



HAL
open science

Formes quadratiques décalées et déformations

Samuel Bach

► **To cite this version:**

Samuel Bach. Formes quadratiques décalées et déformations. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Montpellier, 2017. Français. NNT : 2017MONT013 . tel-01878208

HAL Id: tel-01878208

<https://theses.hal.science/tel-01878208>

Submitted on 20 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivré par l'Université de Montpellier

Préparée au sein de l'école doctorale
Information, Structures, Systèmes

Et de l'unité de recherche
Institut Montpellierain Alexander Grothendieck

Spécialité: **Mathématiques et Modélisation**

Présentée par **Samuel Bach**

**Formes quadratiques décalées et
déformations**

Soutenue le 28 juin 2017 devant le jury composé de :

M Damien CALAQUE	Université de Montpellier	Directeur
M Grégory GINOT	Université Pierre et Marie Curie	Examineur
M Carlos SIMPSON	Université Nice Sophia Antipolis	Président du jury
M Bertrand TOËN	CNRS & Université Paul Sabatier	Co-Directeur



Abstract

The classical L -theory of a commutative ring is built from the quadratic forms over this ring modulo a lagrangian equivalence relation ([23]). We build the derived L -theory from the n -shifted quadratic forms on a derived commutative ring ([32]). We show that forms which admit a lagrangian have a standard form. We prove surgery results for this derived L -theory, which allows to reduce shifted quadratic forms to equivalent simpler forms. We compare classical and derived L -theory.

We define a derived stack of shifted quadratic forms and a derived stack of lagrangians in a form, which are locally algebraic of finite presentation. We compute tangent complexes and find smooth points. We prove a rigidity result for L -theory : the L -theory of a commutative ring is isomorphic to that of any henselian neighbourhood of this ring.

Finally, we define the Clifford algebra of a n -shifted quadratic form, which is a deformation as \mathbb{E}_k -algebra of a symmetric algebra. We prove a weakening of the Azumaya property for these algebras, in the case $n = 0$, which we call *semi-Azumaya*. This property expresses the triviality of the Hochschild homology of the Serre bimodule.

Résumé

La L -théorie classique d'un anneau commutatif est construite à partir des formes quadratiques sur cet anneau modulo une relation d'équivalence lagrangienne ([23]). Nous construisons la L -théorie dérivée, à partir des formes quadratiques n -décalées sur un anneau commutatif dérivé ([32]). Nous montrons que les formes n -décalées qui admettent un lagrangien possèdent une forme standard. Nous montrons des résultats de chirurgie pour la L -théorie dérivée, qui permettent de réduire une forme quadratique décalée en une forme plus simple équivalente. On compare la L -théorie dérivée avec la L -théorie classique.

On définit un champ dérivé des formes quadratiques dérivées, et un champ dérivé des lagrangiens dans une forme, qui sont localement algébriques de présentation finie. On calcule les complexes tangents, et on trouve des points lisses. On montre un résultat de rigidité pour la L -théorie : la L -théorie d'un anneau commutatif est isomorphe à celle d'un voisinage hensélien de cet anneau.

Enfin, on définit l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique n -décalée, qui est une déformation d'une algèbre symétrique en tant qu' \mathbb{E}_k -algèbre. On montre un affaiblissement de la propriété d'Azumaya pour ces algèbres, dans le cas d'un décalage nul $n = 0$, qu'on appelle *semi-Azumaya*. Cette propriété exprime la trivialité de l'homologie de Hochschild du bimodule de Serre.

Introduction

La notion de dualité est omniprésente en mathématiques, que ce soit la dualité de Poincaré, la dualité de Koszul, l'adjonction des foncteurs ou même la transformée de Fourier. Une situation de dualité consiste en général en la donnée de paires d'objets « duaux » et d'une structure qui les relie. Les formes bilinéaires symétriques (ou antisymétriques) sur un module M au-dessus d'un anneau commutatif A donnent un des contextes les plus simples de dualité : elles consistent en la donnée d'un morphisme de M vers son dual $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$, vérifiant une propriété de symétrie. De façon équivalente, elles consistent en la donnée d'un morphisme symétrique de $M \otimes_A M$ vers A , encore appelé appariement ou accouplement.

De manière parfois surprenante, cette simple notion de forme bilinéaire symétrique apparaît dans de nombreux domaines mathématiques, en théorie des nombres bien sûr ([24]), mais aussi pour la classification des variétés topologiques avec la théorie de la chirurgie et la L -théorie ([22]), dans les procédés de quantification par déformation ([4]), ou pour calculer les groupes d'homotopie motiviques du spectre en sphère ([19]).

Dans cette thèse, nous nous intéresserons aux formes bilinéaires symétriques, que nous appellerons plus volontiers formes quadratiques (sous l'hypothèse de caractéristique différente de 2), dans le cadre de la géométrie algébrique dérivée ([28], [29], [14]). Une des idées fondamentales du point de vue dérivé est qu'une égalité entre deux objets doit être vue comme une homotopie qui relie ces objets plutôt que comme une simple propriété. C'est la philosophie développée notamment dans la théorie homotopique des types ([31]). Ainsi, on ne s'intéresse pas uniquement au fait que deux objets soient égaux, mais aussi à la manière dont ils le sont, si bien que les structures étudiées conservent en mémoire les différentes preuves d'égalité entre deux objets. Ce point de vue est récursif, car différentes preuves d'égalité peuvent être elles-mêmes équivalentes, et ainsi de suite. Les objets considérés dans le monde dérivé sont donc la plupart du temps des objets simpliciaux, ou des complexes, qui encodent au niveau 0 les objets de base étudiés, au niveau 1 les identifications entre objets du niveau 0, au niveau 2 les équivalences entre identifications et ainsi de suite.

Un des intérêts majeurs de cette approche est de permettre de s'affranchir des problèmes de singularité, qui sont liés à la présence d'« auto-identifications » d'un élément. Typiquement, considérons un objet X dont les éléments satisfont un ensemble d'équations E . Dans la construction classique d'un quotient, on rajoute des équations supplémentaires E' à satisfaire. Le nombre d'équations satisfaites par un élément peut alors varier lorsque $E \cap E'$ est non vide ; les éléments satisfaisant moins d'équations seront alors des points singuliers. On peut rattraper ces singularités en comptant les équations de $E \cap E'$ comme des auto-identifications des éléments de X . Le nombre d'équations satisfaites par un élément, en tenant

compte des auto-équations, est alors constant.

Pour construire un quotient dérivé, on se contente de relier les éléments à identifier par des arêtes. Les points singuliers dans la construction classique correspondent aux points munis d'arêtes circulaires. Les constructions dérivées (habituellement notées avec le symbole h) sont plus lourdes que leurs analogues classiques car elles conservent plus d'informations, mais elles permettent de mener des calculs en l'absence d'hypothèses de régularité (morphisme lisse, intersection transverse, module plat, etc.).

L'analogue dérivé de la notion de forme quadratique est celle de forme quadratique n -décalée pour $n \in \mathbb{Z}$ qui consiste en la donnée d'un morphisme symétrique de $M \otimes_A^h M$ vers $A[n]$, pour M un module dérivé sur une algèbre commutative dérivée A . On obtient l'analogue dérivé des formes antisymétriques en considérant des morphismes antisymétriques de $M \otimes_A^h M$ vers $A[n]$ ou, de manière équivalente en considérant des formes quadratiques sur $M[1]$. Dans l'article ([27]), les auteurs définissent la notion de forme symplectique n -décalée sur un champ algébrique dérivé, analogue à la notion classique de variété symplectique. Dans une série d'articles ([3]), Joyce et ses collaborateurs ont construit un faisceau pervers associé à une champ -1 -symplectique. En utilisant la structure -1 -symplectique de l'espace de modules des complexes parfaits sur une variété Calabi-Yau de dimension 3 définie dans ([27]), ils définissent ainsi une catégorification des invariants de Donaldson-Thomas d'une variété Calabi-Yau de dimension 3, ces invariants étant obtenus en prenant la caractéristique d'Euler du faisceau pervers en question. Notre but à plus long terme est de généraliser cette construction, afin notamment de l'étendre à des variétés de dimension supérieures.

Un des ingrédients essentiels de cette construction consiste à donner localement des coordonnées standard pour un champ symplectique, à la manière du lemme de Darboux en géométrie symplectique usuelle. La forme standard pour un complexe symplectique (M, w) est particulièrement simple si la forme symplectique possède un lagrangien, c'est-à-dire s'il existe un sous-complexe $N \rightarrow M$ tel que M soit essentiellement $N \oplus N^*[n]$ et w soit induite par l'évaluation $N \otimes N^*[n] \rightarrow A[n]$. Nous nous intéressons donc à l'existence de lagrangiens pour une forme donnée. En particulier, étant donné un lagrangien défini en un point, on cherche à étendre ce lagrangien sur un voisinage hensélien de ce point. Le formalisme dérivé nous permet d'utiliser un argument de théorie des déformations. Pour ce faire, on construit l'espace des modules dérivé des lagrangiens dans une forme quadratique donnée. Le formalisme dérivé nous permet de calculer son complexe tangent, pour trouver des points lisses. En ces points lisses, un argument de théorie des déformations nous permet d'étendre le lagrangien sur un voisinage hensélien.

L'obstruction à l'existence de lagrangiens est calculée par la classe en L -théorie de la forme considérée. Dans le cadre classique, la L -théorie d'un anneau est un

analogue de la K -théorie pour les formes quadratiques. Elle intervient dans le calcul de l'obstruction à ce qu'un CW-complexe soit homotope à une variété différentielle ([22], [23]). Ainsi le premier groupe de L -théorie d'un anneau A est son groupe de Witt $l_0(A) := W(A)$, défini en quotientant l'ensemble des classes d'isomorphismes des formes quadratiques non dégénérées sur des modules projectifs de type fini, muni de la somme directe, par une relation d'équivalence lagrangienne. Concrètement, ce quotient permet de faire en sorte que l'opposé d'un module quadratique (L, q) soit simplement $(L, -q)$. On peut définir aussi des groupes de L -théorie supérieurs, qui permettent de former des suites exactes longues comme en K -théorie.

La définition dérivée de la L -théorie apporte des simplifications substantielles. En effet, les groupes de L -théorie supérieurs $l_n(A)$ sont définis directement comme les groupes de Witt des formes n -décalées. Par ailleurs, la notion dérivée de lagrangien étant plus large que la notion classique, la relation d'équivalence lagrangienne devient plus large et jouit de meilleures propriétés calculatoires. Enfin, notre théorème d'extension des lagrangiens permet de dire que si la classe en L -théorie d'une forme quadratique est nulle en un point, elle est nulle sur un voisinage hensélien de ce point, ce qui se traduit par un théorème de rigidité pour la L -théorie.

Une forme -1 -symplectique sur un champ dérivé permet d'écrire localement ce champ dérivé comme le lieu critique d'un potentiel. Les faisceaux pervers construits dans l'article ([3]) sont les faisceaux pervers de cycles évanescents de ces potentiels, qui viennent mesurer la singularité de ce potentiel. Un théorème d'Orlov ([20]), récemment étendu ([2]), indique une autre manière de mesurer cette singularité en considérant sa dg -catégorie de factorisations matricielles, dont les objets sont des dg -modules $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradués « tordus », c'est-à-dire dont le carré de la différentielle est le potentiel. Une piste pour étendre la construction de Joyce serait de considérer ces dg -catégories plutôt que des faisceaux pervers, comme catégorification des invariants de Donaldson-Thomas. On souhaite notamment les définir en présence de formes k -symplectiques pour $k \neq -1$, ce qui nécessite de clarifier la notion de factorisation matricielle d'un potentiel dérivé.

D'après une construction de Preygel ([21]), la catégorie des factorisations matricielles d'un potentiel quadratique q sur un module M est équivalente à la catégorie dérivée de son algèbre de Clifford $\text{Cliff}(M)$, qui est une algèbre associative obtenue par déformation de l'algèbre symétrique sur $M[-1]$. Plus précisément, au-dessus d'un anneau de caractéristique nulle k , on note β une variable de degré 2, alors $\text{Cliff}(M)$ est obtenue en quotientant l'algèbre tensorielle graduée sur $M[-1]$ au-dessus de $k[\beta, \beta^{-1}]$ par la relation $[x, y] = \beta q(x, y)$ où $[x, y]$ est le crochet de Lie de l'algèbre graduée. Si au lieu d'inverser β , on l'annule, on retrouve bien l'algèbre symétrique, donc $\text{Cliff}(M)$ est bel et bien une déformation de $\text{Sym}_{k[\beta^\pm]}(M[-1])[-1]$ en tant qu'algèbre associative. On souhaite généraliser cette construction pour dé-

finir l'algèbre de Clifford d'une forme n -décalée, dans l'espoir de comprendre les caractéristiques d'une hypothétique catégorie des factorisations matricielles d'un potentiel quadratique n -décalé, à travers la catégorie dérivée de cette algèbre de Clifford.

La construction classique de l'algèbre de Clifford peut être présentée d'une autre manière. En effet, le décalage de -1 munit le module gradué $M[-1]$ d'une forme -2 -symplectique. On lui associe son *algèbre de Lie de Heisenberg*, qui est la plus petite algèbre de Lie graduée contenant $M[-1]$ et l'anneau de base tel que le crochet soit donné par la forme symplectique. L'algèbre de Clifford est l'algèbre enveloppante de cette algèbre de Lie. C'est en effet l'algèbre associative universelle de commutateur donné par la forme.

Cette construction garde un sens pour des dg -modules quadratiques, mais aussi pour des décalages $n < 0$. Si (M, q) est un complexe quadratique n -décalé, on obtient alors une $-n+1$ -*algèbre de Lie de Heisenberg*, qui possède une \mathbb{E}_{-n+1} -algèbre enveloppante, qu'on définit comme étant la \mathbb{E}_{-n+1} -algèbre de Clifford du complexe quadratique (M, q) . Cette algèbre est une déformation de l'algèbre symétrique sur $M[-n-1]$ en tant que E_{-n+1} -algèbres.

Si on considère des complexes antisymétriques au lieu de complexes quadratiques, on peut faire la même construction, sans le décalage de -1 , ce qui permet de définir des E_{-n} -*algèbres de Weyl*, qui sont aussi des déformations d'une algèbre symétrique. On voit ainsi que la différence entre algèbre de Weyl et algèbre de Clifford est une simple affaire de décalage de -1 , qui entraîne dans le cas des algèbres de Clifford une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduation.

Une algèbre de Clifford classique est toujours une algèbre d'Azumaya. Cette notion est similaire à l'inversibilité d'un dg -module, dans le contexte des algèbres associatives. Ce n'est plus le cas pour une algèbre de Clifford dérivée, même pour une forme non décalée, si le complexe quadratique n'est pas concentré en degrés pairs. Néanmoins, on conserve une propriété de « semi-inversibilité ».

Plan de la thèse

La première partie de cette thèse est consacrée à la définition des formes quadratiques n -décalées et leurs lagrangiens (voir aussi [32], [15], [1]), ainsi qu'à l'exposition de ce qu'est la L -théorie d'un anneau dérivé.

Nous montrons notamment que si un complexe quadratique (E, q) admet un lagrangien L , le complexe (E, q) est isométrique à une forme standard.

Proposition (forme standard associée à un lagrangien). *Soit (E, q) un complexe quadratique cofibrant, $L \xrightarrow{i} E$ un morphisme de complexes avec L parfait, une homotopie à zéro h pour la restriction de q à L donnant une structure lagrangienne,*

alors il existe $f : L^*[n-1] \rightarrow L$ une forme quadratique $n-1$ -décalée sur $L^*[n-1]$ telle que (E, q) soit isométrique au complexe quadratique standard associé à f .

Nous utilisons ce résultat pour trouver des lagrangiens bornés inférieurement dans le cas d'un anneau classique.

Proposition. *Pour $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$, tout complexe quadratique n -décalé (E, q) qui admet un lagrangien en admet un concentré en degrés supérieurs ou égaux à $-k$.*

Ces lagrangiens nous seront utiles pour démontrer notre théorème de rigidité.

Nous définissons ensuite la L -théorie d'un anneau dérivé, dont le n -ème groupe est le groupe de Witt des formes quadratique n -décalées. La L -théorie d'une catégorie triangulée avec dualité a été définie par Balmer ([1]). Nos constructions sont similaires, mais nous utilisons la structure d'infini-catégorie stable de la catégorie dérivée d'un anneau dérivé, et non uniquement la structure triangulée de sa catégorie homotopique, ce qui a pour effet de permettre des preuves substantiellement plus courtes. Voir aussi Lurie ([15]) pour des notes de cours sur la L -théorie d'une infini-catégorie stable munie d'un foncteur quadratique.

Nous montrons des résultats de chirurgie pour cette L -théorie.

Proposition. *Sur un anneau non dérivé, tout complexe quadratique n -décalé non dégénéré est cobordant à un complexe quadratique non dégénéré concentré en degré $-l$ si $n = 2l$ ou en degrés $-l$ et $-l - 1$ si $n = 2l + 1$.*

Enfin nous utilisons ce résultat de chirurgie pour identifier la L -théorie classique d'un anneau commutatif non dérivé avec sa L -théorie dérivée. On peut donc utiliser les constructions dérivées pour étudier la L -théorie classique.

Proposition. *Les groupes pairs de L -théorie dérivée d'un anneau classique avec ses groupes pairs de L -théorie classique.*

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à la construction du champ dérivé des lagrangiens dans une forme donnée, sa *Grassmannienne lagrangienne dérivée*, puis au calcul de son complexe tangent.

Théorème. *L'espace des modules des lagrangiens d'une forme quadratique n -décalée est un champ algébrique dérivé localement de présentation finie. Son complexe tangent en un lagrangien est le complexe des formes antisymétriques n -décalées définies sur ce lagrangien.*

On utilise ce calcul ainsi qu'un résultat de théorie des déformations pour montrer notre théorème de rigidité.

Théorème. Soit A un anneau excellent, (A, I) une paire hensélienne, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme de réduction $l_n(A) \rightarrow l_n(A/I)$ est injectif. Il est par ailleurs bijectif si n est pair.

Jardine montre un théorème de rigidité semblable mais pour la L -théorie à coefficients finis ([13]).

Nous définissons dans la troisième partie la \mathbb{E}_{-n+1} -algèbre de Clifford d'un complexe quadratique n -décalé E, q pour $n \leq 0$, en considérant la \mathbb{E}_{-n+1} -algèbre enveloppante de la $-n + 1$ - dg -Lie algèbre de Heisenberg du complexe antisymétrique $(E[-1], q[-2])$. Les algèbres de Clifford sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduées, donc on les considère comme $k[\beta\pm]$ -algèbres, où β est de degré 2.

Définition. Soit $n \leq 0$, (E, q) un complexe quadratique n -décalé, on définit le foncteur \mathbb{E}_{-n+1} -algèbre de Clifford de (E, q) comme :

$$\text{Cliff}(E) = U^{\mathbb{E}_{-n+1}}(\mathbb{H}_{-n+1}(E[-1])) \otimes_{k[\beta]} k[\beta, \beta^{-1}]$$

On montre que cette algèbre possède une propriété qu'on appelle « *semi-Azumaya* ».

Définition. Soit A une dg -algèbre sur k . Son bimodule de Serre est le A -bimodule $A^! := A^* = \underline{\text{Hom}}(A, k)$. On dit que A est *semi-Azumaya* si le complexe d'homologie de Hochschild de $A^!$ est trivial : $A^! \otimes_{A \otimes_k A^{op}} A \simeq k$.

Théorème. Soit (E, q) un complexe quadratique 0-décalé non dégénéré. Alors son algèbre de Clifford $\text{Cliff}(E)$ est *semi-Azumaya* au-dessus de $k[\beta\pm]$.

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Bertrand Toën, pour ses qualités exceptionnelles de mathématicien, son optimisme et sa gentillesse sans bornes, et les belles mathématiques auxquelles il m'a initié. Ce fût une grande chance de l'avoir pour directeur. Je remercie également Damien Calaque pour son enthousiasme et sa disponibilité, surtout en période critique. Je remercie mes rapporteurs, Carlos Simpson et Nikita Markaryan, ainsi que Grégory Ginot, pour le temps précieux qu'ils ont pu m'accorder.

Merci à Benjamin, qui a eu la patience de répondre aux mêmes questions idiotes de façon répétée, à Marco avec qui j'ai partagé une trop brève colocation et trop peu de bières. Mille mercis à Jorge, qui a supporté la cohabitation avec moi en fin de thèse et a été d'une aide précieuse. Merci à Valerio et sa bonne humeur italienne.

Au cours de ces quatre années, à Montpellier puis à Toulouse, j'ai logé dans de nombreuses conditions. Je remercie très chaleureusement les personnes qui m'ont généreusement accueillies lorsque j'étais dans le besoin, notamment Gautier et sa bienveillance constante, Yannick et Frédéric pour leur indéfectible soutien, Marc et Marion pour leur présence chaleureuse. Marion et Coralie B furent parmi les plus belles rencontres de mon séjour montpelliérain. Je remercie aussi Quentin pour les nombreux services qu'il m'a rendus, ainsi que Coralie M.

Merci à Léon d'exister, merci à mes parents de m'avoir permis d'exister, merci à Gilbert et Emmanuel.

Table des matières

1	Formes quadratiques décalées	11
1.1	Complexes quadratiques	11
1.1.1	Le foncteur Sym_A^2	12
1.1.2	Formes quadratiques décalées	14
1.2	Lagrangiens	16
1.2.1	Définitions	16
1.2.2	Formes standards	18
1.2.3	Lagrangiens bornés inférieurement	20
1.2.4	Existence de lagrangiens lisses	22
2	L-théorie dérivée	22
2.1	La relation de cobordisme lagrangien	23
2.2	Groupes de L-théorie	24
2.3	Chirurgie	25
2.3.1	Définition	25
2.4	Chirurgie sous le degré moitié	27
2.5	Comparaison avec la L-théorie classique	30
3	Champs quadratiques et lagrangiens	31
3.1	Le champ des complexes parfaits	32
3.1.1	Définition	32
3.2	Le champ des morphismes de complexes parfaits	32
3.2.1	Définition	32
3.2.2	Complexes et morphismes tangents	33
3.3	Le champ des complexes quadratiques n -décalés	34
3.3.1	Complexe tangent	35
3.4	Le champ des sous-complexes	36
3.4.1	Complexe tangent relatif	36
3.5	Le champ des sous-complexes isotropes	37
3.5.1	Le morphisme de restriction de la forme à un sous-complexe	37
3.5.2	Le morphisme tangent au morphisme de restriction	38
3.5.3	Définition du champ des sous-complexes isotropes	40
3.5.4	Complexe tangent relatif	42
3.6	Le champ des sous-complexes lagrangiens	45
3.6.1	Le complexe tangent relatif du champ des lagrangiens	45
3.7	Application à la rigidité	46

4 Algèbres de Clifford décalées	47
4.1 Rappels sur les \mathbb{E}_n -algèbres et les n -Lie algèbres	47
4.1.1 Opérades et formalité	47
4.1.2 Algèbres enveloppantes	50
4.2 La dg -algèbre de Lie de Heisenberg d'une forme antisymétrique	52
4.3 La \mathbb{E}_{-n+1} -algèbre de Clifford d'une forme quadratique n -décalée	54
4.4 Propriétés de semi-inversibilité	56
4.4.1 Le module des spineurs S	56
4.4.2 Structure de l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique standard 0-décalée	57
4.4.3 Structure des modules S et S^*	59
4.4.4 Semi-équivalence Morita	61
4.4.5 Propriété semi-Azumaya des algèbres de Clifford dérivées	64

Conventions

On travaille sur un anneau simplicial commutatif A contenant un inverse de 2. Un complexe désigne un complexe de cochaînes. Tous les termes utilisés sont à prendre dans leur sens dérivé sauf mention explicite du contraire :

- un module désigne un dg -module
- les limites et colimites sont des limites et colimites homotopiques
- un carré cartésien est un carré cartésien homotopique
- un produit tensoriel est dérivé.
- *fib* (respectivement *cofib*) désigne la fibre (respectivement la cofibre) homotopique d'un morphisme
- si on a un morphisme de module $N \rightarrow M$, on note aussi M/N la cofibre homotopique de ce morphisme

On utilisera les adjectifs « classique », « usuel » ou « strict » pour désigner la notion non dérivée correspondante. En pratique, on considérera des complexes cofibrants donc il n'y aura pas lieu de distinguer produit tensoriel classique et produit tensoriel dérivé. On utilisera aussi le terme « complexe » pour un dg -module, si on veut insister sur l'existence d'une structure de complexe, c'est-à-dire un module gradué usuel, muni d'une différentielle de degré 1. Contrairement à l'usage, on appelle sous-complexe d'un complexe M la donnée d'un morphisme de complexes $N \rightarrow M$, sans hypothèse d'injectivité.

Soit X un objet simplicial abélien, $N(X)$ désigne le complexe normalisé de X . L'anneau A étant simplicial, un A -module désigne à proprement parler un $N(A)$ -module. Si on considère A comme un A -module, on parle en réalité de $N(A)$. Ainsi, on considérera des formes à valeurs dans $A[n]$, ce qui est un abus de langage pour désigner le dg -module $N(A)[n]$.

Si M est un module (donc un dg -module dans notre terminologie), pour $m \in M$, la notation $|m|$ sous-entend que m est un élément homogène et désigne son degré.

On considère la catégorie de modèle des A - dg -modules munie de la structure projective standard. Les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes de complexes et les fibrations sont les épimorphismes niveau par niveau. Dans ce texte, équivalence, équivalence faible et quasi-isomorphisme sont des synonymes.

Soit Q un foncteur de remplacement cofibrant dans la catégorie de modèles des A -modules. Le produit tensoriel de complexes est un bifoncteur

$$\begin{array}{ccc} A - mod \times A - mod & \xrightarrow{\otimes} & A - mod \\ (M, N) & \longmapsto & M \otimes_A N \end{array} .$$

Le produit tensoriel avec un objet cofibrant préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques, on peut donc le dériver. On définit le produit tensoriel dérivé par $M \otimes_A^{\mathbb{L}} N := Q(M) \otimes_A Q(N)$. Il est bien défini à homotopie près.

