. (2011; see Fig. 2), which suggests that their uncertainties are underestimated.

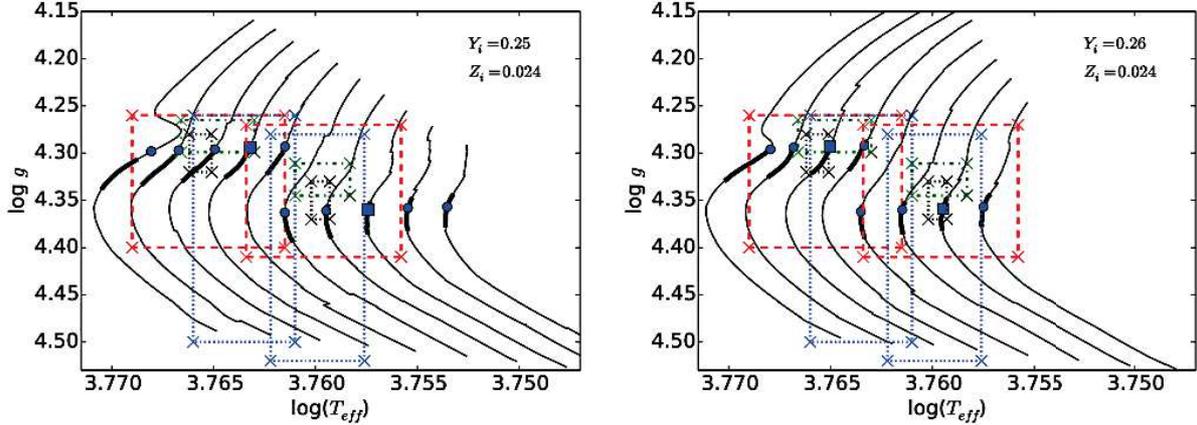
We then derived the best of all these models for both stars. We first did it independently for each  $Y_i$  value. The best models (represented by squares) were selected first because their small separations  $\delta\nu_{0,2}$  best fit the observed ones, second because their echelle diagrams best fit the observed ones, according to  $\chi^2$  minimisations performed between the observed and the modelled frequencies.

When compared with spectroscopic observations (see Fig. 2), it is clear that the best models for  $Y_i = 0.25$  lie inside the box reported by Schuler et al. (2011) for 16 Cygni A alone, not for 16 Cygni B, and that they are outside the box derived by Tucci Maia et al. (2014) for both stars. In contrast, for  $Y_i = 0.26$  lie inside all the boxes for both stars. For this reason, we find that the  $Y_i = 0.26$  value is more probable than that of  $Y_i = 0.25$ .

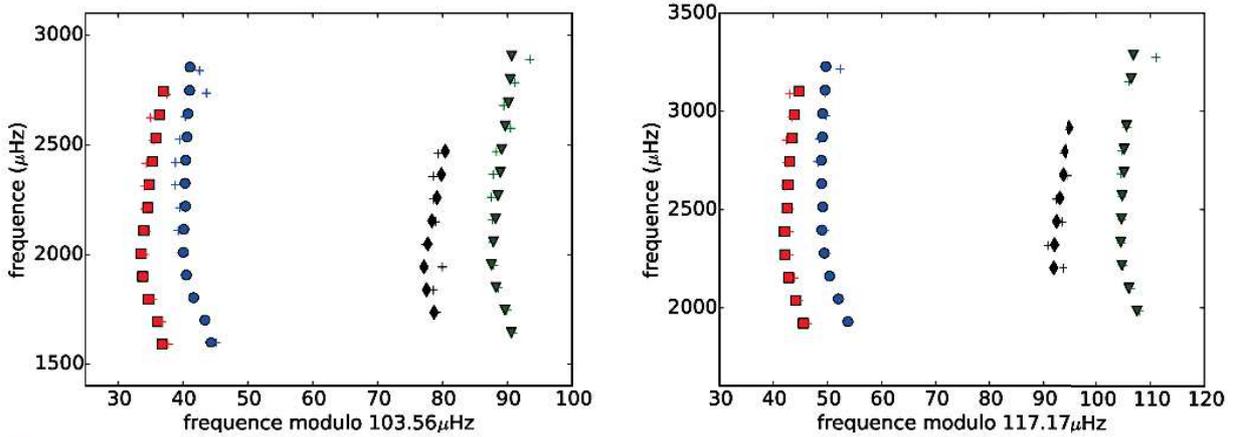
The echelle diagrams corresponding to the best case computed with  $Y_i = 0.26$  are presented in Fig. 3 for 16 Cygni A (left panel) and 16 Cygni B (right panel). The fits between the computed and observed frequencies are very good for both stars. The corresponding stellar masses are  $M_A = 1.10 M_{\odot}$  and  $M_B = 1.06 M_{\odot}$ .

These values and the other parameters obtained for these best models are given in Table 2. The uncertainties we list in this table correspond to the possible range of parameters of all the computed models, which have large and small separations in the observational uncertainties.

We must note that the surface helium abundances derived from these computations are slightly subsolar, while the spectroscopic parameters given in the literature have been computed using a solar helium value. It would be interesting in the future to iterate with spectroscopists and see how such a helium difference could influence the derived effective temperature range.



**Fig. 2.** Evolutionary tracks for models from 1.05 to 1.14  $M_{\odot}$  (from right to left) with  $Z_i = 0.024$  and  $Y_i = 0.25$  (left panel) and evolutionary tracks for models from 1.05 to 1.12  $M_{\odot}$  (from right to left) with  $Z_i = 0.024$  and  $Y_i = 0.26$  (right panel). The error boxes are those of Ram rez et al. (2009; red dashed lines), Ram rez et al. (2011; green dot-dashed lines), Schuler et al. (2011; blue dotted lines) and Tucci Maia et al. (2014; black dotted lines). The blue dots indicate models with the right large separation, taking Kjeldsen et al. (2008) corrections into account. The blue squares correspond to models that also have the right small separations and best fit the Echelle diagram. The black thick segments of each line indicate the models whose radii are consistent with the interferometric determinations of White et al. (2013).



**Fig. 3.** Echelle diagrams for 16 Cygni A (left panel) and 16 Cygni B (right panel). The observed frequencies are represented by crosses. The frequencies computed for the models with  $Y = 0.26$  and  $Z = 0.024$  are represented by blue dots ( $l = 0$ ), green triangles ( $l = 1$ ), red squares ( $l = 2$ ), and black diamonds ( $l = 3$ ).

#### 4. Heavy elements and lithium abundances in 16 Cygni A and B, observational and theoretical discussions

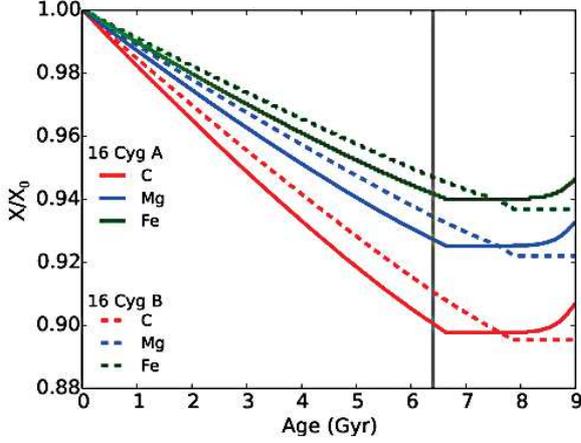
##### 4.1. Spectroscopic observations

The abundances of heavy elements in 16 Cygni A and B have been a subject of debate for 15 yr. Deliyannis et al. (2000) reported an iron overabundance higher in 16 Cygni B than in 16 Cygni A, which has not been confirmed by more recent papers. Whereas Schuler et al. (2011) did not report any difference between 16 Cygni A and B for the abundances of heavy elements, Ram rez et al. (2011) and Tucci Maia et al. (2014) claimed that the heavy elements are overabundant in 16 Cygni A compared to 16 Cygni B. In any case, all observers agree that lithium is more depleted in 16 Cygni B than in 16 Cygni A by a large factor. Lithium has not been detected in B, whereas its abundance in A is slightly higher than that of the Sun. This difference between these very similar stars is difficult to account for using traditional explanations of lithium depletion in G stars.

In the following, we discuss the influence of atomic diffusion and mixing on the lithium and heavy elements abundances, and we show how the lithium difference between the two stars may be explained. We also discuss the consequences of these effects for heavy elements.

##### 4.2. Influence of atomic diffusion on the abundances of heavy elements and lithium

Our models include the computation of detailed atomic diffusion for a large number of elements, as discussed in Sect. 3.1. Figure 4 presents the surface abundance evolution for three of these elements, C, Mg, and Fe, in both 16 Cygni A and B. As the mass of 16 Cygni A is higher than that of 16 Cygni B, the convective zone is smaller and the diffusion processes faster. As a consequence, the surface abundances predicted by the models are higher in 16 Cygni B than in 16 Cygni A by  $\sim 0.002$  dex at the age of our best models (vertical line). Later on in the evolution, at around 8 Gyr, the situation is reversed because the surface



**Fig. 4.** Abundance evolution of C, Mg, and Fe in our best models of 16 Cygni A and B, under the influence of atomic diffusion below the convective zone, when no mixing is taken into account.

**Table 2.** Properties of 16 Cygni A and B from this work.

	16 Cygni A	16 Cygni B
$T_{\text{eff}}$ (K)	$5821 \pm 25$	$5747 \pm 25$
$\log g$	$4.29 \pm 0.01$	$4.36 \pm 0.01$
Mass ( $M_{\odot}$ )	$1.10 \pm 0.01$	$1.06 \pm 0.01$
Radius ( $R_{\odot}$ )	$1.24 \pm 0.01$	$1.13 \pm 0.01$
Luminosity ( $L_{\odot}$ )	$1.58 \pm 0.03$	$1.25 \pm 0.03$
Age (Gyr)	$6.4 \pm 0.4$	$6.4 \pm 0.4$
$Z_i$	0.024	0.024
$Y_i$	0.26	0.26
$Z_{\text{surf}}^a$	0.0221	0.0223
$Y_{\text{surf}}^a$	0.2226	0.2265

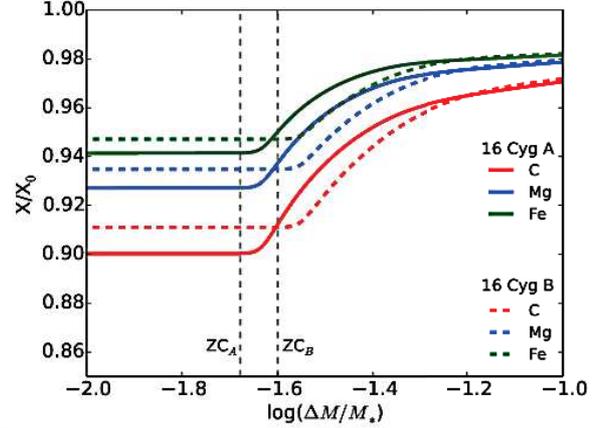
**Notes.** <sup>(a)</sup> Values at the age of best models.

convective zone sinks more quickly in the more massive star. This occurs in models that are too old to account for the observations, however.

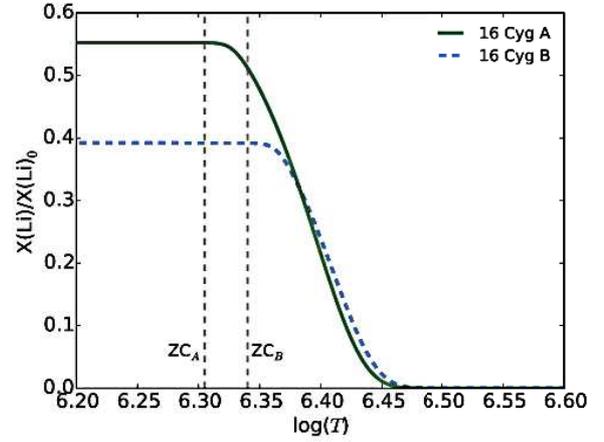
Figure 5 displays the abundance profiles for the same three elements C, Mg, and Fe in the best models for 16 Cygni A and B. The bottoms of the convective zones are shown as vertical dashed lines. The difference of heavy elements abundances is due to the difference in surface convective zone depth, which is deeper in 16 Cygni B than A (grey dashed line). Atomic diffusion coupled with nuclear destruction also has an effect on the abundance of  $^7\text{Li}$  (see Fig. 6). In this case, the final abundance of  $^7\text{Li}$  is lower in 16 Cygni B than in 16 Cygni A. This is not enough to account for the observations. First lithium is depleted in 16 Cygni A by a factor smaller than two, while in the real star it is depleted by 100. Second the depletion ratio between the two star is only  $\sim 1.4$ , while the observations show a ratio of at least 4.7. Extra mixing below the convective zones is clearly needed to account for the observations.

#### 4.3. Mixing processes below the outer convective zone

Many papers have been published in the past 30 yr on the subject of the mixing processes that may occur below the convective zones of solar type stars and result in lithium destruction in their



**Fig. 5.** Abundance profiles of C, Mg, and Fe inside the stars under the same conditions as for Fig. 4.

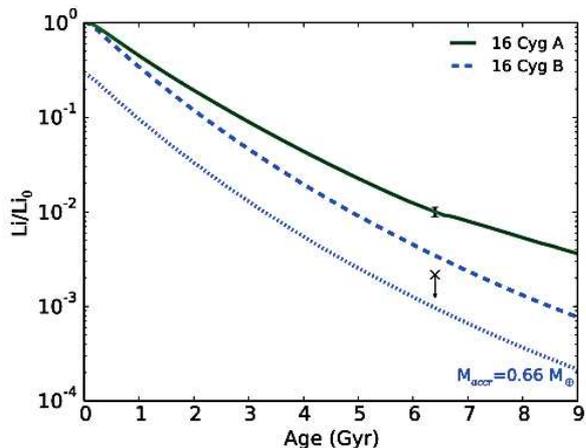


**Fig. 6.** Abundance profiles of lithium under the same conditions as for Fig. 4.

outer layers. The most common one is rotation-induced mixing (e.g. Vauclair 1988; Pinsonneault et al. 1990; Charbonnel et al. 1992, 1994; Castro et al. 2009).

The rotation periods of 16 Cygni A and B have recently been measured with high precision using asteroseismology (Davies et al. 2015). They are very similar, 23.8 days for A, 23.2 days for B, with a difference smaller than the uncertainties. The authors have also determined their inclination angles, 56 degrees for A, 36 degree for B. Using the interferometric radius, the resulting  $v \sin i$  is  $2.23 \text{ km s}^{-1}$  for A and  $1.27 \text{ km s}^{-1}$  for B.

When studying rotation-induced mixing, it appears that the efficiency of the mixing is related to the local linear rotation velocity in such a way that it increases with radius. The bottom of the convective zone lies at a larger radius in A than in B, but the mixing is also more efficient. Simple expressions of the mixing diffusion coefficients (e.g. Zahn 1992) include the factor  $(\Omega^2 R^5 / GM)$ , which is about 1.3 larger for 16 Cygni A than for 16 Cygni B. As already discussed by Deliyannis et al. (2000), it does not seem possible to account for the lithium abundance ratio between A and B by such a simple process. It would not be realistic to invoke a stronger rotation-induced mixing effect in B than in A simply to account for the observations. Another process is clearly needed. We do not intend to discuss all these processes here. We only simulate turbulent



**Fig. 7.** Evolution of lithium surface abundances including a mixing at the bottom of the outer convective zone needed to reproduce the 16 Cygni A abundance in the two models (green solid line and blue dashed line; Sect. 4.3). Evolution of lithium surface abundances including accretion of  $0.66 M_{\odot}$  for 16 Cygni B (blue dotted line) at the beginning of the main sequence, but with the same mixing as before (Sect. 5). Abundances determined using observations from King et al. (1997) are represented by black crosses.

mixing by using a turbulent diffusion coefficient adjusted to obtain a lithium destruction by a factor 100 in 16 Cygni A, and we used the same to deduce the lithium destruction in 16 Cygni B. As in the simulations of Richer et al. (2000), we used a simple form  $D_T = \omega D(\text{He}) \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n$  with  $n = 3$ ,  $\omega = 325$ ,  $D(\text{He})$  the helium diffusion coefficient and  $\rho_0$  the density at the bottom of the outer convective zone.

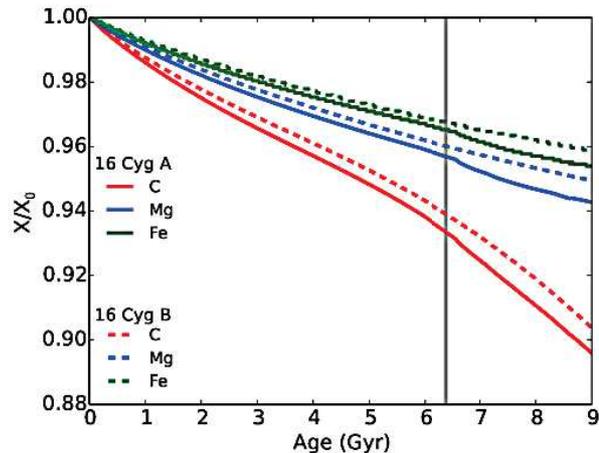
Figure 7 displays the resulting surface lithium abundance evolution in the two stars (green solid line and blue dashed line). As expected, lithium is more destroyed in 16 Cygni B than in 16 Cygni A, but only by a factor 2.9, not enough to account for the observations of an abundance ratio higher than 4.7 at the age of the stars.

Meanwhile, the abundance of heavy elements is also modified, but the abundances in 16 Cygni B may not become lower than in 16 Cygni A (see Fig. 8).

## 5. Fingering convection and lithium destruction induced by planetary accretion

We now return to the fact that the star 16 Cygni B hosts a giant planet while 16 Cygni A does not. As discussed in the introduction, the red dwarf that orbits 16 Cygni A may be the reason for the fact that the main star could not develop any planetary disk.

In this situation, it is quite possible that in its early period on the main sequence, 16 Cygni B was able to accrete some matter from its planetary disk, which could not occur for 16 Cygni A. As discussed by Thado & Vauclair (2012), the accretion of heavy planetary matter onto a stellar surface builds an unstable compositional gradient at the bottom of the surface convective zone that triggers fingering (thermohaline) convection. This mixing leads to complete dilution of the heavy matter inside the star, so that no signature appears at the surface for the heavy elements. On the other hand, it may lead to extra lithium depletion because the mixing continues down to the destruction layers.



**Fig. 8.** Abundance evolution of C, Mg, and Fe in our best models of 16 Cygni A and B, under the influence of atomic diffusion below the convective zone, when mixing is taken into account.

### 5.1. Computations of fingering convection

Fingering convection may occur in stars every time a local accumulation of heavy elements appears in the presence of a stable temperature gradient. It occurs in particular in the case of the accretion of planetary matter (Vauclair 2004; Garaud 2011; Deal et al. 2013).

