



**HAL**  
open science

# Observation du phénomène de blocage anormal de photon dans le domaine micro-onde

Cyril Vaneph

► **To cite this version:**

Cyril Vaneph. Observation du phénomène de blocage anormal de photon dans le domaine micro-onde. Physique Quantique [quant-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2017. Français. NNT : 2017PA066509 . tel-01891267

**HAL Id: tel-01891267**

**<https://theses.hal.science/tel-01891267v1>**

Submitted on 9 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité : **Physique quantique**

École doctorale physique en Île-de-France, ED 564

Présentée par  
**Cyril Vaneph**

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse :

**Observation du phénomène de blocage anormal de photon  
dans le domaine micro-onde**

Soutenue le 30 novembre 2017

devant le jury composé de :

Mme	<b>Jacqueline</b>	<b>Bloch</b>	Rapporteuse
M.	<b>Olivier</b>	<b>Buisson</b>	Rapporteur
M.	<b>Fabien</b>	<b>Portier</b>	Examinateur
M.	<b>Jean-François</b>	<b>Roch</b>	Examinateur
M.	<b>Jean</b>	<b>Hare</b>	Examinateur
M.	<b>Jérôme</b>	<b>Estève</b>	Directeur de thèse
M.	<b>Julien</b>	<b>Gabelli</b>	Membre invité



---

## Remerciements

---

Tout d'abord, je tiens à remercier Jérôme Estève pour ces quatre années et huit mois passés à travailler à ses côtés, en tant que stagiaire de M2 au Laboratoire Kastler Brossel puis en tant que doctorant au sein de ce même laboratoire puis au Laboratoire de physiques des solides. Cette longue période d'interactions m'a permis de découvrir deux domaines expérimentaux tout en poursuivant une même idée d'expérience, opportunité unique pour un doctorant qui a été rendue possible grâce aux qualités d'adaptation de Jérôme, de transmission et surtout à ses très grandes compétences tant expérimentales et théoriques qu'informatiques. Je tiens à remercier particulièrement Julien Gabelli qui, démarrant une collaboration avec Jérôme au LPS, m'a accueilli en même temps, m'offrant un double encadrement, complémentaire de celui de Jérôme.

Je tiens aussi à remercier Marco Aprilli, qui dirige l'équipe NS<sub>2</sub>, pour les différentes discussions scientifiques que nous avons pu avoir et qui a contribué à ma bonne intégration dans l'équipe. Je remercie aussi en ce sens Julien Basset et Charis Quay.

Cette thèse n'aurait pas été possible sans les autres doctorants co-encadrés par Jérôme et Julien avec qui j'ai partagé des heures en salle blanche et au MEB, des discussions scientifiques et non, des codes informatiques, des design Sonnet, des bouchons en voiture, des galères en RER.... Un grand merci à tous les trois. Merci également à mon co-bureau Pierre Février pour son soutien.

La réalisation d'échantillons a été un élément-clé de cette thèse et je tiens à remercier Sylvie Gautier qui, en plus de veiller aux bâtis d'évaporations du groupe, veille aussi sur les doctorants. Merci à Raphael Weil pour toute son aide concernant la fabrication, sans lui les outils indispensables que sont la salle Nano et le MEB ne fonctionneraient pas. Ses conseils pour la réalisation des échantillons ont toujours été extrêmement utiles.

Je tiens à remercier l'ensemble de l'équipe Méso avec laquelle j'ai beaucoup échangé et qui a surtout mis à ma disposition un certain nombre de matériels sans lesquels cette thèse n'aurait pas été possible. Je remercie plus particulièrement Sophie Guéron ma « marraine » au sein du laboratoire, ainsi qu'Hélène Bouchiat et Richard Deblock.

Je remercie aussi la direction et l'administration du LPS et plus particulièrement Véronique, qui a su démêler un certain nombre des complexes ficelles administratives pour mon passage du

LKB au LPS. Je remercie aussi les autres doctorants qui ont participé indirectement à ce travail de thèse : Raphaëlle, Émilie, Anil, Anais et Sergueï.

Lors de mes deux années passées au LKB, j'ai eu la chance de travailler avec Jean, qui outre ses grandes compétences scientifiques, entretient la bonne humeur dans la salle de manip. Je tiens à remercier les membres du LKB que j'ai côtoyés pendant presque 2 ans, tout d'abord Jakob Reichel, qui a codirigé mes recherches avec Jérôme. Merci à Francesco, Claire, Sébastien, Konstantin, Arthur, Omblin et Laura.

Pour effectuer mon monitorat, j'ai choisi une mission de deux ans à la Cité des Sciences et de l'Industrie. Je remercie l'ensemble de l'équipe de la médiation scientifique qui m'a accueilli et formé et avec qui j'ai partagé de nombreuses expériences très enrichissantes. Merci plus particulièrement à Chloé et Nadège qui m'ont encadré, et à Olivier.

Je remercie l'ensemble des membres du jury pour avoir accepté d'y participer, ainsi que pour tous les commentaires et remarques qu'ils ont pu formuler et qui ont permis d'améliorer cette thèse.

J'ai aussi pu pendant cette thèse compter sur de nombreux soutiens extérieurs, à commencer par Agnès, qui m'a écouté et soutenu au quotidien durant toutes les étapes, mais aussi les épreuves de ce travail. En plus d'un soutien affectif, son soutien effectif pour tout un tas de choses concrètes, a permis la réalisation de cette thèse. J'ai aussi pu compter sur mon petit frère Alexandre, ma famille et ma belle-famille et tous mes amis notamment Vincent, César et enfin Pierre Chalmeau.





---

## Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>I Étude théorique du blocage anormal</b>	<b>15</b>
I.1 Système de deux cavités couplées . . . . .	17
I.1.1 Hamiltonien et équations du mouvement . . . . .	17
I.1.2 Phénomène de blocage anormal . . . . .	17
I.1.3 Blocage anormal à très faible nombre de photons . . . . .	18
I.2 Approximation gaussienne . . . . .	21
I.2.1 Solution classique et stabilité . . . . .	21
I.2.2 Fluctuations quantiques : hypothèse gaussienne . . . . .	24
I.2.3 Calcul de $g^2(0)$ pour un état gaussien . . . . .	24
I.2.4 État gaussien du blocage anormal . . . . .	28
I.3 Résolution numérique de l'équation maîtresse . . . . .	32
I.3.1 Opérateur de Lindblad déplacé . . . . .	32
I.3.2 Évolution de $g^2(0)$ en fonction de la puissance de pompe . . . . .	35
I.3.3 Influence de la température et du déphasage pur . . . . .	39
I.4 Temps de corrélation du blocage anormal . . . . .	41
I.4.1 Calcul dans l'approximation gaussienne . . . . .	41
I.4.2 Calcul numérique par le théorème de régression quantique . . . . .	42
I.5 Détermination des paramètres expérimentaux . . . . .	43
I.5.1 Contraintes expérimentales . . . . .	43
I.5.2 Influence des désaccords cavités-pompe . . . . .	44
I.5.3 Tolérance acceptable sur les paramètres $\kappa_i$ , $J$ et $U$ . . . . .	44
<b>II Fabrication et mesure</b>	<b>49</b>
II.1 Mesures micro-onde à basse température . . . . .	51
II.1.1 Mesure à 1.5 K dans un bain d'Hélium pompé . . . . .	51
II.1.2 Mesure à 10 mK dans un cryostat à dilution . . . . .	52
II.1.3 Calcul du rayonnement thermique sur l'échantillon . . . . .	52
II.2 Résonateurs supraconducteurs . . . . .	55

II.2.1	Fabrication de résonateurs supraconducteurs . . . . .	55
II.2.2	Montage et préparation des échantillons . . . . .	57
II.2.3	Étude du couplage d'un résonateur . . . . .	58
II.3	Jonctions Josephson . . . . .	61
II.3.1	Technique de fabrication . . . . .	61
II.3.2	Mesure à température ambiante de la résistance des jonctions . . . . .	63
II.3.3	Caractérisation DC d'un SQUID à basse température . . . . .	66
<b>III</b>	<b>Conception et caractérisation de l'échantillon final</b>	<b>69</b>
III.1	Conception de l'échantillon . . . . .	71
III.1.1	Résonateur non-linéaire . . . . .	71
III.1.2	Couplage entre résonateurs . . . . .	72
III.1.3	Couplage au monde extérieur . . . . .	74
III.2	Modélisation de l'échantillon final . . . . .	75
III.2.1	Circuit électrocinétique équivalent . . . . .	76
III.2.2	Théorie Input-Output . . . . .	77
III.3	Caractérisation expérimentale de l'échantillon final . . . . .	81
III.3.1	Couplages et pertes de la cavité linéaire . . . . .	82
III.3.2	Fréquence de résonance, couplages et perte de la cavité non-linéaire . . . . .	82
III.3.3	Couplage entre cavités . . . . .	84
III.3.4	Non-linéarité . . . . .	88
<b>IV</b>	<b>Mesure des fluctuations quantiques</b>	<b>93</b>
IV.1	Principe de la mesure . . . . .	95
IV.1.1	Théorie de l'amplification et ordre de grandeur . . . . .	95
IV.1.2	Température de bruit d'un amplificateur cryogénique . . . . .	95
IV.1.3	Technique de mesure alternée des moments . . . . .	96
IV.2	Évaluation du rapport signal à bruit . . . . .	97
IV.2.1	Rappel sur la mesure de $g^2(0)$ . . . . .	97
IV.2.2	Calcul de la densité de probabilité des quadratures mesurées . . . . .	98
IV.2.3	Simulation de l'erreur statistique . . . . .	98
IV.3	Dispositif expérimental et traitement des données . . . . .	101
IV.3.1	Chaîne de mesure . . . . .	101
IV.3.2	Calibration du bruit et du gain de la chaîne d'amplification . . . . .	103
IV.3.3	Calibration de l'IQ . . . . .	105
IV.3.4	Caractérisation de la température de l'état de référence . . . . .	107
IV.4	Mesure de $g^2(0)$ avec et sans l'hypothèse gaussienne . . . . .	108
IV.4.1	Acquisition et traitement des données . . . . .	108
IV.4.2	Estimation de $g^2(0)$ avec et sans hypothèse gaussienne . . . . .	108
IV.4.3	Évolution de l'erreur statistique en fonction du nombre de points de mesure . . . . .	110
IV.4.4	Vérification de l'hypothèse gaussienne sur les moments d'ordre quatre . . . . .	110
<b>V</b>	<b>Étude expérimentale du blocage anormal</b>	<b>115</b>
V.1	Un exemple de mesure en utilisant l'hypothèse gaussienne . . . . .	116
V.2	Étude des erreurs systématiques introduites . . . . .	119
V.3	Influence du désaccord entre les cavités . . . . .	122
V.4	Évolution de $g^2(0)$ en fonction du nombre de photons . . . . .	124
V.5	Mesure de $g^2(0)$ sans hypothèse gaussienne . . . . .	127
V.6	Mesure de $g^2(\tau)$ . . . . .	128

<b>Conclusion</b>	<b>131</b>
<b>A Composante spectrale du signal et filtrage</b>	<b>133</b>
A.1 Erreur introduite par des filtres passe-bande idéaux . . . . .	133
A.2 Erreur introduite par les filtres utilisés dans l'expérience . . . . .	134
<b>B Influence de la digitalisation</b>	<b>137</b>
<b>C Calcul de la densité de probabilité des quadratures mesurées</b>	<b>139</b>
<b>D Correction des offsets sur les moments</b>	<b>141</b>
<b>E Correction des imperfections de l'IQ sur les moments</b>	<b>143</b>
E.1 Détermination des gains et de l'erreur $\epsilon$ . . . . .	143
E.2 Correction des moments . . . . .	144
<b>F Expression des moments du champ de cavité</b>	<b>145</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>



---

## Introduction

---

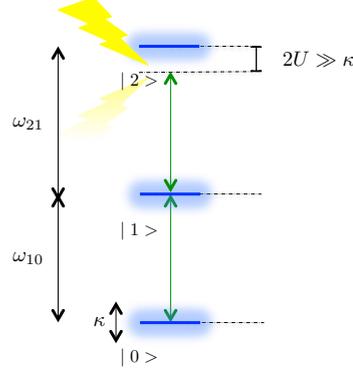
La quantification de la lumière et l'introduction du quanta associé remontent au début du siècle avec les travaux théoriques de Planck en 1900 sur le rayonnement du corps noir et d'Einstein en 1905 sur l'effet photoélectrique. L'observation d'un quanta de lumière n'a été cependant réalisée que dans la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle. Une quantité mettant en évidence le caractère corpusculaire des photons est la fonction de corrélation temporelle du second ordre  $g^2(t - t')$  mesurée sur un champ électrique  $\mathcal{E}(t)$  [1] :

$$g^2(t - t') = \frac{\langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}^*(t')\mathcal{E}(t)\mathcal{E}(t') \rangle}{\langle |\mathcal{E}(t)|^2 \rangle \langle |\mathcal{E}(t')|^2 \rangle}, \quad (1)$$

où  $\langle \rangle$  désigne une moyenne statistique. Cette fonction a été mesurée dans le domaine radio-fréquence [2, 3], puis en optique [4] par Hanbury Brown and Twiss respectivement en 1952 et 1956. Il faut attendre 1963 et les travaux de Glauber [5] sur la cohérence quantique pour montrer que cette mesure permet de mettre en évidence des propriétés de la lumière qui ne peuvent pas être expliquées dans une théorie ondulatoire. Glauber reçoit le prix Nobel en 2005 pour ces travaux. Dans le cas où la lumière est traitée de manière classique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique  $g^2(0) \geq 1$ . Un champ cohérent a la propriété  $g^2(0) = 1$  et un champ thermique  $g^2(0) = 2$ . Ce phénomène est appelé groupement de photons ou « bunching ». À l'opposé, un traitement quantique de la lumière permet d'obtenir une valeur inférieure à 1, phénomène connu sous le nom de dégroupement de photons, ou « antibunching ». En 1976, Carmichael et Walls [6] montrent théoriquement que la lumière émise par un atome à deux niveaux, sous excitation résonnante, est constituée de photons dégroupés. La première preuve expérimentale suit en 1977 par Kimble *et al* [7] en analysant la fluorescence d'un jet d'atomes de sodium. Une valeur de  $g^2(0)$  inférieure à 1 est mesurée en 1987 sur un atome unique piégé [8]. Des sources de photon unique autres que les atomes ont depuis été réalisées, notamment avec des émetteurs à l'état solide comme des molécules piégées dans une matrice solide [9], des boîtes quantiques [10] ou des centres NV [11].

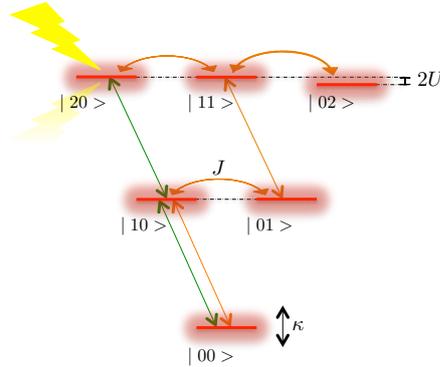
Carmichael montre en 1985 [12] que la lumière transmise par une cavité contenant un atome unique en régime de couplage fort permet également d'obtenir des photons dégroupés. Le calcul de Carmichael montre que la population de la cavité est limitée à 0 ou 1 photon. Ce phénomène est précisé par Imamoglu *et al* en 1997 [13]. Ces derniers lui donne le nom de blocage de photon

par analogie au blocage de Coulomb en physique mésoscopique [14]. La première réalisation suit en 2005 [15] pour un atome unique, puis pour une boîte quantique [16]. Le principe du blocage est présenté sur la figure ci-dessous :



Les états propres du système couplé atome cavité ne sont pas équidistants en énergie. Dans le régime de couplage fort, la non-linéarité  $U = (\omega_{21} - \omega_{10})/2$  est grande devant la largeur de la cavité  $\kappa$ . En pompant la cavité à une fréquence  $\omega_{10}$ , seule la transition du vide vers l'état à un photon est résonante, et la population dans l'état à deux photons est faible et donnée par  $1/(1 + (U/\kappa)^2)$  [17]. Pour obtenir  $g^2(0) \leq 0.1$ , il faut  $U \geq 3\kappa$ . Cette condition est expérimentalement contraignante, c'est pourquoi la découverte en 2010 [18] par Liew et Savona d'un nouveau mécanisme de blocage dans le régime  $U \ll \kappa$  a suscité un grand intérêt. L'observation de ce phénomène avec des photons micro-onde est l'objectif principal de cette thèse.

Ce phénomène appelé « blocage anormal » (ou « anomalous blockade ») apparaît dans un système de deux cavités couplées par un couplage  $J$  et avec une non-linéarité Kerr  $U$  dans au moins une des cavités. Liew et Savona ont montré par une résolution numérique de l'équation maîtresse qu'une des deux cavités émet des photons antibunchés. Ils proposent une réalisation expérimentale dans des micro-cavités semiconductrices. En effet ces systèmes permettent d'obtenir des cavités faiblement non-linéaires couplées [19, 20]. D'un point de vue théorique, une interprétation en termes d'interférence entre différents chemins quantiques est avancée par Bamba *et al* [21] pour expliquer l'apparition de cette statistique inattendue dans un système faiblement non-linéaire, comme montré sur la figure ci-dessous :



Il existe deux chemins reliant l'état  $|10\rangle$  à l'état  $|20\rangle$  qui ont des phases différentes si  $U$  est non nul. Suivant la valeur de cette différence de phase, la population de l'état  $|20\rangle$  peut être soit supérieure, soit inférieure à la population attendue pour un état cohérent. Les photons émis par la cavité peuvent donc être buncheds ou antibunchés. L'étude de Bamba *et al* montre que seule une des cavités doit être non-linéaire, et l'optimum de blocage est obtenu pour  $U = (2\kappa^3)/(3\sqrt{3}J^2)$ . De nombreux travaux théoriques ont suivi ces deux études fondatrices. Les références [22, 23] ont montré que le blocage anormal apparaît si l'on pompe indifféremment une ou deux cavités. La référence [24] calcule le blocage anormal en tenant compte du degré de liberté supplémentaire de polarisation. Les références [25, 26] traitent le cas où les deux cavités sont remplacées par les modes à  $2\omega$  et à  $\omega$  d'une unique cavité non-linéaire. La référence [27] considère le cas où le couplage entre les cavités est réalisé avec une boîte quantique. La référence [28] considère le cas d'un couplage complexe entre les cavités et la référence [29] le cas d'un couplage dissipatif. Le cas de trois cavités couplées a été introduit dès le premier article de Liew et Savona. Là encore, de nombreuses variantes ont été théoriquement étudiées [30, 31, 22]. Une revue théorique sur le blocage anormal a récemment été publiée par Liew et Savona [32]. Il apparaît donc que le blocage anormal est un comportement général pour un grand nombre d'Hamiltoniens. Cette universalité a été expliquée dans [33] par Lemonde *et al* : dans tous ces systèmes, un état comprimé est généré. La valeur de  $g^2(0)$  pour de tels états peut en effet être inférieure à 1 lorsque le paramètre de squeezing  $\xi$  et le déplacement  $\alpha$  vérifient  $\alpha^2 \approx \xi$  [34, 35, 36]. Cette propriété des états comprimés a été observée expérimentalement en optique [37, 38], indépendamment du blocage anormal. Cette formulation du blocage anormal en termes d'état squeeze est un élément central dans cette thèse.

Le phénomène de blocage de photon dans une cavité s'inscrit dans un domaine de recherche plus vaste, celui de l'électrodynamique quantique en cavité. Ce domaine a connu ces dernières années un développement rapide dans le régime micro-onde avec l'avènement de la « circuit-QED », [39, 40, 41, 42]. Ces circuits sont constitués de résonateurs supraconducteurs et d'atomes artificiels réalisés avec des jonctions Josephson. L'observation du régime de couplage fort [39, 40] a rapidement permis l'observation du blocage normal [43, 44, 45], et il est donc naturel de chercher à observer le phénomène de blocage anormal en micro-onde. Nous montrerons dans cette thèse comment concevoir puis fabriquer un circuit supraconducteur composé de deux cavités dont l'une est non-linéaire pour observer le blocage anormal [46, 47]. Du fait de la faible énergie d'un photon micro-onde, il n'existe pour l'instant pas de détecteur de photon unique tel qu'en optique et une mesure de  $g^2(t - t')$  en régime de comptage n'est pas possible. Dans le contexte de l'optique quantique micro-onde, de nouvelles techniques de mesure ont été développées. Ces différentes techniques de tomographie utilisent des opérations quantiques et la lecture de l'état d'un qubit [48], un amplificateur paramétrique [49] ou un amplificateur linéaire [50]. Cette dernière technique de mesure est relativement simple à mettre en oeuvre puisque l'élément clé est un amplificateur cryogénique commercial. Récemment ce type de mesure a permis de mettre en évidence des corrélations quantiques entre photons émis par une jonction tunnel ou une jonction Josephson polarisée [51, 52]. Dans cette thèse, nous avons utilisé cette méthode qui nous permis de mesurer  $g^2(t - t')$  pour des états à très faible nombre de photons ( $\approx 5 \times 10^{-2}$  photons dans la cavité) et de mettre en évidence le blocage anormal.

Cette thèse est organisée de la manière suivante :

- **Chapitre I** : Ce chapitre est consacré à l'étude théorique du blocage anormal.
- **Chapitre II** : Dans ce chapitre, nous verrons les deux systèmes cryogéniques qui seront utilisés ainsi que les techniques de fabrication utilisées pour réaliser l'échantillon souhaité.
- **Chapitre III** : Dans ce chapitre nous montrerons la modélisation et la mesure des paramètres du système avec lequel nous étudierons le blocage anormal : fréquence des cavités, couplage entre cavités, couplage au monde extérieur, non-linéarité.
- **Chapitre IV** : Dans ce chapitre nous verrons la méthode de mesure que nous avons employée pour obtenir  $g^2(0)$ .
- **Chapitre V** : Enfin, nous présenterons les résultats expérimentaux qui montrent l'effet de blocage anormal de photon dans le régime micro-onde.

---

## Étude théorique du blocage anormal

---

Dans ce chapitre, nous allons étudier d'un point de vue théorique le blocage anormal de photon. Ce phénomène apparaît lorsque l'on couple deux cavités électromagnétiques faiblement non-linéaires. Les deux cavités étant couplées au monde extérieur, nous adopterons une description en termes d'équation maîtresse pour obtenir les équations d'évolution du champ dans chaque cavité. Cette description nous permettra d'établir le phénomène de blocage anormal à très faible nombre de photons comme un effet d'interférence. Pour aller au-delà du régime à très faible nombre de photons, nous commencerons par une étude des solutions classiques du système. Puis, en étudiant les solutions quantiques proches de cette solution classique, nous montrerons que le champ peut être considéré comme gaussien dans chaque cavité. Cette hypothèse nous permettra de calculer, dans chaque cavité, le nombre moyen de photons  $n_{\text{tot}}$  et la fonction d'autocorrélation  $g^2(t)$ . Ensuite, nous étudierons le cas plus général, sans cette approximation gaussienne, par une résolution numérique de l'équation maîtresse. En conclusion de ce chapitre, nous établirons les contraintes sur les paramètres physiques décrivant le système (couplage entre cavité, non-linéarité et largeur des cavités) permettant une observation expérimentale du phénomène de blocage anormal.

## Sommaire

---

<b>I.1</b>	<b>Système de deux cavités couplées . . . . .</b>	<b>17</b>
I.1.1	Hamiltonien et équations du mouvement . . . . .	17
I.1.2	Phénomène de blocage anormal . . . . .	17
I.1.3	Blocage anormal à très faible nombre de photons . . . . .	18
<b>I.2</b>	<b>Approximation gaussienne . . . . .</b>	<b>21</b>
I.2.1	Solution classique et stabilité . . . . .	21
I.2.2	Fluctuations quantiques : hypothèse gaussienne . . . . .	24
I.2.3	Calcul de $g^2(0)$ pour un état gaussien . . . . .	24
I.2.4	État gaussien du blocage anormal . . . . .	28
<b>I.3</b>	<b>Résolution numérique de l'équation maîtresse . . . . .</b>	<b>32</b>
I.3.1	Opérateur de Lindblad déplacé . . . . .	32
I.3.2	Évolution de $g^2(0)$ en fonction de la puissance de pompe . . . . .	35
I.3.3	Influence de la température et du déphasage pur . . . . .	39
<b>I.4</b>	<b>Temps de corrélation du blocage anormal . . . . .</b>	<b>41</b>
I.4.1	Calcul dans l'approximation gaussienne . . . . .	41
I.4.2	Calcul numérique par le théorème de régression quantique . . . . .	42
<b>I.5</b>	<b>Détermination des paramètres expérimentaux . . . . .</b>	<b>43</b>
I.5.1	Contraintes expérimentales . . . . .	43
I.5.2	Influence des désaccords cavités-pompe . . . . .	44
I.5.3	Tolérance acceptable sur les paramètres $\kappa_i$ , $J$ et $U$ . . . . .	44

---

## I.1 Deux cavités couplées : équations du mouvement et solution à faible nombre de photons

### I.1.1 Hamiltonien et équations du mouvement

Considérons un système composé de deux modes bosoniques  $\hat{a}_1$  et  $\hat{a}_2$  d'énergie  $\hbar\omega_1$  et  $\hbar\omega_2$ . Le mode 2 présente une non-linéarité de type Kerr d'énergie  $\hbar U$ . Les deux modes sont couplés par un couplage mutuel d'énergie  $\hbar J$ . Ce système est décrit par l'Hamiltonien  $\hat{H}_{\text{sys}}$  :

$$\frac{1}{\hbar}\hat{H}_{\text{sys}} = \omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + J\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) + U\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2 \quad (\text{I.1})$$

Le mode 1 est pompé avec un taux  $\eta$  décrit par l'Hamiltonien  $\hat{H}_p$  :

$$\frac{1}{\hbar}\hat{H}_p = \eta e^{-i\omega_p t}\hat{a}_1 + \eta^* e^{i\omega_p t}\hat{a}_1^\dagger \quad (\text{I.2})$$

Par la suite, nous nous placerons dans le référentiel tournant à la fréquence de la pompe  $\omega_p$ . Dans ce référentiel, il est commode d'introduire  $\delta_i = \omega_p - \omega_i$ ,  $i = 1, 2$  le désaccord entre la fréquence de pompe et la fréquence des cavités. L'Hamiltonien total du système pompé s'écrit alors :

$$\frac{1}{\hbar}\hat{H} = -\delta_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \delta_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + J\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) + U\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2 + \eta\hat{a}_1 + \eta^*\hat{a}_1^\dagger \quad (\text{I.3})$$

Ce système interagit avec le monde extérieur, il s'agit donc d'un système ouvert. On suppose que les modes ont un temps de vie fini relié à leurs largeurs spectrales  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ . Pour décrire ce système ouvert, il existe deux formalismes équivalents.

- Une description en termes d'équation maîtresse donnant l'évolution de la matrice densité  $\hat{\rho}$  du système :

$$i\hbar\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \left[\hat{H}, \hat{\rho}\right] + \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{i=2}\hbar\kappa_i\left(2\hat{a}_i\hat{\rho}\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\right) \quad (\text{I.4})$$

Cette approche est adaptée à une résolution numérique.

- Une description en termes d'équations de Langevin quantiques :

$$\partial_t\hat{a}_k = -i\left[\hat{a}_k, \hat{H}\right] - \frac{\kappa_k}{2}\hat{a}_k - \sqrt{\kappa_k}\hat{\xi}_k(t) \quad \text{avec } k = 1, 2 \quad (\text{I.5})$$

où  $\hat{\xi}_k$  est un terme de bruit quantique. Nous verrons que, en linéarisant ces équations autour de leur solution classique, nous obtiendrons une solution analytique pour les opérateurs  $\hat{a}_k$ .

### I.1.2 Phénomène de blocage anormal

Le phénomène de blocage anormal a été prédit théoriquement par Liew et Savona [18] en 2010. En résolvant numériquement l'équation maîtresse du système, ils ont découvert que la probabilité de mesurer deux photons dans le mode 1 peut s'annuler pour certaines valeurs de paramètres  $U, J, \kappa, \delta_1$  et  $\delta_2$ , et ce même si le rapport  $U/\kappa$  est extrêmement faible. Dans ce chapitre, nous allons d'abord reproduire le calcul de Bamba *et al* [21]. Avec ce calcul, nous montrerons l'apparition du blocage anormal de photon dans le régime où les deux cavités ont une population très inférieure à un photon. Puis nous regarderons le cas plus général à grand nombre de photons en nous inspirant de l'approche développée par Lemonde *et al* [33].

### I.1.3 Blocage anormal à très faible nombre de photons

Lorsque les deux modes bosoniques sont tous les deux très peu peuplés, on peut développer la fonction d'onde sur la base de Fock et ne garder que les états à 0,1 et 2 photons comme proposé par Bamba *et al* [21] :

$$|\psi\rangle = C_{00}|00\rangle + (C_{10}|10\rangle + C_{01}|01\rangle) + (C_{20}|20\rangle + C_{11}|11\rangle + C_{02}|02\rangle) + \dots \quad (\text{I.6})$$

Où on a défini les kets  $|ij\rangle = |i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2$ , l'indice 1 et 2 référant au mode. Ce développement n'est valide que lorsque le nombre de photons dans chaque mode est proche de 0. On suppose donc :

$$1 \approx C_{00} \gg (C_{01}, C_{10}) \gg (C_{20}, C_{11}, C_{02}) \quad (\text{I.7})$$

On peut alors calculer de manière itérative les coefficients  $C_{ij}$  grâce à l'équation maîtresse I.4 dans le cas stationnaire. Projetons à droite sur le vide et à gauche sur  $\langle 10|$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 10| \left[ \hat{H}, \hat{\rho} \right] + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \hbar \kappa_i \left( 2\hat{a}_i \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right) |00\rangle \\ 0 &= \langle 10| \hat{H} |\psi\rangle + i \frac{\kappa_1}{2} \left( \langle 10| \hat{a}_1 |\psi\rangle C_{10} - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 |\psi\rangle \right) \\ 0 &= C_{10} \left( -\delta_1 - i \frac{\kappa_1}{2} (1 - C_{20}) \right) + \eta + \sqrt{2} C_{20} \eta + C_{10} J \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

De même en projetant à droite sur le vide et à gauche sur  $\langle 01|$  on obtient :

$$0 = C_{01} \left( -\delta_2 - i \frac{\kappa_2}{2} (1 - C_{02}) \right) + C_{11} \eta + C_{10} J \quad (\text{I.9})$$

Afin de résoudre ces équations, on se sert de l'hypothèse I.7 et on néglige les termes d'ordres 2 :  $C_{11}\eta$  et  $C_{20}\eta$ . On pose  $\tilde{\delta}_i = -\delta_i - i\kappa_i/2$ ,  $i = 1, 2$ . On obtient ainsi :

$$C_{10} = \frac{\tilde{\delta}_2 \eta}{J^2 - \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_2} \quad (\text{I.10})$$

$$C_{01} = \frac{J \eta}{\tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_2 - J^2} \quad (\text{I.11})$$

En projetant sur les états à deux photons, on trouve :

$$C_{11} = \frac{\eta^2 J (\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2) (\tilde{\delta}_2 + U)}{(\tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_2 - J^2) (\tilde{\delta}_1^2 (\tilde{\delta}_2 + U) - J^2 (\tilde{\delta}_2 + U) + \tilde{\delta}_1 (\tilde{\delta}_2^2 - J^2 + \tilde{\delta}_2 U))} \quad (\text{I.12})$$

$$C_{20} = \frac{\eta^2 (\tilde{\delta}_2^3 + \tilde{\delta}_2^2 U + J^2 U + \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_2 (\tilde{\delta}_2 + U))}{\sqrt{2} (\tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_2 - J^2) (\tilde{\delta}_1^2 (\tilde{\delta}_2 + U) - J^2 (\tilde{\delta}_2 + U) + \tilde{\delta}_1 (\tilde{\delta}_2^2 - J^2 + \tilde{\delta}_2 U))} \quad (\text{I.13})$$

$$C_{02} = \frac{\eta^2 J^2 (\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2)}{\sqrt{2} (\tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_2 - J^2) (\tilde{\delta}_1^2 (\tilde{\delta}_2 + U) - J^2 (\tilde{\delta}_2 + U) + \tilde{\delta}_1 (\tilde{\delta}_2^2 - J^2 + \tilde{\delta}_2 U))} \quad (\text{I.14})$$

Notons qu'un formalisme Input/Ouput permet d'obtenir le même résultat comme montré dans [53]. Maintenant que  $|\psi\rangle$  est connu nous pouvons calculer la valeur de  $g^2(0)$  :

$$g^2(0) = \frac{\langle \psi | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 | \psi \rangle}{(\langle \psi | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | \psi \rangle)^2} = \frac{2 |C_{20}|^2}{(|C_{10}|^2 + |C_{11}|^2 + |C_{20}|^2)^2} \approx 2 \frac{|C_{20}|^2}{|C_{10}|^4} \quad (\text{I.15})$$

Cette formule approchée est particulièrement utile, car  $g^2(0)$  y est indépendant de  $\eta$  ce qui facilite notre étude. Dans le cas le plus simple où les deux cavités sont identiques :  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\omega_1 = \omega_2$  (soit  $\delta_1 = \delta_2$ , et l'on notera simplement  $\delta$  dans ce cas), on peut trouver des paramètres tels que le numérateur de  $g^2(0)$  s'annule [21]. Dans le cas simple où  $J \gg \kappa$ , on a :

$$\delta_1 = \delta_2 = \pm \frac{\kappa}{2\sqrt{3}} \quad (\text{I.16})$$

$$U_{\text{opt}} = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\kappa^3}{J^2} \quad (\text{I.17})$$

Bamba *et al.* interprètent cette annulation du terme  $C_{20}$  comme un effet d'interférence quantique. Pour comprendre cette interférence, on représente sur la gauche de la figure I.1 les niveaux d'énergie de l'Hamiltonien I.1. Il existe deux chemins pour peupler l'état  $|20\rangle$  en pompant la cavité 1 : soit on passe uniquement par l'état  $|10\rangle$  comme représenté par les flèches vertes, soit on passe par l'autre cavité grâce au couplage  $J$  comme représenté par les flèches oranges. À cause de la non-linéarité  $U$ , ces deux chemins ont des phases différentes. Dans le cas d'une interférence destructive,  $C_{20}$  et donc  $g^2(0)$  s'annule. Dans le cas où l'interférence est constructive,  $g^2(0)$  peut être largement supérieur à 1, phénomène appelé bunching. Les équations I.17 et I.16 montrent que l'interférence peut être parfaitement destructive même quand la non-linéarité est faible devant la largeur de la cavité  $\kappa$ . C'est la principale différence avec le blocage « normal ». Dans ce cas, l'annulation de la population de l'état à deux photons est due au désaccord entre l'énergie du photon de pompe et celle de la transition de l'état à 1 vers 2 photons. Pour comparaison, on représente sur la droite de la figure I.1 le schéma de blocage normal.

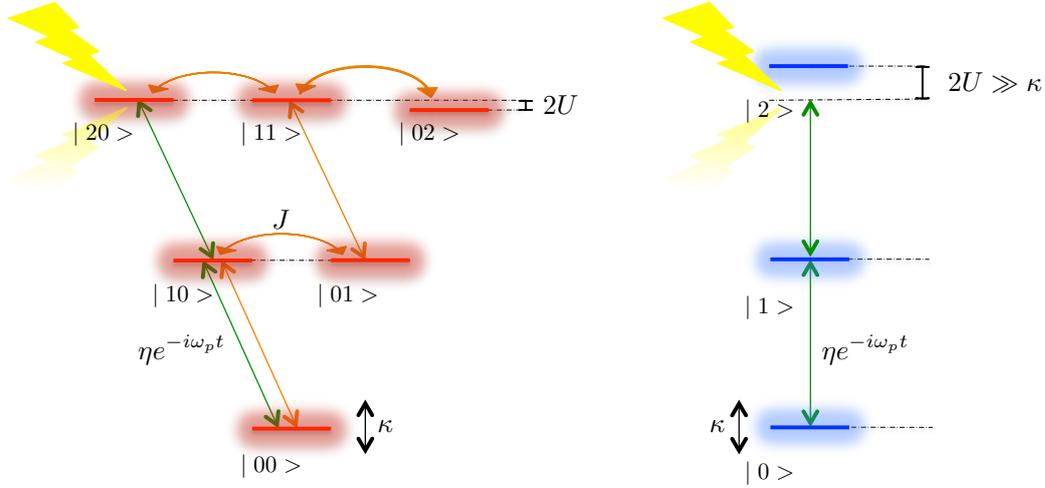


FIGURE I.1 – Schéma du blocage anormal sur la gauche en regard avec le schéma de blocage normal pour une seule cavité. On a représenté les niveaux d'énergie des états contenant au plus deux photons.

### Évolution de $g^2(0)$ en fonction du désaccord entre pompe et cavités

L'équation I.17 donne la relation entre les paramètres  $U, J$  et  $\kappa$  pour que l'interférence ait un contraste maximal. De plus, la fréquence de pompe doit être ajustée pour vérifier I.16. Changer la fréquence de la pompe devrait donc changer l'interférence et la valeur de  $g^2(0)$ . Dans le cas de cavités identiques  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\omega_1 = \omega_2$  et en prenant la valeur  $J = 3\kappa_1$  et  $U = U_{\text{opt}} = -0.043\kappa_1$  on obtient la courbe bleue de la figure I.2. On voit que changer la fréquence de pompe permet de passer continûment d'une interférence constructive à une interférence destructive. En d'autres termes, avec un même dispositif, on peut passer d'une statistique fortement antibunchée à une statistique fortement bunchée. L'interférence se produit autour du désaccord nul. Si on s'éloigne de cette zone, on retrouve la valeur  $g^2(0) = 1$ , valeur attendue pour une source cohérente.

Sur la figure I.2, nous avons également considéré une autre valeur de  $J$ ,  $J = 10\kappa_1$ . La valeur optimale de la non-linéarité pour ce  $J$  est  $U = U_{\text{opt}} = 3.5 \times 10^{-3}\kappa_1$ . On s'aperçoit que le paramètre  $J$  a peu d'influence sur les propriétés du blocage anormal pour peu que  $U$  soit égal à la valeur  $U_{\text{opt}}$ . Par la suite, nous prendrons  $J = 3\kappa_1$ , valeur que nous obtiendrons expérimentalement. Comme noté dans [21], augmenter  $J$  permet de diminuer autant que l'on veut la valeur  $U_{\text{opt}}$ . Bien entendu, une non-linéarité exactement nulle donne  $g^2(0) = 1$ .

Ici, nous avons pris le parti de ne considérer qu'une seule cavité non-linéaire. Dans [21], il est montré que la non-linéarité de la première cavité ne joue qu'un rôle négligeable dans l'interférence lorsque le nombre de photons est faible.

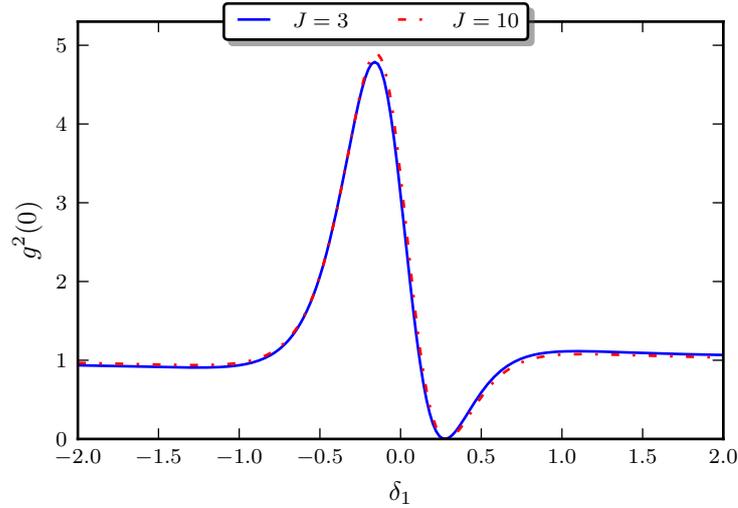


FIGURE I.2 – Évolution de  $g^2(0)$  en fonction de la fréquence de pompe. Les paramètres sont  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\omega_1 = \omega_2$ . On prend  $J = 3\kappa_1$  et  $U = U_{\text{opt}} = -0.043\kappa_1$  pour la courbe bleue et  $J = 10\kappa_1$  et  $U = U_{\text{opt}} = 3.5 \times 10^{-3}\kappa_1$  pour la rouge.

## I.2 Approximation gaussienne

Pour aller au-delà du calcul précédent et du régime à très faible nombre de photons, il faut tout d'abord calculer le comportement classique de ce système non-linéaire. Nous pourrons ensuite étudier les fluctuations quantiques autour de la solution classique.

### I.2.1 Solution classique et stabilité

À partir de l'équation I.5, on obtient le système d'équations pour les deux cavités couplées :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{a}_1 &= -i\tilde{\delta}_1 \hat{a}_1 - iJ\hat{a}_2 - i\eta - \sqrt{\kappa_1} \hat{\xi}_1(t) \\ \partial_t \hat{a}_2 &= -i\tilde{\delta}_2 \hat{a}_2 - 2iU\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2 - iJ\hat{a}_1 - \sqrt{\kappa_2} \hat{\xi}_2(t) \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

En régime stationnaire, les champs quantiques  $\hat{a}_k$  peuvent être décomposés en une partie quantique  $\hat{d}_k$  de valeur moyenne nulle  $\langle \hat{d}_k \rangle = 0$  et en une partie classique  $\alpha_k$ , avec  $\hat{a}_k = \hat{d}_k + \alpha_k$  et  $k = 1, 2$ . La partie classique du champ vérifie :

$$\begin{cases} 0 &= \tilde{\delta}_1 \alpha_1 + J\alpha_2 + \eta_1 \\ 0 &= \tilde{\delta}_2 \alpha_2 + 2U |\alpha_2|^2 \alpha_2 + J\alpha_1 \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Pour la première cavité, le champ  $\alpha_1$  est donné par :

$$\alpha_1 = -\frac{\eta + J\alpha_2}{\tilde{\delta}_1} \quad (\text{I.20})$$

Et l'équation pour  $\alpha_2$  s'écrit :

$$J \frac{\eta}{\tilde{\delta}_1} = \left( 2U |\alpha_2|^2 + \left( \tilde{\delta}_2 - \frac{J^2}{\tilde{\delta}_1} \right) \right) \alpha_2 \quad (\text{I.21})$$

En multipliant cette équation par son complexe conjugué, on aboutit à une équation pour  $|\alpha_2|^2$  :

$$4U^2 \left( |\alpha_2|^2 \right)^3 + 4U \operatorname{Re} \left( \tilde{\delta}_2 - \frac{J^2}{\tilde{\delta}_1} \right) \left( |\alpha_2|^2 \right)^2 + \left| \tilde{\delta}_2 - \frac{J^2}{\tilde{\delta}_1} \right|^2 \left( |\alpha_2|^2 \right) - J^2 \frac{|\eta|^2}{|\tilde{\delta}_1|^2} = 0 \quad (\text{I.22})$$

Il s'agit d'un polynôme de degré 3 en  $|\alpha_2|^2$  dont on peut trouver les solutions numériquement. Une fois  $|\alpha_2|$  connu, on détermine  $\alpha_2$  avec I.21 et  $\alpha_1$  avec I.20.

Il faut maintenant déterminer si les solutions trouvées sont stables. L'équation I.22 est similaire à l'équation pour une cavité non-linéaire. On s'attend donc à observer un phénomène de bistabilité. La bistabilité correspond à la présence de trois solutions, dont une instable et deux stables. Pour étudier la stabilité, suivons l'étude menée dans [54]. En développant les équations du mouvement I.18 autour du point d'équilibre, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_1^* \\ \delta\alpha_2 \\ \delta\alpha_2^* \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1^* \\ \alpha_2 \\ \alpha_2^* \end{pmatrix} \quad (\text{I.23})$$

où  $\delta\alpha_i$  est l'écart à l'équilibre et  $S$  la matrice de stabilité, qui est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} -i\tilde{\delta}_1 & 0 & -iJ & 0 \\ 0 & i\tilde{\delta}_1^* & 0 & iJ \\ -iJ & 0 & -i(\tilde{\delta}_2 + 4U |\alpha_2|^2) & -2iU\alpha_2^2 \\ 0 & iJ & 2iU(\alpha_2^*)^2 & i(\tilde{\delta}_2^* + 4U |\alpha_2|^2) \end{pmatrix} \quad (\text{I.24})$$

L'étude des valeurs propres de  $S$  permet de déterminer la stabilité du point fixe. Si toutes les parties réelles des valeurs propres de  $S$  sont positives, une petite perturbation appliquée au système est amortie, sinon la solution est instable.

On représente sur la figure I.3 les champs dans les cavités, respectivement  $|\alpha_2|$  à gauche et  $|\alpha_1|$  à droite, en fonction de la force de pompe  $\eta$  avec  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ,  $J = 3$ ,  $U = U_{\text{opt}} = -0.043$  et  $\omega_p = -5$  en résolvant numériquement I.21. On représente en trait plein les solutions stables et en trait pointillé les solutions instables.

Le système est bistable lorsqu'il existe deux valeurs de  $\eta$  vérifiant :

$$\frac{\partial |\alpha_2|}{\partial |\eta|} = \infty \Leftrightarrow \frac{\partial |\eta|^2}{\partial |\alpha_2|^2} = 0 \quad (\text{I.25})$$

En utilisant I.22, cette condition correspond à :

$$\frac{\partial |\eta|^2}{\partial |\alpha_2|^2} = 12U^2 \left( |\alpha_2|^2 \right)^2 + 8URe \left( \tilde{\delta}_2 - \frac{J}{\tilde{\delta}_1} \right) \left( |\alpha_2|^2 \right) + \left| \tilde{\delta}_2 - \frac{J}{\tilde{\delta}_1} \right|^2 = 0 \quad (\text{I.26})$$

Les deux racines de ce polynôme donnent les deux valeurs de  $|\alpha_2|^2$  aux seuils d'apparition de la bistabilité. À l'aide de I.21 et I.20, on déduit la valeur de  $|\alpha_1|$  à ces seuils. On représente sur la figure I.4 les seuils de population dans la cavité linéaire en fonction de la fréquence de pompe. Les zones coloriées correspondent aux zones bistables. On montre à gauche le cas de deux cavités résonnantes  $\omega_2 = \omega_1 = 0$ , à droite on utilise  $\omega_2 = 2$  et  $\omega_1 = 0$ . Pour une étude exhaustive des instabilités on peut citer Sarchi *et al* [54] qui ont étudié le cas plus général où les deux cavités sont non-linéaires. Ils prédisent qu'une multistabilité peut être observée dans ce type de système, prédictions vérifiées dans [55]. À fort nombre de photons, la solution peut devenir instable et une rupture spontanée de symétrie peut apparaître comme observé dans [56]. Cette rupture spontanée de symétrie peut apparaître à faible puissance de pompe pour un système où les deux cavités sont faiblement non-linéaires si  $J$  est inférieur à la largeur de cavité [57].

D'un point de vue quantique, la bistabilité correspond à une solution de l'équation maîtresse qui est un mélange statistique de deux solutions bien séparées dans l'espace des phases [58]. Cette situation ne permet donc pas d'observer le phénomène de blocage anormal comme prédit précédemment. Nous nous placerons donc par la suite, dans le régime de faible pompage où une unique solution stable existe.

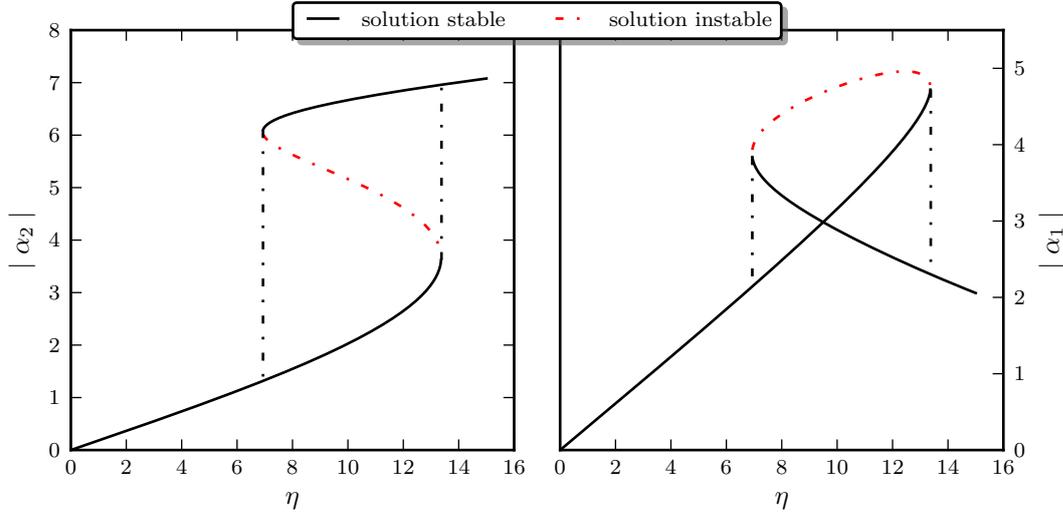


FIGURE I.3 – Amplitudes  $|\alpha_2|$  et  $|\alpha_1|$  respectivement à gauche et à droite en fonction de la force d’excitation  $\eta$ . On représente en trait plein les solutions stables et en trait pointillé les solutions instables. Les autres paramètres sont  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\delta_2 - \delta_1 = 0$ ,  $U = -0.043\kappa_1$ ,  $J = 3\kappa_1$  et enfin  $\delta_1 = -5\kappa_1$ .

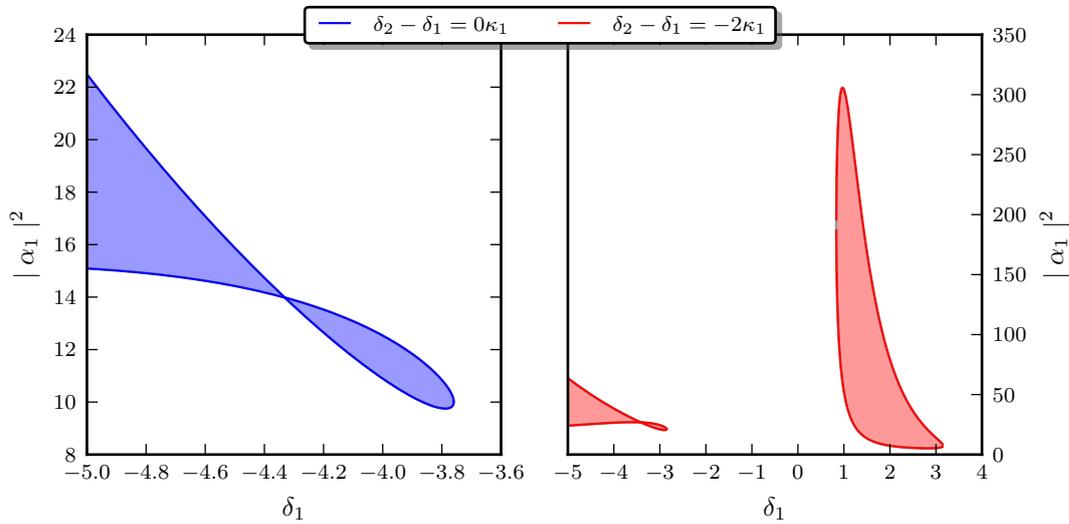


FIGURE I.4 – Seuil d’apparition et de disparition de la bistabilité en fonction du désaccord  $\delta_1$ . Les zones coloriées correspondent aux zones bistables. À gauche, on prend  $\delta_2 - \delta_1 = 0$  et à droite,  $\delta_2 - \delta_1 = -2\kappa_1$ , les autres paramètres sont  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $U = -0.043\kappa_1$  et  $J = 3\kappa_1$

## I.2.2 Fluctuations quantiques : hypothèse gaussienne

Maintenant que nous avons obtenu la solution classique, nous pouvons nous intéresser aux fluctuations quantiques autour de cette solution. Les équations de Langevin quantiques pour les opérateurs champs sont :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{d}_1 &= -i\tilde{\delta}_1 \hat{d}_1 - iJ\hat{d}_2 - \sqrt{\kappa_1} \hat{\xi}_1 \\ \partial_t \hat{d}_2 &= -i\left(\tilde{\delta}_2 - 4U|\alpha_2|^2\right) \hat{d}_2 - 2iU\alpha_2^2 \hat{d}_2^\dagger - 2iU\left(\hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2 + \alpha_2^* \hat{d}_2 + 2\alpha_2 \hat{d}_2^\dagger\right) \hat{d}_2 - iJ\hat{d}_1 - \sqrt{\kappa_2} \hat{\xi}_2 \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

Afin de simplifier ces équations, on peut suivre la prescription proposée dans [33] qui consiste à négliger les termes non-linéaires en  $\hat{d}_2$ . Les équations pour  $\hat{d}_k$  deviennent :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{d}_1 &= -i\tilde{\delta}_1 \hat{d}_1 - iJ\hat{d}_2 - \sqrt{\kappa_1} \hat{\xi}_1 \\ \partial_t \hat{d}_2 &= -i\left(\tilde{\delta}_2 + 4U|\alpha_2|^2\right) \hat{d}_2 - 2iU\alpha_2^2 \hat{d}_2^\dagger - iJ\hat{d}_1 - \sqrt{\kappa_2} \hat{\xi}_2 \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

Cette linéarisation est équivalente à dire que l'évolution du système est déterminée par un Hamiltonien bilinéaire de la forme :

$$-\delta_1 \hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1 + (-\delta_2 + 4U|\alpha_2|^2) \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2 + J\left(\hat{d}_1^\dagger \hat{d}_2 + \hat{d}_1 \hat{d}_2^\dagger\right) + U\left(\alpha_2^2 \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2^\dagger + (\alpha_2^2)^* \hat{d}_2 \hat{d}_2\right) \quad (\text{I.29})$$

Il est montré dans [59] que les états stationnaires d'un tel système sont des états gaussiens dont nous donnerons la définition dans le paragraphe suivant. L'hypothèse qui sous-tend cette approximation est la linéarisation des équations régissant la dynamique quantique du champ. D'autres systèmes présentant un Hamiltonien assez proche [26], [25] exhibent le phénomène de blocage anormal. Cette technique de linéarisation permet de montrer que tous ces schémas génèrent le même type d'état, des états gaussiens squeezés. Avant de calculer l'état gaussien solution de I.28, nous allons revoir quelques propriétés des états gaussiens.