Si M et N sont deux A -modules, et M est cofibrant, $\text{Hom}(M, N)$ désigne le $\pi_0(A)$ -module classique des morphismes de complexes de M dans N , $\underline{\text{Hom}}(M, N)$ désigne le A -module des morphismes de M dans N . On a par définition

$$\underline{\text{Hom}}(M, N)_n = \text{Hom}(M, N[-n])$$

en tant que module gradué et si $h \in \underline{\text{Hom}}((, M), N)_n$, $df = d_N \circ h - (-1)^n h \circ d_M$. En particulier, $\text{Hom}(M, N)$ est le module des 0-cycles de $\underline{\text{Hom}}(M, N)$, et si $f \in \text{Hom}(M, N)$, une homotopie à zéro pour f est la donnée de $h \in \underline{\text{Hom}}(M, N)_{-1}$ tel que $f = d_N \circ h + h \circ d_M = dh$. En général, si M n'est pas cofibrant, on applique les constructions précédentes à $Q(M)$. Elles sont bien définies à homotopie près.

L'association

$$\begin{array}{ccc} A - mod \times A - mod & \xrightarrow{\underline{\text{Hom}}(\cdot, \cdot)} & A - mod \\ (M, N) & \longmapsto & \underline{\text{Hom}}((, M), N) \end{array}$$

est fonctorielle.

1 Formes quadratiques décalées

1.1 Complexes quadratiques

Une forme quadratique classique est une forme bilinéaire symétrique définie sur un module classique et à valeurs dans l'anneau de base. Un aspect crucial de cette définition est le fait que le codomaine est inversible en tant que module. On peut généraliser directement cette notion en considérant des formes bilinéaires

symétriques sur un dg -module, à valeurs dans l'anneau de base A vu comme A - dg -module. On considérera plus généralement des *formes quadratiques n -décalées*, qui sont des formes bilinéaires symétriques à valeurs dans $A[n]$. C'est encore un dg -module inversible, d'inverse $A[-n]$. On pourrait considérer des formes à valeurs dans des dg -modules inversibles, ce qui nous ne feront pas par souci de simplicité.

Pour « dériver » des notions classiques, on reprend la définition classique en l'appliquant à des objets dérivés. La subtilité vient du fait qu'un objet dérivé est toujours considéré « à homotopie près », il faut donc que nos constructions ne dépendent pas du modèle choisi pour représenter l'objet. Il faut donc prendre des définitions invariantes par homotopie.

Les structures de catégories de modèles considérées nous permettent de donner de telles définitions, en appliquant les constructions classiques à des modèles cofibrants de nos objets. On verra en effet que le résultat obtenu est invariant par homotopie, du moins pour les constructions que nous considérons.

Le foncteur diagonal $A - mod \xrightarrow{\Delta} A - mod \times A - mod$ préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques, donc le foncteur composé

$$\begin{array}{ccc} A - mod & \xrightarrow{T_A^2} & A - mod \\ M & \mapsto & M \otimes_A^{\mathbb{L}} M \end{array}$$

est un foncteur de Quillen.

On a une involution σ du produit tensoriel :

$$\sigma_{M,N} : \begin{array}{ccc} M \otimes_A N & \longrightarrow & N \otimes_A M \\ m \otimes n & \longmapsto & (-1)^{|m||n|} n \otimes m \end{array} .$$

Elle induit une involution naturelle du foncteur T_A^2 par $\sigma_M := \sigma_{M,M} : M \otimes_A^{\mathbb{L}} M \mapsto M \otimes_A^{\mathbb{L}} M$.

1.1.1 Le foncteur Sym_A^2

Définition 1.1 (morphisme bilinéaire non-symétrique). Le complexe des formes bilinéaires (non-symétriques) sur un complexe E à valeurs dans un complexe F est $\underline{\text{Bil}}(E, F) := \underline{\text{Hom}}(E \otimes_A^{\mathbb{L}} E, F)$.

L'ensemble des morphismes bilinéaires (non-symétriques) sur E à valeurs dans F est $\text{Bil}(E, F) := \text{Hom}(E \otimes_A^{\mathbb{L}} E, F)$.

Remarque 1.2. L'association $(M, N) \mapsto \underline{\text{Bil}}(M, N)$ est fonctorielle par composition du foncteur $(M, N) \xrightarrow{T_A^2 \times \text{id}} (M \otimes_A^{\mathbb{L}} M, N)$ et du foncteur $\underline{\text{Hom}}(\cdot, \cdot)$. De même, Bil est fonctoriel en ses deux arguments par composition avec H_0 .

Rappelons qu'on a une adjonction $\underline{\text{Hom}}(E \otimes_A^{\mathbb{L}} F, G) \simeq \underline{\text{Hom}}(E, \underline{\text{Hom}}(F, G))$ pour tous complexes E, F et G . En considérant $F = E$, cette adjonction permet de voir un morphisme bilinéaire $m : E \otimes_A^{\mathbb{L}} E \rightarrow F$ comme un morphisme $E \xrightarrow{m} \underline{\text{Hom}}(E, F)$.^[1] On peut aussi appliquer cette adjonction au morphisme $m \circ \sigma_E$, ce qui donne un deuxième morphisme noté $\sigma(m) : E \rightarrow \underline{\text{Hom}}(E, F)$. On obtient alors une transformation naturelle $\underline{\text{Bil}} \xrightarrow{\sigma} \underline{\text{Bil}}$, et une transformation naturelle sur les ensembles sous-jacents $\text{Bil} \xrightarrow{\sigma} \text{Bil}$.

Un morphisme bilinéaire m est *symétrique* si $m = \sigma(m)$. On dira aussi qu'un morphisme $E \xrightarrow{m} \underline{\text{Hom}}(E, F)$ est symétrique lorsque son adjoint est un morphisme bilinéaire symétrique.

Définition 1.3 (morphisme bilinéaires symétriques). L'ensemble des morphismes bilinéaires symétriques sur un complexe E à valeurs dans un complexe F est $\text{SBil}(E, F) \subset \text{Bil}(E, F)$ le sous-ensemble des morphismes m bilinéaires tels que $m = \sigma(m)$. On définit le complexe des morphismes bilinéaires symétriques sur E à valeurs dans F comme étant le sous-complexe de $\underline{\text{Bil}}(E, F)$ des morphismes symétriques niveau par niveau.

Remarque 1.4. La définition de SBil est fonctorielle car c'est la limite classique du diagramme $\text{Bil} \rightrightarrows_{\sigma}^{\text{id}} \text{Bil}$. De même, $\underline{\text{SBil}}$ est fonctoriel.

On remarque que l'inclusion $\text{SBil}(E, F) \subset \text{Bil}(E, F)$ permet en particulier de considérer l'adjoint d'un morphisme symétrique.

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, les limites et colimites considérées sont usuelles et non homotopiques.

Proposition 1.5 (Définition de Sym_A^2). Soit $E \in A - \text{mod}$ un complexe, alors le foncteur $F \mapsto \underline{\text{SBil}}(E, F)$ est représentable par un complexe $\text{Sym}_A^2 E$.

Démonstration. On a $\underline{\text{SBil}}(E, F) = \lim \underline{\text{Bil}}(E, F) \rightrightarrows \underline{\text{Bil}}(E, F) = \lim \underline{\text{Hom}}(E \otimes_A^{\mathbb{L}} E, F) \rightrightarrows \underline{\text{Hom}}(E \otimes_A^{\mathbb{L}} E, F) = \underline{\text{Hom}}(\text{colim}(E \otimes_A^{\mathbb{L}} E \rightrightarrows E \otimes_A^{\mathbb{L}} E), F)$ donc le foncteur est représentable par le complexe $\text{Sym}_A^2 E = \text{colim}(E \otimes_A^{\mathbb{L}} E \rightrightarrows E \otimes_A^{\mathbb{L}} E)$. \square

Ainsi il est équivalent de donner un morphisme bilinéaire symétrique sur E ou de donner un morphisme de domaine $\text{Sym}_A^2 E$.

On a par définition un morphisme de projection $\pi : M \otimes_A^{\mathbb{L}} M \longrightarrow \text{Sym}_A^2 M$. Il admet une section $s : \text{Sym}_A^2 M \longrightarrow M \otimes_A^{\mathbb{L}} M$ induite par le morphisme symétrique

$$s' : \begin{array}{l} M \otimes_A^{\mathbb{L}} M \longrightarrow M \otimes_A^{\mathbb{L}} M \\ m \otimes n \longmapsto \frac{m \otimes n + (-1)^{|m||n|} n \otimes m}{2} \end{array}$$

1. On garde le même nom pour les deux morphismes adjoints, le contexte permettant de les distinguer.

Définition 1.6 (Morphismes antisymétriques). Soit $E \in A - \text{mod}$, on définit $\Lambda_A^2 E := \text{colim}(E \otimes_A^{\mathbb{L}} E \rightrightarrows_{-\sigma}^{\text{id}} E \otimes_A^{\mathbb{L}} E)$. Un morphisme bilinéaire antisymétrique sur E est par définition un morphisme de domaine $\Lambda_A^2 E$.

On a une suite exacte scindée $\text{Sym}_A^2 E \xrightarrow{s} E \otimes_A^{\mathbb{L}} E \rightarrow \Lambda_A^2 E$. Les foncteurs Sym_A^2 et Λ_A^2 sont des rétracts du foncteur T_A^2 , qui préserve les équivalences faibles, donc ces deux foncteurs préservent aussi les équivalences faibles. Ils prennent leurs valeurs dans des complexes cofibrants.

Remarque 1.7. On a des isomorphismes $\text{Sym}_A^2(E[1]) \simeq \Lambda_A^2(E)[2]$ et $\text{Sym}_A^2(E[2]) \simeq (\text{Sym}_A^2 E)[4]$.

En effet, on a les isomorphismes $E[k] \simeq E \otimes_A^{\mathbb{L}} A[k]$, $\sigma_{A[1]} E : A[1] \otimes_A^{\mathbb{L}} E \simeq E \otimes_A^{\mathbb{L}} A[1]$ et $A[1] \otimes_A^{\mathbb{L}} A[1] \simeq A[2]$. Ils induisent l'isomorphisme

$$\begin{aligned} E[1] \otimes_A^{\mathbb{L}} E[1] &\longrightarrow (E \otimes_A^{\mathbb{L}} E)[2] \\ m \otimes n &\longmapsto (-1)^{|n|-1} m \otimes n \end{aligned}$$

où $|n|$ est le degré dans E (et non $E[1]$) d'un élément homogène.

On vérifie alors que $\sigma_{E[1]}$ est conjugué à $-\sigma_E[2]$ par cet isomorphisme, ce qui induit les isomorphismes ci-dessus.

1.1.2 Formes quadratiques décalées

Une forme quadratique n -décalée est simplement un morphisme bilinéaire symétrique à valeurs dans $A[n]$.

Définition 1.8 (formes quadratiques décalées). L'ensemble des formes quadratiques n -décalées sur un complexe M est $\text{Quad}_n(M) := \text{Sbil}(M, A[n])$.

Le complexe des formes quadratiques n -décalées sur M est

$$\underline{\text{Quad}}_n(M) := \underline{\text{Sbil}}(M, A[n]) = \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_A^2 M, A[n])$$

Par la suite, sans mention explicite d'un entier de décalage, une forme quadratique désignera toujours une forme quadratique n -décalée.

On appelle complexe quadratique un couple (M, q) où M est un A -dg-module et $q \in \underline{\text{Quad}}_n(M)$ une forme quadratique sur M .

Remarque 1.9 (4-périodicité). En utilisant la remarque [1.7](#), on a la périodicité suivante : $\underline{\text{Quad}}_n(M[2]) = \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_A^2(M[2]), A[n]) = \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_A^2 M[4], A[n]) = \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_A^2 M, A[n-4]) = \underline{\text{Quad}}_{n-4}(M)$.

Définition 1.10 (formes non dégénérées). Une forme quadratique $q \in \underline{\text{Quad}}_n(M)$ est *non dégénérée* si son adjoint $M \xrightarrow{q} M^*[n]$ est une équivalence.

On dira qu'une forme est strictement non dégénérée si son adjoint est un isomorphisme. Cette propriété dépend d'un représentant donné du complexe quadratique.

Exemple 1.11. On a un morphisme canonique d'évaluation $M \otimes_A^{\mathbb{L}} M^* \xrightarrow{ev} A$ qui donne un morphisme d'évaluation des formes décalées $M \otimes_A^{\mathbb{L}} M^*[n] \xrightarrow{ev[n]} A[n]$. Le morphisme adjoint correspondant est le morphisme usuel $M \xrightarrow{ev} M^{**}$, avec l'identification $(M^*[n])^*[n] = M^{**}$.

Si M est un complexe, le complexe $M \oplus M^*[n]$ possède une forme quadratique n -décalée canonique, définie par $q(m \otimes m') = q(l \otimes l') = 0$, $q(m \otimes l) = (-1)^{|m||l|} q(l \otimes m) = l(m)$ où $m, m' \in M$, $l, l' \in M^*[n]$ et $l(m)$ est l'évaluation de la forme linéaire décalée l en m .

Le dual décalé de ce complexe est $M^*[n] \oplus M^{**}$, le morphisme adjoint s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{M^*[n]} \\ \text{ev} & 0 \end{pmatrix}$$

où $ev : M \rightarrow M^{**}$ est le morphisme canonique

Si M est un complexe parfait, alors le morphisme d'évaluation est une équivalence, et la forme q est non dégénérée.

Soit M et M' deux complexes. On a $(M \oplus M') \otimes_A^{\mathbb{L}} (M \oplus M') \simeq M \otimes_A^{\mathbb{L}} M \oplus M \otimes_A^{\mathbb{L}} M' \oplus M' \otimes_A^{\mathbb{L}} M \oplus M' \otimes_A^{\mathbb{L}} M'$, et $\sigma_{M \oplus M'}$ se restreint en σ_M (respectivement $\sigma_{M'}$, $\sigma_{M, M'}$ et $\sigma_{M', M}$) sur $M \otimes_A^{\mathbb{L}} M$ (respectivement $M' \otimes_A^{\mathbb{L}} M'$, $M \otimes_A^{\mathbb{L}} M'$ et $M' \otimes_A^{\mathbb{L}} M$). On en déduit $\text{Sym}_A^2(M \oplus M') \simeq \text{Sym}_A^2 M \oplus \text{Sym}_A^2 M' \oplus M \otimes_A M'$, donc il existe un morphisme de projection $\text{Sym}_A^2(M \oplus M') \xrightarrow{\pi_{\perp}} \text{Sym}_A^2 M \oplus \text{Sym}_A^2 M'$.

Définition 1.12 (somme directe orthogonale de deux formes). Soient (M, q) et (M', q') deux complexes quadratiques. On a un complexe quadratique $(M \oplus M', q \perp q')$ défini par la composition $\text{Sym}_A^2(M \oplus M') \xrightarrow{\pi_{\perp}} \text{Sym}_A^2 M \oplus \text{Sym}_A^2 M' \xrightarrow{q \oplus q'} A[n] \oplus A[n] \xrightarrow{\perp} A[n]$.

Définition 1.13 (sous-complexe quadratique). Soit (M, q) un complexe quadratique, $N \xrightarrow{f} M$ un morphisme de complexes, alors on définit la *restriction* $q|_N$ (ou f^*q) de la forme q à N par la composition $\text{Sym}_A^2 N \xrightarrow{\text{Sym}_A^2 f} \text{Sym}_A^2 M \xrightarrow{q} A[n]$.

On appellera $(N, q|_N)$ par abus de langage un sous-complexe quadratique de (M, q) , sans aucune hypothèse d'injectivité sur le morphisme f .

Définition 1.14 (orthogonal d'un sous-complexe). Soit (M, q) un complexe quadratique, pour un sous-complexe quadratique $N \xrightarrow{f} M$, on définit son orthogonal

$$N^{\perp} := \text{fib}(M \xrightarrow{f^*[n] \circ q} N^*[n]),$$

qui est aussi un sous-complexe de M par le morphisme canonique $\text{fib}(f^*[n] \circ q) \xrightarrow{i} M$. On notera h_{N^\perp} l'homotopie canonique de cette fibration homotopique.

1.2 Lagrangiens

On a vu précédemment qu'à tout complexe M on peut associer une forme quadratique standard q définie sur $M \oplus M^*[n]$ grâce au morphisme d'évaluation. Dans ce cas, on a une suite exacte scindée $M \rightarrow M \oplus M^*[n] \rightarrow M^*[n]$ telle que la restriction de la forme à M est nulle. Par ailleurs, la forme q est dans un certain sens complètement déterminée par M . On dira que M est un *lagrangien* pour le complexe quadratique $(M \oplus M^*[n], q)$.

La définition générale de lagrangien pour une forme quadratique généralise cette situation. On montrera notamment qu'une forme quadratique munie d'un lagrangien est isométrique à une forme quadratique standard, déterminée par le lagrangien.

1.2.1 Définitions

Comme dans le cas non dérivé, un sous-complexe isotrope d'un complexe quadratique correspond à un sous-complexe sur lequel la forme est nulle.

Définition 1.15 (Sous-complexes isotropes). Un sous-complexe isotrope d'un complexe quadratique (M, q) est la donnée d'un sous-complexe $N \xrightarrow{f} M$ et de $h \in \underline{\text{Hom}}(N, n)_{-1}$ une homotopie à 0 pour $q|_N$ la restriction de la forme à N , i.e $dh = q$.

Par analogie avec le cas non dérivé, on parlera du sous-complexe isotrope N en omettant parfois de mentionner le morphisme f et l'homotopie à zéro h .

Exemple 1.16. Un sous-complexe isotrope (N, f, h) pour le complexe quadratique nul correspond à la donnée d'un complexe quadratique $n - 1$ -décalé (N, h) .

En effet dans ce cas, f est l'unique morphisme nul, et l'équation $dh = 0$ indique que h est un cocycle de degré -1 dans le complexe $\underline{\text{Hom}}(N, n)$, donc un cocycle de degré 0 dans le complexe $\underline{\text{Hom}}(N, n)[-1] = \underline{\text{Hom}}(N, n - 1)$, c'est-à-dire une forme quadratique $n - 1$ décalée sur N .

Remarquons que la restriction de la forme quadratique $q|_N$ à N est la composition de la suite de morphismes $N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{q} M^*[n] \xrightarrow{f^*[n]} N^*[n]$. L'homotopie h indique que cette composition est homotopiquement nulle, donc elle se factorise par le noyau homotopique de $M^*[n] \xrightarrow{f^*[n]} N^*[n]$.

Considérons la cofibration homotopique $N \xrightarrow{f} M \rightarrow M/N$. En dualisant cette cofibration, on obtient une fibration homotopique $(M/N)^*[n] \rightarrow M^*[n] \xrightarrow{f^*[n]}$

$N^*[n]$, qui nous permet donc d'identifier le noyau homotopique de $f^*[n]$, ce qui nous permet de déduire la remarque suivante.

Remarque 1.17. La donnée d'un sous-complexe isotrope (N, f, h) d'un complexe quadratique (M, q) induit un morphisme $\theta : N \rightarrow (M/N)^*[n]$.

En factorisant plutôt $q|_N$ par la cofibre homotopique de $N \xrightarrow{f} M$, on obtient le morphisme dual $\theta^*[n] : M/N \rightarrow N^*[n]$.

Ce morphisme θ associe simplement à chaque élément $n \in N$ le forme « produit scalaire avec n », bien définie modulo N puisque le « produit scalaire » de deux éléments de N est nul.

Remarque 1.18. Étant donné un sous-complexe isotrope (N, f, h) d'un complexe quadratique (M, q) , et une fibration homotopique $K \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} M$ d'homotopie h' (homotopie à zéro pour $f \circ i$), on peut donner une autre présentation de ce morphisme induit par la condition d'isotropie, qui sera utilisée dans le calcul du complexe tangent relatif du champ des lagrangiens. Considérons la suite de morphismes

$$N \otimes_A K \xrightarrow{id \otimes i} N \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes f} M \otimes_A M \xrightarrow{q} A[n]$$

Le morphisme composé est homotope à zéro de deux manières différentes : la composition des deux premiers morphismes est homotope à zéro par l'homotopie h' , la composition des deux derniers par l'homotopie h . Leur différence est donc un morphisme $\gamma : N \otimes_A K \rightarrow A[n-1]$. Explicitement, $\gamma = q \circ (f \otimes h') - h \circ (id_N \otimes i)$.

Remarque 1.19. Si N est un sous-complexe isotrope, la composition $N \rightarrow M \rightarrow N^*[n]$ est homotope à zéro et se factorise donc par $N^\perp = fib(M \rightarrow N^*[n])$ en $N \xrightarrow{i_h} N^\perp \rightarrow M \rightarrow N^*[n]$.

Définition 1.20 (Lagrangiens). Un *lagrangien* pour un complexe quadratique (M, q) est un sous-complexe isotrope (N, f, h) tel que le morphisme induit $\theta : N \rightarrow (M/N)^*[n]$ soit une équivalence.

Exemple 1.21. Un lagrangien (N, f, h) pour le complexe quadratique nul correspond à la donnée d'un complexe quadratique $n-1$ -décalé non-dégénéré (N, h) . En effet dans ce cas $M/N = 0/N = N[1]$ et le morphisme θ est égal à $h : N \rightarrow N^*[n-1]$.

On voit ainsi que dans le contexte dérivé, la notion de lagrangien est beaucoup plus souple que dans le contexte classique, puisque même l'espace quadratique nul en possède une infinité.

Remarque 1.22. On a pour un sous-complexe isotrope la factorisation $N \xrightarrow{f} M \rightarrow M/N \xrightarrow{\theta^*[n]} N^*[n]$ de la restriction $q|_N$. La condition d'être lagrangien indique que

$\theta^*[n]$ soit une équivalence, donc être un sous-complexe lagrangien est équivalent à ce que la suite $N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f^*[n] \circ q} N^*[n]$ soit une cofibration homotopique.

Ainsi, la donnée d'un lagrangien $N \xrightarrow{f} M$ décrit M comme une extension de $N^*[n]$ par N , et on va voir que la forme quadratique sur M est déterminée par cette extension : elle provient du morphisme d'évaluation $N \otimes_A^{\mathbb{L}} N^*[n] \rightarrow A[n]$.

1.2.2 Formes standards

Si L est un complexe parfait, on a une équivalence $L \simeq L^*[n]^*[n]$, et une forme quadratique sur $L^*[n]$ s'identifie à un morphisme $L^*[n] \rightarrow L[n]$ symétrique, c'est-à-dire égal à son dual décalé.

Proposition 1.23 (Forme standard associée à une $n - 1$ -forme). *Soit L un complexe parfait, $L^*[n - 1] \xrightarrow{f} L$ une forme $n - 1$ -décalée, alors on peut munir E la cofibre de f d'une forme quadratique n -décalée non dégénérée notée q_f , appelée forme standard associée à f . De plus, la cofibration homotopique canonique $L \rightarrow E \rightarrow L^*[n]$ obtenue par décalage de 1 présente L comme un lagrangien pour la forme q_f .*

Démonstration. On a une cofibration homotopique

$$L^*[n - 1] \xrightarrow{f} L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} L^*[n] \xrightarrow{f[1]} L[1]$$

En dualisant et en décalant de n cette cofibration homotopique, on obtient la fibration homotopique

$$L^*[n - 1] \xrightarrow{f^*[n-1]} L \xrightarrow{j^*[n]} E^*[n] \xrightarrow{i^*[n]} L^*[n] \xrightarrow{f^*[n]} L[1].$$

Puisque $f^*[n - 1] = f$, les deux suites sont des cofibrations homotopiques équivalentes, d'où l'existence d'une équivalence q_f , unique à homotopie près, faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} L^*[n - 1] & \xrightarrow{\quad} & L & \xrightarrow{\quad} & E & \xrightarrow{\quad} & L^*[n] & \xrightarrow{\quad} & L[1] \\ & & \parallel & & \downarrow q_f & & \parallel & & \parallel \\ L^*[n - 1] & \xrightarrow{\quad} & L & \xrightarrow{\quad} & E^*[n] & \xrightarrow{\quad} & L^*[n] & \xrightarrow{\quad} & L[1] \end{array} .$$

Le dual décalé de q_f est obtenu en dualisant et décalant ce diagramme, ce qui donne le même diagramme, donc q_f est homotope à $q_f^*[n]$ donc symétrique. On a donc défini une forme quadratique n -décalée non dégénérée q_f sur E . Par ailleurs, puisque q_f est une équivalence, la suite $L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{i^*[n] \circ q_f} L^*[n]$ est équivalente à la cofibration homotopique $L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} L^*[n]$, donc elle présente bien L comme un lagrangien dans (E, q_f) . \square

Remarque 1.24 (description explicite de la forme standard). En considérant la construction de la cofibre d'un morphisme donnée par le cône du morphisme, on peut donner une représentation explicite du complexe quadratique associé à un morphisme symétrique $L^*[n-1] \xrightarrow{f} L$. En tant que module gradué, le cône E du morphisme f est $L \oplus L^*[n]$, sa différentielle est $\begin{pmatrix} d & f[1] \\ 0 & d^*[n] \end{pmatrix}$ où d est la différentielle de L et $d^*[n]$ celle de $L^*[n]$.

Le dual décalé $E^*[n]$ est $L^*[n] \oplus L^{**}$ en tant que module gradué, avec différentielle $\begin{pmatrix} d^*[n] & 0 \\ f^*[n-1] & d^{**} \end{pmatrix}$. En utilisant l'équivalence $L^{**} \simeq L$ et la symétrie de f , on obtient une équivalence entre E et $E^*[n]$ qui correspond à q_f .

Par exemple si f est nulle, q_f est simplement l'équivalence entre $L \oplus L^*[n]$ et son dual décalé $L^*[n] \oplus L^{**}$ obtenue en intervertissant les facteurs directs et en identifiant L avec L^{**} .

Remarque 1.25. La remarque précédente montre en particulier qu'une forme standard est strictement non dégénérée.