Fingering convection is characterised by the so-called density ratio  $R_0$ , which is the ratio between the thermal and  $\mu$ -gradients:

$$R_0 = \frac{\nabla - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla_{\mu}}$$

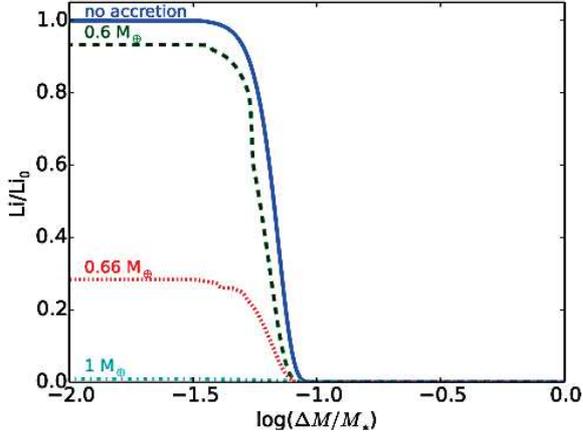
The instability can only develop if this ratio is higher than one and lower than the Lewis number, which is the ratio of the thermal to the molecular diffusivities. In this case, a heavy blob of fluid falls down inside the star and continues to fall because it exchanges heat more quickly than particles with the surroundings. If  $R_0$  is smaller than one, the region is dynamically convective (Ledoux criterium), and if it is larger than the Lewis number, the region is stable.

Various analytical treatments of fingering convection in stars were given in the past, leading to mixing coefficients that differed by orders of magnitude (Ulrich 1972; Kippenhahn et al. 1980). More recently, 2D and 3D numerical simulations were performed, converging on coefficients of similar orders (Denissenkov 2010; Traxler et al. 2011).

Here we used the recent prescription given by Brown et al. (2013), which has been confirmed by the 3D simulations of Zemskova et al. 2014.

### 5.2. Effect of accretion-induced fingering convection on the lithium abundance of 16 Cygni B

We computed stellar models of 16 Cygni B with the assumption of accretion of planetary matter at the beginning of the main-sequence phase. These models included the treatment of fingering convection in the case of an inversion of the mean molecular weight gradient. We tested different accretion masses to characterise their effect on the lithium surface abundance due to fingering convection. In these computations, the accreted matter was assumed to have an Earth-like chemical composition



**Fig. 9.** Lithium abundance profiles after the accretion of different masses in the model of 16 Cygni B: no accretion (blue solid line),  $0.6 M_{\oplus}$  (green dashed line),  $0.66 M_{\oplus}$  (red dotted line), and  $1 M_{\oplus}$  (cyan dotted-dashed line) at the beginning of the MS.

(All gre et al. 1995). Changing the relative abundances of the accreted heavy elements has a very weak effect because their contribution to the mean molecular weight may be slightly different. For example, decreasing the iron abundance by a factor two compared to other elements modifies the computed accretion mass by less than 10%.

Abundance profiles of lithium after the accretion of various masses of planetary matter are presented in Fig. 9.

An accreted mass lower than or equal to  $0.6 M_{\oplus}$  does not have any real effect on the lithium abundance because it reduces its surface value by a factor lower than 10%. The mixing is not efficient enough to mix the lithium down to the destruction layers. For masses higher than  $0.6 M_{\oplus}$ , the lithium destruction becomes important and reaches a factor 3.5 for an accreted mass of  $0.66 M_{\oplus}$  and more than a factor 100 for an accreted mass of  $1 M_{\oplus}$ .

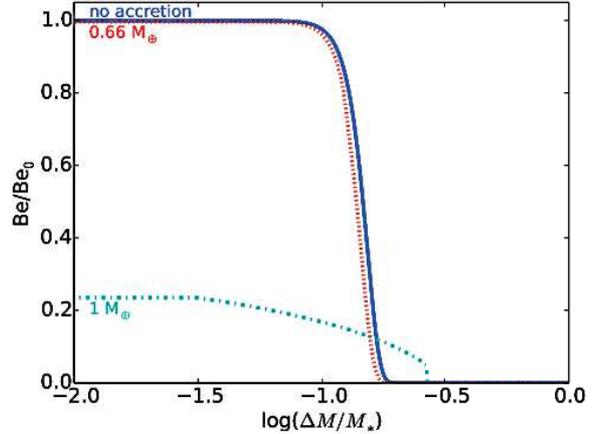
Thus a small amount of planetary matter is enough to significantly reduce the lithium surface abundance in this type of stars.

After the accretion episode in 16 Cygni B, the lithium abundance continues to decrease due to other extra mixing processes in the two stars, as discussed in the previous section. We plot in Fig. 7 the lithium surface abundance evolution with the assumption of an accretion episode of  $0.66 M_{\oplus}$  (blue dotted line), which is enough to account for the observations. As the lithium observation in 16 Cygni B is only an upper limit, any accretion mass higher than this value can explain the abundance difference in the two stars.

### 5.3. Beryllium

Beryllium has been detected in 16 Cygni A and B by Deliyannis et al. (2000), who found that the difference between the two abundances, if any, must be smaller than 0.2 dex. Beryllium is destroyed by nuclear reactions at a temperature of  $T \sim 3.5 \times 10^6$  K, which is higher than the temperature needed to destroy lithium. The fact that it is not depleted gives an upper limit on the accreted mass that must not lead to mixing down to its destruction region.

To characterise this effect, we plot the same figure as Fig. 9 for beryllium (see Fig. 10). An important result is that for an



**Fig. 10.** Beryllium abundance profiles after the accretion of different masses: no accretion (blue solid line),  $0.66 M_{\oplus}$  (red dotted line), and  $1 M_{\oplus}$  (cyan dot-dashed line) at the beginning of the MS.

accretion of  $0.66 M_{\oplus}$  (red dotted line) beryllium is not destroyed by nuclear reactions because fingering convection does not mix the stellar matter deep enough. However, for an accretion of  $1 M_{\oplus}$  (cyan dot-dashed line) beryllium is already reduced by a factor 5. If the beryllium abundance determination of the two components of the 16 Cygni system is confirmed, it may lead to a precise determination of the accreted mass.

## 6. Summary and discussion

The 16 Cygni system is particularly interesting for comparative studies of stars with and without planets. The two main stars of this system have been observed in several ways, leading to very precise constraints.

The most striking feature is the lithium abundance, which is slightly higher than solar for 16 Cygni A and lower by a factor of at least 4.7 in 16 Cygni B (Friel et al. 1993; King et al. 1997). The lithium value given for this later star is an upper limit, which means that it could be completely lithium depleted.

We here presented detailed computations of these two stars, leading to models that precisely fit their asteroseismic frequency determinations, as well as their radii, luminosities, effective temperatures, and gravities. These models were computed by fully taking into account atomic diffusion of helium and heavy elements. Their characteristics are given in Table 2.

Then we discussed the importance of the lithium observations for the two stars. We first showed that the very large lithium depletion observed in 16 Cygni B cannot be accounted for by the classical means of rotation-induced mixing or similar types of extra mixing. The observable parameter difference between them is too small to explain such a large difference in lithium as observed. We suggest that the accretion of heavy matter onto the planet host star 16 Cygni B in its early main-sequence phase induced a special kind of mixing, namely fingering convection, which led to a large lithium destruction on a relatively small timescale (cf. Vauclair 2004; Thado & Vauclair 2012).

We recall that when a star accretes heavy matter onto lighter one, the induced  $\mu$ -gradient leads to a specific kind of hydrodynamical instability, called fingering convection or thermohaline convection, which mixes all the accreted matter downwards. Contrary to what is often assumed, the accreted heavy elements do not leave any signature in the stellar outer layers because

of this mixing. On the other hand, the same mixing may transport lithium down to the layers where it is destroyed by nuclear reactions.

We suggest that during the evolution of the planetary disk, at the beginning of the main-sequence phase, 16 Cygni B may have swallowed a fraction of an Earth-like planet that has led to fingering convection below the convective zone. This short-time efficient extra-mixing allowed the transport of lithium down to the nuclear destruction region. We have seen that two thirds of an Earth-mass planet would be enough to account for the observed upper value of lithium in 16 Cyg B, as shown in Fig. 7. Observations of beryllium have been reported in these two stars by Deliyannis et al. (2000). They found no difference in beryllium between the two stars. If confirmed, this means that the accretion of planetary matter could not have exceeded one Earth mass.

We also computed the detailed variations of the heavy element abundances due to atomic diffusion along the two evolutionary tracks leading to the best models for 16 Cygni A and B. Atomic diffusion alone leads to carbon depletion by about 0.05 dex and to magnesium depletion by about 0.03 dex. The resulting abundances in the two stars are very similar, as observed by Schuler et al. (2011). Differences as suggested by Ramirez et al. (2011) and Tucci Maia et al. (2014) cannot be explained in this context.

In summary, the 16 Cygni system gives evidence of fingering convection induced by the accretion of planetary matter, which is probably the unknown process invoked in the past by several authors to account for the large lithium differences between the two stars.

This result can be generalized to all planet-hosting stars, which may accrete planetary matter in a random way, with various accretion rates. As suggested by Thado et al. (2012), this could lead to an average lithium abundance that is lower in planet-hosting stars than in other stars, as claimed by Israelian et al. (2009) and Delgado Mena et al. (2014). In this framework, precise lithium abundances in seismically observed stars with or without observed planets would be very useful. Furthermore, beryllium observations in the same stars would help constraining the mass accreted onto the star.

*Acknowledgements.* We thank the “Programme National de Physique Stellaire” (PNPS) of CNRS/INSU (France) for financial support. We also warmly thank Piercarlo Bonifacio for very useful comments on the first version of this paper.

*Note added in proof.* After this paper was accepted, Travis Metcalfe draw our attention to his new article accepted for publication in ApJ “Astroseismic modeling of 16 Cyg A & B using the complete *Kepler* data set” by Metcalfe et al. (2015) The authors revise the data given in Metcalfe et al. (2012), particularly the age ( $7.0 \pm 0.3$  Gyr) and the composition ( $Z = 0.021 \pm 0.002$ ,  $Y_i = 0.25 \pm 0.01$ ). They acknowledge that the helium content

they derive may be slightly underestimated due to their neglecting atomic diffusion of heavy elements in the models. It is interesting to stress that we indeed find a slightly higher helium content and a younger age than they.

## References

- Alecian, G., & Leblanc, F. 2004, in *The A-Star Puzzle*, eds. J. Zverko, J. Ziznovsky, S. J. Adelman, & W. W. Weiss, *IAU Symp.*, 224, 587
- Allgre, C. J., Poirier, J.-P., Humler, E., & Hofmann, A. W. 1995, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 134, 515
- Angulo, C. 1999, in *AIP Conf. Ser.*, 495, 365
- Brassard, P., & Charpinet, S. 2008, *Ap&SS*, 316, 107
- Brown, J. M., Garaud, P., & Stellmach, S. 2013, *ApJ*, 768, 34
- Castro, M., Vauclair, S., Richard, O., & Santos, N. C. 2009, *A&A*, 494, 663
- Charbonnel, C., Vauclair, S., & Zahn, J.-P. 1992, *A&A*, 255, 191
- Charbonnel, C., Vauclair, S., Maeder, A., Meynet, G., & Schaller, G. 1994, *A&A*, 283, 155
- Cochran, W. D., Hatzes, A. P., Butler, R. P., & Marcy, G. W. 1997, *ApJ*, 483, 457
- Davies, G. R., Chaplin, W. J., Farr, W. M., et al. 2015, *MNRAS*, 446, 2959
- Deal, M., Deheuvels, S., Vauclair, G., Vauclair, S., & Wächlin, F. C. 2013, *A&A*, 557, L12
- Delgado Mena, E., Israelian, G., Gonz lez Hernandez, J. I., et al. 2014, *A&A*, 562, A92
- Deliyannis, C. P., Cunha, K., King, J. R., & Boesgaard, A. M. 2000, *AJ*, 119, 2437
- Denissenkov, P. A. 2010, *ApJ*, 723, 563
- Friel, E., Cayrel de Strobel, G., Chmielewski, Y., et al. 1993, *A&A*, 274, 825
- Garaud, P. 2011, *ApJ*, 728, L30
- Hausser, H. M., & Marcy, G. W. 1999, *PASP*, 111, 321
- Israelian, G., Delgado Mena, E., Santos, N. C., et al. 2009, *Nature*, 462, 189
- King, J. R., Deliyannis, C. P., Hiltgen, D. D., et al. 1997, *AJ*, 113, 1871
- Kippenhahn, R., Ruschenplatt, G., & Thomas, H.-C. 1980, *A&A*, 91, 175
- Kjeldsen, H., Bedding, T. R., & Christensen-Dalsgaard, J. 2008, *ApJ*, 683, L175
- Metcalfe, T. S., Chaplin, W. J., Appourchaux, T., et al. 2012, *ApJ*, 748, L10
- Metcalfe, T. S., Creevey, O. L., & Davies, G. R. 2015, *ApJ*, 811, L37
- Paquette, C., Pelletier, C., Fontaine, G., & Michaud, G. 1986, *ApJS*, 61, 177
- Patience, J., White, R. J., Ghez, A. M., et al. 2002, *ApJ*, 581, 654
- Pinsonneault, M. H., Kawaler, S. D., & Demarque, P. 1990, *ApJS*, 74, 501
- Ramirez, I., Hernandez, J., & Asplund, M. 2009, *A&A*, 508, L17
- Ramirez, I., Hernandez, J., Cornejo, D., Roederer, I. U., & Fish, J. R. 2011, *ApJ*, 740, 76
- Richer, J., Michaud, G., & Turcotte, S. 2000, *ApJ*, 529, 338
- Rogers, F. J., & Nayfonov, A. 2002, *ApJ*, 576, 1064
- Schuler, S. C., Cunha, K., Smith, V. V., et al. 2011, *ApJ*, 737, L32
- Seaton, M. J. 2005, *MNRAS*, 362, L1
- Tassoul, M. 1980, *ApJS*, 43, 469
- Thado, S., & Vauclair, S. 2012, *ApJ*, 744, 123
- Thado, S., Alecian, G., LeBlanc, F., & Vauclair, S. 2012, *A&A*, 546, A100
- Torres, G. 2010, *AJ*, 140, 1158
- Traxler, A., Garaud, P., & Stellmach, S. 2011, *ApJ*, 728, L29
- Tucci Maia, M., Hernandez, J., & Ramirez, I. 2014, *ApJ*, 790, L25
- Turner, N. H., ten Brummelaar, T. A., McAlister, H. A., et al. 2001, *AJ*, 121, 3254
- Ulrich, R. K. 1972, *ApJ*, 172, 165
- van Leeuwen, F. 2007, *A&A*, 474, 653
- Vauclair, S. 1988, *ApJ*, 335, 971
- Vauclair, S. 2004, *ApJ*, 605, 874
- White, T. R., Huber, D., Maestro, V., et al. 2013, *MNRAS*, 433, 1262
- Zahn, J.-P. 1992, *A&A*, 265, 115
- Zemskova, V., Garaud, P., Deal, M., & Vauclair, S. 2014, *ApJ*, 795, 118

### 4.3 Le destin des systèmes planétaires

Les naines blanches sont des étoiles en fin de vie dont la taille est équivalente à celle de la Terre et la masse environ égale à  $0.6M_{\odot}$ . Il existe plusieurs types de naines blanches. Le premier type, appelé DA, comprend toutes les naines blanches ayant une couche d'hydrogène en surface. Au-dessous de cette couche se trouve une couche d'hélium et un cœur d'oxygène/carbone. Les étoiles du deuxième type, appelées DBs, n'ont pas d'hydrogène en surface. Il existe aussi d'autres types de naines blanches dont nous ne parlerons pas ici (DAB, ...etc).

On a très longtemps pensé que les naines blanches ne comportaient aucun élément lourd dans leur atmosphère en raison du triage gravitationnel très rapide dans ces étoiles. Cependant des observations en spectroscopie haute résolution ont montré des traces d'éléments lourds non négligeables à la fois dans les DAs et les DBs (Zuckerman et al., 2007; Klein et al., 2010; Vennes et al., 2010; Zuckerman et al., 2011; Dufour et al., 2012). Ces naines blanches à raies métalliques sont appelées DAZ et DBZ.

De plus, la découverte d'excès infrarouge dans les spectres obtenus avec le télescope spatial *Spitzer* a permis de montrer l'existence de disques de débris autour de ces étoiles (Farihi, 2011; Xu and Jura, 2012; Girven et al., 2012; Brinkworth et al., 2012). Le lien entre ces deux faits observationnels a été proposé par Jura (2003). Des petits corps (astéroïdes) de l'ancien système planétaire gravitant autour de l'étoile avant qu'elle ne devienne naine blanche sont disloqués par effet de marée, ce qui a produit un disque de poussières provoquant l'excès d'infrarouge dans le spectre. Les éléments lourds présents dans ce disque peuvent alors être accrétés par la naine blanche, ce qui explique leur présence dans l'atmosphère. Dans la mesure où les éléments diffusent en permanence dans l'étoile cela nécessite que l'accrétion se produit encore à l'époque actuelle.

L'étude de la composition chimique des naines blanches qui accrètent permet de déterminer la composition et la masse du ou des corps accrétés et de remonter à la composition initiale des corps du système planétaire.

L'accrétion peut se produire de plusieurs manières. On peut imaginer une accrétion continue du disque sur l'étoile, mais aussi l'accrétion ponctuelle d'un astéroïde ou autre morceau de roche, disloqué par effet de marée avant de tomber sur l'étoile. Quelque soit le processus envisagé, l'observation d'éléments lourds en surface suggère une accrétion continue sur un intervalle de temps recouvrant la période d'observation : dans ce cas le taux d'accrétion doit compenser les pertes par diffusion vers l'intérieur de l'étoile. Une autre possibilité, que nous proposerons ci-dessous, concerne les naines blanches possédant une très petite couche d'hydrogène superficielle : dans ce cas les métaux accrétés peuvent être retenus par la zone de transition hydrogène-hélium.

De nombreux articles ont été publiés pour donner des déterminations de taux d'accrétion à partir des abondances observées. En supposant que les abondances observées sont la conséquence d'un état stationnaire induit par l'équilibre entre les flux de masse accrété et diffusé, on peut en déduire un taux d'accrétion.

En particulier Farihi et al. (2012) ont déterminé des taux d'accrétion pour un grand nombre de naines blanches DAZ et DBZ en faisant l'hypothèse d'un état stationnaire tenant compte de l'accrétion et du triage gravitationnel. Ils obtiennent des résultats étranges, en particulier que les abondances observées dans certaines DBZ nécessitent des taux d'accrétion plus élevés que pour les DAZ. Ces résultats sont étranges car il n'existe aucune raison logique pour que l'accrétion se comporte différemment selon la composition chimique de l'étoile.

Nous avons étudié la même question en ajoutant la convection thermohaline qui avait été négligée dans les calculs précédents.

La première conclusion de cette étude est le fait que la convection thermohaline est beaucoup plus efficace dans les DAs que dans les DBs. Ce comportement différent s'explique facilement car d'une part le poids moléculaire moyen de l'hélium est plus élevé que celui de l'hydrogène, ce qui conduit à des gradients de  $\mu$  plus faibles, d'autre part les zones convectives sont plus profondes dans les DBs que dans les DAs. Les calculs numériques montrent effectivement des différences importantes dans les coefficients de diffusion thermohaline et dans les échelles de temps de mélange pour les deux types d'étoiles, à des températures effectives semblables. Ce résultat peut expliquer pourquoi Farihi et al. (2012) trouvait des taux d'accrétion si différents dans les deux types d'étoiles, en ne tenant compte que du triage gravitationnel. L'ajout de la convection thermohaline conduit à des taux d'accrétion similaires dans les deux types d'étoiles.