## I.2.3 Calcul de $g^2(0)$ pour un état gaussien

### Construction de la matrice densité d'un état gaussien

L'état gaussien pour un mode  $\hat{a}$  le plus général est en un état thermique comprimé et déplacé [59] que l'on décrit par sa matrice densité  $\hat{\rho}_{\alpha,\xi,n_{\text{th}}}$ . Cet état est appelé gaussien, car sa fonction de Wigner, sur laquelle nous reviendrons, est une gaussienne. Cette matrice densité se construit à partir de la matrice densité d'un état thermique  $\hat{\rho}_{n_{\text{th}}}$  de population  $n_{\text{th}}$  avec

$$n_{\text{th}} = \frac{1}{(e^{\hbar\omega/k_b T} - 1)} \quad (\text{I.30})$$

où  $\omega$  est la fréquence du mode,  $T$  la température et  $k_b$  la constante de Boltzmann. On construit avec ce nombre  $\hat{\rho}_{n_{\text{th}}}$  comme :

$$\hat{\rho}_{n_{\text{th}}} = \frac{1}{1 + n_{\text{th}}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{n_{\text{th}}}{1 + n_{\text{th}}}\right)^m |m\rangle \langle m| \quad (\text{I.31})$$

où  $|m\rangle$  est l'état de Fock à  $m$  photons. On introduit ensuite l'opérateur de squeezing  $\hat{S}(\xi)$  qui dépend du paramètre de squeezing  $\xi = r e^{i\theta}$  ( $r \geq 0$ ) :

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}(\xi(\hat{a}^\dagger)^2 - \xi^* \hat{a}^2)\right) \quad (\text{I.32})$$

Cet opérateur nous permet d'obtenir l'état  $\hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}}$ , état thermique squeezé centré en 0 :

$$\hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}} = \hat{S}(\xi) \hat{\rho}_{n_{\text{th}}} \hat{S}^\dagger(\xi) \quad (\text{I.33})$$

Enfin on déplace cet état de  $\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$  avec l'opérateur déplacement :

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \quad (\text{I.34})$$

On obtient ainsi l'état gaussien le plus général  $\hat{\rho}_{\alpha, \xi, n_{\text{th}}}$  :

$$\hat{\rho}_{\alpha, \xi, n_{\text{th}}} = \hat{D}(\alpha) \hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}} \hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\xi) \hat{\rho}_{n_{\text{th}}} \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{D}^\dagger(\alpha) \quad (\text{I.35})$$

Rappelons brièvement quelques propriétés algébriques des opérateurs déplacement et squeezing dont nous aurons besoin par la suite :

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) &= \hat{a} + \alpha & \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{D}(\xi) &= \cosh(r) \hat{a} + e^{i\theta} \sinh(r) \hat{a}^\dagger \\ \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) &= \hat{a}^\dagger + \alpha^* & \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\xi) &= \cosh(r) \hat{a}^\dagger + e^{-i\theta} \sinh(r) \hat{a} \\ \hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha) &= \mathbb{1} & \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) &= \mathbb{1} \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

### Calcul des moments d'ordre 2 de l'état $\hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}}$

L'expression I.33 pour la matrice densité  $\hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}}$  permet de calculer les valeurs moyennes attendues pour les moments des opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$ . Par exemple, on peut calculer :

$$\begin{aligned} \langle \hat{a} \hat{a} \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} &= \text{Tr}(\hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}} \hat{a}^\dagger \hat{a}) & (\text{I.37}) \\ &= \text{Tr}(\hat{S}(\xi) \hat{\rho}_{n_{\text{th}}} \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &= \text{Tr}(\hat{\rho}_{n_{\text{th}}} \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi)) \\ &= \text{Tr}(\hat{\rho}_{n_{\text{th}}} \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi)) \\ &= \text{Tr}(\hat{\rho}_{n_{\text{th}}} \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) (\cosh(r) \hat{a}^\dagger + e^{-i\theta} \sinh(r) \hat{a})) (\cosh(r) \hat{a} + e^{i\theta} \sinh(r) \hat{a}^\dagger) \\ &= \cosh^2(r) \text{Tr}(\hat{\rho}_{n_{\text{th}}} \hat{a}^2) + \sinh^2(r) e^{2i\theta} \text{Tr}(\hat{\rho}_{n_{\text{th}}} (\hat{a}^\dagger)^2) + 2 \sinh(r) \cosh(r) \frac{e^{i\theta}}{2} \text{Tr}(\hat{\rho}_{n_{\text{th}}} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)) \end{aligned}$$

Par définition de  $\hat{\rho}_{n_{\text{th}}}$  (I.31), on a :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}_{n_{\text{th}}} \hat{a}^2) &= 0 \\ \text{Tr}(\hat{\rho}_{n_{\text{th}}} (\hat{a}^\dagger)^2) &= 0 \\ \text{Tr}(\hat{\rho}_{n_{\text{th}}} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)) &= 2n_{\text{th}} + 1 \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

d'où :

$$\langle \hat{a} \hat{a} \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} = \left( n_{\text{th}} + \frac{1}{2} \right) \sinh(2r) e^{i\theta} \quad (\text{I.39})$$

De même on peut calculer  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\xi, n_{\text{th}}}$ . Ces deux moments permettent d'exprimer l'ensemble des moments d'ordre 2. Nous les utiliserons beaucoup par la suite, on définit donc :

$$n \equiv \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} = \left( n_{\text{th}} + \frac{1}{2} \right) \cosh(2r) - \frac{1}{2} \quad (\text{I.40})$$

$$s \equiv \langle \hat{a} \hat{a} \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} = \left( n_{\text{th}} + \frac{1}{2} \right) \sinh(2r) e^{i\theta} \quad (\text{I.41})$$

**Calcul des moments d'ordre supérieur de l'état  $\hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}}$** 

Afin de calculer les moments d'ordre supérieur de l'état  $\hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}}$ , on peut faire un calcul similaire au calcul précédent et on obtient :

$$\boxed{\langle (\hat{a}^\dagger)^2 (\hat{a})^2 \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} = \langle (\hat{a}^\dagger)^2 \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} \langle (\hat{a})^2 \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} + 2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\xi, n_{\text{th}}}^2} \quad (\text{I.42})$$

Ce résultat est en fait une application du théorème de Wick. On peut également montrer que les moments  $\langle (\hat{a}^\dagger)^i \hat{a}^j \rangle$  et  $\langle \hat{a}^i \hat{a}^j \rangle$ , avec  $i + j$  impair, sont nuls.

**Calcul de  $g^2(0)$  pour l'état  $\hat{\rho}_{\alpha, \xi, n_{\text{th}}}$** 

Intéressons-nous maintenant à l'effet du déplacement. Le nombre de photons total  $n_{\text{tot}}$  dans la cavité est :

$$n_{\text{tot}} \equiv \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\alpha, \xi, n_{\text{th}}} \quad (\text{I.43})$$

En appliquant la même méthode que pour le calcul I.38, on peut exprimer le moment calculé sur la distribution déplacée en fonction du moment calculé sur la distribution centrée en 0 :

$$\begin{aligned} n_{\text{tot}} &= \text{Tr} (\hat{\rho}_{\alpha, \xi, n_{\text{th}}} \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &= \text{Tr} (\hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha)) \\ &= \text{Tr} (\hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}} \hat{a}^\dagger \hat{a}) + \alpha^* \text{Tr} (\hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}} \hat{a}) + \alpha \text{Tr} (\hat{\rho}_{\xi, n_{\text{th}}} \hat{a}^\dagger) + |\alpha|^2 \\ &= n_{\text{tot}} = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} + |\alpha|^2 \\ &= n + |\alpha|^2 \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

De même, pour le moment d'ordre 4 on a :

$$\begin{aligned} \langle (\hat{a}^\dagger)^2 (\hat{a})^2 \rangle_{\alpha, \xi, n_{\text{th}}} &= \langle (\hat{a}^\dagger)^2 (\hat{a})^2 \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} + \alpha^2 \langle (\hat{a}^\dagger)^2 \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} + (\alpha^*)^2 \langle (\hat{a})^2 \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} \\ &\quad + 4 |\alpha|^2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} + |\alpha|^4 \end{aligned} \quad (\text{I.45})$$

Et grâce à la propriété I.42 :

$$\begin{aligned} \langle (\hat{a}^\dagger)^2 (\hat{a})^2 \rangle_{\alpha, \xi, n_{\text{th}}} &= \langle (\hat{a}^\dagger)^2 \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} \langle (\hat{a})^2 \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} + 2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\xi, n_{\text{th}}}^2 + \alpha^2 \langle (\hat{a}^\dagger)^2 \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} + (\alpha^*)^2 \langle (\hat{a})^2 \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} \\ &\quad + 4 |\alpha|^2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\xi, n_{\text{th}}} + |\alpha|^4 \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

En introduisant  $n$  et  $s$ , on aboutit à :

$$\boxed{g^2(0) = 1 + \frac{2 |\alpha|^2 (n + |s| \cos(\theta - 2\phi)) + |s|^2 + n^2}{(|\alpha|^2 + n)^2}} \quad (\text{I.47})$$

Cette équation montre que  $g^2(0)$  est une fonction de trois paramètres, le champ classique  $\alpha$  (variable complexe), et les trois paramètres décrivant l'état gaussien centré en 0 :  $n$ ,  $|s|$  et  $\theta$ .

**Propriété de  $g^2(0)$  pour l'état  $\hat{\rho}_{\alpha,\xi,n_{\text{th}}}$** 

L'expression I.47 a été démontrée dans [33]. Il s'agit d'une réécriture d'un résultat plus ancien [36]. Cette écriture nous permet de tirer un certain nombre de conclusions quant au comportement de la fonction de corrélation  $g^2(0)$  d'un état gaussien. On peut notamment chercher les paramètres gaussiens qui minimisent  $g^2(0)$  en fonction du déplacement  $\alpha$ . À température nulle ( $n_{\text{th}} = 0$ ),  $n$  et  $|s|$  ne dépendent que de  $r$ . Grâce à I.47 on voit que pour minimiser  $g^2(0)$  il faut prendre  $\theta = 2\phi$  et optimiser  $r$ . On représente sur la figure I.5 la valeur de  $g^2(0)$  ainsi obtenue en fonction du déplacement  $|\alpha|$ . On constate que la valeur de  $g^2(0)$  peut être rendue aussi faible que l'on souhaite en contrôlant le déplacement. Si  $|\alpha|$  est petit devant 1, on peut montrer que  $g^2(0)$  évolue comme [33] :

$$g^2(0)_{\min} \underset{|\alpha| \ll 1}{\approx} 4|\alpha|^2 + o(|\alpha|^4) \quad (\text{I.48})$$

Si on veut obtenir un  $g^2(0)$  plus petit que 0.1, il faut  $|\alpha|^2 \leq 2.5 \times 10^{-2}$ .

De même, on peut étudier l'influence de la température. On reprend le résultat montré dans [33]. L'évolution du minimum de  $g^2(0)$  lorsque la température est proche de 0 est donnée par :

$$g^2(0)_{\min} \underset{T \ll \hbar\omega/k_b}{\approx} 8\sqrt{e^{-\frac{\hbar\omega}{k_b T}}} \quad (\text{I.49})$$

Si l'on ne travaille pas à température strictement nulle,  $g^2(0)$  ne peut être arbitrairement petit. Si on souhaite observer  $g^2(0) \leq 0.1$ , il faudra travailler à  $T \leq 32$  mK. On peut comparer cette valeur à la température équivalente à l'énergie d'un photon de fréquence 6 GHz qui est de 280 mK.

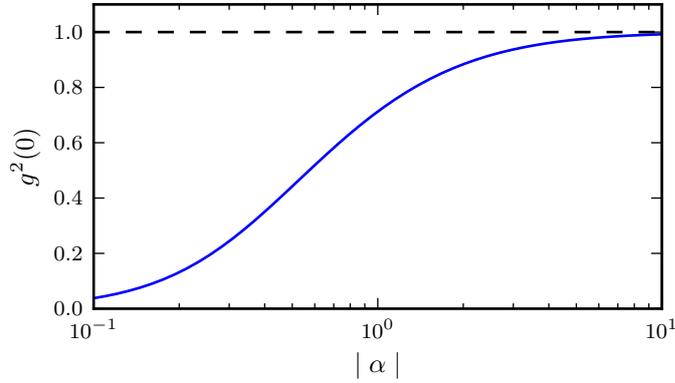


FIGURE I.5 – Valeur de  $g^2(0)$  obtenue par minimisation de I.47 en fonction du déplacement  $|\alpha|$ , à température nulle.

## I.2.4 État gaussien du blocage anormal

### Méthode de calcul des paramètres gaussiens

Pour déterminer les paramètres gaussiens  $n$ ,  $s$  de notre système, il nous faut résoudre les équations régissant la dynamique des fluctuations quantiques autour de la solution classique I.28. Suivons la méthode employée par Lemonde *et al* [33]. Pour cela, effectuons une transformée de Fourier en définissant :

$$\hat{d}_k[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{d}_k(t) e^{i\omega t} \text{ et } \hat{d}_k^\dagger[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{d}_k^\dagger(t) e^{i\omega t} \quad (\text{I.50})$$

Et de même pour  $\hat{\xi}_k$ . On pose les vecteurs  $\vec{\hat{d}} = (\hat{d}_1 \quad \hat{d}_1^\dagger \quad \hat{d}_2 \quad \hat{d}_2^\dagger)^T$  et de même pour  $\vec{\hat{\xi}}$  et enfin  $\kappa$  une matrice diagonale dont les éléments sont  $\{\kappa_1, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_2\}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{\hat{d}}(t) &= S \vec{\hat{d}}(t) - \sqrt{\kappa} \vec{\hat{\xi}}(t) \\ -i\omega \vec{\hat{d}}[\omega] &= S \vec{\hat{d}}[\omega] - \sqrt{\kappa} \vec{\hat{\xi}}[\omega] \\ \vec{\hat{d}}[\omega] &= -\chi[\omega] \sqrt{\kappa} \vec{\hat{\xi}}[\omega] \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

où  $S$  est la matrice de stabilité donnée par I.24 et  $\chi[\omega]$  la matrice définie par :

$$\chi[\omega] = -(\omega + S)^{-1} \quad (\text{I.52})$$

On peut calculer analytiquement cette matrice et donc obtenir une expression analytique de  $\vec{\hat{d}}[\omega]$ .

Un état gaussien est caractérisé par 3 paramètres, le déplacement  $\alpha$  et les deux paramètres  $n$  et  $s$ . La valeur de  $\alpha$  est donnée par l'étude des solutions classiques tandis que  $n$  et  $s$  sont des valeurs moyennes que la solution aux équations de Langevin I.51 nous permet de calculer. Prenons par exemple le calcul du paramètre  $n$  :

$$\begin{aligned} n &\equiv \langle \hat{d}_1^\dagger(t=0) \hat{d}_1(t=0) \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \langle \hat{d}_1^\dagger[\omega] \hat{d}_1[\omega'] \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \kappa \left\langle \left( \sum_{i=1}^4 \chi_{2i}[\omega] \vec{\hat{\xi}}_i[\omega] \right) \left( \sum_{i=1}^4 \chi_{1i}[\omega'] \vec{\hat{\xi}}_i[\omega'] \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{I.53})$$

Il faut donc connaître les propriétés des opérateurs  $\hat{\xi}_i[\omega]$  et  $\hat{\xi}_i^\dagger[\omega]$  pour calculer les paramètres gaussiens. Les opérateurs  $\hat{\xi}_i$  correspondent aux fluctuations quantiques des champs à l'extérieur de la cavité. Ici nous considérons qu'ils correspondent au vide de photon et les corrélations sont donc données par [60]

$$\begin{aligned} \langle \hat{\xi}_i(t) \rangle &= \langle \hat{\xi}_i^\dagger(t) \rangle = 0 \\ \langle \hat{\xi}_i(t) \hat{\xi}_j^\dagger(t') \rangle &= \delta_{ij} \delta(t - t') \\ \langle \hat{\xi}_i^\dagger(t) \hat{\xi}_j(t') \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.54})$$

D'où on déduit :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\xi}_i[\omega] \rangle &= \langle \hat{\xi}_i^\dagger[\omega] \rangle = 0 \\
\langle \hat{\xi}_i[\omega] \hat{\xi}_j^\dagger[\omega'] \rangle &= 2\pi \delta_{ij} \delta(\omega + \omega') \\
\langle \hat{\xi}_i^\dagger[\omega] \hat{\xi}_j[\omega] \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{I.55}$$

Le calcul de  $n$  se réduit donc à :

$$\begin{aligned}
n &= \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (\kappa_1 \chi_{21}[\omega] \chi_{12}[-\omega] + \kappa_2 \chi_{23}[\omega] \chi_{14}[-\omega]) \\
&= \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega n[\omega]
\end{aligned} \tag{I.56}$$

et de même

$$\begin{aligned}
s &= \langle \hat{d}_1(t=0) \hat{d}_1(t=0) \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (\kappa_1 \chi_{11}[\omega] \chi_{12}[-\omega] + \kappa_2 \chi_{13}[\omega] \chi_{14}[-\omega]) \\
&= \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega s[\omega]
\end{aligned} \tag{I.57}$$

Ces deux intégrales sont des fractions rationnelles complexes que nous calculons numériquement. On représente sur la figure I.6  $n[\omega]$  et  $|s[\omega]|$  respectivement à gauche et à droite. On prend comme paramètre des cavités identiques  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  et  $J = 3\kappa_1$  ainsi que  $U = U_{\text{opt}} = -0.043\kappa_1$ . On pompe la cavité faiblement avec  $\eta = 0.1\kappa_1$  à  $\delta_{\text{opt}} = 0.29\kappa_1$ . Le calcul de la solution classique mène à  $\alpha_1 = 6.30 \times 10^{-3} e^{-2.06i}$ . Le calcul des intégrales I.57 et I.56 donne  $n = 3.28 \times 10^{-9}$  et  $s = 3.89 \times 10^{-5} e^{-0.95i}$ . On en déduit grâce à I.47,  $g^2(0) = 1.69 \times 10^{-3}$ .

La figure I.6 montre le spectre de  $n$  et  $|s|$ . On voit que le signal est concentré autour de deux pics centrés en  $\omega_1 \pm J$ . La largeur des pics est donnée par  $\kappa_1$ .

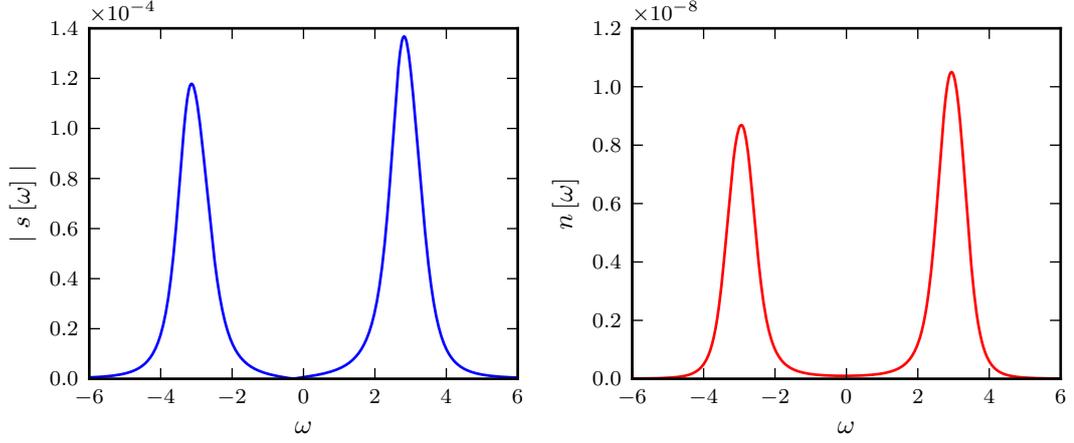


FIGURE I.6 – Paramètres gaussiens  $n[\omega]$  et  $|s[\omega]|$  pour les paramètres  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ,  $J = 3\kappa_1$ ,  $U = U_{\text{opt}} = -0.043\kappa_1$ ,  $\eta = 0.1\kappa_1$  et  $\delta_{\text{opt}} = 0.29\kappa_1$ .

### Évolution des paramètres gaussiens avec la fréquence de pompe

Nous avons maintenant la méthode qui permet de calculer l'ensemble des paramètres gaussiens de l'état stationnaire de notre système de deux cavités couplées. On peut donc étudier l'évolution de ces paramètres en fonction de la fréquence de pompe. On représente sur la figure I.7  $g^2(0)$  en fonction de la fréquence de pompe. Les points noirs montrent le résultat obtenu dans l'approche gaussienne. Le trait rouge représente ce que l'on obtient dans la limite d'une faible population. On constate un parfait accord entre ces deux approches. On note aussi que la population dans la cavité non-linéaire est presque constante. Elle est supérieure à celle dans la première cavité. On représente aussi les différents paramètres de l'état gaussien. On s'aperçoit qu'un très faible squeezing  $r$  est nécessaire, mais suffisant pour obtenir l'effet d'interférence. L'oscillation du  $g^2(0)$  vient du fait que la différence d'angle entre le champ classique  $\alpha$  et l'ellipse de squeezing change avec la fréquence de pompe. Au minimum de  $g^2(0)$ , on a la relation  $\theta = 2\phi$  (représentée par un trait noir vertical). On voit qu'en termes de paramètres gaussiens, l'effet de blocage anormal est lié à un réglage judicieux entre l'angle de l'ellipse de squeezing et l'angle du champ classique.

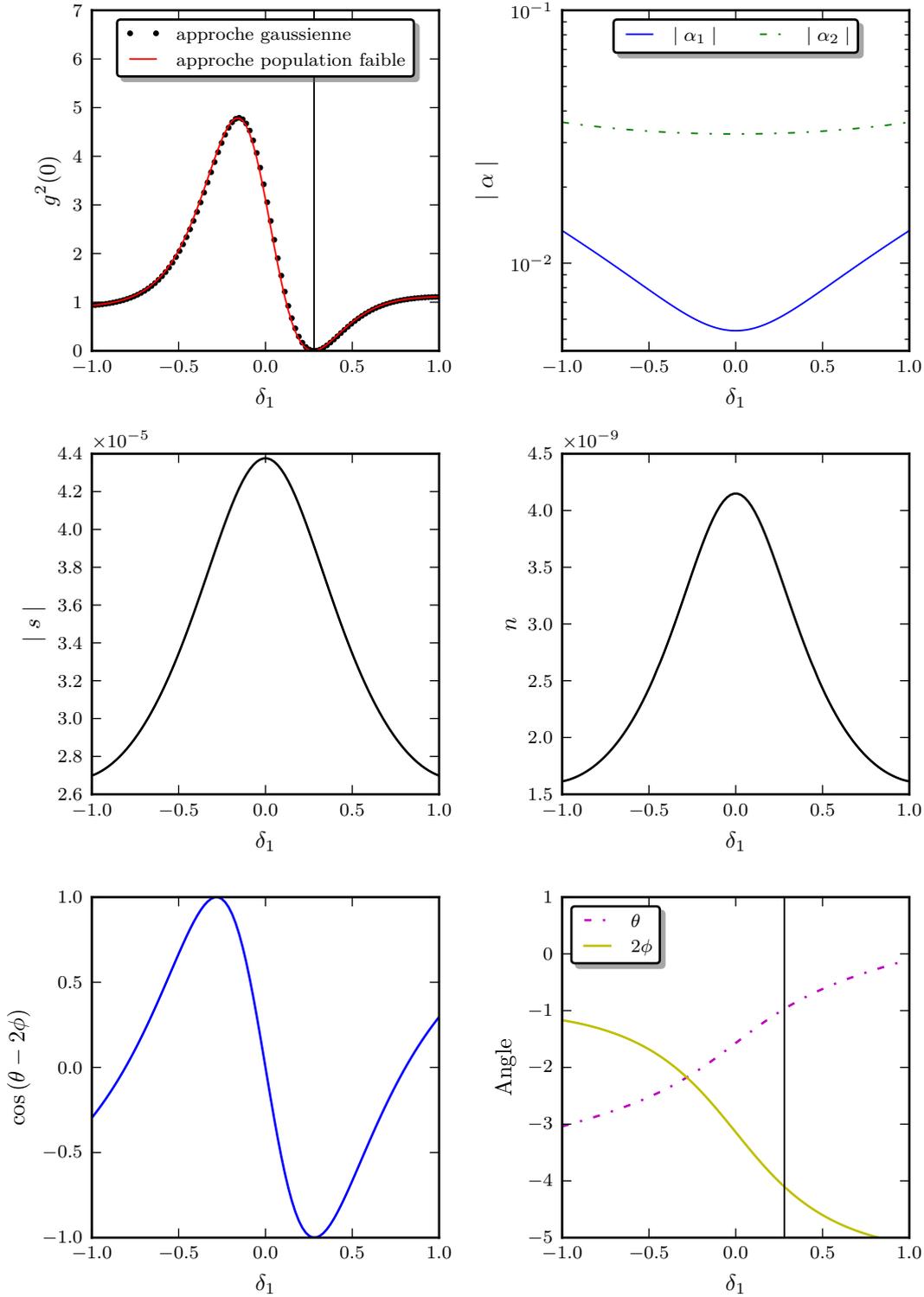


FIGURE I.7 – En haut à gauche, comparaison de  $g^2(0)$  dans l’hypothèse gaussienne et dans l’approche à faible nombre de photons. En haut à droite, le champ classique dans chaque cavité. Au centre  $|s|$  et  $n$ . En bas à droite, l’évolution des arguments de  $\alpha$  et  $s$  (respectivement  $\phi$  et  $\theta$ ) et à gauche, la quantité  $\cos(\theta - 2\phi)$ . Les paramètres sont  $\delta_2 - \delta_1 = 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $U = U_{\text{opt}} = -0.043\kappa_1$ ,  $J = 3\kappa_1$  et  $\eta = 0.1\kappa_1$ .

### I.3 Au-delà de l'hypothèse gaussienne : résolution numérique de l'équation maîtresse

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment la linéarisation des équations du mouvement nous permettait d'obtenir une solution analytique sous la forme d'un état gaussien. Comme nous l'avons vu, le fait que l'état soit gaussien permet d'exprimer  $g^2(0)$  en fonction des moments d'ordre 2 du champ. Le but de cette partie est de développer une méthode de résolution nous permettant de vérifier la validité de l'hypothèse gaussienne. Ceci sera tout aussi important d'un point de vue théorique qu'expérimental. En effet, faire l'hypothèse au niveau expérimental apporte une grande simplification : il est beaucoup plus facile de mesurer les moments d'ordre 2 que ceux d'ordre 4.

#### I.3.1 Opérateur de Lindblad déplacé

Pour aller au-delà de l'hypothèse gaussienne, nous allons résoudre numériquement l'équation maîtresse du système. Dans le référentiel tournant, l'équation maîtresse est donnée par :

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \hbar \kappa_i \left( 2\hat{a}_i \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right) \quad (\text{I.58})$$

Dans le cas stationnaire, on cherche les solutions  $\hat{\rho}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} 0 &= [\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \hbar \kappa_i \left( 2\hat{a}_i \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right) \\ 0 &= \mathcal{L}(\hat{\rho}) \end{aligned} \quad (\text{I.59})$$

Où nous avons introduit l'opérateur de Lindblad  $\mathcal{L}$ . Comme pour la résolution de l'équation de Langevin, on peut développer cette équation autour de la solution classique. On définit l'opérateur de déplacement sur les deux cavités à partir de l'opérateur de déplacement sur un mode I.34 :

$$D(\alpha_1, \alpha_2) = D(\alpha_1) \otimes D(\alpha_2) \quad (\text{I.60})$$

On utilise l'indice 0 pour les éléments déplacés :

$$\hat{\rho}_0 = \hat{D}(-\alpha_1, -\alpha_2) \rho \hat{D}^\dagger(-\alpha_1, -\alpha_2) = \hat{D}^\dagger(\alpha_1, \alpha_2) \rho \hat{D}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (\text{I.61})$$

Appliqué sur I.59, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{D}^\dagger(\alpha_1, \alpha_2) \left( [\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \hbar \kappa_i \left( 2\hat{a}_i \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right) \right) D(\alpha_1, \alpha_2) \\ 0 &= [\hat{H}_0, \hat{\rho}_0] + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \kappa_i \left( 2\hat{a}_i \hat{\rho}_0 \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{\rho}_0 - \hat{\rho}_0 \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right) \\ 0 &= \mathcal{L}_0(\hat{\rho}_0) \end{aligned} \quad (\text{I.62})$$

avec  $\hat{H}_0$  défini par :

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0 = & -\delta_1(\hat{a}_1^\dagger + \alpha_1^*)(\hat{a}_1 + \alpha_1) - \delta_2(\hat{a}_2^\dagger + \alpha_2^*)(\hat{a}_2 + \alpha_2) \\
& + J \left( (\hat{a}_1^\dagger + \alpha_1^*)(\hat{a}_2 + \alpha_2) + (\hat{a}_2^\dagger + \alpha_2^*)(\hat{a}_1 + \alpha_1) \right) \\
& + U(\hat{a}_2^\dagger + \alpha_2^*)(\hat{a}_2^\dagger + \alpha_2^*)(\hat{a}_2 + \alpha_2)(\hat{a}_2 + \alpha_2) \\
& + \eta \left( (\hat{a}_1^\dagger + \alpha_1^*) + (\hat{a}_1 + \alpha_1) \right) \\
& + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \kappa_i \left( \alpha_i^* \hat{a}_i - \alpha_i \hat{a}_i^\dagger \right)
\end{aligned} \tag{I.63}$$

Le dernier terme de  $\hat{H}_0$  vient du déplacement du terme de saut dans l'équation maîtresse.

Pour résoudre numériquement cette équation, le plus simple est de travailler dans la base de Fock. Résoudre l'équation maîtresse revient alors à trouver le noyau de la matrice représentant l'opérateur de Lindblad. Une fois  $\hat{\rho}_0$  déterminée, les différentes grandeurs que l'on souhaite étudier s'obtiennent en effectuant des traces. Par exemple, le nombre de photons dans la cavité 1 est :

$$n_{\text{tot}1} = \text{Tr} \left( \hat{\rho} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \right) = \text{Tr} \left( \hat{\rho}_0 (\hat{a}_1^\dagger + \alpha_1^*) (\hat{a}_1 + \alpha_1) \right) \tag{I.64}$$

Lorsque l'on fait la résolution numérique, on doit tronquer l'espace de Fock à une valeur  $n_{\text{max}}$  de photons. Déplacer la matrice densité comme nous l'avons fait permet de réduire  $n_{\text{max}}$ . Pour vérifier la convergence de notre algorithme et déterminer la valeur de  $n_{\text{max}}$  à prendre, on étudie l'écart relatif entre la valeur de  $n$  obtenue pour  $n_{\text{max}} = 8$  et la valeur obtenue pour des  $n_{\text{max}}$  plus faibles. On appelle  $\epsilon_{m2}$  la quantité ainsi définie :

$$\epsilon_{m2}(n_{\text{max}}) = \frac{\left| \text{Tr} \left( \hat{\rho}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \right)_{n_{\text{max}}} - \text{Tr} \left( \hat{\rho}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \right)_{n_{\text{max}}=8} \right|}{\text{Tr} \left( \hat{\rho}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \right)_{n_{\text{max}}=8}} \tag{I.65}$$

De même, pour vérifier la convergence d'un moment d'ordre plus élevé, on définit  $\epsilon_{m4}$  :

$$\epsilon_{m4}(n_{\text{max}}) = \frac{\left| \text{Tr} \left( \hat{\rho}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 \right)_{n_{\text{max}}} - \text{Tr} \left( \hat{\rho}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 \right)_{n_{\text{max}}=8} \right|}{\text{Tr} \left( \hat{\rho}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 \right)_{n_{\text{max}}=8}} \tag{I.66}$$

On représente ces deux grandeurs respectivement à gauche et à droite sur la figure I.8. Plus  $n_{\text{max}}$  est grand, plus l'erreur relative est faible. Plus le nombre de photons est élevé, plus il faudra prendre un  $n_{\text{max}}$  grand. Ce résultat est attendu, car l'ellipse d'incertitude dans l'espace des phases est donnée par le nombre de photons ainsi que par la valeur du squeezing. On constate aussi que, plus l'on cherche à obtenir un moment d'ordre élevé, plus il faudra prendre un  $n_{\text{max}}$  grand. En pratique on prendra  $n_{\text{max}} = 4$  ce qui nous assurera une erreur de l'ordre de 1% pour la valeur de  $g^2(0)$  pour une cavité contenant moins de 0.5 photon.

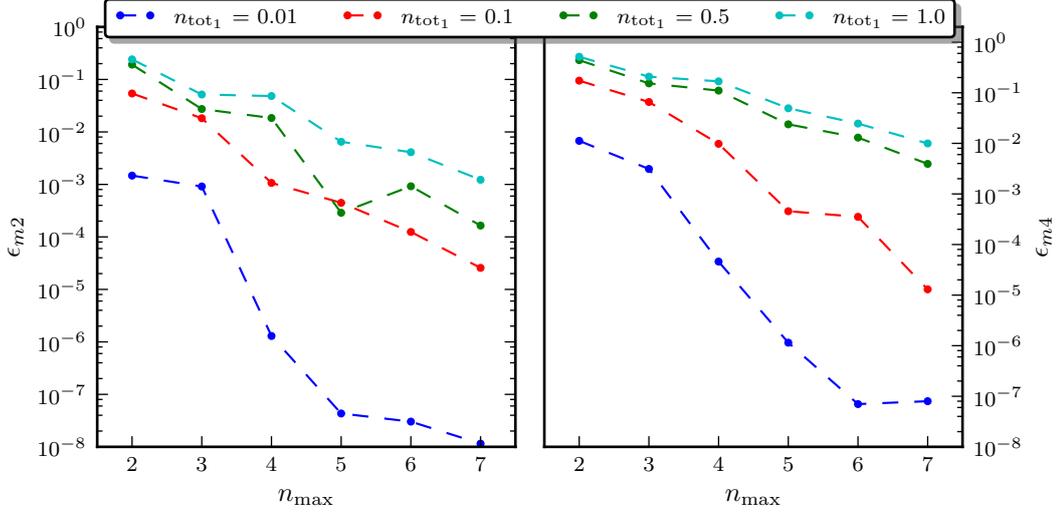


FIGURE I.8 – Effet de la troncation de l'espace de Hilbert de la simulation pour un moment d'ordre 2 à gauche, et un moment d'ordre 4 à droite, pour différents nombres de photons dans la cavité 1  $n_{\text{tot}1}$ . Les paramètres sont  $\delta_2 - \delta_1 = 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $U = U_{\text{opt}} = -0.043\kappa_1$  et  $J = 3\kappa_1$ .

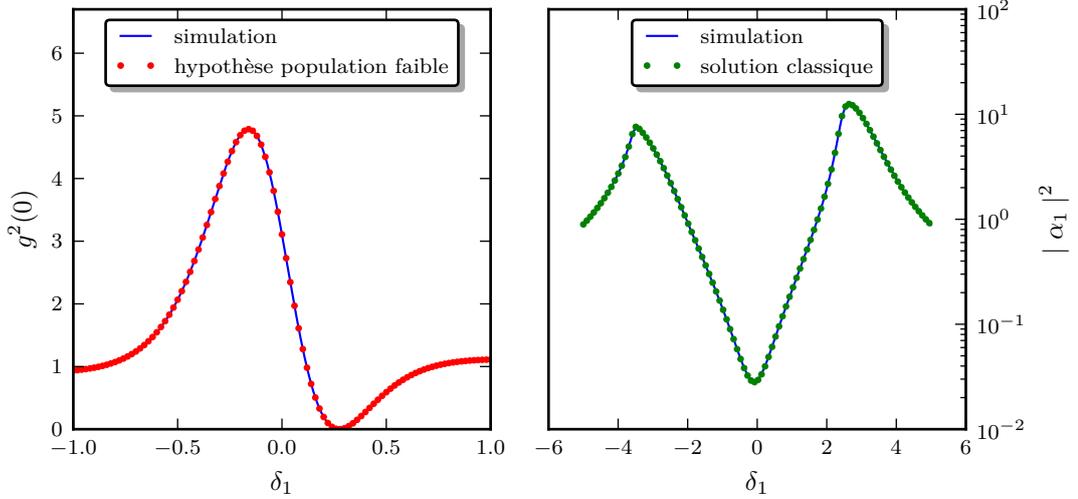


FIGURE I.9 – À gauche, comparaison des valeurs de  $g^2(0)$  obtenues avec I.15 en rouge, et avec notre simulation numérique en bleue, en fonction de la fréquence de pompe. La force de pompe est  $\eta = 0.1$ . À droite, évolution du nombre moyen de photons dans la première cavité calculé avec notre simulation numérique en bleu, et avec I.20 en verts, pour  $\eta = 3.1$ . Les paramètres sont  $\delta_2 - \delta_1 = 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $U = U_{\text{opt}} = -0.043\kappa_1$  et  $J = 3\kappa_1$ .

Enfin, on peut vérifier la bonne correspondance entre les valeurs de  $g^2(0)$  obtenues dans l'approximation gaussienne pour un faible nombre de photons et la résolution de l'équation maîtresse. On montre à gauche sur la figure I.9 l'évolution de la fonction  $g^2(0)$  en fonction du désaccord pour deux cavités identiques. On impose  $\eta = 0.1$ ,  $|\alpha_1|^2$  n'excède donc pas 0.01.

On peut également vérifier qu'on retrouve la solution classique à grand nombre de photons, pour peu que l'on reste en dessous du seuil de bistabilité. On montre à droite de la figure I.9 le nombre de photons moyen dans la cavité 1 en fonction du désaccord. En imposant  $\eta = 3.1$ , on se trouve sous le seuil de bistabilité, quel que soit le désaccord. À cette force de pompe, le champ dans la cavité atteint au maximum une dizaine de photons. Même pour cette forte population, travailler avec une matrice densité centrée permet de simuler l'équation maîtresse en ne gardant que 4 états de Fock par cavité.

### I.3.2 Évolution de $g^2(0)$ en fonction de la puissance de pompe

Expérimentalement, le nombre de photons dans la cavité mesurée est un paramètre clé. Il gouverne le temps d'intégration nécessaire à la mesure de  $g^2(0)$ . Il est donc nécessaire d'étudier le comportement du phénomène de blocage anormal en fonction de la puissance de pompe.

#### Régime de validité de l'approximation gaussienne

Pour commencer, vérifions la validité de l'approximation gaussienne. Pour cela on étudie l'écart entre la valeur prédite avec cette approximation et la valeur obtenue par simulation pour différentes quantités. De manière usuelle, on quantifie l'écart à une gaussienne en calculant une grandeur appelée le cumulants d'ordre  $n$  :  $K_n$ . Le cumulants est l'écart relatif entre le moment d'ordre  $n$  de la distribution considérée et le moment d'ordre  $n$  d'une distribution gaussienne de même valeur moyenne et de même déviation standard. Les cumulants d'ordre supérieur à deux s'annulent donc pour une distribution gaussienne. Intéressons-nous à  $K_4$  :

$$K_4 = \frac{(\text{Tr}(\hat{\rho}_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}) - [\text{Tr}(\hat{\rho}_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger) \text{Tr}(\hat{\rho}_0 \hat{a} \hat{a}) + 2\text{Tr}(\hat{\rho}_0 \hat{a}^\dagger \hat{a})^2])}{(\text{Tr}(\hat{\rho}_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger) \text{Tr}(\hat{\rho}_0 \hat{a} \hat{a}) + 2\text{Tr}(\hat{\rho}_0 \hat{a}^\dagger \hat{a})^2)} \quad (\text{I.67})$$

On représente à gauche sur la figure I.10 cette grandeur pour différentes valeurs de  $U$  en fonction de la population dans la cavité 1. À faible population, l'approximation gaussienne est parfaitement exacte. Pour des populations proches de l'unité, la valeur de  $K_4$  s'écarte de 0 et cet écart est d'autant plus important que  $U$  est grand. Cet écart implique que le  $g^2(0)$  déduit à partir des moments d'ordre deux dans l'hypothèse gaussienne n'est pas correct. On représente à droite de la figure I.10  $g^2(0)$  avec et sans hypothèse gaussienne.

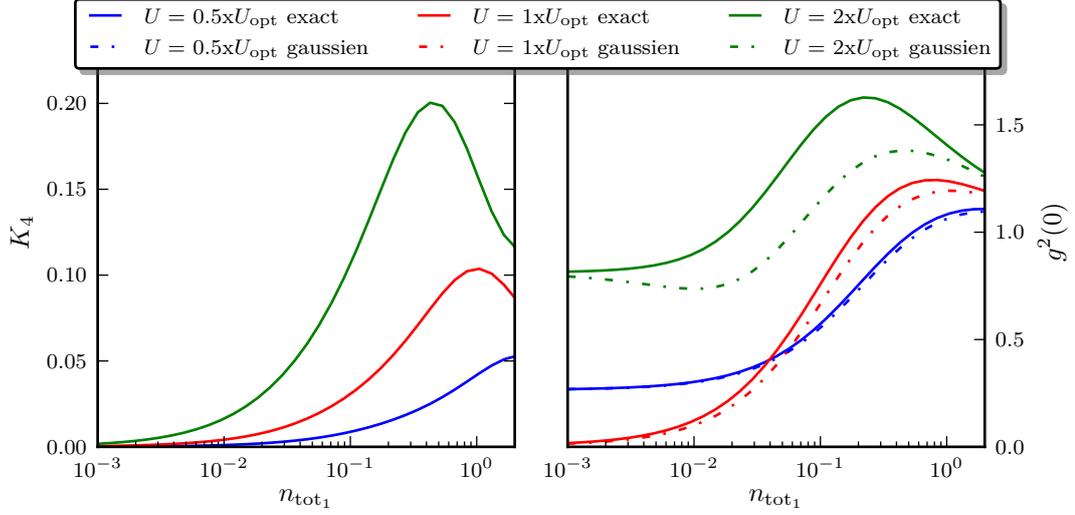


FIGURE I.10 – À gauche, cumulant d'ordre 4 en fonction du nombre de photons dans la cavité 1 pour des cavités identiques. On utilise différentes valeurs de  $U$  repérées par rapport à  $U_{\text{opt}} = -0.043\kappa_1$ , non-linéarité menant à l'annulation du  $g^2(0)$ . À droite, le  $g^2(0)$  obtenu pour ces mêmes paramètres, la valeur exacte en trait plein et la valeur approchée dans l'hypothèse gaussienne en trait pointillé. Les paramètres sont  $\delta_1 = \delta_2 = 0.29\kappa_1$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$  et  $J = 3\kappa_1$ .

### Étude en puissance de pompe au-delà de l'approximation gaussienne

Afin de voir l'influence de la force de pompe, on représente sur la figure I.11  $g^2(0)$  en fonction du désaccord de pompe pour différents taux de pompe  $\eta$ . On voit que les valeurs extremum de  $g^2(0)$  se rapprochent progressivement de 1 lorsque le nombre de photons augmente. Sur la figure I.11 on représente aussi le nombre de photons dans la cavités 1, ce qui nous permet de voir que la position du minimum de  $n_{\text{tot}1}$  se décale vers le rouge lorsque l'on augmente la puissance de pompe.

Si on se place désormais à désaccord fixé  $\delta_1 = \delta_2 = 0.29\kappa_1$  ( $\kappa_1 = \kappa_2$ ) et que l'on fait varier la puissance de pompe, on obtient la courbe rouge, à gauche de la figure I.12. Pour un nombre de photons donné, on peut aussi optimiser les paramètres  $\omega_p$  et  $\omega_2$  pour minimiser  $g^2(0)$ . Si on regarde les paramètres  $\omega_p$  et  $\omega_2$  optimums, on s'aperçoit que lorsque le nombre de photons augmente dans la cavité 1 il faut désaccorder la seconde cavité par rapport à la première et maintenir la pompe proche de la seconde cavité. Dans l'image simplifiée à faible puissance de pompe, nous avons étudié l'effet d'interférence dans un espace tronqué à 2 photons. Lorsqu'on augmente la puissance de pompe, les états avec un nombre d'excitations plus élevé sont à prendre en compte.

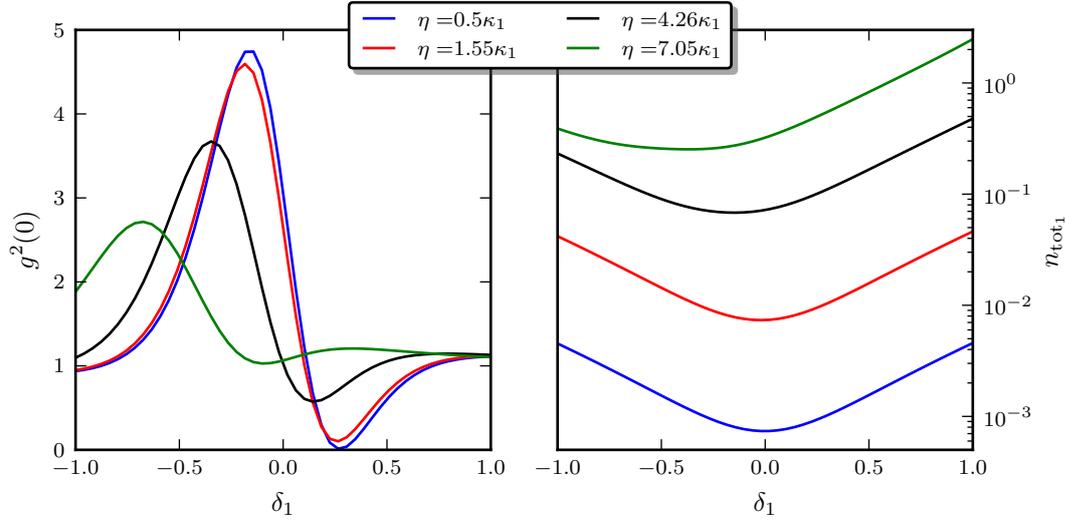


FIGURE I.11 – Influence de la force de pompe sur l'évolution de  $g^2(0)$ , à gauche, et sur le nombre moyen de photons dans la cavité 1, à droite, en fonction de  $\delta$ . On obtient ces courbes avec les paramètres  $\delta_2 - \delta_1 = 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $U = U_{\text{opt}} = -0.043\kappa_1$  et  $J = 3\kappa_1$ .

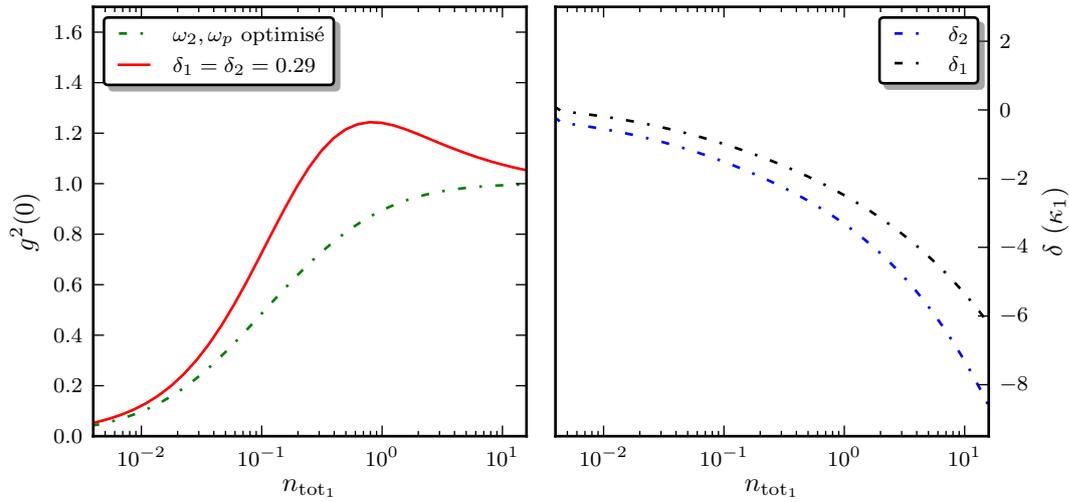


FIGURE I.12 – À gauche, comparaison du  $g^2(0)$  en fonction du nombre de photons dans la cavité 1. En rouge, sans optimisation à  $\delta_1 = \delta_2 = 0.29\kappa_1$ . En vert, avec optimisation des paramètres  $\omega_2$  et  $\omega_p$ . À droite, les paramètres  $\delta_2$  et  $\delta_1$  résultant de l'optimisation. Les autres paramètres sont  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $U = U_{\text{opt}} = -0.043\kappa_1$  et  $J = 3\kappa_1$

### Limite théorique à la valeur de $g^2(0)$ observable en fonction du nombre de photons

On peut se demander si le schéma de blocage anormal permet d'atteindre la limite minimum de  $g^2(0)$  pour un état gaussien (limite représentée sur la figure I.5, obtenue par minimisation de I.47). On représente sur la figure I.13 l'influence des différents paramètres du système sur le minimum de  $g^2(0)$ . On garde un système symétrique  $\kappa_1 = \kappa_2$  et on étudie à gauche l'influence de  $J$  et à droite l'influence de  $U$  en optimisant la valeur de  $g^2(0)$  avec les paramètres  $\omega_2$  et  $\omega_p$ . On constate que, quelles que soient les valeurs des paramètres du système, le comportement en fonction du nombre de photons reste très similaire. Un tel comportement universel est intéressant pour la réalisation expérimentale : quels que soient les détails précis de notre système, on devrait pouvoir observer ce comportement.

Le schéma de blocage anormal n'est pas idéal si le but est de minimiser  $g^2(0)$  en fonction du nombre de photons. En effet, il ne semble pas exister de paramètres qui atteignent la limite d'un état gaussien. Pour l'atteindre, il faut un système, où l'on peut régler le déplacement et le squeezing indépendamment. Un tel système a été montré expérimentalement en optique dans [38].

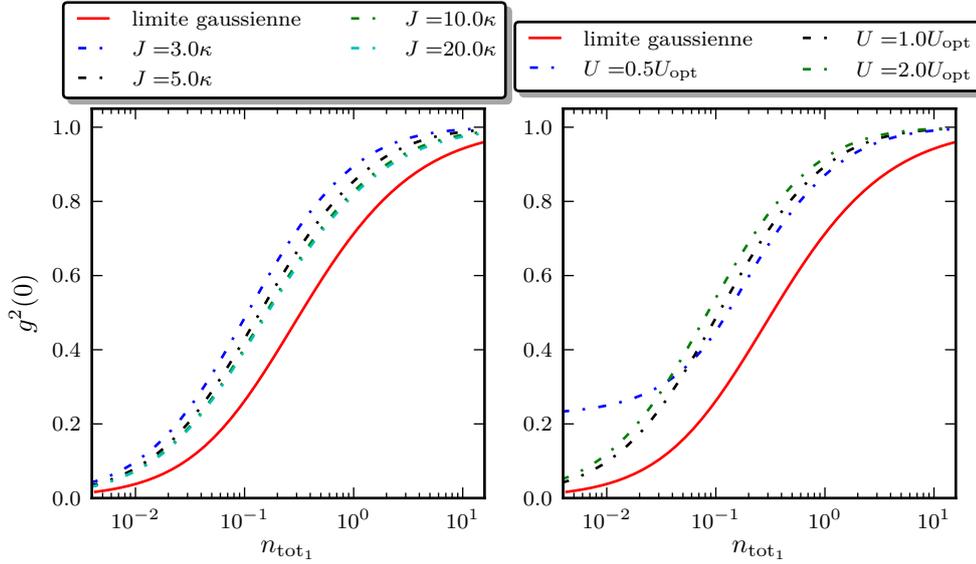


FIGURE I.13 – À gauche, comparaison du  $g^2(0)$  obtenu par optimisation des paramètres  $\omega_2$  et  $\omega_p$  pour différentes valeurs de  $J$  avec  $U = U_{\text{opt}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\kappa^3}{J^2}$ . On représente sur la même figure la limite gaussienne. Sur la droite, on maintient  $J = 3$  fixe et on fait varier  $U$  autour de  $U_{\text{opt}}$ . Les autres paramètres sont  $\omega_1 = 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$ .

### I.3.3 Influence de la température et du déphasage pur

#### Influence de la température

En étudiant les états gaussiens, nous avons déterminé un ordre de grandeur de la température à laquelle il faut travailler pour pouvoir observer  $g^2(0) = 0.1$ . L'influence de la température peut être prise en compte en modifiant l'équation maîtresse :

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \left[ \hat{H}, \hat{\rho} \right] + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \hbar \kappa_i (1 + n_{\text{th}}) \left( 2\hat{a}_i \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right) + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \hbar \kappa_i (n_{\text{th}}) \left( 2\hat{a}_i^\dagger \hat{\rho} \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \right) \quad (\text{I.68})$$

avec  $n_{\text{th}}$  défini par I.31. Sur la figure I.14 on représente l'évolution de  $g^2(0)$  en fonction de la température pour différents nombres de photons  $n_{\text{tot}1}$ . Plus le nombre de photons dans la cavité est petit, plus il faut travailler à basse température pour éviter l'effet thermique. Pour des températures élevées, on retrouve la valeur de 2 attendue pour un état thermique. Nous verrons que notre température de travail sera de l'ordre de 40 mK. Cette température non nulle fixe une limite sur la valeur minimale que l'on peut observer, de l'ordre de  $g^2(0) = 0.4$ .

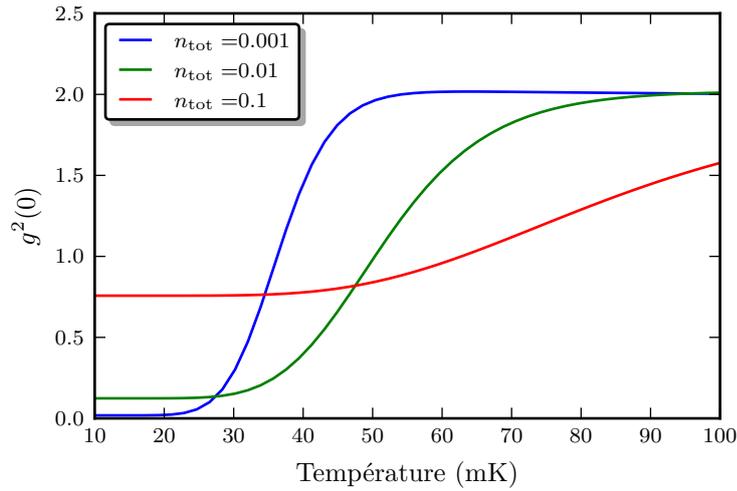


FIGURE I.14 – Influence de la température sur  $g^2(0)$  pour différentes valeurs de  $n_{\text{tot}1}$ . Les paramètres sont  $\delta_1 = \delta_2 = 0.29\kappa_1$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $U = -0.042\kappa_1$  et  $J = 3\kappa_1$

### Influence du déphasage pur

Une seconde source de décohérence à considérer est le déphasage pur. L'interprétation classique du déphasage pur est la variation de la fréquence de la cavité au cours du temps. Pour un système à deux niveaux, ou qubit, le déphasage pur est associé à un temps caractéristique de cohérence que l'on nomme  $T_2$ . Dans le domaine micro-onde, le déphasage pur représente une des principales limitations du temps de cohérence des qubits et a donc été particulièrement étudié. Parmi les principales sources de décohérence, on peut citer l'influence des fluctuations du nombre de photons dans le résonateur [61]. On trouve dans [62] une analyse du bruit introduit par les systèmes à deux niveaux dans l'élément non-linéaire lui-même, des systèmes à deux niveaux dans l'environnement proche du résonateur, ainsi que de la décohérence introduite par le bruit magnétique. La compréhension de ces différentes sources a permis de construire des qubits avec des  $T_2$  de  $92 \mu\text{s}$  [63].

Le déphasage pur rajoute un terme de saut dans l'équation maîtresse dont l'expression est :

$$\frac{i}{2}\Gamma (2\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (\text{I.69})$$

Où on a introduit  $\Gamma = 1/T_2$  le taux associé au déphasage pur. Prenons en compte le déphasage uniquement dans la cavité non-linéaire. On représente sur la figure I.15 l'influence du déphasage pur sur  $g^2(0)$  pour différents nombres de photons. L'effet du blocage disparaît progressivement avec l'augmentation du déphasage pur. L'effet du déphasage pur est d'augmenter la largeur spectrale de la cavité, mixant ainsi des photons ne présentant pas la même statistique, d'où la disparition progressive de l'effet de blocage. On retrouve ainsi les résultats présentés dans [64]. On représente le déphasage pur en unité de  $U$  pour le comparer à l'écart d'énergie typique qui donne l'interférence.