Nous allons montrer que tout complexe quadratique qui admet un lagrangien est isométrique à un complexe quadratique standard.

Proposition 1.26 (Forme standard associée à un lagrangien). *Soit (E, q) un complexe quadratique cofibrant, $L \xrightarrow{i} E$ un morphisme de complexes avec L parfait, une homotopie à zéro h pour la restriction de q à L donnant une structure lagrangienne, alors il existe $f : L^*[n-1] \rightarrow L$ une forme quadratique $n-1$ -décalée sur $L^*[n-1]$ telle que (E, q) soit isométrique au complexe quadratique standard associé à f .*

Démonstration. Puisque L est un lagrangien, la suite $L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{i^*[n] \circ q} L^*[n]$, munie de h l'homotopie à 0, est une cofibration homotopique. On pose $j := i^*[n] \circ q$. En faisant tourner cette cofibration homotopique, on obtient un cofibration homotopique $L^*[n-1] \xrightarrow{f} L \xrightarrow{i} E$. Par symétrie de q , on a $j^*[n] = q \circ i$, et on en déduit la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} L^*[n-1] & \xrightarrow{\quad} & L & \xrightarrow{\quad i \quad} & E & \xrightarrow{\quad j \quad} & L^*[n] & \xrightarrow{\quad f[1] \quad} & L[1] \\ & & \parallel & & \downarrow q & & \parallel & & \parallel \\ L^*[n-1] & \xrightarrow{\quad f^*[n-1] \quad} & L & \xrightarrow{\quad j^*[n] \quad} & E^*[n] & \xrightarrow{\quad i^*[n] \quad} & L^*[n] & \xrightarrow{\quad f^*[n] \quad} & L[1] \end{array}$$

où la seconde ligne est le dual décalé de la première ligne.

On en déduit en particulier $f^*[n-1] = f$, donc f est une forme quadratique $n-1$ -décalée sur $L^*[n-1]$.

On considère alors la forme quadratique standard associée à f , définie sur E . Remarquons que q et q_f induisent toutes deux une équivalence entre la cofibration homotopique $L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} L^*[n]$ et son dual décalé $L \xrightarrow{i} E^*[n] \xrightarrow{j} L^*[n]$, qui vaut l'identité sur L et sur $L^*[n]$. En choisissant un inverse pour q_f , on a ainsi une autoéquivalence $(q_f)^{-1} \circ q$ de E qui induit une autoéquivalence de $L \xrightarrow{i} E^*[n] \xrightarrow{j} L^*[n]$ valant l'identité sur L et $L^*[n]$.

En posant $s := (q_f)^{-1} \circ q - \text{id}_E$, puisque $q_f \circ i = q \circ i$ on a $s \circ i = 0$ d'où l'existence d'un morphisme $s' : L^*[n] \rightarrow E$ tel que $s' \circ j = s$, car $L^*[n]$ est un conoyau homotopique. Par ailleurs, on a également $j \circ s = 0$, d'où $s^2 = s' \circ j \circ s = 0$.

Par symétrie de q et q_f , on obtient la symétrie de $q_f \circ s = q - q_f$ donc $q_f \circ s = s^*[n] \circ q_f$. Ainsi $(\text{id} + \frac{s}{2})^*[n] q_f (\text{id} + \frac{s}{2}) = q_f (\text{id} + \frac{s}{2})^2 = q_f (\text{id} + s) = q$, donc q and q_f sont isométriques par l'autoéquivalence $\text{id}_E + \frac{s}{2}$ (d'inverse $\text{id}_E - \frac{s}{2}$)

□

Remarque 1.27. La proposition précédente montre en particulier qu'un complexe quadratique qui admet un lagrangien parfait est non-dégénéré, et même isométrique à un complexe quadratique strictement non dégénéré.

1.2.3 Lagrangiens bornés inférieurement

Dans cette section nous supposons que l'anneau de base est non dérivé (concentré en degré zéro). Nous montrons l'existence de lagrangiens concentrés en degrés supérieurs à la moitié du décalage de la forme.

Lemme 1.28. *Soit (E, q) un complexe quadratique strictement non dégénéré $2k+1$ -décalé. Il admet un lagrangien concentré en degrés supérieurs à $-k$.*

Démonstration. On considère la troncation de E à gauche à partir du degré $-k$,

$$L := \cdots \rightarrow 0 \rightarrow E_{-k} \rightarrow E_{-k+1} \rightarrow \cdots$$

munie du morphisme canonique d'inclusion $L \xrightarrow{i} E$.

Son dual décalé est

$$L^*[2k+1] = \cdots \rightarrow E_{-k+1}^* \rightarrow E_{-k}^* \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

dont le dernier terme non nul est en degré $-k-1$. C'est une troncation à droite de $E^*[2k+1]$, et le dual de l'inclusion i est la projection canonique $E^*[2k+1] \xrightarrow{i^*[2k+1]} L^*[2k+1]$.

Par définition q provient d'un morphisme en chaque degré $E_l \rightarrow E_{-l-2k-1}^*$ et la composition des morphismes $L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{q} E^*[2k+1] \xrightarrow{i^*[2k+1]} L^*[2k+1]$ est donc nulle.

Par ailleurs, la cofibre du morphisme i peut se calculer degré par degré et on obtient

$$E/L = \cdots \rightarrow E_{-k-2} \rightarrow E_{-k-1} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

La postcomposition avec $(i^*[2k+1]) \circ q$ est simplement le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & E_{-k-2} & \longrightarrow & E_{-k-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & q_{-k-2} & & q_{-k-1} & & 0 \\ & & & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & E_{-k+1}^* & \longrightarrow & E_{-k}^* & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Puisque q est strictement non dégénérée et établit un isomorphisme entre E_l et $E_{-l-2k-1}^*$ en tout degré l , on a bien une équivalence induite entre E/L et $L^*[2k+1]$, donc $L \xrightarrow{i} E$, muni de l'homotopie nulle pour $q|_L$, est un lagrangien. \square

Remarque 1.29. En particulier, si une forme quadratique non dégénérée de décalage impair admet un représentant strictement non dégénéré, alors elle admet un lagrangien.

Lemme 1.30. *Soit (E, q) le complexe quadratique standard $2k$ -décalé associé à un morphisme de complexes parfaits $L^*[2k-1] \xrightarrow{f} L$. Il admet un lagrangien concentré en degrés supérieurs à $-k$.*

Démonstration. On considère le sous-complexe de E donné par

$$L' = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow L_{-k} \rightarrow E_{-k+1} \rightarrow E_{-k+2} \rightarrow \cdots$$

dont le premier terme non nul est en degré $-k$, muni de l'inclusion canonique $L' \xrightarrow{i} E$. Son dual décalé est

$$L'^*[2k] = \cdots \rightarrow E_{-k+1}^* \rightarrow L_{-k}^* \rightarrow 0 \rightarrow \cdots,$$

dont le dernier terme non nul est en degré $-k$.

Puisque la forme standard q est définie degré par degré, on voit que la composition $L' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{q} E^*[2k] \xrightarrow{i^*[2k]} L'^*[2k]$ est nulle en degrés différent de $-k$ puisque L' est concentré en degrés supérieurs ou égaux à $-k$ et $L'^*[2k]$ en degrés inférieurs ou égaux à $-k$. En degré $-k$, q envoie L'_{-k} sur la composante L_{-k}^* dans $E^*[2k]$, qui est envoyée sur zéro par $i^*[2k]$.

Par ailleurs, la cofibre du morphisme i peut se calculer degré par degré et on obtient

$$E/L' = \cdots \rightarrow E_{-k-1} \rightarrow L_{-k}^* \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

La postcomposition avec $(i^*[2k]) \circ q$ est simplement le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \longrightarrow & E_{-k-1} & \longrightarrow & L_{-k}^* & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\dots & \longrightarrow & E_{-k+1}^* & \longrightarrow & L_{-k}^* & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Puisque q est strictement non dégénérée et établit un isomorphisme entre E_l et E_{-l-2k}^* en tout degré l , on a bien une équivalence induite entre E/L' et $L'^*[2k]$, donc $L' \xrightarrow{i} E$, muni de l'homotopie nulle pour $q|_L$, est un lagrangien. \square

Proposition 1.31. *Pour $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$, tout complexe quadratique n -dcalé (E, q) qui admet un lagrangien en admet un concentré en degrés supérieurs ou égaux à $-k$.*

Démonstration. La proposition 1.26 nous permet de supposer que le complexe quadratique est le complexe standard associé à un lagrangien. Dans le cas pair, le lemme 1.30 nous permet de conclure.

Dans le cas impair, la remarque 1.25 nous rappelle que la forme standard associée à un lagrangien est strictement non dégénérée, donc on peut appliquer le lemme 1.28. \square

1.2.4 Existence de lagrangiens lisses

Nous montrons un lemme qui nous sera utile pour trouver des points lisses dans l'espace de modules des lagrangiens d'une forme.

Lemme 1.32 (Existence de lagrangiens lisses). *Soit (M, q) un complexe quadratique possédant un lagrangien, alors il existe un lagrangien $L \rightarrow M$ tel que $\underline{\text{Hom}}(\Lambda_A^2 L, A[n])$ est concentré en degrés négatifs.*

Démonstration. D'après la proposition 1.31, M admet un lagrangien L d'amplitude $[-k, +\infty[$, où $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$. On obtient ainsi que $\Lambda_A^2 L$ est d'amplitude $[-2k, +\infty[$ et $\underline{\text{Hom}}(\Lambda_A^2 L, A[n])$ d'amplitude $]-\infty, 2k - n]$. En particulier, ce complexe est concentré en degrés négatifs si n est pair, strictement négatifs si n est impair. \square

2 L -théorie dérivée

De même que la K -théorie d'un anneau est construite à partir des complexes sur cet anneau en quotientant par une relation d'équivalence, la L -théorie d'un anneau

est construite à partir des complexes quadratiques sur cet anneau, en quotientant par une relation de cobordisme lagrangien.

Les groupes de L -théorie possèdent une définition classique quelque peu plus compliquée pour les groupes de degré non nul que la définition dérivée que nous utilisons. En effet, dans le cadre dérivé, on obtient les groupes de degré n en considérant simplement les complexes quadratiques n -décalés. On montre l'équivalence des définitions pour un anneau classique.

2.1 La relation de cobordisme lagrangien

Pour définir une loi de groupe sur l'ensemble des complexes quadratiques, on a besoin de l'existence d'opposés. L'opposé de (M, q) sera tout simplement $(M, -q)$, ce qui signifie qu'il faut identifier $(M \oplus M, q \perp -q)$ avec le complexe quadratique nul. Le complexe quadratique précédent a pour particularité de posséder un lagrangien naturel, par le morphisme diagonal $M \xrightarrow{\Delta} M \oplus M$.

Définition 2.1. Soit (M, q) et (M', q') deux complexes quadratiques, un *cobordisme* entre ces deux complexes est un lagrangien dans $(M \oplus M', q \perp -q')$. On dira alors que (M, q) est cobordant à (M', q') .

De façon plus explicite, un cobordisme correspond à la donnée d'un complexe N , ainsi que de deux morphismes $M \xleftarrow{f} N \xrightarrow{f'} M'$, et une homotopie $h \in \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_A^2 N, A[n])$ entre $q|_N$ et $q'|_N$, tels qu'une condition de non dégénérescence soit satisfaite.

On peut résumer cette donnée en un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & M \\ f' \downarrow & & \downarrow f^*[n] \circ q \\ M' & \xrightarrow{f'^*[n] \circ q'} & N^*[n] \end{array}$$

et la condition de non dégénérescence correspond à demander que ce diagramme soit homotopiquement cartésien.

Remarque 2.2. On déduit de la remarque [1.22](#) qu'un lagrangien dans un complexe quadratique est la donnée d'un cobordisme entre ce complexe quadratique et le complexe quadratique nul.

Proposition 2.3. *La relation de cobordisme est une relation d'équivalence sur les complexes quadratiques. Elle est compatible avec la somme directe.*

Démonstration. La réflexivité se lit sur le diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} M & \xlongequal{\quad} & M \\ \parallel & & \downarrow q \\ M & \xrightarrow{q} & M^*[n] \end{array}$$

La symétrie est immédiate, puisqu'un diagramme cartésien est symétrique par rapport à sa diagonale.

Pour la transitivité, supposons donnés des diagrammes homotopiquement cartésiens

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \longrightarrow & N^*[n] \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & M' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M'' & \longrightarrow & P^*[n] \end{array}$$

alors on peut les compléter par des carrés homotopiquement cartésiens (ou cocartésiens ce qui est équivalent) pour former le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} N \times_{M'} P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N^*[n] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M'' & \longrightarrow & P^*[n] & \longrightarrow & (N \times_{M'} P)^*[n] \end{array}$$

où chaque petit carré est homotopiquement cartésien. On en déduit que le grand carré l'est aussi, ce qui donne un cobordisme entre M et M'' .

La compatibilité avec la somme directe s'obtient immédiatement en faisant la somme directe de carrés homotopiquement cartésiens. \square

2.2 Groupes de L-théorie

Définition 2.4. Soit $n \in \mathbb{Z}$, on définit $l_{-n}(A)$ le $-n$ -ème groupe de L -théorie de l'anneau dérivé A comme étant l'ensemble des classes de cobordisme de complexes quadratiques n -décalés parfaits non dégénérés, muni de la somme directe.

C'est clairement un monoïde commutatif, et c'est bel et bien un groupe car le fait que (M, q) soit cobordant à lui-même indique que $(M, q) \oplus (M, -q)$ possède un lagrangien (la diagonale), et donc est cobordant au complexe quadratique nul.

La remarque [1.9](#) entraîne la 4-périodicité des groupes de L -théorie.

Proposition 2.5 (4-périodicité des groupes de L -théorie). $\forall i \in \mathbb{Z}, l_i(A) \simeq l_{i+4}(A)$.

Remarque 2.6. Pour $A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux dérivés, le foncteur de changement de base des complexes quadratiques induit pour tout $i \in \mathbb{Z}$ un morphisme de groupe $l_i(A) \rightarrow l_i(B)$.

2.3 Chirurgie

2.3.1 Définition

Étant donné un complexe quadratique, le procédé de chirurgie permet de trouver un complexe quadratique plus petit dans un certain sens, mais dans la même classe de cobordisme. Cela est utile pour trouver des représentants simples d'une classe de cobordisme.

Concrètement, soit (M, q) un complexe quadratique et $N \xrightarrow{f} M$ un sous-complexe isotrope. Puisque la forme quadratique est nulle en restriction à N , nous voudrions effectuer un quotient par N .

Il n'y a pas de forme quadratique naturelle sur M/N car le produit scalaire d'un élément de M avec un élément de N n'est pas nécessairement nul. C'est en revanche le cas si on ne considère uniquement des éléments de l'orthogonal de N .

Rappelons que d'après la remarque [1.19](#), si N est un sous-complexe isotrope, il existe un morphisme canonique $N \xrightarrow{i_h} N^\perp$.

Proposition 2.7. *Soit $(N \xrightarrow{f} M, h)$ un sous-complexe isotrope d'un complexe quadratique (M, q) . On peut munir le complexe*

$$M_f := \text{cofib}(N \xrightarrow{i_h} N^\perp)$$

d'une forme quadratique non dégénérée naturelle q_f . De plus si N est parfait et q non dégénérée alors q_f est non dégénérée. On dit que (M_f, q_f) est la chirurgie de M le long de f .

Démonstration. Remarquons que puisque N^\perp est la fibre du morphisme $M \xrightarrow{f^*[n] \circ q} N^*[n]$, M_f est en réalité « l'homologie » (la cofibre d'une fibre) du triangle $N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f^*[n] \circ q} N^*[n]$ muni de l'homotopie h .

Le dual décalé de M_f est donc l'homologie du triangle dual décalé $N^{**} \xrightarrow{q^*[n] \circ f^{**}} M^*[n] \xrightarrow{f^*[n]} N^*[n]$ muni de l'homotopie $h^*[n]$.

On considère le morphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{f^*[n] \circ q} & N^*[n] \\ \downarrow \text{can} & & \downarrow q & & \downarrow \text{id} \\ N^{**} & \xrightarrow{q^*[n] \circ f^{**}} & M^*[n] & \xrightarrow{f^*[n]} & N^*[n] \end{array}$$

où $can : N \rightarrow N^{**}$ est le morphisme canonique d'un complexe vers son bidual.

Le fait que q et h soit strictement symétriques entraîne la stricte commutativité de ce diagramme. En effet, on a

$$can : \left| \begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & N^{**} \\ n & \longmapsto & l \mapsto l(n) \end{array} \right.$$

et

$$q^*[n] \circ f^{**} : \left| \begin{array}{ccc} N^{**} & \longrightarrow & M^*[n] \\ \phi & \longmapsto & m \mapsto \phi(q(m, f(\cdot))) \end{array} \right.$$

d'où

$$q^*[n] \circ f^{**} \circ can : \left| \begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & M^*[n] \\ n & \longmapsto & m \mapsto q(m, f(n)) \end{array} \right. .$$

D'autre part on a $q \circ f(n) = m \mapsto q(f(n), m)$ or $q(m, f(n)) = q(f(n), m)$ donc le carré de gauche du diagramme commute strictement. Le carré de droite aussi par définition. Enfin les deux homotopies pour le morphisme $N \rightarrow N^*[n]$ induites par les homotopies de chacun des deux triangles sont égales car la première est h , la seconde est $h^*[n] \circ can$, et elles sont égales par symétrie de h .

On définit alors q_f comme étant l'homologie de ce morphisme de triangles. Si N est parfait, can est une équivalence, et si de plus q est non dégénérée on voit que le morphisme de triangles est une équivalence donc q_f aussi et le complexe quadratique (M_f, q_f) est non dégénéré. \square

Remarque 2.8. Puisqu'on a une cofibration homotopique $N \xrightarrow{i_h} N^\perp \xrightarrow{\pi} M_f$, on a aussi une fibration homotopique $M^*[n]_f \xrightarrow{\pi^*[n]} N^*[n]^\perp \rightarrow N^*[n]$, et on peut utiliser la propriété universelle des fibrations et des cofibrations pour caractériser alternativement q_f comme induit par les équations $\pi^*[n] \circ q_f \circ pi = q_{|N^\perp} : N^\perp \rightarrow N^*[n]^\perp$, $h_{M_f}^*[n] \circ q_f \circ \pi = h_{N^\perp} : N^\perp \rightarrow N^*[n-1]$, $\pi^*[n] \circ q_f \circ h_{M_f} = h_{N^\perp}^*[n] : N \rightarrow N^{\perp*}[n-1]$, ces équations étant compatibles car elles induisent bien la même homotopie à zéro h pour le morphisme composé $N \rightarrow N^*[n]$, par symétrie de h .

Proposition 2.9. *Soit $(N \xrightarrow{f} M, h)$ un sous-complexe parfait isotrope d'un complexe quadratique non dégénéré (M, q) . Alors la correspondance $M_f \xleftarrow{\pi} N^\perp \xrightarrow{i} M$, munie de l'homotopie nulle, est lagrangienne. En particulier, (M, q) et (M_f, q_f) sont dans la même classe de L-théorie.*

Démonstration. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} N^\perp & \xrightarrow{\pi} & M_f & \xrightarrow{q_f} & M_f^*[n] & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow i & & \downarrow \pi^*[n] \circ q_f & & \downarrow \pi^*[n] & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{i^*[n] \circ q} & N^{\perp*}[n] & \xrightarrow{id_{N^{\perp*}[n]}} & N^{\perp*}[n] & \xrightarrow{i_h^*[n]} & N^*[n] \end{array}$$

D'après la remarque [2.8](#) on a $qf|_{N^\perp} = q|_{N^\perp}$ donc le carré de gauche est strictement commutatif. On souhaite montrer qu'il est homotopiquement cartésien.

On reconnaît dans le carré de droite le diagramme dual décalé de la définition de M_f comme cofibre homotopique de i_h , donc ce carré, muni du dual décalé de l'homotopie canonique h_{M_f} pour $\text{cof}(i_h)$, est homotopiquement cartésien.

Le carré central est par définition strictement commutatif, et puisque q_f est une équivalence, il est aussi homotopiquement cartésien. On en déduit que ce diagramme est homotopiquement commutatif.

On rappelle que par définition on a une suite de morphismes $N \xrightarrow{i_h} N^\perp \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f^*[n] \circ q} N^*[n]$ factorisant le triangle $N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f^*[n] \circ q} N^*[n]$. Cela signifie en particulier que $i \circ i_h = f$. Ceci nous permet de voir que le rectangle extérieur obtenu par composition de ces trois carrés s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} N^\perp & \longrightarrow & 0 \\ i \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f^*[n] \circ q} & N^*[n] \end{array}$$

On souhaite montrer que l'homotopie pour ce carré est h_{N^\perp} , ce qui nous permettra de l'identifier avec le carré homotopiquement cartésien qui définit N^\perp . Cette homotopie est par définition $h_{M_f}^*[n] \circ q_f \circ \pi$, qui vaut bien h_{N^\perp} d'après la remarque [2.8](#).

On déduit alors des propriétés de composition des diagrammes homotopiquement cartésiens que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} N^\perp & \xrightarrow{\pi} & M_f \\ i \downarrow & & \downarrow \pi^*[n] \circ q_f \\ M & \xrightarrow{i^*[n] \circ q} & N^{\perp*}[n] \end{array}$$

est homotopiquement cartésien, ce qui conclut. □

2.4 Chirurgie sous le degré moitié

On rappelle que A vu comme A -module représente en réalité le complexe normalisé $N(A)$, qui est concentré en degrés négatifs.

On pose $l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, de façon à avoir $n = 2l$ ou $n = 2l + 1$.

Soit C un complexe de cochaînes, on adopte la notation $\pi_i(C) = H^{-i}(C)$.

Lemme 2.10. *Soit (M, q) un complexe quadratique non dégénéré, $m < l$ et $\eta \in \pi_m(M)$. Alors (M, q) est cobordant à un complexe quadratique non dégénéré (M', q') tel que $\forall i < m, \pi_i(M') = \pi_i(M)$ et $\pi_m(M') = \pi_m(M) / \langle \eta \rangle$.*

Démonstration. On choisit un cocycle $A[m] \xrightarrow{\eta} M$ représentant la classe de cohomologie (ou d'homotopie) de η . La forme q se restreint sur $A[m]$ en un morphisme $A[m] \rightarrow A[n - m]$, représentant un 0-cocycle dans $A[n - 2m]$, qui est donc nul en cohomologie car $n - 2m > 0$ et A est concentré en degrés négatifs. Ainsi la donnée de η et d'une homotopie à 0 pour ce cocycle déterminent un sous-module isotrope de M , ce qui permet de pratiquer une chirurgie selon η pour obtenir un nouveau complexe quadratique non dégénéré (M_η, q_η) cobordant à (M, q) .

Soit $\beta : M \rightarrow A[n - m]$ la composition $M \rightarrow M^*[n] \rightarrow A[n - m]$, alors la suite exacte longue en cohomologie donne pour tout i une suite exacte $\pi_{i+1}(A[n - m]) \rightarrow \pi_i(\text{fib}(\beta)) \rightarrow \pi_i(M) \rightarrow \pi_i(A[n - m])$, et puisque $\pi_i(A[n - m]) = \pi_{i+m-n}(A)$, ces groupes sont triviaux pour $i < n - m$, donc $\pi_i(\text{fib}(\beta)) \simeq \pi_i(M)$ tant que $i + 1 < n - m$, donc en particulier pour $i \leq m$ (car $m < l$ et $n \geq 2l$). Par définition, M_η est la cofibre d'un morphisme $A[m] \rightarrow \text{fib}(\beta)$, donc on a une suite exacte $\pi_i(A[m]) \rightarrow \pi_i(\text{fib}(\beta)) \rightarrow \pi_i(M_\eta) \rightarrow \pi_{i-1}(A[m])$. Pour $i < m$, $\pi_i(A[m]) = 0$ donc $i < m$, $\pi_i(M) \simeq \pi_i(\text{fib}(\beta)) \simeq \pi_i(M_\eta)$, et pour $i = m$, $\pi_m(M_\eta)$ est le quotient de $\pi_m(\text{fib}(\beta)) \simeq \pi_m(M)$ par le sous-module engendré par η . \square

Lemme 2.11. *Soit (M, q) un module (parfait) quadratique non dégénéré, alors il est cobordant à un module quadratique non dégénéré (M', q') tel que $\forall i < l$, $\pi_i(M') = 0$.*

Démonstration. Puisque M est parfait, sa cohomologie est finiment engendrée et on peut appliquer récursivement le lemme [2.10](#) avec les générateurs de la cohomologie, en commençant par le plus petit i tel que $\pi_i(M) \neq 0$ jusqu'à $i = l - 1$. \square

On dit qu'un A -module est projectif s'il est concentré en degrés négatifs ainsi que son dual. C'est une généralisation dérivée de la notion usuelle de module projectif, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 2.12. *Soit M un A -module projectif, alors c'est un facteur direct de A^m pour un entier $m \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Puisque M est parfait et concentré en degrés négatifs, $\pi_0(M)$ est un A -module finiment engendré. et il existe un entier m et un morphisme $A^m \rightarrow M$ surjectif sur $\pi_0(M)$. Soit M' la fibre homotopique de ce morphisme, puisque A et M sont concentrés en degrés négatifs, on déduit de la suite exacte longue d'homotopie et de la surjectivité sur $\pi_0(M)$ le fait que M' est aussi concentré en degrés négatifs. En dualisant cette fibre homotopique, on obtient une cofibre homotopique, or $(A^m)^* \simeq A^m$ est encore concentré en degrés négatifs ainsi que M^* , donc M'^* aussi, d'où M' est projectif.