Un autre résultat concerne l'influence de la profondeur de la zone de transition H/He pour les DAs. En effet, lorsque les éléments lourds accrétés dans la zone convective tombent vers l'intérieur de l'étoile, ils peuvent dans certains cas atteindre la zone de transition. Dans la mesure où celle-ci est le siège d'un gradient de  $\mu$  stabilisateur, la convection thermohaline cesse. Les éléments lourds ne sont plus alors soumis qu'au triage gravitationnel, beaucoup plus lent. Dans ces conditions, la migration des éléments lourds est ralentie, et leur abondance augmente dans toute la zone. Ainsi, la surabondance observée peut, dans ce cas, représenter non pas un état stationnaire entre l'accrétion et la diffusion, mais un état stable correspondant à une surabondance globale dans toute cette zone. La quantité d'hydrogène totale de l'étoile est donc un facteur important pour cette étude. Elle peut être déterminée dans certains cas par une étude astérosimulatoire de la naine blanche.

Un autre facteur important est la température effective de l'étoile. En effet, on observe que plus la température effective de l'étoile est élevée, plus la convection thermohaline est efficace, ce qui s'explique bien dans la mesure où le coefficient de diffusion thermohaline dépend de la diffusivité thermique ( $\propto T^3$ ) et que la diffusivité thermique augmente vers la surface de l'étoile.

#### **4.3.1 Article Deal et al. 2013 A&A**

LETTER TO THE EDITOR

## Accretion from debris disks onto white dwarfs Fingering (thermohaline) instability and derived accretion rates

M. Deal<sup>1,2</sup>, S. Deheuvels<sup>1,2</sup>, G. Vauclair<sup>1,2</sup>, S. Vauclair<sup>1,2</sup>, and F. C. Wachlin<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup> Université de Toulouse, UPS-OMP, IRAP, France  
e-mail: sylvie.vauclair@irap.omp.eu

<sup>2</sup> CNRS, IRAP, 14 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

<sup>3</sup> Facultad de Ciencias Astronomicas y Geofisicas, 20646 La plata, Argentina

<sup>4</sup> Instituto de Astrofisica de La Plata, 20646 La plata, Argentina

Received 4 July 2013 / Accepted 11 August 2013

### ABSTRACT

**Context.** Recent observations of a large number of DA and DB white dwarfs show evidence of debris disks, which are the remnants of old planetary systems. The infrared excess detected with *Spitzer* and the lines of heavy elements observed in their atmospheres with high-resolution spectroscopy converge on the idea that planetary material accretes onto these stars. Accretion rates have been derived by several authors with the assumption of a steady state between accretion and gravitational settling. The results are unrealistically different for DA and DB white dwarfs.

**Aims.** When heavy matter is accreted onto stars, it induces an inverse  $\mu$ -gradient that leads to fingering (thermohaline) convection. The aim of this letter is to study the impact of this specific process on the derived accretion rates in white dwarfs and on the difference between DA and DB.

**Methods.** We solve the diffusion equation for the accreted heavy elements with a time-dependent method. The models we use have been obtained both with the IRAP code, which computes static models, and the La Plata code, which computes evolutionary sequences. Computations with pure gravitational settling are compared with computations that include fingering convection.

**Results.** The most important result is that fingering convection has very important effects on DAs but is inefficient in DBs. When only gravitational settling is taken into account, the time-dependent computations lead to a steady state, as postulated by previous authors. When fingering convection is added, this steady state occurs much later.

**Conclusions.** The surprising difference found in the past for the accretion rates derived for DA and DB white dwarfs disappears. The derived accretion rates for DAs are increased when fingering convection is taken into account, whereas those for DBs are not modified. More precise and developed results will be given in a forthcoming paper

**Key words.** white dwarfs – planetary systems – accretion, accretion disks – convection – diffusion – hydrodynamics

### 1. Introduction

Recent high-resolution spectroscopy observations have revealed the presence of heavy elements in the spectra of an increasing number of DA and DB white dwarf stars, classified as DAZ and DBZ white dwarfs. They account for a fraction between 5 (Koester et al. 2005) and 20 percent (Zuckerman et al. 2003) of the DA and DB white dwarfs with effective temperatures below 25000K (Zuckerman et al. 2007, 2011; Klein et al. 2010; Vennes et al. 2010; Dufour et al. 2012). When different chemical species are present in the stellar atmosphere, their abundance ratios are similar to the abundance ratios determined for the Earth's bulk (Melis et al. 2011). In the meantime, observations from *Spitzer* revealed an infrared excess from a number of white dwarfs. This excess is interpreted as the proof of a circumstellar disk orbiting these stars (Farihi 2011; Xu & Jura 2012; Girven et al. 2012; Brinkworth et al. 2012). Many of the white dwarfs exhibiting such infrared excess also show heavy elements in their atmosphere. These two observational facts are linked and indicate that material from the disk is accreted onto the white dwarfs, polluting their atmospheric composition with heavy elements. These disks seem to be the remnant of planetary systems orbiting the white dwarfs.

The presence of heavy elements in white dwarf atmospheres raises the question of how they can remain at the surface, either in the radiative photophere or in the surface convection zone since the gravitational settling takes place on a very short time scale. As shown by Vauclair et al. (1979) and Chayer et al. (1995), the radiative levitation is not efficient enough to balance this settling for effective temperatures below 25 000 K. This suggests that we observe an ongoing accretion process of disk material, which may be due to the tidal disruption of an asteroid-like body (Jura 2003) responsible for the infrared excess.

The accreted heavy elements diffuse downwards either at the radiative photospheric level or below the convective zone inside which they have been mixed. A number of studies have estimated the accretion rate by using the observed heavy element abundances, assuming a steady state between the accretion rate and the gravitational settling. Up to now, these estimates have only taken the gravitational settling into account below the standard convective zones (Dupuis et al. 1992, 1993a,b; Koester 2009; Farihi et al. 2012). Using this method, Farihi et al. (2012) obtained accretion rates ranging from  $10^{5.5}$  to  $10^{9.5}$   $\text{g s}^{-1}$  for DAZ and from  $10^{5.5}$  to  $10^{11.5}$   $\text{g s}^{-1}$  for DBZ white dwarfs. These values correspond to a few asteroid masses accreted in millions of years. More precisely,  $10^{9.5}$   $\text{g s}^{-1}$  accreted during ten million

years are equivalent to the mass of Ceres. That accretion rates above  $>10^{9.5} \text{ g s}^{-1}$  are only found for DBZ is surprising since the white dwarf envelope composition should not play any role in the physics of the accretion process.

Deal et al. (2013) points out that an efficient physical mechanism had been forgotten in these computations, namely “fingering” convection, which is similar to the thermohaline convection observed in the oceans (see, for example, Huppert & Moore 1976 and Gill 1982). This instability is likely to occur whenever heavy elements accumulate in the outer layers of a star (Vauclair 2004; Garaud 2011; Thado & Vauclair 2012).

In this Letter we explore the consequences of this process on the derived accretion rates. We show the results obtained by solving the diffusion equation for heavy elements, including both the gravitational settling and the fingering convection, for a few typical models of DA and DB white dwarf stars. We find that the fingering convection plays a dominant role for the DAZ but has a negligible impact on the DBZ. This process, forgotten in previous computations, may reconcile the accretion rates derived for DAZ and DBZ white dwarfs.

## 2. Global treatment of fingering convection and gravitational settling

### 2.1. The fingering (thermohaline) convection

Accumulating heavy elements in the outer layers of a star induces an inverse  $\mu$  gradient in the radiative zone below the mixed region. This accumulation leads to fingering (thermohaline) instability, provided that the so-called “density ratio”, defined as  $R_0 = \frac{\nabla_{\mu} - \nabla}{|\nabla_{\mu}|}$ , is larger than one and smaller than the Lewis number, ratio of the thermal to the atomic diffusivities. Here the gradients have their usual meanings: the adiabatic and real thermal gradients ( $\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$ ,  $\nabla_{\text{ad}} = (\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P})_{\text{ad}}$ ) and the  $\mu$ -gradient ( $\nabla_{\mu} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln P}$ ).

Fingering convection is usually treated as a macroscopic diffusion process, with a mixing coefficient that has recently been derived in various ways. Here we use the expression given by Vauclair & Thado (2012), calibrated on the 3D numerical computations by Traxler et al. (2011):

$$D_{\text{th}} = C_t \kappa_T (R_0 - 1)^{-1} (1 - R_0 \tau)$$

where  $C_t = 12$  (calibrated constant),  $\kappa_T$  is the thermal diffusivity, and  $\tau$  the inverse Lewis number.

### 2.2. The diffusion equation

The general equation of diffusion, including gravitational (microscopic) settling and fingering (macroscopic) mixing is written as

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c (V_D + V_{\text{th}})) = 0$$

where  $\rho$  is the density,  $V_D$  the microscopic diffusion velocity,  $V_{\text{th}}$  the fingering diffusion velocity, and  $c$  the number concentration of heavy elements.

The microscopic diffusion velocity is computed in the same way as usual (see, for example, Thado & Vauclair 2012), and the fingering velocity is given by

$$V_{\text{th}} = -D_{\text{th}} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial r},$$

where  $D_{\text{th}}$  is the mixing diffusion coefficient.

**Table 1.** Models of DA and DB white dwarfs.

Models	$T_{\text{eff}}$ [K]	$\text{Log } g$	$M_{\text{cz}}$ [g]	Type
1	10 600 K	7.90	$1.68 \times 10^{21}$	DAZ
2	12 800 K	7.88	$1.82 \times 10^{17}$	DAZ
3	16 900 K	7.80	$3.52 \times 10^{16}$	DAZ
4	10 600 K	8.02	$1.84 \times 10^{28}$	DBZ
5	17 100 K	7.99	$1.39 \times 10^{26}$	DBZ
6	21 110 K	7.98	$2.70 \times 10^{24}$	DBZ

**Notes.**  $M_{\text{cz}}$  is the mass contained in the convective zone. (\*) This mass is arbitrarily defined because the model has no convective zone.

## 3. Models

### 3.1. Choice of the DA and DB models

We solved the diffusion equation either with gravitational settling alone or with both gravitational settling and fingering convection in a sample of DA and DB white dwarf models. We selected six models with parameters representative of six observed white dwarfs covering the range of effective temperatures of the DAZ and DBZ (see Table 1). We used two sets of DA and DB models with similar effective temperatures of 10 600 K and 17 000 K, respectively, to compare the effect of fingering convection for stars with different chemical compositions and the same temperature, and for stars with same chemical composition but different temperatures. We also added one DA model with an effective temperature of 12 800 K, which is representative of white dwarfs with thin convective zones, and one DB with an effective temperature of 21 110 K as an example of hot DBs. The mass of the models has been chosen as  $0.59 M_{\odot}$ , which is typical of the observed white dwarfs.

### 3.2. Characteristics of the models

The DA models were computed with the IRAP code originally described in Dolez & Vauclair (1981) and updated by more recent opacity tables, equation of state, and electron conduction from Itoh (1992). For this preliminary study we only considered DA models with thick hydrogen mass fraction of  $M_{\text{H}}/M_* = 10^{-5}$ . For the DB, we selected models in an evolutionary sequence obtained with the stellar evolution code of La Plata (LPCODE; Althaus et al. 2010).

### 3.3. The computations

The diffusion equation was solved using a semi-implicit finite differences method as described by Charbonnel et al. (1992). Because of the very different characteristic time steps for the two processes, and the non-linearity of the mixing by fingering convection, the computations were quite time-consuming. For this reason, we used static models without taking the increase in the depth of the dynamical convective zone induced by the accumulation of heavy elements into account. One of us (F.W.) began a full treatment of this mixing along a white dwarf evolution sequence. Preliminary results show that the fractional mass mixed by the fingering convection exceeds the increase in the dynamical convective mass by orders of magnitude. Results obtained with this full treatment will be included in a forthcoming paper.

### 3.4. The treatment of accretion

We considered a continuous accretion rate of an average fictitious element with a mass of 40 corresponding to calcium. We converted the observed Ca abundance into total accreted mass by assuming that Ca represents 1.6 percent of the accreted mass in agreement with the Earth's bulk composition (Allgre et al. 1995), as in Farihi et al. (2012). The calcium values that have been chosen as constraints for the models are consistent with the abundances observed for stars of similar effective temperatures by Koester & Wilken (2006) for the DAZ, and Zuckerman et al. (2010) and Desharnais et al. (2008) for the DBZ white dwarfs.

The accretion was assumed to occur isotropically on the white dwarf surface. When there is a surface convective zone, we considered that the accreted mass is mixed in the convective zone instantaneously. This is justified since the typical convective turnover time scale is a few seconds in white dwarfs. When there is no surface convection zone, we assumed that the accreted material is mixed in an arbitrary surface layer corresponding to the photosphere, as in Koester (2009).

## 4. The results

### 4.1. Determination of accretion rates

To determine the accretion rates, we iterated our computations each time so as to obtain the same element abundances in the outer layers of the models as observed. Our results show that in most cases, as postulated by Farihi et al. (2012), a steady state may actually be reached after some time; however, this happens much later when fingering convection is added rather than for gravitational diffusion alone.

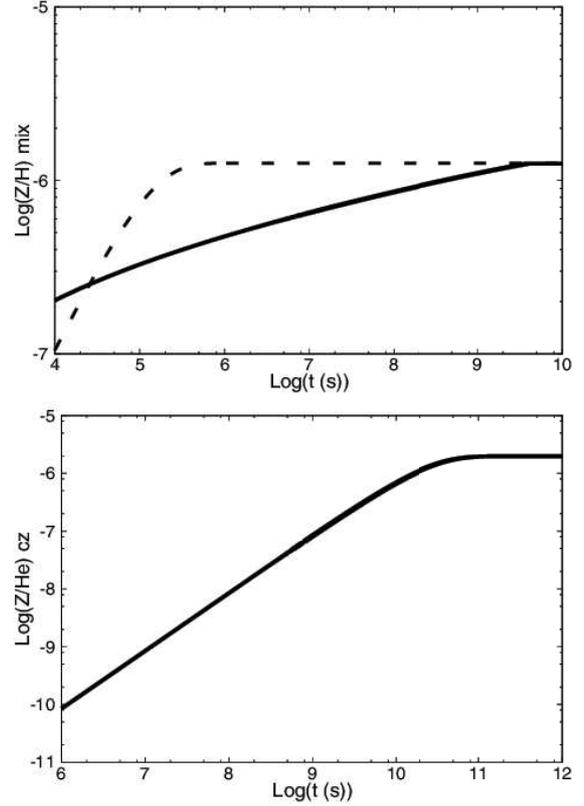
An interesting case is that of DA white dwarfs with very thin convective zones. This case is discussed in the conclusions below, and presented in more detail in a forthcoming paper.

### 4.2. Results for the DAs

To compare our work with the previous ones, we performed two types of computations, first with gravitational settling alone, and second with both gravitational settling and fingering convection. The results are presented in the top panel of Fig. 1 for the DA model 3 with 16 900 K. When fingering convection is included, the accretion rates needed to reproduce the observed surface abundances are larger by almost 2 orders of magnitude (see Table 2). A steady state is reached in both cases but at a later time when fingering convection is included. The abundances profile shapes evolve very differently as shown in Fig. 2 (top panel). The fingering convection mixes the heavy elements much more deeply than predicted when only gravitational settling is taken into account.

### 4.3. Results for the DBs

The same computations have been done for the DB model 5 with 17 100 K (bottom panel Fig. 1). In this case, the fingering convection is inefficient, and the two curves showing the time evolution with and without the fingering convection are indistinguishable. The accretion rates are the same (see Table 2). The profile shapes are also similar (Fig. 2 bottom panel). The inefficiency of the fingering convection in the DBs is due to a  $R_0$  value higher than the Lewis number below the convection zone, which precludes the fingering instability developing. Only for the hottest



**Fig. 1.** Time evolution of the surface metal abundance by number of hydrogen (or helium) for the DA model 3 (*top panel*) and the DB model 5 (*bottom panel*) for accretion rates listed Table 2. The dashed lines represent the behaviour with only gravitational settling taken into account, and the solid lines represent the behaviour with both fingering convection and gravitational settling. The two curves are superposed for the DB model where fingering convection is inefficient.

**Table 2.** Accretion rates ( $\text{g s}^{-1}$ ) and observed heavy element abundances by number of hydrogen (or helium).

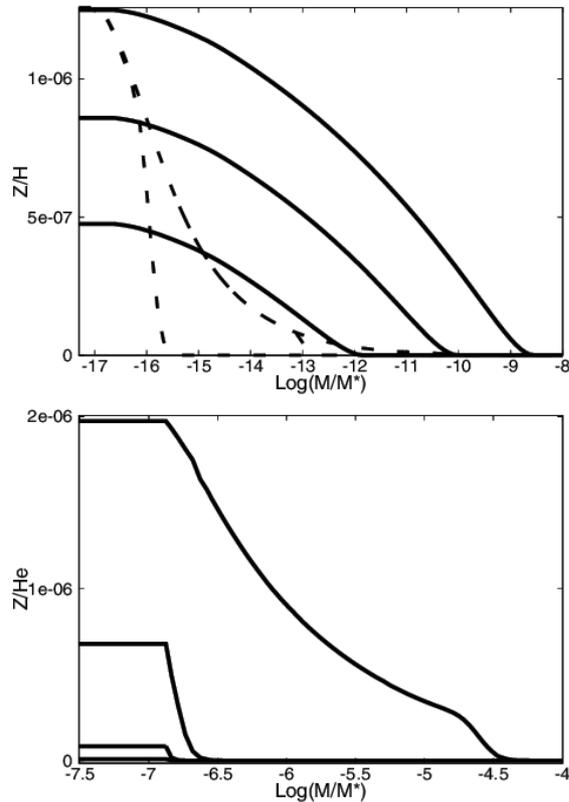
Models	$\text{Log } \dot{M}^a$	$\text{Log } \dot{M}^b$	$\text{Log}[\text{Ca}/\text{H}(\text{e})]$	$\text{Log}[\text{Z}/\text{H}(\text{e})]$
1 (DAZ)	9.23	9.83	-7.2	-5.4
2 (DAZ)	7.74	10.01	-7.1	-5.3
3 (DAZ)	7.70	9.40	-7.7	-5.9
4 (DBZ)	8.04	8.04	-12.4	-10.6
5 (DBZ)	10.08	10.08	-7.5	-5.7
6 (DBZ)	10.70	10.80	-8.0	-6.2

**Notes.** <sup>(a)</sup> Accretion rates computed with the assumption of pure gravitational settling; <sup>(b)</sup> Accretion rates computed with fingering convection included.

DB model (model 6 with 21 110 K) does the fingering convection begin to play a marginal role.