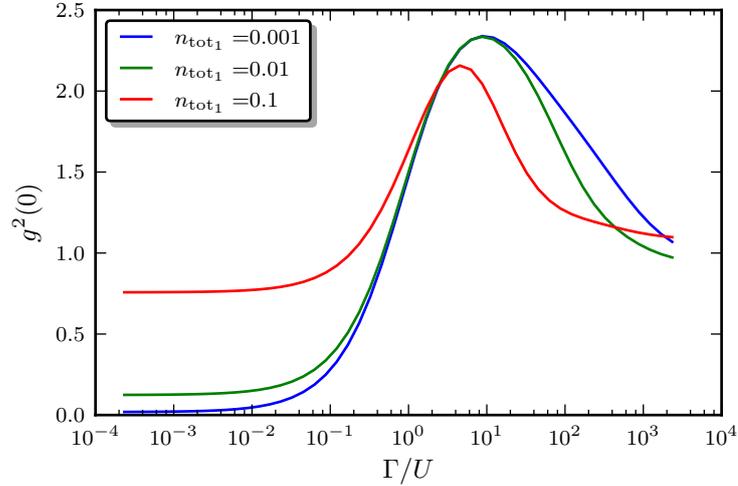


FIGURE I.15 – Influence du déphasage pur sur  $g^2(0)$ . Les paramètres sont  $\delta_1 = \delta_2 = 0.29\kappa_1$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $U = -0.043\kappa_1$  et  $J = 3\kappa_1$ .

## I.4 Temps de corrélation du blocage anormal

### I.4.1 Calcul dans l'approximation gaussienne

Dans ce qui précède, nous avons concentré notre étude sur le comportement de la fonction de corrélation du second ordre à temps nul. Pour étudier cette fonction à des temps non nuls, on peut utiliser l'approche gaussienne. En effet, étant donné que nous connaissons la transformée de Fourier des opérateurs de notre système I.51 nous pouvons déduire leurs valeurs moyennes à tout instant [33]. Pour rappel la fonction de corrélation à temps non nul s'écrit :

$$g^2(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(\tau)\hat{a}(0) \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(0) \rangle^2} \quad (\text{I.70})$$

En utilisant l'approche gaussienne, on peut simplifier la fonction  $g^2(\tau)$ .

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(\tau)\hat{a}(0) \rangle &= \langle (\hat{d}^\dagger(0) + \alpha^*)(\hat{d}^\dagger(\tau) + \alpha^*)(\hat{d}(\tau) + \alpha)(\hat{d}(0) + \alpha) \rangle \\ &= \langle \hat{d}^\dagger(0)\hat{d}^\dagger(\tau)\hat{d}(\tau)\hat{d}(0) \rangle + \alpha^2 \langle \hat{d}^\dagger(0)\hat{d}^\dagger(\tau) \rangle + (\alpha^*)^2 \langle \hat{d}(\tau)\hat{d}(0) \rangle \\ &\quad + |\alpha|^2 \left( \langle \hat{d}^\dagger(0)\hat{d}(0) \rangle + \langle \hat{d}^\dagger(0)\hat{d}(\tau) \rangle + \langle \hat{d}^\dagger(\tau)\hat{d}(0) \rangle + \langle \hat{d}^\dagger(\tau)\hat{d}(\tau) \rangle \right) + |\alpha|^4 \end{aligned} \quad (\text{I.71})$$

Par propriété des états gaussiens, les moyennes d'ordre impair sont nulles pour les opérateurs  $\hat{d}$ . De même, on a grâce au théorème de Wick :

$$\begin{aligned} \langle \hat{d}^\dagger(0)\hat{d}^\dagger(\tau)\hat{d}(\tau)\hat{d}(0) \rangle &= \langle \hat{d}^\dagger(0)\hat{d}^\dagger(\tau) \rangle \langle \hat{d}(\tau)\hat{d}(0) \rangle + \langle \hat{d}^\dagger(0)\hat{d}(\tau) \rangle \langle \hat{d}^\dagger(\tau)\hat{d}(0) \rangle \\ &\quad + \langle \hat{d}^\dagger(0)\hat{d}(0) \rangle \langle \hat{d}^\dagger(\tau)\hat{d}(\tau) \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.72})$$

Grâce à la symétrie par translation temporelle et par retournement du temps, on a :

$$\langle \hat{d}^\dagger(0)\hat{d}(\tau) \rangle = \langle \hat{d}^\dagger(-\tau)\hat{d}(0) \rangle = \langle \hat{d}^\dagger(\tau)\hat{d}(0) \rangle \quad (\text{I.73})$$

Et on définit par analogie aux paramètres gaussiens à temps nul les deux paramètres gaussiens à temps non nul :

$$\begin{aligned} n(\tau) &\equiv \langle \hat{d}^\dagger(\tau)\hat{d}(0) \rangle = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (\kappa_1\chi_{21}[\omega]\chi_{12}[-\omega] + \kappa_2\chi_{23}[\omega]\chi_{14}[-\omega]) e^{-i\omega\tau} \\ s(\tau) &\equiv \langle \hat{d}(\tau)\hat{d}(0) \rangle = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (\kappa_1\chi_{11}[\omega]\chi_{12}[-\omega] + \kappa_2\chi_{13}[\omega]\chi_{14}[-\omega]) e^{-i\omega\tau} \end{aligned} \quad (\text{I.74})$$

On remarque grâce à I.73 que  $n(\tau) = n^*(\tau)$ ,  $n(\tau)$  est donc réel et on a :

$$g^2(\tau) = 1 + \frac{2|\alpha|^2(n(\tau) + |s(\tau)| \cos(\theta(\tau) - 2\phi)) + |s(\tau)|^2 + n(\tau)^2}{(|\alpha|^2 + n(0))^2} \quad (\text{I.75})$$

### I.4.2 Calcul numérique par le théorème de régression quantique

Grâce à nos simulations numériques, on dispose d'un autre outil pour calculer l'évolution de la fonction de corrélation. Il faut pour cela utiliser le théorème de régression quantique [65, 66] qui relie  $\langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(0)\hat{a}(0) \rangle$  à  $\langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(\tau)\hat{a}(0) \rangle$  via l'opérateur de Lindblad. On représente sur la figure I.16 la fonction de corrélation  $g^2(\tau)$  calculée en utilisant ce théorème. On a représenté plusieurs désaccords de cavité. La figure intérieure permet de visualiser la valeur de  $g^2(0)$  pour les différents désaccords. En bleu et en rouge, on a pris les points extremum pour  $g^2(0)$ . On voit que les deux courbes oscillent en opposition de phase. La période d'oscillation est donnée par  $1/J$ . On représente en vert et en violet deux courbes ayant la même valeur de  $g^2(0)$ . On voit que même si ces deux courbes oscillent à  $1/J$ , la courbe verte reste strictement supérieure à 1. On représente en cyan une courbe prise à désaccord quelconque. De ces différentes courbes, on peut voir que la fréquence d'oscillation est donnée par  $J$  tant que le désaccord entre cavités est petit devant  $J$ . Le temps de décroissance de l'enveloppe des oscillations est donné par le temps de vie de la cavité.

Sur la figure I.17 on compare le résultat obtenu dans l'approximation gaussienne et celui obtenu grâce au théorème de régression quantique. Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés uniquement au cas d'une excitation continue. Le cas d'une excitation pulsée est plus complexe et est discuté dans [67] et [29].

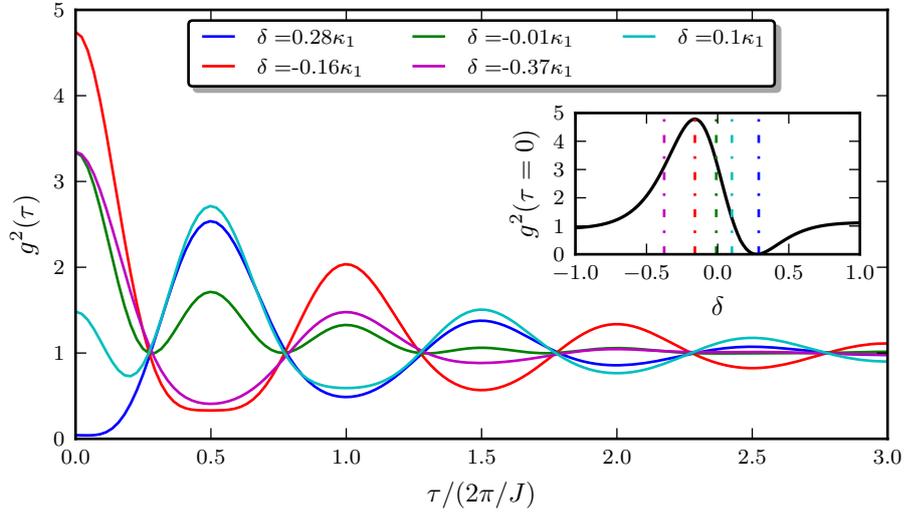


FIGURE I.16 –  $g^2(\tau)$  calculé avec le théorème de régression quantique pour plusieurs désaccords  $\delta$ . La figure intérieure représente  $g^2(0)$  en fonction de  $\delta$ . Les autres paramètres sont  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $U = -0.043\kappa_1$ ,  $J = 3\kappa_1$ , et  $\eta = 0.1\kappa_1$

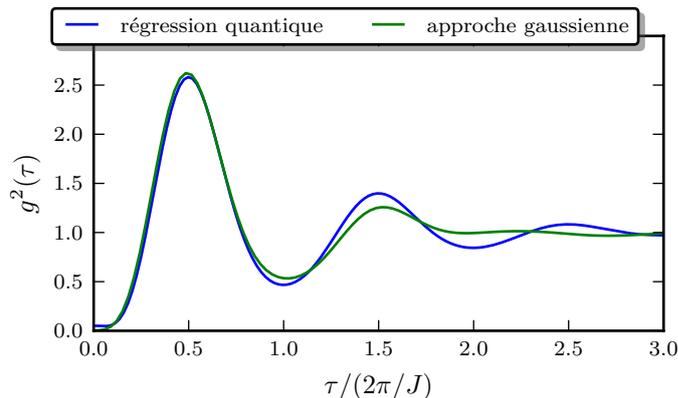


FIGURE I.17 – Comparaison des résultats pour  $g^2(\tau)$  dans l'approche gaussienne en vert et par une simulation numérique utilisant le théorème de régression quantique en bleu. Les paramètres sont  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0.29\kappa_1$ ,  $U = -0.043\kappa_1$ ,  $J = 3\kappa_1$ , et  $\eta = 0.1\kappa_1$

## I.5 Détermination des paramètres expérimentaux dans le régime micro-onde

### I.5.1 Contraintes expérimentales

Maintenant que nous avons une vue d'ensemble théorique du phénomène de blocage anormal, nous pouvons déterminer les différents paramètres qu'il faudra atteindre expérimentalement pour l'observer. Nous devons régler quatre paramètres : la fréquence des modes, la largeur des modes, le couplage entre modes et enfin la non-linéarité.

L'étude expérimentale que nous allons présenter est réalisée dans le domaine micro-onde. L'amplificateur cryogénique nous impose de travailler entre 4 et 8 GHz. Nous choisirons de centrer nos résonateurs vers 6 GHz.

La contrainte expérimentale suivante est due à la carte d'acquisition. Nous disposons d'une carte<sup>1</sup> ayant une fréquence d'échantillonnage de 200 méga sample par seconde. Un bin correspond donc au signal intégré sur 5 ns. Le temps d'oscillation est donné par  $2\pi/J$ . Pour observer correctement notre signal, une dizaine de points par période est suffisante. Ceci impose  $J \approx 2\pi \times 25$  MHz. On peut vérifier grâce aux simulations présentées précédemment que l'influence de la digitalisation temporelle pour de tels paramètres est négligeable (voir annexe B).

Une fois  $J$  fixé, on peut déterminer  $\kappa$ , la largeur des cavités. D'un point de vue expérimental, on a intérêt à maximiser le flux de photons en sortie des cavités pour faciliter la mesure de la statistique de ces derniers. Si  $\kappa$  est supérieur à  $J$ , on ne peut plus résoudre spectralement les deux pics de transmission et le phénomène de blocage anormal disparaît. Pour  $\kappa = 2\pi \times 8$  MHz, on a  $J/\kappa \approx 3$ , régime où le blocage anormal est observable comme nous l'avons montré au cours de ce chapitre.

1. Carte X5-400M intégrée à un ordinateur eInstrument-PC fabriqué par Innovative Integration

Le dernier paramètre à fixer est la non-linéarité. Nous avons vu que les paramètres  $\kappa$ ,  $J$  et  $U$  devaient respecter la relation I.17. Pour  $\kappa = 2\pi \times 8$  MHz et  $J = 2\pi \times 25$  MHz on doit obtenir  $U = 2\pi \times 0.32$  MHz.

### I.5.2 Influence des désaccords cavités-pompe

Notre système expérimental nous permet de contrôler la fréquence de pompe  $\omega_p$  ainsi que la fréquence de la cavité non-linéaire  $\omega_2$ . Les largeurs  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ , le couplage  $J$  ainsi que la non-linéarité pourront être choisis avant de réaliser l'expérience, mais ne seront pas ajustables in situ. Si on pompe faiblement le système, on peut utiliser l'équation analytique donnant la valeur de  $g^2(0)$  à faible nombre de photons I.15. On représente sur la figure I.18  $g^2(0)$  en haut à gauche pour des cavités de mêmes largeurs  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ . On met en regard en haut à droite  $(n_{\text{tot}_1}/\eta)^2$ , dénominateur de I.15. Ce terme est proportionnel au nombre de photons dans la cavité. On s'aperçoit que le phénomène de blocage se produit pour des fréquences où le couplage entre les deux cavités produit une interférence destructive dans la cavité 1, c'est à dire là où la population est la plus faible. En bas de la figure I.18, on représente des coupes de  $g^2(0)$  en fonction de  $\omega_p$  pour différentes valeurs de  $\omega_2$ . On voit que pour des cavités de même largeur ( $\kappa_1 = \kappa_2$ ), la valeur optimum pour la fréquence de la seconde cavité est  $\omega_2 = \omega_1$ . Autour de cet optimum le phénomène de blocage anormal devient de moins en moins visible. L'échelle de désaccord pour laquelle le blocage anormal est visible est aussi donnée par  $\kappa$ . Cette courbe nous montre que pour observer le phénomène de blocage anormal, le mieux est d'avoir  $\omega_1 = \omega_2$ , la tolérance de désaccord entre les cavités est donnée par  $\kappa$ .

### I.5.3 Tolérance acceptable sur les paramètres $\kappa_i$ , $J$ et $U$

Nous venons de quantifier la tolérance sur le désaccord entre les cavités. De même, on peut se demander quelle est la tolérance que l'on peut avoir sur le réglage de la non-linéarité et des largeurs de cavité. L'échelle d'énergie est donnée par  $\kappa_1$  que l'on fixe à 1. Comme nous l'avons montré, le paramètre  $J$  a peu d'influence sur le blocage anormal. Étudions l'influence de  $\kappa_2$  et  $U$  sur  $g^2(0)$  (donnée par I.15) autour de leur valeur optimale, qui est respectivement,  $\kappa_2 \approx \kappa_1$  et  $U \approx U_{\text{opt}}$ . Notre système expérimental nous permet de faire varier  $\omega_2$  et  $\omega_p$  nous pouvons donc utiliser cet avantage. Sur la figure I.19 on représente les résultats obtenus en imposant différentes valeurs pour  $\kappa_2$  et  $U$  tout en gardant  $J$  et  $\kappa_1$  fixe. On recherche pour chaque paramètres  $\kappa_2$  et  $U$  la valeur minimum pour  $g^2(0)$  en optimisant  $\omega_2$  et  $\omega_p$ . On s'aperçoit qu'il existe une large zone où l'on peut rendre  $g^2(0)$  très faible. Cette robustesse vis-à-vis des paramètres des cavités est due au fait que l'on peut ajuster l'interférence avec les paramètres  $\omega_p$  et  $\omega_2$ . En haut à droite, on représente  $(n_{\text{tot}_1}/\eta)^2$  obtenu. En bas, on représente les valeurs de  $\omega_2$  et  $\omega_p$  obtenues pour minimiser la valeur de  $g^2(0)$ . Nous venons donc de montrer que l'effet de blocage anormal est robuste par rapport à une asymétrie des largeurs des cavités et par rapport à la non-linéarité tant que l'on dispose des deux paramètres ajustables  $\omega_2$  et  $\omega_p$ .

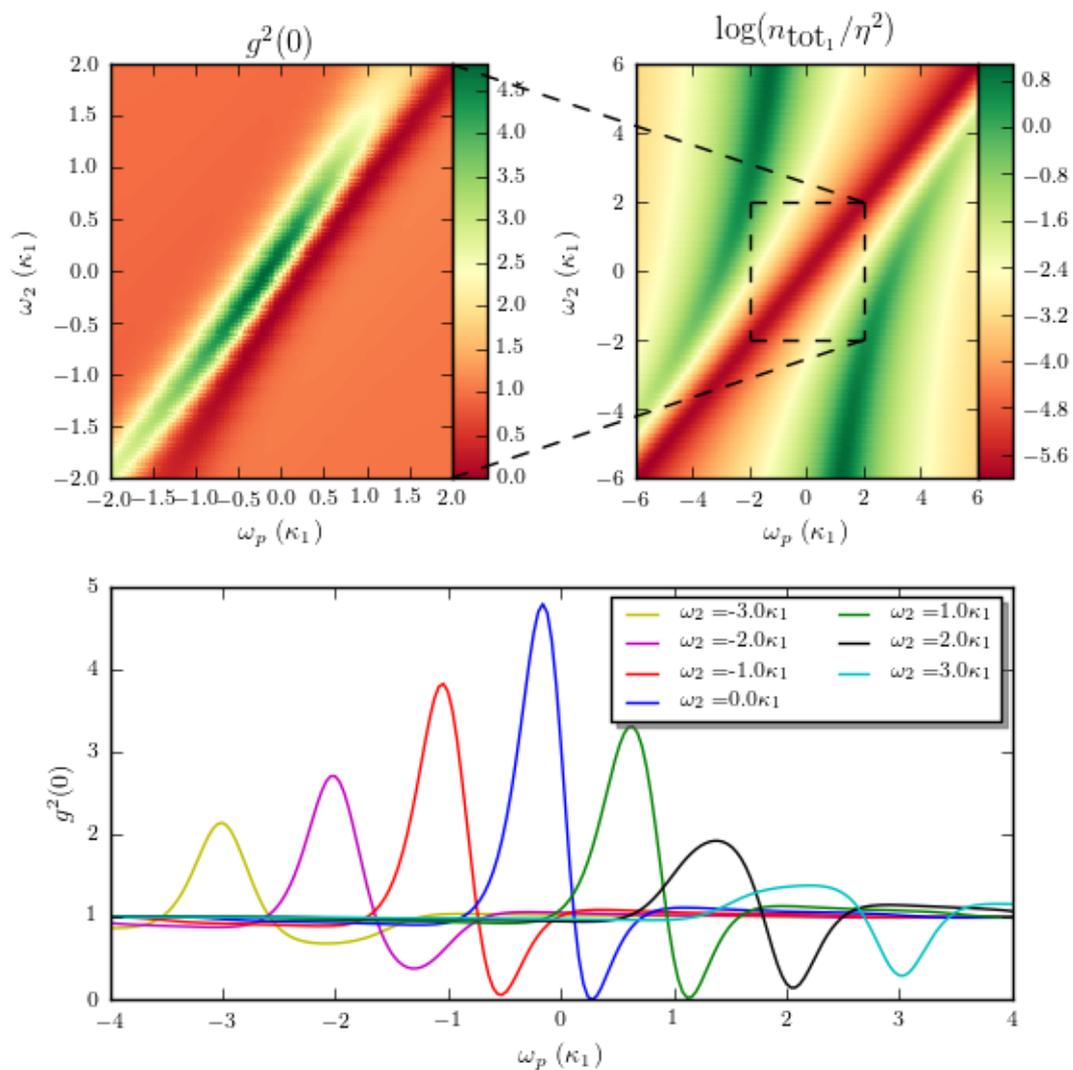


FIGURE I.18 – En haut à gauche,  $g^2(0)$  (obtenu avec l'équation I.15) pour des cavités symétriques en fonction des deux paramètres ajustables  $\omega_2$  et  $\omega_p$ . En bas, une coupe de cette carte pour différentes valeurs de  $\omega_2$ . En haut à droite  $(n_{\text{tot}_1}/\eta)^2$ . Les autres paramètres sont :  $\kappa_1 = \kappa_2$  et  $\omega_1 = 0$ ,  $U = U_{\text{opt}}$  et  $J = 3\kappa_1$ .

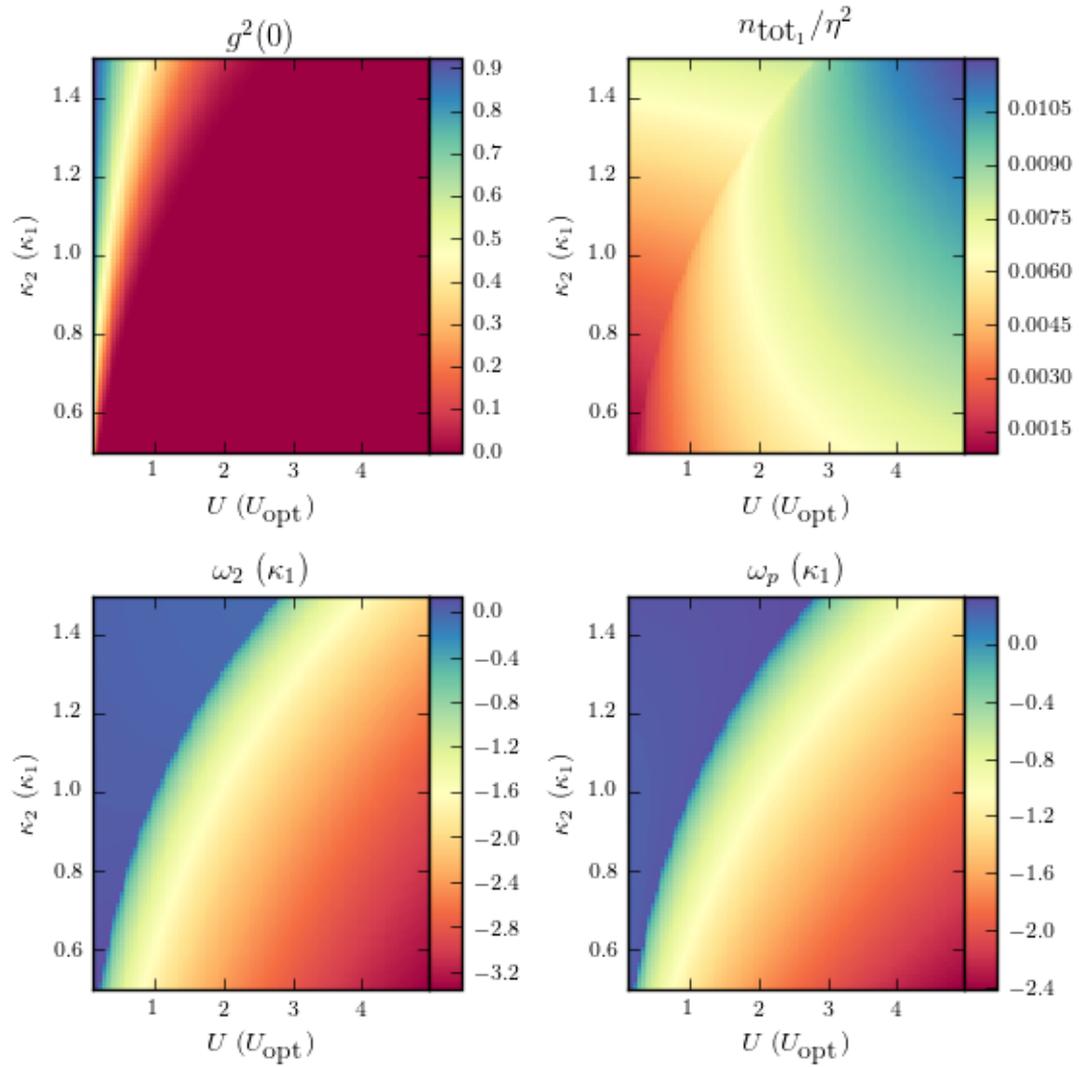


FIGURE I.19 – Optimisation de  $g^2(0)$  pour différents paramètres de cavités  $\kappa_2$  et  $U$ , les autres paramètres sont  $J = 3\kappa_1$ ,  $\kappa_1 = 1$  et  $\omega_1 = 0$ . En haut à gauche, on représente le  $g^2(0)$  minimum que l'on peut obtenir par optimisation de  $\omega_p$  et  $\omega_2$ . En bas à gauche,  $\omega_p$ , et à droite,  $\omega_2$  issu de l'optimisation. En haut à droite,  $n_{\text{tot}_1}/\eta^2$  pour les paramètres ainsi obtenus.

## Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes approches théoriques qui permettent de comprendre et d'étudier le phénomène de blocage anormal. Grâce à l'approche numérique, nous avons montré que les deux paramètres clés sont d'une part le réglage des désaccords entre cavités et pompe et, d'autre part, le nombre de photons dans la cavité. Ce dernier donne la limite inférieure de  $g^2(0)$  que l'on peut obtenir. Nous avons montré que l'approximation gaussienne était valide pour une large gamme de paramètres. Cette approximation nous sera utile d'un point de vue expérimental comme détaillé au chapitre V. L'étude des contraintes expérimentales nous a permis de fixer les paramètres que nous souhaitons obtenir pour nos cavités :  $\kappa_1 \approx \kappa_2 \approx 8$  MHz et  $J \approx 2\pi \times 25$  MHz correspondant à  $U_{\text{opt}} = 0.32$  MHz. Enfin, nous avons montré que le phénomène de blocage est robuste vis-à-vis d'un ajustement imparfait de ces paramètres.



## CHAPITRE II

---

### Résonateurs micro-onde et jonctions Josephson : fabrication et mesure à basse température

---

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux deux cryostats utilisés pendant cette thèse. Le premier permet d'atteindre une température de 1.5 K. Le second est un cryostat à dilution qui sera utilisé pour la mesure du blocage anormal. Après avoir décrit ce cryostat, nous nous intéresserons à l'amplitude du rayonnement thermique présent dans les câbles qui connectent l'échantillon. Dans une seconde partie, nous nous intéresserons à la fabrication et à la caractérisation des résonateurs supraconducteurs. Enfin, nous nous intéresserons aux jonctions Josephson qui nous permettront de réaliser la non-linéarité. Après avoir présenté les techniques de fabrication mises en oeuvre, nous caractériserons les propriétés des jonctions, tout d'abord à température ambiante puis à 10 mK.

**Sommaire**

---

<b>II.1 Mesures micro-onde à basse température . . . . .</b>	<b>51</b>
II.1.1 Mesure à 1.5 K dans un bain d'Hélium pompé . . . . .	51
II.1.2 Mesure à 10 mK dans un cryostat à dilution . . . . .	52
II.1.3 Calcul du rayonnement thermique sur l'échantillon . . . . .	52
<b>II.2 Résonateurs supraconducteurs . . . . .</b>	<b>55</b>
II.2.1 Fabrication de résonateurs supraconducteurs . . . . .	55
II.2.2 Montage et préparation des échantillons . . . . .	57
II.2.3 Étude du couplage d'un résonateur . . . . .	58
<b>II.3 Jonctions Josephson . . . . .</b>	<b>61</b>
II.3.1 Technique de fabrication . . . . .	61
II.3.2 Mesure à température ambiante de la résistance des jonctions . . . . .	63
II.3.3 Caractérisation DC d'un SQUID à basse température . . . . .	66

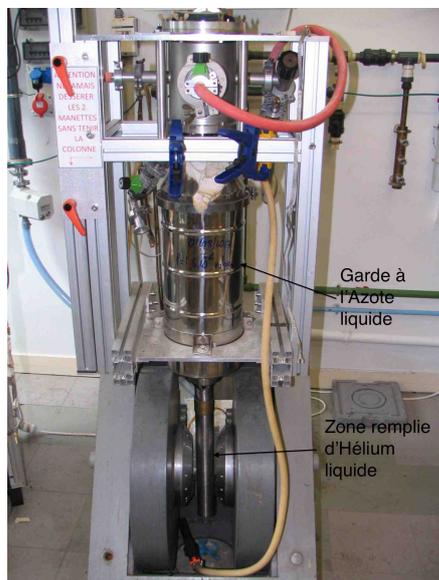
---

## II.1 Mesures micro-onde à basse température

Dans cette partie, nous allons brièvement décrire les deux cryostats utilisés pour les mesures présentées dans cette thèse. Le premier permet de refroidir un échantillon à une température de 1.5 K et nous a permis de tester des résonateurs fabriqués en niobium. Le second est un cryostat à dilution avec une température de base de 10 mK que nous allons utiliser pour la mesure du blocage anormal présentée au chapitre V. Nous décrirons en particulier le câblage micro-onde utilisé pour thermaliser le rayonnement électromagnétique vu par l'échantillon à une température de 40 mK.

### II.1.1 Mesure à 1.5 K dans un bain d'Hélium pompé

Ce cryostat est composé d'une enceinte séparée de l'environnement par un vide d'isolement et une garde remplie d'azote liquide. Le fond du cryostat est rempli avec de l'Hélium liquide. En pompant sur le bain d'Hélium, on amène celui-ci à une température comprise entre 1.2 K et 1.5 K. Sur la figure II.1 on montre deux photos de ce cryostat, à gauche une vue d'ensemble et à droite une image de la canne de mesure. Ce dispositif permet de refroidir rapidement (environ 2 heures) un échantillon. La figure II.2 présente le schéma de principe du câblage d'un échantillon dans ce cryostat.



(a) Photo du cryostat à bain d'Hélium pompé



(b) Canne de mesure avec les amenées RF

FIGURE II.1 – Cryostat à bain d'hélium pompé

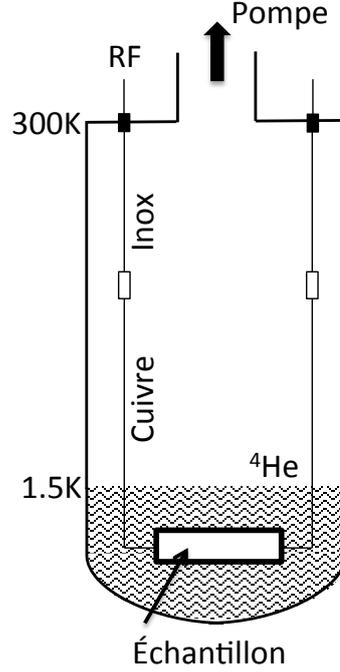


FIGURE II.2 – Schéma du cryostat à bain d'Hélium pompé. L'échantillon plonge directement dans l'Hélium. Il est connecté à l'extérieur via des câbles SMA inox et cuivre. Seules 2 lignes sont représentées sur le schéma pour plus de clarté, mais nous disposons de 4 lignes. Pour les mesures présentées ici, les lignes ne sont pas atténuées ce qui permet de mesurer les coefficients de transmission et de réflexion pour chacun des ports.

### II.1.2 Mesure à 10 mK dans un cryostat à dilution

Le cryostat utilisé pendant cette thèse est un cryostat à dilution fabriqué par Cryoconcept, modèle Hexadry 400. La figure II.3 présente le schéma du câblage micro-onde et une photo du cryostat. De 300 K à 4 K nous utilisons des câbles inox, puis, de 4 K à 10 mK des câbles supraconducteurs niobium titane (NbTi). Ces câbles sont thermalisés sur les étages à 1 K et 100 mK par des mors en cuivre. La température de base mesurée est de 10 mK, ce qui montre que la puissance thermique ramenée par les câbles est inférieure à  $2 \mu\text{W}$ .

### II.1.3 Calcul du rayonnement thermique sur l'échantillon

Nous allons maintenant estimer la température du rayonnement dans chacun des câbles connectés à l'échantillon. Comme la largeur spectrale de nos cavités est étroite, seule la densité de rayonnement  $n_{\text{th}}$  autour de la fréquence de résonance  $f_0$  ( $\approx 6$  GHz) doit être calculée. La densité de rayonnement à l'équilibre à une température  $T$  est donnée par une distribution de Bose-Einstein :

$$n_{\text{BE}}(f, T) = \frac{1}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \quad (\text{II.1})$$

Pour obtenir  $n_{\text{th}}$ , il faut calculer l'évolution de la densité au passage de chaque atténuateur. On note  $n_{\text{th},i}$  la densité de rayonnement autour de la fréquence  $f_0$  dans le câble  $i$ . Au passage d'un

atténuateur ancré à une température  $T$  la densité de rayonnement incident est atténuée d'un facteur  $D$  et augmentée de la densité du rayonnement d'un corps noir à température  $T$  pondérée d'un facteur  $1 - D$ , où  $D$  est le facteur d'atténuation en puissance de l'atténuateur.

$$n_{\text{th},i+1} = Dn_{\text{th},i} + (1 - D)n_{\text{BE}}(\nu, T) \quad (\text{II.2})$$

Pour chaque câble on peut définir une température effective équivalente  $T_i$  telle que  $n_{\text{BE}}(f_0, T_i) = n_{\text{th},i}$ . Le tableau ci-dessous indique les populations et les températures effectives pour les différents câbles de la ligne de pompe, où chaque câble est repéré par la température de l'étage supérieur auquel il est fixé.

T (K)	300	50	4	0.01
Atténuation (dB)	x	20	20	30
$n_{\text{th},i}$	1041	182	15	0.015
$T_i$ (K)	300	52.5	4.5	0.068

Pour la ligne d'observation, l'atténuation est obtenue en utilisant deux circulateurs fixés sur l'étage à 10 mK. L'isolation donnée par le fabricant est de  $-20$  dB. En considérant que l'amplificateur se comporte comme un corps noir de température 2 K, qui est sa température de bruit, nous obtenons une densité de  $n_{\text{th}} = 6.46 \times 10^{-4}$  correspondant à une température effective de 39 mK.

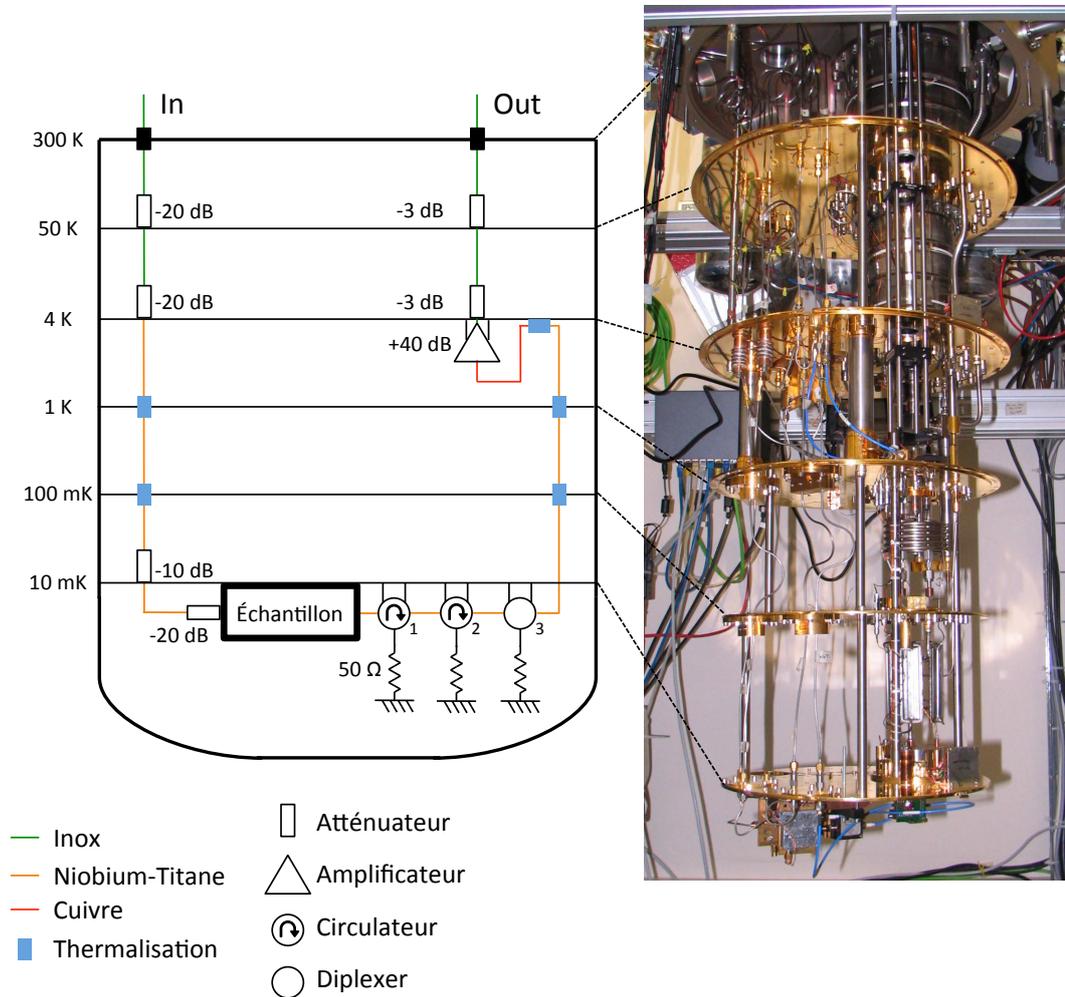


FIGURE II.3 – Schéma de câblage micro-onde et photo du cryostat a dilution. À gauche, la ligne de pompe est constituée de câbles inox puis supraconducteur (NbTi). La température de rayonnement sur l'échantillon est de 68 mK pour cette ligne. À droite, la ligne d'observation est constituée d'un câble NbTi reliant l'étage à 10 mK à l'entrée d'un amplificateur cryogénique. L'échantillon est protégé du rayonnement de l'amplificateur par 2 circulateurs et un diplexer. Les circulateurs présentent une bande de fonctionnement de 4 à 8 GHz pour une isolation de 20 dB. Le diplexer permet d'atténuer le rayonnement de fréquence inférieur à 1 GHz. La température de rayonnement est de 39 mK.

## II.2 Résonateurs supraconducteurs

Deux approches ont été développées en circuit-QED pour réaliser des résonateurs supraconducteurs, soit en réalisant une ligne coplanaire de longueurs  $\lambda/4$  ou  $\lambda/2$  [68], soit en associant une inductance formée d'un méandre et une capacité interdigitée pour obtenir un résonateur LC, aussi appelé résonateur « lumped element » [69]. Nous avons choisi cette seconde approche, la figure II.4 montre une photo au microscope optique d'un tel résonateur. Cette technique nous permet d'obtenir un circuit LC résonant à 6 GHz ayant une surface d'environ  $500 \times 500 \mu\text{m}^2$ . L'impédance caractéristique de ces résonateurs est de l'ordre de  $50 \Omega$  avec une inductance de l'ordre du nH et une capacité de quelques centaines de fF.

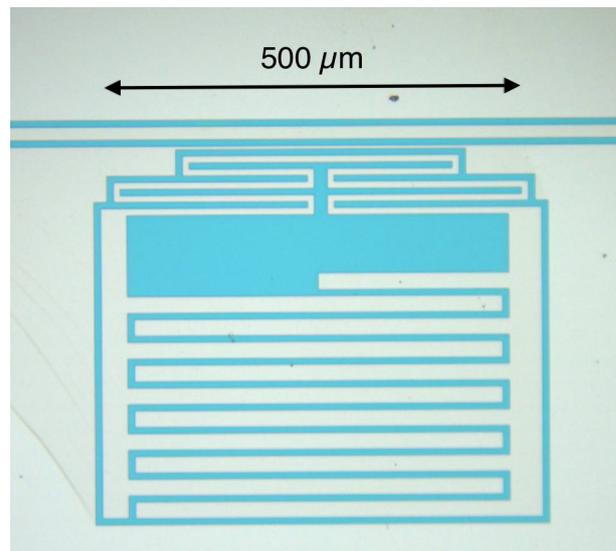


FIGURE II.4 – Image au microscope d'un résonateur LC résonant à environ 6 GHz. La partie basse constituée de doigts interdigités réalise la capacité. L'écart entre doigts est de  $10 \mu\text{m}$ , la largeur des doigts est de  $20 \mu\text{m}$ . Le méandre qui relie les deux armatures de la capacité constitue l'inductance. La largeur du fil est de  $10 \mu\text{m}$ . Le résonateur est couplé à un guide coplanaire visible en haut de l'échantillon.

### II.2.1 Fabrication de résonateurs supraconducteurs

Les résonateurs comme celui montré sur la figure II.4 sont réalisés en niobium sur un substrat de silicium oxydé par lithographie électronique comme décrit sur la figure II.5. Certains échantillons ont été obtenus par lift-off et d'autres par gravure. Dans les deux cas, le niobium est déposé par pulvérisation et a une épaisseur d'environ 200 nm. La figure II.6 montre l'état de surface et la forme des flancs obtenus pour chacune des deux techniques. La dernière étape de fabrication est la métallisation de la face arrière de l'échantillon avec une couche de Ti/Au d'épaisseur 5/50 nm afin de définir un plan de masse.

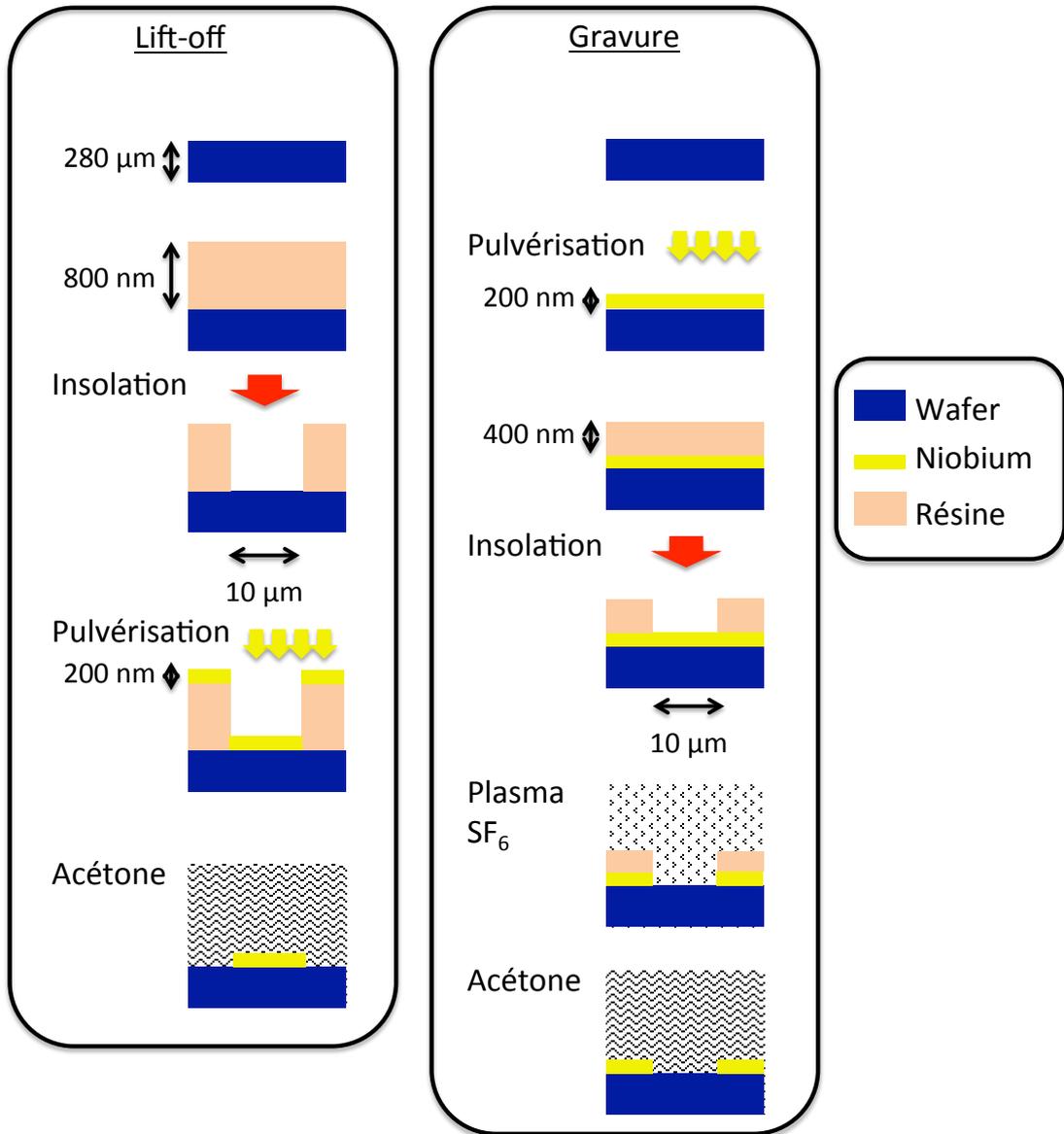


FIGURE II.5 – Schéma des différentes étapes de fabrication des résonateurs. À gauche, en lift-off. À droite, en gravure. **Lift-off** On dépose sur le wafer  $800\ \text{nm}$  de PMMA-A6. Le motif est défini par lithographie électronique et révélé dans une solution de MIBK. Le niobium est déposé dans un bâti de pulvérisation assisté par un plasma argon puis lifté à l'acétone. **Gravure** Le niobium est déposé par pulvérisation sur le wafer avant enrésinement. Après lithographie, on grave la partie de niobium laissée libre par l'insolation et la révélation. La gravure est faite par RIE (Reactive Ion Etching) dans un plasma de  $\text{SF}_6$ . Le temps de gravure est typiquement de l'ordre de  $3\ \text{min}$ . La fin de gravure est repérée par suivi laser. Après gravure, la résine résiduelle est retirée dans un bain d'acétone et éventuellement par un délaquage dans un plasma oxygène.

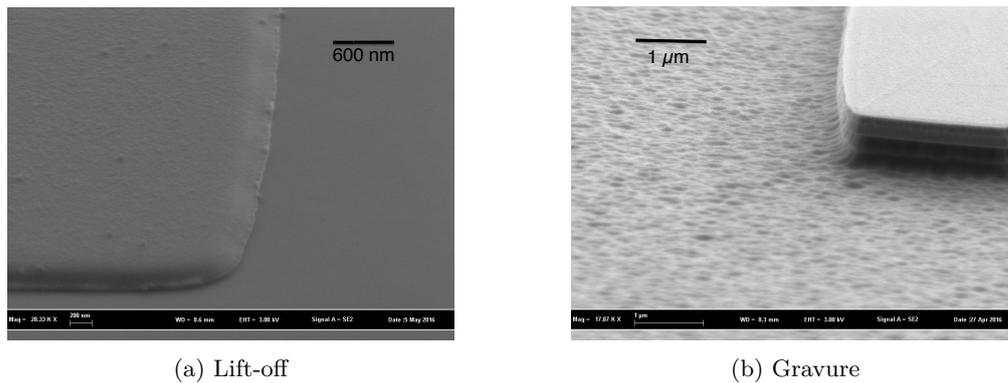


FIGURE II.6 – Flancs et état de surface des échantillons obtenus par lift-off et gravure.

## II.2.2 Montage et préparation des échantillons

L'échantillon est collé avec de la laque à l'argent dans un boîtier en cuivre au centre d'un circuit en TMM10 qui connecte, par des guides coplanaires, les ports de l'échantillon à des prises SMA. Afin d'assurer une bonne continuité entre les différents plans de masse définis pendant la lithographie, nous les relierons par des cloches microsoudées disposées à intervalles réguliers II.7. La figure II.8 montre l'influence de ces cloches sur la transmission au voisinage de la résonance d'une cavité. L'ajout des cloches permet d'obtenir un pic de transmission ayant une forme lorentzienne beaucoup mieux définie qu'en leur absence.

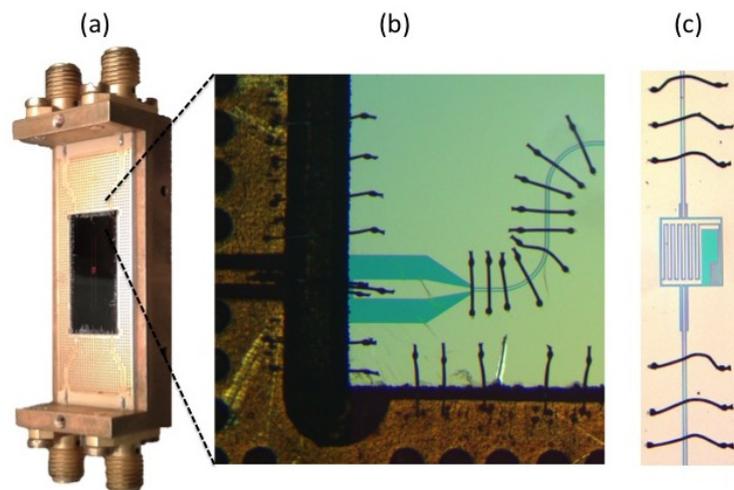


FIGURE II.7 – (a) Photo du porte-échantillon : des prises SMA sont fixées sur le corps en cuivre du porte échantillon. L'âme du connecteur est soudée au conducteur central d'un guide coplanaire réalisé sur un substrat en TMM10. Ces guides sont ensuite microsoudés à ceux lithographiés sur l'échantillon (b). (c) Cloches microsoudées reliant les deux plans de masse à gauche et à droite de l'image.

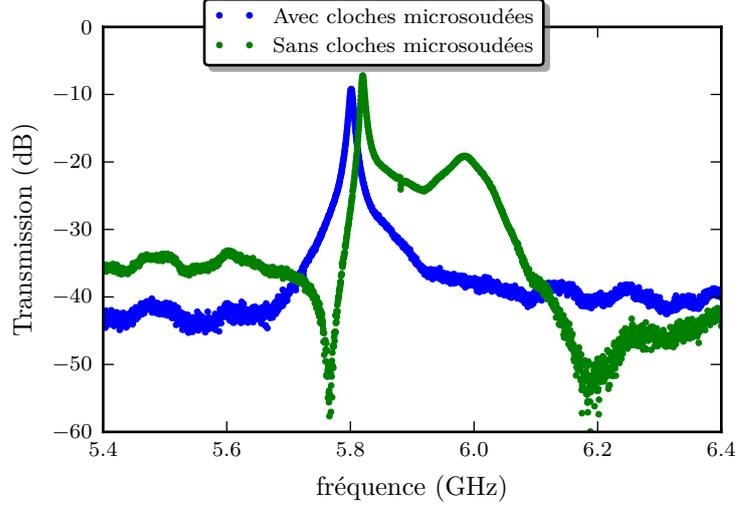


FIGURE II.8 – Mesure de transmission d’un même résonateur lorsque les plans de masse sont reliés ou non entre eux par des cloches microsoudées.

### II.2.3 Étude du couplage d’un résonateur

Un résonateur couplé à son environnement a une fonction de réponse en fréquence qui est une lorentzienne dont la largeur à mi-hauteur est  $\kappa_t$ . Celle-ci peut se décomposer comme :

$$\kappa_t = \kappa_c + \kappa_i \quad (\text{II.3})$$

où  $\kappa_c$  est le couplage aux lignes de mesures, et  $\kappa_i$  est le couplage à l’environnement. On définit habituellement le facteur de qualité de couplage  $Q_c = \omega/\kappa_c$  et le facteur de qualité intrinsèque  $Q_i = \omega/\kappa_i$ . Nous présentons ici deux mesures de facteurs de qualités pour deux couplages  $\kappa_c$  différents, obtenus en variant la longueur  $d$  de la capacité de couplage. Les échantillons sont présentés sur la figure II.9. Nous avons mesuré à 1.5 K les coefficients de transmission et de réflexion pour chacun des deux ports de chaque échantillon. Ces mesures sont présentées pour l’échantillon  $d = 260 \mu\text{m}$  sur la figure II.10. Sur la même figure, nous montrons pour comparaison les résultats de la simulation de l’échantillon par le logiciel Sonnet. Les courbes expérimentales et simulées sont ajustées par des lorentziennes :

$$\begin{aligned} |S_{11}(\omega)|^2 &= 1 - \frac{4\kappa_1(\kappa_2 + \kappa_i)}{(\kappa_i + \kappa_1 + \kappa_2)^2 + 4(\omega - \omega_0)^2} \\ |S_{22}(\omega)|^2 &= 1 - \frac{4\kappa_2(\kappa_1 + \kappa_i)}{(\kappa_i + \kappa_1 + \kappa_2)^2 + 4(\omega - \omega_0)^2} \\ |S_{12}(\omega)|^2 &= \frac{4\kappa_1\kappa_2}{(\kappa_i + \kappa_1 + \kappa_2)^2 + 4(\omega - \omega_0)^2} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

où  $\omega_0$  est la fréquence de résonance,  $\kappa_{1,2}$  le couplage à chaque ligne. Le tableau ci-dessous présente les valeurs obtenues pour les deux échantillons et les compare à la simulation. Pour l’échantillon  $d = 260 \mu\text{m}$ , l’écart entre les couplages mesurés et simulés est inférieur à 20% et le facteur de qualité intrinsèque est de 6000. Pour l’échantillon  $d = 180 \mu\text{m}$  l’accord est moins bon. La position

de la résonance est reproduite à mieux que 3%. Pour la réalisation de l'échantillon final nous utiliserons la même géométrie de couplage entre les résonateurs et les lignes avec  $d = 135 \mu\text{m}$  pour un couplage et  $d = 445 \mu\text{m}$  pour l'autre.

Grandeurs	Résonateur $d = 180 \mu\text{m}$		Résonateur $d = 260 \mu\text{m}$	
	Simulation	Expérience	Simulation	Expérience
$f_0$	6.284 GHz	6.106 GHz	6.229 GHz	6.09 GHz
$\kappa_1$	1.74 MHz	2.54 MHz	3.39 MHz	4.11 MHz
$\kappa_2$	1.25 MHz	0.88 MHz	2.49 MHz	2.43 MHz
$\kappa_i$	0	0.75 MHz	0	1.03 MHz

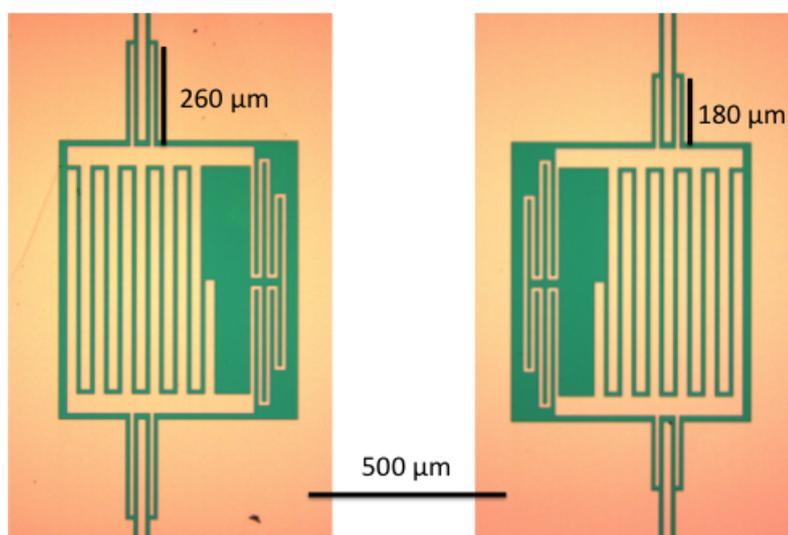


FIGURE II.9 – Image optique de deux résonateurs couplés différemment à deux lignes coplanaires. Les deux résonateurs sont identifiés par la longueur  $d$  de la capacité de couplage ( $d = 260$  ou  $180 \mu\text{m}$ ).