On a donc une fibration homotopique $\underline{\text{Hom}}_A(M, M') \rightarrow \underline{\text{Hom}}_A(M, A^m) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_A(M, M)$, or M' , M^* et A sont concentrés en degrés négatifs, donc $\underline{\text{Hom}}_A(M, M') \simeq M^* \otimes_A M'$ aussi. La suite exacte longue en homotopie donne alors la surjectivité de

$\pi_0(\underline{\text{Hom}}_A(M, A^m)) \rightarrow \pi_0(\underline{\text{Hom}}_A(M, M))$. En particulier, le morphisme $A^m \rightarrow M$ admet une section $M \rightarrow A^m$, d'où M est un facteur direct de A^m . \square

Lemme 2.13. *Pour n pair et A , si un complexe quadratique non dégénéré (M', q') vérifie $\forall i < l, \pi_i(M') = 0$, alors M' est quasi-isomorphe à un module projectif placé en degré $-l$.*

Démonstration. On peut reformuler la condition en disant que $M'[-l]$ est concentré en degrés négatifs. La condition de non dégénérescence entraîne une équivalence entre M' et $M'^*[2l]$, d'où une équivalence $M'[-l] \simeq M'^*[l]$. Ainsi, $M'[-l]$ et son dual sont concentrés en degrés négatifs, donc on peut conclure grâce au lemme [2.12](#).

On peut reformuler la condition en disant que $M'[-l]$ est concentré en degrés négatifs. Puisque A est concentré en degré 0, le dual de $M'[-l]$ est concentré en degrés positifs. La condition de non dégénérescence entraîne que M' et $M'^*[2l]$ soient équivalents, d'où $M'[-l] \simeq M'^*[l]$, donc $M'[-l]$ est concentré en degrés positifs et négatifs donc concentré en degré 0, et ainsi M' est concentré en degré $-l$. \square

Le cas impair est moins simple, car au lieu d'obtenir un module projectif concentré en un seul degré, on obtiendra un module concentré en deux degrés. Par souci de simplicité, on formule l'analogie impair dans le cas d'un anneau de base non dérivé. En effet dans ce cas, un complexe parfait concentré en degré 0 est équivalent à un module projectif classique, alors que si A est dérivé, A lui-même n'est pas concentré en degré 0. On a notamment la notion de Tor-amplitude, qui nous permet de prouver facilement cette propriété de concentration en deux degrés.

On rappelle qu'un complexe est de Tor-amplitude dans $[a, b]$ si et seulement s'il est quasi-isomorphe à un complexe de modules plats dont tous les termes non nuls sont en degrés dans l'intervalle $[a, b]$. Par ailleurs, un complexe de Tor-amplitude dans $[a, b]$ et dans $[c, d]$ est de Tor-amplitude dans $[a, b] \cap [c, d]$. Enfin, pour un complexe parfait, on peut remplacer « modules plats » par « modules projectifs de type fini », et s'il est concentré en degrés négatifs, alors il est de Tor-amplitude dans $[-\infty, 0]$.

Lemme 2.14. *Pour n impair et A non dérivé (i.e. concentré en degré 0), soit (M', q') un complexe quadratique non dégénéré telle que $\forall i < l, \pi_i(M') = 0$, alors M' est de Tor-amplitude dans $[-l - 1, -l]$.*

Démonstration. Puisque $M'[-l]$ est concentré en degrés négatifs, quitte à prendre une résolution, on peut supposer que les termes strictement positifs de $M'[-l]$ sont nuls. En dualisant, $M'^*[l]$ est nul en degrés strictement négatifs donc de Tor-amplitude dans $[0, +\infty]$, or on a $M'[-l] \simeq M'^*[l + 1]$ donc $M'[-l]$ est de Tor-amplitude dans $[-\infty, 0]$ et dans $[-1, +\infty]$, donc M' est de Tor-amplitude dans

$[-l - 1, -l]$. En particulier il est équivalent à un complexe constitué de deux modules projectifs de type fini en degré $-l - 1$ et en degré l . \square

On déduit des lemmes précédents le résultat de chirurgie suivant.

Proposition 2.15. *Sur un anneau non dérivé, tout module quadratique n -décalé non dégénéré est cobordant à un module quadratique non dégénéré concentré en degré $-l$ si $n = 2l$ ou en degrés $-l$ et $-l - 1$ si $n = 2l + 1$.*

2.5 Comparaison avec la L-théorie classique

On montre l'équivalence de la définition classique et de la définition usuelle du premier groupe de L -théorie d'un anneau commutatif A . Ce groupe est également appelé groupe de Witt de l'anneau A .

Dans le cadre classique, un A -module quadratique non dégénéré est la donnée d'un A -module classique M et d'une forme bilinéaire symétrique q induisant un isomorphisme $M \simeq M^*$. Un lagrangien classique pour un module quadratique classique (M, q) est un sous-module $L \subset M$ tel que $q|_L = 0$ et q induit un isomorphisme $L \simeq (M/L)^*$ (où M/L est bien le quotient classique de modules). Un module quadratique qui admet un lagrangien classique est dit « métabolique ». Les modules quadratiques non dégénérés (respectivement métaboliques) forment un monoïde abélien pour la somme directe orthogonale.

Le contexte dérivé diffère essentiellement en ce qu'il considère des complexes et non seulement des modules concentrés en degré 0, et la notion de lagrangien est plus vaste car il n'y a pas de condition d'injectivité sur le morphisme $L \rightarrow M$.

Définition 2.16. Soit A un anneau commutatif, son premier groupe de L -théorie classique $l_0^{cl}(A)$ est le quotient du monoïde abélien des classes d'isomorphismes de modules quadratiques non dégénérés projectifs de type fini par le sous-monoïde engendré par les espaces métaboliques.

Puisqu'un module projectif de type fini est parfait, et un lagrangien classique est également un lagrangien dérivé, on a un morphisme de comparaison canonique $l_0^{cl}(A) \xrightarrow{c} l_0(A)$.

Proposition 2.17. *Le morphisme de comparaison $l_0^{cl}(A) \xrightarrow{c} l_0(A)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. La surjectivité est une conséquence directe du lemme [?], où on a montré que la chirurgie permettait de réduire un complexe quadratique en un module quadratique projectif de type fini dans la même classe de cobordisme.

Pour l'injectivité, soit (M, q) un module quadratique non dégénéré projectif de type fini, tel qu'il existe un lagrangien (dérivé) $L \rightarrow M$. D'après le lemme [1.26](#), il

existe un morphisme symétrique $L^*[-1] \xrightarrow{f} L$ tel que (M, q) soit isométrique à la forme standard (M_f, q_f) associée à f .

On remarque que si on note $E_i = L_{-i}^* \oplus L_i$ le i -ème terme de M_f et $d_i : E_i \rightarrow E_{i+1}$ sa différentielle, alors par symétrie de f , $d_{-i}^* = d_{i+1}$. Autrement dit, les termes de degrés opposés sont duaux, et les différentielles aussi. La forme q_f est induite par cette identité $E_i^* \simeq E_{-i}$. On note q_0 la forme standard sur E_0 , correspondant à l'identification canonique $E_0 \simeq E_0^*$. Alors $E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} E_0$ est isotrope pour la forme q_0 car la restriction de q_0 à E_{-1} donne le morphisme $E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}^* \circ d_{-1}} E_{-1}^*$, or $d_{-1}^* = d_0$ donc c'est le morphisme $d_0 \circ d_{-1} = 0$. Ainsi, $\text{Im}(d_{-1}) \subset E_0$ est un sous-module isotrope de E_0 au sens classique. On peut alors appliquer une chirurgie classique le long de ce sous-module isotrope (similaire à la chirurgie dérivée) pour obtenir un module quadratique (M_c, q_c) classiquement cobordant à (E_0, q_0) . Ce module n'est autre que l'homologie de $E_{-1} \rightarrow E_0 \rightarrow E_1$, c'est-à-dire $H_0(M_f) \simeq M$. L'isométrie dérivée $(M_f, q_f) \rightarrow (M, q)$ induit en homologie une isométrie classique $(M_c, q_c) \rightarrow (M, q)$? Puisque (E_0, q_0) est trivial dans $l_0^{cl}(A)$ et classiquement cobordant à (M_c, q_c) , on en déduit que (M, q) est trivial dans $l_0^{cl}(A)$, ce qui conclut. □

3 Champs quadratiques et lagrangiens

Jusqu'à présent, on a travaillé sur des anneaux dérivés. Les constructions précédentes satisfont la descente étale et forment donc des champs. Nous définissons le champ des complexes quadratiques, puis le champ des lagrangiens dans un complexe quadratique donné. Après chaque définition, on explique en quoi elle correspond bien à l'espace des modules de la notion considérée, en vérifiant que sur des affines, on retrouve les définitions données précédemment.

On calcule ensuite le complexe tangent, afin notamment de déterminer les points lisses.

Par la suite, A désignera toujours une algèbre simpliciale commutative, et on fixe un entier $n \in \mathbb{Z}$ correspondant au décalage des formes. On utilisera la même notation pour un morphisme de $\text{Spec}(A)$ vers un champ X , et pour un élément de $X(A)$ (un 0-simplexe) correspondant à ce morphisme via le lemme de Yoneda.

3.1 Le champ des complexes parfaits

3.1.1 Définition

Pour tout morphisme d'algèbres simpliciales $A \longrightarrow B$, on a un foncteur de changement de base

$$\cdot \otimes_A B : \begin{array}{c} \text{Perf}(A) \longrightarrow \text{Perf}(B) \\ M \longmapsto M \otimes_A N(B) \end{array}$$

. Ces foncteurs de changement de base induisent un foncteur lax de la catégorie des algèbres simpliciales commutatives vers la catégorie des catégories, qui peut être rectifié en un foncteur strict.

En composant ce foncteur avec le foncteur nerf, on obtient $\underline{\text{Perf}}$ ([12]), le champ dérivé des complexes parfaits. On a une transformation naturelle $\text{Sym}^2 : \underline{\text{Perf}} \longrightarrow \underline{\text{Perf}}$ induite par Sym_A^2 sur chaque algèbre simpliciale commutative A , grâce à l'isomorphisme naturel $\text{Sym}_A^2 M \otimes_A B \simeq \text{Sym}_B^2(M \otimes_A B)$.

Il y a un morphisme de champs constant $A[n] : \underline{\text{Perf}} \longrightarrow \underline{\text{Perf}}$ défini sur chaque algèbre simpliciale A comme étant le morphisme constant d'ensembles simpliciaux de $\underline{\text{Perf}}(A)$ vers le point $N(A)[n]$.

3.2 Le champ des morphismes de complexes parfaits

3.2.1 Définition

Soit $\text{Perf}^{\Delta_1}(A)$ la catégorie dont les objets sont les morphismes entre complexes parfaits cofibrants sur A , et les morphismes entre deux objets $M \longrightarrow N$ et

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{m} & M' \\ M' \longrightarrow N' & \text{sont les carrés commutatifs} & \begin{array}{c} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ N & \xrightarrow{n} & N' \end{array} \end{array} \quad \text{où } m \text{ et } n \text{ sont des quasi-}$$

isomorphismes.

On a des foncteurs source et but $(s, t) : \text{Perf}^{\Delta_1}(A) \longrightarrow \text{Perf}(A) \times P(A)$. Ce morphisme admet une section $0 : \text{Perf}(A) \times \text{Perf}(A) \longrightarrow \text{Perf}^{\Delta_1}(A)$ donnée par le morphisme nul entre la source et le but.

La composition des morphismes donne un foncteur

$$\circ : \text{Perf}(A)^{\Delta_1} \times_{\text{Perf}(A)}^h \text{Perf}(A)^{\Delta_1} \longrightarrow \text{Perf}(A)^{\Delta_1}$$

, la catégorie de départ étant le produit fibré homotopique des foncteurs t et s . Si u et v sont deux objets de $P(A)$ (donc des morphismes de complexes) tels que $s(u) = t(v)$ alors la source et le but de leur composition est simplement $s(u \circ v) = s(v)$, $t(u \circ v) = t(u)$.

On a un morphisme $\text{Sym}^2 : \text{Perf}(A)\Delta_1 \longrightarrow \text{Perf}(A)\Delta_1$ qui commute avec les foncteurs source et but.

De même que précédemment, pour tout morphisme d'algèbres simpliciales $A \longrightarrow B$, on a un foncteur de changement de base

$$\cdot \otimes_A B : \begin{array}{ccc} \text{Perf}^{\Delta_1}(A) & \longrightarrow & \text{Perf}^{\Delta_1}(B) \\ M \xrightarrow{f} N & \longmapsto & M \otimes_A N(B) \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{N(B)}} N \otimes_A N(B) \end{array}$$

, ce qui nous donne un foncteur lax, qui peut être rectifié pour donner un foncteur de la catégorie des algèbres simpliciales commutatives vers la catégorie des catégories.

En composant avec le foncteur nerf, on obtient le champ des morphismes de complexes parfaits $\underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$. On a par ailleurs des morphismes de champs $(s, t) : \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \longrightarrow \underline{\text{Perf}} \times \underline{\text{Perf}}$, et une section $0 : \underline{\text{Perf}} \times \underline{\text{Perf}} \longrightarrow \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$. On a également des morphismes $\circ : \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \times_{\underline{\text{Perf}}}^h \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \longrightarrow \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$ et $\text{Sym}^2 : \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \longrightarrow \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$.

La fibre homotopique du morphisme $\underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}(A) \xrightarrow{(s,t)} \underline{\text{Perf}}(A) \times \underline{\text{Perf}}(A)$ en un point $(M, N) : \text{Spec } A \rightarrow \underline{\text{Perf}} \times \underline{\text{Perf}}$ est équivalente à $\underline{\text{Map}}(M, N)$.

3.2.2 Complexes et morphismes tangents

Pour $M : \text{Spec } A \longrightarrow \underline{\text{Perf}}$ un A -point de $\underline{\text{Perf}}$ représentant un complexe parfait M , le complexe tangent à $\underline{\text{Perf}}$ en M est $\underline{\text{End}}(E)[1]$ ([30]).

Soit $f : \text{Spec } A \longrightarrow \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$ un A -point de $\underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$ représentant un morphisme de complexes parfaits $E \longrightarrow F$, alors le complexe tangent à $\underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$ en f est $\underline{\text{End}}(E) \times_{\underline{\text{Hom}}(E,F)}^h \underline{\text{End}}(F)[1]$.

Le morphisme tangent $T_{E \rightarrow F} \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \xrightarrow{T(s,t)} T_E \underline{\text{Perf}} \times T_F \underline{\text{Perf}}$ est le morphisme naturel $\underline{\text{End}}(E) \times_{\underline{\text{Hom}}(E,F)}^h \underline{\text{End}}(F)[1] \longrightarrow \underline{\text{End}}(E) \times \underline{\text{End}}(F)[1]$.

Le morphisme tangent à $\underline{\text{Perf}} \times \underline{\text{Perf}} \xrightarrow{0} \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$ est obtenu en composant l'équivalence $\underline{\text{End}}(E) \times \underline{\text{End}}(F) \simeq \underline{\text{End}}(E) \times_{\underline{\text{Hom}}(E,F)}^h \underline{\text{End}}(F)$, où les deux morphismes structurels du produit fibré sont nuls, avec le morphisme canonique

$$\underline{\text{End}}(E) \times_{\underline{\text{Hom}}(E,F)}^h \underline{\text{End}}(F) \longrightarrow \underline{\text{End}}(E) \times_{\underline{\text{Hom}}(E,F)}^h \underline{\text{End}}(F).$$

Le morphisme tangent à la composition \circ est le morphisme naturel

$$(\underline{\text{End}}(E) \times_{\underline{\text{Hom}}(E,F)}^h \underline{\text{End}}(F)) \times_{\underline{\text{End}}(F)}^h (\underline{\text{End}}(F) \times_{\underline{\text{Hom}}(F,G)}^h \underline{\text{End}}(G)) \rightarrow \underline{\text{End}}(E) \times_{\underline{\text{Hom}}(E,G)}^h \underline{\text{End}}(G).$$

Remarque 3.1. On peut écrire explicitement ce morphisme de la façon suivante : étant donnés les morphismes de complexes $E \xrightarrow{u} F$ et $F \xrightarrow{v} G$, le morphisme tangent à la composition prend pour argument la donnée de $e \in \underline{\text{End}}(E)$, $f \in \underline{\text{End}}(F)$, $f' \in \underline{\text{End}}(F)$, $g \in \underline{\text{End}}(G)$, h une homotopie entre $u \circ e$ et $f \circ u$, h'

une homotopie entre f et f' , h'' une homotopie entre $v \circ f'$ et $g \circ v$. L'image de cette donnée est induite dans $\underline{\text{End}}(E) \times_{\underline{\text{Hom}}(E,G)}^h \underline{\text{End}}(G)$ par e, g et l'homotopie $v \circ h + v \circ h' \circ u + h'' \circ u$ entre les morphismes $v \circ u \circ e$ et $g \circ v \circ u$.

Proposition 3.2. *Soit $(N \xrightarrow{f} M) : \text{Spec } A \rightarrow \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$ un A -point de $\underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$, soit $K \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} M$ une fibration homotopique, alors le complexe tangent relatif du morphisme $\underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \xrightarrow{t} \underline{\text{Perf}}$ au point f est équivalent à $\underline{\text{Hom}}(N, K)[1]$.*

Démonstration. Par définition, ce complexe tangent relatif est la fibre homotopique du morphisme de projection $(\underline{\text{End}}(N) \times_{\underline{\text{Hom}}(N,M)}^h \underline{\text{End}}(M) \rightarrow \underline{\text{End}}(M))[1]$, qui est équivalente à la fibre homotopique du morphisme $\underline{\text{End}}N \xrightarrow{f \circ} \underline{\text{Hom}}(N, M)[1]$ par composition des produits fibrés homotopiques. Cette fibre homotopique est équivalente à $\underline{\text{Hom}}(N, K)[1]$ par la propriété universelle de la fibration homotopique $K \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} M$. \square

3.3 Le champ des complexes quadratiques n -décalés

Définition 3.3. On définit le champ $\underline{\text{Quad}}(n)$ des complexes quadratiques n -décalés comme étant le produit fibré homotopique

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Quad}}(n) & \longrightarrow & \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \\ \downarrow & & \downarrow (s,t) \\ \underline{\text{Perf}} & \xrightarrow{(\text{Sym}^2, A[n])} & \underline{\text{Perf}} \times \underline{\text{Perf}} \end{array}$$

Par la suite, on notera simplement $\underline{\text{Quad}}$, le décalage étant sous-entendu.

Vérifions que ce champ paramètre bien les complexes quadratiques. Soit $M : \text{Spec } A \rightarrow \underline{\text{Perf}}$ un complexe parfait au-dessus de A , alors par composition des produits fibrés homotopiques, on sait que la fibre homotopique du morphisme $\underline{\text{Quad}}(A) \rightarrow \underline{\text{Perf}}(A)$ au point M est équivalente à la fibre homotopique de (s, t) au point $(\text{Sym}_A^2 M, A[n])$, c'est-à-dire $\underline{\text{Map}}(\text{Sym}_A^2 M, A[n])$.

De cette façon, on décrit $\underline{\text{Quad}}(A)$ comme étant fibré au-dessus de $\underline{\text{Perf}}(A)$, la fibre étant l'espace des formes quadratiques décalées sur le complexe fixé M . Ainsi chaque complexe quadratique correspond à un point d'une telle fibre, donc à un point de $\underline{\text{Quad}}(A)$, et réciproquement tout point de $\underline{\text{Quad}}(A)$ correspond à un point de $\underline{\text{Perf}}(A)$ et un élément de la fibre au-dessus de ce point, donc à un complexe quadratique.

Proposition 3.4. *Le champ $\underline{\text{Quad}}$ est localement algébrique de présentation finie.*

Démonstration. En effet, c'est un produit fibré homotopique de champs localement algébriques de présentation finie. \square

En particulier il admet un complexe tangent.

3.3.1 Complexe tangent

On considère un A -point $(M, q) : \text{Spec } A \rightarrow \underline{\text{Quad}}$.

Proposition 3.5.

$$T_{M,q}\underline{\text{Quad}} \simeq \text{fib}(\underline{\text{End}}M \xrightarrow{q \circ T_M \text{Sym}^2} \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_A^2 M, A[n]))[1]$$

Démonstration. Par définition du champ $\underline{\text{Quad}}$ on a un carré cartésien homotopique

$$\begin{array}{ccc} T_{M,q}\underline{\text{Quad}} & \longrightarrow & T_q \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \\ \downarrow & & \downarrow T(s,t) \\ T_M \underline{\text{Perf}} & \xrightarrow{T_M \text{Sym}^2 \times 0} & T_{\text{Sym}^2 M} \underline{\text{Perf}} \times T_{A[n]} \underline{\text{Perf}} \end{array}$$

d'où $T_{M,q}\underline{\text{Quad}} \simeq \underline{\text{End}}M \times_{\underline{\text{End}}\text{Sym}_A^2 M \times A}^h (\underline{\text{End}}\text{Sym}_A^2 M \times_{\underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_A^2 M, A[n])}^h A)[1]$. On a utilisé ici l'équivalence de A -complexes $\underline{\text{End}}(A[n]) \simeq \underline{\text{End}}(A) \simeq A$.

On applique ensuite le lemme 3.6 avec $W = \underline{\text{End}}M$, $X = \underline{\text{End}}\text{Sym}_A^2 M$, $Y = A$, et $Z = \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_A^2 M, A[n])$ pour obtenir l'équivalence

$$T_{M,q}\underline{\text{Quad}} \simeq \text{fib}(\underline{\text{End}}M \xrightarrow{q \circ T_M \text{Sym}^2} \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_A^2 M, A[n]))[1].$$

\square

Lemme 3.6. *On considère des complexes W, X, Y, Z munis de morphismes $X \xrightarrow{x} Z$, $Y \xrightarrow{y} Z$, $W \xrightarrow{w} X \times Y$. Alors $W \times_{X \times Y}^h (X \times_Z^h Y) \simeq \text{fib}(W \xrightarrow{(x-y) \circ w} Z)$.*

Démonstration. On a $X \times_Z^h Y \simeq (X \times Y) \times_Z^h 0$ où le morphisme structurel $X \times Y \rightarrow Z$ est $x - y$, d'où $W \times_{X \times Y}^h (X \times_Z^h Y) \simeq W \times_{X \times Y}^h ((X \times Y) \times_Z^h 0) \simeq W \times_Z^h 0$ par composition de carrés cartésiens homotopiques, ce qui conclut. \square

Ainsi un morphisme vers $T_{M,q}\underline{\text{Quad}}$ correspond à la donnée d'un morphisme vers $\underline{\text{End}}M$ ainsi qu'une homotopie à 0 pour la composée de ce morphisme avec $q \circ T_M \text{Sym}^2$.

3.4 Le champ des sous-complexes

On considère un anneau simplicial commutatif A fixé ainsi que M un complexe parfait sur A .

Définition 3.7. On définit le champ $\underline{\text{Perf}}_{/M}$ des sous-complexes M comme étant le produit fibré homotopique

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Perf}}_{/M} & \longrightarrow & \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \\ \downarrow & & \downarrow t \\ \text{Spec } A & \xrightarrow{M} & \underline{\text{Perf}} \end{array}$$

3.4.1 Complexe tangent relatif

Soit $A \rightarrow B$ une B -algèbre simpliciale commutative, on notera M_B le complexe obtenu par changement de base $M \otimes_A N(B)$.

On considère un B -point $(N \xrightarrow{f} M_B) : \text{Spec } B \rightarrow \underline{\text{Perf}}_{/M}$, et une fibration homotopique $K \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} M_B$ d'homotopie h . On s'intéresse au complexe tangent relatif du morphisme structurel $\underline{\text{Perf}}_{/M} \rightarrow \text{Spec } A$.

Proposition 3.8. *Le complexe tangent relatif du champ des sous-complexes de M au point f est*

$$T_f \underline{\text{Perf}}_{/M/\text{Spec } A} \simeq \underline{\text{Hom}}(N, K)[1]$$

Démonstration. On a un carré cartésien homotopique
$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Perf}}_{/M} & \longrightarrow & \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \\ \downarrow & & \downarrow t \\ \text{Spec } A & \xrightarrow{M} & \underline{\text{Perf}} \end{array}$$
, donc

le complexe tangent relatif du morphisme $\underline{\text{Perf}}_{/M} \rightarrow \text{Spec } A$ au point f est équivalent au complexe tangent relatif du morphisme but $\underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \xrightarrow{t} \underline{\text{Perf}}$ au point f , qui est équivalent à $\underline{\text{Hom}}(N, K)[1]$ d'après la proposition [3.2.2](#). \square

Remarque 3.9. La restriction du morphisme tangent de la projection canonique $\underline{\text{Perf}}_{/M} \rightarrow \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$ au complexe tangent relatif s'identifie avec le morphisme canonique

$$\underline{\text{Hom}}(N, K)[1] \longrightarrow \underline{\text{End}}(N) \times_{\underline{\text{Hom}}(N, M)}^h \underline{\text{End}}(M)[1]$$

induit par les morphismes $\underline{\text{Hom}}(N, K) \xrightarrow{i^\circ} \underline{\text{End}}(N)$, $\underline{\text{Hom}}(N, K) \xrightarrow{0} \underline{\text{End}}(M)$ et l'homotopie $h \circ$.

We now compute the tangent morphism to Sym^2 at a morphism $M : \text{Spec } A \rightarrow \underline{\text{Perf}}$. Recall the projection $\pi : M \otimes_A M \rightarrow \text{Sym}_A^2 M$ and its section $s : \text{Sym}_A^2 M \rightarrow M \otimes_A M$. Any morphism $f : M \otimes_A M \rightarrow N$ can be symmetrized into a morphism $S(f) : \text{Sym}_A^2 M \rightarrow N$ where $S(f) = f \circ s$. In particular there is a morphism $S_M : \underline{\text{End}}(M \otimes_A M) \rightarrow \underline{\text{End}}\text{Sym}_A^2 M$ obtained by postcomposition with π followed by symmetrization.