## 5. Discussion and conclusion

Our most important result is the strong behaviour difference of fingering convection in DA and DB white dwarfs. For similar effective temperatures, it plays a major role in the hydrogen environment of DAs but is completely inefficient in the helium environment of DBs. The reasons include the difference in the depth



**Fig. 2.** Time evolution of the surface metal abundance profiles by number of hydrogen (or helium) according to the depth in the star for the DA model 3 (*top panel*) and the DB model 5 (*bottom panel*) for accretion rates listed Table 2. From bottom to top there are chronological times ( $t = 10^6$  s,  $t = 10^8$  s, and  $t = 5 \times 10^9$  s for the DA model, and  $t = 10^8$  s,  $t = 10^9$  s,  $t = 10^{10}$  s, and  $t = 10^{12}$  s for the DB model). The dashed lines represent the behaviour with only gravitational settling taken into account, and the solid lines represent the behaviour with both fingering convection and gravitational settling. For the DB model profiles are identical because fingering convection does not develop.

of convective zones, the difference in the thermal diffusivity in the radiative zone below, and the difference in the ambient mean molecular weight. Although more computations are needed to study all the white dwarfs with observed heavy elements, we strongly suggest that the difference in the derived accretion rates for both kind of stars, as found by previous authors, comes from not taking fingering convection into account.

Our numerical computations confirm that a steady state between accretion and diffusion may generally be reached after some time, and much later when fingering convection is considered than with pure gravitational settling. One interesting case, not shown in this paper, but one that will be extensively presented in a forthcoming paper, is that of DAs with a very small hydrogen layer. In this case the accreted matter is mixed by fingering convection down to the transition region between H and He. Owing to the stabilizing  $\mu$ -gradient, fingering convection is stopped at that depth. The only reason that heavy elements may

still migrate below this region is their microscopic settling in the helium environment, which is quite slow. For this reason, and only in this case, heavy matter remains in the stellar outer layers long after accretion has stopped.

In all other cases, accretion rates may be derived in the same way as previously done with pure settling, except that the results are several orders of magnitude more than before for DAs. Fingering convection seems to be the missing process in previous computations, which reconciles the rates derived for DAs and DBs. This conclusion is quite satisfying because no reasons could be found for a different accretion process according to the internal chemical composition of the accreting star. We now know that the same accretion process can account for the observations of both kinds of stars.

*Acknowledgements.* We thank Noel Dolez for providing models of DA white dwarfs, computed with the IRAP code.

## References

- All gre, C. J., Poirier, J.-P., Humler, E., & Hofmann, A. W. 1995, *Earth and Planetary Science Letters*, 134, 515
- Althaus, L. G., Corsico, A. H., Bischoff-Kim, A., et al. 2010, *ApJ*, 717, 897
- Brinkworth, C. S., G nsicke, B. T., Girven, J. M., et al. 2012, *ApJ*, 750, 86
- Charbonnel, C., Vauclair, S., & Zahn, J.-P. 1992, *A&A*, 255, 191
- Chayer, P., Fontaine, G., & Wesemael, F. 1995, *ApJS*, 99, 189
- Deal, M., Vauclair, S., & Vauclair, G. 2013, in *ASP Conf. Ser.* 469, eds. J. Krziesiński, G. Stachowski, P. Moskalik, & K. Baján, 435
- Deshamaix, S., Wesemael, F., Chayer, P., Kruk, J. W., & Saffer, R. A. 2008, *ApJ*, 672, 540
- Dolez, N., & Vauclair, G. 1981, *A&A*, 102, 375
- Dufour, P., Kilic, M., Fontaine, G., et al. 2012, *ApJ*, 749, 6
- Dupuis, J., Fontaine, G., Pelletier, C., & Wesemael, F. 1992, *ApJS*, 82, 505
- Dupuis, J., Fontaine, G., Pelletier, C., & Wesemael, F. 1993a, *ApJS*, 84, 73
- Dupuis, J., Fontaine, G., & Wesemael, F. 1993b, *ApJS*, 87, 345
- Farihi, J. 2011, in *AIP Conf. Ser.* 1331, eds. S. Schuh, H. Drechsel, & U. Heber, 193
- Farihi, J., G nsicke, B. T., Wyatt, M. C., et al. 2012, *MNRAS*, 424, 464
- Garaud, P. 2011, *ApJ*, 728, L30
- Gill, A. E. 1982, *Atmosphere-Ocean Dynamics*, in *International Geophysics Series* 30, ed. Academic Press
- Girven, J., Brinkworth, C. S., Farihi, J., et al. 2012, *ApJ*, 749, 154
- Huppert, H. E., & Moore, D. R. 1976, *J. Fluid Mech.*, 78, 821
- Itoh, N. 1992, *Rev. Mex. Astron. Astrofis.*, 23, 231
- Jura, M. 2003, *ApJ*, 584, L91
- Klein, B., Jura, M., Koester, D., Zuckerman, B., & Melis, C. 2010, *ApJ*, 709, 950
- Koester, D. 2009, *A&A*, 498, 517
- Koester, D., & Wilken, D. 2006, *A&A*, 453, 1051
- Koester, D., Rollenhagen, K., Napiwotzki, R., et al. 2005, *A&A*, 432, 1025
- Melis, C., Farihi, J., Dufour, P., et al. 2011, *ApJ*, 732, 90
- Th ado, S., & Vauclair, S. 2012, *ApJ*, 744, 123
- Traxler, A., Garaud, P., & Stellmach, S. 2011, *ApJ*, 728, L29
- Vauclair, S. 2004, *ApJ*, 605, 874
- Vauclair, S., & Th ado, S. 2012, *ApJ*, 753, 49
- Vauclair, G., Vauclair, S., & Greenstein, J. L. 1979, *A&A*, 80, 79
- Vennes, S., Kawka, A., & N meth, P. 2010, *MNRAS*, 404, L40
- Xu, S., & Jura, M. 2012, *ApJ*, 745, 88
- Zuckerman, B., Koester, D., Reid, I. N., & H nsch, M. 2003, *ApJ*, 596, 477
- Zuckerman, B., Koester, D., Melis, C., Hansen, B. M., & Jura, M. 2007, *ApJ*, 671, 872
- Zuckerman, B., Melis, C., Klein, B., Koester, D., & Jura, M. 2010, *ApJ*, 722, 725
- Zuckerman, B., Koester, D., Dufour, P., et al. 2011, *ApJ*, 739, 101



# Chapitre 5

## Impact de l'accrétion sur les étoiles pauvres en métaux

### Sommaire

---

5.1	Les étoiles pauvres en métaux du halo . . . . .	117
5.2	Les "Carbon Enhanced Metal Poor stars" . . . . .	119
5.3	Modélisation . . . . .	121
5.4	Accrétion provenant d'un compagnon de $1 M_{\odot}$ . . . . .	121
5.4.1	Évolution de l'étoile juste après l'accrétion . . . . .	122
5.4.2	Évolution de l'étoile au turn off . . . . .	124
5.5	Accrétion provenant d'un compagnon de $3 M_{\odot}$ . . . . .	125
5.6	Discussion sur le cas du lithium dans les étoiles pauvres en métaux . . . . .	127

---

Dans ce chapitre nous étudions l'effet de l'accrétion de matière provenant d'une étoile sur son compagnon dans le cas d'un système binaire. Nous traitons le cas des étoiles pauvres en métaux du halo présentant une dispersion du lithium à très faible métallicité ainsi que le cas des "Carbon Enhanced Metal Poor stars" (CEMP) qui sont des étoiles pauvres en métaux et dont la surabondance de carbone ne peut être expliquée par l'évolution de l'étoile seule.

### 5.1 Les étoiles pauvres en métaux du halo

L'observation des étoiles du halo par Spite and Spite (1982) (et d'autres auteurs par la suite) a montré une abondance de lithium très similaire dans toutes ces étoiles et ce pour différentes métallicités (le *plateau du lithium*). Ces auteurs pensaient que cette abondance représentait le lithium créé lors de la nucléosynthèse primordiale. Cependant cela ne peut être le cas car ces étoiles subissent les effets de la diffusion atomique ce qui réduit la quantité de lithium en surface (Michaud et al., 1984). L'observation du lithium dans les étoiles vieilles et chaudes était inattendue car la diffusion atomique était sensée réduire la quantité de lithium en surface à un niveau non détectable. En effet, plus une étoile est chaude et plus les effets de la diffusion atomique sont importants. Il a été ensuite

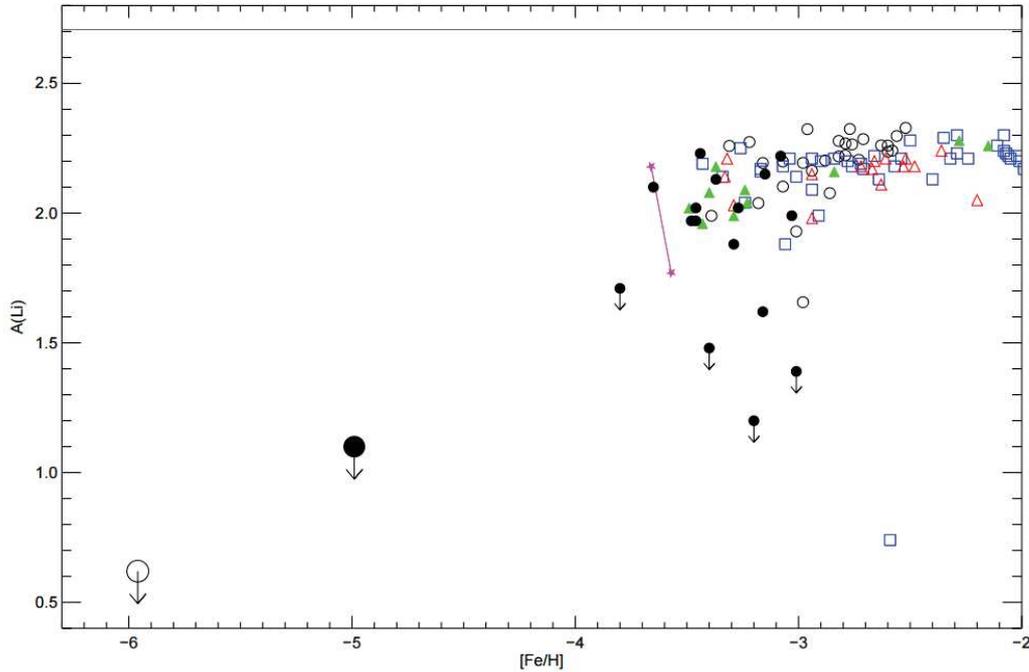


FIGURE 5.1: Abondance de lithium en fonction de  $[Fe/H]$  pour différents échantillons d'étoiles. Les points noirs proviennent de Bonifacio et al. (2012), les cercles noirs de Sbordone et al. (2010), les triangles verts de Aoki et al. (2009), les triangles rouges de Hosford et al. (2009), les étoiles magentas de González Hernández et al. (2008), les carrés bleus de Asplund et al. (2006) et les gros points noir et blanc de Sbordone et al. (2012) (Figure 4 de l'article Sbordone et al. 2012).

montré que les processus de mélange réduisent les effets de la diffusion atomique et peuvent transporter le lithium dans les régions où il est détruit par réactions nucléaires (Vauclair, 1988; Vauclair and Charbonnel, 1995, 1998; Richard et al., 2005; Vick et al., 2013). Dans tous les cas l'abondance de lithium observée actuellement dans les étoiles du halo n'est pas l'abondance initiale. Les mesures du satellite WMAP, et plus tard du satellite Planck, ont permis de déterminer une abondance de lithium primordiale qui est environ 0.5 dex supérieure à celle observée actuellement ce qui est une confirmation des travaux sur la diffusion atomique et les processus de mélange.

L'amélioration de la qualité des observations permet maintenant des déterminations d'abondance plus précises et pour des abondances plus faibles de lithium. Cela a permis de montrer que beaucoup d'étoiles ne suivaient pas le comportement du plateau du lithium et montraient des abondances de lithium plus faibles pour des métallicités inférieures à  $[Fe/H] = -2.8$ . En particulier Sbordone et al. (2010) ont observé que les étoiles chaudes ( $5800 \text{ K} < T_{\text{eff}} < 6800 \text{ K}$ ) au turn off ne montraient plus d'abondances de lithium uniformes mais une dispersion avec une valeur supérieure correspondant à la celle du plateau (Fig. 5.1). Le même comportement a été retrouvé par d'autres auteurs (eg. Frebel and Norris 2013, voir Fig. 5.2) et ceci même pour  $[Fe/H] > -2.8$ .

L'étude des étoiles pauvres en métaux est très intéressante pour déterminer le lithium primordial car ce sont des étoiles vieilles, de faibles masses, et qui pour la majorité sont encore sur la séquence principale. Cela signifie qu'elles ont dans leur atmosphère les signatures chimiques du

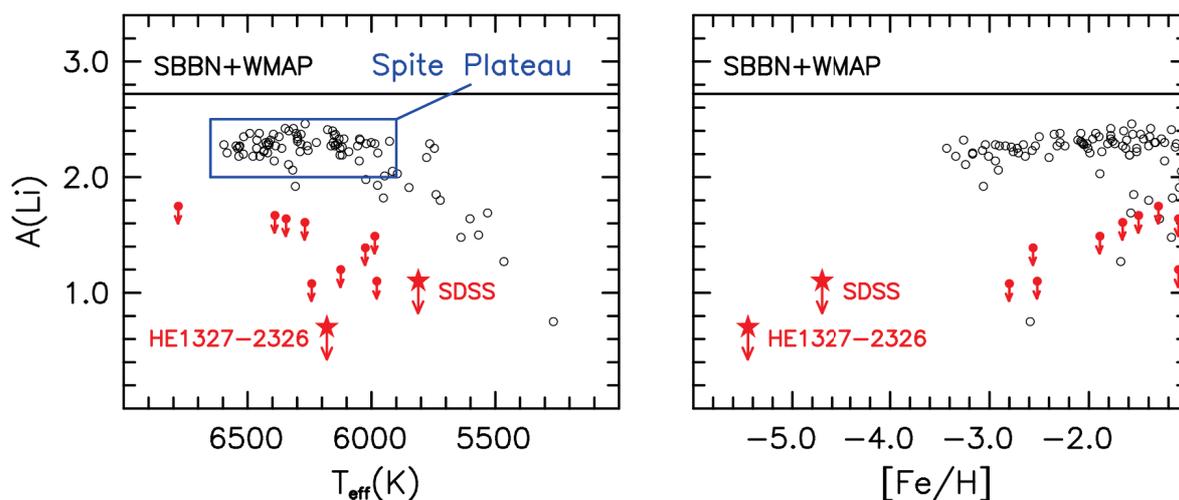


FIGURE 5.2: Abondance de lithium en fonction de la température (gauche) et de  $[Fe/H]$  (droite) provenant de Frebel et al. (2008) (étoiles rouges, HE1327-2326), Caffau et al. (2011) (étoiles rouges, SDSS), Meléndez et al. (2010) (cercles noirs) et Ryan et al. (2001) (points rouges). La ligne horizontale correspond à la détermination de WMAP Cyburt et al. (2008) (Figure 12 de l'article Frebel and Norris 2013).

gaz avec lequel elles se sont formées, modifiées par la diffusion atomique et les processus de transport. Ces objets ont des masses comprises entre  $0.6$  et  $0.8 M_{\odot}$ . Déterminer leurs abondances de surface permet de sonder l'Univers au début de son existence. Cela suppose que ces étoiles n'ont pas subi de trop forte accréation de matière du milieu interstellaire ou de mélanges internes trop efficaces.

Nous étudions ici la possibilité d'une accréation de matière provenant d'un compagnon qui pourrait être suffisante pour détruire du lithium grâce à la convection thermohaline dans les étoiles de faible métallicité. L'hypothèse est que la déplétion de lithium dans ces étoiles ne dépend que de la masse accréée et de l'âge de l'étoile au moment de l'accréation. Nous étudions aussi la proportion d'étoiles binaires présentes parmi les étoiles pauvres en métaux.

## 5.2 Les "Carbon Enhanced Metal Poor stars"

Les "Carbon Enhanced Metal Poor stars" (CEMP) sont des étoiles pauvres en métaux mais riches en carbone. Elles sont majoritairement définies par  $[C/Fe] > +1.0$  (Beers and Christlieb, 2005) et  $[Fe/H] < -2$ . Des études sur la composition chimique des CEMP ont montré que la plupart d'entre elles étaient riches en éléments du processus- $s$  comme le baryum (Aoki et al., 2008) formant ainsi le groupe des CEMP- $s$ . De plus 68 % de ces étoiles se trouvent dans des systèmes binaires (Lucatello et al., 2005).

Les systèmes binaires apportent une explication naturelle pour ces étoiles qui n'ont pas pu former cette quantité de carbone au cours de leur existence. L'hypothèse est que l'étoile principale du système la plus massive a évolué la branche asymptotique des géantes (AGB) et est devenue riche en carbone après le 3<sup>ème</sup> dredge-up (enfouissement de la zone convective de surface dans les

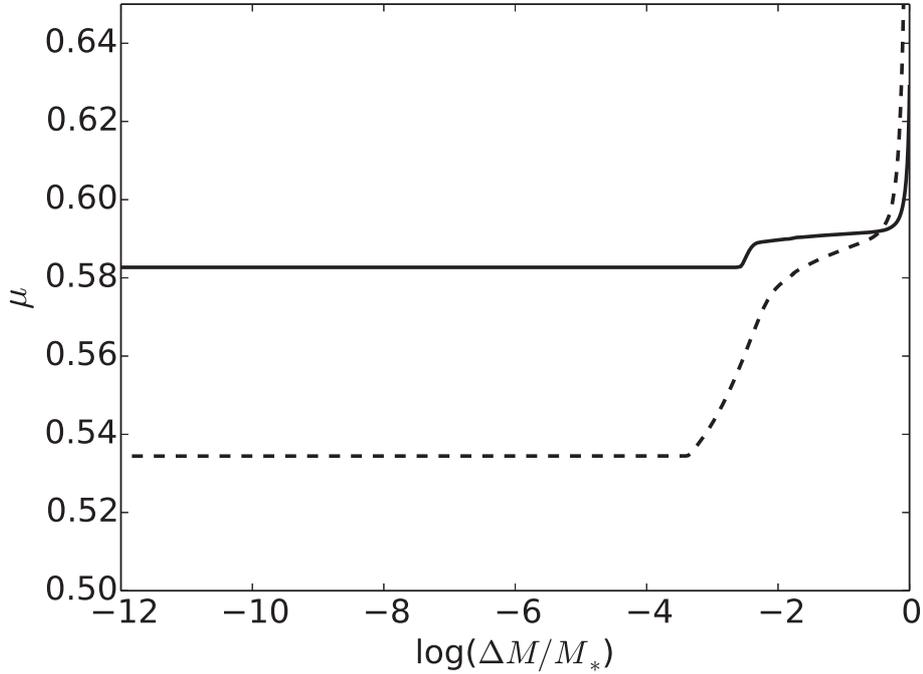


FIGURE 5.3: Profils de  $\mu$  en fonction de  $\log(\Delta M/M_*)$  pour un modèle de  $0.8 M_\odot$  et  $Z_i = 10^{-4}$  à 1 (trait plein) et 6 milliards d'années (trait en pointillés).

régions profondes de l'étoile où se produisent les réactions nucléaires, voir Iben and Renzini 1983). Ensuite par le biais du vent stellaire une partie de cette matière a été accrétée par l'étoile secondaire du système.

Cette accréation de matière peut produire de la convection thermohaline à la base de la zone convective de surface (Stancliffe et al., 2007; Stancliffe and Glebbeek, 2008; Stancliffe, 2009). La matière accrétée ne reste donc pas dans la zone convective et est diluée dans l'étoile.