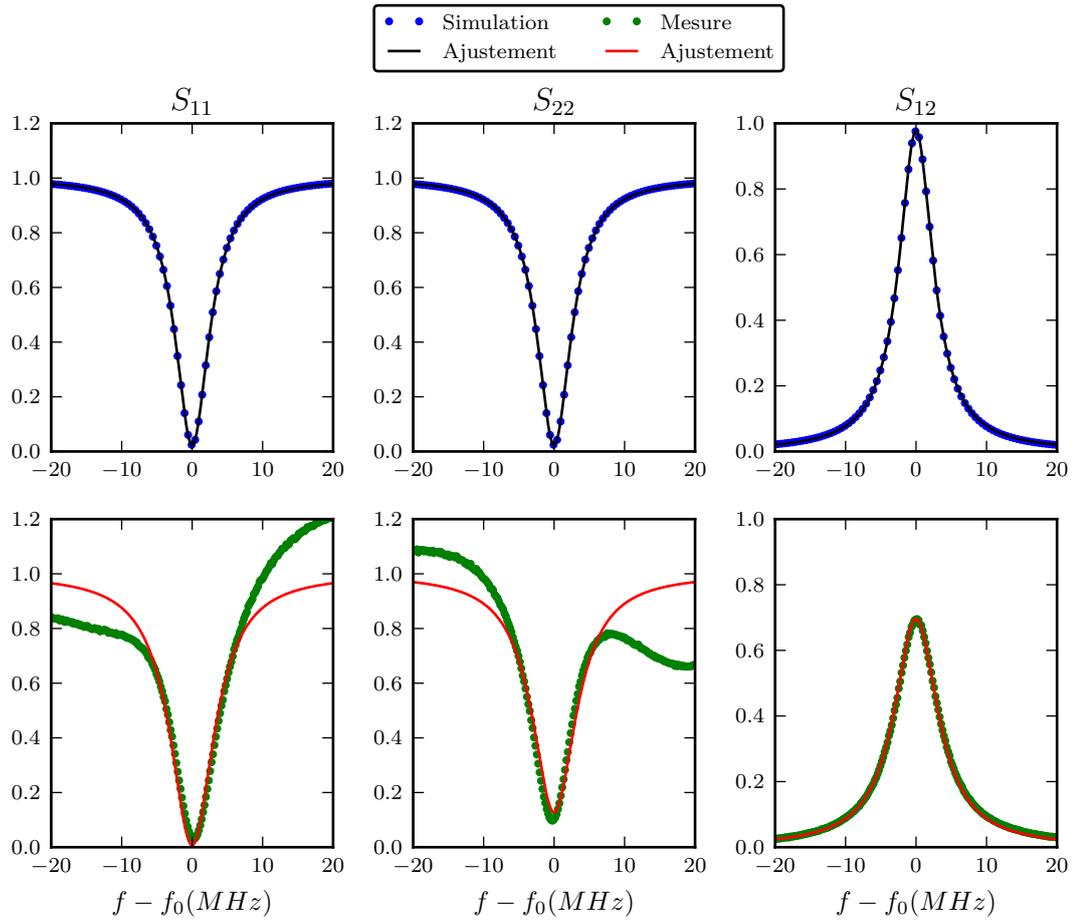


FIGURE II.10 – Présentation des résultats relatifs au résonateur caractérisé par  $d = 260 \mu\text{m}$ . En haut, on montre les simulations et en bas, la mesure expérimentale.

## II.3 Jonctions Josephson

Pour introduire une non-linéarité de type Kerr dans notre résonateur, nous insérons une jonction Josephson ou un SQUID comme précédemment réalisé dans [70, 71] et comme expliqué dans la partie III.1.1. Cette approche est intermédiaire entre celle utilisée pour obtenir des qubits supraconducteurs qui ont une non-linéarité bien plus importante [72] et celle développée pour la réalisation d'amplificateur paramétrique où la non-linéarité est plus faible [73]. Nous allons décrire ici la technique de fabrication de nos jonctions et leurs caractéristiques.

### II.3.1 Technique de fabrication

Nos jonctions sont réalisées en aluminium en utilisant une double évaporation sous angle [74], comme montré sur la figure II.12. La figure II.11 montre une image au microscope électronique d'un pont suspendu utilisé pour fabriquer une jonction et l'image d'une jonction. Typiquement, on peut réaliser des surfaces de jonctions comprises entre  $0.2 \mu\text{m}^2$  et  $1 \mu\text{m}^2$ . Pour raccorder la jonction en aluminium au résonateur en niobium, on réalise une dernière étape de lithographie, comme présenté sur la figure II.13. Durant cette étape, on dépose par lift-off un rectangle d'aluminium ou de niobium, à cheval sur le résonateur et la jonction. Avant d'évaporer le métal, l'échantillon est décapé à l'aide d'un flux d'ions argon pour éliminer la couche d'oxyde superficielle et obtenir un contact DC entre la jonction et le résonateur [75].

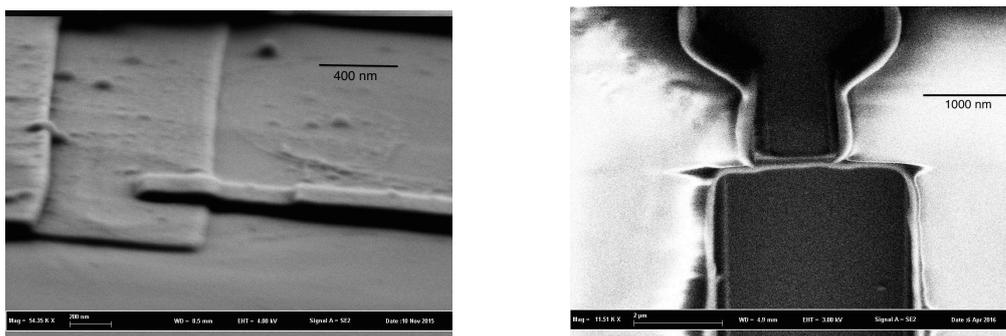


FIGURE II.11 – À gauche, image au microscope électronique d'une jonction typique vue par la tranche. On distingue les marches dues aux deux évaporations sous angle. À droite, image au microscope électronique d'un pont suspendu en PMMA de largeur  $1 \mu\text{m}$ .

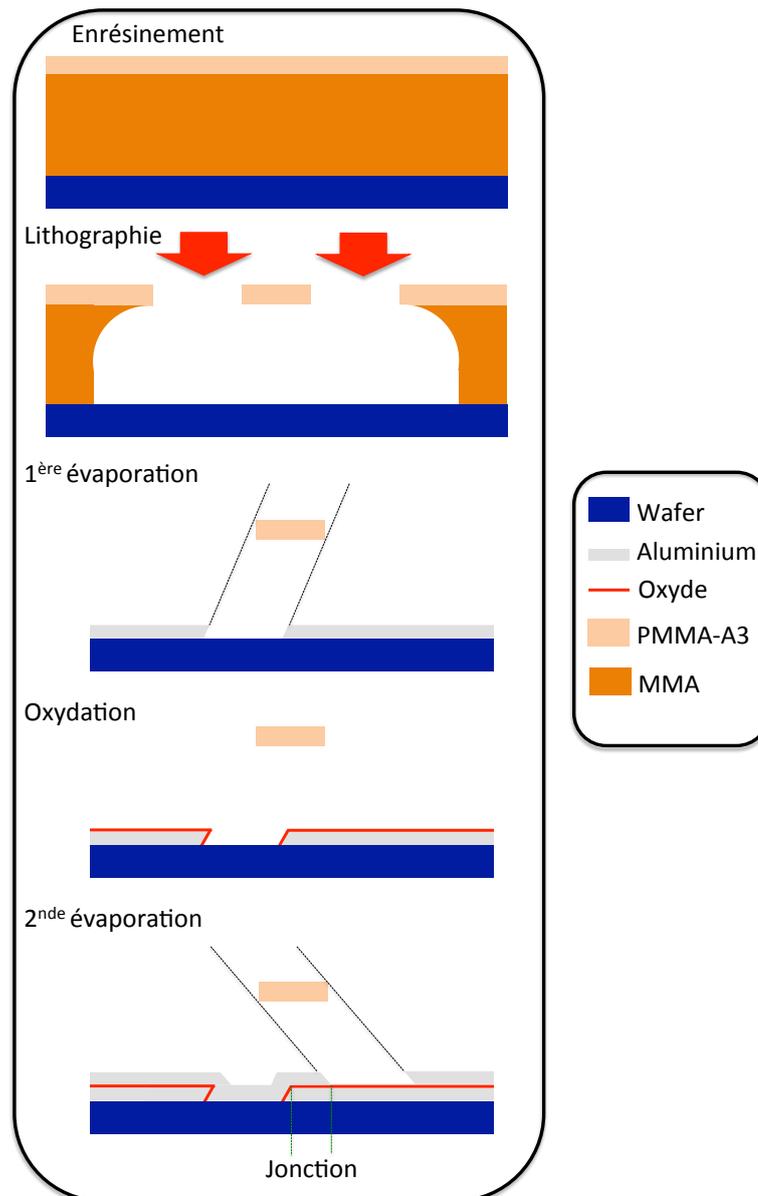


FIGURE II.12 – Schéma des différentes étapes de fabrication des jonctions Josephson avec la technique du pont suspendu. On dépose sur un wafer de silicium oxydé 900 nm de résine MMA puis 100 nm de résine 495-PMMA-A3. Cette seconde résine plus résistante à l'insolation par lithographie électronique permet de réaliser le pont. Pour révéler l'échantillon, on le plonge dans une solution de MIBK pendant 50 secondes, puis on le rince rapidement à l'isopropanol. On vérifie ensuite que les ponts sont présents au microscope optique. On évapore ensuite deux couches d'aluminium d'épaisseur 20 nm puis 40 nm avec deux angles différents. On utilise comme premier angle d'évaporation  $-10^\circ$  et comme second angle  $+35^\circ$ . Les angles d'évaporation, l'épaisseur de la résine ainsi que la largeur du pont fixent la taille de la jonction. Avant la seconde évaporation, l'échantillon est oxydé dans un flux d'oxygène à une pression de  $10^{-1}$  mbar pendant 10 minutes.

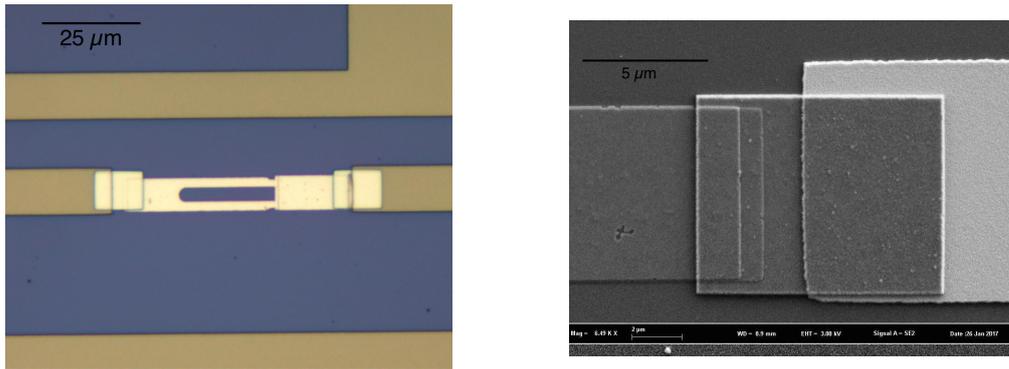


FIGURE II.13 – À gauche, image au microscope optique d'un SQUID (jaune clair) inséré dans un résonateur en niobium (en brun). À droite, on montre une image au MEB de la zone de raccord, le SQUID étant à gauche et le résonateur à droite. On voit au centre le dépôt d'aluminium évaporé après décapage ionique.

### II.3.2 Mesure à température ambiante de la résistance des jonctions Évolution avec la taille de la jonction

On s'attend à ce que la résistance tunnel  $R_n$  de la jonction soit inversement proportionnelle à sa surface  $S$ . Sur la figure II.14 on présente des mesures de  $R_n$  en fonction de  $S$  où la variation de  $S$  est obtenue en changeant la longueur du pont entre 250 nm et 1  $\mu\text{m}$ . Les autres paramètres sont fixes et donnent une longueur de recouvrement dans la direction perpendiculaire au pont de 580 nm. La résistance normale est mesurée sous pointes par la technique des quatre points de mesure. On vérifie ainsi que  $R_n$  est bien inversement proportionnelle à la surface de la jonction avec pour cette échantillon  $R_n = 990\Omega \times 1/S(\mu\text{m}^{-2})$ . Nous verrons ci-dessous que cette valeur varie beaucoup d'un échantillon à l'autre.

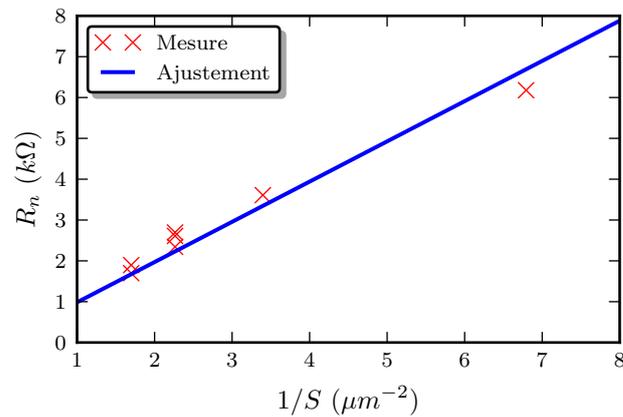


FIGURE II.14 – Relation entre la résistance normale et surface de la jonction.

### Dispersion de la résistance normale sur un même échantillon

Pour connaître la dispersion de nos jonctions, nous avons réalisé plusieurs échantillons contenant des jonctions identiques sur un wafer de  $8 \times 8$  mm. L'objectif de cette étude est en particulier de savoir si une jonction témoin placée à environ 8 mm de la jonction placée dans le résonateur nous permet d'en connaître les caractéristiques. La figure II.15 présente, à gauche, la cartographie des valeurs  $R_n$  mesurées, et, à droite, leurs histogrammes pour un échantillon typique. Nous observons de manière systématique un gradient des valeurs de  $R_n$ . Sur l'échantillon présenté, seules 3 jonctions ne présentent pas de résistance normale, elles sont court-circuitées. Ce taux d'échec de 5% est représentatif de notre méthode de fabrication. Si on élimine les valeurs extrêmes on obtient une déviation standard de 15%. L'état de l'art est proche d'une dispersion de l'ordre de quelques pourcents [76].

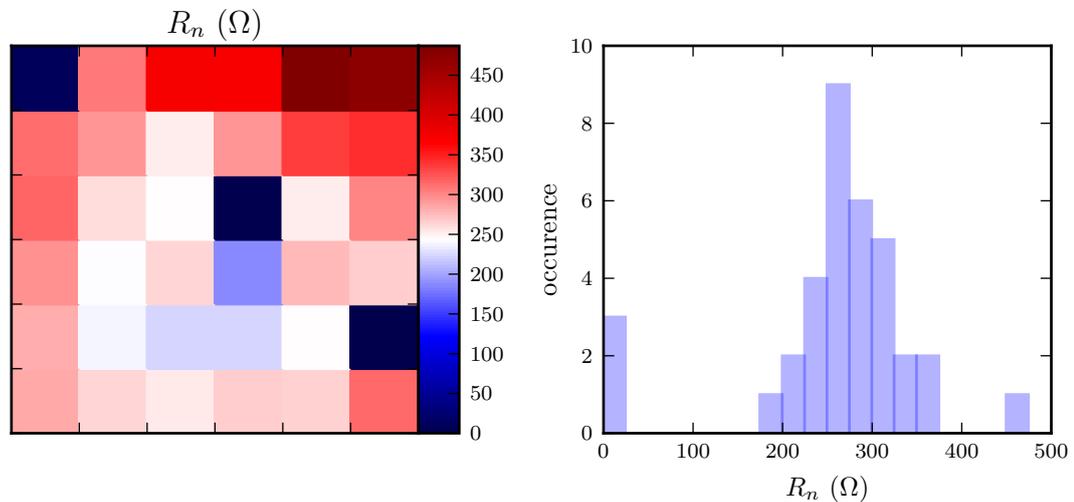


FIGURE II.15 – À gauche, cartographie de la résistance normale de 36 jonctions identiques réparties sur un même échantillon. À droite, l'histogramme des valeurs mesurées.

### Dispersion entre échantillons

Outre la reproductibilité sur un même échantillon, on peut caractériser la reproductibilité entre échantillons. La figure II.16 présente la mesure du produit  $R_n \times S$  pour 8 échantillons fabriqués dans les mêmes conditions sur une période de 1 an. On voit que la dispersion entre échantillons est très supérieure à celle sur un même échantillon. Cette mesure montre l'importance de la fabrication d'une jonction témoin pour pouvoir estimer la résistance de la jonction placée dans le résonateur. Pour la conception de l'échantillon final, nous considérons  $R_n \times S = 250 \Omega \mu\text{m}^2$ .

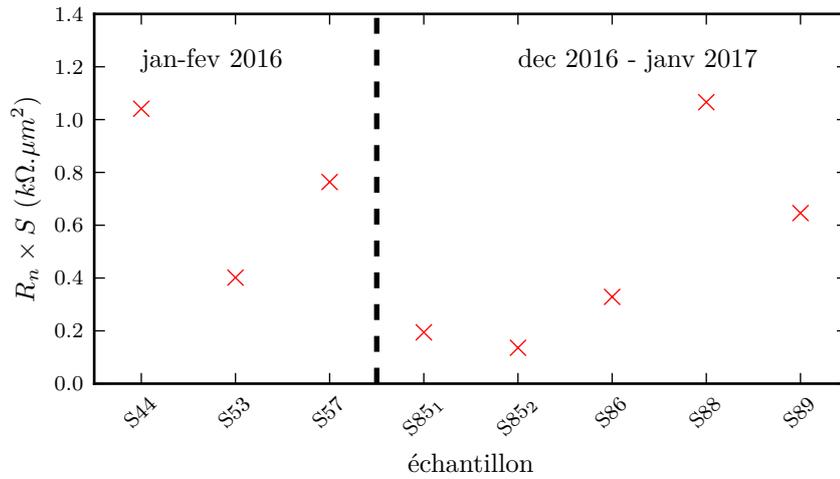


FIGURE II.16 – Comparaison du produit  $R_n \times S$  pour plusieurs échantillons produits dans les mêmes conditions. La ligne verticale sépare deux campagnes de fabrication espacées d'environ 1 an.

### Vieillessement des jonctions

La dernière étude que nous avons menée sur les propriétés des jonctions concerne l'évolution de  $R_n$  au cours du temps, comme représenté sur la figure II.17. La mesure est faite sur plusieurs jonctions provenant de deux échantillons fabriqués avec le même procédé. La résistance normale augmente avec le temps de 20 à 60% sur un temps caractéristique d'environ 2 jours.

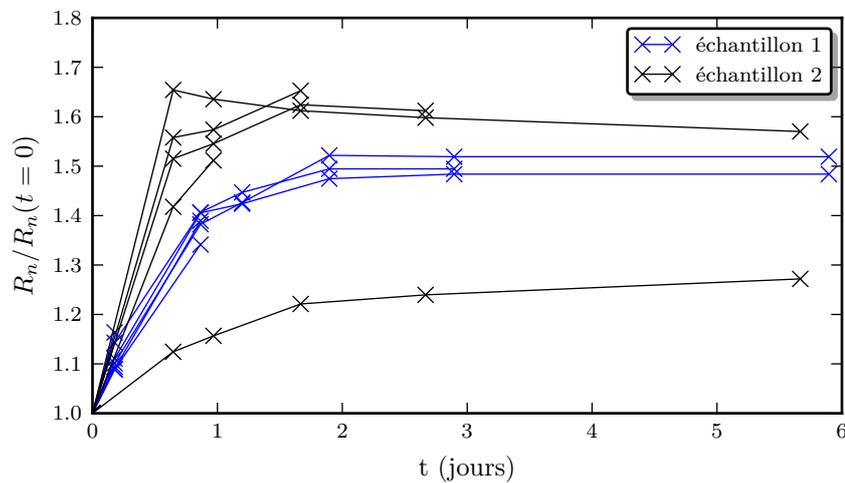


FIGURE II.17 – Évolution de la résistance normale en fonction du temps, normalisée par la valeur à  $t = 0$ .

### II.3.3 Caractérisation DC d'un SQUID à basse température

Nous avons mesuré la caractéristique courant-tension d'un SQUID à 10 mK en fonction du flux magnétique à travers le SQUID. Le SQUID est constitué de deux jonctions ayant une surface de  $1 \mu\text{m}^2$  et l'aire de la boucle du SQUID est  $12.7 \mu\text{m}^2$ . La figure II.18 montre, à gauche, la caractéristique obtenue pour un flux proche de la valeur maximisant le courant de switching. À droite, on montre l'évolution du courant de switching en fonction du flux magnétique. De la partie normale de la caractéristique, on déduit  $R_n = 492 \Omega$ , cette valeur est supérieure de 12% à la valeur mesurée à température ambiante. Ce comportement est attendu pour une jonction tunnel. Lorsque la jonction switche vers son état normal, nous observons une tension à ses bornes de  $360 \mu\text{V}$  en bon accord avec la valeur attendue de  $2\Delta/e$  où  $\Delta$  est le gap de l'aluminium dont la valeur typique est habituellement comprise entre  $160$  et  $200 \mu\text{V}$ . Le courant critique attendu est relié à la résistance normale par la loi de Ambegaokar-Baratoff [77] :

$$R_n I_c = \frac{\pi\Delta}{2e} \tanh \frac{\Delta}{k_B T} \quad (\text{II.5})$$

où  $T$  est la température. La valeur théorique pour notre SQUID est donc de  $I_c = 549 \text{ nA}$ . Nous observons que le maximum de courant de switching est limité à  $200 \text{ nA}$  soit  $I_c/2$ . Une étude plus approfondie serait nécessaire pour savoir si cette réduction est due à un chauffage de la jonction, à l'environnement électromagnétique, ou peut être expliquée théoriquement [78].

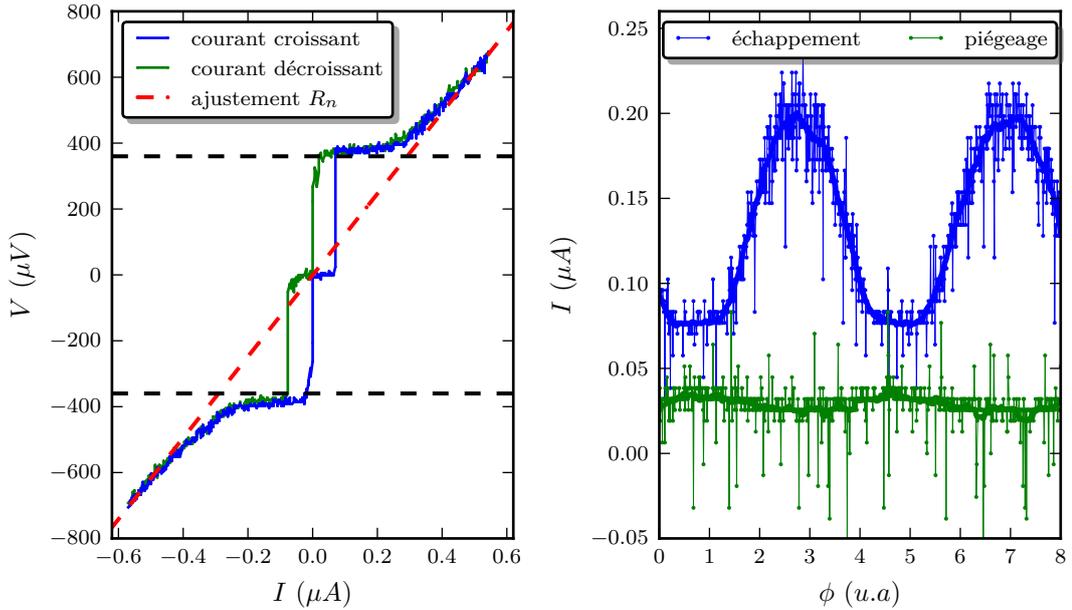


FIGURE II.18 – À gauche, caractéristique courant-tension à 10 mK d'un SQUID pour un flux maximisant le courant de switching. On représente en bleu la courbe obtenue en augmentant le courant et en vert, la courbe obtenue en diminuant le courant imposé. L'ajustement en pointillé rouge de la courbe courant-tension dans sa partie normale donne une résistance  $R_n = 492 \Omega$ . Les deux lignes horizontales représentent la tension attendue au switching pour de l'aluminium ayant un gap de  $180 \mu\text{V}$ . À droite, évolution du courant d'échappement et du courant de piégeage en fonction du flux magnétique imposé dans le SQUID.

## Conclusion du chapitre

Nous avons présenté les deux cryostats que nous avons utilisés dans ce travail de thèse. Nous avons étudié les difficultés inhérentes à des mesures micro-onde à basse température. Nous avons ensuite donné les procédés de fabrication que nous avons mis en oeuvre pour réaliser des résonateurs supraconducteurs micro-onde. Nous avons montré que nous étions capables d'ajuster la fréquence d'un résonateur autour de 6 GHz. Nous nous sommes intéressés aux couplages des résonateurs aux lignes de mesure. Nos facteurs de qualité intrinsèque n'excèdent pas quelques milliers à 1.5 K. Cela est suffisant pour mener l'expérience que l'on souhaite réaliser. Après avoir présenté les techniques de fabrication pour réaliser des jonctions Josephson, nous nous sommes intéressés à leurs propriétés en régime de courant continu.



## CHAPITRE III

---

### Conception et caractérisation de l'échantillon final

---

Dans ce chapitre, nous allons présenter les différentes étapes de simulation qui nous ont permis d'aboutir à un dessin d'échantillon présentant des caractéristiques adaptées à l'étude du blocage anormal. Nous montrerons qu'une modélisation électrocinétique de ce système est nécessaire pour obtenir les équations de la dynamique du champ dans les résonateurs. Nous établirons comment passer de ces équations classiques aux équations quantiques du système ouvert. Enfin, nous confronterons notre modèle à l'expérience, et nous déduirons les valeurs de paramètres modélisant notre échantillon.

**Sommaire**

---

<b>III.1 Conception de l'échantillon</b> . . . . .	<b>71</b>
III.1.1 Résonateur non-linéaire . . . . .	71
III.1.2 Couplage entre résonateurs . . . . .	72
III.1.3 Couplage au monde extérieur . . . . .	74
<b>III.2 Modélisation de l'échantillon final</b> . . . . .	<b>75</b>
III.2.1 Circuit électrocinétique équivalent . . . . .	76
III.2.2 Théorie Input-Output . . . . .	77
<b>III.3 Caractérisation expérimentale de l'échantillon final</b> . . . . .	<b>81</b>
III.3.1 Couplages et pertes de la cavité linéaire . . . . .	82
III.3.2 Fréquence de résonance, couplages et perte de la cavité non-linéaire . . . . .	82
III.3.3 Couplage entre cavités . . . . .	84
III.3.4 Non-linéarité . . . . .	88

---

## III.1 Conception de l'échantillon

### III.1.1 Résonateur non-linéaire

Nous commençons par la conception du résonateur non-linéaire. Ce résonateur est caractérisé par une fréquence de résonance proche de 6 GHz et une non-linéarité  $U = 2\pi \times -0.32$  MHz. Pour obtenir une non-linéarité de l'ordre de quelques centaines de kHz, nous avons choisi d'insérer un SQUID dans un résonateur LC comme montré sur la figure III.1. La figure III.1 montre aussi la réalisation pratique de ce schéma. Ce schéma a déjà été étudié dans [71]. L'expression de la non-linéarité Kerr est :

$$U = \frac{\pi p^3 \omega_0 Z}{2R_K} \quad (\text{III.1})$$

où  $\omega_0 = 1/\sqrt{(L_s + L_0)C}$  est la fréquence du résonateur,  $R_K = h/e^2$  le quantum de résistance,  $Z = \sqrt{(L_s + L_0)/C}$  l'impédance du résonateur et  $p = L_s/(L_s + L_0)$ .

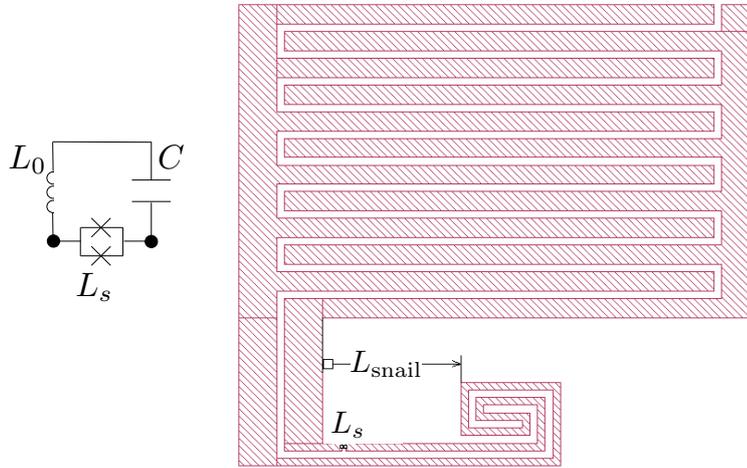


FIGURE III.1 – Schéma d'une cavité non-linéaire. À gauche, le modèle équivalent. À droite, image du résonateur non-linéaire que nous allons utiliser. On distingue l'emplacement du SQUID en bas sur un des méandres de l'inductance. La longueur  $L_{\text{snail}}$  est un paramètre d'optimisation qui fixe l'inductance  $L_0$ . La capacité  $C$  est fixe et réalisée par le peigne interdigité en haut du dessin.

Pour obtenir la valeur de la non-linéarité souhaitée, nous avons simulé dans Sonnet le résonateur de la figure III.1 et extrait la fréquence de résonance  $f_0$  en fonction de l'inductance du SQUID  $L_s$  et de la longueur  $L_{\text{snail}}$  qui fixe la valeur de l'inductance  $L_0$ . Pour une longueur  $L_{\text{snail}}$  fixée, l'ajustement de  $f_0$  par  $1/(2\pi\sqrt{C(L_0 + L_s)})$  nous permet de déduire les valeurs de  $C$  et de  $L_0$ . Par ailleurs, si on fixe la fréquence de résonance  $f_0$ , on peut éliminer  $L_s$  et obtenir l'évolution de  $U$  en fonction de  $L_{\text{snail}}$  comme montré sur la figure III.2. Cette procédure nous permet d'aboutir à un dessin du résonateur non-linéaire pour lequel  $U$  et  $f_0$  sont fixés. La valeur de l'inductance du SQUID est comprise entre 0.3 et 0.4 nH. Cette inductance doit être obtenue pour un flux non-nul dans le SQUID afin de pouvoir en régler la valeur lors de l'expérience. On choisit donc de fabriquer un SQUID dont l'inductance à flux nul est de  $L_{s0} = 0.1$  nH. Cette valeur correspond à un courant critique  $\phi_0/(2\pi L_{s0}) = 3.3 \mu\text{A}$  soit  $R_n \approx 100 \Omega$ . L'aire de chaque jonction du SQUID sera donc fixée à  $1.2 \mu\text{m}^2$ .

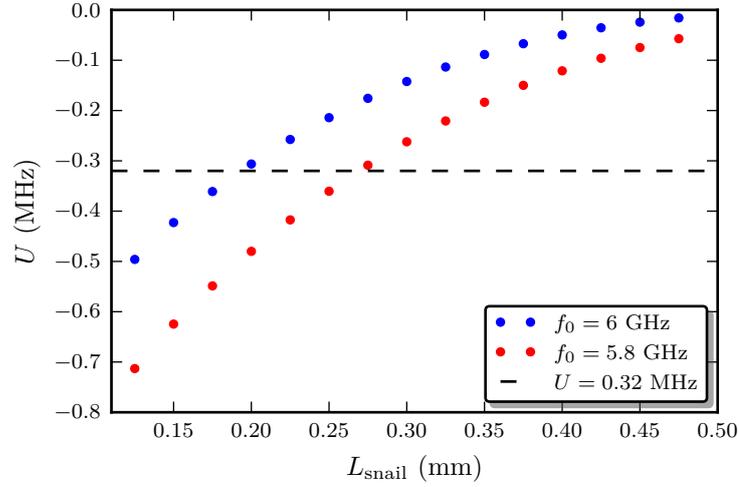


FIGURE III.2 – Variation de la non-linéarité en fonction de la longueur  $L_{\text{snail}}$  pour deux valeurs de fréquence  $f_0$ . La ligne horizontale indique la valeur de la non-linéarité que l'on souhaite obtenir.

### III.1.2 Couplage entre résonateurs

La figure III.3 montre le dessin de l'échantillon final simulé dans Sonnet et en particulier les différentes longueurs que nous avons optimisées. Nous avons choisi un couplage capacitif, la valeur de la capacité de couplage est fixée par la longueur  $L_{\text{couplage}}$  que nous optimisons pour atteindre  $J = 2\pi \times 25$  MHz. Ce choix de couplage permet de rendre la non-linéarité indépendante de  $J$  au première ordre. En variant  $L_s$ , nous observons dans les simulations un croisement évité des modes propres lorsque la résonance de la cavité non-linéaire traverse celle de la cavité linéaire. On extrait le couplage  $J$  de la distance entre les modes propres lorsque les cavités sont à résonance. On répète cette procédure pour différentes longueurs  $L_{\text{couplage}}$ . On aboutit à une longueur de couplage  $L_{\text{couplage}} = 100 \mu\text{m}$  pour  $J \approx 2\pi \times 25$  MHz. On répète la procédure du paragraphe précédent pour ajuster  $L_{\text{snail}}$  et obtenir la non-linéarité souhaitée lorsque les cavités sont à résonance. On aboutit à  $L_{\text{snail}} = 180 \mu\text{m}$ .

La figure III.4 montre le croisement évité obtenu pour  $L_{\text{couplage}} = 100 \mu\text{m}$  et  $L_{\text{snail}} = 180 \mu\text{m}$ . Les positions des résonances peuvent être ajustées par :

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \sqrt{J^2 + 4(\omega_2 - \omega_1)^2} \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{CL_1}} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C(L_2 + L_s)}} \quad (\text{III.2})$$

On obtient alors l'ensemble des paramètres suivants  $J = 2\pi \times 24.1$  MHz,  $L_1 = 1.40$  nH,  $L_2 = 1.03$  nH,  $C = 529$  fF, soit  $f_1 = 5.860$  GHz et  $U = 2\pi \times -0.33$  MHz. Les deux cavités sont à résonance pour  $L_s = 0.37$  nH.

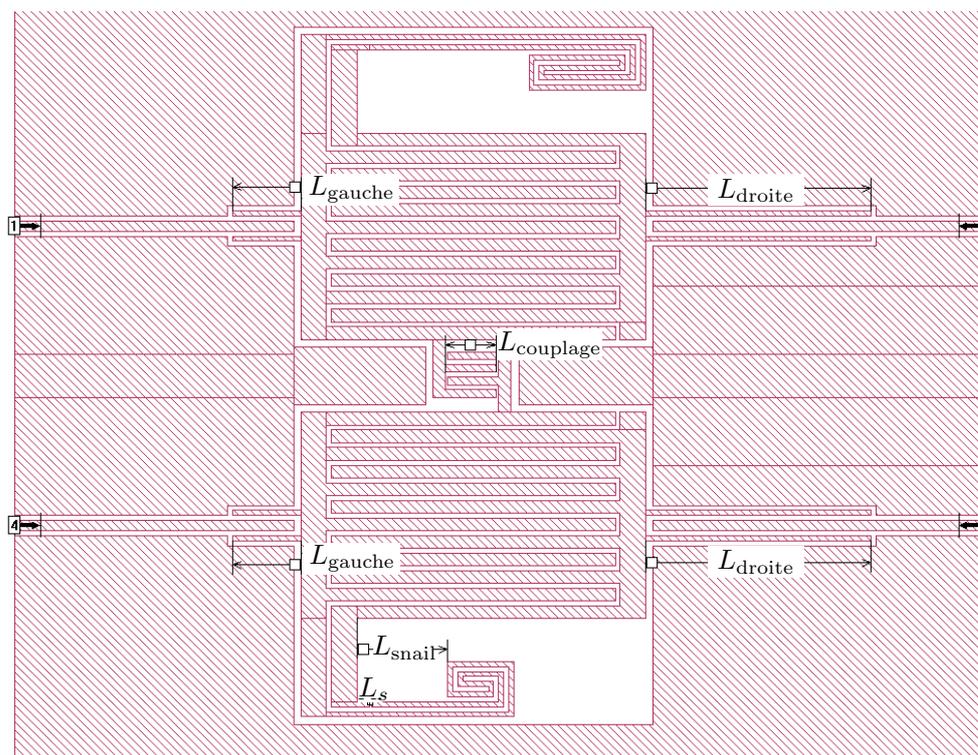


FIGURE III.3 – Dessin de l'échantillon final simulé dans Sonnet avec les différentes quantités que nous avons ajustées.

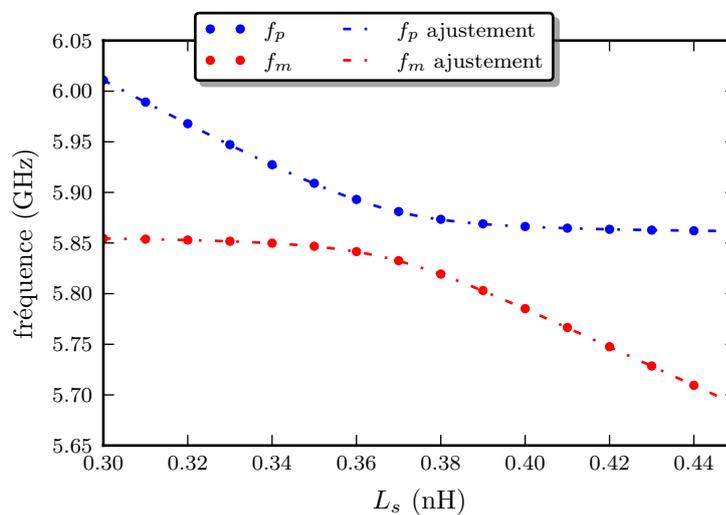


FIGURE III.4 – Fréquence de résonance des modes propres au niveau du croisement évité. Les points bleus et rouges correspondent aux fréquences données par simulation. En trait pointillé, l'ajustement à partir de la formule III.2

### III.1.3 Couplage au monde extérieur

Nous avons choisi de connecter chaque cavité à deux lignes coplanaires avec des couplages dans un rapport 10. Cela nous permet d'utiliser la ligne faiblement couplée comme ligne de pompe et la ligne fortement couplée comme ligne d'observation. Ainsi le flux de photons provenant de la cavité est dix fois plus élevé dans la ligne d'observation que dans la ligne de pompe. De plus, le fait de travailler en transmission permet une bonne isolation entre le signal issu de la cavité et le signal de pompe. On reprend la procédure de la section II.2.3 pour chacune des cavités. On aboutit à  $L_{\text{gauche}} = 135 \mu\text{m}$  et  $L_{\text{droite}} = 445 \mu\text{m}$ . Pour ces longueurs, les résultats de la simulation sont  $\kappa_1 = 2\pi \times 0.57 \text{ MHz}$ ,  $\kappa_2 = 2\pi \times 7.69 \text{ MHz}$ ,  $\kappa_3 = 2\pi \times 8.46 \text{ MHz}$  et  $\kappa_4 = 2\pi \times 0.57 \text{ MHz}$ , où l'indice correspond au numéro des ports indiqués sur la figure III.5 qui illustre le dessin de l'échantillon final.

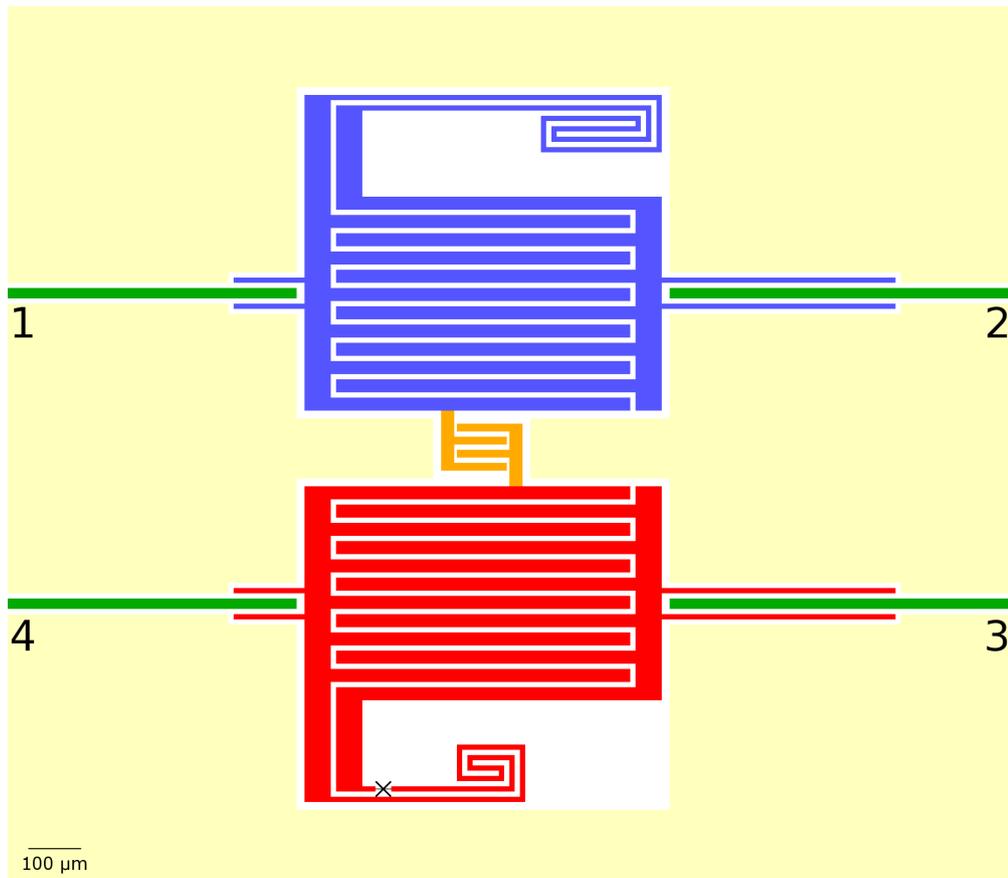


FIGURE III.5 – Dessin de l'échantillon final obtenu après optimisation. En bleu la cavité linéaire (cavité 1), en rouge la cavité comportant le SQUID (cavité 2), en orange la capacité de couplage, en vert les lignes coplanaires et en jaune le plan de masse. Les zones blanches représentent les zones sans métal. Les chiffres indiquent les numéros des ports par lesquels on adresse l'échantillon.

## III.2 Modélisation de l'échantillon final

Dans la partie précédente, nous avons supposé que chaque résonateur n'est couplé qu'à deux des quatre lignes de l'échantillon. Les équations du mouvement pour les amplitudes du champ dans chaque cavité peuvent alors s'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= -i\alpha_1 \left( (\omega_1 - \omega) - i\frac{1}{2}(\kappa_{i1} + \kappa_1 + \kappa_2) \right) - iJ\alpha_2 + \sqrt{\kappa_1}\alpha_1^{\text{in}} + \sqrt{\kappa_2}\alpha_2^{\text{in}} \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= -i\alpha_2 \left( (\omega_2 - \omega) - i\frac{1}{2}(\kappa_{i2} + \kappa_3 + \kappa_4) \right) - iJ\alpha_1 + \sqrt{\kappa_3}\alpha_3^{\text{in}} + \sqrt{\kappa_4}\alpha_4^{\text{in}}\end{aligned}\quad (\text{III.3})$$

où  $\alpha_i^{\text{in}}$  est l'amplitude de l'onde incidente sur le port  $i$ . La fréquence  $\omega_1$  est fixée à  $\omega_1 = 2\pi \times 5.860$  GHz et la dépendance de  $\omega_2$  avec  $L_s$  est donnée par III.2. Les amplitudes des ondes diffusées sont :

$$\begin{aligned}\alpha_1^{\text{out}} &= \sqrt{\kappa_1}\alpha_1 - \alpha_1^{\text{in}} \\ \alpha_2^{\text{out}} &= \sqrt{\kappa_2}\alpha_2 - \alpha_2^{\text{in}} \\ \alpha_3^{\text{out}} &= \sqrt{\kappa_3}\alpha_2 - \alpha_3^{\text{in}} \\ \alpha_4^{\text{out}} &= \sqrt{\kappa_4}\alpha_2 - \alpha_4^{\text{in}}\end{aligned}\quad (\text{III.4})$$

La figure III.6 compare les transmissions obtenues en résolvant les équations III.3 et III.4 à celles calculées par Sonnet pour une valeur de  $L_s$  donnée telle que les deux cavités soient à résonance. Comme attendu, les positions des pics obtenus par Sonnet coïncident avec celles du modèle. En revanche, les amplitudes et les largeurs diffèrent.

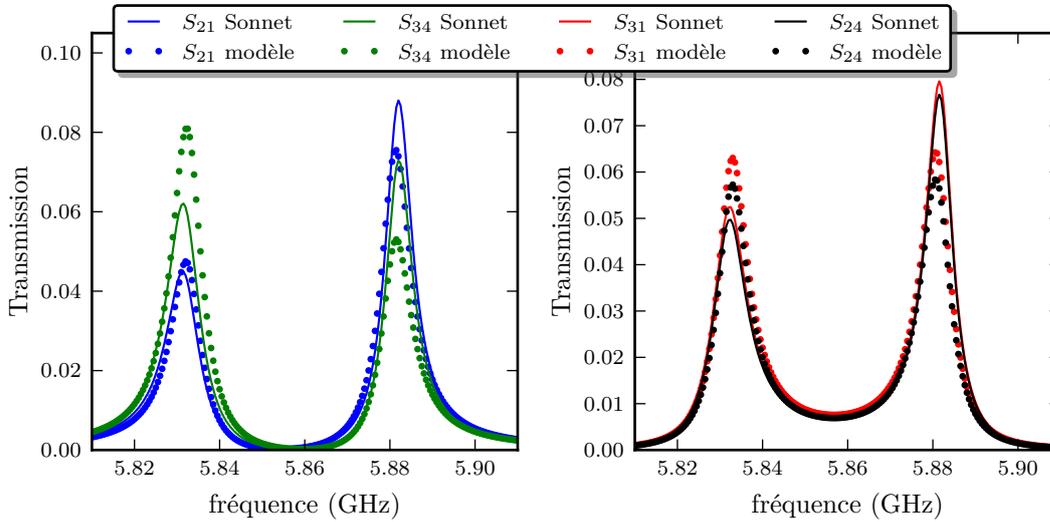


FIGURE III.6 – On compare les transmissions prédites par Sonnet avec celle prédites par les équations III.3 et III.4 au niveau du croisement évité. Les paramètres sont  $\omega_1 = 2\pi \times 5.860$  GHz,  $\omega_2 = 2\pi \times 5.854$  GHz (soit  $L_s = 0.37$  nH),  $\kappa_1 = 2\pi \times 0.57$  MHz,  $\kappa_2 = 2\pi \times 7.69$  MHz,  $\kappa_3 = 2\pi \times 8.46$  MHz,  $\kappa_4 = 2\pi \times 0.57$  MHz.

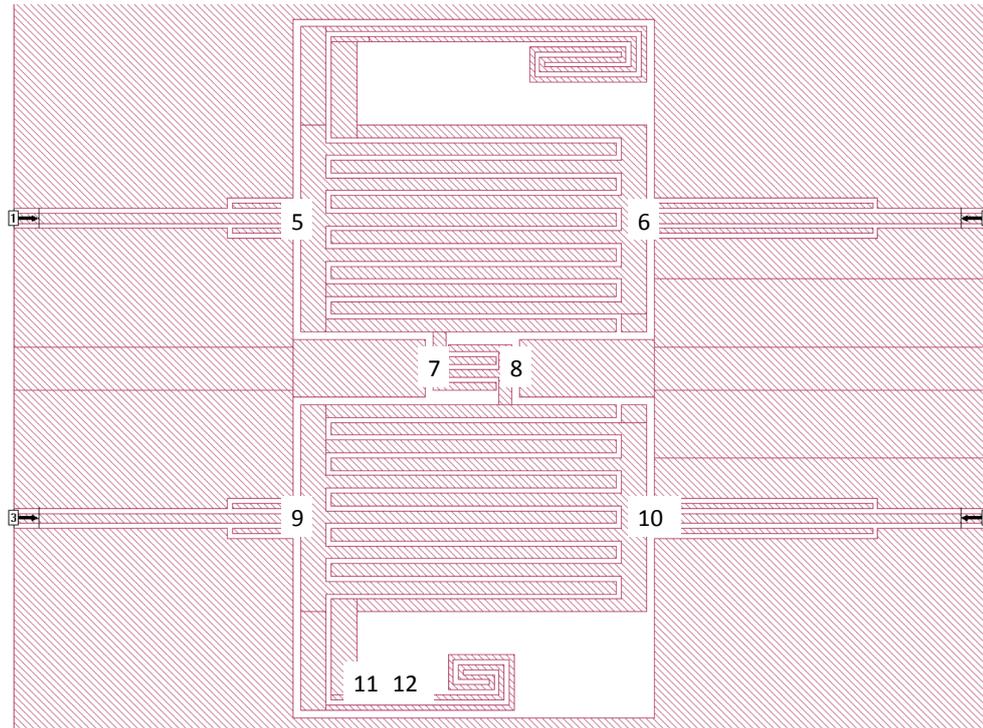


FIGURE III.7 – Dessin de l'échantillon final simulé dans Sonnet avec la position des noeuds utilisés pour la modélisation

### III.2.1 Circuit électrocinétique équivalent

Pour affiner notre compréhension de l'échantillon et obtenir un modèle reproduisant plus fidèlement les prédictions de Sonnet, nous avons appliqué la procédure développée dans le groupe par Alexis Morvan pour obtenir un circuit électrocinétique équivalent. La figure III.7 montre la position des noeuds utilisés pour la modélisation. Nous supposons que les différents noeuds sont reliés entre eux par l'association en parallèle d'une inductance et d'une capacité. La simulation Sonnet permet d'obtenir les valeurs de chaque composant de ce circuit.

#### Équations du mouvement

Nous souhaitons obtenir un modèle comprenant seulement deux degrés de liberté. Le circuit équivalent que nous avons obtenu en comprend 8. La procédure de réduction à seulement deux modes sera détaillée dans la thèse d'Alexis Morvan. Nous allons ici donner seulement le résultat final qui se résume à l'obtention de deux matrices :

- La matrice  $H$  qui correspond à l'Hamiltonien des deux modes isolés. C'est une matrice de taille  $2 \times 2$ .
  - La matrice  $B$  de taille  $2 \times 4$  qui couple chaque mode aux quatre ports de l'échantillon.
- Les équations du mouvement pour l'amplitude des deux modes peuvent alors s'écrire sous forme

matricielle :

$$\frac{d}{dt}\vec{\alpha} = -iH\vec{\alpha} - \frac{1}{4}BB^T H(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*) + \frac{i}{\sqrt{2}}B\vec{\alpha}^{in} \quad \text{et} \quad \vec{\alpha}^{out} = \vec{\alpha}^{in} + \frac{i}{\sqrt{2}}B^T H(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*) \quad (\text{III.5})$$

où les amplitudes complexes de chaque mode ainsi que les amplitudes des ondes incidentes et diffusées sont écrites sous la forme de vecteurs colonnes. Les éléments des matrices  $H$  et  $B$  sont calculés à partir des valeurs des composants du circuit équivalent et dépendent de la valeur de l'inductance du SQUID  $L_s$ .

### Simplification des équations du mouvement

Les équations du mouvement peuvent être simplifiées pour obtenir un modèle ressemblant à celui des équations III.3 et III.4. Pour cela, nous faisons l'approximation suivante sur le terme de couplage des modes aux ports externes

$$\frac{1}{4}BB^T H(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*) \rightarrow \frac{1}{4}BB^T \omega_0 \vec{\alpha} \quad (\text{III.6})$$

où  $\omega_0$  est une fréquence constante qui correspond au centre de la bande de fréquence utilisée dans l'expérience. Ici, on choisit  $\omega_0 = \omega_1$ . Cette approximation correspond à une approximation de champ tournant pour le couplage entre les modes de cavités et les modes externes ainsi qu'à l'approximation de couplage indépendant de la fréquence [79]. En tenant compte de ces approximations et en rajoutant des pertes intrinsèques pour chaque mode, nous obtenons les équations du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\vec{\alpha} = -iH\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BB^T + \kappa_i\right)\omega_0\vec{\alpha} + \frac{i}{\sqrt{2}}B\vec{\alpha}^{in} \quad \text{et} \quad \vec{\alpha}^{out} = \vec{\alpha}^{in} + \frac{i}{\sqrt{2}}B^T\omega_0\vec{\alpha} \quad (\text{III.7})$$

avec

$$\kappa_i = \begin{pmatrix} \kappa_{i1} & 0 \\ 0 & \kappa_{i2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.8})$$

La figure III.8 compare les transmissions prédites par Sonnet à celles calculées à partir des équations III.5 et des équations simplifiées III.7. Les deux modèles reproduisent fidèlement les prédictions de Sonnet et l'effet des approximations n'est pas visible. La figure III.9 montre l'évolution des éléments de matrice de  $H$  en fonction de  $L_s$  et les compare à ceux du modèle III.3. Nous montrons également l'évolution des éléments de  $\frac{1}{2}BB^T\omega_0$ . Dans le modèle III.3, on supposait cette matrice diagonale ayant pour éléments non nuls  $\kappa_1 + \kappa_2$  et  $\kappa_3 + \kappa_4$ .

### III.2.2 Théorie Input-Output

Nous allons montrer ici comment les équations du mouvement III.7 peuvent être transposées en une description quantique en utilisant le formalisme Input-Output. En reprenant les notations de Gardiner et Zoller [80], l'équation du mouvement pour un mode  $\hat{a}$  d'un système ouvert est :

$$\dot{\hat{a}} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{a}, H_{\text{sys}}] - \sum_l [\hat{a}, \hat{c}_l^\dagger] \left( \frac{1}{2}\gamma_l \hat{c}_l + \sqrt{\gamma_l} \hat{b}_l^{\text{in}} \right) + \sum_l [\hat{a}, \hat{c}_l] \left( \frac{1}{2}\gamma_l \hat{c}_l^\dagger + \sqrt{\gamma_l} \hat{b}_l^{\text{in}\dagger} \right) \quad (\text{III.9})$$

avec les relations de fermeture

$$\hat{b}_l^{\text{out}} = \hat{b}_l^{\text{in}} + \sqrt{\gamma_l} \hat{c}_l \quad (\text{III.10})$$

où  $\hat{c}_l$  est un opérateur décrivant le couplage du système au mode extérieur  $l$  et  $\gamma_l$  la force du couplage. Les opérateurs  $\hat{b}_l^{\text{in}}$  et  $\hat{b}_l^{\text{out}}$  sont les opérateurs annihilation pour le champ incident et

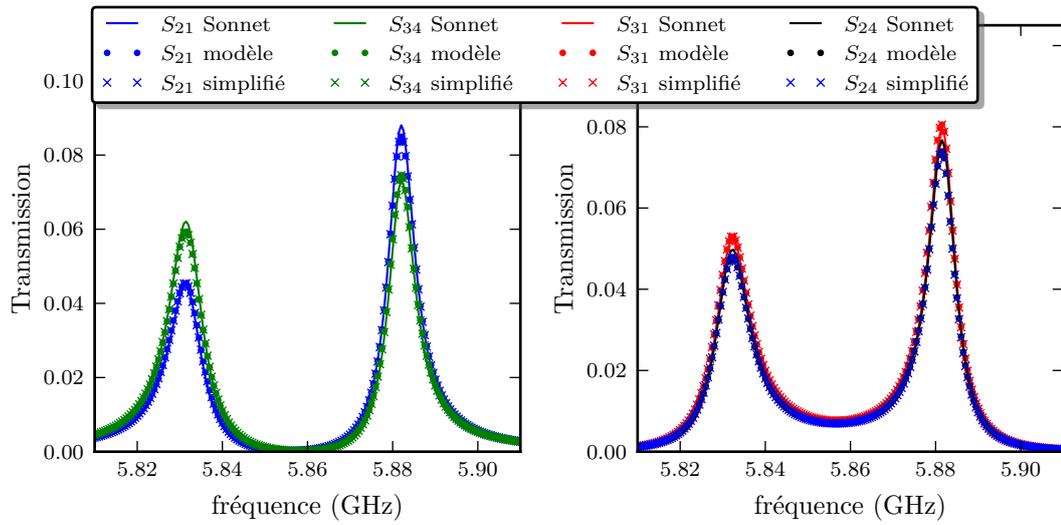


FIGURE III.8 – On compare les transmissions prédites par Sonnet avec celle prédites par les équations III.5 et III.7 au niveau du croisement évité. La figure est tracée pour  $L_s = 0.36$  nH.