Proposition 3.10. *The tangent morphism $T_M \text{Sym}^2 : \underline{\text{End}}(M)[1] \rightarrow \underline{\text{End}}(\text{Sym}_A^2 M)[1]$ is the composition of $\underline{\text{End}}(M) \xrightarrow{id_{M \otimes_A M}} \underline{\text{End}}(M \otimes_A M)$ followed by S_M , with a shift of 1.*

Démonstration. To add in a later version. □

3.5 Le champ des sous-complexes isotropes

On considère un anneau simplicial commutatif A fixé ainsi que (M, q) un complexe quadratique sur A , correspondant à un morphisme de champs $(M, q) : \text{Spec } A \rightarrow \underline{\text{Quad}}$. On notera aussi M et q les morphismes induits $M : \text{Spec } A \rightarrow \underline{\text{Perf}}$ et $q : \text{Spec } A \rightarrow \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$.

3.5.1 Le morphisme de restriction de la forme à un sous-complexe

On souhaite définir le morphisme de champs qui à un sous-complexe $N \xrightarrow{f} M$ associe le complexe quadratique $(N, q|_N)$ obtenu par restriction de la forme quadratique à N .

On a un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{\text{Perf}}_{/M} & \longrightarrow & \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} & \xrightarrow{\text{Sym}^2} & \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \\
 \downarrow & & \downarrow t & & \downarrow t \\
 \text{Spec } A & \xrightarrow{M} & \underline{\text{Perf}} & \xrightarrow{\text{Sym}^2} & \underline{\text{Perf}} \\
 \downarrow q & & \downarrow (\text{Sym}^2, A[n]) & & \parallel \\
 \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} & \xrightarrow{(s,t)} & \underline{\text{Perf}} \times \underline{\text{Perf}} & \xrightarrow{\pi_1} & \underline{\text{Perf}}
 \end{array}$$

où π_1 est la projection sur la première composante.

Chaque petit carré étant commutatif à homotopie près, ce diagramme nous permet de construire le carré extérieur, qui est donc commutatif à homotopie près, et nous permet d'affirmer l'existence d'un morphisme $\underline{\text{Perf}}_{/M} \xrightarrow{f_1} \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \times_{\underline{\text{Perf}}}^h$

$\underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$. En termes concrets, ce morphisme associe à un sous-complexe $N \xrightarrow{f} M$ le couple $(\text{Sym}_A^2 f, q)$.

On considère ensuite $f_2 = \circ(f_1)$ le morphisme composé $\underline{\text{Perf}}_{/M} \longrightarrow \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \times_{\underline{\text{Perf}}}^h \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \xrightarrow{\circ} \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$. Ce morphisme associe à un sous-complexe $N \xrightarrow{f} M$ la restriction de la forme au sous-complexe $q|_N \in \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}(A)$.

On définit f_3 le morphisme composé $\underline{\text{Perf}}_{/M} \rightarrow \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \xrightarrow{s} \underline{\text{Perf}}$, où le premier morphisme est la projection canonique. C'est un morphisme d'oubli, qui à un sous-complexe $N \rightarrow M$ associe sa source N .

Grâce aux diverses propriétés de commutativité de Sym^2 , \circ ainsi que des morphismes source et but, on obtient sans difficulté la commutativité à homotopie près du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Perf}}_{/M} & \xrightarrow{f_2} & \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \\ f_3 \downarrow & & \downarrow (s,t) \\ \underline{\text{Perf}} & \xrightarrow{(\text{Sym}^2, A[n])} & \underline{\text{Perf}} \times \underline{\text{Perf}} \end{array}$$

qui induit donc un morphisme

$$q| : \underline{\text{Perf}}_{/M} \longrightarrow \underline{\text{Quad}}$$

3.5.2 Le morphisme tangent au morphisme de restriction

Comme précédemment, on considère un B -point $(N \xrightarrow{f} M_B) : \text{Spec } B \rightarrow \underline{\text{Perf}}_{/M}$, et une fibration homotopique $K \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} M_B$ d'homotopie h .

On souhaite calculer la restriction du morphisme tangent de $q| : \underline{\text{Perf}}_{/M} \rightarrow \underline{\text{Quad}}$ au complexe tangent relatif $T_f \underline{\text{Perf}}_{/M/\text{Spec } A}$.

On appellera « morphisme tangent relatif » la restriction d'un morphisme tangent au complexe tangent relatif $T_f \underline{\text{Perf}}_{/M/\text{Spec } A}$.

Lemme 3.11. *Le morphisme tangent relatif de $f_1 : \underline{\text{Perf}}_{/M} \rightarrow \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \times_{\underline{\text{Perf}}}^h \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}$ est induit par un diagramme strictement commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(N, K)[1] & \xrightarrow{m_1} & T_{\text{Sym}_B^2 f} \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \\ 0 \downarrow & & \downarrow Tt \\ T_{q_B} \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} & \xrightarrow{T_s} & T_{\text{Sym}_B^2 M_B} \underline{\text{Perf}} \end{array}$$

Démonstration. En effet le morphisme f_1 est induit par un diagramme commutatif à homotopie près, donc son morphisme tangent est induit par le diagramme tangent.

Le morphisme m_1 est donc la composition de $TSym^2$ avec le morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(N, K)[1] \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(N) \times_{\underline{\mathrm{Hom}}(N, M)} \underline{\mathrm{End}}(M)[1]$$

décrit dans la remarque [3.9](#). Sa composée avec Tt est nulle car c'est la projection sur le second facteur. Le morphisme de $\underline{\mathrm{Hom}}(N, K)[1]$ vers $T_{q_B} \underline{\mathrm{Perf}}^{\Delta_1}$ se factorise par le morphisme tangent de $\underline{\mathrm{Perf}}_{/M} \rightarrow \mathrm{Spec} A$, donc est homotope au morphisme nul puisque $\underline{\mathrm{Hom}}(N, K)[1]$ est la fibre de ce morphisme tangent.

La commutation du diagramme est bien stricte puisque les deux morphismes sont nuls. □

Pour calculer le morphisme tangent relatif de $\underline{\mathrm{Perf}}_{/M} \xrightarrow{f_2} \underline{\mathrm{Perf}}^{\Delta_1}$, on doit composer le morphisme tangent relatif de f_1 avec le morphisme tangent de \circ , la composition des morphismes de complexes.

Nous commençons par décrire plus explicitement le morphisme m_1 .

Remarque 3.12. Le morphisme $m_1[-1]$ est induit par

$$\underline{\mathrm{Hom}}(N, K) \xrightarrow{S_N \circ (i \circ \cdot)} \underline{\mathrm{End}}(\mathrm{Sym}_B^2 N),$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}(N, K) \xrightarrow{0} \underline{\mathrm{End}}(\mathrm{Sym}_B^2 M_B),$$

ainsi qu'une homotopie entre ces deux morphismes qui provient de l'homotopie h .

Plus précisément, pour construire ce morphisme, on commence par appliquer $\underline{\mathrm{Hom}}(N, \cdot)$ à la fibration homotopique $K \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} M$ munie de l'homotopie h , on obtient une fibration homotopique $\underline{\mathrm{Hom}}(N, K) \xrightarrow{i \circ \cdot} \underline{\mathrm{End}}(N) \xrightarrow{f \circ \cdot} \underline{\mathrm{Hom}}(N, M)$ munie de l'homotopie $h \circ \cdot$, ce qui correspond à la description de la remarque [3.9](#). On compose ensuite avec $TSym$, donc l'homotopie à 0 pour le morphisme $\underline{\mathrm{Hom}}(N, K) \xrightarrow{S_f \circ S_N(i \circ \cdot)} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Sym}_B^2 N, \mathrm{Sym}_B^2 M_B)$ est $S(h \circ \cdot)$.

Lemme 3.13. *Le morphisme tangent relatif de $\underline{\mathrm{Perf}}_{/M} \xrightarrow{f_2} \underline{\mathrm{Perf}}^{\Delta_1}$ est induit par un diagramme commutatif à homotopie près*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}(N, K)[1] & \xrightarrow{m_2} & \underline{\mathrm{End}}(\mathrm{Sym}_B^2 N)[1] \\ \downarrow 0 & & \downarrow q_{1N \circ \cdot} \\ B[1] & \xrightarrow{\cdot \circ q_{1N}} & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Sym}_B^2 N, B[n])[1] \end{array}$$

où $m_2[-1]$ est le morphisme $\underline{\mathrm{Hom}}(N, K) \xrightarrow{S_N \circ (i \circ \cdot)} \underline{\mathrm{End}}(\mathrm{Sym}_B^2 N)$ et l'homotopie $h_1 := q \circ S(h \circ \cdot)$.

Démonstration. La description du morphisme m_1 donnée dans la remarque [3.12](#) nous donne une description explicite du morphisme tangent relatif de f_1 . En utilisant la description explicite du morphisme tangent de \circ donnée dans la remarque [3.1](#), on obtient la description du morphisme tangent relatif de f_2 voulue. \square

Remarque 3.14. Le morphisme tangent relatif de f_3 est simplement le morphisme $\underline{\text{Hom}}(N, K) \xrightarrow{i\circ} \underline{\text{End}}N$ décalé de 1.

On a maintenant tous les éléments pour calculer le morphisme tangent relatif de q_1 .

Lemme 3.15. *Le morphisme tangent relatif de q_1*

$$\underline{\text{Hom}}(N, K)[1] \xrightarrow{T_{q_1}} \text{fib}(\underline{\text{End}}N \xrightarrow{q_{1N} \circ T_N \text{Sym}^2} \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n]))[1]$$

est induit par le morphisme $\underline{\text{Hom}}(N, K) \xrightarrow{i\circ} \underline{\text{End}}N$ et l'homotopie $h_1 = q \circ S(h \circ \cdot)$.

Démonstration. En effet q_1 étant induit par un diagramme commutatif à homotopie près, son morphisme tangent est induit par le tangent de ce diagramme, c'est-à-dire le diagramme strictement commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(N, K) & \xrightarrow{T_{f_2}} & \underline{\text{End}}\text{Sym}_B^2 N \times_{\underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n])}^h B \\ \downarrow T_{f_3} & & \downarrow (\pi_1, \pi_2) \\ \underline{\text{End}}N & \xrightarrow{(T\text{Sym}^2, 0)} & \underline{\text{End}}\text{Sym}_B^2 N \times B \end{array}$$

décalé de 1.

La remarque [3.14](#) et le lemme [3.13](#) nous donnent explicitement T_{f_2} ainsi que T_{f_3} . Remarquons que les composantes selon B sont partout nulles.

En faisant appel au lemme [3.6](#) avec $W = \underline{\text{End}}N$, $X = \underline{\text{End}}\text{Sym}_B^2 N$, $Y = B$, $Z = \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n])$, on constate que ce diagramme est équivalent à un morphisme de $\underline{\text{Hom}}(N, K)$ vers $\text{fib}(W \rightarrow Z)$, induit par $\underline{\text{Hom}}(N, K) \xrightarrow{T_{f_3}} W$, c'est-à-dire $i \circ \cdot$, et l'homotopie à 0 pour le morphisme $\underline{\text{Hom}}(N, K) \xrightarrow{q_{1N} \circ T_{f_2}} Z$, qui est h_1 . \square

3.5.3 Définition du champ des sous-complexes isotropes

On a également un morphisme nul $\underline{\text{Perf}} \xrightarrow{0} \underline{\text{Quad}}$ qui munit un complexe parfait M de la forme nulle, défini par la commutativité à homotopie près du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\text{Perf}} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1} \\
& \downarrow \text{id} & \downarrow (s,t) \\
\underline{\text{Perf}} & \xrightarrow[\text{(\text{Sym}^2, A[n])}]{} & \underline{\text{Perf}} \times \underline{\text{Perf}}
\end{array}$$

Définition 3.16. On définit le champ $\underline{\text{Isot}}_M$ des sous-complexes isotropes du complexe quadratique (M, q) comme étant le produit fibré homotopique

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\text{Isot}}_M & \longrightarrow & \underline{\text{Perf}}_{/M} \\
\downarrow & & \downarrow q_1 \\
\underline{\text{Perf}} & \xrightarrow[\quad 0 \quad]{} & \underline{\text{Quad}}
\end{array}$$

Vérifions que ce champ paramètre bel et bien les sous-complexes isotropes de (M, q) . On le considère cette fois-ci comme un champ fibré au-dessus de $\underline{\text{Perf}}_{/M}$. Soit $N \rightarrow M_B$ un B -point de $\underline{\text{Perf}}_{/M}$, on veut décrire la fibre homotopique du morphisme $\underline{\text{Isot}}_M(B) \rightarrow \underline{\text{Perf}}_{/M}(B)$ au point $N \rightarrow M_B$. Elle est équivalente à la fibre homotopique du morphisme $\underline{\text{Perf}}(B) \xrightarrow{0} \underline{\text{Quad}}(B)$ au point (N, q_N) .

Considérons le diagramme suivant, composé uniquement de carrés cartésiens à homotopie près :

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\quad z \quad} & \underline{\text{Perf}}(B) & & \\
\downarrow & & \downarrow z' & & \downarrow 0 & & \\
\cdot & \xrightarrow[\quad q_N \quad]{} & \underline{\text{Map}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n]) & \longrightarrow & \underline{\text{Quad}}(B) & \longrightarrow & \underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}(B) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow (s,t) \\
& & \cdot & \xrightarrow[\quad N \quad]{} & \underline{\text{Perf}} B & \xrightarrow[\text{(\text{Sym}_B^2, B[n])}]{} & \underline{\text{Perf}}(B) \times \underline{\text{Perf}}(B)
\end{array}$$

Nous souhaitons déterminer X , car par composition des carrés cartésiens, c'est la fibre homotopique du morphisme $\underline{\text{Perf}}(B) \xrightarrow{0} \underline{\text{Quad}}(B)$ au point (N, q_N) .

Par définition, le morphisme $\underline{\text{Perf}} \xrightarrow{0} \text{stQuad} \rightarrow \underline{\text{Perf}}$ vaut l'identité, donc le morphisme z est le tiré en arrière du morphisme N le long de l'identité de $\underline{\text{Perf}}(B)$, c'est donc le morphisme N , et $Y = \cdot$.

Le morphisme de Y vers $\underline{\text{Perf}}^{\Delta_1}(B)$ envoie le point sur le morphisme $\text{Sym}_B^2 N \xrightarrow{0} B[n]$, par définition du morphisme $\underline{\text{Perf}}(B) \xrightarrow{0} \underline{\text{Quad}}(B)$, donc par l'identification de $\underline{\text{Map}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n])$ comme fibre homotopique du morphisme (s, t) au point $(\text{Sym}_B^2 N, B[n])$, on obtient que le morphisme z' envoie le point sur la forme quadratique nulle dans $\underline{\text{Map}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n])$.

Ainsi, on a le produit fibré homotopique

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow 0 \\ \cdot & \xrightarrow{q|_N} & \underline{\text{Map}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n]) \end{array} \quad \text{donc}$$

X est équivalent à $\underline{\text{Path}}(0, q|_N)$, qui est donc la fibre homotopique de $\underline{\text{Isot}}_M(B) \rightarrow \underline{\text{Perf}}_{/M}(B)$ au point $N \rightarrow M_B$.

Ainsi, la donnée d'un B -point de $\underline{\text{Isot}}_M$ correspond à la donnée d'un sous-complexe $N \rightarrow M_B$ ainsi que d'une homotopie de $q|_N$ à 0, ce qui correspond à la donnée d'un sous-complexe isotrope de (M_B, q_B) .

Proposition 3.17. *Le champ $\underline{\text{Isot}}_M$ est localement algébrique de présentation finie. En particulier il admet un complexe tangent.*

Démonstration. C'est un produit cartésien homotopique de champs localement algébriques de présentation finie. \square

3.5.4 Complexe tangent relatif

On considère un B -point $(N \xrightarrow{f} M_B, h) : \text{Spec } B \rightarrow \underline{\text{Isot}}$ du champ des sous-complexes isotropes du complexe quadratique (M, q) , h étant une homotopie à zéro pour $q|_N$, ainsi qu'une fibration homotopique $K \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} M_B$ d'homotopie h' .

Le complexe tangent relatif de $\underline{\text{Isot}}$ en ce point est un produit fibré homotopique de $Tq|_N$ et $T0$. En effet on a le diagramme suivant, donc chaque carré est cartésien homotopique :

$$\begin{array}{ccccc} T_{N/\text{Spec } A} \underline{\text{Isot}}_M & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(N, K)[1] & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T_N \underline{\text{Isot}}_M & \longrightarrow & T_N \underline{\text{Perf}}_{/M} & \longrightarrow & T_N \text{Spec } A \\ \downarrow & & \downarrow Tq|_N & & \\ T_N \underline{\text{Perf}} & \xrightarrow{T0} & T_N \underline{\text{Quad}} & & \end{array}$$

donc par composition des carrés cartésiens, on a le carré cartésien homotopique

$$\begin{array}{ccc} T_{N/\text{Spec } A} \underline{\text{Isot}}_M & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(N, K)[1] \\ \downarrow & & \downarrow Tq|_N \\ T_N \underline{\text{Perf}} & \xrightarrow{T0} & T_N \underline{\text{Quad}} \end{array}$$

Remarque 3.18. Le morphisme tangent de $\underline{\text{Perf}} \xrightarrow{0} \underline{\text{Quad}}$ en un point $N : \text{Spec } B \rightarrow \underline{\text{Perf}}$ est le morphisme $\underline{\text{End}}N[1] \rightarrow \text{fib}(\underline{\text{End}}N \xrightarrow{0} \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n]))[1]$ induit par l'identité de $\underline{\text{End}}N$ et l'homotopie nulle.

Les modèles explicites de $T0$ et $Tq_{|N}$ (lemme [3.15](#)) donnés plus haut ont pour but respectivement $\text{fib}(\underline{\text{End}}N \xrightarrow{0} \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n]))[1]$ et $\text{fib}(\underline{\text{End}}N \xrightarrow{q_{|N} \circ T_N \text{Sym}^2} \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n]))[1]$. C'est l'homotopie h (la condition d'isotropie) qui donne l'équivalence de ces deux complexes, et qui permet bel et bien de considérer le produit fibré homotopique de $T0$ et $Tq_{|N}$.

On va calculer ce produit fibré homotopique en prenant $\text{fib}(\underline{\text{End}}N \xrightarrow{q_{|N} \circ T_N \text{Sym}^2} \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n]))[1]$ pour modèle des buts de $T0$ et $Tq_{|N}$.

Remarque 3.19. Le morphisme

$$\underline{\text{End}}N[1] \xrightarrow{T0} \text{fib}(\underline{\text{End}}N \xrightarrow{q_{|N} \circ T_N \text{Sym}^2} \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n]))[1]$$

est induit par l'identité de $\underline{\text{End}}N$ et l'homotopie $h_2 := h \circ T_N \text{Sym}^2$.

Le lemme [3.15](#) et la remarque [3.19](#) nous permettent alors de calculer explicitement le complexe tangent relatif de $\underline{\text{Isot}}$. Le but de ces morphismes étant lui-même une fibre homotopique, on peut en réalité simplifier un tant soit peu le calcul.

Lemme 3.20. *Soit $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$ une fibration homotopique de complexes, $I \xrightarrow{a} G$ et $J \xrightarrow{b} G$ deux morphismes de complexes. Alors $I \times_G^h J \simeq \text{fib}(I \times_H^h J \xrightarrow{m} F)$.*

Démonstration. On rappelle l'équivalence $I \times_G^h J \simeq (I \times J) \times_G^h 0$ où le morphisme $I \times J \rightarrow G$ est $a - b$. On a alors la suite d'équivalences $I \times_G^h J \simeq (I \times J) \times_G^h 0 \simeq ((I \times J) \times_G^h F) \times_F^h 0 \simeq ((I \times J) \times_G^h (G \times_H^h 0)) \times_F^h 0 \simeq ((I \times J) \times_H^h 0) \times_F^h 0 \simeq (I \times_H^h J) \times_F^h 0 \simeq \text{fib}(I \times_H^h J \rightarrow F)$.

Le morphisme m est induit par propriété universelle de la fibre homotopique F par le morphisme $I \times_H^h J \xrightarrow{a \circ \pi_1 - b \circ \pi_2} G$ et l'homotopie à zéro canonique pour le morphisme $I \times_H^h J \xrightarrow{g \circ a \circ \pi_1 - g \circ b \circ \pi_2} H$. □

Proposition 3.21. *Le complexe tangent relatif de $\underline{\text{Isot}}$ en un sous-complexe isotrope $(N \xrightarrow{f} M_B, h)$ de fibre K est équivalent à*

$$\text{fib}(\underline{\text{Hom}}(N, K) \xrightarrow{S \circ \alpha} \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n-1]))[1]$$

où $S : \underline{\text{Hom}}(N \otimes_B N, B[n-1]) \xrightarrow{S(-)} \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n-1])$ est l'application de symétrisation et α est

$$\begin{aligned} \alpha : \underline{\text{Hom}}(N, K) &\longrightarrow \underline{\text{Hom}}(N \text{ tens } B N, B[n-1]) \\ l &\longmapsto n_1 \otimes n_2 \mapsto \gamma(n_1 \otimes l(n_2)) \end{aligned}$$

pour $\gamma : N \otimes_B K \mapsto B[n-1]$ le morphisme naturel induit par la condition d'isotropie.

Ce résultat s'interprète aisément. En effet $\underline{\text{Hom}}(N, K)[1]$ correspond aux déformations infinitésimales de N en tant que sous-complexe de M_B , donc en respectant le morphisme d'« inclusion ». Le morphisme $S \circ \alpha$ indique la déformation de la condition d'isotropie induite par la déformation de N , donc on doit considérer la fibre de $S \circ \alpha$ si on veut respecter cette condition d'isotropie.

Démonstration. On pose $F := \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n])$, $G := \text{fib}(\underline{\text{End}}N \xrightarrow{q_{|N \circ T_N \text{Sym}^2}} \underline{\text{Hom}}(\text{Sym}_B^2 N, B[n]))[1]$, $H := \underline{\text{End}}N[1]$, $I := \underline{\text{Hom}}(N, K)[1]$, $J := H$, $a := I \xrightarrow{T_{q_1}} G$, $b := J \xrightarrow{T_0} G$.

Ainsi, le complexe tangent relatif de $\underline{\text{Isot}}$ est $I \times_G^h J$. On a une fibration homotopique $F \rightarrow G \rightarrow H$ obtenue en faisant tourner la fibration $G \rightarrow H \rightarrow F[1]$, donc on déduit du lemme 3.20 l'équivalence $I \times_G^h J \simeq \text{fib}(I \times_H^h J \xrightarrow{m} F) \simeq \text{fib}(I \xrightarrow{m} F)$.

Précisons le morphisme m , en utilisant la description donnée dans la preuve du lemme 3.20. On sait (lemme 3.15) que le morphisme $a : I \rightarrow G$ est induit par $\underline{\text{Hom}}(N, K)[1] \xrightarrow{i \circ} \underline{\text{End}}N[1]$ et l'homotopie $h_1 = q \circ S(h' \circ \cdot)$. Le morphisme composé $c := I \rightarrow G \rightarrow H$ est donc simplement $\underline{\text{Hom}}(N, K)[1] \xrightarrow{i \circ} \underline{\text{End}}N[1]$. Le morphisme $b : J \rightarrow G$ est lui induit par l'identité de $\underline{\text{End}}N[1]$ et l'homotopie $h_2 := h \circ T_N \text{Sym}^2$ (remarque 3.19). Remarquons que $I \xrightarrow{a-b \circ c} G$ est alors induit par le morphisme nul $\underline{\text{Hom}}(N, K)[1] \xrightarrow{0} \underline{\text{End}}N[1]$ et l'homotopie $h_1 - h_2 \circ c$, qui en tant qu'homotopie de 0 à 0 est en réalité un morphisme de I dans F .

Sous l'identification $I \times_H^h J \simeq I$, le morphisme $I \times_H^h J \xrightarrow{a \circ \pi_1 - b \circ \pi_2} G$ devient $I \xrightarrow{a-b \circ c} G$, et l'homotopie à zéro canonique pour le morphisme $I \times_H^h J \xrightarrow{g \circ a \circ \pi_1 - g \circ b \circ \pi_2} H$ devient l'homotopie nulle. Dans ces conditions, le morphisme induit $I \xrightarrow{m} F$ est simplement $h_1 - h_2 \circ c = q \circ S \circ (h' \circ \cdot) - h \circ T_N \text{Sym}^2(i \circ \cdot)$, et le complexe tangent relatif de $\underline{\text{Isot}}$ est la fibre de ce morphisme.

Explicitement, h_1 envoie $l \in \underline{\text{Hom}}(N, K)$ sur $n_1 \otimes n_2 \mapsto q(h'(l(n_1)) \otimes h'(l(n_2)))$

La remarque 1.18 définit le morphisme $\gamma : N \otimes_B K \rightarrow B[n-1]$ par la formule $\gamma = q \circ (f \otimes h') - h \circ (\text{id}_N \otimes i)$. Considérons la composition

$$\underline{\text{Hom}}(N, K) \xrightarrow{\text{id}_N \otimes -} \underline{\text{Hom}}(N \otimes_B N, N \otimes_B K) \xrightarrow{\gamma \circ -} \underline{\text{Hom}}(N \otimes_B N, B[n-1])$$

que nous nommons α .

En termes plus concrets, ce morphisme α envoie $l \in \underline{\text{Hom}}(N, K)$ sur $\alpha(l) : n_1 \otimes n_2 \mapsto \gamma(n_1 \otimes l(n_2)) \in \underline{\text{Hom}}(N \otimes_B N, B[n-1])$. Le morphisme $S \circ \alpha$ envoie donc $l \in \underline{\text{Hom}}(N, K)$ sur $S \circ \alpha(l) = n_1 \otimes n_2 \mapsto \frac{\gamma(n_1 \otimes l(n_2)) + \gamma(n_2 \otimes l(n_1))}{2}$.

On constate que $h_1 - h_2 \circ c = q \circ S \circ (h' \circ \cdot) - h \circ T_N \text{Sym}^2(i \circ \cdot)$ coïncide avec $S \circ \alpha$, ce qui conclut. □

3.6 Le champ des sous-complexes lagrangiens

Définition 3.22. On définit le champ $\underline{\text{Lag}}_M$ des sous-complexes lagrangiens de (M, q) comme le sous-champ de $\underline{\text{Isot}}_M$ tel que le sous-complexe isotrope représenté soit lagrangien.