Notre étude consiste à calculer des modèles incluant l'effet complet de la diffusion atomique, ce que n'incluaient pas les modèles de Stancliffe et collaborateurs. En particulier les accélérations radiatives peuvent avoir un effet important pour les étoiles de faible métallicité ayant des masses comprises entre  $0.7$  et  $0.9 M_\odot$  (Richard et al., 2002a,b). Ces accélérations radiatives peuvent conduire à des augmentations de la quantité de métaux en surface ainsi qu'à une augmentation de l'abondance des éléments légers.

L'évolution passée de l'étoile est un facteur très important pour étudier la convection thermohaline induite par de l'accréation de matière. En effet, plus l'accréation se passe tard sur la séquence principale, plus les éléments ont eu le temps de diffuser vers le centre de l'étoile. En particulier, la diffusion de l'hélium produit un gradient de  $\mu$  stabilisateur qui bloque la convection thermohaline. La zone de mélange est alors réduite et cela peut empêcher la destruction des éléments légers si la quantité de matière accrétée n'est pas suffisante pour surmonter le gradient d'hélium.

Thompson et al. (2008) ont montré que la présence du gradient stabilisateur d'hélium em-

pêchant la convection thermohaline permet d'expliquer la forte abondance en lithium de l'étoile CEMP CS 22964-161. La figure 5.3 montre les profils de  $\mu$  pour une étoile de  $0.8 M_{\odot}$  à deux âges différents. On remarque qu'en 5 milliards d'années la barrière de  $\mu$  à surmonter pour permettre la destruction du lithium passe de 0.01 à 0.05.

### 5.3 Modélisation

Afin d'étudier l'effet de l'accrétion dû au vent d'une étoile compagnon nous avons utilisé le code de Montréal/Montpellier (cf. Section 1.1). Cela nous permet de prendre en compte les accélérations radiatives dans les modèles et d'en caractériser l'impact. Nous ne pouvons faire de comparaison directe avec le code TGEC car les tables de l'approximation SVP ne permettent pas le calcul des accélérations radiatives pour des masses inférieures à  $0.9 M_{\odot}$ . Nous avons inclus la prescription de Brown et al. (2013) dans le code de Montréal/Montpellier pour la convection thermohaline (cf. Section 1.2) ainsi que la possibilité d'accréter de la matière dans la zone convective de surface du modèle.

Nous avons choisi dans un premier temps de faire cette étude pour une seule métallicité ( $[Fe/H] = -2.3$ ). A cette métallicité on trouve à la fois des CEMP-*s* et des étoiles montrant un déficit de lithium en surface ( $A(Li) < A(Li_{WMAP})$ ). Cela nous permet de déterminer l'impact de la masse et de la composition de la matière accrétée ainsi que l'impact de l'époque de l'accrétion sur la formation d'une étoile déficiente en lithium ou d'une CEMP-*s*.

Nous avons utilisé les compositions chimiques de vents, les masses éjectées et les âges d'éjection de vents obtenus par Stancliffe and Glebbeek (2008). Ces données sont disponibles pour des compagnons AGB de plusieurs masses allant de 1 à  $3.5 M_{\odot}$ . Nous avons choisi de tester l'accrétion d'un compagnon de 1 et  $3 M_{\odot}$  ce qui implique une accrétion qui prend fin respectivement à 6.1 et 0.27 milliards d'années. Pour ce qui est de la masse accrétée nous avons choisi entre 1/1000 et 1/10 de la masse totale éjectée ce qui permet de simuler un système binaire plus ou moins éloigné. Ceci nous donne 0.38, 3.8 et  $38 M_{Jup}$  ( $M_{Jup} \approx 10^{-3} M_{\odot}$ ) accrété dans le cas où le compagnon est une étoile  $1 M_{\odot}$ . Malgré le fait que pour une étoile de  $3 M_{\odot}$  la quantité de matière éjectée dans les vents est supérieure, nous avons choisi de garder les mêmes masses accrétées afin de pouvoir faire une comparaison plus directe des modèles sans rajouter une variable supplémentaire dans les calculs.

Nous avons ensuite calculé 6 modèles de  $0.8 M_{\odot}$  dont les paramètres sont résumés table 5.1. Dans tous ces modèles le seul processus de mélange additionnel pris en compte est la convection thermohaline. Le but de cette étude n'est pas de reproduire parfaitement une étoile mais d'avoir une idée quantitative de l'effet de l'accrétion à différents âges sur une même étoile initiale.

### 5.4 Accrétion provenant d'un compagnon de $1 M_{\odot}$

Nous étudions dans un premier temps le cas d'un compagnon de  $1 M_{\odot}$ . L'éjection des vents est alors tardive et ne se produit qu'à 6.1 milliards d'années. Ceci implique donc que les éléments ont eu le temps de diffuser dans l'étoile. cela forme un gradient stabilisateur principalement produit par l'hélium. Ce gradient forme ainsi une barrière et peut réduire ou empêcher la convection thermohaline produite par l'accrétion.

TABLE 5.1: Résumé des paramètres des modèles.

Modèle initial				
Masse ( $M_{\odot}$ )	$Y_i$	$Z_i$	$A(Li)_i$	$[C/Fe]_i$
0.8	0.2484	$10^{-4}$	2.57	0.12
Modèle accrétion				
Masse compagnon ( $M_{\odot}$ )	Masse accrétée ( $M_{Jup}$ )	Age accrétion (Ma)	$Y_{accr}$	$Z_{accr}$
1	0.38	6.1	0.276	$5.25 \cdot 10^{-3}$
1	3.8	6.1	0.276	$5.25 \cdot 10^{-3}$
1	38	6.1	0.276	$5.25 \cdot 10^{-3}$
3	0.38	0.27	0.284	$4.37 \cdot 10^{-3}$
3	3.8	0.27	0.284	$4.37 \cdot 10^{-3}$
3	38	0.27	0.284	$4.37 \cdot 10^{-3}$

### 5.4.1 Évolution de l'étoile juste après l'accrétion

La figure 5.4 présente le diagramme HR du modèle initial sans accrétion et des modèles après l'accrétion de 0.38, 3.8 et 38  $M_{Jup}$  avec une composition chimique du vent obtenue par Stancliffe and Glebbeek (2008). On remarque qu'après accrétion la trace évolutive s'éloigne du cas sans accrétion ce qui provient de la modification de la composition chimique de surface. L'écart reste cependant faible car seules les parties superficielles sont concernées dans ce cas.

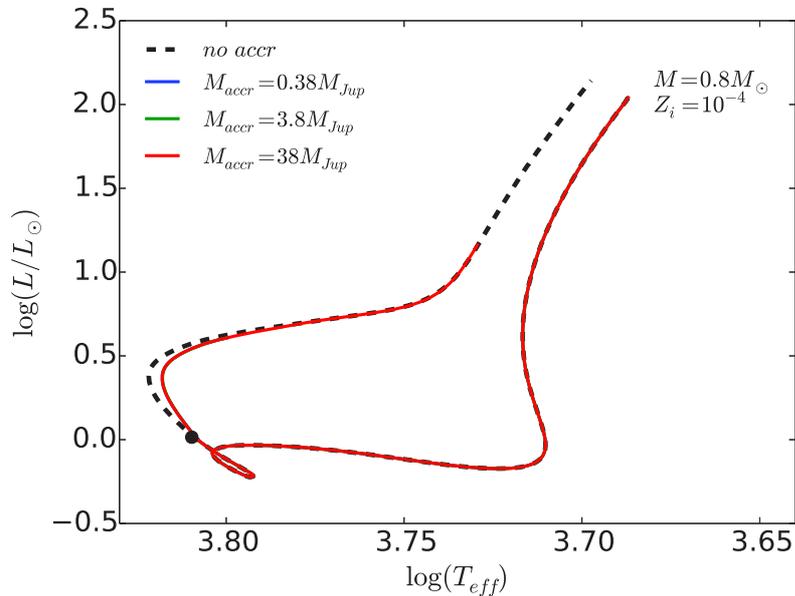


FIGURE 5.4: Diagramme HR pour un modèle de  $0.8 M_{\odot}$  sans accrétion (trait pointillé noir) et avec accrétion à 6.1 Ma de trois masses différentes. Le point noir représente le moment où l'accrétion a lieu sur la trace évolutive.

La masse accrétée est faible devant la masse totale de l'étoile. Cependant la masse de la zone convective de surface au moment de l'accrétion est très proche de celle accrétée. L'accrétion de  $0.38$  ou  $38 M_{Jup}$  une fois homogénéisée dans la zone convective produit un gradient de  $\mu$  à la base de la zone convective quasiment identique. Le mélange par convection thermohaline produit donc dans les 3 cas un profil d'abondance très similaire.

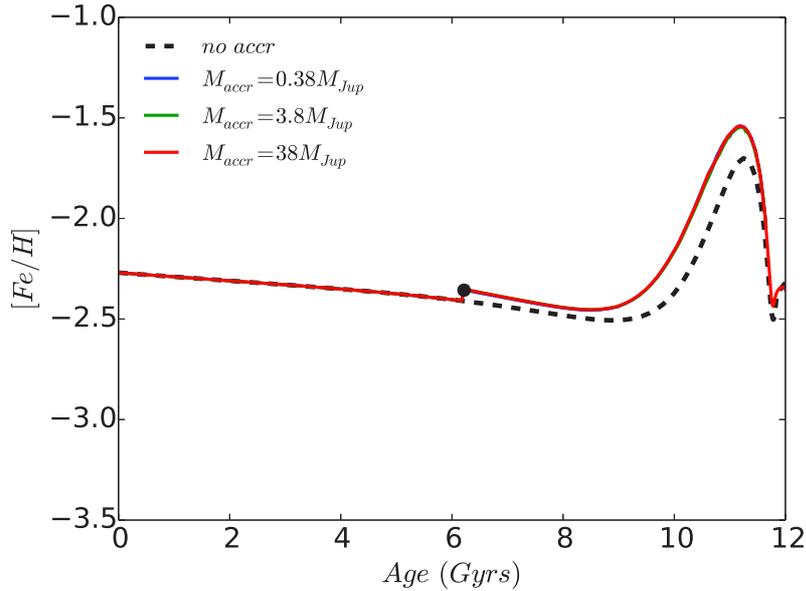


FIGURE 5.5: Évolution au cours du temps de  $[Fe/H]$ . La légende est la même que Fig. 5.4.

Les figures 5.5 et 5.6 présentent l'évolution en surface de  $[Fe/H]$ ,  $A(Li)$  et  $[C/Fe]$  au cours du temps. Après accrétion, le quantité de fer en surface augmente et ne diminue que faiblement après l'apparition de la convection thermohaline, le rapport  $[Fe/H]$  est toujours inférieur à  $-2$ . La même chose se produit lorsque l'on regarde l'évolution du lithium en surface. Cela implique que la convection thermohaline ne mélange pas la région sous la zone convective de surface assez profondément pour détruire du lithium par réactions nucléaires (cf. Section 4.2). Il subsiste aussi une forte surabondance de carbone et produit en surface un rapport  $[C/Fe] > +1$  ce qui implique dans ce cas que l'accrétion a formé une CEMP-*s*.

Le fait que la thermohaline ne réduise pas les surabondances produites par l'accrétion vient du fait que l'hélium en diffusant a produit un gradient stabilisateur. La figure 5.7 montre le profil de  $\mu$  au moment de l'accrétion (courbe bleue). L'accrétion produit un fort gradient de  $\mu$  à la base de la zone convective de surface ( $\log(\Delta M/m_*) = -3$ ) qui déclenche de la convection thermohaline. Le mélange que cela induit produit le profil de  $\mu$  représenté par la courbe verte. On remarque que la convection thermohaline n'a dilué la matière accrétée que jusqu'au gradient d'hélium stabilisateur ( $\log(\Delta M/m_*) = -2.1$ ) ce qui implique qu'il reste une trace en surface de la matière accrétée. Cela rend donc possible l'augmentation de façon significative de l'abondance de carbone en surface sans pour autant détruire du lithium (celui-ci se détruit par réactions nucléaires plus profondément).

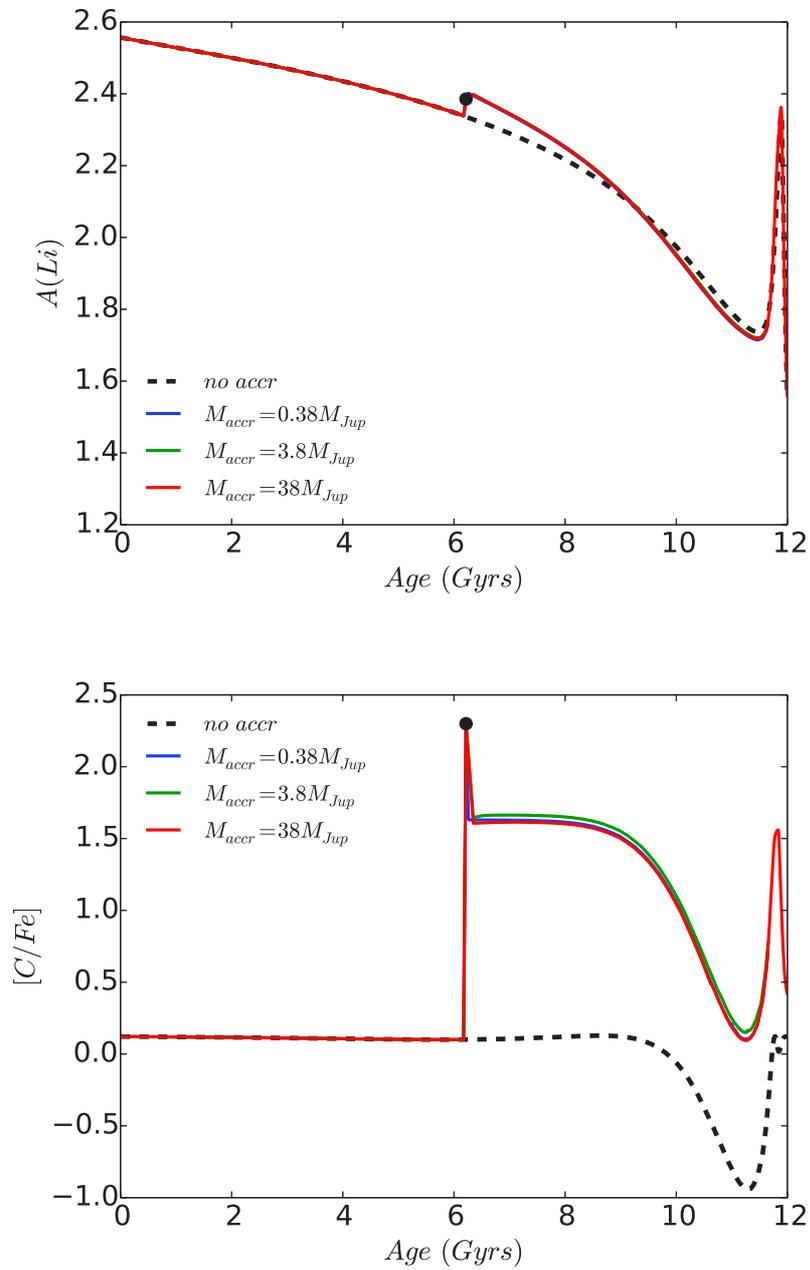


FIGURE 5.6: Évolution au cours du temps de  $A(\text{Li})$  (panneau du haut) et  $[\text{C}/\text{Fe}]$  (panneau du bas). La légende est la même que Fig. 5.4.

### 5.4.2 Évolution de l'étoile au turn off

Après dix milliards d'années d'évolution l'étoile s'apprête à quitter la séquence principale (turn off). La zone convective de surface continue à se réduire ce qui permet à la diffusion atomique

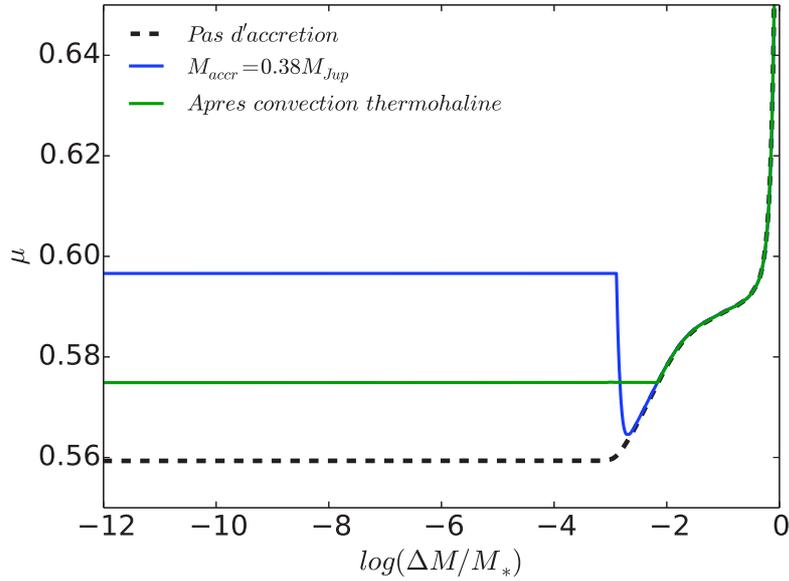


FIGURE 5.7: Profil de  $\mu$  à 6.1 milliards d'années sans accrétion (trait pointillé noir), au moment de l'accrétion de  $0.38 M_{Jup}$  (trait plein bleu) et après le mélange par convection thermohaline (trait plein vert).

d'avoir un plus fort impact. Cela explique en particulier la forte variation de abondance de surface de fer et du rapport  $[C/Fe]$  que l'on observe figures 5.5 et 5.6 et qui est due à la diffusion atomique dominée par le triage gravitationnel. Ensuite à partir d'environ onze milliards d'années on observe une remonté des abondance de fer, carbone et lithium qui s'explique par le fait qu'à ce moment la taille de la zone convective de surface est assez petite pour que les accélérations radiatives à sa base puissent supporter ces éléments et les pousser vers la surface. Ensuite la zone convective s'approfondit de nouveau et le triage gravitationnel domine à nouveau .

Ce type de variation des abondances ne semble pas observé dans les étoiles des amas globulaire ce qui semble indiquer qu'un ou plusieurs processus réduisent en surface les effets de la diffusion atomique (Richard et al., 2005).

## 5.5 Accrétion provenant d'un compagnon de $3 M_{\odot}$

Nous nous intéressons maintenant à l'accrétion causée par un vent provenant d'un compagnon de  $3 M_{\odot}$ . La démarche est la même que précédemment et les seules différences proviennent de la composition chimique du vent qui est légèrement différente et principalement de l'époque de l'accrétion qui est de 270 millions d'année au lieu de 6.1 milliards d'années.

La figure 5.8 présente le diagramme HR des modèles de  $0.8 M_{\odot}$  sans accrétion et avec accrétion de 0.38, 3.8 et  $38 M_{Jup}$  à 270 millions d'années. Comme dans le cas précédent après l'accrétion la trace évolutive s'éloigne légèrement du cas sans accrétion à cause du changement de composition. Les traces évolutives sont les mêmes pour les trois masses accrétées.