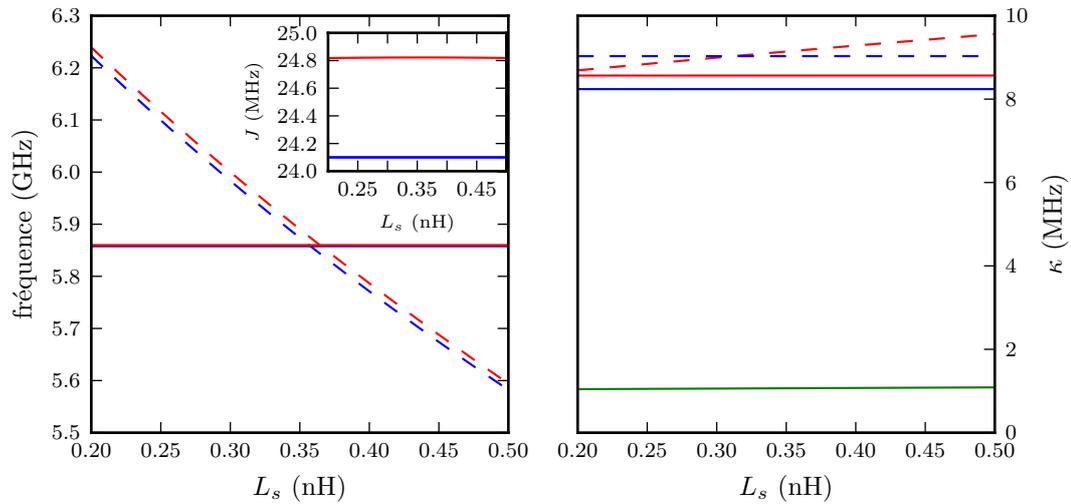


FIGURE III.9 – À gauche, on trace l'évolution des éléments diagonaux de  $H$  en fonction de  $L_s$  que l'on compare aux prédictions du modèle simplifié III.3. La figure intérieure montre l'évolution du terme  $H_{1,2}$  comparée à la valeur de  $J$  obtenue dans III.3. À droite, évolution des éléments de  $\frac{1}{2}BB^T\omega_0$  comparée aux valeurs  $\kappa_1+\kappa_2$  et  $\kappa_3+\kappa_4$ . Dans cette figure, les traits pleins correspondent à la cavité linéaire et les traits pointillés à la cavité non-linéaire. La couleur rouge correspond au modèle électrocinétique. La couleur bleue correspond au modèle simplifié III.3. Les traits verts (confondus) correspondent aux éléments non diagonaux de  $\frac{1}{2}BB^T\omega_0$ .

diffusé du mode  $l$ .

Les variables classiques  $\alpha_i$ ,  $A_l^{in}$  et  $A_l^{out}$  utilisées précédemment peuvent être quantifiées comme suit [79] :

$$\begin{aligned} \alpha_i &\rightarrow \sqrt{\hbar}\hat{a}_i \\ \frac{1}{i}\sqrt{\frac{1}{\hbar\omega_0}}A_l^{in}(t) &\rightarrow \hat{b}_l^{in} \\ \frac{1}{i}\sqrt{\frac{1}{\hbar\omega_0}}A_l^{out}(t) &\rightarrow \hat{b}_l^{out} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Les opérateurs ainsi définis vérifient les relations de commutation canoniques pour des opérateurs bosoniques. L'évolution Hamiltonienne des opérateurs  $\hat{a}_i$  est donnée par l'Hamiltonien

$$\hat{H}_0 = \sum_{i,j} H_{ij} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \quad (\text{III.12})$$

où les coefficients  $H_{ij}$  sont les éléments de la matrice  $H$  issue du modèle électrocinétique.

On suppose que le couplage aux ports  $\hat{c}_l$  s'écrit comme une combinaison linéaire des opérateurs  $\hat{a}_i$  seulement :

$$\hat{c}_l = \alpha_{1l}\hat{a}_1 + \alpha_{2l}\hat{a}_2 \quad \text{avec} \quad \alpha_{1l}^2 + \alpha_{2l}^2 = 1 \quad (\text{III.13})$$

On impose ainsi  $[\hat{a}_i, \hat{c}_l] = 0$  et  $[\hat{c}_l, \hat{c}_l^\dagger] = 1$  rendant les opérateurs  $\hat{c}_l$  bosoniques. Identifions maintenant la relation de fermeture III.7 à celle de la théorie Input-Output III.10 :

$$\begin{aligned} \hat{b}_l^{out} &= \hat{b}_l^{in} + \sqrt{\gamma_l}(\alpha_{1l}\hat{a}_1 + \alpha_{2l}\hat{a}_2) \\ A_l^{out} &= A_l^{in} + \frac{i}{\sqrt{2}}\omega_0(B_{1l}\alpha_1 + B_{2l}\alpha_2) \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

L'identification de ces deux équations et la normalisation III.13 nous permettent d'écrire :

$$\gamma_l = \frac{\omega_0}{2}(B_{1l}^2 + B_{2l}^2) \quad \alpha_{1l} = \frac{B_{1l}}{\sqrt{B_{1l}^2 + B_{2l}^2}} \quad \alpha_{2l} = \frac{B_{2l}}{\sqrt{B_{1l}^2 + B_{2l}^2}} \quad (\text{III.15})$$

Le fait d'avoir imposé une relation de commutation bosonique à  $\hat{c}_l$  permet l'interprétation des coefficients  $\gamma_l$  comme les couplages des modes  $\hat{c}_l$  vers les modes des lignes.

Dans le cas où le système est excité par un champ cohérent monochromatique, le champ incident  $\hat{b}_l^{in}$  peut se décomposer comme la somme d'un champ classique  $\beta_l^{in}$  et d'une partie quantique de valeur moyenne nulle  $\hat{b}_l^{in,0}$ . On définit alors le taux de pompage  $\eta_i$  du mode  $i$  par les champs incidents comme :

$$\eta_i = \sum_l \sqrt{\gamma_l} \alpha_{il} \beta_l^{in} \quad (\text{III.16})$$

Ceci permet de définir l'Hamiltonien  $H_p$  associé au pompage :

$$\hat{H}_p = \eta_1 (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) + \eta_2 (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) \quad (\text{III.17})$$

### Terme Kerr venant du SQUID

Jusqu'à maintenant nous avons considéré le SQUID comme une inductance linéaire de valeur  $L_s$  contribuant comme  $\phi^2/(2L_s)$  à l'Hamiltonien du circuit, où  $\phi$  est la différence de flux aux bornes du SQUID. En remplaçant cette contribution par l'énergie Josephson  $-E_J \cos(\frac{2\pi}{\phi_0}\phi)$  où  $\phi_0$  est le quantum de flux et  $E_J = (\frac{\phi_0}{2\pi})^2 \frac{1}{L_s}$ , on obtient en développant le cosinus à l'ordre 4 en  $\phi$  un terme non-linéaire [71, 81]. Lors du processus de réduction du nombre de degrés de liberté, ce terme non-linéaire se transforme en terme Kerr ne faisant intervenir que des opérateurs  $\hat{a}_2$  et  $\hat{a}_2^\dagger$ . On obtient donc l'Hamiltonien total :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_p + U\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2 \quad (\text{III.18})$$

où la valeur de  $U$  dépend de  $L_s$  et est tracée sur la figure III.18 en vert. Cette valeur est proche de celle prédite par l'équation III.1.

### Équations de Langevin quantiques

À partir de cet Hamiltonien total, on aboutit alors aux équations de Langevin quantiques suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_1 &= -i(H_{11}\hat{a}_1 + H_{12}\hat{a}_2 + \eta_1) - \sum_l \alpha_{1l} \left( \frac{1}{2}\gamma_l \hat{c}_l + \sqrt{\gamma_l} \hat{b}_l^{\text{in},0} \right) \\ \dot{\hat{a}}_2 &= -i(H_{22}\hat{a}_2 + H_{21}\hat{a}_1 + 2U\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2 + \eta_2) - \sum_l \alpha_{2l} \left( \frac{1}{2}\gamma_l \hat{c}_l + \sqrt{\gamma_l} \hat{b}_l^{\text{in},0} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

avec les relations de fermeture :

$$\hat{b}_l^{\text{out}} = \hat{b}_l^{\text{in}} + \sqrt{\gamma_l} \hat{c}_l(t) \quad (\text{III.20})$$

Les équations III.19 peuvent se mettre sous la forme quantique suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_1 &= -i(\omega_1\hat{a}_1 + J\hat{a}_2 + \eta_1) - \frac{\kappa_{11}}{2}\hat{a}_1 - \frac{\kappa_{12}}{2}\hat{a}_2 - \hat{\xi}_1 \\ \dot{\hat{a}}_2 &= -i(\omega_2\hat{a}_2 + J\hat{a}_1 + 2U\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2 + \eta_2) - \frac{\kappa_{22}}{2}\hat{a}_2 - \frac{\kappa_{21}}{2}\hat{a}_1 - \hat{\xi}_2 \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

où nous avons mis la matrice  $H$  sous la forme  $H = \begin{pmatrix} \omega_1 & J \\ J & \omega_2 \end{pmatrix}$ , et avons défini  $\kappa_{ij} = \sum_l \alpha_{il}\alpha_{jl}\gamma_l$

et les termes de bruit  $\hat{\xi}_i = \sum_l \alpha_{il}\sqrt{\gamma_l}\hat{b}_l^{\text{in},0}$ . La différence entre ces deux équations et les équations I.28 étudiées au chapitre I sont les termes non locaux proportionnels à  $\kappa_{12}$  et  $\kappa_{21}$ . Nos simulations montrent que ces termes ne modifient que marginalement la physique du blocage anormal présenté au chapitre I. L'équation maîtresse associée aux équations III.21 est :

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}] + \sum_{l=0}^4 \frac{\gamma_l}{2} (n_{\text{th}l} + 1) (2\hat{c}_l\hat{\rho}\hat{c}_l^\dagger - \hat{c}_l^\dagger\hat{c}_l\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{c}_l^\dagger\hat{c}_l) + \sum_{l=0}^4 \frac{\gamma_l}{2} n_{\text{th}l} (2\hat{c}_l^\dagger\hat{\rho}\hat{c}_l - \hat{c}_l\hat{c}_l^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{c}_l\hat{c}_l^\dagger) \quad (\text{III.22})$$

Cette équation sera, par la suite, utilisée dans les simulations.

### III.3 Caractérisation expérimentale de l'échantillon final

La figure III.10 montre plusieurs images au microscope de l'échantillon final réalisé comme décrit au chapitre II.2. L'échantillon comporte également 14 jonctions témoins qui ne sont pas visibles sur ces images. La résistance normale moyenne de ces jonctions test nous permet d'estimer la résistance du SQUID à  $92\ \Omega$  soit une inductance théorique à flux nul de  $0.11\ \text{nH}$ . L'échantillon a ensuite été placé dans son porte-échantillon et des cloches ont été micro-soudées pour assurer la continuité du plan de masse.

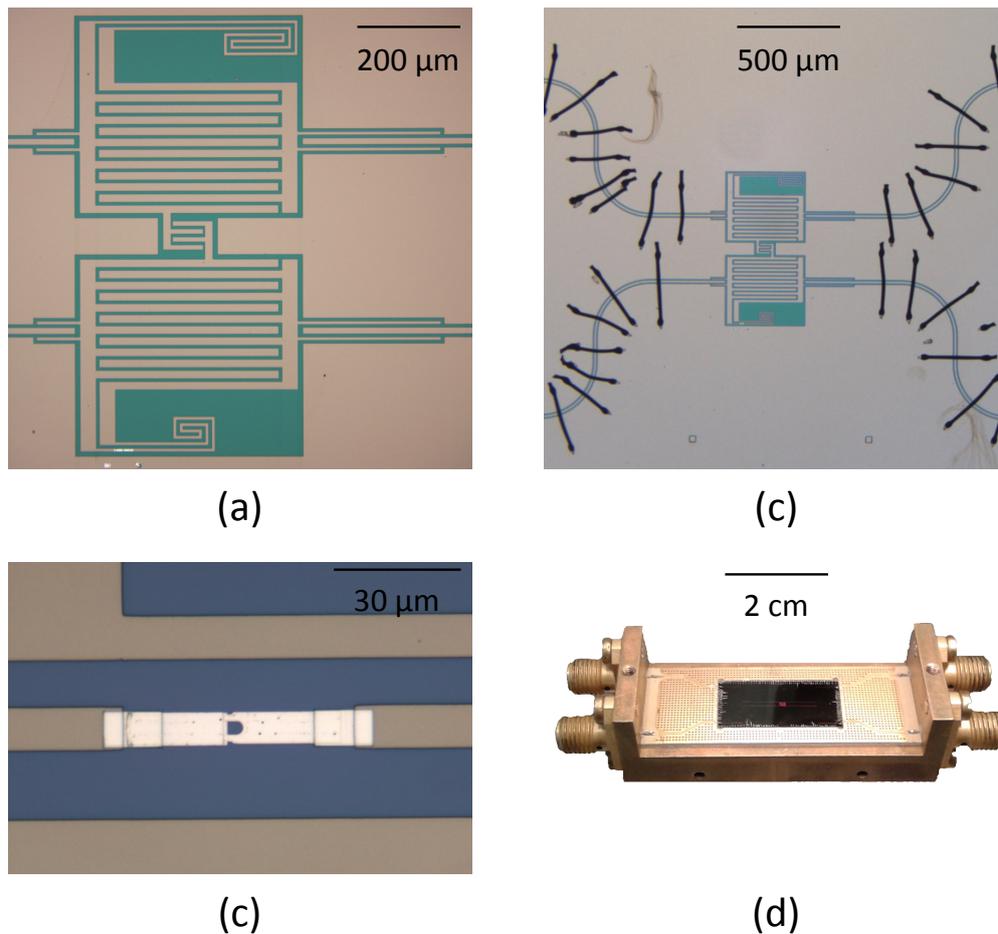


FIGURE III.10 – (a) Résonateurs, (b) Cloches microsoudées et (c) SQUID : Images au microscope optique de l'échantillon final. (d) Photo du porte-échantillon utilisé pour connecter les quatre lignes coplanaires de l'échantillon aux câbles SMA du cryostat.

### III.3.1 Couplages et pertes de la cavité linéaire

Pour caractériser la cavité linéaire, on désaccorde la cavité 2 et on réalise une mesure de transmission entre les ports 1 et 2. On peut ajuster la réponse obtenue par une lorentzienne de largeur  $\kappa_t$ , comme représenté sur la figure III.11. Il faudrait connaître précisément l'amplitude et la largeur du pic pour déterminer séparément les pertes intrinsèques et les couplages aux lignes. Étant donné que nous ne connaissons pas parfaitement les pertes de nos câbles ni l'amplification de notre chaîne, nous allons supposer que les couplages aux lignes sont égaux à ceux donnés par Sonnet et en déduire le taux de perte intrinsèque  $\kappa_{i1}$ . L'ajustement des données donne  $\kappa_{t1} = 2\pi \times 10.35$  MHz, or la largeur donnée par Sonnet est  $\kappa_1 + \kappa_2 = 2\pi \times 8.18$  MHz. On en déduit  $\kappa_{i1} = 2\pi \times 2.17$  MHz, soit un facteur de qualité intrinsèque de 2700. On observe un écart entre la fréquence simulée et la fréquence de résonance mesurée inférieur à 0.4%.

Le maximum de transmission nous permet d'obtenir le produit  $T_1 T_2 = -39$  dB, où  $T_1$  est la transmission de la ligne de pompe et  $T_2$  celle de la chaîne d'amplification. Si l'on suppose les câbles sans perte et l'amplification des amplificateurs donnée par leurs spécifications, on attend  $T_1 T_2 = -24$  dB. On en déduit que l'ensemble des câbles a des pertes de 15 dB à 6 GHz.

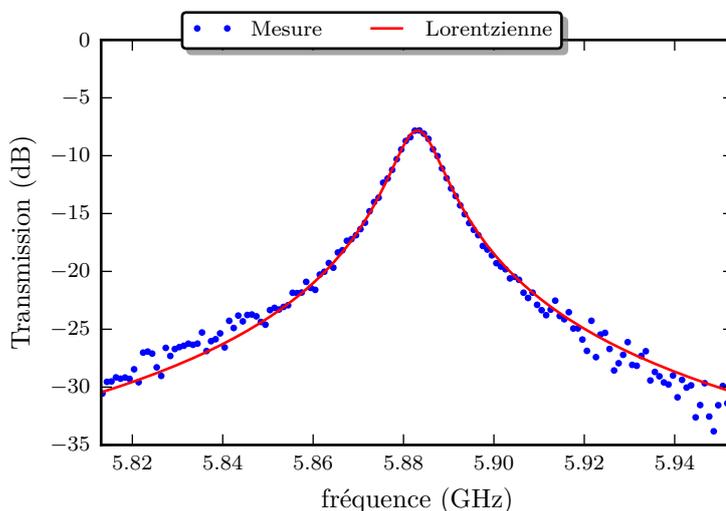


FIGURE III.11 – Transmission de la cavité linéaire lorsque la cavité 2 est très désaccordée. Les points bleus représentent la transmission mesurée, la courbe rouge l'ajustement des données avec une lorentzienne de largeur 10.35 MHz.

### III.3.2 Fréquence de résonance, couplages et perte de la cavité non-linéaire

#### Fréquence de résonance et paramètres du SQUID

Nous avons mesuré la fréquence de résonance de la cavité 2 en fonction du flux magnétique à travers le SQUID. Cette mesure est représentée par les points bleus sur la figure III.12. Afin d'extraire les paramètres du SQUID, nous utilisons les éléments de la matrice  $H$  obtenus dans la section III.2 en supposant que  $L_s$  est reliée au flux magnétique imposé via le courant  $I_{\text{bobine}}$

circulant dans la bobine de contrôle par la relation :

$$L_s = \frac{L_{s0}}{|\cos((aI_{\text{bobine}} + b)\pi)|} \quad (\text{III.23})$$

L'inductance  $L_{s0}$  est l'inductance à flux nul du SQUID,  $a$  et  $b$  relient  $I_{\text{bobine}}$  au flux traversant le SQUID. Pour ajuster les données, on introduit un facteur correctif  $\alpha_{\text{shift}_2}$  qui relie la fréquence mesurée  $f_{\text{mes}}$  à la fréquence simulée  $H_{22}(L_s)$ .

$$f_{\text{mes}} = \frac{1}{2\pi} \alpha_{\text{shift}_2} H_{22}(L_s) \quad (\text{III.24})$$

L'ajustement des paramètres  $L_{s0}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha_{\text{shift}_2}$  de cette formule avec les données expérimentales est représenté sur la figure III.12. On obtient  $L_{s0} = 78.9$  pH ce qui est le bon ordre de grandeur attendu d'après les jonctions tests mesurées. Enfin, on trouve  $\alpha_{\text{shift}_2} = 0.9905$ .

En toute rigueur, le SQUID doit être modélisé par une inductance et une capacité en parallèle. Pour des jonctions typiques, on attend une capacité par unité de surface de  $50 \text{ fF}/\mu\text{m}^2$ , soit une capacité de  $100 \text{ fF}$  pour notre SQUID. Nos simulations permettent de prendre en compte ce paramètre. Néanmoins, il n'a pas d'influence significative sur l'évolution de la fréquence. Nous négligerons donc cette capacité par la suite.

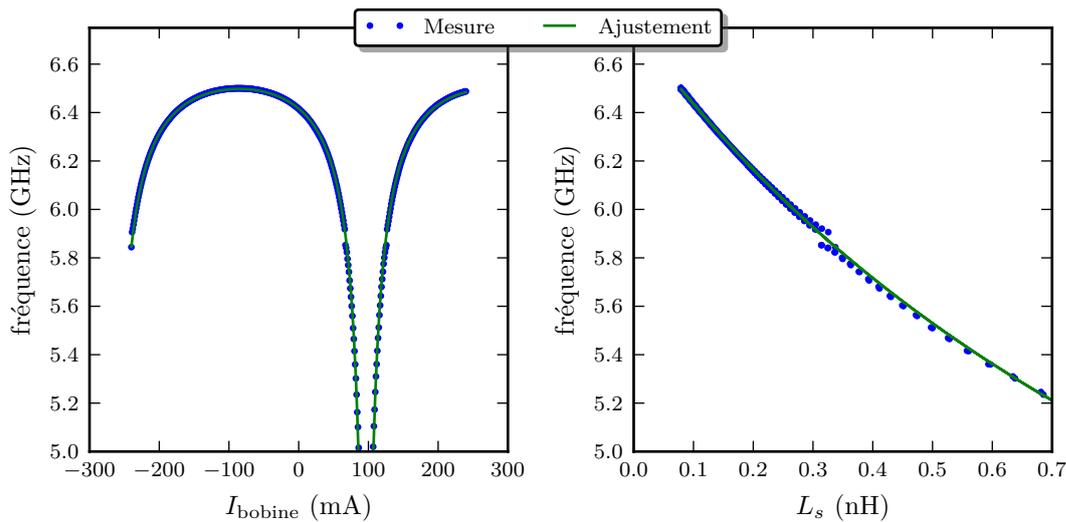


FIGURE III.12 – Fréquence de résonance de la cavité non-linéaire. Les points bleus représentent les fréquences mesurées, la courbe verte l'ajustement des données avec la formule III.24. Sur la gauche, on représente les données en fonction de  $I_c$ , sur la droite, en fonction de  $L_s$ .

### Largeur de la cavité non-linéaire

Nous avons mesuré la largeur de la cavité avec SQUID en fonction du flux magnétique. On obtient les résultats présentés à gauche de la figure III.13 en ajustant le pic de transmission avec une lorentzienne. On montre sur la même figure les résultats obtenus via nos simulations. On constate un large écart entre théorie et expérience. À droite, sur la figure III.13, on montre

4 courbes de transmissions prises pour différentes valeurs de flux. Ces courbes de transmission montrent qu'entre 5.5 et 6.5 GHz nous avons un fond de transmission de l'ordre de  $-55$  dB. Ailleurs en fréquence, ce fond est plus faible et compris entre  $-70$  et  $-65$  dB. Ce fond rend l'estimation de la largeur difficile mais ne suffit pas à expliquer l'écart à la théorie. Par la suite, étant donné que notre mesure de la largeur de la seconde cavité n'est pas fiable, on prendra  $\kappa_{i1} = \kappa_{i2} = 2\pi \times 2.17$  MHz et les couplages aux lignes donnés par la matrice  $B$  obtenue par simulation.

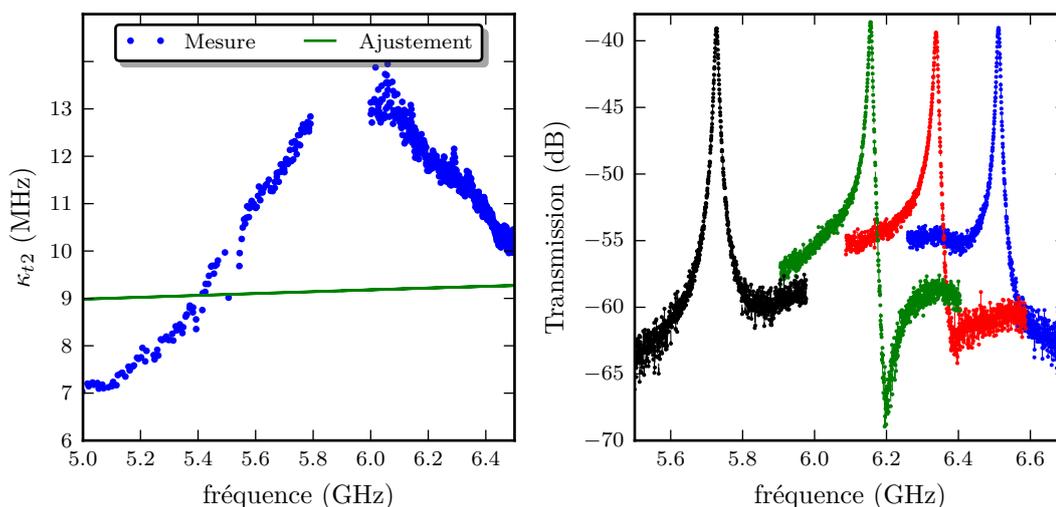


FIGURE III.13 – Largeur totale de la cavité non-linéaire sur la gauche. Les points bleus représentent les valeurs mesurées, la courbe verte est donnée par nos simulations. Sur la droite, on représente 4 courbes de transmission prises à différentes valeurs de flux magnétique.

### III.3.3 Couplage entre cavités

#### Croisement évité

Maintenant que nous avons caractérisé les deux cavités indépendamment, nous pouvons nous intéresser à la zone où les deux cavités se couplent. On représente sur la figure III.14 l'ensemble des transmissions mesurables avec notre montage en fonction du flux magnétique imposé. Sur la gauche, on représente les données. Sur la droite, on donne les transmissions obtenues par la simulation, connaissant les paramètres de notre SQUID. Le maximum de transmission est normé à 1 pour chaque jeu de données. Les échelles en fréquence et en flux, bien que légèrement décalées, ont le même ambitus.

À partir des mesures de  $S_{21}$  et  $S_{34}$ , on extrait les fréquences des deux modes propres  $f_{\pm}$  en fonction du flux magnétique. On obtient les points représentés sur la figure III.15. Ces données sont ajustées en introduisant trois paramètres  $\alpha_{\text{shift}_1}$ ,  $\alpha_{\text{shift}_2}$  et  $\alpha_{\text{shift}_J}$  qui modifient les éléments de la matrice  $H$  de la manière suivante :

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_{\text{shift}_1} \omega_1 & \alpha_{\text{shift}_J} J \\ \alpha_{\text{shift}_J} J & \alpha_{\text{shift}_2} \omega_2(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \phi = aI_{\text{bobine}} + b \quad (\text{III.25})$$

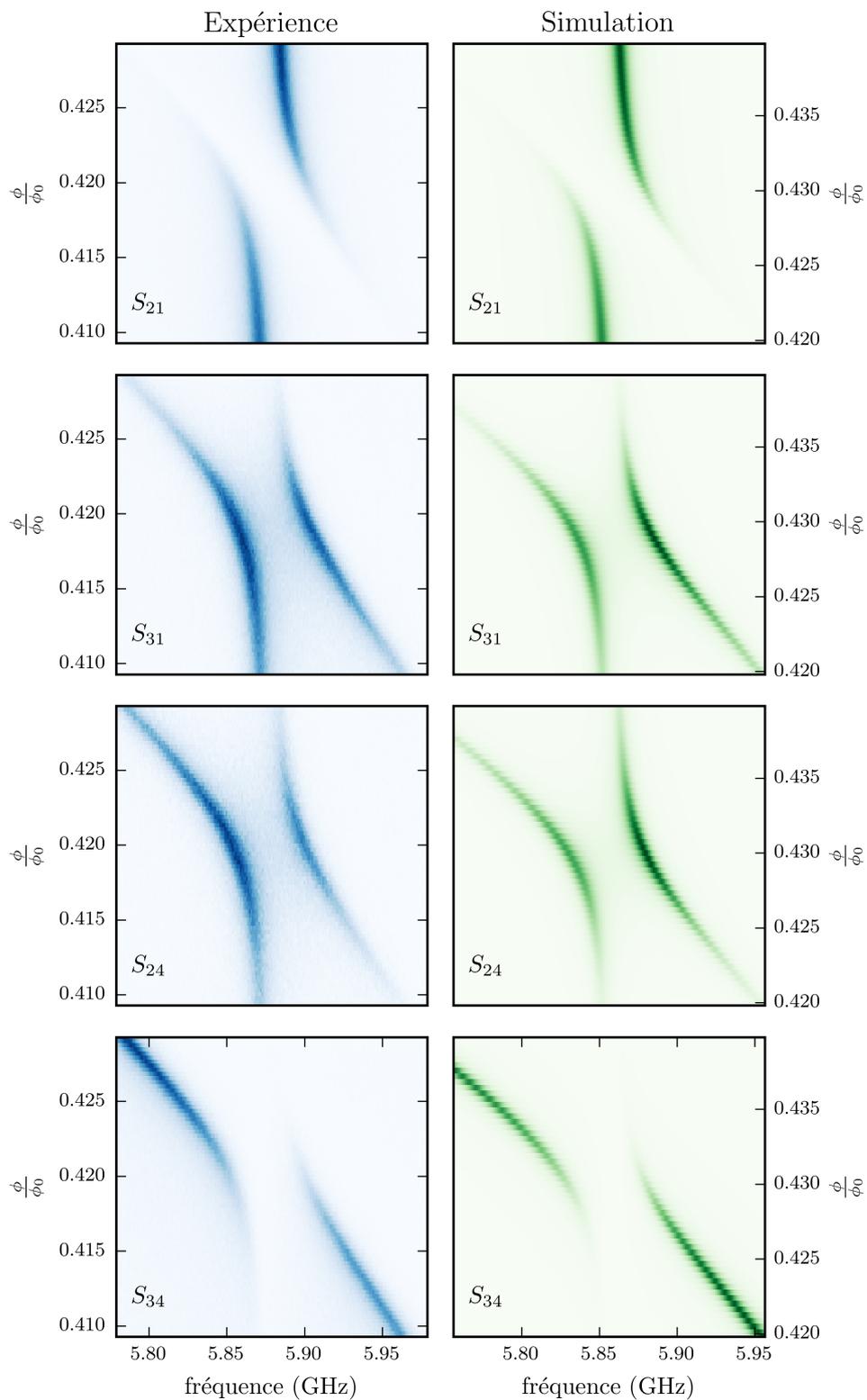


FIGURE III.14 – Transmissions mesurées et simulées au niveau du croisement évité. Les simulations sont obtenues sans paramètres ajustables. Les pertes intrinsèques sont  $\kappa_{i1} = \kappa_{i2} = 2\pi \times 2.17$  MHz.

Les valeurs propres de  $H$  doivent correspondre aux deux fréquences mesurées. On représente en trait plein sur la figure III.15 l'ajustement. On obtient ainsi au niveau du croisement évité  $\alpha_{\text{shift}_J} = 1.010$  en très bon accord avec les simulations.

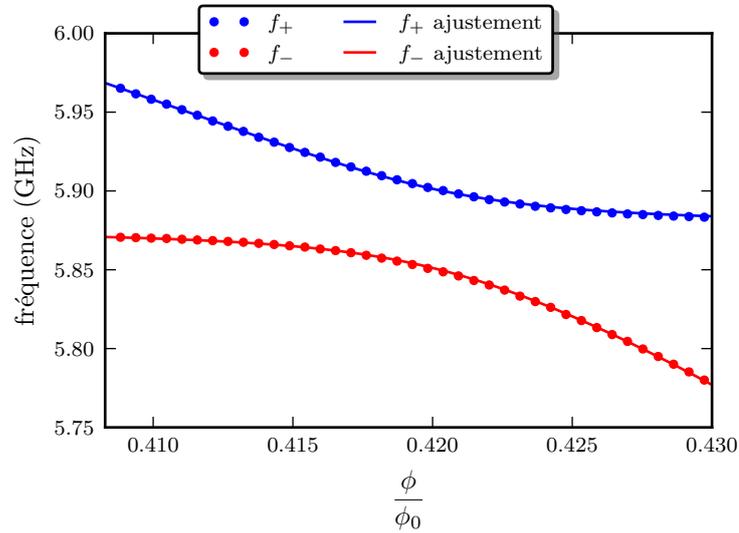


FIGURE III.15 – Fréquences des deux modes couplés  $\omega_{\pm}$  et leurs ajustement. L'ajustement est obtenu en introduisant des coefficients correctifs dans les éléments de matrice de  $H$ .

La comparaison entre la théorie et l'expérience sur la figure III.14 montre que les hauteurs relatives des pics de transmission diffèrent entre théorie et expérience (principalement sur  $S_{31}$  et  $S_{24}$ ). La figure III.16 montre les 4 transmissions mesurées pour deux valeurs de flux. Ces données sont corrigées de la transmission des câbles. Pour cela, nous avons supposé  $T_1 = T_2$  et  $T_3 = T_4$ , les produits  $T_1T_2$  et  $T_3T_4$  sont déterminés loin du croisement évité comme expliqué précédemment. On trace sur la même figure les prédictions de notre modèle. Bien que notre modèle reproduise bien l'évolution des fréquences des modes propres en fonction du flux, les populations dans chaque cavité ne sont pas parfaitement expliquées.

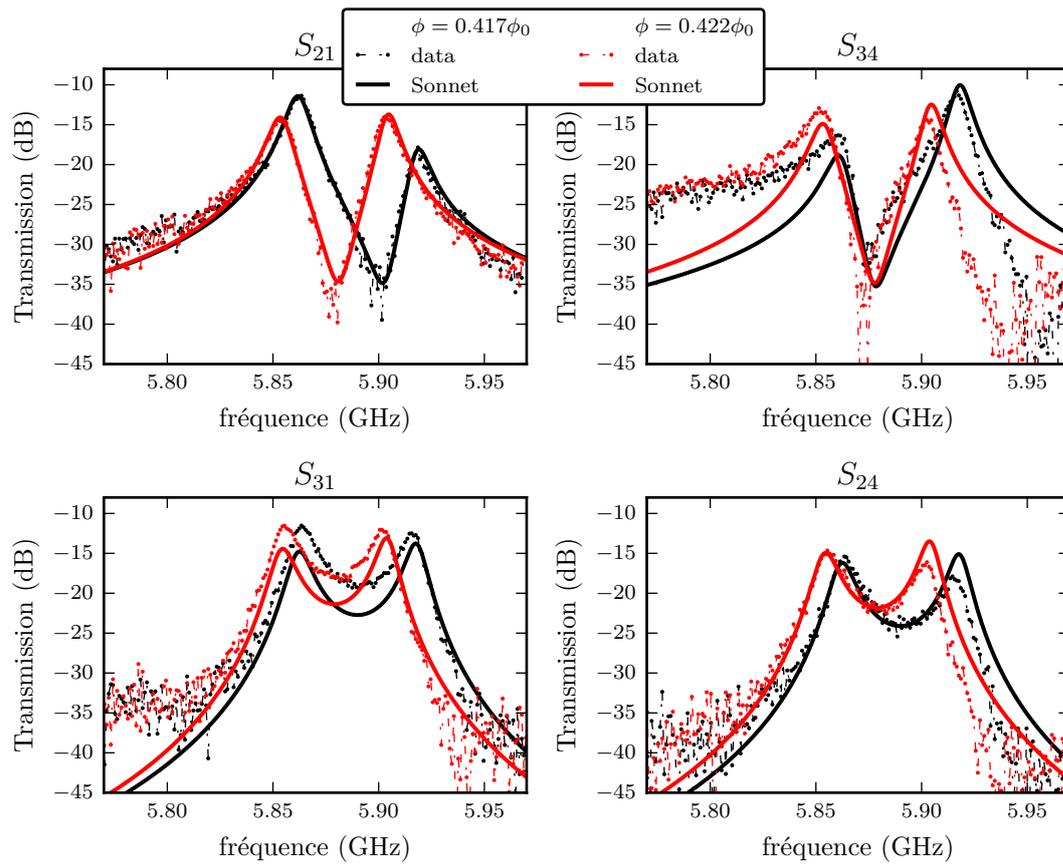


FIGURE III.16 – Transmission mesurée et simulée pour deux valeurs de flux telles que les cavités soient proches de résonance.

### III.3.4 Non-linéarité

Pour mesurer la non-linéarité  $U$  nous avons mesuré plusieurs spectres de transmission de la cavité 2 ( $S_{34}$ ) pour plusieurs puissances de pompe. Nous nous sommes placés à des valeurs de flux telles que la première cavité n'est pas peuplée. Nous nous ramenons ainsi au cas d'une cavité unique non-linéaire avec une non-linéarité Kerr. Ce problème peut être résolu exactement, la référence [82] rappelle l'expression des moments du champ dans la cavité :

$$\langle (a^\dagger)^j (a)^k \rangle = \left( \frac{\eta_2}{U} \right)^{k+j} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c^*)}{\Gamma(c+k)\Gamma(c^*+j)} \frac{\mathcal{F}(c+k, c^*+j, 2 \mid \eta_2/U \mid^2)}{\mathcal{F}(c, c^*, 2 \mid \eta_2/U \mid^2)} \quad (\text{III.26})$$

avec

$$c = -(\omega_p - \omega_2) - i\kappa/2 / U \quad (\text{III.27})$$

et

$$\mathcal{F}(c, d, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(c+n)\Gamma(d+n)} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{III.28})$$

où on a introduit  $\mathcal{F}$  la fonction hypergéométrique définie à partir de la fonction Gamma d'Euler  $\Gamma$ , et  $\kappa$  est la largeur totale de la cavité et  $\omega_p$  la fréquence de pompe. Nous avons établi précédemment que :

$$\eta_2 \approx \sqrt{\frac{\omega_2}{2}} B_{24} \beta_2^{\text{in}} = \sqrt{\frac{P_e T_4}{2\hbar}} B_{24} \quad (\text{III.29})$$

où on a utilisé le fait que  $B_{24} \gg B_{14}$  loin du croisement évité et où  $P_e$  est la puissance de la source utilisée pour faire la mesure. De même la puissance transmise est :

$$P_m = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \frac{\omega_2 B_{23}^2}{2} \hbar \omega_2 T_3 \quad (\text{III.30})$$

Expérimentalement, on mesure la transmission  $P_m/P_e$ . Les données sont montrées sur la figure III.17 pour trois valeurs de flux. Pour ajuster les données par la formule III.26 nous distinguons deux régimes :

$U \sim \kappa/2$  Dans ce régime, l'équation III.26 prédit une baisse du maximum de transmission en même temps qu'un shift en fréquence comme montré en haut à gauche de la figure III.17. Ainsi  $U$ ,  $T_3$  et  $T_4$  sont trois paramètres d'ajustement indépendants et peuvent donc être extraits. On représente en bleu les valeurs de  $U$  obtenues par cette méthode sur la figure III.18.

$U \ll \kappa/2$  Les paramètres  $T_3$ ,  $T_4$  et  $U$  ne sont pas indépendants. Pour ajuster les données, nous supposons  $T_3$  connue et donnée par l'étude du régime précédent ( $U \sim \kappa/2$ ) pour en déduire  $T_4$  et  $U$ . On représente en noir les valeurs de  $U$  obtenues par cette méthode sur la figure III.18.

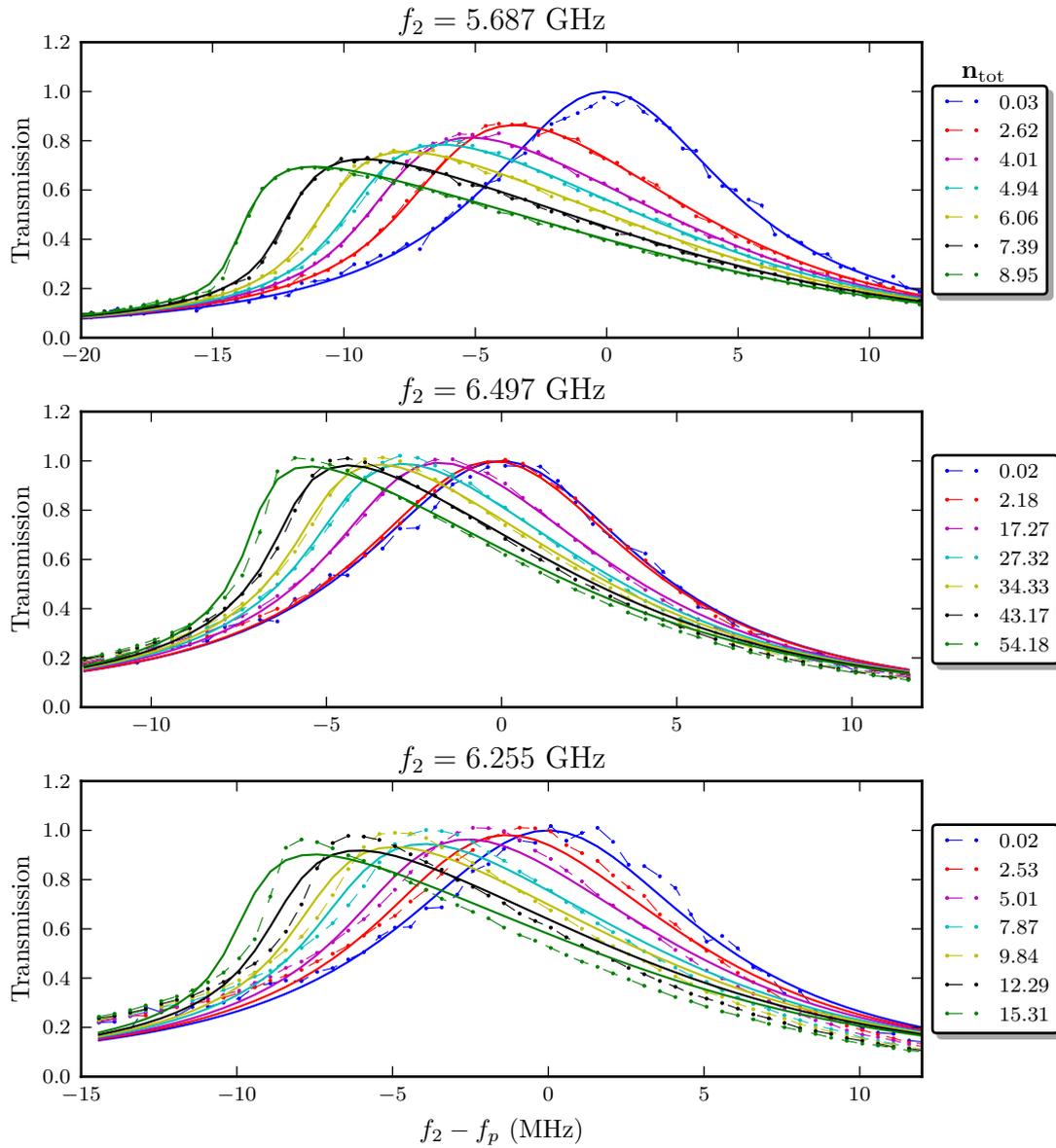


FIGURE III.17 – On représente la transmission normalisée pour différentes puissances d'excitation en traits pointillés ainsi que l'ajustement avec la formule III.26. Les différentes courbes sont repérées par le nombre de photons à l'intérieur de la cavité au maximum de transmission. Chaque jeu de données est obtenu pour un flux magnétique différent, on indique la fréquence de résonance à faible puissance de pompe.

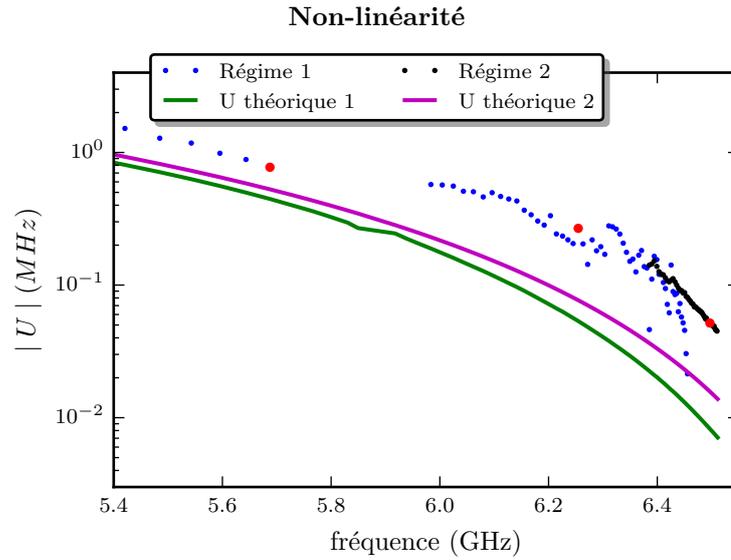


FIGURE III.18 – Les points bleus représentent la non-linéarité obtenue en supposant  $T_3$ ,  $T_4$  et  $U$  comme trois variables indépendantes. Pour les points noirs, on suppose  $T_3$  connue et on ajuste  $T_4$  et  $U$ . Enfin, les points rouges correspondent aux trois jeux de données présentés sur la figure III.17. La courbe verte est la prédiction du modèle électrocinétique, et la courbe magenta la prédiction de l'équation III.1

La non-linéarité mesurée est systématiquement supérieure à nos prédictions d'un facteur d'environ 3. Nous ne comprenons pas cet écart qui est peut-être dû à une mauvaise estimation de la largeur  $\kappa$  en fonction du flux. Proche du croisement évité, nous utiliserons pour nos simulations  $U = 2\pi \times -660$  kHz. Cette valeur est déterminée par extrapolation à partir des points mesurés de part et d'autre du croisement évité.

## Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'échantillon qui permettra d'étudier le phénomène de blocage anormal au chapitre suivant. Nous avons établi théoriquement les équations dynamiques qui régissent l'évolution du champ. Ceci nous permet de faire la correspondance entre les calculs du chapitre I et l'échantillon. Nous résumons dans le tableau ci-dessous les valeurs que nous utiliserons pour la simulation du blocage anormal dans le chapitre V.

Grandeurs	Valeurs
$L_s$	$78.9 \text{ pH} /  \cos \pi(aI_{\text{bobine}} + b) $
$f_1$	$5.8768 \text{ GHz}$
$f_2$	$0.9905 \frac{1}{2\pi} H_{22}(L_s)$
$\sqrt{\omega_0} B$	$\begin{pmatrix} 1.42 \times 10^{-2} & -5.20 \times 10^{-2} & 7.55 \times 10^{-4} & 3.87 \times 10^{-3} \\ -7.87 \times 10^{-4} & -3.40 \times 10^{-3} & -1.42 \times 10^{-2} & 5.40 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \sqrt{2\pi \times f_1}$
$\kappa_{i1}$	$2\pi \times 2.17 \text{ MHz}$
$\kappa_{i2}$	$2\pi \times 2.17 \text{ MHz}$
$J$	$2\pi \times 25.1 \text{ MHz}$
$U$	$2\pi \times -660 \text{ kHz}$

TABLE III.1 – Paramètres de notre échantillon. Les paramètres  $a$  et  $b$  doivent être réajustés à chaque mise à froid.



---

### Mesure des fluctuations quantiques d'un mode micro-ondes

---

Dans ce chapitre nous détaillons la méthode de mesure employée pour mesurer les moments des fluctuations quantiques du champ micro-onde dans une cavité. Nous avons choisi de mesurer le signal issu de la cavité en utilisant un amplificateur cryogénique puis un démodulateur IQ. Les quadratures en sortie de l'IQ sont ensuite digitalisées. Nous montrerons comment extraire des mesures les moments du signal de cavité qui est convolué par le bruit thermique de l'amplificateur. Dans une seconde partie nous étudierons le rapport signal à bruit de la mesure. Ensuite, nous présenterons le dispositif expérimental que nous utiliserons pour effectuer cette mesure. Nous caractériserons les imperfections de notre chaîne de mesure et montrerons comment il est possible de les corriger. Enfin, nous mesurerons les fluctuations issues de la cavité linéaire pour un jeu de paramètres afin d'étudier la convergence du signal vers sa valeur moyenne et le rapport signal à bruit effectivement obtenu.

---

**Sommaire**

<b>IV.1 Principe de la mesure</b> . . . . .	<b>95</b>
IV.1.1 Théorie de l'amplification et ordre de grandeur . . . . .	95
IV.1.2 Température de bruit d'un amplificateur cryogénique . . . . .	95
IV.1.3 Technique de mesure alternée des moments . . . . .	96
<b>IV.2 Évaluation du rapport signal à bruit</b> . . . . .	<b>97</b>
IV.2.1 Rappel sur la mesure de $g^2(0)$ . . . . .	97
IV.2.2 Calcul de la densité de probabilité des quadratures mesurées . . . . .	98
IV.2.3 Simulation de l'erreur statistique . . . . .	98
<b>IV.3 Dispositif expérimental et traitement des données</b> . . . . .	<b>101</b>
IV.3.1 Chaîne de mesure . . . . .	101
IV.3.2 Calibration du bruit et du gain de la chaîne d'amplification . . . . .	103
IV.3.3 Calibration de l'IQ . . . . .	105
IV.3.4 Caractérisation de la température de l'état de référence . . . . .	107
<b>IV.4 Mesure de <math>g^2(0)</math> avec et sans l'hypothèse gaussienne</b> . . . . .	<b>108</b>
IV.4.1 Acquisition et traitement des données . . . . .	108
IV.4.2 Estimation de $g^2(0)$ avec et sans hypothèse gaussienne . . . . .	108
IV.4.3 Évolution de l'erreur statistique en fonction du nombre de points de mesure . . . . .	110
IV.4.4 Vérification de l'hypothèse gaussienne sur les moments d'ordre quatre	110

---

## IV.1 Principe de la mesure

### IV.1.1 Théorie de l'amplification et ordre de grandeur

Nous souhaitons mesurer les caractéristiques d'un signal de l'ordre d'un photon sortant de notre cavité. La puissance moyenne en sortie de cavité pour un photon est  $P = \kappa h f \approx -127$  dBm ( $\kappa = 2\pi \times 8.6$  MHz,  $f = 5.878$  GHz). Un signal aussi faible ne peut être mesuré directement, il faut utiliser un amplificateur. On peut décrire le processus d'amplification d'un mode quantique  $\hat{a}$  comme [83, 84] :

$$\hat{a} \rightarrow \sqrt{G}\hat{a} + \sqrt{G-1}\hat{h}^\dagger \quad (\text{IV.1})$$

avec  $\hat{h}$  un mode bosonique inhérent au processus d'amplification et  $G$  le gain de la chaîne d'amplification. En supposant  $G \gg 1$ , le champ après amplification peut se réécrire :

$$S = \hat{a} + \hat{h}^\dagger \quad (\text{IV.2})$$

L'opérateur  $S$  commute avec  $S^\dagger$ , il s'agit donc d'une variable classique. Le but de ce chapitre est de voir comment il est possible d'extraire les moments de  $\hat{a}$  à partir de la mesure des moments de  $S$ .

### IV.1.2 Température de bruit d'un amplificateur cryogénique

L'expression IV.2 de  $S$  nous montre que le signal mesuré est la somme du signal sortant de la cavité et d'un signal ajouté par l'amplification. Le bruit ajouté par un amplificateur est caractérisé par une grandeur que l'on appelle la température de bruit  $T_{\text{ampl}}$ . La densité spectrale de puissance est [83, 85] :

$$\mathcal{P}_{\text{ampl}}(f) = k_B T_{\text{ampl}} \quad (\text{IV.3})$$

La puissance du bruit dépend de la bande passante de mesure  $\Delta f$  et de  $T_{\text{ampl}}$ . Nous avons utilisé un amplificateur cryogénique<sup>1</sup> bas bruit caractérisé par  $T_{\text{ampl}} = 2$  K. Le bruit intégré sur la bande passante d'observation  $2\Delta f$  est<sup>2</sup> :

$$P_{\text{ampl}} = 2k_B T_{\text{ampl}} \Delta f \quad (\text{IV.4})$$

Cette puissance doit être comparée à celle du signal provenant de la cavité, soit pour un photon  $P = \kappa h f$ . Le rapport de ces puissances est :

$$n_{\text{ref}} \equiv \frac{1}{G_{\text{Att}}} \frac{2k_B T_{\text{ampl}} \Delta f}{\kappa h f} = 12.6 \quad (\text{IV.5})$$

Le facteur  $G_{\text{Att}}$  permet de tenir compte des pertes entre la cavité et l'amplificateur. Nous montrerons dans la section IV.3.2 que cette atténuation est d'environ -3 dB. La puissance du bruit est équivalente à la puissance rayonnée par un champ de cavité contenant 12.6 photons. La majeure partie du signal  $S$  est du bruit ajouté par l'amplificateur et non du signal provenant de la cavité. La question soulevée est donc : comment déconvoluer des mesures des fluctuations de  $S$ , le bruit rajouté par l'amplification, pour obtenir les fluctuations de  $\hat{a}$  ?

1. modèle LNF-LNC4\_8C fabriqué par Low Noise Factory (numéro de série 071A),  $T_{\text{ampl}} = 2$  K sur une bande 4 – 8 GHz

2. Le facteur deux dans la définition de la bande passante permet de relier directement  $\Delta f$  aux caractéristiques des filtres utilisés dans l'expérience comme montré au paragraphe IV.3.3.

### IV.1.3 Technique de mesure alternée des moments

De manière habituelle on définit les quadratures d'un champ quantique comme :

$$\begin{cases} \hat{X} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{Y} &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

Les deux quadratures du champ mesuré  $S$  s'écrivent à partir de IV.6 et de IV.2 comme :

$$\begin{cases} X_S &= \hat{X} + \hat{X}_h \\ Y_S &= \hat{Y} - \hat{Y}_h \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

La formule précédente nous montre que les fluctuations quantiques de  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  que nous cherchons à mesurer ont une distribution convoluée par la distribution de bruit de l'amplificateur. Pour déconvoluer de ce bruit nous suivons la méthode proposée dans [86]. Cette méthode consiste à mesurer les moments de  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  sur l'état  $\rho$  que l'on cherche à caractériser puis à recommencer la mesure sur un état  $\rho_0$  de référence connu. Prenons le second moment de  $\hat{X}$  mesuré sur l'état  $\rho$  :

$$\langle X_S^2 \rangle_\rho = \langle \hat{X}^2 \rangle_\rho + 2 \langle \hat{X} \rangle_\rho \langle \hat{X}_h \rangle + \langle \hat{X}_h^2 \rangle = \langle \hat{X}^2 \rangle_\rho + \langle \hat{X}_h^2 \rangle \quad (\text{IV.8})$$

Nous avons ici utilisé le fait que le bruit rajouté par l'amplificateur est de valeur moyenne nulle. Le même moment pris sur la référence donne :

$$\langle X_S^2 \rangle_0 = \langle \hat{X}^2 \rangle_0 + \langle \hat{X}_h^2 \rangle \quad (\text{IV.9})$$

On note les moments mesurés pour l'état de référence avec un indice 0. En supposant que le bruit ajouté par l'amplificateur est indépendant de l'état à son entrée, on peut éliminer le bruit ajouté par l'amplification pour obtenir :

$$\langle \hat{X}^2 \rangle_\rho = \langle X_S^2 \rangle_\rho - \langle X_S^2 \rangle_0 + \langle \hat{X}^2 \rangle_0 \quad (\text{IV.10})$$

Dans [86], Eichler *et al* considèrent le cas d'un état de référence vide  $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$ . Dans notre cas, nous voulons analyser un champ avec un très faible nombre de photons moyen et nous ne pouvons pas négliger la population thermique dans l'état de référence lorsque la pompe est éteinte. Un état thermique  $\hat{\rho}_{n_{\text{th}}}$  est caractérisé par le nombre de photons thermiques  $n_{\text{th}}$ . La valeur de  $n_{\text{th}}$  sera à mesurer et on a :

$$\langle \hat{X}^2 \rangle_0 = \langle \hat{X}^2 \rangle_{\hat{\rho}_{n_{\text{th}}}} = \frac{1}{2} + n_{\text{th}} \quad (\text{IV.11})$$

La méthode que nous venons de présenter s'applique de manière similaire pour les moments d'ordre supérieur. Pour les termes croisés, on utilise les moments symétrisés qui sont ceux ayant une signification physique :

$$\langle \hat{X}^n \hat{Y}^m \rangle^s = \frac{1}{2} \left( \langle \hat{X}^n \hat{Y}^m \rangle + \langle \hat{Y}^m \hat{X}^n \rangle \right) \quad (\text{IV.12})$$

L'annexe F donne l'ensemble des expressions des moments de  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  pour l'état  $\rho$  en fonction des moments de  $X_S$  et  $Y_S$  mesurés dans l'état  $\rho$  et  $\rho_0$ .