On le définit en prenant les composantes connexes de :

$$\underline{\text{Lag}}_{M_0}(B) := \{y \in \underline{\text{Isot}}_{M_0}(B) \text{ telque } (N \rightarrow M_B, h) \text{ est lagrangien}\}$$

où pour $y \in \underline{\text{Isot}}_M(B)$, $(N \rightarrow M_B, h)$ est le sous-module isotrope représenté par y . ICela définit bien un sous-champ car la condition d'être lagrangien est locale, puisque qu'elle teste si un morphisme est un quasi-isomorphisme.

Proposition 3.23. *Le champ $\underline{\text{Lag}}_M$ est un sous-champ ouvert de $\underline{\text{Isot}}_M$. En particulier il est localement algébrique de présentation finie.*

Démonstration. Le champ $\underline{\text{Lag}}_M$ est le lieu où le morphisme $\theta : K \rightarrow N^*[n-1]$ est une équivalence, c'est donc le lieu où $\text{cofib}(\theta)$ est quasi-isomorphe à 0. C'est un ouvert de Zariski par la semi-continuité de Grothendieck. \square

3.6.1 Le complexe tangent relatif du champ des lagrangiens

Puisque le champ des lagrangiens est un ouvert du champ des sous-complexes isotropes, le complexe tangent relatif du champ des lagrangiens en un point est le complexe tangent relatif du champ des sous-complexes isotropes en ce point. La condition de non-dégénérescence supplémentaire permet de donner un modèle plus simple pour ce complexe.

On garde les notations précédentes, avec un B -point $(N \xrightarrow{f} M_B, h) : \text{Spec } B \rightarrow \underline{\text{Lag}}$ du champ des lagrangiens du complexe quadratique (M, q) , h étant une homotopie à zéro pour $q|_N$, ainsi qu'une fibration homotopique $K \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} M_B$ d'homotopie h' .

Théorème 3.24. *Le complexe tangent relatif de $\underline{\text{Lag}}_M$ en un lagrangien $L \rightarrow M$ est équivalent au complexe des formes antisymétriques n -décalées sur L .*

Ce théorème est un analogue dérivé d'un résultat classique connu.

Démonstration. Le proposition [3.21](#) nous permet de décrire ce complexe tangent relatif comme la fibre du morphisme $S \circ \alpha$, décalée de 1.

On peut décrire α alternativement comme la composition du morphisme

$$\underline{\text{Hom}}(N, K) \xrightarrow{\theta \circ -} \underline{\text{Hom}}(N, N^*[n-1])$$

et de l'adjonction

$$\underline{\mathrm{Hom}}(N, N^*[n-1]) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(N \otimes_A N, A[n-1])$$

puisque le premier morphisme envoie $l \in \underline{\mathrm{Hom}}(N, K)$ sur $n_1 \mapsto (n_2 \mapsto \gamma(n_1, l(n_2)))$, qui est ensuite envoyé par l'adjonction sur $n_1 \otimes n_2 \mapsto \gamma(n_1 \otimes l(n_2))$.

Cette adjonction peut se lire dans l'autre sens $\underline{\mathrm{Hom}}(N \otimes_A N, A[n-1]) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(N, N^*[n-1])$. Si N est lagrangien, le morphisme θ possède un quasi-inverse $\iota : N^*[n-1] \rightarrow K$ tel que $\theta \circ \iota$ soit homotope à $id_{N^*[n-1]}$. La post-composition par ι induit donc une équivalence $\underline{\mathrm{Hom}}(N \otimes_A N, A[n-1]) \simeq^\beta \underline{\mathrm{Hom}}(N, K)$. Par construction, α et β sont quasi-inverses.

Ainsi, puisque β est une équivalence, la fibre homotopique du morphisme $S \circ \alpha$ est équivalente à la fibre homotopique du morphisme $S \circ \alpha \circ \beta = S$, qui est bien le complexe des formes antisymétriques $n-1$ -décalées $\underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda^2 N, A[n-1])$. On conclut en ajoutant le décalage de 1. \square

3.7 Application à la rigidité

Théorème 3.25. *Soit A un anneau excellent, (A, I) une paire hensélienne, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme de réduction $l_n(A) \rightarrow l_n(A/I)$ est injectif. De plus, si n est pair, il est bijectif.*

Démonstration. On considère la classe de cobordisme d'un complexe quadratique non dégénéré (M, q) sur A . On souhaite montrer que si sa réduction (\bar{M}, \bar{q}) sur A/I admet un lagrangien, alors elle admet un lagrangien qui peut être relevé sur A .

La proposition 1.32 nous assure que (\bar{M}, \bar{q}) admet un lagrangien $\bar{L} \rightarrow \bar{M}$ tel que $\underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda_{A/I}^2 \bar{L}, A/I[n])$ soit concentré en degrés négatifs.

D'après la proposition 3.24, on sait que $\underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda_{A/I}^2 \bar{L}, A/I[n])$ est le complexe tangent relatif de $\underline{\mathrm{Lag}}_M$ en $\bar{L} : \mathrm{Spec} A/I \rightarrow \underline{\mathrm{Lag}}_M$, donc le morphisme de champs $\underline{\mathrm{Lag}}_M \rightarrow \mathrm{Spec} A$ est lisse en \bar{L} .

Par le lemme 3.26, on trouve une section $L : \mathrm{Spec} A \rightarrow \underline{\mathrm{Lag}}_M$ qui relève \bar{L} , et donc un lagrangien de M sur A , donc la classe de cobordisme de (M, q) est triviale, ce qui conclut pour l'injectivité.

Pour la surjectivité dans le cas où n est pair, on considère un complexe quadratique non dégénéré (\bar{M}, \bar{q}) sur A/I . Par chirurgie (lemme 2.13), on peut supposer que \bar{M} est concentré en degré $-\frac{n}{2}$ donc par la proposition 3.5, on voit que le complexe tangent du champ des formes quadratiques sur A est concentré en degré 0 au point (\bar{M}, \bar{q}) . Il est donc lisse en ce point, et on utilise de nouveau le lemme 3.26 pour relever ce complexe quadratique en un complexe quadratique (M, q) sur A , ce qui prouve la surjectivité. \square

Lemme 3.26. *Soit X un champ localement algébrique de présentation finie, A un anneau excellent, (A, I) une paire hensélienne, $f : X \rightarrow S$ un morphisme de champs (où $S = \text{Spec } A$) et $x \in X(A/I)$ un point où f est lisse. Il existe une section $\hat{x} : S \rightarrow X$ qui relève $x : \text{Spec } A/I \rightarrow X$.*

Démonstration. Soit $A_i := A/I^i$, $S_i := \text{Spec } A_i$, $\tilde{A} := \varprojlim A_i$ la complétion de A selon I , $\tilde{S} := \text{Spec } \tilde{A}$ muni du morphisme canonique $\tilde{S} \rightarrow S$, $\tilde{X} := X \times_S^h \tilde{S}$ et $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ le changement de base de f . On a un morphisme canonique $A_1 = \text{Spec } (A/I) \rightarrow \tilde{S}$ qui relève $\text{Spec } (A/I) \rightarrow S$, d'où un point $x_1 : \text{Spec } (A/I) \rightarrow \tilde{X}$ où \tilde{f} est lisse. Par lissité formelle et puisque les S_i sont des sous-schémas fermés de S_j , $j > i$ définis par des idéaux nilpotents, ce point se relève en $x_2 : S_2 \rightarrow \tilde{X}$, qui se relève en $x_3 : S_3 \rightarrow \tilde{X}$ et ainsi de suite. Puisque $X(\tilde{A}) = \varprojlim X(A_i)$, on obtient un morphisme $\tilde{x} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{X}$ sur S , qui donne par projection sur X un morphisme $\tilde{S} \rightarrow X$, qu'on note encore \tilde{x} .

Par ailleurs, par le théorème de Popescu, $\tilde{A} = \varinjlim A_\alpha$ est une limite directe de A -algèbres lisses A_α puisque le morphisme $A \rightarrow \tilde{A}$ est régulier ([26]). Puisque X est localement de présentation finie, $X(\tilde{A}) = \text{colim } X(A_\alpha)$ et \tilde{x} se factorise par un morphisme sur S $x_\alpha : S_\alpha = \text{Spec } A_\alpha \rightarrow X$ pour un certain α . Puisque le morphisme structurel $S_\alpha \rightarrow S$ est lisse et S est local hensélien, il existe une section $S \rightarrow S_\alpha$, et par composition avec x_α on obtient le morphisme recherché $\hat{x} : S \rightarrow X$. \square

4 Algèbres de Clifford décalées

On travaille sur un anneau k de caractéristique nulle.

4.1 Rappels sur les \mathbb{E}_n -algèbres et les n -Lie algèbres

4.1.1 Opérades et formalité

Cette section rappelle des résultats utiles. Nous donnons des références pour les preuves.

On considère des opérades dans les complexes sur k . Un morphisme d'opérade est une équivalence faible si c'est une équivalence faible sur les complexes sous-jacents. La catégorie des algèbres sur une opérade est munie d'une structure de modèles en prenant pour équivalences faibles (respectivement fibrations) les morphismes d'algèbres qui sont des équivalences faibles (respectivement fibrations) en tant que complexes, pour la structure de modèles projective (Théorème 4.1.1 ([11])).

Étant donnée C une catégorie avec équivalences, on appelle morphisme homotopique un morphisme de la catégorie homotopique HoC de C .

Définition 4.1. Pour $n \geq 1$, soit \mathbb{E}_n^{Top} l'opérate topologique des petits disques, on considère son analogue dans les complexes $\mathbb{E}_n = C_{-*}(\mathbb{E}_n^{Top})$, où C_* est le complexe des chaînes singulières à coefficients dans k .

Le signe introduit dans la graduation est nécessaire pour obtenir un complexe de cochaînes. On rappelle que l'espace des opérations d'arité m de \mathbb{E}_n^{Top} est homotope à l'espace $\text{Conf}_m(\mathbb{R}^n)$ des configurations de m points dans \mathbb{R}^n (Lemme 6.4 dans ([25])), et en particulier l'espace des opérations binaires de \mathbb{E}_n^{Top} est une sphère de dimension $n - 1$: $E_n^{Top}(2) \simeq S^{n-1}$ (Proposition 2.2 dans ([25])). En particulier pour $n \geq 2$, son homologie est concentrée en degrés 0 et $n - 1$, et vaut k en chacun de ces degrés. Notons que la classe d'un point de S^{n-1} est un générateur canonique de $H_0(S^{n-1})$, tandis qu'il faut choisir une classe fondamentale $[S^{n-1}]$ pour expliciter un isomorphisme $H_{n-1}(S^{n-1}) \simeq k$.

Pour $n = 1$, l'espace des configurations de m points dans \mathbb{R} se rétracte sur l'espace discret des relations d'ordre totales sur m points (au nombre de $m!$). On en déduit l'existence d'un morphisme $Ass \rightarrow E_1$, section de cette rétraction, qui est une équivalence faible d'opéradés (Exemple 1.1.7 ([16])).

Définition 4.2. Une dg -algèbre de Lie est un complexe muni d'une opération binaire de degré 0, le crochet, satisfaisant :

- (*Antisymétrie*) $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$
- (*Jacobi*) $[x, [y, z]] + (-1)^{|x|(|y|+|z|)}[y, [z, x]] + (-1)^{|z|(|x|+|y|)}[z, [x, y]] = 0$.

On note Lie l'opérate définissant ces algèbres.

Remarque 4.3. Si on a un complexe E muni d'une application $E \otimes E \xrightarrow{m} E[n]$, alors le complexe $F := E[-n]$ est muni d'une application $F \otimes F \xrightarrow{m[-2n]} F$.

Définition 4.4. Soit $n \in \mathbb{Z}$, une n - dg -Lie algèbre est la donnée d'un complexe E ainsi que d'un crochet de degré $1 - n$ $[-, -] : E \otimes E \rightarrow E[n - 1]$ tels que le complexe $E[1 - n]$ muni du crochet décalé $[-, -][2 - 2n] : E[1 - n] \otimes E[1 - n] \rightarrow E[1 - n]$ soit une dg -algèbre de Lie.

On note Lie_n l'opérate définissant ces algèbres.

En particulier, si $(E, [-, -])$ est une dg -algèbre de Lie, alors $E[n]$ muni du crochet décalé est une $n + 1$ - dg -Lie algèbre.

Définition 4.5. Une n - dg -algèbre de Poisson est une n - dg -Lie algèbre munie d'un produit produit associatif et commutatif, satisfaisant la relation de distributivité (relation de Poisson) $[a, bc] = [a, b]c + (-1)^{(|a|+1-n)|b|}b[a, c]$.

L'opérate de n -Poisson définissant ces algèbres est notée P_n .

Remarque 4.6. Par définition, on a des inclusions $\text{Lie}_n \subset P_n$ et $\text{Comm} \subset P_n$. On remarque aussi que ces opéradés sont formelles, c'est-à-dire équivalentes à leur homologie, puisque les complexes qui les définissent ont une différentielle nulle.

On note Ass l'opérade associative, et $Comm$ l'opérade commutative.

Proposition 4.7. *L'opérade $Comm$ est un objet terminal dans la catégorie des opérades unitaires. En particulier il existe des morphismes unitaires canoniques $P_n \rightarrow Comm$ et $\mathbb{E}_n \rightarrow Comm$.*

Démonstration. Voir Proposition 2.2.21 dans ([5]). □

Les opérades de Poisson sont obtenues en considérant l'homologie des opérades des petits disques.

Théorème 4.8. *Pour $n \geq 2$, il existe un isomorphisme entre l'opérade de n -Poisson et l'homologie de l'opérade des petits disques $P_n \simeq H_{-*}(\mathbb{E}_n)$, qui envoie la multiplication sur l'unité (la classe d'un point) de $H_0(\mathbb{E}_n(2)) = k$ et le crochet sur un générateur de $H_{n-1}(\mathbb{E}_n(2)) \simeq k$ (une classe fondamentale de la sphère S^{n-1}).*

Démonstration. Voir le théorème 6.3 dans ([25]) ou le théorème 4.2.15 dans ([5]). □

On fixe pour la suite une classe fondamentale de S^{n-1} , et donc une identification canonique $P_n \simeq H_*(\mathbb{E}_n)$.

Proposition 4.9. *On a un morphisme d'opérade $Lie_1 \rightarrow \mathbb{E}_1$. Pour $n \geq 2$, on a un morphisme homotopique d'opérades $Lie_n \rightarrow \mathbb{E}_n$ qui vaut l'inclusion canonique $Lie_n \subset P_n$ en homologie. Par ailleurs, un tel morphisme est unique (dans la catégorie homotopique).*

Démonstration. Pour $n = 1$, on a le morphisme classique $Lie_1 = Lie \rightarrow Ass$ de l'opérade de Lie vers l'opérade associative, envoyant le crochet sur l'opération $xy - yx$. On compose avec l'équivalence faible $Ass \rightarrow \mathbb{E}_1$. Pour $n \geq 2$, on obtient ce morphisme homotopique en appliquant la dualité bar-cobar au morphisme canonique d'opérades $E_n \subset Comm$ où $Comm$ est l'opérade commutative, grâce au fait que l'opérade Lie est duale de Koszul de l'opérade $Comm$ et E_n est auto-duale (avec des décalages).

Voir la section 3 de ([7]) pour une construction précise, et les théorèmes B et C de ([8]) pour l'unicité. □

Kontsevich a démontré la formalité de l'opérade des petits disques sur \mathbb{R} : l'opérade \mathbb{E}_n est homotopiquement équivalente à son homologie sur \mathbb{R} si $n \geq 2$. Fresse et Willwacher ont étendu ce résultat sur \mathbb{Q} , donc sur notre anneau k , qui est une \mathbb{Q} -algèbre.

Théorème 4.10 (Formalité des petits disques). *Pour $n \geq 2$, tout isomorphisme $P_n \simeq H_*(\mathbb{E}_n)$ est l'homologie d'un isomorphisme de l'opérade P_n dans l'opérade \mathbb{E}_n dans la catégorie homotopique des opérades.*

Démonstration. Voir le théorème B' dans ([9]). Notons que s'il existe une équivalence homotopique d'opérades $P_n \simeq \mathbb{E}_n$, alors quitte à précomposer par un automorphisme de P_n , tout isomorphisme $P_n \simeq H_*(\mathbb{E}_n)$ est l'homologie d'une équivalence $P_n \simeq \mathbb{E}_n$. \square

Cette formalité est compatible avec les morphismes de Lie_n dans P_n et dans \mathbb{E}_n , ainsi qu'avec les morphismes de P_n et \mathbb{E}_n dans Comm .

Proposition 4.11. *Si $n \geq 2$, étant donné une équivalence d'opérades $P_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{E}_n$ induisant l'identité de P_n en homologie, la composition $\text{Lie}_n \subset P_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{E}_n$ est égale au morphisme homotopique $\text{Lie}_n \rightarrow \mathbb{E}_n$ de la proposition 4.9 (dans la catégorie homotopique).*

La composition $P_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{E}_n \rightarrow \text{Comm}$ est égale au morphisme canonique $P_n \rightarrow \text{Comm}$.

Démonstration. Le premier résultat est conséquence de l'unicité décrite dans la proposition 4.9. En effet, le morphisme composé $\text{Lie}_n \subset P_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{E}_n$ vaut l'inclusion canonique $\text{Lie}_n \subset P_n$ en homologie, donc est égal à tout morphisme $\text{Lie}_n \rightarrow \mathbb{E}_n$ valant l'inclusion canonique en homologie.

Le second résultat est conséquence de la proposition 4.7, car si le morphisme $P_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{E}_n$ induit l'identité de P_n en homologie, alors c'est un morphisme unitaire, donc la composée avec $\mathbb{E}_n \rightarrow \text{Comm}$ aussi, et on conclut puisque Comm est terminale dans les opérades unitaires. \square

En combinant le théorème 4.10 et la proposition 4.11, on en déduit le

Corollaire 4.12. *Si $n \geq 2$ il existe une suite de morphismes homotopiques d'opérades $\text{Lie}_n \subset P_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{E}_n \rightarrow \text{Comm}$ où chaque composition de morphismes correspond à un morphisme canonique défini précédemment.*

4.1.2 Algèbres enveloppantes

Si on a $P \xrightarrow{\phi} Q$ un morphisme d'opérades, on a un foncteur de restriction naturel ϕ^* de la catégorie des Q -algèbres vers la catégorie des P -algèbres, que l'on peut voir comme un foncteur d'oubli. Ce foncteur admet un adjoint à gauche $\phi_!$.

Proposition 4.13. *Soit $P \xrightarrow{\phi} Q$ un morphisme d'opérades, alors il existe une adjonction de Quillen*

$$\phi_! : P\text{-Alg} \rightleftarrows Q\text{-Alg} : \phi^*.$$

Démonstration. La construction est semblable à celle d'une algèbre enveloppante : étant donnée une P -algèbre A , on considère la Q -algèbre libre engendrée par A , puis on identifie les éléments abstraits de cette algèbre libre provenant d'une opération

de P avec le résultat de cette opération dans A (de même que dans le cas de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, on identifie le crochet abstrait $[[x, y]] := x \otimes y - y \otimes x$ avec le crochet de l'algèbre de Lie $[x, y]$).

Voir la proposition 1.3.8 de ([5]) pour une définition précise. Voir la proposition 1.4.6 de ([6]) pour l'adjonction de Quillen. \square

Si A est une P -algèbre, on appellera $\phi_!$ la Q -algèbre enveloppante de A . Grâce à l'inclusion canonique $\text{Lie}_n \subset P_n$, on peut parler de la P_n -algèbre enveloppante d'une n - dg -algèbre de Lie.

Exemple 4.14. — Si on note 1 l'opérade triviale, dont les algèbres sont simplement les complexes, on a un morphisme d'opérades $1 \subset \text{Comm}$, qui induit le foncteur d'oubli associant à une dg -algèbre commutative son complexe sous-jacent. L'algèbre commutative enveloppante d'un complexe est l'adjoint à gauche de ce foncteur, c'est-à-dire le foncteur Sym .

- La P_n -algèbre enveloppante d'une n - dg -algèbre de Lie L vaut $\text{Sym}L$ en tant que dg -algèbre commutative, et son crochet coïncide avec le crochet de L sur la partie de poids 1. La relation de Poisson permet de définir uniquement le crochet en tout poids à partir du crochet en poids 1. Pour voir que cette n -algèbre de Poisson est bien l'algèbre enveloppante, considérons P est une P_n -algèbre. C'est en particulier une algèbre commutative donc la donnée d'un morphisme $L \rightarrow P$ de Lie_n -algèbres est équivalente à la donnée d'un morphisme d'algèbres commutatives $\text{Sym}L \rightarrow P$ tel que le morphisme composé $L \subset \text{Sym}L \rightarrow P$ soit un morphisme de Lie_n -algèbres, ce qui conclut.

Si le morphisme d'opérades est une équivalence, alors l'adjonction est une équivalence de Quillen entre la catégorie de modèles des P -algèbre et celle des $Q_A dg$ -algèbres (Théorème 4.7.4 dans ([11])). Un morphisme dans la catégorie homotopique des opérades induit donc une adjonction au niveau des catégories homotopiques des algèbres sur ces opérades.

Ainsi le morphisme homotopique $\text{Lie}_n \rightarrow \mathbb{E}_n$ induit un foncteur O_n de la catégorie homotopique des \mathbb{E}_n -algèbres dans celle des Lie_n -algèbres, appelé foncteur d'oubli. On notera HoC la catégorie homotopique d'une catégorie avec équivalences C .

Définition 4.15. Le foncteur $U^{\mathbb{E}_n}$ donnant la \mathbb{E}_n -algèbre enveloppante d'une Lie_n -algèbre de Lie est le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli. Il est bien défini à homotopie près.

$$U^{\mathbb{E}_n} : Ho\text{Lie}_n - Alg \rightleftarrows Ho\mathbb{E}_n - Alg : O_n.$$

Pour $n = 1$, on rappelle la construction classique explicite de la dg -algèbre enveloppante d'une dg -algèbre de Lie, qui est induite par le morphisme d'opérades $\text{Lie} \rightarrow \mathbb{E}_1$ (vrai morphisme et pas seulement morphisme homotopique).

Proposition 4.16. Soit $(L, [-, -])$ une dg -algèbre de Lie, sa dg -algèbre enveloppante $U(L)$ est obtenue en quotientant la dg -algèbre tensorielle $T(L) = \bigoplus_{n \geq 0} L^{\otimes n}$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x - [x, y]$ où $x, y \in L$ sont des éléments homogènes.

Démonstration. Voir la remarque 2.1.7 dans ([17]). □

A priori le foncteur d'algèbre enveloppante U ne calcule pas forcément directement le foncteur $U^{\mathbb{E}1}$, puisqu'il faut d'abord le « dériver ».

Théorème 4.17 (Poincaré-Birkhoff-Witt). Soit $(L, [-, -])$ une dg -algèbre de Lie. On a un isomorphisme de complexes

$$\begin{aligned} \text{Sym}L &\rightarrow U(L) \\ l_1 \dots l_n &\mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon_{\bar{i}}(\sigma) l_{\sigma_1} \dots l_{\sigma_n} \end{aligned}$$

où $\epsilon_{\bar{i}}(\sigma)$ est le signe défini par l'équation $l_1 \dots l_n = \epsilon_{\bar{i}}(\sigma) l_{\sigma_1} \dots l_{\sigma_n}$ dans $\text{Sym}L$.

Démonstration. Voir le théorème 4.1.2.1 dans ([10]). Voir aussi la remarque 2.1.8 dans ([17]). □

Si on considère la sous-catégorie pleine des dg -algèbres de Lie cofibrantes en tant que complexes, comme on travaille en caractéristique nulle, le foncteur Sym préserve les cofibrations acycliques, donc on déduit du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt que U envoie une cofibration acyclique sur une équivalence. Par le lemme de Ken Brown, c'est donc un foncteur homotopique, donc la construction de la proposition 4.16 coïncide avec la définition 4.15 sur des dg -algèbres de Lie cofibrantes en tant que complexes.

4.2 La dg -algèbre de Lie de Heisenberg d'une forme antisymétrique

Définition 4.18. Soit (E, w) un complexe antisymétrique n -décalé. Sa dg -algèbre de Lie de Heisenberg est l'extension centrale de dg -algèbres de Lie tordue par la forme w :

$$k[n] \xrightarrow{i} H(E) \xrightarrow{\pi} E.$$

En tant que complexe, $H(E) = E \oplus k[n]$. Le crochet de $H(E)$ est induit par $\omega : E \otimes E \rightarrow k[n]$ par la composition

$$[\cdot, \cdot] : H(E) \otimes H(E) \xrightarrow{\pi \otimes \pi} E \otimes E \xrightarrow{\omega} k[n] \xrightarrow{i} H(E)$$

Remarque 4.19. La notation $H(E)$ est abusive puisque la structure d'algèbre de Lie dépend de la forme antisymétrique sur E , mais nous l'utiliserons s'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur la forme utilisée, sinon nous noterons $H(E, \omega)$.

Définition 4.20. Un morphisme *strict* de complexes quadratiques (ou antisymétriques) est la donnée de deux complexes quadratiques (ou antisymétriques) (E, q) , (F, q') , et d'un morphisme de complexes $E \xrightarrow{f} F$ tel que $q = f^*(q')$.

En particulier si $L \rightarrow E$ est un sous-complexe d'un complexe quadratique (E, q) , on a un morphisme strict de complexes quadratiques de $(L, q|_L)$ vers (E, q) .