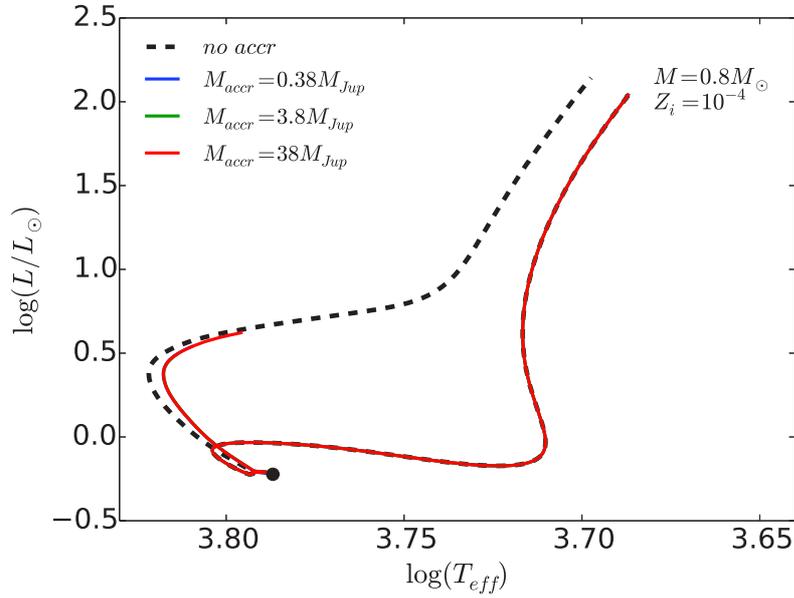


FIGURE 5.8: Diagramme HR pour un modèle de  $0.8 M_{\odot}$  sans accrétion (trait pointillé noir) et avec accrétion à 270 millions d’années de trois masses différentes. Le point noir représente le moment où l’accrétion a lieu sur la trace évolutive.

Contrairement au cas d’un compagnon de  $1 M_{\odot}$ , on remarque que l’accrétion produit une diminution du rapport  $[Fe/H]$  (Fig. 5.9) alors que la fraction de masse de la matière accrétée est très peu différente entre les vents d’une étoile de 1 et 3  $M_{\odot}$ . Cela vient du fait que l’étoile, à 270 millions d’années, sort à peine de la PMS et les éléments lourds n’ont pas encore eu le temps de se déplacer vers le centre de l’étoile sous l’effet de la diffusion atomique. Une fois la matière accrétée (moins métallique) diluée dans la zone convective de surface cela provoque une diminution du rapport  $[Fe/H]$ . Cependant sous l’effet de la convection thermohaline déclenchée par l’accrétion le rapport  $[Fe/H]$  reprend sa valeur pré-accrétion.

La figure 5.10 montre l’évolution au cours du temps de l’abondance de lithium et du rapport  $[C/Fe]$ . Après accrétion le rapport  $[C/Fe]$  augmente rapidement et prend la valeur 1.5 après le mélange produit par la convection thermohaline. Il se produit ici le même scénario que pour l’accrétion des vents d’un compagnon de  $1 M_{\odot}$  et il est aussi possible dans ce cas de former une CEMP-*s*. Cependant le mélange thermohaline est assez profond pour produire une destruction du lithium par réactions nucléaires ce qui induit une diminution d’un facteur 2.5 environ (panneau du haut Fig. 5.10). La déplétion de lithium est la même pour les 3 masses accrétées car la zone convective de surface a une composition chimique quasiment égale à celle du vent après l’accrétion. En effet la petite taille de la zone convective de surface et la métallicité plus importante du vent induisent un gradient de  $\mu$  à la base de la zone convective pratiquement identique.

Dans ce cas la destruction du lithium est permise car au début de la séquence principale les éléments (principalement l’hélium) n’ont pas encore produit de gradient de  $\mu$  stabilisateur ce qui permet à la convection thermohaline de diluer la matière accrétée plus profondément dans

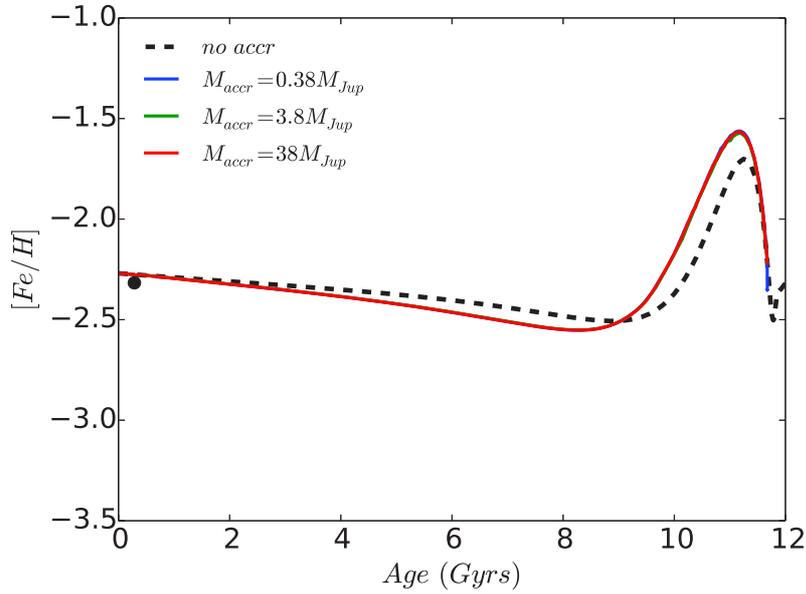


FIGURE 5.9: Évolution au cours du temps de  $[Fe/H]$ . La légende est la même que Fig. 5.4.

l'étoile et ce jusqu'à la zone de destruction du lithium par réactions nucléaires. La figure 5.11 nous montre les profils de  $\mu$  sans accréation, au moment de l'accréation et après le mélange produit par la convection thermohaline. On peut voir ici que la composition chimique est homogénéisée jusqu'à  $\log(\Delta M/M_*) = -0.5$  ce qui est beaucoup plus profond que dans le cas d'une accréation de matière provenant d'une étoile de  $1 M_\odot$  à 6.1 milliards d'années.

L'évolution proche du turn off est identique à celle du cas d'un compagnon de  $1 M_\odot$ . Dans ce cas aussi il est nécessaire d'ajouter un mélange additionnel pour réduire les effets de la diffusion atomique et ainsi conserver la surabondance de carbone afin de reproduire les abondances de surface d'une CEMP-s.

## 5.6 Discussion sur le cas du lithium dans les étoiles pauvres en métaux

En choisissant de restreindre cette étude à une masse donnée ( $0.8 M_\odot$ ) et une métallicité  $[Fe/H] = -2.3$  nous avons pu former une CEMP-s ( $[C/Fe] > +1$ ) en supposant une accréation par un vent d'un compagnon AGB de 1 et  $3 M_\odot$ . Cependant il existe une grande différence entre ces deux modèles qui est l'abondance de surface du lithium.

Dans le cas où l'accréation se produit tard sur la séquence principale il n'y a pas de destruction du lithium par réactions nucléaires car le gradient d'hélium stabilisateur induit par la diffusion bloque la convection thermohaline induite par l'accréation. Ainsi la matière est diluée jusqu'à ce gradient d'hélium.

Dans le cas où l'accréation se produit tôt sur la séquence principale la convection thermohaline

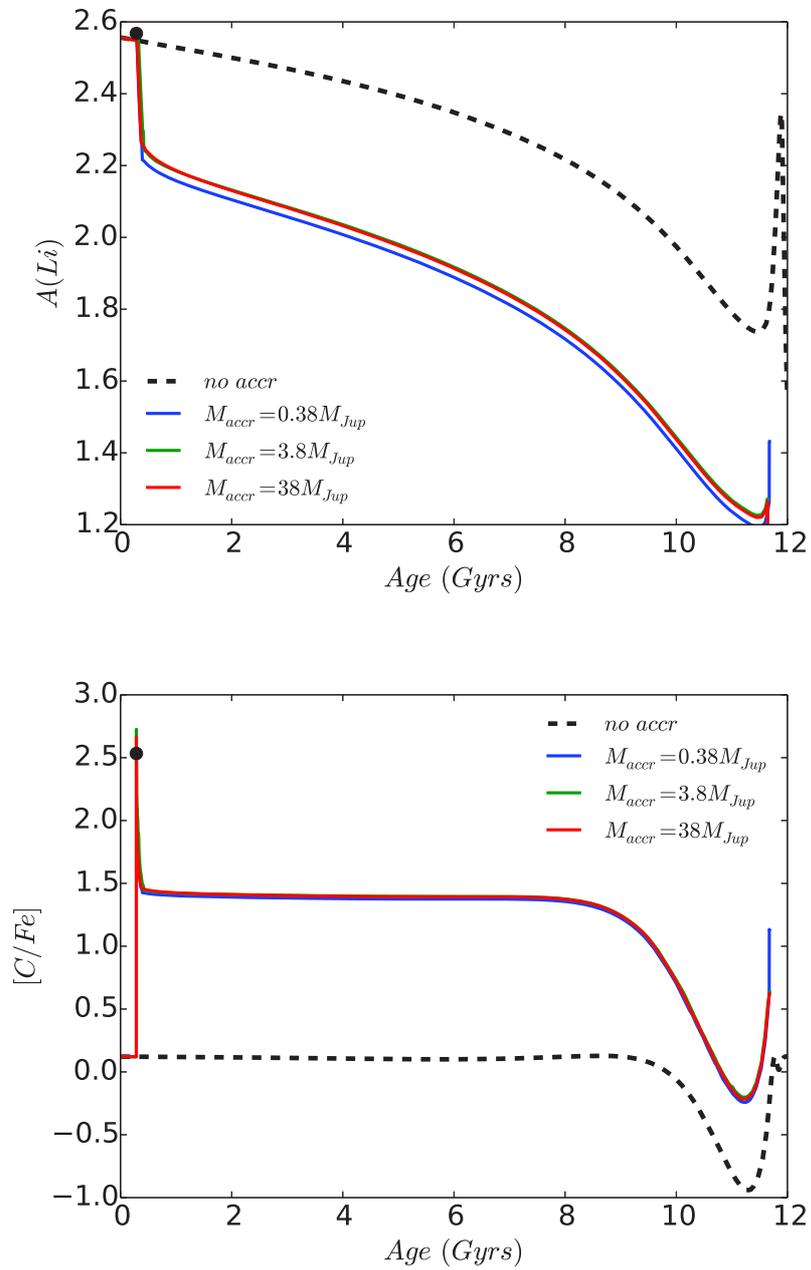


FIGURE 5.10: Évolution au cours du temps de  $A(\text{Li})$  (panneau du haut) et  $[\text{C}/\text{Fe}]$  (panneau du bas). La légende est la même que Fig. 5.4.

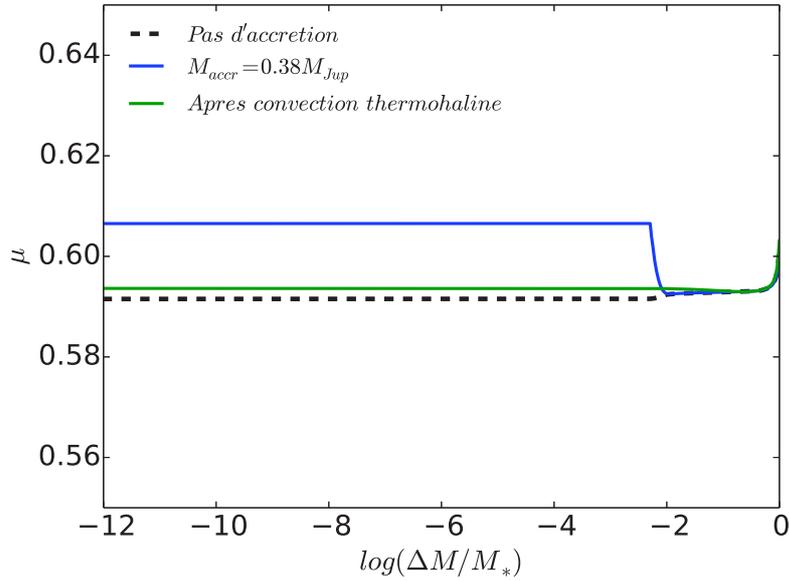


FIGURE 5.11: Profil de  $\mu$  à 270 millions d'années sans accrétion (trait pointillé noir), au moment de l'accrétion de  $0.38 M_{Jup}$  (trait plein bleu) et après le mélange par convection thermohaline (trait plein vert).

induite par l'accrétion n'est pas bloquée par le gradient d'hélium car celui-ci n'a pas encore eu le temps de se former. Cela permet donc un mélange plus profond à la base de la zone convective de surface qui transporte la matière jusqu'à la zone de destruction du lithium et réduit ainsi l'abondance de surface du lithium. Nous retrouvons ici le même résultat qu'obtenu à la Section 4.2.

Les observations du lithium dans les CEMP montre à la fois des étoiles ayant une abondance de lithium "normale" égale à celle du plateau du lithium mais aussi d'autres étoiles ayant une déficience en lithium non expliquée tout en conservant une surabondance en carbone (Masseron et al., 2012). Le simple fait que l'accrétion provenant d'un compagnon AGB ne se produit pas au même moment en fonction de la masse du compagnon pourrait permettre d'expliquer ce comportement. Il faudrait donc poursuivre cette étude pour des modèles de masses différentes et pour d'autres métallicités afin de pouvoir conclure si l'époque de l'accrétion est le principal paramètre à prendre en compte.

La poursuite de cette étude à plus faible métallicité pourrait aussi ouvrir des pistes pour la dispersion de lithium observée à plus basse métallicité (cf. Section 5.1). Nous savons qu'à  $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.3$  il est possible de détruire du lithium avec de l'accrétion d'un compagnon AGB. Il est possible que cette déplétion de lithium ne soit pas accompagnée d'une surabondance de carbone comme c'est le cas ici pour des métallicités plus faible. Nous poursuivrons cette étude après cette thèse et prévoyons de rédiger un article à ce sujet.



# Conclusion

Au cours de ces trois années de thèse, nous avons étudié l'impact de la diffusion atomique sur la structure interne et l'hydrodynamique des étoiles ainsi que l'impact de l'accrétion de matière à leur surface. Nous avons montré que la convection thermohaline (qui apparaît dans ces deux cas) modifie fortement les profils d'abondance des éléments chimiques et peut conduire à la destruction des éléments légers par réactions nucléaires.

- Nous avons tout d'abord implémenté la convection thermohaline dans le code TGEC et le code de Montréal/Montpellier en utilisant la prescription 1D de Brown et al. (2013). En collaboration avec Pascale Garaud, nous avons testé avec des simulations 3D l'apparition de la convection thermohaline lors de l'accumulation d'un élément lourd. Nous avons ainsi pu montrer qu'un état stationnaire peut se mettre en place sous l'action de deux effets. L'effet des accélérations radiatives qui fait migrer l'élément vers la surface, produit une accumulation et donc une inversion de  $\mu$ . Et l'effet de la convection thermohaline qui mélange cette région de l'étoile et dilue l'abondance de l'élément en train de s'accumuler. Cette étude a aussi permis de valider la prescription de Brown et al. (2013).
- Nous avons ensuite montré, à l'aide de modèles d'étoiles A calculés avec le code TGEC, qu'en plus de produire de la convection dynamique induite par l'augmentation de l'opacité, les accumulations d'éléments lourds (produites par la diffusion atomique) induisent de la convection thermohaline. Cela produit un mélange dans plusieurs régions de l'étoile et modifie les profils d'abondance ainsi que la structure interne. La convection thermohaline réduit localement l'abondance de l'élément qui s'est accumulée à l'endroit où il est le principal contributeur à l'opacité sous l'effet des accélérations radiatives. Cet effet modifie ainsi le profil d'opacité à l'intérieur de l'étoile. Ces effets se produisent dès que les accélérations radiatives sur un élément permettent une accumulation suffisante pour inverser le gradient de  $\mu$ . Nous avons aussi montré que les accélérations radiatives ont le même effet dans les étoiles un peu moins massives telles que les étoiles F. Dans ce cas le flux de photons est plus faible mais il permet une accumulation suffisante pour déclencher de la convection thermohaline.
- Nous avons étudié l'effet des accumulations d'éléments lourds produites par la diffusion atomique sur la détermination des paramètres de l'étoile 94 Ceti. Nous avons calculé des

modèles (avec le code TGEC) incluant les accélérations radiatives ainsi que la convection thermohaline et des modèles n'incluant pas ces processus afin d'étudier les modifications des fréquences d'oscillation obtenues avec le code PULSE. Nous avons pu montrer que les modifications de la structure interne produites par les accumulations d'éléments et la convection thermohaline qui en résulte induisent une différence sensible dans la détermination de l'âge de l'étoile par rapport à des modèles n'incluant pas ces processus.

Au cours de cette thèse nous avons également étudié l'effet de l'accrétion de matière planétaire riche en métaux à la surface d'une étoile. L'accrétion de matière modifie la composition chimique de surface de l'étoile et peut induire de la convection thermohaline à la base de la zone convective. Dans certains cas cela peut conduire à la destruction par réactions nucléaires d'éléments légers tels que le lithium et le béryllium.

- Nous avons montré que l'accrétion de matière planétaire pouvait expliquer la différence des abondances de lithium entre les composantes A et B du système 16 Cygni. Il s'agit d'un système dont les deux étoiles principales ont quasiment les mêmes caractéristiques excepté l'abondance de lithium au moins 4.7 fois inférieure dans 16 Cygni B par rapport à 16 Cygni A et le fait qu'il y ait une planète détectée autour de 16 Cygni B et non autour de 16 Cygni A. Nous avons modélisé ces deux étoiles à l'aide du code TGEC. Nous avons ensuite sélectionné les meilleurs modèles en comparant les fréquences calculées à l'aide du code PULSE et les fréquences obtenues à partir des observations *Kepler*. A partir de ces modèles, nous avons étudié l'effet qu'aurait l'accrétion de matière planétaire riche en métaux au début de la séquence principale sur l'étoile 16 Cygni B. Cette étoile possède une planète et possédait donc un disque protoplanétaire au début de son existence. Nous avons ainsi montré qu'une accrétion d'une masse équivalente à deux tiers de la masse terrestre, avec la même composition chimique moyenne que la Terre, permettait de reproduire la différence des abondances de lithium entre 16 Cygni A et B.
- Nous avons aussi étudié l'impact de la convection thermohaline sur la détermination des taux d'accrétion sur les naines blanches de type DA et DB. Des excès infrarouges sont observés ce qui indique la présence d'un disque de débris (reste de l'ancien système planétaire) autour de ces naines blanches. De plus, des éléments lourds sont observés à la surface de certaines de ces étoiles. Cependant elles subissent de forts effets de triage gravitationnel ce qui implique qu'aucun élément lourd ne peut subsister en surface sauf si ces éléments sont en train d'être accrétés. Nous avons montré que la prise en compte de la convection thermohaline modifiait les taux d'accrétion déterminés pour les DA et réconciliait une différence de taux d'accrétion obtenue par d'autres auteurs entre les naines blanches DA et DB.