## IV.2 Évaluation du rapport signal à bruit

Nous allons maintenant estimer le rapport signal à bruit de la mesure des moments obtenus au paragraphe précédent et de la mesure de  $g^2(0)$  calculée à partir de ces moments.

### IV.2.1 Rappel sur la mesure de $g^2(0)$

Afin d'établir le rapport signal à bruit de notre protocole de mesure, revoyons le lien entre les moments de la distribution et  $g^2(0)$ .

#### Moments d'ordre un

Les moments d'ordre un du champ sont reliés à la partie classique,  $\alpha$ , du champ peuplant la cavité.

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \langle \hat{X} \rangle + i \langle \hat{Y} \rangle \right) = |\alpha| e^{i\phi} \quad (\text{IV.13})$$

#### Moments d'ordre deux et hypothèse gaussienne

En faisant l'hypothèse d'un état gaussien, nous avons vu au chapitre I que nous pouvions obtenir la fonction de corrélation d'ordre 2 qui vaut en fonction des paramètres de l'état I.47 :

$$g^2(0) = 1 + \frac{2 |\alpha|^2 (n + |s| \cos(\theta - 2\phi)) + |s|^2 + n^2}{(|\alpha|^2 + n)^2} \quad (\text{IV.14})$$

Il faut relier  $n$  et  $s$  aux moments mesurés. Le plus simple est d'introduire la matrice de covariance :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2 & \frac{1}{2} \langle \hat{X} \hat{Y} + \hat{Y} \hat{X} \rangle - \langle \hat{X} \rangle \langle \hat{Y} \rangle \\ \frac{1}{2} \langle \hat{X} \hat{Y} + \hat{Y} \hat{X} \rangle - \langle \hat{X} \rangle \langle \hat{Y} \rangle & \langle \hat{Y}^2 \rangle - \langle \hat{Y} \rangle^2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

On a alors :

$$n = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} - 1) \quad (\text{IV.16})$$

$$s = \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + i\sigma_{12} \quad (\text{IV.17})$$

#### Moments d'ordre quatre et mesure directe de $g^2(0)$

La fonction  $g^2(0)$ , sans hypothèse gaussienne, s'écrit :

$$g^2(0) = \frac{3 - 4 \langle \hat{X}^2 \rangle - 4 \langle \hat{Y}^2 \rangle + \langle \hat{X}^4 \rangle + \langle \hat{Y}^4 \rangle + \langle \hat{X}^2 \hat{Y}^2 + \hat{Y}^2 \hat{X}^2 \rangle}{(\langle \hat{X}^2 \rangle + \langle \hat{Y}^2 \rangle - 1)^2} \quad (\text{IV.18})$$

On voit que nous pouvons mesurer  $g^2(0)$  de deux manières. Soit on mesure les moments de  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  jusqu'à l'ordre 4 et on utilise la formule IV.18, soit on suppose l'état gaussien et on utilise la formule IV.14 et la mesure des moments d'ordre 2. Ces deux méthodes se distinguent principalement par la différence de signal à bruit comme nous allons le montrer.

### IV.2.2 Calcul de la densité de probabilité des quadratures mesurées

La distribution de probabilité du signal après amplification est le produit de convolution des distributions individuelles comme montré dans [87]. Formellement on note  $D_\rho(R_m)$  la distribution de probabilité associée à la variable  $R_m = \begin{pmatrix} X_m \\ Y_m \end{pmatrix}$ . Lorsque le système est dans l'état  $\rho$  on a [86] :

$$D_\rho(R_m) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\Lambda W_1[\rho_h](R_m - \Lambda)W_{-1}[\rho](\Lambda) \quad (\text{IV.19})$$

où  $W_s$  est la fonction de Wigner généralisée d'ordre  $s$  [88] et  $\rho_h$  la matrice densité du bruit ajouté par l'amplificateur. On montre dans l'annexe C que cette convolution de fonction de Wigner gaussienne, donne une gaussienne :

$$D_\rho(R_m) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(R_m - \langle \hat{R} \rangle)^T(\sigma_h + \sigma)^{-1}(R_m - \langle \hat{R} \rangle)\right\}}{\pi\sqrt{\det[(\sigma_h + \sigma)]}} \quad (\text{IV.20})$$

où nous avons utilisé  $\sigma$  la matrice de covariance de l'état  $\rho$  et  $\sigma_h$  la matrice de covariance du bruit ajouté par l'amplificateur où  $\sigma_h$  est donnée par :

$$\sigma_h = n_{\text{ref}} \times \mathbb{1}_{2 \times 2} \quad (\text{IV.21})$$

avec  $n_{\text{ref}}$  précédemment défini dans IV.5. Comme attendu, nous obtenons une distribution gaussienne dont la variance est augmentée du bruit de l'amplificateur.

### IV.2.3 Simulation de l'erreur statistique

L'évaluation des moments du champ sortant de la cavité repose sur la déconvolution de deux distributions statistiques. Pour établir le rapport signal à bruit de cette procédure, nous avons réalisé la simulation numérique de notre méthode en effectuant des tirages aléatoires. On choisit les paramètres de la cavité  $n$ ,  $s$  et  $n_{\text{th}}$  ce qui nous permet de connaître  $\sigma$  la matrice de covariance de la cavité. Lorsque la cavité n'est pas pompée, elle est dans l'état vide caractérisé par  $\alpha = 0$ ,  $n = 0$ ,  $s = 0$ . On obtient ainsi  $\sigma_0 = \frac{1}{2} \times \mathbb{1}_{2 \times 2}$  matrice de covariance du vide. On choisit des paramètres d'amplification identiques à l'expérience en imposant  $\sigma_h = n_{\text{ref}} \times \mathbb{1}_{2 \times 2}$ . Les étapes de la simulation sont les suivantes :

- On tire un ensemble de  $N$  couples  $\{(X_i, Y_i)\}$  à l'aide de la formule IV.20 dans une distribution gaussienne de covariance  $\sigma + \sigma_h$ , ce qui simule notre mesure.
- On tire de même un ensemble de  $N$  couples  $\{(X_i^0, Y_i^0)\}$  en imposant une covariance de  $\sigma_0 + \sigma_h$ , ce qui constitue notre référence.
- On calcule les moments issus de la cavité en appliquant les formules présentées dans l'annexe F.
- On déduit  $g^2(0)$  à partir de la formule IV.14 si l'on suppose l'état gaussien ou bien directement à partir de la formule IV.18.

Toutes les grandeurs permettant de calculer  $g^2(0)$  sont estimées et les erreurs faites sur ces estimations se répercutent sur la variance de  $g^2(0)$ . Afin de connaître les différentes variances, on effectue 100 fois la procédure précédemment décrite. Sur la figure IV.1 on représente les variances obtenues pour les différentes grandeurs nécessaires à l'évaluation de  $g^2(0)$  en fonction du nombre de points  $N$ . On voit que les variances suivent une loi en  $1/N$  comme attendu pour des variables gaussiennes. On représente en trait pointillé l'ajustement des points de simulation avec cette loi. On en déduit ainsi la variance associée à chaque moment et à l'estimation de  $g^2(0)$  avec et sans hypothèse gaussienne, respectivement repérée par un indice HG et SHG dans la figure IV.1.

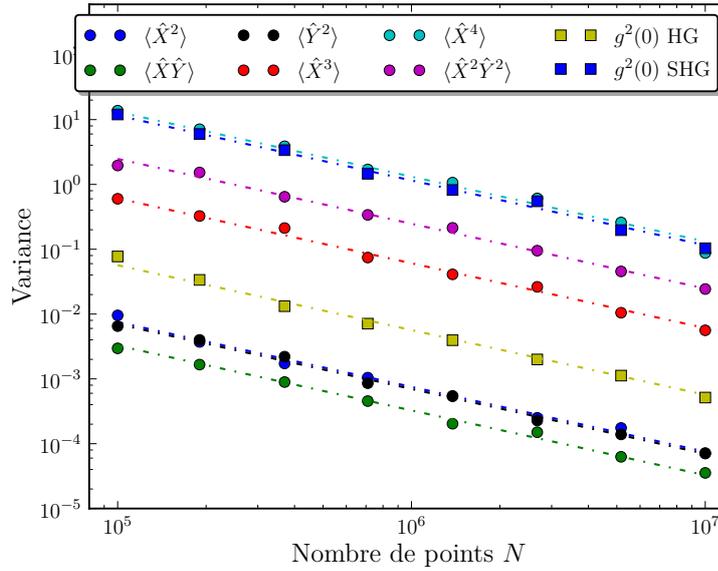


FIGURE IV.1 – Variance obtenue en effectuant 100 fois la même simulation sur les différents estimateurs nécessaires à la détermination de  $g^2(0)$ . En trait pointillé on représente l'ajustement à une courbe en  $1/N$ . Les paramètres utilisés sont  $\alpha = \sqrt{0.7}e^{0.2i}$ ,  $n = 5.76 \times 10^{-2}$ ,  $s = 2.47 \times 10^{-1}$  menant à  $g^2(0) = 0.65$  optimum pour cette population de cavité. Le bruit de l'amplificateur a pour matrice des covariances  $\sigma_h = 12.6\mathbb{1}_{2 \times 2}$ .

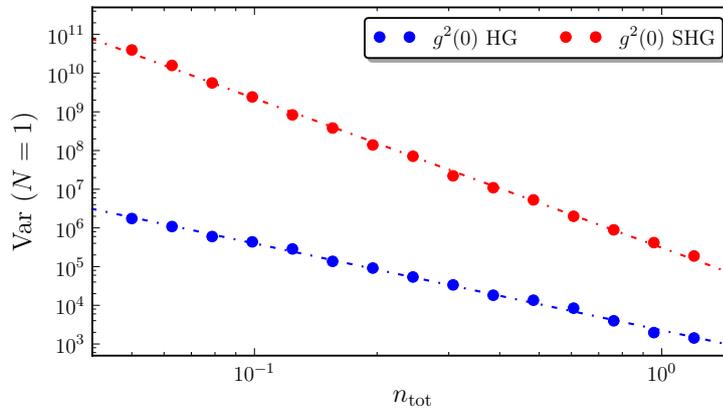


FIGURE IV.2 – Variance de l'estimateur de  $g^2(0)$  pour différentes populations  $n_{\text{tot}}$  de cavité avec et sans l'hypothèse gaussienne. L'ajustement aux données est fait avec une courbe du type  $\beta n_{\text{tot}}^\gamma$ . Les paramètres de  $n$  et  $s$  sont ajustés pour chaque  $n_{\text{tot}}$  de manière à minimiser  $g^2(0)$  pour chaque population de cavité. Les paramètres d'amplification sont les mêmes que pour la figure IV.1.

Les courbes des variances montrées sur la figure IV.1 sont indépendantes du nombre de photons lorsque l'on considère les moments mais ce n'est pas le cas pour  $g^2(0)$ . Nous avons donc reproduit l'étude précédente pour différents nombres de photons. Sur la figure IV.2 on représente la variance de l'estimateur de  $g^2(0)$  pour  $N = 1$ , avec et sans hypothèse gaussienne en fonction du nombre de photons dans la cavité  $n_{\text{tot}}$ . On ajuste les résultats obtenus avec une loi de puissance de la forme  $\beta n_{\text{tot}}^\gamma$ . Si on utilise l'hypothèse gaussienne on trouve un exposant  $\gamma = -2.24$ . Sans hypothèse on trouve un exposant  $\gamma = -3.86$ . Effectuons une application numérique pour une valeur proche de celle que nous utiliserons expérimentalement. Pour  $n_{\text{tot}} = 0.05$ , la valeur minimum observable est de  $g^2(0) = 0.15$ . Pour obtenir une erreur statistique de 0.1 sur la mesure de  $g^2(0)$  il faudra acquérir  $1.9 \times 10^8$  points de mesure dans l'hypothèse gaussienne et  $3.2 \times 10^{12}$  points sans cette hypothèse correspondant à une durée d'acquisition respective de 1.9 seconde et 8.9 heure.

### IV.3 Dispositif expérimental et traitement des données

#### IV.3.1 Chaîne de mesure

On présente sur la figure IV.3 la chaîne de mesure. La partie concernant la ligne de pompe et la ligne d'amplification à l'intérieur du cryostat ont été décrites dans le chapitre II.1. On les représente de manière simplifiée pour permettre une vue d'ensemble. On représente en trait pointillé l'échantillon. La cavité linéaire est connectée au monde extérieur tandis que la cavité non-linéaire est connectée sur des résistances de 50 Ω ancrées thermiquement sur la plaque à 10 mK.

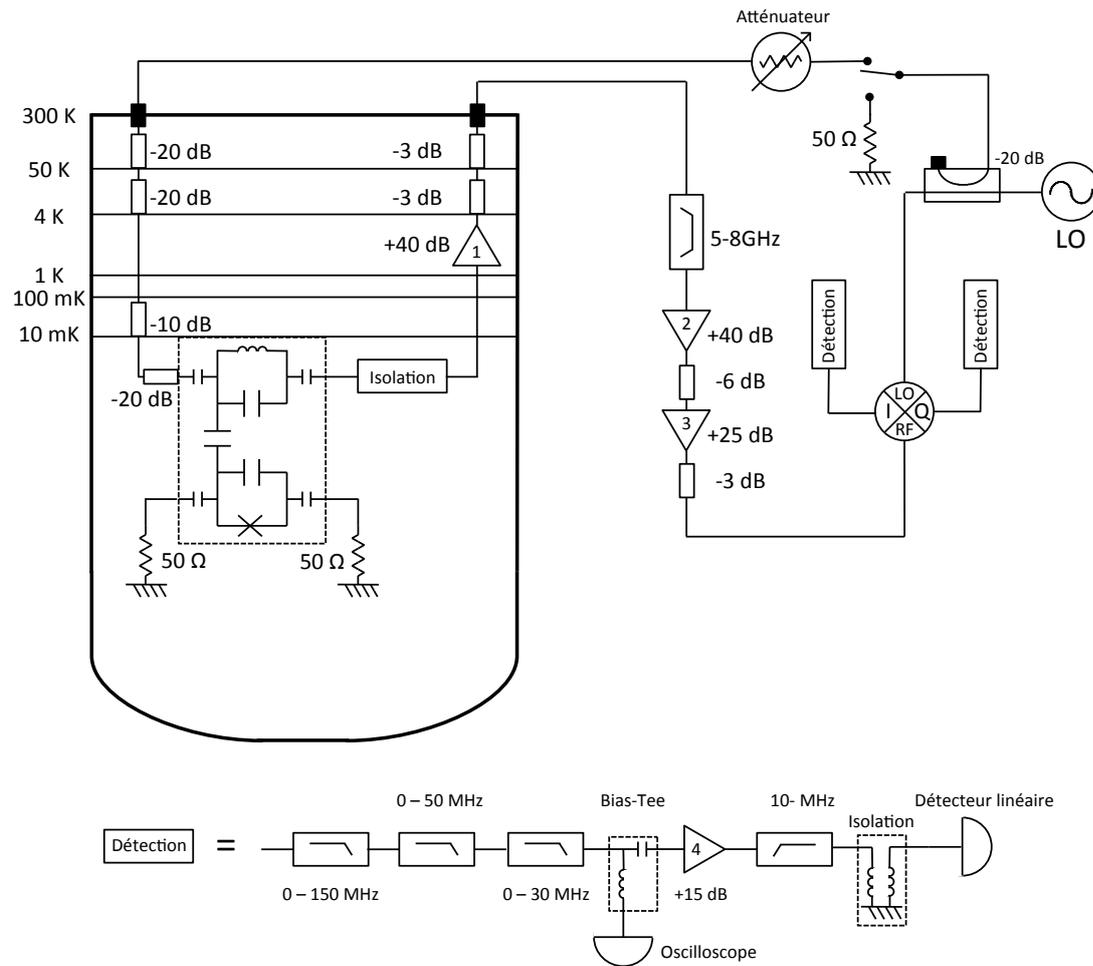


FIGURE IV.3 – Schéma du montage cryogénique. Sur la gauche la partie refroidie, sur la droite la chaîne d'amplification. En bas, la chaîne de détection à température ambiante.

### Adaptation du niveau de pompe

Pour pomper la cavité, on dispose d'un générateur RF<sup>3</sup> accordable en fréquence. Le signal à la sortie est fixé à 8 dBm pendant toutes les expériences. Ce signal est divisé en deux, on en prélève -20 dB à l'aide d'un coupleur directionnel pour pomper la cavité. Le reste sert d'oscillateur local pour le mixer IQ. La voie qui conduit à la cavité est reliée à un switch mécanique qui permet de choisir entre le signal provenant d'une 50  $\Omega$  ou celui venant du générateur. La position du switch détermine si la cavité est en position pompée, ou si elle est dans son état de référence. Après le switch, on place un atténuateur<sup>4</sup> programmable entre 0 et -30 dB. L'ensemble de la ligne a des pertes de l'ordre de 5 dB. Si l'atténuateur variable est réglé à -15 dB la puissance en entrée de l'échantillon est donc de -102 dBm. Nous allons nous placer dans un régime où les cavités sont à résonance et pompées au minimum de transmission qui est de -35 dB. Nous aurons ainsi une puissance moyenne de -137 dBm dans la cavité, correspondant bien à une population moyenne de moins de 1 photon.

### Adaptation des niveaux dans la chaîne d'amplification

Nous avons montré que pour un photon dans la cavité la puissance en sortie de l'échantillon est de -127 dBm. Le premier amplificateur<sup>5</sup> amplifie le signal de +40 dB et rajoute un bruit correspondant à une température de 2 K. Le second<sup>6</sup> amplifie le signal de +40 dB avec une température de bruit de 110 K. On peut facilement montrer que le bruit total ajouté est totalement dominé par le bruit ajouté par le premier amplificateur pour peu que celui-ci ait un gain suffisamment grand, ce qui est le cas ici, ainsi que pour le dernier amplificateur<sup>7</sup> qui amplifie de +25 dB.

Une fois le signal suffisamment amplifié, on l'envoie dans un mixer IQ<sup>8</sup>. Le mixer IQ comporte deux voies de sortie que l'on branche à notre chaîne de détection. À la sortie de l'IQ le signal d'intérêt est la superposition d'un signal DC et d'un signal AC de quelques dizaines de MHz. Afin de détecter correctement ce signal, nous avons réalisé deux voies de détection symétriques (une pour chaque sortie de l'IQ) comme suit :

**Filtrage** On réduit la bande passante de détection à l'aide de trois filtres passe-bas<sup>9 10 11</sup>. La fréquence de coupure haute est de 35 MHz.

**Partie DC** On sépare la partie DC de la partie AC à l'aide d'un Bias-Tee<sup>12</sup>. On détecte la partie DC avec un oscilloscope<sup>13</sup>

**Amplification** Le signal doit de nouveau être amplifié pour avoir la bonne amplitude. On utilise un amplificateur<sup>14</sup> de gain +15 dB.

**Filtrage** On filtre de nouveau le signal avec un filtre passe-haut<sup>15</sup> coupant à 10 MHz.

3. SynthHD : 54MHz - 13.6 GHz Dual Channel Microwave Generator

4. RDCAT-8000-30

5. voir 1

6. modèle AFS4-00100800-14-10P-4 fabriqué par Miteq (numéro de série 1115690),  $T_n = 110$  K.

7. modèle LCA-018 fabriqué par Narda-Miteq,  $T_n = 530$  K

8. Marki 4509LXP

9. VLF80 (minicircuits)

10. BLP-50 (minicircuits)

11. BLP-30 (minicircuits)

12. ZFBT-6GW+ (minicircuits)

13. Lecroy Wavesurfer

14. ZFL-500 (minicircuits)

15. Fait maison

**Isolation** A l'aide d'un transformateur d'isolation<sup>16</sup> on s'assure qu'il n'y a pas de problème de boucle de masse entre la carte d'acquisition et le reste de l'expérience. Ceci est nécessaire pour effectuer une bonne mesure de la partie DC.

**Détection** Enfin, dernier élément du montage, on détecte la partie AC à l'aide d'une carte d'acquisition<sup>17</sup>. Cette carte acquiert  $200 \times 10^6$  points par seconde sur 14 bits.

La question de l'adaptation du niveau du signal dans la chaîne d'amplification et de détection se pose deux fois. Tout d'abord les amplificateurs et le mixer IQ acceptent une puissance maximum, appelée point de compression, au-delà de laquelle leur réponse n'est plus linéaire. Ce point de compression est en général de l'ordre du dBm. Dans notre cas, la puissance du signal en fin de chaîne d'amplification est donnée par le bruit émis par le premier amplificateur sur la bande passante imposée par le filtre large bande multiplié par le gain soit :  $-13$  dBm. Nous sommes donc bien en régime linéaire. Le second point est qu'il faut que le signal ait une amplitude adaptée par rapport au détecteur. Dans ce cas la bande passante à considérer est la bande passante imposée par les filtres après l'IQ. Pour  $2$  K de température de bruit, un gain de  $100$  dB et une bande passante de  $24$  MHz on trouve une puissance de  $-16$  dBm en entrée de carte. L'impédance d'entrée de la carte est de  $50 \Omega$ , la variance de la tension en entrée de la carte sera donc typiquement de  $36$  mV, pour un signal d'entrée maximal de  $\pm 1$  V digitalisé sur 14 bit.

### IV.3.2 Calibration du bruit et du gain de la chaîne d'amplification

#### Bruit de grenaille d'une jonction tunnel

Une manière de calibrer le gain et la température de bruit de notre chaîne d'amplification est d'utiliser une source de bruit calibrée en entrée de l'amplificateur. Pour ce faire nous avons remplacé l'échantillon par une jonction tunnel d'impédance  $50 \Omega$ . La jonction est en aluminium, mais maintenue dans son état normal à l'aide d'un aimant néodyme. Le courant la traversant a des fluctuations (aussi appelées bruit de grenaille ou shot-noise) à toutes fréquences  $f$  dépendant du courant de polarisation continu  $I$ . La puissance dissipée dans notre système d'impédance  $Z_0 = 50 \Omega$  par unité de bande passante associée à ces fluctuations s'écrit [89] :

$$\mathcal{P}_{\text{Jonction}}(f) = Z_0 \delta I^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{eR_J I + hf}{k_B T_e}}{\tanh \frac{eR_J I + hf}{2k_B T_e}} + \frac{\frac{eR_J I - hf}{k_B T_e}}{\tanh \frac{eR_J I - hf}{2k_B T_e}} \right) k_B T_e \quad (\text{IV.22})$$

où  $R_J = 50 \Omega$  est l'impédance de la jonction et  $T_e$  est la température électronique au niveau de la jonction. À ces fluctuations, il faut ajouter le bruit émis par l'amplificateur  $\delta P_{\text{ampl}}$  précédemment introduit IV.3. Après amplification avec un gain  $G$ , la puissance totale intégrée sur bande de largeur  $\Delta f$  est donnée par :

$$P_{\text{SN}} = (\mathcal{P}_{\text{ampl}} + 2G_{\text{Att}} \mathcal{P}_{\text{Jonction}}) 2\Delta f G \quad (\text{IV.23})$$

Le facteur  $G_{\text{Att}}$  permet de prendre en compte d'éventuelles pertes entre la jonction et l'amplificateur, comme précédemment introduit.

16. FTB-1-1 (minicircuits)

17. Carte X5-400M intégrée à un ordinateur eInstrument-PC fabriqué par Innovative Integration

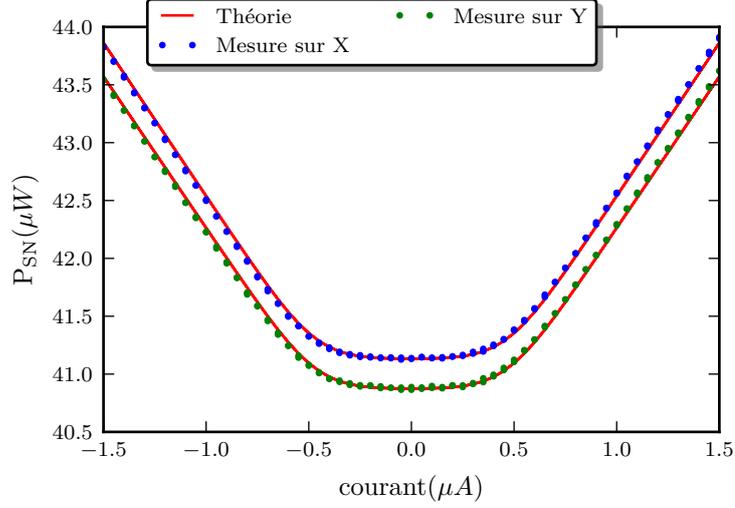


FIGURE IV.4 – Les points bleus représentent la puissance mesurée, la courbe rouge l’ajustement des données avec le modèle IV.23. On trouve  $T_e = 41.5$  mK,  $G = 98$  dB et  $T_{\text{ampl}} = 4.8$  K

### Résultats expérimentaux

On mesure ces fluctuations à l’aide du schéma de détection déjà introduit. La jonction est montée sur un Bias-Tee ce qui permet de la polariser avec un courant DC. On règle la source à 6 GHz. On présente la variation de  $P_{SN}$  en fonction du courant de polarisation  $I$  sur la figure IV.4. L’ajustement avec la formule IV.23 donne  $T_e = 41.5$  mK,  $G = 98$  dB et  $T_{\text{ampl}} = 4.8$  K pour  $G_{\text{Att}} = 0$  dB. La température électronique est plus élevée que la température de base du cryostat, nous estimons que cet excès de température est dû à un chauffage par la ligne DC qui polarise la jonction. En ce qui concerne le gain on trouve un résultat cohérent avec les mesures RF du chapitre III, on observe néanmoins que les voies de détection  $X$  et  $Y$  sont légèrement asymétriques. Nous reviendrons sur l’effet de cette asymétrie sur la mesure de  $g^2(0)$  dans la section suivante. Cette mesure permet aussi de vérifier que l’ensemble de la ligne d’amplification a bien une réponse linéaire, comme attendu.

Enfin, la température de bruit extraite est de  $T_{\text{ampl}} = 4.8$  K si on considère  $G_{\text{Att}} = 0$  dB. La température attendue est de 2 K, ce qui indique que les pertes entre la jonction et l’amplificateur sont de  $-3.8$  dB. Le bruit de la jonction est mesuré à travers un Bias-Tee qui n’est pas présent dans le montage final. Cette mesure n’est donc pas une calibration exacte des pertes entre l’échantillon et l’amplificateur et ne donne qu’un ordre de grandeur de ces pertes. Nous considérons pour traiter les données que  $G_{\text{Att}} = -3$  dB et nous tiendrons compte de l’erreur systématique induite par cette hypothèse en faisant varier  $G_{\text{Att}}$  entre  $-2$  dB et  $-6$  dB. Ceci est équivalent à dire que la température de bruit effective,  $G_{\text{Att}}T_{\text{ampl}}$  de l’amplification est comprise entre 3.2 K et 8 K.

### IV.3.3 Calibration de l'IQ

#### Mesure des imperfections de l'IQ avec un bruit blanc

Lorsque la cavité n'est pas pompée, le signal remontant dans notre chaîne est le bruit de l'amplificateur cryogénique. Avec le schéma de mesure précédemment présenté, on acquiert un signal de  $8.4 \times 10^6$  points. On représente sur la figure IV.5 l'histogramme bidimensionnel des grandeurs  $X$  et  $Y$  ainsi que les histogrammes pour chaque quadrature. On peut calculer la matrice des covariances et les valeurs moyennes :

$$\begin{aligned}\sigma_X &\equiv \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = 0.110 \text{ V}^2 & \langle X \rangle &= -0.6 \text{ mV} \\ \sigma_Y &= 0.104 \text{ V}^2 & \langle Y \rangle &= -0.4 \text{ mV} \\ \sigma_{XY} &\equiv \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle = -1.47 \text{ mV}\end{aligned}$$

Cette mesure met plusieurs problèmes en évidence. On s'aperçoit que  $\sigma_X$  et  $\sigma_Y$  sont légèrement différentes, indiquant une asymétrie des gains sur chaque voie. Ensuite on voit qu'il existe un offset dû à la carte d'acquisition. La soustraction de cet offset dans les moments mesurés se fait comme présenté dans l'annexe D. Enfin, on constate que  $\sigma_{XY}$  n'est pas nulle. Or le bruit émis par l'amplificateur ne peut pas être corrélé à l'oscillateur local. Cette corrélation entre les voies  $X$  et  $Y$  est due aux imperfections du mixer IQ et aux filtres après l'IQ.

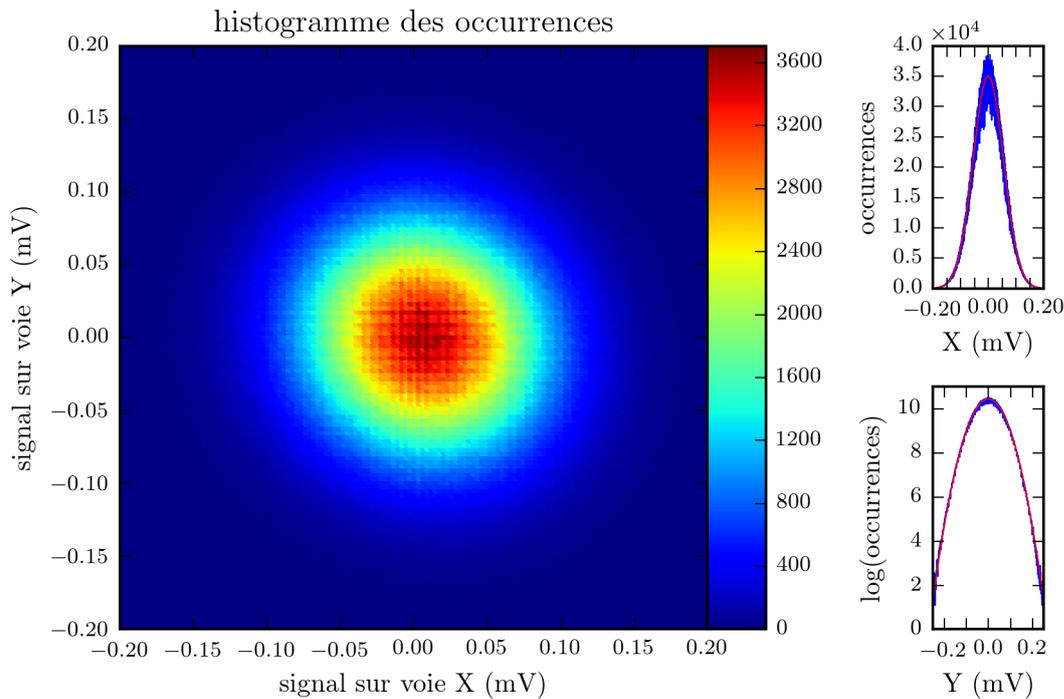


FIGURE IV.5 – Histogramme 2D du nombre d'occurrences sur les voies  $X$  et  $Y$  pour une acquisition, cavité non pompée, contenant  $8.4 \times 10^6$  points. Sur la droite les histogrammes de chaque voie. En haut  $X$  en échelle linéaire et à droite  $Y$  en échelle logarithmique. En rouge on représente un ajustement des données avec une fonction gaussienne.

### Modélisation et correction des imperfections de l'IQ

Nous avons modélisé le passage des quadratures du signal amplifié  $X_S, Y_S$  aux quadratures mesurées  $X_m, Y_m$  par un gain et une erreur  $\epsilon$  indépendante de la fréquence :

$$\begin{cases} X_m &= \sqrt{G_X} X_S \\ Y_m &= \sqrt{G_Y} (Y_S + \epsilon X_S) \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

$G_X$  et  $G_Y$  décrivent le gain de chaque voie. Nous avons présenté dans la section IV.1.3 notre protocole d'acquisition qui repose sur les mesures successives de la cavité puis d'une référence. Cette mesure de référence nous sert d'étalon pour déterminer à chaque point de mesure les gains associés à chaque voie et l'erreur  $\epsilon$ . Dans l'annexe E, on montre comment déterminer  $G_X, G_Y$  et  $\epsilon$  et ainsi comment déduire les moments de  $X_S$  et  $Y_S$  à partir de la mesure de ceux de  $X_m$  et  $Y_m$ . L'hypothèse utilisée est que l'amplificateur émet un bruit isotrope de variance  $n_{\text{ref}}$ .

### Caractérisation de la chaîne de détection en fonction de la fréquence

La mesure des moments retournés par la carte est une mesure des fluctuations intégrée sur la bande passante fixée par les filtres après l'IQ. Dans ce paragraphe, nous allons considérer l'effet de la dépendance en fréquence des gains  $G_X$  et  $G_Y$  sur la mesure des moments et montrer que cela n'impacte pas le minimum de  $g^2(0)$  mesuré. La transmission de chaque voie entre la sortie de l'IQ et l'entrée de la carte d'acquisition est représentée sur la figure IV.6.

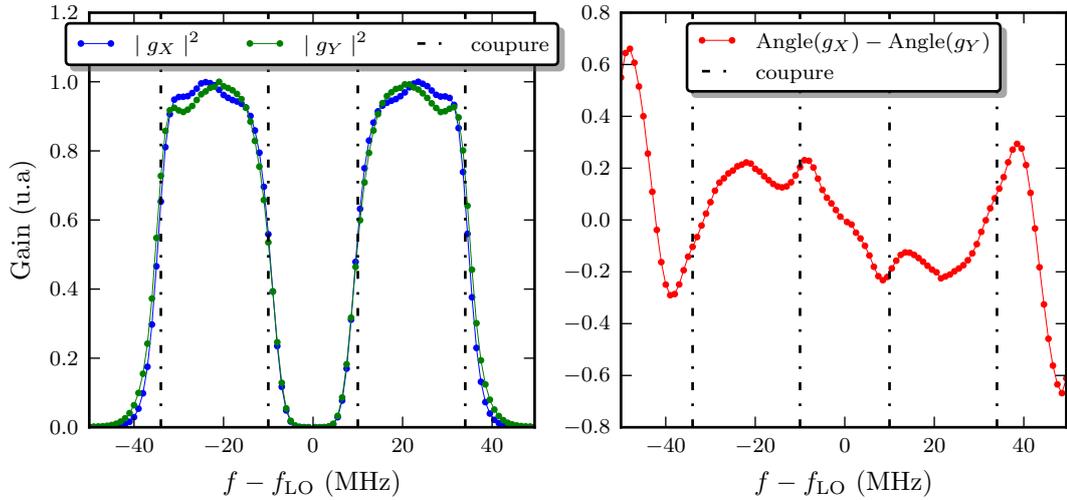


FIGURE IV.6 – Fonction de transfert des deux filtres sur les voies  $X$  et  $Y$ . À gauche on représente le module de la transmission normalisé. À droite on représente la différence de phase entre les deux voies.

La différence de déphasage entre les voies contribue à augmenter  $\sigma_{XY}$  et s'ajoute à l'erreur  $\epsilon$  du mixer. Dans l'annexe A on montre que grâce à la modélisation en termes d'états gaussiens on peut prendre en compte l'effet d'un filtrage dépendant de la fréquence et différent sur les voies  $X$  et  $Y$ . On montre que notre méthode de correction avec le modèle effectif indépendant de la

fréquence IV.24 permet une bonne correction. Par la suite nous négligerons l'erreur systématique introduite par la dépendance fréquentielle de  $G_X$  et  $G_Y$ .

### IV.3.4 Caractérisation de la température de l'état de référence

La cavité elle est connectée au monde extérieur par les lignes RF qui amènent un rayonnement thermique. Nous avons montré au chapitre II.1 comment calculer la population de ce rayonnement en fonction des éléments RF et des températures de chaque étage du cryostat. Au chapitre III, nous avons déterminé l'équation maîtresse III.22 régissant la dynamique du champ dans la cavité. Cette équation permet de tenir compte du nombre de photons thermiques  $n_{\text{th}_l}$  ( $l=1,2,3,4$ ) en entrée de chaque port du système qui dans notre cas sera :

**Port 1 :** Ligne de pompe : avec notre atténuation nous avons une température équivalente à  $T = 68$  mK correspond à  $n_{\text{th}_1} = 1.5 \times 10^{-3}$

**Port 2 :** Ligne d'observation : grâce aux isolateurs nous avons calculé  $T = 39$  mK correspond à  $n_{\text{th}_2} = 6.5 \times 10^{-4}$

**Port 3,4 :** Ces ports sont connectés à une résistance de  $50 \Omega$  thermalisée à  $10$  mK assurant une population thermique de  $n_{\text{th}_{3,4}} = 3.1 \times 10^{-12}$

Nous pouvons alors résoudre numériquement l'équation maîtresse III.22 en prenant en compte ces différentes températures. L'ensemble des autres paramètres caractérisant notre échantillon a été déterminé au chapitre III. On représente sur la figure IV.7 en bleu la population thermique dans la cavité non-linéaire et en vert celle de la cavité linéaire en fonction de la fréquence de la cavité non-linéaire. En pointillé noir, on représente les limites de la zone de fréquence où l'on fera des mesures de  $g^2(0)$  et enfin, le trait vertical vert représente la fréquence de la cavité linéaire. Lorsque les cavités se couplent, les populations thermiques s'équilibrent entre les deux cavités. Dans la zone de mesure, la population dans la cavité linéaire varie entre  $7.5 \times 10^{-4}$  et  $9.3 \times 10^{-4}$ , nous la considérons comme constante et égale à  $7.8 \times 10^{-4}$  (correspondant à une température effective de  $T = 39.4$  mK). Cette valeur de température est utilisée pour traiter toutes les données au chapitre V.

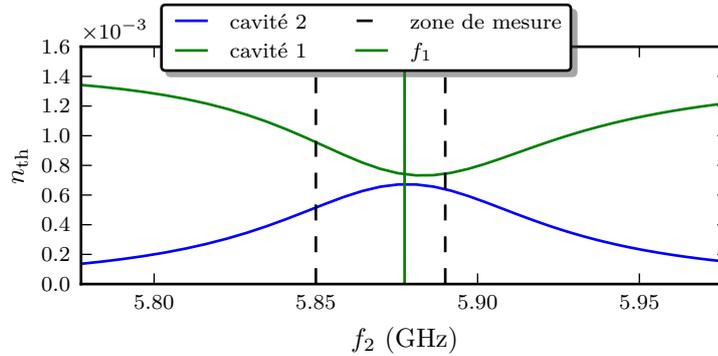


FIGURE IV.7 – Population thermique des cavités en fonction de la fréquence de la cavité 2. En vert, la population dans la cavité 1, et en bleu, dans la cavité 2. Le trait plein vert représente la fréquence de la cavité 1 et les traits pointillés la zone de fréquence que nous explorerons expérimentalement.

## IV.4 Mesure de $g^2(0)$ avec et sans l'hypothèse gaussienne

### IV.4.1 Acquisition et traitement des données

#### Acquisition par paquets et calcul en temps réel

Pour mesurer les moments des fluctuations quantiques du champ, on utilise une carte d'acquisition avec un échantillonnage à une fréquence de 200 MHz. Nous acquérons le signal par paquets de  $N = 84 \times 10^6$  points. Le signal ainsi échantillonné donne deux distributions de points, une pour chaque quadrature. On peut calculer les moments des deux distributions jusqu'à l'ordre 2 ou 4 en temps réel. Ce sont ces moments qui constituent les données brutes de l'expérience. On acquiert  $N$  point de mesure, puis  $N$  point de référence en l'espace d'une 1 s. Cette procédure permet de s'affranchir des dérives lentes de la chaîne d'amplification.

#### Méthode de traitements des données

Nous pouvons maintenant résumer l'ensemble du protocole de mesure :

**Mesure** On mesure  $N$  points lorsque la cavité est pompée. On mesure  $N$  points cavité non-pompée, cette mesure constitue notre référence. On calcule les moments associés à chaque distribution. Cette mesure peut-être répétée  $N_p$  fois pour améliorer la statistique.

**Corrections des imperfections de l'IQ** On déduit des mesures de référence les offsets. On corrige les offsets sur la mesure et la référence en suivant l'annexe D. On déduit de la référence ainsi corrigée les gains et l'erreur  $\epsilon$ . On utilise ensuite les formules de l'annexe E pour obtenir les moments corrigés de l'erreur  $\epsilon$  et des gains calibrés sur le bruit thermique de l'amplificateur qui nous sert de référence.

**Calcul des moments de la cavité** On suit la procédure de l'annexe F pour calculer les moments de la cavité à partir de la mesure pompe allumée et de la mesure de référence.

**Calcul de  $g^2(0)$**  Les étapes précédentes nous donnent  $N_p$  estimations de chaque moment. Nous moyennons ces estimations pour obtenir la valeur finale pour chaque moment. De ces valeurs nous calculons  $g^2(0)$  avec la formule IV.14 pour un état gaussien ou la formule IV.18 sans hypothèse gaussienne.

### IV.4.2 Estimation de $g^2(0)$ avec et sans hypothèse gaussienne

Pour vérifier que nous estimons correctement  $g^2(0)$  avec et sans hypothèse gaussienne, nous avons choisi un point où d'après nos simulations, les deux calculs doivent donner le même résultat. Nous avons mesuré  $N_p = 40000$  paquets de  $N$  points de mesure du paragraphe précédent. Pour chaque paquet, on estime  $g^2(0)$  avec ou sans hypothèse gaussienne. On obtient ainsi deux ensembles d'estimation  $\{g^2(0)\}_{\text{HG}}$  et  $\{g^2(0)\}_{\text{SHG}}$ . On représente sur la figure IV.8 l'histogramme de ces deux ensembles. On représente avec un trait rouge la moyenne de ces estimations. La distribution  $\{g^2(0)\}_{\text{SHG}}$  est bien ajustée par une gaussienne (en vert). L'erreur statistique est donc donnée par la déviation standard de cette gaussienne divisée par  $\sqrt{N_p}$ . L'estimation de  $g^2(0)$  donne  $g^2(0) = 0.82 \pm 0.14$ .

Dans le cas où on effectue l'hypothèse gaussienne, la distribution de  $\{g^2(0)\}_{\text{HG}}$  n'est pas gaussienne. Ceci s'explique par le fait que, bien que les moments d'ordre 1 et 2 soient des variables gaussiennes, la fonction qui les relie à  $g^2(0)$  est non-linéaire. Si on moyenne les 40000 moments estimés puis que l'on calcule  $g^2(0)$ , on trouve  $g^2(0) = 0.765$ . En revanche si on estime

40000 fois  $g^2(0)$  puis que l'on moyenne les résultats obtenus, on trouve  $g^2(0) = 0.718$ . Cette sous-estimation de  $g^2(0)$  est due à la longue queue de la distribution vers les basses valeurs de  $g^2(0)$  visible sur l'histogramme de  $\{g^2(0)\}_{\text{HG}}$ .

Pour résoudre ce problème, il faut augmenter le nombre de paquets  $N_p$  utilisés pour calculer les moments avant de calculer  $g^2(0)$ . Sur la figure IV.9 on présente l'histogramme de deux distributions :  $\{g^2(0)\}_{\text{HG}, N_p=5}$  et  $\{g^2(0)\}_{\text{HG}, N_p=20}$ . On voit que le fait d'augmenter  $N_p$  rend la distribution gaussienne. Pour  $N_p = 20$ , la distribution est bien ajustée par une fonction gaussienne. Pour la suite de ce travail on utilisera un nombre minimum de  $N_p = 20$  pour estimer  $g^2(0)$  avec l'hypothèse gaussienne, ceci permet d'obtenir un estimateur non biaisé de  $g^2(0)$  dans l'hypothèse gaussienne.

Pour estimer l'erreur statistique d'une mesure avec  $N_p = 20$ , nous employons une technique de type Monte-Carlo. Nous estimons la valeur moyenne et la variance de chaque moment à partir des  $N_p$  mesures et tirons au sort 5000 réalisations de l'expérience en utilisant ces valeurs. Nous en déduisons une déviation standard pour  $g^2(0)$ . Pour montrer la validité de cette méthode, prenons la distribution  $\{g^2(0)\}_{\text{HG}, N_p=20}$ . Sa déviation standard est de  $2.4 \times 10^{-3}$ . Si l'on prend maintenant un point au hasard dans cette distribution et que l'on applique la méthode que nous venons de présenter, on trouve une déviation standard de  $2.2 \times 10^{-3}$ .

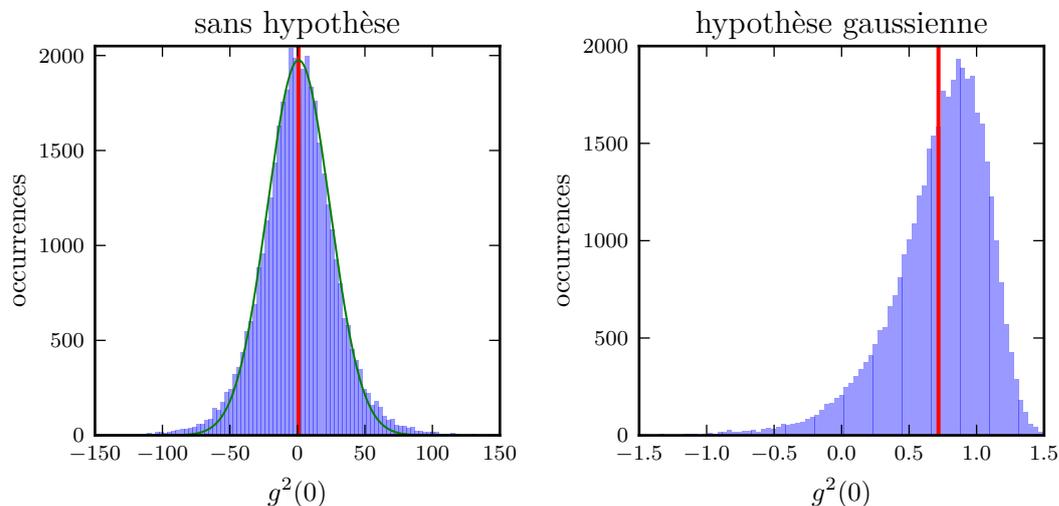


FIGURE IV.8 – Histogrammes des 40000 points de mesure utilisés pour mesurer  $g^2(0)$  avec et sans hypothèse gaussienne. Sur la gauche, l'histogramme des  $\{g^2(0)\}_{\text{SHG}}$ , en vert on représente l'ajustement d'une gaussienne à cette distribution. Sur la droite,  $\{g^2(0)\}_{\text{HG}}$  sur les mêmes données. Sur les deux histogrammes, le trait rouge représente la moyenne de la distribution.

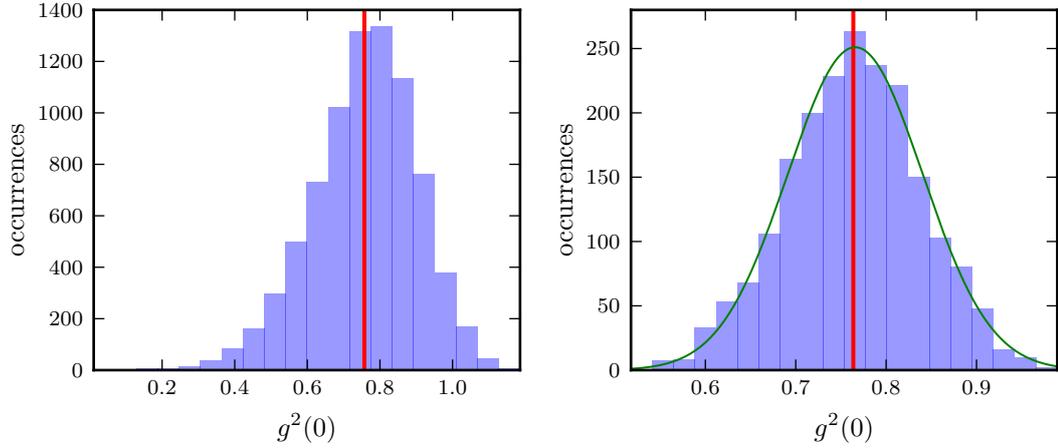


FIGURE IV.9 – Sur la gauche, l’histogramme des  $\{g^2(0)\}_{\text{HG}, N_p=5}$  extraits avec l’hypothèse gaussienne et avec  $N_p = 5$ . Sur la droite, l’histogramme des  $\{g^2(0)\}_{\text{HG}, N_p=20}$ . En vert, on représente l’ajustement d’une gaussienne à cette distribution. Sur les deux histogrammes, le trait rouge représente la moyenne de la distribution.

#### IV.4.3 Évolution de l’erreur statistique en fonction du nombre de points de mesure

Pour vérifier que l’erreur statistique obtenue au paragraphe précédent est en accord avec les estimations simulées au paragraphe IV.2.3, nous montrons sur la figure IV.10 les variances des estimateurs des moments et de  $g^2(0)$  en fonction du nombre de paquets  $N_p$ . Pour calculer la variances sur  $N_p$  paquets nous choisissons  $25 \times N_p$  paquets parmi les 40000 pour obtenir 25 estimations avec  $N_p$  paquets dont nous déduisons les variances. La variances des moments d’ordre 4 décroît en  $1/N_p$  sur l’ensemble de la gamme mesurée. Les variances des moments d’ordre 2 saturent à  $10^{-6}$  limitant la variance sur  $g^2(0)$  dans l’hypothèse gaussienne à  $10^{-3}$ .

#### IV.4.4 Vérification de l’hypothèse gaussienne sur les moments d’ordre quatre

Nous avons vu au paragraphe précédent que nous obtenons des valeurs de  $g^2(0)$  compatibles entre elles avec et sans hypothèse gaussienne sur l’état. Cette mesure est une indication indirecte que l’état est gaussien. Nous présentons ici une comparaison entre les moments mesurés et la valeur attendue pour un état gaussien. Les données sont les mêmes qu’au paragraphe précédent.

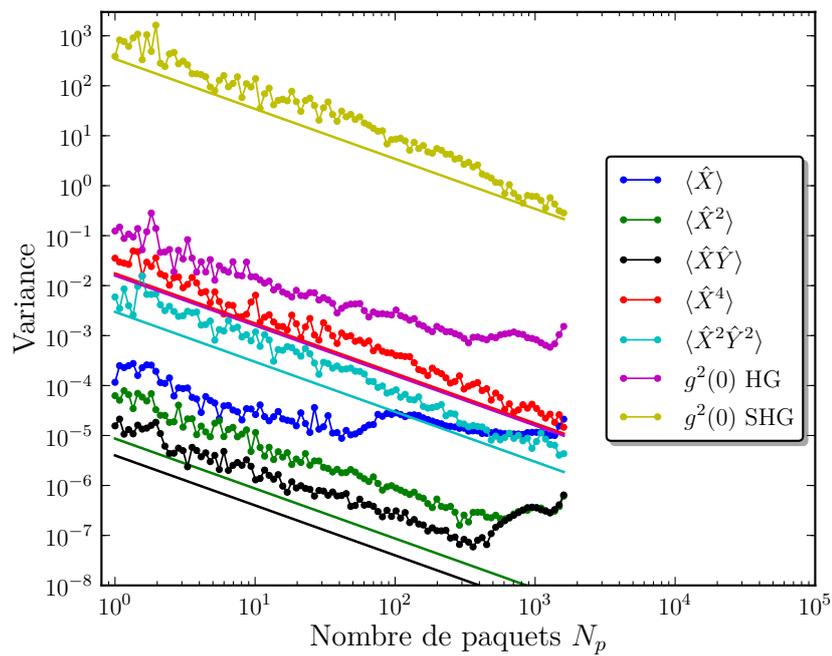


FIGURE IV.10 – Variance des estimateurs des moments de  $g^2(0)$  en fonction du nombre de paquets.

Grandeur	Valeur	Valeur gaussienne	Écart
$\langle \hat{X}^2 \rangle$	$5.199 \times 10^{-1} \pm 0.2 \times 10^{-4}$		
$\langle \hat{X}\hat{Y} \rangle^s$	$0.242 \times 10^{-1} \pm 0.1 \times 10^{-4}$		
$\langle \hat{Y}^2 \rangle$	$4.858 \times 10^{-1} \pm 0.2 \times 10^{-4}$		
$\langle \hat{X}^3 \rangle$	$7.0 \times 10^{-4} \pm 0.5 \times 10^{-4}$	0	$7.0 \times 10^{-4}$
$\langle \hat{X}^2\hat{Y} \rangle^s$	$4.7 \times 10^{-4} \pm 0.3 \times 10^{-4}$	0	$4.7 \times 10^{-4}$
$\langle \hat{X}\hat{Y}^2 \rangle^s$	$7.7 \times 10^{-4} \pm 0.3 \times 10^{-4}$	0	$7.7 \times 10^{-4}$
$\langle \hat{Y}^3 \rangle$	$-17.7 \times 10^{-4} \pm 0.5 \times 10^{-4}$	0	$17.7 \times 10^{-4}$
$\langle \hat{X}^4 \rangle$	$8.105 \times 10^{-1} \pm 5. \times 10^{-4}$	$3 \langle \hat{X}^2 \rangle^2$	$3.1 \times 10^{-4}$
$\langle \hat{X}^3\hat{Y} \rangle^s$	$0.366 \times 10^{-1} \pm 2.5 \times 10^{-4}$	$3 \langle \hat{X}^2 \rangle \langle \hat{X}\hat{Y} \rangle^s$	$11.7 \times 10^{-4}$
$\langle \hat{X}^2\hat{Y}^2 \rangle^s$	$-2.469 \times 10^{-1} \pm 2.3 \times 10^{-4}$	$\langle \hat{X}^2 \rangle \langle \hat{Y}^2 \rangle + 2 \langle \hat{X}\hat{Y} \rangle^s - \frac{1}{2}$	$236.1 \times 10^{-4}$
$\langle \hat{X}\hat{Y}^3 \rangle^s$	$0.342 \times 10^{-1} \pm 2.4 \times 10^{-4}$	$3 \langle \hat{Y}^2 \rangle \langle \hat{X}\hat{Y} \rangle^s$	$10.7 \times 10^{-4}$
$\langle \hat{Y}^4 \rangle$	$7.084 \times 10^{-1} \pm 4.5 \times 10^{-4}$	$3 \langle \hat{Y}^2 \rangle^2$	$3.1 \times 10^{-4}$

TABLE IV.1 – Ensemble des moments mesurés. Les valeurs mesurées sont données avec leurs erreurs statistiques, correspondant à plus ou moins  $1\sigma$ .

## Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté le protocole permettant de mesurer les moments du champ de cavité. Ce protocole repose sur une acquisition alternée d'une mesure et d'une référence. À partir de ces deux mesures, nous avons montré que nous étions capables de remonter effectivement à l'information souhaitée moyennant plusieurs hypothèses :

- Le champ dans la cavité, pendant que l'on acquiert la référence, est un champ thermique dont la température est donnée par un calcul théorique. Ce calcul repose sur la connaissance de la chaîne de pompe et d'amplification ainsi que sur les valeurs des couplages de notre échantillon.
- Les imperfections de l'IQ et la différence entre les voies d'amplification pour chaque quadrature introduisent des corrélations artificielles entre les quadratures et des gains différents. La validation de notre méthode pour éliminer ces imperfections repose sur un calcul théorique.
- La détermination des paramètres d'amplification repose sur l'hypothèse que l'amplificateur cryogénique émet un bruit gaussien de température effective constante  $G_{\text{Att}}T_{\text{ampl}} = 4 \text{ K}$ .

Moyennant ces trois hypothèses, nous avons montré que nous étions capables de mesurer  $g^2(0)$  avec et sans hypothèse gaussienne.