Remarque 4.21. Un morphisme strict de complexes antisymétriques $(E, \omega) \xrightarrow{f} (F, \omega')$ induit un morphisme de dg -algèbres de Lie $H(E) \xrightarrow{H(f)} H(F)$, où $H(f) := f \oplus \text{id}_{k[n]}$. En effet, on a un diagramme strictement commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} H(E) \otimes H(E) & \xrightarrow{\pi \otimes \pi} & E \otimes E & \xrightarrow{\omega} & k[n] & \xrightarrow{i} & H(E) \\ H(f) \otimes H(f) \downarrow & & f \otimes f \downarrow & & \parallel & & \downarrow H(f) \\ H(F) \otimes H(F) & \xrightarrow{\pi \otimes \pi} & F \otimes F & \xrightarrow{\omega'} & k[n] & \xrightarrow{i'} & H(F) \end{array}$$

Par ailleurs, si le morphisme f est un quasi-isomorphisme de complexes, il induit un quasi-isomorphisme sur les complexes sous-jacents de $H(E)$ et $H(F)$ donc un quasi-isomorphisme de dg -algèbres de Lie.

Définition 4.22. Soit Symp la catégorie dont les objets sont les complexes antisymétriques n -décalés, et les morphismes sont les morphismes stricts entre complexes antisymétriques. Alors on a un foncteur

$$H : \begin{array}{l} \text{Symp} \longrightarrow dg - Lie \\ (E, \omega) \longmapsto H(E) \\ f \longmapsto H(f) \end{array} .$$

On souhaite vérifier que l'algèbre de Lie de Heisenberg d'un complexe antisymétrique est bien définie à quasi-isomorphisme près.

Lemme 4.23. Soit E un complexe, ω et ω' deux formes antisymétriques sur E et h une homotopie antisymétrique entre ω et ω' . Alors il existe un complexe antisymétrique $(\bar{E}, \bar{\omega})$ ainsi que deux morphismes stricts $(E, \omega) \xrightarrow{f} (\bar{E}, \bar{\omega})$ et $(E, \omega') \xrightarrow{g} (\bar{E}, \bar{\omega})$ tels que f et g soient des quasi-isomorphismes de complexes.

Démonstration. Soit I l'objet intervalle dans les complexes. Rappelons qu'on a deux inclusions canoniques $i_1 : E \rightarrow E \otimes I$ et $i_2 : E \rightarrow E \otimes I$ qui sont des quasi-isomorphismes, sections d'un morphisme $\sigma : E \otimes I \rightarrow E$. On a donc $\sigma \circ i_1 = \sigma \circ i_2 = \text{id}_E$. On définit $\bar{E} := E \otimes_k I$, $f := i_1$ et $g := i_2$ étant les deux inclusions canoniques de E dans \bar{E} . On veut définir la forme antisymétrique $\bar{\omega}$ sur \bar{E} .

Rappelons que la donnée d'un morphisme de \bar{E} vers F est équivalente à la donnée de deux morphismes de E vers F ainsi qu'une homotopie entre ces deux

morphismes. Les morphismes ω et ω' définissent deux morphismes de E vers $E^*[n]$, et h est une homotopie entre ces morphismes, d'où l'existence d'un morphisme $\bar{E} \xrightarrow{a} E^*[n]$, tel que $a \circ f = \omega$ et $a \circ g = \omega'$. En composant avec le morphisme $\sigma^*[n] : E^*[n] \rightarrow \bar{E}^*[n]$, on obtient un morphisme $\bar{\omega} := \sigma^*[n] \circ a$ de \bar{E} dans $\bar{E}^*[n]$. Ce morphisme est antisymétrique car les deux formes et l'homotopie le sont.

La composition $E \xrightarrow{f} \bar{E} \xrightarrow{\bar{\omega}} \bar{E}^*[n] \xrightarrow{f^*[n]} E^*[n]$ vaut $(f^*[n] \circ \sigma^*[n]) \circ (a \circ f) = (*[n]\sigma \circ f) \circ \omega = \text{id}_{E^*[n]} \circ \omega = \omega$, donc le morphisme $(E, \omega) \xrightarrow{f} (\bar{E}, \bar{\omega})$ est bien un morphisme strict de complexes antisymétriques, et de même pour $(E, \omega') \xrightarrow{g} (\bar{E}, \bar{\omega})$. \square

Proposition 4.24. *Soit $(E, \omega), (F, \omega')$ deux complexes antisymétriques, $E \xrightarrow{f} F$ un quasi-isomorphisme de complexes tel que ω et $f^*(\omega')$ soit homotopes. Alors $H(E)$ et $H(F)$ sont isomorphes dans la catégorie homotopiques des dg -algèbres de Lie.*

Démonstration. D'après le lemme [4.23](#), on a un complexe antisymétrique $(\bar{E}, \bar{\omega})$ ainsi que deux morphismes stricts $(E, \omega) \xrightarrow{f} (\bar{E}, \bar{\omega})$ et $(E, f^*(\omega')) \xrightarrow{g} (\bar{E}, \bar{\omega})$ tels que f et g soient des quasi-isomorphismes de complexes.

Par la remarque [4.21](#), on a donc des quasi-isomorphismes de dg -algèbres de Lie $H(E, \omega) \xrightarrow{\sim} H(\bar{E})$ et $H(E, f^*(\omega')) \xrightarrow{\sim} H(\bar{E})$. Par ailleurs, le morphisme $(E, f^*(\omega')) \xrightarrow{f} (F, \omega')$ est strict, et c'est un quasi-isomorphisme de complexes, donc on a aussi un quasi-isomorphisme de dg -algèbres de Lie $H(E, f^*(\omega')) \xrightarrow{\sim} H(F)$. On obtient donc effectivement un isomorphisme dans la catégorie homotopiques des dg -algèbres de Lie entre $H(E, \omega) = H(E)$ et $H(F)$. \square

4.3 La \mathbb{E}_{-n+1} -algèbre de Clifford d'une forme quadratique n -décalée

On considère (E, w) un complexe antisymétrique n -décalé, et son algèbre de Lie de Heisenberg $H(E)$, extension centrale de dg -algèbres de Lie $k[n] \xrightarrow{i} H(E) \xrightarrow{\pi} E$. D'après la remarque [4.3](#), en décalant la dg -algèbre de Lie $H(E)$ de $-n-2$, on obtient une $-n-1$ - dg -Lie algèbre $H_{-n-1}(E) = H(E)[-n-2]$, qui est une extension centrale de $-n-1$ - dg -Lie algèbres

$$k[-2] \xrightarrow{i[-n-2]} H_{-n-1}(E) \xrightarrow{\pi[-n-2]} E[-n-2].$$

Si $n \leq -2$, on peut appliquer ensuite le foncteur $U^{\mathbb{E}_{-n-1}}$, pour obtenir des morphismes de E_{-n-1} -algèbres

$$U^{\mathbb{E}_{-n-1}}(k[-2]) \rightarrow U^{\mathbb{E}_{-n-1}}(H_{-n-1}(E)) \rightarrow U^{\mathbb{E}_{-n-1}}(E[-n-2]).$$

Lemme 4.25. Soit $n > 0$, la \mathbb{E}_n -algèbre enveloppante de la n -dg-algèbre de Lie commutative E est l'algèbre polynomiale $\text{Sym}E$ vue comme \mathbb{E}_n -algèbre.

Démonstration. Dans le cas $n = 1$, cela résulte immédiatement de la construction donnée dans la proposition 4.16.

En général, on considère la suite de morphismes homotopiques d'opéades $\text{Lie}_n \subset \text{P}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{E}_n \rightarrow \text{Comm}$ du corollaire 4.12. Pour déterminer la \mathbb{E}_n -algèbre enveloppante de E , il suffit de déterminer sa P_n -algèbre enveloppante grâce à l'équivalence $\text{P}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{E}_n$. Or E étant abélienne, sa P_n -algèbre enveloppante est simplement $\text{Sym}E$ munie du n -crochet de Poisson nul. Cette P_n -algèbre est obtenue en appliquant le foncteur d'oubli à l'algèbre commutative $\text{Sym}E$. La \mathbb{E}_n -algèbre enveloppante de E est donc la \mathbb{E}_n -algèbre obtenue en appliquant le foncteur d'oubli à l'algèbre commutative $\text{Sym}E$. \square

En particulier, on a une équivalence de \mathbb{E}_{-n-1} -algèbres $U^{\mathbb{E}_{-n-1}}(k[-2]) \simeq k[\beta]$ où β est une variable de degré 2. Ainsi $U^{\mathbb{E}_{-n-1}}(\text{H}_{-n-1}(E))$ est une $k[\beta]$ - \mathbb{E}_{-n-1} -algèbre.

Si (E, q) un complexe quadratique n -décalé. Pour construire une algèbre à partir de ce complexe quadratique, on applique les constructions précédentes au complexe antisymétrique $n - 2$ -décalé $(E[-1], q[-2])$. On note $\omega = q[-2]$.

Définition 4.26. Soit $n \leq 0$, (E, q) un complexe quadratique n -décalé, on définit le foncteur \mathbb{E}_{-n+1} -algèbre de Clifford de (E, q) comme :

$$\text{Cliff}(E) = U^{\mathbb{E}_{-n+1}}(\text{H}_{-n+1}(E[-1])) \otimes_{k[\beta]} k[\beta, \beta^{-1}]$$

D'après la proposition 4.24, et puisque le foncteur U préserve les équivalences, le foncteur Cliff est invariant par quasi-isométrie, c'est-à-dire que si on a un morphisme de complexes quadratiques $(E, q) \xrightarrow{f} (E', q')$ tel que f soit un quasi-isomorphisme de complexes, alors $\text{Cliff}(E)$ et $\text{Cliff}(E')$ sont équivalentes en tant que \mathbb{E}_{-n+1} -dg-algèbres.

Exemple 4.27. En particulier, pour la forme n -décalée nulle sur le complexe nul, $\text{Cliff}(0) = k[\beta, \beta^{-1}]$ en tant que \mathbb{E}_{-n+1} -algèbre, d'après le lemme 4.25.

Dans le cas d'un complexe quadratique (E, q) concentré en degré 0, pour un décalage nul $n = 0$, la proposition 4.16 montre que $U^{\mathbb{E}_1}(\text{H}(E[-1]))$ est le quotient de la dg-algèbre tensorielle $T(E[-1])$ par l'idéal bilatère engendré par $x \otimes y + y \otimes x - \beta q(x, y)$ pour $x, y \in L$. En inversant β on obtient $\text{Cliff}(E)$. Si on considère alors $\text{Cliff}(E)$ comme une algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée, en prenant $\beta = 1$ on retrouve l'algèbre de Clifford classique associée à la forme quadratique q .

En prenant $\beta = 0$ dans $U^{\mathbb{E}_{-n+1}}(\text{H}_{-n+1}(E[-1]))$ on obtient $U^{\mathbb{E}_{-n+1}}(E[-n-2])$ donc une algèbre symétrique d'après le lemme 4.25. C'est en ce sens que $\text{Cliff}(E)$ est une déformation d'une algèbre symétrique.

4.4 Propriétés de semi-inversibilité

On notera $k[\beta\pm] := k[\beta, \beta^{-1}]$.

Soit une dg -algèbre A sur k , on dit que c'est une algèbre d'Azumaya (dérivée) si c'est un complexe parfait et si le morphisme naturel $A \otimes_k^h A^{op} \rightarrow \underline{\text{End}}_k A$ est une équivalence. Du point de vue de la théorie de Morita dérivée, où on considère les catégories dérivées des algèbres, A^{op} représente un inverse putatif pour A , et puisque $\underline{\text{End}}_k A$ est Morita-équivalente à k , unité du produit tensoriel, la condition Azumaya signifie que A est inversible pour le produit tensoriel d'algèbres au sens Morita. C'est un analogue pour les algèbres de la notion de dg -module inversible.

Lorsqu'une forme quadratique classique est non dégénérée, son algèbre de Clifford est une algèbre d'Azumaya dérivée. Ici l'aspect dérivé se résume à la présence d'une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradation. On peut le démontrer en considérant d'abord le cas d'une forme possédant un lagrangien. On définit un $A - k[\beta\pm]$ -bimodule, appelé *module des spineurs*, qui établit une équivalence entre la catégorie dérivée de l'algèbre de Clifford et celle de $k[\beta\pm]$, autrement dit l'algèbre de Clifford est alors Morita-triviale. Ensuite étant donnée un module quadratique non dégénéré (E, q) , on peut considérer la somme de ce module quadratique avec son opposé $(E \oplus E, q \perp -q)$. Cette somme possède un lagrangien via le morphisme diagonal $E \xrightarrow{\Delta} E \oplus E$, donc l'algèbre de Clifford de cette somme est Morita-triviale, et on constate que cette algèbre de Clifford est bien $\text{Cliff}(E) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Cliff}(E)^{op}$, ce qui prouve l'inversibilité de $\text{Cliff}(E)$.

Pour une forme quadratique définie sur un complexe non nécessairement concentré en degré 0, ce n'est plus nécessairement le cas. En effet, pour le complexe $E = k[1] \oplus k[-1]$ muni de la forme canonique identifiant E et E^* , l'algèbre de Clifford obtenue est (en oubliant les degrés et en prenant $\beta = 1$) $k\{x, y\}/\{xy - yx = 1\}$, qui est l'algèbre de Weyl. En particulier, cette algèbre n'est pas de dimension finie donc pas Azumaya. On va s'attacher dans la suite de cette section à montrer que ces algèbres de Clifford vérifient néanmoins une propriété similaire : on les appellera *semi-Azumaya*.

Définition 4.28. Soit A une dg -algèbre sur k . Son bimodule de Serre est le A -bimodule $A^! := A^* = \underline{\text{Hom}}(A, k)$. On dit que A est *semi-Azumaya* si le complexe d'homologie de Hochschild de $A^!$ est trivial : $A^! \otimes_{A \otimes_k A^{op}} A \simeq k$.

On voit l'analogie avec la propriété Azumaya si on considère que le bimodule de Serre joue le rôle de A^{op} , et k celui de l'algèbre Morita-triviale $\underline{\text{End}}_k A$.

4.4.1 Le module des spineurs S

Soit (E, q) un complexe quadratique et $L \xrightarrow{i} E$ un sous-complexe, alors on a un morphisme de E_{-n+1} -algèbres $\text{Cliff}(L) \xrightarrow{\text{Cliff}(i)} \text{Cliff}(E)$ où L est muni de la forme

$q|_L$. Si la forme $q|_L$ est nulle, on a par ailleurs un morphisme strict $(L, q|_L) \rightarrow 0$, d'où un morphisme de E_{-n+1} -algèbres $\text{Cliff}(L, 0) \rightarrow k[\beta\pm]$. Si L est un sous-complexe isotrope, la forme $q|_L$ est homotope à 0, donc $\text{Cliff}(L) = \text{Cliff}(L, q|_L)$ est équivalente à $\text{Cliff}(L, 0)$. On en déduit ainsi une structure de \mathbb{E}_{-n+1} -module sur $k[\beta\pm]$.

Définition 4.29. Soit (E, q) un complexe quadratique, $L \xrightarrow{i} E$ un lagrangien. Le module des spineurs S associé à L est le $\text{Cliff}(E) - k[\beta\pm]$ bimodule défini par

$$S := \text{Cliff}(E) \otimes_{\text{Cliff}(L)}^h k[\beta\pm].$$

On a une paire de foncteurs adjoints

$$\cdot \otimes_{\text{Cliff}(E)}^h S : \text{Mod} - \text{Cliff}(E) \rightleftarrows \text{Mod} - k[\beta\pm] : \underline{\text{Hom}}_{k[\beta\pm]}(S, \cdot).$$

Dans le cas d'une algèbre de Clifford classique, cette paire de foncteurs adjoints est une équivalence de catégories, ce qui prouve la Morita-trivialité des algèbres de Clifford des formes quadratiques qui possèdent un lagrangien.

Pour des complexes, S n'est pas nécessairement un complexe parfait en tant que $k[\beta\pm]$ -module à droite, par exemple dans le cas où E a des éléments en degré impair et $\text{Cliff}(E)$ est de dimension infinie (par exemple le cas des algèbres de Weyl mentionné plus haut). Dans ce cas cette adjonction ne peut être une équivalence.

En revanche, $(\cdot \otimes_{\text{Cliff}(E)}^h S) \circ \text{Hom}_{k[\beta\pm]}(S, \cdot) : \text{Mod} - k[\beta\pm] \rightarrow \text{Mod} - k[\beta\pm]$ reste homotope à l'identité. Pour montrer cela, on applique ce foncteur au générateur $k[\beta\pm]$, ce qui nous donne le $k[\beta\pm]$ -module $S^* \otimes_{\text{Cliff}(E)}^h S$. On va montrer que ce $k[\beta\pm]$ -module est quasi-isomorphe à $k[\beta\pm]$.

4.4.2 Structure de l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique standard 0-décalée

On considère le cas d'une forme standard associée à un lagrangien. On fixe pour la suite L un complexe parfait cofibrant, f une forme quadratique -1 -décalée sur L^* , (E, q_f) le complexe quadratique standard associé à f . Notons d_L la différentielle du complexe L , d_{L^*} celle du complexe L^* . En tant que complexe, E est le cône du morphisme $L^*[-1] \xrightarrow{f} L$ donc se représente par le module gradué $L \oplus L^*$ muni de la différentielle $d_E = d_L + d_{L^*} + f[1]$. La forme quadratique q_f est induite par le morphisme canonique d'évaluation, et sa restriction à L est nulle. Sa restriction au sous-module gradué L^* est également nulle. D'après le lemme [4.25](#), puisque la restriction de la forme q_f à L est nulle, on a une équivalence de dg -algèbres

$$\text{Cliff}(L) \simeq \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1])$$

On gardera la même notation pour la différentielle d'un complexe, de son algèbre tensorielle ou symétrique, et de ses décalages.

Lemme 4.30. *L'algèbre de Clifford de E admet un modèle où*

$$\text{Cliff}(E) = \text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L^*[-1]) \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L[-1])$$

en tant que module gradué sur k . Le produit vérifie $ll^* = (-1)^{|l||l^*|}l + l^*(l)\beta$. La différentielle est l'unique dérivation d_E qui coïncide avec d_L sur $L[-1]$, et $d_E(l^*) = d_{L^*}(l^*) + f(l^*)$ pour $l^* \in L^*[-1]$

Pour calculer le produit de deux éléments de $\text{Cliff}(E)$ dans le modèle ci-dessus, on remet les termes de $L[-1]$ et de $L^*[-1]$ dans le bon ordre en utilisant les règles de commutation données ci-dessus, de façon à obtenir un élément de $\text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L^*[-1]) \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L[-1])$. Ce modèle de $\text{Cliff}(E)$ nous permet de parler de poids selon L^* et de poids selon L .

Démonstration. On considère la construction de l'algèbre enveloppante de la proposition 4.16. D'après le théorème 4.17 (Poincaré-Birkhoff-Witt), $\text{Cliff}(E)$ est isomorphe en tant que complexe à $\text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(E[-1])$. En tant que module gradué $E = L \oplus L^*$, on a un isomorphisme gradué canonique $\text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}((L \oplus L^*)[-1]) \simeq \text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L^*[-1]) \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L[-1])$, donc on a une identification $\text{Cliff}(E) = \text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L^*[-1]) \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L[-1])$ en tant que module gradué, qui vaut $l \mapsto 1 \otimes l$ sur L et $l^* \mapsto l^* \otimes 1$ sur L^* . Puisque $d_E = d_L + d_{L^*} + f$ (on rappelle qu'on garde la même notation pour la différentielle du complexe décalé de -1), on en déduit que la différentielle d_E de $\text{Cliff}(E)$ coïncide bien avec d_L sur $L[-1]$, et $d_E(l^*) = d_{L^*}(l^*) + f(l^*)$ pour $l^* \in L^*[-1]$. Il existe une unique dérivation de l'algèbre $\text{Cliff}(E)$ définie sur les générateurs $L[-1]$ et $L^*[-1]$, donc ces conditions définissent de manière unique une différentielle sur $\text{Cliff}(E)$, qui est donc d_E .

Puisque la forme quadratique est nulle sur les sous-modules gradués L et L^* , la structure d'algèbre sur les sous-modules gradués $\text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L^*[-1])$ et $\text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L[-1])$ est bien la structure symétrique usuelle (ce sont donc des sous-algèbres graduées). Pour finir d'explicitier la structure d'algèbre sur $\text{Cliff}(E)$, il nous suffit de donner la relation $ll^* = (-1)^{|l||l^*|}l + l^*(l)\beta$, qui provient directement de la proposition 4.16. \square

Pour $e, e' \in \text{Cliff}(E)$, la notation ee' désigne le produit dans $\text{Cliff}(E)$, et $e \otimes e'$ désigne un élément de $\text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L^*[-1]) \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L[-1])$. On appellera vecteur un élément de $L[-1]$, polyvecteur un élément de $\text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L[-1])$, forme linéaire un élément de $L^*[-1]$ et forme un élément de $\text{Sym}_{k[\beta_{\pm}]}(L^*[-1])$.

Remarque 4.31. En tant qu'algèbre associative, $\text{Cliff}(E)$ est munie d'un crochet de Poisson donné par le crochet de Lie usuel $[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|}yx$. Ce crochet de Poisson est caractérisé par sa valeurs sur les générateurs $L[-1]$ et $L^*[-1]$. Spécifiquement, $[x, y] = 0$ si $x, y, \in L[-1]$ ou si $x, y, \in L^*[-1]$, et $[l, l^*] = l^*(l)\beta$. En particulier, $[x, \cdot]$ est une dérivation de $\text{Cliff}(E)$, et si $l \in L[-1]$, $\phi \in \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L^*[-1])$, on notera $[l, \phi] = \phi(l)\beta$. C'est la contraction de la forme ϕ le long du vecteur l .

Dans ce cas, puisque $\phi l = \phi \otimes l$, on en déduit la formule suivante pour le produit d'un vecteur et d'une forme $l\phi = [l, \phi] + (-1)^{|l||\phi|}\phi l = \phi(l)\beta + (-1)^{|l||\phi|}\phi \otimes l$. Cette formule explicite la structure de $\text{Cliff}(L)$ -module à gauche de $\text{Cliff}(E)$ induite par le morphisme $\text{Cliff}(L) \rightarrow \text{Cliff}(E)$.

Remarque 4.32. Puisque f est un morphisme de complexes, c'est un cocycle en degré 0 dans $\text{Hom}_k(\text{Sym}_k^2 L[1]^*, k[-1])$, qui est l'adjoint d'un bivecteur $X \in \text{Sym}_k^2 L[1]$, cocycle en degré -1 de $\text{Sym}_k^2 L[1]$. L'application $f : L^*[-1] \rightarrow L$ peut donc aussi être vue comme l'application (partielle) d'une forme linéaire en le bivecteur $X : \phi \in L^*[-1] \mapsto \phi(X) \in L$. Ainsi on peut écrire $d_E(l^*) = d_{L^*}(l^*) + l^*(X)$.

Remarque 4.33. Ce modèle de $\text{Cliff}(E)$ est une algèbre symétrique en tant que module gradué, mais sa différentielle diffère de la différentielle usuelle sur l'algèbre symétrique par une application qui diminue le poids selon L^* et l'augmente selon L , par l'application de $f : L^*[-1] \rightarrow L$. Notons d_0 la différentielle de $\text{Cliff}(E)$ dans le cas $f = 0$, c'est-à-dire quand $\text{Cliff}(E)$ est une dg -algèbre symétrique. En utilisant les remarques [4.31](#) et [4.32](#), on observe que pour $\bar{l}^* = l_1^* \dots l_n^* \in \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L^*[-1])$, la différentielle de $\text{Cliff}(E)$ vaut

$$d_E(\bar{l}^*) = d_0(\bar{l}^*) + \beta \bar{l}^*(X) + \sum_{i=1}^n \pm l_1^* \dots l_{i-1}^* l_{i+1}^* \dots l_n^* \otimes l_i^*(X)$$

avec les signes respectant la règle de Koszul.

4.4.3 Structure des modules S et S^*

Lemme 4.34. *Le modèle de $\text{Cliff}(E)$ donné par le lemme [4.30](#) est semi-libre comme $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) = \text{Cliff}(L)$ -module à droite.*

Démonstration. Cela signifie qu'il existe une filtration exhaustive de $\text{Cliff}(L)$ -modules $0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = \text{Cliff}(E)$ telle que les dg -modules F_{n+1}/F_n soient libres. On considère ici la décomposition selon les poids dans L^* : $F_n = \text{Sym}_{k[\beta\pm]}^{\leq n}(L^*[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1])$ en tant que module gradué, qu'on munit de la différentielle de $\text{Cliff}(E)$. On note F'_n le produit tensoriel de dg -modules $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}^{\leq n+1}(L^*[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1])$. D'après la remarque [4.33](#), la différentielle de F_{n+1} diffère de celle de F'_{n+1} par une application qui diminue le poids selon L^* , donc à valeurs dans F_n . On a donc $F_{n+1}/F_n \simeq F'_{n+1}/F'_n \simeq \text{Sym}_{k[\beta\pm]}^{n+1}(L^*[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]}$

$\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1])$, qui est bel et bien libre comme $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1])$ -module à droite. \square

En particulier, c'est un $\text{Cliff}(L)$ -module à droite cofibrant. Cela nous permet de calculer S par un produit tensoriel usuel :

$$S = \text{Cliff}(E) \otimes_{\text{Cliff}(L)}^h k[\beta\pm] = \text{Cliff}(E) \otimes_{\text{Cliff}(L)} k[\beta\pm].$$

Lemme 4.35. *En tant que k -module gradué, $S = \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L^*[-1])$. La différentielle d_S de S vaut $d_S = d_{L^*} + \text{ev}(X)\beta$ où $\text{ev}(X)$ est l'évaluation des formes en le bivecteur X , qui diminue donc le poids des formes de 2. L'action à gauche de $\text{Cliff}(L)$ est donnée pour $l \in L[-1]$ et $\phi \in \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L^*[-1]) = S$ par la formule $l.\phi = \phi(l)\beta$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} S &= \text{Cliff}(E) \otimes_{\text{Cliff}(L)} k[\beta\pm] \\ &= (\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L^*[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Cliff}(L)) \otimes_{\text{Cliff}(L)} k[\beta\pm] \\ &= \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L^*[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} k[\beta\pm] \\ &= \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L^*[-1]) \end{aligned}$$

comme k -modules gradués. La formule pour la différentielle d_S est une conséquence directe de la formule pour la différentielle d_E de la remarque 4.33. En effet, le dernier terme de cette formule disparaît car le produit tensoriel définissant S oblitère les termes de poids au moins 1 par rapport à L .