Pour finir nous avons étudié l'accrétion de matière éjectée par le vent d'une étoile compagnon AGB sur une étoile de  $0.8 M_{\odot}$ . Nous avons montré que pour une métallicité donnée il était à la fois possible de former une étoile CEMP-*s* ayant un lithium "normal" mais aussi de former une étoile CEMP-*s* montrant une déplétion par rapport au plateau du lithium. Dans les deux cas la convection thermohaline induit une dilution de la matière accrétée mais cela à des profondeurs différentes dans l'étoile en fonction de la présence d'un gradient stabilisateur d'hélium produit par la diffusion atomique au cours de l'évolution. Au début de la séquence principale ce gradient est encore faible et permet à la convection thermohaline de diluer la matière accrétée jusqu'à la zone

de destruction du lithium ce qui réduit la quantité de lithium en surface. En revanche plus tard sur la séquence principale le gradient d'hélium permet de bloquer la convection thermohaline et donc de ne pas détruire de lithium. Le principal facteur pour la formation de ces deux types d'étoiles est donc la masse du compagnon AGB et le moment où se passe l'accrétion. Cette étude n'est que préliminaire et nous allons continuer dans ce sens en étudiant une gamme de masse et de métallicité plus large pour l'étoile accrétante.



# Bibliographie

- Alecian, G. and LeBlanc, F. (2002). New approximate formulae for radiative accelerations in stars. *MNRAS*, 332 :891–900.
- Alecian, G., Lebreton, Y., Richard, O., and Vauclair, G., editors (2013). *New Advances in Stellar Physics : From Microscopic to Macroscopic Processes*, volume 63 of *EAS Publications Series*.
- Allègre, C. J., Poirier, J.-P., Humler, E., and Hofmann, A. W. (1995). The chemical composition of the Earth. *Earth and Planetary Science Letters*, 134 :515–526.
- Aller, L. H. and Chapman, S. (1960). Diffusion in the Sun. *ApJ*, 132 :461.
- Angulo, C. (1999). NACRE : A European Compilation of Reaction rates for Astrophysics. In *American Institute of Physics Conference Series*, volume 495 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 365–366.
- Aoki, W., Barklem, P. S., Beers, T. C., Christlieb, N., Inoue, S., García Pérez, A. E., Norris, J. E., and Carollo, D. (2009). Lithium Abundances of Extremely Metal-Poor Turnoff Stars. *ApJ*, 698 :1803–1812.
- Aoki, W., Beers, T. C., Sivarani, T., Marsteller, B., Lee, Y. S., Honda, S., Norris, J. E., Ryan, S. G., and Carollo, D. (2008). Carbon-Enhanced Metal-Poor Stars. III. Main-Sequence Turnoff Stars from the SDSS SEGUE Sample. *ApJ*, 678 :1351–1371.
- Asplund, M., Lambert, D. L., Nissen, P. E., Primas, F., and Smith, V. V. (2006). Lithium Isotopic Abundances in Metal-poor Halo Stars. *ApJ*, 644 :229–259.
- Bahcall, J. N. and Pinsonneault, M. H. (1992). Standard solar models, with and without helium diffusion, and the solar neutrino problem. *Reviews of Modern Physics*, 64 :885–926.
- Bahcall, J. N., Pinsonneault, M. H., and Wasserburg, G. J. (1995). Solar models with helium and heavy-element diffusion. *Reviews of Modern Physics*, 67 :781–808.
- Beers, T. C. and Christlieb, N. (2005). The Discovery and Analysis of Very Metal-Poor Stars in the Galaxy. *ARA&A*, 43 :531–580.
- Bender, C. M. and Orszag, S. A. (1978). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*.

- Bonifacio, P., Sbordone, L., Caffau, E., Ludwig, H.-G., Spite, M., González Hernández, J. I., and Behara, N. T. (2012). Chemical abundances of distant extremely metal-poor unevolved stars. *A&A*, 542 :A87.
- Brassard, P. and Charpinet, S. (2008). PULSE : a finite element code for solving adiabatic nonradial pulsation equations. *Ap&SS*, 316 :107–112.
- Brinkworth, C. S., Gänsicke, B. T., Girven, J. M., Hoard, D. W., Marsh, T. R., Parsons, S. G., and Koester, D. (2012). A Spitzer Space Telescope Study of the Debris Disks around Four SDSS White Dwarfs. *ApJ*, 750 :86.
- Brown, J. M., Garaud, P., and Stellmach, S. (2013). Chemical Transport and Spontaneous Layer Formation in Fingering Convection in Astrophysics. *ApJ*, 768 :34.
- Brun, A. S., Turck-Chièze, S., and Morel, P. (1998). Standard Solar Models in the Light of New Helioseismic Constraints. I. The Solar Core. *ApJ*, 506 :913–925.
- Buldgen, G., Reese, D. R., and Dupret, M. A. (2016). Constraints on the structure of 16 Cygni A and 16 Cygni B using inversion techniques. *A&A*, 585 :A109.
- Burgers, J. M. (1969). *Flow Equations for Composite Gases*.
- Caffau, E., Bonifacio, P., François, P., Sbordone, L., Monaco, L., Spite, M., Spite, F., Ludwig, H.-G., Cayrel, R., Zaggia, S., Hammer, F., Randich, S., Molaro, P., and Hill, V. (2011). An extremely primitive star in the Galactic halo. *Nature*, 477 :67–69.
- Carlos, M., Nissen, P. E., and Meléndez, J. (2016). Correlation between lithium abundances and ages of solar twin stars. *A&A*, 587 :A100.
- Castro, M. and Vauclair, S. (2006). Asteroseismic signatures of helium gradients in late F-type stars. *A&A*, 456 :611–616.
- Castro, M., Vauclair, S., Richard, O., and Santos, N. C. (2009). Lithium abundances in exoplanet-host stars : modelling. *A&A*, 494 :663–668.
- Chapman, S. (1917). Convection and diffusion within giant stars. *MNRAS*, 77 :540.
- Chapman, S. and Cowling, T. G. (1970). *The mathematical theory of non-uniform gases. an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases*.
- Charbonnel, C., Vauclair, S., Maeder, A., Meynet, G., and Schaller, G. (1994). Lithium and beryllium depletion by rotation-induced mixing in the Sun and in galactic cluster stars. *A&A*, 283 :155–162.
- Charbonnel, C., Vauclair, S., and Zahn, J.-P. (1992). Rotation-induced mixing and lithium depletion in galactic clusters. *A&A*, 255 :191–199.
- Charbonnel, C. and Zahn, J.-P. (2007). Inhibition of thermohaline mixing by a magnetic field in Ap star descendants : implications for the Galactic evolution of  $^3\text{He}$ . *A&A*, 476 :L29–L32.

- Christensen-Dalsgaard, J. and Dappen, W. (1992). Solar oscillations and the equation of state. *A&Ar*, 4 :267–361.
- Christensen-Dalsgaard, J., Dappen, W., Ajukov, S. V., Anderson, E. R., Antia, H. M., Basu, S., Baturin, V. A., Berthomieu, G., Chaboyer, B., Chitre, S. M., Cox, A. N., Demarque, P., Donatowicz, J., Dziembowski, W. A., Gabriel, M., Gough, D. O., Guenther, D. B., Guzik, J. A., Harvey, J. W., Hill, F., Houdek, G., Iglesias, C. A., Kosovichev, A. G., Leibacher, J. W., Morel, P., Proffitt, C. R., Provost, J., Reiter, J., Rhodes, Jr., E. J., Rogers, F. J., Roxburgh, I. W., Thompson, M. J., and Ulrich, R. K. (1996). The Current State of Solar Modeling. *Science*, 272 :1286–1292.
- Christensen-Dalsgaard, J., Duvall, Jr., T. L., Gough, D. O., Harvey, J. W., and Rhodes, Jr., E. J. (1985). Speed of sound in the solar interior. *Nature*, 315 :378–382.
- Christensen-Dalsgaard, J., Thompson, M. J., and Gough, D. O. (1989). Differential asymptotic sound-speed inversions. *MNRAS*, 238 :481–502.
- Ciacio, F., degl’Innocenti, S., and Ricci, B. (1997). Updating standard solar models. *A&AS*, 123.
- Cochran, W. D., Hatzes, A. P., Butler, R. P., and Marcy, G. W. (1997). The Discovery of a Planetary Companion to 16 Cygni B. *ApJ*, 483 :457–463.
- Cowley, C. R. and Aikman, G. C. L. (1975). Nuclear and nonnuclear abundance patterns in the manganese stars. *ApJ*, 196 :521–524.
- Cyburt, R. H., Fields, B. D., and Olive, K. A. (2008). An update on the big bang nucleosynthesis prediction for  ${}^7\text{Li}$  : the problem worsens. *JCAP*, 11 :012.
- Davies, G. R., Chaplin, W. J., Farr, W. M., García, R. A., Lund, M. N., Mathis, S., Metcalfe, T. S., Appourchaux, T., Basu, S., Benomar, O., Campante, T. L., Ceillier, T., Elsworth, Y., Handberg, R., Salabert, D., and Stello, D. (2015). Asteroseismic inference on rotation, gyrochronology and planetary system dynamics of 16 Cygni. *MNRAS*, 446 :2959–2966.
- Deal, M., Deheuvels, S., Vauclair, G., Vauclair, S., and Wachlin, F. C. (2013). Accretion from debris disks onto white dwarfs. Fingering (thermohaline) instability and derived accretion rates. *A&A*, 557 :L12.
- Delgado Mena, E., Israelian, G., González Hernández, J. I., Sousa, S. G., Mortier, A., Santos, N. C., Adibekyan, V. Z., Fernandes, J., Rebolo, R., Udry, S., and Mayor, M. (2014). Li depletion in solar analogues with exoplanets. Extending the sample. *A&A*, 562 :A92.
- Deliyannis, C. P., Cunha, K., King, J. R., and Boesgaard, A. M. (2000). Beryllium and Iron Abundances of the Solar Twins 16 Cygni A and B. *AJ*, 119 :2437–2444.
- Denissenkov, P. A. (2010). Numerical Simulations of Thermohaline Convection : Implications for Extra-mixing in Low-mass RGB Stars. *ApJ*, 723 :563–579.
- Dufour, P., Kilic, M., Fontaine, G., Bergeron, P., Melis, C., and Bochanski, J. (2012). Detailed Compositional Analysis of the Heavily Polluted DBZ White Dwarf SDSS J073842.56+183509.06 : A Window on Planet Formation ? *ApJ*, 749 :6.

- Dziembowski, W. A., Pamyatnykh, A. A., and Sienkiewicz, R. (1990). Solar model from helioseismology and the neutrino flux problem. *MNRAS*, 244 :542–550.
- Eddington, A. S. (1926). *The Internal Constitution of the Stars*.
- Edvardsson, B., Andersen, J., Gustafsson, B., Lambert, D. L., Nissen, P. E., and Tomkin, J. (1993). The Chemical Evolution of the Galactic Disk - Part One - Analysis and Results. *A&A*, 275 :101.
- Elliott, J. R. (1998). Helioseismic constraints on new solar models from the MoSEC code. *A&A*, 334 :703–712.
- Farihi, J. (2011). Evidence for Terrestrial Planetary System Remnants at White Dwarfs. In Schuh, S., Drechsel, H., and Heber, U., editors, *American Institute of Physics Conference Series*, volume 1331 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 193–210.
- Farihi, J., Gänsicke, B. T., Wyatt, M. C., Girven, J., Pringle, J. E., and King, A. R. (2012). Scars of intense accretion episodes at metal-rich white dwarfs. *MNRAS*, 424 :464–471.
- Fowler, W. A., Burbidge, E. M., Burbidge, G. R., and Hoyle, F. (1965). The Synthesis and Destruction of Elements in Peculiar Stars of Types a and B. *ApJ*, 142 :423.
- Frebel, A., Collet, R., Eriksson, K., Christlieb, N., and Aoki, W. (2008). HE 1327-2326, an Unevolved Star with  $[\text{Fe}/\text{H}] < -5.0$ . II. New 3D-1D Corrected Abundances from a Very Large Telescope UVES Spectrum. *ApJ*, 684 :588–602.
- Frebel, A. and Norris, J. E. (2013). *Metal-Poor Stars and the Chemical Enrichment of the Universe*, page 55.
- Gabriel, M. (1997). Influence of heavy element and rotationally induced diffusions on the solar models. *A&A*, 327 :771–778.
- Garaud, P. (2011). What Happened to the Other Mohicans ? The Case for a Primordial Origin to the Planet-Metallicity Connection. *ApJl*, 728 :L30.
- Garaud, P. (2013). Double-diffusive convection. In Alecian, G., Lebreton, Y., Richard, O., and Vauclair, G., editors, *EAS Publications Series*, volume 63 of *EAS Publications Series*, pages 285–295.
- Gelly, B., Grec, G., Schmider, F.-X., and Fossat, E. (1988). Solar calibration of asteroseismology. *A&A*, 200 :207–212.
- Girven, J., Brinkworth, C. S., Farihi, J., Gänsicke, B. T., Hoard, D. W., Marsh, T. R., and Koester, D. (2012). Constraints on the Lifetimes of Disks Resulting from Tidally Destroyed Rocky Planetary Bodies. *ApJ*, 749 :154.
- Gizon, L. and Solanki, S. K. (2003). Determining the Inclination of the Rotation Axis of a Sun-like Star. *ApJ*, 589 :1009–1019.
- Gonzalez, J.-F., LeBlanc, F., Artru, M.-C., and Michaud, G. (1995). Improvements on radiative acceleration calculations in stellar envelopes. *A&A*, 297 :223–236.

- González Hernández, J. I., Bonifacio, P., Ludwig, H.-G., Caffau, E., Spite, M., Spite, F., Cayrel, R., Molaro, P., Hill, V., François, P., Plez, B., Beers, T. C., Sivarani, T., Andersen, J., Barbuy, B., Depagne, E., Nordström, B., and Primas, F. (2008). First stars XI. Chemical composition of the extremely metal-poor dwarfs in the binary CS 22876-032. *A&A*, 480 :233–246.
- Gough, D. (1986). *Hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems in the sun and stars*.
- Gough, D. O. (1990). Comments on Helioseismic Inference. In Osaki, Y. and Shibahashi, H., editors, *Progress of Seismology of the Sun and Stars*, volume 367 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, page 283.
- Grevesse, N. and Noels, A. (1993). Cosmic abundances of the elements. In Prantzos, N., Vangioni-Flam, E., and Casse, M., editors, *Origin and Evolution of the Elements*, pages 15–25.
- Hale, A. (1994). Orbital coplanarity in solar-type binary systems : Implications for planetary system formation and detection. *AJ*, 107 :306–332.
- Hauser, H. M. and Marcy, G. W. (1999). The Orbit of 16 Cygni AB. *pasp*, 111 :321–334.
- Hosford, A., Ryan, S. G., García Pérez, A. E., Norris, J. E., and Olive, K. A. (2009). Lithium abundances of halo dwarfs based on excitation temperature. I. Local thermodynamic equilibrium. *A&A*, 493 :601–612.
- Hui-Bon-Hoa, A. (2008). The Toulouse Geneva Evolution Code (TGEC). *Ap&SS*, 316 :55–60.
- Hui-Bon-Hoa, A. and Alecian, G. (1998). Metal abundances of A-type stars in galactic clusters. II. Pleiades, Coma Berenices, Hyades, and Praesepe. *A&A*, 332 :224–234.
- Iben, Jr., I. and Renzini, A. (1983). Asymptotic giant branch evolution and beyond. *ARA&A*, 21 :271–342.
- Israelian, G., Delgado Mena, E., Santos, N. C., Sousa, S. G., Mayor, M., Udry, S., Domínguez Cerdeña, C., Rebolo, R., and Randich, S. (2009). Enhanced lithium depletion in Sun-like stars with orbiting planets. *Nature*, 462 :189–191.
- Izotov, Y. I. and Thuan, T. X. (2010). The Primordial Abundance of  $^4\text{He}$  : Evidence for Non-Standard Big Bang Nucleosynthesis. *ApJ*, 710 :L67–L71.
- Jura, M. (2003). A Tidally Disrupted Asteroid around the White Dwarf G29-38. *ApJl*, 584 :L91–L94.
- King, J. R., Deliyannis, C. P., Hiltgen, D. D., Stephens, A., Cunha, K., and Boesgaard, A. M. (1997). Lithium Abundances in the Solar Twins 16 CYG A and B and the Solar Analog alpha CEN A, Calibration of the 6707 Angstrom Li Region Linelist, and Implications. *AJ*, 113 :1871.
- Kippenhahn, R., Ruschenplatt, G., and Thomas, H.-C. (1980). The time scale of thermohaline mixing in stars. *A&A*, 91 :175–180.
- Kjeldsen, H., Bedding, T. R., and Christensen-Dalsgaard, J. (2008). Correcting Stellar Oscillation Frequencies for Near-Surface Effects. *ApJl*, 683 :L175–L178.

- Klein, B., Jura, M., Koester, D., Zuckerman, B., and Melis, C. (2010). Chemical Abundances in the Externally Polluted White Dwarf GD 40 : Evidence of a Rocky Extrasolar Minor Planet. *ApJ*, 709 :950–962.
- Langer, N., Fricke, K. J., and Sugimoto, D. (1983). Semiconvective diffusion and energy transport. *A&A*, 126 :207.
- LeBlanc, F. and Alecian, G. (2004). New method for fast and easy computation of radiative accelerations in stars. *MNRAS*, 352 :1329–1334.
- Lebreton, Y., Goupil, M. J., and Montalbán, J. (2014a). How accurate are stellar ages based on stellar models ?. I. The impact of stellar models uncertainties. In *EAS Publications Series*, volume 65 of *EAS Publications Series*, pages 99–176.
- Lebreton, Y., Goupil, M. J., and Montalbán, J. (2014b). How accurate are stellar ages based on stellar models ?. II. The impact of asteroseismology. In *EAS Publications Series*, volume 65 of *EAS Publications Series*, pages 177–223.
- Lucatello, S., Tsangarides, S., Beers, T. C., Carretta, E., Gratton, R. G., and Ryan, S. G. (2005). The Binary Frequency Among Carbon-enhanced, s-Process-rich, Metal-poor Stars. *ApJ*, 625 :825–832.
- Maldonado, J., Eiroa, C., Villaver, E., Montesinos, B., and Mora, A. (2012). Metallicity of solar-type stars with debris discs and planets. *A&A*, 541 :A40.
- Masseron, T., Johnson, J. A., Lucatello, S., Karakas, A., Plez, B., Beers, T. C., and Christlieb, N. (2012). Lithium Abundances in Carbon-enhanced Metal-poor Stars. *ApJ*, 751 :14.
- Mayor, M., Udry, S., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D., Santos, N. C., and Burnet, M. (2004). The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XII. Orbital solutions for 16 extra-solar planets discovered with CORALIE. *A&A*, 415 :391–402.
- Meléndez, J., Casagrande, L., Ramírez, I., Asplund, M., and Schuster, W. J. (2010). Observational evidence for a broken Li Spite plateau and mass-dependent Li depletion. *A&A*, 515 :L3.
- Metcalfe, T. S., Chaplin, W. J., Appourchaux, T., García, R. A., Basu, S., Brandão, I., Creevey, O. L., Deheuvels, S., Doğan, G., Eggenberger, P., Karoff, C., Miglio, A., Stello, D., Yıldız, M., Çelik, Z., Antia, H. M., Benomar, O., Howe, R., Régulo, C., Salabert, D., Stahn, T., Bedding, T. R., Davies, G. R., Elsworth, Y., Gizon, L., Hekker, S., Mathur, S., Mosser, B., Bryson, S. T., Still, M. D., Christensen-Dalsgaard, J., Gilliland, R. L., Kawaler, S. D., Kjeldsen, H., Ibrahim, K. A., Klaus, T. C., and Li, J. (2012). Asteroseismology of the Solar Analogs 16 Cyg A and B from Kepler Observations. *ApJL*, 748 :L10.
- Metcalfe, T. S., Creevey, O. L., and Davies, G. R. (2015). Asteroseismic Modeling of 16 Cyg A & B using the Complete Kepler Data Set. *ApJ*, 811 :L37.
- Michaud, G. (1970a). Diffusion Processes in Peculiar a Stars. *ApJ*, 160 :641.
- Michaud, G. (1970b). Diffusion Processes in Peculiar a Stars. *ApJ*, 160 :641.