---

## Étude expérimentale du blocage anormal

---

Nous allons dans ce chapitre montrer que l'échantillon présenté au chapitre III permet de générer un état antibunché via le phénomène de blocage anormal. Dans un premier temps, nous montrerons l'évolution des différents paramètres gaussiens caractéristiques de l'état en fonction du désaccord cavité-pompe, pour des cavités à résonance. Nous étudierons ensuite les erreurs systématiques. Ensuite, nous nous intéresserons à l'évolution du blocage anormal en fonction de deux paramètres : les désaccords cavités-pompe et la puissance de pompe. Nous comparerons les résultats obtenus avec les prédictions théoriques faites au chapitre I. Pour finir, nous montrerons des mesures de l'évolution temporelle de la fonction  $g^2(\tau)$ .

### Sommaire

---

<b>V.1</b>	<b>Un exemple de mesure en utilisant l'hypothèse gaussienne . . . . .</b>	<b>116</b>
<b>V.2</b>	<b>Étude des erreurs systématiques introduites . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>V.3</b>	<b>Influence du désaccord entre les cavités . . . . .</b>	<b>122</b>
<b>V.4</b>	<b>Évolution de <math>g^2(0)</math> en fonction du nombre de photons . . . . .</b>	<b>124</b>
<b>V.5</b>	<b>Mesure de <math>g^2(0)</math> sans hypothèse gaussienne . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>V.6</b>	<b>Mesure de <math>g^2(\tau)</math> . . . . .</b>	<b>128</b>

---

## V.1 Un exemple de mesure en utilisant l'hypothèse gaussienne

Dans toutes les mesures, nous pompions la cavité linéaire via le port 1. La fréquence de la cavité 1 a été déterminée et vaut  $f_1 = 5.8768$  GHz. Nous allons mesurer le champ sortant de cette cavité par le port 2 grâce à la technique présentée au chapitre IV. La fréquence de la seconde cavité peut être ajustée et est déterminée par un étalonnage comme montré sur la figure III.15. Dans cette section, nous allons nous placer à  $f_2 = 5.8814$  GHz. Dans un premier temps, nous allons supposer l'état comme gaussien. Les figures V.1 et V.2 montrent l'évolution des paramètres gaussiens mesurés lorsque la fréquence de pompe varie. La figure V.2 est obtenue pour une puissance de pompe supérieure de 9 dB à celle de la figure V.1. En haut à gauche, on montre  $|\alpha_1|^2$ , c'est-à-dire l'intensité de la partie classique du champ. La fréquence centrale de la fenêtre de mesure a été choisie pour être autour du minimum de transmission, zone où le blocage anormal est attendu comme nous l'avons montré théoriquement sur la figure I.18. Le nombre minimum de photons est  $n_{\text{tot}} = 4.63 \times 10^{-3}$  pour V.1 et  $n_{\text{tot}} = 4.70 \times 10^{-2}$  pour V.2.

Pour les paramètres gaussiens, on présente  $n$  et  $s$ . On observe sur les deux figures que la fonction  $|s|$  présente un maximum au minimum de transmission et que  $|s|$  augmente avec la puissance de pompe. Cela montre bien que la cavité non-linéaire induit un squeezing d'autant plus fort que sa population est élevée, comme montré dans [33]. On s'attend aussi à ce que  $n$  passe par un maximum au minimum de transmission, ce qui est bien visible sur la figure V.2. La formule IV.14 qui relie  $g^2(0)$  au paramètre gaussien, nous indique que si  $n \ll |s|$ , ce qui est presque le cas ici, il faut que  $|\alpha_1|^2$  soit du même ordre de grandeur que  $|s|$  pour voir le blocage anormal. On s'attend donc à ce que  $g^2(0)$  s'écarte de 1 au minimum de transmission lorsque  $|\alpha_1|^2$  est suffisamment petit. Lorsque c'est le cas, l'oscillation de  $g^2(0)$  est déterminée par la valeur de  $\cos(\theta - 2\phi)$ . Nous rappelons que  $\theta$  est l'angle de squeezing et  $\phi$  l'angle du champ classique. On représente cette quantité sur les figures V.1 et V.2. On voit que cette quantité oscille entre  $\pm 1$  avec le désaccord.

De la mesure de l'ensemble de ces paramètres, nous avons déduit la valeur de  $g^2(0)$ . On montre le résultat en bas des figures V.1 et V.2. On représente l'erreur statistique obtenue avec une barre verticale de taille  $1\sigma$ . Proche du désaccord nul, on observe un fort bunching suivi d'un antibunching suivant la valeur de  $\cos(\theta - 2\phi)$ . Lorsque l'on s'éloigne du minimum de transmission, la valeur de  $g^2(0)$  tend vers 1. Cela est dû au fait que les valeurs de  $|\alpha_1|^2$  et de  $|s|$  s'écartent, réduisant le contraste de l'interférence à 0.

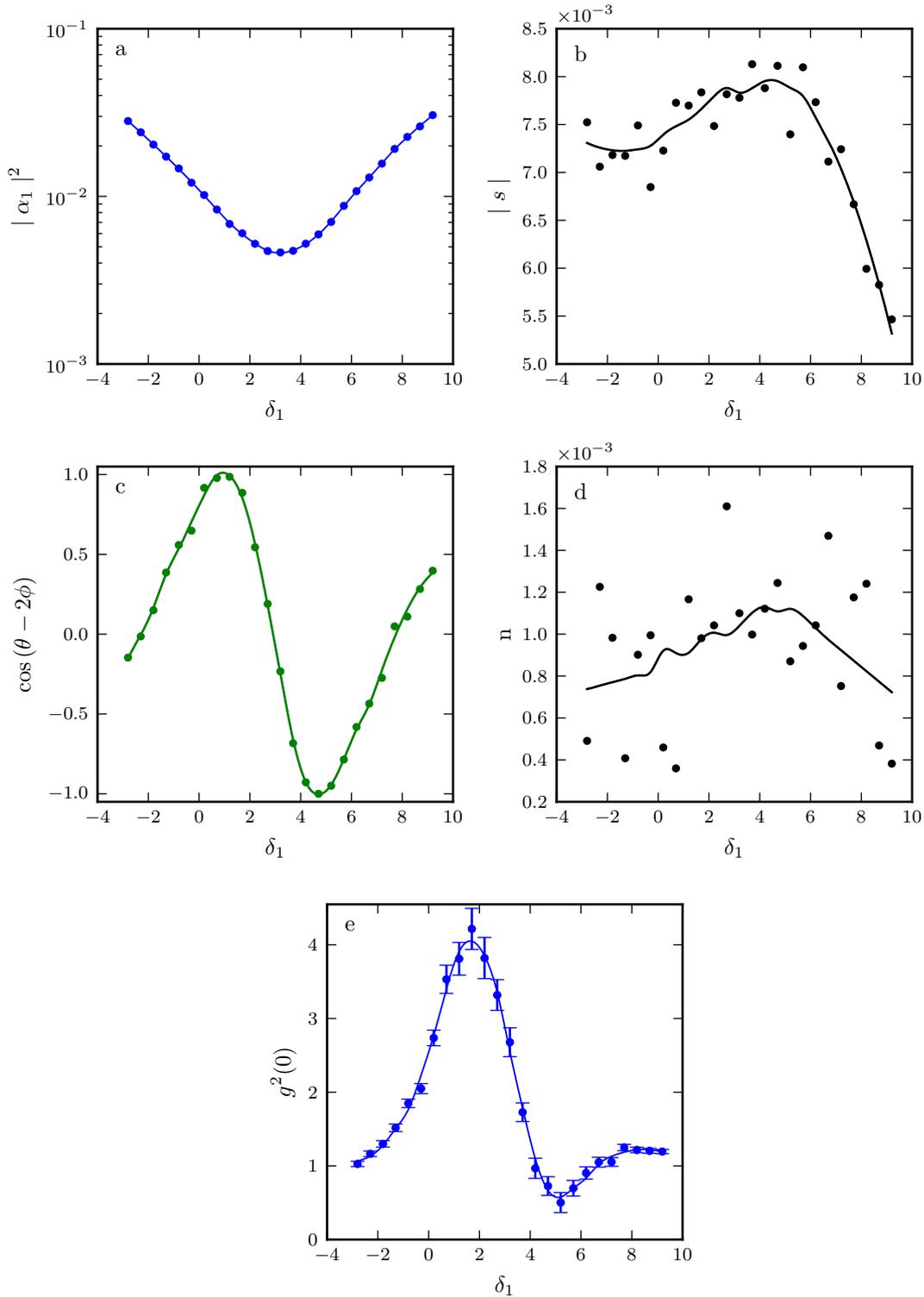


FIGURE V.1 – Mesure des paramètres gaussiens du champ de la cavité 1 et de  $g^2(0)$  en fonction du désaccord  $\delta_1$  en MHz, la cavité 2 étant fixe,  $f_2 = 5.8814$  GHz. (a) Population classique  $|\alpha_1|^2$ . (b),(d) Paramètres  $|s|$  et  $n$  (c)  $\cos(\theta - 2\phi)$ . (e) On trace la valeur de  $g^2(0)$  déduite des paramètres précédents. Les points représentent les valeurs mesurées et les courbes en trait plein sont des courbes lissées pour faciliter la lecture. Au minimum de transmission, on a  $n_{\text{tot}} = 4.63 \times 10^{-3}$ .

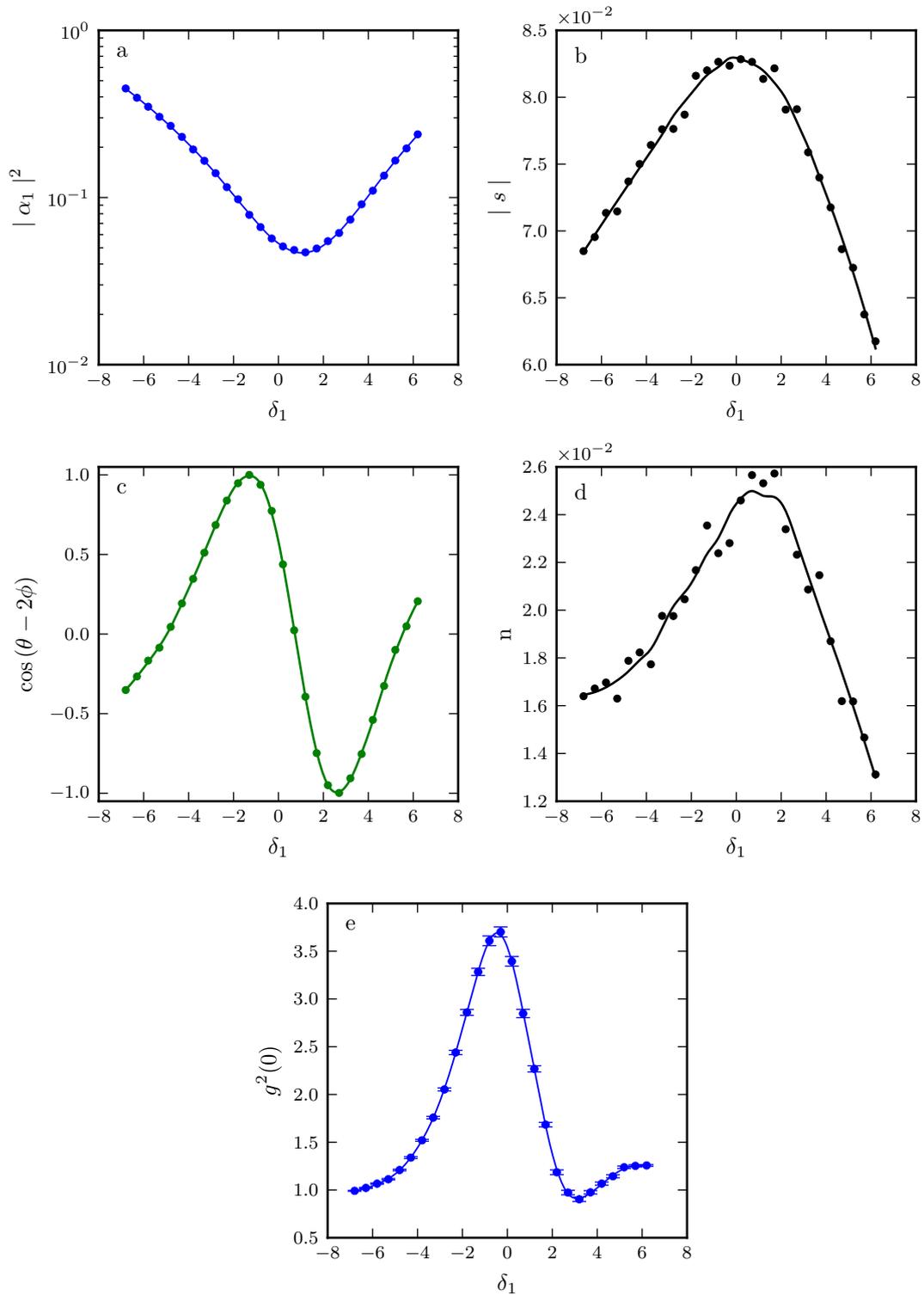


FIGURE V.2 – Mesure des paramètres gaussiens du champ de la cavité 1 et de  $g^2(0)$  en fonction du désaccord  $\delta_1$  en MHz, la cavité 2 étant fixe,  $f_2 = 5.8814$  GHz. (a) Population classique  $|\alpha_1|^2$ . (b),(d) Paramètres  $|s|$  et  $n$  (c)  $\cos(\theta - 2\phi)$ . (e) On trace la valeur de  $g^2(0)$  déduite des paramètres précédents. Les points représentent les valeurs mesurées et les courbes en trait plein sont des courbes lissées pour faciliter la lecture. Au minimum de transmission, on a  $n_{\text{tot}} = 4.70 \times 10^{-2}$

## V.2 Étude des erreurs systématiques introduites

Avant de poursuivre notre étude du blocage, nous allons évaluer les différentes erreurs entachant les mesures de  $g^2(0)$  présentées sur les figures V.1 et V.2. La méthode pour déterminer l'erreur statistique a été présentée dans la section IV.4. Outre ce type d'erreur, nous avons identifié deux sources d'erreurs systématiques que nous allons maintenant détailler.

### Incertitude sur $n_{\text{ref}}$

La première source d'erreur systématique concerne  $n_{\text{ref}}$ , le nombre de photons de cavité équivalant au bruit de l'amplification. La valeur de  $n_{\text{ref}}$  est reliée à la largeur du mode  $\kappa$  et à la température de bruit de l'amplificateur. Il est raisonnable de considérer une incertitude sur  $n_{\text{ref}}$  d'un facteur compris entre 0.8 et 2, cela change notre étalonnage du gain et donc le nombre de photons. En revanche la fonction  $g^2(0)$  est un rapport d'intensité au carré et le gain peut, au premier ordre, se factoriser, l'influence de  $n_{\text{ref}}$  devrait donc être faible. Sur les figures V.3 et V.4 on reprend les mêmes paramètres expérimentaux que pour les figures V.1 et V.2. Pour étudier l'erreur systématique, on reprend les mêmes données expérimentales brutes, mais on les traite de nouveau en changeant  $n_{\text{ref}}$ . On obtient les résultats en haut des figures V.3 et V.4, à gauche pour  $g^2(0)$  et à droite pour la partie classique du champ  $|\alpha_1|^2$ . On voit que l'erreur systématique sur  $g^2(0)$  est d'autant plus négligeable que le nombre de photons est grand.

### Incertitude sur $n_{\text{th}}$

La seconde source d'erreur systématique est l'indétermination de  $n_{\text{th}}$ , le nombre de photons thermiques caractérisant l'état de référence. Cette population est déterminée par la connaissance de la chaîne de pompe et d'observation. Une indétermination de 3 dB sur la transmission est raisonnable. Au milieu des figures V.3 et V.4 on représente l'influence de  $n_{\text{th}}$  en procédant de même que pour  $n_{\text{ref}}$ . À fort nombre de photons, l'erreur systématique est négligeable. Ce paramètre n'a pas d'influence sur la population classique. L'effet de  $n_{\text{th}}$  est d'augmenter  $n$  et donc de limiter l'amplitude de l'oscillation de  $g^2(0)$ .

### Combinaison des incertitudes

Ces deux sources d'erreurs systématiques ont une influence différente suivant le nombre de photons. Dans le pire des cas, on considère  $0.8 \leq n_{\text{ref}}/n_{\text{ref}_0} \leq 2$ , et  $0.5 \leq n_{\text{th}}/n_{\text{th}_0} \leq 2$  où l'indice 0 réfère à la valeur que l'on attend d'après les caractérisations que nous avons menées. Enfin, nous avons pris en compte l'influence de l'effet du filtrage en ajoutant l'erreur déterminée dans l'annexe A. En prenant en compte toutes ces erreurs, on aboutit à la zone d'incertitude pour  $g^2(0)$  et  $|\alpha|^2$  représentée en bas de la figure V.3 et V.4.

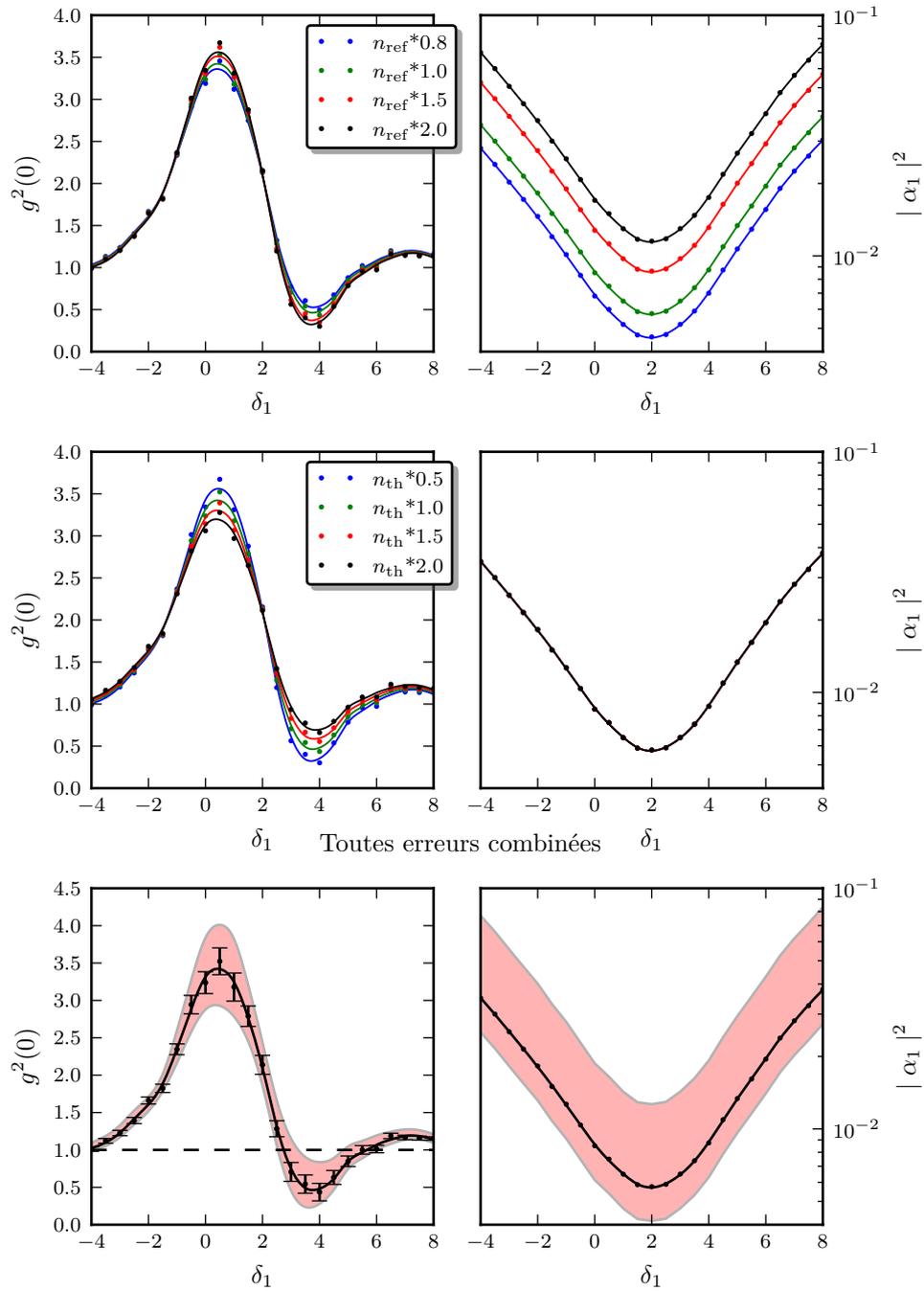


FIGURE V.3 – Influence des erreurs systématiques sur la mesure de  $g^2(0)$  à gauche, et sur  $|\alpha_1|^2$  en fonction du désaccord  $\delta_1$  donné en MHz. En haut, influence de l'erreur faite sur  $n_{\text{ref}}$ , au milieu, influence de  $n_{\text{th}}$  et enfin en bas, toutes les erreurs combinées, y compris celle due au filtrage. Les paramètres expérimentaux sont  $f_2 = 5.8814$  GHz et, au minimum de transmission, on a  $n_{\text{tot}} = 4.63 \times 10^{-3}$ .

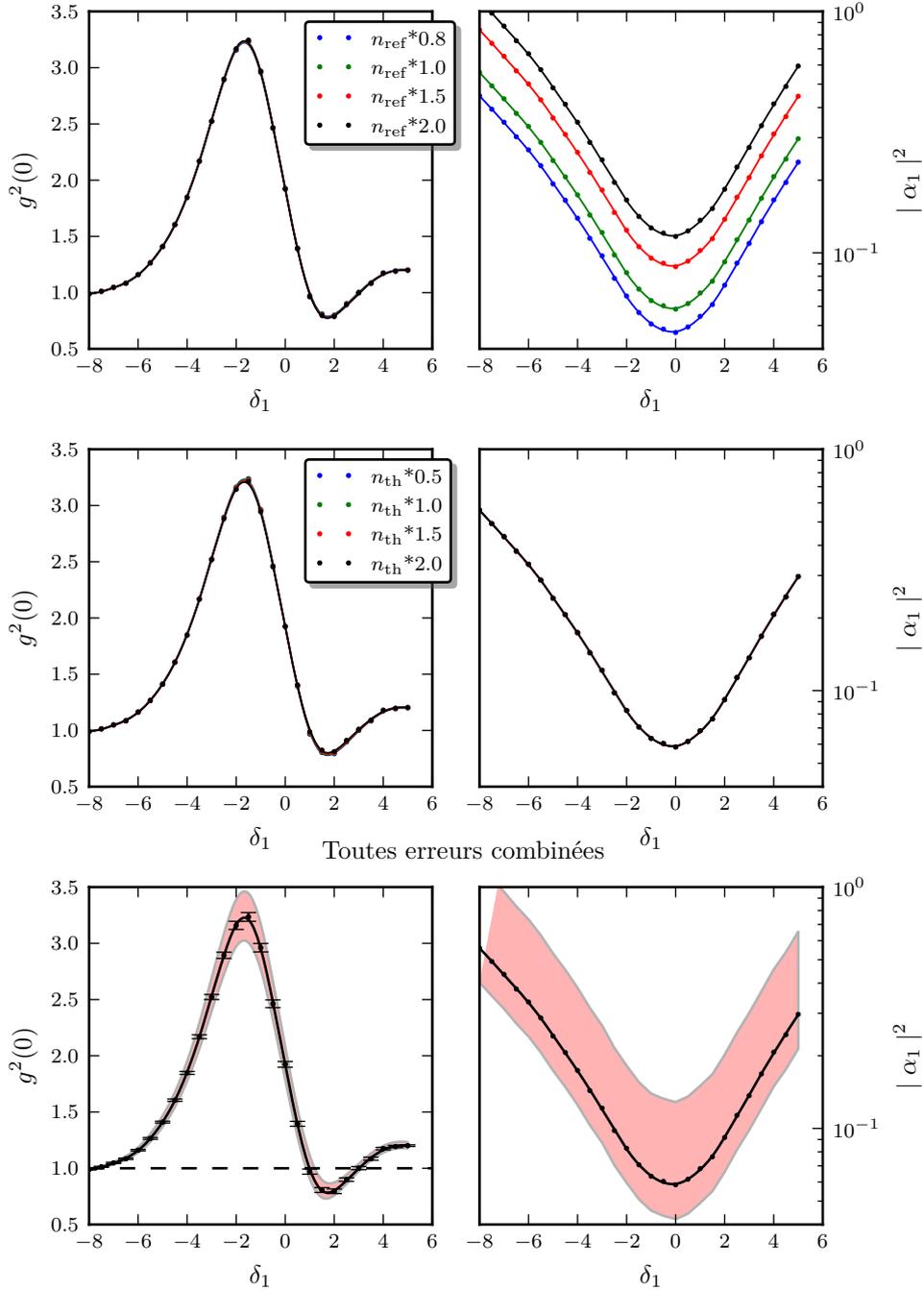


FIGURE V.4 – Influence des erreurs systématiques sur la mesure de  $g^2(0)$  à gauche, et sur  $|\alpha_1|^2$  en fonction du désaccord  $\delta_1$  donné en MHz. En haut, influence de l'erreur faite sur  $n_{\text{ref}}$ , au milieu, influence de  $n_{\text{th}}$  et enfin en bas, toutes les erreurs combinées, y compris celle due au filtrage. Les paramètres expérimentaux sont  $f_2 = 5.8814$  GHz et, au minimum de transmission, on a  $n_{\text{tot}} = 4.70 \times 10^{-2}$ .

### V.3 Influence du désaccord entre les cavités

On s'intéresse maintenant à l'influence du désaccord entre les cavités. Pour cela, nous acquérons plusieurs jeux de données en fonction de la fréquence de pompe pour différentes valeurs de flux dans le SQUID. On représente les résultats obtenus sur la figure V.5 sous forme de carte de densité avec en abscisse le désaccord cavité 1 pompe  $\delta_1$ , et en ordonnée le désaccord entre cavités  $f_2 - f_1 = \delta_1 - \delta_2$ . À gauche, on représente  $g^2(0)$  et à droite, l'intensité de la population classique  $|\alpha_1|^2$ .

Nous avons représenté sur la même figure les prédictions théoriques de l'équation maîtresse III.22 présentée au chapitre III. Les paramètres  $J$ ,  $U$  et les couplages aux lignes sont pris égaux à ceux déterminés au chapitre III (et résumés dans le tableau III.1). La force de pompe  $\eta$  est ajustée pour que le nombre de photons au minimum de transmission pour  $\delta_2 = \delta_1$  soit égal à celui mesuré.

La zone où l'effet d'interférence est visible suit le minimum de transmission. Nous avons établi cette propriété dans le chapitre théorique (voir la figure I.18). Ensuite on voit que le  $g^2(0)$  est maximum proche du désaccord  $\delta_1 - \delta_2$  nul, mais minimum pour un désaccord négatif entre cavités. Ce comportement est bien reproduit par nos simulations. Nous voyons que, pour  $g^2(0)$  les valeurs extremum sont en bon accord. En ce qui concerne la partie classique du champ, nous voyons que même si nous avons ajusté la force de pompe pour faire correspondre le minimum de transmission, l'accord simulation expérience est moins bon. La zone de désaccord où on a  $|\alpha_1|^2 \leq 0.45$  est plus large sur les courbes théoriques que sur les courbes expérimentales. Cela nous indique que nous avons une mauvaise compréhension de la dynamique classique du champ dans la cavité. Pour ce type de courbe, nous ne pourrions donc conclure qu'à un accord qualitatif entre théorie et expérience et non à un accord quantitatif.

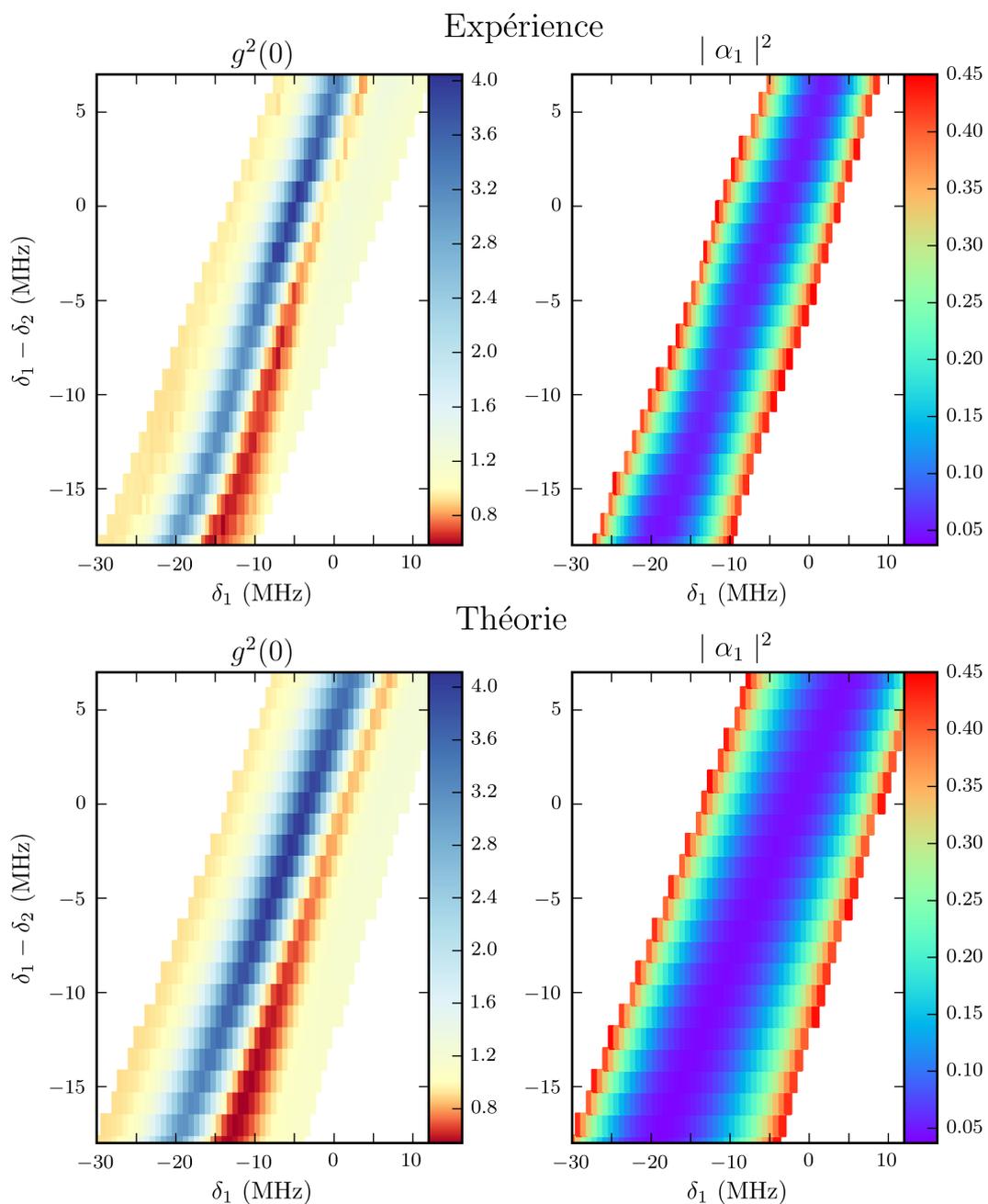


FIGURE V.5 – Influence du désaccord entre les cavités sur le  $g^2(0)$  à gauche et sur  $|\alpha_1|^2$  à droite. En abscisse, le désaccord cavité-pompe,  $\delta_1$ . En ordonnée, le désaccord cavité 1-cavité 2,  $\delta_1 - \delta_2$ . En haut, on présente les résultats expérimentaux. En bas, la simulation théorique pour notre échantillon toujours avec le modèle et les paramètres du chapitre III.

## V.4 Évolution de $g^2(0)$ en fonction du nombre de photons

### Étude à désaccord fixe entre cavités

On représente sur la figure V.6 l'évolution de  $g^2(0)$  pour différents taux de pompe en fonction de  $\delta_1$ . Les cavités sont placées assez proche :  $f_2 = 5.8814$  GHz soit  $\delta_1 - \delta_2 = 4.6$  MHz. On représente aussi l'intensité du champ classique dans la cavité 1. Dans la légende, on indique le nombre de photons au minimum de transmission ainsi que l'atténuation variable en début de chaîne de pompe. Lorsque la force de pompe augmente, le minimum de transmission se décale vers les basses fréquences. Il s'agit d'un effet non-linéaire que l'on attend d'après les équations classiques du champ. Cet effet est dû au redshift des deux maxima de transmission lorsque la population dans la cavité non-linéaire augmente, comme présenté dans la figure III.17.

Lorsque le nombre de photons diminue, le contraste de l'interférence augmente et la valeur minimale obtenue pour  $g^2(0)$  diminue également et sature à 0.4. Les points noirs de la figure V.7 montrent l'évolution de  $g^2(0)$  pour  $\delta_1 = 4.7$  MHz.

### Optimisation du minimum de $g^2(0)$ observé en fonction du nombre de photons

Dans l'étude précédente, le désaccord entre cavités était fixé, or les résultats théoriques présentés sur la figure I.12 montrent que le minimum de  $g^2(0)$  pour un nombre de photons donné ne peut être obtenu qu'en ajustant le désaccord entre cavités. Cette courbe du minimum de  $g^2(0)$  dépend peu des paramètres de l'échantillon. Il s'agit donc d'une courbe « universelle » intéressante à mesurer.

Les points bleus de la figure V.7 montrent le résultat de cette optimisation pour notre échantillon. Pour chaque valeur mesurée, on représente avec une barre d'erreur fine l'erreur systématique. Cette erreur est obtenue avec la méthode que nous avons présentée dans la section V.2. Cette erreur est présente non seulement sur la valeur de  $g^2(0)$  mais aussi sur le nombre de photons. On représente donc des barres d'erreur verticales et horizontales pour tenir compte de ces deux erreurs. L'erreur statistique est représentée par des barres d'erreur plus épaisses. Nous résumons ci-dessous les deux valeurs les plus basses que nous ayons mesurées. Pour  $\delta_1 - \delta_2 = -6.6$  MHz et  $\delta_1 = -3.8$  MHz nous avons mesuré :

$$g^2(0) = 0.40 \pm 0.1 \left\{ \begin{array}{l} -8.06 \times 10^{-2} \\ +1.20 \times 10^{-1} \end{array} \right. \text{ pour } n_{\text{tot}} = 2.944 \times 10^{-2} \left\{ \begin{array}{l} -8.27 \times 10^{-3} \\ +3.54 \times 10^{-2} \end{array} \right\} \quad (\text{V.1})$$

Pour  $\delta_1 - \delta_2 = 4.6$  MHz et  $\delta_1 = 4.7$  MHz nous avons mesuré :

$$g^2(0) = 0.38 \pm 0.08 \left\{ \begin{array}{l} -0.20 \\ +0.35 \end{array} \right. \text{ pour } n_{\text{tot}} = 1.095 \times 10^{-2} \left\{ \begin{array}{l} -3.06 \times 10^{-3} \\ +1.31 \times 10^{-2} \end{array} \right\} \quad (\text{V.2})$$

L'erreur statistique étant indiquée par le symbole  $\pm$  et l'erreur systématique est donnée entre accolades.

Dans la figure V.7 les courbes vertes et rouges sont les prédictions théoriques de l'équation maîtresse avec les paramètres rappelés au paragraphe précédent. Contrairement aux prédictions théoriques à température nulle montrées au chapitre I, la valeur de  $g^2(0)$  réaugmente à faible nombre de photons. Ceci est dû à la température non nulle. Lorsque la population est trop faible, la statistique est dominée par les photons thermiques et  $g^2(0)$  tend progressivement vers 2.

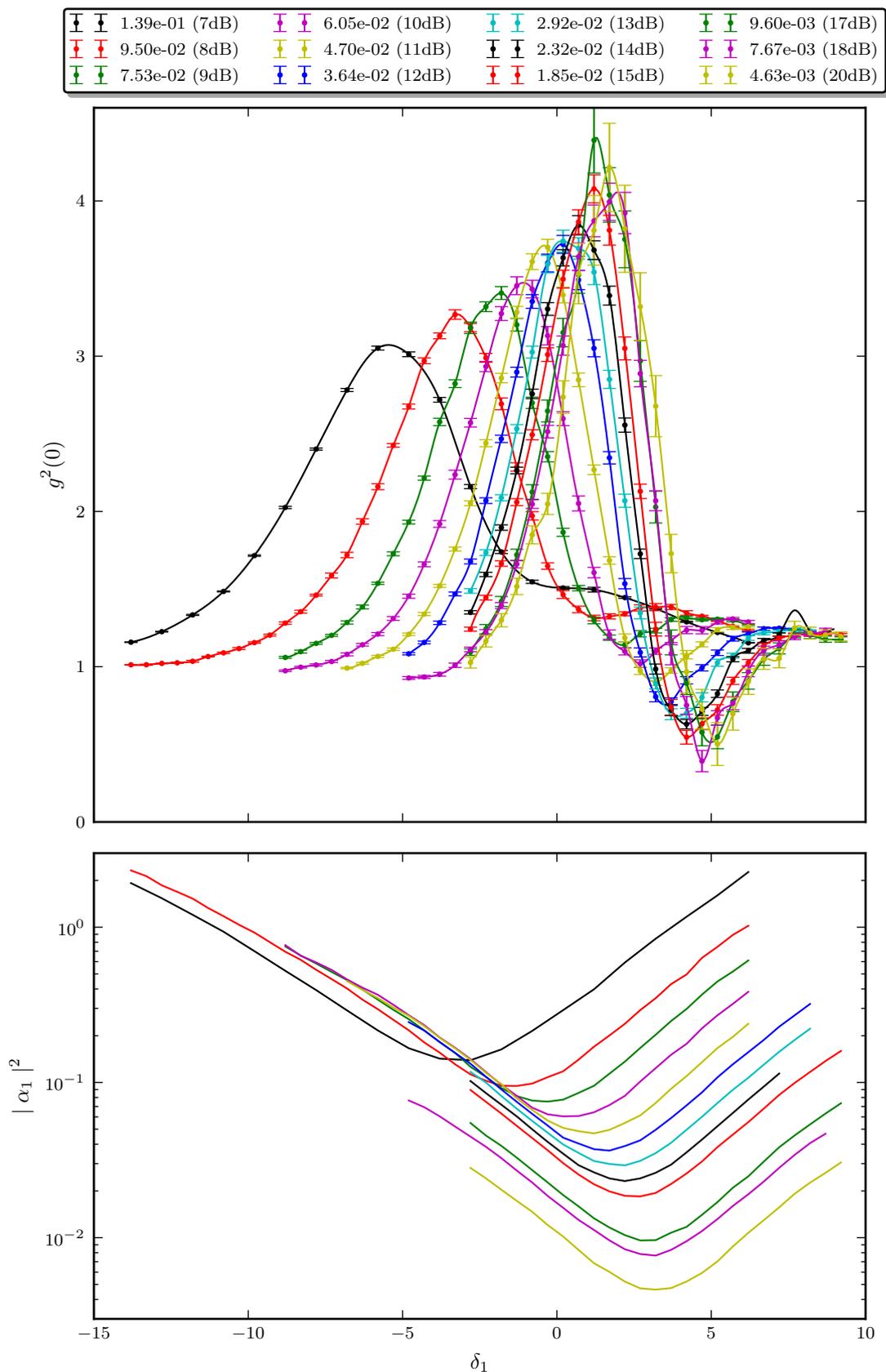


FIGURE V.6 – Évolution de  $g^2(0)$  et de  $|\alpha_1|^2$  pour différents taux de pompe en fonction de  $\delta_1$ . La seconde cavité est maintenue à  $f_2 = 5.8814$  GHz. L'atténuation utilisée en début de chaîne est donnée dans la légende avec la valeur minimum de  $|\alpha_1|^2$ .

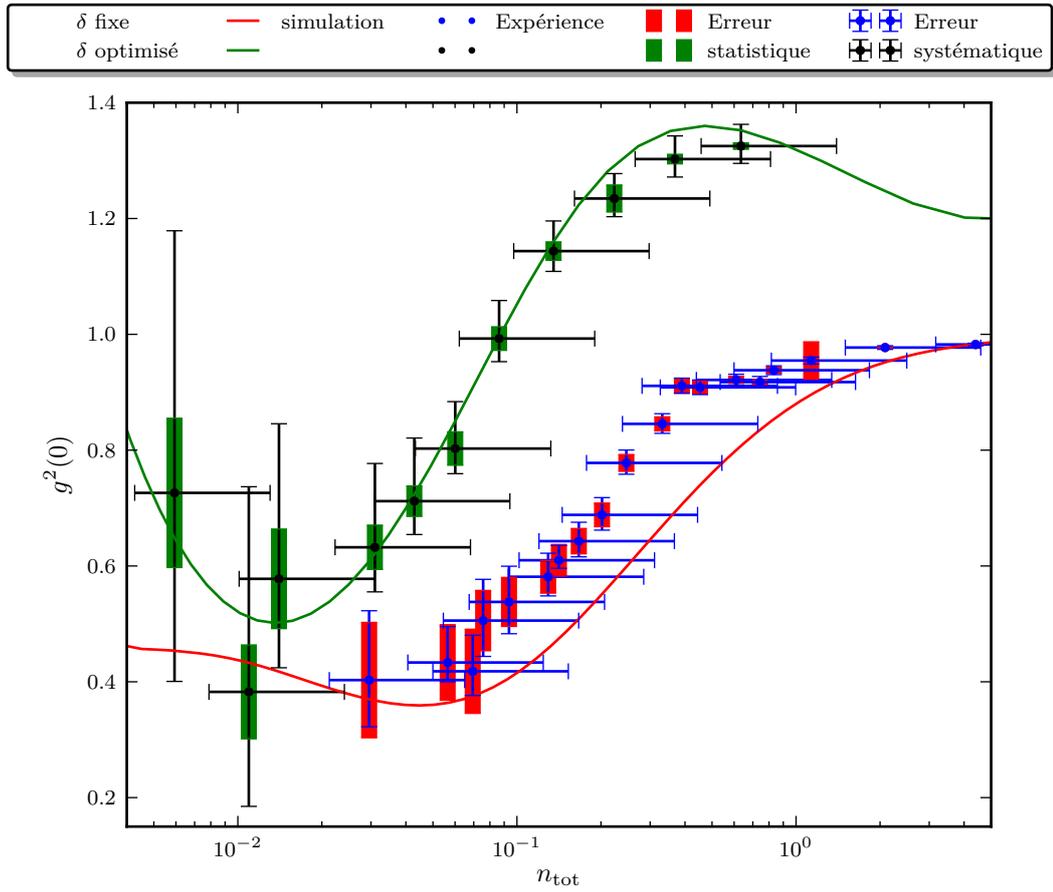


FIGURE V.7 – Évolution de  $g^2(0)$  en fonction du nombre de photons dans la cavité 1. En vert, on se place à désaccord fixé et en rouge, on optimise le désaccord. Les points correspondent à l'expérience et les lignes à la théorie. Les barres d'erreurs fines représentent l'erreur systématique et les barres d'erreurs épaisses l'erreur statistique. Les paramètres expérimentaux pour la courbe verte sont :  $\delta_1 - \delta_2 = 4.6$  MHz et  $\delta_1 = 4.7$  MHz.

## V.5 Mesure de $g^2(0)$ sans hypothèse gaussienne

Dans ce qui précède, nous avons supposé que l'état était gaussien, c'est-à-dire qu'il était entièrement caractérisé par ses moments d'ordres 1 et 2. Nous allons maintenant montrer que cette hypothèse est valable sur l'ensemble de la gamme de nombres de photons utilisée dans l'expérience. On se place à un point tel que  $\delta_1 - \delta_2 = 4.6$  MHz, la pompe est à une fréquence telle que  $\delta_1 = 4.7$  MHz et on fait varier l'intensité de la pompe. On obtient les résultats présentés sur la figure V.8. On représente en rouge les points mesurés sans hypothèse gaussienne. Pour comparaison on représente en bleu la valeur que l'on obtient en utilisant l'hypothèse gaussienne avec les mêmes mesures. Le nombre de points de mesure est adapté pour chaque puissance, comme précédemment. On observe un excellent accord entre les deux méthodes de traitement. Le point mesuré à plus faible nombre de photons correspond au point traité dans la section IV.4. Cette mesure permet de montrer que notre état est en très bonne approximation gaussien, quel que soit le nombre de photons.

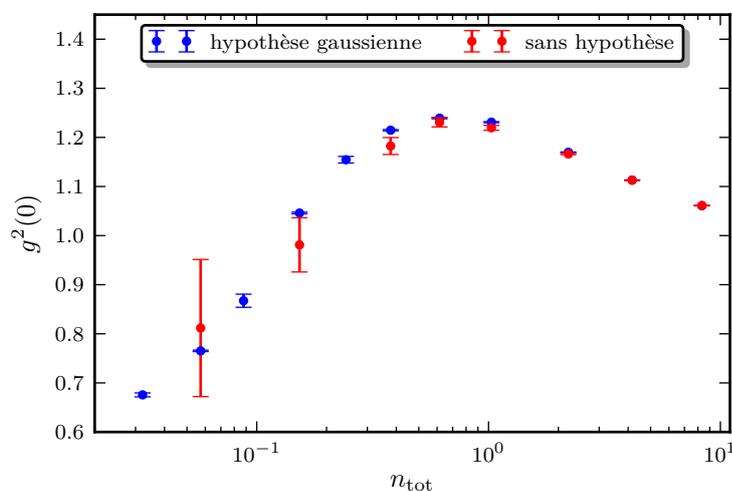


FIGURE V.8 – Vérification de l'hypothèse gaussienne pour différentes puissances de pompe. En rouge, les mesures traitées sans hypothèse et en bleu, les mêmes mesures traitées en supposant l'état comme gaussien. Les paramètres expérimentaux sont :  $\delta_1 - \delta_2 = 4.6$  MHz et  $\delta_1 = 4.7$  MHz.

## V.6 Mesure de $g^2(\tau)$

Enfin, dans l'hypothèse gaussienne, on peut mesurer le comportement temporel  $g^2(\tau)$ . Nous avons montré au chapitre I que  $g^2(\tau)$  (I.75) s'écrivait en fonction des corrélations  $n(\tau) = \langle \hat{d}^\dagger(\tau)\hat{d}(0) \rangle$  et  $s(\tau) = \langle \hat{d}(\tau)\hat{d}(0) \rangle$ . Ces corrélations s'expriment en fonction des corrélations temporelles des quadratures  $\langle \hat{X}(\tau)\hat{X}(0) \rangle$ ,  $\langle \hat{Y}(\tau)\hat{Y}(0) \rangle$  et  $\langle \hat{X}(\tau)\hat{Y}(0) \rangle$ . Comme pour les corrélations à temps nul, on mesure les moments des corrélations pompe allumée puis pompe éteinte à partir desquels on remonte à  $\langle \hat{X}(\tau)\hat{X}(0) \rangle$  et aux autres corrélations. Le passage de la grandeur mesurée à la corrélation souhaitée s'effectue avec la même méthode que pour les corrélations à temps nul.

On présente les résultats obtenus sur la figure V.9 pour différents désaccords  $\delta_1$ . La cavité 2 est toujours à  $\delta_1 - \delta_2 = 4.6$  MHz. La puissance de pompe est identique à la puissance utilisée pour obtenir la courbe noire repérée par  $n_{tot} = 2.32 \times 10^{-2}$  au niveau du minimum de transmission sur la figure V.6. Les points de mesure sont indiqués avec leurs erreurs statistiques, on ajoute une courbe lissée pour rejoindre les points. En haut à gauche, on représente un désaccord pour lequel  $g^2(0)$  est la valeur maximum de  $g^2(\tau)$ . On voit ensuite qu'à temps non nul  $g^2(\tau)$  passe en dessous de 1 bien que  $g^2(0)$  soit supérieur 1. Cette propriété n'a, à notre connaissance, jamais été observée auparavant. En haut à droite, on représente une courbe prise pour un désaccord proche de minimiser  $g^2(0)$ . La légère décroissance de  $g^2(\tau)$  pour des temps proches de 0 indique que nous ne sommes pas tout à fait à cet optimum. Néanmoins, on observe le comportement attendu. Cette figure nous permet de voir que la fonction de  $g^2(0)$  oscille bien avec une période  $2\pi/J$  comme attendu théoriquement.

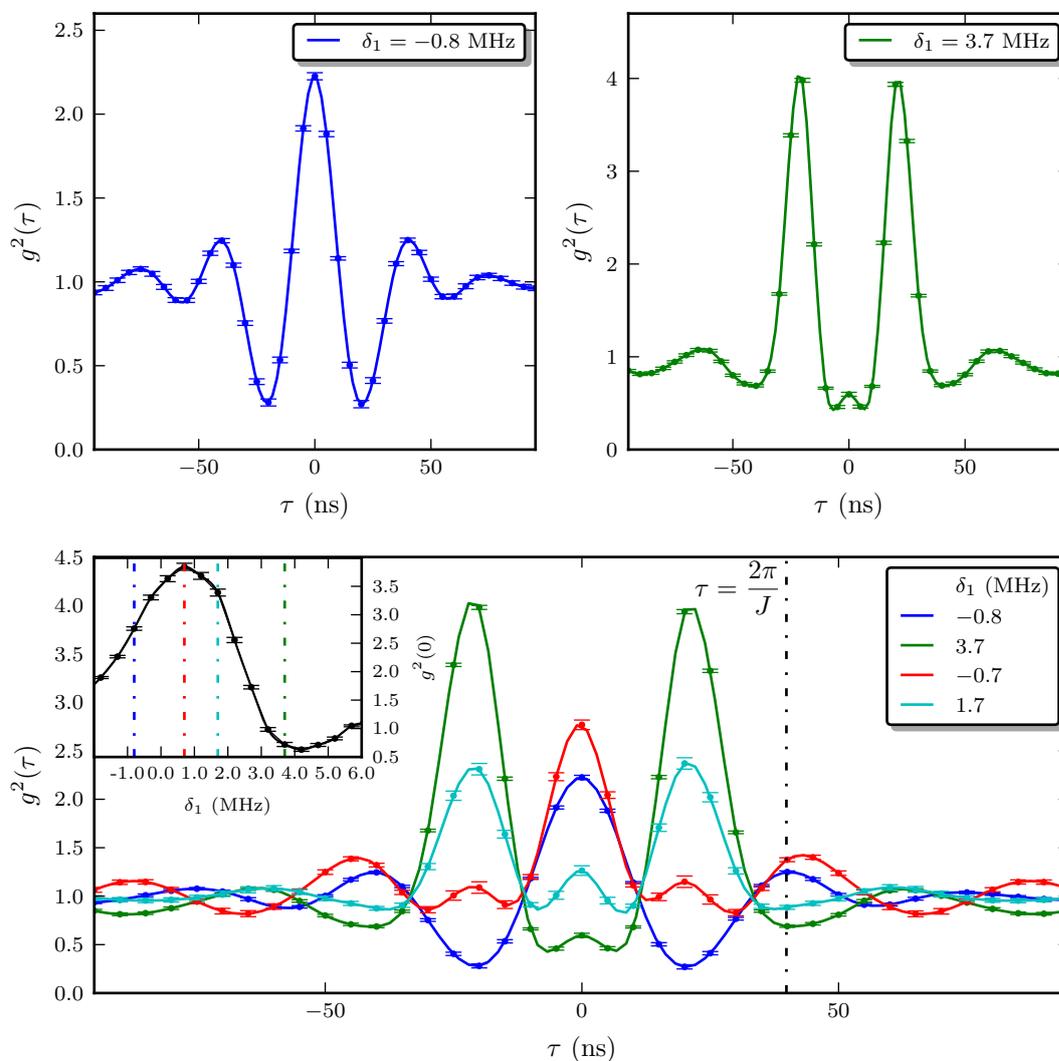


FIGURE V.9 – Évolution de  $g^2(\tau)$  pour différents désaccords  $\delta_1$ . La cavité 2 est telle que  $\delta_1 - \delta_2 = 4.6$  MHz. En bas, on représente des courbes prises pour 4 désaccords. On représente en figure intérieure  $g^2(0)$  en fonction de  $\delta_1$  pour visualiser où les différentes courbes ont été prises. Cette courbe est identique à celle repérée avec  $n_{tot} = 2.32 \times 10^{-2}$  au niveau du croisement évité sur la figure V.6. En haut, on représente les courbes prises à  $\delta_1 = -0.8$  MHz et à  $\delta_1 = 3.7$  MHz seules.

## Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence expérimentalement le phénomène de blocage anormal. Plusieurs caractéristiques du blocage anormal ont été mesurées en faisant l'hypothèse que l'état mesuré était gaussien. Nous avons montré, en fonction de la fréquence de pompe, les différents paramètres gaussiens. Nous avons ensuite quantifié les différentes erreurs systématiques présentes dans notre mesure. L'évolution caractéristique de  $g^2(0)$  en fonction du désaccord entre la pompe et la cavité 1 a été observée. Nous avons étudié l'évolution de  $g^2(0)$  avec le nombre de photons dans la cavité 1. Cette mesure montre un bon accord avec la théorie. Nous avons prouvé expérimentalement que notre état pouvait en bonne approximation être décrit par un état gaussien. Enfin, toujours dans l'hypothèse gaussienne, nous avons mesuré l'évolution temporelle  $g^2(\tau)$ .

---

## Conclusion

---

Dans ce travail de thèse, en partant de travaux existants, nous nous sommes intéressés au phénomène de blocage anormal. L'apport de notre travail théorique porte sur l'étude des paramètres expérimentaux clés. Nous avons ainsi caractérisé l'évolution du blocage anormal avec le nombre de photons, nous avons étudié la robustesse du système par rapport à un inévitable désordre, et enfin nous nous sommes intéressés à l'influence de la température et à celle du déphasage pur. D'un point de vue expérimental, nous avons conçu, fabriqué et caractérisé un échantillon présentant les caractéristiques nécessaires à l'étude du blocage anormal.

Nous avons présenté la première réalisation expérimentale du phénomène de blocage anormal. Nous avons montré que l'état généré était bien un état gaussien et que cette approche était particulièrement utile. Nous avons étudié l'évolution de  $g^2(0)$  en fonction du nombre de photons dans la cavité et montré qu'il existait bien une limite minimum au  $g^2(0)$  en fonction du nombre de photons. Cet optimum peut être atteint en changeant les paramètres de désaccord. Toujours sur l'étude de  $g^2(0)$  nous avons mesuré une évolution cohérente de  $g^2(0)$  avec les désaccords cavité 1, pompe et cavité 1, cavité 2. Enfin, nous avons étudié le comportement de  $g^2(\tau)$ . Nous avons montré qu'il était possible de résoudre l'oscillation rapide de cette fonction et nous avons ainsi obtenu un point de mesure avec un antibunching à temps non nul alors que  $g^2(0)$  était fortement bunché pour les paramètres utilisés.

En ce qui concerne notre étude du blocage anormal, plusieurs améliorations pourraient être apportées. Une des difficultés pour la comparaison entre théorie et expérience est que nous n'avons pas une compréhension parfaite du comportement classique de notre échantillon. Une étude plus approfondie de cette dynamique serait nécessaire. Ensuite, le second facteur limitant que nous avons rencontré est la population d'origine thermique présente dans la cavité. On pourrait réduire cette population en atténuant plus le signal en entrée d'échantillon et en ajoutant un isolateur en sortie.

Nous avons été en mesure d'étudier la plupart des prédictions théoriques faites dans ce régime lorsqu'une seule cavité est pompée, mais ce n'est pas le seul schéma possible. Le régime micro-onde offre une plate-forme idéale pour un certain nombre d'autres propositions théoriques, on peut notamment penser à un schéma où les deux cavités sont pompées, ou alors à la réalisation d'un couplage complexe [90].