De même, l'action à gauche de $\text{Cliff}(L)$ sur S provient de l'action à gauche de $\text{Cliff}(L)$ sur $\text{Cliff}(E)$ par multiplication à gauche décrite dans la remarque 4.31, donc pour $l \in L[-1]$ et $\phi \in \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L^*[-1]) = S$, cette action est simplement $l.\phi = \phi(l)\beta$, le deuxième terme étant annihilé dans le produit tensoriel. \square

Lemme 4.36. *En tant que k -module gradué, $S^* = \widehat{\text{Sym}}(L[1])$. Sa différentielle d_{S^*} est*

$$d_{S^*} = d_L + \beta X \wedge \cdot$$

et sa structure de $\text{Cliff}(L)$ -module à droite est donnée par $\hat{l}.l = \hat{l}\beta$ où $\hat{l} \in \widehat{\text{Sym}}(L[1])$, $l \in L[-1]$.

Démonstration. En utilisant la structure de S décrite dans le lemme 4.35, on a $S^* = \underline{\text{Hom}}_{k[\beta\pm]}(\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L^*[-1]), k[\beta\pm]) = \widehat{\text{Sym}}(L[1])$ comme k -module gradué, et la différentielle de S^* est duale de d_S , donc $d_{S^*} = d_L + \beta X \wedge \cdot$. En effet, via l'identification canonique de L avec son bidual, l'application duale de l'évaluation des formes en X est bien la multiplication par X .

La structure de $\text{Cliff}(L)$ -module à droite gradué de $S^* = \widehat{\text{Sym}}(L[1])$ est obtenue en dualisant le $\text{Cliff}(L)$ -module à gauche gradué S . L'action duale de $l.\phi = \phi(l)\beta$ est simplement la multiplication $\hat{l}.l = \hat{l}\beta$ où $\hat{l} \in \widehat{\text{Sym}}(L[1])$, $l \in L[-1]$. \square

4.4.4 Semi-equivalence Morita

Rappelons que nous cherchons à calculer $S^* \otimes_{\text{Cliff}(E)}^h S$ et montrer que ce complexe est équivalent à $k[\beta\pm]$. On a $S^* \otimes_{\text{Cliff}(E)}^h S = S^* \otimes_{\text{Cliff}(E)}^h (\text{Cliff}(E) \otimes_{\text{Cliff}(L)}^h k[\beta\pm]) = S^* \otimes_{\text{Cliff}(L)}^h k[\beta\pm]$. Pour calculer ce produit tensoriel dérivé, on donne maintenant une résolution cofibrante de $k[\beta\pm]$ en tant que $\text{Cliff}(L)$ -module à gauche.

Rappelons que nous conservons la même notation pour la différentielle d'un complexe et de ses décalages, au choix d'un signe près. Considérons $\text{Cn}_0 := \text{hocof}(\text{id}_{L[-1]})$ le cône de l'identité de $L[-1]$. Ce complexe est équivalent au complexe nul, donc en appliquant le foncteur Sym , on obtient une dg -algèbre commutative équivalente à $k[\beta\pm] = \text{Sym}(0)$. Explicitement, Cn_0 est $L[-1] \oplus L$ comme k -module gradué. Notons $d_{k[\beta\pm]}$ sa différentielle. Soit d_{id} la différentielle définie par $d_{id}(l) = 0$ si $l \in L[-1]$, et d_{id} envoie le facteur L sur le facteur $L[-1]$ par l'identité (vue comme un morphisme de L vers $L[-1][1]$). Soit d_{LL} la différentielle du complexe $L[-1] \oplus L$. On a $d_{LL} = d_L$ sur $L[-1]$ et $d_{LL} = -d_L$ sur L . Alors $d_{k[\beta\pm]} = d_{LL} + d_{id}$. Ces différentielles s'étendent naturellement comme dérivations de la k -algèbre graduée $\text{Sym}(\text{Cn}_0) = \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$.

Lemme 4.37. *La k - dg -algèbre $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$ munie de la différentielle $d_{k[\beta\pm]} = d_{LL} + d_{id}$ est une résolution cofibrante du $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1])$ -module à gauche $k[\beta\pm]$.*

Démonstration. En effet on a vu que c'est une résolution de $k[\beta\pm]$. Elle est cofibrante comme $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1])$ -module à gauche car semi-libre. Pour le voir, on considère une filtration par les poids selon L . La démonstration est la même que celle du lemme [4.34](#). \square

Lemme 4.38. *En tant que $k[\beta\pm]$ -module gradué,*

$$S^* \otimes_{\text{Cliff}(L)}^h k[\beta\pm] \simeq \widehat{\text{Sym}}(L[1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L.$$

Sa différentielle d vaut $d_L + \beta X \wedge \cdot$ sur $\widehat{\text{Sym}}(L[1])$, et $d_{k[\beta\pm]} = -d_L + \beta d_{id}$ sur $\text{Sym}L$.

Démonstration. Grâce au lemme [4.37](#), on peut remplacer le produit tensoriel dérivé par un produit tensoriel usuel, donc en tant que $k[\beta\pm]$ -modules,

$$\begin{aligned} S^* \otimes_{\text{Cliff}(L)}^h k[\beta\pm] &\simeq S^* \otimes_{\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1])} (\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L) \\ &= \widehat{\text{Sym}}(L[1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L \end{aligned}$$

On obtient immédiatement l'expression de la différentielle à partir de celles de S^* donnée dans le lemme [4.36](#) et de $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$ dans le lemme [4.37](#). \square

Pour définir la contraction de $S^* \otimes^h_{\text{Cliff}(L)} k[\beta\pm]$ sur $k[\beta\pm]$, on souhaite donner une contraction explicite du dg -module $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$ sur $k[\beta\pm]$, puis l'étendre au complété « à gauche » $\widehat{\text{Sym}}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$. Par définition, $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$ est une $k[\beta\pm]$ - dg -algèbre commutative, donc on a un morphisme de dg -algèbres

$$k[\beta\pm] \xrightarrow{i} \text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L.$$

De même en appliquant le foncteur Sym au morphisme nul $\text{Cn}_0 \xrightarrow{0} 0$, on obtient un morphisme de $k[\beta\pm]$ - dg -algèbres

$$\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L \xrightarrow{\pi_0} k[\beta\pm].$$

Le morphisme composé $k[\beta\pm] \xrightarrow{\pi_0 \circ i} k[\beta\pm]$ est l'identité de $k[\beta\pm]$ puisque c'est un morphisme de $k[\beta\pm]$ -algèbres. Il nous suffit donc de trouver une homotopie de $i \circ \pi_0$ à l'identité de $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$ pour obtenir une rétraction de $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$ sur $k[\beta\pm]$.

Lemme 4.39. *Soit $h : L[-1] \rightarrow L$ le morphisme de modules gradués de degré -1 qui vaut l'identité en tant que morphisme non gradué. Il induit un endomorphisme gradué de degré -1 de $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$ qui est une homotopie entre $i \circ \pi_0$ et l'identité de $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$. Cet endomorphisme respecte le poids global.*

Démonstration. Remarquons que $d_{id} : L \rightarrow L[-1]$ est l'inverse de $h = L[-1] \rightarrow L$. Par construction, si M est un dg -modules cofibrant, le module gradué $\text{Sym}(M)$ ne dépend pas de la différentielle de M . On peut donc construire notre extension de h en oubliant toutes les différentielles. Si on a un endomorphisme h de degré -1 d'un module gradué M , il s'étend en un endomorphisme de degré -1 , qui respecte le poids, du module gradué $\text{Sym}M$, par les formules

$$\begin{aligned} \text{Sym}^n M &\longrightarrow \text{Sym}^n M \\ m_1 m_2 \dots m_n &\longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{|m_1| + \dots + |m_{i-1}|} m_1 m_2 \dots h(m_i) m_{i+1} \dots m_n \end{aligned}$$

Si on note p l'automorphisme du module gradué $\text{Sym}M$ qui vaut $\frac{\text{id}_{\text{Sym}^n M}}{n}$ en degré n , et si on note h' l'unique dérivation de $\text{Sym}M$ de degré -1 étendant h , alors $h = p \circ h'$.

En appliquant cette construction à $h \oplus 0$, endomorphisme gradué de degré -1 de $L[-1] \oplus L$, on obtient un endomorphisme gradué de degré -1 de $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$ qui respecte le poids, qu'on notera encore h .

Notons simplement id l'identité de $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$, et $c_0 = i \circ \pi_0$. L'endomorphisme c_0 associe à un polynôme en $L[-1]$ et L son terme constant. Autrement dit c_0 est l'identité en poids 0, et nul pour les poids supérieurs.

On veut montrer $d_{k[\beta\pm]} \circ h + h \circ d_{k[\beta\pm]} = \text{id} - c_0$. Remarquons que d commute avec l'automorphisme p , puisque la différentielle préserve le poids. Ainsi $d_{k[\beta\pm]} \circ h + h \circ d_{k[\beta\pm]} = p \circ (d_{k[\beta\pm]} \circ h' + h' \circ d_{k[\beta\pm]})$. Rappelons que l'ensemble des dérivations d'une cdg -algèbre est une sous- dg -algèbre de Lie de la dg -algèbre des endomorphismes. Ainsi, puisque $d_{k[\beta\pm]}$ et h' sont des dérivations de degrés 1 et -1 , $d_{k[\beta\pm]} \circ h' + h' \circ d_{k[\beta\pm]}$ est une dérivation de degré 0. En particulier, elle est entièrement déterminée par son image sur les générateurs.

En poids 1, $h' = h$. Si $l \in L[-1]$, $d_{\text{id}} \circ h'(l) + h' \circ d_{\text{id}}(l) = d_{\text{id}} \circ h(l) = l$, et $d_{LL} \circ h'(l) + h' \circ d_{LL}(l) = -d_L(h(l)) + h(d_L(l)) = 0$ donc $d_{k[\beta\pm]} \circ h'(l) + h' \circ d_{k[\beta\pm]}(l) = l$. Si $l \in L$, $d_{\text{id}} \circ h'(l) + h' \circ d_{\text{id}}(l) = h \circ d_{\text{id}}(l) = l$ et $d_{LL} \circ h'(l) + h' \circ d_{LL}(l) = 0$ donc $d_{k[\beta\pm]} \circ h'(l) + h' \circ d_{k[\beta\pm]}(l) = l$. Puisque p vaut l'identité en poids 1, on constate que $d_{k[\beta\pm]} \circ h' + h' \circ d_{k[\beta\pm]}$ coïncide avec $p^{-1} \circ (\text{id} - c_0)$ en poids 1. On vérifie facilement que $p^{-1} \circ (\text{id} - c_0)$ est également une dérivation de degré 0. On en déduit $d_{k[\beta\pm]} \circ h' + h' \circ d_{k[\beta\pm]} = p^{-1} \circ (\text{id} - c_0)$ par unicité d'une dérivation définie sur des générateurs, donc on a effectivement $d_{k[\beta\pm]} \circ h + h \circ d_{k[\beta\pm]} = \text{id} - c_0$, ce qui conclut la preuve. \square

Lemme 4.40. *On peut étendre h en une contraction sur $k[\beta\pm]$ de $\widehat{\text{Sym}}L[-1] \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$ muni de la différentielle $d_{k[\beta\pm]}$. Ainsi $\widehat{\text{Sym}}L[-1] \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L \simeq k[\beta\pm]$.*

Démonstration. Soit $f \in \widehat{\text{Sym}}L[-1]$, on note f_n la composante de poids n de f , alors $h(f_n) \in \text{Sym}^{n-1}L[-1] \otimes L$, d'après la formule donnée dans la preuve du lemme [4.39](#). Puisque L est un complexe parfait cofibrant, c'est un k -module projectif de type fini si on oublie la différentielle. Si $(l_i)_{i=1, \dots, m}$ est une famille génératrice, pour tout n il existe $h_{n,i} \in \text{Sym}^{n-1}L[-1]$ tels que $h(f_n) = \sum_{i=1, \dots, m} h_{n,i} \otimes l_i$, donc on peut définir $h(f) := \sum_{n=0}^{+\infty} h(f_n) = \sum_{i=1, \dots, m} (\sum_{n=0}^{+\infty} h_{n,i}) \otimes l_i \in \widehat{\text{Sym}}L[-1] \otimes L$. Si on considère $M = L[-1] \oplus L$, l'automorphisme p du module gradué $\text{Sym}M$ qui vaut $\frac{\text{id}_{\text{Sym}^n M}}{n}$ en degré n s'étend en un automorphisme de $\widehat{\text{Sym}}L[-1] \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$, et il existe une unique extension de h à la cdg -algèbre $\widehat{\text{Sym}}L[-1] \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$ telle que $p^{-1} \circ h$ soit une dérivation. Cette dérivation se restreint bien en la contraction h du lemme [4.39](#) sur $\text{Sym}_{k[\beta\pm]}(L[-1]) \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L$. En particulier, on a bien $d_{k[\beta\pm]} \circ h + h \circ d_{k[\beta\pm]} = \text{id} - c_0$ degré par degré, donc globalement aussi, d'où h est une contraction, et $\widehat{\text{Sym}}L[-1] \otimes_{k[\beta\pm]} \text{Sym}L \simeq k[\beta\pm]$. \square

Notons d_0 la différentielle de $S^* \otimes^h_{\text{Cliff}(L)} k[\beta\pm]$ dans le cas $X = 0$. D'après le lemme [4.38](#), elle vaut d_L sur $\widehat{\text{Sym}}(L[1])$, et $d_{k[\beta\pm]} = -d_L + \beta d_{\text{id}}$ sur $\text{Sym}L$.

L'identité de L induit un morphisme de degré 2 de $L[1]$ dans $L[-1]$, donc la multiplication par β^{-1} induit un isomorphisme de complexe $L[1] \xrightarrow{* \beta^{-1}} L[-1]$, et donc un isomorphisme de cdg -algèbres $\widehat{\text{Sym}}L[1] \simeq \widehat{\text{Sym}}L[-1]$. On en déduit un isomorphisme de complexes $\widehat{\text{Sym}}(L[1]) \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Sym}L \simeq \widehat{\text{Sym}}L[-1] \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Sym}L$ pour la différentielle d_{LL} , mais aussi pour les différentielles respectives βd_{id} et d_{id} , d'où un isomorphisme de complexes pour les différentielles respectives d_0 et $d_{k[\beta_{\pm}]}$.

Corollaire 4.41. *Si $X = 0$, $S^* \otimes_{\text{Cliff}(E)}^h S \simeq k[\beta_{\pm}]$.*

Démonstration. Puisque $S^* \otimes_{\text{Cliff}(E)}^h S \simeq S^* \otimes_{\text{Cliff}(L)}^h k[\beta_{\pm}] \simeq \widehat{\text{Sym}}L[-1] \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Sym}L$, il suffit d'appliquer le lemme [4.40](#). \square

Corollaire 4.42. *Si (E, q) est la forme standard associée à une forme -1 -décalée nulle $L^*[-1] \xrightarrow{0} L$, alors le foncteur $\underline{\text{Hom}}_{k[\beta_{\pm}]}(S, \cdot) : \text{Mod} - k[\beta_{\pm}] \rightarrow \text{Mod} - \text{Cliff}(E)$ est pleinement fidèle.*

Démonstration. On a la paire de foncteurs adjoints

$$\cdot \otimes_{\text{Cliff}(E)}^h S : \text{Mod} - \text{Cliff}(E) \rightleftarrows \text{Mod} - k[\beta_{\pm}] : \underline{\text{Hom}}_{k[\beta_{\pm}]}(S, \cdot)$$

et d'après le corollaire [4.41](#), le foncteur composé $(\cdot \otimes_{\text{Cliff}(E)}^h S) \circ (\underline{\text{Hom}}_{k[\beta_{\pm}]}(S, \cdot))$ est homotope à l'identité, d'où le résultat. \square

4.4.5 Propriété semi-Azumaya des algèbres de Clifford dérivées

Théorème 4.43. *Soit (E, q) un complexe quadratique 0 -décalé non dégénéré. Alors son algèbre de Clifford $\text{Cliff}(E)$ est semi-Azumaya au-dessus de $k[\beta_{\pm}]$ (définition [4.28](#)).*

Démonstration. Considérons les morphisme de complexes quadratiques diagonaux et antidiagonaux

$$\Delta^{\pm} : \begin{array}{ccc} (E, 0) & \longrightarrow & (E, q) \oplus^{\perp} (E, -q) \\ x & \longmapsto & x \oplus \pm x \end{array}$$

qui font apparaître E comme lagrangien dans $E \oplus E^{op} := (E \oplus E, q \perp -q)$ pour l'homotopie nulle. Il résulte de la proposition [4.16](#) que l'algèbre de Clifford de $(E, -q)$ est isomorphe à $\text{Cliff}(E)^{op}$, et celle de $E \oplus E^{op}$ est isomorphe à $\text{Cliff}(E) \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Cliff}(E)^{op}$. Considérons le module des spineurs associé au lagrangien antidiagonal $S_1 = \text{Cliff}(E \oplus E^{op}) \otimes_{\text{Cliff}(E, 0)}^h k[\beta_{\pm}]$.

Les morphismes Δ^{\pm} sont injectifs, notons leurs images respectives encore Δ^{\pm} , alors $E \oplus E = \Delta^+ \oplus \Delta^-$, et peut donner un modèle de $\text{Cliff}(E \oplus E^{op})$ similaire à celui du lemme [4.30](#), en remplaçant L^* par Δ^+ et L par Δ^- . On obtient ainsi comme

dans le lemme [4.34](#) que le modèle choisi pour $\text{Cliff}(E \oplus E^{op})$ est naturellement cofibrant comme $\text{Cliff}(E, 0)$ -module à droite, donc on peut calculer S_1 en prenant un produit tensoriel usuel.

Si on note e (respectivement e') les éléments de E (respectivement l'élément correspondant dans E^{op}) dans $E \oplus E^{op}$, alors S_1 est le quotient de l'algèbre $\text{Cliff}(E) \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Cliff}(E)^{op}$ par l'idéal à gauche I engendré par les éléments de la forme $e - e'$. Considérons le morphisme de $\text{Cliff}(E)$ -bimodules

$$\begin{array}{ccc} \text{Cliff}(E) \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Cliff}(E)^{op} & \xrightarrow{m} & \text{Cliff}(E) \\ e_1 \dots e_n \otimes e'_{n+1} \dots e'_m & \mapsto & e_1 \dots e_n e_m e_{m-1} \dots e_{n+1} \end{array} .$$

Ce morphisme est bien défini c'est la composée de la multiplication de $\text{Cliff}(E)$ avec $\text{id}_{\text{Cliff}(E)} \otimes \tau$ où $\tau : \text{Cliff}(E)^{op} \rightarrow \text{Cliff}(E)$ est la transposition (voir 2.6 [\[18\]](#)). On voit que I est le noyau de ce morphisme m , donc on a un isomorphisme de bimodules induit $m : S_1 \simeq \text{Cliff}(E)$. Ainsi S_1^* est le bimodule de Serre $\text{Cliff}(E)^!$, et $S_1^* \otimes_{\text{Cliff}(E \oplus E^{op})}^h S_1$ est équivalent à $\text{Cliff}(E)^! \otimes_{\text{Cliff}(E) \otimes_{k[\beta_{\pm}]} \text{Cliff}(E)^{op}}^h \text{Cliff}(E)$. Il nous reste à vérifier que ce produit tensoriel dérivé est équivalent à $k[\beta_{\pm}]$.

La forme standard associée au morphisme nul $E^*[-1] \xrightarrow{0} E$ est simplement $E \oplus E^*$ muni de la forme quadratique q_0 induite par le morphisme d'évaluation $E \otimes_k E^* \rightarrow k$. On rappelle qu'on utilise la même notation pour q comme forme bilinéaire symétrique ou comme morphisme symétrique $E \xrightarrow{q} E^*$. On a une quasi-isométrie

$$\text{rot} : \left| \begin{array}{ccc} (E \oplus E, q_{\perp} - q) & \longrightarrow & (E \oplus E^*, q_0) \\ x \oplus y & \longmapsto & x + y \oplus \frac{q(x-y)}{2} \end{array} \right. .$$

En effet

$$\begin{aligned} q_0(\text{rot}(x \oplus y), \text{rot}(x' \oplus y')) &= \frac{1}{2} q_0((x + y \oplus q(x - y)), (x' + y' \oplus q(x' - y'))) \\ &= \frac{1}{2} [q(x + y, x' - y') + q(x - y, x' + y')] \\ &= q(x, x') - q(y, y') \\ &= (q_{\perp} - q)(x \oplus y, x' \oplus y') \end{aligned}$$

et par ailleurs puisque q induit une équivalence entre E et E^* , ce morphisme de complexes est bien une équivalence. La quasi-isométrie rot envoie le lagrangien antidiagonal E sur le lagrangien $E^* \subset (E \oplus E^*, q_0)$.

On considère le module des spineurs S_2 associé à ce lagrangien. D'après le corollaire [4.41](#), le complexe $S_2^* \otimes_{\text{Cliff}(E \oplus E^*)}^h S_2$ est quasi-isomorphe à $k[\beta_{\pm}]$. Grâce à la quasi-isométrie rot , on en déduit que $S_1^* \otimes_{\text{Cliff}(E \oplus E^{op})}^h S_1$ est quasi-isomorphe à $k[\beta_{\pm}]$, ce qui conclut. \square

Références

- [1] Paul Balmer *Triangular Witt groups Part II : From usual to derived* Mathematische Zeitschrift, 2001, Volume 236, Number 2, Page 351
- [2] A. Blanc, M. Robalo, B. Toën, G. Vezzosi *Motivic Realizations of Singularity Categories and Vanishing Cycles*, arXiv :1607.03012
- [3] C. Brav, V. Bussi, D. Dupont, D. Joyce, and B. Szendrői *Symmetries and stabilization for sheaves of vanishing cycles*, arXiv :1211.3259, J. Singul., 11 :85–151, 2015. With an appendix by Jörg Schürmann
- [4] D. Calaque, T. Pantev, B. Toën, M. Vaquié, G. Vezzosi *Shifted Poisson Structures and Deformation Quantization*, arXiv :1506.03699
- [5] Benoît Fresse *Homotopy of operads and Grothendieck-Teichmüller groups Part I*, <http://math.univ-lille1.fr/fresse/OperadHomotopyBook/>
- [6] Benoît Fresse *Homotopy of operads and Grothendieck-Teichmüller groups Part II*, <http://math.univ-lille1.fr/fresse/OperadHomotopyBook/>
- [7] Benoît Fresse *Koszul duality of En-operads*, Selecta Math. 17 (2011), 363-434
- [8] Benoît Fresse *On mapping spaces of differential graded operads with the commutative operad as target*, Math. Res. Lett. 18 (2011), pp. 215-230
- [9] Benoît Fresse, Thomas Willwacher *The intrinsic formality of E_n -operads*, arXiv :1503.08699
- [10] Benjamin Hennion *Formal loops, Tate objects and tangent Lie algebras*, arXiv :1412.0053
- [11] Vladimir Hinich *Homological algebra of homotopy algebras*, arXiv :q-alg/9702015
- [12] A. Hirschowitz, C. Simpson *Descente pour les n-champs*, preprint math.AG/9807049.
- [13] J.F. Jardine *A rigidity theorem for L-theory*, preprint
- [14] Jacob Lurie *Derived Algebraic Geometry*, PhD thesis, <http://hdl.handle.net/1721.1/30144>
- [15] Jacob Lurie *Algebraic L-theory and Surgery*, Lecture notes at <http://www.math.harvard.edu/lurie/287x.html>
- [16] Jacob Lurie *Derived Algebraic Geometry VI : $\mathbb{E}[k]$ -Algebras*, <http://www.math.harvard.edu/lurie/papers/DAG-VI.pdf>
- [17] Jacob Lurie *Derived Algebraic Geometry X : Formal Moduli Problems*, <http://www.math.harvard.edu/lurie/papers/DAG-X.pdf>
- [18] Eckhard Meinrenken *Clifford algebras and Lie groups*, Lecture Notes, University of Toronto, 2009

- [19] Fabien Morel *On the motivic stable π_0 of the sphere spectrum*, *Axiomatic, Enriched and Motivic Homotopy Theory*, pp. 219-260, J.P.C. Greenlees (ed.), 2004 Kluwer Academic Publishers.
- [20] Dmitri Orlov *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities* In *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin*. Vol. II, volume 270 of *Progr. Math.*, pages 503–531. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009
- [21] Anatoly Preygel *Thom-Sebastiani and duality for matrix factorizations*, arXiv :1101.5834
- [22] Andrew Ranicki *Algebraic and Geometric Surgery*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press
- [23] Andrew Ranicki *The algebraic theory of surgery* *Proceedings of the London Mathematical Society* (3) 40, pp. 87-192, (1980)
- [24] Jean-Pierre Serre *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France
- [25] Dev Sinha *The homology of the little disks operad*, arXiv :math/0610236
- [26] Bernard Teissier *Résultats récents sur l'approximation des morphismes en algèbre commutative*, Séminaire N.Bourbaki, 1993-1994, exp. no 784, p. 259-282.
- [27] T. Pantev, B. Toën, M.Vaquié, G.Vezzosi *Shifted symplectic structures* *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 117 (2013), 271-328,
- [28] B. Toën, G. Vezzosi *Homotopical Algebraic Geometry II : geometric stacks and applications*, arXiv :math/0404373
- [29] Bertrand Toën *Derived Algebraic Geometry*, arXiv :1401.1044
- [30] B. Toën, M. Vaquié *Moduli of objects in dg-categories*, *Ann. Sci. de l'ENS* Volume 40 (2007) Issue 3, Pages 387-444
- [31] The Univalent Foundations Program *Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics*, <https://homotopytypetheory.org/book>, Institute for Advanced Study, 2013
- [32] Gabriele Vezzosi *Quadratic forms and Clifford algebras on derived stacks*, Preprint arXiv :1309.1879