- Michaud, G. (1970c). *I. Diffusion processes in A-PEC stars. II. Nucleosynthesis in Si burning.* PhD thesis, California Institute of Technology.
- Michaud, G., Charland, Y., Vauclair, S., and Vauclair, G. (1976). Diffusion in main-sequence stars - Radiation forces, time scales, anomalies. *ApJ*, 210 :447–465.
- Michaud, G., Fontaine, G., and Beaudet, G. (1984). The lithium abundance - Constraints on stellar evolution. *ApJ*, 282 :206–213.
- Michaud, G., Richard, O., Richer, J., and Vandenberg, D. A. (2004). Models for Solar Abundance Stars with Gravitational Settling and Radiative Accelerations : Application to M67 and NGC 188. *ApJ*, 606 :452–465.
- Michaud, G., Richer, J., and Vick, M. (2011). Sirius A : turbulence or mass loss ? *A&A*, 534 :A18.
- Montmerle, T. and Michaud, G. (1976). Diffusion in stars - Ionization and abundance effects. *ApJs*, 31 :489–515.
- Moore, K. and Garaud, P. (2016). Main Sequence Evolution with Layered Semiconvection. *ApJ*, 817 :54.
- Morel, P., Provost, J., and Berthomieu, G. (1997). Updated solar models. *A&A*, 327 :349–360.
- Paquette, C., Pelletier, C., Fontaine, G., and Michaud, G. (1986). Diffusion coefficients for stellar plasmas. *ApJs*, 61 :177–195.
- Patience, J., White, R. J., Ghez, A. M., McCabe, C., McLean, I. S., Larkin, J. E., Prato, L., Kim, S. S., Lloyd, J. P., Liu, M. C., Graham, J. R., Macintosh, B. A., Gavel, D. T., Max, C. E., Bauman, B. J., Olivier, S. S., Wizinowich, P., and Acton, D. S. (2002). Stellar Companions to Stars with Planets. *ApJ*, 581 :654–665.
- Pinsonneault, M. H., Kawaler, S. D., and Demarque, P. (1990). Rotation of low-mass stars - A new probe of stellar evolution. *ApJs*, 74 :501–550.
- Praderie, F. (1967). PhD thesis, PhD Thesis, Univ. Paris, (1967).
- Prandtl, L. (1925). , volume 5.
- Prat, V., Lignières, F., and Lagarde, N. (2015). Numerical simulations of zero-Prandtl-number thermohaline convection. In Martins, F., Boissier, S., Buat, V., Cambrésy, L., and Petit, P., editors, *SF2A-2015 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, pages 419–422.
- Queloz, D., Mayor, M., Naef, D., Santos, N., Udry, S., Burnet, M., and Confino, B. (2000). Extrasolar Planets in the Southern Hemisphere : The CORALIE Survey. In Bergeron, J. and Renzini, A., editors, *From Extrasolar Planets to Cosmology : The VLT Opening Symposium*, page 548.
- Ramírez, I., Meléndez, J., and Asplund, M. (2009). Accurate abundance patterns of solar twins and analogs. Does the anomalous solar chemical composition come from planet formation ? *A&A*, 508 :L17–L20.

- Ramírez, I., Meléndez, J., Cornejo, D., Roederer, I. U., and Fish, J. R. (2011). Elemental Abundance Differences in the 16 Cygni Binary System : A Signature of Gas Giant Planet Formation ? *ApJ*, 740 :76.
- Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., Appourchaux, T., Benz, W., Brandeker, A., Christensen-Dalsgaard, J., Deleuil, M., Gizon, L., Goupil, M.-J., Güdel, M., Janot-Pacheco, E., Mas-Hesse, M., Pagano, I., Piotto, G., Pollacco, D., Santos, C., Smith, A., Suárez, J.-C., Szabó, R., Udry, S., Adibekyan, V., Alibert, Y., Almenara, J.-M., Amaro-Seoane, P., Eiff, M. A.-v., Asplund, M., Antonello, E., Barnes, S., Baudin, F., Belkacem, K., Bergemann, M., Bihain, G., Birch, A. C., Bonfils, X., Boisse, I., Bonomo, A. S., Borsa, F., Brandão, I. M., Brocato, E., Brun, S., Burleigh, M., Burston, R., Cabrera, J., Cassisi, S., Chaplin, W., Charpinet, S., Chiappini, C., Church, R. P., Csizmadia, S., Cunha, M., Damasso, M., Davies, M. B., Deeg, H. J., Díaz, R. F., Dreizler, S., Dreyer, C., Eggenberger, P., Ehrenreich, D., Eigmüller, P., Erikson, A., Farmer, R., Feltzing, S., de Oliveira Fialho, F., Figueira, P., Forveille, T., Fridlund, M., García, R. A., Giommi, P., Giuffrida, G., Godolt, M., Gomes da Silva, J., Granzer, T., Grenfell, J. L., Grottsch-Noels, A., Günther, E., Haswell, C. A., Hatzes, A. P., Hébrard, G., Hekker, S., Helled, R., Heng, K., Jenkins, J. M., Johansen, A., Khodachenko, M. L., Kislyakova, K. G., Kley, W., Kolb, U., Krivova, N., Kupka, F., Lammer, H., Lanza, A. F., Lebreton, Y., Magrin, D., Marcos-Arenal, P., Marrese, P. M., Marques, J. P., Martins, J., Mathis, S., Mathur, S., Messina, S., Miglio, A., Montalbán, J., Montalto, M., Monteiro, M. J. P. F. G., Moradi, H., Moravveji, E., Mordasini, C., Morel, T., Mortier, A., Nascimbeni, V., Nelson, R. P., Nielsen, M. B., Noack, L., Norton, A. J., Ofir, A., Oshagh, M., Ouazzani, R.-M., Pápics, P., Parro, V. C., Petit, P., Plez, B., Poretti, E., Quirrenbach, A., Ragazzoni, R., Raimondo, G., Rainer, M., Reese, D. R., Redmer, R., Reffert, S., Rojas-Ayala, B., Roxburgh, I. W., Salmon, S., Santerne, A., Schneider, J., Schou, J., Schuh, S., Schunker, H., Silva-Valio, A., Silvotti, R., Skillen, I., Snellen, I., Sohl, F., Sousa, S. G., Sozzetti, A., Stello, D., Strassmeier, K. G., Švanda, M., Szabó, G. M., Tkachenko, A., Valencia, D., Van Grootel, V., Vauclair, S. D., Ventura, P., Wagner, F. W., Walton, N. A., Weingrill, J., Werner, S. C., Wheatley, P. J., and Zwintz, K. (2014). The PLATO 2.0 mission. *Experimental Astronomy*, 38 :249–330.
- Richard, O., Michaud, G., and Richer, J. (2001). Iron Convection Zones in B, A, and F Stars. *ApJ*, 558 :377–391.
- Richard, O., Michaud, G., and Richer, J. (2002a). Models of Metal-poor Stars with Gravitational Settling and Radiative Accelerations. III. Metallicity Dependence. *ApJ*, 580 :1100–1117.
- Richard, O., Michaud, G., and Richer, J. (2005). Implications of WMAP Observations on Li Abundance and Stellar Evolution Models. *ApJ*, 619 :538–548.
- Richard, O., Michaud, G., Richer, J., Turcotte, S., Turck-Chièze, S., and Vandenberg, D. A. (2002b). Models of Metal-poor Stars with Gravitational Settling and Radiative Accelerations. I. Evolution and Abundance Anomalies. *ApJ*, 568 :979–997.
- Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C., and Dziembowski, W. A. (1996). New solar models including helioseismological constraints and light-element depletion. *A&A*, 312 :1000–1011.
- Richer, J., Michaud, G., Rogers, F., Iglesias, C., Turcotte, S., and LeBlanc, F. (1998). Radiative Accelerations for Evolutionary Model Calculations. *ApJ*, 492 :833–842.

- Richer, J., Michaud, G., and Turcotte, S. (2000). The Evolution of AMFM Stars, Abundance Anomalies, and Turbulent Transport. *ApJ*, 529 :338–356.
- Rogers, F. J. and Nayfonov, A. (2002). Updated and Expanded OPAL Equation-of-State Tables : Implications for Helioseismology. *ApJ*, 576 :1064–1074.
- Ryan, S. G., Beers, T. C., Kajino, T., and Rosolankova, K. (2001). Ultra-Lithium-deficient Halo Stars and Blue Stragglers : A Common Origin ? *ApJ*, 547 :231–239.
- Santos, N. C., Israelian, G., and Mayor, M. (2001). The metal-rich nature of stars with planets. *A&A*, 373 :1019–1031.
- Santos, N. C., Israelian, G., and Mayor, M. (2004). Spectroscopic [Fe/H] for 98 extra-solar planet-host stars. Exploring the probability of planet formation. *A&A*, 415 :1153–1166.
- Santos, N. C., Israelian, G., Mayor, M., Rebolo, R., and Udry, S. (2003). Statistical properties of exoplanets. II. Metallicity, orbital parameters, and space velocities. *A&A*, 398 :363–376.
- Sbordone, L., Bonifacio, P., and Caffau, E. (2012). Lithium abundances in extremely metal-poor turn-off stars. *Memorie della Societa Astronomica Italiana Supplementi*, 22 :29.
- Sbordone, L., Bonifacio, P., Caffau, E., Ludwig, H.-G., Behara, N. T., González Hernández, J. I., Steffen, M., Cayrel, R., Freytag, B., van't Veer, C., Molaro, P., Plez, B., Sivarani, T., Spite, M., Spite, F., Beers, T. C., Christlieb, N., François, P., and Hill, V. (2010). The metal-poor end of the Spite plateau. I. Stellar parameters, metallicities, and lithium abundances. *A&A*, 522 :A26.
- Schuler, S. C., Cunha, K., Smith, V. V., Ghezzi, L., King, J. R., Deliyannis, C. P., and Boesgaard, A. M. (2011). Detailed Abundances of the Solar Twins 16 Cygni A and B : Constraining Planet Formation Models. *ApJL*, 737 :L32.
- Seaton, M. J. (1997). Radiative accelerations in stellar envelopes. *MNRAS*, 289 :700–720.
- Seaton, M. J. (2005). Opacity Project data on CD for mean opacities and radiative accelerations. *MNRAS*, 362 :L1–L3.
- Smith, V. V., Cunha, K., and Lazzaro, D. (2001). The Abundance Distribution in the Extrasolar-Planet Host Star HD 19994. *AJ*, 121 :3207–3218.
- Spite, M. and Spite, F. (1982). Lithium abundance at the formation of the Galaxy. *Nature*, 297 :483–485.
- Stancliffe, R. J. (2009). Light element abundances in carbon-enhanced metal-poor stars. *MNRAS*, 394 :1051–1060.
- Stancliffe, R. J. and Glebbeek, E. (2008). Thermohaline mixing and gravitational settling in carbon-enhanced metal-poor stars. *MNRAS*, 389 :1828–1838.
- Stancliffe, R. J., Glebbeek, E., Izzard, R. G., and Pols, O. R. (2007). Carbon-enhanced metal-poor stars and thermohaline mixing. *A&A*, 464 :L57–L60.

- Takeda, Y. and Sadakane, K. (1997). Oxygen  $\lambda 7771\text{--}5$  Triplet in Hyades A-Type Stars : A Quest for the Key to the AM Phenomenon. *PASJ*, 49 :367–382.
- Talon, S. and Charbonnel, C. (2005). Hydrodynamical stellar models including rotation, internal gravity waves, and atomic diffusion. I. Formalism and tests on Pop I dwarfs. *A&A*, 440 :981–994.
- Talon, S., Richard, O., and Michaud, G. (2006). AmFm Stars as a Test of Rotational Mixing Models. *ApJ*, 645 :634–651.
- Théado, S., Alecian, G., LeBlanc, F., and Vauclair, S. (2012). The new Toulouse-Geneva stellar evolution code including radiative accelerations of heavy elements. *A&A*, 546 :A100.
- Théado, S. and Vauclair, S. (2012). Metal-rich Accretion and Thermohaline Instabilities in Exoplanet-host Stars : Consequences on the Light Elements Abundances. *ApJ*, 744 :123.
- Théado, S., Vauclair, S., Alecian, G., and LeBlanc, F. (2009). Influence of Thermohaline Convection on Diffusion-Induced Iron Accumulation in a Stars. *ApJ*, 704 :1262–1273.
- Théado, S., Vauclair, S., Castro, M., Charpinet, S., and Dolez, N. (2005). Asteroseismic tests of element diffusion in solar type stars. *A&A*, 437 :553–560.
- Thompson, I. B., Ivans, I. I., Bisterzo, S., Sneden, C., Gallino, R., Vauclair, S., Burley, G. S., Shectman, S. A., and Preston, G. W. (2008). CS 22964-161 : A Double-lined Carbon- and s-Process-enhanced Metal-poor Binary Star. *ApJ*, 677 :556–571.
- Traxler, A., Garaud, P., and Stellmach, S. (2011). Numerically Determined Transport Laws for Fingering (“Thermohaline”) Convection in Astrophysics. *ApJL*, 728 :L29.
- Tucci Maia, M., Meléndez, J., and Ramírez, I. (2014). High Precision Abundances in the 16 Cyg Binary System : A Signature of the Rocky Core in the Giant Planet. *ApJL*, 790 :L25.
- Turcotte, S., Richer, J., and Michaud, G. (1998a). Consistent Evolution of F Stars : Diffusion, Radiative Accelerations, and Abundance Anomalies. *ApJ*, 504 :559–572.
- Turcotte, S., Richer, J., Michaud, G., Iglesias, C. A., and Rogers, F. J. (1998b). Consistent Solar Evolution Model Including Diffusion and Radiative Acceleration Effects. *ApJ*, 504 :539–558.
- Turner, N. H., ten Brummelaar, T. A., McAlister, H. A., Mason, B. D., Hartkopf, W. I., and Roberts, Jr., L. C. (2001). Search for Faint Companions to Nearby Solar-like Stars using the Adaptive Optics System at Mount Wilson Observatory. *aj*, 121 :3254–3258.
- Ulrich, R. K. (1972). Thermohaline Convection in Stellar Interiors. *ApJ*, 172 :165.
- Valenti, J. A. and Fischer, D. A. (2005). Spectroscopic Properties of Cool Stars (SPOCS). I. 1040 F, G, and K Dwarfs from Keck, Lick, and AAT Planet Search Programs. *ApJ*, 159 :141–166.
- van Belle, G. T. and von Braun, K. (2009). Directly Determined Linear Radii and Effective Temperatures of Exoplanet Host Stars. *ApJ*, 694 :1085–1098.
- van Leeuwen, F. (2007). Validation of the new Hipparcos reduction. *A&A*, 474 :653–664.

- VandenBerg, D. A., Richard, O., Michaud, G., and Richer, J. (2002). Models of Metal-poor Stars with Gravitational Settling and Radiative Accelerations. II. The Age of the Oldest Stars. *ApJ*, 571 :487–500.
- Vauclair, S. (1988). Lithium nuclear destruction in stellar outer layers - A consistent theoretical view of the characteristic features observed in young and old stars. *ApJ*, 335 :971–975.
- Vauclair, S. (2004). Metallic Fingers and Metallicity Excess in Exoplanets' Host Stars : The Accretion Hypothesis Revisited. *ApJ*, 605 :874–879.
- Vauclair, S. and Charbonnel, C. (1995). Influence of a stellar wind on the lithium depletion in halo stars : a new step towards the lithium primordial abundance. *A&A*, 295 :715.
- Vauclair, S. and Charbonnel, C. (1998). Element Segregation in Low-Metallicity Stars and the Primordial Lithium Abundance. *ApJ*, 502 :372–377.
- Vauclair, S. and Reeves, H. (1972). Spallation Processes in Stellar Surfaces. *A&A*, 18 :215.
- Vauclair, S. and Théado, S. (2012). Thermohaline Instabilities inside Stars : A Synthetic Study Including External Turbulence and Radiative Levitation. *ApJ*, 753 :49.
- Vennes, S., Kawka, A., and Németh, P. (2010). The heavily polluted atmosphere of the DAZ white dwarf GALEX J193156.8+011745. *MNRAS*, 404 :L40–L44.
- Verma, K., Antia, H. M., Basu, S., and Mazumdar, A. (2014). A Theoretical Study of Acoustic Glitches in Low-mass Main-sequence Stars. *ApJ*, 794 :114.
- Vick, M., Michaud, G., Richer, J., and Richard, O. (2010). AmFm and lithium gap stars. Stellar evolution models with mass loss. *A&A*, 521 :A62.
- Vick, M., Michaud, G., Richer, J., and Richard, O. (2013). Population II stars and the Spite plateau. Stellar evolution models with mass loss. *A&A*, 552 :A131.
- Watson, W. D. (1970). Element Diffusion and Abundance Anomalies in Metallic a Stars. *ApJL*, 162 :L45.
- Watson, W. D. (1971). Particle Diffusion in Stars Having Shallow Convective Envelopes. *A&A*, 13 :263.
- White, T. R., Huber, D., Maestro, V., Bedding, T. R., Ireland, M. J., Baron, F., Boyajian, T. S., Che, X., Monnier, J. D., Pope, B. J. S., Roettenbacher, R. M., Stello, D., Tuthill, P. G., Farrington, C. D., Goldfinger, P. J., McAlister, H. A., Schaefer, G. H., Sturmann, J., Sturmann, L., ten Brummelaar, T. A., and Turner, N. H. (2013). Interferometric radii of bright Kepler stars with the CHARA Array :  $\theta$  Cygni and 16 Cygni A and B. *MNRAS*, 433 :1262–1270.
- Xu, S. and Jura, M. (2012). Spitzer Observations of White Dwarfs : The Missing Planetary Debris around DZ Stars. *ApJ*, 745 :88.
- Zahn, J.-P. (1992). Circulation and turbulence in rotating stars. *A&A*, 265 :115–132.

Zemskova, V., Garaud, P., Deal, M., and Vauclair, S. (2014). Fingering Convection Induced by Atomic Diffusion in Stars : 3D Numerical Computations and Applications to Stellar Models. *ApJ*, 795 :118.

Zuckerman, B., Koester, D., Dufour, P., Melis, C., Klein, B., and Jura, M. (2011). An Aluminum/Calcium-rich, Iron-poor, White Dwarf Star : Evidence for an Extrasolar Planetary Lithosphere ? *ApJ*, 739 :101.

Zuckerman, B., Koester, D., Melis, C., Hansen, B. M., and Jura, M. (2007). The Chemical Composition of an Extrasolar Minor Planet. *ApJ*, 671 :872–877.