Dans une perspective plus générale, l'étude que nous avons menée porte sur un aspect de la physique observable avec un dimère de Bose-Hubbard. D'autres phénomènes physiques ont été prédits et pourraient être étudiés, on peut notamment penser à l'observation de l'intrication entre les modes [91], ou encore à l'apparition d'une transition de phase brisant la symétrie entre modes [92, 57]. Le couplage de deux résonateurs est une étape vers le couplage d'un plus grand nombre de résonateurs. Le phénomène de blocage anormal a été prédit pour trois résonateurs couplés [18, 21]. L'augmentation du nombre de cavités couplé permettrait de faire de la simulation quantique [93, 94, 95].

---

Composante spectrale du signal et filtrage

---

### A.1 Erreur introduite par des filtres passe-bande idéaux

Pour des besoins expérimentaux, nous avons besoin de filtrer notre signal. Dans l'espace des fréquences, l'action du filtre sur le champ observé est décrite par :

$$\hat{d}_{\text{fil}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{d}[\omega] e^{-i\omega t} F[\omega] \quad (\text{A.1})$$

avec  $F$  la fonction de transfert du filtre. Dans le cas gaussien, on peut ainsi calculer les paramètres filtrés caractérisant la distribution :

$$\begin{aligned} n_{\text{fil}}(\tau) &= \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (\kappa_1 \chi_{21}[\omega] \chi_{12}[-\omega] + \kappa_2 \chi_{23}[\omega] \chi_{14}[-\omega]) F[\omega] F[-\omega] e^{-i\omega\tau} \\ s_{\text{fil}}(\tau) &= \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (\kappa_1 \chi_{11}[\omega] \chi_{12}[-\omega] + \kappa_2 \chi_{13}[\omega] \chi_{14}[-\omega]) F[\omega] F[-\omega] e^{-i\omega\tau} \\ \alpha_{\text{fil}} &= \alpha F[0] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Et on aura ainsi accès à la fonction de corrélation filtrée :

$$g_{\text{fil}}^2(\tau) = 1 + \frac{2|\alpha_{\text{fil}}|^2 (n_{\text{fil}}(\tau) + |s_{\text{fil}}(\tau)| \cos(\theta_{\text{fil}}(\tau) - 2\varphi_{\text{fil}})) + |s_{\text{fil}}(\tau)|^2 + n_{\text{fil}}(\tau)^2}{(|\alpha_{\text{fil}}|^2 + n_{\text{fil}}(0))^2} \quad (\text{A.3})$$

On représente à gauche sur la figure A.1 les composantes spectrales de  $s$  et plus exactement  $|s[\omega]|^2$ . On représente cette grandeur pour trois valeurs de désaccord entre la cavité 1 et la cavité 2, la pompe étant centrée sur la cavité 2. Cette fonction présente deux pics centrés autour de  $\pm J$ . On considère ici que le filtre est décrit par une fonction créneaux dont les limites sont données par les fréquences de coupure du filtre. On représente en trait pointillé les limites de la bande passante qu'imposeront nos filtres. En faisant cette approximation, on peut calculer la fonction  $g_{\text{fil}}^2(0)$ . On représente cette fonction en trait pointillé à droite de la figure A.1 pour deux valeurs de désaccord cavité 1-cavité 2 en fonction du désaccord  $\delta_2$ . On représente en comparaison en trait

plein  $g^2(0)$  sans filtrage. On s'aperçoit que tant que les désaccords sont de l'ordre de la largeur des cavités, les filtres n'ont qu'un effet très faible sur  $g^2(0)$ .

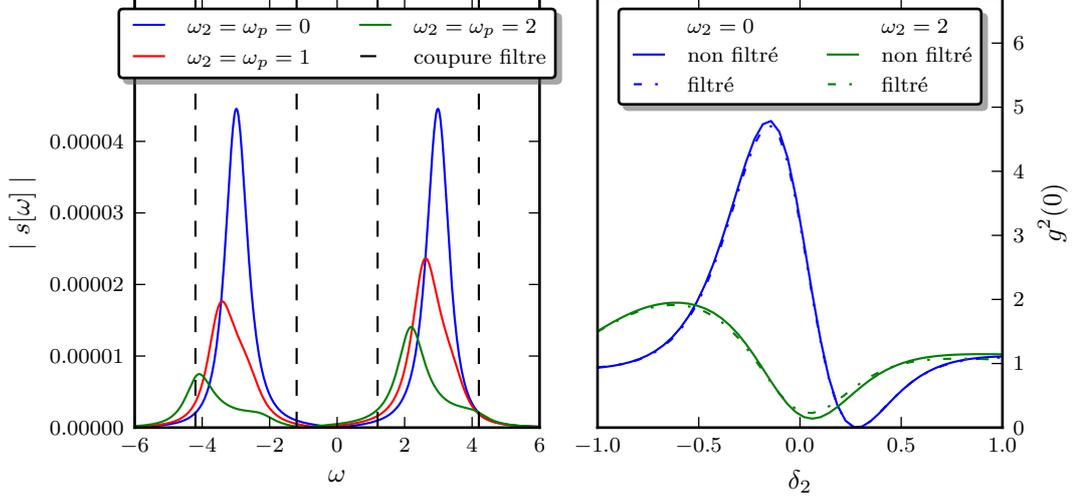


FIGURE A.1 – À gauche les composantes spectrales de  $|s|$  pour différentes valeurs de désaccord entre cavités et pompe. On représente en trait pointillé la bande passante. Sur la droite on représente la fonction  $g^2(0)$  obtenue pour deux désaccords de cavité en fonction du désaccord pompe cavité  $\delta_2$  avec et sans filtrage. Les autres paramètres sont  $\omega_1 = 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ,  $U = -0.042$ ,  $J = 3$ , et  $\eta = 0.1$

## A.2 Erreur introduite par les filtres utilisés dans l'expérience

Expérimentalement nous avons mesuré la réponse fréquentielle complexe  $G_X[\omega]$ , et  $G_Y[\omega]$ , IV.6. Les quadratures mesurées sont données par E.3 :

$$\begin{aligned}
 \langle X_m^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G_X[\omega] \left( \langle \hat{X}^2[\omega] \rangle + \tilde{n}_{\text{ref}} \right) \\
 \langle Y_m^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G_Y[\omega] \left( \langle \hat{Y}^2[\omega] \rangle + \tilde{n}_{\text{ref}} \right) + 2\epsilon \langle \hat{X}[\omega] \hat{Y}[\omega] \rangle + \epsilon^2 \left( \langle \hat{X}^2[\omega] \rangle + \tilde{n}_{\text{ref}} \right) \\
 \langle X_m Y_m \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sqrt{G_X[\omega] G_Y[\omega]} \left( \langle \hat{X}[\omega] \hat{Y}[\omega] \rangle + \epsilon \left( \langle \hat{X}^2[\omega] \rangle + \tilde{n}_{\text{ref}} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

avec  $\tilde{n}_{\text{ref}}$  la densité spectrale de bruit ajouté par l'amplificateur. Il s'agit d'un bruit blanc et pour être dans les conditions de l'expérience on a :  $n_{\text{ref}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G_X[\omega] \langle \hat{X}^2[\omega] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G_X[\omega] \tilde{n}_{\text{ref}}$  avec  $n_{\text{ref}} = 12.6$ . On impose  $\epsilon = 0.08$ , valeur que l'on mesure en caractérisant l'IQ. Les valeurs moyennes des opérateurs sont calculées à partir de la matrice  $\chi[\omega]$  I.52. Par exemple pour

$\langle \hat{X}^2[\omega] \rangle$  on a :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{X}^2[\omega] \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \left( \hat{d}[\omega] + \hat{d}^\dagger[\omega] \right) \left( \hat{d}[\omega] + \hat{d}^\dagger[\omega] \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \left( \langle \hat{d}^\dagger[\omega] \hat{d}[\omega] \rangle + \langle \hat{d}[\omega] \hat{d}^\dagger[\omega] \rangle + \langle \hat{d}^\dagger[\omega] \hat{d}^\dagger[\omega] \rangle + \langle \hat{d}[\omega] \hat{d}[\omega] \rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \kappa_1 \chi_{21}[\omega] \chi_{12}[-\omega] + \kappa_2 \chi_{23}[\omega] \chi_{14}[-\omega] \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \kappa_1 \chi_{11}[\omega] \chi_{22}[-\omega] + \kappa_2 \chi_{13}[\omega] \chi_{24}[-\omega] \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \kappa_1 \chi_{21}[\omega] \chi_{22}[-\omega] + \kappa_2 \chi_{23}[\omega] \chi_{24}[-\omega] \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \kappa_1 \chi_{11}[\omega] \chi_{12}[-\omega] + \kappa_2 \chi_{13}[\omega] \chi_{14}[-\omega] \right)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Et de même pour  $\langle \hat{Y}^2[\omega] \rangle$  et  $\langle \hat{X}[\omega] \hat{Y}[\omega] \rangle$ .

Pour calculer l'effet du filtrage on détermine numériquement  $\langle \hat{X}^2[\omega] \rangle$ ,  $\langle \hat{Y}^2[\omega] \rangle$  et  $\langle \hat{X}[\omega] \hat{Y}[\omega] \rangle$  à partir de la connaissance de la matrice  $\chi[\omega]$  lorsque la cavité est pompée. On détermine numériquement la référence  $\langle \hat{X}^2[\omega] \rangle_0$ ,  $\langle \hat{Y}^2[\omega] \rangle_0$  et  $\langle \hat{X}[\omega] \hat{Y}[\omega] \rangle_0$  à partir de la connaissance de la matrice  $\chi[\omega]$  lorsque la cavité n'est pas pompée. On applique ensuite la procédure expliquée au chapitre IV pour déterminer les valeurs de  $G_X$ ,  $G_Y$  et  $\epsilon$ . On corrige ensuite les moments de  $G_X$ ,  $G_Y$  et  $\epsilon$ . Enfin on calcule  $g^2(0)$  à partir des moments corrigés. On obtient les résultats présentés dans la figure A.2 où l'on a simulé deux cavités symétriques  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  en faisant varier la fréquence de pompe  $\omega_p$ . Les autres paramètres sont les paramètres mesurés pour notre échantillon. On voit que l'effet du filtrage est de diminuer le maximum de  $g^2(0)$  observé. Pour le minimum, l'effet des filtres est largement en dessous des différentes sources d'erreurs, statistiques et systématiques que nous allons rencontrer.

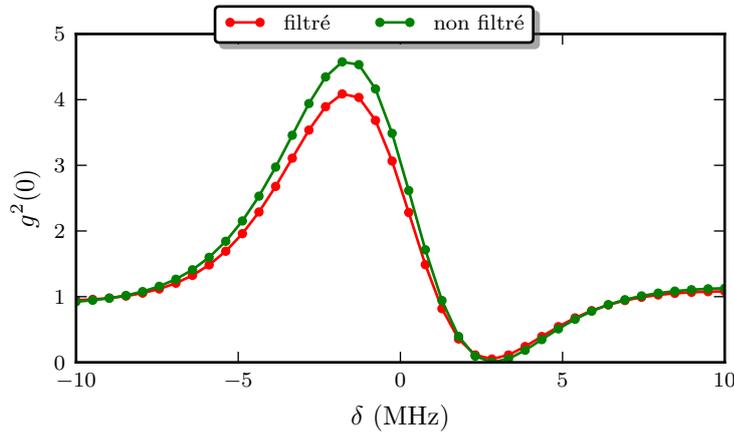


FIGURE A.2 – Influence du filtrage sur la valeur de  $g^2(0)$  mesurée. Les paramètres sont  $\omega_1 = 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 10.35$  MHz,  $U = 0.660$  MHz,  $J = 25.1$  MHz, et  $\eta = 1$  MHz



## Influence de la digitalisation

Dans cette annexe, nous étudions l'influence de la digitalisation temporelle introduite par la carte d'acquisition. Nous disposons d'une carte ayant une fréquence d'échantillonnage de 200 MS/s. Un bin correspond donc au signal intégré sur 5 ns. La période des oscillations est donnée par  $2\pi/J$ . Nous avons vu que  $U \approx 2\pi \times 25$  MHz et  $\kappa = 2\pi \times 8$  MHz. Avec ces paramètres, on peut calculer le résultat que l'on attend pour la mesure de  $g^2(\tau)$ . Pour cela, on considère que la carte intègre le signal sur la durée d'un bin. On représente les résultats sur la figure B.1 pour deux désaccords. On voit que la mesure de  $g^2(0)$  n'est pas affectée par la digitalisation de la carte.

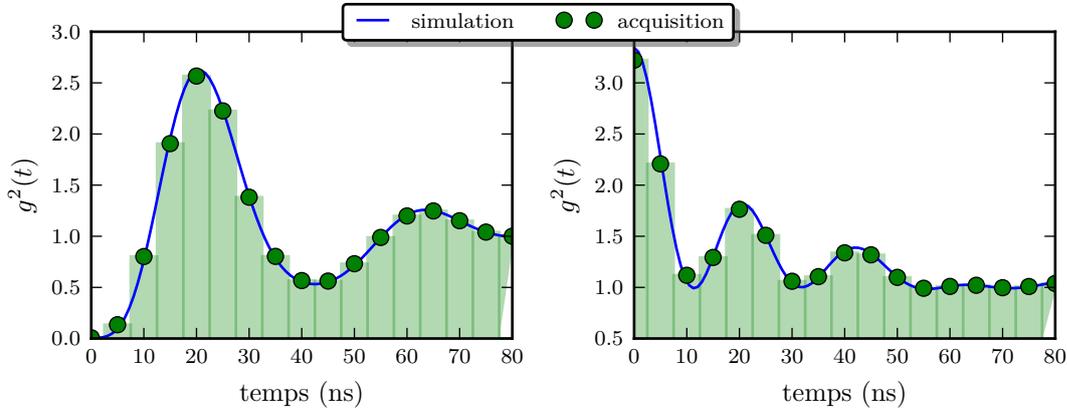


FIGURE B.1 – En bleu,  $g^2(\tau)$ , en vert, les points acquis par la carte. Les barres vertes verticales permettent de visualiser les bins d'intégration. Les paramètres sont  $\delta_1 = \delta_2 = 0.29\kappa_1$  à gauche,  $\delta_1 = \delta_2 = -0.1\kappa_1$  à droite,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2\pi \times 8$  MHz,  $U = -0.042\kappa_1$ ,  $J = 3\kappa_1$ , et  $\eta = 0.05\kappa_1$



---

Calcul de la densité de probabilité des quadratures mesurées

---

Nous souhaitons calculer la distribution de probabilité du signal après amplification donnée par :

$$D_\rho(R_m) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\Lambda W_1[\rho_n](R_m - \Lambda)W_{-1}[\rho](\Lambda) \quad (\text{C.1})$$

où  $W_s$  est défini par :

$$W_s[\rho](X) = \frac{1}{(2\pi^2)^n} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\Lambda \exp\left\{\frac{1}{2}s\Lambda^T\Lambda + i\Lambda^T\Omega X\right\} \chi[\rho](\Lambda) \quad (\text{C.2})$$

Où  $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  la matrice symplectique et  $\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{pmatrix}$  est un vecteur contenant les quadratures du champ. Enfin  $\chi[\rho]$  est la fonction caractéristique de l'état  $\rho$  définie par :

$$\chi[\rho](\Lambda) = \text{Tr}\left[\rho \exp\left\{-i\Lambda\Omega\hat{R}\right\}\right] \quad (\text{C.3})$$

Afin de calculer analytiquement cette fonction de Wigner, nous allons supposer que l'état est gaussien. Dans ce cas, la fonction caractéristique de l'état est donnée par [59] :

$$\chi[\rho](\Lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\Lambda^T\Omega\sigma\Omega^T\Lambda - i\Lambda^T\Omega\langle\hat{R}\rangle\right\} \quad (\text{C.4})$$

Où  $\sigma$  est la matrice de covariance précédemment introduite. En utilisant la propriété que, pour toute matrice  $Q$  réelle et définie positive et tout vecteur  $X$ , on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2\Lambda \exp\left\{-\frac{1}{2}\Lambda^T Q \Lambda + i\Lambda^T X\right\} = \frac{(2\pi)\exp\left\{-\frac{1}{2}X^T Q^{-1} X\right\}}{\sqrt{\det[Q]}} \quad (\text{C.5})$$

On peut calculer la fonction de Wigner généralisée pour un état gaussien :

$$W_s[\rho](X) = \frac{1}{(2\pi^2)^n} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\Lambda \exp\left\{\frac{1}{2}s\Lambda^T\Lambda + i\Lambda^T\Omega X\right\} \chi[\rho](\Lambda) \quad (\text{C.6})$$

$$= \frac{1}{(2\pi^2)^n} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\Lambda \exp\left\{i\Lambda^T\Omega(X - \langle X \rangle_\rho) - \frac{1}{2}\Lambda^T\Omega(\sigma - s\mathbf{1}_{2 \times 2})\Omega^T\Lambda\right\} \quad (\text{C.7})$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(X - \langle X \rangle_\rho)^T(\sigma - s\mathbf{1}_{2 \times 2})^{-1}(X - \langle X \rangle_\rho)\right\}}{\pi\sqrt{\det[(\sigma - s\mathbf{1}_{2 \times 2})]}} \quad (\text{C.8})$$

On a donc :

$$D_\rho(R_m) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\Lambda \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(R_m - \Lambda)^T(\sigma_h - \mathbf{1}_{2 \times 2})^{-1}(R_m - \Lambda)\right\}}{\pi\sqrt{\det[(\sigma_h - \mathbf{1}_{2 \times 2})]}} \times \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\Lambda - \langle \hat{R} \rangle)^T(\sigma + \mathbf{1}_{2 \times 2})^{-1}(\Lambda - \langle \hat{R} \rangle)\right\}}{\pi\sqrt{\det[(\sigma + \mathbf{1}_{2 \times 2})]}} \quad (\text{C.9})$$

Il s'agit du produit de convolution de deux fonctions gaussiennes et on obtient le résultat souhaité IV.20 :

$$D_\rho(R_m) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(R_m - \langle \hat{R} \rangle)^T(\sigma_h + \sigma)^{-1}(R_m - \langle \hat{R} \rangle)\right\}}{\pi\sqrt{\det[(\sigma_h + \sigma)]}} \quad (\text{C.10})$$

## ANNEXE D

---

### Correction des offsets sur les moments

---

Pour retirer un offset  $X_0$  sur les moments de  $X_m$ , il faut appliquer les transformations suivantes aux moments :

$$\begin{aligned}
\langle X_m \rangle &\rightarrow \langle X_m \rangle - X_0 \\
\langle X_m^2 \rangle &\rightarrow \langle X_m^2 \rangle - 2X_0 \langle X_m \rangle + X_0^2 \\
\langle X_m Y_m \rangle &\rightarrow \langle X_m Y_m \rangle - Y_0 \langle X_m \rangle - X_0 \langle Y_m \rangle + X_0 Y_0 \\
\langle X_m^3 \rangle &\rightarrow \langle X_m^3 \rangle - 3X_0 \langle X_m^2 \rangle + 3X_0^2 \langle X_m \rangle + X_0^3 \\
\langle X_m^2 Y_m \rangle &\rightarrow \langle X_m^2 Y_m \rangle - 2X_0 \langle X_m Y_m \rangle + X_0^2 \langle Y_m \rangle - 2X_0 Y_0 \langle X_m \rangle - X_0^2 Y_0 \\
\langle X_m^4 \rangle &\rightarrow \langle X_m^4 \rangle - 4(X_0 \langle X_m^3 \rangle + X_0^3 \langle X_m \rangle) + 6X_0^2 \langle X_m^2 \rangle + X_0^4 \\
\langle X_m^3 Y_m \rangle &\rightarrow \langle X_m^3 Y_m \rangle - \langle X_m^3 \rangle Y_0 + 3(-\langle X_m \rangle X_0^2 Y_0 + \langle X_m^2 \rangle X_0 Y_0 + \langle X_m Y_m \rangle X_0^2 - \langle X_m^2 Y_m \rangle X_0) \\
&\quad - \langle Y_m \rangle X_0^3 + X_0^3 Y_0 \\
\langle X_m^2 Y_m^2 \rangle &\rightarrow \langle X_m^2 Y_m^2 \rangle + \langle X_m^2 \rangle Y_0^2 + \langle Y_m^2 \rangle X_0^2 - 2(\langle X_m Y_m^2 \rangle X_0 + \langle X_m^2 Y_m \rangle Y_0 + \langle Y_m \rangle X_0^2 Y_0 + \langle X_m \rangle X_0 Y_0^2) \\
&\quad + 4\langle X_m Y_m \rangle X_0 Y_0 + X_0^2 Y_0^2
\end{aligned} \tag{D.1}$$

On obtient ces expressions en développant le polynôme  $\langle (X_m - X_0)^m \rangle$ .



---

 Correction des imperfections de l'IQ sur les moments
 

---

### E.1 Détermination des gains et de l'erreur $\epsilon$

Notre modèle entre moments mesurés et moments après amplification s'écrit IV.24 :

$$\begin{cases} X_m &= \sqrt{G_X} X_S \\ Y_m &= \sqrt{G_Y} (Y_S + \epsilon X_S) \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Les moments d'ordre deux s'écrivent :

$$\begin{aligned} \langle X_m^2 \rangle &= G_X \langle X_S^2 \rangle \\ \langle Y_m^2 \rangle &= G_Y (\langle Y_S^2 \rangle + 2\epsilon \langle X_S Y_S \rangle + \epsilon^2 \langle X_S^2 \rangle) \\ \langle X_m Y_m \rangle &= \sqrt{G_X G_Y} (\langle X_S Y_S \rangle + \epsilon \langle X_S^2 \rangle) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

La cavité est prise dans son état de référence, on a donc :

$$\begin{aligned} \langle X_S^2 \rangle_0 &= \langle \hat{X}^2 \rangle_0 + \langle \hat{X}_h^2 \rangle = \frac{1}{2} + n_{\text{th}} + n_{\text{ref}} = n_{\text{ref,th}} \\ \langle Y_S^2 \rangle_0 &= n_{\text{ref,th}} \\ \langle X_S Y_S \rangle_0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

En inversant le système E.3, on aboutit à :

$$\begin{aligned} G_X &= \frac{\langle X_m^2 \rangle_0}{n_{\text{ref,th}}} \\ G_Y &= \frac{\langle Y_m^2 \rangle_0 \langle X_m^2 \rangle_0 - \langle X_m Y_m \rangle_0^2}{n_{\text{ref,th}} \langle X_m^2 \rangle_0} \\ \epsilon &= \frac{\langle X_m Y_m \rangle_0}{n_{\text{ref,th}} \sqrt{G_X G_Y}} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

## E.2 Correction des moments

Maintenant que les gains et  $\epsilon$  sont déterminés, on peut corriger les moments mesurés grâce aux relations :

$$\begin{aligned}
\langle X_S \rangle &= \frac{\langle X_m \rangle}{\sqrt{G_X}} \\
\langle X_S Y_S \rangle &= 0 \\
\langle Y_S \rangle &= \frac{\langle Y_m \rangle}{\sqrt{G_Y}} - \epsilon \frac{\langle X_m \rangle}{\sqrt{G_X}} \\
\langle X_S^2 \rangle &= \frac{\langle X_m^2 \rangle}{G_X} \\
\langle X_S Y_S \rangle &= \frac{\langle X_m Y_m \rangle}{\sqrt{G_X G_Y}} - \epsilon \frac{\langle X_m^2 \rangle}{G_X} \\
\langle Y_S^2 \rangle &= \frac{\langle Y_m^2 \rangle}{G_Y} - 2\epsilon \frac{\langle X_m Y_m \rangle}{\sqrt{G_X G_Y}} + \epsilon^2 \frac{\langle X_m^2 \rangle}{G_X} \\
\langle X_S^3 \rangle &= \frac{\langle X_m^3 \rangle}{G_X^{3/2}} \\
\langle X_S^2 Y_S \rangle &= -\frac{\epsilon \sqrt{G_Y} \langle X_m^3 \rangle - \sqrt{G_X} \langle X_m^2 Y_m \rangle}{G_X^{3/2} \sqrt{G_Y}} \\
\langle X_S Y_S^2 \rangle &= -\frac{-\epsilon^2 G_Y \langle X_m^3 \rangle + 2\epsilon \sqrt{G_X} \sqrt{G_Y} \langle X_m^2 Y_m \rangle - G_X \langle X_m Y_m^2 \rangle}{G_X^{3/2} G_Y} \\
\langle Y_S^3 \rangle &= -\frac{\epsilon^3 G_Y^{3/2} \langle X_m^3 \rangle - 3\epsilon^2 \sqrt{G_X} G_Y \langle X_m^2 Y_m \rangle + 3\epsilon G_X \sqrt{G_Y} \langle X_m Y_m^2 \rangle - G_X^{3/2} \langle Y_m^3 \rangle}{G_X^{3/2} G_Y^{3/2}} \\
\langle X_S^4 \rangle &= \frac{\langle X_m^4 \rangle}{G_X^2} \\
\langle X_S^3 Y_S \rangle &= -\frac{\epsilon \sqrt{G_Y} \langle X_m^4 \rangle - \sqrt{G_X} \langle X_m^3 Y_m \rangle}{G_X^2 \sqrt{G_Y}} \\
\langle X_S^2 Y_S^2 \rangle &= -\frac{-\epsilon^2 G_Y \langle X_m^4 \rangle + 2\epsilon \sqrt{G_X} \sqrt{G_Y} \langle X_m^3 Y_m \rangle - G_X \langle X_m^2 Y_m^2 \rangle}{G_X^2 G_Y} \\
\langle X_S Y_S^3 \rangle &= -\frac{\epsilon^3 G_Y^{3/2} \langle X_m^4 \rangle - 3\epsilon^2 \sqrt{G_X} G_Y \langle X_m^3 Y_m \rangle + 3\epsilon G_X \sqrt{G_Y} \langle X_m^2 Y_m^2 \rangle - G_X^{3/2} \langle X_m Y_m^3 \rangle}{G_X^2 G_Y^{3/2}} \\
\langle Y_S^4 \rangle &= -\frac{-\epsilon^4 G_Y^2 \langle X_m^4 \rangle + 4\epsilon^3 \sqrt{G_X} G_Y^{3/2} \langle X_m^3 Y_m \rangle - 6\epsilon^2 G_X G_Y \langle X_m^2 Y_m^2 \rangle}{G_X^2 G_Y^2} \\
&\quad + \frac{4\epsilon G_X^{3/2} \sqrt{G_Y} \langle X_m Y_m^3 \rangle - G_X^2 \langle Y_m^4 \rangle}{G_X^2 G_Y^2}
\end{aligned} \tag{E.5}$$

## ANNEXE F

---

### Expression des moments du champ de cavité en fonction des moments mesurés

---

La mesure des moments de  $X_S$  et  $Y_S$  sur l'état de référence donne :

$$\langle \hat{X}_h \rangle = 0 \quad (\text{F.1})$$

$$\langle \hat{Y}_h \rangle = 0 \quad (\text{F.2})$$

$$\langle \hat{X}_h^2 \rangle = \langle X_S^2 \rangle_0 - \frac{1}{2} - n_{\text{th}} \quad (\text{F.3})$$

$$\langle \hat{X}_h \hat{Y}_h \rangle^s = 0 \quad (\text{F.4})$$

$$\langle \hat{Y}_h^2 \rangle = \langle Y_S^2 \rangle_0 - \frac{1}{2} - n_{\text{th}} \quad (\text{F.5})$$

$$\langle \hat{X}_h^3 \rangle = \langle X_S^3 \rangle_0 \quad (\text{F.6})$$

$$\langle \hat{X}_h^2 \hat{Y}_h \rangle^s = -\langle X_S^2 Y_S \rangle_0 \quad (\text{F.7})$$

$$\langle \hat{X}_h \hat{Y}_h^2 \rangle^s = \langle X_S Y_S^2 \rangle_0 \quad (\text{F.8})$$

$$\langle \hat{Y}_h^3 \rangle = -\langle Y_S^3 \rangle_0 \quad (\text{F.9})$$

$$\langle \hat{X}_h^4 \rangle = \langle X_S^4 \rangle_0 + \frac{3}{4} (1 - 4 \langle X_S^2 \rangle_0 - 2n_{\text{th}}) (1 + 2n_{\text{th}}) \quad (\text{F.10})$$

$$\langle \hat{X}_h^3 \hat{Y}_h \rangle^s = -\langle X_S^3 Y_S \rangle_0 \quad (\text{F.11})$$

$$\langle \hat{X}_h^2 \hat{Y}_h^2 \rangle^s = \langle X_S^2 Y_S^2 \rangle_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \langle X_S^2 \rangle_0 + \langle Y_S^2 \rangle_0 \right) - (\langle X_S^2 \rangle_0 + \langle Y_S^2 \rangle_0 - 1) n_{\text{th}} + n_{\text{th}}^2 \quad (\text{F.12})$$

$$\langle \hat{X}_h \hat{Y}_h^3 \rangle^s = -\langle X_S Y_S^3 \rangle_0 \quad (\text{F.13})$$

$$\langle \hat{Y}_h^4 \rangle = \langle Y_S^4 \rangle_0 + \frac{3}{4} (1 - 4 \langle Y_S^2 \rangle_0 - 2n_{\text{th}}) (1 + 2n_{\text{th}}) \quad (\text{F.14})$$

F.1, F.2 et F.4 sont nuls par construction (voir IV.3.3). Les moments du champ de la cavité sont donnés par :

$$\langle \hat{X} \rangle = \langle X_S \rangle_\rho \quad (\text{F.15})$$

$$\langle \hat{Y} \rangle = \langle Y_S \rangle_\rho \quad (\text{F.16})$$

$$\langle \hat{X}^2 \rangle = \langle X_S^2 \rangle_\rho - \langle \hat{X}_h^2 \rangle \quad (\text{F.17})$$

$$\langle \hat{X}\hat{Y} \rangle^s = \langle X_S Y_S \rangle_\rho \quad (\text{F.18})$$

$$\langle \hat{Y}^2 \rangle = \langle X_S^2 \rangle_\rho - \langle \hat{X}_h^2 \rangle \quad (\text{F.19})$$

$$\langle \hat{X}^3 \rangle = \langle X_S^3 \rangle_\rho - \langle \hat{X}_h^3 \rangle \quad (\text{F.20})$$

$$\langle \hat{X}^2 \hat{Y} \rangle^s = \langle X_S^2 Y_S \rangle_\rho + \langle \hat{X}_h^2 \hat{Y}_h \rangle^s \quad (\text{F.21})$$

$$\langle \hat{X}\hat{Y}^2 \rangle^s = \langle X_S Y_S^2 \rangle_\rho - \langle \hat{X}_h \hat{Y}_h^2 \rangle^s \quad (\text{F.22})$$

$$\langle \hat{Y}^3 \rangle = \langle Y_S^3 \rangle_\rho + \langle \hat{Y}_h^3 \rangle \quad (\text{F.23})$$

$$\langle \hat{X}^4 \rangle = \langle X_S^4 \rangle_\rho - 6 \left( \langle X_S^2 \rangle_\rho \langle \hat{X}_h^2 \rangle - \langle \hat{X}_h^2 \rangle^2 \right) - \langle \hat{X}_h^4 \rangle \quad (\text{F.24})$$

$$\langle \hat{X}^3 \hat{Y} \rangle^s = \langle X_S^3 Y_S \rangle_\rho - 3 \langle X_S Y_S \rangle_\rho \langle \hat{X}_h^2 \rangle + \langle \hat{X}_h^3 \hat{Y}_h \rangle^s \quad (\text{F.25})$$

$$\langle \hat{X}^2 \hat{Y}^2 \rangle^s = \langle X_S^2 Y_S^2 \rangle_\rho - \left( \langle Y_S^2 \rangle_\rho \langle \hat{X}_h^2 \rangle + \langle X_S^2 \rangle_\rho \langle \hat{Y}_h^2 \rangle \right) \quad (\text{F.26})$$

$$+ 2 \langle \hat{X}_h^2 \rangle \langle \hat{Y}_h^2 \rangle - \langle \hat{X}_h^2 \hat{Y}_h^2 \rangle^s - 1 \quad (\text{F.27})$$

$$\langle \hat{X}\hat{Y}^3 \rangle^s = \langle X_S Y_S^3 \rangle_\rho - 3 \langle X_S Y_S \rangle_\rho \langle \hat{Y}_h^2 \rangle + \langle \hat{X}_h \hat{Y}_h^3 \rangle^s \quad (\text{F.28})$$

$$\langle \hat{Y}^4 \rangle = \langle Y_S^4 \rangle_\rho - 6 \left( \langle Y_S^2 \rangle_\rho \langle \hat{Y}_h^2 \rangle - \langle \hat{Y}_h^2 \rangle^2 \right) - \langle \hat{Y}_h^4 \rangle \quad (\text{F.29})$$

---

## Bibliographie

---

- [1] A. Aspect, P. Grangier, & G. Grynberg. *Optique quantique 2 : photons* (École polytechnique, Département de physique, 2005).
- [2] R. H. Brown, R. Jennison, & M. D. Gupta. “Apparent angular sizes of discrete radio sources : Observations at jodrell bank, manchester.” *Nature* **170**, 1061 (1952).
- [3] R. H. Brown & R. Twiss. “A new type of interferometer for use in radio astronomy.” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **45**, 663 (1954).
- [4] R. H. Brown & R. Q. Twiss. “Correlation between photons in two coherent beams of light.” *Nature* **177**, 27 (1956).
- [5] R. J. Glauber. “The Quantum Theory of Optical Coherence.” *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963).
- [6] H. J. Carmichael & D. F. Walls. “A quantum-mechanical master equation treatment of the dynamical Stark effect.” *Journal of Physics B : Atomic and Molecular Physics* **9**, 1199 (1976).
- [7] H. J. Kimble, M. Dagenais, & L. Mandel. “Photon Antibunching in Resonance Fluorescence.” *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691 (1977).
- [8] F. Diedrich & H. Walther. “Nonclassical radiation of a single stored ion.” *Phys. Rev. Lett.* **58**, 203 (1987).
- [9] T. Basché, W. E. Moerner, M. Orrit, & H. Talon. “Photon antibunching in the fluorescence of a single dye molecule trapped in a solid.” *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1516 (1992).
- [10] P. Michler, A. Kiraz, C. Becher, W. V. Schoenfeld, P. M. Petroff, L. Zhang, E. Hu, & A. Imamoglu. “A Quantum Dot Single-Photon Turnstile Device.” *Science* **290**, 2282 (2000).
- [11] C. Kurtsiefer, S. Mayer, P. Zarda, & H. Weinfurter. “Stable Solid-State Source of Single Photons.” *Phys. Rev. Lett.* **85**, 290 (2000).
- [12] H. J. Carmichael. “Photon Antibunching and Squeezing for a Single Atom in a Resonant Cavity.” *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2790 (1985).
- [13] A. Imamoglu, H. Schmidt, G. Woods, & M. Deutsch. “Strongly Interacting Photons in a Nonlinear Cavity.” *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1467 (1997).
- [14] T. A. Fulton & G. J. Dolan. “Observation of single-electron charging effects in small tunnel junctions.” *Phys. Rev. Lett.* **59**, 109 (1987).

- [15] K. M. Birnbaum, A. Boca, R. Miller, A. D. Boozer, T. E. Northup, & H. J. Kimble. “Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom.” *Nature* **436**, 87 (2005).
- [16] A. Faraon, I. Fushman, D. Englund, N. Stoltz, P. Petroff, & J. Vučković. “Coherent generation of non-classical light on a chip via photon-induced tunnelling and blockade.” *Nature Physics* **4** (2008).
- [17] I. Carusotto & C. Ciuti. “Quantum fluids of light.” *Rev. Mod. Phys.* **85**, 299 (2013).
- [18] T. C. H. Liew & V. Savona. “Single Photons from Coupled Quantum Modes.” *Phys. Rev. Lett.* **104**, 183601 (2010).
- [19] M. Bayer, T. Gutbrod, J. P. Reithmaier, A. Forchel, T. L. Reinecke, P. A. Knipp, A. A. Dremin, & V. D. Kulakovskii. “Optical Modes in Photonic Molecules.” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2582 (1998).
- [20] M. Galbiati, L. Ferrier, D. D. Solnyshkov, D. Tanese, E. Wertz, A. Amo, M. Abbarchi, P. Senellart, I. Sagnes, A. Lemaître, E. Galopin, G. Malpuech, & J. Bloch. “Polariton Condensation in Photonic Molecules.” *Phys. Rev. Lett.* **108**, 126403 (2012).
- [21] M. Bamba, A. Imamoğlu, I. Carusotto, & C. Ciuti. “Origin of strong photon antibunching in weakly nonlinear photonic molecules.” *Phys. Rev. A* **83**, 021802 (2011).
- [22] X.-W. Xu & Y.-J. Li. “Antibunching photons in a cavity coupled to an optomechanical system.” *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **46**, 035502 (2013).
- [23] H. Z. Shen, Y. H. Zhou, H. D. Liu, G. C. Wang, & X. X. Yi. “Exact optimal control of photon blockade with weakly nonlinear coupled cavities.” *Opt. Express* **23**, 32835 (2015).
- [24] M. Bamba & C. Ciuti. “Counter-polarized single-photon generation from the auxiliary cavity of a weakly nonlinear photonic molecule.” *Applied Physics Letters* **99**, 171111 (2011).
- [25] A. Majumdar & D. Gerace. “Single-photon blockade in doubly resonant nanocavities with second-order nonlinearity.” *Phys. Rev. B* **87**, 235319 (2013).
- [26] D. Gerace & V. Savona. “Unconventional photon blockade in doubly resonant microcavities with second-order nonlinearity.” *Phys. Rev. A* **89**, 031803 (2014).
- [27] A. Majumdar, M. Bajcsy, A. Rundquist, & J. Vučković. “Loss-Enabled Sub-Poissonian Light Generation in a Bimodal Nanocavity.” *Phys. Rev. Lett.* **108**, 183601 (2012).
- [28] H. Z. Shen, Y. H. Zhou, & X. X. Yi. “Tunable photon blockade in coupled semiconductor cavities.” *Phys. Rev. A* **91**, 063808 (2015).
- [29] H. Flayac & V. Savona. “Single photons from dissipation in coupled cavities.” *Phys. Rev. A* **94**, 013815 (2016).
- [30] O. Kyriienko & T. C. H. Liew. “Triggered single-photon emitters based on stimulated parametric scattering in weakly nonlinear systems.” *Phys. Rev. A* **90**, 063805 (2014).
- [31] O. Kyriienko, I. A. Shelykh, & T. C. H. Liew. “Tunable single-photon emission from dipolaritons.” *Phys. Rev. A* **90**, 033807 (2014).
- [32] H. Flayac & V. Savona. “The Unconventional Photon Blockade.” *arXiv :1709.06484* (2017).
- [33] M.-A. Lemonde, N. Didier, & A. A. Clerk. “Antibunching and unconventional photon blockade with Gaussian squeezed states.” *Phys. Rev. A* **90**, 063824 (2014).
- [34] D. Stoler. “Photon Antibunching and Possible Ways to Observe It.” *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1397 (1974).
- [35] D. Walls. “Squeezed states of light.” *Nature* **306**, 141 (1983).
- [36] M. H. Mahran & M. V. Satyanarayana. “Bunching and antibunching properties of various coherent states of the radiation field.” *Phys. Rev. A* **34**, 640 (1986).

- [37] Y. J. Lu & Z. Y. Ou. “Observation of Nonclassical Photon Statistics due to Quantum Interference.” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 023601 (2001).
- [38] N. B. Grosse, T. Symul, M. Stobińska, T. C. Ralph, & P. K. Lam. “Measuring Photon Antibunching from Continuous Variable Sideband Squeezing.” *Phys. Rev. Lett.* **98**, 153603 (2007).
- [39] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R. S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, & R. J. Schoelkopf. “Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics.” *Nature* **431**, 162 (2004).
- [40] I. Chiorescu, P. Bertet, K. Semba, Y. Nakamura, C. Harmans, & J. Mooij. “Coherent dynamics of a flux qubit coupled to a harmonic oscillator.” *Nature* **431**, 159 (2004).
- [41] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, & R. J. Schoelkopf. “Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits : An architecture for quantum computation.” *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
- [42] R. J. Schoelkopf & S. M. Girvin. “Wiring up quantum systems.” *Nature* **451**, 664 (2008).
- [43] D. Bozyigit, C. Lang, L. Steffen, & J. M. Fink. “Antibunching of microwave-frequency photons observed in correlation measurements using linear detectors.” *Nature Physics* **4**, 154–158 (2011).
- [44] C. Lang, D. Bozyigit, C. Eichler, L. Steffen, J. M. Fink, A. A. Abdumalikov, M. Baur, S. Filipp, M. P. da Silva, A. Blais, & A. Wallraff. “Observation of Resonant Photon Blockade at Microwave Frequencies Using Correlation Function Measurements.” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 243601 (2011).
- [45] A. J. Hoffman, S. J. Srinivasan, S. Schmidt, L. Spietz, J. Aumentado, H. E. Türeci, & A. A. Houck. “Dispersive Photon Blockade in a Superconducting Circuit.” *Phys. Rev. Lett.* **107**, 053602 (2011).
- [46] C. Eichler, Y. Salathe, J. Mlynek, S. Schmidt, & A. Wallraff. “Quantum-Limited Amplification and Entanglement in Coupled Nonlinear Resonators.” *Phys. Rev. Lett.* **113**, 110502 (2014).
- [47] J. Raftery, D. Sadri, S. Schmidt, H. E. Türeci, & A. A. Houck. “Observation of a Dissipation-Induced Classical to Quantum Transition.” *Phys. Rev. X* **4**, 031043 (2014).
- [48] M. Hofheinz, H. Wang, M. Ansmann, R. C. Bialczak, E. Lucero, M. Neeley, A. O’connell, D. Sank, J. Wenner, J. M. Martinis, *et al.* “Synthesizing arbitrary quantum states in a superconducting resonator.” *Nature* **459**, 546 (2009).
- [49] F. Mallet, M. A. Castellanos-Beltran, H. S. Ku, S. Glancy, E. Knill, K. D. Irwin, G. C. Hilton, L. R. Vale, & K. W. Lehnert. “Quantum State Tomography of an Itinerant Squeezed Microwave Field.” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 220502 (2011).
- [50] C. Eichler, D. Bozyigit, C. Lang, L. Steffen, J. Fink, & A. Wallraff. “Experimental State Tomography of Itinerant Single Microwave Photons.” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 220503 (2011).
- [51] J.-C. Forgues, C. Lupien, & B. Reulet. “Experimental Violation of Bell-like Inequalities By Electronic Shot Noise.” *Phys. Rev. Lett.* **114**, 130403 (2015).
- [52] M. Westig, B. Kubala, O. Parlavecchio, Y. Mukharsky, C. Altimiras, P. Joyez, D. Vion, P. Roche, D. Esteve, M. Hofheinz, *et al.* “Emission of Nonclassical Radiation by Inelastic Cooper Pair Tunneling.” *Phys. Rev. Lett.* **119**, 137001 (2017).
- [53] H. Flayac & V. Savona. “Input-output theory of the unconventional photon blockade.” *Phys. Rev. A* **88**, 033836 (2013).

- [54] D. Sarchi, I. Carusotto, M. Wouters, & V. Savona. “Coherent dynamics and parametric instabilities of microcavity polaritons in double-well systems.” *Phys. Rev. B* **77**, 125324 (2008).
- [55] A. Amo, I. Sagnes, L. Le Gratiet, E. Galopin, A. Lemaitre, J. Bloch, & S. R. K. Rodriguez. “Interaction-induced hopping phase in driven-dissipative coupled photonic microcavities.” *Nature Communications* **7**, 1 (2016).
- [56] P. Hamel, S. Haddadi, F. Raineri, P. Monnier, G. Beaudoin, I. Sagnes, A. Levenson, & A. Yamomotti. “Spontaneous mirror-symmetry breaking in coupled photonic-crystal nanolasers.” *Nature Photonics* (2015).
- [57] B. Cao, K. W. Mahmud, & M. Hafezi. “Two coupled nonlinear cavities in a driven-dissipative environment.” *Phys. Rev. A* **94**, 063805 (2016).
- [58] P. D. Drummond & D. F. Walls. “Quantum theory of optical bistability. I. Nonlinear polarisability model.” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **13**, 725 (1980).
- [59] S. Olivares. “Quantum optics in the phase space.” *The European Physical Journal Special Topics* **203**, 3 (2012).
- [60] C. W. Gardiner & P. Zoller. *Quantum noise, a handbook of markovian and non-markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics* (Springer, 2004), third edition edn.
- [61] P. Bertet, I. Chiorescu, G. Burkard, K. Semba, C. J. P. M. Harmans, D. P. DiVincenzo, & J. E. Mooij. “Dephasing of a Superconducting Qubit Induced by Photon Noise.” *Phys. Rev. Lett.* **95**, 257002 (2005).
- [62] G. Ithier, E. Collin, P. Joyez, P. J. Meeson, D. Vion, D. Esteve, F. Chiarello, A. Shnirman, Y. Makhlin, J. Schrieffer, & G. Schön. “Decoherence in a superconducting quantum bit circuit.” *Phys. Rev. B* **72**, 134519 (2005).
- [63] C. Rigetti, J. M. Gambetta, S. Poletto, B. L. T. Plourde, J. M. Chow, A. D. Córcoles, J. A. Smolin, S. T. Merkel, J. R. Rozen, G. A. Keefe, M. B. Rothwell, M. B. Ketchen, & M. Steffen. “Superconducting qubit in a waveguide cavity with a coherence time approaching 0.1 ms.” *Phys. Rev. B* **86**, 100506 (2012).
- [64] S. Ferretti, V. Savona, & D. Gerace. “Optimal antibunching in passive photonic devices based on coupled nonlinear resonators.” *New Journal of Physics* **15**, 025012 (2013).
- [65] M. Lax. “Quantum Noise. X. Density-Matrix Treatment of Field and Population-Difference Fluctuations.” *Phys. Rev.* **157**, 213 (1967).
- [66] H. J. Carmichael. *An open system approach to quantum optics* (Lecture Note in Physics, 1991).
- [67] H. Flayac & V. Gerace, D. Savona. “An all-silicon single-photon source by unconventional photon blockade.” *Scientific Reports* **5**, 11223 (2015).
- [68] M. Göppl, A. Fragner, M. Baur, R. Bianchetti, S. Filipp, J. M. Fink, P. J. Leek, G. Puebla, L. Steffen, & A. Wallraff. “Coplanar waveguide resonators for circuit quantum electrodynamics.” *Journal of Applied Physics* **104**, 113904 (2008).
- [69] T. Lindström, J. E. Healey, M. S. Colclough, C. M. Muirhead, & A. Y. Tzalenchuk. “Properties of superconducting planar resonators at millikelvin temperatures.” *Phys. Rev. B* **80**, 132501 (2009).
- [70] E. Boaknin, V. E. Manucharyan, S. Fissette, M. Metcalfe, L. Frunzio, R. Vijay, I. Siddiqi, A. Wallraff, R. J. Schoelkopf, & M. Devoret. “Dispersive microwave bifurcation of a superconducting resonator cavity incorporating a Josephson junction.” *arXiv :cond-mat/0702445* (2007).

- [71] F. R. Ong, M. Boissonneault, F. Mallet, A. Palacios-Laloy, A. Dewes, A. C. Doherty, A. Blais, P. Bertet, D. Vion, & D. Esteve. “Circuit QED with a Nonlinear Resonator : ac-Stark Shift and Dephasing.” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 167002 (2011).
- [72] M. H. Devoret, A. Wallraff, & J. M. Martinis. “Superconducting Qubits : A Short Review.” *arXiv.org* (2004).
- [73] C. Eichler & A. Wallraff. “Controlling the dynamic range of a Josephson parametric amplifier.” *EPJ Quantum Technology* **1**, 2 (2014).
- [74] G. J. Dolan. “Offset masks for lift off photoprocessing.” *Applied Physics Letters* **31**, 337 (1977).
- [75] A. Dunsworth, A. Megrant, C. Quintana, Z. Chen, R. Barends, B. Burkett, B. Foxen, Y. Chen, B. Chiaro, A. Fowler, R. Graff, E. Jeffrey, J. Kelly, E. Lucero, J. Y. Mutus, M. Neeley, C. Neill, P. Roushan, D. Sank, A. Vainsencher, J. Wenner, T. C. White, & J. M. Martinis. “Characterization and reduction of capacitive loss induced by sub-micron Josephson junction fabrication in superconducting qubits.” *Applied Physics Letters* **111**, 022601 (2017).
- [76] I. M. Pop, T. Fournier, T. Crozes, F. Lecocq, I. Matei, B. Pannetier, O. Buisson, & W. Guichard. “Fabrication of stable and reproducible submicron tunnel junctions.” *Journal of Vacuum Science & Technology B, Nanotechnology and Microelectronics : Materials, Processing, Measurement, and Phenomena* **30**, 010607 (2012).
- [77] V. Ambegaokar & A. Baratoff. “Tunneling Between Superconductors.” *Phys. Rev. Lett.* **10**, 486 (1963).
- [78] J. M. Kivioja, T. E. Nieminen, J. Claudon, O. Buisson, F. W. J. Hekking, & J. P. Pekola. “Weak coupling Josephson junction as a current probe : effect of dissipation on escape dynamics.” *New Journal of Physics* **7**, 179 (2005).
- [79] M. H. D. Uri Vool. “Introduction to Quantum Electromagnetic Circuits.” *arXiv :1610.03438* (2016).
- [80] C. W. Gardiner & P. Zoller. *Quantum noise, a handbook of markovian and non-markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics* (Springer, 2004), third edition edn.
- [81] S. E. Nigg, H. Paik, B. Vlastakis, G. Kirchmair, S. Shankar, L. Frunzio, M. H. Devoret, R. J. Schoelkopf, & S. M. Girvin. “Black-Box Superconducting Circuit Quantization.” *Phys. Rev. Lett.* **108**, 240502 (2012).
- [82] A. Le Boité, G. Orso, & C. Ciuti. “Bose-Hubbard model : Relation between driven-dissipative steady states and equilibrium quantum phases.” *Phys. Rev. A* **90**, 063821 (2014).
- [83] C. M. Caves. “Quantum limits on noise in linear amplifiers.” *Phys. Rev. D* **26**, 1817 (1982).
- [84] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, F. Marquardt, & R. J. Schoelkopf. “Introduction to quantum noise, measurement, and amplification.” *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1155 (2010).
- [85] M. Mariantoni, E. P. Menzel, F. Deppe, M. A. Araque Caballero, A. Baust, T. Niemczyk, E. Hoffmann, E. Solano, A. Marx, & R. Gross. “Planck Spectroscopy and Quantum Noise of Microwave Beam Splitters.” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 133601 (2010).
- [86] C. Eichler, D. Bozyigit, & A. Wallraff. “Characterizing quantum microwave radiation and its entanglement with superconducting qubits using linear detectors.” *Phys. Rev. A* **86**, 032106 (2012).
- [87] M. S. Kim. “Quasiprobability functions measured by photon statistics of amplified signal fields.” *Phys. Rev. A* **56**, 3175 (1997).

- [88] K. E. Cahill & R. J. Glauber. “Density Operators and Quasiprobability Distributions.” *Phys. Rev.* **177**, 1882 (1969).
- [89] Y. Blanter & M. Büttiker. “Shot noise in mesoscopic conductors.” *Physics Reports* **336**, 1 (2000).
- [90] K. Fang, Z. Yu, & S. Fan. “Realizing effective magnetic field for photons by controlling the phase of dynamic modulation.” *Nature Photonics* **6**, 782–787 (2012).
- [91] W. Casteels & M. Wouters. “Optically bistable driven-dissipative Bose-Hubbard dimer : Gutzwiller approaches and entanglement.” *Phys. Rev. A* **95**, 043833 (2017).
- [92] W. Casteels & C. Ciuti. “Quantum entanglement in the spatial-symmetry-breaking phase transition of a driven-dissipative Bose-Hubbard dimer.” *Phys. Rev. A* **95**, 013812 (2017).
- [93] A. A. Houck, H. E. Türeci, & J. Koch. “On-chip quantum simulation with superconducting circuits.” *Nature Physics* **8**, 292 (2012).
- [94] S. Schmidt & J. Koch. “Circuit QED lattices : towards quantum simulation with superconducting circuits.” *Annalen der Physik* **525**, 395 (2013).
- [95] M. J. Hartmann. “Quantum simulation with interacting photons.” *Journal of Optics* **18**, 104005 (2016).







## Observation du phénomène de blocage anormal de photon dans le domaine micro-onde

Le phénomène de blocage de photon est observé lorsqu'un système à deux niveaux est fortement couplé à une cavité, limitant ainsi le nombre d'occupation des photons dans le mode de la cavité à zéro ou un. Ce phénomène est analogue au blocage de Coulomb en physique mésoscopique et a été observé en optique en couplant un atome unique ou une boîte quantique à une cavité. L'efficacité du blocage, mesurée par la fonction d'autocorrélation du deuxième ordre  $g^2(0)$ , augmente d'autant plus que la non-linéarité du système est grande devant la largeur de la cavité. Ce travail de thèse présente l'étude théorique et expérimentale d'un nouveau phénomène de blocage appelé « phénomène de blocage anormal de photon », dans le régime micro-onde. Ce phénomène apparaît dans un système photonique comprenant deux modes couplés, où au moins un des modes est non-linéaire. Par contraste avec le blocage de photon standard, le blocage anormal permet d'obtenir un blocage parfait ( $g^2(0) = 0$ ) pour une non-linéarité arbitrairement faible. Nous présentons les propriétés théoriques du blocage anormal, et notamment sa formulation en termes d'états gaussiens. Afin de mettre en évidence ce phénomène, nous avons réalisé deux résonateurs supraconducteurs couplés, dont l'un est rendu non-linéaire et ajustable en fréquence par l'ajout d'un SQUID. Nous montrons les techniques de fabrication employées et la caractérisation des paramètres de notre échantillon. Enfin, nous présentons les techniques mises en œuvre pour mesurer  $g^2(\tau)$ . Cette mesure nous a permis de mettre en évidence le phénomène de blocage anormal et d'en étudier les propriétés en fonction des différents paramètres expérimentaux.

**Mots-clés :** Optique quantique, blocage anormal, circuit-QED, états gaussiens, dégroupement de photon, résonateur non-linéaire.

---

### Anomalous photon blockade effect observation in the microwave regime

Photon blockade is observed when a two level system is strongly coupled to a cavity thus limiting the occupation number of the cavity mode to zero or one photon. This phenomenon is analogous to the Coulomb blockade effect in mesoscopic physics and has been observed in optics by coupling a single atom or a quantum dot to a cavity. The efficiency of the blockade, as measured by the second order auto-correlation function  $g^2(0)$ , increases with the non-linearity of the system in comparison to the cavity width. In this thesis, we present a theoretical and experimental study of a new blockade mechanism, called « anomalous photon blockade effect », in the microwave domain. This effect appears in photonics systems consisting of two coupled modes, where at least one of the mode is non-linear. In contrast to the standard blockade effect, perfect blockade ( $g^2(0) = 0$ ) can be achieved with an arbitrary weak non-linearity strength. In the first part, we present a theoretical study of the anomalous blockade, and we use, in particular, a description in terms of gaussian states. To experimentally observe this effect, we have micro-fabricated two coupled superconductive resonators, where one of the resonator is frequency tunable and non-linear thanks to a SQUID. In the second part, we present the fabrication process and the characterization of our sample. Finally, we present the different techniques that we use to measure the auto-correlation function  $g^2(\tau)$ . This measurement allowed us to demonstrate the anomalous blockade effect and to study its various properties as a function of the experimental parameters.

**Keywords :** Anomalous Blockade, circuit-QED, Gaussian states, photons antibunching, non-linear resonator, lumped element resonator.

